HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	第18回数学総合若手研究集会 ： 数学の交叉点
Author(s)	祐川, 翼; 石井, 宙志; 工藤, 勇 他
Citation	Hokkaido University technical report series in Mathematics, 182, i, 1-ix, 850
Issue Date	2022-03
DOI	https://doi.org/10.14943/101654
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/84617
Type	departmental bulletin paper
File Information	tech182.pdf



Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

第 18 回数学総合若手研究集会

～数学の交叉点～

The 18th Mathematics Conference for Young Researchers

– MCYR18 –

世話人

祐川翼 (代表) 石井宙志 工藤勇 関元樹 長谷川蒼

波多野幸平 安孫子啓介 田嶌優 藤江克徳 牧田慎平

札幌，北海道大学，2022

Series#182. March, 2022

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#163 S. Jimbo, S. Goto, Y. Kohsaka, H. Kubo, Y. Maekawa, and M. Ohnuma, Mathematics for Nonlinear Phenomena: Analysis and Computation －International Conference in honor of Professor Yoshikazu Giga on his 60th birthday－, 47 pages. 2015.

#164 S. -I. Ei, Y. Giga, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 40th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 122 pages. 2015.

#165 A. Tsuchida, Y. Aikawa, K. Asahara, M. Abe, Y. Kabata, H. Saito, F. Nakamura and S. Honda, 第 12 回数学総合若手研究集会, 373 pages. 2016.

#166 S. -I. Ei, Y. Giga, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 41st Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 110 pages. 2016.

#167 Kubo, Hideo and Ozawa, Tohru and Takamura, Hiroyuki, Mathematical Analysis for Stability in Nonlinear Dynamics - in honor of Professor Vladimir Georgiev on his 60th birthday -, 79 pages. 2016.

#168 F. Nakamura, Y. Aikawa, K. Asahara, M. Abe, D. Komori, H. Saito, S. Handa, K. Fujisawa, S. Honda, A. Rodríguez Mulet, 第 13 回数学総合若手研究集会, 501 pages. 2017.

#169 N. Tanaka (K. Kiyohara, T. Morimoto, K. Yamaguchi, Eds.), Geometric Theory of Systems of Ordinary Differential Equations I, 177 pages. 2017.

#170 N. Tanaka (K. Kiyohara, T. Morimoto, K. Yamaguchi, Eds.), Geometric Theory of Systems of Ordinary Differential Equations II, 519 pages. 2017.

#171 S. -I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, Y. Tonegawa, and K. Tsutaya, Proceedings of the 42nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations － In memory of Professor Taira Shirota －, 102 pages. 2017.

#172 Shigeru Kuroda, Takao Namiki, Akihiro Yamaguchi, Yutaka Yamaguchi, 複雑系数理の新展開：津田一郎教授退職記念研究集会報告集, 69 pages. 2018.

#173 S. Handa, D. Komori, K. Fujisawa, A. Rodriguez Mulet, M. Aoki, Y. kamijima, I. Fukuda, T. Yabu, 第 14 回数学総合若手研究集会, 580 pages. 2018.

#174 Yoshikazu Giga, Hideo Kubo, Tohru Ozawa, The 11th Mathematical Society of Japan - Seasonal Institute - The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations －, 160 pages. 2018.

#175 S. -I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, Proceedings of 43rd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 99 pages. 2018.

#176 I. Fukuda, M. Aoki, Y. Ueda, Y. Kamijima, T. Yabu, T. Niimura, N. Satoh, H. Toyokawa, K. Matsuzaka, S. Yamagata, K. Yoshida, 第 15 回数学総合若手研究集会, 657 pages. 2019.

#177 S. -I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, T. Ozawa, T. Sakajo, and K. Tsutaya, Proceedings of 44th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 115 pages. 2019.

#178 H. Toyokawa, Y. Otsuto, N. Satoh, K. Matsuzaka, S. Yamagata, K. Yoshida, R. Ashikaga, S. Okida, M. Oyama, K. Kuwata K. Misu, H. Ishii, T. Sukekawa, 第 16 回数学総合若手研究集会, 692 pages. 2020.

#179 S. -I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, T. Ozawa, T. Sakajo, K. Tsutaya, Proceedings of 45th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 106 pages. 2020.

#180 K. Misu, S. Okida, R. Ashikaga, M. Oyama, K. Kuwata, H. Ishii, I. Kudo, T. Sukekawa, M. Seki, A. Hasegawa, K. Hatano, 第 17 回数学総合若手研究集会, 595 pages. 2021.

#181 S.-I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, Y. Liu, T. Ozawa, T. Sakajo, and K. Tsutaya, Proceedings of 46th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 116 pages. 2021.

はじめに

大学院生および若手研究者により組織・運営されているこの数学総合若手研究集会も今年で第 18 回を迎えることとなりました。当研究集会は、数学に関わる物理・化学・経済・工学・医学などの様々な分野の若手研究者の講演の場となることで、研究の発展および人的ネットワークの構築を目的として行われています。近年、多くの分野で数学的手法が取り入れられているなか、当研究集会のように数学を中心とした分野間交流を行うことは大変意義があるものであると信じております。今年度の研究集会は例年より大きな規模となり、幅広い分野の若手研究者の方々 102 名にご講演して頂くこととなりました。当初は現地開催とオンライン開催を組み合わせたハイブリッド型の開催方針をとっていましたが、2022 年からの新型コロナウイルス感染拡大を鑑み、全面オンラインでの開催となりました。現地参加のための準備をされていた参加者の皆様にご迷惑をかけましたこと、この場を借りて深くお詫びいたします。重ねまして、参加者の皆様のご協力により研究集会が開催できましたこと、心より感謝申し上げます。

当研究集会の講演は、口頭発表であるシングルセッション (60 分) とパラレルセッション (30 分)、そしてポスターセッションからなります。シングルセッションは、あらゆる分野の参加者を対象とした講演であり、問題の背景・動機などの入門的な内容を含んだ講演となっております。パラレルセッションでは、分野ごとに部屋を分け、より専門的な内容の講演が行われます。ポスターセッションは講演者と聴講者との自由な議論の場となっております。

このテクニカルレポート集は講演者の皆様から事前に提供して頂いた原稿をまとめたものです。サブタイトルに「数学の交叉点」とありますように、数学が様々な分野の“交叉点” となることを目的とし、数学以外の分野の方々にもわかりやすく入門的な事項を含んだものとなっております。参加者の皆様が講演をより深く理解し、またご自身の研究を進展させる一助となればこの上ない喜びです。

開催にあたり

- 講演者の皆様、参加者の皆様
- 北海道大学数学教室の先生方
- 数学事務の方々
- 過去の数学総合若手研究集会世話人の方々

から多大なるご支援、ご協力を頂きました。この場を借りて心より感謝申し上げます。

なお、この研究集会は北海道大学大学院理学研究院数学部門の財政的援助を受けて開催されています。深く感謝いたしております。

2022 年 3 月
MCYR18 世話人
祐川翼 (代表)　石井宙志　工藤勇　関元樹　長谷川蒼
波多野幸平　安孫子啓介　田嶌優　藤江克徳　牧田慎平

第18回 数学総合若手研究集会

～数学の交叉点～

The 18th Mathematics Conference for Young Researchers

日時： 2022年3月1日 (火)~3月4日 (金)

場所： オンライン

S:シングル会場 (Zoom webinar)　A:パラレル会場 (Zoom)
B:パラレル会場 (Zoom)　C:パラレル会場 (Zoom)
D:パラレル会場 (Zoom)　E:ポスター会場・休憩所 (oVice)

URL:　https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~wakate/mcyr/2022/ja/index.html

• シングルセッション (会場S)

下地 優作　(Yusaku SHIMOJI)　明治大学大学院理工学研究科数学専攻
基本解近似解法を用いた雪の結晶成長モデルに対する数値計算 3

只野 誉　(Homare TADANO)　山口大学理学部数理科学科
A Zoo of Myers-Type Theorems 13

中山 勇祐　(Yusuke NAKAYAMA)　早稲田大学大学基幹理工学研究科数学・応用数学専攻
A Giambelli formula for the quantum K-theory of Grassmanianns 23

紅村 冬大　(Fuyuta KOMURA)　慶應義塾大学理工学部
A correspondence between inverse subsemigroups, open wide subgroupoids and Cartan intermediate C*-subalgebras 33

• パラレルセッション (会場A)

中川 彬雄　(Akio NAKAGAWA)　千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻
Appell-Lauricella functions over finite fields (有限体上の Appell-Lauricella 関数) 43

金子 尚弥　(Naoya KANEKO)　名古屋工業大学大学院工学専攻情報工学系プログラム
楕円曲線から得られる代数幾何符号のゼータ関数について 53

松村 朋直　(Tomonao MATSUMURA)　金沢大学大学院自然科学研究科数物科学専攻計算科学コース
Fano 多面体が定める K3 曲面に対するミラー対称性について 63

森 友佑　(Yusuke MORI)　名古屋工業大学大学院工学専攻情報工学系プログラム
Coxeter 配置を変形した超平面配置の特性準多項式の数え上げによる計算 73

若尾 亮太　(Ryota WAKAO)　岡山理科大学大学院理学研究科応用数学専攻
ボゾン化の手法を用いたホップ・スーパー代数の分類について 83

木村 藍貴　(Aiki KIMURA)　東北大学大学院理学研究科数学専攻
多重ゼータ値と多重ゼータスター値を補間する級数の巡回和公式 93

矢城 信吾　(Shingo YASHIRO)　日本経済大学経済学部商学科
Syzygies of Projective Curves 99

野本 慶一郎　(Keiichiro NOMOTO)　九州大学大学院数理学府数理学専攻
ある CM 楕円曲線に付随する L 関数の特殊値の代数的部分の 2 進付値 109

渡辺 将一　(Nobukatsu WATANABE)　東京理科大学理学研究科数学専攻
Brauer-friendly 加群の性質について 119

Tsai Daniel　(Daniel TSAI)　名古屋大学大学院多元数理科学研究科
A recurring pattern in natural numbers of a certain property 127

伊城 慎之介　(Shinnosuke ISHIRO)　日本大学大学院総合基礎科学研究科地球情報数理科学専攻
Surjectivity of some local cohomology maps and the second vanishing theorem 135

宋 珠愛　(Chue SON)　東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻
Rational function semifields of tropical curves are finitely generated over the tropical semifield 141

根本 裕介　(Yusuke NEMOTO)　千葉大学大学院融合理工学府数学情報科専攻
Hesse cubic 曲線のレギュレーターと超幾何関数 147

松本 孝文　(Takafumi MATSUMOTO)　神戸大学大学院理学研究科数学専攻
放物接続のモジュライ空間の双有理構造 155

齋藤 琢弥　(Takuya SAITO)　北海道大学大学院理学院数学専攻
対称群による判別的配置 B(6,3,A),B(6,2,A) の分類 161

吉崎 彪雅　(Hyuga YOSHIZAKI)　東京理科大学大学院理工学研究科数学専攻
三次元多様体における Weber 問題 171

太田 洋平　(Yohei OTA)　東京工業大学情報理工学院数理・計算科学系数理・計算科学コース
ハイゼンベルグダブルの一般化とその性質 177

島田 了輔　(Ryosuke SHIMADA)　東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
Geometric Structure of Affine Deligne-Lusztig Varieties 187

杉本 奨吾　(Sugimoto SHOGO)　早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学・応用数理専攻
Factorial GP 関数の Chevalley 公式 189

水野 雄貴　(Yuki MIZUNO)　早稲田大学基幹理工学研究科数学応用数理専攻
An explicit construction of derived moduli stacks of Harder-Narasimhan filtrations 193

安沢 拓真　(Takumi ANZAWA)　名古屋大学多元数理科学研究科多元数理科学専攻
有限交代多重ゼータ値のパラメータを持つ重み付き和公式について 203

中村 悠人　(Yuto NAKAMURA)　北陸先端科学技術大学院大学先端科学技術研究科情報科学系
Surreal number 入門 213

• パラレルセッション (会場Ｂ)

菅原 朔見　(Sakumi SUGAWARA)　北海道大学大学院理学院数学専攻
超平面配置の極小セル分割とカスプ付きディバイドによる Kirby 図式 223

清原 悠貴　(Hirotaka KIYOHARA)　北海道大学大学院理学院数学専攻
3 次元ハイゼンベルグ群の時間的極小曲面のワイエルシュトラス型表現公式 233

今里 優樹　(Yuki IMASATO)　東京工業大学情報理工学院数理・計算科学系数理・計算科学コース
非平面グラフとリー環 sl(N) のウェイトシステム 243

新井 克典　(Katsunori ARAI)　大阪大学大学院理学研究科数学専攻
有向絡み目図式の dual graph diagram 253

米村 拳太郎　(Kentaro YONEMURA)　九州大学大学院数理学府数理学専攻
一葉双曲面上のカンドルと結び目の不変量 263

岩木 隼太　(Hayata IWAKI)　東京工業大学情報理工学院数理・計算科学系数理・計算科学コース
圏と関手を用いた Kuperberg 不変量の研究 271

森 祥仁　(Akihito MORI)　東北大学大学院理学研究科数学専攻
Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量と Homological block 281

村松 滉平　(Kohei MURAMATSU)　東京工業大学大学院情報理工学院数理・計算科学系数理・計算科学コース
Closed normal o-graph による閉 3 次元多様体の表現と Kuperberg 不変量 287

Mai Cong Hung　(Cong Hung MAI)　Osaka University, Department of Mathematics
Quantitative estimates for the Bakry-Ledoux isoperimetric inequality 297

小林 愼一郎　(Shinichiro KOBAYASHI)　東北大学大学院理学研究科数学専攻
グラフラプラシアンの固有値に対する普遍不等式 307

高田 佑太　(Yuta TAKADA)　北海道大学大学院理学院数学専攻
Picard numbers of K3 surfaces with Siegel disks 313

鈴木 龍正　(Tatsumasa SUZUKI)　東京工業大学理学院数学系数学コース
Kirby 図式とポシェット手術を用いた 4 次元多様体の構成 323

田代 賢志郎　(Kenshiro TASHIRO)　東北大学大学院理学研究科数学専攻
サブリーマン冪零多様体上のシストール不等式について 333

田嶌 優　(Yu TAJIMA)　北海道大学大学院理学院数学専攻
Magnitude homology of graphs and discrete Morse theory on Asao-Izumihara complexes 341

辻 寛　(Hiroshi TSUJI)　大阪大学大学院理学研究科数学専攻
Dilation 不等式とその応用 349

宮澤 仁　(Jin MIYAZAWA)　東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
Localization of a KO^*(pt)-valued index and the orientability of the $Pin^-(2)$ monopole moduli space 357

浅野 喜敬　(Nobutaka ASANO)　東北大学大学院理学研究科数学専攻
Right-left equivalent maps of simplified (2, 0)-trisections with different configurations of vanishing cycles 363

高野 暁弘　(Akihiro TAKANO)　東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
Long-Moody construction and twisted Alexander invariants 371

長坂 篤英　(Atsuhide NAGASAKA)　東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
重み付きグラフのゼータ関数とその変形について 381

谷口 雄大　(Yuta TANIGUCHI)　大阪大学大学院理学研究科数学専攻
Quandle と f-twisted Alexander matrix 391

安田 順平　(Jumpei YASUDA)　大阪大学大学院理学研究科数学専攻
曲面絡み目の plat 表示 399

児玉 悠弥　(Yuya KODAMA)　東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻
Thompson 群や関連する群の divergence function について 407

丸山 修平　(Shuhei MARUYAMA)　名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
The space of non-extendable quasimorphisms 413

• パラレルセッション (会場 C)

田中 悠也　(Yuya TANAKA)　東京理科大学大学院理学研究科数学専攻
ロジスティック項と非線形の生成項をもつ走化性方程式系の解の爆発 425

安孫子 啓介　(Keisuke ABIKO)　北海道大学大学院理学院数学専攻
非線形動的境界条件付きの楕円型偏微分方程式に対する Phragmèn-Lidelöf の定理 429

村松 亮　(Ryo MURAMATSU)　東京理科大学大学院理学研究科数学専攻
一般の劣一次ベクトルポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式の解のモジュレーションノルム評価について 437

浜野 大　(Masaru HAMANO)　埼玉大学大学院理工学研究科
長距離型ポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式の解の時間大域挙動について 441

北村 駿介　(Shunsuke KITAMURA)　東北大学大学院理学研究科数学専攻
特性方向の重みを持つ非線形波動方程式の lifespan 評価 451

安達 駿弥　(Shunya ADACHI)　熊本大学大学院自然科学教育部理学専攻
2 階 Fuchs 型微分方程式のモノドロミー不変エルミート形式について 459

藤井 幹大　(Mikihiro FUJII)　九州大学大学院数理学府数理学専攻
異方的粘性項を持つ 3 次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の長時間挙動 469

道本 裕太　(Yuta MICHIMOTO)　早稲田大学教育学研究科教科教育学専攻
充足因子環と測度付き同値関係 479

谷口 晃一　(Koichi TANIGUCHI)　東北大学材料科学高等研究所
Hardy-Sobolev 型半線型熱方程式の解の挙動について 489

千代 祐太朗　(Yutaro CHIYO)　東京理科大学大学院理学研究科数学専攻
準線形誘引・反発型走化性方程式系の解の有界性と漸近挙動 495

石橋 和葵　(Kazuki ISHIBASHI)　広島商船高等専門学校電子制御工学科
Non-oscillation criteria for damped half-linear dynamic equations with mixed derivatives on a time scale 499

佐藤 光汰朗　(Kotaro SATO)　東北大学大学院理学研究科数学専攻
準静的亀裂形成現象に由来する非線形発展方程式について 509

松田 隼一朗　(Junichiro MATSUDA)　京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数学系
Classification of quantum graphs on M_2 and their quantum automorphism groups 519

青木 基記　(Motofumi AOKI)　東北大学大学院理学研究科数学専攻
有界平均振動空間に属するナヴィエ・ストークス方程式の超関数解の平滑化現象について 527

Ó hAodha Dáithí　(Dáithí Ó HAODHA)　東北大学大学院理学研究科数学専攻
An Optimal Decay Estimate of Solutions to the Surface Quasi-Geostrophic Equation 537

石塚 健二郎　(Kenjiro ISHIZUKA)　京都大学数理解析研究所
非線形消散クライン・ゴルドン方程式の 2 ソリトン周りの大域ダイナミクス 547

甲斐 大貴　(Hirotaka KAI)　大阪市立大学大学院理学研究科数物系専攻
リーマン多様体上のジャンプ過程とその性質 557

藤江 克徳　(Katsunori FUJIE)　北海道大学大学院理学院数学専攻
ランダム行列とその主小行列の固有値分布について 561

笹谷 晃平　(Kôhei SASAYA)　京都大学理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系
フラクタル上の Ahlfors 正則共形次元とスペクトル次元の関係について 571

宮川 明裕　(Akihiro MIYAGAWA)　京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数学系
A characterization of rationality for operators in free semicircular elements 581

山下 龍生　(Ryusei YAMASHITA)　東京都立大学理学研究科数理科学専攻
Reconstruction of the defect by the enclosure method for inverse problems of the magnetic Schrödinger operator 589

森澤 功暁　(Katsuaki MORISAWA)　東北大学大学院理学研究科数学専攻
１次元非線形波動方程式の combined effect と一般論に対するその影響 595

喜多 航佑　(Kosuke KITA)　早稲田大学大学院先進理工学研究科物理学及応用物理学専攻
Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear heat equations on a bounded domain ..601

• パラレルセッション (会場Ｄ)

橋本 悠香　(Yuka HASHIMOTO)　NTT ネットワークサービスシステム研究所/慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
作用素のベクトルへの作用に関する Krylov 部分空間法 609

石塚 天　(Takashi ISHIZUKA)　九州大学大学院数理学府数理学専攻
不動点定理と計算量理論 613

簗島 瞬　(Shun YANASHIMA)　東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻
Bessel house-moving の構成と諸性質 623

星野 秀朋　(Hidetomo HOSHINO)　早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
Einstein 方程式の拘束条件に着目した数値計算法 631

豊田 和人　(Kazuhito TOYOTA)　公立はこだて未来大学大学院システム情報科学研究科複雑系情報科学領域
Belousov-Zhabotinsky 反応を用いたレザバー計算の提案とシミュレーション 637

堤 夏輝　(Tsutsumi NATSUKI)　一橋大学商学部商学科
データ駆動時系列モデリングによる微分方程式の導出 647

木村 直記 (Naoki KIMURA) 早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
Jacobi 多様体と擬 Riemann 計量の整合性 657

大野 走馬 (Soma OHNO) 早稲田大学基幹理工学研究科数学応用数理専攻
Rarita-Schwinger fields on nearly Kähler manifolds 663

軸丸 芳揮 (Yoshiki JIKUMARU) 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
吊り下げ曲面の微分幾何学的定式化 671

吉田 裕哉 (Yuuya YOSHIDA) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
古典量子差分プライバシーの数学的側面 681

曺 永旻 (Youngmin CHO) 大阪大学大学院基礎工学研究科システム創成専攻
半線型常微分方程式系に対する解の爆発レート評価 687

石田 あかり (Akari ISHIDA) 大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する反復法の安定性評価に関する深さ依存性 691

Chandra Evan (William) 大阪大学基礎工学研究科システム創成専攻数理科学領域
(Evan (William) CHANDRA)
Time Global Bounds for System of Partial Differential Equations with Ambrosetti-Rabinowitz Nonlinearity 697

黒川 大雅 (Taiga KUROKAWA) 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
エネルギー固定条件下における Kepler 型ポテンシャル系の 2 点境界条件を満たす解の存在について . 705

梶原 唯加 (Yuika KAJIHARA) 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
平面 n 体問題の周期解と組みひも 715

本永 翔也 (Shoya MOTONAGA) 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
近可積分系の正則レベル集合近傍における可積分性の判定条件 725

Mahmoudi Sonia (Sonia MAHMOUDI) Department of mathematics, Graduate school of science, Tohoku university
Classification of Combinatorial Weaving Diagrams 733

市田 優 (Yu ICHIDA) 明治大学大学院理工学研究科数学専攻
相空間のコンパクト化に基づく空間 1 次元退化放物型方程式における非負の進行波解の分類 737

岡 大将 (Tomoyuki OKA) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
消散型波動方程式に対する準周期的時空均質化問題 747

渡邉 南 (Minami WATANABE) 津田塾大学大学院理学研究科数学専攻
二重冪の非線形シュレディンガー方程式の解の散乱について 757

長田 祐輝 (Yuki OSADA) 東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻
3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系に対する ground state energy の漸近展開 761

石川 彩香 (Ayaka ISHIKAWA) 横浜国立大学大学院理工学府数物・電子情報系理工学専攻
セゲディウォークが対応する佐藤ゼータ函数 771

南 彩菜 (Ayana MINAMI) 公立はこだて未来大学大学院システム情報科学研究科複雑系情報科学領域
一様格子上の空間離散モデルにおけるパターン形成 777

• ポスターセッション (会場 E)

北澤 直樹 (Naoki KITAZAWA) 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
可微分関数の Reeb グラフとグラフの具体的な可微分関数の Reeb グラフとしての実現 789

松本 洋平 (Yohei MATSUMOTO) 信州大学大学院総合理工学研究科工学専攻
1 欠陥付非ユニタリ量子ウォークのスペクトル 799

齋藤 耕太 (Kota SAITO) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
Prime-representing functions and Hausdorff dimension 809

小澤 歩 (Ayumi OZAWA) 東京大学大学院新領域創成科学研究科複雑理工学専攻
確率的なリセットによる集団振動の抑制 819

上島 芳倫 (Yoshinori KAMIJIMA) National Center for Theoretical Sciences
最近接有向パーコレーションに対するレース展開 827

Alossaimi Maram (Maram ALOSSAIMI) School of Mathematics and Statistics, University of Sheffield
Poisson Algebras II 837

森 政興 (Masaoki MORI) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
高次元局所体上代数群の不変測度 843

世話人: 祐川翼 (代表) 石井宙志 工藤勇 関元樹 長谷川蒼
波多野幸平 安孫子啓介 田嶌優 藤江克徳 牧田慎平

Schedule

3月1日 (火)

9:50-10:00	開会			
10:00-11:00	下地 優作 (数理)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:20-11:50	(講演辞退)	菅原 朔見 (幾何)	田中 悠也 (解析)	橋本 悠香 (数理)
12:00-12:30	中川 彬雄 (代数)	清原 悠貴 (幾何)	安孫子 啓介 (解析)	石塚 天 (数理)
12:30-14:00	昼食			
14:00-14:30	金子 尚弥 (代数)	今里 優樹 (幾何)	村松 亮 (解析)	簗島 瞬 (数理)
14:40-15:10	松村 朋直 (代数)	新井 克典 (幾何)	浜野 大 (解析)	星野 秀朋 (数理)
15:30-16:00	森 友佑 (代数)	米村 拳太郎 (幾何)	北村 駿介 (解析)	豊田 和人 (数理)
16:10-16:40	若尾 亮太 (代数)	岩木 隼太 (幾何)	安達 駿弥 (解析)	堤 夏輝 (数理)
16:50-17:20	木村 藍貴 (代数)	森 祥仁 (幾何)	藤井 幹大 (解析)	木村 直記 (幾何)
17:30-18:00	矢城 信吾 (代数)	村松 滉平 (幾何)	道本 裕太 (解析)	大野 走馬 (幾何)

3月2日 (水)

10:00-11:00	只野 誉 (幾何)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:20-11:50	野本 慶一郎 (代数)	Mai Cong Hung(幾何)	谷口 晃一 (解析)	軸丸 芳揮 (数理)
12:00-12:30	渡辺 将一 (代数)	小林 愼一郎 (幾何)	千代 祐太朗 (解析)	吉田 裕哉 (数理)
12:30-14:00	昼食			
14:00-15:30	ポスターセッション (会場 E)			
15:40-16:10	Tsai Daniel(代数)	高田 佑太 (幾何)	石橋 和葵 (解析)	曺 永旻 (数理)
16:20-16:50	伊城 慎之介 (代数)	鈴木 龍正 (幾何)	佐藤 光汰朗 (解析)	石田 あかり (数理)
17:00-17:30	宋 珠愛 (代数)	田代 賢志郎 (幾何)	松田 隼一朗 (解析)	Chandra (William) Evan(数理)

3月3日 (木)

10:00-11:00	中山 勇祐 (代数)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:20-11:50	根本 裕介 (代数)	田嶌 優 (幾何)	青木 基記 (解析)	黒川 大雅 (数理)
12:00-12:30	松本 孝文 (代数)	辻 寛 (幾何)	Ó hAodha, Dáithí(解析)	梶原 唯加 (数理)
12:30-14:00	昼食			
14:00-14:30	齋藤 琢弥 (代数)	宮澤 仁 (幾何)	石塚 健二郎 (解析)	本永 翔也 (数理)
14:40-15:10	吉崎 彪雅 (代数)	浅野 喜敬 (幾何)	甲斐 大貴 (解析)	Mahmoudi Sonia(数理)
15:30-16:00	太田 洋平 (代数)	高野 暁弘 (幾何)	藤江 克徳 (解析)	市田 優 (数理)
16:10-16:40	島田了輔 (代数)	長坂 篤英 (幾何)	笹谷 晃平 (解析)	岡 大将 (数理)
16:50-17:20	杉本 奨吾 (代数)	谷口 雄大 (幾何)	宮川 明裕 (解析)	渡邉 南 (解析)
17:30-18:00	水野 雄貴 (代数)	安田 順平 (幾何)	山下 龍生 (解析)	長田 祐輝 (解析)

3月4日 (金)

10:00-11:00	紅村 冬大 (解析)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:20-11:50	安沢 拓真 (代数)	児玉 悠弥 (幾何)	森澤 功暁 (解析)	石川 彩香 (数理)
12:00-12:30	中村 悠人 (代数)	丸山 修平 (幾何)	喜多 航佑 (解析)	南 彩菜 (数理)

シングルセッション
会場 S

基本解近似解法を用いた雪の結晶成長モデルに対する数値計算

明治大学大学院 理工学研究科 数学専攻
下地優作 (Yusaku SHIMOJI)*
明治大学大学院 理工学研究科 数学専攻
沖野祥則 (Yoshinori OKINO)

1　導入

「雪は天から送られた手紙である」

この言葉は，世界で初めて人工的に雪の結晶を作り出すことに成功した科学者，中谷宇吉郎が残した言葉である．地上に降りてくる雪の結晶はおよそ上空 3000m で作られる．その形状は六角板，針状結晶，樹枝状結晶など，実に様々であり，それは上空の気象条件によって決定される．つまり中谷宇吉郎の言葉に表現されているように，地上に降り注いだ雪の結晶の形状から，はるか上空の気象状況等を窺い知ることができるのである．

雪の結晶は，温度と過飽和度というパラメータを用いて中谷小林ダイアグラム（図 2）にあるように分類ができることが知られている．雪の結晶成長を記述したモデルは多く存在するが，そのほとんどはこの中谷小林ダイアグラムを再現することを一つの目標としている．本レポート上で紹介する横山黒田モデルは，ダイアグラム (図 2）の中央あたりにある六角板状の結晶から樹枝状の模様への縦の変化を，一部再現することができるモデルである．縦方向の変化は，過飽和度を変化させることに



図 1　雪の結晶（沖野撮影）

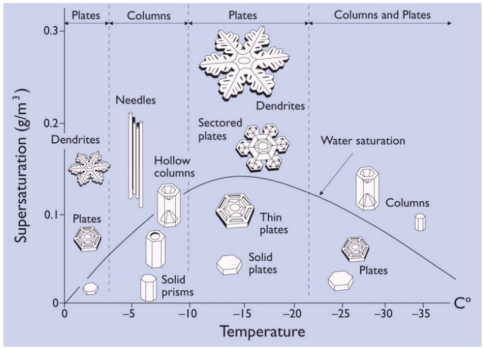


図 2　中谷小林ダイアグラム [3]

* 講演者

対応している．さらに，多くのモデルが結晶の形状に焦点を当てているのに対し，横山と黒田は結晶成長の素過程から今回紹介するモデルを導出しいている [2]．ここではその結晶成長の素過程の概要，モデルの導出，さらにそのモデルの数値計算に用いる基本解近似解法について紹介し，その数値計算の結果の一部を紹介する．

2　結晶成長の仕組み

結晶が「成長する」という言葉を用いているが，この言葉の意味についてもう少し詳しく言及する．例えば水が固まって氷になる，もしくは氷が溶けて水になるといったような状態変化のように，ある物質が 1 つの相と呼ばれる均質な状態から他の相に移り変わる現象を一般に相転移と呼ぶ．この相転移がなぜ生じるかについて考える．

物質が温度や圧力を指定されたとき，どのような状態をとるかを決定するには，大きく分けて次の 2 つの傾向がある．1 つ目は力学的なエネルギー E を低くしようとする傾向であり，もう 1 つは原子や分子の熱運動によって無秩序な状態を取ろうとする傾向である．後者の無秩序さについては，熱力学ではエントロピー S という概念で表現することができ，S は

$$S = k \log W \tag{1}$$

と表すことができる．ここで $k = 1.380 \times 10^{-23}\mathrm{JK}^{-1}$ はボルツマン定数であり，W は取りうる微視的状態数の総数である．これらの相反する 2 つの傾向の競合により，物質は次のように定義される（ヘルツホルム）自由エネルギー G を最小にするときに熱力学的に安定な状態をとる：

$$G = E - TS. \tag{2}$$

ここで E は物質のエネルギーであり，T は絶対温度である．(2) において，T が非常に小さいときには右辺第 2 項の影響が小さいので，エネルギー E を小さくすることで G 全体として小さな値をとることになる．一方で T が大きいときには第 2 項の影響が強く出てくるので，エントロピー S を大きくする，つまり無秩序な状態をとることで G が小さくなり，物質は安定な状態に向かうことになる．

液相と固相の 2 相が共存しているときは，結晶粒子を 1 つ受け取ったときの自由エネルギーの増分がどちらの相においても等しいときである．このときの自由エネルギーの増分を化学ポテンシャルと呼び，液相の化学ポテンシャルを μ^{L}，固相の化学 μ^{C} とするとき，これらの大小関係によって相転移の向きが定まる．例えば，融液の温度 T が平衡温度の T_{e} よりも低い過冷却状態のとき，$\mu^{\mathrm{L}} > \mu^{\mathrm{C}}$ となる．したがって，融液相から固相に粒子が 1 つ移動したとき，

$$\Delta\mu = \mu^{\mathrm{L}} - \mu^{\mathrm{C}} > 0$$

だけ自由エネルギーは減少する．このように，化学ポテンシャルの差 $\Delta\mu$ が相転移の駆動力となる．気相成長，つまり水蒸気の中で氷の結晶が成長する場合，この化学ポテンシャルの差は過飽和度 σ が高いほど大きい．それは蒸気圧が平衡蒸気圧を超えると，水蒸気量が空気が蓄えられる量を超え，それが結晶となるからである．過飽和度 σ は実際の蒸気圧 p と平衡蒸気圧 p_{e} を用いて

$$\sigma = \frac{p - p_{\mathrm{e}}}{p_{\mathrm{e}}} \tag{3}$$

と表される．雪の結晶成長においても，この過飽和度が重要な役割を担う．

3　横山黒田モデル

雪の結晶成長は，大きく分けて

1. 界面カイネティクス過程
2. 結晶の周りの水分子の拡散過程

の 2 つで説明することができる．それぞれについて詳しく見ていく．

3.1　界面カイネティクス過程

界面カイネティクス過程とは，空気と結晶表面の境界上で水分子が結晶表面に組み込まれていく過程のことである．結晶は自身を構成する分子の種類等により，面心立方格子や体心立方格子など，その結晶格子構造が異なる．またその構造によって，どの切断面が構成原子が最稠密になっているか（最も原子が詰まっているか）などの性質が変わってくる．雪の結晶は水分子から成り，それらは六方最密格子の構造を持つことが知られている．これにより，雪の結晶は六角形の方向に成長しやすい異方性を持つ結晶構造となっている．

さて，気体中の水分子が結晶の表面に取り込まれる過程を考える．単位面積の結晶表面に単位時間あたりに入射する水分子の数 j_{imp} は周りの水分子の個数が多いほど多くなる．したがって j_{imp} は水分子の分圧 p に比例し，

$$j_{\mathrm{imp}} = \frac{p}{\sqrt{2\pi mkT}} \tag{4}$$

と表すことができる．ここで m は分子の質量，k はボルツマン定数，T は絶対温度である．もし入射分子が入射とともに全て結晶相に組み込まれるとすれば，j_{imp} は単位面積あたり単位時間あたりに結晶に組み込まれる分子数 j_{in} に一致する．したがって，

$$j_{\mathrm{in}} = j_{\mathrm{imp}} = \frac{p}{\sqrt{2\pi mkT}} \tag{5}$$

となる．もし結晶相と蒸気相が平衡状態にあれば，単位面積あたり単位時間あたりに結晶表面から出ていく分子数 j_{out} と結晶相に組み込まれる分子数 j_{imp} は等しくなる．つまり，平衡蒸気圧 p_{e} を用いて

$$j_{\mathrm{out}} = j_{\mathrm{imp}} = \frac{p_{\mathrm{e}}}{\sqrt{2\pi mkT}} \tag{6}$$

と書ける．したがって，もし過飽和な状態であれば，$j_{\mathrm{imp}} > j_{\mathrm{out}}$ となり，単位時間あたりに増加する結晶表面の分子数 dN_{C}/dt は

$$\frac{dN_{\mathrm{C}}}{dt} = \frac{p - p_{\mathrm{e}}}{\sqrt{2\pi mkT}} \tag{7}$$

と書くことができる．このとき，水分子 1 つあたりの体積を v_{c} とすれば，界面の成長速度 V_{max} は

$$V_{\mathrm{max}} = v_{\mathrm{c}}\frac{dN_{\mathrm{C}}}{dt} = v_{\mathrm{c}}\frac{p - p_{\mathrm{e}}}{\sqrt{2\pi mkT}} \tag{8}$$

と表される．(8) は Hertz-Knudsen の式と呼ばれる．しかしいま，入射した水分子が全て結晶相に取り込まれるという仮定を与えていたが，実際は取り込まれることもあれば，そのまま蒸発してしまうこともある．したがって，実際の界面の成長速度 V は

$$V = \alpha V_{\max}, \quad \alpha \in [0,1] \tag{9}$$

と書けるだろう．ここで α は凝縮係数と呼ばれる．この凝縮係数 α は，実際には過飽和度 σ に依存する．見通しを良くするために，カイネティック係数 β を導入する．β は

$$\beta = \frac{\alpha_1 v_{\mathrm{c}} p_{\mathrm{e}}}{\sqrt{2\pi m k T}} \tag{10}$$

と定義される．こちらの $\alpha_1 \in [0,1]$ も凝縮係数であるが，都合上添字の 1 をつけておく．すると (9) は

$$V_{\mathrm{k}} = \beta\sigma \tag{11}$$

と書くことができる．ここで，添字の k は界面カイネティクスによる界面成長速度であることを示している．

3.2 水分子の拡散過程

結晶界面の成長速度は，結晶の周囲の水蒸気，つまり水分子の拡散の速さに比べて十分に小さいとみなすことができる．それゆえ，結晶の周りで過飽和度は準定常的に拡散分布しているとみなすことができる．したがって，結晶の周りで過飽和度 σ は

$$\triangle\sigma = 0 \tag{12}$$

を満たす．(12) を解くための境界条件として，結晶界面の十分遠方での過飽和度に関する関係式

$$\sigma = \sigma_{\infty} \tag{13}$$

を与える．また，体積拡散により定まる界面の成長速度 V_{d} は濃度，つまりここでは過飽和度の勾配に比例する．したがって，V_{d} は界面上で

$$V_{\mathrm{d}} = \gamma \frac{\partial\sigma}{\partial \boldsymbol{n}} \tag{14}$$

と書くことができる．ここで，γ は定数，$\boldsymbol{n}$ は界面での外向き単位法線ベクトルである．さらに質量保存則を考慮すれば，界面カイネティクス過程で考えた V_{k} と拡散過程による成長速度 V_{d} は等しくなる．したがって，結晶の界面の成長速度 V は結晶界面上で $V = V_{\mathrm{k}} = V_{\mathrm{d}}$ を満たす．つまり結晶界面上での境界条件として

$$\beta\sigma = \gamma \frac{\partial\sigma}{\partial \boldsymbol{n}} \tag{15}$$

を得る．

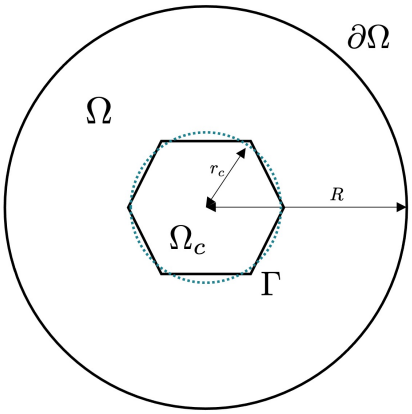


図 3　横山黒田モデルの状況設定

3.3　横山黒田モデル

ここで，今までの議論を数理モデルとしてまとめておく．考えている問題の状況は，図 3 のような設定である．Ω_{C} は固相，つまり結晶が占める領域を表し，Ω は気相，つまり結晶の周りを水蒸気が満たす領域である．また，Γ は結晶の界面，$\partial\Omega$ は気相の境界を表し，Γ から十分遠方で定義されるとする．この設定において，雪の結晶成長を表す横山黒田モデルは次のような方程式系で表される：

$$\begin{cases} \triangle\sigma = 0 & \text{in } \Omega(t), \\ \beta(\theta,\sigma)\sigma = \gamma\dfrac{\partial\sigma}{\partial \boldsymbol{n}} & \text{on } \Gamma(t), \\ V = \beta(\theta,\sigma)\sigma & \text{on } \Gamma(t), \\ \sigma = \sigma_\infty & \text{on } \partial\Omega(t). \end{cases} \tag{16}$$

各値は，次のように定義される：

$$\begin{aligned} &\sigma = \frac{p - p_{\mathrm{e}}}{p_{\mathrm{e}}}, \\ &\beta(\theta,\sigma) = \alpha_2\beta_{\max}, \\ &\beta_{\max} = \frac{\alpha_1 v_c p_{\mathrm{e}}}{\sqrt{2\pi m k_{\mathrm{B}} T}}, \quad \alpha_2 = \frac{\eta}{\eta_1}\tanh\frac{\eta_1}{\eta}, \\ &\eta = \tan\theta = \frac{d}{\lambda}, \qquad\quad \eta_1 = \frac{d}{2x_{\mathrm{s}}}. \end{aligned}$$

ここで，$\alpha_1 \in [0,1]$ は凝縮定数，また，α_2 も $x\tanh x^{-1}$ の形をしているので，$\alpha_2 \in [0,1)$ であるので，こちらも一種の凝縮定数とみなせる．その他の値については，図 4 をもとに考えていく．図 4 にあるように，d は結晶界面のステップの高さ，λ は平均ステップ距離，x_{s} は界面に吸着した水分子が表面に固定されるまでに表面拡散する平均距離，θ はステップ面とプリズム面のなす角度である．前述したように，凝縮定数 α は過飽和度に依存するはずであり，結晶構造に関する異方性も有するはずである．したがって，$\alpha = \alpha_1\alpha_2$ としたときの (9) が (16) の V の式になる．

そのことについてもう少し詳しく考えると，各ステップが一様に前進速度 v で λ だけ前進したとすると，その時間 λ/v で図 4 における直線 l は距離 $d\cos\theta$ だけ V の方向に進む．つまり速度

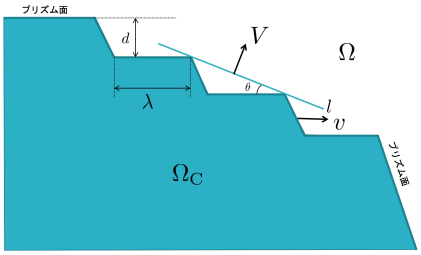


図 4　成長する結晶の表面

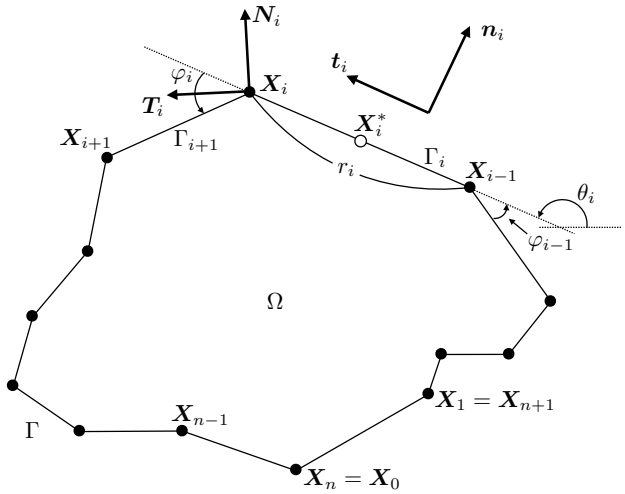


図 5　空間の離散化

$V = dv\cos\theta/\lambda$ を得る．BCF 理論 ([1] などを参照) から，関係式

$$v = v_\infty \tanh\frac{\lambda}{2x_{\mathrm{s}}}, \quad v_\infty = \frac{2x_{\mathrm{s}}}{d}\alpha_1 V_{\max}$$

が得られ，それらを代入すると $V = \alpha_1\alpha_2 V_{\max}$，つまりモデル方程式 (16) の V を得る．また，モデル方程式 (16) の第 2 式に現れる γ については，ここでは拡散係数 D を用いて

$$\gamma = \frac{v_{\mathrm{c}} p_{\mathrm{e}}}{k_{\mathrm{B}} T} D$$

とした．

4　数値計算

4.1　数値計算スキームの概要

境界 $\Gamma(t)$ を $\Gamma(t) = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_i(t)$ のように N 個の辺からなる多角形で近似する（図 5）．ここで $\Gamma(t)$ の第 i 辺 $\Gamma_i(t)$ は次のように定義される：

$$\Gamma_i(t) = (\boldsymbol{X}_{i-1}(t), \boldsymbol{X}_i(t)) = \{\lambda\boldsymbol{X}_{i-1}(t) + (1-\lambda)\boldsymbol{X}_i(t) \mid \lambda \in (0,1)\}.$$

ここで，$\boldsymbol{X}_i(t)$ は $\Gamma(t)$ の第 i 頂点である $(i = 1, 2, \ldots, N)$．境界 $\Gamma(t)$ の運動は次のような発展法則に従う：

$$\dot{\boldsymbol{X}}_i(t) = V_i(t)\boldsymbol{N}_i(t) + W_i\boldsymbol{T}_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad t \in (0, T). \tag{17}$$

$\boldsymbol{N}_i$ と $\boldsymbol{T}_i$ はそれぞれ頂点 $\boldsymbol{X}_i$ における単位外向き法線ベクトルと単位接線ベクトルであり，V_i と W_i はそれぞれ頂点 $\boldsymbol{X}_i$ における法線速度と接線速度である．

第 m 時間で与えられた多角形曲線 $\Gamma^{(m)}$ に対して，発展法則 (17) の右辺を次の手順で計算していく：

1. 頂点 $\boldsymbol{X}_i^{(m)}$ における単位接線ベクトル $\boldsymbol{T}_i^{(m)}$ を，隣接する 2 辺上の単位接線ベクトルのちょうど中間の方向を向くように定義する．その接線ベクトルを $-\pi/2$ だけ回転させることにより，$\boldsymbol{X}_i^{(m)}$ における単位外向き法線ベクトル $\boldsymbol{N}_i^{(m)}$ を定義する．
2. 基本解近似解法を用いて，境界条件付きのラプラス問題 (16) を解く．基本解近似解法を用いて得た近似解 $\sigma^{(m)}$ と頂点 $\boldsymbol{X}_i^{(m)}$ における単位外向き法線ベクトル $\boldsymbol{N}_i^{(m)}$ を用いて，頂点における法線速度 $V_i^{(m)}$ を求めることができる．
3. 漸近的一様配置法を用いて，頂点における接線速度 $\{W_i^{(m)}\}_{i=1}^N$ を求める．

上記の手順を踏むことにより，(17) の右辺を計算することができる．その値を用いて常微分方程式 (17) を数値的に解くことにより，時刻 $t + 1$ における多角形曲線 $\Gamma^{(m+1)}$ が得られる．

4.2 基本解近似解法

基本解近似解法とは，主にポテンシャル問題（Laplace 方程式の境界値問題）に対するメッシュフリーの数値解法である．基本解近似解法の基本的な考え方は，対象としている問題の近似解を，基本解（ここでは Laplace 方程式の基本解）の線型結合で表す，というものである．具体的に，今回対象としている問題 (16) に対して基本解近似解法を用いて近似解を構成していく．

(16) の近似解 σ は，次のような形で与えられる：

$$\sigma(\boldsymbol{x}) = Q_0 + \sum_{j=1}^{2N} Q_j E_j(\boldsymbol{x}), \quad E_j(\boldsymbol{x}) = E(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_j).$$

ここで，$E(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-1} \log|\boldsymbol{x}|$ は Laplace 方程式の基本解である．また，$\{\boldsymbol{y}_j\}_{j=1}^{2N}$ は特異点であり，領域 $\Omega^{(m)}$ の外部で定義される．この特異点は基本解近似解法の計算精度を左右する重要な役割を果たし，適切に配置されることが必要とされる．σ は線型結合の係数 $\{Q_j\}_{j=0}^{2N}$ によらず Laplace 方程式を確かに満たす．そこで，$\{Q_j\}_{j=0}^{2N}$ は σ が与えられた境界条件を満たすように決定する．ここでは，境界条件を多角形曲線の各辺の中点 $\boldsymbol{X}_i^* = (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_{i-1})/2$ を選点とし，選点法を用いて近似する．つまり，$\{Q_j\}_{j=0}^{2N}$ は以下の制約条件

$$\sum_{j=1}^{2N} Q_j = 0 \tag{18}$$

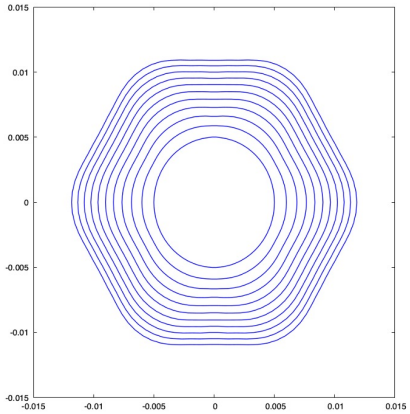


図 6　正円からの結晶成長

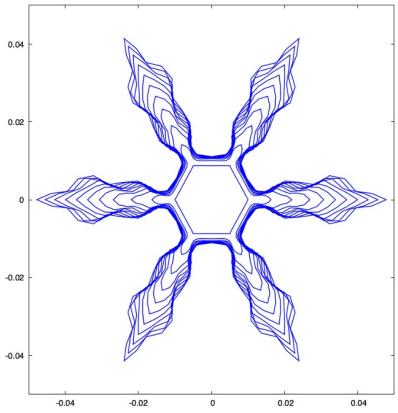


図 7　正六角形からの結晶成長

のもと，次の線型方程式系の解として与えられる：

$$\beta(\boldsymbol{X}_i^*)\sigma(\boldsymbol{X}_i^*) - \gamma\frac{\partial\sigma(\boldsymbol{X}_i^*)}{\partial\boldsymbol{n}} = 0, \quad i = 1,\dots,N, \tag{19}$$

$$\sigma(\boldsymbol{X}_i^*) = \sigma_\infty, \quad i = N+1,\dots,2N. \tag{20}$$

ここで，$\boldsymbol{n}_i$ は多角形曲線の第 i 辺上の単位外向き法線ベクトル，r_i は第 i 辺の長さである．また，$i = N+1,\dots,2N$ のときは，$\partial\Omega$ 上の境界条件を表している．

こうして求めた第 i 辺上の $\sigma(\boldsymbol{X}_i^*)$ を用いて，第 i 辺上の法線速度 v_i を次のように計算することができる：

$$v_i = \beta(\boldsymbol{X}_i^*)\sigma(\boldsymbol{X}/i^*). \tag{21}$$

この $\{v_i\}_{i=1}^N$ から，関係式

$$V_i = \frac{v_i + v_{i+1}}{2\mathsf{cos}_i}, \quad i = 1,2,\dots,N \tag{22}$$

を用いて $\{V_i\}_{i=1}^N$ を得ることができる．ここで，$\mathsf{cos}_i = \cos(\varphi_i/2)$ であり，φ_i は多角形曲線の第 i 辺と第 $i+1$ 辺の間の外角である．

制約条件 (18) は，基本解近似解法の計算において，スケール変換に対する不変性を与えるために用いた条件式である．詳細は [7] などを参照されたい．

4.3　数値計算結果

最後に，基本解近似解法を用いたモデル方程式 (16) に対する数値計算結果を紹介する．図 6 は結晶の初期の形を正円として，時間発展を追跡したものである．時間が経過するにつれて六角形に近づいていくことが見て取れる．一方，図 7 については初期の形を正六角形とし，時間発展を追跡したものである．こちらは時間が経過するにつれて，樹枝状の模様を形成することが見て取れる．現状，横山黒田モデルを用いた場合には正円から計算を始めた際に丸みを帯びた六角形上のパターンより先のパターン（図 7 のような樹枝状パターンなど）は確認できていない．これは恐らくモデルを導出する際にベルグ効果と呼ばれるものを考慮していないことが原因ではないかと考えられるが，結論には至っていない．この辺りは，今後の課題としている．

参考文献

[1] W. K. Burton, N. Cabrera and F. C. Frank, The growth of crystals and the equilibrium structure of their surfaces, *Philos. Trans. R. Soc. Landon, Ser.* A **243**(1951) 299-358

[2] E. Yokoyama & T. Kuroda, Pattern formation in growth of snow crystals occurring in the surface kinetic process and the diffusion process, *Physical Review* A **41** (1990)

[3] J. W. Barrett, H. Garcke and R. Nŭrnberg, Numerical computations of faceted pattern formation in snow crystal growth, *Physical Review* E **86** (2012)

[4] M. Beneš, MATHEMATICAL AND COMPUTATIONAL ASPECTS OF SOLIDIFICATION OF PURE SUBSTANCES, *Acta Math. Univ. Comenianae* (2001)

[5] James G. Kelly & Everett C. Boyer, Physical Improvements to a Mesoscopic Cellular Automaton Model for Three-Dimensional Snow Crystal Growth, *Cryst. Growth Des.* **14** (2014)

[6] 矢崎成俊，『界面現象と曲線の微積分』，共立出版，2016

[7] 矢崎成俊，『動く曲線の数値計算』，共立出版，2019

[8] D. Ševčovič, Daniel & S. Yazaki, Evolution of plane curves with a curvature adjusted tangential velocity, *Jpn. J. Ind. Appl. Math.*, **28**(2011), 413-442

[9] K. Sakakibara & S. Yazaki, Structure-preserving numerical scheme for the one-phase Hele-Shaw problems by the method of fundamental solutions, *Comput. Math. Methods*, **1**(2019), e1063, 25

[10] K. Sakakibara & S. Yazaki, Method of fundamental solutions with weighted average condition and dummy points, *JSIAM Lett.*, **9**(2017), 41-44

[11] K. Sakakibara & S. Yazaki, Bidirectional numerical conformal mapping based on the dipole simulation method, *Eng. Anal. Bound. Elem.*, **114**(2020), 45-57

[12] M. J. Shelley, F. -R. Tian, and K. Wlodarski, Hele-Shaw flow and pattern formation in a time-dependent gap, *Nonlinearity*, **10**(1997),1471-1495

[13] M. Katsurada & H. Okamoto, A mathematical study of the charge simulation method. I., *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **35**(1988), 507-518

[14] K. Amano, D. Okano, H. Ogata and M. Sugihara, Numerical conformal mappings onto the linear slit domain, *Jpn. J. Ind. Appl. Math.*, **29**(2012), 165-186

A Zoo of Myers-type Theorems*

山口大学 理学部 数理科学科
只野 誉（Homare TADANO）†

概要

リーマン幾何学において最も重要な研究対象のひとつはリーマン多様体の曲率と位相の関係を明らかにすることである．本稿では完備リーマン多様体がコンパクトになるための古典的な十分条件を紹介し，著者によるそれらの一般化を紹介する．

1 導入

本稿を通して $n \geqslant 2$ を自然数とし，(M, g) を n 次元の完備 Riemann 多様体とする．リーマン幾何学において最も自然かつ重要な問題のひとつはリーマン計量から定まる曲率が多様体に及ぼす幾何学的性質を解き明かすことである．リーマン計量から定まる曲率には主にリーマン曲率，リッチ曲率，スカラー曲率の 3 つがある．その中でリッチ曲率は曲面のガウス曲率を高次元に一般化した体積の膨張度を測るような曲率であり，リーマン幾何学の重要な定理の多くはリッチ曲率の言葉を用いて記述される．1982 年に S.T. Yau は

3 次元以上の多様体はリッチ曲率が常に負となるようなリーマン計量を許容するか？

という問題を提案した．この問題は多くの数学者たちによって研究され，3 次元の場合は L.Z Gao と S.-T. Yau [9] によって肯定的に解決され，3 次元以上の場合は J. Lohkamp [13] によって肯定的に解決された．対照的に S.B. Myers [15] は完備リーマン多様体のリッチ曲率が下から正の定数で抑えられるならば，そのような多様体はコンパクトになり，直径は上から抑えられることを証明した．

定理 1 (S.B. Myers [15])**.** *If there exists some positive constant $\lambda > 0$ such that the Ricci curvature satisfies $\mathrm{Ric}_g \geqslant (n-1)\lambda g$, then (M, g) is compact and the diameter of (M, g) has the upper bound*

$$\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}.$$

定理 1 の帰結として非コンパクトな完備リーマン多様体のリッチ曲率は下から正の定数で抑えられないことが導かれ，下から正の定数で抑えられるようなリッチ曲率を持つ完備リーマン計量が存在するための位相的な障害を与える．リッチ曲率とリーマン多様体の

* 第 18 回数学総合若手研究集会（2022 年 3 月・北海道大学）テクニカルレポート
† 本研究は科研費の助成を受けたものである（課題番号：18K13417）

位相の関係については多くの先行研究があるにも関わらず完全な理解には程遠い状況で, 現在でも活発に研究されている重要な話題である. 定理 1 はリッチ曲率が下から正の定数で抑えられているという条件を弱い条件に置き換えることで様々な方向へ一般化されてきた. ここではそのような一般化のうち幾つかを紹介する. W. Ambrose [1] は測地線に沿ったリッチ曲率の積分を仮定することで 定理 1 の最初の一般化を与えた.

定理 2 (W. Ambrose [1]). *If there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma\colon [0,+\infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))dt = +\infty,$$

then (M,g) is compact.

定理 2 は多くの数学者たちによって改良されてきた. G.J. Galloway [8] は測地線に沿ったリッチ曲率の減衰の情報を与えるような定理 2 の一般化を与えた.

定理 3 (G.J. Galloway [8]). *If there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma : [0,+\infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\int_0^{+\infty} t^\lambda \,\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))dt = +\infty \tag{1.1}$$

for some constant $\lambda \in [0,1)$, then (M,g) is compact.

定理 3 は最初に A. Avez [2] によってリッチ曲率が非負であるという条件のもとで証明された. A. Avez による定理では条件 (1.1) は条件

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^\lambda \,\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))dt > \frac{n-1}{1-\lambda}\frac{1}{t_0^{1-\lambda}} \tag{1.2}$$

に置き換えられた. ここで $t_0 > 0$ と $\lambda \in [0,1)$ は定数である. 定理 3 ではリッチ曲率の符号に関する条件は仮定されていないが, G.J. Galloway [8] はリッチ曲率が非負という条件を課せば条件 (1.1) と (1.2) はさらに改良されることを証明した.

定理 4 (G.J. Galloway [8]). *Suppose that the Ricci curvature is non-negative. If there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma\colon [0,+\infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^\lambda \,\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))dt > (n-1)\frac{(2-\lambda)^2}{4(1-\lambda)}\frac{1}{t_0^{1-\lambda}} \tag{1.3}$$

for some constants $t_0 > 0$ and $\lambda \in [0,1)$, then (M,g) is compact.

P. Mastrolia, M. Rimoldi, G. Veronelli [14] はリッチ曲率が下から非正の定数で抑えられているという状況の下で定理 4 の一般化を証明した.

定理 5 (P. Mastrolia, M. Rimoldi, and G. Veronelli [14]). *Suppose that the Ricci curvature satisfies* $\mathrm{Ric}_g \geqslant -B^2 g$ *for some non-negative constant* $B \geqslant 0$. *If there exists some point* $p \in M$ *for which every geodesic* $\gamma : [0, +\infty) \to M$ *emanating from* p *satisfies either the condition*

$$\int_a^b t^\lambda \,\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt > B\sqrt{n-1}\left\{ b^\lambda + a^\lambda \frac{\exp\left(\frac{2Ba}{\sqrt{n-1}}\right)+1}{\exp\left(\frac{2Ba}{\sqrt{n-1}}\right)-1} \right\} + (n-1)\frac{\lambda^2}{4(\lambda-1)}(b^{\lambda-1} - a^{\lambda-1}) \tag{1.4}$$

or the condition

$$\int_a^b t \,\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt > B\sqrt{n-1}\left\{ b + a \frac{\exp\left(\frac{2Ba}{\sqrt{n-1}}\right)+1}{\exp\left(\frac{2Ba}{\sqrt{n-1}}\right)-1} \right\} + \frac{n-1}{4}\ln\frac{b}{a} \tag{1.5}$$

for some constants a, b, *and* λ *such that* $0 < a < b$ *and* $\lambda \neq 1$, *then* (M, g) *is compact.*

注意. In the case of $B = 0$, (1.4) and (1.5) must be intended in a limit sense. Namely, the integral conditions (1.4) and (1.5) must be replaced, respectively, by

$$\int_a^b t^\lambda \,\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt > (n-1)a^{\lambda-1} + (n-1)\frac{\lambda^2}{4(\lambda-1)}(b^{\lambda-1} - a^{\lambda-1}) \tag{1.6}$$

and

$$\int_a^b t \,\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt > (n-1)\left(1 + \frac{1}{4}\ln\frac{b}{a}\right).$$

When $\lambda \in [0, 1)$, by taking the limit $b \to +\infty$, (1.6) recovers (1.3).

多様体 M 上の連続関数 $f : M \to \mathbb{R}$ に対して M 上の非負連続関数 $f_+ : M \to \mathbb{R}$ を

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\}$$

で定義する. $f_+(x) = 0$ は任意の $x \in M$ に対して $f(x) = 0$ が成り立つことと同値である.

完備リーマン多様体 (M, g) のリッチ曲率が正の定数 $\lambda > 0$ に対して $\mathrm{Ric}_g \geqslant (n-1)\lambda g$ を満たせば, 定理 1 より (M, g) はコンパクトであり, その直径は $\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$ を満たす. このとき任意の単位速度の測地線 $\gamma = \gamma(t)$ に対して $\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) \geqslant (n-1)\lambda$ となり

$$\left((n-1)\lambda - \mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\right)_+ = 0 \tag{1.7}$$

が成り立つ. J.-G. Yun [37] は (1.7) を弱めることで 定理 1 の一般化を証明した.

定理 6 (J.-G. Yun [37]). *For any positive constants* $\lambda > 0$ *and* $\varepsilon > 0$, *there exists an explicit positive constant* $\delta = \delta(n, \lambda, \varepsilon) > 0$ *such that if there exists some point* $p \in M$ *for which every geodesic* $\gamma\colon [0, +\infty) \to M$ *emanating from* p *satisfies*

$$\int_0^{+\infty} \left((n-1)\lambda - \mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\right)_+ dt < \delta(n, \lambda, \varepsilon),$$

then (M,g) *is compact and the diameter from* p *satisfies* $\operatorname{diam}_p(M,g) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} + \varepsilon$.

また B.-Y. Wu [35] は (1.7) を弱めることで 定理 1 の一般化を証明した.

定理 7 (B.-Y. Wu [35])**.** *If there exist some constants* $\lambda > 0$ *and* $\Lambda \geqslant 0$ *such that for any point* $p \in M$ *and each minimal geodesic* γ *emanating from* p*, the Ricci curvature satisfies*

$$\int_\gamma \left((n-1)\lambda - \operatorname{Ric}_g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))\right)_+ dt \leqslant \Lambda,$$

then (M,g) *is compact. Moreover, the diameter of* (M,g) *has the upper bound*

$$\operatorname{diam}(M,g) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\Lambda}{(n-1)\lambda}.$$

$\Lambda = 0$ ならば 定理 7 は 定理 1 に帰着される. 一方で E. Calabi [5] はリッチ曲率が非負であるという仮定の下で完備リーマン多様体がコンパクトになるための十分条件を与えた.

定理 8 (E. Calabi [5])**.** *Suppose that the Ricci curvature is non-negative. If there exists some point* $p \in M$ *for which every geodesic* $\gamma : [0,+\infty) \to M$ *emanating from* p *satisfies*

$$\limsup_{s\to+\infty}\left\{\int_0^s \sqrt{\operatorname{Ric}_g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))}dt - \frac{\sqrt{n-1}}{2}\ln s\right\} = +\infty,$$

then (M,g) *is compact.*

J. Cheeger, M. Gromov, M. Taylor [6] はある領域の外側でリッチ曲率の 2 次の減衰を仮定して完備リーマン多様体がコンパクトになるための十分条件を与えた.

定理 9 (J. Cheeger, M. Gromov, and M. Taylor [6])**.** *If there exist some point* $p \in M$ *and positive constants* $r_0 > 0$ *and* $\nu > 0$ *such that the Ricci curvature satisfies*

$$\operatorname{Ric}_g(x) \geqslant (n-1)\frac{(\frac{1}{4}+\nu^2)}{r^2(x)}g(x) \tag{1.8}$$

for all $x \in M$ *satisfying* $r(x) \geqslant r_0$*, where* $r(x)$ *denotes the distance between* p *and* x*, then* (M,g) *is compact. Moreover, the diameter of* (M,g) *from* p *has the upper bound*

$$\operatorname{diam}_p(M,g) \leqslant r_0 \exp\left(\frac{\pi}{\nu}\right).$$

定理 9 には興味深い一般化が存在する. この一般化を紹介するために記号の準備をしよう. まず正の数 $r > 0$ に対して $L_0(r) := r$ と定め, 自然数 $k \geqslant 1$ に対して

$$L_k(r) := \underbrace{\ln \circ \ln \circ \cdots \circ \ln}_{k\text{-times}}(r)$$

とおく. このとき $r > e \uparrow\uparrow (k-1)$ に対して $L_k(r) > 0$ が成り立つ. ここで

$$e \uparrow\uparrow k := \underbrace{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e}}}}}_{k\text{-times}}$$

であり, $e \uparrow\uparrow 0 := 1$ とする. さらに実数 $x \in \mathbb{R}$ と整数 $k \geqslant 0$ に対して $e_0(x) := x$ かつ $e_{k+1}(x) := \exp(e_k(x))$ とおき, 整数 $k \geqslant 0$ に対して $e_k := e_k(0)$ とおく. このとき $e_k = e \uparrow\uparrow (k-1)$ および $L_k(e_k) = 0$ が成り立つ. 自然数 $k \geqslant 1$ と正の数 $\nu > 0$ に対して

$$\mathcal{A}_{k,\nu}(r) := \frac{1}{4}\left\{ \frac{1}{L_0^2(r)} + \frac{1}{(L_0(r)L_1(r))^2} + \cdots + \frac{1}{(L_0(r)L_1(r)L_2(r)\cdots L_{k-2}(r))^2} + \frac{1+4\nu^2}{(L_0(r)L_1(r)L_2(r)\cdots L_{k-1}(r))^2} \right\}$$

とおく. ここで $r > e_{k-1}$ である. この設定のもとで (1.8) は

$$\mathrm{Ric}_g(x) \geqslant (n-1)\mathcal{A}_{1,\nu}(r(x))g(x)$$

と書き表される. V. Boju と L. Funar [4] は定理 9 で仮定されたリッチ曲率の減衰 (1.8) を弱いものに置き換えて完備リーマン多様体がコンパクトになるための十分条件を与えた.

定理 10 (V. Boju and L. Funar [4]). *If there exist some point $p \in M$, natural number $k \geqslant 1$, and positive constants $r_0 > e_{k-1}$ and $\nu > 0$ such that the Ricci curvature satisfies*

$$\mathrm{Ric}_g(x) \geqslant (n-1)\mathcal{A}_{k,\nu}(r(x))g(x) \tag{1.9}$$

for all $x \in M$ satisfying $r(x) \geqslant r_0$, where $r(x)$ denotes the distance between p and x, then (M, g) is compact. Moreover, the diameter of (M, g) from p has the upper bound

$$\mathrm{diam}_p(M, g) \leqslant e_{k-1}\left(L_{k-1}(r_0)\exp\left(\frac{\pi}{\nu}\right)\right).$$

最近 J. Wan [31] はリッチ曲率の減衰 (1.9) がさらに改良出来ることを証明した.

定理 11 (J. Wan [31]). *If there exist some point $p \in M$ and positive constants $r_0 > 0$ and $k \geqslant 2$ such that the Ricci curvature satisfies*

$$\mathrm{Ric}_g(x) \geqslant \frac{C(n, r_0, k)}{(r_0 + r(x))^k} g(x)$$

for all $x \in M$, where $r(x)$ denotes the distance between p and x, then (M, g) is compact. Here the constant $C(n, r_0, k)$ may be taken as

$$C(n, r_0, k) = \begin{cases} (n-1)\frac{(k-1)^k}{(k-2)^{k-2}} r_0^{k-2} & k > 2, \\ (n-1)\left(1 + \frac{r_0}{\varepsilon}\right) \quad \textit{for any} \quad \varepsilon > 0 & k = 2. \end{cases}$$

2　結果

ここからはリッチ曲率を拡張する曲率を紹介し, 定理 1 やその一般化に対する対応物を与える. Riemann 多様体 (M,g) 上で定義された滑らかな関数 $f\colon M\to\mathbb{R}$ と定数 $m\in(-\infty,+\infty]$ に対して **m-Bakry–Émery リッチ曲率** [3] を

$$\mathrm{Ric}_f^m \coloneqq \begin{cases} \mathrm{Ric}_g & m=n,\\ \mathrm{Ric}_g+\mathrm{Hess}\, f-\dfrac{1}{m-n}df\otimes df & m\in(-\infty,n)\cup(n,+\infty),\\ \mathrm{Ric}_g+\mathrm{Hess}\, f & m=+\infty \end{cases}$$

で定義する. ここで $\mathrm{Hess}\, f$ は関数 f のヘッシアンを表す. 簡単のため

$$\mathrm{Ric}_f \coloneqq \mathrm{Ric}_g+\mathrm{Hess}\, f$$

とおき, **Bakry–Émery リッチ曲率** という. $f:M\to\mathbb{R}$ を **ポテンシャル関数** という. $m<+\infty$ のとき, 滑らかな正値関数 $v:M\to\mathbb{R}^+$ を

$$v\coloneqq\exp\left(\frac{f}{n-m}\right)$$

で定義する. ここで $\mathbb{R}^+\coloneqq\{x\in\mathbb{R}:x>0\}$ は正の実数全体の集合を表す. より一般的に Riemann 多様体 (M,g) 上で定義された滑らかなベクトル場 $V\in\mathfrak{X}(M)$ と定数 $m\in(-\infty,+\infty]$ に対して **m-変形 Bakry–Émery リッチ曲率** [11] を

$$\mathrm{Ric}_V^m \coloneqq \begin{cases} \mathrm{Ric}_g & m=n,\\ \mathrm{Ric}_g+\dfrac{1}{2}\mathcal{L}_V g-\dfrac{1}{m-n}V^*\otimes V^* & m\in(-\infty,n)\cup(n,+\infty),\\ \mathrm{Ric}_g+\dfrac{1}{2}\mathcal{L}_V g & m=+\infty \end{cases}$$

で定義する. ここで $\mathcal{L}_V$ はベクトル場 V による Lie 微分を表し, V^* はベクトル場 V の Riemann 計量 g による双対を表す. 簡単のため

$$\mathrm{Ric}_V\coloneqq\mathrm{Ric}_g+\frac{1}{2}\mathcal{L}_V g$$

とおき, **変形 Bakry–Émery リッチ曲率** という. $V\in\mathfrak{X}(M)$ を **ポテンシャルベクトル場** という. m-Bakry–Émery リッチ曲率や m-変形 Bakry–Émery リッチ曲率はリッチ曲率を用いて書き表される多くの重要な定理をポテンシャル関数とポテンシャルベクトル場の適切な仮定の下で自然に拡張することが知られており, 多くの数学者が定理 1 やその一般化を m-Bakry–Émery リッチ曲率や m-変形 Bakry–Émery リッチ曲率の場合へ拡張している [7, 10–12, 16–30, 32–36, 38]. そのような拡張のうち, 本稿では主に著者が $m\in(-\infty,1]$ の場合の m-Bakry–Émery リッチ曲率を用いて得た結果を述べる. 定理 2 は $m\in(-\infty,1]$ のとき m-Bakry–Émery リッチ曲率を用いて次のように拡張される.

定理 12 ([26]). *Let $m \in (-\infty, 1]$. Suppose that the potential function is bounded from above. Set $v := \exp(\frac{f}{n-m})$. If there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma\colon [0, +\infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\int_0^{+\infty} v^2(\gamma(t))\,\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt = +\infty,$$

then (M, g) is compact.

定理 6 と定理 7 は $m \in (-\infty, 1]$ のとき m-Bakry–Émery リッチ曲率を用いて次のように拡張される．同時にこれらは定理 1 の m-Bakry–Émery リッチ曲率への拡張も与える．

定理 13 ([26]). *Let $m \in (-\infty, 1]$. Suppose that the potential function is bounded from above. Set $v := \exp(\frac{f}{n-m})$. For any positive constants $\lambda > 0$ and $\varepsilon > 0$, there exists an explicit positive constant $\delta = \delta(n, m, v_{\max}, \lambda, \varepsilon) > 0$ such that if there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma\colon [0, +\infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\int_0^{+\infty} \left((n-m)\lambda - v^2(\gamma(t))\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\right)_+ dt < \delta(n, m, v_{\max}, \lambda, \varepsilon),$$

then (M, g) is compact and the diameter from p satisfies $\mathrm{diam}_p(M, g) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} v_{\max} + \varepsilon$.

定理 14 ([29]). *Let $m \in (-\infty, 1]$. Suppose that the potential function is bounded from above. If there exist some constants $\lambda > 0$ and $\Lambda \geqslant 0$ such that for any point $p \in M$ and each minimal geodesic γ emanating from p, the m-Bakry–Émery Ricci curvature satisfies*

$$\int_\gamma \left((n-m)\lambda - v^2(\gamma(t))\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\right)_+ dt \leqslant \Lambda,$$

then (M, g) is compact. Moreover, the diameter of (M, g) satisfies

$$\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} v_{\max} + \frac{\Lambda}{(n-m)\lambda}.$$

定理 5 は $m \in (-\infty, 1]$ のとき m-Bakry–Émery リッチ曲率を用いて次のように拡張される．この系として定理 4 の m-Bakry–Émery リッチ曲率への拡張も得られる．

定理 15 ([28]). *Let $m \in (-\infty, 1]$. Suppose that the potential function is bounded from above. Suppose also that the m-Bakry–Émery Ricci curvature satisfies $\mathrm{Ric}_f^m \geqslant -B^2 g$ for some non-negative constant $B \geqslant 0$. If there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma : [0, +\infty) \to M$ emanating from p satisfies either the condition*

$$\begin{aligned}\int_a^b t^\lambda v^2(\gamma(t))\,\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))dt > B\sqrt{n-m}\,v_{\max}^2 \left\{ b^\lambda + a^\lambda \frac{\exp\left(\frac{2Ba}{\sqrt{n-m}}\right)+1}{\exp\left(\frac{2Ba}{\sqrt{n-m}}\right)-1} \right\} \\ + (n-m)v_{\max}^2 \frac{\lambda^2}{4(\lambda-1)}(b^{\lambda-1} - a^{\lambda-1})\end{aligned} \tag{2.1}$$

or the condition

$$\int_a^b tv^2(\gamma(t))\,\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))dt > B\sqrt{n-m}v_{\max}^2\left\{b+a\frac{\exp\left(\frac{2Ba}{\sqrt{n-m}}\right)+1}{\exp\left(\frac{2Ba}{\sqrt{n-m}}\right)-1}\right\} + \frac{n-m}{4}v_{\max}^2\ln\frac{b}{a} \tag{2.2}$$

for some constants a, b, and λ such that $0<a<b$ and $\lambda\neq 1$, then (M,g) is compact.

注意. In the case of $B=0$, (2.1) and (2.2) must be intended in a limit sense. Namely, the integral conditions (2.1) and (2.2) must be replaced, respectively, by

$$\int_a^b t^\lambda v^2(\gamma(t))\,\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))dt > (n-m)v_{\max}^2a^{\lambda-1}+(n-m)v_{\max}^2\frac{\lambda^2}{4(\lambda-1)}(b^{\lambda-1}-a^{\lambda-1})$$

and

$$\int_a^b tv^2(\gamma(t))\,\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))dt > (n-m)v_{\max}^2\left(1+\frac{1}{4}\ln\frac{b}{a}\right).$$

定理 8 は $m\in(-\infty,1]$ に対する m-Bakry–Émery リッチ定理がある点で負になることを許容した上で次のように拡張される.

定理 16 ([28])**.** *Let $m\in(-\infty,1]$. Suppose that the potential function is bounded from above. If there exist some point $p\in M$, non-negative constant $B\geqslant 0$, and positive constant $t_0>0$ for which every geodesic $\gamma:[0,+\infty)\to M$ emanating from p satisfies either the condition*

$$\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))\geqslant -\frac{B^2}{t^2}\quad \textit{for all}\quad t>0$$

with

$$\limsup_{s\to+\infty}\left\{\int_{t_0}^s\sqrt{v^2(\gamma(t))\left(\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))+\frac{B^2}{t^2}\right)}dt-\sqrt{\frac{n-m}{4}+B^2}v_{\max}\ln s\right\}=+\infty,$$

then (M,g) is compact.

定理 10 は $m\in(-\infty,1]$ のとき m-Bakry–Émery リッチ曲率を用いて次のように拡張される. この系として定理 9 の m-Bakry–Émery リッチ曲率への拡張も得られる.

定理 17 ([30])**.** *Let $m\in(-\infty,1]$. Suppose that the potential function is bounded from above and put $v:=\exp(\frac{f}{n-m})$. Suppose also that there exist some point $p\in M$, natural number $k\geqslant 1$, and positive constants $r_0>e_{k-1}$ and $\nu>0$ such that the m-Bakry–Émery Ricci curvature satisfies*

$$v^2(x)\,\mathrm{Ric}_f^m(x)\geqslant(n-m)v_{\max}^2\,\mathcal{A}_{k,\nu}(r(x))g(x)$$

for all $x \in M$ *satisfying* $r(x) \geqslant r_0$*, where* $r(x)$ *denotes the distance between* p *and* x*. Then* (M, g) *is compact. Moreover, the diameter of* (M, g) *from* p *has the upper bound*

$$\operatorname{diam}_p(M, g) \leqslant e_{k-1}\left(L_{k-1}(r_0)\exp\left(\frac{\pi}{\nu}\right)\right).$$

定理 11 はポテンシャル関数が有界であるという仮定の下で Bakry–Émery リッチ曲率へ次のように拡張される.

定理 18 ([27])**.** *Suppose that there exists some non-negative constant* $0 \leqslant H < +\infty$ *such that the potential function satisfies* $|f| \leqslant H$*. If there exist some point* $p \in M$ *and positive constants* $r_0 > 0$ *and* $k \geqslant 2$ *such that the Bakry–Émery Ricci curvature satisfies*

$$\operatorname{Ric}_f(x) \geqslant \frac{C(n, H, r_0, k)}{(r_0 + r(x))^k} g(x)$$

for all $x \in M$*, where* $r(x)$ *denotes the distance between* p *and* x*, then* (M, g) *is compact. Here the constant* $C(n, H, r_0, k)$ *may be taken as*

$$C(n, H, r_0, k) = \begin{cases} (n + 4H - 1)\frac{(k-1)^k}{(k-2)^{k-2}} r_0^{k-2} & k > 2, \\ (n + 4H - 1)\left(1 + \frac{r_0}{\varepsilon}\right) \quad \textit{for any} \quad \varepsilon > 0 & k = 2. \end{cases}$$

紙面の都合上, 指摘すべき多くの文献を割愛した. m-Bakry–Émery リッチ曲率と変形 m-Bakry–Émery リッチ曲率を用いた定理 1 とその一般化の拡張については, 解説論文 [18, 22] も参考にして戴きたい.

参考文献

[1] W. Ambrose, *A theorem of Myers*, Duke Math. J. **24** (1957), 345–348.

[2] A. Avez, *Riemannian manifolds with non-negative Ricci curvature*, Duke Math. J. **39** (1972), 55–64.

[3] D. Bakry and M. Émery, *Diffusions hypercontractives*, in: Séminaire de Probabilités, XIX, 1983/84, in: Lecture Notes in Math., vol. 1123, Springer, Berlin, 1985, pp. 177–206.

[4] V. Boju and L. Funar, *A note on the Bonnet-Myers theorem*, Z. Anal. Anwendungen **15** (1996), 275–278.

[5] E. Calabi, *On Ricci curvature and geodesics*, Duke Math. J. **34** (1967), 667–676.

[6] J. Cheeger, M. Gromov, and M. Taylor, *Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), 15–53.

[7] M. Fernández-López and E. García-Río, *A remark on compact Ricci solitons*, Math. Ann. **340** (2008), 893–896.

[8] G.J. Galloway, *Compactness criteria for Riemannian manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **84** (1982), 106–110.

[9] L.Z. Gao and S.-T. Yau, *The existence of negatively Ricci curved metrics on three-manifolds*, Invent. Math. **85** (1986), 637–652.

[10] K. Kuwae and X.-D. Li, *New Laplacian comparison theorem and its applications to diffusion processes on Riemannian manifolds*, Preprint (2020), to appear in Bull. London Math. Soc., available at arXiv:2001.00444v1.

[11] M. Limoncu, *Modifications of the Ricci tensor and applications*, Arch. Math. (Basel) **95** (2010), 191–199.
[12] _____, *The Bakry–Emery Ricci tensor and its applications to some compactness theorems*, Math. Z. **271** (2012), 715–722.
[13] J. Lohkamp, *Metrics of negative Ricci curvature*, Ann. of Math. (2) **140** (1994), 655–683.
[14] P. Mastrolia, M. Rimoldi, and G. Veronelli, *Myers-type theorems and some related oscillation results*, J. Geom. Anal. **22** (2012), 763–779.
[15] S.B. Myers, *Riemannian manifolds with positive mean curvature*, Duke Math. J. **8** (1941), 401–404.
[16] Z. Qian, *Estimates for weighted volumes and applications*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (1997), 235–242.
[17] Y. Soylu, *A Myers-type compactness theorem by the use of Bakry–Emery Ricci tensor*, Diff. Geom. Appl. **54** (2017), 245–250.
[18] H. Tadano, *Some Myers type theorems and Hitchin–Thorpe inequalities for shrinking Ricci solitons*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **73** (2015), 183–199.
[19] _____, *Remark on a diameter bound for complete Riemannian manifolds with positive Bakry–Émery Ricci curvature*, Diff. Geom. Appl. **44** (2016), 136–143.
[20] _____, *An upper diameter bound for compact Ricci solitons with application to the Hitchin–Thorpe inequality*, J. Math. Phys. **58** (2017), 023503.
[21] _____, *Some Ambrose- and Galloway-type theorems via Bakry–Émery and modified Ricci curvatures*, Pacific J. Math. **294** (2018), 213–231.
[22] _____, *Some Myers type theorems and Hitchin–Thorpe inequalities for shrinking Ricci solitons, II*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **77** (2019), 83–111.
[23] _____, *Some Cheeger–Gromov–Taylor type compactness theorems via m-Bakry–Émery and m-modified Ricci curvatures*, Nonlinear Anal. **199** (2020), 112045.
[24] _____, *Some compactness theorems via m-Bakry–Émery and m-modified Ricci curvatures with negative m*, Diff. Geom. Appl. **75** (2021), 101720.
[25] _____, *Boju–Funar type theorems via m-Bakry–Émery and m-modified Ricci curvatures*, Internat. J. Math. **32** (2021), 2150051.
[26] _____, *m-Bakry–Émery Ricci curvatures, Riccati inequalities, and bounded diameters*, Diff. Geom. Appl. **80** (2022), 101832.
[27] _____, *Extensions of the Bonnet–Myers theorem via m-Bakry–Émery Ricci and m-modified Ricci curvatures*, Preprint.
[28] _____, *Ambrose and Calabi type theorems via m-Bakry–Émery and m-modified Bakry–Émery Ricci curvatures*, Preprint.
[29] _____, *Radial m-Bakry–Émery Ricci curvatures, Riccati inequalities, and Myers-type theorems*, Preprint.
[30] _____, *Boju–Funar type theorems via m-Bakry–Émery Ricci curvature with* $m \leqslant 1$, Preprint.
[31] J. Wan, *An extension of Bonnet–Myers theorem*, Math. Z **291** (2019), 195–197.
[32] L.F. Wang, *A Myers theorem via m-Bakry-Émery curvature*, Kodai Math. J. **37** (2014), 187–195.
[33] G. Wei and W. Wylie, *Comparison geometry for the Bakry-Emery Ricci tensor*, J. Differential Geom. **83** (2009), 377–405.
[34] J.-Y. Wu, *Myers' type theorem with the Bakry–Émery Ricci tensor*, Ann. Global Anal. Geom. **54** (2018), 541–549.
[35] B.-Y. Wu, *A note on the generalized Myers theorem for Finsler manifolds*, Bull. Korean Math. Soc. **50** (2013), 833–837.
[36] W. Wylie, *Sectional curvature for Riemannian manifolds with density*, Geom. Dedicata **178** (2015), 151–169.
[37] J.-G. Yun, *A note on the generalized Myers theorem*, Bull. Korean Math. Soc. **46** (2009), 61–66.
[38] S. Zhang, *A theorem of Ambrose for Bakry–Emery Ricci tensor*, Ann. Global Anal. Geom. **45** (2014), 233–238.

A Giambelli formula for the quantum K-theory of Grassmanianns

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学・応用数理専攻
中山勇祐 (Yusuke Nakayama)
joint work with Dang Hiep, Takeshi Ikeda, Tomoo Matsumura and Shogo Sugimoto

1 Review on Schubert calculus for Grassmannian

Schubert 計算とは代数幾何学の 1 分野であり幾何学的な問題の解の数を数え上げることである. 特に, 構造定数を決定することが重要な問題である. ここで構造定数とは, Grassmann 多様体のコホモロジー環において Schubert 多様体は Schubert 類と呼ばれるコホモロジー類を定め, Schubert 類どうしの積を考えた時に Schubert 類達の線形和で書けそれらに現れる係数のことを言う. 古典的な場合で言えば, Pieri の規則と呼ばれるある特殊な Young 図形で添字付けられる Schubert 類との積を組み合わせ論を用いた方法で求めることが知られている. また, Grassmann 多様体のコホモロジー環に対してある不変式環から全射があってその Schubert 類に対して Schur 多項式が対応することが知られている. つまり, 構造定数を求める問題は多項式の展開に帰着される. この章ではこのような特殊多項式に焦点を当てた Grassmann 多様体の Schubert 計算について述べる.

1.1 Cohomology

以下この報告集では X を Grassmann 多様体 $Gr(m,\mathbb{C}^n)$ とする. $\mathcal{Y}_m(n)$ を行が m 以下で列が $n-m$ 以下の Young 図形の集合とする. つまり集合としては以下で与えられる:

$$\mathcal{Y}_m(n)=\{\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)\mid n-m\geq\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_m\geq 0,\ \lambda_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

さらに $\mathcal{Y}_m(\infty)$ を $\bigcup_{i\geq m}\mathcal{Y}_m(i)$ で定義する. $\mathbb{C}^n$ の旗 $F^{\cdot}$ とは次のような線形部分空間の減少列のことを言う:

$$\mathbb{C}^n=F^0\supset F^1\supset\cdots\supset F^n=\{0\},\quad \dim F^i=n-i.$$

任意の $\lambda\in\mathcal{Y}_m(n)$ に対して, λ で添字付けられる *Schubert* 多様体 Ω_λ を

$$\Omega_\lambda:=\{V\in X\mid \dim\left(F^{\lambda_i+m-i}\cap V\right)\geq i\ (1\leq i\leq m)\}$$

で定義する. この時 Ω_λ は X の閉部分多様体であって, X での余次元は $|\lambda|=\sum_i\lambda_i$ に等しい. コホモロジー類 $\sigma_\lambda\in H^{2|\lambda|}(X,\mathbb{Z})$ を基本ホモロジー類 $[\Omega_\lambda]\in H_{2m(n-m)-2|\lambda|}(X,\mathbb{Z})$ の Poincaré 双対とす

る. これを *Schubert* 類と呼ぶ. これらは $H^*(X,\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}$-basis である. 2 つの Schubert 類の積を以下で表す:

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}_m(n)} c^\nu_{\lambda,\mu} \sigma_\nu$$

ここで定数 $c^\nu_{\lambda,\mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は $|\nu| = |\lambda| + |\mu|$ の場合を除き 0 である. この $c^\nu_{\lambda,\mu}$ を構造定数と呼ぶ. この数は 3 つの Schubert 多様体の交点数に等しいことが知られている. 先にも述べた通り, この構造定数を求めることが Schubert 計算において重要な問題である. それを求める手段として以下のような特殊多項式を用いた方法がある. Λ_m を対称多項式環 $\mathbb{Z}[z_1, \cdots, z_m]^{\mathfrak{S}_m}$ とする. $\lambda \in \mathcal{Y}_m(\infty)$ の Schur 多項式を

$$s_\lambda := \frac{\det(z_i^{\lambda_j + m - j})_{m \times m}}{\prod_{1 \leq i < j \leq m}(z_i - z_j)}$$

で定義する. この時, 古典的に次の事が知られている.

Theorem 1.1 環の全射

$$\Lambda_m \to H^*(X, \mathbb{Z})$$

が存在して, 元の対応は以下で与えられる:

$$s_\lambda \mapsto \begin{cases} \sigma_\lambda & \text{if } \lambda \in \mathcal{Y}_m(n) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

つまり, 幾何学的な構造定数は Schur 多項式という特殊多項式の代数的な計算で求めることができる. さらに, s_λ の構造定数はよく知られている (Littlewood-Richardson 規則).

1.2 Quantum cohomology

次に量子コホモロジー環 $QH^*(X,\mathbb{Z})$ について紹介する. X の量子コホモロジー環は加群として $H^*(X,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}[q]$ で与えられる $\mathbb{Z}[q]$-代数であって, 代数構造は

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}_m(n),\ d \geq 0} c^{\nu,d}_{\lambda,\mu} q^d \sigma_\nu$$

で定義される. ここで $c^{\nu,d}_{\lambda,\mu}$ は 3 つの Schubert 多様体 Ω_λ, Ω_μ と $\Omega_{\check{\nu}}$ ($\check{\nu} = (n-m-\nu_m, \cdots, n-m-\nu_1)$, $c^{\nu,0}_{\lambda,\mu} = c^\nu_{\lambda,\mu}$) を通る X 上の次数 d の有理曲線の数である. つまり, 量子コホモロジー環における構造定数は種数 0, 次数 d, 3 点の Gromov-Witten 不変量で与えられる. この場合も古典的なコホモロジー環の時と同様に Schubert 類に対応する多項式が知られている. (つまり, Gromov-Witten 不変量も多項式の計算で求めることができる.)

Theorem 1.2 (Bertram, Fulton and Ciocan-Fontanine [3]) 量子コホモロジー環 $QH^*(X)$ は $\mathbb{Z}[q]$-代数として

$$\Lambda_m[q]/J_{m,n}, \quad J_{m,n} = \langle h_{n-m+1}, \cdots, h_{n-1}, h_n + (-1)^m q \rangle, \quad \deg q = n$$

と同型である. ここで $h_i := \sum_{1\leq j_1\leq\cdots\leq j_i\leq m} z_{j_1}\cdots z_{j_i}$ である. 任意の $\lambda \in \mathcal{Y}_m(n)$ に対して, Schur 多項式 s_λ は $QH^*(X)$ 上の Schubert 類 σ_λ に対応する.

ここで古典的なコホモロジー環と量子コホモロジー環の構造定数について比較してみる.

Example 1.3 $X = Gr(2,4)$ とする. $\sigma_1\cdot\sigma_1$ に注目してみると, 出てくる Schubert 類は共に同じで

	$H^*(X)$	$QH^*(X)$
$\sigma_1\cdot\sigma_1$	$\sigma_{1,1}+\sigma_2$	$\sigma_{1,1}+\sigma_2$
$\sigma_{2,1}\cdot\sigma_1$	$\sigma_{2,2}$	$\sigma_{2,2}+q$
$\sigma_2\cdot\sigma_{1^2}$	0	q

構造定数も同じである. しかし, $\sigma_{2,1}\cdot\sigma_1$ に注目してみると, $\sigma_{2,2}$ は共通しているが量子コホモロジー環の方には q という項が存在する. これが両者の環の違いである. この表からもわかるように量子コホモロジー環における q を 0 に特殊化することで古典的なコホモロジー環の計算に一致する. ただし, 左辺と右辺のそれぞれの項の次数（添字付けられる Young 図形の箱の個数, ただし今の場合 $\deg q = 4$）は両者の環において等しいことに注意する.

1.3 K-theory

この節では Grothendieck 環 $K(X)$ について考える. 古典的なコホモロジー環との違いは $H^*(X)$ は次数付き環であることに対して, $K(X)$ の方はそうではない. これについて定義を与えた後に具体例で見る. $\mathrm{Coh}(X)$ を X 上の連接層のなす圏とし, $K(X)$ を Grothendieck 群 $K_0(\mathrm{Coh}(X))$ とする. この時, $K(X)$ は以下で積構造を定め環となる:

$$[\mathcal{F}]\cdot[\mathcal{G}] = [\mathcal{F}\otimes^L_{\mathcal{O}_X}\mathcal{G}]$$

この環を X の *Grothendieck* 環 と呼ぶ. $K(X)$ は Schubert 構造層 $\mathcal{O}_\lambda := [\mathcal{O}_{\Omega_\lambda}]$ からなる基底を持つ. この $\mathcal{O}_\lambda$ を $K(X)$ 上の *Schubert* 類 と呼ぶ. 二つの Schubert 類の積を以下で表す:

$$\mathcal{O}_\lambda\cdot\mathcal{O}_\mu = \sum_\nu (-1)^{|\nu|-|\lambda|-|\mu|} c^\nu_{\lambda,\mu}\mathcal{O}_\nu.$$

ここで定数 $c^\nu_{\lambda,\mu}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を 構造定数 と呼ぶ.

Example 1.4 $X = Gr(2,4)$ とする. $\sigma_1\cdot\sigma_1$ と $\mathcal{O}_1\cdot\mathcal{O}_1$ を比較する. $\sigma_1\cdot\sigma_1$ の方のそれぞれの項の次数は 2 である. $\mathcal{O}_1\cdot\mathcal{O}_1$ には, $\mathcal{O}_{1,1}$ と $\mathcal{O}_2$ の次数は 2 であるが次数が 3 である $\mathcal{O}_{2,1}$ という項もある. つまり, $H^*(X)$ 上の Schubert 類の積は次数を保つのに対して, $K(X)$ の Schubert 類の積は次数を保たない. $K(X)$ 上の計算において次数を保たない項を 0 にすれば $H^*(X)$ 上の計算に一致する.

	$H^*(X)$		$K(X)$
$\sigma_1 \cdot \sigma_1$	$\sigma_{1,1} + \sigma_2$	$\mathcal{O}_1 \cdot \mathcal{O}_1$	$\mathcal{O}_{1,1} + \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_{2,1}$
$\sigma_{2,1} \cdot \sigma_1$	$\sigma_{2,2}$	$\mathcal{O}_{2,1} \cdot \mathcal{O}_1$	$\mathcal{O}_{2,2}$
$\sigma_2 \cdot \sigma_{1^2}$	0	$\mathcal{O}_2 \cdot \mathcal{O}_{1^2}$	0

$K(X)$ においても $H^*(X)$ の時と同様に Schubert 類に対応する特殊多項式が知られている. β を形式的パラメーターとする. $\lambda \in \mathcal{Y}_m(\infty)$ の *β-Grothendieck* 多項式 を以下で定義する:

$$G^{\beta}_{\lambda}(z_1, \cdots, z_m) := \frac{\det(z_i^{\lambda_j+m-j}(1+\beta z_i)^{j-1})_{1\leq i,j\leq m}}{\prod_{1\leq i<j\leq m}(z_i - z_j)}$$

これは $\Lambda_m[\beta]$ の元である. β を -1 に特殊化した $G_\lambda := G^{\beta=-1}_{\lambda} \in \Lambda_m$ $(\lambda \in \mathcal{Y}_m(\infty))$ を Grothendieck 多項式と呼ぶ. これらは Λ_m の $\mathbb{Z}$-basis をなす. $G^{\beta=0}_{\lambda} \in \Lambda_m$ は Schur 多項式 s_λ である.

Theorem 1.5 (Lascoux-Schützenberger [11])

$$G_\lambda \mapsto \begin{cases} \mathcal{O}_\lambda & \text{if } \lambda \in \mathcal{Y}_m(n) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義される次の全射環準同型が存在する:

$$\Lambda_m \to K(X).$$

また, "set-valued tableaux" を用いて, $\mathcal{O}_\lambda$ の構造定数を計算することができる [1].

1.4 Quantum K-theory

古典的なコホモロジー環の Gromov-Witten 不変量を用いた一般化として量子コホモロジー環を考えたが, K-理論に関しても Gromov-Witten 理論を用いた一般化が Givental と Lee によって考えられた. X の量子 K-理論的環 $QK(X)$ とは加群として $K(X) \otimes \mathbb{Z}[q]$ で与えられる $\mathbb{Z}[q]$-代数であって, 代数構造は

$$\mathcal{O}_\lambda \cdot \mathcal{O}_\mu = \sum_{\nu \in \mathcal{Y}_m(n),\ d\geq 0} N^{\nu,d}_{\lambda,\mu} q^d \mathcal{O}_\nu$$

で定義する. ここで $N^{\nu,d}_{\lambda,\mu}$ は種数 0 の有利曲線から X への安定写像の Kontsevich モジュライ空間を用いて定義される. この時, これで定義した積は結合的であることが示されている [5]. 例えば, ある特別な構造定数 $N^{\nu,d}_{\lambda,i}$ を求める手段として Buch と MIhalcea によって Pieri の規則が知られている [4]. 量子コホモロジー環や K-理論との関係を次の章で述べる.

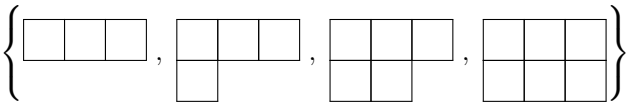
2 Presentation of the quantum K-theory of Grassmannian

この章では我々が得た主結果とその証明のアイデアについて述べる. また, 具体例を通じて量子 K-理論が量子コホモロジー環や K-理論とどのような関係にあるかを見る.

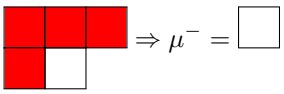
2.1 Main result

各 $\mu \in \mathcal{Y}_m(\infty)$ に対して, μ^- を μ から 1 行目と 1 列目を取り除いたパーティションとする. $\mathcal{H}_{m,n}$ を $\{\mu \in \mathcal{Y}_m(\infty) \mid \mu_1 = n - m + 1\}$ とする.

Example 2.1 $X = Gr(2,4)$ とする. このとき

$\mathcal{H}_{m,n} =$ 

である. また, 例えば $\mu = (3,2)$ を選べば以下の赤色の箱を取り除いたパーティションが μ^- である:

$\mu =$  $\Rightarrow \mu^- =$

コホモロジー環や量子コホモロジー環, Grothendiec 環のそれぞれの環における Schubert 類に対して特殊多項式が対応してきたが, 我々の主結果は量子 K-理論的環の Schubert 類に対応する特殊多項式を決定した.

Theorem 2.2 (Dang-Ikeda-Matsumura-N-Sugimoto) $I_{m,n}$ を $\Lambda_m[q,\beta]$ のイデアルで以下の関係で生成されているとする:

$$G_\mu(z_1, \cdots, z_m) - q \cdot (-\beta)^{m-l(\mu)} G_{\mu^-}(z_1, \cdots, z_m) \ (\mu \in \mathcal{H}_{m,n})$$

ここで $l(\mu)$ は μ の長さである. このとき, $G_\lambda \mod I_{m,n} \mapsto \mathcal{O}_\lambda$ $(\lambda \in \mathcal{Y}_m(n))$ を対応させる環準同型 $\Lambda_m[q,\beta]/I_{m,n} \to QK(X)$ は $\mathbb{Z}[q]$-代数としての同型である.

Remark 2.3 "Yang-Baxter algebra" を用いて, Gorbounov と Korff は 2018 年に $QK(X)$ におけるプレゼンテーションを構成している [6].

Example 2.4 $X = Gr(2,4)$ とする. イデアルの生成元は $G_3 \equiv -\beta \cdot q$, $G_{3,1} \equiv q$, $G_{3,2} \equiv q \cdot G_1$, $G_{3,3} \equiv q \cdot G_2$ である. Lenart による Grothendieck 多項式の Pieri 規則 [10] を用いる.

- $G_1 \cdot G_1 = G_{1,1} + G_2 + \beta G_{2,1}$
- $G_2 \cdot G_1 = G_{2,1} + G_3 + \beta \cdot G_{3,1} \equiv G_{2,1} - \beta \cdot q + \beta \cdot q = G_{2,1} \pmod{I_{m,n}}$
- $G_{2,1} \cdot G_1 = G_{2,2} + G_{3,1} + \beta \cdot G_{3,2} \equiv G_{2,2} + q + \beta \cdot q \cdot G_1 \pmod{I_{m,n}}$
- $G_2 \cdot G_{1^2} = G_{3,1} \equiv q \pmod{I_{m,n}}$

例えば, $G_2 \cdot G_1$ では関係を入れることによって剰余環上では $G_{2,1}$ だけになることに注意する.

さて, それぞれの環との関係を見てみよう.

Example 2.5 $X = Gr(2,4)$ とする.

	$H^*(X)$	$QH^*(X)$
$\sigma_1 \cdot \sigma_1$	$\sigma_{1,1} + \sigma_2$	$\sigma_{1,1} + \sigma_2$
$\sigma_{2,1} \cdot \sigma_1$	$\sigma_{2,2}$	$\sigma_{2,2} + q$
$\sigma_2 \cdot \sigma_{1^2}$	0	q

	$K(X)$	$QK(X)$
$\mathcal{O}_1 \cdot \mathcal{O}_1$	$\mathcal{O}_{1,1} + \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_{2,1}$	$\mathcal{O}_{1,1} + \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_{2,1}$
$\mathcal{O}_{2,1} \cdot \mathcal{O}_1$	$\mathcal{O}_{2,2}$	$\mathcal{O}_{2,2} + q - q \cdot \mathcal{O}_1$
$\mathcal{O}_2 \cdot \mathcal{O}_{1^2}$	0	q

$q = 0$ にすれば $K(X)$ 上の計算に一致する. 例えば $\mathcal{O}_{2,1} \cdot \mathcal{O}_1$ に注目して $QK(X)$ の計算を見ると $\mathcal{O}_{2,2}$ と q の次数は 4 であるのに対して最後の項である $q \cdot \mathcal{O}_1$ の次数は 5 である. やはり $QK(X)$ でも $K(X)$ と同様に次数を保たない. $QK(X)$ 上の計算において次数を保たない項を 0 にすれば $QH^*(X)$ 上の計算に一致する.

このように $QK(X)$ 上での計算がわかれば, 然るべき特殊化をすることでそれぞれの環の計算をすることができる.

Lenart による Grothendieck 多項式の Pieri 規則 [10] と主結果を用いて次の表が得られる.

Example 2.6 $X = Gr(2,4)$ とする.

- $\mathcal{O}_1 \cdot \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{1,1} + \mathcal{O}_2 - \mathcal{O}_{2,1}$
- $\mathcal{O}_2 \cdot \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{2,1}$
- $\mathcal{O}_{1,1} \cdot \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{2,1}$
- $\mathcal{O}_{2,1} \cdot \mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_{2,2} + q - q \cdot \mathcal{O}_1$
- $\mathcal{O}_{2,2} \cdot \mathcal{O}_1 = q \cdot \mathcal{O}_1$
- $\mathcal{O}_{1,1} \cdot \mathcal{O}_{1,1} = \mathcal{O}_{2,2}$
- $\mathcal{O}_2 \cdot \mathcal{O}_{1,1} = q$
- $\mathcal{O}_{2,1} \cdot \mathcal{O}_{1,1} = q \cdot \mathcal{O}_1$
- $\mathcal{O}_{2,2} \cdot \mathcal{O}_{1,1} = q \cdot \mathcal{O}_2$

さて, 主結果の系として $QK(X)$ 上の任意の Schubert 類の行列式の各成分が 1 列である Giambelli 公式を得た. これは Grothendieck 多項式の行列式の各成分が 1 列である Giambelli 公式を証明し, 主結果を用いることで得られる.

Corollary 2.7 (Dang-Ikeda-Matsumura-N-Sugimoto) $QK(X)$ 上において, 次の Giambelli 公式が成り立つ: 任意の $\lambda \in \mathcal{Y}_m(n)$ に対して

$$\mathcal{O}_\lambda = \det\left(\sum_{s\geq 0}\binom{i-j}{s}(-1)^s \mathcal{O}_{(1^{\lambda'_i+j-i+s})}\right)_{1\leq i,j\leq r'}.$$

ここで λ' は λ の共役, $r' = \lambda_1$ であり, $1^i = (1,\cdots,1,0,\cdots,0)$ は $|1^i| = i$ をみたすものである.

Example 2.8 $m = 3, n = 5, \lambda = (2,2) \in \mathcal{Y}_3(5)$ とする. そのとき, $QK(X)$ 上で次の等式が成立する.

$$\mathcal{O}_\lambda = \begin{vmatrix} \mathcal{O}_{1^2} & \mathcal{O}_{1^3} \\ \mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_{1^2} & \mathcal{O}_{1^2} \end{vmatrix} = \mathcal{O}_{1^2}\cdot\mathcal{O}_{1^2} - \mathcal{O}_{1^3}\cdot(\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_{1^2}).$$

2.2 Outline of the proof

この節では主結果の証明のアイデアと概略について述べる. 次の結果が証明の鍵である.

Lemma 2.9 R を結合的な $\mathbb{Z}[q]$-代数で次の性質を満たすとする:

(i) R は加法的な $\mathbb{Z}[q]$-basis $\{\mathcal{G}_\lambda\}_{\lambda\in\mathcal{Y}_m(n)}$ を持つ.

(ii) R は "双対 Pieri 規則" をみたす. すなわち,

$$\mathcal{G}_\lambda \cdot \mathcal{G}_{1^i} = \sum_{\nu\in\mathcal{Y}_m(n),\ d\geq 0} N^{\nu,d}_{\lambda,1^i} q^d \mathcal{G}_\nu. \quad (\lambda\in\mathcal{Y}_m(n), 1\geq i\geq m).$$

このとき $\mathbb{Z}[q]$-線形写像 $\mathcal{G}_\lambda \mapsto \mathcal{O}_\lambda$ $(\lambda\in\mathcal{Y}_m(n))$ は環の同型 $R \cong QK(X)$ を与える.

$R := \Lambda_m[\beta,q]/I_{m,n}$ とする. 以下のことを証明する. G^β_λ $(\lambda\in\mathcal{Y}_m(n))$ の像が

1. $\mathbb{Z}[q]$ 上線形独立である.
   (アイデアは $QH^*(X)$ に落とし込むことである [Bertram, Fulton and Ciocan-Fontanine] [3].)
2. 双対 Pieri 規則をみたす. つまり

$$G_\lambda \cdot G_{1^i} = \sum_{\nu\in\mathcal{Y}_m(n),\ d\geq 0} N^{\nu,d}_{\lambda,1^i} q^d G_\nu \mod I_{m,n}.$$

   (Lenart による Grothendieck 多項式 $\{G_\lambda\}$ の双対 Pieri 規則 [10] を使い, Buch と Mihalcea による $QK(X)$ 上の双対 Pieri 規則 [4] と一致することを証明する.)
3. R を $\mathbb{Z}[q]$-加群として生成する. (2 を使う.)

3 Ongoing projects and related topics

最後に現在行なっている研究の内容を紹介する. T を $GL_n(\mathbb{C})$ の対角行列からなる極大トーラスとする. このとき, T-同変 Grothendieck 環 $K_T(X)$ を考えたのと同様に T-同変量子 K 環 $QK_T(X)$ を考えることができる.

Ongoing project 3.1 (Dang-Ikeda-Matsumura-N-Sugimoto) $QK(X)$ と同様に $QK_T(X)$ のプレゼンテーションを構成しようとしている. さらに, 環の同型を導くだけでなく構造定数を決定するアルゴリズムを見つけようとしている.

Remark 3.2 Gorbounov と Korff は 2018 年に $QK_T(X)$ のプレゼンテーションの予想をして, 同年に Buch と Chaput と Mihalcea と Perrin によってその予想が正しいことが証明された [2].

ここまでは Grassmann 多様体の場合のみを考えてきたが, X がラグランジアン Grassmann 多様体や極大直交 Grassmann 多様体について考える.

Ongoing project 3.3 $X = LG(n)$ または $OG(n+1, 2n+2)$ の場合を考える. (すなわち, type C もしくは type D.) このとき, $QK_T(X)$ のプレゼンテーションを構成しようとしていて, Schubert 類に対応する特殊多項式を見つけようとしている.

References

[1] A. Buch, A Littlewood-Richardson rule for the K-theory of Grassmannians, Acta Math., 189 (2002), no. 1, pp.37–78

[2] A. Buch, P.-E. Chaput, L. Mihalcea, and N. Perrin, A Chevalley formula for the equivariant quantum K-theory of cominuscule varieties. Algebraic Geom., 5 (2018), 568–595

[3] A. Bertram, I. Cican-Fontanine, and W. Fulton, Quantum multiplication of Schur Polynomials. J. Algebra, 219 (1999), 728–746.

[4] A. Buch, and L. Mihalcea, Quantum K-theory of Grassmannians. Duke Math. J., 156, 3 (2011), 501–538

[5] A. Givental, On the WDVV equation in quantum K-theory, Michigan Math. J., 48 (2000), 295–304,

[6] V. Gorbounov and C. Korff, Quantum integrability and generalised quantum Schubert calculus, Adv. Math., 313 (2017), 282–356.

[7] T. Ikeda, 数え上げ幾何学講義, 東京大学出版会

[8] T. Ikeda, L. Mihalcea and H. Naruse, Factorial P- and Q-Schur functions represent equivalent quantum Schubert classes, Osaka J. Math., 53 (2016), 591–619.

[9] T. Ikeda and H. Naruse, K-theoretic analogues of factorial Schur P- and Q-functions. Adv. Math., 243 (2013), 22–66.

[10] C. Lenart, Combinatorial aspects of the K-theory of Grassmannians. Ann. Comb., 4 (2000), no. 1, 67–82.

[11] A. Lascoux and M.P. Schützenberger, Structure de Hopf de l'anneau de cohomologie et de

l'anneau de Grothendieck d'une variété de drapeaux, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 295 (1982), no. 11, 629–633.

A CORRESPONDENCE BETWEEN INVERSE SUBSEMIGROUPS, OPEN WIDE SUBGROUPOIDS AND CARTAN INTERMEDIATE C*-SUBALGEBRAS

慶應義塾大学理工学部 紅村 冬大 (FUYUTA KOMURA)

Abstract. 与えられた作用素環に対し，その部分環を計算することは伝統的な研究である．例えば，群作用から得られる作用素環の部分環は，適当な条件下では作用している群の部分群で計算できる．本稿では逆半群と呼ばれる代数系を導入し，逆半群と C*環のガロア対応とも言うべき結果を紹介する．さらに，応用例として Cuntz 環やグラフ環の部分環の計算について紹介する．本講演は講演者のプレプリント (arXiv:2007.11456) に基づく．

1. Introduction

本稿では筆者の論文 [8] を概説することを目標に，関連する数学的対象の概説を行う．この論文で扱う主な対象は逆半群 (inverse semigroup)，エタール亜群 (étale groupoid) と C*環 (C*-algebra) である．逆半群は完全に代数的な対象であり，エタール亜群は位相と代数の構造を兼ね備えた対象である．C*環論は関数解析の一分野として扱われている．ここで，これらの対象の関係を簡単に説明する．

作用素環論は Hilbert 空間上の作用素がなす代数を扱う分野であり，関数解析の一分野として扱われる．作用素環は一般に無限次元であり位相を考えることが重要となるが，扱う位相の違いによって作用素環は C*環と von Neumann 環に分かれる．本稿で扱う C*環論では，主にノルムから定まる位相を用いる．C*環を定義すること自体は難しくはないが，様々な具体例を構成することは困難であった．今では様々な C*環の構成法が考えられており，その中の一つにエタール亜群を用いるものがある (Renault[14] による)．亜群とは全ての射が可逆となるような小圏である．圏の構造と両立する位相を備えた亜群は位相亜群と呼ばれるが，その中でも特にある離散性を持つ位相亜群をエタール亜群と呼ぶ．エタール亜群が与えられると，その上の convolution algebra を完備化することによって亜群 C*環と呼ばれる C*環が得られる．亜群 C*環の性質をエタール亜群の言語で特徴付ける研究は数多くの研究者によってなされている．亜群 C*環のイデアル構造については [2]，nuclearity などの解析的な性質については [1] が詳しい．[10] では，亜群 C*環のアーベル化をエタール亜群の言語で記述した．

エタール亜群は様々な数学対象から得られる．例えば，離散力学系や多様体上の葉層構造からエタール亜群が得られる．本稿では逆半群から得られるエタール亜群に着目する．逆半群とは一般化逆元を備えた半群であり，群を特殊な場合として含んでいる．群は空間等の大域的な対称性を記述するが，逆半群はフラクタル図形等に見られる “局所的な対称性” (local symmetry) を記述する．逆半群は位相空間に作用していると，その作用からエタール亜群を構成することができる．逆半群は純代数的な対象であるので，逆半群を用いることで C*環やエタール亜群の理論に純代数的なアプローチが得られると期待される．実際に，[6] や [7] ではエタール亜群や亜群 C*環と逆半群の関係について研究が行われている．[9] では，逆半群の商と，universal groupoid と呼ばれるエタール亜群の商，不変集合の関係について述べら

れている．[10] と [9] から，逆半群，エタール亜群，亜群 C*環のそれぞれの商に対応があることが分かる．

本稿のテーマである C*環の部分環について，関係する研究を述べる．群が C*環に作用している時，接合積という C*環を構成することができる．[5] では，接合積の部分環と群の部分群の対応について結果が得られている．また，[3] では，亜群 C*環とエタール亜群の Galois 対応とも言うべき結果が得られている．すなわち，[3] では亜群 C*環の部分環とエタール亜群の部分亜群との間の 1 対 1 対応が示された．一方，エタール亜群は位相を備えた対象であり，そのままでは部分亜群の計算が困難である．そこで，[8] ではエタール亜群の部分亜群と逆半群の部分半群との対応が示された．逆半群は純代数的な対象なので，部分半群の計算が比較的簡単である．[3] の結果と [8] の結果を組み合わせることで，C*環の部分環と逆半群の部分半群との対応が得られる．群よりも逆半群の方が構造が豊かであり，この対応によって多くの部分環を捉えることができると期待される．本稿ではこの結果の紹介を目標に，基本的な定義から説明する．

2. 逆半群とエタール亜群

2.1. **逆半群.** 本節では逆半群に関する基本的な概念を解説する．省略した証明に関しては [11] などの教科書を参照せよ．

S を半群とする．任意の $s \in S$ に対し

$$s^*ss^* = s^*, ss^*s = s$$

となるような $s^* \in S$ が一意に存在する時，S を逆半群と呼ぶ．s^* は s の一般化逆元 (generalized inverse) と呼ばれる．

S の冪等元全体からなる集合を $E(S)$ と書く．つまり

$$E(S) := \{e \in S \mid e^2 = e\}$$

とする．$E(S)$ の元は互いに可換であり，かつ $E(S)$ は S の部分逆半群になることが知られている．

Example 2.1. X を集合とする．$I(X)$ を，X 上の partial bijection 全体からなる集合とする：

$$I(X) := \{f \colon U \to V \mid U, V \subset X,\ f \text{ は全単射 }\}.$$

写像の合成によって $I(X)$ の積が定まる．また，$f \in I(X)$ に対し $f^* := f^{-1}$ とすれば，$I(X)$ は逆半群となる．partial bijection$f \colon U \to V$ に対し，その定義域，値域をそれぞれ $\mathrm{dom}\, f := U, \mathrm{ran} f := V$ と書く．

$E(I(X))$ は X の部分集合上の恒等写像全体からなる集合と一致する．また，X の構造によって $I(X)$ の元に適切な条件を課す．例えば，X が位相空間であるときは，$I(X)$ は X の開集合から開集合への同相写像全体からなる集合と定める．

Wagner-Preston の定理は，任意の逆半群がある $I(X)$ の部分半群として実現されることを主張する．これは群論の Cayley の定理の類似物である．

Example 2.2. $n \in \mathbb{N}$ を 2 以上の自然数とする．Polycyclic monoid P_n を以下の式で定める：

$$P_n := \langle S_1, S_2, \ldots, S_n, 0, 1 \mid S_i^* S_j = \delta_{i,j} 1 \rangle.$$

つまり，P_n は $S_i^* S_j = \delta_{i,j} 1$ を満たす $\{S_i\}_{i=1}^n, 0, 1$ で生成されており，そのような逆半群の中で universal なものの事である．

P_n の元の表し方について説明する．$\Sigma := \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，$\Sigma^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Sigma^n$ を Σ 上の有限語全体からなる集合とする．ここで，Σ^0 は空語からなる 1 元集合である．Σ^* の元 μ は $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l \in \Sigma$ を用いて $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l)$ と表される．この $l \in \mathbb{N}$

を μ の長さと呼び，$|\mu| := l$ と表す．また，$\mu \in \Sigma^*$ に対し $S_\mu := S_{\mu_1} S_{\mu_2} \cdots S_{\mu_l} \in P_n$ と定める．$S_i^* S_j = \delta_{i,j} 1$ という関係式を繰り返し用いることで，

$$P_n = \{S_\mu S_\nu^* \mid \mu, \nu \in \Sigma^*\} \cup \{0\}$$

となることが分かる．

2.2. **エタール亜群.** 本節ではエタール亜群に関する基本的な事項を解説する．端的に言えば，亜群とは全ての射が可逆な小圏である．本稿では以下のような記号を用いる．

Definition 2.3. 亜群 G とは

(1) unit space $G^{(0)} \subset G$,
(2) domain map と range map $d, r \colon G \to G^{(0)}$,
(3) $G^{(2)} := \{(\alpha, \beta) \in G \times G \mid d(\alpha) = r(\alpha)\}$ 上で定義される積

$$G^{(2)} \ni (\alpha, \beta) \mapsto \in \alpha\beta \in G$$

から構成され，これらは以下の条件を満たす：

- 任意の $x \in G^{(0)}$ に対し $d(x) = r(x) = x$ が成り立つ，
- 任意の $(\alpha, \beta) \in G^{(2)}$ に対し $d(\alpha)\beta = \beta$, $\alpha r(\beta) = \alpha$ が成り立つ，
- 任意の $(\alpha, \beta) \in G^{(2)}$ に対し，$d(\alpha\beta) = d(\beta)$, $r(\alpha\beta) = r(\alpha)$ が成り立つ，
- 任意の $(\alpha, \beta), (\beta, \gamma) \in G^{(2)}$ に対し，$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ が成り立つ，
- 任意の $\gamma \in G$ に対し，ある $\gamma' \in G$ が存在して $(\gamma', \gamma), (\gamma, \gamma') \in G^{(2)}$，$d(\gamma) = \gamma'\gamma$ と $r(\gamma) = \gamma\gamma'$ が成り立つ．

上のような γ' は γ から一意に定まるので γ^{-1} と表す．

Example 2.4. 群は unit space が 1 点集合となる亜群と同一視することができる．集合は unit space が全体と一致するような亜群と同一視することができる．

上記の例は亜群の極端な例である．一般には群が集合や空間に作用している時に，変換亜群という亜群を構成することができる．本稿ではさらに一般化して，逆半群の作用から得られる亜群を扱う．

群に対して位相群という概念があるように，亜群に対しても位相亜群を考える．位相亜群 G とは，積と inverse $G \ni \gamma \mapsto \gamma^{-1} \in G$ が連続となる位相を備えた亜群 G のことである．$d(\gamma) = \gamma^{-1}\gamma, r(\gamma) = \gamma\gamma^{-1}$ が任意の $\gamma \in G$ に対し成り立つことから，位相亜群の domain map と range map は連続である．

Definition 2.5. G を位相亜群とする．G がエタールであるとは，domain map $d \colon G \to G^{(0)}$ が局所同相写像になることである．[1)]エタール位相亜群を単にエタール亜群と呼ぶ．

位相亜群において inverse をとる写像は同相写像なので，エタール亜群の range map も局所同相写像になる．

本稿ではエタール亜群 G の unit space $G^{(0)}$ が局所コンパクトハウスドルフ空間であることを仮定する．この仮定は G 上の連続関数が豊富に存在することを保証し，C*環を構成する際に重要となる．また，G 全体がハウスドルフであるとは限らず，実際にハウスドルフでない例は自然に現れる．ハウスドルフでないエタール亜群の扱い方については [12] が詳しい．

次に，逆半群の空間への作用から得られるエタール亜群について解説する．逆半群の作用から得られるエタール亜群が本稿の考察の対象となる．

[1)] $d \colon G \to G^{(0)}$ が局所同相写像であるとは，任意の $\gamma \in G$ に対し $\gamma \in U$ となる開集合 $U \subset G$ が存在し $d(U) \subset G^{(0)}$ が開集合かつ $d|_U$ が像への同相写像となることである．

Definition 2.6. S を逆半群，X を位相空間とする．S の X への作用とは，逆半群の準同型 $\alpha\colon S \to I(X)$ のことである．この時，$\alpha\colon S \curvearrowright X$ と書く．また，$s \in S$ の α による像を $\alpha_s \in I(X)$ と書く．

Definition 2.7. S を逆半群，X を局所コンパクトハウスドルフ空間，$\alpha\colon S \curvearrowright X$ を作用とする．集合

$$S * X := \{(s,x) \in S \times X \mid x \in \mathrm{dom}(\alpha_s)\}$$

上の同値関係 $\sim$ を以下のように定める：

$$(s,x) \sim (t,y) \iff x = y \text{ かつ } se = te \text{ なる } e \in E(S) \text{ が存在する．}$$

$S \ltimes_\alpha X := S * X/\sim$ と定め，$(s,x) \in S * X$ の同値類を $[s,x] \in S \ltimes_\alpha X$ と書く．

$S \ltimes_\alpha X$ の亜群としての構造は以下のように定まる．まず，unit space を

$$(S \ltimes_\alpha X)^{(0)} := \{[e,x] \in S \ltimes_\alpha X \mid x \in \mathrm{dom}(\alpha_e)\}$$

と定める．写像

$$(S \ltimes_\alpha X)^{(0)} \ni [e,x] \mapsto x \in X$$

は全単射になることが分かるので，この全単射によって $(S \ltimes_\alpha X)^{(0)}$ と X を同一視する．$S \ltimes_\alpha X$ の domain map, range map をそれぞれ

$$d([s,x]) = x, r([s,x]) = \alpha_s(x)$$

と定める．$[s,x],[t,y] \in S \ltimes_\alpha X$ の積は $x = \alpha_t(y)$ の時に定義し

$$[s,x][t,y] := [st,y]$$

と定める．[2] $[s,x]$ の逆元は $[s^*, \alpha_s(x)]$ と定まる．以上の構造によって $S \ltimes_\alpha X$ は亜群となる．また，$s \in S$ と開集合 $U \subset \mathrm{dom}(\alpha_s)$ に対し

$$Z(s,U) := \{[s,x] \in S \ltimes_\alpha X \mid x \in U\}$$

と定める．$S \ltimes_\alpha X$ の位相として $Z(s,U)$ 全体が生成する位相を考える．この位相によって $S \ltimes_\alpha X$ はエタール亜群になる．

最後に，本稿の考察の対象である strongly tight な作用を定義する．

Definition 2.8. S を逆半群，X を全不連結局所コンパクトハウスドルフ空間，$\alpha\colon S \curvearrowright X$ を作用とする．作用 α が ample であるとは，任意の $e \in E(S)$ に対し $\mathrm{dom}\,\alpha_e \subset X$ がコンパクト開集合になることとする．Ample な作用 α が strongly tight であるとは，$\{\mathrm{dom}\,\alpha_e\}_{e \in E(S)}$ が X の開基になっていることとする．

Strongly tight という条件は，大雑把に言えば空間 X の情報が $E(S)$ に反映されているという条件である．従って，strongly tight な作用に対しては，作用の性質が逆半群そのものの代数的な性質に反映されることが期待される．

Example 2.9. P_n を polycyclic monoid，$\Sigma := \{1,2,\ldots,n\}$ とする (Example 2.2 参照)．P_n の $\Sigma^{\mathbb{N}}$ への strongly tight な作用を定義する．まず，直積位相を考えることで $\Sigma^{\mathbb{N}}$ をコンパクトハウスドルフ空間とみなす．$\mu \in \Sigma^*$ に対し，$C(\mu) \subset \Sigma^{\mathbb{N}}$ を μ から始まる無限文字列全体からなる集合とする．$C(\mu)$ は $\Sigma^{\mathbb{N}}$ のコンパクト開集合となることに注意せよ．$S_\mu S_\nu^* \in P_n$ に対し，同相写像 $\beta_{S_\mu S_\nu^*}\colon C(\nu) \to C(\mu)$ が $\beta_{S_\mu S_\nu^*}(\nu x) = \mu x$ によって定まる (ただし，$x \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ である)．$0 \in P_n$ には空写像を対応させることで，作用 $\beta\colon P_n \curvearrowright \Sigma^{\mathbb{N}}$ が定まる．$C(\mu)$ が $\Sigma^{\mathbb{N}}$ の開基であることから，β は strongly tight となることが分かる．

[2] domain map や range map, 積が実際に well-defined であることは容易に確かめられる．

上記の例は Cuntz 環という C*環と深い関係を持つ重要な例である．

3. 部分半群と部分亜群の対応

S を逆半群，X を全不連結局所コンパクトハウスドルフ空間とし，$\alpha\colon S \curvearrowright X$ を strongly tight な作用とする．この時エタール亜群 $S \ltimes_\alpha X$ が定まるのであった (Definition 2.7)．まず，$S \ltimes_\alpha X$ の開部分亜群と S の部分半群の対応について述べる．その後，C*環論への応用を述べる．

Definition 3.1. S を逆半群, X を局所コンパクトハウスドルフ空間とし, $\alpha\colon S \curvearrowright X$ を作用とする．また，$G := S \ltimes_\alpha X$ とおく．部分亜群 $G^{(0)} \subset H \subset G$ と部分半群 $E(S) \subset T \subset S$ に対し，T_H と H_T をそれぞれ

$$T_H := \{s \in S \mid Z(s, \operatorname{dom}\alpha_s) \subset H\},$$
$$H_T := \{[t, x] \in G \mid t \in T, x \in \operatorname{dom}\alpha_t\}$$

と定める．T_H は $E(S)$ を含む S の部分半群となり，H_T は $G^{(0)}$ を含む G の開部分亜群となる．

写像 $H \mapsto T_H$ と $T \mapsto H_T$ は互いの逆写像になりそうであるが，一般にはそうではない．$T \mapsto T_H$ の定義域を特別な部分半群のクラスに制限することで，これらの写像は互いの逆写像となる．

Definition 3.2. S を逆半群, X を局所コンパクトハウスドルフ空間とし, $\alpha\colon S \curvearrowright X$ を作用とする．部分半群 $T \subset S$ が α-join closed であるとは，以下の条件が成り立つことである：

‘任意の $s \in S$ に対し，「$s \in T$ であること」と「ある有限集合 $F \subset E(S)$) が存在し，$sF \subset T$ かつ $\operatorname{dom}\alpha_s \subset \bigcup_{f\in F} \operatorname{dom}\alpha_f$ が成り立つこと」が同値である．’

Remark 3.3. $s \in T$ ならば，$F = \{s^*s\}$ とすれば上記の後半の条件が成り立つ．従って，上記の “only if part” は自動的に成り立つ．部分半群が α-join closed であることを示す際は，上記の “if part” を確かめれば良い．

本稿の主定理は以下である．

Theorem 3.4 ([8, Theorem 2.1.10])**.** S を逆半群，X を局所コンパクトハウスドルフ空間とし，$\alpha\colon S \curvearrowright X$ を strongly tight な作用とする．また，$\mathcal{T}$ を α-join closed で $E(S)$ を含む S の部分半群全体からなる集合とし，$\mathcal{H}$ を $G^{(0)}$ を含む G の開部分亜群全体からなる集合とする．この時，以下の写像

$$\mathcal{T} \ni T \mapsto H_T \in \mathcal{H},$$
$$\mathcal{H} \ni H \mapsto T_H \in \mathcal{T}$$

は互いに逆写像である．

上の定理は開部分亜群は部分半群で捉えられることを主張する．C*環論に応用する上では開かつ閉の部分亜群も重要となるが，H_T が閉になるための T の必要十分条件も得られている [8, Theorem 2.2.6].

4. C*環の Cartan 中間環

前節では部分亜群と部分半群の対応を見た．この節では．前節の内容がどのように C*環論に応用されるか説明する．

4.1. **C*環.** まず，C*環について簡単に説明する．詳細は作用素環の教科書を参照せよ ([17] など).

大雑把に言えば，C*環 A とは複素数体 $\mathbb{C}$ 上の Banach 空間であり，積と対合 (involution) $A \ni a \mapsto a^* \in A$ を備えたもののことである．ここでは正確な定義をする代わりに，具体例をいくつか挙げる．

Example 4.1. X をコンパクトハウスドルフ空間とし，$C(X)$ を X 上の複素数値連続関数全体からなる集合とする (X が局所コンパクトの場合は，無限遠で消える連続関数からなる C*環 $C_0(X)$ を考える)．$C(X)$ は以下の構造について C*環となる．関数の各点での和，スカラー倍，積を考えることで，$C(X)$ は積を備えた $\mathbb{C}$ ベクトル空間 ($\mathbb{C}$ 代数) となる．$f \in C(X)$ に対し $f^* \in C(X)$ を $f^*(x) := \overline{f(x)}$ と定めることで，$C(X)$ の対合 $f \mapsto f^*$ が定まる．また，$C(X)$ のノルムは sup ノルム $\|f\| := \sup_{x\in X}|f(x)|$ である．以上の構造によって，$C(X)$ は C*環となる．特に，$C(X)$ の積は可換であり，$C(X)$ は積の単位元を持つ．逆に，積の単位元を持つ可換 C*環はある $C(X)$ と同型になることも知られている (Gelfand-Naimark の定理).

Example 4.2. H を $\mathbb{C}$ 上の Hilbert 空間とする．$B(H)$ を H から H への有界線形作用素全体からなる集合とする．この時，$B(H)$ は以下の構造について C*環となる．$B(H)$ は各点での演算を考えることで $\mathbb{C}$ ベクトル空間となる．また，写像の合成によって $B(H)$ の積が定まる．$A \in B(H)$ のノルムは $\|A\| := \sup_{\|\xi\|=1}\|A\xi\|$ によって定まる (右辺に現れるノルムが H のノルムであることに注意せよ)．また，対合 $A^* \in B(H)$ は A の随伴 (adjoint) 作用素として定まる ([13] など，関数解析の教科書を参照せよ)．これらの構造によって $B(H)$ は C*環となる．H が有限次元の時は，$B(H)$ は行列環 $M_{\dim H}(\mathbb{C})$ と同型になる．この時，$B(H)$ の対合と $M_{\dim H}(\mathbb{C})$ の共役転置が対応する．また，任意の C*環が $B(H)$ の部分環として実現できることも Gelfand-Naimark の定理として知られている．

Example 4.3. 非自明な C*環の例として，Cuntz 環を紹介する．2 以上の自然数 n に対し，Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ は

$$t_i^* t_j = \delta_{i,j} 1, \quad \sum_{i=1}^{n} t_i t_i^* = 1$$

を満たす $t_1, t_2, \ldots, t_n$ で生成される univesal な C*環として定義される．ここで，universal とは上記の関係式を満たす元で生成される他の C*環に対し $\mathcal{O}_n$ から全射が誘導される，という意味である．上記の関係式を用いることで，$\{t_\mu t_\nu^*\}_{\mu,\nu\in\Sigma^*}$ の線型結合が $\mathcal{O}_n$ で稠密になっていることが分かる (ここで，Example 2.2 の記法を用いた).

4.2. **亜群 C*環と Cartan 中間環.** 上述のように C*環は $B(H)$ の部分環として実現されるものの，特定の性質を持つように具体例を構成することは困難である．そこで，群作用や有向グラフなどさまざまな数学的対象から C*環を構成する方法が考えられ，材料となった対象と構成された C*環の関係が調べられた．このように C*環を構成する方法はさまざまなものが考えられていたが，多くの構成法を包括する形でエタール亜群による C*環の構成法が Renault によって提案された [14].

エタール亜群から C*環を構成する方法について簡単に説明する．詳しくは [14] や [16] を参照せよ．G をハウスドルフなエタール亜群とする (ハウスドルフでない場合は工夫が必要となる．[12] を参照せよ)．$C_c(G)$ を G 上のコンパクトサポートを持つ連続関数からなる $\mathbb{C}$ ベクトル空間とする．$f, g \in C_c(G)$ に対し

$$f * g(\gamma) := \sum_{\alpha\beta=\gamma} f(\alpha)g(\beta), \quad f^*(\gamma) := \overline{f(\gamma^{-1})}$$

と定めることで $C_c(G)$ の積と対合が定まる．$C_c(G)$ を適切なノルムで完備化すればC*環が得られるが，ノルムの選び方は一通りではない．よく研究されているノルムは最大のノルムである universal norm と，左正則表現から定まる reduced norm である．universal norm と reduced norm による $C_c(G)$ の完備化をそれぞれ $C^*(G), C^*_\lambda(G)$ と書き，それぞれ普遍亜群 C*環 (universal groupoid C*-algebra)，被約亜群 C*環 (reduced groupoid C*-algebra) と呼ぶ．また，これらをまとめて亜群 C*環と呼ぶ．

亜群 C*環の性質と材料となったエタール亜群の性質はよく調べられている．亜群 C*環のイデアルは [2] などで調べられており，従順性などの解析的な性質は [1] や [4] にまとめられている．

様々な C*環が亜群 C*環として実現されることが知られている．与えられた C*環を亜群 C*環として実現するには，Cartan 部分環の理論が有用である [15]．亜群 C*環は可換 C*環 $C_0(G^{(0)})$ を部分環として持つが，逆に Cartan 部分環と呼ばれる“良い” 可換部分環を持つ C*環が (twisted) 亜群 C*環と同型になることが [15] で示された．

A を C*環，$D \subset A$ を Cartan 部分環とする．この時，$A \simeq C^*_\lambda(G), D \simeq C_0(G^{(0)})$ となるエタール亜群 G が存在する (簡単のため，twist は自明であるとする)．この時，Cartan 中間環 $D \subset B \subset A$ と開部分亜群 $G^{(0)} \subset H \subset G$ が 1:1 対応することが [3] で示された．G が strongly tight action を用いて $G = S \ltimes X$ と表される場合は，Theorem 3.4 によって開部分亜群の計算は部分半群の計算に帰着される．このことを用いると，例えば Cuntz 環 (Example 4.3) の部分環は，Example 2.2 の polycyclic monoid によって計算できることが分かる．

Example 4.4. $\beta\colon P_n \curvearrowright \Sigma^{\mathbb{N}}$ を Example 2.9 の strongly tight な作用とする．$G := P_n \curvearrowright \Sigma^{\mathbb{N}}$ と置き，$C^*_\lambda(G)$ の構造について説明する．$i \in \Sigma$ に対し $Z(S_i, C(i)) \subset G$ はコンパクト開集合なので，その上の特性関数 $s_i := \chi_{Z(S_i,C(i))}$ は $C_c(G)$ の元である．従って $s_1, s_2, \ldots, s_n$ は $C^*_\lambda(G)$ の元であるが，これらは以下の関係式を満たす：

$$s_i^* s_j = \delta_{i,j} 1, \quad \sum_{i=1}^{n} s_i s_i^* = 1.$$

また，少々非自明であるが $C^*_\lambda(G)$ は $\{s_i\}_{i=1}^n$ で生成されている．従って Cuntz 環 $\mathcal{O}_n$ から $C^*_\lambda(G)$ に t_i を s_i に移すような準同型が誘導されるが，実はこれが同型写像となる．

以上の事実を用いて，$\mathcal{O}_n$ の部分環を求める．$\mathcal{O}_n^{\mathbb{T}}$ を $\mathrm{span}\{t_\mu t_\nu^*\}_{|\mu|=|\nu|}$ の閉包とする．$\mathcal{O}_n^{\mathbb{T}}$ は $\mathcal{O}_n$ の部分 C*環となることが分かる ($\mathcal{O}_n$ はゲージ作用と呼ばれる円周群 $\mathbb{T}$ の作用を持つが，その不動点環が $\mathcal{O}_n^{\mathbb{T}}$ である)．また，2 以上の自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathcal{O}_n^m$ を $\mathrm{span}\{t_\mu t_\nu^*\}_{|\mu|=|\nu| \mod m}$ の閉包とすると $\mathcal{O}_n^m$ も $\mathcal{O}_n^{\mathbb{T}}$ を含む $\mathcal{O}_n$ の部分 C*環となる．実は，$\mathcal{O}_n^{\mathbb{T}}$ を含む $\mathcal{O}_n$ の Cartan 中間環は，$\mathcal{O}_n^m$ しかないことが分かる．これは，$\{S_\mu S_\nu^*\}_{|\mu|=|\nu|}$ を含む P_n の β-join closed な部分半群を計算することで分かる．

他にも，有向グラフから得られる C*環 (グラフ環) や自己相似作用から得られる C*環 (Nekrashevych 環) も逆半群から構成することができるため，これらの部分 C*環も計算できることが期待される．

Acknowledgement. 本研究は JSPS 科研費 20J10088 の助成を受けたものです．

References

[1] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault. *Amenable Groupoids*. Monographie de l'Enseignement mathématique. L'Enseignement Mathématique, 2000.

[2] J. Brown, L. O. Clark, C. Farthing, and A. Sims. Simplicity of algebras associated to étale groupoids. *Semigroup Forum*, **88**(2):433–452, 2014.
[3] J. H. Brown, R. Exel, A. H. Fuller, D. R. Pitts, and S. A. Reznikoff. Intermediate C*-algebras of Cartan embeddings. *Proc. Amer. Math. Soc. Ser.*, B **8**:27–41, 2021.
[4] N. P. Brown and N. Ozawa. *C*-algebras and Finite-dimensional Approximations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Soc., 2008.
[5] J. Cameron and Roger R. Smith. A Galois correspondence for reduced crossed products of simple C*-algebras by discrete groups. *Canadian Journal of Mathematics*, 71(5):1103–1125, 2019.
[6] R. Exel. Inverse semigroups and combinatorial C*-algebras. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 39, 04 2007.
[7] R. Exel and E. Pardo. The tight groupoid of an inverse semigroup. *Semigroup Forum*, 92(1):274–303, 2016.
[8] F. Komura. A correspondence between inverse subsemigroups, open wide subgroupoids and cartan intermediate C*-subalgebras. arXiv:2007.11456, 2020.
[9] F. Komura. Invariant sets and normal subgroupoids of universal étale groupoids induced by congruences of inverse semigroups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, published online:1–20, 2021.
[10] F. Komura. Quotients of étale groupoids and the abelianizations of groupoid C*-algebras. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 111(1):56–75, 2021.
[11] M. V. Lawson. *Inverse Semigroups: The Theory of Partial Symmetries*. World Scientific, 1998.
[12] A. Paterson. *Groupoids, Inverse Semigroups, and their Operator Algebras*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Boston, 2012.
[13] G. K. Pedersen. *Analysis Now*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1989.
[14] J. Renault. *A Groupoid Approach to C*-Algebras*. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1980.
[15] J. Renault. Cartan subalgebras in C*-algebras. *Irish Math. Soc. Bull.*, **61**:29–63, 2008.
[16] A. Sims. Hausdorff étale groupoids and their C*-algebras. *Operator Algebras and Dynamics: Groupoids, Crossed Products, and Rokhlin Dimension*, 2020.
[17] M. Takesaki. *Theory of Operator Algebras I*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer Berlin Heidelberg, 2001.

Department of Mathematics, Faculty of Science and Technology, Keio University, 3-14-1 Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama, 223-8522, Japan
Email address: fuyuta.k@keio.jp

パラレルセッション
会場 A

Appell-Lauricella functions over finite fields
(有限体上の Appell-Lauricella 関数)

千葉大学大学院融合理工学府
中川彬雄 (Akio Nakagawa)

概要

Gauss 超幾何関数の多変数化である, Appell-Lauricella 超幾何関数というものがあり, Gauss 超幾何と同様に, 変換公式や積分表示が知られている. 本稿では, 有限体上の Appell-Lauricella 関数の定義と背景を紹介した後, $\mathbb{C}$ 上における積分表示の有限体類似が得られたので, これを紹介する. その応用として, 有限体上のある代数多様体の Artin L 関数と有限体上の Appell-Lauricella 関数の関係も紹介する.

1　1 変数超幾何関数及び Appell-Lauricella 超幾何関数

この節では, 古典的な 1 変数超幾何関数及び Appell-Lauricella 関数について復習した後, それらの有限体類似について説明する.

$m, n \geq 0$ を整数とし, 複素パラメータ $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$(すべての j で $b_j \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$) と, 複素変数 z に対し, 1 変数超幾何関数 ${}_mF_n$ は ($m = 2, n = 1$ の場合を Gauss 超幾何という) は次のような級数で定義される:

$$ {}_mF_n\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_m \\ b_1, \ldots, b_n \end{matrix}; z\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_m)_k}{(1)_k (b_1)_k \cdots (b_n)_k} z^k. $$

ここで, $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a)$ ($\Gamma(s)$ はガンマ関数) は Pochhammer 記号であり, 特に $(1)_k = k!$ である.

例 1.1.　(i) ${}_0F_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{z^k}{(1)_k} = \exp z$.

(ii) ${}_1F_0\left(\begin{matrix} a \\ \end{matrix}; z\right) = (1-z)^{-a}$ (幾何級数).

(iii) ${}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix} 1,1,\ldots,1 \\ 2,\ldots,2 \end{matrix}; 1\right) = \zeta(n)$ (ζ は Riemann ζ 関数).

Gauss 超幾何関数の多変数化である, Appell-Lauricella 関数とは, 次の 4 つの関数である:

$$ F_A^{(n)}\left(\begin{matrix} a; b_1, \ldots, b_n \\ c_1, \ldots, c_n \end{matrix}; x_1, \ldots, x_n\right) := \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\cdots+m_n} (b_1)_{m_1} \cdots (b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1} \cdots (c_n)_{m_n} (1)_{m_1} \cdots (1)_{m_n}} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}. $$

$$ F_B^{(n)}\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n \\ c \end{matrix}; x_1, \ldots, x_n\right) := \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m_1} \cdots (a_n)_{m_n} (b_1)_{m_1} \cdots (b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\cdots+m_n} (1)_{m_1} \cdots (1)_{m_n}} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}. $$

$$ F_C^{(n)}\left(\begin{matrix} a; b \\ c_1, \ldots, c_n \end{matrix}; x_1, \ldots, x_n\right) := \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\cdots+m_n} (b)_{m_1+\cdots+m_n}}{(c_1)_{m_1} \cdots (c_n)_{m_n} (1)_{m_1} \cdots (1)_{m_n}} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}. $$

$$ F_D^{(n)}\left(\begin{matrix} a; b_1, \ldots, b_n \\ c \end{matrix}; x_1, \ldots, x_n\right) := \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\cdots+m_n} (b_1)_{m_1} \cdots (b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1+\cdots+m_n} (1)_{m_1} \cdots (1)_{m_n}} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}. $$

特に, $n = 2$ の場合を Appell 関数といい, $F_A^{(2)} = F_2, F_B^{(2)} = F_3, F_C^{(2)} = F_4, F_D^{(2)} = F_1$ と書く.

$\mathbb{C}$ 上の超幾何関数の間には様々な変換公式があり, また, 超幾何関数には微分方程式の解としての側面もある. これらについてより詳しく知りたい方は, [13] を参照していただきたい.

q を素数 p の冪とし, $\kappa := \mathbb{F}_q$ を位数 q の有限体とする. また, $\widehat{\kappa^\times}$ を κ の乗法群の指標群とし, $\varepsilon \in \widehat{\kappa^\times}$ を自明な指標とする. また, 0 での値は 0 とすることで, 定義域を κ に広げておく. 指標 $\eta, \eta_1, \ldots, \eta_n \in \widehat{\kappa^\times}$ に対し, Gauss 和及び Jacobi 和は以下で定義される指標和である:

$$g(\eta) := -\sum_{x\in\kappa} \eta(x)\psi(x) \quad (\psi : \kappa \to \mathbb{C}^\times \text{は加法指標}),$$
$$j(\eta_1, \ldots, \eta_n) := (-1)^{n-1} \sum_{x_1+\cdots+x_n=1} \eta_1(x_1)\cdots\eta_n(x_n).$$

これらはそれぞれ, $\mathbb{C}$ 上のガンマ関数, ベータ関数の有限体類似であり, 以下のような性質を持つ:

(i) $\eta \in \widehat{\kappa^\times}$ の複素共役 (逆元と言っても良い) を $\overline{\eta}$ と書くことにする. このとき,

$$g(\eta)g^\circ(\overline{\eta}) = \eta(-1)q. \tag{1.1}$$

ここで, $g^\circ(\eta)$ は $\eta = \varepsilon$ のときのみ $qg(\eta) = qg(\varepsilon) = q$ で, それ以外の場合は $g^\circ(\eta) = g(\eta)$ として定める.

(ii) $\eta_1, \ldots, \eta_n \in \widehat{\kappa^\times}$ に対し,

$$j(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \begin{cases} \dfrac{g(\eta_1)\cdots g(\eta_n)}{g^\circ(\eta_1\cdots\eta_n)} & (\eta_i \neq \varepsilon \text{ for some } i), \\ \dfrac{1-(1-q)^n}{q} & (\eta_1 = \cdots = \eta_n = \varepsilon). \end{cases} \tag{1.2}$$

注 1.2. 上で登場した Gauss 和の変種 g° は, 大坪氏 [11] が導入したものである. この記号により, 有限体上の超幾何関数を記述する際に, 式が整理され, 古典的なものとの類似を追いやすくなっている.

指標 $\alpha, \nu \in \widehat{\kappa^\times}$ に対し, Pochhammer 記号の有限体類似を,

$$(\alpha)_\nu := \frac{g(\alpha\nu)}{g(\alpha)}, \quad (\alpha)_\nu^\circ := \frac{g^\circ(\alpha\nu)}{g^\circ(\alpha)}$$

で定義する.

定義 1.3. 指標 $\alpha_i, \beta_j \in \widehat{\kappa^\times}$ と $\lambda \in \kappa$ に対し, 有限体上の超幾何関数 ${}_mF_n$ を,

$${}_mF_n\left(\begin{matrix}\alpha_1\ldots,\alpha_m\\ \beta_1,\ldots,\beta_n\end{matrix};\lambda\right) := \frac{1}{1-q}\sum_{\nu}\frac{(\alpha_1)_\nu\cdots(\alpha_m)_\nu}{(\varepsilon)_\nu^\circ(\beta_1)_\nu^\circ\cdots(\beta_n)_\nu^\circ}\nu(\lambda)$$

とする. さらに, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \kappa$ と指標 $\alpha, \alpha_i, \beta, \beta_j, \gamma, \gamma_k \in \widehat{\kappa^\times}$ に対して, 有限体上の Appell-Lauricella 関数を次のように定義する:

$$F_A^{(n)}\left(\begin{matrix}\alpha;\beta_1,\ldots,\beta_n\\ \gamma_1,\ldots,\gamma_n\end{matrix};\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$$
$$:= \frac{1}{(1-q)^n}\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n\in\widehat{\kappa^\times}}\frac{(\alpha)_{\nu_1\cdots\nu_n}(\beta_1)_{\nu_1}\cdots(\beta_n)_{\nu_n}}{(\varepsilon)_{\nu_1}^\circ\cdots(\varepsilon)_{\nu_n}^\circ(\gamma_1)_{\nu_1}^\circ\cdots(\gamma_n)_{\nu_n}^\circ}\nu_1(x_1)\cdots\nu_n(x_n),$$
$$F_B^{(n)}\left(\begin{matrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_n;\beta_1,\ldots,\beta_n\\ \gamma\end{matrix};\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$$
$$:= \frac{1}{(1-q)^n}\sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n\in\widehat{\kappa^\times}}\frac{(\alpha_1)_{\nu_1}\cdots(\alpha_n)_{\nu_n}(\beta_1)_{\nu_1}\cdots(\beta_n)_{\nu_n}}{(\varepsilon)_{\nu_1}^\circ\cdots(\varepsilon)_{\nu_n}^\circ(\gamma)_{\nu_1\cdots\nu_n}^\circ}\nu_1(x_1)\cdots\nu_n(x_n),$$
$$F_C^{(n)}\left(\begin{matrix}\alpha;\beta\\ \gamma_1,\ldots,\gamma_n\end{matrix};\lambda_1,\ldots,\lambda_n\right)$$

$$:= \frac{1}{(1-q)^n} \sum_{\nu_1,\dots,\nu_n \in \widehat{\kappa^\times}} \frac{(\alpha)_{\nu_1\cdots\nu_n}(\beta)_{\nu_1\cdots\nu_n}}{(\varepsilon)^\circ_{\nu_1}\cdots(\varepsilon)^\circ_{\nu_n}(\gamma_1)^\circ_{\nu_1}\cdots(\gamma_n)^\circ_{\nu_n}} \nu_1(x_1)\cdots\nu_n(x_n),$$

$$F_D^{(n)}\left(\begin{matrix}\alpha;\beta_1,\dots,\beta_n\\ \gamma\end{matrix};\lambda_1,\dots,\lambda_n\right) := \frac{1}{(1-q)^n} \sum_{\nu_1,\dots,\nu_n \in \widehat{\kappa^\times}} \frac{(\alpha)_{\nu_1\cdots\nu_n}(\beta_1)_{\nu_1}\cdots(\beta_n)_{\nu_n}}{(\varepsilon)^\circ_{\nu_1}\cdots(\varepsilon)^\circ_{\nu_n}(\gamma)^\circ_{\nu_1\cdots\nu_n}} \nu_1(x_1)\cdots\nu_n(x_n).$$

これら関数はすべて, $\mathbb{Q}$ に 1 の $q-1$ 乗根を添加した円分体上に値をとる ([11]).

注 1.4. 有限体上の 1 変数超幾何関数は, Koblitz 氏 [7], Greene 氏 [4], Katz 氏 [6], McCarthy 氏 [8], 大坪氏 [11] らがそれぞれ独立に定義しており, 正規化及び定数項での値など微妙な違いを除いて “だいたい”同じものである. また, 有限体上の多変数超幾何もいくつか定義されている (cf. [2], [5], [11], [14]). これら有限体上の超幾何関数に対して, 古典的な公式の類似となるような公式が数多く知られている. 本稿では, 大坪氏の定義を用いており, この定義は $\mathbb{C}$ 上との類似が最も見やすくなっている.

2 積分表示とその有限体類似

超幾何関数は次のような積分表示 (cf. [13]) をもつ: 各 i に対し, $\mathrm{Re}(b_i)>\mathrm{Re}(a_i)>0$ のとき,

$$ {}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix}a_0,a_1,\dots,a_n\\ b_1,\dots,b_n\end{matrix};z\right) = \prod_{i=1}^n B(a_i,b_i-a_i)^{-1} \times \int_0^1 \left(\prod_{i=1}^n t_i^{a_i-1}(1-t_i)^{b_i-a_i-1}\right)(1-zt_1\cdots t_n)^{-a_0}dt_1\cdots dt_n.$$

ただし, $B(\cdot,\cdot)$ はベータ関数.

この有限体類似として, 次が知られている (cf. [11]): $\alpha_0\neq\varepsilon$ かつ $\alpha_i\neq\beta_i$ (for all i) のとき,

$$ {}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix}\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n\\ \beta_1,\dots,\beta_n\end{matrix};\lambda\right) = \prod_{i=1}^n -j(\beta_i,\overline{\alpha_i}\beta_i)^{-1} \sum_{t_i\in\kappa}\left(\prod_{i=1}^n \alpha_i(t_i)\overline{\alpha_i}\beta_i(1-t_i)\right)\overline{\alpha_0}(1-\lambda t_1\cdots t_n). \quad (2.1)$$

上の積分表示と同様に, 古典的な Appell-Lauricella 関数にもいくつかの積分表示が知られている (cf. [13]). 以下では, その有限体類似が得られたので, それらを紹介する.

Appell-Lauricella 関数 F_D について, いくつかの条件のもとで以下のような積分表示が知られている:

(i) $$F_D^{(n)}\left(\begin{matrix}a;b_1,\dots,b_n\\ c\end{matrix};x_1,\dots,x_n\right) = B(a,c-a)^{-1}\int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{c-a-1}\prod_{i=1}^n(1-x_iu)^{-b_i}du,$$

(ii) $$F_D^{(n)}\left(\begin{matrix}a;b_1,\dots,b_n\\ c\end{matrix};x_1,\dots,x_n\right) = \frac{\Gamma(c)}{\prod_i\Gamma(b_i)\cdot\Gamma(c-\sum_{j=1}^n b_j)} \times \int_I \prod_{h=1}^n u_h^{b_h-1}\cdot(1-\sum_i u_i)^{c-\sum_j b_j-1}(1-\sum_k u_kx_k)^{-a}du_1\cdots du_n.$$

ただし, $I=\{(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n \mid u_i\geq 0,\ \sum_i u_i\leq 1\}$. この有限体類似は以下である.

定理 2.1. $\lambda_i\in\kappa^\times$ とする.

(i) $\alpha\neq\gamma$ かつ $\beta_i\neq\varepsilon$ (for all i) とする. このとき,

$$F_D^{(n)}\left(\begin{matrix}\alpha;\beta_1,\dots,\beta_n\\ \gamma\end{matrix};\lambda_1,\dots,\lambda_n\right) = -j(\alpha,\overline{\alpha}\gamma)^{-1}\sum_{u\in\kappa^\times}\alpha(u)\overline{\alpha}\gamma(1-u)\prod_{i=1}^n\overline{\beta_i}(1-\lambda_iu).$$

(ii) $\alpha \neq \varepsilon$ かつ $\beta_1 \cdots \beta_n \neq \gamma$ とする．このとき，

$$F_D^{(n)}\left(\begin{matrix}\alpha; \beta_1, \ldots, \beta_n \\ \gamma\end{matrix}; \lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$$
$$= (-1)^n \frac{g^\circ(\gamma)}{\prod_i g(\beta_i) \cdot g(\overline{\beta_1 \cdots \beta_n}\gamma)} \times \sum_{u_1,\ldots,u_n \in \kappa^\times} \prod_{i=1}^n \beta_i(u_i) \cdot \overline{\beta_1 \cdots \beta_n}\gamma\Big(1 - \sum_j u_j\Big)\overline{\alpha}\Big(1 - \sum_k \lambda_k u_k\Big).$$

証明の概略．証明では，離散 Fourier 変換を使う：$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ を $(\kappa^\times)^n$ 上の $\mathbb{C}$ 値関数とする．このとき，

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{1}{(q-1)^n} \sum_{\nu_1,\ldots,\nu_n \in \widehat{\kappa^\times}} \widehat{f}(\nu_1, \ldots, \nu_n) \prod_{i=1}^n \nu_i(\lambda_i). \tag{2.2}$$

ここで，

$$\widehat{f}(\nu_1, \ldots, \nu_n) := \sum_{t_1,\ldots,t_n \in \kappa^\times} f(t_1, \ldots, t_n) \prod_{i=1}^n \overline{\nu_i}(t_i).$$

(i) では，

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{u \in \kappa^\times} \alpha(u)\overline{\alpha}\gamma(1-u) \prod_{i=1}^n \overline{\beta_i}(1 - \lambda_i u)$$

とおいて，$\widehat{f}$ を計算すると，

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\nu_1, \ldots, \nu_n) &= \sum_{t_1,\ldots,t_n \in \kappa^\times} \sum_{u \in \kappa^\times} \alpha(u)\overline{\alpha}\gamma(1-u) \prod_i \overline{\beta_i}(1 - \lambda_i u)\overline{\nu_i}(t_i) \\
&= \sum_u \sum_{s_1,\ldots,s_n} \alpha\nu_1 \cdots \nu_n(u)\overline{\alpha}\gamma(1-u) \prod_i \overline{\beta_i}(1 - s_i)\overline{\nu_i}(s_i) \\
&= (-1)^{n+1} j(\alpha\nu_1 \cdots \nu_n, \overline{\alpha}\gamma) \prod_i j(\overline{\nu_i}, \overline{\beta_i}) \\
&= (-1)^{n+1} j(\alpha, \overline{\alpha}\gamma) \cdot \frac{(\alpha)_{\nu_1 \cdots \nu_n}}{\prod_i (\varepsilon)^\circ_{\nu_i}} \cdot \frac{\prod_i (\beta_i)_{\nu_i}}{(\gamma)^\circ_{\nu_1 \cdots \nu_n}}
\end{aligned}$$

となる．ここで，$s_i = t_i u$ としており，最後の等号では (1.2) および (1.1) を使った．したがって，(2.2) より (i) を得る．(ii) も

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{u_1,\ldots,u_n \in \kappa} \prod_{i=1}^n \beta_i(u_i) \cdot \overline{\beta_1 \cdots \beta_n}\gamma\Big(1 - \sum_j u_j\Big)\overline{\alpha}\Big(1 - \sum_k \lambda_k u_k\Big).$$

として同様にすれば得られる． □

次に，F_A および F_B について考える．$\mathbb{C}$ 上において，これらは次のような積分表示を持つ：

(i) $F_A^{(n)}\left(\begin{matrix}a; b_1, \ldots, b_n \\ c_1, \ldots, c_n\end{matrix}; x_1, \ldots, x_n\right)$
$$= \prod_{i=1}^n B(b_i, c_i - b_i)^{-1} \times \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Big(\prod_{i=1}^n u_i^{b_i - 1}(1-u_i)^{c_i - b_i - 1}\Big)\Big(1 - \sum_{i=1}^n x_i u_i\Big)^{-a} du_1 \cdots du_n,$$

(ii) $F_B^{(n)}\left(\begin{matrix}a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n \\ c\end{matrix}; x_1, \ldots, x_n\right)$
$$= \frac{\Gamma(c)}{\prod_i \Gamma(b_i) \cdot \Gamma(c - \sum_j b_j)} \times \int_I \prod_{h=1}^n u_i^{b_i - 1} \cdot (1 - \sum_i u_i)^{c - \sum_j b_j - 1} \prod_k (1 - u_k x_k)^{-a_k} du_1 \cdots du_n.$$

ただし，$I = \{(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid u_i \geq 0,\ \sum_i u_i \leq 1\}$．$F_D$ と同様に，離散 Fourier 変換を用いることで以下の有限体類似を得られる．

定理 2.2. $\lambda_i \in \kappa^\times$ とする.

(i) $\alpha \neq \varepsilon$ かつ $\beta_i \neq \gamma_i$ (for all i) とする. このとき,

$$F_A^{(n)}\left(\begin{matrix}\alpha;\beta_1,\dots,\beta_n\\ \gamma_1,\dots,\gamma_n\end{matrix};\lambda_1,\dots,\lambda_n\right)=\prod_{i=1}^n -j(\beta_i,\overline{\beta_i}\gamma_i)^{-1}\sum_{u_1,\dots,u_n\in\kappa}\Big(\prod_{i=1}^n\beta_i(u_i)\overline{\beta_i}\gamma_i(1-u_i)\Big)\overline{\alpha}\Big(1-\sum_{j=1}^n\lambda_j u_j\Big).$$

(ii) $\alpha_i \neq \varepsilon$ (for all i) かつ $\beta_1\cdots\beta_n \neq \gamma$ とする. このとき,

$$\begin{aligned}&F_B^{(n)}\left(\begin{matrix}\alpha_1,\dots,\alpha_n;\beta_1,\dots,\beta_n\\ \gamma\end{matrix};\lambda_1,\dots,\lambda_n\right)\\ &\quad=\frac{g^\circ(\gamma)}{\prod_i g(\beta_i)\cdot g(\overline{\beta_1\cdots\beta_n}\gamma)}\times\sum_{u_1,\dots,u_n\in\kappa^\times}\prod_{i=1}^n\beta_i(u_i)\cdot\overline{\beta_1\cdots\beta_n}\gamma\Big(1-\sum_j u_j\Big)\prod_{k=1}^n\overline{\alpha_k}(1-\lambda_i u_i).\end{aligned}$$

残るは F_C についてだが, これは他の 3 つと比べて多少複雑であり, $n=2$ の場合のみに次の積分表示が知られている (cf. [13]):

$$\begin{aligned}&F_4(a;b;c_1,c_2;x(1-y),y(1-x))\\ &\quad=B(a,c_1-a)^{-1}B(b,c_2-b)^{-1}\int_0^1\int_0^1 u^{a-1}v^{b-1}(1-u)^{c_1-a-1}(1-v)^{c_2-b-1}\\ &\qquad\times(1-ux)^{a-c_1-c_2+1}(1-vy)^{b-c_1-c_2+1}(1-ux-vy)^{c_1+c_2-a-b-1}dudv.\end{aligned}$$

この積分表示は, Burchnall-Chaundy 氏ら [1] による次の展開公式と Gauss 超幾何の積分表示により得られる:

$$\begin{aligned}&F_4(a;b;c_1,c_2;x(1-y),y(1-x))\\ &\quad=\sum_{r=0}^\infty\frac{(a)_r(b)_r(1+a+b-c_1-c_2)_r}{(1)_r(c_1)_r(c_2)_r}x^r y^r\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}a+r,b+r\\ c_1+r\end{matrix};x\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}a+r,b+r\\ c_2+r\end{matrix};y\right).\end{aligned}$$

これらの有限体類似として, 以下が成り立つ. 以降, $\delta(\eta)$ は $\eta=\varepsilon$ のときのみ 1 で, それ以外では 0 とする.

定理 2.3. $x,y\neq 0,1$ とする. $\alpha,\beta,\gamma_1,\gamma_2,\alpha\beta\overline{\gamma_1\gamma_2}\neq\varepsilon$ かつ $\alpha,\beta\neq\gamma_1,\gamma_2$ とするとき,

$$\begin{aligned}F_4(\alpha;\beta;\gamma_1,\gamma_2;x(1-y),y(1-x))=&\frac{1}{1-q}\sum_{\eta\in\widehat{\kappa^\times}}\frac{(\alpha)_\eta(\beta)_\eta(\alpha\beta\overline{\gamma_1\gamma_2})_\eta}{(\varepsilon)_\eta^\circ(\gamma_1)_\eta^\circ(\gamma_2)_\eta^\circ}\eta(xy)\,{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha\eta,\beta\eta\\ \gamma_1\eta\end{matrix};x\right){}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha\eta,\beta\eta\\ \gamma_2\eta\end{matrix};y\right)\\ &-\frac{j(\beta\overline{\gamma_1},\alpha\overline{\gamma_2})}{j(\alpha,\overline{\gamma_1})j(\beta,\overline{\gamma_2})}\overline{\gamma_1}(x)\overline{\gamma_2}(y)+q^{-\delta(\alpha\overline{\beta})}R_\alpha(x,y)+R_\beta(x,y).\end{aligned}$$

ここで,

$$R_\alpha(x,y)=\frac{1}{q}\cdot\frac{g(\overline{\alpha\beta}\gamma_1\gamma_2)g(\alpha\overline{\gamma_1})g(\alpha\overline{\gamma_2})g(\gamma_1)g(\gamma_2)}{g^\circ(\overline{\alpha}\gamma_1\gamma_2)g(\alpha\overline{\beta})g(\alpha)}\overline{\alpha}((1-x)(1-y))\gamma_1\Big(\frac{x}{1-x}\Big)\gamma_2\Big(\frac{y}{1-y}\Big),$$

かつ

$$R_\beta(x,y)=\frac{1}{q}\cdot\frac{g(\overline{\alpha\beta}\gamma_1\gamma_2)g(\beta\overline{\gamma_1})g(\beta\overline{\gamma_2})g(\gamma_1)g(\gamma_2)}{g^\circ(\overline{\beta}\gamma_1\gamma_2)g(\overline{\alpha}\beta)g(\beta)}\overline{\beta}((1-x)(1-y))\gamma_1\Big(\frac{x}{1-x}\Big)\gamma_2\Big(\frac{y}{1-y}\Big).$$

定理 2.4. 上の定理と同じ状況のもとで,

$$\begin{aligned}F_4(\alpha;\beta;\gamma_1,\gamma_2;x(1-y),y(1-x))=&j(\alpha,\overline{\alpha}\gamma_1)^{-1}j(\beta,\overline{\beta}\gamma_2)^{-1}\sum_{u,v}\alpha(u)\beta(v)\overline{\alpha}\gamma_1(1-u)\overline{\beta}\gamma_2(1-v)\\ &\times\alpha\overline{\gamma_1\gamma_2}(1-ux)\beta\overline{\gamma_1\gamma_2}(1-vy)\overline{\alpha\beta}\gamma_1\gamma_2(1-ux-vy)\\ &-\frac{j(\beta\overline{\gamma_1},\alpha\overline{\gamma_2})}{j(\alpha,\overline{\gamma_1})j(\beta,\overline{\gamma_2})}\overline{\gamma_1}(x)\overline{\gamma_2}(y)-S_\alpha(x,y)-S_\beta(x,y).\end{aligned}$$

ここで,

$$S_\alpha(x,y) := \frac{g(\overline{\alpha\beta}\gamma_1\gamma_2)g(\gamma_1)g(\gamma_2)}{g^\circ(\overline{\alpha}\gamma_1\gamma_2)g(\overline{\alpha}\gamma_1)g(\overline{\beta}\gamma_2)g(\alpha)}\overline{\gamma_1}(x)\overline{\alpha}\gamma_1(x-1)\overline{\beta}(y),$$

かつ

$$S_\beta(x,y) := \frac{g(\overline{\alpha\beta}\gamma_1\gamma_2)g(\gamma_1)g(\gamma_2)}{g^\circ(\overline{\beta}\gamma_1\gamma_2)g(\overline{\alpha}\gamma_1)g(\overline{\beta}\gamma_2)g(\beta)}\overline{\gamma_2}(y)\overline{\beta}\gamma_2(y-1)\overline{\alpha}(x).$$

証明の概略. 古典的なものの証明は, [13] に載っており, 定理 2.3, 2.4 は, それとパラレルな類似を考えることで証明できる. しかし, 他 3 つのときとは異なり, 単に離散 Fourier 変換を使うだけでは証明ができない. そのため, 仮定が多いのと, 剰余項がたくさん出てしまう. 仮定をどれだけ外せるかは今後の課題である. まず, 定理 2.3 の証明には, 以下の 3 つの命題 (いずれも大坪氏 [11] の結果を少し精密にしたものである) と Gauss 和の性質 (1.1) を主に使う.

命題 2.5 (Vandermonde の定理の類似)**.** $\gamma \neq \varepsilon$ のとき,

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\overline{\mu}\\ \gamma\end{matrix};1\right) = q^{-\delta(\overline{\alpha}\gamma)}\frac{(\overline{\alpha}\gamma)_\mu}{(\gamma)^\circ_\mu} - \Big(\delta(\mu)\delta(\overline{\alpha}\gamma)+\delta(\alpha)\delta(\gamma\mu)\Big)\frac{(1-q)^2}{q}.$$

命題 2.6 (Saalschutz の定理の類似)**.** $\alpha \neq \varepsilon$, $\beta \neq \gamma$ かつ $\alpha\beta\overline{\gamma} \neq \varepsilon$ とするとき,

$$\begin{aligned}{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha,\beta,\overline{\nu}\\ \gamma,\alpha\beta\overline{\gamma\nu}\end{matrix};1\right) =& q^{-\delta(\overline{\alpha}\gamma)}\frac{(\overline{\alpha}\gamma)_\nu(\overline{\beta}\gamma)_\nu}{(\gamma)^\circ_\nu(\overline{\alpha\beta}\gamma)_\nu} + \frac{g^\circ(\gamma)g^\circ(\alpha\beta\overline{\gamma\nu})}{g(\alpha)g(\beta)g(\overline{\nu})}\\ &- (\delta(\overline{\alpha}\gamma)\delta(\nu)+\delta(\beta)\delta(\gamma\nu))\frac{(1-q)^2}{q}.\end{aligned}$$

命題 2.7 (Pfaff の公式の類似)**.** $x \neq 0, 1$ とする. $\beta \neq \varepsilon$ かつ $\alpha \neq \gamma$ とするとき,

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right) = \overline{\alpha}(1-x)\left(q^{-\delta(\overline{\beta}\gamma)}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\overline{\beta}\gamma\\ \gamma\end{matrix};\frac{x}{x-1}\right) - \delta(\overline{\beta}\gamma)\frac{1-q}{q}\right).$$

定理 2.4 は, 定理 2.3 の右辺に, (2.1) の条件を緩めたものを適用することで得られる. □

3 合同ゼータ関数と Artin L 関数

ある代数多様体が与えられたとき, それが有理点を持つのか, また持つとしたらどれぐらいの有理点を持つか? という問題がある. ここでは, κ 上の代数多様体 V に対し, κ-有理点の個数に関係する, V の合同ゼータ関数と, より細かい Artin L 関数について復習する. これらについてより詳しい説明が知りたい方は, [12] などを参照していただきたい.

整数 $r \geq 1$ に対し, $N_r(V)$ を V の $\mathbb{F}_{q^r}$-有理点の個数 $\#V(\mathbb{F}_{q^r})$ とする. このとき, V の合同ゼータ関数とは次の冪級数で定義されるものである:

$$Z(V,t) := \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_r(V)\frac{t^r}{r}\right) \in \mathbb{Q}[[t]].$$

例 3.1. $V = \mathbb{P}^n$(n 次元射影空間) の場合. 容易に次がわかる:

$$N_r(V) = 1 + q^r + \cdots + q^{rn}.$$

したがって, $-\log(1-x) = x + x^2/2 + x^3/3 + \cdots$ より,

$$Z(V,t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)\cdots(1-q^nt)}.$$

次に, V にある有限アーベル群 G が作用している場合を考える. このとき, G の指標群 $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ の元 χ に対して, V の指標付き有理点の個数を次で定義する:

$$N_r(V;\chi) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G}\chi(g)\#\{X \in V(\overline{\kappa}) \mid g^{-1}\circ F^r(X) = X\} \in \mathbb{C}.$$

ここで, $\overline{\kappa}$ は κ の代数閉包で, $F : V \to V$ は q 乗フロベニウス射である. そして, V の χ に付随する Artin L 関数とは次で定義される冪級数である:

$$L(V,\chi;t) = \exp\left(\sum_{r=1}^{\infty} N_r(V;\chi)\frac{t^r}{r}\right) \in \mathbb{C}[[t]].$$

指標の直交性と, F^r での固定点は $\mathbb{F}_{q^r}$-有理点であることから, $N_r(V) = \sum_{\chi\in\widehat{G}} N_r(V;\chi)$ であり, このことから, V の合同ゼータ関数は Artin L 関数の積に分解する.

例 3.2 (Artin L 関数と有限体上の超幾何の関係).

(i) Koblitz [7] は, $y^d = x^a(1-x)^b(1-\lambda x)^c$ を一般化した形の超曲面に対し, そこへのある群の作用 (次の節で考えるものと同じもの) を考え, その群の指標に付随する有理点の個数を有限体上の 1 変数超幾何で表した.

(ii) 著者は対角超曲面およびその特別な場合である Dwork 超曲面と呼ばれる射影多様体へのある有限群の作用を考え, その群の指標に付随する指標付き有理点の個数を有限体上の超幾何で表し, その系として, Artin L 関数を有限体上の超幾何で表している. さらに, その結果に Weil 予想を用いることで, 有限体上の特定の形の超幾何関数の体の拡大による挙動を与えている (詳しくは [10] を参照していただきたい).

(iii) 宮谷氏 [9] は, 対角超曲面をより一般化した超曲面の合同ゼータ関数を, 有限体上の超幾何で表している.

4 代数多様体と Appell-Lauricella 関数

本節では, いくつかの代数多様体の指標付き有理点の個数を, 有限体上の Appell-Lauricella 関数で表せた (すなわち, Artin L 関数と有限体上の超幾何の関係を与えた) ので, これを紹介する.

以降, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \kappa^\times$ とする. 次の κ 上のアファイン代数多様体を考える:

$$C_{D,\lambda} : y^d = x^a(1-x)^c\prod_{i=1}^{n}(1-\lambda_i x)^{b_i},$$

$$X_{D,\lambda} : y^d = \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_i}\cdot\Big(1-\sum_j x_j\Big)^c\Big(1-\sum_j \lambda_j x_j\Big)^a.$$

ただし, $d, a, b_1, \ldots, b_n, c \in \mathbb{Z}_{>0}$. 以降, $d \mid q-1$ とする. 1 の d 乗根のなす群 $\mu_d \subseteq \kappa^\times$ は, $y \mapsto \xi y$ ($\xi \in \mu_d$) によって, $C_{D,\lambda}$, $X_{D,\lambda}$ に作用する. $\zeta_d := \exp(2\pi i/d)$ とし, μ_d の生成元 ξ を一つ固定する. 指標群 $\widehat{\mu_d}$ は, 位数がちょうど d の指標

$$\chi : \mu_d \longrightarrow \mathbb{C}^\times; \xi \longmapsto \zeta_d$$

により生成される. 次に, 写像 $\theta_d : \kappa^\times \to \mu_d$ を,

$$\theta_d(a) = a^{\frac{q-1}{d}} \quad (a \in \kappa^\times)$$

で定義し,

$$\varphi_d := \chi\circ\theta_d \in \widehat{\kappa^\times}$$

とすると, これは位数 d の指標である. 定理 2.1 より, 次が得られる.

定理 4.1. (i) $\gcd(d,c)=\gcd(d,b_i)=1$ (for all i) とする. このとき, 各 $m=0,1,\dots,d-1$ に対し,

$$N_1(C_{D,\lambda};\chi^m) = \begin{cases} q & (m=0), \\ -j\big(\varphi_d^{ma},\varphi_d^{mc}\big)F_D^{(n)}\left(\begin{matrix}\varphi_d^{ma};\overline{\varphi_d}^{mb_1},\dots,\overline{\varphi_d}^{mb_n}\\ \varphi_d^{m(c+a)}\end{matrix};\lambda_1,\dots,\lambda_n\right) & (m\neq 0). \end{cases}$$

(ii) $\gcd(d,a)=\gcd(d,c)=1$ とする. このとき, 各 m に対し,

$$N_1(X_{D,\lambda};\chi^m) = \begin{cases} q^n & (m=0), \\ (-1)^n j(\varphi_d^{mb},\varphi_d^{mc})F_D^{(n)}\left(\begin{matrix}\overline{\varphi_d}^{ma};\varphi_d^{mb_1},\dots,\varphi_d^{mb_n}\\ \varphi_d^{m(b_1+\cdots+b_n+c)}\end{matrix};\lambda_1,\dots,\lambda_n\right) & (m\neq 0). \end{cases}$$

ただし, $j(\varphi_d^{mb},\varphi_d^{mc}) := j(\varphi_d^{mb_1},\dots,\varphi_d^{mb_n},\varphi_d^{mc})$ である.

注 4.2. Frechette-Swisher-Tu 氏ら [3] は, $C_{D,\lambda}$ の有理点の個数を, 有限体上の F_D の和で表している. 上の定理 (i) は, その精密化になっている.

証明の概略. (i) のみ示す ((ii) も同様に示せる). $f(x)=x^a(1-x)^c\prod_{i=1}^n(1-\lambda_i x)^{b_i}$ とおく. このとき各 $m=0,\dots,d-1$ に対し,

$$\begin{aligned} &N_1(C_{D,\lambda};\chi^m) \\ &= \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\chi^m(\xi^i)\#\{(x,y)\in C_{D,\lambda}(\overline{\kappa}) \mid \xi^{-i}F(x,y)=(x,y)\} \\ &= \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{d}\chi^m(\xi^i)\#\{(x,y)\in C_{D,\lambda}(\overline{\kappa}) \mid x\in\kappa,\ y^{q-1}=\xi^i \text{ or } y=0\} \\ &= \sum_{i=1}^{d}\chi^m(\xi^i)\#\{x\in\kappa \mid \theta_d(f(x))=\xi^i\} + \frac{1}{d}\#\{x\in\kappa \mid f(x)=0\}\sum_{i=1}^{d}\chi^m(\xi^i). \end{aligned}$$

したがって, $m=0$ に対しては

$$\begin{aligned} &N_1(C_{D,\lambda};\chi^m) \\ &= \sum_{i=1}^{d}\#\{x\in\kappa \mid \theta_d(f(x))=\xi^i\} + \#\{x\in\kappa \mid f(x)=0\} \\ &= \#\kappa = q. \end{aligned}$$

そして $m\neq 0$ に対しては, $\sum_{i=1}^{d}\chi^m(\xi^i)=0$ なので,

$$\begin{aligned} N_1(C_{D,\lambda};\chi^m) &= \sum_{i=1}^{d}\chi^m(\xi^i)\#\{x\in\kappa \mid \theta_d(f(x))=\xi^i\} \\ &= \sum_{x\in\kappa}\varphi_d^m(f(x)) \\ &= \sum_{x\in\kappa}\varphi_d^{ma}(x)\varphi_d^{mc}(1-x)\prod_{i=1}^{n}\varphi_d^{mb_i}(1-\lambda_i x). \end{aligned}$$

よって定理 2.1(i) より結果が得られる. □

同様の議論が, F_A, F_B, F_4 についても行える. 以下のような多様体を考える.

$$X_{A,\lambda} : y^d = \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_i}(1-x_i)^{c_i} \cdot \Big(1 - \sum_j \lambda_j x_j\Big)^a,$$

$$X_{B,\lambda} : y^d = \prod_{i=1}^{n} x_i^{b_i} \cdot \Big(1 - \sum_j x_j\Big)^c \prod_{k=1}^{n} (1-\lambda_k x_k)^{a_k},$$

$$X_{4,\lambda} : y^d = x_1^a x_2^b (1-x_1)^{c_1}(1-x_2)^{c_2}(1-\lambda_1 x_1)^{3d-(b+c_1+c_2)}(1-\lambda_2 x_2)^{3d-(a+c_1+c_2)}(1-\sum_{i=1}^{2}\lambda_i x_i)^{c_1+c_2}.$$

ただし, $a, a_1, \ldots, a_n, b, b_1, \ldots, b_n, c, c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ($X_{4,\lambda}$ では, $a, b, c_1, c_2 \leq d$). これら多様体にも同様に μ_d が作用する. 定理 2.2, 2.4 から, 次が得られる.

定理 4.3. (i) $gcd(d, a) = gcd(d, c_i) = 1$ (for all i) とする. このとき各 m に対し,

$$N_1(X_{A,\lambda}; \chi^m) = \begin{cases} q^n & (m=0), \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n} -j(\varphi_d^{mb_i}, \varphi_d^{mc_i}) \cdot F_A^{(n)}\left(\begin{matrix} \overline{\varphi_d}^{ma}; \varphi_d^{mb_1}, \ldots, \varphi_d^{mb_n} \\ \varphi_d^{m(b_1+c_1)}, \ldots, \varphi_d^{m(b_n+c_n)} \end{matrix}; \lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) & (m \neq 0). \end{cases}$$

(ii) $gcd(d, a_i) = gcd(d, c) = 1$ (for all i) とする. このとき, 各 m に対し,

$$N_1(X_{B,\lambda}; \chi^m) = \begin{cases} q^n & (m=0), \\ j\big(\varphi_d^{mb}, \varphi_d^{m(c-\sum_i b_i)}\big) F_B^{(n)}\left(\begin{matrix} \overline{\varphi_d}^{ma_1}, \ldots, \overline{\varphi_d}^{ma_n}; \varphi_d^{mb_1}, \ldots, \varphi_d^{mb_n} \\ \varphi_d^{m(b_1+\cdots+b_n+c)} \end{matrix}; \lambda_1, \ldots, \lambda_n\right) & (m \neq 0), \end{cases}$$

ただし, $j\big(\varphi_d^{mb}, \varphi_d^{m(c-\sum_i b_i)}\big)$ は Theorem 4.1 (ii) の記号と同様.

(iii) 定理 2.4 の状況に対応する仮定の下で, 各 m に対し,

$$N_1(X_{4,\lambda}; \chi^m) = \begin{cases} q^2 & (m=0), \\ j(\varphi_d^{ma}, \varphi_d^{mc_1}) j(\varphi_d^{mb}, \varphi_d^{mc_2}) F_4\big(\varphi_d^{ma}; \varphi_d^{mb}; \varphi_d^{m(a+c_1)}, \varphi_d^{m(b+c_2)}; \lambda_1(1-\lambda_2), \lambda_2(1-\lambda_1)\big) & \\ +R(\lambda_1, \lambda_2) & (m \neq 0). \end{cases}$$

ただし, 剰余項 $R(\lambda_1, \lambda_2)$ は

$$\begin{aligned} & j(\varphi_d^{m(c_1+c-2)}, \varphi_d^{mb}) \cdot \overline{\varphi_d}^{m(a+c_1)}(\lambda_1) \varphi_d^{mc_1}(\lambda_1 - 1) \overline{\varphi_d}^{mb}(\lambda_2) \\ & + j(\varphi_d^{m(c_1+c-2)}, \varphi_d^{ma}) \cdot \overline{\varphi_d}^{m(b+c_2)}(\lambda_2) \varphi_d^{mc_2}(\lambda_2 - 1) \overline{\varphi_d}^{ma}(\lambda_1) \\ & + \varphi_d^{m(a+b)}(-1) j(\varphi_d^{m(b-a-c_1)}, \varphi_d^{m(a-b-c_2)}) \cdot \overline{\varphi_d}^{m(a+c_1)}(\lambda_1) \overline{\varphi_d}^{m(b+c_2)}(\lambda_2), \end{aligned}$$

(剰余項のうち, はじめの 2 項が定理 2.4 の S_α, S_β に対応する部分).

定理 4.1, 4.3 の系として, これら多様体の Artin L 関数を有限体上の Appell-Lauricella 関数で記述できる.

5 今後の課題

今後の課題として, 以下のことを考えている.

(i) 定理 2.4 の仮定はいくつか外せないのか調べる.

(ii) $C_{D,\lambda}$ や $X_{*,\lambda}$ で非特異な場合かつ射影化したものを考えることで, Weil 予想を用いて有限体上の Appell-Lauricella 関数の体の拡大における挙動を調べたり, 関数の値の絶対値を評価する.

(iii) 多様体の有理点を見ることで, 有限体上の超幾何の間の関係式が得られないか調べる.

参考文献

[1] J. L. Burchnall, T. W. Chaundy. Expansions of Appell's double hypergeometric functions, I. Quart. J. Math. (Oxford), 1940, 11, 249-270

[2] A. S. Chetry, G. Kalita. Lauricella hypergeometric series $F_A^{(n)}$ over finite fields, arXiv:2011.02755v1, 2020.

[3] S. Frechette, H. Swisher, F. Tu. A cubic transformation formula for Appell-Lauricella hypergeometric functions over finite fields. arXiv:1701.04526v2, 19 Jan 2017.

[4] J. Greene. Hypergeometric functions over finite fields. Trans. Amer. Math. Soc., Volume 301(1), 1987, 77-101.

[5] B. He. A Lauricella hypergeometric series over finite fields. arXiv:1610.04473. 1 May 2017.

[6] N. M. Katz. *Exponential sums and differential equations*, Annals of Mathematics Studies, Volume 124. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[7] N. Koblitz. The number of points on certain families of hypersurfaces over finite fields. Compositio Math., tome 48, 1983, 3-23.

[8] D. McCarthy. Transformations of well-poised hypergeometric functions over finite fields. Finite Fields Appl., Volume 18(6), 2012, 1133-1147.

[9] K. Miyatani. Monomial deformations of certain hypersurfaces and two hypergeometric functions. Int. J. Number Theory, Volume 11(8), 2015, 2405-2430.

[10] A. Nakagawa. Artin L-functions of diagonal hypersurfaces and generalized hypergeometric functions over finite fields. arXiv:2111.15054, 2021.

[11] N. Otsubo, Hypergeometric functions over finite fields. arXiv:2108.06754, 2021.

[12] J.-P. Serre. Zeta and L functions. *Arithmetical Algebraic Geometry*, Harper and Row, New York, 1965, 82-92.

[13] L. J. Slater. *Generalized hypergeometric functions*. Cambridge University Press 1966.

[14] M. Tripathi, R. Barman. A finite field analogue of the Appell series F_4. arXiv. 2018.

楕円曲線から得られる代数幾何符号のゼータ関数について

名古屋工業大学大学院 工学専攻 情報工学系プログラム 情報数理分野
金子 尚弥 (Naoya KANEKO)

1 導入

数学では様々な分野でゼータ関数が考えられているが,1999 年に [1] において Iwan Duursma によって符号に対してもゼータ関数が定義され,[2] では (自己双対符号に対して) リーマン予想の類似も定式化された. また,1980 年代に Goppa は有限体上の代数曲線とその有理点から代数幾何符号と言われる符号を作った. 本講演では楕円曲線から得られる代数幾何符号のゼータ関数の性質, 特にリーマン予想についてわかったことを紹介する. 構成としては 2 節で符号理論の簡単な説明と符号のゼータ関数を定義してリーマン予想の類似を定式化し, 3 節では代数幾何符号を定義して一般的に成り立つ性質をみる. そしてメインの 4 節では楕円曲線から得られる代数幾何符号のゼータ関数を計算機を用いて具体的な計算をした結果やその考察を述べる.

2 符号のゼータ関数とリーマン予想

符号理論とは情報工学における 1 つの分野であり, コンピュータで通信する際に生じる情報の欠落や誤りなどを検出して修正する機能を持つ符号というものを研究する. ここでは, 符号理論に関する必要最低限のことをまとめる. 主な参考文献は [6],[7],[8] である. 以下では q は素数のべき乗とする.

定義 2.1. 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の n 次元ベクトル空間 $\mathbb{F}_q^n$ の部分空間 C を ($\mathbb{F}_q$上の) **線形符号**あるいは単に**符号**といい, C の元のことを符号語という. C の基底を $x_1, \cdots, x_k$ とするとき, それらを並べた $k \times n$ 行列を C の**生成行列**という. このとき C は生成行列 G を用いて

$$C = \{(a_1, \cdots, a_k)G \mid a_i \in \mathbb{F}_q\}$$

と表せる.

一般に符号 C が大きいほどより多くの情報を伝えることができ,$\mathbb{F}_q^n \setminus C$ が大きいほど誤り訂正の能力が高くなる. 符号理論では相反するこの 2 つの条件を満たすような効率のよい符号を作ることが目標である. 次に $\mathbb{F}_q^n$ に距離を定義する.

定義 2.2. $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{F}_q^n$ に対して

$$d(x, y) := \#\{1 \leq i \leq n \mid x_i \neq y_i\}$$

とする. ここで有限集合 S に対して $\#S$ は S の元の個数を表す. このとき $d(x, y)$ は $\mathbb{F}_q^n$ 上の距離と

なり, ハミング距離という. 符号 C の**最小距離** d を

$$d := \min\{d(x,y) \mid x,y \in C, x \neq y\}$$

で定める.

定義 2.3. $x \in \mathbb{F}_q^n$ に対して

$$\mathrm{wt}(x) := d(x,0) = \{1 \leq i \leq n \mid x_i \neq 0\}$$

を x の重さという. また, 符号 C の最小重み w を

$$w := \min\{\mathrm{wt}(x) \mid x \in C, x \neq 0\}$$

とする. $d(x,y) = d(x-y,0) = \mathrm{wt}(x-y)$ であることから符号の**最小距離と最小重みは一致している**ことに注意する.

定義 2.4. $\mathbb{F}_q^n$ の符号 C が k 次元で最小距離が d のとき $[n,k,d]$ 符号と表す. 符号理論での意味は k が大きいほど多くの情報を送信でき,d が大きいほど多くの誤りを訂正できる. また

$$C^{\perp} = \{x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n \mid x^t y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = 0 \ (\forall y = (y_1, \cdots, y_n) \in C)\}$$

は $[n, n-k, d^{\perp}]$ 符号であり C の**双対符号**という.

n,k,d の間には様々な制限が知られており, ここでは 1 つだけ紹介する.

定理 2.5. $[n,k,d]$ 符号 C は

$$d \leq n - k + 1$$

を満たす. これをシングルトン限界式という. また, この不等式が等号となる符号のことを MDS (***maximum distance separable***) **符号**という.

次に符号のゼータ関数を定義するために符号の重さの分布を表した重さ多項式 (weight enumerator) を定義する.

定義 2.6. 符号 C に対して

$$A_i := \#\{w \in C \mid \mathrm{wt}(w) = i\}$$

とするとき,n 次斉次多項式

$$A_C(x,y) := \sum_{i=0}^{n} A_i x^{n-i} y^i$$

を C の重さ多項式という.

定義 2.7. $[n,k,d]$ 符号 C に対して

$$\frac{P(T)}{(1-T)(1-qT)}(xT + (1-T)y)^n = \cdots + \frac{A_C(x,y) - x^n}{q-1} T^{n-d} + \cdots$$

を満たす高々 $n-d$ 次の多項式 $P(T) \in \mathbb{Q}[T]$ が一意的に存在する. この $P(T)$ を C の**ゼータ多項式**といい $Z(T) = P(T)/((1-T)(1-qT))$ を C のゼータ関数という.

この定義が表しているのは $P(T)$ をうまくとることで左辺を級数展開したときに T^{n-d} の係数に重さ多項式が現れるようにできるということである. 証明の概略としては $P(T) = a_0 + a_1T + \cdots + a_{n-d}T^{n-d}$ とすると定義の条件から $a_0, \cdots, a_{n-d}$ を未知数とする連立方程式が得られてその解が一意的に定まるという流れである (より詳しい証明として [4] を参照). ゼータ多項式 $P(T)$ の性質として次が知られている (証明は [3] を参照).

命題 2.8. $[n, k, d]$ 符号 C のゼータ多項式を $P(T)$ とし,C の双対符号である $[n, n-k, d^\perp]$ 符号 $C^\perp$ のゼータ多項式を $P^\perp(T)$ とする. $d^\perp \geq 2$ のとき
(1) $\deg P(T) = n + 2 - d - d^\perp$.
(2) $P(1) = 1$.
(3) $P^\perp(T) = q^g T^{g+g^\perp} P(1/qT)$.
ここで $g = n + 1 - k - d, g^\perp = n + 1 - k^\perp - d^\perp$ であり g を C の種数という (この名の由来は合同ゼータ関数の関数等式の類似からである).
(4) MDS 符号のゼータ多項式は 1 であり, その逆も成り立つ.

$C = C^\perp$ となるとき C を自己双対符号というが, このとき $P(T) = P^\perp(T)$ だから命題の (3) よりゼータ多項式は関数等式

$$P(T) = q^g T^{2g} P(1/qT)$$

を満たす. これは合同ゼータ関数の関数等式と同じ形である (合同ゼータ関数については 3 節で詳しく述べる). そこで Duursma は自己双対符号に対してリーマン予想の類似を合同ゼータ関数のリーマン予想に沿って定義したが, ここでは自己双対とは限らない一般の符号に対して次のようにリーマン予想の類似を定式化する.

定義 2.9. $\mathbb{F}_q$ 上の符号 C が**リーマン予想を満たす**とは,C のゼータ多項式の根の大きさが $1/\sqrt{q}$ となることである. つまり

$$P(\alpha) = 0 \implies |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{q}}$$

となることである.

4 節でみるようにリーマン予想を満たす符号も, 満たさない符号もどちらも存在する. このように符号によってリーマン予想の成立の可否が変わるが, リーマン予想を満たす符号の特徴づけはいまだにわかっていない. また, 符号のリーマン予想を考える意味としては次のように符号の最小距離の評価が得られることである (証明は [2]).

定理 2.10. $\mathbb{F}_q$ 上の $[n, k, d]$ 符号のゼータ多項式を $P(T) = a_0(1 + aT + \cdots)$ の形で表したとき

$$d \leq q + a$$

が成り立つ.

ここで $P(T)$ の根を $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ とすると

$$|a| = \left| \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{\alpha_i} \right|$$

だから根の大きさの評価は C の最小距離 d の評価を与えていることがわかる (先にも述べた通り, 符号理論において d は重要な量の 1 つであった). このように符号のリーマン予想は単なる類似だけではなくて, それ自身の意味ももっているのである.

3 代数幾何符号

ここでは有限体上の代数曲線とその有理点から符号が作れることを説明する. さらに, 合同ゼータ関数についても簡単に触れる. 2 節でみたように, 符号とは $\mathbb{F}_q^n$ の部分空間として抽象的に定義したので次のように簡単に作ることができる. $\mathbb{F}_q$ 上のベクトル空間 V と V から $\mathbb{F}_q^n$ への線形写像 $f : V \to \mathbb{F}_q^n$ があるときに $\mathrm{Im}(f)$ は符号となる. このとき f が単射ならば符号 $\mathrm{Im}(f)$ を V と同一視でき,V についてよく理解できているならそれを符号の性質として理解することもできる. 代数幾何符号とは V としてリーマン・ロッホ空間をとり f として有理点の代入写像とするものである. 代数曲線に関する基本的な定義などは紙面の都合により省略するが主な参考文献は [8] であるからそちらを参照されたい.

X を $\mathbb{F}_q$ 上の種数 g の非特異代数曲線として $P_1, \cdots, P_n$ を X の相異なる $\mathbb{F}_q$ 有理点とし, $D = P_1 + \cdots + P_n$ を因子とする. G を $\mathbb{F}_q$ 上で定義された因子として $D \cap G = \emptyset$ ($:\Leftrightarrow$ 代数閉包 $\bar{\mathbb{F}}_q$ 上で $\mathrm{Supp}\, D \cap \mathrm{Supp}\, G = \emptyset$) とする. このとき F_q 上のベクトル空間

$$L(G) := \{f \in \mathbb{F}_q(X)^\times \mid (f) + G > 0\} \cup \{0\}$$

を考える. ここで $\mathbb{F}_q(X)$ は X の $\mathbb{F}_q$ 上の有理関数体である. このとき線形写像 Φ_L を

$$\begin{array}{rccc} \Phi_L \colon & L(G) & \longrightarrow & \mathbb{F}_q^n \\ & \cup & & \cup \\ & f & \longmapsto & (f(P_1), \cdots, f(P_n)) \end{array}$$

のように定義する.$C_L = C_L(X, D, G) := \mathrm{Im}\ \Phi_L$ は符号となり**弱代数幾何符号**という. $\mathrm{Ker}\ \Phi_L = L(G - D)$ であるから, 特に $\deg G < \deg D = n$ なら Φ_L は単射となる. 代数幾何符号の性質として, 符号の次元と最小距離がある程度わかることが挙げられる.

定理 3.1. 上記の設定において $G > 0$ とする.C_L が $[n, k, d]$ 符号であるとき次が成り立つ.
(1) $\deg G < n$ ならば

$$k \geq \deg G - g + 1$$

$$n - \deg G \leq d \leq n - \deg G + g$$

となる.
(2) $2g - 2 < \deg G < n$ ならば

$$k = \deg G - g + 1$$

となる.

この定理の証明の概略は, 仮定から Φ_L が単射だから符号 C_L と $L(G)$ を同一視することができ, リーマン・ロッホの定理

$$\dim L(G) - \dim L(K_X - G) = \deg G + 1 - g$$

より $\dim L(G)$, したがって k がわかるということである (詳しい証明は [8] を参照). 定理 3.1 の (1) の仮定を満たすとき C_L を**代数幾何符号**といい,(2) の仮定を満たすとき**強代数幾何符号**という.

次に代数曲線に対して合同ゼータ関数を定義する. X を $\mathbb{F}_q$ 上で定義された代数曲線とし,N_ν を X の $\mathbb{F}_{q^\nu}$ 有理点の個数とする ($\nu = 1, 2, \cdots$). このとき

$$Z(X/\mathbb{F}_q, T) = \exp\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{N_\nu}{\nu} T^\nu\right)$$

を X の**合同ゼータ関数**という. 合同ゼータ関数は様々な性質が知られており, 関数等式やリーマン予想の類似を満たすことも証明されている (ヴェイユ予想という). 以下では特別な場合のみの主張を述べる.

定理 3.2. X を $\mathbb{F}_q$ 上の非特異完備代数曲線で種数が 1 であるとき

$$\begin{aligned} Z(X/\mathbb{F}_q, T) &= \frac{P(T)}{(1-T)(1-qT)} \\ P(T) &= (1-\alpha_1 T)(1-\alpha_2 T) = 1 + (N_1 - (1+q))T + qT^2 \\ Z(X/\mathbb{F}_q, T) &= Z(X/\mathbb{F}_q, 1/qT) \end{aligned}$$

が成り立つ. さらに $P(T)$ の根の大きさは $1/\sqrt{q}$ である.

この定理の関数等式から $P(T) = qT^2 P(1/qT)$ を得るがこれは符号のゼータ多項式の関数等式と類似していることがわかる. これまでのことから代数幾何符号を考えると, 合同ゼータ関数と符号のゼータ関数 (多項式) の 2 つのゼータが登場する. このとき 2 つのゼータ関数に何か関係があるのかと疑問に思ったのがこの研究を始めたきっかけである. 次の節ではこの問題を考えるために具体的な計算をした結果や考察を述べる.

4 楕円曲線から得られる代数幾何符号のゼータ関数

ここでは楕円曲線とその $\mathbb{F}_q$ 有理点を用いて代数幾何符号をつくる. このときにできる符号のゼータ関数 (多項式) は様々な性質をもつことがわかった. $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q) \neq 2, 3$ とするとき $\mathbb{F}_q$ 上の楕円曲線は

$$E_{a,b} : y^2 = x^3 + ax + b \ (a, b \in \mathbb{F}_q, 4a^3 + 27b^2 \neq 0)$$

の形となる. 今回の実験では, 楕円曲線の有理点が $\{P_1, \cdots, P_n, P_\infty\}$ (P_∞は無限遠点) のとき代数幾何符号の定義で現れた D と G はそれぞれ

$$\begin{aligned} D &= P_1 + \cdots + P_n \\ G &= 2P_\infty \end{aligned}$$

とする. このときにできる $[n, k, d]$ 代数幾何符号のパラメータは定理 3.1 から

$$n > 2 \text{ ならば } k = 2, n-2 \leq d \leq n-1$$

となる. よって**代数幾何符号を作る際は無限遠点も含めて 4 つ以上の有理点が必要となる**. また D, G をこのようにしたのは $L(G)$ の基底が $\{1, x\}$(x は x 座標を返す関数) のように単純なものがとれるからである. G の係数を大きくしたり D, G を全く別のものにすると他の例も考えることができる.

まずは $E_{a,b}$ の有理点の個数, さらには群構造を決定しておく. 具体的には計算機を用いて有理点を全て求め, 各有理点の位数を調べることで群の構造を決定する. $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/d_2\mathbb{Z}$ をそれぞれ $[d]$ や $[d_1,d_2]$ と表すことにすると $q=5,7$ のときそれぞれ表 1, 表 2 のようになる.

a \ b	0	1	2	3	4
0		[6]	[6]	[6]	[6]
1	[2,2]	[9]	[4]	[4]	[9]
2	[2]	[7]			[7]
3	[10]		[5]	[5]	
4	[2,4]	[8]	[3]	[3]	[8]

表 1　$E_{a,b}(\mathbb{F}_5)$ の群構造

a \ b	0	1	2	3	4	5	6
0		[2,6]	[3,3]	[13]	[3]	[7]	[2,2]
1	[8]	[5]		[6]	[10]		[11]
2	[8]	[5]		[6]	[10]		[11]
3	[2,4]	[12]	[9]	[6]	[10]	[7]	[4]
4	[8]	[5]		[6]	[10]		[11]
5	[2,4]	[12]	[9]	[6]	[10]	[7]	[4]
6	[2,4]	[12]	[9]	[6]	[10]	[7]	[4]

表 2　$E_{a,b}(\mathbb{F}_7)$ の群構造

各楕円曲線に対して重さ多項式 $A(x,y)$, ゼータ多項式 $P(T)$, リーマン予想の可否, 合同ゼータ多項式 (合同ゼータ関数の分子のこと) を求めるプログラムを作成したところ結果は $q=5,7$ のときそれぞれ表 3, 表 4 のようになった. 実は, 群構造が同じ楕円曲線からは同値な符号が得られる. ここで符号 C と C' が同値であるとは C の成分を入れ替えたり, スカラー倍することで C' にできることをいう. 符号が同値なとき, 符号の性質 (最小距離や重さ多項式, ゼータ多項式など) は同じになる.

これらの結果から次のようなことに気がつく.

- ($P(T)=1$ を除き) ゼータ多項式の係数に規則性がみられ (定数項):(T^2 の係数)$=1:q$ となっている. これは合同ゼータ多項式と同じ性質である.
- 同じ楕円曲線から作られるゼータ多項式と合同ゼータ多項式は一致してしない. しかし, ある楕円曲線のゼータ多項式を定数倍すると, 他の楕円曲線の合同ゼータ多項式になっているものがある.
- [4] と [5], [6] と [7] のようにゼータ多項式が一致するペアがある.
- ほとんどのゼータ多項式がリーマン予想を満たしている. 楕円曲線 $[2,4]$ から符号を作ったと

楕円曲線	$A(x,y)$	$P(T)$	RH の可否	合同ゼータ多項式
[2,2]	$x^3+12xy^2+12y^3$	1	○	$1-2T+5T^2$
[4]	$x^3+4x^2y+4xy^2+16y^3$	$\frac{1}{3}(1-3T+5T^2)$	○	$1-2T+5T^2$
[5]	$x^4+8x^2y^2+16y^4$	$\frac{1}{3}(1-3T+5T^2)$	○	$1-T+5T^2$
[6]	$x^5+8x^2y^3+4xy^4+12y^5$	$\frac{1}{5}(1-T+5T^2)$	○	$1+5T^2$
[7]	$x^6+12x^2y^4+12y^6$	$\frac{1}{5}(1-T+5T^2)$	○	$1+T+5T^2$
[2,4]	$x^7+8x^2y^5+12xy^6+4y^7$	$\frac{2}{21}(1+\frac{9}{2}T+5T^2)$	×	$1+2T+5T^2$
[8]	$x^7+12x^2y^5+4xy^6+8y^7$	$\frac{1}{7}(1+T+5T^2)$	○	$1+2T+5T^2$
[9]	$x^8+16x^2y^6+8y^8$	$\frac{1}{7}(1+T+5T^2)$	○	$1+3T+5T^2$
[10]	$x^9+16x^2y^7+4xy^8+4y^9$	$\frac{1}{9}(1+3T+5T^2)$	○	$1+4T+5T^2$

表 3

楕円曲線	$A(x,y)$	$P(T)$	RH の可否	合同ゼータ多項式
[2,2]	$x^3+18xy^2+30y^3$	1	○	$1-4T+7T^2$
[4]	$x^3+6x^2y+6xy^2+36y^3$	$\frac{1}{3}(1-5T+7T^2)$	○	$1-4T+7T^2$
[5]	$x^4+12x^2y^2+36y^4$	$\frac{1}{3}(1-5T+7T^2)$	○	$1-3T+7T^2$
[6]	$x^5+12x^2y^3+6xy^4+30y^5$	$\frac{1}{5}(1-3T+7T^2)$	○	$1-2T+7T^2$
[7]	$x^6+18x^2y^4+30y^6$	$\frac{1}{5}(1-3T+7T^2)$	○	$1-T+7T^2$
[2,4]	$x^7+12x^2y^5+18xy^6+18y^7$	$\frac{2}{21}(1+\frac{5}{2}T+7T^2)$	○	$1+7T^2$
[8]	$x^7+18x^2y^5+6xy^6+24y^7$	$\frac{1}{7}(1-T+7T^2)$	○	$1+7T^2$
[3,3]	$x^8+24x^2y^6+24y^8$	$\frac{1}{7}(1-T+7T^2)$	○	$1+T+7T^2$
[9]	$x^8+24x^2y^6+24y^8$	$\frac{1}{7}(1-T+7T^2)$	○	$1+T+7T^2$
[10]	$x^9+24x^2y^7+6xy^8+18y^9$	$\frac{1}{9}(1+T+7T^2)$	○	$1+2T+7T^2$
[11]	$x^{10}+30x^2y^8+18y^{10}$	$\frac{1}{9}(1+T+7T^2)$	○	$1+3T+7T^2$
[2,6]	$x^{11}+24x^2y^9+18xy^{10}+6y^{11}$	$\frac{4}{55}(1+\frac{23}{4}T+7T^2)$	×	$1+4T+7T^2$
[12]	$x^{11}+30x^2y^9+6xy^{10}+12y^{11}$	$\frac{1}{11}(1+3T+7T^2)$	○	$1+4T+7T^2$
[13]	$x^{12}+36x^2y^{10}+12y^{12}$	$\frac{1}{11}(1+3T+7T^2)$	○	$1+5T+7T^2$

表 4

きのゼータ多項式が $q=5$ のときはリーマン予想を満たしていないが $q=7$ のときには満たしている.

今は具体的な q で計算をしたが q が一般の場合を考えることで上記の観察結果にいくつか説明をつけることができた. ポイントは #Ker[2] で生成行列の分類ができることである. ここで [2] は楕円曲線の群構造ではなく, 楕円曲線の 2 倍写像のことである. 先に結論を述べると次のようになる.

定理 4.1. 上記の設定においてできる $[n,2,d]$ 符号のゼータ多項式は

$$P(T)=\begin{cases}\frac{1}{n-1}(1+(n-q-2)T+qT^2) & (\#\mathrm{Ker}[2]=1)\\ \frac{1}{n}(1+(n-q-1)T+qT^2) & (\#\mathrm{Ker}[2]=2)\\ \frac{n-3}{n(n-1)}\left(1+(n-q+\frac{n-1}{n-3})T+qT^2\right) & (\#\mathrm{Ker}[2]=4, \text{楕円曲線が } [2,2] \text{ でない})\\ 1 & (\text{楕円曲線が } [2,2])\end{cases}$$

となる.

証明のポイントは $L(G)$ の基底が単純なことから生成行列に規則性がみられることである. それによって重さを数えあげることができ, ゼータ多項式を計算できる. より詳しく述べると $L(G)$ の基底は $\{1,x\}$ であるから符号 C_L は $\Phi_L(1)$ と $\Phi_L(x)$ で生成され,C_L の生成行列は

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x(P_1) & x(P_2) & \cdots & x(P_n)\end{pmatrix}$$

となる. ここで楕円曲線の有理点の x 座標について考察する. $E(\mathbb{F}_q)$ を楕円曲線の $\mathbb{F}_q$ 有理点全体のなす集合とすると楕円曲線の定義方程式より明らかに $(x_0,y_0)\in E(\mathbb{F}_q)$ ならば $(x_0,-y_0)\in E(\mathbb{F}_q)$ である. つまり $y_0\neq 0$ ならば x 座標が等しい異なる有理点が存在する. y 座標が 0 となる有理点が 2 等分点であるが, 楕円曲線の 2 等分点の個数は 0,1,3 のいずれかとなる. $\#\mathrm{Ker}[2]=1$, つまり 2 等分点をもたないとき, 無限遠点を除いた有理点の集合 $\{P_1,\cdots,P_n\}$ は適切に添字を付け替えることによって $\{P_1,P_1',P_2,P_2',\cdots,P_m,P_m'\}$ で P_i と P_i' の x 座標が等しくなるようにできる (もちろん $n=2m$ である). 有理点の添字を入れ替えて符号を作ると集合としては異なるが, 符号の性質は変わらないから, この操作をしてもよいことに注意する. 生成行列は

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ a_1 & a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & a_m & a_m\end{pmatrix}\quad (2\leq m\leq q)$$

となる. ここで $a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{F}_q$ はどの 2 つも相異なる. よって符号語 x は $\alpha,\beta\in\mathbb{F}_q$ によって

$$x=(\alpha+\beta a_1,\alpha+\beta a_1,\alpha+\beta a_2,\alpha+\beta a_2,\cdots,\alpha+\beta a_m,\alpha+\beta a_m)$$

の形となる. 次に x の重さ $\mathrm{wt}(x)$ を考える. まず $\mathrm{wt}(x)=0$ となるのは $\alpha=\beta=0$ のときのみである. C_L の最小距離 (=最小重み) は $n-2$ だから $\mathrm{wt}(x)=n-2$ となるものを考える. つまり x の成分の中でちょうど 2 つだけ 0 になるものである. i を固定して

$$\alpha+\beta a_i=0$$

となるのは β を固定するごとに α が一意的に定まるから q 通りある. しかし $\beta=0$ とすると $\alpha=0$ となり, 先ほど数えたものになってしまうからこれは除外する必要がある. $a_1,\cdots,a_n$ はどの 2 つも相異なっていたから $j\neq i$ に対して

$$\alpha+\beta a_j\neq 0$$

である. i は 1 から m までの m 通りあるから $\mathrm{wt}(x)=n-2$ となる x は $m(q-1)$ 通りである. 次に $\mathrm{wt}(x)=n-1$ となる w は存在しないから, 残りはすべて重さ n である. よって重さ多項式は

$$A(x,y)=x^n+m(q-1)x^2y^{n-2}+(q^2-m(q-1)-1)y^n$$

となる. 重さ多項式がわかったからゼータ多項式が計算できる. その結果は

$$\begin{aligned} P(T) &= \frac{1}{2m-1}(1+(2m-2-q)T+qT^2) \\ &= \frac{1}{n-1}(1+(n-q-2)T+qT^2) \end{aligned}$$

となる. 2 等分点が 1,3 個のときも同様の考察で $P(T)$ を得られる.

この定理から計算結果の観察で気づいたことに対して説明ができる. まず, ゼータ多項式の係数の規則性で,(定数項):(T^2 の係数)$= 1 : q$ となっていることについてだが, これは定理 4.1 の $P(T)$ の形から明らかである. 次にゼータ多項式と合同ゼータ多項式が一致しないことについてだが, 定理 4.1 の設定だと合同ゼータ多項式が

$$1+(N_1-(q+1))T+qT^2 = 1+(n-q)T+qT^2$$

となるので $P(T)$ を定数倍して定数項が 1 になるようにしても T の係数が少しだけずれているから一致しないことがわかる. また, このズレがゼータ多項式と別の楕円曲線の合同ゼータ多項式が一致していることの原因であることもわかる. 次に楕円曲線が [4] と [5],[6] と [7] のようにゼータ多項式が一致するペアが存在したが, これについても定理 4.1 の $\#\mathrm{Ker}[2] = 1, \#\mathrm{Ker}[2] = 2$ のときの $P(T)$ の形をみれば等しくなっていることを確認できる. また $P(T)$ を明示的に求めることができたため, リーマン予想について考察することができる. 例えば $\#\mathrm{Ker}[2] = 1$ のとき $\mathbb{F}_q$ 有理点の個数 N_1 は $n+1$ 個だから

$$P(T) = \frac{1}{n-1}(1+(n-q-2)T+qT^2) = \frac{1}{n-1}(1+(N_1-q-3)T+qT^2)$$

であり,$P(T)$ の判別式が負であることがリーマン予想が成り立つための必要十分条件である. つまり

$$(N_1-q-3)^2 < 4q$$

であるが, これは Hasse-Weil の不等式

$$(N_1-q-1)^2 \leq 4q$$

と少しずれていることがわかる. つまり $\#\mathrm{Ker}[2] = 1$ のときにリーマン予想を満たさない例が存在する余地があるということである. 実際に $p = 23$ で $N_1 = 15$ となる楕円曲線 $y^2 = x^3 + x + 12$ を選ぶと不等式を満たさないことがわかる. 以上からリーマン予想は満たしたり満たさなかったり状況によってまちまちであることがわかった. また, 副産物として自己双対でない符号で $P(T)$ が関数等式を満たす例が作れた. 定理の $P(T)$ は

$$P(T) = qT^2P(1/qT)$$

を満たしていることが計算からわかる. 自己双対符号は n が偶数であることが必要条件であるから表 3,4 において自己双対でない符号はたくさんある.

最後に, 今回行った計算は代数幾何符号のほんの一例に過ぎず, 状況設定を変えることで他にも様々な計算ができる. もしかしたら今回の計算では見つからなかった面白い結果がまだまだ眠っているかもしれない.

参考文献

[1] Duursma, I. Weight distribution of geometric Goppa codes, Trans. Amer. Math. Soc. **351**, No.9 (1999), 3609-3639.

[2] Duursma, I. A Riemann hypothesis analogue for self-dual codes, DIMACS series in Discrete Math. and Theoretical Computer Science **56**(2001), 115-124.

[3] Duursma, I. From weight enumerators to zeta functions, Discrete Appl. Math. **111** (2001), 55-73.

[4] 知念宏司, 平松豊一. 線形符号のゼータ関数とリーマン予想の類似 (Iwan Duursma の仕事の紹介), 数理解析研究所講究録, 1361 巻, 2004 年, 91-101.

[5] Chinen, Koji. Zeta functions for formal weight enumerators and the extremal property. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **81** (2005), no. 10, 168–173.

[6] 内田興二. 有限体と符号理論, サイエンス社, 2000.

[7] F.J. Macwilliams; N.J.A. Sloane. The Theory of Error-Correcting Codes. North-Holland Publishing Co, 1977.

[8] 桂利行. 代数幾何入門, 共立出版, 1998.

Fano 多面体が定める K3 曲面に対する ミラー対称性について

金沢大学大学院 自然科学研究科 数物科学専攻 計算科学コース
松村朋直 (Tomonao MATSUMURA)

1 はじめに

K3 曲面は楕円曲線の高次元として考えることができる複素曲面で, その 2 次ホモロジー群は階数 22 の自由 $\mathbb{Z}$-加群である. この $\mathbb{Z}$-加群を交点形式によって格子としてみると符号 (3,19) の偶ユニモジュラー格子になっており, K3 格子と呼ばれている. K3 格子の部分格子で, 因子全体によって生成されるものを Néron–Severi 格子と呼ぶ.

K3 曲面にはミラー対称性と呼ばれる現象がある. Dolgachev([2]) はミラー対称性について研究するなかで, ミラー対の定義を Néron–Severi 格子を用いて与えた. 一方で Batyrev([1]) の方法によると 3 次元反射的多面体とその双対多面体とのそれぞれに対し, K3 曲面を構成できる. K3 曲面のミラー対と多面体の双対性に関係があると予想されている ([2]).

今回扱う K3 曲面は反射的多面体の中でも Fano 多面体と呼ばれるクラスの多面体から定まる K3 曲面である. 3 次元 Fano 多面体は $GL(3,\mathbb{Z})$ の作用を除き 18 個のみである. それらは頂点の数により分類されており, 頂点が 4 個のものが 1 つ, 5 個のものが 4 つ, 6 個のものが 7 つ, 7 個のものが 4 つ, 8 個のものが 2 つある. それらから定まる K3 曲面と, 双対多面体から定まる K3 曲面双方について Néron–Severi 格子の計算を行うことで予想 3.1 の証明が可能である.

小池 ([3]) は 3 次元 Fano 多面体の双対多面体から定まる K3 曲面について, その Néron–Severi 格子を決定した. この結果は 3 次元代数多様体についての Moĭšezon([4]) の定理を用いて示されている. この定理を用いるために多面体が Fano 多面体である必要がある.

Fano 多面体そのものから定まる K3 曲面の Néron–Severi 格子については, 4 頂点の場合は Narumiya–Shiga([5]) によって決定されている. また 5 頂点の場合においては Nagano([6]) によって決定されており, いずれの場合も予想 3.1 が正しいことが証明されている. 本研究の目的は残る 6, 7, 8 頂点の場合について Fano 多面体そのものから定まる K3 曲面の Néron–Severi 格子を計算し, 予想 3.1 が正しいことを証明することである.

本稿ではまず §2 で Fano 多面体から K3 曲面を定める方法に述べ, §3 で Néron–Severi 格子を用いたミラー対の定義, 主題となる予想について述べる. その後 §4 で小池の結果を紹介する. §5 では楕円曲面について触れ, 主結果を述べる. 最後に証明の流れについて, 今回扱う 3 次元 Fano 多面体の内の 1 つを使って実際の計算を追う形で説明する.

2 多面体が定める K3 曲面

定義 2.1. $\mathbb{R}^3$ 上の多面体のうち, 以下を満たすものを 3 次元 Fano 多面体と呼ぶ:

1. すべての頂点の座標が整数で書けている.
2. 原点を内点に持つ.
3. 任意の面は単体であり, それぞれの面を作る頂点は $\mathbb{Z}^3$ の基底になる.
4. 境界上の整数点は頂点のみである.

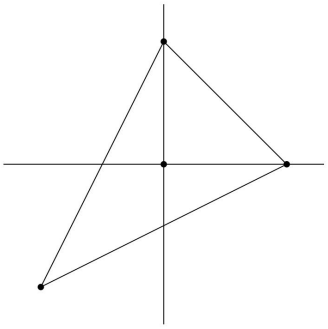


図 1

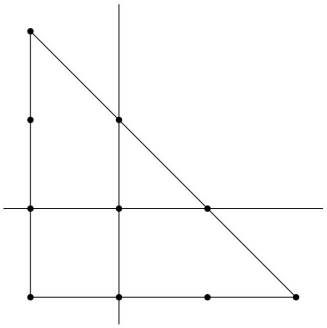


図 2

3 次元 Fano 多面体は $GL(3,\mathbb{Z})$ の作用を除き 18 個存在する.

3 次元 Fano 多面体から以下のようにして K3 曲面の族を定めることができる ([1]).

1. 多面体の頂点と内部と境界の整数点の座標 (x_1, x_2, x_3) それぞれに対して t_1, t_2, t_3 の単項式 ${t_1}^{x_1}{t_2}^{x_2}{t_3}^{x_3}$ を対応させる.
2. 対応させた単項式を複素係数 $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{C}^m$ を用いて

$$f = a_1{t_1}^{x_1}{t_2}^{x_2}{t_3}^{x_3} + \cdots + a_m{t_1}^{x_1}{t_2}^{x_2}{t_3}^{x_3}$$

   のように表す.
3. $\{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{C}^3 | f = 0\}$ で与えられる代数多様体は $(a_1, \ldots, a_m)$ をパラメータに持つ K3 曲面の族になる.

K3 曲面は以下のように定義される複素曲面である.

定義 2.2. 標準束が自明で単連結なコンパクト複素曲面を K3 曲面と呼ぶ.

上の定義により K3 曲面は 2 次元 Calabi–Yau 多様体であり, 1 次元 Calabi–Yau 多様体である楕円曲線の高次元化と考えることができる.

Batyrev の構成法について, 次元を 1 つ下げた場合で例を挙げる. この場合は 2 次元 Fano 多面体から定義式を定めるため, K3 曲面から次元が 1 落ちて楕円曲線の族が定まる.

例 2.1. 図 1 は 3 個の頂点 $(1,0), (0,1), (-1,-1)$ を持つ 2 次元 Fano 多面体である. 対応する多項式はそれぞれ $t_1, t_2, \frac{1}{t_1 t_2}$ である. 内部と境界の整数点は原点のみで, 対応する多項式は $1 = {t_1}^0{t_2}^0$. したがって多様体の定義式は

$$a_1 + a_2 t_1 + a_3 t_2 + \frac{a_4}{t_1 t_2} = 0$$

のように書ける. これは $(a_1, \ldots, a_4) \in \mathbb{C}^4$ をパラメータに持つ楕円曲線の族を定める.

次に双対多面体を定義する.

定義 2.3. 多面体 P に対し以下のようにして定まる多面体 P° を

$$P^\circ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \geq -1, \forall y \in P\}.$$

で定義し P の双対多面体と呼ぶ.

一般に Fano 多面体の双対多面体は Fano 多面体にならないが, すべての頂点が整数点になることが知られている. 3 次元 Fano 多面体の双対多面体からも Fano 多面体と同じように K3 曲面の族を定めることができる.

例 2.2. 図 2 で示した多面体は図 1 の多面体の双対多面体である. 単項式をとることができる整数点は 10 個あり, 次の楕円曲線の族

$$a_1 + \frac{a_2 t_1^2}{t_2} + \frac{a_3 t_1}{t_2} + \frac{a_4}{t_2} + \frac{a_5}{t_1 t_2} + a_6 t_1 + \frac{a_7}{t_1} + a_8 t_2 + \frac{a_9 t_2}{t_1} + \frac{a_{10} t_2^2}{t_1} = 0$$

を与える.

多面体から定まる K3 曲面の族はパラメータ $(a_1, \cdots, a_m) \in \mathbb{C}^m$ を持つが, 以降はこのパラメータが一般の位置にある K3 曲面について議論を進める.

3 ミラー対と Dolgachev の予想

Dolgachev の予想を述べるために K3 格子と Néron–Severi 格子について定義する.

定義 3.1. 任意の K3 曲面 $\mathfrak{S}$ について,2 次ホモロジー群 $H_2(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$ は階数 22 の自由 $\mathbb{Z}$-加群になる.
$H_2(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$ はカップ積により格子としてみることができる. この格子は交点形式

$$L_{\mathrm{K3}} = E_8(-1) \oplus E_8(-1) \oplus U \oplus U \oplus U$$

をもつ格子と同型.
ここで $E_8(-1)$ は一意的に存在する階数 8 の負定値偶ユニモジュラー格子で, U は階数 2 の偶ユニモジュラー双曲型格子である. L_{K3} は符号 (3,19) で階数 22 の偶ユニモジュラー格子で, この格子を K3 格子と呼ぶ.

定義 3.2. $\mathfrak{S}$ の因子によって生成される $H_2(\mathfrak{S}, \mathbb{Z})$ の部分格子を Néron–Severi 格子と呼び, $\mathrm{NS}(\mathfrak{S})$ と書く. また $\mathrm{NS}(\mathfrak{S})$ の直交補格子を $\mathrm{Tr}(\mathfrak{S}) = \mathrm{NS}(\mathfrak{S})^{\perp}$ と書く.

定義 3.3 (Dolgachev, [2])**.** K3 曲面 $\mathfrak{S}$, $\check{\mathfrak{S}}$ について, $\check{\mathfrak{S}}$ が $\mathfrak{S}$ のミラー対であるとは

$$\mathrm{Tr}(\mathfrak{S}) \cong \mathrm{NS}(\check{\mathfrak{S}}) \oplus U$$

が成り立つことをいう.

Dolgachev は K3 曲面のミラー対称性について研究し, ミラー対の格子構造の間の関係についての予想を得た ([2], Conjecture (8.6)). Dolgachev の予想は 3 次元 Fano 多面体の双対性とそれらから定まる K3 曲面のミラー対称性との関係を示唆する.

予想 3.1. 3 次元 Fano 多面体 P から定まる K3 曲面を S とする. P の双対多面体 P° から定まる K3 曲面が S のミラー対 $\check{S}$ と同型である.

本稿では 6 個以上の頂点をもつ 3 次元 Fano 多面体について扱う.

4 小池の結果

以下に 6 頂点以上の 3 次元 Fano 多面体と小池による結果をまとめる ([3]). 4, 5 頂点の 3 次元 Fano 多面体や Néron–Severi 格子の計算については [3], [5], [6] を参照.

定理 4.1 (K.Koike, [3])**.** 表 1 に示した 3 次元 Fano 多面体 P_j について, その双対多面体 P_j° から定まる K3 曲面の Néron–Severi 格子は L_j° で与えられる. ただし, P_j の欄に書かれた行列の縦ベクトルはその Fano 多面体の頂点の座標を示している.

表 1: 定理 1 の結果

j	P_j	L_j°
6	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
7	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
8	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
9	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
10	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$
11	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
12	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
13	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$
14	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
15	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$
16	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
17	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

j	P_j	L_j°
18	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

5 楕円曲面

主結果について述べる前に楕円曲面について説明しておく.

定義 5.1. k を代数的閉体とし, k 上の非特異射影曲面を X, k 上の非特異射影曲線を C とする. 全射正則写像 $f : X \to C$ が以下を満たすとき, $f : X \to C$ を楕円曲面という.

1. C から有限個の点を除いた C' についてファイバー $f^{-1}(v')$ $(v' \in C')$ は k 上の楕円曲線になる（これを一般ファイバーと呼ぶ）.
2. 任意のファイバー $f^{-1}(v)$ $(v \in C)$ は第一種例外曲線を含まない.

本稿では以下 $k = \mathbb{C}$ とする. 一般ファイバーでないファイバーを特異ファイバーと呼び, 8 種類に分類がなされている ([7]).

定義 5.2. $f : X \to C$ を楕円曲面とする. 正則写像 $\sigma : C \to X$ が $f \circ \sigma = \mathrm{id}_C$ を満たすとき σ を f の切断という.

楕円曲面 $f : X \to C$ の一般ファイバー, 特異ファイバーの既約成分 , 切断は X の因子であるから, これらを生成元にしてできる格子は Néron–Severi 格子の部分格子になる. 以下の 2 つの定理はこの部分格子を調べる上で重要である.

定理 5.1 (Shioda, [8])**.** $K = k(C)$ を k 上の 1 変数関数体とする. 楕円曲面 $f : X \to C$ が切断を持つとき, 一般ファイバーと同型な K 上の楕円曲線 E/K をとることができる. この対応により E の K-有理点全体 $E(K)$ と楕円曲面の切断全体は 1 対 1 に対応する.

定理 5.2 (T.Shioda, [8])**.** 一般ファイバー F, 切断 O, Q の交点数は以下のようになっている:

$$\begin{aligned} (F)^2 &= 0, \\ (O \cdot F) &= (Q \cdot F) = 1, \\ (O)^2 &= (Q)^2 = -2. \end{aligned}$$

特異ファイバーの既約成分の交点数は分類の型に対応した ADE 型のルート格子から決まる. また一般ファイバーと特異ファイバーの既約成分は交点を持たない.

定理 5.3 (主結果)**.** 3 次元 Fano 多面体 P_j と P_j から定まる K3 曲面 S_j について以下が成り立つ.

1. S_j には楕円曲面 $f_j : S_j \to C$ の構造が入り, その Néron–Severi 格子 $\mathrm{NS}(S_j)$ は f_j の一般ファイバー, 特異ファイバーの既約成分, 切断によって生成される.
2. P_j に対し予想 3.1 が成り立つ. すなわち

$$\mathrm{Tr}(S_j) = \mathrm{NS}(S_j)^\perp \cong L_j^\circ \oplus U.$$

本稿の執筆時点で筆者は $j = 7, 8, 10, 11, 13, 14, 15, 18$ の場合について証明を得ている. 他の場合においても似た方法で証明を与えることができると強く予想され, [9] にまとめる予定である.

6 Néron–Severi 格子の計算

6.1 Fano 多面体 P_{14} の場合

以下では P_{14} を例に主結果の証明を述べる. S_{14} は

$$a_1 + a_2t_1 + a_3t_2 + a_4t_3 + a_5\frac{1}{t_1t_3} + a_6\frac{1}{t_2} + a_7\frac{1}{t_1} + a_8\frac{1}{t_1t_2} = 0.$$

で与えられる.

変数 x, y, z と定数 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ を以下のようにおく:

$$x = \frac{a_2t_1}{a_1}, y = \frac{a_3t_2}{a_1}, z = \frac{a_4t_3}{a_1}.$$

$$\lambda_1 = \frac{a_2a_4a_5}{{a_1}^3}, \lambda_2 = \frac{a_3a_6}{{a_1}^2}, \lambda_3 = \frac{a_2a_7}{{a_1}^2}, \lambda_4 = \frac{a_2a_3a_8}{{a_1}^3}.$$

このように双有理変換を行うことで, 以下で定義された曲面

$$xyz(1 + x + y + z) + \lambda_1y + \lambda_2xz + \lambda_3yz + \lambda_4z = 0$$

を得る.

次に

$$x = \frac{2x_0(-x_0 + \lambda_4y + \lambda_3y^2)}{y(-\lambda_2x_0 - x_0y - x_0y^2 + \lambda_1y^3 - z_1)},$$

$$z = -\frac{-\lambda_2x_0 - x_0y - x_0y^2 + \lambda_1y^3 - z_1}{2y(-x_0 + \lambda_4y + \lambda_3y^2)}$$

のように双有理変換 $(x, y, z) \mapsto (x_0, y, z_1)$ をすることで, S_{14} を 1 変数関数体 $\mathbb{C}(y)$ 上の楕円曲線と見ることができる. 実際,

$$\begin{aligned}{z_1}^2 =& 4{x_0}^3 + ({\lambda_2}^2 + 2\lambda_2y - 4\lambda_4y + y^2 + 2\lambda_2y^2 - 4\lambda_3y^2 + 2y^3 + y^4){x_0}^2 \\ &+ (-2\lambda_1\lambda_2y^3 - 2\lambda_1y^4 - 2\lambda_1y^5)x_0 + {\lambda_1}^2y^6\end{aligned}$$

のように書ける. これは自明な切断 O(無限遠点) と以下のような切断 Q をもつ:

$$Q : y \mapsto (x_0, y, z_1) = (0, y, {\lambda_1y}^3).$$

次に特異ファイバーがどのようになっているかを調べる. さらに変数変換を行い ${x_0}^2$ の項を消去することで

$${z_1}^2 = 4{x_1}^3 + g_2(y)x + g_3(y)$$

を得る. $D_0 = {g_2}^3 - 27{g_3}^2$ とおくと D_0 は y について 16 次の多項式. $y = 0$ における $g_2(y)$ の零点の位数を $\mathrm{Ord}_{y=0}(g_2)$ のように表すと

$$(\mathrm{Ord}_{y=0}(g_2), \mathrm{Ord}_{y=0}(g_3), \mathrm{Ord}_{y=0}(D_0)) = (0, 0, 7)$$

のようになる.

また $y_1 = \frac{1}{y}$ とおいて変数変換を行うことで以下の表示を得る:

$${z_2}^2 = 4{x_2}^3 + h_2(y_1)x + h_3(y_1).$$

$D_\infty = {h_2}^3 - 27{h_3}^2$ とおくと D_∞ は y_1 について 17 次の多項式で,

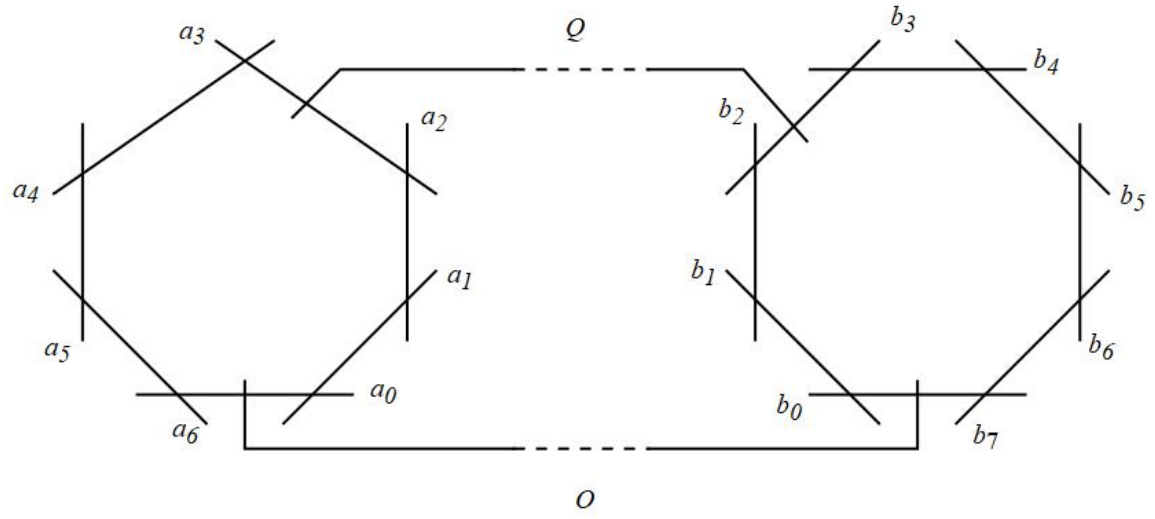


図 3　P_{14} の特異ファイバー

$$(\mathrm{Ord}_{y_1=0}(h_2), \mathrm{Ord}_{y_1=0}(h_3), \mathrm{Ord}_{y_1=0}(D_\infty)) = (0, 0, 8).$$

[10] の分類により S_{14} は $y = 0$ において I_7 型, $y = \infty$ において I_8 型の特異ファイバーを持ち, それ以外に 9 本の I_1 型特異ファイバーを持つことが分かる. 図 3 は特異ファイバーと切断の様子を表している.

$L_{14} =< F, O, Q, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7 >$ は $\mathrm{NS}(S_{14})$ の部分格子で, その交点行列は以下のようになっている.

$$L_{14} = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2
\end{pmatrix}$$

この行列の行列式は $\det(L_{14}) = -23$. この L_{14} が K3 曲面 S_{14} の Néron-Severi 格子 $\mathrm{NS}(S_{14})$ を生成することが次のようにしてわかる.

1. K3 曲面におけるトレリ型の定理と周期写像の全射性を用いることで $\mathrm{NS}(S_{14})$ の階数が 16 になることが証明される.
2. $[\mathrm{NS}(S_{14}) : L_{14}] = d$ となる自然数 d が存在する. 2 次形式は交点数により定まっていたので, $\det(L_{14}) = d^2 \det(\mathrm{NS}(S_{14}))$ と書けるが, $\det(L_{14}) = -23$ より $d = 1$.

6.2 他の Fano 多面体 P_j の場合

S_j の一般ファイバー, 特異ファイバーの既約成分, 切断から基底を選んで生成した格子 L_j の行列式 $\det(L_j)$ が平方数を含む場合もあるが, その場合も以下の定理を用いて E/K の有理点の性質を利用することで解決できると予想される.

定理 6.1 (T.Shioda, [8]). $f : X \to C$ を楕円曲面, $E(K)$ を f の一般ファイバー E/K の K-有理点全体とし, そのうち有限位数の点全体を $E(K)_{tor}$ と書く. このとき

1. $E(K) \to \mathrm{NS}(X)/T$ は群同型.
2. $E(K)_{tor} \cong \check{T}/T$.

ただし T は f の一般ファイバー, 自明な切断, 特異ファイバーの既約成分によって生成される部分格子. また $\check{T} = T \otimes \mathbb{Q} \cap \mathrm{NS}(X)$.

この定理により楕円曲面 X の Néron–Severi 格子 $\mathrm{NS}(X)$ は一般ファイバー, 特異ファイバーの既約成分, 切断によって生成されることが分かる. また $\mathrm{NS}(X)$ の交点形式から $E(K)$ の交点形式が定まり,$E(K)/E(K)_{tor}$ は非退化な偶格子になる. これを Mordell–Weil 格子と呼ぶ. Mordell–Weil 格子から得られる性質により $[\mathrm{NS}(S_j) : L_j] = 1$ になるように適切な基底をとることができる (詳細は [9] にまとめる).

7 予想 3.1 の証明

再び $j = 14$ の時について考える. 証明を完成させるには $L_{14}^{\perp}$ と $L_{14}^{\circ} \oplus U$ が同型であることを確かめればよい. そのために以下のような 2 次形式を定める.

定義 7.1. 格子 $\mathfrak{L}$ に対して $\mathfrak{L}^* = \mathrm{Hom}(\mathfrak{L}, \mathbb{Z})$ とすると, $A_{\mathfrak{L}} = \mathfrak{L}^*/\mathfrak{L}$ は有限アーベル群.

$A_{\mathfrak{L}}$ 上の 2 次形式 $q_{\mathfrak{L}} : A_{\mathfrak{L}} \to \mathbb{Q}/2\mathbb{Z}$ を以下のように定める:

$$q_{\mathfrak{L}}(na) = n^2 q_{\mathfrak{L}}(a), \forall n \in \mathbb{Z}, \forall a \in A_{\mathfrak{L}}.$$

$$q_{\mathfrak{L}}(a + a') - q_{\mathfrak{L}}(a) - q_{\mathfrak{L}}(a') \equiv 2b(a, a') \pmod{2\mathbb{Z}}.$$

ただし $b : A_{\mathfrak{L}} \times A_{\mathfrak{L}} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ は $\mathfrak{L}$ の交点形式から自然に定まる双線形形式.

定義 7.2. 符号が (s, t) であるような偶格子 $\mathfrak{L}$ について, $\mathfrak{L}$ の不変量を $(s, t, q_{\mathfrak{L}})$ とする.

このとき以下のような定理が定まる.

定理 7.1 (Nikulin, [11]). 非退化な偶格子 $\mathfrak{L}$ の原始的な埋め込み $\mathfrak{L} \hookrightarrow M$ について M が偶ユニモジュラー格子であるならば

$$q_{\mathfrak{L}^{\perp}} \cong -q_{\mathfrak{L}}.$$

定理 7.2 (Nikulin, [11]). 不変量 $(s, t, q_{\mathfrak{L}})$ をもつ偶格子 $\mathfrak{L}$ について

- $s > 0$
- $t > 0$
- $A_{\mathfrak{L}}$ の最小の生成系の元の個数が $\mathrm{rank}(\mathfrak{L}) - 2$ 以下

が成り立つとき, 不変量 $(s, t, q_{\mathfrak{L}})$ をもつ格子は同型を除き $\mathfrak{L}$ のみである.

$A_{\mathfrak{L}}$ は以下のように求めることができる. $\mathrm{rank}(\mathfrak{L}) = n$ とする.

$\mathfrak{L} =< e_1, \ldots, e_n >, \mathfrak{L}^* =< v_1, \ldots, v_n >$ とすると $v_1, \ldots, v_n$ を $i, j = 1, \ldots, n$ に対しクロネッカーのデルタを用いて

$$v_i e_j = \delta_{i,j}$$

となるようとることができる.

$$v_i = a_{i1}e_1 + \cdots + a_{in}e_n$$

とおくと

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & \cdots & e_1 \cdot e_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_n \cdot e_1 & \cdots & e_n \cdot e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & 1 \end{pmatrix}$$

が成り立つ. $\{a_{ij}\}$ は $\mathfrak{L}$ の交点行列の逆行列. この $\{a_{ij}\}$ を用いて $\mathfrak{L}^*$ を求めればよい.

まず $q_{L_{14}^\circ}$ を計算する.

$${L_{14}^\circ}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{23} & \frac{9}{23} & \frac{4}{23} & \frac{10}{23} \\ \frac{9}{23} & -\frac{6}{23} & \frac{5}{23} & \frac{1}{23} \\ \frac{4}{23} & \frac{5}{23} & -\frac{8}{23} & \frac{3}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{1}{23} & \frac{3}{23} & -\frac{4}{23} \end{pmatrix}$$

であるから ${L_{14}^\circ}^*$ の基底 v_1, v_2, v_3, v_4 は

$$\begin{aligned} v_1 &= -\frac{2}{23}e_1 + \frac{9}{23}e_2 + \frac{4}{23}e_3 + \frac{10}{23}e_4, \\ v_2 &= \frac{9}{23}e_1 - \frac{6}{23}e_2 + \frac{5}{23}e_3 + \frac{1}{23}e_4, \\ v_3 &= \frac{4}{23}e_1 + \frac{5}{23}e_2 - \frac{8}{23}e_3 + \frac{3}{23}e_4, \\ v_4 &= \frac{10}{23}e_1 + \frac{1}{23}e_2 + \frac{3}{23}e_3 - \frac{4}{23}e_4 \end{aligned}$$

と書ける. $v_2 \equiv 7v_1$, $v_3 \equiv 21v_1$, $v_4 \equiv 18v_1 \pmod{L_{14}^\circ}$ であるから $A_{L_{14}^\circ}$ は v_1 を生成元とする位数 23 の巡回群. v_1 について $q_{L_{14}^\circ}$ の値を計算すると

$$q_{L_{14}^\circ}(v_1) \equiv \frac{38}{23} \pmod{2\mathbb{Z}}. \tag{1}$$

同様の手順で $q_{L_{14}}$ も求める. L_{14}^* の基底を $w_1, \ldots, w_{16}$ とすると,

$$\begin{aligned} w_1 \equiv w_7 &\equiv 8w_4, & w_2 \equiv w_{12} &\equiv 4w_4, \\ w_3 &\equiv 19w_4, & w_5 &\equiv 2w_4, \\ w_6 &\equiv 3w_4, & w_8 &\equiv 13w_4, \\ w_9 \equiv w_{11} &\equiv 18w_4, & w_{10} &\equiv 9w_4, \\ w_{13} &\equiv 17w_4, & w_{14} &\equiv 7w_4, \\ w_{15} &\equiv 20w_4, & w_{16} &\equiv 10w_4 \end{aligned}$$

であるから $A_{L_{14}}$ は w_4 を生成元とする位数 23 の巡回群. w_4 について $q_{L_{14}}$ の値を計算すると

$$q_{L_{14}}(w_4) \equiv \frac{8}{23} \equiv -\frac{38}{23} \pmod{2\mathbb{Z}}.$$

(1) より

$$q_{L_{14}}(w_4) \equiv -q_{L_{14}^\circ}(v_1) \pmod{2\mathbb{Z}}.$$

したがって

$$-q_{L_{14}} \cong q_{L_{14}^\circ}. \tag{2}$$

$\mathrm{NS}(S_{14}) = L_{14}$ の符号は $(1, 15)$ であるから $\mathrm{Tr}(S_{14})$ の符号は $(2, 4)$. 定理 7.1 より

$$q_{\mathrm{Tr}(S_{14})} \cong q_{\mathrm{NS}(S_{14})^{\perp}} \cong -q_{\mathrm{NS}(S_{14})} \cong -q_{L_{14}}.$$

一方 L_{14}° の符号は $(1, 3)$ であるから $L_{14}^{\circ} \oplus U$ の符号は $(2, 4)$. また (2) から

$$q_{L_{14}^{\circ} \oplus U} \cong q_{L_{14}^{\circ}} \oplus q_U \cong q_{L_{14}^{\circ}} \cong -q_{L_{14}}.$$

$\mathrm{Tr}(S_{14})$ と $L_{14}^{\circ} \oplus U$ の不変量はどちらも $(2, 4, -q_{L_{14}})$ になるので定理 7.2 より

$$\mathrm{Tr}(S_{14}) \cong L_{14}^{\circ} \oplus U.$$

したがって $j = 14$ において予想 3.1 が成り立つ.

参考文献

[1] V. V. Batyrev, Dual polyhedra and mirror symmetry for Calabi–Yau hypersurfaces in toric varieties, J. Algebraic Geom. **3** (1994), no. 3, 493–535. MR1269718(95c:14046)

[2] I. V. Dolgachev, Mirror symmetry for lattice polarized K3 surfeces, J. Math. Sci. **81** (1996), no. 3, 2599–2630, Algebraic geometry, 4. MR1420220(97i:14024)

[3] 小池 健二, Polytope から定まる K3 曲面について, 千葉大学大学院自然科学研究科修士論文, 1998.

[4] B. G. Moĭšezon, Algebraic homology classes on algebraic varieties, Math. USSR-Isvestiha vol. 1 (1967), No. 2.

[5] N. Narumiya, H. Shiga, The mirror map for a family of K3 surfaces induced from the simplest 3 dimensional reflexive polytope, AMS, CRM Proc.Lect.Notes **30** (2001), 139–161.

[6] A. Nagano, Period differential equations for the families of K3 surfaces with two parameters derived from the reflexive polytopes, Kyushu J. Math, **66** (2012), 193–244.

[7] K. Kodaira, On compact complex analytic surfaces, II-III, Ann. of Math. **77** (1963), 563–626; yextbf78 (1963), 1–40.

[8] T. Shioda, On elliptic modular surfaces, J. Math. Soc. Japan, **24** (1972), no. 1, 20–59.

[9] T. Matsumura, Mirror symmetry for K3 surfaces derived from Fano polytopes, 金沢大学大学院自然科学研究科修士論文, in preparation.

[10] 志賀 弘典, K3 moduler 函数について, 数学 38(2) (1986), 36–40.

[11] V. Nikulin, Integral symmetric bilinear forms and some of their applications, Izv. Akad. Nauk SSSR **43** (1979), 111–177 ; Math. USSR lzvestija **14** (1980), 103–167.

Coxeter 配置を変形した超平面配置の特性準多項式の数え上げによる計算

名古屋工業大学 大学院 情報工学系プログラム　情報数理分野
森 友佑 (Yusuke MORI)

概要

神谷・竹村・寺尾により、整数係数の超平面配置を剰余類環上の超平面配置と見たときの補集合の点の数は準多項式になることが示されており、このような準多項式を特性準多項式という．同時に彼らにより，Coxeter 配置のうち A・B・C・D 型の特性準多項式は一般的に明示式が求められている．本稿では，D 型の Coxeter 配置を変形した超平面配置に対する特性準多項式の明示式を紹介する．証明には，Coxeter 配置の対称性を利用した数え上げによる手法を用いた．なお，本研究は中島規博氏との共同研究である．

1　導入

$\boldsymbol{C}$ を $m \times n$ 整数行列，長さ n の整数ベクトルを $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^n$ とし，$(m+1) \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} \coloneqq \begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix}$ を定める．$c_1, c_2, \cdots, c_n$ を $\boldsymbol{C}$ の列，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ を $\boldsymbol{A}$ の列とし，$\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ としたとき，超平面 H_{a_i} を次のように定義する．

$$H_i = H_{a_i} \coloneqq \{\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_m) \in \mathbb{Z}^m \mid \mathbf{z}c_i - b_i = 0\}.$$

行列 $\boldsymbol{A}$ によって定義される $\mathbb{Z}^m$ 上の超平面配置を次のように書くとする．

$$A = A_{\boldsymbol{A}} \coloneqq \{H_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

このような配置のうち，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ のものを中心的配置，$\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$ のものを中心的でない配置と呼ぶ．$q \in \mathbb{Z}_{>0} \coloneqq \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$ に対して $\mathbb{Z}_q \coloneqq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}_q^{\times} \coloneqq \mathbb{Z}_q \backslash \{0\}$ とし，任意の整数 a に対して $q-reduction$ $[a]_q \coloneqq a + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_q$ を定める．また整数要素を持つ行列かベクトルである $\boldsymbol{A}'$ に対して，$[\boldsymbol{A}']_q$ を各要素に対して $q-reduction$ としたものする．行列 $[\boldsymbol{A}]_q$ によって定義される超平面配置，すなわち A の $q-reduction$ を

$$\begin{aligned} H_{i,q} = [H_i]_q \coloneqq &\{\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_m) \in \mathbb{Z}_q^m \mid \mathbf{z}[c_i]_q - [b_i]_q = 0\}. \\ [A]_q \coloneqq &\{H_{i,q} \mid 1 \leq i \leq n\} \end{aligned}$$

と定める．次に A の補集合を $M_A(q)$ とする．

$$M_A(q) \coloneqq \{\mathbf{z} = (z_1, \cdots, z_m) \in \mathbb{Z}_q^m \mid \mathbf{z}[\boldsymbol{C}]_q - [\boldsymbol{b}]_q \in (\mathbb{Z}_q^{\times})^n\}.$$

このとき超平面配置の補集合の要素数 $|M_A(q)|$ は次のように記すことができる．

$$\begin{aligned}|M_A(q)| &= \left|\mathbb{Z}_q^m \setminus \bigcup_{i=1}^{n} H_{i,q}\right| \\ &= q^m - \left|\bigcup_{i=1}^{n} H_{i,q}\right|.\end{aligned}$$

定理 1.1 ([3], Theorem 3.1)**.** $\mathbb{Z}[t]$ を $\mathbb{Z}$ 上の多項式環とする．ある周期 $\rho \in \mathbb{Z}_{>0}$ と多項式 $\chi_A^1(t), \chi_A^2(t), \ldots, \chi_A^\rho(t) \in \mathbb{Z}[t]$ が存在して，$|M_q(S)|$ を以下のように書くことができる．

$$|M_A(q)| \coloneqq \begin{cases} \chi_A^1(q) & q \equiv 1 \ mod\ \rho, \\ \chi_A^2(q) & q \equiv 2 \ mod\ \rho, \\ \quad\vdots & \\ \chi_A^\rho(q) & q \equiv \rho \ mod\ \rho. \end{cases}$$

このような周期的な多項式は準多項式と呼ばれ，特に定理 1.1 のような準多項式を超平面配置の特性準多項式と呼び，$\chi_A^{quasi}(q) = |M_A(q)|$ と表す．特に定理 1.1 の $\chi_A^1(t)$ は単に特性多項式と呼ばれる．非負整数 $a \leq b, n \geq 1$ に対して $[a,b] \coloneqq \{k \in \mathbb{Z} | a \leq k \leq b\}$ と $[n] \coloneqq \{k \in \mathbb{Z} | 1 \leq k \leq n\}$ とする．このとき空でない集合 $J \subseteq [n]$ に対して，$\boldsymbol{A}_J \coloneqq \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_J \\ \boldsymbol{b}_J \end{pmatrix}$ を定める．ただし $J = \{j_1, \ldots, j_{|J|}\}, \boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ のとき $\boldsymbol{C}_J \coloneqq (c_{j_1}, \ldots, c_{j_{|J|}}), b_J \coloneqq (b_{j_1}, \ldots, b_{j_{|J|}})$ とする．$\ell(J) = rank\boldsymbol{C}_J, \ell'(J) = rank\boldsymbol{A}_J$ とし，$\boldsymbol{C}_J$ の単因子を $e_{J,1}, e_{J,2}, \ldots, e_{J,\ell(J)}$，$\boldsymbol{A}_J$ の単因子を $e'_{J,1}, e'_{J,2}, \ldots, e'_{J,\ell'(J)}$ とおき，$e_{J,1}|e_{J,2}|\ldots|e_{J,\ell(J)}$，$e'_{J,1}|e'_{J,2}|\ldots|e'_{J,\ell(J)}$ を満たすようにとる．次の定理のために以下の値を定義する．

$$\rho_C \coloneqq lcm\left(e_{J,\ell(J)} | \emptyset \neq J \subseteq [n]\right)$$

$$q_0 \coloneqq max\left(e_{J,\ell'(J)} | \ell'(J) = \ell(J) + 1, \emptyset \neq J \subseteq [n]\right)$$

$$\tilde{d}(q) \coloneqq \begin{cases} \prod_{j=1}^{\ell(J)} gcd(e_{J,j}, q) & if\ gcd(e_{J,j}, q) = gcd(e'_{J,j}, q)\ for\ all\ 1 \leq j \leq \ell(J) \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

このような ρ_C をその性質から *lcm period* と呼ぶ．また q_0 について，$\{\emptyset \neq J \subseteq [n] | \ell'(J) = \ell(J) + 1\} = \emptyset$ のとき $q_0 = 0$ とする．超平面配置 A の特性準多項式 $\chi_A^{quasi}(q)$ に対して以下のことがいえる．

定理 1.2 ([1], *Theorem* 2.1)**.**
$q > q_0$ に対して $|M_A(q)| = \chi_A^k(q)$ $(1 \leq k \leq \rho_C, q \in k + \rho_C\mathbb{Z}_{\geq 0})$ となるような m 次単多項式 $\chi_A^1(q), \chi_A^2(q), \ldots, \chi_A^{\rho_C}(q)$ が存在し，以下のようにかける．

$$|M_A(q)| = q^m + \sum_{J:\emptyset \neq J \subseteq [n], \ell'(J) = \ell(J)} (-1)^{\#J} \tilde{d}_J(q) q^{m-\ell(J)}$$

$\chi_A^k(q)$ は $gcd(\rho_C, k)$ の値に依存する．

$$\chi_A^k(q) = \chi_A^l(q) \ \ if\ gcd(\rho_C, k) = gcd(\rho_C, l)$$

また，特性準多項式の周期に対して，以下の定理が示されている．

定理 1.3 ([4], Theorem 1.1)**.**
$m \geq 1$ とし，$\rho_C, \rho_s \geq 1$ を $\rho_s | \rho_C$ であるように与える．このとき *lcm period* が ρ_C かつ *minimum period* が ρ_s であるような中心的でない配置が存在する．

lcm period が *minimum period* より真に大きくなるとき，その超平面配置の特性準多項式は *period collapse* が起きているという ([4])．

定理 1.4 ([4], Theorem 1.2)**.**
$m, n \geq 1$ に対して C が $m \times n$ 整数行列であるとき，$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$ が定義する超平面配置の特性準多項式の *lcm period* は常に *minimum period* である．

2 Coxeter 配置の特性準多項式

主に用いる A, B, C, D 型の Coxeter 配置定義する行列とその特性準多項式はすでに示されている ([1])．

命題 2.1. $m > 0$ とするとき，A 型 *Coxeter* 配置の係数行列 $\mathscr{A}_m$ と特性準多項式は以下の通りである．

$$\mathscr{A}_m = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 & & & & & \\ -1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & -1 & \cdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 0 & \cdots & -1 & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\mathscr{A}_m} = 1$$

$$\chi^1_{\mathscr{A}_m}(q) = \prod_{i=1}^{m}(q-i),\ q \in \mathbb{Z}_{>0}$$

命題 2.2. $m > 0$ とするとき，D 型 *Coxeter* 配置の係数行列 $\mathscr{D}_m$ と特性準多項式 $\chi^k_{\mathscr{D}_m}$ は以下の通

りである.

$$\mathscr{D}_m = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 & & & & & \\ \pm1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & & \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \pm1 & \cdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \pm1 & 0 & \cdots & \pm1 & & \pm1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\mathscr{D}_m} = 2$$

$$\chi^1_{\mathscr{D}_m}(q) = (q-m+1)\prod_{i=1}^{m-1}(q-2i+1)$$

$$\chi^2_{\mathscr{D}_m}(q) = \left(q^2-2(m-1)q+m(m-1)\right)\prod_{i=1}^{m-2}(q-2i)$$

命題 2.3. $m>0$ とするとき，B 型 *Coxeter* 配置の係数行列 $\mathscr{B}_m$ と特性準多項式 $\chi^k_{\mathscr{B}_m}$ は以下の通りである.

$$\mathscr{B}_m = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \vdots & \pm1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \pm1 & \cdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \pm1 & 0 & \cdots & \pm1 & & \pm1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\mathscr{B}_m} = 2$$

$$\chi^1_{\mathscr{B}_m}(q) = \prod_{i=1}^{m}(q-2i+1)$$

$$\chi^2_{\mathscr{B}_m}(q) = (q-m)\prod_{i=1}^{m-1}(q-2i)$$

命題 2.4. $m>0$ とするとき，C 型 *Coxeter* 配置の係数行列 $\mathscr{C}_m$ と特性準多項式 $\chi^k_{\mathscr{C}_m}$ は以下の通りである.

$$\mathscr{C}_m = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & & & & & \\ \vdots & \ddots & & & \vdots & \pm1 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \pm1 & \cdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \pm1 & 0 & \cdots & \pm1 & & \pm1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_{\mathscr{C}_m} = 2$$

$$\chi^1_{\mathscr{C}_m}(q) = \prod_{i=1}^{m}(q-2i+1)$$

$$\chi^2_{\mathscr{C}_m}(q) = \prod_{i=1}^{m}(q-2i)$$

3　Coxeter 配置を変形した配置の特性準多項式

この章では本稿の主結果を紹介する．前章までに示した表記を用いる．

3.1　A 型 Coxeter 配置からの変形

$m \in \mathbb{Z}_{>0}, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について，$0 \leq t \leq m$ とし，$s_1, \ldots, s_t \in \mathbb{Z}_{>0}$ を $s_t | \ldots | s_1$ を満たすように与える．このとき，A 型 Coxeter 配置の係数行列 $\mathscr{A}_m$ に，第 i 成分を s_i としそれ以外の成分を 0 とした t 個の列 $(i = 1, \ldots, t)$ を加えた以下の $m \times (m^2 - m + 2t)/2$ 行列を $\mathscr{A}_m(s_1, \ldots, s_t)$ とする．

$$\mathscr{A}_m(\boldsymbol{s}_t) = \mathscr{A}_m(s_1, \ldots, s_t) \coloneqq \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & \cdots & s_t & \mathscr{A}_m \\ \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$$

ただし $\boldsymbol{s}_t \coloneqq (s_1, \ldots, s_t)$ とかく．$t = 0$ のとき，これは単に A 型 Coxeter 配置の係数行列である．また，$\rho_{\mathscr{A}_m(\boldsymbol{s}_t)} = s_1$ である．$k | \rho_{\mathscr{A}_m(\boldsymbol{s}_t)}$ とする．任意の $i \in [1, t]$ に対して $d_i \coloneqq gcd(k, s_i)$ とする．ここで，$q \in k + \rho_{\mathscr{A}_m(\boldsymbol{s}_t)}\mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$d_i = gcd(k, s_i) = gcd(q, \rho_{\mathscr{A}_m(\boldsymbol{s}_t)}, s_i) = gcd(q, s_1, s_i) = gcd(q, s_i)$ と書き換えることができる．

このようなとき，$\mathscr{A}_m(s_1, \ldots, s_t)$ を係数行列とする超平面配置の特性準多項式は次のように書ける．

定理 3.1.
$k | \rho_{\mathscr{A}_m(\boldsymbol{s}_t)}$ とすると，

$$\begin{aligned} \chi^k_{\mathscr{A}_m(\boldsymbol{s}_t)}(q) =& (q - d_1)(q - d_2 - 1) \cdots (q - d_t - t + 1)(q - t)(q - t - 1) \cdots (q - m + 1) \\ =& \prod_{i=1}^{t} (q - d_i - i + 1) \prod_{i=t+1}^{m} (q - i + 1) \end{aligned}$$

である．ただし $q \in k + \rho_{\mathscr{A}_m(\boldsymbol{s}_t)}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ である．

3.2　D 型 Coxeter 配置からの変形

次に，r, t を $0 \leq r \leq t \leq m$ を満たす整数とする．$s_1 \ldots, s_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を $s_1, \ldots s_r$ が偶数，$s_{r+1}, \ldots s_t$ が奇数，$s_t | \ldots | s_1$ であるように与える．このとき $s_1, \ldots, s_t$ 第 i 成分を s_i とし，その他の成分を 0 とする t 個の列を D 型 Coxeter 配置の係数行列 $\mathscr{D}_m$ に加えた $m \times (m^2 - m + t)$ 行列を $\mathscr{D}_m(s_1, \ldots, s_t)$

とする．

$$\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)=\mathscr{D}_m(s_1,\dots,s_t)\coloneqq\begin{pmatrix} s_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & & & & \vdots & \\ \vdots & & s_r & & & \vdots & \\ \vdots & & & s_{r+1} & & \vdots & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots & \mathscr{D}_m \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & s_t & \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ \vdots & & & & & \vdots & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$$

この形を用いることで，先に定義した Coxeter 配置の係数行列は以下のように表すことができる．$t=0$ のとき，これは単に D 型 Coxeter 配置の係数行列であり，$\mathbf{1}_m\coloneqq(1,\dots,1),\mathbf{2}_m\coloneqq(2,\dots,2)\in\mathbb{Z}^m, z\in\mathbb{Z}$ と表すとすると

$$\mathscr{B}_m=\mathscr{D}_m(\mathbf{1}_m)$$
$$\mathscr{C}_m=\mathscr{D}_m(\mathbf{2}_m)$$

である．$\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)$ の *lcm period* は $\rho_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}=lcm(s_1,2)$ であり，この配置は中心的であるので $\rho_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}$ が *minimum period* である．$k|\rho_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}$ とする．$i\in[1,t]$ に対して $d_i\coloneqq gcd(k,s_i)$ とする．$q\in k+\rho_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}\mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．$d_i=gcd(k,s_i)=gcd(q,\rho_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)},s_i)=gcd(q,lcm(s_1,2),s_i)=gcd(q,s_i)$ と書き換えることができる．任意の数列 $\{f_i|i=1,\dots,n\}$ に対して $a,b\in[n]$ が $a>b$ であるとき，$\prod_a^b f_i=1,\sum_a^b f_i=0$ とする．

定理 3.2.

$k|\rho_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}$ とする．

・k が奇数のとき

$$\chi^k_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}(q)=\prod_{i=1}^{t}(q-d_i-2i+2)\cdot\left(\prod_{i=t+1}^{m}(q-2i+1)+(m-t)\prod_{i=t+1}^{m-1}(q-2i+1)\right)$$

・k が偶数のとき

$$\chi^k_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}(q)=\prod_{i=1}^{r}(q-d_i-2i+2)$$
$$\cdot\left\{\prod_{i=r+1}^{t}(q-d_i-2i+1)\cdot\left(\prod_{i=t+1}^{m}(q-2i)+2(m-t)\prod_{i=t+1}^{m-1}(q-2i)+(m-t)(m-t-1)\prod_{i=t+1}^{m-2}(q-2i)\right)\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{i=r+1}^{t}\prod_{j=1}^{i-1}(q-d_j-2j+1)\prod_{j=i+1}^{t}(q-d_j-2j+3)\right)\cdot\left(\prod_{i=t+1}^{m-1}(q-2i)+(m-t)\prod_{i=t+1}^{m-2}(q-2i)\right)\right\}$$

である．特に $t = m$ ならば

・k が奇数のとき

$$\chi^k_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}(q) = \prod_{i=1}^{m}(q - d_i - 2i + 2)$$

・k が偶数のとき

$$\chi^k_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}(q) = \prod_{i=1}^{r}(q - d_i - 2i + 2) \cdot \left(\prod_{i=r+1}^{t}(q - d_i - 2i + 1) + \sum_{i=r+1}^{m} \prod_{j=r+1}^{i-1}(q - d_j - 2j + 1) \prod_{j=i+1}^{m}(q - d_j - 2j + 3) \right)$$

である．ただし，$q \in k + \rho_{\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)}\mathbb{Z}_{>0}$

3.3 計算例

第 2 章の特性準多項式は定理 3.2 の式を用いても得られる．

命題 *2.2* の証明.

$t = 0$ のとき，$\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)$ は $\mathscr{D}_m$ である．

定理 3.2 で上の条件で考えると $\rho_{\mathscr{D}_m} = 2$ より

・$k = 1$ のとき

$$\begin{aligned}\chi^1_{\mathscr{D}_m}(q) =& \prod_{i=1}^{m}(q - 2i + 1) + m \prod_{i=1}^{m-1}(q - 2i + 1) \\ =& (q - 2m + 1 + m) \prod_{i=1}^{m-1}(q - 2i + 1) \\ =& (q - m + 1) \prod_{i=1}^{m-1}(q - 2i + 1)\end{aligned}$$

・$k = 2$ のとき

$$\begin{aligned}\chi^2_{\mathscr{D}_m}(q) =& \prod_{i=1}^{m}(q - 2i) + 2m \prod_{i=1}^{m-1}(q - 2i) + m(m-1) \prod_{i=1}^{m-2}(q - 2i) \\ =& \left((q - 2m)(q - 2m + 2) + 2m(q - 2m + 2) + m(m-1)\right) \prod_{i=1}^{m-2}(q - 2i) \\ =& \left(q^2 - 2(m-1)q + m(m-1)\right) \prod_{i=1}^{m-2}(q - 2i)\end{aligned}$$

□

命題 *2.3* の証明.

$r=0, t=m$ かつ $s_1=\cdots=s_m=1$ のとき，$\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)$ は $\mathscr{B}_m$ である．$d_1=\cdots=d_m=1$ であることに注意し，定理 3.2 で上の条件で考えると $\rho_{\mathscr{B}_m}=2$ より

・$k=1$ のとき

$$\begin{aligned}\chi^1_{\mathscr{B}_m}(q)=&\prod_{i=1}^{m}(q-1-2i+2)\\=&\prod_{i=1}^{m-1}(q-2i+1)\end{aligned}$$

・$k=2$ のとき

$$\begin{aligned}\chi^2_{\mathscr{B}_m}(q)=&\prod_{i=1}^{m}(q-1-2i+1)+\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{i-1}(q-1-2j+1)\prod_{i=i+1}^{m}(q-1-2j+3)\\=&\prod_{i=1}^{m}(q-2i)+\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{i-1}(q-2j)\prod_{i=i}^{m-1}(q-2j)\\=&\prod_{i=1}^{m}(q-2i)+\sum_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{m-1}(q-2j)\\=&\prod_{i=1}^{m}(q-2i)+m\prod_{j=1}^{m-1}(q-2j)\ =\ (q-m)\prod_{i=1}^{m-1}(q-2i)\end{aligned}$$

□

命題 *2.4* の証明.

$r=t=m$ かつ $s_1=\cdots=s_m=2$ のとき，$\mathscr{D}_m(\boldsymbol{s}_t)$ は $\mathscr{C}_m$ である．定理 3.2 で上の条件で考えると $\rho_{\mathscr{B}_m}=2$ より

・$k=1$ のとき，$d_1=\cdots=d_m=1$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\chi^1_{\mathscr{C}_m}(q)=&\prod_{i=1}^{m}(q-1-2i+2)\\=&\prod_{i=1}^{m}(q-2i+1)\end{aligned}$$

・$k=2$ のとき，$d_1=\cdots=d_m=2$ であることに注意すると

$$\begin{aligned}\chi^2_{\mathscr{C}_m}(q)=&\prod_{i=1}^{m}(q-2-2i+2)\\=&\prod_{i=1}^{m}(q-2i)\end{aligned}$$

□

参考文献

[1] H. Kamiya, A. Takemura, and H. Terao. The characteristic quasi-polynomials of the arrangements of root systems and mid-hyperplane arrangements. Arrangements, local systems and singularities, pages 177–190, Progr. Math., 283, Birkh ¨ auser Verlag, Basel, 2010.

[2] H. Kamiya, A. Takemura, and H. Terao. Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers. J. Algebr. Comb., 27(3):317–330, 2008.

[3] H. Kamiya, A. Takemura, and H. Terao. Periodicity of non-Central integral arrangements modulo positive integers. Ann. Comb., 15(3):449–464, 2011.

[4] A.Higashitani, T.N.Tran, and M.Yoshinaga. Period collapse in characteristic quasi-polynomials of hyperplane arrangements. Preprint.

ボゾン化の手法を用いたホップ・スーパー代数の分類について

岡山理科大学大学院 理学研究科 応用数学専攻
若尾亮太 (Ryota WAKAO)

概要

群やリー代数のある種の一般化であるホップ代数の研究は古くから盛んに行われている．近年，理論物理学からもたらされた「スーパー対称性」と呼ばれる非自明な対称性を取り入れた「ホップ・スーパー代数」への興味が高まってきている．本研究ではボゾン化と呼ばれる手法を用いることで，低次元のホップ・スーパー代数の分類が可能であることを明らかにした．本稿ではその手法や分類結果について説明する．

1 群の話

まずは群の復習から始める．集合 G と 2 項演算 $G \times G \to G; (g,h) \mapsto gh$ について，次の 3 条件を満たす G を群というのであった：

(1) $\forall g,h,k \in G,\ (gh)k = g(hk)$. [**結合法則**]
(2) $\exists e \in G$ s.t. $\forall g \in G,\ eg = g = ge$. [**単位元の存在**]
(3) $\forall g \in G,\ \exists g^{-1} \in G$ s.t. $gg^{-1} = e = g^{-1}g$. [**逆元の存在**]

さらに $\forall g,h \in G, gh = hg$ が成り立つとき G を**アーベル群**といい，特に G が有限集合である（$\#G < \infty$ と書く）とき，**有限群**というのだった．

有限次元ベクトル空間において，次元という不変量は重要な指標になっていたように，群においても位数は重要な指標となる．近年，**有限単純群**（正規部分群が自明なものしかない）の完全な分類がなされたのは有名である．分類に用いられる基本的な道具として，次のようなものが挙げられる：

事実 1.1. 有限群 G を任意にとり固定する．このとき，以下が成立：

(1) 部分群 $H \leqslant G$ に対して，伴って考えられる左剰余類 G/H の元の個数は

$$\#(G/H) = \frac{\#G}{\#H}$$

となる．特に，$\#H$ は必ず $\#G$ を割り切る．[**Lagrange の定理**]
(2) $\#G = p^n m$ のように素数 p と，p と互いに素な自然数 m で表示されているとする．このとき

$$\exists H \leqslant G, \quad \text{s.t.} \quad \#H = p^n$$

と部分的な Lagrange の定理の逆が成立する．[**Sylow の定理**]

(3) 任意の有限位数のアーベル群は適当な巡回群の直積と群同型となる．[**有限アーベル群の基本定理**]

例えば，これらから直ちに次のような特定のクラスの分類が完了する．

- $\#G$ が素数のとき G は巡回群.
- $\#G$ がある素数の 2 乗で表せるとき G はアーベル群.
- $\#G$ が相異なる 2 つの素数の積で表せるとき G は巡回群.

2 Hopf 代数の話

簡単のため標数 0 の代数閉体である基礎体 $\Bbbk$ を固定し，$\Bbbk$ 上のテンソル $\otimes_{\Bbbk}$ は $\otimes$ とかく．この章では Hopf 代数の定義を述べ，その性質や例を見ていく．

2.1 代数と余代数

単位的環（1 を持つ） A が **代数**（**algebra**）であるとは，積写像 $m : A \times A \to A ; (a, b) \mapsto ab$ が $\Bbbk$-**双線型**であることを要請していた．ここで，写像 m が $\Bbbk$-双線型であるとは，次の 4 条件を満たすものである： 任意の $a, a', b, b' \in A, k \in \Bbbk$ たちに対して

(1) $m(a + a', b) = (a + a')b = ab + a'b = m(a, b) + m(a', b)$.
(2) $m(ka, b) = (ka)b = k(ab) = k.m(a, b)$.
(3) $m(a, b + b') = a(b + b') = ab + ab' = m(a, b) + m(a, b')$.
(4) $m(a, kb) = a(kb) = k(ab) = k.m(a, b)$.

例えば，以下に挙げられるものたちはみな代数となる．

例 2.1.

- $\Bbbk$ 自身は通常の乗法で代数をなす.
- $n \in \mathbb{N}$ を自然数とする．正方行列環 $M_n(\Bbbk)$ は行列の積で代数をなす.
- X を不定元に持つ 1 変数多項式環 $\Bbbk[X]$ は多項式の積で代数をなす.
- 代数たち A, B に対し，$\Bbbk$ 上のテンソル積 $A \otimes B$ は次の積で代数をなす

$$(a \otimes b)(c \otimes d) \ = \ (ac \otimes bd) \quad \text{for} \quad a, c \in A,\, b, d \in B.$$

- 群 G に対し群環 $\Bbbk G = \bigoplus_{g \in G} \Bbbk g$ は次の積で代数をなす.

$$(\sum_{g \in G} x_g g)(\sum_{h \in G} y_h h) \ = \ \sum_{g,h \in G} x_g y_h gh \quad for \quad x_g, y_h \in \Bbbk.$$

代数 A の定義において双線型性は $\exists A \otimes A \to A; a \otimes b \mapsto ab$ とも考えてよい．テンソル積を用いて，代数を再定義すると次のようになる．

ベクトル空間 A が代数であるとは，線型写像たち $m : A \otimes A \to A$ と $u : \Bbbk \to A$ が存在し次の 2 条件を満たすものをいう：

(1) $m \circ (\mathrm{id}_A \otimes m) = m \circ (m \otimes \mathrm{id}_A)$ [**結合律**]
(2) $m \circ (\mathrm{id}_A \otimes u) = m \circ (u \otimes \mathrm{id}_A)$ [**単位律**]

さて，名のとおり，余代数とは代数の双対概念として定義される．

定義 2.2. ベクトル空間 C について．線型写像たち $\Delta : C \to C \otimes C$ と $\varepsilon : C \to \Bbbk$ が存在し次の 2 条件を満たすときこの C を**余代数**（**coalgebra**）という．Δ, ε はそれぞれ**余積**，**余単位**と呼ばれる：

(1) $(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \ = \ (\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$ [**余結合律**]
(2) $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta \ = \ (\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$ [**余単位律**]

余積 Δ に関して，写像 flip を $\mathrm{flip} : C \otimes C \to C \otimes C ; c \otimes c' \mapsto c' \otimes c$ と定める．写像の等号 $\mathrm{flip} \circ \Delta = \Delta$ が成り立つとき C は**余可換**であるという．

上の定義は形式的に代数の公理を反転させたものに他ならないが，十分多くの実用的な例を含む．

例 2.3.

- 基礎体 $\Bbbk$ は自明に余代数をなす．
- 群環 $\Bbbk G$ は任意の $g \in G$ に対して $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$ とすることで余代数をなす．
- 多項式環 $\Bbbk[X]$ は自然数 n に対して $\Delta(X^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{i} X^{n-k} \otimes X^n$, $\varepsilon(X^n) = \delta_{n,0}$ で余代数をなす．ここで，$\binom{n}{i}$ は二項係数であり，$\delta_{i,j}$ はクロネッカーデルタである．

代数 $A = (A, m, u)$ と余代数 $C = (C, \Delta, \varepsilon)$ に対して線形写像の空間 $\mathrm{Hom}(C, A)$ 上に次の積（**convolution 積**）を定める：

$$f * g \ = \ m \circ (f \otimes g) \circ \Delta \quad \text{for} \quad f, g \in \mathrm{Hom}(C, A).$$

命題 2.4. $\mathrm{Hom}(C, A)$ は convolution 積で代数をなし，単位元は $u \circ \varepsilon$ で与えられる．

Proof. 結合律は余積 Δ が余結合律を満たしていることからよい．単位元については，元 $c \in C$ に対して余積の像を $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$ と表示すると $f * (u \circ \varepsilon)(c) = \sum f(c_1) u(\varepsilon(c_2))$ となる．代数 A の単位元を 1_A とかくとき $u(\varepsilon(c_2)) = \varepsilon(c_2).1_A$ なので，f の線型性と余単位律から $f * (u \circ \varepsilon)(c) = f(\sum c_1 \varepsilon(c_2)) = f(c)$ が成立する．逆側も同様に $(u \circ \varepsilon) * f = f$ が示されるので，確かに単位元となることが分かる． □

2.2 Hopf 代数の定義と例

定義 2.5. 代数かつ余代数であるような H であって，次の 2 条件を満たす H を Hopf 代数と呼ぶ：

(1) 余積 Δ と余単位 ε は代数射．
(2) 恒等写像 $\mathrm{id}_H \in \mathrm{Hom}(H, H)$ が convolution 積に関して逆元をもつ．

この (2) の逆元は専ら $S \in \mathrm{Hom}(H, H)$ とかかれ**対合射**（**antipode**）と呼ばれる．

定義に出てくる antipode は群でいうところの逆元をとる操作に対応している（後で見る）．群に

おいては積の逆元は $(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1}$ と積の順序が入れ替わっていたように，一般の Hopf 代数の antipode も**反代数射**である．つまり次が成立する（[16, Proposition 4.0.1] を参照）：

$$\forall h, h' \in H, \quad S(hh') = S(h')S(h),\ S(1) = 1.$$

以下で Hopf 代数となるものの例を見ていこう．

例 2.6.

- 群環 $\Bbbk G$ は $S(g) = g^{-1}$ とすることで余可換な Hopf 代数をなす．
  実際，$g, h \in G$ に対し

  $$\Delta(gh) = gh \otimes gh = (g \otimes g)(h \otimes h) = \Delta(g)\Delta(h), \quad \varepsilon(gh) = 1 = \varepsilon(g)\varepsilon(h).$$

  よって代数射になることはよい．antipode は

  $$(\mathrm{id} * S)(g) = \mathrm{id}(g)S(g) = gg^{-1} = e = (u \circ \varepsilon)(g).$$

  よって確かに Hopf 代数となる．
- 多項式環 $\Bbbk[X]$ は $S(X) = -X$ とすることで可換かつ余可換な Hopf 代数をなす．
  実際，定め方から Δ, ε が代数射になることはよい．antipode は

  $$(\mathrm{id} * S)(X) \ = \ (\mathrm{id} \otimes S)(1 \otimes X + X \otimes 1) = S(X) + X = -X + X = 0 = (u \circ \varepsilon)(X).$$

  よってこの場合も Hopf 代数となる（S は反代数射であったことに注意する）．
- 有限群 G を固定する．群環 $\Bbbk G$ の双対空間 $(\Bbbk G)^* := \mathrm{Hom}(\Bbbk G, \Bbbk) = \bigoplus \Bbbk g^*$ は convolution 積により可換な代数（g^* は g の双対基底）であり，さらに Hopf 代数をなす．
  実際，余積 $\Delta(g^*)$ は G 内で $g_1 g_2 = g$ を満たすような $g_1^* \otimes g_2^*$ の和で定義する．すなわち

  $$\Delta(g^*) := \sum_{g_1 g_2 = g \in G} g_1^* \otimes g_2^*$$

  と定める．余単位 ε^* は $\varepsilon^*(g^*) = g^*(e)$ とすればよく，antipode S^* は $h \in G$ に対して $(S^*(g^*))(h) = g^*(h^{-1})$ とすることで Hopf 代数をなす．また単位元は $\sum_{g \in G} g^*$ である．
- ホップ代数たち H, H' に対してテンソル積 $H \otimes H'$ は余単位のテンソル積と，antipode のテンソル積と，次の余積により Hopf 代数をなす．

  $$H \otimes H' \to (H \otimes H') \otimes (H \otimes H')\,;\, h \otimes h' \mapsto \sum (h_1 \otimes h_1') \otimes (h_2 \otimes h_2').$$

  ここで，H, H' の余積をそれぞれ $H \to H \otimes H, h \mapsto \sum h_1 \otimes h_2$，$H' \to H' \otimes H'; h' \mapsto h_1' \otimes h_2'$ とかいた．

他にも や Lie 代数の普遍包絡環，テンソル代数，対称代数，量子群は Hopf 代数の例となっている．

ホップ代数 H に対して $g.\ell(H) := \{0 \neq g \in H \mid \Delta(g) = g \otimes g\} \subset H$ の元を **group-like 元**という．構造をみることで $g.\ell(\Bbbk G) = G$ や $g.\ell(\Bbbk[X]) = \{1\}$ がすぐ従う．

2.3 Hopf 代数の分類

有限群の分類は，§1 で見たように既に完成しているのであった．群環の例でみたように，Hopf 代数は群の一般化であることを考えると Hopf 代数の分類を行うというのは自然な発想である．群の構造を知るためには部分群を知ることが重要であった．Hopf 代数に関しても，“部分 Hopf 代数” の概念がある．すなわち，Hopf 代数の部分空間で，構造射たちをその部分空間に制限し Hopf 代数となるものを**部分 Hopf 代数**と呼ぶ．

有限次元 Hopf 代数の分類において強力な道具として次が知られている：

事実 2.7 ([10] Nichols-Zoeller の定理)**.**

有限次元 Hopf 代数 H について．その部分 Hopf 代数 $H' \subset H$ を任意にとり固定する．このとき，H は 自由 H'-加群となる．特に，整除関係 $\dim H' \mid \dim H$ が成立する．

このことから直ちに，$\dim H = p$ と素数次元になるときの部分 Hopf 代数 H' は $H' = \Bbbk$ または H のみと分かる．この主張は，群論における Lagrange の定理の一般化を与えており，実際，任意の有限群 G とその部分群 $H \leqslant G$ を固定すると，Hopf 代数とその部分 Hopf 代数として $\Bbbk H \subset \Bbbk G$ が考えられるが，次元を見るとこれは Lagrange の定理と一致することが分かる．

このように群環と同型な Hopf 代数を考えることは群を考えることと同値なので，Hopf 代数の分類理論において，群環及びその線型双対は**自明な Hopf 代数**と呼ばれる．

有限次元 Hopf 代数の分類は群の場合と比べて，今もなお活発に研究がなされている．例えば，次元が 2 個以下の素数の積で表せれる場合は，以下のような分類結果となっている：

- [19] 素数次元の Hopf 代数は全て自明な Hopf 代数.
- [9, 13] 奇素数 $p > 2$ であって $\dim H = 2p$ のとき H は自明な Hopf 代数.
- [8, 2, 12] 素数 p であって $\dim H = p^2$ のとき (i) **半単純**（すなわち「部分加群として自明なものしかない」ものたちの直和で H を表せる）な H は自明な Hopf 代数．(ii) 半単純でない H は Taft 代数と呼ばれる Hopf 代数.
- [7, 13, 3, 5, 17, 11, 14] 相異なる素数 p, q であって $\dim H = pq$ のとき (i) 半単純な H は自明な Hopf 代数．(ii) 半単純でない H は今だ部分的にしか分類がなされていない.

他の状況における分類の詳しいリストは [4] を参照されたい.

3 Hopf スーパー代数

3.1 Hopf スーパー代数の定義と例

スーパーとは，$\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ で次数付けられた対象の理論である．これまでは，通常のベクトル空間上における代数・余代数構造を考えてきた．その代わりとして $\mathbb{Z}_2$-graded ベクトル空間 $V = V_0 \oplus V_1$ を考え，この V を**スーパーベクトル空間**という．各部分空間には名前がついていて V_0 は **even part** と V_1 は **odd part** と呼ばれ，元 $v \in V_0 \cup V_1$ に関して $v \in V_0$ のときは $|v| := 0$, $v \in V_1$ の

ときは $|v| := 1$ と定め，これを v の **parity** と呼ぶ．スーパーベクトル空間たち全体と $\mathbb{Z}_2$-grading を保つ線型写像を考えることで，これは圏をなす．またスーパーベクトル空間たち V, W に対して $V \otimes W := (\bigoplus_{i+j=0} V_i \otimes W_j) \oplus (\bigoplus_{i+j=1} V_i \otimes W_j)$ と定めることでテンソル圏をなす．さらに次の**スーパー対称性**により対称テンソル圏をなす．

$$V \otimes W \to W \otimes V\,;\, v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v.$$

さて，この対称テンソル圏内の代数対象や，Hopf 代数対象をそれぞれ**スーパー代数**や **Hopf スーパー代数**と呼ぶ．例えば，Hopf スーパー代数 $H = H_0 \oplus H_1$ の余積は $\Delta(ab) = (-1)^{|a_{(2)}||b_{(1)}|} a_{(1)} b_{(1)} \otimes a_{(2)} b_{(2)}$ を満たすことに注意する．

例 3.1. $H := \bigwedge \Bbbk := \Bbbk[X]/(X^2) = \Bbbk 1 \oplus \Bbbk X$ with $H_1 = \Bbbk X$ は次で Hopf スーパー代数をなす：

$$\Delta(X) = 1 \otimes X + X \otimes 1, \quad \varepsilon(X) = 0, \quad S(X) = -X.$$

このとき関係式 $X^2 = 0$ は

$$\Delta(X^2) = \Delta(X)^2 = X^2 \otimes 1 - X \otimes X + X \otimes X + 1 \otimes X^2 = 0.$$

と確かに満たしていることが分かる．

3.2 Hopf スーパー代数の分類

言葉遣いとして H が **purely even** であるとは H の odd part が 0，つまり $H = H_0 \oplus H_1$ と表示したときに $H_1 = 0$ となるときをいう．この場合，$H = H_0$ となって，通常の Hopf 代数の話に帰着される．Hopf スーパー代数の分類にあたり，本質的なのは purely even でないものたちを知ることである．

Hopf 代数の分類に比べて，Hopf スーパー代数の分類はまだまだ始まったばかりであり，これまで主だった結果としては [1] による 4 次元以下の Hopf スーパー代数の分類が知られている：

定理 3.2 ([1])**.** purely even でない Hopf スーパー代数 H の同型類は，次元に応じて以下のように分類される：

$$\begin{aligned}
\dim H = 2 \quad &\Longrightarrow \quad \textstyle\bigwedge \Bbbk = \Bbbk[X]/(X^2) \text{ のみ} \\
\dim H = 3 \quad &\Longrightarrow \quad \text{存在しない} \\
\dim H = 4 \quad &\Longrightarrow \quad \mathcal{H}^{(0)}, \textstyle\bigwedge \Bbbk^2, \mathcal{H}^{(1)}, \mathcal{H}^{(2)}, \mathcal{H}^{(3)} \text{の 5 つ}
\end{aligned}$$

上に出てくる Hopf スーパー代数 $\mathcal{H}^{(0)}, \bigwedge \Bbbk^2, \mathcal{H}^{(1)}, \mathcal{H}^{(2)}, \mathcal{H}^{(3)}$ は代数として

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{(0)} &= \Bbbk[x,y]/(x^2+y^2-1, xy) \\
\textstyle\bigwedge \Bbbk^2 &= \Bbbk\langle x,y\rangle/(x^2, y^2, xy+yx) \\
\mathcal{H}^{(1)} &= \Bbbk\langle G,X\rangle/(G^2-1, X^2, GX-XG) \\
\mathcal{H}^{(2)} &= \Bbbk\langle G,X\rangle/(G^2-1, X^2, GX+XG) \\
\mathcal{H}^{(3)} &= \Bbbk\langle G,Y\rangle/(G^2-1, Y^2, GY-YG)
\end{aligned}$$

と定義され（ただし記号 $\Bbbk\langle x,y\rangle$ は x,y で生成される自由代数を表す），余積はそれぞれ次のように定まっている：

- $\mathcal{H}^{(0)}$ の場合：$\Delta(x)=x\otimes x-\sqrt{-1}y\otimes y$, $\Delta(y)=x\otimes y+y\otimes x$.
- $\bigwedge \Bbbk^2$ の場合：$\Delta(x)=1\otimes x+x\otimes 1$, $\Delta(y)=1\otimes y+y\otimes 1$.
- G は $\Delta(G)=G\otimes G$.
- X,Y は $\Delta(X)=X\otimes G+1\otimes X, \Delta(Y)=Y\otimes G+1\otimes Y$.

この主張の [1] による証明はコンピューターを用いることで，Hopf スーパー代数の構造をなすような生成元と関係式を総当たり法で導き出すという方法でなされていた．しかし，この手法ではより高次元を行うのはより困難であるという問題点があった．そこで本研究では，より理論的に “ボゾン化” と呼ばれる手法を用いて，Hopf スーパー代数の分類を行う．

3.3 ボゾン化（bozonization）について

一般に群 G がとその作用が入った群 N が与えられたとき，新たに半直積群 $N\rtimes G$ を考えることが出来たのであった．同様にして，Hopf 代数 K とその “作用” が入った Hopf 代数 H が与えられたとき，**smash 積**と呼ばれる新たな Hopf 代数 $K\#H$ を考えることが出来る．このような一般論は Radford[15] によって詳しく研究がなされている．

Hopf スーパー代数 H に対して，群環 $\Bbbk\mathbb{Z}_2$ は parity として “作用” している．つまり，$\mathbb{Z}_2=\langle\sigma\rangle$ と乗法的に表示するとき，$h=h_0+h_1\in H=H_0\oplus H_1$ と $i=0,1$ に対して，$\sigma^i\cdot h:=h_0+(-1)^i h_1$ で与えられる．実は smash 積はこの状況においても，次のように定義することができる．

定義 3.3. Hopf スーパー代数 H に対してテンソル積 $H\otimes\Bbbk\mathbb{Z}_2$ 上に積，単位元をそれぞれ

$$(a\otimes\sigma^i)(b\otimes\sigma^j):=a(b_0+(-1)^i b_1)\otimes\sigma^{i+j},\qquad 1_H\otimes 1_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$$

と入れる．ただし，$b=b_0+b_1\in H_0\oplus H_1$ と表示しており $1_H,1_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$ はそれぞれの単位元である．さらに余積，余単位をそれぞれ

$$\widehat{\Delta}(a\otimes\sigma^i):=(a_{0(1)}\otimes\sigma^i)\otimes(a_{0(2)}\otimes\sigma^i)+(a_{1(1)}\otimes\sigma^{i+1})\otimes(a_{1(2)}\otimes\sigma^i),\qquad \varepsilon_H\otimes\varepsilon_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$$

と入れる．ただし，余積を $\Delta(a)=a_{(1)}\otimes a_{(2)}$ と表示しており $\varepsilon_H,\varepsilon_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$ はそれぞれの余単位である．これを $\hat{H}:=H\otimes\Bbbk\mathbb{Z}_2$ とかき H の $\Bbbk\mathbb{Z}_2$ による**ボゾン化**と呼ぶ．

ボゾン化された $\hat{H}$ は（スーパーでない通常の）Hopf 代数をなし，antipode は次で与えられる：

$$\hat{S}:\hat{H}\to\hat{H}\,;\,a\otimes\sigma^i\mapsto(-1)^{i+1}S_H(a)\otimes\sigma^{i+|a|}.$$

ここで S_H は H の antipode である．

Hopf スーパー代数 H に対して，$g.\ell(H)=\{0\neq g\in H_0\mid\Delta(g)=g\otimes g\}$ とおけば，ボゾン化された $\hat{H}$ の group-like 元全体は次のように分解する：

$$g.\ell(\hat{H})\cong g.\ell(H)\times\mathbb{Z}_2.$$

次の命題は証明は単純だが，本稿において基本的である．

命題 3.4. purely even でない Hopf スーパー代数 H について．ボゾン化 $\hat{H}$ は非可換かつ非余可換.

Proof. 仮定から $0 \neq x \in H_1$ をとり固定する．積のほうは

$$(x \otimes \sigma)(1 \otimes \sigma) = (x \otimes e) \neq -(x \otimes e) = (1 \otimes \sigma)(x \otimes \sigma)$$

となり非可換となる．また余積のほうは

$$\hat{\Delta}(x \otimes \sigma) = (x_{(1)} \otimes e) \otimes (x_{(2)} \otimes \sigma)$$

となり明らかに非余可換となる． □

3.4 主結果

次元が 3 である purely even でない Hopf スーパー代数は [1] らの計算によると存在しないことが分かっていたが，ボゾン化の手法を用いることで，この結果を含む次の結果を得ることが出来た.

定理 3.5. purely even でない奇素数次元の Hopf スーパー代数は存在しない.

Proof. 背理法で，$\dim H = p > 2$ となる Hopf スーパー代数 H が存在したと仮定する．このとき，ボゾン化 $\hat{H}$ の次元は $\dim \hat{H} = 2p$ である．一方で $2p$ 次元の Hopf 代数は [9, 13] から，自明な Hopf 代数しかないのだった．すなわち $\#G = 2p$ を満たす群 G であって $\hat{H} = \Bbbk G$ または $(\Bbbk G)^*$ のいずれかとなる．しかし $\Bbbk G, (\Bbbk G)^*$ はそれぞれ余可換，可換であったのでこれは命題 3.4 に矛盾する． □

次に，4 次元の purely even でない Hopf スーパー代数 H を考える．このとき $\dim \hat{H} = 8$ となるが，既に 8 次元の Hopf 代数は [7, 18] によって分類がなされている．そこで，逆にこの分類結果を用いることによってボゾン化する前の H の構造を決定することができ，以下のような [1] の結果より詳細な分類を得ることができた.

定理 3.6. purely even でない 4 次元 Hopf スーパー代数 H は次のいずれかに同型となる.

$$\hat{H}\text{が半単純} \Longrightarrow H = \mathcal{H}^{(0)}$$
$$\hat{H}\text{が半単純でない} \Longrightarrow H = \bigwedge \Bbbk^2, \mathcal{H}^{(1)}, \mathcal{H}^{(2)}, \mathcal{H}^{(3)}.$$

さらにこれらのボゾン化は次の Hopf 代数同型を与える.

$$\widehat{\mathcal{H}^{(0)}} = \mathcal{A}, \quad \widehat{\bigwedge \Bbbk^2} = A_{C_2}, \quad \widehat{\mathcal{H}^{(2)}} = \widehat{\mathcal{H}^{(3)}} = A_{C_2 \times C_2}$$

ここで，$\mathcal{A}$ の定義は [7] また，A_{C_2} および $A_{C_2 \times C_2}$ の定義は [18] を参照.

参考文献

[1] S. Aissaoui and A. Makhlouf, *On classification of finite-dimensional superbialgebras and Hopf superalgebras*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **10** (2014), Paper 001, 24 pp.

[2] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *Hopf algebras of order p^2 and braided Hopf algebras of order p*, J. Algebra **199** (1998), no. 2, 430–454.

[3] P. Etingof and S. Gelaki,*Semisimple Hopf algebras of dimension pq are trivial*, J. Algebra **210** (1998), 664–669.

[4] M. Beattie and G. A. García, *Classifying Hopf algebras of a given dimension*, Contemp. Math., **585**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2013).

[5] S. Gelaki and S. Westreich, *On semisimple Hopf algebras of dimension pq*, Proc. Am. Math. Soc. **128** (2000), 39–47. (Corrigendum: Proc. Am. Math. Soc. 128 (2000), 2829–2831.)

[6] A. Masuoka, *Some further classification results on semisimple Hopf algebras*, Comm. Algebra **24** (1996), 307–329.

[7] A. Masuoka, *Semisimple Hopf algebras of dimension 6,8*, Israel J. Math. **92** (1995), 361–373.

[8] A. Masuoka, *The p^n theorem for semisimple Hopf algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** no. 3 (1996), 735–737.

[9] A. Masuoka, *Semisimple Hopf algebras of dimension* $2p$, Comm. Algebra **23** (1995), 1931–1940.

[10] Nichols, W.and Zoeller,M.: *A Hopf algebra freeness theorem*, Amer. J. Math. **111** (1989), 381-385.

[11] S. Natale, *On semisimple Hopf algebras of dimension pq^2* , II, Algebr. Represent. Theory **5** (3), (2001), 277–291.

[12] S-H. Ng, *Non-semisimple Hopf algebras of Dimension p^2*, J. Algebra **255**, no. 1 (2002), 182–197.

[13] S-H. Ng, *Hopf algebras of dimension* $2p$, Proc. Amer. Math. Soc. **133**, no. 8 (2005), 2237–2242 (electronic).

[14] S-H. Ng, *Hopf algebras of dimension pq*, II, J. Algebra **319**, no. 7 (2008), 2772–2788.

[15] D. Radford,*The structure of Hopf algebras with a projection*, J. Algebra **92** (1985), 322-347.

[16] M. E.Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin, New York (1969).

[17] Y. Sommerhäuser, *Yetter-Drinfel' d Hopf algebras over groups of prime order*, Lecture Notes in Mathematics, 1789. Springer-Verlag, Berlin, 2002. iv+158 pp.

[18] D. Ştefan, *Hopf algebras of low dimension*, J. Algebra **211** (1999), 343–361.

[19] Y. Zhu, *Hopf algebras of prime dimension*, Int. Math. Res. Not. **1** (1994), 53–59.

多重ゼータ値と多重ゼータスター値を補間する級数の巡回和公式

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
木村藍貴 (Aiki KIMURA)

概要

多重ゼータ値および多重ゼータスター値は, どちらも順序付きの正整数の組に対して収束多重級数で定義される実数である. 多重ゼータ値または多重ゼータスター値全体が有理数体上で生成する代数の構造解明は重要な課題であり, 多重ゼータ値や多重ゼータスター値の間に成り立つ関係式族の究明が急がれている. 双方で成り立つ類似の関係式族のひとつとして, 変数たちを巡回させた和（巡回和）に関する公式が知られており, 今回, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値を補間する多重級数を導入し, その級数についても巡回和公式を得たので報告する.

1 導入

順序付きの正整数の組 $(k_1,\dots,k_r)$ をインデックス, 特に $k_r>1$ であるものを収束インデックスと呼ぶことにする. 収束インデックス $(k_1,\dots,k_r)$ に対して, 多重ゼータ値および多重ゼータスター値を以下の収束多重級数でそれぞれ定義する:

- $\zeta(k_1,\dots,k_r):=\displaystyle\sum_{1\le m_1<\cdots<m_r}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\quad(\in\mathbb{R})$.
- $\zeta^\star(k_1,\dots,k_r):=\displaystyle\sum_{1\le m_1\le\cdots\le m_r}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\quad(\in\mathbb{R})$.

どちらの級数も $k_r>1$ で絶対収束し, $k_r=1$ では発散するので, 収束インデックスに限定している. 併せてインデックスの重さを $k_1+\cdots+k_r$, 深さを r とする. 特に深さ 1 の多重ゼータ（スター）値は, Riemann ゼータ関数の正整数点における特殊値（Riemann ゼータ値）である. この観点では Riemann ゼータ値の多重化が多重ゼータ（スター）値であるともみなせる. 多重ゼータ値に関する研究は, 18 世紀の C. Goldbach や L. Euler らによって始まり, Euler の論文 [4] において, $\zeta(2,1)=\zeta(3)$ をはじめとした, 二重ゼータ値（深さ 2 の多重ゼータ値）についての関係式が証明されている. のちに M. Hoffman や D. Zagier によって, 一般の深さの多重ゼータ値および多重ゼータスター値が研究され, 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上で多重ゼータ（スター）値の間に成り立つ多くの線形関係式の存在が確認された. さらに, 多重ゼータ（スター）値全体が $\mathbb{Q}$ 上で生成する代数について, 結び目不変量や基本群の Galois 表現などとの密接な関わりが指摘されている. そのため, 多重ゼータ（スター）値がなす代数の構造解明は重要な課題であり, 多重ゼータ（スター）値の間に成り立つ関係式族の究明が急がれている. なお, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値はすべて無理数であろうという予想の

もとで研究されており, その無理数性は特殊なインデックスを除いて未解決である.

本稿では, まず多重ゼータ（スター）値に関する次元予想を述べ, 次に多重ゼータ値と多重ゼータスター値の双方で成り立つ類似の関係式族として, 和公式 ([6], [18]) と巡回和公式 ([8], [13]) を紹介する. 最後に, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値を補間する級数（ハイブリッド多重ゼータ値と呼ぶことにする）を導入し, ハイブリッド多重ゼータ値について得られた巡回和公式を報告する.

2 多重ゼータ値と多重ゼータスター値

多重ゼータ値と多重ゼータスター値の間のよく知られた性質として, 互いを他方の線形和で表せることが挙げられる. 記述方法は, 多重ゼータスター値の級数におけるランニングインデックス間の不等号「$\leq$」について, 「$<$」と「$=$」に場合分けをすることで多重ゼータ値の線形和を得る. 逆についても同様である:

$$\begin{aligned}\zeta^{\star}(k_1,k_2) &= \sum_{1\leq m_1\leq m_2} \frac{1}{{m_1}^{k_1}{m_2}^{k_2}} \\ &= \sum_{1\leq m_1< m_2} \frac{1}{{m_1}^{k_1}{m_2}^{k_2}} + \sum_{1\leq m_1= m_2} \frac{1}{{m_1}^{k_1}{m_2}^{k_2}} \\ &= \zeta(k_1,k_2)+\zeta(k_1+k_2).\end{aligned}$$

また, 多重ゼータ（スター）値どうしについても多くの $\mathbb{Q}$-線形関係式が存在し, Zagier によって次の予想が提唱された:

予想 2.1 (多重ゼータ（スター）値に関する次元予想, Zagier[17])**.** $\mathcal{Z}_k$ を重さ k の多重ゼータ値が張る $\mathbb{Q}$-ベクトル空間として, 数列 $\{d_k\}_{k\geq 0}$ を漸化式 $d_k = d_{k-2}+d_{k-3}$, $d_0=1$, $d_1=0$, $d_2=1$ で定める. このとき, 任意の整数 $k\geq 2$ に対して,

$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_k \stackrel{?}{=} d_k.$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\cdots$
d_k	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	$\cdots$
2^{k-2}	–	–	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	$\cdots$

上の表には予想次元 d_k と重さ k のインデックスの個数 2^{k-2} が記載されており, 次元 d_k と見かけの多重ゼータ値の個数を比較することで, 多重ゼータ値の間には多くの $\mathbb{Q}$-線形関係式が存在することがわかる. また, 多重ゼータ値は多重ゼータスター値の線形和として表せることから, 重さ k の多重ゼータスター値が張る $\mathbb{Q}$-ベクトル空間と $\mathcal{Z}_k$ は一致する. そのため, この予想は多重ゼータスター値に関する次元予想でもある. 実は, 数列 d_k は $\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_k$ の上界であることが寺杣および Deligne–Goncharov によって独立に証明されている.

定理 2.2 (Goncharov[5], 寺杣 [15], Deligne-Goncharov[3])**.**

$$\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{Z}_k \leq d_k.$$

しかしながら, 重さが奇数であるような多重ゼータ（スター）値については, $\zeta(3)$ を除いて, 無理数であるかどうかすらわかっていない. そのため, 寄稿時点では $\mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3, \mathcal{Z}_4$ の次元しか確定できてお

らず, 多重ゼータ（スター）値の研究において, 次元予想の解明は重要課題となっている. また, 多重ゼータ（スター）値どうしの積は多重ゼータ（スター）値の線形和に書き直せることが知られており, $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 $\mathcal{Z} = \mathbb{Q} + \sum_{k\geq 2} \mathcal{Z}_k$ は通常積のもとで $\mathbb{Q}$-代数となる. 一般に $\mathcal{Z}_k \cdot \mathcal{Z}_l \subset \mathcal{Z}_{k+l}$ が成り立つ. 多重ゼータ（スター）値の代数 $\mathcal{Z}_k$ の構造について本稿では述べないが, 興味がある方は [1] や [2] などを参照されたい.

ここからは, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値の双方で成り立つ類似の関係式を紹介していく.

定理 2.3 (多重ゼータ値の和公式, Granville[6], Zagier[18])**.** 正整数 k, r $(k > r)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\sum_{\substack{k_1,\dots,k_{r-1}\geq 1, k_r\geq 2 \\ k_1+\cdots+k_r=k}} \zeta(k_1,\dots,k_r) = \zeta(k).$$

定理 2.4 (多重ゼータスター値の和公式 cf. Hoffman[7])**.** 正整数 k, r $(k > r)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\sum_{\substack{k_1,\dots,k_{r-1}\geq 1, k_r\geq 2 \\ k_1+\cdots+k_r=k}} \zeta^\star(k_1,\dots,k_r) = \binom{k-1}{r-1}\zeta(k).$$

定理 1.3 および定理 1.4 の左辺は, 重さ k かつ 深さ r のインデックスをもつすべての多重ゼータ（スター）値の和であり, それが Riemann ゼータ値 $\zeta(k)$（あるいはその整数倍）に等しいという関係式である. どちらの和公式も Hoffman の論文 [7] において言及され, 多重ゼータ値の和公式については A. Granville と Zagier によって独立に証明された. 多重ゼータ値と多重ゼータスター値は互いを線形和で表せることを認めれば, ふたつの和公式は関係式族として同値であることが知られている. 次に和公式を細分する関係式である巡回和公式を紹介する.

定理 2.5 (巡回和公式, Hoffman–大野 [8])**.** 2 以上である整数を少なくともひとつもつようなインデックス $(k_1,\dots,k_r)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{k_j-1} \zeta(k_j-l, k_{j+1},\dots,k_r,k_1,\dots,k_{j-1},l+1) = \sum_{j=1}^{r} \zeta(k_{j+1},\dots,k_r,k_1,\dots,k_{j-1},k_j+1). \quad (2.1)$$

定理 2.6 (多重ゼータスター値の巡回和公式, 大野–若林 [13])**.** 2 以上である整数を少なくともひとつもつようなインデックス $(k_1,\dots,k_r)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\sum_{j=1}^{r}\sum_{l=1}^{k_j-1} \zeta^\star(k_j-l, k_{j+1},\dots,k_r,k_1,\dots,k_{j-1},l+1) = k\zeta(k+1).$$

ここで, $k = k_1 + \cdots + k_r$ である. また, 左辺内側の和について, $k_j = 1$ のときは 0 とする.

現れるインデックスはすべて収束インデックスであり, インデックスの各整数を巡回させたような多重ゼータ値たちの和を考えている. ここで, 式 (2.1) の右辺に現れる多重ゼータ値の深さは左辺と比べて 1 小さいことに注意すると, 重さと深さを固定した多重ゼータ値の和に対して繰り返し巡回和公式を適用することで, その和が Riemann ゼータ値に等しいという和公式（定理 2.3）を導出できる. この意味で巡回和公式は和公式を細分する関係式族である. また, ふたつの巡回和公式は関係式

族として同値であることが, 井原–梶川–大野–奥田 [9], ならびに田中–若林 [14] によって異なる手法で証明されている.

例 2.7. インデックス $(1,2,3)$ に対する多重ゼータ値および多重ゼータスター値の巡回和公式はそれぞれ以下のようになる:

$$\zeta(2,1,2,2)+\ \zeta(1,1,2,3)+\ \zeta(1,3,1,2)\ =\zeta(2,3,2)+\zeta(3,1,3)+\zeta(1,2,4). \tag{2.2}$$
$$\zeta^\star(2,1,2,2)+\zeta^\star(1,1,2,3)+\zeta^\star(1,3,1,2)=6\zeta(7). \tag{2.3}$$

3 主結果

本節では, ランニングインデックス間の不等号に「$<$」と「$\leq$」を混在させた, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値を補間する級数について得られた結果を紹介する.

定義 3.1 (cf. 川島 [10])**.** 正整数の組 $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_s)\in(\mathbb{Z}_{\geq 1})^s$, $\mathbf{k}_i=(k_{i,1},\dots,k_{i,\mu_i})\in(\mathbb{Z}_{\geq 1})^{\mu_i}$ ($\mathbf{k}_s$ は収束インデックス) に対して,

$$\zeta_\mu(\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_s):=\sum_{\substack{1\leq m_{1,1}<\cdots<m_{1,\mu_1}\\ m_{1,\mu_1}\leq m_{2,1}<\cdots<m_{2,\mu_2}\\ \vdots\\ m_{s-1,\mu_{s-1}}\leq m_{s,1}<\cdots<m_{s,\mu_s}}}\prod_{i=1}^{s}\frac{1}{{m_{i,1}}^{k_{i,1}}\cdots{m_{i,\mu_i}}^{k_{i,\mu_i}}}\quad(\in\mathbb{R}).$$

本稿では, $\zeta_\mu(\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_s)$ をハイブリッド多重ゼータ値と呼ぶことにする. 多重ゼータ（スター）値と同様に $\mathbf{k}_s$ が収束インデックス, すなわち $k_{s,\mu_s}>1$ ならば絶対収束しており, このことはハイブリッド多重ゼータ値も多重ゼータ（スター）値の線形和で記述できることから容易に確認される. ハイブリッド多重ゼータ値の定義において, 各 μ_i は「$\leq$」から次の「$\leq$」までの間にあるランニングインデックスの個数を表しており, 「,」と「;」はそれぞれ「$<$」と「$\leq$」に対応している. ハイブリッド多重ゼータ値が多重ゼータ値と多重ゼータスター値を補間することは, 特殊な場合として,

$$\zeta_{(s)}(k_{1,1},\dots,k_{1,s})=\zeta(k_{1,1},\dots,k_{1,s}),\quad \zeta_{(\underbrace{1,\dots,1}_{s})}(k_{1,1};\dots;k_{s,1})=\zeta^\star(k_{1,1},\dots,k_{s,1})$$

であることからわかる. なお, ハイブリッド多重ゼータ値以外にも, 多重ゼータ値と多重ゼータスター値を補間する対象として, 山本による t-多重ゼータ値 ([16]) や, 中筋–Phuksuwan–山崎による Schur 多重ゼータ値 ([12]) などが知られている.

記述を簡略化するため, $\zeta_\mu(\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_s)$ を単に $\zeta(\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_s)$ と表すことにして, 主定理を以下に述べる:

定理 3.2. (i) $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_s)\in(\mathbb{Z}_{\geq 1})^s$, $\mathbf{k}_i\in(\mathbb{Z}_{\geq 1})^{\mu_i}$, 2 以上であるような整数を少なくともひと

つもつようなインデックス $(\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_s)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\mu_i}\sum_{l=1}^{k_{i,j}-1}\zeta(k_{i,j}-l,\mathbf{k}_{i(j+1)};\dots;\mathbf{k}_s,\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_i{}^{(j-1)},l+1)$$
$$=\zeta(\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_{s-1};\mathbf{k}_s{}^{(s-1)},k_{s,\mu_s}+1)+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\mu_i-1}\zeta(\mathbf{k}_{i(j+1)};\dots;\mathbf{k}_s,\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_i{}^{(j-1)},k_{i,j}+1). \tag{3.1}$$

(ii) $\mu=(\mu_1,\dots,\mu_s)\in(\mathbb{Z}_{\geq 1})^s$, $\mathbf{k}_i\in(\mathbb{Z}_{\geq 1})^{\mu_i}$, 2 以上であるような整数を少なくともひとつもつようなインデックス $(\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_s)$ に対して, 次が成り立つ:

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\mu_i}\sum_{l=1}^{k_{i,j}-1}\zeta(k_{i,j}-l,\mathbf{k}_{i(j+1)};\dots;\mathbf{k}_s;\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_i{}^{(j-1)},l+1)$$
$$=\delta_\mu k\zeta(k+1)+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\mu_i-1}\zeta(\mathbf{k}_{i(j+1)};\dots;\mathbf{k}_s;\mathbf{k}_1;\dots;\mathbf{k}_i{}^{(j-1)},k_{i,j}+1). \tag{3.2}$$

ここで, $\mathbf{k}_i{}^{(j)}=(k_{i,1},\dots,k_{i,j})$, $\mathbf{k}_{i(j)}=(k_{i,j},\dots,k_{i,\mu_i})$, $\delta_\mu=\begin{cases}1 & \mu=(1,\dots,1)\\ 0 & \mu\neq(1,\dots,1)\end{cases}$, $k=\sum_{i,j}k_{i,j}$ である. また, 両辺において空和は 0 とする.

式 (3.1) と (3.2) では, それぞれの $\mathbf{k}_s$ と $\mathbf{k}_1$ の間が「,」と「;」で異なっている. すなわち, それぞれの式でランニングインデックス m_{s,μ_s} と $m_{1,1}$ の間の不等号が「$<$」あるいは「$\leq$」であるハイブリッド多重ゼータ値を考えており, 双方で巡回和公式が成り立つという主張である. 注意として, インデックスの「$k_{i,j}$,」あるいは「$k_{i,j}$;」というかたまりを巡回させており, 右端のインデックスを (i) では「k_{s,μ_s},」, (ii) では「k_{s,μ_s};」とみなしている.

注意 3.3. 定理 3.2(i) と (ii) は関係式族として同値である. また, それぞれが関係式族として定理 2.5 (および定理 2.6) と同値である. 特に $\mu=(r)$ とすれば式 (3.1) は定理 2.5 に一致し, $\mu=(\underbrace{1,\dots,1}_{r})$ とすれば式 (3.2) は定理 2.6 に一致する.

例 3.4. $\mu=(3)$, $\mathbf{k}_1=(1,2,3)$ とすると, 式 (3.1) は例 2.7 の式 (2.2) に一致する. 一方, 式 (3.2) は次の等式が得られる:

$$\zeta(2;1,2,2)+\zeta(1;1,2,3)+\zeta(1,3;1,2)=\zeta(2,3;2)+\zeta(3;1,3).$$

例 3.5. $\mu=(1,1,1)$, $(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_3)=(1;2;3)$ とすると, 式 (3.2) において $\delta_\mu=1$ であり, 右辺の二重和は空和となるので例 2.7 の式 (2.3) に一致する. 一方, 式 (3.1) からは次の等式が得られる:

$$\zeta(2,1;2;2)+\zeta(1,1;2;3)+\zeta(1;3,1;2)=\zeta(1;2;4).$$

例 3.6. $\mu=(2,1)$, $(\mathbf{k}_1;\mathbf{k}_2)=(1,2;3)$ とすると, 式 (3.1) から次の等式が得られる:

$$\zeta(2,1,2;2)+\zeta(1,1,2;3)+\zeta(1;3,1,2)=\zeta(1,2;4)+\zeta(2;3,2).$$

一方, 式 (3.2) からは次の等式が得られる:

$$\zeta(2;1,2;2)+\zeta(1;1,2;3)+\zeta(1;3;1,2)=\zeta(2;3;2).$$

注意 3.7. 定理 3.2 の証明は, Hoffman–大野 [8] による定理 1.5 の証明と, 大野–若林 [13] による定理 1.6 の証明を, ハイブリッド多重ゼータ値の議論に拡張することによる. 詳しい証明は [11] を参照されたい.

参考文献

[1]『第 26 回整数論サマースクール「多重ゼータ値」報告集』(佐久川憲児・田坂浩二・三柴善範 編) (2019).
[2] 荒川恒男, 金子昌信, 『多重ゼータ値入門』, COE Lecture Note Vol. 23, 九州大学, (2010).
[3] P. Deligne and A. B. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 1, 1–56 (French, with English and French summaries).
[4] L. Euler, *Meditationes circa singulare serierum genus*, Novi Comm. Acad. Sci. Petropol20 (1775), 140–186, reprinted in Opera Omnia ser. I, **15**, B. G. Teubner, Berlin (1927), 217–267.
[5] A. B. Goncharov, *Periods and mixed motives*, preprint.
[6] A. Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, in London Math. Soc. Lecture Note Ser. **247**, Cambridge (1997), 95–101.
[7] M. Hoffman, *Multiple harmonic series*, Pacific J. Math., **152** (1992), 275–290.
[8] M. Hoffman and Y. Ohno, *Relations of multiple zeta values and their algebraic expression*, J. of Algebra, **262** (2003), 332–347.
[9] K. Ihara, J. Kajikawa, Y. Ohno and J. Okuda, *Multiple zeta values vs. multiple zeta-star values*, J. of Algebra, **332** (2011), 187–208.
[10] G. Kawashima, *Multiple series expressions for the Newton series which interpolate finite multiple harmonic sums*, arXiv:0905.0243.
[11] A. Kimura, *The cyclic sum formula for multiple harmonic series interpolating multiple zeta and zeta-star values*, preprint.
[12] M. Nakasuji, O. Phuksuwan, and Y. Yamasaki, *On Schur multiple zeta functions*: A combinatoric generalization of multiple zeta functions, Adv. Math. **333** (2018), 570–619.
[13] Y. Ohno and N. Wakabayashi, *Cyclic sum of multiple zeta values*, Acta Arithmetica, **123** (2006), 289–295.
[14] T. Tanaka and N. Wakabayashi, *An algebraic proof of the cyclic sum formula for multiple zeta values*, J. of Algebra, **323** (2010), 766–778.
[15] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. **149** (2002), 339–369.
[16] S. Yamamoto *Interpolation of multiple zeta and zeta-star values*, J. of Algebra, **385** (2013), 102–114.
[17] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, in ECM volume, Progress. Math. **120** (1994), 497–512.
[18] ———, *Multiple zeta values*, Unpublished manuscript, Bonn (1995).

Syzygies of Projective Curves

日本経済大学 経済学部 商学科
矢城 信吾 (Shingo YASHIRO)

概要

本稿では，射影曲線の極小自由分解およびその syzygy についての考察を述べる．特に，[1][2] で得られた曲線の極小自由分解を，適切な形で分類・整理することを現在考えている．そのための方向性などを講演でも述べさせていただく．

1 はじめに

射影多様体の syzygy については，極小自由分解とともに考察されてきた．X を射影多様体とし，L を X 上の非常に豊富な直線束としたとき

$$\varphi_L : X \to \mathbb{P} = \mathbb{P}H^0(X, L)$$

によって，射影空間への埋め込みが定義される．この次数付き環を $R_L = R(X, L) = \oplus H^0(X, L^{\otimes m})$ として定義する．射影空間 $\mathbb{P}$ の次数付き環 $S = \mathrm{Sym}\, H^0(X, L)$ 上の次数付き加群として R_L を考えたとき，極小自由分解 $\mathbb{E}_\bullet$ が存在する：

$$\mathbb{E}_\bullet : \cdots \to E_2 \to E_1 \to E_0 \to R_L \to 0.$$

ただし，$E_i = \oplus S(-a_{i,j})$ である．この極小自由分解において，(N_p) 条件を満たすとは，次の 2 条件が成り立つことである．

1. $E_0 = S$,
2. $1 \leq i \leq p$ に対して
$$a_{i,j} = i + 1 \text{ for all } j$$
が成り立つ．

簡単な推論により

- (N_0) 条件を満たすとは，$m \geq 0$ に対して
$$\mathrm{Sym}^m H^0(X, L) \to H^0(X, L^{\otimes m})$$
が全射であることと同値である．このときを，射影正規性（Projectively Normal）という．
- (N_1) 条件を満たすとは，(N_0) 条件を満たしかつ，斉次イデアル $I_{X/\mathbb{P}}$ が 2 次斉次多項式で生成される．

- (N_2) 条件を満たすとは，(N_1) 条件を満たしかつ，斉次イデアル $I_{X/\mathbb{P}}$ の生成系 $\{Q_1, \ldots, Q_r\}$ に対して，1 次斉次多項式 L_i が存在し

$$\sum L_i Q_i = 0$$

が成り立つ．

このようなことより，(N_p) 条件を満たすとは

1. $E_0 = S$,
2. $E_i = \oplus S(-i-1)$ for $1 \leq i \leq p$

が成り立つことである．本稿では [1][2] により得られた曲線の極小自由分解を (N_p) 条件の基で分類を整理することを主眼としている．また (N_p) 条件において，$I_{X/\mathbb{P}}$ が「2 次斉次多項式で生成される」ことを条件としたが，これが「d 次斉次多項式で生成される」という条件に置き換えたもの・拡張は [3] にて行われている．

2　2 次曲面の概説

本稿で扱う曲面および代表的な射影多様体について述べておく．ここで，$\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面について概説する．この節では，標数 2 でない代数的閉体とする．[*1]

非特異 2 次曲面とは，既約な 2 次斉次多項式 $F(z_0, \ldots, z_3)$ で定義される曲面 Q であり，特異点集合 $\operatorname{Sing} Q = V(\dfrac{\partial F}{\partial z_0}, \ldots, \dfrac{\partial F}{\partial z_3}) = \phi$ となるものである．

任意の非特異 2 次曲面は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ に同型である．実際に，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を Segre 埋め込みした像 $\sigma_{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$ を考えたとき

$$\sigma_{1,1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \ni ([x_0, x_1], [y_0, y_1]) \mapsto [x_0y_0, x_0y_1, x_1y_0, x_1y_1] \in \mathbb{P}^3$$

によって，$\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面 $Q : z_0z_3 - z_1z_2 = 0$ が定義される．この曲面に変数変換することで同型が示される．

直線束の同型類全体の集合（Picard 群）$\operatorname{Pic} Q$ は $\operatorname{Pic} Q \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である．この生成系 l_1, l_2 とすると，Intersection Pairing として

$$l_1^2 = 0, l_1.l_2 = 1, l_2^2 = 0$$

の関係がある．さらに計算を行うことで，直線束 $\mathcal{O}_Q(a, b)$ の Cohomology 群は次のように決定される．

命題 2.1. 直線束 $\mathcal{O}_Q(a, b)$ $(a \geq b)$ の *Cohomology* 群は次のように決定される：

$$H^0(Q, \mathcal{O}_Q(a, b)) = \begin{cases} (a+1)(b+1) & (a, b \geq 0) \\ 0 & (otherwise) \end{cases},$$

[*1] この仮定がないと，対称行列，2 次形式や階数による非特異判定などができなくなる．

$$H^1(Q,\mathcal{O}_Q(a,b)) = \begin{cases} 0 & (a,b \geq 0) \\ -(a+1)(b+1) & (otherwise) \\ 0 & (a,b \leq -2) \end{cases},$$

$$H^2(Q,\mathcal{O}_Q(a,b)) = \begin{cases} (a+1)(b+1) & (a,b \leq -2) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

がいえる．また，(a,b) 型の曲線 C の Q 上でのイデアル層 $\mathcal{I}_{C/Q}$ に対して

$$H^1(Q,\mathcal{I}_{C/Q}) = 0 \Longleftrightarrow |a-b| \leq 1$$

となる．

2.1　2 次超曲面について：補足

ここでは，一般の 2 次超曲面について補足する．多項式環 $S = k[z_0,\ldots,z_n]$ 内の斉次 2 次多項式

$$\sum_{0\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}z_iz_j$$

で定義される $\mathbb{P}^n$ 内の 2 次超曲面 Q について考える．Q には，対称行列 $A = (a_{i,j})$ が対応している．この A の階数によって分類できる．

命題 2.2. $\mathbb{P}^n$ 内において，2 次超曲面は次の形へ変数変換し帰着できる：

$$Q : z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_r^2 = 0.$$

$r = n+1$ のとき，非特異 2 次超曲面で非退化となり，$r < n+1$ のときは，次のような 2 次錐が構成される：$\operatorname{Sing} Q \subset Q$ は $(n-r-1)$ 次元線形多様体であり，$\mathbb{P}^{r-1}$ 内の非特異 2 次超曲面上の錐として構成できる．さらに

1. $r = 2$ のとき，$\operatorname{Cl} Q \cong \mathbb{Z}$
2. $r = 3$ のとき，$\operatorname{Cl} Q \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
3. $r \geq 4$ のとき，$\operatorname{Cl} Q \cong \mathbb{Z}$

がいえる．

3　Del Pezzo 曲面の概説

この節では，Del Pezzo 曲面について概説する．Del Pezzo 曲面とは，反標準因子が非常に豊富な射影曲面をいう．主な結果は [4] などからの引き戻しである．このような曲面は次のように分類される．

命題 3.1. X を次数 d の *Del Pezzo* 曲面とする．このとき，$3 \leq d \leq 9$ である．また，次のことが成り立つ．

1. $d = 9$ のとき，これは射影平面 $\mathbb{P}^2_k$ に同型であり，これは $\mathbb{P}^9_k$ への 3 次の *Veronese* 埋め込みとなる．
2. $d = 8$ のとき，これは射影平面 $\mathbb{P}^2_k$ の 1 点 *Blow-up* または $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ に同型である．
3. $3 \leq d \leq 6$ のとき，これは射影平面 $\mathbb{P}^2_k$ の一般の位置にある $9 - d$ 点 *Blow-up* と同型である．

この Del Pezzo 曲面の直線束の同型類 $\operatorname{Pic} X$ について，次のことがいえる．

命題 3.2. *Del Pezzo* 曲面の直線束の同型類 $\operatorname{Pic} X$ は次のようになる：

1. $d = 9$ のとき，$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}l$ である．生成元 l は $l^2 = 1$ となるものである．これは直線を因子としてみたものの同型類である．また超平面切断の同型類 h は $(3;)$ 型である．
2. $d = 8$ のとき
   （a）射影平面 $\mathbb{P}^2_k$ の 1 点 *Blow-up* では，$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}l \oplus \mathbb{Z}e_1$ となる．これらは
   $$l^2 = 1, l.e_1 = 0, e_1^2 = -1$$
   が成り立つ．l は射影平面 $\mathbb{P}^2$ 上の直線 L を X 上への引き戻したものの同型類であり，e_1 は 1 点 P_1 を *Blow-up* することでできる例外因子 E_1[*2]の同型類である．また超平面切断の同型類 h は $(3; 1)$ 型である．
   （b）$\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ のときは，$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}l_1 \oplus \mathbb{Z}l_2$ となる．これらは
   $$l_1^2 = l_2^2 = 0, l_1.l_2 = 1$$
   が成り立つ．また超平面切断の同型類 h は $(2, 2)$ 型である．
3. $3 \leq d \leq 7$ のときは，$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}l \oplus \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_r$ となる．これらは
   $$l^2 = 1, l.e_i = 0, e_i.e_j = -\delta_{i,j}$$
   である．ただし，$r = 9 - d$ とする．また超平面切断の同型類 h は $(3; 1, \ldots, 1)$ 型である．

注意 3.3. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ を r 点 *Blow-up* して構成される *Del Pezzo* 曲面上の $(a; b_1, \ldots, b_r)$ 型の有効因子は，$\mathbb{P}^2$ 上の曲線 C で次のようなものに対応している：C は次数 a で，各点 P_i を b_i 重点としてもつ曲線である．このことから，ある完備線形系の部分線形系に対応していることがいえる．

Del Pezzo 曲面上の因子 C の算術種数 $p_a(C)$ および射影空間内での曲線（有効因子）としての次数 $\deg C$ については，次のことがいえる．

命題 3.4. *Del Pezzo* 曲面上の因子 C の算術種数 $p_a(C)$ および次数 $\deg C$ は次のようになる．

1. $d = 9$ のとき，C を $(a;)$ 型の因子とすると
   $$p_a(C) = \binom{a-1}{2}, \deg C = 3a$$
   である．

[*2] E が例外直線とは，$E^2 = -1$ かつ $E \cong \mathbb{P}^1$ が成り立つものである．曲面上の 1 点を Blow-up することで構成される．

2. $d = 8$ のとき

（a）射影平面 $\mathbb{P}^2_k$ の 1 点 *Blow-up* では，C を $(a; b_1)$ 型の因子とすると

$$p_a(C) = \binom{a-1}{2} - \binom{b_1}{2}, \deg C = 3a - b_1$$

である．

（b）$\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ のときは，C を (a, b) 型の因子とすると

$$p_a(C) = (a-1)(b-1), \deg C = 2(a+b)$$

である．

3. $3 \leq d \leq 7$ のときは，C を $(a; b_1, \ldots, b_r)$ 型の因子とすると

$$p_a(C) = \binom{a-1}{2} - \sum_{i=1}^{r} \binom{b_i}{2}, \deg C = 3a - b_1 - \cdots - b_r$$

である．ただし，$r = 9 - d$ とする．また

4　2 次曲面・Del Pezzo 曲面上にある曲線の例

この節では [5][6] を基に，$\mathbb{P}^3$ 内の非特異 2 次曲面および Del Pezzo 曲面上ある曲線の例を紹介する．

4.1　正規有理曲線（Rational Normal Curve）

$\mathbb{P}^1$ の斉次座標系を $[x_0, x_1]$ とする．すなわち，$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)) = \langle x_0, x_1 \rangle$ とする．射影直線 $\mathbb{P}^1$ も次数 n の因子 D による大域切断

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(D)) = \langle x_0^n, x_0^{n-1}x_1, \ldots, x_0x_1^{n-1}, x_1^n \rangle$$

を考える．この基底により構成される射 $\varphi_D : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ の閉埋め込みであり，その像 $C = \varphi_D(\mathbb{P}^1)$ は n の有理曲線となる．これを正規有理曲線という．この曲線の定義イデアル I_C は $\binom{n}{2}$ 個の 2 次斉次多項式で生成される．別の表現として曲線 C の定義イデアル I_C は $2 \times n$ 行列

$$M_{n,1} = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{n-1} \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_n \end{pmatrix}$$

の 2×2 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M_{n,1})$ に等しい．これは，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1}$ を Segre 埋め込みした射影多様体を線形多様体で切断したものである．実際に $X = \sigma_{1,1}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1})$ の定義イデアル I_X は $2 \times n$ 行列

$$M = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 & z_2 & \cdots & z_{n-1} \\ z_n & z_{n+1} & z_{n+2} & \cdots & z_{2n-1} \end{pmatrix}$$

の 2×2 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M)$ となる．さらに，線形多様体 H は n 次元で

$$H : z_{n+i-1} - z_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

で定義される．これより $C = X \cap H$ および，$I_C = I_X + I_H$ がいえる．

正規有理曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ の極小自由分解については，Eagon-Northcott 複体が対応する：

$$0 \longrightarrow S(-n)^{\oplus(n-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S(-r-1)^{\oplus r\begin{pmatrix} n \\ r+1 \end{pmatrix}} \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow S(-2)^{\oplus\binom{n}{2}} \longrightarrow S \longrightarrow S_C \longrightarrow 0.$$

ただし，$r \geq 1$ とする．これを Betti 数 $\beta_{i,j}$ で表すと，$\beta_{0,0} = 1$

$$\beta_{i,i+1} = i\binom{n}{i+1} \ (1 \leq i \leq n-1)$$

であり，それ以外は $\beta_{i,j} = 0$ である．

例 4.1. 正規有理曲線の簡単な例として，$v_2 : \mathbb{P}^1 \ni [x_0, x_1] \mapsto [x_0^2, x_0x_1, x_1^2] \in \mathbb{P}^2$ を考えると，平面 2 次曲線 $C : z_0z_2 - z_1^2 = 0$ が定義できる．

例 4.2. 同様に，$v_3 : \mathbb{P}^1 \ni [x_0, x_1] \mapsto [x_0^3, x_0^2x_1, x_0x_1^2, x_1^3] \in \mathbb{P}^3$ を考えると，捩れ 3 次曲線 C が定義できる．これは $C : z_0z_2 - z_1^2 = 0, z_0z_3 - z_1z_2 = 0, z_1z_3 - z_2^2 = 0$ により定義される．

より一般的な結果として，Rational Normal Scroll の極小自由分解を考えることができる．Rational Normal Scroll とは，$\mathbb{P}^1$ 上の階数 n のベクトル束 $\mathcal{E}$ の射影化 $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^1$ をある射影空間 $\mathbb{P}^N$ に埋め込んだものである．具体的には

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n) \ (0 < a_1 \leq \cdots \leq a_n)$$

に対して，$N = \sum_{i=1}^n a_i + n - 1$ とおいて埋め込むものである．$X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ の定義イデアル I_X を考える．$D = \sum_{i=1}^n a_i + n$ として $2 \times D$ 行列

$$M_{D,1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} z_{1,0} & \cdots & z_{1,a_1-1} & z_{2,0} & \cdots & z_{2,a_2-1} & \cdots & z_{n,0} & \cdots & z_{n,a_n-1} \\ z_{1,1} & \cdots & z_{1,a_1} & z_{2,1} & \cdots & z_{2,a_2} & \cdots & z_{n,1} & \cdots & z_{n,a_n} \end{array} \right)$$

の 2×2 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M_{D,1})$ に等しい．$S = k[z_{1,0}, \ldots, z_{n,a_n}]$ における定義イデアル I_X の極小自由分解は

$$0 \longrightarrow S(-N)^{\oplus(N-1)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S(-i-1)^{\oplus i\begin{pmatrix} N \\ i+1 \end{pmatrix}} \longrightarrow \cdots$$

$$\longrightarrow S(-2)^{\oplus\binom{N}{2}} \longrightarrow S \longrightarrow S_X \longrightarrow 0.$$

である．

注意 4.3. 階数 1 のベクトル束 $\mathcal{O}(a_1)(a_1 > 0)$ のとき，$X = \mathbb{P}(\mathcal{O}(a_1)) \cong \mathbb{P}^1$ であり，埋め込みは $X \subset \mathbb{P}^{a_1}$ となるから，正規有理曲線を意味する．

注意 4.4. 階数 2 のベクトル束 $\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \mathcal{O}(a_2)(0 < a_1 \leq a_2)$ のとき，$\pi : X = \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^1$ に対して，$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(-a_2)$ とすると，$X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}')$ となる．これは，*Hirzebruch* 曲面に同型であることがいえる．

4.2 正規楕円曲線（Elliptic Normal Curve）

C を楕円曲線 $(g = 1)$ とし，$P_0 \in C$ とする．C 上の次数 n の因子 $D = nP_0(n \geq 3)$ に対応する埋め込み $\varphi_D : C \to \mathbb{P}^{n-1}$ における像は n 次曲線となる．これを正規楕円曲線という．$H^0(C, \mathcal{O}_C(P_0) = \langle 1 \rangle, H^0(C, \mathcal{O}_C(2P_0)) = \langle 1, f \rangle, H^0(C, \mathcal{O}_C(3P_0)) = \langle 1, f, g \rangle$ とすると Riemann-Roch の定理より

$$H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) = \langle 1, f, \ldots, f^i, g, gf, \ldots, gf^j \rangle \ (0 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor, 0 \leq j \leq \lfloor (n-3)/2 \rfloor)$$

と基底を選ぶことができる．$n = 3$ のとき，$\mathbb{P}^2$ 内の非特異 3 次曲線が得られる．$n = 4$ のときは，4 次曲線となり，2 つの 2 次曲面の完全交叉となる．

この関係式を導出するために，Rational Normal Scroll Surface を構成する．上記の基底の構成を利用して

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \cdots & f^{a-1} & g & \cdots & f^{b-1} \\ f & \cdots & f^a & gf & \cdots & f^b \end{array} \right)$$

を考えると，$2 \times (a + b)$ 行列

$$M(\mathcal{O}_C(2P_0), \mathcal{O}_C((n-2)P_0)) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} z_{1,0} & \cdots & z_{1,a-1} & z_{2,0} & \cdots & z_{2,b-1} \\ z_{1,1} & \cdots & z_{1,a} & z_{2,1} & \cdots & z_{2,b} \end{array} \right)$$

が構成される．ただし，$a = \lfloor n/2 \rfloor, b = \lfloor (n-3)/2 \rfloor$ であり，$\lfloor n/2 \rfloor + 1 + \lfloor (n-3)/2 \rfloor + 1 = n$ である．この 2×2 小行列式全体で定義される $\mathbb{P}^{n-1}(n \geq 4)$ 内の射影曲面が定義できる．

1. $n = 4$ のときは，$\pi : \mathbb{P}(\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(2)) \to Q_0 \subset \mathbb{P}^3$（$Q_0$ は 2 次錐）となる．[*3]
2. $n \geq 5$ のとき，埋め込み $\varphi : \mathbb{P}(\mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b))) \to X \subset \mathbb{P}^{n-1}$ が構成できて，X は非特異射影曲面（次数 $n-1$ の Hirzebruch 曲面）となる．

先述の通り X は Hirzebruch 曲面に同型であり，その Picard 群は

$$\mathrm{Pic}\, X \cong \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}f$$

で与えられる．ただし，h は超平面切断 $H(\cong \mathbb{P}^1)$ に対応する直線束 $\mathcal{O}_X(1)$ の同型類，f は $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ 上のファイバーに対応する直線束 $\mathcal{O}_X(F)(F \cong \mathbb{P}^1)$ の同型類であり，$h^2 = n-1, h.f = 1, f^2 = 0$ である．この曲面上において，正規楕円曲線 C に対応する X 上の因子は $C = 2H - (n-3)F$ である．すなわち，I_X の生成系から，I_C の生成系を構成することを考える．より一般的には，X の極小

[*3] この射は，特異点 $O \in Q_0$ を中心とした Blow-up を意味する．

自由分解を利用して，C の極小自由分解を構成することとなる．X の斉次座標環 S_X 上での C の定義イデアルを $I_{C/X}$ とし，その層化を考えると

$$\widetilde{I_{C/X}} = \mathcal{O}_X((n-3)F - 2H) = \mathcal{O}_X((n-3)F)(-2)$$

を意味する．これより，$I_{C/X}$ の極小自由分解は

$$\bigoplus_{m\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X((n-3)F)(m))$$

の極小自由分解を -2 シフトしたものだと考えられる．これは Eagon-Northcott 複体の Mapping Cone として構成することができる．

定理 4.5. $C \subset \mathbb{P}^n (n \geq 3)$ を $n+1$ 次の正規楕円曲線とする．このとき，$S = k[z_0, \ldots, z_n]$ における X の極小自由分解は次で与えられる．

$$\begin{aligned} 0 \to & S(-n-1) \to S(-n+1)^{\oplus(n-2)+\begin{pmatrix} n-1 \\ 2 \end{pmatrix}} \to S(-i-1)^{\oplus i\begin{pmatrix} n-1 \\ i+1 \end{pmatrix}+(n-i-1)\begin{pmatrix} n-1 \\ i-1 \end{pmatrix}} \to \cdots \\ & \to S(-2)^{\oplus\binom{n-1}{2}+(n-2)} \to S \to S_C \to 0. \end{aligned}$$

また，*Betti* 数 $\beta_{i,j}$ について，$\beta_{0,0} = 1$ であり

$$\beta_{i,i+1} = i\binom{n-1}{i+1} + (n-i-1)\binom{n-1}{i-1} (1 \leq i \leq n-2), \beta_{n-1,n+1} = 1$$

であり，その他は $\beta_{i,j} = 0$ となる．

5 結果の概略と今後の展望

この節では，[1][2] の結果の概略を述べる．まず射影曲面 X 上の曲線 C が ACM（Arithmetically Cohen-Macaulay (for short:ACM)）な曲線であるとは

$$H^1(X, \mathcal{I}_{C/X}(m)) = 0 \ (m \in \mathbb{Z})$$

が成り立つことである．このことを基にして，まずは非特異 2 次曲面 Q 上の分類について述べる．

補題 5.1. 非特異 2 次曲面 Q 上の (a, b) 型の因子 C が *ACM* であるとは，$|a-b| \leq 1$ となることと同値である．

次に，Del Pezzo 曲面上の因子 C の分類である．これは次の手順で進める：

1. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の 3 次の Veronese 埋め込み $v_3 : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^9$. この場合は，すべての因子が ACM である．

2. 射影直線の直積 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の埋め込み $\sigma_{2,2}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^8$ においては，非特異 2 次曲面の場合と同じように，次のことがいえる：
   (a, b) 型の因子 C が ACM であるとは，$|a - b| \leq 2$ となることと同値である．
3. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ の r 点 Blow-up ($1 \leq r \leq 6$) については，次の方法で分類を考える．$\pi : X \to \mathbb{P}^2$ を r 点 Blow-up とし，$\mathcal{L}$ を $(a; b_1, \ldots, b_r)$ 型の因子に対応する X 上の直線束とする．このとき，$\mathbb{P}^2$ 上の層の完全系列が存在する：

$$0 \to \pi_* \mathcal{L} \to \mathcal{O}(a) \to \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{O}_{P_i} / \mathcal{M}_{P_i}^{b_i} \to 0.$$

   これにより評価することで，ACM 曲線の分類は完成する ([1], [2])

特に，前述の結果より正規有理曲線 $C \subset \mathbb{P}^n$ については，(N_{n-1}) 条件を満たすといえる．また，正規楕円曲線 $C \subset \mathbb{P}^n (n \geq 3)$ については，(N_{n-1}) 条件は満たさず，(N_{n-2}) 条件を満たすといえる．

一般に射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^n$ の斉次イデアル I_X について，完全列

$$E_1 \to I_X \to 0.$$

より，$\mathbb{P}^n$ の X を中心とした Blow-up を $\mathrm{Bl}_X \mathbb{P}^n$ とし，次数付き加群の層化 $\mathcal{E}_1 = \widetilde{E_1}$ とおくと

$$\mathrm{Bl}_X \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}(\mathcal{E}_1)$$

に埋め込むことと同値であると考えられる．それゆえ，X の次数付き環が (N_1) 条件を満たすということは，$\mathrm{Bl}_X \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N$ と射影空間の直積（多重射影空間）内に埋め込まれることが示される．また，ベクトル束の立場から考えると，$X \subset \mathbb{P}^n$ を余次元 2 の非特異部分多様体とすると，$\mathcal{I}_X$ は局所的には，2 つの元で生成される．これより $\mathbb{P}^n$ 上の階数 2 のベクトル束 $\mathcal{E}$ が存在し，完全列

$$\mathcal{E} \to \mathcal{I}_X \to 0$$

が存在する．よって

$$\mathrm{Bl}_X \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$$

が示される．また，(N_2) 条件以降を考えることは，埋め込みの列を構成する上で重要であると考えられる．

ベクトル束については，非特異空間曲線 $C \subset \mathbb{P}^3$ と $\mathbb{P}^3$ 内の階数 2 のベクトル束が対応するという結果がある ([7])．さらには，ベクトル束が分裂 (split) することと，曲線 C が完全交叉となることが同値である．このような見地からも，ベクトル束と何かしらの対応を模索していきたい．

6 謝辞

このたびは，原稿が遅れましたことを心よりお詫び申し上げます。また第１８回 MCYR 実行委員会のみなさまにおかれましては，新型コロナウイルスの状況下で様々な開催案を，模索していただいたことを心より感謝申し上げます。

参考文献

[1] S. Yashiro. Minimal free resolution of acm curves on del pezzo surfaces. *Preprint*.

[2] S. Yashiro. Minimal free resolution of non-acm curves on del pezzo surfaces. *Preprint*.

[3] David Eisenbud, Mark Green, Klaus Hulek, and Sorin Popescu. Restricting linear syzygies: algebra and geometry. *Compositio Mathematica*, 141(6):1460–1478, 2005.

[4] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[5] D. Eisenbud. *The Geometry of Syzygies: A Second Course in Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2006.

[6] J. Harris. *Algebraic Geometry: A First Course*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1992.

[7] R. Hartshorne. Stable vector bundles of rank 2 on P^3. *Mathematische Annalen*, 238(3):229–280, 1978.

ある CM 楕円曲線に付随する L 関数の特殊値の代数的部分の 2 進付値

九州大学 大学院 数理学府 数理学専攻
博士後期課程 2 年 野本 慶一郎 (Keiichiro NOMOTO)

1 導入

Euler は 1735 年に等式

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

を発見した. より一般に, Riemann ζ 関数 $\zeta(s):=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n^s}$ $(\mathrm{Re}(s)>1)$ に対して

$$\zeta(2n)=(-1)^{n+1}\frac{B_{2n}(2\pi)^{2n}}{2(2n)!}\quad(n\in\mathbb{N}) \tag{1}$$

が成り立つ. ここで B_n $(n=0,1,2,\dots)$ は Bernoulli 数と呼ばれる有理数である. 等式 (1) より $\zeta(2n)/\pi^{2n}$ は有理数であることが分かる. では素数 p に対して $\zeta(2n)/\pi^{2n}$ の p 進付値はいくつだろうか？特に整数だろうか？ Clausen-von Staudt の定理を用いると, Bernoulli 数の p 進付値について以下が成り立つことが分かる.

- $p-1\nmid k\iff v_p(B_k)\geq v_p(2k)$.
- $p-1\mid k\Longrightarrow v_p(B_k)=-1$.

ただし v_p は $v_p(p)=1$ と正規化された p 進付値である. ここから $\zeta(2n)/\pi^{2n}$ の p 進付値の下からの評価が得られる. 本稿ではこの問題の楕円曲線に対する類似を考える. E を楕円曲線とし, 簡単のため $\mathbb{Q}$ 上定義されていると仮定する. 楕円曲線 E の model を一つ固定すると, 実周期

$$\Omega_E:=\int_{E^0(\mathbb{R})}|\omega|$$

が定まる. (この値は円周率 π の類似物である.) このとき, $L(E/\mathbb{Q},1)\neq 0$ ならば強い Birch and Swinnerton-Dyer 予想は以下の等式を主張する:

$$L(E/\mathbb{Q},1)=\frac{\Omega_E\cdot\prod_{p:\mathrm{bad}}c_p\cdot\#Ш(E/\mathbb{Q})}{(\#E(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}})^2},$$

ここで $c_p\in\mathbb{Z}$ は素数 p での局所玉河数, $Ш(E/\mathbb{Q})$ は Tate-Shafarevich 群である. したがって $L(E/\mathbb{Q},1)/\Omega_E$ は有理数となることが予想されるが, 特に E が虚数乗法をもつ場合は Damerell により証明され (cf. [2]), $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の場合は Modularity Theorem, Drinfeld-Manin 等の結果から

従う．そこで Riemann ζ 関数の場合と同様にして「$L(E/\mathbb{Q},1)/\Omega_E$ の p 進付値はいくつだろうか？」という問題が考えられる．この問題に関して Zhao は正確に p 進付値を評価し決定することのできる革新的な method (以降, **Zhao's method** と呼ぶ) を与えた ([6])．実際に Zhao's method を用いて p 進付値を評価している研究をいくつか簡潔にまとめた．

	楕円曲線	定義体	D	条件	p
[6, Zhao (1997)]	$y^2=x^3-Dx$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	$D=\pi_1^2\cdots\pi_n^2$	$\pi_i\equiv 1 \bmod 4$	2
[5, Qiu, Zhang (2002)]	$y^2=x^3-Dx$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	$D=\pi_1\cdots\pi_n$	$\pi_i\equiv 1 \bmod 4$	2
[7, Zhao (2003)]	$y^2=x^3-4Dx$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	$D=\pi_1^2\cdots\pi_n^2$	$\pi_1\equiv 1 \bmod 2+2i$	2
[3, Kezuka (2018)]	$y^2=4x^3-27D$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	$D=D_0^3$	some conditions on D_0	2
[3, Kezuka (2018)]	$y^2=4x^3-27D$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	$D=D_0^2$	some conditions on D_0	3

しかしどの結果も, D を割る素元の冪に関する条件をいくつか課している．これは Zhao's method が, D に含まれる素元の個数についての数学的帰納法を用いるものであることに起因している．本稿では, 多重に数学的帰納法を用いることで, 素元の冪に関する条件を完全に外した上での p 進付値の評価を与える．(cf. Theorem 4.1, Theorem 4.2)

2 準備

以下, D と書けば常に 2 と互いに素な $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ の元を表すものとする．E_{4D} を Weierstrass 方程式 $y^2=x^3-4Dx$ で定義される K 上の楕円曲線とする．$d\in K^\times$ に対し E_{4d^4D} と E_{4D} は K 上同型なので, D は初めから quartic-free な K の整数環 $\mathcal{O}_K$ の元であるとしてよい．したがって D は以下の $D_1^{(n)},D_2^{(m)},D_3^{(\ell)}$ のうちのいくつかの積として一意的に表示できる:

$$D_1^{(n)}=\prod_{\pi_{1,i}\in S_1}\pi_{1,i},\qquad D_2^{(m)}=\prod_{\pi_{2,j}\in S_2}\pi_{2,j}^2,\qquad D_3^{(\ell)}=\prod_{\pi_{3,k}\in S_3}\pi_{3,k}^3.$$

ただし, $S_1=\{\pi_{1,1},\dots,\pi_{1,n}\},S_2=\{\pi_{2,1},\dots,\pi_{2,m}\},S_3=\{\pi_{3,1},\dots,\pi_{3,\ell}\}$ は 2 と互いに素な $\mathcal{O}_K$ の素元の集合であり, $\pi_{i,j}\equiv 1 \bmod 2+2\sqrt{-1}$ を満たす．また, ψ_{4D} を E_{4D} に付随する K の Hecke 指標とし, 2 と互いに素な $\mathcal{O}_K$ のイデアル Δ を, ψ の導手が Δ を割り切るように適切に大きく取る (実際には explicit に与える)．さらに $\mathcal{O}_K$ のイデアル $\mathfrak{g}\neq 0$ に対して, $L_{\mathfrak{g}}(\psi,s)$ を Hecke L 関数 $L(\psi,s)$ から $\mathfrak{g}$ を割る素イデアルに対応した Euler factor を取り除いたもの, すなわち

$$L_{\mathfrak{g}}(\psi,s):=L(\psi,s)\prod_{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{g}}\left(1-\frac{\psi(\mathfrak{p})}{N\mathfrak{p}^s}\right)$$

とする．Zhao's method を実行する上で重要となる考え方は, L-value の p 進付値は和の方が計算が容易ということである．ここでいう和とは, D を一定の条件の元に変化させたときの E_{4D} の L 関数の特殊値の和である．この考えに則り, 次の記号を導入する．$T_1\subset\{1,\dots,n\},T_2\subset\{1,\dots,m\},T_3\subset\{1,\dots,\ell\}$ を任意の部分集合とする．このとき $D_1^{(n)},D_2^{(m)},D_3^{(\ell)}$ の部分積を

$$D_{T_1}=\prod_{i\in T_1}\pi_{1,i},\qquad D_{T_2}=\prod_{j\in T_2}\pi_{2,j}^2,\qquad D_{T_3}=\prod_{k\in T_3}\pi_{3,k}^3$$

と定義する．ただし $T_i=\varnothing$ のときは $D_{T_i}=1$ とする．このとき $D_T:=D_{T_1}D_{T_2}D_{T_3}$ とおく．

3 L-value の有限和としての表示

Zhao's method を実行するために L-value を (ある特殊関数を用いて) 有限和で表す. ω を $E_1 : y^2 = x^3 - x$ の実周期, $\wp(z) = \wp(z, \omega\mathcal{O}_K)$ を Weierstrass $\wp$ 関数, $(\cdot/\cdot)_4$ を四乗剰余記号とする. このとき以下の命題が成り立つ. 正確な主張は [4] を参照されたい.

Proposition 3.1. $(\mathcal{O}_K/\Delta)^\times$ の完全代表系 $\mathcal{C}$ を一つ固定する. このときある $S(z) \in \mathbb{C}(\wp(z\omega/\Delta), \wp'(z\omega/\Delta))$ が存在して以下が成り立つ.

(i) 以下の等式が成り立つ.

$$\frac{\Delta L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_T}}, 1)}{\omega} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{4} \displaystyle\sum_{c \in \mathcal{C}} \left(\frac{c}{D_T}\right)_4 + \sum_{c \in V} \left(\frac{c}{D_T}\right)_4 S(c) & ((-1/D_T)_4 = 1) \\ \displaystyle\sum_{c \in V} \left(\frac{c}{D_T}\right)_4 S(c) & ((-1/D_T)_4 = -1), \end{cases}$$

ただし $V = \left\{ c \in \mathcal{C} \,\middle|\, c \equiv 1 \bmod 2 + 2\sqrt{-1} \right\}$, $L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_T}}, 1) = \pm L_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_T}}, 1)$ である.

(ii) 任意の $c \in V$ に対して $v_2(S(c)) = -1/2$.

Remark 2. Proposition 3.1(ii) において, $p \neq 2$ なる素数に対しても $S(c)$ の p 進付値を計算すれば Zhao's method を用いて L-value の代数的部分の p 進付値を評価することができる.

次に Proposition 3.1(i) の両辺の T に関する和を取る. ただし T が動く範囲は, 評価したい D の形によって細かく分ける. 例えば $D = D_1^{(n)}$ ならば T_1 は $\{1, \ldots, n\}$ の 部分集合全体を渡らせ, $T_2 = T_3 = \varnothing$ とする. $D = D_1^{(n)} D_2^{(m)}$ ならば T_1 は $\{1, \ldots, n\}$ の部分集合全体を, T_2 は $\{1, \ldots, m\}$ の部分集合全体を渡らせ, $T_3 = \varnothing$ とする. あらためて, Proposition 3.1(i) の両辺の T に関する和を取ると

$$\sum_T \frac{\Delta L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_T}}, 1)}{\omega} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{4} \displaystyle\sum_T \sum_{c \in \mathcal{C}} \left(\frac{c}{D_T}\right)_4 + \sum_{c \in V} S(c) \sum_T \left(\frac{c}{D_T}\right)_4 & ((-1/D_T)_4 = 1) \\ \displaystyle\sum_{c \in V} S(c) \sum_T \left(\frac{c}{D_T}\right)_4 & ((-1/D_T)_4 = -1) \end{cases}$$

が成り立つ. Proposition 3.1(ii) と簡単な指標和の計算より以下の命題が得られる.

Proposition 3.2. 記号は §3 の通りとする．このとき以下が成り立つ．

$$v_2\left(\sum_T \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_T}},1)}{\omega}\right) \geq \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & (T_1 \subset \{1,\dots,n\}) \\ \dfrac{2m-1}{2} & (T_2 \subset \{1,\dots,m\}) \\ \dfrac{\ell-1}{2} & (T_3 \subset \{1,\dots,\ell\}) \\ \dfrac{n+2m-1}{2} & (T_1 \subset \{1,\dots,n\}, T_2 \subset \{1,\dots,m\}) \\ \dfrac{2m+\ell-1}{2} & (T_2 \subset \{1,\dots,m\}, T_3 \subset \{1,\dots,\ell\}) \\ \dfrac{n+\ell-1}{2} & (T_1 \subset \{1,\dots,n\}, T_3 \subset \{1,\dots,\ell\}) \\ \dfrac{n+2m+\ell-1}{2} & (T_1 \subset \{1,\dots,n\}, T_2 \subset \{1,\dots,m\}, T_3 \subset \{1,\dots,\ell\}). \end{cases}$$

4 Zhao's method と多重的拡張

Zhao's method はその性質から D に含まれる素元の冪が全て等しい場合，すなわち $D = D_1^{(n)}, D_2^{(m)}, D_3^{(\ell)}$ のいずれかの場合にしか適用できない．本節では Zhao's method を多重に用いることで全ての D に対する L-value の 2 進付値の評価を行う．まず準備として $D = D_1^{(n)}, D_2^{(m)}, D_3^{(\ell)}$ の場合に L-value の 2 進付値の評価を行う．

Theorem 4.1. 記号は §3 の通りとする．このとき以下が成り立つ．

$$v_2\left(\frac{L_4(\overline{\psi_{4D}},1)}{\omega}\right) \geq \begin{cases} \dfrac{n-2}{2} & (D = D_1^{(n)}) \\ \dfrac{2m-3}{2} & (D = D_2^{(m)}) \\ \dfrac{\ell-2}{2} & (D = D_3^{(\ell)}). \end{cases}$$

[証明の概要]. $D = D_1^{(n)}$ の場合についてのみ説明する．$T_1 = \{1,\dots,n\}$ ならば $L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1}}},1) = L^*_4(\overline{\psi_{4D_1^{(n)}}},1)$ である．$T_1 = \varnothing$ ならば

$$\begin{aligned} L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1}}},1) &= L_4(\overline{\psi_{4D_1^{(n)}}},1)\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{\overline{\psi_4}((\pi_{1,i}))}{N(\pi_{1,i})}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}\omega}{4}\prod_{i=1}^{n}\frac{\pi_{1,i}-(-1/\pi_{1,i})_4}{\pi_{1,i}} \end{aligned}$$

が成り立つ．主張を n に関する帰納法で示す．$n = 1$ のとき Proposition 3.2より

$$v_2\left(\underbrace{\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4},1)}{\omega}}_{T_1=\varnothing} + \underbrace{\frac{L^*_4(\overline{\psi_{4D_1^{(1)}}},1)}{\omega}}_{T_1=\{1\}}\right) \geq 0 > -\frac{1}{2}$$

が成り立つ．したがって付値の性質から $v_2(L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4},1)/\omega)\geq -1/2$ を示せば十分である．実際,

$$\begin{aligned} v_2\left(\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4},1)}{\omega}\right) &= v_2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\pi_{1,1}-(-1/\pi_{1,1})_4}{\pi_{1,i}}\right)\\ &= -\frac{3}{2}+v_2\left(\pi_{1,1}-\left(\frac{-1}{\pi_{1,1}}\right)_4\right)\\ &\geq -\frac{3}{2}+1\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

と評価できる．よって $n=1$ のとき成り立つ．$1,\dots,n-1$ まで成り立つと仮定する．このとき Proposition 3.2より

$$v_2\left(\underbrace{\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4},1)}{\omega}}_{T_1=\varnothing}+\sum_{\varnothing\neq T_1\subsetneq\{1,\dots,n\}}\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1}}},1)}{\omega}+\underbrace{\frac{L^*_4(\overline{\psi_{4D_1^{(n)}}},1)}{\omega}}_{T_1=\{1,\dots,n\}}\right)>\frac{n-2}{2}$$

が成り立つ．したがって上式左辺の第一項と第二項の 2 進付値がいずれも $(n-2)/2$ 以上であればよい．第一項に関しては

$$\begin{aligned} v_2\left(\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4},1)}{\omega}\right) &= v_2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\prod_{i=1}^{n}\frac{\pi_{1,i}-(-1/\pi_{1,i})_4}{\pi_{1,i}}\right)\\ &= -\frac{3}{2}+\sum_{i=1}^{n}v_2(\pi_{1,i}-(-1/\pi_{1,i})_4)\\ &\geq -\frac{3}{2}+n\\ &> \frac{n-2}{2}\end{aligned}$$

と評価できる．第二項に関しては, 帰納法の仮定より

$$\begin{aligned} v_2\left(\sum_{\varnothing\neq T_1\subsetneq\{1,\dots,n\}}\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1}}},1)}{\omega}\right) &= v_2\left(\sum_{\varnothing\neq T_1\subsetneq\{1,\dots,n\}}\frac{L^*_4(\overline{\psi_{4D_{T_1}}},1)}{\omega}\prod_{\pi_{1,i}\nmid D_{T_1}}\left(1-\frac{\overline{\psi_{4D_{T_1}}}((\pi_{1,i}))}{N(\pi_{1,i})}\right)\right)\\ &\geq \min_{\varnothing\neq T_1\subsetneq\{1,\dots,n\}}\left\{v_2\left(\frac{L^*_4(\overline{\psi_{4D_{T_1}}},1)}{\omega}\prod_{\pi_{1,i}\nmid D_{T_1}}\left(1-\frac{\overline{\psi_{4D_{T_1}}}((\pi_{1,i}))}{N(\pi_{1,i})}\right)\right)\right\}\\ &\geq \min_{\varnothing\neq T_1\subsetneq\{1,\dots,n\}}\left\{\frac{\#T_1-2}{2}+\frac{1}{2}\cdot(n-\#T_1)\right\}\\ &= \frac{n-2}{2}\end{aligned}$$

と評価できる．よって n のとき成り立つ．以上より主張が示された． □

Theorem 4.2. 記号は §3 の通りとする．このとき以下が成り立つ．

$$v_2\left(\frac{L_4(\overline{\psi_{4D}},1)}{\omega}\right) \geq \begin{cases} \dfrac{n+m-2}{2} & (D = D_1^{(n)}D_2^{(m)}) \\ \dfrac{m+\ell-2}{2} & (D = D_2^{(m)}D_3^{(\ell)}) \\ \dfrac{n+\ell-2}{2} & (D = D_1^{(n)}D_3^{(\ell)}) \\ \dfrac{n+m+\ell-2}{2} & (D = D_1^{(n)}D_2^{(m)}D_3^{(\ell)}). \end{cases}$$

[証明の概要]．$D = D_1^{(n)}D_2^{(m)}$ の場合についてのみ説明する．以下のステップに基づいて n と m に関する二重帰納法で示す．

1. 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $(1, m)$ で成り立つ．
2. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(n, 1)$ で成り立つ．
3. $(n_0, m_0) \neq (n, m)$ $(1 \leq n_0 \leq n, 1 \leq m_0 \leq m)$ で成り立つならば (n, m) で成り立つ．

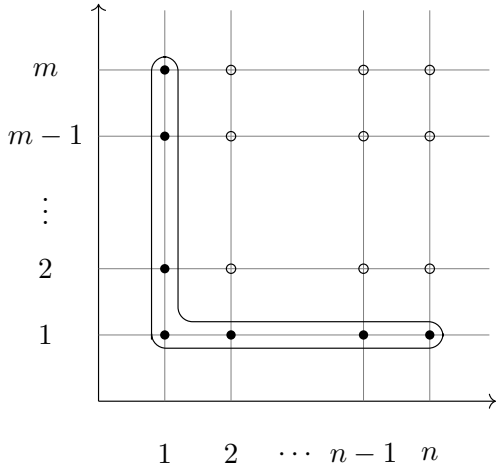


図 1　ステップ 1 とステップ 2

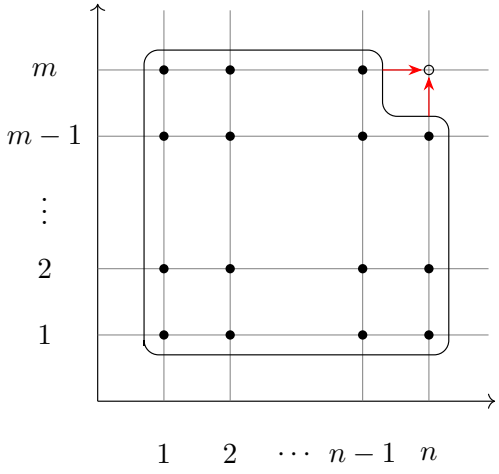


図 2　ステップ 3

ステップ 1 を m に関する帰納法で示す．$m = 1$ のとき Proposition 3.2より

$$\underbrace{\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4},1)}{\omega}}_{T_1=T_2=\varnothing} + \underbrace{\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_2^{(1)}}},1)}{\omega}}_{T_1=\varnothing,T_2=\{1\}} + \underbrace{\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_1^{(1)}}},1)}{\omega}}_{T_1=\{1\},T_2=\varnothing} + \underbrace{\frac{L^*_{4}(\overline{\psi_{4D_1^{(1)}D_2^{(1)}}},1)}{\omega}}_{T_1=\{1\},T_2=\{1\}}$$

の 2 進付値は 0 以上である．したがって上式の第一項から第三項の 2 進付値が 0 以上であればよい．第一項に関しては

$$v_2\left(\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4},1)}{\omega}\right) = v_2\left(\frac{L^*_{4}(\overline{\psi_4},1)}{\omega}\left(1-\frac{\overline{\psi_4}((\pi_{1,1}))}{N(\pi_{1,1})}\right)\left(1-\frac{\overline{\psi_4}((\pi_{2,1}))}{N(\pi_{2,1})}\right)\right) \geq -\frac{3}{2}+1+1>0.$$

と評価ができる．第二項に関しては Theorem 4.1より

$$v_2\left(\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_2^{(1)}}},1)}{\omega}\right) = v_2\left(\frac{L^*_{4}(\overline{\psi_{4D_2^{(1)}}},1)}{\omega}\left(1-\frac{\overline{\psi_{4D_2^{(1)}}}((\pi_{1,1}))}{N(\pi_{1,1})}\right)\right) \geq -\frac{1}{2}+1>0.$$

と評価できる．同様に第三項の 2 進付値が 0 以上であることを示すことができる．よって $m=1$ のとき成り立つ．$1,\dots,m-1$ まで成り立つと仮定する．このとき Proposition 3.2より

$$\underbrace{\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4},1)}{\omega}}_{T_1=T_2=\varnothing}+\sum_{\varnothing\neq T_2\subset\{1,\dots,m\}}\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_2}}},1)}{\omega}+\underbrace{\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_1^{(1)}}},1)}{\omega}}_{T_1=\{1\},T_2=\varnothing}$$
$$+\sum_{\varnothing\neq T_2\subsetneq\{1,\dots,m\}}\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_1^{(1)}D_{T_2}}},1)}{\omega}+\underbrace{\frac{L^*_4(\overline{\psi_{4D_1^{(1)}D_2^{(m)}}},1)}{\omega}}_{T_1=\{1\},T_2=\{1,\dots,m\}}$$

の 2 進付値は $(m-1)/2$ 以上である．したがって上式の第一項から第四項の 2 進付値が $(m-1)/2$ 以上であればよい．第一項に関しては

$$\begin{aligned}v_2\left(\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4},1)}{\omega}\right)&=v_2\left(\frac{L^*_4(\overline{\psi_4},1)}{\omega}\left(1-\frac{\overline{\psi_4}((\pi_{1,1}))}{N(\pi_{1,1})}\right)\prod_{j=1}^{m}\left(1-\frac{\overline{\psi_4}((\pi_{2,j}))}{N(\pi_{2,j})}\right)\right)\\&=-\frac{3}{2}+1+m\\&>\frac{m-1}{2}.\end{aligned}$$

と評価できる．第二項に関しては Theorem 4.1より

$$\begin{aligned}&v_2\left(\sum_{\varnothing\neq T_2\subset\{1,\dots,m\}}\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_2}}},1)}{\omega}\right)\\&\geq\min_{\varnothing\neq T_2\subset\{1,\dots,m\}}\left\{v_2\left(\frac{L^*_4(\overline{\psi_{4D_{T_2}}},1)}{\omega}\left(1-\frac{\overline{\psi_{4D_{T_2}}}((\pi_{1,1}))}{N(\pi_{1,1})}\right)\prod_{\pi_{2,j}\nmid D_{T_2}}\left(1-\frac{\overline{\psi_{4D_{T_2}}}((\pi_{2,j}))}{N(\pi_{2,j})}\right)\right)\right\}\\&\geq\min_{\varnothing\neq T_2\subset\{1,\dots,m\}}\left\{\frac{2\#T_2-3}{2}+1+(m-\#T_2)\right\}\\&>\frac{m-1}{2}.\end{aligned}$$

と評価できる．同様に第三項の 2 進付値も $(m-1)/2$ 以上であることが示せる．第四項に関しては，帰納法の仮定より

$$v_2\left(\sum_{\varnothing\neq T_2\subsetneq\{1,\dots,m\}}\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_1^{(1)}D_{T_2}}},1)}{\omega}\right)\geq\min_{\varnothing\neq T_2\subsetneq\{1,\dots,m\}}\left\{v_2\left(\frac{L^*_4(\overline{\psi_{4D_T}},1)}{\omega}\right)\prod_{\pi_{2,j}\nmid D_{T_2}}\left(1-\frac{\overline{\psi_{4D_T}}((\pi_{2,j}))}{N(\pi_{2,j})}\right)\right\}$$
$$\begin{aligned}&\geq\frac{1+\#T_2-2}{2}+\frac{1}{2}\cdot(m-\#T_2)\\&=\frac{m-1}{2}.\end{aligned}$$

と評価できる．よって m のとき成り立つ．したがってステップ 1 が示された．同様にしてステップ 2 も示すことができる．

ステップ 3 を示す. $(n_0, m_0) \neq (n, m)$ $(1 \leq n_0 \leq n, 1 \leq m_0 \leq m)$ で成り立つと仮定する. このとき Proposition 3.2より

$$\underbrace{\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4}, 1)}{\omega}}_{T_1=T_2=\varnothing} + \sum_{\varnothing \neq T_2 \subset \{1,\dots,m\}} \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_2}}}, 1)}{\omega} + \sum_{\varnothing \neq T_1 \subset \{1,\dots,n\}} \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1}}}, 1)}{\omega}$$
$$+ \sum_{\substack{\varnothing \neq T_1 \subsetneq \{1,\dots,n\} \\ \varnothing \neq T_2 \subsetneq \{1,\dots,m\}}} \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1} D_{T_2}}}, 1)}{\omega} + \sum_{\varnothing \neq T_1 \subsetneq \{1,\dots,n\}} \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_1} D_2^{(m)}}}, 1)}{\omega}$$
$$+ \sum_{\varnothing \neq T_2 \subsetneq \{1,\dots,m\}} \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_1^{(n)} D_{T_2}}}, 1)}{\omega} + \underbrace{\frac{L^*_4(\overline{\psi_{4D_1^{(n)} D_2^{(m)}}}, 1)}{\omega}}_{T_1=\{1,\dots,n\}, T_2=\{1,\dots,m\}}$$

の 2 進付値は $(n + m - 2)/2$ 以上である (cf. 図 3). よって第一項から第六項の 2 進付値が $(n + m - 2)/2$ 以上であればよい.

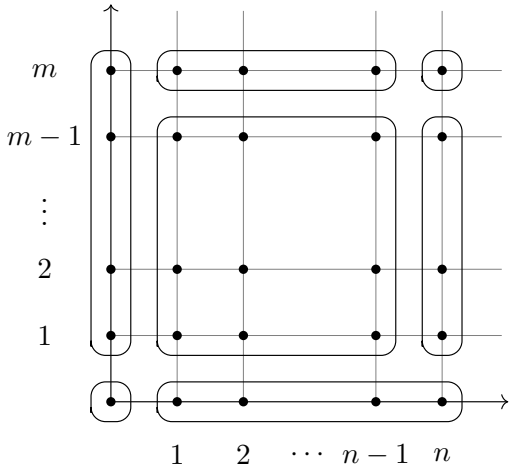


図 3　和の分解の様子

同様なので第一項と第二項と第四項のみ計算する. 第一項に関しては

$$\begin{aligned} v_2\left(\frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_4}, 1)}{\omega}\right) &= v_2\left(\frac{L^*_4(\overline{\psi_4}, 1)}{\omega} \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{\overline{\psi_4}((\pi_{1,i}))}{N(\pi_{1,i})}\right) \prod_{j=1}^{m}\left(1 - \frac{\overline{\psi_4}((\pi_{2,j}))}{N(\pi_{2,j})}\right)\right) \\ &= -\frac{3}{2} + n + m \\ &> \frac{n + m - 2}{2}. \end{aligned}$$

と評価できる. 第二項に関しては, Theorem 4.1より

$$v_2\left(\sum_{\varnothing \neq T_2 \subset \{1,\dots,m\}} \frac{L^*_{4\Delta}(\overline{\psi_{4D_{T_2}}}, 1)}{\omega}\right)$$

$$\geq \min_{\varnothing \neq T_2 \subset \{1,\dots,m\}} \left\{ v_2\left(\frac{L_4^*(\overline{\psi_{4D_{T_2}}},1)}{\omega} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{\overline{\psi_{4D_{T_2}}}((\pi_{1,i}))}{N(\pi_{1,i})}\right) \prod_{\pi_{2,j} \nmid D_{T_2}} \left(1 - \frac{\overline{\psi_{4D_{T_2}}}((\pi_{2,j}))}{N(\pi_{2,j})}\right)\right)\right\}$$

$$\geq \min_{\varnothing \neq T_2 \subset \{1,\dots,m\}} \left\{ \frac{2\#T_2 - 3}{2} + 1 \cdot n + 1 \cdot (m - \#T_2)\right\}$$
$$> \frac{n+m-2}{2}.$$

と評価できる. 第四項に関しては, 帰納法の仮定より

$$v_2\left(\sum_{\substack{\varnothing \neq T_1 \subsetneq \{1,\dots,n\} \\ \varnothing \neq T_2 \subsetneq \{1,\dots,m\}}} \frac{L_{4\Delta}^*(\overline{\psi_{4D_{T_1}D_{T_2}}},1)}{\omega}\right)$$

$$\geq \min_{\substack{\varnothing \neq T_1 \subsetneq \{1,\dots,n\} \\ \varnothing \neq T_2 \subsetneq \{1,\dots,m\}}} \left\{ v_2\left(\frac{L_4^*(\overline{\psi_{4D_T}},1)}{\omega}\right) \prod_{\pi_{1,i} \nmid D_{T_1}} \left(1 - \frac{\overline{\psi_{4D_T}}((\pi_{1,i}))}{N(\pi_{1,i})}\right) \prod_{\pi_{2,j} \nmid D_{T_2}} \left(1 - \frac{\overline{\psi_{4D_T}}((\pi_{2,j}))}{N(\pi_{2,j})}\right)\right\}$$

$$\geq \min_{\substack{\varnothing \neq T_1 \subsetneq \{1,\dots,n\} \\ \varnothing \neq T_2 \subsetneq \{1,\dots,m\}}} \left\{ \frac{\#T_1 + \#T_2 - 2}{2} + \frac{1}{2} \cdot (n - \#T_1) + \frac{1}{2} \cdot (m - \#T_2)\right\}$$
$$= \frac{n+m-2}{2}.$$

と評価できる. よって (n,m) のとき成り立つ. 以上より主張が示された. □

5 展望

いくつかの先行研究 (cf. [6], [7], [5]) においては p 進付値の等号成立条件を様々なアルゴリズムを用いて与えているが, 今回 Theorem 4.1, Theorem 4.2 では等号成立条件を与えることが出来なかった. これは数学的帰納法を多重に用いることにより等号成立の条件が複雑になってしまっていることが原因である. 等号成立条件を与えることは整数論的に非常に重要である. 例えば D を一つ固定して

$$v_2\left(\frac{L(E_D/K,1)}{\omega}\right) < \infty$$

という結果が得られたとしよう. このとき $L(E_D/K,1) \neq 0$ であるから, Birch and Swinnerton-Dyer 予想を認めれば $\operatorname{rank} E_D(K) = 0$ が分かる (適切な条件下の元であれば Coates-Wiles の定理から従う). 実際 Coates, Li は [1] において, そのような方針で L-value が 0 でないことを証明している. 今後は Theorem 4.2 の状況等においても等号成立条件を与える簡潔なアルゴリズムを考えたい.

Acknowledgements. 本稿の執筆にあたり, 九州大学の隈部哲さん, 足立大雅さんに適切な助言をいただきました. 心から感謝申し上げます.

参考文献

[1] J. Coates, Y. Li, *Non-vanishing theorems for central L-values of some elliptic curves with complex multiplication*. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 121 (2020), no. 6, 1531-1578. 11G40 (11G05 11R23)

[2] R. M. Damerell, *L-functions of elliptic curves with complex multiplication*. I. Acta Arith. 17 (1970), 287-301. 14.48 (14.00)

[3] Y. Kezuka, *On the p-part of the Birch-Swinnerton-Dyer conjecture for elliptic curves with complex multiplication by the ring of integers of* $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 164 (2018), no. 1, 67-98. 11G40 (14G10 14H52)

[4] K. Nomoto, *The 2-adic valuations of central L-values of elliptic curves with complex multiplication*. (in preparation)

[5] D. Qiu, X. Zhang, *L-series and their* 2*-adic valuations at* $s = 1$ *attached to CM elliptic curves*. Acta Arith. 103 (2002), no. 1, 79-95. 11G40 (11G05)

[6] C. Zhao, *A criterion for elliptic curves with lowest* 2*-power in* $L(1)$. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 121 (1997), no. 3, 385-400. 11G40 (11G05)

[7] C. Zhao, *A criterion for elliptic curves with lowest* 2*-power in* $L(1)$. *II*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 134 (2003), no. 3, 407-420. 11G40 (11G05)

Email address: nomotokeiichiro@gmail.com

Brauer-friendly 加群の性質について

東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻
渡辺 将一 (Nobukatsu WATANABE)

概要

本稿では, 有限群のモジュラー表現論において最も興味のもたれている予想の一つである Broué 予想において重要な役割を果たすと考えられる Brauer-friendly 加群が持ち上げ可能であることを示す。

1 イントロダクション

まず, 有限群の表現論とは何かを一言で言えば, 「与えられた有限群の性質とその表現の関係性を調べる分野」である。モジュラー表現論とは, 考えている表現の係数体の標数が考えている有限群の位数を割り切る場合をいう。なぜこの設定の場合を区別するかというと, 係数体の標数が 0 や有限群の位数と互いに素の場合 (このような場合の表現を通常表現という) は Maschke の定理より, すべての表現が半単純表現 (つまり, 単純表現のいくつかの直和) と同値になるので比較的よくわかっているためである。1935 年頃から R. Brauer により有限体や環上の表現などが本格的に研究され始める。その頃から現在までの有限群のモジュラー表現論における一つの大きな指針 (哲学) を標語的に「与えられた有限群の標数 $p > 0$ の体上の表現は, その p-局所部分群の表現により統制されているのではないか？」ということが出来る。ここで, p-局所部分群とは p-部分群の正規化群や中心化群のことをいう。これは有限群のモジュラー表現論における局所-大域原理のようなものである。有限群の表現論では与えられた表現を加群論的手法により研究することがあり, 本研究でも加群論的に表現を調べる。ここで加群論的手法とは, 有限群 G の可換環 R 上の加群 V に関するある表現 $G \to GL(V)$ が与えられることと, RG-加群 V が与えられることは同値なことなので, 表現を加群を用いて調べる研究手法のことである。ここで, $RG := \{\sum_{g\in G} \lambda_g g \mid \lambda_g \in R, g \in G\}$ とは群の積を線形に拡張した積を定義した R-多元環で, 可換環 R と有限群 G に関する群環である。群環やそれ上の加群の構造には, 群環の係数体や有限群やそれ自身の多元環としての構造が絡み, 群, 環, 体のすべてが絡むとても興味深い対象である。

本研究の背景を述べるためにも, いくつかの用語を定義していく。p を素数として, $\mathcal{O}$ を完備離散付値環でその商体 F が標数 0 であり, その唯一の極大イデアル $\mathfrak{p} := J(\mathcal{O})$ による剰余体 $k := \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ が標数 p の代数的閉体であるものを一つ固定する。このとき, 自然な全射 $\mathcal{O}G \twoheadrightarrow kG$ の $x \in \mathcal{O}G$ の像を $\bar{x}$ により表す。また, べき等元の持ち上げ可能定理により, 各原始べき等元 $i \in kG$ に対して, ある原始べき等元 $\hat{i} \in \mathcal{O}G$ で $\bar{\hat{i}} = i$ を満たすものが存在する。$R \in \{\mathcal{O}, k\}$ を固定する. 以下, 任意の環上の加群は特に断らない限り有限生成な左加群とする。既に説明したように通常表現の直和分解

による最小単位は単純加群 (表現) になる。しかし, モジュラー表現論においては必ずしも単純加群だけが最小単位ではないので, 直和による分解でこれ以上分解できない加群を**直既約加群**と定める。これがモジュラー表現論における表現の直和分解における最小単位である。もちろん単純加群は直既約加群の例になっている。RG はそれ自身の積を作用に用いて左 RG-加群かつ右 RG-加群になり両側 (RG, RG)-加群にもなっている。このとき, この両側 (RG, RG)-加群 RG の直既約 (RG, RG)-加群への分解を $RG = B_1 \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n$ としたときに, 各 B_i は R-多元環をなし RG の **(p-) ブロック**という。また各 B_i に対してその単位元はあるべき等元 $b_i \in Z(RG)$ で, $\{b_i\}_{1 \leq i \leq n}$ は $Z(RG)$ における原始べき等元で, $B_i = RGb_i = b_iRG$ となる。この b_i を B_i の**ブロックべき等元**という。以下ではブロックべき等元も単にブロックという。各直既約 RG-加群 M は唯一のブロック b_i により $b_iM \neq 0$ となる。このとき M はブロック b_i に属するという。R を RG の作用がすべて自明に作用する RG-加群と見たものを自明な RG-加群といい R_G により表す。自明な RG-加群 R_G の属するブロックが唯一存在してそのブロックを**主ブロック**という。RG-加群 L の直和分解に RG-加群 M と同型な加群が出てくる場合 $M \mid L$ と表す。次に加群に対する誘導と制限を定義する。$H \leq G$, RG-加群 M, RH-加群 N に対して, $\mathrm{Ind}_H^G(N) := RG \otimes_{RH} N$ により N の G への誘導を定義し, M の作用を RH に制限することにより RH-加群 $\mathrm{Res}_H^G(M)$ を定義する。また, M^* により M の双対 (右)RG-加群を表す。直既約 RG-加群に対して vertex と source という G の p-部分群とその群環上の加群を定義する。

定義 1 (vertex, source)**.** 直既約 RG-加群 M に対して, 次の条件を満たす G の p-部分群 P が G-共役を除き一意的に決まる。

(a) $M \mid \mathrm{Ind}_P^G(\mathrm{Res}_P^G M)$ となる。
(b) $H \leq G$ に対して $M \mid \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G(M))$ ならば, $P \leq_G H$ となる。

ここで $P \leq_G H$ は, ある $g \in G$ により ${}^gP \leq H$ であることを表す。この P を M の **vertex** といい, $\mathrm{vtx}(M)$ により表す。さらに, $\mathrm{vtx}(M)$=P のときに, 次の条件を満たす直既約 RP-加群 S が $N_G(P)$-共役を除き一意的に定まる。

(a) $M \mid \mathrm{Ind}_P^G(S)$
(b) $S \mid \mathrm{Res}_P^G(M)$
(c) $\mathrm{vtx}(S) = P$

この直既約 RP-加群 S を M の **source** といい, $\mathrm{s}(M)$ により表す。

特に RG のブロック B に対してその両側 (RG, RG)-加群としての作用を $R[G \times G]$-加群と見ることができ, そのようにしてみたときの B の vertex としてある G の p-部分群 P による $\Delta P \leq G \times G$ が取れる。この P は G-共役を除き一意的に定まるが, この P を B の**不足群**という。特に, RG の主ブロックの不足群は G の Sylow p-部分群になる。これらを用いて次の Brauer の第 1 主定理と第 3 主定理を述べる。

定理 1 (Brauer の第 1 主定理, 第 3 主定理)**.** RG の不足群 P をもつブロック b に対して, $RN_G(P)$ の不足群 P をもつある唯一のブロック c で, 後の定義 3 で定める Brauer 準同型 $\mathrm{br}_{\Delta P}$ により

$\mathrm{br}_{\Delta P}(b) = \mathrm{br}_{\Delta P}(c)$ となるものが存在する。また, RG の不足群 P をもつすべてのブロックと, $RN_G(P)$ の不足群 P をもつすべてのブロックは, この対応により一対一に対応する。この対応により, RG のブロック b に対応する $RN_G(P)$ のブロックを b の **Brauer 対応子**という。特に RG の主ブロックの Brauer 対応子は $RN_G(P)$ の主ブロックになる。

この Brauer の主定理は G のブロックとその p-局所部分群のブロックを関連付けるとても重要な定理である。この対応するブロックに属する互いの表現は, 後ほど紹介する Green 対応と呼ばれる誘導と制限を用いた対応により対応している。このようなことが上で述べた有限群のモジュラー表現論における局所-大域原理を考える根拠となっている。次に局所-大域原理の一つの定式化された重要な問題である Broué 予想を述べる。

予想 (Broué 予想)**.** G を有限群, b を不足群 P をもつ RG のブロック, c を b の Brauer 対応子である $RN_G(P)$ のブロックとする。もし P が可換群ならば, RGb と $RN_G(P)c$ は導来同値である。

この Broué 予想は有限群のモジュラー表現論において最も興味のもたれている問題の一つであり, 今までにいくつかの場合に対して予想が示されてきた。例えば G が対称群や交代群や $SL_2(p^n)$ のすべてのブロック, P が巡回群のすべてのブロック, $P \cong C_3 \times C_3$ のすべての主ブロック, $p = 2$ のすべての群のすべての主ブロックの場合などがあり他にもいくつかの場合に確認されている ([5, 7.5] を参照)。Broué 予想の確認のためには RGb と $RN_G(P)c$ の導来同値を構成しなければならないが, その一つの手法として「奥山メソッド」と呼ばれる奥山哲郎氏により考案された RGb と $RN_G(P)c$ の森田型安定同値を足掛かりに導来同値を構成する方法が存在し, Broué 予想が確認されている多くの場合がこの奥山メソッドを用いて確認されている ([5, 7.2] を参照)。このことから, 森田型安定同値の構成が重要になってくる。b と c が主ブロックの場合に有用な一つの手法として, 次の Broué の貼り合わせの原理が存在する。

定理 2 (Broué の貼り合わせの原理)**.** P を G の Sylow p-部分群, b を RG の主ブロック, M を $\mathrm{Res}^{G\times G}_{G\times N_G(P)}(RGb)$ の vertex $\Delta(P)$ の直既約因子とする。このとき, もし $\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(N_G(P))$ ならば次は同値である。

(i) 関手 $M \otimes_{RN_G(P)} -$ と $M^* \otimes_{RG} -$ により RG の主ブロックと $RN_G(P)$ の主ブロックの間の森田型安定同値が誘導される。

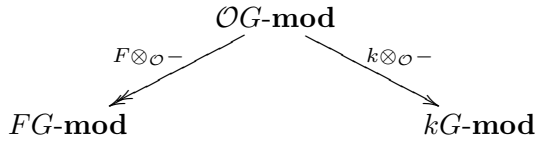
(ii) 任意の $1 \neq Q \leq P$ に対して, 関手 $\mathrm{Br}_{\Delta Q}(M) \otimes_{kC_G(Q)} -$ と $\mathrm{Br}_{\Delta Q}(M^*) \otimes_{kC_{N_G(P)}(Q)} -$ により $kC_G(Q)$ の主ブロックと $kC_{N_G(P)}(Q)$ の主ブロックの間の森田同値が誘導される。

ここで, Br は定義 3 で定義される Brauer construction, $\mathcal{F}(G)$ は定義 6 で定義される fusion system である。

定理の中の M は $R[G \times N_G(P)]$ の ΔP に関する Scott 加群というものである。

一方, b と c が主ブロック以外の場合にも Broué の貼り合わせの原理に対応する結果が存在する。Broué の貼り合わせの原理に対応する結果として, Linckelmann の貼り合わせの原理 [4, Theorem 1.2] と呼ばれる定理が存在する。この詳細を述べるにはさらに用語を用意しなければいけないので詳細は控えるが, つまるところ Broué の貼り合わせの原理と同様に, Scott 加群を含む加群のクラスで

ある Brauer-friendly 加群による RGb と $RN_G(P)c$ の森田型安定同値は, それらの各 p-局所部分群の間の森田同値を調べればよい, という定理である。ここで, 森田同値を誘導する加群は主ブロックの場合とは異なり slash 関手と呼ばれる関手を施した加群になる。Linckelmann の貼り合わせの原理により森田型安定同値が構成出来たとすると奥山メソッドより, 森田型安定同値を誘導する関手を施した加群の構造を調べる必要がある。その際に加群が「持ち上げ可能である」という性質を満たしていると調べやすくなる。そのため「持ち上げ可能である」という性質に関して説明をしていく。今 $\mathcal{O}$, F, k の定義から, 次の加群圏の関係を得る。



一般的には, 関手 $k\otimes_{\mathcal{O}}-$ は稠密ではない。そこでこの関手により対応する $\mathcal{O}G$-加群をもつ kG-加群のことを“持ち上げ可能である”という。

定義 2 (持ち上げ可能)**.** kG-加群 M が持ち上げ可能であるとは, $k\otimes_{\mathcal{O}}\widehat{M}\cong M$ を満たすある $\mathcal{O}G$-加群 $\widehat{M}$ が存在するときをいう。この $\widehat{M}$ のことを“M のリフト”という。

持ち上げ可能であることの有用性は, もし kG-加群 M が持ち上げ可能であった場合, M のリフトである $\mathcal{O}G$-加群 $\widehat{M}$ が存在することにより FG-加群 $F\otimes_{\mathcal{O}}M$ を考えることが出来ることにある。FG-加群は標数 0 の体上の表現なので指標を用いていろいろなことを計算することにより調べることが出来る。この FG 上での計算結果を kG 上に還元することが出来る。以上のようなことから持ち上げ可能である加群のクラスを調べたい。現在持ち上げ可能であることが分かっている加群のクラスはとても少なく, 後で定義をする p-permutation 加群や Endo-permutation 加群などのみである。また, p-permutation 加群や Endo-permutation 加群のリフトはそれぞれ p-permutation 加群と Endo-permutation 加群で取ることが出来る。[3] において 2018 年に C. Lassueur と J. Thévenaz により p-permutation 加群と Endo-permutation 加群を包含する加群のクラスである Endo-p-permutation 加群に対して持ち上げ可能であり, そのリフトが Endo-p-permutation 加群で取れることが示された。本稿の主役である Brauer-friendly 加群は Endo-p-permutation 加群を包含する加群のクラスであることから自然な疑問として Brauer-friendly 加群が持ち上げ可能であるかということが考えられる。またこれは単なる一般化ではなく一般のブロックの場合における Linckelmann の貼り合わせの原理による森田型安定同値の誘導する加群達を調べる必要性からも知っておきたいことである。そのため本稿では Brauer-friendly 加群が持ち上げ可能であることを示していく。

2　記号と用語の導入

この節では, Brauer-friendly 加群の定義やその定義をするために必要な記号や用語を定義する。以下, G を有限群とする。まず, $\mathcal{O}G$-加群 M, 部分群 $H\leq G$ に対して M^H により H の元の作用により不変な M の元全体を表す。また, トレース写像 $\mathrm{Tr}_H^G: M^H\to M^G$ を $\mathrm{Tr}_H^G(m):=\sum_{t\in G/H}tm$ により定める。以下, $\overline{N}_G(H):=N_G(H)/H$ とする。

定義 3 (Brauer construction, Brauer morphism, Brauer 関手)**.** P を G の p-部分群, M を $\mathcal{O}G$-加群とする。$\mathrm{Br}_P(M) := M^P/(\sum_{Q<P} \mathrm{Tr}_Q^P(M^Q) + J(\mathcal{O})M^P)$ により $k\overline{N}_G(P)$-加群である M の P による Brauer construction を定める。これにより定まる関手 $\mathrm{Br}_P : {}_{\mathcal{O}G}\mathbf{Mod} \to {}_{k\overline{N}_G(P)}\mathbf{Mod}; M \mapsto \mathrm{Br}_P(M)$ を Brauer 関手という。また, 自然な全射 $\mathrm{br}_P : M^P \to \mathrm{Br}_P(M)$ を M の P による Brauer morphism という。

定義 4 (source idempotent)**.** b を $\mathcal{O}G$ のブロック, D を b の不足群, $i \in (RGb)^D$ を原始べき等元とする。このとき i が source idempotent であるとは, $\mathrm{br}_D(i) \neq 0$ を満たすときをいう。

定義 5 (subpair)**.** b を $\mathcal{O}G$ のブロックとする。このとき, (P, b_P) が G の subpair とは, P が G の p-部分群で b_P が $\mathcal{O}C_G(P)$ のブロックである対のことをいう。また, (P, b_P) が (G, b)-subpair とは, (P, b_P) が subpair でかつ $\mathrm{br}_{\Delta P}(b)\overline{b}_P = \overline{b}_P$ を満たすときをいう。

注意. G の subpair には G の作用が自然に入り, また subpair には包含関係が定まる。

各 $g \in G$ に対して $c_g := {}^g(\cdot)$ を共役写像とする。

定義 6 (ブロックの fusion system)**.** b を G のブロック, (P, b_P) を (G, b)-subpair とする。このとき、$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$ を次のような対象と射をもつ圏として定める。この $\mathcal{F}$ を (G, b) の (P, b_P) における fusion system という。

- 対象：P のすべての部分群.
- 射：$Q_1, Q_2 \leq P$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{F}_{(P,b_P)}(G,b)}(Q_1, Q_2) := \{c_g : Q_1 \to Q_2 \mid g \in G \ s.t. \ (Q_1, b_{Q_1}) \leq {}^g(Q_2, b_{Q_2})\}.$$

P を G の Sylow p-部分群, b を RG の主ブロック, b_P を $RC_G(P)$ の主ブロックとする。このとき, $\mathcal{F}_P(G) := \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$ と定める。

次の vertex subpair と source triple は vertex と source をより精密にした概念である。

定義 7 (vertex subpair, source triple, [1, Definition 2])**.** M を直既約 $\mathcal{O}Gb$-加群とする。

・M の vertex subpair が (P, b_P) であるとは, (P, b_P) が (G, b)-subpair で, $P \leq_G \mathrm{vtx}(M)$ で, ある直既約 $\mathcal{O}P$-加群 V により $M \mid b\mathcal{O}Gb_P \otimes_{\mathcal{O}P} V$ が成り立つことをいう。

・V が M の vertex subpair (P, b_P) に関する source であるとは, V が $M \mid b\mathcal{O}Gb_P \otimes_{\mathcal{O}P} V$ の成り立つ直既約 $\mathcal{O}P$-加群のことをいう。

・(P, b_P, V) が M の source triple であるとは, V が M の vertex subpair (P, b_P) に関する source であるときをいう。

注意. M の source triple が (P, b_P, V) ならば, [1, Lemma 1] の同値より $\mathrm{vtx}(M) = P$, $\mathrm{s}(M)$=V と取れる。

定理 3 (Green 対応 [1, Lemma 1, Definition 2])**.** (P, b_P) を (G, b)-subpair とする。M を直既約 $\mathcal{O}Gb$-加群としたとき, $f_{b_P}^b(M)$ を $b_P\mathrm{Res}^G_{N_G(P,b_P)}(M)$ の直既約因子で vertex P をもつ唯一の因子により定める。このとき, $f_{b_P}^b$ は source triple (P, b_P, V) をもつ直既約 $\mathcal{O}Gb$-加群の同型類全体から

source triple(P, b_P, V) をもつ直既約 $\mathcal{O}N_G(P, b_P)b_P$-加群の同型類全体への全単射を与える。

定義 8 (permutation 加群, p-permutation 加群)**.** M を RG-加群とする。M が permutation RG-加群であるとは, G のある部分群 H_i により $M \cong \bigoplus_i \mathrm{Ind}_{H_i}^G(R_{H_i})$ となることである。また, M が p-permutaion RG-加群であるとは, ある permutation RG-加群 N により $M \mid N$ となることである。

この後定義する Brauer-friendly 加群は source に $\mathcal{F}$-stable endo-permutation 加群をもつの加群なので, その endo-(p-)permutation 加群と $\mathcal{F}$-stable を定義する。

定義 9 (endo-(p-)permutaion 加群)**.** M を RG-加群とする。このとき、M が endo-(p-)permutaion RG-加群であるとは, $\mathrm{End}_R(M)$ が (p-)permutation RG-加群となるときをいう。

定義 10 ($\mathcal{F}$-stability)**.** b を $\mathcal{O}G$ のブロック, (P, b_P) を (G, b)-subpair, V を endo-permutation $\mathcal{O}Q$-加群, $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$ とする。
・V が $\mathcal{F}$-stable であるとは, 任意の $(Q, b_Q) \leq (P, b_P)$ と任意の $c_g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}}(Q, P)$ に対して $\mathrm{Res}_Q^P(V)$ と $\mathrm{Res}_Q^{{}^gP}(gV)$ の vertex Q をもつ直既約因子が同型である。
・(P, b_P, V) が $\mathcal{F}$-stable endo-permutation source triple とは, V が $\mathcal{F}$-stable かつ直既約 endo-permutation $\mathcal{O}P$-加群で vertex P をもつときをいう。

定義 11 (source triple に対する compatibility)**.** (P_i, b_{P_i}, V_i) を $\mathcal{F}_{(P_i,b_i)}(G, b)$-stable endo-permutation source triple$(i = \{1, 2\})$ とする。
・(P_1, b_{P_1}, V_1) と (P_2, b_{P_2}, V_2) が compatible であるとは, 任意の (G, b)-subpair (Q, b_Q) と任意の $c_{g_i} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Br}(G,b)}((Q, b_Q), (P_i, b_{P_i}))$ に対して $\mathrm{Res}_{c_{g_1}}(V_1) \oplus \mathrm{Res}_{c_{g_2}}(V_2)$ が endo-permutation 加群であることである。ここで, $\mathrm{Br}(G, b)$ はすべての (G, b)-subpair を対象に持ち, 射はブロックの fusion system と同じ様に定めた Brauer 圏と呼ばれる圏である。

定義 12 (Brauer-friendly 加群 [1, Definition 8])**.** M を $\mathcal{O}Gb$-加群, $M = \bigoplus_{1 \leq i \leq n} X_i$ を直既約分解で各 X_i が直既約 $\mathcal{O}Gb$-加群で source triple (P_i, b_{P_i}, V_i) をもつものとする。
・M が Brauer-friendly $\mathcal{O}Gb$-加群であるとは, 各 $i \in \{1, ..., n\}$ に対して (P_i, b_{P_i}, V_i) が $\mathcal{F}_{(P_i,b_i)}(G, b)$-stable endo-permutation source triple で, 各 $i, j \in \{1, ..., n\}$ に対して (P_i, b_{P_i}, V_i) と (P_j, b_{P_j}, V_j) が compatible であるときをいう。

注意. b が主ブロックの場合は, Brauer-friendly RGb-加群と endo-p-permutation RGb-加群は一致する。一般の場合は, 直既約 endo-p-permutation RGb-加群は直既約 Brauer-friendly RGb-加群であるが逆は一般には成り立たない。

以上より定義した加群のクラスは次のような関係性にある。

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{permutation 加群} & \subseteq & \text{endo-permutation 加群} \\ & & \bigcap\mid & & \bigcap\mid \\ \text{Scott 加群} & \subseteq & p\text{-permutation 加群} & \subseteq & \text{endo-}p\text{-permutation 加群} \\ & & & & \bigcap\mid \\ & & & & \text{Brauer-friendly加群} \end{array}$$

3 補題

このセクションでは主結果を示す際に必要になる主要な補題を用意する。

補題 1. [2, Lemma 8.4] (P, b_P) を (G, b)-subpair とし, $\mathcal{F} := \mathcal{F}_{(Q,b_Q)}(G, b)$ を saturated と仮定する。このとき, 任意の $\mathcal{F}$-stable 直既約 endo-permutaion kP-加群は持ち上げ可能である。さらに, そのリフトとして $\mathcal{F}$-stable 直既約 endo-permutaion kP-加群が取れる。

補題 2. [2, Lemma 8.3] b を不足群 D をもつ $\mathcal{O}G$ のブロック, $P \leq D$, i を b の source idempotemt, V を $\mathrm{vtx}(V) = P$ である $\mathcal{F}$-stable 直既約 endo-permutation kP-加群, $X := \mathcal{O}Gi \otimes_{\mathcal{O}P} V$, b_P を $\overline{b}_P \mathrm{br}_P(i) \neq 0$ となる $\mathcal{O}C_G(P)$ の唯一のブロックとする。このとき, 任意の $k \otimes_{\mathcal{O}} X$ の直既約因子 M は持ち上げ可能で, X の直既約因子としてリフトを取ることができる。

補題 3. [1, Lemma 3 (i)] M を source triple(P, b_P, V) をもつ直既約 kGb-加群とする。このとき, $(kGb)^P$ の原始べき等元 i で $b_P \mathrm{br}_P(i) \neq 0$ かつ $M \mid kGi \otimes_{kP} V$ が成り立つものが存在する。

補題 4. [1, Lemma 3 (ii)] M を source triple(P, b_P, V) をもつ直既約 kGb-加群とする。このとき, b の不足群 D で $P \leq D$ を満たすものが存在し, b の source idempotent j で $b_P \mathrm{br}_P(j) \neq 0$ かつ $M \mid kGj \otimes_{kP} V$ を満たすようなものが存在する。

4 主結果

次の定理が本稿の主定理である。

定理 4. b を不足群 D をもつ kG のブロック, M を source triple(P, b_P, S) をもつ直既約 Brauer-friendly kGb-加群とする。$\mathcal{F} := \mathcal{F}_{(P,b_P)}(G, b)$ が saturated であると仮定する。このとき, $\widehat{S}/\mathfrak{p}\widehat{S} \cong S$ かつ $\widehat{M}/\mathfrak{p}\widehat{M} \cong M$ を満たす source triple $(P, \widehat{b}_P, \widehat{S})$ をもつある直既約 Brauer-friendly $\mathcal{O}G\hat{b}$-加群 $\widehat{M}$ が存在する。特に, M は持ち上げ可能である。

注意. 一般には, 定理のリフトは一意的ではない。

証明 (証明の概略)**.** ・Step 1 : $\widehat{S}$ の存在性.
補題 1 より $\mathcal{F}$-stable 直既約 endo-permutaion kP-加群 S に対して, そのリフトとしてある $\mathcal{F}$-stable 直既約 endo-permutaion $\mathcal{O}P$-加群 $\widehat{S}$ が取れる。

・Step 2：$\widehat{M}$ の存在性.
補題 4 より, b の source idempotent $j \in (kGb)^D$ で

$$M \mid kGj \otimes_{kP} S (\cong k \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}G\hat{j} \otimes_{\mathcal{O}P} \widehat{S})$$

を満たすものが存在する。また, 補題 1 より $\widehat{M} \mid \mathcal{O}G\hat{j} \otimes_{\mathcal{O}P} \widehat{S}$ となるように M のリフトを取れる。
・Step 3：$\widehat{M}$ の source triple が $(P, \hat{b}_P, \widehat{S})$ であること.
$bb_P = i_1 + \cdots + i_n : (kGb)^P$ における原始べき等元分解とする。補題 3 より, ある原始べき等元 $i := i_\ell \in (kGb)^P$ で $b_P \mathrm{br}_P(i_\ell) \neq 0$ かつ

$$M \mid kGi \otimes_{kP} S \mid bkGb_P \otimes_{kP} S.$$

また,

$$M \mid kGi \otimes_{kP} S \mid kGj \otimes_{kP} S$$

が成り立つので, べき等元の持ち上げ定理より

$$\widehat{M} \mid \mathcal{O}G\hat{i} \otimes_{\mathcal{O}P} \widehat{S} \mid \hat{b}\mathcal{O}G\hat{b}_P \otimes_{\mathcal{O}P} \widehat{S}$$

を得る。これより, $\widehat{M}$ は P-射影的でもある。もし $Q \lneq_G P$ に対して, $\widehat{M}$ が Q-射影的ならば M も Q-射影的になるので, これは矛盾である。よって $\mathrm{vtx}(\widehat{M}) = P$。また, $\mathrm{s}(\widehat{M}) = S$ もわかる。以上のことより, $\widehat{M}$ の source triple は $(P, \hat{b}_P, \widehat{S})$ である。 □

参考文献

[1] E. Biland, *Brauer-friendly modules and slash functors*, J. Pure Appl. Algebra 218 (2014), 2319-2336.

[2] R. Kessar and M. Linckelmann, *Descent of equivalences and character bijections*, in: Geometric and topological aspects of the representation theory of finite groups, Springer Proc. Math. Stat., 242, Springer, (2018), 181–212.

[3] C. Lassueur and J. Thévenaz, *Lifting endo-p-permutation modules*, Arch. Math. (Basel) **110** (2018), 205–212.

[4] M. Linckelmann, *On stable equivalences with endopermutation source*, J. Algebra 434 (2015), 27-45.

[5] 宇野勝博・切刀直子, 有限群のモジュラー表現論における予想について, 数学 65 巻 1 号 (2013), 1-23.

A recurring pattern in natural numbers of a certain property

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
Daniel TSAI

概 要

The concept of v-palindromes is recently introduced by the speaker. Let $b \geq 2$ and $n \geq 1$ be integers such that $b \nmid n$ and that n is not a base b palindrome. Our main theorem is that, if $n(k)$, for integers $k \geq 1$, denotes the k-copy repeated concatenation of the base b digits of n, then whether $n(k)$ is a base b v-palindrome depends only on k modulo some integer $\omega \geq 1$.

1 Introduction

Since the concept of v-palindromes is introduced by the speaker [4, 3], there is not really any history or background on the subject. The usage of the word "palindrome" in the naming does, however, came from the idea that the v-palindromes can be viewed as an analogy of the usual palindromes. We first illustrate using the example of 1998.

$$\begin{array}{ccccc} 1998 & = & 2 \cdot 3^3 \cdot 37 & \longmapsto & 2 + (3+3) + 37 \\ \uparrow & & & & \| \\ \text{base 10 reverse} & & & & 45 \\ \downarrow & & & & \| \\ 8991 & = & 3^5 \cdot 37 & \longmapsto & (3+5) + 37 \end{array} \tag{1}$$

In the above, we prime factorized both 1998 and its base 10 reverse 8991. Then we summed the numbers "appearing" in each factorization (the prime divisors and their corresponding exponents larger than 1); notice that because an exponent of 1 does not "appear", i.e., we usually do not write it when doing an actual prime factorization, we do not sum it. Then perhaps somewhat surprisingly, the sums agree. In the following we rigorously define the concept of v-palindromes after stating some preliminary definitions.

Recall the base b representation of an integer $n \geq 1$ as follows.

Definition 1. Let $b \geq 2$, $L \geq 1$, and $0 \leq a_{L-1}, a_{L-2}, \ldots, a_0 < b$ be integers, then we denote

$$(a_{L-1}a_{L-2}\cdots a_0)_b := a_{L-1}b^{L-1} + a_{L-2}b^{L-2} + \cdots + a_0. \tag{2}$$

Theorem 1 ([1], Theorem 4.7)**.** *Let $b \geq 2$ be an integer. Then for every integer $n \geq 1$, there exist unique integers $L \geq 1$ and $0 \leq a_{L-1}, a_{L-2}, \ldots, a_0 < b$ with $a_{L-1} \neq 0$ such that*

$$n = (a_{L-1}a_{L-2}\cdots a_0)_b. \tag{3}$$

We give the definition of a palindrome.

Definition 2. Let $b \geq 2$ be an integer. An integer $n \geq 1$ given in the form (3) is a *base b palindrome* if $a_i = a_{L-1-i}$ for each $0 \leq i \leq L-1$.

Intuitively speaking, a palindrome is a number whose digits read the same forwards and backwards, i.e., there is a left-right symmetry, such as 121 and 2332.

Definition 3. Let $b \geq 2$ be an integer and let $n \geq 1$ be an integer given in the form (3). Then the *base b reverse* of n is $r_b(n) = (a_0 \cdots a_{L-2}a_{L-1})_b$.

Intuitively speaking, the reverse is the number formed by writing the digits of the original number in reverse order. For example, $r_{10}(18) = 81$ and $r_{10}(20) = r_{10}(200) = 2$. With Definition 3, the definition of a base b palindrome can be written simply as $n = r_b(n)$. We now define a function v to denote "summing the numbers appearing in the factorization" as follows.

Definition 4. Let $n \geq 1$ be an integer with prime factorization

$$n = p_1^{a_1} \cdots p_s^{a_s} q_1 \cdots q_t, \tag{4}$$

where the $s, t \geq 0$ and $a_1, \ldots, a_s \geq 2$ are integers and the $p_1, \ldots, p_s, q_1, \ldots, q_t$ are distinct primes. We define

$$v(n) = \sum_{i=1}^{s} (p_i + a_i) + \sum_{j=1}^{t} q_j. \tag{5}$$

Recall that a function $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ is called *additive* if $f(mn) = f(m) + f(n)$ whenever $m, n \geq 1$ are coprime. Then v is an additive function. We can now define v-palindromes.

Definition 5. Let $b \geq 2$ be an integer. An integer $n \geq 1$ is a *base b v-palindrome* if

(i) $b \nmid n$,

(ii) $n \neq r_b(n)$,

(iii) $v(n) = v(r_b(n))$.

Here the notation $x \mid y$ means that x divides y and $x \nmid y$ that x does not divide y. We explain why the v-palindromes can be viewed as an analogy to the usual palindromes. The definition of a base b palindrome is $n = r_b(n)$. Condition (iii) above is obtained by applying a v to $n = r_b(n)$. Condition (i) is included just for the aesthetic purpose that n and $r_b(n)$ have the same number of digits and condition (ii) so that condition (iii) is nontrivial. Thus there is this slight connection between palindromes and v-palindromes. However it is conceivable that they will have very different behavior.

This talk is based on the speaker's paper [3], in which the main theorem [3, Theorem 1] indicates a periodic phenomenon involving v-palindromes and repeated concatenations. While [3] deals only with base ten, its content is easily adapted to a general base, and the main theorem of this talk is the adaptation of [3, Theorem 1] to a general base (Theorem 2 below).

We end this section by giving the definition of repeated concatenations.

Definition 6. Let $b \geq 2$ be an integer and let $n \geq 1$ be an integer given in the form (3). Then for integers $k \geq 1$, the *k-copy repeated concatenation in base b* of n is

$$\begin{aligned} n(k)_b &= (\underbrace{a_{L-1}a_{L-2}\cdots a_0\, a_{L-1}a_{L-2}\cdots a_0\, \cdots\cdots\, a_{L-1}a_{L-2}\cdots a_0}_{k \text{ copies of } a_{L-1}a_{L-2}\cdots a_0})_b \\ &= n(1 + b^L + \cdots + b^{(k-1)L}) = n \cdot \frac{1 - b^{Lk}}{1 - b^L}. \end{aligned} \tag{6}$$

2 The main theorem

With the relevant definitions in the Introduction, we can now state the adaptation of [3, Theorem 1] to a general base as follows.

Theorem 2 ([3, Theorem 1], for a general base)**.** *Let $b \geq 2$ be an integer and let $n \geq 1$ be an integer with $b \nmid n$ and $n \neq r_b(n)$. Then there exists an integer $\omega \geq 1$ such that for every integer $k \geq 1$, $n(k)_b$ is a base b v-palindrome if and only if $n(k+\omega)_b$ is. In other words, whether $n(k)_b$ is a base b v-palindrome depends only on k modulo ω.*

We illustrate the above theorem with the example of $b = 10$ and $n = 48$. The sequence of repeated concatenations in base ten of 48 is

$$48, 4848, 484848, \ldots. \tag{7}$$

Replacing each term above by 1 if it is a base ten v-palindrome and 0 if not, (7) becomes

$$0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots. \tag{8}$$

Now Theorem 2 says that the above sequence of 1's and 0's is periodic. It might seem that the smallest period is 3. However in fact, $48(21)_{10}$ is not a base ten v-palindrome and the smallest period is 21.

The proof of [3, Theorem 1] is only for $b = 10$, but is easily adapted to a general base. We give the first half of the general proof in Section 2.2 and briefly describe how the rest of the proof works in Section 2.3. For the rest of this section, we fix a base $b \geq 2$ and shall write r_b simply as r, $n(k)_b$ simply as $n(k)$, and call a base b v-palindrome simply a v-palindrome. We also fix an integer $n \geq 1$ with $b \nmid n$, $n \neq r(n)$, and L base b digits. Some notation which will be used later are as follows.

- For a prime p and integer $n \neq 0$, $\mathrm{ord}_p(n)$ denotes the greatest integer a such that $p^a \mid n$.
- sgn is the *sign function* defined by $\mathrm{sgn}(x) = 1$ if $x > 0$ and $\mathrm{sgn}(x) = -1$ if $x < 0$.
- $\vee$ and $\wedge$ are the logical symbols for *or* and *and*.

2.1 Preparation

Certain numbers ρ_k are used in the proof and we give their definition as follows.

Definition 7. For integers $k \geq 1$, we denote

$$\rho_k = (\overbrace{1\underbrace{0\cdots0}_{L-1}1\underbrace{0\cdots0}_{L-1}1\cdots\cdots1\underbrace{0\cdots0}_{L-1}1}^{k})_b, \tag{9}$$

where there are k digits of 1 with $L-1$ digits of 0 between any consecutive digits of 1, and the number is regarded in base b.

Then it is clear that for integers $k \geq 1$, $n(k) = n\rho_k$. Also, certain functions $\varphi_{p,\delta}$ are used in the proof and we give their definition as follows.

Definition 8. For primes p and integers $\delta \geq 1$, we define a function $\varphi_{p,\delta}\colon \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{N}$ by setting, for integers $\alpha \geq 0$,

$$\varphi_{p,\delta}(\alpha) = v(p^{\alpha+\delta}) - v(p^{\alpha}). \tag{10}$$

The functions $\varphi_{p,\delta}$ can be described explicitly. We have

$$\varphi_{2,1}(\alpha) = \begin{cases} 2, & \text{if } \alpha = 0, 1, \\ 1, & \text{if } \alpha \geq 2. \end{cases} \tag{11}$$

For primes p,

$$\varphi_{p,1}(\alpha) = \begin{cases} p, & \text{if } \alpha = 0, \\ 2, & \text{if } \alpha = 1, \\ 1, & \text{if } \alpha \geq 2. \end{cases} \tag{12}$$

For primes p and integers $\delta \geq 2$,

$$\varphi_{p,\delta}(\alpha) = \begin{cases} p+\delta, & \text{if } \alpha = 0, \\ 1+\delta, & \text{if } \alpha = 1, \\ \delta, & \text{if } \alpha \geq 2. \end{cases} \tag{13}$$

We also give the following notation for the ranges of the functions $\varphi_{p,\delta}$.

Definition 9. For primes p and integers $\delta \geq 1$, we denote $R_{p,\delta} = \varphi_{p,\delta}(\mathbb{N} \cup \{0\})$.

From (11), (12), and (13), it is clear that $R_{p,\delta}$ is of size 2 or 3.

2.2 First part of the proof

Let the prime factorizations of n and $r(n)$ be

$$n = p_1^{a_1} \cdots p_m^{a_m}, \tag{14}$$

$$r(n) = p_1^{b_1} \cdots p_m^{b_m}, \tag{15}$$

where $m \geq 1$ and $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \geq 0$ are integers with $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$ for each $1 \leq i \leq m$, and $p_1 < \cdots < p_m$ are primes. For integers $k \geq 1$, let the prime factorization of ρ_k be

$$\rho_k = p_1^{g_1} \cdots p_m^{g_m} c, \tag{16}$$

where $g_1, \ldots, g_m \geq 0$ and $c \geq 1$ are integers with $(c, p_1 \cdots p_m) = 1$. The $g_1, \ldots, g_m, c$ varies as k increases, but we suppress this dependency on k from our notation for simplicity. We have, for integers $k \geq 1$,

$$n(k) = n\rho_{k,L} = p_1^{a_1+g_1} \cdots p_m^{a_m+g_m} c, \tag{17}$$

$$r(n(k)) = r(n)\rho_{k,L} = p_1^{b_1+g_1} \cdots p_m^{b_m+g_m} c. \tag{18}$$

Since v is an additive function, applying v to the above equalities yield

$$v(n(k)) = \sum_{i=1}^{m} v(p^{a_i+g_i}) + v(c), \tag{19}$$

$$v(r(n(k))) = \sum_{i=1}^{m} v(p^{b_i+g_i}) + v(c). \tag{20}$$

Hence n is a v-palindrome if and only if

$$\sum_{i=1}^{m} (v(p_i^{a_i+g_i}) - v(p_i^{b_i+g_i})) = 0. \tag{21}$$

If $a_i = b_i$, then $v(p_i^{a_i+g_i}) - v(p_i^{b_i+g_i}) = 0$. Thus let those $1 \leq i \leq m$ with $a_i \neq b_i$ be ordered as $i_1 < \cdots < i_t$ (notice that because $n \neq r(n)$, $t \geq 1$). Then (21) becomes

$$\sum_{j=1}^{t} (v(p_{i_j}^{a_{i_j}+g_{i_j}}) - v(p_{i_j}^{b_{i_j}+g_{i_j}})) = 0. \tag{22}$$

But this is a cumbersome notation, so hereafter we denote p_{i_j} by p_j, a_{i_j} by a_j, b_{i_j} by b_j, and g_{i_j} by g_j. This will not cause any confusion because we will not be referring to the other prime factors or their corresponding exponents. Then (22) becomes

$$\sum_{j=1}^{t} (v(p_j^{a_j+g_j}) - v(p_j^{b_j+g_j})) = 0. \tag{23}$$

For each $1 \leq j \leq t$, put $\delta_j = a_j - b_j$ and $\mu_j = \min(a_j, b_j)$. Then the above can be rewritten, using the functions $\varphi_{p,\delta}$ of Section 2.1, as

$$\sum_{j=1}^{t} \operatorname{sgn}(\delta_j) \varphi_{p_j,|\delta_j|}(\mu_j + g_j) = 0. \tag{24}$$

Now let

$$\mathcal{U} = \left\{ (u_1, \ldots, u_t) \in R_{p_1,|\delta_1|} \times \cdots \times R_{p_t,|\delta_t|} \colon \sum_{j=1}^{t} \operatorname{sgn}(\delta_j) u_j = 0 \right\}. \tag{25}$$

Then for integers $k \geq 1$, $n(k)$ is a v-palindrome if and only if

$$\bigvee_{(u_1,\ldots,u_t)\in\mathcal{U}} \bigwedge_{j=1}^{t} (\varphi_{p_j,|\delta_j|}(\mu_j + g_j) = u_j). \tag{26}$$

The above expression depends only on k and we see that only the $g_j = \operatorname{ord}_{p_j}(\rho_{k,L})$ $(1 \leq j \leq t)$ change as k increases.

2.3 The rest of the proof

In Section 2.2, we showed that for integers $k \geq 1$, $n(k)$ is a v-palindrome if and only if (26) holds. Now the truth value of (26) depends only on the truth values of the individual $(\varphi_{p_j,|\delta_j|}(\mu_j+g_j) = u_j)$'s and each of them is equivalent to a simpler condition involving divisibility properties of k. We need to first define certain numbers h_{p^α} as follows.

Definition 10. For prime powers p^α with $(p, b) = 1$. The order of b^L regarded as an element of $(\mathbb{Z}/p^{\alpha+\mathrm{ord}_p(b^L-1)}\mathbb{Z})^\times$ is denoted by h_{p^α}.

Then it follows that we have the sequence of divisibility relations

$$h_p \mid h_{p^2} \mid h_{p^3} \mid \cdots . \tag{27}$$

Each $(\varphi_{p_j,|\delta_j|}(\mu_j + g_j) = u_j)$ is equivalent to one of the conditions

$$\begin{cases} h_{p_j} \nmid k, \\ h_{p_j} \mid k \text{ and } h_{p_j^2} \nmid k, \\ h_{p_j^2} \mid k, \\ h_{p_j} \mid k, \\ h_{p_j^2} \mid k, \\ \text{impossible}, \\ \text{always true}. \end{cases} \tag{28}$$

When $(p_j, b) = 1$, only the last two conditions are possible. The way to determine which of the above conditions $(\varphi_{p_j,|\delta_j|}(\mu_j + g_j) = u_j)$ is equivalent to is a bit tedious and the way in the case of $b = 10$ is described in [3]. Recall that if $x \mid z$, then for $y \in \mathbb{Z}$, $x \mid y$ if and only if $x \mid (y + z)$. Using this property and in view of (27), we see that a possible choice for ω in Theorem 2 is

$$\omega = \mathrm{lcm}\{h_{p_j^2} \colon (p_j, b) = 1\}. \tag{29}$$

3 The smallest period and order

The periodic phenomenon described by Theorem 2 raises the following questions.

Question 1. How to find the smallest possible ω?

Question 2. Does there exist an integer $k \geq 1$ such that $n(k)_b$ is a base b v-palindrome?

Based on the above questions, we give the following notation.

Definition 11. Let $b \geq 2$ and $n \geq 1$ be integers with $b \nmid n$ and $n \neq r_b(n)$. The smallest possible ω in Theorem 2 is denoted by $\omega_0(n)_b$. If there exists a $k \geq 1$ such that $n(k)_b$ is a base b v-palindrome, then the smallest one is called the *order* of n with respect to b and denoted by $c(n)_b$; otherwise we set $c(n)_b = \infty$.

表 1: Table of $\omega_0(n)_{10}$ and $c(n)_{10}$.

n	$\omega_0(n)_{10}$	$c(n)_{10}$
13	6045	15
17	337960	280
18	1	1
19	15561	819
26	6045	15
37	32412	12
39	6045	15
48	21	3
49	22701	3243
56	273	3
79	4781712	624

Although (29) provides a possible ω, it is often too large. A way for finding $\omega_0(n)_{10}$ and $c(n)_{10}$ is given in the speaker's preprint [2], which is easily adapted to a general base. Whether that is the most efficient way, we are still not sure. In essence, a function called the indicator function is constructed from which both $\omega_0(n)_{10}$ and $c(n)_{10}$ can be derived quite easily. We describe the indicator function, for a general base. We need to first define certain functions I_a as follows.

Definition 12. For integers $a \geq 1$, define a function $I_a \colon \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ by

$$I_a(k) = \begin{cases} 1, & \text{if } a \mid k, \\ 0, & \text{if } a \nmid k. \end{cases} \tag{30}$$

That is, I_a is the indicator function of $a\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$.

Definition 13. Let $b \geq 2$ and $n \geq 1$ be integers with $b \nmid n$ and $n \neq r_b(n)$. We define the *indicator function* $I_n^b \colon \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ by

$$I_n^b(k) = \begin{cases} 1, & \text{if } n(k)_b \text{ is a base } b \text{ } v\text{-palindrome}, \\ 0, & \text{if } n(k)_b \text{ is not a base } b \text{ } v\text{-palindrome}, \end{cases} \tag{31}$$

for $k \geq 1$, and then extending periodically (which is possible due to Theorem 2) to the whole $\mathbb{Z}$.

Then we have the following.

Theorem 3 ([2, Theorm 5.8], for a general base)**.** *Let $b \geq 2$ and $n \geq 1$ be integers with $b \nmid n$ and $n \neq r_b(n)$. Then there exist unique integers $q \geq 0$, $1 \leq a_1 < \cdots < a_q$, and $\lambda_1, \ldots, \lambda_q \neq 0$ such that*

$$I_n^b = \lambda_1 I_{a_1} + \lambda_2 I_{a_2} + \cdots + \lambda_q I_{a_q}. \tag{32}$$

From (32), $\omega_0(n)_b$ and $c(n)_b$ can be derived as follows.

Theorem 4 ([2, Corollary 6.5 and Corollary 7.2], for a general base)**.** *Let $b \geq 2$ and $n \geq 1$ be integers with $b \nmid n$ and $n \neq r_b(n)$. Suppose that I_n^b is expressed in the form* (32)*, then*

$$\omega_0(n)_b = \operatorname{lcm}\{a_1, \ldots, a_q\}, \quad c(n)_b = \inf\{a_1, \ldots, a_q\}. \tag{33}$$

A definite procedure for expressing the indicator function I_n^{10} in the form (32) is given in [2], which is easily adapted to a general base.

参考文献

[1] McCoy, N. H. (1975). *Introduction to Modern Algebra.* Boston, Mass.: Allyn and Bacon, Inc.

[2] Tsai, D. (2021). The fundamental period of a periodic phenomenon pertaining to v-palindromes. `https://arxiv.org/abs/2103.00989`

[3] Tsai, D. (2021). A recurring pattern in natural numbers of a certain property. *Integers.* 21: Paper No. A32.

[4] 蔡承勲. (2018). ある奇妙な性質を満たす自然数. 数学セミナー. 57(11):35–36.

Surjectivity of some local cohomology maps and the second vanishing theorem

日本大学大学院総合基礎科学研究科地球情報数理科学専攻
伊城　慎之介 (Shinnosuke Ishiro)

概要

局所コホモロジーは可換環論の重要な研究対象の一つである．特に局所コホモロジーが消滅する条件を調べることは，局所コホモロジーが定義されて以来，研究され続けている．本稿では局所コホモロジーの消滅定理の一つである，第二消滅定理に関する M. Asgharzadeh 氏と下元数馬氏との共同研究について紹介する．

本稿は M. Asgharzadeh 氏と日本大学の下元数馬氏との共著論文 [1] に基づく．また R は可換ネーター環，I は R のイデアルとする．

[*1] R が有理数体 $\mathbb{Q}$ を含むとき R は**標数 0 の環**であるといい，R が有限体 $\mathbb{F}_p$ を含むとき R は**標数 $p>0$ の環**という．特に標数 0 と標数 $p>0$ の環をまとめて**等標数の環**という．また等標数でない環（体を含まない環）を**混標数の環**という．

例 0.1.　1. 有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の多項式環やベキ級数環は，標数 0 の環である．

2. 有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の多項式環やベキ級数環は標数 p の環である．

3. p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ 上の多項式環やベキ級数環は混標数の環である．

1　局所コホモロジー

まず局所コホモロジーを定義する．局所コホモロジーは 1961 年に A. Grothendieck によって Harvard 大学のセミナーにて定義された．

定義 1.1. R-加群 M に対して

$$\Gamma_I(M) := \{x \in M \mid I \text{ ある自然数 } n>0 \text{ が存在して } I^n x = 0 \text{ が成り立つ.}\}$$

と定義する．このとき関手 $\Gamma_I(-)$ は共変な左完全関手であり，この i 次右導来関手を i **次局所コホモロジー**と呼び，$H^i_I(-)$ を表す．

局所コホモロジーを定義する方法は他にも Cech 複体を用いた定義があるが，詳細は [2] や [7] を参照のこと．ホモロジー代数の一般論から次の長完全列が得られる．

[*1] 標数はネーター性は必要ない．

命題 1.2. R 加群の短完全列

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

に対して次の長完全列が得られる；

$$\cdots \to H_I^{i-1}(N) \to H_I^i(L) \to H_I^i(M) \to H_I^i(N) \to H_I^{i+1}(L) \to \cdots .$$

また定義より以下が成り立つ.

命題 1.3. M を R 加群とする．任意の $i > 0$，任意の $x \in H_I^i(M)$ に対してある $n \geq 0$ が存在して $I^n x = 0$ である.

1.1 局所コホモロジーの消滅問題

次の問題は局所コホモロジーが定義されてから研究され続けている.

問題 1 (局所コホモロジーの消滅問題 (Grothendieck'61))**.** $(R, \mathfrak{m})$ を局所環，n を整数とする．このとき任意の $i > n$ に対して $H_I^i(M) = 0$ となる条件を与えよ.

$n = \dim R$ の時は 1961 年に Grothendieck 自身によって与えられ（**Grothendieck の消滅定理**），$n = \dim R - 1$ の時は 1968 年に Hartshorne によって与えられた (**Hartshorne-Lichtenbaum の消滅定理**)．$n = \dim R - 2$ の時は**第二消滅定理**と呼ばれている.

定義 1.4. ([cf. [10, Definition 1.2]) $(R, \mathfrak{m})$ を d 次元局所環，$\widetilde{R}$ を R の完備化の強ヘンゼル化の完備化，$\widetilde{\mathfrak{m}}$ は $\widetilde{R}$ の極大イデアルとする．このとき R に対して**第二消滅定理が成り立つ**とは以下が同値であることをいう；

1. 全ての $i > d - 2$ と R-加群 M に対して $H_I^i(M) = 0$ が成り立つ,
2. $\dim(R/I) \geq 2$ かつ $\widetilde{R}/I\widetilde{R}$ の punctured spectrum $\mathrm{Spec}^\circ(\widetilde{R}/I\widetilde{R}) := \mathrm{Spec}(\widetilde{R}/I\widetilde{R})\backslash\{\widetilde{\mathfrak{m}}\}$ が連結である.

第二消滅定理には長い歴史がある．この定理は，1968 年に Hartshorne[3] によって射影多様体に対して証明され，任意の正則局所環に対して成り立つことが予想された．1993 年に標数 p の場合を Peskin-Szpiro[9] が証明し，同年に標数 0 の場合を Ogus[8] が証明した．1977 年には Hartshorne-Speiser[5] によって，Frobenius 作用を用いた，標数 p の場合の別証明が与えられた．その後 1990 年に Huneke-Lyubeznik[4] によって，標数 0 と標数 p を区別しない証明が与えられた.

混標数の場合は長年進展はなかったが，2018 年に Hernández-Betancourt-Perez-Witt[6] によって不分岐な正則局所環 ($p \in \mathfrak{m}\backslash\mathfrak{m}^2$ を満たす) の特別な場合に証明を与えた（彼らはこの定理を**新第二消滅定理**と呼んでいる）．さらに 2021 年に arXiv にあげられた Zhang のプレプリント [10] では不分岐な場合に第二消滅定理が成り立つことを証明した．現在では分岐している正則局所環（$p \in \mathfrak{m}^2$ を満たす）の場合のみ未解決問題である.

講演者らは分岐している正則局所環の新第二消滅定理に関する研究を行なった．主結果を述べる前に [6] の新第二消滅定理について説明する.

定理 1.5. ([6, Theorem 3.8]) $(R,\mathfrak{m})$ を剰余体が分離閉体である d 次元不分岐な混標数の完備正則局所環，I を R のイデアルとする．I の任意の極小素イデアル $\mathfrak{q}$ に対して $\dim(R/\mathfrak{q}) \geq 3$ が成り立つと仮定する．このとき以下は同値である．

1. $H_I^{d-1}(R) = 0$.
2. $\mathrm{Spec}^\circ(R/I)$ が連結である．

定理 1.5 の証明では，次の補題（定理 1.5 の I が素イデアルの場合）が特に重要である[*2]．

補題 1.6. ([6, Lemma 3.7]) $(R,\mathfrak{m})$ を剰余体が分離閉体である d 次元不分岐な混標数の完備正則局所環，$\mathfrak{p}$ を R の素イデアルとする．このとき $\dim(R/\mathfrak{p}) \geq 3$ と仮定すると，$H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R) = 0$ が成り立つ．

注意 1.7.

1. Cohen の構造定理より以下が従う．
   (a) d 次元不分岐完備正則局所環 $(R,\mathfrak{m})$ は $C(k)[[x_2,\dots,x_d]]$ と同型である．ただし $C(k)$ は剰余体 k が $R/\mathfrak{m}$ と同型であるような完備離散付値環である．
   (b) 分岐している d 次元正則局所環 $(R,\mathfrak{m})$ は $C(k)[[x_1,\dots,x_d]]/(p-f)$ $(f \in \mathfrak{m}^2)$ と同型である．例えば $\mathbb{Z}_p[[x,y]]/(p-xy)$ は分岐している 2 次元正則局所環である．
2. 局所整域の punctured spectrum は連結である (cf. [7, Exercise 15.6])．したがって補題 1.6 において $\mathrm{Spec}^\circ(R/\mathfrak{p})$ は連結である．

簡単に補題 1.6 の証明の概略を述べる．

補題 *1.6* の証明. $p \in \mathfrak{p}$ の場合のみ証明する．命題 1.2 より，短完全列

$$0 \to R \xrightarrow{\times p} R \to R/pR \to 0$$

に対して長完全列

$$\cdots \to H_{\mathfrak{p}}^{d-2}(R/pR) \to H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R) \xrightarrow{\times p} H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R) \to H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R/pR) \to \cdots \tag{1}$$

が得られる．注意 1.7 より R は $C(k)[[x_2,\dots,x_d]]$ と同型なので R/pR は $d-1$ 次元正則局所環である．また $\mathfrak{p}(R/pR) \subseteq R/pR$ は素イデアルなので注意 1.7.2 より $(R/pR)/\mathfrak{p}(R/pR)$ の punctured spectrum は連結である．したがって等標数の第二消滅定理から $H_{\mathfrak{p}}^{d-2}(R/pR) = 0$ が得られる．よって長完全列 (1) より $H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R) \xrightarrow{\times p} H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R)$ が単射である．ここで $H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R) \neq 0$ と仮定すると，命題 1.3 より，ある 0 でない元 $x \in H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R)$ と自然数 $n > 0$ が存在して $\mathfrak{p}^n x = 0$ が成り立つ．特に $p \in \mathfrak{p}$ より $p^n x = 0$ が成り立つ．このとき n は $p^{n-1}x \neq 0$ となるようにとれるが，これは $H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R) \xrightarrow{\times p} H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R)$ が単射であることに矛盾する．したがって $H_{\mathfrak{p}}^{d-1}(R) = 0$ である． □

我々は定理 1.5 を元にして，分岐している場合も扱えるように改良することを目標にした．問題は，分岐している場合は R/pR が正則局所環にならないことである．この問題を解消するために我々は次の定理を証明した．

[*2] 定理 1.5 の主張 1 ⇒ 2 の証明は Huneke-Lyubeznik[4] の証明をそのまま適用することができる．主張 2 ⇒ 1 では I が素イデアルの場合がが証明できれば，後は Huneke-Lyubeznik[4] の証明が適用できる．

主定理 1. ([1, Theorem 3.4]) $(R,\mathfrak{m})$ を標数 $p>0$ の d 次元正則局所環，$I\subseteq R$ をイデアルとする．非負整数 $i\geq 0$ に対して $l_R(H_I^{d-i}(R))<+\infty$ と仮定する．このとき $H_I^i(R)$ は可除加群である．すなわち任意の非零因子 $x\in R$ に対して $H_I^i(R)\xrightarrow{\times x}H_I^i(R)$ は全射である．

我々はこの定理を応用して，定理 1.5 をある仮定の元で分岐・不分岐を区別しない証明を与えた．

主定理 2. ([1, Theorem 1.1]) $(R,\mathfrak{m})$ を剰余体が分離閉体である混標数の d 次元完備正則局所環，$I\subseteq R$ をイデアルとする．I の任意の極小素イデアル $\mathfrak{q}$ に対して $\dim(R/\mathfrak{q})\geq 3$ かつ $l_R(H^2_{\mathfrak{m}}(R/pR+\mathfrak{q}))<+\infty$ が成り立つと仮定する．このとき以下は同値である．

1. $H_I^{d-1}(R)=0$.
2. $\mathrm{Spec}^\circ(R/I)$ は連結である．

主定理 2 でも I が素イデアルの場合，つまり次の補題が重要である．

補題 1.8. ([1, Lemma 4.4]) $(R,\mathfrak{m})$ を剰余体が分離閉体である混標数の d 次元完備正則局所環，$\mathfrak{q}$ を $\dim(R/\mathfrak{q})\geq 3$ である R の素イデアルとする．$J:=pR+\mathfrak{q}$ とおく．このとき $l_R(H^2_{\mathfrak{m}}(R/J))<+\infty$ と仮定すると $H^{d-1}_{\mathfrak{q}}(R)=0$ が成り立つ．

最後に具体例を述べる．次は分岐している正則局所環の局所コホモロジーの非消滅の例である．

例 1.9. ([1, Example 4.5]) k を標数 $p>0$ の代数閉体，$C(k)$ を剰余体が k の完備離散付値環とする．$R:=C(k)[[X_1,X_2,X_3,X_4,Y_1,Y_2,Y_3,Y_4]]/(p-X_iY_j)$, $I=(X_1,X_2,X_3,X_4)\cap(Y_1,Y_2,Y_3,Y_4)$ とおく．このとき $H_I^7(R)\neq 0$ が成り立つ．

講演では主定理 1 を用いた補題 1.8 の証明の概略や例の計算方法を紹介する．

参考文献

[1] M. Asgharzadeh, S. Ishiro, and K. Shimomoto. *Surjectivity of some local cohomology map and the second vanishing theorem*, arXiv:2107.09041 (2021).

[2] M. P. Brodmann and R. Y. Sharp, *Local cohomology: an algebraic introduction with geometric applications*, Cambridge university press (2012).

[3] R. Hartshorne, *Cohomological dimension of algebraic varieties*, Annals of Mathematics (1968) 403-450.

[4] C. Huneke and G. Lyubeznik, *On the vanishing of local cohomology modules*, Invent Math (1990) 73-93

[5] R. Hartshorne and R. Speiser, *Local cohomological dimension in characteristic p*, Annals of Mathematics (1977) 45-79.

[6] D. Hernández, L. Núñez-Betancourt, F. Perez and E. Witt, *Cohomological dimension, Lyubeznik numbers, and connectedness in mixed characteristic*, Journal of Algebra (2018).

[7] S. B. Iyengar, S. Iyengar, G. J. Leuschke, A. Leykin, E. Miller, and C. Miller, *Twenty-four*

hours of local cohomology, American Mathematical Soc (2007).

[8] A. Ogus, *Local cohomological dimension of algebraic varieties*, Annals of Mathematics (1973) 327-365.

[9] C. Peskine and L. Szpiro, *Dimension projective finie et cohomologie locale*, Publications Mathématiques de l'IHÉS (1973) 47-119.

[10] W. Zhang, *The second vanishing theorem for local cohomology modules*, arXiv : 2102.12545v2 (2021).

Rational function semifields of tropical curves are finitely generated over the tropical semifield

東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻
宋珠愛 (Chue SON)

概 要

We prove that the rational function semifield of a tropical curve is finitely generated as a semifield over the tropical semifield $\boldsymbol{T} := (\boldsymbol{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ by giving a specific finite generating set.

1 Introduction

This manuscript is on tropical geometry. Tropical geometry is an algebraic geometry over the *tropical semifield* $\boldsymbol{T} := (\boldsymbol{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$, which is developing from the bigining of this century. In tropical geometry, we study tropical varieties. Tropical varieties are polyhedral complexes obtained from algebraic varieties by a limit operation called *tropicalization*. Tropical curves, one-dimensional tropical varieties, correspond to algebraic curves. In this manuscript, an *(abstract) tropical curve* means a metric graph, i.e., the underlying metric space of the pair (G, l), where G is an unweighted, undirected, finite, connected, nonempty multigraph that may have loops (in what follows, we call such a multigraph a *graph* simply), $l : E(G) \to \boldsymbol{R}$ is a *length function*, and $E(G)$ stands for the set of edges of G. For a tropical curve Γ, a map $f : \Gamma \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty\}$ is a *rational function* on Γ if f is a continuos piecewise affine function with integer slopes, or a constant function of $-\infty$. The set $\mathrm{Rat}(\Gamma)$ of all rational functions on Γ becomes a semifield over $\boldsymbol{T}$ with the pointwise maximum operation as its addition $\oplus$ and the pointwise usual addition as its multiplication $\odot$. We call $\mathrm{Rat}(\Gamma)$ the *rational function semifield* of Γ. The following theorem is our main theorem:

Theorem 1. *Let Γ be a tropical curve. Then, the rational function semifield $\mathrm{Rat}(\Gamma)$ is finitely generated as a semifield over $\boldsymbol{T}$.*

This is a tropical analogue of the fact that the function field of an algebraic curve over $\boldsymbol{C}$ is generated by two elements over $\boldsymbol{C}$. To prove this theorem, the following lemma is our key:

Lemma 2 ([1, Lemma 2])**.** *Let Γ be a tropical curve. Then, $\mathrm{Rat}(\Gamma)$ is generated by all chip firing moves and all constant functions as a group with $\odot$ as its binary operation.*

Here, a *chip firing move* $\mathrm{CF}(\Gamma_1, l)$ is the rational function defined by the pair of a subgraph Γ_1 and a number $l \in \boldsymbol{R}_{>0}$ as follows: $\mathrm{CF}(\Gamma_1, l)(x) := -\min\{\mathrm{dist}(\Gamma_1, x), l\}$, where a *subgraph* is a closed subset with a finite number of connected components and $\mathrm{dist}(\Gamma_1, x)$ denotes the distance

between Γ_1 and x. By this lemma, it is enough to find a finite set of rational functions which generates all chip firing moves as a semifield over $\boldsymbol{T}$.

Note that this manuscript is based on [2]. In [2], a tropical curve may have edges of length ∞. Even a tropical curve has an edge of length ∞, the assertion of Theorem 1 holds.

2 Proof of Theorem 1

Let Γ be the tropical curve obtained from the pair (G, l) of a graph G and a length function l. Then, the pair (G, l) is called a *model* for Γ. There are many possible models for Γ. We frequently identify a vertex (resp. an edge) of G with the corresponding point (resp. the corresponding closed subset) of Γ. The *canonical model* $(G_\circ, l_\circ)$ for Γ is defined as follows: if Γ is not homeomorphic to a circle, then let $V(G_\circ) := \{x \in \Gamma \mid \mathrm{val}(x) \neq 2\}$; otherwise, let $V(G_\circ)$ be consist of arbitrary one point of Γ, where $\mathrm{val}(x)$ denotes the minimum number of the connected components of $U \setminus \{x\}$ with any neighborhood U of x. Let $G_\circ$ be the graph which has $V(G_\circ)$ as its set of vertices and the set of all closures of connected components of $\Gamma \setminus V(G_\circ)$ as its set of edges, and $l_\circ$ the length function which maps each edge of $G_\circ$ to its length. Fix a direction on edges of $G_\circ$. Let each $e \in E(G_\circ)$ be identified with the interval $[0, l_\circ(e)]$ with this direction. For each edge $e \in E(G_\circ)$, let $x_e = \frac{l_\circ(e)}{4}$, $y_e = \frac{l_\circ(e)}{2}$, and $z_e = \frac{3l_\circ(e)}{4}$. We define rational functions

$$f_e := \mathrm{CF}\left(\{y_e\}, \frac{l_\circ(e)}{2}\right), g_e := \mathrm{CF}\left(\{x_e\}, \frac{l_\circ(e)}{4}\right), h_e := \mathrm{CF}\left(\{z_e\}, \frac{l_\circ(e)}{4}\right).$$

Let d be the diameter of Γ, i.e., $d = \sup\{\mathrm{dist}(x, y) \mid x, y \in \Gamma\} = \max\{\mathrm{dist}(x, y) \mid x, y \in \Gamma\}$. Let R be the semifield generated by f_e, g_e, h_e for any $e \in E(G_\circ)$ and $\mathrm{CF}(\{v\}, d)(= -\mathrm{dist}(v, \cdot))$ for any $v \in V(G_\circ)$ over $\boldsymbol{T}$. We will show that this semifield R coincides with $\mathrm{Rat}(\Gamma)$.

In Algorithm 1, $\overline{e_i \setminus S}$ denotes the closure of $e_i \setminus S$, and if S consists of only one point x, then we write l_x instead of $l_{\{x\}}$.

Remark 3. Let Γ be a tropical curve and S_1 a proper connceted subgraph of Γ. Let $l \leq l_{S_1}$ and $S_2 := \{x \in \Gamma \mid \mathrm{dist}(S_1, x) \leq l\}$. With $a := \min\{k \in \boldsymbol{Z}_{>0} \mid l/k \leq l_{S_2}\}$, $m := \min\{k \in \boldsymbol{Z}_{>0} \mid l_{S_2}/k \leq l/a\}$ and any $l' > 0$, by the definition of chip firing moves, we have

$$\mathrm{CF}\left(S_2, \frac{l}{a}\right) = \mathrm{CF}\left(S_1, \frac{l}{a}\right) \odot \bigodot_{k=1}^{a} \bigodot_{\substack{x' \in \Gamma: \\ \mathrm{dist}(S_1, x') = \frac{kl}{a}}} \left\{\mathrm{CF}\left(\{x'\}, \frac{l}{a}\right) \odot \frac{l}{a}\right\},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{CF}\left(\left\{x \in \Gamma \mid \mathrm{dist}(S_2, x) \leq \frac{kl_{S_2}}{m}\right\}, \frac{l_{S_2}}{m}\right) = {} & \mathrm{CF}\left(\left\{x \in \Gamma \mid \mathrm{dist}(S_2, x) \leq \frac{(k-1)l_{S_2}}{m}\right\}, \frac{l_{S_2}}{m}\right) \\ & \odot \bigodot_{\substack{x' \in \Gamma: \\ \mathrm{dist}(S_2, x') = \frac{kl_{S_2}}{m}}} \left\{\mathrm{CF}\left(\{x'\}, \frac{l_{S_2}}{m}\right) \odot \frac{l_{S_2}}{m}\right\},\end{aligned}$$

$$\mathrm{CF}(S_2, l_{S_2}) = \left\{\mathrm{CF}\left(S_2, \frac{l}{a}\right) \oplus \left(-\frac{l_{S_2}}{m}\right)\right\} \odot \bigodot_{k=1}^{m-1} \mathrm{CF}\left(\left\{x \in \Gamma \mid \mathrm{dist}(S_2, x) \leq \frac{kl_{S_2}}{m}\right\}, \frac{l_{S_2}}{m}\right),$$

and

$$\mathrm{CF}(S_1, l + l') = \mathrm{CF}(S_1, l) \odot \mathrm{CF}(S_2, l').$$

Algorithm 1

Input: Γ : a tropical curve

$E(G_\circ) = \{e_1, \ldots, e_n\}$: a labeling of edges of the canonical model for Γ

S : a proper connected subgraph of Γ

Output: l_S

$i \leftarrow 1$
while $i \leq n$ **do**
  if $e_i \cap S = \varnothing$ **then**
    $l_i \leftarrow$ (the diameter of Γ), $i \leftarrow i + 1$
  else $\{S \supset e_i\}$
    $l_i \leftarrow$ (the diameter of Γ), $i \leftarrow i + 1$
  else $\{S \supset \partial e_i\}$
    $l_i \leftarrow$ (the length of $\overline{e_i \setminus S}$)$/2$, $i \leftarrow i + 1$
  else $\{S \subset e_i^\circ\}$
    $l_i \leftarrow \min\{\mathrm{dist}(S, x) \mid x$ is one of the endpoints of $e_i\}$, $i \leftarrow i + 1$
  else
    $l_i \leftarrow$ (the length of $\overline{e_i \setminus S}$), $i \leftarrow i + 1$
  end if
end while
$l_S \leftarrow \min\{l_1, \ldots, l_n\}$
return l_S

Lemma 4. *Let e be an edge of $G_\circ$ and v, w the endpoint(s) of e (possibly $v = w$). Let x be in $e \setminus \{v, w\}$. Then,* $\mathrm{CF}(\{x\}, l_x) \in R$.

Proof. If x is the midpoint of e, then $\mathrm{CF}(\{x\}, l_x) = f_e \in R$. Suppose that x is not the midpoint of e. Assume that $0 < l_x \leq \frac{l_\circ(e)}{4}$ and $g_e(x) = -\frac{l_\circ(x)}{4}$. Then

$$\begin{aligned}\mathrm{CF}(\{x\}, l_x) &= \left\{\left(\frac{l_\circ(e)}{2} - l_x\right) \odot f_e \oplus \left(l_x - \frac{l_\circ(e)}{2}\right) \odot f_e^{\odot(-1)}\right\}^{\odot(-1)} \\ &\quad \odot \left(-\frac{l_\circ(e)}{4}\right) \odot g_e^{\odot(-1)} \oplus (-l_x) \in R.\end{aligned}$$

Similarly, if $0 < l_x \leq \frac{l_\circ(e)}{4}$ and $h_e(x) = -\frac{l_\circ(e)}{4}$, then $\mathrm{CF}(\{x\}, l_x) \in R$.
When $\frac{l_\circ(e)}{4} < l_x \leq \frac{l_\circ(e)}{3}$ and $g_e(x) = -\frac{l_\circ(e)}{4}$, we have

$$\begin{aligned}\mathrm{CF}(\{x\}, l_x) &= \left\{\left(\frac{l_\circ(e)}{2} - l_x\right) \odot f_e \oplus \left(l_x - \frac{l_\circ(e)}{2}\right) \odot f_e^{\odot(-1)}\right\}^{\odot(-1)} \\ &\quad \odot \left\{\left(-\frac{l_\circ(e)}{4}\right) \odot g_e^{\odot(-1)}\right\}^{\odot 2} \oplus (-l_x) \in R.\end{aligned}$$

Similarly, if $\frac{l_\circ(e)}{4} < l_x \leq \frac{l_\circ(e)}{3}$ and $h_e(x) = -\frac{l_\circ(e)}{4}$, then $\mathrm{CF}(\{x\}, l_x) \in R$.

When $\frac{l_\circ(e)}{3} < l_x < \frac{l_\circ(e)}{2}$ and $g_e(x) = -\frac{l_\circ(e)}{4}$, we have

$$\begin{aligned}\mathrm{CF}(\{x\}, l_\circ(e) - 2l_x) &= \left\{\left(\frac{l_\circ(e)}{2} - l_x\right) \odot f_e \oplus \left(l_x - \frac{l_\circ(e)}{2}\right) \odot f_e^{\odot(-1)}\right\}^{\odot(-1)} \\ &\quad \odot \left\{\left(-\frac{l_\circ(e)}{4}\right) \odot g_e^{\odot(-1)}\right\}^{\odot 2} \oplus (2l_x - l_\circ(e)) \in R.\end{aligned}$$

Similarly, if $\frac{l_\circ(e)}{3} < l_x < \frac{l_\circ(e)}{2}$ and $h_e(x) = -\frac{l_\circ(e)}{4}$, then $\mathrm{CF}(\{x\}, l_\circ(e) - 2l_x) \in R$.

Let x be in the fifth case. Since

$$\begin{aligned}&\mathrm{CF}\left(\left\{x_1 \in \Gamma \mid \mathrm{dist}(x, x_1) \le \frac{l_\circ(e)}{2} - l_x\right\}, \frac{l_\circ(e)}{2} - l_x\right) \\ =\ &\mathrm{CF}\left(\{x\}, \frac{l_\circ(e)}{2} - l_x\right) \odot \bigodot_{\substack{x_1 \in e: \\ \mathrm{dist}(x,x_1) = \frac{l_\circ(e)}{2} - l_x}} \left\{\mathrm{CF}\left(\{x_1\}, \frac{l_\circ(e)}{2} - l_x\right) \odot \left(\frac{l_\circ(e)}{2} - l_x\right)\right\} \in R,\end{aligned}$$

with inputs $l = \frac{l_\circ(e)}{2} - l_x$, $S_1 = \{x_1 \in \Gamma \mid \mathrm{dist}(x, x_1) \le l_\circ(e)/2 - l_x\}$ in Remark 3, we have $\mathrm{CF}(\{x\}, l_x) \in R$.

When x is in the sixth case, by the same argument, we have $\mathrm{CF}(\{x\}, l_x) \in R$. □

Note that l_x coincides with $\min(\mathrm{dist}(x, v), \mathrm{dist}(x, w))$ in the setting of Lemma 4.

By Remark 3 and Lemma 4, we prove the following three lemmas.

Lemma 5. *For any $x \in \Gamma$ and any positive real number l, $\mathrm{CF}(\{x\}, l)$ is in R.*

Proof. For any $x \in \Gamma$ and $l > 0$, by the definition of chip firing moves, we have $\mathrm{CF}(\{x\}, l) = \mathrm{CF}(\{x\}, d) \oplus (-l)$. Hence it is sufficient to check that $\mathrm{CF}(\{x\}, d) \in R$. If $x \in V(G_\circ)$, then $\mathrm{CF}(\{x\}, d) \in R$.

Suppose that there exists an edge $e \in E(G_\circ)$ which does not have x as an endpoint. Considering Remark 3 with $l = l_x, S_1 = \{x\}$, by Lemma 4, we have

$$\mathrm{CF}(S_2, l_{S_2}) \in R$$

and

$$\mathrm{CF}(S_1, l + l_{S_2}) = \mathrm{CF}(S_1, l) \odot \mathrm{CF}(S_2, l_{S_2}) \in R.$$

Since S_2 contains a lot of whole edges of $G_\circ$ more than S_1 and the set of edges of $G_\circ$ is finite, by repeating inputs of $l = l_{S_2}$, $S_1 = S_2$ in Remark 3, we have $\mathrm{CF}(\{x\}, d) \in R$. □

Lemma 6. *For any proper connected subgraph Γ_1 and any positive real number l, $\mathrm{CF}(\Gamma_1, l)$ is in R.*

Proof. By Lemma 5, if Γ_1 consists of only one point, then we have the conclusion. Assume that Γ_1 does not consist of only one point.

Suppose that Γ_1 contains no whole edges of $G_\circ$ and that there exists an edge $e \in E(G_\circ)$ containing Γ_1. Let x_1 and x_2 be the endpoints of Γ_1. Let x be the midpoint of Γ_1. By Lemma 5, for any positive real number l, we have

$$\mathrm{CF}(\Gamma_1, l) = \left[\{\mathrm{CF}(\{x\}, l + \mathrm{dist}(x_1, x)) \odot \mathrm{dist}(x_1, x)\}^{\odot(-1)} \oplus 0\right]^{\odot(-1)} \in R.$$

Suppose Γ_1 contains p edges. Let $\partial\Gamma_1 \cup (V(G_\circ) \cap \Gamma_1) = \{x_1, \ldots, x_q\}$. We may assume that $x_1, \ldots, x_q$ are distinct. Let $\Gamma_{11}, \ldots, \Gamma_{1s}$ be connected components of $\Gamma_1 \setminus \{x_1, \ldots, x_q\}$. For a sufficiently small positive real number ε, let Γ'_{1i} be the connected subgraph $\{x \in \Gamma_{1i} \,|\, \text{for any } j, \mathrm{dist}(x, x_j) \geq \varepsilon\}$ of Γ. Then, we have

$$\mathrm{CF}(\Gamma_1, \varepsilon) = \left\{ \bigoplus_{k=1}^{q} \mathrm{CF}(\{x_k\}, \varepsilon) \right\} \odot \bigodot_{k=1}^{s} \left(\varepsilon \odot \mathrm{CF}(\Gamma'_{1k}, \varepsilon) \right).$$

The last divisor is in the first case, and thus it is in R. By inputting $l = \varepsilon$, $S_1 = \Gamma_1$ and by repeating inputs $l = l_{S_2}$, $S_1 = S_2$ in Remark 3, we have $\mathrm{CF}(\Gamma_1, d) \in R$. From this, for any $l > 0$, we have $\mathrm{CF}(\Gamma_1, l) = \mathrm{CF}(\Gamma_1, d) \oplus (-l) \in R$. □

Lemma 7. *For any proper subgraph Γ_1 and any positive real number l, $\mathrm{CF}(\Gamma_1, l)$ is in R.*

Proof. Let Γ_1 be a proper subgraph of Γ. Let s be the number of connected components of Γ_1. If $s = 1$, then the conclusion follows Lemma 6. Assume $s \geq 2$. Let $\Gamma'_1, \ldots, \Gamma'_s$ be all the distinct connected components of Γ_1. For $l' > 0$, let $\Gamma'_k(l') := \{x \in \Gamma \,|\, \mathrm{dist}(\Gamma'_k, x) \leq l'\}$. If l' is sufficiently small, then the intersection of $\Gamma'_1(l'), \ldots, \Gamma'_s(l')$ is empty. Let l'_1 be the minimum value of l' such that this intersection is nonempty. By induction on s, $\mathrm{CF}\left(\bigcup_{k=1}^{s} \Gamma'_k(l'_1), d\right) \in R$. On the other hand,

$$\mathrm{CF}(\Gamma_1, l'_1) = \bigoplus_{k=1}^{s} \mathrm{CF}(\Gamma'_k, l'_1) \in R.$$

Hence

$$\mathrm{CF}(\Gamma_1, d) = \mathrm{CF}(\Gamma_1, l'_1) \odot \mathrm{CF}\left(\bigcup_{k=1}^{s} \Gamma'_k(l'_1), d \right) \in R.$$

In conclusion, for any $l > 0$, we have

$$\mathrm{CF}(\Gamma_1, l) = \mathrm{CF}(\Gamma_1, d) \oplus (-l) \in R.$$ □

From Lemmas 2, 5, 6, 7, we have Theorem 1.

参考文献

[1] Christian Haase, Gregg Musiker and Josephine Yu, *Linear Systems on Tropical Curves*, Mathematische Zeitschrift **270** (2012), 1111–1140.

[2] Song JuAe, *Rational function semifields of tropical curves are finitely generated over the tropical semifield*, arXiv:2112.01357.

Hesse cubic 曲線のレギュレーターと超幾何関数

千葉大学大学院融合理工学府 数学情報科学専攻
根本裕介 (Yusuke NEMOTO)

概要

特殊な代数多様体やその族に対するレギュレーターは一般超幾何関数という古典的な関数を用いて記述できることが知られている. 本稿では, Hesse cubic 曲線に対してそのレギュレーターを計算し, 一般超幾何関数や Kampé de Fériet の超幾何関数で記述できることを紹介する.

1 レギュレーター写像

数論幾何学の研究対象は主に代数多様体という, いくつかの多項式の零点集合で表される図形である. 代数多様体に付随する L 関数の整数点での値は特殊値[*1]と呼ばれる. L 関数の特殊値は代数多様体の不変量と結びついていると信じられており, 古くから研究がなされている. 有名な例として, 以下で挙げる類数公式があげられる. K を代数体, $X = \operatorname{Spec} K$ とすると, X の L 関数は Dedekind ゼータ関数

$$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} \frac{1}{(N\mathfrak{a})^s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-(N\mathfrak{p})^{-s}} \quad (s \in \mathbb{C})$$

と一致する. ただし, 和は $\mathcal{O}_K$ の 0 でない整イデアル全体を動き, $N\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}$ のノルム[*2]を表す. また, $\mathfrak{p}$ は 0 でない素イデアル全体を動く. $K = \mathbb{Q}$ のときは, 古典的な Riemann ゼータ関数

$$\zeta_{\mathbb{Q}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\text{prime}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

となる. r_1 を K の実素点の個数, r_2 を複素素点の個数とし, $n = r_1 + 2r_2$ とおく.

$$Z_K(s) = \left(\frac{\sqrt{|d_K|}}{2^{r_2}\pi^{\frac{n}{2}}} \right)^s \Gamma(s/2)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}\zeta_K(s)$$

とおくと, 関数等式

$$Z_K(1-s) = Z_K(s)$$

が成り立つ. ここで, d_K は代数体 K の判別式, $\Gamma(s)$ はガンマ関数を表す. Dedekind ゼータ関数はアプリオリには $\mathrm{Re}(s) > 1$ でしか収束しないが, 上記の関数等式を用いて $\mathbb{C}$ 全体に有理型に解析接続することができる[*3].

[*1] 正確には L 関数を級数展開したときの先頭項の係数.

[*2] $\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}$ の元の個数.

[*3] $s = 1$ でのみ 1 位の極をもち, その他の点では正則である.

定理 1.1 (類数公式)**.** $\zeta_K^*(0)$ を $\zeta_K(s)$ の $s=0$ での先頭項の係数[*4]とする．このとき，

$$\zeta_K^*(0) = -\frac{h_K R_K}{w_K}$$

ここで，$h_K = \#\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ は類数，$w_K = \#\mathcal{O}_{K,\mathrm{tor}}^*$，$R_K$ はレギュレーターであり[*5]，それぞれ代数体 K に付随する不変量である．

R_K は次のように定義される．$\sigma_1, \ldots, \sigma_{r_1}$ を実埋め込み，$\sigma_{r_1+1}, \ldots, \sigma_n$ を虚埋め込みで $\sigma_{r_1+r_2+i} = \overline{\sigma_{r_1+i}}$ $(i = 1, 2, \ldots, r_2)$ を満たすとする．古典的なレギュレーター写像を

$$r : \mathcal{O}_K^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \to \prod_{\sigma_i : K \hookrightarrow \mathbb{C}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{r_1+r_2}, \quad u \in \mathcal{O}_K^* \quad \mapsto (N_i \log |\sigma_i(u)|)_i$$

で定義する．ただし，

$$N_i = \begin{cases} 1 & (1 \le i \le r_1) \\ 2 & (r_1 + 1 \le i \le r_1 + r_2) \end{cases}$$

であり，第 2 成分の $\mathbb{Q}$ は対角的に埋め込む．このとき，Dirichlet の単数定理から $r \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ は同型となるので，$\mathrm{Im}(r)$ は $\mathbb{R}^{r_1+r_2}$ の $\mathbb{Q}$ 格子[*6]となり，R_K をその格子の基本領域の体積として定義する．

例 1.2. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ とすると，$r_1 = 2$, $r_2 = 0$ であり，$\mathcal{O}_K^* \cong \{(1+\sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ である．したがって，$R_K = \log(1+\sqrt{2})$ である．

$h_K, w_K \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ であることに注意すると，レギュレーターは Dedekind ゼータ関数の特殊値の超越部分を記述している不変量であることが見て取れる．

k を代数体とする．k 上定義された滑らかな射影代数多様体 X に対して，Spec $\mathbb{C}$ とのファイバー積を $X_{\mathbb{C}}$ と書く．$\mathbb{Q}(n) = (2\pi i)^n \mathbb{Q}$ とおく．このとき，高次 Chern 指標の理論を用いることでレギュレーター写像 [*7]

$$\mathrm{reg} : H^{i+1}_{\mathscr{M}}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(n)) \to H^{i+1}_{\mathscr{D}}(X_{\mathbb{C}}, \mathbb{Q}(n))$$

を定義することができる (cf. [12])．ここで，左辺はモチヴィック・コホモロジーと呼ばれる代数的 K 群を用いて定義される $\mathbb{Q}$ ベクトル空間，右辺は Deligne コホモロジーと呼ばれる Deligne 複体のコホモロジー群である (詳しい定義は [12] を参照)．特に，$X = \mathrm{Spec}\ K$, $i = 0$, $n = 1$ の場合を考えると，上のレギュレーターは

$$\mathrm{reg} : (K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to \prod_{\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C}} (\mathbb{C}/\mathbb{Q}(1))$$

となる．これに埋め込み

$$\mathcal{O}_K^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \hookrightarrow K^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \hookrightarrow (K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

[*4] $s = 1$ で 1 位の極をもつことから関数等式より $\mathrm{ord}_{s=0}\zeta_K(s) = r_1 + r_2 - 1$ となるので，

$$\zeta_K^*(0) = \lim_{s \to 0} s^{-r_1-r_2+1}\zeta_K(s).$$

[*5] $\mathrm{Pic}(\mathcal{O}_K)$ は $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_K$ の因子類群，$\mathcal{O}_{K,\mathrm{tor}}^*$ は整数環 $\mathcal{O}_K^*$ の捻れ部分群を表す．

[*6] V を $\mathbb{R}$ ベクトル空間としたとき，部分 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 H が $\mathbb{Q}$ 格子であるとは，$H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong V$ が成り立つことである．

[*7] より一般にモチーフに対しても同様にレギュレーター写像を定義することができる．

と射影

$$\prod_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}}(\mathbb{C}/\mathbb{Q}(1))\to\prod_{\sigma:K\hookrightarrow\mathbb{C}}\mathbb{R}$$

を合成したものは古典的なレギュレーター写像と一致する．したがって, 代数多様体のレギュレーター写像は代数体のレギュレーター写像の一般化であることが見て取れる．類数公式同様, レギュレーター写像を使って L 関数の特殊値の超越部分を記述することができると予想されている (Beilinson 予想, [3])

ここでは, X を $\mathbb{C}$ 上定義された滑らかな射影代数多様体とし, $i=1$, $n=2$ の場合を考える．$X^{(1)}$ で X の余次元 1 の集合を表すことにする．このとき, モチヴィック・コホモロジーは

$$H^2_{\mathscr{M}}(X,\mathbb{Q}(2))=\mathrm{Ker}\left(K_2^M(\mathbb{C}(X))\otimes\mathbb{Q}\xrightarrow{T\otimes\mathbb{Q}}\bigoplus_{x\in X^{(1)}}\mathbb{C}(x)^*\otimes\mathbb{Q}\right)$$

と同型である (cf. [10])．ここで, $\mathbb{C}(X)$ は X の関数体, $K_2^M(\mathbb{C}(X))$ はミルナー K 群と呼ばれるシンボル $\{f,g\}\in\mathbb{C}(X)^*\otimes\mathbb{C}(X)^*$ で生成される群を $\{f,1-f\}=0$ $(f\neq0,1)$ という関係[*8]で割ったアーベル群である．$T=(T_x)$ は Tame シンボルと呼ばれる写像であり,

$$T_x(\{f,g\})=(-1)^{\mathrm{ord}_x(f)\mathrm{ord}_x(g)}\left(\frac{f^{\mathrm{ord}_x(g)}}{g^{\mathrm{ord}_x(f)}}\right)(x)$$

で定義される．また Deligne コホモロジーにも

$$H^2_{\mathscr{D}}(X,\mathbb{Q}(2))\xrightarrow{\sim}H^1(X(\mathbb{C}),\mathbb{C}/\mathbb{Q}(2))=\mathrm{Hom}(H_1(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}),\mathbb{C}/\mathbb{Q}(2))$$

という同型がある[*9](cf. [12])．以後モチヴィック・コホモロジーと Deligne コホモロジーを上の同型を通して右辺と同一視し, レギュレーター写像

$$\mathrm{reg}:H^2_{\mathscr{M}}(X,\mathbb{Q}(2))\to\mathrm{Hom}(H_1(X(\mathbb{C}),\mathbb{Z}),\mathbb{C}/\mathbb{Q}(2)),\quad\{f,g\}\mapsto(\gamma\mapsto\langle\mathrm{reg}(\{f,g\})\mid\gamma\rangle)$$

を詳しく考察する．

2 超幾何関数

この節では一般超幾何関数やその 2 変数への拡張である Kampé de Fériet の超幾何関数の復習をする．古典的に知られている超幾何関数は Gauss の超幾何関数と呼ばれる次で定義される関数である．

$${}_2F_1\left[\begin{matrix}a,b\\c\end{matrix}\middle|x\right]:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{x^n}{n!}.$$

[*8] Steinberg relations という．

[*9] $H^1(H_1)$ はそれぞれ Betti コホモロジー (ホモロジー) である．これは．$X(\mathbb{C})$ を複素多様体と見なしたときの位相的コホモロジー (ホモロジー) である．

ここで, $(a)_n := \Gamma(a+n)/\Gamma(a) = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ は Pochhammer 記号を表す. この関数のパラメーターを一般化する形で一般超幾何関数

$$ {}_rF_s\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_r \\ b_1,\dots b_s \end{matrix}\middle| x\right] := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n\cdots(a_r)_n}{(b_1)_n\dots(b_s)_n}\frac{x^n}{n!} $$

が定義される. また一般超幾何関数の 2 変数への拡張として Kampé de Fériet の超幾何関数

$$ \begin{aligned} &F^{A;B;B'}_{C;D;D'}\left[\begin{matrix} a_1,\dots,a_A; & b_1,\dots,b_B; & b'_1,\dots,b'_{B'} \\ c_1,\dots,c_C; & d_1,\dots,d_D; & d'_1,\dots,d'_{D'} \end{matrix}\middle| x,y\right] \\ &:= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{A}(a_i)_{m+n}\prod_{i=1}^{B}(b_i)_m\prod_{i=1}^{B'}(b'_i)_n}{\prod_{i=1}^{C}(c_i)_{m+n}\prod_{i=1}^{D}(d_i)_m\prod_{i=1}^{D'}(d'_i)_n}\frac{x^m y^n}{m!n!}. \end{aligned} $$

が定義される [5]. これらの級数は一般に $|x|<1$, $|x|,|y|<1$ で収束するが, パラメーターがある条件を満たせばその境界 $x=1$, $x=y=1$ でも収束することが知られている (cf. [7]).

例 2.1 (Euler-Gauss の和公式, cf. [2, 1.3])**.** $\mathrm{Re}(a)+\mathrm{Re}(b)<\mathrm{Re}(c)$, c が負の整数でないとき,

$$ {}_2F_1\left[\begin{matrix} a,b \\ c \end{matrix}\middle| 1\right] = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-1)\Gamma(c-b)}. $$

Kapmé de Fériet の超幾何関数のパラメーターが特殊な場合には一般超幾何関数を用いて記述することもでき (cf. [6, 9]), 例えば以下のような結果が知られている.

定理 2.2 ([6, (2.2)])**.**

$$ F^{1;2;1}_{1;1;0}\left[\begin{matrix} a; & b-e,c; & e \\ b; & d; & - \end{matrix}\middle| z,z\right] = \frac{1}{(1-z)^a}{}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b-e,d-c \\ b,d \end{matrix}\middle| \frac{z}{z-1}\right]. $$

3 レギュレーターと超幾何関数

一般ファイバーに

$$ X_t = f^{-1}(t) : (x^n-1)(y^m-1) = 1-t $$

をもつファイブレーション $f : X \to \mathbb{P}^1$ を考える. これは朝倉氏や大坪氏によって定義された Fermat 型の超幾何ファイブレーションと呼ばれる代数多様体の族[*10] で, その周期やレギュレーターが一般超幾何関数を用いて記述できることが知られている [1, 4]. 任意の i,j $(1\le i\le n-1,\ 1\le j\le m-1)$ に対して, $a_i := 1-i/n$, $b_j := 1-j/m$ とする. また, $\omega_{i,j}$ を正則微分形式

$$ \omega_{i,j} = x^{i-1}y^{j-1}\frac{m^{-1}}{y^{m-1}(x^n-1)}dx $$

とする. このとき, ある位相的 1 サイクル δ が存在して周期は

$$ \int_\delta \omega_{i,j} = -\frac{1}{nm}\cdot 2\pi\sqrt{-1}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix} a_i,b_j \\ 1 \end{matrix}\middle| 1-t\right] $$

[*10] 超幾何ファイブレーションは Fermat 型の他にも Gauss 型や楕円ファイブレーションなどの例がある. 朝倉氏は [1] でそれらのレギュレーターも計算し, 一般超幾何関数を用いて記述している.

と Gauss の超幾何関数を用いて記述することができる. K_2 レギュレーターも同様に一般超幾何関数 ${}_4F_3$ を用いて記述することができる.

定理 3.1 ([1, Theorem 3.2])**.** あるモチヴィック・コホモロジーの元 $\xi(\nu_1,\nu_2)$ とある位相的 *1* サイクル δ が存在して, 任意の $|1-t|<1$ に対して *modulo* $\mathbb{Q}(1)$ で

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\langle \mathrm{reg}(\xi(\nu_1,\nu_2)|_t) \mid \delta\rangle = -\log(nm(1-\nu_1)(1-\nu_2)) + \log(1-t) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j-1}^{m-1}\frac{(1-\nu_1^{-i})(1-\nu_2^{-j})}{nm}\times a_i b_j (1-t) {}_4F_3\left[\begin{matrix} a_i+1, b_j+1, 1, 1 \\ 2,2,2 \end{matrix}\middle| 1-t\right]$$

が成り立つ. ただし, $\nu_1,\nu_2\neq 1$ はそれぞれ *1* の n 乗根と m 乗根である.

証明の方針を簡単に述べる. 証明は (1) モチヴィック・コホモロジーの元の構成, (2)dlog 写像の計算, (3) レギュレーターの計算 (定数項を除く), (4) 定数項の決定というの 4 ステップに分かれる. まずはモチヴィック・コホモロジーの元

$$\xi(\nu_1,\nu_2) := \left\{\frac{x-1}{x-\nu_1}, \frac{y-1}{y-\nu_2}\right\} \in H^2_{\mathscr{M}}(X\backslash Y, \mathbb{Q}(2))$$

を構成する. ここで, $Y=f^{-1}(1)$ である. これの dlog 写像

$$\mathrm{dlog} : H^2_{\mathscr{M}}(X\backslash Y,\mathbb{Q}(2)) \to \Gamma(X,\Omega^2_X(\log Y)), \quad \{f,g\}\mapsto \frac{df}{f}\wedge\frac{dg}{g}$$

の像を定義にしたがって計算すると

$$\mathrm{dlog}(\xi(\nu_1,\nu_2)) = -\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}(1-\nu_1^{-i})(1-\nu_2^{-j})\frac{dt}{t-1}\omega_{i,j}$$

が得られる. レギュレーター $F(t)=\langle \mathrm{reg}(\xi(\nu_1,\nu_2)|_t) \mid \delta\rangle$ は t に関する局所正則関数になるが, その微分が dlog 写像を用いて記述できること ([1, Proposition 3.1]), すなわち

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{dF}{dt} = -\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}(1-\nu_1^{-i})(1-\nu_2^{-j})\frac{1}{t-1}\int_\delta \omega_{i,j}$$

となることと, 周期が超幾何関数で表せることを使うと

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}F(t) = C_0 + C_1\log(1-t) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j-1}^{m-1}\frac{(1-\nu_1^{-i})(1-\nu_2^{-j})}{nm}\times a_i b_j (1-t) {}_4F_3\left[\begin{matrix} a_i+1, b_j+1, 1, 1 \\ 2,2,2 \end{matrix}\middle| 1-t\right]$$

と計算できる. 定数項の部分を個別に議論することによって定理を得る.

4 Hesse cubic 曲線の周期とレギュレーター

Hesse cubic 曲線

$$f : X \to \mathbb{P}^1, \quad X_t = f^{-1}(t) : x^3 + y^3 + 1 = 3txy$$

を考える. 1 の原始 3 乗根 $e^{2\pi i/3}$ を ζ で表し, $Y = f^{-1}(1) \cup f^{-1}(\zeta) \cup f^{-1}(\zeta^2) \cup f^{-1}(\infty)$ とする. このとき, f は $X \backslash Y$ で滑らかである.

補題 4.1 ([11])**.** 任意の $|t| < 1$ に対して, X_t 上の微分形式を

$$\omega_{\mathrm{Hes}} = \frac{dy}{x^2 - ty}, \quad \eta_{\mathrm{Hes}} = \frac{xydy}{x^2 - ty}$$

とおく. このとき, $\{\omega_{\mathrm{Hes}}, \eta_{\mathrm{Hes}}\}$ は $H^1_{\mathrm{dR}}(X_t(\mathbb{C}))$ の基底になる.

Hesse cubic 曲線の周期は Gauss の超幾何関数を用いて記述することができる.

定理 4.2 ([8, 11])**.** 任意の $|t| < 1$ に対して, $X(\mathbb{C})$ 上の位相的 *1* サイクル δ が存在して

$$\int_\delta \omega_{\mathrm{Hes}} = -(1-\zeta)B_{\frac{1}{3}}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3}\end{matrix}\middle| t^3\right] + (1-\zeta^2)B_{\frac{2}{3}}t\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3}\end{matrix}\middle| t^3\right],$$
$$\int_\delta \eta_{\mathrm{Hes}} = -(1-\zeta^2)B_{\frac{2}{3}}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}-\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}\end{matrix}\middle| t^3\right] - \frac{1-\zeta}{2}B_{\frac{1}{3}}t^2\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3}\end{matrix}\middle| t^3\right].$$

ここで, B_s はベータ関数 $B(s, s)$ を表す.

Hesse cubic 曲線のレギュレーターも周期と同様に, その値を超幾何関数を用いて記述することができる.

定理 4.3 ([11])**.** あるモチヴィック・コホモロジーの元 ξ_∞, $\xi_{\mathrm{Hes}} \in H^2(X \backslash Y, \mathbb{Q}(2))$ と位相的サイクル $\gamma \in H^1(X, \mathbb{Q})$ が存在して, *modulo* $\mathbb{Q}(2)$ で次が成り立つ.

1. 任意の $|t| < 1$, $\mathrm{Re}(t) < \frac{1}{2}$ に対して

$$\langle \mathrm{reg}(\xi_\infty|_t) \mid \gamma \rangle = -\frac{9\zeta^2}{(1-t^3)^{\frac{1}{3}}}B_{\frac{1}{3}}t\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\end{matrix}\middle| \frac{t^3}{t^3-1}\right] - \frac{9\zeta}{2(1-t^3)^{\frac{2}{3}}}B_{\frac{2}{3}}t^2\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\end{matrix}\middle| \frac{t^3}{t^3-1}\right].$$

2. 任意の $|t| < 1$ に対して,

$$\langle \mathrm{reg}(\xi_{\mathrm{Hes}}|_t) \mid \gamma \rangle = -(1-\zeta)B_{\frac{1}{3}}t\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\end{matrix}\middle| t^3\right] + (1-\zeta^2)B_{\frac{2}{3}}\frac{t^2}{2}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \\ \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\end{matrix}\middle| t^3\right].$$

構成から ξ_{Hes} は $H^2_{\mathscr{M}}(X \backslash Y, \mathbb{Q}(2))$ の中で

$$\xi_{\mathrm{Hes}} = \xi_1 + \xi_\zeta + \xi_{\zeta_2}$$

と分解することができる. 各々に対してそのレギュレーターの値を計算することで, それらを Kampé de Fériet の超幾何関数を用いて記述することができる. $t \in \mathbb{P} \backslash \{1, \zeta, \zeta^2, \infty\}$ に対して,

$F_\infty : X_t(\mathbb{C}) \to X_t(\mathbb{C})$ を無限フロベニス写像[*11]とし, $H_1(X_t(\mathbb{C}),\mathbb{Z})^{F_\infty=-1}$ を F_∞ が -1 倍で作用する固有空間を表す. このとき, レギュレーターの値域を

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(H_1(X_t(\mathbb{C}),\mathbb{Z})^{F_\infty=-1},\mathbb{C}/\mathbb{Q}(2)) &\to \mathrm{Hom}(H_1(X_t(\mathbb{C}),\mathbb{Q})^{F_\infty=-1},\mathbb{R}(1))\\ &\to \mathrm{Hom}(H_1(X_t(\mathbb{C}),\mathbb{Q})^{F_\infty=-1},\mathbb{R})\end{aligned}$$

に制限したものを実レギュレーターとよび, reg との合成を $\mathrm{reg}_\mathbb{R}$ と表す. ここで, 1 つ目の写像は射影 $\mathbb{C}/\mathbb{Q}(2) \to \mathbb{R}(1) = \sqrt{-1}\mathbb{R}$, 2 つ目の写像は値域に $(2\pi\sqrt{-1})^{-1}$ をかけることで得られる.

定理 4.4 ([11])**.** $|t| < 1$ を満たす任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して, ある $\gamma \in H_1(X_t(\mathbb{C}),\mathbb{Q})^{F_\infty=-1}$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\mathrm{reg}_\mathbb{R}(\xi_1|_t)(\gamma) &= \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\left(K_1(t)+K_2(t)-\frac{3}{2}K_3(t)+2C\right),\\ \mathrm{reg}_\mathbb{R}(\xi_\zeta|_t)(\gamma) &= \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\left(K_1(t)-2K_2(t)-\frac{3}{2}K_3(t)-C\right),\\ \mathrm{reg}_\mathbb{R}(\xi_{\zeta^2}|_t)(\gamma) &= \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\left(K_1(t)+K_2(t)+3K_3(t)-C\right),\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}K_1(t) &= B_{\frac{1}{3}}t\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\\ \frac{4}{3},\frac{2}{3}\end{matrix}\middle| t^3\right] + B_{\frac{2}{3}}t^2\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\\ \frac{5}{3},\frac{4}{3}\end{matrix}\middle| t^3\right],\\ K_2(t) &= B_{\frac{1}{3}}t^3F^{1;2;1}_{1;1;0}\left[\begin{matrix}1;\frac{1}{3},\frac{1}{3};1\\ 2;\frac{2}{3};-\end{matrix}\middle| t^3,t^3\right] - B_{\frac{2}{3}}t^3F^{1;2;1}_{1;1;0}\left[\begin{matrix}1;\frac{2}{3},\frac{2}{3};1\\ 2;\frac{4}{3};-\end{matrix}\middle| t^3,t^3\right],\\ K_3(t) &= B_{\frac{1}{3}}t^2F^{1;2;1}_{1;1;0}\left[\begin{matrix}\frac{2}{3};\frac{1}{3},\frac{1}{3};1\\ \frac{5}{3};\frac{2}{3};-\end{matrix}\middle| t^3,t^3\right] - \frac{B_{\frac{2}{3}}}{2}t^4F^{1;2;1}_{1;1;0}\left[\begin{matrix}\frac{4}{3};\frac{2}{3},\frac{2}{3};1\\ \frac{7}{3};\frac{4}{3};-\end{matrix}\middle| t^3,t^3\right],\\ C &= 3B_{\frac{1}{3}}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{1}{3},\frac{1}{3},1\\ \frac{4}{3},\frac{2}{3}\end{matrix}\middle| 1\right] - \frac{3}{2}B_{\frac{2}{3}}\,{}_3F_2\left[\begin{matrix}\frac{2}{3},\frac{2}{3},1\\ \frac{5}{3},\frac{4}{3}\end{matrix}\middle| 1\right].\end{aligned}$$

定理 4.3, 定理 4.4 の証明は, 定数項以外の部分に関しては定理 3.1 と同じ手法を用いることによって得られる. 定数項の部分は, $t = 0$ でのファイバーの様子を個別にみることで決定することができる.

参考文献

[1] M. Asakura, *Regulators of K_2 of hypergeometric fibrations*, Res. Number Theory 4 (2018), no.2, 22.

[2] W. N. Bailey, *Generalized Hypergeometric Series*, Cambridge Univ. Press, (1935).

[3] A. Beilinson, *Higher regulators and values of L-functions*, J. Soviet Math. 30 (1985), 2036-2070.

[*11] $X_t(\mathbb{C})$ に作用する複素共役写像.

[4] M. Asakura, N. Otsubo, *CM periods, CM regulators and hypergeometric functions, II*, Math. Z. 289 (2018), no.3-4, 1325-1355.

[5] P. Appell, J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques; Polynômes d'Herimite*, Gauthier-Villars, Paris, (1926).

[6] D. Cvijovic, Allen R. Miller, *A reduction formula for the Kampé de Fériet function*, Appl. Math. Lett. 23 (2010), no.7, 769-771.

[7] N. T. Hái, O. I. Marichev, H. M. Srivastava, *A note on the convergence of certain families of multiple hypergeometric series*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 164, (1992), 104-115.

[8] K. Matsumoto, T. Terasoma, S. Yamazaki, *Jacobi's formula for Hesse cubic curves*, Acta Math. Vietnam. 35 (2010), no.1, 91-105.

[9] H. Liu, W. Wang, *Transformation and summation formulae for Kampé de Fériet series*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 409 (2014), 100-110.

[10] J. Nekovář, *Beilinson's conjectures*, in Motives (Seattle, WA, 1991), Part 1, Proc. Sympos. Pure Math 55, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1994), 537-570.

[11] Y. Nemoto, *On the K_2-regulator of the Hesse cubic curve and hypergeometric functions*, in preparation.

[12] P. Schneider, *Introduction to the Beilinson conjectures. Beilinson's conjectures on special values of L-functions*, Perspect. Math., 4, Academic Press, Boston, MA, (1988), 1-35.

放物接続のモジュライ空間の双有理構造

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
松本 孝文 (Takafumi MATSUMOTO)

概 要

放物接続とは線形微分方程式系の幾何学的対応物であり、そのモジュライ空間はパンルヴェ方程式や幾何学的ラングランズ対応と密接に関係している。放物接続を調べる方法として放物ベクトル束や見かけの特異点との関係を探る方法があり、射影空間上で 2 階の場合はこれによりモジュライ空間の構造が把握されていた。本講演ではこれらの詳細を述べるとともに、モジュライ空間の双有理構造について 2 階で種数が一般の場合に得られた結果を紹介する。

1 導入

複素領域上の線形微分方程式系に対しモノドロミー表現と呼ばれる基本群の表現が定まる．モノドロミー表現を変えないような微分方程式の変形はモノドロミー保存変形と呼ばれ，ある非線形微分方程式を用いて特徴付けられることが知られている．R. Fucks は $\mathbb{P}^1$ 上の 4 点で確定特異点のみをもつ 2 階線形微分方程式のモノドロミー保存変形の非線形微分方程式としてパンルヴェ第 VI 方程式が現れることを発見した．この研究がきっかけとなり，今日では線形微分方程式系のモノドロミー保存変形により得られる非線形微分方程式はパンルヴェ性をもつ，すなわち解の動く特異点が高々極のみであることが期待され，この指導原理をもとに多くの研究がなされている．

複素数体 $\mathbb{C}$ 上の非特異射影代数曲線 C 上のベクトル束で指定された点に旗構造が入っているものを放物ベクトル束といい，旗構造と整合的な接続を放物接続という．複素領域上の線形微分方程式系は $\mathbb{CP}^1$ 上のベクトル束の有理接続とみなせる．特に，確定特異点のみを許す線形微分方程式系は $\mathbb{P}^1$ 上の対数的接続とみなせる．稲場・岩崎・齋藤 [IIS1][IIS2][In] は確定特異点型の放物接続に安定性を導入し安定放物接続のモジュライ空間を構成した．さらに安定放物接続のモジュライ空間から放物接続に対するモノドロミー表現を対応させることでモノドロミー表現のモジュライ空間への解析的写像を定義し，これが固有かつ全射な双有理写像であることを証明した．この結果から代数曲線上の確定特異点のみをもつ線形微分方程式系に対し，そのモノドロミー保存変形により得られる非線形微分方程式のパンルヴェ性が従う．上記の対応は Riemann-Hilbert 対応と呼ばれるものであり，この対応を通してモノドロミー保存変形により得られる非線形微分方程式は放物接続のモジュライ空間上のあるハミルトンベクトル場が与えるハミルトン系として捉えることができる．

上記のハミルトン系の明示的な記述を与えることは可積分系の研究において重要である．ハミルトン系を具体的に書き下すためには放物接続のモジュライ空間上にダルブー座標を与える必要がある．Loray・齋藤は $\mathbb{P}^1$ 上で 2 階の場合に見かけの特異点写像 App と放物ベクトル束 $\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}$ への忘却写像 Bun を通して放物接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu})$ 上にダルブー座標を与えた．すなわち次の定理を証明した．

定理 1.1. (Loray-Saito [LS]) $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\nu}$ が然るべき条件を満たすとき有理写像

$$\mathrm{App} \times \mathrm{Bun} \colon \mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu}) \cdots \to \mathbb{P}^N \times \mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}$$

は双有理写像.

ところで，モジュライ空間の研究において双有理構造を調べること，特に有理性の判定は基本的である．Boden・横川 [BY] は行列式直線束を固定した放物ベクトル束のモジュライ空間が full flag の場合を含む多くの場合に有理多様体になることを証明した．このことと定理 1.1 から $\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\nu}$ が特定の条件を満たすとき，

$\mathbb{P}^1$ 上の 2 階の放物接続のモジュライ空間が有理多様体になることがわかる．ダルブー座標の導入やモジュライ空間の有理性の観点から定理 1.1 を一般の種数や階数の場合に拡張することが望まれる．

本稿では種数が 1 以上で 2 階の場合に定理 1.1 の拡張として得られた結果を概説する．

2　安定放物接続のモジュライ空間

この節では放物接続を定義し放物接続のモジュライ空間の性質を述べる．C を種数 g の $\mathbb{C}$ 上の非特異射影代数曲線とし，$\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ を C の異なる n 点とする．また $D = t_1 + \cdots + t_n$ を C 上の有効因子とする．

定義 2.1. $\lambda \in \mathbb{C}$ を固定する．$\nabla\colon E \to E \otimes \Omega^1_C(D)$ をベクトル束の間の写像とする．組 (E, ∇) が $(C, \mathbf{t})$ 上の対数的 λ-接続であるとは，任意の局所切断 $a \in \mathcal{O}_C, \sigma \in E$ に対し

$$\nabla(a\sigma) = \lambda\sigma \otimes a + a\nabla(\sigma)$$

が成り立つときをいう．

(E, ∇) を $(C, \mathbf{t})$ 上の対数的 λ-接続とする．留数行列 $\mathrm{res}_{t_i}(\nabla) \in \mathrm{End}(E|_{t_i}) \simeq M_r(\mathbb{C})$ の順序の付いた固有値の集合 $\{\nu_0^{(i)}, \ldots, \nu_{r-1}^{(i)}\}$ を ∇ の t_i における局所指数という．

補題 2.2. (E, ∇) を $(C, \mathbf{t})$ 上の対数的 λ-接続とし，$\boldsymbol{\nu} = (\nu_j^{(i)})_{0\le j\le r-1}^{1\le i\le n}$ を (E, ∇) の局所指数の集合とする．このとき，

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{r-1} \nu_j^{(i)} = -\lambda \deg E = -\lambda d.$$

各 $r, n \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{Z}, \lambda \in \mathbb{C}$ に対し，

$$\mathcal{N}_r^{(n)}(d, \lambda) := \left\{ (\nu_j^{(i)})_{0\le j\le r-1}^{1\le i\le n} \in \mathbb{C}^{nr} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{r-1} \nu_j^{(i)} = -\lambda d \right\}$$

とする．

定義 2.3. $\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}_r^{(n)}(d, \lambda)$ とする．以下の条件を満たす組 $(E, \nabla, l_* = \{l_*^{(i)}\}_{1\le i\le n})$ を $(C, \mathbf{t})$ 上の $\boldsymbol{\nu}$-放物 λ-接続と呼ぶ．

(1) (E, ∇) は $(C, \mathbf{t})$ 上の対数的 λ-接続．

(2) $l_*^{(i)}\colon E \otimes k(t_i) = l_0^{(i)} \supsetneq l_*^{(i)} \supsetneq \cdots \supsetneq l_{r-1}^{(i)} \supsetneq l_r^{(i)} = \{0\}$ は E の t_i における放物構造であり，任意の i, j に対し $(\mathrm{res}_{t_i}(\nabla) - \nu_j^{(i)}\mathrm{id})(l_j^{(i)}) \subset l_{j+1}^{(i)}$ が成立．

$\lambda = 1$ のとき，$\boldsymbol{\nu}$-放物 λ-接続を単に $\boldsymbol{\nu}$-放物接続という．

注意 2.1. $\lambda = 0$ のとき，$\boldsymbol{\nu}$-放物 λ-接続は $\boldsymbol{\nu}$-放物 Higgs 束に他ならない．$\boldsymbol{\nu} = 0$ のとき $\boldsymbol{\nu}$-放物 Higgs 束を単に放物 Higgs 束という．

重み $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_j^{(i)}\}_{1\le j\le r}^{1\le i\le n}$ を任意の $i = 1, \cdots, n$ に対し $0 < \alpha_1^{(i)} < \alpha_2^{(i)} < \cdots < \alpha_r^{(i)} < 1$ となる相異なる実数の組とする．

定義 2.4. $\boldsymbol{\nu}$-放物 λ-接続 (E, ∇, l_*) が $\boldsymbol{\alpha}$-安定であるとは，ゼロでない部分束 $F \subsetneq E$ で $\nabla(F) \subset F \otimes \Omega^1_C(D)$ なる全ての F に対し，不等式

$$\frac{\mathrm{pardeg}_{\boldsymbol{\alpha}} F}{\mathrm{rank}\, F} < \frac{\mathrm{pardeg}_{\boldsymbol{\alpha}} E}{\mathrm{rank}\, E}$$

が成り立つときをいう．

$(C,\mathbf{t}),\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{N}_r^{(n)}(d,\lambda)$ を固定する．粗モジュライ空間を

$$\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},r,d,\lambda):=\{(E,\nabla,l_*\}_{1\le i\le n})\mid (C,\mathbf{t})\text{ 上の階数 }r\text{，次数 }d\text{ の }\boldsymbol{\alpha}\text{-安定な }\boldsymbol{\nu}\text{-放物 }\lambda\text{-接続 }\}/\simeq$$

により定義する．ただし，同値関係 $\sim$ は $\boldsymbol{\nu}$-放物 λ-接続の間の自然な同型写像から得られるものとする．$\lambda\neq 0$ なら射 $(E,\nabla,l_*)\mapsto(E,\frac{1}{\lambda}\nabla,l_*)$ により

$$\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},r,d,\lambda)\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu}/\lambda,r,d,1)$$

となる．

定理 2.5. $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},r,d,\lambda)$ は非特異準射影的スキームであり，空でなければその次元は $2r^2(g-1)+nr(r-1)+2$ である．

証明. $\lambda\neq 0$ のときは $\lambda=1$ の場合に帰着される．この場合の証明は [IIS1][IIS2][In] を参照．また $\lambda=0$, すなわち放物 Higgs 束の場合は [Yo1] [Yo2] を参照. □

$\boldsymbol{\nu}=(\nu_j^{(i)})^{1\le i\le n}_{0\le j\le r-1}\in\mathcal{N}_r^{(n)}(d,\lambda)$ に対し，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\nu})=(\sum_{j=0}^{r-1}\nu_j^{(i)})_{1\le i\le n}$ とする．

$$\det\colon\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},r,d,\lambda)\longrightarrow\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\nu}),1,d,\lambda)$$

を $\det((E,\nabla,l_*))=(\det E,\mathrm{tr}\nabla)$ で定める．$(L,\nabla_L)\in\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{\nu}),1,d,\lambda)$ に対し，

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},r,(L,\nabla_L),\lambda)&:=\det{}^{-1}((L,\nabla_L))\\&=\left\{(E,\nabla,l_*)\in\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},r,d,\lambda)\mid(\det E,\mathrm{tr}\,\nabla)\simeq(L,\nabla_L)\right\}\end{aligned}$$

とする．$\lambda\neq 0$ なら射 $(E,\nabla,l_*)\mapsto(E,\frac{1}{\lambda}\nabla,l_*)$ により

$$\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},r,(L,\nabla_L),\lambda)\xrightarrow{\sim}\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu}/\lambda,r,(L,\tfrac{1}{\lambda}\nabla_L),1)$$

となる．

定理 2.6. (Inaba [In]) $\lambda\neq 0$ とする．$g=0,r\ge 2,n\ge 4$ または $g=1,n\ge 2$ または $g\ge 2,n\ge 1$ のとき，$\mathcal{M}^{\alpha}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},r,(L,\nabla_L),\lambda)$ は $(r-1)(2(r+1)(g-1)+rn)$ 次元の既約な非特異準射影代数多様体である．

3　見かけの特異点

この節では 2 階の場合の見かけの特異点写像を紹介する．一般の場合は [SS] を参照.

(E,∇,l_*) を $\boldsymbol{\nu}$-放物接続とし，$\sigma\in H^0(C,E)$ をゼロでない切断とする．このとき層の準同型 $\varphi_{(\nabla,\sigma)}$ を合成

$$\mathcal{O}_C\xrightarrow{\sigma}E\xrightarrow{\nabla}E\otimes\Omega^1_C(D)\to E/\mathcal{O}_C\otimes\Omega^1_C(D)$$

により定める．$\varphi_{(\nabla,\sigma)}$ がゼロでないとき $\mathrm{Coker}\,\varphi_{(\nabla,\sigma)}$ は C 上のねじれ $\mathcal{O}_C$-加群となる．ここで

$$\mathrm{App}((E,\nabla,l_*,\sigma)):=\mathrm{Supp}\,\mathrm{Coker}\,\varphi_{(\nabla,\sigma)}$$

とする．$d=2g-1$ のとき，$\mathrm{App}((E,\nabla,l_*,\sigma))$ の長さは $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},d)=\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},2,d,1)$ の次元の半分となる (この値を N とする)．さらにこのとき generic な (E,∇,l_*) に対し $\dim H^0(C,E)=1$ であり，したがって $\mathrm{App}((E,\nabla,l_*,\sigma))$ は σ に依らず (E,∇,l_*) のみから定まることがわかる． $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))=\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(\boldsymbol{\nu},2,(L,\nabla_L),1)$ とする．

定義 3.1. $d=2g-1$ とする．このとき見かけの特異点写像 App を

$$\mathrm{App}\colon\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},d)\cdots\to S^N(C)$$

$$(E,\nabla,l_*)\longmapsto\mathrm{App}((E,\nabla,l_*,\sigma))$$

で定める．

App を $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))$ 上へ制限したとき，その像は $|L\otimes\Omega^1_C(D)|=\mathbb{P}H^0(C,L\otimes\Omega^1_C(D))$ に含まれる．すなわち有理写像

$$\mathrm{App}\colon \mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))\cdots\to |L\otimes\Omega^1_C(D)|$$

を得る．

4 主結果

この節では [T] の主結果について述べる．$\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)$ を $\boldsymbol{\alpha}$-安定な 2 階の放物ベクトル束で行列式直線束が L であるもののモジュライ空間とする．

命題 4.1. $g\geq 1$ とし，$\sum_{i=1}^n(\alpha_2^{(i)}-\alpha_1^{(i)})<1$ とする．集合 $V_0\subset\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)$ を次の条件を満たす $(E,l_*)\in\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)$ 全体からなる集合とする．

(1) (E,l_*) は $(L,\mathbf{t})$ の $(\mathcal{O}_C,\emptyset)$ による拡大．

(2) $H^0(C,E)=1$，すなわち E は $\mathcal{O}_C$ と同型な部分直線束をただ一つのみもつ．

このとき，V_0 は $\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)$ の空でない開集合である．

上の命題より V_0 から $\mathbb{P}\mathrm{Ext}^1((L,\mathbf{t}),(\mathcal{O}_C,\emptyset))=|L\otimes\Omega^1_C(D)|^*$ への自然な開埋め込みが存在することがわかる．$|L\otimes\Omega^1_C(D)|\times|L\otimes\Omega^1_C(D)|^*$ の部分多様体 Σ を次で定める;

$$\Sigma:=\{(\alpha,\beta)\mid\langle\alpha,\beta\rangle=0\}.$$

また接続を忘れる有理写像を Bun で表す．すなわち

$$\mathrm{Bun}\colon \mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))\cdots\to\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)$$

$$(E,\nabla,l_*)\longmapsto(E,l_*)$$

である．さらに $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))$ の部分集合 $\mathcal{M}^0$ を

$$\mathcal{M}^0=\{(E,\nabla,l_*)\in\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))\mid(E,l_*)\in V_0\}.$$

で定める．$\mathcal{M}^0$ は $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))$ の Zariski 開集合である．

定理 4.2. $d=2g-1$, $\sum_{i=1}^n\nu_0^{(i)}\neq 0$, $\sum_{i=1}^n(\alpha_2^{(i)}-\alpha_1^{(i)})<1$ とする．このとき射

$$\mathrm{App}\times\mathrm{Bun}\colon \mathcal{M}^0\longrightarrow(|L\otimes\Omega^1_C(D)|\times V_0)\setminus\Sigma$$

は同型である．したがって有理写像

$$\mathrm{App}\times\mathrm{Bun}\colon \mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))\ \cdots\to|L\otimes\Omega^1_C(D)|\times\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)$$

は双有理写像である．

$\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_H(L)=\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_{(C,\mathbf{t})}(0,2,(L,0),0)$ とする．すなわち $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_H(L)$ は 2 階の $\boldsymbol{\alpha}$-安定な放物 Higgs 束で行列式直線束及び誘導する準同型の組が $(L,0)$ であるもののモジュライ空間である．各 $(E,l_*)\in\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)$ に対し自然な同型

$$T^*_{(E,l_*)}\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)\simeq\{\Theta\in H^0(C,\mathcal{E}ndE\otimes\Omega^1_C(D))\mid\mathrm{tr}\,\Phi=0\}.$$

が存在する．これにより $T^*\mathcal{P}^{\boldsymbol{\alpha}}(L)$ から $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_H(L)$ への自然な開埋め込みが存在することがわかる．

命題 4.3. $d=2g-1$, $\sum_{i=1}^n\nu_0^{(i)}=0$, $\sum_{i=1}^n(\alpha_2^{(i)}-\alpha_1^{(i)})<1$ とする．このとき $\mathcal{M}^0$ は V_0 の余接束 T^*V_0 の全空間と同型であり，忘却写像 $\mathrm{Bun}\colon\mathcal{M}^0\to V_0$ は射影 $T^*V_0\to V_0$ に対応する．したがって $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))$ は $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}_H(L)$ と双有理同値である．

定理 4.2 と命題 4.3 より次を得る．

系 4.4. $\sum_{i=1}^n(\alpha_2^{(i)}-\alpha_1^{(i)})<1$ とする．このとき $\mathcal{M}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\nu},(L,\nabla_L))$ は有理多様体である．

参考文献

[BY] H. U. Boden and K. Yokogawa, Rationality of moduli spaces of parabolic bundles, J. London Math. Soc. (2) 59 (1999), no. 2, 461–478.

[IIS1] M. Inaba and K. Iwasaki and M. -H. Saito, Moduli of stable parabolic connections, Riemann-Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. I, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 42 (2006), no. 4, 987–1089.

[IIS2] M. Inaba and K. Iwasaki and M. -H. Saito, Moduli of stable parabolic connections, Riemann-Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. II, Adv. Stud. Pure Math., 45, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2006).

[In] M. Inaba, Moduli of parabolic connections on curves and the Riemann-Hilbert correspondence, J. Algebraic Geom. 22 (2013), no. 3, 407–480.

[LS] F. Loray and M. -H. Saito, Lagrangian fibrations in duality on moduli spaces of rank 2 logarithmic connections over the projective line, Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 4, 995–1043.

[SS] M. -H. Saito and S. Szabó, On apparent singularities and canonical coordinates for moduli spaces of connections, in preparation

[T] T.Matsumoto, Birational geometry of moduli spaces of rank 2 logarithmic connections, arXiv: 2105.06892

[Yo1] K. Yokogawa, Compacitification of moduli of parabolic sheaves and moduli of parabolic Higgs sheaves, J. Math. Kyoto Univ. 33 (1993), no. 2, 451–504

[Yo2] K. Yokogawa, Infinitesimal deformation of parabolic Higgs sheaves, Internat, J. Math. 6 (1995), no. 1, 125–148

対称群による判別的配置 $\mathcal{B}(6,3,\mathcal{A}), \mathcal{B}(6,2,\mathcal{A})$ の分類

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
齋藤琢弥 (Takuya SAITO)

概要

判別的配置 $\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})$ は組紐配置の高次化として導入された超平面配置である．これは固定した k 次元空間の一般の位置にある n 枚の超平面からなる配置 $\mathcal{A}$ に対し，その各超平面の平行移動全体のなす空間に定義される．この配置の組合せ型は $\mathcal{A}$ に依存し，固定した n,k に対して組合せ型が最大になるとき $\mathcal{A}$ を very generic，そうでないとき non-very generic と呼ばれている．本稿では $n=6,k=2,3$ の場合に 6 元集合の分割との対応づけを与えることができることを紹介する．

1 導入

組紐配置はよく研究されてきた超平面配置であり，組紐群や A 型ルート系などと関連している（cf.[OT92]）．この組紐配置の高次化として判別的配置（discriminantal arrangements）は Manin と Schectman によって 1989 年に導入された [MS89]．k 次元空間の一般の位置にある n 枚からなる超平面配置 $\mathcal{A}$ を一つ固定し，その各超平面の平行移動全体のなす空間 $\mathbb{S}(\mathcal{A})$ を考える．判別的配置は $\mathbb{S}(\mathcal{A})$ に構成される $\binom{n}{k+1}$ 枚の超平面から構成される配置である．この組合せ型は導入された時点では $\mathcal{A}$ に依存しないと考えられていたが，1994 年，[Fal94] で Falk によってそうでないことが指摘された．この論文では $\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})$ が適当な構成によって $\mathcal{A}$ から得られる $n-k$ 次元空間の n 点集合が生成する超平面配置と線形同型になることが示され，これを用いて $n=6,k=3$ とき組合せ型が一致しない 2 つの例が構成された．この一般の位置にある点が生成する超平面配置としての視点での研究は [KNT12][NA12] でもされている．

一般の位置にある超平面配置全体のなす空間のある Zarisky 開集合 $\mathcal{Z}$ 上では $\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})$ の組合せ型は一定，特に最大になることが知られている．Bayer，Brandt らは [BB97] で元の配置 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{Z}$ に含まれているとき very generic，そうでないとき non very generic と分類した．加えて彼らは $\mathcal{A}$ が very generic な場合の $\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})$ の組合せ型を予想し，Athanasiadis によって [Ath99] で肯定的に解決された．一方で non very generic な場合の組合せ型や，$\mathcal{Z}$ の明示的な構成は与えられていない．non very generic な場合の組合せ型と関連する最近の研究は [LS18, SSY17, SSY19, SY21] などがある．特に [SSY19] では本稿と関連する結果として Pappus の定理や Hesse の配置と関わりや，実配置の場合 non very generic な点は高々 4 であることを指摘している．

実は Manin と Schectman 以前以降にもいくつかの文脈で同値な定義がなされてきた．例えば 1985 年に [Cra85] で Crapo によって geometry of circuits と呼ばれる線形表現されたマトロイドから構成される判別的配置と同値な概念を考えている．彼は特に $n=6,k=2$ の場合の例について詳

細な議論をしている．本稿でもこの例と Falk の $n=6, n=3$ の例について分類を与える．この他の同値な概念として [Lon80] で Longyear によって 2 値マトロイドの circuits の研究として derived matroid が定義され，Oxley と Wang によって一般の体上で表現されたマトロイドへ拡張された [OW19]．これと関連する最近の研究は [CFW21] や [FHK21] などがある．特に後者では線形符号や秘匿情報検索への応用が示唆されている．

この他に関連する話題としては高次の組紐群やその高次圏への応用（cf.[MS89, KV94]）や高次 Bruhat 順序や fiber zonotopes と呼ばれる多面体との関わり（cf.[FZ01]）などもある．

2 準備

2.0 記号と約束

本稿では体 $\mathbb{K}$ は可換であるとし，$\mathbb{K}^k$ は縦ベクトルからなるものとする．k, n は $k \leq n$ を満たす自然数とし．有限集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を $[n]$ と書く．また，有限集合 S の濃度を $|S|$，S の k 元部分集合全体を $\binom{S}{k}$ で表すこととする．有限集合 S の部分集合族 $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2 \subset 2^S$ に対して，ある自己全単射 $f : S \to S$ が存在して，任意の $I_1 \in \mathbb{T}_1$ について $f(I_1) \in \mathbb{T}_2$ かつ任意の $I_2 \in \mathbb{T}_2$ について $f^{-1}(I_2) \in \mathbb{T}_1$ であるときに $\mathbb{T}_1$ と $\mathbb{T}_2$ は同型であるという．また，S の部分集合族 $\mathbb{T} \subset 2^S$ の補構造 $\mathbb{T}^*$ を $\{S \setminus I \mid I \in \mathbb{T}\}$ によって定義しておく．さらに有限次元 affine 空間 $\mathbb{A}$ とその部分空間 $\mathbb{A}'$ に対し余次元を $\mathrm{codim}\mathbb{A}' = \dim \mathbb{A} - \dim \mathbb{A}'$ によって定義する．

2.1 分割

自然数をいくつかの正整数の和で表すことを自然数の分割と呼ぶ．より正確には正整数の単調有限列 $\nu = (\nu_1 \leq \ldots \leq \nu_r)$ が $n = \sum_{1 \leq i \leq r} \nu_i$ を満たすとき，ν を n の分割と呼ぶ．分割 ν が $(\underbrace{d_1 = \cdots = d_1}_{a_1} < \underbrace{d_2 = \cdots = d_2}_{a_2} < \cdots < \underbrace{d_l = \cdots = d_l}_{a_l})$ であるとき $\nu = d_1^{a_1} d_2^{a_2} \cdots d_l^{a_l}$ と表すこととする．例えば 6 の分割であれば次の 11 個の分割がある．

$$1^6, 1^4 2^1, 1^3 3^1, 1^2 2^2, 1^2 4^1, 1^1 2^1 3^1, 2^3, 1^1 5^1, 2^1 4^1, 3^2, 6^1.$$

また，有限集合 V の部分集合族 $\mathcal{V}(\not\ni \emptyset)$ であって $\bigcup_{V' \in \mathcal{V}} V' = V$ と任意の $V', V'' \in \mathcal{V}$ に対して $V' \cap V'' = \emptyset$ を満たすとき V の分割という．V の分割全体は V の部分集合族の集合であるから同型から定まる同値関係 $\sim$ が定まる．この同値類は適当な代表元を取ることで，自然数 $|V|$ の分割 $\nu = (|V_1| \leq \cdots \leq |V_r|)$ として記述できる．この同値類の元を型 ν の分割と呼ぶことにする．

2.2 超平面配置

Affine 空間 $\mathbb{A}^k = \mathbb{K}^k$ の超平面とは余次元 1 の affine 部分空間のことである．また，有限個の affine 超平面からなる集合 $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_n\}$ を affine 空間 $\mathbb{K}^k$ 上の超平面配置 (hyperplane arrangement) と呼ぶ．以降 affine という枕詞をつけず，超平面配置あるいは配置，また n, k を強調したいときは用語としてあまり一般的ではないが (n, k)-配置と呼ぶことにする．一般に超平面は適当な $\alpha_i \in \mathbb{K}^k$ と $t_i \in \mathbb{K}$ を使い $H_i = \{v \in \mathbb{K}^k \mid \alpha_i \cdot v = t_i\}$ と書ける．ここで $\alpha \cdot v$ は $\alpha \in \mathbb{K}^k$ の転

置 α^{T} と v との積 $\alpha^{\mathsf{T}}v$ である．この α_i は定数倍を除いて一意的であり，$\mathbb{K}=\mathbb{R},\mathbb{C}$ の場合に倣って H_i の法線ベクトルと呼ぶことにする．

超平面配置の部分集合を部分配置と呼ぶ．(n,k)-配置 $\mathcal{A}$ の任意の部分配置 $\mathcal{A}'$ に対して $|\mathcal{A}'|\leq k$ なら $\operatorname{codim}\bigcap_{H\in\mathcal{A}'}H=|\mathcal{A}'|$，そうでないなら $\bigcap_{H\in\mathcal{A}'}=\emptyset$ であるとき $\mathcal{A}$ が一般の位置にあるという．超平面配置 $\mathcal{A}$ が $\bigcap_{H\in\mathcal{A}}H\neq\emptyset$ を満たすとき中心的であるという．

超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して，その組合せ型 (combinatorics) あるいは交差順序集合 (intersection poset) とは $\mathcal{A}$ の超平面の非空な交わり全体からなる階数付き順序集合 $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ である．この階数は余次元によって与えられる．つまり，$\mathcal{L}(\mathcal{A})=\left\{\bigcap_{H\in\mathcal{A}'}H\neq\emptyset\,\middle|\,\mathcal{A}'\subset\mathcal{A}\right\}$, $\operatorname{rank}(W)=\operatorname{codim}(W)$ である．一般に超平面配置の組合せ型は結び半束となる．特に中心的であるとき，組合せ型は交わりも持ち束になる．また，S を $\mathcal{A}$ の添字集合としたとき組合せ型の元 $W\in\mathcal{L}(\mathcal{A})$ に対して W を通る超平面の添字集合を $\mathbb{T}(W)=\{i\in S\mid W\subset H_i\}$ として定義する．さらに超平面配置の階数を $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ の階数として定義する．つまり $\operatorname{rank}(\mathcal{A})=\max_{W\in\mathcal{L}(\mathcal{A})}\operatorname{rank}W$ である．

例 1 (組紐配置)**.** 組紐配置 $\mathcal{B}_n$ とは $\mathbb{K}^n$ の中心的配置 $\{H_{ij}\mid i<j\}$ である．ここで各超平面は $H_{ij}=\{(x_1,\ldots,x_n)^{\mathsf{T}}\in\mathbb{K}^n\mid x_i=x_j\}$ として定義される．$\bigcap_{H\in\mathcal{B}_n}H=\{(x_1,\ldots,x_n)^{\mathsf{T}}\in\mathbb{K}^n\mid x_1=\ldots=x_n\}\neq\emptyset$ であり，$\operatorname{rank}(\bigcap_{H\in\mathcal{B}_n}H)=n-1$ であることから $\operatorname{rank}(\mathcal{B}_n)=n-1$ がわかる．例えば $n=4$ のとき適当な affine 部分空間での断面は図 1 のようになり，この組合せ型 $\mathcal{L}(\mathcal{B}_4)$ の Hasse 図は図 2 のようになる．ここで $\mathbb{T}(F_{i_1i_2i_3})=\{i_1i_2,i_2i_3,i_1i_3\},\mathbb{T}(F_{i_1i_2/i_3i_4})=\{i_1i_2,i_3i_4\}$ とした．つまり $F_{i_1i_2i_3}=H_{i_1i_2}\cap H_{i_2i_3}\cap H_{i_1i_3},F_{i_1i_2/i_3i_4}=H_{i_1i_2}\cap H_{i_3i_4}$ である．

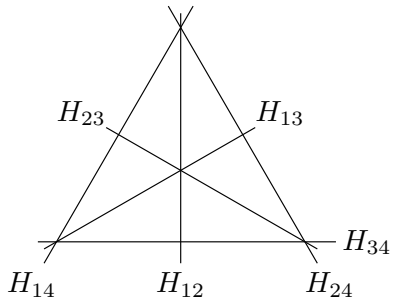


図 1　組紐配置 $\mathcal{B}_4$ の断面

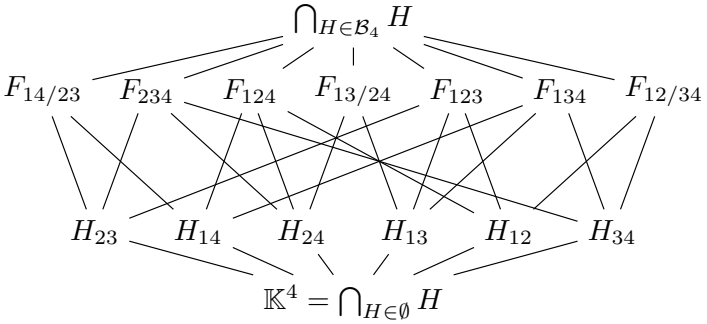


図 2　組紐配置 $\mathcal{B}_4$ の組合せ型 $\mathcal{L}(\mathcal{B}_4)$

また，$\mathbb{A}^k$ を $\mathbb{K}$ 上の射影空間 $\mathbb{P}^k=\mathbb{P}(\mathbb{K}^{k+1})$ の部分空間だと考えると，超平面 $H\in\mathcal{A}$ の閉包 $\overline{H}$ をとれる．この $\overline{H}$ を集めることで $\mathbb{P}^k$ 上の超平面配置が得られる．これを無限遠超平面 $H_\infty=\mathbb{P}^k\setminus\mathbb{A}^k$ 上に制限したものを $\mathcal{A}_\infty=\{H_{\infty,i}=H_\infty\cap\overline{H_i}\mid H_i\in\mathcal{A}\}$ と書くことにする．

2.3　判別的配置

さて，本研究の主題である判別的配置を定義していこう．

定義 2 (判別的配置 [MS89])**.** 一般の位置にある (n,k)-配置 $\mathcal{A}=\{H_1,\ldots,H_n\}$ を固定する．$t=(t_1,\ldots,t_n)^{\mathsf{T}}\in\mathbb{K}^n$ に対して $H_i\in\mathcal{A}$ の t-平行移動を $H_i^t=\{v\in\mathbb{K}\mid\alpha_i\cdot v=t_i\}$ によって定義す

る．さらに $\mathcal{A}$ の t-平行移動 $\mathcal{A}^t$ を $\{H_1^t,\dots,H_n^t\}$ をして定義する．$\mathcal{A}$ の t-平行移動全体のなす空間を $\mathbb{S}(\mathcal{A})=\{\mathcal{A}^t \mid t\in\mathbb{K}^n\}\cong\mathbb{K}^n$ とすると，$\mathcal{A}^t$ が一般の位置にないようなもの全体はいくつかの超平面 D_L の和集合として記述される．この超平面 D_L 全体の集合として判別的配置 $\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})$ を定義する．ここで L は $[n]$ の $k+1$ 元部分集合全体を走り，$D_L=\left\{\mathcal{A}^t\in\mathbb{S}(\mathcal{A})\,\middle|\,\bigcap_{i\in L}H_i^t\neq\emptyset\right\}$ である．つまり，$\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})=\{D_L\mid L\in\binom{[n]}{k+1}\}$ である．

判別的配置 $\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})$ は階数 $n-k$ で中心的な $(\binom{n}{k+1},n)$-配置である．実際 $\bigcap_{D\in\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})}D=\left\{\mathcal{A}^t\in\mathbb{S}(\mathcal{A})\mid\bigcap_{H^t\in\mathcal{A}^t}H^t\neq\emptyset\right\}$ であり，$\bigcap_{H^t\in\mathcal{A}^t}H^t\neq\emptyset$ となるような t は $H_1,\dots,H_k$ まで勝手な平行移動ができるから，このような平行移動全体は k 次元空間をなす．よって $\operatorname{rank}\left(\bigcap_{H^t\in\mathcal{A}^t}H^t\right)=n-k$ を得る．さて，判別的配置が組紐配置の一般化になっていることを確認しておこう．

例 3. $k=1$ とする．$(n,1)$-配置 $\mathcal{A}=\{H_1,\dots,H_n\}$ は $\mathbb{K}$ の中の点配置である．この t-平行移動 $\mathcal{A}^t$ は $H_i^t=\{v\in\mathbb{K}\,|\,v=t_i\}=\{t_i\}$ として記述される．また，D_L の添字集合はは $\binom{[n]}{2}$ あるから自然数 $1\le i<j\le n$ に対して超平面を D_{ij} と書こう．また $H_i^t\cap H_j^t\neq\emptyset$ は $t_i=t_j$ と同値であるから $D_{ij}\cong\{(t_1,\dots,t_n)^{\mathsf{T}}\in\mathbb{K}^n\mid t_i=t_j\}$ となる．従って $\mathcal{B}(n,1,\mathcal{A})$ は例 1 の組紐配置 $\mathcal{B}_n$ と一致する．

判別的配置の超平面 $D_L, L=\{i_1,\dots,i_{k+1}\}\in\binom{[n]}{k+1}$ の法線は $\mathbb{K}^n\cong\mathbb{S}(\mathcal{A})$ の標準基底を $\{e_i\}_{1\le i\le n}$ とすることで

$$\alpha_L=\det\begin{pmatrix}e_{i_1}&\cdots&e_{i_{k+1}}\\ \alpha_{i_1}&\cdots&\alpha_{i_{k+1}}\end{pmatrix}$$

と書かれることが知られている (cf.[BB97])．従って $\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A})$ の組合せ型は $\mathcal{A}$ の t-平行移動に依存せず $\mathcal{A}_\infty$ のみで決定されることがわかるため，$\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A}_\infty)$ と書くことにする．

一般の位置にある配置の 2 つのクラスを Bayer，Brandt [BB97]，Athanasiadis [Ath99] に従って定義する．

- $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ とする．このとき，組合せ型の濃度 $|\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A}_\infty))|$ が最大であるような一般の位置にある (n,k)-配置 $\mathcal{A}$ を *very generic* と呼ぶ．very generic な (n,k)-配置から得られる判別的配置を $\mathcal{B}(n,k)$ と書く．
- 任意の体 $\mathbb{K}$ 上の一般の位置にある (n,k)-配置 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A}_\infty))\cong\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$ となるとき，$\mathcal{A}$ も very generic と呼ぶ．
- very generic でない一般の位置にある配置 $\mathcal{A}$ を *non very generic* と呼ぶ．

$W\in\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k))$ を very generic な点という．また，$W'\in\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A}_\infty))$ に対して very generic な点 W が存在して $\mathbb{T}(W)$ と $\mathbb{T}(W')$ が同型であるとき W' も very generic な点という．逆に non very generic な配置 $\mathcal{A}$ に対して $W\in\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A}_\infty))$ が very generic な点でないとき non very generic な点であるという．$m(\mathcal{A})$ を $\mathcal{L}(\mathcal{B}(n,k,\mathcal{A}))$ の極小な non very generic な点の個数とする．

さて，(n,k)-配置 $\mathcal{A}$ と $\mathbb{T}=\{L_1,\dots,L_r\}\subset\binom{[n]}{k+1}$ に対して $\mathcal{A}^t$ が次の条件を満たすとき $K_{\mathbb{T}}$-移動と呼ばれる；任意の $L\in\mathbb{T}, j\notin L$ に対して $\bigcap_{i\in L}H_i^t\neq\emptyset$ かつ $H_j^t\cap\left(\bigcap_{i\in L}H_i^t\right)=\emptyset$（cf.[SY21]）．

例 4 (Crapo の例 [Cra85])**.** $\mathcal{A}=\{H_1,\dots,H_6\}$ を一般の位置にある実 $(6,2)$-配置，$\mathbb{T}=\{\{1,2,3\},\{1,5,6\},\{2,4,6\},\{3,4,5\}\}$ とする．この very generic な配置 $\mathcal{A}$ について，相異なる 3 元 $L_1,L_2,L_3\in\mathbb{T}$ は 4 通りの選び方があるから，階数 3 の点 $D_{L_1}\cap D_{L_2}\cap D_{L_3}$ が 4 つ得られる．例

えば $F = D_{123} \cap D_{156} \cap D_{345}$ を考えると，その元 $\mathcal{A}^t \in F$ は図 3 のような配置になる．このとき $F \not\subset D_{246}$ であり，$K_{\mathbb{T}}$-移動にならない．一方で $\mathcal{A}$ がある種の代数方程式を満たすとき $K_{\mathbb{T}}$-移動が存

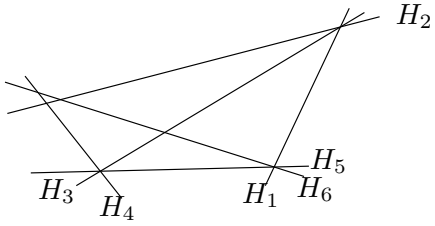


図 3　$\mathcal{L}(\mathcal{B}(6,2,\mathcal{A}))$ の very generic な点

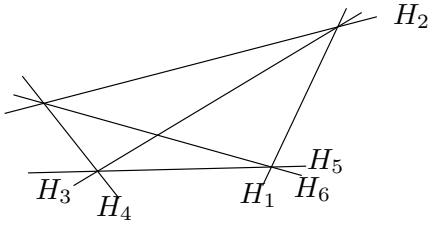


図 4　$\mathcal{L}(\mathcal{B}(6,2,\mathcal{A}))$ の non very generic な点

在し，これが non very generic な点になる．実際，very generic な配置では 4 点あった階数 3 の点が 1 つの点 $D_{123} \cap D_{156} \cap D_{246} \cap D_{345}$ に退化していることがわかる．[6] の部分集合族がこの例の $\mathbb{T}$ と同型であるとき 4-集合と呼ばれる（cf.[SY21]）．4-集合 $\mathbb{T}$ に対する $K_{\mathbb{T}}$-移動 $\mathcal{A}^t$ と同じ組合せ型を持つ配置を Crapo の配置と呼ぶことにする．$\mathrm{rank}(\mathcal{B}(6,2,\mathcal{A})) = 4$ であることを考えると $(6,2)$-配置 $\mathcal{A}$ が non very generic であることの必要十分条件は $\mathcal{A}$ の平行移動が存在し，Crapo の配置になることだと分かる．

例 5 (Falk の例 [Fal94])．$\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_6\}$ を一般の位置にある実 $(6,2)$-配置，$\mathbb{T} = \{\{1,2,3,4\},\{1,2,5,6\},\{3,4,5,6\}\}$ とする．このとき $K_{\mathbb{T}}$-移動 $\mathcal{A}^t$ が存在すれば，それらのなす集合は階数 2 の non very generic な点になる．$K_{\mathbb{T}}$-移動 $\mathcal{A}^t$ が得られたとき $\mathbb{K}^3$ の中の 3 直線 $H_1^t \cap H_2^t, H_3^t \cap H_4^t, H_5^t \cap H_6^t$ が同一平面上にあることになる．これを $\mathcal{A}_\infty$ で解釈すると 3 点 $H_{\infty,1} \cap H_{\infty,2}, H_{\infty,3} \cap H_{\infty,4}, H_{\infty,5} \cap H_{\infty,6}$ が共線であることに他ならない（cf.[LS18]）．この例のように [6] の部分集合族が [6] の2^3 型の分割の補構造になっているとき，その部分集合族は good 6-partition と呼ばれる（cf.[SSY17],[SSY19]）．$\mathrm{rank}(\mathcal{B}(6,3,\mathcal{A})) = 3$ であることを考えると $(6,3)$-配置 $\mathcal{A}$ が non very generic であることの必要十分条件は good 6-partition$\mathbb{T}$ から得られる $K_{\mathbb{T}}$-移動が存在することだと分かる．

より高次元，一般の non very generic な例は [LS18],[SY21] などを参照されたい．

2.4　グラフ

グラフとは有限集合 V とその 2 元部分集合の族 $E \subset \binom{V}{2}$ の組 $G = (V, E)$ である．$E = \binom{V}{2}$ であるとき完全グラフと呼びこのグラフを K_V，特に $V = [n]$ であるとき K_n と書く．V の元を頂点，E の元を辺と呼ぶ．$G = (V, E)$ の辺の部分集合 $E' \subset E$ が，V の分割を与えているとき，辺集合 E' を G の 1-因子と呼ぶ．G の 1-因子の族 $\{E_1, \ldots, E_r\}$ が E の分割を与えているとき，この族を G の 1-因子分解という．$E' = E \cap \binom{V'}{2}$ で定めたとき (V', E') を誘導部分グラフといい $G[V']$ と書く．これを一般化し V の分割 $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_r\}$ に対して誘導部分グラフ $G[\mathcal{V}]$ を $(V, E[\mathcal{V}]), E[\mathcal{V}] = \bigcup_{i=1}^r E \cap \binom{V_i}{2}$ によって定める．頂点と辺の部分集合 $V' \subset V, E' \subset E \cap \binom{V'}{2}$ の組 (V', E') を部分グラフという．また，相異なる頂点の列 $v_0, \ldots, v_k \in V$ が任意の $i \in [k]$ について $\{v_{i-1}, v_i\} \in E$ であるとき v_0 と v_k を結ぶ道と呼ぶ．頂点の部分集合 $V' \subset V$ が任意の $v, v' \in V$ に

対して v と v' を結ぶ道があるとき V' を G の連結成分と呼ぶ.

さて，完全グラフ K_V に対して，V の型 $d_1^{a_1}d_2^{a_2}\cdots d_l^{a_l}$ の分割 $\mathcal{V}$ が与えられたときの誘導部分グラフ $K_V[\mathcal{V}]$ を考えておこう．完全グラフであるから $K_V[\mathcal{V}]$ の辺の数は $\mathcal{V}$ の型のみに依存し，それは $m(d_1^{a_1}d_2^{a_2}\cdots d_l^{a_l}) = \sum_{1\le j\le l} a_j\binom{d_j}{2}$ によって与えられる．$|V| = 6$ であるとき以下のように計算できる．

$$\begin{aligned} &m(1^6) = 0, \quad m(1^42^1) = 1, \quad m(1^33^1) = 3, \quad m(1^22^2) = 2,\\ &m(1^24^1) = 6, \quad m(1^12^13^1) = 4, \quad m(2^3) = 3, \quad m(1^15^1) = 10,\\ &m(2^14^1) = 7, \quad m(3^2) = 6, \quad m(6^1) = 15. \end{aligned} \tag{1}$$

2.5 6 次対称群の外部自己同型 ϕ と完全グラフ $K_{\phi([6])}$

$\mathfrak{S}_6$ の $(12)(34)(56)$ の共役類を $C = \mathrm{Conj}_{\mathfrak{S}_6}((12)(34)(56))$ とおく．この小節では C の部分集合 C' が生成する部分群 $\langle C'\rangle$ に C の元がいくつ含まれているかを 6 頂点完全グラフと対応づけることで考える．まず，6 次対称群 $\mathfrak{S}_6$ には次の外部自己同型 ϕ が存在する．

$$\begin{aligned} &(12)\mapsto\phi((12)) = (15)(26)(34), \quad (23)\mapsto\phi((23)) = (12)(35)(46),\\ &(34)\mapsto\phi((34)) = (15)(24)(36), \quad (45)\mapsto\phi((45)) = (14)(26)(35),\\ &(56)\mapsto\phi((56)) = (15)(23)(46). \end{aligned}$$

この外部自己同型によって互換は C の元にうつる．特に互換全体に ϕ を制限したとき，C との間の全単射を与える．

さて，K_6 の辺 $\{i,j\}\subset[6]$ を互換 $(ij)\in\mathfrak{S}_6$ と同一視し ϕ の像として得られる 6 頂点完全グラフ $K_{\phi([6])} = (V, \binom{V}{2})$（図 5）を考えよう．つまり，$K_6$ の頂点集合 $[6]$ について $\phi : [6]\to V = \phi([6]) = \{\phi(i)\mid i\in[6]\}; i\mapsto\phi(i)$ とする．$K_{\phi([6])}$ の辺集合と C の濃度は共に 15 であるから再び辺 $\{\phi(i),\phi(j)\}$ を $\phi((ij))\in C$ と同一視する．外部自己同型によって与えられているから $K_{\phi([6])}$ の

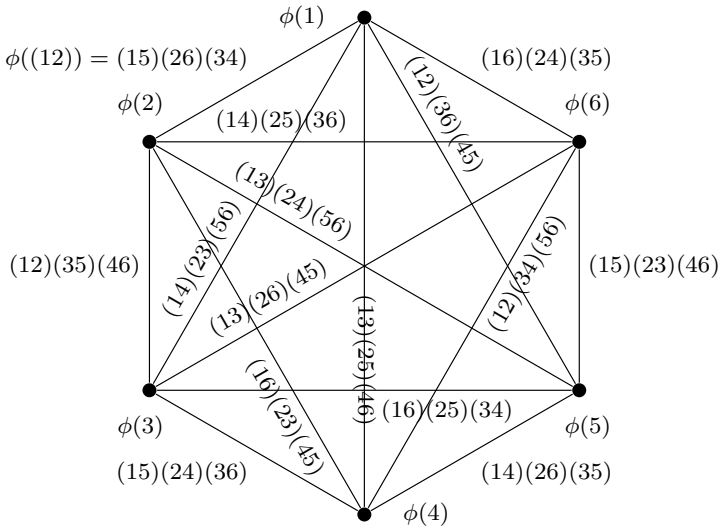


図 5　完全グラフ $K_{\phi([6])}$

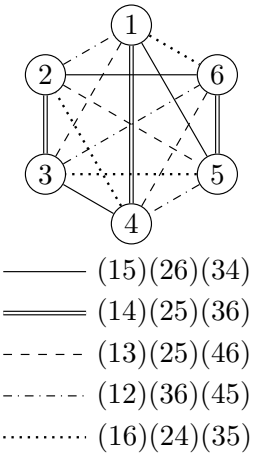


図 6　$\phi(1)$ 上での 1-因子分解

辺の部分集合 $C'\subset C$ を選んだとき，それらが生成する $\mathfrak{S}_6$ の部分群 $\langle C'\rangle$ に含まれる辺は C' が定

める連結成分によって決定される．つまり部分グラフ $(V, C') \subset K_{\phi([6])}$ の連結成分による V の分割 $\mathcal{V} = \{V_1, \ldots, V_r\}$ が $C \cap \langle C' \rangle$ を定める．特に ν 型の分割 $\mathcal{V}$ なら $|C \cap \langle C' \rangle|$ は $K_{\phi([6])}[\mathcal{V}]$ の辺の数 $m(\nu)$ である．いま，V は 6 点からなり $m(\nu)$ は式 (1) で与えられている．

最後に $\mathfrak{S}_6$ の元による $[6]$ の軌道分解を $o : S_6 \to 2^{[6]}; \sigma \mapsto \{\langle\sigma\rangle i \mid i \in [6]\}$ によって定義する．特に $K_{\phi([6])}$ の辺 $(i_1 i_2)(i_3 i_4)(i_5 i_6) \in C$ による軌道分解は 1-因子 $o((i_1 i_2)(i_3 i_4)(i_5 i_6)) = \{\{i_1, i_2\}, \{i_3, i_4\}, \{i_5, i_6\}\}$ を与える．これは good 6-partition$\mathbb{T}$ の補構造 $\mathbb{T}^*$ になっていることに注意しておく．また，任意の頂点 $\phi(i) \in V$ に対して接続する辺は K_6 の 1-因子分解 $\{o(\phi((ij)))\}_{j \neq i}$ を与えている（cf. 図 6）．逆に，共通の頂点を持たない $K_{\phi([6])}$ の 2 辺 $\phi(i_1 i_2), \phi(i_3 i_4)$ に対しては $o(\phi(i_1 i_2)) \cap o(\phi(i_3 i_4)) \neq \emptyset$ となる．また，o を C に制限した写像 $o|_C : C \to 2^{[6]}$ は単射であるから C と good 6-partition 全体の間に全単射 $\psi = (\cdot)^* \circ o|_C : C \to \{\mathbb{T} \subset 2^{[6]} \mid \mathbb{T} \text{ は good 6-partition}\}$ があることもわかる．

3 主結果

3.1 $\mathcal{B}(6, 2, \mathcal{A})$ の分類

この小節では $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_6\}$ を一般の位置にある $(6, 2)$-配置とする．射影直線上の複比を使い計算することで以下の補題がわかる．

補題 6. 以下は同値.

i. ある $t \in \mathbb{K}^6$ が存在して $\mathcal{A}^t$ が 4-集合 $(L_1, L_2, L_3, L_4) = (\{i_1, i_2, i_3\}, \{i_1, i_5, i_6\}, \{i_2, i_4, i_6\}, \{i_3, i_4, i_5\})$ によって定まる Crapo の配置になる．

ii.
$$\frac{|\alpha_{i_1}\alpha_{i_5}||\alpha_{i_2}\alpha_{i_6}||\alpha_{i_3}\alpha_{i_4}|}{|\alpha_{i_1}\alpha_{i_6}||\alpha_{i_2}\alpha_{i_4}||\alpha_{i_3}\alpha_{i_5}|} = 1. \tag{2}$$

iii. 射影直線 H_∞ 上の対合的射影変換 σ が存在して $\sigma(H^0_{i_j}) = H^0_{i_{j+3}}$ を満たす．ここで添字 j は $\mathbb{Z}_6$ の元とみなしている．

また，式 (2) に注目することで Crapo の配置が 4-集合 $\mathbb{T} = \{L_1, \ldots, L_4\}$ から構成されたとき，4-集合 $\mathbb{T}^* = \{[6] \setminus L_i \mid i = 1, 2, 3, 4\}$ から定まる Crapo の配置も生じることがわかる．従って $\mathcal{B}(6, 2, \mathcal{A})$ の non very generic な点の個数は偶数になる．これは [Cra85] でも指摘されている．この対 $\{\mathbb{T}, \mathbb{T}^*\}$ から得られる non very generic な点の組を 4 重点対と呼ぶことにする．

さて，補題 6 の σ を添字集合 $[6]$ の上の対称群 $\mathfrak{S}_6$ の元だと考えると，$\sigma = (i_1 i_4)(i_2 i_5)(i_3 i_6) \in C$ を得る．従って C と $\mathcal{B}(6, 2, \mathcal{A})$ の non-very generic な点，特に 4 重点対との間に 1 : 1 の対応ができ，小節 2.5 の議論から次の定理が従う．

定理 7. 任意の $\mathcal{A}$ に対して $K_{\phi([6])}$ の頂点集合の分割 $\mathcal{V}$ が存在して，$K_{\phi([6])}[\mathcal{V}]$ の辺集合が $\mathcal{L}(\mathcal{B}(6, 2, \mathcal{A}))$ の 4 重点対に対応する．このとき $\mathcal{A}$ の型を $\mathcal{V}$ の型 ν と定める．特に $m(\mathcal{A}) = 2m(\nu)$.

注意 8. 1. 任意の $\mathbb{K}$ で一般射影変換群 $PGL(2, \mathbb{K})$ が 6 重推移的でないことを使えば $\mathfrak{S}_6 \not\subset PGL(2, \mathbb{K})$ がわかり，ここから 6^1 型の配置が存在しないことがわかる．

2. non very generic な点の数が最大になるのは $1^1 5^2$ 型の配置のときであり，これは $\mathbb{K}$ の標数が 5 の場合に限り存在する．

3.2 $\mathcal{B}(6,3,\mathcal{A})$ の分類

この小節では $\mathcal{A} = \{H_1, \ldots, H_6\}$ を一般の位置にある $(6,3)$-配置とする．Pappus の定理と呼ばれる射影幾何学における古典的な定理がある．

定理 9 (Pappus)**.** $h_1, h_2, \ldots, h_6$ を可換体上の射影平面上の一般の位置にある直線とする．$h_1 \cap h_2, h_3 \cap h_4, h_5 \cap h_6$ が共線かつ $h_1 \cap h_6, h_2 \cap h_3, h_4 \cap h_5$ が共線ならば $h_1 \cap h_4, h_2 \cap h_5, h_3 \cap h_6$ も共線である．

この定理の 3 つの共線な 3 点はそれぞれ K_6 の 1-因子に対応している．従ってこれらは $K_{\phi([6])}$ の互いに頂点を共有する辺とも対応し，特にこの辺と接続する頂点は 3 頂点完全グラフを作ることがわかる．従って $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ を上の共線な 3 点に対応する K_6 の 1-因子とすると $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2 = \emptyset$ である．これらを例 5 での無限遠平面 $H_\infty \cong \mathbb{P}^2$ 上の直線配置 $\mathcal{A}_\infty$ に適用することで次の系を得る．

系 10. $\mathbb{T}_1, \mathbb{T}_2$ を $\mathbb{T}_1 \cap \mathbb{T}_2 = \emptyset$ であるような good 6-partitions とする，$\sigma_1, \sigma_2 \in C$ を $\mathbb{T}_1$ と $\mathbb{T}_2$ に対応する元とする，もし $K_{\mathbb{T}_1}$-移動と $K_{\mathbb{T}_2}$-移動が存在するならば $K_{\mathbb{T}_3}$-移動が存在する．ここで $\mathbb{T}_3$ は $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$ に対応する good 6-partition である（図 7 参照）．

$o(\sigma_1) = \{\{i_1, i_2\}, \{i_3, i_4\}, \{i_5, i_6\}\}$

$o(\sigma_3) = \{\{i_1, i_4\}, \{i_2, i_5\}, \{i_3, i_6\}\}$

$o(\sigma_2) = \{\{i_1, i_6\}, \{i_2, i_3\}, \{i_4, i_5\}\}$

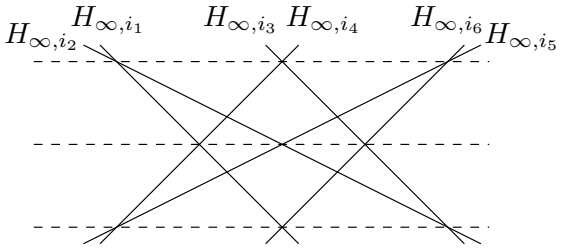


図 7　good 6-partition の補構造と Pappus の配置

これらと小節 2.5 の議論から次の補題が従う．

定理 11. 任意の $\mathcal{A}$ に対して $K_{\phi([6])}$ の頂点集合の分割 $\mathcal{V}$ が存在して，$K_{\phi([6])}[\mathcal{V}]$ の辺集合が $\mathcal{L}(\mathcal{B}(6,3,\mathcal{A}))$ の good 6-partiton から得られる non very generic な点に対応する．このとき $\mathcal{A}$ の型を $\mathcal{V}$ の型 ν と定める．特に $m(\mathcal{A}) = m(\nu)$.

定理 11 を用いて計算をすることで次の分類を得ることができる．

定理 12. $\mathbb{K}$ を標数 0，$\mathcal{A}$ を $\mathbb{K}^3$ 上の generic な配置とする．型 ν を持つ一般の位置にある配置 $\mathcal{A}$ が実現される最小の体は以下の表のようになる；

ν	1^6	$1^4 2^1$	$1^3 3^1$	$1^2 2^2$	$1^2 4^1$	$1^1 2^1 3^1$	2^3	$1^1 5^1$	$2^1 4^1$	3^2	6^1
$\mathbb{K}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\star$	$\mathbb{Q}(\sqrt{5})$	$\star$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	$\star$

.

ここで $\star$ は型 ν の配置が標数 0 の可換体上で実現されないことを意味する．

注意 13. 最後に幾つかの補足を加えておく．

1. 3^2 型の $(6,3)$-配置は H_∞ 上で Hesse の配置に対応している．これは [SSY19]Theorem 6.5. で指摘されている．一方でこの分類は実 $(6,3)$-配置から得られる判別的配置の non very generic な点の数が 4 であることの反例を構成している．
2. 1^15^1 型の $(6,3)$-配置は正 12 面体の各面と平行な平面として構成される（図 8）．$\mathcal{B}(6,2,\mathcal{A})$ の

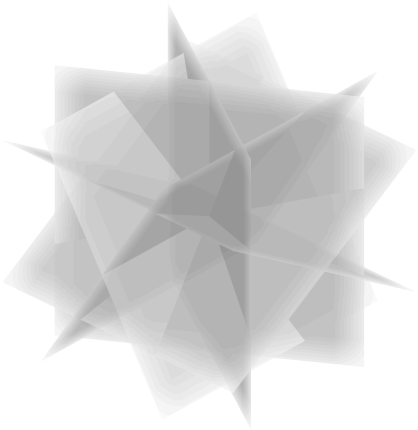


図 8　正 12 面体の各面と平行な平面から構成される配置

場合と合わせて考えると対称性が高いほど non-very generic な点が多いことが期待される．

3. $(6,3)$-配置は 6^1 型であるとき，non very generic な点の数は最大になるが，標数 0 の体上でこの型を持った配置の最小が実現する最小の体は 4 元数体 $\mathbb{F}_4=\{0,1,\omega,\omega^2=\omega+1\}$ で，その法線ベクトル $\alpha_i\,(i=1,\cdots,6)$ は以下のように与えられる；

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6)=\begin{pmatrix}1&0&0&1&\omega&\omega^2\\0&1&0&1&\omega^2&\omega\\0&0&1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

実はマトロイド理論における禁止マイナーを考えることで，6^1 型の配置は 4 元以上からなる標数 2 の体上にのみ構成されることがわかる．

参考文献

[Ath99] Christos A Athanasiadis. The largest intersection lattice of a discriminantal arrangement. *Beitr. Algebra Geom*, 40(2):283–289, 1999.

[BB97] Margaret M Bayer and Keith A Brandt. Discriminantal arrangements, fiber polytopes and formality. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 6(3):229–246, 1997.

[CFW21] Beifang Chen, Houshan Fu, and Suijie Wang. Parallel translates of represented matroids. *Advances in Applied Mathematics*, 127:102176, 2021.

[Cra85] Henry Crapo. The combinatorial theory of structures. In *Matroid Theory*, volume 40 of *Colloquia mathematica Societatis János Bolyai*, pages 107–213. North-Holland, 1985.

[Fal94] Michael Falk. A note on discriminantal arrangements. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 122(4):1221–1227, 1994.

[FHK21] Ragnar Freij-Hollanti and Olga Kuznetsova. Information hiding using matroid theory. *Advances in Applied Mathematics*, 129:102205, 2021.

[FZ01] Stefan Felsner and Günter M. Ziegler. Zonotopes associated with higher bruhat orders. *Discrete Mathematics*, 241(1-3):301–312, 2001.

[KNT12] Hiroshi Koizumi, Yasuhide Numata, and Akimichi Takemura. On intersection lattices of hyperplane arrangements generated by generic points. *ANNALS OF COMBINATORICS*, 16(4):789–813, 12 2012.

[KV94] Mikhail Kapranov and Vladimir Voevodsky. Braided monoidal 2-categories and manin-schechtman higher braid groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 92(3):241–267, 1994.

[Lon80] Judith Q Longyear. The circuit basis in binary matroids. *Journal of Number Theory*, 12(1):71–76, 1980.

[LS18] ANATOLY LIBGOBER and SIMONA SETTEPANELLA. Strata of discriminantal arrangements. *Journal of Singularities*, 18:440–454, 2018.

[MS89] Yu I Manin and V Schechtman. Arrangements of hyperplanes, higher braid groups and higher bruhat orders. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 17:289–308, 1989. Algebraic Number Theory — in honor of K. Iwasawa.

[NA12] Yasuhide Numata and A.Takemura. On computation of the characteristic polynomials of the discriminantal arrangements and the arrangements generated by generic points. *Harmony of Grobner Bases and the Modern Industrial Society, (Takayuki Hibi, editor), World Scientific*, pages 228–252, 2012.

[OT92] Peter Orlik and Hiroaki Terao. Orbit types. In *Arrangements of Hyperplanes*, pages 289–300. Springer, 1992.

[OW19] James Oxley and Suijie Wang. Dependencies among dependencies in matroids. *The Electronic Journal of Combinatorics*, pages P3–46, 2019.

[SSY17] Sumire Sawada, Simona Settepanella, and So Yamagata. Discriminantal arrangement, 3×3 minors of plücker matrix and hypersurfaces in grassmannian $Gr(3, \mathbf{C}^n)$. *Comptes Rendus Mathematique*, 355(11):1111–1120, 2017.

[SSY19] Sumire Sawada, Simona Settepanella, and So Yamagata. Pappus's theorem in grassmannian $Gr(3, \mathbf{C}^n)$. *ARS MATHEMATICA CONTEMPORANEA*, 16(1):257–276, 2019.

[SY21] Simona Settepanella and So Yamagata. Combinatorics of discriminantal arrangements. *arXiv preprint arXiv:2101.00544*, 2021.

三次元多様体における Weber 問題

東京理科大学大学院 理工学研究科 数学専攻
吉崎彪雅 (Hyuga YOSHIZAKI)

概要

Weber 問題とは，素数 p に対して，有理数体上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大の中間体の類数を求める，数論における未解決問題である．一方で，代数体と三次元多様体には，興味深い類似が指摘されている．講演者は，代数体のイデアル類群と三次元多様体の整係数 1 次ホモロジー群の類似性をもとに，三次元多様体における Weber 問題を考察した．そして，数論側と同様の結果 (類数の収束性) を得たので，紹介する．

本講演は，植木潤氏 (東京電機大学) との共同研究に基づくものである．

1 導入-類似研究-

数論的位相幾何学とは，代数体と三次元多様体の類似性に焦点を当て，一方の理論の他方での類似を考察することによる相互発展を目指す分野である．特に，代数体の素イデアルと三次元多様体に埋め込まれた結び目の類似は，古くから指摘されている ([Mo])．この類似を軸として，両分野の諸概念の類似が考案され，「類似対応の辞書作り」が進んでいる．今回は，数論における類数問題のトポロジー側での類似を研究した結果を紹介するため，このセクションではイデアル類群と 1 次ホモロジー群の類似について言及しておく．代数体 F に対し，J_F を分数イデアル全体，P_F を単項生成イデアル全体とするとき，F のイデアル類群 Cl_F は，

$$\mathrm{Cl}_F := J_F/P_F$$

で定義される．そして，これは有限群であることが知られており，その位数を F の類数という．代数体の類数決定問題は，Gauss を発端とする歴史ある課題であるにもかかわらず，未だに類数 1 の代数体がどのくらい存在するか (有限か無限かも) 分かっていない．一方で，三次元多様体 M に対し，その 1-サイクルを $Z_1(M)$ ，1-バウンダリーを $B_1(M)$ とするとき，M の 1 次ホモロジー群は，

$$H_1(M) := Z_1(M)/B_1(M)$$

で定義されるのであった．代数体の整数環は Dedekind 環であるため，J_F は素イデアルで生成される自由アーベル群である．また，$Z_1(M)$ は，M 内の結び目で生成される自由アーベル群である．素イデアルと結び目の類似に基づき，イデアル類群とホモロジー群の類似が見て取れる．本研究では，類数問題の中でも，次に紹介する Weber の類数問題の類似を考察した．

2 背景-Weber 問題-

p を素数として，有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{Z}_p$ 拡大を $\mathbb{B}_p$ とする．$\mathbb{Z}_p$ 拡大とは，無限次 Galois 拡大で，その Galois 群が p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ の加法群と同型なものである．正の整数 n に対して，$\mathbb{B}_p$ の p^n 次の中間体がただ一つあり，それを $\mathbb{B}_{p,n}$ とする．Weber 問題とは，全ての素数 p と，正の整数 n に対して，$\mathbb{B}_{p,n}$ の類数 $h_{p,n}$ を求める問題である．また，様々な結果により，次のように予想されている．

予想 2.1. 全ての素数 p と正の整数 n に対して，$h_{p,n} = 1$ だろう．

特に $p = 2$ の場合，Weber [We] 以来様々な研究者によって進展してきたが，現状 $h_{2,6} = 1$ までしか分かっていない ([Mi])．他にも，$h_{2,n}$ を割らない素数の決定という観点からも近年研究が進んでいる (ごく一部であるが，たとえば [Ho, FK, MO])．

一方で，$\mathbb{Z}_p$ 拡大の中間体の類数には，岩澤理論における興味深い性質がある．中でも今回注目するのは，類数を数列 $\{h_{p,n}\}_{n\geq 1}$ とみなしたとき，数列の p 進的振る舞いに関する特徴である．

定理 2.2. 全ての素数 p に対し，類数列 $\{h_{p,n}\}_{n\geq 1}$ は，$\mathbb{Z}_p$ において収束する．

証明の概略. 相対ノルム $\mathrm{N}_{p,n/n-1} : \mathbb{B}_{p,n} \to \mathbb{B}_{p,n-1}$ からイデアル類群間の写像 $\mathrm{N}_{p,n/n-1} : \mathrm{Cl}_{\mathbb{B}_{p,n}} \to \mathrm{Cl}_{\mathbb{B}_{p,n-1}}$ が定まり，これは全射になることが知られている．よって，完全系列

$$0 \to \ker \mathrm{N}_{p,n/n-1} \to \mathrm{Cl}_{\mathbb{B}_{p,n}} \to \mathrm{Cl}_{\mathbb{B}_{p,n-1}} \to 0$$

があり，$\#\ker \mathrm{N}_{p,n/n-1} = h_{p,n}/h_{p,n-1}$ となる．$\ker \mathrm{N}_{p,n/n-1}$ には Galois 群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{B}_{p,n}) \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ が作用するため，$\ker \mathrm{N}_{p,n/n-1}$ の軌道分解の位数を考えることによって，

$$\frac{h_{p,n}}{h_{p,n-1}} \equiv 1 \pmod{p^n} \tag{1}$$

が得られる．これは，数列 $\{h_{p,n}\}_{n\geq 1}$ が p 進 Cauchy 列であることを表し，$\mathbb{Z}_p$ の完備性から，収束する．実際には，(1) 式の証明は，各素数 l パートごとに考え，$l \neq p$ の場合は軌道分解を，$l = p$ の場合は次の岩澤の有名な結果から従う；

定理 2.3 (岩澤 [I])**.** 全ての素数 p と正の整数 n に対し，$p \nmid h_{p,n}$.

□

Weber 問題は未解決であり，$h_{p,n}$ が決定されている (p, n) は有限個しかない．よってその収束先は見当もつかない．しかし，次のセクションで紹介する，類数の収束性のトポロジーにおける類似では，数論側より分かることが多く，収束先が決定できる場合がある．

3 結果-類数の収束性-

まず，トポロジー側における $\mathbb{Z}_p$ 拡大の類似を紹介する．代数体の拡大の類似は，三次元多様体の被覆空間である．K を三次元球面 S^3 に埋め込まれた結び目とするとき，K で分岐する S^3 の p^n 重

巡回被覆空間 M_{K,p^n} が存在する（分岐被覆の定義は，たとえば [Rol]）．結び目 K で分岐するとは，その被覆写像の分岐集合が K となることである．p^n 重巡回被覆とは，被覆変換群 $\mathrm{Deck}(M_{K,p^n}/S^3)$ が $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ に同型となることである（被覆変換群は，被覆写像を保つような同相写像で，代数体における Galois 群の類似である）．M_{K,p^n} の 1 次ホモロジー群は有限群であることが知られており，その位数を $h_{K,p^n} = \#H_1(M_{K,p^n})$ とする．Weber 問題の数論側の類似として，以下の結果が得られた．

定理 3.1. 全ての結び目 K に対し，数列 $\{h_{K,p^n}\}_{n\geq 1}$ は，$\mathbb{Z}_p$ において収束する．

数論側と同様に，$H_1(M_{K,p^n})$ の n に関する相対的な写像の ker に対し，被覆変換群による作用を考えることで証明できる．一方で，類体論を用いた証明もできるため，今回は後者を紹介する．

4 証明

いくつか準備をする．結び目 K に対し，Alexander 多項式 $\Delta_K(t)$ という整数係数相反多項式が定まる．たとえば，三葉結び目に対しては $\Delta_K(t) = t - 1 + t^{-1}$ となり，8 の字結び目に対しては $\Delta_K(t) = -t + 3 - t^{-1}$ となる．さらに，h_{K,p^n} について，$\Delta_K(t)$ を用いて計算できる公式が知られている．

定理 4.1. 全ての結び目 K，素数 p，正の整数 n に対して，

$$h_{K,p^n} = \prod_{i=0}^{p^n-1} |\Delta_K(\zeta_{p^n}^i)| \tag{2}$$

が成立．ただし，$\zeta_{p^n} = \exp(2\pi\sqrt{-1}/p^n)$.

また，岩澤の結果 (定理 2.3) の類似として，次の植木の結果がある；

定理 4.2 (植木 [U])**.** 全ての結び目 K，素数 p，正の整数 n に対して，$p \nmid h_{K,p^n}$.

次に定理 3.1 の証明を紹介する．

定理 *3.1* の証明. 定理 2.2 と同様,

$$\frac{h_{K,p^n}}{h_{K,p^{n-1}}} \equiv 1 \pmod{p^n} \tag{3}$$

が証明できれば十分である．$\Delta_K(t)$ は相反多項式であることから，$\Delta_K(\zeta_{p^n})$ は，$\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ の最大実部分体 $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+$ の元とみなせる．よって (2) から,

$$\begin{aligned}\frac{h_{K,p^n}}{h_{K,p^{n-1}}} &= \prod_{i=0}^{p^n-1} |\Delta_K(\zeta_{p^n}^i)| \Big/ \prod_{i=0}^{p^{n-1}-1} |\Delta_K(\zeta_{p^{n-1}}^i)| \\ &= \prod_{p\nmid i}^{p^n-1} |\Delta_K(\zeta_{p^n}^i)| \\ &= \mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+/\mathbb{Q}}(\Delta_K(\zeta_{p^n}))^2\end{aligned} \tag{4}$$

となる．ここで，$\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+/\mathbb{Q}}$ は $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+$ の $\mathbb{Q}$ 上のノルムである．一方で，$\mathbb{Q}$ のイデアル $p^n\mathbb{Z}$ を法とする射類体は $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+$ であるから，相互法則より，

$$I_p(\mathbb{Q})/P_p(\mathbb{Q})\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+/\mathbb{Q}}(I_p(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$$

となる．ここで，$I_p(\mathbb{Q})$， $P_p(\mathbb{Q})$，$I_p(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+$ はそれぞれ，p と互いに素な $\mathbb{Q}$ のイデアル，$\mathbb{Q}$ の単項イデアル，$\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+$ のイデアルである．定理 4.2 によれば，$\Delta_K(\zeta_{p^n})$ で生成される $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+$ のイデアルは p と互いに素なので，相互法則の対応から，

$$\mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+/\mathbb{Q}}(\Delta_K(\zeta_{p^n})) \equiv \pm 1 \pmod{p^n}$$

となる．よって，

$$\frac{h_{K,p^n}}{h_{K,p^{n-1}}} = \mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\zeta_{p^n})^+/\mathbb{Q}}(\Delta_K(\zeta_{p^n}))^2 \equiv 1 \pmod{p^n}$$

を得る． □

5 例

K として三葉結び目を考えると，$\Delta_K(t) = t - 1 + t^{-1}$ となる．そして，$\Delta_K(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n} + \zeta_{p^n}^{-1} - 1$ は，$(p,n) = (2,1),(3,1)$ のときを除いて $\mathbb{Z}[\zeta_{p^n} + \zeta_{p^n}^{-1}]$ の単数である．一方，(4) より，

$$h_{K,p^n} = \begin{cases} |\Delta_K(1)\Delta_K(-1)|\mathrm{N}_{2^2}(\Delta_K(\zeta_{2^2}))^2 \cdots \mathrm{N}_{2^n}(\Delta_K(\zeta_{2^n}))^2 & p = 2 \\ |\Delta_K(1)|\mathrm{N}_{p^1}(\Delta_K(\zeta_{p^1}))^2 \cdots \mathrm{N}_{p^n}(\Delta_K(\zeta_{p^n}))^2 & 2 \nmid p \end{cases} \tag{5}$$

である．ここで，N_{p^n} は，代数体 $\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}) \cap \mathbb{R}$ のノルムである．よって全ての $n \geq 1$ に対し，

$$h_{K,p^n} = \begin{cases} |\Delta_K(-1)| = 3 & p = 2 \\ \mathrm{N}_{3^1}(\Delta_K(\zeta_{3^1}))^2 = 4 & p = 3 \\ 1 & p \geq 5 \end{cases} \tag{6}$$

となる．

K として 8 の字結び目を考えると，$\Delta_K(t) = -t + 3 - t^{-1}$ となる．$\Delta_K(\zeta_{p^n})$ は単数にはならず，h_{K,p^n} は $n \geq 1$ に対して狭義単調増大する．以下，$p = 2,3$ に対する h_{K,p^n} の計算結果である．

$n \backslash p$	2	3
1	5	16
2	45	5776
3	2205	192900153616
4	4870845	34 桁

急速に増大しているが，$h_{K,p^n} \pmod{p^n}$ を計算すると，

$$h_{K,2^n} \equiv \begin{cases} -3 \pmod{2^1} \\ -3 \pmod{2^2} \\ -3 \pmod{2^3} \\ -3 \pmod{2^4} \end{cases} \tag{7}$$

$$h_{K,3^n} \equiv \begin{cases} -2 \pmod{3^1} \\ -2 \pmod{3^2} \\ -2 \pmod{3^3} \\ -2 \pmod{3^4} \end{cases} \tag{8}$$

が確認でき，それぞれ $-3, -2$ に，p 進的に収束していると予想できる．実際，$\Delta_K(t)$ の根に関する p 進解析的な議論により証明できるが，そのためには多項式の終結式によるホモロジー群の位数の公式を導入する必要があるため，ここでは割愛し，結果だけ記す．

定理 5.1. 8 の字結び目 K に対し，

$$\lim_{n\to\infty} h_{K,p^n} = \begin{cases} -3 & p = 2 \\ -2 & p = 3 \\ -4 & p = 5 \\ \sqrt{2} - 2 & p = 7. \end{cases}$$

参考文献

[Co] H. Cohn, A numerical study of Weber's real class number calculation I, Numer. Mathe., 2 (1960), 347-362.

[FK] T. Fukuda, K. Komatsu, Weber's class number problem in the cyclotomic $\mathbb{Z}_2$-extension of $\mathbb{Q}$, III, Int. J. Number Theory, 7 (2011), no. 6, 1627-1635.

[Ho] K. Horie, Certain Primary Components of the Ideal Class Group of the Z_p-Extension Over the Rationals, Tohoku Math. J., 59 (2007), no. 2, 259-291.

[I] K. Iwasawa, A note on class numbers of algebraic number fields, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 20 (1956), 257-258

[Mi] J. C. Miller, Class numbers of totally real fields and applications to the Weber class number problem, Acta Arith., 164 (2014), no.4, 381-398.

[MO] T. Morisawa, R. Okazaki, Height and Weber's Class Number Problem, J. Théorie des Nombres de Bordeaux, 28 (2016), no.3, 811-828.

[Mo] M. Morishita, Knots and Primes: an introduction to arithmetic topology, Springer, Universitext, 2012

[Rol] D. Rolfsen. Knots and Links (Mathematics Lecture Series, 7). Publish or Perish, Berkeley, CA, 1976.

[U] J. Ueki, On The Homology of Branched Coverings of 3-Manifolds, Nagoya Math. J., 213 (2014), 21-39.

[Wa] L. C. Washington, Introduction to Cyclotomic Fields second edition, GTM 83, Springer, 1997.

[We] H. Weber, Theorie der Abel'schen Zahlkörper, Acta Math., 8 (1886), 193-263.

[Yo] H. Yoshizaki, A New Continued Fraction Expansion and Weber's Class Number Problem, arXiv:2010.06399.

ハイゼンベルグダブルの一般化とその性質

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系 数理・計算科学コース
太田 洋平 (Yohei OTA)

1 導入

ホップ代数の中でも，準 3 角ホップ代数は普遍 R 行列をもち，この普遍 R 行列は 6 角関係式という性質を満たしている．一般にホップ代数 H から準 3 角ホップ代数 $D(H)$ を構成する手続きが知られており，この $D(H)$ を H のドリンフェルトダブルと呼ぶ．ホップ代数の一般化である準ホップ代数においてもドリンフェルトダブルが存在し，準 3 角準ホップ代数を構成できることが知られている．一方，双代数 H に対して，ハイゼンベルグダブルと呼ばれる代数 $H(H)$ が構成でき，$H(H)$ には S 行列が存在し，この S 行列は 5 角関係式を満たすことが知られている．本稿では準双代数に対して，ハイゼンベルグダブルを定義し，5 角関係式の類似が成立することを説明する．

2 準ホップ代数

定義 2.1 (k 代数). k を体，A を k 上のベクトル空間，$\mu_A : A \otimes A \to A, \eta_A : k \to A$ を k 線形写像とする．以下の図式が可換となるときは k **代数** (k-algebra) であるという．

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A\otimes A & \xrightarrow{\mu_A\otimes 1_A} & A\otimes A \\ {\scriptstyle 1_A\otimes\mu_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_A} \\ A\otimes A & \xrightarrow[\mu_A]{} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} k\otimes A & \xrightarrow{\eta_A\otimes 1_A} & A\otimes A & \xleftarrow{1_A\otimes\eta_A} & A\otimes k \\ & \searrow^{\cong} & \downarrow{\scriptstyle \mu_A} & \swarrow_{\cong} & \\ & & A & & \end{array}$$

また，k 代数 $(A, \mu_A, \eta_A), (A', \mu_{A'}, \eta_{A'})$ と k 線形写像 $f : A \to A'$ に対して，以下の図式が可換となるとき，f は k **代数の射**であるという．

$$\begin{array}{ccc} A\otimes A & \xrightarrow{f\otimes f} & A'\otimes A' \\ {\scriptstyle \mu_A}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{A'}} \\ A & \xrightarrow[f]{} & A' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\quad f \quad} & A' \\ & {\scriptstyle \eta_A}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle \eta_{A'}} & \\ & k & \end{array}$$

注意 2.2. 以降では異なる整数の組 $1 \le j_1 \le \ldots \le j_m \le l$ と，$A^{\otimes m}$ の元 $x = \sum x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$ に対して，$x_{j_1 \ldots j_m}$ を $A^{\otimes m}$ の元で，$1 \le i \le m$ に対し x_i を j_i 番目のテンソル積におき，残りの成分は 1 としたものとする．例えば，$x = \sum x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$ に対し，$x_{231} = \sum x_3 \otimes x_1 \otimes x_2, x_{234} = \sum 1 \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes x_3$ などとなる．

定義 2.3 (ホップ代数). (H, μ_H, η_H) を k 代数とし，$\Delta_H : H \to H \otimes H, \varepsilon_H : H \to k$ を k 代数の射とする．（ここで，H の元 h に対して，$\Delta(h) = \sum_{(h)} h^{(1)} \otimes h^{(2)}$ と表すことにする．）以下の図式が

可換となるとき，$(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ は**双代数** (bialgebra) であるという．

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\Delta_H} & H \otimes H \\ {\scriptstyle \Delta_H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_H \otimes \Delta_H} \\ H \otimes H & \xrightarrow[\Delta_H \otimes 1_H]{} & H \otimes H \otimes H \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} k \otimes H & \xleftarrow{\varepsilon_H \otimes 1_H} & H \otimes H & \xrightarrow{1_H \otimes \varepsilon_H} & H \otimes k \\ & \searrow^{\cong} & \uparrow{\scriptstyle \Delta_H} & \nearrow_{\cong} & \\ & & H & & \end{array}$$

また，上記の条件に加えて，k 線形同型 $\gamma_H : H \to H$ が H の元 h に対して，

$$\sum_{(h)} h^{(1)} \gamma_H(h^{(2)}) = \varepsilon_H(h) 1_H = \sum_{(h)} \gamma_H(h^{(1)}) h^{(2)}$$

を満たすとき，$(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, \gamma_H)$ は**ホップ代数** (Hopf algebra) であるという．

注意 2.4. $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H)$ が有限次元双代数のとき，$\mu_{H^*} = \Delta_H^*, \Delta_{H^*} = \mu_H^*, \eta_{H^*} = \varepsilon_H^*, \varepsilon_{H^*} = \eta_H^*$ とすると，H^* はまた双代数の構造を持つ．特に $f, g \in H^*$ に対して $\mu_{H^*}(f \otimes g)$ を $f * g$ と書く．H が有限次元ホップ代数の時は上記の構成に加え，$\gamma_{H^*} = \gamma_H^*$ とすることで H^* はホップ代数としての構造を持つ．

定義 2.5 (準ホップ代数). (H, μ_H, η_H) を k 代数とし，$\Delta_H : H \to H \otimes H, \varepsilon_H : H \to k$ を k 代数の射とする．また $\Phi_H = \sum_i \phi_1^i \otimes \phi_2^i \otimes \phi_3^i$ を $(H \otimes H \otimes H)^\times$ の元とする．任意の H の元 h に対して以下の式が成立するとき，$(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, \Phi_H)$ は**準双代数** (quasi-bialgebra) であるという．

$$(1_H \otimes \Delta_H)(\Delta_H(h)) = \Phi_H((\Delta_H \otimes 1_H)(\Delta_H(h)))\Phi_H^{-1}$$

$$(\varepsilon_H \otimes 1_H)(\Delta_H(h)) = h = (1_H \otimes \varepsilon_H)(\Delta_H(h))$$

$$(1_H \otimes 1_H \otimes \Delta_H)(\Phi_H)(\Delta_H \otimes 1_H \otimes 1_H)(\Phi_H) = (\Phi_H)_{234}((1_H \otimes \Delta_H \otimes 1_H)(\Phi_H))(\Phi_H)_{123}$$

$$(1_H \otimes \varepsilon_H \otimes 1_H)(\Phi_H) = 1_H \otimes 1_H$$

また k 準双代数 $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, \Phi_H)$ と H の元 α, β と全単射な反代数射 $\gamma_H : H \to H$ $(\gamma_H(h_1 h_2) = \gamma_H(h_2)\gamma_H(h_1), S(1_H) = 1_H$ を満たす写像) が H の元 h に対して以下の条件を満たすとき，$(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, \Phi_H, \gamma_H, \alpha, \beta)$ は**準ホップ代数** (quasi-Hopf algebra) であるという．

$$\sum_{(h)} \gamma_H(h^{(1)}) \alpha h^{(2)} = \varepsilon_H(h)\alpha, \quad \sum_{(h)} h^{(1)} \beta \gamma_H(h^{(2)}) = \varepsilon_H(h)\beta$$

$$\sum_i \phi_1^i \beta \gamma_H(\phi_2^i) \alpha \phi_3^i = 1_H, \quad \sum_i \gamma_H(\psi_1^i) \alpha \psi_2^i \beta \gamma_H(\psi_3^i) = 1_H$$

ただし，$\Phi_H^{-1} = \sum_i \psi_1^i \otimes \psi_2^i \otimes \psi_3^i$ とする．

注意 2.6. 以降準双代数および準ホップ代数の Φ_H を $\sum_i \phi_1^i \otimes \phi_2^i \otimes \phi_3^i$ で，Φ_H^{-1} を $\sum_i \psi_1^i \otimes \psi_2^i \otimes \psi_3^i$ で表すことにする．

注意 2.7. 準双代数・準ホップ代数が，$\Phi = 1 \otimes 1 \otimes 1$ を満たすとき，これらは双代数・ホップ代数となる．よって，準双代数・準ホップ代数は双代数・ホップ代数の一般化となっている．

定義 2.8 (準 3 角準ホップ代数). $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, \Phi_H)$ を双代数とし，R を $(H \otimes H)^\times$ の元とする．任意の H の元 h に対して，以下が成立するとき，$(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, \Phi_H, R)$ は**準 3 角準双代数** (quasi-triangular quasi-bialgebra) であるという．また R を H の**普遍 R 行列** (universal R-matrix) という．

$$(\Delta_H(h))_{21} = R\Delta_H(h)R^{-1}$$
$$(1_H \otimes \Delta_H)(R) = (\Phi_{231})^{-1}R_{13}\Phi_{213}R_{12}(\Phi_{123})^{-1}$$
$$(\Delta_H \otimes 1_H)(R) = \Phi_{321}R_{13}(\Phi_{132})^{-1}R_{23}\Phi_{123}$$

また，準ホップ代数 H と $(H \otimes H)^\times$ の元 R に対して，H が準双代数として，準 3 角準双代数となるとき，H は**準 3 角準ホップ代数** (quasi-triangular quasi-Hopf algebra) であるという．

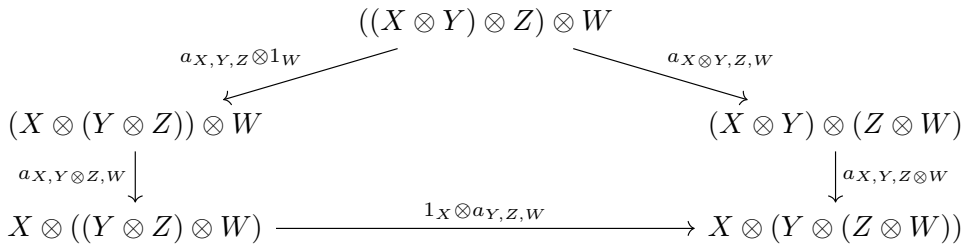
命題 2.9 (6 角関係式). $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \varepsilon_H, \Phi_H, R)$ を準 3 角準双代数とするとき以下の式が成立する．

$$R_{12}\Phi_{312}R_{13}(\Phi_{132})^{-1}R_{23}\Phi_{123} = \Phi_{321}R_{23}(\Phi_{231})^{-1}R_{13}\Phi_{213}R_{12}$$

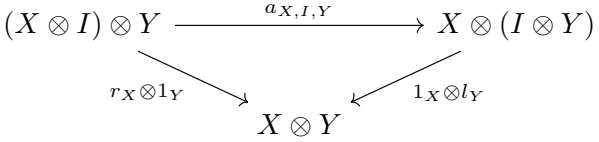
3 準ホップ代数のドリンフェルトダブル

定義 3.1 (モノイダル圏). $\mathcal{C}$ を圏，$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ を関手，$a : (- \otimes -) \otimes - \to - \otimes (- \otimes -)$ を自然同型とする．また，I を $\mathcal{C}$ の対象，$l : I \otimes 1_{\mathcal{C}} \to 1_{\mathcal{C}}, r : 1_{\mathcal{C}} \otimes I \to 1_{\mathcal{C}}$ を自然同型とする．$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ が以下の 2 条件を満たすとき，**モノイダル圏** (monoidal category) であるという．また a を**結合子** (associator)，l, r をそれぞれ**左単位子** (left unit)，**右単位子** (right unit)，I を**単位対象** (unit object) という．

(pentagon axiom)　任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y, Z, W に対して以下の図式が可換となる．

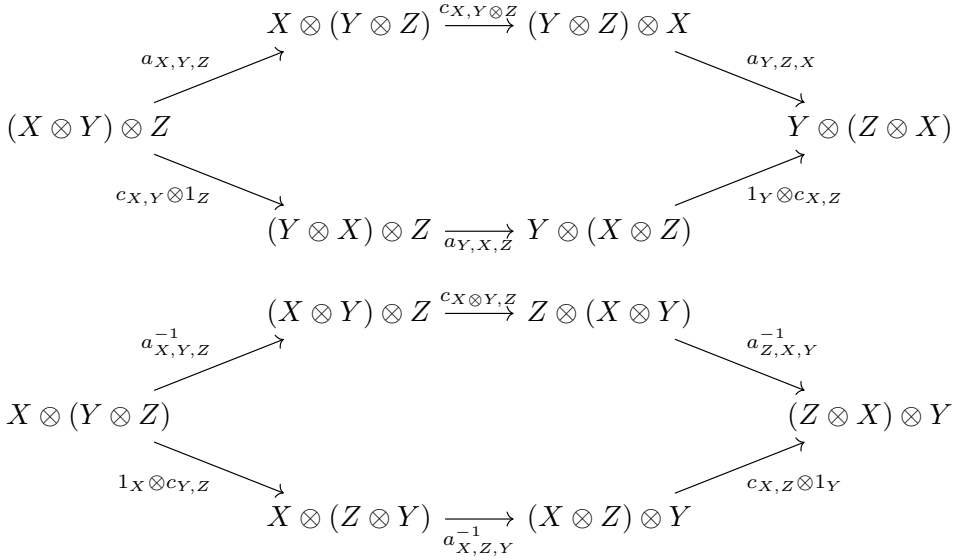


(triangle axiom)　任意の $\mathcal{C}$ の対象 X, Y に対して以下の図式が可換となる．



定義 3.2 (ブレイドモノイダル圏). $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r)$ をモノイダル圏，$\tau : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ を第一成分と第二成分を入れ替える関手，$c : - \otimes - \to (- \otimes -) \circ \tau$ を自然同型とする．$(\mathcal{C}, \otimes, a, I, l, r, c)$ が**ブレイドモノイダル圏** (braided monoidal category) であるとは，以下の条件を満たすことをいう．

(hexagon axiom)　$\mathcal{C}$ の対象 X, Y, Z, W に対して以下の図式が可換となる．



注意 3.3. 一般にモノイダル圏 $\mathcal{C}$ からブレイドモノイダル圏 $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ を構成する方法（ドリンフェルトセンター）が知られている．特に $\mathcal{C}$ がリジッドモノイダル圏という構造を持つとき，$\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ はリジッドブレイドモノイダル圏となる．

H を有限次元準ホップ代数とすると，有限次元 H 加群の圏 H-mod はリジッドモノイダル圏の構造を持つ．$\mathcal{Z}(H\text{-mod})$ は注意 3.3より，リジッドブレイドモノイダル圏構造を持つが，淡中双対と呼ばれる圏と代数の対応により，このような圏はある有限次元準 3 角準ホップ代数 $D(H)$ の加群の圏となることが知られている．この $D(H)$ を H の**ドリンフェルトダブル** (Drinfeld double) という．$D(H)$ は集合としては $H^* \otimes H$ であり，$D(H)$ の元を $f \bowtie h$ と書くとき，$D(H)$ の積構造は以下のように定まる．ただし，?は不定元の入る場所を指している．

$$(f \bowtie a) \cdot (g \bowtie b) = \sum (f * g)\left((\gamma)^{-1}(a^{(3)})?a^{(1)}\right) \otimes a^{(2)}b$$

H がホップ代数の時は，$D(H)$ は比較的簡単な構造をしているが，H が準ホップ代数の時の $D(H)$ の構造はかなり複雑である．具体的な表示は [BCPO19] などに記載がある．まだ $D(H)$ の普遍 R 行列は H の基底 $\{e_i\}$ とその双対基底 $\left\{e^i\right\}$ を用いて以下のように表すことができる．

$$R = \sum_i (1 \bowtie e_i) \otimes (e^i \bowtie 1)$$

定義 3.4 (イエッター・ドリンフェルト加群). H を準双代数とし，(M, μ_M) を左 H 加群，$\Delta_M : M \ni m \mapsto \sum_{(m)} m^{(0)} \otimes m^{(1)} \in M \otimes H$ を k 線形写像とする．任意の H の元 h と M の元 m に対して以下が成立するとき，(M, μ_M, Δ_M) は**イエッター・ドリンフェルト加群** (Yetter-Drinfeld module) であるという．

$$\sum \left(\psi_2^i m^{(0)}\right)^{(0)} \otimes \left(\psi_2^i m^{(0)}\right)^{(1)} \psi_1^i \otimes \psi_3^i m^{(1)} = \Phi_H^{-1} \sum (\psi_3^i m)^{(0)} \otimes \left((\psi_3^i m)^{(1)}\right)^{(1)} \psi_1^i \otimes \left((\psi_3^i m)^{(1)}\right)^{(2)} \psi_2^i$$

$$\sum \varepsilon_H\left(m^{(1)}\right) m^{(0)} = m, \quad \sum h^{(1)} m^{(0)} \otimes h^{(2)} m^{(1)} = \sum \left(h^{(2)} m\right)^{(0)} \otimes \left(h^{(2)} m\right)^{(1)} h^{(1)}$$

また H 上のイエッター・ドリンフェルト加群 $(M,\mu_M,\Delta_M),(N,\mu_N,\Delta_N)$ と左 H 加群の射 $f: M\to N$ に対して，f が以下の条件を満たすとき，**イエッター・ドリンフェルト加群の射**であるという．

$$(f\otimes 1_H)\circ\Delta_M=\Delta_N\circ f$$

これによりイエッター・ドリンフェルト加群の圏 ${}_H\mathcal{YD}^H$ を定義することができる．また，有限次元イエッター・ドリンフェルト加群の圏を ${}_H\mathcal{YD}^H_{fd}$ と表す．

命題 3.5. H を k 上の有限次元準ホップ代数とする．このとき，次の圏同値が成立する．

$$\mathcal{Z}(H\text{-mod})\simeq {}_H\mathcal{YD}^H_{fd}\simeq D(H)\text{-mod}$$

4　ホップ代数のハイゼンベルグダブル

定義 4.1 (ホップセンター). $(\mathcal{B},\otimes,a,I,l,r,c)$ をブレイドモノイダル圏，$\mathcal{C}$ をモノイダル圏とし，$F:\mathcal{C}\to\mathcal{B}$ を quasi-monoidal functor とする．

定義 4.2 (ホップ加群). H を双代数とし，(M,μ_M) を右 H 加群，$\Delta_M: M\ni m\mapsto\sum_{(m)}m^{(-1)}\otimes m^{(0)}\in H\otimes M$ を k 線形写像とする．任意の H の元 h と M の元 m に対して以下が成立するとき，(M,μ_M,Δ_M) は**ホップ加群** (Hopf module) であるという．

$$(\Delta_H\otimes 1_M)\circ\Delta_M=(1_H\otimes\Delta_M)\circ\Delta_M$$

$$\sum_{(m)}\varepsilon_H(m^{(-1)})m^{(0)}=m$$

$$\sum_{(m),(h)}m^{(-1)}h^{(1)}\otimes m^{(0)}h^{(2)}=\sum_{(mh)}(mh)^{(-1)}\otimes(mh)^{(0)}$$

また H 上のホップ加群 $(M,\mu_M,\Delta_M),(N,\mu_N,\Delta_N)$ と右 H 加群の射 $f:M\to N$ に対して，f が以下の条件を満たすとき，**ホップ加群の射**であるという．

$$(1_H\otimes f)\circ\Delta_M=\Delta_N\circ f$$

これによりホップ加群の圏 ${}^H\mathcal{M}_H$ を定義することができる．また，有限次元ホップ加群の圏を ${}^H\mathcal{M}_H^{fd}$ と表す．

H を有限次元双代数とすると，有限次元 H 加群の圏 mod-H はモノイダル圏である．ドリンフェルトセンターと同様に，モノイダル圏 $\mathcal{C}$ から圏 $\mathcal{H}(\mathcal{C})$ を構成する方法（ホップセンター）が知られており，$\mathcal{H}(\text{mod-}H)$ はある k 代数 $H(H)$ の右 $H(H)$ 加群の圏と圏同値であることが知られている．この $H(H)$ を H の**ハイゼンベルグダブル** (Heisenberg double) という．$H(H)$ は $D(H)$ と同様に集合としては $H^*\otimes H$ であり，$H(H)$ の元を $f\#h$ と書くとき，$H(H)$ の積構造は以下のように定まる．ただし，?は不定元の入る場所を指している．

$$(f\#a)\cdot(g\#b)=\sum f*g(?a^{(1)})\#a^{(2)}b$$

命題 4.3. H を k 上の有限次元双代数とする．このとき，次の式が成立する．

$$\mathcal{H}(\text{mod-}H) \simeq {}^{H}\mathcal{M}_{H}^{fd} \simeq \text{mod-}H(H)$$

命題 4.4 (5 角関係式). H を k 上の双代数とし，$\{e_i\}$ を H の基底，$\{e^i\}$ をその双対基底とする．

$$S = \sum_i (1\#e_i) \otimes (e^i\#1)$$

とするとき，以下の式が成立する．

$$S_{12}S_{13}S_{23} = S_{23}S_{12}$$

命題 4.5. H をホップ代数とし，$\phi : D(H) \to H(H) \otimes H(H)^{\mathrm{op}}$ を以下の式で定める．

$$\phi = \mu_{H(H)\otimes H(H)^{\mathrm{op}}} \circ ((1_{H^*} \otimes \eta_H)^{\otimes 2} \otimes (\eta_{H^*} \otimes 1_H)^{\otimes 2}) \circ (1_{H^*} \otimes (\gamma_H^{-1})^* \otimes 1_H \otimes \gamma_H) \circ (\Delta_{H^*}^{\mathrm{op}} \otimes \Delta_H)$$

このとき，ϕ は代数の埋め込みを与え，以下の性質を満たす．

$$\phi(\varepsilon_H \bowtie e_i) = \sum \varepsilon_H \# e_i^{(1)} \otimes \varepsilon_H \# \gamma_H(e_i^{(2)})$$

$$\phi(e^i \bowtie 1_H) = \sum (e^i)^{(2)} \# 1_H \otimes \gamma_H^{-1^*}((e^i)^{(1)}) \# 1_H$$

またこのような性質を満たす代数の射はただ一つである．

注意 4.6. ホップ代数におけるドリンフェルトダブルとハイゼンベルグダブルには，上記の関係があるが，この関係は準ホップ代数のドリンフェルトダブルとハイゼンベルグダブルでは成立しない．第 6 節でこのような例の構成を行う．

5 主結果

この節では第 4 節の内容の準双代数の場合への拡張を考察する．

定義 5.1 (準双代数のホップ加群). H を準双代数とし，(M, μ_M) を右 H 加群，$\Delta_M : M \ni m \mapsto \sum_{(m)} m^{(-1)} \otimes m^{(0)} \in H \otimes M$ を k 線形写像とする．任意の H の元 h と M の元 m に対して以下が成立するとき，(M, μ_M, Δ_M) は**ホップ加群** (Hopf module) であるという．

$$\sum m^{(-1)} \otimes \left(m^{(0)}\right)^{(-1)} \otimes \left(m^{(0)}\right)^{(0)} = \sum \left(m^{(-1)}\right)^{(1)} \psi_1^i \otimes \left(m^{(-1)}\right)^{(2)} \psi_2^i \otimes m^{(0)}\psi_3^i$$

$$\sum \varepsilon_H\left(m^{(-1)}\right) m^{(0)} = m, \qquad \sum_{(m),(h)} m^{(-1)}h^{(1)} \otimes m^{(0)}h^{(2)} = \sum_{(mh)} (mh)^{(-1)} \otimes (mh)^{(0)}$$

また H 上のホップ加群 $(M, \mu_M, \Delta_M), (N, \mu_N, \Delta_N)$ と右 H 加群の射 $f : M \to N$ に対して，f が以下の条件を満たすとき，**ホップ加群の射**であるという．

$$(1_H \otimes f) \circ \Delta_M = \Delta_N \circ f$$

これによりホップ加群の圏 ${}^{H}\mathcal{M}_H$ を定義することができる．また，有限次元ホップ加群の圏を ${}^{H}\mathcal{M}_H^{fd}$ と表す．

注意 5.2. H が双代数のときはこれらは定義 4.2で定義したものと同じになる．

定義 5.3 (準双代数のハイゼンベルグダブル). H を準双代数とし，$H^*\#H$ を $H^* \otimes H$ に以下の積と H の右作用を入れたものとする．

$$(f\#a)\cdot(g\#b) = \sum f(?\psi_1) * g(?\psi_2 a^{(1)})\#\psi_3 a^{(2)} b \quad (f\#a, g\#b \in H^*\#H)$$

$$(f\#a) \triangleleft h = f(h?)\#a$$

またこの積の単位元は $\varepsilon_H\#1_H$ となる．作用により $H^*\#H$ は右 H 加群の構造を持ち，$H^*\#H$ は圏 Mod-H における代数の構造を持つ．

注意 5.4. $H^*\#H$ は圏 Mod-H における代数であるが，k 代数の構造は持たない．

ここで，k 線形空間 M に対し，$\mu_M : M \otimes H^*\#H \ni m \otimes (f\#a) \to m\cdot(f\#a) \in M$ という k 線形写像が定義されていて，M の元 m と，$H^*\#H$ の元 $f_1\#a_1, f_2\#a_2, f_3\#a_3$ に対して以下が成立するとき，M を右 $H^*\#H$ 加群と呼ぶことにする．

$$m\cdot(\varepsilon_h\#1_H) = m$$

$$(m\cdot(f_1\#a_1))\cdot(f_2\#a_2) = m\cdot((f_1\#a_1)\cdot(f_2\#a_2))$$

$$m\cdot(((f_1\#a_1)\cdot(f_2\#a_2))\cdot(f_3\#a_3)) = m\cdot((f_1\#a_1)\cdot((f_2\#a_2)\cdot(f_3\#a_3)))$$

また通常の加群の射と同じ定義で右 $H^*\#H$ 加群の射が定義すると，(有限次元) 右 $H^*\#H$ 加群の圏 Mod-$H(H)$ (mod-$H(H)$) を構成することができる．

命題 5.5. H を有限次元準ホップ代数とするとき，つぎの圏同値が成立する．

$$\mathcal{H}(\text{mod-}H) \simeq {}^H\mathcal{M}_H^{fd} \simeq \text{mod-}H(H)$$

定理 5.6. H を有限次元準双代数とし，$\{e_i\}$ を H の基底，$\{e^i\}$ をその双対基底とする．

$$((f_1\#a_1)\otimes(f_2\#a_2)\otimes(f_3\#a_3)) \leftharpoonup (h_1\otimes h_2\otimes h_3) = (f_1\#a_1h_1)\otimes(f_2\#a_2h_2)\otimes(f_3\#a_3h_3)$$

$$S = \sum_i (1\#e_i)\otimes(e^i\#1)$$

とするとき，$(S_{12}S_{13})S_{23} = S_{12}(S_{13}S_{23})$ が成立し，これらを $S_{12}S_{13}S_{23}$ と表記すると以下の式が成立する．

$$(S_{12}S_{13}S_{23}) \leftharpoonup \Phi = S_{23}S_{12}$$

6 具体例の計算

位数 n の巡回群 C_n の体 k 上の群環 $k[C_n]$ は自然なホップ代数構造（$g \in C_n$ に対して $\Delta(g) = g\otimes g, \varepsilon(g) = 1_K, \gamma(g) = g^{-1}$）が定まるが，$k[C_n]$ に非自明な結合子 Φ を定め，準ホップ代数とみなすことができる．この節では，位数が 2 と 3 の巡回群に対して，上記の方法で非自明な準ホップ代数を構成し，そのドリンフェルトダブルとハイゼンベルグダブルの計算例を紹介する．ここで，写像 ϕ は命題 4.5で定義した写像である．

例 6.1. C_2 の生成元を g と書き，$p_+ = \frac{1}{2}(1+g), p_- = \frac{1}{2}(1-g), \Phi = 1\otimes 1\otimes 1 - 2p_-\otimes p_-\otimes p_-$ と定めると，$k[C_2]$ は準ホップ代数構造を持つ．この準ホップ代数を $h(2)$ と表す．このとき $h(2)$ のドリンフェルトダブル $D(h(2))$ とハイゼンベルグダブルの $H(h(2))$ の積の演算表は以下のとおりである．

$D(h(2))$	$p_+^* \bowtie p_+$	$p_+^* \bowtie p_-$	$p_-^* \bowtie p_+$	$p_-^* \bowtie p_-$
$p_+^* \bowtie p_+$	$p_+^* \bowtie p_+$	0	$p_-^* \bowtie p_+$	0
$p_+^* \bowtie p_-$	0	$p_+^* \bowtie p_-$	0	$p_-^* \bowtie p_-$
$p_-^* \bowtie p_+$	$p_-^* \bowtie p_+$	0	$p_+^* \bowtie p_+$	0
$p_-^* \bowtie p_-$	0	$p_-^* \bowtie p_-$	0	$-p_+^* \bowtie p_-$

$H(h(2))$	$p_+^* \# p_+$	$p_+^* \# p_-$	$p_-^* \# p_+$	$p_-^* \# p_-$
$p_+^* \# p_+$	$p_+^* \# p_+$	0	0	$p_-^* \# p_-$
$p_+^* \# p_-$	0	$p_+^* \# p_-$	$p_-^* \# p_+$	0
$p_-^* \# p_+$	$p_-^* \# p_+$	0	0	$-p_+^* \# p_-$
$p_-^* \# p_-$	0	$p_-^* \# p_-$	$p_+^* \# p_+$	0

また，$D(h(2))$ の基底を ϕ により $H(h(2))\otimes H(h(2))^{\mathrm{op}}$ へ送った先での演算の表は以下のとおりである．

	$\phi(p_+^* \bowtie p_+)$	$\phi(p_+^* \bowtie p_-)$	$\phi(p_-^* \bowtie p_+)$	$\phi(p_-^* \bowtie p_-)$
$\phi(p_+^* \bowtie p_+)$	$\phi(p_+^* \bowtie p_+)$	0	$\phi(p_-^* \bowtie p_+)$	0
$\phi(p_+^* \bowtie p_-)$	0	$\phi(p_+^* \bowtie p_-)$	0	$\phi(p_-^* \bowtie p_-)$
$\phi(p_-^* \bowtie p_+)$	$\phi(p_-^* \bowtie p_+)$	0	$\phi(p_+^* \bowtie p_+)$	0
$\phi(p_-^* \bowtie p_-)$	0	$\phi(p_-^* \bowtie p_-)$	0	$-\phi(p_+^* \bowtie p_-)$

よって ϕ は代数の射となっていることが分かる．また $H(h(2))$ において，

$$S = \varepsilon \# p_+ \otimes {p_+}^* \# 1 + \varepsilon \# p_- \otimes p_-^* \# 1$$

となり，この S に関して定理 5.6が成立していることが確認できる．また，$H(h(2))$ の演算表から

$$((p_-^* \# p_-)\cdot(p_-^* \# p_+))\cdot(p_-^* \# p_-) \neq (p_-^* \# p_-)\cdot((p_-^* \# p_+)\cdot(p_-^* \# p_-))$$

が成立することが確認でき，$H(h(2))$ が非結合的代数であることが確認できる．

例 6.2. g を C_3 の生成元として，$k[C_3]^*$ を $k[C_3]$ の双対ホップ代数とする．このとき $p_0 = 1^*, p_1 = g^*, p_2 = (g^2)^*$ とすると，これらは $k[C_3]^*$ の基底となる．また $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ として，$\Phi = 1\otimes 1\otimes 1 + (\omega-1)(p_1\otimes p_1\otimes p_1 + p_1\otimes p_2\otimes p_2 + p_2\otimes p_1\otimes p_2 + p_2\otimes p_2\otimes p_1) + (\omega^2-1)(p_2\otimes p_1\otimes p_1 + p_1\otimes p_2\otimes p_1 + p_1\otimes p_1\otimes p_2 + p_2\otimes p_2\otimes p_2)$ と定めると，$k[C_3]^*$ は準ホップ代数の構造を持つ．この準ホップ代数を $h(3)$ と表す．このとき $h(3)$ のドリンフェルトダブル $D(h(3))$ とハイゼ

ンベルグダブルの $H(h(3))$ の積の演算表は以下のとおりである.

$D(h(3))$	$p_0^* \bowtie p_0$	$p_0^* \bowtie p_1$	$p_0^* \bowtie p_2$	$p_1^* \bowtie p_0$	$p_1^* \bowtie p_1$	$p_1^* \bowtie p_2$	$p_2^* \bowtie p_0$	$p_2^* \bowtie p_1$	$p_2^* \bowtie p_2$
$p_0^* \bowtie p_0$	$p_0^* \bowtie p_0$	0	0	$p_1^* \bowtie p_0$	0	0	$p_2^* \bowtie p_0$	0	0
$p_0^* \bowtie p_1$	0	$p_0^* \bowtie p_1$	0	0	$p_1^* \bowtie p_1$	0	0	$p_2^* \bowtie p_1$	0
$p_0^* \bowtie p_2$	0	0	$p_0^* \bowtie p_2$	0	0	$p_1^* \bowtie p_2$	0	0	$p_2^* \bowtie p_2$
$p_1^* \bowtie p_0$	$p_1^* \bowtie p_0$	0	0	$p_2^* \bowtie p_0$	0	0	$p_0^* \bowtie p_0$	0	0
$p_1^* \bowtie p_1$	0	$p_1^* \bowtie p_1$	0	0	$\omega p_2^* \bowtie p_1$	0	0	$\omega^2 p_0^* \bowtie p_1$	0
$p_1^* \bowtie p_2$	0	0	$p_1^* \bowtie p_2$	0	0	$\omega^2 p_2^* \bowtie p_2$	0	0	$\omega p_0^* \bowtie p_2$
$p_2^* \bowtie p_0$	$p_2^* \bowtie p_0$	0	0	$p_0^* \bowtie p_0$	0	0	$p_1^* \bowtie p_0$	0	0
$p_2^* \bowtie p_1$	0	$p_2^* \bowtie p_1$	0	0	$\omega^2 p_0^* \bowtie p_1$	0	0	$\omega p_1^* \bowtie p_1$	0
$p_2^* \bowtie p_2$	0	0	$p_2^* \bowtie p_2$	0	0	$\omega p_0^* \bowtie p_2$	0	0	$\omega^2 p_1^* \bowtie p_2$

$H(h(3))$	$p_0^* \# p_0$	$p_0^* \# p_1$	$p_0^* \# p_2$	$p_1^* \# p_0$	$p_1^* \# p_1$	$p_1^* \# p_2$	$p_2^* \# p_0$	$p_2^* \# p_1$	$p_2^* \# p_2$
$p_0^* \# p_0$	$p_0^* \# p_0$	0	0	0	0	$p_1^* \# p_2$	0	$p_2^* \# p_1$	0
$p_0^* \# p_1$	0	$p_0^* \# p_1$	0	$p_1^* \# p_0$	0	0	0	0	$p_2^* \# p_2$
$p_0^* \# p_2$	0	0	$p_0^* \# p_2$	0	$p_1^* \# p_1$	0	$p_2^* \# p_0$	0	0
$p_1^* \# p_0$	$p_1^* \# p_0$	0	0	0	0	$\omega p_2^* \# p_2$	0	$\omega p_0^* \# p_1$	0
$p_1^* \# p_1$	0	$p_1^* \# p_1$	0	$p_2^* \# p_0$	0	0	0	0	$(-\omega - 1) p_0^* \# p_2$
$p_1^* \# p_2$	0	0	$p_1^* \# p_2$	0	$(-\omega - 1) p_2^* \# p_1$	0	$p_0^* \# p_0$	0	0
$p_2^* \# p_0$	$p_2^* \# p_0$	0	0	0	0	$(-\omega - 1) p_0^* \# p_2$	0	$(-\omega - 1) p_1^* \# p_1$	0
$p_2^* \# p_1$	0	$p_2^* \# p_1$	0	$p_0^* \# p_0$	0	0	0	0	$\omega p_1^* \# p_2$
$p_2^* \# p_2$	0	0	$p_2^* \# p_2$	0	$\omega p_0^* \# p_1$	0	$p_1^* \# p_0$	0	0

また，$D(h(3))$ の基底を ϕ により $H(h(3)) \otimes H(h(3))^{\mathrm{op}}$ へ送った先での演算の表は以下のとおりである．ただし，$p_{ij} = p_i^* \# p_j, p_{ijkl} = p_i^* \# p_j \otimes p_k^* \# p_l$ とする．

	$\phi(p_{00})$	$\phi(p_{01})$	$\phi(p_{02})$	$\phi(p_{10})$	$\phi(p_{11})$	$\phi(p_{12})$	$\phi(p_{20})$	$\phi(p_{21})$	$\phi(p_{22})$
$\phi(p_{00})$	$\phi(p_{00})$	0	0	$\phi(p_{10})$	0	0	$\phi(p_{20})$	0	0
$\phi(p_{01})$	0	$\phi(p_{01})$	0	0	$\phi(p_{11})$	0	0	$\phi(p_{21})$	0
$\phi(p_{02})$	0	0	$\phi(p_{02})$	0	0	$\phi(p_{12})$	0	0	$\phi(p_{22})$
$\phi(p_{10})$	$\phi(p_{10})$	0	0	$P_{2211}+$ $\omega P_{2012}+$ $\omega^2 P_{2110}$	0	0	$P_{0000}+$ $\omega P_{0202}+$ $\omega^2 P_{0101}$	0	0
$\phi(p_{11})$	0	$\phi(p_{11})$	0	0	$P_{2112}+$ $\omega P_{2210}+$ $\omega^2 P_{2011}$	0	0	$P_{0201}+$ $\omega P_{0100}+$ $\omega^2 P_{0002}$	0
$\phi(p_{12})$	0	0	$\phi(p_{12})$	0	0	$P_{2010}+$ $\omega P_{2111}+$ $\omega^2 P_{2212}$	0	0	$P_{0102}+$ $\omega P_{0001}+$ $\omega^2 P_{0200}$
$\phi(p_{20})$	$\phi(p_{20})$	0	0	$P_{0000}+$ $\omega P_{0202}+$ $\omega^2 P_{0101}$	0	0	$P_{1122}+$ $\omega P_{1220}+$ $\omega^2 P_{1021}$	0	0
$\phi(p_{21})$	0	$\phi(p_{21})$	0	0	$P_{0201}+$ $\omega P_{0100}+$ $\omega^2 P_{0002}$	0	0	$P_{1020}+$ $\omega P_{1121}+$ $\omega^2 P_{1222}$	0
$\phi(p_{22})$	0	0	$\phi(p_{22})$	0	0	$P_{0102}+$ $\omega P_{0001}+$ $\omega^2 P_{0200}$	0	0	$P_{1221}+$ $\omega P_{1022}+$ $\omega^2 P_{1120}$

このとき，上記の表と $D(h(3))$ の表を比べると，ϕ は代数の射となっていないことが分かる．(上記の表の ω, ω^2 を 1 に置き換えると，代数の射となっている.) つまり，命題 4.5の類似はそのままの

形では成立しないことが分かる，また $H(h(3))$ において，

$$S = \varepsilon\#p_0 \otimes {p_0}^*\#1 + \varepsilon\#p_1 \otimes p_1^*\#1 + \varepsilon\#p_2 \otimes p_2^*\#1$$

となり，この S に関して定理 5.6が成立していることが確認できる．また，$H(h(3))$ の演算表から

$$((p_1^*\#p_2)\cdot(p_1^*\#p_1))\cdot(p_2^*\#p_2) \neq (p_1^*\#p_2)\cdot((p_1^*\#p_1)\cdot(p_2^*\#p_2))$$

が成立することが確認でき，$H(h(2))$ が非結合的代数であることが確認できる．

参考文献

[BCPO19] D. Bulacu, S. Caenepeel, F. Panaite and F.V. Oystaeyen, Quasi-Hopf Algebras A Categorical Approach. Cambridge University Press, 2019.

[Kash97] R. M. Kashaev, The Heisenberg double and the pentagon relation, Algebra i Analiz, 8:4 (1996), 63–74; St. Petersburg Math. J., 8:4 (1997), 585–592

[Kass95] C. Kassel, Quantum Groups, Grad. Texts Math. 155, Springer-Verlag, New York, 1995.

[Laug15] R. Laugwitz, Braided Drinfeld and Heisenberg doubles. Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 219, Issue 10, 4541-4596, 2015.

[Maji98] S. Majid, Quantum double for quasi-Hopf algebras. Lett. Math. Phys. 45 , no. 1, 1-9, 1998.

[Mont93] S. Montgomery, Hopf Algebras and Their Actions on Rings, American Mathematical Soc, 1993.

[Suzu18] S. Suzuki, The universal quantum invariant and colored ideal triangulations, Algebraic & Geometric Topology 18, 3363–3402, 2018.

Geometric Structure of Affine Deligne-Lusztig Varieties

島田了輔　(東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻)

$k=\mathbb{F}_q$ とし, $\bar{k}$ を k の代数閉包とする. さらに $F=k((t)), L=\bar{k}((t))$ とおき, $\mathcal{O}=\bar{k}[[t]]$ と書く. σ を L/F の Frobenius 射とする. G を k 上の split connected reductive group とし, T をその split maximal torus とする. B を G の Borel 部分群で T を含むものとする. 任意の cocharacter $\lambda\in X_*(T)$ に対し t^λ を $t\in\mathbb{G}_m(F)$ の $\lambda\colon \mathbb{G}_m\to T$ による像とする.

以下, dominant cocharacter $\lambda\in X_*(T)$ を固定する. このときアファイン Deligne-Lusztig 多様体 $X_\lambda(b)$ とはアファイン Grassmannian の中の局所閉集合で

$$X_\lambda(b)(\bar{k})=\{xG(\mathcal{O})\in G(L)/G(\mathcal{O})\mid x^{-1}b\sigma(x)\in G(\mathcal{O})t^\lambda G(\mathcal{O})\}$$

によって定まるものである. 似たようにして任意の parahoric 部分群 (特に岩堀部分群) に対するアファイン Deligne-Lusztig 多様体も定義することができる. アファイン Deligne-Lusztig 多様体 $X_\lambda(b)$ には σ-中心化群

$$J_b=J_b(F)=\{g\in G(L)\mid g^{-1}b\sigma(g)=b\}$$

が作用する. この作用は $X_\lambda(b)$ の既約成分の集合への作用も誘導する.

定義から明らかなようにアファイン Deligne-Lusztig 多様体は古典的な Deligne-Lusztig 多様体のループ群に対しての類似である. J_b は $X_\lambda(b)$ のホモロジーに対しても自然に作用するが, Deligne-Lusztig 多様体が有限簡約代数群の表現論において決定的な役割を果たしていることを鑑みると, $X_\lambda(b)$ のホモロジーから得られる J_b の表現もまた非常に興味深い対象であると言える. こうした方向での研究の最近の展開として Chan-Ivanov による (岩堀の場合の) アファイン Deligne-Lusztig 多様体を用いた局所 Langlands 対応の実現がある [1]. その証明は全て純粋に局所的で, こうした研究は Langlands 対応を理解する上で重要な直感を与える. 一方で $X_\lambda(b)$ の幾何学的構造は古典的な Deligne-Lusztig 多様体に比べてはるかに難しく, 様々な観点から研究が行われている.

アファイン Deligne-Lusztig 多様体がいつ空でないかを決定する簡単な判定法は Kottwitz と Rapoport により予想され, 最終的に Gashi により証明されている [2]. 加えて $X_\lambda(b)\neq\emptyset$ に対し次元公式

$$\dim X_\lambda(b)=\langle\rho,\lambda-\nu_b\rangle-\frac{1}{2}\mathrm{def}(b)$$

が知られている [3]. ここで ν_b は b の Newton vector, ρ は positive root の和の半分, そして $\mathrm{def}(b)$ は b の defect を意味する. また, このようなアファイン Deligne-Lusztig 多様体の幾何学的性質に関する結果自体も数論幾何学への応用を持ち, 例えば Xiao と Zhu はある場合の既約成分を調べ, その結果を志村多様体の basic locus に応用している [4].

岩堀部分群に対する場合には Chan と Ivanov により特定の GL_n のアファイン Deligne-Lusztig 多様体に対し明示的な描写がなされた [1]. そこで与えられた直和分解の各成分は古典的 Deligne-Lusztig 多様体と有限次元アファイン空間の積である.

本研究 [5] ではアファイン Grassmannian の中の GL_3 のアファイン Deligne-Lusztig 多様体を b が basic であると仮定して調べる. このためには b の Newton vector が $(\frac{i}{3},\frac{i}{3},\frac{i}{3})$ $(i=0,1,2)$ である場合を調べれば十分である. 任意の dominant cocharacter $\lambda\in X_*(T)$ と $X_\lambda(b)\neq\emptyset$ に対し, $X_\lambda(b)$ の既約成分を完全に決定する.

定理 1. $X_\lambda(b)$ の既約成分は $\bigsqcup_{\mu\in M} J_b/K_\mu$ により添字付けられる. ここで M は λ によって決まる *dominant cocharacter* の有限集合で, K_μ は μ によって決まる *lattice* の J_b の作用による固定部分群である. また, 各既約成分は簡単な多様体上の *affine bundle* である.

群 J_b は添字集合に左からかけることによって作用する. 多くの場合既約成分は有限次元アファイン空間の open subscheme であり, それ自体もまたアファインである. この結果の系として, $X_\lambda(b)$ の既約成分が全て古典的 Deligne-Lusztig 多様体とアファイン空間の積であるような (λ, b) が特定できる. その場合, $X_\lambda(b)$ は既約成分の直和である.

定理 2. Ω を k 上の 2 次元 *Drinfeld upper half space* とし, $\mathbb{A}$ を有限次元アファイン空間とする. 上のような (λ, b) に対して次が成り立つ.

1. $b = 1$ のとき, $\bar{k}$ 上の多様体として

$$X_\lambda(1) \cong \bigsqcup_{J_1/K_0} \Omega \times \mathbb{A} \qquad \text{または}$$
$$X_\lambda(1) \cong \Big(\bigsqcup_{J_1/K_1} \Omega \times \mathbb{A}\Big) \sqcup \Big(\bigsqcup_{J_1/K_2} \Omega \times \mathbb{A}\Big).$$

   ここで K_i はある *lattice* の J_1 の作用による固定部分群である.

2. b が $(\frac{i}{3}, \frac{i}{3}, \frac{i}{3})$ $(i = 1, 2)$ という形の *Newton vector* を持つとき, $\bar{k}$ 上の多様体として

$$X_\lambda(b) \cong \bigsqcup_{J_b/H_b} \mathbb{A} \qquad \text{または}$$
$$X_\lambda(b) \cong \Big(\bigsqcup_{J_b/H_b} \mathbb{A}\Big) \sqcup \Big(\bigsqcup_{J_b/H_b} \mathbb{A}\Big).$$

   ここで H_b はある *lattice* の J_b の作用による固定部分群である.

証明の方針は次の通りである: SL_3 に対する Bruhat-Tits の建物を用いて $X_\lambda(b)(\bar{k})$ を閉部分集合の和に分解し, それらが実際には既約成分であることを示す. このために上述した次元公式も用いる. 各既約成分の構造は Schubert cell への埋め込みによって決定される. これらの各過程で重要なのは Kottwitz による先行研究 [6] の結果である.

参考文献

[1] C. Chan and A. B. Ivanov. *Affine Deligne-Lusztig varieties at infinite level.* Preprint, 2018.

[2] Q. Gashi, *On a conjecture of Kottwitz and Rapoport*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **43** (2010), no. 6, 1017-1038.

[3] E. Viehmann, *The dimension of some affine Deligne-Lusztig varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 39 (2006), no. 3, 513-526.

[4] L. Xiao and X. Zhu, *Cycles on Shimura varieties via geometric Satake*, arXiv e-prints, arXiv:1707.05700 (Jul 2017), 1707.05700.

[5] R. Shimada, Geometric structure of affine Deligne-Lusztig varieties for GL_3, 2021, arXiv:2102.09169.

[6] R. E. Kottwitz, *Orbital integrals on* GL_3, Amer. J. Math. 102 (1980), no. 2, 327-384.

Factorial GP 関数の Chevalley 公式

杉本奨吾（Sugimoto Shogo）

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻

1 導入

Factorial GP 関数は maximal orthogonal Grassmannian variety の torus 同変 K-theory の Schubert 類を表す特殊関数である．この関数は Ikeda–Naruse[2] らによって導入され, strict partition によって添字づけられる．この論文の中で factorial GP 関数は 4 つの表示-対称群を使った表示（Hall-Littlewood 型公式）,pfaffian の有理式（Nimmo 型公式）,tableaux 表示,diagrams 表示-が与えられた．またこの関数は特殊化すれば Schur の P 関数となる．

Schubert calcurus の基本問題の 1 つは構造定数を求めることである．つまり factorial GP 関数の積を factorial GP 関数の 1 次式で表したときの係数を求めることである．一般の strict partition を添字にもつ GP 関数の構造定数に関してはまだわかっていないが Chevalley 公式という一方を特別な partition つまり one box に制限したときの構造定数は Buch–Chaput–Mihalcea–Perrin[1] らによって与えられた．この公式を紹介する．

2 記号

n を自然数とする．$(x)=(x_1,x_2,\cdots,x_n),(b)=(b_1,b_2,\cdots),\beta$ を formal parameter とする．S_n を n 次対称群とする．$R(T)=\mathbb{Z}[e^{\pm t_1},\cdots,e^{\pm t_{n+1}}]$ とおく．

定義 2.1. $G\Gamma_n$ を次の条件を満たす多項式 f の集合とする．

(1) $\mathbb{Z}[\beta][x_1,x_2,\cdots,x_n]$ の元

(2) 変数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ で対称

(3) f に $1\leq i<j\leq n$ である i,j に対して $x_i=t,x_j=\ominus t(=-\frac{t}{1+\beta t})$ を代入したときこの多項式は t に依存しない．

ここで集合 $G\Gamma_n$ は環になっている．

例 1. $\prod_{i=1}^{n}(1+\beta x_i)$ は $G\Gamma_n$ の元である．(3) の条件は $1+\beta(\ominus t)=1-\frac{\beta t}{1+\beta t}=\frac{1+\beta t-\beta t}{1+\beta t}=(1+\beta t)^{-1}$ より $(1+\beta t)$ は打ち消しあうことからわかる．条件 (1), (2) は明らか．

定義 2.2. 自然数の狭義単調減少列 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2\cdots,\lambda_\ell)$（つまり $\lambda_i>\lambda_{i+1}$）を **strict partition** といい ℓ を λ の**長さ (length)** という（また $\emptyset$ は長さ 0 の *strict partition* と考える）．長さ n 以下の *strict partition* の集合を $\mathcal{SP}_n$ とおく．つまり

$$\mathcal{SP}_n=\{\lambda=(\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_\ell)|\ell\leq n,\lambda_i\in\mathbb{Z}_{>0}\}$$

とおく．また第 1 成分が n 以下である *strict partition* の集合を $\mathcal{SP}(n)$ とおく．つまり

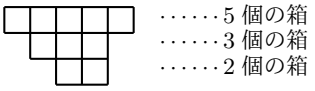
$$\mathcal{SP}(n)=\{\lambda=(\lambda_1>\lambda_2>\cdots>\lambda_\ell)|\lambda_1\leq n,\lambda_i\in\mathbb{Z}_{>0}\}$$

とおく．

この 2 つの集合は $\mathcal{SP}(n) \subset \mathcal{SP}_n$ という包含関係がある.

strict partition λ は次のように **shifted Young diagram** $\mathbb{D}(\lambda) = \{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | i \leq j \leq \lambda_i + i - 1, 1 \leq i \leq \ell(\lambda)\}$ と同一視できる.

例えば $\lambda = (5,3,2)$ は次の図形と対応させる.



これは 1 行目に 5 個の箱,2 行目に 3 個の箱,3 行目に 2 個の箱を 1 つずらして並べたものである. この partition $\lambda = (5,3,2)$ の長さは 3 であるから $\lambda \in \mathcal{SP}_3$ であるが $\lambda \notin \mathcal{SP}(3)$ である ($\because \lambda_1 = 5 > 3$).

今後はこの同一視で strict partition と shifted young diagram を区別せずに用いる. つまり

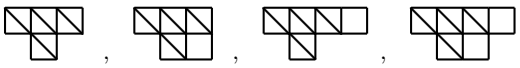
$$\mathcal{SP}(3) = \left\{ \emptyset, \square, \square\square, \begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}, \square\square\square, \begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\square\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}\square\square\square\\\square\\\square\end{smallmatrix} \right\}$$

と同一視する. 一般の $\mathcal{SP}_n, \mathcal{SP}(n)$ に関しても同様である. この同一視のもとで rook strip を定義する.

定義 2.3. λ, μ を *strict partitions* とする. $\lambda \subset \mu$ で $\lambda_i \leq \mu_i, (1 \leq i \leq n)$ を表す. $\lambda \subset \mu$ である 2 つの *partitions* について μ/λ で μ の *diagram* から λ を除いた *diagram* を表す. μ/λ が **rook strip** とは同じ行 同じ列には 2 つ以上の箱がないことをいう. 言い換えると μ は λ に各行各列高々1 個の箱をくっつけて得られる *partition* である. また λ/λ も（これは $\emptyset$ となる）*rook strip* に含める.

例 2. $\lambda = (1) = \square$ のとき μ/λ が *rook strip* となる *strict partition* μ は $(1) = \square, (2) = \begin{smallmatrix}\square\square\end{smallmatrix}$ の 2 つである.

$\lambda = (3,1)$ のとき μ/λ が *rook strip* となる *strict partion* となる μ は $(3,1), (3,2), (4,1), (4,2)$ の 4 つでこれは次のように *diagram* を描けばわかる. ただし斜線部は $(3,1)$ を表している.



$R(T) \otimes_{\mathbb{Z}[\beta]} G\Gamma_n$ 上に演算 $\oplus, \ominus$ を次で定義する.

$$x \oplus y = x + y + \beta xy, \quad x \ominus y = \frac{x-y}{1+\beta y} .$$

ここで $\oplus$ は結合法則が満たされ 0 が単位元となり $\ominus$ は $\oplus$ の逆演算である. また $\ominus x = \frac{-x}{1+\beta x}$ である. $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$[x|b]^k = (x \oplus b_1)(x \oplus b_2) \cdots (x \oplus b_k)$$

と定義する. またこれを長さ ℓ の strict partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2 \cdots, \lambda_\ell)$ に拡張して

$$[x|b]^\lambda = \prod_{j=1}^{\ell} [x_j|b]^{\lambda_j}$$

で定義する.

3 Factorial GP 関数とその Chevalley 公式

定義 3.1. *[2]* $\lambda \in \mathcal{SP}_n, \ell$ を λ の長さとする．関数 $GP_\lambda(x|b)$ を次で定義する．

$$GP_\lambda(x|b) := \frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{w\in S_n} w\left[[x|b]^\lambda \prod_{1\le i<j\le n, i\le \ell}\frac{x_i \oplus x_j}{x_i \ominus x_j}\right].$$

ここで x は n 変数 $x_1, \cdots, x_n$ を S_n は n 次対称群を表し $w \in S_n$ は x の添字に作用する．また $GP_\emptyset(x|b) = 1$ とおく．

定義から Factorial GP 関数は ($\beta = 0, \forall b_i = 0$ で) 特殊化すれば Schur の P 関数が得られることがわかる．

命題 3.2. *[2]* $\lambda \in \mathcal{SP}_n$ に対して $GD^{(n)}_\lambda(x|1-e^t) \in R(T) \otimes_{\mathbb{Z}[\beta]} G\Gamma_n$ を

$$GD^{(n)}_\lambda(x|1-e^t) = \begin{cases} GP_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n|1-e^{t_1}, \cdots, 1-e^{t_{n+1}}, 0, \cdots) & n : even \\ GP_\lambda(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0|1-e^{t_1}, \cdots, 1-e^{t_{n+1}}, 0, \cdots) & n : odd \end{cases}$$

とおく．このとき $\{GD^{(n)}_\lambda(x|1-e^t)|\lambda \in \mathcal{SP}_n\}$ は $R(T) \otimes_{\mathbb{Z}[\beta]} G\Gamma_n$ の $R(T)-basis$ となる．

$OG(n+1, 2n+2)$ を even orthogonal Grassmanninan variety とし,$K_T(OG(n+1, 2n+2))$ を $OG(n+1, 2n+2)$ の torus 同変 K 理論とする．Ω_λ を λ に対する Schubert variety,$\mathcal{O}_{\Omega_\lambda}$ をその構造層とするとこれは $K_T(OG(n+1, 2n+2))$ の元 $[\mathcal{O}_{\Omega_\lambda}]_T$ を定める．さらに $K_T(OG(n+1, 2n+2))$ は $\{[\mathcal{O}_{\Omega_\lambda}]_T|\lambda \in \mathcal{SP}(n)\}$ を $R(T)-$ 加群としての基底に持つことが知られていて $K_T(OG(n+1, 2n+2))$ は環構造を持つことから,$\lambda, \mu \in \mathcal{SP}(n)$ に対して

$$[\mathcal{O}_{\Omega_\lambda}]_T[\mathcal{O}_{\Omega_\mu}]_T = \sum_{\nu\in\mathcal{SP}(n)} c^\nu_{\lambda,\mu}[\mathcal{O}_{\Omega_\nu}]_T$$

と展開できることがわかる．Schubert calculus の基本的な問題の 1 つはこの係数 $c^\nu_{\lambda,\mu}$ を求めることである．しかし一般の $\lambda, \mu \in \mathcal{SP}(n)$ に対してこの係数を求めることは難しい．そこで $\mu = (1)$ という特別な partition に制限したときの $c^\nu_{\lambda,\mu}$ を考える．これは **Chevallay 公式**とよばれ,[1] で与えられている．また $\mu = (\mu_1)$ というもう少し一般の場合は Pieri 公式と呼ばれ, まだ未解決である．

定理 3.3. *[2]* 次の写像は $R(T)-$ 代数として準同型でかつ全射である．

$$\pi_n : R(T) \otimes_{\mathbb{Z}[\beta]} G\Gamma_n \longrightarrow K_T(OG(n+1, 2n+2)) \quad GD^{(n)}_\lambda(x|1-e^t) \mapsto \begin{cases} [\mathcal{O}_{\Omega_\lambda}]_T & \lambda \in \mathcal{SP}(n) \\ 0 & \lambda \notin \mathcal{SP}(n) \end{cases}$$

この対応により $GD^{(n)}(x|1-e^t)$ が つまり（偶数変数の）factorial GP 関数が Schubert 類を表す特殊関数であることがわかる．

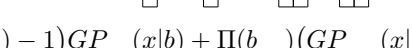
定理 3.4. *[1](Chevalley 公式)*
n を偶数,$\lambda \in \mathcal{SP}_n, \ell$ を λ の長さとする．このとき

$$GP_\lambda(x|b)\cdot GP_\square(x|b) = \beta^{-1}\{\Pi(b_\lambda) - 1\}GP_\lambda(x|b) + \Pi(b_\lambda)\sum_{\mu/\lambda: r,s, \mu\neq\lambda, \mu\in\mathcal{SP}_n} \beta^{|\mu/\lambda|-1}GP_\mu(x|b)$$

が成り立つ．ここで

$$\Pi(b_\lambda) = \begin{cases} \prod_{i=1}^\ell (1+\beta b_{\lambda_i+1})^{-1} & \ell : even \\ \{\prod_{i=1}^\ell (1+\beta b_{\lambda_i+1})^{-1}\}(1+\beta b_1)^{-1} & \ell : odd \end{cases}$$

を表す．また $\mu/\lambda : r, s$ は *rook strip* を表す（μ は λ に各行各列高々1 個の箱をくっつけて得られる *shifted young diagram*）．

例 3. $\lambda =$  のとき μ としてとれる *partition* は  の 4 通りであった．これより

$$GP_{\square\square\square}(x|b)\cdot GP_\square(x|b) = \beta^{-1}\big(\Pi(b_{\square\square\square}) - 1\big)GP_{\square\square\square}(x|b) + \Pi(b_{\square\square\square})\big(GP_{\square\square\square\square}(x|b) + GP_{\square\square\square}(x|b) + \beta GP_{\square\square\square\square}(x|b)\big)$$

である．ここで $\ell(\lambda) = 2$ より $\Pi(b_{\square\square\square}) = (1+\beta b_4)(1+\beta b_2)$ である．

References

[1] Anders S. Buch, Pierre-Emmanuel Chaput, Leonardo C. Mihalcea and Nicolas Perrin, A Chevalley formula for the equivariant quantum K-theory of cominuscule varieties, Algebraic Geometry 5 (5) (2018) 568-595

[2] Takeshi Ikeda and Hiroshi Naruse,K-theoretic analogues of factorial Schur P-and Q-functions, Advances in Mathematics 243 (2013) 22-66

An explicit construction of derived moduli stacks of Harder-Narasimhan filtrations

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
水野　雄貴 (Yuki Mizuno)

1　導入，本レポートについて

■著者について　著者の専門分野は代数幾何学である．代数幾何学は多項式の零点で記述される多様体について研究する分野である．その中でも，著者は代数多様体 (またはスキーム) 上の層のモジュライ空間について研究している．ここで，代数多様体 (またはスキーム) X 上の層とは， X 上の開集合全体からなる圏 ouv(X) から集合の圏 Sets への反変関手である種の張り合わせの条件の成立するもののことを指す．また，X 上の層のモジュライ空間とは代数多様体 (またはその一般化であるスキーム) で各点が X 上の層をパラメトライズしているものを指す．特に著者はベクトル束や連接層のモジュライ空間について研究している，ここで連接層とは，大雑把に言って局所的には有限生成な加群に付随する層として実現される層のことである．

■スタックの動機　一般に X 上の連接層全てをパラメトライズするような代数多様体やスキームは存在しない．もし，モジュライ空間をスキームとして実現する場合，パラメトライズする層を制限する必要がある．この時に制限される層は，(半) 安定層と呼ばれるクラスに属す．一方で，X 上の連接層全てをパラメトライズするようなモジュライ空間を構成する場合， スキームのさらに一般化であるスタックという概念が必要となる．このように構成された層のモジュライ空間をモジュライスタックと呼ぶことにする，

■導来代数幾何学の動機　ここからは，導来代数幾何学と呼ばれるものの動機について簡単に説明する．こうして構成されたモジュライスタックには多様体同様に滑らかさの概念を自然に定義することができる．しかしながら，モジュライスタックをいつも滑らかになるとは限らない，Kontsevich や Deligne, Drinfeld たちは，これらのモジュライ空間はさらに性質の良い (もちろん滑らかな) 幾何学的対象の切り下げとして得られるだろうという哲学を提唱した．これを Hidden Smoothness Philosophy(Principle) という．このような幾何学的対象が導来スキームや導来スタックと言われるものとなる．スキームが位相空間と環の層の組と表される一方で，導来スキームは位相空間と次数付き微分代数の層の組として表される，

著者は，Ciocan-Fontanine, Behrend 等らの手法 ([1]) を用いることにより，Harder-Narasimahan フィルトレーションの導来スタックを構成した．このレポートでは最終的にはその結果について紹介できればと思う．

■本レポートについて　ここまで，非常に大雑把にではあるが，著者の研究分野のモチベーションについて説明した．本レポートでは，代数幾何学が専門でない方を想定して，今まで書いてきた専門用語を含めてできるだけ根本概念から書いていければと思う．このレポートがスタックの概念への入門の手助けとなれば幸いである．そのため，著者の主結果についての説明への比重が少なくなっている．さらに興味を持っていただけた場合はプレプリントを参照していただければ幸いである．

2 代数多様体，スキーム

この章の大部分の定義は [3] を参考にしている．さらに詳細な説明についてはそちら参照せよ．k は以下, 代数閉体とする．

2.1 代数多様体

まずは，スキームの説明に入る前にさらに具体的な代数多様体の定義を行う．

定義 2.1. n 次のアフィン空間 $\mathbb{A}^n_k$(または $\mathbb{A}^n$) とは，$\mathbb{A}^n_k := \{(a_1, \cdots, a_n) | a_i \in k\}$.

定義 2.2 (アフィン代数多様体)**.** $A(\mathbb{A}^n) := k[x_1, \cdots, x_n]$ の部分集合 S に関して，$Z(S) := \{p \in \mathbb{A}^n | f(p) = 0, {}^\forall f \in S\}$．この時，$\{Z(S) | S \subset A(\mathbb{A}^n)\}$ は閉集合の公理を満たす，これにより定まる $\mathbb{A}^n_k$ の位相を Zariski 位相という．Zarisiki 位相で閉集合となる $\mathbb{A}^n$ の部分位相空間をアフィン (代数) 多様体という．さらに，2 つの互いを含まない閉集合の和として表されるアフィン多様体を既約という．アフィン多様体 $X \subset \mathbb{A}^n$ に対して，$I(X) := \{fk[x_1, \cdots, x_n] | f(p) = 0, {}^\forall p \in X\}$, $A(X) := A(\mathbb{A}^n)/I(X)$. $X \subset \mathbb{A}^n, Y \subset \mathbb{A}^m$ に対して写像 $f : X \to Y$ が X から Y への射であるとは，$f(p) = (f_1(p), \cdots, f_m(p)), (f_i \in A(X))$ となることである，

定義 2.3 (代数多様体)**.** X が代数多様体であるとは， X の有限な開被覆 $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ と各 i について同相写像 $\varphi_i : U_i \to V_i$ (ただし，V_i はアフィン多様体) があり，任意の i, j について $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ が局所的にアフィン代数多様体の射となっている．

2.2 スキーム

この節では，今の代数多様体の一般化となる概念であるスキームとその周辺概念を行う．ここで書いたことよりもさらに細かい定義に関しては，[3, Chapter2,3] を見ていただければと思う．

定義 2.4 (層)**.** X を位相空間とする．X 上の前層 F とは，圏 $\mathrm{ouv}(X)$ から　圏 Sets への反変関手のことを言う．二つの前層の射は関手の間の自然変換として定義する．ここで，$\mathrm{ouv}(X)$ は対象を X の開集合全てとし，射は開集合の包含とする．前層 F が層であるとは，以下の 2 つが成り立つことをいう．

- $U \in \mathrm{ouv}(X), s_1, s_2 \in F(U)$，さらに $U = \cup U_i$ を U の開被覆とした時， $s_1|_{U_i} = s_2|_{U_i} (\forall i)$ ならば，$s_1 = s_2$.
- $U, U_i \in \mathrm{ouv}(X)$ を上記のようにとり，$s_i \in F(U_i)$ が $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たす時，$\exists s \in F(U)$ で $s|_{U_i} = s_i$.

定義 2.5. F を位相空間 X 上の層とし，$\varphi : X \to Y$ を位相空間間の連続写像とする．この時，前層 $\varphi_* F$ を $\varphi_* F(V) := F(\varphi^{-1} U)$ として定める．この時，$\varphi_* F$ は Y 上の層を定める．また，$U \subset X$ を開部分集合とした時，U 上の 前層 $F|_U$ を $F|_U(V) := F(V)$ として定める，この前層も実際に層となる．

定義 2.6 (環付き空間)**.** X を位相空間，$\mathcal{O}$ を X 上の層とした時，$\mathcal{O}$ が環の層であるとは $F : \mathrm{ouv}(X) \to \mathrm{Ring} \hookrightarrow \mathrm{Sets}$ と書ける時をいう．また，環付き空間とは位相空間 X と X 上の環の層 $\mathcal{O}$ の組 $(X, \mathcal{O})$ をいう．さらに，$\forall x \in X$ について，$\mathcal{O}_{X,x} := \lim_{U \ni x} \mathcal{O}_X(U)$ が局所環となる時，局所環つき空間という．

定義 2.7. $(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$ を環付き空間とした時．その間射 $(f, f^\sharp)(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ とは，連続写像

$f : X \to Y$ と Y 上の環の層の間の射 $f^\sharp : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ の組みのことである，さらに，環付き空間たちが局所環付き空間であるとき，$f_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ が局所環の準同型となる時，環付き空間の射は局所環付き空間の射という．

定義 2.8 (アフィンスキーム)**.** R を環とした時，R に付随する環付き空間 $(\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec(R)}})$ を以下のように定める．$\mathrm{Spec}(R) := \{\mathfrak{p} \subset R | \mathfrak{p}$ は素イデアル $\}$, $V(\mathfrak{a}) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}$ とした時，$V(\mathfrak{a})$ 全体は $\mathrm{Spec}(R)$ の閉集合を定める．これにより定まる位相により $\mathrm{Spec}(R)$ を位相空間と見る．また，$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}(U) := \{s : U \to \coprod_{\mathfrak{p}\in U} A_\mathfrak{p} | s(\mathfrak{p}) \in A_\mathfrak{p}, s$ は局所的に A の元の商と書ける $\}$ これにより，$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(X)}$ は X 上の環の層となる．

局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ がアフィンスキームであるとは，ある環 R が存在して，局所環付き空間の同型 $(X, \mathcal{O}_X) \simeq (\mathrm{Spec}(R), \mathcal{O}_{\mathrm{Spec(R)}})$ が存在することである．

定義 2.9 (スキーム)**.** 局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ がスキームであるとは, 任意の点 $x \in X$ に対して $x \in \exists U \subset X$ で　$(U, \mathcal{O}_X|_U)$ がアフィンスキームとなることである．スキームの間の射は局所環つき空間の射として定義する．

定義 2.10. S をスキーム後した時，圏 Sch/S を対象をスキーム X と X から S への射 φ の組みとする．さらに，対象は単に φ で表す．また，$\varphi : X \to S$ から $\psi : Y \to S$ への射はスキームの射 $f : X \to Y$ で $\psi \circ f = \varphi$ を満たすものとする．

2.3　連接層，ベクトル束

本レポートで重要な概念である連接層やベクトル束の概念について説明を行う．

定義 2.11. $(X, \mathcal{O}_X)$ を環つき空間とした時，その上の層 $\mathcal{F}$ が $\mathcal{O}_X$ 加群であるとは，X の各開部分集合 U に関して $\mathcal{F}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$ 加群であり，$V \subset U$ を任意の U の開部分集合として時，制限写像 $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ が可換間の射 $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ と可換になることである．また，$\mathcal{G}$ もその上の $\mathcal{O}_X$ 加群であるとするとき，その間の射 $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とは層の射であり，各 $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$ 加群の射となることである．

定義 2.12 (局所自由層)**.** $(X, \mathcal{O}_X)$ 上の $\mathcal{O}_X$ 加群 $\mathcal{F}$ が局所自由層であるとは，X の開被覆 $X = \bigcup U_i$ が存在して，$\mathcal{F}|_{U_i}$ が,$\mathcal{O}_{U_i}$ の直和と $\mathcal{O}_{U_i}$ 加群として同型になることを言う．

定義 2.13. $\mathrm{Spec}(A)$ をアフィンスキームとする．M を A 加群とした時，これに付随する $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,A}$ 加群 $\tilde{M}$ を以下でさだめる:

任意の開集合 $U \subset \mathrm{Spec}(A)$ に関して，$\tilde{M}(U) := \{s : U \to \coprod_\mathfrak{p} M_\mathfrak{p} | {}^\forall\mathfrak{p} \in U, s(\mathfrak{p}) \in M_\mathfrak{p}$ かつ局所的に $s = \frac{m}{f}(m \in M, f \in A)$ と書ける.$\}$.

定義 2.14. スキーム $(X, \mathcal{O}_X)$ に関してその上の加群 $\mathcal{F}$ があるアフィン開被覆 $X = \bigcup \mathrm{Spec}(A_i)$ に関して $\mathcal{F}|_{\mathrm{Spec}(A_i)} \simeq \tilde{M}_i (\exists M_i \in \mathrm{Mod}(A_i))$ となる時，$\mathcal{F}$ を準連接層といい，その M_i が有限生成 A_i 加群となる時 $\mathcal{F}$ は連接層であると言う．

注意 2.15. スキーム X 上の局所自由層とベクトル束の間には 1 対 1 の対応を作ることができる ([3, Chapter2, Exercise 5.18]).　これにより局所自由層とベクトル束は同一視して扱う．

3 代数空間，スタック

3.1 関手としてのスキーム, 代数空間

スキームは関手として見ることができることについて説明する．

定義 3.1. X をスキームとする．関手

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(-,X) : (\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$$

を $Y \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(Y,X)$ により定める．

この時，$X \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(-,X)$ はスキームの圏からスキーム圏から集合の圏への関手の圏 $[(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}]$ への忠実充満な関手を定める．また，$X \simeq Y \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(-,X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}}(-,Y)$ であることから，$\mathrm{Sch}^{\mathrm{op}} \subset [(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}]$ とみなせる．

$F \in [(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}]$ が，$\mathrm{Hom}(-,X) \simeq F$ $(\exists X \in (\mathrm{Sch}))$ となる時，F は表現可能であるという．

代数空間とは，大まかに言えば，$[(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}]$ のなかで，スキームに近いものさらに詳しくは，etale local にスキームが貼り合わさったものとして定義される．代数空間の定義の前に，必要な定義をいくつか述べる．

定義 3.2. $F \in [(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}]$ とした時，F がエタール位相で層であるとは以下が成立することを言う．

$^{\forall}U, U_i \in \mathrm{Sch}$, $\{\varphi_i : U_i \to U\}$: エタール射の族で $\bigcup_i \mathrm{Im}(\varphi_i) = U$ とする．

- $s,t \in F(U)$ とした時，$F(\varphi_i)(s) = F(\varphi_i)(t)$ ならば $s = t$.
- $s_i \in F(U_i)$ とし，$F(pr_{ij1})(s_i) = F(pr_{ij2})(s_j)$ ならば，$\exists s \in F(U)$ で $F(\varphi_i)(s) = s_i$ となる．ただし，pr_{ij1}, pr_{ij2} は以下のカルテジアン図式のより定義される．

$$\begin{array}{ccc} U_i \times_U U_j & \xrightarrow{pr_{ij2}} & U_j \\ {\scriptstyle pr_{ij1}}\downarrow & \square & \downarrow{\scriptstyle \varphi_j} \\ U_i & \xrightarrow{\varphi_i} & U \end{array}$$

定義 3.3. $\alpha : F \to G \in \mathrm{Mor}([(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}])$ が表現可能であるとは，任意のスキーム U か G への射 $\beta : U \to G$ に対し，$F \times_{\alpha,G,\beta} U$ がスキームとして表現可能であることである．また，α が全射 (エタール) であるとは，射 $F \times_{\alpha,G,\beta} U \to U$ がエタール射 (全射) となることである．

定義 3.4 (代数空間)**.** $F \in [(\mathrm{Sch})^{\mathrm{op}}, \mathrm{Sets}]$ が代数空間であるとは，以下の条件を満たすことである．

1. F はエタール位相で層となる．
2. 対角射 $F \to F \times F$ は表現可能.
3. あるスキーム U と表現可能な射 $U \to F$ でエタールな全射が存在する．

注意 3.5.
- 上の定義の 3 で表現可能な射の存在を要求しているが，実は 2 の条件からスキームから F への射は全て表現可能であることが導かれる．
- 関手 F がスキームとして表現される必要十分条件は上の代数空間の定義のエタール射を開埋め込みに置き換えた条件として書くことができる．

3.2 モジュライ関手, 関手としてのスタック

ここでは，モジュライ関手として層のモジュライ関手の定義を述べる．

定義 3.6. $X : k$ 上の局所有限型スキームとする．この時，X 上の連接層のモジュライ関手を以下で定める:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{M}_X : & (\mathrm{Sch}\,/k)^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & (\mathrm{Sets}) \\ & \cup & & \cup \\ & U & \longmapsto & \{E \in \mathrm{QCoh}(X \times_k U) | E : U \text{ 上平坦で局所有限表示される } \}/\text{同型} \end{array}$$

注意 3.7. $E \in \mathcal{M}_X(U)$ ならば，E の各点 $u \in U$ へのファイバーへの制限は X 上の連接層となる．

命題 3.8. $\mathcal{M}_X$ はスキームまたより一般な代数空間によって表現されない．

このようなことが起きる要因としては，$\mathcal{M}_X$ は局所的に同型な連接層を同一視できないことが要因として挙げられる．ここで，例えばベクトル束の場合は張り合わせの同型射までモジュライ関手のの情報に含まればこのようなことから回避できる．従って，モジュライ関手は同型で割らずにかつ層の同型射の情報まで保つものを定義する．

定義 3.9 (関手としての層のモジュライスタック)**.** X は先と同様に定め，X 上の層のモジュライスタック $\mathcal{M}'_X$ を以下の “関手” で定める．

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{M}'_X : & (\mathrm{Sch}\,/k)^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & (\mathrm{Groupoids}) \\ & \cup & & \cup \\ & U & \longmapsto & \{ \text{対象} : E \in \mathrm{QCoh}(X \times_k U), U \text{ 上平坦で局所有限表示される}, \text{射} : \text{層の自己同型射} \} \end{array}$$

注意 3.10. 上の定義で “関手” と書いたのは厳密には関手の定義を満たさずに，2-関手と呼ばれるものの定義を満たすからである．

定義 3.11. $\mathcal{M}'_X$ は対象と射に関して貼りあわせの条件を満たす．

定義 3.12 (関手としてのスタック)**.** $F : (\mathrm{Sch}\,/k)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Sets}$ を 2-関手とする．F が対象と射に関して張り合わせの条件を満たす時にスタックという．

注意 3.13. 2-関手の定義はここでは述べない．記述にややスペースをとってしまうのと関手によるスタックの定義は実用上は用いないためである．詳細については，[7] や [2] を参照せよ．

3.3 圏としてのスタック

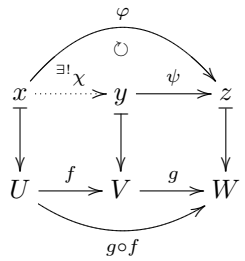
関手としてのスタックの定義は動機としてはわかりやすいが実用上は扱いずらい．そこで，よりスタックの定義を簡単に書くことができないかという考えが浮かぶ．このような動機からここでは，ファイバー圏 (fibered categories) を用いたスタックの定式化について述べる．

定義 3.14 (スキーム S 上のグルーポイド)**.** S をスキームとする．$p : \mathcal{X} \to \mathrm{Sch/S}$ が S 上のグルーポイドであるとは，以下の条件を満たすことである．(この時，単に $\mathcal{X}$ を S 上のグルーポイドいう．)

1. $\forall f : U \to V \in \mathrm{Mor}(\mathrm{Sch}\,/S), \forall x \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X})$ が $p(x) = T$ を満たすとする (この時，x は T 上の対象であるという)．この時，$\exists y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{X})$ と $\exists \varphi \in \mathrm{Mor}(\mathcal{X})$ であり，$p(y) = U, p(\varphi) = f$ (f^*x で y を表す).

$$\begin{array}{ccc} {}^{\exists}y & \overset{{}^{\exists}\varphi}{\cdots\cdots\succ} & x \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \xrightarrow{f} & U \end{array}$$

2. $f : U \to V, g : V \to W$ を S 上のスキームの射，$\varphi : x \to z, \psi : y \to z$ を $\mathcal{X}$ 上の射とし，$p(\varphi) = g \circ f, g(\psi) = g$ とする．この時，$\exists! \chi : x \to y$ で $\varphi = \psi \circ \chi$.



また，$q : \mathcal{Y} \to \mathrm{Sch}/S$ も S 上のグルーポイドであるとする時，S 上のグルーポイドの射 $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ とは $\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への関手で，$q \circ \varphi = p$ を満たすものである．

定義 3.15. $p : \mathcal{X} \to (\mathrm{Sch}/S)$ をスキーム S 上のグルーポイドとする．この時，圏 $\mathcal{X}(U)$ を $\mathcal{X}$ の部分圏で対象は $p(x) = U$ となるもので，射は $p(\varphi) = \mathrm{id}_U$ となるようなものとする．

命題 3.16. S 上のグルーポイドを定めると $(\mathrm{Sch}/S)^{op}$ から (groupoids) への 2-関手が定まる．この対応により 2-関手の圏と S 上のグルーポイドの圏の間には圏同値が定まる．

例 3.17. 関手 $F : (\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Sets})$ は以下の構成により S 上のグルーポイドとみなせる．

対象. (U, x) U は S 上のスキーム．$x \in F(U)$.
射. $f : (U, x) \to (V, y)$．ただし，$f : U \to V$ は S 上のスキームの射で $F(f)(y) = x$ を満たす．

これ以降，この対応により F とこのグルーポイドを同一視する．

例 3.18 (層のモジュライ空間)**.** 定義 3.9 を S 上のグルーポイドとして表すと以下のようになる．

対象. (U, E) U は k 上のスキーム．E は $U \times_k X$ 上の準連接層で U 上平坦かつ局所有限表示を持つもの．
射. $(f, \varphi) : (U, E) \to (V, F)$ $f : U \to V$ は k 上のスキームの射で，$\varphi : E \to f^*F$ は層の同型射．ただし，射の合成を定義する際は，層の射の引き戻し関手間の自然な同型 $(g \circ f)^* \simeq f^*g^*$ を用いる．

定義 3.19 (圏としてのスタック)**.** S 上のグルーポイド $p : \mathcal{X} \to (\mathrm{Sch}/S)$ が S 上のスタックであるとは以下の条件を満たすことである．

$U, U_i \in \mathrm{Sch}/S$, $\{f_i : U_i \to U\}$ を S 上のスキームの射でエタール射の族でありかつ U の被覆となっているものとする．

(単一性). $x, y \in \mathcal{X}(U)$ で $\varphi, \psi : x \to y \in \mathrm{Mor}(\mathcal{X})$ とする．${f_i}^*\varphi = {f_i}^*\psi$ ならば，$\varphi = \psi$ となる．
(射の張り合わせ). $x, y \in \mathcal{X}(U)$ で $\varphi_i : {f_i}^*x \to {f_i}^*y \in \mathrm{Mor}(\mathcal{X})$ とする．$\forall i, j$ に対して，$f_{ij}^*\varphi_i = f_{ji}^*\varphi_j$ ならば，$\exists \varphi : x \to y$ で $f_i^*\varphi = \varphi_i$ となる．ただし，$f_{ij} : U_{ij} := U_i \times_U U_j \to U_i$ は f_j の f_i による引き戻し．
(対象の張り合わせ). $x_i \in \mathcal{X}(U_i)$，$\varphi_{ij} : f_{ij}^*x_i \to f_{ji}^*x_j \in \mathrm{Mor}(\mathcal{X})$ とする．φ_{ij} はコサイクル条件を満たすとする．この時，$x \in \mathcal{X}(U)$ と $\varphi_i : f_i^*x \to x_i \in \mathrm{Mor}(\mathcal{X})$ が存在して，$\varphi_{ij} \circ f_{ij}^*\varphi_i = f_{ji}^*\varphi_j$ を満たす．

注意 3.20. 例 3.17 の F が代数空間の時，対応する S 上のグルーポイドはスタックとなる．また，例 3.18 の S 上のグルーポイドもスタックとなる．

3.4 スタックに関する諸定義

定義 3.21 (S 上のグルーポイドのファイバー積)**.** $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}, \Psi : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ を S 上のグルーポイドの射とする．p, q, r を $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ の構造射とする．この時，これらのファイバー積 $\mathcal{X} \times_{\Phi,\mathcal{Z},\Psi} \mathcal{Y}$ (Φ, Ψ が明らかな場合は $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y}$ と書く) を以下の S 上のグルーポイドにより定める．

対象. (x, y, φ) ただし $x \in \mathrm{ob}\,\mathcal{X}, y \in \mathrm{ob}\,\mathcal{Y}$ で $p(x) = q(y)$ をみたし，$\varphi : \Phi(x) \to \Psi(y)$ は $\mathcal{Z}$ の射.

射. $(\alpha, \beta) : (x', y', \varphi') \to (x, y, \varphi)$ $\alpha : x' \to x, \beta : y' \to y$ はそれぞれ $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ の射で $\Psi(\alpha) \circ \varphi = \varphi' \circ \Psi(\beta)$ を満たす.

定義 3.22. $\Psi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を S 上のグルーポイドの射とする．Ψ が表現可能であるとは，任意のスキーム U から $\mathcal{Y}$ への射 Ψ に関して．$\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} F$ が代数空間と同型になることである.

定義 3.23. 表現可能な S 上のグルーポイドの射 $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が滑らか (エタール，全射) であるとは，任意のスキームから $\mathcal{Y}$ への射 $\Psi : U \to \mathcal{Y}$ に対して，ファイバー積により得られる射 $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U \to U$ が滑らか (エタール，全射) となることである.

定義 3.24 (Artin, Deligne-Mumford スタック)**.** $\mathcal{X}$ が S 上のスタックであるとする．この時 $\mathcal{X}$ が Artin (Deligne-Mumford) スタックであるとは，以下が成り立つことである.

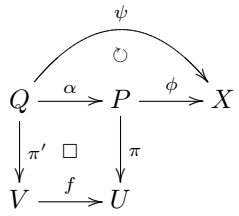
1. 対角射 $\delta : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が表現可能.
2. スキーム U から $\mathcal{X}$ への全射で滑らか (エタール) な射 $\Phi : U \to \mathcal{X}$ が存在する.

注意 3.25. 上の定義の一つ目の条件から任意のスキームから $\mathcal{X}$ への射が表現可能になるため，U から $\mathcal{X}$ への任意の射は表現可能になる．また，Artin スタックは代数的スタックともいう.

例 3.26 (商スタック)**.** 以降で頻繁に用いられる商スタックの定義を述べる．X を S 上のスキームとして G を S 上の群スキームで X に作用しているとする，この時，この作用に関する商スタック $[X/G]$ を以下の S 上のグルーポイドとして定める.

対象. $(\pi : P \to U, \phi : P \to X)$, U は S 上のスキーム．π は主 G 束であり，ϕ は G 同変射.

射. $(\alpha, f) : (\pi' : Q \to V, \psi : Q \to X) \to (\pi : P \to U, \phi : P \to X)$ $f : V \to U$ は S 上のスキームの射であり，$\alpha : Q \to P$ も S 上のスキームの射で，以下の可換図式を満たす,



4 導来代数幾何学, 主結果について

以下では k は標数 0 の代数閉対とする．ここから先は，[6], [1] に基づいた主結果の説明を行う.

4.1 基本的な定義

定義 4.1 (次数付き微分代数 (dga)，次数付き微分リー代数 (dgla))**.** R を $\mathbb{Z}$ 次数付き代数とする．このとき，$d : R \to R$ は次数が 1 の次数つき代数の準同型とする．この時，(R, d) が次数付き微分代数 (dga) であるとは，$d(ab) = (da)b + (-1)^{\bar{a}}a(db)$ が成り立つことである．

L を $\mathbb{Z}$ 次数つき k ベクトル空間とする．$[\cdot,\cdot] : L \times L \to L$ を次数 0 の双線型性写像とし，$d : L \to L$ を次数 1 の線型写像とする．この時 $(L, [\cdot,\cdot], d)$ が次数付き微分リー代数であるとは，以下が成り立つことである: (1). $[a, b] + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, a] = 0$, (2). $[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{\bar{a}\bar{b}}[b, [a, c]]$, (3). $d([a, b]) = [da, b] + (-1)^{\bar{a}}[a, db]$.

定義 4.2 (dg-スキーム，dg-スタック)**.** X をスキーム (代数的スタック) とする．$\mathcal{R}_X$ を X 上の $\mathbb{Z}_{\leq 0}$ 次数付き微分代数の層で $\mathcal{R}^0_X = \mathcal{O}_X$．また，$\mathcal{R}^i_X$ が準連接層であるとする．この時，$(X, \mathcal{R}_X)$ を dg-スキーム (スタック) という．

注意 4.3. スタック上の層は本レポートでは定義していなかった．詳しくは [5] を参照せよ．ただ，本レポートでは商スタック上の準連接層しか考えず，商スタック $[X/G]$ 上の準連接層は X 上の準連接層で G 同変なものと 1 対 1 に対応することが知られている．そのため，この事実のみ与えておけば本レポートにおいては十分である．

定義 4.4. $(X, \mathcal{R}_X)$ を dg スキーム (スタック) としたときその下にあるスキーム (スタック) を底空間が $|\operatorname{Spec}(H^0(\mathcal{R}))|$ で構造層が $H^0(\mathcal{R}_X)$ となるスキーム (スタック) とする．これらを $\pi_0(X, \mathcal{R})$ と表すことにして，dg スキーム (スタック)$(X, \mathcal{R}_X)$ を $\pi_0(X, \mathcal{R}_X)$ の導来化と呼ぶことにする．

4.2 フィルター付き加群の導来モジュライスタック

定義 4.5. A を環とする．フィルター付き A 加群とは A 加群 M と M の部分加群のフィルトレーション

$$0 = F_0M \subset F_1M \subset \cdots \subset F_sM = M$$

の組み (M, F_iM) のこととする．また，F_iM が明らかな時は単に M と書くことでフィルター付き加群を表す．さらに (N, F'_iN) もフィルター付き A 加群とした時 (M, F_iM) から (N, F'_iN) への準同型とは M から N への A 加群の準同型でフィルトレーションを保つものとする．さらに，そのようなもの全体を $\operatorname{Hom}_-(M, N)$ で表す. 同様な方法で次数付き環 A に対してフィルター付き次数付き A 加群を定義することができ，M, N が二つのそれとするとき，その間の次数を保つ準同型を $\operatorname{Hom}_{A-\mathrm{gr},-}(M, N)$ で表す.

以下で，次数つき代数や環等は $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付きであるとする．

定義 & 命題 4.6. A は次数付き k 代数で $A_0 = k$ であるとする．$V := \bigoplus_{i=p}^{q} V_i$ をフィルター付きで次数付き k-ベクトル空間で $[p, q]$ の間にのみ *0* でない斉次な元があるとする *(*このことを $[p, q]$-次数付きと言う*)*．このとき，

$$L^i_- := \operatorname{Hom}_{k-\mathrm{gr},-}(A^{\otimes i} \otimes_k V, V) = \operatorname{Hom}_{k-\mathrm{gr},-}(A^{\otimes i}, \operatorname{End}_-(V, V)).$$

このとき，$L_- := \bigoplus_i L^i_-$ には以下の構成で，次数付き微分リー代数の構造が入る．

- d は環 A の積構造により定まる*:* $d\mu(a_1, \cdots, an + 1) = \sum_{i=i}^{n}(-1)^{n-i}\mu(\cdots, a_ia_{i+1}, \cdots)$
- $[\cdot,\cdot]$ はベクトル空間の準同型の合成により定める*:* $[\mu, \mu'] = \mu \circ \mu' - (-1)^{mn}\mu' \circ \mu$．ただし，$\mu \circ \mu'(a_1, \cdots, a_{m+n}) := (-1)^{mn}\mu(a_1, \cdots, a_m) \circ \mu'(a_{m+1}, \cdots, a_{m+n})$ とする．

注意 4.7. V には，$G := \mathrm{GL}(V) = \bigoplus_{i=p}^{q} \mathrm{GL}(V_i)$ の V のフィルトレーションを保つ放物部分群 P の共役による作用があるため，これの L_- への作用が存在する．特に，L_-^1 をアフィン空間と見なせば，商スタック $[L_-^1/P]$ が得られる．

定義 4.8. $L_-^1 = \mathrm{Hom}_{kf-\mathrm{gr},-}(A \otimes_k V, V)$ の元 μ に対して，μ がモーラーカルタンエレメントであるとは，

$$d\mu + \frac{1}{2}[\mu, \mu] = 0$$

が成り立つことを言う．さらにこのような元全体を $\mathrm{MC}(L_-)$ と書くことにする．

注意 4.9. モーラーカルタンエレメントがどのような元を表すか考える．今，$\mu \in L_-^1$ に対しては，$\frac{1}{2}[\mu, \mu] = \mu \circ \mu$ が成立するので，μ がモーラーカルタンであるとは，

$$d\mu + \mu \circ \mu = 0$$

と書き直すことができる．これは言い換えると μ が V の上にフィルター付き次数付き A 加群の構造を与えることと同値である．ただし，異なる $\mathrm{MC}(L_-)$ の元が同型な A 加群を定めることがあることに注意せよ．

命題 4.10. $[L_-^1/P]$ の商部分スタック $[\mathrm{MC}(L_-)/P]$ は次元ベクトルが $(0, \cdots, 0, \dim V_p, \cdots, \dim V_q, 0, \cdots)$ となる次数付きフィルター付き A 加群のモジュライスタックとなる．

さらに，我々は L_- が dgla であることを用いて，$[\mathrm{MC}(L_-)/P]$ の導来化を行うことができる．

命題 4.11. ある *dg* スタックが存在して，その下にあるスタックで $[\mathrm{MC}(L_-)/P]$ となるものが存在する．

証明の概略．ここでは具体的な dg スタックの構成についてここでは述べることにする．

まず，$M := L_-^1$ 上のベクトル束 $\mathcal{L}_-^i := M \times_k L_-^i$ を考えることができることに注意せよ．このとき，$\mathcal{L}_- := \bigoplus \mathcal{L}_-^i$ は M 上の curved dgla と呼ばれるものの層となる．

ここで curved dgla の層とは dgla の層の拡張となるもので，$d \circ d \neq 0$ であるが，$^\exists f \in \mathcal{L}_-^2$ が存在して，$d \circ d = [\cdot, f]$ となるものである．f は曲率と呼ばれる．さらに，$Z(f) = \mathrm{MC}(L_-)$ が成立する．ここで $Z(f)$ は f の M での零点．さらに，$\mathcal{R}_M := \mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_-)$ は L_- の $d, [\cdot, \cdot]$ と曲率 f から得られる微分により，可換次数付き微分代数 (cdga) の層となる．加えて，$\mathcal{R}_M$ には L_- の P による作用により，P-同変層としての構造が定まる．従って，これにより定まる $[M/P]$ 上の cdga の層を $\mathcal{R}_{[M/P]}$ と書けば，$([M/P], \mathcal{R}_{[M/P]})$ は $[\mathrm{MC}(L_-)/P]$ の導来化となる．

□

いま定義した dg スタック $([M/P], \mathcal{R})$ には接復体というスキームの接空間を拡張した概念を定義することができる．

定義 & 命題 4.12 ([6])**.** 任意の点 $x \in [\mathrm{MC}(L_-)/P]$ とするとき，x における接複体とは，以下で与えられる k-ベクトル空間の $[-1, \infty]$-余複体である．

$$\mathcal{T}_{[M/P],x} := \{\cdots \to 0 \to \mathrm{Lie}(P) \to T_{M.x} \to \mathcal{L}^2|x \to \mathcal{L}^3|_x \to \cdots\}$$

ここで，$\mathrm{Lie}(P) \simeq \mathrm{Hom}_-(V, V), T_{M.x} \simeq \mathrm{Hom}_-(A \otimes V, V)$ となることに注意せよ．また，この複体の微分 d' は $d' = d + [\cdot, x]$ で与えられる．さらに，$H^i(\mathcal{T}_{[M/P],x}) = \mathrm{Ext}^{i+1}_{A-\mathrm{gr},-}(x, x)$ が任意の x について成立する．

注意 4.13. この命題により導来化したフィルター付き次数付き A 加群のモジュライスタックは滑らかになることがわかる．さらに，この導来スタックの切り下げによってフィルター付き次数付き A 加群のモジュライスタックが得られる．すなわち，1 で目的とした対象がここで一つ得られたことがわかる．

4.3 HN-フィルトレーションのモジュライスタックの埋め込み

この節では，HN-フィルトレーションのスタックが前の節で扱ってきたフィルター付き次数付き加群のモジュライスタックに埋め込めることを紹介する．そして，これを用いることで，HN-フィルトレーションのスタックの導来化を構成する．まずは，連接層の安定性と HN-フィルトレーションの定義について述べる．

定理 & 定義 4.14 ([4])**.** X を k 上の射影スキーム *(cf. [3, Chapter 2.4])* とし, $\mathcal{F}$ をその上の連接層とする．このとき，$\mathcal{F}$ が *pure* であるとは，任意の *0* でない部分連接層のサポートの次元が退化しないことをいう．ここで，層 $\mathcal{F}$ のサポートとは $\mathcal{F}_x := \lim_{x\in U} \mathcal{F} \neq 0$ であるような X の点 x 全体のことを言う．また，X 上の *pure* な連接層 $\mathcal{F}$ が豊富な直線束 L について *(*半*)* 安定であるとは, 任意の部分連接層 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ について

$$p(\mathcal{G}, L, t) \quad (\leq) \quad p(\mathcal{F}, L, t) \quad (t \gg 0)$$

が成立することをいう．ここで,

$$\chi(X, \mathcal{F}\otimes L^{\otimes t}) = \sum_{i=0}^{\dim(\mathrm{X})} \frac{\alpha_i}{i!}t^i, \quad p(\mathcal{F}, L, t) := \frac{\chi(X, \mathcal{F}\otimes L^{\otimes t})}{\alpha_i}$$

とする．さらに任意の *pure* な連接層 $\mathcal{F}$ について，フィルトレーション $0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_s = \mathcal{F}$ で，$\tilde{\mathcal{F}}_i := \mathcal{F}_{i+1}/\mathcal{F}_i$ が L に関する安定性で半安定になりかつ $p_i(t) := p(\tilde{\mathcal{F}}_i,\ L, t) > p(\tilde{\mathcal{F}}_{i+1}, L, t)$ となるようなものがただ一つ存在する．また，このとき，$(p_0(t), \cdots, p_{s-1}(t))$ を $\mathcal{F}$ の *HN-*タイプと言う.

定理 4.15. *[6]* 固定した *HN-*タイプをもつ連接層のモジュライスタック $\mathcal{M}_1$ について，ある次数付き代数 A のある次元ベクトルに関する次数付きフィルター付き加群のモジュライスタック $\mathcal{M}_2$ が存在して，$\mathcal{M}_1$ から $\mathcal{M}_2$ への開埋め込みが存在する．さらに，この開埋め込みの像は安定性の言葉を用いることにより *"*具体的に*"* 記述することができる.

定義 4.16. $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ は上記のようにしたとき，$\mathcal{M}_2$ の前の節で構成した導来化 $\tilde{\mathcal{M}}_2$ の $\mathcal{M}_1$ に制限したものを $\mathcal{M}_1$ の導来化と呼ぶ.

以下の定理はこの導来化が適切なものであると言うことを意味している.

定理 4.17 ([6])**.** $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_1$ とし $\mathcal{M}_2$ での対応する点を x とすれば，$H^i(\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{M}}_2, x}) \simeq \mathrm{Ext}^{i+1}_-(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ が成立する.

参考文献

[1] Kai Behrend, Ionut Ciocan-Fontanine, Junho Hwang, and Michael Rose. The derived moduli space of stable sheaves. *Algebra & Number Theory*, 8(4):781 – 812, 2014.

[2] Tomás L Gómez. Algebraic stacks. *Proceedings Mathematical Sciences*, 111(1):1–31, 2001.

[3] R Hartshorne. Algebraic geometry. *Graduate Texts in Mathematics*, 79, 1977.

[4] Daniel Huybrechts and Manfred Lehn. *The geometry of moduli spaces of sheaves*. Cambridge University Press, 2010.

[5] Géraud Laumon and Laurent Moret-Bailly. *Champs algébriques*, volume 39 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. Springer, Berlin, 2000.

[6] Yuki Mizuno. An explicit construction of derived moduli stacks of harder-narasimhan filtrations, 2021.

[7] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*.

有限交代多重ゼータ値の
パラメータを持つ重み付き和公式について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
安沢 拓真　Anzawa Takumi

2021/12/19

1　導入

$\mathbb{N}^r$ $(r \in \mathbb{N})$ の元を**指数**と呼ぶことにする。ここで指数 $\mathbf{k} := (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{N}^r$ で $k_r > 1$ を満たすものを取る。**多重ゼータ値**とは次で定義される実数値である:

$$\zeta(\mathbf{k}) := \zeta(k_1, \ldots, k_r) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{1}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}$$

ここで $k := k_1 + \cdots + k_r$ を $\mathbf{k}$ の**重さ**と言い $\mathrm{wt}\,\mathbf{k}$ もしくは $|\boldsymbol{k}|$ と書き、r を $\boldsymbol{k}$ の**深さ**と言い $\mathrm{dp}\,\mathbf{k}$ と書く。多重ゼータ値の重さ、深さと言ったりもする。$r = 1$ のときは Riemann のゼータ関数の正の整数点での特殊値になることに注意する。多重ゼータ値の起源は古く Euler により関係式

$$\sum_{i=2}^{k-1} \zeta(i, k-i) = \zeta(k)$$

が得られている。これは和公式と呼ばれる関係式 (c.f. [G])

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k \\ k_r \geq 2}} \zeta(k_1, \ldots, k_r) = \zeta(k).$$

の特別なケースである。現在では多重ゼータ値の研究は数論の域にはとどまらず例えば場の理論やファインマンダイアグラム、結び目理論 (c.f. [B1], [B2], [LM] など)、と結びついており他にもモチーフ論 (c.f. [T]) とも関連性が深い。

多重ゼータ値の反復積分表示を紹介する。そのために多重ポリログを定義する。

***Definition* 1.1.** $\boldsymbol{k} := (k_1, \ldots, k_r) \in \mathbb{Z}^r$ とする。このとき複素関数, **多重ポリログ** $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z) := \mathrm{Li}(\boldsymbol{k}; z) := \mathrm{Li}(\boldsymbol{k})$ を次で定める：

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z) := \sum_{0<m_1<\cdots<m_r} \frac{z^{m_r}}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}}.$$

$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z)$ は $z = 0$ を中心とする半径 1 の開円板上で絶対かつ広義一様に収束する。

***Remark* 1.2.** $k_r > 1$ のとき多重ポリログ $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z)$ は $z = 0$ を中心とする半径 1 の閉円板で収束するため $\lim_{z\to 1} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z) = \zeta(\boldsymbol{k})$ が成り立つ。

多重ポリログ $\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z)$ は $0<z<1$ のとき以下の**反復積分表示**と言われる表示を持つ:

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{k}}(z)=\int_{0<t_1<\cdots<t_k<z}\frac{dt_1}{1-t_1}\underbrace{\frac{dt_2}{t_2}\cdots\frac{dt_{k_r}}{t_{k_r}}}_{k_r-1\text{ 個}}\frac{dt_{k_r+1}}{1-t_{k_r+1}}\cdots\frac{dt_{k-k_1+1}}{1-t_{k-k_1+1}}\underbrace{\frac{dt_{k-k_1+2}}{t_{k-k_1+2}}\cdots\frac{dt_k}{t_k}}_{k_1-1\text{ 個}}.$$

但し $k:=\mathrm{wt}\,\boldsymbol{k}$ とする。特に $k_r>1$ ならば $z\to 1$ を取ることで次が得られる:

$$\zeta(\boldsymbol{k})=\int_{0<t_1<\cdots<t_k<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\underbrace{\frac{dt_2}{t_2}\cdots\frac{dt_{k_r}}{t_{k_r}}}_{k_r-1\text{ 個}}\frac{dt_{k_r+1}}{1-t_{k_r+1}}\cdots\frac{dt_{k-k_1+1}}{1-t_{k-k_1+1}}\underbrace{\frac{dt_{k-k_1+2}}{t_{k-k_1+2}}\cdots\frac{dt_k}{t_k}}_{k_1-1\text{ 個}}.$$

例えば指数として 2 を取ると

$$\zeta(2)=\int_{0<t_1<t_2<1}\frac{dt_1}{1-t_1}\frac{dt_2}{t_2}$$

が得られる。

***Definition* 1.3.** 各整数 $k\geq 0$ に対して $\mathbb{Q}$-線形空間 $\mathcal{Z}_k\subset\mathbb{R}$ を $\mathcal{Z}_0:=\mathbb{Q}$,

$$\mathcal{Z}_k:=\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k\\ r\geq 1,k_i\geq 1,k_r\geq 2}}\mathbb{Q}\cdot\zeta(k_1,\ldots,k_r),\ (k\geq 1)$$

により定める。また

$$\mathcal{Z}:=\sum_{k=0}^{\infty}\mathcal{Z}_k$$

と定める。

$\mathcal{Z}$ 上の全ての線形関係式は正規化複シャッフル関係式と呼ばれる関係式から導かれると予想されている。また $\mathcal{Z}$ は $\mathcal{Z}_k$ の直和で表されると予想されている。即ち $\mathcal{Z}$ 上の異なる重さの非自明な線形関係式は存在しないと予想されている。

さて、多重調和和と呼ばれる多重ゼータ値の部分和

$$H_M(k_1,\ldots,k_r):=\sum_{M>m_r>\cdots>m_1\geq 1}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}\ (M,\ r\in\mathbb{N},\ M>r,\ (k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{N}^r)$$

は 2000 年代に Hoffmann 氏や Zhao 氏らによって特に $M=p:$ 素数の場合について研究されていた。これを基に Kaneko, Zagier 氏の両氏は

$$\mathcal{A}=\left(\prod_{p:\mathrm{prime}}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)\Big/\left(\bigoplus_{p:\mathrm{prime}}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)$$

なる $\mathbb{Q}$-代数で値を取る有限多重ゼータ値を次で定義した。

***Definition* 1.4.** $(k_1,\ldots,k_r)\in\mathbb{N}^d$ とする。 **有限多重ゼータ値**とは

$$\zeta_{\mathcal{A}}(k_1,\ldots,k_r):=\left(\sum_{p>m_r>\cdots>m_1\geq 1}\frac{1}{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}}\right)_p$$

によって定まる $\mathcal{A}$ の元である。

***Definition* 1.5.** 各整数 $k \geq 0$ に対して $\mathbb{Q}$-線形空間 $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} \subset \mathcal{A}$ を $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},0} := \mathbb{Q}$,

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k} := \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_r=k \\ r\geq 1, k_i \geq 1}} \mathbb{Q} \cdot \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_r) \ (k \geq 1)$$

により定める。また

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{A}} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$$

と定める。

$\mathcal{Z}$ と同様に $\mathcal{Z}_{\mathcal{A}}$ は $\mathcal{Z}_{\mathcal{A},k}$ の直和で表されると予想されている。

多重ゼータ値と有限多重ゼータ値は形こそ似ているものの果たして有限多重ゼータ値が多重ゼータ値の有限類似になっているか見えてこない。それを敷衍しているのが次に紹介する金子-Zagier 予想である。

***Conjecture* 1.6** ([Kan], 主予想)**.** 次の $\mathbb{Q}$-代数同型が存在する*:*

$$\mathcal{Z}/\zeta(2)\mathcal{Z} \cong \mathcal{Z}_{\mathcal{A}}.$$

実際多くの多重ゼータ値の関係式や空間の構造の有限類似が見つかっており実際 [SW] では $1 \leq i \leq n \leq k-1$ なる k, n, $i \in \mathbb{Z}$ に対して

$$I_{k,n,i} = \{(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 1}^n \mid k_1 + \cdots + k_n = k, k_i \geq 2.\}$$

と定めたとき

$$\sum_{(k_1,\ldots,k_n)\in I_{k,n,i}} \zeta_{\mathcal{A}}(k_1, \ldots, k_n) = (-1)^{n-i} \left(\binom{k-1}{n-i} + (-1)^n \binom{k-1}{i-1} \right) \beta_k.$$

が成り立つことを示している。但し $\beta_k := \left(\frac{B_{p-k}}{k}\right)_{p>k} \in \mathcal{A}$ であり B_n はベルヌーイ数と呼ばれる有理数で (形式的な) べき級数展開

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n} t^n$$

により定まる。これは先で紹介した和公式の有限類似である。

多重ゼータ値のパラメータ付き重み付き和公式は [EW], [OEL] の着想をもとに門田氏 [Kad] によって考えられた。鎌野氏 [Kam] によってパラメータ付き重み付き和公式の有限類似が次によって与えられている。

***Theorem* 1.7** ([Kam], main theorem)**.** q_1, $q_2 \in \mathbb{N}$ を取る。また λ_1, λ_2, ξ_1, ξ_2 を変数とする。このとき $\mathcal{A}$ において以下が成り立つ*:*

$$\sum_{\substack{i_1,i_2,j_1,j_2\geq 0 \\ i_1+i_2=q_1 \\ j_1+j_2=q_2}} \left((-1)^{i_2+j_2} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} + (\lambda_1^{i_1} \xi_1^{j_1} + \lambda_2^{i_1} \xi_2^{j_1})(\lambda_1 + \lambda_2)^{i_2} (\xi_1 + \xi_2)^{j_2} \right) \times \sum_{\substack{\boldsymbol{k_1} \in S_{i_1,j_1} \\ \boldsymbol{k_2} \in S_{i_2,j_2}}} \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k_1}, \boldsymbol{k_2}) = (0)_p$$

ここで i, $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $S_{i,j} := \{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^{i+1} \mid |\boldsymbol{k}| = i + j + 1\}$ とする。

Theorem 1.7 を特殊化することで次の二つの系を得る。

***Corollary* 1.8** ([Kam], Corollary 2.3)**.** 二つの非負整数 $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$ に対して以下が成り立つ：

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in S_{q_1+1,q_2}} w(\boldsymbol{k})\, \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) = (-1)^{r-1}\, \zeta_{\mathcal{A}}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{q_1}, q_2+1).$$

ここで $\boldsymbol{k} := (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ に対して

$$w(\boldsymbol{k}) := \begin{cases} 0 & (k_1 > 1) \\ m & (k_1 = \cdots = k_m = 1,\ k_{m+1} > 1) \end{cases}$$

と定める。

***Corollary* 1.9** ([Kam], Corollary 2.5)**.** 非負整数 q_1 及び正の偶数 q_2 に対して

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in S_{q_1+1,q_2}} 2^{w(\boldsymbol{k})}\, \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{k}) = (0)_p$$

が成り立つ。

さて、有限多重ゼータ値を更に交代化した有限交代多重ゼータ値を紹介する。$\overline{\mathbb{N}} := \{\overline{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ と定め $\mathbb{D} := \mathbb{N} \cup \overline{\mathbb{N}}$ と定義する。$\mathbb{D}$ 上の符号 sgn を

$$\mathrm{sgn}(\alpha) := \begin{cases} 1 & \alpha \in \mathbb{N} \\ -1 & \alpha \in \overline{\mathbb{N}} \end{cases}$$

とする。ここで $\alpha \in \mathbb{N}$ に対して $\overline{\overline{\alpha}} := \alpha$ としたとき $\mathbb{D}$ 上の絶対値を

$$|\alpha| := \begin{cases} \alpha & (\alpha \in \mathbb{N}) \\ \overline{\alpha} & (\alpha \in \overline{\mathbb{N}}) \end{cases}$$

により定める。このとき $m \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{D}$ に対して $m^{\alpha} := m^{|\alpha|}$ と定義する。有限交代多重ゼータ値とは次で定義される。

***Definition* 1.10.** $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{D}^d$ とする。 **有限交代多重ゼータ値**とは

$$\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}) := \left(\sum_{p > m_r > \cdots > m_1 \geq 1} \frac{\mathrm{sgn}(\alpha_1)^{n_1} \cdots \mathrm{sgn}(\alpha_r)^{n_r}}{n_1^{\alpha_1} \cdots n_r^{\alpha_r}} \right)_p$$

によって定まる $\mathcal{A}$ の元である。

***Remark* 1.11.** $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}^r$ のとき有限多重ゼータ値になる。

今回の結果は Theorem 1.7 の結果の交代化にあたるのが次の定理である。

***Theorem* 1.12.** q_1, q_2, $q_3 \in \mathbb{N}$ を取り, λ_i, ξ_i, μ_i $(i = 1, 2)$ を独立変数とする。このとき $\mathcal{A}$ において次が成り立つ*:*

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i_1+i_2=q_1 \\ j_1+j_2=q_2 \\ k_1+k_2=q_3}} (-1)^{i_2+j_2+k_2} \lambda_1^{i_1} \lambda_2^{i_2} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \mu_1^{k_1} \mu_2^{k_2} \times \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha} \in S_{i_1,j_1,k_1} \\ \boldsymbol{\beta} \in S_{i_2,j_2,k_2}}} \mathrm{sgn}(\boldsymbol{\beta})\, \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \\ &+ \sum_{\substack{i_1+i_2=q_1 \\ j_1+j_2=q_2 \\ k_1+k_2=q_3}} (\lambda_1^{i_1} \xi_1^{j_1} \mu_1^{k_1} + \lambda_2^{i_1} \xi_2^{j_1} \mu_2^{k_1})(\lambda_1 + \lambda_2)^{i_2} (\xi_1 + \xi_2)^{j_2} (\mu_1 + \mu_2)^{k_2} \\ &\times \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha} \in S_{i_1,j_1,k_1} \\ \boldsymbol{\beta} \in S_{i_2,j_2,k_2}}} \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = (0)_p. \end{aligned}$$

ここで $i,\ j,\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $S_{i,j,k} := \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{D}^{i+j+1} \mid |\boldsymbol{\alpha}| = i+j+k+1\}$ とする。

Theorem 1.7 と同様に Theorem 1.12 を特殊化することで次の二つの系を得る。

***Corollary* 1.13.** $q_1,\ q_2,\ q_3 \in \mathbb{N}$ を取る。このとき次を得る。

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{q_1+1,q_2,q_3}} w_a(\boldsymbol{\alpha})\,\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}) =& (-1)^{q_3-1} \sum_{\mathbf{1} \in S_{q_1,q_2,0}} \zeta_{\mathcal{A}}(\mathbf{1}, q_3+1) \\ &- \sum_{k_1+k_2=q_3} \sum_{\boldsymbol{\beta} \in S_{q_1,q_2,k_2}} \zeta_{\mathcal{A}}(k_1+1, \boldsymbol{\beta}) + \zeta_{\mathcal{A}}(\overline{k_1+1}, \boldsymbol{\beta})\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{D}^n$ に対して

$$w_a(\boldsymbol{\alpha}) := \begin{cases} 0 & (|\alpha_1| \neq 1) \\ m & (|\alpha_1| = \cdots = |\alpha_m| = 1,\ |\alpha_{m+1}| > 1) \end{cases}$$

と定義する。

Proof. Theorem 1.12 に $(\lambda_1, \lambda_2, \xi_1, \xi_2, \mu_1, \mu_2) = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$ を代入すれば良い。 □

***Corollary* 1.14.** $q_1,\ q_2 \in \mathbb{N},\ q_3$ を正の偶数とする。このとき

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha} \in S_{q_1+1,q_2,q_3}} J_a(\boldsymbol{\alpha})\,\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{\substack{i_1+i_2=q_1 \\ j_1+j_2=q_2 \\ k_1+k_2=q_3}} (-1)^{i_2+j_2-1} \sum_{\substack{\alpha \in S_{i_1,j_1,k_1} \\ \beta \in S_{i_2,j_2,k_2}}} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\beta})\,\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$$

が成り立つ。ここで $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{D}^n$ に対して

$$J_a(\alpha) := \begin{cases} 1 + 2 + \cdots + 2^{w_a(\boldsymbol{\alpha})-1} & (w_a(\boldsymbol{\alpha}) \geq 1) \\ 0 & (w_a(\boldsymbol{\alpha}) = 0) \end{cases}$$

と定義する。

Proof. Theorem 1.12 に $(\lambda_1, \lambda_2, \xi_1, \xi_2, \mu_1, \mu_2) = (1, 1, 1, 1, -1, 1)$ を代入すれば良い。 □

次節以降で Theorem 1.12 の証明とその準備を行う。

2 証明の準備

有限交代多重ゼータ値を考えるために交代多重ポリログを次で定義する。

***Definition* 2.1.** $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{D}^r$ とする。このとき複素関数

$$\operatorname{Li}_{\boldsymbol{\alpha}}(z) = \operatorname{Li}(\boldsymbol{\alpha}, z) := \operatorname{Li}(\boldsymbol{\alpha}) := \sum_{n_r > \cdots > n_1 \geq 1} \frac{\operatorname{sgn}(\alpha_1)^{n_1} \cdots \operatorname{sgn}(\alpha_r)^{n_r}}{n_1^{\alpha_1} \cdots n_r^{\alpha_r}} z^{n_r}$$

を定める。これを**交代多重ポリログ**と言う。$\operatorname{Li}_{\boldsymbol{\alpha}}$ は $|z| < 1$ なる複素領域で定義される 複素関数である。

***Remark* 2.2.** $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{D}^r$ として $\iota_i := \operatorname{sgn}(\alpha_i),\ \eta_i := \prod_{j=1}^{i} \iota_j$ とする。$0 < z < 1$ のとき交代多重ポリログは以下の反復積分表示を持つ:

$$\operatorname{Li}(\boldsymbol{\alpha}; z) = \int_{0<t_1<\cdots<t_\alpha<z} \frac{dt_1}{\eta_d - t_1} \underbrace{\frac{dt_2}{t_2} \cdots \frac{dt_{\alpha_r}}{t_{\alpha_r}}}_{|\alpha_r|-1 \text{ 個}} \frac{dt_{\alpha_r+1}}{1 - t_{\alpha_r+1}} \cdots \frac{dt_{\alpha-\alpha_1+1}}{\eta_1 - t_{\alpha-\alpha_1+1}} \underbrace{\frac{dt_{\alpha-\alpha_1+2}}{t_{\alpha-\alpha_1+2}} \cdots \frac{dt_\alpha}{t_\alpha}}_{|\alpha_1|-1 \text{ 個}}$$

但し $\alpha := \operatorname{wt} \boldsymbol{\alpha}$ とした。

ここで作用素 $\mathfrak{L}_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}[[z]] \to \mathbb{Q}$ を

$$\mathfrak{L}_p\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^n\right) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k$$

と定める。任意の指数 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{D}^d$ に対して $\mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha}; z)$ を $\mathbb{Q}[[z]]$ の元として見ると

$$(\mathfrak{L}_p(\mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha}; z)))_p = \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathcal{A}$$

となる。

***Definition* 2.3.** $t_1,\ t_2 \in (0,1)$ に対して

$$\begin{aligned} L_1(t_1,t_2) &:= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{1-t} = \log\frac{1-t_1}{1-t_2} \\ L_0(t_1,t_2) &:= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{t} = \log\frac{t_2}{t_1} \\ L_{-1}(t_1,t_2) &:= \int_{t_1}^{t_2} \frac{-dt}{1+t} = \log\left(\frac{1+t_1}{1+t_2}\right) \end{aligned}$$

と定める。

証明には以下の補題を用いる

***Lemma* 2.4.** $s \in \mathbb{N}$, $i_l,\ j_l,\ k_l \in \mathbb{N}$ $(1 \le l \le s)$, $0 < z < 1$ を取る。このとき

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i_1!\cdots i_s! j_1 \cdots j_s! k_1! \cdots k_s!} \sum_{\substack{\eta_l \in \{\pm 1\} \\ 1 \le l \le s}} \int_{0<t_1<\cdots<t_s<z} L_1^{i_1}(t_1,t_2)\cdots L_1^{i_s}(t_s,z) \\ &L_{-1}^{j_1}(t_1,t_2)\cdots L_{-1}^{j_s}(t_s,z) L_0^{k_1}(t_1,t_2)\cdots L_0^{k_s}(t_s,z) \frac{dt_1}{\eta_1 - t_1}\cdots\frac{dt_s}{\eta_s - t_s} \\ &= \sum_{(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s)\in S} \mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s; z) \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで $S := \prod_{1 \le l \le s} S_{i_l, j_l, k_l}$ とする。

***Lemma* 2.5.** $s,\ t \in \mathbb{N}$ として指数 $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_1,\ldots,\alpha_s) \in \mathbb{D}^s$, $\boldsymbol{\beta} := (\beta_1,\ldots,\beta_t) \in \mathbb{D}^t$ を取る。このとき

$$(\mathfrak{L}_p(\mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha})\,\mathrm{Li}(\boldsymbol{\beta})))_p = \mathrm{sgn}(\boldsymbol{\beta})(-1)^{\mathrm{wt}\,\boldsymbol{\beta}}\,\zeta_{\mathcal{A}}(\alpha_1,\ldots,\alpha_s,\beta_t,\ldots,\beta_1)$$

が成り立つ。

3　主結果の証明

$0 < z < 1$ に対して

$$\begin{aligned} N(z) =& \frac{1}{q_1!q_2!q_3!} \sum_{\eta_1,\eta_2\in\{\pm1\}} \int_{\substack{0<s<z \\ 0<t<z}} (\lambda_1 L_1(s,z) + \lambda_2 L_1(t,z))^{q_1} (\xi_1 L_{-1}(s,z) + \xi_2 L_{-1}(t,z))^{q_2} \\ & (\mu_1 L_0(s,z) + \mu_2 L_0(t,z))^{q_3} \frac{ds}{\eta_1 - s}\frac{dt}{\eta_2 - t} \end{aligned}$$

と定める。このとき二項展開より

$$
\begin{aligned}
N(z) = &\sum_{\eta_1,\eta_2\in\{\pm1\}} \sum_{\substack{i_1+i_2=q_1\\ j_1+j_2=q_2\\ k_1+k_2=q_3}} \frac{1}{i_1!i_2!}\frac{1}{j_1!j_2!}\frac{1}{k_1!k_2!} \\
&\times \int_{0<s<z} \lambda_1^{i_1}\xi_1^{j_1}\mu_1^{k_1} L_1(s,z)^{i_1} L_{-1}(s,z)^{j_1} L_0(s,z)^{k_1} \frac{ds}{\eta_1 - s} \\
&\times \int_{0<t<z} \lambda_2^{i_2}\xi_2^{j_2}\mu_2^{k_2} L_1(t,z)^{i_2} L_{-1}(t,z)^{j_2} L_0(t,z)^{k_2} \frac{dt}{\eta_2 - t} \\
= &\sum_{\substack{i_1+i_2=q_1\\ j_1+j_2=q_2\\ k_1+k_2=q_3}} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\xi_1^{j_1}\xi_2^{j_2}\mu_1^{k_1}\mu_2^{k_2} \\
&\times \left(\frac{1}{i_1!j_1!k_1!}\int_{0<s<z} \lambda_1^{i_1}\xi_1^{j_1}\mu_1^{k_1} L_1(s,z)^{i_1} L_{-1}(s,z)^{j_1} L_0(s,z)^{k_1} \left(\frac{ds}{1-s} + \frac{-ds}{1+s}\right)\right) \\
&\times \left(\frac{1}{i_2!j_2!k_2!}\int_{0<t<z} \lambda_2^{i_2}\xi_2^{j_2}\mu_2^{k_2} L_1(t,z)^{i_2} L_{-1}(t,z)^{j_2} L_0(t,z)^{k_2} \left(\frac{dt}{1-t} + \frac{-dt}{1+t}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Lemma 2.4 の $s=1$ の場合より

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{i_1+i_2=q_1\\ j_1+j_2=q_2\\ k_1+k_2=q_3}} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\xi_1^{j_1}\xi_2^{j_2}\mu_1^{k_1}\mu_2^{k_2} \left(\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in S_{i_1,j_1,k_1}} \mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha};z)\right)\left(\sum_{\boldsymbol{\beta}\in S_{i_2,j_2,k_2}} \mathrm{Li}(\boldsymbol{\beta};z)\right) \\
&= \sum_{\substack{i_1+i_2=q_1\\ j_1+j_2=q_2\\ k_1+k_2=q_3}} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\xi_1^{j_1}\xi_2^{j_2}\mu_1^{k_1}\mu_2^{k_2} \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in S_{i_1,j_1,k_1}\\ \boldsymbol{\beta}\in S_{i_2,j_2,k_2}}} \mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha};z)\,\mathrm{Li}(\boldsymbol{\beta};z)
\end{aligned}
$$

上の式より $N(z) \in \mathbb{Q}[[z]][\lambda_1,\lambda_2,\xi_1,\xi_2,\mu_1,\mu_2]$ とみなせるので $\mathfrak{L}_p$ を任意の素数 p で作用させれば Lemma 2.5 より

$$
\begin{aligned}
(\mathfrak{L}_p\,(N(z)))_p &= \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=q_1\\ j_1+j_2+j_3=q_2\\ k_1+k_2+k_3=q_3}} \lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\xi_1^{j_1}\xi_2^{j_2}\mu_1^{k_1}\mu_2^{k_2} \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in S_{i_1,j_1,k_1}\\ \boldsymbol{\beta}\in S_{i_2,j_2,k_2}}} (\mathfrak{L}_p\,(\mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha};z)\,\mathrm{Li}(\boldsymbol{\beta};z)))_p \\
&= \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=q_1\\ j_1+j_2+j_3=q_2\\ k_1+k_2+k_3=q_3}} (-1)^{i_2+j_2+k_2+1}\lambda_1^{i_1}\lambda_2^{i_2}\xi_1^{j_1}\xi_2^{j_2}\mu_1^{k_1}\mu_2^{k_2} \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in S_{i_1,j_1,k_1}\\ \boldsymbol{\beta}\in S_{i_2,j_2,k_2}}} \mathrm{sgn}(\boldsymbol{\beta})\,\zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})
\end{aligned}
$$

となる。他方 $N(z)$ 式内の積分範囲を T とすると T は合併 $\bigsqcup_{j=1}^{3} T_j$ で表される。ここで

$$
\begin{aligned}
T_1 &:= \{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<s<t<z\} \\
T_2 &:= \{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<t<s<z\} \\
T_3 &:= \{(s,t)\in\mathbb{R}^2 \mid 0<s=t<z\}
\end{aligned}
$$

である。いま $N_j(z)$ を $N(z)$ の式内の積分範囲を T_j に取り換えたものとする。$(1\le j\le 3)$ このとき T_3 は測度 0 より $N_3(z)=0$ が成り立つことに注意する。

便宜のためここでは $N_1(z)$ のみを計算する。

$$
\lambda_1 L_1(s,z) + \lambda_2 L_1(t,z) = \lambda_1 L_1(s,t) + (\lambda_1+\lambda_2) L_1(t,z)
$$

が成り立つことに注意すると (L_1, L_{-1} も同様) 二項展開より

$$\begin{aligned}
N_1(z) =& \frac{1}{q_1!q_2!q_3!} \sum_{\eta_1,\eta_2\in\{\pm 1\}} \int_{0<s<t<z} (\lambda_1 L_1(s,z) + \lambda_2 L_1(t,z))^{q_1} (\xi_1 L_{-1}(s,z) + \xi_2 L_{-1}(t,z))^{q_2} \\
& (\mu_1 L_0(s,z) + \mu_2 L_0(t,z))^{q_3} \frac{ds}{\eta_1 - s} \frac{dt}{\eta_2 - t} \\
=& \frac{1}{q_1!q_2!q_3!} \sum_{\eta_1,\eta_2\in\{\pm 1\}} \int_{0<s<t<z} (\lambda_1 L_1(s,t) + (\lambda_1+\lambda_2) L_1(t,z))^{q_1} \\
& (\xi_1 L_{-1}(s,t) + (\xi_1+\xi_2) L_{-1}(t,z))^{q_2} (\mu_1 L_0(s,t) + (\mu_1+\mu_2) L_0(t,z))^{q_3} \frac{ds}{\eta_1 - s} \frac{dt}{\eta_2 - t} \\
=& \sum_{\eta_1,\eta_2\in\{\pm 1\}} \sum_{\substack{i_1+i_2=q_1 \\ j_1+j_2=q_2 \\ k_1+k_2=q_3}} \frac{\lambda_1^{i_1}(\lambda_1+\lambda_2)^{i_2} \xi_1^{j_1}(\xi_1+\xi_2)^{j_2} \mu_1^{k_1}(\mu_1+\mu_2)^{k_2}}{i_1!i_2!j_1!j_2!k_1!k_2!} \\
& \int_{0<s<t<z} L_1(s,t)^{i_1} L_1(t,z)^{i_2} L_{-1}(s,t)^{j_1} L_{-1}(t,z)^{j_2} L_0(s,t)^{k_1} L_0(t,z)^{k_2} \frac{ds}{\eta_1 - s} \frac{dt}{\eta_2 - t}
\end{aligned}$$

Lemma 2.4 の $s = 2$ の場合より

$$= \lambda_1^{i_1}(\lambda_1+\lambda_2)^{i_2} \xi_1^{j_1}(\xi_1+\xi_2)^{j_2} \mu_1^{k_1}(\mu_1+\mu_2)^{k_2} \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in S_{i_1,j_1,k_1} \\ \boldsymbol{\beta}\in S_{i_2,j_2,k_2}}} \mathrm{Li}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$$

を得る。上の式より $N_1(z) \in \mathbb{Q}[[z]][\lambda_1,\lambda_2,\xi_1,\xi_2,\mu_1,\mu_2]$ とみなせるので $\mathfrak{L}_p$ を任意の素数 p で作用させると

$$(\mathfrak{L}_p\, N_1(z))_p = \sum_{\substack{i_1+i_2=q_1 \\ j_1+j_2=q_2 \\ k_1+k_2=q_3}} \lambda_1^{i_1}(\lambda_1+\lambda_2)^{i_2} \xi_1^{j_1}(\xi_1+\xi_2)^{j_2} \mu_1^{k_1}(\mu_1+\mu_2)^{k_2} \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in S_{i_1,j_1,k_1} \\ \boldsymbol{\beta}\in S_{i_2,j_2,k_2}}} \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \qquad (1)$$

となる。同様に $(\mathfrak{L}_p\, N_2(z))_p$ は

$$(\mathfrak{L}_p\, N_2(z))_p = \sum_{\substack{i_1+i_2=q_1 \\ j_1+j_2=q_2 \\ k_1+k_2=q_3}} \lambda_2^{i_1}(\lambda_1+\lambda_2)^{i_2} \xi_2^{j_1}(\xi_1+\xi_2)^{j_2} \mu_2^{k_1}(\mu_1+\mu_2)^{k_2} \times \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in S_{i_1,j_1,k_1} \\ \boldsymbol{\beta}\in S_{i_2,j_2,k_2}}} \zeta_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \qquad (2)$$

と計算できるため (1) と (2) より Theorem 1.12 の式の右辺を得る。

□

参考文献

[B1] D. J. Broadhurst, *On the enumeration of irreducible k-fold Euler sums and their roles in knot theory and field theory*, preprint, arXiv:hep-th/9604128.

[B2] D. J. Broadhurst, *Conjectured enumeration of irreducible multiple zeta values, from knots and Feynman diagrams*, preprint, arXiv:hep-th/9612012.

[EW] M. Eie, C.-H. Wei, *A short proof for the sum formula and its generalization*, Arch. Math. 91, 330–338 (2008)

[G] A. Granville, *A decomposition of Riemann's zeta-function*, Analytic number theory, Kyoto, 1996, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 247, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 95-101, (1997)

[Kad] S. Kadota, *Certain weighted sum formulas for multiple zeta values with some parameters*, Comment. Math. Univ. St. Pauli 66, 1–2, 1-13, (2017)

[Kam] K. Kamano, *Weighted sum formulas for finite multiple zeta values*, J. Number Theory 192, 168–180 (2018)

[Kan] 金子 昌信, 「有限多重ゼータ値」, RIMS Kokyuroku Bessatsu B68, 175–190 (2017)

[LM] T.-Q.-T. Le, J. Murakami, *Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions*, Topology Appl, 62, 2, 193-206, (1995)

[OEL] Y.L. Ong, M.Eie, W.-C. Liaw, *On generalizations of weighted sum formulas of multiple zeta values*, Int. J. Number Theory 9, no. 5, 1185-1198, (2013)

[SW] S. Saito, N. Wakabayashi, *Sum formula for finite multiple zeta values*, J. Math. Soc. Japan. 67, 3, 1069-107, (2015)

[T] T. Terasoma, *Mixed Tate motives and multiple zeta values*, Invent. Math. 149, 2, 339-369, (2002)

surreal number 入門

北陸先端科学技術大学院大学 先端科学技術研究科 博士前期課程 先端科学技術専攻 情報科学系
中村 悠人 (Yuto Nakamura)

概要

真クラスをなす可換体構造の例としてsurreal numberと呼ばれるものが知られている。その構成方法としてconwayの構成というものがあり、このconwayの構成及びsurreal number上の加法、乗法の定義には再帰的な定義が用いられている。しかしこれらの再帰的定義の正当性を集合論の言葉で検証したものは先行文献には見当たらない。今回の講演では、conwayの構成及びsurreal number上の加法、乗法を集合論の言葉で再定式化し、これを用いて真クラスをなす可換体構造を構成する。

§1 Introduction

◆代数学でよく知られる可換体とは
集合Rと二つの2項演算
$+ : R \times R \to R$
$\cdot : R \times R \to R$
の組$(R, +, \cdot)$であって、
1.$(R, +)$は0を加法単位元とするアーベル群
2.ある$1 \in R$があって$\forall x \in R \quad 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$
3.$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
4.$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
5.$x \cdot y = y \cdot x$
6.$\forall x \neq 0 \ \exists y \ x \cdot y = y \cdot x = 1$
を満たすものである。
しかしこれら6つの公理を満たしているにも関わらず「体にはならない」場合が存在する。
それはすなわちRが集合ではなく真クラスであるような場合である。
このような例として、例としてsurreal numberと呼ばれるものが知られている。
今回の講演ではsurreal numberによる真クラスをなす可換体構造の構成について、
先行文献の記述のギャップを埋めつつ解説する。

§2 Surreal numberのインフォーマルな定義と簡単な例

◆まずはインフォーマルな形でsurreal numberを定義し、簡単な例をいくつか見ていく。
surreal number は以下のようにして再帰的に定義される。
definition(インフォーマル)
surreal number xとは、すでに定義されたsurreal numberの集合X_LとX_Rからなる
タプル$\langle X_L | X_R \rangle$であって、
$\forall x_L \in X_L \forall x_R \in X_R, x_R \not\leq x_L$
が成立しているものである。
ここでX_Lを左側集合、X_Rを右側集合と呼ぶ。

ここで、surreal number上の大小関係$\leq$については何ら定義されていないことに
気付くと思う。しかしこの時点でsurreal numberの例が一つ見いだせる。
それは$\langle \emptyset | \emptyset \rangle$である。
実際、$\leq$の内容如何に関わらず、
$\forall x_L \in \emptyset \forall x_R \in \emptyset, x_R \not\leq x_L$
は成立しているからである。
以下、特に混同の恐れがない限り$\langle \emptyset | \emptyset \rangle$のことを$\langle | \rangle$もしくは0と表記する。

◆surreal number上の大小関係も再帰的に定義される。

definition(インフォーマル)

surreal number $x=\langle X_L|X_R\rangle, y=\langle Y_L|Y_R\rangle$に対して、$x\leq y$であるとを
$\forall x_L\in X_L, y\not\leq x_L\wedge\forall y_R\in Y_R, y_R\not\leq x$
が成り立つことと定める。

この定義から、まず$\langle|\rangle\ \leq\ \langle|\rangle$、すなわち$0\leq 0$が分かる。
実際、
$\forall x_L\in\emptyset, 0\not\leq x_L\wedge\forall y_R\in\emptyset, y_R\not\leq 0$
が成立しているからである。

◆上記で定義されたsurreal number 0を使って新たなタプル
$\langle\{0\}|\emptyset\rangle, \langle\emptyset|\{0\}\rangle, \langle\{0\}|\{0\}\rangle$
を考えることができるが、これらのうちsurreal numberであるのは前2つのみである。
このことは以下のようにしてわかる。

$\langle\{0\}|\emptyset\rangle$がsurreal numberであること：
$\because\forall x_L\in\{0\}\forall x_R\in\emptyset, x_R\not\leq x_L$が成立していることから。
$\langle\emptyset|\{0\}\rangle$がsurreal numberであること：
$\because\forall x_L\in\emptyset\forall x_R\in\{0\}, x_R\not\leq x_L$が成立していることから。
$\langle\{0\}|\{0\}\rangle$がsurreal numberではないこと：
$\because$もしsurreal numberなら、
$\forall x_L\in\{0\}\forall x_R\in\{0\}, x_R\not\leq x_L$が成立しなければならないため
$0\not\leq 0$ということになるが、すでに$0\leq 0$を示しているため矛盾。
notation
以下、$\langle\emptyset|\{0\}\rangle$などを$\langle|0\rangle$といったように略記する。

◆新たに定義されたsurreal numberたちについても大小関係を知ることができる。
$0\leq\langle 0|\rangle$：
$\because\forall x_L\in\emptyset, 0\not\leq x_L\wedge\forall y_R\in\emptyset, y_R\not\leq 0$が成立していることから。
$\langle 0|\rangle\not\leq 0$：
$\because\exists x_L\in\{0\}, x_L\leq 0\vee\exists y_R\in\emptyset, y_R\leq\langle 0|\rangle$
が成り立っていることが$0\leq 0$より分かる。
$\langle 0|\rangle\leq\langle 0|\rangle$：
$\because\forall x_L\in\{0\}, \langle 0|\rangle\not\leq x_L\wedge\forall y_R\in\emptyset, y_R\not\leq\langle 0|\rangle$
が成り立っていることが$\langle 0|\rangle\not\leq 0$より分かる。
同様のやり方で
$\langle|0\rangle\leq 0, 0\not\leq\langle|0\rangle, \langle|0\rangle\leq\langle|0\rangle, \langle|0\rangle\leq\langle 0|\rangle, \langle 0|\rangle\not\leq\langle|0\rangle$を示すことができる。

notation
$\langle 0|\rangle$のことを1と、$\langle|0\rangle$のことを-1と書く。
$x\leq y\wedge y\not\leq x$のことを$x<y$と書く。
$x\leq y\wedge y\leq x$のことを$x\sim y$と書く。
$x\leq y$や$x<y$の代わりに$y\geq x, y>x$などと書くことがある。

remark
$\langle -1|1\rangle$はsurreal numberでありかつ$\langle -1|1\rangle\sim 0$が成り立つ。
つまり$x\leq y$かつ$y\leq x$でも$x=y$とは限らない。
(但し$\sim$が"同値関係"になっていることは後に示す。)
$\because 1\not\leq -1$であることから$\langle -1|1\rangle$がsurreal numberであることはわかる。
また、
$\forall x_L\in\{-1\}, 0\not\leq x_L\wedge\forall y_R\in\emptyset, y_R\not\leq\langle -1|1\rangle$
が成立しているため、$\langle -1|1\rangle\leq 0$である。
さらに、
$\forall x_L\in\emptyset, \not\leq\langle -1|1\rangle\not\leq x_L\wedge\forall y_R\in\{1\}, y_R\not\leq 0$
であるため$0\leq\langle -1|1\rangle$も言える。

§3 定義のフォーマルな正当化

◆§2ではsurreal numberを再帰で定義したが、
これをフォーマルに正当化するには整礎クラス上の超限再帰を用いる。

まずはsurreal numberよりも条件の緩いpseudo numberという概念を定義する。

definition
各順序数$\xi \in ON$ に対して集合PN_ξを以下のようにしてON上の超限再帰で定める。
・$PN_0 = \{\langle|\rangle\}$
・$PN_\beta = (\bigcup_{\xi<\beta} PN_\xi) \bigcup \{\langle X_L|X_R\rangle | X_L, X_R \subset \bigcup_{\xi<\beta} PN_\xi\}$ $(\beta > 0)$
クラス$\bigcup_{\xi\in ON} PN_\xi$を$PN$と書き、$PN$の元をpseudo numberと呼ぶ。

definition
$x \in PN$に対して順序数$\mathrm{bir}(x)$を
$\mathrm{bir}(x) = \min\{\beta \in ON | x \in PN_\beta\}$
で定義する。$\mathrm{bir}(x)$のことをxのbirthdayと呼ぶ。

◆次に、pseudo number上に大小関係を定める。

definition
ON^2に整列順序$\prec$を辞書式順序、すなわち
$(a,b) \prec (c,d) \Leftrightarrow (a,c) \vee [a = c \wedge b < d]$
によって定める。無限基数κをfixして各$(\xi_1, \xi_2) \in \kappa^2$に対して
集合$Ord^\kappa_{(\xi_1,\xi_2)}$を以下のように整礎集合$(\kappa^2, \prec)$上の超限再帰によって定める。
・$Ord^\kappa_{(0,0)} = \{(0,0)\}$
・$Ord^\kappa_{(\xi_1,\xi_2)} = (\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)} Ord^\kappa_{(\alpha,\beta)}) \bigcup$
$\{(x,y) \in PN^2_{\max(\mathrm{bir}(x),\mathrm{bir}(y))} |$
$(\mathrm{bir}(x), \mathrm{bir}(y)) \preceq (\xi_1, \xi_2)$
$\wedge \forall x_L \in X_L [\exists y_L \in Y_L (x_L, y_L) \in \bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)} Ord^\kappa_{(\alpha,\beta)} \vee \exists x_{LR} \in X_{LR} (x_{LR}, y) \in \bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)} Ord^\kappa_{(\alpha,\beta)}]$
$\wedge \forall y_R \in Y_R [\exists y_{RL} \in Y_{RL} (x, y_L) \in \bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)} Ord^\kappa_{(\alpha,\beta)} \vee \exists x_R \in X_R (x_R, y_R) \in \bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)} Ord^\kappa_{(\alpha,\beta)}]\}$
$((\xi_1, \xi_2) \succ (0,0))$
ただし、x_Lの右側集合をX_{LR}と書くといった表記法をしている
$Ord^\kappa = \bigcup_{(\xi_1,\xi_2)\in ON^2} Ord^\kappa_{(\xi_1,\xi_2)}, Ord = \bigcup_\kappa Ord^\kappa$と定め、
$x, y \in PN$に対して$x \leq y$であることを$(x,y) \in Ord$であることと定める。

◆pseudo numberとその上での大小関係を使ってsurreal numberの定義を行う。

definition
各順序数$\xi \in ON$ に対して集合NO_ξを以下のようにしてON上の超限再帰で定める。
・$NO_0 = \{\langle|\rangle\}$
・$NO_\beta = (\bigcup_{\xi<\beta} NO_\xi) \bigcup \{\langle X_L|X_R\rangle | X_L, X_R \subset \bigcup_{\xi<\beta} NO_\xi \wedge \forall x_L \in X_L \forall x_R \in X_R, x_R \not\leq x_L\}$
$(\beta > 0)$
クラス$\bigcup_{\xi\in ON} NO_\xi$を$NO$と書き、$NO$の元をsurreal numberと呼ぶ。

remark
NO_βを定義する箇所で出てきている$\not\leq$はpseudo numberにおける大小関係の記号である。
先にpseudo number及びその大小関係を定義しているからNO_β
の再帰的定義ができているというところがポイントである。

◆次にNOが真クラスになることをみる。

definition
各順序数ξについてpseudo number s_ξを以下のように超限再帰で定める
・$s_0 = \langle|\rangle = 0$
・$s_{\beta+1} = \langle s_\beta|\rangle$
・$s_\gamma = \langle \bigcup_{\beta<\gamma}\{s_\beta\}|\rangle$ (γ :極限順序数)

proposition
$\xi \in ON$について、$s_\xi \in NO$であり、$\mathrm{bir}(s_\xi) = \xi$である。
∵ξについての帰納法で示すことができる。
・$\xi = 0$のとき、$s_0 = 0$なので正しい。
・$\xi = \beta + 1$の形の時
$s_{\beta+1} = \langle s_\beta|\rangle$であって、帰納法の仮定から$s_\beta \in NO_\beta$でかつ$\mathrm{bir}(s_\beta) = \beta$であるから、
$PN_{\beta+1}$の定義から$s_{\beta+1} \in PN_{\beta+1}$である。

また、$\forall x_L \in \{s_\beta\} \forall x_R \in \emptyset, x_R \not\leq x_L$であるため、$s_{\beta+1} \in NO_{\beta+1}$である。
$s_{\beta+1} \in PN_\beta$を仮定すると、$\mathrm{bir}(s_\beta) < \beta$となって矛盾してしまうため、
$\mathrm{bir}(s_{\beta+1}) = \beta + 1$も言える。
・ξが極限順序数の時
$s_\xi = \langle \bigcup_{\beta<\xi} \{s_\beta\} | \rangle$
$\bigcup_{\beta<\xi} \{s_\beta\} \subset \bigcup_{\beta<\xi} NO_\beta$であり、 $\forall x_L \in \bigcup_{\beta<\xi} \{s_\beta\} \forall x_R \in \emptyset, x_R \not\leq x_L$であるため、$s_\xi \in NO_\xi$である。
また、ある$\gamma < \xi$について$s_x i \in PN_\gamma$と仮定すると
$\forall x \in \bigcup_{\beta<\xi} \{s_\beta\}, \mathrm{bir}(x) < \gamma$となるが、$\xi$は極限順序数なので
$\gamma < \gamma + 1 < \xi$だから$\mathrm{bir}(s_{\gamma+1}) = \gamma + 1$であることに反してしまう。

corollary
相異なる順序数α, βについて$s_\alpha \neq s_\beta$
$\because \mathrm{bir}(\alpha) = \alpha \neq \beta = \mathrm{bir}(\beta)$から明らか。

theorem
NOは真クラスである。 $\because NO$を集合と仮定すると
$\forall x \in NO \exists! y, y = \mathrm{bir}(x)$であることと、各$\xi \in ON$に対し$\mathrm{bir}(s_\xi) = \xi$であることから置換公理より
$ON = \{y | \exists x \in NO y = \mathrm{bir}(x)\}$
が集合になってしまうので矛盾する。

◆証明は省略するが、surreal number 上の関係$\sim$には同値関係の性質が成り立つ。
また、$\leq$については反射律と推移律が成り立ち、かつ
任意のsurreal numberx, yについて$x \leq y$か$y \leq x$の少なくとも一方が成り立つ。

proposition
$x \in NO$であるとする。
$x \leq x$、したがって$x \sim x$が成り立つ。
proposition
$x, y \in NO$について、
$x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$
proposition
$x, y, z \in NO$について、
$x \sim y \wedge y \sim z$ならば$x \sim z$
proposition
$x, y, z \in NO$について、
$x \leq y \wedge y \leq z$ならば$x \leq z$
proposition
$x, y \in NO$について、
$x \not\leq y$ならば$y \leq x$

§4 足し算と掛け算

◆surreal number上の足し算と掛け算について、ここではインフォーマルな形での定義と
フォーマルな形での定義とを与え、基本的な性質を紹介する。
足し算や掛け算といった演算も再帰を用いて定義されるが、フォーマルな正当化をするには§3のような
整礎クラス上の超限再帰を使う。

definition(インフォーマル)
$x, y \in NO$に対して、$x + y$は再帰的に
$x + y = \langle X_L + y \bigcup x + Y_L | X_R + y \bigcup x + Y_R \rangle$
で定められる。
ただし、集合$X_L + y$などは
$X_L + y = \{z | \exists x_L \in X_L \, z = x_L + y\}$ などとして定められる。

example
$0 + 0 = \langle \emptyset + 0 \bigcup 0 + \emptyset | \emptyset + 0 \bigcup 0 + \emptyset \rangle = \langle \emptyset | \emptyset \rangle = 0$
$0 + 1 = \langle \emptyset + 1 \bigcup 0 + 0 | \emptyset + 1 \bigcup 0 + \emptyset \rangle = \langle 0 | \emptyset \rangle = 1$
$0 + (-1) = \langle \emptyset + (-1) \bigcup 0 + \emptyset | \emptyset + (-1) \bigcup 0 + 0 \rangle = \langle | 0 \rangle = -1$
$1 + (-1) = \langle 0 + (-1) \bigcup 1 + \emptyset | \emptyset + (-1) \bigcup 1 + 0 \rangle = \langle -1 | 1 \rangle \sim 0$

フォーマルに定義するには以下のようにする。

definition(フォーマル)
無限基数κをfixして各$(\xi_1,\xi_2)\in\kappa^2$に対して
集合$Ad^\kappa_{(\xi_1,\xi_2)}$を以下のように整礎集合$(\kappa^2,\prec)$上の超限再帰によって定める。
・$Ad^\kappa_{(0,0)}=\{(0,0,0)\}$
・$Ad^\kappa_{(\xi_1,\xi_2)}=(\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Ad^\kappa_{(\alpha,\beta)})\bigcup$
$\{(x,y,\langle X_L+y\bigcup x+Y_L|X_R+y\bigcup x+Y_R\rangle)|x,y\in NO$
$\wedge(\mathrm{bir}(x),\mathrm{bir}(y))\preceq(\xi_1,\xi_2)$
$\wedge X_L+y=\{a|\exists x_L\in X_L,(x_L,y,a)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Ad^\kappa_{(\alpha,\beta)}\}$
$\wedge x+Y_L=\{a|\exists y_L\in Y_L,(x,y_L,a)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Ad^\kappa_{(\alpha,\beta)}\}$
$\wedge X_R+y=\{a|\exists x_R\in X_R,(x_R,y,a)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Ad^\kappa_{(\alpha,\beta)}\}$
$\wedge x+Y_R=\{a|\exists y_R\in Y_R,(x,y_R,a)\in\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Ad^\kappa_{(\alpha,\beta)}\}\}$
$Ad^\kappa=\bigcup_{(\xi_1,\xi_2)\in ON^2}Ad^\kappa_{(\xi_1,\xi_2)},Ad=\bigcup_\kappa Ad^\kappa$と定め、
$x,y,z\in NO$に対して$x+y=z$であることを$(x,y,z)\in Ad$であることと定める。

◆surreal numberの足し算について以下の性質が成り立つ。証明は省略する。

proposition
$x,y\in NO$に対して、
$x+y\sim y+x$

proposition
$x,y,z\in NO$に対して、
$(x+y)+z\sim x+(y+z)$

proposition
以下が成り立つ。
任意の$x\in NO$に対して、$x+0\sim x$
任意の$x\in NO$に対してある$-x\in NO$があって$x+(-x)\sim 0$
$x=\langle X_L|X_R\rangle$なら$-x\sim\langle -X_R|-X_L\rangle$

proposition
$x,y,x',y'\in NO$に対して、
$x\sim x'\wedge y\sim y'\Rightarrow x+x'\sim y+y'$

definition(インフォーマル)
$x,y\in NO$に対して、$x\cdot y$は再帰的に
$x\cdot y=\langle X_L\cdot y+x\cdot Y_L-X_L\cdot Y_L\bigcup X_R\cdot y+x\cdot Y_R-X_R\cdot Y_R|$
$X_L\cdot y+x\cdot Y_R-X_L\cdot Y_R\bigcup X_R\cdot y+x\cdot Y_L-X_R\cdot Y_L\rangle$
で定められる。
ただし、集合$X_L\cdot y+x\cdot Y_L-X_L\cdot Y_L$などは
$X_L\cdot y+x\cdot Y_L-X_L\cdot Y_L=\{(a+b)-c|$
$\exists x_L\in X_L\exists y_L\in Y_L\,a=x_L\cdot y\wedge b=x\cdot y_L\wedge c=x_L\cdot y_L\}$などとして定められる。

フォーマルに定義するには以下のようにする。

definition(フォーマル)
無限基数κをfixして各$(\xi_1,\xi_2)\in\kappa^2$に対して
集合$Mul^\kappa_{(\xi_1,\xi_2)}$を以下のように整礎集合$(\kappa^2,\prec)$上の超限再帰によって定める。
・$Mul^\kappa_{(0,0)}=\{(0,0,0)\}$
・$Mul^\kappa_{(\xi_1,\xi_2)}=(\bigcup_{(\alpha,\beta)\prec(\xi_1,\xi_2)}Mul^\kappa_{(\alpha,\beta)})\bigcup$
$\{(x,y,\langle X_L\cdot y+x\cdot Y_L-X_L\cdot Y_L\bigcup X_R\cdot y+x\cdot Y_R-X_R\cdot Y_R|$
$\quad X_L\cdot y+x\cdot Y_R-X_L\cdot Y_R\bigcup X_R\cdot y+x\cdot Y_L-X_R\cdot Y_L\rangle)\quad|x,y\in NO$
$\wedge(\mathrm{bir}(x),\mathrm{bir}(y))\preceq(\xi_1,\xi_2)$

$\wedge X_L \cdot y + x \cdot Y_L - X_L \cdot Y_L = \{(a+b) - c | \exists x_L \in X_L \exists y_L \in Y_L, (x_L, y, a) \in \bigcup_{(\alpha,\beta) \prec (\xi_1,\xi_2)} Mul^{\kappa}_{(\alpha,\beta)}$
$\wedge (x, y_L, b) \in \bigcup_{(\alpha,\beta) \prec (\xi_1,\xi_2)} Mul^{\kappa}_{(\alpha,\beta)}$
$\wedge (x_L, y_L, c) \in \bigcup_{(\alpha,\beta) \prec (\xi_1,\xi_2)} Mul^{\kappa}_{(\alpha,\beta)}\}$

$\wedge X_R \cdot y + x \cdot Y_R - X_R \cdot Y_R = \{(a+b) - c | \exists x_R \in X_R \exists y_R \in Y_R, (x_R, y, a) \in \bigcup_{(\alpha,\beta) \prec (\xi_1,\xi_2)} Mul^{\kappa}_{(\alpha,\beta)}$
$\wedge (x, y_R, b) \in \bigcup_{(\alpha,\beta) \prec (\xi_1,\xi_2)} Mul^{\kappa}_{(\alpha,\beta)} \quad \wedge (x_R, y_R, c) \in \bigcup_{(\alpha,\beta) \prec (\xi_1,\xi_2)} Mul^{\kappa}_{(\alpha,\beta)}\}$

$\wedge X_L \cdot y + x \cdot Y_R - X_L \cdot Y_R = \{(a+b) - c | \exists x_L \in X_L \exists y_R \in Y_R, (x_L, y, a) \in \bigcup_{(\alpha,\beta) \prec (\xi_1,\xi_2)} Mul^{\kappa}_{(\alpha,\beta)}$
$\wedge (x, y_R, b) \in \bigcup_{(\alpha,\beta) \prec (\xi_1,\xi_2)} Mul^{\kappa}_{(\alpha,\beta)} \quad \wedge (x_L, y_R, c) \in \bigcup_{(\alpha,\beta) \prec (\xi_1,\xi_2)} Mul^{\kappa}_{(\alpha,\beta)}\}$

$\wedge X_R \cdot y + x \cdot Y_L - X_R \cdot Y_L = \{(a+b) - c | \exists x_R \in X_R \exists y_L \in Y_L, (x_R, y, a) \in \bigcup_{(\alpha,\beta) \prec (\xi_1,\xi_2)} Mul^{\kappa}_{(\alpha,\beta)}$
$\wedge (x, y_L, b) \in \bigcup_{(\alpha,\beta) \prec (\xi_1,\xi_2)} Mul^{\kappa}_{(\alpha,\beta)} \quad \wedge (x_R, y_L, c) \in \bigcup_{(\alpha,\beta) \prec (\xi_1,\xi_2)} Mul^{\kappa}_{(\alpha,\beta)}\}\}$

$Mul^{\kappa} = \bigcup_{(\xi_1,\xi_2) \in ON^2} Mul^{\kappa}_{(\xi_1,\xi_2)}, Mul = \bigcup_{\kappa} Mul^{\kappa}$と定め、
$x, y, z \in NO$に対して$x \cdot y = z$であることを$(x, y, z) \in Mul$であることと定める。

◆surreal numberの掛け算について以下の性質が成り立つ。証明は省略する。

proposition
$x \in NO$とする
以下が成り立つ。
$0 \cdot x \sim x \cdot 0 \sim 0$
$1 \cdot x \sim x \cdot 1 \sim x$

proposition
$x, y \in NO$とする。このとき
$x \cdot y \sim y \cdot x$

proposition
$x, y, z \in NO$とする。このとき
$(x \cdot y) \cdot z \sim x \cdot (y \cdot z)$

proposition
$x, y, z \in NO$とする。このとき
$x \cdot y + z \sim x \cdot y + x \cdot z$

proposition
任意の$x \in NO \setminus \{0\}$に対してある$\frac{1}{x} \in NO$があって$x \cdot (\frac{1}{x}) \sim 1$

proposition
$x, y, x', y' \in NO$に対して、
$x \sim x' \wedge y \sim y' \Rightarrow x \cdot x' \sim y \cdot y'$

§5 真クラスをなす可換体構造の構成

◆§4で紹介した性質からsurreal numberの足し算と掛け算は可換体のようにふるまう。
しかし、§1最後のremarkで述べたように$x \neq y$であっても$x \sim y$になることがあるので、
NOのままでは真クラスをなす可換体構造の例を得たことにはならない。 真クラスをなす可換体構造を得るには$\sim$による同値類に相当するものを構成する必要がある。
構成に際しては$x \in NO$に対して$\{y | x \sim y\}$が真クラスになってしまうことに注意しなければならない。

definition
$x \in NO$に対して
$\xi_x = \min\{\xi \in ON | \exists y \in NO, y \sim x \wedge \xi = \mathrm{bir}(y)\}$
と定め、
$\bar{x} = \{y \in NO_{\xi_x} | x \sim y\}$
と定める。$\bar{x}$は集合であり、$x \sim y \Rightarrow \bar{x} = \bar{y}$である。

remark
ξ_xをわざわざ定めたのは内包公理によって$\bar{x}$を集合とするためである。

definition

クラス$\overline{\overline{NO}}$を

$\overline{\overline{NO}} = \{\bar{x} | x \in NO\}$

で定め、$\overline{\overline{NO}}$上の足し算、掛け算を

$\bar{x} + \bar{y} = \overline{\overline{x + y}}$

$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{\overline{x \cdot y}}$

で定める。§3で紹介した性質より、これらの演算はwell-definedであり、体の公理を満たしている。

proposition

$\alpha, \beta \in ON, \alpha < \beta$とする。このとき$s_\alpha \neq s_\beta$である。

$\because s_\beta \not\leq s_\alpha$を示せば十分である。$\beta(> \alpha)$についての帰納法で示す。

・$\beta = \alpha + 1$のとき

$\langle s_\alpha | \rangle \not\leq s_\alpha \Leftrightarrow \exists x_L \in \{s_\alpha\}, s_\alpha \leq x_L \vee \exists y_R \in S_{\alpha R}, y_R \leq s_{\alpha+1}$より成立。

・$\beta = \alpha + 1 + (\gamma + 1)$の形であるとき

$s_\beta \not\leq s_\alpha \Leftrightarrow \exists x_L \in \{s_\alpha + 1 + \gamma\}, s_\alpha \leq x_L \vee \exists y_R \in S_{\alpha R}, y_R \leq s_\beta$

仮定より$s_{\alpha+1+\gamma} \not\leq s_\alpha$だから主張は成立。

・$\beta = \alpha + 1 + \eta$ (η：極限順序数)であるとき

$s_\beta \not\leq s_\alpha \Leftrightarrow \langle \bigcup_{\xi < \alpha+1+\eta} \{s_\xi\} | \rangle \not\leq s_\alpha \exists x_L \in \bigcup_{\xi < \alpha+1+\eta} \{s_\xi\}, s_\alpha \leq x_L \vee \exists y_R \in S_{\alpha R}, y_R \leq s_\beta$

仮定より$\alpha < \xi < \alpha + 1 + \eta$に対して $s_\xi \not\leq s_\alpha$だから主張は成立。

corollary

相異なる順序数α, βについて$\bar{s_\alpha} \neq \bar{s_\beta}$

以上により、以下の主結果を得る。

主結果

theorem

$(\overline{\overline{NO}}, +, \cdot)$は可換体構造を持つ真クラスである

$\because (\overline{\overline{NO}}$が真クラスであることをみればよい。

$\overline{\overline{NO}}$が集合とすると$\bigcup_{\alpha \in ON} \{\bar{s_\alpha}\} \subset ON$も集合であり、

任意の$\bar{s_\alpha}$に対してただひとつの$\alpha \in ON$が存在するので置換公理よりONが集合となってしまう。

(参考)

[1] John H. Conway, *On numbers and games*, A K Peters, Ltd., 2001.

[2] D.E.Knuth, *Surreal Numbers*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1974.

整礎クラス上の超限再帰については以下を参考にした。

[3]Ralf Schindler, *Set Theory*, Springer, 2014.

パラレルセッション
会場 B

超平面配置の極小セル分割とカスプ付きディバイドによる Kirby 図式

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
菅原 朔見 (Sakumi SUGAWARA)

概要

$\mathbb{C}^l$ 内のアフィン超平面の有限集合を超平面配置という．超平面配置のトポロジーにおいて，超平面配置が実超平面を複素化して得られる場合は，補集合のセル分割が実構造を用いて記述されることが知られている．本稿では，特に $l = 2$ すなわち直線配置の場合に対して，より精密な情報であるハンドル分解を得ることができたので，それを紹介する．また，直線配置の補集合は実 4 次元多様体となり，Kirby 図式によりハンドル分解を表すことができる．直線配置の補集合の Kirby 図式を，ディバイドの一般化であるカスプ付きディバイドを用いて記述することができたので，それについても紹介する．本講演の内容は，吉永正彦氏 (北海道大学) との共同研究に基づく．

1 導入

$\mathbb{C}^l$ 内のアフィン超平面の有限集合 $\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_n\}$ を超平面配置という．超平面配置のトポロジーにおいて補集合 $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^l \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{A}} H$ は重要な対象であり，「超平面配置の組み合わせ論的な構造から補集合 $M(\mathcal{A})$ のトポロジカルな情報をどれくらい取り出せるか」というのは大きな問題意識である．また，$M(\mathcal{A})$ の持つトポロジカルな性質として，極小セル分割を持つことがあげられる．極小セル分割とは，k 次の Betti 数 $b_k(M(\mathcal{A}))$ が k 次元のセルの個数と等しくなるようなセル分割のことである ([DP] ,[R], $l = 2$ の場合については [F]) ．極小セル分割の存在の証明自身は具体的なセルの接着写像は与えていないが，実超平面配置の複素化補集合の場合については，Lefschetz 超平面切断定理を応用する方法 [Y1] や，離散 Morse 理論を用いた方法 [SS] などで具体的なセルの接着写像が記述され，補集合のホモトピー型が記述されている．

本研究では，$l = 2$ の場合について扱う．この場合は $M(\mathcal{A})$ は複素 2 次元のアフィン多様体となり，0-,1-,2-ハンドルのみを持つ実 4 次元多様体となる．実 4 次元多様体に対してはハンドル分解の情報を表す Kirby 図式と呼ばれる絡み目の図式がある (Kirby 図式などの 4 次元多様体について詳しく書かれた [GS] があるので参照されたい)．本研究では $l = 2$ について，Lefschetz の超平面切断定理によるセル分割の方法 ([Y1],[Y2]) を精密化して，実直線配置の複素化補集合 $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式を得ることができた．

また，得られた Kirby 図式を表示する方法として，カスプ付きディバイドの概念を導入して記述する．ディバイドとは，有限個の閉区間と S^1 から D^2 への proper で generic なはめこみの像のことであり，代数曲線の孤立特異点の近傍の様子を記述するツールとして A'Campo により導入されたもの

である [AC]．ディバイドからは接ベクトルを対応させることにより，S^3 内の絡み目を得ることができる．ディバイドを用いることにより，本来 3 次元的で複雑である絡み目を円板の 2 次元的な情報で表示することができる．今回，ディバイドにカスプを許したカスプ付きディバイドへと一般化し，直線配置の実構造を用いて構成されるカスプ付きディバイドを用いて $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式を記述する．また，本研究の詳細については [SY] を参照されたい．

2 超平面配置のトポロジー

定義 2.1. $\mathbb{K}$ を体とする．$\mathbb{K}^l$ 内のアフィン超平面の有限集合 $\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_n\}$ を**超平面配置**と呼ぶ．また，その補集合を $M(\mathcal{A}) = \mathbb{K}^l \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{A}} H$ と定める．

例 2.2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ とする．このとき補集合 $M(\mathcal{A}) = \mathbb{R}^l \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{A}} H$ は有限個の連結な開集合に分かれる．各連結成分を**部屋**と呼ぶ．部屋全体の集合を $\mathrm{ch}(\mathcal{A})$ と表す．

例 2.3. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ とする．このとき補集合 $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^l \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{A}} H$ は連結であり，アフィン代数多様体となる．

超平面配置のトポロジーからの観点では，複素超平面配置 ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の場合) の補集合のトポロジーを調べるのが重要な問題である．これについて，$M(\mathcal{A})$ は以下に述べる極小セル分割と呼ばれる性質を持つことが知られている．

定理 2.4. $\mathcal{A}$ を複素超平面配置とする．このとき $M(\mathcal{A})$ は極小セル分割を持つ．すなわち，$k \geq 0$ に対して k 次の Betti 数 $b_k(X) = \#(k\text{-セルの個数 })$ となる CW 複体 X とホモトピー同値である．

証明の詳細については触れないが，次の Lefschetz 超平面切断定理が鍵になる．

定理 2.5. (Lefschetz 超平面切断定理) F を $\mathcal{A}$ と generic に交わる超平面とする．このとき，以下が成り立つ．

- $M(\mathcal{A}) \cap F$ は $M(\mathcal{A})$ の $(l-1)$-スケルトンにホモトピー同値．
- $M(\mathcal{A})$ は $M(\mathcal{A}) \cap F$ に有限個の l-セルを接着して得られる CW 複体とホモトピー同値．

また，$\mathcal{A}$ が実超平面配置を複素化して得られる場合は，その実構造を用いて $M(\mathcal{A})$ のトポロジーを記述することができる．

定義 2.6. $\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_n\}$ を実超平面配置とする．このとき各超平面に $\otimes\mathbb{C}$ することで複素超平面配置 $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} = \{H_1 \otimes \mathbb{C}, \cdots, H_n \otimes \mathbb{C}\}$ が得られる．複素化補集合を $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^l \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{A}} H \otimes \mathbb{C}$ と表す．

実超平面配置 $\mathcal{A}$ と generic に交わる超平面を F に対して，F と交わらない部屋の集合を

$$\mathrm{ch}_F(\mathcal{A}) = \{C \in \mathrm{ch}(\mathcal{A}) \mid C \cap F = \emptyset\}$$

と定める．$M(\mathcal{A})$ のトポロジーと部屋の個数の関係について，次が成り立つことが知られている．

命題 2.7. $b_i = b_i(M(\mathcal{A}))$ を $M(\mathcal{A})$ の Betti 数とすると，

(1) $\#\,\mathrm{ch}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{l} b_i$
(2) $\#\,\mathrm{bch}(\mathcal{A}) = |\sum_{i=1}^{l}(-1)^i b_i|$
(3) $\#\,\mathrm{ch}_F(\mathcal{A}) = b_l$

である．ただし，$\mathrm{bch}(\mathcal{A})$ は有界な部屋全体の集合である．

特に $l = 2$ (すなわち直線配置) の場合は $M(\mathcal{A}) \cap F \cong \mathbb{C}\backslash(n \text{ 点})$ であることに注意し，(3) と定理 2.4 を合わせると，以下が得られる．

命題 2.8. $\mathcal{A}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の超平面配置，$M(\mathcal{A})$ を複素化補集合とする．このとき，$M(\mathcal{A})$ は 1-スケルトンが S^1 の n 個の一点和で，2-セルが $\#\,\mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ 個接着している CW 複体とホモトピー同値である．

例 2.9. $\mathcal{A}$ を図のように 3 本が互いに二点ずつで交わるような直線配置とする．このとき複素化補集合 $M(\mathcal{A})$ は 1-セルが 3 個あり，そこに C_1，C_2，$C_3 \in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ に対応する 2-セルが接着しているようなホモトピー型を持つ．

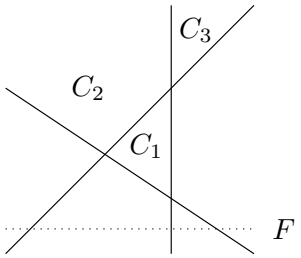


図 1　直線配置の例

3　カスプ付きディバイド

主結果では，カスプ付きディバイドから得られる絡み目を用いた Kirby 図式の記述を行う．そのためにカスプ付きディバイドの準備を述べる．

定義 3.1. 有限個の閉区間と S^1 から 2 次元円板への連続写像の像 P で，有限個のカスプ点を除けば proper で generic なはめこみになっているようなものを**カスプ付きディバイド**という．

注意 3.2. カスプがひとつもないものを単にディバイドという．ディバイドは代数曲線の孤立特異点の近傍の様子を既述する手段として，A'Campo により導入されたものである *[AC]*.

定義 3.3. カスプ付きディバイド P からは接ベクトルとの対応により S^3 内の絡み目 $L(P)$ が得られる．すなわち

$$L(P) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \in P,\ \boldsymbol{y} \in T_{\boldsymbol{x}}P,\ |\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2 = 1\} \subset S^3$$

と定め，これを**ディバイド絡み目**と呼ぶ．

注意 3.4. カスプの部分では関数の微分は定義されないが，接線を引くことは可能である．カスプの近傍では，$L(P)$ は半捻りが対応する．

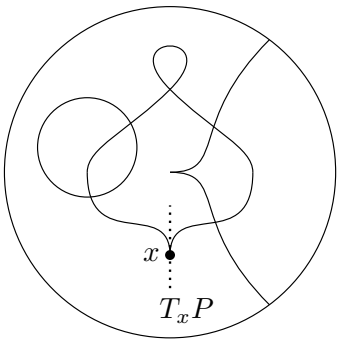


図 2　カスプ付きディバイドの例．例えば $x \in P$ はカスプであるが，接線は定義される．

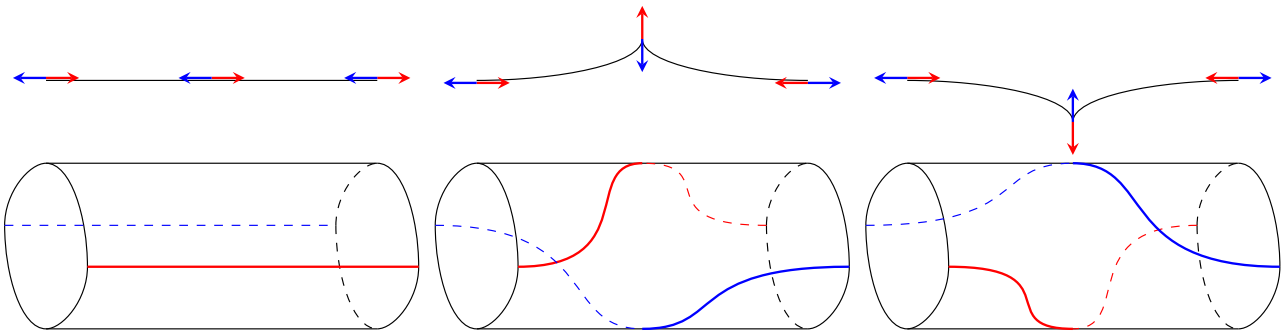


図 3　カスプの点に対応する $L(P)$ の半捻り

注意 3.5. 絡み目のイソトピーを変えないディバイドの変形として，次のようなものがある．

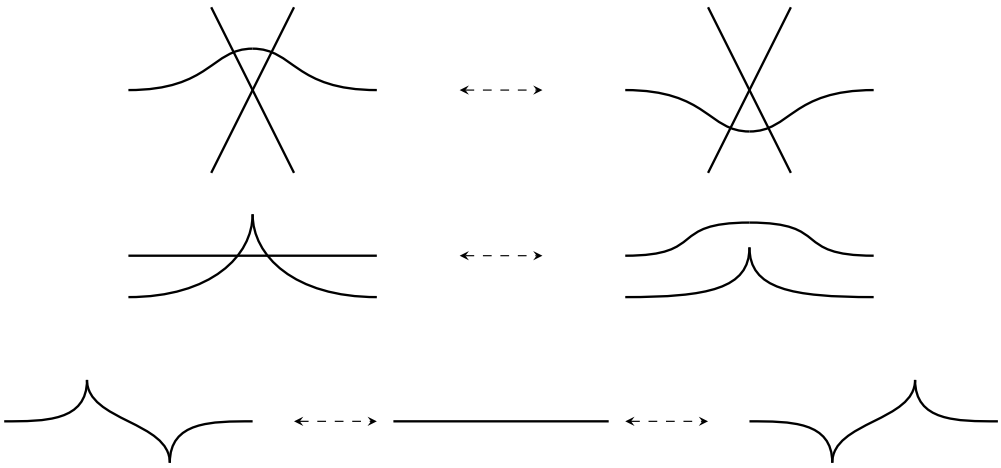


図 4　$L(P)$ のイソトピーを変えないディバイドの変形

また主結果でカスプ付きディバイドを構成する際の舞台となる D^2 や S^3 のモデルを準備する．D^2

に対応するものとして，長方形

$$\mathrm{Rect}(R,1)=[-R,R]\times[-1,1]\approx D^2$$

と定める．ただし $R>0$ を十分大きい実定数である．$\boldsymbol{x}\in\mathrm{Rect}(R,1)$ に対し，長方形の境界との (最大値ノルム $||\cdot||_\infty$ についての) 距離を $\delta(\boldsymbol{x})=\min\{x_1+R, R-x_1, x_2+1, 1-x_2\}$ とする．$\mathrm{Rect}(R,1)$ 上で接ベクトルを対応させることにより，3-次元球面のモデルを

$$S^3(R,1)=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid \boldsymbol{x}\in\mathrm{Rect}(R,1),\ \boldsymbol{y}\in T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^2,\ ||\boldsymbol{y}||=\delta(\boldsymbol{x})\}\approx S^3$$

とする．これは 4 次元球体

$$D^4(R,1)=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid \boldsymbol{x}\in\mathrm{Rect}(R,1),\ \boldsymbol{y}\in T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^2,\ ||\boldsymbol{y}||\le\delta(\boldsymbol{x})\}\approx D^4$$

の境界である．(本稿では単にノルム $||\cdot||$ と書けば最大値ノルム $||\cdot||_\infty$ のことを表す．)

4 $M(\mathcal{A})$ のハンドル分解

以降常に $\mathcal{A}$ を実直線配置，$M(\mathcal{A})$ を複素化補集合とする．この節では区分的線形写像を用いた $M(\mathcal{A})$ のハンドル分解について紹介する．詳しくは [SY] の 4 節を参照.

各 $H\in\mathcal{A}$ はアフィン直線であるから，$a,b,c\in\mathbb{R}$ を用いた一次式

$$\alpha_H(x_1,x_2)=ax_1+bx_2+c=0$$

により定義される．複素化直線 $H\otimes\mathbb{C}$ は $\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2\mid az_1+bz_2+c=0\}$ により定まる．

$\mathbb{C}^2$ と $\mathbb{R}^2$ 上の接バンドルの全空間 $T\mathbb{R}^2$ を，$\boldsymbol{x}+\sqrt{-1}\boldsymbol{y}\mapsto(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ と対応させる (ただし $\boldsymbol{y}\in T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^2$)．この同一視を用いると，$M(\mathcal{A})$ が接ベクトルを用いて次のように記述できる．

命題 4.1.

$$M(\mathcal{A})=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\mid \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2,\ \boldsymbol{y}\in T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^2,\ H\in\mathcal{A}_{\boldsymbol{x}}\text{ならば }\boldsymbol{y}\notin T_{\boldsymbol{x}}H\}.$$

ただし，$\mathcal{A}_{\boldsymbol{x}}=\{H\in\mathcal{A}\mid \boldsymbol{x}\in H\}$ である．*(雑に言えば，$M(\mathcal{A})$ は $H\in\mathcal{A}$ と横断的に交わる接ベクトル全体のなす集合である．)*

証明. $(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$，$z_i=x_i+\sqrt{-1}y_i$ と表すと，

$$\begin{aligned}(z_1,z_2)\in H\otimes\mathbb{C}&\Leftrightarrow az_1+bz_2+c=0\\&\Leftrightarrow a(x_1+\sqrt{-1}y_1)+b(x_2+\sqrt{-1}y_2)+c=0\\&\Leftrightarrow ax_1+bx_2+c+\sqrt{-1}(ay_1+by_2)=0\\&\Leftrightarrow ax_1+bx_2+c=0\quad\text{かつ}\quad ay_1+by_2=0\end{aligned}$$

となる．接ベクトルとの対応によると，$(z_1,z_2)\in H\otimes\mathbb{C}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\in H$ かつ $\boldsymbol{y}\in T_{\boldsymbol{x}}H(\subset T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^2)$ となる．あとは $M(\mathcal{A})=\mathbb{C}^2\setminus\bigcup_{H\in\mathcal{A}}H\otimes\mathbb{C}$ であることから従う． □

また適切な座標変換のもと，$\mathcal{A}$ に以下の条件を仮定する．(一般性を失わない)

(i) $\mathcal{A}$ の交点 (x_1,x_2) の x_2 座標は，$1<x_2<R_0$ を満たす.

(ii) $F = \{x_2 = 0\}$ は $\mathcal{A}$ と generic に交わる．

(iii) H_i と F のなす偏角 θ_i について $\pi/4 \leq \theta_1 \leq \cdots \leq \theta_n \leq 3\pi/4$ をみたす．

$H \in \mathcal{A}$，$C \in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ とする．$\tilde{H}_{\mathbb{C}}$，$\tilde{C}$ をそれぞれ $H \otimes \mathbb{C}$，C の $M(\mathcal{A})$ における十分小さい管状近傍と定める．

$$M_1 = (\mathbb{C}^2 \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} \tilde{H}_{\mathbb{C}}) \cap \{-R \leq x_1 \leq R\} \cap \{-1 \leq x_2 \leq R_0\} \cap \{||y|| \leq R\}$$

とする．これはコンパクトな 4 次元多様体で，M_1 の内部は $M(\mathcal{A})$ に微分同相である ([Dur])．したがって，M_1 の Kirby 図式を記述することを考える．

$$M_2 = (M_1 \setminus \bigcup_{C \in \mathrm{ch}(\mathcal{A})} \tilde{C}) \cup \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{Rect}(R, 1),\ ||y|| \leq R\} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} \tilde{H}_{\mathbb{C}}$$

とする．これは M_1 から部屋の近傍を抜き去ってできる多様体であるが，$C \cap F \neq \emptyset$ をみたす部屋に対しては，$\tilde{C}$ の接着は D^4 との境界和のため微分同相であり，$C \in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ を満たす部屋に対しては，$\tilde{C}$ の接着は 2-ハンドルの接着である．

$$M_3 = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in M_2 \mid x_2 > 1 \text{ ならば } x_2 \leq x_1 + R,\ x_2 \leq -x_1 + R, \rho(x_2) \leq ||y|| \leq 1\}$$

とする．ここで $\rho : [1, R_0] \to [0, 1]$,$\rho(h) = (h-1)/(R_0 - 1)$ である．M_3 は M_2 の $x_2 > 1$ 部分について $\boldsymbol{y}$ の長さを縮めているだけであるから，M_3 と M_2 は微分同相である．

$$M_4 = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{Rect}(R, 1),\ \boldsymbol{y} \in T_{\boldsymbol{x}}\mathbb{R}^2,\ ||\boldsymbol{y}|| \leq \delta(\boldsymbol{x})\} \setminus \bigcup_{H \in \mathcal{A}} \tilde{H}_{\mathbb{C}}$$

とする．

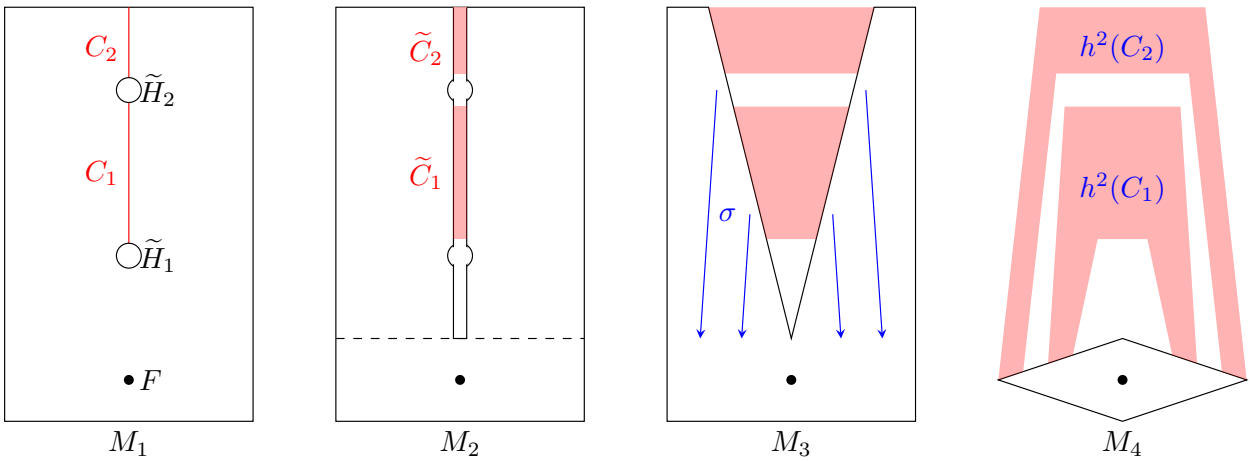


図 5　M_1 から M_4 への変形の模式図

また，$\sigma : M_3 \to M_4$ を次で定める．

$$\sigma(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) := \begin{cases} \left(\left(x_1 - \frac{y_1}{y_2}(x_2 - 1 + ||\boldsymbol{y}||_\infty), 1 - ||\boldsymbol{y}||_\infty\right), \boldsymbol{y}\right), & x_2 \geq 1 - ||\boldsymbol{y}||_\infty \text{ かつ } |y_1| \leq |y_2|, \\ \left(\left(x_1 - \frac{y_2}{y_1}(x_2 - 1 + ||\boldsymbol{y}||_\infty), 1 - ||\boldsymbol{y}||_\infty\right), \boldsymbol{y}\right), & x_2 \geq 1 - ||\boldsymbol{y}||_\infty \text{ かつ } |y_1| \geq |y_2|, \\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) & \text{if } x_2 \leq 1 - ||\boldsymbol{y}||_\infty, \end{cases}$$

これは変位レトラクトを与え，また M_3 と M_4 が微分同相であることがわかる．M_4 は定義から $D^4(R,1)$ から直線の近傍 $\tilde{H_{\mathbb{C}}}$ を抜き去ったものであり，また直線の交点に対する仮定 (i) から，$D^4(R,1)$ 上では直線は交わらない．従って M_4 は $D^4(R,1)$ から $D^2 \times D^2$ の非交和を n 個除いたものであり，一つの 0-ハンドルに 1-ハンドルのみをちょうど n 個接着させたハンドル体と微分同相である．さらに抜き去る $\tilde{H_{\mathbb{C}}}$ について，境界の $S^3(R,1)$ 上では

$$H_{\mathbb{C}} \cap S^3(R,1) = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x} \in \overline{H},\ \boldsymbol{y} \in T_{\boldsymbol{x}}H,\ ||\boldsymbol{y}|| = \delta(\boldsymbol{x})\}$$

となっていることから，これは $\overline{H} = H \cap \mathrm{Rect}(R,1)$ を $\mathrm{Rect}(R,1)$ 上のディバイドとみなしたときに得られる結び目 (自明な結び目) になっていることがわかる．これが Kirby 図式における 1-ハンドル接着を表す点付き円とみなせる．

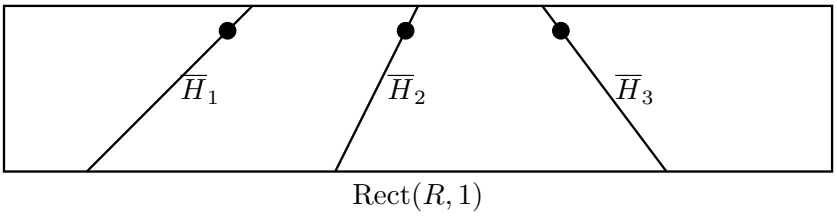


図 6　$\overline{H_i} \subset \mathrm{Rect}(R,1)$．ここから得られるディバイド絡み目が 1-ハンドルの点付き円になる

また，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ を任意に一つ固定する．$C \in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ と 2-ハンドルが一対一対応しているが，C に対応する 2-ハンドルは，

$$\{\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mid ||\boldsymbol{y}|| = \rho(x_2)\} \subset \partial M_4$$

と表すことができる．さらに $\boldsymbol{x}$ を十分近い $\boldsymbol{x}' \in C$ へ少し動かしても $\sigma(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y})$ と $\sigma(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は絡まないことがわかり，フレーミング係数は 0 となる．

以上から 1-ハンドル体である M_4 が得られ，σ を用いて 2-ハンドルの接着写像が記述でき，欲しいハンドル分解を得ることができた．

5　カスプ付きディバイドを用いた Kirby 図式

まずは (厳密ではないが) 主結果を述べておく．

定理 5.1. $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式は "$\mathcal{A}$ の実構造の組み合わせ構造を用いて得られる" $\mathrm{Rect}(R,1)$ 上のカスプ付きディバイドから得られる絡み目として記述できる．

Kirby 図式を記述するために，1-ハンドルに対応する点付き円，2-ハンドルに対応する絡み目を準備する必要がある．まず 1-ハンドルについては，前節でも述べたように，$\overline{H}$ が対応するカスプ付きディバイドの成分である．2-ハンドルについては，$C \in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ との対応があったので，$C \in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ に応じて $\mathrm{Rect}(R,1)$ 内のカスプ付きの曲線を定めれば良い．

定義 5.2. $C \in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$，$H_i \in \mathcal{A}$ に対して，符号 $\delta_i(C)$ を以下で定める．

$$\delta_i(C) = \begin{cases} +1, & \text{if } \alpha_i(C) > 0, \\ -1, & \text{if } \alpha_i(C) < 0. \end{cases}$$

$C \in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ に対応する $\mathrm{Rect}(R,1)$ 上のカスプ付きの曲線 $\gamma(C)$ を以下のようにして定める．

(i) $\overline{H_1}$ の左側では，$\delta_1(C) = +1$ ならば左向きカスプを書き，$\delta_1(C) = -1$ ならば滑らかな曲線を図 7 のように書く．

(ii) $(\delta_i, \delta_{i+1}) = (+1,-1), (-1,1)$，$\delta_i = \delta_{i+1}$ のときはそれぞれ図 8 のように $\overline{H_i}$ と $\overline{H_{i+1}}$ の間に曲線を書く．

(iii) $\overline{H_n}$ の右側では，$\delta_1(C) = -1$ ならば右向きカスプを書き，$\delta_1(C) = +1$ ならば滑らかな曲線を図 9 のように書く．

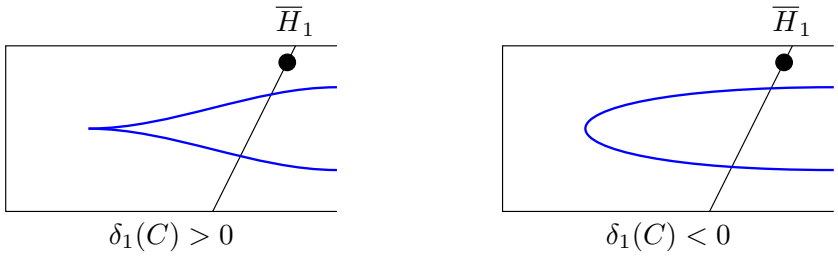


図 7　$\overline{H_1}$ の左側

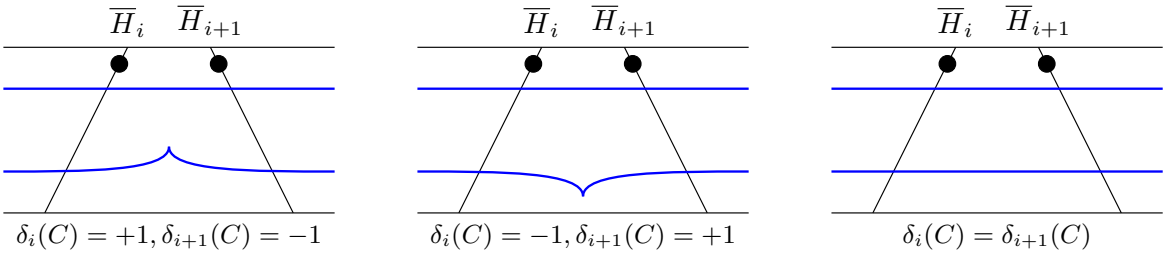


図 8　$\overline{H_n}$ と $\overline{H_{n+1}}$ の間

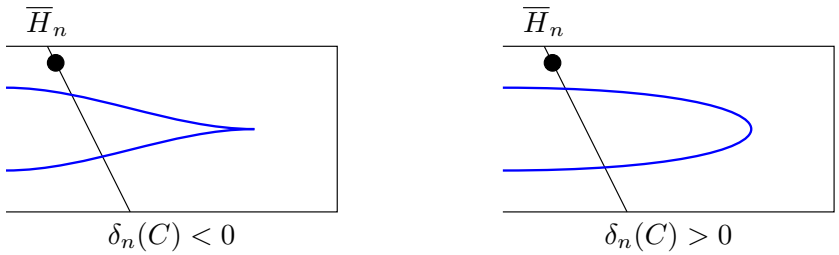


図 9　$\overline{H_n}$ の右側

また $\mathrm{ch}_F(\mathcal{A}) = \{C_1, \cdots, C_b\}$ が複数個の元からなる場合については，各 C_s 上から一点 $P_s = (k_s, h_s)$ を $1 < h_1 < \cdots < h_b < R_0$ となるようにとる．このとき，h_s の値が大きい順に，$\mathrm{Rect}(R,1)$ では，$\gamma(C_s)$ を x_2 の座標が小さい順に構成する．

注意 5.3. 順番は一意に定まらないこともある．その場合カスプ付きディバイドとしては異なったも

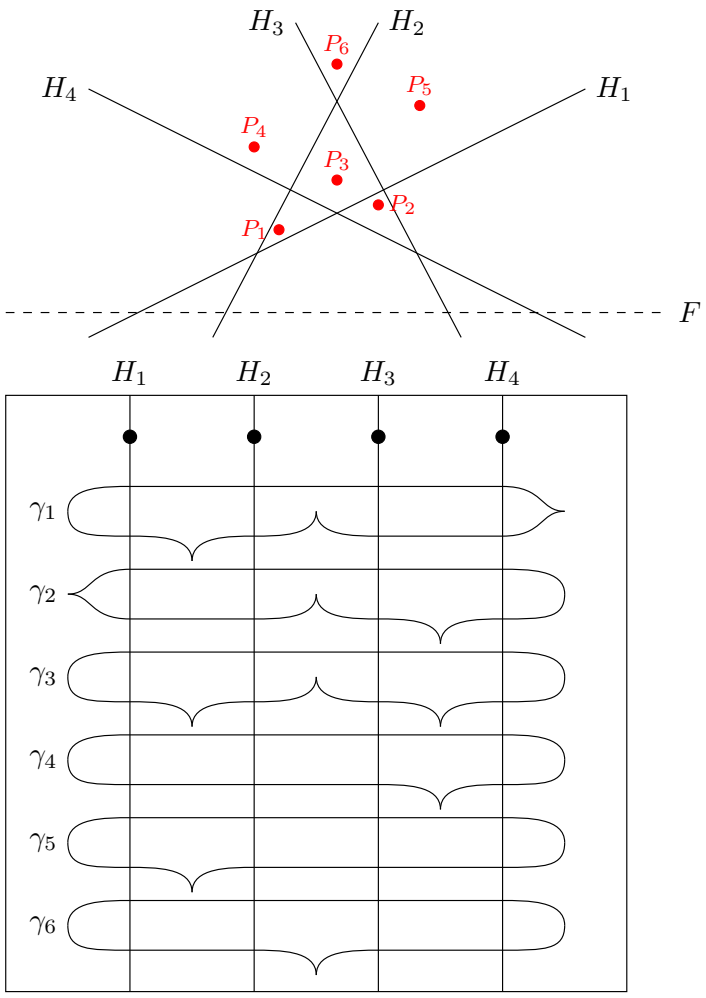
のが得られるが，ディバイド絡み目については注意 3.5 の変形により移り合うことができ，同じ絡み目が得られることがわかる．

主定理の正確な主張を述べる．

定理 5.4. $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式は $\mathrm{Rect}(R,1)$ 上のカスプ付きディバイド $\{\overline{H_1},\cdots,\overline{H_n},\gamma(C_1),\cdots,\gamma(C_b)\}$ から得られる絡み目として記述できる．ここに $\overline{H_i}$ から得られる結び目は 1-ハンドルの接着を表す点付き円を，$\gamma(C_s)$ から得られる結び目は 2-ハンドルの接着円を表す．また 2-ハンドルのフレーミング係数は全て 0 である．

証明については述べないが，$C_s \in \mathrm{ch}_F(\mathcal{A})$ に対応する 2-ハンドルの接着円と $\gamma(C_s)$ がイソトピックになることを示せば十分である．詳細は [SY] の 5.2 節を参照．

例 5.5. $\mathcal{A}=\{H_1,H_2,H_3,H_4\}$ を generic に交わる直線配置とすると $M(\mathcal{A})$ の Kirby 図式を表すカスプ付きディバイドは図のようになる．



参考文献

[AC] N. A'Campo, Generic immersions of curves, knots, monodromy and Gordian number. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 88 (1998), 151-169 .

[CP] O. Couture, B. Perron, Representative braids for links associated to plane immersed curves. J. Knot Theory Ramifications **9** (2000), no. 1 1-30.

[DP] A. Dimca, S. Papadima, Hypersurface complements, Milnor fibers and higher homotopy groups of arrangements. Ann. of Math. (2) **158** (2003), no. 2, 473–507.

[Dur] A. H. Durfee, Neighborhoods of algebraic sets. Trans. Amer. Math. Soc. **276** (1983), no. 2, 517-530.

[F] M. Falk, Homotopy types of line arrangements. Invent. Math. **111** (1993), no. 1, 139–150.

[GS] R. E. Gompf, A. I. Stipsicz, 4-manifolds and Kirby calculus. Graduate Studies in Mathematics, 20. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999. xvi+558 pp.

[OT] P. Orlik, H. Terao, Arrangements of Hyperplanes. Grundlehren Math. Wiss. **300**, Springer-Verlag, New York, 1992.

[R] R. Randell, Morse theory, Milnor fibers and minimality of hyperplane arrangements. Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), no. 9, 2737–2743.

[SS] M. Salvetti, S. Settepanella, Combinatorial Morse theory and minimality of hyperplane arrangements. Geom. Topol. **11** (2007), 1733–1766.

[SY] S. Sugawara, M. Yoshinaga, Divides with cusps and Kirby diagrams for line arrangements, arXiv:2103.15262 [math.GT] ,to appear in Topology and its Applications.

[Y1] M. Yoshinaga, Hyperplane arrangements and Lefschetz's hyperplane section theorem. Kodai Math. J. **30** (2007) no. 2, 157–194.

[Y2] M. Yoshinaga, Minimal stratifications for line arrangements and positive homogeneous presentations for fundamental groups. Configuration Spaces: Geometry, Combinatorics and Topology, 503-533, CRM Series, 14, Ed. Norm., Pisa, 2012.

3 次元ハイゼンベルグ群の時間的極小曲面のワイエルシュトラス型表現公式

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
清原悠貴 (Hirotaka KIYOHARA)

概要

3 次元ハイゼンベルグ群の左不変ローレンツ計量は 3 種類に等長的に分類されることが知られている. 本講演ではそのうちの 1 種について, 3 次元ハイゼンベルグ群の非垂直な時間的極小曲面がド・ジッター球面へのローレンツ調和写像によって特徴づけられることを説明する. またループ群の分解定理を用いることで時間的極小曲面のワイエルシュトラス型表現公式が得られることを紹介する. 本講演の内容は北海道大学の小林真平氏との共同研究 [15] に基づく.

1 導入

Thurston の幾何化予想 ([20]) の解決以降, 8 つのモデル空間をはじめとする 3 次元等質空間の平均曲率一定曲面の研究が盛んに行われてきた ([6], [8], [9], [13]). 特にモデル空間において, ある 2 次微分が平均曲率一定曲面に対して正則になることを明らかにした Abresch-Rosenberg の研究 ([1]) やスピノルを用いた行列方程式系によって 3 次元等質空間の曲面の積分表示を示した Berdinskiĭ-Taĭmanov の研究 (c.f.[7]) が 3 次元等質空間の研究が発展した大きな要因である. 本講演で扱う 3 次元ハイゼンベルグ群は Thurston 幾何のモデル空間の 1 つであり, 特にハイゼンベルグ群の平均曲率零曲面の研究は今なお重要な課題である.

また 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ の平均曲率一定曲面の Kenmotsu 公式 ([14]) やそのミンコフスキー版である Akutagawa-Nishikawa の空間的平均曲率一定曲面の Kenmotsu 型公式 ([2]) など, 平均曲率一定曲面の表現公式は数多く知られている. 中でも Sym の公式と呼ばれる表現公式は元々は $\mathbb{E}^3$ のガウス曲率が負一定の曲面を表現するために A. Sym([18]) によって発見された公式であるが, A. I. Bobenko([3], [4]) や T. Taniguchi([19]) によって正定値の空間形やミンコフスキー空間の平均曲率一定曲面にまで拡張された.

Abresch-Rosenberg や Berdinskiĭ-Taĭmanov をはじめとするこれまでの主要な研究では, 空間の計量としてリーマン計量を用いることが一般的であった. 3 次元ハイゼンベルグ群の極小曲面のワイエルシュトラス型表現公式を与えた Dorfmeister らによる研究 ([10]) では, 対称空間への調和写像とスピノルの観点から 3 次元ハイゼンベルグ群の極小曲面とミンコフスキー空間の平均曲率一定曲面の間に関係があることを明らかにし, Sym の公式を用いて極小曲面の表現公式を与えた. 本講演ではハイゼンベルグ群にローレンツ計量を定め, ド・ジッター球面への調和写像による時間的極小曲面の特徴付けを説明する. また, ミンコフスキー空間の時間的平均曲率一定曲面との関係を示すことで得ら

れる時間的極小曲面の表現公式を紹介する.

ユークリッド空間やミンコフスキー空間の平均曲率一定曲面はガウス写像を通して対称空間への調和写像との関係が深く, それ自体が研究の一分野を築いていると言ってもよい. 曲面から対称空間への調和写像に関する重大な研究として Dorfmeister-Pedit-Wu([12]) のワイエルシュトラス型の調和写像の構成方法が知られており, 論文著者の頭文字をとって DPW 法と呼ばれている. DPW 法ではループ群と呼ばれる無限次元リー群の分解を行い, 調和写像の動標構を作り出すことで調和写像を構成する. 本講演ではこの手法を用いてド・ジッター球面への調和写像の動標構を与えることで得られる 3 次元ハイゼンベルグ群の時間的極小曲面のワイエルシュトラス型表現公式について時間の許す限り紹介したい.

2 ハイゼンベルグ群の時間的曲面

本講演で紹介する手法では曲面の座標系としてパラ複素数を使用する. パラ複素数を用いることにより, 正定値計量の場合における Abresch-Rosenberg 微分 ([1]) と呼ばれる平均曲率一定曲面に対して正則な 2 次微分に類似した 2 次微分が得られ, 時間的極小曲面の構造がより明確になる. 本節ではパラ複素数の定義と性質およびハイゼンベルグ群の時間的曲面がみたす方程式を紹介する.

2.1 パラ複素構造

次の演算を満たす 1 と i' で張られる実代数を $\mathbb{C}'$ で表す :

$$(i')^2 = 1, \quad 1 \cdot i' = i' \cdot 1 = i'.$$

実代数 $\mathbb{C}' = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}i'$ およびその元をパラ複素数という. 任意のパラ複素数 $z \in \mathbb{C}'$ は複素数と同様に一意に $x, y \in \mathbb{R}$ が存在して $z = x + yi'$ と表され, 実部, 虚部, パラ複素共役をそれぞれ $\mathrm{Re}\, z = x$, $\mathrm{Im}\, z = y$, $\bar{z} = x - yi'$ と書く. 一方, 複素数とは異なりパラ複素数は次のような性質を持つ.

定理 2.1. (1) パラ複素数 $z = x + yi' \in \mathbb{C}'$ に対し, $z = w^2$ を満たすパラ複素数 $w \in \mathbb{C}'$ が存在する必要十分条件は $x \pm y \geq 0$ である.

(2) パラ複素数 $z = x + yi' \in \mathbb{C}'$ に対し, $z = e^w$ を満たすパラ複素数 $w \in \mathbb{C}'$ が存在する必要十分条件は $x \pm y > 0$ である.

(3) パラ複素数 $z = x+yi' \in \mathbb{C}'$ に対し, 逆元 $z^{-1} \in \mathbb{C}'$ が存在するための必要十分条件は $x^2 - y^2 \neq 0$ である.

(4) パラ複素数 $z, w \in \mathbb{C}'$ に対し, $(zw)^{1/2} \in \mathbb{C}'$ が存在するならば, $\epsilon \in \{\pm 1, \pm i'\}$ で $(\epsilon z)^{1/2}$, $(\epsilon w)^{1/2}$ が存在するものが取れる.

2.2 ハイゼンベルグ群

アファイン空間 $\mathbb{R}^3$ に次の群構造を備えた $\mathrm{Nil}_3 = (\mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_3), \cdot)$ を 3 次元ハイゼンベルグ群という：

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 + \frac{1}{2}(x_1 y_2 - y_1 x_2)).$$

このときハイゼンベルグ群 Nil_3 のリー環 $\mathfrak{nil}_3$ は $\mathbb{R}^3$ に標準基底 $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ の関係を次で定めたものとして与えられる：

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_2, e_3] = [e_3, e_1] = 0.$$

3 次元ハイゼンベルグ群の左不変ローレンツ計量の分類について次が知られている.

定理 2.2 ([17])**.** 3 次元ハイゼンベルグ群の任意の左不変ローレンツ計量は次のいずれかに等長的である：

(1) $g_1 = -dx_1^2 + dx_2^2 + \omega^2$,
(2) $g_2 = dx_1^2 + dx_2^2 - \omega^2$,
(3) $g_3 = dx_1^2 - dx_2^2 - 2\omega dx_2$.

ただし $\omega = dx_3 + \frac{1}{2}(x_2 dx_1 - x_1 dx_2)$ である. さらに各計量に関する等長群の次元は (1), (2) は 4, (3) は 6 である.

左不変ローレンツ計量 g_2 については Brander-Kobayashi ([5]) によって空間的極大曲面のワイエルシュトラス型表現公式が研究されている. 本講演では Nil_3 に与える計量として g_1 を採用し, その Levi-Civita 接続を ∇ とする.

2.3 ハイゼンベルグ群の時間的曲面

向き付け可能で連結な 2 次元多様体 M から 3 次元ハイゼンベルグ群への写像 $f : M \to \mathrm{Nil}_3$ を時間的曲面, すなわち誘導計量がローレンツであるはめ込みとする. このとき誘導されたローレンツ計量は M 上にローレンツ等角構造を定める. 故に M 上のパラ複素座標 $z = x + yi'$ で誘導計量 I が $I = e^u dz d\bar{z} = e^u(dx^2 - dy^2)$ の形で表されるものがとれ, M はローレンツ面, f はローレンツ等角はめ込みと見なすことができる. このとき z をローレンツ等角座標という. またパラ複素座標系 z に対して 2 次形式 Bdz^2 がパラ正則であるとは $\partial_{\bar{z}} B = 0$ が成り立つときをいう. このような関数 B はパラ正則であるという. ローレンツ面の幾何について詳細は [21] を参照されたい.

ローレンツ面 M から 3 次元ハイゼンベルグ群 Nil_3 へのローレンツ等角はめ込み $f : M \to \mathrm{Nil}_3$ に対し, $\Phi = f^{-1} f_z$ によって $\mathfrak{nil}_3$ 値写像 Φ を定義する. ここで f^{-1} は f の各点に対する逆元を意味し, f_z の単位元への左移動を表す. このとき次が成立する：

$$\Phi_{\bar{z}} - \overline{\Phi}_z + [\overline{\Phi}, \Phi] = 0. \tag{2.1}$$

さらに N を f の単位法ベクトル場とし, H を N に関する f の平均曲率とすると

$$\Phi_{\bar{z}} + \overline{\Phi}_z + \left\{\Phi, \overline{\Phi}\right\} = e^u H f^{-1} N \tag{2.2}$$

が成立する．ここで $\{\cdot,\cdot\}$ は $\{X,Y\}=\nabla_X Y+\nabla_Y X$ によって定義される対称双線形写像である．また $\Phi=\sum_{k=1}^{3}\phi_k e_k$ と展開したとき, 定理 2.1(3) と f の等角性より

$$\phi_1=\epsilon\left((\overline{\psi_2})^2+(\psi_1)^2\right),\ \phi_2=\epsilon i'\left((\overline{\psi_2})^2-(\psi_1)^2\right),\ \phi_3=2\psi_1\overline{\psi_2}$$

を満たす $\epsilon\in\{\pm i'\}$ とパラ複素関数 ψ_1, ψ_2 が存在することがわかる．このパラ複素関数 ψ_1, ψ_2 を f の生成スピノルという．

命題 2.3 (c.f.[7])**.** ローレンツ等角写像 f が満たす式 (2.1)(2.2) は次の非線形ディラック方程式に書き換えられる：

$$\begin{pmatrix}\partial_z\psi_2+\mathcal{U}\psi_1\\ -\partial_{\bar z}\psi_1+\mathcal{V}\psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

ここで $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ は,

$$\mathcal{U}=\mathcal{V}=-\frac{H}{2}e^{u/2}+\frac{i'}{4}h \tag{2.4}$$

$$e^{u/2}=2(\psi_2\overline{\psi_2}+\psi_1\overline{\psi_1}),\quad h=2(\psi_2\overline{\psi_2}-\psi_1\overline{\psi_1}) \tag{2.5}$$

で与えられる．関数 $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ を f のディラックポテンシャルという．

注意 2.4. 関数 H, $e^{u/2}$, h および非線形ディラック方程式 (2.3)(2.4) から式 (2.1)(2.2) を得るには解 (ψ_1,ψ_2) が (2.5) を満たしている必要がある．また単位法ベクトル場をスピノルで表すことで, 関数 h がある点で消えていることと, 対応する時間的曲面 f に左不変ベクトル場 E_3 がその点で接していることは同値であることがわかる．このことから h が至るところで消えない時間的曲面 f は非垂直であるという．

注意 2.5. ミンコフスキー空間 $\mathbb{L}^3$ の時間的曲面の非線形ディラックポテンシャルを同様に導くと, Nil_3 の時間的曲面の $H=0$ の場合によく似ていることがわかる．これはミンコフスキー空間のある時間的平均曲率 $1/2$ 曲面とハイゼンベルグ群の時間的 $H=0$ 曲面にある種の対応があるためである．

ローレンツ等角写像の単位法ベクトル場を単位元に左移動させた正規ガウス写像は 2 つの立体射影を通じてド・ジッター球面 $\mathbb{S}^2_1=\left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{L}^3|x_1^2-x_2^2+x_3^2=1\right\}$ への写像と見なすことができる．

3 時間的極小曲面

時間的曲面 $f:M\to\mathrm{Nil}_3$ の平均曲率が 0 であるとき, f を時間的極小曲面という．時間的極小曲面に対しては曲面が非垂直であることとディラックポテンシャルが可逆であることは同値である．また, ディラックポテンシャル $\mathcal{U}$ が可逆であるとき, あるパラ複素関数 w と $\tilde\epsilon\in\{\pm1,\pm i'\}$ が存在して $\mathcal{U}=\tilde\epsilon e^{w/2}$ と表せる．このとき非線形ディラック方程式は Lax 形式に書き換えることができる．本節では本講演における主結果である非垂直な時間的極小曲面のローレンツ調和写像による特徴づけと表現公式を与える．

3.1 主結果 1

パラ複素平面の単連結領域 $\mathbb{D}$ 上定義されたディラックポテンシャルが可逆なローレンツ等角写像 $f:\mathbb{D}\to \mathrm{Nil}_3$ に対し, パラメータ $\mu\in\mathbb{S}^1_1:=\left\{e^{i't}=\cosh t+i'\sinh t\in\mathbb{C}'\,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}$ を用いて行列値 1 次微分形式の族 α^μ を

$$\alpha^\mu:=U^\mu dz+V^\mu d\bar z,$$

$$U^\mu=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}w_z+\frac{1}{2}H_z\tilde\epsilon e^{-w/2}e^{u/2} & -\mu^{-1}\tilde\epsilon e^{w/2}\\ \mu^{-1}B\tilde\epsilon e^{-w/2} & -\frac{1}{4}w_z\end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$$V^\mu=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}w_{\bar z} & -\mu\bar B\tilde\epsilon e^{-w/2}\\ \mu\tilde\epsilon e^{w/2} & \frac{1}{4}w_{\bar z}+\frac{1}{2}H_{\bar z}\tilde\epsilon e^{-w/2}e^{u/2}\end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

で定める. ここで関数 B は *Abresch-Rosenberg* 微分と呼ばれる 2 次形式の係数関数である. 曲面の平均曲率が一定であるとき, この 2 次形式はパラ正則になる. 次の定理は 3 次元ハイゼンベルグ群の非垂直な時間的極小曲面を特徴づける本講演の主結果の 1 つである.

定理 3.1. 単連結領域 $\mathbb{D}\subset\mathbb{C}'$ 上で定義されたディラックポテンシャルが可逆なローレンツ等角写像 $f:\mathbb{D}\to\mathrm{Nil}_3$ に対し, 以下は同値である :

(1) f は時間的極小曲面である.
(2) ディラックポテンシャル $\mathcal{U}=\tilde\epsilon e^{w/2}=-\frac{H}{2}e^{u/2}+\frac{i'}{4}h$ は純パラ虚数に値を持つ.
(3) $d+\alpha^\mu$ は全ての μ について自明束 $\mathbb{D}\times\mathrm{SU}'_{1,1}$ 上の平坦接続を与える.
(4) 正規ガウス写像 $f^{-1}N$ はド・ジッター球面 $\mathbb{S}^2_1\subset\mathbb{L}^3_{(+,-,+)}$ へのローレンツ調和写像である.

ここで $\mathrm{SU}'_{1,1}$ は次で与えられるリー群で, 特殊パラユニタリ群という :

$$\mathrm{SU}'_{1,1}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix}\mid \alpha,\beta\in\mathbb{C}',\alpha\bar\alpha-\beta\bar\beta=1\right\}.$$

3.2 主結果 2

定理 3.1 より非垂直な時間的極小曲面 f に対し, 微分方程式 $(F^\mu)^{-1}dF^\mu=\alpha^\mu$ は $\mathrm{SU}'_{1,1}$ 値の初期値に対して $\mathrm{SU}'_{1,1}$ 値の解 F^μ をもつ. 以下簡単のため $h>0$, $\epsilon=i'$ とするが, 他の状況においても同様の結果が得られる.

定義 3.2. 微分方程式 $(F^\mu)^{-1}dF^\mu=\alpha^\mu$ の $\mathrm{SU}'_{1,1}$ 値の解 F^μ を時間的極小曲面 f の一般拡張動標構という. 特に条件

$$F^\mu|_{\mu=1}=F=\frac{1}{\sqrt{\psi_2\overline{\psi_2}-\psi_1\overline{\psi_1}}}\begin{pmatrix}\overline{\psi_2} & \overline{\psi_1}\\ \psi_1 & \psi_2\end{pmatrix}$$

の下で F^μ を時間的極小曲面 f の拡張動標構という.

例 3.3. 次の Nil_3 の曲面 f は $x_3=0$ 平面に値を持つ時間的極小曲面である :

$$f=\left(\frac{2i'(z-\bar z)}{1+z\bar z},\ \frac{2(z+\bar z)}{1+z\bar z},\ 0\right).$$

曲面 f に対する拡張動標構 F^μ は次で与えられる：

$$F^\mu = \frac{1}{(1+z\bar{z})^{1/2}} \begin{pmatrix} 1 & -i'\mu^{-1}z \\ i'\mu\bar{z} & 1 \end{pmatrix}.$$

ミンコフスキー空間 $\mathbb{L}^3$ と特殊パラユニタリ群 $\mathrm{SU}'_{1,1}$ のリー環

$$\mathfrak{su}'_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} ai' & \bar{b} \\ b & -ai' \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}' \right\}$$

を次の対応をもって同一視する：

$$\mathfrak{su}'_{1,1} \ni \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ri' & -p-qi' \\ -p+qi' & -ri' \end{pmatrix} \longleftrightarrow (p,q,r) \in \mathbb{L}^3_{(+,-,+)}.$$

ただし $\mathfrak{su}'_{1,1}$ には不定値内積 $\langle X, Y\rangle := 2\mathrm{tr}(XY)$ を定める．さらに線形同型写像

$$\Xi : \mathfrak{su}'_{1,1} \ni \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_3 i' & -x_2 - x_1 i' \\ -x_2 + x_1 i' & -x_3 i' \end{pmatrix} \mapsto x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathfrak{nil}_3$$

をとる．ド・ジッター球面へのローレンツ調和写像はミンコフスキー空間の時間的平均曲率一定曲面との関連が深く，ローレンツ調和写像から時間的平均曲率一定曲面を与える Sym の公式が知られている ([11])．このことを応用して 3 次元ハイゼンベルグ群の時間的極小曲面の表現公式を与える次の定理を得た．

定理 3.4. 単連結領域 $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}'$ 上定義されたある時間的極小曲面 f に対し，その拡張動標構を F^μ とする．リー環 $\mathfrak{su}'_{1,1}$ に値をもつ写像 $f_{\mathbb{L}^3}$ と $N_{\mathbb{L}^3}$ を

$$f_{\mathbb{L}^3} = -i'\mu(\partial_\mu F^\mu)(F^\mu)^{-1} - \frac{i'}{2}\mathrm{Ad}(F^\mu)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N_{\mathbb{L}^3} = \frac{i'}{2}\mathrm{Ad}(F^\mu)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で定め，さらに写像 $f^\mu : \mathbb{D} \to \mathrm{Nil}_3$ を

$$f^\mu := \exp \circ \Xi \circ \hat{f}, \quad \hat{f} = (f_{\mathbb{L}^3})^o - \frac{i'}{2}\mu(\partial_\mu f_{\mathbb{L}^3})^d$$

により定める．ここで *"o","d"* はそれぞれ非対角成分と対角成分を表す．このとき 1 に十分近い μ に対して以下が成立する：

(1) 写像 $f_{\mathbb{L}^3}$ はミンコフスキー空間 $\mathbb{L}^3$ の時間的平均曲率 $1/2$ 曲面であり，$N_{\mathbb{L}^3}$ を単位法ベクトル場にもつ．
(2) 写像 f^μ は 3 次元ハイゼンベルグ群 Nil_3 の時間的極小曲面であり，正規ガウス写像を立体射影を通してド・ジッター球面への写像と見たものが $N_{\mathbb{L}^3}$ である．さらに $f^\mu|_{\mu=1}$ はオリジナルの時間的極小曲面 f と等長群の作用を除いて一致する．

注意 3.5. 定理 3.4 の $f_{\mathbb{L}^3}$ の定義式がミンコフスキー空間の時間的平均曲率 $1/2$ 曲面の Sym の公式のパラ複素数を用いた表示である．

4　拡張動標構のワイエルシュトラス型表現

定理 3.1 および定理 3.4 より一般拡張動標構を与えることでハイゼンベルグ群の時間的極小曲面を与えることができる. 本節では拡張動標構をパラ正則関数で記述する, 拡張動標構のワイエルシュトラス型表現公式を紹介する.

4.1　ループ群の分解

時間的極小曲面の拡張動標構は $\mathbb{C}' \setminus \{z(1 \pm i') | z \in \mathbb{C}'\}$ 上でパラメータ μ について解析的であるため, ループ群と呼ばれる無限次元リー群の一種である以下の群を考える.

$$
\begin{aligned}
\Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma &= \left\{ g : \mathbb{S}^1_1 \to \mathrm{SL}_2\mathbb{C}' \;\middle|\; \begin{array}{c} g = \cdots + g_{-1}\mu^{-1} + g_0 + g_1\mu^1 + \cdots \\ g(-\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g(\mu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\}, \\
\Lambda'^{+}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma &= \left\{ g \in \Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \mid g = g_0 + g_1\mu^1 + \cdots \right\}, \\
\Lambda'^{-}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma &= \left\{ g \in \Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \mid g = g_0 + g_{-1}\mu^{-1} + \cdots \right\}, \\
\Lambda'^{+}_*\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma &= \left\{ g \in \Lambda'^{+}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \mid g(0) = \mathrm{id} \right\}, \\
\Lambda'^{-}_*\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma &= \left\{ g \in \Lambda'^{-}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \mid g(\infty) = \mathrm{id} \right\}, \\
\Lambda'\mathrm{SU}'_{1,1\sigma} &= \left\{ g \in \Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \middle| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left(\overline{g(1/\bar{\mu})}^{T} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = g(\mu) \right\}.
\end{aligned}
$$

時間的極小曲面の拡張動標構はループ群 $\Lambda'\mathrm{SU}'_{1,1\sigma}$ の元である. 次の定理はループ群の基本的な分解公式である Birkhoff 分解・Iwasawa 分解 ([16]) を応用して得られる.

定理 4.1. (1) Birkhoff 分解 : 積をとる写像

$$
\Lambda'^{-}_*\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \times \Lambda'^{+}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \to \Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma, \quad \Lambda'^{+}_*\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \times \Lambda'^{-}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \to \Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma
$$

はそれぞれ $\Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma$ のある稠密開集合への微分同相写像である.

(2) Iwasawa 分解 : 積をとる写像

$$
\Lambda'\mathrm{SU}'_{1,1\sigma} \times \Lambda'^{+}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma \to \Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma
$$

は $\Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma$ のある稠密開集合への微分同相写像である.

これらの稠密開集合を $\Lambda'\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma$ の *Big cell* という.

4.2　主結果 3

定理 4.1 の Birkhoff 分解を時間的極小曲面の拡張動標構に用いることで拡張動標構のワイエルシュトラスデータになるパラ正則 1 形式が得られた.

定理 4.2. 時間的極小曲面 f に対し, その拡張動標構 F^μ が Big cell に属しているとする. このとき Birkhoff 分解 $F^\mu = F^\mu_- F^\mu_+$ $(F^\mu_- \in \Lambda'^{-}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma,\ F^\mu_+ \in \Lambda'^{+}\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma)$ によって定まる F^μ_- の

Maurer-Cartan 形式 $\xi = (F_-^\mu)^{-1}dF_-^\mu$ は次で与えられる：

$$\xi = \mu^{-1}\begin{pmatrix} 0 & a(z) \\ -\frac{B(z)}{a(z)} & 0 \end{pmatrix} dz. \tag{4.1}$$

ただし $B(z)$ は時間的極小曲面 f の Abresch-Rosenberg 微分の係数関数であり, $a(z)$ は

$$a(z) = -\frac{i'}{4}h^2(z,0)h^{-1}(0,0)$$

で定義されるパラ正則関数である．パラ正則 1 形式 ξ を時間的極小曲面 f の正規ポテンシャルという．

逆に次の定理により式 (4.1) で定義された正規ポテンシャルから 3 次元ハイゼンベルグ群の時間的極小曲面の拡張動標構を構成できることを示した．

定理 4.3. 式 (4.1) で定義されたパラ正則 1 形式 ξ に対し, 2 次正方行列 F_-^μ を方程式

$$\partial_z F_- = F_-\xi, \quad F_-(z=0) = \mathrm{id}$$

の解とする．このとき Iwasawa 分解 $F_-^\mu = F^\mu V_+$ $(F^\lambda \in \Lambda'\mathrm{SU}'_{1,1\sigma},\ V_+ \in \Lambda'^+\mathrm{SL}_2\mathbb{C}'_\sigma)$ によって定まる F^μ に対し, ある $k \in \mathrm{U}'_1$ が存在して $F^\mu k$ は適切に座標変換すると 3 次元ハイゼンベルグ群の時間的極小曲面の拡張動標構になる．ここで $\mathrm{U}'_1 := \left\{ \begin{pmatrix} e^{i'\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i'\theta} \end{pmatrix} \middle| \theta \in \mathbb{R} \right\}$ である．

5 具体例

例 5.1 (双曲放物面)．正規ポテンシャル $\xi = \mu^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{i'}{4} \\ -\frac{i'}{4} & 0 \end{pmatrix} dz$ に対して拡張動標構は

$$F^\mu = \begin{pmatrix} \cosh\frac{-\mu^{-1}z+\mu\bar{z}}{4} & i'\sinh\frac{-\mu^{-1}z+\mu\bar{z}}{4} \\ i'\sinh\frac{-\mu^{-1}z+\mu\bar{z}}{4} & \cosh\frac{-\mu^{-1}z+\mu\bar{z}}{4} \end{pmatrix}$$

で与えられる．対応する $\mathbb{L}^3$ の時間的平均曲率 $1/2$ 曲面 $f_{\mathbb{L}^3}$ と Nil_3 の時間的極小曲面 f^μ は

$$f_{\mathbb{L}^3} = \left(\frac{\mu^{-1}z+\mu\bar{z}}{2}, -\sinh i'\frac{-\mu^{-1}z+\mu\bar{z}}{2}, -\cosh\frac{-\mu^{-1}z+\mu\bar{z}}{2} \right)$$

$$f^\mu = \left(-\sinh i'\frac{-\mu^{-1}z+\mu\bar{z}}{2}, \frac{\mu^{-1}z+\mu\bar{z}}{2}, \frac{\mu^{-1}z+\mu\bar{z}}{4}\sinh i'\frac{-\mu^{-1}z+\mu\bar{z}}{2} \right)$$

である．時間的極小曲面 f^μ は双曲放物面 $x_3 = -x_1x_2/2$ を示している．

例 5.2 (B-scroll 型時間的極小曲面)．パラ正則関数 $S(z)$ を用いて正規ポテンシャル ξ を

$$\xi = \mu^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -\frac{i'}{4} \\ -\frac{1-i'}{2}S(z) & 0 \end{pmatrix} dz$$

で定める．このとき, 対応するミンコフスキー空間の時間的平均曲率 $1/2$ 曲面は B-scroll と呼ばれる null 曲線による線織面である．また, 対応するハイゼンベルグ群の時間的極小曲面も線織面になっている．

参考文献

[1] U. Abresch, H. Rosenberg. Generalized Hopf differentials. *Mat. Contemp.* **28**: 1–28, 2005.

[2] K. Akutagawa, S. Nishikawa. The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-space. *Tohoku Math. J.* **42**: 67–82, 1990.

[3] A. I. Bobenko. Constant mean curvature surfaces and integrable equations. *Russian Math. Surveys* **46**(4): 1-45, 1991.

[4] A. I. Bobenko. Surfaces in terms of 2 by 2 matrices. Old and new integrable cases. Harmonic maps and integrable systems, Vieweg, 83–127, 1994.

[5] D. Brander, S. P. Kobayashi. Vertical sets on maximal surfaces in Heisenberg groups. *In preparation*, 2021.

[6] D. Brander, M. Svensson. Timelike constant mean curvature surfaces with singularities. *J. Geom. Anal.* **24**(3): 1641–1672, 2014.

[7] D. A. Berdinskiĭ, I. A. Taĭmanov. Surfaces in three-dimensional Lie groups (Russian). *Sibirsk. Mat. Zh.* **46**(6): 1248–1264, 2005. English translation: *Siberian Math. J.* **46**(6): 1005–1019, 2005.

[8] B. Daniel. Isometric immersions into 3-dimensional homogeneous manifolds. *Comment. Math. Helv.* **82**(1): 87–131, 2007.

[9] B. Daniel. The Gauss map of minimal surfaces in th Heisenberg group. *Int. Math. Res. Not. IMRN,* (3): 674–695, 2011.

[10] J. F. Dorfmeister, J. Inoguchi, S.-P. Kobayashi. A loop group method for minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group. *Asian J. Math.* **20**(3): 409–448, 2016.

[11] J. Dorfmeister, J. Inoguchi, M. Toda. Weierstra-type representation of timelike surfaces with constant mean curvature. in: *Differential geometry and integrable systems (Tokyo, 2000)*, Contemp. Math., **308**: 77–99, 2002.

[12] J. Dorfmeister, F. Pedit, H. Wu. Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces. *Comm. Anal. Geom.* **6**(4): 633–668, 1998.

[13] I. Fernandez, P. Mira. A characterization of constant mean curvature surfaces in homogeneous 3-manifolds. *Differential Geom. Appl.* **25**(3): 281–289, 2007.

[14] K. Kenmotsu. Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature. Math. Ann., **245**: 89–99, 1979.

[15] H. Kiyohara, S.-P. Kobayashi. Timelike minimal surfaces in the three-dimensional Hiesenberg group. *In preparation.*

[16] A. Pressley, G. Segal. *Loop groups.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1986. Oxford Science Publications.

[17] S. Rahmani, Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois, [Lorentz metrics on three-dimensional unimodular Lie groups]. *J. Geom. Phys.*, **9**(3): 295–302, 1992.

[18] A. Sym. Soliton surfaces and their applications (soliton geometry from spectral problems), Geometric aspects of the Einstein equations and integrable systems (Scheveningen, 1984), Springer, 154–231, 1985.

[19] T. Taniguchi. The Sym-Bobenko formula and constant mean curvature surfaces in Minkowski 3-space. *Tokyo J. Math.*, **20**(2): 463–373, 1997.

[20] W. M. Thurston (S. Levy ed.). *Three-dimensional geometry and topology.* Vol. 1, Princeton Math. Series, Vol. 35, Princeton Univ. Press, 1997.

[21] T. Weinstein. *An introduction to Lorentz surfaces.* De Gruyter Expositions in Mathematics, 22. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1996.

非平面グラフとリー環 sl(N) のウェイトシステム

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系
今里優樹 Imasato Yuki

概要

ウェイトシステムとは有限次元のリー環を 1 つ固定したとき, 3-正則グラフに対して値を与える関数であり, リー環 $sl(N)$ に対するウェイトシステムの値はグラフの平面性と関係がある. 本講演ではまずはじめにグラフの諸定義およびグラフの平面性に重要なワグナーの定理を紹介する. その後ウェイトシステムの定義と $sl(N)$ に対するウェイトシステムの性質を紹介し, 最後にいくつかのグラフに対する $sl(N)$ のウェイトシステムの計算結果を考察する.

1 グラフ

グラフを定義する.

定義 1. 有限集合 V, E と, E から V の冪集合への写像 $\psi : E \to P(V)$ に対して, 任意の $e \in E$ で $|\psi(e)|$ が 1 または 2 であるとき, これら 3 つの組 (V, E, ψ) をグラフという. グラフ G に対して V を頂点集合, E を辺集合という. また V の元を頂点, E の元を辺という.

グラフ $G = (V, E, \psi)$ の頂点 $v \in V$ と辺 $e \in E$ に対して $v \in \psi(e)$ であるとき e は v に接続するといい, v に接続する辺の数を v の次数という. グラフとは上記のように 2 つの有限集合と写像の組のことであるが, 頂点を点, 辺を接続する頂点を結ぶ曲線として平面に描く表し方が一般的である.

例 1. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$,
$\psi(e_1) = \{v_1, v_2\}, \psi(e_2) = \{v_1, v_3\}, \psi(e_3) = \{v_2, v_3\}, \psi(e_4) = \{v_2, v_4\}, \psi(e_5) = \{v_3, v_4\}$
となるグラフ (V, E, ψ) は以下のように表される.

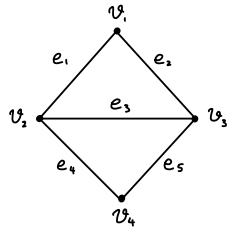


図 1 グラフの例

定義 2. k を自然数とする. G において全ての頂点の次数が k であるとき, G は k-正則グラフという.

定義 3. G において, 頂点と辺の交互列 $W = v_0 e_0 v_1 e_1 v_2 \cdots v_{n-1} e_{n-1} v_n$ を道という. ただし $\psi(e_k) =$

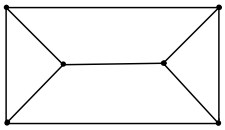


図 2　3-正則グラフの例

$\{v_k, v_{k+1}\}$ とする．このとき v_0 を始点, v_n を終点という．

定義 4. G の任意の頂点 v, w において v を始点, w を終点とする道が存在するとき G は連結であるという．

定義 5. $G = (V, E, \psi)$ から辺 e を取り除いたグラフ $(V, E\backslash\{e\}, \psi_{E\backslash\{e\}})$ を辺 e の削除という．G を非連結にするのに削除しなければならない最小の辺の数を辺連結度といい, 辺連結度が k 以上のグラフを k-辺連結グラフという．

定義 6. グラフを平面に描くとき全ての頂点を異なる点として描き, 全ての辺が端点以外で他の辺と交わらないように描けるとき, グラフは平面的であるという．

例 2. 下の 2 つの図は同一のグラフを表しており, 左図は辺が交差しているが, 辺をずらすと右図のように交差なくかけるのでこのグラフは平面的である．

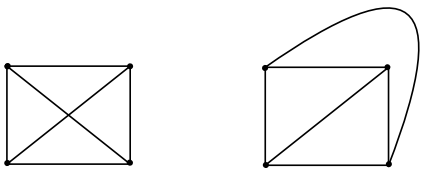


図 3　平面的グラフ

例 3. 非平面的グラフの例としては $K_{3,3}$ や K_5 がある．

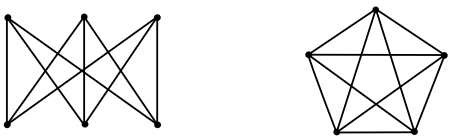


図 4　非平面的グラフ $K_{3,3}$ 及び K_5

定義 7. $G = (V, E, \psi)$ の頂点 v に接続する辺の集合を E_v とする．G から v 及び v に接続する辺を全て取り除いたグラフ $(V\backslash\{v\}, E\backslash E_v, \psi_{E\backslash E_v})$ を頂点 v の削除という．

定義 8. $G = (V, E, \psi)$ の辺 e_0 に対して $\psi(e_0) = \{u, w\}$ とする．このとき V に新たな頂点 v_{uw} 追加し, $V' = V \cup \{v_{uw}\}\backslash\{u, w\}$, $E' = E\backslash\{e\}$ とする．ここで辺 $e \in E', \psi(e) = \{v_1, v_2\}$ に対して, 写像

$\psi' : E' \to P(V')$ を

$$\psi'(e) = \begin{cases} \{v_1, v_2\} & (\{v_1, v_2\} \cap \{u, w\} = \phi) \\ \{v_1, v_{uw}\} & (v_2 = u \text{ または } v_2 = w) \\ \{v_{uw}, v_2\} & (v_1 = u \text{ または } v_1 = w) \end{cases}$$

とする. このときグラフ $G' = (V', E', \psi')$ を G の縮約といい, e が縮約されたという.

定義 9. G から縮約と辺・頂点の削除を繰り返して得られるグラフを G のマイナーという.

定理 1 (ワグナーの定理 [2])**.** グラフが平面的であることの必要十分条件は, マイナーとして K_5 または $K_{3,3}$ を含まないことである.

2 ウェイトシステムの定義

定義 10. G を 3-正則グラフとする. G の各頂点に対して, 接続する 3 つの辺に巡回的な向きが決まっているとき, G は頂点に向きのついた 3-正則グラフという.

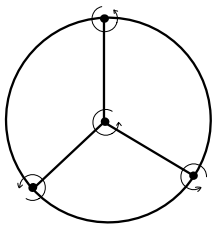


図 5 向きのついた 3-正則グラフの例

以下, 頂点に向きのついた 3-正則グラフについてのみ考える.

有限次元のリー環 L に対して, 以下の 3 つの性質を満たす双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L \to \mathbb{C}$ が定まっているとする.

- 対称性をもつ. すなわち $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$ となる.
- 非退化である. すなわち任意の b に対して $\langle a, b \rangle = 0$ ならば $a = 0$ となる.
- ad-invariant 性を持つ. すなわち $\langle [c, a], b \rangle + \langle a, [c, b] \rangle = 0$ となる.

このときウェイトシステムとは, グラフ G に対して値 $W_L(G)$ を返す写像 W_L である. $W_L(G)$ を定義するために t^{ij} 及び f_{ijk} を以下で定義する.

定義 11. L の基底を $\{L_i\}_{i=1}^{dimL}$ とし $t_{ij} = \langle L_i, L_j \rangle$ としたとき, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の非退化性から行列 $(t_{ij})_{dimL \times dimL}$ は正則であることがいえる. そこで (t_{ij}) の逆行列を (t^{ij}) とおく. また $f_{ijk} = \langle L_i, [L_j, L_k] \rangle$ とする.

このとき $W_L(G)$ は以下の手順で定義される.

step.1 辺の半分をラベリングする.
step.2 1 つの辺に対して, その辺上のラベルを読み $t^{\cdot\cdot}$ を割り当てる.
step.3 1 つの頂点に対して, その頂点の周りのラベルを向きづけられた順に読み $f_{\cdots}$ を割り当てる.

step.4 辺の分だけ t を, 頂点の分だけ f を掛け合わせる.
step.5 step.4 の式に対して, 各ラベルに 1 から $\dim L$ を代入したものを足し合わせる.

なお基底を変えてもにウェイトシステムの値は変わらない.

例 4. 上記の手順に従って図 5 のグラフ G の $W_{sl(2)}(G)$ を計算する. ただし $sl(2)$ に対して双線形形式としては $\langle L_i, L_j\rangle = tr(L_i, L_j)$ を用いると対称性, 非退化性, *ad-invariant* 性を満たすのでこれを用いる.

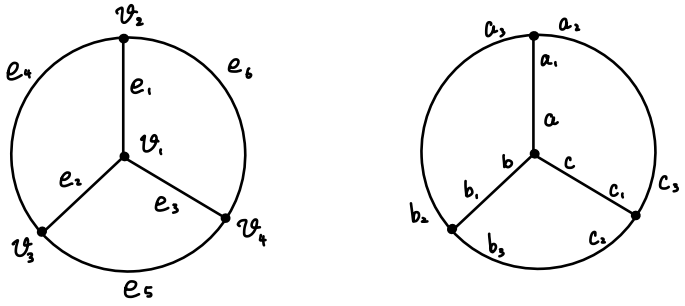
$sl(2)$ の基底として,

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いると,

$$(t^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, f_{ijk} = \begin{cases} 1 & ((i,j,k) = (1,2,3),(2,3,1),(3,1,2) \text{ のとき}) \\ -1 & ((i,j,k) = (3,2,1),(2,1,3),(1,3,2) \text{ のとき}) \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

となる. 次に辺の半分をラベリングすると下の右図のようになる.



次に辺に対して t を, 頂点に対して f を対応させる. 例えば e_1 に対しては t^{aa_1}, v_4 に対しては $f_{c_1c_2c_3}$ を対応させる. 次に全ての頂点, 辺に対応する t, f を掛け合わせ,

$$t_{aa_1}t_{bb_1}t_{cc_1}t_{a_3b_2}t_{b_3c_2}t_{c_3a_2}f_{abc}f_{a_1a_2a_3}f_{b_1b_2b_3}f_{c_1c_2c_3}$$

を得る. 最後に各変数 $a, b, c, \cdots, c_3$ に 1 から $dim(sl(2)) = 3$ までを代入し足し合わせたものが $W_{sl(2)}(G)$ である. すなわち

$$W_{sl(2)}(G) = \sum_{a,b,c,\cdots,c_3=1}^{3} t_{aa_1}t_{bb_1}t_{cc_1}t_{a_3b_2}t_{b_3c_2}t_{c_3a_2}f_{abc}f_{a_1a_2a_3}f_{b_1b_2b_3}f_{c_1c_2c_3}$$

となる.

3 リー環 $sl(N)$ ウェイトシステム

以下 $sl(N)$ のウェイトシステムについて考えていく. ただし双線形形式としては $\langle L_i, L_j\rangle = \mathrm{tr}(L_i, L_j)$ を用いる. ここで以下の補題が成り立つ.

補題 1. N を変数と見なしたとき, 任意の連結グラフ G に対して $W_{sl(N)}(G)$ は N の多項式となる. また G の頂点数を v としたとき, N の多項式 $W_{sl(N)}(G)$ の次数は高々 $\frac{v}{2} + 2$ 次となる.

定義 12. 連結グラフ G に対して, $W_{sl(N)}(G)$ の $\frac{v}{2}+2$ 次の係数を $W^{top}_{sl(N)}(G)$ と表す.

このとき次の定理が成り立つ.

定理 2 (Bar-Natan[1])**.** G は連結であるとする. このとき G が 2-辺連結ならば $|W^{top}_{sl(N)}(G)|$ は, G の球面への埋め込みの数と等しくなり, 辺連結度が 1 ならば $W^{top}_{sl(N)}(G)=0$ となる.

この定理から 2-辺連結である G に限ると, G が平面的ならば $W^{\mathrm{top}}_{sl(N)}(G)\neq 0$, 非平面的ならば $W^{\mathrm{top}}_{sl(N)}(G)=0$ となることが言える.

以下上記の補題と定理を示す. まずは以下の補題を示す.

補題 2. 任意のグラフ G, 自然数 N に対して $W_{sl(N)}(G)=W_{gl(N)}(G)$ となる.

補題 2 の証明. $sl(N)$ の定義より,

$$gl(N)=sl(N)\oplus\{cE|c\in\mathbb{C}\}$$

となるので $sl(N)$, $\{cE|c\in\mathbb{C}\}$ の基底として, $\{L_i\}_{i=1}^{N^2-1}$, $L_{N^2}=E$ をそれぞれ取ると, $\{L_i\}_{i=1}^{N^2}$ は $gl(N)$ の基底となる. ここで行列リー環の括弧積の定義より $[L_i,E]=0$ となるので, i,j,k のいづれかが N^2 のとき $f_{ijk}=\{L_i,[L_j,L_k]\}=0$ となる. よって,

$$\begin{aligned}W_{gl(N)}(G)&=\sum_{a,b,c,\cdots=1}^{N^2}t^{aa_1}t^{bb_1}\cdots f_{abc}f_{a_1a_2a_3}\cdots\\&=\sum_{a,b,c,\cdots=1}^{N^2-1}t^{aa_1}t^{bb_1}\cdots f_{abc}f_{a_1a_2a_3}\cdots\\&=W_{sl(N)}(G)\end{aligned}$$

となる. □

よって以下 $W_{sl(N)}(G)$ の代わりに $W_{gl(N)}(G)$ について考える.

$gl(N)$ の基底として $\{L_{ij}\}_{i,j=1}^{N}(L_{ij}=E_{ij})$ をとる. ここで $t^{(ij)(kl)}, f_{(ij)(kl)(mn)}$ を定義に沿って計算すると, $t^{(ij)(kl)}=\delta_{il}\delta_{jk}, f_{(ij)(kl)(mn)}=\delta_{jk}\delta_{lm}\delta_{ni}-\delta_{jm}\delta_{nk}\delta_{li}$ となる. これを用いて $W_{gl(N)}(G)$ を以下の手順で計算する.

step.1 $gl(N)$ の基底は (ij) や (kl) のように 2 つの文字からなるので, グラフ G の辺を二重化し, それぞれの辺の半分にラベルをつける. 例えば図 5 のグラフは下図のようになる.

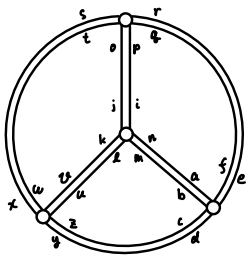
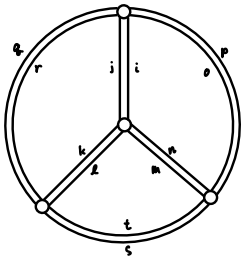
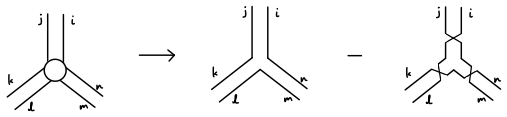


図 6　辺を 2 重化したグラフ

step.2 $t^{(ij)(kl)} = \delta_{il}\delta_{jk}$ となることから, $W_{gl(N)}(G)$ を計算する際 $i \neq l$ または $j \neq k$ となる項は考えなくて良い. よって 1 本の線に対してラベリングされた 2 つの文字をつなげ, 1 つの文字でラベリングする. このとき $t^{(ij)(kl)}$ は全て 1 になるので, $W_{gl(N)}(G) = \sum_{i,j,k,\cdots=1}^{N} f_{(ij)(kl)(mn)} f_{\cdots} \cdots$ となり, あとは f だけを考えれば良い. すなわち下図のようなラベリングを考えれば良い.



step.3 $f_{(ij)(kl)(mn)} = \delta_{jk}\delta_{lm}\delta_{ni} - \delta_{jm}\delta_{nk}\delta_{li}$ となることから各頂点に対して以下のような図を割り当てる.

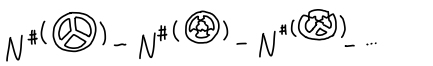


step.4 上の図の第 1 項に注目すると, $j = k, l = m, n = i$ のとき 1, それ以外のときは 0 になるので i, j, k, l, m, n に 1 から N までを代入すると,

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,\cdots,n=1}^{N} \delta_{jk}\delta_{lm}\delta_{ni} &= \#\{1 \leq i, j, \cdots, n \leq N | j = k, l = m, n = i\} \\ &= N^3\end{aligned}$$

これは $N^{(\text{辺の数})}$ と思うことができる.

step.5 各頂点に対して step.3 の右辺の第 1 項または第 2 項の図を割り当て $N^{(\text{辺の数})}$ を計算し, それを全通り足し合わせたものが $W_{gl(N)}(G) = W_{sl(N)}(G)$ となる. 例えば図 5 のグラフに対して $W_{sl(N)}(G)$ は以下のような式で表せる. ただし $\#(\bigcirc)$ は $\bigcirc$ の辺の本数を表すとする.



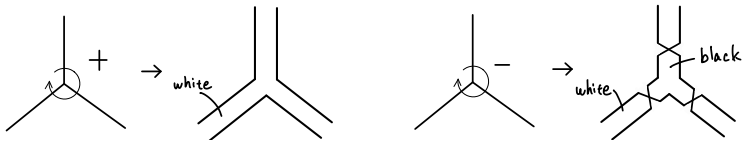
これらをまとめると,

$$W_{gl(N)}(G) = \sum_{M:G \text{ の marking}} \text{sign}(M) N^{b(T_M)} \tag{1}$$

ただし G の marking M や T_M は以下で定める.

- G の各頂点に符合 $+$ または $-$ を割り当てたものを G の marking と呼び, G の marking M の全ての頂点の符号の積を $\text{sign}(M)$ と表す.
- M から得られる境界付き向きづけ可能な平面 T_M を以下で定める.

– M で $+$ の頂点および $-$ の頂点にそれぞれ下図のように向き付け可能な平面片を割り当てる．ここで辺が反時計回り並んでいるように見える側から頂点を見たとき, $+$ の頂点は表面を white で裏面を black, $-$ の頂点は表面を black で裏面を white と名付ける．



– 平面片を辺の対応に従って繋げた境界付き向きづけ可能な平面が T_M である．ただし各平面片を繋ぐとき, white 面と white 面, black 面と black 面が繋がるようにする．

- T_M の境界の要素数を $b(T_M)$ と表す．

G の marking M に対して, T_M の全ての境界を 2 次元円盤で埋めた向きづけ可能な平面を S_M と表す．χ をオイラー数, g を種数とすると,

$$2-2g(S_M)=\chi(S_M)=\chi(T_M)+b(T_M)=\chi(G)+b(T_M)$$

が成り立つ．G は 3-正則であったので, $\chi(G)=v-e=v-\frac{3}{2}v=-\frac{v}{2}$ となる．よって

$$b(T_M)=-\chi(G)+2-2g(S_M)=\frac{v}{2}+2-g(S_M)$$

を得る．この式と式 (1) から補題 1 が証明できる．さらに S_M が球面となるような marking M を spherical と呼ぶことにすると, 以下の式が得られる．

$$W^{top}_{sl(N)}(G)=W^{top}_{gl(N)}(G)=\sum_{G\text{ の spherical marking }M}\operatorname{sign}(M)$$

よって定理 2 を示すには, G が 2-辺連結ならば $\sum_{G\text{ の spherical marking }M}\operatorname{sign}(M)$ の絶対値が G の球面への埋め込みの数になっていて, 2-辺連結でなければ $\sum_{G\text{ の spherical marking }M}\operatorname{sign}(M)=0$ となることを示せば良い．このうち前半は, 2-辺連結グラフ G の spherical marking と G の球面への埋め込みが 1 対 1 対応することと, G の 2 つの spherical marking M, M' に対して $\operatorname{sign}(M)$ と $\operatorname{sign}(M')$ が打ち消し合わないことを示せば良い．

定理 2 の証明.
まずは 2-辺連結な G に対して, spherical marking と G の球面への埋め込みが 1 対 1 対応することを示す．写像

$$\Theta:\{G\text{ の spherical marking }M\}\to\{G\text{ の球面への埋め込み }\}$$

を G の S_M への自然な埋め込みとして定義できる．また G の球面への埋め込みに対して, 球面の片側から見て頂点の向きが時計回りか反時計回りかを見ることにより頂点に $+$ と $-$ のどちらが割り当てられているかがわかり, spherical marking M を再現できるので, 写像 Θ は全単射である．

次に spherical marking M に対して $\operatorname{sign}(M)$ が打ち消し合わないことを示す．これは, whitney の定理から 2-辺連結な G に対して, G の球面への埋め込みは下図のような flip で移り合うことから言える．逆に 2-辺連結でない G に対しては, spherical marking M が存在したとしても $\operatorname{sign}(M)$ と $\operatorname{sign}(M')$ が打ち消し合うような spherical marking M' が存在するので $\sum_{G\text{ の spherical marking }M}\operatorname{sign}(M)=0$ となる． □

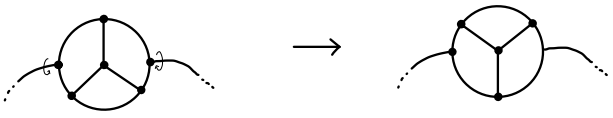
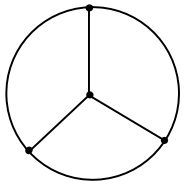


図 7　flip

4　$W_{sl(N)}$ の計算結果

ここからは様々なグラフに対して $W_{sl(N)}(G)$ をコンピュータを用いて計算した結果を紹介する．なお $W_{sl(N)}(G)$ の計算は, 定理 2 の証明に用いた $W_{gl(N)}(G)$ を計算する方法, すなわち marking M に対して $b(T_M)$ を計算し, 全ての marking に対して $\mathrm{sign}(M)\cdot N^{b(T_M)}$ を足し合わせる方法で求めた．またグラフの 1 つの頂点の向きを変えても $W_{sl(N)}(G)$ は -1 倍されるだけであるので, ウェイトシステムの -1 倍の違いは無視してグラフの頂点の向きは考えないものとする．

まずは以下のグラフのウェイトシステムについて考察する．このグラフを G_{benz} と呼ぶことにする．G_{benz}



は平面的なので, $W^{\mathrm{top}}_{sl(N)}(G_{\mathrm{benz}}) \neq 0$ となるはずである．G_{benz} の頂点数は 4 なので, $W^{\mathrm{top}}_{sl(N)}(G_{\mathrm{benz}})$ は $W_{sl(N)}(G_{\mathrm{benz}})$ の $\frac{4}{2}+2=4$ 次の係数である．

実際に計算すると $W_{sl(N)}(G_{\mathrm{benz}}) = 2N^4 - 2N^2$ となるので, $W^{\mathrm{top}}_{sl(N)}(G) = 2 \neq 0$ となることがわかる．

次に非平面的グラフのウェイトシステムを考察する．ワグナーの定理より, グラフ $K_{3,3}$ と K_5 は非平面的グラフの中で, マイナーに関して極小なグラフと思うことができるのでまずは $K_{3,3}$ と K_5 のウェイトシステムについて考察する．



図 8　$K_{3,3}$ 及び K_5

$K_{3,3}$ は非平面的グラフなので, $W^{\mathrm{top}}_{sl(N)}(K_{3,3}) = 0$ となるはずである．$K_{3,3}$ の頂点数は 6 なので, $W^{\mathrm{top}}_{sl(N)}(K_{3,3})$ は $W_{sl(N)}(K_{3,3})$ の $\frac{6}{2}+2=5$ 次の係数である．実際に計算すると $W_{sl(N)}(K_{3,3}) = 0$ となり, 5 次の係数だけでなく全ての係数が 0 になることが分かる．

そこで, 他の非平面的グラフ G に対しても $W_{sl(N)}(G)$ の全ての係数が 0, すなわち $W_{sl(N)}(G) = 0$ となるかどうかについて考えていく．他の非平面的グラフとして, $K_{3,3}$ に辺と辺を繋ぐ橋をかけたグラフを考える．このとき橋の掛け方は, 1 つの辺にかける, 1 つの頂点に接続する 2 つの辺にかける, 同じ辺に接続しない 2 つの辺にかける, の 3 通りあり, それぞれ $K_{3,3}-\mathrm{bridge1}$, $K_{3,3}-\mathrm{bridge2}$, $K_{3,3}-\mathrm{bridge3}$ と呼ぶことにする．これら 3 つのグラフは以下のようにかける．

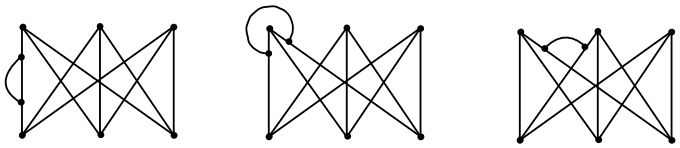


図 9　$K_{3,3}-\text{bridge1}$, $K_{3,3}-\text{bridge2}$, $K_{3,3}-\text{bridge3}$

ワグナーの定理からこれらは非平面的でありことが言える. これらのウェイトシステムを計算すると,

$$W_{sl(N)}(K_{3,3}-\text{bridge1})=0$$
$$W_{sl(N)}(K_{3,3}-\text{bridge2})=0$$
$$W_{sl(N)}(K_{3,3}-\text{bridge3})=24N^4-24N^2$$

となる. $K_{3,3}-\text{bridge3}$ のウェイトシステムに注目すると $W_{sl(N)}(K_{3,3}-\text{bridge3})$ の 6 次の係数が 0 すなわち $W^{\text{top}}_{sl(N)}(K_{3,3}-\text{bridge3})=0$ になっているが, $W_{sl(N)}(K_{3,3}-\text{bridge3})\neq 0$ すなわち全ての項が 0 になる訳ではないことが分かった. 次に $K_{3,3}-\text{bridge1}$ と $K_{3,3}-\text{bridge2}$ を組み合わせたグラフを $K_{3,3}-\text{bridge12}$, $K_{3,3}-\text{bridge2}$ と $K_{3,3}-\text{bridge3}$ を組み合わせたグラフを $K_{3,3}-\text{bridge23}$, $K_{3,3}-\text{bridge1}$ と $K_{3,3}-\text{bridge3}$ を組み合わせたグラフを $K_{3,3}-\text{bridge13}$ と呼ぶことにする.

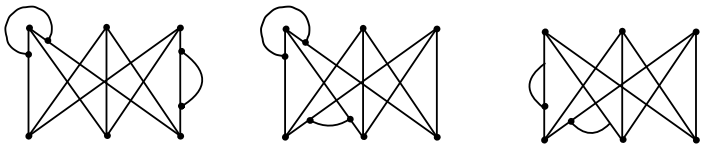


図 10　$K_{3,3}-\text{bridge12}$, $K_{3,3}-\text{bridge23}$, $K_{3,3}-\text{bridge13}$

これらも非平面的グラフである. これらのウェイトシステムを計算すると,

$$W_{sl(N)}(K_{3,3}-\text{bridge12})=0$$
$$W_{sl(N)}(K_{3,3}-\text{bridge23})=24N^5-24N^3$$
$$W_{sl(N)}(K_{3,3}-\text{bridge13})=48N^5-48N^3$$

となる.

最後の K_5 のウェイトシステムについて考える. K_5 は 3-正則グラフではないので, そのままウェイトシステムを計算することはできない. よって, 縮約をすると K_5 になる 3-正則グラフのウェイトシステムを考える. 以下の 2 つのグラフは共に 5 回縮約をすると K_5 になる 3-正則グラフである. これら 2 つのグラフをそれぞれ $K_5-\text{vertical}$, $K_5-\text{horizontal}$ と呼ぶことにする.

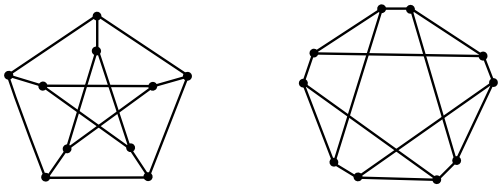


図 11　$K_5-\text{vertical}$ 及び $K_5-\text{horizontal}$

これらのウェイトシステムを計算すると,

$$W_{sl(N)}(K_5 - \text{vertical}) = 0$$
$$W_{sl(N)}(K_5 - \text{horizontal}) = 32N^5 - 32N^3$$

となり, こちらも $K_{3,3}$ をマイナーに持つグラフのウェイトシステムと同様に全体が 0 になるものとそうでないものが出てきた.

参考文献

[1] D.Bar-Natan, *Lie Algebras and the Four Color Theorem*, Combinatorica, **17** (1997) 43–52.

[2] K.Wagner, *Über eine Eigenschaft der ebenen Komplexe*, Math. Ann., **114** (1937) 570–590

[3] J.A.Bondy, U.S.R.Murty, グラフ理論への入門 (立花俊一・奈良知恵・田澤新成訳) 共立出版株式会社 (1991).

[4] R.J. ウィルソン, グラフ理論入門 原著第 4 版 (西関隆夫・西関裕子訳) 近代科学社 (2001).

有向絡み目図式の dual graph diagram

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻
新井克典 (Katsunori ARAI)

概要

有向絡み目は, S^3 へ埋め込まれた有限個の向き付けられた円周 S^1 の非交和である。dual graph diagram は, D. Needell 氏と S. Nelson 氏によって導入された有向絡み目図式の表示方法である。しかし, 与えられた dual graph diagram が有向絡み目図式を表さない場合がある. 本研究では連結な dual graph diagram が有向絡み目図式を表すための必要十分条件を与えた.

1 導入

3 次元球面 S^3 に滑らかに埋め込まれた μ 個の円周 S^1 を μ 成分の**絡み目**という. とくに, 1 成分の絡み目を**結び目**という. 向きが指定されている絡み目を**有向絡み目**という. 2 つの有向絡み目 L_1 と L_2 は, S^3 の向きを保つ滑らかな自己同相写像 $\varphi\colon S^3 \to S^3$ で, 向きを込めて $\varphi(L_1) = L_2$ を満たすものが存在するとき同じとみなす.

射影 $p\colon S^3 \to S^2$ であって, 絡み目 L の像 $p(L)$ の他重点が有限個で, その全てが横断的 2 重点になるような射影を考える. このとき, 像 $p(L)$ を絡み目 L の**正則射影図**という. 絡み目の正則射影図において, 各 2 重点に上下を付けたものを**絡み目図式**という.

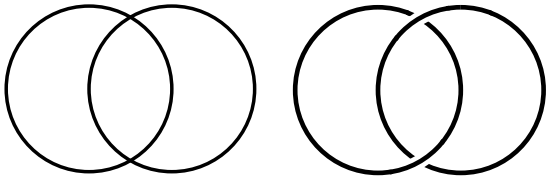


図 1: ホップ絡み目の正則射影図（左）とホップ絡み目の絡み目図式（右）

結び目図式にチェッカーボード彩色を施すことで, **チェッカーボードグラフ**という S^2 上に埋め込まれたグラフを構成できる. さらにチェッカーボードグラフを 1 つとり, 各辺に結び目図式の各交差から定まる符号を与えると, S^2 上に埋め込まれた符号付きグラフができる. 逆に, S^2 上に埋め込まれた符号付きグラフから結び目図式を構成することができる.

D. Needell 氏と S. Nelson 氏は有向絡み目図式のチェッカーボードグラフの和の各辺に, ある対応で向きまたは符号を与えたものを導入し, これを *dual graph diagram* と呼んでいる [1]. さらに [1] では S^2 上に埋め込まれたグラフとその双対グラフの和の各辺に, ある対応で向きまたは符号をつけたものから node 付き有向絡み目図式を構成する方法を与えた.

しかし, この方法は常に適用できるとは限らない. そこでどのような場合に適用できるのかについて述べる. また, この方法が適用できる場合に, 有向絡み目図式を構成できるための必要十分条件も与えることができた. 本文ではこれらの結果について報告する.

本文の構成は次の通りである. 2 章でチェッカーボードグラフの定義とその性質について述べ, 3 章で D. Needell 氏と S. Nelson 氏が導入した dual graph diagram [1] について述べる. 最後に 4 章で連結な dual graph diagram が有向絡み目図式を表すための必要十分条件を与える.

2　チェッカーボードグラフ

2.1　グラフと双対グラフ

定義 2.1.1 グラフ G とは, 頂点の集合 $V(G)$ と辺の集合 $E(G)$ の組をいう.

本文では, グラフは常に有限で, 多重辺やループを許すものとする. また, S^2 上に埋め込まれたグラフを単に S^2 上のグラフと呼ぶことにする.

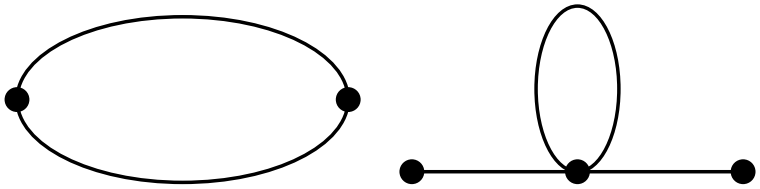


図 2: 多重辺（左）とループ（右）

S^2 上のグラフ G に対して, G を埋め込みの像とみるとき $|G|$ と書くことにする. $S^2 - |G|$ の連結成分を G の**領域**という.

定義 2.1.2 G^d が G の**双対グラフ**であるとは, 次の方法で構成される S^2 上のグラフをいう:

1. G の各領域から 1 点をとり, それらを G^d の頂点とする.
2. 任意の $e \in E(G)$ に対し, e の両側にある G の領域に対応する G^d の頂点を, e の端点以外とちょうど 1 点で交わるように結ぶ曲線を G^d の辺とする.

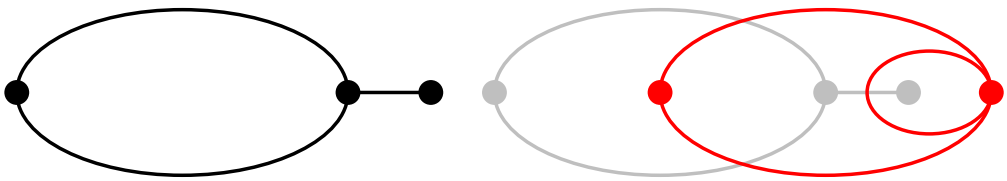
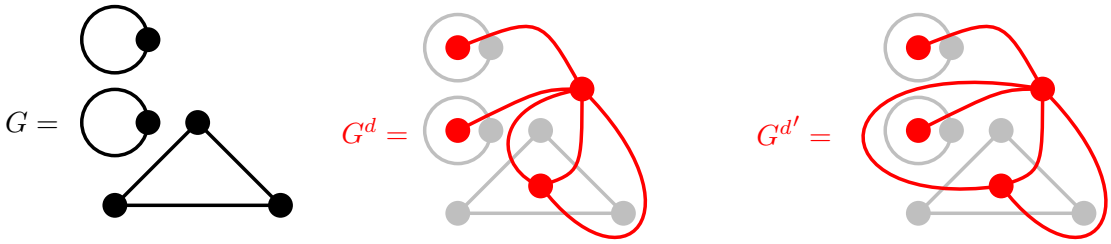


図 3: S^2 上のグラフ G（左）と G の双対グラフ G^d（右）

双対グラフは常に連結である. また, 双対グラフは S^2 上のアイソトピーの差を除いて一意的に定まるとは限らない.

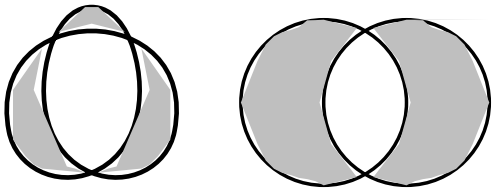
次の例では G^d と $G^{d'}$ はどちらも G の双対グラフであるが, S^2 上のアイソトピーで移り合わない.



2.2 チェッカーボードグラフ

絡み目の正則射影図 U に対して, $S^2 - U$ の連結成分を U の**領域**と呼ぶ.

定義 2.2.1 U の**チェッカーボード彩色**とは, U の各領域を白黒で塗る彩色で, 隣接領域を異なる色で塗るものである.



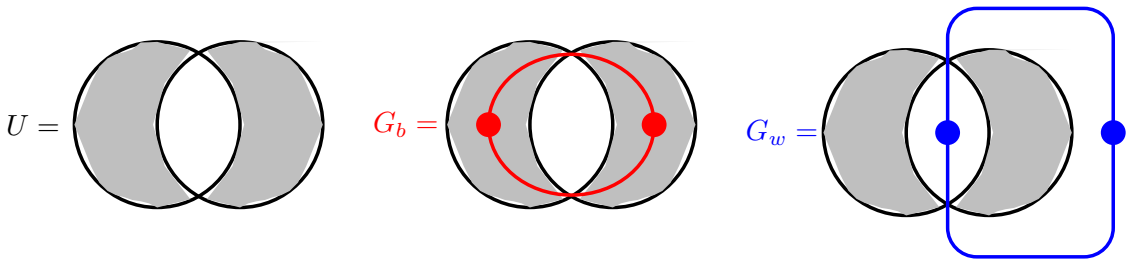
命題 2.2.2 S^2 上の任意の絡み目正則射影図はチェッカーボード彩色可能である.

定義 2.2.3 U を絡み目の正則射影図で, チェッカーボード彩色されたものとする.

G_b (resp. G_w) が U の**チェッカーボードグラフ**であるとは, G_b (resp. G_w) が次の方法により構成される S^2 上のグラフであることをいう:

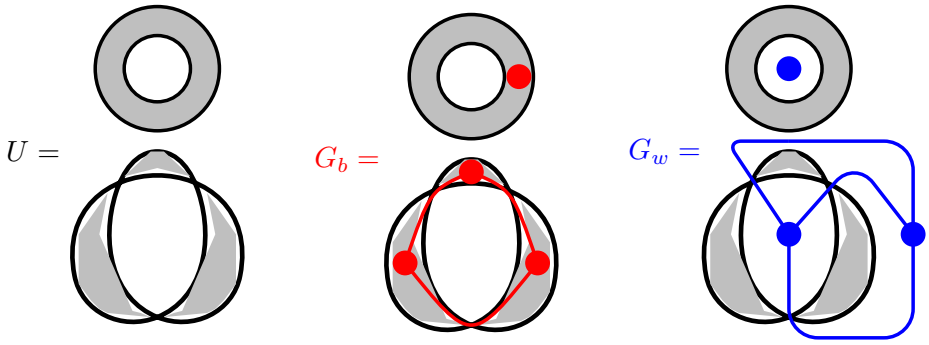
1. 各黒色 (resp. 白色) 領域から 1 点をとり, G_b (resp. G_w) の頂点とする.
2. U の各交差において, 向かい合う黒色 (resp. 白色) 領域を結び, G_b (resp. G_w) の辺とする.

本文では, $\{G_b,\ G_w\}$ を**チェッカーボードグラフペア**と呼ぶことにする.

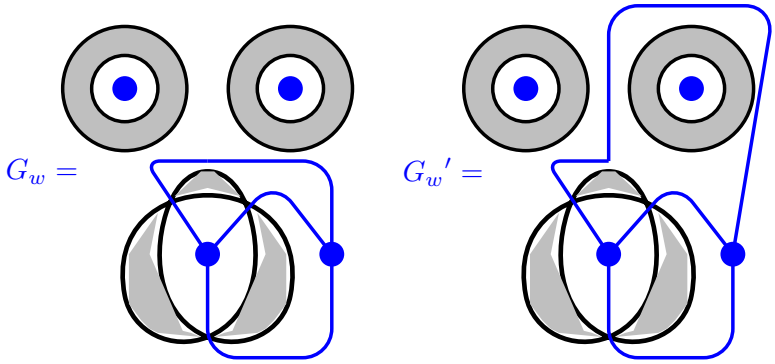


一般に G_b と G_w は互いに双対なグラフではない.

次の例では, G_b と G_w はともに非連結であるので, 互いに双対なグラフではない.



また, 一般にチェッカーボードグラフは一意的に定まるとは限らない. 次の例では, G_w と $G_w{}'$ が S^2 上のアイソトピーで移り合わない.



チェッカーボードグラフが互いに双対なグラフになる十分条件をとして次が成り立つ.

命題 2.2.4 (known) U を S^2 上の絡み目正則射影図で, チェッカーボード彩色されたものとし, $\{G_b,\ G_w\}$ を U のチェッカーボードグラフペアとする. このとき, U が連結で交点を少なくとも 1 つ持つならば G_b と G_w は互いに双対なグラフになる.

系 2.2.5 U を S^2 上の絡み目正則射影図で, チェッカーボード彩色されたものとし, $\{G_b,\ G_w\}$ を U のチェッカーボードグラフペアとする. このとき, G_b と G_w がともに連結かつ孤立頂点を持たないならば G_b と G_w は互いに双対なグラフになる.

注意 2.2.6 G_b と G_w がともに連結かつ孤立頂点を持たないならば U が連結で交点を少なくとも 1 つ持つ.

双対グラフがある絡み目正則射影図のチェッカーボードグラフになる条件を述べるために, 必要な準備を行う.

G を S^2 上のグラフとし, G^d を G の双対グラフとする.

G の辺は G^d のある 1 つの辺と 1 点で交わる. この点を辺交差と呼ぶ.

$G \cup G^d$ から得られる S^2 上のグラフ $\widetilde{G}$ とは, $G \cup G^d$ の辺交差も頂点とする S^2 上のグラフをいう.

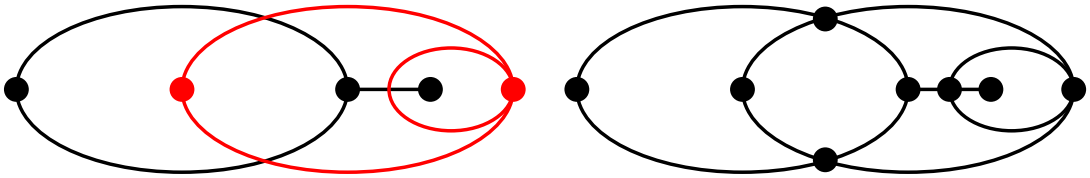


図 4: $G \cup G^d$（左）と $\widetilde{G}$（右）

$G \cup G^d$ の領域を $\widetilde{G}$ の領域として定める.

$G \cup G^d$ の 4 辺形領域とは, 領域の周りに 4 つの辺があるような領域のことをいう. $G \cup G^d$ の 4 辺形領域は次の場合に限られる:

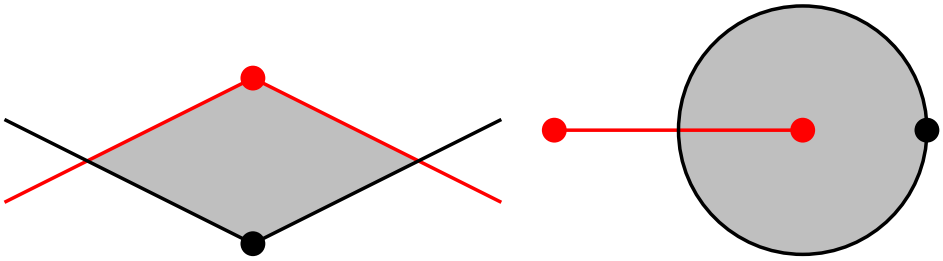


図 5: $G \cup G^d$ の 4 辺形領域

補題 2.2.7 G を S^2 上のグラフとし, G^d を G の双対グラフとする. このとき, 次は同値である: G は連結かつ孤立頂点を持たないならば $G \cup G^d$ の各領域が 4 辺形である.

命題 2.2.8 G を S^2 上のグラフとし, G^d を G の双対グラフとする. このとき, G が連結かつ孤立頂点を持たないならばある絡み目正則射影図 U が存在して, $\{G,\ G^d\}$ は U のチェッカーボードグラフペアになる.

3 Dual graph diagram

3.1 Dual graph diagram

定義 3.1.1 (Needell-Nelson [1]). D を S^2 上の有向絡み目図式, $\{G_b,\ G_w\}$ を D のチェッカーボードグラフペア, そして $\mathcal{O}(E(G_b))$, $\mathcal{O}(E(G_w))$ を G_b, G_w の辺の向きの集合とする.

$(\{G_b,\ G_w\},\ f)$ が D の *dual graph diagram* であるとは, G_b, G_w の和 $G_b \cup G_w$ と次を満たす写像

$$f : E(G_b) \cup E(G_w) \to \{\pm\} \cup \mathcal{O}(E(G_b)) \cup \mathcal{O}(E(G_w))$$

の組をいう:

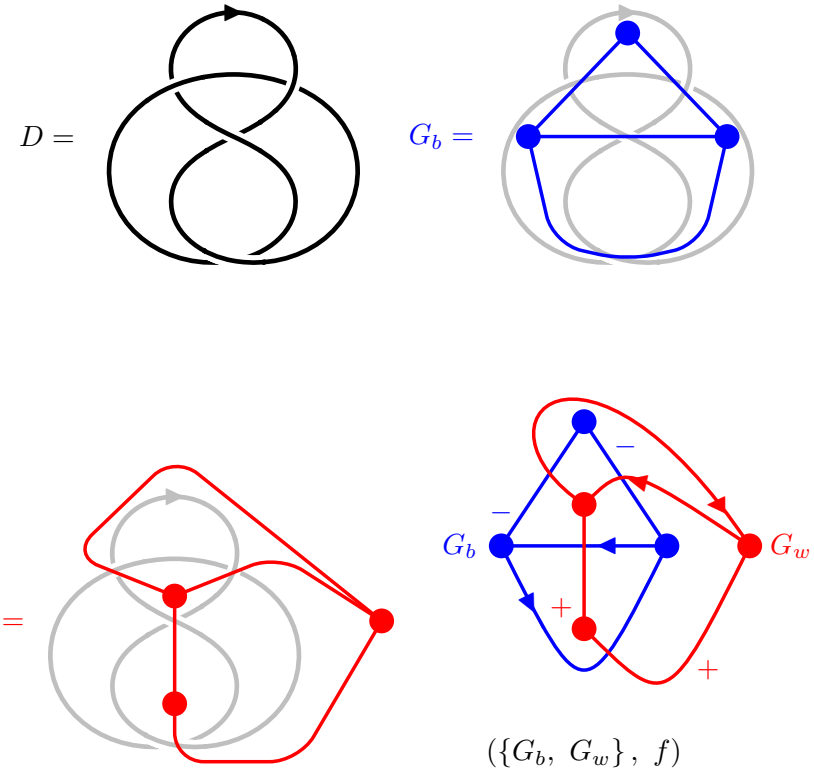
- f は D の各交差において,



を満たす.

注意 3.1.2 Dual graph diagram は有向絡み目図式のみからは定まらない. 実際, チェッカーボードグラフが一意的に定まらないような有向絡み目図式からは, 複数通りの dual graph diagram が考えられる.

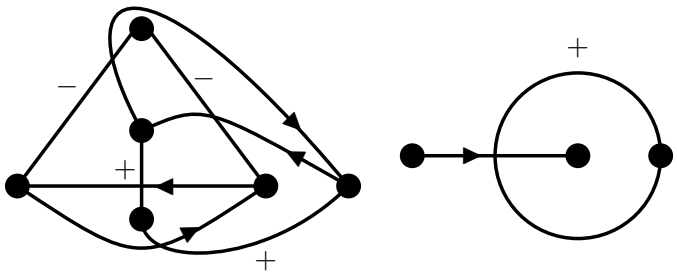
次の例は八の字結び目の図式 D から, dual graph diagram を構成するものである. D のチェッカーボードグラフ G_b と G_w の和 $G_b \cup G_w$ において, 各辺に D の各交差から対応 f によって定まる向きまたは符号を与えて D の dual graph diagram $(\{G_b,\ G_w\},\ f)$ になる.



$(\{G_b,\ G_w\},\ f)$

定義 3.1.3 $(\{G,\ G^d\},\ f)$ が *(一般の) connected dual graph diagram* であるとは, S^2 上の連結かつ孤立頂点を持たないグラフ G とその双対グラフ G^d の和 $G \cup G^d$ と次を満たす写像 $f : E(G) \cup E(G^d) \to \{\pm\} \cup \mathcal{O}(E(G)) \cup \mathcal{O}(E(G^d))$ の組をいう:

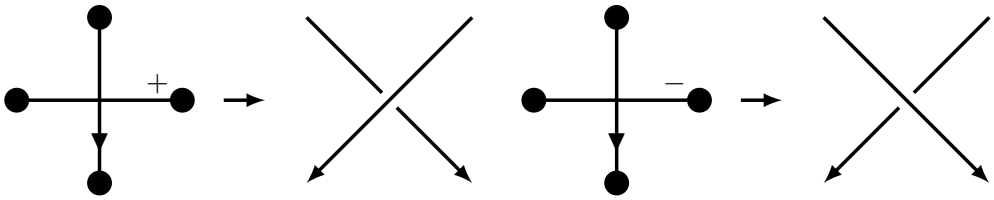
$e \in E(G),\ e' \in E(G^d),\ e \cap e' \neq \varnothing \Rightarrow (f(e), f(e')) \in \{\pm\} \times \mathcal{O}(E(G^d)) \cup \mathcal{O}(E(G)) \times \{\pm\}$



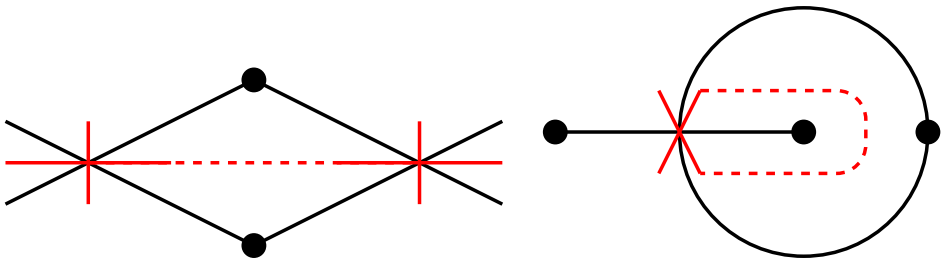
（一般の）connected dual graph diagram から *node* 付き有向絡み目図式を対応させる方法を述べる. 但し node 付き有向絡み目図式とは次の 2 価頂点を許した有向絡み目図式をいう:



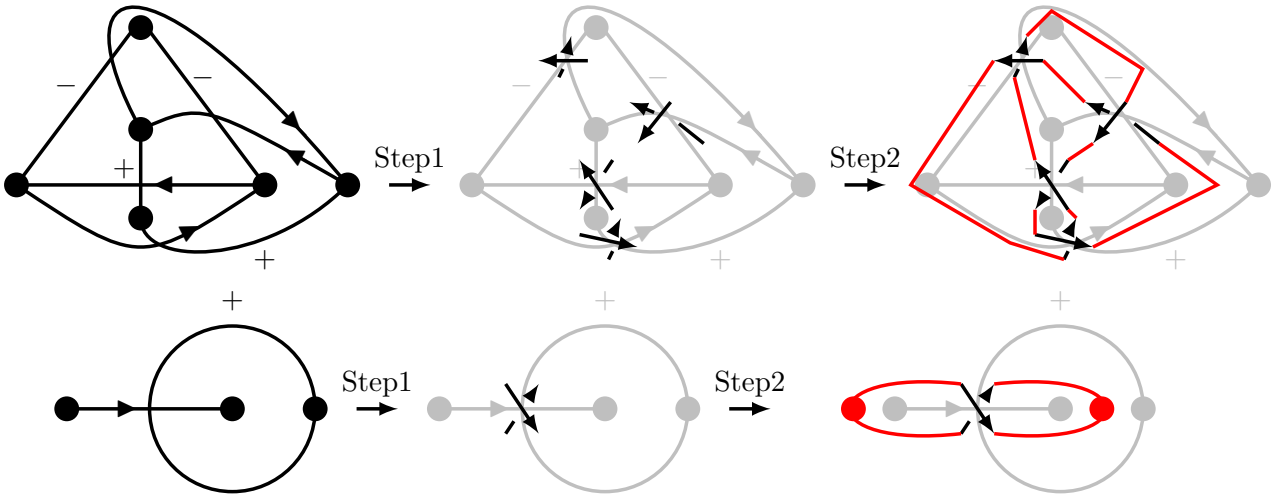
命題 3.1.4 (cf. Needell-Nelson [1]). （一般の）connected dual graph diagram $(G,\ G^d,\ f)$ は次の方法により, node 付き有向絡み目図式を表す.
(Step1) $(G,\ G^d,\ f)$ の各 edge crossing 毎に, 以下の局所的な交差を対応させる.



(Step2) 各領域内にある交差の端点を結ぶ.



例 3.1.5



4　主結果

4.1　主結果

定理 4.1.1　（一般の）connected dual graph diagram $(\{G,\ G^d\},\ f)$ が有向絡み目図式を表すための必要十分条件は, 各 4 辺形領域において, 各頂点の入次数の和と出次数の和が等しくなることである.

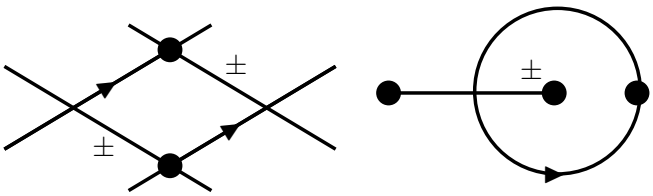


図 6: 各頂点の入次数と出次数の和が等しくなる例.

但し, 頂点の入次数とはその頂点を終点にもつような向きの付いた辺の本数をいう. また, 頂点の出次数とはその頂点を始点として持つような辺の本数をいう.

さらに,Theorem 4.1.1 から次の結果を得た.

定理 4.1.2 次の 2 つの集合は定義 3.1.1 と命題 3.1.4 の対応によって 1 対 1 の対応が与えられる.

- 定理 4.1.1 の条件を満たす（一般の）connected dual graph diagram 全体の集合.
- 連結で交差を 1 つ以上持つ有向絡み目図式全体の集合.

定理 4.1.2 の証明には次の 2 つの補題を用いる.

補題 4.1.3 定理 4.1.1 の条件を満たす（一般の）connected dual graph diagram が表す有向絡み目図式は連結で交差を 1 つ以上持つ.

補題 4.1.4 連結で交差を 1 つ以上持つ有向絡み目図式の dual graph diagram は定理 4.1.1 の条件を満たす（一般の）connected dual graph diagram である.

参考文献

[1] D. Needell, S. Nelson, *Biquasiles and dual graph diagrams*, J. Knot Theory Ramifications **10** (2017), no. 8, 1750048.

一葉双曲面上のカンドルと結び目の不変量

九州大学大学院 数理学府 数理学専攻
米村 拳太郎 * (Kentaro YONEMURA)

概要

一葉双曲面上に定義されたカンドルの構造と、それに関係した結び目の不変量 “longitudinal map” について述べる。

1　結び目理論の概説

この節では、結び目理論の目的と必要な概念の紹介を行う。まず、結び目の定義を行う。

定義 1.1（結び目とその射影図）　結び目とは、滑らかな埋め込み $S^1 \hookrightarrow S^3$ のことである。これを平面に射影し、上下交差を明示したものを射影図という。射影図は、弧 (arc) と交点 (crossing) により構成されている。図 1 も参照。

結び目理論では、結び目全体の集合に適当な同値関係を入れる。文献や目的によって、考える同値関係は微妙に異なるので、ここでは述べない。以上を踏まえると、結び目理論の目的を述べることが出来る。

結び目理論の目的

結び目を、同値なものを除いて全て分類する。

特に、結び目を分類する際は、「不変量」と呼ばれる結び目が同値であるための必要条件を構成して調べることが多い。

これ以降は、この文献を読む際に必要な用語の解説なので、飛ばしてしまっても構わない。

結び目そのものを考えることは難しいので、結び目の補空間を考えることが多い。

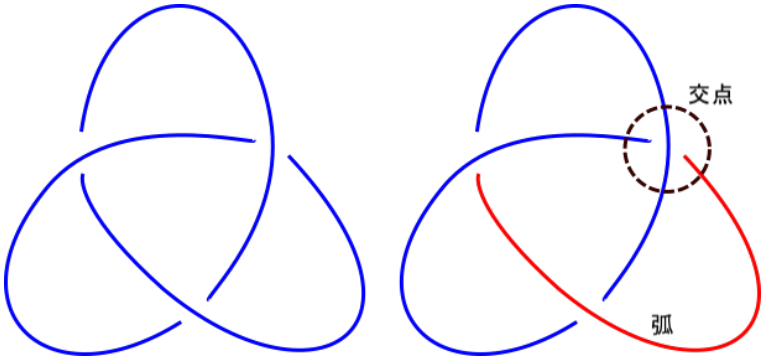


図 1　結び目の射影図の例

* Email:3MA20009Y@s.kyushu-u.ac.jp

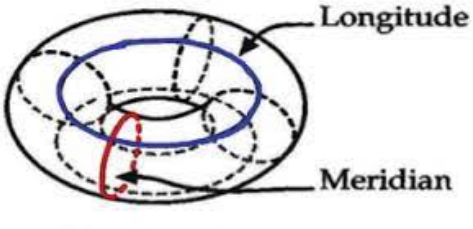


図 2　赤色の線がメリディアン、青色の線がロンジチュード。

定義 1.2（結び目の補空間）　結び目 $K : S^1 \hookrightarrow S^3$ の像と円盤 $\mathcal{D}$ の積を考え、その内部 $\mathrm{int}(\mathrm{Im}\, K \times \mathcal{D})$ を取り除いたものを結び目の補空間といい、$S^3 \setminus K$ と書く。つまり

$$S^3 \setminus K = S^3 \setminus \mathrm{int}(\mathrm{Im}\, K \times \mathcal{D})$$

である。これは 3 次元多様体の構造を自然に持つ。

定義 1.3（結び目群）　K を結び目とする。K の補空間[*1]の基本群

$$\pi_K = \pi_1(S^3 \setminus K)$$

を K の結び目群という。

定義 1.4（結び目群のメリディアンとロンジチュード）　K を結び目とする。結び目の補空間の境界 $\partial(S^3 \setminus K)$ は 2 次元トーラス $S^1 \times S^1$ に同相である。この事実から、境界 $\partial(S^3 \setminus K)$ からメリディアン (経線) とロンジチュード (緯線)(図 2 参照) に相当するループを考えることが出来る。結び目群の元において、メリディアン $\mathfrak{m} \in \pi_K$ とロンジチュード $\mathfrak{l} \in \pi_K$ を境界のメリディアンとロンジチュードに相当するループから得られる元とする。

2　カンドルを用いて結び目理論を研究する理由

カンドルは、1982 年に Joyce[6] と Matveev[8] のよって独立に定義された代数系である。この節では、カンドルを用いて結び目理論の研究を行う理由を述べる。

カンドルを用いて結び目理論の研究を行うのは、ほぼ完全な結び目の不変量が構成されているからである：結び目 K に対して、Joyce[6] と Matveev[8] は独立に現在「結び目カンドル」や「基本カンドル」と呼ばれている結び目の不変量 Q_K を構成した。結び目カンドル Q_K に対して、次の性質が知られている。

定理 2.1（Joyce[6], Matveev[8]）　K_1, K_2 を向きづけられた結び目とする。このとき、Q_{K_1} と Q_{K_2} がカンドルとして同型であることは、K_1 が K_2 または K_2 の向き付けを逆にして鏡像を取った結び目 $(-K_2)^*$ と ambient isotopic であることと同値である。

一般的には、カンドルを用いて結び目を調べることで、未知の不変量を構成することが出来るのではないか、と期待されている。著者個人としては、様々な分野の知見を取り込んで構成されている結び目理論をカンドルを用いて統一的に記述しなおすことが出来るのではないか、と期待している。

[*1] 定義 1.2 参照。

3　カンドルの概説

この節では、この文献を読む際に必要なカンドルに関する概念を述べる。詳細に関しては、野坂 [9] や鎌田 [7] を参照されたい。

まず、カンドルの定義を述べる。

定義 3.1（カンドル [6, 8]）　カンドル (quandle) とは空でない集合 X と二項演算 $\triangleright : X \times X \to X$ の組 $(X, \triangleright)$ で次の Q1〜Q3 の条件を満たすものである：

Q1 （冪等性）任意の $x \in X$ に対して $x \triangleright x = x$ が成り立つ。
Q2 （逆元）任意の $x, y \in X$ に対して $x = z \triangleright y$ を満たす $z \in X$ が一意に存在する。
Q3 （自己分配性）任意の $x, y, z \in X$ に対して $(x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$ が成り立つ。

定義 3.1 における条件 Q1〜Q3 は、それぞれ Reidemister 移動 I〜III と呼ばれる、結び目の射影図に対する操作に対応していることが知られている。

いくつかカンドルの例を挙げておこう。

例 3.2（二面体カンドル [11]）　$X = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とし、二項演算 $\triangleright$ を

$$x \triangleright y = 2y - x$$

と定めると、$(X, \triangleright)$ はカンドルとなる。このカンドルは二面体カンドルと呼ばれている。

例 3.3（共役カンドル）　G を群とし、二項演算 $\triangleright$ を

$$g \triangleright h = h^{-1}gh$$

と定めると、$(G, \triangleright)$ はカンドルとなる。このカンドルは共役カンドルと呼ばれている。

以下、この文献を読む際に必要な概念を述べてこの節を終わる。

定義 3.4（カンドル準同型とカンドル同型）　X, Y をカンドルとするとき、写像 $f : X \to Y$ が

$$f(x \triangleright y) = f(x) \triangleright f(y)$$

を満たすとき、カンドル準同型写像という。特に、カンドル準同型写像 f が全単射であるとき、カンドル同型写像という。

4　この文献で扱う一葉双曲面上に定義されたカンドル

この文献で主に扱うカンドルを構成する。

命題 4.1　$r > 0$ とする。$S^2_1(r)$ を

$$\begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

に関する $SL(2, \mathbb{R})$ の共役類とする。このとき、二項演算 $\triangleright : S^2_1(r) \times S^2_1(r) \to S^2_1(r)$ を

$$g \triangleright h = h^{-1}gh$$

として定めると $(S^2_1(r), \triangleright)$ はカンドルとなる。

この文献では、命題 4.1 で構成したカンドルも単に $S^2_1(r)$ と表すことにする。$S^2_1(r)$ は一葉双曲面と微分同相であることに注意されたい。

カンドルの研究者にとっては、次の見方から $S^2_1(r)$ は取り立てて珍しいカンドルではない。

- $S^2_1(r)$ は $SL(2,\mathbb{R})$ に関する共役カンドルの部分カンドルである。
- 京都大数理解析研究所の石川氏による未発表論文で 2 次元の smooth quandle (多様体としての構造を併せ持つカンドル) の分類が完了している。

5 幾何学的形状とカンドル構造

前節で構成したものとは異なる方法で一葉双曲面上にカンドルを構成し、それが前節で構成したカンドルと同型でないことを述べる。これにより、幾何学的な構造が同じでも、性質の全く異なるカンドル構造が入ることが分かる。

この節では双線形形式 $\langle -,-\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ をある種の Minkowski 内積

$$\langle (x_0,x_1,x_2),(y_0,y_1,y_2)\rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2$$

とする。

定義 5.1　一葉双曲面 $S^2_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \ : \ \langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle = 1\}$ 上に二項演算 $\triangleright : S^2_1(r) \times S^2_1(r) \to S^2_1(r)$ を

$$\boldsymbol{x} \triangleright \boldsymbol{y} = 2\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}$$

と定めると、$(S^2_1, \triangleright)$ はカンドルとなる。このカンドルを $S^2_{1\,\mathbb{R}}$ と表わすことにする。

次の命題により、$S^2_1(r)$ と $S^2_{1\,\mathbb{R}}$ は幾何的な構造は一致するが、カンドルとして同型ではない。紙幅の都合上、証明は省略する。

命題 5.2　$S^2_{1\,\mathbb{R}}$ は対合性

$$^\forall x, y, \quad (x \triangleright y) \triangleright y = x$$

を満たすが、任意の $r > 0$ に対して $S^2_1(r)$ は対合性を満たさない。

注意 5.3　この節を設けたのは、Azcan-Fenn[1] の「球面カンドル」の構成と、Clark-Saito[3] の「球面カンドル」の構成が全く異なっていたことに起因する。この場合には、偶然にも整合性が取れている。

6 longitudinal map に関係するカンドルを用いた結び目の不変量

この文献の目的のひとつとして、longitudinal map の具体例を計算することがある。まず、longitudinal map の定義を述べよう。

定義 6.1（longitudinal map[3]）　K を結び目、G を群とする。さらに、$\mathfrak{m}, \mathfrak{l} \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ をそれぞれ K のメリディアンとロンジチュードとする。$x \in G$ をひとつ決めたとき、写像

$$\mathcal{L}^x_G : \{f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), G) \ : \ f(\mathfrak{m}) = x\} \to G \quad f \mapsto f(\mathfrak{l})$$

を longitudinal map という。

この節では、定義 6.1 で述べた longitudinal map が生まれた経緯を述べる。

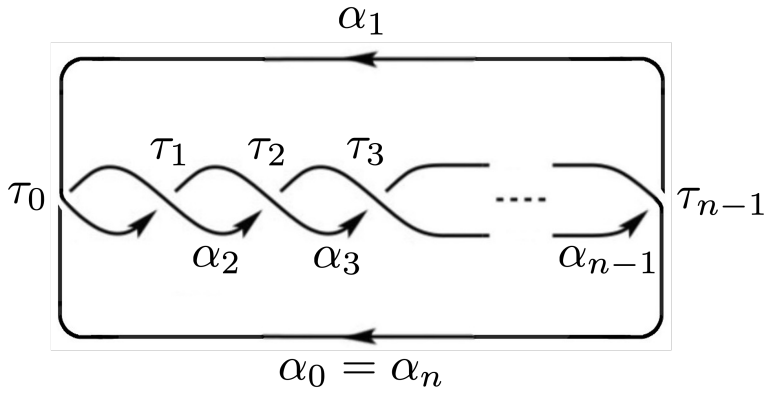


図 3　$(2, n)$ 型トーラス結び目の射影図

1999 年、Carter ら [2] により、カンドルコサイクル不変量が構成された。これは、極めて強力な結び目の不変量である。著名な応用として、井上-蒲谷 [5] による双曲結び目の複素体積のカンドルコサイクル不変量による実現が知られている。カンドルコサイクル不変量の難点は、

- 考えるカンドルの 2 コサイクルを具体的に分からなければならない
- 考えるカンドルによる彩色を全て記述する必要があり、そのために考えるカンドルの集合としての濃度が有限であることが望ましい

ことである。

2007 年、Eisermann[4] は colouring polynomial を構成した。この結び目の不変量の良いところは、考えているカンドルの 2 コサイクルを具体的に分かる必要がないことである。さらに、

- colouring polynomial はカンドルコサイクル不変量の真の拡張である。つまり、カンドルコサイクル不変量で見分けられる結び目は colouring polynomial で見分けられる。
- colouring polynomial は Yang-Baxter 不変量として実現できる。

ことが Eisermann 自身により証明されている。

2019 年、Clark-Saito[3] は、colouring polynomial を集合としての濃度が有限でないカンドルに対しても定義することが出来る不変量へ拡張するため、longitudinal map を構成した。

7　$(2, n)$ 型トーラス結び目の $S_1^2(r)$ による彩色

結び目 K とその射影図 D、そしてカンドル X が与えられたとき、写像

$$C : \{D \text{ の弧全体 }\} \to X$$

でカンドル準同型 $f : Q_K \to X$ を誘導するものを、X による D の彩色という。ここでの Q_K は、結び目カンドルと呼ばれる K に対して定まるカンドルである。X による D の彩色全体を $\mathrm{Col}_X(D)$ とかく。結び目の射影図 D によって $\mathrm{Col}_X(D)$ は異なるが、その濃度は一致することが知られている。

この節では、$S_1^2(r)$ による彩色を述べる。

定理 7.1　図 3 のような射影図 D を持つ $(2, n)$ 型トーラス結び目の彩色は

$$\mathrm{Col}_{S_1^2(r)}(D) = \bigcup_{f \in \mathrm{Inn}\, SL(2,\mathbb{R})} \{f \circ C_0\} \cup \left\{ f \circ C_{j,b,c} \ : \ \begin{array}{c} j = 1, 3, \cdots, n-2 \\ bc = -\frac{4 \sin^2 \theta_j (\sin^2 \theta_j + \sinh^2 r)}{\sinh^2 r} \end{array} \right\}$$

である。

紙幅の都合上、記号の説明と証明は省略する。証明のポイントは、行列の対角化によって冪乗を具体的に求めることが出来ることである。彩色を計算するときに学部で習う線形代数が前面に出るのは、実は珍しいことである。

著者は「線形代数の恩恵を受け易いため、この文献で扱ってるような smooth quandle (多様体構造を併せ持つカンドル) について研究をしよう」という PR を行っている。この文献を読んで興味を持っていただけたら幸いである。

8 $S^2_1(r)$ による彩色と双曲型 $SL(2,\mathbb{R})$ 表現の関係

$r>0$, K を結び目とする。$SL(2,\mathbb{R})$ における

$$\begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$$

と共役な元を、この文献では双曲元ということにする。

定義 8.1（双曲型 $SL(2,\mathbb{R})$ 表現） $\mathfrak{m} \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ とする。このとき、表現 $f : \pi_1(S^3 \setminus K) \to SL(2,\mathbb{R})$ に対して、$f(\mathfrak{m})$ が双曲元であるとき、双曲型 $SL(2,\mathbb{R})$ 表現とこの文献ではいうことにする。

野坂 [10] の結果を用いることにより、$S^2_1(r)$ による彩色と双曲型 $SL(2,\mathbb{R})$ 表現の間には、自然な 1 対 1 対応が得られる。

定理 8.2 K を結び目、D を K の射影図、そして $r>0$ とする。このとき、1 対応 1 対応

$$\Psi_{K,r} : \mathrm{Col}_{S^2_1(r)}(D) \xrightarrow{\sim} \{ f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), SL(2,\mathbb{R})) \ : \ f \text{ は双曲表現 } \}$$

を具体的に構成することが出来る。

さらに、系として、次の自然な対応が誘導される。

系 8.3 K を図のような射影図 D を持つ $(2,n)$ 型トーラス結び目とし、K のメリディアン $\mathfrak{m}$ を α_0 とする。このとき、$\Psi_{K,r}$ から次のような 1 対 1 対応が誘導される。

$$\{ C \in \mathrm{Col}_{S^2_1(r)}(D) \ : \ C(\alpha_0) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \} \simeq \{ f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(S^3 \setminus K), SL(2,\mathbb{R})) \ : \ f(\mathfrak{m}) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \}$$

9 $(2,n)$ 型トーラス結び目の $SL(2,\mathbb{R})$-longitudinal map の計算例

定義 6.1 において、K を $(2,n)$ 型トーラス結び目、$G = SL(2,\mathbb{R})$、そして

$$x = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$$

とした場合の計算例を述べる。ただし、$r>0$ とする。

補題 9.1 定理 7.1 の記号を用いる。$u_0 = \exp C_{j,b,c}(\alpha_0),\ u_1 = \exp C_{j,b,c}(\alpha_1)$ とする。このとき、

$$(u_0 u_1)^n = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

である。

定理 9.2　系 8.3 の対応を考えると、

$$\mathcal{L}^x_G(\Psi_{K,r}(C_0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\mathcal{L}^x_G(\Psi_{K,r}(C_{j,b,c})) = \begin{pmatrix} -e^{-2nr} & 0 \\ 0 & -e^{2nr} \end{pmatrix}$$

証明　$k \geq 1$ を用いて、$n = 2k+1$ とする。ここでは、結び目群は Wirtinger 表示という、図式の弧を生成元とするような、図式から得られる表示で表されているとする。$\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1} \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ を用いて、ロンジチュード $\mathfrak{l} \in \pi_1(S^3 \setminus K)$ を

$$\mathfrak{l} = \alpha_0^{-n}(\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_{2k-1})(\alpha_0\alpha_2\cdots\alpha_{2k})$$

と表せる。このとき、[3, Lemma 6.3] の証明と同様の議論を行うことで、

$$\mathfrak{l} = \alpha_0^{-2n}(\alpha_0\alpha_1)^n$$

であることが従う。これを用いて、longitudinal map $\mathcal{L}^x_G(f)$ を計算する。
($f = \Psi_{K,r}(C_0)$ のとき)

$$C_0(\alpha_0) = C_0(\alpha_1) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}$$

より、

$$\mathcal{L}^x_G(f) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}^{-2n} (\begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix})^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

である。
($f = \Psi_{K,r}(C_{j,b,c})$ のとき) 補題 9.1 より、

$$\mathcal{L}^x_G(f) = \begin{pmatrix} e^r & 0 \\ 0 & e^{-r} \end{pmatrix}^{-2n} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-2nr} & 0 \\ 0 & -e^{2nr} \end{pmatrix}$$

である。

謝辞

本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2136 の支援を受けたものである。

参考文献

[1] Hiiseyin Azcan and Roger Fenn. Spherical representations of the link quandles. *Turkish J. of Mathematics*, Vol. 18, pp. 102–110, 1994.

[2] J Carter, Daniel Jelsovsky, Seiichi Kamada, Laurel Langford, and Masahico Saito. Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 355, No. 10, pp. 3947–3989, 2003.

[3] W. Edwin Clark and Masahico Saito. Longitudinal mapping knot invariant for SU(2). *J. Knot Theory Ramifications*, Vol. 27, No. 11, pp. 1843014, 22, 2018.

[4] Michael Eisermann. Knot colouring polynomials. *Pacific Journal of Mathematics*, Vol. 231, No. 2, pp. 305–336, 2007.

[5] Ayumu Inoue and Yuichi Kabaya. Quandle homology and complex volume. *Geometriae Dedicata*, Vol. 171, No. 1, pp. 265–292, 2014.

[6] David Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *J. Pure Appl. Algebra*, Vol. 23, No. 1, pp. 37–65, 1982.

[7] Seiichi Kamada. *Surface-knots in 4-space*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Singapore, 2017. An introduction.

[8] S. V. Matveev. Distributive groupoids in knot theory. *Mat. Sb. (N.S.)*, Vol. 119(161), No. 1, pp. 78–88, 160, 1982.

[9] Takefumi Nosaka. *Quandles and topological pairs;Symmetry, knots, and cohomology*. SpringerBriefs in Mathematics.

[10] Takefumi Nosaka. Homotopical interpretation of link invariants from finite quandles. *Topology Appl.*, Vol. 193, pp. 1–30, 2015.

[11] Mituhisa Takasaki. Abstraction of symmetric transformations. *Tôhoku Math. J.*, Vol. 49, pp. 145–207, 1943.

圏と関手を用いた Kuperberg 不変量の研究

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系 数理・計算科学コース
岩木隼太 (Hayata IWAKI)

概要

Kuperberg 不変量とは 3 次元多様体の Heegaard 図式と有限次元 Hopf 代数から得られる 3 次元多様体の不変量である．本講演では Hopf 代数 H を用いた S^3 内の絡み目の補空間の Kuperberg 不変量と Drinfel'd double $D(H)$ を用いた絡み目の Reshetikhin-Turaev 不変量のひとつが一致するという Kuperberg の主張に厳密な証明を与える．また, Heegaard 図式の圏を定義し, タングルの圏や o-タングルの圏, ベクトル圏との間の関手を構成し, 上記の関係を圏と関手を用いて書き表す．最後に, タングルや o-タングル, Heegaard 図式の圏とそれらの間の関手についての関係を考察する．

1 Kuperberg 不変量

Kuperberg 不変量は 3 次元多様体の Heegaard 図式と有限次元 Hopf 代数を用いて計算される．Heegaard 図式は多様体のハンドル分解を表したものである．不変量はその図式より Hopf 代数 H 上のテンソルネットワークを得ることで計算される．まず, Hopf 代数とテンソルネットワークについて述べ, 絡み目の補空間に対する Kuperberg 不変量を考察する．

1.1 Hopf 代数

定義 1. (k-Hopf 代数).
$S\colon H \to H$ とする．$(H, M, i, \Delta, \varepsilon, S)$ が k-Hopf 代数とは, $(H, M, i, \Delta, \varepsilon)$ が k-双代数であり, S について以下の式が成り立つものである．

$$M(\mathrm{id}_H \otimes S)\Delta = M(S \otimes \mathrm{id}_H)\Delta = i\varepsilon.$$

Hopf 代数 $(H, M, i, \Delta, \varepsilon, S)$ を単に H と書くこともある．また, $S^2 = \mathrm{id}_H$ であるとき Hopf 代数 H は involutory であるという．

今後, 特に断りがなければ Hopf 代数は有限次元で involutory なものを考えることとする．

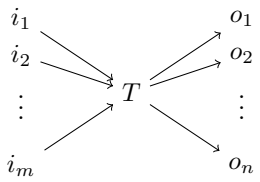
定義 2. (integral, cointegral).
$(H, M, i, \Delta, \varepsilon, S)$ を Hopf 代数とする．μ_L [resp. μ_R] が left [resp. right] integral とは, 以下を満たすものである．

$$(\mu_L \otimes \mathrm{id}_H)\Delta = i\mu_L \quad [\mathrm{resp.}\ (\mathrm{id}_H \otimes \mu_R)\Delta = i\mu_R]$$

また, e_L [resp. e_R] が left [resp. right] cointegral とは, 以下を満たすものである．

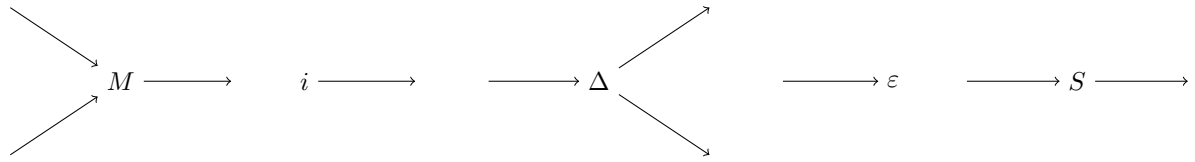
$$M(e_L \otimes \mathrm{id}_H) = e_L\varepsilon \quad [\mathrm{resp.}\ M(\mathrm{id}_H \otimes e_R) = e_R\varepsilon]$$

これまでに定義した写像を視覚的に捉えるため, テンソルネットワークを導入する. V を体 k 上の有限次元ベクトル空間とする. V 上のテンソルネットワークとは, テンソルを表す向き付きグラフである. テンソル $T \in (V^*)_{i_1} \otimes (V^*)_{i_2} \otimes \cdots \otimes (V^*)_{i_m} \otimes V_{o_1} \otimes V_{o_2} \cdots \otimes V_{o_n}$ に対して, T に入る辺として反時計回りの順に $i_1, i_2, \ldots, i_m$, T から出ていく辺として時計回りの順に $o_1, o_2, \ldots, o_n$ を持つグラフ



を T のテンソルネットワークと呼ぶ.

テンソル T は線形写像 $V^{\otimes m} \to V^{\otimes n}$ と思うことができる. テンソルネットワークを用いて Hopf 代数の各写像を以下のように表す.



次に, Hopf 代数の満たす性質を紹介する.

系 3. H が involutory な Hopf 代数のとき, 以下の 2 つのテンソルは right integral かつ left integral である.



前者を $T \in H^*$ と表し, trace と呼ぶ. と表す. さらに以下の 2 つのテンソルは right cointegral かつ left cointegral である.



前者を $C \in H$ と表し, cotrace と呼ぶ.

1.2 Kuperberg 不変量

1.2.1 ハンドル体

定義 4. (ハンドル).

$\lambda \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ 次元円盤と $m - \lambda$ 次元円盤の直積

$$D^\lambda \times D^{m-\lambda}$$

を m 次元 λ-ハンドルという.

定義 5. (ハンドル体).
以下のようなものを m 次元ハンドル体と呼ぶ.

1. m 次元 0-ハンドル D^m は m 次元ハンドル体である.
2. m 次元ハンドル体 N に C^∞ 級の埋め込み $\varphi\colon \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda} \to \partial N$ によって λ を貼り付けた $N \cup D^\lambda \times D^{m-\lambda}$ は m 次元ハンドル体.

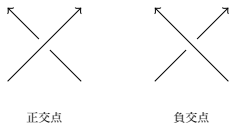
C^∞ 級の埋め込み $\varphi\colon \partial D^\lambda \times D^{m-\lambda} \to \partial N$ を接着写像と呼ぶ. さらに, ∂D^λ を接着球面と呼ぶ.

定理 6. (多様体のハンドル分解).
任意の閉じた m 次元多様体 M について, M はある m 次元ハンドル体で表すことができる.

閉 3 次元多様体を同じ種数の 2 つのハンドル体の境界に沿った張り合わせに分解することを Heegaard 分解と呼ぶ. この境界を Heegaard 曲面と呼ぶ. この分解で得られたハンドル体をそれぞれ upper, lower と名付ける. 2 つのハンドル体が lower upper で名付けられているとき, Heegaard 曲面の向きから 2 つのハンドル体を境界に沿って張り合わせてできた多様体の向きを定めることができる. S が閉曲面であるとき, S 上のハンドル体図式 d を次のように定めることができる. S へのハンドルの埋め込みの非交和な接着球面で c_i の近傍を S から除いたものが平面へ埋め込めるものの集合を $\{c_i\}$ とする. このとき, $(S, \{c_i\})$ をハンドル体図式と呼ぶ.

定義 7. (Heegaard 図式).
閉曲面 S 上の 3 次元閉多様体の Heegaard 図式とは, その多様体の Heegaard 分解によって得られた 2 つの同じ種数のハンドル体に対応する S 上のハンドル体図式 d_u, d_l と Heegaard 曲面 S の組 (S, d_u, d_l) である.

Kuperberg 不変量は Heegaard 図式の upper circle と lower circle の各交点にテンソルネットワークを対応させてそれを縮約したものを正規化したものである. D を lower circle と upper circle が向き付けられた Heegaard 図式とする. さらに, H を次元が 1 以上の有限次元 involutory Hopf 代数とする. これらを用いて次のように $\#(D, H)$ を定義する. ただし, 定義に使う正交点, 負交点はそれぞれ以下のものとする.

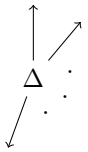


図の, 上を通る辺は upper circle, 下を通る辺は lower circle に対応している. upper circle u が, m 個の lower circle と交わっているとき, m 本の辺が入るテンソルネットワークを対応させる. ここで, m 本の辺は反時計回りに交点と対応している. ただし, u と lower circle の交点が負交点ならば, 下図のように M に入る辺を置き換える.



次に, lower circle l が, n 個の upper circle と交わったいるとき, n 本の辺が出るテンソルネットワークを対応さ

せる．ここで, n 本の辺は時計回りで交わる順に交点と対応している．



最後にそれぞれの交点に対して, その交点を構成する upper circle と lower circle のテンソルネットワークの対応する辺を縮約し, 新たなテンソルネットワークを得る．この操作を全ての circle に対して行いできたテンソルの値を $Z(D;H)$ とする．この $Z(D;H)$ を用いて Heegaard 図式から k 上の値を得る．

定義 8. S を閉曲面, D を S 上の Heegaard 図式, H を有限次元 involutory Hopf 代数とする．このとき, $\#(D,H) \in k$ を

$$\#(D,H) = Z(D;H)(\dim H)^{g(S)-n_u-n_l}$$

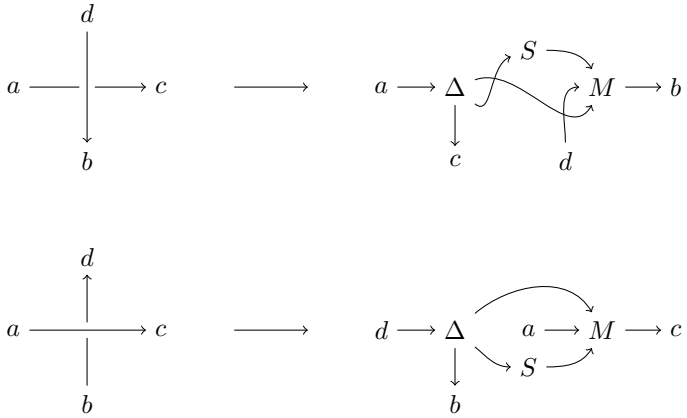
と定める．ただし, $g(S)$ は曲面 S の種数であり, n_u, n_l はそれぞれ upper circle, lower circle の数である．

定理 9. $\#(D,H)$ は 3 次元 bordism の不変量である．特に, 閉 3 次元多様体の不変量である．

ここで, 3 次元 bordism とは 3 次元多様体 M の内部から B^3 を取り除き, その閉包を得る操作による同値関係から得られる 3 次元多様体の同値類である．

1.3 絡み目の補空間に対する Kuperberg 不変量

絡み目の補空間の Heegaard 図式から Kuperberg 不変量を得ることができる．絡み目の各交点について次のようなテンソルネットワークを対応させる．



この操作を全ての交点について行い, 絡み目に沿ってテンソルネットワークをつなげることにより, Kuperberg 不変量 $\#(D,H)$ が得られる．

Reshetikhin-Turaev 不変量 [3] は絡み目 L の不変量である．Drinfel'd double $D(H)$ の自身への有限次元表現を $H^* \otimes C$ へ制限したものに付随する Reshetikhin-Turaev 不変量と Hopf 代数 H を用いた S^3 内の絡み目 L の補空間 Kuperberg 不変量が一致していることが知られている．$(H, M, i, \Delta, \varepsilon, S)$ を Hopf 代数と

する．Drinfel'd double $D(H)$ とは 6 つ組 $(H^* \otimes H, M_{D(H)}, i_{D(H)}, \Delta_{D(H)}, \varepsilon_{D(H)}, S_{D(H)})$ である．ただし，$M_{D(H)}, i_{D(H)}, \Delta_{D(H)}, \varepsilon_{D(H)}, S_{D(H)}$ は以下の通りである．

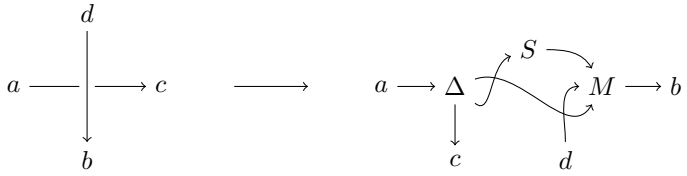
$$
\begin{aligned}
&M_{D(H)}\colon\ H^* \otimes H \otimes H^* \otimes H \ni f \otimes a \otimes g \otimes b \mapsto fg(S^{-1}(a''')?a') \otimes a''b \in H^* \otimes H,\\
&i_{D(H)}\colon\ k \ni 1_k \mapsto i_{H^*} \otimes i_H = \varepsilon \otimes i \in H^* \otimes H,\\
&\Delta_{D(H)}\colon\ H^* \otimes H \ni f \otimes a \mapsto \sum f'' \otimes a' \otimes f' \otimes a'' \in H^* \otimes H \otimes H^* \otimes H,\\
&\varepsilon_{D(H)}\colon\ H^* \otimes H \ni f \otimes a \mapsto f(i)\varepsilon(a) \in k,\\
&S_{D(H)}\colon\ H^* \otimes H \ni f \otimes a \mapsto \sum f'(S^{-1}(a'''))f'''(a')S^{-1}(f'') \otimes S^{-1}(a'') \in H^* \otimes H.
\end{aligned}
$$

Drinfel'd double $D(H)$ は Hopf 代数の構造を持つ．さらに，$R \in D(H) \otimes D(H)$ を

$$R_{D(H)} = \sum_j \varepsilon_H \otimes e_j \otimes e^j \otimes i_H$$

と定義すると，$(H^* \otimes H, M_{D(H)}, i_{D(H)}, \Delta_{D(H)}, \varepsilon_{D(H)}, S_{D(H)}, R_{D(H)})$ は準三角 Hopf 代数である．

絡み目の正交点に対して Kuperberg 不変量の構成は次のようなテンソルネットワークを与えた．



このテンソルネットワークを $H^* \otimes H^*$ から $H^* \otimes H^*$ への線形写像と思うと，

$$f \otimes g \mapsto f_{(3)}S(f_{(1)})g \otimes f_{(2)} \tag{1}$$

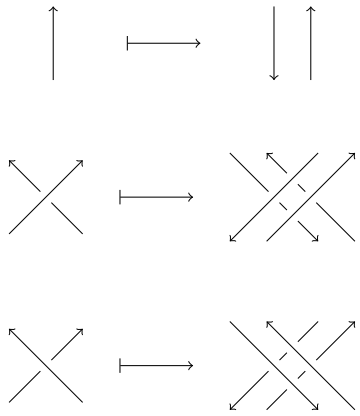
という写像が得られる．一方で，正交点に対して Drinfel'd double $D(H)$ の自身への有限次元表現を $H^* \otimes C$ へ制限したものに付随する Reshetikhin-Turaev 不変量は次の H-準同型写像を対応させる．

$$
\begin{aligned}
f \otimes C \otimes g \otimes C &\mapsto \sum_k M_{D(H)}((e^k \otimes i) \otimes (g \otimes C)) \otimes M_{D(H)}((\varepsilon \otimes e_k) \otimes (f \otimes C))\\
&= \sum_k g_{(1)}(S^{-1}(i))g_{(3)}(i)e^k g_{(2)} \otimes iC \otimes f_{(1)}(S^{-1}(e_{k_{(3)}}))f_{(3)}(e_{k_{(1)}})\varepsilon f_{(2)} \otimes e_{k_{(2)}}C\\
&= \sum_k e^k g \otimes C \otimes f_{(1)}(S^{-1}(e_{k_{(3)}}))f_{(3)}(e_{k_{(1)}})f_{(2)} \otimes e_{k_{(2)}}C\\
&= \sum_k e^k g \otimes C \otimes f_{(1)}(S^{-1}(e_{k_{(3)}}))f_{(3)}(e_{k_{(1)}})f_{(2)} \otimes \varepsilon(e_{k_{(2)}})C\\
&= \sum_k e^k g \otimes C \otimes f_{(1)}(S^{-1}(e_{k_{(2)}}))f_{(3)}(e_{k_{(1)}})f_{(2)} \otimes C\\
&= \sum_{k,l} e^k e^l g \otimes C \otimes f_{(1)}(S^{-1}(e_l))f_{(3)}(e_k)f_{(2)} \otimes C\\
&= f_{(3)}S^{-1}(f_{(1)})g \otimes C \otimes f_{(2)} \otimes C
\end{aligned}
$$

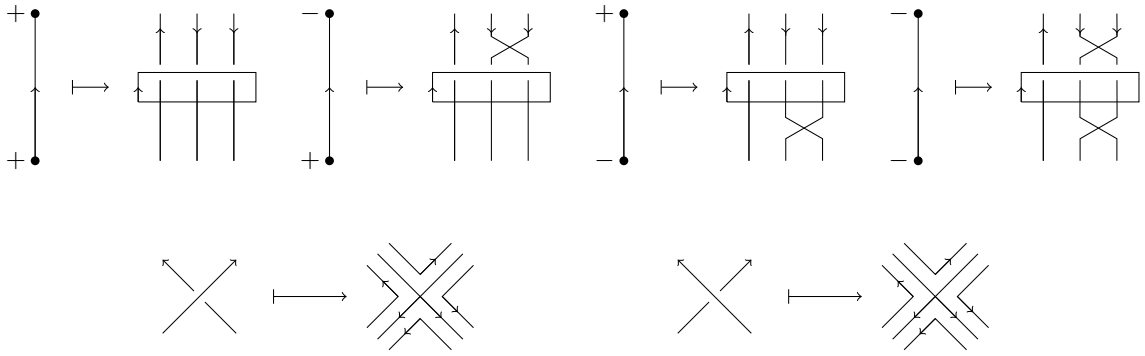
H の involutory 性より $S^{-1} = S$ であるから，この写像は (1) と同一視することができる．負交点についても同様の結果が得られる．

2 タングル, o-タングル

以降, 絡み目をタングルとして扱う. o-タングルとはタングルに仮想交点を許したものである. 仮想交点とは, 交点を通る辺に上下を付けないものである. o-タングルは branched spine を表したものである. ここで, 次のようなタングルと o-タングルの対応を考える.



このようにして絡み目 L を表すタングルから得られた o-タングルが表す branched spine は $S^2 \times [-1,1]$ から絡み目 L の開近傍を取り除いたものを表す [2]. また, branched spine から Heegaard 図式を得ることができる [4]. 次のようにして o-タングルから Heegaard 図式を得られる.



3 いろいろな圏と関手

タングルや o-タングルを射にした圏を定義する. タングル圏 $\mathcal{T}$ は対象が $\{\{+,-\}$ の列 $\} \cup \emptyset$ であり, 射がタングルであるような圏である. o-タングル圏は対象が $\{\{+,-\}$ の列 $\} \cup \emptyset$ であり, 射を o-タングルであるような圏である. Heegaard 図式圏は対象が $\{\{+,-\} \times \{u,l\}$ の列 $\} \cup \emptyset$ であり, 射がタングルであるような圏である. Heegaard 図式圏の対象が他の 2 つの圏のものと異なるのは, upper circle と lower circle を区別するためである.

1. tangle 圏 $\mathcal{T}$.

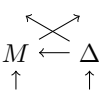
- (対象) $\mathrm{Ob}(\mathcal{T}) = \{\{+,-\}$ の列 $\} \cup \emptyset$.
- (射) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\varepsilon, \varepsilon') = \{(\varepsilon, \varepsilon')$ 型の tangle の isotopy class$\}$.
- (恒等射) $\mathrm{id}_\emptyset$ は空のタングル, id_ε は区間 $\{1, 2, \ldots, n\} \times \{0\} \times [0, 1]$ で構成される $(\varepsilon, \varepsilon')$ 型の tangle の isotopy class.
- (合成射) $L \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\varepsilon, \varepsilon')$, $L' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\varepsilon', \varepsilon'')$ に対して, $L \circ L'$ は tangle L の上部に tangle L' を置いて繋げたもの.
- (対象のテンソル積) $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k), \varepsilon' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_l) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{T})$ に対し, $\varepsilon \otimes \varepsilon' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_l)$.
- (射のテンソル積) $L, L' \in \mathrm{Hom}(\mathcal{T})$ に対し, $L \otimes L'$ は L の右側に L' を置いたもの.

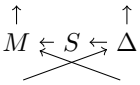
2. o-tangle 圏 $\mathcal{O}$.
   - (対象) $\mathrm{Ob}(\mathcal{O})$) $\{\{+,-\}$ の列 $\} \cup \emptyset$.
   - (射) $\mathrm{Hom}(\mathcal{O})) = \{(\varepsilon, \varepsilon')$ 型の o-タングルの isotopy class$\}$.
   - (恒等射) $\mathrm{id}_\emptyset$ は空の o-タングル, id_ε は区間 $\{1, 2, \ldots, n\} \times \{0\} \times [0, 1]$ で構成される o-tangle の isotopy class.
   - (合成射) $L \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\varepsilon, \varepsilon')$, $L' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\varepsilon', \varepsilon'')$ に対して, $L \circ L'$ は o-タングル L の上部に o-タングル L' を置いて繋げたもの.
   - (対象のテンソル積) $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k), \varepsilon' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_l) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{O})$ に対し, $\varepsilon \otimes \varepsilon' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_l)$.
   - (射のテンソル積) $L, L' \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O})$ に対し, $L \otimes L'$ は L の右側に L' 置いたもの.
3. Heegaard 図式圏 $\mathcal{H}ee$.
   - (対象) $\mathrm{Ob}(\mathcal{H}ee) = \{\{+,-\} \times \{u, l\}$ の列 $\} \cup \emptyset$.
   - (射) $\mathrm{Hom}(\mathcal{H}ee) = (\varepsilon, \varepsilon')$ 型の o-タングルの isotopy class$\}$.
   - (恒等射) $\mathrm{id}_\emptyset$ は空の o-タングル, id_ε は区間 $\{1, 2, \ldots, n\} \times \{0\} \times [0, 1]$ で構成される o-タングルの isotopy class.
   - (合成射) $L \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\varepsilon, \varepsilon')$, $L' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\varepsilon', \varepsilon'')$ に対して, $L \circ L'$ は o-タングル L の上部に o-タングル L' を置いて繋げたもの.
   - (対象のテンソル積) $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k), \varepsilon' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_l) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{H}ee)$ に対し, $\varepsilon \otimes \varepsilon' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_l)$.
   - (射のテンソル積) $L, L' \in \mathrm{Hom}(\mathcal{H}ee)$ に対し, $L \otimes L'$ を L の右側に L' 置いたもの.

これらの圏の間の関手を定める.

1. $\mathcal{H}ee$ から $\boldsymbol{Vect}_k$ への functor $F^{\boldsymbol{Vect}_k}_{\mathcal{H}ee}$.

$$F^{\boldsymbol{Vect}_k}_{\mathcal{H}ee}\colon \begin{array}{l} \mathrm{Ob}(\mathcal{H}ee) \ni (+,u), (+,l) \mapsto H \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Vect}_k), \\ \mathrm{Ob}(\mathcal{H}ee) \ni (-,u), (-,l) \mapsto H^* \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{Vect}_k), \end{array}$$

$\mathrm{Hom}(\mathcal{H}ee) \ni$  $\longmapsto$  $\in \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Vect}_k)$

$\mathrm{Hom}(\mathcal{H}ee) \ni$  $\longmapsto$  $\in \mathrm{Hom}(\boldsymbol{Vect}_k)$

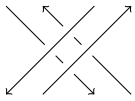
2. $\mathcal{H}ee$ から $\mathcal{O}$ への functor $F^{\mathcal{O}}_{\mathcal{H}ee}$.
   対象の遷移は u, l の色を忘れたものとする. すなわち, $(+,u),(+,l) \mapsto +$, $(-,u),(-,l) \mapsto -$ である. 射は同じものへと写す.
3. Reshitikhin-Turaev 不変量を表す functor $\boldsymbol{RT}$.

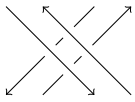
$$\boldsymbol{RT}\colon \mathcal{T} \to \boldsymbol{Vect}_k$$

   はタングルの Drinfel'd double$D(H)$ の自分自身への有限次元表現を $H^* \otimes C$ に制限したものに付随する Reshetikhin-Turaev 不変量を対応させる関手である.
4. $\mathcal{T}$ から $\mathcal{O}$ への functor $F^{\mathcal{O}}_{\mathcal{T}}$.

$$F^{\mathcal{O}}_{\mathcal{T}}\colon\ \mathrm{Ob}(\mathcal{T}) \ni +,- \mapsto (-,+) \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{O}),$$

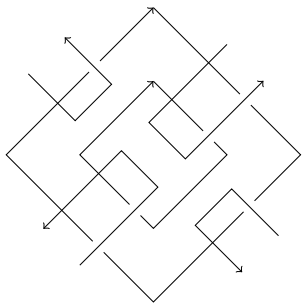
$\mathrm{Hom}(\mathcal{T}) \ni$  $\longmapsto$  $\in \mathrm{Hom}(\mathcal{O})$

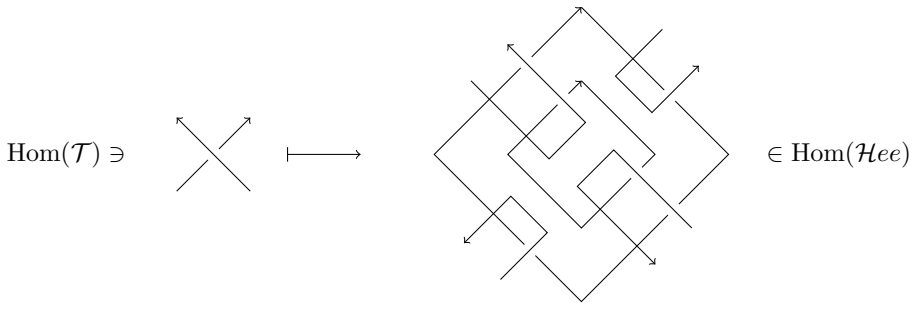
$\mathrm{Hom}(\mathcal{T}) \ni$  $\longmapsto$  $\in \mathrm{Hom}(\mathcal{O})$

$\mathrm{Hom}(\mathcal{T}) \ni$  $\longmapsto$  $\in \mathrm{Hom}(\mathcal{O})$

5. $\mathcal{T}$ から $\mathcal{H}ee$ への functor $F^{\mathcal{H}ee}_{\mathcal{T}}$.

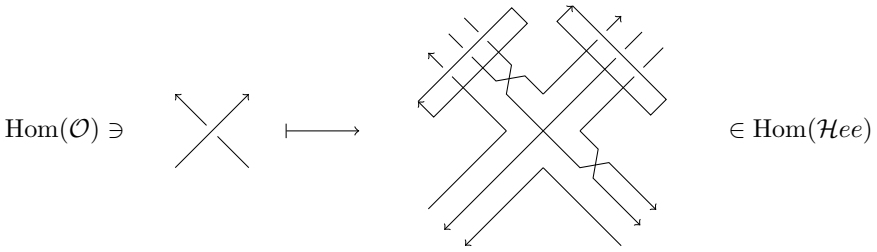
$$F^{\mathcal{H}ee}_{\mathcal{T}}\colon\ \mathrm{Ob}(\mathcal{T}) \ni (+,u),(+,l) \mapsto H \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{H}ee),$$
$$\mathrm{Ob}(\mathcal{T}) \ni (-,u),(-,l) \mapsto H^* \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{H}ee),$$

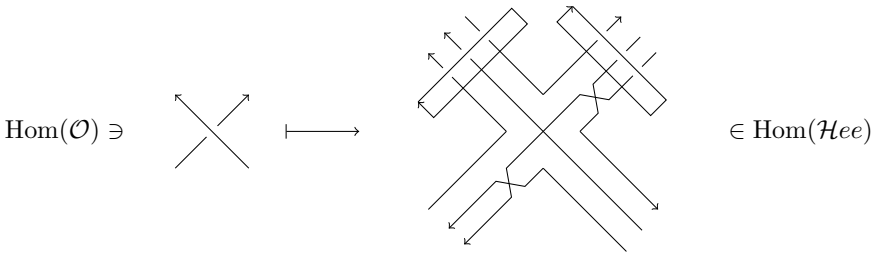
$\mathrm{Hom}(\mathcal{T}) \ni$  $\longmapsto$  $\in \mathrm{Hom}(\mathcal{H}ee)$



6. $\mathcal{O}$ から $\mathcal{H}ee$ への functor $F_{\mathcal{O}}^{\mathcal{H}ee}$.

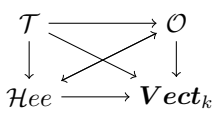
$$F_{\mathcal{O}}^{\mathcal{H}ee}\colon\ \mathrm{Ob}(\mathcal{O}) \ni + \mapsto ((+,u),(-,u),(-,u)) \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{H}ee),$$
$$\mathrm{Ob}(\mathcal{O}) \ni - \mapsto ((+,u),(+,u),(-,u)) \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{H}ee),$$





1 は Kuperberg 不変量の構成の一部である Heegaard 図式からテンソルネットワークを得る方法を表している. 2 は Heegaard 図式の upper circle と lower circle を忘れることで o-タングルとみる関手である. 3 はタングルから結び目の不変量である Reshetikhin-Turaev 不変量を計算する関手である. 4 は [2] の構成である. 絡み目 L に対して 4 で写された o-タングルは $S^2 \times [-1,1]$ から絡み目 L の開近傍を取り除いた branched spine を表す. 5 は絡み目からその補空間の Heegaard 図式を作る関手である. 6 は branched spine から Hegaard 図式を作る関手である [4].

4 各圏の間の関係



これまでに定義した圏や関手を用いると上のような図式が考えられる．H を用いた絡み目 L の補空間の Kuperberg 不変量と Drinfel'd double $D(H)$ の自分自身への有限次元表現を $H^* \otimes C$ に制限したものに付随する Reshetikhin-Turaev 不変量が一致することにより,

$$F_{\mathcal{H}ee}^{Vect_k} \circ F_{\mathcal{T}}^{\mathcal{H}ee} = RT$$

であることがわかる．また, $F_{\mathcal{T}}^{\mathcal{O}}$ によって作られる branched spine は $S^2 \times [-1, 1]$ 内の元のタングルの補空間を表すが,

$$F_{\mathcal{O}}^{\mathcal{H}ee} \circ F_{\mathcal{T}}^{\mathcal{O}} \neq F_{\mathcal{H}ee}^{Vect_k} \circ F_{\mathcal{T}}^{\mathcal{H}ee}$$

であることがテンソルネットワークを計算することによりわかる．

参考文献

[1] Kuperberg, Greg. "*Involutory Hopf algebras and 3-manifold invariants.*" International Journal of Mathematics 2.01 (1991): 41–66.

[2] Baseilhac, Stephane, and Riccardo Benedetti. "*The Kashaev and quantum hyperbolic link invariants.*" arXiv preprint arXiv:1101.1851 (2011).

[3] Reshetikhin, Nicolai Yu, and Vladimir G. Turaev. "*Ribbon graphs and their invaraints derived from quantum groups.*" Communications in Mathematical Physics 127.1 (1990): 1–26.

[4] Benedetti, Riccardo, and Carlo Petronio. "*Branched standard spines of 3-manifolds.* Springer, 2006.

[5] Mihalache, Serban Matei, Sakie Suzuki, and Yuji Terashima. "*The Heisenberg double of involutory Hopf algebras and invariants of closed* 3*-manifolds.*" arXiv preprint arXiv:2104.03037 (2021).

[6] 松本幸夫. Morse 理論の基礎. 岩波書店, 2005.

Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量と Homological block

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
森　祥仁 (Akihito MORI)

概要

Gukov-Pei-Putrov-Vafa は homological block と呼ばれる q 級数を定義してその radial limit が WRT 不変量と一致することを予想した．今回の研究では H グラフで表される 3 次元ホモロジー球面に対して彼らの予想が正しいことを証明した．その結果としてそのような多様体の WRT 不変量が深さ 2, 重さ 1, 量子集合 $\mathbb{Q}$ の量子モジュラー形式であることがわかる．この発表は村上友哉氏（東北大学）との共同研究 [MM21] に基づく．

1　序

1.1　WRT 不変量の先行研究

量子トポロジーは量子不変量を研究する分野である．特に Witten-Reshetikhin-Turaev (WRT) 不変量は注目に値する． WRT 不変量は向き付け可能な閉 3 次元多様体の位相不変量である．Witten [Wit89] は場の理論を用いて 3 次元多様体の位相不変量を構成した．しかし彼の構成は経路積分を用いるため, 数学者にとって扱いに困るものであった．Reshetikhin-Turaev [RT91] は Witten の仕事から着想を得て位相不変量を構成した．我々はこれを WRT 不変量と呼ぶ．Witten 及び Reshetikhin-Turaev の仕事が量子トポロジー誕生のきっかけになったのである．

WRT 不変量は向き付け可能な閉 3 次元多様体の不変量であるが, そのような多様体は Dehn 手術で得られることが知られている．

定義 1.1. $L = \{L_i\}_{i=1}^n$ を S^3 内の絡み目とする．L の管状近傍 $N(L)$ と書き $S^3 \setminus N(L)$ を $E(L)$ と書く．$V = \{V_i\}_{i=1}^n$ をソリッドトーラスの集合とする．このとき, 同相写像 $f\colon \partial V \to \partial E(L)$ による V と $E(L)$ の貼り合わせを Dehn 手術という．貼り合わせ写像は有理数で表されることが知られている．絡み目図式と有理数を合わせて手術図式という．

各 L_i が自明な結び目の場合は各 L_i を頂点とし, L_i, L_j が絡まっていれば対応する頂点の間に辺を伸ばすことで手術図式をグラフで読み替えることができる．

定義 1.2. 木 $G = (V, E)$ と重み $w\colon V \to \mathbb{Z}$ の組を plumbed グラフという．$w(v)$ を w_v と書く．手術図式が plumbed グラフで与えられるような多様体を plumbed 多様体という．

* 本研究は JSPS 科研費 JP 21J10271, JP 20J20308 の助成を受けたものである．
† akihito.mori.s5@dc.tohoku.ac.jp

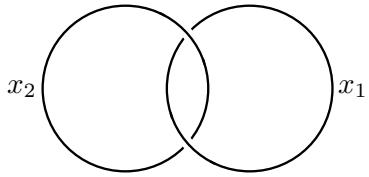


図 1: 手術図式の例 ($x_i \in \mathbb{Q}$)



図 2: 手術図式に対応するグラフ

plumbed 多様体の例として Brieskorn 多様体や Seifert 多様体が挙げられる．Brieskorn 多様体は三叉のグラフで表され, Seifert 多様体は中心から足が幾つか生えているグラフで表される．

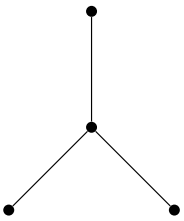


図 3: Brieskorn 多様体

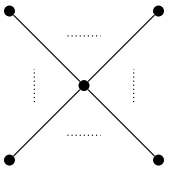


図 4: 手術図式に対応するグラフ

その重要性から, 現在に至るまで多くの研究者が WRT 不変量を研究対象に選んだ．中でも本研究と目標を同じくする主だったものを以下に列挙する．Lawrence-Zagier [LZ99] は Poincaé ホモロジー球面 $\Sigma(2,3,5)$ に対する WRT 不変量がある false theta 関数の radial limit で書けることを証明した．樋上 [Hik06] は Seifert ホモロジー球面に対する WRT 不変量が Eichler 積分とその微分の極限値の和として書けることを証明している．

これらの事実から WRT 不変量を復元する整数係数 q 級数の存在が示唆される．Gukov-Pei-Putrov-Vafa は plumbed 多様体に対して homological block と呼ばれる q 級数を定義し, その radial limit の線形和が WRT 不変量と一致することを予想した [GPPV20]．藤-岩木-村上-寺嶋 [FIMT20] は Seifert ホモロジー球面に対して WRT 関数と呼ばれる q 級数を定義してその radial limit が WRT 不変量と一致することを証明した．Andersen-Mistegård [AM20] は WRT 関数が Seifert 多様体に対する homological block と同等であることを証明し, 藤-岩木-村上-寺嶋とは別の方法で Seifert 多様体に対する homological block の radial limit から Seifert 多様体に対する WRT 不変量を復元できることを証明した．以下に homological block と radial limit の定義を述べる．

定義 1.3 ([GPPV20, Subsection 3.4])**.** $G = (V, E, w)$ を plumbed グラフとする．$\delta = (\delta_v)_{v\in V}$ を $\deg(v)$ が奇数なら $\delta_v = 1$, 偶数なら $\delta_v = 0$ で定める．このとき, plumbed 多様体 $M_3(G)$ と $b \in (H_1(M_3(G), \mathbb{Z}) + \delta)/\{\pm 1\} \cong (2\mathbb{Z}^N/2W(\mathbb{Z}^N) + \delta)/\{\pm 1\}$ に対して homological block が以下の式で定義される．

$$\widehat{Z}_{G,b}(q) = q^{-\sum_{v\in V}(w_v+3)/4}\text{v.p.}\int_{|z_v=1|,v\in V}\prod_{v\in V}\frac{dz_v}{2\pi\sqrt{-1}z_v}(z_v - 1/z_v)^{2-\deg(v)}\Theta_{-W,b}(z)$$

ただし v.p. は Cauchy の主値で, W は plumbed グラフに対応する手術図式 $\mathcal{G}$ の絡み行列であり,

$$\Theta_{-W,b}(q;\{z_v\}_{v\in V}) := \sum_{\boldsymbol{l}={}^t(l_v)_{v\in V}\in 2W(\mathbb{Z}^{|V|})+b} q^{-{}^t\boldsymbol{l}W^{-1}\boldsymbol{l}/4}\prod_{v\in V} z_v^{l_v}$$

とする.

定義 1.4. 開円盤 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ 上で定義された関数 f を考える. 円盤の境界上の点 x_0 をとる. このとき極限 $\lim_{t\to 1-0} f(tx_0)$ を radial limit という.

1.2 量子モジュラー形式の先行研究

モジュラー形式とは高い対称性を持つ正則関数のことで, 数論の分野でよく研究されているが, 他にも Langlands 予想やムーンシャインなど様々な数学に姿を現す興味深い対象である. モジュラー形式には多様な変種が存在するが, 中でも量子モジュラー形式は量子トポロジーとの関連から最近盛んに研究されている. 以下に Zagier [Zag10] による量子モジュラー形式の定義を述べる.

定義 1.5 ([Zag10])**.** k を整数, Γ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の部分群, $\mathcal{Q}$ を $\mathbb{Q}$ の部分集合とする. 写像 $f\colon \mathcal{Q} \to \mathbb{C}$ が以下の条件を満たすとき f を重さ k, 群 Γ, 量子集合 $\mathcal{Q}$ の量子モジュラー形式という:

$$\text{任意の } \gamma \in \Gamma \text{ に対して } f - f|_k\,\gamma \text{ が } \mathbb{R} \text{ の開集合上の解析関数に拡張できる.}$$

ただし $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して slash operator を $(f|_k\,\gamma)(x) = (c\tau + d)^{-k} f(\gamma x)$ で定義する.

この定義は Bringmann-Kaszian-Milas [BKM19] によって一般化されている.

定義 1.6 ([BKM19])**.** k を整数, Γ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の部分群, $\mathcal{Q}$ を $\mathbb{Q}$ の部分集合とする. $\mathcal{Q}_l(\Gamma)$ を重さ l, 群 Γ, 量子集合 $\mathcal{Q}$ の量子モジュラー形式全体の集合とし, $\mathcal{O}(R)$ を $\mathbb{R}$ の開集合 R 上の解析関数全体の集合とする. 写像 $f\colon \mathcal{Q} \to \mathbb{C}$ が以下の条件を満たすとき f を深さ 2, 重さ k, 群 Γ, 量子集合 $\mathcal{Q}$ の量子モジュラー形式という: 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対してある開集合 $R \subset \mathbb{R}$, $k_1, \ldots, k_r \in 1/2\mathbb{Z}$ が存在して

$$f - f|_k\,\gamma \in \mathcal{O}(R) \oplus \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{Q}_{k_i}(\Gamma)\mathcal{O}(R)$$

が成り立つ.

深さ 2 の量子モジュラー形式と homological block に関して以下の定理が知られている.

定理 1.7 ([BMM20])**.** H グラフから定まるホモロジー球面の homological block は深さ 2, 重さ 1, 群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, 量子集合 $\mathbb{Q}$ の量子モジュラー形式である.

2 主定理

我々は Seifert 多様体でない場合に homological block と WRT 不変量を研究する. 特に H グラフで表される多様体を考える.

定理 2.1. WRT_k を WRT 不変量, Γ を H グラフ, $M(\Gamma)$ を手術図式 $\mathcal{L}(\Gamma)$ で表される 3 次元多様体, $\widehat{Z}_\Gamma(q)$ を H グラフに対する homological block, ζ_k を 1 の原始 k 乗根とする. $w_i \in \mathbb{Z}_{<0}$, Γ の隣接行

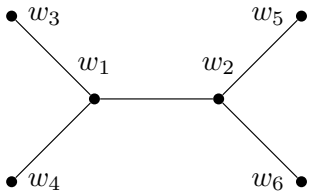


図 5: H グラフ Γ

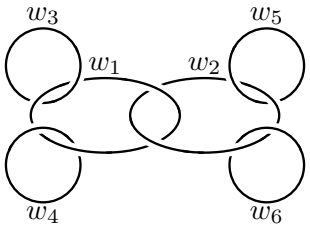


図 6: 手術図式 $\mathcal{L}(\Gamma)$

列 W は負定値で行列式は 1 とする. このとき以下の等式が成り立つ.

$$\mathrm{WRT}_k(M_3(\Gamma)) = -\frac{1}{2\left(\zeta_{2k}-\zeta_{2k}^{-1}\right)} \lim_{\substack{q\to\zeta_k^{-1}\\ |q|<1}} \widehat{Z}_\Gamma(q)\,. \tag{1}$$

Bringmann-Mahlburg-Milas [BMM20] は $\widehat{Z}_\Gamma(q)$ が深さ 2 の量子モジュラー形式になることを証明している. 彼女らの結果と我々の結果を合わせると WRT 不変量が量子モジュラー形式であることがわかる.

定理 2.2. $f_\Gamma\colon \mathbb{Q}\to\mathbb{C}$ を以下の式で定める.

$$f_\Gamma\left(\frac{h}{k}\right) = \frac{1}{k^2} \sum_{\gamma={}^t(\alpha,\beta)\in(2S)^{-1}(\mathbb{Z}^2)\cap[0,\,k)^2} \varepsilon(\gamma)\boldsymbol{e}\left(\frac{h}{k}Q(\gamma)\right)\alpha\beta$$

ただし $h/k\in\mathbb{Q}$ は既約分数であって, Q は W^{-1} の左上の 2×2 行列が定める 2 次形式とする. このとき f_Γ は深さ 2, 重さ 1, 量子集合 $\mathbb{Q}$ の量子モジュラー形式であって, 任意の $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して

$$f_\Gamma\left(-\frac{1}{k}\right) = -\frac{2\left(\zeta_{2k}-\zeta_{2k}^{-1}\right)}{\zeta_k^{-(18+\sum_{i=1}^6 w_i+\sum_{i=3}^6 1/w_i)/4}}\mathrm{WRT}_k(M_3(\Gamma))$$

が成り立つ.

3 証明の概略

まず記号を準備する.

- h/k は既約分数,
- $M,N,a,c\in\mathbb{Z}_{>0}, b\in\mathbb{Z}$ で $ac-MNb^2=1$ を満たす,
- $Q(x,y) := Max^2+2MNbxy+Ncy^2$,
- 写像 $\chi\colon \frac{1}{2M}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$,
- 写像 $\psi\colon \frac{1}{2M}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$,
- 写像 $C\colon \frac{1}{2M}\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$.

証明する際に重要なのが以下の命題である.

命題 3.1 ([MM21])**.** χ は以下の条件を満たすとする.

- $\sum_{\alpha\in\frac{1}{2M}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}}\chi(\alpha)=0$
- $\chi(\alpha)\neq 0$ なる α の既約分数表示の分母は $2M$
- $M\alpha, M\alpha^2 \bmod \mathbb{Z}$ は $\chi(\alpha)\neq 0$ なる α の取り方に依らない.

ψ も同様の条件を満たすとする. このとき

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in(\frac{1}{2M}\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})\times(\frac{1}{2N}\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})}\chi(\alpha)\psi(\beta)C(\alpha)e^{2\pi\sqrt{-1}\frac{h}{k}Q(\alpha,\beta)}=0$$

が成り立つ.

直接計算と命題 3.1 を使うことで WRT 不変量を重み付き Gauss 和で表示できる. 一方で Euler-Maclaurin の和公式と命題 3.1 を使うことで homological block の radial limit を重み付き Gauss 和で表示できる. 両者の表示が一致することから定理 2.1 が証明できる. 定理 2.1 と Bringmann-Mahlburg-Milas [BMM20] の主結果を合わせることで定理 2.2 が証明できる. 以上が主結果の証明の概略である.

参考文献

[AM20] J. Andersen and W. Mistegård. Resurgence analysis of quantum invariants of Seifert fibered homology spheres. September 2020. arXiv:1811.05376v3.

[BKM19] Kathrin Bringmann, Jonas Kaszian, and Antun Milas. Higher depth quantum modular forms, multiple Eichler integrals, and $\mathfrak{sl}_3$ false theta functions. *Res. Math. Sci.*, 6(2):Paper No. 20, 41, 2019.

[BMM20] Kathrin Bringmann, Karl Mahlburg, and Antun Milas. Higher depth quantum modular forms and plumbed 3-manifolds. *Lett. Math. Phys.*, 110(10):2675–2702, 2020.

[FIMT20] Hiroyuki Fuji, Kohei Iwaki, Hitoshi Murakami, and Yuji Terashima. Witten–Reshetikhin–Turaev function for a knot in Seifert manifolds. 2020. arXiv:2007.15872.

[GPPV20] Sergei Gukov, Du Pei, Pavel Putrov, and Cumrun Vafa. BPS spectra and 3-manifold invariants. *J. Knot Theory Ramifications*, 29(2):2040003, 85, 2020.

[Hik06] Kazuhiro Hikami. Quantum invariants, modular forms, and lattice points. II. *J. Math. Phys.*, 47(10):102301, 32, 2006.

[LZ99] Ruth Lawrence and Don Zagier. Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds. volume 3, pages 93–107. 1999. Sir Michael Atiyah: a great mathematician of the twentieth century.

[MM21] Akihito Mori and Yuya Murakami. Witten–Reshetikhin–Turaev, homological blocks, and quantum modular forms. 2021. arXiv:2110.10958v2.

[RT91] N. Reshetikhin and V. G. Turaev. Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent. Math.*, 103(3):547–597, 1991.

[Wit89] Edward Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm. Math. Phys.*, 121(3):351–399, 1989.

[Zag10] Don Zagier. Quantum modular forms. In *Quanta of maths*, volume 11 of *Clay Math. Proc.*, pages 659–675. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

Closed normal o-graph による閉 3 次元多様体の表現と Kuperberg 不変量

東京工業大学 情報理工学院 数理・計算科学系 数理・計算科学コース
村松滉平 (Kohei Muramatsu)

概要

任意の閉 3 次元多様体は closed normal o-graph と呼ばれる図式で表現でき, 3 次元多様体の同相類を与える図式の同値関係が知られている. 本研究では, Benedetti と Petronio による考察を元に normal o-graph を用いて Kuperberg 不変量を再定義し, closed normal o-graph の同値関係とテンソルネットワークを用いてその不変性の証明を行った. また, closed normal o-graph の変形の 1 つである (0,2) move の一般化について考察した.

1 導入

3 次元多様体の位相不変量 f, すなわちある写像 f であって, 2 つの 3 次元多様体 M_1, M_2 が同相であれば $f(M_1) = f(M_2)$ を満たすものは様々なものが考案されている. 3 次元多様体は直接扱うにはやや高次元な図形なので, 細かいパーツに分解して組み合わせ的に扱うことが多い. 本研究ではその組み合わせ的な手法のうち, ヒーガード分解と spine によるグラフ表現を用いて 3 次元多様体を扱い, 不変量を考察する.

ヒーガード分解は多様体を 2 つのハンドル体の貼り合わせとして表現する方法である. 3 次元の場合は, 同じ種数 (穴の数) の 2 つのソリッドトーラスを貼り合わせることとなる. 同じトーラスどうしでも貼り合わせ方によって得られる 3 次元多様体は異なるが, その貼り合わせ方はトーラス上の閉曲線の組で一意に定めることができる. この閉曲線の組はヒーガード図式と呼ばれている. すなわち, ヒーガード分解は 2 次元の閉曲面と 1 次元の閉曲線の組で 3 次元多様体を表現する [7].

spine は, 「潰す」「膨らませる」という操作で境界付き 3 次元多様体と対応づけさせた 2 次元多面体である. spine は基本的なパーツの組み合わせで得られ, そのパーツの組み合わせ方は重み付きのグラフで表現できる. すなわち, spine によるグラフ表現は重み付きグラフで 3 次元多様体を表現する. 特に, 閉 3 次元多様体の同相類は closed normal o-graph と呼ばれるグラフを 3 種類の局所移動で割った同値類と一対一対応することが知られている [2].

ヒーガード図式から定義される不変量として, Kuperberg 不変量がある [4]. [2] では, spine を表すグラフそのものをハンドル体とみなし, グラフの各辺から局所的にヒーガード図式及び Kuperberg 不変量を構成する考察がされている. 本研究ではこの考察を受け, normal o-graph から Kuperberg 不変量を再定義し, その不変性の証明を行った. 特に, 0-2 move の一般化である Reidemeister Ⅱ move について Kuperberg 不変量が不変となる場合分けを得た.

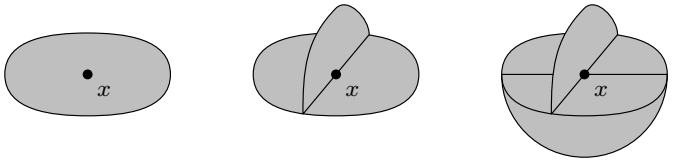
本稿では第 2 章で spine の理論を紹介し, spine のグラフ表現と 2 次元多面体の対応を説明する. 第 3 章でヒーガード図式と Kuperberg 不変量の定義を行う. 第 4 章で主結果を紹介する.

2 spine と closed normal o-graph

定義 1. K を単体複体, $\sigma \in K$ を *principal*, すなわち $\sigma \not\subseteq \delta$ $(\forall \delta \in K \setminus \{\sigma\})$ とし, $\sigma' \in K$ を σ の *free* な面, すなわち $\sigma' \neq \sigma$ であり $\sigma' \not\subseteq \delta$ $(\forall \delta \in K \setminus \{\sigma, \sigma'\})$ を満たす σ の面であるとする. このとき, K から $K \setminus \{\sigma, \sigma'\}$ を得る操作を K の ***elementary collapse*** という. P を多面体, Q を P の部分多面体とし, P, Q のある単体分割 K, L が存在して, *elementary collapse* の繰り返しによって K から L を得ることができるとき, P は Q に ***collapse*** するといい, $P \searrow Q$ と書く.

定義 2. M をコンパクトで連結な境界つき 3 次元多様体とする. M の部分多面体 P に対し $M \searrow P$ であるとき, P を M の ***spine*** という. 連結閉 3 次元多様体 M の *spine* は, $M \setminus Int\ B^3$ $(B^3 \subset M)$ の *spine* とする.

コンパクトな 2 次元多面体 P は, $\forall x \in P$ の近傍が下図のいずれかと同相なとき, **simple** であるという.



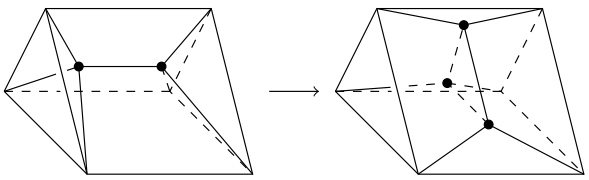
(1) (2) (3)

また, simple な多面体 P について, P の特異点集合を $S(P) = \{x \in P \mid x \text{ の近傍が } (2)(3)\}$, 頂点集合を $V(P) = \{x \in P \mid x \text{ の近傍が } (3)\}$ と定義する. P が以下の 2 条件を満たすとき, P は **special** であるという.

(a) $S(P) \setminus V(P)$ の各連結成分は 1 胞体と同相,
(b) $P \setminus S(P)$ の各連結成分は 2 胞体と同相.

3 次元多様体の spine P が special な多面体であるとき, spine P は **special** であるという.

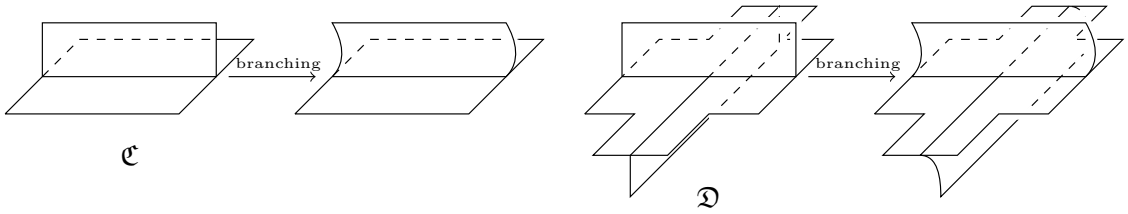
定理 1. *([1, Theorem1.2])* 任意のコンパクトで連結な境界つき 3 次元多様体は頂点を 2 つ以上持つ *special spine* を持つ. 同相な多様体から得られる頂点を 2 つ以上持つ *special spine* P, P' は, 下図で定義される *Matveev-Piergallini move* とその逆を繰り返し施すことによって互いに移り合う.



従って, コンパクトで連結な境界つき 3 次元多様体の同相類集合を $\mathcal{M}$, 2 つ以上の頂点を持つ

special な多面体のうち 3 次元多様体の spine となりうるものの集合を $\mathcal{P}$, Matveev-Piergallini move で移り合うという同値関係で $\mathcal{P}$ を割った商集合を $\mathcal{P}/\sim$ とすると, $\mathcal{M}$ と $\mathcal{P}/\sim$ の間には全単射 $\Phi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{P}/\sim$ が存在する.

n 頂点の special な多面体は, 以下で定義される 2 次元多面体 $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ を, それぞれ $2n$ 個と n 個組み合わせることで本質的に一意に得ることができる ([1, Lemma1.3]). その構成の仕方は 2 つの $\mathfrak{D}$ を 1 つの $\mathfrak{C}$ がどのように接続させるかで説明でき, $\mathfrak{D}$ をグラフの頂点, $\mathfrak{C}$ をグラフの辺, 接続の仕方をグラフの辺の重みとみなしてグラフで表現することができる. 特に, 向きづけられた多様体の場合は o-graph で表現することができる.

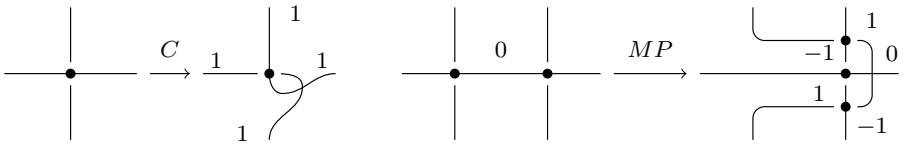


定義 3. 以下の性質を備えた連結な有限 4 価グラフを ***o-graph*** という.

1. 1 つ以上の頂点を持ち, 各 4 価頂点の近傍には $\mathbb{R}^2$ 内の 2 つの線分が直交するような埋め込みが 1 つ指定され, その埋め込みには結び目図式の交点と同様の上下表記がある,
2. 各辺は $\mathbb{Z}_3$ の元で重み付けられている.

定理 2. *([1, Theorem0.1])*

- 全ての *o-graph* にはコンパクトかつ連結な向きづけられた境界付き 3 次元多様体の向きを保存する同相類が一意に定まり, 任意のコンパクトかつ連結な向きづけられた境界付き 3 次元多様体は 2 つ以上の頂点を持つある *o-graph* から得られる.
- *o-graph* Γ_1, Γ_2 が 2 つ以上の頂点を持つとし, それぞれから得られる 3 次元多様体を $\mathcal{M}(\Gamma_1), \mathcal{M}(\Gamma_2)$ とする. このとき, $\mathcal{M}(\Gamma_1), \mathcal{M}(\Gamma_2)$ が向きを保って同相 $\Leftrightarrow$ Γ_1, Γ_2 が C, MP *move* とその逆移動で移り合う.

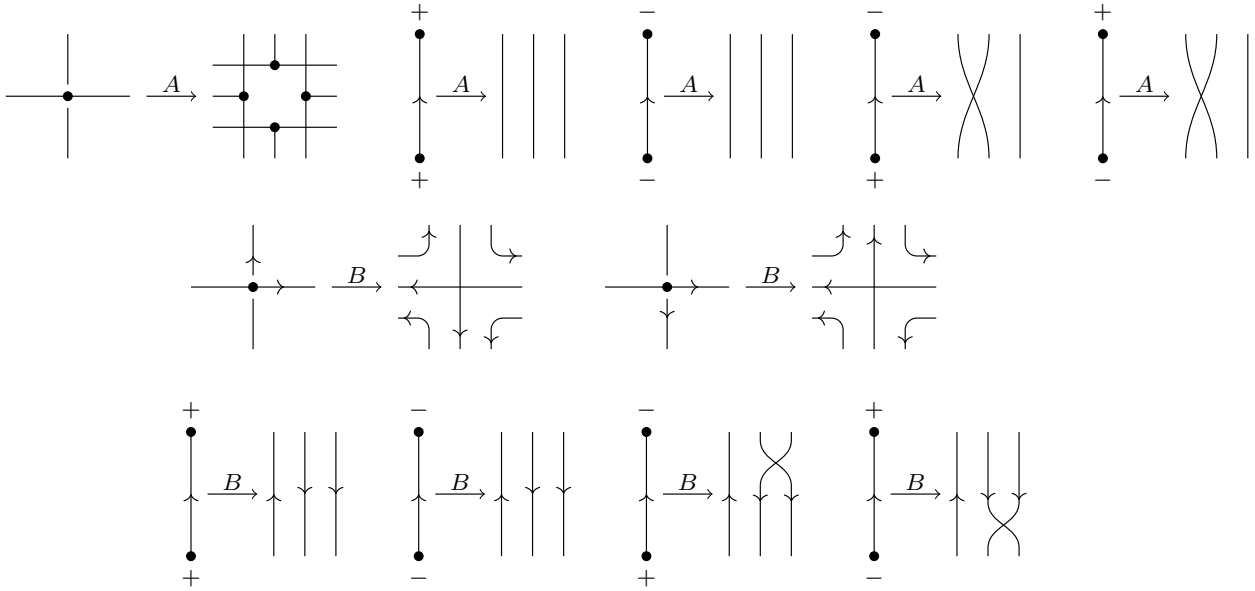


最後に, spine に branching という構造を与える. spine の branching は 3 次元多様体のベクトル場の構成などと関連する話であるが, 本研究では 3 次元多様体に関する branching の性質は扱わず, 単に spine のグラフ表現の応用として branching を導入するため, $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ の 2 次元円板の接続を滑らかにする操作として branching を定義する. branching を使うと, 閉 3 次元多様体を closed normal o-graph で表現できることが知られている.

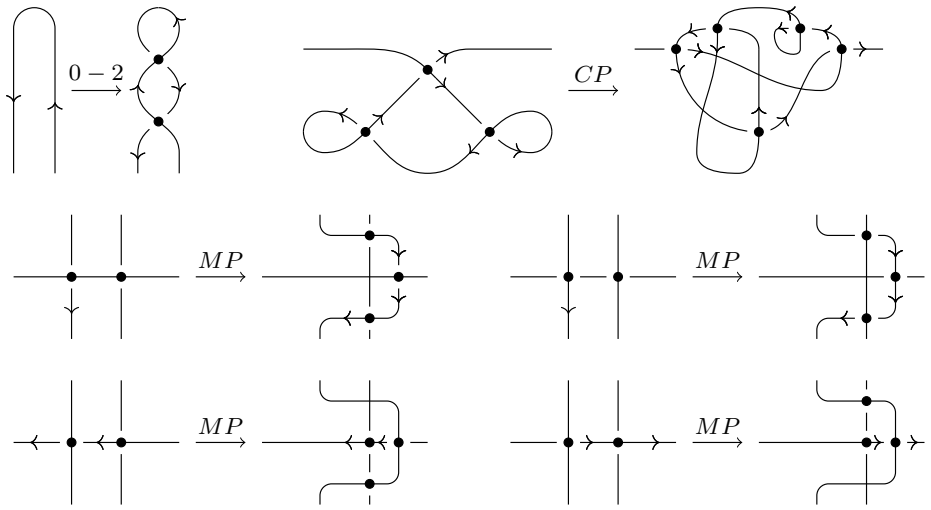
定義 4. 交点を端点とする各辺に重みの代わりに向きを与え, 交点を挟んだ辺は同じ向きをもつようにした *o-graph* を ***normal o-graph*** という. 以下の 3 つの公理を満たす *normal o-graph* を

closed normal o-graph という.

1. 頂点周りで上下どうしの辺のみをつなげて得られる閉曲線は連結,
2. 規則 A によってグラフから得られる 3 価グラフは連結,
3. 規則 B によってグラフから得られる向きづけられた閉曲線の数はグラフの頂点の数よりちょうど 1 つ多い.



定理 3. *([2, Theorem1.4.2])closed normal o-graph* Γ_1, Γ_2 それぞれから得られる閉 3 次元多様体を $\mathcal{M}(\Gamma_1), \mathcal{M}(\Gamma_2)$ とする. このとき, $\mathcal{M}(\Gamma_1), \mathcal{M}(\Gamma_2)$ が同相 $\Leftrightarrow \Gamma_1, \Gamma_2$ が 0-2, *MP, CP move* とその逆移動で移り合う.



ここで MP move は, 図中の無向辺への向きの与え方によって全部で 16 通り存在する. これによって, 閉 3 次元多様体の同相類集合を $\mathcal{M}$, closed normal o-graph の集合を $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ を 0-2, MP, CP

move で移り合うという同値関係で割った商集合を $\mathcal{G}/\sim$ とすると, $\mathcal{M}$ と $\mathcal{G}/\sim$ の間には全単射 $\Phi\colon \mathcal{M} \to \mathcal{G}/\sim$ が存在する.

3 ヒーガード図式と Kuperberg 不変量

V_1, V_2 を同じ種数の 2 つの向きづけられたハンドル体とする. 向きを逆にする同相写像 $f\colon \partial V_2 \to \partial V_1$ によって対応する点を同一視して得られる商空間は向き付け可能閉 3 次元多様体であり, それを M とする. 同一視された $\partial V_1, \partial V_2$ を $\partial V_1 = \partial V_2 = F$ としたとき, $(V_1, V_2; F)$ または単に (V_1, V_2) を M の**ヒーガード分解**といい, F を M の**ヒーガード曲面**という. F の種数をヒーガード分解の種数という.

F の種数を g とし, $\partial V_1, \partial V_2$ 上のそれぞれ g 本の互いに交わらない単純閉曲線 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_g\}, \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_g\}$ は, $\partial V_1 \setminus (\bigcup_{i=1,2,\cdots,g} \beta_i), \partial V_2 \setminus (\bigcup_{i=1,2,\cdots,g} \alpha_i)$ がそれぞれ S^2 から $2g$ 個の 2 次元円板を除いた曲面と同相となっているとき, それぞれ**完備メリディアン円板系**を表す. 写像 $f\colon \partial V_2 \to \partial V_1$ は完備メリディアン円板系の像で定めることができることが知られており, $(\partial V_1, \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_g\}, \{f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots, f(\alpha_g)\})$ の組を M の**ヒーガード図式**といい, $\{f(\alpha_1), f(\alpha_2), \cdots, f(\alpha_g)\}$ を **upper circle**, $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_g\}$ を **lower circle** という.

単純閉曲線に条件を与えず, 単に互いに交わらないだけの lower circle と 互いに交わらないだけの upper circle で**一般化ヒーガード図式**を定義することができ, 今後ヒーガード図式というときはこの一般化ヒーガード図式のことを指すこととする.

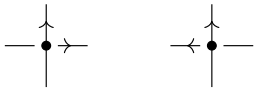
定理 4. *([7, Theorem6.2])* 任意の向き付け可能な閉 3 次元多様体はヒーガード分解を持つ.

ヒーガード図式によってヒーガード曲面へ 2 次元円板を貼り合わせて得られる 2 次元多面体は, 得られる 3 次元多様体の spine となっている. この spine が special である, すなわち $F \setminus (\bigcup_{i=1,2,\cdots,g} \beta_i \cup \alpha_i)$ が 2 次元円板となっている場合は, upper circle と lower circle の交点を自然に頂点とみなし, 辺の重みを全て 0 とすることでヒーガード図式を o-graph として表現できる. さらに, uppper circle と lower circle の F との接続箇所は任意に滑らかにすることができ, 従って branching を与えることができるため normal o-graph による表現が可能である. upper circle と lower circle に向きを与えたものを向きづけられたヒーガード図式といい, normal o-graph の辺の向きと自然に同一視する.

以下, Kuperberg 不変量の定義を行う. $D = (F, \{u_1, u_2, \cdots, u_{n_u}\}, \{l_1, l_2, \cdots, l_{n_l}\})$ を一般化ヒーガード図式, $(H, M, i, \Delta, \varepsilon, S)$ を involutory なホップ代数, すなわち $S^2 = id_H$ を満たすものとする. $u_1, u_2, \cdots, u_{n_u}, l_1, l_2, \cdots, l_{n_l}$ それぞれに任意に向きを与え, 以下の手順でテンソルネットワークを与える.

各 upper circle には Δ を, 各 lower circle には M を与え, ある upper circle に与えられた Δ テンソルにはその upper circle が lower circle と交わっている交点の数だけ Δ から出ていく矢印を与え, 同様に M テンソルには upper circle との交点の数だけ M テンソルに入る矢印を与える. Δ の各矢印は, その upper circle の向きに沿った交点の順に, 交わっている lower circle に与えられた M テンソルの矢印と時計回りの順に接続する. M の各矢印も同様に, lower circle の向きに沿った交点

の順に, Δ テンソルと反時計回りの順に接続する. 矢印の接続の際, upper circle と lower circle の負の交点では S を間に挟んで接続させる.

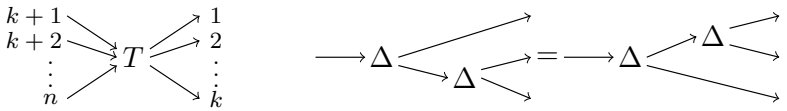


正の交点　　負の交点

以上の手順で得られるテンソルネットワークを $Z(H)$, F の種数を $g(F)$ としたとき, 以下で与えられる $\#(D,H)$ を **Kuperberg quantity** という. 特に, $(\dim H)^{g(F)-n_u-n_l}$ の部分を Kuperberg quantity の**正規化項**という.

$$\#(D,H) = Z(H)(\dim H)^{g(F)-n_u-n_l}$$

ここで**テンソルネットワーク**とは, テンソル積の元を扱う図式のことであり, テンソル空間 $H^{\otimes k}\otimes H^{*\otimes n-k}$ の元を $T^{1,\dots,k}_{k+1,\dots,n}$ と表し以下の図式を与えるものである. 例えば, ホップ代数の余積 $\Delta\colon H\to H\otimes H\in H^{\otimes 2}\otimes H^*$ の余結合律は以下の等式で表される.



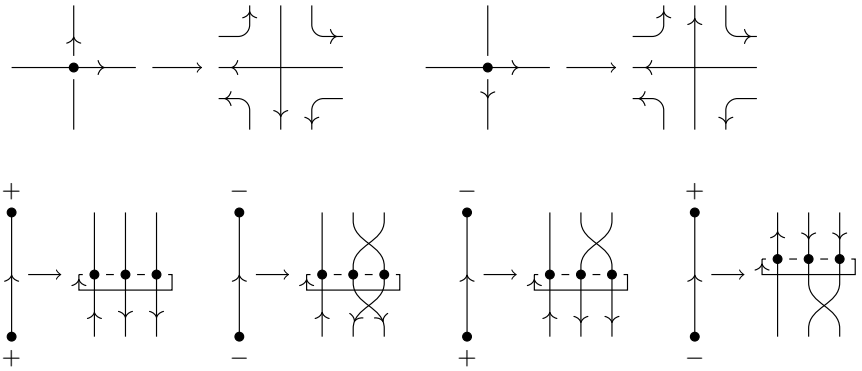
定義 5. $\mathcal{M}$ を 3 次元多様体の同相類集合とする. $M\in\mathcal{M}$ に対し $Int(M)\setminus B^3$ の閉包を得る操作を *puncture move* という. $M_1, M_2\in\mathcal{M}$ の同値関係 $M_1\sim_{bor} M_2$ を, M_1 と M_2 が有限回の *puncture move* とその逆移動で移り合うこととしたとき, この同値関係から得られる 3 次元多様体の同値類 $\mathcal{M}/\sim_{bor}$ を ***bordism*** という.

定理 5. *([4, Theorem5.1])Kuperberg quantity* $\#(D,H)$ は *bordism* の不変量である. 特に, 閉 3 次元多様体の不変量である.

4　closed normal o-graph と Kuperberg 不変量

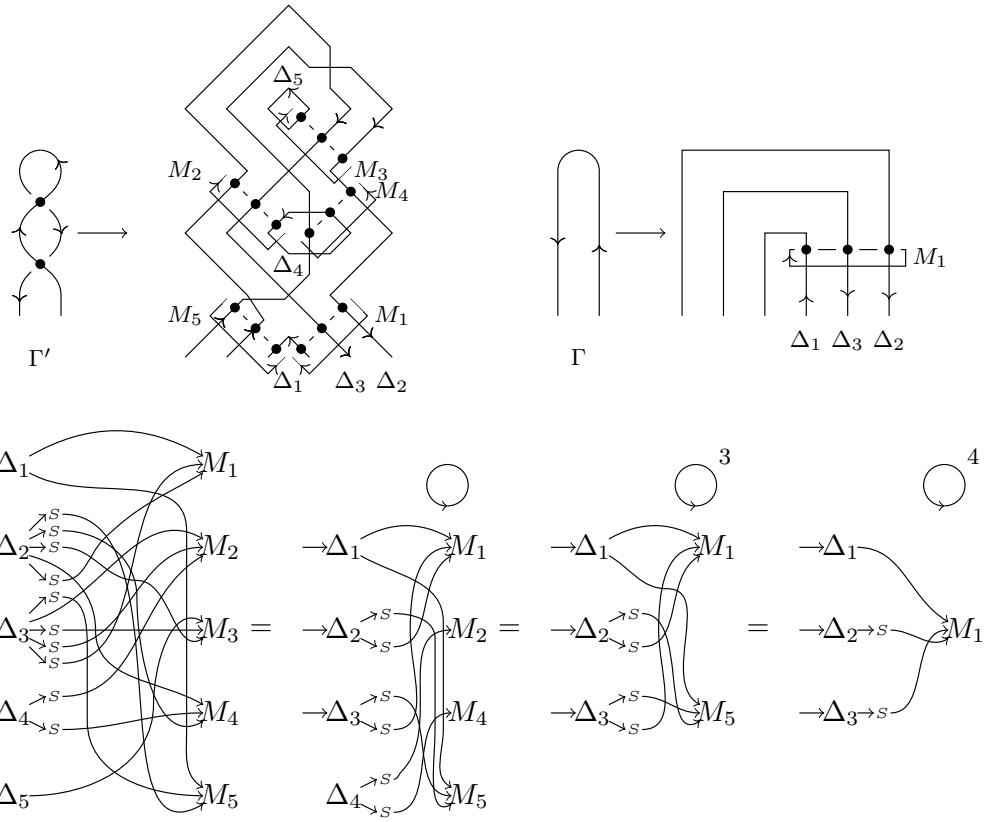
spine P は 2 次元多面体であったが, $S(P)$ の 3 次元近傍をハンドル体とみなすと, $P\setminus S(P)$ の $S(P)$ への貼り合わせを upper circle と対応させたヒーガード分解を得る. すなわち, o-graph Γ が与えられると Γ の各辺と頂点の近傍において局所的に $\mathcal{M}(\Gamma)$ のヒーガード図式を得ることができる [2]. それに加え, 前章で紹介したヒーガード図式の normal o-graph 表現と Kuperberg 不変量の定義を用いると, normal o-graph から Kuperberg 不変量の再定義を得る.

branched spine を表す normal o-graph を Γ とする. Γ の各辺と頂点に対し, 以下の対応規則によって向き付けられたヒーガード図式を表す normal o-graph $\mathcal{H}_\Gamma$ を得る. $\mathcal{H}_\Gamma$ から前章の Kuperberg 不変量と同様の定義を用いて得られる $\#(\Gamma,H)$ を Kuperberg quantity と呼ぶ. ただし, 正規化項の指数のうち $g(F)$ は Γ の頂点数 v_Γ を用いて $v_\Gamma+1$ とする.



定理 6. M を向きづけられた閉 3 次元多様体とし, M を表す *closed normal o-graph* を Γ とする. この時 *Kuperberg quantity* $\#(\Gamma, H)$ は M の位相不変量となっている.

Proof. 0-2 move, MP-move, CP-move のそれぞれについて, Kuperberg quantity が不変であることを確認すればよい. ここでは 0-2 move についての略式のみ記す. 証明に用いる等式変形は [5] における bordism の同値類を表す変形に対応している.

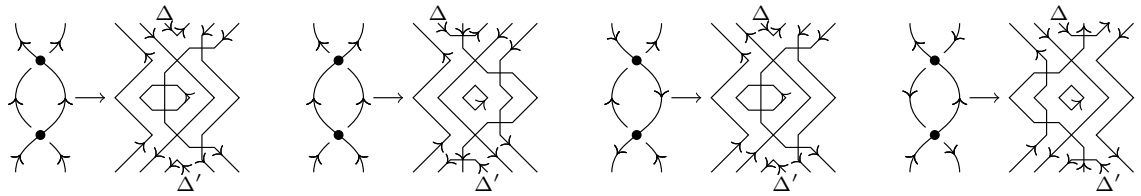


$$\begin{aligned}\#(\Gamma', H) &= Z_{\Gamma'}(H)(\dim H)^{v'_\Gamma+1-n_{u\Gamma'}-n_{l\Gamma'}} \\ &= \left(Z_\Gamma(H)(\dim H)^4\right)(\dim H)^{(v_\Gamma+2)+1-(n_{u\Gamma}+2)-(n_{l\Gamma}+4)} = \#(\Gamma, H)\end{aligned}$$

□

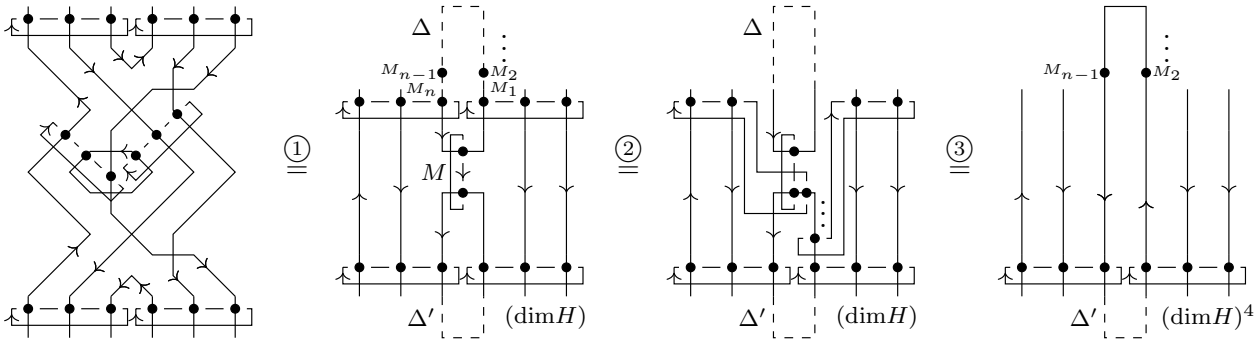
0-2 move は normal o-graph における RII move の特別な形であるが, 本研究では upper circle の大域的な接続に関する条件で場合分けをすることで一般の RII move における Kuperberg 不変量の不変性を示した.

定義 6. *normal o-graph の RII move について, 下図で示す upper circle* Δ, Δ' *が大域的に接続されていない際の RII move を case* 1*, そうでない場合を case* 2 *と呼ぶ.*



定理 7. *closed normal o-graph* Γ *について, Kuperberg invariant* $\#(\Gamma, H)$ *は case* 1 *の RII move で不変.*

証明の方針を紹介する. まず, RII move の局所範囲内でテンソルネットワークの等式変形をすることで, 局所範囲内で閉じている upper circle と 1 つの lower circle を除き次元のスカラー倍を得て, 残りの lower circle M を Δ, Δ' のみと交わらせることができる (①). case 1 の定義より Δ, Δ' はそれぞれ別の upper circle であり, Δ と lower circle との交点を $M_1, M_2, \cdots, M_n$ とする. lower circle の他の交点に本質的に影響を与えることなく, 各交点を順に Δ から外して Δ' へ移す等式変形を行うことができ (②), Δ が M とのみ交わるまで他の交点を外すと, Δ, M を除き次元のスカラー倍を得る等式変形が行える. 最後に, 余分な lower circle を外して次元のスカラー倍を得る (③). 以上の変形で得られるテンソルネットワークは RII move 前のものと一致しており, $\#(\Gamma, H)$ は不変であることが示せる.



$$\begin{aligned}\#(\Gamma', H) &= Z_{\Gamma'}(H)(\dim H)^{v_{\Gamma'}+1-n_{u\Gamma'}-n_{l\Gamma'}} \\ &= \left(Z_\Gamma(H)(\dim H)^4\right)(\dim H)^{(v_\Gamma+2)+1-(n_{u\Gamma}+2)-(n_{l\Gamma}+4)} = \#(\Gamma, H)\end{aligned}$$

この主結果を用いると, MP move を RII move で割ることで定理 6 の証明で示すべき move の場合の数を減らすことができる. また, Kuperberg 不変量は既約な閉 3 次元多様体については完全不変量である [4] ことから以下の主張を得る.

系 1. Γ, Γ' を, Γ, Γ' から得られる閉 3 次元多様体 $M(\Gamma), M(\Gamma')$ が既約となる *closed normal o-graph* とする. Γ, Γ' が *case* 1 の *RII move* で互いに移り合う時, $M(\Gamma), M(\Gamma')$ は同相である.

参考文献

[1] Riccardo Benedetti and Carlo Petronio, *A finite graphic calculus for 3-manifolds*, Manuscripta Math. **88** (1995), 291–310.

[2] Riccardo Benedetti and Carlo Petronio, *Branched standard spines of 3-manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, 1653. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[3] Yuya Koda, *Branched spines and Heegaard genus of 3-manifolds*, Manuscripta Math. **123** (2007), 285–299.

[4] Greg Kuperberg, *Involutory Hopf algebras and 3-manifold invariants*, Internat. J. Math. **2** (1991), 41–66.

[5] Sergei Matveev, *Algorithmic topology and classification of 3-Manifolds*, Algorithms and Computation in Mathematics, 9. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[6] Mihalache, Serban Matei, Sakie Suzuki and Yuji Terashima, *The Heisenberg double of involutory Hopf algebras and invariants of closed 3-manifolds*, arXiv:2104.03037 (2021).

[7] 森元勘治, 3 次元多様体入門, 2013.

Quantitative estimates for the Bakry-Ledoux isoperimetric inequality

Osaka University, Department of Mathematics
MAI Cong Hung (joint work Shin-ichi Ohta)

1 Introduction

Our work studied a quantitative isoperimetric inequality under Ricci curvature bound condition on (non-compact) weighted Riemannian manifolds.

Curvatures is an important concept in geometry as they are the geometric measures of the non flatness of geometric shapes. From an analytic point of view, differential equations that describe the physical phenomena in curved spaces are affected by the distortion of geometric quantities that arose from the non flatness of the underlying spaces. Therefore, curvatures are important in the study of functional analysis, differential equations, and the analysis of curved spaces. Among various notions of curvatures, Ricci curvature is of interest. Ricci curvature can be characterized by the measurement of how a shape is deformed as one moves along geodesics. The lower bound of Ricci curvature allows one to extract global geometric and topological information by comparison with a model space of constant curvature. For instance, positive Ricci curvature bound implies the bound of diameter and degree of volume distortion of a ball with respect to its radius.

In recent years, the theory developed by Lott, Sturm, and Villani has shed new light on studies of lower bounds on Ricci curvature by connecting differential geometry with Wasserstein geometry and optimal transport. Ricci curvature can be used to measure the distortion of optimal transports between subsets in curved spaces, hence the study of Ricci curvature is connected to the theory of optimal transport. Weighted Ricci curvature is modified to include the appearance of density and based on the generalization of Brunn–Minkowsky inequality, which extracts the relation between optimal transport and geometry of lower Ricci curvature bound. In Riemannian setting, we can study this relation in the sense of weighted manifolds.

In weighted manifolds and metric measure spaces, the weighted Ricci curvature Ric_N involving a parameter N called the *effective dimension*. On a weighted Riemannian manifold, the weighted Ricci curvature bound $\mathrm{Ric}_N \geq K$ is equivalent to the curvature dimension condition $\mathrm{CD}(K, N)$ in the theory of Lott, Sturm, and Villani. The parameters K and N are interpreted as "a lower bound of the Ricci curvature" and "an upper bound of the dimension", respectively. It is interesting that the condition $\mathrm{Ric}_N \geq K > 0$ would be satisfied by non-compact manifolds when $N = \infty$. In this work, I would study the stability problem of the isoperimetric inequality in Riemannian manifolds of $\mathrm{Ric}_\infty \geq K > 0$ or the Bakry–Ledoux isoperimetric inequality.

The rigidity (to characterize a space attaining equality or model space) and stability (to show that the space is close to the model space when equality nearly holds) problems are important subjects in geometric analysis as they are connected with the theory of convergence of spaces. Theses tasks in non-compact weighted manifolds are challenging because one might not be able use traditional approach like maximal diameter argument. But a breakthrough named *needle decomposition* was introduced by Klartag in ([Kl]) provided an efficient approach to the rigidity and stability problems in non-compact weighted manifolds. Needle decomposition

is a localization technique to reduce high-dimensional inequalities into their one-dimensional counterpart which enable one to use real analysis to verify.

In [Ma2], the author gave an alternative proof of the equality case of the Bakry–Ledoux isoperimetric inequality via needle decomposition induced from the L1-optimal transport of the isoperimetric minimizer. By reviewing this process, one might obtained the respected rigidity result. It stated that if a weighted manifold satisfies the equality in isoperimetric inequality, it must be isometric to the product of Gausian space and a hypersurface. This observation comes from the fact that distance functions (or guiding function of the needle decomposition) on needles playing the role of an eigenfunction in the sharp spectral gap inequality in [CZ].

Based on this observation, we studied a quantitative estimate of Bakry–Ledoux inequality on weighted Riemannian manifolds with $\mathrm{Ric}_\infty \geq K > 0$. We followed the proof in [Ma2] to obtain an upper bound of the volume of the symmetric difference between a Borel set and a sub-level set of the guiding function arising in the needle decomposition, in terms of the deficit in Bakry–Ledoux's Gaussian isoperimetric inequality. This work is the first quantitative isoperimetric inequality on non-compact spaces besides Euclidean and Gaussian spaces so far. Our main result is the following theorem.

Main Theorem (Theorem 7.5) *Let $(M, g, \mathfrak{m})$ be a complete weighted Riemannian manifold such that $\mathrm{Ric}_\infty \geq 1$ and $\mathfrak{m}(M) = 1$. Fix $\theta \in (0,1) \setminus \{1/2\}$ and $\varepsilon \in (0,1)$, take a Borel set $A \subset M$ with $\mathfrak{m}(A) = \theta$, and assume that $\mathsf{P}(A) \leq \mathcal{I}_{(\mathbb{R},\gamma)}(\theta) + \delta$ holds for sufficiently small $\delta > 0$ (relative to θ and ε). Then, for the guiding function u associated with A such that $\int_M u \, d\mathfrak{m} = 0$, we have*

$$\min\Big\{\mathfrak{m}\big(A \triangle \{u \leq a_\theta\}\big), \mathfrak{m}\big(A \triangle \{u \geq a_{1-\theta}\}\big)\Big\} \leq C(\theta,\varepsilon)\delta^{(1-\varepsilon)/(9-3\varepsilon)}.$$

We would explain the notions and geometric meaning of this result on the following sections.

2 Preliminaries

A *weighted Riemannian manifold* means a triple $(M, g, \mathfrak{m})$, where (M, g) be a connected, complete $\mathcal{C}^\infty$-Riemannian manifold of dimension $n \geq 2$ without boundary and $\mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-\Psi}\,\mathrm{vol}_g$ is a measure modifying the volume measure vol_g of (M, g) with a $\mathcal{C}^\infty$ *weight function* Ψ. In a weighted Riemannian manifold, the Ricci curvature is modified as follow:

Definition 2.1 (Weighted Ricci curvature) Given $v \in T_xM$ and $N \in \mathbb{R} \setminus \{n\}$, the *weighted Ricci curvature* $\mathrm{Ric}_N(v)$ is defined by

$$\mathrm{Ric}_N(v) := \mathrm{Ric}_g(v) + \mathrm{Hess}\,\Psi(v,v) - \frac{\langle \nabla\Psi(x), v\rangle^2}{N-n}.$$

As the limits of $N \to \infty$ and $N \downarrow n$, we also define

$$\mathrm{Ric}_\infty(v) := \mathrm{Ric}_g(v) + \mathrm{Hess}\,\Psi(v,v),$$
$$\mathrm{Ric}_n(v) := \begin{cases} \mathrm{Ric}_g(v) + \mathrm{Hess}\,\Psi(v,v) & \text{if } \langle \nabla\Psi(x), v\rangle = 0, \\ -\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

where $\mathrm{Ric}_g(v)$ is the original Ricci curvature. We note that $\mathrm{Ric}_N(cv) = c^2\,\mathrm{Ric}_N(v)$ for all $c \in \mathbb{R}$. We also write $\mathrm{Ric}_N \geq K$ for $K \in \mathbb{R}$ when $\mathrm{Ric}_N(v) \geq K|v|^2$ holds for all $v \in TM$.

Remark 2.2 (i) By definition Ric_N enjoys the monotonicity

$$\mathrm{Ric}_n(v) \leq \mathrm{Ric}_N(v) \leq \mathrm{Ric}_\infty(v) \leq \mathrm{Ric}_{N'}(v)$$

for $N \in [n, \infty)$ and $N' \in (-\infty, n)$. Therefore, $\mathrm{Ric}_\infty \geq K$ is weaker than $\mathrm{Ric}_N \geq K$ with $N \in [n, \infty)$.

(ii) The range $N \in [n, \infty]$ has been intensively studied by Bakry and his collaborators via Γ-*calculus* (see [BaGL]), including the Bakry–Ledoux isoperimetric inequality under $\mathrm{Ric}_\infty \geq K > 0$ ([BL]).

(iii) The curvature bound $\mathrm{Ric}_N \geq K$ is equivalent to the *curvature-dimension condition* $\mathrm{CD}(K, N)$ in the sense of Lott–Sturm–Villani, see [LV2, St1, St2, Vi].

We also define the Laplacian associated with $\mathfrak{m}$.

Definition 2.3 (Weighted Laplacian) The *weighted Laplacian* acting on $u \in \mathcal{C}^\infty(M)$ is defined by

$$\Delta_{\mathfrak{m}} u := \Delta u - \langle \nabla u, \nabla \Psi \rangle,$$

where Δ is the Laplacian with respect to g.

The Green formula also holds for $\mathfrak{m}$:

$$\int_M \phi \Delta_{\mathfrak{m}} u \, d\mathfrak{m} = -\int_M \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle \, d\mathfrak{m},$$

for $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ with compact support.

The condition $\mathrm{Ric}_\infty \geq K > 0$ implies $\mathfrak{m}$ has a Gaussian decay and $\mathfrak{m}(M) < \infty$ holds ([St1, Theorem 4.26]). Without loss of generality, we can normalize $\mathfrak{m}$ as $\mathfrak{m}(M) = 1$ since adding a constant to Ψ does not change Ric_∞. From $\mathrm{Ric}_\infty \geq K > 0$ we also have the lower bound of the first nonzero eigenvalue of $-\Delta_{\mathfrak{m}}$ as $\lambda_1 \geq K$, equivalent to the sharp *Poincaré inequality*.

$$\mathrm{Var}_{(M,\mathfrak{m})}(u) := \int_M u^2 \, d\mathfrak{m} - \left(\int_M u \, d\mathfrak{m} \right)^2 \leq \frac{1}{K} \int_M |\nabla u|^2 \, d\mathfrak{m}. \tag{2.1}$$

The rigidity problem was investigated in [CZ] as a counterpart to the celebrated Obata rigidity theorem ([Ob]).

Theorem 2.4 (Rigidity of spectral gap) *Let $(M, g, \mathfrak{m})$ be a complete weighted Riemannian manifold satisfying $\mathfrak{m}(M) = 1$ and $\mathrm{Ric}_\infty \geq K > 0$. If equality $\lambda_1 = K$ is achieved with an eigenfunction u, then:*

(i) *$(M, g, \mathfrak{m})$ is isometric to the product space $\mathbb{R} \times \Sigma$ as weighted Riemannian manifolds, where $\Sigma = u^{-1}(0)$ and $(\Sigma, g_\Sigma, \mathfrak{m}_\Sigma)$ is an $(n-1)$-dimensional weighted Riemannian manifold of $\mathrm{Ric}_\infty \geq K$, and $\mathbb{R}$ is equipped with the Gaussian measure $\sqrt{K/(2\pi)} \mathrm{e}^{-Kx^2/2} \, dx$.*

(ii) *The function u is constant on $\{t\} \times \Sigma$ for each $t \in \mathbb{R}$, and we can moreover choose as $u(t, x) = t$.*

3 Isoperimetric inequalities

To state the isoperimetric inequality, we define the *perimeter* of a Borel set $A \subset M$ with $\mathfrak{m}(A) < \infty$ as

$$\mathsf{P}(A) := \inf_{\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}} \liminf_{i \to \infty} \int_M |\nabla \phi_i| \, d\mathfrak{m}, \tag{3.1}$$

where $\{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ runs over all sequences of Lipschitz functions converging to the indicator function χ_A in $L^1(\mathfrak{m})$. When $\mathsf{P}(A) < \infty$, we have $\mathsf{P}(X \setminus A) = \mathsf{P}(A)$.

Normalizing $\mathfrak{m}(M) = 1$, we define the *isoperimetric profile* as

$$\mathcal{I}_{(M,\mathfrak{m})}(\theta) := \inf\{\mathsf{P}(A) \,|\, A \subset M,\, \mathfrak{m}(A) = \theta\}$$

for $\theta \in (0,1)$, where A runs over all Borel sets with $\mathfrak{m}(A) = \theta$. An isoperimetric inequality under the condition $\mathrm{Ric}_\infty \geq K > 0$ was first shown by Bakry–Ledoux [BL] in the same form in Gaussian spaces. Under a combination of $\mathrm{Ric}_N \geq K$ and the diameter bound $\mathrm{diam}(M) \leq D$, Milman [Mi1, Mi2] studied the following isoperimetric inequality:

Theorem 3.1 (Isoperimetric inequalities) *Let $(M, g, \mathfrak{m})$ be a complete weighted Riemannian manifold satisfying $\mathfrak{m}(M) = 1$, $\mathrm{diam}(M) \leq D$ with $D \in (0, \infty]$, and $\mathrm{Ric}_N \geq K$ for $N \in (-\infty, 0) \cup [n, \infty]$ and $K \in \mathbb{R}$. Then we have $\mathcal{I}_{(M,\mathfrak{m})}(\theta) \geq \mathcal{I}_{(K,N,D)}(\theta)$ for all $\theta \in (0,1)$, where $\mathcal{I}_{(K,N,D)}$ depends only on K, N and D.*

This inequality is sharp in all the parameters K, N and D, and $\mathcal{I}_{(K,N,D)}$ is independent from the dimension n of M. For the precise formulas of the function $\mathcal{I}_{(K,N,D)}$, we refer to [Mi1, Mi2]. Here we give the formula in the case $K > 0$ and $N = \infty$ as in Bakry–Ledoux inequality. Without the diameter bound ($D = \infty$), the model space is the Gaussian space and

$$\mathcal{I}_{(K,\infty,\infty)}(\theta) = \sqrt{\frac{K}{2\pi}} \mathrm{e}^{-K a_\theta^2/2}, \qquad \text{where} \quad \sqrt{\frac{K}{2\pi}} \int_{-\infty}^{a_\theta} \mathrm{e}^{-Kt^2/2}\, dt = \theta.$$

For $D \in (0, \infty)$, we have

$$\mathcal{I}_{(K,\infty,D)}(\theta) = \inf_{\xi \in [-D, 0]} f_{\xi,D}(\theta)$$

with

$$f_{\xi,D}(\theta) := \frac{\mathrm{e}^{-K b_{\theta,\xi,D}^2/2}}{\int_\xi^{\xi+D} \mathrm{e}^{-Kt^2/2}\, dt}, \qquad \text{where} \quad \frac{\int_\xi^{b_{\theta,\xi,D}} \mathrm{e}^{-Kt^2/2}\, dt}{\int_\xi^{\xi+D} \mathrm{e}^{-Kt^2/2}\, dt} = \theta.$$

The following lemma gives a look on how the diameter influences the isoperimetric profile.

Lemma 3.2 (Difference between $\mathcal{I}_{(K,\infty,D)}$ and $\mathcal{I}_{(K,\infty,\infty)}$) *Let $K, D \in (0, \infty)$. For $\theta \in (0,1)$, we have*

$$\mathcal{I}_{(K,\infty,D)}(\theta) - \mathcal{I}_{(K,\infty,\infty)}(\theta) > \frac{\sqrt{K}}{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-KD^2}}{\sqrt{K} D + 1}.$$

Moreover, the profile $\mathcal{I}_{(K,\infty,\infty)}$ is strictly concave by the following lemma.

Lemma 3.3 (Concavity of $\mathcal{I}_{(K,\infty,\infty)}$) *For $\theta \in (0,1)$, we have*

$$\mathcal{I}''_{(K,\infty,\infty)}(\theta) = -\frac{K}{\mathcal{I}_{(K,\infty,\infty)}(\theta)}.$$

The rigidity result of Bakry–Ledoux inequality was provided Morgan [Mo, Theorem 18.7] and an alternative proof based on the needle decomposition was introduced in [Ma2, Section 3].

Theorem 3.4 (Rigidity of isoperimetric inequality) *Let $(M, g, \mathfrak{m})$ be a complete weighted Riemannian manifold satisfying $\mathfrak{m}(M) = 1$ and $\mathrm{Ric}_\infty \geq K$ for some $K > 0$. If $\mathfrak{m}^+(A) = \mathcal{I}_{(K,\infty,\infty)}(\theta)$ holds for some $A \subset M$ with $\theta = \mathfrak{m}(A) \in (0,1)$, then we have the following.*

(i) *$(M, g, \mathfrak{m})$ is isometric to the product space $\mathbb{R} \times \Sigma$ as weighted Riemannian manifolds, where $(\Sigma, g_\Sigma, \mathfrak{m}_\Sigma)$ is an $(n-1)$-dimensional weighted Riemannian manifold of $\mathrm{Ric}_\infty \geq K$, and $\mathbb{R}$ is equipped with the Gaussian measure $\sqrt{K/(2\pi)}\mathrm{e}^{-Kx^2/2}\, dx$.*

(ii) *The set A is a half-space in this product structure, in the sense that A coincides with $(-\infty, a_\theta] \times \Sigma$ or $[a_{1-\theta}, \infty) \times \Sigma$.*

Our motivation is to study a quantitative version of this theorem.

4 Needle decomposition

Our main approach on this study is the localization method called *needle decomposition* (also called the *localization*), introduced by Klartag [Kl]. Via the needle decomposition one can reduce an inequality on a high-dimensional space to those on geodesics.

At first, we define transport rays associated with a 1-Lipschitz function.

Definition 4.1 (Transport rays) Let u be a 1-Lipschitz function on M. We say that $X \subset M$ is a *transport ray* associated with u if $|u(x) - u(y)| = d(x, y)$ holds for all $x, y \in X$ and if, for all $z \notin X$, there exists $x \in X$ such that $|u(x) - u(z)| < d(x, z)$.

Any transport ray is a closed set and necessarily the image of a minimal geodesic. Hence each transport ray is equipped with the natural distance in real analysis. The next theorem is the needle decomposition ([Kl, Theorems 1.2, 1.5]) with distance-like *guiding function* u acting as a 'guide' of the decomposition.

Theorem 4.2 (Needle decomposition) *Let $(M, g, \mathfrak{m})$ be a complete weighted Riemannian manifold satisfying $\mathrm{Ric}_N \geq K$, and take a function $f \in L^1(\mathfrak{m})$ such that $\int_M f \, d\mathfrak{m} = 0$ and $\int_M |f(x)| d(x_0, x) \, \mathfrak{m}(dx) < \infty$ for some $x_0 \in M$. Then there exists a 1-Lipschitz function u on M, a partition $\{X_q\}_{q \in Q}$ of M, a measure ν on Q and a family of probability measures $\{\mathfrak{m}_q\}_{q \in Q}$ on M satisfying the following.*

(i) *For any measurable set $A \subset M$, we have $\mathfrak{m}(A) = \int_Q \mathfrak{m}_q(A) \, \nu(dq)$. Moreover, for ν-almost every $q \in Q$, we have $\mathrm{supp}(\mathfrak{m}_q) = X_q$.*

(ii) *For ν-almost every $q \in Q$, X_q is a transport ray associated with u. Moreover, if X_q is not a singleton, then the weighted Ricci curvature of $(X_q, |\cdot|, \mathfrak{m}_q)$ satisfies $\mathrm{Ric}_N \geq K$.*

(iii) *For ν-almost every $q \in Q$, we have $\int_{X_q} f \, d\mathfrak{m}_q = 0$.*

Our approach on quantitative isoperimetric inequalities based on Klartag's proof in [Kl] of the isoperimetric inequality (Theorem 3.1) via the needle decomposition. Here we give an outline of this proof as we would give the quantitative estimate based on it.

Let $(M, g, \mathfrak{m})$ satisfy $\mathrm{Ric}_N \geq K$, $\mathrm{diam}(M) \leq D$ and $\mathfrak{m}(M) = 1$. Given the volume parameter $\theta \in (0, 1)$, we fix an arbitrary Borel set $A \subset M$ such that $\mathfrak{m}(A) = \theta$. We consider the needle decomposition associated with the function $f(x) := \chi_A(x) - \theta$. Then we find $\int_M f \, d\mathfrak{m} = 0$, and obtain (Q, ν) and $\{(X_q, \mathfrak{m}_q)\}_{q \in Q}$ associated with f as in Theorem 4.2. (iii) in Theorem 4.2 implies $\mathfrak{m}_q(A) = \theta$ for ν-almost every $q \in Q$. Moreover, $(X_q, |\cdot|, \mathfrak{m}_q)$ preserving the curvature condition $\mathrm{CD}(K, N)$ by (ii) and $\mathrm{diam}(X_q) \leq D$ trivially. Therefore, the 1-dimensional isoperimetric inequality yields $\mathsf{P}(A \cap X_q) \geq \mathcal{I}_{(K,N,D)}(\theta)$ for ν-almost every $q \in Q$, where $\mathsf{P}(A \cap X_q)$ denotes the perimeter of $A \cap X_q$ in $(X_q, |\cdot|, \mathfrak{m}_q)$. By Lemma 6.2 in the later section, we obtain

$$\mathsf{P}(A) \geq \int_Q \mathsf{P}(A \cap X_q) \, \nu(dq) \geq \mathcal{I}_{(K,N,D)}(\theta).$$

Taking the infimum in A gives $\mathcal{I}_{(M,\mathfrak{m})}(\theta) \geq \mathcal{I}_{(K,N,D)}(\theta)$.

5 One-dimensional analysis

From this section, we normalize as $K = 1$ without loss of generality. In this section, we consider 1-dimensional spaces enjoying $\mathrm{CD}(1, \infty)$ represent needles in the needle decomposition. Let $I \subset \mathbb{R}$ be a closed interval equipped with a measure $\mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-\psi} \, dx$, where dx denotes the Lebesgue

measure and ψ is locally Lipschitz. If $(I, |\cdot|, \mathfrak{m})$ satisfying $\mathrm{CD}(1,\infty)$ then ψ is 1-convex in the following sense:

$$\psi\big((1-t)x+ty\big) \le (1-t)\psi(x)+t\psi(y)-\frac{(1-t)t}{2}|x-y|^2$$

for any $x, y \in I$ and $t \in (0,1)$.

The following lemma in ([Bo, Proposition 2.1]) enables one to simplify the calculation on isoperimetric minimizer to 1-dimensional halfspaces.

Lemma 5.1 *Let $\mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-\psi}\,dx$ be a probability measure on a closed interval $I \subset \mathbb{R}$ such that ψ is convex. Then the minimum of $\mathsf{P}(A)$ on the class of all Borel sets $A \subset I$ with $\mathfrak{m}(A) = \theta$ coincides with the minimum on the subclass consisting of the (semi-infinite) intervals $(-\infty, a]\cap I$ and $[b,\infty)\cap I$.*

The next proposition is the core estimate in 1-dimensional analysis as we shall compare $\mathfrak{m}$ on I with the Gaussian measure $\boldsymbol{\gamma}$ on $\mathbb{R}$ with mean 0 and variance 1, denoted by

$$\boldsymbol{\gamma} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{g}}(x)}\,dx, \qquad \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{g}}(x) := \log\big(\sqrt{2\pi}\big)+\frac{1}{2}x^2.$$

Proposition 5.2 (Difference of weight functions) *Let $I \subset \mathbb{R}$ be a closed interval equipped with a probability measure $\mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-\psi}\,dx$ such that ψ is 1-convex. Fix $\theta \in (0,1)$ and assume that*

$$\int_{I\cap(-\infty,a_\theta]} \mathrm{e}^{-\psi}\,dx = \theta \tag{5.1}$$

and that

$$\mathrm{e}^{-\psi(a_\theta)} \le \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{g}}(a_\theta)}+\delta \tag{5.2}$$

holds for sufficiently small $\delta > 0$ (relative to θ). Then we have

$$\psi(x)-\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{g}}(x) \ge \big(\psi'_+(a_\theta)-a_\theta\big)(x-a_\theta)-\omega(\theta)\delta \tag{5.3}$$

for every $x \in I$, and

$$\psi(x)-\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{g}}(x) \le \big(\psi'_+(a_\theta)-a_\theta\big)(x-a_\theta)+\omega(\theta)\sqrt{\delta} \tag{5.4}$$

for every $x \in [S,T]$ such that $\lim_{\delta\to 0} S = -\infty$ and $\lim_{\delta\to 0} T = \infty$, where ψ'_+ denotes the right derivative of ψ and $\omega(\theta)$ is a constant depending only on θ.

With the help of Proposition 5.2, we obtain the following result as a quantitative version of Lemma 5.1 in 1-dimensional spaces. It states that a set with small isoperimetric deficit would have small symmetric difference with a half space.

Proposition 5.3 (Small symmetric difference) *Let $I \subset \mathbb{R}$ be a closed interval equipped with a probability measure $\mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-\psi}\,dx$ such that ψ is 1-convex. Fix $\theta \in (0,1)$ and assume that, for a Borel set $A \subset I$ with $\mathfrak{m}(A) = \theta$,*

$$\mathsf{P}(A) \le \mathrm{e}^{-\boldsymbol{\psi}_{\mathrm{g}}(a_\theta)}+\delta$$

holds for a sufficiently small $\delta > 0$. Then we have

$$\min\Big\{\mathfrak{m}\big(A\triangle(-\infty, r^-_{\mathfrak{m}}(\theta)]\big), \mathfrak{m}\big(A\triangle[r^+_{\mathfrak{m}}(\theta),\infty)\big)\Big\} \le \frac{\mathsf{P}(A)-\mathcal{I}_{(I,\mathfrak{m})}(\theta)}{C_1(\theta,\delta)}, \tag{5.5}$$

where $r^-_{\mathfrak{m}}(\theta), r^+_{\mathfrak{m}}(\theta) \in I$ are defined by

$$\mathfrak{m}\big(I\cap(-\infty, r^-_{\mathfrak{m}}(\theta)]\big) = \mathfrak{m}\big(I\cap[r^+_{\mathfrak{m}}(\theta),\infty)\big) = \theta,$$

and $\lim_{\delta\to 0} C_1(\theta,\delta) = \infty$.

6 Reverse Poincare inequality

To study the well-behavior of the guiding function when the isoperimetric deficit is small, we consider the reverse direction of the Poincaré inequality as the guiding function of the needle decomposition plays the role of eigenfunction in the equality case of sharp Poincaré inequality. In 1-dimensional space with a small isoperimetric deficit, we obtain:

Proposition 6.1 (Reverse Poincaré inequality on needles) *Let $I \subset \mathbb{R}$ be a closed interval equipped with a probability measure $\mathfrak{m} = \mathrm{e}^{-\psi}\,dx$ such that ψ is 1-convex. Fix $\theta \in (0,1)$ and assume (5.1) and $\mathrm{e}^{-\psi(a_\theta)} \le \mathrm{e}^{-\psi_{\mathrm{g}}(a_\theta)} + \delta$. Then, given $\varepsilon \in (0,1)$, if $\delta > 0$ is sufficiently small (relative to θ and ε), we have*

$$\mathrm{Var}_{(I,\mathfrak{m})}(u) := \int_I u^2\,d\mathfrak{m} - \left(\int_I u\,d\mathfrak{m}\right)^2 \ge \frac{1}{\Lambda(\theta,\varepsilon,\delta)} \int_I |u'|^2\,d\mathfrak{m} \tag{6.1}$$

for every affine function $u(x) = ax + b$ with $a, b \in \mathbb{R}$, where $\Lambda(\theta,\varepsilon,\delta) \le (1 - C_2(\theta,\varepsilon)\delta^{(1-\varepsilon)/2})^{-1}$ and, in particular, $\lim_{\delta\to 0} \Lambda(\theta,\varepsilon,\delta) = 1$.

Put $f := \chi_A - \theta$ and denote by (Q,ν) and $\{(X_q,\mathfrak{m}_q)\}_{q\in Q}$ the elements of the needle decomposition as in Theorem 4.2 that we used to prove the isoperimetric inequality. $(X_q,\mathfrak{m}_q)$ enjoys $\mathrm{Ric}_\infty \ge 1$ (or $\mathrm{CD}(1,\infty)$) for ν-almost every $q \in Q$ and we define $A_q := A \cap X_q$ for $q \in Q$.

To extend the reverse Poincaré inequality to the high-dimensional manifold, we would make use of the following lemma which gives the nice decomposition of the isoperimetric deficit.

Lemma 6.2 (Decomposition of deficit) *We have*

$$\mathsf{P}(A) - \mathcal{I}_{(\mathbb{R},\boldsymbol{\gamma})}(\theta) \ge \int_Q \big(\mathsf{P}(A_q) - \mathcal{I}_{(\mathbb{R},\boldsymbol{\gamma})}(\theta)\big)\,\nu(dq),$$

where $\mathsf{P}(A_q)$ denotes the perimeter of A_q in $(X_q,\mathfrak{m}_q)$.

Let $u : M \longrightarrow \mathbb{R}$ be the guiding function associated with $f = \chi_A - \theta$ above. A reverse inequality is obtained by integrating (6.1) on needles.

Theorem 6.3 (Reverse Poincaré inequality) *Let $(M,g,\mathfrak{m})$ be a complete weighted Riemannian manifold such that $\mathrm{Ric}_\infty \ge 1$ and $\mathfrak{m}(M) = 1$. Fix $\theta,\varepsilon \in (0,1)$ and take a Borel set $A \subset M$ with $\mathfrak{m}(A) = \theta$ and $\mathsf{P}(A) \le \mathcal{I}_{(\mathbb{R},\boldsymbol{\gamma})}(\theta) + \delta$ for sufficiently small $\delta > 0$ (relative to θ and ε). Then the guiding function u associated with $f = \chi_A - \theta$ satisfies*

$$\mathrm{Var}_{(M,\mathfrak{m})}(u) \ge \frac{1}{\Lambda'(\theta,\varepsilon,\delta)} = \frac{1}{\Lambda'(\theta,\varepsilon,\delta)} \int_M |\nabla u|^2\,d\mathfrak{m},$$

where $\Lambda'(\theta,\varepsilon,\delta) \le (1 - C_2'(\theta,\varepsilon)\delta^{(1-\varepsilon)/(3-\varepsilon)})^{-1}$ and in particular $\lim_{\delta\to 0} \Lambda'(\theta,\varepsilon,\delta) = 1$.

7 Quantitative Bakry–Ledoux inequality

In this section we would give an outline of approach to our main result. Let $(M,g,\mathfrak{m})$ be a weighted Riemannian manifold with $\mathrm{Ric}_\infty \ge 1$ and $\mathfrak{m}(M) = 1$, fix $\theta \in (0,1)$ and take a Borel set $A \subset M$ with $\mathfrak{m}(A) = \theta$. We consider the needle decomposition associated with $f := \chi_A - \theta$ and obtain the guiding function u with $\int_M u\,d\mathfrak{m} = 0$, a partition $(X_q,\mathfrak{m}_q)_{q\in Q}$ and a probability measure ν on Q. Set $A_q := A \cap X_q$ as in the previous section.

We set $\delta(A) := \mathsf{P}(A) - \mathcal{I}_{(\mathbb{R},\gamma)}(\theta)$ and define the 'long' needles (as small deficit implies large diameter):

$$Q_\ell := \left\{ q \in Q \,\middle|\, \mathsf{P}(A_q) - \mathcal{I}_{(\mathbb{R},\gamma)}(\theta) < \sqrt{\delta(A)} \right\} \tag{7.1}$$

The decomposition of deficit in Lemma 6.2 implies the following.

Lemma 7.1 (Q_ℓ is large) *We have $\nu(Q_\ell) \geq 1 - \sqrt{\delta(A)}$.*

To study the behavior of long needles, we define two sets of different directions of the isoperimetric minimizers:

$$\begin{aligned} Q_\ell^- &:= \left\{ q \in Q_\ell \,\middle|\, \mathfrak{m}_q\big(A_q \triangle (-\infty, r^-_{\mathfrak{m}_q}(\theta)]\big) \leq \sqrt{\delta(A)} \right\}, \\ Q_\ell^+ &:= \left\{ q \in Q_\ell \,\middle|\, \mathfrak{m}_q\big(A_q \triangle [r^+_{\mathfrak{m}_q}(\theta), \infty)\big) \leq \sqrt{\delta(A)} \right\}, \end{aligned} \tag{7.2}$$

where X_q is parametrized by u and $r^\pm_{\mathfrak{m}_q}(\theta) \in X_q$ are defined by

$$\mathfrak{m}\big(X_q \cap (-\infty, r^-_{\mathfrak{m}_q}(\theta)]\big) = \mathfrak{m}\big(X_q \cap [r^+_{\mathfrak{m}_q}(\theta), \infty)\big) = \theta$$

as in Proposition 5.3.

The next lemma is a consequence of Proposition 5.3.

Lemma 7.2 ($Q_\ell^- \cup Q_\ell^+$ is large) *If $\delta(A)$ is sufficiently small, then we have*

$$\nu\big(Q_\ell \setminus (Q_\ell^- \cup Q_\ell^+)\big) \leq \sqrt{\delta(A)}.$$

Via the reverse Poincaré inequality, we obtain the following proposition which shows the guiding function u behaves well when the deficit is small.

Proposition 7.3 (u is nearly centered on most needles) *If $\delta(A)$ is sufficiently small, then there exists a measurable set $Q_c \subset Q$ such that $\nu(Q_c) \geq 1 - \delta(A)^{(1-\varepsilon)/(9-3\varepsilon)}$ and*

$$\max\left\{ |a_\theta - r^-_{\mathfrak{m}_q}(\theta)|, |a_{1-\theta} - r^+_{\mathfrak{m}_q}(\theta)| \right\} \leq C_3(\theta,\varepsilon)\delta(A)^{(1-\varepsilon)/(9-3\varepsilon)} \tag{7.3}$$

holds for every $q \in Q_c \cap Q_\ell$.

By the well-behavior of the guiding function, one might obtain that one of Q_ℓ^- and Q_ℓ^+ has a small volume or most of needles have the same direction of the isoperimetric minimizers. We need an additional assumption $\theta \neq 1/2$ as a technical condition.

Proposition 7.4 (One of Q_ℓ^- and Q_ℓ^+ is small) *Assume $\theta \neq 1/2$. Then we have*

$$\min\{\nu(Q_\ell^-), \nu(Q_\ell^+)\} \leq C_4(\theta)\delta(A)^{(1-\varepsilon)/(9-3\varepsilon)},$$

provided that $\delta(A)$ is sufficiently small.

Now we would give the proof of the main theorem by applying the previous results on this section.

Theorem 7.5 (Quantitative isoperimetry) *Let $(M, g, \mathfrak{m})$ be a complete weighted Riemannian manifold such that $\mathrm{Ric}_\infty \geq 1$ and $\mathfrak{m}(M) = 1$. Fix $\theta \in (0,1) \setminus \{1/2\}$ and $\varepsilon \in (0,1)$, take a Borel set $A \subset M$ with $\mathfrak{m}(A) = \theta$, and assume that $\mathsf{P}(A) \leq \mathcal{I}_{(\mathbb{R},\gamma)}(\theta) + \delta$ holds for sufficiently small $\delta > 0$ (relative to θ and ε). Then, for the guiding function u associated with A such that $\int_M u \, d\mathfrak{m} = 0$, we have*

$$\min\Big\{ \mathfrak{m}\big(A \triangle \{u \leq a_\theta\}\big), \mathfrak{m}\big(A \triangle \{u \geq a_{1-\theta}\}\big) \Big\} \leq C(\theta,\varepsilon)\delta^{(1-\varepsilon)/(9-3\varepsilon)}. \tag{7.4}$$

Proof. By Proposition 7.4, we first assume $\nu(Q_\ell^+) \le C_4(\theta)\delta^{(1-\varepsilon)/(9-3\varepsilon)}$ without loss of generality. From Lemmas 7.1 and 7.2,

$$\nu(Q \setminus Q_\ell^-) = \nu(Q \setminus Q_\ell) + \nu\big(Q_\ell \setminus (Q_\ell^- \cup Q_\ell^+)\big) + \nu(Q_\ell^+) \le 2\sqrt{\delta} + C_9(\theta)\delta^{(1-\varepsilon)/(9-3\varepsilon)}.$$

Therefore we obtain

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{m}\big(A \triangle \{u \le a_\theta\}\big) \\
&\le \int_{Q_\ell^-} \mathfrak{m}_q\big(A_q \triangle (-\infty, a_\theta]\big)\, \nu(dq) + \nu(Q \setminus Q_\ell^-) \\
&\le \int_{Q_\ell^-} \mathfrak{m}_q\big((-\infty, a_\theta] \triangle (-\infty, r^-_{\mathfrak{m}_q}(\theta)]\big)\, \nu(dq) + \int_{Q_\ell^-} \mathfrak{m}_q\big(A_q \triangle (-\infty, r^-_{\mathfrak{m}_q}(\theta)]\big)\, \nu(dq) \\
&\quad + \nu(Q \setminus Q_\ell^-) \\
&\le \int_{Q_\ell^-} \mathfrak{m}_q\big((-\infty, a_\theta] \triangle (-\infty, r^-_{\mathfrak{m}_q}(\theta)]\big)\, \nu(dq) + 3\sqrt{\delta} + C_4(\theta)\delta^{(1-\varepsilon)/(9-3\varepsilon)}. \qquad (7.5)
\end{aligned}$$

Proposition 7.3 implies that $|a_\theta - r^-_{\mathfrak{m}_q}(\theta)| \le C_3(\theta,\varepsilon)\delta^{(1-\varepsilon)/(9-3\varepsilon)}$ for $q \in Q_c \cap Q_\ell$. Hence,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}_q\big((-\infty, a_\theta] \triangle (-\infty, r^-_{\mathfrak{m}_q}(\theta)]\big) &= \mathfrak{m}_q\big(\min\{a_\theta, r^-_{\mathfrak{m}_q}(\theta)\}, \max\{a_\theta, r^-_{\mathfrak{m}_q}(\theta)\}\big) \\
&\le C(\theta,\varepsilon)\delta^{(1-\varepsilon)/(9-3\varepsilon)}
\end{aligned}$$

for $q \in Q_c \cap Q_\ell$. Substituting into (7.5), we obtain

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{m}\big(A \triangle \{u \le a_\theta\}\big) \\
&\le C(\theta,\varepsilon)\delta^{(1-\varepsilon)/(9-3\varepsilon)} + \nu(Q_\ell^- \setminus Q_c) + 3\sqrt{\delta} + C_4(\theta)\delta^{(1-\varepsilon)/(9-3\varepsilon)} \\
&\le C(\theta,\varepsilon)\delta^{(1-\varepsilon)/(9-3\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

□

References

[AGS] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, Metric measure spaces with Riemannian Ricci curvature bounded from below. Duke Math. J. **163** (2014), 1405–1490.

[BL] D. Bakry and M. Ledoux, Lévy–Gromov's isoperimetric inequality for an infinite-dimensional diffusion generator. Invent. Math. **123** (1996), 259–281.

[BaGL] D. Bakry, I. Gentil and M. Ledoux, Analysis and geometry of Markov diffusion operators. Springer, Cham, 2014.

[BBJ] M. Barchiesi, A. Brancolini and V. Julin, Sharp dimension free quantitative estimates for the Gaussian isoperimetric inequality. Ann. Probab. **45** (2017), 668–697.

[Bo] S. Bobkov, Extremal properties of half-spaces for log-concave distributions. Ann. Probab. **24** (1996), 35–48.

[CMM] F. Cavalletti, F. Maggi and A. Mondino, Quantitative isoperimetry à la Levy–Gromov. Comm. Pure Appl. Math. **72** (2019), 1631–1677.

[CM] F. Cavalletti and A. Mondino, Sharp and rigid isoperimetric inequalities in metric-measure spaces with lower Ricci curvature bounds. Invent. Math. **208** (2017), 803–849.

[CZ] X. Cheng and D. Zhou, Eigenvalues of the drifted Laplacian on complete metric measure spaces. Commun. Contemp. Math. **19** (2017), 1650001, 17 pp.

[CFMP] A. Cianchi, N. Fusco, F. Maggi and A. Pratelli, On the isoperimetric deficit in Gauss space. Amer. J. Math. **133** (2011), 131–186.

[Kl] B. Klartag, Needle decompositions in Riemannian geometry. Mem. Amer. Math. Soc. **249** (2017), no. 1180.

[LV2] J. Lott and C. Villani, Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport. Ann. of Math. **169** (2009), 903–991.

[Ma1] C. H. Mai, On Riemannian manifolds with positive weighted Ricci curvature of negative effective dimension. Kyushu J. Math. **73** (2019), 205–218.

[Ma2] C. H. Mai, Rigidity for the isoperimetric inequality of negative effective dimension on weighted Riemannian manifolds. Geom. Dedicata **202** (2019), 213–232.

[MO] C. H. Mai and S. Ohta, Quantitative estimates for the Bakry-Ledoux isoperimetric inequality. To appear in *Comment. Math. Helv.*

[Mi1] E. Milman, Sharp isoperimetric inequalities and model spaces for the curvature-dimension-diameter condition. J. Eur. Math. Soc. **17** (2015), 1041–1078.

[Mi2] E. Milman, Beyond traditional curvature-dimension I: new model spaces for isoperimetric and concentration inequalities in negative dimension. Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), 3605–3637.

[Mo] F. Morgan, Geometric Measure Theory. A beginner's guide. Fifth edition. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2016.

[Ob] M. Obata, Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere. J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 333–340.

[Oh] S. Ohta, Needle decompositions and isoperimetric inequalities in Finsler geometry. J. Math. Soc. Japan, **70** (2018), 651–693.

[St1] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. I. Acta Math. **196** (2006), 65–131.

[St2] K.-T. Sturm, On the geometry of metric measure spaces. II. Acta Math. **196** (2006), 133–177.

[Vi] C. Villani, Optimal transport, old and new. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

グラフラプラシアンの固有値に対する普遍不等式

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
小林　愼一郎 (Shinichiro KOBAYASHI)

概要

ラプラシアンのスペクトラムは空間の幾何学的性質を反映する重要な不変量である．どのような数列がスペクトラムとして現れ得るか, という問題は興味深い問いである．Payne–Pólya–Weinberger (1956) は, Euclid 空間内の有界領域における Dirichlet ラプラシアンのスペクトラムに対する普遍不等式を見出した．その後, 様々な方向性で一般化・精密化されている．本講演では, 考察の対象を離散的な空間, すなわちグラフに置き換えた場合のラプラシアンのスペクトラムに対する普遍不等式とその周辺を紹介したい．

1　導入

1.1　Euclid 空間内の有界領域に対する Dirichlet 固有値問題

ラプラシアンの固有値は空間の情報を多く反映する重要な不変量であり, 多くの数学者を魅了してきた．Euclid 空間内の有界領域 Ω に対して定数 λ が **Dirichlet 固有値**であるとは, ある非自明な関数 u が存在して

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

が成り立つことである．ここで Δ は Euclid 空間上の関数に作用するラプラシアンである．重複も込めた Dirichlet 固有値全体を**スペクトラム**という．よく知られているように, スペクトラムは正の実数直線内の離散集合であり, 無限大に発散する．スペクトラム $\{\lambda_i = \lambda_i(\Omega)\}_{i=1}^{\infty}$ を

$$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \to \infty$$

と並べたとき, Weyl の法則：

$$\lambda_k \approx 4\pi \left(\frac{|\Omega|}{\Gamma(1+n/2)} \right)^{2/n} k^{2/n} \text{ as } k \to \infty$$

が成り立つ．Stewartson–Waechter [6] はスペクトル逆問題の一つとして次の問題を唱えた：

問題 1.1. 数列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ が与えられたとき, ある Euclid 空間内の領域 Ω が存在して任意の $i = 1, 2, \ldots$ に対して $a_i = \lambda_i(\Omega)$ となるだろうか．

この問題に対するアプローチの一つとして次の方法が挙げられる：

(1) 任意の Dirichlet スペクトラムに対して領域に依存しない性質 (P) を与える．

(2) 性質 (P) を満たさない数列はいかなる領域の Dirichlet スペクトラムにもならない.

Payne–Pólya–Weinberger [5], Thompson [7] は以下の不等式を示した：n 次元 Euclid 空間内の有界領域の Dirichlet スペクトラム $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ に対して

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \leq \frac{4}{kn} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i,\ k = 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$

が成り立つ. この不等式は領域に依存しない. よって, 不等式 (1.1) を満たさない数列はいかなる領域の Dirichlet スペクトラムにもならない. 例えば, 数列 $\{ak^m\}_{k=1}^{\infty}$, $a > 0, m \geq 4$ は不等式 (1.1) を満たさない. 不等式 (1.1) は多くの数学者により改良され, 特に Yang [8] は以下の不等式を示した：n 次元 Euclid 空間内の有界領域の Dirichlet スペクトラム $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2 \leq \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_i)\lambda_i,\ k = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

を示した. Yang の不等式 (1.2) は多くの系を生み出す. 例えば, λ_{k+1} と λ_1 の比 λ_{k+1}/λ_1 の比を本質的に k のみに依存する関数による上からの評価を得る：

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1} \leq Ck^{2/n},\ k = 1, 2, \ldots. \tag{1.3}$$

1.2 閉リーマン多様体に対する固有値問題

連結で境界を持たないコンパクト Riemann 多様体に対して境界条件の無いラプラシアンの固有値を考えることができる. すなわち, 連結な閉 Riemann 多様体 (M, g) に対して定数 λ が固有値であるとは, M 上のある非自明な関数 u が存在して

$$-\Delta_g u = \lambda u \text{ in } M$$

が成り立つことである. ここで Δ_g は M 上の Riemann 計量 g から定まるラプラシアンである. スペクトラム $\{\lambda_i = \lambda_i(M, g)\}_{i=0}^{\infty}$ を

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \to \infty$$

と並べる. Dirichlet 境界条件の場合とは異なり, ゼロも固有値である. 問題 1.1 の変種として次の問題を考える：

問題 1.2. 数列 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ が与えられたとき, ある連結な閉 Riemann 多様体 (M, g) が存在して任意の $i = 0, 1, \ldots$ に対して $a_i = \lambda_i(M, g)$ となるだろうか.

問題 1.2 は次元が 3 以上かつ有限列の場合は肯定的に解決されている [2]. すなわち, 任意の 3 次元以上の多様体 M と任意の非減少な有限実数列 $\{a_i\}_{i=0}^{N}$ で $a_0 = 0$ を満たすものに対して M 上の Riemann 計量 g が存在して任意の $i = 0, 1, \ldots, N$ に対して $a_i = \lambda_i(M, g)$ が成り立つ. よって, Payne–Pólya–Weinberger, Yang の不等式のような結果は閉 Riemann 多様体全体に対しては期待で

きないことがわかる．しかし, Cheng–Yang [1] は次元が 2 以上の**等質**な閉 Riemann 多様体のスペクトラム $\{\lambda_i\}_{i=0}^{\infty}$ に対して Yang 型の普遍不等式を見出した：

$$\sum_{i=0}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2 \le \sum_{i=0}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)(4\lambda_i+\lambda_1),\ k=1,2,\dots. \tag{1.4}$$

Riemann 多様体 M が等質であるとは, その等長変換群が M に推移的に作用することである．平坦トーラスや球面は等質である．

1.3 グラフにおける固有値問題

本講演ではグラフといったらループや多重辺を含まないものとする．グラフ G に対して V_G をその頂点集合, E_G を辺集合とする．二頂点 $x,y\in V$ に対して $\{x,y\}\in E_G$ のとき $x\sim y$ とも表す．記号 d_x で頂点 x の次数を表す．グラフが**局所有限**であるとは, 各頂点の次数が有限であることをいう．局所有限グラフ G に対して**正規化ラプラシアン** Δ_G を V_G 上の関数 u に対して

$$\Delta_G u(x)=\frac{1}{d_x}\sum_{y\in V:\,y\sim x}(u(y)-u(x)),\ x\in V$$

によって定める．グラフ上のラプラシアンのスペクトラムに対して 1.1 節, 1.2 節と同様のことが成り立つかどうかを考える．領域 $\Omega\subset V_G$ が与えられたとき, その**境界** $\partial\Omega$ を

$$\partial\Omega=\{x\in V_G\setminus\Omega \mid y\sim x \text{ for some } y\in\Omega\}$$

によって定める．領域 Ω に対して定数 λ が **Dirichlet 固有値**であるとは, $\Omega\cup\partial\Omega$ 上のある非自明な関数 u が存在して

$$\begin{cases}-\Delta_G u=\lambda u & \text{in } \Omega,\\ u=0 & \text{on } \partial\Omega\end{cases}$$

が成り立つことである．領域 Ω が n 頂点であるとき, Dirichlet 固有値は重複を込めて n 個存在する．スペクトラム $\{\lambda_i=\lambda_i(\Omega)\}_{i=1}^{n}$ を

$$0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$$

と並べる．Hua–Lin–Su [3] は 1.1 節の類似として n 次元整数格子グラフ $\mathbb{Z}^n$ 内の有限領域の Dirichlet スペクトラム $\{\lambda_i\}_{i\ge1}$ に対して Yang 型の不等式を得た：

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2(1-\lambda_i)\le\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\lambda_i,\ k=1,2,\dots.$$

1.4 主結果

それでは 1.2 節の類似はどうなるであろうか．閉多様体の類似として有限グラフを考えることは自然であると思われる．有限グラフ G に対して定数 λ が**固有値**であるとは, V_G 上のある非自明な関数 u が存在して

$$-\Delta_G u=\lambda u \text{ in } V_G$$

が成り立つことである. グラフ G が n 頂点であるとき, 固有値は重複を込めて n 個存在する. スペクトラム $\{\lambda_i = \lambda_i(G)\}_{i=0}^{n-1}$ を

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_{n-1}$$

と並べる. 一方, 多様体の等質性に対応するグラフの条件は一意には決まらない. 例えば

- 頂点推移性：任意の二頂点 x, y に対してある自己同型 γ が存在して $y = \gamma(x)$ が成り立つ.
- 辺推移性：任意の二辺 e_1, e_2 に対してある自己同型 γ が存在して $e_2 = \gamma(e_1)$ が成り立つ.

などグラフに対しては複数の等質性の概念がある. 完全グラフやサイクルグラフは辺推移的かつ頂点推移的である. 本講演の主結果の一つは以下である：

定理 1.3 ([4])**.** $\{\lambda_i\}_{i=0}^{n-1}$ を n 頂点からなる**辺推移的**グラフのスペクトラムとする. このとき, 0 でも 1 でもない任意の固有値 λ と $k = 0, 1, \ldots, n-2$ に対して

$$\sum_{i=0}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2(1 - \lambda_i) \leq \sum_{i=0}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)(2(2 - \lambda)\lambda_i + \lambda) \tag{1.5}$$

が成り立つ. 特に $k = 0, 1, \ldots, n-2$ に対して

$$\sum_{i=0}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)^2(1 - \lambda_i) \leq \sum_{i=0}^{k}(\lambda_{k+1} - \lambda_i)(4\lambda_i + \lambda_1) \tag{1.6}$$

が成り立つ.

系 1.4. 定理 1.3 と同じ仮定のもと, 以下が成り立つ：

- 任意の $k = 0, 1, \ldots, n-2$ に対して

$$\lambda_{k+1} \leq \frac{\sum_{i=0}^{k}((5 - 2\lambda_1)\lambda_i - \lambda_i^2 + \lambda_1)}{\sum_{i=0}^{k}(1 - \lambda_i)}.$$

- 正数 $\delta < 1$ に対して $\lambda_k \leq 1 - \delta$ ならば

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_1} \leq C(\delta)k^{2/\delta}$$

が成り立つ. ただし

$$C(\delta) = \left(1 + \frac{4}{\delta}\right)\left(\frac{5}{64}\delta + \frac{9}{16}\right)^{1/2}.$$

一方, 定理 1.3 の仮定を頂点推移的グラフに置き換えることはできないことも分かる：

命題 1.5. ある頂点推移的グラフからなる列 $\{G_j\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して, 次が成り立つ：

$$\frac{\lambda_2(G_j)}{\lambda_1(G_j)} \uparrow +\infty \text{ as } j \to \infty.$$

それぞれの研究において全体の空間や境界条件は異なっているが, 基本的な方針は同じである. すなわち, 任意の関数に対して補助的な勾配評価を行い, 関数として調和関数や固有関数などのよい関数を考えると固有値の普遍不等式を得る. 以下の節で主定理の証明に用いる道具と命題 1.5 を満たす例を紹介する.

2 勾配評価

G を局所有限グラフとする．頂点集合 V_G 上の実数値関数全体の空間を $C(V_G)$ と表す．正規化ラプラシアン $\Delta_G\colon C(V_G)\to C(V_G)$ は

$$\Delta_G u(x)=\frac{1}{d_x}\sum_{y\sim x}(u(y)-u(x)),\ u\in C(V_G), x\in V_G$$

で定義されているのであった．正規化ラプラシアンから定まる**勾配作用素** Γ を

$$\Gamma(u,v)=\frac{1}{2}(\Delta_G(uv)-(\Delta_G u)v-u\Delta_G v),\ u,v\in C(V_G)$$

によって定める．勾配作用素は Riemann 多様体 (M,g) 上のラプラシアン Δ_g の場合は

$$\frac{1}{2}(\Delta_g(uv)-(\Delta_g u)v-u\Delta_g v)=g(\nabla u,\nabla v)$$

と一致する．有限領域 $\Omega\subset V_G$ と $u,v\in C(\Omega\cup\partial\Omega)$ に対して v が Dirichlet 境界条件を満たすならば

$$\sum_{x\in\Omega}u(x)\Delta_G v(x)d_x=-\sum_{x\in\Omega}\Gamma(u,v)(x)d_x.$$

また, 固有値に関する最大・最小原理は勾配作用素を用いて次のように表される：

$$\lambda_{k+1}=\sup_{W\subset C(\Omega)}\inf\left\{\sum_{x\in\Omega}\Gamma(u,u)(x)d_x\ \middle|\ u\in W,\sum_{x\in\Omega}u(x)^2d_x=1\right\}.$$

ただし右辺の sup は次元が $n-k$ である $C(\Omega)$ の線形部分空間 W 全体にわたってとる．最大・最小原理と Green の公式を用いることで以下の勾配評価を得る：

補題 2.1. 任意の関数 $h\in C(\Omega)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)^2\Phi_i(h)\le\sum_{i=1}^{k}(\lambda_{k+1}-\lambda_i)\|2\Gamma(u_i,h)+u_i\Delta_G h\|^2_{L^2(\Omega)}$$

が成り立つ．ただし

$$\Phi_i(h)=\sum_{\{x,y\}\in E_\Omega}u_i(x)u_i(y)(h(x)-h(y))^2.$$

有限グラフの場合, 調和関数は各連結成分上定数に限るため, 補題 2.1 を用いても何も言えたことにならない．そこで非自明な固有値に対する固有関数を用いる．グラフが辺推移的であるとき, 固有関数の正規直交系は辺上で良い対称性を持つ．一方, 整数格子や三角格子などの無限グラフの場合は座標関数が調和関数となり, 座標関数の族は辺上で良い対称性を持つ．これらの意味については次のセクションで述べる．

3　固有関数の対称性

グラフ G が**辺推移的**であるとは, G の自己同型群が辺集合に推移的に作用することであった.

補題 3.1. G を辺推移的な有限グラフとし, λ を G の固有値とする. また, $\{h_1, \dots, h_m\}$ を固有値 λ の固有空間の正規直交基底とする. このとき, 任意の $\{x, y\} \in E_G$ に対して

$$h_1(x)h_1(y) + \cdots + h_m(x)h_m(y) = \frac{m(1-\lambda)}{2\#E_G} \tag{3.1}$$

が成り立つ. さらに $\lambda \neq 1$ または G が頂点推移的ならば, 任意の $x \in V_G$ に対して

$$h_1(x)^2 + \cdots + h_m(x)^2 = \frac{m}{2\#E_G}$$

が成り立つ.

定理 1.3 において辺推移的という仮定は (3.1) を導くためだけに使われている. 条件 (3.1) は辺推移性と同値ではないことが以下の命題により分かる：

命題 3.2. G, H を二つの辺推移的グラフで等スペクトルであるとする. このとき, デカルト積 $G\square H$ も (3.1) を満たす.

命題 3.2 において同型でない G, H をとってくると, 積グラフ $G\square H$ は辺推移的ではないが, (3.1) を満たす.

一方, グラフが頂点推移的のとき (3.1) は一般には言えない. グラフ G_j を完全グラフ K_j と K_2 の積とする. このとき G_j は頂点推移的であり, 第一固有値と第二固有値の比 $\lambda_2(G_j)/\lambda_1(G_j) = j/2$ は上に非有界である.

参考文献

[1] Q.-M. Cheng and H. Yang, *Bounds on eigenvalues of Dirichlet Laplacian*, Math. Ann. **337** (2007), no. 1, 159–175.

[2] Y. Colin de Verdière, *Construction de laplaciens dont une partie finie du spectre est donnée*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **20** (1987), no. 4, 599–615.

[3] B. Hua, Y. Lin, and Y. Su, *Payne-Pólya-Weinberger, Hile-Protter and Yang's inequalities for Dirichlet Laplace eigenvalues on integer lattices*, arXiv:1710.05799 (2017).

[4] S. Kobayashi, *An upper bound for higher order eigenvalues of symmetric graphs*, J. Math. Soc. Japan **73** (2021), no. 4, 1277–1287. MR4329030

[5] L. E. Payne, G. Pólya, and H. F. Weinberger, *On the ratio of consecutive eigenvalues*, J. Math. and Phys. **35** (1956), 289–298.

[6] K. Stewartson and R. T. Waechter, *On hearing the shape of a drum: further results*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **69** (1971), no. 2, 353–363.

[7] C. J. Thompson, *On the ratio of consecutive eigenvalues in N-dimensions*, Studies in Appl. Math. **48** (1969), 281–283.

[8] H. Yang, *An estimate of the difference between consecutive eigenvalues*, Preprint IC/91/60 of ICTP ,Trieste (1995).

Picard numbers of K3 surfaces with Siegel disks

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
高田佑太 (Yuta TAKADA)

概要

K3 曲面が Siegel 円板をもつ自己同型を許容するとき，その Picard 数は 0 以上 18 以下の偶数となる．逆に 0 以上 18 以下の偶数が与えられたとき，それを Picard 数としてもつ K3 曲面であって Siegel 円板をもつ自己同型を許容するものの存在が，K3 格子上の自己同型を構成することで示される．この K3 格子上の自己同型は，一定の条件をみたす超幾何群がそれ自身から定義される格子に作用することを用いて構成される．なお，本研究は岩崎克則教授との共同研究である．

1 導入

K3 曲面とは不正則数が 0 かつ標準束が自明であるようなコンパクト複素曲面のことである．楕円曲線上には正則 1 形式が定数倍を除いて一意的に存在し，K3 曲面には正則 2 形式が定数倍を除いて一意的に存在する．この意味で K3 曲面は楕円曲線を二次元に一般化したもので，コンパクト複素曲面のひとつの重要なクラスを占めている．

K3 曲面 X の中間コホモロジー群 $H^2(X,\mathbb{Z})$ は交叉理論により定まる内積によって符号 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子となる．ここで格子とは階数有限の自由加群であって整数に値をとる非退化対称双線型形式が備わっているもののことである．X 上の自己同型 f はコホモロジー群に自己同型 f^* を誘導し，f^* は $H^2(X,\mathbb{Z})$ の格子の構造を保つ．さらに f^* は $H^2(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C} = H^2(X,\mathbb{C})$ の Hodge 構造とよばれる直和分解の構造と，Kähler 錐とよばれる $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X) := H^{1,1}(X)\cap H^2(X,\mathbb{R})$ の部分集合を保つ．

逆に符号 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子（K3 格子とよぶ）L に Hodge 構造と Kähler 錐に相当する構造を定義するとき，それらを保つ L 上の自己同型 F は，Torelli の定理と周期写像の全射性によって，ある K3 曲面上の自己同型 f のコホモロジー群への誘導 f^* であると思うことができる．このことから K3 曲面の力学系は K3 格子上の自己同型を通して研究することができる．ここでいう力学系とはひとつの自己同型の反復合成を意味する．

本稿で主題となるのは Siegel 円板とよばれる力学系的な対象である．曲面 X 上の自己同型 f の Siegel 円板とは f が無理数回転として働く X の領域のことである．K3 曲面上の Siegel 円板をもつ自己同型を初めて観察したのは McMullen [6] である．彼が与えた例は Picard 数が 0 の K3 曲面上の自己同型である．その後，小木曽 [7] は Picard 数 8 の K3 曲面上の自己同型で Siegel 円板をもつものの存在を示している．また我々 [3] は超幾何群を用いた格子自己同型の構成を利用し Picard 数 12 の K3 曲面上の自己同型で Siegel 円板をもつものの存在を示している．

K3 曲面が Siegel 円板をもつ自己同型を許容するとき，その Picard 数は 0 以上 18 以下の偶数となる．この逆も次の定理の意味で肯定的である．

定理 1（[4, Theorem 1.1]） K3 曲面が Siegel 円板をもつ自己同型を許容するとき, その Picard 数は 0 以上 18 以下の偶数となる．逆に 0 以上 18 以下の各偶数に対して, それを Picard 数としてもつ K3 曲面であって Siegel 円板をもつ自己同型を許容するものが存在する．

これは K3 格子上の自己同型を構成し，それを K3 曲面上の自己同型に持ち上げることで示される．我々は K3 格子上の自己同型の構成に，[3] でも用いた超幾何群の方法を利用する．

2 K3 曲面

K3 曲面とは不正則数が 0 かつ標準束が自明であるようなコンパクト複素曲面のことである．標準束が自明なことは至るところ消えない正則 2 形式が定数倍を除いて一意的に存在することを意味する．すべての K3 曲面は Kähler 多様体であることが知られている．K3 曲面の理論においては中間コホモロジー群の構造が非常に重要である．とくに整数係数中間コホモロジー群には格子の構造が定まる．まず格子の諸概念をまとめておく．

■格子　階数有限の自由 $\mathbb{Z}$ 加群 L で $\mathbb{Z}$ に値をとる非退化対称双線型形式 $(\cdot,\cdot)$ を備えたものを**格子**といい $(L,(\cdot,\cdot))$ または単に L で表す．格子 $(L,(\cdot,\cdot))$ に対して，加群としての L の階数を $\operatorname{rk} L$ とかく．また，非退化対称双線型形式 $(\cdot,\cdot)$ のことを単に**内積**とよぶ．L の元 x に対し整数 (x,x) を x の**自己内積**という．任意の元の自己内積が偶数（i.e. $2\mathbb{Z}$ の元）であるとき L を**偶格子**という．

以下 L を階数 n の格子とする．L の内積は $L_{\mathbb{Q}} := L \otimes \mathbb{Q}$ に線型に拡張される．この $L_{\mathbb{Q}}$ の内積も L の内積と同じ記号 $(\cdot,\cdot)$ で表す．

$$L^* := \{y \in L_{\mathbb{Q}} \mid (y,x) \in \mathbb{Z} \text{ for all } x \in L\}$$

を L の**双対**という．L^* は内積が整数値とは限らないという意味では格子ではない．（別の文脈ではこのようなものも格子ということがある．）一般に $L \subset L^*$ である．$L^* = L$ をみたすとき L は**ユニモジュラー**であるという．

格子 L の基底 $(e_1,\dots,e_n)$ を固定するとき，内積は行列 $G = ((e_i,e_j))_{ij}$ によって表現される．これを（基底 $(e_1,\dots,e_n)$ に関する）**Gram 行列**という．格子の性質は Gram 行列の言葉で言い換えることができる．例えば

- L が偶格子 $\iff$ G の対角成分が全て偶数.
- L がユニモジュラー $\iff$ $\det G = \pm 1$.

である．また，Gram 行列の正の固有値の個数 p と負の固有値の個数 q は基底の選び方に依らない．組 (p,q) を L の**符号**という．L が**正定値** (resp. **負定値**) とは $q = 0$（resp. $p = 0$）であるときにいう．正定値でも負定値でもない格子は**不定値**とよばれる．

不定値ユニモジュラー偶格子は符号のみによって同型を除いて一意的に決まることが知られている．符号 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子を **K3 格子**とよぶ．これは K3 曲面の整数係数の 2 次コホ

モロジー群が，交叉形式により符号 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子の構造をもつことによる．

■K3 曲面のコホモロジー群　以下，X を K3 曲面，η_X を X の至るところ消えない正則 2 形式とする．X の整数係数のコホモロジー群は以下のようになっている：

$$H^0(X,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z},\ H^1(X,\mathbb{Z})=0,\ H^2(X,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}^{22},\ H^0(X,\mathbb{Z})=0,\ H^0(X,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}.$$

さらに上でも述べたように $H^2(X,\mathbb{Z})$ は交叉形式により K3 格子となる．

次に $\mathbb{C}$ 係数中間コホモロジー群 $H^2(X,\mathbb{C})=H^2(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}$ についてみる．$H^2(X,\mathbb{C})$ には**Hodge 構造**とよばれる直和分解

$$H^2(X,\mathbb{C})=H^{2,0}(X)\oplus H^{1,1}(X)\oplus H^{0,2}(X)$$

が定まる．ここで $H^{2,0}(X)=\mathbb{C}\eta_X, H^{0,2}(X)=\mathbb{C}\overline{\eta_X}$ （$\overline{\eta_X}$ は η_X の複素共役）で $H^{1,1}(X)$ は $\{\eta_X,\overline{\eta_X}\}$ の直交補空間である．このとき $H^{2,0}(X)\oplus H^{0,2}(X)$ の符号は $(2,0)$ で $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X):=H^{1,1}(X)\cap H^2(X,\mathbb{R})$ は符号 $(1,19)$ の内積つき $\mathbb{R}$ ベクトル空間である．したがって $\mathcal{C}_X:=\{x\in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)\mid (x,x)>0\}$ は 2 つの連結成分に分かれる．このうち Kähler 類を含む方を**正錐**といい $\mathcal{C}_X^+$ で表す．

定義 2　$P_X:=H^{1,1}(X)\cap H^2(X,\mathbb{Z})$ を X の **Picard 格子**といい，（$\mathbb{Z}$ 加群としての）P_X のランクを **Picard 数**という．

注意 3　Picard 格子は（$H^2(X,\mathbb{Z})$ の内積を制限して得られる）内積が退化している場合があり，その場合は上で定義した意味での格子ではない．

P_X の自己内積 -2 の元全体の集合を Δ_X とし，そのうち有効因子（または有効直線束）に代表されるもの全体を Δ_X^+ とかく．このとき Δ_X はルート系で，$\Delta_X=\Delta_X^+\sqcup(-\Delta_X^+)$ と分解され，この分解は正ルート・負ルートの分解になっている．

$$\mathcal{K}_X:=\{x\in\mathcal{C}_X^+\mid (x,r)>0\quad\text{for all } r\in\Delta_X^+\}$$

を X の **Kähler 錐**という．自明ではないが，名前の示す通り Kähler 錐は Kähler 類全体のなす錐に一致する．

f を X 上の自己同型とすると f のコホモロジーへの誘導 f^* は $H^2(X,\mathbb{Z})$ の格子の構造，$H^2(X,\mathbb{C})$ の Hodge 構造，Kähler 錐を保つ．次に，K3 格子上に形式的に定義された Hodge 構造と Kähler 錐を保つ自己同型が K3 曲面上の自己同型に持ち上がることをみる．

■自己同型のリフト　L を K3 格子，すなわち符号 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子とする．$L_{\mathbb{C}}:=L\otimes\mathbb{C}$ のベクトル η で $\mathbb{C}\eta\oplus\mathbb{C}\overline{\eta}$ の符号が $(2,0)$ になるようなものは，$L_{\mathbb{C}}$ に**（抽象的）Hodge 構造**

$$L_{\mathbb{C}}=H^{2,0}\oplus H^{1,1}\oplus H^{0,2}$$

を定める．ただし，$H^{2,0}=\mathbb{C}\eta, H^{0,2}=\mathbb{C}\overline{\eta}, H^{1,1}=\{\eta,\overline{\eta}\}^{\perp}$ である．この状況で単にベクトル η を Hodge 構造とよぶことにする．このとき K3 曲面のコホモロジー群のときと同様に $H^{1,1}_{\mathbb{R}}:=H^{1,1}\cap\mathbb{R}L$ は符号 $(1,19)$ の内積つき $\mathbb{R}$ ベクトル空間で $\mathcal{C}:=\{x\in H^{1,1}_{\mathbb{R}}\mid (x,x)>0\}$ は 2 つの連結

成分に分かれる．一方で，K3 曲面のコホモロジー群のときとは異なり内在的に“Kähler 類”があるわけではないので，$\mathcal{C}$ の連結成分の一方を任意に固定し**正錐**とよび $\mathcal{C}^+$ で表す．

$P := H^{1,1} \cap L$ を L の **Picard 格子**とよび，P の自己内積 -2 の全体の集合を Δ で表す．K3 曲面のコホモロジー群のときは有効因子に代表されるものを集めて正ルートの集合が作れたが，いまは Δ に内在的に決まる正負分解があるわけではないので，Δ の正負分解 $\Delta = \Delta^+ \sqcup (-\Delta^+)$ を任意にひとつ選んで固定しておく．このとき

$$\mathcal{K} := \{x \in \mathcal{C}^+ \mid (x, r) > 0 \quad \text{for all } r \in \Delta^+\}$$

を L の **Kähler 錐**という．Hodge 構造 η と Kähler 錐 $\mathcal{K}$ を合わせて L の **K3 構造**という．

Torelli の定理と周期写像の全射性により，K3 構造を保つ L の自己同型は次の命題の意味で K3 曲面上の自己同型に持ち上がる．

命題 4　F は K3 格子 L 上の自己同型で，ある K3 構造 $(\eta, \mathcal{K})$ を保つとする．このとき K3 曲面 X，X 上の自己同型 f，格子の同型 $\iota : H^2(X, \mathbb{Z}) \to L$ であって次をみたすものが存在する：

$$\iota(\eta_X) = \eta, \quad \iota(\mathcal{K}_X) = \mathcal{K} \quad \text{and} \quad F = \iota \circ f^* \circ \iota^{-1}.$$

このとき K3 曲面 X と自己同型 f の組 (X, f) を (L, F) の**リフト**とよぶ．□

■行列式・Salem 数　f を K3 曲面 X 上の自己同型とする．0 でない正則 2 形式 η_X の引き戻し $f^*\eta_X$ はまた 0 でない正則 2 形式なので $f^*\eta_X = \delta(f)\eta_X$ となるような複素数 $\delta(f)$ が決まる．これを f の**行列式**という．行列式とよばれるのは次の理由による：もし f が不動点 $p \in X$ をもつならば，$\eta_{Xp} \in \bigwedge^2 T_p^* X$ を η_X の p における値として，任意の $v_p \in \bigwedge^2 T_p X$ に対して

$$\delta(f)(\eta_{Xp}, v_p) = (f^*\eta_{Xp}, v_p) = (\eta_{Xp}, f_* v_p) = (\eta_{Xp}, (\det(df)_p)v_p) = \det(df)_p(\eta_{Xp}, v_p)$$

となる．ここで T_pX, T_p^*X はそれぞれ正則接空間，正則余接空間で $(\cdot,\cdot)$ は $\bigwedge^2 T_p^* X$ と $\bigwedge^2 T_p X$ の双対を表すペアリングである．したがって $\delta(f)$ は p における f の微分 $(df)_p : T_pX \to T_pX$ の行列式に等しい．

行列式は絶対値 1 で，さらに 1 の冪根であるか，または Salem 数の共役数となる．**Salem 数**とは実の代数的整数 $\lambda > 1$ であって $\lambda^{\pm 1}$ を除くすべての共役数が単位円周上にのっている数のことである．Salem 数の最小多項式を **Salem 多項式**という．Salem 多項式は偶数次の回文モニック多項式である．ここで多項式 $\sum_{i=0}^n a_i t^{n-i}$ が**モニック**であるとは $a_0 = 1$ であることで，**回文**であるとは $a_i = a_{n-i}$ が任意の $i = 0, \ldots, n$ で成り立つことである．

3　Siegel 円板・不動点公式

3.1　Siegel 円板

Siegel 円板とは，端的にいえば，自己同型の無理数回転する領域のことである．以下では 2 次元に限って説明するが一般の次元でも同様である．**無理数回転**とは二重円板 $\mathbb{D}^2$ 上の自己写像であって，絶対値 1 の乗法的独立な複素数 $\lambda_1, \lambda_2 \in S^1$ を用いて $(z_1, z_2) \mapsto (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$ と表されるもの

のことである．ここで複素数 λ_1, λ_2 が**乗法的独立**とは，整数 k_1, k_2 に対して $\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2} = 1$ ならば $k_1 = k_2 = 0$ となることである．

定義 5　X を複素曲面，f をその上の自己同型とする．f が点 $p \in X$ を中心とする **Siegel 円板** U をもつとは

(0)　p は f の不動点であり，
(1)　U は f で不変な p の近傍で，
(2)　$f : (U, p) \to (U, p)$ が無理数回転に双正則に共役である，すなわち，無理数回転 $r : (\mathbb{D}^2, 0) \to (\mathbb{D}^2, 0)$ と双正則写像 $\gamma : (\mathbb{D}^2, 0) \to (U, p)$ であって $f = \gamma \circ r \circ \gamma^{-1}$ をみたすものが存在する

ときにいう．

命題 6　K3 曲面 X 上の自己同型 f が Siegel 円板をもつとき行列式 $\delta(f)$ は 4 次以上の Salem 数の共役数である．また X の Picard 数は 0 以上 18 以下の偶数となる．

証明　f を $p \in X$ を中心とする Siegel 円板をもつ X 上の自己同型とする．$\delta := \delta(f)$ の最小多項式を $\chi_0(t) \in \mathbb{Z}[t]$, $f^* : H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathbb{Z})$ の固有多項式を $\chi(t) \in \mathbb{Z}[t]$ とおくと，δ は f^* の固有値のひとつだから

$$\chi(t) = \chi_0(t)\chi_1(t) \quad \text{for some } \chi_1(t) \in \mathbb{Z}[t]$$

と表せる．いま f の p における微分 $(df)_p$ の固有値を α_1, α_2 とおくと p は Siegel 円板の中心なので α_1, α_2 は乗法的独立である．一方，$\delta = \alpha_1\alpha_2$ なので δ は 1 のべき根ではない．$\delta \in S^1$ に注意すると [6, Corollary 3.3] より $\chi_0(t)$ は 4 次以上の Salem 多項式，$\chi_1(t)$ は円分多項式の積となる（$\chi_1(t) = 1$ も許す）．とくに δ は Salem 数の共役である．

また，$\chi_0(t), \chi_1(t)$ が互いに素であることに注意すると，Picard 格子は

$$P_X = \{x \in H^2(X, \mathbb{Z}) \mid \chi_1(f^*)x = 0\}$$

と表せることがわかる．このことから

$$X \text{ の Picard 数} = \deg(\chi_1(t)) = 22 - \deg(\chi_0(t))$$

となる．Salem 多項式は偶数次なので Picard 数は 0 以上 18 以下の偶数となる．　□

上の命題は定理 1 の前半を主張している．定理 1 の後半を得るためには，自己同型がいつ Siegel 円板をもつのかを考えなければならない．一般の（K3 曲面に限らない）複素多様体上の自己同型について，非線型写像の局所線型化に関する Siegel-Sternberg の定理と超越数論の Baker-Fel'dman の定理を合わせて次のような十分条件が得られる．

命題 7（[6, Theorem 5.1]）　f を n 次元複素多様体 X 上の自己同型で点 $p \in X$ を不動点にもつとする．このとき点 p における f の微分 $(df)_p$ の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ が絶対値 1 の代数的数でかつ乗法的独立であるならば，f は p を中心とする Siegel 円板をもつ．　□

この命題より不動点の存在とその点における微分の情報がわかればよいということになる．それらを教えてくれるのが Lefschetz 型の不動点公式である．

3.2 不動点公式

f を複素多様体 X 上の自己同型とする．f のコホモロジー群への作用 f^* のトレースの交代和

$$\Lambda(f) := \sum_{k\geq 0}(-1)^k \operatorname{Tr}(f^*|H^k(X,\mathbb{R})) \quad \text{（特異コホモロジー群）},$$
$$\Lambda^0(f) := \sum_{j\geq 0}(-1)^j \operatorname{Tr}(f^*|H^{0,j}(X)) \quad \text{（Dolbeault コホモロジー群）}$$

をそれぞれ f の**（位相的）Lefschetz 数**，**正則 Lefschetz 数**とよぶ．K3 曲面の場合

$$\Lambda(f) = \sum_{k=0}^{4} \operatorname{Tr}(f^*|H^k(X,\mathbb{R})) = 1 - 0 + \operatorname{Tr}(f^*|H^2(X,\mathbb{R})) - 0 + 1 = 2 + \operatorname{Tr}(f^*|H^2(X,\mathbb{R})),$$

$$\Lambda^0(f) = \sum_{j=0}^{2} \operatorname{Tr}(f^*|H^{0,j}(X)) = 1 - 0 + \overline{\delta(f)} = 1 + \delta(f)^{-1}$$

となる．

古典的な Lefschetz の不動点公式は，（一般の位相多様体上の）自己同型 f に対して，不動点がすべて孤立点ならば Lefschetz 数 $\Lambda(f)$ は重複を数えた不動点の個数である，ということを主張する．次の Saito の Lefschetz 公式は，考える多様体をコンパクト Kähler 曲面に限定することによって孤立していない不動点の情報も記述する．

定理 8（Saito の Lefschetz 公式 [8, 5, 2]） f をコンパクト Kähler 曲面 X 上の自己同型とする．$X_{\mathrm{I}}(f), X_{\mathrm{II}}(f)$ をそれぞれ f の I 型固定曲線，II 型固定曲線とし $I_p(f), I_C(f)$ をそれぞれ $p \in \mathrm{Fix}(f), C \in X_{\mathrm{I}}(f) \cup X_{\mathrm{II}}(f)$ の“重複度”とする（これらの定義は [5] をみよ）．このとき

$$\Lambda(f) = \sum_{p\in \mathrm{Fix}(f)} I_p(f) + \sum_{C\in X_{\mathrm{I}}(f)} \chi_C I_C(f) + \sum_{C\in X_{\mathrm{II}}(f)} \tau_C I_C(f) \tag{1}$$

が成り立つ．ここで χ_C は C の正規化の Euler 標数で τ_C は C の自己交点数である．また上式の右辺は有限和となり意味をもつ． □

例えば K3 曲面 X 上の自己同型 f について，f が不動点をもたないならば式 (1) の右辺は 0 なので $2 + \operatorname{Tr}(f^*|H^2(X,\mathbb{R})) = 0$ となる．対偶を考えて，$\operatorname{Tr}(f^*|H^2(X,\mathbb{R})) \neq -2$ ならば f は少なくともひとつの不動点をもつことがいえる．

正則 Lefschetz 数も不動点から定まる量を足しあげたものになっている．

定理 9（Atiyah-Bott の正則 Lefschetz 公式 [1]） f をコンパクト複素多様体上の自己同型とし，f の不動点はすべて横断的である，すなわち任意の $p \in \mathrm{Fix}(f)$ に対して $\det(\mathrm{id} - (df)_p) \neq 0$ が成り立つとする．このとき（各不動点は孤立点で）

$$\Lambda^0(f) = \sum_{p\in \mathrm{Fix}(f)} \nu_p(f) \quad \text{where } \nu_p(f) = \frac{1}{\det(\mathrm{id} - (df)_p)}$$

が成り立つ． □

正則 Lefschetz 公式について，不動点が孤立点であって横断的でない場合にも不動点指数 $\nu_p(f)$ の Grothendieck 留数を用いた表示がある [10]．また，不動点が部分多様体をなす場合も“横断的”であれば不動点指数が計算できる形で与えられる（Toledo-Tong の公式 [9]）．

定理 9 について，例えば K3 曲面上の自己同型 f がただひとつの横断的な不動点 p をもつとき，$(df)_p$ の固有値を α_1, α_2 とすると正則 Lefschetz 公式は

$$1 + \delta^{-1} = \Lambda^0(f) = \frac{1}{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}$$

となる．この式から α_1, α_2 の情報 (絶対値や乗法的独立性など) を引き出して p が Siegel 円板の中心であるかどうかを論じることができる．

■K3 曲面における Siegel 円板の判定法　ここで K3 曲面 X 上の自己同型 f が Siegel 円板をもつための十分条件を与える．f は少なくともひとつの不動点 p をもち，行列式 $\delta := \delta(f)$ は Salem 数の共役数であると仮定する．このとき $(df)_p$ の固有値 α_1, α_2 は複素数 α を用いて

$$\alpha_1 = \delta^{\frac{1}{2}}\alpha, \quad \alpha_2 = \delta^{\frac{1}{2}}\alpha^{-1}$$

と表せる．$\tau := \delta + \delta^{-1}$ とおくとき命題 7 より次を得る．

補題 10（[4, Lemma 7.1]） $(\alpha + \alpha^{-1})^2$ は 0 以上 4 以下の実数で，かつ，ある有理関数 $P(T) \in \mathbb{Q}(T)$ を用いて $(\alpha + \alpha^{-1})^2 = P(\tau)$ と表されるとする．このとき

(i)　τ の共役数 τ' で $-2 < \tau' < 2, P(\tau') > 4$ をみたすものが存在する，または
(ii)　$P(\tau)$ は代数的整数でない

ならば p は Siegel 円板の中心である．

証明の概略　$(\alpha + \alpha^{-1})^2 \in [0, 4]$ から $\alpha \in S^1$，とくに $\alpha_1, \alpha_2 \in S^1$ がいえる．また，α_1, α_2 は二次方程式 $t^2 - \delta^{1/2}P(\tau)^{1/2}t + \delta = 0$ の根なので代数的数である．さらに条件 (i) または (ii) から α_1, α_2 が乗法的独立であることが導かれる．したがって命題 7 より p は Siegel 円板の中心である．　□

注意 11　$\delta \in S^1$ ゆえ $\tau = \delta + \delta^{-1}$ は実数である．したがって，補題 10 の仮定に関して，$(\alpha + \alpha^{-1})^2$ がある有理関数 $P(T)$ を用いて $(\alpha + \alpha^{-1})^2 = P(\tau)$ と表されるならばそれは自動的に実数になる．

$(\alpha + \alpha^{-1})^2 = P(\tau)$ となるような有理関数 $P(T)$ は正則 Lefschetz 公式を使って見つけることができる．例えば f がただひとつの横断的な不動点 p をもつとき，正則 Lefschetz 公式

$$1 + \delta^{-1} = \Lambda^0(f) = \frac{1}{(1-\delta^{\frac{1}{2}}\alpha)(1-\delta^{\frac{1}{2}}\alpha^{-1})}$$

より

$$(\alpha + \alpha^{-1})^2 = P(\tau) \quad \text{where } P(T) = \frac{(T+1)^2}{T+2}$$

となる．

4　定理 1 の証明の概略

定理 1 の証明の概略を述べる．前半はすでに述べた通りである（命題 6）．後半について，0 以上 18 以下の偶数 ρ が与えられたとする．このとき，命題 4 より K3 格子 L 上のある K3 構造を保つ自己同型 F で次をみたすものを構成できればよい：

$$(L,F)\text{ のリフトを }(X,f)\text{ とするとき }X\text{ は Picard 数 }\rho\text{ で }f\text{ が Siegel 円板をもつ.}$$

まずは構成すべき (L,F) の必要条件をまとめる．F によって保たれる L の K3 構造を $(\eta,\mathcal{K})$ とおく．まず，f が Siegel 円板をもつためには

$$F\text{ の固有多項式 }\chi(t)\text{ は Salem 多項式 }s(t)\text{ と円分多項式の積 }\chi_1(t)\text{ の積となっていて,}\qquad(2)$$

複素数 δ を $F\eta=\delta\eta$ によって定まる数とすると

$$s(\delta)=0,\ \text{すなわち }\delta\text{ は Salem 数の共役である}\qquad(3)$$

必要がある．また，このとき X の Picard 数は $22-\deg(s(t))$ なので

$$\deg(s(t))=22-\rho\qquad(4)$$

が成り立たなければならない（see 命題 6 の証明）．

一般に K3 格子上の自己同型で特定の固有多項式をもつものを構成するのは簡単ではないが，我々は超幾何格子とよばれる格子を使って上の条件 (2), (3), (4) をみたすような組 (L,F) を大量に構成する．そのあとで構成したそれらの中から，補題 10 の仮定をみたすものを探す，という手順で Siegel 円板をもつ K3 曲面上の自己同型の存在がいえる．実際，後述の表 1 に対応する超幾何格子上の自己同型が補題 10 の仮定をみたす．これを判断するための具体的な計算は [4] をみてほしい．

■超幾何群・超幾何格子　$\mathrm{rk}(A-B)=1$ をみたす $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ の 2 元 A,B で生成される群を**超幾何群**とよぶ．超幾何群 $H=\langle A,B\rangle$ に対して $C:=A^{-1}B$ とおく．$\mathrm{rk}(C-I)=1$（I は単位行列）なので $c:=\det C$ は C の固有値である．

ふたつの n 次のモニック多項式

$$\varphi(t)=t^n+\varphi_1t^{n-1}+\cdots+\varphi_n,\quad \psi(t)=t^n+\psi_1t^{n-1}+\cdots+\psi_n\in\mathbb{C}[t]$$

に対して

$$A=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&-\varphi_n\\1&0&\dots&0&-\varphi_{n-1}\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\0&0&&1&-\varphi_1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&-\psi_n\\1&0&\dots&0&-\psi_{n-1}\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\0&0&&1&-\psi_1\end{pmatrix}$$

とおくと A,B の固有多項式はそれぞれ $\varphi(t),\psi(t)$ で $\langle A,B\rangle<\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ は超幾何群である．この超幾何群を $H(\varphi,\psi)$ とかく．超幾何群 $H(\varphi,\psi)$ について $c\neq1$ を仮定し，c に対応する C の固有ベクトル z を固定する．

$\varphi(t), \psi(t)$ が整数係数であって $t^n\varphi(t^{-1}) = \varphi(0)\varphi(t)$, $t^n\psi(t^{-1}) = \psi(0)\psi(t)$ をみたすならば，自由 $\mathbb{Z}$ 加群

$$L(\varphi, \psi) = \langle z, Az, A^2z, \ldots, A^{n-1}z \rangle_{\mathbb{Z}}$$

は $H(\varphi, \psi)$ 不変であって，さらに $H(\varphi, \psi)$ 不変な内積をもつ格子となる．これを**超幾何格子**とよぶ．

超幾何格子 $L := L(\varphi, \psi)$ が K3 格子であって，A の固有多項式 $\varphi(t)$ は Salem 多項式 $\varphi_0(t)$ と円分多項式の積 $\varphi_1(t)$ の積であるとする．A の固有ベクトル $\eta \in L_{\mathbb{C}}$ で $\mathbb{C}\eta \oplus \mathbb{C}\overline{\eta}$ の符号が $(2, 0)$ であるようなものは L に A 不変な Hodge 構造を定める．このとき η に対応する固有値 δ が Salem 数の共役数ならば A に適切な修正を施して得られる L 上の自己同型 $\tilde{A}$ は Hodge 構造 η と Kähler 錐を保つ自己同型となる．さらに $\tilde{A}$ の固有多項式 $\tilde{\varphi}(t)$ は

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi_0(t)\tilde{\varphi}_1(t) \quad \text{for some } \tilde{\varphi}_1(t) : \text{円分多項式の積}$$

とかける．詳細については [3, 4] をみてほしい．

■超幾何格子が K3 格子となる例　我々は [3] で超幾何格子が K3 格子になるための条件を詳しく調べている．[4] ではその結果を用いて，超幾何格子が K3 格子になるようなモニック多項式 φ, ψ のペアを，リフトの K3 曲面の Picard 数ごとに大量に構成している．

下の表 1 の φ, ψ に対して $(L(\varphi, \psi), \tilde{A})$ は K3 格子上のある K3 構造を保つ自己同型であって，そのリフトが Siegel 円板をもつ．ただし，表の ρ はリフトの K3 曲面の Picard 数で，$\delta, \varphi_1(t)$ は上述のものである．$\rho = 0$ の場合も超幾何格子上の自己同型のリフトとして得られるのだが，少し事情が異なるので表には載せていない（Picard 数 0 の K3 曲面上の自己同型で Siegel 円板をもつものが存在することは McMullen[6] により既に得られている結果でもある）．Dynkin 型は Picard 格子のルート系の Dynkin 型のことである．本稿ではあまり触れていないが，不動点公式を使うときに必要になるので表に含めている．また c_i は i 番目の円分多項式で，s_i^k は次数が k の Salem 数の中で小さい方から i 番目の Salem 数の最小多項式である．

表 1　$(L(\varphi, \psi), \tilde{A})$ のリフトが Siegel 円板をもつ K3 曲面上の自己同型になるもの．

ρ	φ	ψ	$\delta + \delta^{-1}$	Dynkin 型	$\tilde{\varphi}_1$
2	$s_1^{(20)}c_1c_2$	$s_1^{(10)}c_{21}$	-1.39262	A_1	c_1c_2
4	$s_{22}^{(18)}c_1c_2c_4$	$s_1^{(6)}c_{48}$	-0.493116	$\mathrm{A}_1 \oplus \mathrm{A}_1$	$c_1c_2c_4$
6	$s_5^{(16)}c_1c_2c_3c_4$	$s_2^{(10)}c_{42}$	-1.64926	$\emptyset$	$c_1c_2c_3c_4$
8	$s_1^{(14)}c_1c_2c_{14}$	$s_4^{(14)}c_{24}$	1.74567	E_8	c_1^8
10	$s_1^{(12)}c_1c_2c_{16}$	$s_3^{(6)}c_{60}$	-1.89888	D_9	$c_1^8c_2^2$
12	$s_1^{(10)}c_1c_2c_4c_{16}$	$s_1^{(6)}c_{40}$	-0.584664	$\mathrm{E}_6 \oplus \mathrm{E}_6$	$c_1^4c_2^4c_4^2$
14	$s_{16}^{(8)}c_1c_2c_3c_{12}c_{18}$	$s_{12}^{(10)}c_{42}$	-0.751024	$\emptyset$	$c_1c_2c_3c_{12}c_{18}$
16	$s_1^{(6)}c_1c_2c_4c_{26}$	$s_{43}^{(22)}$	-0.254102	D_{16}	c_1^{16}
18	$s_1^{(4)}c_1c_2c_8c_{12}c_{30}$	※	-1.30278	$\mathrm{A}_2^{\oplus 2} \oplus \mathrm{E}_6 \oplus \mathrm{E}_8$	$c_1^{13}c_2^3c_4$

※ $t^{22} - t^{21} - 2t^{20} + 2t^{18} + t^{17} - t^{15} - 2t^{14} + t^{12} + t^{11} + t^{10} - 2t^8 - t^7 + t^5 + 2t^4 - 2t^2 - t + 1$

参考文献

[1] M.F. Atiyah and R. Bott. *A Lefschetz fixed point formula for elliptic complexes Ⅱ.* Ann. of Math. (2) **88** (1968), 451–491.

[2] T.-C. Dinh, V.-A. Nguyên and T.T. Truong. *Growth of the number of periodic points for meromorphic maps.* Bull. Lond. Math. Soc. **49** (2017), no. 6, 947–964.

[3] K. Iwasaki and Y. Takada. *Hypergeometric groups and dynamics on K3 surfaces.* to appear in Math. Z. A preprint version is available at arXiv:2003.13943v4

[4] K. Iwasaki and Y. Takada. *K3 surface, Picard numbers and Siegel disks.* arXiv:2111.03787.

[5] K. Iwasaki and T. Uehara. *Periodic points for area-preserving birational maps of surfaces.* Math. Z. **266** (2010), no. 2, 289–318.

[6] C.T. McMullen. *Dynamics on K3 surfaces: Salem numbers and Siegel disks.* J. Reine Angew. Math. **545** (2002), 201–233.

[7] K. Oguiso. *The third smallest Salem number in automorphisms of K3 surfaces.* Algebraic geometry in East Asia-Seoul 2008, 331–360, Adv. Stud. Pure Math., **60**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2010.

[8] S. Saito. *General fixed point formula for an algebraic surface and the theory of Swan representations for two-dimensional local rings.* Amer. J. Math. **109** (1987), no. 6, 1009–1042.

[9] D. Toledo and Y.L. Tong. *Duality and intersection theory in complex manifolds. Ⅱ. The holomorphic Lefschetz formula.* Ann. of Math. (2) **108** (1978), no. 3, 519–538.

[10] D. Toledo. *On the Atiyah-Bott formula for isolated fixed points.* J. Defferencial Geometry **8** (1973), 401–436.

Kirby 図式とポシェット手術を用いた 4 次元多様体の構成

東京工業大学 理学院 数学系 数学コース
鈴木龍正 (Tatsumasa SUZUKI)

概要

$S^1 \times D^3$ と $S^2 \times D^2$ の境界連結和をポシェットという. 4 次元多様体にポシェット P を埋め込み, P の内部を取り除き, P の境界の微分同相写像で P を貼り戻す操作をポシェット手術という. 本講演では, 特定の Kirby 図式上でのポシェット手術の操作手順を与える. また, 単連結な 4 次元閉多様体 M 上のポシェット手術によって, ホモトピー M を構成するための必要条件を提示する. 更に, 実際にポシェット手術で得られるホモトピー M を Kirby 計算で構成する.

1 導入

$\mathbb{N}$ は正の整数全体, $\mathbb{Z}$ は整数全体, $\mathbb{Q}$ は有理数全体, $\mathbb{R}$ は実数全体とする.
$D^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{k=1}^n x_k^2 \leqq 1\}$, $S^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1\}$ とする.
以下では, 多様体と写像は全て滑らかであると仮定する.

位相幾何学の分野において, 全ての 4 次元多様体の微分同相類を特定する問題は, 重要な未解決問題の一つである. 4 次元多様体に 2 次元球面と 2 次元球体の直積 $S^2 \times D^2$ が埋め込まれているとき, $S^2 \times D^2$ の内部 $S^2 \times \mathrm{Int}D^2$ を取り除いた後に, 境界 $S^2 \times S^1$ の微分同相写像によって $S^2 \times D^2$ を貼り戻す操作を Gluck 手術 (Gluck surgery) という. 4 次元球面 S^4 上の Gluck 手術は 4 次元ホモトピー球面を生成する. S^4 上の Gluck 手術により得られた 4 次元ホモトピー球面が S^4 と微分同相であるかは未解決問題であるが, $S^2 \times D^2$ の埋め込み方が 0-slice 2-knot（Melvin の定理 [Me]）や twist spun 2-knot（Gordon の定理 [G]）に対応するときは, S^4 と微分同相であることが知られている. 2004 年に岩瀬順一氏と松本幸夫氏により Gluck 手術の一般化であるポシェット手術が導入された [IM]. 4 次元多様体に円周と 3 次元球体の直積と 2 次元球面と 2 次元球体の直積の境界連結和 $(S^1 \times D^3) \natural (S^2 \times D^2)$ が埋め込まれているとき, $\mathrm{Int}((S^1 \times D^3) \natural (S^2 \times D^2))$ を取り除いた後に, 境界 $(S^1 \times S^2) \# (S^2 \times S^1)$ の微分同相写像によって $(S^1 \times D^3) \natural (S^2 \times D^2)$ を貼り戻す操作をポシェット手術という. ポシェット手術は全ての 4 次元多様体上で操作可能である.

2 4 次元多様体と Kirby 計算

2.1 4 次元多様体

4 次元多様体についての 2 つの有名な結果について紹介する.
以下では, $Q_M \colon H_2(M) \times H_2(M) \to \mathbb{Z}$ を 4 次元多様体 M の交叉形式とする.

定理 2.1(Whitehead の定理)[W]. M_1, M_2 を向き付けられた単連結な 4 次元閉多様体のとき, M_1 と M_2 が向きを保ってホモトピー同値であるための必要十分条件は $Q_{M_1} \cong Q_{M_2}$ である.

定理 2.2(Freedman の定理)[F]. M を 4 次元多様体とする. M と S^4 がホモトピー同値のとき, M と S^4 は同相である.

2.2 ハンドル分解

定義 2.3(ハンドル). $0 \leqq k \leqq n (k, n \in \mathbb{Z})$ とし, X を n 次元コンパクト多様体とする. n 次元 k ハンドル h^k とは, ある埋め込み写像 $\varphi\colon \partial D^k \times D^{n-k} \to \partial X$ により $\partial D^k \times D^{n-k}$ に沿って X の境界 ∂X に接着される $D^k \times D^{n-k}$ のコピーのことである. このとき, $D^k \times \{0\}$ を心球体 (core), $\{0\} \times D^{n-k}$ を横断球体 (cocore), $\partial D^k \times D^{n-k}$ を接着領域 (attaching region), $\partial D^k \times \{0\}$ を接着球面 (attaching sphere), $\{0\} \times \partial D^{n-k}$ をベルト球面 (belt sphere) と呼ぶ.

定義 2.4(ハンドル分解). X を n 次元コンパクト多様体, $\partial_+ X$, $\partial_- X$ を X のコンパクト部分多様体とし, $\partial X = \partial_+ X \cup \partial_- X$(非交和) とする. このとき, X は $I \times \partial_- X$ にいくつかのハンドルを接着して得られる多様体と微分同相である (但し, $I := [0, 1]$ であり, $\{0\} \times \partial_- X$ と $\partial_+ X$ が対応しているとする). これを $\partial_- X$ 上に作られた相対ハンドル体と呼び, $\partial_- X = \emptyset$ のときは単にハンドル体と呼ぶ. X と微分同相な (相対) ハンドル体を求めることを $(X, \partial_- X)$ のハンドル分解という.

2.3 Kirby 図式

X を 4 次元コンパクト連結多様体とし, $\partial_- X = \emptyset$ とすると, X のあるハンドル分解はただ 1 つの 0 ハンドル D^4 を持つ. X のハンドル体は, この 0 ハンドルの境界に 1, 2, 3, 4 ハンドルを順に接着して得られる多様体である. これらのハンドルの接着領域を 0 ハンドルの境界, $\partial D^4 = S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 上に図示した様子を Kirby 図式という. 但し, $\partial_+ X = \emptyset$ のとき, 3, 4 ハンドルの接着の仕方はアイソトピーを除いて一意的なので, それらのハンドルの接着の様子は図示しなくて良い.

定義 2.5(絡み数). K_1, K_2 を S^3 内の向きの付いた絡み目とする. このとき, $H_1(S^3 - K_1) \cong \mathbb{Z}$ が成立するので, $H_1(S^3 - K_1)$ は K_1 のメリディアン μ で生成され, $[K_2] = n[\mu]$ を満たすただ 1 つの $n \in \mathbb{Z}$ が存在する. このとき, n を絡み数 (linking number) と呼び, $lk(K_1, K_2)$ と表す.

定理 2.6. K_2 が K_1 の下を通って交叉するときの符号付き和は $lk(K_1, K_2)$ に等しい.

定義 2.7. K を結び目とし, K' を K に平行な結び目とする. $lk(K, K')$ を K によって定まる framing の framing 係数という.

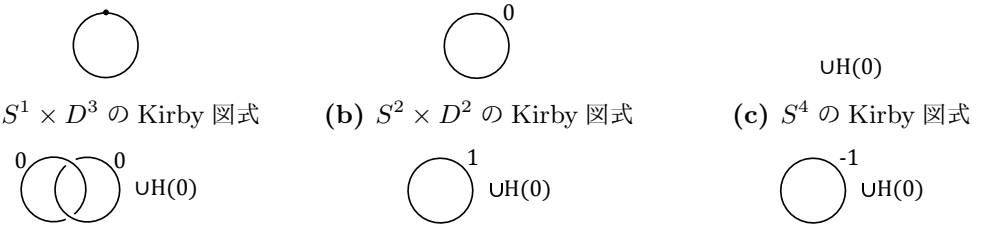
1 ハンドル $D^1 \times D^3$ の接着領域は $\partial D^1 \times D^3 = D^3 \cup D^3$(非交和) であるから, $\mathbb{R}^3$ に 2 個の閉球を描く. このとき, 2 個の閉球が鏡像関係になるように描く. また, 1 ハンドルは自明な結び目 (unknot) に dot を付けた dotted circle としても描くことができる.

2 ハンドルは接着領域が $\varphi(S^1 \times D^2)$ であるが, 簡略化して $\varphi(S^1 \times \{0\})$ を描く. しかし, $\varphi(S^1 \times \{0\})$

を指定しただけでは, 接着写像のアイソトピー類は一意に定まらないので framing を指定する必要がある. 具体的には, 2 ハンドルは $\mathbb{R}^3$ 上の framing 係数の付いた絡み目 (link) として表現可能である.

2.4 Kirby 図式と手術図式の例

以下では, $H(n)$ は n 個の 4 次元 3 ハンドルと 1 個の 4 次元 4 ハンドルの和集合を表すことにする. D^4 の Kirby 図式は何も描かれていない Kirby 図式である.



(a) $S^1 \times D^3$ の Kirby 図式　**(b)** $S^2 \times D^2$ の Kirby 図式　**(c)** S^4 の Kirby 図式

(d) $S^2 \times S^2$ の Kirby 図式　**(e)** $\mathbb{CP}^2$ の Kirby 図式　**(f)** $\overline{\mathbb{CP}^2}$ の Kirby 図式

図 1: Kirby 図式の例

S^3 内の手術の様子を図示したものを手術図式 (surgery diagram) と呼ぶ. S^3 の手術図式は何も描かれていない手術図式である. 図 2(a) では $p, q \in \mathbb{Z}$, $\gcd(p, q) = 1$ とする.



(a) (p, q) 型のレンズ空間 $L(p, q)$ の手術図式　**(b)** 3 次元トーラス T^3 の手術図式

図 2: 手術図式の例

$\partial M_1 \neq \emptyset$ かつ $\partial M_1 \neq \emptyset$ のとき, M_1 と M_2 との境界連結和により得られる 4 次元多様体 $M_1 \natural M_2$ の Kirby 図式は, M_1 の Kirby 図式と M_2 の Kirby 図式を並べて描くことで得られる. $\partial M_1 = \emptyset$ かつ $\partial M_2 \neq \emptyset$ のとき, M_1 と M_2 との連結和により得られる 4 次元多様体 $M_1 \# M_2$ の Kirby 図式は, M_1 から 1 個の 4 ハンドルを除いた 4 次元多様体の Kirby 図式と M_2 の Kirby 図式を並べて描くことで得られる. $\partial M_1 = \emptyset$ かつ $\partial M_2 \neq \emptyset$ のとき, M_1 と M_2 との連結和により得られる 4 次元多様体 $M_1 \# M_2$ の Kirby 図式は, M_1 から 1 個の 4 ハンドルを除いた 4 次元多様体の Kirby 図式と M_2 から 1 個の 4 ハンドルを除いた 4 次元多様体の Kirby 図式を並べて描き, 1 個の 4 ハンドルを加えることで得られる.



(a) $(S^1 \times D^3) \natural (S^2 \times D^2)$ の Kirby 図式　**(b)** $\mathbb{CP}^2 \# \overline{\mathbb{CP}^2}$ の Kirby 図式

図 3: $M_1 \natural M_2$ と $M_1 \# M_2$ の Kirby 図式の例

2.5 Kirby 計算

以下に示すハンドルスライドやハンドル消去, ハンドル生成, Dehn 手術等の Kirby 図式を変形させる操作を Kirby 変形と呼び, Kirby 変形を用いて 4 次元多様体の Kirby 図式を導出することを Kirby 計算と呼ぶ.

定義 2.8(ハンドルスライド). $0 \leqq k \leqq n (k, n \in \mathbb{Z})$ とする. X をコンパクト n 次元多様体とし, h_1^k, h_2^k を n 次元 k ハンドルとする. h_1^k の接着球面が h_2^k のベルト球面に横断するようハンドルを動かすことができる. この操作をハンドルスライドと呼ぶ.

ハンドルスライドが Kirby 図式上でどのように表されるかを述べる. ハンドル分解の特性上, 1 ハンドルを 2 ハンドル上スライドすることはできない. 従って, Kirby 計算においては, 1(または 2) ハンドル同士のスライドか, 2 ハンドルを 1 ハンドル上スライドするという操作のみ可能である.

h_i を 4 次元ハンドル $(i \in \{1, 2\})$ とし, ある枠付き結び目 (framed knot)K_i で表現されているとする. 但し, h_2 が 4 次元 1 ハンドルの場合は framing 係数が 0 の結び目 (knot) として考えることにする. K_i に向きを定める. K_2 の framing を表す平行曲線を K_2' とする. h_1 を h_2 上スライドする操作は, Kirby 図式上では K_1 と K_2' のバンド和 $\hat{K_1}$ を考え, K_1 を $\hat{K_1}$ に取り換える操作に対応する (図 4). $\hat{K_1}$ と K_2 の向きが一致するとき, この操作を handle addition と呼び, $\hat{K_1}$ と K_2 の向きが反対になるとき, handle subtraction と呼ぶ. K_i の framing 係数を n_i とする. K_1 を K_2 上ハンドルスライドすると, n_i は以下のように変化する:

$$\texttt{addition} : n_1 \to n_1 + n_2 + 2lk(K_1, K_2); n_2 \to n_2$$

$$\texttt{subtraction} : n_1 \to n_1 + n_2 - 2lk(K_1, K_2); n_2 \to n_2$$

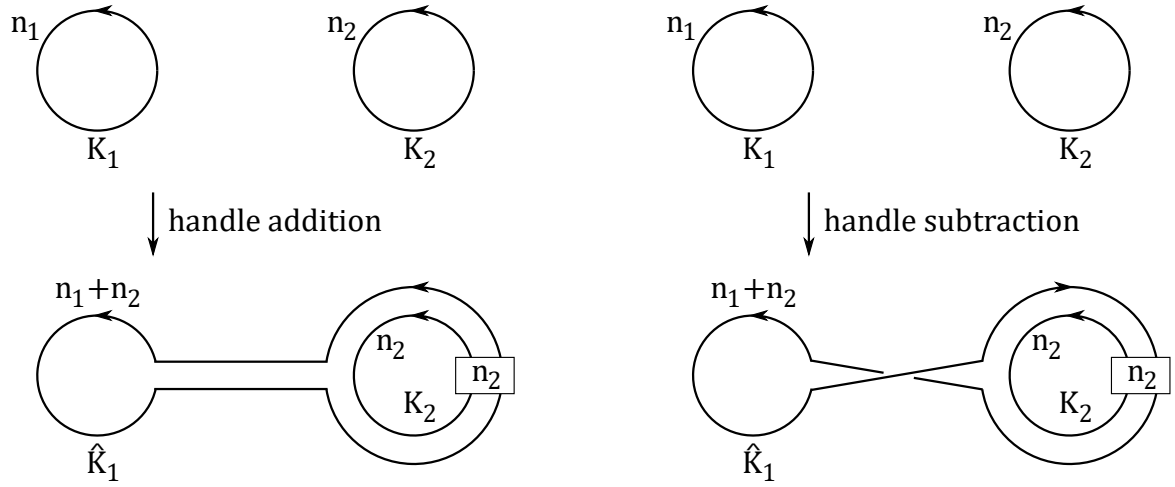


図 4: ハンドルスライドの例

定義 2.9(ハンドル消去, ハンドル生成). $0 \leqq k \leqq n (k, n \in \mathbb{Z})$ とし, X をコンパクト n 次元多様体とする. X に k ハンドル h^k と $(k+1)$ ハンドル h^{k+1} が接着しているとする. h^k のベルト球面と h^{k+1}

の接着球面が丁度 1 個の点で横断的に交わるとき, h^k と h^{k+1} を消去することができる. h^k と h^{k+1} を消去する操作をハンドル消去と呼び, 逆の操作をハンドル生成と呼ぶ.

Kirby 図式上では, 消去対 (h^1, h^2), (h^2, h^3) は図 5 のようになる.



(a) 消去対 $(h^1, h^2)(n \in \mathbb{Z})$ **(b)** 消去対 (h^2, h^3)

図 5: 消去対の例

2.6 相対 Kirby 計算

X を 4 次元コンパクト連結多様体とする. これまでの相対ハンドル体の説明では, $\partial_- X = \emptyset$ と仮定したが, ここでは $\partial_- X \neq \emptyset$ とする. $\partial_- X$ は $\mathbb{R}^3$ 上の手術図式によって描く. この手術図式の上に 1, 2, 3, 4 ハンドルの接着を Kirby 図式として描いた図を, $(X, \partial_- X)$ の相対 Kirby 図式 (relative Kirby diagram) と呼ぶ.

この相対 Kirby 図式上での変形については以下のような規則がある:
(1) ハンドルは Kirby 図式と同様の変形を行うことができる.
(2)$\partial_- X$ の絡み目は $\partial_- X$ 内で, ハンドルスライドや Rolfsen twist ができる.
(3)$\partial_- X$ の絡み目はハンドルの上をスライドさせることができない.

例 2.10(upside down). upside down とは, ハンドル体の上下を反転させる操作である. それは次の手順で行うことができる:

($(X, \partial_- X)$ に 3, 4 ハンドルが存在しない場合)
まず, ハンドル体 $(X, \partial_- X)$ の double をとると, $(X, \partial_- X)$ は $(X, \overline{\partial_+ X})$ を誘導する. このとき, 0 ハンドルは 4 ハンドルを, 1 ハンドルは 3 ハンドルを, 2 ハンドルは心球体と横断球体が反対になった 2 ハンドルをそれぞれ誘導する. 最後に, $(X, \partial_- X)$ を取り除くと, upside down が完了する. 相対 Kirby 図式上では 0 ハンドルが存在すれば 4 ハンドルを加え, 1 ハンドルの個数分だけ 3 ハンドルを加え, 各 2 ハンドルの接着円周に 0-framed meridian を加え, $(X, \partial_- X)$ の 1 ハンドルを表す dotted circle を $\langle 0 \rangle$-framed unknot に代え, $(X, \partial_- X)$ の 2 ハンドルの係数に $\langle\rangle$ を付け加えることで upside down が完了する.

($(X, \partial_- X)$ に 3, 4 ハンドルが存在する場合)
まず, ハンドル体 $(X, \partial_- X)$ から全ての 3, 4 ハンドルを取り除き, 得られるハンドル体を $(Y, \partial_- Y)$ とする. $(Y, \partial_- Y)$ は 3, 4 ハンドルが存在しないハンドル体であるから, $(Y, \partial_- Y)$ に対して 3, 4 ハンドルが存在しない場合の upside down を実行する. その後, $(X, \partial_- X)$ の 3 ハンドルの個数分だけ 1 ハンドルを加え, $(X, \partial_- X)$ の 4 ハンドルの個数分だけ 0 ハンドルを加えると, $(X, \partial_- X)$ の upside down が完了する. 相対 Kirby 図式上では $(X, \partial_- X)$ から全ての 3, 4 ハンドルを取り除き, $(Y, \partial_- Y)$

に upside down を実行した後に, 適切な相対 Kirby 計算を施すと, $(X, \partial_- X)$ の 3 ハンドルの個数分の $\langle 0 \rangle$-framed knot を持つ相対 Kirby 図式が得られるので, この相対 Kirby 図式にある全ての $\langle 0 \rangle$-framed knot を dotted circle に変更すると, upside down が完了する.

本節のより発展的な内容は [GS] に書かれている.

3 ポシェット手術

3.1 Gluck 手術とポシェット手術の関係

定義 3.1(Gluck 手術). M を 4 次元多様体, $e\colon S^2 \times D^2 \to M$ を埋め込み写像, $h\colon \partial S^2 \times D^2 \to \partial(M - \mathrm{Int} e(S^2 \times D^2))$ を微分同相写像とする. M 上の Gluck 手術 (Gluck surgery) とは, M から $\mathrm{Int} e(S^2 \times D^2)$ を取り除いた後に, $h\colon \partial S^2 \times D^2 \to \partial(M - \mathrm{Int} e(S^2 \times D^2))$ によって $S^2 \times D^2$ を貼り直す操作のことである.

定義 3.2(ポシェット)[IM]. $(S^1 \times D^3) \natural (S^2 \times D^2)$ に微分同相な 4 次元多様体をポシェットと呼び, P と表す.

ポシェットの名前は P が $S^1 \vee S^2$ にホモトピー同値であることに由来する.

$\partial P \approx (S^1 \times \partial D^3) \# (S^2 \times \partial D^2)$ より $H_1(\partial P) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ であるから $H_1(\partial P)$ の生成元として $[S^1 \times \{*\}]$ と $[\{*\} \times \partial D^2]$ がとれる. ∂P 上の曲線 $l := S^1 \times \{*\}$, $m := \{*\} \times \partial D^2$ をそれぞれ P のロンジチュード (longitude), メリディアン (meridian) と呼ぶ.

定義 3.3(ポシェット手術)[IM]. M を 4 次元多様体, $e\colon P \to M$ を埋め込み写像, $h\colon \partial P \to \partial(M - \mathrm{Int} e(P))$ を微分同相写像とする. M 上のポシェット手術とは, M から $\mathrm{Int} e(P)$ を取り除いた後で, $h\colon \partial P \to \partial(M - \mathrm{Int} e(P))$ によって P を貼り直す操作のことである. M 上のポシェット手術後に得られる 4 次元多様体 $(M - \mathrm{Int} e(P)) \cup_h P$ を $M(e, h)$ とする.

$(p, q, \varepsilon) = (1, 0, 1)$ のとき, ポシェット手術は Gluck 手術に他ならない.

定義 3.4(mod 2 framing). $h\colon \partial P \to \partial(M - \mathrm{Int} e(P))$ を接着写像とする. P の境界 $(S^1 \times \partial D^3) \# (S^2 \times \partial D^2)$ は自然に 2 成分の framing 係数が 0 の自明な結び目から構成される絡み目と思えるので, 曲線 $h(m)$ は自明な 2 成分絡み目の補空間内にある結び目 K である. S^3 内の結び目図式として, K の Seifert framing をとる. 一方で, 積構造 $S^2 \times D^2$ の像からなる $h(m)$ の framing の像としてもう一つ別の framing が取れる. 自明な 2 成分絡み目に対するハンドルスライドは framing を 2 ずつ変えることにより, この 2 つの framing の差は $(S^1 \times S^2) \# (S^2 \times S^1)$ 内で mod 2 を法とした整数として well-defined である. この 2 つの差を mod 2 framing と呼ぶ.

3.2 ポシェット手術についての先行結果

定理 3.5($M(e, h)$ の微分同相類の決定要素)[IM, Theorem 2]. $M(e, h)$ の微分同相類は, 以下の要素で決定される:

(1) 埋め込み写像 $e\colon P \to M$,
(2) ホモロジー類 $h_*([m]) \in H_1(\partial(M - \mathrm{Int}e(P))) \cong \mathbb{Z}[m] \oplus \mathbb{Z}[l]$,
(3) $h(m)$ のまわりの mod 2 framing.

以下では, $p, q \in \mathbb{Z}$, $\gcd(p,q) = 1$, $\varepsilon \in \{0,1\}$, $i_P\colon P \to DP$ を包含写像とし, $h_*([m]) = p[m]+q[l]$ を満たし, $h(m)$ のまわりの mod 2 framing が $\varepsilon \in \{0,1\}$ の微分同相写像 $h\colon \partial P \to \partial(M - \mathrm{Int}e(P))$ を $h_{p,q,\varepsilon}\colon \partial P \to \partial(M - \mathrm{Int}e(P))$ と表すことにする. 4 次元閉多様体 DP を P の double ($DP \approx (S^1 \times S^3)\#(S^2 \times S^2)$), 4 次元閉多様体 $L(n;0,1;\varepsilon)$ を Pao の多様体 [P] とする ($n \in \mathbb{Z}$). 2011 年に早野健太氏は $L(n;0,1;\varepsilon)$ の Kirby 図式は図 6 であることを示している [H].

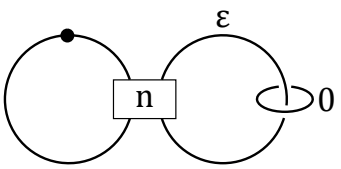


図 6: Pao の多様体 $L(n;0,1;\varepsilon)$ の Kirby 図式

2013 年に柏木信一氏は DP 上のポシェット手術において, (p,q) とハンドルの相互スライドが p/q の連分数展開を介して関係することを発見し, 次の定理を証明した.

定理 3.6[K, 定理 2]. $DP(i_P, h_{0,1,\varepsilon})$ は S^4 に微分同相であり, $DP(i_P, h_{1,q,\varepsilon})$ は $L(q;0,1;\varepsilon)$ に微分同相である.

2015 年に村瀬裕一氏は DP 上のポシェット手術で得られる多様体の Kirby 図式を決定することで, 定理 3.6 の主張を拡張した.

定理 3.7(包含写像を用いた DP 上のポシェット手術の完全分類)[Mu, 定理 1.2]. $q > p \geqq 0$ のとき, $DP(i_P, h_{p,q,\varepsilon})$ は $L(q;0,1;\varepsilon)$ に微分同相である.

2020 年に大川翼氏は S^4 上のポシェット手術が 4 次元ホモロジー球面になるための条件を発見した.

定理 3.8[O, 定理 1.1]. $n \in \mathbb{Z}$ とする. Mayer-Vietoris 完全系列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(\partial P) \xrightarrow{i_{n1} \oplus i_{n2}} H_n(S^4 - \mathrm{Int}e(P)) \oplus H_1(P) \xrightarrow{j_n} H_n(S^4(e, h_{p,q,\varepsilon})) \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

において, $i_{11}([l]) = 0$ が成立するとき,
(1)$H_1(S^4(e, h_{p,q,\varepsilon})) \cong \mathbb{Z}_p$,
(2)$H_2(S^4(e, h_{1,q,\varepsilon})) = 0$.
特に, $S^4(e, h_{p,q,\varepsilon})$ と S^4 がホモトピー同値ならば $p = 1$ が成立する.

定理 2.1 と定理 2.2, 定理 3.8 より, 次の定理が直ちに従う.

定理 3.9. $i_1([l]) = 0$ が成立するとき, $S^4(e, h_{p,q,\varepsilon})$ と S^4 が同相であるための必要十分条件は $S^4(e, h_{p,q,\varepsilon})$ は単連結かつ $p = 1$ である.

また, 大川氏は次の定理も証明した.

定理 3.10(自明なコードを用いた S^4 上のポシェット手術)[O, 定理 1.2]. $e\colon P \to S^4$ が P を ribbon 2-knot に自明なコードを接着した多様体になるように埋め込むとき, 多様体 $S^4(e, h_{1,q,\epsilon})$ は S^4 に微分同相である.

4 主結果

定理 4.1(定理 3.7 の拡張)[S, 定理 1.1(1)]. d, d_1, $d_2 \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$, $p, q \geqq 0$. Y を 4 次元多様体 (4 次元ハンドル体), i を Y の 1 ハンドルの数, $X = DY$(Y の double) とする. 図 7 のように 2 種の記号を定義する.

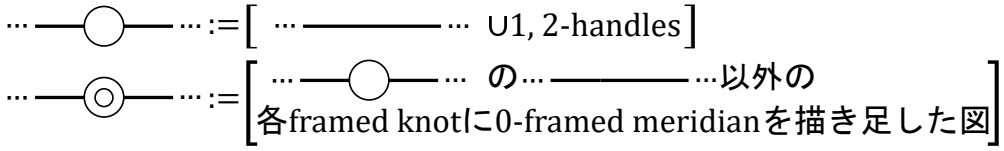


図 7: 2 種の記号

Y の Kirby 図式が図 8 になるとし, $e\colon P \to X$ を図 9 で定める. $X(e, h_{p,q,\varepsilon})$ の Kirby 図式は $(p, q) = (1, 0)$ または $0 < p < q$ のとき図 10(a) になり, $(p, q) = (0, 1)$ のとき図 10(b) になる.

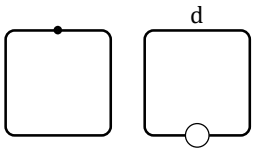


図 8: Y の Kirby 図式

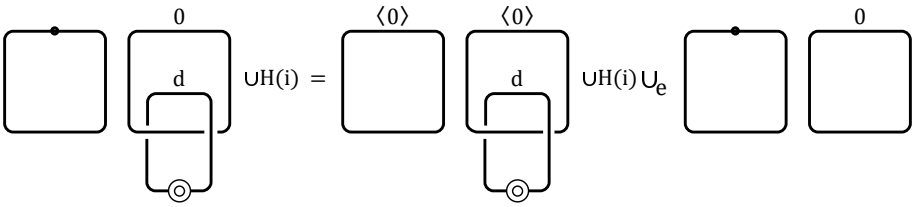


図 9: $e\colon P \to X$ の定め方



(a) $(p, q) = (1, 0)$ または $0 < p < q$ の場合　　**(b)** $(p, q) = (0, 1)$ の場合

図 10: $X(e, h_{p,q,\varepsilon})$ の Kirby 図式

多様体 M に対して, e^n を M の n 胞体とする ($n \geqq 0, n \in \mathbb{Z}$). また, ∂P 上の球面 $\{*\} \times \partial D^3$, $S^2 \times \{*\}$ をそれぞれ a, b とする. 定理 3.8 のアナロジーとして, 次の定理が成り立つ.

定理 4.2. $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}$ とする. M を連結かつ単連結な 4 次元閉多様体とし, $M = e^0 \cup \bigcup_{k=1}^{m} e_k^2 \cup e^4$ を M の胞体分割とする. このとき, 空間対 $(M, M - \mathrm{Int}e(P))$ の長完全系列

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(M - \mathrm{Int}e(P)) \xrightarrow{k_n} H_n(M) \xrightarrow{l_n} H_n(M, M - \mathrm{Int}e(P)) \xrightarrow{\delta_n} \cdots$$

において, $l_2 = 0$ が成立し, Mayer-Vietoris 完全系列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(\partial P) \xrightarrow{i_{n1} \oplus i_{n2}} H_n(M - \mathrm{Int}e(P)) \oplus H_n(P) \xrightarrow{j_n} H_n(M(e, h_{p,q,\varepsilon})) \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

において, $i_{11}([l]) = 0$, $i_{21}(H_2(\partial P)) \subset \mathbb{Z}[e(a)] \oplus \mathbb{Z}[b]$ が成立するとき,
(1)$H_1(M(e, h_{p,q,\varepsilon})) \cong \mathbb{Z}_p$,
(2)$H_n(M(e, h_{1,q,\varepsilon})) \cong H_n(M)$.
特に, $M(e, h_{p,q,\varepsilon})$ と M がホモトピー同値ならば $p = 1$ が成立する.

定理 2.1 と定理 4.2 より, 次の定理が直ちに従う.

定理 4.3. $l_2 = 0$, $i_{11}([l]) = 0, i_{21}(H_2(\partial P)) \subset \mathbb{Z}[e(a)] \oplus \mathbb{Z}[b]$ が成立するとき, $M(e, h_{p,q,\varepsilon})$ と M がホモトピー同値であるための必要十分条件は $M(e, h_{p,q,\varepsilon})$ が単連結かつ $p = 1$ である.

例 4.4. $S^2 \times S^2$ は連結かつ単連結な 4 次元閉多様体である. $S^2 \times S^2$ の胞体分割として, $S^2 \times S^2$ $= e^0 \cup \bigcup_{k=1}^{2} e_k^2 \cup e^4$ が取れる. $m = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3$ とする. $e_m \colon P \to S^2 \times S^2$ を $S^2 \times S^2$, $(S^2 \times S^2)(e_m, h_{p,q,\varepsilon})$ の Kirby 図式がそれぞれ図 11, 12 になるよう定めると, 空間対
$(S^2 \times S^2, S^2 \times S^2 - \mathrm{Int}e_m(P))$ の長完全系列

$$\cdots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(S^2 \times S^2 - \mathrm{Int}e_m(P)) \xrightarrow{k_n} H_n(S^2 \times S^2) \xrightarrow{l_n} H_n(S^2 \times S^2, S^2 \times S^2 - \mathrm{Int}e_m(P)) \xrightarrow{\delta_n} \cdots$$

において, $l_2 = 0$ が成立し, Mayer-Vietoris 完全系列

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(\partial P) \xrightarrow{i_{n1} \oplus i_{n2}} H_n(S^2 \times S^2 - \mathrm{Int}e_m(P)) \oplus H_n(P) \xrightarrow{j_n} H_n((S^2 \times S^2)(e_m, h_{p,q,\varepsilon})) \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

において, $i_{11}([l]) = 0$, $i_{21}(H_2(\partial P)) \subset \mathbb{Z}[e(a)] \oplus \mathbb{Z}[b]$ が成立する ($n \in \mathbb{Z}$). また,
$\pi_1((S^2 \times S^2)(e_m, h_{p,q,\varepsilon})) = 1$ より $(S^2 \times S^2)(e_m, h_{p,q,\varepsilon})$ は単連結であるから, 定理 4.3 より
$(S^2 \times S^2)(e_m, h_{p,q,\varepsilon})$ と $S^2 \times S^2$ はホモトピー同値である. 更に, upside down を利用した相対 Kirby 計算により, $(S^2 \times S^2)(e_m, h_{p,q,\varepsilon})$ と $S^2 \times S^2$ は微分同相であることが分かる.

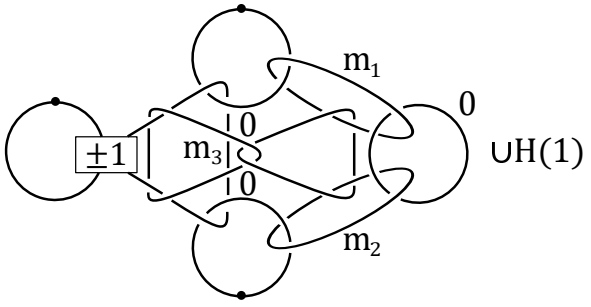


図 11: $S^2 \times S^2$ の Kirby 図式

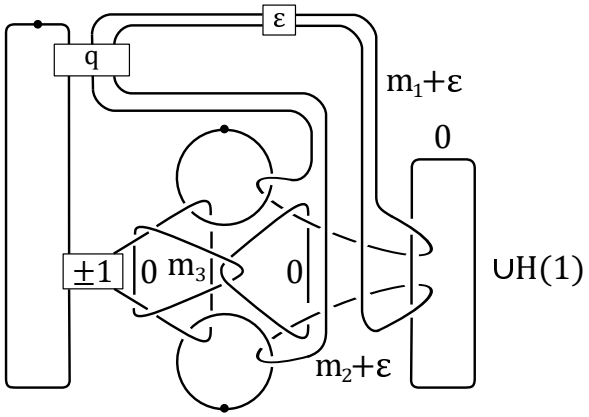


図 12: $(S^2 \times S^2)(e_m, h_{p,q,\varepsilon})$ の Kirby 図式

謝辞

本研究は東京工業大学次世代研究者挑戦的研究プログラム「殻を破るぞ！越境型理工系博士人材育成」の助成を受けたものである.

参考文献

[F] M. H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. **17** (1982), 357-453.

[G] C. Gordon, *Knots in the 4-sphere*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), 585-596.

[GS] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus, Graduate Studies in Mathematics*, Volume **20**, American Mathematical Society, 1999.

[H] K. Hayano, *On genus1 simplified broken Lefschetz fibrations*, Algebr. Geom. Topol. **11**(2011), 12671322.

[IM] Z. Iwase and Y. Matsumoto, *4-dimensional surgery on a "pochette"*, Proceedings of the East Asian School of Knots, Links and Related Topics February 16-20, 2004 Seoul, Korea, pp. 161–166.

[K] 柏木 信一, Pochette surgery と Kirby diagram, 大阪大学修士論文, 2013.

[Me] P. Melvin, *Blowing up and down in 4-manifolds (UC Berkeley PhD Thesis)*, ProQuest LLC (1977), 173.

[Mu] 村瀬 裕一, *Pochette surgery and Kirby diagrams*, 東京工業大学修士論文, 2015.

[O] 大川 翼, 四次元球面上のポシェット手術について, 東京工業大学修士論文, 2020.

[P] P. S. Pao, *The topological structure of 4-manifolds with effective torus actions*. I, Trans. Amer. Math. Soc. **227** (1977), 279317.

[S] 鈴木 龍正, *Constructions of 4-manifolds by pochette surgery*, 東京工業大学修士論文, 2021.

[W] J. H. C. Whitehead, *On simply connected, 4-dimensional polyhedra*, Comment. Math. Helv. **22** (1949), 4892.

サブリーマン冪零多様体上のシストール不等式について

東北大学大学院理学研究科数学専攻
田代賢志郎 (Kenshiro TASHIRO)

概要

閉リーマン多様体上のシストール不等式は, 端的に言えば閉曲線の長さの最小値 (シストール) は体積の定数倍で抑えられることを主張する. 本稿では特定のサブリーマン多様体に対して, シストール不等式の類似を与えたことを報告する.

1 導入

1.1 サブリーマン幾何学

多様体 M と TM の部分束 E, および E 上の計量 g からなる三対 (M, E, g) をサブリーマン多様体という. 特に $E = TM$ の場合, (M, TM, g) はリーマン多様体となるという意味で, サブリーマン多様体はリーマン多様体の一般化である. それらの類似点と相違点を明確にすることは一つのテーマである.

サブリーマン幾何の研究動機は多岐にわたり, CR 幾何, 幾何学的群論, 二階微分作用素の解析などで現れてきたが, 一般的なサブリーマン多様体の研究を活発化させたのは Agrachev らによる最適制御理論からのアプローチである. 最適制御理論は機械工学などの分野で用いられる技術で, 標語としては 2 つの状態を行き来するうえで最もコストが低いルートは何か, を説明する理論である. 例えば次の例がよく知られている.

例 1. 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点 (x, y) に x 軸との角度 θ で車が止まっている. この時, 別の点 (x', y') に角度 θ' で到着するのに最短なルートは何か?

$M = \mathbb{R}^2 \times S^1$, X, Y を M 上のベクトル場で

$$X = \cos\theta\partial_x + \sin\theta\partial_y, \qquad Y = \partial_\theta$$

とし, $E = Span\{X, Y\}$, g を X, Y が正規直交となる計量とする. この設定の下, 上記の問題はサブリーマン多様体 (M, E, g) の 2 点間の最短線は何か, という問題に言い換えることができる.

最適制御理論は元々は例 1 のような状況をモデル化する解析的な側面が強い理論だが, 特別な場合としてサブリーマン多様体に適用すればその測地線や曲率を定式化することができる. それにより例えば Myers の定理 [4] や, 測度収縮性 [2, 5] など, リーマン多様体に見られる興味深い性質が確認されてきた.

上記のような背景からサブリーマン多様体のリーマン幾何的側面を調べることは面白い試みであ

り, 今回の話ではその一つとしてシストール不等式について考える.

1.2 シストール不等式

M を閉リーマン多様体とする. これに対してシストール $sys(M)$ は

$$sys(M) = \min\{length(c) \mid c : \text{ non-contractible closed curve}\}$$

により定義される.

例 2. 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^2$ と, その格子部分群 Γ を考える. この時, 平坦トーラス $\Gamma\backslash\mathbb{E}^2$ のシストールは

$$\min\{\|\gamma_1 x - \gamma_2 x\| \mid \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, x \in \mathbb{E}^2\}$$

となり, 図 *1* で言う赤の線分の長さに相当する (この場合は最短閉曲線は一意でない).

簡単のため, 平坦トーラス $\Gamma\backslash\mathbb{E}^2$ 上のシストール不等式を説明する.

定理 1 (e.g. 1.A.1 of [7])**.** 格子部分群 Γ によらない定数 C_2 があって,

$$sys(\Gamma\backslash\mathbb{E}^2) \leq C_2 Vol(\Gamma\backslash\mathbb{E}^2)^{\frac{1}{2}}$$

を満たす.

証明は次のようになされる. $p : \mathbb{E}^2 \to \Gamma\backslash\mathbb{E}^2$ を被覆写像とし, 正数 $R > 0$ を $Vol(B(R)) = Vol(\Gamma\backslash\mathbb{E}^2)$ となるよう選ぶ ($B(R)$ は半径 R の球). この時, $p|_{B(R)}$ は単射ではなく, したがってある $\gamma \in \Gamma$ があって $\|x - \gamma x\| \leq \|x\| + \|\gamma x\| \leq 2R$ である. 一方で $Vol(B(R)) = \pi R^2$ であるから,

$$sys(\Gamma\backslash\mathbb{E}^2) \leq \|x - \gamma x\| \leq 2R = \frac{2}{\sqrt{\pi}} Vol(B(R))^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} Vol(\Gamma\backslash\mathbb{E}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

注意 1. この方法で得られる定数 $C_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ は最適ではなく, 実際は $C_2 = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ で証明できる. またその等号成立条件は Γ が図 *1* のように正三角形を張るときに限る.

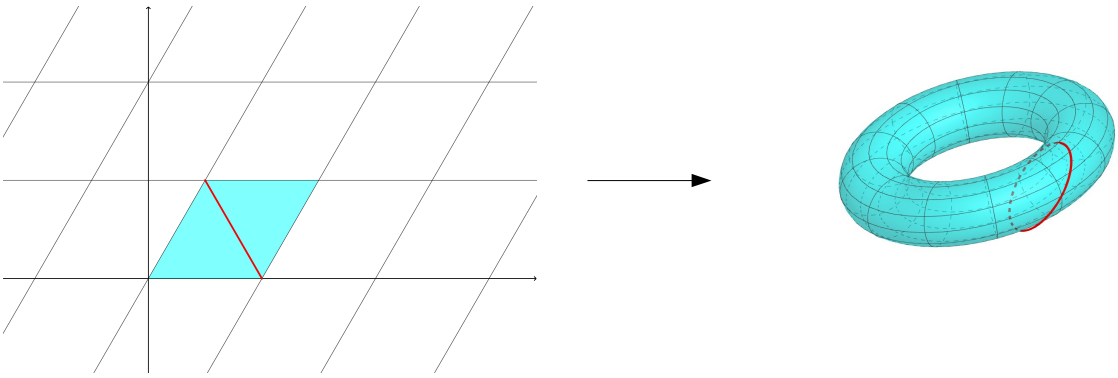


図 1: トーラスの被覆写像

シストール不等式は平坦トーラスに限らず, 閉曲面や aspherical な多様体などに一般化されてきた. 最も広いクラスはグロモフによる essential 多様体についてのもので, 彼は定数 C_n $(n = \dim M)$ について

$$sys(M) \leq C_n Vol(M)^{\frac{1}{n}}$$

であることを示した [6]. ここで多様体が essential であることの定義はしないが, 重要なことは定数が (ハウスドルフ, 位相) 次元 n にのみ依存していることである.

今回のテーマであるサブリーマン多様体上のシストール不等式を考えるうえで, まず考えなければならないのが弧長と体積である. 弧長はよく知られている通り, $length(c) = \int \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}dt$ で定義される $(\dot{c}(t) \in E \ a.e.)$. 体積は 2.2 節で定義されるポップ体積を考える. ポップ体積は 'よい' サブリーマン多様体上に定義される等長不変な体積形式 $d\mu$ で, それによりボレル可測集合 A の体積を $Vol(A) = \int_A d\mu$ として定義する ('よい' については注意 3).

また空間は, 2.1 節で定義されるカルノー群 (の商空間) という特別な場合を扱う. カルノー群の特徴づけとして Dilation と呼ばれる, ユークリッド空間におけるスカラー倍に相当する概念の存在があげられる [8]. また 'よい' サブリーマン多様体の接錘はカルノー群に等長になる [9]. これらの特徴づけから, カルノー群の商空間はリーマン幾何における平坦トーラスを考えたと思って差し支えない.

2 準備

2.1 カルノー群

$\mathfrak{g}$ をべき零リー環, $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ をリー括弧積とする. べき零性からある $k \in \mathbb{N}$ があって $\underbrace{[\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \cdots, \mathfrak{g}] \cdots]}_{k+1} = \{0\}$ となる. この時, $\mathfrak{g}$ は k-step であるという. また, $\mathfrak{g}$ のベクトル空間としての直和分解 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$ で $[V_i, V_j] = V_{i+j}$ を満たすものがあるとき, $\mathfrak{g}$ は stratified であるという. 以降 $\mathfrak{g}$ は stratified であると仮定する.

注意 2. このような直和分解はリー代数の同型を除いて一意.

リー群の一般論から, 連結かつ単連結なべき零リー群 G で付随するリー環が $\mathfrak{g}$ となるものが一意に存在する (これにより G が k-step である, stratified であるなどと言う).

$\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ を V_1 上の内積とする. この時, カルノー群は次のように定義される.

定義 1. 三つ組 $(G, V_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ をカルノー群という.

カルノー群上のサブリーマン計量は次のように定義される. $p \in G$ に対し, $L_p : G \to G, x \mapsto px$ とし, $\mathfrak{g}$ を T_eG に同一視する. $E_p = L_{p*}V_1$ とすれば, $E = \bigsqcup E_p$ は TM の部分束になる. また計量 g を $g_p((L_p)_*u, (L_p)_*v) = \langle u, v\rangle_1$ で定める $(u, v \in V_1)$. これによりサブリーマン多様体 (G, E, g) を得る. 定義から誘導される距離 d は左不変 $(d(px, py) = d(x, y))$ となる.

例 3.

- ユークリッド空間 $\mathbb{E}^n$ は 1-*step* カルノー群.
- $$\mathbb{H} = \{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid (z_1,t_1)\cdot(z_2,t_2) = (z_1+z_2, t_1+t_2+2\mathfrak{Im}(z_1\overline{z}_2))$$

はハイゼンベルグ群と呼ばれる．ハイゼンベルグ群は $V_1 = Span\{\partial_x - 2y\partial_t, \partial_y + 2x\partial_t\}$, $V_2 = Span\{\partial_t\}$ および適当な内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ によって 2-*step* カルノー群である $(z = x + \sqrt{-1}y)$.

■Baker–Campbell–Hausdorff formula　$\exp : \mathfrak{g} \to G$ を指数写像とする．すなわち, 左不変ベクトル場 $X \in \mathfrak{g}$ に対して, その積分曲線を $I_X : \mathbb{R} \to G$ としたとき, $\exp(X) = I_X(1)$ と定義する．$\mathfrak{g}$ がべき零で G が単連結であるとき, 指数写像 exp は微分同相写像になることが知られている．次に述べる Baker–Campbell–Hausdorff formula は, リー群の積をリー括弧積を用いて記述できるという意味で有用である．

定理 2. $q \in \mathbb{N}$ と $(n_1, \ldots, n_q) \in \{1,2\}^q$ に対し, 定数 $C(n_1, \ldots, n_q) \in \mathbb{R}$ で次を満たすものが存在する; 任意の $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ に対し,

$$\exp(X_1) \cdot \exp(X_2) \tag{1}$$

$$= \exp\left(X_1 + X_2 + \frac{1}{2}[X_1, X_2] + \sum_{q>2} \sum_{(n_1,\ldots,n_q)\in\{1,2\}^q} C_{(n_1,\ldots,n_q)}[X_{n_1}, [X_{n_2}, \ldots, X_{n_q}]\cdots] \right). \tag{2}$$

ここで, 定数 $C_{(n_1,\ldots,n_q)}$ はリー群の構造によらず, また $\mathfrak{g}$ がべき零の場合には有限和となる．

特に G が 2-step の場合, $[\cdot,\cdot]_c$ を群の交換子 $[x,y]_c = xyx^{-1}y^{-1}$ とすれば,

$$[\exp(X_1), \exp(X_2)]_c = \exp([X_1, X_2])$$

となり, リー群 G の交換子とリー代数 $\mathfrak{g}$ のリー括弧積が同一視できる．

■Dilation　正数 $t > 0$ に対し, リー代数同型写像 $\delta_t : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ を $\delta_t(\sum_{i=1}^k U_i) = \sum_{i=1}^k t^i U_i$ で定義する $(U_i \in V_i)$．この δ_t は Dilation と呼ばれる．指数写像 exp とその逆 $\log : G \to \mathfrak{g}$ を介することで, δ_t を G 上の微分同相写像とみなすことができる．

Dilation は次の意味で, ベクトル空間のスカラー倍の類似であると言える;

$$d(\delta_t(x), \delta_t(y)) = td(x, y).$$

特に半径 t の球 $B(t) \subset G$ とハール測度 m に関して,

$$m(B(t)) = m(\delta_t(B(1))) = t^Q m(B(1)) \tag{3}$$

が成立する．ここで, $Q = \sum_{i=1}^k i \dim V_i$ であり, Mitchell [9] によりこれはハウスドルフ次元に一致する．

2.2 ポップ体積

リーマン多様体 (M, g) に対し, その上の自然な体積形式は $dvol_g = \sqrt{\det(g)_{ij}}$ で与えられる．ポップ体積はこの体積形式の一般化であり, Popp により考案され Montgomery による本 [10] で導入された．

端的に言うと, ポップ体積とは V_1 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$) から $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_P$ を構成することで得られる．構成のために補題を用意する．

補題 1 (Lemma 20.3 in [1])**.** $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ を内積空間, V をベクトル空間, $f : E \to V$ を全射線形写像とする. この時, V 上のノルム $\|\cdot\|_V$ を

$$\|v\|_V = \min\{\|u\|_E \mid v = f(u)\}$$

で定義すれば, このノルムは V 上に内積を誘導する.

つまり, ノルムの定義に加えて parallelogram law を満たすことが確認される. この補題を用いて, 各 V_i 上に内積を構成する. テンソル積 $V_1^{\otimes i}$ 上に内積は

$$\langle X_1 \otimes \cdots \otimes X_i, Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_i\rangle_{\otimes i} = \prod_{j=1}^{i} \langle X_j, Y_j\rangle_1$$

で自然に定義される. また $\pi_i : V_1^{\otimes i} \to V_i$ を $X_1 \otimes \cdots \otimes X_i \mapsto [X_1, [X_2, \cdots, X_i]\cdots]$ により定義する. $\pi_i : (V_1^{\otimes i}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\otimes i}) \to V_i$ は全射線形写像なので, 補題 1 から V_i 上に内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ が定義できる. さらに $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_P$ を, 各 V_i 上で $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ に一致し, 各 V_i と V_j が直交するように定義する.

定義 2. ポップ体積 $d\mu$ は, $\mathfrak{g} = \bigoplus V_i$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_P$ から誘導される体積形式である.

ポップ体積は (局所) 等長不変な体積形式であり [3], 特にカルノー群は左不変な計量であることから, ハール体積となる. 今回はポップ体積の係数に着目する.

注意 3. ポップ体積は, より一般に *equiregular* なサブリーマン多様体上で定義される. サブリーマン多様体が *equiregular* であるとは, $E_x^{(i)} := \underbrace{[E, [E, \cdots, E]\cdots]_x}_{i}$ に対し, $\dim E_x^{(i)} = \dim E_y^{(i)}$ が任意の $x, y \in M$, $i = 1, \ldots, k$ に対して成立することを言い, カルノー群も *equiregular* である.

構成はサブリーマン多様体の各接空間をカルノー群で近似し, カルノー群上のポップ体積をサブリーマン多様体上の体積形式に移植することでなされる.

3 主定理

$(G, V_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ を k-step カルノー群, $d_i = \dim V_i$ とする. 今回紹介する定理は次である.

定理 3 ([11])**.** ある定数 $C = C(d_1, \ldots, d_k) > 0$ が存在して, 任意のカルノー群 $(G, V_1, \langle\cdot,\cdot\rangle_1)$ と格子部分群 $\Gamma < G$ に対して,

$$sys(\Gamma\backslash G) \leq C \cdot vol(\Gamma\backslash G)^{\frac{1}{Q}}$$

が成立する.

定数 C はリー群 G, 格子部分群 Γ, 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ の選び方によらない.

注意 4. d_1, d_2 の上限はハウスドルフ次元 Q で書けるため, 定数は Q の形で書くこともできる.

3.1 証明のアイデア; 2-step の場合

以下簡単のため, G が 2-step であると仮定する. 1.2 で述べたトーラス $\Gamma\backslash\mathbb{E}^2$ の場合の証明を, 次のように踏襲できる. $p : G \to \Gamma\backslash G$ を被覆写像とする. この時, 正数 $R > 0$ が存在して $vol(B(R)) = vol(\Gamma\backslash G)$ となるものが存在する. 2.1 節 (3) から, $vol(B(R)) = R^Q vol(B(1))$ である. したがって

$$sys(\Gamma\backslash G) \leq 2R = 2vol(B(1))^{-\frac{1}{Q}} vol(\Gamma\backslash G)^{\frac{1}{Q}}.$$

この議論から, 単位球体の体積 $vol(B(1))$ の下限が d_1, d_2 のみに依存した定数で抑えられることを示せば十分である (体積を具体的に計算することは難しい).

内積空間 $(V_i, \langle\cdot,\cdot\rangle_i)$ $(i = 1, 2)$ に対し, $B_i(r)$ を半径 r の球とする.

命題 1. 正定数 $r_i = r_i(d_1, d_2)$ が $i = 1, 2$ に対して存在して,

$$\exp(B_1(r_1) \times B_2(r_2)) \subset B(1)$$

である.

$\exp(B_1(r_1) \times B_2(r_2))$ の体積は, n 次元ユークリッド空間の単位球体の体積 ω_n を用いて $r_1^{d_1} r_2^{d_2} \omega_{d_1}\omega_{d_2}$ に一致する. これにより主定理が得られる.

Proposition 1 の証明. $Z \in V_2$, $\alpha = \|Z\|_2$ とする. この時, $d(e, \exp(Z))$ の上限を α で与える. ノルム $\|\cdot\|_2$ の定義から, ある $\{X_{nj}\}_{n=1,\ldots,N, j=1,2}$ が存在して

$$\begin{cases} Z = \sum_{n=1}^{N} [X_{n1}, X_{n2}], \\ \alpha = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \|X_{n1}\|_1 \|X_{n2}\|_1} \end{cases}$$

が成立. テンソル積の定義から, $N \leq d_1^2$, $\|X_{n1}\|_1 = \|X_{n2}\|_1$ とすることができる. Baker–Campbell–Hausdorff formula (1) から,

$$\exp(Z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{N} [X_{n1}, X_{n2}]\right) = \prod_{n=1}^{N} [\exp(X_{n1}), \exp(X_{n2})]_c.$$

三角不等式と距離の左不変性から,

$$d(e, \exp(Z)) \leq 2\sum_{n=1}^{N} d(e, \exp(X_{n1})) + d(e, \exp(X_{n2})) = 4\sum_{n=1}^{N} \|X_{n1}\|_1.$$

l^1 ノルムと l^2 ノルムの比較から,

$$\sum_{n=1}^{N} \|X_{n1}\|_1 \leq \sqrt{N \sum_{n=1}^{N} \|X_{n1}\|_1^2} \leq d_1\alpha.$$

これらを組み合わせて,

$$d(e, \exp(Z)) \leq 4d_1\alpha.$$

$r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{8d_1}$ とする. $(Z_1, Z_2) \in B_1(r_1) \times B_2(r_2)$ に対して, 再び Baker–Campbell–Hausdorff formula と三角不等式から

$$d(e, \exp(Z_1 + Z_2)) \leq d(e, \exp(Z_1)) + d(e, \exp(Z_2)) \leq 1.$$

よって命題が従う. □

一般に k-step の場合は, Baker–Campbell–Hausdorff formula の高次の項が関わってくるので, 複雑化するが同じアイデアで示せる.

参考文献

[1] A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry.

[2] A. Agrachev, P. W. L. Lee, Generalized Rici curvature bounds for three dimensional contact subRiemannian manifolds,. *Math. Ann.* **360**(1–2), 209–253 (2014).

[3] D. Barilari, L. Rizzi, A formula for Popp' s volume in sub-Riemannian geometry, *Anal. Geom. Metr. Spaces*, 2013, **1**, 42–57.

[4] D. Barilari and L. Rizzi, Comparison theorems for conjugate points in sub-Riemannian geometry. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **22**(2), 439–472 (2016).

[5] D. Barilari, L. Rizzi, Sub-Riemannian interpolation inequalities, *Invent. Math.*, **215**, 977-1028 (2019).

[6] M. Gromov, Filling Riemannian manifolds, *J. Differential Geom.* **18**(1), 1–147 (1983).

[7] M. Gromov, Systoles and intersystolic inequalities, *Actes de la Table Ronde de G ´ eom ´ etrie Diff ´ erentielle (Luminy 1992)*, 291–362. *S ´ eminaires et Congr'es, 1. Soc. Math. France, Institut Henri Poincar ´ e, Paris* (1996).

[8] E. Le Donne, A primer on Carnot groups: homogeneous groups, Carnot-Carathéodory spaces, and regularity of their isometries. *Anal. Geom. Metr. Spaces* **5** , no. 1, 116-137 (2017).

[9] J. Mitchell, On Carnot Carathéodory metrics, *J. Diff. Geom.*, **21**, 35-45 (1985).

[10] R. Montgomery, A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications, Mathematical Surveys and Monographs, **91**, *American Mathematical Society.*

[11] K. Tashiro, A systolic inequality for compact quotients of Carnot groups with the Popp's volume, in preparation.

グラフのマグニチュードホモロジーと Asao-Izumihara 複体における離散モース理論

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
田嶌 優 (Yu TAJIMA)

概 要

グラフ G と次数 k，チェインの長さ ℓ からマグニチュードホモロジー $\mathrm{MH}_k^\ell(G)$ が定まる．長さ ℓ と次数 k が異なるとき $\mathrm{MH}_k^\ell(G) = 0$ をみたすグラフを diagonal グラフと呼ぶ．マグニチュードチェイン複体に対応する CW 複体（Asao-Izumihara 複体）が先行研究で定義された．本講演では，あるクラスの diagonal グラフの Asao-Izumihara 複体が球面の 1 点和とホモトピー同値であると示したことを紹介する．本講演は，北海道大学の吉永正彦氏との共同研究（[8]）に基づく．

1 導入

グラフ G は頂点集合 $V(G)$ と辺の集合 $E(G)$ から定まる：$G = (V(G), E(G))$. グラフは各辺の長さを 1 とし，各頂点間の最短 path の長さを距離と定めることで距離空間として考えることができる．マグニチュードは距離空間に対して「有効な点の個数」をはかる不変量で，Leinster により定義された（[7]）．グラフのマグニチュードホモロジーは，マグニチュードの「圏化」として Hepworth-Willerton により導入されたホモロジーである（[4]）．別の言い方をすると，グラフのマグニチュードホモロジーはマグニチュードに対して以下の関係式をみたすホモロジーとして定義された（q は変数とする）．

$$\#G = \sum_{\ell \geq 0} \left(\sum_{k \geq 0} (-1)^k \operatorname{rank} \mathrm{MH}_k^\ell(G) \right) q^\ell. \tag{1}$$

式 (1) の左辺はグラフ G のマグニチュードを表し（定義 2.1），右辺の $\mathrm{MH}_k^\ell(G)$ は G の長さ ℓ，次数 k のマグニチュードホモロジー（定義 2.2）を表す．グラフ G が $\mathrm{MH}_k^\ell(G) = 0$ $(k \neq \ell)$ をみたすとき，G を diagonal であるという．グラフのマグニチュードホモロジーは一般に計算が難しいが，グラフ G が diagonal であるときは (1) の式よりマグニチュードからマグニチュードホモロジーが定まる．このことから，diagonal グラフについては先行研究でもよく考察されており，様々な結果が示されている（[1], [3], [4]）．グラフのマグニチュードホモロジーの計算手法の一つとして，単体複体を用いたものが [2] と [5] で示されている．このうち [2] ではグラフのマグニチュードチェイン複体に対応する単体複体 $K_\ell(a, b)$ と部分複体 $K'_\ell(a, b)$ のペアが定義されており，これらから定まる CW 複体 $K_\ell(a, b)/K'_\ell(a, b)$ をここでは Asao-Izumihara 複体と呼ぶ（詳細な定義は §3 で）．

本講演では，pawful graph と呼ばれる（diagonal であることが知られている）グラフの Asao-Izumihara 複体が球面の 1 点和とホモトピー同値であると示したことを紹介する．証明には離散モース理論を用いる．

2　グラフのマグニチュードとマグニチュードホモロジー

以下 G をグラフとし，有限，単純，かつ連結であることを仮定する．グラフ G の辺の列

$$\{v_0,v_1\},\{v_1,v_2\},\cdots,\{v_{k-1},v_k\}\in E(G)\ (v_0,v_1,\cdots,v_k\in V(G))$$

を長さ k の path と呼ぶ．グラフ G 上の距離関数 $d_G\colon V(G)\times V(G)\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を，各頂点間にある path の長さの最小値で定める．

定義 2.1. グラフ G に対して，成分に $\mathbb{Q}$ 上の有理関数体 $\mathbb{Q}(q)$ の元をもつ $|V(G)|\times|V(G)|$ 行列 Z_G を $Z_G:=\left(q^{d(x,y)}\right)_{x,y\in V(G)}$ で定める（q は変数）．このとき，Z_G は逆行列をもつので，Z_G^{-1} の (x,y)-成分を $Z_G^{-1}(x,y)$ と書く．グラフ G のマグニチュードを次で定義する．

$$\#G:=\sum_{x,y\in V(G)}Z_G^{-1}(x,y).$$

グラフ G の頂点を並べてできる $x=(x_0,x_1,\cdots,x_k)\in V(G)^{k+1}$ が，任意の $i\in\{0,1,\cdots,k-1\}$ に対して $x_i\neq x_{i+1}$ をみたすとき，x を sequence という．Sequence $x=(x_0,x_1,\cdots,x_k)\in V(G)^{k+1}$ に対して，$y=(y_0,y_1,\cdots,y_{k'})\in V(G)^{k'+1}$ が x の subsequence である（$y\prec x$ と書く）とは，各 $j\in\{0,1,\cdots,k'\}$ に対して $y_j=x_{i_j}$ をみたす添字の列 $0=i_0<i_1<\cdots<i_{k'}=k$ が存在することをいう．Sequence x の長さを $L(x):=d(x_0,x_1)+d(x_1,x_2)+\cdots+d(x_{k-1},x_k)$ で定める． また，x_i $(i=1,\cdots,k-1)$ に対して $L(x)=L((x_0,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_k))$ が成り立つとき，x_i は x で smooth であるといい，smooth でないときは singular であるという．

定義 2.2. 長さ $\ell\geq 0$ を固定する．グラフ G のマグニチュードチェイン複体 $\mathrm{MC}_*^\ell(G)$ を以下で定義する．

$$\mathrm{MC}_k^\ell(G):=\bigoplus_{x\in\{x=(x_0,\cdots,x_k)\in V(G)^{k+1}\colon\text{ sequence }|L(x)=\ell\}}\mathbb{Z}\langle x\rangle,$$

$$\partial\colon\mathrm{MC}_k^\ell(G)\to\mathrm{MC}_{k-1}^\ell(G),\ \partial:=\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^i\partial_i,$$

$$\partial_i\langle x_0,\cdots,x_k\rangle:=\begin{cases}\langle x_0,\cdots,\widehat{x_i},\cdots,x_k\rangle & (x_i\text{ が }x\text{ で smooth のとき}),\\ 0 & (x_i\text{ が }x\text{ で singular のとき}).\end{cases}$$

グラフ G の長さ ℓ，次数 k のマグニチュードホモロジーを $\mathrm{MH}_k^\ell(G):=H_k(\mathrm{MC}_*^\ell(G))$ で定める．

定義 2.3. グラフ G が $\mathrm{MH}_k^\ell(G)=0$ $(k\neq\ell)$ をみたすとき，G は diagonal であるという．

3　Asao-Izumihara 複体

グラフのマグニチュードチェイン複体に対応する（定理 3.4 をみたすような），単体複体と部分複体のペアとして，[2] で $K_\ell(a,b)$ と $K'_\ell(a,b)$ が定義された．

定義 3.1. 頂点 $a,b\in V(G)$ と $\ell\geq 3$ を固定し，

$$P_\ell(a,b):=\left\{x=(x_0,\cdots,x_k)\in V(G)^{k+1}\;\middle|\;\begin{array}{l}x_0=a,\ x_k=b,\ L(x)=\ell,\\ \text{任意の }i\in\{0,\cdots,k-1\}\text{ に対して }x_i\neq x_{i+1}.\end{array}\right\}$$

と定める．集合 $K_\ell(a,b)$ とその部分集合 $K'_\ell(a,b)$ を以下で定める．

- $K_\ell(a,b) := \{\, \emptyset \neq \{(x_{i_1}, i_1), \cdots, (x_{i_k}, i_k)\} \subset V(G) \times \{1, \cdots, \ell-1\} \mid (a, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}, b) \prec \exists (a, x_1, \cdots, x_{\ell-1}, b) \in P_\ell(a,b) \,\}$,
- $K'_\ell(a,b) := \{\, \{(x_{i_1}, i_1), \cdots, (x_{i_k}, i_k)\} \in K_\ell(a,b) \mid L(a, x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}, b) \leq \ell - 1 \,\}$.

注意 3.2. (i) 混乱のないときは，$\{(x_{i_1}, i_1), \cdots, (x_{i_k}, i_k)\} \in K_\ell(a,b)$ を $\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\}$ と書く．

(ii) 集合 $K_\ell(a,b)$ は単体複体である．また，$K_{\ell-1}(a,b)$ と $K'_\ell(a,b)$ は，どちらも $K_\ell(a,b)$ の部分複体であり，一般に $K_{\ell-1}(a,b) \subsetneq K'_\ell(a,b)$ となっている．

(iii) 単体複体 $K_\ell(a,b)$ 上で部分複体 $K'_\ell(a,b)$ を一点につぶして得られる CW 複体 $K_\ell(a,b)/K'_\ell(a,b)$ を Asao-Izumihara 複体と呼ぶ．

グラフのマグニチュードチェイン複体について，自然に成り立つこととして以下の命題がある．

命題 3.3 ([2], Proposition 2.9.)．長さ $\ell \geq 0$ を固定する．このとき，chain complex として以下の直和分解が成り立つ．

$$\mathrm{MC}^\ell_*(G) = \bigoplus_{a,b \in V(G)} \mathrm{MC}^\ell_*(a,b).$$

ただし，$\mathrm{MC}^\ell_*(a,b)$ は a で始まり b で終わる sequence で生成される，チェイン複体 $\mathrm{MC}^\ell_*(G)$ の部分複体である．

定理 3.4 ([2], Theorem 4.3.)．長さ $\ell \geq 3$ とし，$* \geq 0$ とする．頂点 $a, b \in V(G)$ を固定する．このとき，チェイン複体として次の同型が成り立つ：

$$(C_*(K_\ell(a,b), K'_\ell(a,b)), -\tilde{\partial}) \cong (\mathrm{MC}^\ell_{*+2}(a,b), \partial).$$

例 3.5. サイクルグラフ C_4 (図 1) を考える．長さ $\ell = 4$ とする．

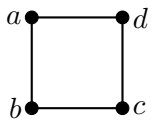


図 1: サイクルグラフ C_4.

このとき，Asao-Izumihara 複体 $K_4(a,a)/K'_4(a,a)$ が 2 次元球面の 1 点和とホモトピー同値であることを確かめる．単体複体 $K_4(a,a)$ の maximal face は以下である．

$$\{(b,1),(a,2),(b,3)\},\ \{(b,1),(a,2),(d,3)\},\ \{(b,1),(c,2),(b,3)\},$$
$$\{(b,1),(c,2),(d,3)\},\ \{(d,1),(a,2),(b,3)\},\ \{(d,1),(a,2),(d,3)\},$$
$$\{(d,1),(c,2),(b,3)\},\ \{(d,1),(c,2),(d,3)\}.$$

また，部分複体 $K'_4(a,a)$ は以下のようになる．

$$K'_4(a,a) = \left\{ \begin{array}{l} \{(b,1)\},\ \{(a,2)\},\ \{(b,3)\},\ \{(d,3)\},\ \{(d,1)\},\ \{(a,2),(b,3)\}, \\ \{(b,1),(b,3)\},\ \{(b,1),(a,2)\},\ \{(a,2),(d,3)\},\ \{(d,1),(a,2)\}, \\ \{(d,1),(d,3)\} \end{array} \right\}.$$

図 2 にあるように，単体複体 $K_4(a,a)$ は正八面体と同型で，部分複体 $K'_4(a,a)$ は 2 つの 1 次元球面の 1 点和とホモトピー同値である（図 2 では，$K'_4(a,a)$ は赤で描かれている）．よって，Asao-Izumihara 複体 $K_4(a,a)/K'_4(a,a)$ は 3 つの 2 次元球面の 1 点和とホモトピー同値である．

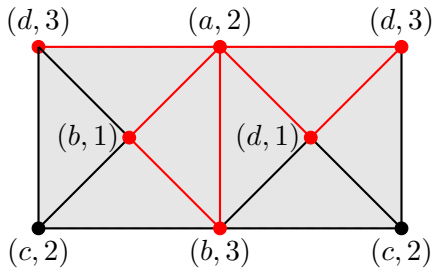


図 2: サイクルグラフ C_4 に対応する単体複体 $K_4(a,a)$ と部分複体 $K_4'(a,a)$.

4　主結果

定義 4.1. グラフ G が以下の 2 つの条件をみたすとき，G を pawful graph と呼ぶ.

(i) 直径（2 頂点間の距離の最大値）が 2 以下である.

(ii) 距離について $d(x,y) = d(y,z) = 2$, $d(x,z) = 1$ をみたす任意の $x, y, z \in V(G)$ に対して，$d(a,x) = d(a,y) = d(a,z) = 1$ をみたす頂点 $a \in V(G)$ が存在する.

定理 4.2. 長さ $\ell \geq 3$ とし，G を *pawful graph* とする．頂点 $a, b \in V(G)$ を固定する．このとき，*Asao-Izumihara* 複体 $K_\ell(a,b)/K_\ell'(a,b)$ は，空または可縮または $(\ell-2)$ 次元球面の 1 点和とホモトピー同値である.

系 4.3 ([3], Theorem 4.4.)**.** *Pawful graph* は *diagonal* である.

5　離散モース理論

今回は，単体複体における離散モース理論について，主定理の証明に必要な部分だけを [6] に従って簡潔に紹介する.

定義 5.1. Poset P に対して，部分集合 $M \subseteq P \times P$ が以下の 2 つの条件をみたすとき，M を partial matching と呼ぶ.

(i) 任意の $(a,b) \in M$ に対して $a \prec b$ が成り立つ．ただし $a \prec b$ は,「$a < b$」かつ「$a < c < b$ をみたす $c \in P$ が存在しない」ことを意味する.

(ii) 各 $a \in P$ は，M の元に 1 回までしか出てこない.

定義 5.2. Poset P に対して，$M \subseteq P \times P$ を partial matching とする．以下の形のサイクルが存在しないとき，M を acyclic matching という.

$$b^1 \succ a^1 \prec b^2 \succ a^2 \prec \cdots \prec b^p \succ a^p \prec b^{p+1} = b^1.$$

ただし，$(a_i, b_i) \in M$ $(i = 1, 2, \cdots, p)$, $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ $(i \neq j)$, $p \geq 2$ とする.

定義 5.3. Poset P 上の partial matching M を考える．Poset P の元 a に対して，$(a,b) \in M$ または $(b,a) \in M$ をみたす $b \in P$ が存在しないとき，a を critical elenment という.

単体複体に関する離散モース理論の重要な結果として，以下の定理が知られている．これを主定理の証明に用いる.

定理 5.4 ([6], Theorem 11.13.(b)). 単体複体 S の *face poset* を P とし，$M \subseteq P \times P$ を P 上の *acyclic matching* とする．また，*critical element* のうち i-次元のものの個数を c_i とする．このとき，単体複体 S は c_i 個の i-次元セルをもつ CW 複体とホモトピー同値である．

6 主定理（定理 4.2）の証明

Proof. $K_\ell(a,b)/K'_\ell(a,b)$ を調べる．$K_\ell(a,b)$ の face poset から $K'_\ell(a,b)$ の元を除いたものを P とおく．以下，$\{x_1,\cdots,x_{k-1}\} \in P$ を $(x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k)$ $(x_0=a,\ x_k=b)$ と書く．このとき，$x=(x_0,\cdots,x_{k-1}),\ y=(y_0,\cdots,y_k) \in P$ に対して，以下の 2 つは同値である．

- $x \prec y$.
- $d(y_i,y_{i+2}) = d(y_i,y_{i+1}) + d(y_{i+1},y_{i+2})$ かつ $(x_0,\cdots,x_{k-1}) = (y_0,\cdots,\hat{y}_{i+1},\cdots,y_k)$ をみたす $i \in \{0,\cdots,k-2\}$ が存在する．

写像 $p\colon \{(x,y,z) \in V(G)^3 \mid d(x,y)=d(y,z)=2,\ d(x,z)=1\} \to V(G)$ を $(x,y,z) \mapsto a$ で定める．ただし，a は $d(a,x)=d(a,y)=d(a,z)=1$ をみたす点を一つ選んで固定したものである．また，写像 $q\colon \{(x,y) \in V(G)^2 \mid d(x,y)=2\} \to V(G)$ を $(x,y) \mapsto b$ で定める．ただし，b は $d(x,b)=d(b,y)=1$ をみたす点を一つ選んで固定したものである．次に，集合 S を以下で定める．

$$\begin{aligned} S := &\left\{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in V(G)^4 \,|d(\alpha,\delta)=1,\ d(\beta,\delta)=2,\ d(\alpha,\beta)=1,\ \gamma=\alpha\right\} \\ &\sqcup \left\{ (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in V(G)^4 \,\middle|\, \begin{array}{l} d(\alpha,\delta)=2,\ d(\beta,\delta)=2, \\ d(\alpha,\beta)=1,\ \gamma=p(\alpha,\delta,\beta) \end{array} \right\} \\ &\sqcup \{(\beta,\gamma,\delta) \in V(G)^3 \mid d(\beta,\delta)=2,\ \gamma=q(\beta,\delta)\}. \end{aligned}$$

Face poset P の元 $x=(x_0,\cdots,x_k)$ に対して，$(x_{i-1},x_i,x_{i+1},x_{i+2}) \in S$ をみたす $i \in \{1,\cdots,k-2\}$ が存在するとき，1 番小さい i を i_0 とおく．ただし，$(x_0,x_1,x_2) \in S$ のときは $i_0=0$ と定め，条件をみたす i が存在しないかつ $i_0 \neq 0$ のときは $i_0=\infty$ と定める．また，$d(x_j,x_{j+1})=2$ をみたす $j \in \{0,\cdots,k-1\}$ のうち，1 番小さい j を j_0 とおく．条件をみたす j が存在しないとき $j_0=\infty$ とする．ここで，P の部分集合 A,P',P'' を以下で定める．

$$A := \{x \in P \mid i_0=\infty \text{ かつ } j_0=\infty\},$$

$$P' := \{x \in P \mid i_0 > j_0\},$$

$$P'' := \{x \in P \mid i_0 < j_0\}.$$

写像 $f\colon P' \to P''$ を，$(x_0,\cdots,x_k) \mapsto (x_0,\cdots,x_{j_0-1},x_{j_0},z,x_{j_0+1},\cdots,x_k)$ で定める．頂点 z は，$j_0=0$ のときは $(x_0,z,x_1) \in S$ をみたす点であり，$j_0 \geq 1$ のときは $(x_{j_0-1},x_{j_0},z,x_{j_0+1}) \in S$ をみたす点である．写像 $g\colon P'' \to P'$ を，$(y_0,\cdots,y_k) \mapsto (y_0,\cdots,\widehat{y_{i_0+1}},\cdots,y_k)$ で定めると，

$$\begin{aligned} f \circ g((y_0,\cdots,y_k)) &= f((y_0,\cdots,y_{i_0},y_{i_0+2},\cdots,y_k)) \\ &= (y_0,\cdots,y_{i_0},z,y_{i_0+2},\cdots,y_k) \\ &= (y_0,\cdots,y_k). \\ g \circ f((x_0,\cdots,x_k)) &= g((x_0,\cdots,x_{j_0},\tilde{z},x_{j_0+1},\cdots,x_k)) = (*). \end{aligned}$$

ただし，z は，$i_0 = 0$ のときは $(y_0, z, y_2) \in S$, $i_0 \geq 1$ のときは $(y_{i_0-1}, y_{i_0}, z, y_{i_0+2}) \in S$ をみたす点で一意に定まる．また，$\tilde{z}$ は，$j_0 = 0$ のときは $(x_0, z, x_1) \in S$, $j_0 \geq 1$ のときは $(x_{j_0-1}, x_{j_0}, z, x_{j_0+1}) \in S$ をみたす点で一意に定まる．ここで，$j_0 \geq 2$ のとき $(x_{j_0-1}, x_{j_0}, z, x_{j_0+1}) \in S$ ならば，$d(x_{j_0-1}, z) \leq 1$ より $(x_{j_0-2}, x_{j_0-1}, x_{j_0}, z) \notin S$ がいえるので，

$$(*) = (x_0, \cdots, x_k).$$

よって，$f \circ g = \mathrm{id}_{P''}$, $g \circ f = \mathrm{id}_{P'}$ となるので，f は全単射である．

Poset P 上の matching $M \subseteq P \times P$ を次で定める．

$$M := \{(x, y) \in P \times P \mid x \in P',\ y \in P'',\ f(x) = y\}.$$

このとき，任意の $(x, y) \in M$ は，$x \prec y$ をみたす．また，$P' \cap P'' = \emptyset$，f : 単射より，各 $x \in P$ は M の元に 1 回までしか出てこない．よって，M は partial matching である．次に，M が acyclic であることを示す．

Matching M に以下のサイクルが存在すると仮定する．

$$y^1 \succ x^1 \prec y^2 \succ x^2 \prec \cdots x^p \prec y^{p+1} = y^1.$$

ただし，$y^{t+1} = f(x^t)$ $(t \geq 1)$ である．また，$y^t = (y_0^t, \cdots, y_k^t) \in P''$ に対して，y^t で smooth な点の 1 つ $y_{i^t+1}^t$ を取り除いたものを x_t とする．$x^t \in P'$ に対して，j_0 を j^t と書く．j^1 を j^t で最小のものと仮定してよい．このとき，以下が成り立つ．

- $j^t = i^t$ $(t \geq 1)$
- $j^t + 1 \geq j^{t+1}$, $j_t \neq j^{t+1}$ $(t \geq 1)$
- $j^2 = j^1 + 1$ ($\because j^1$の最小性より)

よって，$y^1 = (y_0, \cdots, y_k)$ とすると，x^1, y^2, x^2, y^3 は以下のように書ける．

$$\begin{aligned}
x^1 &= (y_0, \cdots, y_{i^1}, y_{i^1+2}, \cdots, y_k),\\
y^2 &= (y_0, \cdots, y_{i^1}, z_1, y_{i^1+2}, \cdots, y_k)\ (z_1\text{は } (y_{i^1-1}, y_{i^1}, z_1, y_{i^1+2}) \in S \text{ をみたす点}),\\
x^2 &= (y_0, \cdots, y_{i^1}, z_1, y_{i^1+3}, \cdots, y_k),\\
y^3 &= (y_0, \cdots, y_{i^1}, z_1, z_2, y_{i^1+3}, \cdots, y_k)\ (z_2\text{は } (y_{i^1}, z_1, z_2, y_{i^1+3}) \in S \text{ をみたす点}).
\end{aligned}$$

ここで，$y^t =: (y_0^t, \cdots, y_k^t)$ と書くと，$d(y_{i^1}^t, y_{i^1+2}^t) \leq 1$ $(t \geq 3)$ がいえる．以下に帰納法で示す．

(I) $t = 3$ のとき
$y^3 = (y_0, \cdots, y_{i^1}, z_1, z_2, y_{i^1+3}, \cdots, y_k)$ で，$(y_{i^1}, z_1, z_2, y_{i^1+3}) \in S$ より，

- $z_2 = y_{i^1}$
- $z_2 = p(y_{i^1}, z_1, y_{i^1+3})$

のいずれかが成り立つが，いずれの場合も $d(y_{i^1}^3, y_{i^1+2}^3) = d(y_{i^1}, z_2) \leq 1$ がいえる．

(II) y^t $(t \geq 3)$ について，$d(y^t_{i^1}, y^t_{i^1+2}) \leq 1$ と仮定する．

$$y^{t+1} = (y^t_0, \cdots, y^t_{i^t-1}, y^t_{i^t}, z_t, y^t_{i^t+2}, \cdots, y^t_k) \ (z_t\text{は } (y^t_{i^t-1}, y^t_{i^t}, z_t, y^t_{i^t+2}) \in S \text{ をみたす点})$$

と書ける．$d(y^t_{i^1}, y^t_{i^1+2}) \leq 1$ (仮定) より $i^t \neq i^1$ で，$i^t \geq i^1$ と合わせると，$i^t \geq i^1 + 1$ である．

(i) $i^t = i^1 + 1$ のとき，(I) と同様に $(y^t_{i^t-1}, y^t_{i^t}, z_t, y^t_{i^t+2}) \in S$ より

$$d(y^{t+1}_{i^1}, y^{t+1}_{i^1+2}) = d(y^t_{i^t-1}, z_t) \leq 1$$

がいえる．

(ii) $i^t \geq i^1 + 2$ のとき

$$d(y^{t+1}_{i^1}, y^{t+1}_{i^1+2}) = d(y^t_{i^1}, y^t_{i^1+2}) \leq 1.$$

(I), (II) より，$d(y^t_{i^1}, y^t_{i^1+2}) \leq 1$ $(t \geq 3)$ が成り立つ．よって，$y^t_{i^1+1}$ は y^t で smooth ではないので，$j^t = i^t \neq i^1 = j^1$ $(i \geq 3)$ が分かり，$j^2 \neq j^1$ と合わせて $j^t \neq j^1$ $(t \geq 2)$ がいえる．一方，$y^1 = y^{p+1}$ より $j^1 = i^1 = i^{p+1} = j^{p+1}$ であるが，これは $j^t \neq j^1$ $(t \geq 2)$ と矛盾する．

以上で，M が acyclic matching であることが示せた．単体複体 $K_\ell(a,b)$ の face poset 上で M を考えると，critical element は A の元と $K'_\ell(a,b)$ の元だけである．定理 5.4 より，$A = \emptyset$ のときは $K_\ell(a,b)/K'_\ell(a,b)$ は可縮となる．集合 $A \neq \emptyset$ のとき，A の元はすべて $j_0 = \infty$ をみたすので $(\ell-2)$ 次元単体である．定理 5.4 より，$K_\ell(a,b)$ は，$K'_\ell(a,b)$ にいくつかの $(\ell-2)$ 次元セルを貼り付けた CW 複体とホモトピー同値である．よって，$K_\ell(a,b)/K'_\ell(a,b)$ はいくつかの $(\ell-2)$ 次元球面の 1 点和とホモトピー同値である． □

参考文献

[1] Y. Asao, Y. Hiraoka, S. Kanazawa, Girth, magnitude homology, and phase transition of diagonality. arXiv:2101.09044, 2021.

[2] Y. Asao, K. Izumihara, Geometric approach to graph magnitude homology. *Homology Homotopy Appl.* **23** (2021), no. 1, 297-310.

[3] Y. Gu, Graph magnitude homology via algebraic Morse theory. arXiv:1809.07240, 2018.

[4] R. Hepworth and S. Willerton, Categorifying the magnitude of a graph. *Homology Homotopy Appl.* **19** (2017), no. 2, 31-60.

[5] R. Kaneta and M. Yoshinaga, Magnitude homology of metric spaces and order complexes. *Bull. of London Math. Soc.* **53** (2021), no. 3, 893-905.

[6] D. Kozlov, Combinatorial Algebraic Topology. Springer, 2008.

[7] T. Leinster, The magnitude of a graph. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **166** (2019), 247-264.

[8] Yu Tajima, Masahiko Yoshinaga, Magnitude homology of graphs and discrete Morse theory on Asao-Izumihara complexes. arXiv:2110.02458, 2021.

Dilation 不等式とその応用

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻
辻寛 (Hiroshi TSUJI)

概要

Dilation 不等式は Borell's lemma とも呼ばれており，高次元凸幾何学においてよく知られた不等式である．この不等式は，ユークリッド空間上の log-concave 確率測度で測った原点対称な凸体の体積とその dilation の体積との関係を表している．本講演では dilation 不等式を一種の等周不等式とみなしたうえで dilation profile という新たな概念を導入し，リッチ曲率の任意定数の制限の下，重みつきリーマン多様体上での dilation 不等式の構成を行う．

1 序文

2 次元ユークリッド空間内の領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ が与えられたとき，その領域と同じユークリッド体積を持つ領域であって，その周の長さが最も小さくなるような領域はどのような形か，という問題を考える．この問題は等周問題と呼ばれており，長い歴史を持つ古典的な問題として知られている（例えば [C]）．上述した等周問題では，開円板が適切な領域であることが知られている．この等周問題は自然に高次元化され，またリーマン多様体上でも同様の問題が定式化される．

古典的な等周問題では領域の体積を測るためにルベーグ測度を用いるが，ルベーグ測度ではない測度を用いて同様の等周問題を考えた場合にはどうなるか，という問題を考える．この問題に対する一つの具体例として，$\mathbb{R}^n$ 上の正規分布

$$d\gamma_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} dx$$

の場合が知られている．実はこの場合，古典的な場合と異なり，半空間が適切な領域であることが知られている．しかし，一般的に等周問題を直接取り扱いうことは簡単なことではない．そこで等周問題を直接考えるのではなく，等周に関する量（isoperimetric profile）を導入し，その量を比べることである種の等周不等式を構成することを考える．実際，リッチ曲率の下界のもとでは（モデル空間との比較を通して）その量を用いた等周不等式が構成できることが知られている [Mi1], [Mi2].

より具体的には次の量を考える．$\mathbb{R}^n$ 上のボレル測度 $\mathfrak{m}$ に対してボレル集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ の境界面積（Minkowski area）を

$$\mathfrak{m}^+(A) := \liminf_{\varepsilon \to 0+} \frac{\mathfrak{m}([A]_\varepsilon) - \mathfrak{m}(A)}{\varepsilon}$$

により定める．ここで $[A]_\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ は

$$[A]_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) < \varepsilon\}$$

によって定義される A の ε 近傍である．Minkowski area を用いて次の isoperimetric profile が導入される：

$$\mathcal{I}_{\mathfrak{m}}(\theta) \coloneqq \{\mathfrak{m}^{+}(A) \mid A \subset \mathbb{R}^n, \mathfrak{m}(A) = \theta\}, \quad \forall \theta \in [0,1].$$

このとき，次の事実が知られている．

定理 1.1 ([Mi1])**.** $\mathbb{R}^n$ 上の滑らかな非負関数を密度関数に持つボレル測度 $\mathfrak{m}$ が，$\mathfrak{m}(\mathbb{R}^n) = 1$ と $\mathrm{Ric}_\infty \geq 1$ を満たすとき，$\mathcal{I}_{\mathfrak{m}} \geq \mathcal{I}_{\gamma_n}$ が $[0,1]$ 上で成り立つ．

ここで Ric_∞ は重みつきリッチ曲率（3 節参照）を表す．特に正規分布 γ_n は $\mathrm{Ric}_\infty = 1$ を満たす．原論文では，上の定理はより一般の空間（リーマン多様体）において，より広い枠組みの重みつきリッチ曲率の下界と直径の上界のもとで議論されていることを注意しておく．

本講演では，Minkowski area における ε 近傍を別の量に取り替えた場合，対応する profile の比較定理は同様に得られるか，得られるならば現れるモデル空間は何であるか，といった問題を調べる．もう少し具体的には，ε 近傍の代わりに“相似拡大もどき”(ε-dilation) を新たな近傍として取り扱う．その新たな近傍を通して得られる不等式を本講演では dilation 不等式と呼んでいる．この問題の動機はもともとは高次元凸幾何学に根差しており，等周不等式とは独立であることを注意しておく．そのうえで本講演では，従来の等周不等式を彷彿とさせる結果が得られたことを紹介したい．

2 Dilation 不等式

$\mathbb{R}^n$ 上のボレル測度 μ が **s-concave** ($s \in \mathbb{R}$) とは，次が成り立つことを指す: $\mu(A), \mu(B) > 0$ を満たす任意のコンパクト集合 $A, B \subset \mathbb{R}^n$ と $\lambda \in [0,1]$ に対して，

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geq ((1-\lambda)\mu(A)^s + \lambda \mu(B)^s)^{1/s}. \tag{2.1}$$

ここで，$(1-\lambda)A + \lambda B \coloneqq \{(1-\lambda)a + \lambda b \mid a \in A, b \in B\}$ とする．また $s = 0$ のとき，右辺は（連続的に）$\mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^{\lambda}$ と解釈され，この場合は特別に **log-concave** と呼ばれる．例えば，$\mathbb{R}^n$ 上の n 次元ルベーグ測度は $1/n$-concave である．この事実は古典的な Brunn-Minkowski 不等式に対応する．他にも n 次元標準正規分布 γ_n は log-concave 確率測度であることが知られている．

Borell[Bor] は s-concave 測度 μ と原点対称な凸体 K（i.e., K はコンパクトな凸集合であってその内部は空集合ではなく $K = -K$ を満たす）の関係として次の不等式を見出した．

$$\left(\frac{2}{t+1}\mu(\mathbb{R}^n \setminus (tK))^s + \frac{t-1}{t+1}\mu(K)^s\right)^{1/s} \leq \mu(\mathbb{R}^n \setminus K), \quad \forall t \geq 1. \tag{2.2}$$

ただし，$\mu(K) > 0$ かつ $\mu(tK) < 1$ としておく．また，$s = 0$ のとき左辺は

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus (tK))^{\frac{2}{t+1}}\mu(K)^{\frac{t-1}{t+1}}$$

となる．この不等式は次の包含関係と (2.1) から直ちに得られる．

$$\frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus (tK)) + \frac{t-1}{t+1}K \subset \mathbb{R}^n \setminus K, \quad \forall t \geq 1.$$

不等式 (2.2) は高次元凸幾何学の文脈においてよく知られた不等式であり，**Borell's lemma** と呼ばれる．本予稿では (2.2) のようなスケールを伴った体積の変化に関する不等式を **dilation 不等式**と呼ぶことにする．

話を先に進める前に，Borell's lemma の解釈とその応用を紹介する．以下の議論では簡単のために μ は log-concave 確率測度（すなわち $s=0$ かつ $\mu(\mathbb{R}^n)=1$）としておく．このとき，(2.2) は次のように書き換えることができる．

$$1-\mu(tK) \le \left(\frac{1-\mu(K)}{\mu(K)}\right)^{(t+1)/2} \mu(K), \quad \forall t \ge 1. \tag{2.3}$$

とくに $\mu(K) \ge 2/3$ のとき，上の不等式から次の式が従う．

$$1-\mu(tK) \le c_1 e^{-c_2 t}, \quad \forall t \ge 1.$$

ここで，$c_1, c_2 > 0$ は absolute constant である．この不等式は K の体積がある程度大きければ $\mu(\mathbb{R}^n \setminus (tK))$ が t に関して指数減衰することを表しており，ゆえに Borell's lemma はある種の測度の集中現象を表す不等式として理解することができる．

高次元凸幾何学において知られる Borell's lemma の応用の一つとして，次の不等式は reverse Hölder inequality（または Kahane-Khintchine inequality, moment comparison）と呼ばれる不等式である: $\mathbb{R}^n$ 上の任意の log-concave 確率測度 μ，ノルム $\|\cdot\|$ と $1 \le p \le q$ に対して，

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^q \, d\mu(x)\right)^{1/q} \le C\frac{q}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}.$$

ここで $C>0$ はいかなる量にも依存しない absolute constant である．上式の左の不等式はよく知られた Hölder 不等式である．上式の右の不等式はノルムに関する large deviation inequality を通して証明される．

さて，先ほど Borell's lemma を紹介したが，では (2.2) は最良な形をしているだろうか．この問いを考えるために，ここでも簡単に μ は log-concave 確率測度とする．このとき Borell's lemma から (2.3) が従う．今，K として $\mu(K) < 1/2$ を満たすものをとり，$t \to +\infty$ での (2.3) のふるまいに着目する．このとき左辺は 0 に近づく一方で，右辺は正に発散することがわかる．このことから (2.2) は K の体積が小さいときには最良ではないことが確認できる．実際，Lovász-Simonovits[LS] らは log-concave の場合に，その後 Guédon[G] は s-concave ($s \in [0,n]$) の場合に，次のように改良できることを証明した．

$$\left(\frac{2}{t+1}\mu(\mathbb{R}^n \setminus (tK))^s + \frac{t-1}{t+1}\right)^{1/s} \le \mu(\mathbb{R}^n \setminus K), \quad \forall t \ge 1. \tag{2.4}$$

ここで，K は原点対称な凸体であり，$s>0$ のときには $\mu(tK)<1$ を満たすとする．また $s=0$ のときには，左辺は次の表示を持つ：

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus (tK))^{\frac{2}{t+1}}.$$

さらに，上式の等号を達成するような測度と原点対称な凸体の組を具体的に与えることもできる（3.2 節参照）．

以上のように，Borell's lemma は最良な形で改良できることが分かった．では次の疑問として「K は原点対称」という仮定は必要であろうか．実は K が一般のボレル集合の場合，特別な（tK ではない）dilation を考えることにより，(2.4) と同様の不等式が成立することが Nazarov-Sodin-Volberg[NSV], Bobkov[Bob1, Bob2], Bobkov-Nazarov[BobN], Fradelizi[Fr] らの研究によって明らかになっている．さらに，より一般に同様の dilation 不等式が非負の重みつきリッチ曲率を持つリーマン多様体上で成立することが Klartag[Kl] によって言及されている．次節でこの一般的な設定の下での拡張の議論を行う．

3 リーマン多様体への拡張

3.1 重みつきリッチ曲率

この節では重みつきリッチ曲率を導入し，その基本的な性質を説明する．$(\mathcal{M}, g, \mathfrak{m})$ を geodesically-convex な n 次元重みつきリーマン多様体とし，$\mathfrak{m} = e^{-\Psi}\mathrm{vol}_g$（$\Psi \in C^\infty(\mathcal{M})$）は $\mathfrak{m}(\mathcal{M}) = 1$ を満たすとする．ここで vol_g は g から定まる自然な体積形式である．このとき $N \in (-\infty, \infty]$ に対して，重みつきリッチ曲率 Ric_N は次のように定義される．

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \mathrm{Ric}_N(v) \coloneqq \mathrm{Ric}_g(v) + \mathrm{Hess}\Psi(v,v) - \frac{\langle \nabla\Psi(p), v\rangle^2}{N-n} \qquad \text{if } \ N \neq n, \infty,\\
&(2)\ \mathrm{Ric}_\infty(v) \coloneqq \mathrm{Ric}_g(v) + \mathrm{Hess}\Psi(v,v),\\
&(3)\ \mathrm{Ric}_n(v) \coloneqq \begin{cases} \mathrm{Ric}_g(v) + \mathrm{Hess}\Psi(v,v) & \text{if } \langle \nabla\Psi(p), v\rangle = 0,\\ -\infty & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

ここで $p \in \mathcal{M}, v \in T_p\mathcal{M}$ であり，Ric_g は $(\mathcal{M}, g)$ から定まるリッチ曲率である．$(\mathcal{M}, g, \mathfrak{m})$ がある $\kappa \in \mathbb{R}$ と $N \in (-\infty, \infty]$ に対して $\mathrm{Ric}_N \geq \kappa$ を満たすとは，任意の $v \in T\mathcal{M}$ に対して $\mathrm{Ric}_N(v) \geq \kappa g(v,v)$ が成立することを指す．例えば標準正規分布 γ_n は $\mathrm{Ric}_\infty = 1$ を満たすことが定義より確認できる．また重みつきのリッチ曲率はその定義からすぐわかるように，$N \in (n, \infty)$ と $N' \in (-\infty, 1)$ に対して次のような単調性を持つ:

$$\mathrm{Ric}_n \leq \mathrm{Ric}_N \leq \mathrm{Ric}_\infty \leq \mathrm{Ric}_{N'}.$$

今日では，重みつきリッチ曲率の制限 $\mathrm{Ric}_N \geq \kappa$ は Lott, Sturm, Villani らの曲率次元条件 $CD(\kappa, N)$ と同値であることはよく知られている．とくに (M, g) がユークリッド空間の場合，$\mathbb{R}^n$ 上の確率測度 μ が s-concave ($s \in (-\infty, 1/n]$) であることは $CD(0, 1/s)$（$s = 0$ のときは $1/s \coloneqq +\infty$ とする）に対応し，ゆえに $\mathrm{Ric}_{1/s} \geq 0$ と同値であることがわかる．ユークリッド空間におけるこれらの関係は Borell[Bor] によって示されている．

3.2 dilation 不等式

$(\mathcal{M}, g)$ を geodesically-convex な n 次元リーマン多様体とし，$A \subset \mathcal{M}$ をボレル集合とする．このとき $\varepsilon \in [0, 1)$ に対して，$\mathcal{M}$ における A の **ε-dilation 集合**を次で定義する:

$$A_\varepsilon \coloneqq A \cup \{x \in \mathcal{M} |\ \text{次を満たす最短測地線 } \gamma \text{ が存在; } \gamma : [0,1] \to \mathcal{M},\ \gamma(0) = x,\ |\gamma \cap A| > 1 - \varepsilon\}. \tag{3.1}$$

ここで $|\gamma \cap A|$ は $\{t \in [0,1] \mid \gamma(t) \in A\}$ を 1 次元ルベーグ測度で測った体積とする．とくに $A_0 = A$ であることを注意しておく．

例 3.1. (1) $K \subset \mathbb{R}^n$ を凸開集合とする．このとき，

$$K_\varepsilon = K + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(K - K).$$

とくに K が開集合かつその閉方が原点対称な凸体となるとき，

$$K_\varepsilon = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}K.$$

とくにこの性質から，ε-dilation はユークリッド空間における原点対称な凸体の自然な dilation の一般化として理解できる．

(2) $(\mathcal{M}, g)$ を geodesically-convex な n 次元リーマン多様体とし，$B(x;r)$ を中心 $x \in \mathcal{M}$，半径 $r > 0$ の開球とする．このとき

$$B(x;r)_\varepsilon \subset B\left(x; \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}r\right).$$

一般にこの包含関係は等号にはなりえない（たとえば $\mathbb{S}^1$ の場合を考えればよい）．

以上のようにして定義された dilation に対して，(2.4) と同様の結果が成立する．

定理 3.2 (Klartag [Kl])**.** $(\mathcal{M}, g, \mathfrak{m})$ を *geodesically-convex* な n 次元重みつきリーマン多様体とし，$\mathfrak{m}(\mathcal{M}) = 1$ を満たすとする．このとき $(\mathcal{M}, g, \mathfrak{m})$ がある $N \in (-\infty, 0) \cup [n, \infty]$ に対して $\mathrm{Ric}_N \geq 0$ を満たすならば，任意のボレル集合 $A \subset \mathcal{M}$ と $\mathfrak{m}(A_\varepsilon) < 1$ となる $\varepsilon \in [0,1)$ に対して，

$$1 - \mathfrak{m}(A) \geq \left\{(1-\varepsilon)\mathfrak{m}(\mathcal{M} \setminus A_\varepsilon)^{1/N} + \varepsilon\right\}^N \tag{3.2}$$

が成り立つ．ここで $N = \infty$ のとき，右辺は $\mathfrak{m}(\mathcal{M} \setminus A_\varepsilon)^{1-\varepsilon}$ とする．

前節でも述べたように，μ が $\mathbb{R}^n$ 上の s-concave 確率測度であれば $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2^2, \mu)$ は $\mathrm{Ric}_{1/s} \geq 0$ を満たす．ゆえに定理 3.2 は (2.4) を導くことがわかる．また (3.2) は最良でもある．実際，$\mathbb{R}$ 上の確率測度 $\mu_N = \rho_N(x)dx$,

$$\rho_N(x) \coloneqq \left(1 - \frac{x}{N}\right)_+^{N-1} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x), \tag{3.3}$$

はその台上で $\mathrm{Ric}_N \geq 0$ を満たし，かつ A として区間 $(0,a)$ (a は任意の正定数）を考えることで (3.2) の等号が達成されることがわかる．

4 主結果

本節では定理 3.2 における曲率の仮定「$\mathrm{Ric}_N \geq 0$」をより一般的な条件「$\mathrm{Ric}_N \geq K$」（$K \in \mathbb{R}$）に置き換えた場合に，(3.2) がどのような形として現れるかを調べる．そのために (3.2) の次のような書き換えに注目する．

$$\mathfrak{m}(A_\varepsilon) \geq 1 - \left(\frac{(1-\mathfrak{m}(A))^{1/N} - \varepsilon}{1-\varepsilon}\right)_+^N.$$

ここで $\alpha > 0$ に対して $0^\alpha := 1$ とする．このとき上式は A_ε を A の“近傍”として考えた場合の等周不等式として理解することができる．実際，本主結果では上記のように dilation 不等式を等周不等式とみなすことによる拡張を与えた．より正確に述べるために，等周不等式の isoperimetric profile に対応する **dilation profile** を定義する．geodesically-convex な n 次元重みつきリーマン多様体 $(\mathcal{M}, g, \mathfrak{m})$ の dilation profile $\mathcal{D}_{(\mathcal{M},g,\mathfrak{m})}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ とは，

$$\mathcal{D}_{(\mathcal{M},g,\mathfrak{m})}(\theta) := \inf\{\mathfrak{m}^*(A) \mid \text{ボレル集合 } A \subset \mathcal{M},\ \mathfrak{m}(\mathcal{M}) = \theta\}, \quad \theta \in [0,1].$$

ここでボレル集合 $A \subset \mathcal{M}$ に対して $\mathfrak{m}^*(A)$ は

$$\mathfrak{m}^*(A) := \liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{\mathfrak{m}(A_\varepsilon) - \mathfrak{m}(A)}{\varepsilon}$$

として定義される量であり，本予稿ではこの量を **dilation area** と呼ぶことにする．

さて，定理 3.2 とそのあとの最良性の議論から，$\mathrm{Ric}_N \geq 0$ の仮定の下，

$$\mathcal{D}_{(\mathcal{M},g,\mathfrak{m})}(\theta) \geq \mathcal{D}_{(\mathbb{R},|\cdot|,\mu_N)}(\theta) = -N\left(1 - \theta - (1-\theta)^{1-1/N}\right), \quad \theta \in [0,1] \tag{4.1}$$

が従う．より一般に次の事実が得られることが，本予稿の主結果である．

定理 4.1 ([T])**.** $\kappa \in \mathbb{R}$, $N \in (-\infty, 1) \cup [n, \infty]$, $D \in (0, \infty]$ を固定する．このとき，次を満たすような関数 $\mathcal{D}_{\kappa,N,D}\colon [0,1] \to [0,\infty)$ が *explicit* に与えられる*: geodesically-convex* な n 次元重みつきリーマン多様体 $(\mathcal{M}, g, \mathfrak{m})$ が $\mathfrak{m}(\mathcal{M}) = 1$，$\mathrm{Ric}_N \geq \kappa$ かつ $\mathrm{diam}\mathcal{M} \leq D$ を満たすとき，任意の強凸集合 $A \subset \mathcal{M}$ に対して，

$$\mathfrak{m}^*(A) \geq \mathcal{D}_{\kappa,N,D}(\mathfrak{m}(A)) \tag{4.2}$$

が成り立つ．また関数 $\mathcal{D}_{\kappa,N,D}$ は *point-wise* に最良である．

ここで $A \subset \mathcal{M}$ が強凸集合であるとは，任意の $p, q \in A$ に対して $\mathcal{M}$ 内の最短測地線がただ一つ定まり，かつその曲線全体が A に含まれることを指す．

主定理で現れる $\mathcal{D}_{\kappa,N,D}$ は具体的に書き下すことができ，$\kappa = 0$ の場合には (4.1) の右辺に一致する．他の場合の例として，ここでは $\kappa > 0, N = \infty, D \leq \infty$ の場合だけを明示的に与えておく:

$$\mathcal{D}_{\kappa,\infty,D}(\theta) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{e^{-\kappa\alpha(x,\theta)^2/2}}{\int_x^{x+D} e^{-\kappa t^2/2}\,dt}(\alpha(x,\theta) - x) \;\middle|\; \frac{\int_x^{\alpha(x,\theta)} e^{-\kappa t^2/2}\,dt}{\int_x^{x+D} e^{-\kappa t^2/2}\,dt} = \theta \right\}, \quad \theta \in [0,1].$$

注意 4.2. (1) $\mathcal{D}_{\kappa,N,D}$ が凹関数のとき，定理 4.1 の (4.2) における A はボレル集合とできる．とくに $\kappa = 0$ のとき，(4.1) の右辺は凹関数であるから定理 4.1 は定理 3.2 を導くことがわかる．

(2) 定義から dilation area はスケール不変である．すなわち，$\lambda > 0$ に対して $(\mathcal{M}, \lambda^2 g, \mathfrak{m})$ を新たな geodesically-convex な n 次元重みつきリーマン多様体とし，$A \subset \mathcal{M}$ をボレル集合とするとき，$\mathfrak{m}^*(A)$ は λ に依存せずに決まる．したがって，dilation profile はスケール不変な関数となる．とくにこの性質から，定理 4.1 の $\mathcal{D}_{0,N,D}$ は D に依存しないことがわかる．実際，$(\mathcal{M}, g, \mathfrak{m})$ が $\mathrm{Ric}_N \geq 0$ かつ $\mathrm{diam}\mathcal{M} \leq D$ をみたすとき，$(\mathcal{M}, \lambda^2 g, \mathfrak{m})$ は $\mathrm{Ric}_N \geq 0$ かつ $\mathrm{diam}\mathcal{M} \leq \lambda D$ をみたす．一方で dilation profile は λ に依存しないの

で，$\mathcal{D}_{(\mathcal{M},\lambda^2 g,\mathfrak{m})} = \mathcal{D}_{(\mathcal{M},g,\mathfrak{m})}$ が成り立ち，結論を得る．同様の議論をすることで $\mathcal{D}_{\kappa,N,\infty}$（$\kappa > 0$）は κ に依存せずに，その符号のみに依存することがわかる．とくにこの事実は $\lim_{\kappa\to+0} \mathcal{D}_{\kappa,N,\infty} \neq \mathcal{D}_{0,N,\infty}$ を意味する．

参考文献

[Bob1] S. G. Bobkov, Large deviations via transference plans, Advances in mathematics research, Vol. 2, 151–175, Adv. Math. Res., **2**, Nova Sci. Publ., Hauppauge, NY, 2003.

[Bob2] S. G. Bobkov, Large deviations and isoperimetry over convex probability measures with heavy tails, Electron. J. Probab. **12** (2007), 1072–1100.

[BobN] S. G. Bobkov and F. Nazarov, Sharp dilation-type inequalities with fixed parameter of convexity, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) 351 (2007), Veroyatnost'i Statistika. **12**, 54–78, 299; reprinted in J. Math. Sci. (N.Y.) **152** (2008), no. 6, 826-839.

[Bor] C. Borell, Convex measures on locally convex spaces, Ark. Mat. **12** (1974), 239–252.

[C] I. Chavel, Isoperimetric inequalities. Differential geometric and analytic perspectives. Cambridge Tracts in Mathematics, 145. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Fr] M. Fradelizi, Concentration inequalities for s-concave measures of dilations of Borel sets and applications, Electron. J. Probab. **14** (2009), no. 71, 2068–2090.

[G] O. Guédon, Kahane-Khinchine type inequalities for negative exponent, Mathematika **46** (1999), no. 1, 165–173.

[Kl] B. Klartag, Needle decompositions in Riemannian geometry, Mem. Amer. Math. Soc. **249** (2017), no. 1180.

[LS] L. Lovász and M. Simonovits, Random walks in a convex body and an improved volume algorithm, Random Structures Algorithms **4** (1993), no. 4, 359–412.

[Mi1] E. Milman, Sharp isoperimetric inequalities and model spaces for the curvature-dimension-diameter condition, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **17** (2015), no. 5, 1041–1078.

[Mi2] E. Milman, Beyond traditional curvature-dimension I: new model spaces for isoperimetric and concentration inequalities in negative dimension, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 5, 3605–3637.

[NSV] F. Nazarov, M. Sodin and A. Volberg, The geometric Kannan-Lovász-Simonovits lemma, dimension-free estimates for the distribution of the values of polynomials, and the distribution of the zeros of random analytic functions, Algebra i Analiz 14 (2002), no. 2, 214–234; translation in St. Petersburg Math. J. **14** (2003), no. 2, 351–366.

[T] H. Tsuji, Dilation type inequalities for strongly-convex sets in weighted Riemannian manifolds, Anal. Geom. Metr. Spaces **9** (2021), no. 1, 219–253.

Localization of a $KO^*(\mathrm{pt})$-valued index and the orientability of the $\mathrm{Pin}^-(2)$ monopole moduli space

東京大学大学院数理科学研究科 数理科学専攻
宮澤 仁 (Jin MIYAZAWA)

Abstract

本講演は, 閉多様体上で定義される楕円型線形偏微分作用素の指数とよばれる不変量についての講演である. まず指数と幾何学あるいはトポロジーに関する様々な結果を紹介し, 指数理論へのイントロダクションとする. そのあと指数に関する, この講演と同じタイトルの論文 [2] の結果を紹介する. 主結果はふたつで, ひとつめは Spin 構造, Spin^c 構造, $\mathrm{Pin}^{\pm}$ 構造を含む一般化された構造を定義し, $KO^*(pt)$ に値をとる指数を, 局所化させて計算できるという定理である. ふたつめは, 局所化定理を用いて, ゲージ理論であらわれるモジュライ空間の向き付け可能性を決定した結果である.

1 導入

1.1 楕円型作用素の指数

n 次元閉リーマン多様体 X と, 計量の入ったベクトル束 (実でも複素でもよい)$E, F \to X$ について, l 階線形偏微分作用素

$$D\colon \Gamma(E) \to \Gamma(F)$$

が楕円型であるとは, X の任意の点の近傍で D を局所座標と E, F の局所自明化であらわしたとき, D の l 階微分を含む項の $\partial/\partial x^i$ を形式的に ξ_i に置き換えた行列値の l 次斉次多項式 $P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ が退化することと $(\xi_1, \ldots, \xi_n) = 0$ が同値であることである. D の微分の階数に応じて楕円型偏微分作用素とよぶ. 楕円型作用素の例を挙げよう.

Example 1.1.

- $E = F = X \times \mathbb{R}$ とする. このとき, X の計量からラプラス作用素が定義される. これは 2 階の楕円型作用素である.
- E を X の余接束の外積代数の偶数次の部分, F を奇数次の部分とする. $D = d + d^*$ とするとこれは 1 階の楕円型作用素である. この D をドラーム作用素とよぶことにする.
- X を $4k$ 次元有向閉リーマン多様体とし, E を外積代数のうちホッジスターの $+1$ 固有空間, F を -1 固有空間とし, $D = d + d^*$ とするとこれも 1 階の楕円型作用素である. これを符号数作用素と呼ぶ.
- X をケーラー多様体, E を X の正則ベクトル束 L に値をとる反正則外積代数のうち偶数次の部分, F を奇数次の部分とする. D をドルボー作用素 $\bar\partial + \bar\partial^*$ とするとこれも 1 階の楕円型作用素である.

閉多様体上で定義される楕円型線形偏微分作用素にはつぎの著しい性質がある:

- D の kernel, cokernel は有限次元である.
- D の kernel の次元と cokernel の次元の差は D をしかるべきホモトピーで動かしても変化しない. 特に, X や E, F の計量の取り方にはよらない.

したがって $\dim(\ker(D)) - \dim(\mathrm{coker}(D))$ は D のホモトピー類にしかよらない不変量である. これを D の指数といい, $\mathrm{ind}(D)$ であらわす.

Example 1.2.
- ラプラス作用素の指数は $1 - 1 = 0$ である.
- ドラーム作用素の指数を見る. kernel は偶数次の調和形式の和であり, cokernel は随伴作用素の kernel と自然に同一視できるので奇数次の調和形式の和と同型である.
- 符号数作用素の指数はホッジ分解から同様にして $4k$ 次元多様体の符号数に一致することがわかる.
- ドルボー作用素の指数は正則ベクトル束 L のコホモロジーのオイラー数に一致する.

上の例からわかるように幾何学で出てくる重要な量のなかには楕円型作用素の指数としてあらわされるものがある.

逆に, 上の例から楕円型作用素の指数は多様体 X やベクトル束 E, F からきまる位相的な量で決まるのではないかと予想できる. 実際, ドラーム作用素と符号数作用素は X のベッチ数のみから決まり, ドルボー作用素の指数はヒルツブルフのリーマン・ロッホの定理から TX と正則ベクトル束 L の特性類で書けることがわかる.

一般の楕円型作用素について, その指数が位相的な量で計算できるというのが Atiyah-Singer の指数定理 [1] である. 楕円型作用素の指数は解析的指数と呼ばれ, 一方 K 群に値をとる位相的指数というものが定義され, そのふたつの指数が一致するというのが主張である. それを用いると指数を特性類で計算する公式が得られる. (別の証明の仕方として, 熱核の漸近展開をもちいて直接特性類の公式を得る方法もある.)

指数定理はガウスボンネの定理, ヒルツブルフの符号数定理, ヒルツブルフのリーマン・ロッホの定理など幾何学の重要な定理の一般化である.

1.2 ゲージ理論と指数定理

指数定理の重要な応用としてゲージ理論における, モジュライ空間の次元の計算があげられる. ゲージ理論は, ASD 方程式やサイバーグ・ウィッテン方程式などの非線形偏微分方程式を用いて 4 次元多様体の微分構造の情報や 3 次元多様体のトポロジーを調べる分野である. 4 次元および 3 次元の多様体の微分トポロジーは特に低次元トポロジーと呼ばれ, 5 次元以上の多様体には見られない現象がたくさん知られている. たとえば, 話を微分構造にかぎっても 5 次元以上の位相閉多様体の微分構造は存在しても有限個であるのに対し, 4 次元多様体で異種微分構造が存在することがわかっているものはすべて無限個である. また S^n のエキゾチックな微分構造の数は $n \geq 5, n = 3$ の場合には個数が求まっているが S^4 に関しては存在するかどうかもわかっていない.

ゲージ理論をもちいて 4 次元多様体の微分同相類にたいする不変量を構成する方法として, 考えて

いる非線形偏微分方程式の解の空間を無限次元の群で割って得られる空間, モジュライ空間を用いる方法がある．これは ASD 方程式に対してもサイバーグ・ウィッテン方程式に対しても定義される不変量である．どちらもモジュライ空間は有限次元の多様体になる．多様体になることは, 非線形偏微分方程式をヒルベルト空間の間の滑らかな写像とみなし, 無限次元の陰関数定理を用いて示される．有限次元の例では, n 次元多様体から m 次元多様体への滑らかな写像の正則値の引き戻しで定義される多様体の次元は $n-m$ である．この定義域と地域の次元の差にあたるのが, 非線形偏微分方程式を線形化した作用素の指数である．したがってモジュライ空間の次元は指数定理から計算されるのである．

2 指数の変種とモジュライ空間の向き付け

2.1 $KO^*(pt)$ に値をとる指数

指数には様々な変種があるが, ここでは特に $KO^*(pt)$ に値をとる指数について簡単に触れる．前節で紹介した指数はふたつのベクトル空間の次元の差であり, いわば $KO^0(pt)$(複素なら $K^0(pt)$) に値をとる指数といえる．楕円型作用素から得られる不変量にはもっと精密なものがある．高次の KO 群に値をとる指数である．リーマン面の Spin 構造の mod 2 指数がある．これは $KO^{-2}(pt) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に値をとる指数である．一般に, n 次元 Spin 多様体に対し $KO^{-n}(pt)$ に値をとる指数が定義できる．これを Atiyah-Milnor-Singer 不変量という．Atiyah-Milnor-Singer 不変量は Spin コボルディズム不変量である．

2.2 mod 2 指数とモジュライの向き付け

Subsection 1.2 においてゲージ理論では非線形偏微分方程式の解のなす空間 (を, 群で割った空間) であるモジュライ空間を用いて不変量を得ると述べた．このことについてもう少し詳しく述べる．例としてサイバーグ・ウィッテン方程式から得られるサイバーグ・ウィッテン不変量について説明する．サイバーグ・ウィッテン方程式の解のモジュライ空間は向き付け可能な閉多様体であり, 自然な $U(1)$ 束が与えられている．この $U(1)$ 束のチャーン類をモジュライ空間の次元 /2 乗してモジュライ空間のある向きで積分したのがサイバーグ・ウィッテン不変量である．とくに, モジュライ空間が 0 次元のときにはモジュライ空間の点の個数の符号込みの数え上げである．したがって不変量の定義にはモジュライ空間に向きが必要である．

サイバーグ・ウィッテン方程式の変種に中村信裕氏が [3], [4] で導入した $Pin^-(2)$ monopole 方程式がある．この方程式の解のモジュライ空間がサイバーグ・ウィッテンの場合と同じように有限次元の閉多様体になることは容易にわかる．このモジュライ空間に向きが付くかどうかは, とある $KO^{-1}(pt) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に値をとる指数が消えるかどうかにかかっている．しかし, この指数を位相的な情報から計算するのはそのままでは容易ではない．高次の KO 群に値をとる指数については, 特性類の積分のような簡単な位相不変量から計算する一般的な方法は知られていないからである．簡単にこの $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に値をとる指数が消えることがわかる場合をのぞいて $\mathrm{Pin}^-(2)$ monopole 不変量は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 値の不変量しか定義されていない．それにも関わらず $\mathrm{Pin}^-(2)$ monopole は通常のサイバー

グ・ウィッテン不変量では検出できない, 連結和の形の 4 次元多様体の微分構造に関する情報が検出できる. $\mathrm{Pin}^-(2)$ monopole の $\mathbb{Z}$ 値の不変量が定義できる場合が広がればより精密な情報を検出できることが予想される.

3 主結果

ここまでの背景を踏まえ, [2] の主結果の説明をする.

3.1 $KO^*(pt)$ に値をとる指数とその局所化

[2] では, Spin 構造, Spin^c 構造, $\mathrm{Pin}^{\pm}$ 構造の共通の一般化である, n 次元多様体上の $G^+(n, s^+, s^-)$ 構造を定義し, その構造に対し $KO^{s^- - n - s^+}(pt)$ に値をとる指数を定義した. これは Atiyah-Milnor-Singer 不変量の一般化である. 主定理のひとつめはこの不変量の局所化定理である. すなわち, n 次元多様体 X 上の $G^+(n, s^+, s^-)$ 構造 $\mathfrak{s}$ があるとき, X のある $n - s^-$ 次元部分多様体 C(Spin^c 構造の場合には特性部分多様体に相当する) に $G^+(n - s^-, s^+, 0)$ 構造 $\mathfrak{s}_C$ が誘導される.

Theorem 3.1. $G^+(n, s^+, s^-)$ ボルディズム類 $(X, \mathfrak{s})$ から $G^+(n - s^-, s^+, 0)$ ボルディズム類 $(C, \mathfrak{s}_C)$ を与える写像を f とする. このとき以下の図式は可換である:

$$\begin{array}{ccc} \Omega_n^{G^+(n,s^+,s^-)}(pt) & \xrightarrow{f} & \Omega_{n-s^-}^{G^+(n-s^-,s^+,0)}(pt) \\ & \searrow & \downarrow \\ & & KO^{-n-s^++s^-}(pt) \end{array}$$

ただし KO 群への写像は指数で与えられる.

3.2 $\mathrm{Pin}^-(2)$ monopole モジュライの向き付け

主定理のふたつめは, 局所化定理を用いて, $\mathrm{Pin}^-(2)$ monopole の向き付け可能性の obstruction を計算し, その obstruction が消えていない例を構成したというものである. 今後の課題としては obstruction が消えていない場合に $\mathbb{Z}$ 値の $\mathrm{Pin}^-(2)$ monopole 不変量を計算し, 通常のサイバーグ・ウィッテンでは検出できない, 連結和の形の 4 次元多様体に関してあらたにエキゾチックなものを検出できないかという問題がある.

References

[1] M. F. Atiyah and I. M. Singer. The index of elliptic operators. I. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 87, pp. 484–530, 1968.

[2] Jin Miyazawa. Localization of a $KO^*(pt)$-valued index and the orientability of the $Pin^-(2)$ monopole moduli space. *arXiv preprint arXiv:2109.10579*, 2021.

[3] Nobuhiro Nakamura. $\mathrm{Pin}^-(2)$-monopole equations and intersection forms with local coefficients of four-manifolds. *Mathematische Annalen*, Vol. 357, No. 3, pp. 915–939, 2013.

[4] Nobuhiro Nakamura. $\mathrm{Pin}^-(2)$-monopole invariants. *Journal of Differential Geometry*, Vol. 101, No. 3, pp. 507–549, 2015.

Right-left equivalent maps of simplified $(2,0)$-trisections with different configurations of vanishing cycles

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
浅野喜敬 (Nobutaka ASANO)

概要

可微分写像の同値類をその特異点の情報から特徴づけるという問題を考える．近年導入された新しい 4 次元多様体から 2 次元平面への可微分写像として，トライセクション写像というものがある．トライセクション写像は 4 次元多様体の 3 つの 1-ハンドルボディによる分割を誘導するものとして Gay-Kirby により導入された．さらに Baykur-Saeki は特異値が自己交叉を持たない単純な trisection 写像を導入した．講演者は単純な $(2,0)$-trisection の右左同値類を図式で特徴づけるために必要と考えられる幾つかの条件を考察した． 得られた結果についてその周辺と合わせて紹介する．単純な trisection の基礎的な事項についてより詳細に知りたい場合は，[4] を参照されたい．

多様体は滑らかで連結とし，$\sharp^k A$ は k 個の A を連結和した多様体を，$\natural^k A$ は k 個の A を境界連結和した多様体を表す．

1 序

多様体に対し，その上の可微分写像の特異点が多様体の微分トポロジー的な性質と深い繋がりがあることが良く知られている．例えば，多様体に Morse 関数を与えることでその特異点の情報から多様体のハンドル分割が与えられる．これまで微分トポロジーの研究ではハンドル分解を通して多くのことが理解されている．例えば 3 次元多様体に適切な Morse 関数を与えることで，次の分割を得ることが出来る：

$$M = H_1 \cup_\partial H_2$$

ここで，H_i は種数 g のハンドル体 ($\simeq \natural^g (S^1 \times D^2)$) であり (図 1 参照)，3 次元多様体 M が，2 つのハンドル体の境界での貼り合わせとして実現されている．種数 g のハンドル体の境界は種数 g の向き付け可能閉曲面である．上記の分割は 3 次元多様体の Heegaard 分解と呼ばれ，古典的な 3 次元多様体の分割として知られている．Heegaard 分解が与えられると，2 つのハンドル体の接着の様子が曲面上の曲線族として図示される (例 : 図 2)．この図式は Heegaard 図式と呼ばれている．Heegaard 分解は Dehn 手術と並んで 3 次元多様体の研究において大きな柱としての役割を持つ．

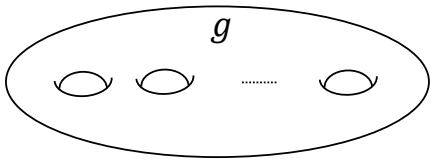


図 1: 種数 g の (3 次元) ハンドル体.

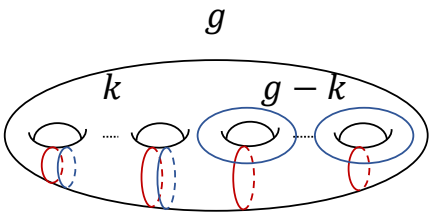


図 2: $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の標準的な種数 g の Heegaard 図式.

Morse 関数を一般化したものとして，安定写像がある．安定写像とは M から N への可微分写像であり，写像の空間の中で摂動しても特異点の性質が変わらないものである．可微分多様体のトポロジーと関連してこれまで多くの研究が為されている．

本稿で紹介するトライセクション写像は 4 次元多様体から実 2 次元平面への安定写像である．トライセクション写像の値域を 3 等分することで 4 次元多様体の 3 つの 1-ハンドル体の分割であるトライセクションを誘導し，貼り合わせの情報を曲面上の単純閉曲線族の 3 つ組として表すことができる．この表示はトライセクション図式という．

単純なトライセクション写像とは，特異値集合に 2 重点を持たないトライセクション写像であり，Baykur-佐伯により初めて導入されたものである．Baykur-佐伯は閉 4 次元多様体の持つ単純な特異 Lefschetz 束を変形することで，単純なトライセクション写像を得るアルゴリズムを具体的に与えている [2].

本稿では，次の問題について考えた：

問題：単純なトライセクション写像はその図式から特徴づけられるか.

2　トライセクションの定義

トライセクションは Gay-Kirby により導入された，4 次元多様体の 1-ハンドル体による分割である.

定義 1. $0 \leq k \leq g$ を正の整数とする．組 (X, X_1, X_2, X_3) が次の (1)，(2)，(3) を満たすとき，この組を (g,k)-trisection という.

(1) $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$

(2) 各 $i = 1,2,3$ について，微分同相写像 $\phi_i : X_i \to \natural^k(S^1 \times D^3)$ が存在する.

(3) 各 $i = 1,2,3$ について，3 を法として，$Y^-_{k,g} = \phi_i(X_i \cap X_{i+1})$，$Y^+_{k,g} = \phi_i(X_i \cap X_{i-1})$ とおいたとき，$Y^+_{k,g} \cup Y^-_{k,g}$ は $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の標準的な Heegaard 分解を与える.

任意の向き付け可能な連結閉 4 次元多様体はトライセクションを許容し，さらに各多様体に対しそのトライセクションは “安定化” と呼ばれる操作の差を除いて一意的である [3]．3 次元多様体において，2-ハンドルの接着円周を種数 g の向き付け可能閉曲面 Σ_g 上に表示したものを Heegaard 図式と呼んでいた．これと同様に，4 次元多様体に対しても，4 次元の 2-ハンドルの接着円周を曲面上に表

示したものを考えることができる．これが次に述べるトライセクション図式である．

定義 2. $\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_g\}$，$\beta = \{\beta_1, ..., \beta_g\}$，$\gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_g\}$ を，それぞれについて，Σ_g 上の非交和な単純閉曲線の族とする．各 $(\Sigma_g, \alpha, \beta)$，$(\Sigma_g, \beta, \gamma)$，$(\Sigma_g, \gamma, \alpha)$ が $\sharp^k(S^1 \times S^2)$ の種数 g の Heegaard 図式であるとき，組 $(\Sigma_g, \alpha, \beta, \gamma)$ をトライセクション図式という．

3　安定な特異点

以下，X を 4 次元多様体，$f : X \to \mathbf{R}^2$ を C^∞ 級写像とし，Crit(f) $= \{p \in X \mid p$ は f の臨界点 $\}$ とする．trisection 写像の定義を述べるために必要な特異点・及びその特異値集合の近傍における正則ファイバーの変化について紹介する．

定義 3. $p \in$ Crit(f) とする．p における局所座標 (t, x, y, z) が存在して，$f(t, x, y, z) = (t, -x^2 - y^2 + z^2)$ (resp.$f(t, x, y, z) = (t, -x^2 - y^2 - z^2)$) と表せるとき，$p$ は不定値 (resp. 定値) 折り目特異点である．

定義 4. $p \in$ Crit(f) とする．p における局所座標 (t, x, y, z) が存在して，$f(t, x, y, z) = (t, x^3 - 3xt + y^2 - z^2)$ と表せるとき，p はカスプ特異点である．

特異値の近傍の正則値上の正則ファイバーを特異ファイバーに近づけることで，正則ファイバーのトポロジーは変化する．その様子を以下に示す．

図 3 中図は不定値折り目特異点の近傍におけるファイバーと特異値を通り過ぎた後のファイバーの形の変化を示したものである．図 3 左図の縦方向の座標が定義 3 における座標 t であり，黒太実線部が f の特異値集合を表している．図 3 中図の横方向の座標は $-x^2 - y^2 + z^2$ と与えられるため，点線の引き戻しに沿って 3 次元 2-ハンドルの接着が行われている．したがってファイバーの曲面では手術が行われ，図 3 中図のような変化が生じる．このときの 2-ハンドルの接着円周に対応するファイバー上の曲線 (図 3 中図で赤線で示される単純閉曲線) を不定値折り目特異点の消滅サイクルと呼び，値域上の点線を reference path と呼ぶ．定値折り目特異点の場合も同様にして，reference path の引き戻しに沿って 3 次元 3-ハンドルの接着が行われる．また，このとき図 3 左図の横方向の座標は $-x^2 - y^2 - z^2$ で与えられており，特異値はこの関数の最大値である．よって赤線を通過するとファイバーは空集合となり，図 3 右図のような変化が生じる．

カスプ特異点の近傍の像は図 3 右図である．黒太線部が特異値集合であり，特異値集合の尖点部では 2 本の不定値折り目特異点の像が接している．図 3 右図の reference path にしたがってファイバーを動かすと不定値折り目特異点の消滅サイクル a, b に沿って 3 次元 2-ハンドルの接着が行われ，ファイバーが D^2 へと変化する．このとき，a と b は幾何学的に 1 度だけ交わる．

4　右左同値・安定写像

この章では可微分写像の同値関係である右左同値と，安定写像について紹介する．安定写像は次節で紹介するトライセクション写像を含む写像のクラスであり，比較的扱い易く意味のある特異点を持

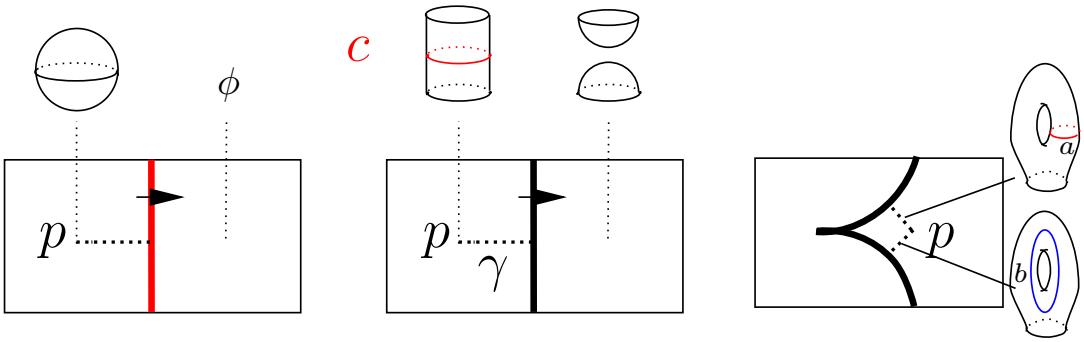


図 3: (左図)：定値折り目特異値　(中図)：不定値折り目特異値　(右図)：カスプ特異値

つ写像である．

定義 5. 可微分写像 $f, g : M \to N$ に対して以下の図式が可換であるとき，f と g は右左同値であるといい，$f \simeq g$ と表す：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\phi} & M \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ N & \xrightarrow{\psi} & N \end{array}$$

微分同相写像を定義域と値域の多様体全体における座標変換のようなものと思うと，2 つのこの同値関係の下で，安定写像を定義する．

定義 6. $f : M \to N$ の近傍内の任意の可微分写像 g に対し $f \simeq g$ であるとき，f を安定写像であるという．但し，写像空間 $C^\infty(M, N)$ にはホイットニー C^∞ 位相を入れている．

例えば，多様体上の Morse 関数で特異値がすべて異なるものは安定写像である．この意味で，安定写像は Morse 関数の一般化である．

ホイットニー C^∞ 位相については例えば [5] を参照されたい．大らかに述べると，$f, g \in C^\infty(M, N)$ が「近い」というのは，多様体 M 上一様に f, g の偏微分係数がすべて「近い」ということを意味している．

安定写像についての必要十分条件を紹介する．

定理 7. X を向き付け可能な閉 4 次元多様体，Σ を 2 次元多様体，$f : X \to \Sigma$ を可微分写像で固有 (proper) であるとする．f が安定であることと，次のすべての条件が成り立つことは同値である．

1 Crit(f) が折り目特異点とカスプ特異点からなる集合である．
2 f のカスプ特異点への制限は単射である．
3 f の折り目特異点への制限は，2 重点がすべて横断的で，その像はカスプ特異値を含まないは

め込みである．

また Crit(f) は X の 1 次元部分多様体であることが知られている．即ち特異値集合 $f(\mathrm{Crit(f)})$ はいくつかの 1 次元円周のはめ込みである．

安定写像は多様体の性質を調べるために用いられる重要な写像である．例えば曲面上の Morse 関数から得られるホモロジーの情報は曲面の位相型を決定するが， 3 次元多様体上の Morse 関数から 3 次元多様体の位相的情報を導き出すことは難しい．しかし値域の次元を高くして，3 次元多様体から曲面への安定写像を考えることで，より詳細に多様体の情報を引き出すことが出来る．

5　トライセクション写像

Gay-Kirby は，閉 4 次元多様体から $\mathbf{R}^2$ への安定写像 (トライセクション写像) を構成することで，任意の閉 4 次元多様体がトライセクションを許容することを証明した．この節では，トライセクション写像の定義について述べる．

定義 8. 安定写像 $f : X \to D^2$ の特異値集合が図 4 で与えられるとき，f は自然に (g, k)-トライセクションの構造をもつ．また，このとき X は (g, k)-トライセクション写像を許容するという．

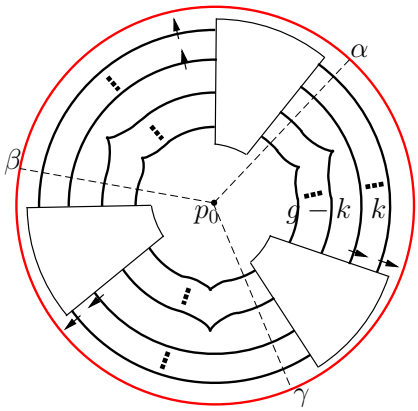


図 4: (g, k)-トライセクション写像の特異値集合．

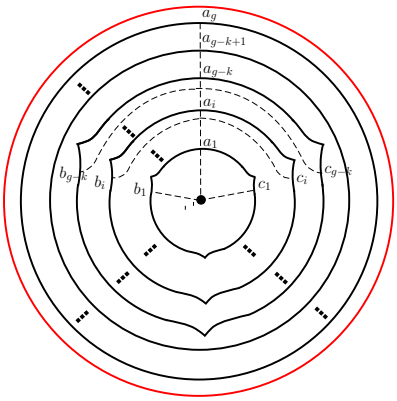


図 5: 単純な (g, k)-トライセクション写像の特異値集合．

図 4 の一番外側にある赤い円周は定値折り目特異点の像を表し，内側には不定値折り目特異点やカスプ特異点の像が描かれている．3 つの白い箱の内部には，各々 g 本の不定値折り目特異値のはめ込みが存在し，白い箱の不定値折り目特異値の単店同士を繋いでいる．ただし，これらの多重点はすべて 2 重点であり，折り目特異値は p_0 を中心とした円周に直行する接ベクトルを持たない．白い箱の間では，外側には不定値折り目特異値が k 本あり，内側には 1 つのカスプ特異値が 1 つついた不定値折り目特異値が $g - k$ 本ある．また，各白い箱の間に存在する特異値は互いに交わらない．

さらに，$f^{-1}(p_0) \simeq \Sigma_g$ である．これは半径方向のレファレンスパスに沿って外から内に動いたときの正則ファイバーの変化を調べると，外側から順に，空集合，$S^2, T^2, \ldots, \Sigma_g$ と変化することから従う．

定義 8 における (g,k)-トライセクション写像 f から X の (g,k)-トライセクション (X,X_1,X_2,X_3) とトライセクション図式 $(\Sigma_g,\alpha,\beta,\gamma)$ は次のようにして構成される．まず，図 4 のレファレンスパス α,β,γ に沿って値域の D^2 を 3 つの扇形に分割する．各扇形の引き戻しは $\natural^k(S^1\times D^3)$ と微分同相である．さらに，レファレンスパス α,β に沿って p_0 から半径方向に向かって 中心ファイバー $f^{-1}(p_0)$ を動かす．このときレファレンスパスと特異値集合の各交点で，不定値折り目特異点の消滅サイクルが現われ，消滅サイクルに沿って中心ファイバー $f^{-1}(p_0)$ は退化する．特異値集合とレファレンスパスの g 個の交点から，ある消滅サイクルの族 $\alpha=\{\alpha_1,...,\alpha_g\}$，$\beta=\{\beta_1,...,\beta_g\}$ を得る．これらは Σ_g 上のカットシステムであり，$f^{-1}(\alpha\cup\beta)\simeq\sharp^k(S^1\times S^2)$ であることから (Σ_g,α,β) は $\sharp^k(S^1\times S^2)$ の Heegaard 図式を与える．レファレンスパス β,γ，γ,α についても同様に (Σ_g,β,γ)，(Σ_g,γ,α) が $\sharp^k(S^1\times S^2)$ の Heegaard 図式を与える．以上から，トライセクション図式 $(\Sigma_g,\alpha,\beta,\gamma)$ が f より得られる．またこれらのことから各セクターの共通部分が定義 1(3) を満たすこともしたがう．逆に，定義 1 から図 4 を特異値集合とする安定写像を構成することもできる [3]．トライセクション写像をより単純化したものとして，Baykur-Saeki は特異値が図 5 で与えられる単純なトライセクション写像を導入し，任意の閉 4 次元多様体が単純な trisection 写像をもつことを証明した [1]．また，Hayano は単純なトライセクション写像に付随するトライセクション図式の研究を閉曲面の写像類群の観点から進め，モノドロミーの表記などを精密化した [4].

6　単純なトライセクションのモノドロミー

Baykur-Saeki は閉 4 次元多様体の単純なトライセクションを，単純特異 Lefschetz 束に対して特異点論の技法を用いたアルゴリズムを構成することで証明した．

定理 9 (Baykur-Saeki [1])．Z_f を f の Lefschetz 特異点の集合とする．このとき次が成り立つ．

(1) 閉 4 次元多様体 X に対し，$f:X\to S^2$ を，$\#Z_f=k$ かつ C_f の連結成分数は $l\in\{0,1\}$ である単純特異 Lefschetz 束とする．このとき，X は単純な $(2g+k-l+2,2g-l)$-トライセクションを許容する．

(2) X が単純な (g,k)-トライセクションを持つとする．このとき，ファイバー連結である directed 特異 Lefschetz 束で種数が $g+2$，かつ，$\natural Z_f=3g-3k+4$ であるものが存在する．

トライセクション写像から 4 次元多様体の図式を得るためには，不定値折り目特異点の消滅サイクルを一方単純な trisection 写像は，消滅サイクルらに Lefschetz 特異点のモノドロミーに由来する関係式がある．Hayano は次の定理を示した．定理において，$\Sigma_{a_1,...,a_{i-1}}$ は中心にある正則ファイバーに対し，消滅サイクル $a_1,\dots,a_{i-1}$ に沿って曲面を切り開き，各境界成分に円板を貼ることで得られる曲面を表し，$\mathrm{Mod}(\Sigma_{a_1,...,a_{i-1}};a_i)$ はその曲面上の曲線 a_i を固定する自己微分同相写像のなす群を表す．また，Φ_{a_i} は $\mathrm{Mod}(\Sigma_{a_1,...,a_{i-1}};a_i)$ から $\mathrm{Mod}(\Sigma_{a_1,...,a_{i-1},a_i})$ への，a_i に沿った変形により定まる自然な写像とする．

定理 10 (Hayano [4])．$f:X\to\mathbf{R}^2$ を単純 (g,k)-trisection とし，図 5 のように reference path を与える．$a_1,\dots,a_h,b_1,\dots,b_{g-k},c_1,\dots,c_{g-k}$ を中心にある正則ファイバー上の消滅サイクルとす

る．このとき，次が成り立つ．

(1) 各 $i=0,\dots,g-k-1$ に対し，$\mu_i \in \mathrm{Mod}(\Sigma_{a_1,\dots,a_{i-1}};a_i)$ を帰納的に

$$\mu_i = \begin{cases} id_\Sigma & i=0 \\ \Phi_{a_i}(t_{t_{c_i}(a_i)} \circ \mu_{i-1} \circ t_{t_{b_i}(c_i')} \circ t_{t_{a_i}(b_i)}) & i>0 \end{cases}$$

で定義する．ただし $c_{i+1}' = \mu^{-1}(c_{i+1})$ である．このとき，μ_i は特異値集合の内側から図 6 のように i 番目の円の少し内側にそれと平行に描いた円に沿ったモノドロミーを表す．

(2) (a_i,b_i), (a_i,c_i) (b_i,c_{i+1}') はそれぞれただ一度だけ交わる．

(3) 各 $j=g-k,\dots,g-1$ について，$\Phi_{a_j}\circ\cdots\circ\Phi_{a_{g-k+1}}(\mu_{g-k})$ は a_{j+1} を保つ．

逆に，これらの条件を満たす $a_1,\dots,a_g,b_1,\dots,b_{g-k},c_1,\dots,c_{g-k}$ が与えられたとき，それを実現する単純な trisection $f':X'\to\mathbf{R}^2$ が存在する．

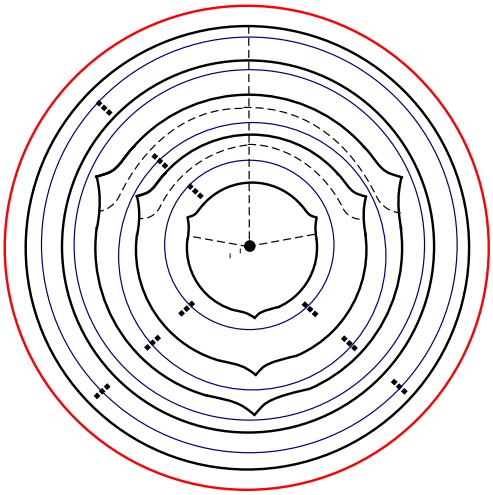


図 6: μ_i を誘導する円周の族．

また，Hayano は論文 [4] において，定理 10 のモノドロミーの表記と安定写像のホモトピー変形を用いることで，種数 2 の単純な trisection を持つ 4 次元多様体の分類を行った．この結果は Meier-Zupan による種数 2 の trisection を許容する 4 次元多様体の分類の系としてすでに知られていたが，論文 [4] では単純な trisection を持つ 4 次元多様体の分類問題を線形代数の問題に帰着させることで，より簡明な証明を与えている．

7　主結果

可微分写像の右左同値類を特異点から与えられる図式より決定することは基本的な問題である．本稿では，次の問題を考える：単純なトライセクションの同値類全体の集合と単純なトライセクション図式全体の集合の間に一対一の対応は存在するか？一般に，単純なトライセクション写像が与えられると，そこから得られる単純なトライセクション図式は一意的ではない．そこで，単純なトライセクション図式全体の集合を自然な同値関係で同一視することを考える．

定義 11. $(\Sigma, \{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\}), (\Sigma', \{a_1', a_2'\}, \{b_1', b_2'\}, \{c_1', c_2'\})$ を単純な $(2,0)$-トライセクション図式とする．

- 図式の曲線のラベルを保つ Σ から Σ' への同相写像，
- 上三角ハンドルスライド，
- レファレンスパスの取り換え

の有限列で $(\Sigma, \{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\})$ が $(\Sigma', \{a_1', a_2'\}, \{b_1', b_2'\}, \{c_1', c_2'\})$ に移るとき，これらの単純なトライセクション図式は同値であるといい，$(\Sigma, \{a_1, a_2\}, \{b_1, b_2\}, \{c_1, c_2\}) \sim (\Sigma', \{a_1', a_2'\}, \{b_1', b_2'\}, \{c_1', c_2'\})$ と表す．

講演者は単純な $(2,0)$-トライセクションの右左同値類に着目し，その図式全体の集合をレファレンスパスの取り換えで生じる図式の変化，上三角ハンドルスライド，曲面の同相写像により同一視したものについて考察した．

定理 12. $f : X \to \mathbf{R}^2$ をモノドロミーが非自明である単純な $(2,0)$-トライセクションとする．中心ファイバー上の消滅サイクルのイソトピー類の配置が例外的な場合を除いて，少なくとも 2 つの単純な $(2,0)$-トライセクション f' と f'' が存在し，以下を満たす：

- f, f', f'' は互いに右左同値だが，f, f', f'' の単純なトライセクション図式は相異なる．即ち，同相写像と上三角ハンドルスライドでは移り合わない．

参考文献

[1] N. Asano Right-left equivalent maps of simplified $(2,0)$-trisections with different configurations of vanishing cycles, preprint, available at arXiv:2109.13533.

[2] R. I. Baykur and O. Saeki, Simplified indefinite fibrations on 4-manifolds, *Trans. AMS*, https://doi.org/10.1090/tran/8325.

[3] D. Gay and R. Kirby, Trisecting 4-manifolds, *Geom. Topol.* **20** (2016), no. 6, 3097–3132.

[4] K. Hayano, On diagrams of simplified trisections and mapping class groups, available at arXiv:1711.02790, to appear in Osaka J. Math.

[5] 泉屋秀一，佐野貴志，佐伯修，佐久間一浩，特異点の数理 1 幾何学と特異点，共立出版，2001.

The Long-Moody construction and twisted Alexander invariants

東京大学大学院 数理科学研究科数理科学専攻
高野 暁弘（Akihiro Takano）*

概要

Long-Moody 構成とは，組み紐群と自由群の半直積の表現から組み紐群の新しい表現を作る方法である．その構成によって出来た表現を行列表示すると，ねじれ Alexander 不変量の定義に使われる表現でねじった Alexander 行列が現れることが分かる．本講演では，組み紐を固定したとき “良い” 表現を選ぶと，その組み紐の閉包のねじれ Alexander 不変量が Long-Moody 構成を用いて記述できることを示す．

1 組み紐群の表現と結び目の不変量

S^3 を 3 次元球面とする．**結び目（knot）**とは，S^3 内に埋め込まれた円周のことである．また，複数の結び目の非交和のことを**絡み目（link）**という．2 つの結び目 K_1, K_2 が**同値（equivalent）**であるとは，S^3 の向きを保つ自己同相写像 $h\colon S^3 \longrightarrow S^3$ であって $h(K_1) = K_2$ となるものが存在するときをいう．結び目理論の目標は，与えられた 2 つの結び目が同値かどうか区別することであり，そのために使われるのが結び目の不変量である．不変量とは，2 つの結び目が同値ならばそれぞれから得られる量（数，集合，多項式，etc.）が等しくなるようなものである．これまでに多くの不変量が構成されており，単に結び目を区別するだけでなく，不変量の強さ（どの程度区別出来るか）や不変量同士の関係性なども盛んに研究されてきた．

結び目の不変量は，結び目の図式から構成されることが多い．ここで結び目の**図式（diagram）**とは，S^3 内にある結び目を S^2 に射影し，それによって現れた自己交差での上下の情報を付け加えたものである．一般に図式のとり方は無限にあるが，**Reidemeister の定理**により結び目が同値であることの必要十分条件が図式上での局所的な操作（**Reidemeister 移動**）で記述できることが知られている．つまり，図式から結び目の不変量を構成しようと考えたら，Reidemeister 移動で不変になるようにすれば良いということが分かる．

ここまで結び目とは何かということを簡単に説明したところで，次に結び目と関わりが深い概念である組み紐および組み紐群について説明したいと思う．

D^2 を $\mathbb{C}$ 内の単位円板とし，$z_1, \ldots, z_n$ を D^2 の内部の点であって，各点 z_i は実軸上にあり $z_1 < \cdots < z_n$ を満たすようにとる．n 本の**組み紐（braid）**とは，n 個の有向単位区間の $D^2 \times [0,1]$ への埋め込みであって，各区間の始点（resp. 終点）はある $z_i \times \{0\}$（resp. $z_j \times \{1\}$）であり，また各区間の埋め込みは各平面 $D^2 \times \{t\}$ $(0 \leq t \leq 1)$ とただ 1 点で横断的に交わるようなものである．2 つの組み紐 b_1, b_2 が**同値**であるとは，$D^2 \times [0,1]$ の向きを保つ自己同相写像 $g\colon D^2 \times [0,1] \longrightarrow D^2 \times [0,1]$ であって境界上で恒等写像かつ $g(b_1) = b_2$ となるものが存在するときをいう．また，b_1 の終点と b_2 の始点を繋げることにより新しい組み紐が得られるので，この組み紐を $b_1 b_2$ と書く．この操作により，n 本の組み紐の同値類全体の集合上に積が定まり，さらにこれは群をなす．この群を B_n と書き，n 次の**組み紐群（braid group）**という．組み紐群は，Artin 表示と呼ばれる次の群表示をもつことが知られている:

$$\left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i & (|i-j| \geq 2) \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} & (i = 1, \ldots, n-2) \end{array} \right\rangle.$$

* E-mail: takano@ms.u-tokyo.ac.jp

各生成元 σ_i は，図 1 のような n 本の組み紐に対応する．また，全ての i $(1 \leq i \leq n)$ に対して始点が $z_i \times \{0\}$ である紐の終点が $z_i \times \{1\}$ であるような組み紐を n 本の**純組み紐（pure braid）**といい，それらの同値類全体の集合に B_n と同じ群構造を入れたものを P_n と書き，n 次の**純組み紐群（pure braid group）**という．純組み紐群は，代数的には組み紐群 B_n から対称群 S_n への自然な全射準同型の核として定義される．

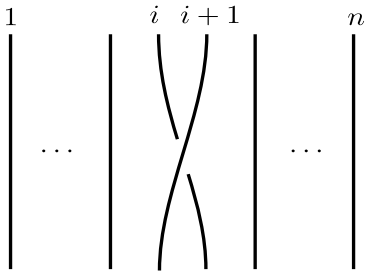


図 1: 生成元 σ_i

組み紐群 B_n の元 b が与えられたとき，その端点同士を繋げて得られる S^3 内の結び目や絡み目のことを組み紐 b の**閉包（closure）**といい，$\hat{b}$ と書く（図 2 参照）．ここで自然な問いとして，逆に任意の結び目や絡み目は

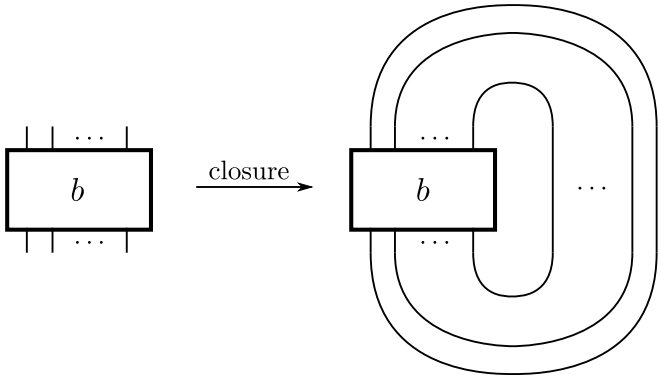


図 2: 組み紐の閉包

組み紐の閉包として実現できるか？ということが考えられるが，それは肯定的に解決されている（**Alexander の定理**）．また，2 つの異なる組み紐の閉包が同値な結び目や絡み目を表すための必要十分条件（**Markov の定理**）も知られており，この 2 つの定理により組み紐の研究は結び目の研究と深く関わりがあることが分かる．[*1]

さて，次に組み紐の観点から結び目の不変量を（再）構成できるか？という問いが生まれるわけであるが，ここでは組み紐群の表現に注目することにする．実は，組み紐群の表現が与えられたとき，その表現から結び目の不変量を構成しようという試みはこれまで多く行われてきた．例えば，組み紐群 B_n からランク n の自由群 $F_n = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ への作用 (つまり準同型 $B_n \longrightarrow Aut(F_n)$) が自然に定まり，次で与えられる:

$$x_j \cdot \sigma_i := \begin{cases} x_i x_{i+1} x_i^{-1} & (j = i) \\ x_i & (j = i+1) \\ x_j & (j \neq i, i+1) \end{cases} .$$

これは幾何学的には次のように解釈される．$D_n := D^2 \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ とし，D^2 の境界上に基点 z をとる．このとき，基本群 $\pi_1(D_n, z)$ はランク n の自由群 F_n と同型であり，各生成元 x_i は，z を基点として z_i の周りを時計回りに 1 回周る単純ループとして実現される．組み紐群 B_n は D_n の写像類群，つまり D_n の向きを保つ

[*1] 結び目理論や結び目の不変量についてより詳しく知りたい方は，例えば村上 [9] や大槻 [8] を参照してほしい．また，組み紐群については例えば Kassel-Turaev[4] や村上 [10] 等を参照してほしい．

自己同相写像であって境界上では恒等写像であるようなもののイソトピー類の集合（に群構造を入れたもの）と同型なので，B_n の各元は $\pi_1(D_n, z) \cong F_n$ の自己同型写像を誘導し，これにより B_n の F_n への右作用を得る（図 3 参照）．このとき，組み紐 b の閉包の補空間の基本群 $\pi_1(S^3 \setminus \hat{b})$ は，Seifert-van Kampen の定理を用いることで次のように書けることが分かる:

$$\pi_1(S^3 \setminus \hat{b}) \cong \langle x_1, \ldots, x_n \mid x_1 = x_1 \cdot b, \ldots, x_n = x_n \cdot b \rangle \,. \tag{1}$$

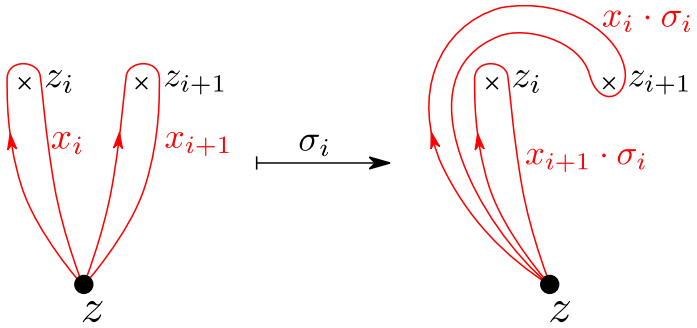


図 3: 生成元 σ_i の $\pi_1(D_n, z)$ への作用

線型表現に関する最初の結果としては，Burau[2] によるものがある．Burau は組み紐群 B_n に対して Burau 表現と呼ばれる $n-1$ 次元表現 $\widetilde{\mathscr{B}}\colon B_n \longrightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ を構成し，その表現から Alexander 多項式が復元されることを示した．すなわち，組み紐 $b \in B_n$ の閉包の Alexander 多項式を $\Delta_{\hat{b}}(t)$ と表したとき，以下の等式が成り立つ:

$$\Delta_{\hat{b}}(t)(t^n - 1) = \pm t^l (t-1) \det(\widetilde{\mathscr{B}}(b) - I_{n-1}).$$

ここで，$l \in \mathbb{Z}$ であり I_k は k 次単位行列とする．また，絡み目に対する多変数 Alexander 多項式に対しても，Gassner 表現 $\widetilde{\mathscr{G}}\colon P_n \longrightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}])$ によって復元されることを Birman[1] が示している．

さらに，Alexander 多項式の一般化として，和田 [6] によって定義されたねじれ Alexander 不変量というものがある．これに対応して Conway[3] はねじれ Burau 写像 $\widetilde{\mathscr{B}}_\rho\colon B_n \longrightarrow GL_{(n-1)k}(R[t^{\pm 1}])$ を導入した．ここで，R は一意分解整域であり，ρ は F_n の R 上の k 次元表現である．また，ねじれ Burau 写像は実は一般には表現とはならない．いま，組み紐 $b \in B_n$ に対して，表現 ρ がある条件を満たすとする．閉包 $\hat{b}$ の ρ に付随するねじれ Alexander 不変量を $\Delta_{\hat{b},\rho}(t)$ と表したとき

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t) \det(\rho(x_1 \cdots x_n)t^n - I_k) = \pm \varepsilon t^l \det(\widetilde{\mathscr{B}}_\rho(b) - I_{(n-1)k})$$

が成り立つ．ここで，$\varepsilon \in \det(\rho(\pi_1(S^3 \setminus \hat{b})))$ である．

本講演では，ねじれ Burau 写像とは別の表現である Long-Moody 構成と呼ばれるものがねじれ Alexander 不変量を復元することを示す．Long-Moody 構成とは，Long（および Moody）[5] により導入された，半直積 $B_n \ltimes F_n$ の表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ から組み紐群 B_n の新しい表現 $\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)\colon B_n \longrightarrow GL_{(n-1)k}(R)$ を構成する方法である．いま，組み紐 $b \in B_n$ に対して，表現 ρ がある条件を満たすとすると

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t) \det(\rho(x_1 \cdots x_n)t^n - I_k) = \pm \varepsilon t^l \det\left(t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \mathrm{Diag}\left(\rho(b), \ldots, \rho(b)\right)\right)$$

が成り立つ．ここで，$\varepsilon \in R^\times$ である．

2 ねじれ Alexander 不変量

まず，ねじれ Alexander 不変量の定義を述べる．ここでは，特に結び目（または絡み目）で 1 変数の場合に限定するが，より一般の有限表示群に対する定義は，例えば和田 [6] や北野-合田-森藤 [7] を参照してほしい．

3 次元球面 S^3 内の結び目（または絡み目）K を考える．また，K の補空間の基本群 $\pi_1(S^3 \setminus K)$ を $G(K)$ と表す．$G(K)$ は不足数 (= (生成元の個数) − (関係子の個数)) が 1 であるような，つまり以下のような群表示を必ずもつのでこれを固定する:

$$G(K) \cong \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_{n-1} \rangle . \tag{2}$$

ただし，Wirtinger 表示であることは仮定しない．

ねじれ Alexander 不変量の定義のためにいくつか写像を準備する．まず $\alpha\colon G(K) \longrightarrow \mathbb{Z} \cong \langle t \rangle$ を各メリディアンを t に写すような準同型とする．特に，α は全射であって，K が結び目であれば単にアーベル化である．また，R を一意分解整域とし，$\rho\colon G(K) \longrightarrow GL_k(R)$ を $G(K)$ の k 次元表現とする．さらに，F_n を $x_1, \dots, x_n$ で生成されるランク n の自由群とし，$\phi\colon F_n \longrightarrow G(K)$ をそれぞれの群表示から誘導される自然な全射準同型とする．これらの写像は自然に群環上の写像

$$\widetilde{\alpha}\colon \mathbb{Z}[G(K)] \longrightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}],\quad \widetilde{\rho}\colon \mathbb{Z}[G(K)] \longrightarrow \mathbb{Z}[GL_k(R)] \subset M_k(R),\quad \widetilde{\phi}\colon \mathbb{Z}[F_n] \longrightarrow \mathbb{Z}[G(K)]$$

を誘導する．ここで，$M_k(R)$ は R を成分とする k 次正方行列全体からなる環である．$\widetilde{\rho}$ と $\widetilde{\alpha}$ のテンソル積表現 $\widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\alpha}\colon \mathbb{Z}[G(K)] \longrightarrow M_k(R[t^{\pm 1}])$ を，$(\widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\alpha})(g) \coloneqq \rho(g)\alpha(g)$ $(g \in G(K))$ と定義し，$\widetilde{\phi}$ との合成を

$$\Phi \coloneqq (\widetilde{\rho} \otimes \widetilde{\alpha}) \circ \widetilde{\phi}\colon \mathbb{Z}[F_n] \longrightarrow M_k(R[t^{\pm 1}])$$

と書く．最後に Fox の自由微分 $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\colon \mathbb{Z}[F_n] \longrightarrow \mathbb{Z}[F_n]$ を考える．Fox の自由微分とは $\mathbb{Z}$ 上線型写像であって

- 任意の i, j に対して，$\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$．ただし δ_{ij} はクロネッカーのデルタ
- 任意の $g, g' \in F_n$ に対して，$\dfrac{\partial (gg')}{\partial x_j} = \dfrac{\partial g}{\partial x_j} + g\dfrac{\partial g'}{\partial x_j}$

を満たすものである．

以上の準備のもと，$(n-1) \times n$ 行列 M を各 (i, j) 成分が $k \times k$ 行列

$$\Phi\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) \in M_k(R[t^{\pm 1}])$$

となる行列とする．この行列 M を，表現 ρ に付随する $G(K)$ の表示 (2) の**ねじれ Alexander 行列**という．さらに，行列 M の j 列目を取り除いた $(n-1)$ 次正方行列を M_j とし，これを各成分が $R[t^{\pm 1}]$ の $(n-1)k$ 次正方行列とみなすことで，通常の行列式を考えることが出来る．このとき，ある j が存在して $\Phi(x_j - 1) \neq 0$ となり，さらにそのような i, j に対して

$$\det M_i \det \Phi(x_j - 1) = \pm \det M_j \det \Phi(x_i - 1) \tag{3}$$

が成り立つことが確かめられる．

定義 2.1. $\Phi(x_j - 1) \neq 0$ となるような j に対して

$$\Delta_{K,\rho}(t) \coloneqq \frac{\det M_j}{\det \Phi(x_j - 1)}$$

と定義し，$\Delta_{K,\rho}(t)$ を結び目（または絡み目）K の表現 ρ に付随する**ねじれ Alexander 不変量**という．

補足 2.2. ねじれ Alexander 不変量は，εt^l 倍 $(\varepsilon \in R^\times, l \in \mathbb{Z})$ の違いを除いて定義され，さらに式 (3) より $\Phi(x_j - 1) \neq 0$ となる j によらずに定まることが分かる．また，これは結び目（または絡み目）K と表現 ρ と全射準同型 α に対する不変量となる．

3 Long-Moody 構成

$\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ を，半直積 $B_n \ltimes F_n$ の k 次元表現とする．ここで，B_n の F_n への作用は上で与えられたものとする．また，$v \in R^{\oplus k}$ は行ベクトル $v = (v_1, \ldots, v_k)$ のように書き，表現 ρ は右からかけられているとする．$\mathcal{I}_{F_n}$ を F_n の添加イデアル，つまり $\mathcal{I}_{F_n} \coloneqq \ker(R[F_n] \longrightarrow R : x \longmapsto 1)$ $(x \in F_n)$ とする．$\mathcal{I}_{F_n}$ は自然に左 $R[F_n]$ 加群になり，また $R^{\oplus k}$ も表現 ρ により右 $R[F_n]$ 加群とみなすことが出来るので，テンソル積 $R^{\oplus k} \otimes_{R[F_n]} \mathcal{I}_{F_n}$ を考えることが出来る．

定義 3.1. ([5, Theorem 2.1]) 表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ の **Long-Moody 構成**とは，B_n の表現 $\mathcal{LM}(\rho)\colon B_n \longrightarrow GL_R(R^{\oplus k} \otimes_{R[F_n]} \mathcal{I}_{F_n})$ であって，任意の $b \in B_n, h \in \mathcal{I}_{F_n}, v \in R^{\oplus k}$ に対して

$$\mathcal{LM}(\rho)(b)(v \otimes h) \coloneqq v(\rho(b)) \otimes h \cdot b$$

で与えられるものである．

添加イデアル $\mathcal{I}_{F_n}$ はランク n の自由 $R[F_n]$ 加群と同型であるので，$R^{\oplus k} \otimes_{R[F_n]} \mathcal{I}_{F_n} \cong R^{\oplus nk}$ となり，Long-Moody 構成は B_n の nk 次元表現とみなすことが出来る．

補足 3.2. Long-Moody 構成には，1 変数増やして考えることがよくある．$t^l \in R[t^{\pm 1}]$ $(l \in \mathbb{Z})$ に対して，$t^l\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_1(R[t^{\pm 1}]) = R[t^{\pm 1}]^\times$ を $B_n \ltimes F_n$ の 1 次元表現であって, 各生成元 σ_i, x_i を t^l 倍にうつすものとして定義する．また, 表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ とのテンソル積表現 $t^l \otimes \rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R[t^{\pm 1}])$ を $t^l\rho$ と表す．このとき，表現 ρ の **1 変数増やした Long-Moody 構成**とは，表現

$$t^{-1}\mathcal{LM}(t\rho) = t^{-1} \otimes \mathcal{LM}(t\rho)\colon B_n \longrightarrow GL_{R[t^{\pm 1}]}(R[t^{\pm 1}]^{\oplus k} \otimes_{R[F_n]} \mathcal{I}_{F_n}) \cong GL_{nk}(R[t^{\pm 1}])$$

のことである．

例 3.3. 1 次元自明表現 $\mathcal{T} \coloneqq t^0\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_1(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ を考える．このとき, 1 変数増やした Long-Moody 構成 $t^{-1}\mathcal{LM}(t\mathcal{T})\colon B_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ は unreduced Burau 表現と同値である．

さて，上述の通り添加イデアル $\mathcal{I}_{F_n}$ はランク n の自由 $R[F_n]$ 加群と同型であり，その基底として例えば $x_1 - 1, \ldots, x_n - 1$ がとれる．よって，この基底に関する Long-Moody 構成の行列表示を考えることが出来る．

定理 3.4. 任意の組み紐 $b \in B_n$ に対して

$$\mathcal{LM}(\rho)(b) = \mathrm{Diag}\,(\rho(b), \ldots, \rho(b)) \cdot \left(\rho\left(\frac{\partial(x_i \cdot b)}{\partial x_j}\right)\right)_{1 \le i,j \le n}$$

が成り立つ．

証明. Fox の自由微分の基本公式より，任意の $w \in \mathbb{Z}[F_n]$ に対して

$$w - 1 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_j}(x_j - 1)$$

が成り立つ．よって，任意の $b \in B_n, v \in R^{\oplus k}$ および $1 \le i \le n$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathcal{LM}(\rho)(b)(v \otimes (x_i - 1)) &= v(\rho(b)) \otimes (x_i - 1) \cdot b \\
&= v(\rho(b)) \otimes \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial(x_i \cdot b)}{\partial x_j}\right)(x_j - 1) \\
&= \sum_{j=1}^{n} v\left(\rho(b)\rho\left(\frac{\partial(x_i \cdot b)}{\partial x_j}\right)\right) \otimes (x_j - 1)
\end{aligned}$$

となり求める行列を得る． □

4　主結果

4.1　Reduced Long-Moody 構成

主結果を述べるために，reduced Long-Moody 構成の定義を説明する．そのために，F_n の別の生成元を用意する．$g_i \coloneqq x_1 \cdots x_i$ とすると，$g_1, \ldots, g_n$ もまた $\pi_1(D_n, z) \cong F_n$ の生成元となり，B_n の作用は次で与えられる（図 4）：

$$g_j \cdot \sigma_i \coloneqq \begin{cases} g_j & (j \neq i) \\ g_{i+1} g_i^{-1} g_{i-1} & (j = i \neq 1) \\ g_2 g_1^{-1} & (j = i = 1) \end{cases}.$$

特に，g_n は D^2 の境界とホモトピックなので B_n の作用は自明であることが分かる．以後，F_n は $g_1, \ldots, g_n$ で生成されているとみなし，その部分群 F_{n-1} は $g_1, \ldots, g_{n-1}$ で生成されているとする．

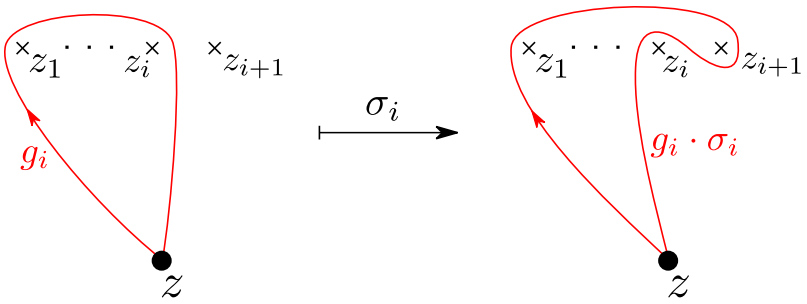


図 4: 生成元 g_i と σ_i の作用

$\mathcal{I}_{F_n}$ の基底を $g_1 - 1, \ldots, g_n - 1$ にとり直し，この基底に関する $\mathcal{LM}(\rho)$ の行列表示を求めると

$$\mathcal{LM}(\rho)(b) = \mathrm{Diag}\left(\rho(b), \ldots, \rho(b)\right) \cdot \begin{pmatrix} \left(\rho\left(\dfrac{\partial(g_i \cdot b)}{\partial g_j}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1} & V \\ 0 & I_k \end{pmatrix}$$

となる．ここで，V はある $(n-1)k \times k$ 行列である．

定義 4.1. ([5, Theorem 2.11]) 表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ の **reduced Long-Moody 構成**とは，B_n の表現 $\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)\colon B_n \longrightarrow GL_R(R^{\oplus k} \otimes_{R[F_{n-1}]} \mathcal{I}_{F_{n-1}})$ であって，任意の $b \in B_n, h \in \mathcal{I}_{F_{n-1}}, v \in R^{\oplus k}$ に対して

$$\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)(b)(v \otimes h) \coloneqq v(\rho(b)) \otimes h \cdot b$$

で与えられるものである．このとき，基底 $g_1 - 1, \ldots, g_{n-1} - 1$ に関する $\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)$ の行列表示は次のようになる:

$$\widetilde{\mathcal{LM}}(\rho)(b) = \mathrm{Diag}\left(\rho(b), \ldots, \rho(b)\right) \cdot \left(\rho\left(\frac{\partial(g_i \cdot b)}{\partial g_j}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1}.$$

補足 4.2. 1 変数増やした reduced Long-Moody 構成も同様に定義される．また，その行列表示は

$$\begin{aligned} t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) &= t^{-1}(b)\mathrm{Diag}\left(t\rho(b), \ldots, t\rho(b)\right) \cdot \left(t\rho\left(\frac{\partial(g_i \cdot b)}{\partial g_j}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1} \\ &= \mathrm{Diag}\left(\rho(b), \ldots, \rho(b)\right) \cdot \left(t\rho\left(\frac{\partial(g_i \cdot b)}{\partial g_j}\right)\right)_{1 \leq i,j \leq n-1} \end{aligned}$$

となる．

4.2 主結果

前節より，Long-Moody 構成の行列表示は Fox の自由微分で記述できることが分かった．さらに，最初にとる表現 ρ にある条件を課すことでねじれ Alexander 不変量との関係が分かる．

定理 4.3. 組み紐 $b \in B_n$ を固定する．表現 $\rho\colon B_n \ltimes F_n \longrightarrow GL_k(R)$ に対して，表現 $G(\hat{b}) = \pi_1(S^3 \setminus \hat{b}) \longrightarrow GL_k(R)$ が存在して次の図式が可換であると仮定する*:*

$$\begin{array}{ccc} F_n & \xrightarrow{\rho|_{F_n}} & GL_k(R) \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & \nearrow & \\ G(\hat{b}) & & \end{array}$$

このとき，

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t)\det(\rho(x_1\cdots x_n)t^n - I_k) = \pm\varepsilon t^l \det\left(t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \mathrm{Diag}\left(\rho(b),\ldots,\rho(b)\right)\right)$$

が成り立つ．ここで，$\varepsilon \in R^\times, l \in \mathbb{Z}$ である．また，表現 $G(\hat{b}) \longrightarrow GL_k(R)$ は $\rho|_{F_n}$ から誘導されるので，同じ記号 ρ で表している．

証明. 組み紐 b を用いた補空間の基本群 $G(\hat{b})$ の表示 (1) において，生成元を $x_1,\ldots,x_n$ から $g_1,\ldots,g_n$ に取り替えることにより不足数 1 の表示を得る:

$$G(\hat{b}) \cong \langle g_1,\ldots,g_n \mid g_1 = g_1\cdot b,\ldots,g_{n-1} = g_{n-1}\cdot b\rangle\,.$$

このとき，全射準同型 $\alpha\colon G(\hat{b}) \longrightarrow \mathbb{Z} \cong \langle t\rangle$ は $g_i \longmapsto t^i$ $(i = 1,\ldots,n)$ で与えられる．この表示によるねじれ Alexander 行列を計算すると

$$M = \left(\Phi\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right) - \delta_{ij}I_k\right)_{1\le i\le n-1, 1\le j\le n}$$

となるので，表現 ρ に付随するねじれ Alexander 不変量 $\Delta_{\hat{b},\rho}(t)$ は

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t) = \frac{\det M_n}{\det\Phi(g_n - 1)} = \frac{\det\left(\Phi\left(\dfrac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right) - I_{(n-1)k}\right)}{\det\Phi(g_n - 1)}$$

となる．一方，定義より $\Phi = (\widetilde{\rho}\otimes\widetilde{\alpha})\circ\widetilde{\phi}$ であり，また $t|_{F_n} = \alpha\circ\phi$, $\rho|_{F_n} = \rho\circ\phi$ なので

$$\begin{aligned} t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) &= \mathrm{Diag}\left(\rho(b),\ldots,\rho(b)\right)\cdot\left(t\rho\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right)\right) \\ &= \mathrm{Diag}\left(\rho(b),\ldots,\rho(b)\right)\cdot\left(\Phi\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right)\right) \end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned} \det\left(t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \mathrm{Diag}\left(\rho(b),\ldots,\rho(b)\right)\right) &= \det\mathrm{Diag}\left(\rho(b),\ldots,\rho(b)\right)\det\left(t\rho\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right) - I_{(n-1)k}\right) \\ &= (\det\rho(b))^{n-1}\det\left(\Phi\left(\frac{\partial(g_i\cdot b)}{\partial g_j}\right) - I_{(n-1)k}\right) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \det(\rho(x_1\cdots x_n)t^n - I_k) &= \det(t\rho(g_n) - I_k) \\ &= \det\Phi(g_n - 1) \end{aligned}$$

が成り立つ．$\det\rho(b) \in R^\times$ なので，求める等式を得る． □

5 例

最後に，定理 4.3 の例をいくつか述べることにする．ただし，定理 4.3 の仮定では，$B_n \rtimes F_n$ の表現が結び目（または絡み目）群の表現を誘導するという条件を課していたが，以下の例では逆に，最初に結び目（または絡み目）群の表現をとってきて，それが $B_n \rtimes F_n$ の表現に拡張されるかどうかを考えることにする．

例 5.1. ([6, Section 4]) $b := \sigma_1^3 \in B_2$ とする．この閉包は三葉結び目 3_1 である（図 5 参照）．このとき，補

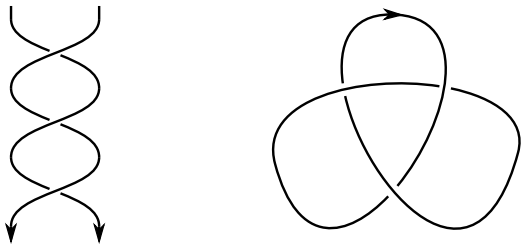


図 5: 組み紐 σ_1^3 と三葉結び目 3_1

空間の基本群は

$$\begin{aligned} G(\hat{b}) = \pi_1(S^3 \setminus \hat{b}) &\cong \langle x_1, x_2 \mid x_1 = x_1 \cdot b, x_2 = x_2 \cdot b \rangle \\ &\cong \langle x_1, x_2 \mid x_1 x_2 x_1 = x_2 x_1 x_2 \rangle \\ &\cong \langle g_1, g_2 \mid g_1 = g_1 \cdot b \rangle \end{aligned}$$

と書ける．また，表現 $\rho := \widetilde{\mathscr{B}}\colon G(\hat{b})(\cong B_3) \longrightarrow GL_2(\mathbb{Z}[s^{\pm 1}])$ を reduced Burau 表現とする．この表現は

$$\rho(x_1) = \begin{pmatrix} -s & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & -s \end{pmatrix}$$

で与えられる．これは自然にランク 2 の自由群 F_2 の表現に拡張される．また，半直積 $B_2 \ltimes F_2$ は

$$B_2 \ltimes F_2 \cong \left\langle x_1, x_2, \sigma_1 \;\middle|\; x_1\sigma_1 = \sigma_1 x_1 x_2 x_1^{-1}, x_2\sigma_1 = \sigma_1 x_1 \right\rangle$$

という表示をもつので，表現 ρ が $B_2 \ltimes F_2$ に拡張されるためには，上の関係式を満たすように σ_1 の像を定める必要があるが，これは

$$\rho(\sigma_1) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすればよい．ここで，$g_1 \cdot b = g_2^2 g_1^{-1} g_2^{-1}$ なので

$$\frac{\partial(g_1 \cdot b)}{\partial g_1} = -g_2^2 g_1^{-1}$$

であり，よって

$$t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) = -\rho(b)\rho(g_2^2 g_1^{-1})t^3 = \begin{pmatrix} st^3 & -st^3 + s^2t^3 \\ st^3 & -st^3 \end{pmatrix}$$

である．したがって

$$\det\left(t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \rho(b)\right) = \det\begin{pmatrix} 1 + st^3 & -st^3 + s^2t^3 \\ st^3 & 1 - st^3 \end{pmatrix} = 1 - s^3t^6$$

と

$$\det\left(\rho(x_1x_2)t^2 - I_2\right) = \det\begin{pmatrix} -1 & -st^2 \\ st^2 & -st^2 - 1 \end{pmatrix} = 1 + st^2 + s^2t^4$$

を得る．以上より，ねじれ Alexander 不変量は

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t) = \frac{1 - s^3t^6}{1 + st^2 + s^2t^4} = 1 - st^2$$

となる．

例 5.2. $b := \sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1} \in B_3$ とすると，その閉包は 8 の字結び目 4_1 である（図 6 参照）．このとき，補空

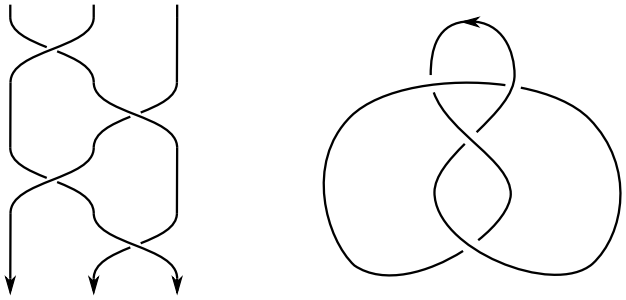


図 6: 組み紐 $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$ と 8 の字結び目 4_1

間の基本群は

$$\begin{aligned} G(\hat{b}) &\cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 = x_1 \cdot b, x_2 = x_2 \cdot b, x_3 = x_3 \cdot b \rangle \\ &\cong \left\langle x_2, x_3 \;\middle|\; x_2[x_3^{-1}, x_2] = [x_3^{-1}, x_2]x_3 \right\rangle \\ &\cong \langle g_1, g_2, g_3 \mid g_1 = g_1 \cdot b, g_2 = g_2 \cdot b \rangle \end{aligned}$$

である．ここで，$[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$ である．また，表現 $\rho\colon G(\hat{b}) \longrightarrow SL_2(\mathbb{C})$ を次で定義する:

$$\rho(x_1) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(s+2) & 3s \\ -2s^2 & s-1 \end{pmatrix},\quad \rho(x_2) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix},\quad \rho(x_3) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(s+2) & 3 \\ -2 & s-1 \end{pmatrix}.$$

ここで，$s \in \mathbb{C}$ は $s^2 + s + 1 = 0$ を満たすとする．半直積 $B_3 \ltimes F_3$ は

$$B_3 \ltimes F_3 \cong \left\langle x_1, x_2, x_3, \sigma_1, \sigma_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1\sigma_1 = \sigma_1 x_1 x_2 x_1^{-1}, x_2\sigma_1 = \sigma_1 x_1, x_3\sigma_1 = \sigma_1 x_3, \\ x_1\sigma_2 = \sigma_2 x_1, x_2\sigma_2 = \sigma_2 x_2 x_3 x_2^{-1}, x_3\sigma_2 = \sigma_2 x_2, \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2 \end{array} \right\rangle$$

という表示をもつので，σ_1 と σ_2 の像を

$$\rho(\sigma_1) = \sqrt{\frac{-s}{3}}\begin{pmatrix} 1 & s+2 \\ -\dfrac{2(s+2)}{3} & -s^2 \end{pmatrix},\quad \rho(\sigma_2) = \sqrt{\frac{-s}{3}}\begin{pmatrix} 1 & s-1 \\ \dfrac{2(2s+1)}{3} & -s^2 \end{pmatrix}$$

と定めれば，表現 ρ は $B_3 \ltimes F_3$ に拡張される．すると

$$\begin{aligned} &\det\left(t^{-1}\widetilde{\mathcal{LM}}(t\rho)(b) - \begin{pmatrix} \rho(b) & 0 \\ 0 & \rho(b) \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} \dfrac{(t^3+2t^2+1)(s-1)}{3t} & -\dfrac{t^3-t^2s+1}{t} & \dfrac{2t^2s+t^2+ts-t+3s}{3t^2} & \dfrac{ts+s+1}{t} \\ \dfrac{2(-t^2s^2+t^3+1)}{3t} & -\dfrac{(t^3+2t^2+1)(s+2)}{3t} & \dfrac{2(ts+t+s)}{3t} & -\dfrac{2t^2s+t^2-3s^2+ts+2t}{3t^2} \\ \dfrac{3t^2s-3t+s-1}{3t} & -\dfrac{1}{t} & \dfrac{3t^2+ts-t+3s}{3t^2} & \dfrac{s+1}{t} \\ \dfrac{2}{3t} & \dfrac{3t^2s^2-3t-s-2}{3t} & \dfrac{2s}{3t} & \dfrac{3t^2+3s^2-ts-2t}{3t^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{(1+t)^4(1-t+t^2)^2}{t^4} \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}\det\left(\rho(x_1x_2x_3)t^3 - I_2\right) &= \det\begin{pmatrix} -(1+t)(1-t+t^2) & 0 \\ 0 & -(1+t)(1-t+t^2) \end{pmatrix} \\ &= (1+t)^2(1-t+t^2)^2\end{aligned}$$

となるので，ねじれ Alexnader 不変量は

$$\Delta_{\hat{b},\rho}(t) = (1+t)^2$$

となる．

補足 5.3. 8 の字結び目 4_1 には holonomy 表現 $\rho\colon G(4_1) \longrightarrow SL_2(\mathbb{C})$ と呼ばれる有名な表現があり，次で与えられる:

$$\rho(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(x_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -s & 1 \end{pmatrix}.$$

ここで，$s \in \mathbb{C}$ は $s^2 + s + 1 = 0$ を満たすとする．しかし，この表現は $B_3 \ltimes F_3$ には拡張されない．

参考文献

[1] Joan S. Birman. *Erratum: "Braids, links, and mapping class groups" (Ann. of Math. Studies, No. 82, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1974)*. Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Toyko, 1975. Based on lecture notes by James Cannon.

[2] Werner Burau. Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 11(1):179–186, 1935.

[3] Anthony Conway. Burau maps and twisted Alexander polynomials. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, 61(2):479–497, 2018.

[4] Christian Kassel and Vladimir Turaev. *Braid groups*, volume 247 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2008. With the graphical assistance of Olivier Dodane.

[5] D. D. Long. Constructing representations of braid groups. *Comm. Anal. Geom.*, 2(2):217–238, 1994.

[6] Masaaki Wada. Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups. *Topology*, 33(2):241–256, 1994.

[7] 北野晃朗・合田洋・森藤孝之. ねじれ *Alexander* 不変量. 数学メモアール, 5. 日本数学会, 2006.

[8] 大槻知忠. 結び目の不変量. 共立講座 数学の輝き, 4. 共立出版, 2015.

[9] 村上斉. 結び目理論入門（上）. 岩波数学叢書. 岩波書店, 2019.

[10] 村上順. 結び目と量子群. すうがくの風景, 3. 朝倉書店, 2000.

重み付きグラフのゼータとその変形について

東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
長坂 篤英 (Atsuhide Nagasaka)

概要

結び目を分類する上で不変量は重要な道具である．その中でも twisted Alexander 多項式は強力な不変量であり，近年重み付きグラフのゼータとの関連が示されたと言う進展がある．以下では，重み付きグラフの変形操作を定義し，結び目の変形との関係を述べ，ある条件を満たすより一般の群から重み付きグラフの定義をする方法と群の変形に伴うグラフの変形について述べる．

1 導入

二つの結び目を区別せよ，という問に対し不変量は非常に重要な役割を果たす．J. W. Alexander[5] により 1927 年に Alexander 多項式が導入されて以降，Jones 多項式，colored Jones 多項式や HOMFLY-PT 多項式などの多項式不変量や Jones 多項式の categorification によって得られる Khovanov homology など，人類は様々な不変量を得てきた．和田 [7]，Lin[10] により独立に定義された twisted Alexander 多項式は，Alexander 多項式に結び目群の表現の情報を付与することによって精密化したものであり，従来の Alexander 多項式では区別できない unknot と Kinoshita-Terasaka knot (KT knot) を区別でき，さらに HOMFLY-PT 多項式等で区別できない KT knot と Conway knot を区別できるという点で twisted Alexander 多項式は非常に強力であることがわかる．

一方，石井，大城は twisted Alexander 多項式を含み，さらに quandle という代数系から得られる quandle 2-cocycle invariant と呼ばれる不変量も含むような f-twisted Alexander 不変量という概念を作り出した [2]．

さらに，近年合田は matrix-weighted graph のゼータ関数から twisted Alexander 多項式の “分子” を復元できることを示した [4]．証明には隣接行列と自由微分から得られる Alexander 行列を関連づけるという手法を用いている．これは両者の関係が示唆された非常に興味深い結果であるが，与えられた量が結び目の不変量を与えているか否かは和田の一般論に委ねているという点において，ゼータ関数の世界の中で閉じた枠組みを構築したとは言い難い．

以下では，まず matrix-weighted graph の基本変形というゼータ関数の値を保存する変形を操作する．その後，ある条件を満たす有限表示群に対してグラフを構成できることを述べ，変形操作を定義する．結び目の変形と言える Reidemeister move，それに伴う結び目群の表示の変形と言える Tietze 変換が全て weighted graph の変形という文脈で捉えられることを示す．

2 Matrix-weighted graph についての諸事項

本節では matrix-weighted graph についての定義をし，その変形について述べる．

有限有向グラフの各 edge に対して行列の重みを付与したもである．すなわち，vertex の集合を $V_G = \{v_1, \cdots, v_n\}$ とし，各 v_i に対して $a_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ が与えられているとする．そして，v_i から v_j への edge が存在するとき，その edge の weight として可換環 R 成分の $a_i \times a_j$ の行列を対応させる．edge e に対し，weight を $w(e)$ と表す．以下では，matrix-weighted graph をグラフの G と weight の w を合わせて (G, w) で表す．

edge e の始点，終点を $o(e), t(e)$ と表し，列 $(e_1, \cdots, e_k)$ であり，$i = 1, \cdots k-1$ に対し $t(e_i) = o(e_{i+1})$ なるものを $(o(e_1), t(e_k))$-path という．とくに，$o(e_1) = t(e_k)$ の場合，cycle と呼ぶ．

2 つの cycle $(e_1, \cdots, e_k), (f_1, \cdots, f_k)$ が同値であるとは，ある j が存在して $e_{i+j} = f_i$ が成り立つことをいう．さらに，cycle $(e_1, \cdots, e_k)$ がある cycle を用いて $(f_1, \cdots, f_m)^l$ とかける時，$(e_1, \cdots, e_k)$ は $(f_1, \cdots, f_m)$ の power であると言い，$l \geq 2$ となるような l が存在しない時 prime と言う．

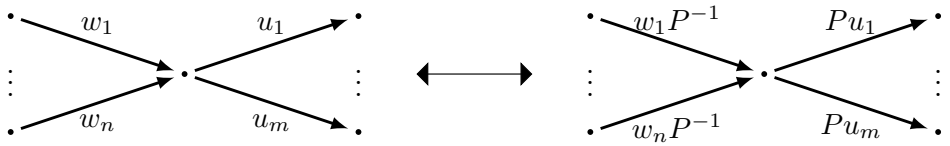
matrix-weighted graph (G, w) の matrix-weighted zeta function $\zeta_G(w)$ は

$$\zeta_G(w) = \prod_{[C]} \det(I - w(C))^{-1}$$

で定義される．ここに，$[C]$ は prime cycle の同値類を走り，$C = (e_1, \cdots, e_k)$ としたとき，$w(C) = w(e_1) \cdots w(e_k)$ とする．

Definition 2.1. weighted oriented graph に対し，次の様な他の部分は不変にして一部の vertex, edge 及びその weight を変化させるような変形，及び図における edge の向きを逆にしたものを matrix-weighted graph の基本変形と呼ぶ．以下の図で，矢印が入っていない edge はその向きを問わないものとする．

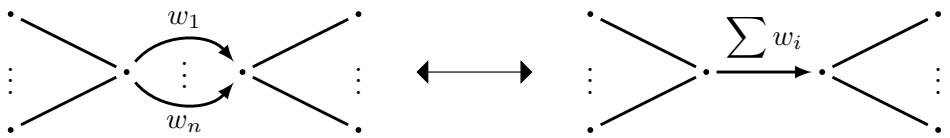
(1) (base change condition)



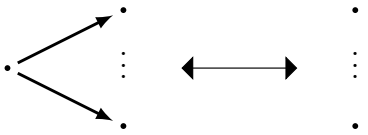
(2) (null edge)



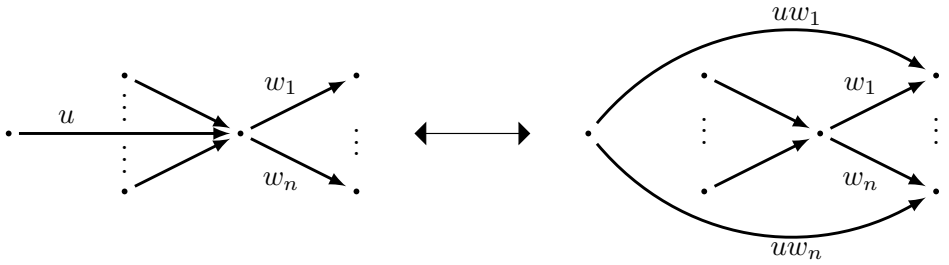
(3) (summing weights)



(4) (source/sink eliminating)



(5) (hub vertex resolution)



matrix-weighted graphs $(G,w),(G',w')$ が基本変形を有限回繰り返して他方が他方に移るとき，$(G,w)\sim(G',w')$ と書く．□

以上の変形操作に対し，次が成り立つ．

Theorem 2.2. (N.)

$$(G,w)\sim(G',w')\Longrightarrow\zeta_G(w)=\zeta_{G'}(w')$$

□

3　有限表示群と重み付きグラフ

本節では，適切な条件を満たす有限表示群から自由微分を用いることで重み付きグラフを構成し，その変形操作について述べる．そして，この変形操作が群の変形と関連していることを述べる．

まずは自由微分を定義する．$F_s=\langle x_1,\cdots,x_s\rangle$ を自由群とする． 自由微分とは，$\mathbb{Z}$ 線型写像

$$\frac{\partial}{\partial x_i}:\mathbb{Z}F_s\to\mathbb{Z}F_s$$

であって，次の条件を満たすものである．

- 全ての $p,q\in F_s$ に対して
$$\frac{\partial}{\partial x_i}(pq)=\frac{\partial}{\partial x_i}(p)+p\frac{\partial}{\partial x_i}(q)$$
- $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(x_j)=\delta_{ij}$

Definition 3.1. $\langle X\,|\,R\rangle=\langle x_1,\cdots,x_n\,|\,r_1,\cdots,r_m\rangle$ を群 G の表示とする．関係式 r において，alphabet x_i を一つ選び，同じ生成元 x_i が r の中に複数現れる場合は，どの x_i かも指定する．これを r の基点と呼ぶ．□

以下では次の仮定をする．

Assumption 3.2. 各 r_i は基点をもち，かつ alphabet は X の中で異なる．さらに，$\mathrm{pr} : F_s \twoheadrightarrow G$ としたとき，

$$\mathrm{pr}\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) \neq 0 \in \mathbb{Z}G$$

である． □

各 $r \in R$ に対し基点を定めたとき，これを (X, R, B) の三つ組で表す．以下では，(X, R, B) と書いた場合は断りなく上の条件を満たすように各 $r \in R$ に基点が定まっているものとする．有限表示が与えられた時に関係式の基点の取り方は様々であるが，一つを固定して議論をする時は関係式のラベルを付け替えて

$$r_i = x_i f_i(x_1, \cdots, x_n)^{-1}$$

と書くことにする．これを以下では簡単のため

$$r_i : x_i = f_i$$

と書く．条件により，

$$\mathrm{pr}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right) \neq 1 \in \mathbb{Z}G$$

である．f_i^{-1} の中に x_i がある場合にも，r_i の先頭にどの x_i を指定するかの不定性があるが，まずは一つ固定して議論をする．

Remark 3.3. 以上の仮定は単射

$$f : R \to X$$

が存在し，さらに $r \in R$ に対して $f(r)$ は r の alphabet でありかつどの alphabet かも指定しているということができる． □

Definition 3.4. 上の仮定を満たす有限表示群 $\langle x_1, \cdots, x_n \,|\, r_1, \cdots, r_m \rangle$ に対し，$r_i = x_i f_i^{-1}$ を $x_i = f_i$ と読んで両辺を微分した

$$dx_i = df_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$$

を考える．graph の vertex の集合 $v_1, \cdots, v_n$ に対し，関係式 r_i ごとに，v_i から v_j へ edge を伸ばし，weight を

$$\mathrm{pr}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$$

と定める．ここに，$\mathrm{pr} : \langle x_1, \cdots, x_n \rangle \twoheadrightarrow \langle x_1, \cdots, x_n \,|\, r_1, \cdots, r_m \rangle$ である．これを group-weighted graph と言い，$\Gamma(X, R, B)$ と表す． □

Group-weighted graph の基本変形を次の様に定義する．

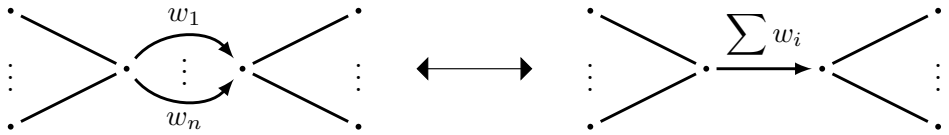
Definition 3.5. 次の様な局所的変形，すなわち他の部分は不変にして一部の vertex, edge(の weight) を変化させるような変形を group-weighted graph の基本変形と呼ぶ[*1]．以下の図で，矢印が入っていない edge はその向きを問わないものとする．

(G1) (null edge)

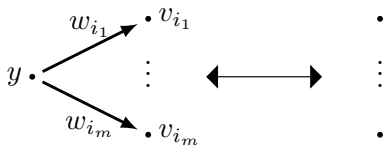


ここに，weight が 0 の edge が出発する点は sink ではないとする．

(G2) (summing weights)



(G3) (source/sink eliminating)

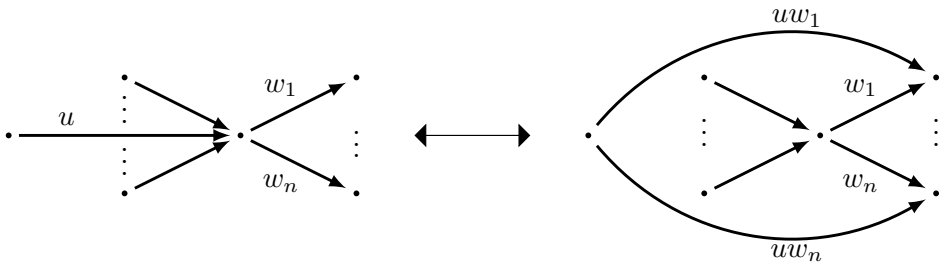


ここに，上の $w_{i_1}, \cdots, w_{i_m}$ において，

$$df = \sum_j w_{i_j} dx_{i_j}$$

なる y を含まない word f が存在するとする．

(G4) (hub vertex resolution)



□

G の表現 $\rho : G \to GL_k(K)$ を用いて各 edge の weight $g \in \mathbb{Z}G$ を $\rho(g)$ に置き換えることで matrix-weighted graph が得られる．この様にして得られた matrix-weighted graph を $\Gamma_\rho(X, R, B)$ とかく．定義から次がわかる．

[*1] この定義では「矢印を逆にする」という定義はしない．これは，定義 3.4 で v_i「から」出発する，としているからである．v_i「に」入力する，と定義した場合は矢印の向きが逆になる．

Proposition 3.6. $\Gamma(X,R,B)$ と $\Gamma(X',R',B')$ が *group-weighted graph* の基本変形で移り合うならば，$\Gamma_\rho(X,R,B)$ と $\Gamma_\rho(X',R',B')$ は *matrix-weighted graph equivalent* である． □

また，どのように表現をとるかということについては次のことがわかる．

Proposition 3.7. $\Gamma_\rho(X,R,B)$ のゼータ関数を $\zeta_\rho(X,R,B)$ と書いたとき，次が成り立つ．

(1) $\rho \sim \rho' \Longrightarrow \zeta_\rho(X,R,B) = \zeta_{\rho'}(X,R,B)$
(2) $\rho \sim \rho_1 \oplus \rho_2 \Longrightarrow \zeta_\rho(X,R,B) = \zeta_{\rho_1}(X,R,B)\zeta_{\rho_2}(X,R,B)$ □

以上に述べた通りこの matrix-weighted graph 構成では，r_i の label の付け替えや，r_i の左辺にくる x_i の取り方などの不定性が一般には生じるが，次のことが言える．

Proposition 3.8. ゼータ関数は r_i の *label* の選択や，r_i の中のどの x_i を先頭に選ぶかの選択を変えても K の単数倍を除いて一致する． □

すなわち，$f : R \to X$ が定まっている時，$r \in R$ に対し $f(r)$ を r の具体的にどの alphabet にするか，という不定性は考えている環の単数倍を違いを無視すればゼータ関数の値が一致する．一方，基点を変化させた時は一般にはゼータ関数の値は異なる．ただし，基点の集合が不変である限りはゼータ関数の値は不変となる．

Proposition 3.9. 群 G の表示 $\langle X \,|\, R\rangle$ を考える．写像 $f, g : R \to X$ は単射であって，$r \in R$ に対し $f(r), g(r)$ がそれぞれ r の *alphabet* であるとする．このとき，$f(R) = g(R)$ であれば単数倍を除いてそのゼータ関数が一致する． □

さて，以上の様に構成した group-weighted graph の変形と，グラフの構成に用いた有限表示群の変形とを関連付けよう．よく知られている様に，次の群の変形操作は群の同型を誘導する．

Definition 3.10. 2 つの有限表示群 $\langle X \,|\, R\rangle, \langle X' \,|\, R'\rangle$ が，次の有限回の (1) ∼ (4) の操作およびその逆で移り合う時，この二つは strongly Tietze equivalent という．

(1) r_i を r_i^{-1} に変える．
(2) r_i を $r_i r_j$ $(i \neq j)$ に変える．
(3) $w \in F(x_1, \cdots, x_n)$ を用いて r_i を $w r_i w^{-1}$ にする．
(4) G の表示を $\left\langle x_1, \cdots, x_n, y \,\middle|\, r_1, \cdots, r_m, y w^{-1} \right\rangle$ $(w \in F(x_1, \cdots, x_n))$ にする． □

Definition 3.11. Strong Tietze 変換において，

- (1) ∼ (3) では基点を不変．
- (4) では yw^{-1} の基点を y とする．

というように基点を設定する時，これを基点を保った strong Tietze 変換と呼ぶ． □

このとき次が成り立つ．

Theorem 3.12. (N.) $(X,R,B), (X',R',B')$ を群 G の *2* つの有限表示群とする．二つの表示が基

点を保った *strongly Tietze equivalent* であるとき $\Gamma(X,R,B) \sim \Gamma(X',R',B')$ である． □

逆が成り立つか？という問題を考えよう．

Theorem 3.13. (N.) 有限表示群 (X,R,B) に対し，*group-weighted graph* $\Gamma(X,R,B)$ をつくる．Γ を $\Gamma(X,R,B)$ に *group-weighted graph* の基本変形を行って得られたグラフとする．このとき，次を満たす有限表示群 (X',R',B') が存在する．

- $\Gamma = \Gamma(X',R',B')$.
- (X,R) と (X',R') は *strongly Tietze equivalent.* □

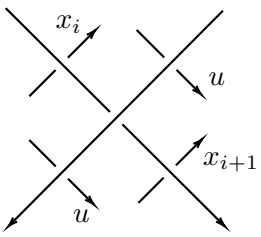
4　結び目理論への応用

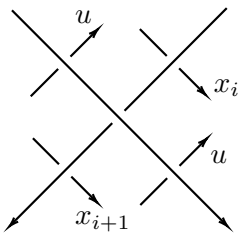
本章は，結び目理論への応用を述べる．細かい言葉の定義などは [14] などを参照されたい．まずは，和田氏 [7] によって定義された結び目の twisted Alexander 多項式を定義し，合田氏 [4] の定理を概説するとともに，結び目の変形と先に述べたグラフの変形を結びつける．そして，最後には結び目図式から不変量を得るにはグラフ上でどのような条件を満たすべきかについて議論をする．以下では K と書いたら結び目とし，π_K と書いたらその結び目群 $\pi_1(S^3 \setminus K)$ とする．

π_K の Wirtinger 表示

$$\langle x_1, \cdots, x_n \,|\, r_1, \cdots, r_{n-1} \rangle$$

を一つ固定する．ここに，Wirtinger 表示とは，結び目図式が与えられるたびに交叉点ごとに次の様に π_K の生成元を書いて得られる π_K の表示であった:





関係式：　$x_{i+1}u^{-1}x_1^{-1}u$　　$x_{i+1}ux_1^{-1}u^{-1}$

twisted Alexander 多項式とは，結び目群の表現から得られるものである．写像をいくつか用意しよう．まず，α は Hurewicz 写像から誘導される写像とする:

$$\alpha : \pi_K \to \pi_K/[\pi_K,\pi_K] \cong \mathbb{Z} \cong \langle t \rangle \,; x_i \mapsto t$$

α を $\mathbb{Z}\pi_K \to \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ に延長したものを $\widetilde{\alpha}$ とし，$F_n = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle$ から π_K への自然な射影を ϕ, $\rho : \pi_K \to GL_m(\mathbb{C})$ を表現とする．これらを延長したものを $\widetilde{\phi}, \widetilde{\rho}$ とかく．以上の写像を用いて次の合成を考える．

$$\Phi : \mathbb{Z}F_n \xrightarrow{\widetilde{\phi}} \mathbb{Z}\pi_K \xrightarrow{\widetilde{\rho}\otimes\widetilde{\alpha}} M_m(\mathbb{C}[t^{\pm 1}])$$

(i,j) 成分が

$$M_{ij} = \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \in M_m(\mathbb{C}[t^{\pm 1}])$$

であるブロック行列を M とし，M の k 列目を取り除いて得られるブロック行列として $(m-1) \times (m-1)$ のサイズの行列を M_k とする．

Lemma 4.1 ([7])**.** すべての j に対し $\det \Phi(1-x_j) \neq 0$ である． □

Lemma 4.2 ([7])**.** $1 \leq i < j \leq n$ に対して

$$(\det M_j)\,(\det \Phi(1-x_i)) = \pm\,(\det M_i)\,(\det \Phi(1-x_j))$$

が成り立つ． □

これにより，結び目 K の Wirtinger 表示を一つ固定した時についての不変量を得られた．

Definition 4.3 ([7])**.** Wirtinger 表示から得られる有理式

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \frac{\det M_j}{\det(1-\Phi(x_j))}$$

を表現 ρ に対応した結び目 K の twisted Alexander 多項式と言う． □

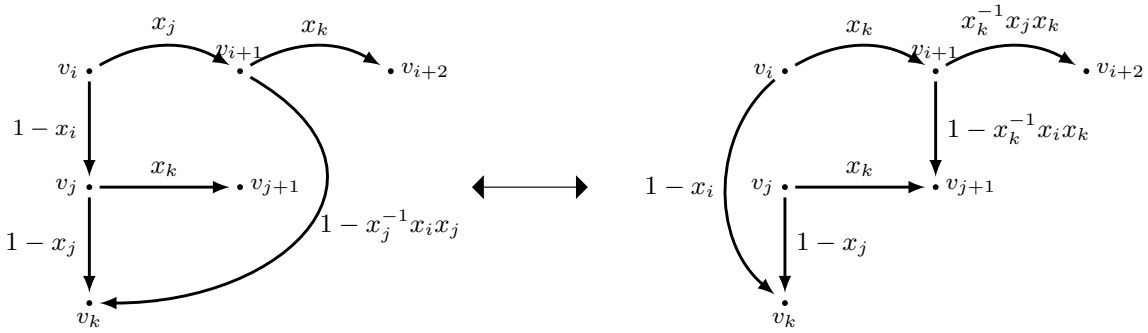
これによって，結び目図式を一つ固定するたびに，すなわち結び目群の表示を一つ固定するたびに値を割り当てることができた．合田氏 [4] は，結び目群の関係式を

$$r_i : x_{i+1} = u^{\mp 1} x_{i+2} u^{\pm 1} \ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

としたとき，M_1 は適切な matrix-weighted graph のゼータ関数から得られることを示した．合田氏は結び目図式から knot graph と呼ばれるグラフを構成し，そこに weight を付与することで matrix-weighted graph を構成した．一般には Wirtinger 表示の取り方はいろいろあるから，Wirtinger 表示のとり方を変えた時についての考察をしよう．

Theorem 4.4 ([7])**.** $\Delta_{K,\rho}$ は $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ の単数倍の違いを除いて定まる．

Proof. ここでは，グラフを用いた証明をする．Wirtinger 表示において関係式をどのように $n-1$ 個選ぶかの不定性は strong Tietze 変換であることが知られており，これによる行列式の変化は $\mathbb{C}[t^{\pm 1}]$ の単元倍の違いのみである．Wirtinger 表示における関係式を $x_i = u^{\mp 1} x_{i+1} u^{\pm 1}$ と読み，グラフを作る．例えば Reidemeister move 3 の前後のグラフの変化は次の様になっている．



この二つは group-weighted graph の基本変形で移り合うことがわかるから，表現を用いて matrix-weighted graph を構成した際，これらも基本変形で移り合う．すなわちゼータ関数は一致する． ■

Remark 4.5. 上の証明で，基本変形の列を作るとそれが strong Tietze 変換の列になっていることがわかる．これは，同じく [7] によって示された「π_K の任意の Wirtinger 表示は strongly Tietze equivalent である」ということの証明も同時に与える． □

Remark 4.6. 和田氏は，表現が unimodular であるとき，すなわち，$\rho : \pi_K \to SL_m(R)$ であるときに $\Delta_{K,\rho}$ はある $e \in \mathbb{Z}$ を用いて，m が奇数のとき $\pm t^e$ の，m が偶数のとき t^e の違いを除いて定まる，ということを示している．このことは Theorem 4.4 において，Wirtinger 表示の関係式を固定した場合ゼータの値は一致するため，strong Tietze 変換の (1), (2) での行列の行が定数倍されることから従う． □

Theorem 4.4 におけるグラフの変化を再考しよう．$w(v_i \to v_j)$ で v_i から v_j への path の weight の和とする．このとき，両側のグラフともに次が成り立っている．

- $w(v_i \to v_{i+2}) = x_j x_k$
- $w(v_i \to v_{j+1}) = x_k - x_i x_k$
- $w(v_i \to v_k) = 1 - x_i$
- $w(v_j \to v_{j+1}) = x_k$
- $w(v_j \to v_j) = 1 - x_j$

この考え方を押し進めると，Reidemeister moves の前後に対応するグラフの適切な path の weight が等しければ結び目図式が与えられた時に不変量を与えることが期待される．そこで，自由微分から得られるとは限らない行列の weight を付与させてグラフを構成し，Reidemeister moves の前後に対応するグラフの適切な path の weight が等しい条件を考えよう．このとき，石井氏，大城氏 [2] によって定義された Alexander pair により weight が統制されることがわかる．

Definition 4.7. Q を quandle, R を単位的環とする．写像 $f_1, f_2 : Q \times Q \to R$ が次の条件を満たすとき，組 $f = (f_1, f_2)$ を Alexander pair と呼ぶ．

(1) 全ての $a \in Q$ に対し $f_1(a,a) + f_2(a,a) = 1$
(2) 全ての $a, b \in Q$ に対し $f_1(a,b)$ は可逆元
(3) 全ての $a, b, c \in Q$ に対し次が成り立つ:
  (ア) $f_1(a * b, c) f_1(a,b) = f_1(a * c, b * c) f_1(a,c)$
  (イ) $f_1(a * b, c) f_2(a,b) = f_2(a * c, b * c) f_1(b,c)$
  (ウ) $f_2(a * b, c) = f_1(a * c, b * c) f_2(a,c) + f_2(a * c, b * c) f_2(b,c)$ □

quandle の定義などについては [6] などを参照されたい．Alexander pair の条件式は次の様な設定を考えた時に自然に出てくる条件である．

Proposition 4.8. [8] $f = (f_1, f_2)$ が *Alexander pair* であるとする．このとき，$Q \times R$ に次で

quandle の構造 $(Q \times R, \star)$ が入る*:*

$$(a, x) \star (b, y) = (a * b, f_1(a, b)x + f_2(a, b)y)$$

□

Alexander pair $f = (f_1, f_2)$ が Propositoin 4.8 が満たすことと weight の path を保存することの関連は，被覆空間と基本群の関係のアナロジーから理解できる．先に現れた以外の結び目の不変量として，quandle 2-cocycle invariant との関連なども以上の文脈から捉えることができ，[11] の別証明を与えるなど，グラフの path の weight を保つという条件が非常に重要な条件であることが示唆される．

参考文献

[1] A. Terras, Zeta functions of graphs: a stroll through the garden, Cambridge University Press, 2010, vol. 128.

[2] A. Ishii and K. Oshiro, “Twisted Derivatives with Alexander pairs for quandles., preprint.

[3] D. Joyce, “A classifying invariant of knots, the knot quandle,” Journal of Pure and Applied Algebra 23.1 (1982): 37-65.

[4] H. Goda, “Twisted alexander polynomial and matrix-weighted zeta function,” Kyushu Journal of Mathematics 74.1 (2020): 211-221.

[5] J. W. Alexander, “Topological invariants of knots and links,” Transactions of the American Mathematical Society 30.2 (1928): 275-306.

[6] M. Elhamdadi and S. Nelson, Quandles, American Mathematical Soc., 2015.

[7] M. Wada, “Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups,” Topology 33.2 (1994): 241-256.

[8] N. Andruskiewitsch, and M. Graña, “From racks to pointed Hopf algebras,” Advances in Mathematics 178.2 (2003): 177-243.

[9] T. Ohtsuki, Quantum invariants: A study of knots, 3-manifolds, and their sets, World Scientific, 2002.

[10] X. S. Lin, “Representations of knot groups and twisted Alexander polynomials,” Acta Mathematica Sinica 17.3 (2001): 361-380.

[11] Y. Taniguchi, “An f-twisted Alexander matrix of link quandles,” arXiv preprint arXiv:2107.06561 (2021).

[12] 大槻 知忠, 結び目の不変量, 共立講座, 数学の輝き 4, 共立出版，2015.

[13] 北野 晃朗, 合田 洋, 森藤 孝之, ねじれ Alexander 不変量, 数学メモアール, 5, 日本数学会, 2006.

[14] 村上 斉, 結び目理論入門 (上) (岩波数学叢書), 岩波書店, 2019.

Quandle と f-twisted Alexander matrix

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻
谷口 雄大 (Yuta Taniguchi)

概要

Quandle とは結び目理論と相性の良い代数系である．近年, quandle を用いて f-twisted Alexander matrix と呼ばれる概念が導入され, いくつかの結び目不変量が構成された．本講演では f-twisted Alexander matrix から得られる結び目不変量が Alexander 不変量より真に強い不変量であることを示す．時間が許せば, 最近の研究についても報告する．

1 導入

結び目とは円周 S^1 の 3 次元球面 S^3 への滑らかな埋め込みの像のことである, ここで S^1 と S^3 には向きが入っているとする．また向きを保つ滑らかな同相写像 $\varphi : S^3 \to S^3$ で $\varphi(K_1)$ が K_2 と向きをこめて一致しているとき, 結び目 K_1 と K_2 は同値であるという．結び目理論において基本的な問題の 1 つは与えられた 2 つの結び目が同値かどうかという問題である．この問題に対しては結び目の不変量, すなわち結び目の同値類からある集合への写像の研究が重要な役割を果たす．代表的な結び目の不変量の 1 つは結び目群 $G(K)$ である．これは結び目 K の補空間 $S^3\backslash K$ の基本群 $\pi_1(S^3\backslash K)$ のことである．結び目群は結び目の分類に対しては強力に働く不変量ではあるが, 完全に分類できるわけではなく結び目としては同値ではないが結び目群が同型になる結び目の組が存在することが知られている．他にも Alexander 不変量や (twisted) Alexander 多項式など様々な不変量が知られている ([1,3,8]).

Quandle とは Joyce [5] と Matveev [6] によって独立に導入された結び目理論と非常に相性が良い代数系である．現在までに様々な結び目の不変量が quandle を用いて定義され, 盛んに研究されてきた．近年, Ishii-Oshiro [4] によって **f-twisted Alexander matrix** という概念が導入され, 新たな結び目の不変量が構成された．この概念は結び目の図式, quandle, **Alexander pair** と呼ばれる写像の組と彩色と呼ばれる写像を決めることで定義される．特にある条件の元では f-twisted Alexander matrix は Alexander matrix や Wada [8] によって定義された表現付きの Alexander matrix を復元する．Alexander 不変量や (twisted) Alexander 多項式は Alexander matrix や表現付きの Alexander matrix から得られるので f-twisted Alexander matrix から得られる不変量は Alexander 不変量や (twisted) Alexander 多項式の拡張と考えられる．

ここで自然な疑問として「 f-twisted Alexander matrix から得られる不変量は Alexander 不変量や (twisted) Alexander 多項式を**真**に拡張したものだろうか」というものが考えられる．すなわち, Alexander 不変量や (twisted) Alexander 多項式から取り出せない情報を f-twisted Alexander matrix から得られる不変量から取り出せるのかという問題である．特にこの問題を結び目の分類と

いう面から考えると次のような問題に書き換えられる.

問題 1. Alexander 不変量で区別できない結び目を f-twisted Alexander matrix から得られる不変量で区別できるのだろうか.

本稿の目的はこの問題に肯定的な解答を与えることである.

定理 1.1. f-twisted Alexander matrix から得られる不変量は Alexander 不変量よりも強力な結び目の不変量である, すなわち Alexander 不変量で区別できないが f-twisted Alexander matrix から得られる不変量で区別出来る異なる結び目が存在する.

2 定義

定義 2.1 (Joyce [5])**.** 空でない集合 X 上の 2 項演算 $*: X \times X \to X$ が次の条件を満たすとき、組 $(X, *)$ を **quandle** という. 簡単のため $(X, *)$ を単に X と書くことにする.

(Q1) 任意の $x \in X$ に対して, $x * x = x$.
(Q2) ある 2 項演算 $\bar{*}: X \times X \to X$ が存在し, 任意の $x, y \in X$ に対して $(x * y)\bar{*}y = (x\bar{*}y) * y = x$.
(Q3) 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

Quandle の条件 (Q1), (Q2), (Q3) は結び目理論における Reidemeister 移動に対応している. 同様の概念が Matveev によって導入されている [6].

例 2.2. X を左 $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -加群, X 上の 2 項演算を $x * y = tx + (1-t)y$ で定める. このとき X は quandle であり, この quandle を **Alexander quandle** と呼ぶ.

例 2.3. X を群 G, X 上の 2 項演算を $x * y = y^{-1}xy$ で定める. このとき X は quandle であり, この quandle を **conjugation quandle** と呼び $\mathrm{Conj}(G)$ と書く.

$p: S^3 \to S^2$ を有向結び目 K の像 $p(K)$ の多重点が有限個で, 多重点全てが横断的な 2 重点である射影とする. $p(K)$ の各 2 重点に上下の情報を付け加えたものを有向結び目の図式と呼ぶ.

定義 2.4 (Joyce [5])**.** D を有向結び目 K の図式, X を quandle とし, $\mathcal{A}(D)$ で D の弧全体の集合とする. 写像 $c: \mathcal{A}(D) \to X$ が次の条件を満たしているとき, c を X**-彩色**と呼ぶ.

- 任意の D の 2 重点 χ に対して, $c(x_i) * c(x_j) = c(x_k)$ が成り立つ, ここで x_i, x_j, x_k は χ の周りで図 1 のように集まっている弧である.

X-彩色全体の集合を $\mathrm{Col}_X(D)$ と書くことにする.

命題 2.5 (Joyce [5])**.** D と D' を結び目 K の図式とする. このとき $\mathrm{Col}_X(D)$ と $\mathrm{Col}_X(D')$ の間に全単射が存在する. 特に X が有限 quandle ならば $\mathrm{Col}_X(D)$ は有限集合になりその位数は図式の取り方に寄らない.

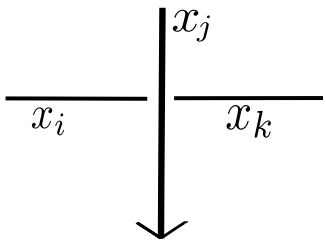


図 1　2 重点 χ の周りの弧.

続いて quandle cocycle 不変量の定義を述べる. A をアーベル群としその単位元を e_A と書く. 本稿ではアーベル群の演算は乗法的であるとする.

定義 2.6 (Carter-Jelsovsky-Kamada-Langford-Saito [2])**.** 写像 $\theta : X^2 \to A$ が次の条件を満たすとき θ を **quandle 2-cocycle** と呼ぶ.

- 任意の $x \in X$ に対して, $\theta(x, x) = e_A$.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $\theta(x * y, z)\theta(x, y) = \theta(x * z, y * z)\theta(x, z)$.

$c : \mathcal{A}(D) \to X$ を X-彩色とし, $\theta : X^2 \to A$ を quandle 2-cocycle とする. ここで D の 2 重点 χ をとり, χ の周りでは図 1 のようになっているとする. このとき χ における重み $\Phi_\theta(\chi, c) \in A$ を次で定める:

$$\Phi_\theta(\chi, c) := \begin{cases} \theta(c(x_i), c(x_j)) & (\text{下方弧の向きが } x_i \text{ から } x_k), \\ \theta(c(x_i), c(x_j))^{-1} & (\text{下方弧の向きが } x_k \text{ から } x_i). \end{cases}$$

つづいて全ての 2 重点における重みをかけ合わせた元を $\Phi_\theta(D, c) := \Pi_\chi \Phi_\theta(\chi, c) \in A$ と書く. このとき次が成り立つ.

定理 2.7 (Carter-Jelsovsky-Kamada-Langford-Saito [2])**.** D と D' を結び目 K の図式とし, 命題 2.5 の全単射を $\varphi : \mathrm{Col}_X(D) \to \mathrm{Col}_X(D')$ と書く. このとき任意の X-彩色 $c \in \mathrm{Col}_X(D)$ に対して $\Phi_\theta(D, c) = \Phi_\theta(D', \varphi(c))$ が成り立つ.

よって X が有限 quandle のとき, 多重集合 $\Phi_\theta(D) = \{\Phi_\theta(D, c) \mid c \in \mathrm{Col}_X(D)\}$ は図式の取り方に寄らない, すなわち結び目の不変量になる. この不変量を **quandle cocycle 不変量** と呼び $\Phi_\theta(K)$ と書く.

3　Alexander pair と f-twisted Alexander matrix

X を quandle, R を乗法的単位元 1 をもつ環とする.

定義 3.1 (Ishii-Oshiro [4])**.** 写像 $f_1, f_2 : X \times X \to R$ が次の条件を満たすとき, 組 $f = (f_1, f_2)$ を **Alexander pair** と呼ぶ.

- 任意の $x \in X$ に対して, $f_1(x, x) + f_2(x, x) = 1$.

- 任意の $x, y \in X$ に対して, $f_1(x, y)$ は R の単元.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して,

$$f_1(x * y, z) f_1(x, y) = f_1(x * z, y * z) f_1(x, z),$$
$$f_1(x * y, z) f_2(x, y) = f_2(x * z, y * z) f_1(y, z),$$
$$f_2(x * y, z) = f_1(x * z, y * z) f_2(x, z) + f_2(x * z, y * z) f_2(y, z).$$

いくつか Alexander pair の例を挙げる.

例 3.2. X を任意の quandle とし, $f_1, f_2 : X \times X \to \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ を $f_1(x, y) = t, f_2(x, y) = 1 - t$ で定めるとこの組 $f = (f_1, f_2)$ は Alexander pair になる.

例 3.3. G を群とし, X を conjugation quandle $\mathrm{Conj}(G)$ とする. このとき $f_1, f_2 : X \times X \to \mathbb{Z}[G][t^{\pm 1}]$ を $f_1(x, y) = y^{-1}t, f_2(x, y) = y^{-1}x - y^{-1}t$ で定めるとこの組 (f_1, f_2) は Alexander pair になる.

D を結び目 K の図式, $c : \mathcal{A}(D) \to X$ を X-彩色とし, $\mathcal{C}(D)$ で D の 2 重点全体の集合とする. また $f = (f_1, f_2)$ を Alexander pair とする. 続いて D の 2 重点 χ に対して χ の上方弧を $a_{\mathrm{ov}}(\chi)$, χ の下方弧で $a_{\mathrm{ov}}(\chi)$ の向きに沿って右側にある弧を $a_{\mathrm{ri}}(\chi)$, χ の下方弧で $a_{\mathrm{ov}}(\chi)$ の向きに沿って左側にある弧を $a_{\mathrm{le}}(\chi)$ と書くことにする. このとき, 次で定める各成分が R の元であるような行列 $(\alpha_{ij})_{i \in C(D), j \in A(D)}$ を D に関する **f-twisted Alexander matrix** と呼び $A(D, c; f_1, f_2)$ と書く:

$$\begin{aligned}\alpha_{ij} := {} & \delta(a_{\mathrm{ri}}(i), j) f_1(c(a_{\mathrm{ri}}(i), c(a_{\mathrm{ov}}(i))) \\ & + \delta(a_{\mathrm{ov}}(i), j) f_2(c(a_{\mathrm{ri}}(i), c(a_{\mathrm{ov}}(i))) \\ & - \delta(a_{\mathrm{le}}(i), j),\end{aligned}$$

ここで $\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & (x = y) \\ 0 & (x \neq y) \end{cases}$ である.

例 3.4. D を図 2 の図式とし, 弧と 2 重点を図のようにラベル付けする. このとき

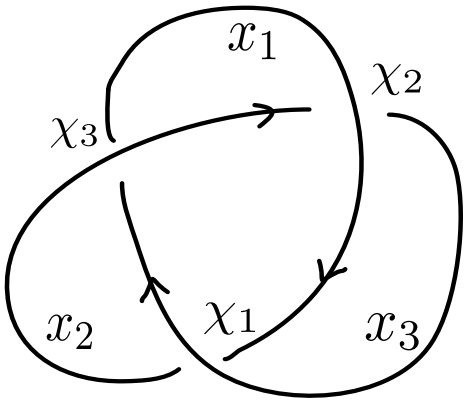


図 2 結び目の図式 D と D のラベル付け

$a_{\mathrm{ov}}(\chi_1), a_{\mathrm{ri}}(\chi_1), a_{\mathrm{le}}(\chi_1)$ はそれぞれ x_3, x_1, x_2 である. よって $\alpha_{\chi_1, x_1}, \alpha_{\chi_1, x_2}, \alpha_{\chi_1, x_3}$ はそれ

ぞれ $f_1(c(x_1),c(x_3)), -1, f_2(c(x_1),c(x_3))$ となる. 他の交点に関しても計算すると f-twisted Alexander matrix は以下の行列である:

$$A(D,c;f_1,f_2)=\begin{pmatrix} f_1(c(x_1),c(x_3)) & -1 & f_2(c(x_1),c(x_3)) \\ f_2(c(x_2),c(x_1)) & f_1(c(x_2),c(x_1)) & -1 \\ -1 & f_2(c(x_3),c(x_2)) & f_1(c(x_3),c(x_2)) \end{pmatrix}$$

定義から f-twsited Alexander matrix は図式 D やその弧や 2 重点のラベル付けにも依存するが次のようにして図式等に依らない値を取り出すことができる. $n := |(\mathcal{A}(D))|, m := |\mathcal{C}(D)|$ とおくと $A(D,c;f_1,f_2)$ は $m \times n$ 行列である. ここで R-加群準同型 $R^m \ni \boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a}A(D,c;f_1,f_2) \in R^n$ の余核を $\mathrm{Coker}(A(D,c;f_1,f_2))$ と書くことにする. このとき次が成り立つ.

定理 3.5 (Ishii-Oshiro [4])**.** D と D' を結び目 K の図式とし, 命題 2.5 の全単射を $\varphi : \mathrm{Col}_X(D) \to \mathrm{Col}_X(D')$ と書く. このとき任意の X-彩色 $c \in \mathrm{Col}_X(D)$ に対して $\mathrm{Coker}(A(D,c;f_1,f_2))$ と $\mathrm{Coker}(A(D',\varphi(c);f_1,f_2))$ は R-加群として同型である.

よって X が有限 quandle ならば多重集合 $\{\mathrm{Coker}(A(D,c;f_1,f_2)) \mid c \in \mathrm{Col}_X(D)\}$ は結び目の不変量になる.

例 3.6. $f=(f_1,f_2)$ を例 3.2 の Alexander pair とする. このとき f-twisted Alexander matrix $A(D,c;f_1,f_2)$ は **Alexander matrix** と一致する (cf. [4]). よって $\mathrm{Coker}(A(D,c;f_1,f_2))$ は $H_1(E_K^\infty) \oplus \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ と同型である, ここで E_K^∞ は K の補空間の無限巡回被覆空間 (すなわち可換化準同型 $G(K) \to \mathbb{Z}$ の核に対応した被覆空間) である.

$H_1(E_K^\infty)$ は結び目 K の **Alexander 不変量**と呼ばれ古くから研究されている. つまり例 3.6 から次のことがわかる.

- Alexander matrix は $A(D,c;f_1,f_2)$ の特別な場合である.
- Alexander 不変量は $\mathrm{Coker}(A(D,c;f_1,f_2))$ の特別な場合である.

よって Alexander matrix や Alexander 不変量の拡張として f-twisted Alexander matrix や $\mathrm{Coker}(A(D,c;f_1,f_2))$ を調べたいというのがこの研究の動機の 1 つである.

4 主定理の証明

定理 1.1 の証明は具体的に Alexander pair を構成し, 計算することで成される. この節ではその鍵となる定理を紹介する.

X を quandle, A をアーベル群とし, $\theta : X^2 \to A$ を quandle 2-cocycle とする. $\mathbb{Z}[A]$ を整数環 $\mathbb{Z}$ 上の群環とし写像 $f_\theta, 0 : X^2 \to \mathbb{Z}[A]$ を次で定める:

$$f_\theta(x,y) := 1 \cdot \theta(x,y), \quad 0(x,y) := 0.$$

このとき次が成り立つ.

補題 4.1. $f_\theta = (f_\theta, 0)$ は Alexander pair である.

この Alexander pair $f_\theta = (f_\theta, 0)$ を **quandle 2-cocycle に付随する Alexander pair** と呼ぶことにする. 次の定理が主結果の証明の鍵である.

定理 4.2. D を結び目 K の図式とし $c : \mathcal{A}(D) \to X$ を X-彩色とする. このとき次が成り立つ:

$$\mathrm{Coker}(A(D, c; f_\theta, 0)) \cong \mathbb{Z}[A]/(1 \cdot \Phi_\theta(D, c) - 1 \cdot e_A).$$

この定理では f-twisted Alexander matrix から quandle cocycle 不変量の情報が得られるということを示している.

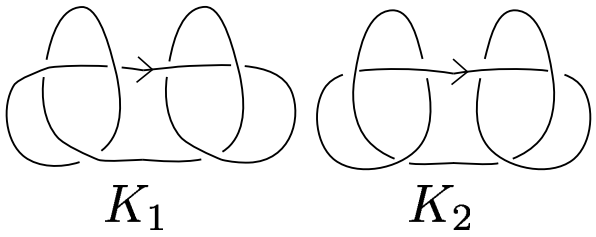


図 3　結び目 K_1 と K_2

ここで図 3 の結び目を考える. これらの結び目 K_1 と K_2 の結び目群 $G(K_1), G(K_2)$ は同型である. Alexander 不変量は結び目群から定まるので K_1 と K_2 の Alexander 不変量は一致する. そのため K_1 と K_2 を f-twisted Alexander matrix から得られる不変量で区別することが出来れば定理 1.1 の証明が出来たことになる. つまり多重集合 $\{\mathrm{Coker}(A(D, c; f_1, f_2)) \mid c \in \mathrm{Col}_X(D)\}$ が異なる quandle X と Alexander pair を構成すればよい.

そこでまず $\Phi_\theta(K_1) \neq \Phi_\theta(K_2)$ を満たす quandle X と quandle 2-cocycle θ を用意する. 定理 4.2 を用いて多重集合 $\{\mathrm{Coker}(A(D, c; f_\theta, 0)) \mid c \in \mathrm{Col}_X(D)\}$ を計算することによって, quandle X と θ に付随する Alexander pair $(f_\theta, 0)$ が欲しい quandle と Alexander pair であるということが確かめられる. 具体的な計算は [7] を参照されたい.

注意 4.3. 前述したように $G(K_1)$ と $G(K_2)$ は同型である. Alexander matrix の拡張である表現付きの Alexander matrix から得られる twisted Alexander 多項式と呼ばれる不変量も結び目群から定まる, すなわち K_1 と K_2 は twisted Alexander 多項式を用いても区別することが出来ない. よってこのことから f-twisted Alexander matrix は表現付きの Alexander matrix を真に拡張した概念であるといえる.

参考文献

[1] J. W. Alexander, *Topological invariants of knots and links*, Trans. Amer. Math. Soc. **30** (1928), 275-306.

[2] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford and M. Saito. Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* **355** (2003), 3947–3989.

[3] R. H. Fox, *Free differential calculus. II. The isomorphism problem of groups,* Ann. of Math. (2) **59** (1954), 196-210.

[4] A. Ishii and K. Oshiro, *Twisted derivatives with Alexander pairs for quandles*. preprint.

[5] D. Joyce. *A classifying invariant of knots, the knot quandle*. J. Pure Appl. Algebra. **23** (1982), no. 1, 37-65.

[6] S. Matveev. *Distributive groupoids in knot theory*. Math. USSR. Sbornik. **47** (1982), 73-83.
[7] Y. Taniguchi, *An f-twisted Alexander matrix of link quandles*, arXiv:2107.06561.
[8] M. Wada, *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology **33** (1994), no. 2, 241-256.

曲面絡み目の plat 表示

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻
安田順平 (Jumpei YASUDA)

1　絡み目の plat 表示

3 次元ユークリッド空間内の閉曲線を**絡み目 (link)** といい，連結な絡み目を**結び目 (knot)** という[*1]．結び目理論の基本問題は結び目，絡み目の分類問題と同型問題である．2 つの絡み目 L と L' が**全同位 (ambient isotopy)** によって移りあうとは，$\mathbb{R}^3$ の同位 (isotopy) $\{h_s\}_{s=0}^1$ であって $h_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ と $h_1(L) = L'$ を満たすものが存在することをいう．また全同位によって移りあう絡み目を**同値**な絡み目という．絡み目 L が**自明 (trivial)** であるとは，$\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた互いに交わらない 2 次元円板の和集合であって L を境界に持つものが存在することをいう．

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ からユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ への射影による絡み目 L の像 P を考える．このとき P が絡み目 L の**正則射影図**であるとは，平面 $\mathbb{R}^2$ 上における P の多重点が横断的な二重点のみからなるときをいう．正則射影図 P の各二重点に絡み目の上下が分かるように情報を付与したもの D を絡み目 L の**図式 (diagram)** という．

結び目理論の研究において絡み目の図式は大きな寄与を果たしている．そのため次章で導入する曲面絡み目に対しても適切な図式や表示を定義することは，曲面絡み目の変形や不変量の計算を行う上で重要な問題である．

絡み目をブレイドの plat 閉包によって表示する方法を紹介する．今後 n, m は正の整数とする．区間 $I = [0, 1]$ と 2 次元円板 $D = I^2$ に対して，$p : D \times I \to I$ を第二成分の射影，D 内の n 点からなる部分集合 $Q_n = \{q_1, \ldots, q_n\}$ を $q_k = (1/2, k/(n+1)) \in D$ によって定める．このとき円筒 $D \times I$ 内の曲線 β が次数 n の**幾何ブレイド (geometric braid)** であるとは，次の 2 条件を満たすことをいう．

(1) 制限写像 $\mathrm{p}|_\beta : \beta \to I$ は n 次の被覆写像である．
(2) 境界 $\partial\beta$ は $Q_n \times \{0, 1\}$ と一致する．

また境界を固定する $D \times I$ の全同位によって 2 つの幾何ブレイドが移りあうとき，それらのブレイドは**同値**であるという．混乱の恐れが無ければ幾何ブレイドを単にブレイドと呼ぶ．

D の n 点配置空間を $\mathrm{C}_n(D)$ とするとき，$\mathrm{C}_n(D)$ の基本群 $B_n = \pi_1(\mathrm{C}_n(D), Q_n)$ を次数 n の**ブレイド群**という．n 次の幾何ブレイドの同値類は n 次ブレイド群の元と 1 対 1 対応することが知られている．またブレイド群 B_n は次の群表示を持つことが知られている (Artin [1])．

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \,|\, \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i\ (|i-j|>2),\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j\ (|i-j|=1) \right\rangle.$$

[*1] 本講演では PL カテゴリーで議論する．しかし同様の方法によって滑らかなカテゴリーにおいても議論が可能である．

ブレイドから絡み目を得るために，フタの役割を担う wicket を定義する．円筒 $D\times I$ 内の **wicket** とは，$D\times I$ 内の半円周 (semicircle) であり，半円周の境界は $\mathrm{Int}D\times\{0\}$ と垂直に交わっているものである ([3])．$D\times I$ 内の ***m*-wicket system** とは，互いに交わらない m 本の wicket の和集合である．

wicket の大きな特徴は，端点 ∂w を指定すると一意的に m-wicket system w が与えられることである．そこで $\partial w_m = \{\{q_1,q_2\},\dots,\{q_{2m-1},q_{2m}\}\}$ によって定義される m-wicket system を**標準的**であると呼ぶ．ここで $\{q_1,q_2\}$ は w_m の連結成分の 1 つが q_1 と q_2 を端点に持つことを指定している．標準的な $2m$-wicket system w_m は次数 $2m$ のブレイドの (片側の) 端点と一致している．そこで図 1 のように次数 $2m$ のブレイド β の境界を 2 つの m-wicket system によって塞ぐことにより，ブレイドから絡み目 $\widetilde{\beta}$ を構成することが出来る．この絡み目 $\widetilde{\beta}$ をブレイドの **plat 閉包** (**plat closure**) といい，また絡み目の **plat 表示**という．

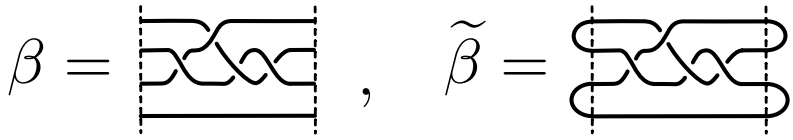


図 1　次数 4 のブレイドと 8 の字結び目の plat 表示 ($m=2$)

2　曲面絡み目

4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ 内の閉曲面を**曲面絡み目** (**surface-link**) といい，連結な曲面絡み目を**曲面結び目** (**surface-knot**) という[*2]．特に 2 次元球面 S^2 と同相な曲面結び目を 2 **次元結び目** (**2-knot**) と呼ぶ．2 つの曲面絡み目が $\mathbb{R}^4$ の全同位変形で移りあうとき，それらの曲面絡み目は**同値**であるという．

曲面結び目理論の基本問題は結び目理論と同様であるが，(1 次元) 結び目とは異なり位相形が複数存在する．また絡み目と同様に $\mathbb{R}^3$ への正則射影図を考えることにより曲面絡み目の**図式**が定義されるが，これは紙面で計算することが困難なため，不変量計算においては別の表示を構成することが有効である．その表示の 1 つとして，次に紹介するバンド付き絡み目表示がある．

絡み目 L に接着する**バンド** (**band**) とは $\mathbb{R}^3$ 内に埋め込まれた 2 次元円板 b であって，L と b の共通部分が L と ∂b の共通部分と一致し，それは異なる 2 つの線分であることをいう：

$$L\cap b \;=\; L\cap\partial b,\quad L\cap b\approx I\sqcup I.$$

絡み目 L のバンドを b とする．このとき絡み目 L' がバンド b に沿った絡み目 L の**バンド手術** (**band surgery**) によって得られるとは，絡み目 L' が次のようにして得られるときをいう：

$$L \;=\; (L\cup\partial b)\setminus\mathrm{Int}(L\cap\partial b).$$

絡み目 L と L に接着する互いに交わらないバンドの集合 $B=\{b_1\dots,b_n\}$ の組 (L,B) を**バンド付き絡み目** (**banded link**) という．2 つのバンド付き絡み目が**同値**であるとは，$\mathbb{R}^3$ の全同位変形によってバ

[*2] 曲面絡み目を **knotted surface** と呼ぶ文献もある．

ンド同士が交わることなく移りあうことをいう．またバンド付き絡み目 (L, B) に対して L を B に属するバンドによって手術して得られる絡み目を L_B と記す．

バンド付き絡み目 (L, B) について，2 つの絡み目 L と L_B が共に自明な絡み目であるとき，(L, B) は**許容的** (**admissible**) であるという．以下では許容的なバンド付き絡み目を考えよう．$\mathrm{pr} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ を第 1 成分の射影とする．L と L_B は自明であるため，$\mathbb{R}^3$ 内の円板族 $\mathbf{d}$ と $\mathbf{D}$ の境界となっている．この円板族を用いて次のような $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ 内の曲面絡み目を構成する (このように曲面絡み目をバンド付き絡み目と 2 次元円板の 1-パラメータ族によって表示する手法を**モーションピクチャー**という)．

$$\mathrm{pr}(F \cap \mathbb{R}^3 \times \{t\}) = \begin{cases} \mathbf{D} & (t = 1), \\ L_B & (0 < t < 1), \\ L \cup |B| & (t = 0), \\ L & (-1 < t < 0), \\ \mathbf{d} & (t = -1), \text{and} \\ \emptyset & \text{otherwise}, \end{cases}$$

この曲面絡み目 F は円板族 $\mathbf{d}, \mathbf{D}$ と (L, B) に依った定義であるが，$\mathbf{d}$ と $\mathbf{D}$ の取り方，そして (L, B) の同値類の取り方に依らず (曲面絡み目の同値の差を除いて) 一意的に定まることが知られている．この曲面絡み目 F を $F(L, B)$ と記し，バンド付き絡み目 (L, B) の**閉実現曲面** (**closed realizing surface**) という．(許容的な) バンド付き絡み目は閉実現曲面によって曲面絡み目を表示することが出来るが，逆に全ての曲面絡み目はバンド付き絡みによって表示することが知られている (cf. [10])．これを曲面絡み目の**バンド付き絡み目表示** (**banded link presentation**) という．

3　ブレイド状曲面と 2 次元ブレイド

ブレイド状曲面は Rudolph[11] によって導入され，そして Viro(cf. Kamada [6, 7, 8]) によって 2 次元ブレイドが導入された．これらは幾何ブレイドの高次元化である．

D_1 と D_2 を 2 次元円板 I^2，写像 $\mathrm{pr}_i : D_1 \times D_2 \to D_i$ $(i = 1, 2)$ を第 i 成分への射影とする．また D_2 の基点 y_0 を ∂D_2 上に取り固定する．次数 n の (**点付き**) **ブレイド状曲面** ((**pointed**) **braided surface**) とは次を満たす $D_1 \times D_2$ に埋め込まれた向き付けられた曲面 S である [11]:

(1) 制限写像 $\pi_S = \mathrm{pr}_2|_S : S \to D_2$ は次数 n の単純分岐被覆写像である．
(2) 境界 ∂S は $D_1 \times \partial D_2$ 内の閉ブレイドである．
(3) 基点 y_0 上の π_S の逆像 $\mathrm{pr}_1(\pi_S^{-1}(y_0))$ は Q_n と一致する．

n 次の分岐被覆写像が**単純** (**simple**) であるとは，各分岐値の逆像が $n - 1$ 点からなるときを言う．

2 **次元ブレイド** (**2-dimensional braid**) とは境界 ∂S が自明な閉ブレイドとなるようなブレイド状曲面である．即ち，各 $y \in \partial D_2$ について $\mathrm{pr}_1(\pi_S^{-1}(y)) = Q_n$ が成り立つ．分岐被覆写像 π_S の次数をブレイド状曲面 S の**次数**といい，$\deg S$ と記す．

2 つのブレイド状曲面が**同値**であるとは，$D_1 \times D_2$ のファイバーを保つ全同位 (isotopy)$\{h_t\}_{t \in I}$ によって移り合うことを言う．ここで連続写像 h_t がファイバーを保つとは，$D_1 \times D_2$ を D_2 上の自明な

D^2 束と見なしたときにファイバー構造を保つことを意味している．ブレイド状曲面が**自明**であるとは，2 次元ブレイド $Q_n \times D_2$ に同値であることをいう．

補題 3.1 (cf. [8])**.** ブレイド状曲面 S が自明である必要十分条件は分岐被覆写像 π_S が分岐点を持たないことである．

3.1　2 次元ブレイドの閉包

2 次元ブレイドを用いて曲面絡み目を表示する手法として閉包を導入する．

$I \subset \mathbb{R}$ により $D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^4$ とする．次数 n の 2 次元ブレイド S の**閉包 (closure)** とは，n 枚の自明な円板を ∂S に沿って ($\mathbb{R}^4$ 内における)$D_1 \times D_2$ の外側から S に貼り合わせて得られる (向き付けられた) 曲面絡み目である．S の閉包を $\overline{S}$ と表す．2 次元ブレイドの閉包は図 2 に示すモーションピクチャーによって記述することが出来る．ここで $S_{[t]}$ $(t \in I)$ は S の $D_1 \times (I \times \{t\})$ における切断面 $S \cap D_1 \times (I \times \{t\})$ である．

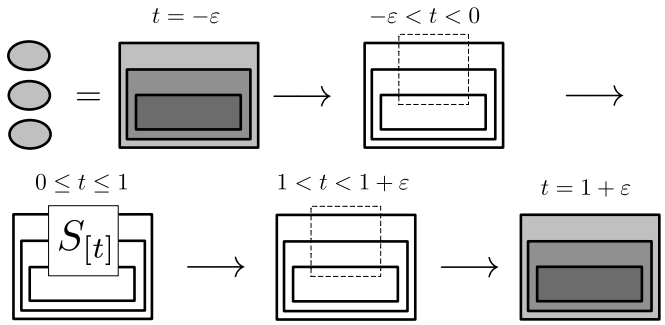


図 2　2 次元ブレイドの閉包のモーションピクチャー

2 次元ブレイドの閉包について，次の存在性が成り立つ．

命題 3.2 (鎌田 [7])**.** 全ての向き付けられた曲面絡み目はある 2 次元ブレイドの閉包と同値である．

そのため全ての向き付け可能な曲面絡み目は 2 次元ブレイドによる表示を持つ．向き付け可能な曲面絡み目 F に対して，閉包が F と同値となるような 2 次元ブレイドの最小次数を**ブレイド指数**といい $\mathrm{Braid}(F)$ と記す．ブレイド指数の値が小さな曲面絡み目については次のことが知られている．

命題 3.3 (鎌田 [5])**.** 向き付け可能な曲面絡み目 F のブレイド指数について次が成り立つ．

- ブレイド指数が 2 以下であるとき，F は自明な曲面結び目である．
- ブレイド指数が 3 であるとき，F はリボン曲面絡み目である．

命題 3.4 (鎌田-佐藤-高林 [9])**.** 非自明な 2 次元結び目 F と F' に対して，ブレイド指数は連結和に関して加法的でない：

$$\mathrm{Braid}(F \# F') \ < \ \mathrm{Braid}(F) \ + \ \mathrm{Braid}(F') \ - \ 1.$$

3.2 ブレイド状曲面のブレイドモノドロミー

ブレイド状曲面は次に導入するブレイドモノドロミーによって特徴付けることが可能である．

次数 n のブレイド状曲面 S に関して分岐被覆写像 π_S の分岐値全体を Σ_S とする．このとき $D_2 \setminus \Sigma_S$ 上のループ $\gamma : (I, \partial I) \to (D_2 \setminus \Sigma_S, y_0)$ に対して，$\mathrm{pr}_1(\pi^{-1}(\gamma(t)))$ $(t \in I)$ は D_1 上の m 点集合となり，特に $\mathrm{pr}_1(\pi^{-1}(\gamma(0))) = \mathrm{pr}_1(\pi^{-1}(\gamma(1))) = Q_n$ となる．よって $D_2 \setminus \Sigma_S$ 上のループ γ から次数 n のブレイド

$$\beta_\gamma \;=\; \bigcup_{t \in I} \mathrm{pr}_1(\pi^{-1}(\gamma(t))) \;\subset\; D_1 \times I.$$

が定まり，同値類を取ることによって群準同型写像

$$\rho_S : \pi_1(D_2 \setminus \Sigma_S, y_0) \;\to\; B_n$$

が得られる．この群準同型 ρ_S をブレイド状曲面 S の**ブレイドモノドロミー表現** (**braid monodromy representation**) という．2 つのブレイド状曲面 S と S' のブレイドモノドロミー表現 ρ_S と $\rho_{S'}$ を考える．このとき次を満たす同相写像 $g : D_2 \to D_2$ が存在するとき，ρ_S と $\rho_{S'}$ は**同値**であるという．但し $g_* : \pi_1(D_2 \setminus \Sigma_S, y_0) \to \pi_1(D_2 \setminus \Sigma_{S'}, y_0)$ は同相写像 g が誘導する同型写像である．

(1) $g(y_0) = y_0$ かつ $g(\Sigma_S) = \Sigma_{S'}$ が成り立つ．
(2) $\rho_S = \rho_{S'} \circ g_*$ が成り立つ．

命題 3.5 (cf. [8])**.** 2 つのブレイド状曲面が同値である必要十分条件はそれらのブレイドモノドロミー表現が同値であることである．

ブレイドモノドロミー表現は，Σ_S に関する Hurwitz arc system を用いることにより，ブレイド群 B_n の有限個の元により具体的に書き表すことが可能である (これをブレイド状曲面 S の**ブレイドシステム** (**braid system**) という)．詳細については [8] を参照されたい．

4 ブレイド状曲面の plat 閉包

(1 次元) 絡み目の plat 表示では，ブレイドにフタとして wicket を貼り合わせて絡み目を構成した．そこで wicket のループ (閉曲線) を上手く応用することでブレイド状曲面の”フタ”を構成し，そして曲面絡み目の plat 表示を導入する．

次の $m+1$ 個のブレイドによって生成されるブレイド群 B_{2m} の部分群 K_{2m} を **Hilden 部分群**という ([4], cf.[2])：

$$K_{2m} \;=\; \left\langle \sigma_1,\, \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2,\, \sigma_{2i}\sigma_{2i-1}\sigma_{2i+1}^{-1}\sigma_{2i}^{-1}\ (i = 1, 2, \ldots, m-1) \right\rangle.$$

また円筒 $D \times I$ 内の m-wicket system 全体のなす配置空間を $\mathcal{W}_m$ とする．ここで $\mathcal{W}_m$ は弧状連結であることが知られている．

命題 4.1 (Brendle-Hatcher [3])**.** 配置空間 $\mathcal{W}_m$ の基本群は *Hilden* 部分群と同型である：

$$\pi_1(\mathcal{W}_m, w_m) \;\simeq\; K_{2m}.$$

この同型写像は次のようにして与えられる．$f : (I, \partial I) \to (\mathcal{W}_m, w_m)$ を配置空間 $\mathcal{W}_m$ 内のループとする．このとき次数 $2m$ のブレイド β_f を

$$\beta_f \;=\; \bigcup_{t\in I} \partial f(t) \times \{t\} \;\subset\; D \times I$$

によって定めると，ブレイド β_f の同値類は Hilden 部分群の元となる．この対応により基本群 $\pi_1(\mathcal{W}_m, w_m)$ から Hilden 部分群 K_{2m} への写像が定まり，かつ同型写像を与えることが分かっている．

定義 4.2. (幾何) ブレイド β が**適切** (**adequate**) であるとは，あるループ $f : (I, \partial I) \to (\mathcal{W}_m, w_m)$ が存在して $\beta = \beta_f$ を満たすことをいう．

次に次数 n のブレイド状曲面 S に対して，その境界に現れるブレイド β_S を

$$\beta_S \;=\; \bigcup_{t\in I} \mathrm{pr}_1(\pi_S^{-1}(\mu(t))) \times \{t\} \;\subset\; D \times I$$

として定める．これは境界 ∂S の閉ブレイドを基点上で切り開いて得られるブレイドである．

定義 4.3. 幾何ブレイド β_S が適切なブレイドであるとき，ブレイド状曲面 S は**適切** (**adequate**) であるという．

4.1 Wicket 型曲面と plat 閉包

$I \subset \mathbb{R}$ により $D_i \subset \mathbb{R}^2$，$D_1 \times D_2 \subset \mathbb{R}^4$ とする．$\mathbb{R}^2 \setminus \mathrm{Int}\, D_2$ 内における境界 ∂D_2 の正則近傍を N とする．すると N はアニュラス $I \times S^1$ と同相であるため，自然な同一視によって $D_1 \times N$ を $D \times I \times S^1$ と見做す．

定義 4.4. $f : (I, \partial I) \to (\mathcal{W}_m, w_m)$ をループとする．このとき $D_1 \times N$ 内のコンパクト曲面 A_f を

$$A_f \;=\; \bigcup_{t\in I} f(t) \times \{p(t)\} \;\subset\; D \times I \times S^1 \;=\; D_1 \times N,$$

によって定める (ここで $p : I \to S^1 = I/\partial I$ は商写像である)．この曲面 A_f を **wicket 型**曲面という．

Wicket 型曲面 A_f の構成より，境界 ∂A_f は適切なブレイド β_f の閉包となっている．そこで適切なブレイド状曲面 S を考えると，定義よりあるループ $f : (I, \partial I) \to (\mathcal{W}_m, w_m)$ が存在して $\beta_S = \beta_f$ となる．境界 ∂S と ∂A_f は共にブレイド β_f の閉包となり一致している．よって曲面絡み目 $S \cup A_f$ が定義できる．

また m-wicket system は境界成分から一意的に復元できていた．よって wicket 型の曲面 A_f は境界 $\partial S = \partial A_f$ から一意的に定まる．そこで A_f を A_S と記すことにする．

定義 4.5. 適切なブレイド状曲面 S の **plat 閉包** (**plat closure**) $\widetilde{S}$ を $\mathbb{R}^4$ 内の S と wicket 型曲面 A_S の和集合として定める：

$$\widetilde{S} \;=\; S \;\cup\; A_S.$$

定義 4.6. 曲面絡み目 F がある適切なブレイド状曲面の plat 閉包であるとき，F を **plat form** という．さらに S が 2 次元ブレイドのとき，F を **genuine plat form** という．

5　主定理

曲面絡み目の plat 表示について，次の存在性定理が分かった．

定理 5.1. 全ての曲面絡み目はあるブレイド状曲面の *plat* 閉包と同値である．

また 2 次元ブレイドの閉包の存在性 (命題 3.2) に対して，類似の結論も得られた．

定理 5.2. 全ての向き付け可能な曲面絡み目はある *genuine plat* 閉包と同値である．

曲面絡み目の plat 表示を用いることにより，次の曲面絡み目不変量が定義される．

定義 5.3. 曲面絡み目 F の **plat 指数** (**plat index**) Plat(F) を，F の plat 表示を与えるブレイド状曲面の最小次数の半数値によって定義する．

$$\mathrm{Plat}(F) \;=\; \min\left\{ \deg S/2 \,|\, S \text{ はブレイド状曲面}, \widetilde{S} \simeq F \right\}.$$

定義 5.4. 曲面絡み目 F は genuine plat 表示を持つとする．このとき F の **genuine plat 指数** (**genuine plat index**) g.Plat(F) を，F の genuine plat 表示を与える 2 次元ブレイドの最小次数の半数値によって定義する．

$$\mathrm{g.Plat}(F) \;=\; \min\left\{ \deg S/2 \,|\, S \text{ は 2 次元ブレイド}, \widetilde{S} \simeq F \right\}.$$

この 2 つの不変量は次の不等式関係が成り立つ．これは定理 5.2 の証明から従う．

定理 5.5. 向き付け可能な曲面絡み目 F に対して次の不等式が成り立つ．

$$\mathrm{Plat}(F) \;\leq\; \mathrm{g.Plat}(F) \;\leq\; \mathrm{Braid}(F).$$

この不等式は (1 次元) 絡み目で知られている事実の類似である．

注意 5.6. (1 次元) 絡み目 L の橋指数を bridge(L) とするとき，次の不等式が成り立つ．

$$\mathrm{bridge}(L) \;=\; \mathrm{plat}(L) \;\leq\; \mathrm{braid}(L).$$

6　結び目群と結び目対称カンドルの計算

また plat 表示を用いた計算例として，曲面絡み目の不変量である結び目群と結び目 (対称) カンドルの計算を紹介する．

4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ 内の曲面絡み目 F に対して，その補空間の基本群 $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$ を**結び目群** (**knot group**) といい $G(F)$ と記す．同様に，$D_1 \times D_2$ 内のブレイド状曲面 S に対して，その補空間の基本群 $\pi_1(D_1 \times D_2 \setminus S)$ を S の**結び目群** (**knot group**) といい $G(S)$ と記す．

ブレイド状曲面の結び目群は次のようにして群表示が与えられることが知られている．補空間 $D_1 \times D_2 \setminus S$ 内のループ $x_1, \ldots, x_n$ を基点 y_0 上のメリディアンループとする．

命題 6.1 (cf. [8])**.** 次数 n のブレイド状曲面 S の結び目群は次の群表示を持つ.

$$G(F) \;=\; \langle x_1, \ldots, x_n \,|\, r_1, \ldots, r_l \rangle$$

ここで l はブレイド状曲面の分岐点の個数であり，各関係子 r_j は S のブレイドシステムから与えられる.

定理 6.2. 次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S に対して，*plat* 閉包の結び目群 $G(\widetilde{S})$ の群表示として次が成り立つ.

$$G(\widetilde{S}) \;=\; \left\langle x_1, \ldots, x_{2m} \,|\, r_1, \ldots, r_n,\; x_{2i-1} = x_{2i}^{-1}\; (i = 1, \ldots, m) \right\rangle$$

この定理は結び目対称カンドルと呼ばれる曲面絡み目の不変量に応用することが可能である.

定理 6.3. 曲面絡み目 F はブレイド状曲面 S によって *plat* 表示が与えられているとする．また結び目対称カンドルを $(X(F), \rho)$ とするとき次の対称カンドル表示がある：

$$X(F) \;=\; \langle x_1, \ldots, x_{2m} \,|\, r_1, \ldots, r_n,\; x_{2i-1} = \rho(x_{2i})\; (i = 1, \ldots, m) \rangle_{\mathrm{sq}}$$

ここで各 r_j は S のブレイドシステムから与えられる関係子である.

参考文献

[1] Emil Artin. Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 4(1):47–72, 1925.

[2] Joan S. Birman. On the stable equivalence of plat representations of knots and links. *Canadian J. Math.*, 28(2):264–290, 1976.

[3] Tara Brendle and Allen Hatcher. Configuration spaces of rings and wickets. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 88, 05 2008.

[4] Hugh M. Hilden. Generations for two subgroups of the braid group. *Pacific J. Math.*, 59(2), 1975.

[5] Seiichi Kamada. Surfaces in $\mathbf{R}^4$ of braid index three are ribbon. *J. Knot Theory Ramifications*, 1(2):137–160, 1992.

[6] Seiichi Kamada. Alexander's and Markov's theorems in dimension four. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 31(1):64–67, 1994.

[7] Seiichi Kamada. A characterization of groups of closed orientable surfaces in 4-space. *Topology*, 33(1):113–122, 1994.

[8] Seiichi Kamada. *Braid and knot theory in dimension four*, volume 95 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[9] Seiichi Kamada, Shin Satoh, and Manabu Takabayashi. The braid index is not additive for the connected sum of 2-knots. *Transactions of The American Mathematical Society - TRANS AMER MATH SOC*, 358:5425–5440, 12 2006.

[10] Akio Kawauchi, Tetsuo Shibuya, and Shin'ichi Suzuki. Descriptions on surfaces in four-space. I. Normal forms. *Math. Sem. Notes Kobe Univ.*, 10(1):75–125, 1982.

[11] Lee Rudolph. Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids. *Comment. Math. Helv.*, 58(1):1–37, 1983.

Thompson 群や関連する群の divergence function について

東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻
児玉悠弥 (Yuya KODAMA)

概要

幾何学的群論における主要な研究対象に, Thompson 群 F, T, V と呼ばれる無限群がある. これらの群は珍しい性質をもつので, 様々な “亜種” も研究されている. 近年 Thompson 群に対して, “無限遠での連結性” を表す量が計算された. この結果が他の亜種にも成り立つのかが急速に調べられており, 講演者のものも含めた結果を紹介したい.

1 導入

1965 年に, Richard Thompson によって F, T, V という 3 つの群が定義された. これらの群は, ある種の有限性を持ちながらも多くの不思議な性質を持つ群で, 現在でも様々な手法を用いて研究されている.

その手法の一つに, Thompson 群と似た群を新たに構成し, 元の群との関係性や, その群自身の性質を調べるというものがある. 3 つの群はそれぞれ様々な定義の仕方があり, それらの定義から様々な亜種が構成されている. 例えば, Higman-Thompson 群 [6], Brown-Thompson 群 [3], braided Thompson 群 [2, 4], 高次元の Thompson 群 [1], Lodha-Moore 群 [8] 等が挙げられる. それぞれが興味深い性質をもつ群だが, 今講演においては主に braided Thompson 群 BV に着目する. この群は, Thompson 群 V と Braid 群を組み合わせて構成されるような群である.

幾何学的群論における群の研究の主要な方法の一つに, 有限生成群にグラフの構造を定め, そのグラフの幾何的性質を調べるというものがある. このグラフは一般には生成集合の取り方に依存するため, その幾何的性質は “群とその生成系に関する性質” ということになる. 我々が主に興味を持っているのは “群の性質” であるので, 生成系の取り方の違いを同一視する必要があり, それが擬等長同型と呼ばれるものである. 群に対して擬等長不変な量を計算するという研究は, 現在でもよく行われている.

有限生成群に対して定まる擬等長不変量のひとつに, divergence function と呼ばれるものがある. divergence function とは概ね “無限遠における空間のつながりの強さ” を表す量であり, 十分につながりが強いことを「linear divergence をもつ」という. Thompson 群が linear divergence をもつことは [5] において既に証明されている. また, ブレイド群 B_n についても, $n \geq 3$ であるならば linear divergence をもつことがわかる[*1]. これらのことから, その 2 つの群を組み合わせた BV も同様の性質を持つことが期待される. 実際次が成り立つ.

[*1] 例えば, v2 の [7, Proposition 3.3] に記載予定.

Theorem 1.1 ([7]) *BV は, linear divergence をもつ.*

証明は, 細かい場合分けを含む組み合わせ群論的な議論を用いて行う.

2 Cayley graph と擬等長同型

有限生成群と生成集合に対して, 次のようにグラフを定義する.

Definition 2.1 (Cayley graph) G を有限生成群, S をその有限な生成集合で単位元を含んでいないものとし[*2], G の部分集合 S^{-1} を $\{s^{-1} \mid s \in S\}$ で定める. 無向グラフ $\mathrm{Cay}(G, S)$ を次で定める:

- 頂点集合は G.
- 辺集合は $\{\{g, gs\} \mid g \in G, s \in S \cup S^{-1}\}$.

このとき, $\mathrm{Cay}(G, S)$ を G の S に関する Cayley graph と呼ぶ. 簡単のため, $\{g, gs\}$ という辺と $\{gs, gss^{-1}\} = \{gs, g\}$ という辺は同一視しておく.

Cayley graph には, 常にその生成集合によって定まる語距離 d_S をいれておく. これはつまり, 各辺の長さを 1 として, 2 点を結ぶ辺の列で最小のものの辺の数である. 以下では, この距離を頂点集合に制限したものを考える.

Cayley graph は群を幾何学化したものに見えるが, 実際にはその生成集合に依存して定まるものである. 生成集合のとり方に依らないものでなければ, 群そのものを幾何学化したとは言えない. そこで, 次のように “ゆるい同型” を定める.

Definition 2.2 (擬等長同型) 距離空間 X, Y の間の写像 $f : X \to Y$ が次を満たすとする:

1. ある数 $\lambda \geq 1, k \geq 0$ が存在して, 任意の $x_1, x_2 \in X$ に対して
$$\frac{1}{\lambda} d_X(x_1, x_2) - k \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_X(x_1, x_2) + k$$
が成り立つ.
2. ある $C > 0$ が存在して, $f(X)$ の $C-$ 閉近傍が Y と一致する.

このとき X と Y は擬等長同型であるといい, f を擬等長同型写像という[*3].

有限生成群とその Cayley graph に対して, 次が成り立つ.

Proposition 2.3 有限生成群 G に対して S, T を 2 つの有限生成集合とする. このとき, $\mathrm{Cay}(G, S)$ と $\mathrm{Cay}(G, T)$ は擬等長同型である.

[*2] 特に断らない限り, 有限生成集合は常にこの性質を満たすとする.

[*3] X から Y への擬等長同型写像が存在すれば, Y から X への擬等長同型写像も (一意とは限らないが) 存在する. 条件 2 を使って適当に対応を決めればよい.

Proof. (G, d_S) から (G, d_T) への恒等写像が擬等長同型写像となることを示す. ある $L > 0$ が存在して, 任意の $g, h \in G$ に対して

$$\frac{d_S(g,h)}{L} \leq d_T(g,h) \leq L d_S(g,h).$$

が成り立つことを示せば良い.

$L_1 := \max_{t \in T \cup T^{-1}} d_S(e,t)$ とする[*4]. $d_T(g,h) = n$, すなわち n 個の $T \cup T^{-1}$ の元 $t_1, \ldots, t_n$ を用いて $gt_1t_2 \cdots t_n = h$ と書けるとする. 言い換えると, (G, d_T) における g から h への最短の道は, $g, gt_1, gt_1t_2, \ldots, gt_1t_2 \cdots t_n = h$ という順番に頂点を通っていく道ということである. (G, d_S) 内で, 同じ頂点を通って g と h を結ぶことを考える. $d_S(g, gt_1)$ とは, t_1 を $S \cup S^{-1}$ の元の (最小の個数での) 積で表した時の元の個数であるので, これは結局 $d_S(e, t_1)$ と等しく, L_1 で上から評価される. 同様に, $d_S(gt_1, gt_1t_2) = d(e, t_2)$ であるのでこれも L_1 で上から評価され, 以降も同じように計算できる. 三角不等式から,

$$\begin{aligned} d_S(g,h) &\leq d_S(g, gt_1) + d_S(gt_1, gt_1t_2) + \cdots + d_S(gt_1 \cdots t_{n-1}, h) \\ &\leq L_1 n \\ &= L_1 d_T(g,h) \end{aligned}$$

が成り立つ.

$L_2 := \max_{s \in S \cup S^{-1}} d_T(e,s)$ に対して, S, T の役割を入れ替えた上の議論を適用すれば, $d_T(g,h) \leq L_2 d_S(g,h)$ が得られる.

最後に $\max\{L_1, L_2\}$ を L とおけば, 証明が完了する. □

この命題によって, 有限生成群の Cayley graph は擬等長同型の違いを除いて一意に定まることがわかる.

Remark 2.4 自明な群の Cayley graph(すなわち 1 点からなる graph) と, 有限群 (と適当な生成集合) の Cayley graph は擬等長同型である. 実際, 自明群の 1 点を有限群の単位元に送る写像が擬等長同型写像の定義を満たす. このことから, 通常我々は有限生成である無限群を研究対象とすることが多い.

また, 一つの生成集合上での Cayley graph に対して "幾何的な性質" を定めたあとに, それが擬等長同型のもので不変であることが示せれば, その性質を群の幾何的な性質と思うことができる. Section 4 では, その一つの例である divergence function というものについて述べる.

3 Thompson 群と braided Thompson 群

3.1 Thompson 群 F, T, V

まず V を定義して, その部分群として残りの 2 つを定義する.

[*4] $d_S(e,t) = d_S(e, t^{-1})$ であるので, T^{-1} はなくてもよい.

V の元 g は, leaf の数が同じである有限の根付き 2 分木 T_+, T_- と leaf の集合の置換 σ からなる 3 つ組 (T_+, σ, T_-) で表される. このような 3 つ組のことを, **tree diagram** と呼ぶ.

2 分木 T の各 leaf o に対して, root から o への一意な path が対応する. 各 caret(^のこと) の左側を 0, 右側を 1 とラベル付けすれば, path に対応する binary word $w(o)$ が得られる. 以降, 各 path とそれに対応する binary word は同一視する.

Cantor 集合 C と無限 2 進列からなる空間を同一視することにより, V の元 (T_+, σ, T_-) に対応した C から C への同相写像が得られる. 実際, T_+ の各 leaf o と任意の無限語 a に対して, $w(o)a$ を $w(\sigma(o))a$ に対応させれば良い.

群の合成を定義するための準備をする. T_+ の leaves x, y が dipole を形成するとは, x, y が T_+ 内で同じ親を持ち, さらに $\sigma(x), \sigma(y)$ が (この順番で)T_- 内で同じ親をもつ状態のことをいう. dipole は自然に取り除くことができる. また, 取り除く前後の tree diagram から得られる Cantor 集合 C の間の同相写像は同じであり, このときこれらの tree diagram は V の同じ元を表しているとみなす. dipole を差し込むことも, 上の内容を逆にたどればできる. dipole がない tree diagram のことを **reduced tree diagram** という. V の任意の元は reduced tree diagram を用いて unique に表される.

群の演算を定義する. 任意の 2 元 $g_1, g_2 \in V$ に対して, それに対応する tree diagram を 2 つ任意にとり, (A_+, α, A_-) と (B_+, β, B_-) とする. このとき, いくつかの dipole を差し込むことにより, g_1, g_2 を表し更に $B'_+ = A'_-$ を満たすような tree diagrams(A'_+, α', A'_-), (B'_+, β', B'_-) が得られる. このとき,

$$g_1 g_2 := (A'_+, \alpha'\beta', B'_-)$$

と定義する. なお, ここでの $\alpha'\beta'$ とは通常の写像の合成とは逆の順番での合成, すなわち右作用である. $B'_+ = A'_-$ より leaf の数が等しいので, 写像の合成が計算できる.

最後に F, T を定義する. T は σ を巡回置換のみに制限したものとし, F は σ を恒等写像のみに制限したものと定める. 明らかに, それぞれ V の部分群となる.

3.2 braided Thompson 群 BV

Thompson 群 V は, 葉の数が等しい 2 つの有限根付き 2 分木と, その葉の数に対応する対称群の元を用いて表されていた. BV は, この対称群の部分をブレイド群に置き換えることで定義される. V における tree diagram に対応して, BV における 3 つ組を **tree-braid-tree diagram** と呼ぶ.

V と異なるのは, 同じ元を表す別の tree-braid-tree diagram の同一視の仕方と, 合成の定義である.

V においては, 対応する 2 つの leaf が dipole を形成するときに, 取り除く操作を与えた. BV においては, 次の 2 つの条件を満たすとき, caret と対応する 2 本の紐を取り除く操作を定め, 同一視を行う.

1. ブレイド群から自然に定まる対称群への全射準同型を用いて tree-braid-tree diagram を tree diagram とみなしたとき, V の元の意味で dipole を形成していること.
2. その対応する 2 本の紐が平行であること.

逆の操作も同様に定義することができるので, それを用いて tree-braid-tree diagram の間の同一視を定める.

合成の定義については, 写像の合成の部分をブレイド群の積で置き換えればよい.

4 divergence function

f, g を $\mathbb{R}_+$ から $\mathbb{R}_+$ への写像とする. ある $A, B, C, D, E \geq 0$ が存在して, 全ての $x \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$f(x) \leq Ag(Bx + C) + Dx + E$$

が成り立つとき, $f \preceq g$ と定める. $f \equiv g$ を $f \preceq g$ かつ $g \preceq f$ で定めると, これは同値関係になる. 定義から, 全ての線形写像は同値である.

$\delta \in (0, 1)$ とする. 有限生成群 G の **δ-divergence function** $f_\delta(x)$ とは, ある有限生成系 S に関する Cayley graph の単位元に対応する点 e から距離が x 離れた任意の 2 点を, e を中心とした半径 δx の ball の中を通らずに結べる道の長さを, 上からおさえられる値の最小値のことである. そのような道が存在しないときには, 道の長さを ∞ と定める.

ある δ が存在して, G とある生成集合 S に対して定まる divergence function が線形写像と同値であるとすると, 別の生成集合 S' に対して定まる divergence function もその性質を持つ[*5]. 従ってこれは, 群そのものの性質とみなすことができる. ある δ が存在して, G のあるケイリーグラフに対する δ-divergence function が線形写像と同値であるとき, G は **linear divergence** をもつという.

Thompson 群 F, T, V や BV は, 全て linear divergence をもつ. これは実際に道を構成して, 具体的な δ を与えることで証明される.

参考文献

[1] M. G Brin, *Higher dimensional thompson groups*, Geometriae Dedicata **108** (2004), no. 1, 163–192.

[2] ———, *The algebra of strand splitting. I. A braided version of Thompson's group V*, Journal of Group Theory **10** (2007), no. 6, 757–788.

[3] K. S Brown, *Finiteness properties of groups*, Journal of Pure and Applied Algebra **44** (1987), no. 1-3, 45–75.

[4] P. Dehornoy, *The group of parenthesized braids*, Advances in Mathematics **205** (2006), no. 2, 354–409.

[5] G. Golan and M. Sapir, *Divergence functions of Thompson groups*, Geometriae Dedicata **201** (2019), no. 1, 227–242.

[6] G. Higman, *Finitely Presented Infinite Simple Groups*, Notes in pure math, Australian National University, 1974.

[7] Y. Kodama, *Divergence function of the braided Thompson group*, to appear in Kyoto Journal of Mathematics, arXiv:2012.03785 (2020).

[8] Y. Lodha and J. T. Moore, *A nonamenable finitely presented group of piecewise projective homeomorphisms*, Groups, Geometry, and Dynamics **10** (2016), no. 1, 177–200.

[*5] この性質は擬等長同型の元でも不変である.

The space of non-extendable quasimorphisms

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
丸山修平 (Shuhei MARUYAMA)

概要

群上の “有界な誤差で準同型” となる実数値関数を擬準同型 (quasimorphism) という. 正規部分群上の擬準同型が全体の群に拡張できるか, という「擬準同型の拡張問題」について得られた結果を紹介する. とくに, 自由群, 曲面群, 3-manifold 群, 自由群の (IA-) 自己同型群など, 幾何由来の群に関する拡張不可能な擬準同型の空間の決定について紹介する. 本稿は川崎盛通氏 (青山学院大学), 木村満晃氏 (京都大学), 松下尚弘氏 (琉球大学), 見村万佐人氏 (東北大学) との共同研究に基づく.

1 序

本稿ではプレプリント [KKM$^+$21] の結果を紹介する.

群 G 上の実数値関数 $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ が擬準同型 (quasimorphism) であるとは,

$$D(\mu) = \sup_{g,h\in G} |\mu(gh) - \mu(g) - \mu(h)| < \infty$$

が成り立つときをいう. つまり擬準同型とは “有界な誤差で準同型” な関数である. また, 任意の巡回部分群上で準同型となる擬準同型を斉次擬準同型 (homogeneous quasimorphism) という. 斉次擬準同型のなす線形空間を $Q(G)$ で表す. 以下では斉次なものしか扱わないので, 単に擬準同型と書いたら斉次なものを指すことにする.

G の正規部分群 N 上の G 不変擬準同型 μ が与えられたとき, それが G 上の擬準同型に拡張できるか, という G 不変擬準同型の拡張問題を扱う (ここで G 不変というのは共役不変の意味である). 拡張不能擬準同型については, 筆者の知る限り [Sht16], [KK19] の例しか無かった.[*1] また [Sht16] の例は拡張不能な準同型なので, 真に擬準同型であり拡張不能なものは [KK19] の例しか見つかっていなかった.

一般に擬準同型の構成は難しいので, 拡張不能な擬準同型を構成するのはなおのこと難しい. そこで, 拡張不能な擬準同型の存在や非存在くらいは示せないだろうか, ということで, 拡張不能な擬準同型のなす線形空間

$$\mathcal{NE}(G,N) = Q(N)^G \big/ \big(i^*Q(G) + H^1(N)^G\big)$$

を導入し (3 章), その線形空間の非自明性や自明性を調べることにする. この空間の正確な意味は 3 章で説明するが, ラフに述べると, この空間 $\mathcal{NE}(G,N)$ が非自明なとき, N 上に拡張不能な G 不変擬準同型が存在する.

[*1] 本研究とほぼ同時期に, 拡張不能準同型の別の例を見つけた [KM20].

本稿の主結果は以下である:

定理 1.1 ([KKM$^+$21])**.** (1) 自由群 $G = F_n$ とその交換子部分群 N に対し, $\mathcal{NE}(G, N) = 0$.
(2) 自由群の自己同型群 $G = \mathrm{Aut}(F_n)$ と IA-自己同型群 $N = \mathrm{IA}_n$ に対し, $\mathcal{NE}(G, N) = 0$.
(3) 連結成分が 2 つの双曲絡み目の基本群 G とその交換子部分群 N に対し, $\mathcal{NE}(G, N) = 0$.
(4) 種数 2 以上の閉曲面の基本群 G とその交換子部分群 N に対し, $\mathcal{NE}(G, N) \cong \mathbb{R}$.
(5) 種数 $l \geq 2$ の閉曲面上の向きを保つ同相写像 f に対し, M_f でその写像トーラスを表し, G を M_f の基本群, N を交換子部分群とする. 同相写像 f が擬アノソフであり, その写像類がトレリ群に入るとき, $\mathcal{NE}(G, N) \cong \mathbb{R}^{2l+1}$.

$\mathcal{NE}(G, N)$ は商空間として定義されているが, 上定理の例ではすべて分子の空間も分母の空間も非可算無限次元の空間である (定理 2.2 から分かる). しかし商を取りその差を見てみると, 自由群の例だと分子と分母の差はなく, 曲面群の例だとその差はたったの 1 次元分しかない.

拡張不能擬準同型やその空間にはいくつか応用がある ([KKMM21b], [KKM$^+$21]). とくに空間 $\mathcal{NE}(G, N)$ に関して, 次の安定交換子長 scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ の同値定理が成り立つ.

定理 1.2 ([KKM$^+$21])**.** $\mathcal{NE}(G, N) = 0$ のとき, scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ は双リプシッツ同値である.

2 擬準同型と交換子長

以下では擬準同型と (安定) 交換子長の基礎的なことを紹介する. 擬準同型や (安定) 交換子長については [Cal09] が標準的な教科書である.

擬準同型は準同型を含む広いクラスであるが, 擬準同型を考える動機の一つに完全群がある. 完全群とは任意の元が交換子 $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$ の積で表せるという群である. G を完全群としたとき, 実数値準同型 $G \to \mathbb{R}$ はすべて自明となることが定義から直ちに分かる. したがって, 実数値準同型を用いて完全群の情報を取り出すことは不可能である. 一方, 完全群は擬準同型なら許容し得て, その擬準同型を用いてその完全群の代数的な情報 (例えば交換子長など) を取り出すことができる.

群 G の交換子部分群 $[G, G]$ の元 g について, その交換子長 (commutator length) $\mathrm{cl}_G(g)$ は, g を与える交換子の最小数

$$\mathrm{cl}_G(g) = \min\{l \in \mathbb{N} \mid g = [a_1, b_1] \cdots [a_l, b_l]\}$$

である. 交換子長は幾何的には "最小種数" とみなすことができる. 例えば G として多様体の基本群を考える (もしくは離散群 G の分類空間を考える). このとき G の元 g は多様体上のループで実現できるが, そのループを張る境界付き曲面の種数の最小数がまさに g の交換子長である.

一般に交換子長の計算は非常に難しい.[*2] そこで交換子長の安定化として安定交換子長 (stable commutator length)

$$\mathrm{scl}_G(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{cl}_G(g^n)}{n}$$

を考える. 交換子長は劣加法性を持つので, 極限は必ず存在する. 安定交換子長の計算については, 擬

[*2] プレプリント [Heu20] のタイトルを見よ.

準同型を用いた次の定理がある.

定理 2.1 ([Bav91], Bavard の双対定理)**.** 交換子部分群の元 $g \in [G, G]$ に対し,

$$\mathrm{scl}_G(g) = \sup_{\mu \in Q(G)/H^1(G)} \frac{|\mu(g)|}{2D(\mu)}$$

が成り立つ.

したがって具体的な擬準同型が構成できたとすると, それを用いて安定交換子長の lower bound を与えることができる. とくに安定交換子長が非零とすると, 交換子長は非有界関数であることが分かる. 完全群 G について交換子長が有界関数になるとき, G を一様完全群という. つまり完全群上に非自明な擬準同型が存在すると, その群は一様完全群にはなり得ないことが分かる.

擬準同型と一様完全性に関する例として, Poincaré の translation number ([Poi81]) を挙げる. 円周の向きを保つ同相群を $\mathcal{H}$, 実数直線上の同相写像で 1 平行移動と可換なもののなす群を $\widetilde{\mathcal{H}}$ で表す. $\widetilde{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ の普遍被覆群となることが知られている. 写像 $\tau\colon \widetilde{\mathcal{H}} \to \mathbb{R}$ を

$$\tau(h) = \lim_{n\to\infty} \frac{h^n(0)}{n}$$

で定める. 極限が必ず存在し, 擬準同型となることは簡単に分かる. この τ を Poincaré の translation number という. Translation number は円周の力学系の研究の過程で [Poi81] で導入され, その有理性と円周の同相写像の周期点の存在が同値となるなど, 円周の力学系における基本的で重要な道具である. 簡単に分かるように 1 平行移動 $T \in \widetilde{\mathcal{H}}$ について $\tau(T) = 1$ なので, $\mathrm{scl}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(T) > 0$ である.[*3] $\mathcal{H}$ は一様完全群であることが知られている. 一方, $\widetilde{\mathcal{H}}$ は完全群であることが知られているが, 上記の理由から $\widetilde{\mathcal{H}}$ は一様完全でないことが分かる.

Thurston や Banyaga の定理により, 閉多様体の微分同相群やハミルトン微分同相群は完全群であることが知られている. このことから擬準同型は微分同相群などでよく調べられているが, 幾何群論的な視点から有限生成群においても擬準同型は盛んに調べられている. 擬準同型の存在について, 次の定理がある.

定理 2.2 ([EF97])**.** G が非初等的双曲群のとき, $Q(G)$ は非可算無限次元である.

例えば閉双曲多様体の基本群上には, 擬準同型が豊富に存在している.

3 G 不変擬準同型と (G, N)-交換子長

ここまでの章では, 群を一つ固定して, その群上の擬準同型について述べてきた. 以下では, 群 G とその正規部分群 N を固定して, 各群上の擬準同型の関係について「擬準同型の拡張可能性」の観点から話をする.

簡単に分かることとして, G 上の擬準同型 μ は G 不変, つまり任意の $g, h \in G$ に対し $\mu(ghg^{-1}) = \mu(h)$ が成り立つ. このことから, 擬準同型 $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ の N への制限も以下の G 不変性を持つ.

[*3] 実際には $\mathrm{scl}_{\widetilde{\mathcal{H}}}(T) = 1/2$ となる.

定義 3.1. N 上の擬準同型 μ が G 不変であるとは, 任意の $g \in G$, $x \in N$ に対し $\mu(gxg^{-1}) = \mu(x)$ を満たすときをいう. G 不変擬準同型のなす空間を $Q(N)^G \subset Q(N)$ で表す.

したがって, G 不変性は N 上の擬準同型が G に拡張するための簡単な必要条件である.

一般に, N 上の G 不変擬準同型が G 上の擬準同型の制限として得られるとは限らない. そのような擬準同型の存在や非存在を議論するために, 次の空間を導入する.

定義 3.2. 商空間

$$\mathcal{NE}(G,N) = Q(N)^G \big/ \big(i^*Q(G) + H^1(N)^G\big)$$

を拡張不能擬準同型のなす空間とよぶ. ここで $H^1(N)^G$ は N 上の G 不変準同型のなす空間である.

G 不変な準同型で割っているので, 真に擬準同型で拡張不能なものを見ている. 拡張不能性の観点から言うと, 空間 $\mathcal{NE}(G,N)$ は G 不変準同型で摂動しても拡張できない擬準同型と見ていることになる.

この空間を考える一つの動機に (G,N)-交換子長がある. まず, $g \in G$ と $x \in N$ に対し, 元 $[g,x] = gxg^{-1}x^{-1}$ を (G,N)-交換子とよび, (G,N)-交換子で生成される群 $[G,N]$ を (G,N)-交換子部分群とよぶ. (G,N)-交換子部分群の元 g に対し, (G,N)-交換子長 $\mathrm{cl}_{G,N}(g)$ を

$$\mathrm{cl}_{G,N}(g) = \min\{l \in \mathbb{N} \mid g = [g_1,x_1]\cdots[g_l,x_l],\ x_1,\dots,x_l \in N\}$$

で定義する. 安定 (G,N)-交換子長 $\mathrm{scl}_{G,N}(g)$ も同様に

$$\mathrm{scl}_{G,N}(g) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{cl}_{G,N}(g^n)}{n}$$

と定める. (G,N)-交換子長にも劣加法性があり, 極限が必ず存在する. この安定 (G,N)-交換子長にも Bavard の双対定理と同様の定理が成り立つ.

定理 3.3 ([KKMM21a])**.** (G,N)-交換子部分群の元 $g \in [G,N]$ に対し,

$$\mathrm{scl}_{G,N}(g) = \sup_{\mu \in Q(N)^G/H^1(N)^G} \frac{|\mu(g)|}{2D(\mu)}$$

が成り立つ.

定理 2.1 と定理 3.3 を見比べてみると, sup を取る範囲の差がちょうど $\mathcal{NE}(G,N)$ である. したがって, 空間 $\mathcal{NE}(G,N)$ は scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ の差を測っているとも思える. 例えば $\mathcal{NE}(G,N)$ が自明のとき, scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ との間に差がないことが期待されるが, 実際に次の定理が成り立つ.

定理 3.4 ([KKM+21])**.** 空間 $\mathcal{NE}(G,N)$ が自明のとき, scl_G と $\mathrm{scl}_{G,N}$ とは双リプシッツ同値である.

簡単に分かるように $[G,N]$ 上で $\mathrm{scl}_G \le \mathrm{scl}_{G,N}$ が成り立つので, 双リプシッツ同値とはある定数 C が存在して $[G,N]$ 上

$$\mathrm{scl}_G \le \mathrm{scl}_{G,N} \le C \cdot \mathrm{scl}_G$$

が成り立つことを意味している.

4　相対コホモロジーの五項完全列

群 G とその正規部分群 N を与えると, 商群 $\Gamma = G/N$ と合わせて短完全列

$$1 \to N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} \Gamma \to 1$$

が得られる. このとき, 擬準同型のなす空間について次が完全列が知られている.

命題 4.1 ([Cal09, Remark 2.90])**.** 次は完全列である:

$$0 \to Q(\Gamma) \xrightarrow{p^*} Q(G) \xrightarrow{i^*} Q(N)^G.$$

また, 準同型については次の完全列が知られている.

定理 4.2 ([HS53], 五項完全列)**.** 以下の完全列が存在する:

$$0 \to H^1(\Gamma) \to H^1(G) \to H^1(N)^G \to H^2(\Gamma) \to H^2(G).$$

ここで $H^*(-)$ は群の実数係数コホモロジー群である.

注意として, 群 G の実数係数 1 次コホモロジー群は, G 上の実数値準同型のなす空間と同型である.

一旦, 準同型の拡張問題を考える. 「N 上の G 不変準同型 h が G に拡張できるか」は, 定理 4.2 の完全列から「h が $H^2(\Gamma)$ 上で自明となるか」と問うのと同値である. 例えば $H^2(\Gamma) = 0$ となる場合, N 上の G 不変準同型は常に G 上に拡張可能である.

擬準同型の場合, 命題 4.1 の完全列が $Q(N)^G$ のところで途切れているのが問題である. そこで, $Q(N)^G$ の右側を埋める形で以下の完全列を構成した.

定理 4.3 ([KKM+21], 相対コホモロジーの五項完全列)**.** 以下の完全列が存在する:

$$0 \to Q(\Gamma) \to Q(G) \to Q(N)^G \to H^2_{/b}(\Gamma) \to H^2_{/b}(G).$$

ここで $H^2_{/b}$ は群コホモロジーの有界コチェイン複体に関する相対コホモロジー群である.

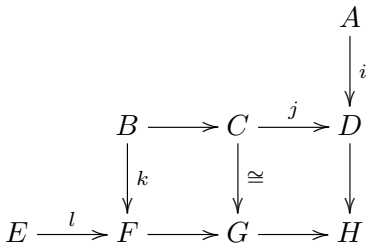
また, この完全列は群コホモロジーの五項完全列と整合的である. とくに次の各行各列が完全列となる可換図式がある:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & & & & H^2_b(\Gamma) & \longrightarrow & H^2_b(G) \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle c_G} \\
0 & \longrightarrow & H^1(\Gamma) & \longrightarrow & H^1(G) & \longrightarrow & H^1(N)^G & \longrightarrow & H^2(\Gamma) & \xrightarrow{p^*} & H^2(G) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & Q(\Gamma) & \longrightarrow & Q(G) & \longrightarrow & Q(N)^G & \longrightarrow & H^2_{/b}(\Gamma) & \longrightarrow & H^2_{/b}(G) \\
 & & & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & & & & & H^3_b(\Gamma) & \longrightarrow & H^3_b(G).
\end{array}$$

ここで H_b^* は実数係数の有界コホモロジー群である.

上の完全列は $\mathcal{NE}(G,N) = Q(N)^G \big/ \big(i^*Q(G) + H^1(N)^G\big)$ の各項 $Q(N)^G, i^*Q(G), H^1(N)^G$ を含んでいる.

補題 4.4. 各列各行が完全列であるような線形空間の可換図式



で $C \to G$ が同型だとする. このとき, 自然な写像 $F \to D$ は同型

$$F\big/\big(l(E) + k(B)\big) \cong \operatorname{Im} i \cap \operatorname{Im} j$$

を誘導する.

例えば Γ がアーベル群 (より広く amenable 群) のとき, 自然な写像 $H^2(\Gamma) \to H^2_{/b}(\Gamma)$ は同型となる. このように $H^2(\Gamma) \to H^2_{/b}(\Gamma)$ が同型のとき, 補題 4.4 を上の可換図式に適用すると, 同型 $\mathcal{NE}(G,N) \cong \operatorname{Im} c_G \cap \operatorname{Im} p^*$ が得られる. この同型を用いると, 拡張不能擬準同型のなす空間を群コホモロジーと有界コホモロジーを用いて調べることができるようになる. これが定理 1.1 の証明の鍵である.

5 定理 1.1 の証明の概略

定理 1.1 の (2)

定理 1.1 の中で (2) が原理的には最も単純である. 自由群 F_n の自己同型群 $G = \operatorname{Aut}(F_n)$ を考える. F_n のアーベル化は $\mathbb{Z}^n$ であり, そこに自明に作用する部分群を $N = \mathrm{IA}_n$ とおく. このとき G と N は完全列

$$1 \to N \to G \to GL(n,\mathbb{Z}) \to 1$$

をなす. 簡単のため $n \geq 3$ とする. このとき, [Mil71] より $H^2(GL(n,\mathbb{Z})) = 0$ であり, [Mon04] と [Mon10] を合わせると $H^3_b(GL(n,\mathbb{Z})) = 0$ が分かる ([KKM$^+$21, Lemma 7.5]). したがって $H^2_{/b}(GL(n,\mathbb{Z})) = 0$ である. よって定理 4.3 から $Q(N)^G/i^*Q(G) = 0$ である. とくに $\mathcal{NE}(G,N) = 0$ である.

定理 1.1 の (1)

(1) に限らず (3), (4), (5) においても, N が交換子部分群なので $\Gamma = G/N$ はアーベル群である. よって同型 $\mathcal{NE}(G,N) \cong \operatorname{Im} c_G \cap \operatorname{Im} p^*$ が使える. G が自由群 F_n のとき $H^2(G) = 0$ なので $\operatorname{Im} c_G \cap \operatorname{Im} p^* = 0$ である. よって $\mathcal{NE}(G,N) = 0$ である.

定理 1.1 の (3)

G を連結成分 2 つの双曲絡み目の基本群とし, N をその交換子部分群とする. [FS02] より $\operatorname{Im} c_G \neq H^2(G)$ であり, $H^2(G) \cong \mathbb{R}$ なことから $\operatorname{Im} c_G = 0$ を得る. よって $\mathcal{NE}(G,N) \cong \operatorname{Im} c_G \cap \operatorname{Im} p^* = 0$ である.

定理 1.1 の (4)

G を種数 $l \geq 2$ の閉曲面 Σ_l の基本群とし, N を交換子部分群とする. このとき $H^2(G) \cong H^2(\Sigma_l) \cong \mathbb{R}$ と $\operatorname{Im} c_G \cap \operatorname{Im} p^* \subset H^2(G)$ より $\operatorname{Im} c_G \cap \operatorname{Im} p^* = 0$ または $\mathbb{R}$ である. 閉曲面 Σ_l は双曲多様体なので, [Gro82] より $c_G \colon H_b^2(G) \to H^2(G)$ は全射である. また, 具体的な計算で $p^* \colon H^2(G/N) \to H^2(G)$ の全射性も分かる. 以上より

$$\mathcal{NE}(G,N) \cong \operatorname{Im} c_G \cap \operatorname{Im} p^* = H^2(G) = \mathbb{R}$$

である.

定理 1.1 の (5)

種数 $l \geq 2$ の閉曲面 Σ_l 上の向きを保つ擬アノソフ同相写像 f で, その写像類がトレリ群に入るとする. G を f の写像トーラス M_f の基本群とし, N をその交換子部分群とする.

[Thu86]([Ota96]) より, f が擬アノソフであることと写像トーラス M_f が双曲構造を持つことが同値である. したがって (4) のときと同様, [Gro82] より $c_G \colon H_b^2(G) \to H^2(G)$ は全射である.

写像類がトレリ群に入るので, f は閉曲面のホモロジーに自明に作用する. ここから写像トーラスのホモロジー, コホモロジーが計算でき, M_f が $K(\pi,1)$-多様体なことを合わせると $G/N \cong H_1(G;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2l+1}$ および $H^2(G) \cong \mathbb{R}^{2l+1}$ が分かる. また, トレリ性をうまく使って計算すると $p^* \colon H^2(G/N) \to H^2(G)$ が全射となることが分かる. 以上より

$$\mathcal{NE}(G,N) \cong \operatorname{Im} c_G \cap \operatorname{Im} p^* = H^2(G) = \mathbb{R}^{2l+1}$$

である.

注意 5.1. (1) トレリ群の中で擬アノソフ元は以下の意味で generic に存在する: 種数 3 以上のときトレリ群は有限生成であり, その Cayley グラフ上でランダムウォークをしたときに擬アノソフ元にいない確率が exponential order で 0 に収束する ([LM12], [MS13]).

(2) 定理 1.1 の (5) の例 (写像トーラス) は 3 次元双曲多様体の中で基本的な対象である. 実際, 任意の 3 次元閉双曲多様体は有限被覆を取ることで写像トーラスにできることが分かっている ([Thu82] の virtual fibering 予想, [Ago13] により肯定的に解決).

参考文献

[Ago13] Ian Agol, *The virtual Haken conjecture*, Doc. Math. **18** (2013), 1045–1087, With an appendix by Agol, Daniel Groves, and Jason Manning.

[Bav91] Christophe Bavard, *Longueur stable des commutateurs*, Enseign. Math. (2) **37** (1991), no. 1-2, 109–150.

[Cal09] Danny Calegari, *scl*, MSJ Memoirs, vol. 20, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.

[EF97] David B. A. Epstein and Koji Fujiwara, *The second bounded cohomology of word-hyperbolic groups*, Topology **36** (1997), no. 6, 1275–1289.

[FS02] Koji Fujiwara and Teruhiko Soma, *Bounded classes in the cohomology of manifolds*, vol. 92, 2002, Dedicated to John Stallings on the occasion of his 65th birthday, pp. 73–85.

[Gro82] Michael Gromov, *Volume and bounded cohomology*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1982), no. 56, 5–99 (1983).

[Heu20] Nicolaus Heuer, *Computing commutator length is hard*, arXiv:2001.10230 (2020).

[HS53] Gerhard Paul Hochschild and Jean-Pierre Serre, *Cohomology of group extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 110–134.

[KK19] Morimichi Kawasaki and Mitsuaki Kimura, *$\hat{G}$-invariant quasimorphisms and symplectic geometry of surfaces*, to appear in *Israel J. Math*, arXiv:1911.10855v2 (2019).

[KKM$^+$21] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Shuhei Maruyama, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *The space of non-extendable quasimorphisms*, arXiv:2107.08571 (2021).

[KKMM21a] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *Bavard's duality theorem for mixed commutator length*, preprint, arXiv:2007.02257v2 (2021).

[KKMM21b] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *Commuting symplectomorphisms on a surface and the flux homomorphism*, preprint, arXiv:2102.12161v3 (2021).

[KM20] Morimichi Kawasaki and Shuhei Maruyama, *On boundedness of characteristic class via quasi-morphism*, preprint, arXiv:2012.10612 (2020).

[LM12] Alexander Lubotzky and Chen Meiri, *Sieve methods in group theory II: the mapping class group*, Geom. Dedicata **159** (2012), 327–336.

[Mil71] John Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1971, Annals of Mathematics Studies, No. 72.

[Mon04] Nicolas Monod, *Stabilization for* SL_n *in bounded cohomology*, Discrete geometric analysis, Contemp. Math., vol. 347, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 191–202.

[Mon10] ———, *On the bounded cohomology of semi-simple groups, S-arithmetic groups and products*, J. Reine Angew. Math. **640** (2010), 167–202.

[MS13] Justin Malestein and Juan Souto, *On genericity of pseudo-Anosovs in the Torelli group*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2013), no. 6, 1434–1449.

[Ota96] Jean-Pierre Otal, *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, Astérisque (1996), no. 235, x+159.

[Poi81] Henri Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (i)*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **7 et 8** (1881), 375–422 et 251–296 (fre).

[Sht16] Alexander I. Shtern, *Extension of pseudocharacters from normal subgroups, III*, Proc. Jangjeon Math. Soc. **19** (2016), no. 4, 609–614.

[Thu82] William P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **6** (1982), no. 3, 357–381.

[Thu86] ———, *Hyperbolic structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle*, 1986.

パラレルセッション
会場 C

ロジスティック項と非線形の生成項をもつ走化性方程式系の解の爆発

東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻
田中悠也 (Yuya TANAKA)

1 序

本稿では非退化放物・楕円型走化性方程式系

$$\begin{cases} u_t = \nabla\cdot((u+\delta)^{m-1}\nabla u) - \nabla\cdot(u(u+\delta)^{\alpha-1}\nabla v) + \lambda u - \mu u^{\kappa}, & x\in B_R,\ t>0,\\ 0 = \Delta v - \overline{M_\ell}(t) + u^{\ell}, & x\in B_R,\ t>0,\\ \nabla u\cdot\nu = \nabla v\cdot\nu = 0, & x\in \partial B_R,\ t>0,\\ u(x,0) = u_0(x), & x\in B_R \end{cases} \tag{1}$$

及び退化放物・楕円型走化性方程式系

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m - \nabla\cdot(u^{\alpha}\nabla v) + \lambda u - \mu u^{\kappa}, & x\in B_R,\ t>0,\\ 0 = \Delta v - \overline{M_\ell}(t) + u^{\ell}, & x\in B_R,\ t>0,\\ \nabla u^m\cdot\nu = \nabla v\cdot\nu = 0, & x\in \partial B_R,\ t>0,\\ u(x,0) = u_0(x), & x\in B_R \end{cases} \tag{2}$$

の解の有限時刻爆発について考える. ここで, $B_R\subset\mathbb{R}^n$ $(R>0, n\geq 1)$ は原点を中心とする半径 R の開球, $\delta>0$, $m\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, $\lambda>0$, $\mu>0$, $\kappa>1$, $\ell>0$ とし, ν は ∂B_R の外向き単位法線ベクトルとする. また, $\overline{M_\ell}(t) := \frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} u^{\ell}(x,t)\,dx$ とし, u_0 は非負の関数とする. 問題 (1) と問題 (2) はある化学物質 (濃度 v) に引き寄せられる性質 (走化性) をもつ生物 (密度 u) の動きを表したモデルであり, 生物の増殖を抑制するロジスティック項 $\lambda u-\mu u^{\kappa}$ と, 非線形の生産項 u^{ℓ} をもつことが特徴である.

問題 (1) について, $m=\alpha=\ell=1$ のときには, Fuest [1] により

$$\kappa\in\left(1, \min\left\{2, \frac{n}{2}\right\}\right) \quad (n\geq 3) \tag{3}$$

という条件の下で解の有限時刻爆発が示されている. また, $m=\alpha=1$, $\ell>0$ のときには, Yi, Mu, Xu, Dai [5] によって $\kappa<\frac{\ell+1}{1+2/n}$ という条件の下で解の有限時刻爆発が示されている. しかし, この条件は, $\ell=1$ の場合を考えると [1] における条件 (3) よりも強い条件となっている. また, 拡散項や走化性項が非線形の場合である $m\neq 1$, $\alpha\neq 1$ の場合の解の有限時刻爆発の条件については得られていない. なお, 退化放物型の問題 (2) に対する解の有限時刻爆発に関する結果は知られていない.

本研究の目的は, 問題 (1) 及び問題 (2) の解の有限時刻爆発を示すことである. また, [5] における条件の改良も行う.

2　主結果 1

問題 (1) における解の有限時刻爆発について, 以下の結果を得た.

定理 1 ([3])**.** $m \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\kappa > 1$, $\ell > 0$ は次の条件を満たすと仮定する:

$$\alpha + \ell > \max\left\{ m + \frac{2}{n}\kappa,\ \frac{2}{n}\kappa,\ \kappa \right\}. \tag{4}$$

このとき, 任意の $M_0 > 0$ に対して, 以下を満たす十分小さなある $\eta_0 \in (0, M_0)$ と $r_\star \in (0, R)$ が存在する: 球対称で動径方向に単調減少な非負の関数 $u_0 \in C^\beta(\overline{B_R})$ $(\beta \in (0,1))$ が

$$\int_{B_R} u_0(x)\,dx = M_0$$

かつ

$$\int_{B_{r_\star}} u_0(x)\,dx \geq M_0 - \eta_0$$

を満たすならば, ある $T^* \in (0, \infty)$ が存在し, 問題 (1) の古典解 (u, v) で次を満たすものが存在する:

$$\lim_{t \nearrow T^*} \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(B_R)} = \infty.$$

注意. $m = \alpha = 1$ の場合を考えると, 条件 (4) は

$$\kappa < \min\left\{ \frac{n}{2}\ell,\ 1 + \ell \right\}$$

となる. この条件は [5] における条件 $\kappa < \frac{\ell+1}{1+2/n}$ の改良となっている. さらに, この条件は [1] の条件 (3) の一般化になっている.

証明の方針. [4] の手法を参考に, 解 u の局所的な積分量を用いて定義されるモーメント型関数

$$\phi(t) := \int_0^{s_0} s^{-\gamma}(s_0 - s) \left(\int_0^{s^{\frac{1}{n}}} \rho^{n-1} u(\rho, t)\,d\rho \right) ds \tag{5}$$

$(s_0 \in (0, R^n), \gamma \in (-\infty, 1)$ はある定数$)$ を用いて次のような不等式を導出する:

$$\phi'(t) \geq C\phi^{1+\theta}(t) \quad (\theta > 0).$$

この不等式から $T_{\max} < \infty$ ($T_{\max}$: 解の最大存在時刻) となることがわかり, 解の爆発が示される.

3　主結果 2

非退化放物型の問題 (1) の研究では, モーメント型関数 (5) に対する微分不等式を導いて解の爆発を示している. 一方, 退化放物型の問題 (2) では解の正則性が保証されず, ϕ の微分不等式を導くことが困難である. そこで, 問題 (2) については, 弱解の枠組みで解の有限時刻爆発を示す. そのために,

主結果 1 における議論で扱ったモーメント型関数 ϕ の微分不等式を積分して得られる不等式 (次項のモーメント不等式) に着目して, 解の有限時刻爆発を導く.

主結果を述べる前に問題 (2) のモーメント解を次のように定義する.

定義 2 (モーメント解)**.** $T \in (0,\infty]$ とする. $B_R \times [0,T)$ 上で定義された球対称な非負の関数の組 (u,v) で, 以下を満たすようなものを問題 (2) の $[0,T)$ 上の **モーメント解**であるという:

(i) $\forall T' < T;\quad u \in L^\infty(0,T';L^\infty(B_R))$, $u^m \in L^2(0,T';H^1(B_R))$,

(ii) $\forall T' < T;\quad v \in L^\infty(0,T';H^1(B_R))$,

(iii) $\forall \varphi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(\overline{B_R} \times [0,T))$;

$$\int_0^T \int_{B_R} (\nabla u^m \cdot \nabla\varphi - \chi u^\alpha \nabla v \cdot \nabla\varphi - \lambda u\varphi + \mu u^\kappa \varphi - u\varphi_t) = \int_{B_R} u_0(x)\varphi(x,0),$$
$$\int_0^T \int_{B_R} \nabla v \cdot \nabla\varphi + \int_0^T \left(\overline{M_\ell}(t) \int_{B_R} \varphi \right) - \int_0^T \int_{B_R} u^\ell \varphi = 0,$$

(iv) (u,v) は次の**モーメント不等式**を満たす:

$$\exists K > 0 \text{ s.t.} \quad \phi(t) - \phi(0) \geq K \int_0^t \phi^{\alpha+\ell}(\tau)\, d\tau \quad \text{for all } t \in (0,T).$$

ここで, ϕ は (5) で定義されるモーメント型関数である.

本研究では, 問題 (2) における解の有限時刻爆発について次の結果を得た.

定理 3. $m \geq 1$, $\alpha \geq 1$, $\kappa > 1$, $\ell > 0$ は次の条件を満たすと仮定する:

$$\alpha + \ell > \max\left\{ m + \frac{2}{n}\kappa,\ \kappa \right\}$$

このとき, 任意の $M_0 > 0$ に対して, 以下を満たす十分小さなある $\eta_0 \in (0, M_0)$ と $r_\star \in (0,R)$ が存在する: 球対称で動径方向に単調減少な非負の関数 $u_0 \in L^\infty(B_R)$ が

$$\int_{B_R} u_0(x)\, dx = M_0$$

かつ

$$\int_{B_{r_\star}} u_0(x)\, dx \geq M_0 - \eta_0$$

を満たすならば, ある $T^* \in (0,\infty)$ が存在し, 問題 (2) の $[0,T^*)$ 上のモーメント解 (u,v) で次を満たすものが存在する:

$$\operatorname*{ess\text{-}lim\,sup}_{t \nearrow T^*} \|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(B_R)} = \infty,$$

i.e.,

$$\forall L > 0\ \exists T_0 < T^*\ \forall t \geq T_0; \quad \|u(\cdot,t')\|_{L^\infty(B_R)} \geq L \quad \text{for a.a. } t' \in (t,T^*).$$

証明の方針. 問題 (2) に対する近似問題を考え, 主結果 1 における議論により, その近似解に対するモーメント不等式を導出する. そして, 近似解の収束から問題 (2) の解に対するモーメント不等式を得ることで解の有限時刻爆発を示す. ここで, 近似解の収束については, [2] における議論を用いる.

参考文献

[1] M. Fuest, *Approaching optimality in blow-up results for Keller–Segel systems with logistic-type dampening*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **28** (2021), 16 pages.

[2] S. Ishida, T. Yokota, *Blow-up in finite or infinite time for quasilinear degenerate Keller–Segel systems of parabolic–parabolic type*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **18** (2013), 2569–2596.

[3] Y. Tanaka, *Boundedness and finite-time blow-up in a quasilinear parabolic–elliptic chemotaxis system with logistic source and nonlinear production*, J. Math. Anal. Appl. **506** (2022), 125654, 29 pages.

[4] M. Winkler, *A critical blow-up exponent in a chemotaxis system with nonlinear signal production*, Nonlinearity **31** (2018), 2031–2056.

[5] H. Yi, C. Mu, G. Xu, P. Dai, *A blow-up result for the chemotaxis system with nonlinear signal production and logistic source*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **26** (2021), 2537–2559.

非線形動的境界条件付きの楕円型偏微分方程式に対する Phragmén-Lindelöf の定理

北海道大学大学院 理学院 数学専攻 博士後期課程 1 年
安孫子啓介 (Keisuke ABIKO)

1 導入

1.1 目的

本稿の目的は, 楕円型方程式の境界値問題の粘性劣解に対する Phragmén-Lindelöf の定理を証明することである. Phragmén-Lindelöf の定理とは, 非有界領域上の偏微分方程式の解に対して増大度条件を課した場合の最大値原理の一種である.

楕円型方程式

$$F(x,t,Du,D^2u)=0 \text{ in } \Omega\times(0,T) \tag{1.1}$$

を考える. ただし, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ はその境界が滑らかな領域, $T>0$ は定数とし, $u:\overline{\Omega}\times(0,T)\to\mathbb{R}$ を未知関数, $Du=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, $D^2u=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{i,j}$ とする. また, $F\in C(\overline{\Omega}\times(0,T)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^n)$ の細かい条件は後述するが, 一様楕円型とは限らないものとする. $\mathbb{S}^n$ は n 次実対称行列全体の集合とする.

境界条件は次のものを考える.

$$\partial_t u+B(x,Du)=0 \text{ on } \partial\Omega\times(0,T) \tag{1.2}$$

なお, $\partial_t u=\frac{\partial u}{\partial t}$, $B\in C^1(\partial\Omega\times\mathbb{R}^n)$ とし, こちらも細かい条件は後述する. (1.2) のように, 空間変数に関する項に時間微分項を付け加えた境界条件を動的境界条件と呼ぶ. 動的境界条件は化学工学や流体力学等の分野で様々な拡散現象を記述する際に現れることが知られている.

F, B にはそれぞれ以下の条件を仮定する.

■F への仮定　本稿では以下の (F1)-(F3) を常に仮定する.

(F1) $(x,t,p)\in\overline{\Omega}\times(0,T)\times\mathbb{R}^n$ と $N\le M$ である M, $N\in\mathbb{S}^n$ に対して

$$F(x,t,p,M)\le F(x,t,p,N).$$

(F2) $\Lambda>0$ と $b\in C(\overline{\Omega})$ は非負値関数, $\nu:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}^n$ は連続で $\nu\neq 0$, かつ $\partial\Omega$ 上では $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトル場と一致するベクトル場が存在して, 以下を満たす: 任意の $(x,t,p,M)\in\overline{\Omega}\times(0,T)\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^n$ に対して (1.3) が成り立つ.

$$-\Lambda\operatorname{Tr}(\nu\otimes\nu)M-b(x)|(I-\nu\otimes\nu)p|\le F(x,t,p,M). \tag{1.3}$$

(F3) $(x,t)\in\overline{\Omega}\times(0,T)$ に対して, $F(x,t,0,O)=0$.

(F1) は退化楕円性と呼ばれる条件である. なお, N, $M\in\mathbb{S}^n$ に対し $N\leq M$ (resp., $N<M$) とは, 任意の $\xi\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ に対して $\langle(N-M)\xi,\xi\rangle\leq 0$ (resp.,$\langle(N-M)\xi,\xi\rangle<0$) であることとする. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は $\mathbb{R}^n$ 上の標準内積とし, $|\cdot|$ は内積によって定まるノルムとする. また, $I\in\mathbb{S}^n$ は単位行列とする.

■B への仮定

(B1) 任意の $x\in\overline{\Omega}$, $\lambda\geq 0$, $p\in\mathbb{R}^n$ に対して, $B(x,\lambda p)=\lambda B(x,p)$.
(B2) ある $\theta>0$ が存在して, 任意の $x\in\partial\Omega$ と $p\in\mathbb{R}^n$ に対して $\langle\nu(x),D_pB(x,p)\rangle\geq\theta$.

この仮定は [4] に倣ったものである. 通常の境界条件 $B(x,Du)=0$ は非線形な Neumann 境界条件であり, 例えば Neumann 条件 ($B(x,p)=\langle\nu,p\rangle$), Capillary 境界条件 ($B(x,p)=\langle\nu,p\rangle-a(x)|p|$), $a(x)\in[0,1]$ が典型的である.

以上を踏まえ, 次の定理 1 が主結果である.

定理 1 (Phragmén-Lindelöf)**.** (1.1), (1.2) の粘性劣解 $u\in C(\Omega\times(0,T))$ が次の条件を満たすとする.

1. 任意の $R>0$ に対して, $\limsup_{t\to+0}\sup_{|x|\leq R,x\in\Omega}u(x,t)\leq 0$.
2. (1.4) を満たす正値関数 $g\in C^2(\overline{\Omega}\times(0,T))$ が存在して, $\liminf_{R\to\infty}\sup_{\partial B_R\times(0,T)}\dfrac{u^+}{g}\leq 0$. ここで, $B_R:=\{x\in\Omega\mid|x|<R\}$ とし,

$$\begin{cases}-\Lambda\,\mathrm{Tr}(\nu\otimes\nu)D^2g-b(x)|(I-\nu\otimes\nu)Dg|\geq 0 & \text{in } \Omega\times(0,T),\\ \partial_t g+B(x,Dg)\geq 0 & \text{on } \partial\Omega\times(0,T).\end{cases}\tag{1.4}$$

このとき, $\sup_{\Omega\times(0,T)}u\leq 0$.

この証明は次のような手順で行われる. まず, $v(x,t)=\frac{u^+(x,t)}{g(x,t)}$ と変換する. 1, 2 と最大値原理を使うと, $v(x_*,t_*)$ が極大値となるような $(x_*,t_*)\in\partial\Omega\times(0,T)$ が存在することがわかる. $v(x_*,t_*)>0$ であると仮定すると, (x_*,t_*) で $v-\varphi$ が極大値をとりながら, 方程式と境界条件をともに満たさないような関数 φ を構成することができ, 矛盾が導かれる.

1.2 Phragmén-Lindelöf の定理

楕円型偏微分方程式の解が満たす性質として最大値原理は基本的なものであるが, 非有界領域上でも解に何らかの形で増大度の条件を課すことで最大値原理と同じような評価が得られる場合がある. そのような命題を Phragmén-Lindelöf の定理と呼ぶ. 典型的には次のような命題である.

命題 1. $u\in C^2(\mathbb{R}^n_+)\cap C(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ が次を満たすとする.

$$\begin{cases}-\Delta u\leq 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+,\\ u\leq 0 & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+.\end{cases}$$

ただし, $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$ とする. このとき, $\limsup_{R\to\infty} R^{-1} \sup_{\partial B_R \cap \mathbb{R}^n_+} u \le 0$ ならば $\sup_{\mathbb{R}^n_+} u \le 0$ である.

一般には, 増大度の条件がなければこのような評価は得られない. 例えば $u(x) = -x_1^2 + x_2^2$ は $\mathbb{R}^2_+$ 上で $\Delta u = 0$ かつ $\partial\mathbb{R}^2_+$ 上 $u \le 0$ だが, $\sup_{\partial B_R \cap \mathbb{R}^2_+} u = R^2$ なので増大度条件を満たしておらず, 明らかに $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ 上 $u \le 0$ ではない.

Phragmén-Lindelöf の定理に関する古典的な結果は数多いが, まずは [8] を参照することをお勧めする. 動的境界条件付きの楕円型方程式に対しては [5,6] で扱われている. [5] は動的境界条件を伴った Poisson 方程式に対する最小解について議論したもので, Dirichlet 問題との関連性を論じるにあたって Phragmén-Lindelöf の定理は重要な役割を果たしている.

主結果である定理 1 は, 次の [6, Theorem 5] を進展させたものである.

命題 2 ([6, Theorem 5]). $u \in C(\overline{\mathbb{R}^n_+} \times (0,T))$ を次の粘性劣解とする.

$$\begin{cases} F(x,t,Du,D^2u) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n_+ \times (0,T), \\ \partial_t u + \langle \nu, Du \rangle = 0 & \text{on } \partial\mathbb{R}^n_+ \times (0,T). \end{cases}$$

ただし, $F \in C(\overline{\mathbb{R}^n_+} \times (0,T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n)$ は (F1) と次の (1.5) を満たすとする.

$$\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(M) - b(x)|p'| \le F(x,t,p,M) \quad {}^\forall(x,t,p,M) \in \mathbb{R}^n_+ \times (0,T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n. \tag{1.5}$$

ここで, $\mathcal{P}^-_{\lambda,\Lambda}(M) := \min\{-\operatorname{Tr}(AM) \mid -\Lambda I \le A \le -\lambda I\}$ は $0 < \lambda \le \Lambda$ に対して定まる Pucci 作用素, $p' = (p_1, \cdots, p_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ としている.

u が次を満たすと仮定する.

$$\limsup_{t\to+0} \sup_{|x'|\le R} u(x',0,t) \le 0 \quad {}^\forall R > 0,$$

$$\liminf_{R\to\infty} \sup_{|x|=R, t\in(0,T)} \frac{u(x,t)}{1+x_n} \le 0.$$

このとき, $\overline{\mathbb{R}^n_+} \times (0,T)$ 上で $u \le 0$ である.

命題 2 は定理 1 において $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, $B(x,p) = -p_n$, $g(x,t) = 1 + x_n$ とし, (F2) に代えて (1.5) とした場合の主張である.

2 準備

2.1 粘性解

まずは弱解の概念として粘性解を用意する. 粘性解とは, 1980 年代はじめに Crandall, Lions らによって導入された弱解の概念で, 一階もしくは二階楕円型, 放物型方程式に対して有効であることが特徴である.

定義 1 (粘性解).

1. $u \in C(\Omega \times (0,T))$ が (1.1) の粘性劣解 (resp., 粘性優解) であるとは, $\varphi \in C^2(\overline{\Omega} \times (0,T))$ について, $u - \varphi$ が点 $(x_*, t_*) \in \Omega \times (0,T)$ で極大値 (resp., 極小値) を取るとき, 次の不等式が成り立つことをいう.

$$F(x_*, t_*, D\varphi(x_*, t_*), D^2\varphi(x_*, t_*)) \le 0.$$
$$(\text{resp.}, F(x_*, t_*, D\varphi(x_*, t_*), D^2\varphi(x_*, t_*)) \ge 0)$$

2. $u \in C(\Omega \times (0,T))$ が (1.1), (1.2) の粘性劣解 (resp., 粘性優解) であるとは, $\varphi \in C^2(\overline{\Omega} \times (0,T))$ について, $u - \varphi$ が点 $(x_*, t_*) \in \overline{\Omega} \times (0,T)$ で極大値 (resp., 極小値) を取るとき, 1 に加えて, $(x_*, t_*) \in \partial\Omega \times (0,T)$ であれば, 次の不等式が成り立つことをいう.

$$\min\{\partial_t\varphi(x_*, t_*) + B(x_*, D\varphi(x_*, t_*)), F(x_*, t_*, D\varphi(x_*, t_*), D^2\varphi(x_*, t_*))\} \le 0.$$
$$(\text{resp.}, \max\{\partial_t\varphi(x_*, t_*) + B(x_*, D\varphi(x_*, t_*)), F(x_*, t_*, D\varphi(x_*, t_*), D^2\varphi(x_*, t_*))\} \ge 0)$$

u が粘性劣解かつ粘性優解であるとき, u を粘性解と呼ぶ. また, 通常の意味で微分可能である場合は古典劣解などと呼ぶ.

定義に現れる φ のことを試験関数と呼ぶ. 直感的には φ が u に点 (x_*, t_*) で上から”タッチ”しているとき, u の微分を φ の微分に置き換えて解釈しているということである.

注意 1. (F3) のとき, u が (1.1) の粘性劣解であれば, $u^+ := \max\{u, 0\}$ も (1.1) の粘性劣解である.

本稿では割愛するが, 粘性解理論の基本的な事柄は [3, 7] 等が参考になる.

2.2 方向楕円性と最大値原理

本研究において, 一様楕円性より弱い楕円性を考えているのは重要なポイントである. そこで, ”弱い”楕円性と最大値原理について紹介する.

楕円性とは, F の $\mathbb{S}^n$ 成分に関する単調性の仮定である. (F1) の退化楕円性は, 粘性解を考えるにあたって最低限の仮定といえる. 一階の方程式はすべて退化楕円性を満たすことを注意しておく.

定義 2 (楕円性)**.**

1. $0 < \Lambda$ と $\nu \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ が存在して, $(x, t, p, M) \in \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^n$ と $\tau \ge 0$ に対して (2.1) が成り立つことを方向楕円型という.

$$F(x, t, p, M + \tau\nu \otimes \nu) - F(x, t, p, M) \le -\Lambda\tau \tag{2.1}$$

2. $0 < \lambda \le \Lambda$ が存在して, $(x, t, p) \in \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R}^n$ と M, $N \in \mathbb{S}^n$ に対して (2.2) が成り立つことを一様楕円型という.

$$-\Lambda \operatorname{Tr}(M - N) \le F(x, t, p, M) - F(x, t, p, N) \le -\lambda \operatorname{Tr}(M - N). \tag{2.2}$$

例えば $-\operatorname{Tr} M$ や Pucci 作用素は一様楕円型である. Partial Trace 作用素 $P_k(M) := m_{11} + m_{22} + \cdots + m_{kk}$ は $k < n$ であれば一様楕円型ではないが, e_1, e_2,$\cdots$, e_k について方向楕円型である ($\{e_i\}$

は $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする). F が一様楕円型であれば方向楕円型であることが簡単な計算でわかる. 弱い楕円性を持つ方程式に関しては [2,10] 等を参照せよ.

(F2) の十分条件に関する命題を紹介しておく. 証明は割愛する.

命題 3. F が以下の条件を満たすとき, F は (F2) を満たす.

- $0 < \lambda \leq \Lambda$ が存在して, $(x,t,p) \in \overline{\Omega} \times (0,T) \times \mathbb{R}^n$, M, $N \in \mathbb{S}^n$ に対して

$$-\Lambda \operatorname{Tr}(\nu \otimes \nu)(M-N) \leq F(x,t,p,M) - F(x,t,p,N) \leq -\lambda \operatorname{Tr}(\nu \otimes \nu)(M-N). \quad (2.3)$$

- $(x,t,M) \in \overline{\Omega} \times (0,T) \times \mathbb{S}^n$, p, $q \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$|F(x,t,p,M) - F(x,t,q,M)| \leq b(x)|(I - \nu \otimes \nu)(p-q)|.$$

なお, (2.3) は前述の方向楕円性より多少強い仮定になっていることを注意しておく.

次に, 最大値原理と Hopf の補題を紹介する. 以下 $U \subset \Omega$ を有界領域とする.

命題 4 (弱最大値原理)**.** $u \in C(\overline{U} \times [0,T])$ を (1.1) の粘性劣解とする. このとき,

$$\max_{\overline{U} \times [0,T]} u = \max_{\partial U \times [0,T]} u.$$

命題 5 (Hopf の補題)**.** $u \in C(\overline{U} \times (0,T))$ を (1.1) の粘性劣解とする. ∂U が十分滑らかで, $(x_*,t) \in \partial U \times (0,T)$ で $u(x_*,t_*) = M$ かつ $U \times (0,T)$ 上 $u < M$ のとき, ある定数 $A > 0$ が存在して, $\langle \nu(x_*), \xi \rangle < 0$ である任意の $\xi \in \mathbb{R}^n$ について

$$\limsup_{h \to 0} \frac{u(x_* + h\xi, t_*) - u(x_*,t_*)}{h} \leq A \langle \nu(x_*), \xi \rangle.$$

詳しい証明は [1,9,10] などを参照せよ.

3 定理 1 の証明の概略

証明の概略. $v := \frac{u^+}{g}$ は次の (3.1) の粘性劣解であることが直接的な計算によりわかる.

$$\begin{cases} -\Lambda g \operatorname{Tr}(\nu \otimes \nu) D^2 v - 2\Lambda |Dg||Dv| - b(x)g|(I - \nu \otimes \nu)Dv| = 0 & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ g\partial_t v + v\partial_t g + B(x, gDv + vDg) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T). \end{cases} \quad (3.1)$$

増大条件から, 次を満たすような増加列 $\{R_k\}$ が存在する.

$$\lim_{k \to \infty} R_k = \infty, \quad \lim_{k \to \infty} \sup_{x \in \partial B_{R_k}, t \in (0,T)} v \leq 0.$$

よって, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな k について

$$\sup_{x \in \partial B_{R_k}, t \in (0,T)} v \leq \varepsilon \quad (3.2)$$

である.

ある k で $L_k := \sup_{B_{R_k}\times(0,T)} v > \varepsilon$ であると仮定する.

$L_k = v(x_*, t_*)$ で $(x_*, t_*) \in \overline{B_{R_k}} \times [0, T]$ を定める. 最大値原理により $x_* \in \partial B_{R_k}$ だが, (3.2) により $|x_*| \neq R$. また, 初期条件を鑑みれば $t_* \neq 0$. よって $(x_*, t_*) \in (B_{R_k} \cap \partial\Omega) \times (0, T)$ である.

さて, $\varphi(x,t)$ を次のように定める.

$$\varphi(x,t) := p|(I - \nu_* \otimes \nu_*)(x - x_*)|^2 - q\langle -\nu_*, x - x_*\rangle^2 - r\langle -\nu_*, x - x_*\rangle + |t - t_*|^2 + L_k. \quad (3.3)$$

ただし, p, q, r は適切な正定数とし, $\nu_* = \nu(x_*)$ としている. このとき, $v - \varphi$ は (x_*, t_*) で極大値をとる (極大値を取るように係数を選ぶことができる). しかし, φ の微分を計算して (3.1) に代入すれば, 方程式, 境界条件ともになり立たないことがわかり, 矛盾する.

よって, 全ての k について $L_k = \max_{B_{R_k}\times(0,T)} v \leq \varepsilon$ となり, $k \to \infty$, $\varepsilon \to 0$ とすれば結論を得る. □

4 試験関数の構成

(3.3) で定めた試験関数 φ の係数を決定する方針を説明する. 以下 t は固定して考える.

$B = \{x \in \Omega \mid |x - c| < R\}$ を x_* における内部球とする. $\alpha > 0$ に対して, 次の補助関数を考える.

$$h(x) := -e^{-\alpha|x-c|^2} + e^{-\alpha R^2}.$$

$N = \{x \in \Omega \mid |x - x_*| < l\}$ とする. まずは $N \setminus B$ 上では $\varphi > L_k$ となるように係数をきめる. これは $\{\varphi(x,t) = L_k\}$ という等高面が x_* の近傍で B に含まれるようにすれば可能である.

十分大きい $\alpha > 0$ とこれに依存して十分小さい $\varepsilon > 0$ について, $\overline{N \cap B}$ で $v - \varepsilon h - L_k \leq 0$ とできる. これは Hopf の補題や強最大値原理の証明と同じ手法である (参考: [1]). $h(x_*) + L_k = v(x_*, t_*)$ だから, $v - \varphi$ の代わりに $\varepsilon h + L_k - \varphi$ を評価していくことで, 滑らかな関数の極値問題に帰着する.

参考文献

[1] L. Caffarelli, Y. Li, and L. Nirenberg. Some remarks on singular solutions of nonlinear elliptic equations III: viscosity solutions including parabolic operators. *Comm. Pure Appl. Math.*, 66(1):109–143, 2013.

[2] I. Capuzzo Dolcetta and A. Vitolo. Directional ellipticity on special domains: weak maximum and Phragmén-Lindelöf principles. *Nonlinear Anal.*, 184:69–82, 2019.

[3] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27(1):1–67, 1992.

[4] P. Dupuis and H. Ishii. On oblique derivative problems for fully nonlinear second-order elliptic PDEs on domains with corners. *Hokkaido Math. J.*, 20(1):135–164, 1991.

[5] M. Fila, K. Ishige, and T. Kawakami. Minimal solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 105(6):788–809, 2016.

[6] K. Ishige and K. Nakagawa. The Phragmèn-Lindelöf theorem for a fully nonlinear elliptic problem with a dynamical boundary condition. In *Geometric properties for parabolic and*

elliptic PDE's, volume 176 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 159–171. Springer, [Cham], 2016.

[7] S. Koike. *A beginner's guide to the theory of viscosity solutions*, volume 13 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2004.

[8] M. H. Protter and H. F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations*. Springer-Verlag, New York ; Tokyo, 1984.

[9] P. Pucci and J. Serrin. *The maximum principle*. Number v. 73 in Progress in nonlinear differential equations and their applications. Brikhäuser, Basel ; Boston, 2007.

[10] A. Vitolo. Maximum principles for viscosity solutions of weakly elliptic equations. In *Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar*, pages 110–136, 2019.

一般の劣一次ベクトルポテンシャルをもつシュレーディンガー方程式の解のモジュレーションノルム評価について

村松 亮 (Ryo MURAMATSU)*
東京理科大学 大学院理学研究科数学専攻 博士後期課程 2 年

1 導入

本研究では, 以下のベクトルポテンシャル付きシュレーディンガー方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\left(\nabla - i\boldsymbol{a}(t,x)\right)^2 u(t,x) = V(t,x)u(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $u(t,x)$, $u_0(x)$ はそれぞれ $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ についての複素数値関数であり, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n)$, $V : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ で, $\boldsymbol{a}(t,x) = (a_1(t,x), \cdots, a_n(t,x))$ とし, $(\nabla - i\boldsymbol{a}(t,x))^2 = \sum_{k=1}^n (\partial_{x_k} - ia_k(t,x))^2$ である. さらに, $V(t,x)$, $\boldsymbol{a}(t,x)$ には以下の仮定を課す.

仮定 A. 各 $j = 1, \cdots, n$ に対し $a_j : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級であり, $\rho < 1$ が存在して任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対し,

$$^\exists C_\alpha > 0 \text{ s.t. } ^\forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n;\ \max_{1\le j\le n} |\partial_x^\alpha a_j(t,x)| \le C_\alpha (1+|x|)^{\rho-|\alpha|}.$$

仮定 V. $V \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ は, $|\alpha| \ge 2$ をみたす任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対し条件

$$^\exists C_\alpha > 0 \text{ s.t. } ^\forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n;\ |\partial_x^\alpha V(t,x)| \le C_\alpha$$

をみたすとする.

2 シュレーディンガー方程式とモジュレーション空間

量子力学において, n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に存在する粒子の位置 $x \in \mathbb{R}^n$ における状態は, 波動関数とよばれる L^2 関数 $u(x)$ によって表現される. 系が時間発展するとき, 対応する波動関数が時間発展すると考え, 時刻 t における波動関数 $u(t,x)$ は, 次の**シュレーディンガー方程式**をみたす:

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) = H(t,x)u(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2}$$

ただし $H(t,x)$ は量子力学的ハミルトニアン

$$H(t,x) = -\frac{\Delta}{2} + V(t,x)$$

* 本研究は加藤圭一先生 (東京理科大学) との共同研究に基づく.

であり, 対応する古典的ハミルトニアン $H = p^2/2 + V(t,x)$ に正準量子化という手続きを施すことで得られる. ただし, $-\Delta = \sum_{j=1}^{n}(-i\partial_{x_j})^2$ で, 粒子の質量とプランク定数は 1 としている.

量子力学における種々の結果から知られているように, 波動関数は波と粒子の二重性をもつ. このことを偏微分方程式の文脈で言い換えれば, 波動方程式の解に似た性質と熱方程式の解に似た性質の両方を波動関数が持つということを意味する. 例えば熱方程式の解と似た性質としては, 平滑化効果とよばれる現象が (熱方程式よりも弱い形ではあるが) 成立することも知られている. 具体的には $V(t,x) \equiv 0$ としたとき, 次の**分散型評価**とよばれる不等式が成り立つ:

命題 (分散型評価)**.** $2 \le p \le \infty$ とし, $p' \ge 1$ を $1/p + 1/p' = 1$ をみたすものとする. このとき, $C > 0$ が存在して, (2) の解 $u(t,x)$ と初期値 $u_0(x)$ について,

$$\|u(t,\cdot)\|_{L^p} \le C|t|^{-n(1/2-1/p)}\|u_0\|_{L^{p'}}, \quad t \ne 0$$

が成り立つ.

その一方で, 熱核が持っていたような**ルベーグ空間 $L^p(\mathbb{R}^n)$ での有界性**は, シュレーディンガー発展作用素には一般に保証されない. これは偏微分方程式論としては分散型波動方程式と放物型方程式とを分ける性質の一例と言え, また量子力学的には波動関数そのものは粒子ではないということを言っているとも解釈できよう.

シュレーディンガー発展作用素が有界になる空間としては L^2 空間や重み付きソボレフ空間があるが, シュレーディンガー発展作用素が有界となり, かつ一般の L^p 空間に近しい性質を持つ関数空間はないだろうか? このような視点から導入されるのが, モジュレーション空間とそれにおける解の評価である.

定義 1 (波束変換)**.** $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, 窓関数 φ による f の波束変換 $W_\varphi f$ を, 以下で定める:

$$W_\varphi f(x,\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)} e^{-iy\cdot\xi} f(y)dy, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

定義 2 (モジュレーション空間)**.** $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とする. このとき, $1 \le p,q \le \infty$ に対し, モジュレーション空間 $M^{p,q}_\varphi(\mathbb{R}^n)$ を以下のように定義する:

$$M^{p,q}_\varphi(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \;\middle|\; \|f\|_{M^{p,q}_\varphi} \equiv \big\| \|W_\varphi f(x,\xi)\|_{L^p_x} \big\|_{L^q_\xi} < \infty \right\}.$$

モジュレーション空間は Feichtinger[3] によって 1983 年に導入された空間であり, 擬微分作用素との関連性や, $M^{p,1}$ ノルムによる双線形評価から非線形方程式との相性が指摘され, 研究がすすめられてきた. 非線形シュレーディンガー方程式のモジュレーション空間における局所および大域的適切性は Wang-Zhao-Guo[7] や Wang-Hudzik[6] があるが, これらの結果を得る際に自由シュレーディンガー発展作用素のモジュレーション空間における分散型評価を用いている.

他方, Bényi-Gröchenig-Okoudjou-Rogers[1] ではシュレーディンガー方程式の解の $M^{p,q}$ ノルムを初期値の $M^{p,q}$ ノルムで制御するという, $L^p(\mathbb{R}^n)$ には見られない評価が得られた. Kato-Kobayashi-Ito[5] においては, 窓関数を時間に依存させてとるという手法を用いることで, 自由および調和振動子付きシュレーディンガー方程式に対し, それぞれ解のモジュレーション空間におけるノルム評価を等式の形で与えている. さらに, [4] では劣 2 次の空間増大度を持つ一般のスカラーポテンシャルを付与したシュレーディンガー方程式の解 (2) に対し, 以下のモジュレーションノルム評価を与えている:

定理 (Kato-Kobayashi-Ito[4])**.** $1 \le p \le \infty$, $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とし, $\varphi(t,x) = e^{it\Delta/2}\varphi_0(x)$ と定める. $V(t,x)$ は仮定 V をみたすとし, $u(t,x)$ は $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する方程式 (2) の解であるとする.

このとき, $T > 0$ に対してある $C_T > 0$ が存在して, 任意の $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し,

$$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,p}_{\varphi(t,\cdot)}} \le C_T \|u_0\|_{M^{p,p}_{\varphi_0}}, \quad t \in [-T,T]$$

が成り立つ.

本研究の主定理は, [4] を劣 1 次増大の $\boldsymbol{a}(t,x)$ に対して拡張したものである.

3 主結果

主定理. $1 \le p \le \infty$, $T > 0$, $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とする. また $\boldsymbol{a}(t,x)$ は仮定 A を, $V(t,x)$ は仮定 V をみたすとする. このとき, ある定数 $C_T > 0$ が存在して, 任意の $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対し, $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する方程式 (1) の解 $u(t,x)$ は

$$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,p}_{\varphi(t,\cdot)}} \le C_T \|u_0\|_{M^{p,p}_{\varphi_0}}, \quad t \in [-T,T] \tag{3}$$

をみたす. ただし, $\varphi(t,x) = e^{it\Delta/2}\varphi_0(x)$.

4 証明の概略

方程式の線形性により, 十分小さい T に対して (3) を示せばよい. $t \in \mathbb{R}$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ に対し, 特性曲線 $x(s) = x(s;t,x,\xi)$, $\xi(s) = \xi(s;t,x,\xi)$ を

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \xi(s) - \boldsymbol{a}(s,x(s)), & x(t) = x, \\ \dot{\xi}(s) = \nabla_x(\xi(s)\cdot\boldsymbol{a}(s,x(s)) - \frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2(s,x(s))), & \xi(t) = \xi \end{cases} \tag{4}$$

の解とする. ただし $\dot{a} = \frac{d}{ds}a$. このとき波束変換と上記の特性曲線を用いて積分不等式

$$\begin{aligned} \left\|W_{\varphi(t,\cdot)}u(t,x,\xi)\right\|_{L^p_x L^p_\xi} \le{}& \left\|W_{\varphi(0,\cdot)}u_0(x(0;t,x,\xi),\xi(0;t,x,\xi)\right\|_{L^p_x L^p_\xi} \\ &+ \left\| \int_0^t |R_{\varphi(\tau)}u(\tau,x(\tau;t,x,\xi),\xi(\tau;t,x,\xi)|d\tau \right\|_{L^p_x L^p_\xi} \end{aligned} \tag{5}$$

が得られる. ここで,

$$\begin{aligned} R_{\varphi(\tau)}u(\tau,x,\xi) = \sum_{j,k,l=1}^{n} \xi_j \times \Bigg(\iiint \overline{\varphi_{k,l}(\tau,y-x)}\varphi(\tau,y-z)W_{\varphi(\tau)}u(\tau,z,\eta) \\ \times R_{j,k,l}(\tau,y,x)e^{iy\cdot(\eta-\xi)}dydz\bar{d}\eta \Bigg) + (\xi\text{の低階項}), \\ R_{j,k,l}(\tau,y,x) = \int_0^1 (\partial^2_{x_k x_l}a_j)(\tau, x+\theta(y-x))(1-\theta)d\theta, \\ \varphi_{k,l}(\tau,y-x) = (y_l - x_l)(y_k - x_k)\varphi(\tau,y-x). \end{aligned}$$

ベクトルポテンシャルのない [4] では (5) 式右辺にある剰余項の被積分関数を左辺で評価しグロンウォールの不等式を用いることで目標の (3) が得られたが, 今回は方程式中の一階微分の項に由来して,

$R_{\varphi(\tau)}u(\tau,x(\tau),\xi(\tau))$ の主要部が $\xi(\tau)$ に関し 1 次の増大度を持つため, 一般の L^p-ノルムをとって評価を得ることが難しい. そこで一般の p に対して直接示す代わりに, $p=2,\infty$ の場合のみ示し, 複素補間を用いることで $2\le p\le\infty$ の場合を証明する. $1\le p\le 2$ のときは双対性の議論を用いることで得られる.

$p=2$ の場合は方程式の構造から簡単に導けるので, $p=\infty$ の場合について述べる. $\lambda>1$ に対し, $\varphi^\lambda(t,x)=e^{i\lambda^2 t\Delta/2}\varphi_0(\lambda x)$ とする. 重要なのは十分大きい λ に対して次の評価を示すことである:

$$\left\|\int_0^t |R_{\varphi^\lambda(\tau)}u(\tau,x(\tau),\xi(\tau))|d\tau\right\|_{L_x^\infty L_\xi^\infty}\le\frac{1}{2}\sup_{t\in[0,T]}\left\|W_{\varphi^\lambda(t,\cdot)}u(t,x,\xi)\right\|_{L_x^\infty L_\xi^\infty}. \tag{6}$$

これが示されれば, (5) 式の両辺に L_x^∞-L_ξ^∞ ノルムと t に関する sup をとることで, 窓関数 $\varphi^\lambda(t,x)$ に対するモジュレーションノルム評価が示される. モジュレーションノルムは窓関数に依らないから, これにより一般の $\varphi(t,x)$ で $p=\infty$ の場合が示されたことになるのである. (6) は, 次の基本的な特性曲線の評価式を用いることで示される:

補題. $\delta>0$ とする. 定数 $C_\delta>0$ が存在して, 十分小さい $T>0$, 任意の $x,\xi\in\mathbb{R}^n$, $t\in\mathbb{R}$ に対し,

$$\int_0^T\langle x(\tau;t,x,\xi)\rangle^{-1-\delta}\,|\xi(\tau;t,x,\xi)|\,d\tau\le C_\delta(1+T).$$

注. 補題 1 から, $\xi(\tau)$ の 1 次増大項を評価するためには $x(\tau)$ の 1 次より真に大きい減衰と抱き合わせて時間積分する必要がある. このとき, $x(\tau)$ の減衰はベクトルポテンシャル $\boldsymbol{a}(t,x)$ のテイラー展開の剰余項 $R_{j,k,l}(\tau,y,x(\tau))$ から得ることができる. しかし, $\boldsymbol{a}(t,x)$ の空間増大度が 1 次になってしまうと, $x(\tau)$ の 1 次の減衰しか得られず, 補題 1 を適用できない. 現状, 劣一次のベクトルポテンシャルに対してのみしか証明が完了していないのはこのためである.

参考文献

[1] Bényi, A., Gröchenig, K., Okoudjou, K.A., Rogers, L.G., Unimodular Fourier multipliers for modulation spaces, J. Functional Anal., **246**, 366–384 (2007).

[2] Cordero, E., Gröchenig, K., Nicola, F, Rodino, L., Wiener algebras of Fourier integral operators, J. Math. Pures. Appl., **99**, 219–233 (2013).

[3] Feichtinger, H.G., Modulation Spaces on Locally Compact Abelian Groups (TECHNICAL REPORT), Universität Wien, (1983).

[4] Kato, K., Kobayashi, M., Ito, S., Estimates on modulation spaces for Schrödinger evolution operators with quadratic and sub-quadratic potentials, J. Functional Anal., **266**, 733–753 (2014).

[5] Kato, K., Kobayashi, M., Ito, S., Representation of Schrödinger operator of a free particle via short-time Fourier transform and its applications, Tohoku Math. J., **64**, 223–231 (2012).

[6] Wang, B., Hudzik, H., The global Cauchy problem for the NLS and NLKG with small rough data, J. Differential Equations, **232**, 36–73 (2007).

[7] Wang, B., Zhao, L., Guo, B., Isometric decomposition operators, function spaces $E_{p,q}^\lambda$and applications to nonlinear evolution equations, J. Functional Anal., **233**, 1–39 (2006).

[8] Yajima, K., Schrödinger evolution equations with magnetic fields, J. D'Analyse Mathématique, **56**, 29–76 (1991).

長距離型ポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式の解の時間大域挙動について

埼玉大学大学院 理工学研究科
浜野 大 (Masaru HAMANO)

概要

本講演では長距離型ポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式を考える. 方程式の線形部分は解に対して分散的に働き, 非線形部分は解に対して吸引的に働く. そのため, 分散性と吸引性の強弱により様々な解の時間大域挙動が存在する. 分散性が強いとき, 時間無限大で非線形効果が薄まり線形方程式の解に漸近する. 吸引性が強いとき, 解はあるところに集中する. 分散性と吸引性が釣り合うとき, 時間に関して位相の周期的な変動しかない解が生じる. 本講演では, 時間大域挙動を決定づける初期値の条件を紹介する.

1 導入

本稿では逆冪乗型ポテンシャルをもつ以下の非線形シュレディンガー方程式を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \partial_x^2 u(t,x) - \dfrac{\gamma}{|x|^\mu} u(t,x) = -|u(t,x)|^4 u(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{NLS$_\gamma$}$$

ここで, 虚数単位 $i = \sqrt{-1}$, 時間微分 $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, 空間微分 $\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$, $\gamma > 0$, $0 < \mu < 1$, 解 $u(t,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ は未知関数, 初期値 $u_0(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ は既知関数である.

$0 < \mu \leq 1$ のとき $\frac{\gamma}{|x|^\mu}$ は長距離型ポテンシャルと呼ばれ, $1 < \mu$ のとき $\frac{\gamma}{|x|^\mu}$ は短距離型ポテンシャルと呼ばれる.

1.1 準備

非負値 X, Y に対して, ある $C > 0$ が存在して $X \leq CY$ が成り立つとき $X \lesssim Y$ と表現する. $X \lesssim Y \lesssim X$ が成り立つとき $X \sim Y$ と表現する.

定義 1.1 (ルベーグ空間)**.** $p \geq 1$ において, ルベーグ空間 $L^p(\mathbb{R})$ を

$$L^p(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L^p} < \infty\}$$

で定義する. ここで, ルベーグノルム $\|\cdot\|_{L^p}$ は次である.

$$\|f\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, & (1 \leq p < \infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|, & (p = \infty). \end{cases}$$

定義 1.2 (フーリエ変換・フーリエ逆変換)**.** フーリエ変換とフーリエ逆変換を次のように定義する.

$$(\text{フーリエ変換}) \quad \mathcal{F}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x\xi} f(x)dx,$$
$$(\text{フーリエ逆変換}) \quad \mathcal{F}^{-1}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\xi} f(x)dx.$$

定義 1.3 (ソボレフ空間)**.** 非斉次ソボレフ空間 $W^{s,p}(\mathbb{R})$ と斉次ソボレフ空間 $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R})$ を次で定義する.

$$W^{s,p}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{W^{s,p}} < \infty\},$$
$$\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{\dot{W}^{s,p}} < \infty\}.$$

ここで, 非斉次ソボレフノルム $\|\cdot\|_{W^{s,p}}$ と斉次ソボレフノルム $\|\cdot\|_{\dot{W}^{s,p}}$ はそれぞれ

$$\|f\|_{W^{s,p}} := \|(1-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p} = \|\mathcal{F}^{-1}(1+4\pi^2|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}f\|_{L^p},$$
$$\|f\|_{\dot{W}^{s,p}} := \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p} = \|\mathcal{F}^{-1}(2\pi|\cdot|)^{s}\mathcal{F}f\|_{L^p}.$$

$p = 2$ のとき $H^s(\mathbb{R}) := W^{s,2}(\mathbb{R})$, $\dot{H}^s(\mathbb{R}) := \dot{W}^{s,2}(\mathbb{R})$ と表すこととする.

注意 1.4. $1 < p < \infty$, $s = 1$ のとき, 次が成り立つ.

$$\|f\|_{W^{1,p}} \sim \|f\|_{L^p} + \|\partial_x f\|_{L^p}.$$

2 (NLS_γ) の時間局所適切と解の時間挙動

この後の都合のため (NLS_γ) のみでなく, より一般な非線形冪をもつ方程式 :

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u - \frac{\gamma}{|x|^\mu}u = -|u|^{p-1}u, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \tag{NLS_γ^p}$$

に関する性質を述べていく. $(\mathrm{NLS}_\gamma) = (\mathrm{NLS}_\gamma^5)$ であることに注意する.

時間に依存した非線形偏微分方程式の研究は大きく分けると 2 つに分けられる. 1 つ目は時間局所適切の有無である. (NLS_γ^p) が時間局所適切であるとは, 次の (1)〜(4) が成り立つことである.

(1) (解の一意性) (NLS_γ^p) の解は一意である.

(2) (解の存在性) 任意の $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ に対して, 時間区間 $(T_{\min}, T_{\max}) = (T_{\min}(u_0), T_{\max}(u_0))$ $(\ni 0)$ 上定義される (NLS_γ^p) の解 $u \in C((T_{\min}, T_{\max}); H^1(\mathbb{R}))$ が存在して, $(T_{\min}, T_{\max})$ を超えて (NLS_γ^p) の解は存在しない.

(3) (Blow-up alternative) もし $T_{\max} < \infty$ $(T_{\min} > -\infty)$ とすると,

$$\lim_{t\nearrow T_{\max}} \|u(t)\|_{H^1} = \infty, \qquad \left(\lim_{t\searrow T_{\min}} \|u(t)\|_{H^1} = \infty\right).$$

(4) (初期値への連続依存性) もし $u_{0,n} \longrightarrow u_0$ in H^1 とすると, 任意の閉区間 $I \subset (T_{\min}, T_{\max})$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \geq n_0$ に対して $u_{0,n}$ を初期値にもつ (NLS_γ^p) の解 u_n は I 上で定義されて $u_n \longrightarrow u$ in $C(I; H^1)$ $(n \to \infty)$ をみたす.

注意 2.1. (Blow-up alternative) より, 次が成り立つ.

$$\sup_{t\in(T_{\min},T_{\max})} \|u(t)\|_{H^1} < \infty \implies (T_{\min},T_{\max}) = \infty.$$

(NLS_γ^p) は時間局所適切であることが知られている.

定理 2.2 ((NLS_γ^p) の時間局所適切, [2])**.** $p > 1$, $\gamma > 0$, $0 < \mu < 1$ とする. このとき, (NLS_γ^p) は時間局所適切である.

定理 2.2 で得られた (NLS_γ^p) の解は質量とエネルギーを保存する.

定理 2.3 (保存則)**.** 定理 2.2 で得られた (NLS_γ^p) の解 u は次の質量とエネルギーを時間に関して保存する.

$$\begin{aligned} &\text{(質量)} \quad M[f] := \|f\|_{L^2}^2, \\ &\text{(エネルギー)} \quad E_\gamma^p[f] = \frac{1}{2}\|\partial_x f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\gamma}{|x|^\mu}|f(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1}\|f\|_{L^{p+1}}^{p+1}. \end{aligned}$$

つまり,

$$M[u(t)] = M[u_0], \quad E_\gamma^p[u(t)] = E_\gamma^p[u_0], \qquad t \in (T_{\min},T_{\max})$$

が成り立つ. $p = 5$ のとき, 簡単のため単に $E_\gamma^5 = E_\gamma$ で表す.

$\gamma = 0$ のとき (NLS_0^p) は次のスケール変換に関して不変である.

$$u(t,x) \mapsto u_{[\lambda]}(t,x) := \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda^2 t, \lambda x), \qquad (\lambda > 0).$$

つまり, u が (NLS_0^p) の解であるならば, $\lambda > 0$ に対して $u_{[\lambda]}$ もまた (NLS_0^p) の解である. この変換により初期値 u_0 は

$$u_0(x) \mapsto (u_0)_{\{\lambda\}}(x) := \lambda^{\frac{2}{p-1}} u_0(\lambda x) \tag{1}$$

と移り変わる. $s_c := \frac{1}{2} - \frac{2}{p-1}$ とすると, $\dot{H}^{s_c}$-ノルムはこの変換に関して不変である. つまり, $\|(u_0)_{\{\lambda\}}\|_{\dot{H}^{s_c}} = \|u_0\|_{\dot{H}^{s_c}}$ が成り立つ. そのため $p = 5$ ($s_c = 0$) のとき, (NLS_γ) は L^2-臨界もしくは質量臨界と呼ばれる.

時間局所適切が得られたとき, 解の時間発展による挙動を調べることが時間に依存した非線形偏微分方程式の研究の 2 つ目である. (NLS_γ^p) の解の時間発展を考えた際, 線形部分 $(i\partial_t u + \partial_x u - \frac{\gamma}{|x|^\mu}u)$ は分散的にはたらき, 非線形部分 $(-|u|^{p-1}u)$ は吸引的にはたらく. 分散性は波を散らばらせ, 吸引性は波を集中させる.



分散性　　吸引性

線形部分と非線形部分の働きが逆であり, これらの兼ね合いにより様々な種類の時間挙動が存在する.

分散効果の方が吸引効果より強いとき, 解 u は空間遠方に向かっていく. そのため, 解 u 自身の相互作用が弱まり線形状態に近づく. このような挙動を散乱といい, このような解を散乱解と呼ぶ. 吸引効果の方が分散効果より強いとき, 解 u はあるところに集中していく. このような挙動を爆発といい, このような解を爆発解と呼ぶ. 爆発は有限時間爆発と無限時間爆発の 2 つに分けられる. 分散効果と吸引効果が釣り合うとき, 時間に関して位相の周期的な変動しかない解が生じる. このような解を定在波解と呼ぶ. これらの挙動を数学的に記述すると以下のようになる.

定義 2.4 (散乱解, 有限時間爆発解, 無限時間爆発解, 定在波解)**.** $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ とする.

- (散乱解)
  (NLS^p_γ) の解 u が正 (負) の時間で散乱するとは, $T_{\max} = +\infty$ ($T_{\min} = -\infty$) であり, さらに, ある $\psi_+ \in H^1(\mathbb{R})$ ($\psi_- \in H^1(\mathbb{R})$) が存在して
  $$\lim_{t\to+\infty} \|u(t) - e^{it(\partial_x - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}\psi_+\|_{H^1} = 0, \quad \left(\lim_{t\to-\infty} \|u(t) - e^{it(\partial_x - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}\psi_-\|_{H^1} = 0\right)$$
  が成立することである. 時間両方向で散乱するとき, 単に散乱すると呼ぶ. ここで, $e^{it(\partial_x - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}$ は線形シュレディンガー発展作用素であり, $e^{it(\partial_x - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}\psi$ は ψ を初期値にもつ線形方程式
  $$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \partial_x^2 u(t,x) - \dfrac{\gamma}{|x|^\mu} u(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \\ u(0,x) = \psi(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{LS_γ}$$
  の解である.
- (有限時間爆発解)
  (NLS^p_γ) の解 u が正 (負) の時間で有限時間爆発するとは, $T_{\max} < +\infty$ ($T_{\min} > -\infty$) をみたすことである. 時間両方向で有限時間爆発するとき, 単に有限時間爆発すると呼ぶ.
- (無限時間爆発解)
  (NLS^p_γ) の解 u が正 (負) の時間で無限時間爆発するとは, $T_{\max} = +\infty$ ($T_{\min} = -\infty$) であり, さらに,
  $$\limsup_{t\to+\infty} \|u(t)\|_{H^1} = \infty, \quad \left(\limsup_{t\to-\infty} \|u(t)\|_{H^1} = \infty\right)$$
  が成り立つことである. 時間両方向で無限時間爆発するとき, 単に無限時間爆発すると呼ぶ.
- (定在波解)
  ある $\omega \in \mathbb{R}$ に対して
  $$u(t,x) = e^{i\omega t} Q_{\omega,\gamma}(x)$$
  の形をしているとき, 解 u は定在波解であるという. ここで, $Q_{\omega,\gamma} = Q_{\omega,\gamma}(x)$ は楕円型方程式
  $$-\omega Q_{\omega,\gamma} + \partial_x^2 Q_{\omega,\gamma} - \frac{\gamma}{|x|^\mu} Q_{\omega,\gamma} = -|Q_{\omega,\gamma}|^{p-1} Q_{\omega,\gamma} \tag{$\mathrm{SP}^p_{\omega,\gamma}$}$$
  の解である.

注意 2.5. $(\mathrm{SP}^p_{\omega,\gamma})$ の解は作用汎関数

$$S^p_{\omega,\gamma}(f) := \frac{\omega}{2}M[f] + E^p_\gamma[f]$$

により次のように特徴付けられる.

$$Q_{\omega,\gamma} \text{ が } (\mathrm{SP}^p_{\omega,\gamma}) \text{ の解} \iff (S^p_{\omega,\gamma})'(Q_{\omega,\gamma}) = 0.$$

3 先行結果

$\gamma = 0$ (ポテンシャルの項がない) とき :

- (定在波解の存在) $p > 1$ のとき $(\mathrm{SP}^p_{\omega,\gamma})$ は解をもつ. 特に,

  $$\mathcal{G}^p_{\omega,\gamma} := \{\phi \in \mathcal{A}^p_{\omega,\gamma} : S^p_{\omega,\gamma}(\phi) \le S^p_{\omega,\gamma}(\psi) \text{ for any } \psi \in \mathcal{A}^p_{\omega,\gamma}\}$$

  に属する基底状態と呼ばれる解が存在する. ここで,

  $$\mathcal{A}^p_{\omega,\gamma} := \{\phi \in H^1(\mathbb{R}) \setminus \{0\} : (S^p_{\omega,\gamma})'(\phi) = 0\}.$$

- (時間大域存在) $1 < p < 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ ならば, (NLS^p_0) の解 u は時間大域的に存在する.
- (散乱) $Q_{1,0}$ は $(\mathrm{SP}^p_{1,0})$ の基底状態とする.
  - $p = 5$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, $M[u_0] < M[Q_{1,0}]$ ならば, (NLS_0) の解 u は散乱する [4].
  - $p > 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, $s_c := \frac{1}{2} - \frac{2}{p-1}$,

    $$M[u_0]^{\frac{1-s_c}{s_c}} E^p_0[u_0] < M[Q_{1,0}]^{\frac{1-s_c}{s_c}} E^p_0[Q_{1,0}], \tag{2}$$

    $$\|u_0\|_{L^2}^{\frac{1-s_c}{s_c}} \|\partial_x u_0\|_{L^2} < \|Q_{1,0}\|_{L^2}^{\frac{1-s_c}{s_c}} \|\partial_x Q_{1,0}\|_{L^2} \tag{3}$$

    ならば, (NLS^p_0) の解 u は散乱する [1, 6].
- (有限時間爆発または無限時間爆発) $Q_{1,0}$ は $(\mathrm{SP}^p_{1,0})$ の基底状態とする. $p > 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, $s_c := \frac{1}{2} - \frac{2}{p-1}$, (2),

  $$\|u_0\|_{L^2}^{\frac{1-s_c}{s_c}} \|\partial_x u_0\|_{L^2} > \|Q_{1,0}\|_{L^2}^{\frac{1-s_c}{s_c}} \|\partial_x Q_{1,0}\|_{L^2} \tag{4}$$

  ならば, (NLS^p_0) の解 u は有限時間爆発もしくは無限時間爆発する [1, 5].
- (有限時間爆発)
  - $p \ge 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap |x|^{-1}L^2(\mathbb{R})$, $E^p_0[u_0] < 0$ ならば, (NLS^p_0) の解 u は有限時間爆発する [7].
  - $Q_{1,0}$ は $(\mathrm{SP}^p_{1,0})$ の基底状態とする. $p > 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap |x|^{-1}L^2(\mathbb{R})$, (2), (4) ならば, (NLS^p_0) の解 u は有限時間爆発する [1].
  - $p = 5$ の場合には, Ogawa–Tsutsumi [10] により $u_0 \in |x|^{-1}L^2(\mathbb{R})$ の仮定が取り除かれた.

定理 3.1 (Ogawa–Tsutsumi, [10])**.** $p = 5$, $\gamma = 0$ とする. $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ が $E_0[u_0] < 0$ をみたすとき, (NLS_0) の解 u は有限時間爆発する.

注意 3.2. Ogawa–Tsutsumi はスケール変換 (1) を利用することで定理 3.1 を証明した.

$\gamma > 0$ (ポテンシャルの項がある) とき :

- (時間大域存在) $Q_{1,0}$ は $(\mathrm{SP}^p_{1,0})$ の基底状態とする.
  - $p < 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ ならば, (NLS^p_γ) の解 u は時間大域的に存在する.
  - $p = 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, $M[u_0] < M[Q_{1,0}]$ ならば, (NLS_γ) の解 u は時間大域的に存在する.
  - $p > 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, $s_c := \frac{1}{2} - \frac{2}{p-1}$, (3),

$$M[u_0]^{\frac{1-s_c}{s_c}} E^p_\gamma[u_0] < M[Q_{1,0}]^{\frac{1-s_c}{s_c}} E^p_0[Q_{1,0}], \tag{5}$$

    ならば, (NLS^p_γ) の解 u は時間大域的に存在する [3].
- (有限時間爆発または無限時間爆発) $Q_{1,0}$ は $(\mathrm{SP}^p_{1,0})$ の基底状態とする. $p > 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, $s_c := \frac{1}{2} - \frac{2}{p-1}$, (4), (5) ならば, (NLS^p_γ) の解 u は有限時間爆発もしくは無限時間爆発する [8].
- (有限時間爆発)
  - $p \geq 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap |x|^{-1}L^2(\mathbb{R})$, $E^p_\gamma[u_0] < 0$ ならば, (NLS^p_γ) の解 u は有限時間爆発する [3, 8].
  - $Q_{1,0}$ は $(\mathrm{SP}^p_{1,0})$ の基底状態とする. $p > 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap |x|^{-1}L^2(\mathbb{R})$, (4), (5) ならば, (NLS^p_γ) の解 u は有限時間爆発する [3].

4 主定理

$\gamma = 0$ の場合と同様に $\gamma > 0$ の場合にも $p = 5$ において $u_0 \in |x|^{-1}L^2(\mathbb{R})$ の仮定を取り除けるかどうかというのは自然な疑問である. しかしながら $0 < \mu < 1$ のとき (NLS_γ) はスケール不変でないため, Ogawa–Tsutsumi [10] の議論を直接適用することはできない. そこで, 当問題における局所化されたビリアル等式 (補題 5.2) の重み関数に対するスケール変換を用いた証明方法の有効性を確認した. それを (NLS_γ) に適用することにより以下の結果を得た.

定理 4.1 (H.–Ikeda–Machihara, [9])**.** $p = 5$, $\gamma > 0$, $0 < \mu < 1$ とする. $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ が $E_\gamma[u_0] < 0$ をみたすとき, (NLS_γ) の解 u は有限時間爆発する.

5 証明の概略

補題 5.1 (Ogawa–Tsutsumi, [10])**.** $f \in H^1(\mathbb{R})$ とする. また $g \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ は実数値関数とする. このとき, 任意の $R > 0$ に対して

$$\|fg\|_{L^\infty(|x|\geq R)} \leq \|f\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(|x|\geq R)} \left\{2\|g^2\partial_x f\|_{L^2(|x|\geq R)} + \|f\partial_x(g^2)\|_{L^2(|x|\geq R)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ.

補題 5.2 (局所化されたビリアル等式, [3, 11])**.** $p = 5$, $\gamma > 0$, $0 < \mu < 1$ とする. $\varphi \in W^{3,\infty}(\mathbb{R})$ は

コンパクトな台をもつとする. $w := \int_0^x \varphi(y)dy$ と (NLS_γ) の解 $u(t)$ に対して

$$I_{\gamma,w}(t) := \int_{\mathbb{R}} w(x)|u(t,x)|^2 dx$$

を定義する. このとき,

$$\begin{aligned} I'_{\gamma,w}(t) &= 2\mathrm{Im}\int_{\mathbb{R}} w'(x)\overline{u(t,x)}\partial_x u(t,x)dx, \\ I''_{\gamma,w}(t) &= 4\int_{\mathbb{R}} w''(x)|\partial_x u(t,x)|^2 dx - \frac{4}{3}\int_{\mathbb{R}} w''(x)|u(t,x)|^6 dx \\ &\qquad - \int_{\mathbb{R}} w^{(4)}(x)|u(t,x)|^2 dx + 2\mu\int_{\mathbb{R}} \frac{w'(x)}{x}\cdot\frac{\gamma}{|x|^\mu}|u(t,x)|^2 dx \end{aligned}$$

が成り立つ.

ここで, いくつかの関数を定義する. ζ は奇関数であり次をみたすとする.

$$\zeta(s) := \begin{cases} 2s & (0 \le |s| \le 1), \\ 2[s-(s-1)^3] & (1 \le s \le 1+1/\sqrt{3}), \\ 2[s-(s+1)^3] & (-1-1/\sqrt{3} \le s \le -1), \\ \zeta'(s) < 0 & (1+1/\sqrt{3} < |s| < 2), \\ 0 & (2 \le |s|). \end{cases}$$

さらに, 関数 ζ を用いて

$$\mathscr{X}(x) := \int_0^x \zeta(s)ds, \qquad \mathscr{X}_R(x) := R^2\mathscr{X}\left(\frac{x}{R}\right) \tag{6}$$

を定義する.

命題 5.3. $p=5$, $\gamma>0$, $0<\mu<1$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ とする. もし $R>0$, (NLS_γ) の解 $u \in C_t([0,T_{\max}); H^1_x(\mathbb{R}))$, $0 \le t < T_{\max}$ が

$$\|u(t)\|_{L^2(|x|\ge R)} \le \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{4}} =: a_0, \tag{7}$$

をみたすならば $I''_{\gamma,\mathscr{X}_R}(t) \le -2\widetilde{\eta} := 16E_\gamma[u_0] - 2\eta$ が成り立つ. ここで,

$$\eta := -\frac{4}{3R^2}\left(\sqrt{6} + \frac{\|\zeta''\|_{L^\infty(1+1/\sqrt{3}\le|x|\le 2)}}{2}\right)^2 \|u_0\|_{L^2}^6 - \frac{\|\zeta^{(3)}\|_{L^\infty(1\le|x|\le 2)}}{2R^2}\|u_0\|_{L^2}^2.$$

証明. 補題 5.2 を用いると

$$I''_{\gamma,\mathscr{X}_R}(t) = 16E_0[u_0] - \int_{\mathbb{R}} g_R(x)^4\left[4|\partial_x u(t,x)|^2 - \frac{4}{3}|u(t,x)|^6\right]dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{R^2}\mathscr{X}^{(4)}\left(\frac{x}{R}\right)|u(t,x)|^2 dx$$

が成り立つ. ここで g_R は

$$g_R(x) := \left\{2 - \mathscr{X}''\left(\frac{x}{R}\right)\right\}^{\frac{1}{4}}$$

である. 補題 5.1 より

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g_{_R}(x)^4|u(t,x)|^6dx &= \int_{|x|\geq R} g_{_R}(x)^4|u(t,x)|^6dx\\ &\leq \|u\|^2_{L^2(|x|\geq R)}\|g_{_R}u\|^4_{L^\infty(|x|\geq R)}\\ &\leq \|u\|^4_{L^2(|x|\geq R)}\left\{2\|g_{_R}^2\partial_x u\|_{L^2(|x|\geq R)}+\|u\partial_x(g_{_R}^2)\|_{L^2(|x|\geq R)}\right\}^2\\ &\leq 8\|u\|^4_{L^2(|x|\geq R)}\|g_{_R}^2\partial_x u\|^2_{L^2(|x|\geq R)}+2\|u\|^6_{L^2(|x|\geq R)}\|\partial_x(g_{_R}^2)\|^2_{L^\infty(|x|\geq R)}.\end{aligned}$$

単純な計算から

$$|\partial_x(g_{_R}(x)^2)|\begin{cases}=0, & (0\leq|x/R|\leq 1,\ 2\leq|x/R|),\\ \leq\sqrt{6}/R, & (1\leq|x/R|\leq 1+1/\sqrt{3}),\\ \leq\dfrac{1}{2R}\|\zeta''\|_{L^\infty(1+1/\sqrt{3}\leq|x|\leq 2)}, & (1+1/\sqrt{3}<|x/R|<2).\end{cases}$$

が得られる. それゆえ

$$\begin{aligned}I''_{\gamma,\mathscr{X}_{_R}}(t)\leq 16E_0[u_0]&-4\left\{1-\frac{8}{3}\|u\|^4_{L^2(|x|\geq R)}\right\}\int_{|x|\geq R}\left\{2-\mathscr{X}''\left(\frac{x}{R}\right)\right\}|\partial_x u(t,x)|^2dx\\ &+\frac{8}{3R^2}\left(\sqrt{6}+\frac{\|\zeta''\|_{L^\infty(1+1/\sqrt{3}\leq|x|\leq 2)}}{2}\right)^2\|u\|^6_{L^2(|x|\geq R)}+\frac{\|\zeta^{(3)}\|_{L^\infty(1\leq|x|\leq 2)}}{R^2}\|u\|^2_{L^2(|x|\geq R)}\end{aligned}$$

が従う. 質量保存 (定理 2.3) を用いると証明を終える. □

定理 *4.1* の証明. 時間正方向のみ考える. 背理法のため (NLS_γ) の解 u が時間大域的に存在すると仮定する.

次をみたすように $R>0$ を固定する.

$$\begin{gathered}\widetilde{\eta}>0,\\ \frac{1}{R}\left(\int_{\mathbb{R}}\mathscr{X}_R(x)|u_0(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{4}{\widetilde{\eta}}\|\partial_x u_0\|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}}\leq\frac{1}{2}a_0,\end{gathered}\tag{8}$$

ここで $\widetilde{\eta}$ と a_0 は命題 5.3 で定義されたものである. $\widetilde{\eta}\longrightarrow -8E_0[u_0]>0$ $(R\to\infty)$ そして, ルベーグの収束定理により

$$\frac{1}{R^2}\int_{\mathbb{R}}\mathscr{X}_R(x)|u_0(x)|^2dx=\int_{\mathbb{R}}\mathscr{X}\left(\frac{x}{R}\right)|u_0(x)|^2dx=\int_{\mathbb{R}}\int_0^{x/R}\zeta(s)ds|u_0(x)|^2dx\longrightarrow 0\quad(R\to\infty)$$

であることに注意する. これより, 任意の $0\leq t<\infty$ に対して $u(t)$ は (7) をみたすことを示す. (8), $\widetilde{\eta}>0$, $\mathscr{X}_R\geq R^2$ $(|x|\geq R)$ から

$$\|u_0\|_{L^2(|x|\geq R)}\leq\frac{1}{2}a_0\tag{9}$$

が成り立つ. ここで

$$t_0:=\sup\{t>0:\|u(s)\|_{L^2(|x|\geq R)}\leq a_0\ \text{ for any }\ 0\leq s<t\}$$

を定義する. (9) と $\|u(t)\|_{L^2}$ の連続性により $t_0 > 0$ である. $t_0 = \infty$ のときには, 望んだ結果が得られる. $0 < t_0 < \infty$ のとき, $\|u(t)\|_{L^2}$ の連続性により $\|u(t_0)\|_{L^2(|x|\geq R)} = a_0$ が従う. このとき, 解 $u(t)$ は任意の $0 \leq t \leq t_0$ に対して (7) が成り立つので, 命題 5.3 から

$$I''_{\gamma,\mathscr{X}_R}(\tau) \leq -2\widetilde{\eta} \quad (0 \leq \tau \leq t_0).$$

この不等式を $\tau \in [0, s]$ で積分し, さらに $s \in [0, t]$ で積分すると

$$I_{\gamma,\mathscr{X}_R}(t) \leq I_{\gamma,\mathscr{X}_R}(0) + I'_{\gamma,\mathscr{X}_R}(0)t - \widetilde{\eta}t^2. \tag{10}$$

(10) と $\widetilde{\eta} > 0$ を合わせると, 任意の $0 \leq t \leq t_0$ に対して

$$\begin{aligned} I_{\gamma,\mathscr{X}_R}(t) &\leq I_{\gamma,\mathscr{X}_R}(0) - \widetilde{\eta}\left\{t - \frac{1}{2\widetilde{\eta}}I'_{\gamma,\mathscr{X}_R}(0)\right\}^2 + \frac{1}{4\widetilde{\eta}}I'_{\gamma,\mathscr{X}_R}(0)^2 \\ &\leq I_{\gamma,\mathscr{X}_R}(0) + \frac{1}{\widetilde{\eta}}\|u_0\mathscr{X}'_R\|_{L^2}^2\|\partial_x u_0\|_{L^2}^2. \end{aligned} \tag{11}$$

$\mathscr{X}_R \geq R^2$ ($|x| \geq R$), (11), $(\mathscr{X}'_R)^2 \leq 4\mathscr{X}_R$, (8) より, 任意の $0 \leq t \leq t_0$ に対して

$$\|u(t)\|_{L^2(|x|\geq R)} \leq \frac{1}{R}I_{\gamma,\mathscr{X}_R}(t)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{R}I_{\gamma,\mathscr{X}_R}(0)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{4}{\widetilde{\eta}}\|\partial_x u_0\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}a_0.$$

しかしながら, これは矛盾である.

$t_0 = \infty$ のとき, (10) は有限時間で $I_{\gamma,\mathscr{X}_R}(t) < 0$ となることを導くが, これは矛盾である. それゆえ, (NLS_γ) の解 u は有限時間爆発する. □

6 付録

定理 4.1 の証明はより一般的なポテンシャルをもつ

$$i\partial_t u(t,x) + \partial_x^2 u(t,x) - V(x)u(t,x) = -|u(t,x)|^4 u(t,x), \qquad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \tag{NLS_V}$$

に対する以下の系を与える.

系 6.1. $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ とする. V は次の (1) ∼ (3) をみたすとする.

1. (NLS_V) は時間局所適切である.
2. $\varphi \in W^{3,\infty}(\mathbb{R})$ とする. $w(x) := \int_0^x \varphi(s)ds$ と (NLS_V) の解 u に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}} w(x)|u(t,x)|^2dx &= 4\int_{\mathbb{R}} w''(x)|\partial_x u(t,x)|^2dx - \frac{4}{3}\int_{\mathbb{R}} w''(x)|u(t,x)|^6dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} w^{(4)}(x)|u(t,x)|^2dx - 2\int_{\mathbb{R}} w'(x)V'(x)|u(t,x)|^2dx. \end{aligned} \tag{12}$$

3. 任意の $R > 0$ と任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$-R\mathscr{X}'\left(\frac{x}{R}\right)V'(x) - 4V(x) \leq 0 \tag{13}$$

が成り立つ. ここで, $\mathscr{X}$ は (6) で定義される.

このとき, もし

$$E_V[u_0] := \frac{1}{2}\|\partial_x u_0\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} V(x)|u_0(x)|^2 dx - \frac{1}{6}\|u_0\|_{L^6}^6 < 0$$

ならば (NLS_V) の解 u は有限時間爆発する.

参考文献

[1] T. Akahori and H. Nawa, Blowup and scattering problems for the nonlinear Schrödinger equations. Kyoto J. Math. **53** (2013), no. 3, 629–672. MR3102564

[2] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 10. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xiv+323 pp. MR2002047

[3] V. D. Dinh, *On nonlinear Schrödinger equations with repulsive inverse-power potentials*, Acta Appl. Math. **171** (2021), Paper No. 14, 52 pp. MR4198524

[4] B. Dodson, *Global well-posedness and scattering for the mass critical nonlinear Schrödinger equation with mass below the mass of the ground state*, Adv. Math. **285** (2015), 1589–1618. MR3406535

[5] D. Du, Y. Wu, and K. Zhang, On blow-up criterion for the nonlinear Schrödinger equation. Discrete Contin. Dyn. Syst. **36** (2016), no. 7, 3639–3650. MR3485846

[6] D. Fang, J. Xie, and T. Cazenave, Scattering for the focusing energy-subcritical nonlinear Schrödinger equation. Sci. China Math. **54** (2011), no. 10, 2037–2062. MR2838120

[7] R. T. Glassey, *On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **18** (1977), no. 9, 1794–1797. MR0460850

[8] M. Hamano and M. Ikeda, *Equivalence of conditions on initial data below the ground state to NLS with a repulsive inverse power potential*, preprint, arXiv:2004.08788.

[9] M. Hamano, M. Ikeda, and S. Machihara, *Blow-up solutions for non-scale-invariant nonlinear Schrödinger equation in one dimension*, preprint

[10] T. Ogawa and Y. Tsutsumi, *Blow-up of H^1 solutions for the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with critical power nonlinearity*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), no. 2, 487–496. MR1045145

[11] T. Tao, M. Visan, and X. Zhang, *The nonlinear Schrödinger equation with combined power-type nonlinearities*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 7-9, 1281–1343. MR2354495

特性方向の重みを持つ非線形波動方程式の lifespan 評価 *

東北大学大学院理学研究科数学専攻 修士 2 年
北村駿介 (Shunsuke KITAMURA)

本発表は東北大学大学院理学研究科/数理科学連携研究センターの高村博之先生と、釧路工業高等専門学校・創造工学科一般教育部門の若狭恭平先生との共同研究の結果である。

1 導入

偏微分方程式論は個々の具体的な現象に応じて導出された方程式を詳細に解析するスタイルと、如何なる背景や導出過程にも左右されない強固な理論、いわゆる一般論を構築するスタイルがあり、それらは表裏一体で相互に作用しながら数学自身の発展のみならず、物理や工学の発展にも貢献してきた。今回の講演では一般論の構築を見据えたモデル方程式の解析の結果について述べる。まず初めに非線形項が未知関数 u とその偏微分によって構成されている場合を考察する。一次元の非線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}) & \text{in} \quad \mathbf{R} \times (0, \infty), \\ u(x,0) = \varepsilon f(x),\ u_t(x,0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{1}$$

に対して、添え字は偏微分を表わすとし、既知関数 H, f, g は十分滑らかとする。今回は初期値の関数 f, g に台がコンパクトであるという仮定をし、初期値の大きさを決定する ε は十分小さな正定数とする。初期値問題 (1) の解の最大存在時間、いわゆる lifespan、を $\widetilde{T}(\varepsilon)$ という記号で下記のように定義する。

$$\widetilde{T}(\varepsilon) := \sup\{t > 0; \text{適当に固定した } (f,g) \text{ に対して (1) の古典解 } u(x,t) \text{ が存在する } \}$$

lifespan について、$\widetilde{T}(\varepsilon) = \infty$ を満たすならば時間大域解を持つと言い、$\widetilde{T}(\varepsilon) < \infty$ を満たす、つまり有限時間で解 u が発散するならば時間局所解を持つと言う。

解析を行うには非線形項 H が一般的すぎるので、一般性を失わないように簡略化を行う。まず、ベクトル値関数 $U(x,t) = \big(u(x,t), u_x(x,t), u_t(x,t)\big)$ と定義し、微分作用素を $Dv := (v_x, v_t)$ と定義して $DU = \big(Du, Du_x, Du_t\big)$ すると、初期値問題 (1) は ∇ を勾配、$\cdot$ を内積として

$$U_{tt} - U_{xx} = \big(H(U, DU), \nabla H(U, DU) \cdot (U_x, DU_x), \nabla H(U, DU) \cdot (U_t, DU_t)\big)$$

と準線形波動方程式の連立方程式の形で記述することが出来る。よって非線形項 H を

$$H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}) = H_0(u, Du) + H_1(u, Du)u_{tx} + H_2(u, Du)u_{xx}$$

* この研究は日本学術振興会科学研究費補助金 基盤研究 (B) （課題番号：18H01132、研究代表者：高村博之）の助成を受けて行われたものである。

と定義して一般性を失わない。従って、微分階数が高い部分は評価が容易だから、H_0 の解析、つまり半線形項の解析が一般論では主体となる。以下では $H = H(u, Du)$ と仮定する。

また、解析を行う上で初期値に対して $(f, g) \equiv 0$ ならば $u \equiv 0$ が成り立たなければ解の一意性が崩れてしまうので、$H(0) = 0$ が成り立ってほしい。この条件は H をマクローリン展開したときに定数部分が 0 という条件と同値であり、高次の剰余項を R_{n+1} として展開すると次のようになる。

$$H(u, u_x, u_t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}(u\partial_{\lambda_0} + u_x\partial_{\lambda_1} + u_t\partial_{\lambda_2})^k H(\hat{\lambda})\Big|_{\hat{\lambda}=\hat{0}} + R_{n+1}$$

上記において $k = 1$ の項は線形より、この項を入れると波動方程式では無くなってしまう。従って、初期値問題 (1) は ε が十分小さいことから解 u も小さいので、線形項の主な部分は $k \geq 2$ の低次の項であると考えることができる。このような考察のもと、Li, Yu and Zhou[6] によって初期値問題 (1) に対して次のような解の存在が示されている。

定理 1.1　初期値問題 (1) が自然数 α を用いて $\hat{\lambda} = 0$ の近傍において $H(\hat{\lambda}) = O(|\hat{\lambda}|^{1+\alpha})$ を満たすとき、ある正定数 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, g, \alpha)$ が存在して、任意の $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ を満たす ε に対して下記が成立する。

$$\widetilde{T}(\varepsilon) \geq \begin{cases} C\varepsilon^{-\alpha/2} & \text{in general case,} \\ C\varepsilon^{-\alpha(1+\alpha)/(2+\alpha)} & \text{if } \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0, \\ C\varepsilon^{-\alpha} & \text{if } \partial_u^\beta H(\hat{0}) = 0,\ (1 + \alpha \leq \beta \leq 2\alpha) \end{cases}$$

ここで、$C > 0$ は ε に因らない定数である。

この定理 1.1 の H に対する原点近傍の条件はまさに考察から得られた非線形項の低次の項について条件付けをしている。また、定理 1.1 の場合分けは最初の 2 つは強 Huygens の原理により、$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0$ の場合は初期値の影響が空間次元が高次元の場合と同じようになることに起因し、最後の場合分けは非線形項に u の冪が低次で入るときは単純なエネルギー法によって解を構成できず、別の不等式を使う際に逐次近似の評価が悪くなることに起因する。

これら lifespan の下からの評価に対して最適な評価であることを示すには、特別な初期値と非線形項を用いて同じ ε のオーダーを持った量によって lifespan が上から評価されることを示せば良い。特に最適性は、滑らかさを犠牲にして詳細な解析が可能になる $H = |u|^p$ や $H = |u_t|^p$ $(p > 1)$ と定義したモデル方程式によって示される。定理 1.1 の最初の 2 つの場合は Zhou[8] により非線形項を $H = |u|^{1+\alpha}$ と、最後の場合に対しては Zhou[9] により非線形項を $H = |u|^\beta |u_t|^{1+\alpha-\beta}$ と置くことによって最適性が示されている。注意として、これらのモデル方程式による最適性で空間一次元の一般の場合の解析が網羅されたわけでは無い。モデル方程式の結果を一般の場合に適用するには、非線形項の冪が偶数の場合はそのままで良いが、奇数の場合は解 u に正値性などが必要になる。そもそも一般の場合の場合分けが上記 3 つで十分であるかどうかはまだ分かっていないので、あるモデル方程式の結果が定理 1.1 の分類に含まれないならば、一般論のより細かい場合分けが必要であることの可能性を示したことになる。

従って、モデル方程式の解析は一般の場合の解の存在性を議論する上で最適性を保証するものでありながら、モデル方程式の lifespan 評価を行うことによって一般の場合も解析できる場合もある上、

モデル方程式の lifespan 評価から非線形項が一般の場合の最適な lifespan 評価を予想することができる。つまり、モデル方程式の解析と一般論の構築は表裏一体の関係にあると言える。

以下ではモデル方程式に対して解析を行う。物理学などからの要請により、非線形項に対して時空の変数 (x,t) を含む場合を考察するため、重み関数 $F=F(x,t)$ を非線形項に持たせる。加えて、定理 1.1 とその最適性から、非線形項に u が低次で含まれているときに lifespan は小さくなるので、一般の場合を考察するモデル方程式として $H=|u|^p$ に対して解析を行う。

2 準備

一次元空間上の実数値未知関数 $u=u(x,t)$ に対して、非線形項に時空の変数の重みを持つ非線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=F(x,t)|u|^p & \text{in} \quad \mathbf{R}\times(0,\infty), \\ u(x,0)=\varepsilon f(x),\ u_t(x,0)=\varepsilon g(x), & x\in\mathbf{R}, \end{cases} \tag{2}$$

を考える。ここで $p>1$ かつ、初期値について $f\in C_0^2(\mathbf{R})$ かつ $g\in C_0^1(\mathbf{R})$ かつ $0<\varepsilon\ll 1$ とする。加えて重み F に対しては十分滑らかであると仮定する。これらの仮定の下では、Duhamel の原理により、次の積分方程式と同値になる。

$$u(x,t)=\varepsilon u^0(x,t)+L(|u|^p)(x,t) \tag{3}$$

ここで、積分方程式の線形な部分は

$$u^0(x,t):=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(y)dy,$$

Duhamel の項は

$$L(v)(x,t):=\frac{1}{2}\int_0^t ds\int_{x-t+s}^{x+t-s}F(y,s)v(y,s)dy \quad \text{for} \quad v\in C(\mathbf{R}\times[0,\infty))$$

によって定義される。積分方程式 (3) より両辺を微分することで連続な解 u は古典解となる。したがって、時刻 $T>0$ までの古典解 $u\in C^2(\mathbf{R}\times[0,T])$ を考え、lifespan を $T(\varepsilon)$ という記号で下記のように定義する。

$$T(\varepsilon):=\sup\{T>0;\text{適当に固定した } (f,g) \text{ に対して古典解 } u(x,t) \text{ が } 0\le t\le T \text{ で存在する }\}$$

ここで、$f\equiv g\equiv 0$ のとき、解の一意性より (2) の古典解は $u\equiv 0$ となり $T(\varepsilon)=\infty$ を満たす。従って、時間局所解を持つ (2) に対して $\lim_{\varepsilon\to 0}T(\varepsilon)=\infty$ が成り立つことが予想できる。既に 1980 年に Kato[4] によって $F\equiv 1$ の場合は (2) は任意の $p>1$ に対して時間局所解を持つ、つまり有限時間において解が爆発することが示されており、$\varepsilon\to 0$ のときの $T(\varepsilon)$ の増大度を調べることによって重みの影響を考察することが出来る。本研究の目的は特性方向の重みを持つ非線形波動方程式の lifespan 評価を行うことによって重みが解に与える影響を考察することにある。先に主結果を述べ、先行研究と比較する。

3 主結果

$\langle x\rangle := \sqrt{1+x^2}$ と記号を定義する。(2) について、$a, b \in \mathbf{R}$ によってパラメータ付けされた特性方向の重み $F(x,t) = \langle t+\langle x\rangle\rangle^{-1-a}\langle t-\langle x\rangle\rangle^{-1-b}$ を持つ一次元半線形波動方程式

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \dfrac{|u|^p}{\langle t+\langle x\rangle\rangle^{1+a}\langle t-\langle x\rangle\rangle^{1+b}} & \text{in } \mathbf{R}\times(0,\infty), \\ u(x,0) = \varepsilon f(x), \quad u_t(x,0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \tag{4}$$

の古典解の lifespan について、我々は下記の結果を得た。

定理 3.1 $a > 0$ かつ $a+b > 0$ ならば、ある正定数 $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(a,b,f,g,p)$ が存在して、任意の $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ を満たす ε に対して $T(\varepsilon) = \infty$ が成立する。(図 1 及び図 2)

定理 3.2 $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy \neq 0$ ならば、ある正定数 $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(a,b,f,g,p)$ が存在して、任意の $0 < \varepsilon \le \varepsilon_2$ を満たす ε に対して下記が成立する。(図 1)

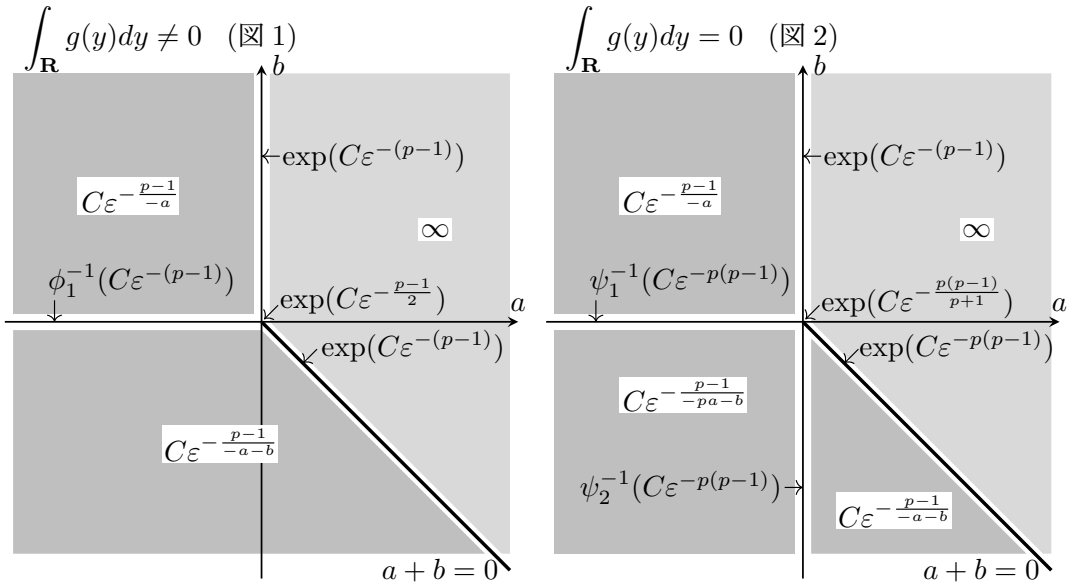
$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} \exp(C\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{if} \quad a+b=0 \text{ and } a>0, \text{ or } a=0 \text{ and } b>0, \\ \exp(C\varepsilon^{-(p-1)/2}) & \text{if} \quad a=b=0, \\ C\varepsilon^{-(p-1)/(-a)} & \text{if} \quad a<0 \text{ and } b>0, \\ \phi_1^{-1}(C\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{if} \quad a<0 \text{ and } b=0, \\ C\varepsilon^{-(p-1)/(-a-b)} & \text{if} \quad a+b<0 \text{ and } b<0, \end{cases}$$

ここで、C は ε に因らない正定数であり、ϕ_1^{-1} は $\phi_1(s) = s^{-a}\log(2+s)$ で定義される関数の逆関数である。また、$T(\varepsilon) \sim A(\varepsilon, C)$ なる記号は、C_1 と C_2 という ε に無関係な正定数が存在して、不等式 $A(\varepsilon, C_1) \le T(\varepsilon) \le A(\varepsilon, C_2)$ を満たすことを表す。

定理 3.3 $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0$ ならば、ある正定数 $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(a,b,f,g,p)$ が存在して、任意の $0 < \varepsilon \le \varepsilon_3$ を満たす ε に対して下記が成立する。(図 2)

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} \exp(C\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{if} \quad a=0 \text{ and } b>0, \\ \exp(C\varepsilon^{-p(p-1)}) & \text{if} \quad a+b=0 \text{ and } a>0, \\ \exp(C\varepsilon^{-p(p-1)/(p+1)}) & \text{if} \quad a=b=0, \\ C\varepsilon^{-(p-1)/(-a)} & \text{if} \quad a<0 \text{ and } b>0, \\ \psi_1^{-1}(C\varepsilon^{-p(p-1)}) & \text{if} \quad a<0 \text{ and } b=0, \\ C\varepsilon^{-p(p-1)/(-pa-b)} & \text{if} \quad a<0 \text{ and } b<0, \\ \psi_2^{-1}(C\varepsilon^{-p(p-1)}) & \text{if} \quad a=0 \text{ and } b<0, \\ C\varepsilon^{-p(p-1)/(-a-b)} & \text{if} \quad a+b<0 \text{ and } a>0, \end{cases}$$

ここで、C は ε に因らない正定数であり、ψ_1^{-1} と ψ_2^{-1} はそれぞれ $\psi_1(s) = s^{-pa}\log(2+s)$ と $\psi_2(s) = s^{-b}\log^{p-1}(2+s)$ で定義される関数の逆関数である。$\sim$ の意味は定理 2 と同じ。



4 先行研究

先行研究による既知の結果と主結果を比較する。初期値問題 (2) について $F \equiv 1$ の場合、つまり重みが無い場合において、Zhou[8] により lifespan の最適な評価が得られている。主結果の記号を用いて下記のように書ける。

$$\begin{cases} T(\varepsilon) \sim C\varepsilon^{-(p-1)/2} & \text{if } \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy \neq 0, \\ T(\varepsilon) \sim C\varepsilon^{-p(p-1)/(p+1)} & \text{if } \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0. \end{cases}$$

これは主結果の $a = b = -1$ の場合と一致している。

また、$F = (1+t)^{-(p-1)}$ の場合はいくつか先行研究がある。なぜなら

$$v_{tt} - v_{xx} + \frac{2}{1+t} v_t = |v|^p \tag{5}$$

という形のいわゆるスケール不変な消散項を持つ半線形波動方程式に対して、$u(x,t) = (1+t)v(x,t)$ という Liouville 変換によって $F = (1+t)^{-(p-1)}$ の重みを持つ非線形波動方程式が得られるからである。この重みの初期値問題に対して、Wakasugi[7] によって $1 < p \leq 3$ のとき $T(\varepsilon) < \infty$ であることを示した。また、D'Abbicco[1] によって $p > 3$ のときに $T(\varepsilon) = \infty$ であることを示した。注意すべき点はこれらはエネルギー解、つまり古典解ほどは滑らかではない解に対しての評価であることである。そして、Kato, Takamura and Wakasa[3] による $1 < p \leq 3$ の場合の古典解の lifespan 評価および時間大域解が得られたが、それらは主結果において $a = p-2$ かつ $b = -1$ と固定したときの lifespan 評価と一致している。この事実は、(4) の重みについては初期値の台のコンパクト性から導かれる有限伝播性より $\langle t + \langle x \rangle \rangle$ が $1+t$ と同値であることによって、主結果が時間変数のみの重みを持つ場合の一般化を含んでいることから自明に分かる。また、臨界指数が一次元の藤田指数と一致することから (5) は熱的と考えることもできるが、初期値の積分量によって lifespan が変わるという波動的な要素があり、むしろ時間変数の減衰によって Strauss 指数がずれたと考えるべきである。

これら $\langle t+\langle x\rangle\rangle$ と $1+t$ の同値性とは対照的に $\langle t-\langle x\rangle\rangle$ と $\langle x\rangle$ は原点付近で同値ではない。関連性を考察するために同じパラメータ $b\in\mathbf{R}$ を設定し、$F=\langle x\rangle^{-1-b}$ という空間変数のみの重みを持つ場合には Kitamura, Morisawa and Takamura[5] による次の結果が得られている。

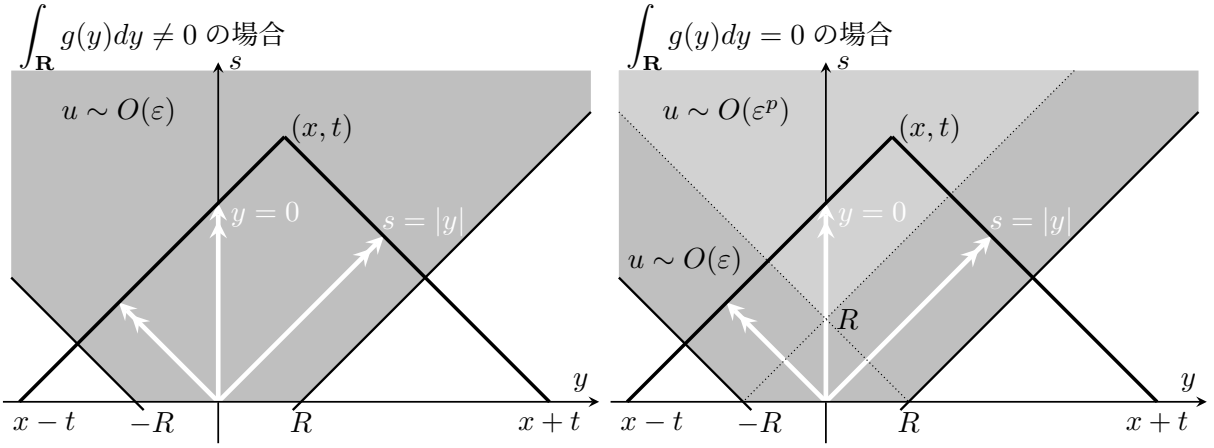
$$T(\varepsilon)\sim\begin{cases} C\varepsilon^{-(p-1)} & \text{for } b>0,\\ \phi^{-1}(C\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{for } b=0,\\ C\varepsilon^{-(p-1)/(1-b)} & \text{for } b<0\end{cases}\quad \text{if } \int_{\mathbf{R}} g(x)dx\neq 0,\quad \Big(\phi(s):=s\log(2+s)\Big) \tag{6}$$

and

$$T(\varepsilon)\sim\begin{cases} C\varepsilon^{-p(p-1)} & \text{for } b>0,\\ \psi_p^{-1}(C\varepsilon^{-p(p-1)}) & \text{for } b=0,\\ C\varepsilon^{-p(p-1)/(1-pb)} & \text{for } b<0\end{cases}\quad \text{if } \int_{\mathbf{R}} g(x)dx=0,\quad \Big(\psi_p(s):=s\log^{p-1}(2+s)\Big) \tag{7}$$

上記と $a=-1$ に固定した主結果の lifespan 評価を比べると、$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(x)dx\neq 0$ の場合は重みが減衰を表わす場合も増大を表わす場合も lifespan 評価は一致している。しかしながら、$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(x)dx=0$ の場合は、重みが減衰、つまり $b>-1$ のときは $\langle x\rangle$ 減衰の方が lifespan は長くなり、重みが増大、つまり $b<-1$ のときは $\langle t-\langle x\rangle\rangle$ 増大の方が lifespan は長くなることが分かる。これら $\langle t-\langle x\rangle\rangle$ 重みと $\langle x\rangle$ 重みの lifespan 評価の大きさの違いは次のように説明することが出来る。

初期値問題の解の存在も解の爆発も、線形積分作用素 L による各点評価の iteration method によって証明される。解の有限伝播性より、$\mathrm{supp}\{f,g\}\subset\{|x|\le R\}$ を満たすように $R(>1)$ を取ると解 u は $\mathrm{supp}\ u\ \subset\{|x|\le t+R\}$ を満たす。従って L の積分領域は頂点 (x,t) の三角形領域のうち、次の図のように色塗りされた部分になる。



ここで、頂点 (x,t) が $t-|x|\ge R$ を満たすとき、積分方程式の線形な部分 u^0 は

$$u^0(x,t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy=\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}} g(y)dy$$

が成立するので、積分方程式 (3) より、

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbf{R}} g(y)dy\neq 0\Rightarrow u(x,t)=O(\varepsilon) && \text{as } \varepsilon\to 0 \quad \text{for } (x,t)\in\{(y,s)\,:\,s-|y|\ge R\}\\ &\int_{\mathbf{R}} g(y)dy=0\Rightarrow u(x,t)=O(\varepsilon^p) && \text{as } \varepsilon\to 0 \quad \text{for } (x,t)\in\{(y,s)\,:\,s-|y|\ge R\}\end{aligned}$$

となる。また、重みが減衰するときは、$\langle x\rangle$ は $y=0$ の近傍で、$\langle t-\langle x\rangle\rangle$ は $s=|y|$ の近傍で減衰が無くなるので lifespan を決定する各点評価が悪くなり、重みが増大するときは、$\langle x\rangle$ は $s=|y|$ の近傍で、$\langle t-\langle x\rangle\rangle$ は $y=0$ の近傍で lifespan を決定する各点評価が悪くなる。従って、$\int_{\mathbf{R}} g(y)dy \neq 0$ ならば $\langle x\rangle$ 重みも $\langle t-\langle x\rangle\rangle$ 重みも各点評価が悪くなる領域の解のオーダーが同じ $O(\varepsilon)$ なので lifespan 評価が同じになるが、$\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0$ ならば $y=0$ の原点付近以外の近傍では解のオーダーが $O(\varepsilon^p)$ と良くなるため、重みが減衰なら $\langle x\rangle$ 減衰の、重みが増大なら $\langle t-\langle x\rangle\rangle$ 増大の lifespan が長くなるということが分かる。

上記のような解 u のオーダーと重みの各点評価が悪くなる領域を考察することによって、定数 $C>0$ を用いて重みが $\langle t-C\langle x\rangle\rangle$ によって構成されている場合の lifespan 評価を予想することができる。つまり、$C>1$ の場合は $s=C|y|$ が $u\sim O(\varepsilon^p)$ となる領域に突入するので $\langle t-C\langle x\rangle\rangle$ 減衰は $\langle x\rangle$ 減衰と lifespan 評価が同じになり、$\langle t-C\langle x\rangle\rangle$ 増大は $s=|y|$ の近傍で各点評価が悪くなるので $\langle x\rangle$ 増大と lifespan 評価が同じになると予想できる。また、$0<C<1$ の場合は $s=C|y|$ が積分領域から逸脱するので $\langle t-C\langle x\rangle\rangle$ 減衰は $1+t$ 減衰と lifespan 評価が同じになり、$\langle t-C\langle x\rangle\rangle$ 増大は $s=|y|$ の近傍で各点評価が悪くなるので $\langle x\rangle$ 増大と lifespan 評価が同じになると予想できる。

5 主結果の証明方法

証明は、lifespan の下からの評価（長時間存在）も上からの評価（有限時間爆発）も、この分野では標準的な各点評価の逐次代入による。しかしながら、その中では、先行研究には見られなかった二つの特性方向の相互作用が現れており、特に、$a>0$ かつ $a+b=0$ の場合に、解の下からの最適な評価を得る際の困難さが顕著である。その部分は、Agemi, Kurokawa and Takamura[2] による “slicing method” が有効に働く。講演では、そこを重点的に紹介する予定である。

参考文献

[1] M. D'Abbicco, *The threshold of effective damping for semilinear wave equations*, Math. Methods Appl. Sci., **38** (2015), 1032-1045.

[2] R. Agemi, Y. Kurokawa and H. Takamura, *Critical curve for p-q systems of nonlinear wave equations in three space dimensions*, J. Differential Equations **167** (2000), no. 1, 87–133.

[3] M. Kato, H. Takamura and K. Wakasa, *The lifespan of solutions of semilinear wave equations with the scale-invariant damping in one space dimension*, Differential Integral Equations **32** (2019), no. 11-12, 659-678.

[4] T. Kato, *Blow up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations*, Comm. Pure Appl. Math, **33** (1980), 501-505.

[5] S. Kitamura, K. Morisawa and H. Takamura, *The lifespan of classical solutions of semilinear wave equations with spatial weights and compactly supported data in one space dimension*, J. Differential Equations **307** (2022), 486-516.

[6] T.-T. Li, X. Yu, and Y.Zhou, *Life-span of classical solutions to one-dimensional nonlinear*

wave equations, Chinese Ann. Math. Ser. B **13** (1992) no. 3, 266-279. A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A **13** (1992), no. 4, 516.

[7] Y. Wakasugi, *Blow-up of solutions to the one-dimensional semilinear wave equation with damping depending on time and space variables*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **34** (2014), no. 9, 3831-3846.

[8] Y. Zhou, *Life span of classical solutions to* $u_{tt} - u_{xx} = |u|^{1+\alpha}$, Chinese Ann. Math. Ser. B **13** (1992) no. 2, 230-243. A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A **13** (1992), no. 2, 280.

[9] Y.Zhou, *Blow up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear wave equations*, Chinese Ann. Math. Ser. B **22** (2001), 275-280.

2 階 Fuchs 型微分方程式の モノドロミー不変エルミート形式について

熊本大学大学院 自然科学教育部 理学専攻
安達駿弥 (Shunya ADACHI)

1 Introduction

このレポートでは, Gauss の超幾何微分方程式を例にしてモノドロミー表現および不変 Hermite 形式に関する一般的な事項を概説した後, 最近講演者によって得られた結果 [2] を紹介する.

1.1 Gauss の超幾何微分方程式とそのモノドロミー表現

Gauss の超幾何微分方程式とは次で与えられる 2 階の線形常微分方程式である.

$$x(1-x)y'' + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)x\}y' - \alpha\beta y = 0, \tag{1}$$

ここで y は $x \in \mathbb{C}$ を独立変数とする未知関数, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ は方程式に含まれるパラメータである. この方程式は Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ 上の 3 点 $\{0, 1, \infty\}$ に特異点を持つ. 微分方程式の解は特異点の近傍で特徴的な挙動を示すが, 方程式 (1) の特異点は全て確定特異点と呼ばれる非常に調べやすい特異点になっていて, 任意の解 $y(x)$ は $\{0, 1, \infty\}$ に分岐点を持つ多価関数となる. このように $\mathbb{P}^1$ 上の特異点が全て確定特異点となるような有理関数係数の線形微分方程式を **Fuchs 型微分方程式**と呼ぶ.

次に解の多価性を記述する量である**モノドロミー表現**について説明する. 方程式の正則点 $b \in \mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ を一つとって固定する. 方程式 (1) は 2 階の線形微分方程式なので $x = b$ の近傍における解全体は 2 次元の線形空間をなす. その基底となる一次独立な解を $\{y_1(x), y_2(x)\}$ として, それらを並べたベクトル値関数

$$\mathcal{Y}(x) = (y_1(x), y_2(x))$$

を方程式 (1) の $x = b$ における**基本解系**と呼ぶ.

基本解系 $\mathcal{Y}(x)$ は $\{0, 1, \infty\}$ に分岐点を持つ. では各分岐点の周りで $\mathcal{Y}(x)$ がどのような多価性を示すかを調べてみよう. 関数 $\mathcal{Y}(x)$ の独立変数 x を b を基点として $x = 0$ の周りを一周するループ γ_0 に沿って解析接続して得られる関数を

$$\tilde{\mathcal{Y}}(x) = (\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x))$$

とする. すると $\tilde{y}_1(x)$ と $\tilde{y}_2(x)$ もまた (1) の解となり, 従って元々の基本解 $\{y_1(x), y_2(x)\}$ の線形結合で表すことができる. つまり

$$\tilde{\mathcal{Y}}(x) = \mathcal{Y}(x)M_0$$

となるような定数行列 $M_0 \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ が存在する．この行列 M_0 を $x=0$ に関する**モノドロミー行列**と呼ぶ．同様のことを他の特異点を回るループについて考えることで M_1, M_∞ が得られる．ここで 2 つの特異点 $x=t_i$ と $x=t_j$ をこの順番で一緒に回るループは γ_i と γ_j を繋いだループに連続的に変形できる (図 1)．このループを $\gamma_i\gamma_j$ で書くことにすると，ループ $\gamma_i\gamma_j$ に対応するモノドロミー行列は M_jM_i となる，つまりループの順番とモノドロミーをかける順番は逆になることに注意する．このことを念頭に置くと，ループ $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ の間に成り立つ関係式

$$\gamma_0\gamma_1\gamma_\infty = 1 \tag{2}$$

に対応して，モノドロミー行列 M_0, M_1, M_∞ の間には

$$M_\infty M_1 M_0 = I \tag{3}$$

という関係が成り立つことがわかる．

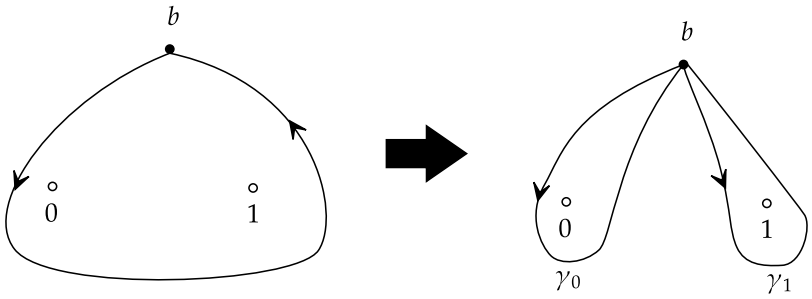


図 1　左のループは連続変形で右のループ $\gamma_0\gamma_1$ になる

以上の説明の下で，用語を整理しておこう．b を基点とするループ全体を連続変形による同値関係で割って得られる群を $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ の**基本群**と呼び，$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, b)$ で表す．上記のループ $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ で代表される同値類たちを改めて $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ と書くことにすると $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, b)$ は

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, b) = \langle \gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty \,|\, \gamma_0\gamma_1\gamma_\infty = 1 \rangle \tag{4}$$

という表示を持つ．このとき基本群 (4) の $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ への (反) 表現，すなわち準同型写像 $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}, b) \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ であって

$$\rho(\gamma_i) = M_i \quad (i = 0, 1, \infty)$$

を満たすものを微分方程式 (1) の基本解系 $\mathcal{Y}(x)$ に関する**モノドロミー表現**と呼ぶ．準同型写像 ρ を定めるためには $\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\})$ の生成元の行き先のみを決めてやれば十分であることに注意しておく．また，関係式 (3) から，M_0 と M_1 が決まれば M_∞ は一意的に決まる．このことからモノドロミー表現を $\rho = (M_0, M_1)$ と表すこともある．一般に微分方程式の解のモノドロミー表現は基本群の表現となる．またモノドロミー表現の像は M_0, M_1, M_∞ および関係式 (3) で生成される $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ の部分群 $G = \langle M_0, M_1 \rangle$ となる．この部分群を**モノドロミー群**と呼ぶ．

1.2 モノドロミー不変 Hermite 形式

前節と同様に $\{y_1(x), y_2(x)\}$ を方程式 (1) の $x = b$ の近傍における一次独立な解の組として, 基本解系 $\mathcal{Y}(x)$ に対するモノドロミー表現 $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, b) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ を考える. この表現は方程式 (1) のパラメータ α, β, γ に依存するが, α, β, γ が実数であるとき,

$$ {}^t\overline{\rho(\gamma)} H \rho(\gamma) = H \quad (\gamma \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, b)) \tag{5} $$

を満たすような 2×2 サイズの Hermite 行列 H が存在することが知られている. $\{y_1(x), y_2(x)\}$ を基底とする方程式 (1) の解空間を V とするとき, この Hermite 行列によって V は Hermite 空間とみなすことができる[*1]. このことを説明しよう.

V に属する任意の解 $y(x) \in V$ は $y_1(x)$ と $y_2(x)$ による線形結合で表される. そこで, $u_1, u_2 \in \mathbb{C}$ を用いて $u_1 y_1(x) + u_2 y_2(x)$ と表される解を $y_u(x)$ とすると, $y_u(x)$ は基本解系 $\mathcal{Y}(x)$ と縦ベクトル $u = {}^t(u_1, u_2)$ を用いて

$$ y_u(x) = u_1 y_1(x) + u_2 y_2(x) = (y_1(x), y_2(x)) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \mathcal{Y}(x) u $$

と表すことができる. つまり基本解系を介することで, 解 $y_u(x) \in V$ と縦ベクトル $u \in \mathbb{C}^2$ の同型対応 $V \cong \mathbb{C}^2$ が得られる. このとき (5) における H を用いて写像 $h : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ を

$$ \begin{array}{rccc} h: & \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & \cup & & \cup \\ & (u, v) & \longmapsto & {}^t\bar{u} H v \end{array} $$

と定義することで, $V \cong \mathbb{C}^2$ 上の Hermite 形式 h が得られる.

このようにして得られた Hermite 形式 h はモノドロミーの作用に対して不変であることを示そう. ループ $\gamma \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, b)$ に沿った $y_u(x)$ の解析接続を $\gamma_* y_u(x)$ と書くことにすると,

$$ \gamma_* y_u(x) = \mathcal{Y}(x) \rho(\gamma) u = y_{\rho(\gamma) u}(x) $$

が成り立つ. つまり γ に沿った解析接続は $u \in \mathbb{C}^2$ に対するモノドロミーの作用

$$ u \mapsto \rho(\gamma) u $$

を引き起こす. 一方 (5) より

$$ \begin{aligned} h(\rho(\gamma)u, \rho(\gamma)v) &= {}^t\overline{\rho(\gamma)u} H \rho(\gamma) v \\ &= {}^t\bar{u} \left({}^t\overline{\rho(\gamma)} H \rho(\gamma) \right) v \\ &= {}^t\bar{u} H v \\ &= h(u, v) \end{aligned} $$

が得られる. つまり h はモノドロミー ρ の作用によって不変であることがわかる.

[*1] 本来 V は $x = b$ における局所解のなす空間であるため V_b と書くべきであるが, ここからの議論は基点 b の選び方によらないため, 記法の簡略化のために V と書くことにする.

このようにして得られたモノドロミー不変 Hermite 形式は, 解の幾何的な性質の解析に有用である. 例えば Hermite 形式の定値性を用いたモノドロミーの有限性の判定や Hermite 行列 H と基本解系 $\mathcal{Y}(x)$ を用いた保型関数の構成などが挙げられる. これらのストーリーを解説している文献として大久保 [7], 吉田 [8] を挙げておく.

Remark 1. モノドロミー表現 ρ および Hermite 形式 h は基本解系 $\mathcal{Y}(x)$ に依存している. しかし基本解系を取り替えても, 取り替えた基本解系に対応するモノドロミー表現もまた不変 Hermite 形式を持つことが確かめられる. つまりここまでの議論は基本解系の取り方に依らない. 従って不変 Hermite 形式の存在性は, 1 つ 1 つの解に対してではなく全ての解, ひいては方程式に対して考えられるべき問題である (後で詳しく説明する).

1.3 モノドロミー不変 Hermite 形式と解の積分表示

超幾何微分方程式 (1) は次のような解の (Euler 型) 積分表示を持つことが知られている.

$$y(x) = \int_p^q t^{\beta-\gamma}(t-1)^{\gamma-\alpha-1}(t-x)^{-\beta}\,dt \tag{6}$$

ここで $p, q \in \{0, 1, x, \infty\}$ である. この積分表示は $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ で定義される大域的な解であり, 前節で説明したモノドロミー不変 Hermite 形式に深く結びついている. この事実を明らかにしたのが喜多-吉田 [6] である. 彼らは, 不変 Hermite 形式は積分 (6) に付随する twisted cycle (被積分関数の多価性を加味した積分路) の交点行列として意味付けられることを明らかにした. この理論については吉田 [8] に詳しい解説がなされている. ただし [6, 8] では基本解系を横ベクトルではなく縦ベクトルで考えているため, 交点行列そのものではなく, その逆行列が不変 Hermite 形式に対応している.

解の積分表示から不変 Hermite 形式が得られるというストーリーは超幾何微分方程式に限らず, 一般の微分方程式に対しても成り立つ. Fuchs 型方程式のうち, rigid と呼ばれる特別なクラスに属する方程式については解の積分表示が存在することが証明されており (cf. 原岡 [3]), 従って rigid な方程式には不変 Hermite 形式が存在することがわかる. ちなみに超幾何微分方程式 (1) は rigid な方程式の典型例である. 一方で rigid ではない方程式に対しては, 解の積分表示を持つような特殊な方程式を除いて不変 Hermite 形式の存在は知られていなかった. しかし最近, 解の積分表示の存在を仮定することなく, 不変 Hermite 形式を持つような non-rigid な Fuchs 型方程式のクラスが存在することが証明された [1, 2]. このクラスに属する方程式が全て解の積分表示を持つか？という問題は未解決であるが, 我々の結果は Fuchs 型方程式全体のなす空間に “不変 Hermite 形式を持つ”という rigid を包含するクラスによる一つの構造が入ることを意味しており, Fuchs 型方程式の研究に新しい視点をもたらすものと考えられる. 次節では [2] の結果の概要を紹介する.

2　4 つの特異点を持つ 2 階 Fuchs 型方程式のモノドロミー不変 Hermite 形式

前節で扱っていた超幾何微分方程式 (1) は 3 つの特異点を持つ 2 階の方程式である. 論文 [2] では特異点の個数を増やした 4 つの特異点を持つ 2 階の Fuchs 型方程式 (系) を考えている. このタイプの方程式は一般に non-rigid な方程式であり, 解の積分表示の存在性は一般には知られていない.

2.1　問題設定

Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ 上の 4 点 $\{t_1, t_2, t_3, t_4 = \infty\}$ に特異点を持つような 2 階 Fuchs 型方程式, もしくは階数 2 の Fuchs 型方程式系を考える. 方程式の正則点 $b \in \mathbb{P}^1 \setminus \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ と $x = b$ における基本解系 $\mathcal{Y}(x)$ を固定すると, この方程式 (系) の解のモノドロミー表現は基本群

$$\pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{t_1, t_2, t_3, t_4\}, b) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \,|\, \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = 1 \rangle$$

の表現となる. 前節では $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ への表現を考えたが, 任意の Fuchs 型微分方程式においては未知関数のゲージ変換を考えることでモノドロミー行列の行列式を 1 にすることができるので, ここからはモノドロミー表現として $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ への表現

$$\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{t_1, t_2, t_3, t_4\}, b) \to \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$$

を考える. このような表現 ρ に対して

$$\rho(\gamma_i) = M_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

とおくと, 関係式 $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4 = 1$ に対応して $M_4M_3M_2M_1 = I$ が成り立つ. 従って ρ を行列の 3 つ組 $(M_1, M_2, M_3) \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})^3$ と同一視して $\rho = (M_1, M_2, M_3)$ と書く.

以上の設定の下で, 我々の目標は次のように述べられる.

問題 1. 不変 Hermite 形式, すなわち

$$^t\overline{\rho(\gamma)} H \rho(\gamma) = H \quad (\gamma \in \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{t_1, t_2, t_3, t_4\}, b)) \tag{7}$$

を持つような Hermite 行列 H を持つような ρ が存在することを示し, さらに特徴付けよ.

ここで, 問題 1 におけるモノドロミー表現 ρ および Hermite 行列 H は基本解系 $\mathcal{Y}(x)$ の選び方に依っていることに注意しよう. しかし Remark 1 で述べたように, 不変 Hermite 形式の存在性自体は基本解系の選び方によらない. 実際 2 つの基本解系 $\mathcal{Y}(x), \tilde{\mathcal{Y}}(x)$ の間にはある $P \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ が存在して

$$\tilde{\mathcal{Y}}(x) = \mathcal{Y}(x)P$$

が成り立つが, このとき $\tilde{\mathcal{Y}}(x)$ に対するモノドロミー表現 $\tilde{\rho}$ は

$$\tilde{\rho}(\gamma) = (\mathrm{Ad}(P)(\rho))(\gamma) := P\rho(\gamma)P^{-1}$$

となる. ここでもし ρ が (7) を満たしているならば, Hermite 行列 $\tilde{H} = {}^t\overline{P^{-1}}HP^{-1}$ に対して

$$ {}^t\overline{\tilde{\rho}(\gamma)}\tilde{H}\tilde{\rho}(\gamma) = \tilde{H} $$

が成り立つ. これは $\tilde{\rho}$ が $\tilde{H} = {}^t\overline{P^{-1}}HP^{-1}$ による不変 Hermite 形式を持つことを示している.

このことから, 不変 Hermite 形式の存在を考える上では基本解系に依存するモノドロミー表現に対する存在性を考えるのではなく, 基本解系に依らない**モノドロミー表現の同値類**に対する存在性を考えるのが自然である. この認識のもとで, 2 つのモノドロミー表現 ρ, ρ' に対する同値関係を

$$ \rho \sim \rho' \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \rho' = \mathrm{Ad}(P)(\rho) \quad (\exists P \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) $$

と定義し, ρ に対する同値類を $[\rho]$ と書くことにする. この同値関係 " $\sim$ " は "同じ微分方程式の解のモノドロミー表現である"という関係に対応している. 従って同値類 $[\rho]$ は Fuchs 型微分方程式に対応しているということになり, 微分方程式の**モノドロミー**と呼ばれる. また $\rho = (M_1, M_2, M_3)$ と行列の組で表したときは, 同値関係は

$$ (M_1, M_2, M_3) \sim (PM_1P^{-1}, PM_2P^{-1}, PM_3P^{-1}) \quad (\exists P \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})) $$

となる. ここで次の定義を与える.

定義 1. モノドロミー表現 $\rho = (M_1, M_2, M_3) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})^3$ またはモノドロミー $[\rho] = [(M_1, M_2, M_3)]$ が**既約**であるとは, M_1, M_2, M_3 に共通した不変部分空間が自明なもの $(\mathbb{C}^2, \{0\})$ に限ることである. 既約でないとき**可約**と呼ぶ.

モノドロミー (表現) が可約であるような Fuchs 型方程式は, より階数の低い方程式に帰着させて解くことができる. そこで今回は既約なモノドロミーに焦点を絞って考えることにする. 以上の準備の下で, 問題 1 を次のように書き直す.

問題 2. 不変 Hermite 形式を持つような既約なモノドロミー $[\rho]$ の存在を示し, さらに特徴付けよ.

上述の対応関係より, 問題 2 は不変 Hermite 形式を持つ既約な Fuchs 型微分方程式 (系) の存在およびその特徴付けを問う問題とも思えることに注意しておく.

2.2 モノドロミー表現の moduli 空間と 3 次曲面

まずはモノドロミー $[\rho]$ が属する空間を定式化しよう. 特異点 $x = t_i$ におけるモノドロミー行列 M_i の $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ における共役類を $x = t_i$ における**局所モノドロミー**と呼び, $\mathcal{C}_i$ で表す. 各特異点における局所モノドロミーを集めたデータを $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4)$ とおく. このとき moduli 空間

$$ \mathcal{M}_{\mathcal{C}} = \{(M_1, M_2, M_3) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \times \mathcal{C}_3 \,;\, (M_3M_2M_1)^{-1} \in \mathcal{C}_4\}/\sim \tag{8} $$

は, 各特異点における局所挙動を $\mathcal{C}$ で指定したモノドロミーを集めた集合となる. 空間 (8) の元と Fuchs 型方程式との対応関係は比較的わかりやすいが, 一般にこの空間 (8) は代数多様体にならず, あまり良い空間とは言えない. そこで, より素性の良いモノドロミー表現の moduli 空間を考えることにする.

パラメータ $a=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{C}^4$ を

$$a_i=\operatorname{tr}\mathcal{C}_i$$

で定める. 以下簡単のため

$$a_i\neq\pm2 \tag{9}$$

を仮定する. いま $M_i\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ で考えていることから, 仮定 (9) は, "各特異点における**モノドロミー行列が異なる固有値を持つ**"ということを意味していることに注意しよう. 従って $x=t_i$ における局所モノドロミーは

$$\mathcal{C}_i=\{M\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\,;\,\operatorname{tr}M=a_i\}=:\mathcal{O}(a_i)$$

で与えられる. このときモノドロミーの moduli 空間 $\mathcal{M}(a)$ を次で定義する.

$$\mathcal{M}(a)=\{(M_1,M_2,M_3)\in\mathcal{O}(a_1)\times\mathcal{O}(a_2)\times\mathcal{O}(a_3)\,;\,(M_3M_2M_1)^{-1}\in\mathcal{O}(a_4)\}/\!/\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}). \tag{10}$$

ここで $/\!/$ は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の相似変換による作用に関する幾何学的不変式論的商 (GIT quotient).

定義 2. 元 $[(M_1,M_2,M_3)]\in\mathcal{M}(a)$ が**既約**であるとは, $[(M_1,M_2,M_3)]$ に含まれるモノドロミー表現が全て既約であることと定義する.

moduli 空間 (10) は先ほど定義した (8) と比べて微分方程式との対応は見づらいように思われるが, $[(M_1,M_2,M_3)]\in\mathcal{M}(a)$ が既約ならば, それは $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}$ における同値類 $[(M_1,M_2,M_3)]$ と集合として等しいため, 既約な元を考えている限りは (8) と (10) における同値類は同じものだと考えて良い.

moduli 空間 $\mathcal{M}(a)$ は 2 次元の代数多様体になるだけではなく, 3 次曲面として幾何的に実現できるという大きな利点がある. このことを説明しよう. モノドロミー表現 $\rho=(M_1,M_2,M_3)$ に対して

$$x_1=\operatorname{tr}(M_2M_3),\quad x_2=\operatorname{tr}(M_3M_1),\quad x_3=\operatorname{tr}(M_1M_2) \tag{11}$$

とすると $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{C}^3$ は $a\in\mathbb{C}^4$ をパラメータとする 3 次多項式

$$f_a(x)=x_1x_2x_3+x_1^2+x_2^2+x_3^2-\theta_1(a)x_1-\theta_2(a)x_2-\theta_3(a)x_3+\theta_4(a).$$

を満たす (Jimbo [4]). ここで (i,j,k) を $(1,2,3)$ の巡回置換として

$$\begin{aligned}\theta_i(a)&=a_ja_k+a_ia_4\quad(i=1,2,3),\\ \theta_4(a)&=a_1a_2a_3a_4+a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2-4.\end{aligned}$$

対応 (11) は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の相似変換で不変であるため, モノドロミー $[(M_1,M_2,M_3)]\in\mathcal{M}(a)$ に対しても値 $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{C}^3$ を対応させることができる. つまり, 対応 (11) はモジュライ空間 $\mathcal{M}(a)$ から 3 次曲面

$$\mathcal{S}(a)=\{x\in\mathbb{C}^3\,;\,f_a(x)=0\}$$

への写像 $\mathcal{M}(a)\to\mathcal{S}(a)$ を与えていることになる. この写像はそのままでは全単射にはならないが, Iwasaki [5] は big open と呼ばれる Zariski 開集合 $\mathcal{S}^\circ(a)\subset\mathcal{S}(a)$ と $\mathcal{M}^\circ(a)\subset\mathcal{M}(a)$ を導入し, その間の同型写像 $\varphi:\mathcal{S}^\circ(a)\xrightarrow{\simeq}\mathcal{M}^\circ(a)$ を構成した ([5], Theorem 3.6). さらに $\mathcal{S}^\circ(a)=\mathcal{S}(a)$ となるような $a\in\mathbb{C}^4$ の値を以下によって特徴付けた.

命題 1 (Iwasaki [5], Theorem 4.1)**.** パラメータ $a=(a_1,a_2,a_3,a_4)\in\mathbb{C}^4$ に対して

$$v(a)=\prod_{\varepsilon\in\{\pm1\}^3} f_a(2\varepsilon),$$

$$w(a)=\prod_{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3=1}(\varepsilon_1a_1+\varepsilon_2a_2+\varepsilon_3a_3+a_4)-\prod_{i=1}^{3}(a_ia_4-a_ja_k)$$

とする. ここで $v(a)$ については $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ であり, $w(a)$ の右辺の総積記号では $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3=1$ を満たすような $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\in\{\pm1\}^3$ についての積をとることとする. すると

$$v(a)w(a)\neq 0 \tag{12}$$

が成り立つとき, またそのときに限り $\mathcal{S}^\circ(a)=\mathcal{S}(a)$ が成り立つ.

パラメータ $a\in\mathbb{C}^4$ が条件 (12) を満たすとき **generic** と呼ぶことにする. また, 次が成り立つ.

命題 2 ([2])**.** パラメータ $a\in\mathbb{C}^4$ に対して

- $\mathcal{M}^\circ(a)$ の任意の元は既約である.
- a が generic ならば $\mathcal{M}^\circ(a)=\mathcal{M}(a)$ が成り立つ.

以上の事実をまとめると, generic な $a\in\mathbb{C}^4$ に対して $\mathcal{S}(a)\cong\mathcal{M}(a)$ であり, 全ての $\mathcal{M}(a)$ の元が既約であることがわかる.

2.3 主結果

論文 [2] では問題 2 の解答として, まず $\mathcal{M}^\circ(a)$ の元に対して, その作用で不変な非退化 Hermite 形式が存在するための必要十分条件を $\mathcal{S}^\circ(a)$ の言葉で特徴付けた.

定理 1 ([2])**.** $a\in\mathbb{R}^4$ とし, 同型写像 $\varphi:\mathcal{S}^\circ(a)\xrightarrow{\simeq}\mathcal{M}^\circ(a)$ をとる. このとき $x\in\mathcal{S}^\circ(a)\cap\mathbb{R}^3$ ならば, またそのときに限り $\varphi(x)=[(M_1,M_2,M_3)]\in\mathcal{M}^\circ(a)$ はその作用で不変な非退化 Hermite 形式を持つ.

$a\in\mathbb{R}^4$ が generic であれば, この結果によって不変 Hermite 形式を持つような全ての $\mathcal{M}(a)$ における全てのモノドロミーが特徴付けられたことになる. 論文 [2] ではより一般な状況として仮定 (9) および (12) を除いた場合も扱っており, 次の結果を得ている.

定理 2 ([2])**.** $a\in\mathbb{R}^4$ とする. このとき任意の既約な $[(M_1,M_2,M_3)]\in\mathcal{M}(a)$ に対して, その作用で不変な非退化 Hermite 形式を持つための必要十分条件は, 対応 (11) で定まる $x=(x_1,x_2,x_3)$ が $x\in\mathcal{S}(a)\cap\mathbb{R}^3$ を満たすことである.

以上の結果から, 4 つの特異点を持つ 2 階 Fuchs 型方程式, もしくは階数 2 の Fuchs 型方程式系のなす空間の中に不変 Hermite 形式を持つ方程式 (系) のなす部分空間が存在することがわかる.

Remark 2. 上記の定理 1, 2 の証明は全て構成的である. すなわち不変 Hermite 形式を与える Hermite 行列の具体形も証明の中で与えられている.

参考文献

[1] Y. Haraoka and S. Adachi, Monodromy invariant Hermitian forms for non-rigid Fuchsian differential equations of order three, submitted (2021).

[2] S. Adachi, Monodromy invariant Hermitian forms for second order Fuchsian differential equations with four singularities, preprint (2021).

[3] 原岡喜重, 複素領域における線形微分方程式, 数学書房叢書, 数学書房, 2015.

[4] M. Jimbo, Monodromy problem and the boundary condition for some Painlevé equations, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **18** (1982), 1137-1161.

[5] K. Iwasaki, An area-preserving action of the modular group on cubic surfaces and the Painlevé VI equation, Commun. Math. Phys., **242** (2003), 185-219.

[6] M. Kita and M. Yoshida, Intersection theory for twisted cycles, Math. Nachr., **166** (1994), 287-304.

[7] 大久保謙二郎, モノドロミ群, 月刊マセマティクス, **1** (1980), 489-495.

[8] 吉田正章, 私説 超幾何関数 –対称領域における点配置空間の一意化–, 共立講座 21 世紀の数学 24, 共立出版, 1997.

異方的粘性項を持つ 3 次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の長時間挙動

九州大学大学院数理学府数理学専攻 博士後期課程 2 年
藤井 幹大 (Mikihiro FUJII)

概要

本講演では，3 次元非圧縮性 Navier-Stokes 方程式で，その粘性項が水平方向の変数のみの 2 次元 Laplacian からなる方程式の初期値問題を考察し，粘性項の異方性が解の長時間挙動に与える影響について注目する．特に，速度場の水平成分の時間減衰率は 2 次元の熱核の減衰率と一致するが，速度場の鉛直成分の減衰率は 3 次元の熱核の減衰率と一致することを線形解析と積分方程式における Duhamel 項の分解を行うことにより説明する．さらに解の時刻無限大での漸近系を具体的に決定できることを報告する．

1 導入

本講演では次の 3 次元異方的 Navier-Stokes 方程式の初期値問題を考える:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta_{\mathrm{h}} u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ \nabla \cdot u = 0, & t \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，$u = (u_1(t,x), u_2(t,x), u_3(t,x))$ と $p = p(t,x)$ はそれぞれ，流体の速度場および圧力を表す未知関数であり，$u_0 = (u_{0,1}(x), u_{0,2}(x), u_{0,3}(x))$ は流体の初期時刻における既知の速度場である．また，$\Delta_{\mathrm{h}} = \partial_1^2 + \partial_2^2$ は水平方向の 2 次元 Laplacian であり，$\nabla = (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ は 3 次元勾配である．以下では 3 次元数ベクトル $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して，その水平成分を $a_{\mathrm{h}} := (a_1, a_2)$ と書くことにする．さらに，$\nabla_{\mathrm{h}} = (\partial_1, \partial_2)$ を 2 次元勾配とする．

1.1 種々の関数空間のノルム

まず，関数の解析的特徴を測る際に用いられる種々のノルムを定義する．以下ではノルム $\|\cdot\|_X$ を定義した際にそのノルムが有限であるような関数全体の集合を X と定義することとする．また $X(\mathbb{R}^d; Y)$ と書いた場合は定義域が $\mathbb{R}^d$，終域がノルム空間 Y の関数であって X-ノルムが有限な関数全体を表すこととする．また簡単のため $X(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}) = X(\mathbb{R}^d)$, $\|\cdot\|_{X(\mathbb{R}^d)} = \|\cdot\|_X$ と略記することがある．まず関数の特異性や無限遠方での挙動を調べる際に用いられる L^p-ノルム $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ を

定義する：

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d;Y)} := \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \|f(x)\|_Y^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \qquad (1 \leqslant p < \infty),$$
$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d;Y)} := \inf \left\{ B > 0 \,;\, |\{x \in \mathbb{R}^d \,;\, \|f(x)\|_Y > B\} = 0 \right\}, \qquad (p = \infty).$$

L^p 空間に関数の滑らかさの情報を加えた空間 $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ $(s \in \mathbb{N})$ は Sobolev 空間と呼ばれ，

$$\|f\|_{W^{s,p}} := \sum_{0 \leqslant m \leqslant s} \|\nabla^m f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

と定められる．特に $p = 2$ のときは $H^s(\mathbb{R}^d) = W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ などと定義される．$H^s(\mathbb{R}^d)$ は Fourier 変換を用いて非整数 $s \in \mathbb{R}$ の場合にも拡張することができ，

$$\|f\|_{H^s} := \|(1 + |\xi|^2)\widehat{f}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d_\xi)}$$

と定義される．この Sobolev 空間の定義は簡潔に $H^s(\mathbb{R}^d) = (1 - \Delta)^{-\frac{s}{2}} L^2(\mathbb{R}^d)$ と表現することもある．さらに，$s, \sigma \in \mathbb{R}$ に対して異方的 Sobolev 空間 $H^{\sigma,s}(\mathbb{R}^3)$, $\dot{H}^{\sigma,s}(\mathbb{R}^3)$ を

$$H^{\sigma,s}(\mathbb{R}^3) := (1 - \Delta_{\mathrm{h}})^{-\frac{\sigma}{2}} (1 - \partial_3^2)^{-\frac{s}{2}} L^2(\mathbb{R}^3), \qquad \dot{H}^{\sigma,s}(\mathbb{R}^3) := (-\Delta_{\mathrm{h}})^{-\frac{\sigma}{2}} (-\partial_3^2)^{-\frac{s}{2}} L^2(\mathbb{R}^3)$$

により定義する．また，$\Omega \subset \mathbb{R}$ に対して $C(\Omega; Y)$ は Ω から Y への連続写像全体の集合とする．

1.2 線形熱方程式の長時間挙動

本講演の目的は時刻無限大における方程式 (1) の解の挙動を具体的に調べた研究結果を報告することである．本研究にまつわる先行研究や主結果を述べる前に，簡単な d 次元線形熱方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{2}$$

の長時間挙動を考える．ここで，$\Delta = \partial_1^2 + ... + \partial_d^2$ は $\mathbb{R}^d$ における Laplacian であり，初期値 $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ は既知であるとする．このとき，(2) の解 $u(t, x)$ は Fourier 変換を用いて計算でき，

$$u(t, x) = e^{t\Delta} u_0(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G_d(t, x - y) u_0(y) dy, \qquad G_d(t, x) := (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

と書くことができる．ここで積分核 $G(t, x)$ は d 次元熱核と呼ばれる関数である．このとき，直接的な計算により

$$\|e^{t\Delta} u_0\|_{L^1} \leqslant \|G(t)\|_{L^1} \|u_0\|_{L^1} = \|u_0\|_{L^1},$$
$$\|e^{t\Delta} u_0\|_{L^\infty} \leqslant (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} \|u_0\|_{L^1} \leqslant t^{-\frac{d}{2}} \|u_0\|_{L^1}$$

となる．よって $\|e^{t\Delta} u_0\|_{L^p} \leqslant \|e^{t\Delta} u_0\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \|e^{t\Delta} u_0\|_{L^\infty}^{1-\frac{1}{p}}$ より

$$\|e^{t\Delta} u_0\|_{L^p} \leqslant t^{-\frac{d}{2}(1-\frac{1}{p})} \|u_0\|_{L^1}$$

である．つまり，方程式 (2) の解の L^p ノルムは時刻無限大 $t \to \infty$ において $O(t^{-\frac{d}{2}(1-\frac{1}{p})})$ のオーダーで減衰することがわかる．また，熱核 $G(t,x)$ を空間変数 x について Talyor 展開することで，解 $u(t,x) = e^{t\Delta}u_0(x)$ の時刻無限大における漸近形を得ることができる:

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{d}{2}(1-\frac{1}{p})} \left\| e^{t\Delta}u_0(x) - G(t,x)\int_{\mathbb{R}^d} u_0(y)dy \right\|_{L^p} = 0.$$

1.3 先行研究

初期値問題 (1) の時間大域的適切性は，Chemin-Desjardins-Gallagher-Grenier [1] により初めて考察され，異方的 Sobolev 空間 $H^{0,s}(\mathbb{R}^3)$ $(s > 1/2)$ における小さい初期値に対する時間大域解が構成された．また，解の一意性は Iftimie [5] によって与えられた．ここで大域適切性の微分指数 $s > 1/2$ はスケール劣臨界な指数であり，スケール臨界指数 $s = 1/2$ は鉛直方向の Sobolev 埋め込み $H^s(\mathbb{R}_{x_3}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}_{x_3})$ が破綻するため除外されている．Paicu [8] はスケール臨界な枠組みでの大域適切性を考察し，$L^2(\mathbb{R}^3)$ を基礎とする異方的 Besov 空間 $\mathcal{B}^{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ における小さい初期値に対する時間大域解の唯一存在を証明した．Chemin-Zhang [2] および Zhang-Fang [12] によって Paicu の結果を L^p の枠組みに拡張する研究がなされ，スケール不変な異方的 Besov 空間 $\mathcal{B}_p^{-1+\frac{2}{p},\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ $(2 \leqslant p < \infty)$ における時間大域的適切性が証明された．[7, 9, 11, 13] などにおいて，(1) に関するその他の適切性に関する結果が報告されている．

一方で，方程式 (1) の解の長時間挙動は Ji-Wu-Yang [6] により，小さな初期値 $u_0 \in H^4(\mathbb{R}^3) \cap H^{-\sigma,1}(\mathbb{R}^3)$ $(3/4 \leqslant \sigma < 1)$ に対する解がすべての $t \geqslant 0$ と $|\alpha| \leqslant 1$ をみたす多重指数 $\alpha = (\alpha_{\mathrm{h}}, \alpha_3) \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^2 \times (\mathbb{N}\cup\{0\})$ に対して

$$\|u(t)\|_{H^4\cap H^{-\sigma,1}} \leqslant C\|u_0\|_{H^4\cap H^{-\sigma,1}}, \qquad \|\nabla^\alpha u(t)\|_{L^2} \leqslant C(1+t)^{-\frac{\sigma+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}\|u_0\|_{H^4\cap H^{-\sigma,1}} \tag{3}$$

を満たすことを証明した．ここで，(3) における解の減衰率は線形解 $e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_0$ の減衰率と一致している．さらに Xu-Zhang [10] は初期値に対する正則性の仮定を弱めた枠組みでの長時間挙動を考察しており，$s > 2$, $(1+3s)/\{10(s-1)\} < \sigma < 1$ のとき小さな初期値 $u_0 \in (\dot{H}^{0,s} \cap \dot{H}^{-\sigma,0} \cap \dot{H}^{-\sigma,-\frac{\sigma}{2}-\frac{1}{4}} \cap \dot{H}^{-\frac{1}{2},1})(\mathbb{R}^3)$ に対する時間大域解 $u(t)$ が $t \to \infty$ において $|\alpha_{\mathrm{h}}| \leqslant 1$ である多重指数 $\alpha_{\mathrm{h}} \in (\mathbb{N}\cup\{0\})^2$ に対して

$$\begin{aligned} &\|\nabla_{\mathrm{h}}^{\alpha_{\mathrm{h}}}u(t)\|_{L^2} = O(t^{-\frac{\sigma+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}), \qquad \|\partial_3 u(t)\|_{L^2} = O(t^{-\frac{1}{4}}), \\ &\|\nabla_{\mathrm{h}}^{\alpha_{\mathrm{h}}}u_3(t)\|_{L^2} = O(t^{-\frac{1}{2}(\frac{3}{2}\sigma+\frac{1}{4}+|\alpha_{\mathrm{h}}|)}) \end{aligned} \tag{4}$$

を満たすことを証明した．

本研究の目的は， [6, 10] により報告されている長時間挙動に関する結果を精密化し，方程式のもつ異方性が解の長時間挙動に与える効果を，解の L^p ノルムの減衰と漸近展開の観点から明らかにすることである．

2 主結果

自然数 s に対して $X^s(\mathbb{R}^3) := H^s(\mathbb{R}^3) \cap L^1(\mathbb{R}^2_{x_\mathrm{h}}; (W^{1,1} \cap W^{1,\infty})(\mathbb{R}_{x_3}))$ とおく．また $G_\mathrm{h}(t, x_\mathrm{h})$ は水平方向に空間変数をとる 2 次元の熱核とする:

$$G_\mathrm{h}(t, x_\mathrm{h}) := (4\pi t)^{-1} e^{-\frac{|x_\mathrm{h}|^2}{4t}}, \qquad (t, x_\mathrm{h}) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^2.$$

本研究における主結果は以下の定理である．

定理 1 ([4])**.** 自然数 $s \geqslant 5$ に対して正定数 $\delta = \delta(s)$ が存在して次が成立する：

初期値 $u_0 \in X^s(\mathbb{R}^3)$ が $\nabla \cdot u_0 = 0$ および $\|u_0\|_{X^s} \leqslant \delta$ をみたすとき，初期値問題 (1) の一意解 $u \in C([0, \infty); X^s(\mathbb{R}^3))$ が存在する．また正定数 C が存在して任意の $1 \leqslant p \leqslant \infty$ に対して

$$\|\nabla^\alpha u_\mathrm{h}(t)\|_{L^p} \leqslant C t^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{|\alpha_\mathrm{h}|}{2}} \|u_0\|_{X^s}, \tag{5}$$

$$\|\nabla_\mathrm{h}^{\alpha_\mathrm{h}} u_3(t)\|_{L^p} \leqslant C t^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{|\alpha_\mathrm{h}|}{2}} \|u_0\|_{X^s} \tag{6}$$

がすべての $t > 0$ と $|\alpha| \leqslant 1$ をみたす多重指数 $\alpha = (\alpha_\mathrm{h}, \alpha_3) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^2 \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$ に対して成立する．

さらに $1 \leqslant p \leqslant \infty$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-\frac{1}{p}} \Bigg\| u_\mathrm{h}(t,x) - G_\mathrm{h}(t,x_\mathrm{h}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,\mathrm{h}}(y_\mathrm{h}, x_3) dy_\mathrm{h} + G_\mathrm{h}(t,x_\mathrm{h}) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \partial_3 (u_3 u_\mathrm{h})(\tau, y_\mathrm{h}, x_3) dy_\mathrm{h} d\tau \Bigg\|_{L^p_x} = 0 \tag{7}$$

が成立し，$1 \leqslant p < \infty$ のときは

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})} \left\| u_3(t,x) - G_\mathrm{h}(t,x_\mathrm{h}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,3}(y_\mathrm{h}, x_3) dy_\mathrm{h} \right\|_{L^p_x} = 0 \tag{8}$$

も成立する．

注意 1. (i) 解の水平成分 $u_\mathrm{h}(t)$ の L^p 減衰率 (5) は 2 次元熱核の $L^p(\mathbb{R}^2)$ ノルム $\|G_\mathrm{h}(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}$ の減衰率に一致することがわかる．特に $p = 2$ のとき，(5) は [6] における端点 $\sigma = 1$ の場合に対応する．一方で解の鉛直成分 $u_3(t)$ の減衰率 (6) は 3 次元熱核の $L^p(\mathbb{R}^3)$ 減衰率に一致する．

(ii) 等方的な Burgers 方程式や Navier-Stokes 方程式の場合と異なり，解の水平成分 $u_\mathrm{h}(t)$ の漸近展開 (7) は誤差が $o(t^{-(1-\frac{1}{p})})$ の精度でも線形解のみでは近似できず非線形性の効果が現れる．

(iii) 漸近極限 (8) における $p = \infty$ の場合は一般に不成立である．つまり，ある初期値 $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ が存在して

$$\liminf_{t\to\infty} t^{\frac{3}{2}} \left\| u_3(t,x) - G_\mathrm{h}(t,x_\mathrm{h}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,3}(y_\mathrm{h}, x_3) dy_\mathrm{h} \right\|_{L^\infty_x} > 0$$

が成立する．

(iv) 初期値が付加条件 $|x_{\mathrm{h}}|u_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^2_{x_{\mathrm{h}}};(L^1\cap L^\infty)(\mathbb{R}_{x_3}))$ をみたし，$s \geqslant 9$ かつ $1 < p \leqslant \infty$ のときは漸近展開 (7) と (8) における誤差 $o(t^{-(1-\frac{1}{p})})$ と $o(t^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})})$ はそれぞれ $O(t^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}\log t)$ と $O(t^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2p}})$ に改善される．

3 線形解析

この節では線形解の時間減衰率と長時間挙動について考察する．特に，線形解の第 3 成分 $e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}$ の評価について考える．

補題 1 ([4])．(1) 正定数 C が存在して

$$\|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}\|_{L^p} \leqslant Ct^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u_0\|_{L^1} \tag{9}$$

がすべての $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $t>0$ と $\nabla\cdot u_0 = 0$ をみたす $u_0 = (u_{0,1},u_{0,2},u_{0,3}) \in L^1(\mathbb{R}^3)$ に対して成立する．

(2) $1 \leqslant p \leqslant \infty$ と $\nabla\cdot u_0 = 0$ をみたす $u_0(x) = (u_{0,1},u_{0,2},u_{0,3}) \in L^1(\mathbb{R}^2_{x_{\mathrm{h}}};(L^1\cap L^\infty)(\mathbb{R}_{x_3}))$ に対して，$t\to\infty$ のとき 0 に収束する関数 $\mathcal{R}_p(t)$ と正定数 C が存在して

$$\left\| e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}(x) - G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}})\int_{\mathbb{R}^2} u_{0,3}(y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}} \right\|_{L^p} \leqslant Ct^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})}\mathcal{R}_p(t)^{\frac{1}{p}}\|u_0(x)\|_{L^1}^{1-\frac{1}{p}} \tag{10}$$

がすべての $t>0$ に対して成立する．

証明. まず (9) を示す．初期値の発散 0 条件から $\partial_3 u_{0,3} = -\nabla_{\mathrm{h}}\cdot u_{0,\mathrm{h}}$ であるため，

$$\begin{aligned}
\|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}\|_{L^p} &\leqslant \|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^1_{x_3}}^{\frac{1}{p}}\|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^\infty_{x_3}}^{1-\frac{1}{p}}\\
&\leqslant C\left(t^{-(1-\frac{1}{p})}\|u_{0,3}\|_{L^1}\right)^{\frac{1}{p}}\|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}\partial_3 u_{0,3}\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^1_{x_3}}^{1-\frac{1}{p}}\\
&= Ct^{-\frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})}\|u_{0,3}\|_{L^1}^{\frac{1}{p}}\|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}\nabla_{\mathrm{h}}\cdot u_{0,\mathrm{h}}\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^1_{x_3}}^{1-\frac{1}{p}}\\
&\leqslant Ct^{-\frac{1}{p}(1-\frac{1}{p})}\|u_{0,3}\|_{L^1}^{\frac{1}{p}}\left(t^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}\|u_{0,\mathrm{h}}\|_{L^1}\right)^{1-\frac{1}{p}}\\
&\leqslant Ct^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})}\|u_0\|_{L^1}
\end{aligned}$$

が従う．

次に (10) を示す．

$$F(t,x) := e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}(x) - G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}})\int_{\mathbb{R}^2} u_{0,3}(y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}}$$

とすると

$$\|F(t)\|_{L^p} \leqslant \|F(t)\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^1_{x_3}}^{\frac{1}{p}}\|F(t)\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^\infty_{x_3}}^{1-\frac{1}{p}} \leqslant \|F(t)\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^1_{x_3}}^{\frac{1}{p}}\|\partial_3 F(t)\|_{L^p_{x_{\mathrm{h}}}L^1_{x_3}}^{1-\frac{1}{p}}$$

である．ここで $\mathcal{R}_p(t) := t^{1-\frac{1}{p}}\|F(t)\|_{L^p_{x_\mathrm{h}}L^1_{x_3}}$ とすると，熱核の Taylor 展開により $\mathcal{R}_p(t)$ は $t\to\infty$ において減衰する．一方で初期値の発散 0 条件と部分積分により

$$\partial_3\int_{\mathbb{R}^2}u_{0,3}(y_\mathrm{h},x_3)dy_\mathrm{h}=-\int_{\mathbb{R}^2}\nabla_\mathrm{h}\cdot u_{0,\mathrm{h}}(y_\mathrm{h},x_3)dy_\mathrm{h}=0,$$
$$\partial_3 e^{t\Delta_\mathrm{h}}u_{0,3}(x)=-\int_{\mathbb{R}^2}\nabla_\mathrm{h}G_\mathrm{h}(t,x_\mathrm{h}-y_\mathrm{h})\cdot u_{0,\mathrm{h}}(y_\mathrm{h})dy_\mathrm{h}$$

となるので,

$$\partial_3 F_0(t,x)=-\int_{\mathbb{R}^2}(\nabla_\mathrm{h}G_\mathrm{h})(t,x_\mathrm{h}-y_\mathrm{h})\cdot u_{0,\mathrm{h}}(y_\mathrm{h},x_3)dy_\mathrm{h}$$

である．よって

$$\begin{aligned}\|\partial_3F_0(t,x)\|_{L^p_{x_\mathrm{h}}L^1_{x_3}}&\leqslant\|\nabla_\mathrm{h}G_\mathrm{h}(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}\|u_{0,\mathrm{h}}\|_{L^1}\\&\leqslant Ct^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}\|u_0\|_{L^1}\end{aligned}$$

となる．以上から

$$\|F_0(t)\|_{L^p}\leqslant Ct^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})}\mathcal{R}_p(t)^{\frac{1}{p}}\|u_0\|_{L^1}^{1-\frac{1}{p}}.$$

となり，証明が完了する． □

4 積分方程式の分解

本節では，方程式 (1) に対応する次の積分方程式について考察する:

$$u(t)=e^{t\Delta_\mathrm{h}}u_0-\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta_\mathrm{h}}\mathbb{P}\nabla\cdot(u\otimes u)(\tau)d\tau. \tag{11}$$

ここで $\mathbb{P}=(\delta_{kl}+R_kR_l)_{1\leqslant k,l\leqslant 3}$ は Helmholtz 射影であり，$\{R_k\}_{k=1}^3$ は 3 次元の Riesz 変換を表す．Riesz 変換は L^1 および L^∞ において非有界であるため，積分方程式 (11) を用いて解の L^1,L^∞ ノルムの評価をすることは困難であるように見える．しかし作用素 $e^{(t-\tau)\Delta_\mathrm{h}}\mathbb{P}\nabla\cdot$ を適切に分解することによりこの問題は解決できる．実際，(11) は直接的な計算により次のように Riesz 変換を含まない形に書き換えられる．

補題 2 ([4])**.** ベクトル場 u を積分方程式 (11) の解とする．このとき，次が成立する:

$$\begin{cases}u_\mathrm{h}(t)=e^{t\Delta_\mathrm{h}}u_{0,\mathrm{h}}+\displaystyle\sum_{m=1}^5\mathcal{D}_m^\mathrm{h}[u](t),\\ u_3(t)=e^{t\Delta_\mathrm{h}}u_{0,3}+\displaystyle\sum_{m=1}^3\mathcal{D}_m^\mathrm{v}[u](t)\end{cases} \tag{12}$$

であり，Duhamel 項の分解 $\{\mathcal{D}^{\mathrm{h}}_m[u]\}_{m=1}^5$ と $\{\mathcal{D}^{\mathrm{v}}_m[u]\}_{m=1}^3$ は

$$\mathcal{D}^{\mathrm{h}}_1[u](t) := -\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta_{\mathrm{h}}}\partial_3(u_3u_{\mathrm{h}})(\tau)d\tau,$$
$$\mathcal{D}^{\mathrm{h}}_2[u](t) := -\int_0^t e^{(t-\tau)\Delta_{\mathrm{h}}}\nabla_{\mathrm{h}}\cdot(u_{\mathrm{h}}\otimes u_{\mathrm{h}})(\tau)d\tau,$$
$$\mathcal{D}^{\mathrm{h}}_3[u](t) := \int_0^t \nabla_{\mathrm{h}}e^{(t-\tau)\Delta_{\mathrm{h}}}(u_3(\tau)^2)d\tau,$$
$$\mathcal{D}^{\mathrm{h}}_4[u](t) := -\sum_{k,l=1}^2\int_0^t \nabla_{\mathrm{h}}\partial_k\partial_l K(t-\tau)*(u_ku_l)(\tau)d\tau,$$
$$\mathcal{D}^{\mathrm{h}}_5[u](t) := 2\sum_{k=1}^2\int_0^t \nabla_{\mathrm{h}}\partial_k(-\Delta_{\mathrm{h}})^{\frac12}\widetilde{K}(t-\tau)*(u_3u_k)(\tau)d\tau + \int_0^t \nabla_{\mathrm{h}}\Delta_{\mathrm{h}}K(t-\tau)*(u_3(\tau)^2)d\tau$$

および

$$\mathcal{D}^{\mathrm{v}}_1[u](t) := \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta_{\mathrm{h}}}\nabla_{\mathrm{h}}\cdot(u_3u_{\mathrm{h}})(\tau)d\tau,$$
$$\mathcal{D}^{\mathrm{v}}_2[u](t) := \sum_{k,l=1}^2\int_0^t (-\Delta_{\mathrm{h}})^{\frac12}\partial_k\partial_l\widetilde{K}(t-\tau)*(u_ku_l)(\tau)d\tau,$$
$$\mathcal{D}^{\mathrm{v}}_3[u](t) := 2\sum_{k=1}^2\int_0^t \partial_k\Delta_{\mathrm{h}}K(t-\tau)*(u_3u_k)(\tau)d\tau + \int_0^t (-\Delta_{\mathrm{h}})^{\frac32}\widetilde{K}(t-\tau)*(u_3(\tau)^2)d\tau$$

により定義される．ここで $K(t,x)$ と $\widetilde{K}(t,x)$ は

$$K(t,x) := \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{|x_{\mathrm{h}}|^2}{4(t+s)}}}{4\pi(t+s)}\frac{e^{-\frac{x_3^2}{4s}}}{(4\pi s)^{\frac12}}ds, \qquad \widetilde{K}(t,x) := \mathrm{sgn}(x_3)K(t,x)$$

により定義される積分核である．

5　主結果の証明の概略

本節では定理 1 の証明の概略を述べる．

5.1　時間減衰評価 (5),(6) の証明

時間減衰評価 (5),(6) は線形評価

$$\|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,\mathrm{h}}\|_{L^p} \leqslant Ct^{-(1-\frac1p)}\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2_{x_{\mathrm{h}}};(L^1\cap L^\infty)(\mathbb{R}_{x_3}))},$$
$$\|e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}\|_{L^p} \leqslant Ct^{-\frac32(1-\frac1p)}\|u_0\|_{L^1}$$

および積分核 $K(t)$ に関する評価

$$\begin{aligned}\|\nabla_{\mathrm{h}}^3 K(t)\|_{L^p} &\leqslant \int_0^\infty \left\|\nabla_{\mathrm{h}}^3 G_{\mathrm{h}}(t+s)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \|G_{\mathrm{v}}(s)\|_{L^p(\mathbb{R})}\, ds \\ &\leqslant C\int_0^\infty (t+s)^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{3}{2}} s^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} ds \\ &\leqslant Ct^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

を用いて，continuous argument を適用することで証明できる．特に Duhamel 項の減衰評価は $t\to\infty$ のとき，$|\alpha|\leqslant 1$ である多重指数 $\alpha\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^3$ に対して

$$\begin{aligned}\|\nabla^\alpha \mathcal{D}_1^{\mathrm{h}}[u](t)\|_{L^p} &= O((t^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}),\\ \|\nabla^\alpha \mathcal{D}_2^{\mathrm{h}}[u](t)\|_{L^p} &= O(t^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{1+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}\log t),\\ \|\nabla^\alpha \mathcal{D}_3^{\mathrm{h}}[u](t)\|_{L^p} &= O(t^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{1+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}),\\ \|\nabla^\alpha \mathcal{D}_4^{\mathrm{h}}[u](t)\|_{L^p} &= O(t^{-\frac{9}{8}(1-\frac{1}{p})-\frac{1+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}\log t),\\ \|\nabla^\alpha \mathcal{D}_5^{\mathrm{h}}[u](t)\|_{L^p} &= O(t^{-\frac{9}{8}(1-\frac{1}{p})-\frac{1+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}})\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\|\nabla^\alpha \mathcal{D}_1^{\mathrm{v}}[u](t)\|_{L^p} &= O(t^{-(1-\frac{1}{p})-\frac{1+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}) = O(t^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2p}-\frac{|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}),\\ \|\nabla^\alpha \mathcal{D}_2^{\mathrm{v}}[u](t)\|_{L^p} &= O(t^{-\frac{9}{8}(1-\frac{1}{p})-\frac{1+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}}\log t),\\ \|\nabla^\alpha \mathcal{D}_3^{\mathrm{v}}[u](t)\|_{L^p} &= O(t^{-\frac{9}{8}(1-\frac{1}{p})-\frac{1+|\alpha_{\mathrm{h}}|}{2}})\end{aligned}$$

となる．

5.2 漸近展開 (7), (8) の証明

Fujigaki-Miyakawa [3] の手法を用いて計算することで，

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-\frac{1}{p}} \left\| \mathcal{D}_1^{\mathrm{h}}[u](t,x) + G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \partial_3(u_3 u_{\mathrm{h}})(\tau, y_{\mathrm{h}}, x_3) dy_{\mathrm{h}} d\tau \right\|_{L_x^p} = 0$$

であることがわかる．また，熱核の Taylor 展開により，

$$\lim_{t\to\infty} t^{1-\frac{1}{p}} \left\| e^{t\Delta_{\mathrm{h}}} u_{0,\mathrm{h}}(x) - G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,\mathrm{h}}(y_{\mathrm{h}}, x_3) dy_{\mathrm{h}} \right\|_{L_x^p} = 0$$

である．したがって，以上のことと前小節で述べた非線形項の減衰評価を用いることで

$$
\begin{aligned}
t^{1-\frac{1}{p}} &\Bigg\| u_{\mathrm{h}}(t,x) - G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,\mathrm{h}}(y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}} \\
&\qquad\qquad + G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \partial_3(u_3u_{\mathrm{h}})(\tau,y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}}d\tau \Bigg\|_{L^p_x} \\
&\leqslant t^{1-\frac{1}{p}} \left\| e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,\mathrm{h}}(x) - G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,\mathrm{h}}(y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}} \right\|_{L^p_x} \\
&\quad + t^{1-\frac{1}{p}} \left\| \mathcal{D}^{\mathrm{h}}_1[u](t) + G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \partial_3(u_3u_{\mathrm{h}})(\tau,y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}}d\tau \right\|_{L^p_x} + \sum_{m=2}^{5} t^{1-\frac{1}{p}} \|\mathcal{D}^{\mathrm{h}}_m[u](t)\|_{L^p_x} \\
&\leqslant t^{1-\frac{1}{p}} \left\| e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,\mathrm{h}}(x) - G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,\mathrm{h}}(y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}} \right\|_{L^p_x} \\
&\quad + t^{1-\frac{1}{p}} \left\| \mathcal{D}^{\mathrm{h}}_1[u](t) + G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \partial_3(u_3u_{\mathrm{h}})(\tau,y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}}d\tau \right\|_{L^p_x} + Ct^{-\frac{1}{2}}\log t \\
&\to 0 \qquad \text{as } t\to\infty
\end{aligned}
$$

となり，(7) を得る．

次に (8) を示す．補題 1 と前小節で述べた非線形項の減衰評価から．

$$
\begin{aligned}
t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})} &\left\| u_3(t,x) - G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,3}(y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}} \right\|_{L^p_x} \\
&\leqslant t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})} \left\| e^{t\Delta_{\mathrm{h}}}u_{0,3}(x) - G_{\mathrm{h}}(t,x_{\mathrm{h}}) \int_{\mathbb{R}^2} u_{0,3}(y_{\mathrm{h}},x_3)dy_{\mathrm{h}} \right\|_{L^p_x} + \sum_{m=1}^{3} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})} \|\mathcal{D}^{\mathrm{v}}_m[u](t)\|_{L^p_x} \\
&\leqslant C\mathcal{R}_p(t)^{\frac{1}{p}} \|u_0\|_{L^1}^{1-\frac{1}{p}} + Ct^{-\frac{1}{2p}} + Ct^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{8}(1-\frac{1}{p})}\log t.
\end{aligned}
$$

上式の最右辺は，$p<\infty$ であれば，$t\to\infty$ のとき 0 に収束する．以上によって証明が完了した．

参考文献

[1] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, and E. Grenier, M2AN Math. Model. Numer. Anal. 34 (2000), 315-335.

[2] J.-Y. Chemin and P. Zhang, Comm. Math. Phys. 272 (2007), 529-566.

[3] Y. Fujigaki and T. Miyakawa, SIAM J. Math. Anal. 33 (2001), 523-544.

[4] M. Fujii, *Large time behavior of solutions to the 3D anisotropic Navier-Stokes equation*, arXiv:2108.11940v2.

[5] D. Iftimie, SIAM J.Math. Anal. 33 (2002), 1483-1493.

[6] R. Ji, J. Wu, and W. Yang, J. Differential Equations 290 (2021), 57-77.

[7] Y. Liu, M. Paicu, and P. Zhang, Arch. Ration. Mech. Anal. 238 (2020), 805-843.

[8] M. Paicu, Rev. Mat. Iberoamericana 21 (2005), 179-235.

[9] M. Paicu and P. Zhang, Comm. Math. Phys. 307 (2011), 713-759.

[10] L. Xu and P. Zhang, arXiv:2107.06453.

[11] K. Yan and Z. Yin, Nonlinear Anal. Real World Appl. 32 (2016), 52-73.

[12] T. Zhang and D. Fang, J. Math. Pures Appl. (9) 90 (2008), 413-449.

[13] T. Zhang, Comm. Math. Phys. 287 (2009), 211-224.

充足因子環と測度付き同値関係

早稲田大学大学院教育学研究科
道本裕太 (Yuta MICHIMOTO)

概要

測度付き同値関係から von Neumann 環を構成することができる. どのような測度付き同値関係であれば充足因子環を誘導するのか, を主題とした研究で得られた結果について発表する. 本稿では, その研究に至った経緯や予備知識をまとめ, 本研究の主定理を紹介する.

1 はじめに

作用素環論は函数解析学における一分野であり, Hilbet 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体の成す環 $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ の部分環である, C* 環や von Neumann 環と呼ばれる対象を主に取り扱う. 中心が自明な von Neumann 環を因子環という. タイトルにある, 充足因子環とは von Neumann 環の重要なクラスである. また, エルゴード作用とそれに付随する von Neumann 環の関係を調べることは作用素環論の創成期からの基本的な問題である. そこで, 本研究ではエルゴード理論の文脈で登場する測度付き同値関係と充足因子環の関係性について調べた.

無限次元の世界を扱う作用素環論において, 有限次元近似性をもつ対象は重宝され, より良く調べられている. 原典である Murray–von Neumann の論文において, 有限次元近似性をもつ (II_1 型と呼ばれる) 因子環は同型を除いてただ一つであることが示されている. また, 作用素環論において重要な概念の一つが従順性である. 従順性はもともと群論の言葉であり, 左不変な有限加法的測度をもつときをいう (沢山の同値条件が存在する). von Neumann 環の従順性は, 従順群の群環から誘導された von Neumann 環の性質と対応する. 有名な Connes の結果 ([Con76]) により, von Neumann 環が従順であることと有限次元近似性をもつことは同値である. このように, 従順環については多くのことが解明されているが, 非従順因子環の構造の解析はより困難である. 例えば, 非可換な自由群 $\mathbb{F}_n$ は非従順群であるから, その群 von Neumann 環 $L(\mathbb{F}_n)$ は非従順環であるが, これらが生成元の個数に依存するかは長年の未解決問題である. このような構造が複雑である非従順環の中でも扱うことができ, 研究が進んでいるクラスの一つが充足因子環である.

因子環が充足的であるとは, その自己同型群において内部自己同型全体の成す部分群が (然るべき位相で) 閉となるときをいう. これは Connes が von Neumann 環の自己同型群を調べている際に導入された概念である. 「どのような群やエルゴード作用から誘導される因子環が充足的であるか」は自然な問題であるが, 現在では多くのことが解明されている. 例えば, 非可換自由群の群 von Neumann 環 $L(\mathbb{F}_n)$ は充足因子環であり, もっと一般に内部従順でない離散群 Γ の群 von Neumann 環 $L(\Gamma)$ は充足的である (この逆は成り立たず, 反例が構成されている). また, 内部従順でない離散群

の強エルゴードな保測作用から誘導される因子環は充足的であり, この非特異作用版も近年証明されている. 私は, エルゴード作用から構成される因子環の充足性に興味をもち, その一般化に相当する測度付き同値関係から誘導される因子環の充足性を調べた. 本稿は, その研究の前提知識や経緯, 得られた結果の内容をまとめたものである.

2 von Neumann 環に関する基礎事項

本節では, von Neumann 環に関する基礎事項について紹介する. より詳しい内容については, [Tak1] 等のテキストを参照せよ.

M を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素全体の成す Banach 環 $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ の単位的 $*$ 部分環とする. $*$ をとる操作は, 行列環でいう共役をとる操作に対応する. 二重可換子環 M'' が M 自身と一致するとき, M を **von Neumann 環**という. 可換子環とは $A \subset \mathbf{B}(\mathcal{H})$ について $A' := \{\, T \in \mathbf{B}(\mathcal{H}) \mid \forall a \in A,\, aT = Ta \,\}$ と定められたものであり, 二重可換子環を $A'' := (A')'$ と書くことにする. von Neumann の二重可換子定理より, von Neumann 環であることと, 強作用位相で閉じていることとは同値 (弱作用素位相に関してでも同値) であることに注意する. つまり, $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ において各点収束の位相について閉じている単位的 $*$ 部分環が von Neumann 環である. 一方で, 一様収束にあたるノルム収束について閉じている部分環が C* 環である. ノルム位相の方が強作用素位相よりも強いので, von Neumann 環は C* 環である. 掛け算作用素によって, $L^\infty(X,\mu)$ は $\mathbb{B}(L^2(X,\mu))$ 上の可換な von Neumann 環とみなせる. 実は, 可換な von Neumann 環に対して, それと同型となるような L^∞ 環をとることができる. このような観点から, von Neumann 環論は非可換積分論とも言われることがある.

von Neumann 環 M が**因子環**であるとは, その中心 $\mathcal{Z}(M) = M \cap M'$ が自明であるときをいい, 可分な von Neumann 環は因子環の直積分に分解される. von Neumann 環が可分であるとは前双対がノルム位相について可分であることであり, 可分な Hilbert 空間上の von Neumann 環は可分である. 以降は, Hilbert 空間に対して可分性を仮定する. 次に, 群や群作用から誘導される因子環の具体例について紹介する.

例 **2.1** (群 von Neumann 環)**.** Γ を可算離散群とし, λ を Γ の左正則表現とする. つまり, λ は $\lambda_s(f)(t) := f(s^{-1}t)$ $(s,t \in \Gamma)$ と定められた $\ell^2(\Gamma)$ 上のユニタリ表現のことである. このとき,

$$L(\Gamma) := \lambda(\Gamma)'' \subset \mathbf{B}(\ell^2(\Gamma))$$

を Γ の群 **von Neumann 環**という. 可算群 Γ に対して, Γ が無限共役類群 (ICC 群) であることと, 群 von Neumann 環 $L(\Gamma)$ が因子環であることは同値である. 全ての非自明な共役類が無限集合であるとき, 無限共役類群であるという. この特徴付けは古典的な結果であるが, 一方で局所コンパクト群の場合は解明されていない (完全不連結群でもよくわかっていない).

例 **2.2** (群測度 von Neumann 環)**.** $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ を離散群 Γ の (標準的) 確率測度空間上の非特異作用とする. ここで, 作用写像 $G \times X \to X$ が可測であるとき測度空間上の作用といい, 非特異作用とは, 任意の $s \in \Gamma$ に対して $s_*\mu$ と μ が測度の意味で同値であるものをいう. ただし, $s_*\mu$ は μ の $s \in \Gamma$ による押し出し測度である. このとき, $\alpha_s(f)(t) := f(s^{-1}t)$ と定めれば Γ の可換 von

Neumann 環 $L^\infty(X,\mu)$ 上の作用 α が誘導される．この作用 $\Gamma \curvearrowright L^\infty(X,\mu)$ を用いて, 半直積群の構成のようにして新たな von Neumann 環を次のように構成することができる．まず, Hilbert 空間 $\mathcal{H} := L^2(X,\mu) \otimes \ell^2(\Gamma)$ とおき, $\mathcal{H}$ 上の Γ の $*$ 表現 $\pi_\alpha \colon \Gamma \to \mathbf{B}(\mathcal{H})$ を $\pi_\alpha(f)(\xi \otimes \delta_s) := \alpha_s(f) \otimes \delta_s$ $(f \in L^\infty(X,\mu), \xi \in L^2(X,\mu), s \in \Gamma)$ と定める．また, $u_s := 1 \otimes \lambda_s$ $(s \in \Gamma)$ とおく．ここで, 関係式 $\pi_\alpha(\alpha_s(f)) = u_s \pi_\alpha(f) u_s^*$ $(s \in \Gamma, f \in L^\infty(X,\mu))$ をみたすことに注意する．このとき,

$$L^\infty(X) \rtimes \Gamma := \{\, \pi_\alpha(f), u_s \mid f \in L^\infty(X,\mu), s \in \Gamma \,\}'' \subset \mathbf{B}(\mathcal{H})$$

を群測度 **von Neumann** 環という．では群環の場合と同様に, いつ因子環となるのかが問題となる．そのために, 作用について 2 つの概念を導入する．非特異作用 $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ が (本質的に) 自由であるとは, ほとんど至る所の $x \in X$ について固定部分群が自明であるときをいい, エルゴード的であるとは, すべての Γ 不変な可測集合 $U \subset X$ が自明となる (つまり, 任意の $s \in \Gamma$ に対して $\mu(U \triangle sU) = 0$ ならば $\mu(U)(1-\mu(U)) = 0$ となる) ときをいう．自由作用 $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ に対して, この作用がエルゴード的であることと構成された群測度 von Neumann 環が因子環であることは同値である．

例 2.1 のように Γ が ICC 群のとき $L(\Gamma)$ は因子環となり, さらに有界線形汎関数を $\tau \colon L(\Gamma) \ni x \to \langle x\delta_e, \delta_e \rangle_{\ell^2(\Gamma)} \in \mathbb{C}$ と定めれば, τ は正規忠実なトレース状態である．つまり, τ の作用素ノルムは 1 (τ は状態である) で, 弱作用素位相について連続 (正規性) であり, $\tau(x^*x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (忠実性), $\tau(xy) = \tau(yx)$ $(x, y \in L(\Gamma))$(トレース性) をみたすことをいう．一般に, 因子環 M が II_1 型であるとは, 無限次元かつ正規忠実なトレース状態をもつときをいう．特にトレース性が重要であり, これは環がある種の可換性をもつことを意味する．トレース性をもたない因子環は III 型であるという．群測度 von Neumann 環の文脈では, II_1 型であるか III 型であるかは, 元の作用が保測的か非特異的かに依存する．III 型環の解析は II_1 型因子環よりも困難であり, 冨田竹崎理論という道具が必要となる．しかし, III 型環の構造については多くの紙面が必要となるため割愛する．詳しくはテキスト [Tak2] を参照せよ．本研究では III 型因子環や非特異作用も扱う．

3 測度付き同値関係と von Neumann 環

本節では, 測度付き同値関係と von Neumann 環の関係について紹介する．測度空間上の群作用が与えられたとき, 軌道同値関係と呼ばれる測度付き同値関係が定まる．Γ を可算無限群, (X,μ) を (標準的) 確率空間とし, $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ は非特異作用であるとする．各 $x, y \in X$ について x が y の Γ 軌道に含まれるとき, $x \sim_\Gamma y$ と書くことにし, $\sim_\Gamma$ は X 上の同値関係を定める．$\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X) := \{\, (x,y) \in X \times X \mid x \sim_\Gamma y \,\}$ と書くことにする．このとき, $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ は以下の条件をみたす．

- $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ の (同値関係 $\sim_\Gamma$ の) 各同値類は可算集合である．
- $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ は $(X \times X, \mu \otimes \mu)$ の中で可測である．
- 可測集合 $E \subset X$ について $[E]_\Gamma := [E]_{\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)} := \{\, x \in X \mid \exists y \in X : x \sim_\Gamma y \,\}$ と定めるとき, $\mu(E) = 0$ ならば $\mu([E]_\Gamma) = 0$ となる．

このような $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ を $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ の軌道同値関係という．より一般に, X 上の同値関係 $\mathcal{R}$ がこ

れらの 3 条件をみたす ($\sim_\Gamma$ を $\mathcal{R}$ の同値関係とみる) とき, 非特異な測度付き同値関係という. 以降は, 単に測度付き同値関係と呼ぶことにする.

例 2.2 では, 非特異作用から von Neumann 環を構成した. 今回は, 測度付き同値関係から von Neumann 環を構成する方法を紹介する. オリジナルは Krieger によって導入されたが, その後に Feldman–Moore によって改良された. 以下は, Feldman–Moore による構成法を基にしている. $\mathcal{R}$ を (標準的) 確率測度空間 (X, μ) 上の非特異な測度付き同値関係とする. このとき, 左 (右) 数え上げ測度と呼ばれる $\mathcal{R} \subset X \times X$ 上の測度 $\mu_l(\mu_r)$ を, 可測集合 $A \subset \mathcal{R}$ について

$$\mu_l(A) := \int_X \#\{\, y \in X \mid (x, y) \in A \,\}\, d\mu(x),$$
$$\mu_r(A) := \int_X \#\{\, x \in X \mid (x, y) \in A \,\}\, d\mu(y).$$

と定める. ここで, $\mathcal{R}$ の非特異性は μ_l と μ_r が測度の意味で同値であることに対応する. 作用の場合は $s_*\mu$ と μ の同値性と対応していたことに注意する. $L^\infty(\mathcal{R}, \mu_l)$ 内で左有限と呼ばれる, 有界かつ十分小さい台をもつような関数全体を $\mathcal{M}_f(\mathcal{R})$ と書くことにする. $\mathcal{M}_f(\mathcal{R})$ において, 行列の積のような演算を導入し環を構成する. $F, G \in \mathcal{M}_f(\mathcal{R})$ に対して, 積を

$$F * G := \sum_{z \in \mathcal{R}[x]} F(x, z) G(z, y)$$

と定める. ただし, $\mathcal{R}[x]$ は $\mathcal{R}$ における $x \in X$ の同値類とする. さらに, $F \in \mathcal{M}_f(\mathcal{R})$ の共役を $F^*(x, y) := \overline{F(y, x)}$ と定める. 最後に, von Neumann 環を構成するために $\mathcal{M}_f(\mathcal{R})$ を $L^2(\mathcal{R}, \mu_l)$ 上に表現する. $F \in \mathcal{M}_f(\mathcal{R})$ に対して $L_F \in \mathbf{B}(L^2(\mathcal{R}, \mu_l))$ を

$$(L_F \xi)(x, y) := \sum_{z \in \mathcal{R}[x]} F(x, z) \xi(z, y), \quad \xi \in L^2(\mathcal{R}, \mu_l)$$

と定めれば, $L_F L_G = L_{F*G}$ と $L_F^* = L_{F^*}$ をみたす. 以上のようにして, $\{\, L_F \mid F \in \mathcal{M}_f(\mathcal{R}) \,\}$ を $\mathbf{B}(L^2(\mathcal{R}, \mu_l))$ 内の $*$ 部分環としてみなせる. よって, 次のように von Neumann 環

$$L(\mathcal{R}) := \{\, L_F \mid F \in M_f(\mathcal{R}) \,\}'' \subset \mathbf{B}(L^2(\mathcal{R}, \mu_l)).$$

を定めることができる. 軌道同値関係 $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ も測度付き同値関係であった. 実は, 作用 $\Gamma \curvearrowright X$ が自由であれば, 群測度 von Neumann 環 $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ と $L(\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X))$ は同型となる. また, 群測度 von Neumann 環のときと同様, $L(\mathcal{R})$ が因子環となることは $\mathcal{R}$ のエルゴード性が保証する. 測度付き同値関係 $\mathcal{R}$ がエルゴード的であるとは, 可測集合 $U \subset X$ で U は $\mathcal{R}$ 不変である (零集合を除いて $U = [U]_\mathcal{R}$ をみたす) とき U は自明である ($\mu(U)(1 - \mu(U)) = 0$ である) ことをいう.

最後に, 測度付き同値関係 $\mathcal{R}$ と von Neumann 環 $L(\mathcal{R})$ の対応について紹介する. 本稿の冒頭でも述べた通り, エルゴード作用と von Neumann 環は密接な関係にあり, その一つの理由として次の Sinegr の定理が挙げられる.

定理 3.1 (Singer)**.** $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ をそれぞれ (X_1, μ_1), (X_2, μ_2) 上の測度付き同値関係とする. このとき, $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ が同型であることと, $\Phi(L^\infty(X, \mu_1)) = L^\infty(X_2, \mu_2)$ をみたすような $*$ 同型写像 $\Phi\colon L(\mathcal{R}_1) \to L(\mathcal{R}_2)$ が存在することは同値である.

この主張について幾つか注意を述べる．まず, $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ が同型であるとは, Borel 同型写像 $\theta\colon X_1 \to X_2$ で θ は各同値類を保ち, $\theta_*\mu$ と μ が測度の意味で同値であるものが存在するときをいう．次に, 定理 3.1 の主張では, 暗に $L^\infty(X_i,\mu_i)$ を $L(\mathcal{R}_i)$ の部分環とみなしている．一般に, $L^\infty(X,\mu)$ は $\mathcal{M}_f(\mathcal{R})$ の対角成分としてみることができる．実際, $f \in L^\infty(X,\mu)$ に対して $F(x,y) := f(x)1_\Delta(x,y)$ という対応を考えればよい．ただし, 1_Δ は対角集合の定義関数である．さらに, $L^\infty(X,\mu) \subset L(\mathcal{R})$ は Cartan 部分環と呼ばれる良い部分環である (定義は割愛する)．Cartan 部分環には全体の環から (ある種の) 射影が落ちるため, その部分環の情報を活用することができる．Singer の定理は測度付き同値関係の同型は von Neumann 環の同型とその Cartan 部分環を写すことに対応することを述べている．ここ 20 年ほどで, von Neumann 環の Cartan 部分環の位置を特定する技術は大きく進展があり, この技術はエルゴード作用から構成される von Neumann 環に関する剛性問題を解明する上で重要である．

4　充足因子環に関する背景

本節では, 充足因子環の定義や諸性質を紹介し, 本研究の動機を述べたい．前節は, 測度付き同値関係と von Neumann 環の対応 (定理 3.1) について述べた．Cartan 部分環に関する研究等は盛んに行われているが, 本研究では「どのような測度付き同値関係 (もしくは作用) であれば, 誘導された von Neumann 環が良い条件をもつのか？」を主題とする．その目標としたい von Neumann 環の条件が充足性である．

充足性は Connes が von Neumann 環の自己同型群の構造を調べる際に導入した概念である．von Neumann 環 M の自己同型群 $\mathrm{Aut}(M)$ の位相は, $\alpha_i \to \alpha$ の収束を $\|\varphi\circ\alpha_i - \varphi\circ\alpha\| \to 0$, $\varphi \in M_*$ として定めたものを考える．ただし, M_* は M の前双対であり, 正規性という von Neumann 環を考える上で必要な連続性を備える M 上の線形汎関数全体のことである．(本稿では, M_* がノルム可分である場合しか扱わない．) また, $\alpha \in \mathrm{Aut}(M)$ が内部的であるとは, $\alpha = \mathrm{Ad}(u)$ をみたすようなユニタリ元 $u \in M$ が取れるときをいう．内部的な自己同型全体を $\mathrm{Int}(M)$ と表す．$\mathrm{Int}(M)$ は $\mathrm{Aut}(M)$ の正規部分群であることに注意する．このとき, 充足性は以下のように定義される．

定義 4.1 (Connes [Con74])**.** M を von Neumann 環とする．$\mathrm{Int}(M)$ が $\mathrm{Aut}(M)$ で閉であるとき, M は**充足的**であるという．

I 型因子環 (ある $\mathbf{B}(\mathcal{H})$ と同型となる因子環) の任意の自己同型は内部的であることから, I 型因子環は充足的であることに注意する．

因子環 M に対して中心列を用いた充足性の特徴付けがある．有界列 $(x_n)_n \subset M$ について,

- 任意の $\xi \in L^2(M)$ に対して $\|x_n\xi - \xi x_n\|_{L^2(M)} \to 0$ が成り立つとき, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ は**中心列**であるという．
- 有界列 $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ で $*$ 強作用素位相について $x_n - \lambda_n 1_M \to 0$ をみたすものが存在するとき, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ は**自明**であるという．

実は, von Neumann 環 M が表現する Hilbert 空間を (ある意味で) 標準的に取ることができ, その

Hilbert 空間を $L^2(M)$ と書いている．さらに, $L^2(M)$ には両側 M 加群としての構造が入ることに注意する．以上の用語により, 充足性は次のように特徴付けられる．

命題 4.2 (Connes [Con74])**.** M を因子環とする．M が充足的であることと, 任意の M の中心列が自明であることは同値である．

次に, 充足因子環の具体例について述べる．Murray–von Neumann の論文 [MvN43] から次が得られる．

(1) 有限次元近似性をもつ II_1 型因子環は充足的でない．
(2) 非可換自由群 $\mathbb{F}_n$ の群 von Neumann 環 $L(\mathbb{F}_n)$ は充足的である．ここで, $\mathbb{F}_n$ は ICC 群なので $L(\mathbb{F}_n)$ は因子環であることに注意する．

この当時はまだ充足性は導入されておらず, 性質 Γ と呼ばれる別の概念を用いて示された．この結果から, (非可換) 自由群 von Neumann 環は有限近似性を持たないこともわかる．(1) と関連して, より一般に I 型でない従順因子環は充足的でないことが知られている．一方で, (2) と関連して, より一般に次のことが示された．

定理 4.3 (Effros [Eff73])**.** 内部従順的でない可算無限群の群 von Neumann 環は充足因子環である．

内部従順でない群は従順でなく, 自動的に ICC 群であることに注意する．非可換自由群 $\mathbb{F}_n$, 性質 (T) をもつ ICC 群や ICC な (Gromov の意味での) 双曲群は内部従順でない．

次に, 群測度 von Neumann 環と充足性の関係について紹介する．そのために, 強エルゴード性という作用の条件を導入する．Γ を可算群, (X, μ) を (標準的) 確率測度空間とし, $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ を非特異作用とする．$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を X の可測集合の列とするとき,

- 任意の $s \in \Gamma$ に対して $\mu(U_n \triangle sU_n) \to 0$ となるとき, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は Γ 概不変であるという．
- $\mu(U_n)(1 - \mu(U_n)) \to 0$ をみたすとき, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は自明であるという．

定義 4.4 (Schmidt)**.** 上の記号のもと, 作用 $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ が強エルゴードであるとは, 任意の概不変列が自明であることをいう．

強エルゴード作用はエルゴード的であることに注意する．全ての非従順な可算群について, その Bernoulli 作用 $\Gamma \curvearrowright ([0, 1]^\Gamma, \mathrm{Leb}^{\otimes\Gamma})$ は強エルゴードな自由保測作用である (この非特異作用版は難しい話題となる)．一方で, すべてのエルゴード的な自由非特異作用 $\mathbb{Z} \curvearrowright (X, \mu)$ は強エルゴード的でない．より一般に, 従順な非特異作用は強エルゴード的でない．上で紹介した Effros の結果 (定理 4.3) の群測度 von Neumann 環版が以下の定理である．

定理 4.5 (Choda [Cho81])**.** 可算無限群 Γ が内部従順でなく, $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ が強エルゴードな自由保測作用であれば, その群測度 von Neunann 環 $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ は充足因子環である．

さらに近年, Choda の結果の非特異作用版についても示されている．それは, 群に対して双完全性という, 多くの群がみたすような条件に関する主張となっている．可算群 Γ が双完全であるとは, Γ

が完全群であり, 次の条件

$$\exists m\colon \Gamma \ni x \mapsto m_x \in \mathrm{Prob}(\Gamma),\quad \forall s,t \in \Gamma,\quad \lim_{x\to\infty} \|m_{sxt} - s_* m_x\|_{\ell^1(\Gamma)} = 0$$

をみたすことである. 後半の条件は性質 **(S)** と呼ばれる.

定理 4.6 (Houdayer–Isono [HI15])**.** 可算群 Γ が性質 (S) をみたし, (X,μ) は (非原子的な標準的) 確率測度空間とする. $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ が強エルゴードな自由非特異作用であれば, その群測度 von Neunann 環 $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ は充足因子環である.

Brothier–Deprez–Vaes によって, 局所コンパクト群に対しても双完全性や性質 (S) が導入された ([BDV18]). そこで, Houdayer–Isono の結果が局所コンパクト群についても成立するのか？ という疑問が本研究の動機であった.

5　なぜ測度付き同値関係が必要となったのか

4 節で紹介した通り, 離散群の作用 $\Gamma \curvearrowright (X,\mu)$ の群測度 von Neumann 環 $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ がいつ充足的であるかは既に解明されている. $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ は軌道同値関係から誘導されたものだが, なぜ一般の測度付き同値関係 $\mathcal{R}$ の von Neumann 環 $L(\mathcal{R})$ を考える必要があったのかを述べたい. 局所コンパクト群 G の作用から構成される因子環 $L^\infty(X) \rtimes G$ については, 離散群の場合と異なった問題点が幾つかある. 一つ目として, 3 節で述べたように離散群の場合は Cartan 部分環と呼ばれる群測度 von Neumann 環の部分環が重要な役割を担っていた. しかし, 局所コンパクト群の場合は $L^\infty(X) \rtimes G$ において $L^\infty(X)$ が Cartan 部分環とならない. そのため, $L^\infty(X) \rtimes G$ から $L^\infty(X)$ に良い射影が落ちないので, 作用 $G \curvearrowright (X,\mu)$ の情報を全体の環に反映させることが困難となる. 二つ目として, 離散群 Γ の場合は, 軌道同値関係 $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ は測度付き同値関係となり, 群測度 von Neumann 環 $L^\infty(X) \rtimes \Gamma$ は $\mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$ から誘導されたものとしてみなせた. しかし, そもそも局所コンパクト群 G の場合は軌道同値関係が可算性を失い, 測度付き同値関係を成さない. 以上のように, 局所コンパクト群の作用を考えると根本的な問題が発生する. その状況を打開する道具として, cross section を考える方法がある.

corss section の詳しい定義は述べないが, これは (X,μ) の可測部分集合であり, corss section 上に $\mathcal{R}(G \curvearrowright X)$ を制限することによって, $\mathcal{R}(G \curvearrowright X)$ から元の作用 $G \curvearrowright X$ の十分な情報を持った測度付き同値関係を取り出すことができる (これを $\mathcal{R}_0$ と書くことにする). 例えば, $G \curvearrowright X$ が非特異であれば $\mathcal{R}_0$ は (同値関係として) 非特異であり, $G \curvearrowright X$ と $\mathcal{R}_0$ のエルゴード性は同値である. そして, いまの興味は群測度 von Neumann 環 $L^\infty(X) \rtimes G$ の充足性であるが, これも $L(\mathcal{R}_0)$ の構造が大きく影響する. なお, $G \curvearrowright X$ がエルゴード的かつ自由非特異作用であれば, $L^\infty(X) \rtimes G$ も $L(\mathcal{R}_0)$ も因子環となることに注意する. 実際, うまく $L^\infty(X) \rtimes G$ の射影 p を選べば, $p(L^\infty(X) \rtimes G)p \cong L(\mathcal{R}_0) \mathbin{\overline{\otimes}} \mathbf{B}(L^2(U))$ が成立する. ここで, von Neumann 環の射影とは Hilbert 空間の直交射影のことであり, U は G の単位元のある近傍である.

目標の問題は, 「性質 (S) をもつ局所コンパクト群 G について $G \curvearrowright X$ が強エルゴード的な自由非特異作用に対して, その群測度 von Neumann 環 $L^\infty(X) \rtimes G$ (これは因子環となっている) は充足的か?」であった. このために Deprez が導入した測度付き同値関係の性質 (S) を経由する ([Dep19]).

性質 (S) をもつ G のエルゴード的な自由非特異作用 $G \curvearrowright X$ について, cross section を用いて構成した $\mathcal{R}_0$ は性質 (S) をもつことから, $L(\mathcal{R}_0)$ の問題に帰着させて肯定的に解決することができる. 以上のような経緯により, 性質 (S) をみたす測度付き同値関係から誘導された von Neumann 環の構造を調べる必要に至った.

6　主結果の紹介

4 節と 5 節で述べた通り, 局所コンパクト群の作用から構成される因子環の充足性をみるために, 測度付き同値関係 $\mathcal{R}$ の因子環 $L(\mathcal{R})$ の構造に着目した. 本研究で得られた主結果は次の定理である.

定理 6.1. $\mathcal{R}$ が (標準的) 確率空間 (X, μ) 上の強エルゴード的な測度付き同値関係で性質 (S) をもてば, $L(\mathcal{R})$ は充足因子環である.

測度付き同値関係 $\mathcal{R}$ の強エルゴード性は, 作用の場合と対応するように定義される. この結果はまさしく Houdayer–Isono の結果 (定理 4.6) の測度付き同値関係版となっている. 局所コンパクト G 上の作用 $G \curvearrowright X$ について, cross section を通りして作用の情報を十分にもった測度付き同値関係 $\mathcal{R}_0$ を取り出せることを紹介した. もし, $G \curvearrowright X$ が強エルゴード作用であれば $\mathcal{R}_0$ も強エルゴード的であることがわかる. よって, 5 節で紹介した同型 $p(L^\infty(X) \rtimes G)p \cong L(\mathcal{R}_0) \mathbin{\overline{\otimes}} \mathbf{B}(L^2(U))$ を経て, 上の系を用いれば目標であった次の主張が得られる.

定理 6.2. G を局所コンパクト群として, $G \curvearrowright X$ を自由な非特異作用とする. もし G が性質 (S) をみたし $G \curvearrowright X$ が強エルゴード的であれば, $L^\infty(X) \rtimes G$ は充足因子環である.

7　おわりに

本稿では, 局所コンパクト群の作用から構成される von Neumann 環の充足性を動機に, 測度付き同値関係について注目した. 離散群の作用に関する既存の結果を局所コンパクトについても証明することができたため, この先の研究興味は局所コンパクト群特有の具体例を構成することである. 現状では, 非可換自由群 $\mathbb{F}_n$ を含む局所コンパクト群を考えて, 結局 $\mathbb{F}_n$ の強エルゴード作用の話に帰着されてしまう. また, 離散群であっても強エルゴード的な非特異作用の具体例を構成することが困難であることが多い. 局所コンパクト群の場合で面白い非特異作用を構成できるのか, も問題である. Houdayer–Isono の充足因子環に関する結果は Ozawa による別証明も知られており, $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Z})$ などの双完全でない離散群についても充足性を示している. よって, 局所コンパクト群で性質 (S) をもたない $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ の強エルゴード的な自由非特異作用 $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}) \curvearrowright X$ について, 群測度 von Neumann 環 $L^\infty(X) \rtimes \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ は充足因子環であるか? も興味のある問題である.

参考文献

[BDV18] A. Brothier, T. Deprez, and S. Vaes, *Rigidity for von Neumann algebras given by locally compact groups and their crossed products*, Comm. Math. Phys. **361** (2018), 85–125.

[Cho81] M. Choda, *Inner amenability and fullness*, Proc. Amer. Math. Soc. **86** (1982), 663–666.

[Con74] A. Connes, *Almost periodic states and factors of type III_1*, J. Funct. Anal. **16** (1974), 415–445.

[Con76] A. Connes, *Classification of injective factors*, Ann. of Math. (2) **104** (1976), no. 1, 73–115.

[Eff73] E.G. Effros, *Property Γ and inner amenability*, Proc. Amer. Math. Soc. **47** (1975), 483–486.

[Dep19] T. Deprez, *Ozawa's class $\mathcal{S}$ for locally compact groups and unique prime factorization of group von Neumann algebras*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **150** (2019), 2656–2681.

[HI15] C. Houdayer and Y. Isono, *Bi-exact groups, strongly ergodic actions and group measure space type III factors with no central sequence*, Comm. Math. Phys. **348** (2016), 991–1015.

[MvN43] F. J. Murray and J. von Neumann, *On rings of operators. IV*, Ann. of Math. (2) **44** (1943), 716–808.

[Tak1] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras. I*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[Tak2] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras. II*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[Tak3] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras. III*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[Vae12] S. Vaes, *An inner amenable group whose von Neumann algebra does not have property Gamma*, Acta Math. **208** (2012), no. 2, 389–394.

Hardy-Sobolev 型半線型熱方程式の解の挙動について

東北大学 材料科学高等研究所
谷口晃一 (Koichi TANIGUCHI)

概要

本講演では, 空間に関して非均一な非線形性をもつ熱方程式の適切性 (解の存在, 解の一意性, 初期値に関する安定性) と解の挙動の分類について最近得られた結果を報告する. 熱方程式とは, 熱伝導や拡散現象を記述する基礎方程式の一つであり, 本研究では外力項として, ある一点で特異性をもつ非線形項 (Hardy 型あるいは Hardy-Sobolev 型と呼ばれる) を考える. 特に, エネルギー臨界と呼ばれる場合を考察し, 基底状態より小さいエネルギーを持つ初期値に対して, 解の挙動 (散逸解あるいは爆発解) を決定づける初期値の必要十分条件を与える. このように, 与えられた初期データから解の性質を決定することは重要な問題であり, これにより現象の予測が可能となる. 証明は Kenig-Merle [13, 14] による concentration compactness の議論, および Levine の concavity 法に基づく.

1 導入

次の Hardy-Sobolev 型半線型熱方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = |x|^{-\gamma}|u|^{2^*(\gamma)-2}u, \quad (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^d, \\ u|_{t=0} = u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{HS}$$

ここで, $d \geq 3$ かつ $0 < \gamma < 2$ である. $\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ は斉次 Sobolev 空間であり, ノルムは以下で与えられる.

$$\|f\|_{\dot{H}^1} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

非線形項の中に現れる指数 $2^*(\gamma)$ は

$$2^*(\gamma) := \frac{2(d-\gamma)}{d-2}$$

で与えられ, Hardy-Sobolev 臨界指数と呼ばれている.

この方程式の定常問題は恒星系の運動に関するモデルとして, 数学・物理学において古くから研究されている. 数学的には, 非線形項の特異性 $|x|^{-\gamma}$ により, 方程式が空間に関する平行不変性や古典解を持たない点が特徴的である. 本講演ではまず, 初期値問題 (HS) の時間局所適切性を示す. 適切性は, 現象のモデル化や数値実験などの実学的手法の正当性を理論的に保証するための重要な課題である. $\gamma = 0$ の場合は, 方程式 (HS) は通常の冪型非線形項をもつ半線型熱方程式に対応しており, 非常

本講演は, 千頭昇氏 (名古屋工業大学), 池田正弘氏 (理化学研究所/慶應義塾大学) との共同研究に基づく.

によく研究がなされている (例えば [8, 2] を参照). 方程式 (HS) の適切性については 1990 年代から研究されており, Wang が $C_B(\mathbb{R}^d)$ の枠組みで解の存在を示している ([21] を参照). ここで, $C_B(\mathbb{R}^d)$ は $\mathbb{R}^d$ 上の連続かつ有界な関数から成る空間である. 近年, Ben Slimene-Tayachi-Weissler によって $L^q(\mathbb{R}^d)$ における適切性, Chikami によって Besov 空間における適切性が示されている ([1, 4] を参照). 本研究では, $\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ における (HS) の適切性の結果を与えた ([5] を参照). また, Hénon 型 ($\gamma < 0$ の場合) に対しても適切性が研究されている ([21, 16, 6] を参照).

次に, 適切性の研究で示した時間局所解に対して, 時間大域的挙動を研究する. 本講演の主結果では, 対応する基底状態より小さいエネルギーを持つ初期値に対して, 解の挙動を決定づける初期値の必要十分条件を与えている. より正確には, 初期値の $\dot{H}^1$ ノルムの大きさにより, 解が散逸的になるか爆発解になるかが完全に決定づけられる. この種の問題は, エネルギー劣臨界の場合においては古くから熱方程式, シュレディンガー方程式, 波動方程式など様々な方程式に対して研究がなされている (例えば [18, 20, 17, 11] を参照). エネルギー臨界においても, Kenig-Merle [13, 14] 以降, 様々な方程式に対して行われており, 半線型熱方程式 ($\gamma = 0$ の場合) に対しては Ishiwata [12] や Gustafson-Roxanas [9] によって示されている. 本研究では, Hardy-Sobolev 型 ($\gamma < 0$ の場合) に対して類似の結果を示した ([5] を参照).

2 準備

$\{e^{t\Delta}\}_{t\geq 0}$ を熱半群とする. すなわち,

$$(e^{t\Delta}f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} G_t(x-y)f(y)\,dy, \quad G_t(x) := (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

本節では, 重み付き線形評価式および解の定義を与える.

補題 2.1 ([1]). $d \geq 1$, $0 \leq \gamma < d$, $0 \leq \frac{1}{p_1} < \frac{\gamma}{d} + \frac{1}{p_2} < 1$ とする. このとき, ある正定数 $C = C(d, \gamma, p_1, p_2)$ が存在し, 次が成り立つ.

$$\|e^{t\Delta}(|x|^{-\gamma}f)\|_{L^{p_1}} \leq Ct^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1})-\frac{\gamma}{2}}\|f\|_{L^{p_2}}, \quad t > 0, \quad f \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d).$$

定義 2.2. $T \in (0, \infty]$, $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ とし, $q_c := \frac{2d}{d-2}$, $q > q_c$ とする. 関数 $u \in C([0,T); \dot{H}^1(\mathbb{R}^d))$ が積分方程式

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\Delta}(|x|^{-\gamma}|u(\tau)|^{2^*(\gamma)-2}u(\tau))\,d\tau \tag{1}$$

および

$$\|u\|_{\mathcal{K}^q(T)} := \sup_{t\in(0,T)} t^{\frac{d}{2}(\frac{1}{q_c}-\frac{1}{q})}\|u(t)\|_{L^q} < \infty \tag{2}$$

を満たすとき, u は初期値問題 (HS) の解であるという. $T < \infty$ のとき u を時間局所解と呼ぶ. さらに, 解の最大存在時刻 $T_m = T_m(u_0)$ が $T_m = \infty$ のとき u を時間大域解と呼び, 特に $\lim_{t\to\infty}\|u(t)\|_{\dot{H}^1} = 0$ を満たす解を散逸解, $\limsup_{t\to\infty}\|u(t)\|_{\dot{H}^1} = +\infty$ を満たす解を無限時間爆発解と呼ぶ. また, $T_m < \infty$ はとき u を有限時間爆発解と呼ぶ.

3 時間局所適切性

定理 3.1 (Chikami-Ikeda-T. [5]). $d \geq 3$ かつ $0 < \gamma < 2$ とし, $q > q_c$ に適切な仮定を課す. このとき, 初期値問題 (HS) は時間局所適切である. すなわち, 次が成り立つ.

(i) (解の存在) 任意の初期値 $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ に対して, ある時刻 $T > 0$ が存在し, 次を満たす (HS) の解 $u \in C([0,T]; \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{K}^q(T)$ が存在する:

$$\|u\|_{\mathcal{K}^q(T)} \leq 2\|e^{t\Delta}u_0\|_{\mathcal{K}^q(T)}.$$

(ii) (解の一意性) $T > 0$ とする. $u, v \in \mathcal{K}^q(T)$ を $u(0) = v(0) = u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ かつ積分方程式 (1) を満たす関数とする. このとき, 任意の $t \in [0,T]$ に対して, $u(t) = v(t)$ が成り立つ.

(iii) (初期値連続依存性) 解写像 $\Phi : \dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \mapsto C([0,T); \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{K}^q(T) : u_0 \mapsto u$ はリプシッツ連続である.

さらに, $T_m = T_m(u_0)$ を解の最大存在時刻とすると, 次の同値性が成り立つ:

$$\|u\|_{\mathcal{K}^q(T_m)} < \infty \iff T_m = \infty \text{ かつ } \lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_{\dot{H}^1} = 0. \tag{3}$$

注意 3.2. 初期値問題 (HS) は古典解をもたない. しかしながら, 定理 3.1 で得られた解 u は, 次を満たす:

$$u \in C^{1,2}_{\mathrm{loc}}((0,T_m) \times (\mathbb{R}^d \setminus \{0\})) \cap C^{\frac{\alpha}{2},\alpha}_{\mathrm{loc}}((0,T_m) \times \mathbb{R}^d)$$

([1] の Remark 1.1 および Proposition 3.2 を参照).

4 解の挙動の分類

本節では, 解の挙動に関する主結果を述べる. そのために, いくつか定義や補題を与える. エネルギー汎関数 $E : \dot{H}^1(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ を

$$E(f) := \frac{1}{2}\|f\|^2_{\dot{H}^1} - \frac{1}{2^*(\gamma)} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|^{2^*(\gamma)}}{|x|^\gamma} dx.$$

で定義する. このとき, (形式的に) 次のエネルギー等式が得られる:

$$\frac{d}{dt}E(u(t)) = -\int_{\mathbb{R}^d} |\partial_t u(t,x)|^2 \, dx \leq 0, \quad t > 0. \tag{4}$$

エネルギー等式 (4) の正当化は [5] の Proposition 2.9 で示されている. 次の Hardy-Sobolev 不等式より, 任意の初期値 $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ に対して (HS) の解のエネルギー $E(u)$ は常に有限である.

補題 4.1 (Hardy-Sobolev 不等式). $d \geq 3$, $0 \leq \gamma \leq 2$ とする. このとき, 任意の $f \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ に対して次が成り立つ.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|^{2^*(\gamma)}}{|x|^\gamma} dx \right)^{\frac{1}{2^*(\gamma)}} \leq C_{HS}\|f\|_{\dot{H}^1}. \tag{5}$$

ここで, $C_{HS} = C_{HS}(d,\gamma)$ は (5) の最良定数である.

注意 4.2. $\gamma = 0$ のときは臨界 Sobolev 不等式, $\gamma = 2$ のときは Hardy 不等式と一致する.

次に (HS) の定常問題を考える.

$$-\Delta w = |x|^{-\gamma}|w|^{2^*(\gamma)-2}w \quad \text{in } \mathbb{R}^d.$$

この定常問題の非自明な最小エネルギー解を基底状態と呼び, $W = W(x)$ で表す. このとき, W は以下の形で与えられる.

$$W(x) = ((d-\gamma)(d-2))^{\frac{d-2}{2(2-\gamma)}}\,(1+|x|^{2-\gamma})^{-\frac{d-2}{2-\gamma}}. \tag{6}$$

注意 4.3. 基底状態 W は Hardy-Sobolev 不等式と密接に関連している. 実際, W は最良定数 C_{HS} を達成する関数になっている. また, 基底状態 W のエネルギー $E(W)$ と C_{HS} は次のような関係性が知られている:

$$E(W) = \frac{2-\gamma}{2(d-\gamma)}C_{HS}^{\frac{2(d-\gamma)}{2-\gamma}}$$

(Lieb [15] を参照).

このとき, $E(u_0) \le E(W)$ において解の挙動が決定づけられる. すなわち, 次の結果が得られた.

定理 4.4 (Chikami-Ikeda-T. [5]). $d \ge 3$ かつ $0 < \gamma < 2$ とし, $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ かつ $E(u_0) \le E(W)$ を仮定する. このとき (HS) の解 u に対して, 次が成り立つ.

(i) $\|u_0\|_{\dot{H}^1} < \|W\|_{\dot{H}^1}$ ならば, u は散逸解である.
(ii) $\|u_0\|_{\dot{H}^1} > \|W\|_{\dot{H}^1}$ ならば, u は有限時間爆発解あるいは無限時間爆発解である. さらに $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ を付加条件として課せば, u は有限時間爆発解に限る.
(iii) $E(u_0) = E(W)$ かつ $\|u_0\|_{\dot{H}^1} = \|W\|_{\dot{H}^1}$ ならば, 解 u は基底状態になる.

注意 4.5. 定理 4.4 に関する諸注意を与える.

(a) $E(u_0) < E(W)$ かつ $\|u_0\|_{\dot{H}^1} = \|W\|_{\dot{H}^1}$ を満たす関数 $u_0 \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ は存在しない.
(b) 定理 4.4 (i), (ii) の後半の主張, (iii) は $\gamma = 0$ の場合の Ishiwata [12] や Gustafson-Roxanas [9] の結果の $\gamma > 0$ の場合への拡張になっている. (ii) の前半の主張は $\gamma = 0$ の場合には知られていない.
(c) 近年, 非線形シュレディンガー方程式の初期値問題

$$i\partial_t u + \Delta u = -|x|^{-\gamma}|u|^{p-2}u, \quad (t,x) \in (-T,T)\times\mathbb{R}^d$$

に対しても類似の研究がなされている ([3, 7] を参照). 特に, Cho-Lee [7] はエネルギー臨界 ($p = 2^*(\gamma)$ の場合) において $d = 3$ かつ $0 < \gamma < \frac{3}{2}$ の制約の下, 球対称解に対して定理 4.4 に対応する結果を示している.

最後に, 定理 4.4 の証明の概略を述べる (証明の詳細は [5] の 3 節を参照). 定理 4.4 (i) の証明では, 特異ポテンシャル $|x|^{-\gamma}$ があることによりいくつかの困難が生じる. 証明は Kenig-Merle [13, 14] に

よる concentration compactness を用いた背理法の議論に基づく. 正確には, はじめに (i) が成り立たないと仮定し, この仮定の下で $E(u_0^c) < E(W)$ かつ $\|u_0^c\|_{\dot{H}^1} < \|W\|_{\dot{H}^1}$ を満たす初期値 u_0^c をもつ最小エネルギー爆発解 u^c を concentration compactness を用いて構成する. この u_c の構成において, (HS) が平行移動不変性をもたないことにより, (HS) 特有の新たな困難が生じる (球対称解に対してはこのような困難は生じないため, 既存の文献の多くは球対称解のみを扱っているが, 本研究では非球対称な場合も扱っている). 本研究では, "(HS) の解がある条件下において線型解に漸近する" という $\gamma > 0$ のとき特有の性質を利用することでこの問題を解決した ([5] の Lemma 3.2 を参照). 最後に, エネルギー等式 (4) と $E(u_0^c) < E(W)$ を用いて, 最小エネルギー爆発解 u_c が $u_c \equiv 0$ であることを示すことができる (この部分の議論についても, backward uniqueness を用いる既存の方法と異なっている). しかしながら, これは爆発解であることと矛盾するため, 背理法により (i) が成立する.

定理 4.4 (ii) の証明は, Levine の concavity 法に基づいており, ある常微分不等式の議論に帰着される. 特に, (ii) の前半の主張の証明では, 空間に関して局在化した解に対して concavity 法を用いる. この議論を正当化するために $|x|^{-\gamma}$ の空間遠方における減衰の効果を本質的に利用している. (ii) の前半の主張の証明は, 解そのものに concavity 法を適用するだけであり, $\gamma = 0$ の場合の議論と同じである.

定理 4.4 (iii) は基底状態 W の性質とエネルギー等式 (4) からすぐに従う.

参考文献

[1] B. Ben Slimene, S. Tayachi, and F. B. Weissler, *Well-posedness, global existence and large time behavior for Hardy-Hénon parabolic equations*, Nonlinear Anal. **152** (2017), 116–148.

[2] H. Brezis and T. Cazenave, *A nonlinear heat equation with singular initial data*, J. d'Analyse Math. **68** (1996), 277–304.

[3] M. Cardoso, L. G. Farah, C. M. Guzmán, and J. Murphy, *Scattering below the ground state for the intercritical non-radial inhomogeneous NLS*, arXiv:2007.06165 (2020).

[4] N. Chikami, *Composition estimates and well-posedness for Hardy-Hénon parabolic equations in Besov spaces*, J. Elliptic Parabol. Equ. **5** (2019), no. 2, 215–250.

[5] N. Chikami, M. Ikeda, and K. Taniguchi, *Well-posedness and global dynamics for the critical Hardy-Sobolev parabolic equation*, Nonlinearity **34** (2021), no. 11, 8094–8142.

[6] N. Chikami, M. Ikeda, and K. Taniguchi, *Optimal well-posedness and forward self-similar solution for the Hardy-Hénon parabolic equation in critical weighted Lebesgue spaces*, arXiv:2104.14166 (2021).

[7] Y. Cho and K. Lee, *On the focusing energy-critical inhomogeneous NLS: weighted space approach*, Nonlinear Anal. **205** (2021), 112261.

[8] M. Giga, *Solutions for semilinear parabolic equations in Lp and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system*, J. Differential Equations **62** (1986), no. 2, 186–212.

[9] S. Gustafson and D. Roxanas, *Global, decaying solutions of a focusing energy-critical heat equation in* $\mathbb{R}^4$, J. Differential Equations **264** (2018), no. 9, 5894–5927.

[10] M. Hénon, *Numerical experiments on the stability of spherical stellar systems*, Astron. Astrophys **24** (1973), 229–238.

[11] R. Ikehata and T. Suzuki, *Stable and unstable sets for evolution equations of parabolic and hyperbolic type*, Hiroshima Math. J. **26** (1996), no. 3, 475–491.

[12] M. Ishiwata, *Asymptotic behavior of strong solutions for nonlinear parabolic equations with critical Sobolev exponent*, Adv. Differential Equations **13** (2008), no. 3-4, 349–366.

[13] C. E. Kenig and F. Merle, *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case*, Invent. Math. **166** (2006), no. 3, 645–675.

[14] C. E. Kenig and F. Merle, *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical focusing non-linear wave equation*, Acta Math. **201** (2008), no. 2, 147–212.

[15] E. H. Lieb, *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities*, Ann. of Math. (2) **118** (1983), no. 2, 349–374.

[16] M. Majdoub, *Well-posedness and blow-up for an inhomogeneous semilinear parabolic equation*, Differ. Equ. Appl. **13** (2021), no. 1, 85–100.

[17] L. E. Payne and D. H. Sattinger, *Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations*, Israel J. Math. 22 (1975), no. 3-4, 273–303.

[18] D. H. Sattinger, *On global solution of nonlinear hyperbolic equations*, Rational Mech. Anal. **30** (1968), 148–172.

[19] S. Tayachi, *Uniqueness and non-uniqueness of solutions for critical Hardy-Hénon parabolic equations*, J. Math. Anal. Appl. **488** (2020), no. 1, 123976.

[20] M. Tsutsumi, *On solutions of semilinear differential equations in a Hilbert space*, Math. Japon. **17** (1972), 173–193.

[21] X. Wang, *On the Cauchy problem for reaction-diffusion equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **337** (1993), no. 2, 549–590.

準線形誘引・反発型走化性方程式系の解の有界性と漸近挙動

東京理科大学大学院 理学研究科 数学専攻
千代祐太朗 (Yutaro CHIYO)

1 導入

次の走化性方程式系の初期値境界値問題の解の有界性とその漸近挙動を考える:

$$\begin{cases} u_t = \nabla\cdot\big((u+1)^{m-1}\nabla u - \chi u(u+1)^{p-2}\nabla v + \xi u(u+1)^{q-2}\nabla w\big), & x\in\Omega,\ t>0,\\ 0 = \Delta v + \alpha u - \beta v, & x\in\Omega,\ t>0,\\ 0 = \Delta w + \gamma u - \delta w, & x\in\Omega,\ t>0,\\ \nabla u\cdot\nu = \nabla v\cdot\nu = \nabla w\cdot\nu = 0, & x\in\partial\Omega,\ t>0,\\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここで, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\in\mathbb{N})$ は滑らかな境界をもつ有界領域, $m,p,q\in\mathbb{R}$, $\chi,\xi,\alpha,\beta,\gamma,\delta>0$ は定数, $u_0\in C(\overline{\Omega})\setminus\{0\}$ は非負値関数であり, ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルである.

問題 (1) において $m=1$, $p=q=2$ の場合は, アルツハイマー病で観測される細胞の凝縮現象を記述するモデルである. ここで, u は細胞の密度, v は化学誘引物質の濃度, w は化学忌避物質の濃度を表す. 問題 (1) は, そのモデルを一般化したものであり, 同様の一般化は Keller–Segel 系に対しても以下のようになされている:

$$\begin{cases} u_t = \nabla\cdot\big((u+1)^{m-1}\nabla u - \chi u(u+1)^{p-2}\nabla v\big),\\ v_t = \Delta v + \alpha u - \beta v. \end{cases} \tag{2}$$

特に, (2) において $m=1$, $p=2$ の場合が古典的な Keller–Segel 系である.

本研究のテーマは次の二つである:

(I) 問題 (1) の解の有界性.
(II) 問題 (1) の有界な解の漸近挙動.

まず, **(I)** に関連する先行研究と本研究の目的を説明する. Keller–Segel 系 (2) の解挙動は, 拡散項 $\nabla\cdot\big((u+1)^{m-1}\nabla u\big)$ に現れる m, 誘引項 $-\chi\nabla\cdot\big(u(u+1)^{p-2}\nabla v\big)$ に現れる p, 次元 n に関する条件により分類される. 実際, $p<m+\frac{2}{n}$ の場合は解の有界性が示されており (Tao–Winkler [**11**], Ishida et al. [**6**]), $p>m+\frac{2}{n}$ の場合は爆発解の存在が得られている (Winkler [**12**], Cieślak–Stinner [**2, 3**]). これに対して, 反発項 $\xi\nabla\cdot\big(u(u+1)^{q-2}\nabla w\big)$ を含む問題 (1) では, 別の観点で解挙

動を分類する結果が, 特別な場合に知られている. 実際, $m=1$, $p=q=2$ のとき, $\chi\alpha-\xi\gamma<0$ の場合は解の有界性が得られており (Tao–Wang [**10**]), $\chi\alpha-\xi\gamma>0$ の場合は爆発解の存在が示されている (Fujie–Suzuki [**5**], Lankeit [**7**]). これらの結果から, 問題 (1) の解挙動について, 反発項の効果が誘引項の効果より強い, (**i**) $p<q$, または (**ii**) $p=q$ かつ $\chi\alpha-\xi\gamma<0$, の場合には, 条件 $p<m+\frac{2}{n}$ を仮定することなく (1) の解の有界性が得られると予想される. 本研究の第一の目的は, この予想を反映する結果を導くことである.

次に, **(II)** に関連する先行研究と本研究の目的を説明する. 問題 (1) において $m=1$, $p=q=2$ の場合の解の漸近挙動は, 係数または初期値の小ささに条件を課すことで決定されている. 実際, 係数に条件を課す場合については, Tao–Wang [**10**] により $n\in\{2,3\}$ で $\chi\alpha-\xi\gamma<0$, $\beta=\delta$ の場合に漸近挙動が決定されている:

$$\begin{aligned}
&u(\cdot,t)\to\overline{u_0} && \text{in } L^\infty(\Omega) \quad (t\to\infty),\\
&v(\cdot,t)\to\frac{\alpha}{\beta}\overline{u_0} && \text{in } L^\infty(\Omega) \quad (t\to\infty),\\
&w(\cdot,t)\to\frac{\gamma}{\delta}\overline{u_0} && \text{in } L^\infty(\Omega) \quad (t\to\infty).
\end{aligned}$$

その後, Lin–Mu–Zhou [**9**] により $n\geq 2$ の場合に係数 β,δ に対する条件が一般化された. 一方, 初期値の小ささに条件を課す場合については, Li–Lin–Mu [**8**] により $n=2$ で $\chi\alpha-\xi\gamma=0$ の場合に $\|u_0\|_{L^1(\Omega)}$ に対する小ささの条件の下で上の漸近挙動が得られている. 特に, [**8**] では $p=q=2$ であることを活かして, $z:=\chi v-\xi w$ と変換することで, 問題 (1) を Keller–Segel 系

$$\begin{cases} u_t=\Delta u-\nabla\cdot(u\nabla z),\\ 0=\Delta z-z+(\beta-\delta)u \end{cases}$$

に帰着させる議論が利用されている. しかし, $p\neq q$ の場合の問題 (1) は, Keller–Segel 系には帰着できない. そこで本研究では, 準線形走化性方程式系

$$\begin{cases} u_t=\nabla\cdot\big((u+1)^{m-1}\nabla u-\chi u(u+1)^{p-2}\nabla v\big),\\ v_t=\Delta v-v+u \end{cases} \tag{3}$$

の解の漸近挙動を決定した Cieślak–Winkler [**4**] の手法に着目した. [**4**] では, 条件 $n\geq 2$, $p-m\in[0,\frac{2}{n})$, $\chi\|u_0\|_{L^1(\Omega)}^{p-m}<\frac{1}{C_{\langle p-m\rangle}^2}$ の下でこの方程式系の解 (u,v) の漸近挙動が

$$\begin{aligned}
&u(\cdot,t)\to\overline{u_0} && \text{in } L^\infty(\Omega) \quad (t\to\infty),\\
&v(\cdot,t)\to\overline{u_0} && \text{in } L^\infty(\Omega) \quad (t\to\infty)
\end{aligned}$$

と決定されることが示されている. ここで $\overline{u_0}:=\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0$ であり, $C_{\langle p-m\rangle}>0$ は次の Poincaré–Sobolev の不等式で $\theta:=p-m$ とした際に現れる定数である:

$$\|\varphi-\overline{\varphi}\|_{L^2(\Omega)}\leq C_{\langle\theta\rangle}\|\nabla\varphi\|_{L^{\frac{2}{\theta+1}}(\Omega)} \quad \forall\,\theta\in\Big[0,\frac{2}{n}\Big) \quad \forall\,\varphi\in W^{1,\frac{2}{\theta+1}}(\Omega). \tag{4}$$

本研究の第二の目的は, (3) に反発項が加わり, 第 2 方程式及び第 3 方程式が楕円型である問題 (1) に対しても, [**4**] の手法が有効であることを確認することである.

2　主結果

問題 (1) の解の有界性及びその漸近挙動に関して, 以下の結果を得た.

定理 1 (解の有界性; [**1**, Theorems 3.1, 3.3])**.** 次の (**i**), (**ii**) のいずれかを仮定する:

(**i**) $p < q$;
(**ii**) $p = q$ かつ $\chi\alpha - \xi\gamma < 0$.

そのとき, 任意の非負値関数 $u_0 \in C(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$ に対して, 問題 (1) の時間大域的古典解 (u, v, w) が一意的に存在して, 次の意味で有界である:

$$\exists C > 0; \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le C \quad (t > 0).$$

定理 2 (解の漸近挙動)**.** $n \ge 2$ とし, 問題 (1) の有界な解の存在を仮定する. また, m, p は $p - m \in [0, \frac{2}{n}]$ を満たし, 非負値関数 $u_0 \in C(\overline{\Omega}) \setminus \{0\}$ は

$$\chi\alpha \|u_0\|_{L^1(\Omega)}^{p-m} \le \frac{1}{2C_{\langle p-m\rangle}}$$

を満たすと仮定する. ここで, $C_{\langle p-m\rangle} > 0$ は不等式 (4) で $\theta := p - m$ としたときに現れる定数である. そのとき, 問題 (1) の解 (u, v, w) に対して, 次が成立する:

$$u(\cdot, t) \to \overline{u_0} \qquad \text{in } L^\infty(\Omega) \quad (t \to \infty),$$

$$v(\cdot, t) \to \frac{\alpha}{\beta}\overline{u_0} \quad \text{in } L^\infty(\Omega) \quad (t \to \infty),$$

$$w(\cdot, t) \to \frac{\gamma}{\delta}\overline{u_0} \quad \text{in } L^\infty(\Omega) \quad (t \to \infty).$$

ここで, $\overline{u_0} := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u_0$ である.

証明の鍵. 定理 1 の証明における鍵は, 問題 (1) の解 (u, v, w) に対して, 次が成り立つことを示すことである: 任意の $\varepsilon > 0$ と $\ell > 1$ に対して定数 $c(\varepsilon, \ell) > 0$ が存在して,

$$\int_\Omega w^\ell \le \varepsilon \int_\Omega u^\ell + c(\varepsilon, \ell).$$

また, 定理 2 の証明の方針は,

$$\int_0^\infty \int_\Omega (u - \overline{u_0})^2 \le c_1 \quad (c_1 > 0)$$

の導出である. この評価が得られると, u の一様評価 $\|u\|_{C^{2,1}(\overline{\Omega}\times[0,\infty))} \le c_2$ $(c_2 > 0)$ と Gagliardo–Nirenberg の不等式の援用により, u が $\overline{u_0}$ に $L^\infty(\Omega)$ の位相で収束することを示すことができる.

参考文献

[1] Y. Chiyo and T. Yokota. Boundedness and finite-time blow-up in a quasilinear parabolic–elliptic–elliptic attraction-repulsion chemotaxis system. *arXiv: 2107.10445 [math.AP]*.

[2] T. Cieślak and C. Stinner. Finite-time blowup and global-in-time unbounded solutions to a parabolic–parabolic quasilinear Keller–Segel system in higher dimensions. *J. Differential Equations*, **252**(10):5832–5851, 2012.

[3] T. Cieślak and C. Stinner. Finite-time blowup in a supercritical quasilinear parabolic–parabolic Keller–Segel system in dimension 2. *Acta Appl. Math.*, **129**:135–146, 2014.

[4] T. Cieślak and M. Winkler. Stabilization in a higher-dimensional quasilinear Keller–Segel system with exponentially decaying diffusivity and subcritical sensitivity. *Nonlinear Anal.*, **159**:129–144, 2017.

[5] K. Fujie and T. Suzuki. Global existence and boundedness in a fully parabolic 2D attraction-repulsion system: chemotaxis-dominant case. *Adv. Math. Sci. Appl.*, **28**:1–9, 2019.

[6] S. Ishida, K. Seki, and T. Yokota. Boundedness in quasilinear Keller–Segel systems of parabolic–parabolic type on non-convex bounded domains. *J. Differential Equations*, **256**(8):2993–3010, 2014.

[7] J. Lankeit. Finite-time blow-up in the three-dimensional fully parabolic attraction-dominated attraction-repulsion chemotaxis system. *J. Math. Anal. Appl.*, **504**(2):Paper No. 125409, 16pp., 2021.

[8] Y. Li, K. Lin, and C. Mu. Asymptotic behavior for small mass in an attraction-repulsion chemotaxis system. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 146, 13, 2015.

[9] K. Lin, C. Mu, and D. Zhou. Stabilization in a higher-dimensional attraction-repulsion chemotaxis system if repulsion dominates over attraction. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **28**(6):1105–1134, 2018.

[10] Y. Tao and Z-A. Wang. Competing effects of attraction vs. repulsion in chemotaxis. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **23**(1):1–36, 2013.

[11] Y. Tao and M. Winkler. Boundedness in a quasilinear parabolic–parabolic Keller–Segel system with subcritical sensitivity. *J. Differential Equations*, **252**(1):692–715, 2012.

[12] M. Winkler. Finite-time blow-up in the higher-dimensional parabolic–parabolic Keller–Segel system. *J. Math. Pures Appl.* (9), **100**(5):748–767, 2013.

Non-oscillation criteria for damped half-linear dynamic equations with mixed derivatives on a time scale

広島商船高等専門学校 電子制御工学科
石橋和葵 (Kazuki ISHIBASHI)

概要

Hilger (1988) によって導入されたタイムスケールの概念から，近年，常微分方程式と差分方程式の統一理論に関する研究が注目を集めている．本稿では，タイムスケールを活用して，常微分方程式と差分方程式のどちらの解も終局的に正（または負）を保証する十分条件（非振動条件）を得たので報告する．その非振動条件の特徴として，常微分方程式と差分方程式が共に線形方程式ならば，類似条件となる．しかし，両者が 1 次元 p ラプラス作用素を有する非線形方程式ならば，その条件には相違性が存在する．

1 導入

近年，常微分方程式と差分方程式を統一したダイナミック方程式（dynamic equation）の定性的理論が活発的に研究されている．この研究の土台は，Hilger [6] によって導入されたタイムスケール（time scale）$\mathbb{T}$ の定義に基づく．タイムスケール $\mathbb{T}$ とは，任意の実数直線上の閉部分集合で定義される．既に，タイムスケール上のダイナミック方程式に関する基礎理論は整備されている（[1, 2, 3, 4] を参照せよ）．タイムスケール上で扱う導関数は，通常の微分の概念を一般化し，次の 2 種類のデルタ微分とナブラ微分と呼ばれる導関数によって定義される．

$$x^{\Delta}(t) := \begin{cases} \lim_{s\to t} \dfrac{x(t)-x(s)}{t-s} & (t=\sigma(t)) \\ \dfrac{x(\sigma(t))-x(t)}{\sigma(t)-t} & (t<\sigma(t)) \end{cases} \quad \text{かつ} \quad x^{\nabla}(t) := \begin{cases} \lim_{s\to t} \dfrac{x(t)-x(s)}{t-s} & (t=\rho(t)) \\ \dfrac{x(\rho(t))-x(t)}{\rho(t)-t} & (t>\rho(t)). \end{cases}$$

ここで，σ は $\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$ によって定義され，*forward jump operator* と呼ばれており，ρ は $\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ によって定義され，*backward jump operator* と呼ばれている．また，時間 t と演算子 σ との差を $\mu(t) := \sigma(t) - t$ として，時間 t と演算子 ρ との差を $\nu(t) := t - \rho(t)$ とする．もし，$\mu(t) = 0$ となる $t \in \mathbb{T}$ が存在すれば，その時間 t を *right-dense* と呼び，$\mu(t) > 0$ となる $t \in \mathbb{T}$ が存在すれば，その時間 t を *right-scattered* と呼ぶ．一方，もし，$\nu(t) = 0$ となる $t \in \mathbb{T}$ が存在すれば，その時間 t を *left-dense* と呼び，$\nu(t) > 0$ となる $t \in \mathbb{T}$ が存在すれば，その時間 t を *left-scattered* と呼ぶ．また，タイムスケール $\mathbb{T}$ において，ある時刻 m が left-scattered の最大値をとる場合，$\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T} - \{m\}$ とする．そうでない場合は，$\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T}$ である．また，ある時刻 n が right-scattered の最小値をとる場合，$\mathbb{T}_{\kappa} = \mathbb{T} - \{n\}$ とする．そうでない場合は，$\mathbb{T}_{\kappa} = \mathbb{T}$ である．

タイムスケール $\mathbb{T}$ の選び方は様々であり，$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ならば，デルタ微分とナブラ微分は，$x^{\Delta}(t) =$

$x'(t) = x^{\nabla}(t)$ となるから，通常の微分と一致する．また，$\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ならば，デルタ微分とナブラ微分は前進差分 $x^{\Delta}(t) = \Delta x(t) = x(t+1) - x(t)$ と後退差分 $x^{\nabla}(t) = \nabla x(t) = x(t) - x(t-1)$ になる．

タイムスケール上の積分も定義されている．実際に，関数 $f : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ に対して，それぞれの right-dense point で連続かつ任意の left-dense point で左極限値が存在すれば，関数 f は *right-dense continuous* と呼ばれており，もし関数 f が right-dense continuous ならば，$F^{\Delta}(t) = f(t)$ を満たすデルタ微分可能な関数 F^{Δ} が存在する．一方，関数 $g : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ に対して，それぞれの left-dense point で連続かつ任意の right-dense point で右極限値が存在すれば，関数 g は *left-dense continuous* と呼ばれており，もし関数 g が left-dense continuous ならば，$G^{\nabla}(t) = g(t)$ を満たすナブラ微分可能な関数 G^{∇} が存在する．すなわち，$a < b$ に対して，デルタ積分とナブラ積分はそれぞれ

$$\int_a^b f(t)\Delta t = F(b) - F(a) \quad \text{かつ} \quad \int_a^b g(t)\nabla t = G(b) - G(a)$$

によって定義され，もし $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ならば，デルタ積分とナブラ積分は通常の積分となる．一方，$\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ならば，デルタ積分とナブラ積分は以下の通りである．

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \sum_{t=a}^{b-1} f(t) \quad \text{かつ} \quad \int_a^b g(t)\nabla t = \sum_{t=a+1}^{b} g(t).$$

既に上述したように，タイムスケールの概念でよく使う演算子は σ と ρ，μ，ν であり，これらの演算子を利用して，一般化された指数関数も定義されている．その指数関数を定義する準備として，任意の $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ に対して，$1 + \mu(t)h(t) \neq 0$ を満たす関数 $h : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ が存在すると仮定する．この関数 h は *regressive* と呼ばれている．また，全ての regressive かつ right-dense continuous を満たす関数族の集合を $\mathcal{R}_{\mu}$ と定義する．さらに，任意の $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ に対して，集合 $\mathcal{R}_{\mu}^{+}$ を $\mathcal{R}_{\mu}^{+} := \{h \in \mathcal{R}_{\mu} : 1 + \mu(t)h(t) > 0\}$ によって定義する．このとき，関数 h が $h \in \mathcal{R}_{\mu}$ ならば，任意の $t \in \mathbb{T}$ と $s \in \mathbb{T}^{\kappa}$ に対して，一般化された指数関数を

$$e_{\phi}(t, s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(\phi(\tau))\Delta\tau\right)$$

によって定義する．ただし，$\xi_h(z)$ は

$$\xi_h(z) = \begin{cases} \dfrac{\log(1 + hz)}{h} & (h \neq 0) \\ z & (h = 0) \end{cases}$$

である．もし $h \in \mathcal{R}^{+}$ ならば，関数 $e_h(t, t_0)$ は常に正である．一方，任意の $t \in \mathbb{T}$ に対して，$1 - \nu(t)h(t) \neq 0$ を満たす関数 $h : \mathbb{T}_{\kappa} \to \mathbb{R}$ は *ν-regressive* と呼ばれている．また，全ての ν-regressive かつ left-dense continuous を満たす関数族の集合を $\mathcal{R}_{\nu}$ と定義する．さらに，任意の $t \in \mathbb{T}$ に対して，集合 $\mathcal{R}_{\nu}$ を $\mathcal{R}_{\nu}^{+} = \{h \in \mathcal{R}_{\nu} : 1 - \nu(t)h(t) > 0\}$ によって定義する．このとき，関数 h が $h \in \mathcal{R}_{\nu}$ ならば，任意の $t \in \mathbb{T}$ と $s \in \mathbb{T}_{\kappa}$ に対して，一般化された指数関数を

$$\hat{e}_{\phi}(t, s) = \exp\left(\int_s^t \hat{\xi}_{\nu(\tau)}(\phi(\tau))\nabla\tau\right)$$

によって定義する．ただし，$\hat{\xi}_h(z)$ は

$$\hat{\xi}_h(z) = \begin{cases} -\dfrac{\log(1-hz)}{h} & (h \neq 0) \\ z & (h = 0) \end{cases}$$

である．

上述したタイムスケール上で扱う関数や定義はごく一部であるが，本稿では必要な道具となる．このタイムスケール上の関数や定義を利用して，常微分方程式と差分方程式の両解挙動に対する類似性の研究が注目を浴びている．また，類似性のみならず，常微分方程式と差分方程式の解挙動の相違性についても探求すべき課題となる．

本稿では，デルタ微分とナブラ微分を混合した減衰付き非線形ダイナミック方程式（nonlinear dynamic equation with mixed derivatives）

$$(\Phi_p(x^{\Delta}))^{\nabla} + a(t)\Phi_p(x^{\Delta}) + b(t)\Phi_p(x) = 0, \quad t \in \mathbb{T}_{t_0} \tag{1.1}$$

の解の非振動性を考える．ただし，$t_0 \in \mathbb{T}$ であり，$\mathbb{T}_{t_0} = \mathbb{T} \cap [t_0, \infty)$ と定義する．また，$a\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ と $b\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ は real left-dense continuous である．また，任意の $p > 1$ に対して，実数値関数 Φ_p は

$$\Phi_p(s) = \begin{cases} |s|^{p-2}s & (s \neq 0) \\ 0 & (s = 0) \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

であり，1 次元 p-Laplacian で定義された関数である．特に，パラメータ p の共役数 q は $(p-1)(q-1) = 1$ を満たすとする．このとき，関数 Φ_p の逆関数は Φ_q であることに注意しておく．

方程式 (1.1) は非線形であるが，関数 Φ_p の定義から**半分線形**と呼ばれている．実際に，任意の実数 s_1 と s_2 に対して，$\Phi_p(s_1 s_2) = \Phi_p(s_1)\Phi_p(s_2)$ となるから，斉次性は成立する．しかしながら，一般的に $p \neq 2$ であれば，$\Phi_p(s_1 + s_2) = \Phi_p(s_1) + \Phi_p(s_2)$ は成り立たない．すなわち，加法性は満たさない．したがって，本研究で扱う方程式は，線形性のうち，半分の性質をもつことから，方程式 (1.1) は**半分線形ダイナミック方程式**（half-linear dynamic equation）と呼ばれている．半分線形ダイナミック方程式 (1.1) に対して，$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ のとき，方程式 (1.1) は減衰付き半分線形微分方程式となる．$\mathbb{T} = \mathbb{N}$ のとき，方程式 (1.1) は前進差分と後退差分をもつ減衰付き半分線形差分方程式となる．

方程式 (1.1) は次の Sturm–Liouville 型と呼ばれる半分線形ダイナミック方程式

$$(r(t)\Phi_p(x^{\Delta}))^{\nabla} + c(t)\Phi_p(x) = 0, \quad t \in \mathbb{T}_{t_0} \tag{1.2}$$

と同値である（詳細は第 2 節を参照せよ）．方程式 (1.1) や方程式 (1.2) は自明解 $x(t) \equiv 0$ をもつから，非自明解の挙動を探求する．考察する方程式の一般解の導出は一般的に困難であるから，解の挙動を探るために必要な方法の一つとして，振動理論がよく知られている．振動理論とは，方程式の解を終局的に正（または負）となる解（非振動解）とそうでない解（振動解）の 2 つに分類することである．方程式 (1.1) や方程式 (1.2) の解が振動する（または振動しない）定義は以下の通りである．

定義 1.1 ある時刻 t に対して，方程式 (1.1) または方程式 (1.2) の解が $x(t) = 0$ または，left-scattered かつ $x(\rho(t))x(t) < 0$ を満たす t が存在するとき，その時刻 t を *generalized zero* と呼ぶ．

定義 1.2 $t^* = \sup \mathbb{T}$ かつ $a \in \mathbb{T}$ とする．$t^* < \infty$ の場合，$\rho(t^*) = t^*$ と仮定する．方程式 (1.1) または方程式 (1.2) の非自明解が振動するとは，区間 $[a, t^*)$ に対して，方程式 (1.1) または方程式 (1.2) の

全ての非自明解が無限個の generalized zero をもつときである．そうでない場合は，区間 $[a, t^*)$ に対して，方程式 (1.1) または方程式 (1.2) の全ての解は振動しないという．すなわち，ある十分大きな時刻以降の t に対して，方程式 (1.1) または方程式 (1.2) の解は常に正または常に負を意味する．

半分線形ダイナミック方程式 (1.2) の振動理論の基礎は，Došlý and Marek [5] によって構築され，既に，Sturm の比較定理や分離定理も存在する．Sturm の比較定理と分離定理は，方程式 (1.2) の 1 つの非自明解が振動すれば，方程式 (1.2) の全ての非自明解も振動することである．もちろん，方程式 (1.2) の 1 つの非自明解が振動しなければ，方程式 (1.2) の全ての非自明解も振動しない．すなわち，方程式 (1.2) に対して，振動する解と振動しない解は混在しない．また，方程式 (1.1) と方程式 (1.2) は同値であるから，振動する解と振動しない解が混在しない事実は方程式 (1.1) にも当てはまる．Sturm の比較定理や分離定理を利用して，著者も方程式 (1.2) の全ての非自明解が振動しないための十分条件も導出している（[7] を参照せよ）．この結果は，半分線形微分方程式と半分線形差分方程式の解挙動の類似性に関する成果となる．

最近では，常微分方程式の解の性質を探る手法が差分方程式にも適用できるようにカスタマイズされるようになり，タイムスケールの概念を利用して，連続型の方程式（線形または非線形微分方程式）と離散型の方程式（線形または非線形差分方程式）の解の性質（振動性や安定性）を統一した類似条件が数多く導出されている．このままでは，常微分方程式と差分方程式の解の相違性は消失してしまうのではないのか？と疑問が生じてもおかしくはない．そこで，本稿では，方程式 (1.1) の全ての非自明解が振動しないための十分条件を導出するとともに，その十分条件から，常微分方程式と差分方程式の解の相違性を発見することを主目的とする．

目的を達成するためには，振動理論でよく利用する，方程式 (1.1) に対応したリッカチダイナミック方程式（Riccati dynamic equation）の導入が必要となる．実際に，方程式 (1.1) の非自明解が振動しないと仮定して，同値変換を利用すれば，1 階非線形ダイナミック方程式（リッカチダイナミック方程式）が導出できる．もし，リッカチダイナミック方程式を満たす大域解が 1 つでも存在すれば，方程式 (1.1) の全ての非自明解は振動しないことがわかる．これまで，方程式 (1.1) に対応したリッカチダイナミック方程式はこれまでに与えられていないため，本研究では，このリッカチ手法を確立して，目的を達成させる．

本稿の構成は以下の通りである．

第 2 節では，方程式 (1.1) に対応する一般化された新しいリッカチダイナミック方程式を与える．第 3 節では，第 2 節で紹介したリッカチダイナミック方程式を利用して，方程式 (1.1) の全ての非自明解が振動しないことを保証する十分条件とその証明を紹介する．また，導出した非振動定理から，具体例として，減衰付き半分線形 Euler 型方程式の非振動条件を与える．最後の第 4 節では，第 3 節で紹介した非振動条件から，$p \neq 2$ ならば，半分線形微分方程式と半分線形差分方程式の両者の解の非振動条件に相違性があることを紹介する．

2　一般化されたリッカチダイナミック方程式

方程式 (1.1) に対応するリッカチダイナミック方程式を導出するために，以下の命題を利用する．

命題 2.1　もし $-a \in \mathcal{R}_\nu^+$ ならば，方程式 (1.1) は次の Strum–Liouville 型半分線形ダイナミック方程

式 (1.2) と同値である．ただし，関数 r と c は

$$r(t) = \hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t, t_0) \quad \text{かつ} \quad c(t) = \frac{b(t)}{1+\nu(t)a(t)} \hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t, t_0)$$

である．

命題 2.1 の証明 方程式 (1.1) の両辺に $\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t, t_0)$ を掛け算すれば,

$$\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t, t_0)(\Phi_p(x^\Delta))^\nabla + \hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t, t_0)a(t)\Phi_p(x^\Delta) + \hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t, t_0)b(t)\Phi_p(x) = 0$$

となる．また，関数 $\Phi_p(x^\Delta)$ に対して,

$$\Phi_p(x^\Delta) = \Phi_p(x^\Delta(\rho(t))) + \nu(t)(\Phi_p(x^\Delta))^\nabla$$

を利用すれば,

$$\begin{aligned}(1+\nu(t)a(t))\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t, t_0)(\Phi_p(x^\Delta))^\nabla + a(t)\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t, t_0)\Phi_p(x^\Delta(\rho(t))) \\ + b(t)\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t, t_0)\Phi_p(x) = 0\end{aligned}$$

を得る．ここで，$1+\nu(t)a(t) > 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t, t_0)(\Phi_p(x^\Delta))^\nabla + \frac{a(t)}{1+\nu(t)a(t)}\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t, t_0)\Phi_p(x^\Delta(\rho(t))) \\ + \frac{b(t)}{1+\nu(t)a(t)}\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t, t_0)\Phi_p(x) = 0\end{aligned}$$

がわかる．したがって，タイムスケール上の積の微分公式から,

$$(\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t, t_0)\Phi_p(x^\Delta))^\nabla + \frac{b(t)}{1+\nu(t)a(t)}\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t, t_0)\Phi_p(x) = 0 \tag{2.1}$$

を得る． □

命題 2.1 を利用して，以下の必要十分条件を証明する．

定理 2.1 以下は同値である．

(i) 方程式 (1.1) の全ての非自明解が振動しない．

(ii) $\Phi_q(w(\rho)) \in \mathcal{R}_\nu^+$ かつ $\mathcal{W}[w] \geq 0$ を満たすナブラ微分可能な関数 w が存在する．ただし，$\mathcal{W}[w]$ は

$$\mathcal{W}[w] := \begin{cases} w^\nabla(t) - b(t) + a(t)w(t) - (p-1)|w(t)|^q & (\rho(t) = t), \\ w^\nabla(t) - b(t) + a(t)w(t) + \frac{w(\rho(t))}{\nu(t)}\left(1 - \frac{1}{\Phi_p(1-\nu(t)\Phi_q(w(\rho(t))))}\right) & (\rho(t) < t) \end{cases}$$

である．

定理 2.1 の証明 まず，十分条件を示していく．方程式 (1.1) の 1 つの解 x が振動しないと仮定する．このとき，一般性を失うことなく，$x(t) > 0$ と仮定してもよい．ここで，関数 w を

$$w(t) := -\frac{\Phi_p(x^\Delta(t))}{\Phi_p(x(t))}$$

と定義する．関数 w はナブラ微分可能であるから,

$$\Phi_p(x(t)) = \Phi_p(x(\rho(t))) + \nu(t)(\Phi_p(x(t)))^\nabla$$

かつ

$$\Phi_p(x^{\Delta}(t)) = \Phi_p(x^{\Delta}(\rho(t))) + \nu(t)(\Phi_p(x^{\Delta}(t)))^{\nabla}$$

に注意すれば,

$$\begin{aligned}
w^{\nabla}(t) =& -\frac{(\Phi_p(x^{\Delta}(t)))^{\nabla}\Phi_p(x(t)) - \Phi_p(x^{\Delta}(t))(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}}{\Phi_p(x(t))\Phi_p(x(\rho(t)))} \\
=& -\frac{(\Phi_p(x^{\Delta}(t)))^{\nabla}\big(\Phi_p(x(\rho(t))) + \nu(t)(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}\big) - \Phi_p(x^{\Delta}(t))(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}}{\Phi_p(x(t))\Phi_p(x(\rho(t)))} \\
=& -\frac{(\Phi_p(x^{\Delta}(t)))^{\nabla}}{\Phi_p(x(t))} + \frac{\big(\Phi_p(x^{\Delta}(t)) - \nu(t)(\Phi_p(x^{\Delta}(t)))^{\nabla}\big)(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}}{\Phi_p(x(t))\Phi_p(x(\rho(t)))} \\
=& \frac{a(t)\Phi_p(x^{\Delta}(t)) + b(t)\Phi_p(x(t))}{\Phi_p(x(t))} + \frac{\Phi_p(x^{\Delta}(t))(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}}{\Phi_p(x(t))\Phi_p(x(\rho(t)))} \\
=& b(t) - a(t)w(t) - w(\rho(t))\frac{(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}}{\Phi_p(x(t))}
\end{aligned}$$

を得る．また，簡単のために,

$$(\Phi_p(x(t)))^{\nabla} = \frac{1}{\nu(t)}\big(\Phi_p(x(t)) - \Phi_p(x(\rho(t)))\big)$$

であることに注意して，$(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}/\Phi_p(x(t))$ を計算すれば,

$$\begin{aligned}
\frac{(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}}{\Phi_p(x(t))} =& \frac{\Phi_p(x(t)) - \Phi_p(x(\rho(t)))}{\nu(t)\Phi_p(x(t))} \\
=& \frac{1}{\nu(t)}\left(1 - \frac{\Phi_p(x(\rho(t)))}{\Phi_p(x(t))}\right) \\
=& \frac{1}{\nu(t)}\left(1 - \frac{\Phi_p(x(\rho(t)))}{\Phi_p\big(x(\rho(t)) + \nu(t)x^{\Delta}(\rho(t))\big)}\right) \\
=& \frac{1}{\nu(t)}\left(1 - \frac{1}{\Phi_p\left(1 + \nu(t)\frac{x^{\Delta}(\rho(t))}{x(\rho(t))}\right)}\right)
\end{aligned}$$

となる．また,

$$\frac{x^{\Delta}(t)}{x(\rho(t))} = -\Phi_p(w(\rho(t)))$$

から,

$$\frac{(\Phi_p(x(t)))^{\nabla}}{\Phi_p(x(t))} = \frac{1}{\nu(t)}\left(1 - \frac{1}{\Phi_p\left(1 - \nu(t)\Phi_q(w(\rho(t)))\right)}\right)$$

を得る．もし $\rho(t) < t$ ならば，関数 w のナブラ微分は

$$w^{\nabla}(t) = b(t) - a(t)w(t) - \frac{w(\rho(t))}{\nu(t)}\left(1 - \frac{1}{\Phi_p\left(1 - \nu(t)\Phi_q(w(\rho(t)))\right)}\right)$$

となる．また，方程式 (1.1) の解が非振動解であるから,

$$x(t)x(\rho(t)) > 0$$

によって,

$$1-\nu(t)\Phi_q(w(\rho(t))) = 1+\nu(t)\frac{x^{\Delta}(\rho(t))}{x((\rho(t)))} = \frac{x(\rho(t))+\nu(t)x^{\Delta}(\rho(t))}{x(\rho(t))}$$
$$= \frac{x(\rho(t))+\nu(t)x^{\nabla}(t)}{x(\rho(t))}$$
$$= \frac{x(t)}{x(\rho(t))} = \frac{x(t)x(\rho(t))}{x^2(\rho(t))} > 0$$

を満足する.

一方，もし $\rho(t)=t$ ならば，関数 w のナブラ微分は

$$w^{\nabla}(t) = b(t)-w(t)a(t)-w(\rho(t))\frac{(\Phi_p(x(t)))'}{\Phi_p(x(t))}$$
$$= b(t)-a(t)w(t)-(p-1)w(\rho(t))\frac{x'(t)}{x(t)}$$
$$= b(t)-a(t)w(t)+(p-1)w(\rho(t))|w(t)|^q$$

となる.

次に必要条件を示していく．新しい正の関数 d を

$$d(t) := w^{\nabla}(t)-b(t)+a(t)w(t)+\frac{w(\rho(t))}{\nu(t)}\left(1-\frac{1}{\Phi_p(1-\nu(t)\Phi_q(w(\rho(t))))}\right) \geq 0$$

とする．このとき，関数 d をもつ半分線形ダイナミック方程式

$$(\Phi_p(x^{\Delta}))^{\nabla}+a(t)\Phi_p(x^{\Delta})+(b(t)+d(t))\Phi_p(x)=0 \tag{2.2}$$

を考える．このとき，方程式 (2.2) は非振動解

$$x(t) = e_{-\Phi_q(w)}(t,t_0)$$

をもつことは容易にわかる．したがって，命題 2.1 を利用すれば，方程式 (2.2) は

$$(\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)\Phi_p(x^{\Delta}))^{\nabla}+\frac{b(t)+d(t)}{1+\nu(t)a(t)}\hat{e}_{\frac{a}{1+\nu a}}(t,t_0)\Phi_p(x)=0 \tag{2.3}$$

となる．また，方程式 (1.1) と方程式 (2.1) は同値である．したがって，方程式 (2.1) と方程式 (2.3) に対して，Sturm の比較定理を利用すれば,

$$b(t)+d(t) \geq b(t)$$

であるから，方程式 (2.1) のすべての非自明解は振動しない．すなわち，方程式 (1.1) のすべての非自明解も振動しないことがわかる． □

3　半分線形ダイナミック方程式 (1.1) の非振動定理

方程式 (1.1) に対して，新しい非振動定理を与える.

定理 3.1 ナブラ微分可能な関数 B は，$B^{\nabla}(t) = b(t)$ かつ $\Phi_q(B(\rho)) \in \mathcal{R}_{\nu}^{+}$ を満たすと仮定する．もし

$$\begin{cases} \big((p-1)\Phi_q(B(t)) - a(t)\big)B(t) \le 0 \quad (\rho(t) = t), \\ B(\rho(t)) - \big(B(t)a(t)\nu(t) + B(\rho(t))\big)\Phi_p\big(1 - \nu(t)\Phi_q(B(\rho(t)))\big) \le 0 \quad (\rho(t) < t) \end{cases} \tag{3.1}$$

ならば，方程式 (1.1) の全ての非自明解は振動しない．

定理 3.1 の証明 $\rho(t) < t$ の場合のみ証明する．$\rho(t) = t$ の場合は Sugie and Matsumura [8] を参照せよ．$\nu > 0$ かつ $1 - \nu\Phi_q(B(\rho)) > 0$ であることに注意して，(3.1) の両辺を $\nu\Phi_p\big(1 - \nu\Phi_q(B(\rho))\big)$ で割れば，

$$\begin{aligned} 0 &\ge -B(t)a(t) - \frac{B(\rho(t))}{\nu(t)} + \frac{B(\rho(t))}{\nu(t)\Phi_p\big(1 - \nu(t)\Phi_q(B(\rho(t)))\big)} \\ &= -B(t)a(t) - \frac{B(\rho(t))}{\nu(t)}\left(1 - \frac{1}{\Phi_p\big(1 - \nu(t)\Phi_q(B(\rho(t)))\big)}\right) \end{aligned}$$

を得る．ここで，両辺に B^{∇} を加えれば，

$$B^{\nabla}(t) \ge b(t) - B(t)a(t) - \frac{B(\rho(t))}{\nu(t)}\left(1 - \frac{1}{\Phi_p\big(1 - \nu(t)\Phi_q(B(\rho(t)))\big)}\right)$$

となる．したがって，B は定理 2.1 のリッカチ不等式を満たす． □

定理 3.1 の例として，次の減衰付き Euler 型半分線形ダイナミック方程式

$$(\Phi_p(x^{\Delta}))^{\nabla} + a(t)\Phi_p(x^{\Delta}) + \frac{1}{t\sigma(t)}\Phi_p(x) = 0, \quad t \in \mathbb{T}_{t_0} \tag{3.2}$$

を考える．もし $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ならば，$\sigma(t) = t$ であるから，方程式 (3.2) は半分線形微分方程式

$$(\Phi_p(x'))' + a(t)\Phi_p(x') + \frac{1}{t^2}\Phi_p(x) = 0, \quad t \ge 1 \tag{3.3}$$

となる．一方，$\mathbb{T} = \mathbb{N}$ ならば，$\sigma(t) = t + 1$ であるから，方程式 (3.2) は半分線形差分方程式

$$\nabla(\Phi_p(\Delta x(t))) + a(t)\Phi_p(\Delta x(t)) + \frac{1}{t(t+1)}\Phi_p(x(t)) = 0, \quad t \ge 1 \tag{3.4}$$

となる．方程式 (3.3) と方程式 (3.4) をそれぞれ定理 3.1 に適用すれば，以下の結果がわかる．

例 3.1 もし

$$a(t) \le \frac{1-p}{t^{q-1}} \tag{3.6}$$

ならば，方程式 (3.3) の全ての非自明解は振動しない．

例 3.2 もし

$$a(t) \le \frac{t+1}{t\Phi_p\left(1 + \Phi_q(t^{-1})\right)} - \frac{t+1}{t} \tag{3.7}$$

ならば，方程式 (3.4) の全ての非自明解は振動しない．

例 3.1 の証明 関数 $B(t) = -t^{-1}$ とおけば，$B'(t) = t^{-2}$ となる．また，$\rho(t) = t$ の場合の定理 3.1 の条件 (3.1) に対して，条件 (3.6) を利用すれば，

$$\big((p-1)\Phi_p(-t^{-1}) - a(t)\big)(-t^{-1}) = \frac{p-1}{t^q} + \frac{a(t)}{t} \le 0$$

となる．したがって，条件 (3.1) を満たす． □

例 3.2 の証明 関数 $B(t) = -(t+1)^{-1}$ とおく．このとき，$B(\rho(t)) = B(t-1) = -t^{-1}$ かつ $\nu(t) = 1$ であるから，

$$\nabla B(t) = B(t) - B(t-1) = \frac{1}{t(t+1)}$$

かつ

$$1 - \nu(t)\Phi_q\big(B(\rho(t))\big) = 1 + \Phi_q(t^{-1}) > 0$$

となる．また，$\rho(t) < t$ の場合の定理 3.1 の条件 (3.1) に対して，条件 (3.7) を利用すれば，

$$\begin{aligned}
&B(\rho(t)) - \big(B(t)a(t)\nu(t) + B(\rho(t))\big)\Phi_p\big(1 - \nu(t)\Phi_q(B(\rho(t)))\big) \\
&= -\frac{1}{t} - \left(-\frac{a(t)}{t+1} - \frac{1}{t}\right)\Phi_p(1 + \Phi_q(t^{-1})) \\
&\le -\frac{1}{t} + \left(\frac{t+1}{t\Phi_p\left(1 + \Phi_q(t^{-1})\right)} - \frac{t+1}{t}\right)\frac{\Phi_p(1 + \Phi_q(t^{-1}))}{t+1} + \frac{\Phi_p(1 + \Phi_q(t^{-1}))}{t} \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる．したがって，条件 (3.1) を満たす． □

注意 3.1 $p = 2$ の場合，条件 (3.6) と条件 (3.7) は共に

$$a(t) \le -\frac{1}{t}$$

となる．したがって，線形微分方程式 (3.2) と線形差分方程式 (3.3) の解が振動しないための条件は一致する．

4 解の非振動性に関する常微分方程式と差分方程式の相違性

本節では，常微分方程式と差分方程式の解の非振動性に関する相違条件を議論する．第 3 節の注意 3.1 で紹介したように，$p = 2$ の場合は，方程式 (3.3) と方程式 (3.4) の解の非振動条件は同じとなる．しかしながら，$p \neq 2$ かつ $p > 1$ の場合は，半分線形微分方程式 (3.3) と半分線形差分方程式 (3.4) の全ての非自明解が振動しない条件は異なる．実際に，ここで問題となるのは，半分線形微分方程式 (3.3) の解が振動しない条件 (3.6) のもとで，半分線形差分方程式 (3.4) の解は振動しないのか？それとも振動するのか？もし，半分線形差分方程式 (3.4) の 1 つの解でも振動解を見つけることができれば，相違性を発見できる．実際に，例 3.1 の条件 (3.6) のもとで，半分線形差分方程式 (3.4) の非自明解が振動していることを数値シミュレーションにより可視化する．

方程式 (3.4) の解軌道を描くために，パラメータを $p = 3.8$ かつ $q = p/(p-1) \approx 1.35714\cdots$ とする．また，方程式 (3.4) の係数関数 a を $a(t) = (1-p)/t^{q-1}$ とすれば，条件 (3.6) は満足している．

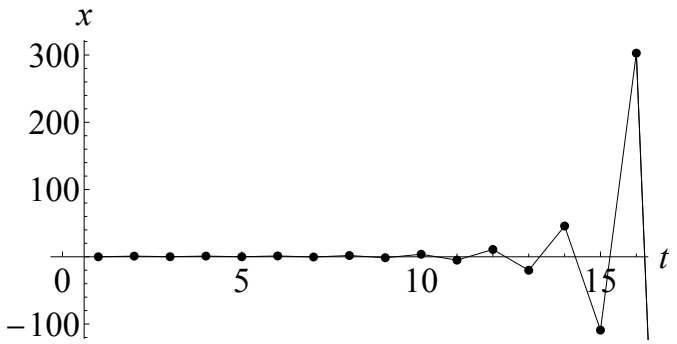


図 1　$p = 3.8$ かつ $q = p/(p-1) \approx 1.35714\cdots$ のときの条件 (3.6) を満足する方程式 (3.4) の振動する解

このとき，方程式 (3.4) の $x(1) = 0$ かつ $x(2) = 1$ から出発する解は振幅がどんどん大きくなる振動解であることがわかる（図 1 を参照せよ）.

結論として，$p \neq 2$ かつ $p > 1$ の場合は，半分線形微分方程式 (3.3) と半分線形差分方程式 (3.4) の解の振動性にはそれぞれ相違性があることがわかる．一般的に，タイムスケールの概念は常微分方程式と差分方程式を統一する道具として活用されるが，本稿では，類似性のみならず相違性について発見することができた.

参考文献

[1] R. P. Agarwal, D. O'Regan, S. H. Saker, *Dynamic Inequalities On Time Scales*, Springer, New York, 2014.

[2] M. Bohner, A. C. Peterson, *Dynamic equations on time scales: An introduction with applications*, Birkhäuser, Boston, 2001.

[3] M. Bohner, A. Peterson, *Advances in Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhäuser, Boston, 2003.

[4] M. Bohner, S. G. Georgiev, *Multivariable dynamic calculus on time scales*, Springer-Verlag: Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 2016.

[5] O. Došlý, D. Marek, Half-linear dynamic equations with mixed derivatives, E. J. Diff. Eq., **2005** (2005), pp.1–18.

[6] S. Hilger, Ein Maßkettenkalkül mit Anwendung auf Zentrumsmannigfaltigkeiten, PhD thesis, Universität Würzburg, 1988.

[7] K. Ishibashi, Hille–Nehari type non-oscillation criteria for half-linear dynamic equations with mixed derivatives on a time scale, E. J. Diff. Eq., **2021** (2021), no. 78, pp.1–15.

[8] J. Sugie, K. Matsumura, A nonoscillation theorem for half-linear differential equations with periodic coefficients, Appl. Math. Comput., **199** (2008), 447–455.

準静的亀裂形成現象に由来する非線形発展方程式について

東北大学大学院理学研究科数学専攻
佐藤光汰朗 (Kotaro Sato)

1 序文

本小論では次の非線形発展方程式について考察する.

$$\begin{cases} \partial I_{(-\infty,0]}(\partial_t z) - \Delta z + \sigma z \ni f & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ z = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ z(\cdot,0) = z_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

ただし $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域, $z = z(x,t)$ は未知関数とし, 関数 $f = f(x,t)$, $\sigma = \sigma(x,t)$, $z_0 = z_0(x)$ は与えられているものとする. ここで, $I_{(-\infty,0]}$ は $(-\infty,0]$ 上の指示関数, $\partial I_{(-\infty,0]} : \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$ はその劣微分作用素を表すとする. すなわち, $s \in \mathbb{R}$ に対して

$$I_{(-\infty,0]}(s) = \begin{cases} 0 & \text{if } s \in (-\infty,0], \\ +\infty & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$\partial I_{(-\infty,0]}(s) = \begin{cases} \{0\} & \text{if } s \in (-\infty,0), \\ [0,+\infty) & \text{if } s = 0, \\ \emptyset & \text{otherwise} \end{cases}$$

と表される (劣微分作用素の基本的な性質については, 例えば [9] 等を参照). 方程式 (1.1) は, 次の変分不等式 (VI) に書き換えることができる.

$$\begin{cases} \partial_t z\,(-\Delta z + \sigma z - f) = 0 & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ \partial_t z \le 0,\ -\Delta z + \sigma z - f \le 0 & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ z = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ z(\cdot,0) = z_0 & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{VI}$$

変分不等式 (VI) の表示からも明らかなように, 方程式 (1.1) の解には時間に関して非増加とする制約条件が課せられている. このような不可逆構造を伴う方程式は, 例えば脆性破壊などの分野にしばしば現れる. Francfort と Marigo は, 亀裂発展の基礎理論として知られる Griffith 理論の拡張として, 脆性破壊現象に対する変分的モデルを提唱した. このモデルでは亀裂集合のハウスドルフ測度を含む汎関数が導入され, 亀裂集合の単調増加性を拘束条件に課した条件付き最小化問題によって亀裂の発生や進展が記述される. 一方, 画像処理の分野で導入された Ambrosio-Tortorelli 正則化 [2,3] によるフェーズフィールド近似法を転用すると, Francfort-Marigo の最小化問題は, 汎関数

$$AT_\varepsilon(u,z) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(z^2 + \eta_\varepsilon\right) |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla z|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega (1-z)^2 \,\mathrm{d}x$$

の z に関する非増加拘束条件付き最小化問題によって近似することができる. ただし $\varepsilon > 0$ とし, η_ε は $0 < \eta_\varepsilon \ll \varepsilon$ を満たす定数とする. このモデルでは, 領域 Ω は脆性材料を表し, 関数 $u \in H^1(\Omega)$ は

材料の変位場を表す. ただし, ここでは簡単のためスカラー値化している. また $z \in H^1(\Omega)$ は $[0,1]$ に値を取り各点 $x \in \Omega$ での材料の損傷の度合いを表す相場 (phase-field) で, z が 1 に近い点では損傷がなく, z が 0 に近い点で亀裂が生じているとみなす. Giacomini [8] は AT_ε の拘束条件付き最小化問題を逐次的に解き, その最小化元からなる列の連続極限を取ることで, 亀裂の準静的発展を表す変位場と相場のフローを構成した. さらに, ここで構成されたフローは亀裂の準静的発展を特徴づける 3 つの性質 (**不可逆性**, **片側極小性**, **エネルギー保存則**) を満たすことが示されている. しかし, 一連のスキームが Euler-Lagrange 方程式や勾配流として表現されていなかったため, 得られたフローの定性的・定量的な性質はあまり分かっていない. 偏微分方程式論の立場から研究する取り組みも現れたが, フルモデルは適切性も示されておらず, また近似や単純化を行った上で研究されているため, 特に上で述べた亀裂の準静的過程を特徴づける 3 つの性質を同時に伴うものは見当たらない.

本小論で扱う方程式 (1.1) は, 汎関数 AT_ε に対する (形式的な) Euler-Lagrange 方程式系に対して, 変位場に相当する未知関数 u が相場 z とは独立に決定されるとみなす単純化を施して得られる z に関する単独の方程式である. 方程式 (1.1) のように時間微分項に非線形かつ非有界な作用素を伴う発展方程式を扱った研究としては [1] や [4], 疲労損傷に関するモデルとしては [7] 等がある. そこで扱われている作用素はある種の強圧性を持つが, これらと比較したとき, 方程式 (1.1) では時間微分項に掛かる作用素が退化している, すなわち強圧性が失われていることにより方程式の放物性が失われ, 特に解の時間微分のアプリオリ評価の導出がより困難となる. 一方, それによって解の時間発展の一部が制限されるため, 方程式の解はエネルギー保存則を含む上述の 3 つの性質を満たすようになる. なお, 方程式 (1.1) の解の構成においては [1] で行われた方程式の時間離散化によるアプローチを踏襲するが, 本方程式では解の平滑化効果など放物型方程式特有の性質が期待できないため, 基盤となるエネルギー評価は [1] とは異なる方法で導出する必要がある.

本小論で扱う内容は主に次の 3 点である. 1 点目に, 方程式 (1.1) の適切性を示す (Theorem 2.3). 解の構成はいわゆる minimizing movement スキームに基づくが, 時間微分に作用する劣微分作用素が退化性を持つため, 方程式に解の時間微分を掛けて積分し評価するなどの通常の方法では時間微分に関するアプリオリ評価が導出されない. ここでは, まず Barbu や新井による非有界作用素を伴う二重非線形発展方程式に対する手法を時間離散化し, 時間微分項に掛かる劣微分作用素の特異性を定量的に評価することで解の時間微分の有界性評価を導く. 2 点目に, その解が満たす定性的性質, すなわち亀裂進展に関わる 3 つの性質について考察する (Theorem 2.6). また, Theorem 2.8 では方程式 (1.1) の解の時刻無限大での極限がある極限方程式の解として特徴付けられることを示す.

2 主定理

本小論を通して $N \geq 1$ とし, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は十分滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とする.

Definition 2.1. 関数 $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $\sigma \in W^{1,1}(0,T;L^{N/2}(\Omega))$, $z_0 \in$

$H_0^1(\Omega)$ に対して, 関数 $z : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ が方程式 (1.1) の解であるとは,

$$z \in W^{1,2}\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(0,T;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right), \tag{2.1}$$

$$\partial_t z \le 0,\ -\Delta z + \sigma z - f \le 0 \ \text{ a.e. in } \Omega \times (0,T), \tag{2.2}$$

$$\partial_t z\,(-\Delta z + \sigma z - f) = 0 \ \text{ a.e. in } \Omega \times (0,T), \tag{2.3}$$

$$z(x,0) = z_0(x) \ \text{ a.e. } x \in \Omega \tag{2.4}$$

が成り立つことをいう.

Remark 2.2. 定義 2.1 の条件 (2.1) に現れる関数空間 $W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ に対して, 関数 w をこの空間から任意に選んだとき, 関数 $t \mapsto \|\nabla w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ は $[0,T]$ 上絶対連続となる. さらに, いわゆる連鎖率

$$\frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = -\int_0^t \int_\Omega \Delta w(s)\,\partial_t w(s)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}s \ \text{ for a.e. } t \in (0,T)$$

が成り立つ (例えば [5] を参照).

主定理の証明に先立って, 次の記法を導入する. 関数 $\rho \in L^{N/2}(\Omega)$ に対して,

$$\|u\|_\rho := \left(\int_\Omega \rho\,|u|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2},\ u \in H_0^1(\Omega) \tag{2.5}$$

と定める. 関数 $\rho \in L^{N/2}(\Omega)$ が Ω 上非負であるならば, $\|\cdot\|_\rho$ は $H_0^1(\Omega)$ 上に $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ と同値なノルムを定める.

本小論の主定理は以下の通りである.

Theorem 2.3. (i) 関数 $f \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $\sigma \in L^\infty(0,T;L^N(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T;L^{N/2}(\Omega))$, $z_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ が

$$\sigma \ge 0 \ \text{ a.e. in } \Omega \times (0,T), \tag{2.6}$$

$$f(\cdot,t) \ge \hat{f} \ \text{ a.e. in } \Omega, \ \text{ for a.e. } t \in (0,T) \ \text{ for some } \hat{f} \in L^2(\Omega), \tag{2.7}$$

$$-\Delta z_0 + \sigma(0) z_0 - f(0) \le 0 \ \text{ in } H^{-1}(\Omega) \tag{2.8}$$

を満たすとする. このとき, 方程式 (1.1) の解 z が存在し, さらに $z \in W^{1,2}(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ を満たす.

(ii) 固定された関数 $\sigma \in W^{1,1}(0,T;L^{N/2}(\Omega))$ に対し, 定数 $C = C(\Omega,\sigma) > 0$ が存在して, σ, $f = f^i \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T;H^{-1}(\Omega))$, $z_0 = z_0^i \in H_0^1(\Omega)$, $i = 1,2$ に対する方程式 (1.1) の解 z^1, z^2 に対して

$$\left\|z^1 - z^2\right\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 \le C\left(\left\|z_0^1 - z_0^2\right\|_{\sigma(0)}^2 \mathrm{d}x + \left\|\nabla z_0^1 - \nabla z_0^2\right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\|f^1 - f^2\right\|_{W^{1,2}(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2\right)$$

が成り立つ. 特に, 与えられたデータに対して, 方程式 (1.1) の解は一意である.

Remark 2.4. (i) Theorem 2.3 (i) では f の時間微分が相対空間 $H^{-1}(\Omega)$ の元としてのみ定義されている. ここで, もし f が $W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$ に属するならば, 方程式の両辺に Δz の時間微分を掛けて積分する操作を正当化することができ, Δz に関するアプリオリ評価が導かれる. Theorem 2.3 の枠組みではそのような形式操作が正当化できないため, minimizing movement スキームに基づいて近似解の情報をより詳細に引き出す必要がある.

(ii) Theorem 2.3 (i) の仮定 (2.8) は与えられた初期データに対する整合条件であるが, この仮定は方程式 (1.1) の解が存在するための必要条件である. 実際, 方程式 (1.1) の解 z および任意の非負関数 $v \in H_0^1(\Omega)$ に対して, 関数 $\Phi : [0,T] \to \mathbb{R}$ を $\Phi(t) = \langle -\Delta z(t) + \sigma(t)z(t) - f(t), v\rangle_{H_0^1(\Omega)}$ と定めたとき, 解の定義より $\Phi \leq 0$ on $(0,T)$ が成り立つ. さらに, Remark 2.2 に注意すると, Φ は $[0,T]$ 上連続であるから, このことより $\Phi(0) \leq 0$ が従う.

(iii) Theorem 2.3 (ii) では, 係数関数 σ を一つ固定した場合の f および z_0 に対する解の連続依存性が述べられている. 一方, σ 自身に対する解の連続依存性はよりデリケートである.

Remark 2.5. Theorem 2.3 は, 解 z に Dirichlet 境界条件と Neumann 境界条件の混合条件を課す場合にも拡張することができる. ただし, その場合 σ が $\Omega \times (0,T)$ 上で退化しないこと, すなわち $\inf_{0<t<T} \|\sigma\|_{L^1(\Omega)} > 0$ を仮定する.

Theorem 2.3 について, 次節で (i) の証明の概略, 特に解のアプリオリ評価の導出について述べる.

続く Theorem 2.6 では, 方程式 (1.1) の解の満たす定性的性質について述べる. 汎関数 $\mathcal{E} : H_0^1(\Omega) \times (0,T) \to \mathbb{R}$ を

$$\mathcal{E}(w,t) = \frac{1}{2}\|w\|_{\sigma(t)}^2 - \int_\Omega f(t)w \,\mathrm{d}x, \quad w \in H_0^1(\Omega),\ t \in (0,T)$$

で定めるとき, 次が成り立つ.

Theorem 2.6. 関数 f, σ および z_0 はそれぞれ Definition 2.1 で仮定される関数空間に属するとする. このとき, 方程式 (1.1) の解 z は次の (i)–(iii) を満たす.

(i) **(不可逆性)** 不等式 $\partial_t z \leq 0$ a.e. in $(0,T)$ が成り立つ,

(ii) **(片側極小性)** 不等式 $w \leq z(t)$ を満たす $w \in H_0^1(\Omega)$, $t \in [0,T]$ に対して, $\mathcal{E}(z(t),t) \leq \mathcal{E}(w,t)$ が成り立つ,

(iii) **(エネルギー保存則)** 関数 $t \mapsto \mathcal{E}(z(t),t)$ は $[0,T]$ 上絶対連続であって, 各 $0 \leq s < t \leq T$ に対して

$$\mathcal{E}(z(t),t) = \mathcal{E}(z(s),s) - \int_s^t \langle \partial_t f(r),\, z(r)\rangle_{H_0^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\int_s^t \int_\Omega \partial_t\sigma(r)\,|z(r)|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}r$$

が成り立つ.

Remark 2.7. Theorem 2.6 で保証される 3 つの性質は, [8] において Ambrosio-Torotorelli 汎関数の最小化元のフローが満たす 3 つの条件にそれぞれ対応している. 特に (iii) のエネルギーに関する等式から, f と σ がともに時間発展しないならばエネルギーも変化しない, すなわちエネルギーは自発的に消散しないことが従う. この点は一般的な放物型方程式との差異であり, 方程式 (1.1) が力学的な側面を持つことを示唆している.

Proof of Theorem 2.6. 変分不等式の表示から, 解 z が不可逆性の条件を満たすことは明らかである. 任意の $t \in (0,T)$ を固定し, $w \leq z(t)$ in Ω を満たす関数 $w \in H_0^1(\Omega)$ を任意に固定すると, 変分不等式の第 2 式より

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_\Omega (-\Delta z(t) + \sigma(t)z(t) - f(t))\,(w - z(t))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega (-\Delta z(t) + \sigma(t)z(t) - f(t))\,w\,\mathrm{d}x - \|z(t)\|_{\sigma(t)}^2 + \int_\Omega f(t)z(t)\,\mathrm{d}x \ \leq\ \mathcal{E}(w,t) - \mathcal{E}(z(t),t) \end{aligned}$$

が成り立つ. また, z の時間微分に対する連鎖率により, 任意の t に対して

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}\left(z(t),t\right) &= -\int_\Omega \Delta z(t)\partial_t z(t)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \sigma(t)z(t)\partial_t z(t)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(t)\partial_t z(t)\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t\sigma(t)\left|z(t)\right|^2\mathrm{d}x - \left\langle \partial_t f(t), z(t)\right\rangle_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \partial_t\sigma(t)\left|z(t)\right|^2\mathrm{d}x - \left\langle \partial_t f(t), z(t)\right\rangle_{H_0^1(\Omega)} \ \text{ for a.e. } t\in(0,T),\end{aligned}$$

が成り立ち, $\mathcal{E}\left(z(t),t\right)$ の t に関する絶対連続性を得る. □

さらに, (1.1) の時間大域解の存在およびその挙動について, 次が成り立つ.

Theorem 2.8. (i) 関数 $f\in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty);L^2(\Omega))$, $\sigma\in L^2_{\mathrm{loc}}([0,\infty);L^N(\Omega))$ および $z_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ は Theorem 2.3 の仮定 (2.6), (2.8) に加え,

(2.9) $\partial_t f\in L^1(0,\infty;H^{-1}(\Omega))\cap L^2(0,\infty;H^{-1}(\Omega))$,

(2.10) $\partial_t\sigma\in L^2(0,\infty;L^2(\Omega))$,

(2.11) $f(\cdot,t)\geq \hat{f}$ a.e. in Ω, for a.e. $t\in(0,+\infty)$ for some $\hat{f}\in L^2(\Omega)$,

を満たすとする. このとき, 方程式 (1.1) の時間大域的な解が存在して

$$\begin{aligned}&z\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}\left([0,\infty);H_0^1(\Omega)\right)\cap L^2_{\mathrm{loc}}\left([0,\infty);H^2(\Omega)\right),\\ &\partial_t z\in L^2\left(0,\infty;H_0^1(\Omega)\right)\end{aligned}$$

を満たす.

(ii) 関数 f, σ, z_0 は上記の仮定を全て満たすとし, さらに

(2.12) $f-f_\infty\in L^2\left(0,\infty;L^2(\Omega)\right)$ for some $f_\infty\in L^2(\Omega)$,

(2.13) $\sigma-\sigma_\infty\in L^2\left(0,\infty;L^N(\Omega)\right)$, $\sigma_\infty\not\equiv 0$ in Ω for some $\sigma_\infty\in L^N(\Omega)$,

(2.14) $\partial_t\sigma\in L^1\left(0,\infty;L^{N/2}(\Omega)\right)$

を満たすとする. このとき, 方程式 (1.1) の時間大域解 z は

$$z_\infty\leq z_0,\ -\Delta z_\infty+\sigma_\infty z_\infty\leq f_\infty \text{ a.e. in } \Omega$$

を満たす関数 $z_\infty\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ に $t\to+\infty$ で $H_0^1(\Omega)$ 上強収束する. さらに, 加えて

(2.15) $f_\infty-\sigma_\infty z_*\leq f(t)-\sigma(t)z_0$ a.e. in Ω, $t\in(0,+\infty)$

が方程式

(2.16) $\partial I_{(-\infty,0]}\left(z_*-z_0\right)-\Delta z_*+\sigma_\infty z_*\ni f_\infty$ in Ω

の解 z_* に対して成り立つならば, $z_\infty\equiv z_*$ in Ω が成り立つ.

Theorem 2.8 の証明はここでは割愛する.

Remark 2.9. Theorem 2.8 において, この問題特有の現象を顕著に表現していると考えられるのは仮定 (2.15) である. 特に, 極限関数の特徴付けに初期値 z_0 やデータ f, σ の $(0,+\infty)$ 上での情報を用いている. なお, (2.15) を仮定しなかった場合, その他の全ての条件を仮定したとしても, 極限関数が (2.16) の形で特徴付けられない反例が構成できる.

このことは方程式の解の不可逆性と関係がある. すなわち, 方程式 (1.1) の解は一度減少すると 2 度と増加することができないため, たとえ初期時刻付近に受けた影響でも時刻無限大までその影響が残るという性質が反映されていると考えられる.

3 方程式 (1.1) の解の存在証明の概略

自然数 $m \in \mathbb{N}$ によって区間 $(0,T)$ を m 等分し, その幅を $\tau = T/m > 0$ とする. また, $0 \le k \le m$ に対して $t_k = k\tau$ とおく. Theorem 2.3 で与えられた関数 f と σ, および $0 \le k \le m$ に対して,

$$f_k = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\cdot,s)\,\mathrm{d}s \in L^2(\Omega) \text{ for } k = 1,2,\dots,m, \quad f_0 = f(\cdot,0) \in H^{-1}(\Omega),$$
$$\sigma_k = \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sigma(\cdot,s)\,\mathrm{d}s \in L^N(\Omega) \text{ for } k = 1,2,\dots,m, \quad \sigma_0 = \sigma(\cdot,0) \in L^{N/2}(\Omega)$$

とおき, 各 k に対する方程式

$$\partial I_{(-\infty,0]}(z_k - z_{k-1}) - \Delta z_k + \sigma_k z_k \ni f_k \text{ in } \Omega \tag{3.1}$$

を考える. 方程式 (3.1) の可解性について, 次が成り立つ.

Proposition 3.1. 関数 $\alpha \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, $g \in L^2(\Omega)$, および Ω 上非負値の関数 $\rho \in L^N(\Omega)$ に対して, 方程式

$$\begin{cases} \partial I_{(-\infty,0]}(v-\alpha) - \Delta v + \rho v \ni g & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

の解 $v \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ が一意的に存在する. さらに, 解 v は以下を満たす.

(i) いわゆる Lewy-Stampacchia 評価が成り立つ. すなわち,

$$g \wedge (-\Delta\alpha + \rho\alpha) \le -\Delta v + \rho v \le g \text{ a.e. in } \Omega \tag{3.3}$$

が成り立つ. ただし $a \wedge b = \min\{a,b\}$ とする.

(ii) 関数 α と g に関する比較原理が成り立つ. すなわち, α^i, g^i, $i = 1,2$ が $\alpha^1 \le \alpha^2$, $g^1 \le g^2$ in Ω を満たすならば, 対応する解は $v^1 \le v^2$ in Ω を満たす.

Proposition 3.1 の証明は割愛する. Proposition 3.1 により, 各 k に対して (3.1) の解 $z_k \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ が存在する. これに対し 2 種類の補間, すなわち区分的線形補間 z_τ と区分的定数補間 $\overline{z_\tau}$ をそれぞれ

$$z_\tau(t) = z_{k-1} + \frac{t-t_{k-1}}{\tau}(z_k - z_{k-1}) \quad \text{in } \Omega,\ t_{k-1} \le t \le t_k,$$
$$\overline{z_\tau}(t) = z_k \quad \text{in } \Omega,\ t_{k-1} < t \le t_k$$

で定める. また f_τ, σ_τ, $\overline{f_\tau}$, $\overline{\sigma_\tau}$ についてもそれぞれ同様の補間を表すとする. 以下ではこの 2 種類の補間について τ に関する有界性を導き, $\tau \to 0_+$ における極限として解を構成する.

Lemma 3.2. 補間 (z_τ), $(\overline{z_\tau})$ に対して,

$$\|z_\tau\|_{W^{1,2}(0,T;H_0^1(\Omega))} \le C,$$
$$\|\overline{z_\tau}\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))} \le C$$

が成り立つ. ただし C は時間離散幅 τ に依存しない定数とする.

Proof. まず $\|z_\tau\|_{L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))}$ の有界性を示す. 各 k に対して $\eta_k \in \partial I_{(-\infty,0]}(z_k - z_{k-1})$ を

$$\eta_k - \Delta z_k + \sigma_k z_k = f_k \text{ in } \Omega \tag{3.4}$$

とおき, 両辺に $z_k - z_{k-1}$ をテストすると, $\eta_k(z_k - z_{k-1}) = 0$ に注意して, Young の不等式により

$$\frac{1}{2}\|z_k\|^2_{\sigma_k} - \frac{1}{2}\|z_{k-1}\|^2_{\sigma_k} \le \int_\Omega f_k z_k \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f_k z_{k-1}\,\mathrm{d}x$$

が成り立つ. 両辺を 1 から k まで足し合わせることで

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|z_k\|^2_{\sigma_k} \le{}& \frac{1}{2}\|z_0\|^2_{\sigma_0} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k \int_\Omega (\sigma_j - \sigma_{j-1})|z_{j-1}|^2\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_\Omega f_k z_k\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f_0 z_0\,\mathrm{d}x - \sum_{j=1}^k \int_\Omega (f_j - f_{j-1})|z_{j-1}|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

が得られ, これによって

$$\begin{aligned}\|z_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} \le{}& C\left(\|z_0\|^2_{H^1_0(\Omega)}\left(1 + \|\sigma_0\|_{L^{N/2}(\Omega)}\right) + \|f_0\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \|f\|^2_{W^{1,2}(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right) \\ &+ \frac{C\tau}{2}\sum_{j=1}^k \left(1 + \left\|\frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{\tau}\right\|^2_{L^{N/2}(\Omega)}\right)\|z_{k-1}\|^2_{H^1_0(\Omega)}\end{aligned} \tag{3.5}$$

が成り立つ. ただし $C = C(\Omega) > 0$ である. したがって, 離散版 Gronwall の不等式によって,

$$\begin{aligned}\|z_k\|^2_{H^1_0(\Omega)} &\le C\alpha \exp\left(\tau\sum_{j=1}^k \left(1 + \left\|\frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{\tau}\right\|_{L^{N/2}(\Omega)}\right)\right) \\ &\le C\alpha\exp\left(C\left(1 + \|\partial_t\sigma\|_{L^1(0,T;L^{N/2}(\Omega))}\right)\right)\end{aligned} \tag{3.6}$$

が成り立つ. ただし $\alpha := \|z_0\|^2_{H^1_0(\Omega)}(1 + \|\sigma_0\|_{L^{N/2}(\Omega)}) + \|f_0\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \|f\|^2_{W^{1,2}(0,T;H^{-1}(\Omega))}$ とおいた. また $C = C(\Omega, T) > 0$ である.

次に $\|\partial_t z_\tau\|_{L^2(0,T;H^1_0(\Omega))}$ の有界性を示す. 式 (3.4) の k と $k-1$ に対する差分を取り, その両辺に $(z_k - z_{k-1})/\tau$ をテストすることで

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \frac{\eta_k - \eta_{k-1}}{\tau}\cdot\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\,\mathrm{d}x + \left\|\nabla\left(\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_\Omega \frac{f_k - f_{k-1}}{\tau}\cdot\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{\sigma_k z_k - \sigma_{k-1}z_{k-1}}{\tau}\cdot\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

を得る. ここで, $\eta_k \in \partial I_{(-\infty,0]}(z_k - z_{k-1})$ が成り立つから, 左辺第 1 項は非負である. また, 右辺第 2 項について,

$$\begin{aligned}&-\int_\Omega \frac{\sigma_k z_k - \sigma_{k-1}z_{k-1}}{\tau}\cdot\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega z_k\frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{\tau}\cdot\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \sigma_{k-1}\left|\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\right|^2\,\mathrm{d}x \\ &\le C\left\|\frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{\tau}\right\|_{L^{N/2}(\Omega)}\left\|\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\right\|_{L^{\frac{2N}{N-2}}(\Omega)} - C\left\|\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\right\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \left\|\nabla\left(\frac{z_k - z_{k-1}}{\tau}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし $C = C(\Omega, \sigma, z_0, f, T) > 0$ である. したがって, Young の不等式により

$$\left\| \frac{z_k - z_{k-1}}{\tau} \right\|^2_{H^1_0(\Omega)} \le C \left\| \frac{f_k - f_{k-1}}{\tau} \right\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + C \left\| \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{\tau} \right\|^2_{L^{N/2}(\Omega)} \tag{3.7}$$

が成り立つ. ここで C は k と τ に依存しない定数である. 右辺は $\|\partial_t f\|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} + \|\partial_t \sigma\|^2_{L^2(0,T;L^{N/2}(\Omega))}$ の定数倍で評価できるため, (z_τ) の $W^{1,2}(0,T;H^1_0(\Omega))$ 上有界である.

次に $(\overline{z_\tau})$ の $L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ 上の有界性を示す. 各 k に対して, 不等式 (3.3) により

$$\begin{aligned} f_k \ge -\Delta z_k + \sigma_k z_k &\ge f_k \wedge \left(-\Delta z_{k-1} + \sigma_{k-1} z_{k-1} + (\sigma_k - \sigma_{k-1}) z_{k-1}\right) \\ &\ge f_k \wedge f_{k-1} \wedge \cdots \wedge f_1 \wedge \Big(-\Delta z_0 + \sigma_0 z_0 + \sum_{j=1}^{k} (\sigma_j - \sigma_{j-1}) z_{j-1} \Big) \\ &\ge -\left|\hat{f}\right| - |-\Delta z_0 + \sigma_0 z_0| - \sum_{j=1}^{k} |(\sigma_j - \sigma_{j-1}) z_{j-1}| \end{aligned}$$

が成り立つ. これによって,

$$\begin{aligned} \|\Delta z_k\|^2_{L^2(\Omega)} \le C\Big(\|\hat{f}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta z_0\|^2_{L^2(\Omega)} \left(1 + \|\sigma_0\|^2_{L^{N/2}(\Omega)}\right) + \tau \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{\tau} \right\|^2_{L^{N/2}(\Omega)} \|\Delta z_{j-1}\|^2_{L^2(\Omega)} \Big) \\ + C\left(\|\sigma_k\|^2_{L^N(\Omega)} \|z_k\|^2_{L^{2N/(N-2)}(\Omega)} + \|f_k\|^2_{L^2(\Omega)} \right) \end{aligned}$$

を得る. ただし $C = C(\Omega, T)$ である. ここで, $\|z_k\|_{L^{2N/(N-2)}(\Omega)}$ の有界性により

$$\begin{aligned} \|\Delta z_k\|^2_{L^2(\Omega)} &\le \tilde{\alpha} + C\left(\|\sigma_k\|^2_{L^N(\Omega)} + \|f_k\|^2_{L^2(\Omega)} \right) + C\tau \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{\tau} \right\|^2_{L^{N/2}(\Omega)} \|\Delta z_{j-1}\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\le \tilde{\alpha} + C\left(\|\sigma\|^2_{L^\infty(0,T;L^N(\Omega))} + \|f\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \right) \\ &\quad + C\tau \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{\tau} \right\|^2_{L^{N/2}(\Omega)} \|\Delta z_{j-1}\|^2_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし $C = C(\Omega, \sigma, z_0, f, T) > 0$ とし, $\tilde{\alpha} := C(\|\hat{f}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta z_0\|^2_{L^2(\Omega)} (1 + \|\sigma_0\|^2_{L^{N/2}(\Omega)}))$ とする. ここに離散版 Gronwall の不等式を適用することにより,

$$\begin{aligned} \|\Delta z_k\|^2_{L^2(\Omega)} &\le \left(\tilde{\alpha} + C\left(\|\sigma\|^2_{L^\infty(0,T;L^N(\Omega))} + \|f\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \right) \right) \exp\left(\tau \sum_{j=1}^{k} \left\| \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{\tau} \right\|^2_{L^{N/2}(\Omega)} \right) \\ &\le \left(\tilde{\alpha} + C\left(\|\sigma\|^2_{L^\infty(0,T;L^N(\Omega))} + \|f\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \right) \right) \exp\left(\|\partial_t \sigma\|^2_{L^2(0,T;L^{N/2}(\Omega))} \right) \end{aligned}$$

を得る. ただし $C = C(\Omega, \sigma, T, z_0) > 0$ である. これによって $\|\Delta \overline{z_\tau}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$ の有界性が従う. □

Lemma 3.2 から従う弱収束および汎弱収束に加え, Ascoli-Arzelà の定理によって (z_τ) の $C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ での強収束性が得られる. 以上をまとめると次のようになる; 極限関数 $z \in W^{1,2}(0,T;H^1_0(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ が存在して

$$\begin{cases} z_{\tau'} \to z & \text{weakly in } W^{1,2}\left(0,T;H^1_0(\Omega)\right), \\ & \text{strongly in } C\left([0,T];L^2(\Omega)\right), \\ \overline{z_{\tau'}} \to z & \text{weakly in } L^2\left(0,T;H^2(\Omega)\right), \\ & \text{weakly star in } L^\infty\left(0,T;H^2(\Omega)\right) \end{cases} \tag{3.8}$$

を満たす. ただし $(\tau') \subset (\tau)$ は適切な部分列とする. 最後に, 極限関数 z が (1.1) の解であることを示す. 以下, 簡単のため部分列 (τ') を改めて (τ) と書く.

Lemma 3.3. 極限 z は方程式 (1.1) の解である.

Lemma 3.3 の証明には次の補題を用いる.

Lemma 3.4. 各 $\tau > 0$ に対して $\overline{\eta_\tau}(t) = \eta_k$ in Ω, $t_{k-1} < t \le t_k$ とおく. ただし $\eta_k \in L^2(\Omega)$ は Lemma 3.2 の証明中に定めたものとする. このとき, 上で得た極限関数 z に対して,

$$\limsup_{\tau \to 0_+} \int_0^T \int_\Omega \overline{\eta_\tau}\, \partial_t z_\tau \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le \int_0^T \int_\Omega (\Delta z - \sigma z + f)\, \partial_t z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

が成り立つ.

Proof. 各 $\tau > 0$ に対して,

$$\int_0^T \int_\Omega \overline{\eta_\tau}\, \partial_t z_\tau \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega \Delta \overline{z_\tau}\, \partial_t z_\tau \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T \int_\Omega \sigma\, \overline{z_\tau}\, \partial_t z_\tau \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega \overline{f_\tau}\, \partial_t z_\tau \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

であり, 右辺の各項を順に I_1, I_2, I_3 とおくと, 微分積分学の基本定理により

$$I_1 \le -\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla z_\tau(T)|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla z_0|^2 \,\mathrm{d}x$$

が成り立つ. また, $(\overline{f_\tau})$ は f に $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ 上強収束するから, $I_3 \to \int_0^T \int_\Omega f\, \partial_t z \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ as $\tau \to 0_+$ が成り立つ. 一方, I_2 について,

$$\begin{aligned}
&- \int_0^T \int_\Omega \overline{\sigma_\tau}\, \overline{z_\tau}\, \partial_t z_\tau \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=1}^m \int_\Omega (-z_k + z_{k-1})\, \sigma_k z_k \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\le -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \int_\Omega \left(\sigma_k |z_k|^2 - \sigma_k |z_{k-1}|^2 \right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \int_\Omega \left(\sigma_k |z_k|^2 - \sigma_{k-1} |z_{k-1}|^2 \right) \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \int_\Omega (\sigma_k - \sigma_{k-1}) |z_{k-1}|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{2} \int_\Omega \sigma_\tau(T) |z_\tau(T)|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_\Omega \sigma_0 |z_0|^2 \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \partial_t \sigma_\tau |\overline{z_\tau}|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで,

$$\begin{aligned}
&\sigma_\tau \to \sigma \quad \text{strongly in } W^{1,2}\left(0,T;L^{N/2}(\Omega)\right), \\
&\overline{z_\tau} \to z \quad \text{strongly in } C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)
\end{aligned}$$

が成り立つことに注意すると,

$$\begin{aligned}
&\liminf_{\tau \to 0_+} \int_\Omega \sigma_\tau(T) |z_\tau(T)|^2 \,\mathrm{d}x \ge \int_\Omega \sigma(T) |z(T)|^2 \,\mathrm{d}x, \\
&\lim_{\tau \to 0_+} \int_0^T \int_\Omega \partial_t \sigma_\tau |\overline{z_\tau}|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega \partial_t \sigma |z|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

が従う. これにより,

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\tau\to 0_+}\left(-\int_0^T\int_\Omega \overline{\sigma_\tau}\,\overline{z_\tau}\,\partial_t z_\tau\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)\\
&\le -\frac{1}{2}\int_\Omega \sigma(T)\,|z(T)|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_0\,|z_0|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \partial_t\sigma\,|z|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=-\frac{1}{2}\int_0^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega \sigma(t)\,|z(t)|^2\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \partial_t\sigma\,|z|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_0^T\int_\Omega \sigma z\partial_t z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

が成り立つ. したがって,

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{\tau\to 0_+}\int_0^T\int_\Omega \overline{\eta_\tau}\,\partial_t z_\tau\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&\le -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z(T)|^2\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla z_0|^2\,\mathrm{d}x-\int_0^T\int_\Omega \sigma z\partial_t z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega f\,\partial_t z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=-\frac{1}{2}\int_0^T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\|\nabla z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}t-\int_0^T\int_\Omega \sigma z\partial_t z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_0^T\int_\Omega f\,\partial_t z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\
&=\int_0^T\int_\Omega (\Delta z-\sigma z+f)\,\partial_t z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

が成り立つ. □

Proof of Lemma 3.3. 極限関数 z が Definition 2.1 の各条件を満たすことを確認する. 極限の構成法より, z は (2.1) を満たす. また, 近似解 z_τ および $\overline{z_\tau}$ が (2.2) に現れる 2 つの不等式をそれぞれ満たすことに注意すると, その弱極限である z は (2.2) を満たす. さらに, (2.2) および Lemma 3.4 より

$$
0=\limsup_{\tau\to 0_+}\int_0^T\int_\Omega \overline{\eta_\tau}\partial_t z_\tau\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le\int_0^T\int_\Omega \partial_t z\,(\Delta z-\sigma z+f)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le 0
$$

が成り立ち, よって (2.3) が従う. 最後に, $z_\tau(0)=z_0$ であることに注意して, (z_τ) の $C([0,T];L^2(\Omega))$ での強収束性により (2.4) が従う. したがって z は方程式 (1.1) の解であり, さらに (3.8) より $z\in W^{1,2}(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$ を満たす. □

参考文献

[1] G. Akagi and M. Kimura, Unidirectional evolution equations of diffusion type, J. Differential Equations **266** (2019), 1–43.

[2] L. Ambrosio and V.M. Tortorelli, Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ-convergence, Comm. Pure Appl. Math. **43** (1990), 999–1036.

[3] ———, On the approximation of free discontinuity problems, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **6** (1992), 105–123.

[4] T. Arai, On the existence of the solution for $\partial\varphi(u'(t))+\partial\psi(u(t))\ni f(t)$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo sec. IA Math. **26** (1979), 75–96.

[5] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et sémi-groupes de contractions dans les éspaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1973.

[6] G.A. Francfort and J.-J. Marigo, Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem, J. Mech. Phys. Solids **46** (1998), 1319–1342.

[7] M. Frémond and B. Nedjar, *Damage, gradient of damage and principle of virtual power*, Internat. J. Solids Structures **33** (1996), no. 8, 1083–1103.

[8] A. Giacomini, Ambrosio-Tortorelli approximation of quasistatic evolution of brittle fractures, Calc. Var. Partial Differential Equations **22** (2005), 129–172.

[9] R.T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Mathematical Series, No. 28, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

Classification of quantum graphs on M_2 and their quantum automorphism groups

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻 数学系
松田隼一朗 (Junichiro MATSUDA)

概要

量子グラフの概念は 2010 年代初頭に量子情報理論に触発されて導入され、量子情報理論、作用素環論、量子群論などとの関わりの中で近年発展してきた。Musto, Reutter, Verdon [7] が導入した隣接行列としての量子グラフが本研究の主な対象である。量子グラフの抽象的な構成法はいくつか論じられていたが、新しい分野であることもあり非自明な具体例に乏しい面があった。そこで、量子グラフの明示的な具体例や正しい直観を得るために最も基本的な非可換環 M_2 上の量子グラフと量子自己同型群の分類を行った。また、その結果から量子グラフと古典グラフの間の非自明な量子同型を得て、系として量子自己同型群の表現圏の間の同値性 $SO(3) \sim_{mon} S_4^+, O(2) \sim_{mon} H_2^+$ が導かれた。

1 導入

Gelfand の双対性に端を発する非可換理論・作用素環論の文脈において、「量子」という単語は古典的な対象の「非可換」な一般化・類似物の意味で用いられる。$\mathbb{C}$ 上のノルム付き $*$-代数で C^*-条件 $\|x^*x\| = \|x\|^2$ を満たすものを C^*-環というが、(狭義の) Gelfand の双対性とは単位元を持つ可換 C^*-環とコンパクトハウスドルフ空間との圏論的双対性のことで、具体的には $C(X)$ を位相空間 X 上の連続関数環として

コンパクトハウスドルフ空間 $X = \mathrm{Spec}(A)$	連続写像 $f : X \to Y$
単位的可換 C^*-環 $A = C(X)$	単位的 $*$-準同型 $\cdot \circ f : C(Y) \to C(X)$

という対象と射の対応で与えられる。そこからのアナロジーで、一般の非可換な C^*-環を “非可換な” 空間（の関数空間）と見なすことにより作用素環論、非可換幾何学、量子群論、量子情報理論、など様々な分野が発展してきた。今回扱う量子グラフもその流れを汲み、古典グラフにおける頂点集合を量子化（非可換化）したものになっている。

2 古典グラフから量子グラフへ

辺の重複がなく向きのある (有限) 有向グラフは、頂点の集合 V とそれらを結ぶ辺の集合 $E \subset V \times V$ の組 (V, E) として定義され、辺に向きのない無向グラフは全ての辺 (i, j) が逆 (j, i) も辺に持つ有向グラフとして記述できる。こうしたグラフはネットワークなどのモデルとしての側面を持つ。作用素論的な定式化としては、頂点 j から i への辺があるとき (i, j) 成分が 1、ないとき (i, j) 成分が 0

となる隣接行列 $A = (A_{ij}) \in M_{|V|}$ を考える方法がある。行列の成分ごとの積を Schur 積というが、$\{0,1\}$-値である隣接行列が Schur 積に関して冪等な行列として特徴付けられることに注意する。隣接行列 A は有限集合 V 上の関数空間 $C(V) = \mathbb{C}^V = \ell^2(V)$ に作用する作用素

$$A : C(V) \to C(V) \quad (Af)(i) = \sum_j A_{ij} f(j)$$

と見なせるため、そのスペクトルなどを用いて解析的手法でグラフの情報を調べることができる。なお、無向グラフの隣接行列は対称になり、辺の重複や重みのあるグラフは重みを成分とするより一般の行列として記述される。より一般の重みを含めて繋がり方に着目した定式化としては、辺に対応する行列単位 e_{ij}（(i,j) 成分が 1 で他が 0 の行列）で張られる $M_{|V|}$ の部分空間

$$\mathcal{S} = \mathrm{span}\{e_{ij} \mid (i,j) \in E\} \subset M_{|V|} = B(\ell^2(V))$$

を考える手法もある。次式は無向グラフの場合の対応の一例である。


$$\leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}$$

古典グラフはこのように頂点集合 V とその上の付加構造の組として捉えられる。Gelfand の双対性から、V に対応する可換な C^*-環 $C(V)$ を一般の C^*-環 B に置き換え、付加構造を上手く一般化することにより量子グラフを定義することができる。

量子グラフの概念は量子情報理論の文脈で Duan, Severini, Winter により無向グラフの辺の空間 $\mathcal{S}$ を非可換化した noncommutative graph として最初に導入された。古典グラフが V 上の関係 $E \subset V \times V$ として捉えられることから、量子関係としての量子グラフを Weaver が導入した。量子関係自体も Weaver が導入したもので、Duan らが $C(V)$ にあたる関数環として Hilbert 空間 H 上の有界作用素が成す環 $B(H)$ のみを扱っていたのに対して、量子関係はより一般の von Neumann 環 $B \subset B(H)$ を関数環として扱えるようになっている。Musto, Reutter, Verdon[7] は Schur 積の概念を有限次元 C^*-環 B 上の作用素 $A : B \to B$ に拡張することにより、量子隣接行列として量子グラフを定式化した。Musto らは B 上の標準的なトレースを用いて Schur 積を定義したが、その後 Brannan らが δ-form と呼ばれるより一般の状態 (B 上の汎関数 $\psi : B \to \mathbb{C}$ で単位的 $\psi(1_B) = 1$ かつ正値 $\psi(x^*x) \geq 0$ なもの) を用いて同様に量子グラフを定義し、それら量子グラフの量子自己同型群なども導入した。

Musto らの業績は string diagram (cf [10], [4]) を用いた優れた記法を量子グラフなどに適用した点にもあり、筆者の仕事の一部は一般の δ-form のもとでの string diagram の取り扱いについて精密化したことである。

ここでは量子隣接行列としての量子グラフの定式化について述べる。ψ を有限次元 C^*-環 B 上の忠実な状態とする。つまり $\langle x|y\rangle := \psi(x^*y)$ で定まる B 上の内積が非退化で、(GNS 構成で) 得られる内積空間が $L^2(B,\psi) \cong B$ であるとする。B の環構造から積 $m : B \otimes B \ni a \otimes b \mapsto ab \in B$ が定まるが、Hilbert 空間上の作用素として m の随伴をとることで余積 $m^\dagger : B \to B \otimes B$ を得る.

Definition 2.1 (Banica [1], Musto, Reutter, Verdon [7], Brannan, et al. [2])**.** $\delta > 0$ とする。B

上の忠実な状態 ψ は $mm^\dagger = \delta^2 \mathrm{id}_B$ を充たすときに δ-form と呼ばれる。このとき (B, ψ) を量子集合と呼ぶ。

古典グラフの場合 $C(V)$ 上の δ-form は $\delta^2 = |V|$ となる頂点集合上の一様分布 μ（に関する積分 $\int \cdot \, d\mu$）のみであることが確かめられるため、δ-form は一様分布のある種の一般化になっている。量子集合上の作用素に対しては以下のように Schur 積が一般化される。

Definition 2.2. 量子集合 (B, ψ) 上の作用素 $A_0, A_1 : B \to B$ に対し、その Schur 積 $A_0 \bullet A_1 : B \to B$ を以下により定義する:

$$A_0 \bullet A_1 \coloneqq \delta^{-2} m(A_0 \otimes A_1) m^\dagger.$$

古典グラフの場合 $(C(V), \mu)$ の標準基底 $(e_i)_{i \in V}$ について $m(e_i \otimes e_j) = \delta_{ij} e_i,\ m^\dagger(e_i) = |V| e_i \otimes e_i$ となるため、$A_0 \bullet A_1 : C(V) \to C(V)$ は A_0, A_1 を行列表示したときの成分ごとの積に一致することが分かる。Schur 積を環構造から再構成した Musto らの洞察は見事である。なお、一般の B に対しては Schur 積が非可換な積であることに注意されたし。

Definition 2.3 (Musto, Reutter, Verdon [7], Brannan et al. [2])**.** 量子集合 (B, ψ) 上の量子隣接行列とは、$A : B \to B$ で Schur 冪等なもののことである:

$$A \bullet A = \delta^{-2} m(A \otimes A) m^\dagger = A.$$

このとき $\mathcal{G} = (B, \psi, A)$ を (B, ψ) 上の量子グラフという.

量子グラフ $\mathcal{G} = (B, \psi, A)$ の基本的な性質として以下が挙げられる。構成要素である ψ や A の性質をそのまま $\mathcal{G}$ の性質と呼ぶことも多い。

- ψ が tracial $\psi(xy) = \psi(yx)$ であるとき $\mathcal{G}$ が tracial;
  tracial δ-form τ は $B = \bigoplus_s M_{n_s}$ に対して $\tau = (\dim B)^{-1} \bigoplus_s n_s \operatorname{Tr}_s$ として一意に定まることが知られている。
- A が self-adjoint $A^\dagger = A$ であるとき $\mathcal{G}$ が self-adjoint;
- A が real (実,$*$-preserving)$A(x^*) = (Ax)^*$ であるとき $\mathcal{G}$ が real;
  古典グラフの場合 A は自動的に real であったが、量子グラフの場合そうとは限らない。
- A が real かつ self-adjoint のとき $\mathcal{G}$ が無向 (undirected);
  古典グラフの場合は real が自明なので self-adjoint のみでよかったが、量子グラフの場合 real を課さないと無向グラフらしくならない。
- A が正値（半正定値性を保つ $A(B_+) \subset B_+$）なときに $\mathcal{G}$ が正値; A が完全正値（任意の n について $n \times n$ の B-値行列環に成分ごとの作用で拡張しても正値 $A^{(n)}(M_n(B)_+) \subset M_n(B)_+$）なときに $\mathcal{G}$ が完全正値;
- $A \bullet \mathrm{id}_B = \mathrm{id}_B$ のとき $\mathcal{G}$ が reflexive, $A \bullet \mathrm{id}_B = 0$ のとき irreflexive;
  古典グラフの場合 id_B との内積は行列の対角成分を抜き出すことにあたり、この条件はすべてのループを辺に持つ/持たないことを意味する。
- 定数 d に対し $A1 = d1$ かつ $\psi A = d\psi$ のとき $\mathcal{G}$ が d-正則という。d は次数と呼ばれる。
  古典グラフの場合各頂点に出入りしている辺の数がそれぞれ d のとき d-正則というが、その

特徴付けのひとつである定数関数 1_V が隣接行列の固有値 d の固有ベクトルであることのアナロジーである。

また、Schur 冪等性から次の同値性が導かれる。

Proposition 2.4 (M [6])**.** 量子グラフ $\mathcal{G} = (B, \psi, A)$ について、以下は同値*:*

- A は実*;*
- A は正値*;*
- A は完全正値*.*

Example 2.5. 量子グラフの典型例として以下が挙げられる。

- 古典グラフ (V, E), V 上の一様分布 μ, 隣接行列 $A : C(V) \to C(V)$ について, $(C(V), \tau, A)$ は量子グラフであり、逆に可換な量子グラフは Gelfand の双対性からこの形で与えられる.
- $A = \mathrm{id}_B$ は '各頂点のループ' のみからなる (B, ψ) 上の自明量子グラフを与え、これは reflexive 1-正則無向量子グラフである。
- $A = \delta^2\psi(\cdot)1 = \delta^2 |1\rangle\langle 1|$ は可能なすべての辺を持つ (B, ψ) 上の (reflexive) 完備グラフを与え、これは reflexive δ^2-正則無向量子グラフである。

このようにして量子グラフが定義され、与えられた量子グラフ (B_i, ψ_i, A_i) からは直和 $(B_0 \oplus B_1, \frac{\delta_0^2\psi_0 \oplus \delta_1^2\psi_1}{\delta_0^2+\delta_1^2}, A_0 \oplus A_1)$ やテンソル積 $(B_0 \otimes B_1, \psi_0 \otimes \psi_1, A_0 \otimes A_1)$、抽象的な変形で新しい量子グラフを構成する方法 [8] やランダム構成 [3] など、抽象的な量子グラフの構成法は知られていた。しかし、導入されたのが 2010 年代初頭なのもあり量子グラフの明示的な具体例は完備グラフなどの自明なものしか知られていなかった。そこで筆者は最も基本的な非可換環 $B = M_2$ の場合について量子グラフと量子自己同型群の明示的な記述と分類を行った。

3 量子自己同型群

量子グラフの量子自己同型群とは、量子グラフに作用する普遍的なコンパクト量子群 (CQG) のことを指し、具体的には以下で与えられる。

Definition 3.1 (Woronowicz [11, 12])**.** コンパクト量子群とは可分単位的 C^*-環 $\mathcal{A}$ と余積と呼ばれる $*$-準同型 $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes_{\min} \mathcal{A}$ の組 $G = (\mathcal{A}, \Delta)$ で以下を充たすもののことである:

(coassociative) $(\Delta \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{A}})\Delta = (\mathrm{id}_{\mathcal{A}} \otimes \Delta)\Delta$;
(cancellative) $(\mathcal{A} \otimes 1)\Delta(\mathcal{A})$ と $(1 \otimes \mathcal{A})\Delta(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ で稠密.

古典的なコンパクト群 G は $\Delta : C(G) \to C(G) \otimes C(G) \cong C(G \times G), (\Delta f)(x, y) = f(xy)$ として CQG $(C(G), \Delta)$ と見なせる。$\mathcal{A}$ は一般に非可換であるが、古典群とのアナロジーから形式的に $C(G)$ と書くのが一般的である。Gelfand の双対性から $C(G)$ が量子群の台集合を与え、Δ が群演算を与えていると言える。

Definition 3.2 (Brannan et al. [2])**.** 量子グラフ $\mathcal{G} = (B, \psi, A)$ の量子自己同型群は以下を充たす組 $\mathrm{Qut}(\mathcal{G}) = (C(\mathrm{Qut}(\mathcal{G})), \Delta)$ からなる CQG である:

- $C(\mathrm{Qut}(\mathcal{G}))$: $B = L^2(B,\psi)$ の正規直交基底 (e_i) に対して、

$$\rho : B \ni e_i \mapsto \sum_k e_k \otimes u_i^k \in B \otimes C(\mathrm{Qut}(\mathcal{G}))$$

を単位的 $*$-準同型とし $\rho\ A = (A \otimes \mathrm{id})\rho$ を充たす unitary $u = (u_i^k)_{k,i} \in M_n(C(\mathrm{Qut}(\mathcal{G})))$ の係数 u_i^k で生成される単位的普遍 C^*-環;

- 余積 $\Delta : C(\mathrm{Qut}(\mathcal{G})) \to C(\mathrm{Qut}(\mathcal{G})) \otimes C(\mathrm{Qut}(\mathcal{G}))$ は $*$-準同型で次を充たすもの:

$$\Delta u_i^k = \sum_j u_j^k \otimes u_i^j.$$

上記の ρ は基本表現と呼ばれ、対称群 $S_N = \mathrm{Aut}(X)$ でいう N 点集合 X への自然な作用にあたるものである。古典群の集合への作用は $S_N \times X \to X$ という写像で記述されるが、量子群としての作用は Gelfand 双対をとった関数環の準同型 $C(X) \to C(S_N \times X) \cong C(S_N) \otimes C(X)$ で余積と余結合的なものとして記述される。

4 M_2 における分類

M_2 上の tracial 2-form は $\tau = \mathrm{Tr}\,/2$ で与えられる. 隣接行列 A を ONB $(\sqrt{2}e_{11}, \sqrt{2}e_{12}, \sqrt{2}e_{21}, \sqrt{2}e_{22})$ について行列表示して条件式を解くことにより以下を得る.

Theorem 4.1 (M [6], Gromada [5])**.** (M_2, τ) 上の *reflexive* 無向量子グラフ A は以下の d-正則量子グラフのいずれかに同型である.

$$d=1)\quad A_1 = \mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{Spec}(A_1) = \{1,1,1,1\}.$$

$$d=2)\quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 2 \end{pmatrix},\ \mathrm{Spec}(A_2) = \{2,2,0,0\}.$$

$$d=3)\quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & 2 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 2 & & & 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{Spec}(A_3) = \{3,1,1,-1\}.$$

$$d=4)\quad A_4 = 4\tau(\cdot)1 = \begin{pmatrix} 2 & & & 2 \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ 2 & & & 2 \end{pmatrix},\ \mathrm{Spec}(A_4) = \{4,0,0,0\}.$$

なお、tracial な場合については筆者と同様の動機から Gromada が辺の空間 $\mathcal{S}$ との対応を利用する別の手法で同様の分類結果を出している。

M_2 上の一般の δ-form は Powers state $\omega_q = Tr(Q\cdot)$ にユニタリ同値であり、$\delta = q + q^{-1}$, $q \in (0,1]$, $Q = \frac{1}{1+q^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q^2 \end{pmatrix}$ で与えられる. $q = 1$ とすると $\omega_1 = \tau$ に帰着するから $q < 1$ としてよい。このとき ONB$(e_{ij}Q^{-1/2})$ について (M_2, ω_q) 上の隣接行列 A を行列表示すると以下を得る.

Theorem 4.2 (M [6])**.** $q \in (0,1)$ に対して、(M_2, ω_q) 上の *reflexive* 無向量子グラフ A は以下のいずれかである.

- $A_1^q = \mathrm{id}_B = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$, 1-正則.
- $A_3^q = \begin{pmatrix} 1 & & & \delta \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \delta & & & 1 \end{pmatrix}$, 非正則.
- $A_2^q = \begin{pmatrix} q^{-1}\delta & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & q\delta \end{pmatrix}$, 非正則.
- $A_4^q = \delta^2\omega_q(\cdot)1 = \begin{pmatrix} q^{-1}\delta & & & \delta \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ \delta & & & q\delta \end{pmatrix}$, δ^2-正則.

なお、上のパラメータで $q = 1$ とすると、tracial な場合に分類した量子グラフに一致する。これらの量子グラフ $\mathcal{G}_d^q = (M_2, \omega_q, A_d^q)$ の量子自己同型群として、特殊直交量子群 $SO_q(3)$ や直交群 $O(2)$, ユニタリトーラス $\mathbb{T} = U(1)$ が以下のように得られた。

Theorem 4.3 (M [6], Gromada [5])**.** *Tracial* な場合、

$$\mathrm{Qut}(\mathcal{G}_1^1) = \mathrm{Qut}(\mathcal{G}_4^1) \cong SO(3). \qquad \mathrm{Qut}(\mathcal{G}_2^1) = \mathrm{Qut}(\mathcal{G}_3^1) \cong O(2).$$

Theorem 4.4 (M [6])**.** $q \in (0,1)$ について、

$$\mathrm{Qut}(\mathcal{G}_1^q) = \mathrm{Qut}(\mathcal{G}_4^q) \cong SO_q(3). \qquad \mathrm{Qut}(\mathcal{G}_2^q) = \mathrm{Qut}(\mathcal{G}_3^q) \cong \mathbb{T} < SO_q(3).$$

証明には Sołtan [9] による (M_2, ω_q) に作用する普遍的な CQG としての $SO_q(3)$ の特徴付けが利いている.

さて、ここで tracial な場合の正則量子グラフ $\mathcal{G}_d^1$ のスペクトルを観察すると、実は 4 点集合上の reflexive 正則古典グラフのスペクトルに一致していることに気付く。実際これらの間には量子同型と呼ばれる同型より弱いが高い類似性があることを示すことができる。集合間の同型はスカラー ($\mathbb{C}$ の射影 $\{0,1\}$) 値の permutation 行列を用いて記述できるが、集合間の量子同型は対応を与える行列として作用素 ($B(H)$ の射影) 値の量子 permutation 行列を許すことで得られ、量子グラフの量子同型はそれらを一般化したものになっている。

Theorem 4.5 (M [6], Gromada [5])**.** 各 $d = 1, 2, 3, 4$ について、(M_2, τ) 上の $\mathcal{G}_d^1$ は 4 点集合上の *reflexive* d-正則古典グラフと量子同型である.

筆者は量子同型を計算することによりこれを示した。一方、Gromada は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ の Cayley グラフを量子同型な別のグラフに変形する方法でこれを示している。

CQG G_0, G_1 について、そのユニタリ表現を対象とし intertwiner を射とする圏 $\mathrm{Rep}(G_i)$ の間に表現のテンソル積を保つ同値（テンソル圏としての同値）が成り立つときに G_0, G_1 がモノイド同値 $G_0 \sim_{mon} G_1$ であるという。Brannan らにより量子同型がモノイド同値を誘導することが示されている。

Theorem 4.6 (Brannan et al. [2, Theorem 4.7])**.** 量子グラフの量子同型 $\mathcal{G}_0 \cong_q \mathcal{G}_1$ に対して、量子自己同型群のモノイド同値 $\mathrm{Qut}(\mathcal{G}_0) \sim_{mon} \mathrm{Qut}(\mathcal{G}_1)$ が成り立つ。

したがって、Theorem 4.5M [6], Gromada [5]dfn.4.5 の系として以下を得る。

Corollary 4.7. (1)　特殊直交群 $SO(3)$ は量子対称群 S_4^+ とモノイド同値である.
(2)　直交群 $O(2)$ は量子正八面体群 $H_2^+ < S_4^+$ とモノイド同値である.

これらのモノイド同値は量子群論において既に知られている結果ではあるが、重要な量子群の間のモノイド同値を量子グラフの応用という新たな手法で示すことができたという点で興味深い。具体的な量子グラフの構成法などの発展に伴い、今後量子群興味深い具体例やモノイド同値が得られるのではないかと期待される。

参考文献

[1] Teodor Banica. Quantum groups and Fuss–Catalan algebras. *Communications in mathematical physics*, 226(1):221–232, 2002.

[2] Michael Brannan, Alexandru Chirvasitu, Kari Eifler, Samuel Harris, Vern Paulsen, Xiaoyu Su, and Mateusz Wasilewski. Bigalois extensions and the graph isomorphism game. *Communications in Mathematical Physics*, 375(3):1777–1809, Sep 2019.

[3] Alexandru Chirvasitu and Mateusz Wasilewski. Random quantum graphs. *arXiv preprint arXiv:2011.14149*, 2020.

[4] Bob Coecke and Aleks Kissinger. *Picturing Quantum Processes: A First Course in Quantum Theory and Diagrammatic Reasoning*. Cambridge University Press, 2017.

[5] Daniel Gromada. Some examples of quantum graphs. *arXiv preprint arXiv:2109.13618*, 2021.

[6] Junichiro Matsuda. Classification of quantum graphs on m_2 and their quantum automorphism groups. *arXiv preprint arXiv:2110.09085*, 2021.

[7] Benjamin Musto, David Reutter, and Dominic Verdon. A compositional approach to quantum functions. *Journal of Mathematical Physics*, 59(8):081706, 2018.

[8] Benjamin Musto, David Reutter, and Dominic Verdon. The Morita theory of quantum graph isomorphisms. *Communications in Mathematical Physics*, 365(2):797–845, 2019.

[9] Piotr M Sołtan. Quantum $SO(3)$ groups and quantum group actions on M_2. *Journal of Noncommutative Geometry*, 4(1):1–28, 2010.

[10] Jamie Vicary. Categorical formulation of finite-dimensional quantum algebras. *Communi-*

cations in Mathematical Physics, 304(3):765–796, 2011.

[11] Stanisław L Woronowicz. Compact matrix pseudogroups. *Communications in Mathematical Physics*, 111(4):613–665, 1987.

[12] Stanisław L Woronowicz. Compact quantum groups. *Symetries quantiques, Papers from the NATO Advanced Study Institute, Les Houches, 1995*, pages 845–884, 1998.

有界平均振動空間に属するナヴィエ・ストークス方程式の超関数解の平滑化現象について

東北大学 大学院理学研究科 数学専攻
青木基記 (Motofumi Aoki)

概 要

本発表では, ある条件を満たしている非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の解の平滑化現象について発表する. エネルギー有限な初期値に対して, 本方程式の時間大域的な超関数解が存在することは数学的に証明されている. しかし, 解が滑らかになるかどうかについては数学的には明らかになっておらず, 一定の条件を付け加える必要がある. 本研究では, 有界平均振動空間と呼ばれる関数空間に時間局所的な超関数解が属していれば, その解が滑らかになることについて述べる.

1 序

本研究では, 以下の非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の超関数解 (弱解) の正則性について考察を行う. 空間次元を 3 次元あるいは 4 次元とする.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = 0, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^d, \\ \operatorname{div} u = 0, & t>0,\ x\in\mathbb{R}^d, \\ u\big|_{t=0} = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{N-S}$$

ここで, $u=(u_1(t,x),u_2(t,x),\cdots,u_d(t,x))$, $p=p(t,x)$ はそれぞれ流体の速度場と圧力を表す未知関数である. また, $u_0=(u_{0,1}(x),u_{0,2}(x),\cdots,u_{0,d}(x))$ は $\operatorname{div} u_0=0$ を満たす与えられた初期速度場とする. また, 第一式は流体の運動を表す方程式であり, 第二式は流体の質量保存則と非圧縮条件から導かれる式である.

まず初めに, 本発表で用いる非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の超関数解 (弱解) の定義について述べる. $C^\infty_{0,\sigma}, L^p_\sigma, \dot H^s_\sigma, H^s_\sigma$ をそれぞれ

$$\begin{cases} C^\infty_{0,\sigma} := \{f\in C^\infty \big| \operatorname{supp} f \text{ がコンパクトで } \operatorname{div} f = 0\}, \\ L^p_\sigma := \overline{C^\infty_{0,\sigma}}^{\|\cdot\|_p}, \quad 1<p<\infty, \quad \dot H^s_\sigma := \overline{C^\infty_{0,\sigma}}^{\|\cdot\|_{\dot H^s}}, \quad H^s_\sigma := \overline{C^\infty_{0,\sigma}}^{\|\cdot\|_{H^s}}, \quad s\in\mathbb{R} \end{cases}$$

とする. 非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の超関数解を以下で定義する.

定義 (超関数解 [7]). $u_0\in L^2_\sigma$ とする. 以下が成り立つ時, u は非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の時間 $(0,T)$ 上の超関数解であると言う.

(1) u がエネルギークラス $L^\infty(0,T;L^2_\sigma)\cap L^2(0,T;\dot H^1_\sigma)$ に属する.

(2) u は L^2 の弱位相の意味で $[0,T]$ 上時間について連続, すなわち, 任意の $\phi\in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対し,

$$u(t,x)\mapsto \langle u(t,x),\phi(x)\rangle$$

が $[0,T]$ 上時間について連続である.

(3) 任意の $0 \le t < T$ と $\phi \in H^1(0,t;H^1_\sigma)$ に対し,

$$\int_0^t \{\langle -u, \partial_t \phi\rangle + \langle \nabla u, \nabla \phi\rangle + \langle (u\cdot\nabla)u, \phi\rangle\}\, d\tau = -\langle u(t), \phi(t)\rangle + \langle u_0, \phi(0)\rangle$$

が成り立つ.

ここで, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は L^2 内積とする.

続いて, 非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の先行研究について述べる. Leray は 1934 年に全空間上において, エネルギー不等式

$$\|u(t)\|_2^2 + \int_0^t \|\nabla u\|_2^2 d\tau \le \|u_0\|_2^2$$

を満たす時間大域解の存在を示した. また, Hopf は 1951 年にエネルギー不等式を満たす時間大域解を任意の領域で構成している. このエネルギー不等式を満たす超関数解のことを特に Leray–Hopf の弱解と呼ぶ. しかし, 超関数解のエネルギークラスでの一意正則性は 2 次元空間しか示されていない.

超関数解 u が Serrin クラスと呼ばれる次の空間

$$L^\theta(0,T;L^r), \quad \frac{2}{\theta} + \frac{d}{r} \le 1, \quad d \le r \le \infty$$

に属しているとき, 解が一意的になることが Serrin [10], Masuda [7] によって示されている. さらに, Serrin [9], Iskauriaza–Serëgin–Šhverák [4] らによって Serrin クラスに属している解が滑らかになることが示されている. ここで, $\lambda > 0$ に対し, u_λ, p_λ をそれぞれ

$$u_\lambda(t,x) := \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad p_\lambda(t,x) := \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x)$$

と定める. このとき, u, p が非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の解なら, u_λ, p_λ もまた方程式の解になっている. また, スケール変換を施すことで, u と u_λ の間には次の関係

$$\|u_\lambda\|_{L^\theta(0,T;L^r)} = \lambda^{1-\frac{2}{\theta}-\frac{3}{r}} \|u\|_{L^\theta(0,T;L^r)}$$

が成り立つ. 特に $2/\theta + 3/r = 1$ のとき, $L^\theta(0,T;L^r)$ は, ノルムの大きさが $\lambda > 0$ に依存しないスケール不変な関数空間になっていることが知られている.

以下, スケール不変な条件下における解の正則性に関する先行研究について述べる. Sohr [11] は, $d < r < \infty$ に対して, 弱ルベーグ空間 $L^{\theta,\infty}(0,T;L^{r,\infty})$ に属している十分小さな解が滑らかになることを示している. また, $L^2(0,T;L^\infty)$ の仮定を弱めた結果として, Kozono–Taniuchi [5] によって $L^2(0,T;BMO)$, Kozono–Ogawa–Taniuchi [6] によって $L^2(0,T;\dot{B}^0_{\infty,\infty})$ での一意正則性の結果が示されている. ここで, 関数空間 L^∞, BMO, $\dot{B}^0_{\infty,\infty}$ に対して, 次の包含関係

$$L^\infty \subset BMO \subset \dot{B}^0_{\infty,\infty}.$$

が成り立つことが知られている. さらに, $L^\infty(0,T;L^d)$ の仮定に関連した結果として, $C((0,T];B^{-1}_{\infty,\infty})$ に属している超関数解が滑らかになることが Cheskidov–Shvydkoy [3] によって示されている. この $B^{-1}_{\infty,\infty}$ の斉次型の空間 $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$ について, Sobolev の不等式を用いることで, 次の埋め込みの関係

$$L^d \subset \dot{B}^{-1+\frac{d}{p}}_{p,\infty} \subset BMO^{-1} \subset \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$$

が知られている. そして $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$ は, Bourgain–Pavlovic [2] によって非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の初期値問題の非適切性が示されている空間になっている. また, Seregin–Zhou [8] は $L^\infty(0,T;\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty})$ に属する軸対称な超関数解が滑らかになることを示している. これらの結果は, 非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式において, 初期値問題の適切性と解の正則性の問題が独立した問題であることを示唆した結果になっている.

本研究では, 以下の結果を得た.

定理 1.1 ([1]). $T<\infty$, $u_0\in L^2_\sigma$ とし u を (N-S) の $(0,T)$ 上の超関数解で

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}<\infty \tag{1.1}$$

を満たすものとする. このとき, 任意の自然数 $k\in\mathbb{N}$ に対して,

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{k}{2}}\|\nabla^k u\|_2<\infty \tag{1.2}$$

が成り立つ. 特に u は滑らかな解になる.

注意.

(1) (1.1) は非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の解のスケールを不変にするノルムになっている. すなわち, $u_\lambda(t,x)=\lambda u(\lambda^2 t,\lambda x)$, $\lambda>0$ に対し, (1.1) は以下を満たしている;

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}}\|u_\lambda\|_{BMO}=\sup_{t>0} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}.$$

(2) 本結果で用いた条件 (1.1) は, Kozono–Taniuchi [5] が一意正則性を示す上で用いた条件を, 時間方向について部分的に緩和している. 実際, 初期時刻近傍で $t^{-\frac{1}{2}}$ の特異性

$$\|u\|_{BMO}=t^{-\frac{1}{2}}$$

を有する解は, 条件 (1.1) を満たしているが, $L^2(0,T;BMO)$ には属していない.

(3) (1.1) は線形熱方程式の解に対し, 以下の評価が成り立つことが知られている;

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|e^{t\Delta}u_0\|_{BMO}\le\|u_0\|_{B^{-1}_{\infty,\infty}}.$$

この評価から, 非圧縮性ナヴィエ・ストークス方程式の初期値問題で非適切性が示されている空間と類似した空間のノルムによって, 線形項に起因する解の挙動がコントロールできることが分かる. したがって, 本結果も Cheskidov–Shvydkoy [3] の結果と同様に, 初期値問題の適切性と解の正則性の問題が独立した問題であることを示唆した結果になると考えられる. また, Cheskidov–Shvydkoy [3] では高周波のノルムの大きさに制限がかかっていたが, 本結果ではノルムの大きさに制限はない.

2 準備

この節では, 本テクニカルレポートで用いる記号 , 関数空間及び補題について述べる.

$\rho\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ を時間方向の軟化作用素とする. すなわち, $0<s<t<T$ と $0<\delta<\min\{s,T-t\}$ に対し, ρ は, $\operatorname{supp}\rho\subset(-1,1)$, $\rho(\tau)=\rho(-\tau)$, $\rho(\tau)>0$, そして $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\rho(\tau)d\tau=1$ を満たすものとする. $\rho_\delta(\tau)=\delta^{-1}\rho(\delta^{-1}\tau)$ をスケール変換とし, $u_\delta(\tau)$ を ρ_δ と u の合成積とする:

$$u_\delta(\tau)=(\rho_\delta * u)(\tau):=\int_s^t\rho_\delta(\tau-\mu)u(\mu)d\mu.$$

$\phi_0\in\mathscr{S}$ を以下を満たす関数とする.

$$\widehat{\phi_0}\ge 0,\ \operatorname{supp}\widehat{\phi_0}\subset\{\xi\in\mathbb{R}^d|2^{-1}\le|\xi|\le 2\},\ \sum_{j\in\mathbb{Z}}\widehat{\phi_0}(2^{-j}\xi)=1\ \text{ for any }\xi\in\mathbb{R}^d.$$

このとき, Littlewood–Paley の 2 進単位分解 $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{Z}} \subset \mathscr{S}$ 及び $S_j f$ を以下で定める;

$$\begin{cases} \widehat{\phi_j}(\xi) := \widehat{\phi_0}(2^{-j}\xi) \quad \text{for } j \in \mathbb{Z}, \\ S_j f := \displaystyle\sum_{l=-\infty}^{j-3} \phi_l * f. \end{cases}$$

定義 (Hardy 空間, BMO 空間). $1 \le p < \infty$ とする. $\phi \in \mathscr{S}$ は $\lambda > 0$ に対し, $\phi_\lambda := \lambda^{-d}\phi(\lambda^{-1}x)$ が $\|\phi_\lambda\|_1 = 1$ を満たすものとする. Hardy 空間 $\mathcal{H}^p$ は

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p} := \left\{ f \in L^p_{loc} \,\middle|\, \sup_{\lambda>0} \|\phi_\lambda * f\|_p < \infty \right\}$$

で定められる関数空間である. また, BMO 空間を

$$BMO := \left\{ f \in L^1_{loc}/\sim \,\middle|\, \|f\|_{BMO} := \sup_{x\in\mathbb{R}^d, r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y) - f_{B_r(x)}| dy < \infty \right\}$$

で定義する. ここで, $\sim$ は定数関数を 0 と同一視する同値関係で, $f_{B_r(x)}$ は中心 x 半径 r の球における積分平均である.

定義 (斉次 Triebel–Lizorkin 空間). $1 \le p \le \infty$, $1 \le q < \infty$, $s \in \mathbb{R}$ とする. 斉次 Triebel–Lizorkin 空間 $\dot{F}^s_{p,q}$ を以下で定める.

$$\dot{F}^s_{p,q} := \{ f \in \mathscr{S}'/\mathscr{P} \,|\, \|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}} < \infty \},$$

$$\|f\|_{\dot{F}^s_{p,q}} := \begin{cases} \left\| \left\{ \displaystyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} (2^{sj}|(\phi_j * f)(x)|)^q \right\}^{\frac{1}{q}} \right\|_p & \text{if } p < \infty, \\ \displaystyle\sup_{\substack{j\in\mathbb{Z}, \\ x\in\mathbb{R}^d}} \left\{ \frac{1}{|B_{2^{-j}}(x)|} \int_{B_{2^{-j}}(x)} \sum_{k\ge j} (2^{sk}|(\phi_k * f)(y)|)^q dy \right\}^{\frac{1}{q}} & \text{if } p = \infty. \end{cases}$$

ここで, $\mathscr{S}'$ は緩増加超関数全体の集合, $\mathscr{P}$ は多項式全体の集合とする.

注意.

(1) $1 < p < \infty$ に対し, L^p と $\mathcal{H}^p$ と $\dot{F}^0_{p,2}$ は同型な空間になっていることが知られている. また, $\mathcal{H}^1$ と $\dot{F}^0_{1,2}$ は同型な空間であり, BMO と $\dot{F}^0_{\infty,2}$ は同型な空間であることが知られている.

(2) $1 \le p < \infty$ と Hölder 共役指数 p' に対して, $(\dot{F}^0_{p,2})' \cong \dot{F}^0_{p',2}$ が成り立つ. また, $(\mathcal{H}^1)' \cong BMO$ であることが知られている.

補題 2.1 ([1]). $T < \infty, d \le 4, k \in \mathbb{N}$ とする. $u, v, w \in L^\infty(0,T; L^2_\sigma) \cap L^2(0,T; \dot{H}^1_\sigma)$ であり, w は (1.1) を満たすものとする. このとき, ほとんど至る所の $t \in (0,T)$ と $0 \le s \le t$ に対し, 以下が成り立つ;

$$\int_s^t \tau^k \langle (u\cdot\nabla)v, w\rangle d\tau = -\int_s^t \tau^k \langle (u\cdot\nabla)w, v\rangle d\tau.$$

命題 2.2 ([1]). $s, s_0 \ge 1$ とする. このとき, $C = C(d) > 0$ が存在して, 任意の $f \in \dot{F}^{-s}_{\infty,2} \cap \dot{H}^{s_0}$, $g \in \dot{H}^s \cap \dot{F}^{-s_0}_{\infty,2}$ と $h \in L^2$ に対し, 以下が成り立つ;

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} fgh \, dx \right| \le C(\|f\|_{\dot{F}^{-s}_{\infty,2}} \|g\|_{\dot{H}^s} \|h\|_2 + \|f\|_{\dot{H}^{s_0}} \|g\|_{\dot{F}^{-s_0}_{\infty,2}} \|h\|_2).$$

特に, 任意の $u, v \in \dot{F}^{-s}_{\infty,2} \cap \dot{H}^{s+1}$ と $w \in L^2$ に対し, 以下が成り立つ;

$$|\langle (u \cdot \nabla)v, w \rangle| \le C(\|u\|_{\dot{F}^{-s}_{\infty,2}} \|\nabla v\|_{\dot{H}^s} \|w\|_2 + \|u\|_{\dot{H}^{s+1}} \|\nabla v\|_{\dot{F}^{-(s+1)}_{\infty,2}} \|w\|_2).$$

命題 2.3 ([1])**.** $0 < T < \infty$, $u_0 \in L^2_\sigma$ とする. u が (N-S) の $(0,T)$ 上の超関数解で, (1.1) を満たすものとする. このとき, 任意の $k \in \mathbb{N}$ とほとんど至る所の $t \in (0,T)$ と $0 \le s \le t$ に対し, 次の時間重み付きのエネルギー等式が成り立つ;

$$t^k \|u(t)\|_2^2 + 2\int_s^t \tau^k \|\nabla u\|_2^2 d\tau = s^k \|u(s)\|_2^2 + k\int_s^t \tau^{k-1} \|u\|_2^2 d\tau.$$

3 定理 1.1 の証明

証明. 本証明は帰納法で示す. 定理 1.1 の仮定を満たすような超関数解 u をとる. $w_h^{(k)}$ を u の空間方向に関する k 階差分

$$\begin{aligned} w_h^{(1)}(t,x) &= u(t,x+h) - u(t,x), \quad h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \\ w_h^{(k)} &= \left(w_h^{(k-1)}\right)_h^{(1)}, \quad k = 2,3,4,\cdots \end{aligned}$$

とする. まず, 空間方向の差分に関する時間重み付きのエネルギー等式

$$t\|w_h^{(1)}(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \tau \|\nabla w_h^{(1)}\|_2^2 d\tau = \int_0^t \|w_h^{(1)}\|_2^2 d\tau + \int_0^t \tau \langle (w_h^{(1)} \cdot \nabla) w_h^{(1)}, u \rangle d\tau \tag{3.1}$$

を示す. 命題 2.3 より,

$$t\|u(t,x)\|_2^2 + 2\int_0^t \tau \|\nabla u(\tau,x)\|_2^2 d\tau = \int_0^t \|u(\tau,x)\|_2^2 d\tau$$

が成り立つ. したがって, x を $x+h$ に取り替えることで,

$$t\|u(t,x+h)\|_2^2 + 2\int_0^t \tau \|\nabla u(\tau,x+h)\|_2^2 d\tau = \int_0^t \|u(\tau,x+h)\|_2^2 d\tau$$

を得る. 次に, $u(t,x)$ に対しては $\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2}} u(\tau,x+h))_\delta$ を, $u(t,x+h)$ に対しては $\tau^{\frac{1}{2}}(\tau^{\frac{1}{2}} u(\tau,x))_\delta$ をそれぞれテスト関数として取り, δ について極限を取ることで, 次の差に関するエネルギー等式

$$\begin{aligned} &t\langle u(t,x), u(t,x+h) \rangle + 2\int_0^t \tau \langle \nabla u(\tau,x), \nabla u(\tau,x+h) \rangle d\tau \\ &= \int_0^t \langle u(\tau,x), u(\tau,x+h) \rangle d\tau - \int_0^t \tau \langle (w_h^{(1)}(\tau,x) \cdot \nabla) w_h^{(1)}(\tau,x+h), u(\tau,x) \rangle \} d\tau \end{aligned}$$

が得られる. ここで, 非線形項 $\tau\langle (w_h^{(1)}(\tau,x) \cdot \nabla) w_h^{(1)}(\tau,x+h), u(\tau,x) \rangle$ については

$$\begin{aligned} &\langle (u(\tau,x+h) \cdot \nabla) u(\tau,x+h), u(\tau,x) \rangle + \langle (u(\tau,x) \cdot \nabla) u(\tau,x), u(\tau,x+h) \rangle \\ &= \langle (u(\tau,x+h) \cdot \nabla) u(\tau,x+h), u(\tau,x) \rangle - \langle (u(\tau,x) \cdot \nabla) u(\tau,x+h), u(\tau,x) \rangle \\ &= \langle (w_h^{(1)}(\tau,x) \cdot \nabla) u(\tau,x+h), u(\tau,x) \rangle = \langle (w_h^{(1)}(\tau,x) \cdot \nabla) w_h^{(1)}(\tau,x), u(\tau,x) \rangle \end{aligned}$$

のように計算している. 最後にこれらを足し合わせることで, 空間方向の差分に関する時間重み付きのエネルギー等式 (3.1) が得られる.

$k=1$ のとき, (1.2) が成り立つことを示す. $\mathcal{H}^1$ と BMO の双対性, div-curl lemma, そして (1.1) を用いることで, ある正定数 C_0 によって非線形項 $\tau\langle(w_h^{(1)}(\tau,x)\cdot\nabla)w_h^{(1)}(\tau,x+h),u(\tau,x)\rangle$ は

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t \tau\langle(w_h^{(1)}\cdot\nabla)w_h^{(1)},u\rangle d\tau\right| &\le \int_0^t \tau\|(w_h^{(1)}\cdot\nabla)w_h^{(1)}\|_{\mathcal{H}^1}\|u\|_{BMO}d\tau\\ &\le C\int_0^t \tau^{\frac{1}{2}}\|w_h^{(1)}\|_2\|\nabla w_h^{(1)}\|_2 d\tau \sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}\\ &\le \frac{1}{2}C_0^2\int_0^t \|w_h^{(1)}\|_2^2 d\tau\left(\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}\right)^2+\frac{1}{2}\int_0^t \tau\|\nabla w_h^{(1)}\|_2^2 d\tau\end{aligned}$$

と上から評価できる. これを空間方向の差分に関するエネルギー等式 (3.1) に代入することで,

$$t\|w_h^{(1)}(t)\|_2^2+\int_0^t \tau\|\nabla w_h^{(1)}\|_2^2 d\tau \le \left(1+\frac{1}{2}C_0^2\sup_{0<t<T} t\|u\|_{BMO}^2\right)\int_0^t \|w_h^{(1)}\|_2^2 d\tau \tag{3.2}$$

が分かる. ここで, 微分ノルムと差分ノルムについて

$$\sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|u(x+h)-u(x)\|_2}{|h|}=\|\nabla u\|_2$$

が成り立つことに注意すれば, (3.2) の両辺を $|h|$ で割ることで,

$$\sup_{0<t<T}\left(t\|\nabla u\|_2^2+\int_0^t \tau\|\nabla^2 u\|_2^2 d\tau\right)\le\left(1+\frac{1}{2}C_0^2\sup_{0<t<T} t\|u\|_{BMO}^2\right)\|u\|^2_{L^2(0,T;\dot{H}^1)} \tag{3.3}$$

が得られる. 左辺の 1 項目から $k=1$ の場合の正則性の証明が従う.

続いて, 帰納法を用いて任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して (1.2) が成り立つことを示す. $k\ge 2$ と $h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ を任意に固定する. また, $k-1$ 以下の任意の自然数 m に対して u が

$$\sup_{0<t<T} t^m\|\nabla^m u(t)\|_2^2+\int_0^t \tau^m\|\nabla^{m+1}u\|_2^2 d\tau\le A(m)\int_0^t \tau^{m-1}\|\nabla^m u\|_2^2 d\tau \tag{3.4}$$

を満たしていると仮定する. ここで, $A(m)$ は

$$\begin{cases}A(1):=1+\dfrac{C_0^2}{2}\left(\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}\right)^2,\\ A(m):=m+\left\{\dfrac{C_0^2}{2}+\dfrac{1}{2}C_1^2(1+C_2)^2\left\{(1+C_2)^m-1-C_2^m\right\}^2\right\}\left(\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}\right)^2\end{cases}$$

で定められるものであり, C_0 は (3.2), C_1 は 命題 2.2 によってそれぞれ定まる正定数とする. また, C_2 は (3.8) で後述する, BMO 空間における微分ノルムと差分ノルムの同値性から現れる正定数とする. u が (3.4) を満たしているとき, 自然数 k に対して

$$\sup_{0<t<T} t^k\|\nabla^k u(t)\|_2^2+\int_0^t \tau^k\|\nabla^{k+1}u\|_2^2 d\tau\le A(k)\int_0^t \tau^{k-1}\|\nabla^k u\|_2^2 d\tau \tag{3.5}$$

を満たすことを示す. 最初に定めた u の k 階差分 $w_h^{(k)}$ は

$$w_h^{(k)}(t,x):=\sum_{l=0}^k(-1)^l\binom{k}{l}u(t,x+lh)$$

の形で書ける．$k=1$ の場合と同様に計算することで $w_h^{(k)}$ は次の時間重み付きのエネルギー等式

$$\begin{aligned}
&t^k\|w_h^{(k)}(t)\|_2^2+2\int_0^t\tau^k\|\nabla w_h^{(k)}\|_2^2d\tau+\int_0^t\tau^k\langle(u(x+kh)\cdot\nabla)w_h^{(k)},w_h^{(k)}\rangle d\tau\\
=&k\int_0^t\tau^{k-1}\|w_h^{(k)}\|_2^2d\tau-\sum_{l=1}^{k-1}\binom{k}{l}\int_0^t\tau^k\langle(w_h^{(k-l)}(x+lh)\cdot\nabla)w_h^{(l)},w_h^{(k)}\rangle d\tau\\
&-\int_0^t\tau^k\langle(w_h^{(k)}\cdot\nabla)u,w_h^{(k)}\rangle d\tau
\end{aligned}\tag{3.6}$$

を満たす．補題 2.1 より (3.6) の左辺 3 項目は 0 になる．(3.6) の右辺 2 項目は, 命題 2.2 から

$$\begin{aligned}
&\binom{k}{l}\left|\int_0^t\tau^k\langle(w_h^{(k-l)}(x+lh)\cdot\nabla)w_h^{(l)},w_h^{(k)}\rangle d\tau\right|\\
\le&C_1\binom{k}{l}\int_0^t\tau^{\frac12}\|w_h^{(k-l)}\|_{\dot F^{-(k-l)}_{\infty,2}}\tau^{k-\frac12}\|\nabla w_h^{(l)}\|_{\dot H^{k-l}}\|w_h^{(k)}\|_2d\tau\\
+&C_1\binom{k}{l}\int_0^t\tau^{k-\frac12}\|w_h^{(k-l)}\|_{\dot H^{(l+1)}}\tau^{\frac12}\|\nabla w_h^{(l)}\|_{\dot F^{-(l+1)}_{\infty,2}}\|w_h^{(k)}\|_2d\tau
\end{aligned}\tag{3.7}$$

と評価できる．上式の両辺を $|h|^{2k}$ で割る．このとき, 微分ノルムを差分ノルムの同値性から

$$\begin{aligned}
&\sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|w_h^{(k-l)}\|_{\dot F^{-(k-l)}_{\infty,2}}}{|h|^{k-l}}\le C_2^{k-l}\|u\|_{BMO},\\
&\sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|\nabla w_h^{(l)}\|_{\dot H^{k-l}}}{|h|^{l}}\le\|\nabla u\|_{\dot H^k},\\
&\sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|w_h^{(k)}\|_2}{|h|^{k}},\ \sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|w_h^{(l)}\|_{\dot H^{k-l}}}{|h|^{l}}\le\|u\|_{\dot H^k}
\end{aligned}\tag{3.8}$$

となることに注意すれば, (3.7) の右辺 1 項目から

$$\begin{aligned}
&\binom{k}{l}\left|\frac{C_1}{|h|^{2k}}\int_0^t\tau^{\frac12}\|w_h^{(k-l)}\|_{\dot F^{-(k-l)}_{\infty,2}}\tau^{k-\frac12}\|\nabla w_h^{(l)}\|_{\dot H^{k-l}}\|w_h^{(k)}\|_2d\tau\right|\\
\le&C_1C_2^{k-l}\binom{k}{l}\sup_{0<t<T}t^{\frac12}\|u\|_{BMO}\left(\int_0^t\tau^{k-1}\|u\|_{\dot H^k}^2d\tau\right)^{\frac12}\left(\int_0^t\tau^k\|\nabla u\|_{\dot H^k}^2d\tau\right)^{\frac12}
\end{aligned}$$

が得られる．また,

$$\begin{aligned}
&\sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|\nabla w_h^{(l)}\|_{\dot F^{-(l+1)}_{\infty,2}}}{|h|^{l+1}}\le C_2^{l+1}\|u\|_{BMO},\\
&\sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|w_h^{(k-l)}\|_{\dot H^{l+1}}}{|h|^{k-l}}\le\|u\|_{\dot H^{k+1}},\\
&\sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|w_h^{(k)}\|_2}{|h|^{k}},\ \sup_{h\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}}\frac{\|w_h^{(k-l)}\|_{\dot H^{l}}}{|h|^{k-l}}\le\|u\|_{\dot H^k}
\end{aligned}$$

となることから, (3.7) の右辺 2 項目は, (3.7) の右辺 1 項目のときと同様にして

$$\begin{aligned}&\binom{k}{l}\left|\frac{C_1}{|h|^{2k}}\int_0^t \tau^{k-\frac{1}{2}}\|w_h^{(k-l)}\|_{\dot{H}^{(l+1)}}\tau^{\frac{1}{2}}\|\nabla w_h^{(l)}\|_{\dot{F}^{-(l+1)}_{\infty,2}}\|w_h^{(k)}\|_2 d\tau\right|\\ \leq& C_1C_2^{l+1}\binom{k}{l}\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}\left(\int_0^t \tau^{k-1}\|u\|_{\dot{H}^k}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \tau^k\|\nabla u\|_{\dot{H}^k} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

と評価できることが分かる. 以上より, (3.6) の右辺 2 項目は

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{k-1}\binom{k}{l}\left|\frac{1}{|h|^{2k}}\int_0^t \tau^k\langle(w_h^{(k-l)}(x+lh)\cdot\nabla)w_h^{(l)}, w_h^{(k)}\rangle d\tau\right|\\ \leq& C_1\left\{\sum_{l=1}^{k-1}\left(C_2^{k-l}+C_2^{l+1}\right)\binom{k}{l}\right\}\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}\left(\int_0^t \tau^{k-1}\|u\|_{\dot{H}^k}^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \tau^k\|\nabla u\|_{\dot{H}^k} d\tau\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

のように上から評価できる. さらに, 2 項定理より

$$\sum_{l=1}^{k-1}\left(C_2^{k-l}+C_2^{l+1}\right)\binom{k}{l} = (1+C_2)\Big((1+C_2)^k - 1 - C_2^k\Big)$$

であるから, これとヤングの不等式を用いることで, 最終的に (3.6) の右辺 2 項目は上から

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{k-1}\binom{k}{l}\left|\frac{1}{|h|^{2k}}\int_0^t \tau^k\langle(w_h^{(k-l)}(x+lh)\cdot\nabla)w_h^{(l)}, w_h^{(k)}\rangle d\tau\right|\\ &\leq\frac{1}{2}C_1^2(1+C_2)^2\left\{(1+C_2)^k - 1 - C_2^k\right\}^2\left(\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}\right)^2\int_0^t \tau^{k-1}\|u\|_{\dot{H}^k}^2 d\tau\\ &\quad+\frac{1}{2}\int_0^t \tau^k\|\nabla u\|_{\dot{H}^k}^2 d\tau\end{aligned}$$

のように評価できる. (3.6) の右辺 3 項目についても, 右辺 2 項目と同様に

$$\begin{aligned}&\left|-\frac{1}{|h|^{2k}}\int_0^t \tau^k\langle(w_h^{(k)}\cdot\nabla)u, w_h^{(k)}\rangle d\tau\right| = \left|\frac{1}{|h|^{2k}}\int_0^t \tau^k\langle(w_h^{(k)}\cdot\nabla)w_h^{(k)}, u\rangle d\tau\right|\\ &\leq\frac{C_0^2}{2}\left(\sup_{0<t<T} t^{\frac{1}{2}}\|u\|_{BMO}\right)^2\int_0^t \tau^{k-1}\|u\|_{\dot{H}^k}^2 d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t \tau^k\|\nabla u\|_{\dot{H}^k}^2 d\tau\end{aligned}$$

の形で上から評価できる. したがって, (3.6) の両辺を $|h|^{2k}$ で割り, 非線形項に関する上の評価を適用することで, $h\in\mathbb{R}^d\backslash\{0\}$ に対して,

$$t^k\frac{\|w_h^{(k)}(t)\|_2^2}{|h|^{2k}}+2\int_0^t \tau^k\frac{\|\nabla w_h^{(k)}\|_2^2}{|h|^{2k}}d\tau\leq A(k)\int_0^t \tau^{k-1}\|\nabla^k u\|_2^2 d\tau+\int_0^t \tau^k\|\nabla^{k+1}u\|_2^2 d\tau$$

が成り立つことが分かる. あとは, 微分ノルムと差分ノルムの同値性を用いることで, (3.5)

$$t^k\|\nabla^k u(t)\|_2^2+\int_0^t \tau^k\|\nabla^{k+1}u\|_2^2 d\tau\leq A(k)\int_0^t \tau^{k-1}\|\nabla^k u\|_2^2 d\tau$$

が得られる. 最後に, (3.5) の右辺が有界であることを示す. (3.4) の仮定より

$$\int_0^t \tau^m\|\nabla^{m+1}u\|_2^2 d\tau\leq A(m)\int_0^t \tau^{m-1}\|\nabla^m u\|_2^2 d\tau\quad\text{for } m=1,2,\cdots,k-1$$

が成り立つから, (3.5) と合わせることで,

$$\int_0^t \tau^{k-1}\|\nabla^k u\|_2^2 d\tau \le \left(\prod_{m=1}^{k-1} A(m)\right)\int_0^t \|u\|_{\dot{H}^1}^2 d\tau$$

である. 超関数解の定義より $u \in L^2(0,T;\dot{H}^1)$ であったから, 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\sup_{0<t<T} t^{\frac{k}{2}}\|\nabla^k u\|_2 < \infty$$

が分かる. □

参考文献

[1] M. Aoki and T. Iwabuchi, *Remark on smoothing property of weak solutions for the Navier-Stokes equations*, Differential Integral Equations **34** (2021), no. 3-4, 199–222.

[2] J. Bourgain and N. Pavlović, *Ill-posedness of the Navier-Stokes equations in a critical space in 3D*, J. Funct. Anal. **255** (2008), no. 9, 2233–2247.

[3] A. Cheskidov and R. Shvydkoy, *The regularity of weak solutions of the 3D Navier-Stokes equations in* $B^{-1}_{\infty,\infty}$, Arch. Ration. Mech. Anal. **195** (2010), no. 1, 159–169.

[4] L. Escauriaza, G. Seregin, and V. Šverák, *Backward uniqueness for parabolic equations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **169** (2003), no. 2, 147–157.

[5] H. Kozono and Y. Taniuchi, *Bilinear estimates in BMO and the Navier-Stokes equations*, Math. Z. **235** (2000), no. 1, 173–194.

[6] H. Kozono, T. Ogawa, and Y. Taniuchi, *The critical Sobolev inequalities in Besov spaces and regularity criterion to some semi-linear evolution equations*, Math. Z. **242** (2002), no. 2, 251–278.

[7] K. Masuda, *Weak solutions of Navier-Stokes equations*, Tohoku Math. J. (2) **36** (1984), no. 4, 623–646.

[8] G. Seregin and D. Zhou, *Regularity of solutions to the Navier-Stokes equations in* $\dot{B}^{-1}_{\infty,\infty}$, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **477** (2018), no. Kraevye Zadachi Matematicheskoĭ Fiziki i Smezhnye Voprosy Teorii Funktsiĭ. 47, 119–128; English transl., J. Math. Sci. (N.Y.) **244** (2020), no. 6, 1003–1009.

[9] J. Serrin, *On the interior regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **9** (1962), 187–195.

[10] ———, *The initial value problem for the Navier-Stokes equations*, Nonlinear Problems (Proc. Sympos., Madison, Wis., 1962), Univ. Wisconsin Press, Madison, Wis., 1963.

[11] H. Sohr, *A regularity class for the Navier-Stokes equations in Lorentz spaces*, J. Evol. Equ. **1** (2001), no. 4, 441–467. Dedicated to the memory of Tosio Kato.

An Optimal Decay Estimate of Solutions to the Surface Quasi-Geostrophic Equation

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
ダヒ・オーヘー (Dáithí Ó hAodha)

1 Introduction

In this presentation, we are concerned with the Surface Quasi-Geostrophic Equation.

$$\begin{cases} \partial_t \theta + (-\Delta)^{\alpha/2}\theta + (u\cdot\nabla)\theta = 0, & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^2, \\ u = (-R_2\theta, R_1\theta), & \text{in } (0,\infty)\times\mathbb{R}^2, \\ \theta|_{t=0} = \theta_0, & \text{in } \mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{1.1}$$

where $\theta : (0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is an unknown function, representing the potential temperature of a fluid parcel at a point (t,x) in spacetime; and u represents the velocity of a fluid parcel. $R_j = \partial_j(-\Delta)^{-1/2} = \mathcal{F}^{-1}[\, i\xi_j/|\xi|\,]*$ is the j-th Riesz transform; and $\alpha \in [1,2]$. Discussions of the physical meaning and derivation of the equation can be found in references [4, 6, 7, 9, 16, 19], and we briefly introduce the derivation in Section 2.

In this presentation, we prove L^p-norm estimates for solutions to the equation with sufficiently regular initial data θ_0. We then show that these estimates are optimal given certain conditions on the shape of the initial data.

Let us recall several existing results related to the regularity of the solutions. In the subcritical case, $\alpha \in (1,2]$, unique global existence and regularity can be shown, for initial data

$$\theta_0 \in L^1 \cap L^p,\ p \in \Big(\frac{2}{\alpha-1}, \infty\Big],$$

by classical methods using the Banach fixed point theorem, similarly to [13, 21]. Global unique existence and regularity for the subcritical case are also proven on the torus in [17].

For the critical case, $\alpha = 1$, global well-posedness is an important problem due to criticality, and was proven independently in [8] and [2] (see also [18]).

Finally, for the supercritical case, $\alpha \in [0,1)$, the paper [12] proves global regularity for all $\alpha \in [\alpha_0, 1)$, where α_0 grows with respect to the size of the initial data. Global regularity for large data in the supercritical case is an open problem. In this report, we discuss a sharp decay estimate of the nonlinear part of the solution in the subcritical and critical cases.

We begin our study of (1.1) by defining the following function:

$$P_{\alpha/2}(t,x) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-t|\xi|^\alpha}\right](x), \text{ for } t>0,\ x\in\mathbb{R}^2, \tag{1.2}$$

which is the fundamental solution to the fractional heat equation, the linear part of (1.1).

Definition. (Mild Solution) A function, θ, is a mild solution of (1.1) if

$$\theta(t) = P_{\alpha/2}(t)*\theta_0 - \int_0^t P_{\alpha/2}(t-s)*(u(s)\cdot\nabla)\theta(s)\,\mathrm{d}s, \text{ for all } t>0, \tag{1.3}$$

$$\lim_{t\to 0^+}\theta(t) = \theta_0, \text{ in } L^p, \text{ for all } p\in[1,\infty), \tag{1.4}$$

$$\theta\in C([0,\infty);L^p(\mathbb{R}^2)), \text{ for all } p\in[1,\infty), \tag{1.5}$$

$$\theta\in C((0,\infty);W^{2,p}(\mathbb{R}^2))\cap C^1((0,\infty);L^p(\mathbb{R}^2)), \text{ for all } p\in[1,\infty]. \tag{1.6}$$

We also define M, the "mass" of the solution, θ, as $M := \int_{\mathbb{R}^2}\theta_0(x)\,\mathrm{d}x$, and denote the linear part of θ by $U(t) := P_{\alpha/2}(t)*\theta_0$. We briefly discuss the existence of global solutions.

Proposition 1.1. Let $\alpha\in[1,2]$ and $\theta_0\in W^{1,1}\cap W^{1,\infty}$. Then there exists a unique global mild solution $\theta\in C([0,\infty);W^{1,p})\cap C((0,\infty);W^{1,1}\cap W^{1,\infty})$ of (1.1), for all $1\le p<\infty$.

2 Preliminaries

We list some important definitions and results used for the proof in Section 3.

2.1 Preliminary Results

2.1.1 L^p Spaces

Definition. (L^p Space)

Let (Ω, M, μ) be a measure space. The set $L^p(\Omega)$, with $1\le p<\infty$, is defined as the set of all functions, $f:\Omega\to\mathbb{R}$, such that

$$\|f\|_p := \Big(\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p} < \infty.$$

For $p=\infty$, the set is defined as the set of all functions whose essential supremum is finite. That is,

$$\|f\|_\infty := \inf\{C\ge 0 \mid |f(x)|\le C, \text{ for almost all } x\in\Omega\}.$$

Functions that agree almost everywhere are considered a single element of $L^p(\Omega)$.

Notation. For $1\le p\le\infty$, we denote by p' the conjugate exponent. That is,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1,$$

with the convention that $\frac{1}{\infty} := 0$ in this context.

Proposition 2.1. (Hölder's Inequality)

Let $f \in L^p(\Omega)$ and $g \in L^{p'}(\Omega)$, where $1 \leq p \leq \infty$. Then $fg \in L^1$, and

$$\int_\Omega |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Proposition 2.2. (Young's Convolution Inequality)

Let $f \in L^p$ and $g \in L^q$, where $1 \leq p, q \leq r \leq \infty$, such that

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1.$$

Then

$$\|f * g\| r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Here, $(f * g)$ denotes the convolution of f and g. That is,

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^2} f(x-y)g(y) \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x-y) \, \mathrm{d}y.$$

Proposition 2.3. (Gagliardo-Nirenberg Inequality for Fractional Laplacian [15])

Define

$$\dot{H}^s_p := \{f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P} \mid \|f\|_{\dot{H}^s_p(\mathbb{R}^n)} := \|(-\Delta)^{s/2} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

where $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ is the set of all polynomials over $\mathbb{R}^n$.

Let $0 \leq \sigma < s < \infty,\ 1 < q, r \leq \infty,\ 1 < p \leq \infty$ such that

$$\frac{n}{p} - \sigma = \theta \frac{n}{q} + (1-\theta)(\frac{n}{r} - s),$$

where $\theta \neq 0$ if $s - \sigma \geq n/r$. Then, for all $f \in L^q(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^s_r(\mathbb{R}^n)$, we have $f \in \dot{H}^\sigma_p$. Moreover, we obtain the inequality

$$\|f\|_{\dot{H}^\sigma_p} \leq C \|f\|_q^\theta \|f\|_{\dot{H}^s_r}^{1-\theta} \text{ for all } f \in L^q(\mathbb{R}^n) \cap \dot{H}^s_r(\mathbb{R}^n). \tag{2.1}$$

2.1.2 The Fourier Transform

For a function, f, we define the Fourier transform of f as follows:

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \hat{f}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\xi} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

The inverse Fourier transform is then defined as

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi} \hat{f}(\xi) \, \mathrm{d}\xi.$$

For the purpose of calculating inequalities, we will frequently omit the factor of $1/2\pi$.

Proposition 2.4. (Plancherel Theorem)

Let $f \in L^1 \cap L^\infty$. Then the L^2 norm of f is invariant under the Fourier transform. That is,

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2.$$

Proposition 2.5. (Hausdorff-Young Inequality)
Let $f \in L^1 \cap L^\infty$. Let $1 \leq p \leq 2$ with $1/p + 1/p' = 1$. Then

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p.$$

2.1.3 Besov Spaces

Definition. We use the Littlewood-Paley decomposition of unity to define homogeneous Besov spaces. Let $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ be a set of non-negative measurable functions such that

1. $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}_k(\xi) = 1$, for all $\xi \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$,
2. $\hat{\phi}_k(\xi) = \hat{\phi}_0(2^{-k}\xi)$,
3. supp $\hat{\phi}_k(\xi) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid 2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}\}$.

The Besov norm is then defined as follows. For $f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$, $1 \leq p, q \leq \infty$, and $s \in \mathbb{R}$,

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} := \left\| \{2^{sk}\|\phi * f\|_p\}_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{l^q}.$$

Finally, the set $\dot{B}^s_{p,q}$ is defined as the set of functions, $f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$, whose Besov norm is finite.

We refer to [10] for the proofs to the following propositions.

Proposition 2.6. Let $1 \leq p, q \leq \infty$, and $s \in \mathbb{R}$. Then for $f \in \dot{B}^{s+1}_{p,q}$,

$$\|\nabla f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq C\|f\|_{\dot{B}^{s+1}_{p,q}}.$$

Proposition 2.7. Let $1 \leq p \leq \infty$. Then for $f \in \dot{B}^{2(1-\frac{1}{p})}_{1,1}$,

$$\|f\|_{\dot{B}^0_{p,1}} \leq C\|f\|_{\dot{B}^{2(1-\frac{1}{p})}_{1,1}}.$$

3 Main Result

Theorem 3.1. Let $\alpha \in [1, 2]$, $p \in [1, \infty]$ and

$$b_{\alpha,p}(t) = \begin{cases} t^{\frac{2}{\alpha}(1-\frac{1}{p})+\frac{3}{\alpha}-1} & \text{if } \alpha \in (1, 2], \\ t^{2(1-\frac{1}{p})+2} \ln t & \text{if } \alpha = 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Let $\theta_0 \in W^{1,1} \cap W^{1,\infty}$, and let θ be a mild solution. Also assume $|x|^2\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Then we have the following convergence:

$$b_{\alpha,p}(t)\Big\|\theta(t) - MP_{\alpha/2}(t) + \nabla P_{\alpha/2}(t)\cdot\int_{\mathbb{R}^2} y\theta_0(y)\,\mathrm{d}y - \sum_{i,j=1}^{2}\partial_{x_i}\partial_{x_j}P_{\alpha/2}(t)\int_{\mathbb{R}^2} y_i y_j\theta_0\,\mathrm{d}y \qquad (3.2)$$
$$+\int_0^t P_{\alpha/2}(t-s) * \nabla\cdot\Big((RU(s))U(s)\Big)\,\mathrm{d}s\Big\|_p \to 0, \text{ as } t\to\infty.$$

Furthermore, there exists θ_0 such that the nonlinear component is optimally bounded by $b_{\alpha,p}(t)$ in the $p = 2$ case. That is

$$\left\|\int_0^t P_{\alpha/2}(t-s) * \nabla\cdot\Big((RU(s))U(s)\Big)\,\mathrm{d}s\right\|_2 \simeq \frac{1}{b_{\alpha,2}(t)} \qquad (3.3)$$

for all sufficiently large t.

In this report, we will only be providing a full proof of (3.3). A full treatment of (3.2) can be found in [3]. The above result can be considered as an expansion of similar results, such as in [13, 21]. Roughly speaking, we have approximated the linear term in θ by a Taylor expansion, and constructed a linear approximation of the nonlinear term of θ.

Remark 3.2. If the initial data, θ_0, is radially symmetric, the nonlinear approximation term in (3.3) becomes 0 (see e.g. [14], page 46).

Proposition 3.3. Let $\theta_0 \in W^{1,1} \cap W^{1,\infty}$, and $1 \le p \le \infty$.

(i) For all $\alpha \in [1, 2]$, there exists $C > 0$ such that for all $t > 0$

$$\|\theta(t)\|_p \le C(t+1)^{-\frac{2}{\alpha}(1-\frac{1}{p})}. \qquad (3.4)$$

(ii) For $\alpha = 1$, $\beta > 0$, there exists $C_\beta > 0$ such that for all $t \ge 1$

$$\||\nabla|^\beta\theta(t)\|_p \le C_\beta t^{-2(1-\frac{1}{p})-\beta}. \qquad (3.5)$$

For the proof of (i), see [1]. For the proof of (ii), see Proposition 4.3 in [20].

3.1 Estimating the Nonlinear Term from Above

Before we begin the proof, we note one more lemma, which we will apply in this report for brevity. However, it is in fact possible to complete the entire proof without using the following lemma. To see how, please refer to [3].

Lemma 3.4. ([11]) Let $0 < p, p_1, p_2 < \infty$, with $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Let $m = m(\xi-\eta, \eta) \in C^2(\mathbb{R}^2\backslash\{0\})$, such that $|\partial^\alpha_{\xi-\eta,\eta} m(\xi-\eta,\eta)| \le C(|\xi-\eta| + |\eta|)^{-|\alpha|}$, for all multi-indices α, with $|\alpha| \le 2$. Then

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\Big[\int_{\mathbb{R}^2} m(\xi-\eta,\eta)\hat{f}(\xi-\eta)\hat{g}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\Big]\right\|_p \le C\|f\|_{p_1}\|g\|_{p_2}.$$

Lemma 3.5. Let $1 \le p \le \infty$, and $\alpha \in [1,2]$. Suppose that θ is a mild solution satisfying the decay property in Proposition 3.3. Then there exists $C > 0$ such that for all $t \ge 1$,

$$\left\| \int_0^t P_{\alpha/2}(t-s) * (u(s)\cdot\nabla)\theta(s)\,\mathrm{d}s \right\|_p \le C b_{\alpha,p}(t), \tag{3.6}$$

where $b_{\alpha,p}$ is defined by (3.1) (and the same inequality then obviously also holds for (3.3)).

Proof.

Step 1. ($p \ge 2$ case) We start on the second half of the time-interval. By Proposition 3.3, and by the boundedness of the Riesz transform, we obtain for all $\alpha \in [1,2]$

$$\left\| \int_{t/2}^t P_{\alpha/2}(t-s) * \nabla\cdot(u(s)\theta(s))\,\mathrm{d}s \right\|_p \le C t^{-\frac{2}{\alpha}(1-\frac{1}{p})-\frac{3}{\alpha}+1}.$$

For the first half of the time-interval, we will take the Fourier transform inside the norm, and manipulate the resulting multipliers from the derivative and Riesz transform.

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^{t/2} P_{\alpha/2}(t-s) * \nabla\cdot(u(s)\theta(s))\,\mathrm{d}s \right\|_p \\
&= \left\| \int_0^{t/2} \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-(t-s)|\xi|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} \xi_j \eta_{3-j} \frac{|\xi-\eta|^2-|\eta|^2}{|\eta||\xi-\eta|(|\xi-\eta|+|\eta|)} \hat\theta(s,\xi-\eta)\hat\theta(s,\eta)\,\mathrm{d}\eta \Big]\,\mathrm{d}s \right\|_p .
\end{aligned}$$

We start with the $p = 2$ case. The large multiplier inside the η integral is easily estimated from above by $2/|\xi-\eta|$. Next, we take the Littlewood-Paley decomposition of both θ functions:

$$\hat\theta(s,\xi-\eta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat\theta_k(s,\xi-\eta), \qquad \hat\theta(s,\eta) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat\theta_l(s,\eta).$$

We also split the L^2 norm by Hölder's inequality.

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^{t/2} P_{\alpha/2}(t-s) * \nabla\cdot\Big(u(s)\theta(s)\Big)\,\mathrm{d}s \right\|_2 \\
&\le \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \int_0^{t/2} \| |\xi|^2 e^{-(t-s)|\xi|^\alpha} \|_2 \left\| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|\xi-\eta|} \Big| \hat\theta_k(s,\xi-\eta)\hat\theta_l(s,\eta) \Big|\,\mathrm{d}\eta \right\|_\infty \mathrm{d}s \\
&\le C t^{-\frac{2}{\alpha}(1-\frac{1}{2})-\frac{2}{\alpha}} \int_0^{t/2} \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^k} \|\hat\theta_k(s)\|_{\frac{4}{3}} \|\hat\theta_l(s)\|_4\,\mathrm{d}s \\
&\le C t^{-\frac{2}{\alpha}(1-\frac{1}{2})-\frac{2}{\alpha}} \int_0^{t/2} \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \|\theta_k(s)\|_{\frac{4}{3}} \|\theta_l(s)\|_{\frac{4}{3}}\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

The above sum can be written as the product of Besov norms of the solution, θ. (3.6) for the $p = 2$ case is then achieved by applying the following Besov norm estimate. ([3])

$$\|\theta(t)\|_{\dot B^0_{\frac{4}{3},1}} \le C t^{-1/2\alpha}, \text{ for all } t \ge 1, \text{ and all } \alpha \in [1,2].$$

The result is then easily extended to all $p > 2$ by Young's convolution inequality.

Step 2. ($1 \le p < 2$ case) Our goal is the following claim. Let $\alpha \in [1,2]$ and $1 \le p < 2$. Then

$$\left\| \mathcal{F}^{-1}\Big[\int_0^{t/2} e^{-(t-s)|\xi|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} \xi_1^2 \frac{\eta_2(\xi_1 - 2\eta_1)}{|\eta||\xi-\eta|(|\xi-\eta|+|\eta|)} \hat{\theta}(s,\xi-\eta)\hat{\theta}(s,\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}s \Big] \right\|_p \le C b_{\alpha,p}(t). \quad (3.7)$$

We split the Fourier multiplier into two parts:

$$\frac{\eta_2(\xi_1 - 2\eta_1)}{|\eta||\xi-\eta|(|\xi-\eta|+|\eta|)} = \frac{\eta_2(\xi_1-\eta_1)+\eta_1\eta_2}{|\eta||\xi-\eta|(|\xi-\eta|+|\eta|)} =: M_1(\xi-\eta,\eta) + M_2(\xi-\eta,\eta).$$

The desired result is then achieved by applying Lemma 3.4 to each of these multipliers. □

3.2 Optimal Decay of Non-Linear Term

We lastly discuss the optimality of our estimate for the L^p norm of the non-linear term in θ. The decay rate for our estimate from above is optimal if we can bound the non-linear estimate from below by the same power of t. That is, we need

$$\left\| \int_0^t P_{\alpha/2}(t-s) * \nabla \cdot \Big((RU(s))U(s) \Big)\,\mathrm{d}s \right\|_2 \ge \begin{cases} Ct^{1-\frac{4}{\alpha}}, \text{ for all } \alpha \in (1,2], \\ Ct^{-3}\ln t, \text{ for } \alpha = 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Since we are taking the L^2-norm, taking the Fourier Transform inside the norm does not change its value.

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t P_{\alpha/2}(t-s) * \nabla \cdot ((RU(s))U(s))\,\mathrm{d}s \right\|_2 \\ &= \left\| \int_0^t \sum_{j=1}^2 \xi_j e^{-(t-s)|\xi|^\alpha} \frac{(-1)^j}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{\eta_{3-j}}{|\eta|} + \frac{\xi_{3-j}-\eta_{3-j}}{|\xi-\eta|} \right) e^{-s|\xi-\eta|^\alpha} e^{-s|\eta|^\alpha} \right. \\ &\quad \left. \hat{\theta}_0(\xi-\eta)\hat{\theta}_0(\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}s \right\|_2. \end{aligned}$$

We rewrite the divergence operator and Riesz transform as two separate Fourier multipliers.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^2 \xi_j \frac{(-1)^j}{2} \left(\frac{\eta_{3-j}}{|\eta|} + \frac{\xi_{3-j}-\eta_{3-j}}{|\xi-\eta|} \right) \\ =&\frac{2\xi_1\xi_2}{|\xi-\eta|} \left(\frac{\eta_1^2-\eta_2^2}{|\eta|(|\eta|+|\xi-\eta|)} \right) + \frac{2\eta_1\eta_2}{|\xi-\eta|} \left(\frac{\xi_2^2-\xi_1^2}{|\eta|(|\eta|+|\xi-\eta|)} \right) \\ &+ \sum_{j=1}^2 \frac{|\xi|^2 \xi_j \eta_{3-j}}{|\eta||\xi-\eta|(|\eta|+|\xi-\eta|)} \\ =:&m_1(\xi-\eta,\eta) + m_2(\xi-\eta,\eta) \end{aligned}$$

The key difference between these two multipliers is that the numerator of m_1 features a second-order derivative, whereas that of m_2 has a third-order derivative. We show that, for some initial

data θ_0, the first part with m_1 has the optimal decay and the remainder with m_2 is smaller.

Lemma 3.6. Let $\delta, \epsilon > 0$. Let $\theta_0 \in W^{1,1} \cap W^{1,\infty}$ as before, but with the following additional conditions:

- $\hat{\theta}_0 \geq 0, \text{ on } \mathbb{R}^2,$
- $\text{supp } \hat{\theta}_0 \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi_2| < \delta|\xi_1|\},$
- $\hat{\theta}_0(\xi) \geq C, \text{ for some } C > 0, \text{ for all } \xi \in \text{ supp } \hat{\theta} \cap \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi| \leq 1\}.$

Then, for sufficiently small δ and ϵ, we have

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} m_1(\xi-\eta,\eta)\, e^{-s|\xi-\eta|^\alpha} e^{-s|\eta|^\alpha} \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}s \right\|_{L^2(|\xi|\leq \epsilon t^{-1/\alpha})} \\ \geq \begin{cases} Ct^{1-\frac{4}{\alpha}}\epsilon^3, \text{ for } \alpha \in (1,2], \\ Ct^{-3}\epsilon^3 \ln(t), \text{ for } \alpha = 1, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} m_2(\xi-\eta,\eta)\, e^{-s|\xi-\eta|^\alpha} e^{-s|\eta|^\alpha} \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}s \right\|_{L^2(|\xi|\leq \epsilon t^{-1/\alpha})} \\ \leq C\epsilon^{7/2} t^{1-\frac{4}{\alpha}}, \text{ for all } \alpha \in [1,2]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Proof. We consider (3.10) and (3.9) separately. Beginning with (3.10), we consider just the $j = 1$ part, as the estimates of both terms are identical. Since $\hat{\theta}_0$ is bounded, we need only consider the integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\eta_2}{|\eta||\xi-\eta|(|\eta|+|\xi-\eta|)} e^{-s|\xi-\eta|^\alpha} e^{-s|\eta|^\alpha} \,\mathrm{d}\eta.$$

Splitting the above into two parts, one where $|\eta|$ is close to $|\xi|$ and one where they are far apart, we can bound the above integral by

$$C + C|\xi|^{-1//2} s^{-1/2\alpha}$$

Therefore, we obtain

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t |\xi|^3 e^{-(t-s)|\xi|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\eta_2}{|\eta||\xi-\eta|(|\eta|+|\xi-\eta|)} e^{-s|\xi-\eta|^\alpha} e^{-s|\eta|^\alpha} \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}s \right\|_{L^2(|\xi|\leq \epsilon t^{-1/\alpha})} \\ &\leq \left\| \int_0^t |\xi|^3 e^{-(t-s)|\xi|^\alpha} (C + C|\xi|^{-1/2} s^{-1/2\alpha}) \,\mathrm{d}s \right\|_{L^2(|\xi|\leq \epsilon t^{-1/\alpha})} \\ &\leq \left\| |\xi|^3 \int_0^t C \,\mathrm{d}s \right\|_{L^2(|\xi|\leq \epsilon t^{-1/\alpha})} + \left\| |\xi|^{5/2} \int_0^t C s^{-1/2\alpha} \,\mathrm{d}s \right\|_{L^2(|\xi|\leq \epsilon t^{-1/\alpha})} \\ &\leq C(\epsilon^4 + \epsilon^{7/2}) t^{1-\frac{4}{\alpha}}. \end{aligned}$$

We note that all three of these terms are smaller than $\epsilon^{7/2} t^{1-\frac{4}{\alpha}}$ for $\epsilon < 1$ and $t > 1$, and thus we have (3.10).

We next will show (3.9), for sufficiently small ϵ, and for sufficiently large t. We begin by labelling the two terms in our integral.

$$\begin{aligned}
&\bigg\| \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{2\xi_1\xi_2}{|\xi-\eta|} \left(\frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{|\eta|(|\eta| + |\xi-\eta|)} \right) + \frac{2\eta_1\eta_2}{|\xi-\eta|} \left(\frac{\xi_2^2 - \xi_1^2}{|\eta|(|\eta| + |\xi-\eta|)} \right) \right) \\
&\hat{U}(s, \xi-\eta)\hat{U}(s,\eta)\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}s \bigg\|_{L^2(|\xi| \le \epsilon t^{-1/\alpha})} \\
&=: \|(L) + (R)\|_{L^2(|\xi| \le \epsilon t^{-1/\alpha})}.
\end{aligned}$$

Our plan is to make (L) the larger term. This is accomplished by the conditions on θ_0 that we have imposed. Taking the norm of (L) on its own,

$$\begin{aligned}
&\bigg\| \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{2\xi_1\xi_2}{|\xi-\eta|} \left(\frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{|\eta|(|\eta| + |\xi-\eta|)} \right) e^{-s|\xi-\eta|^\alpha} \hat{\theta}_0(\xi-\eta) e^{-s|\eta|^\alpha} \hat{\theta}_0(\eta)\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}s \bigg\|_{L^2(|\xi| \le \epsilon t^{-1/\alpha})} \\
&\ge C \bigg\| \xi_1\xi_2 \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^\alpha} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\eta_1^2 e^{-s|\xi-\eta|^\alpha} \hat{\theta}_0(\xi-\eta) e^{-s|\eta|^\alpha} \hat{\theta}_0(\eta)}{|\eta||\xi-\eta|(|\eta| + |\xi-\eta|)}\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}s \bigg\|_{L^2(|\xi| \le \epsilon t^{-1/\alpha})} \\
&\ge C \bigg\| \xi_1\xi_2 \int_1^t e^{-\epsilon} \int_{2|\xi| < |\eta| < 1} \frac{\eta_1^2 e^{-cs|\eta|^\alpha}}{|\eta|^3}\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}s \bigg\|_{L^2(|\xi| \le \epsilon t^{-1/\alpha})} \\
&\ge \bigg\| \xi_1\xi_2 \int_1^t e^{-\epsilon} \int_{2|\xi|}^1 e^{-cs\rho^\alpha}\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}s \bigg\|_{L^2(|\xi| \le \epsilon t^{-1/\alpha})} \\
&= \bigg\| \xi_1\xi_2 \int_1^t e^{-\epsilon} \int_{2|\xi| s^{1/\alpha}}^{s^{1/\alpha}} e^{-c\rho}\, \mathrm{d}\rho s^{-1/\alpha}\, \mathrm{d}s \bigg\|_{L^2(|\xi| \le \epsilon t^{-1/\alpha})} \\
&\ge \bigg\| \xi_1\xi_2 \int_1^t e^{-\epsilon} C s^{-1/\alpha}\, \mathrm{d}s \bigg\|_{L^2(|\xi| \le \epsilon t^{-1/\alpha})} \\
&\ge \begin{cases} C t^{1-\frac{4}{\alpha}} \epsilon^3, \text{ for } \alpha \in (1,2], \\ C t^{-3} \epsilon^3 \ln(t), \text{ for } \alpha = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Finally, by our setting of supp $\hat{\theta}_0$, we obtain

$$\|(R)\|_{L^2(|\xi| \le \epsilon t^{-1})} \le C t^{-3} \epsilon^4 \ln(t),$$

by estimations of integrals similar to before. Thus we obtain (3.9). □

参考文献

[1] A. Córdoba and D. Córdoba, *A Maximum Principle Applied to Quasi-Geostrophic Equations*, Communications in Mathematical Physics **249** (2004), 511-528.

[2] A. Kiselev, F. Nazarov, and A. Volberg, *Global Well-Posedness for the Critical 2D Dissipative Quasi-Geostrophic Equation*, Invent. Math. **167** (2007), no. 3, 445–453.

[3] D. Ó hAodha and T. Iwabuchi, *Large-Time Behaviour of Solutions to the Surface Quasi-Geostrophic Equations*, arXiv:2105.08289.

[4] G. Lapeyre, *Surface Quasi-Geostrophy*, Fluids **2** (2017), 7.

[5] H. Wang and Z. Zhang, *A frequency localized maximum principle applied to the 2D quasi-geostrophic equation*, Comm. Math. Phys. **301** (2011), no. 1, 105–129.

[6] I. M. Held, R. T. Pierrehumbert, S. T. Garner, and K. L. Swanson, *Surface quasi-geostrophic dynamics*, J. Fluid Mech. **282** (1995), 1–20.

[7] J. Pedlosky, *Geophysical fluid dynamics*, Springer Verlag New York, 1979.

[8] L. A. Caffarelli and A. Vasseur, *Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), no. 3, 1903–1930.

[9] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics*, Pergamon Press, London-Paris-Frankfurt; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1959.

[10] H. Triebel, *Theory of function spaces*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2010.

[11] L. Grafakos, A. Miyachi, and N. Tomita, *On Multilinear Fourier Multipliers of Limited Smoothness*, Canadian J. Math. **65** (2013), no. 2, 299–330.

[12] M. Coti Zelati and V. Vicol, *On the global regularity for the supercritical SQG equation*, Indiana Univ. Math. J. **65** (2016), no. 2, 535–552.

[13] M. Escobedo and E. Zuazua, *Large time behavior for convection-diffusion equations in* $\mathbf{R^N}$, J. Funct. Anal. **100** (1991), no. 1, 119–161.

[14] M.-H. Giga, Y. Giga, and J. Saal, *Nonlinear partial differential equations*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol. 79, Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA, 2010.

[15] N. Chikami, *On Gagliardo - Nirenberg type inequalities in Fourier - Herz spaces*, J. Func. An. **275** (2018), no. 5, 1138–1172.

[16] P. Constantin, *Energy Spectrum of Quasigeostrophic Turbulence*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002).

[17] P. Constantin and J. Wu, *Behavior of solutions of 2D quasi-geostrophic equations*, SIAM J. Math. Anal. **30** (1999), no. 5, 937–948.

[18] P. Constantin and V. Vicol, *Nonlinear maximum principles for dissipative linear nonlocal operators and applications*, Geom. Funct. Anal. **22** (2012), 1289 - 1321.

[19] R. M. Blumenthal and R. K. Getoor, *Some theorems on stable processes*, Trans. Amer. Math. Soc. **95** (1960), 263–273.

[20] T. Iwabuchi, *Analyticity and large time behavior for the Burgers equation and the quasi-geostrophic equation, the both with the critical dissipation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **37** (2020), no. 4, 855–876.

[21] T. Iwabuchi, *Global solutions for the critical Burgers equation in the Besov spaces and the large time behavior*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **32** (2015), no. 3, 687–713.

消散項を持つ非線形クラインゴルドン方程式の 2 ソリトン周りの大域ダイナミクス

京都大学数理解析研究所
石塚健二郎 (Kenjiro ISHIZUKA)

概要

消散項を持つ非線形クライン・ゴルドン方程式について考える. この方程式は大域挙動が近年研究されており,[2] では 1 次元の場合において, 大域解が時間が経ったときに n 個のソリトンの和に漸近する「n ソリトン解」, または 0 に収束する「減衰解」になることを示した. 一方,n ソリトン解の近傍における初期値と大域挙動の関係性はわかっていない. 本講演では 2 ソリトン解近傍の初期値において,「2 ソリトン解集合」,2 つの「1 ソリトン解集合」,「減衰解集合」, そして「爆発解集合」の 5 つの連結な集合に分類でき, さらに減衰解集合と爆発解集合の境界が 2 つの 1 ソリトン解集合と 2 ソリトン解集合の和集合になっていることを示す. 本講演は京都大学の中西賢次氏との共同研究に基づく.

1 導入

1.1 主結果

次の消散項を持つ非線形クライン · ゴルドン方程式

$$\partial_t^2 u + 2\alpha\partial_t u - \Delta u + u - |u|^{p-1}u = 0,\ ((t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N) \tag{DNLKG}$$

を考える. ただし $\alpha > 0$ で p, N は以下の条件

$$N = 1, 2 \text{ ならば } 2 < p < \infty,\ N \geq 3 \text{ ならば } 2 < p < \frac{N+2}{N-2}$$

を満たすとする. このとき (DNLKG) の解 $\vec{u}(t) := (u(t), \partial_t u(t))$ が $\mathcal{H} := H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$ で局所適切であることが知られている. ここでいう局所適切とは, 任意の初期値 $\vec{u}(0) \in \mathcal{H}$ に対して, この初期値に依存した最大存在区間 I 上での (DNLKG) の解 $\vec{u} \in C(I;\mathcal{H})$ が唯一つ存在することを指す.
次に,(DNLKG) のエネルギー関数として $E : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ を

$$E((u_1,u_2)) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \{|\nabla u_1|^2 + |u_1|^2 + |u_2|^2 - \frac{2}{p+1}|u_1|^{p+1}\} \tag{1}$$

と定義する. このとき (DNLKG) の解 $\vec{u}$ は

$$E(\vec{u}(t_2)) - E(\vec{u}(t_1)) = -2\alpha\int_{t_1}^{t_2} \|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 dt \tag{2}$$

を満たす. さらに $Q:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ を

$$-\Delta Q+Q-|Q|^{p-1}Q=0 \tag{3}$$

を満たす正定値球対称な解とする.(3) の解で正定値球対称であるものが唯一つ存在することは [6] に記されている. 本研究では Q を平行移動, または符号反転させたものをソリトンと呼ぶ.
(DNLKG) の解の大域挙動について, まず以下のように定義する.

- (DNLKG) の解 $\vec{u}$ においてある $T\in(0,\infty)$ が存在して $t\to T-0$ で $\|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}}\to\infty$ のとき $\vec{u}$ を爆発解と定義する.
- (DNLKG) の大域解 $\vec{u}$ が $\lim_{t\to\infty}\|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}}=0$ となるとき,$\vec{u}$ を減衰解と定義する.
- ある $K\in\mathbb{N}$ と $\sigma\in\{\pm1\}^K$, $z:[0,\infty)\to(\mathbb{R}^N)^K$ が存在して,(DNLKG) の大域解 $\vec{u}$ が

  $$\lim_{t\to\infty}\|u(t,x)-\sum_{j=1}^{K}\sigma_jQ(x-z_j(t))\|_{H^1}+\|\partial_tu(t)\|_{L^2}=0\ ,\ \lim_{t\to\infty}\min_{j\neq k}|z_j(t)-z_k(t)|=\infty$$

  を満たすとき $\vec{u}$ を K ソリトン解と定義する.

$N=1$ のとき,[2] によって (DNLKG) の解は上のいずれかになることが示された. 我々の興味は初期値と上の解の大域挙動の対応付けである. この興味に対する研究の結果, 十分離れた異符号の 2 つのソリトンの重ね合わせの近傍での初期値と大域挙動の対応付けを示した.
主結果を述べるために Q 周りの線形化作用素について述べる. まず作用素 L を

$$L:=-\Delta+1-pQ^{p-1} \tag{4}$$

とする. このとき [1] より, 作用素 L は唯一つ負の固有値を持つことが知られている. このとき負の固有値を $-\nu_0^2$ (ただし $\nu_0>0$) とし,L^2 ノルムが 1 である固有ベクトルで正定値のものを Y とする. すなわち,$Y\in H^1(\mathbb{R}^N)$ は正定値の球対称な関数で

$$LY=-\nu_0^2Y\ ,\ \|Y\|_{L^2}=1 \tag{5}$$

を満たすものとする. このとき (DNLKG) に対して $\vec{u}=\vec{Q}+\vec{v}$ とおくと

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}v\\ \partial_tv\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\ -L&-2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v\\ \partial_tv\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ f(Q+v)-f(Q)-f'(Q)v\end{pmatrix}$$

なので, 方程式の線形化を考えたとき,

$$e^{\nu_+t}Y_+\ (\text{ただし } Y_+=\begin{pmatrix}Y\\ \nu_+Y\end{pmatrix},\ \nu_+:=-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\nu}\ )$$

という解が存在する. それゆえ, この Y^+ の方向は不安定な成分となっている.[3] では十分離れた異符号の 2 つのソリトンの重ね合わせの近傍において, それぞれのソリトン周りの不安定成分を制御することで 2 ソリトン解が余次元 2 の多様体をなすことを示した. 我々はこの近傍内の初期値と大域挙動の対応付けを行った.
主定理を述べるためにもう少し用語の定義を行う. まず

$$Y^-(x):=\begin{pmatrix}\frac{\nu}{\nu_+}Y\\ Y\end{pmatrix}$$

と定義し,$|z_1 - z_0| \gg 1$ なる $z = (z_0, z_1) \in (\mathbb{R}^N)^2$ に対して

$$\mathcal{A}_{z,\delta} := \{\varphi \in \mathcal{H} | \langle \varphi, Y^-(\cdot - z_j)\rangle = 0 \ (j = 0, 1), \|\varphi\|_{\mathcal{H}} < \delta\} \tag{6}$$

とする. ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $L^2(\mathbb{R}^N)$ の標準内積である. このとき,$|z_1 - z_0|$ が十分大きいので

$$\mathcal{H} = \mathbb{R}Y^+(x - z_0) \oplus \mathbb{R}Y^+(x - z_1) \oplus \mathcal{A}_{z,\infty} \tag{7}$$

が容易にわかる. それゆえ 2 ソリトンの近傍に対して (7) の形で分解することで 2 つの方向の不安定成分を取り出すことができる. 我々の主結果は以下のとおりである ($\vec{Q} := (Q, 0)$ とする).

定理 1.1. ある $\delta \in (0, 1)$ が存在して以下が成立する.
$\sigma_0, \sigma_1 \in \{\pm 1\}$ と $z = (z_0, z_1) \in (\mathbb{R}^N)^2$ が

$$\sigma_0\sigma_1 = -1 \ , \ |z_0 - z_1| > \frac{1}{\delta} \tag{8}$$

を満たすとする. このときあるリプシッツ連続な写像 $F_j : \mathcal{A}_{z,\delta} \times [-\delta, \delta] \to [-\delta, \delta]$ が存在して (DNLKG) の初期値

$$\sum_{j=0,1} \sigma_j(\vec{Q} + a_j Y^+)(\cdot - z_j) + \varphi \ (\varphi \in \mathcal{A}_{z,\delta}, \ a_0, a_1 \in [-\delta, \delta])$$

の解 $\vec{u}$ の挙動は以下のように分類される.

- $j = 0, 1$ の両方に対して $a_j = F_j(\varphi, a_{1-j})$ のとき $\vec{u}$ は *2* ソリトン解となる.
- $j = 0, 1$ の片方に対して $a_j = F_j(\varphi, a_{1-j})$ かつ $a_{1-j} < F_{1-j}(\varphi, a_j)$ のとき $\vec{u}$ は *1* ソリトン解となる.
- $j = 0, 1$ の両方に対して $a_j < F_j(\varphi, a_{1-j})$ のとき $\vec{u}$ は減衰解となる.
- (a_0, a_1) が上記以外の場合 $\vec{u}$ は有限時間で爆発する.

主定理の 2 ソリトン解はリプシッツ連続 $G : \mathcal{A}_{z,\delta} \to (-\delta, \delta)^2$ を用いて「$(a_0, a_1) = G(\varphi)$ なら 2 ソリトン解」と言い換えることができる. 先のリプシッツ写像 G の存在については [3] で示されている. 主定理ではこの 2 ソリトン解の近傍を考えたとき,「2 ソリトン解集合」と 2 つの「1 ソリトン解集合」, そして「減衰解集合」と「爆発解集合」の 5 つの連結な集合に分割でき, さらに減衰解と爆発解の境界が 2 つの 1 ソリトン解集合と 2 ソリトン解集合の和集合になっていることを示している.

1.2 3 ソリトン解近傍での困難性について

今回の主定理では $\sigma_0\sigma_1 = -1$ が重要で, この関係式のときソリトン間の相互作用は反発するように働く. それゆえ時間が経つとソリトン間の相互作用は小さくなっていく. それゆえ 2 ソリトン解の近傍で解を考えるとき, 相互作用が常に小さくなっているのが活きている.
一方, 同様のことを 3 ソリトン解の近傍を考えると, 真ん中のソリトンのみ減衰するような状況になることがある. このとき, 先の主定理の状況で $\sigma_0\sigma_1 = 1$ の場合も考える必要がでてくる. この状況での解析は極めて困難である. なぜなら, この状況のときの 2 つのソリトン間の相互作用は引力となる. そのため, 時間が経つと 2 つのソリトンが融合するような状況が発生する. しかしながら, この融合の

状況には解析できる手段がほぼないので, この部分の解析ができないと 3 ソリトン周りでの初期値大域挙動の対応付けはできない.

1.3 証明の概略について

2 ソリトン周りの解析もソリトン間の相互作用が弱いときは 1 ソリトン周りの貼り合わせに帰着する. そのためには 1 ソリトン周りの解析が必要である. また,1 ソリトン解周りの解を考える以前に, 古くからエネルギーが $E(\vec{Q})$ より下の状態ではネハリ関数と呼ばれる関数の符号で解の大域挙動が決定できていた. そのため, ここでは基底状態より下での解析, 評価について述べた後,1 ソリトン周りの大域挙動の解析を行い, 最後に 2 ソリトン周りの大域挙動と初期値の対応付けを行う.

2 基底状態より下での基本的性質

ここでは (DNLKG) の解 $\vec{u}$ がソリトンのエネルギー $E(\vec{Q})$ より下の状態での解の大域挙動について考える.. 最初に, 基底状態に関してはネハリ関数 $K_0 : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ を

$$K_0(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2 - |\varphi|^{p+1} \tag{9}$$

と定義すると,

$$E(\vec{Q}) = \inf\{E((\varphi,0)|\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\},\ K_0(\varphi) = 0\} \tag{10}$$

となる. 特にこの性質から $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{H}$ に対して $E(\varphi) < E(\vec{Q})$, $\varphi_1 \neq 0$ なら $K_0(\varphi_1) \neq 0$ がわかる. [4] ではこの状況での評価を一様に行っていて, 十分小さい $\delta > 0$ が存在して

$$E(\varphi) < E(\vec{Q}) - \delta \text{ ならば } K_0(\varphi_1) \gtrsim \min\{\delta, \|\varphi_1\|_{H^1}^2\} \text{ または } K_0(\varphi_1) \lesssim -\delta \tag{11}$$

が成立する. ただし, ここでいう $\gtrsim$,$\lesssim$ はある集合 A 上の実数値関数 ψ_1, ψ_2 に関して

$$\psi_1 \lesssim \psi_2 \Leftrightarrow \text{ある } C > 0 \text{ が存在して任意の } x \in A \text{ で} \psi_1(x) \leq C\psi_2(x)$$
$$\psi_1 \gtrsim \psi_2 \Leftrightarrow \text{ある } C > 0 \text{ が存在して任意の } x \in A \text{ で} \psi_1(x) \geq C\psi_2(x)$$

のことを指す. この一様な評価は極めて良い性質で, なぜなら (DNLKG) の解 $\vec{u}$ のエネルギーは (2) より時間が経つと減衰していく. この減衰の性質から $\vec{u}$ が基底状態よりエネルギーが低いとき,K_0 の一様な評価も合わせて用いることで $\vec{u}$ の解の大域挙動に関する一様な評価を得ることができる. まず, 減衰解に関しては以下のような結果がある.

補題 2.1. ある定数 $\delta > 0$ と (DNLKG) の解 $\vec{u}$ が

$$E(\vec{u}(0)) < E(\vec{Q}) - \delta\ ,\ K_0(u(0)) \geq 0$$

を満たすとする. このとき $\vec{u}$ は大域解となり, さらにある *(δ に依存しない)* 定数 $C, c > 0$ が存在して任意の $t \geqq 0$ で

$$\|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} \leq Ce^{-c\delta t} \tag{12}$$

が成立する.

次に, 爆発解に関する議論を行う. 爆発解に関しては以下の 2 つの評価を合わせることで判定が容易に行える.

補題 2.2. 関数 $P : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ を

$$P((\varphi_1, \varphi_2)) = \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle + \alpha \|\varphi_1\|_{L^2}^2 \tag{13}$$

と定義する. このとき (DNLKG) の解 $\vec{u}$ に対して, ある $t \geq 0$ で

$$P(\vec{u}(t)) > \frac{p+1}{p-1}(1+2\alpha)E(\vec{u}(t)) \tag{14}$$

を満たすなら $\vec{u}$ は爆発解となる. さらにこの不等式は一度成立すればそれ以降の解が存在する時間で常に成立する.

補題 2.3. ある正の定数 $\delta > 0, B > 0$ と (DNLKG) の解 $\vec{u}$ が

$$E(\vec{u}(0)) < E(\vec{Q}) - \delta \ , \ K_0(u(0)) < 0 \ , \ \|\vec{u}(0)\|_{\mathcal{H}} \leq B$$

を満たすとする. このときある (δ に依存しない) 定数 $C, c > 0$ が存在して任意の $t \geqq 0$ で

$$P(\vec{u}(t)) \geq e^{ct - \frac{CB^2}{\delta}} - 1 - B^2 \tag{15}$$

が成立する.

この 2 つを併用することで $K_0(u(0)) < 0$ なら爆発解になることは容易にわかる. これらの証明は [5] に記してある. これらより, 解のエネルギーが基底状態のエネルギーより低くなっているならば上の評価から一様に減衰, 爆発の評価が得られる.

3　1 ソリトン周りの大域挙動の分類

3.1　1 ソリトン解の存在

次に 1 ソリトン周りの解の挙動の分類を行う. 紙面の都合上粗く議論をすることがあるが,[5] に完全な証明が記載されている. まず $z \in \mathbb{R}^N$ に対して (セクション 3 においては z は $\mathbb{R}^N$ の要素とする),

$$\vec{Q}_z := (Q_z, 0) \ , \ Q_z(x) := Q(x - z) \ , \ Y_z^{\pm}(x) := Y^{\pm}(x - z) \tag{16}$$

とする. このとき z は後でうまく選ぶとして,$v(t)$ と $a(t)$ を

$$v(t) = \vec{u}(t) - \vec{Q}_z \ , \ a(t) = \langle v(t), Y_z^- \rangle$$

と定める. さらにこのとき $\gamma(t) := v(t) - a(t)Y^+(t)$ とすると

$$\langle Y^+(t), \gamma(t) \rangle = 0 \tag{17}$$

が成立する. よって上の分解で不安定成分とそれ以外を分けることができている. さらにこの $a(t)$ に関しては不安定方向の成分となっているため, 指数増大する項となる. これらをまとめると以下の主張が成立する.

補題 3.1. ある $\delta > 0$ と $z \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^N)$ 存在して, 以下を満たす.(DNLKG) の解 $\vec{u}$ がある $T > 0$ に対して

$$\sup_{t\in[0,T)} \|\vec{u}(t) - \vec{Q}_z\|_{\mathcal{H}} \leq \delta \ , \ \|\vec{u}(T) - \vec{Q}_z\|_{\mathcal{H}} = \delta \tag{18}$$

を満たすとする. このときある $\mu > 0$ が存在して,

$$\begin{aligned} |\frac{d}{dt}a - \nu_+ a| &\lesssim \|v\|_{\mathcal{H}}^2 \\ \|\gamma\|_{\mathcal{H}} &\lesssim e^{-\mu t}\|\gamma(0)\|_{\mathcal{H}} + \|v(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned} \tag{19}$$

が成立する.

この主張より,$\vec{u}(0)$ に対して

$$a(0) \gg \|\gamma(0)\|_{\mathcal{H}} \text{かつ } \|v(0)\|_{\mathcal{H}} \ll \delta \tag{20}$$

を満たすように初期値を取ると, この初期値の解 $\vec{u}$ は $t = T$ で $a(T) \sim \delta$ かつ $\|\gamma(T)\|_{\mathcal{H}} \ll \delta$ となる. ここで

$$K_0(Q+\varphi) = -(p-1)\langle Q^p, \varphi\rangle + O(\|\varphi\|_{H^1}^2) \tag{21}$$

が成立するので,$a(T) \sim \delta$ かつ $\|\gamma(T)\|_{\mathcal{H}} \ll \delta$ の状態なら $0 < t < T$ で

$$a(t) \gtrsim e^{\frac{\nu_+}{2}t}a(0) \ , \ \|\gamma(t)\|_{\mathcal{H}} \ll a(t) \sim \|v(t)\|_{\mathcal{H}} \tag{22}$$

となっているので $t = T$ で

$$E(\vec{u}(T)) < E(\vec{Q}) \ , \ K_0(u(T)) \sim -a(T)$$

が成立. ただし「$A \sim B$」とは $A \lesssim B$ かつ $B \lesssim A$ のことを指す. これから (20) の初期値では解は爆発することがわかる. 同様の作業で $-a(0) \gg \|\gamma(0)\|_{\mathcal{H}}$ かつ $\|v(0)\|_{\mathcal{H}} \ll \delta$ のときは解が 0 に減衰することもわかる. さらに T' を

$$T' := \sup_{t\in[0,T)} \{t \mid 0 \leq s \leq t \text{ で } |a(s)| \leq \delta'\} \tag{23}$$

とする. ただし $0 < \delta' \ll \delta$ なる定数とする. ここで $\|v(0)\|_{\mathcal{H}} \ll \delta'$ の範囲で $T' < \infty$ とおくと,$|a(T')| = \delta'$ となる. さらに解の連続依存性から写像 $a(0) \mapsto a(T')$ を考えると連続写像になり, それゆえこの写像の定義域 $[-\delta', \delta']$ での値域は連結になる. ところがこの値域は $\{-\delta', \delta'\}$ となるので矛盾. よって $T' = \infty$ となる $a(0)$ が存在し, これが 1 ソリトン解になる.

3.2 1 ソリトン解の解集合の形状

次に先に求めた 1 ソリトン解が余次元 1 の多様体をなすことを示す. 先の $z, \vec{u}$ に加えて,(DNLKG) の初期値

$$\vec{Q}_z + v_* = \vec{Q}_z + a_*(0)Y_z^+ + \gamma_*(0) \tag{24}$$

の解を $\vec{u}_*$ とする. さらに時間が経ったとき

$$\vec{u}_*(t) = \vec{Q}_z + a_*(t)Y_z^+ + \gamma_*(t) \tag{25}$$

とする. ただし分解方法は $\vec{u}$ と同様とする. このとき以下の評価が成立する.

補題 3.2. ある $\delta > 0$ と $z \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ 存在して, 以下を満たす.(DNLKG) の解 $\vec{u}, \vec{u}_*$ がある $T > 0$ に対して

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\vec{u}(t) - \vec{Q}_z\|_{\mathcal{H}} \leq \delta$$
$$\sup_{t\in[0,T]} \|\vec{u}_*(t) - \vec{Q}_z\|_{\mathcal{H}} \leq \delta \ ,$$

を満たすとする. このとき

$$\vec{u}_{\#}(t) = \vec{u}(t) - \vec{u}_*(t) \ , v_{\#}(t) = v(t) - v_*(t) \ , \ a_{\#}(t) = a(t) - a_*(t) \ , \ \gamma_{\#}(t) = \gamma(t) - \gamma_*(t)$$

とするとある $\mu > 0$ が存在して,

$$|\frac{d}{dt}a_{\#} - \nu_+ a_{\#}| \lesssim (\|v\|_{\mathcal{H}} + \|v_*(t)\|_{\mathcal{H}})\|v_{\#}(t)\|_{\mathcal{H}} \tag{26}$$

が成立する.

この評価より,$|a_{\#}|$ は時間が経つと指数増大して, さらに $|a_{\#}| \gg \|\gamma_{\#}\|_{\mathcal{H}}$ となるので,$\vec{u}_*$ を 1 ソリトン解の初期値としたら $\vec{u}$ は補題 3.1 に帰着出来て解の分類ができる. また,$-\vec{Q}_z$ 周りでも同様の議論ができるのでまとめると以下が成立する.

補題 3.3. ある $\delta \in (0,1)$ が存在して以下が成立する.
$\sigma \in \{\pm 1\}$ と $z \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$\mathcal{A}_z = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \langle \varphi, Y_z^- \rangle = 0 \ , \ \|\varphi\|_{\mathcal{H}} < \delta\} \tag{27}$$

とすると, あるリプシッツ連続な写像 $\mathcal{F} : \mathcal{A}_z \to [-\delta, \delta]$ が存在して (DNLKG) の初期値

$$\sigma(Q + aY^+)(x - z) + \varphi \ (a \in (-\delta, \delta), \varphi \in \mathcal{A}_z)$$

の解 $\vec{u}$ の挙動は以下のように分類される.

- $a < \mathcal{F}(\varphi)$ のとき $\vec{u}$ は減衰解になる.
- $a = \mathcal{F}(\varphi)$ のとき $\vec{u}$ は *1* ソリトン解となる.
- $a > \mathcal{F}(\varphi)$ のとき $\vec{u}$ は爆発解となる.

4　2 ソリトン周りの大域挙動の分類

次に 2 ソリトン周りで解を分解する. まず $\sigma_0, \sigma_1 \in \{\pm 1\}$,$z = (z_0, z_1) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)^2), |z_0 - z_1| \gg 1$ とする. さらに $j = 0, 1$ に対して

$$Q_j(x) := \sigma_j Q(x - z_j) \ , \vec{Q}_j = (Q_j, 0) \ , \ Y_j^{\pm}(x) := Y^{\pm}(x - z_j) \tag{28}$$

とする. さらに (DNLKG) の解 $\vec{u}$ に対して

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \sum_{j=0,1} \vec{Q}_j + v \\ v &= \sum_{j=0,1} a_j Y_j^+ + \gamma \ , \ a_j = \langle v, Y_j^- \rangle \end{aligned} \tag{29}$$

となるように v, γ, a_j を定義する. このとき 1 ソリトン周りの場合と異なり a_j にはソリトン間の相互作用も働くが, この場合も z をうまくとることで以下が成立する.

補題 4.1. ある $\delta > 0$ と $z \in C^1(\mathbb{R}; (\mathbb{R}^N)^2)$ 存在して, 以下を満たす.(DNLKG) の解 $\vec{u}$ がある $T > 0$ に対して

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\vec{u}(t) - \sum_{j=0,1} \vec{Q}_j\|_{\mathcal{H}} \leq \delta \ , \ \|\vec{u}(T) - \vec{Q}_z\|_{\mathcal{H}} = \delta \tag{30}$$

を満たすとする. このときある $\mu > 0$ が存在して,

$$\begin{aligned} |\frac{d}{dt}a - \nu_+ a| &\lesssim \|v\|_{\mathcal{H}}^2 + Q(z_1 - z_0) \\ \|\gamma\|_{\mathcal{H}} &\lesssim e^{-\mu t}\|\gamma(0)\|_{\mathcal{H}} + \|v(t)\|_{\mathcal{H}}^2 + Q(z_1 - z_0) \end{aligned} \tag{31}$$

が成立する.

ここでの $Q(z_1 - z_0)$ は 2 つのソリトン間の相互作用の大きさである. 詳しくは [5] で計算している. ここで $\|v\|_{\mathcal{H}}^2 \gg Q(z_1 - z_0)$ のときは a_0, a_1 に対して 1 ソリトン周りと同様の考え方をできるが,$\|v\|_{\mathcal{H}}^2 \lesssim Q(z_1 - z_0)$ の場合は相互作用が支配的になる.

4.1 2 ソリトン解の差の評価

先の $\vec{u}$ に加えて (DNLKG) の初期値

$$\sum_{j=0,1} \vec{Q}_j + v_* = \sum_{j=0,1} \vec{Q}_j + a_{*,j}(0)Y_j^+ + \gamma_*(0) \tag{32}$$

の解を $\vec{u}_*$ とする. さらに時間が経ったとき

$$\vec{u}_*(t) = \sum_{j=0,1} \vec{Q}_j + a_{*,j}(t)Y_j^+ + \gamma_*(t) \tag{33}$$

とする. ただし分解方法は $\vec{u}$ と同様とする. さらに $\vec{u}$ と $\vec{u}_*$ の差として

$$\vec{u}_\#(t) = \vec{u}(t) - \vec{u}_*(t) \ , v_\#(t) = v(t) - v_*(t) \ , \ a_{\#,j}(t) = a_j(t) - a_{*,j}(t) \ , \ \gamma_\#(t) = \gamma(t) - \gamma_*(t)$$

ただし $j = 0, 1$ とする. ここで $\vec{u}_*$ を $\vec{u}$ 周りの線形化作用素を考えることで表現すると,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_{\#,0} \\ a_{\#,1} \end{pmatrix} = \nu_+ \begin{pmatrix} a_{\#,0} \\ a_{\#,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_{00}(t) & M_{01}(t) \\ M_{10}(t) & M_{11}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\#,0} \\ a_{\#,1} \end{pmatrix} + N(t) \tag{34}$$

のように表せる. ただし N は可積分としてよい. このとき

$$M(t) = \begin{pmatrix} M_{00}(t) & M_{01}(t) \\ M_{10}(t) & M_{11}(t) \end{pmatrix}$$

とすると, これは $\|v\|_{\mathcal{H}}^2 \gg Q(z_1 - z_0)$ のときは M も可積分となり,1 ソリトン周りと同様の挙動を表す. しかしながら $\|v\|_{\mathcal{H}}^2 \lesssim Q(z_1 - z_0)$ の場合は M が可積分かはわからないため,$(a_{\#,0}, a_{\#,1})$ の初期値の方向と時間発展後の方向が同じ方向を向くかはわからない. なぜなら, 例えば

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_{\#,0} \\ a_{\#,1} \end{pmatrix} = \nu_+ \begin{pmatrix} a_{\#,0} \\ a_{\#,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & e^{-t} \\ e^{-t} & \frac{1}{1+t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\#,0} \\ a_{\#,1} \end{pmatrix}$$

での $(a_{\#,0}(0), a_{\#,1}(0)) = (1,0)$ の解は $(a_{\#,0}(t), a_{\#,1}(t)) \sim te^{\nu_+ t}(0,1)$ になる $(t \to \infty)$.
この式からわかるように M に関する可積分性がわからないと初期値の方向が一定の方向を向いているとは限らないことがわかる.
この方向に関する主張がわかれば嬉しいが, 方向に関する主張として以下が成立する.

補題 4.2. ある $\delta > 0$ と $z \in C^1((\mathbb{R}^N)^2; \mathbb{R})$ 存在して, 以下を満たす.(DNLKG) の解 $\vec{u}, \vec{u}_*$ がある $T > 0$ に対して

$$\sup_{t\in[0,T)} \|\vec{u}(t) - \sum_{j=0,1} \vec{Q}_j\|_{\mathcal{H}} \le \delta \ , \ \sup_{t\in[0,T)} \|\vec{u}_*(t) - \sum_{j=0,1} \vec{Q}_j\|_{\mathcal{H}} \le \delta \tag{35}$$

を満たすとする. このとき先の $M(t)$ に関して,$M_{00} - M_{11}, M_{01}, M_{10} \in L^1([0,T))$ となる.

この主張より,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_{\#,0} \\ a_{\#,1} \end{pmatrix} = (\nu_+ + M_{00})\begin{pmatrix} a_{\#,0} \\ a_{\#,1} \end{pmatrix} + N'$$

となり,N' が可積分となるので $(a_{\#,0}, a_{\#,1})$ の初期値の方向と時間が経った後の方向は保たれる.
以上をふまえて主定理の証明の概略を記す. [3] より,2 ソリトン解を満たす (a_0, a_1) の存在はわかっている. この初期値を $\vec{u}$ としたとき,$a_{*,0} < a_0$ なら $\vec{Q}_0$ 周りのソリトンは減衰する. それゆえ時間が経つと $\vec{Q}_0$ 周りは減衰解の挙動をする. よって,$a_{*,0} < a_0$ での $(a_{*,0}, a_{*,1})$ は,

- $a_{*,1} - a_1 \gtrsim a_0 - a_{*,0}$ のときは時間がたつと $\vec{Q}_1$ 周りで爆発するので元の解自体の $P(\vec{u})$ も大きくなり, 爆発解になる.
- $a_1 - a_{*,1} \gtrsim a_0 - a_{*,0}$ のときは $\vec{Q}_0$ 周りも $\vec{Q}_1$ 周りもどちらも減衰するので, 時間が経つと解 $\vec{u}$ は $E(\vec{u}) < E(\vec{Q}), K_0(u) \ge 0$ となり減衰する.

注意 4.3. これらの評価はセクション 2 で行った一様な評価のおかげで成立している. もしセクション 2 での評価がなければ,$\vec{Q}_0$ 周りでの減衰が遅すぎて $\vec{Q}_0$ 周りと $\vec{Q}_1$ 周りの相互作用の影響などから解の挙動の分類が困難になる恐れがある.

よって上の議論と爆発解集合と減衰解集合がどちらも開集合になっている (セクション 2 からわかる) 性質から位相的な議論である $a_{\star,1}$ が存在して $(a_{\#,0}, a_{\star,1})$ は 1 ソリトン解になる.
最後にこの 1 ソリトン解集合のリプシッツ連続性を考える. これは $\vec{u}$ が $\vec{Q}_0$ 周りが消える 1 ソリトン解になっているとしたら,

- $a_{*,1} > a_1$ のとき,
  $a_{*,1} - a_1 \gtrsim |a_{\#,0}| + \|\gamma_{\#}\|_{\mathcal{H}}$ なら時間が経った後は $\vec{Q}_1$ 周りで爆発するので元の解自体の $P(\vec{u})$ も大きくなり, 爆発解になる.
  $a_{*,1} - a_1 \ll |a_{\#,0}| + \|\gamma_{\#}\|_{\mathcal{H}}$ なら時間が経った後に $\vec{Q}_0$ 周りは減衰した後も $\vec{Q}_1$ 周りは $\vec{Q}_1$ の近傍にいる状態のままなので 1 ソリトン周りの議論に帰着できて爆発解がわかる.
- $a_{*,1} < a_1$ のときも今の議論と同様の作業で減衰解になることが示せる.

これより 2 ソリトン解になる (a_0, a_1) における $a_{*,0} < a_0$ での解の大域挙動の分類はできた.$a_{*,1} < a_1$ の場合も同様にでき, 今までの議論をまとめることで主定理が得られる.

参考文献

[1] S. -M. Chang, S. Gustafson, K. Nakanishi and T. -P. Tsai, *Spectra of linearized operators for NLS solitary waves.* SIAM J. Math. Anal. **39** (2007/08), no. 4, 1070–1111.

[2] R. Côte, Y. Martel, and X. Yuan, *Long-time asymptotics of the one-dimensional damped nonlinear Klein-Gordon equation.* Arch. Ration. Mech. Anal. **239** (2021), no. 3, 1837–1874.

[3] R. Côte, Y. Martel, X. Yuan, and L. Zhao, *Description and classification of 2-solitary waves for nonlinear damped Klein-Gordon equations.* preprint, arxiv:1908.09527.

[4] S. Ibrahim, N. Masmoudi, and K. Nakanishi, *Scattering threshold for the focusing nonlinear Klein-Gordon equation.* Anal. PDE, **4** (2011), no. 3, 405–460.

[5] K. Ishizuka, and K. Nakanishi, *Global dynamics around 2-solitons for the nonlinear damped Klein-Gordon equations.* preprint, arxiv:2109.03737.

[6] M. Kwong, *Uniqueness of positive solutions of* $\Delta u - u + u^p = 0$ *in* $\mathbb{R}^N$. Arch. Rational Mech. Anal. **105** (1989), no. 3, 243–266.

リーマン多様体上のジャンプ過程とその性質

大阪市立大学大学院 理学研究科 数物系専攻
甲斐大貴 (Hirotaka Kai)

概要

Markov 過程とは未来の状態が現在の情報のみによって決定するランダムな粒子の動きである．Dirichlet 形式の発展に伴い，より一般の空間に Markov 過程を構成出来るようになった．一方で，ユークリッド空間上の独立増分性を持つ確率連続な確率過程（Lévy 過程）はユークリッド空間上の典型的な Markov 過程の 1 つである．ユークリッド空間上の Lévy 過程の性質については，多くのことが分かっており，後に詳しく説明する再帰性と過渡性については Chung-Fuchs[4] によって特徴づけられている．従って，一般の Markov 過程を Lévy 過程に限定し，対象とする空間をリーマン多様体に拡張して研究すると，どれくらいの結果が得られるのか，という疑問は自然な発想である．まず，リーマン多様体上の確率過程がどの様な条件を満たしたとき，それを Lévy 過程と呼べるのだろうか，という問題が発生する．実は，Hille-Yoshida の定理によって，Banach 空間上の強連続縮小半群と擬微分作用素，Markov 過程（及びレゾルベント，Dirichlet 形式）は 1 対 1 に対応していることが分かっている．この擬微分作用素が $\Delta/2$（ラプラシアン）のとき，対応する Markov 過程は Brown 運動となる．これに着目して，Malliavin-Elworthy-Li は正規直交枠束上の確率微分方程式の解を底空間に射影して多様体上の Brown 運動を構成した．その後，Applebaum[1],[2] はこの手法を拡張し，正規直交枠束上の Marcus 型確率微分方程式の解を底空間に射影する事によってリーマン多様体上の Lévy 型確率過程を構成した．

ユークリッド空間と一般のリーマン多様体の違いの一つは曲率である．Ichihara[10] はリーマン多様体上の Brown 運動が再帰性，過渡性，保存性を持つための十分条件を曲率の情報から与えた．この研究を一般化し，Lévy 型確率過程の再帰性，過渡性，保存性の十分条件を与えたのが今回の私の研究内容である．

1 導入

(M, g) を $m(\geq 2)$ 次元単連結完備リーマン多様体とし無限遠点 ∂_M による 1 点コンパクト化を $\widehat{M}$ とする．更に ∇ を Levi-Civita 接続とする．M の枠束を $\mathcal{F}(M)$ とし，$\mathcal{F}(M)$ から M への射影を π と書く．$\mathcal{F}(M)$ の部分多様体 $O(M)$ を次のように定義する．

$$O(M) = \{u = ((v_1)_{\pi u}, \dots, (v_m)_{\pi u}); (v_1)_{\pi u}, \dots, (v_m)_{\pi u} \text{は } \mathrm{T}_{\pi u}M \text{ の正規直交基底 } \}$$

$u \in O(M)$ を次の関係で $\mathrm{T}_{\pi u}M$ から $\mathbb{R}^m$ への線形同型写像と考える．

$$\mathbb{R}^m \ni z \mapsto \sum z^i (v_i)_{\pi u} \in \mathrm{T}_{\pi u}M$$

勝手な $z \in \mathbb{R}^m$ に対して，$Hz(u) \in \mathrm{T}_u O(M)$ を $uz \in \mathrm{T}_{\pi u}M$ の水平持ち上げと定義すると Hz は $O(M)$ 上のベクトル場となる．特に $\mathbb{R}^m$ 上の正規直交基底 $e_1, \dots, e_m$ に対して，$H_i(u) = He_i$ と書

くことにする．$O(M)$ 上の常微分方程式

$$\frac{\partial \Xi_t}{\partial t} = Hz(\Xi_t),\ \Xi_0 = id$$

の解を $\Xi_z^t = \mathrm{Exp}(tHz)$ と書く．

$\{B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^m); 0 \leq t < \infty\}$ を m 次元 Brown 運動とし $N(dz, ds)$ を $\nu(dz)ds$ を intensity に持つ Poisson ランダム測度とする．ただし $\nu(dz)$ は

$$\int_{\mathbb{R}_0^m} (1 \wedge |z|^2)\nu(dz)$$

を満たす Lèvy 測度である．これらの記号の下，$\{U_t; 0 \leq t < e\}$ を次の確率微分方程式の解とする．

$$\begin{aligned} F\left(U_t^u\right) - F\left(u\right) = &\int_0^t \sum_{i=1}^m H_i F\left(U_{s-}^u\right) \circ dB_s^i \\ &+ \int_0^t \int_{|z|>1} \left\{\left(F \circ \Xi_z\right)\left(U_{s-}^u\right) - F\left(U_{s-}^u\right)\right\} N\left(dz, ds\right) \\ &+ \int_0^t \int_{|z|\leq 1} \left\{\left(F \circ \Xi_z\right)\left(U_{s-}^u\right) - F\left(U_{s-}^u\right)\right\} \widetilde{N}\left(dz, ds\right) \\ &+ \int_0^t \int_{|z|\leq 1} \left\{\left(F \circ \Xi_z\right)\left(U_{s-}^u\right) - F\left(U_{s-}^u\right) - \sum_{i=1}^m z^i H_i F\left(U_{s-}^u\right)\right\} \nu\left(dz\right) ds \\ &\forall F \in C^\infty(M). \end{aligned} \tag{1}$$

ここで $e = \inf\{t > 0; X_t \notin M\}$ は爆発時刻であり，$\circ dB_s^i$ は Stratonovich 積分である．この確率微分方程式の解の射影 $\{X_t = \pi U_t; 0 \leq t < e\}$ を M 上の Lèvy 型確率過程と呼ぶ．一般に $\{U_t; 0 \leq t < e\}$ は Markov 過程であるが $\{X_t = \pi U_t; 0 \leq t < e\}$ は Markov 過程かどうかは分からない．次の定理は $\{X_t = \pi U_t; 0 \leq t < e\}$ が Markov 性を持つ十分条件を与えている．

定理 1 (Applebaum, D. and Estrade, A. (2000))．*Lèvy* 測度 $\nu(dz)$ が回転不変であるとき，$\{X_t = \pi U_t; 0 \leq t < e\}$ は出発点 x のフレームの選び方に依らない．従って，$\{X_t = \pi U_t; 0 \leq t < e\}$ は *Markov* 過程となる．

これで，本研究に必要な基本的な設定は終わりである．ここからは本研究の主結果について述べたいと思う．

2　主結果

まずは，Markov 過程の再帰性，過渡性，既約性についての定義をまとめる．

定義 1. D を M 上の滑らかな境界を持つ相対コンパクト集合とし，到達時刻，最終脱出時刻をそれぞれ

$$T_D = \inf\{t > 0;\ X_t \in D\}$$
$$\sigma_D = \sup\{t > 0;\ X_t \notin D\}$$

と定義する．このとき

- $\mathbb{P}_x[\sigma_D = \infty] = 1$ が全ての x,D で成り立つとき，$\{X_t; 0 \le t < e\}$ は再帰的である．
- $\mathbb{P}_x[\sigma_D < \infty] = 1$ が全ての x,D で成り立つとき，$\{X_t; 0 \le t < e\}$ は過渡的である．
- $\mathbb{P}_x[T_D < \infty] = 1$ が全ての x,D で成り立つとき，$\{X_t; 0 \le t < e\}$ は既約的である．

既約的な右連続 Markov 過程は再帰性か過渡性のどちらかを持つ．また，再帰的な右連続 Markov 過程は爆発しないことに注意する．詳細は Getoor[7] を参照すること．

$\mathrm{dist}(\cdot,\cdot) : M \times M \to [0,\infty)$ を M 上の距離関数とする．また, M の基準となる点 $o \in M$ を一つ固定して，$r(\cdot) = \mathrm{dist}(o,\cdot)$ と定義する．

定理 2. ある負の定数 β が存在して，M の断面曲率 K が $K \le \beta < 0$ を満たすとき，次の不等式が成り立つような定数 $C(\beta, m) > 0$ と *1* 次元 *Brown* 運動 $\{W_t; 0 \le t < e\}$ が存在する．

$$r(X_t) \ge r(x) + W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^m} \Big(r \circ \xi_z(X_{s-}) - r(X_{s-}) \Big) \widetilde{N}(dz, ds) + C(\beta, m)t$$

この定理から次のことが分かる．

定理 3.

$$\mathbb{P}_x[\lim_{t\to\infty} r(X_t) = \infty,\ e = \infty] = \mathbb{P}_x[e = \infty]$$

が全ての $x \in M$ で成り立つ．従って，$\{X_t; 0 \le t < e\}$ は過渡的である．

定義 2. *Markov* 過程 $\{X_t; 0 \le t < e\}$ が保存的であるとは，

$$\mathbb{P}_x[e = \infty] = 1$$

が全ての $x \in M$ で成り立つことである．

$M \ni x \mapsto \mathbb{P}_x[e = \infty] \in [0,1]$ にある程度の滑らかさがあれば，Markov 過程 $\{X_t; 0 \le t < e\}$ が保存的であることを示すには，$\mathbb{P}_x[e = \infty] = 1$ となる $x \in M$ を一つ見つけてくるだけで十分である．

定理 4. $j(x) = \mathbb{P}_x[e = \infty]$ と定義し，$j \in C^2(M)$ とする．このとき次のいずれかが成り立つ．

- 全ての $x \in M$ に対して，$j(x) = 1$.
- 全ての $x \in M$ に対して，$j(x) = 0$.
- 全ての $x \in M$ に対して，$0 < j(x) < 1$.

また断面曲率に更なる条件を加えることで次の定理が導かれる．

定理 5. 任意の $\delta > 0$ に対して，$\phi(\delta) = \delta + \frac{4\tanh\left(\sqrt{|\beta|}\delta\right)}{\sqrt{|\beta|}}$ とし，停止時刻を

$$T(\delta) = \inf\{t > 0;\ r(X_t) < \phi(\delta)\}$$

と定義する．断面曲率 K に対して $\alpha \le K \le \beta < 0$ を満たす負の定数 α, β が存在すると仮定する．このとき次のことが成り立つ．

定数 $C(\alpha, m, \delta)$ が存在し，$\{t < e \wedge T(\delta)\}$ 上で

$$r(X_t) \le r(x) + W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^m} \Big(r \circ \xi_z(X_{s-}) - r(X_{s-}) \Big) \widetilde{N}(dz, ds) + C(\alpha, m, \delta)t$$

が成り立つ.

この定理から $\{X_t; 0 \leq t < e\}$ が保存的であることが導かれる.

参考文献

[1] Applebaum ,D. and Estrade ,A.: *Isotropic Lèvy processes on Riemannian manifolds*, *Ann. Probab.* **28** (2000), 166-184.

[2] Applebaum, D.: *A horizontal Lévy process on the bundle of orthonormal frames over a complete Riemannian manifold. Séminarie de Probabilités.* XXIX, 166-180. Lecture Notes in Math., **1613**. *Springer, Berlin* (1995)

[3] Fujiwara, T.: *Stochastic differential equations of jump type on manifolds and Lévy flows. J. Math. Kyoto. Univ.* **31** (1991), 99-119.

[4] Chung, K. L. and Fuchs, W. H.: *On the distribution of values of sums of random variables. Amer. Math. Soc.* **6** (1951).

[5] Fujiwara, T.: *Stochastic differential equations of jump type on manifolds and Lévy flows. J. Math. Kyoto. Univ.* **31** (1991), 99-119.

[6] Fujiwara, T., Kunita, H.: *Stochastic differential equations of jump type and Lévy processess in diffeomorphisms group. J. Math. Kyoto. Univ.* **25** (1985), 71-106.

[7] Getoor, R. K.: *Transience and recurrence of Markov processes*, *Seminar on Probability, XIV(Paris, 1978/1979)(French),* 397-409, Lecture Notes in Math., **784**, *Springer, Berlin,* (1980).

[8] Hsu, E.: *Stochastic analysis on manifolds. Amer. Math. Soc.* (2002).

[9] Hunt, G. A.: *Semigroups on measures on Lie groups*, *Trans. Amer. Math. Soc* **81** (1956), 264-293.

[10] Ichihara, K.: *Curvature, geodesics and the Brownian motion on a Riemannian manifold. II. Explosion properties*, *Nagoya Math. J.* **87** (1982), 115-125.

[11] Kai ,H. and Takeuchi ,A.: *Gradient formula for jump processes on Riemannian manifolds*, *Electron. J. Probab.* **26** (2021), article no. 101, 1 –15.

[12] Kobayashi ,S. and Nomizu ,K.: *Foundations of Differential Geometry. Volume I*, *Wiley, NewYork*, (1963).

[13] Kunita, H.: *Stochastic Flows and Jump-Diffusions. Springer,* (2019).

[14] Takeuchi, A.: *Bismut-Elworthy-Li-type formulae for stochastic differential equations with jumps. J. Theoret. Probab.* **23** (2010), 576-604.

ランダム行列とその主小行列の固有値分布について

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
藤江克徳 (Katsunori FUJIE)

概要

ランダム行列とは成分が確率変数で与えられる行列のことである．ランダム行列理論において，その主な研究対象は確率的に定まる固有値，すなわち固有値分布である．歴史的，そして物理的な背景から，行列のサイズを大きくしていった際の固有値分布の振る舞いにとくに興味が持たれている．本講演ではユニタリ共役作用で分布が不変となるランダムエルミート行列の系列について，それらの主小行列の固有値分布がサイズが大きくなったとき，どのように決定されるかを説明する．なお本講演は長谷部高広氏（北海道大学）との共同研究に基づいている．

1 導入

ランダム行列の数理的解析が始まったのは 1920 年代の J.Wishart による統計学の研究がはじめとされる．そこから少し時間が立って 50 年代になって E.P.Wigner による核物理の研究でふたたび現れたのを皮切りに，ランダム行列はとくにその初期において主に物理学の分野で理論的な発展が進んだ．現在では素数分布との関連から数論などの純粋数学から，また無線通信理論への応用的な側面を持つため工学からも興味が持たれており，さらなる理論的な解明が望まれる分野である ([13])．

ランダム行列やその系列が定める固有値分布の理論的な解析の道具のうちの一つに自由確率論と呼ばれる研究分野がある．自由確率論とは簡単に述べると非可換な確率変数を調べる研究分野であり，その重要な具体例・応用先としてランダム行列理論がある．とくに独立なランダム行列の系列がその極限分布において自由独立性を満たすという重要な発見がこの分野の立ち上げの本格的なきっかけになった．またこの事実からとくに自由確率論はランダム行列やその極限を扱う理論的な枠組みとして自然なものであると認識されている ([16])．

この他, 自由確率論と他分野との関わりでとくに注目したいのは A.Vershik, S.Kerov らの漸近的表現論である．漸近的表現論とはよくわかっている群の帰納極限として得られる巨大な群の指標などを調べる研究分野である．例えば古典的な結果として有限対称群の帰納極限として得られる無限対称群の指標への漸近理論, そしてヤング図形の最尤形状（しばしば VKLS(Vershik–Kerov–Lagan–Shepp) 曲線と呼ばれる）の発見などがある ([12])．自由確率論がその指標の極限における振る舞いを記述するのに役立つことが 90 年代に P.Biane によって発見されるなどその本質的な関わりが示唆されている ([2])．対称群の漸近的表現論の文脈では発展していくヤング図形を扱うことが多く, ヤング図形の表示として絶対値関数を器に見立てて箱を落としていくような, いわゆる露式表示が用いられる ([8])．こうするとヤング図形は有限台を持つ測度, または関数のグラフ, あるいはその極小値・極大値として翻訳される．このとき interlace する数列が現れる．Kerov はこうして漸近的表現論の研究に

おける副産物として得られた interlace する数列やそれを一般化した Rayleigh measure に関する研究を行い, Markov–Krein 対応などについての結果を得た ([10], [11]).

とくにランダム行列の観点から述べたとき，エルミート行列とその主小行列の固有値が満たす関係として interlace する数列が現れる．Kerov はこの事実に関しても研究を行なっており，Wigner 行列を Haar Orthogonal 行列で共役をとったランダム行列とその主小行列の固有値分布の組で作られる折れ線グラフがその極限においても再び上で述べた VKLS 曲線に集中していくという結果を得ている ([9])．これに引き続いて A.Bufetov は Wigner 行列，Wishart 行列の両クラスで同様の結果が成り立つという結果を得た ([1])．上記二つの結果を受けて 2020 年に Goel–Yao は次の予想を提出した ([7]).

予想 1.1. ユニタリ共役不変なランダムエルミート行列 A_N の経験固有値分布 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\lambda_i}$ がある確率測度 $\mathfrak{m}$ に確率弱収束すると仮定する．このとき，その主小行列 $\widetilde{A}_N$ の固有値分布との組で作られる符号付き確率測度 $\tau_N = \sum_{i=1}^{N}\delta_{\lambda_i} - \sum_{j=1}^{N-1}\delta_{\tilde{\eta}_i}$ は $\mathfrak{m}$ を Markov–Krein 対応で引き戻した τ に確率弱収束する.

注意 1.2.
1. 重要なランダム行列の二種類のクラス GUE(Gaussian Unitary Ensemble) と Wishart 行列はユニタリ共役不変である.
2. この予想はランダム行列理論における folklore—すなわち多くの研究者が主張は成り立つと認識しているがどこにその正しい証明があるのか知らない—だったようである.

本稿ではどのようにしてこの主張が成り立つのかを説明する．なお，より詳しい説明また証明については参考文献，とくに論文 [6] を参照してほしい.

2 準備

主張と主結果について詳しく述べるためこの節ではいくつか必要な定義と記号を紹介しておく.

2.1 自由確率論

定義 2.1. n を自然数とする. 集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を $[n]$ で表す.

1. $[n]$ の分割 ρ とは $[n]$ の部分集合族で, 空集合を持たず, どの共通部分も空集合で, 和集合が $[n]$ に一致するもの, すなわち:

$$\bigsqcup_{V\in\rho} V = [n], \qquad V \neq \emptyset \ (V \in \rho), \qquad V_1 \cap V_2 = \emptyset \ (V_1, V_2 \in \rho,\ V_1 \neq V_2).$$

   分割 $\rho \in \mathrm{P}(n)$ の要素 $V \in \rho$ をブロックという. そして $[n]$ の分割全体を $\mathrm{P}(n)$ で表す.
2. 分割 $\rho \in \mathrm{P}(n)$ が交差しているとは, あるブロック $V_1, V_2 \in \rho$ $(V_1 \neq V_2)$ が存在し, 各 V_1, V_2 に要素 $i_1, i_2 \in V_1$, $j_1, j_2 \in V_2$ があって,

$$i_1 < j_1 < i_2 < j_2,$$

   となるときにいう. $\mathrm{P}(n)$ のうち, 交差していないものを非交差分割と呼び, その全体を $\mathrm{NC}(n)$

で表す.

3. $\mathrm{NC}(n)$ には次のようにして順序を定めることができる: $\rho, \nu \in \mathrm{NC}(n)$ について任意の $V \in \rho$ に対してある $V' \in \nu$ が存在して $V \subset V'$ となるとき,

$$\rho \leq \nu$$

と表す.

注意 2.2. 順序集合 $\mathrm{NC}(n)$ は以下の性質をみたす.

1. $\mathrm{NC}(n)$ には最小元 0_n と最大元 1_n が存在する:

$$0_n = \{\{1\}, \ldots, \{n\}\}, \quad 1_n = \{\{1, \ldots, n\}\}.$$

2. $\mathrm{NC}(n)$ は束となる.
3. とくに $\mathrm{NC}(n)$ は有限半順序集合であるから Möbius 関数 μ_n を持つ.

さらに $\mathrm{NC}(n)$ には Kreweras complement と呼ばれる反順序自己同型写像がある.

定義 2.3. $\mathrm{NC}(n)$ の元 ρ に対し, 新たな元 $K(\rho) \in \mathrm{NC}(n)$ を次のようにして定める:

step1: ρ は $[n] = \{1, \ldots, n\}$ の分割であった. $1, \ldots, n$ に対し, $\overline{1}, \ldots, \overline{n}$ を間に差し込む:

$$1\ \overline{1}\ 2\ \overline{2}\ \ldots\ n\ \overline{n}.$$

step2: このとき $[\overline{n}] = \{\overline{1}, \ldots, \overline{n}\}$ と表し, $[\overline{n}]$ の分割全体を $P(\overline{n})$, 非交差分割の全体を $\mathrm{NC}(\overline{n})$ と表そう. いま任意の $\nu \in P(\overline{n})$ に対し $\rho \cup \nu$ は $\{1, \overline{1}, \ldots, n, \overline{n}\}$ の分割となる. よって, とくに $\nu \in \mathrm{NC}(\overline{n})$ で $\rho \cup \nu \in \mathrm{NC}(1, \overline{1}, \ldots, n, \overline{n})$ となるもののうち最大のものをとる. これを $K(\rho) \in \mathrm{NC}(n)$ として定める.

この対応 $K\colon \mathrm{NC}(n) \longrightarrow \mathrm{NC}(n)$ を Kreweras complement と呼ぶ.

命題 2.4. [15, Exercise 9.23.] Kreweras complement について, 以下の性質が成り立つ:

1. $\gamma_n = (1, \ldots, n) \in \mathfrak{S}_n$ を巡回置換とする. このとき $\gamma_n\colon [n] \longrightarrow [n]$ より, 誘導される写像

$$\gamma_n^*\colon \mathrm{NC}(n) \longrightarrow \mathrm{NC}(n),$$

すなわち $\rho = \{V_1, \ldots, V_r\} \in \mathrm{NC}(n)$ に対し, $\gamma_n^*(\rho) = \{\gamma_n^{-1}(V_1), \ldots, \gamma_n^{-1}(V_r)\}$ が存在する. とくに Kreweras complement について $K^2(\rho) = \gamma_n^*(\rho)$ が成り立つ.

2. 1. より, K^{2n} は恒等写像に等しいので, とくに Kreweras complement K は全単射である.
3. Kreweras complement K は順序反転な同型写像, すなわち $\rho, \nu \in \mathrm{NC}(n)$, $\rho \leq \nu$ に対し, $K(\nu) \leq K(\rho)$ となる.
4. 任意の $\rho \in \mathrm{NC}(n)$ について

$$|\rho| + |K(\rho)| = n + 1 \tag{2.1}$$

が成り立つ.

これから $\mathrm{NC}(n)$ の Möbius 関数 μ_n と Kreweras complement の関わりをみよう．$\mathrm{NC}(n)$ の最小限 0_n と最大元 1_n を用いた μ_n の値 s_n を

$$s_n = \mu_n(0_n, 1_n), \quad n \geq 1$$

として定める．一般に次の命題が成り立つ:

命題 2.5. [15, Proposition 10.15.] $n \geq 1$ とする．このとき

$$s_n = (-1)^{n-1} C_{n-1}$$

が成り立つ．ここで, C_{n-1} は $(n-1)$ 番目の Catalan 数である．

命題 2.6. $(\rho, \nu) \in \mathrm{NC}(n)^{(2)}$ とするとき, 区間 $[\rho, \nu]$ は以下のような自然な分解を持つ:

$$[\rho, \nu] \cong \mathrm{NC}(1)^{t_1} \times \mathrm{NC}(2)^{t_2} \times \cdots \times \mathrm{NC}(n)^{t_n}.$$

したがって,

$$\mu_n(\rho, \nu) = {s_1}^{t_1} {s_2}^{t_2} \cdots {s_n}^{t_n}$$

が成り立つ．とくに $\rho = \{V_1, \ldots, V_k\} \in \mathrm{NC}(n)$ に対し, $\mu_n(\rho) = \mu_n(0_n, \rho)$ と表すことにすると

$$\mu_n(\rho) = \prod_{1 \leq i \leq k} (-1)^{|V_i|-1} C_{|V_i|-1} \tag{2.2}$$

となる．

これまでに説明してきた Möbius 関数 μ_n を用いて自由キュムラントを定めていこう．

定義 2.7. $\mathcal{A}$ を単位元 $1_{\mathcal{A}}$ を持つ $\mathbb{C}$-代数で $\varphi\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$-線型汎関数で $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ とする．このとき $(\mathcal{A}, \varphi)$ を代数的確率空間と呼ぶ.

定義 2.8. $(\mathcal{A}, \varphi)$ を代数的確率空間とする．

1. $\mathcal{A}^n = \mathcal{A} \times \cdots \times \mathcal{A}$ に上の n 重線型汎関数 φ_n を

   $$\varphi_n[a_1, \ldots, a_n] = \varphi(a_1 \cdots a_n),$$

   で定める．
2. 任意の $\rho = \{V_1, \ldots, V_l\} \in \mathrm{NC}(n)$ に対して φ_ρ を以下のように定める:

   $$\varphi_\rho[a_1, \ldots, a_n] = \prod_{1 \leq j \leq l} \varphi_{|V_j|}[a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}],$$

   ここで各 $1 \leq j \leq l$ に対し $V_j = \{i_1 < \cdots < i_p\}$ である．
3. 任意の $n \in \mathbb{N}$, $\rho \in \mathrm{NC}(n)$ に対し R_ρ を

   $$\mathrm{R}_\rho[a_1, \ldots, a_n] = \sum_{\nu \leq \rho} \varphi_\nu[a_1, \ldots, a_n] \mu(\nu, \rho),$$

   として定める．

Möbius 関数の性質と上の定義 2.8 から次の定理が従う.

命題 2.9. 任意の $n \in \mathbb{N}$, $\rho = \{V_1, \ldots, V_l\} \in \mathrm{NC}(n)$ に対し, 以下が成り立つ:

$$\varphi_\rho[a_1, \ldots, a_n] = \sum_{\nu \leq \rho} \mathrm{R}_\nu[a_1, \ldots, a_n], \tag{2.3}$$

$$\mathrm{R}_\rho[a_1, \ldots, a_n] = \sum_{\nu \leq \rho} \varphi_\nu[a_1, \ldots, a_n]\mu_n(\nu, \rho), \tag{2.4}$$

$$\mathrm{R}_\rho[a_1, \ldots, a_n] = \prod_{1 \leq j \leq l} \mathrm{R}_{|V_j|}[a_{i_1}, \ldots, a_{i_p}]. \tag{2.5}$$

ここで各 $1 \leq j \leq l$ に対し $V_j = \{i_1 < \cdots < i_p\}$ である. 上記の等式 (2.3) から (2.5) をまとめて自由確率論のモーメント・キュムラント公式と呼ぶ.

最後に非交差分割全体 $\mathrm{NC}(n)$ が対称群 $\mathfrak{S}_n$ 内の単位元 e から巡回置換 γ_n への測地線集合として埋め込まれることをみよう. まず, よく知られているように対称群 $\mathfrak{S}_n$ は互換によって生成される. σ の長さ $|\sigma|$ を σ の互換の積による最小実現数として定める.

$$|\sigma| = \min\{l \mid \sigma = \pi_1 \cdots \pi_l \text{ (ここで } \pi_j \text{ はすべて互換)}\}.$$

次に対称群 $\mathfrak{S}_n$ 上に距離を定める.

定義 2.10.

1. $\sigma, \pi \in \mathfrak{S}_n$ に対し, その距離 $d(\sigma, \pi)$ を $d(\sigma, \pi) = |\sigma^{-1}\pi|$ で定める.
2. 巡回置換 $\gamma_n = (1, \ldots, n) \in \mathfrak{S}_n$ に対し, 単位元 e から γ_n までの測地線集合 $\mathfrak{S}_{\mathrm{NC}}(\gamma_n)$ を

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_{\mathrm{NC}}(\gamma_n) &= \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid d(e, \sigma) + d(\sigma, \gamma_n) = d(e, \gamma_n)\} \\ &= \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid |\sigma| + |\sigma^{-1}\gamma_n| = n - 1\}\end{aligned}$$

   として定める.
3. $\sigma, \pi \in \mathfrak{S}_{\mathrm{NC}}(\gamma_n)$, すなわち σ と π はそれぞれ単位元 e から γ_n までの測地線上にあるとする. このとき, σ が π と同一の測地線上にあり, かつ π よりも e に近い, すなわち

$$d(e, \sigma) + d(\sigma, \pi) = d(e, \pi) \iff |\sigma| + |\sigma^{-1}\pi| = |\pi|$$

   が成り立つとき, $\sigma \leq \pi$ と表すことにする. これは $\mathfrak{S}_{\mathrm{NC}}(\gamma_n)$ における順序となる.

$[n]$ の分割全体 $\mathrm{P}(n)$ から対称群 $\mathfrak{S}_n$ への対応 $\mathcal{P}$ を次のようにして与える:

step1: $\rho = \{V_1, \ldots, V_l\} \in \mathrm{P}(n)$ とする. このとき ρ の各ブロック $V_j \in \rho$ $(1 \leq j \leq l)$ に対し $V = \{i_1, \ldots, i_p\}$ を単調増加になるように表示しよう.

step2: ρ の各ブロック V_j について巡回置換 $\pi_j = (i_1, \ldots, i_p)$ を対応させ, $\mathcal{P}(\rho)$ をその積として定める:

$$\mathcal{P}_\rho = \pi_1 \cdots \pi_l.$$

対応 $\mathcal{P}\colon \mathrm{P}(n) \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ を非交差分割 $\mathrm{NC}(n)$ 上に制限すると, 次の重要な定理が成り立つ:

定理 2.11. [15, Proposition 23.23.] 対応 $\mathcal{P}\colon \mathrm{P}(n) \longrightarrow \mathfrak{S}_n$ について $\mathrm{NC}(n)$ 上に制限したもの

$$\mathcal{P}\colon \mathrm{NC}(n) \longrightarrow \mathfrak{S}_{\mathrm{NC}}(\gamma_n)$$

は順序同型写像となる.

注意 2.12. この定理から以下のことが直ちに従う: $\mathrm{NC}(n)$ と $\mathfrak{S}_{\mathrm{NC}}(\gamma_n)$ は順序同型であるから, とくに Möbius 関数が一致している. よって同一の記号 μ_n によって表そう. いま $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathrm{NC}}(\gamma_n)$ のサイクル分解が $\sigma = \pi_1 \cdots \pi_l$ とすると, 命題 2.6 の式 (2.2) より

$$\mu_n(\sigma) = \prod_{1\leq j\leq l} (-1)^{|\pi_j|} C_{|\pi_j|} = (-1)^{|\sigma|} \prod_{1\leq j\leq l} C_{|\pi_j|}. \tag{2.6}$$

2.2 ユニタリ共役不変な行列と Haar ユニタリ行列

エルミート行列の固有値について以下の命題が成り立つことが知られている.

命題 2.13 (Cauchy interlacing theorem)**.** $N \times N$ エルミート行列 $A_N = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ の固有値が

$$\lambda_1(A_N) \leq \cdots \leq \lambda_N(A_N)$$

であるとする. このとき, A_N の主小行列 $\widetilde{A}_N = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq N-1}$ の固有値が

$$\lambda_1(\widetilde{A}_N) \leq \cdots \leq \lambda_{N-1}(\widetilde{A}_N)$$

であるとき, これらの固有値列は interlace する. すなわち

$$\lambda_i(A_N) \leq \lambda_i(\widetilde{A}_N) \leq \lambda_{i+1}(A_N)$$

が任意の $1 \leq i \leq N-1$ において成り立つ.

またユニタリ共役不変なランダムエルミート行列は Haar ユニタリ行列を用いて対角化できる.

命題 2.14. [3, Proposition 6.1.] A_N はユニタリ共役不変なランダムエルミート行列とする. このとき $A_N = {U_N}^* D_N U_N$ がほとんど確実に成り立つ. ここで

- U_N は Haar ユニタリ行列.
- D_N は A_N の固有値を大きさ順に並べ対角行列にしたもの.
- U_N と D_N は独立.

定義 2.15. $k \leq N$ を自然数, $U_N = (u_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ を Haar ユニタリ行列とする. 各 $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ について Weingarten 関数 $\mathrm{Wg}(\sigma, N)$ を次の式で定める:

$$\mathrm{Wg}(\sigma, N) = \mathbb{E}[u_{11}u_{22}\cdots u_{kk}\overline{u_{1\sigma(1)}u_{2\sigma(2)}\cdots u_{k\sigma(k)}}].$$

注意 2.16. Weingarten 関数が類関数であること, すなわち

$$\mathrm{Wg}(\pi^{-1}\sigma\pi, N) = \mathrm{Wg}(\sigma, N) \qquad \sigma, \pi \in \mathfrak{S}_k$$

は定義式から計算することで直ちにわかる.

Weingarten 関数について, 次の公式が成り立つ:

命題 2.17. [5, Proposition 2.3.] A_i, B_i $(i = 1, \dots, k)$ を $N \times N$ 行列とする. このとき, 任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ について

$$\begin{aligned}&\mathbb{E} \circ \mathrm{Tr}_\sigma[A_1 U_N B_1 U_N{}^*, \dots, A_k U_N B_k U_N{}^*] \\ &\quad = \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathfrak{S}_k \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma}} \mathrm{Tr}_{\sigma_1}[A_1, \dots, A_k] \, \mathrm{Tr}_{\sigma_2}[B_1, \dots, B_k] \, \mathrm{Wg}(\sigma_3, N)\end{aligned}$$

が成り立つ. とくに σ として $\gamma_k = (1, 2, \dots, k)$ を取れば,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E} \circ \mathrm{Tr}[(A_1 U_N B_1 U_N{}^*) \cdots (A_k U_N B_k U_N{}^*)] \\ &\quad = \sum_{\sigma, \pi \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{Tr}_\sigma[A_1, \dots, A_k] \, \mathrm{Tr}_\pi[B_1, \dots, B_k] \, \mathrm{Wg}(\pi^{-1}\sigma^{-1}\gamma_k, N)\end{aligned}$$

となる.

注意 2.18. $\mathrm{Tr}_\sigma[A_1, \dots, A_k]$ は定義 2.8 における φ_ρ の定め方と同様, サイクル分解 $\sigma = \pi_1 \cdots \pi_l \in \mathfrak{S}_k$ に対して

$$\mathrm{Tr}_\sigma[A_1, \dots, A_k] = \prod_{1 \le j \le l} \mathrm{Tr}[A_{i_1}, \dots, A_{i_p}],$$

と定めている. ここで各 $1 \le j \le l$ に対し $\pi_j = (i_1, \cdots, i_p)$ である.

とくに Weingarten 関数は以下のような漸近展開を持つことが知られている:

定理 2.19. [4, Theorem 2.7.] $k \le N$ を自然数, $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ とする. このとき

$$N^{k+|\sigma|} \, \mathrm{Wg}(\sigma, N) = \mu_k(\sigma) + O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

ここで, $\mu_k(\sigma)$ とは σ の巡回置換分解が $\sigma = \pi_1 \cdots \pi_l$ であったとき

$$\mu_k(\sigma) = \prod_{1 \le j \le l} (-1)^{|\pi_j|} C_{|\pi_j|}$$

として定まる値である.

注意 2.20. これは式 (2.6) における $\mu_k(\sigma)$ と完全に一致しているため, 同一の記号を用いている.

2.3 Markov–Krein 対応

この節では有限離散の場合における Markov–Krein 対応を説明する. すなわち interlace する数列と対応する折れ線図形, そして Rayleigh 測度と Kerov 推移測度という二つの測度の対応である. 参考文献は主に [8],[10], [11],[12] である.

定義 2.21. 二つの実数列 $\{x_i\}_{i=1}^N$, $\{y_j\}_{j=1}^{N-1}$ が

$$x_1 \le y_1 \le x_2 \le y_2 \le \cdots \le y_{N-1} \le x_N$$

となるとき interlace しているという.

Interlace する数列の組 $\{x_i\}_{i=1}^N$, $\{y_j\}_{j=1}^{N-1}$ に対しそれぞれ $\{x_i\}_{i=1}^N$ を極小値に，$\{y_j\}_{j=1}^{N-1}$ を極大値に持つ傾き ± 1 の連続関数 ω が対応する．いま折れ線図形の全体を $\mathcal{D}_0$ として表す.

折れ線図形 ω と intelace する数列 $\{x_i\}_{i=1}^N$, $\{y_j\}_{j=1}^{N-1}$ の間には一対一の対応があり, また

$$\frac{1}{2}\omega''(t)dt = \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i}(t)dt - \sum_{j=1}^{N-1} \delta_{y_j}(t)dt$$

という関係がある.

ここで右辺に現れている実測度を τ と書き, $\{x_i\}_{i=1}^N$, $\{y_j\}_{j=1}^{N-1}$ から定まる Rayleigh 測度と呼ぶ. すなわち

$$\tau = \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i} - \sum_{j=1}^{N-1} \delta_{y_j}.$$

Interlace する数列 $\{x_i\}_{i=1}^N$, $\{y_j\}_{j=1}^{N-1}$ と, 折れ線図形 ω, Rayleigh 測度 τ の間にはそれぞれ一対一の対応がある．したがって, これらを以後同一のものとみなす.

次に interlace する数列 $\omega = (\{x_i\}_{i=1}^N, \{y_j\}_{j=1}^{N-1})$ に対して有理関数

$$\frac{(z-y_1)\cdots(z-y_{N-1})}{(z-x_1)\cdots(z-x_N)}, \quad z \in \mathbb{C}$$

を定め, その部分分数分解を

$$\frac{(z-y_1)\cdots(z-y_{N-1})}{(z-x_1)\cdots(z-x_N)} = \frac{u_1}{z-x_1} + \cdots + \frac{u_N}{z-x_N}, \quad z \in \mathbb{C} \tag{2.7}$$

としよう．このとき留数 $\{u_i\}_{i=1}^N$ について次の性質が成り立つ.

$$u_i > 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} u_i = 1.$$

この $\{u_i\}_{i=1}^N$ を用いて有限集合 $\{x_i\}_{i=1}^N$ を台に持つ確率測度 $\mathfrak{m}_\omega$ を定める:

$$\mathfrak{m}_\omega = \sum_{i=1}^{N} u_i \delta_{x_i}.$$

これを ω から定まる Kerov 推移測度と呼ぶ.

有限集合を台に持つ確率測度の全体を $\mathcal{M}_0$ とすると, 上記の対応 $\omega \longrightarrow \mathfrak{m}_\omega$ は $\mathcal{D}_0$ から $\mathcal{M}_0$ への全単射対応となっている．これを有限離散の場合における Markov–Krein 対応と呼ぼう.

とくにモーメントについて注目すべき性質があることに注意したい．いま, $\mathfrak{m} = \sum_{i=1}^N u_i \delta_{x_i}$ と $\tau = \sum_{i=1}^N \delta_{x_i} - \sum_{j=1}^{N-1} \delta_{y_j}$ が Markov–Krein 対応によって結ばれているとする．このとき有理関数の等式 (2.7) が成り立っている．これを exp や log, そしてその級数展開を用いて式変形することにより, 母関数の関係式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{M}_n(\mathfrak{m})}{z^n} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{M}_k(\tau)}{k} \frac{1}{z^k}\right), \qquad |z| \gg 1 \tag{2.8}$$

が成り立つことがわかる．したがって, $\mathfrak{m}$ と τ のそれぞれのモーメント $\{\mathrm{M}_n(\mathfrak{m})\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $\{\mathrm{M}_k(\tau)\}_{k\in\mathbb{N}}$ の関係は完全対称関数とべき和対称関数の間の関係と同一である.

なおここで述べた結果は連続に拡張することができる ([11]).

3　詳しい問題設定と主結果

ユニタリ共役不変なランダム行列 A_N の固有値分布を $\Lambda_N = (\lambda_1^{(N)} \leq \cdots \leq \lambda_N^{(N)})$，経験固有値分布を $\mathfrak{m}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i^{(N)}}$ とおく．いま $N \to \infty$ において $\mathfrak{m}_N$ がある確率測度 $\mathfrak{m}$ にモーメント確率収束し, k 次モーメントもそれぞれ期待値が有界であるという仮定する．すなわち

$$\sup_{N\geq 1} \mathbb{E}[\mathrm{M}_k(\mathfrak{m}_N)] < \infty \quad \text{and} \quad \mathrm{M}_k(\mathfrak{m}) < \infty, \qquad k \in 2\mathbb{N}$$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}[|\mathrm{M}_k(\mathfrak{m}_N) - \mathrm{M}_k(\mathfrak{m})| \geq \epsilon] = 0, \qquad k \in \mathbb{N},\ \epsilon > 0.$$

いま Markov–Krein 対応によって $\mathfrak{m}$（resp.$\mathfrak{m}_N$）には τ（resp.τ_N）がその Rayleigh 測度として対応しているとしよう．とくにここで $\tau_N = \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i^{(N)}} - \sum_{j=1}^N \delta_{\eta_j^{(N)}}$ であり, 各 $H_N = (\eta_1^{(N)} \leq \cdots \leq \eta_{N-1}^{(N)})$ は Λ_N に対し interlace している:

$$\lambda_1^{(N)} \leq \eta_1^{(N)} \leq \lambda_2^{(N)} \leq \eta_2^{(N)} \leq \cdots \leq \lambda_{N-1}^{(N)} \leq \eta_{N-1}^{(N)} \leq \lambda_N^{(N)}.$$

またそれぞれモーメント $\{\mathrm{M}_n(\mathfrak{m})\}_{n\in\mathbb{N}}$（resp.$\{\mathrm{M}_n(\mathfrak{m}_N)\}_{n\in\mathbb{N}}$）と $\{\mathrm{M}_k(\tau_N)\}_{k\in\mathbb{N}}$（resp.$\{\mathrm{M}_k(\tau)\}_{k\in\mathbb{N}}$）の間には完全対称関数とべき和対称関数の対応があることから $\mathfrak{m}_N$ が $\mathfrak{m}$ にモーメント確率収束することと, τ_N が τ にモーメント確率収束することは同値である．

一方, A_N はエルミート行列であるから命題 2.13(Cauchy interlacing theorem) より, その主小行列 $\widetilde{A}_N$ の固有値分布 $\widetilde{H}_N = (\tilde{\eta}_1^{(N)} \leq \cdots \leq \tilde{\eta}_{N-1}^{(N)})$ も同様に Λ_N に対し interelace している:

$$\lambda_1^{(N)} \leq \tilde{\eta}_1^{(N)} \leq \lambda_2^{(N)} \leq \tilde{\eta}_2^{(N)} \leq \cdots \leq \lambda_{N-1}^{(N)} \leq \tilde{\eta}_{N-1}^{(N)} \leq \lambda_N^{(N)}.$$

この interlace している固有値分布 $\Lambda_N, \widetilde{H}_N$ を用いて Rayleigh 測度 $\tilde{\tau}_N = \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i^{(N)}} - \sum_{j=1}^{N-1} \delta_{\tilde{\eta}_j^{(N)}}$ を定める．

このとき, 以下の結果が成り立つ:

定理 3.1. *$\tilde{\tau}_N$ は τ にモーメント確率収束する．*

証明の鍵は節 2.2 で紹介した命題 2.17 である．とくに $\mathrm{M}_k(\tau_N)$ を公式を用いて展開し，自由確率論的な式変形を使いながら計算を進めていくと, 次の定理が示唆される．

定理 3.2. *$\mathfrak{m}$ を確率測度, τ をその Rayleigh 測度とする．このとき*

$$\mathrm{M}_k(\tau) = \sum_{\rho\in \mathrm{NC}(k)} (k+1-|\rho|)\,\mathrm{R}_\rho(\mathfrak{m}) \tag{3.1}$$

が成り立つ．ここで, $\mathrm{NC}(k)$ は $\{1,\ldots,k\}$ の非交差分割で $\mathrm{R}_\rho(\mathfrak{m})$ は, $\mathfrak{m}$ の自由キュムラントである．

この等式は M.Lassalle が 2009 年に得ていた公式を非交差分割を用いて書き直すことによって得られる ([14])．論文 ([6]) の中では非交差分割の組み合わせ的構造に注目した別証明を与えた．

参考文献

[1] A. Bufetov, "*Kerov's interlacing sequences and random matrices*", Journal of Mathematical Physics, Volume 54, 2013.

[2] P. Biane, "*Representations of symmetric groups and free probability*", Advances in Mathematics, Volume 138, 126-181, 1998.

[3] B. Collins, and C. Male, "*The strong asymptotic freeness of Haar and deterministic matrices*", Annales scientifiques de l'École normale supérieure, Volume 47, 147-163, 2014.

[4] B. Collins, and S. Matsumoto, "*Weingarten calculus via orthogonality relations: new applications*", Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics. Volume 14, 631-656, 2017.

[5] B. Collins, and P. Śniady, "*Integration with respect to the Haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group*", Communications in Mathematical Physics, Volume 264, 773-795, 2006.

[6] K. Fujie and T. Hasebe, The spectra of principal submatrices in rotationally invariant hermitian random matrices and the Markov–Krein correspondence, Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics, to appear. arXiv:2103.09025

[7] G. Goel and A. Yao, "*A quantized analogue of the Markov–Krein correspondence*", arXiv preprint arXiv:2011.10724, 2020

[8] 洞彰人, "対称群の表現とヤング図形集団の解析学", 数学書房, 2017.

[9] S. Kerov, "*Asymptotics of the separation of roots of orthogonal polynomials*", St. Petersburg Mathematical Journal, Volume 5, 925-941, 1994.

[10] S. Kerov, "*Transition probabilities for continual Young diagrams and the Markov moment problem*", Functional Analysis and its Applications, Volume 27, 104-117, 1993.

[11] S. Kerov, "*Interlacing measures*", American Mathematical Society Translations, 35-84, 1998.

[12] S. Kerov, "*Asymptotic representation theory of the symmetric group and its applications in analysis*", Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 2003.

[13] 木村太郎, "ランダム行列の数理", 森北出版, 2021.

[14] M. Lassalle, "*Jack polynomials and free cumulants*", Advances in Mathematics, Volume 222, 2227–2269, 2009.

[15] A. Nica and R. Speicher, "*Lectures on the combinatorics of free probability*", Cambridge University Press, 2006.

[16] D. Voiculescu, K. Dykema and A. Nica, "*Free Random Variables*", American Mathematical Society, 1992.

フラクタル上の Ahlfors 正則共形次元とスペクトル次元の関係について

笹谷 晃平 (Kôhei Sasaya)*

概要

距離空間上の確率過程に関して, そのスペクトル次元, d_S とは確率過程の漸近挙動を表す確率論的 (あるいは, 対応する Dirichlet 形式の観点から言えば解析的) な次元量である. 一方距離空間の Ahlfors 正則共形次元, $\dim_{\mathrm{AR}}$ (Ahlfors regular conformal dimension) とは, 距離空間に擬対称性 (quasisymmetry) と呼ばれる, 同相より強い関係を通して定義される, ある種の幾何的複雑さを測る次元量である. 本研究では, Sierpiński gasket や一般化された Sierpiński carpet の Ahlfors 正則共形次元とその上のブラウン運動に対して示された $\dim_{\mathrm{AR}} \leq d_S \leq 2$ という不等式を, より一般のフラクタル上の確率過程のうち抵抗形式という枠組みを通して構成されるもの対して拡張する.

1 導入-スペクトル次元と Ahlfors 正則共形次元

一般に次元とは対象の複雑さを測る量であると考えられるが, その定義の方法には代数的なもの, 幾何的なものなどさまざまなものが考えられる. 例えば 1 番基本的な $\mathbb{R}^n$ の場合では, 簡単なものでもベクトル空間としての次元という代数的定義や, $\mathbb{R}$ の n 重直積位相を通した幾何的な定義等を考えることができる.
より一般の距離空間, たとえば Sierpiński gasket ($(f_i(i=0,1,2)$ を $\mathbb{R}^2$ 上 $(\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3})$ 中心の $1/2$ 倍縮小写像とするとき, $K = \bigcup_{i=0,1,2} f_i(K)$ を満たす (unique な) 非空コンパクト集合, 以下 SG)) などのフラクタル図形 (図 1, 2, 3 も見よ) にも定義できる幾何的な次元量として, Hausdorff 次元が挙げられる.

$$\mathcal{H}_\alpha(X,d) := \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{diam}(\mathcal{O}_n,d)^\alpha \mid \{\mathcal{O}_n\}_{n=1}^{\infty} : (X,d) \text{ の可算開被覆 } \} \quad (\alpha > 0)$$

を距離空間 (X,d) の α-Hausdorff 測度, $\dim_{\mathrm{H}}(X,d) = \inf\{\alpha > 0 \mid \mathcal{H}_\alpha(X,d) = 0\}$ を (X,d) の Hausdorff 次元と呼ぶ. この量は $\mathbb{R}^n$ や, 自己相似集合と言われるフラクタルの場合, 相似次元と呼ばれるものと一致し, $\dim_{\mathrm{H}}(\mathbb{R}^n, d_n) = n, \dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{SG}, d_2) = \log 3/\log 2$ (ただし, d_n はユークリッド距離およびその制限) となる. 一方で空間 X 上に確率過程 B_t 及び測度 μ が定まっていて, B_t が μ に関する遷移密度 $p(t,x,y)$ をもつ, 即ち

$$\text{任意の非負可測関数 } u \text{ に対し, } \quad E_x(u(B_t)) = \int_X p(t,x,y)u(y)\mu(dy)$$

なる時, その確率過程のスペクトル次元と呼ばれる, 確率過程の漸近挙動を表す量を考えることができる. 極限

$$d_s(B_t,\mu) := \lim_{t\downarrow 0}(-2\log p(t,x,x)/\log t)$$

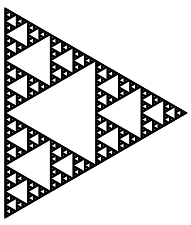


図 1: Sierpiński gasket

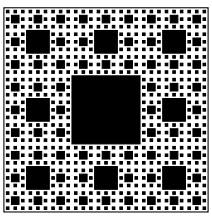


図 2: Sierpiński carpet

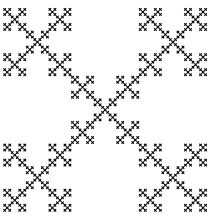


図 3: Vicsek set

* 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻 数理解析系 博士後期課程 2 年, 日本学術振興会特別研究員 (DC1).
本研究は JSPS 科研費 (JP20J23120) の助成を受けている.

が $x \in X$ によらず定まるとき, (B_t, μ) のスペクトル次元と呼ぶ. 例えば B_t が $\mathbb{R}^n$ 上の Brown 運動 ($\mathbb{Z}^n/2^k$ 格子上のランダム・ウォークの, 拡散速度を考慮して補正した極限として現れる, $\mathbb{R}^n$ 上の最も基本的な確率過程), μ を n 次元 Lebesgue 測度とするとき, ガウス核と呼ばれる遷移密度 $p(t,x,y) = (2\pi t)^{-n/2}\exp(-|x-y|^2/2t)$ が存在し, $d_S(B_t, \mu) = n$ となって空間の次元と一致する. 一方で, このような関係はフラクタルのような距離空間の場合には一般には成り立たない. 実際, SG 上にも Brown 運動及び最も標準的な測度 ($\log 3/\log 2$-Hausdorff 測度) を定義することができるが, そのとき $d_S(B_t, \mu) = \log 9/\log 5$ となり, 空間の Hausdorff 次元とは一致しない.

本講演では, 距離空間上の確率過程のスペクトル次元 (厳密には, その変種) が, どのような時に距離空間の次元と比較できるかを考察することになる. ここでまず問題となるのは, フラクタルなどの複雑な空間では, 空間の次元自体も定義によって値が異なるということである. [*1] 事実, 上記の例において "距離空間のスペクトル次元" をその空間の上のブラウン運動及び標準測度に対するスペクトル次元として定めれば, その値は Hausdorff 次元と異なることになる. 本講演では, 空間の次元としては擬対称性と呼ばれる距離の同値関係で定義される, Ahlfors 正則共形次元 (Ahlfors regular conformal dimension, 以下 ARC 次元) を用いる,

定義 1 (擬対称 (quasisymmetry))**.** d, ρ を集合 X 上の距離関数とする, この時 d が ρ に対し擬対称 (quasisymmetric) であるということを, ある同相写像 $\theta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ があって, $x \neq z$ なる任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(\rho(x,y)/\rho(x,z)) \leq \theta(d(x,y)/d(x,z))$ ことで定め, $d \underset{\mathrm{QS}}{\sim} \rho$ と書く.

定義 2 (α-Ahlfors 正則)**.** (X,d) を距離空間とし, $\alpha > 0$ とする. ある Borel 測度 μ と $C > 0$ があって, 任意の $x \in X$ 及び $r \in [\inf_{y\neq x} d(x,y), \mathrm{diam}(X,d)]$ に対し, $C^{-1}r^\alpha \leq \mu(B_d(x,r)) \leq Cr^\alpha$ なるとき, (X,d) は α-Ahlfors 正則 (以下, α-AR) であると呼ぶ.

定義 3 (Ahlfors 正則共形次元)**.** 距離空間 (X,d) に対し, その ARC 次元を以下の式で定める. (但し, $\inf\emptyset = \infty$ とおく).

$$\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) := \inf\{\alpha \mid \text{ある } X \text{ 上の距離 } \rho \text{ で, } d \underset{\mathrm{QS}}{\sim} \rho \text{ かつ } \rho : \alpha\text{-AR なるものが存在 }\}$$

これらの定義について補足しておく. まず擬対称性であるが, この定義は直接的には 2 つの距離で測った任意の 3 点間の距離の比が, θ という歪みの関数を通してラフに保たれると言うことを記述している. また擬対称性は, 円環領域が一様に比較できる距離のペアであるとも特徴づけられる. (半径の値は比較できないが, 半径の比を固定した円環領域どうしが比較可能となる.) これらの考察からも予想されることであるが, $d \underset{\mathrm{QS}}{\sim} \rho$ なら d と ρ は X 上に同じ位相を導き, $\underset{\mathrm{QS}}{\sim}$ は X 上の距離の同値関係となる.

距離空間 (X,d) が孤立点を持たない場合, α-AR であれば $\dim_{\mathrm{H}}(X,d) = \alpha$ であり, α-AR の定義に表れる測度は Hausdorff 測度と定数倍で比較可能である. 即ち ARC 次元とは, 擬対称の範囲で距離を取り替えて, 概ね Hausdorff 次元の意味で距離空間をどれだけ簡単にできるかということを見ている量である. 具体的な値としては, $\dim_{\mathrm{AR}}(\mathbb{R}^n, d_n) = n$ や $\dim_{\mathrm{AR}}(SG, d_2) = 1$ であることが確かめられる. ARC 次元は, [6] ではじめてその形が現れ, [5] で名づけられた上で, 双曲群における有名な予想である Cannon 予想と結び付けられた. さらに [7, 20] では, 空間の距離球から定まる鎖 (曲線に相当) に対して定まるある種の係数 (modulus) によって特徴づけられることが示された. 特に, [20] ではその結果の系として, 以下に述べる通り ARC 次元とブラウン運動のスペクトル次元に関する不等式が示された.

[*1] $\mathbb{R}^n$ の次元は n になるように定義されることが多い

定理 4 ([20], Section 4.7)**.** (X,d) を *SG,* 或いは *Sierpiński Carpet(*以下 *SC)* やその一般化 *(*以下 *GSC)* とし, μ を標準的な自己相似測度, B_t を (X,d) 上の *Brown* 運動とする. このとき $\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) \leq d_S(B_t,\mu) < 2$ または $\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) \geq d_S(B_t,\mu) \geq 2$ が成り立つ.

ここで, SC とは基本的な $\mathbb{R}^2$ の自己相似フラクタルの 1 つで,

$$p_1=(-1,1)\ p_2=(0,-1)\ p_3=(1,-1)\ p_4=(1,0)\ p_5=(1,1)\ p_6=(0,1)\ p_7=(-1,1)\ p_8=(-1,0) \quad (1)$$

とし, φ_j $(j=1,...,8)$ で p_j を中心とする 1/3 倍の縮小写像とする時, $\cup_{j=1}^{8}\varphi_j(K)=K$ を満たす唯一の空でないコンパクト集合として特徴づけられる図形である (図 2). 正方形を 3×3 に分割して中心だけをくり抜くという動作を繰り返して残る図形とも考えられるが, この分割の個数やくり抜き方及び元の空間の次元を, 図形の対称性に注目しながら一般化したのが GSC である. (詳細な定義は [2] を参照のこと.)
1 番標準的な SC も含め, GSC の ARC 次元や Brown 運動のスペクトル次元の具体的な値はわかっていないため, 定理 4 は単に空間の幾何的な次元とスペクトル次元という確率論的 (あるいは, 解析的) な次元を結びつけるという標語的な意味合いだけでなく, 実際の値の評価においても意味のあるものである. 本講演の主結果では, この定理を抵抗形式と呼ばれる, より一般のフラクタル上の確率過程を記述する枠組みに拡張する.

2 Dirichlet 形式と抵抗形式

一般に, 距離空間上に意味のある連続時間の確率過程を構成できるかという問題は自明なものではない. 特にフラクタルのように, 空間に滑らかさがないような場合には困難が伴う. 本節で紹介する Dirichlet 形式のアイデアは, 空間 X 上の Markov 過程 B_t の遷移関数 $p_t(x,A):=\mathbb{P}_x(B_t\in A)$ が, Chapman-Kolmogorov の等式 $p_{s+t}(x,A)=\int_X p_t(y,B)p_s(x,dy)$ を満たすことにより, X 上の関数に対する作用素

$$T_t(f)(x):=\int_X f(y)p_t(x,dy) \quad (t>0)$$

が半群の構造を持つ[*2]ことを利用する. 作用素の半群については関数解析の一般論でよく研究されているので, 取り扱いやすい. 実際には, 構成および取り扱いをより容易にするため, あるクラスで作用素の半群と 1 対 1 対応している [*3]対称 2 次形式を用いる.

定義 5 (Dirichlet 形式)**.** (X,μ) を測度空間とする. $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が $L^2(X:\mu)$ 上の Dirichlet 形式であるとは, 稠密に定義された非負閉対称 2 次形式で Markov 性を満たすもの, 即ち $L^2(X:\mu)$ の稠密な部分空間 $\mathcal{F}$ と関数 $\mathcal{E}:\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ で以下の条件 $(\mathcal{E}1)$~$(\mathcal{E}3)$ を満たすものである.

- 任意の $\alpha\in\mathbb{R}$, $u,v,w\in\mathcal{F}$ につき,
  $\mathcal{E}(u,v)=\mathcal{E}(v,u),\ \mathcal{E}(u,w)+\mathcal{E}(v,w)=\mathcal{E}(u+v,w),\ \mathcal{E}(\alpha u,v)=\alpha\mathcal{E}(u,w),\ \mathcal{E}(u,u)\geq 0$ $(\mathcal{E}1)$
- (閉) $\mathcal{E}_1(u,v):=\mathcal{E}(u,v)+\int_X uvd\mu$とおくとき, $\mathcal{E}_1(u_n-u_m,u_n-u_m)\to 0$ $(u_n\in\mathcal{F},\ n,m\to\infty)$ ならば, ある $u\in\mathcal{F}$ があって $\mathcal{E}_1(u_n-u,u_n-u)\to 0$ $(n\to\infty)$ $(\mathcal{E}2)$
- (Markov 性) $\bar{u}:=\max\{0,\min\{1,u\}\}$ とおくとき, 任意の $u\in\mathcal{F}$ に対し$\bar{u}\in\mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(\bar{u},\bar{u})\leq\mathcal{E}(u,u)$ $(\mathcal{E}3)$

[*2] 可測性, 可積分性, 作用素の定義域などは適切に定まっているとする
[*3] 厳密には, 実 Hilbert 空間上の有界対称線形作用素からなる強連続縮小半群と, 定義域が稠密な非負閉対称 2 次形式が対応する ([12, Section 1.3]).

定義 6 (正則性, 容量)**.** (X,d) を局所コンパクトな可分距離空間, μ を X 全体を台に持つ Radon 測度, $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ を $L^2(X:\mu)$ 上の Dirichlet 形式とする.

(1) (X,d) 上のコンパクト台実連続関数全体の集合 $C_0(X,d)$ に対し, $C_0(X,d)\cap\mathcal{D}$ が $\mathcal{E}_1$ ノルムで $\mathcal{D}$ 上稠密かつ一様ノルムで $C_0(X,d)$ 上稠密であるとき, $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ は正則であるという.

(2) 集合 $A\subset X$ の容量 $\mathrm{Cap}(A)$ を以下の式で定める. (但し,$\inf\emptyset=\infty$)

$$\mathrm{Cap}(A)=\inf_{B:\text{ 開集合},A\subset B}\inf\{\mathcal{E}(u,u)\mid u\in\mathcal{D},\ B\text{ 上 }\mu\text{-a.e. で }u=1\}$$

定理 7. (X,d) を局所コンパクトな可分距離空間*,* μ を X 全体を台に持つ *Radon* 測度*,* $y(\mathcal{E},\mathcal{D})$ を $L^2(X:\mu)$ 上の正則 *Dirichlet* 形式とする. このとき (X,d) 上の*, Hunt* 過程[*4]と呼ばれる連続時間パラメータの確率過程がある容量 *0* の集合を除いて一意的に定まる

Dirichlet 形式の一般論については [12, 8, 24] などが標準的なテキストである. 現在では, フラクタル上の確率過程は Dirichlet 形式を通して定義するのが一般的である[*5] 特に有限分岐と呼ばれる自己相似フラクタル (全体と相似な小部分どうしが高々有限点で交わるようなもの, SG や Vicsek set が典型例, SC が典型的な反例) のクラスにおいては取り扱いが容易であり, 有限部分集合上の Dirichlet 形式の列の, スケールを補正した極限として (X,d) 上の Dirichlet 形式を導く一般論が存在する ([18]). 抵抗形式の理論は, このような有限分岐フラクタル上の Dirichlet 形式の理論を一般化したもので, 有限分岐的であるが自己相似でないものや, また有限分岐的ではないが GSC のうち強再帰的なものについてはこの枠組みで扱うことができる.

定義 8 (抵抗形式, 抵抗距離)**.** 集合 X 上の抵抗形式とは, X 上の実関数の線形部分空間 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{F}$ 上の Markov 性を持つ非負対称 2 次形式, 即ち関数 $\mathcal{E}:\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ で $(\mathcal{E}1)$ と $(\mathcal{E}3)$ を満たすものの組で, さらに加えて以下の条件 (R1)∼(R3) をみたすものをいう.

- $\mathcal{F}$ は定数関数を含み, $u\in\mathcal{F}$ が定数関数であることと $\mathcal{E}(u,u)=0$ は同値 (R1)
- $\mathcal{F}$ の同値関係 $\sim$ を差が定数関数であることで定めると, $(\mathcal{F}/\sim,\mathcal{E})$ は Hilbert 空間となる (R2)
- $x,y\in X,\ x\neq y$ なら $\mathcal{F}_{xy}:=\{u\in\mathcal{F}\mid u(x)=1,\ u(y)=0\}\neq\emptyset$ かつ $R(x,y):=\sup_{u\in\mathcal{F}_{xy}}(\mathcal{E}(u,u))^{-1}<\infty$ (R3)

$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が抵抗形式のとき, 条件 (R3) における $R(x,y)$ の sup は max となり, $(R(x,x)=0$ とおけば$)$ X 上の距離関数となる. この距離のことを抵抗形式に付随する抵抗距離と呼ぶ.

抵抗形式の 1 つの利点は, そのものの定義には他の測度や距離を必要としないところにある. 特に, 対応する距離が定義だけから与えられるので, 距離や位相の議論を他の距離に依存せずに行うことができる. 抵抗形式の理論の基本的な内容は [18, 19] にまとめられているが, 特に以下の結果によって抵抗形式から良い性質を持つ Dirichlet 形式と対応する確率過程を導くことができる.

定理 9 ([19], Theorem 10.4)**.** $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は集合 X 上の抵抗形式で*,* 抵抗形式 R について距離空間 (X,R) が可分*,* 完備*,* 局所コンパクトであり, さらに $C_0(X,R)\cap\mathcal{F}$ が一様ノルムで $C_0(X,R)$ 上稠密であると仮定する. このとき (X,R) 上の *Borel* 測度 μ で*,* 任意の $x\in X,\ r>0$ に対し $0<\mu(B_R(x,r))<\infty$ を満たすようなも

[*4] 大まかに言えば, 標本路が右連続かつ左極限をもつ強 Markov 過程

[*5] 歴史的経緯としては, 初期の研究では SG 上にランダムウォークのある種の極限として直接ブラウン運動を構成している [4, 13, 17].

のに対し, $\mathcal{D}$ で $C_0(X,R)\cap\mathcal{F}$ の $\mathcal{E}_1$ ノルム (($\mathcal{E}2$) と同様に定義) による閉包を表せば, $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ は $L^2(X,\mu)$ 上の正則 *Dirichlet* 形式となる. さらにこのとき, 対応する *Hunt* 過程は X 全体で一意に定義され, μ に対する遷移密度 $p_\mu(t,x,y):(0,\infty)\times X\times X\to\mathbb{R}$ が存在する.

3 主結果

さて, 以上の定義により本研究の主結果を述べることができる.

定理 10. (X,d) を $\dim_{\mathrm{AR}}(X,d)<\infty$ を満たす孤立点を持たない完備距離空間とし, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ を X 上の抵抗形式で, 抵抗距離 R が $R\underset{\mathrm{QS}}{\sim}d$ をみたすものとする. このとき, $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は定理 *9* の仮定を満たし, さらに

$$\mathcal{M}:=\{\mu:(X,d)\text{ 上の }Borel\text{ 測度で, ある }\eta>1\text{ があって}\\ \text{任意の }x\in X,\ r>0\text{ につき }0<\mu(B_d(x,2r))\le\eta\mu(B_d(x,r))<\infty\}$$

とおくとき, 任意の $\mu\in\mathcal{M}$ に対し, 遷移密度 $p_\mu(t,x,y)$ に関する極限

$$\overline{d_S}(\mathcal{E},\mu):=\lim_{\alpha\to\infty}\sup_{\substack{t\in(0,\mathrm{diam}(X,d)),\\ x\in X}}\frac{\log p_\mu(t/\alpha,x,x)-\log p_\mu(t,x,x)}{\log\alpha}$$

が存在し, 不等式 $\dim_{\mathrm{AR}}(X,d)\le\overline{d_S}(\mathcal{E},\mu)<2$ が成り立つ.

Remark. (X,d) に関する条件 $\dim_{\mathrm{AR}}(X,d)<\infty$ はより直感的な幾何的条件で表すこともできる. 定理 17 を参照のこと.

特に,(X,d) が SG や一般化された SC のうち強再帰的なものであり, μ を標準 Hausdorff 測度, $(\mathcal{E},\mathcal{D})$ を $L^2(X,\mu)$ 上の標準的な Dirichlet 形式[*6](つまり, (X,d) 上のブラウン運動に対応する Dirichelte 形式) とするとき,

$$\overline{d_S(\mathcal{E},\mu)}=d_S(\mathcal{E},\mu):=\lim_{t\downarrow0}(-2\log p_\mu(t,x,x)/\log t).$$

が成り立つ. 即ちこの定理は, 定理 4 の拡張であるといえる. 一方注意すべきこととして, 一般の (X,d) 及び $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ では, 極限 $d_S(\mathcal{E},\mu)$ が x の選び方によらず存在したとしても, $\overline{d_S(\mathcal{E},\mu)}>d_S(\mathcal{E},\mu)$ **となるどころか, 不等式** $\dim_{\mathrm{AR}}(X,d)\le d_S(\mathcal{E},\mu)\le2$ **の反例となる場合が存在する**.

定理 11 ([22], Theorem 1.5 の連続版)**.** 定理 *10* の仮定を満たすような $(X,d),(\mathcal{E},\mathcal{F})$ および $\mu\in\mathcal{M}$ で,

$$d_S(\mathcal{E},\mu)=\log25/\log15<\dim_{\mathrm{AR}}(X,d)=\dim_{\mathrm{AR}}(SC,d_2)<2$$

なるものが存在する. ただし SC は *2* 次元標準 *SC,* d_2 はユークリッド距離の制限.

反例となる (X,d) の構成法についてだけ簡単に述べておく. $\varphi_j(1\le j\le8)$ を SC の定義 (1) で用いたものと同じものとし, また φ_0 を原点を中心とする 1/3 倍の縮小写像をとる. $\Phi_0=\cup_{j\in\{0,1,3,5,7\}}\varphi_j$, $\Phi_1=\cup_{j=1}^8\varphi_j$ とおき, $f:\mathbb{N}\to\{0,1\}$ に対し $X_m(f)$ 及び $X(f)$ を, 帰納的に

$$X_0(f)=\{(x,y)\mid\max\{x,y\}\le1\},\quad X_m(f)=\Phi_{f(1)}\circ\cdots\circ\Phi_{f(m)}(X_0(f)),\quad X(f)=\cap_{m\ge0}X_m(f)$$

[*6] SC の場合, 標準的な (≒ 自己相似性などの良い性質を持つ)Dirichlet 形式が一意に定まるかと言うのは naive な問題で, 解決には長い時間を要した ([3]).

とおく．即ち $f \equiv 1$ のとき $X(f)$ は SC に，$f \equiv 0$ のときは Vicsek set になる．さてここで $f_* = \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{(k(k^2-1),k^3]}$ とおくとき，$X(f_*)$ にユークリッド距離の制限を入れたものが求める (X,d) となる．抵抗形式の構成及び評価の詳細は省くが，おおむね $\lim_{m\to\infty}(\sum_{k=1}^{m} f_*(k))/m = 0$ であることにより $d_S(\mathcal{E},\mu)$ の値は Vicsek set と同じものになる一方で，$\max_{j\in\mathbb{N}}(\sum_{k=j+1}^{j+m} f_*(k))/m = 1$ が任意の m で成り立つことにより $\dim_{\mathrm{AR}}(X,d)$ の値は SC と同じものになる．

4 Basic framework を満たす partition

以下の節では，主定理の証明の概略を示すものとする．本節では，主定理及び先行研究 [20] で中心的な役割を果たす “basic framework を満たす partition” について述べる．これはおおまかに言えば距離空間の離散近似の 1 種であり，距離空間をほぼ同じ大きさの性質のよいセルに段階的に分割し，その分割の親子構造及びセルの隣接構造に対応するグラフ上の関数によって距離空間及びその上の関数の性質を捉えようとするものである．直接的な背景としては，一連の自己相似フラクタルの研究や，ユークリッド空間の 2 進立方体分割の一般化の研究 (cf.[9, 10, 11, 15, 16]) が挙げられるが，アイデア自体は一般的なものである．具体的な定式化は以下で順に行うが，記号が煩雑であるため一度読み飛ばして，後から詳細を確認しても差し支えない．

定義 12 (基準点をもつ木)**.** T を可算集合とし，写像 $\pi : T \to T$ を以下の条件を満たすものとする．

- $F_\pi := \{w \mid \text{ある } n \geq 1 \text{ に対して, } \pi^n(w) = w, \text{とおくとき, } \#F_\pi \leq 1.$ (H1)
- 任意の $w, v \in T$ につき，ある $n, m \geq 0$ があって$\pi^n(w) = \pi^m(v)$. (H2)

$\phi \in T$ を，$F_\pi \neq \emptyset$ のとき $\phi \in F_\pi$ なる元で定め，そうでない時任意の $\phi \in T$ を固定する．このとき 3 つ組 (T, π, ϕ) を基準点をもつ木 (tree with a reference point) と呼ぶ．
$w, v \in T$ に対し，$b(w,v) := \min\{n \geq 0 \mid \text{ある } m \geq 0 \text{ があって, } \pi^n(w) = \pi^m(v)\ m \geq 0\}$，$[w] := b(w,\phi) - b(\phi,w)$ とおき，さらに $k \in \mathbb{Z}$ に対し $(T)_k := \{w \in T \mid [w] = k\}$ とおく．

この定義は $F_\pi \neq \emptyset$ のとき ϕ を根とする木に相当する．$F_\pi = \emptyset$ のときは無限遠に根を持つ木となる．以下本節では $\mathcal{T} = (T, \pi, \phi)$ は基準点を持つ木を表すものとする．

定義 13 (Partition)**.** (X,d) を孤立点を持たない (高々 σ コンパクトな) 距離空間とし，$\mathcal{C}(X,D)$ で (X,d) のコンパクト集合のうち 1 点集合を除いたもの全体とする．写像 $K : T \to \mathcal{C}(Y,\rho)$ が以下の条件を満たすとき，X の ($\mathcal{T}$ でパラメータ付けられた) partition と呼ぶ．

- $\bigcup_{w\in(T)_0} K(w) = X$ かつ, 任意の $w \in T$ につき $\bigcup_{v\in\pi^{-1}(w)} K(v) = K(w)$. (P1)
- 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し$\pi(w_{k+1}) = w_k$を満たすような任意の点列 $(w_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset T$ につき，$\cap_{k\in\mathbb{Z}} K(w_k)$ は 1 点集合となる. (P2)

以下簡単のため，$K(w)$ の代わりに K_w と表す．$w \in T$，$s \in (0,\infty)$，$x, y \in X$ 及び $M \geq 1$, に対し，

partition に関する変数を以下のように定める:

$$
\begin{aligned}
g_d(w) &= \mathrm{diam}(K_w, d),\\
\Lambda_s^d &= \begin{cases} \emptyset & F_\pi \neq \emptyset \text{ かつ } s > g_d(\phi) \text{ の場合} \\ \{w \in T \mid g_d(w) \le s < g_d(\pi(w))\} & \text{それ以外} \end{cases}\\
E_s^d &= \{(w,v) \in \Lambda_s^d \times \Lambda_s^d \mid w \neq v \text{ かつ } K_w \cap K_v \neq \emptyset\},\\
l_s^d(\cdot,\cdot) &:= (\Lambda_s^d, E_s^d) \text{ のグラフ距離}\\
\delta_M^d(x,y) &= \inf\{s > 0 \mid \text{ある } w, v \in \Lambda_s^d \text{があって } x \in K_w,\ y \in K_v \text{かつ } l_s^d(w,v) \le M \text{ を満たす.}\}.
\end{aligned}
$$

定義 14 (Basic framework)**.** $\sup_{w\in T} \#\pi^{-1}(w) < \infty$ と仮定する. (X,d) の partition K が以下の条件を満たすとき, 特に basic framework を満たす partition (以下, BF-partition) であると呼ぶ.

- 任意の $w \in T$ につき, ある開集合 U_wがあって $U_w \supset K_w$かつ$\#\{v \in (T)_{[w]} \mid U_w \cap K_v \neq \emptyset\} < \infty$.
- (minimal). 任意の $w \in T$ につき, $K_w \setminus \bigcup_{v\in(T)_{[w]}:v\neq w} K_v \neq \emptyset$
- (Adapted). ある $M \ge 1,\ \eta_1 > 0$ があって, 任意の $x, y \in X$ に対し$\eta_1^{-1}\delta_M^d(x,y) \le d(x,y) \le \eta_1 \delta_M^d(x,y)$ (B1)
- (Thick). ある$\eta_2 > 0$ があって, 任意の $w \in T$ に対し,
$$\text{ある } x_w \in K_w\text{があって}, \{y \mid \delta_1^d(x_w, y) \le \eta_2 g_d(\pi(w))\} \subset K_w. \quad \text{(B2)}$$
- (Uniformly finite). $sup_{s\in(0,\infty),\ w\in\Lambda_s^d} \#\{v \mid v \in \Lambda_s^d,\ l_s^d(w,v) \le 1\} < \infty$. (B3)
- ある$\eta_3 > 0$ と $r \in (0,1)$ があって, 任意の $w \in T$ に対し$\eta_3^{-1} r^{[w]} \le g_d(w) \le \eta_3 r^{[w]}$. (B4)

Remark. 原論文 [20] では, partition を固定した状態で (同相な) 距離を取り替えるような議論を行うため, "partition K に対し距離 d が basic framework を満たす" という向きの用語の使い方をしている.

先行研究 [20] の主結果は, partition の言葉を用いると以下のように表される.

定理 15 ([20],Theorem 4.6.4, 4.7.9. : コンパクト, [21], Theorem 3.9:σ-コンパクト)**.** K を (X,d) の *BF-partition* とし,$E_k = \{(w,v) \in (T)_k \times (T)_k \mid w \neq v \text{ かつ } K_w \cap K_v \neq \emptyset\},\ l_k$ を $((T)_k, E_k)$ のグラフ距離とする. さらに

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{p,k,w,M} = \inf\{\frac{1}{2} \sum_{(u,v)\in E_{[w]+k}} |f(u)-f(v)|^p \mid f : (T)_{[w]+k} \to \mathbb{R},\ f(u) = 1\ (\pi^k(u) = w \text{ のとき}),\\
f(u) = 0\ (l_{[w]}(w, \pi^k(u)) > M \text{ のとき})\}\\
N_* = \limsup_{k\to\infty} \sup_w (\#\pi^{-k}(w))^{1/k},\\
\overline{d}_p^S(K) = (p \log N_*)/(\log N_* - \limsup_{k\to\infty} \sup_{w\in T} \log(\mathcal{E}_{p,k,w,M}^{1/k})),\\
\underline{d}_p^S(K) = (p \log N_*)/(\log N_* - \liminf_{k\to\infty} \sup_{w\in T} \log(\mathcal{E}_{p,k,w,M}^{1/k}))
\end{aligned}
$$

($p > 0, M$ は *(B1)* の定数) とおく. このとき,

$$\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) = \inf\{p \mid \limsup_{k\to\infty} \sup_{w\in T} \mathcal{E}_{p,k,w,M} = 0\} = \inf\{p \mid \liminf_{k\to\infty} \sup_{w\in T} \mathcal{E}_{p,k,w,M} = 0\}$$

であり, さらに

$$\dim_{\mathrm{AR}}(X,d) \le \underline{d}_p^S(K) \le \overline{d}_p^S(K) < p \text{ または } \dim_{\mathrm{AR}}(X,d) \ge \overline{d}_p^S(K) \ge \underline{d}_p^S(K) \ge p$$

のいずれか一方が成立する.

この定理に現れる $\mathcal{E}_{p,k,w,M}$ という量は, 大まかに言えば "K_w の近くの円環状の領域の, 内側と外側の間の p 次のポテンシャルを, k 段階細かくした近似グラフの上で見ている" 量である. 各種変数に現れる極限は, 全てのスケールと全ての場所でこのようなポテンシャルが最も大きくなるところを見た上で, その量の $k \to \infty$ の極限を取っていることになる. 特に $p = 2$ の場合, このような円環領域の間のポテンシャルは Dirichlet 形式や抵抗形式の議論と直接的に結びついている. とりわけ (X, d) が SG や一般化された SC の場合には, 自然な partition K があって BF-partition となることがわかり, その上の標準 Hausdorff 測度 μ, $L^2(X, \mu)$ 上の標準 Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{D})$ に対し, [4, 1, 2] などの先行研究と比較することにより $\underline{d}_2^S(K) = \overline{d}_2^S(K) = d_S(\mathcal{E}, \mu)$ となることがわかる. この等式と定理 15 から定理 4 が従う.
定理 10 の証明も同様に, BF-partition を用いて $\overline{d_S}(\mathcal{E}, \mu)$ の$\overline{d}_2^S, \underline{d}_2^S$ による評価を行い, 定理 15 と結びつけることで行う. そのためにはまず (X, d) ないし (X, R) の BF-partition の存在を示す必要があるが, それについては以下に述べる定理が存在する.

定義 16 (一様完全, doubling)**.** (X, d) を距離空間とする.

(1) ある $N \in \mathbb{N}$ があって, 任意の $x \in X$ 及び $r > 0$ につき, ある $\{x_i\}_{i=1}^N \subset X$ があって $B_d(x, 2r) \subset \bigcup_{i=1}^N B_d(x_i, r)$ をみたすとき, (X, d) は doubling であるという.
(2) ある $\gamma > 1$ があって, 任意の $x \in X$ 及び $r > 0$ につき, $B_d(x, r) \neq X$ ならば $B_d(x, \gamma r) \setminus B_d(x, r) \neq \emptyset$ をみたすとき, (X, d) は一様完全 (uniformly perfect) であるという.

定理 17 ([23], Theorem 3.9)**.** (X, d) を孤立点を持たない完備距離空間とするとき, 以下の条件は同値.
(1)$\dim_{\mathrm{AR}}(X, d) < \infty$ (2)*doubling* かつ一様完全 (3)(X, d) の *BF-partition* が存在する.

Remark. (1) $\Leftrightarrow$ (2) は既知. (cf. [14, Theorem 13.3, Corollary 14.15]) (3) $\Rightarrow$ (1) は [20, Corollary 4.6.13] による. [23] では, [15] の手法を改良して (2) $\Rightarrow$ (3) を示した.

$d \underset{\mathrm{QS}}{\sim} \rho$ なるとき (X, d) の孤立点は (X, ρ) の孤立点であり, (X, d) の Cauchy 列は (X, ρ) の Cauchy 列となる. 従って定理 17 より, 定理 10 の仮定の下では (X, R) の BF-partition K が存在する. また定義から明らかに $\dim_{\mathrm{AR}}(X, d) = \dim_{\mathrm{AR}}(X, R)$ であるから, この K について $\overline{d}_2^S(K) \leq \overline{d_S}(\mathcal{E}, \mu) < 2$ を示せば定理 15 と合わせて定理 10 を示したことになる. 実際には, 次節に述べるより強い形の主張を示すことができる.

5 主結果の強形, および証明の概略

本節では以下に述べる定理の証明の概略を述べる. この節を通して, 定理 10 の条件を仮定し, さらに (X, R) の BF-partition K を 1 つ任意に固定しておく.

定理 18. $(X, d), (\mathcal{E}, \mathcal{F})$ は定理 *9* の仮定を満たし, 任意の $\mu \in \mathcal{M}$ に対して極限 $\overline{d_S}(\mathcal{E}, \mu)$ が存在して, (X, R) の *BF-partition* K に対して $\overline{d}_2^S(K) \leq \overline{d_S}(\mathcal{E}, \mu) < 2$ をみたす. さらに $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が局所的, 即ち $supp(u) \cap supp(v) = \emptyset$ なる任意の $u, v \in \mathcal{F}$ に対して $\mathcal{E}(u, v) = 0$ を満たすなら, $\underline{d}_2^S(K) = \overline{d}_2^S(K) = \inf_{\mu \in \mathcal{M}} \overline{d_S}(\mathcal{E}, \mu)$ である.

まず基本的な部分を確認する. (X, R) は完備であり, さらに定理 17 より doubling かつ一様完全であるから, 可分かつ局所コンパクトであることはただちに従う. また doubling であることから, $R(x, B_R(x, r)^c)$[*7] $\asymp r$

[*7] $R(A, B) := \max\{\mathcal{E}(u, u)^{-1} \mid u \in \mathcal{F}, u|_A \equiv 1, u|_B \equiv 0\} \neq \inf_{x \in A, y \in B} R(x, y)$

であることも従い, このことから抵抗形式の正則性を導くことができる ([19, Theorem 6.3.]). さらに極限 $\overline{d_S}(\mathcal{E},\mu)$ の存在は, $f(\alpha) := \sup_{t\in(0,\mathrm{diam}(X,d)),x\in X}(p_\mu(t/\alpha,x,x)/p_\mu(t,x,x))$ の劣乗法性, 即ち $f(\alpha)f(\beta) \geq f(\alpha\beta)$ であることから、劣加法関数の一般論だけから示すことができる. 残りの証明は大きく 2 つの部分に分かれ, 以下の補題が示されれば残りは単純な計算で定理 18 が導かれる.

補題 19. $\rho \underset{\mathrm{QS}}{\sim} R$ なる任意の距離 ρ に対し,

$$\overline{d_S}(\mathcal{E},\mu) = 2\limsup_{\alpha\to\infty} \sup_{r\in(0,\mathrm{diam}(X,d)),\ x\in X} \frac{\log V_\rho(x,r) - \log V_\rho(x,r/\alpha)}{\log h_\rho(x,r) - \log h_\rho(x,r/\alpha)} \qquad (*)$$

ただし, $V_\rho(x,r) = \mu(B_\rho(x,r))$ かつ $h_\rho(x,r) = (\sup_{y\in B_\rho(x,r)} R(x,y))V_\rho(x,r)$

補題 20. ある $C>0$ があって任意の $k\geq 0$ で以下が成り立つ.

(1) 任意の $\mu\in\mathcal{M}$ につき, $\sup_{x\in X,s\in(0,\mathrm{diam}(X,R))}\left(\frac{V_R(x,s)}{V_R(x,r^k s)}\right) \geq C^{-1}N_*^k$
(2) 任意の $\epsilon>0$ に対して, ある $\mu\in\mathcal{M}$ があって, $\sup_{x\in X,s\in(0,\mathrm{diam}(X,R))}\left(\frac{V_R(x,s)}{V_R(x,r^k s)}\right) \leq C(N_*+\epsilon)^k$
(3) 任意の $w\in T$ に対し, $\mathcal{E}_{2,k,w} \leq Cr^k$ さらに $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が局所的なら, $\mathcal{E}_{2,k,w} \geq C^{-1}r^k$

補題 19 は, [19, Theorem xx.x] により式 $(*)$ の右辺が

$$2\lim_{\alpha\to\infty} \sup_{\substack{r\in(0,\mathrm{diam}(X,d)),\\ s\in[\alpha,\infty),\ x\in X}} \frac{\log p_\mu(h_\rho(x,r/s),x,x) - \log p_\mu(h_\rho(x,r),x,x)}{\log h_\rho(x,r) - \log h_\rho(x,r/s)},$$

と一致することを用いて示す. この式と $\overline{d_S}(\mathcal{E},\mu)$ の定義式とは上限及び極限の取り方が異なるが, $\rho \underset{\mathrm{QS}}{\sim} R$ から V と及び h の doubling, reverse doubling 条件から極限の値が一致することを示せる. ($\liminf$ では同様の証明はできない.) 補題 20 について, (1) は単純な不等式 $\max_{v:\pi^k(v)=w}\mu(K_v)\#\{v:\pi^k(v)=w\} \geq \mu(K_w)$ から, (2) は Assouad 次元に関する既知の結果 (cf. [14, Theorem13.5.]) から BF-partition の構造を用いて示される (直接構成的に示すこともできる.) (3) は R が可分であることから, 有限集合上の Dirichlet 形式の極限として表せることより, その上の flow や modulus と呼ばれるテクニックを用いて組合せ論的に証明する. (離散近似から極限に戻す部分で多少細かな議論が必要である. 特に lower bound の議論では離散近似において, 離れている点のペアに対する辺の重みの和が極限で消えることが必要で, そこの証明に局所性を用いる.)

参考文献

[1] M. T. Barlow and R. F. Bass, Transition densities for Brownian motion on the Sierpiński carpet. *Probab. Theory Related Fields* **91** (1992), no. 3-4, 307–330.

[2] M. T. Barlow and R. F. Bass, Brownian motion and harmonic analysis on Sierpinski carpets. *Canad. J. Math.* **51** (1999), no. 4, 673–744.

[3] M. T. Barlow, R. F. Bass, T. Kumagai and A. Teplyaev, Uniqueness of Brownian motion on Sierpiński carpets. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **12** (2010), no. 3, 655–701.

[4] M. T. Barlow and E. A. Perkins, Brownian motion on the Sierpiński gasket. *Probab. Theory Related Fields* **79** (1988), no. 4, 543–623.

[5] M. Bonk and B. Kleiner, Conformal dimension and Gromov hyperbolic groups with 2-sphere boundary. *Geom. Topol.* **9** (2005), 219-246.

[6] M. Bourdon and H. Pajot, Cohomologie ℓ_p et espaces de Besov. *J. Reine Angew. Math.* **558** (2003), 85-108.

[7] M. Carrasco Piaggio, On the conformal gauge of a compact metric space. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **46** (2013), no. 3, 495-548.

[8] Z. Q. Chen and M. Fukushima, *Symmetric Markov processes, time change, and boundary theory.* London Mathematical Society Monographs Series, 35. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012.

[9] M. Christ, A $T(b)$ theorem with remarks on analytic capacity and the Cauchy integral. *Colloq. Math.* **60/61** (1990), 601–628.

[10] G. David, Morceaux de graphes lipschitziens et intégrales singulières sur une surface. *Rev. Mat. Iberoamericana* **4** (1988), no. 1, 73–114.

[11] G. David, *Wavelets and singular integrals on curves and surfaces.* Lecture Notes in Mathematics, 1465. Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[12] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes. Second revised and extended edition.* De Gruyter Studies in Mathematics, 19. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2011.

[13] S. Goldstein Random walks and diffusions on fractals. in *Percolation theory and ergodic theory of infinite particle systems (Minneapolis, Minn., 1984–1985)*, 121–129, IMA Vol. Math. Appl., **8**, Springer, New York, 1987.

[14] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[15] T. Hytönen and A. Kairema, Systems of dyadic cubes in a doubling metric space. *Colloq. Math.* **126** (2012), no. 1, 1–33.

[16] A. Käenmäki, T. Rajala and V. Suomala, Existence of doubling measures via generalised nested cubes. *Proc. Amer. Math. Soc.* **140** (2012), no. 9, 3275–3281.

[17] J. Kigami, A harmonic calculus on the Sierpiński spaces. *Japan J. Appl. Math.* **6** (1989), no. 2, 259–290.

[18] J. Kigami, *Analysis on fractals.* Cambridge Tracts in Mathematics, 143. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[19] J. Kigami, Resistance forms, quasisymmetric maps and heat kernel estimates. *Mem. Amer. Math. Soc.* **216** (2012), no. 1015.

[20] J. Kigami, *Geometry and analysis of metric spaces via weighted partitions.* Lecture Notes in Mathematics, 2265. Springer, Cham, 2020.

[21] K. Sasaya Ahlfors Regular Conformal Dimension of Metrics on Infinite Graphs and Spectral Dimension of the Associated Random Walks. To appear in *J. Fractal Geom.*
The preprint version is available in arXiv: 2009.03595 [math.PR].

[22] K. Sasaya *Some relation between spectral dimension and Ahlfors regular conformal dimension on infinite graphs.* Preprint, arXiv: 2109.00851, 2021.

[23] K. Sasaya *Systems of Dyadic Cubes of Complete, Doubling, Uniformly Perfect Metric Spaces without Detours.* Preprint, arXiv: 2110.11696, 2021.

[24] 竹田雅好 · 桑江一洋, ディリクレ形式入門, 現代基礎数学 20, 朝倉書店, 2020.

A characterization of rationality for operators in free semicircular elements

宮川明裕 (Miyagawa Akihiro)

京都大学大学院　理学研究科　数学・数理解析専攻

1　イントロ

自由確率論は１９８０年代に D.Voiculescu によって導入された理論である。自由確率論は元々は作用素環論の枠組みで自由積を解析するために導入されたが、現在ではランダム行列、組み合わせ論、量子解析、量子情報理論などといった様々な分野で現れている。

自由確率論では自由独立性と呼ばれる通常の確率論における独立性とは異なる性質を持った確率変数達を考える。この自由独立性は、非可換な確率変数特有の現象で群の自由積の表現から得られる。確率論の様々な道具を自由独立性と照らし合わせ、自由確率論に導入することで今日まで発展してきた。

自由確率論において、自由独立な分布達の多項式から得られる確率分布を元の分布からどう解析するかが最初の課題である。このような問題に対して Cauchy 変換や R 変換 S 変換などの確率測度の変換と自由独立性との関係、自由キュムラントを用いた組み合わせ論的な議論などが発展してきた。

ここ数年では、多項式より広いクラスの有理関数に対して自由確率論との関係性が研究されており、特に atom に関する性質がよく研究されている。著者が得た結果は、この有理関数との関連性に着目したもので、自由独立な半円分布が生成した作用素が有理関数から得られたものであるための必要十分条件を与えた。

本レポートでは、自由確率論における自由独立性と半円分布について説明し、最後に著者の結果について述べたい。

2　自由群の左正則表現と自由独立性

前述の通り、自由独立性は群のの自由積の表現から自然に現れる。ここでは簡単のため、d 個の生成元 $g_1, \cdots, g_d$ からなる自由群 $\mathbb{F}_d$ について左正則表現を考える。

ここで $\mathbb{F}_d$ の左正則表現とは $\mathbb{F}_d$ からヒルベルト空間

$$l^2(\mathbb{F}_d) := \{f : \mathbb{F}_d \to \mathbb{C}; \|f\|_2^2 = \sum_{g \in \mathbb{F}_d} |f(g)|^2 < \infty\}$$

上の有界線形作用素の成す空間

$$B(l^2(\mathbb{F}_d)) = \{T : l^2(\mathbb{F}_d) \to l^2(\mathbb{F}_d); T \text{ is linear}, \|T\| = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_2}{\|f\|_2} < \infty\}$$

への準同型写像 $\lambda : \mathbb{F}_d \to B(l^2(\mathbb{F}_d))$ のことで

$$[\lambda(g)f](h) = f(g^{-1}h),\ f \in l^2(\mathbb{F}_d),\ g, h \in \mathbb{F}_d$$

で与えられる。また、この写像は群環 $\mathbb{C}[\mathbb{F}_d]$ に拡張することができる。

ここで $B(l^2(\mathbb{F}_d))$ 上の線形写像 τ_e として

$$\tau_e(T) = \langle T\delta_e, \delta_e \rangle_{l^2(\mathbb{F}_d)}$$

を考える。ここで $\delta_e \in l^2(\mathbb{F}_d)$ は単位元 e で 1 をとり、他は 0 をとる関数である。

この τ_e は $\lambda(C[\mathbb{F}_d])$ 上でトレース（$\tau_e[\lambda(f)\lambda(g)] = \tau_e[\lambda(g)\lambda(f)]$）になっている正汎関数であることがわかる。

ここで $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, d\}$ で $i_k \neq i_{k+1} (k = 1, \ldots n-1)$ を満たすものと $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ に対して次が成り立つ。

$$\tau_e[\lambda(g_{i_1}^{j_1} \cdots g_{i_n}^{j_n})] = 0.$$

またこのことから、各 $k = 1, \ldots, n$ について多項式 $p_k \in \mathbb{C}[g_{i_k}]$ が与えられた時、次が成り立つ。

$$\tau_e[(p_1 - \tau_e[\lambda(p_1)]) \cdots (p_n - \tau_e[\lambda(p_n)])] = 0.$$

上の関係式から τ_e の $\lambda(C[\mathbb{F}_d])$ 上での値は、τ_e の各 $\lambda(\mathbb{C}[g_i])$ への制限から求められることがわかる。群の生成元 $g_1, \ldots, g_d$ を確率変数、τ_e を期待値と見ることにより、この関係式はある種の独立性（自由独立性）を定めていると見ることができる。

ここでは自由独立性を C^*-非可換確率空間の言葉で述べることにする。C^*-非可換確率空間 $(\mathcal{A}, \phi)$ は単位元 1 を持つ C^*-環 $\mathcal{A}$(C^*-環とは Involution と呼ばれる冪等な反線形写像 $*$ を持ち、C^*-条件 $\|a^*a\| = \|a\|^2$ を満たす $\mathbb{C}$ 上の Banach 代数）と $\mathcal{A}$ 上の state ϕ ($\phi(1) = 1$、$\phi(a^*a) \geq 0$ を満たす汎関数) から成る。

上の例では $(B(l^2(\mathbb{F}_d)), \tau_e)$ や $(C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_d), \tau_e)$（$C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_d)$ は $\lambda(C[\mathbb{F}_d])$ の作用素ノルムに関する閉包）などが C^*-非可換確率空間の例として挙げられる。

定義 1 (自由独立性)**.** $(\mathcal{A}, \phi)$ を C^*-非可換確率空間とする。$\mathcal{A}$ と共通の単位元を持つ部分 C^*-環 $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_d$ が、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $a_k \in \mathcal{A}_{i_k} (i_k \neq i_{k+1},\ k = 1, \ldots, n)$ が与えられたとき

$$\phi[(a_1 - \phi[a_1]) \cdots (a_n - \phi[a_n])] = 0$$

満たすならば、$\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_d$ は自由独立であるという。特に各 $\mathcal{A}_k$ が一つの元 a_k で生成されている時、$a_1, \ldots, a_d$ は自由独立であるという。

特に上の自由群の例では、生成元 $g_1, \ldots, g_d$ 達は自由独立である事がわかる。

通常の独立な確率変数 X, Y は $E[XYXY] = E[X^2]E[Y^2]$ となるが、自由独立な確率変数 X, Y は $\phi[XYXY] = \phi[X^2]\phi[Y]^2 + \phi[X]^2\phi[Y^2] - \phi[X]^2\phi[Y]^2$ となるので自由独立性は通常の独立性とは異なる。また自由群の例でわかるように、自由独立性は非可換な確率変数特有の性質である。

自由独立性に関して注意したいのは、通常の確率論においては測度のテンソル積によって独立な確率変数を構成できたが、自由独立性は state の自由積から構成されるもので測度そのものが対応している訳では無いというところである。しかしながら、$X + Y$ や YXY など自由独立な確率変数 X, Y から得られる（主に多項式）新たな確率変数 $P(X, Y)$ については $P(X, Y)$ が正規（$P(X, Y)^*P(X, Y) = P(X, Y)P(X, Y)^*$）の場合、スペクトル定理によって対応する測度（スペクトル測度）を得る事ができる。

このような $P(X,Y)$ の測度を、元の X,Y の測度と自由独立性から調べる事が自由確率論の目的の一つである。そのための道具となる Cauchy 変換、R 変換、S 変換や自由キュムラント、それらと自由独立性についての関係性については [9],[11],[13] などを参照してもらいたい。

3 自由半円分布

自由確率論における半円分布は、確率論における正規分布と同様に中心的な役割を担っている。この節では、半円分布の定義を述べると共に自由中心極限定理、GUE ランダム行列との繋がりを説明し、最後に自由フォック空間への表現について説明したい。

定義 2 (半円分布)**.** （標準）半円分布とは以下の確率密度関数で与えられる実確率変数である:

$$\frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\ 1_{[-2,2]}.$$

また C^*-非可換確率空間 $(\mathcal{A},\phi)$ において、自己共役な元 $s=s^*\in\mathcal{A}$ が半円分布を持つとは、s のスペクトル測度が半円分布で与えられる事をいい、特に任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して以下が成り立つ。

$$\phi(s^n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}x^n\sqrt{4-x^2}dx$$

ここで dx は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度である。

確率論における中心極限定理は独立同分布な確率変数列の部分和をスケーリングしたものが正規分布に分布収束するというものであった。この独立性を自由独立性に変えたものとして次の定理が知られている。

定理 3 (自由中心極限定理, [9],[11],[13])**.** C^*-非可換確率空間 $(\mathcal{A},\phi)$ 上の自由独立な自己共役元の列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathcal{A}$ で任意の $n,k\in\mathbb{N}$ に対し $\phi[a_n^k]=\phi[a_1^k]$ を満たし $\phi[a_1]=0$ $\phi[a_1^2]=1$ を満たすものに対し $S_N=\sum_{n=1}^{N}a_n$ を考えると $\frac{S_N}{\sqrt{N}}$ は半円分布に分布収束する。　特に任意の $k\in\mathbb{N}$ に対し以下が成り立つ、

$$\lim_{N\to\infty}\phi\left[\left(\frac{S_N}{\sqrt{N}}\right)^k\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2}x^k\sqrt{4-x^2}dx$$

ここで自由確率論でよく知られている事実として GUE ランダム行列と半円分布の関係性について述べておきたい。サイズ N の GUE ランダム行列 $A^{(N)}=(A_{ij}^{(N)})$ は自己共役なランダム行列の標準的なモデルであり、独立な正規分布（平均 0、分散 1）$\{x_{ij}\}_{1\le i\le j\le N}$, $\{y_{ij}\}_{1\le i<j\le N}$ 用いて

$$A_{ij}^{(N)}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{N}}x_{ii}\text{ if }i=j\\ \frac{1}{\sqrt{2N}}(x_{ij}+\sqrt{-1}y_{ij})\text{ if }i<j\\ \frac{1}{\sqrt{2N}}(x_{ji}-\sqrt{-1}y_{ji})\text{ if }i>j.\end{cases}$$

で与えられる。この時、次の定理が知られている。

定理 4 ([9], [13])**.** $A_1^{(N)},\dots,A_d^{(N)}$ を独立な *GUE* ランダム行列、$s_1,\dots,s_d$ を自由独立な半円分布とした時、任意の（非可換）多項式 P に対して次が成り立つ、

$$\lim_{N\to\infty}E[\mathrm{tr}_N(P(A_1^{(N)},\dots,A_d^{(N)}))]=\phi[P(s_1,\dots,s_d)].$$

ここで行列 $A=(A_{ij})$ に対して $\mathrm{tr}_NA=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}A_{ii}$ と定めている。

この定理から次が知られている。多項式 P を $P(A_1^{(N)},\dots,A_d^{(N)})$ が自己共役となるようにとったとき、$P(A_1^{(N)},\dots,A_d^{(N)})$ の固有値を重複をこめて $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_N$ として、$\mathbb{R}$ 上の確率測度

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{\lambda_i}$$

をとる。これを $P(A_1^{(N)},\dots,A_d^{(N)})$ の経験固有値分布というが、今ランダム行列を考えているので、これはランダムにとってきた確率測度である。行列解析の基本的な知識から $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数 f に対して $\mathrm{tr}_N f(P(A_1^{(N)},\dots,A_d^{(N)}))$ は f をこの経験固有値分布で積分したものと等しい。上の定理を用いると、$P(A_1^{(N)},\dots,A_d^{(N)})$ の経験固有値分布は $N\to\infty$ の極限において $P(s_1,\dots,s_d)$ のスペクトル測度に確率 1 で分布収束することがわかる。

自由独立な半円分布の 3 つ目の特徴は、物理学の量子論で登場する生成消滅作用素を用いて表現されるというものである。

以下では H をヒルベルト空間とし、自由フォック空間を次のように H のテンソル積の直和で定める。

$$\mathcal{F}(H)=\bigoplus_{n=0}^{\infty}H^{\otimes n}$$

ここで、$H^{\otimes 0}$ は一次元のヒルベルト空間で、真空ベクトルと呼ばれる単位ベクトル Ω を用いて $H^{\otimes 0}=\mathbb{C}\Omega$ としておく。このヒルベルト空間の内積は

$$\langle \xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n,\eta_1\otimes\cdots\otimes\eta_m\rangle=\delta_{n,m}\prod_{k=1}^{n}\langle\xi_k,\eta_k\rangle_H$$

で与えられている。

H の元 ξ に対して、自由フォック空間上の左生成作用素 $l(\xi)$ を

$$l(\xi)(\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n)=\xi\otimes\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_n$$

で定め、左消滅作用素を $l(\xi)^*$ で定める。今 H を d 次元とし、その基底を $e_1,\dots,e_d$ とする．d 個の作用素 $s_1,\dots,s_d$ を $s_i=l(e_i)+l(e_i)^*$ によって定め、真空状態と呼ばれる $B(\mathcal{F}(H))$ 上の正汎関数 τ_Ω を $\tau_\Omega(T)=\langle T\Omega,\Omega\rangle$ で定める。この作用素達について次のことが知られている。

定理 5 ([13])**.** $s_1,\dots,s_d$ は真空状態に関して自由独立な半円分布を持つ。

他にも、非交差分割による組み合わせ ([11]) や自由確率論におけるブラウン運動にも自由半円分布が関係している ([2]).

4 自由独立分布の有理性の特徴づけ

第 2 節で多項式 P について $P(X,Y)$ のスペクトル測度の分布を X,Y の分布と自由独立性から調べるということについて述べたが、最近では P を有理式に拡張するという研究が進められている。これは代数的に見れば自然な拡張であるとともに、ランダム行列への応用という面においても興味深い対象である。この節では、自由確率論における有理性の研究について紹介し、最後に著者の結果について説明したい。

ここで（非可換）有理式というのは変数 $x_1, \ldots, x_d$ から和、積、スカラー倍、商をとる操作を組み合わせて得られるもので、例えば

$$x_1 x_2^{-1} x_3,\ x_1^{-1} + x_2 x_3^{-1},\ [(2x_1+3)^{-1} + x_1]^{-1} x_2$$

などが挙げられる。ここで注意したいのは、このように表現されるもの全体の集合には、代入という操作に意味がないものや、代入した時に同じものを返すものなどが存在する。例えば $(x_1 - x_1)^{-1}$ に与えられた代数の元 X を代入しても 0^{-1} を考えることになり意味がなくなってしまう。また $(X_1X_2)^{-1} = X_2^{-1}X_1^{-1}$ は任意の体の元 X_1, X_2 に対して成り立つので同じものであって欲しい。そこで代入したものが等しいという同値類により有理式を区別する事になる。しかしながら、$x_1(x_2x_1)^{-1}x_2$ に $X_2X_1 = 1 \neq X_1X_2$ となるような代数の元 X_1, X_2 を代入すると $X_1(X_2X_1)^{-1}X_2 = X_1X_2 \neq 1$ となってしまうが、これは体の元では起こり得ないことである。

有理式を代入による同値類に分け、更にそれらの同値類に代数的構造を付加するための標準的な方法として任意のサイズの行列を代入するという方法がとられており、その同値類は非可換有理関数と呼ばれている。更に非可換有理関数の集合は代数の構造を持ち、ある種の普遍性をもった（非可換）体であることが知られている。詳しい定義は [5] を参照してもらいたい。

この非可換有理関数 R に自由独立な分布 $X_1, \ldots, X_d$ を代入することを考える。この代入はトレースを持つ W^*-非可換確率空間に affiliate された閉作用素が成す環において考え、一般に $R(X_1, \ldots, X_d)$ が定義される場合は、$R(X_1, \ldots, X_d)$ は非有界な閉作用素を与える ([7], [8])。トレースを持つ W^*-非可換確率空間 $(\mathcal{M}, \tau)$ では、$\mathcal{M}$ はフォン・ノイマン環（弱作用素位相に関して閉じている $B(H)$ の部分代数）、τ は σ 弱位相について連続なトレースを考える。更に τ は忠実（$\tau(a^*a) = 0$ なら $a = 0$）であることを仮定しておく。

一般に R 上の測度 μ が $\lambda \in \mathbb{R}$ で $\mu(\{\lambda\}) > 0$ を満たす時、λ を μ の atom という。$R(X_1, \ldots, X_d)$ の well-definedness やスペクトル分布の atom に関して次のことが知られている。

定理 6 ([7], [8])**.** $(\mathcal{M}, \tau)$ をトレースを持つ W^*-非可換確率空間、$X_1, \ldots, X_d \in \mathcal{M}$ を自由独立で *atom* を持たない自己共役な元とするとき、任意の非可換有理関数に対し、$R(X_1, \ldots, X_d)$ は $\mathcal{M}$ に *affiliate* された閉作用素 として *well-defined* で、この R から $R(X_1, \ldots, X_d)$ への対応は単射準同型を与える。更に $R(X_1, \ldots, X_d)$ が定数でない自己共役作用素の時、$R(X_1, \ldots, X_d)$ のスペクトル分布は *atom* を持たない。

また各 X_i に atom がある場合、$R(X_1, \ldots, X_d)$ の atom は代数的に計算でき、自由独立性を仮定しない時の $R(X_1, \ldots, X_d)$ の atom の情報は、自由独立な場合の atom の情報で評価できることが知られている [1]。また定理 4 あたりで述べた経験固有値分布の収束も研究されている [3]。

このような非可換有理関数と自由独立な確率変数との関係性の研究の一つとして最後に著者の結果を紹介したい。以下では自由独立な半円分布 $s_1, \ldots, s_d$ を自由フォック空間上の有界線形作用素として、$s_1, \ldots, s_d$ から得られる有界線形作用素が非可換有理関数への代入から得られるための必要十分条件について考える。$s_1, \ldots, s_d$ で得られる有界線形作用素の集合として、$s_1, \ldots, s_d$ が生成するフォン・ノイマン環 $L^\infty(s_1, \ldots, s_d)$ を考える。

また非可換有理関数への代入によって得られる有界線形作用素の集合を $C_{\mathrm{rat}}(s_1, \ldots, s_d)$ とする。$L^\infty(s_1, \ldots, s_d)$ の中で $C_{\mathrm{rat}}(s_1, \ldots, s_d)$ を特徴づけるために、右生成作用素 $r_1, \ldots, r_d$ を考える。これは $\xi_1 \otimes \cdots \xi_n \in H^{\otimes n}$ に対して、

$$r_i(\xi_1 \otimes \cdots \xi_n) = \xi_1 \otimes \cdots \xi_n \otimes e_i$$

によって定義される $\mathcal{F}(H)$ 上の有界線形作用素である。

すると $C_{\mathrm{rat}}(s_1,\ldots,s_d)$ は次のように特徴づけられる。

定理 7 ([10])**.** $a \in L^\infty(s_1,\ldots,s_d)$ に対し、次が成り立つ。

$$a \in C_{\mathrm{rat}}(s_1,\ldots,s_d) \Leftrightarrow \{[r_i,a]\}_{i=1}^d \text{ が全て有限階作用素}$$

ここで $[r_i,a] = r_i a - a r_i$.

この結果に関連するものとして $C^*_{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_d)$ での結果が Duchamp と Reutenauer[4] によって示され、Linnell によって非有界な場合の結果 [6] が知られており、著者の結果は彼らの結果から着想を得たものである。

この定理の補足説明としてクロネッカーの定理について説明しておきたい。円周 S^1 上のルベーグ測度に関する L^∞ 関数 f が L^2 関数の成すヒルベルト空間 $L^2(S^1)$ 上で $f = \sum_{k=0}^\infty \alpha_n z^{-n-1}$ とフーリエ級数に展開した時、フーリエ係数に関する Hankel 行列 $\{\alpha_{n+m}\}_{n,m}$ を考える。今の場合 f の有界性から、この Hankel 行列は数列ヒルベルト空間上の有界線形作用素とみなせる。

この時、クロネッカーの定理は次のように述べることができる。

定理 8 (クロネッカーの定理, [12])**.** *Hankel* 行列 $\{\alpha_{n+m}\}_{n,m}$ が有限階作用素であることと f が有理関数であることは同値である。

更にこの定理から、$L^2(S^1)$ の部分空間 H^2 を、任意の $n = -1,-2,\ldots\infty$ で n 番目のフーリエ係数が 0 である関数の成す空間（ハーディ空間）とした時、P を $L^2(S^1)$ から H^2 への射影（Riesz 射影）とした時、$L^\infty(S^1)$ の有理関数の特徴づけとして次を得る。

系 9. $f \in L^\infty(S^1)$ に対し、 $[P,f]$ が有限階作用素であることと f が有理関数であることは同値である。ここでは f を $L^2(S^1)$ 上の掛け算作用素と同一視している。

Duchamp-Reutenauer, Linnell, そして著者の結果はこのクロネッカーの定理の非可換版ととして捉えることができる。

著者の得た結果に関する今後の展望として、以下の事が考えられる。

- 自由群の生成元や自由半円分布以外の作用素に有理性の特徴付けが成り立つのか。
- $\{[r_i,a]\}_{i=1}^d$ が全て有限階作用素という条件をコンパクト作用素などの別のクラスに変えた時、a はどのような作用素となるか。

参考文献

[1] O. Arizmendi, G. C'ebron, R. Speicher and S. Yin. Universality of free random variables: atoms for non-commutative rational functions. *arXiv preprint arXive 2107.11507*, 2021.

[2] P. Biane and R. Speicher. Stochastic calculus with respect to free Brownian motion and analysis on Wigner space. *Probability Theory and Related Fields* 112, 373–409, 1998.

[3] B. Collins, T. Mai, A. Miyagawa, F. Parraud, S. Yin. Convergence for noncommutative rational functions evaluated in random matrices *arXiv preprint arXiv:2103.05962*, 2021

[4] G. Duchamp and C. Reutenauer. Un critère de rationalité provenant de la géométrie non commutative. *Invent. Math.* 128(3):613–622, 1997.

[5] D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov. Noncommutative rational functions, their difference-differential calculus and realizations. *Multidimensional Syst. Signal Process.*, 23(1-2):49–77, 2012.

[6] PA. Linnell. A rationality criterion for unbounded operators. *J. Funct. Anal.*, 171(1):115–121, 2000.

[7] T. Mai, R. Speicher and S. Yin. The free field: zero divisors, Atiyah property and realizations via unbounded operators. *arXiv preprint arXiv:1805.04150v2*, 2018.

[8] T. Mai, R. Speicher and S. Yin. The free field: realization via unbounded operators and Atiyah property. *arXiv preprint arXiv:1905.08187*, 2019

[9] J. A. Mingo and R. Speicher. *Free probability and random matrices*, volume 35 of *Fields Institute Monographs*. Springer, New York; Fields Institute for Research in Mathematical Sciences, Toronto, ON, 2017.

[10] A. Miyagawa. A characterization of rationality for operators in free semicircular elements. *arXiv prepront arXive:2109.08841.*

[11] A. Nica and R. Speicher. Lectures on the Combinatorics of Free Probability (London Mathematical Society Lecture Note Series). *Cambridge: Cambridge University Press*, 2006.

[12] J. Partington. An Introduction to Hankel Operators (London Mathematical Society Student Texts). *Cambridge: Cambridge University Press*, 1989.

[13] D. Voiculescu, K. Dykema, A. Nica. Free Random Variables (CRM Monograph Series 1). *American Mathematical Society*, 1992

Reconstruction of the defect by the enclosure method for inverse problems of the magnetic Schrödinger operator

東京都立大学 理学研究科 数理科学専攻
山下 龍生 (Ryusei YAMASHITA)

概 要

本稿では物体（導体）Ω 内に発生した欠陥 D の位置や形を境界 $\partial\Omega$ での観測データから抽出する公式を与える．欠陥 D を復元する方法として囲い込み法を用いる．囲い込み法は池畠氏が [3] で提唱した方法である．我々は磁場 Schrödinger 方程式に対して観測データから欠陥 D を復元する方法を示す．囲い込み法は Dirichlet to Neumann map(以下 DN map) から介在物を復元する逆問題であるが, このような DN map による同定問題は境界値逆問題と呼ばれ, Calderón 問題に端を発する．Calderón は 1980 年にインピーダンス CT の数学的モデルとして, DN map から導電率を同定する問題を提唱した．

1 導入

本稿は [5] に基づくものである．我々は磁場 Schrödinger 方程式の DN map から囲い込み法を用いて欠陥 D の凸包を抽出する公式を与える．$\Omega \subset R^n (n = 2, 3)$ は有界で $\partial\Omega$ は C^2 とする．D は $\overline{\mathrm{D}} \subset \Omega$ を満たす開集合とし, $\Omega \setminus \overline{\mathrm{D}}$ とする．欠陥 D は互いに素な有界領域 $\{D_j\}_{j=1}^n$ の集まりとし, D は境界でリプシッツ連続とする．まず, Ω の中に欠陥 D を持たない磁場の Schrödinger 方程式に対して DN map を定義する．本稿を通して $A \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n), q \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}), \lambda \in L^\infty(\partial D; \mathbb{R})$ とする．ここで, $D_A^2 u := \sum_{j=1}^n D_{A,j}(D_{A,j}u)$, $D_{A,j} := \frac{1}{i}\partial_j + A_j$ とし, $A = (A_1, A_2, \cdots, A_n)$.

Definition 1. $A(x)$ と $q(x)$ は admissible とする．このとき, 与えられた $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ に対して, $u \in H^1(\Omega)$ が次の磁場 Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} D_A^2 u + qu = 0 \text{ in } \Omega, \\ u = f \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

の弱解であるとは $u = f$ on $\partial\Omega$ で, かつ任意の $\varphi \in H^1(\Omega)$ s.t. $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ に対して

$$\int_\Omega (D_A u) \cdot \overline{D_A \varphi} + qu\overline{\varphi}\, dx = 0$$

が成り立つことをいう.

DN map $\Lambda_{q,A}$ は次のように定義する.

Definition 2. (Weak formulation of DN map)
DN map $\Lambda_{q,A} : H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ は次のように定義する:

$$\langle \Lambda_{q,A} f\ ,\ \overline{g} \rangle = \int_\Omega (D_A u) \cdot \overline{D_A v} + qu\overline{v}\, dx, \quad f, g \in H^{1/2}(\partial\Omega),$$

ここで $u \in H^1(\Omega)$ は (1) の弱解で $v \in H^1(\Omega)$ は $v|_{\partial\Omega} = g$ を満たす任意の関数とする.

Ω の中に欠陥 D を持ち ∂D が Robin 型の磁場 Schrödinger に対して弱解を定義する.

Definition 3. (Robin case)
$A(x), q(x)$ と $\lambda(x)$ は admissible とする. ν は $\Omega \setminus \overline{D}$ に対して外向き単位法線ベクトルとする. このとき, 与えられた $f \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ に対して, $u \in H^1(\Omega \setminus \overline{D})$ が次の磁場 Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} D_A^2 u + qu = 0 \text{ in } \Omega \setminus \overline{D}, \\ \nu \cdot (\nabla + iA)u + \lambda u = 0 \text{ on } \partial D, \\ u = f \text{ on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

の弱解であるとは,$u = f$ on $\partial\Omega$ で, かつ任意の $\varphi \in H^1(\Omega \setminus \overline{D})$ s.t. $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ に対して

$$\int_{\Omega\setminus\overline{D}} (D_A u) \cdot \overline{D_A \varphi} + qu\overline{\varphi}\, dx + \int_{\partial D} \lambda u \overline{\varphi}\, dS = 0$$

が成り立つことをいう.

DN map $\Lambda_{q,A,D}^{(R)}$ は次のように定義する.

Definition 4. (DN map of the Robin case)
DN map $\Lambda_{q,A,D}^{(R)} : H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ は次のように定義する:

$$\langle \Lambda_{q,A,D}^{(R)} f\ ,\ \overline{g} \rangle = \int_{\partial D} \lambda u \overline{v}\, dS + \int_{\Omega\setminus\overline{D}} (D_A u) \cdot \overline{D_A v} + qu\overline{v}\, dx, \quad f, g \in H^{1/2}(\partial\Omega),$$

ここで, $u \in H^1(\Omega \setminus \overline{D})$ は (2) の弱解で $\varphi \in H^1(\Omega \setminus \overline{D})$ は $\varphi|_{\partial\Omega} = g$ を満たす任意の関数とする. 特に, $\lambda = 0$ のとき $\Lambda_{q,A,D}^{(R)}$ ではなく $\Lambda_{q,A,D}^{(N)}$(Neumann 型) と書く.

Remark 1. ∂D が Dirichlet 型の磁場 Schrödinger 方程式に対する DN map $\Lambda_{q,A,D}^{(D)}$ についても同じように定義することができる.

次に, 囲い込み法で重要な役割をはたす指示関数を導入する. n 次元のすべての単位ベクトルからなる集合を $S^{n-1}(n = 2, 3)$ で表す. 与えられた $\omega \in S^{n-1}$ に対して, 直交する単位ベクトルをひとつとって $\omega^\perp \in S^{n-1}$ で表す. このとき, $D_A^2 v + qv = 0$ の解として, パラメータ τ に対して, $r_\tau(x;\omega), \phi_\tau(x,\omega)$ を用いて $v_\tau(x;\omega) := e^{\tau x\cdot(\omega + i\omega^\perp) + \phi_\tau(x,\omega)}(1 + r_\tau(x;\omega))$ とかけるものを用いる. この解は複素幾何光学解とよばれる.

Definition 5. (Indicator function)
$t, \tau \in \mathbb{R}$ とする. このとき指示関数 $I_\omega(\tau; t)$ を以下のように定義する.

$$I_\omega^{(R)}(\tau; t) := \langle (\Lambda_{q,A} - \Lambda_{q,A,D}^{(R)})(e^{-\tau t} v_\tau(x;\omega)), \overline{e^{-\tau t} v_\tau(x;\omega)} \rangle$$

特に,$\lambda = 0$ のとき $\Lambda_{q,A,D}^{(R)}$ に代えて $\Lambda_{q,A,D}^{(N)}$ とかく. また, $\Lambda_{q,A,D}^{(D)}$ を用いた指示関数 $I_\omega^{(D)}(\tau; t)$ も同様に定義できる. ここで, 支持関数 $h_D(\omega)$ を次で定義する:

$$h_D(\omega) = \sup_{x\in D} x \cdot \omega,\ \omega \in S^{n-1}.$$

このとき, D の凸包 $conv(D)$ は次のように求まることに注意する.

$$\mathrm{conv}(D) := \cap_{\omega\in S^{n-1}} \{x \in R^n | x \cdot \omega < h_D(\omega)\}.$$

2 主結果

指示関数 $I_\omega(\tau;t)$ は DN map から定義されるので, 支持関数 $h_D(\omega)$ が $I_\omega(\tau;t)$ から復元できれば, 欠陥 D の凸包 $\mathrm{conv}(D)$ が Ω の境界 $\partial\Omega$ での観測データから復元されたことになる. ここで, 指示関数から支持関数を復元する定理を与える.

Theorem 1 (Dirichlet case)**.** $A(x)$ と $q(x)$ は *admissible* とし, $A \in C^{n+4}(\overline{\Omega})$ と $q \in C^{n+3}(\overline{\Omega})$ とする. このとき

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\log |I_\omega^{(D)}(\tau;0)|}{2\tau} = h_D(\omega).$$

Robin 型においては, 次を仮定する.

$(D)_\omega$**:** ∂D は C^2 級とする. $\omega \in S^{n-1}$ に対して, $T(\omega) = \{x \in \overline{D} \mid h_D(\omega) - x\cdot\omega = 0\}$ は 1 点 x_0 のみからなるとし, さらに x_0 のまわりで ∂D は, ある $\epsilon > 0$ によりグラフ $y = f(s), |s| < \epsilon, s \in \mathbf{R}^{n-1}$ とかけて, ある定数 $K_0, K_1 > 0$ と $m_\omega \geq 2$ があって次を満たすものとする**.**

$$K_0|s|^{m_\omega} \leq f(s) \leq K_1|s|^{m_\omega} \quad (|s| < \epsilon).$$

Theorem 2 (Robin case)**.** $A(x), q(x)$ と $\lambda(x)$ は *admissible* とし, $A \in C^{n+4}(\overline{\Omega}), q \in C^{n+3}(\overline{\Omega})$, $\lambda \in C^1(\partial D)$ とする. $\omega \in S^{n-1}$ に対して $2 \leq m_\omega < 3$ として条件 $(D)_\omega$ を仮定する. このとき, 次が成り立つ.

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{\log |I_\omega^{(R)}(\tau;0)|}{2\tau} = h_D(\omega).$$

Dirichlet case の証明に必要な命題と補題を準備する.

Proposition 1. 与えられた $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ に対して, (1) の弱解を $v \in H^1(\Omega)$ とする. このとき, 次の評価を満たす正の定数 C が存在する.

$$\int_D |D_A v|^2\,dx - C\int_D |v|^2\,dx - C\int_{\partial D} |v|^2\,dS \leq \langle (\Lambda_{q,A,D}^{(\mathrm{D})} - \Lambda_{q,A})f\ ,\ \overline{f}\rangle$$

$$\langle (\Lambda_{q,A,D}^{(\mathrm{D})} - \Lambda_{q,A})f\ ,\ \overline{f}\rangle \leq C\int_D |D_A v|^2\,dx + C\int_D |v|^2\,dx.$$

Lemma 1. $\omega \in S^{n-1}$ に対して v_τ^0 は

$$v_\tau^0 = v_\tau^0(x;\omega) := e^{\tau(x\cdot\omega)}e^{-\tau h_D(\omega)}.$$

(i) 十分大きな τ に対して, 次を満たす正の定数 C が存在する.

$$C^{-1}\int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx \leq e^{-2\tau h_D(\omega)}\int_D |D_A v_\tau|^2 dx \leq C\int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx,$$
$$e^{-2\tau h_D(\omega)}\left(\int_D |v_\tau|^2\,dx + \int_{\partial D} |v_\tau|^2\,dS\right) \leq C\left(\int_D |v_\tau^0|^2\,dx + \int_{\partial D} |v_\tau^0|^2\,dS\right).$$

(ii) $x_0 \in \partial D$ と $q > 0$ を任意にとる. このとき, 十分大きな τ に対して, 次を満たす正の定数 C が存在する.

$$e^{-\tau h_D(\omega)}\int_{\partial D} |x - x_0|^q \left|\frac{\partial}{\partial\nu} v_\tau(x;\omega)\right| dS \leq C\tau\int_{\partial D} |x - x_0|^q |v_\tau^0(x;\omega)|\,dS.$$

Robin case の証明に必要な命題と補題を準備する. 任意の $0<\epsilon<1$ に対して, 次の記号を準備する.

$$q_0(n) := \begin{cases} n=3 & \text{のとき} \quad \dfrac{1}{2}, \\ n=2 & \text{のとき} \quad 1-\epsilon. \end{cases}$$

Proposition 2 (Robin case)**.** A, q, λ は *admissible* として $\lambda \in C^1(\partial D)$ とする. $y_0 \in \partial D$ は任意の点として与えられた $f \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ に対して $v \in H^1(\Omega)$ は (2) の弱解とする. このとき, 次を満たす正の定数 C が存在する.

$$\begin{aligned} & \int_D |D_A v|^2\,dx - C\left\{\int_D |v|^2\,dx + \left(\int_{\partial D} |y-y_0|^{q_0(n)} \left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|\,dS\right)^2 + \int_{\partial D}|v|^2\,dS\right\} \\ \le\ & -\langle (\Lambda^{(\mathrm{R})}_{q,A,D} - \Lambda_{q,A})f\ ,\ \overline{f}\rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\langle (\Lambda^{(\mathrm{R})}_{q,A,D} - \Lambda_{q,A})f\ ,\ \overline{f}\rangle \\ \le\ & C\left\{\int_D |D_A v|^2\,dx + \int_D |v|^2\,dx + \left(\int_{\partial D} (|y-y_0|^{q_0(n)} \left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|\,dS\right)^2 + \int_{\partial D}|v|^2\,dS\right\}. \end{aligned}$$

Lemma 2. $v \in H^1(\Omega)$ と $u \in H^1(\Omega \setminus \overline{D})$ はそれぞれ (1) と (2) の弱解とする. $w := u - v$ とすると, 次の評価をえる.

$$\begin{aligned} & -\langle (\Lambda^{(\mathrm{R})}_{q,A,D} - \Lambda_{q,A})f\ ,\ \overline{f}\rangle \\ =\ & \int_{\Omega\setminus\overline{D}} |D_A w|^2 + q|w|^2\,dx + \int_D |D_A v|^2 + q|v|^2\,dx + \int_{\partial D} (\lambda|w|^2 - \lambda|v|^2)\,dS. \end{aligned}$$

Lemma 3. $\omega \in S^{n-1}$ に対して $(D)_\omega$ を仮定し, $x_0 \in T(\omega)$ とする.
(i) 十分大きな τ に対して, 次を満たす正の定数 C_ω が存在する.

$$\int_D |\nabla v^0_\tau(x;\omega)|^2\,dx \ge \begin{cases} C_\omega \tau^{1-\frac{2}{m_\omega}} & (n=3), \\ C_\omega \tau^{1-\frac{1}{m_\omega}} & (n=2). \end{cases}$$

(ii) 十分大きな τ に対して, 次を満たす正の定数 K が存在する.

$$\left(\tau \int_{\partial D} |x-x_0|^{q_0(n)} v^0_\tau(x;\omega)\,dS\right)^2 \le \begin{cases} K\tau^{2-\frac{5}{m_\omega}} & (n=3), \\ K\tau^{2-\frac{4-2\epsilon}{m_\omega}} & (n=2). \end{cases}$$

3 証明の概略

Theorem 1 の証明

Proof. まず, Proposition 1 から

$$e^{-2\tau h_D(\omega)}\left(\int_D |D_A v_\tau|^2\,dx - C\int_D |v_\tau|^2\,dx - C\int_{\partial D}|v_\tau|^2\,dS\right) \le e^{-2\tau h_D(\omega)} I^{(\mathrm{D})}_\omega(\tau;0), \tag{3}$$

$$e^{-2\tau h_D(\omega)} I^{(\mathrm{D})}_\omega(\tau;0) \le C e^{-2\tau h_D(\omega)}\left(\int_D |D_A v_\tau|^2\,dx + \int_D |v_\tau|^2\,dx\right). \tag{4}$$

Lemma 1 (i) を使って, (3) (4) を書き直すと, 正の定数 C_j $(j=1,2,3)$ に対して

$$C_1\int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx - C_2\left(\int_D |v_\tau^0|^2\,dx + \int_{\partial D}|v_\tau^0|^2\,dS\right) \le e^{-2\tau h_D(\omega)} I_\omega^{(\mathrm{D})}(\tau;0),$$

$$e^{-2\tau h_D(\omega)} I_\omega^{(\mathrm{D})}(\tau;0) \le C_3\left(\int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx + \int_D |v_\tau^0|^2\,dx\right)$$

をえる. $|\nabla v_\tau^0(x;\omega)| = \tau |v_\tau^0(x;\omega)|$ なので,

$$\frac{\displaystyle\int_D |v_\tau^0|^2\,dx}{\displaystyle\int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx} = O(\tau^{-2}).$$

Grisvard [1] から, 任意の正の ϵ に対して v_τ^0 に独立な $C_\epsilon = C_\epsilon(D)$ がとれて

$$\int_{\partial D} |v_\tau^0|^2\,dS \le \epsilon \int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx + C_\epsilon \int_D |v_\tau^0|^2\,dx. \tag{5}$$

(5) において, 十分小さな ϵ をとると (3) から

$$C_4\int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx - C_5\int_D |v_\tau^0|^2\,dx \le e^{-2\tau h_D(\omega)} I_\omega^{(\mathrm{D})}(\tau;0)$$

をえる. よって,

$$C_6\int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx \le e^{-2\tau h_D(\omega)} I_\omega^{(\mathrm{D})}(\tau;0) \le C_7\int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx. \tag{6}$$

ここで,∂D is C^2 なので十分大きな τ に対して次を満たすような定数 C が存在する (see, Ikehata [3]).

$$\int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx = \tau^2\int_D e^{2\tau(x\cdot\omega - h_D(\omega))}\,dx \ge C \tag{7}$$

$x\in D$ で $x\cdot\omega - h_D(\omega)\le 0$ なので

$$|v_\tau^0(x;\omega)|^2 = e^{2\tau(x\cdot\omega - h_D(\omega))} \le 1 \ (x\in D),$$

となるので

$$\int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx = \tau^2\int_D |v_\tau^0|^2\,dx \le \tau^2|D|. \tag{8}$$

ここで, (6), (7) と (8) から, 十分大きな τ に対して

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\log|I_\omega^{(\mathrm{D})}(\tau;0)|}{2\tau} = h_D(\omega).$$

□

Theorem 2 の証明

Proof. $q = q_0(n)$ として Proposition 2 と Lemma 1 (ii) から次の評価を満たす正の定数 C_j $(j = 8,9,10,11)$ がとれる.

$$C_8\int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx - C_9\left(\tau\int_{\partial D}|x-x_0|^{q_0(n)}|v_\tau^0(x;\omega)|\,dS\right)^2 \le -e^{-2\tau h_D(\omega)} I_\omega^{(\mathrm{R})}(\tau;0),$$

$$-e^{-2\tau h_D(\omega)} I_\omega^{(\mathrm{R})}(\tau;0) \le C_{10}\int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx + C_{11}\left(\tau\int_{\partial D}|x-x_0|^{q_0(n)}|v_\tau^0(x;\omega)|\,dS\right)^2. \tag{9}$$

$v_\tau^0(x;\omega) \le 1$ $(x \in \partial D)$ なので (8) とあわせて (9) の右辺から, 十分大きな τ に対して

$$-e^{-2\tau h_D(\omega)} I_\omega^{(\mathrm{R})}(\tau;0) \le C_{12}\tau^2. \tag{10}$$

一方, Lemma 3 から

$$\frac{\left(\tau\displaystyle\int_{\partial D}|x-x_0|^{q_0(n)}|v_\tau^0(x;\omega)|\,dS\right)^2}{\displaystyle\int_D |\nabla v_\tau^0|^2\,dx} = \begin{cases} O(\tau^{-\frac{3-m_\omega}{m_\omega}}) & (n=3), \\ O(\tau^{-\frac{3-2\epsilon-m_\omega}{m_\omega}}) & (n=2), \end{cases}$$

という評価をえる. $(D)_\omega$ の仮定の下 $m_\omega < 3$ とし, $\epsilon > 0$ とすると $3-2\epsilon-m_\omega > 0$. (3) の左辺に (7) の評価を使うと, 十分大きな τ に対して, 次の評価を満たす正の定数 C_{13} が存在する.

$$C_{13} \le -e^{-2\tau_D(\omega)} I_\omega^{(\mathrm{R})}(\tau;0). \tag{11}$$

よって,(10) と (11) の評価から

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\log|I_\omega^{(\mathrm{R})}(\tau;0)|}{2\tau} = h_D(\omega).$$

□

参考文献

[1] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains,* Pitman Advanced Pub, 1985.

[2] M. Ikehata, *How to draw a picture of an unknown inclusion from boundary measurements,* J. Inv. Ill-Posed Problems, **7** (1999), pp. 255-271.

[3] M. Ikehata, *Reconstruction of the support function for inclusion from boundary measurements,* J. Inv. Ill-Posed Problems, **8** (2000), pp. 367-378.

[4] M. Ikehata, *Two sides of probe method and obstacle with impedance boundary condition,* Hokkaido Math. J., **35** (2006), pp. 659-681.

[5] K. Kurata and R. Yamashita, *Reconstruction of the defect by the enclosure method for inverse problems of the magnetic Schrödinger operator,* (preprint).

1次元半線形波動方程式の古典解の lifespan 評価に対する combined effect *

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
森澤功暁 (Katsuaki MORISAWA)

概要

非線形波動方程式の一般論は、古典解の最大存在時間の下界を初期値の小ささで表現するものである。それは 1990 年代半ばにその最適性とともにほぼ完成していたが、2014 年に種類の異なる非線形項の和が極端に短い存在時間を生み出すという combined effect が発見された。本発表では未解明であった空間1次元の場合を解析した結果を報告する。これは東北大学の高村博之先生と武蔵野大学の佐々木多希子先生との共同研究である。

1 背景と動機

実数値未知関数 $u = u(x,t)$ に対する非線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = H(u, Du, \nabla_x Du) & \text{in} \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \varepsilon f(x),\ u_t(x,0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで、

$$Du := \big(\frac{\partial u}{\partial x_i},\ i = 0,1,\dots,n\big),\ x_0 = t,$$

$$\nabla_x Du := \big(\frac{\partial u}{\partial x_i x_j},\ i,j = 0,1,\dots,n,\ i+j \geq 1\big)$$

とする。更に、$f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ で、$\varepsilon > 0$ は十分小さいパラメータとする。

$$\widehat{\lambda} = (\lambda;\ (\lambda_i), i = 0,1,\dots,n;\ (\lambda_{ij}), i,j, = 0,1,\dots,n,\ i+j \geq 1)$$

と書くとき、 非線形項 $H = H(\widehat{\lambda})$ は、十分滑らかな関数で $\widehat{\lambda} = 0$ の近傍で

$$H(\widehat{\lambda}) = \mathcal{O}(|\widehat{\lambda}|^{1+\alpha})$$

を満たすとする。 ここで α は自然数である。$\widehat{T}(\varepsilon)$ を (1.1) の古典解の lifespan、つまり最大存在時間として以下のように定義する。

$$\widehat{T}(\varepsilon) := \sup\{t > 0 : \text{適当に固定した } (f,g) \text{ に対して (1.1) の古典解 } u(x,t) \text{ が存在する。}\}$$

* この研究は日本学術振興会科学研究費補助金 基盤研究 (B)（課題番号：18H01132、研究代表者：高村博之）の助成を受けて行われたものである。

(1.1) は、$\widehat{T}(\varepsilon)=\infty$ のとき時間大域解をもち、$\widehat{T}(\varepsilon)<\infty$ のときは、時間区間 $[0,\widehat{T}(\varepsilon))$ において時間局所解をもつことを意味する。この設定では、時間局所解に対して、解の一意性より $\lim_{\varepsilon\to+0}\widehat{T}(\varepsilon)=\infty$ となることが予想される。そのときの $\widehat{T}(\varepsilon)$ の下界を α を用いて ε の詳細なオーダーで表現することがここでいう一般論という意味である。

時間大域解の存在を示している $\widehat{T}(\varepsilon)=\infty$ 以外の部分に対しては、非線形項の滑らかさを犠牲にする代わりに詳細な結果が得られる $H=|u_t|^p$ や $H=|u|^q$ などのモデル方程式の爆発解を解析することにより、それらの最適性が証明される。ここでいう最適という意味は、 このような特別な非線形項と特別な初期値を使って、$\widehat{T}(\varepsilon)$ が上から同じ ε のオーダーを持った量で評価されるということである。特に 1 次元の場合、任意の $\alpha\in\mathbb{N}$ に対して $\widehat{T}(\varepsilon)<\infty$、つまり、時間大域解が存在しない為、モデル方程式による最適性の証明が重要である。

本講演では、Morisawa& Sasaki& Takamura[7] の結果から、非線型項を $u_t^p+u^q$ とし、その lifespan を評価することで空間 1 次元の一般論の場合分けが十分でないことを説明する。

2 主結果

空間 1 次元半線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=A|u_t|^p+B|u|^q & \text{in}\quad \mathbb{R}\times(0,\infty),\\ u(x,0)=\varepsilon f(x),\ u_t(x,0)=\varepsilon g(x), & x\in\mathbb{R}\end{cases}\tag{2.1}$$

の古典解を考える。ここで、$u=u(x,t)$ は実数値未知関数で、各定数は $A,B\geq 0$, $p,q>1$ とし、f と g は台コンパクトである滑らかな関数とする。$\varepsilon>0$ は十分小さなパラメータである。以下では $T(\varepsilon)$ を (2.1) の古典解の lifespan として以下のように定義する。

$$T(\varepsilon):=\sup\{t>0:\text{適当に固定した }(f,g)\text{ に対して (2.1) の古典解 }u(x,t)\text{ が存在する。}\}$$

$A=0$ かつ $B>0$ の場合は、Zhou[9] によって次の結果が得られている。

$$T(\varepsilon)\sim\begin{cases} C\varepsilon^{-(q-1)/2} & \Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}}g(x)dx\neq 0\ \text{のとき}\Big),\\ C\varepsilon^{-q(q-1)/(q+1)} & \Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}}g(x)dx=0\ \text{のとき}\Big)\end{cases}\tag{2.2}$$

ここで、$T(\varepsilon)\sim A(\varepsilon,C)$ なる記号は、C_1 と C_2 という ε に無関係な正定数が存在して、不等式 $A(\varepsilon,C_1)\leq T(\varepsilon)\leq A(\varepsilon,C_2)$ を満たすことを表すものとする。

一方、$A>0$ かつ $B=0$ の場合は、

$$T(\varepsilon)\sim C\varepsilon^{-(p-1)}\tag{2.3}$$

が、上からの評価は Zhou[8] で、下からの評価は整数の p に対しては Li&Yu&Zhou[6] で、一般の $p\geq 2$ は Kitamura&Morisawa&Takamura[5] で、それぞれ得られている。

定理 2.1. ([7]) $A,B>0$、$p,q\geq 2$ とする。$\displaystyle\int_{\mathbb{R}}g(x)dx\neq 0$ ならば、次の評価が成り立つ。

$$T(\varepsilon)\sim\begin{cases} C\varepsilon^{-(p-1)} & \big(p\leq\dfrac{q+1}{2}\text{のとき}\big),\\ C\varepsilon^{-(q-1)/2} & \big(\dfrac{q+1}{2}\leq p\ \text{のとき}\big)\end{cases}\tag{2.4}$$

定理 2.2. ([7]) $A, B > 0$、$p, q \geq 2$ とする。$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 0$ ならば、次の評価が成り立つ。

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} C\varepsilon^{-(p-1)} & \left(p \leq \dfrac{q+1}{2} \text{のとき}\right), \\ C\varepsilon^{-p(q-1)/(q+1)} & \left(\dfrac{q+1}{2} \leq p \leq q \text{ のとき}\right), \\ C\varepsilon^{-q(q-1)/(q+1)} & (p \geq q \text{ のとき}) \end{cases} \tag{2.5}$$

注意 2.1. (2.2)、(2.3) から自然な予想として

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} \min\{C\varepsilon^{-(p-1)},\ C\varepsilon^{(q-1)/2}\} & \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)dx \neq 0 \text{ のとき}\right), \\ \min\{C\varepsilon^{-(p-1)},\ C\varepsilon^{-q(q-1)/(q+1)}\} & \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 0 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

が考えられるが、

$$p - 1 < q\frac{q-1}{q+1} \iff p > \frac{q+1}{2}$$

であるので、

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 0$$

かつ $(q+1)/2 < p < q$ の時、定理 2 から

$$T(\varepsilon) \sim C\varepsilon^{-p(q-1)/(q+1)} < \min\{C\varepsilon^{-(p-1)},\ C\varepsilon^{-q(q-1)/(q+1)}\}$$

となり、この予想に反して lifespan が短くなっている。このように $|u_t|^p$ と $|u|^q$ の両方の影響が現れていて lifespan が短くなる現象を Combined effect とよぶ。

注意 2.2. このような Combined effect は初めて Katayama[4] によって空間 2 次元での解の長時間存在に焦点を当てた整数冪のみを扱う一般論構築中に観測され、それが最適であることが Han&Zhou[2] の (1) の解の非存在定理によって一般次元を含む形で証明された。その対となる非整数冪の長時間存在は、空間次元が 2 以上で lifespan 評価を含んで Hidano&Wang&Yokoyama[3] によって得られている。後に、Dai&Fang&Wang[1] によって、その評価の改良が得られている。[1] は同時に空間 1 次元での解の有限時間爆発を全ての指数に対して示しているが、lifespan 評価は導出していない。

3 一般論との比較

今回の主結果 (2.4)、(2.5) が一般論に及ぼす影響を観察するため、1 次元非線形波動方程式の一般論の結果を紹介する。

$n = 1$ のとき、(1.1) の lifespan $\widehat{T}(\varepsilon)$ の下からの評価は Li&Yu&Zhou[6] で以下のようにまとめられている。

$$\widehat{T}(\varepsilon) \geq \begin{cases} c\varepsilon^{-\alpha/2} & (f, g \text{ が一般のとき}), \\ c\varepsilon^{-\alpha(1+\alpha)/(2+\alpha)} & \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 0 \text{ のとき}\right), \\ c\varepsilon^{-\alpha} & (1 + \alpha \leq \forall\beta \leq 2\alpha \text{ に対して } \partial_u^\beta H(0) = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \tag{3.1}$$

ここで c は ε に依らない正定数である。以上が 1 次元非線形波動方程式の一般論の結果である。

ここで、一般論と今回の主結果を比べるため

$$H(u, Du, \partial_x Du) = u_t^p + u^q \ (2 \le p, q \in \mathbb{N})$$

として (3.1) を書き換える。

$p < q$ のとき、$\alpha = p - 1$ であるから

$$\widehat{T}(\varepsilon) \ge \begin{cases} c\varepsilon^{-(p-1)/2} & (f, g \text{ が一般のとき}), \\ c\varepsilon^{-p(p-1)/(p+1)} & \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 0 \text{ のとき}\right), \\ c\varepsilon^{-(p-1)} & \left(p \le \forall\beta \le 2(p-1) \text{ に対して } \partial_u^\beta H(0) = 0 \text{ のとき}\right) \end{cases} \tag{3.2}$$

$p \le (q+1)/2$、つまり、$2p - 1 \le q$ の場合は、$p + 1 \le 2p - 1$ に注意すると

$$\partial_u^\beta \sim u^{q-\beta} \text{ かつ } 2p - 1 - \beta \le q - \beta$$

となって

$$\partial_u^\beta H(0) = 0 \quad \left(p \le \forall\beta \le 2(p-1)\right)$$

を満たす。従って、$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)dx$ がどのような値でも

$$\widehat{T}(\varepsilon) \ge c\varepsilon^{-(p-1)}$$

となる。これは今回の主結果 (2.4)、(2.5) と一致する。

逆に、$p > (q+1)/2$、つまり、$2p - 1 > q(> p)$ の場合は

$$\exists\beta \in \{p+1, \dots, 2p-2\} \ s.t. \ \partial_u^\beta H(0) \ne 0$$

となるから

$$\widehat{T}(\varepsilon) \ge \begin{cases} c\varepsilon^{-(p-1)/2} & \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)dx \ne 0 \text{ のとき}\right), \\ c\varepsilon^{-p(p-1)/(p+1)} & \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 0 \text{ のとき}\right) \end{cases} \tag{3.3}$$

となり、主結果 (2.4)、(2.5) の

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} C\varepsilon^{-(q-1)/2} & \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)dx \ne 0 \text{ のとき}\right), \\ C\varepsilon^{-p(q-1)/(q+1)} & \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 0 \text{ のとき}\right) \end{cases} \tag{3.4}$$

と比べると前者は $p < q$ より、後者は

$$\frac{q-1}{q+1} = 1 - \frac{2}{q+1} > 1 - \frac{2}{p+1} = \frac{p-1}{p+1}$$

より、一般論の結果より今回の主結果 (2.4)、(2.5) の方が解の存在時間が長い。従って、$(q+1)/2 < p < q$ のとき一般論の結果はまだ不十分であることがわかる。

また、$p \geq q$ のとき $\alpha = q-1$ だから

$$\widehat{T}(\varepsilon) \geq \begin{cases} c\varepsilon^{-(q-1)/2} & (f, g \text{ が一般のとき}), \\ c\varepsilon^{-q(q-1)/(q+1)} & \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = 0 \text{ のとき}\right), \\ c\varepsilon^{-(q-1)} & \left(p \leq \forall\beta \leq 2(p-1) \text{ に対して } \partial_u^\beta H(0) = 0 \text{ のとき}\right) \end{cases} \tag{3.5}$$

この 3 番目は、$\beta = q$ で条件を満たさないから存在しない。従って、今回の主結果 (2.4)、(2.5) と一致する。

ゆえに、$(q+1)/2 < p < q$ のとき、今回の主結果 (2.4)、(2.5) は一般論を改良しているといえる。

注意 3.1. 今回の主結果 (2.4)、(2.5) で整数冪が取れることを確かめると

$$u_{tt} - u_{xx} = u_t^4 + u^5$$

のとき、$(p, q) = (4, 5)$ で

$$\frac{q+1}{2} = 3 < p = 4 < q = 5$$

となって実際に一般論を改良している。

4 主結果の証明の概略

証明では、lifespan の下からの評価（長時間存在）に、この分野では標準的な重み付き最大値ノルム空間での逐次近似法を用いる。一般論より良い結果が出た理由は、初期値問題 (2.1) と同値な積分方程式と、それを時間変数に関して微分した積分方程式を連立して、未知関数 u とその時間導関数 u_t にそれぞれ異なる時空の重みを課したことによる。

lifespan の上からの評価（有限時間爆発）には, 未知関数の空間積分量を解析する、いわゆる汎関数法を用いる。多くの部分は二項ある非線形項のうちの一つを取り去った形で簡単に証明できるが、combined effect が発生している場合が特殊で、基本的には Han & Zhou [2] の方法に従い、最後は Takamura [10] による改良された常微分不等式に対する加藤の補題を適用する。

これらの詳細に関しては講演中に触れることにする。

参考文献

[1] W.Dai, D.Fang and C.Wang, *Global exsitence and lifespan for semilinear wave equations with mixed nonlinear terms*, J. Differential Equations 267 (2019), no. 5, 3328-3354.

[2] W.Han and Y.Zhou, *Blow up for some semilinear wave equations in multi-space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations 39 (2014), no. 4, 651-665.

[3] K.Hidano, C.Wang and K.Yokoyama, *Combined effects of two nonlinearities in lifespan of small solutions to semi-linear wave equations*, Math. Ann. 366 (2016), no. 1-2, 667-694.

[4] S.Katayama, *Lifespan of solutions for two space dimensional wave equations with cubic nonlinearity*, Comm. Partial Differential Equations 26 (2001), no. 1-2, 205-232.

[5] S.Kitamura, K.Morisawa and H.Takamura, *Semilinear wave equations of derivative type with spatial weigts in one space dimension*, arXiv:2112.01015,

[6] D.-Q.Li, X.Yu and Y.Zhou, *Life-span of classical solutions to one-dimensional nonlinear wave equations*, A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A 13 (1992), no. 4, 516. Chinese Ann. Math. Ser. B 13 (1992), no. 3, 266-279.

[7] K.Morisawa, T.Sasaki and H.Takamura, *The combined effect in one space dimension beyond the general theory for nonlinear wave equations* , in preparation,
[8] Y.Zhou, *Blow up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear wave equations*, Chinese Ann. Math. Ser. B 22 (2001), no. 3, 275-280.
[9] Y.Zhou,*Life span of classical solutions to* $u_{tt} - u_{xx} = |u|^{1+\alpha}$, Chinese Ann. Math. Ser.B, **13**(1992), 230-243,
[10] H.Takamura, *Improved Kato's lemma on ordinary differential inequality and its application to semilinear wave equations*, Nonlinear Analysis 125 (2015), 227-240.

Existence and nonexistence of global solutions for nonlinear heat equations on a bounded domain

早稲田大学大学院 先進理工学研究科 物理学及応用物理学専攻
喜多 航佑 (Kosuke KITA)

概要

全空間における非線形熱方程式 (藤田方程式) では，方程式の非線形項の冪と藤田指数と呼ばれる空間次元によって定まる数の大小によって初期値問題の正値解の挙動が大きく異なることが知られている．ここでは，有界領域における初期値境界値問題の正値時間大域解の存在・非存在が，前述の藤田方程式の様に非線形項の冪ではなく，境界条件によって特徴付けられることについて考察する．

1 導入

本稿では主に次の放物型方程式について考察する．

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = |u|^{p-2}u, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ (\text{境界条件}), & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

ここで，Ω は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ $\mathbb{R}^N$ の有界領域，或いは全空間 $\Omega = \mathbb{R}^N$ とする．但し，$\Omega = \mathbb{R}^N$ (藤田方程式) の場合は境界条件は考えないものとする．本稿を通して非線形項は優線形，即ち $p > 2$ とし，初期値は常に $u_0 \geq 0$ かつ $u_0 \not\equiv 0$ とする．ここでは先ず，方程式 (1.1) について良く知られた事実を簡単に纏める．尚，本節では解のクラスについては適当に滑らかなものを考える．下記の内容及びその詳細については，[4, 5, 7, 13, 14, 15] 等を参照.

全空間における (1.1) はナビエ・ストークス方程式の研究の為に藤田宏先生によって考案された問題であるが，一様な混合気体の燃焼理論により導出されるモデル方程式でもあり，様々な文脈で現れることが知られている．この方程式の正値解の構造は，非線形項の指数 p によって変わることが [5] によって示された.

定理 1.1 (藤田 [5])**.** $p_F = 2 + \frac{2}{N}$ とする．方程式 (1.1) の正値解について，次が成り立つ.

(i) $2 < p < p_F$ ならば，全ての解は有限時間で爆発する.
(ii) $p_F < p$ ならば，ある初期値に対して解は時間大域的に存在する.

この p_F を藤田指数と呼ぶ．藤田指数は，方程式 (1.1) において拡散項が無い (空間一様な) 常微分方程式の解の爆発のレートと反応項が無い線形熱方程式の解の L^∞ ノルムの減衰のレートが釣り合う指数として形式的に理解できる．尚，ちょうど臨界 ($p = p_F$) の場合は定理 1.1 の (i) と同様に正

値解は爆発することが分かっている．符号変化解を許すと正と負の部分の相互作用により，解の爆発を抑制する可能性が生じ正値解の場合とは同様とならない場合が起こり得る．空間 1 次元 ($N = 1$) の場合については [11, 12] を参照.

領域 Ω が有界の場合は，代表的な境界条件として以下のものが考えられる．

$$u = 0, \qquad t > 0,\ x \in \partial\Omega, \quad \text{(斉次ディリクレ境界条件)}, \tag{1.2}$$

$$\partial_\nu u = 0, \qquad t > 0,\ x \in \partial\Omega, \quad \text{(斉次ノイマン境界条件)}. \tag{1.3}$$

ここで，ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルであり，∂_ν は法線微分を表す．斉次ディリクレ境界条件と斉次ノイマン境界条件は，それぞれ吸収壁境界条件・反射壁境界条件とも呼ばれている．斉次ディリクレ境界条件下での (1.1) は適当に小さな初期値に対して時間大域解が存在することが知られている．一方で斉次ノイマン境界条件下においては (1.1) の任意の正値解は有限時間で爆発する (cf. [13])．全空間の藤田方程式と異なり，有界領域における非線形熱方程式の解の挙動に対しては，非線形項の指数よりも寧ろ，境界条件が重要な役割を担っていると考えられる．

上記のことから，有界領域における非線形熱方程式に対して全空間の藤田方程式に対する藤田臨界指数の結果に対応する臨界現象を明らかにするには，ある意味で斉次ディリクレ境界条件と斉次ノイマン境界条件の “間” となるような境界条件を考えるのが自然であると考えた．ここで最も単純な斉次ディリクレ境界条件と斉次ノイマン境界条件を繋ぐ境界条件として次のロバン境界条件が知られている．

$$\partial_\nu u + \lambda u = 0, \qquad t > 0,\ x \in \partial\Omega, \quad \text{(ロバン境界条件)}. \tag{1.4}$$

ここで $\lambda > 0$ は正定数である．このロバン境界条件は境界における熱放射が線形であることを表している．形式的には $\lambda \to 0$ で斉次ノイマン境界条件，$\lambda \to +\infty$ で斉次ディリクレ境界条件と見做すことが出来る．ところが如何なる小さな $\lambda > 0$ に対しても，十分小さな初期値の下で (1.4) 下での (1.1) の解は時間大域的に存在する事が示される．即ち，この意味でロバン境界条件はディリクレ境界条件に近いという事が分かる．以上より，有界領域における (1.1) の時間大域な正値解の存在・非存在に関する臨界現象はロバン境界条件では見出すことが出来ない．(或いは斉次ノイマン境界条件がちょうど臨界の場合と捉えざるを得ない．)

本稿ではロバン境界条件とは異なる観点から有界領域における非線形熱方程式の臨界現象について考察する．結果を述べる前に，非線形境界条件の枠組みで問題を定式化する．先ず，極大単調作用素と劣微分作用素について簡単に説明する．詳しくは [1, 2] などを参照．内積 $(\cdot,\cdot)_H$ を持つヒルベルト空間 H 上の多価作用素 $A : H \to 2^H$ を考える．作用素 A の定義域を $D(A) := \{x \in H\,;\, Ax \neq \emptyset\}$ とする．このとき，そのグラフ $G(A) := \{(x, y) \in G(A)\,;\, x \in D(A), y \in Ax\}$ が

$$(x_1 - x_2, \xi_1 - \xi_2)_H \geq 0, \qquad \forall (x_1, \xi_1), \forall (x_2, \xi_2) \in G(A)$$

を満たすとき，作用素 A が単調 (monotone) であるという．さらに，単調作用素 A が如何なる単調拡張も持たないとき (単調作用素としての拡張が自分自身のみの場合)，A は極大単調 (maximal monotone) 作用素という．次に，$\Phi(H)$ で H 上の適正凸下半連続汎函数 $\phi : H \to (-\infty, +\infty]$ 全体の集合とする．ここで ϕ が適正とは ϕ の有効領域 $D(\phi) := \{u \in H\,;\, \phi(u) < +\infty\}$ が空でないこと

をいう．このとき，$\phi \in \Phi(H)$ と各 $u \in D(\phi)$ に対して，ϕ の u での劣微分 $\partial\phi(u)$ を

$$\partial\phi(u) = \{f \in H\,;\, \phi(v) - \phi(u) \geq (f, v-u)_H, \quad \forall v \in D(\phi)\}$$

と定める．また，$\partial\phi : H \to 2^H$ を定義域を $D(\partial\phi) := \{u \in D(\phi)\,;\, \partial\phi(u) \neq \emptyset\}$ とする多価作用素とし，これを劣微分作用素と呼ぶ．一般に劣微分作用素は極大単調作用素となることが知られている．

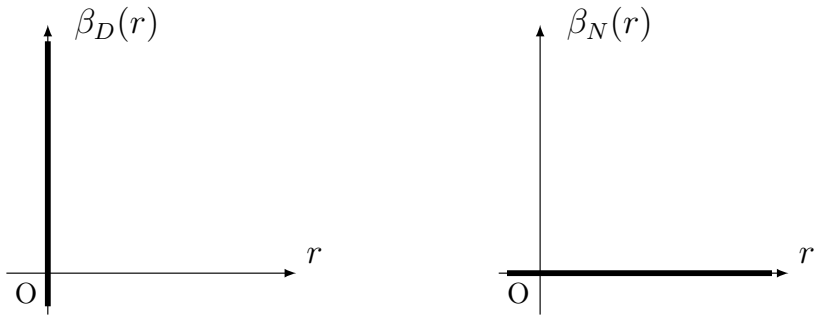
有界領域における (1.1) を改めて次のように書き直す．

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = |u|^{p-2}u, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ -\partial_\nu u \in \beta(u), & t > 0,\ x \in \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{P}$$

ここで，β は $\beta(0) \ni 0$ を満たす $\mathbb{R}$ 上の極大単調作用素であり，ある適正凸下半連続函数 $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ の劣微分を用いて $\beta = \partial j$ と書ける．一般には β は多価作用素であることに注意．当然，$\beta(r) = 0$ 或いは $\beta(r) = \lambda r$ とすれば (P) の境界条件はそれぞれ斉次ノイマン境界条件 (1.3)，ロバン境界条件 (1.4) となる．(以下，$\beta_N(r) = 0$ とする．) また，

$$\beta_D(r) := \begin{cases} \mathbb{R}, & r = 0, \\ \emptyset, & r \neq 0, \end{cases}$$

とおけば，$\beta = \beta_D$ のとき (P) は斉次ディリクレ境界条件に対応する．



本稿では，$\beta = \beta_D$ のときの (P) を $(\mathrm{P})_D$ ，$\beta = \beta_N$ のときの (P) を $(\mathrm{P})_N$ と表すことにする．また，有界領域における (P) の解の挙動に関する上記の事実を踏まえて，次の言葉を導入する．

定義 1.2. 方程式 (P) の解の極大存在時間を T_m と表す．

(i) 方程式 (P) が *D-type* $\iff$ $\exists u_0 \in L^\infty_+(\Omega)$; $T_m = +\infty$.
(ii) 方程式 (P) が *N-type* $\iff$ $\forall u_0 \in L^\infty_+(\Omega)$, $T_m < +\infty$.

但し，$L^\infty_+(\Omega) = \{v \in L^\infty(\Omega)\,;\, v \geq 0, v \neq 0\}$ である．

明らかに $(\mathrm{P})_D$ は D-type であり，$(\mathrm{P})_N$ は N-type である．

注意 1.3. 方程式 (P) は $u_0 \in L^\infty_+$ に対して，次のクラスの非負の一意局所解を持つ事が非線形発展方程式の抽象論の応用から示される．証明については [9, 10] を参照．

$$u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; L^\infty(\Omega)), \quad \partial_t u, \Delta u \in L^2(0,T; L^2(\Omega)).$$

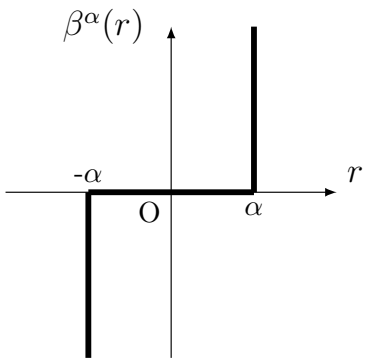
2 主結果

再度，問題と設定を明らかにしておく．本節以下では次の問題を考察する．

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = |u|^{p-2}u, & t>0,\ x\in\Omega, \\ -\partial_\nu u \in \beta^\alpha(u), & t>0,\ x\in\partial\Omega, \\ u(0,x)=u_0(x), & x\in\Omega. \end{cases} \tag{P}_\alpha$$

ここで，$\Omega\subset\mathbb{R}^N$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とし，ν でその外向き単位法線ベクトルを表すものとする．さらに，β^α は $\alpha>0$ をパラメーターとする以下で定義される極大単調グラフとする．

$$\beta^\alpha(r)=\begin{cases} (-\infty,0], & r=-\alpha, \\ 0, & |r|<\alpha \\ [0,+\infty), & r=\alpha, \\ \emptyset, & |r|>\alpha. \end{cases}$$



ここで，$\alpha\to 0$ で $\beta^\alpha\to\beta_D$，$\alpha\to+\infty$ で $\beta^\alpha\to\beta_N$ となることに注意．即ち，$\alpha=0$ で $(\mathrm{P})_\alpha$ は $(\mathrm{P})_D$ ，$\alpha=+\infty$ で $(\mathrm{P})_\alpha$ は $(\mathrm{P})_N$ と見做せる．主結果は以下の通りである．

定理 2.1. ある $\alpha_c\in(0,+\infty)$ が存在して，次が成り立つ．

(i) $\alpha<\alpha_c$ ならば $(\mathrm{P})_\alpha$ は *D-type.*
(ii) $\alpha>\alpha_c$ ならば $(\mathrm{P})_\alpha$ は *N-type.*

3 証明の概略

主定理の証明には非線形境界条件を伴う放物型方程式に対する比較定理を用いる．(第 15 回数学総合若手研究集会のテクニカルレポート [8] や [10] を参照．) 以下にその比較定理を簡単に述べる．次の初期値境界値問題を考える．

$$\mathrm{NBC}(f,\beta,a;T) \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(u), & t>0,\ x\in\Omega, \\ -\partial_\nu u \in \beta(u), & t>0,\ x\in\partial\Omega, \\ u(0,x)=a(x), & x\in\Omega. \end{cases}$$

簡単のため，ここでは各記号の設定は以前のセクションと同じものとする．また，$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は一価の写像である．初期値を $a\in L^\infty(\Omega)$ とし，$T>0$ は $\mathrm{NBC}(f,\beta,\gamma,a;T)$ の解の極大存在時間とする．ここでは，$\mathrm{NBC}(f,\beta,\gamma,a;T)$ の解を $C([0,T);L^2(\Omega))\cap W^{1,2}_{loc}((0,T);L^2(\Omega))\cap L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))$ のクラスに属する強解と定める．(注意 1.3 を参照．)

定理 3.1. *u_i をそれぞれ $\mathrm{NBC}(f_i,\beta_i,a_i;T_i)$ $(i=1,2)$ の強解とする．以下を仮定する．*

(A1) $a_1\le a_2$ *a.e.* in Ω,

(A2) (i) $\sup\{b_2\,;\,b_2\in\beta_2(r_2)\}\le\sup\{b_1\,;\,b_1\in\beta_1(r_1)\}\quad \forall r_1\in D(\beta_1),\,\forall b_2\in D(\beta_2)$ *with* $r_1>r_2$,
or
(ii) $r_1\le r_2\qquad \forall r_1\in D(\beta_1),\,\forall r_2\in D(\beta_2)$.

(A3) $F_1\le F_2$ *a.e.* in $\mathbb{R}$ かつ F_1 と F_2 の少なくとも一方は局所 *Lipschitz* 連続.

このとき，次が成立する．

$$u_1(t,x)\le u_2(t,x)\qquad \forall t\in[0,T],\quad a.e.\ x\in\Omega.$$

ここで，$T=\min(T_1,T_2)$ とする．

証明の流れは以下の通りである．

$$\alpha_0:=\inf\{\alpha>0\,;\,(\mathrm{P})_\alpha \text{ is N-type.}\}$$

Step 1: $\alpha_0<\infty$.
Step 2: $\alpha>\alpha_0$ ならば $(\mathrm{P})_\alpha$ は N-type.
Step 3: $\alpha_0>0$.
Step 4: $\alpha<\alpha_0$ ならば $(\mathrm{P})_\alpha$ は D-type.

各ステップは適当な比較函数を用いて比較定理より示される．最後に $\alpha_c=\alpha_0$ として定理の主張を得る．

参考文献

[1] V. Barbu, "*Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces*", Springer Monographs in Mathematics, 2010.

[2] H. Brézis, "*Opérateurs Maximaux Monotones et Semigroupes de Contractions dans Espace de Hilbert*," North Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1973.

[3] H. Brezis; T. Cazenave; Y. Martel; A. Ramiandrisoa, Blow up for $u_t-\Delta u=g(u)$ revisited, *Adv. Differential Equations*, **1** (1996), no. 1, 73-90.

[4] M. Fila (下條昌彦 記), 非線形熱方程式の爆発問題入門：Marek Fila 氏講義録, 東京大学数理科学レクチャーノート, **10**, 2011.

[5] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t=\Delta u+u^{1+\alpha}$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.*, **I 13** (1966), 109–124.

[6] K. Hayakawa, On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations,*Proc. Japan Acad.*, **49** (1973), 503–505.

[7] 石毛和弘・溝口紀子, 非線形熱方程式の爆発問題について, 数学, **56** (2004), 182-192.

[8] 喜多航佑, 非線形境界条件に支配される放物型方程式に対する比較定理とその応用について, *Hokkaido University technical report series in mathematics*, **176** (2019), 319-324.

[9] K.Kita; M. Ôtani, Bounds for global solutions of nonlinear heat equations with nonlinear boundary conditions, *Libertas Math. (N.S.)*, **41** (2021), 1-22.

[10] K.Kita; M. Ôtani, On a comparison theorem for parabolic equations with nonlinear boundary conditions, *Adv. Nonlinear Anal.*, accepted. (arXiv:2109.01803)

[11] N. Mizoguchi; E. Yanagida, Critical exponents for the blow-up of solutions with sign changes in a semilinear parabolic equation, *Math. Ann.*, **307** (1997), no. 4, 663-675.

[12] N. Mizoguchi; E. Yanagida, Critical exponents for the blowup of solutions with sign changes in a semilinear parabolic equation. II, *J. Differential Equations*, **145** (1998), no. 2, 295-331.

[13] P. Quittner; P. Souplet, *Superlinear Parabolic Problems, Blow-up, Global Existence and Steady States,* 2nd ed., Birkhäuser Basel, 2019.

[14] 柳田英二, 藤田型方程式の大域解の挙動, 数学 **63** (2011), 85-102.

[15] 柳田英二, 反応拡散方程式, 東京大学出版会, 2015.

パラレルセッション
会場 D

作用素のベクトルへの作用に関する Krylov 部分空間法

NTT ネットワークサービスシステム研究所 /
慶應義塾大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻
橋本悠香 (Yuka HASHIMOTO)

概要

近年，時系列データ解析の手法のひとつとして，データが非線形力学系から生じたものと考え，その力学系の時間発展を表す線形作用素（Perron-Frobenius 作用素）を推定することで解析を行う方法が注目を集めている．Perron-Frobenius 作用素は，Hilbert 空間上の線形作用素として定義されるため，これを推定するための Krylov 部分空間法が利用できる．一般的には，線形作用素をあるベクトルへ作用させたものを Krylov 部分空間上で近似する問題となる．本稿では，Krylov 部分空間法として Shift-invert Arnoldi 法を適用した場合の収束性解析を行う．

本稿は慶應義塾大学の野寺隆氏との共同研究 [1] に基づく．

1 序論

Krylov 部分空間法は，線形作用素の振る舞いを近似する方法として様々な研究が行われてきた．Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素 A とベクトル $v \in \mathcal{H}$ に対して，m 次元 Krylov 部分空間 $\mathcal{K}_m(A, v)$ は以下のように定義される．

$$\mathcal{K}_m(A, v) = \mathrm{Span}\{v, Av, \ldots, A^m v\}$$

ただし，$\{v, Av, \ldots, A^m v\}$ は一次独立であるとする．

一方，近年，時系列データ解析の手法のひとつに，データが非線形力学系から生じたものと考え，力学系の時間発展を表す Perron-Frobenius 作用素を推定する方法が注目を集めている．例えば，状態空間 $\mathcal{X}$ 上の離散力学系 $x_{t+1} = h(x_t)$ に対する Perron-Frobenius 作用素 K は，RKHS と呼ばれる無限次元 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の線形作用素として，次式のように定義できる [2, 3].

$$K\phi(x) = \phi(h(x))$$

ただし，$\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{H}$ は特徴写像と呼ばれ，通常，有限次元空間である $\mathcal{X}$ を無限次元空間 $\mathcal{H}$ へ移すものである．Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ の元 $\phi(x)$ と $\phi(y)$ の内積は positive definite kernel と呼ばれる関数により，厳密に計算が可能となる．また，力学系 $x_{t+1} = h(x_t)$ から生じた観測データ $x_0, \ldots, x_{m-1}$ に対して，$\phi(x_0), \phi(x_1) = K\phi(x_0), \ldots, \phi(x_{m-1}) = K^{m-1}\phi(x_0)$ が張る空間 $\mathcal{K}_m(K, \phi(x_0))$ は，Krylov 部分空間となる．このため，無限次元空間上で定義された Perron-Frobenius 作用素 K を推定するための Krylov 部分空間法が，与えられた有限個のデータのみから実行可能となる [2, 4]．すなわち，ある時刻における観測データから，将来の時刻に観測されるであろうデータ予測に利用できる．これは，観測データ z に対して，作用素ベクトル積 $K^n\phi(z)$ を $\mathcal{K}_m(K, \phi(x_0))$ 上で近似する問題となる．

Perron-Frobenius 作用素 K は非有界になる例も知られており [5]，その場合，空間 $\mathcal{K}_m(K, \phi(x_0))$ を用いる方法（Arnoldi 法）は収束性が保証されない．そこで，K の代わりに有界作用素 $(\gamma I - K)^{-1}$ に対する Kryov 部分空間を構成する Shift-invert Arnoldi 法が提案されている [4]．ただし，γ は，K のスペクトル集合に含まれない複素数である．本稿では，作用素ベクトル積の Shift-invert Arnoldi 法による近似の収束性解析を行う．

2　作用素ベクトル積のための Shift-invert Arnoldi 法

$\mathcal{H}$ を可分な Hilbert 空間とし，K を $\mathcal{H}$ 上の線形作用素，$v \in \mathcal{H}$ とする．本節では，自然数 n に対して，$K^n v$ を近似する Shift-invert Arnoldi 法 [4] を考える．γ を K のスペクトル集合に含まれない複素数，$Z = (\gamma I - K)^{-1}$ とし，初期ベクトル $u_0 \in \mathcal{H}$，$i = 1, \ldots, m$ に対して，$u_i = Z u_{i-1}$ とする．QR 分解により $u_0, \ldots, u_{m-1}$ を正規直交化し，$[u_0, \ldots, u_{m-1}] = Q_m R_m$ を満たす $Q_m : \mathbb{C}^m \to \mathcal{H}$，$R_m \in \mathbb{C}^{m \times m}$ を求める．ただし，Q_m は，正規直交基底 $\{q_0, \ldots, q_{m-1}\}$ により，$Q_m = [q_0, \ldots, q_{m-1}]$ となる．線形作用素 $Q_m Q_m^*$ は，$\mathcal{H}$ から $u_0, \ldots, u_{m-1}$ の張る空間（Krylov 部分空間）への射影作用素になる．よって，$\tilde{L}_m = Q_m^* Z Q_m$ とすると，$\tilde{L}_m$ は，Z を Krylov 部分空間へ射影した作用素の行列表現で，R_m が可逆ならば，次式が得られる．

$$\tilde{L}_m = Q_m^* [u_1, \ldots, u_m] R_m^{-1}$$

Shift-invert Arnoldi 法による $K^n v$ の近似は，$\tilde{L}_m$ が可逆な時，次式で与えられる．

$$K^n v \approx Q_m f(\tilde{L}_m) Q_m^* v := a_m^{\mathrm{SIA}} \tag{1}$$

ただし，$f(x) = (\gamma - x^{-1})^n$ である．

3　収束性解析

本節では，Shift-invert Arnoldi 法による近似 (1) の収束性解析を行う．線形作用素 K が非有界であるとき，0 は Z のスペクトルである．一方で，f は 0 において解析的ではないので，$f(\tilde{L}_m)$ を K の近似と考えて直接的に解析するのは難しい．そこで，f の代わりに，0 において解析的な関数 $g(x) = x^n(\gamma x - 1)^{-n}$ を用いる．ベクトル $K^n v$ の近似 a_m の残差を $\mathrm{res}(a_m) = \|K^{-n} a_m - v\|$ と定める．Krylov 部分空間を修正し，$w_0 \in \mathcal{H}$ に対して，$Z^{m-n-1} w_0, \ldots, Z w_0, w_0, K^{-1} w_0, \ldots, K^{-n} w_0$ が張る空間 $\mathcal{V}$ 上での Shift-invert Arnoldi 法を考える．残差の $\mathcal{V}$ 上の最小値を r_m とすると，定理 3.1 を得る．ただし，$W(Z)$ は Z の値域を表し，$\rho > 0$ と $r > \rho$ に対して $\overline{\mathbb{C}} \setminus W(Z)$ から $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{|x| \le \rho\}$ への等角写像 α を用いて，Γ_r を $\alpha = r$ の等高線の内部とする．さらに，$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Gamma_r} |f(x)|$ と定めることにする．

定理 3.1　$m \ge 2n+1$ とする．また，0 は K のスペクトル集合に含まれないとする．n 次 多項式 q_n と $m-n-1$ 次多項式 $\tilde{q}_{m-n-1}$ を，$q_n(K^{-1}) w_0 + \tilde{q}_{m-n-1}(Z) w_0 = a_m^{\mathrm{SIA}}$ により定める．関数 g は Γ_r で解析的とし，ある $C > 0$ が存在して $\|q_n(K^{-1}) w_0\| \le C$ を満たすものとする．このとき，ある

$C' > 0$ が存在して，a_m^{SIA} の残差と残差の最小値 r_m との差は，次式のように評価できる．

$$\| \operatorname{res}(a_m^{\mathrm{SIA}}) - r_m \| \leq C' \frac{(\rho/r)^m}{1-\rho/r}$$

残差の最小値 r_m は m の増加と共に減少していくため，m を十分大きくとれば，a_m^{SIA} の残差は m の増加とともに減少することになる．

4 結 論

本稿では，作用素ベクトル積の Shift-invert Arnoldi 法による近似の収束性解析を行い，残差が Krylov 部分空間の次元の増加とともに減少していくことを示した．

参考文献

[1] Hashimoto, Y. and Nodera, T., Krylov subspace methods for estimating operator-vector multiplications in Hilbert spaces, Japan J. Indust. Appl. Math. Vol. 38 (2021) 781–803.

[2] Kawahara, Y., Dynamic Mode Decomposition with Reproducing Kernels for Koopman Spectral Analysis, In NeurIPS 2016 (2016) 911–919.

[3] Klus, S., Schuster, I., and Muandet, K, Eigendecompositions of Transfer Operators in Reproducing Kernel Hilbert Spaces, J. Nonlinear. Sci. Vol. 30 (2020) 283–315.

[4] Hashimoto, Y., Ishikawa, I., Ikeda, M., Matsuo, Y., and Kawahara, Y., Krylov Subspace Method for Nonlinear Dynamical Systems with Random Noise, JMLR Vol. 21 (2020) 172:1–29.

[5] Ikeda, M., Ishikawa, I., and Sawano, Y., Composition Operators on Reproducing Kernel Hilbert Spaces with Analytic Positive Deinite Functions, arXiv:1911.11992 (2019).

不動点定理と計算量理論

九州大学大学院 数理学府 数理学専攻
石塚天 (Takashi ISHIZUKA)

概要

計算量クラス TFNP は，解の存在が保証された計算量クラスである．TFNP の難しさを議論するとき，数学における存在定理（鳩の巣原理，握手補題，不動点定理など）が活用される．Nash 均衡と Brouwer の不動点が一致するという事実から，不動点計算問題の難しさは社会科学・計算機科学の双方から注目されている．本発表では，講演者の結果を交えつつ，不動点定理と計算量理論の関係を紹介する．

1 はじめに

アルゴリズム（algorithm）とは，計算問題を解く手法をひとつひとつ示したものである．多くの場合，アルゴリズムの効率性は，『P vs. NP 問題』の文脈で議論される．これは，ミレニアム懸賞問題のひとつであり，数学・理論計算機科学双方の分野における最重要未解決問題である．

計算量理論とは，計算問題の難しさを定量的に評価し，効率的なアルゴリズムの有無を明確にする研究分野である．計算問題には，大きく分けてふたつの形式がある．ひとつは，Yes/No で答えることが可能な判定問題である．もうひとつは， 具体的な解を出力する探索問題である．以下に具体例を示す：

判定問題　自然数 N は素数であるか？
探索問題　自然数 N を割り切る素数 p は何か？

前者の問題は，Yes/No で答えることができる；自然数 N が素数であるか否かは，一意に定まる．一方で，後者の問題を Yes/No で答えることは不適切である．具体的な自然数（より正確には素数）を提示する必要がある．

計算量クラス P と NP は，判定問題に関するクラスである．Papadimitriou [20] は，『P vs. NP 問題』を探索問題の文脈で，等価な『FP vs. FNP 問題』へと拡張した．

探索問題は，『与えられた入力に対する適切な解を見つける問題』として定式化される計算問題である．本稿では，以下のふたつの条件を満たす探索問題を扱う：

1. 解のサイズは，入力長の多項式サイズである；
2. 解の妥当性は，多項式時間で判定できる．

上記のふたつの条件を満たす探索問題を多項式時間限定探索問題と呼ぶ．本稿では，多項式時間限定探索問題しか扱わないため，これらを単に探索問題と呼ぶことにする．計算量クラス FNP は，探索問

題全体のクラスである．探索問題が完備性（totality）を持つとは，次の条件を満たすときをいう：

- 任意の入力に対して，少なくともひとつの解が存在する．

完備性を満たす探索問題のことを完備探索問題と呼ぶ．計算量クラス TFNP は，完備探索問題全体のクラスである．

探索問題の計算量理論では，一般的に TFNP の部分クラスの複雑さに焦点をあてる．Papadimitriou [20] は，完備性の証明方法に基づき，探索問題をいくつかのクラスへ分類した．代表的な計算量クラスは，PPAD, PPA, PPP などである（詳細については，[15] を参照すること）．

多くの場合，探索問題の計算量理論の研究動機は，応用的な側面 — 実社会に現れる計算問題の解決 — から来ることが多い．局所最適解を求める問題 [17] や，経済モデルの均衡点を求める問題 [7, 25]，公平な配分・割り当てを求める問題 [14, 18, 22] などである．これらの問題は，いずれも解の妥当性検証が容易であり，常に解を有するような問題である．一方で，効率的な計算手法が確立されていない問題となる．

本稿の目的は，不動点定理と計算量理論の関係を紹介することにある．特に，『不動点定理によって存在が保証された不動点を計算する問題（不動点計算問題）』の難しさに関する一連の研究の流れを紹介する．

2　探索問題の計算量理論

2.1　準備

ここでは，本稿で使用する記号や用語を導入する．なお，計算量理論に関する基本的な事項は，標準的な教科書を参照されたい（たとえば，[1, 21, 23] など）．

本稿では，自然数は 0 を含まないものとし，自然数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表す．さらに，非負整数全体の集合を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ で表し，非負実数全体の集合を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ で表す．また，実数全体の集合を $\mathbb{R}$ でかく．自然数 n に対して，$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ と定める．ふたつの相異なる実数 $a < b$ に対して，$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,;\, a \leq x \leq b\}$ とする．

有限集合 Σ を『文字』の集合とする．直感的には，計算機で扱うことが可能な『文字』の集まりと捉えればよい．一般性を失うことなく，$\Sigma = \{0, 1\}$ を仮定してよい（証明は，標準的な計算理論の教科書を参照すること）．文字列とは，『文字』の有限列である．つまり，任意の文字列 s に対して，適切な自然数 n が存在して，$s = s_1 s_2 \cdots s_n$ と書くことができる；ここで，$s_i \in \Sigma\ \forall i \in [n]$．このとき，$n$ を文字列 s の長さ（あるいは，文字列長）と呼ぶ．文字列 s の長さを $|s|$ で表す．自然数 n に対して，Σ^n で，長さ n の文字列全体の集合を表す．さらに，Σ^* で，文字列全体の集合を表す．

2.2　探索問題とは？

関係 $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ が，$|y| \leq \mathrm{poly}(|x|)\ \forall (x, y) \in R$ を満たすとき，多項式バランスをもつという．また，R が多項式時間検証可能であるとは，$(x, y) \in R$ を多項式時間で判定できるときをいう．関係 R が完備であるとは，すべての入力 $x \in \Sigma^*$ に対して，少なくともひとつの解 $y \in \Sigma^*$ such that

$(x, y) \in R$ が存在するときをいう．以下，本稿では，多項式バランスかつ多項式時間検証可能な関係 $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ のみを考える．

いま，R, S を探索問題とする．探索問題 R から S への多項式時間帰着 $R \leq_P S$ は，ふたつの多項式時間計算可能函数 f, g で次のように定められる：R の各入力 I_R に対して，$f(I_R)$ は S の入力である；さらに，$f(I_R)$ に対応する適切な解 y について，$g(y, I_R)$ は，I_R に対する適切な解である．

計算量クラス $\mathcal{C}$ に対して，探索問題 R が $\mathcal{C}$ 困難であるとは，$\mathcal{C}$ に属するすべての探索問題 S から，R への多項式時間帰着が存在するときをいう．さらに，$\mathcal{C}$ 困難である探索問題 R が，計算量クラス $\mathcal{C}$ に属するとき，R は $\mathcal{C}$ 完全であるという．

関係 $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ に関する探索問題を次のように定める：

定義 2.1 (Papadimitriou [20])**.** Given a string $x \in \Sigma^*$, find a string $y \in \Sigma^*$ such that $(x, y) \in R$ if such a y exists, and return the string "*no*" otherwise.

計算量クラス FNP は，多項式時間検証可能かつ多項式バランスをもつ関係 $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ に関する探索問題で構成されるクラスである．計算量クラス TFNP は，完備な関係 R で構成される計算量クラス FNP の部分クラスである．計算量クラス FP は，多項式時間で探索問題を解くことが可能な計算量クラスである．定義から明らかに次の関係が成り立つ．

命題 2.2. $\mathtt{FP} \subseteq \mathtt{TFNP} \subseteq \mathtt{FNP}$.

これらの包含関係が, 真であるか, 等号が成立するか, は重要な未解決問題である．特に, $\mathtt{FP} \stackrel{?}{=} \mathtt{FNP}$ は，ミレニアム懸賞問題のひとつである $\mathtt{P} \stackrel{?}{=} \mathtt{NP}$ と等価な問いである．

定理 2.3 (Megiddo and Papadimitriou [19])**.** $\mathtt{FP} = \mathtt{FNP}$ *if and only if* $\mathtt{P} = \mathtt{NP}$.

3　不動点定理と計算量理論

本章では，連続探索問題の複雑さを扱う．つまり，実数値函数が入力として与えられ，望みの実数値解を出力する問題である．この問題を定式化するため，算術回路 (Arithmetic Circuit) を導入する．本稿における算術回路の定義は，Daskalakis and Papadimitriou [8] と同じである．

3.1　Arithmetic Circuit

函数 $f : [0,1]^n \to [0,1]^m$ を計算する算術回路は，変数でラベル付された n 個の入力ゲート，有理数でラベル付された幾つかの入力ゲートと，m 個の出力ゲートを持つ非巡回有効グラフである．全ての内部ノードは，二部ゲートであり，次の演算のいずれかでラベル付されている：$\{+, -, *, \max, \min, >\}$；ここで，演算 $>$ は，入力 $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ に対して，$x > y$ のとき 1 を出力し，それ以外は 0 を出力する．

算術回路の入力と出力は，$[0,1]$ 区間上に制限する．出力が負値をとるとき，算術回路の出力を 0 で再定義する．一方で，出力が 1 を超えるとき，算術回路の出力を 1 で再定義する．算術回路 C の

サイズ[*1]を $\mathtt{size}(C)$ でかく．

上記の算術回路の定義は，[8] に基づく．しかし，これには若干の問題が含まれている．それは，算術回路が多項式時間で計算できない可能性である．それどころか，多項式時間階層に含まれているかすら定かではない．

計算量クラス FNP に属する探索問題を考えるためには，算術回路に幾つかの制約を課す必要がある．Daskalakis and Papadimitriou [9] は，この問題を解決する訂正手法を提案した．本稿では，彼らによる制約ではなく，Fearnley et al. [12] によって提案された手法を用いる．彼らの定式化は，Daskalakis and Papadimitriou [9] による定式化と等価であるだけでなく，幾つかのアドバンテージを有している．

算術回路 C が，*well-behaved* であるとは，次の条件を満たすときをいう：

- 出力に到達するすべての有向パスは，高々 $\log(\mathtt{size}(C))$ 個の真乗算ゲート（*true multiplication gate*）を含む；

ここで，真乗算ゲートは，ふたつの入力が共に定数ノードでない乗算ゲートのことである．Fearnley et al. [12] は，連続探索問題の入力を well-behaved arithmetic circuit に制限することで，計算量クラス FNP に属する計算問題を定式化した．前述したとおり，Daskalakis and Papadimitriou [9] による定式化に比べて，well-behaved arithmetic circuit を用いた定式化は，次のふたつのアドバンテージを有する：

1. 余分な入力・出力を追加する必要がない；
2. 与えられた算術回路が，well-behaved であるかどうかは容易に検証できる．

3.2 不動点計算問題の難しさ

算術回路を用いた計算問題で最も興味深い問題は，不動点計算問題 — 不動点定理で存在が保証された不動点を求める問題 — である．基本的に，不動点計算問題は，遷移函数 $f : [0,1]^3 \to [0,1]^3$ を計算する算術回路と近似パラメータ $\varepsilon > 0$ を入力として受け取り，$x \in [0,1]^3$ such that $\|f(x) - x\|_\infty \leq \varepsilon$ を出力する問題として定式化される．ただし，完備性を満たすために幾つかの『違反』も会として認めている．たとえば，定義 3.1 で紹介する計算問題 Brower では，連続性に反する点を回として認めている．

本章では，不動点計算問題の難しさに関する研究の流れを紹介する．

Brouwer の不動点定理

最も有名な不動点計算問題は，Brouwer の不動点計算問題である．これは，Brouwer の不動点定理 [4] によって存在が保証された不動点を実際に計算する問題である．形式的には次のように定式化される：

[*1] サイズとは，算術回路 C を表現するために必要なビット長を意味する．このビット長には，C で使用される定数を表現するためのビットも含まれる．

定義 3.1. BROWER

Input:

- two parameters $\varepsilon, \lambda > 0$;
- an arithmetic well-behaved arithmetic circuit computing $f : [0,1]^3 \to [0,1]^3$.

Task: Find one of the following:

- a point $x \in [0,1]^3$ such that $\|f(x) - x\|_\infty \leq \varepsilon$;
- two points $x, y \in [0,1]^3$ such that $\|f(x) - f(y)\|_\infty > \lambda \|x - y\|_\infty$.

ここで，函数の連続性は Lipschitz 連続を用いて保証している．これは完備性を満たすために要求している条件である．Brouwer の不動点定理の主張と，解が満たすべき条件を比較すると計算問題 BROUWER が完備探索問題であることが分かる．

Papadimitriou [20] は，計算問題 BROUWER が PPAD 完全問題であることを示した．この計算問題は 1 次元では，容易に — 多項式時間で — 解くことができるが，2 次元では PPAD 完全問題となる [6].

Brouwer の不動点定理の難しさは，様々な問題の PPAD 完全性の証明に応用されている．たとえば，Nash 均衡計算問題の難しさが PPAD 完全であることは，Brouwer の PPAD 完全性に基づいて証明されている [6, 20].

Banach の不動点定理（縮小写像の不動点定理）

続いて，Banach の不動点定理 [2] に関連する計算問題の難しさを紹介する．計算問題 BANACH は，計算問題 BROUWER において，パラメータ（Lipschitz 定数）λ が，$0 < \lambda < 1$ を満たすことを要求した計算問題である．形式的な定義は下記のとおり：

定義 3.2. BANACH

Input:

- a parameter $\varepsilon >$;
- a parameter $0 < \lambda > 1$;
- an arithmetic well-behaved arithmetic circuit computing $f : [0,1]^3 \to [0,1]^3$.

Task: Find one of the following:

- a point $x \in [0,1]^3$ such that $\|f(x) - x\|_\infty \leq \varepsilon$;
- two points $x, y \in [0,1]^3$ such that $\|f(x) - f(y)\|_\infty > \lambda \|x - y\|_\infty$.

Daskalakis and Papadimitriou [8] は，計算問題 BANACH が計算量クラス PPAD ∩ PLS に属することを示した．しかし，この計算問題が完全問題であるかどうかは未解決である．より正確には，ℓ_p-norm について，計算問題 BANACH が PPAD ∩ PLS 困難であるか，が未解決である [12]．前述で，

ℓ_p-norm を持ち出したことには訳がある．計算問題 Banach の入力において，距離を計算する算術回路を付加することで，この問題は PPAD ∩ PLS 完全問題となる [10, 13].

Caristi の不動点定理

Caristi の不動点定理 [5] は，Banach の不動点定理の一般化として知られている．

定義 3.3. Caristi

Input:

- three parameters $\varepsilon, \eta, \lambda > 0$;
- two arithmetic well-behaved arithmetic circuits computing $f : [0,1]^3 \to [0,1]^3$ and $\varphi : [0,1]^3 \to [0,1]$.

Task: Find one of the following:

- a point $x \in [0,1]^3$ such that $\|f(x) - x\|_\infty \leq \varepsilon$;
- a point $x \in [0,1]^3$ such that $\eta\|x - f(x)\|_\infty > \varphi(x) - \varphi(f(x))$;
- two points $x, y \in [0,1]^3$ such that $|\varphi(x) - \varphi(y)| > \lambda\|x - y\|_\infty$.

計算問題 Caristi では，遷移函数 $f : [0,1]^3 \to [0,1]^3$ に加えて，ポテンシャル函数 $\varphi : [0,1]^3 \to [0,1]$ も入力として受け取る．また，遷移函数 f が Lipschitz 連続であることは，要求していない．一方で，ポテンシャル函数 φ が Lipschitz 連続であることを要求する．Caristi の不動点定理 [5] から，上記の問題は完備探索問題である[*2].

Ishizuka [16] は，計算問題 Caristi が PLS 完全問題であることを示した．計算量クラス PLS は，局所探索アルゴリズムで解くことが可能な計算問題全体の集合であり，Johnson et al. [17] によって導入された．[16] で示されるまで，不動点定理よる計算量クラス PLS の特徴付けは知られていなかった．

Brøndsted の不動点定理

Brøndsted の不動点定理 [3] は，Caristi の不動点定理の類似であり，同様に Banach の不動点定理の一般化である．Caristi の不動点定理では，ポテンシャル函数が Lipschitz 連続であることを要求した．Brøndsted の不動点定理では，ポテンシャル函数が連続であることは要求しない．一方で，遷移函数は連続であることを要求する．形式的には，次のように定式化する：

[*2] 厳密には， Caristi の不動点定理のオリジナルの主張 [5] では，ポテンシャル函数が下半連続であればよい．Brouwer の不動点定理同様に，入力が要求に反していることを多項式時間で検証できることを保証するために，Lipschitz 連続であることを要求している

定義 3.4. Brøndsted

Input:

- two parameter $\varepsilon, \eta, \lambda > 0$;
- two arithmetic well-behaved arithmetics circuit computing $f : [0,1]^3 \to [0,1]^3$ and $\varphi : [0,1]^3 \to [0,1]$.

Task: Find one of the following:

- a point $x \in [0,1]^3$ such that $\|f(x) - x\|_\infty \leq \varepsilon$;
- a point $x \in [0,1]^3$ such that $\eta\|x - f(x)\|_\infty > \varphi(x) - \varphi(f(x))$;
- two points $x, y \in [0,1]^3$ such that $\|f(x) - f(y)\|_\infty > \lambda\|x - y\|_\infty$.

定義から明らかに，計算問題 Brøndsted は計算量クラス PPAD に属する．なぜなら，計算問題 Brøndsted は，計算問題 Brouwer を用いて解くことができる．また，PPAD ∩ PLS 困難問題であることも知られている [16]．しかし，どちらのクラスの完全問題となるかは未解決問題である．

Tarski の不動点定理

最後に Tarski の不動点定理 [24] に関する計算問題の難しさを紹介する．Tarski の不動点定理も，前述の Caristi の不動点定理や Brøndsted の不動点定理と同様に，順序集合上の不動点定理である．これまで，算術回路に基づく不動点定理が続いたが，Tarski の不動点定理は，通常の Boolean 回路に基づく定義ができる．形式的には，次のように定める：

定義 3.5. Tarski

Input:

- a Boolean circuit computing $f : [N]^d \to [N]^d$.

Task: Find one of the following:

- a point $x \in [N]^d$ such that $f(x) = x$;
- two points $x, y \in [N]^d$ such that $x \preceq y$ and $f(x) \not\preceq f(y)$.

ここで，$x \preceq y$ は，すべての座標 $i \in [d]$ において，$x_i \leq y_i$ が成り立つことを意味する．

Etessami et al. [11] は，計算問題 Tarski が計算量クラス PPAD ∩ PLS に属することを示した．しかし，PPAD ∩ PLS 困難であるかどうかは分かっていない．

4 おわりに

本稿では，不動点計算問題の難しさに関する最新の研究状況を紹介した．不動点計算問題に関する一連の研究の流れで，筆者の貢献は次のふたつである：

- 計算問題 Caristi が PLS 完全問題であることを示した；
- 計算問題 Brøndsted が，計算量クラス PPAD に含まれ，計算量クラス PPAD ∩ PLS 困難であることを示した．

これらの成果は，[16] に掲載されている．

現在（2021 年 12 月中旬），不動点計算問題の研究で抱えている未解決問題は以下の通りである：

- 計算問題 Banach は，PPAD ∩ PLS 完全問題であるか？
- 計算問題 Brøndsted は，PPAD 完全問題であるか，それとも PPAD ∩ PLS 完全問題であるか？
- 計算問題 Tarski は，PPAD ∩ PLS 完全問題であるか，それとも計算量クラス EOPL に含まれるか？

最後に，本稿で紹介した不動点計算問題はいずれも『弱近似』を求める計算問題である．これらの計算問題とは別に，『強近似』を求める計算問題の難しさも考えられている．函数 $f : [0,1]^3 \to [0,1]^3$ に対する ε-弱近似とは，$\|f(x) - x\| \leq \varepsilon$ を満たす $x \in [0,1]^3$ である．一方で，ε-強近似とは，$\|x^* - x\| \leq \varepsilon$ を満たす $x \in [0,1]^3$ である；ここで，$x^* \in [0,1]^*$ は函数 f の不動点である．すなわち，$f(x^*) = x^*$ を満たす．弱近似と強近似の違いについては， Yannakakis のサーベイ論文 [25] を参照することをおすすめする．

謝辞

筆者の研究の一部は，JSPS 科研費 21J10845 および JST，ACT-X，JPMJAX2101 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] S. Arora and B. Barak. Computational Complexity: A Mordern Approach. *Cambridge University Press*, 2009.

[2] S. Banach: Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales. *Fund. Math.*, Vol. 3, pp. 133—181, 1922.

[3] A. Brøndsted. on a lemma of Bishop and Phelps. *Pac. J. Math.* Vol. 55(2), pp. 335–341, 1974.

[4] L. E. J. Brouwer. Uber Abbildung von Mannigfaltikeiten. *Mathematicshe Annalen*, Vol. 71, pp. 97–115, 1912.

[5] J. Caristi. Fixed point theorems for mapping satisfying inwardness conditions. *Trans. Am. Math. Soc.* Vol. 215, pp. 241–251, 1976.

[6] C. Chen and X. Deng. On the complexity of 2D discrete fixed point problem. *Theor. Comput. Sci.* Vol. 410(44), pp. 4448–4456, 2009.

[7] C. Daskalakis. Nash equilibria: Complexity, symmetries, and approximation. *Comput. Sci. Rev.*, Vol. 3, pp. 87–100, 2009.

[8] C. Daskalakis and C. Papadimitriou. Continuous local search. In Proc. of *SODA*, ACM, pp. 790-804, 2011.

[9] C. Daskalakis and C. Papadimitriou. Continuous local search — corrigendum. 2020.

[10] C. Daskalakis, C. Tzamos, and M. Zampetakis. A converse to Banach's fixed point theorem and its CLS-completeness. In Proc. of *STOC*, AMC, pp. 447–530, 2018.

[11] K. Ettesami, C. Papadimitriou, A. Rubinstein, and M. Yannakakis. Tarski's theorem, supermodular games, and the complexity of equilibria. In Proc. of *ITCS*, Vol. 151, pp. 18:1–18:19. 2020.

[12] J. Fearnley, P. W. Goldberg, A. Hollender, R. Savani. The complexity of gradient descent: $\texttt{CLS} = \texttt{PPAD} \cap \texttt{PLS}$. In Proc. of *STOC*, ACM, pp. 46–59, 2021.

[13] J. Fearnley, S. Gordon, R. Mehta, and R. Savani. CLS: new problems and completeness. *arXiv preprint*, 2017.

[14] A. Filos-Ratsikas and P. W. Goldberg. The Complexity of Splitting Necklaces and Bisecting Ham Sandwiches. In Proc. of *STOC*, pp. 638–649, 2019.

[15] P. W. Goldberg and P. H. Papadimitriou. TFNP: An Update. In Proc. of *CIAC*, pp. 3–9, 2021.

[16] T. Ishizuka. On the complexity of finding a Caristi's fixed point. *Inf. Process. Lett.*, Vol. 170, 2021.

[17] D. S. Johnson, C. H. Papadimitriou, and M. Yannakakis. How easy is local search? *J. Comput Syst. Sci.*, Vol. 37(1), pp. 79–100, 1988.

[18] S. Kintali, L. J. Poplawski, R. Rajaraman, R. Sundaram, and S.-H. Teng. Reducibility among Fractional Stability Problems. SIAM *J. Comput.*, Vol. 42(6), pp. 2063—2113, 2013.

[19] N. Megiddo and C. H. Papadimitriou. On total fucntions, existence theorems and computational complexity. *Theor. Comput. Sci.* Vol. 81(2), pp. 317–324, 1991.

[20] C. H. Papadimitriou. On the complexity of the parity argument and inefficient proofs of existence. *J. Comput. Syst. Sci.*, Vol. 48(3), pp. 498–532, 1994.

[21] C. H. Papadimitriou. Computational Complexity. *Addison-Wesley*, 1994.

[22] P. Schnider. The Complexity of Sharing a Pizza. In Proc. of *ISAAC*, 2021.

[23] M. Sipser. Introduction to the theory of computation. *PWS Publishing Company*, 1997.

[24] A. Tarski. A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applictions. *Pac. J. Math.*, Vol. 5(2), pp. 285–309, 1955.

[25] M. Yannakakis. Equilibria, fixed points, and complexity classes. *Comput. Sci. Rev.*, Vol. 3, pp. 71–85, 2009.

Bessel house-moving の構成と諸性質

東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻
簗島瞬 (Shun Yanashima)

概 要

δ 次元 Bessel 過程は 1 次元拡散過程の一つで, δ が自然数の場合には δ 次元 Brown 運動のユークリッドノルムとその法則が一致することが知られており, 様々な分野で研究が進められてきた. 本稿では, 時刻 1 で初めて所与の値に到達する δ 次元 Bessel 過程を δ **次元 Bessel house-moving** と呼ぶことにし, その 2 つの構成方法とサンプルパスの性質について紹介する. 本稿は石谷謙介氏, 林徳福氏との共同研究の内容に基づく.

1 準備

本節では, 主結果を理解するために必要と思われる事項を紹介する.

1.1 連続確率過程, Brown 運動, Markov 過程

確率過程は, 時間変化に対して確率的に値が変化する現象をモデル化するための数学的な道具として, 物理学や経済学, 情報科学等様々な分野で利用されている. その中でも, 値の変化が連続的であるものを連続確率過程と呼び, 次のように定義される.

区間 $[t_1, t_2]$ 上の連続関数全体を $C([t_1, t_2], \mathbb{R})$ で表し, ノルム

$$\|f\| := \sup_{u \in [t_1, t_2]} |f(u)| \quad (f \in C([t_1, t_2], \mathbb{R}))$$

から定まる位相に関する Borel 集合族を $\mathcal{B}(C([t_1, t_2], \mathbb{R}))$ で表す.

定義 1.1 (連続確率過程)**.** 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の $C([t_1, t_2], \mathbb{R})$-値確率変数, すなわち $\mathcal{F}/\mathcal{B}(C([t_1, t_2], \mathbb{R}))$-可測関数を, 実数値連続確率過程と呼ぶ.

連続確率過程 X に対し, $\omega \in \Omega$ を固定するごとに連続関数 $t \mapsto X(t, \omega)$ が定まる.

定義 1.2 (サンプルパス)**.** 連続確率過程 X に対し, $\omega \in \Omega$ を固定したときの連続関数 $t \in [t_1, t_2] \mapsto X(t, \omega)$ を, X のサンプルパスと呼ぶ.

一方で, 連続確率過程 X に対し, $t \in [t_1, t_2]$ を固定したとき, 関数 $\omega \in \Omega \mapsto X(t, \omega)$ は実数値可測関数となることがわかる. そこで, 確率論においては連続確率過程 X を, t で添字付けられた実数値確率変数の族として, $X = \{X(t)\}_{t \in [t_1, t_2]}$ と書く.

連続確率過程の代表的な例として, Brown 運動がある:

例 1.3 (Brown 運動)**.** $a \in \mathbb{R}$ に対し, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の連続確率過程 $W = \{W(t)\}_{t \in [t_1, t_2]}$ が次を満たすとき, a 出発の Brown 運動 (Wiener 過程) と呼ぶ:

1. $P(W(t_1) = a) = 1$.

2. 任意の $n = 1, 2, \ldots$ と任意の $t_1 \leq s_0 < s_1 < \cdots < s_n \leq t_2$ に対し, 増分 $\{W(s_i) - W(s_{i-1})\}_{i=1,2,\ldots,n}$ は独立で, それぞれ平均 0, 分散 $s_i - s_{i-1}$ の正規分布に従う.

なお, 一般に時刻の区間が $[0, \infty)$ である連続確率過程, Brown 運動を考えることができるが, 本稿では有限区間の場合のみ扱う.

本稿で扱う確率過程 (Bessel 過程, Bessel bridge, Bessel house-moving) はすべて連続確率過程であり, かつ Markov 過程と呼ばれるクラスに属する. Markov 過程とは, 「次に起こる事象の確率が現在の状態のみで決まり, 過去の振る舞いには依存しないような確率過程」であり, 数学的には次のように推移密度関数を用いて定式化できる:

定義 1.4 (推移密度関数)**.** 関数 $(t, x, B) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} \times \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mapsto p(t, x, B) \in \mathbb{R}$ が以下を満たすとき, $p(t, x, B)$ を $\mathbb{R}$ 上の推移密度関数という:

(1) $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}$ を固定するとき, $p(t, x, \cdot)$ は確率測度.

(2) $(t, B) \in [0, \infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ を固定するとき, $p(t, \cdot, B)$ は可測.

(3) $p(0, x, B) = \delta_x(B)$ (ただし δ_x は x における Dirac 測度).

(4) Chapman-Kolmogorov の等式:

$$\int p(s, y, B) p(t, x, dy) = p(t + s, x, B).$$

定義 1.5 (Markov 過程)**.** $a \in \mathbb{R}$ とする. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値確率過程 $X = \{X(t)\}_{t \geq 0}$ と, $\mathbb{R}$ 上の推移密度関数 $p(t, x, B)$ が次を満たすとき, X を密度関数 $p(t, a, dy)$ と推移密度関数 $p(t - s, x, dy)$ をもつ a 出発の Markov 過程と呼ぶ: $0 < s < t,\ x, y \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned} &P(X(t) \in dy) = p(t, a, dy), \\ &P(X(t) \in dy \mid X(s) = x) = p(t - s, x, dy). \end{aligned}$$

$\mathbb{R}$ 上の推移密度関数 $p(t, x, B)$ と $a \in \mathbb{R}$ が与えられたとき, 密度関数 $p(t, a, dy)$ と推移密度関数 $p(t - s, x, dy)$ をもつ a 出発の Markov 過程を構成できることが知られている ([1]).

1.2 Bessel 過程, Bessel bridge

以下では $\delta > 0$ とし, $\nu = \frac{\delta}{2} - 1$ とおく. また, $0 \leq a < b$ とする.

生成作用素 $L_\delta := \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\delta - 1}{2x} \frac{d}{dx}$ をもつ 1 次元拡散過程を δ 次元 Bessel 過程と呼ぶ. a 出発の δ 次元 Bessel 過程を $R^a = \{R^a(t)\}_{t \geq 0}$ で表す.

$\delta \in \mathbb{N}$ のとき, δ 次元 Bessel 過程は, δ 次元 Brown 運動の原点からの距離と法則が一致する.

a 出発の δ 次元 Bessel 過程 $R^a = \{R^a(t)\}_{t \geq 0}$ は, 次の密度関数と推移密度関数をもつ連続 Markov 過程である: $0 < s < t,\ x, y > 0$ に対し

$$\begin{aligned} &P(R^a(t) \in dy) = 2\pi y \left(\frac{y}{a}\right)^\nu A_t^{(\nu)}(a, y) dy, \\ &P(R^a(t) \in dy \mid R^a(s) = x) = 2\pi y \left(\frac{y}{x}\right)^\nu A_{t-s}^{(\nu)}(x, y) dy. \end{aligned}$$

ただし

$$n_t(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right),$$
$$I_\nu(z) := \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k\in\mathbb{Z}_+, \nu+k+1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-} \frac{\left(\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)},$$
$$A_t^{(\nu)}(x,y) := n_t(x)n_t(y)I_\nu\left(\frac{xy}{t}\right)$$

である. $I_\nu(z)$ は第 1 種の変形 Bessel 関数である.

到達点を固定した δ 次元 Bessel 過程は, δ 次元 Bessel bridge と呼ばれている. $[t_1,t_2]\subset[0,1]$ 上の a 出発 b 到達の δ 次元 Bessel bridge を $r^{a\to b}_{[t_1,t_2]} = \{r^{a\to b}_{[t_1,t_2]}(t)\}_{t\in[t_1,t_2]}$ で表す. $t_1=0, t_2=1$ の場合は $r^{a\to b}$ と略記する.

δ 次元 Bessel bridge $r^{a\to b}_{[t_1,t_2]} = \{r^{a\to b}_{[t_1,t_2]}(t)\}_{t\in[t_1,t_2]}$ は, 次で与えられる密度関数と推移密度関数をもつ連続 Markov 過程である: $t_1<s<t<t_2,\ x,y\in(0,b)$ に対し

$$P\left(r^{a\to b}_{[t_1,t_2]}(t)\in dy\right) = \frac{2\pi y A_t^{(\nu)}(a,y)A^{(\nu)}_{t_2-t_1-t}(y,b)}{A^{(\nu)}_{t_2-t_1}(a,b)}dy,$$
$$P\left(r^{a\to b}_{[t_1,t_2]}(t)\in dy \mid r^{a\to b}_{[t_1,t_2]}(s)=x\right) = \frac{2\pi y A^{(\nu)}_{t-s}(x,y)A^{(\nu)}_{t_2-t_1-t}(y,b)}{A^{(\nu)}_{t_2-t_1-s}(x,b)}dy.$$

δ 次元 Bessel bridge の最大値分布について, 次が成り立つ:

命題 1.6 (I-R-Y, cf. [2])**.** $0\le s<t\le 1,\ x,y\in[0,c)$ に対し

$$P\left(\max_{u\in[s,t]}(r^{x\to y}_{[s,t]}(u))\le c\right)$$
$$= \frac{1}{\pi A^{(\nu)}_{t-s}(x,y)}\sum_{n=1}^\infty \frac{J_\nu\left(xj_{\nu,n}/c\right)J_\nu\left(yj_{\nu,n}/c\right)}{c^2J^2_{\nu+1}(j_{\nu,n})}\exp\left(-\frac{j^2_{\nu,n}}{2c^2}(t-s)\right).$$

ただし

$$J_\nu(z) := \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu \sum_{k\in\mathbb{Z}_+,\nu+k+1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_-}\frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$$

であり, $0<j_{\nu,1}<j_{\nu,2}<\cdots$ は $J_\nu(z)$ の零点である. $J_\nu(z)$ は第 1 種の *Bessel* 関数である.

この結果と項別微分定理, 有界収束定理により次が従う:

系 1.7 (I-R-Y)**.** $0\le s<t,\ y\in[0,b)$ に対し

$$\lim_{\eta\downarrow b}\frac{\partial}{\partial\eta}P\left(\max_{u\in[s,t]}r^{y\to b}_{[s,t]}(u)\le\eta\right)$$
$$= \frac{1}{\pi A^{(\nu)}_{t-s}(y,b)}\sum_{n=1}^\infty\frac{j_{\nu,n}J_\nu\left(yj_{\nu,n}/b\right)}{b^3J_{\nu+1}(j_{\nu,n})}\exp\left(-\frac{j^2_{\nu,n}}{2b^2}(t-s)\right).$$

2 Bessel house-moving の構成

δ 次元 Bessel house-moving とは, a 出発で時刻 1 で初めて b に到達する δ 次元 Bessel 過程のことである. 3 次元 Bessel house-moving は [3] で既に構成方法が与えられており, 本研究では δ 次元への一般化を行なった. 以下では, δ 次元 Bessel house-moving の 2 つの構成方法を紹介する.

$\eta > 0$ と $0 \leq s < t \leq 1$, $x, y \in [0, \eta]$ に対して, 次の記号を定義する：

$$\begin{aligned} q_1^{(\eta)}(s,x,t,y) :=& \frac{P\left(R^x(t-s) \in dy\right)}{dy} P\left(\max_{u\in[s,t]}(r_{[s,t]}^{x\to y}(u)) \leq \eta\right) \\ =& 2y\left(\frac{y}{x}\right)^{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu\left(xj_{\nu,n}/\eta\right) J_\nu\left(yj_{\nu,n}/\eta\right)}{\eta^2 J_{\nu+1}^2(j_{\nu,n})} \exp\left(-\frac{j_{\nu,n}^2}{2\eta^2}(t-s)\right), \\ q_2^{(\eta)}(t,y) :=& \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} q_1^{(\eta+\varepsilon)}(0,y,t,\eta) = \frac{P\left(R^y(t) \in d\eta\right)}{d\eta} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\partial}{\partial\varepsilon} P\left(\max_{u\in[0,t]}(r_{[0,t]}^{y\to\eta}(u)) \leq \eta+\varepsilon\right) \\ =& 2\left(\frac{\eta}{y}\right)^{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{\nu,n} J_\nu\left(yj_{\nu,n}/\eta\right)}{\eta^2 J_{\nu+1}(j_{\nu,n})} \exp\left(-\frac{j_{\nu,n}^2}{2\eta^2}t\right). \end{aligned}$$

2.1 構成方法 1: Bessel 過程の first hitting time を用いた構成

a 出発の δ 次元 Bessel 過程 $R^a = \{R^a(t)\}_{t\geq 0}$ の b への first hitting time を $\tau_{a,b}$ で表す：

$$\tau_{a,b} := \inf\{r \geq 0 \mid R^a(r) = b\}.$$

まず, δ 次元 Bessel 過程の first hitting time を用いた定式化は次の通りである：

定理 2.1. 連続 Markov 過程 $H^{a\to b} = \{H^{a\to b}(t)\}_{t\in[0,1]}$ で, 次をみたすものが存在する：$0 < s < t < 1$, $x, y \in (0, b)$ に対し,

$$\begin{aligned} P\left(H^{a\to b}(t) \in dy\right) &= P\left(R^a(t) \in dy \mid \tau_{a,b} = 1\right), \\ P\left(H^{a\to b}(t) \in dy \mid H^{a\to b}(s) = x\right) &= P\left(R^a(t) \in dy \mid R^a(s) = x, \tau_{a,b} = 1\right). \end{aligned}$$

$H^{a\to b} = \{H^{a\to b}(t)\}_{t\in[0,1]}$ を, a 出発 b 到達の δ **次元 Bessel house-moving** とよぶ.

定理の証明は次の 2 つの命題による. まず, 命題 2.2 では

$$P\left(R^a(t) \in dy \mid \tau_{a,b} = 1\right), \qquad P\left(R^a(t) \in dy \mid R^a(s) = x, \tau_{a,b} = 1\right)$$

の具体表示を計算する.

命題 2.2. $0 < s < t < 1$, $x, y \in (0, b)$ に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned} P\left(R^a(t) \in dy \mid \tau_{a,b} = 1\right) &= \frac{q_1^{(b)}(0,a,t,y) q_2^{(b)}(1-t,y)}{q_2^{(b)}(1,a)} dy, \\ P\left(R^a(t) \in dy \mid R^a(s) = x, \tau_{a,b} = 1\right) &= \frac{q_1^{(b)}(s,x,t,y) q_2^{(b)}(1-t,y)}{q_2^{(b)}(1-s,x)} dy. \end{aligned}$$

$0 \leq s < t \leq 1$, $x, y \in [0, b]$ に対し,

$$h_b(s,x,t,y) := \frac{q_1^{(b)}(s,x,t,y) q_2^{(b)}(1-t,y)}{q_2^{(b)}(1-s,x)}.$$

命題 2.3. $0 < s < t < u < 1,\ x, z \in (0, b)$ に対し,

$$\int_0^b h_b(0, a, t, y)dy = 1, \quad \int_0^b h_b(s, x, t, y)dy = 1,$$
$$h_b(s, x, u, z) = \int_0^b h_b(s, x, t, y)\ h_b(t, y, u, z)dy.$$

この命題より, $h_b(0, a, t, y)dy, h_b(s, x, t, y)dy$ は, $\mathbb{R}$ 上の密度関数と推移密度関数となることがわかる. したがって, $h_b(0, a, t, y)dy, h_b(s, x, t, y)dy$ を密度関数と推移密度関数にもつ連続 Markov 過程として $H^{a\to b}$ を実現でき, 定理 2.1 が示される.

2.2 構成方法 2: 条件付 Bessel bridge の弱収束を用いた構成

δ 次元 Bessel house-moving は, 条件付 δ 次元 Bessel bridge の弱収束極限としても構成可能であり, 以下ではこのことを説明する. まず, 「条件付」の意味を明確にするため, 次の記号を定義する.

記号 2.4. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間とし, Y を $(\Omega, \mathcal{F})$ から $(C([0,1], \mathbb{R}), \mathcal{B}(C([0,1], \mathbb{R})))$ への可測写像とする. $P(Y \in \Lambda) > 0$ をみたす $\Lambda \in \mathcal{B}(C([0,1], \mathbb{R}))$ に対し, 可測空間 $(Y^{-1}(\Lambda), Y^{-1}(\Lambda) \cap \mathcal{F})$ 上の確率測度 $P_{Y^{-1}(\Lambda)}$ を

$$P_{Y^{-1}(\Lambda)}(A) := \frac{P(A)}{P(Y \in \Lambda)} \quad (A \in Y^{-1}(\Lambda) \cap \mathcal{F} := \{Y^{-1}(\Lambda) \cap F \mid F \in \mathcal{F}\})$$

で定める. $\Gamma \in Y^{-1}(\Lambda) \cap \mathcal{F}$ に対して $P_{Y^{-1}(\Lambda)}(Y|_\Lambda \in \Gamma)$ のことを単に $P(Y|_\Lambda \in \Gamma)$ と書く.

また, 弱収束の一般的な定義は次である:

定義 2.5 (弱収束)**.** $X_n\ (n = 1, 2, \ldots), X$ を距離空間 (S, ρ) に値を取る確率変数とする. 任意の有界連続関数 $f : S \to \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} E[f(X_n)] = E[f(X)]$$

が成り立つとき, $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ は X に弱収束 *(*法則収束*)* するといい,

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \quad (n \to \infty)$$

と表す.

$0 \le t_1 < t_2 \le 1$ に対して

$$K^-_{[t_1,t_2]}(b + \eta) := \{w \in C([t_1, t_2], \mathbb{R}) \mid w(t) \le b + \eta, t_1 \le t \le t_2\}$$

とおく. このとき, 条件付 δ 次元 Bessel bridge の弱収束極限としての定式化は次の通りである:

定理 2.6 (I-R-Y)**.** a 出発 b 到達の条件付 δ 次元 Bessel bridge の族 $\{r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}\}_{\eta>0}$ に対し, 連続 Markov 過程 $H^{a\to b} = \{H^{a\to b}(t)\}_{t\in[0,1]}$ が存在して

$$r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)} \xrightarrow{\mathcal{D}} H^{a\to b} \quad (\eta \downarrow 0).$$

この $H^{a\to b}$ は構成方法 1 で得られた δ 次元 Bessel house-moving と一致する. なお, $\delta = 3$ の場合は, [3] において定理 2.6 が得られている.

連続確率過程の弱収束について, 次が知られている:

定理 2.7 (Chapter 2, Theorem 4.15 in [4])**.** 実数値の連続確率過程 $X_n = \{X_n(t)\}_{t\in[0,1]}$ $(n = 1,2,\ldots), X = \{X(t)\}_{t\in[0,1]}$ が次の 2 条件を満たすとする*:*

1. 有限次元分布の収束*:* 任意の時刻の列 $0 \le t_1 < \cdots < t_d \le 1$ $(d \in \mathbb{N})$ に対し*,*

$$(X_n(t_1),\ldots,X_n(t_d)) \xrightarrow{\mathcal{D}} (X(t_1),\ldots,X(t_d)) \quad (n\to\infty)$$

2. 緊密性*:* 任意の $\varepsilon > 0$ に対してあるコンパクト集合 $K \subset C([0,1],\mathbb{R})$ が存在して

$$P(X_n \in K) \ge 1-\varepsilon \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

このとき*,*

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X \quad (n\to\infty)$$

が成り立つ*.*

次の 2 つの命題からそれぞれ有限次元分布の収束, 緊密性がわかる:

命題 2.8 (I-R-Y)**.** $0 < s < t < 1,\ x, y \in (0,b)$ に対し*,*

$$\lim_{\eta\downarrow 0} P\left(r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}(t) \in dy\right) = \frac{q_1^{(b)}(0,a,t,y)q_2^{(b)}(1-t,y)}{q_2^{(b)}(1,a)}dy,$$

$$\lim_{\eta\downarrow 0} P\left(r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}(t) \in dy \mid r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}(s) = x\right) = \frac{q_1^{(b)}(s,x,t,y)q_2^{(b)}(1-t,y)}{q_2^{(b)}(1-s,x)}dy.$$

連続 Markov 過程では, 密度関数と推移密度関数の各点収束から有限次元分布の収束がわかる. したがって, この定理より, $r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}$ の有限次元分布は, $H^{a\to b}$ の有限次元分布に収束する.

命題 2.9 (I-R-Y)**.** $\eta_0 > 0$ とする.

1. 任意の $u \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ に対し*,* $\{\pi_{[u,1-u]} \circ r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}\}_{\eta\in(0,\eta_0)}$ は緊密.

2. 任意の $\xi > 0$ に対し*,* $u \downarrow 0$ のとき

$$\sup_{\eta\in(0,\eta_0)} P\left(\sup_{0\le t\le u} |r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}(t) - r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}(0)| > \xi\right) \to 0,$$

$$\sup_{\eta\in(0,\eta_0)} P\left(\sup_{1-u\le t\le 1} |r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}(t) - r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}(1)| > \xi\right) \to 0.$$

この命題より, 族 $\{r^{a\to b}|_{K^-(b+\eta)}\}_{0<\eta<\eta_0}$ の緊密性がわかる. したがって, 定理 2.7 より定理 2.6 が従う.

3 Bessel house-moving のサンプルパスの性質

2 節では δ 次元 Bessel house-moving の 2 つの構成方法を紹介した. 本節では, 構成した δ 次元 Bessel house-moving のサンプルパスの性質に関する結果を紹介する.

まず, サンプルパスの局所 Hölder 連続性に関する次の命題を得た:

命題 3.1 (I-R-Y)**.** 任意の $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$ に対し, δ 次元 Bessel house-moving $H^{a\to b}$ のサンプルパスは次の意味で局所 Hölder 連続*:*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\sup_{\substack{t,s\in[0,1]\\0<|t-s|\le\frac{1}{n}}}\frac{\left|H^{a\to b}(t)-H^{a\to b}(s)\right|}{|t-s|^{\gamma}}<\infty\right\}\right)=1.$$

次に, δ 次元 Bessel house-moving のサンプルパスの分解公式を紹介する. そのためにまず, $w_1 \in C([t_1, t], \mathbb{R})$ と $w_2 \in C([t, t_2], \mathbb{R})$ が $w_1(t) = w_2(t)$ をみたすとき, $w_1 \oplus_t w_2 \in C([t_1, t_2], \mathbb{R})$ を次式で定義する：

$$(w_1 \oplus_t w_2)(s) := \begin{cases} w_1(s), & s \in [t_1, t], \\ w_2(s), & s \in [t, t_2] \end{cases}.$$

このとき, δ 次元 Bessel house-moving のパスの分解公式は次の通りである.

定理 3.2. $C([0,1], \mathbb{R})$ 上の任意の有界連続関数 F に対し, 次式

$$E\left[F(H^{a\to b})\right] = \int_0^b E\left[F(r^{a\to y}_{[0,t]}|_{K^-_{[0,t]}(b)} \oplus_t H^{y\to b}_{[t,1]})\right] P\left(H^{a\to b}(t) \in dy\right) \quad (0 < t < 1)$$

が成立する. ただし, $r^{a\to y}_{[0,t]}|_{K^-_{[0,t]}(b)}$ と $H^{y\to b}_{[t,1]}$ は独立であるとする.

なお, このサンプルパスの分解公式を証明するためには, 定理 2.6 の構成方法が必要となる.
定理 3.2 の系として, 次が成り立つ:

系 3.3 (I-R-Y)**.** 任意の $t \in (0, 1)$ に対し,

$$P\left(\max_{0\le u\le t} H^{a\to b}(u) < b\right) = 1.$$

4 まとめ

a $(a \ge 0)$ 出発で時刻 1 で初めて b $(b > a)$ に到達する δ 次元 Bessel 過程 (Bessel house-moving) の 2 つの構成方法を紹介した:

- 構成方法 1: Bessel 過程の first hitting time を用いた構成
- 構成方法 2: 条件付 Bessel bridge の弱収束を用いた構成

また, この 2 つの構成方法と証明中で用いた結果から, δ 次元 Bessel house-moving のサンプルパスに関する諸結果を得た:

- 局所 Hölder 連続性
- 分解公式

参考文献

[1] 佐藤健一: 加法過程, 紀伊國屋書店, 1990.

[2] J. Pitman and M. Yor: *The law of the maximum of bessel bridge,* Electronic Journal of Probability **15** (1999), 1–35.

[3] D. Hatakenaka, K. Ishitani and K. Suzuki: *On the construction of Brownian house-moving and its properties,* preprint.

[4] I. Karatzas and S. E. Shreve: Brownian motion and Stochastic calculus, Springer, Science+Business Media, Inc. 1998, 2nd ed.

Einstein 方程式の拘束条件に着目した数値計算法

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
星野秀朋 (Hidetomo HOSHINO)

概要

一般相対性理論の基礎方程式である Einstein 方程式は連立非線形偏微分方程式で，拘束条件付き時間発展方程式である．その拘束条件は first class constraint と呼ばれるもので，拘束条件のエラーが指数関数的に増大し，数値計算が容易に破綻してしまうことが知られている．そこで，本講演では Einstein 方程式の拘束条件の精度がどのくらいの精度で保たれているのかということに着目した数値計算法について紹介する．

1 導入

1.1 Einstein 方程式について

一般相対性理論の基礎方程式である Einstein 方程式は

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (\mu\nu = 0, 1, 2, 3) \tag{1.1}$$

である．ただし，ここで $g_{\mu\nu}$ は 4 次元計量，$R_{\mu\nu}$ は Ricci テンソル，R はスカラー曲率，$T_{\mu\nu}$ は物質のエネルギー・運動量テンソルを表している．また，c と G はそれぞれ光速と Newton の重力定数である．Einstein 方程式の左辺は時空の幾何学的な情報，右辺は物質分布の情報を表している．

ブラックホールの解析や重力波の放射など，宇宙における物理現象を予測，解明する際には Einstein 方程式を解く必要性が生じる．Einstein 方程式の有名な厳密解としては Schwarzschild 解や Kerr 解などが挙げられる．しかしながら Einstein 方程式は計量 $g_{\mu\nu}$ についての 2 階の非線形偏微分方程式となっていて強い対称性などを課さない限りは解析的に解くことが難しい．そのため実際に物理シミュレーションを行う際には数値計算により Einstein 方程式の数値解を得る必要がある．

1.2 Einstein 方程式の 3+1 分解

一般相対性理論では時間と空間を等価的に扱っている．また，4 次元共変性を持つ (座標変換に対して不変な) 理論であるため，Einstein 方程式の中で時間座標や空間座標は明示されていない．そのため Einstein 方程式を数値的に解く際には時間座標をこちらで指定しなければならない．しかし，そこで選んだ時間座標が必ずしも物理的な時間を表している座標になっているかどうかは分からないので注意が必要である．4 次元時空を正確に空間 3 次元と時間 1 次元に分けることを $3+1$ 分解と呼ぶ．Einstein 方程式 (1.1) を $3+1$ 分解すると以下のように 4 本の方程式を得る (以下では Einstein の規約を用いる，つまり上下に出てくる添え字はシグマ記号を付けなくても和を取ることにする)．

時間発展方程式：

$$\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} = -2\alpha K_{ij} + D_i\beta_j + D_j\beta_i, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial t} = \alpha\big(R_{ij} - 2K_{ik}K^k_j + KK_{ij}\big) - D_iD_j\alpha - \frac{8\pi G}{c^4}\alpha\left(S_{ij} - \frac{1}{2}\gamma_{ij}(S-\rho)\right) + \beta^k D_k K_{ij} + K_{kj}D_i\beta^k + K_{ik}D_j\beta^k. \tag{1.3}$$

拘束条件方程式：

$$\mathcal{H} \equiv R + K^2 - K_{ij}K^{ij} - \frac{16\pi G}{c^4}\rho \approx 0 \quad \text{(Hamiltonian constraint)}, \tag{1.4}$$

$$\mathcal{M}_i \equiv D_jK^j_i - D_iK - \frac{8\pi G}{c^4}J_i \approx 0 \quad \text{(momentum constraint)}. \tag{1.5}$$

これらの式に出てくる文字の詳細な説明は割愛するが，大雑把にいうと，γ_{ij}(3 次元計量) が Newton 力学での位置に対応し，K_{ij}(3 次元外的曲率) が Newton 力学での速度に対応する．さらに Hamiltonian constraint や momentum constraint はエネルギー保存則や運動量保存則に対応している (あくまでも対応している，と言っているだけで Newton 力学のように保存則から運動方程式，すなわち時間発展方程式を導くことができるというわけではない).

1.3 拘束条件付き時間発展方程式としての Einstein 方程式

Einstein 方程式のように拘束条件が付いた時間発展方程式の例は他にもたくさんあるだろう．例としては Hamilton 系や Maxwell 方程式が挙げられる．しかしながら Einstein 方程式は上記の拘束条件付き時間発展方程式とは決定的に違う面がある．例えば Maxwell 方程式では
時間発展方程式

$$\partial_t \mathbf{B} = -\operatorname{rot}\mathbf{E}, \tag{1.6}$$

$$\partial_t \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{\mathbf{j}}{\varepsilon_0}. \tag{1.7}$$

拘束条件方程式

$$C_1 \equiv \operatorname{div}\mathbf{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0, \tag{1.8}$$

$$C_2 \equiv \operatorname{div}\mathbf{B} = 0. \tag{1.9}$$

となっているが C_1, C_2 の時間微分は以下のようにちょうど 0 になる．

$$\begin{aligned}\partial_t C_1 &= \operatorname{div}(\partial_t\mathbf{E}) - \frac{1}{\varepsilon_0}\partial_t\rho \\ &= -\frac{1}{\varepsilon_0}(\operatorname{div}\mathbf{j} + \partial_t\rho) \\ &= 0 \quad (\because \text{連続の式から } \partial_t\rho + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0),\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\partial_t C_2 = \operatorname{div}(\partial_t\mathbf{e}) = 0. \tag{1.11}$$

一方 Einstein 方程式の拘束条件方程式 (1.4)，(1.5) において $\mathcal{H}, \mathcal{M}_i$ の時間微分を計算すると 0 にはならない．$\mathcal{H}, \mathcal{M}_i$ の時間微分は $\mathcal{H}, \mathcal{M}_i$ およびそれらの空間微分の線形結合で表される．このような

拘束条件を first class constraint と呼ぶ．つまりある時刻において $\mathcal{H}$ と $\mathcal{M}_i$ が 0 なら，その次の時刻でも $\mathcal{H}$ と $\mathcal{M}_i$ は 0 である．この理由により Einstein 方程式の拘束条件方程式 (1.4)，(1.5) において，”$= 0$”ではなく”≈ 0”としている．しかし実際の数値計算では誤差をきちんと 0 にするのは不可能なので $\mathcal{H}$ や $\mathcal{M}_i$ のわずかな誤差により，誤差が指数関数的に増大し，数値計算が破綻しやすくなってしまう．この点が Einstein 方程式の数値計算や離散スキームの構築，誤差の解析を困難にさせている．

2 拘束条件付き時間発展方程式の数値計算に用いる離散スキームの 2 つの評価基準

以下では常微分方程式を用いて説明するが偏微分方程式となっても同様である．

2.1 EOA(Evolution's Order of Accuracy)

常微分方程式

$$\frac{du(t)}{dt} = f(t, u) \tag{2.1}$$

を考える．このとき $u(t + \Delta t)$ と離散スキームにより求められる u_{n+1} について

$$\frac{u(t + \Delta t) - u_{n+1}}{\Delta t} = O(\Delta t^p) \tag{2.2}$$

と書けるとき，その離散スキームの EOA は p であるという．つまり EOA が高いほど数値解は正しい解に近いと言える．この観点からの離散スキームの評価は数値解析の教科書で通常扱われているものである．すなわち教科書で見かける p 次精度のスキームというのは，ここでは EOA が p であるということである．例えば Euler 法の EOA は 1，古典的 Runge–Kutta 法の EOA は 4 である．

2.2 COA(Constraint's Order of Accuracy)

2.2.1 $\dot{C} = 0$ となる場合

$C = 0$ かつ $\dot{C} = 0$ となるような拘束条件が時間発展方程式に付随する場合は，離散スキームにより得られる C_{n+1} と C_n の差を考えて

$$\frac{C_{n+1} - C_n}{\Delta t} = O(\Delta t^q) \tag{2.3}$$

と書けるとき，その離散スキームの COA は q であるという．つまり COA が高いほど拘束条件は満たされていると言える．

2.2.2 $\dot{C} = a(t)C$ となる場合

$C = 0$ かつ $\dot{C} = a(t)C$ となるような拘束条件，つまり Einstein 方程式のように first class constraint を持つような方程式に対しては

$$\begin{aligned}\frac{C(t+\Delta t) - C(t)}{\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C^{(k)}(t)}{k!}\Delta t^k - C(t)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{C^{(k)}(t)}{k!}\Delta t^{k-1}\end{aligned} \tag{2.4}$$

となることを考慮する必要がある．$\dot{C} = a(t)C$ であるから C の時間微分は何階微分であっても $A(t)C$ の形をしているので，

$$\frac{C_{n+1} - C_n}{\Delta t} - (C_n\text{が入っている項}) = O(\Delta t^q) \tag{2.5}$$

となるときに COA が q であるという．

3 COA の例

COA がどのようなものなのか実感するためにの例として Einstein 方程式では煩雑になってしまうので，単振動を取り上げることにする．単振動は
時間発展方程式：

$$\begin{cases}\dot{u} = v, \\ \dot{v} = -u.\end{cases} \tag{3.1}$$

拘束条件方程式 (エネルギー保存則)：

$$C = u^2 + v^2 - 1 = 0 \tag{3.2}$$

である．例えば Heun 法 (よく知られているように EOA は 2 である) を用いた場合，constraint の差分は

$$\frac{C_{n+1} - C_n}{\Delta t} = \frac{1}{4}(u_n^2 + v_n^2)\Delta t^3 + O(\Delta t^4) \tag{3.3}$$

となるので COA は 3 になっている．この例から分かるように EOA と COA は一般には一致しない．以下に単振動についていくつかのスキームでの EOA と COA を載せる

	Euler	Heun	AB2	AB3	RK4	GL1
EOA	1	2	2	3	4	2
COA	1	3	3	3	5	∞

表 1　各スキームの EOA および COA

- AB2・・・2 段 2 次の Adams–Bashforth 法

- AB3・・・3 段 3 次の Adams-Bashforth 法
- RK4・・・古典的 Runge–Kutta 法
- GL1・・・1 段 2 次の Gauss–Legendre 法 (陰的中点法)

GL1 で COA が ∞ となっているのは C の差分が完全に 0 になるという意味である．このような離散スキームは，連続 (微分方程式) で成り立っている性質を離散 (差分方程式) でも再現するという意味で構造保存型スキームなどと呼ばれる．Einstein 方程式に対する完全な構造保存型スキームは未だに構築されていない．

4　離散スキームにパラメータを入れて COA を向上させる

離散スキームに適切なパラメータを導入することにより，EOA はそのままで COA をさらに向上させることが出来る．例えば Einstein 方程式の数値計算でしばしば用いられている iterated Crank–Nicolson 法 (ICN) にパラメータを入れた geometric-averaging θ-iterated Crank–Nicolson 法 (GA θ-ICN) は θ_1, θ_2 をパラメータとして

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, u_n), \\ k_2 = f(t_n + \theta_1 \Delta t, u_n + k_1 \theta_1 \Delta t), \\ k_3 = f(t_n + 2\theta_1\theta_2 \Delta t, u_n + 2k_2 \theta_1 \theta_2 \Delta t), \\ u_{n+1} = u_n + k_3 \Delta t \end{cases} \tag{4.1}$$

のようになっている．$\theta_1\theta_2 = 1/4$ のときに EOA が 2 となる．ICN は $\theta_1 = \theta_2 = 1/2$ のときで EOA が 2 である．例えば，先程の単振動に EOA が 2 となるようにパラメータを導入した GA θ-ICN を適用すると，C の差分は

$$\begin{aligned} \frac{C_{n+1} - C_n}{\Delta t} = {} & \underline{(-\theta_1^u + \theta_1^v)} \Delta t^2 + \underline{\frac{1}{4}(v_n^2 - 4\theta_1^u v_n^2 + u_n^2 - 4\theta_1^v u_n^2)} \Delta t^3 \\ & + \frac{1}{2}(\theta_1^u v_n u_n - \theta_1^v v_n u_n) \Delta t^4 + \frac{1}{4}((\theta_1^u)^2 v_n^2 + (\theta_1^v)^2 u_n^2) \Delta t^5 + O(\Delta t^6) \end{aligned} \tag{4.2}$$

となる．下線部分が 0 となるようにパラメータ θ_1^u, θ_1^v の値を決めると $\theta_1^u = \theta_1^v = 1/4$ となる．このとき COA は 5 になる (Δt^4 の項は意図して消したものではない)．それに対し，従来の手法である ICN では $\theta_1^u = \theta_1^v = 1/2$ なので COA は 3 となる．このようにして EOA は同じであっても，適切にパラメータを選ぶことによって COA を向上させることが出来る．以下に数値実験の結果を示す．

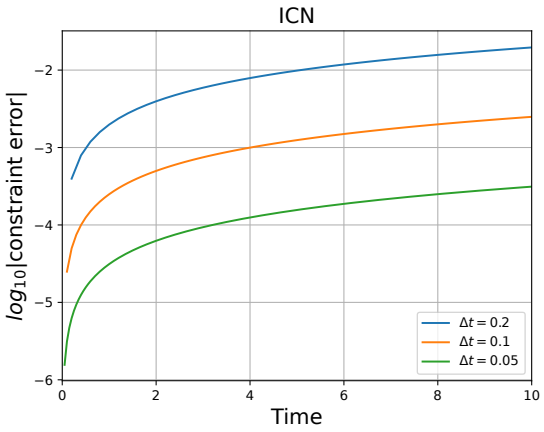


図 1　ICN($\theta_1^u = \theta_1^v = 1/2$) での拘束条件のエラー

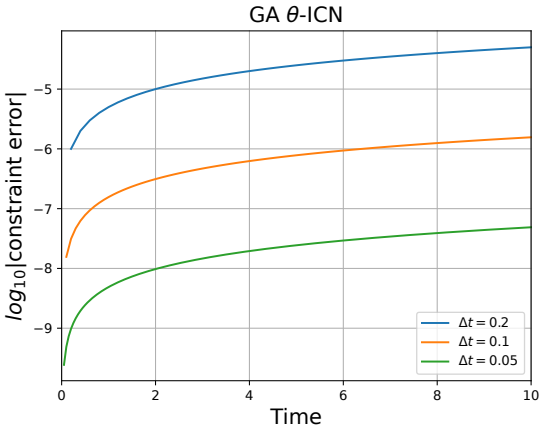


図 2　GA θ-ICN($\theta_1^u = \theta_1^v = 1/4$) での拘束条件のエラー

図 1 では Δt を半分にするとエラーの常用対数が $3\log_{10}2 \simeq 0.9$ 程度下がっているので 3 次精度，図 2 では $5\log_{10}2 \simeq 1.5$ 程度下がっているので 5 次精度であると確認できる．

ここでは簡単のため単振動の例を通して COA を向上させることについて議論したが，Einstein 方程式に対しても同様のことができる．

参考文献

[1] H. Hoshino, K. Sato and G. Yoneda, Parametrized numerical scheme for the Einstein equations, JSIAM Lett., **13** (2021), 13–16.

[2] M. Shibata, Collapse of Rotating Supramassive Neutron Stars to Black Holes: Fully General Relativistic Simulations, Astrophys. J., **595** (2003), 992–999.

[3] B. P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific Collaboration), Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger, Phys. Rev. Lett., **116** (2016), 061102.

[4] R. Arnowitt, S. Deser and C.W. Misner, Republication of: The dynamics of general relativity, Gen. Relativ. Gravit., **40** (2008), 1997–2027.

[5] S. A. Teukolsky, Stability of the iterated Crank–Nicholson method in numerical relativity, Phys. Rev. D, **61** (2000), 087501.

[6] Q. Tran and J. Liu, arXiv:1608.01344, (2016).

[7] T. Tsuchiya and G. Yoneda, Constructing of constraint preserving scheme for Einstein equations, JSIAM Lett., **9** (2017), 57–60.

Belousov-Zhabotinsky 反応を用いたレザバー計算の提案とシミュレーション

公立はこだて未来大学大学院システム情報科学研究科複雑系情報科学領域
○豊田 和人 (Kazuhito TOYOTA)*
香取 勇一 (Yuichi KATORI)† 櫻沢 繁 (Shigeru SAKURAZAWA)‡
高木 清二 (Seiji TAKAGI)§ 田中 吉太郎 (Yoshitaro TANAKA)¶

1 研究背景

近年，人間の学習能力をコンピューターで再現する「機械学習 (Machine Learning)」が盛んに研究されている．機械学習の手法の 1 つとして「ニューラルネットワーク（Neural Network，以下，NN と示す)」と呼ばれる手法がある．NN とは，脳内神経細胞であるニューロンのネットワーク構造を模した数理モデルを指す．ニューロンは，電気信号を用いて情報伝達を行なっている．その際，ニューロン間の接合部であるシナプスの結合強度によって，情報の伝わりやすさが変わる．この結合強度を，NN では重みと表現する．NN において学習とは，出力層で人間が望む結果，つまり正しい答えが出力されるように重みを調整する作業を指す．

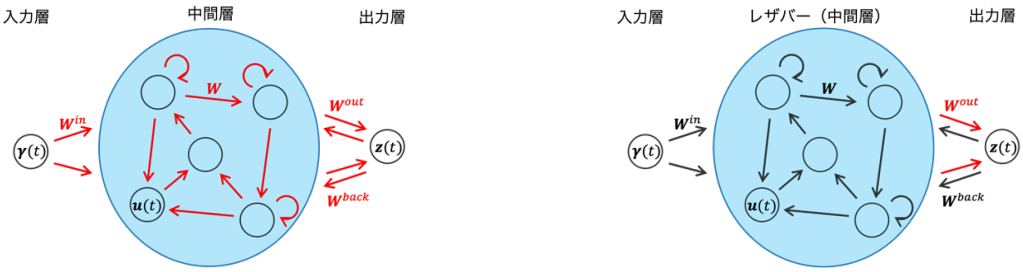
NN には大きく分けて 2 つの種類が存在する．それは，「順伝播型 NN(Feedforword Neural Network，以下，FNN と示す)」と「再帰的 NN(Recurrent Neural Network，以下，RNN と示す)」である．FNN では，情報が入力層から出力層に向かって一方向に流れるという特徴がある．また，FNN は画像認識処理や手書き文字認識などに用いられる．

一方 RNN では，中間層で行なわれた処理の結果も次の時刻で入力として中間層に与えられる．つまり，前の時刻の情報も中間層に影響を与える．そのため，RNN では時系列データを扱うことができ，機械翻訳や音声認識などに用いられる．

しかし，RNN は全ての重みの調整が必要であるため，計算コストが非常に高い．そこで，「レザバー計算 (Reservoir Computing)」と呼ばれる新たな RNN モデルが提案された [1]．構造は従来の RNN と同じであるが，調整する重みが中間層（レザバー）から出力層への重み $\boldsymbol{W}^{out}$ のみである (図 1)．そのため，計算コストを削減することができることが特徴として挙げられる．

また，レザバー計算では $\boldsymbol{W}^{out}$ 以外の重みは調整を必要としないことから，レザバー部分を物理現象に置き換え，物理現象のダイナミクスをそのままレザバーとして活用することができる．この

* E-mail: g2120030@fun.ac.jp
† 公立はこだて未来大学，E-mail: katori@fun.ac.jp
‡ 公立はこだて未来大学，E-mail: sakura@fun.ac.jp
§ 公立はこだて未来大学，E-mail: s-takagi@fun.ac.jp
¶ 公立はこだて未来大学，E-mail: y-tanaka@fun.ac.jp



(a) 従来の RNN　　**(b)** レザバー計算

図 1: RNN とレザバー計算の違い．赤矢印は調整する重みを表す．黒矢印は固定の重みを表す．

ように物理現象をレザバーとしたレザバー計算は，一般に「物理レザバー計算 (Physical Reservoir Computing)」と呼ばれている．これまでにバケツの水面 [2] や，タコ腕を模したソフトマテリアル [2]，流体 [3] をレザバーに用いた物理レザバー計算が報告されている．しかし，実装されている物理現象は多くはない．そのため，物理レザバー計算に関する研究が発展途上であるという現状がある．

2　研究目的・手段

本研究では，どのくらい広い類の物理現象で物理レザバー計算が可能であるかどうかを検証するために，化学反応系を用いた新たな物理レザバー計算を提案することを目的とする．新たな物理レザバー計算を提案することによって，物理レザバー計算の研究の振興に資することができると考えた．また化学反応は，物質の量や濃度を調整することによって，状態を意図的に変えることができるため，物理レザバー計算に適していると考えた．

本研究では，近年盛んに研究されており，実験の手法がよく知られている Belousov-Zhabotinsky 反応（以下，BZ 反応と示す）と呼ばれる化学反応を用いた物理レザバー計算を提案する．

また，物事の「予測」は生物学的なものであるため，予測を行なうという行為は無生物には非常に難しいことであると考えられる．そこで，無生物である物質に物事の「予測」が可能であるかどうかを理論的に検証することを目的とする．

本研究は，BZ 反応をレザバーに用いた物理レザバー計算が実現可能かどうかを，数値シミュレーションを用いて理論的・数値的に明らかにする．数値シミュレーションは，反応拡散系の反応項に BZ 反応のモデル式を導入した系を用いて行なう．

3　提案モデル

3.1　BZ 反応

BZ 反応とは，酸化還元反応がゆっくり周期的に進行する化学反応である．生命の代謝モデルの実験過程で発見されたと言われている．BZ 反応は，酸化剤，還元剤，酸，金属触媒の 4 種類の化合物を混合することによって起こすことができる．ビーカー内で化合物を混合させ，水溶液を攪拌するとビーカー内の水溶液の色が赤から青へ，青から赤へと周期的に変化する．

シャーレ上で反応を起こすと，時空間パターンができることが知られている．拡散の効果により，



(a) 酸化状態



(b) 還元状態

図 2: ビーカー内の様子

溶液面にターゲット状の模様や渦巻の模様，時空間カオス [4] などのパターンが出現する（図 3）．化合物の濃度や量を調整すると，出現するパターンが変化する．



(a) ターゲット状の模様



(b) 時空間カオス [4]

図 3: シャーレ上の様子

3.2 BZ 反応を記述するモデル

BZ 反応を記述するモデルはいくつかあるが，ここでは代表的なモデルを 2 つ示す．

1 つ目に，Oregonater（オレゴネータ）である．オレゴネータは，金属触媒にセリウムを用いた場合のモデルである．オレゴネータは BZ 反応を記述する最も簡易的なモデルであり，次の 2 変数系で表される．ここで，未知変数 $x = x(\tau), z = z(\tau)$ はそれぞれ $HBrO_2$，Ce^{4+} の濃度を表し，ε, f, q は定数パラメータである．また，$\tau > 0$ は時間である．

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{dx}{d\tau} = x(1-x) - fz\dfrac{x-q}{x+q} \\ \dfrac{dz}{d\tau} = x - z \end{cases} \tag{1}$$

2 つ目に，Györgyi-Field（ジョルジ・フィールド）モデル（以下，GF モデルと示す）である．GF モデルも金属触媒にセリウムを用いた場合のモデルであるため，オレゴネータと同じ系統のモデルであると言える．オレゴネータとの違いとして，臭化マロン酸が変数として追加されたことと，臭化物イオンの生成過程が追加されたことが挙げられる．故に GF モデルは，オレゴネータよりも BZ 反応を詳しく記述できるモデルであり，次の 3 変数系で表される．ここで，未知変数 $x = x(\tau), z = z(\tau), v = v(\tau)$ はそれぞれ $HBrO_2$, Ce^{4+},$BrCH(COOH)_2$ の濃度, $k_i (i = 1, 2, ..., 7, f)$

は速度定数を表し，$A, M, C, H, \alpha, \beta, T_0, X_0, Y_0, Z_0, V_0$ はパラメータである．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = T_0\left\{-k_1 H Y_0 x\tilde{y} + \dfrac{k_2 A H^2 Y_0 \tilde{y}}{X_0} - 2k_3 X_0 x^2 + \dfrac{1}{2}k_4 A^{\frac{1}{2}} H^{\frac{3}{2}} X_0^{-\frac{1}{2}}(C - Z_0 z)x^{\frac{1}{2}} \right. \\ \qquad \left. -\dfrac{1}{2}k_5 Z_0 xz - k_f x\right\} =: F(x,z,v) \\ \dfrac{dz}{d\tau} = T_0\left\{k_4 A^{\frac{1}{2}} H^{\frac{3}{2}} X_0^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{C}{Z_0} - z\right)x^{\frac{1}{2}} - k_5 X_0 xz - \alpha k_6 V_0 zv - \beta k_7 M z - k_f z\right\} \\ \dfrac{dv}{d\tau} = T_0\left\{\dfrac{2k_1 H X_0 Y_0 x\tilde{y}}{V_0} + \dfrac{k_2 A H^2 Y_0 \tilde{y}}{V_0} + \dfrac{k_3 X_0^2 x^2}{V_0} - \alpha k_6 Z_0 zv - k_f v\right\} =: H(x,z,v) \end{cases} \tag{2}$$

ただし，

$$T_0 = \frac{1}{10k_2 AHC}, X_0 = \frac{k_2 AH^2}{k_5}, Y_0 = \frac{4k_2 AH^2}{k_5}, Z_0 = \frac{CA}{40M}, V_0 = \frac{4AHC}{M^2},$$
$$\tilde{y} = \tilde{y}(x,z,v) := \frac{ak_6 Z_0 V_0 zv/(k_1 H X_0 x + k_2 AH^2 + k_f)}{Y_0}$$

であり，x と v の非線形項を F と H とした．

BZ 反応のカオスが GF モデルによって記述できることが報告されている [5][7]．GF モデルは，k_f の値を変化させることによって，出現する時系列パターンが変化する．分岐解析ソフト「AUTO」を用いて GF モデルの分岐を調べた．以下に分岐図を示す．ただし，x^*, z^*, v^* は平衡点を表す．

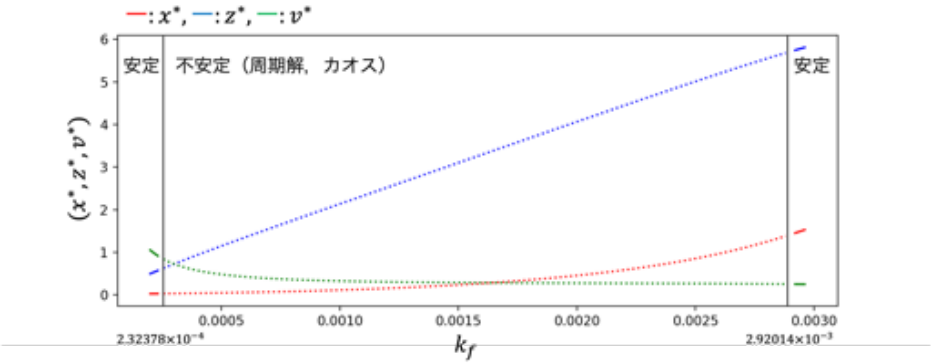


図 4: GF モデルの分岐図

3.3 提案手法

本研究では，シャーレ上における $HBrO_2$ 濃度の時空間パターンをレザバーと見立てて物理レザバー計算を行なう（図 5）．

シャーレ上に任意の点を置き，その点の $HBrO_2$ 濃度を素子として，素子の時系列データを保存する．素子の時系列データが素子の数だけ得られる．素子の数だけ存在する時系列データを重ね合わせることで，様々な時系列パターンの予測ができるか数値シミュレーションで検証する．

また，本研究では数値シミュレーションに用いるモデルとして GF モデルを用いる．物理レザバー計算では中間層で複雑な挙動を起こす必要がある．しかし，2 変数系からはカオスが生じないため，BZ 反応のカオスを記述することのできる 3 変数系の GF モデルを採択した．

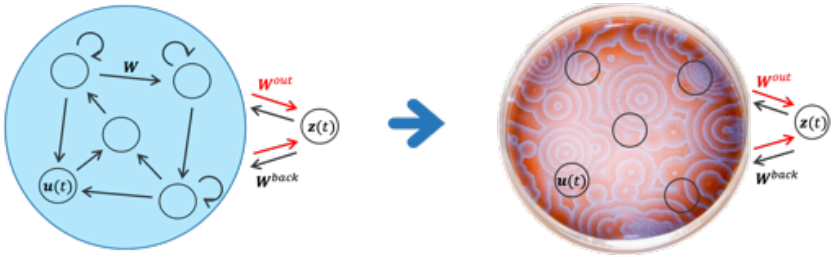


図 5: イメージ図

3.4 光刺激

BZ 反応は白色光によって反応が抑制される性質があるため，光を当てることで反応が変化する [5][6]．本研究では，この性質を利用して，中間層である BZ 反応に教師データを光刺激として入力する．出力として望む時系列データのように，光の強さを変化させながら当てることを想定する．つまり，与える光の強さが教師データとなっている．

また，光を当てることで反応が変化するため，数値シミュレーションを行なう際には，通常の GF モデルを直接用いるのではなく，光刺激による反応を考慮した方程式を解く必要がある．そのため，質量作用の法則を用いて，GF モデルに光刺激の項を導入した方程式を利用する．

光刺激の項を導入するために，次のような過程を考える．以下の式は，物質 Z が光エネルギー $h\nu$ を吸収して物質 Y を生成する過程である [5][6]．BZ 反応の場合，Y は Br^-，Z は Ce^{4+} を表す．

$$\mathrm{Z} + \mathrm{h}\nu \longrightarrow \mathrm{Y} \tag{3}$$

また，光を当てる領域 Ω_i を以下のように与える：

$$\begin{cases} \chi_i(x,y) = \begin{cases} 1, (x,y) \in \Omega_i \\ 0, (x,y) \notin \Omega_i \end{cases} \\ \Omega_i = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-l_i)^2 + (y-m_i)^2 \leq r^2\}. \end{cases} \tag{4}$$

ここで，光を当てる点のうち，i 番目（$i \in \mathbb{N}, i = 1, 2, ..., p$）の点の中心座標を (l_i, m_i)，半径を r と定義する．これを用いると，簡略化した白色光を考慮した GF モデルは，以下の 3 変数系で与えられる．ただし，p は光を当てる点の個数を表す．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \tau} = F(u,z,v) \\ \dfrac{\partial z}{\partial \tau} = T_0 \left\{ k_4 A^{\frac{1}{2}} H^{\frac{3}{2}} U_0^{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{C}{Z_0} - z \right) u^{\frac{1}{2}} - k_5 U_0 u z - \alpha k_6 V_0 z v - \beta k_7 M z \right. \\ \qquad \left. - z\gamma(\tau) \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \chi_i(x,y) - k_f z \right\} =: G(u,z,v,\gamma(\tau),\{\chi_i(x,y)\}_i) \\ \dfrac{\partial v}{\partial \tau} = H(u,z,v) \end{cases} \tag{5}$$

ここで，z の非線形項を G とした．k_f の値を変化させることによって BZ 反応の挙動が変化するため，本研究では k_f をパラメータとして，$k_f = 2.32378 \times 10^{-4}$ と $k_f = 2.92014 \times 10^{-3}$ の間で学習に適した値を探す．

3.5 数理モデリング

数値シミュレーションで解く方程式を以下に示す．$(x,y) \in \Omega := [0,L] \times [0,L], u = u(x,y,t), z = z(x,y,t), v = v(x,y,t)$ とする．拡散項を加えた以下の反応拡散系を考える：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(u,z,v) \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = D_1 \Delta z + G(u,z,v,\gamma(t),\{\chi_i(x,y)\}_i) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_2 \Delta v + H(u,z,v) \end{cases} \tag{6}$$

ここで，$D_1 = D_z/D_u, D_2 = D_v/D_u$ は拡散係数比とする．また，境界条件は斉次ノイマン境界条件を用いる．

学習前は $\gamma(t)$ に教師データ $d(t)+c$ を与える．c は教師データが負の値を取らないように調整するためのパラメータである．学習後は $\gamma(t)$ に出力である出力重みと素子の積の総和 $\sum_{i=1}^{n} W_i^{out} u_i(t)$+c を与える．$n$ は素子の個数を表す．

素子の座標は $(x_n, y_n) = \left(a + \xi \times (n - 10\left[\frac{n}{10}\right]), a + \xi \times \left[\frac{n}{10}\right]\right)$ で定義する．ここで，$[\cdot]$ はガウスの記号とし，a, ξ は正の実数とする．

時刻 t が $t \in [0, t_1)$ の間，Ω 上で (6) を解き，BZ 反応の挙動を起こす（図 6）．本研究の数値シミュレーションでは初期値はランダムとした．また $\boldsymbol{u}(t)$ は n 個の素子上の濃度を表しており，以下の式で定義される．

$$\boldsymbol{u}(t) := \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x_1,y_1,t) \\ u(x_2,y_2,t) \\ \vdots \\ u(x_n,y_n,t) \end{pmatrix} \tag{7}$$

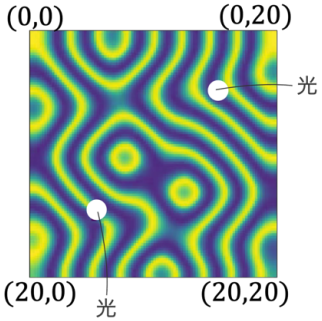


図 6: 数値シミュレーションの様子

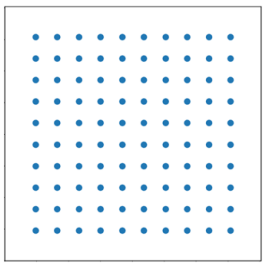


図 7: 素子の位置

$t = t_0 + k\Delta t (k = 0, 1, ..., 1/\Delta t - 1, 0 < \Delta t < 1)$ として，各時刻で素子上の時系列データの線形和 $\sum_{i=1}^{n} W_i^{out} u_i(t)$ が教師データ $d(t)$ に等しくなるように，重み $\{\boldsymbol{W}_i^{out}\}_{i=1,...,n}$ を決める．つまり，以下の方程式を考える：

$$\sum_{i=1}^{n} W_i^{out} u_i(t_0 + k\Delta t) = d(t_0 + k\Delta t), \quad k = 0, 1, ..., \frac{1}{\Delta t} - 1 \tag{8}$$

この連立方程式は，以下の行列とベクトル

$$M := \begin{pmatrix} u_1(t_0) & u_2(t_0) & \cdots & u_n(t_0) \\ u_1(t_0+\Delta t) & u_2(t_0+\Delta t) & \cdots & u_n(t_0+\Delta t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(t_0+(1/\Delta t-1)\Delta t) & u_2(t_0+(1/\Delta t-1)\Delta t) & \cdots & u_n(t_0+(1/\Delta t-1)\Delta t) \end{pmatrix},$$

$$T := \begin{pmatrix} d(t_0) \\ d(t_0+\Delta t) \\ \vdots \\ d(t_0+(1/\Delta t-1)\Delta t) \end{pmatrix}, \quad (\boldsymbol{W}^{out})^t := \begin{pmatrix} W_1^{out} \\ W_2^{out} \\ \vdots \\ W_n^{out} \end{pmatrix}$$

を用いると，

$$M(\boldsymbol{W}^{out})^t = T$$

と表すことができる．これらの M と T を以下の式に代入して $\boldsymbol{W}^{out}$ の計算を行なう．

$$(\boldsymbol{W}^{out})^t = (M^tM + \lambda_0 I)^{-1}M^tT \tag{9}$$

ここで右上の t は転置，$1 \gg \lambda_0 > 0$ は正規化パラメータ，I は n 次の単位行列を表す．

$\boldsymbol{W}^{out}$ の学習後は，$\sum_{i=1}^{n} W_i^{out}u_i(t)$ が $d(t)$ に近似できていると期待できるので，光刺激を教師データ $d(t)+c$ から出力 $\sum_{i=1}^{n} W_i^{out}u_i(t)+c$ に変更した，以下の式を用いて数値シミュレーションを行なう．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + F(u,z,v) \\ \dfrac{\partial z}{\partial t} = D_1\Delta z + G\left(u,z,v,\sum_{i=1}^{n} W_i^{out}u_i(t)+c,\{\chi_i(x,y)\}_i\right) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_2\Delta v + H(u,z,v) \end{cases} \tag{10}$$

教師データと同じグラフに出力 $z(t) = \boldsymbol{W}^{out}\boldsymbol{u}(t)$ を表示させて，教師データ $d(t)$ を近似出来ているかを確認する．

4 結果

提案したモデルを評価するため，時系列データを用いた時系列予測を行なった．その結果を示す．グラフは上から順に，学習前の素子の時系列データ，学習前の教師データ，学習後の素子の時系列データ，出力結果，出力結果の拡大図を表す．4 つ目と 5 つ目のグラフは青の線が教師データ，オレンジの線が出力データを表し，横軸は時間を表す．1 つ目と 3 つ目のグラフは素子の時系列データであるため，全部で n 本の曲線が描かれている．

4.1 周期的な時系列の予測

教師データは $d(t) = \dfrac{3}{10}\sin 190t$ とし，パラメータは $k_f = 1.544 \times 10^{-3}$ とした．図 8 に結果を示す．

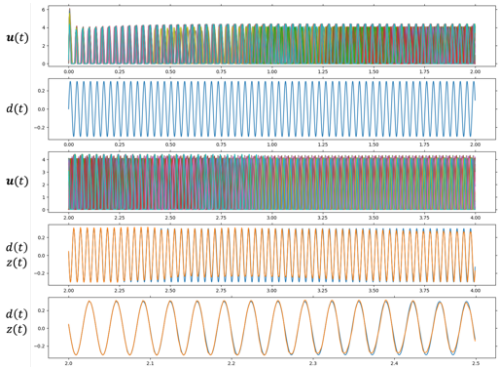


図 8: $d(t) = \dfrac{3}{10}\sin 190t$ の時系列予測の結果．パラメータは，$n = 100, a = 0.7, \xi = 1.7, L = 20, dx = 0.1, dt = 0.00001, \Delta t = 0.001, t_0 = 1.0, t_1 = 2.0, D_1 = 0.6, D_2 = 1.0, (l_i, m_i) = (5, 15), (15, 5), (i = 1, 2), r = 0.3, c = 0.3, k_1 = 4.0 \times 10^6, k_2 = 2.0, k_3 = 3.0 \times 10^3, k_4 = 55.2, k_5 = 7.0 \times 10^3, k_6 = 0.09, k_7 = 0.23, A = 0.1, M = 0.25, H = 0.26, C = 0.000833, \alpha = 666.7, \beta = 0.3478, k_f = 1.544 \times 10^{-3}, \lambda_0 = 0.1$ とした．

5 つ目のグラフより，若干のずれはあるが，形状はほぼ教師データと同じ sin 波が出力できていることがわかる．

次に，教師データを周期が半分である $d(t) = \dfrac{3}{10}\sin 95t$ とし，パラメータは $k_f = 2.71 \times 10^{-3}$ とした．図 9 に結果を示す．

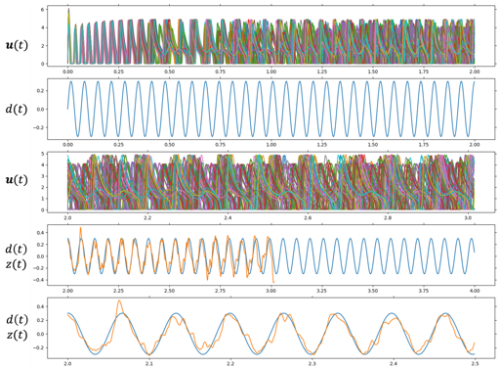


図 9: $d(t) = \dfrac{3}{10}\sin 95t$ の時系列予測の結果．パラメータは，$n, a, \xi, L, dx, dt, \Delta t, t_0, t_1 D_1, D_2, (l_i, m_i), r, c, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, A, M, H, C, \alpha, \beta, \lambda_0$ は図 8 と同じとし，$k_f = 2.71 \times 10^{-3}$ とした．

5 つ目のグラフより，$d(t) = \dfrac{3}{10}\sin 190t$ の結果より精度は良くないが，時系列を追うような sin 波が出力できていることがわかる．また，オレンジの線が途中で途切れているのは，非線形性が強く，計算が途中で発散してしまったためである．

4.2 カオス的な時系列の予測

カオス的な時系列データとして，Mackey-Glass（マッキー・グラス）方程式の解を用いる．教師データは $d(t) = f(t), f(t + dt) = f(t) + \delta\left(\dfrac{0.2f(t - \tau/\delta)}{1 + f(t - \tau/\delta)^{10}} - 0.1f(t)\right), \tau = 17, \delta = 0.02$ とし，

パラメータは $k_f = 2.633 \times 10^{-3}$ とした．マッキー・グラス方程式は，パラメータの設定次第で複雑な時系列になる．マッキー・グラス方程式の学習が成功すると，BZ 反応を用いた物理レザバー計算で非周期的な複雑な時系列も予測できると考えられる．図 10 に結果を示す．

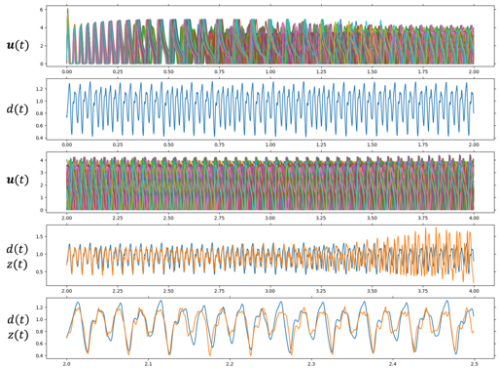


図 10: マッキー・グラス方程式の時系列予測の結果．パラメータは，$n, a, \xi, L, dx, dt, \Delta t, t_0, t_1 D_1, D_2, (l_i, m_i)$, $r, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, A, M, H, C, \alpha, \beta, \lambda_0$ は図 8 と同じとし，$c = 0, k_f = 2.633 \times 10^{-3}$ とした．

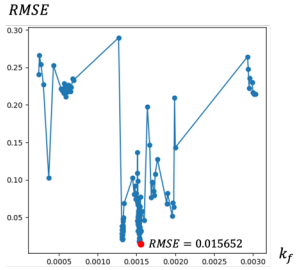
おおよそ $t = 3.0$ まで，すなわち dt を 1 ステップとすると，最初の 100000 ステップは教師データに近い出力が得られていることがわかる．

4.3 誤差の計測

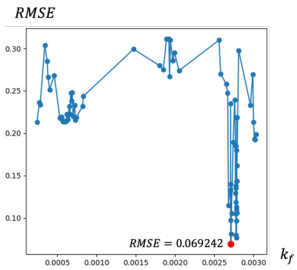
パラメータ k_f の値を変化させた時の予測性能の解析を行なう．k_f の値ごとに，教師データと出力データとの平均平方二乗誤差（Root Mean Square Error，以下，RMSE と示す）を $t_{\text{start}} \leq t \leq t_{\text{end}}$ で計測する．RMSE は以下の式を用いる．

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{t_{\text{end}} - t_{\text{start}}} \int_{t_{\text{start}}}^{t_{\text{end}}} \{d(t) - z(t)\}^2 dt} \tag{11}$$

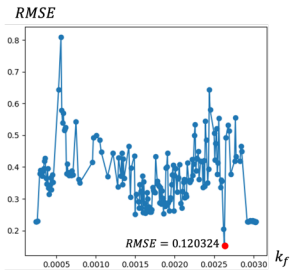
パラメータ k_f と計測された RMSE の相関図を図 11 に示す．



(a) $d(t) = \dfrac{3}{10} \sin 190t$ の予測誤差



(b) $d(t) = \dfrac{3}{10} \sin 95t$ の予測誤差



(c) マッキー・グラス方程式の予測誤差

図 11: 計測した予測誤差．赤い点が数値シミュレーションで用いた値を示す．$t_{\text{start}} = 2.0, t_{\text{end}} = 2.5$ とした．

RMSE の計測結果より，非常に限られたパラメータ領域で誤差が小さくなることがわかる．

5　まとめと今後の展望

数値シミュレーションの結果から，提案したモデルは，数理モデリングの観点から BZ 反応を用いた物理レザバー計算で時系列予測が可能であることが明らかになった．周期関数である sin 波は，教師データに近い sin 波を再現することができた．また，マッキー・グラス方程式は，解に近い時系列データを有限時刻まで再現することができた．学習が成功する k_f は，2 回目のホップ分岐点近くが多いと考えられる．

今後は，次の 3 点について検討をしている．1 点目は，数学的な解析をすることである．今回学習が成功した理由を数学的な観点から突き詰めたり，学習成功の条件を導き出すことによって，他の物理レザバー計算に応用できることが考えられる．2 点目は，学習精度を向上させることである．提案したモデルは，誤差はまだ大きいため，精度を上げることが今後の課題となる．また，マッキーグラス方程式は，t を大きくした場合でも，望ましい出力が得られるようなパラメータを探す必要がある．3 点目は，数値シミュレーションを元に，実際の化学反応を用いて実験をすることである．数値シミュレーションで時系列予測が可能であることを示すことができたので，実際の化学反応で BZ 反応を用いた物理レザバー計算に拡張することができると考えられる．

謝辞

本研究を遂行するにあたって，宮崎大学工学教育研究部工学基礎教育センターの出原浩史准教授には，分岐解析ソフト「AUTO」の使用方法をご教授いただきました．心より感謝申し上げます．

参考文献

[1] H. Jaeger,“A tutorial on training recurrent neural networks, covering BPPT, RTRL, EKF and the “echo state network” approach”, GMD Report 159, German National Research Center for Information Technology, pp.1-46, 2002.

[2] Kohei Nakajima, “Physical reservoir computing -an introductory perspective”, Jpn. J. Appl. Phys. 59 060501, pp.1-13, 2020.

[3] Ken Goto, Kohei Nakajima, Hirofumi Notsu, “Twin vortex computer in fluid flow”, New J. Phys. 23 06305, pp.1-14, 2021.

[4] Q. Ouyang, J. M. Flesselles, “Transition from spirals to defect turbulence driven by a convective instability”, VOL 379, NATURE, pp.143-146, 1996.

[5] 三池秀敏, 森義仁, 山口智彦,「非平衡系の化学 Ⅲ 反応・拡散系のダイナミクス」, 講談社, 1997.

[6] V. Gáspar, et al., ”Z. phys. Chemie, Leipzing”, VOL 264, pp.43, 1983.

[7] L. Györgyi, R. J. Field, “A three-variable model of deterministic chaos in the Belousov-Zhabotinsky reaction”, VOL 355, NATURE, pp.808-810, 1992.

データ駆動時系列モデリングによる微分方程式の導出 *

一橋大学商学部商学科
堤夏輝 (Natsuki Tsutsumi)

概要

適当なカオス的時系列データから背後にある微分方程式を推定することは一般に困難である．我々は微分方程式の推定手法を開発し，ローレンツ方程式のアトラクタ上でふるまう軌道の一変数のみの時系列データから微分方程式を推定した．推定した微分方程式を評価するため，短時間の時間発展予測に加えて，長時間発展によって得られた変数の出現頻度分布の再現を確認した．流体運動のマクロ変数に関する時間発展方程式を流体の基礎方程式であるナヴィエストークス方程式から解析的に導出することは困難なことが知られているが，同様の推定手法を用いて流体のエネルギー変数の時系列のみからその時間発展を描写する微分方程式モデルを得た．

1 はじめに

1.1 従来の時系列予測手法

時系列データから将来の変動を予測することは多くの場面で有用である．そして, その手法について今まで多くの研究がなされてきた．今回はその中でも, 決定論的なモデルから生成されるデータの将来予測を行う手法について提案を行う．

多くの時系列予測はある時点 t における状態から次の時点 $t+1$ における状態を予測するものである．すなわち, 手元の時系列データ $\{\mathbf{X}_t\}$ を用いて,

$$\mathbf{X}_{t+1} \approx F(\mathbf{X}_t), \tag{1}$$

となるように関数 F を構成することが行われている．この F を構成する際に, ニューラルネットなどを用いたり, 入力を $\{\mathbf{X}_i | i \leq t\}$ としたりすることで, 多様な表現ができるようにしている [2].

このようにして作られた関数 F は別の力学系を構成していると考えられる．その力学的構造と元の力学的構造が似ていれば, 構成した関数 F は軌道だけでなく, 力学的構造もよく近似できているといえる．これはカオス性による短期予測の限界があったとしても, 本質的にモデリングには問題がないことを意味している．[4] では実際に力学的構造までも近似しうることを示している．

従来の式 (1) を考えることには 2 つの難点がある．1 つ目の難点は時間刻みが変更できないことである．多くの決定論的なモデルから生成されるデータはある微分方程式

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}), \tag{2}$$

* 本研究は [7] で発表予定である

の解軌道から時間刻み Δt ごとにサンプリングされたものと考えることができる．これを生成モデルと呼称する．一般的には, 生成モデルの関数 f は時刻 t に依存しうるが, 今回は時刻に依存しない自励系を仮定する．このことから, 従来の手法によって推定された関数 F はデータの時間刻み Δt に依存する関数である．したがって, データの時間刻み Δt が変化した場合は関数 F を構成しなおす必要がある．このことは技術的に困難であるだけでなく, 本質的に同じものを異なるようにモデリングすることにあたる．また, 構成されたモデルから, より細かい時間刻みの予測ができない.

2 つ目の難点は構造の推定が難しいことである．上述のように, 推定されたモデルの力学的構造が生成モデルの力学的構造と似ているかを確認することも重要である．生成モデルは式 (2) で表される微分方程式なので, この式を偏微分したりすることで構造を計算できる．しかし, 推定されたモデルは 式 (1) で表される離散時間力学系であり, 元の微分方程式の力学的構造を推定することは困難である．したがって, 別に構造を推定する手法を考える必要がある.

以上の 2 点が従来の式 (1) の難点である．この 2 つを解決できる予測手法について考える.

1.2 微分方程式推定の概要

1.1 節で述べた難点の原因は, 連続時間で表される生成モデルを離散時間のモデルとしてモデリングしていることにある．したがって, 連続時間のままモデリングを行えば, そのような難点は解決すると考えられる．具体的に今回は, 式 (1) の関数 F を推定するのではなく, 以下の式における関数 G を推定する:

$$\left.\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_t} \approx G(\mathbf{X}_t). \tag{3}$$

このようにすることで, 従来手法における難点は解決する.

次の手順をもって, 式 (3) の関数 G を推定する．初めに時系列データ $\{\mathbf{X}_t\}$ を用いてそれぞれの時点における時間微分値を推定する．そのあと, その推定時間微分値を目標変数として, カーブフィッティングを行う．カーブフィッティングとは, G を異なる p 個の関数 $\phi_j(\mathbf{x})$ を用いて

$$G(\mathbf{x}) =< \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}) >, \tag{4}$$

と表して, データからこの $\boldsymbol{\beta}(:= \{\beta_1, \cdots, \beta_p\}^{\mathrm{T}})$ を推定する手法のことを言う．ここで, $<,>$ は標準内積を表し, $\boldsymbol{\phi} := \{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_p\}^{\mathrm{T}}$ とした．例えば, [1, 8] ではこの手法を用いて, 単純なモデルを多項式で近似している．詳しくは第 3 章に記している.

このようにすることで, 軌道だけでなく, 力学的構造も確かめることが可能なモデルをつくることができる.

1.3 レポートの構成

本レポートでは, 第 2 章で具体的な微分方程式を推定する手法を説明する．その後, 第 3 章にカーブフィッティングを多項式で行った場合の精度と限界について紹介する．そのあと, 第 4 章でその難点を解決するために動径関数を導入したものを紹介する．最後に, 第 5 章で 流体のマクロダイナミクスのモデリングに手法を応用した例を説明する.

2　微分方程式推定手法

2.1　時間微分値の推定

初めに, 時系列データから特定の点での時間微分値の推定を行う手法について説明を行う. 手元の時系列データを $\{\mathbf{X}_t\}$ と表し, それが局所的に連続な関数 $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ という関数で表せるとする. また, この関数が必要な階数微分可能であると仮定する. そこで, この関数を $2M$ 次の Taylor 展開をすると,

$$\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{t}+h) \approx \sum_{n=0}^{2M} \left\{ \left. \frac{d^n \tilde{\mathbf{x}}}{dt^n} \right|_{t=\tilde{t}} \right\} \frac{h^n}{n!},$$

と近似できる. この関数をデータから求めることを考えると, $\{\mathbf{X}_t | t = \tilde{t}-M, \cdots, \tilde{t}+M\}$ を用いることで, 一意に求まる. そして, その時の h に関する 1 次項が時間微分値の推定値となる. 今回は $M=3$ で微分値推定を行った. この場合, $\frac{d\mathbf{x}}{dt}|_{t=\tilde{t}}$ の推定値は以下のように計算される:

$$\left. \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right|^{\mathrm{est}}_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_{\tilde{t}}} = \frac{1}{60\Delta t}\{X_{\tilde{t}+3} - 9X_{\tilde{t}+2} + 45X_{\tilde{t}+1} - 45X_{\tilde{t}-1} + 9X_{\tilde{t}-2} - X_{\tilde{t}-3}\}. \tag{5}$$

2.2　最小二乗法

次にカーブフィッティングの手法を説明する. 以降の説明では, $y_t := \frac{d\mathbf{X}}{dt}|^{\mathrm{est}}_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_t}, \phi_{(t,j)} := \phi_j(\mathbf{X}_t)$ とし, $\mathbf{y} := \{y_1, \cdots, y_N\}^{\mathrm{T}}, \Phi := \{\phi_{(t,j)}\}$ とする. ただし, N はデータ数である. 1.2 節で述べたように, カーブフィッティングは, 式 (4) の $\boldsymbol{\beta}$ を推定することである. その推定手法の一つに最小二乗法がある. 式 (4) によって G の値を近似するにあたり, 誤差が最小になるものが良いと考えられる. ここで, 時点 t での誤差を真の値と予測値の差の二乗と定義し, その平均値をモデルの誤差と考える. すると, $\boldsymbol{\beta}$ に関する誤差の関数 ($L(\boldsymbol{\beta})$) は

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{N}||\mathbf{y} - \Phi\boldsymbol{\beta}||^2_{l_2}, \tag{6}$$

となる. この関数を最小化するように $\boldsymbol{\beta}$ を決定する方法を最小二乗法という. 式 (6) は微分可能であるから, 最小化を行うパラメータ $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{LSE}}$ は以下のように表せる:

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{LSE}} = (\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{y}. \tag{7}$$

2.3　Ridge 回帰

データを生成する関数が実際に ϕ_j の線形結合で表される場合, 最小二乗法は良い手法である. 一方で, そうでない場合は過学習を起こしやすい. 過学習とは手元データにフィットしすぎることによって, 未学習データへの適用ができなくなってしまうことである. これを防ぐ為に, 正則化という手法が有用である. 正則化とは, 式 (6) に $\boldsymbol{\beta}$ が望ましい値であるほど小さい値をとる関数 ($R(\boldsymbol{\beta})$) を足して最小化する方法である. 過学習を起こす場合, パラメータの絶対値が大きくなることが多いため, $R(\boldsymbol{\beta}) = ||\boldsymbol{\beta}||^2_{l_2}$ とすることで過学習を防ぐことができると考えら

れる．このような思想の元,

$$\hat{L}(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{N}||\mathbf{y} - \Phi\boldsymbol{\beta}||_{l_2}^2 + \lambda||\boldsymbol{\beta}||_{l_2}^2, \tag{8}$$

を最小化する推定手法を Ridge 回帰という．この式において, λ は正則化の強さを決定するパラメータで, 正則化パラメータといわれる．この正則化の強さは $\mathbf{y}$ の分散が大きいほど, 相対的に弱くなる．なぜならば, 誤差が相対的に大きくなるからである．そこで, $\mathbf{y}$ を標準偏差で割って推定を行い, 複数の推定において共通した正則化パラメータを使用する．

式 (8) を最小化するパラメータ $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{Ridge}}$ は

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{Ridge}} = (\Phi^{\mathrm{T}}\Phi + \lambda N I)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\mathbf{y}, \tag{9}$$

と表せる．この式において, I は p 次の単位行列を表す．

3　多項式モデリング

本節では, もっとも単純な推定手法として, $\phi_j(\mathbf{x})$ に多項式を用いた例を紹介する．その性能を評価するにあたり, Lorenz 微分方程式から生成されたデータを用いる．3.2 節までは [1, 8] を参考にしている．

3.1　Lorenz 微分方程式

Lorenz 微分方程式 [5] は熱対流を示す偏微分方程式を大胆に単純化することで現れる 3 次元の常微分方程式で, 以下で示される:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= p(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz. \end{aligned} \tag{10}$$

今回, データを生成するにあたり, $(p, r, b) = (10, 28, \frac{8}{3})$ とした．この設定はカオス性が生まれることで知られている．また, データの生成は 4 次の Runge-Kutta 法を用い, 時間刻み 0.005 で時間長 $5,000$ だけ行った．

3.2　多項式モデリングの精度評価

Lorenz 微分方程式の 3 次元データに対して, 高々 3 次の多項式回帰を実施した結果を紹介する．推定した結果の係数を表 1 に記した．それを見ると, 本来の微分方程式をよく近似できていることがわかる．実際に数値解軌道を計算すると, 本来の微分方程式の解軌道に近似することもわかる．

このことは, 生成モデルが低次の多項式で表せる場合に, それ以上の次数で回帰をかければよくモデルを近似できることを示している．しかし, 生成モデルが低次の多項式で表せる場合や表されたとしてもそのすべての変数を観測できる場合は多くない．そのような場合の評価を次節で行う．

回帰次数	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_3X_1
第 1 変数	-10.000	10.000	0.000	0.000	0.000
第 2 変数	28.000	-1.000	0.000	0.000	-1.000
第 3 変数	0.000	0.000	-2.667	1.000	0.000

表 1　**Lorenz 微分方程式のモデリング結果.** 高々 3 次の多項式回帰を最小二乗法で行ったときの係数を示している. 推定された 3 つの回帰式すべてにおいて, 係数が絶対値が 10^{-4} より小さいものは省略した.

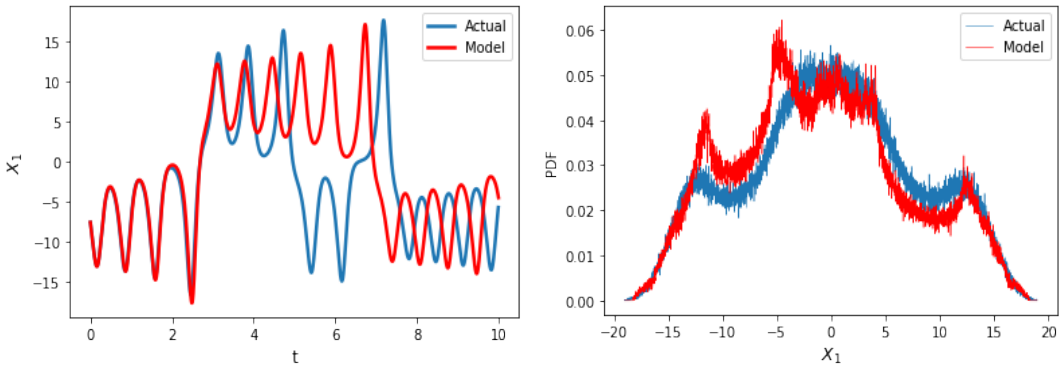


図 1　**時間遅れ系に対する多項式モデリングの結果.** 数値解を時間刻み 0.005 の 4 次 Runge-Kutta 法により求めた. 左図は時間長 10 の X_1 変数の軌道. 短期の予測はできていることがわかる. 右図は時間長 5,000 の軌道を求めたときの X_1 変数の頻度グラフ. 頻度グラフは本来のものを近似できていないことがわかる.

3.3　部分観測と時間遅れの導入

現実では, 生成モデルが低次の多項式で記述されるとは限らず, また一部の変数しか観測できない場合も多い. そのような場合に適用できる手法を考える. その例として, Lorenz 微分方程式のデータのうち, 第 1 変数しか手元にない場合を考える.

入手可能な変数が限られる場合, 埋め込みという操作が生成モデルを再現するのに有用であることが知られている [9]. 埋め込みとは, 1 次元の変数 $x(t)$ に対して, その時間遅れを第 2 変数や第 3 変数として追加する方法である. 例えば, 2 次元分を追加する場合は, 観測された系を疑似的に $(x(t), x(t-\tau), x(t-2\tau))$ とする. 適切に追加する次元と時間遅れの幅 τ を決定することができれば, この手法によって, 元のモデルの性質などを近似できることが知られている. この次元や時間遅れ幅の決定方法について様々な提案がされているが, 確立された方法はない. そこで, 今回は Lorenz 微分方程式の第 1 変数データを扱うにあたり, 時間遅れ幅 0.13 で 2 次元分を追加した.

このモデルに対して, 多項式モデリングを適用した結果を記す. 今回, 高々 8 次の多項式回帰を Ridge 推定で行った. その方程式の短期軌道を図 1 の左図に示した. それを見ると, 短期軌道の予測はある程度うまくいっていることがわかる. 一方で, 統計的特性はうまく近似できていないことが, 図 1 の右図によりわかる.

これらのことから, 多項式で表されるかわからないモデルを低次の多項式でモデリングすると, 短期の軌道は予測しえても, 長期の統計的特性まで近似できるモデルを作ることは簡単ではないと考えられる. そこで, それを解決する手法を次章で導入する.

4　動径関数

Lorenz 微分方程式の第 1 変数とその時間遅れを変数に持つ系の微分方程式を動径関数を用いて推定する.

4.1　動径関数の導入

3.3 節において多項式モデリングが困難であった理由の一つに, 局所的な構造をとらえられなかったことが考えられる. そこで, 局所的な構造を表現できる関数を ϕ_j に用いることを考える.

局所的な構造を表現する方法の 1 つに動径関数がある [3]. 動径関数とは, 入力 $\mathbf{x}$ に対して, あらかじめ決まっている点 $\mathbf{c}$ と $\mathbf{x}$ との距離のみに依存する関数のことをいう. そして, その関数を距離に対して単調減少な有界関数にすることで, 局所的に影響力を持つ関数を構成することができる. 今回はガウス型動径関数といわれる以下の関数 $g_k(\mathbf{x})$ を用いる:

$$g_k(\mathbf{x}) = \exp\left\{\frac{-||\mathbf{x}-\mathbf{c}_k||_{l_2}^2}{h^2}\right\}. \tag{11}$$

ここで, $\mathbf{c}_k$ は k 番目の中心点の座標, h は関数の広がりを表現するパラメータである.

今回, このガウス型動径関数を用いるにあたって, データの存在するすべての領域で 4 つの動径関数に覆われるように中心点 $\{\mathbf{c}_k\}$ を格子状に配置し, h を設定した. 動径関数は $1,806(=: M)$ 個用い, その他に一次項も $\phi_j(\mathbf{x})$ に用いた. つまり, 今回は

$$\left.\frac{d\mathbf{X}}{dt}\right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_i}^{\text{est}} \approx \beta_0 + \sum_{j=1,\cdots,D} \beta_j X_{(i,j)} + \sum_{k=1,\cdots,M} \beta_{D+k}\ g_k(\mathbf{X}_i), \tag{12}$$

として, $\boldsymbol{\beta}$ を推定した. ここで, $\mathbf{X}_{(i,j)}$ はベクトル $\mathbf{X}_i$ の第 j 変数を表す. また, 動径関数は過学習しやすいため, 推定手法には Ridge 回帰 (式 (9)) を用いた.

4.2　短期軌道の評価

動径関数を用いて推定された微分方程式の短期軌道を評価する. 図 2 に短期の解軌道を示している. 多項式モデリングの場合よりも短期予測の精度がよく, かつ時間遅れの構造も保っていることがわかる.

4.3　長期軌道の評価

動径関数を用いて推定された微分方程式の長期軌道を評価する. 図 3 に $10,000$ 時間の解軌道を 3 次元プロットした図を示した. 2 つのアトラクターがよく似ていることがわかる. また, 第 1 変数の頻度グラフを図 4 に示している. 多項式モデリングの場合は頻度グラフを近似できなかったが, 動径関数を用いることで頻度グラフも近似されている.

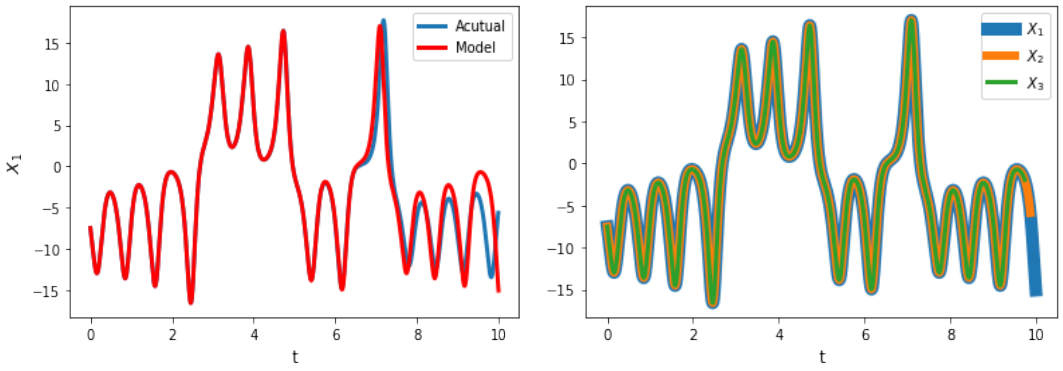


図 2　**動径関数を用いた場合の短期軌道.** 左図は Lorenz 微分方程式の第 1 変数と今回推定された軌道の第 1 変数. 予測がずれている部分はカオス性に由来するものと考えられる. 右図は推定された微分方程式の軌道を時間遅れ分シフトさせた図. 時間遅れ構造が推定された微分方程式にも維持されていることがわかる.

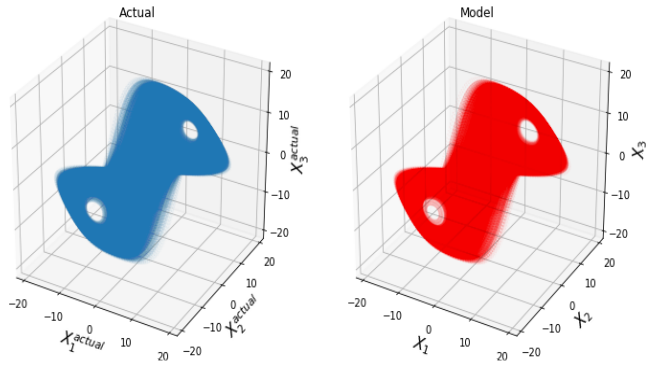


図 3　**動径関数を用いた場合のアトラクター.** 時間刻み $\Delta t = 0.005$ で $T = 10,000$ だけ数値解を計算した結果. 推定された微分方程式のものと本来のものが十分似ていることがわかる.

4.4　不動点

不変集合の一つである不動点についての比較を行う. 不動点とは, 時間微分が 0 となる点のことで, その点が初期値であると動かない点である.

生成モデルである Lorenz 微分方程式 (式 (10)) から不動点をもとめると, 今回のパラメータ設定と時間遅れ系では $(0, 0, 0)$,$(8.485, 8.485, 8.485)$, $(-8.485, -8.485, -8.485)$ の 3 つが不動点となる. 今回推定したモデルの不動点をオイラー法で求めると, 5 つの不動点が求まる. その座標とヤコビ行列の固有値を表 2 に示した. ヤコビ行列の固有値は不動点の性質を決定する要素である. 本来の不動点の座標は良い精度で近似できていることわかる. 一方で, 本来のモデルにはない不動点についてはアトラクターの外にあることが調べるとわかる. この 2 つの不動点をゴースト不動点と呼称する.

2 つのゴースト不動点はモデリング可能な境界を定めている. この不動点の形成する安定多様体を境界にアトラクター側に初期値があるとアトラクター内に吸引される. その一方で, ア

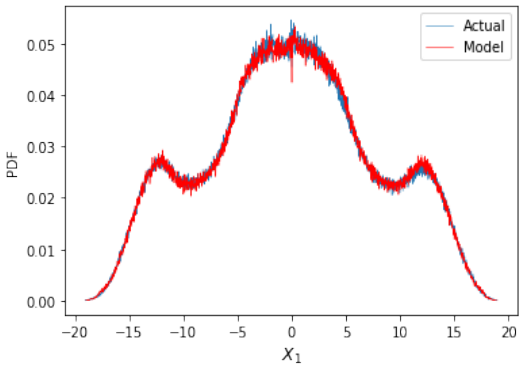


図 4　**動径関数を用いた場合の X_1 の頻度グラフ．**図 3 のデータ X_1 に関する頻度グラフ．本来の頻度グラフと似ていることがわかる．

	L	R	O	GL	GR
X_1^*	-8.48	8.48	0.00	-1.29	1.32
X_2^*	-8.47	8.47	0.00	-1.25	1.29
X_3^*	-8.48	8.48	0.00	-1.37	1.41
Λ_1^*	$0.10 + 10.17i$	$0.10 + 10.17i$	10.56	11.19	11.34
Λ_2^*	$0.10 - 10.17i$	$0.10 - 10.17i$	2.83	-5.12	-4.78
Λ_3^*	-10.60	-11.22	-15.76	-10.12	-10.62

表 2　**不動点の座標とヤコビ行列の固有値．**不動点の座標を (X_1^*, X_2^*, X_3^*) と表し，その点でのヤコビ行列の 3 つの固有値を $\Lambda_1^*, \Lambda_2^*, \Lambda_3^*$ としている．本来の不動点である L, R, O はよく近似できていることがわかる．また，本来の時系列データにないゴースト不動点 GL, GR が存在する．これらはアトラクターの外にあることが調べるとわかる．

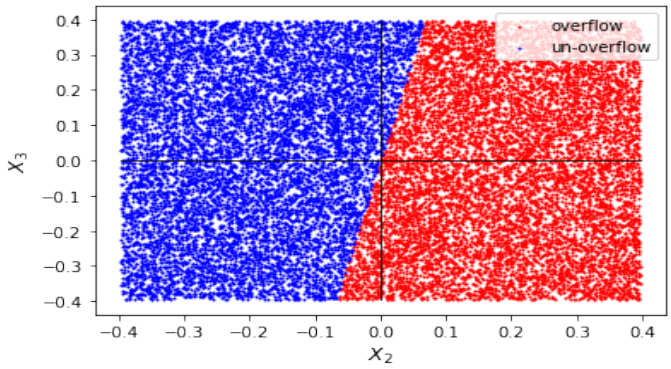


図 5　**ゴースト不動点の形成する境界面．**ゴースト不動点 GR の X_2, X_3 に乱数を足した場合の解軌道が発散するかを確かめた．10 時間以内にアトラクターを含む立方体から出た場合を発散とみなした．発散する場合は赤色，発散しない場合は青色でプロットしている．原点が GR にあたり，それを通る曲線が発散するかの境界面を形成していることがわかる．

トラクターのない側にあると発散すると考えられる．実際に，ゴースト不動点の周辺を初期値にとり数値軌道を求めた結果を図 5 に示した．それを見ると，中心のゴースト不動点を通る線で発散する領域としない領域が分割されていることがわかる．

4.5　まとめ

以上で見てきたように, 動径関数を導入することで短期軌道だけでなく, 長期の軌道の統計的性質や不動点といった性質も近似できる. また, その他にも Poincaré 写像や Lorenz 写像といった性質も元のモデルのものと似ていることが確認することができる. 動径関数を導入することで, 多項式モデリングでとらえられなかった局所的な構造がモデリングできるようになり, 様々な性質まで近似できるようになったと考えられる.

5　流体マクロダイナミクスのモデリング

第 4 章の手法を用いて, 流体力学のエネルギーに関連するマクロ変数 $E(3,t)$ の時系列 [6] を予測するモデルを構築した. 具体的に, 時間窓 5 の移動平均をとったデータに対して, 時間遅れ 2.0 で 4 次元分追加して微分方程式の推定を行った. 流体の基礎方程式からマクロ変数で閉じた方程式は解析的に得られないことが知られている. 一方で, 今回推定された微分方程式はマクロ変数の中で閉じたものとなっている. 図 6 に推定された微分方程式の数値解軌道を示した. ある程度の時間, もとの時系列を近似できることが確認できる.

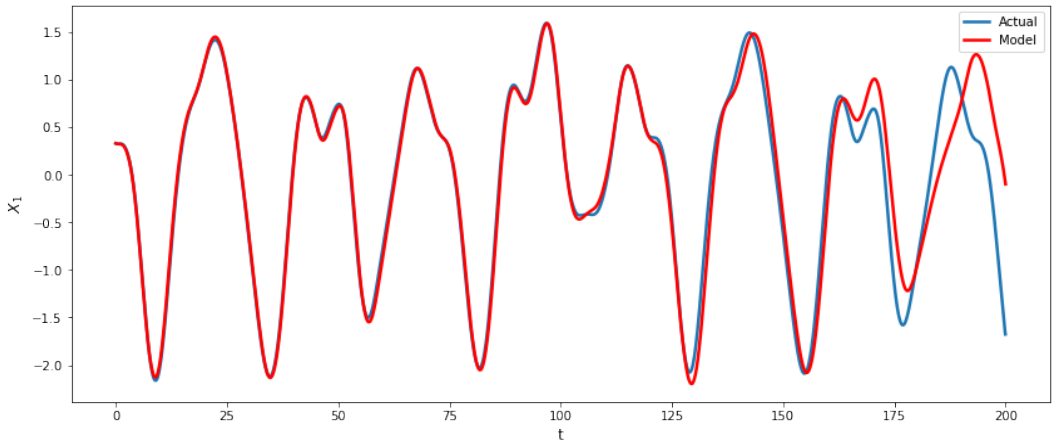


図 6　$X_1 = E(3,t)$ **の推定モデルの数値解軌道.** 時間刻み 0.005 の 4 次 Runge-Kutta 法で解軌道を計算した.

6　まとめ

今回, 生成モデルが未知のデータの微分方程式を推定する手法の提案を行った. データの時間微分値を Taylor 展開を用いて推定した後, それを目標変数にして動径関数に回帰することで近似的な微分方程式を作ることができる. この推定手法により求まった微分方程式は生成モデルの短期軌道だけでなく, 統計的な性質も近似しうることが分かった.

一方で, この手法は動径関数の配置を格子状に行う設定ゆえ, 大きな次元のデータおよび過度に複雑で多くの動径関数を必要とする場合などには適用できない. そのような場合にどのように行うべきかは今後検討するべき事項である.

謝辞

本研究は一橋大学大学院経営管理研究科齊木吉隆教授と東京海洋大学大学院学術研究院中井拳吾助教との共同研究である.

参考文献

[1] E. Baake, M. Baake, H. Bock, and K. Briggs. Fitting ordinary differential equations to chaotic data. *Physical Review A*, 45(8):5524, 1992.

[2] I. Goodfellow, Y. Bengio, and A. Courville. *Deep Learning*. MIT Press, 2016. `http://www.deeplearningbook.org`.

[3] S. Kawano and S. Konishi. Nonlinear regression modeling via regularized gaussian basis function. *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, 39:83–96, 2007.

[4] M. U. Kobayashi, K. Nakai, Y. Saiki, and N. Tsutsumi. Dynamical system analysis of a data-driven model constructed by reservoir computing. *Physical Review E*, 104:044215, 2021.

[5] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20(2):130–141, 1963.

[6] K. Nakai and Y. Saiki. Machine-learning inference of fluid variables from data using reservoir computing. *Physical Review E*, 98(2):023111, 2018.

[7] N. Tsutsumi, K. Nakai, and Y. Saiki. Estimating differential equations from chaotic time-series. *in preparation*.

[8] W.-X. Wang, R. Yang, Y.-C. Lai, V. Kovanis, and C. Grebogi. Predicting catastrophes in nonlinear dynamical systems by compressive sensing. *Physical Review Letters*, 106(15):154101, 2011.

[9] 池口徹. カオス時系列解析の基礎と応用. **産業図書**, pages 33–58, 2000.

Jacobi 多様体と擬 Riemann 計量の整合性

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
木村 直記 (Naoki KIMURA)

概要

Poisson 多様体はシンプレクティック多様体の一般化であり，Jacobi 多様体は Poisson 多様体の一般化である．Boucetta は，Kähler 構造の一般化として，Poisson 構造と擬 Riemann 計量の整合性の概念を導入した．本講演では，この概念を更に一般化し，Jacobi 構造と擬 Riemann 計量の整合性を定義する．また，この定義における計量との整合性が，Jacobi 多様体の Poisson 化に対して良い振る舞いを示すことを紹介する．本研究は中村友哉氏 (工学院大学) との共同研究である．

1 Poisson 多様体と Lie 亜代数

本稿では，M を C^∞-多様体とする．

定義 1 (シンプレクティック多様体)．$2n$ 次元多様体 M 上の非退化閉 2-形式 ω，すなわち，$\omega^n \neq 0$ かつ $d\omega = 0$ を満たす 2-形式 ω を M 上のシンプレクティック構造といい，(M, ω) をシンプレクティック多様体という．

M 上のベクトル場の空間 $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ には Lie bracket $[\cdot, \cdot]$ が定まっているが，これを M 上の多重ベクトル場の空間，すなわち $\Gamma(\Lambda^* TM)$ にいくつかの条件を満たすように拡張したものを Schouten bracket と呼び，Lie bracket と同じく $[\cdot, \cdot]$ と書く．Schouten bracket は $[\cdot, \cdot] : \Gamma(\Lambda^k TM) \times \Gamma(\Lambda^l TM) \to \Gamma(\Lambda^{k+l-1} TM)$ である．Schouten bracket $[\cdot, \cdot]$ を用いて Poisson 多様体は次のように定義される．

定義 2 (Poisson 多様体)．M 上の 2-ベクトル場 $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ が

$$[\pi, \pi] = 0$$

を満たすとき，π を M 上の Poisson 構造といい，(M, π) を Poisson 多様体という．

M 上の 2-形式 $\omega \in \Gamma(\Lambda^2 T^*M)$ と 2-ベクトル場 $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ に対して，
$\omega^\flat : TM \to T^*M,\ X \mapsto \omega^\flat(X) := \omega(X, \cdot)$,
$\pi^\# : T^*M \to TM,\ \alpha \mapsto \pi^\#(\alpha) := \pi(\alpha, \cdot)$
と定めると，
ω が非退化 $\iff$ $\omega^\flat : TM \to T^*M$ が同型射,
π が非退化 $\iff$ $\pi^\# : T^*M \to TM$ が同型射
である．同型射 $-\omega^\flat : TM \to T^*M$ と同型射 $\pi^\# : T^*M \to TM$ が互いに逆写像になるように ω と

π をとることによって，M 上の非退化 2-形式 ω と非退化 2-ベクトル場 π は 1 対 1 対応している．また，非退化 2-形式 ω とそれに対応する非退化 2-ベクトル場 π に対して

$$d\omega = 0 \iff [\pi, \pi] = 0$$

が成り立つので，非退化 Poisson 構造とシンプレクティック構造は等価な概念である．従って，Poisson 多様体はシンプレクティック多様体の一般化である．

定義 3 (Lie 亜代数)**.** M 上のベクトル束 A の切断の空間 $\Gamma(A)$ に Lie bracket $[\cdot,\cdot]_A$ が定まっており，M 上のバンドル写像 $\rho_A : A \to TM$ があって，任意の $X, Y \in \Gamma(A)$ と $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$[X, fY]_A = f[X, Y]_A + (\rho_A(X)f)Y$$

を満たすとき，$(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ を M 上の Lie 亜代数という．また，ρ_A をアンカーと呼ぶ.

例 1. (1) Lie 代数は 1 点上の Lie 亜代数である．(M が 1 点)

(2) M の接束 $(TM, [\cdot,\cdot], \mathrm{id}_{TM})$ は M 上の Lie 亜代数である．ここで，$[\cdot,\cdot]$ は M 上のベクトル場の空間 $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(TM)$ の通常の Lie bracket．$(TM, [\cdot,\cdot], \mathrm{id}_{TM})$ を標準的な Lie 亜代数と呼ぶ.

Lie 亜代数 $(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ に対して，標準的な Lie 亜代数である TM の場合と同じように differential $d_A : \Gamma(\Lambda^k A^*) \to \Gamma(\Lambda^{k+1} A^*)$ (TM の場合は外微分 d)，Lie 微分 $\mathcal{L}^A_X : \Gamma(\Lambda^k A^*) \to \Gamma(\Lambda^k A^*)$，Schouten bracket $[\cdot,\cdot]_A : \Gamma(\Lambda^k A) \times \Gamma(\Lambda^l A) \to \Gamma(\Lambda^{k+l-1} A)$ が定義される.

定義 4 (Poisson 構造)**.** M 上の Lie 亜代数 $(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ 上の 2-切断 $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 A)$ が

$$[\pi, \pi]_A = 0$$

を満たすとき，π を A 上の Poisson 構造という.

多様体 M 上の Poisson 構造は標準的な Lie 亜代数 TM 上の Poisson 構造であるから，Lie 亜代数 A 上の Poisson 構造は多様体上の Poisson 構造の一般化である.

多様体 M 上に Poisson 構造 π があるとき,

$$[\alpha, \beta]_\pi := \mathcal{L}_{\pi^\sharp \alpha}\beta - \mathcal{L}_{\pi^\sharp \beta}\alpha - d(\pi(\alpha, \beta)) \quad (\alpha, \beta \in \Gamma(T^*M))$$

と定めると，余接束 T^*M に Lie 亜代数の構造 $T^*M_\pi := (T^*M, [\cdot,\cdot]_\pi, \pi^\#)$ が入る.
このことは標準的な Lie 亜代数 TM から一般の Lie 亜代数 A に一般化できる.
M 上の Lie 亜代数 $(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ 上に Poisson 構造 π があるとき,

$$[\alpha, \beta]_{A,\pi} := \mathcal{L}^A_{\pi^\sharp \alpha}\beta - \mathcal{L}^A_{\pi^\sharp \beta}\alpha - d_A(\pi(\alpha, \beta)) \quad (\alpha, \beta \in \Gamma(A^*))$$

と定めると，A の双対ベクトル束 A^* に Lie 亜代数の構造 $A^*_\pi := (A^*, [\cdot,\cdot]_{A,\pi}, \rho_A \circ \pi^\#)$ が入る.

Poisson 多様体の研究において Lie 亜代数 T^*M_π は重要である．実際に，Lie 亜代数 T^*M_π は Poisson 多様体の情報の多く（Poisson コホモロジーや特性葉層など）を持っている.

2　Jacobi 多様体と Jacobi 亜代数

定義 5 (Jacobi 多様体)．M 上の 2-ベクトル場 $\Lambda \in \Gamma(\Lambda^2 TM)$ とベクトル場 E の組 (Λ, E) が

$$[\Lambda, \Lambda] = 2E \wedge \Lambda, \quad [E, \Lambda] = 0$$

を満たすとき，(Λ, E) を M 上の Jacobi 構造といい，(M, Λ, E) を Jacobi 多様体という．

Jacobi 多様体 (M, Λ, E) で $E = 0$ のとき，(M, Λ) は Poisson 多様体．従って，Jacobi 多様体は Poisson 多様体の一般化である．

定義 6 (接触多様体)．$(2n+1)$ 次元多様体 M 上の 1-形式 η が $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ を満たすとき，η を M 上の接触構造といい，(M, η) を接触多様体という．

M 上に接触構造 η があるとき，η から Jacobi 構造 (Λ, E) が定まるが，この Jacobi 構造 (Λ, E) は “非退化” になる．非退化 Poisson 構造とシンプレクティック構造は等価な概念であるのと同じように，非退化 Jacobi 構造と接触構造は等価な概念である．

定義 7 (Jacobi 亜代数)．M 上の Lie 亜代数 A と A の 1-コサイクル ϕ_0 の組 (A, ϕ_0) を M 上の Jacobi 亜代数という．ここで，$\phi_0 \in \Gamma(A^*)$ が $d_A \phi_0 = 0$ を満たすとき，A の 1-コサイクルという．

Jacobi 亜代数 (A, ϕ_0) は $\phi_0 = 0$ のとき Lie 亜代数 A であるから，Jacobi 亜代数は Lie 亜代数の一般化である．

例 2. $(X, f), (Y, h) \in \mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M)$ に対して

$$[(X, f), (Y, h)] := ([X, Y], Xh - Yf)$$

と定めると，$\Gamma(TM \times \mathbb{R}) \cong \mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M)$ と同一視することにより，$TM \times \mathbb{R}$ に Lie 亜代数の構造 $(TM \times \mathbb{R}, [\cdot, \cdot], \mathrm{pr}_1)$ が入る．さらに，$(0, 1) \in \Omega^1(M) \times C^\infty(M) \cong \Gamma(T^*M \times \mathbb{R})$ はこの Lie 亜代数 $(TM \times \mathbb{R}, [\cdot, \cdot], \mathrm{pr}_1)$ の 1-コサイクルとなるから，$(TM \times \mathbb{R}, (0, 1))$ は M 上の Jacobi 亜代数になる．$(TM \times \mathbb{R}, (0, 1))$ を標準的な Jacobi 亜代数と呼ぶ．

Jacobi 亜代数 (A, ϕ_0) では，Lie 亜代数 A に 1-コサイクル ϕ_0 を付け加えたことによって，Lie 亜代数 A のアンカー ρ_A，differential d_A，Schouten bracket $[\cdot, \cdot]_A$ が ϕ_0 によってひねられる．ϕ_0 によってひねられた演算を $\rho_A^{\phi_0}$，$d_A^{\phi_0}$，$[\cdot, \cdot]_A^{\phi_0}$ と書く．

定義 8 (Jacobi 構造)．M 上の Jacobi 亜代数 (A, ϕ_0) 上の 2-切断 $\pi \in \Gamma(\Lambda^2 A)$ が

$$[\pi, \pi]_A^{\phi_0} = 0$$

を満たすとき，π を (A, ϕ_0) 上の Jacobi 構造という．

Jacobi 亜代数 (A, ϕ_0) 上の Jacobi 構造 π は，$\phi_0 = 0$ のとき Lie 亜代数 A 上の Poisson 構造に他ならない．従って，Jacobi 亜代数上の Jacobi 構造は Lie 亜代数上の Poisson 構造の一般化である．

多様体 M 上の Jacobi 構造 (Λ, E) は，$\Gamma(\Lambda^2 TM) \times \mathfrak{X}(M) \cong \Gamma(\Lambda^2(TM \times \mathbb{R}))$ と同一視することで標準的な Jacobi 亜代数 $(TM \times \mathbb{R}, (0,1))$ 上の Jacobi 構造とみなせる．従って，Jacobi 亜代数上の Jacobi 構造は多様体上の Jacobi 構造の一般化でもある．

Lie 亜代数 A 上に Poisson 構造 π があると A の双対ベクトル束 A^* に Lie 亜代数の構造 A^*_π が定まるのと同様に，Jacobi 亜代数 (A, ϕ_0) 上に Jacobi 構造 π があると A の双対ベクトル束 A^* に Jacobi 亜代数の構造 (A^*_π, X_0) が入る．ここで，$X_0 := -\pi^\# \phi_0 \in \Gamma(A)$ である．
特に，標準的な Jacobi 亜代数 $(TM \times \mathbb{R}, (0,1))$ 上の Jacobi 構造の場合，すなわち，多様体 M 上の Jacobi 構造 (Λ, E) に対しては，$TM \times \mathbb{R}$ の双対ベクトル束 $T^*M \times \mathbb{R}$ に Jacobi 亜代数の構造 $(T^*M \times \mathbb{R}, (-E, 0))$ が入る．

Poisson 多様体の研究において Lie 亜代数 T^*M_π が重要であるように，Jacobi 多様体の研究において Jacobi 亜代数 $(T^*M \times \mathbb{R}, (-E, 0))$ は重要である．

Jacobi 多様体の Poisson 化と呼ばれる操作は Jacobi 多様体を研究する上で非常に重要である．Poisson 化によって，Jacobi 多様体の研究をより理解の進んでいる Poisson 多様体の研究に帰着できるからである．また，非退化 Jacobi 多様体，すなわち接触多様体の Poisson 化は接触多様体のシンプレクティック化に他ならない．すなわち，非退化 Jacobi 多様体の Poisson 化は非退化 Poisson 多様体である．また，Poisson 化という操作は Jacobi 亜代数上の Jacobi 構造に対して一般化されている．

3 Poisson 構造と計量の整合性

Lie 亜代数 A 上のアファイン接続は TM の共変微分と同じように定義できる．

定義 9. M 上の Lie 亜代数 $(A, [\cdot,\cdot]_A, \rho_A)$ について，$\mathbb{R}$-双線型写像 $\nabla : \Gamma(A) \times \Gamma(A) \to \Gamma(A)$ が任意の $f \in C^\infty(M)$ と $X, Y \in \Gamma(A)$ に対して

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y,$$
$$\nabla_X fY = f \nabla_X Y + (\rho_A(X) f) Y$$

を満たすとき，∇ を A 上のアファイン接続という．

TM の共変微分の場合と同じように，Lie 亜代数 A 上の擬 Riemann 計量 g に対して，捩率 0 かつ計量 g と両立しているような A 上のアファイン接続が唯一つ存在し，そのアファイン接続を g の Levi-Civita 接続と呼ぶ．

Boucetta は，多様体 M 上の Poisson 構造 π と計量の整合性を Lie 亜代数 T^*M_π 上の計量の Levi-Civita 接続を用いて次のように定義した．

定義 10 (Boucetta)**.** Poisson 多様体 (M, π) と T^*M 上の擬 Riemann 計量 g^* に対して，(π, g^*) が整合的であるとは

$$D\pi = 0$$

が成立するときをいう．ここで，D は Lie 亜代数 T^*M_π 上の g^* の Levi-Civita 接続.

(π, g^*) が整合的でかつ Poisson 構造 π が非退化であるとき，π に対応するシンプレクティック形

式 ω は Kähler 形式になることが示されている．従って，整合的な計量を持つ Poisson 構造は Kähler 構造の一般化とみなせる．

Boucetta は多様体上の Poisson 構造と計量の整合性を上記のように定義したが，この定義は Lie 亜代数 T^*M_π 上の計量の Levi-Civita 接続を用いたものであるから，一般の Lie 亜代数 A 上の Poisson 構造に対して計量との整合性を同様に定義できる．

定義 11. Lie 亜代数 A 上の Poisson 構造 π と A^* 上の擬 Riemann 計量 g^* に対して，(π, g^*) が整合的であるとは

$$D^\pi \pi = 0$$

が成立するときをいう．ここで，D^π は Lie 亜代数 A^*_π 上の g^* の Levi-Civita 接続.

4 Jacobi 構造と計量の整合性 (主結果)

今回，Jacobi 亜代数上の Levi-Civita 接続を用いて，Jacobi 亜代数上の Jacobi 構造と計量の整合性を次のよう定義した.

定義 12 (K-Nakamura)**.** Jacobi 亜代数 (A, ϕ_0) 上の Jacobi 構造 π と A^* 上の擬 Riemann 計量 g^* に対して，(π, g^*) が整合的であるとは

$$\begin{aligned}(D^{\pi,\phi_0}_\alpha \pi)(\beta,\gamma) = -\frac{1}{2}((X_0 \otimes \pi)(\beta,\gamma,\alpha) + (X_0 \otimes \pi)(\gamma,\alpha,\beta) + g^*(\alpha,\beta)\pi((g^*)^{\flat-1}(X_0),\gamma) \\ - g^*(\alpha,\gamma)\pi((g^*)^{\flat-1}(X_0),\beta))\end{aligned}$$

が成立するときをいう．ここで，D^{π,ϕ_0} は Jacobi 亜代数 (A^*_π, X_0) 上の g^* の Levi-Civita 接続.

この定義は $\phi_0 = 0$ のとき，定義 11 の Lie 亜代数 A 上の Poisson 構造と計量の整合性の定義と一致している．従って，定義 12 における Jacobi 構造と計量の整合性は Poisson 構造と計量の整合性の一般化になっている．

また，Jacobi 構造と計量の整合性をこのように定義すると次が成り立つ.

定理 13 (K-Nakamura)**.** 定義 11 と定義 12 における計量との整合性は，Poisson 化によって保たれる.

非退化 Jacobi 多様体，すなわち接触多様体に対してこの定理を適用して次を得た.

定理 14 (K-Nakamura)**.** M 上の接触計量構造に対して，その接触構造から定まる非退化 Jacobi 構造と計量が整合的であることと，その接触計量構造が佐々木構造になることが同値である.

定義 10 における整合的な計量を持つ Poisson 構造は Kähler 構造の一般化とみなせるが，定理 14 より，定義 12 における整合的な計量を持つ Jacobi 構造は佐々木構造の一般化とみなすことができる.

参考文献

[1] M. Boucetta, *Compatibilit des structures pseudo-riemanniennes et des structures de Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. 333 (2001), no. 8, 763-768.

Rarita-Schwinger fields on nearly Kähler manifolds.

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
大野走馬 (Soma OHNO)

概要

ラリタ=シュウィンガー作用素, 及びラリタ=シュウィンガー場はそれぞれディラック作用素と調和スピノールというスピン 1/2 幾何の対象をスピン 3/2 幾何に一般化したものである. 我々は [14] において, ラリタ=シュウィンガー場を nearly ケーラー多様体上で調べた. また, ラリタ=シュウィンガー場を調べるのと同様の方法を用いることによって, nearly ケーラー多様体上の変形理論に関しても結果を得ることができた. 今回の講演ではこれらの結果の概要を説明していく.

1 導入

スピン群 $\mathrm{Spin}(n)$ は特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ の普遍被覆として定義される. これは二重被覆となり, 被覆写像を $\mathrm{Ad} : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ と書くことにする.

定義. 向き付きリーマン多様体 (M, g) 上の主 $\mathrm{Spin}(n)$ 束 $\mathbf{Spin}(M)$ 及び次の可換図式を満たす束準同型 Φ をスピン構造という.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Spin}(M) \times \mathrm{Spin}(n) & \xrightarrow{\Phi \times \mathrm{Ad}} & \mathbf{SO}(M) \times \mathrm{SO}(n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Spin}(M) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbf{SO}(M) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ M & \xrightarrow{=} & M \end{array}$$

スピン構造が入った (M, g) をスピン多様体と呼ぶ.

スピン構造を持つことの同値条件はある特性類を用いて述べることができる.

定理. (M, g) を向き付きリーマン多様体とする. このとき, 次は同値になる.

- (M, g) がスピン構造を持つ.
- M の 2 次スティーフェル-ホイットニー類 $\omega_2(M)$ が自明になる.

例えば n 次元球面 $S^n (n \geq 3)$ や奇数次元の複素射影空間 $\mathbb{C}P^{2n+1}$, 及びすべてのカラビヤウ多様体はスピン構造を持つ.

定義. (M^n, g) をスピン多様体, $\mathbf{Spin}(M)$ をスピン構造とする. このとき, スピノール表現 (Δ_n, W_n)

に関する同伴ベクトル束

$$S_{1/2} \coloneqq \mathbf{Spin}(M) \times_{\Delta_n} W_n$$

をスピノール束という. また, このスピノール束の切断をスピノール場とよぶ.

スピン幾何学において重要な楕円型形式的自己共役作用素であるディラック作用素 $D : \Gamma(S_{1/2}) \to \Gamma(S_{1/2})$ を次で定義する.

$$D \coloneqq \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}.$$

ここで, $e_i\cdot$ を TM の局所正規直交枠 $\{e_i\}$ によるクリフォード積としている. このディラック作用素に関する定理を二つ紹介する. 一つ目は指数定理である. (M, g) を偶数次元のスピン多様体とすると, スピノール束は $S_{1/2} = S^+_{1/2} \oplus S^-_{1/2}$ と分解する. ディラック作用素はこの分解に沿って $D = D^+ + D^-$ と書ける. ここで, $D^\pm : \Gamma(S^\pm_{1/2}) \to \Gamma(S^\mp_{1/2})$ である. Atiyah-Singer の指数定理 ([1]) とは, 「多様体がコンパクトなとき, ディラック作用素の解析的指数 $\operatorname{ind} D$ と M の $\hat{A}$-genus $\hat{A}(M)$ が一致する」というものである. つまり,

$$\operatorname{ind} D \coloneqq \dim \ker D^+ - \dim \ker D^- = \hat{A}(M).$$

二つ目の定理は次のリヒネロヴィッツ公式である.

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{\mathrm{scal}}{4}.$$

コンパクトリーマン多様体上で接続ラプラシアン $\nabla^*\nabla$ が非負であることから, スカラー曲率が正 ($\mathrm{scal} > 0$) のときに $\ker D = 0$ となる. また, この $\ker D$ の元のことを調和スピノールと呼ぶ. 同様に, $\mathrm{scal} \equiv 0$ のときに調和スピノールの空間と平行スピノールの空間は一致する, つまり $\ker D = \ker \nabla$ が成り立つ. さらに, 指数定理を用いることによって次を得る.

定理. M を $4k$ 次元コンパクトスピン多様体とする. M に正のスカラー曲率を持つ計量が入るならば $\hat{A}(M) = 0$ となる. 対偶を考えれば, $\hat{A}(M) \neq 0$ ならば M には正のスカラー曲率を持つ計量は入らないということである.

このように, ディラック作用素はスピン幾何学において面白い対象なのである. このようなスピン幾何学の基礎について詳しく知りたい人は [4], [9], [10] などを参照してほしい.

2 ラリタ=シュウィンガー場

(M^n, g) をスピン多様体, $S_{1/2}$ をスピノール束, TM を接束とする. このとき, $S_{1/2} \otimes TM$ 上の捩れディラック作用素 D_{TM} を次で定義する:

$$D_{TM} \coloneqq \sum_{i=1}^{n} (e_i \cdot \otimes \mathrm{Id}_{TM}) \nabla_{e_i}.$$

ここで, ∇ をレビチビタ接続から導かれる $S_{1/2} \otimes TM$ 上の共変微分である. また, 我々は束写像 $\Pi : S_{1/2} \otimes TM \ni \xi \otimes X \mapsto X \cdot \xi \in S_{1/2}$ に対して $S_{3/2} \coloneqq \ker \Pi$ としてベクトル束を定義する. この

$S_{3/2}$ をスピン 3/2 のスピノール束という．さて, $S_{1/2}\otimes TM$ は $\mathrm{Spin}(n)$ によって $S_{1/2}\oplus S_{3/2}$ と既約分解されるが, 捩れディラック作用素 D_{TM} をこの分解に沿って 2×2 行列の形で次のように書くことができる．

$$D_{TM}=\begin{pmatrix} \frac{2-n}{n}D & 2P^* \\ \frac{2}{n}P & Q \end{pmatrix}. \tag{1}$$

$D:\Gamma(S_{1/2})\to\Gamma(S_{1/2})$ は通常のディラック作用素であり, $P:\Gamma(S_{1/2})\to\Gamma(S_{3/2})$ はペンローズ作用素, P^* はペンローズ作用素の形式的随伴作用素である．そして, (2,2)-成分に現れている $Q:\Gamma(S_{3/2})\to\Gamma(S_{3/2})$ をラリタ=シュウィンガー作用素と呼び, 楕円型自己共役な 1 階の微分作用素である．これはディラック作用素のスピン 3/2 版だと思うことができる．また, 1 節において定義した調和スピノールのスピン 3/2 版が次に定義するラリタ=シュウィンガー場である．

定義. $\phi\in\Gamma(S_{3/2})$ が $Q\phi=0$ かつ $P^*\phi=0$ を満たすときにラリタ=シュウィンガー場と呼び, その全体を $\ker Q\cap\ker P^*$ と表す．捩れディラック作用素の行列表示 (1) から分かるように, $\phi\in\Gamma(S_{3/2}), Q\phi=0, P^*\phi=0$ と $\phi\in\Gamma(S_{3/2}), D_{TM}\phi=0$ は同値である．

上で定義したラリタ=シュウィンガー場は, Rarita と Schwinger によって 1941 年に初めて定義され, 重力子の超対称性パートナーであるグラビティーノを記述することから物理学ではよく研究されている．数学においてもいくつか研究結果がある．Wang はラリタ=シュウィンガー場と無限小アインシュタイン変形の関係性を調べた ([15])．さらに最近, 平行ラリタ=シュウィンガー場を持つ多様体が分類された ([8])．

[8] では他にもラリタ=シュウィンガー作用素やラリタ=シュウィンガー場に関して色々と調べられている．例えば次のワイゼンベック公式などが得られる．

$$\frac{2-n}{n}PD+QP=\frac{1}{2}\left(\mathrm{Ric}-\frac{\mathrm{scal}}{n}\right).$$

さらに捩れディラック作用素の行列表示を用いて $D_{TM}^2D_{TM}=D_{TM}D_{TM}^2$ という等式を計算し, アインシュタインという条件を課すことによって様々な可換公式が得られる．

定理 (Homma, Semmelmann 2019 [8])**.** (M,g) をアインシュタインスピン多様体とする．このとき次の可換公式が成り立つ．

$$\begin{aligned} Q\circ P&=\frac{n-2}{n}P\circ D, \quad P^*\circ Q=\frac{n-2}{n}D\circ P^*,\\ \Delta_{S_{1/2}}\circ D&=D\circ\Delta_{S_{1/2}}, \quad \Delta_{S_{1/2}}\circ P^*=P^*\circ\Delta_{S_{3/2}},\\ \Delta_{S_{3/2}}\circ P&=P\circ\Delta_{S_{1/2}}, \quad \Delta_{S_{3/2}}\circ Q=Q\circ\Delta_{S_{3/2}}. \end{aligned}$$

ここで, $\Delta_{S_{1/2}}$ や $\Delta_{S_{3/2}}$ は標準ラプラシアンと呼ばれる 2 階の微分作用素である．

さらに, P^*P が楕円型の微分作用素であることから, 次の定理を得る．

定理 (Homma, Semmelmann 2019 [8])**.** (M,g) をコンパクトなアインシュタインスピン多様体する．このとき, $\Gamma(S_{3/2})=\ker P^*\oplus\mathrm{Im}\,P$ が成り立ち, さらに次を満たす．

- $Q^2=\Delta_{S_{3/2}}+\dfrac{n-8}{8n}\,\mathrm{scal}\quad$ on $\ker P^*$,

- $Q^2 = \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 \left(\Delta_{S_{3/2}} + \frac{\mathrm{scal}}{8}\right) \quad \text{on } \mathrm{Im}\, P$

また, スカラー曲率が非負 ($\mathrm{scal} \geq 0$) のとき $\ker Q \cap \mathrm{Im}\, P = \{0\}$ となり, $\ker Q \cap \ker P^* = \ker Q$ が得られる.

このように, アインシュタインスピン多様体において様々な公式が知られているので, 一般のスピン多様体に比べればラリタ＝シュウィンガー場を調べることができる.

3 nearly ケーラー多様体

定義. 概エルミート多様体 (M, g, J) が次を満たすときに nearly ケーラー多様体という.

$$(\nabla_X J)X = 0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

ここで, ∇ はレビチビタ接続である. また, $(\nabla J)_p \neq 0$, $\forall p \in M$ が成り立つときに nearly ケーラー多様体が strict という. (6 次元の場合には non-Kähler と同値である.)

nearly ケーラー多様体上には標準的なエルミート接続 $\bar{\nabla}$ と呼ばれる次の自然な接続がある.

$$\bar{\nabla}_X Y \coloneqq \nabla_X Y - \frac{1}{2} J(\nabla_X J)Y, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

この接続 $\bar{\nabla}$ は $\bar{\nabla} g = 0$ と $\bar{\nabla} J = 0$ を満たし, 捩率は $\bar{T}(X, Y) = -J(\nabla_X J)Y$ となる.

さて, nearly ケーラー多様体に関して重要な定理を紹介する.

定理 (Nagy 2002 [13])**.** 任意のコンパクト単連結な nearly ケーラー多様体はいくつかのリーマン多様体の積に分解できる. それぞれの多様体は次のクラスのうちのいずれかである.

- ケーラー多様体,
- naturally reductive 3 対称空間,
- スカラー曲率正のコンパクト四元数ケーラー多様体上のツイスター空間,
- 6 次元 strict nearly ケーラー多様体.

この中で, 6 次元 strict nearly ケーラー多様体に興味がある. いくつか理由があり, 一つ目はケーラーでない nearly ケーラー多様体が初めて現れるのが 6 次元であること. (つまり, 2 次元と 4 次元では nearly ケーラー多様体は必ずケーラー多様体になる.) 二つ目は 6 次元 strict nearly ケーラー多様体が実キリングスピノールを持ち, 従って正のアインシュタイン多様体になること. 三つ目は strict nearly ケーラー多様体 (M, g, J) において, ケーラー形式を $\omega \coloneqq g(J\cdot, \cdot)$, 3-form を $\psi^+ \coloneqq \nabla\omega$ と定義すると, 組 (ω, ψ^+) によって M の構造群は $\mathrm{SU}(3)$ に簡約することなどがある. また, このとき上で定義した標準的なエルミート接続は $\mathrm{SU}(3)$ 接続になる. ここで, 二つ目の理由にあるキリングスピノールを定義しておこう.

定義. (M, g) をスピン多様体とする. ある定数 $\lambda \in \mathbb{C}$ が存在し, 次を満たすスピノール場 $\kappa \in \Gamma(S_{1/2})$ をキリングスピノールという.

$$\nabla_X \kappa = \lambda X \cdot \kappa, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

この $\lambda \in \mathbb{C}$ をキリング数と呼ぶ.

キリング数は実数もしくは純虚数になることが知られている. キリング数が零のときには $\kappa \in \Gamma(S_{1/2})$ は平行スピノールとなるが, 零でない実数のときには実キリングスピノール, 純虚数のときには虚キリングスピノールと呼ぶことにする. また, スピン多様体 (M, g) が平行スピノールを持つときにリッチ平坦多様体, 実キリングスピノールを持つときにスカラー曲率が正のアインシュタイン多様体, 虚キリングスピノールを持つときにスカラー曲率が負のアインシュタイン多様体になることが知られている.

6 次元 strict nearly ケーラー多様体が実キリングスピノールを持つことは先に述べたが, 実キリングスピノールを持つ多様体は Bär によって分類されている.

定理 ([2])**.** (M^n, g) を完備単連結なスピン多様体で実キリングスピノールを持つとする. このとき, M は次のいずれかの多様体に一致する.

- 球面 S^n,
- 佐々木-アインシュタイン多様体,
- 3-佐々木多様体,
- 6 次元 strict nearly ケーラー多様体,
- nearly 平行 G_2 多様体.

よって, 6 次元 strict nearly ケーラー多様体以外の実キリングスピノールを持つ多様体でラリタ=シュウィンガー場を調べることにも興味がある.

4 主結果

我々は今回 [14] において, ラリタ=シュウィンガー場を nearly ケーラー多様体上で調べた.

定理 (O, Tomihisa 2021 [14])**.** (M, g, J) を 6 次元でコンパクトな strict nearly ケーラー多様体とする. このとき,

$$\{ \text{ラリタ=シュウィンガー場} \} \cong \{ \text{調和 3 形式} \}.$$

特に, $\dim \ker Q = b_3(M)$ が成り立つ. ここで $b_3(M)$ は 3 次ベッチ数である.

6 次元で完備単連結な strict nearly ケーラー多様体の例は 6 つしか知られていない. そのうちの 4 つは等質 nearly ケーラー多様体で, $S^6 = \mathrm{G}_2 \,/\, \mathrm{SU}(3)$, $S^3 \times S^3 = (\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2))/\Delta\,\mathrm{SU}(2)$, $\mathbb{C}P^3 = \mathrm{Sp}(2)/(\mathrm{U}(1) \times \mathrm{Sp}(1))$, $\mathbb{F}(1,2) = \mathrm{SU}(3)/T^2$ である. 等質 nearly ケーラー多様体はこの 4 つしかないことも知られている ([5]). 残りの 2 つは非等質 nearly ケーラー多様体で, S^6 と $S^3 \times S^3$ である. この 2 つは近年見つけられて, cohomogeneity one nearly ケーラー多様体である ([6]). 等質の S^6 には標準的な計量と概複素構造が備わっているが, その他の 5 つの多様体には標準的でない計量もしくは概複素構造が入っている. これらの多様体の 3 次ベッチ数を計算すると, 等質と非等質の 2 つの $S^3 \times S^3$ の場合に $b_3(S^3 \times S^3) = 2$ であり, 他の場合は 0 となる. 従って, 今知られている例の

中だと, 等質と非等質の 2 つの $S^3 \times S^3$ のみラリタ＝シュウィンガー場が存在していることになる. 一方, 標準的な計量の入った（nearly ケーラー多様体でない）$S^3 \times S^3$ にはラリタ＝シュウィンガー場が存在しないことも今回分かった. これは, ラリタ=シュウィンガー場が位相的な条件だけでなく計量にも依っていることが分かった初めての例という点で重要である.

上の主定理を得るのと同様のテクニックを用いることによって nearly ケーラー多様体の変形理論についても結果が得られた.

定理 (O, Tomihisa 2021 [14])**.** (M, g, J) を 6 次元でコンパクトな strict nearly ケーラー多様体とする. このとき,

$$\{ \text{キリングスピノールの無限小変形} \} \cong E(12) \oplus K_+.$$

ここで. $E(\lambda)$ は co-closed で primitive な $(1,1)$-form に制限したラプラス作用素の固有値 λ の空間であり, K_+ はキリング数が $1/2$ のキリングスピノールの空間である.

標準的な S^6 を除いて, nearly ケーラー構造 (g, J) の無限小変形の空間は $E(12)$ と同型になることが知られている ([11]). nearly ケーラー構造とキリングスピノールは一対一対応しているので, 我々の得た定理は nearly ケーラー構造の無限小変形に関する定理の別証明になっているのである.

アインシュタイン変形の基礎を知りたい人は [3], キリングスピノールの変形理論について知りたい人は [15] を, nearly ケーラー構造や nearly ケーラー多様体上の無限小アインシュタイン変形について知りたい人は [7], [12] などを参照してほしい.

参考文献

[1] M. F. Atiyah, I. M. Singer. *The index of elliptic operators on compact manifolds.* Bull. Amer. Math. Soc., 69 (1963), 422-433.

[2] C. Bär. *Real Killing spinors and holonomy.* Comm. Math. Phys. 154 (1993), no. 3, 509–521.

[3] A. L. Besse. *Einstein manifolds.* Springer-Verlag, Berlin, 1987. xii+510 pp.

[4] J. P. Bourguignon, O. Hijazi, J. L. Milhorat, A. Moroianu, S. Moroianu. *A spinorial approach to Riemannian and conformal geometry.* EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015. ix+452 pp.

[5] J.-B. Butruille. *Classification des variétés approximativement kähleriennes homogènes.* Ann. Global Anal. Geom. 27 (2005), no. 3, 201-225.

[6] L. Foscolo, M. Haskins. *New* G_2*-holonomy cones and exotic nearly Kähler structures on* S^6 *and* $S^3 \times S^3$. Ann. of Math. (2) 185 (2017), no. 1, 59-130.

[7] L. Foscolo. *Deformation theory of nearly Kähler manifolds.* J. Lond. Math. Soc. (2) 95 (2017), no.2, 586-612.

[8] Y. Homma, U. Semmelmann. *The kernel of Rarita-Schwinger operator on Riemannian spin manifolds.* Comm. Math. Phys. 370 (2019), no. 3, 853-871.

[9] 本間泰史. スピン幾何学 スピノール場の数学 森北出版, (2016)

[10] H. B. Lawson, M.-L. Michelsohn. *Spin geometry.* Princeton Mathematical Series, 38. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989. xii+427 pp.

[11] A. Moroianu, P.-A. Nagy, U. Semmelmann. *Deformations of nearly Kähler structures.* Pacific J. Math. 235 (2008), no. 1, 57-72.

[12] A. Moroianu, U. Semmelmann. *Infinitesimal Einstein deformations of nearly Kähler metrics.* Trans. Amer. Math. Soc. 363 (2011), no. 6, 3057-3069.

[13] P.-A. Nagy. *Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations.* Asian J. Math. 6 (2002), no. 3, 481-504.

[14] S. Ohno, T. Tomihisa. *Rarita-Schwinger fields on nearly Kähler manifolds.* arXiv:2105.11129 [math.DG].

[15] M. Y. Wang. *Preserving parallel spinors under metric deformations.* Indiana Univ. Math. J. 40 (1991), no. 3, 815-844.

吊り下げ曲面の微分幾何学的定式化

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
軸丸芳揮 (Yoshiki JIKUMARU)

概要

電線のように自重で釣り合う形状を上下反転させると，圧縮力のみで釣り合う構造が得られ，建築の屋根構造などにおいて力学的に優れた特性を与える．曲線の場合は懸垂線として知られ，さらに膜を吊り下げた場合に現れる曲面の取り扱いに関しては現在も研究が進められているが，材料特性を活かすことができる力学的に優れた特性をもち，かつ変分原理と適合するような定式化に基づく研究は皆無であった．本講演では，膜理論の釣り合い式と変分原理の両方に整合する，力学的特性に優れる吊り下げ型曲面の定式化を提示する．また特別な座標による表示を利用すると，建築曲面設計の問題に対し有用な知見をもたらすことを報告する．なお，本研究は鹿児島大学の横須賀洋平准教授との共同研究に基づく．

1 導入

電線の形状などに見られる，ある曲線を吊り下げた場合に得られる形状は懸垂線やカテナリーとして知られ，自重に対して張力のみで釣り合う．さらに懸垂線を上下反転させた形状は，自重に対して圧縮力のみで釣り合い，逆さ吊り模型と呼ばれる．建築における組積造[*1]のような構造に対しては，逆さ吊り模型で得られる形状が力学的に有用である．サグラダ・ファミリアの設計で著名な Antoni Gaudi は，数式に頼らず，このような逆さ吊り模型の実験を数多く行い，その利点を活かした構造物を提唱した[*2]．またスイスの建築構造家である Heinz Isler は，1000 を超える逆さ吊り模型の実験を行い，実際にガソリンスタンドの屋根形状などへ応用したことでも知られる（図 1）．

近年では実験に頼らない形状形成手法として，チューリッヒ工科大学の Phillipe Block らによって提唱された平面内の力の釣り合い図式を利用した「Thrust Network Analysis (TNA)」と呼ばれる手法が広く知られるようになり，ベルリンやウィーンの幾何学のグループとともに活発な研究が進められている [2, 4, 11]．しかしながら TNA では曲面の座標に関する問題が扱えないため，面内に生じる応力の挙動が明確でなく，さらに変分原理との関連も明確でない．本講演では，微分幾何的手法に基づき，自重に対して座標線方向に面内せん断が生じず，面内膜応力によって釣り合う形状をシェル・膜理論と変分原理に適合する形で定式化する．また建築の文脈において，滑らかな曲面を良い座標でもって離散化することは，数値解析のみならず，力学的特性を維持し，厚みのある平らな板を活用できるという施工性の点からも有効である．そのため，本講演では特別な座標における釣り合い式

[*1] レンガやブロックを積み上げてできる構造のこと．

[*2] 実際には Hooke の法則で有名な Robert Hooke が 1670 年代，すでに逆さ吊り模型の有用性に気づいていたようであるが，彼はアナグラムを利用してその研究成果を公表していたため，解読されたのは 19 世紀になってからであった．実際に Hooke が記述していたアナグラムを文献 [1] に見ることができるが，初見では全く理解できないものである．

の表示と，座標を利用した離散化について述べる．なお本報告内容は論文 [6] を準備中である．



(a) サグラダ・ファミリア



(b) 逆さ吊り模型



(c) 屋根構造



(d) Isler の模型

図 1: (a), (b): Gaudi によるサグラダ・ファミリアとその逆さ吊り模型.
(c), (d): Isler によるダイティンゲンのガソリンスタンドの屋根構造と逆さ吊り模型.

2　準備：曲面論の基本用語

$M \subset \mathbb{R}^2$ を平面内の領域とし[*3]，その座標を (x, y) と表す．M の**はめ込み**とは，ベクトル値関数 $X : M \to \mathbb{R}^3$ であって，M 上の任意の点においてベクトル X_x, X_y が一次独立であるときをいい，はめ込み X を $\mathbb{R}^3$ 内の**曲面**と呼ぶ．このとき X の**面積要素**を $dA = \|X_x \times X_y\| dxdy$ で定める．ベクトル X_x, X_y は曲面の接ベクトルを与え，外積をとって単位法ベクトル $\nu = (X_x \times X_y)/\|X_x \times X_y\|$ を定める．$\mathbb{R}^3$ 上の内積を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と表すとき，曲面の**第一・第二基本行列** g, h を次式で定める：

$$g = \begin{pmatrix} \langle X_x, X_x \rangle & \langle X_x, X_y \rangle \\ \langle X_y, X_x \rangle & \langle X_y, X_y \rangle \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} -\langle X_x, \nu_x \rangle & -\langle X_x, \nu_y \rangle \\ -\langle X_y, \nu_x \rangle & -\langle X_y, \nu_y \rangle \end{pmatrix}. \tag{1}$$

行列 $S = g^{-1}h$ を**形作用素**，S の固有値 κ_1, κ_2 を曲面 X の**主曲率**と呼び，対応する固有ベクトルを**主曲率方向**と呼ぶ．また

$$\mathcal{H} = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \quad \mathcal{K} = \kappa_1 \kappa_2 \tag{2}$$

とおき，$\mathcal{H}, \mathcal{K}$ をそれぞれ曲面 X の**平均曲率**，**Gauss 曲率**と呼ぶ.

以下，座標 (x, y) は曲率線座標であるとする，すなわち第一・第二基本行列がともに対角化される座標を考える[*4]．このとき第一・第二基本行列の成分に関して次の記号を用いる：

$$g = \begin{pmatrix} A_1^2 & 0 \\ 0 & A_2^2 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} \kappa_1 A_1^2 & 0 \\ 0 & \kappa_2 A_2^2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

また単位接ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を関係式

$$X_x = A_1 \boldsymbol{e}_1, \quad X_y = A_2 \boldsymbol{e}_2 \tag{4}$$

によって定める．

[*3] 一般に M は境界をもつ滑らかな 2 次元多様体でよい.
[*4] 接ベクトル X_x, X_y が主曲率方向となる座標．このような座標は $\kappa_1 = \kappa_2$ となる点を除いて存在する.

3　膜の釣り合い式

空間内のシェルや膜のモデル化は，文献 [8, 5] に従う．弾性体の理論における「シェル」という用語は，他の大きさに比べて十分近い距離にある 2 つの曲面 X_1, X_2 によって囲まれた物体に対して用いられ，特に「膜」とはモーメントをゼロとしたシェルを指す．これら 2 つの曲面 X_1, X_2 から等距離にある点の集まりを**シェル中央面**と呼ぶ．シェルの厚みは一定とし，シェル中央面を $X = X(x, y)$ とおく．X に作用する合応力を図 2 のように表すとき，X が**膜**であるとは $N_1 = N_2 = 0$ かつ

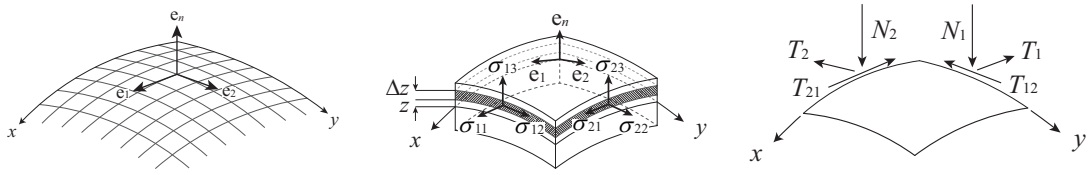


図 2: 単位接ベクトル・法ベクトル，応力・合応力の方向

$T_{12} = T_{21} = S$ と表されるときをいう．このとき，単位面積あたりの荷重 $\boldsymbol{q}$ に対し，座標線方向に面内せん断 S が生じない膜の釣り合いは次式で表される：

$$(A_2T_1)_x - (A_2)_xT_2 + \langle \boldsymbol{q}, X_x \rangle A_2 = 0, \tag{5}$$

$$(A_1T_2)_y - (A_1)_yT_1 + \langle \boldsymbol{q}, X_y \rangle A_1 = 0, \tag{6}$$

$$\kappa_1 T_1 + \kappa_2 T_2 + \langle \boldsymbol{q}, \nu \rangle = 0. \tag{7}$$

補題 3.1. $T_1 = T_2 = T$ かつ $\boldsymbol{q}$ が定ベクトルであるとする．このとき，ある定数 $b \in \mathbb{R}$ が存在し，

$$T + \langle \boldsymbol{q}, X \rangle = -b \tag{8}$$

と表すことができる．また，釣り合い第 3 式は以下の形となる：

$$2\mathcal{H}(\langle \boldsymbol{q}, X \rangle + b) - \langle \boldsymbol{q}, \nu \rangle = 0. \tag{9}$$

注意 3.2. 膜の単位面積あたりの質量を m，重力加速度を g とするとき，鉛直荷重 $\boldsymbol{q} = (0, 0, -mg)$ に対し，$X = (X^1, X^2, X^3)$ とおくと $T = mgX^3 - b$ となり，T は高さ方向の一次関数である．定数 b は膜の最下部の水平張力によって決まり，曲面の高い部分ほど T が大きくなる．

4　変分原理による導出

曲面 $X : M \to \mathbb{R}^3$ と定ベクトル $\boldsymbol{q}$ に対し，以下の汎関数を考える：

$$E(X) := \int_M (\langle \boldsymbol{q}, X \rangle + b)\, dA \tag{10}$$

汎関数 E の停留点は，膜の面積保存条件下における位置エネルギーの停留点にあたる．十分小さな正の数 $\varepsilon > 0$ に対し，曲面 X の変分 X_ε を $X_\varepsilon = X + \varepsilon \delta X + O(\varepsilon^2)$ を考える．ここで δX は変分ベクトル場と呼ばれる．

定理 4.1. 汎関数 E に対する第一変分公式は次式で与えられる：

$$\delta E = -\int_M (2\mathcal{H}(\langle \boldsymbol{q}, X\rangle + b) - \langle \boldsymbol{q}, \nu\rangle)\langle \delta X, \nu\rangle \, dA + \int_{\partial M} (\langle \boldsymbol{q}, X\rangle + b)\langle \delta X, N\rangle \, ds \tag{11}$$

ここで N は境界 ∂M 上の外向き単位余法ベクトルである．したがって Euler-Lagrange 方程式は式 (9) で与えられる．

証明は [6, 7] を参照.

定義 4.2 (吊り下げ曲面)**.** 定荷重 $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$ に対し，膜 $X : M \to \mathbb{R}^3$ が**吊り下げ曲面**であるとは，面内の合応力 T が式 (8) を満たし，釣り合い式 (9) を満たすときをいう．

5　吊り下げ曲面の例

この節では，座標は (s, t) で表すこととする．

5.1　吊り下げ柱面

曲面 X が柱面，すなわち (x, z) 平面上の曲線 $(x(s), 0, z(s))$（s は弧長）を用いて

$$X(s, t) = (x(s), t, z(s)) \tag{12}$$

と表される場合を考える．平面曲線 $(x(s), 0, z(s))$ の曲率を κ と表すと，吊り下げ柱面の釣り合い式は

$$\kappa(\langle \boldsymbol{q}, X\rangle + b) - \langle \boldsymbol{q}, \nu\rangle = 0$$

となる．したがって，補遺で示すように，柱面としての吊り下げ曲面は「懸垂線を y 軸方向へ動かして得られる曲面」に限る．この場合，第一・第二基本形式がともに対角化され，さらに第一基本形式の対角成分は等しいので座標 (s, t) は「等温曲率線座標 (isothermic coordinates)」であるから，座標線方向が主応力方向を与える（図 3）.



図 3: 懸垂線を y 軸方向へ動かして得られる曲面（座標線方向が主応力線を与える）

5.2　吊り下げ回転面

z 軸方向の荷重 $\boldsymbol{q} = (0, 0, \gamma)$ に対し，$X = X(s, t)$ は z 軸を回転軸とする回転面，すなわち

$$X(s, t) := (x(s)\cos t, x(s)\sin t, z(s))$$

と表される曲面を考える（s は弧長パラメータ）．弧長の条件 $(x')^2+(z')^2=1$ より，$x'(s)=\cos\theta(s)$, $z'(s)=\sin\theta(s)$ とおくとき，釣り合い式は次の常微分方程式系へ書き換えられる：

$$x'(s)=\cos\theta(s),\quad z'(s)=\sin\theta(s),\quad \left(\theta'(s)+\frac{\sin\theta(s)}{x(s)}\right)(\gamma z(s)+b)-\gamma\cos\theta(s)=0.$$

これを Mathematica (Version 12.1.0.0) で解かせると，以下のような曲面が得られる：

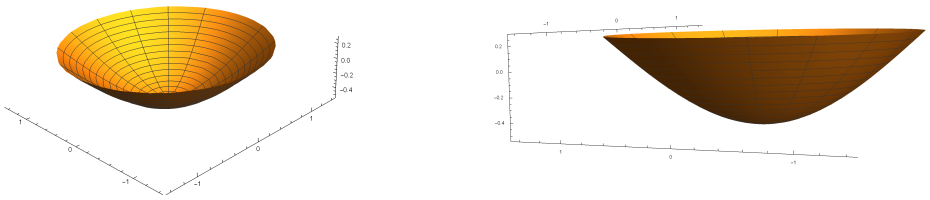


図 4: 吊り下げ回転面（$\gamma=0.516$, $b=0.5$）

6　等温座標による表示，離散化と応力密度法

いま，曲面 X の座標 (x,y) が等温座標，すなわち第一基本行列の係数が

$$A_1^2=A_2^2=e^{\omega} \tag{13}$$

という形で表される座標であるとする[*5]．

定理 6.1. 等温座標で表される膜 X に対し，式 (9) は次の形へ書き換えられる：

$$(-(\langle \boldsymbol{q},X\rangle+b)X_x)_x+(-(\langle \boldsymbol{q},X\rangle+b)X_y)_y+\boldsymbol{q}A_1A_2=0. \tag{14}$$

特に座標 (x,y) が等温かつ曲率線座標であるとき[*6]，荷重 $\boldsymbol{q}$ に対して吊り下げ曲面は座標線方向に面内せん断が生じない釣り合い状態を与え，座標線に沿う主合応力（張力・圧縮力）はそれぞれ $-(\langle \boldsymbol{q},X\rangle+b)X_x$, $-(\langle \boldsymbol{q},X\rangle+b)X_y$ で与えられる．

証明は [6] を参照されたい．式 (14) を用いて，以下のように吊り下げ曲面の離散化を考えることができる．建築の文脈において，滑らかな曲面を良い座標でもって離散化することは，数値解析のみならず，力学的特性を維持し，厚みのある平らな板を活用できるという施工性の点からも有効である．さらにここでは，Schek [10] により提案された応力密度法との関連についても補足する．

等温座標で記述された釣り合い式 (14) は以下のように表せる：

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial \boldsymbol{T}^{(2)}}{\partial y}+\boldsymbol{q}\,A_1A_2=\boldsymbol{0}, \tag{15}$$

ここで，以下の記号を用いた：

$$\boldsymbol{T}^{(1)}:=-(\langle \boldsymbol{q},X\rangle+b)X_x,\quad \boldsymbol{T}^{(2)}:=-(\langle \boldsymbol{q},X\rangle+b)X_y. \tag{16}$$

[*5] このような座標は曲面に $C^{1,\alpha}$ 級の滑らかさがあればいつでも存在し，Korn-Lichtenstein の定理として知られる．現在は S. S. Chern (1955) による証明が広く知られる．

[*6] 等温曲率線座標あるいは双等温座標と呼ばれる．

いま，平面格子 $\mathbb{Z}^2$ の $\mathbb{R}^3$ への実現 $X : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}^3$ を離散曲面と考える．そこで，釣り合い式 (15) に対し，以下のような離散化をとる：

$$\boldsymbol{T}_i^{(1)} - \boldsymbol{T}_{i-1}^{(1)} + \boldsymbol{T}_j^{(2)} - \boldsymbol{T}_{j-1}^{(2)} + \boldsymbol{q}|\vec{A}| = \boldsymbol{0}, \tag{17}$$

ここで，以下の記号を用いた：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_i^{(1)} &:= -\left(\left\langle \boldsymbol{q}, \frac{X_{i,\,j} + X_{i+1,\,j}}{2} \right\rangle + b\right)(X_{i+1,\,j} - X_{i,j}), \\ \boldsymbol{T}_j^{(2)} &:= -\left(\left\langle \boldsymbol{q}, \frac{X_{i,\,j} + X_{i,\,j+1}}{2} \right\rangle + b\right)(X_{i,\,j+1} - X_{i,j}), \end{aligned} \tag{18}$$

$\vec{A}$ は各頂点に対応する「面積ベクトル」に対応する．計算により，式 (17) は以下のように書き直せる：

$$\sum_{X_q:\ \text{adjacent to}\ X_p} w_{pq}(X_q - X_p) + \boldsymbol{q}|\vec{A}| = \boldsymbol{0}, \quad w_{pq} = -\left(\left\langle \boldsymbol{q}, \frac{X_p + X_q}{2} \right\rangle + b\right). \tag{19}$$

w_{pq} を定数とおくとき，与えられた荷重 $\boldsymbol{q}$ に対して方程式 (19) は X を未知数とする線型方程式であり，このリダクションによって形状形成を行う手法を応力密度法と呼ぶ [10]．ところが，式 (19) は一般に非線型方程式であることと，滑らかな理論に鑑みると座標に関する制約条件も必要となる．これらに関する形状形成や応力解析に関する研究は現在も進行中であり，現在は図 5 のような曲面生成の手法が得られている．ここで示す形状生成は，三角形要素による有限要素法ではなく，力学的特性に基づき，座標線に沿った離散化を行い，各矩形の 4 頂点は同一円周上にあるという性質をもつように形状生成を行っている．

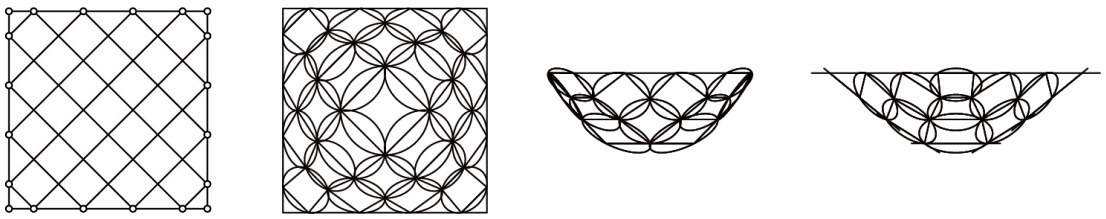


図 5: 初期メッシュと $b = 20$ のときの吊り下げ形状生成例.

7　補遺 1：極小曲面・弾性曲線との関連

7.1　極小曲面（石鹸膜の数理モデル）との関連

一般の吊り下げ曲面において荷重 $\boldsymbol{q} = 0$ の場合を考えると，汎関数 E は面積汎関数（の定数倍）となり，停留点は極小曲面である．ここで曲面 X が極小曲面であるとは，平均曲率が至るところゼロであるような曲面をいい，石鹸膜の数理モデルを与える．実際に釣り合い式 (9) で $\boldsymbol{q} = 0$ とおいても $\mathcal{H} = 0$ が得られる．さらに $T_1 = T_2 = -b$ となり，これは構造力学の分野では等張力と呼ばれる (等張力曲面は極小曲面と等価)．また式 (14) より，$\boldsymbol{q} = 0$ とおくと Laplace 方程式 $X_{xx} + X_{yy} = 0$ が得られる．すなわち等温座標 (x, y) で表された曲面 $X = X(x, y)$ の各座標成分関数はすべて調和関数であるという条件となり，これも極小曲面の有名な特徴づけの一つである．

7.2 Euler の弾性曲線との関連

弾性曲線との関連を注意しておく，すなわち自由境界をもつ吊り下げ曲面でかつ $\mathcal{H}=0$ を満たす曲面は平面となり，境界曲線が平面弾性曲線となる（Bernoulli の Lintearia と呼ばれる．詳細は [7] を参照）．境界曲線を $X(s)$ と表すと，境界の長さ $L(X)$ の第一変分は

$$L(X) = -\int_{\partial M} \langle X'', \delta X\rangle \, ds = -\int_{\partial M} \langle \kappa_n \nu + \kappa_g N, \delta X\rangle \, ds$$

と表せる．ここで κ_n, κ_g はそれぞれ，境界曲線の法曲率・測地的曲率である．境界の長さを固定する変分まで考えた場合，停留点の境界が満たすべき方程式は（c を定数として）

$$\kappa_n = 0, \quad c\cdot\kappa_g = \langle \boldsymbol{q}, X\rangle + b \tag{20}$$

となる．このとき $\mathcal{H}=0$ とすると，釣り合い式から $\langle \boldsymbol{q}, \nu\rangle = 0$ となり，X は平面となるため，境界曲線の形状に関心がある．以下ではこの平面が (x,z) 平面であるとし，荷重 $\boldsymbol{q}$ は (x,z) 平面内のベクトル $\boldsymbol{q}=(q_1,0,q_2)$ として一般性を失わない．境界の釣り合い式より（測地的曲率 κ_g は通常の平面曲線としての曲率 κ に一致し）

$$c\kappa = \langle \boldsymbol{q}, X\rangle + b \tag{21}$$

を得る．これは振り子の方程式である，実際 $X' = (\cos\theta, 0, \sin\theta)$ とおくと $\theta' = \kappa$ より

$$c\theta'' = c\kappa' = \langle \boldsymbol{q}, X'\rangle = q_1\cos\theta + q_2\sin\theta \tag{22}$$

を得る．保存量は $C = (\theta')^2/2 - (q_1/c)\sin\theta + (q_2/c)\cos\theta$ となり，式 (22) を微分して弾性曲線の方程式

$$\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 + C\kappa = 0, \tag{23}$$

を得る．すなわち平面内のどの方向に荷重がかかっていても，境界曲線の形状は弾性曲線の一部として記述される．

8 補遺 2：懸垂線の釣り合い式・変分による特徴づけ

平面曲線としての吊り下げ曲線（懸垂線，カテナリー曲線）の場合を考える．区間 $I=[\alpha,b]$ 上で定義された (x,z) 平面上の曲線 $X(s) := (x(s), z(s))$ を考え，s は弧長パラメータとする．$X(s)$ の単位接ベクトルを $\boldsymbol{e} = X'$，単位法ベクトルを ν と表す．張力を $\boldsymbol{T} = T\boldsymbol{e}$ とおくと，微小線素における力の釣り合い方程式は

$$-\boldsymbol{T} + \left(\boldsymbol{T} + \frac{d\boldsymbol{T}}{ds}ds\right) + \boldsymbol{q}ds = 0 \iff \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} + \boldsymbol{q} = 0 \tag{24}$$

となる．鉛直荷重 $\boldsymbol{q} = (0,0,-mg)$ に対して釣り合い式を解くと以下の主張を得る：

定理 8.1. 曲線の単位長さあたりの質量を m，重力加速度を g とおく．このとき，水平張力を T_0 とおくと，C_1, C_2 を定数として懸垂線は以下の形で表される：

$$z = \frac{T_0}{mg}\cosh\left(\frac{mg}{T_0}x + C_1\right) + C_2. \tag{25}$$

またこのとき，張力 T は以下のように高さの 1 次関数で与えられる：

$$T = mg(z - C_2). \tag{26}$$

次に変分原理による特徴づけを考える．定ベクトル $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^2$ と実数 b に対し，汎関数 $E(X)$ を次式で定義する：

$$E(X) = \int_\alpha^\beta (\langle \boldsymbol{q}, X\rangle + b)\, ds. \tag{27}$$

曲線 X の変分 X_ε を $X_\varepsilon = X + \varepsilon\delta X + O(\varepsilon^2)$ の形で考える．

定理 8.2. 汎関数 E の第一変分は以下の式で与えられる：

$$\delta E = -\int_\alpha^\beta (\kappa(\langle \boldsymbol{q}, X\rangle + b) - \langle \boldsymbol{q}, \nu\rangle)\langle \delta X, \nu\rangle\, ds + [\langle (\langle \boldsymbol{q}, X\rangle + b)\boldsymbol{e}, \delta X\rangle]_\alpha^\beta. \tag{28}$$

固定端の場合，Euler-Lagrange 方程式は

$$\kappa(\langle \boldsymbol{q}, X\rangle + b) - \langle \boldsymbol{q}, \nu\rangle = 0 \tag{29}$$

となる．

Frenet-Serret の公式により，(29) は以下のように変形できる：

$$(\langle \boldsymbol{q}, X\rangle + b)\boldsymbol{e}' + (\langle \boldsymbol{q}, X\rangle + b)'\boldsymbol{e} - \boldsymbol{q} = 0 \iff \frac{d}{ds}\left((\langle \boldsymbol{q}, X\rangle + b)\boldsymbol{e}\right) - \boldsymbol{q} = 0 \tag{30}$$

ここで $\boldsymbol{T} := -(\langle \boldsymbol{q}, X\rangle + b)\boldsymbol{e}$ とおくと

$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} + \boldsymbol{q} = 0 \tag{31}$$

が得られ，これは釣り合い方程式 (24) である．

謝辞

本研究は JST CREST JPMJCR1911「設計の新パラダイムを拓く新しい離散的な曲面の幾何学」の支援を受けたものである．

参考文献

[1] S. Adriaenssens, P. Block, D. Veenendaal and C. Williams, Shell Structures for Architecture: Form Finding and Optimization (Routledge, 2014).

[2] P. Block and J. Ochsendorf, Thrust Network Analysis: A New Methodology for Three-dimensional Equilibrium, *J. Int. Assoc. Shell Spat. Struct.* **48**(3) (2007) 167–173.

[3] J. S. Brew and W. J. Lewis, Free hanging membrane model for shell structures, *Int. J. Numer. Mech, Engng.* **71** (2007) 1513–1533.

[4] F. Fraternali, A thrust network approach to the equilibrium problem of unreinforced masonry vaults via polyhedral stress functions, *Mech. Res. Commun.* **37**(2) (2010) 198–204.

[5] 早川健太郎，軸丸芳揮，横須賀洋平，可香谷隆，林和希，堺雄亮，シェル理論・膜理論への微分幾何学からのアプローチとその建築曲面設計への応用，MI レクチャーノート，Vol. 83, (2021), 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所.

[6] Y. Jikumaru and Y. Yokosuka, Differential geometric formulation of hanging membranes: shell membrane theory and variational principle, in preparation.

[7] M. Koiso and B. Palmer, On a variational problem for soap films with gravity and partially free boundary, *J. Math. Soc. Japan* **57**(2) (2005) 333–355.

[8] V. V. Novozhilov, Thin shell theory, 2nd edn., Groningen: Noordhoff, 1964.

[9] E. Ramm, Finding Methods of Shells, *Bull. Int. Assoc. Shell Spat. Struct. (IASS)*, **57** (1992) 89–98.

[10] H.-J. Schek, Force density method for form finding and computation of general networks, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **3** (1974) 115–134.

[11] E. Vouga, M. Höbinger, J. Wallner and H. Pottmann, Design of self-supporting surfaces, *ACM Trans. Graph.* **31**(4) (2012) 1–11.

[12] サグラダ・ファミリア: `https://en.wikipedia.org/wiki/Sagrada_Fam\%C3\%ADlia`

[13] Gaudi による逆さ吊り模型: `https://en.wikipedia.org/wiki/Antoni_Gaud\%C3\%AD`

[14] ダイティンゲンのガソリンスタンド: `https://en.wikipedia.org/wiki/Heinz_Isler`

[15] Isler の模型: `https://blog.buildllc.com/2009/04/heinz-isler-a-few-important-things/`

古典量子差分プライバシーの数学的側面

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
吉田 裕哉 (Yuuya YOSHIDA)

概要

情報公開におけるプライバシー保護の指標として有名なものに, 差分プライバシーがある. 通常, 差分プライバシーは古典確率論を用いて研究されるため, その量子拡張はほとんど研究されていない. また, 応用面に焦点を当てた研究が多く, 数学的側面に焦点を当てた研究は少ない. 本稿では, 量子拡張の 1 つである古典量子差分プライバシーの数学的側面について, 古典と量子の比較を中心に述べる.

1 導入

データ解析において, 個人情報 X (たとえば, 離婚の有無) を保護しつつ X に関する統計 (たとえば, 離婚率) を知りたいことがある. 個人情報を保護する方法の 1 つに, **ランダム応答**というものがある [10]. ランダム応答において, データ提供者は X の代わりに別のデータ Y を答えるが, この際, Y は条件付き確率分布 $\mathbb{P}_{Y|X}$ に従う. ランダム応答を用いると, ランダム化された Y から元の X を復元できないため, X は保護される. 一方, Y は X の値に依存した確率分布に従うため, 集まった Y から X に関する統計をある程度推定できる.

ランダム応答においてプライバシー保護をより強固にするため, 条件付き確率分布 $\mathbb{P}_{Y|X}$ に対して次の条件を課す:

$$\forall x, x',\ \mathbb{P}_{Y|X}(\cdot|x') \leq e^{\varepsilon}\mathbb{P}_{Y|X}(\cdot|x). \tag{1}$$

ただし, $\varepsilon > 0$ は定数で, 不等式は要素ごとに成り立つことを意味する. この条件は ε **差分プライバシー (ε-DP)** と呼ばれる [2–4]. パラメータ ε が小さいと保護が強く, ε が大きいと保護が弱い. 通常, 差分プライバシーは古典確率論を用いて研究されるため, その量子拡張はほとんど研究されていない. 本稿では, 量子拡張の 1 つである古典量子差分プライバシーを定義し, その数学的側面について, 古典と量子の比較を中心に述べる. より詳しい内容については, full ver. [1] を参照してほしい.

2　古典量子差分プライバシー

以下, データ Y の代わりに量子状態 (数学的には密度行列, つまり, トレース 1 の半正定値行列) を用いる. つまり, データ提供者は $X = x$ の代わりに量子状態 ρ_x を答える (**古典量子の設定**). データ解析者は, 集まった ρ_x から X に関する統計を推定する. さて, 量子状態に関する情報を得るためには, 量子状態を測定しなければならない. 測定すると, (量子状態と測定から定まる) 確率分布に従い, 測定値が得られる. プライバシー保護をより強固にするため, この測定値の確率分布に ε-DP を課す:

$$\forall (M_y)_{y=1}^m \text{ POVM, the c.p.d. } \mathbb{P}(y|x) = \operatorname{Tr} \rho_x M_y \text{ satisfies } \varepsilon\text{-DP}, \tag{2}$$

ただし, "POVM" は "positive-operator-valued measure" の略で測定を表し, "c.p.d." は "conditional probability distribution" の略である. ここでは POVM の定義は重要でないため, 省略する. 条件 (2) は**古典量子 ε 差分プライバシー (CQ ε-DP)** と呼ばれ [11], 次の条件と同値である:

$$\forall x, x',\ \rho_{x'} \le e^{\varepsilon} \rho_x.$$

ただし, 不等式は両辺の差が半正定値であることを意味する. ここで, 古典的な ε-DP の定義 (1) を思い出す. 確率分布 $\mathbb{P}_{Y|X}(\cdot|x)$ を確率ベクトル p_x に置き換えると, (1) は次のように書き換えられる:

$$\forall x, x',\ p_{x'} \le e^{\varepsilon} p_x.$$

そのため, CQ ε-DP は古典的な ε-DP の単純な拡張であることがわかる.

これまでに出てきた定義をまとめる.

Definition 1 (Classical ε-DP [2] and CQ ε-DP [11])**.** $\varepsilon > 0$ を実数, $n \ge 2$ を整数とする. 任意の $i, j = 1, \dots, n$ に対して $p_i \le e^{\varepsilon} p_j$ が成り立つとき, 確率ベクトルの組 $(p_i)_{i=1}^n$ は **ε-DP** であるという. 任意の $i, j = 1, \dots, n$ に対して $\rho_i \le e^{\varepsilon} \rho_j$ が成り立つとき, 密度行列の組 $(\rho_i)_{i=1}^n$ は **CQ ε-DP** であるという. また, 集合 $\mathrm{C}_n^{(d)}(\varepsilon)$, $\mathrm{CQ}_n^{(d)}(\varepsilon)$, $\mathrm{C}_n(\varepsilon)$, $\mathrm{CQ}_n(\varepsilon)$ を次のように定める:

$$\mathrm{C}_n^{(d)}(\varepsilon) = \{\varepsilon\text{-DP } (p_i)_{i=1}^n : \text{all } p_i \text{ are probability vectors in } \mathbb{R}^d\} \quad (d \ge 2),$$
$$\mathrm{CQ}_n^{(d)}(\varepsilon) = \{\text{CQ } \varepsilon\text{-DP } (\rho_i)_{i=1}^n : \text{all } \rho_i \text{ are density matrices on } \mathbb{C}^d\} \quad (d \ge 2),$$
$$\mathrm{C}_n(\varepsilon) = \bigcup_{d \ge 2} \mathrm{C}_n^{(d)}(\varepsilon), \quad \mathrm{CQ}_n(\varepsilon) = \bigcup_{d \ge 2} \mathrm{CQ}_n^{(d)}(\varepsilon).$$

古典状態 (確率ベクトル) $p \in \mathbb{R}^d$ を量子状態 (密度行列) として扱いたいときは, p の代わりに対角成分 $p(1), \dots, p(d)$ を持つ対角行列 $\operatorname{diag}(p)$ を用いる. そのため, $\mathrm{CQ}_n(\varepsilon)$ の部分集合

$$\operatorname{diag}(\mathrm{C}_n(\varepsilon)) \coloneqq \{(\operatorname{diag}(p_i))_{i=1}^n : (p_i)_{i=1}^n \in \mathrm{C}_n(\varepsilon)\}$$

は $\mathrm{C}_n(\varepsilon)$ に対応する集合である.

3 本質的に古典的な元

実は, $\mathrm{diag}(\mathrm{C}_n(\varepsilon))$ より大きい "本質的に古典的な" 集合を定義できる. 説明のため, 次の最適化問題を考える:

$$S_n^{\mathrm{C}}(\varepsilon;\Phi) = \underbrace{\sup_{(p_i)_{i=1}^n \in \mathrm{C}_n(\varepsilon)}}_{\text{Privacy protection}} \underbrace{\Phi(\mathrm{diag}(p_1),\dots,\mathrm{diag}(p_n))}_{\text{Utility}}.$$

これは, "X を保護しつつ X に関する統計の推定精度を最大にしたい" という自然な動機から生じる問題であり, 情報理論的な DP の研究でしばしば扱われる [5–9, 11]. 量子の場合は

$$S_n^{\mathrm{CQ}}(\varepsilon;\Phi) = \underbrace{\sup_{(\rho_i)_{i=1}^n \in \mathrm{CQ}_n(\varepsilon)}}_{\text{Privacy protection}} \underbrace{\Phi(\rho_1,\dots,\rho_n)}_{\text{Utility}}$$

である. 上の Φ は密度行列 n 個の実数値関数であり, 個人情報の有用性を表す. 一方, 条件 $(p_i)_{i=1}^n \in \mathrm{C}_n(\varepsilon)$ や $(\rho_i)_{i=1}^n \in \mathrm{CQ}_n(\varepsilon)$ はプライバシー保護条件である.

次に, 目的関数 Φ に対して以下を仮定する (通常は成り立つ). その際, CPTP 写像という用語が出てくるが, ここでは "密度行列を密度行列に写す線型写像" という認識で十分である.

Definition 2 (Monotonicity for CPTP maps)**.** 任意の密度行列 $\rho_1,\dots,\rho_n$ と CPTP 写像 Λ に対して,

$$\Phi(\Lambda(\rho_1),\dots,\Lambda(\rho_n)) \le \Phi(\rho_1,\dots,\rho_n)$$

が成り立つとき, Φ は CPTP 写像に対して単調であるという. この不等式を**データ処理不等式**という.

CPTP 写像に関する単調性から, 不等式

$$\sup_{\substack{(p_i)_{i=1}^n \in \mathrm{C}_n(\varepsilon) \\ \Lambda \text{ CPTP map}}} \Phi\big(\Lambda(\mathrm{diag}(p_1)),\dots,\Lambda(\mathrm{diag}(p_n))\big) \le S_n^{\mathrm{C}}(\varepsilon;\Phi)$$

が従う. 恒等写像は CPTP 写像なので, 反対向きの不等式も成り立つ. こうして, 次の定義に到達する.

Definition 3 (Essentially classical element)**.** $\varepsilon > 0$ を実数, $n \ge 2$ を整数とする. 任意の $i = 1,\dots,n$ に対して $\Lambda(\mathrm{diag}(p_i)) = \rho_i$ となるような $(p_i)_{i=1}^n \in \mathrm{C}_n(\varepsilon)$ と CPTP 写像 Λ が存在するとき, $(\rho_i)_{i=1}^n \in \mathrm{CQ}_n(\varepsilon)$ は**本質的に古典的**であるという. 集合 $\mathrm{CQ}_n(\varepsilon)$ の本質的に古典的な元全体の集合を $\mathrm{EC}_n(\varepsilon)$ で表す.

さて, $S_n^{\mathrm{EC}}(\varepsilon;\Phi)$ を $S_n^{\mathrm{CQ}}(\varepsilon;\Phi)$ と同様に定める. 集合 $\mathrm{EC}_n(\varepsilon)$ は $\mathrm{diag}(\mathrm{C}_n(\varepsilon))$ より大きいが,

$$S_n^{\mathrm{EC}}(\varepsilon;\Phi) = S_n^{\mathrm{C}}(\varepsilon;\Phi)$$

が成り立つ. 我々は $S_n^{\mathrm{C}}(\varepsilon;\Phi)$ と $S_n^{\mathrm{CQ}}(\varepsilon;\Phi)$ の比較に興味があるが, それは $S_n^{\mathrm{EC}}(\varepsilon;\Phi)$ と $S_n^{\mathrm{CQ}}(\varepsilon;\Phi)$ の比較と同じである. では, そもそも $\mathrm{EC}_n(\varepsilon)$ と $\mathrm{CQ}_n(\varepsilon)$ は一致するのだろうか? これに関して, 次の命題が知られている [11, Theorem 1].

Proposition 1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\mathrm{EC}_2(\varepsilon) = \mathrm{CQ}_2(\varepsilon)$.

一方, 後で述べるように, 任意の $n \geq 3$ に対して $\mathrm{EC}_n(\varepsilon) \neq \mathrm{CQ}_n(\varepsilon)$ である (Corollary 2). そのため, 次の定義を用いて $\mathrm{EC}_n(\varepsilon)$ と $\mathrm{CQ}_n(\varepsilon)$ の違いを評価する.

Definition 4. 実数 $\varepsilon > 0$ と整数 $n \geq 2$ に対して, 集合 $\mathcal{E}_n(\varepsilon)$ を

$$\mathcal{E}_n(\varepsilon) = \{\varepsilon' > 0 : \mathrm{CQ}_n(\varepsilon) \subset \mathrm{EC}_n(\varepsilon')\}$$

と定める.

実は, $\mathcal{E}_n(\varepsilon)$ は空でない (Theorem 1). しかも, 集合 $\mathrm{EC}_n(\varepsilon)$ は $\varepsilon > 0$ に関して単調増加なので, $\mathcal{E}_n(\varepsilon)$ は上に有界でない区間, つまり, $[\varepsilon_{\inf}, \infty)$ または $(\varepsilon_{\inf}, \infty)$ の形である. 簡単にわかるように, $\varepsilon_{\inf} \geq \varepsilon$ である. また, $\varepsilon_{\inf}/\varepsilon$ が大きければ $\mathrm{EC}_n(\varepsilon)$ と $\mathrm{CQ}_n(\varepsilon)$ の差も大きく, $\varepsilon_{\inf}/\varepsilon$ が小さければ $\mathrm{EC}_n(\varepsilon)$ と $\mathrm{CQ}_n(\varepsilon)$ の差も小さい. このように, $\mathrm{EC}_n(\varepsilon)$ と $\mathrm{CQ}_n(\varepsilon)$ の違いは $\mathcal{E}_n(\varepsilon)$ の下限で表せるため, これを評価する.

4 主結果

Theorem 1. 任意の $\varepsilon > 0$ と $n \geq 2$ に対して, $e^{\varepsilon'} - 1 = (n-1)(e^{\varepsilon} - 1)$ となるような $\varepsilon' \in \mathcal{E}_n(\varepsilon)$ が存在する.

Theorem 2. 任意の $n \geq 2$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' \in \mathcal{E}_n(\varepsilon)$ に対して,

$$\frac{e^{\varepsilon'} - 1}{e^{\varepsilon} - 1} \geq F_n(e^{\varepsilon} - 1)$$

である. ただし, F_n は次のように定義される:

$$g_n(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{t-1}(\sqrt{(n-1)(n-t)} + n - t) & 1 < t \le n, \\ \infty & t = 1, \end{cases}$$

$$a_{n,t}(x) = t\Big(\frac{n-t}{n-1}(x+2)^2 - x^2\Big) \quad (1 \le t \le n,\ x \ge 0),$$

$$f_{n,k}(x) = \frac{(n+2k)x + \sqrt{(n+2k)^2x^2 + 8na_{n,k}(x)}}{2a_{n,k}(x)} \quad (1 \le k \le n/2,\ 0 \le x < g_n(k)),$$

$$F_n(x) = \min\{f_{n,k}(x) : 1 \le k \le n/2 \text{ with } x < g_n(k)\} \quad (x \ge 0).$$

関数 g_n, $a_{n,t}$, $f_{n,k}$, F_n の性質に関しては, full ver. [1] の Lemmas 4.1 and 4.2 を参照.

Theorem 1 で $n = 2$ とすると, Proposition 1 が従う. しかも, Theorems 1 and 2 により, 下限 $\varepsilon_{\inf} = \varepsilon_{\inf}(n, \varepsilon) = \inf \mathcal{E}_n(\varepsilon)$ は不等式

$$F_n(e^{\varepsilon} - 1) \le \frac{e^{\varepsilon_{\inf}} - 1}{e^{\varepsilon} - 1} \le n - 1 \tag{3}$$

を満たす. 関数 F_n は次の性質を持つ [1, Lemma 4.2]:

- 任意の $x \ge 0$ に対して, $F_2(x) = 1$;
- 任意の $n \ge 3$ に対して, F_n は狭義単調増加;
- 任意の $n \ge 2$ に対して,

$$F_n(0) = \sqrt{\frac{n(n-1)}{2\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil}} \quad \text{and} \quad \lim_{x \to \infty} F_n(x) = \frac{n+2}{4}.$$

よって, $\varepsilon_{\inf}(2, \varepsilon) = \varepsilon$ である. 次に, 大きい $n \ge 2$ を固定する. $\varepsilon > 0$ が十分小さいなら $F_n(e^{\varepsilon} - 1)$ は $\sqrt{2} = \sup_{m \ge 2} F_m(0)$ 未満であるため, 不等式 (3) の左辺と右辺にはかなり差がある. しかし, $\varepsilon > 0$ が十分大きいなら $F_n(e^{\varepsilon} - 1)$ は $(n+2)/4$ に近いため, 不等式 (3) の左辺と右辺は (n に関する増加レートの意味で) 同程度である.

Theorem 2 から次の系を得る.

Corollary 1. 任意の $n \ge 3$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' \in \mathcal{E}_n(\varepsilon)$ に対して,

$$\frac{e^{\varepsilon'} - 1}{e^{\varepsilon} - 1} > \sqrt{\frac{n(n-1)}{2\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil}}. \tag{4}$$

不等式 (4) の右辺は 1 より大きいので, 次の系を得る.

Corollary 2. 任意の $\varepsilon > 0$ と $n \ge 3$ に対して, $\mathrm{EC}_n(\varepsilon) \ne \mathrm{CQ}_n(\varepsilon)$.

実は, full ver. [1, Theorem 2.2] で, 任意の $n \geq 3$ に対して $S_n^{\mathrm{C}}(\varepsilon;\Phi) = S_n^{\mathrm{EC}}(\varepsilon;\Phi) < S_n^{\mathrm{CQ}}(\varepsilon;\Phi)$ となるような目的関数 Φ を構成している. そのため, このことからも Corollary 2 が従う.

参考文献

[1] Y. Yoshida. Mathematical comparison of classical and quantum mechanisms in optimization under local differential privacy. arXiv:2011.09960.

[2] J. C. Duchi, M. I. Jordan, and M. J. Wainwright. Local privacy and statistical minimax rates. In *2013 IEEE 54th Annual Symposium on Foundations of Computer Science—FOCS 2013*, pages 429–438. IEEE Computer Soc., Los Alamitos, CA, 2013.

[3] C. Dwork. Differential privacy. In *Automata, languages and programming. Part II*, volume 4052 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 1–12. Springer, Berlin, 2006.

[4] C. Dwork, F. McSherry, K. Nissim, and A. Smith. Calibrating noise to sensitivity in private data analysis. In *Theory of cryptography*, volume 3876 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 265–284. Springer, Berlin, 2006.

[5] Q. Geng, P. Kairouz, S. Oh, and P. Viswanath. The staircase mechanism in differential privacy. *IEEE J. Sel. Topics Signal Process.*, 9(7):1176–1184, 2015.

[6] Q. Geng and P. Viswanath. The optimal noise-adding mechanism in differential privacy. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 62(2):925–951, 2016.

[7] Q. Geng and P. Viswanath. Optimal noise adding mechanisms for approximate differential privacy. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 62(2):952–969, 2016.

[8] N. Holohan, D. J. Leith, and O. Mason. Optimal differentially private mechanisms for randomised response. *IEEE Trans. Inf. Forensics Secur.*, 12(11):2726–2735, 2017.

[9] P. Kairouz, S. Oh, and P. Viswanath. Extremal mechanisms for local differential privacy. *J. Mach. Learn. Res.*, 17:Paper No. 17, 51, 2016.

[10] S. L. Warner. Randomized response: a survey technique for eliminating evasive answer bias. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 60(309):63–69, 1965.

[11] Y. Yoshida and M. Hayashi. Classical mechanism is optimal in classical-quantum differentially private mechanisms. In *2020 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, pages 1973–1977. 2020.

半線型常微分方程式系に対する解の爆発レート評価

大阪大学大学院 基礎工学研究科 システム創成専攻
曺永旻 (Youngmin CHO)

1 導入

反応拡散方程式は自然科学, 特に化学物理学, 個体群生態学, 生物医学における多くの現象を表す数理モデルである ([11]). 反応拡散方程式は主に連続的な空間領域で議論されているが, 最近の研究では離散的な空間領域上の反応拡散方程式を考えることも多くある ([8], [9], [10]). 個体群生態学に現れる, 川で繋がっている湖や島など離れている生息地に住んでいる生物の間の相互作用を考える状況では離散的な空間領域を考えることが連続的な空間領域を考えることより自然だからである. 一つの例としては, 2 つの個体群が競争してどちらの個体群の増殖率も減少し, それぞれの個体群の一部は他の離れた生息地への移住することを同時に考えることができる. Levin [5] と Slavík [8] はこのような状況を表すモデルとしてグラフ上の Lotka-Volterra 競争モデルを考え, 定常状態が存在することや解の漸近挙動などを議論した.

上記の例でグラフ上のモデルを考えたように, 離散的な空間領域はグラフとして考えることができる. 特にグラフの頂点の数が有限個なら, グラフ上の反応拡散方程式は常微分方程式系で表すことができる. 自然現象を微分方程式で数理モデル化するとき, 多くの場合にはそのモデルの時間大域的な安定性を調べる. しかし, 一般に常微分方程式系の解が必ず時間大域的に存在するとは限らない. 実際, $p > 1$ とし, 常微分方程式の初期値問題

$$\dot{x}(t) = x(t)^p, \quad x(0) = a \in \mathbb{R} \tag{1}$$

を $t \in \mathbb{R}$ で解くと,

$$x(t) = \frac{1}{(a^{-(p-1)} - t)^{\frac{1}{p-1}}}$$

となり, t が $a^{-(p-1)}$ に近づくとき $|x(t)|$ は無限大に発散する. つまり, $x(t)$ は有限時間 $a^{-(p-1)}$ で爆発する. 単独な方程式でも必ず時間大域解が存在するとは限らないので, 常微分方程式系に対しても同様に言える. よって, 数理モデル化した微分方程式の安定性を調べるだけでなく, 有限時間爆発などの不安定性も調べることが必要である.

有限時間爆発解は, その爆発の”速さ”で特徴づけることができる. 例えば, 次の常微分方程式

$$\dot{x}(t) = -x(t) + x(t)^2, \quad x(0) = a \in \mathbb{R} \tag{2}$$

を $t \in \mathbb{R}$ で解くと, 特に $a > 1$ のときは

$$x(t) = \frac{1}{1 - (1 - a^{-1})e^t}$$

となり, $x(t)$ は有限時間 $T := \log\{1/(1-a^{-1})\}$ で爆発する. さらに,Taylor 展開により

$$\frac{1}{1-(1-a^{-1})e^t} \simeq \frac{1}{(T-t)^1}$$

となるので, その爆発の"速さ"は $T-t$ の指数 1 で決められる. この指数を有限時間爆発解に対する爆発レートという. さらに, この例での爆発レート 1 は $\dot{x}(t) = x(t)^2$ の解の爆発レートと一致する. このように, 解の爆発レートは方程式において増大に関わる項 $x(t)^2$ の指数 2 に依存する. この指数 2 を $x(t)^2$ の増大レートという. 例 (1) を参考すると, 例 (2) での増大レート 2 を一般の $p > 1$ に替えたら解の爆発レートは $1/(p-1)$ であることが予想される.

以上の議論では 2 つの常微分方程式の解を直接求めた上で, 増大レートと爆発レートの関係を考察した. しかし, 常微分方程式系を考えるとき具体的な関数として解を求めることはほとんど不可能である. よって, 常微分方程式系に対して増大レートと解の爆発レートを考察するためには他の議論が必要である. さらに, 増大に関する項が必ず多項式で表されるとは限らないことから, 増大の条件をより一般化したとき, 増大項の増大レートと解の爆発レートの関係についても考察する必要である.

本講演では, 増大を制御した常微分方程式系の初期値問題を考える. この問題に対する有限時間爆発解が存在するとき, 増大制御と解の爆発レートの関係を述べる.

2 問題設定および主結果

次の半線型常微分方程式系

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt}(t) = A\vec{u}(t) + \vec{f}(\vec{u}(t)), \quad t \in (0, T_{\max}), \\ \vec{u}(0) = \vec{u}_0. \end{cases} \tag{P}$$

を考える. ここで, A は $N \times N$ 不定値行列である. つまり, A は対称行列であり, 任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ に対して内積 $\vec{x} \cdot A\vec{x}$ は負の値をもつ. $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^N$ は与えられら初期値である. 問題 (P) に対して, 解 $\vec{u}$ は古典的な意味で考える. また, $T_{\max} = T_{\max}(\vec{u}_0)$ は問題 (P) に対する解の最大存在時間とする. すなわち, 全ての $T < T_{\max}$ に対して解 $\vec{u}$ は $[0,T]$ から $\mathbb{R}^N$ への連続関数で, $(0,T]$ 上で連続的微分可能である. 最大存在時間 $T_{\max}$ が無限大のとき, 問題 (P) の解は時間大域的に存在するといい, 解 $\vec{u}$ を時間大域解という. 一方, 最大存在時間 $T_{\max}$ が有限ならば, 問題 (P) の解 $\vec{u}$ に対して $\lim_{t \to T_{\max}} |\vec{u}(t)| = +\infty$ が成り立つ. このとき, 問題 (P) の解 $\vec{u}$ は有限時間で爆発するといい, また $\vec{u}$ を有限時間爆発解という.

任意の $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ に対して, $|\vec{x}| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2}$ とかく. $\mathbb{R}^N$ 上の $\mathbb{R}^N$-値関数 $\vec{f}$ は, 以下の三条件をみたすとする.

(LL) 関数 $\vec{f}$ は局所 Lipschitz 連続である. つまり, 任意の $R > 0$ に対して, ある $\Lambda(R) \geqslant 0$ が存在して, 任意の $\vec{x}, \vec{y} \in B_R(\vec{0})$ に対して

$$|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{y})| \leqslant \Lambda(R)|\vec{x} - \vec{y}|$$

をみたす.

(G) ある $p > 2$, $K > 0$, $L > 0$ が存在して, 任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ に対して, $|\vec{x}| \geqslant L$ ならば $|\vec{f}(\vec{x})| \leqslant K|\vec{x}|^{p-1}$ が成り立つ.

(AR) ある $\mu > 2$ およびある $F \in C^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R})$ が存在して, $\nabla F = \vec{f}$ かつ任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\vec{0}\}$ に対して $0 < \mu F(\vec{x}) \leqslant \vec{x}\cdot\vec{f}(\vec{x})$ が成り立つ.

条件 (LL) は局所解の存在と一意性を示すときの標準的な仮定である. この条件は非斉次方程式に対して標準的な条件であるが, 半線型方程式に対しても同じ条件が使われることに注意されたい. 条件 (G) は関数 $\vec{f}$ の上からの増大制御を表している. 条件 (AR) は Ambrosetti-Rabinowitz 条件と呼ばれるものである. 条件 (AR) は問題 (P) において, 関数 $\vec{f}$ の下からの増大制御を与える.

命題 2.1. 条件 (AR) のもとで, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して C_ε が存在して, 任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ が $|\vec{x}| > \varepsilon$ をみたすとき,

$$|\vec{f}(\vec{x})| \geqslant \mu C_\varepsilon |\vec{x}|^{\mu-1}$$

が成り立つ. ■

条件 (G) と (AR) により, 原点から十分離れた $\vec{x} \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$C|\vec{x}|^{\mu-1} \leqslant |\vec{f}(\vec{x})| \leqslant K|\vec{x}|^{p-1}$$

と書くことができる. 右辺の $p-1$ を $\vec{f}$ の上からの増大レートという. 同様に, 左辺の $\mu-1$ を $\vec{f}$ の下からの増大レートという.

主定理を述べる.

定理 2.2 (有限時間爆発解に対する爆発レート評価)**.** $T_{\max} < +\infty$ とし, $\vec{u}$ を問題 (P) の解とする. 条件 (G), (AR) のもとで, ある定数 C_1, $C_2 > 0$ が存在して任意の $t \in [0, T_{\max})$ に対して

$$\frac{C_1}{(T_{\max}-t)^{\frac{1}{p-2}}} \leqslant |\vec{u}(t)| \leqslant \frac{C_2}{(T_{\max}-t)^{\frac{1}{\mu-2}}}$$

が成り立つ. ■

左の評価に現れる $1/(p-2)$ を $\vec{u}$ の下からの爆発レートといい, 右の評価に現れる $1/(\mu-2)$ を $\vec{u}$ の上からの爆発レートという. 主定理において, 解に対する下からの評価は非線型項を定める $\vec{f}$ に対する上からの増大レートが解の下からの爆発レートを決めることを意味し, また解に対する上からの評価は非線型項を定める $\vec{f}$ に対する下からの増大レートが解の上からの爆発レートを決めることを意味する.

下からの爆発レート評価は微分方程式論の標準的な議論である局所解の存在時間評価により簡単に得られるため, 本講演では上からの爆発レート評価のみを取り扱う.

参考文献

[1] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14(1973), 349–381.

[2] A. Friedman, B. McLeod, *Blow-up of positive solutions of semilinear heat equations*, Indiana Univ. J. 34(1985), no. 2, 425–447.

[3] Y. Giga, R. V. Kohn, *Characterizing blow-up using similarity variables*, Indiana Univ. Math. J. 36(1987), no.1, 1–40.

[4] Y. Giga, R. V. Kohn, *Nondegeneracy of blow-up for semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. 42(1989), no. 6, 845–884.

[5] S. Levin, *Dispersion and Population Interactions*, The American Naturalist, 108(1974), 207-228.

[6] H. A. Levine, *Some nonexistence and instability theorems of formally parabolic equations of the form* $Pu_t = -Au + F(u)$, Arch. Rat. Mech. Anal. 51(1973), 371–386.

[7] L. E. Payne, D. H. Sattinger, *Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations*, Israel J. Math. 22(1975), no. 3-4, 273–303.

[8] A. Slavík, *Lotka-Volterra competition model on graphs*, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., Vol.19, No. 2, pp. 725–762.

[9] A. Slavík, *Reaction-diffusion equations on graphs: stationary states and Lyapunov functions*, Nonlinearity. 34(2021). 1854—1879.

[10] P. Stehlík, *Exponential number of stationary solutions for Nagumo equations on graphs*, J. Math. Anal. Appl. 455(2017) 1749–1764.

[11] V. Volpert, *Elliptic Partial Differential Equations: Vol. 2: Reaction-Diffusion Equations*, Monographs in Mathematics vol 104, Birkhäuser.

[12] F. B. Weissler, *An* L^∞ *blow-up estimate for a nonlinear heat equation*, Comm. Pure Appl. Math. 38(1985), no. 3, 291–295.

Laplace 方程式の Cauchy 問題に対する 反復法の安定性評価に関する深さ依存性

大阪大学大学院 情報科学研究科 情報基礎数学専攻
石田あかり (Akari ISHIDA)

概要

Laplace 方程式に対する Cauchy 問題を考える. この近似解を Bastay-Kozlov-Turesson により提案された, 対応する境界値問題を繰り返し解く, 反復法と呼ばれる方法で構成する. このとき, 境界値問題を考える領域として, より小さな領域を選んだ方が, より安定的に解を構成できることを示す. 更に, この反復法は Cauchy データに誤差を含む場合にも適用できるので, この場合に対しても同様の評価を示す.

1 序

Ω_* を $\mathbb{R}^2$ の有界領域とし, その境界 $\partial\Omega_*$ は $\Gamma_0 \cup \Gamma_*$ と表せるとする (図 1). Γ_0, Γ_* は閉で非交和とする. 次の Laplace 方程式に対する Cauchy 問題を考える :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega_*, \\ u = \varphi & \text{on } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \psi & \text{on } \Gamma_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

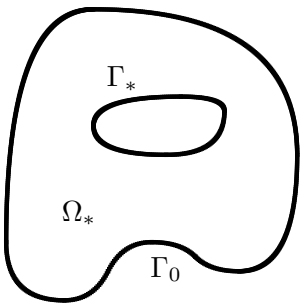


図 1　領域 Ω_*.

但し, ν は Γ_0 の外向き単位法線ベクトル. 一般に, 任意に Cauchy データ φ と ψ が与えられたときに, (1.1) の解 u が Ω_* 全体で存在するとは限らない. ここで考えたい問題は, Ω_* で $\Delta u = 0$ を満たす u が存在するときに, Γ_0 上で観測したデータ φ と ψ から解 u を構成する問題である. 尚, これは, 例えば, 領域の境界で電位と電流を観測して, 領域内部の電位を推定する問題に相当する.

又, (1.1) が不安定な問題, 即ち, 観測データ φ, ψ の誤差が小さくても, 対応する未知のデータ u の誤差が大きくなる問題であることはよく知られている. ところが, [1] での Bastay-Kozlov-Turesson の反復法 ([1] で 2 つの反復法が提案されているが, 以下では, 簡単のために, その 1 つの one-step stationary iterative method をこのように呼ぶことにする) を用いると, 安定的に近似解を構成できる. この反復法では, 対応する境界値問題を繰り返し解いて, 近似解を構成する. (1.1) の近似解を Ω_* 全体で構成するなら, 反復法で解く境界値問題も Ω_* 全体で考える必要がある. ところが, 観測する境界 Γ_0 に近い領域 Ω^* での情報だけが欲しいなら, 境界値問題は Ω^* を含むような領域 Ω 上でのみ考えれば十分である (図 2). このとき, Ω としてより小さな領域を選んだ方が, より安定的に解が構成できることを示す.

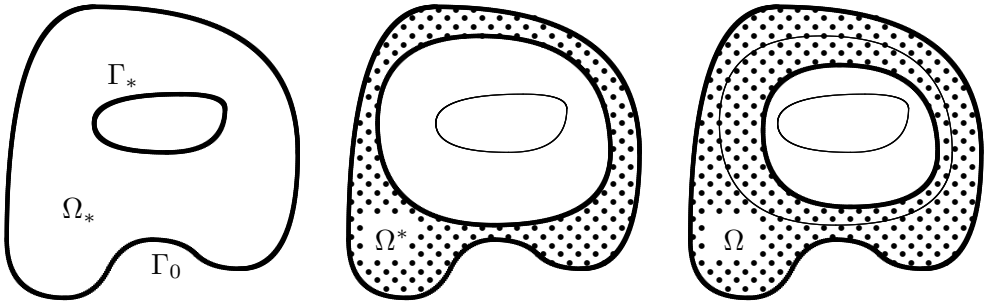


図 2　領域 Ω_*, Ω^*, Ω の関係.

Bastay-Kozlov-Turesson の反復法は, [1] で, 一般の放物型偏微分方程式に対する Cauchy 問題の近似解を構成するための反復法として提案された. 又, これは楕円型の場合にも適用できると述べられている. 他にも, Cauchy 問題を解くための反復法は幾つもある. 例えば, 楕円型に対する反復法 [5], [6] や放物型に対する反復法 [2], [7] 等がある.

後述の通り, Bastay-Kozlov-Turesson の反復法は Landweber の反復法に帰着される. このため, 2 章では, Landweber の反復法について説明する. そして, 3 章で Bastay-Kozlov-Turesson の反復法の反復法を紹介する. 最後に, 4 章で主結果を述べる.

2　Landweber の反復法

Landweber の反復法 [3, Ch. 6, Sec. 1] を紹介する.

X, Y を Hilbert 空間とし, 線型コンパクト作用素 $K : X \to Y$ を単射とする. 方程式 $Kx = y$ の逆問題, 即ち, 与えられた $y \in Y$ に対して $x = K^{-1}y$ を求める問題を考える.

今, $a > 0$, $Kx = y$ とすると, $aK^*Kx = aK^*y$ なので, $x = (I - aK^*K)x + aK^*y$ が成り立つ. 但し, I は恒等作用素. そこで, 解を求めるために, 次のようにして近似列 $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ を構成する :

$$x^{(0)} = z, \;\; x^{(m)} = (I - aK^*K)x^{(m-1)} + aK^*y \quad (m \in \mathbb{N}). \tag{2.1}$$

このように近似列 $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ を構成する方法を Landweber の反復法という. 又, (2.1) から,

$$x^{(m)} = \widetilde{R}_m y, \;\; \text{但し } \widetilde{R}_m y = (I - aK^*K)^m z + a\sum_{k=0}^{m-1}(I - aK^*K)^k K^*y. \tag{2.2}$$

(2.1) で構成した $x^{(m)}$ は m を大きくすると, 真の解に近づく. 即ち, 次の定理 1 が成り立つ.
以下 $\|K\|_{\mathcal{L}}$ により K の作用素ノルムを表す.

定理 1. $0 < a < \frac{2}{\|K\|_{\mathcal{L}}^2}$ とし, $z \in X$ とする. このとき, $Kx^0 = y^0$ ならば,

$$\|\widetilde{R}_m y^0 - x^0\|_X \to 0 \quad \text{as } m \to \infty.$$

ところで, Landweber 反復法は, 誤差が入っていても適用できる. つまり, 方程式 $Kx^0 = y^0$ の右辺 y^0 そのものではなく, 誤差を含んだ y^δ が与えられた場合でも, 解 x^0 の近似解を得ることができる. 即ち, 定理 2 が成り立つ.

定理 2. $0 < a < \frac{2}{\|K\|_{\mathcal{L}}^2}$, $\delta > 0$ とし, $z \in X$ とする.

$$\lim_{\delta \to +0} \delta^2 m(\delta) = 0, \ \lim_{\delta \to +0} m(\delta) = \infty$$

となるように $m(\delta) > 0$ を選ぶ. このとき, $\|y^\delta - y^0\|_Y \leq \delta$ なる y^δ に対して, $Kx^0 = y^0$ ならば,

$$\lim_{\delta \to +0} \|\widetilde{R}_{m(\delta)} y^\delta - x^0\|_X = 0.$$

この定理は

$$\|\widetilde{R}_m y^\delta - x^0\|_X \leq \|\widetilde{R}_m y^\delta - \widetilde{R}_m y^0\|_X + \|\widetilde{R}_m y^0 - x^0\|_X$$

のように “観測誤差 $y^\delta - y^0$ による差” と “反復法による差” の 2 項に分けて考える. 定理 1 で見たように, m を大きくすると, 反復法による差は 0 に近づく. しかし, 観測誤差による差は $m \to \infty$ とすると, 発散してしまう. そこで, m は δ に応じて上手く選ばないといけない. そのための条件が定理 2 の $m(\delta)$ に対する仮定である.

3 Bastay-Kozlov-Turesson の反復法

1 章で述べたように, [1] は, 放物型偏微分方程式の Cauchy 問題に対して, 近似解を構成するための反復法を提案し, その近似解が真の解に収束することを示した. 又, この反復法は楕円型の場合にも適用できるとも述べられている. ここでは, Bastay-Kozlov-Turesson の反復法を今考えている (1.1) に対応する形で紹介する.

3.1 反復法の手順

Ω を $\mathbb{R}^2$ の有界領域とし, その境界 $\partial\Omega$ は $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ と表せるとする (図 3). Γ_0, Γ_1 は閉で非交和とする. 反復法では, 次の境界値問題

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = \eta & \text{on } \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \psi & \text{on } \Gamma_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

及び, 随伴問題

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \text{on } \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = \zeta & \text{on } \Gamma_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

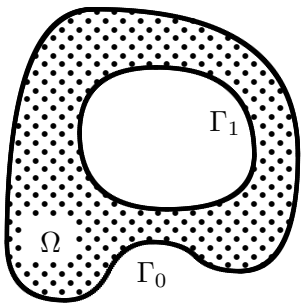


図 3　領域 Ω.

を解く. 近似解を以下のように構成する ([1, Sec. 3.1.1] 参照).

- 任意の関数 $\eta^{(0)} \in L^2(\Gamma_1)$ を選ぶ.
- 解 u の第 0 近似 $u^{(0)}$ は, $\eta = \eta^{(0)}$ on Γ_1 とした問題 (3.1) を解くことで得られる.
- 随伴問題 (3.2) で $\zeta = u^{(0)} - \varphi = \zeta^{(0)}$ on Γ_0 とした解 $v^{(0)}$ が得られる.
- 解 $u^{(\ell-1)}$ と $v^{(\ell-1)}$ が構成されたとき, 第 ℓ 近似 $u^{(\ell)}$ は $\eta = \eta^{(\ell)}$ on Γ_1 とした問題 (3.1) の解.
  但し, $\eta^{(\ell)} = u^{(\ell-1)} + \gamma \frac{\partial v^{(\ell-1)}}{\partial \nu}$, γ は固定された正の定数.
- $v^{(\ell)}$ は, $\zeta = u^{(\ell)} - \varphi = \zeta^{(\ell)}$ on Γ_0 とした随伴問題 (3.2) の解.

3.2 反復法の収束性

上で構成した第 ℓ 近似 $u^{(\ell)}$ が (1.1) の解 u に収束することについて説明する ([1, Sec. 3.1.2] 参照).
作用素 $K : L^2(\Gamma_1) \to L^2(\Gamma_0)$ を, z_1 を (3.1) で $\psi = 0$ に変えた解として

$$K\eta = z_1|_{\Gamma_0} \quad \text{for } \eta \in L^2(\Gamma_1),$$

作用素 $K_1 : L^2(\Gamma_0) \to L^2(\Gamma_0)$ を, z_2 を (3.1) で $\eta = 0$ に変えた解として

$$K_1\psi = z_2|_{\Gamma_0} \quad \text{for } \psi \in L^2(\Gamma_0)$$

で定義する. このとき, 以下の 3 つが分かる.

- K と K_1 はコンパクト作用素. 更に, K は単射.
- (1.1) を解くことと次を解くことは同値:

$$K\eta = \varphi - K_1\psi. \tag{3.3}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{もし, } \eta \text{ が (3.3) の解なら, (3.1) の解は } u = \varphi \text{ on } \Gamma_0 \text{ を満たすので (1.1) を解く.} \\ \text{逆に, もし } u \text{ が (1.1) の解なら, } \eta = u|_{\Gamma_1} \text{ は (3.3) の解.} \end{array} \right)$$

- K の随伴作用素 $K^* : L^2(\Gamma_0) \to L^2(\Gamma_1)$ は, v を (3.2) の解として次で与えられる:

$$K^*\zeta = -\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)\Big|_{\Gamma_1} \quad \text{for } \zeta \in L^2(\Gamma_0).$$

更に, 反復法のアルゴリズムから,

$$\begin{aligned} \eta^{(\ell)} &= u^{(\ell-1)}\Big|_{\Gamma_1} + \gamma\left(\frac{\partial v^{(\ell-1)}}{\partial \nu}\right)\Big|_{\Gamma_1} = \eta^{(\ell-1)} + \gamma(-K^*\zeta^{(\ell-1)}) \\ &= \eta^{(\ell-1)} + \gamma\left(-K^*\,(u^{(\ell-1)} - \varphi)\Big|_{\Gamma_0}\right) = \eta^{(\ell-1)} - \gamma K^*(K\eta^{(\ell-1)} + K_1\psi - \varphi) \\ &= (I - \gamma K^*K)\eta^{(\ell-1)} + \gamma K^*(\varphi - K_1\psi). \end{aligned} \tag{3.4}$$

よって, (3.4) は, (3.3) に対する Landweber の反復法になっていることが分かるので, 定理 1 より,

$$\|\eta^{(\ell)} - \eta\|_{L^2(\Gamma_1)} \to 0 \quad \text{as } \ell \to \infty.$$

更に, (3.1) の適切性に注意すると

$$\|u^{(\ell)} - u\|_{L^2(\Omega)} \le C'\|\eta^{(\ell)} - \eta\|_{L^2(\Gamma_1)} \to 0 \quad \text{as } \ell \to \infty$$

となり, 次の定理が成り立つ.

定理 3 ([1, Theorem 3.1])**.** $u \in L^2(\Omega)$ を (1.1) の解とし,

$$0 < \gamma < \frac{2}{\|K\|^2_{L^2(\Gamma_1)\to L^2(\Gamma_0)}}$$

と仮定する. $u^{(\ell)}$ を反復法の第 ℓ 近似とする. このとき, 任意の関数 $\eta^{(0)} \in L^2(\Gamma_1)$ に対して,

$$\|u^{(\ell)} - u\|_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \text{as } \ell \to \infty.$$

誤差を含むデータに対しても, Landweber の反復法は適用できたので, Bastay-Kozlov-Turesson の反復法も同様に適用できることに注意する.

4　主結果

境界値問題を考える領域として, より小さな領域を選んだ方が, より安定的に解を構成できることを示す. そこで, $0 < \rho_* \le \rho \le \rho^* < 1$ とし,

$$\Omega^* = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho^* < |x| < 1\},\ \Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho < |x| < 1\},\ \Omega_* = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho_* < |x| < 1\},$$
$$\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\},\ \Gamma_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = \rho\},\ \Gamma_* = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = \rho_*\}$$

と置く (図 4).

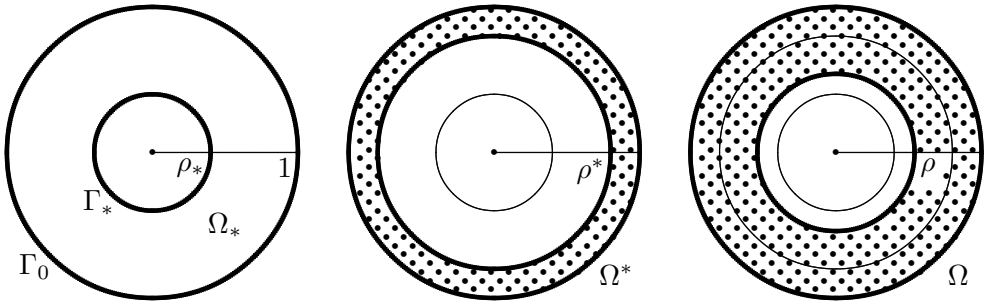


図 4　円環領域 Ω_*, Ω^*, Ω の関係.

この状況で次の定理 4 を得た.

定理 4 ([4])**.** φ, ψ を実数値関数とし, $\|\varphi\|^2_{L^2(\Gamma_0)} + \|\psi\|^2_{L^2(\Gamma_0)} \le M_0^2$ とする. (1.1) の解 u は Ω_* で存在し, $\|u\|_{L^2(\Gamma_*)} \le M$ を満たすとする. $\eta^{(0)} = 0$, $\gamma = \rho$ として, Ω に於いて反復法を用いて得られる第 ℓ 近似を $u^{(\ell)}$ とすると, $\ell \ge 2$ に対して, 次が成り立つ:

$$\|u^{(\ell)} - u\|^2_{L^2(\Omega^*)} \le C \left(\frac{\log \ell}{\ell} \right)^{\frac{\log(\rho^*/\rho_*)}{\log(1/\rho)}}. \tag{4.1}$$

但し, C は M_0, M, ρ^*, ρ_* のみに依る正の定数であり, この評価は, optimal.

ρ ($\le \rho^* < 1$) を大きく取ると, (4.1) の右辺の冪は大きくなることに注意する. このことから, 境界値問題を解く領域 Ω として, より小さな領域を選ぶと, より安定的に解を構成できることが分かる.

Bastay-Kozlov-Turesson の反復法は, 誤差を含むデータに対しても適用できたので, 次のような誤差を含むデータ φ^δ, ψ^δ しか知ることができない場合を考える:

$$\|\varphi^\delta - \varphi\|_{L^2(\Gamma_0)} \le \delta, \quad \|\psi^\delta - \psi\|_{L^2(\Gamma_0)} \le \delta. \tag{4.2}$$

定理 2 の直後で述べたように, 誤差を含む場合の第 ℓ 近似を $u^{(\ell),\delta}$ とすると,

$$\begin{aligned} \|u^{(\ell),\delta} - u\|_{L^2(\Omega^*)} &\le \|u^{(\ell),\delta} - u^{(\ell)}\|_{L^2(\Omega^*)} + \|u^{(\ell)} - u\|_{L^2(\Omega^*)} \\ &\le \widetilde{C}\sqrt{\ell}\,\delta + \|u^{(\ell)} - u\|_{L^2(\Omega^*)}. \end{aligned}$$

尚, $\widetilde{C}\sqrt{\ell}\,\delta$ は, 観測誤差による差 $\|u^{(\ell),\delta} - u^{(\ell)}\|_{L^2(\Omega^*)}$ を評価することで現れる. 又, 反復法による差 $\|u^{(\ell)} - u\|_{L^2(\Omega^*)}$ は定理 4 で既に評価している. ℓ を大きくすると, 反復法による差は 0 に近づくが, $\sqrt{\ell}$ は大きくなるため, 上手く ℓ を選ぶ必要がある.

定理 5. φ, ψ を実数値関数とし, $\|\varphi\|^2_{L^2(\Gamma_0)} + \|\psi\|^2_{L^2(\Gamma_0)} \leq M_0^2$ とする. φ^δ, ψ^δ を (4.2) を満たす実数値関数とする. (1.1) の解 u は Ω_* で存在し, $\|u\|_{L^2(\Gamma_*)} \leq M$ を満たすとする. $\eta^{(0)} = 0$, $\gamma = \rho$ として, Ω に於いて反復法から得られる第 ℓ 近似を $u^{(\ell),\delta}$ とする. このとき, $0 < \delta \leq 1/e^3$ に対して, 次が成り立つ:

$$\|u^{(\ell(\delta,\rho)),\delta} - u\|^2_{L^2(\Omega^*)} \leq \widehat{C} \left(\delta^2 \log \frac{1}{\delta} \right)^{\frac{\log(\rho^*/\rho_*)}{\log(1/\rho)+\log(\rho^*/\rho_*)}}. \tag{4.3}$$

ここで, $\ell(\delta,\rho)$ は $\ell(\delta,\rho) \geq \ell_0(\delta,\rho)$ を満たす最小の整数. 但し,

$$\ell_0(\delta,\rho) = \delta^{-\frac{2\log(1/\rho)}{\log(1/\rho)+\log(\rho^*/\rho_*)}} \left(\log \frac{1}{\delta} \right)^{\frac{\log(\rho^*/\rho_*)}{\log(1/\rho)+\log(\rho^*/\rho_*)}}.$$

又, $\widehat{C}$ は M_0, M, ρ^*, ρ_* のみに依る正の定数.

参考文献

[1] G. Bastay, V. A. Kozlov, and B. O. Turesson, Iterative methods for an inverse heat conduction problem, J. Inv. Ill-Posed Problems **9**, 375-388 (2001).

[2] R. Chapko, T. Johansson and V. Vavrychuk, A projected iterative method based on integral equations for inverse heat conduction in domains with a cut, Inverse Problems **29** (2013), no.6, Article ID 065003.

[3] H. W. Engl, M. Hanke and A. Neubauer, Regularization of inverse problems (Kluwer Academic Publishers Group, 1996).

[4] A. Ishida, A depth-dependent stability estimate in an iterative method for solving a Cauchy problem for the Laplace equation, preprint.

[5] T. Johansson, An iterative procedure for solving a Cauchy problem for second order elliptic equations, Math. Nachr. **272** (2004), 46-54.

[6] T. Johansson, An iterative method for reconstruction of temperature, J. Inverse Ill-Posed Probl. **14** (2006), 267-278.

[7] T. Johansson, An iterative method for a Cauchy problem for the heat equation, IMA J. Appl. Math. **71** (2006), 262-286.

Time Global Bounds for System of Partial Differential Equations with Ambrosetti-Rabinowitz Nonlinearity

Osaka University, Graduate School of Engineering Science, Department of Systems Innovation
Evan William Chandra

Abstract

We are concerned with L^∞-global bounds for global solutions of a system of some semilinear heat equations with subcritical Ambrosetti-Rabinowitz condition. For single equation case with polynomial term, it is known that global solutions have L^∞-global bounds under appropriate conditions. In particular, we will show that the global solutions to our problem has L^∞-global bounds which extends the result from single semilinear parabolic equation case to a system of semilinear parabolic equations.

2010 Mathematics Subject Classification. 35B45; 35K55.
Keywords: L^∞-global bounds, subcritical case, Ambrosetti-Rabinowitz condition

1 Introduction

1.1 Background and motivation

There have been a lot of studies on semilinear parabolic PDEs (see e.g. [2], [4], [8], [12], [15], [16], [17], etc). However, most of the results are related to semilinear parabolic PDEs with (Fujita type) polynomial nonlinearity. As an example, let $N \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $\theta \in (2, 2^*)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a smooth bounded domain in $\mathbb{R}^N$, and consider

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + au + u|u|^{\theta-2} & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u(\,\cdot\,,t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(\,\cdot\,,0) = u_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{P0}$$

where $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ (for simplicity), and recall critical Sobolev exponent $2^* := \frac{2N}{N-2}$ when $N \geq 3$ and $2^* := \infty$ when $N = 1, 2$. When $a = 0$, we have the usual Fujita type equation.

In general, results for local existence of solution for (P0) when $a = 0$ has been proven by Weissler in [19]. Moreover, Weissler also shows that global existence to Problem (P0) for small non-negative initial data in [18]. In fact, Cazenave, Dickstein, and Weissler show that time global sign-changing solutions to Problem (P0) exist for some initial data in [3].

Next, we will briefly discuss some known results related to the behavior of global solution to Dirichlet problem (P0). First, we recall that for $\theta \in (2, 2^*)$ (subcritical case), Cazenave and Lions show that any global solution of (P0) with initial data in $C^2(\overline{\Omega})$ has an L^∞-global bound in [5]. However, when $\theta \geq \frac{6N+4}{3N-4}$, the dependence of any given initial data in $C^2(\overline{\Omega})$ for time global bounds is unclear. Some related results are also given by Giga in [11]. Here, the results of Cazenave and Lions in [5] are extended to full subcritical nonlinearity provided $a = 0$ and the solution is nonnegative. Moreover, the results can be extended even further by

removing the assumption of nonnegativity of global solutions as shown by Ishiwata in [13]. In fact, the existence of time global bounds of global solutions to (P) can be obtained under some appropriate conditions for the energy functional of (P0).

Both necessary and sufficient conditions for the existence of time global bounds of (P0) have been obtained by Ishiwata in [13]. Namely, a global solution of (P0) has an L^∞-global bound if and only if the energy functional associated with (P0) satisfies the *Palais-Smale* condition along the trajectory of the solution itself.

In particular, we would like to study the behavior of global solutions to a system of semilinear parabolic equations with more general nonlinearity compared to the usual polynomial nonlinearity in Fujita Type equation. For instance, our result here covers logarithmic functions (1) as principle nonlinearity. Since we impose condition (N2) to the nonlinear term, it is essentially still a subcritical nonlinear term. Therefore, we expect that global solutions to (P) have time global bounds as in single equation case with polynomial nonlinearity. Our main result confirms that our global solutions indeed have time global bounds.

1.2 Problem

Let $N \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$, and $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a bounded smooth domain. Moreover, we denote $2^* := \frac{2N}{N-2}$ when $N \geq 3$ and $2^* := \infty$ when $N = 1, 2$ as the critical Sobolev exponent. We consider the following system of semilinear heat equations:

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u + a_1 u + bv + f(u,v) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \partial_t v = \Delta v + bu + a_2 v + g(u,v) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ v = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(\,\cdot\,,0) = u_0 & \text{in } \Omega, \\ v(\,\cdot\,,0) = v_0 & \text{in } \Omega, \end{cases} \tag{P}$$

where u_0, $v_0 \in L^\infty(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Moreover, we also impose the following conditions for f and g:

(N1) f, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is locally Lipschitz in $\mathbb{R}$ and $f(0,0) = g(0,0) = 0$.

(N2) There exists $\alpha > 1$, $\beta > 1$ so that $\alpha + \beta = p \in [2 + \frac{2}{N}, 2^*)$, and $C_{N2} > 0$ for any $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ with $|f(u,v)| \leq C_{N2}|u|^{\alpha-1}|v|^\beta$ and $|g(u,v)| \leq C_{N2}|u|^\alpha |v|^{\beta-1}$.

(AR) There exists $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ which satifies the following conditions:

(AR0) For any $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla F(u,v) = (f(u,v), g(u,v))^\mathsf{T}$.

(AR1) F is positive in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(AR2) There exists $\mu > 2$ for any $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ with $\mu F(u,v) \leq \frac{uf(u,v)+vg(u,v)}{2}$.

In particular, we are concerned with a system of semilinear heat equations with subcritical general nonlinearity.

For instance, we can consider an example when $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ with $\alpha = 2$, $\beta = 2.2$ and $\mu = 2.1$ as follows:

$$\begin{cases} f(u,v) &= 2u\log(1+|u|^2) + \frac{2u^3|v|^{2.2}}{1+|u|^2}, \\ g(u,v) &= 2.2u^2\log(1+|u|^2)v|v|^{0.2}, \end{cases} \tag{1}$$

which satisfies (N1), (N2), and

$$F(u,v) = u^2\log(1+|u|^2)|v|^{2.2} \tag{2}$$

satisfies (AR) where $\nabla F(u,v) = (f(u,v), g(u,v))^{\mathsf{T}}$. Clearly, we can see that (1) is not a polynomial nonlinearity.

Next, we define

$$A := \begin{pmatrix} a_1 & b \\ b & a_2 \end{pmatrix} \text{ with eigenvalue } \mu_1 \text{ and } \mu_2. \tag{3}$$

Without loss of generality, we may assume $\mu_1 \le \mu_2$. Then, we denote μ_* as the first eigenvalue of the eigenvalue problem $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ and assume

(AN) A is real symmetric matrix and $\mu_2 < \mu_*$.

Here, we only consider (time) global classical solutions with respect to (P). Furthermore, we can see that the growth condition of f and g is controlled by (N2) whereas (AR) is the so called Ambrosetti-Rabinowitz condition. We also put a remark here that the assumption $p \in [2 + \frac{2}{N}, 2^*)$ is crucial for scaling invariance and to preserve subcritical nonlinearity.

Next, we would like to clarify the definition of L^∞-global bound for our problem as follows.

Definition 1.1. *Let (u,v) be a global classical solution of* (P). *(u,v) is said to have an L^∞-global bound (time global bound) provided that*

$$\sup_{t\in[0,\infty)} (\|u(t)\|_\infty + \|v(t)\|_\infty) < \infty.$$

2 Main result

Our goal is to establish the existence of L^∞-global bounds (time global bounds) of (u,v) which satisfies (P).

Theorem 2.1 (Main Theorem)**.** *Assume (u,v) as the global classical solution of* (P). *Then, (u,v) has an L^∞-global bound.*

3 Preliminaries

In this section, we prepare some basic tools necessary to obtain our main result. We mainly use the inherent properties of energy functionals related to (P) and scaling invariance property. First, we need to define the energy functionals related to (P) as follows:

$$I[u,v] := \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v\|_2^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega (u,v)A(u,v)^{\mathsf{T}}dx - \int_\Omega F(u,v)dx \tag{I1}$$

and

$$J[u,v] := \|\nabla u\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 - \int_\Omega (u,v)A(u,v)^{\mathsf{T}}dx - \int_\Omega (uf(u,v) + vg(u,v))dx \tag{J1}$$

for any $(u,v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. For convenience, we will denote $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ as H.

Next, we consider the following energy equalities.

Lemma 3.1 (Energy equalities)**.** *We have the following energy equalities.*

$$\frac{d}{dt} I[u(t), v(t)] = -(\|\partial_t u(t)\|_2^2 + \|\partial_t v(t)\|_2^2) \tag{I2}$$

and

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2) = -J[u(t), v(t)]. \tag{J2}$$

Next, we observe that the energy functional I is nonnegative by using concavity argument (see e.g. [16, pp.373, Theorem I]).

Proposition 3.2 (Nonnegativity of energy functional)**.** *Let (u, v) be a global classical solution of* (P)*. Then, we have*

$$I[u(t), v(t)] \geq 0 \text{ for any } t \in [0, \infty). \tag{4}$$

Corollary 3.3. *$I[u(t), v(t)] \to L$ as $t \to \infty$ for some $L \geq 0$.*

By (I2) and Proposition 3.2, I is non-increasing and bounded from below. Therefore, Corollary 3.3 holds true. Next, we will prove some basic results related to time sequence along global solutions. Let $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty)$ with $t_n \to \infty$ as $n \to \infty$. Here, we define the following two conditions for our energy functional I:

(I-L) $I[u(t_n), v(t_n)] \to L$ as $n \to \infty$.

(I-FD) $(dI)_{u(t_n),v(t_n)} \to 0$ as $n \to \infty$ in H^* where $(dI)_{u(t_n),v(t_n)}$ is the Fréchet derivative of I at $(u(t_n), v(t_n))$ in H and H^* is the dual space of H.

We proceed to prove the following proposition.

Proposition 3.4 (Compactness of a certain type of time sequence in H)**.** *Assume that (u, v) is a global solution of* (P)*. Then, for any time sequence $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0, \infty)$ with $t_n \to \infty$ as $n \to \infty$, if I satisfies (I-L) and (I-FD), we have $((u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ is compact in H.*

This proposition is essential to show that our global solution is uniformly bounded in H. Next, we proceed to clarify the scaling invariance. Let $\lambda > 0$, $x_* \in \mathbb{R}^N$, $t_* \in [0, \infty)$, and define the following variable transformations

$$\begin{cases} y & := \lambda(x - x_*), \\ s & := \lambda^2(t - t_*), \\ \tilde{u}_\lambda(y, s) & := \lambda^{\frac{-2}{p-2}} u(x, t), \\ \tilde{v}_\lambda(y, s) & := \lambda^{\frac{-2}{p-2}} v(x, t). \end{cases} \tag{5}$$

Then, by using (P) and (5), we will obtain

$$\begin{cases} \partial_s \tilde{u}_\lambda = \Delta \tilde{u}_\lambda + \lambda^{-2}(a_1 \tilde{u}_\lambda + b\tilde{v}_\lambda) + \lambda^{\frac{-2}{p-2}-2} f(\lambda^{\frac{2}{p-2}} \tilde{u}_\lambda, \lambda^{\frac{2}{p-2}} \tilde{v}_\lambda), \\ \partial_s \tilde{v}_\lambda = \Delta \tilde{v}_\lambda + \lambda^{-2}(b\tilde{u}_\lambda + a_2 \tilde{v}_\lambda) + \lambda^{\frac{-2}{p-2}-2} g(\lambda^{\frac{2}{p-2}} \tilde{u}_\lambda, \lambda^{\frac{2}{p-2}} \tilde{v}_\lambda). \end{cases} \tag{P1}$$

Next, we set $p_0 := \frac{N}{2}(p - 2)$ and we will have the following scaling invariance.

Lemma 3.5. *(Scaling invariance) The L^{p_0}-norm of $\tilde{u}$ and $\tilde{v}$ are invariant under* (5)*; i.e.,*

$$\|u(t)\|_{p_0} = \|\tilde{u}_\lambda(s)\|_{p_0,\Omega_\lambda} \text{ and } \|v(t)\|_{p_0} = \|\tilde{v}_\lambda(s)\|_{p_0,\Omega_\lambda} \text{ for any } t \in [0, \infty).$$

The proof of this lemma is rather similar to the proof of Lemma 3.3 (b) in [13]. Finally, we will show the following proposition.

Proposition 3.6 (Convergence in Hölder space)**.** *Assume $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is uniformly bounded in $C^{0,\alpha';0,\alpha'/2}_{loc}(\mathbb{R}^N \times [-1, 0]))$ for any $\alpha' \in (0, 1)$. Then, we have*

$$w_n \to w \text{ in } C^{0,\alpha';0,\alpha'/2}_{loc}(\mathbb{R}^N \times [-1, 0]) \text{ as } n \to \infty \tag{6}$$

up to a subsequence (which is denoted by the same notation).

4 Proof of main result

4.1 Compactness of orbit in $L^q(\Omega) \times L^q(\Omega)$

In this subsection, we begin by showing that our global solution for Problem (P) is uniformly bounded in H. This leads us to the following proposition.

Proposition 4.1 (Boundedness in H)**.** *Let (u, v) be a global solution of* (P)*. Then, it is uniformly bounded in H.*

The boundedness of global solution in H will be crucial for the proof of our main theorem since it enables us to use Rellich-Kondrachov Theorem. Then, by recalling Proposition 4.1, we deduce the weak convergence (up to a subsequence) of orbit in H. Next, we apply Rellich-Kondrachov Theorem to deduce that for any time sequence $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ with $t_n \to \infty$ as $n \to \infty$, there exists a subsequence (still denoted by the same notation) and $(u_*, v_*) \in H$ such that

$$(u_n, v_n) \to (u_*, v_*) \text{ in } L^q(\Omega) \times L^q(\Omega) \text{ as } n \to \infty \tag{7}$$

for any $q \in [1, 2^*)$.

The compactness of our global solution in $L^q(\Omega) \times L^q(\Omega)$ space is crucial to prove Theorem 2.1. Now, we are ready to prove our main result.

4.2 Proof of Theorem 2.1

We will prove this theorem by using contradiction argument which is similar to the one given in [13, pp.1030, Proof of Proposition 4.2] for single equation case. However, we discuss system of PDEs instead of a single equation here which is not covered in [13]. Assume the conclusion does not hold, then we have a time sequence $(t_n')_{n\in\mathbb{N}}$ such that $t_n' \to \infty$ as $n \to \infty$ and $\|u(t_n')\|_\infty + \|v(t_n')\|_\infty \to \infty$ as $n \to \infty$. Without loss of generality, we may assume

$$\|u(t_n')\|_\infty \geq \|v(t_n')\|_\infty \text{ and set } M(t_n') := \|u(t_n')\|_\infty \text{ for any } n \in \mathbb{N}.$$

However, this means that we can guarantee the existence of time sequence (by taking the subsequence of $(t_n')_{n\in\mathbb{N}}$ if necessary) $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,\infty)$ which satisfies

$$\begin{cases} t_n \to \infty \text{ as } n \to \infty, \\ M(t_n) \to \infty \text{ as } n \to \infty, \\ \sup\limits_{t\in[0,t_n]} M(t) = M(t_n) \text{ for any } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{8}$$

Moreover, by continuity of (u, v), we can find $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (and take a subsequence if necessary) and $x_0 \in \overline{\Omega}$ such that

$$\begin{cases} x_n \to \infty \text{ as } n \to \infty, \\ \frac{1}{2}M(t_n) \leq |u(x_n, t_n)| \text{ for any } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{9}$$

Let us take $\lambda^{\frac{2}{p-2}} = M(t_n) =: \lambda_n^{\frac{2}{p-2}}$, $x_* = x_n$, and $t_* = t_n$ to apply (5) to our original problem (P). Then, we will have the following equation:

$$\begin{cases} \partial_s \tilde{u}_n = \Delta \tilde{u}_n + \lambda_n^{-2}(a_1\tilde{u}_n + b\tilde{v}_n) + \lambda_n^{\frac{-2}{p-2}-2} f(\lambda_n^{\frac{2}{p-2}}\tilde{u}_n, \lambda_n^{\frac{2}{p-2}}\tilde{v}_n), \\ \partial_s \tilde{v}_n = \Delta \tilde{v}_n + \lambda_n^{-2}(b\tilde{u}_n + a_2\tilde{v}_n) + \lambda_n^{\frac{-2}{p-2}-2} g(\lambda_n^{\frac{2}{p-2}}\tilde{u}_n, \lambda_n^{\frac{2}{p-2}}\tilde{v}_n). \end{cases} \tag{Pwn}$$

Notice that by using (8) and (9), we also have

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \leq \tilde{u}_n(0_y, 0_s) \text{ for any } n \in \mathbb{N}, \\ \|\tilde{v}_n\|_{L^\infty(-2,0;L^\infty)} \leq \|\tilde{u}_n\|_{L^\infty(-2,0;L^\infty)} \leq 1 \text{ for any } n \in \mathbb{N} \text{ (sufficiently large).} \end{cases} \tag{10}$$

Furthermore, we will have two cases as follows:

(Case 1) $\limsup_{n\to\infty} \lambda_n \text{dist}(x_n, \partial\Omega) = \infty$.
(Case 2) $\limsup_{n\to\infty} \lambda_n \text{dist}(x_n, \partial\Omega) < \infty$.

For simplicity, we denote $\gamma = \limsup_{n\to\infty} \lambda_n \text{dist}(x_n, \partial\Omega)$ here and proceed to (Case 1) first.

We begin by assuming $\gamma = \infty$ and may assume further that $\lambda_n(\Omega - x_n) \to \mathbb{R}^N$ as $n \to \infty$ and $x_0 \in \Omega$. Then, we apply L^p-estimate for parabolic operators (see e.g. [15, pp. 172, Theorem 7.13]) to deduce that $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are bounded sequences in $W^{2,1}_{q,loc}(\mathbb{R}^N \times (-1, 0))$ for sufficiently large $q > 1$ by using (10). Thus, $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are also bounded sequences in $C^{0,\alpha';0,\alpha'/2}_{loc}(\mathbb{R}^N \times [-1, 0]))$ by recalling Sobolev embedding $W^{2,1}_{q,loc} \hookrightarrow C^{0,\alpha';0,\alpha'/2}_{loc}$ (see e.g. [17, pp. 80, Lemma 3.3]) for any $\alpha' \in (0, 1)$. Next, we will show that the following lemma holds true.

Lemma 4.2. *Let $((u_n, v_n))_{n\in\mathbb{N}}$ be a solution of* (Pwn)*. Then, we have*

$$\|\partial_s \tilde{u}_n\|^2_{L^2(-1,0;L^2)} + \|\partial_s \tilde{v}_n\|^2_{L^2(-1,0;L^2)} \to 0 \text{ as } n \to \infty \tag{11}$$

Then, we can take $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ as $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ or $(\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Proposition 3.6 to deduce that

$$\tilde{u}_n \to \tilde{u} \text{ and } \tilde{v}_n \to \tilde{v} \text{ in } C^{0,\alpha';0,\alpha'/2}_{loc}(\mathbb{R}^N \times [-1, 0]) \text{ as } n \to \infty \tag{12}$$

up to a subsequence. Moreover, by using (11), we deduce the following corollary.

Corollary 4.3. *Assume that* (11) *holds true. Then, we have*

$$\int_{-1}^{0} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{u} \partial_s \varphi dy ds = 0 \text{ and } \int_{-1}^{0} \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{v} \partial_s \varphi dy ds = 0 \tag{13}$$

for any test function $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^N \times [-1, 0])$.

In other words, the weak derivative of $\tilde{u}$ and $\tilde{v}$ with respect to s are equal to zero. Thus, we conclude that $\tilde{u}$ and $\tilde{v}$ are independent of s since their weak derivatives are zero and they are locally uniformly continuous functions.

Next, by using (10), we can find $r > 0$ small enough so that

$$\|\tilde{u}\|_{L^{p_0}(B_y(0,r))} > 0. \tag{14}$$

Similarly, we let $\varepsilon > 0$ and define

$$B_x(x_0; \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, |x - x_0| < \varepsilon\}$$
$$B_x(x_n; \frac{r}{\lambda_n}) := \left\{x \in \mathbb{R}^N \,|\, |x - x_n| < \frac{r}{\lambda_n}\right\}.$$

Note that for ε small enough, $B_x(x_0; \varepsilon) \subset \Omega$ which is well defined and $B_x(x_n; \frac{r}{\lambda_n}) \subset B_x(x_0; \varepsilon)$ for sufficiently large n. Thus, by using Proposition 3.6 (uniform convergence) and Lemma 3.5 (scaling invariance), we see that

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{L^{p_0}(B_y(0;r))} &= \|\tilde{u}_n(0_s)\|_{L^{p_0}(B_y(0;r))} + o(1) \\ &= \|u_n\|_{L^{p_0}(B_x(x_n;\frac{r}{\lambda_n}))} + o(1). \end{aligned}$$

Moreover, recall that $p_0 \in [1, 2^*)$ since $p \in [2 + \frac{2}{N}, 2^*)$. Hence, we can use (7) to see that

$$\begin{aligned}\|\tilde{u}\|_{L^{p_0}(B_y(0;r))} &\leq \|u_n\|_{L^{p_0}(B_x(x_0;\varepsilon))} + o(1) \\ &= \|u_*\|_{L^{p_0}(B_x(x_0;\varepsilon))} \to 0 \text{ as } \varepsilon \downarrow 0\end{aligned}$$

which is impossible since (14) holds true. Therefore, this is a contradiction.

Now, we asssume that $\gamma < \infty$ with $x_0 \in \partial\Omega$ and $\lambda_n(\Omega - x_n) \to \mathbb{R}^N_+$ (using coordinate rotation if necessary so that $x_0^N < x^N$ for any $x \in \overline{\Omega}$) as $n \to \infty$. For clarity, here we define

$$\mathbb{R}^N_+ := \{y \in \mathbb{R}^N \,|\, y^N > -\gamma\}.$$

Next, we simply repeat the procedure as before to see that $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are uniformly bounded in $W^{2,1}_{q,q;loc}(\mathbb{R}^N_+ \times (-1, 0))$ for any $q > 1$ sufficiently large. Hence, we can deduce that they are uniformly bounded in $C^{0,\alpha';0,\alpha'/2}_{loc}(\mathbb{R}^N_+ \times [-1, 0])$. Since (P) satisfies zero Dirichlet boundary condition, we can deduce that $\gamma > 0$ (see e.g. [7, pp.477, Case (ii)] and [11, pp. 418, Case 2 (iii)]). Then, we only need to take $r = \frac{\gamma}{2}$ to deduce a contradiction by following similar steps as in (Case 1). Thus, we finish the proof for (Case 2) and complete the proof of Theorem 2.1.

References

[1] Ambrosetti, A., Rabinowitz, P.H. *Dual variational methods in critical point theory*, J. Funct. Anal. 14 (1973), 349-381.

[2] Cazenave, H., Brezis, H. *A nonlinear heat equation with singular initial data*, Journal D'Analyse Mathématique, Vol. 68 (1996), 277–304.

[3] Cazenave, H., Dickstein, F., Weissler, F. *Global existence and blowup for sign-changing solutions of the nonlinear heat equation*, J. Differential Equations 246 (2009), 2669–2680.

[4] Cazenave, H., Haraux, A. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*. Translated from the 1990 French original by Yvan Martel and revised by the authors. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 13. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[5] Cazenave, H., Lions, P.L. *Solutions globales d'equations de la chaleur semilineaires*, Comm. Partial Differential Equations 9 (1984), 935–978.

[6] Chandra, E.W., Ishiwata, M. *On bounds for global solutions of seliminear parabolic eequations system with critical nonlinearity*, preprint.

[7] Fila, M., Souplet, P. *The blow-up rate for semilinear parabolic problems on general domains*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., 8 (2001), 473–480.

[8] Galaktinov, V.A., King, J.R. *Continuation of blowup solutions of nonlinear heat equations in several space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. 50 (1997), 1–67.

[9] Giga, Y., Kohn, R. *Nondegeneracy of blowup for semilinear heat equations*, Comm. Pure Appl. Math. 42 (1989), no. 6, 845–884.

[10] Giga, Y., Kohn, R. *Characterizing blowup using similarity variables*, Indiana Univ. Math. J. 36 (1987), no. 1, 1–40.

[11] Giga, Y. *A bound for global solutions of semilinear heat equations*, Comm. Math. Phys., 103 (1986), 415–421.

[12] Ikehata, R., Suzuki, T. *Stable and unstable sets for evolution equations of parabolic and hyperbolic type*, Hiroshima Math. J. 26 (1996), no. 3, 475–491.

[13] Ishiwata, M. *On bounds for global solutions of semilinear parabolic equations with critical and subcritical Sobolev exponent*, Differential and Integral Equations 20 (2007), no. 9, 1021–1034.

[14] Ishiwata, M. *On a potential-well type result and global bounds of solutions for semilinear parabolic equation involving critical Sobolev exponents*. Notes. Private communication.

[15] Lieberman, G.M. *Second Order Parabolic Differential Equations*. World Scientific Publishing, River Edge, 1996.

[16] Levine, H.A. *Some nonexistence and instability theorems for solutions of formally parabolic equations of the form* $Pu_t = -Au + \mathscr{F}(u)$, Arch. Rational Mech. Anal. 51 (1973), 371–386.

[17] Ladyzenskaja, O.A., Solonnikov, V.A., Ural'ceva, N.N. *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*. Amer. Math Soc., Providence, 1968.

[18] Weissler, F. *Existence and non-existence of global solutions for semilinear heat equation*, Israel Journal of Mathematics, Vol. 38, Nos. 1–2, 1981, 29–40.

[19] Weissler, F. *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in* L^p, Indiana Univ. Math. J. 29 (1980), 79–102.

[20] Willem, M. *Minimax theorems*. Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1996.

エネルギー固定条件下における Kepler 型ポテンシャル系の 2 点境界条件を満たす解の存在について

京都大学大学院 情報学研究科 数理工学専攻
黒川大雅 (Taiga KUROKAWA)

概要

宇宙探査機の軌道設計において目的のエネルギー値を実現する軌道を調べることはコストを削減する上で重要な問題である. この問題で用いられる Hill 問題というモデルはポテンシャル系ではないが, ポテンシャル系に対してはある種の minimizer としてこのような軌道が得られることが知られている. 本発表では, 上述の問題を目標とした適当なポテンシャル系に対し, 与えたエネルギー値を実現する軌道の存在証明を試みる.

1 考察するモデル

雛形として, 特異性を持たない次の常微分方程式系を考える.

$$\frac{d^2X_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial X_i},\ i \in \{1, \cdots, d\}$$

$U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は上に有界な C^∞ 級関数として, この系を上に有界なポテンシャル系と呼ぶことにする.

空間 Hill 問題とは, 次の常微分方程式系のことであり,

$$\begin{aligned}
\frac{d^2X}{dt^2} &= 2\frac{dY}{dt} + 3X - \frac{X}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{d^2Y}{dt^2} &= -2\frac{dX}{dt} - \frac{Y}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{d^2Z}{dt^2} &= -Z - \frac{Z}{(X^2+Y^2+Z^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

空間円周制限 3 体問題の近似系として導出される系である. また, 平面 Hill 問題とは, 空間 Hill 問題を $Z = 0$ 平面に制限した次の常微分方程式系のことである.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2X}{dt^2} &= 2\frac{dY}{dt} + 3X - \frac{X}{(X^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{d^2Y}{dt^2} &= -2\frac{dX}{dt} - \frac{Y}{(X^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

これらは, 人工衛星や宇宙探査機の従う運動方程式のモデルとして有効であると考えられており, 宇宙探査機の軌道設計への応用を目標とした本研究でもこれらの系を扱いたいところだが, ポテンシャル系ではないために目的のエネルギー値を実現する軌道を得るために用いたい変分構造を利用するこ

とができない. そのため, 本研究では差し当たり, 平面 Hill 問題についてコリオリ項を除いた, 次のようなポテンシャル系を扱っている.

$$\frac{d^2X}{dt^2} = 3X - \frac{X}{(X^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\frac{d^2Y}{dt^2} = -\frac{Y}{(X^2+Y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

また, より一般に次のような系について言及することもある.(衝突解の除去の議論を除いて, この系について言及する.)

$$\frac{d^2X_i}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial X_i} - \frac{X_i}{(\sum_{j=1}^{d} X_j^2)^{\frac{3}{2}}},\ i \in \{1, \cdots, d\}$$

$f : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ は下に有界な C^∞ 級関数として, この系を Kepler 型ポテンシャル系と呼ぶことにする.

2　2 点境界値問題

この節では, まず上に有界なポテンシャル系について, エネルギー値の条件を課さない 2 点境界値問題の解の存在についてよく知られている結果を紹介する. 証明についても, 詳細には立ち入らないが, 以降の議論のために概略のみ紹介する.([1] に詳しく書かれている.) その後,Kepler 型ポテンシャル系で同様の結果を得ようとするとき障害となる衝突解の除去に関する問題について紹介する. 最後に, コリオリ項を除いた平面 Hill 問題については衝突解が除去できることを紹介する.

2.1　上に有界なポテンシャル系

まず, 上に有界なポテンシャル系について知られている事実を証明の概略と共に紹介する.

定理 1. 上に有界な C^∞ 級関数 $U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ について, 任意の異なる 2 点 $a, b \in \mathbb{R}^d$ と任意の実数 $T > 0$ に対し, 連続曲線 $c_T : [0, T] \to \mathbb{R}^d$ が存在して, 次の 2 つの条件を満たす.

1. $c_T(0) = a$, $c_T(T) = b$, $(0, T)$ 上で C^∞ 級曲線
2. $\forall t \in (0, T),\ \frac{d^2 c_T}{dt^2}(t) = -\frac{\partial U}{\partial x}(c_T(t))$

証明. まず, 集合 $\mathcal{C}(a, b; T)$ を,Sobolev 空間 $W^{1,2}((0, T), \mathbb{R}^d)$ の部分集合として, この Sobolev 空間の連続曲線の空間 $C([0, T], \mathbb{R}^d)$ への埋め込み写像 i を使って, 次のように定義すると

$$\mathcal{C}(a, b; T) \equiv i^{-1}(\{q_T \in C([0, T], \mathbb{R}^d) | q_T(0) = a,\ q_T(T) = b\})$$

$\mathcal{C}(a, b; T)$ は凸集合で, 弱位相についても閉であることがわかる. 次に, この集合上の汎関数 $\mathcal{A}_T : \mathcal{C}(a, b; T) \to \mathbb{R}$ を次のように定義すると

$$\mathcal{A}_T(q_T) \equiv \int_0^T \frac{1}{2} || \frac{dq_T}{dt}(t) ||^2 - U(q_T(t))\ dt$$

上に有界な C^∞ 級関数 U について,$\mathcal{A}_T$ は $W^{1,2}((0,T),\mathbb{R}^d)$ の弱位相について下半連続で, 強圧性条件も満たされることがわかる. 従って $\mathcal{A}_T$ の minimizer の存在が保証される.

$$\exists c_T \in \mathcal{C}(a,b;T) \text{ s.t. } \mathcal{A}_T(c_T) = \inf_{q_T \in \mathcal{C}(a,b;T)} \mathcal{A}_T(q_T)$$

さらに, この c_T は C^∞ 級曲線であることが示され,1 を満たすことがわかる. また, 変分学の基本補題から 2 を満たすことも示される.□

以上が証明の概略であり,Hilbert 空間の閉凸部分集合上で minimizer を捉えることによって示されていることに注意したい. 各 $T>0$ に対し minimizer の集合 $\mathcal{M}_T$ を

$$\mathcal{M}_T \equiv \{c_T \in \mathcal{C}(a,b;T) | \mathcal{A}_T(c_T) = \inf_{q_T \in \mathcal{C}(a,b;T)} \mathcal{A}_T(q_T)\}$$

定めておく. もちろん, 定理 1 より任意の $T>0$ に対し $\mathcal{M}_T \neq \varnothing$ である.

2.2 Kepler 型ポテンシャル系

Kepler 型ポテンシャル系も上に有界なポテンシャルであるが, 原点で定義されない点で状況が異なっており, 定理 1 の証明と同様の議論を行うことを考えるとき,$\bar{\mathcal{A}}_T : \mathrm{cl}(\tilde{\mathcal{C}}(a,b;T)) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $\bar{\mathcal{A}}_T(q_T) \equiv \int_0^T \frac{1}{2}||\frac{dq_T}{dt}(t)||^2 + f(q_T(t)) + \frac{1}{||q_T(t)||}\, dt$($\tilde{\mathcal{C}}(a,b;T)$ の定義はすぐ後で行う.) の minimizer の存在が保証される集合が

$$\tilde{\mathcal{C}}(a,b;T) \equiv i^{-1}(\{\tilde{q}_T \in C([0,T],\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) | \tilde{q}_T(0) = a,\ \tilde{q}_T(T) = b\})$$

ではなく, この集合の $W^{1,2}((0,T),\mathbb{R}^d)$ のノルム位相についての閉包

$$\mathrm{cl}(\tilde{\mathcal{C}}(a,b;T)) = i^{-1}(\{q_T \in C([0,T],\mathbb{R}^d) | q_T(0) = a,\ q_T(T) = b\})$$

であることに注意が必要である. 仮に $\tilde{\mathcal{C}}(a,b;T)$ で minimizer の存在が保証されれば, 同様の議論により 1,2 に対応する性質を満たす連続曲線 $\tilde{c}_T : [0,T] \to \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ の存在が保証される. 従って, 考えたい f について,$\tilde{\mathcal{C}}(a,b;T)$ での minimizer の存在が保証できることを確認する必要がある. 各 $T>0$ に対し minimizer の集合 $\bar{\mathcal{M}}_T$ を

$$\bar{\mathcal{M}}_T \equiv \{c_T \in \mathrm{cl}(\tilde{\mathcal{C}}(a,b;T)) | \bar{\mathcal{A}}_T(c_T) = \inf_{q_T \in \mathrm{cl}(\tilde{\mathcal{C}}(a,b;T))} \bar{\mathcal{A}}_T(q_T)\}$$

定めておく. もちろん, 以上の議論より任意の $T>0$ に対し $\bar{\mathcal{M}}_T \neq \varnothing$ である.

2.3 コリオリ項を除いた平面 Hill 問題

この節では, まず, コリオリ項を除いた平面 Hill 問題が, 点変換によっては変数分離系に移せないことを Bertrand-Darboux の定理を適用することによって示す.

命題 1. 次の Hamiltonian についての

$$H(x,y,p_x,p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - (\alpha x^2 + \beta y^2)$$

2 自由度 Hamilton 系が点変換によって変数分離系に移されるための必要十分条件は

$$\alpha=\beta \text{ or } 4\alpha=\beta \text{ or } \alpha=4\beta$$

である.

証明. Bertrand-Darboux の定理は,2 自由度 Hamilton 系 $\tilde{H}(x,y,p_x,p_y)=\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2)+V(x,y)$ が点変換によって変数分離系に移されるための必要十分条件が,

$$(2axy+bx+dy+e)(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2})-2(a(x^2-y^2)+dx-by+c)\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+3(2ay+b)\frac{\partial V}{\partial x}-3(2ax+d)\frac{\partial V}{\partial y}$$

が x,y について恒等的に 0 になるような,$(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5\setminus\{0\}$ が存在することであると主張する. 今の系については,

$$\begin{aligned}&(2axy+bx+dy+e)(-3\frac{x^2}{r^5}+\frac{1}{r^3}-2\alpha+3\frac{y^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}+2\beta)\\&-2(a(x^2-y^2)+dx-by+c)(-3\frac{xy}{r^5})\\&+3(2ay+b)(\frac{x}{r^3}-2\alpha x)-3(2ax+d)(\frac{y}{r^3}-2\beta y)\\=&16(-\alpha+\beta)axy+2(-4\alpha+\beta)bx+2(-\alpha+4\beta)dy+e(-2\alpha+2\beta-3\frac{x^2-y^2}{r^5})+6c\frac{xy}{r^5}\end{aligned}$$

が x,y について恒等的に 0 になるような,$(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5\setminus\{0\}$ の存在を考えればよいが,c,e は 0 にせざるを得ない.$\alpha=\beta$ のとき,$a\neq 0,\ b,d=0$ が,$4\alpha=\beta$ のとき,$b\neq 0,\ a,d=0$ が,$\alpha=4\beta$ のとき,$d\neq 0,\ a,b=0$ が取れ,$(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5\setminus\{0\}$ が存在するのは, この場合に限ることがわかる.□

従って, 特にコリオリ項を除いた平面 Hill 問題 ($\alpha=\frac{3}{2},\beta=0$ のとき) は, 点変換によっては変数分離系に移せないことがわかった.

次に, コリオリ項を除いた平面 Hill 問題については衝突解が除去できることを示す. 以下の証明は,[2],[3] とほとんど同様であるが,Sundman の評価の証明については計算が異なるため詳細に述べることにする.

まず,Levi-Civita 変換による正則化を行う. すなわち $(X,Y)\to(\frac{1}{2}(\xi_1^2-\xi_2^2),\xi_1\xi_2)$ なる点変換を行うと,

$$H(\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2)=\frac{||\eta||^2}{2||\xi||^2}-\frac{2}{||\xi||^2}-\frac{3}{8}(\xi_1^2-\xi_2^2)^2$$

と変換される.Hamiltonian は軌道に沿って保存されるから,$H=h$ と固定し,$s\equiv\frac{t}{||\xi||^2}$ とパラメータを取り替えると, このエネルギーレベル集合上で軌道の従う微分方程式は,ξ についての原点近傍で次のように書かれる.

$$\begin{aligned}\frac{d\xi_i}{ds}&=\eta_i\\\frac{d\eta_i}{ds}&=2h\xi_i+o(||\xi||^4)\end{aligned}$$

ここで,$i\in\{1,2\}$ である. 解析的な微分方程式の解は解析的であるから ([4] 等を参照されたい.),$s=0$ で $\xi=0$ となる衝突解は,

$$\xi_1=\sum_{i=1}^{\infty}a_is^i,\xi_2=\sum_{i=1}^{\infty}b_is^i,\eta_1=\sum_{i=0}^{\infty}c_is^i,\eta_2=\sum_{i=0}^{\infty}d_is^i$$

の形で書ける. 従って,

$$t = \int (a_1^2 + b_1^2)s^2 + O(s^3)ds = \frac{a_1^2 + b_1^2}{3}s^3 + O(s^4)$$

であり,

$$X = \sum_{i=2}^{\infty} \tilde{a}_i t^{i/3}, Y = \sum_{i=2}^{\infty} \tilde{b}_i t^{i/3}$$

衝突解が ξ についての原点近傍で評価できた.(この評価を,Sundman の評価と呼ぶ.) この評価を用いて,[3] とほとんど同様に次の命題が示される.

命題 2. コリオリ項を除いた平面 Hill 問題については, 任意の異なる 2 点 $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ と任意の実数 $T > 0$ で,

$$\bar{\mathcal{M}}_T \subset \tilde{\mathcal{C}}(a, b; T)$$

が成り立つ.

3 エネルギー固定条件下における 2 点境界値問題

この節では, いよいよ与えられたエネルギー値を実現する解の存在について議論する. まず, 与えられたエネルギー値を実現する解を得る変分構造について紹介する. その後, 上に有界なポテンシャル系とコリオリ項を除いた平面 Hill 問題, それぞれについて,$\mathbb{R}^d$ または $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ から勝手に 2 点取って, その 2 点境界条件を満たし, なおかつエネルギー値の条件を満足するような解が存在するためのエネルギー値の範囲についての十分条件を与える. 最後に, 先行研究との比較を行う.

3.1 与えられたエネルギー値を実現する解を得る変分構造

まず, 上に有界なポテンシャル系について考える. 実数 $E \in \mathbb{R}$ に対し, 関数 $A_E : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $c_T \in \mathcal{M}_T$ を用いて $A_E(T) \equiv \mathcal{A}_T(c_T) + ET$ と定義する. 次の命題が成り立つ.

命題 3.

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } A_E(T_0) = \inf_{T \in (T_0 - \delta, T_0 + \delta)} A_E(T)$$
$$\Rightarrow \forall c_{T_0} \in \mathcal{M}_{T_0},\ \forall t \in (0, T_0),\ \frac{1}{2}||\frac{dc_{T_0}}{dt}(t)||^2 + U(c_{T_0}(t)) = E$$

証明.

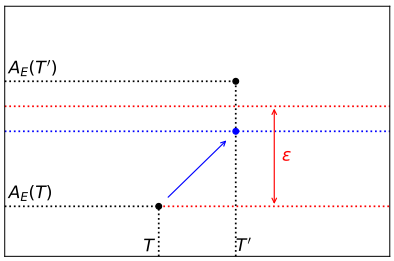
$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } A_E(T_0) = \inf_{T \in (T_0 - \delta, T_0 + \delta)} A_E(T)$$
$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall c_{T_0} \in \mathcal{M}_{T_0}, \forall T \in (T_0 - \delta, T_0 + \delta), \mathcal{A}_{T_0}(c_{T_0}) + ET_0 \leq \mathcal{A}_T(c_{T_0} \circ \mathrm{trans}_{T_0,T}) + ET$$
$$\Leftrightarrow \exists \delta > 0 \text{ s.t. } \forall c_{T_0} \in \mathcal{M}_{T_0}, \forall T \in (T_0 - \delta, T_0 + \delta), \mathcal{K}_{T_0}(c_{T_0}) - \mathcal{P}_{T_0}(c_{T_0}) \leq \frac{T_0}{T}\mathcal{K}_{T_0}(c_{T_0}) - \frac{T}{T_0}\mathcal{P}_{T_0}(c_{T_0})$$
$$\Rightarrow \forall c_{T_0} \in \mathcal{M}_{T_0},\ \mathcal{K}_{T_0}(c_{T_0}) + \mathcal{P}_{T_0}(c_{T_0}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall c_{T_0} \in \mathcal{M}_{T_0},\ \forall t \in (0, T_0),\ \frac{1}{2}||\frac{dc_{T_0}}{dt}(t)||^2 + U(c_{T_0}(t)) = E$$

ここで $\mathrm{trans}_{T_2,T_1} : [0,T_1] \to [0,T_2]$, $\mathcal{K}_T, \mathcal{P}_T : \mathcal{C}(a,b;T) \to \mathbb{R}$ は, それぞれ次のように定義した.

$$\mathrm{trans}_{T_2,T_1} = \frac{T_2}{T_1}t,\ \mathcal{K}_T(q_T) \equiv \int_0^T \frac{1}{2}||\frac{dq_T}{dt}(t)||^2\ dt,\ \mathcal{P}_T(q_T) \equiv \int_0^T U(q_T(t)) - E\ dt\ \square$$

また, 次の命題も成り立つ.

命題 4. 任意の実数 $E \in \mathbb{R}$ について A_E は上半連続関数である.



証明. 背理法を用いて示す. すなわち $\exists \epsilon > 0$ s.t. $\forall \delta > 0$, $\exists T' \in (T-\delta, T+\delta)$ s.t. $A_E(T') - A_E(T) > \epsilon$ と仮定する. また $\mathcal{K}_T(c_T), \mathcal{P}_T(c_T)$ が実数値であることに注意する.

$$\mathcal{A}_{T'}(c_T \circ \mathrm{trans}_{T,T'}) + ET' - A_E(T) = (\frac{T}{T'} - 1)\mathcal{K}_T(c_T) - (\frac{T'}{T} - 1)\mathcal{P}_T(c_T) < \epsilon$$

を導いて矛盾を示したい. これは次と同値であり

$$-\mathcal{P}_T(c_T)(T'-T)^2 - T(\mathcal{K}_T(c_T) + \mathcal{P}_T(c_T) + \epsilon)(T'-T) - T^2\epsilon < 0$$

δ を十分小さくとれば成り立つことがわかる.□

さらに, 次の命題も成り立つことがわかった.

命題 5. ポテンシャル U がある実数 $M \in \mathbb{R}$ について $U \leq M$ を満たすとき, 任意の実数 $E \geq M$ について A_E は下半連続関数である.

最後に, 次の命題も成り立つ.

命題 6. 任意の実数 $E \in \mathbb{R}$ について A_E は $T \to 0$ で正に発散する.

証明. $\exists M \in \mathbb{R}$ s.t. $U \leq M$ であるから

$$\begin{aligned} A_E(T) &= \inf_{q_T} \int_0^T \frac{1}{2}||\frac{dq_T}{dt}||^2 - U(q_T) + E\ dt \\ &\geq \inf_{q_T} \int_0^T \frac{1}{2}||\frac{dq_T}{dt}||^2\ dt + (E-M)T \\ &\geq \frac{1}{2T}||b-a||^2 + (E-M)T \end{aligned}$$

最後の不等式は Hölder の不等式を用いた.□

次に,Kepler 型ポテンシャル系について考える. 実数 $E \in \mathbb{R}$ に対し, 関数 $\bar{A}_E : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ を $c_T \in \bar{\mathcal{M}}_T$ を用いて $\bar{A}_E(T) \equiv \bar{\mathcal{A}}_T(c_T) + ET$ と定義する. 命題 3, 命題 4, 命題 5, 命題 6 それぞれの系として以下が成り立つ.

系 1.

$$\exists \delta > 0 \text{ s.t. } \bar{A}_E(T_0) = \inf_{T \in (T_0-\delta, T_0+\delta)} \bar{A}_E(T) \text{ かつ } \bar{\mathcal{M}}_{T_0} \cap \tilde{\mathcal{C}}(a,b;T_0) \neq \varnothing$$
$$\Rightarrow \forall c_{T_0} \in \bar{\mathcal{M}}_{T_0} \cap \tilde{\mathcal{C}}(a,b;T_0),\ \forall t \in (0,T_0),\ \frac{1}{2}||\frac{dc_{T_0}}{dt}(t)||^2 - f(c_{T_0}(t)) - \frac{1}{||c_{T_0}(t)||} = E$$

系 2. 任意の実数 $E \in \mathbb{R}$ について $\bar{A}_E$ は上半連続関数である.

系 3. 関数 f がある実数 $M \in \mathbb{R}$ について $f \geq -M$ を満たすとき, 任意の実数 $E \geq M$ について A_E は下半連続関数である.

系 4. 任意の実数 $E \in \mathbb{R}$ について $\bar{A}_E$ は $T \to 0$ で正に発散する.

3.2 上に有界なポテンシャル系

まず, 上に有界なポテンシャル系について, 命題 6 の証明から直ちに次の命題が従う.

命題 7. ポテンシャル U がある実数 $M \in \mathbb{R}$ について $U \leq M$ を満たすとき, 任意の実数 $E > M$ について A_E は $T \to +\infty$ で正に発散する.

従って, 以上の議論 (命題 3,5,6,7) から次の定理が示される.

定理 2. 上に有界な C^∞ 級関数 $U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, U \leq M$ について, 任意の異なる 2 点 $a, b \in \mathbb{R}^d$ と任意の実数 $E > M$ に対し, 実数 $T > 0$ と連続曲線 $c_T : [0,T] \to \mathbb{R}^d$ が存在して, 次の 3 つの条件を満たす.

1. $c_T(0) = a$, $c_T(T) = b$, $(0,T)$ 上で C^∞ 級曲線
2. $\forall t \in (0,T),\ \frac{d^2 c_T}{dt^2}(t) = -\frac{\partial U}{\partial x}(c_T(t))$
3. $\forall t \in (0,T),\ \frac{1}{2}||\frac{dc_T}{dt}(t)||^2 + U(c_T(t)) = E$

3.3 Kepler 型ポテンシャル系 $(d = 2)$

次に,Kepler 型ポテンシャル系 $(d = 2)$ については, 次の命題が成り立つことがわかった.Kepler 問題の解の特性を用いることで証明できる.

命題 8. 関数 f がある実数 $M \in \mathbb{R}$ について $f \geq -M$ を満たすとき, 任意の実数 $E \geq M$ について $\bar{A}_E$ は $T \to +\infty$ で正に発散する.

3.4 コリオリ項を除いた平面 Hill 問題

従って, 以上の議論 (命題 2, 系 1,3,4, 命題 8) から次の定理が示される.

定理 3. 任意の異なる 2 点 $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ と任意の実数 $E \geq 0$ に対し, 実数 $T > 0$ と連続曲線 $c_T : [0, T] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ が存在して, 次の 3 つの条件を満たす.

1. $c_T(0) = a$, $c_T(T) = b$, $(0, T)$ 上で C^∞ 級曲線
2. $\forall t \in (0, T),\ \frac{d^2 X \circ c_T}{dt^2}(t) = 3X(c_T(t)) - \frac{X(c_T(t))}{||c_T(t)||^3},\ \frac{d^2 Y \circ c_T}{dt^2}(t) = -\frac{Y(c_T(t))}{||c_T(t)||^3}$
3. $\forall t \in (0, T),\ \frac{1}{2}||\frac{dc_T}{dt}(t)||^2 - \frac{3}{2}X^2(c_T(t)) - \frac{1}{||c_T(t)||} = E$

3.5 先行研究との比較

現時点で把握している先行研究としては,Mañé set に関連して,Tonelli Lagrange System について知られている, 次の結果がある.([5])

定理 4. M を境界を持たない d 次元完備 Riemann 多様体,$L : TM \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数で次の 3 つの条件を満たすものとする.

1. $\exists A > 0$ s.t. $\forall (x, v) \in TM,\ \forall w \in T_x M,\ w \cdot L_{vv}(x, v) \cdot w \geq A||w||_x^2$
2. $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists B \in \mathbb{R}$ s.t. $\forall (x, v) \in TM,\ L(x, v) \geq A||v||_x - B$
3. $\forall r \geq 0,\ \sup_{(x,v) \in TM, ||v||_x \leq r} L(x, v) < +\infty,$
   $\sup_{(x,v) \in TM, ||v||_x \leq r, ||w||_x = 1} w \cdot L_{vv}(x, v) \cdot w < +\infty$

このとき, 任意の異なる 2 点 $a, b \in \mathbb{R}^d$ と任意の実数 $E > c(L)$($c(L)$ は Mañé's critical value を表す. 定義については後で述べる.) に対し, 実数 $T > 0$ と連続曲線 $c_T : [0, T] \to M$ が存在して, 次の 3 つの条件を満たす.

1. $c_T(0) = a$, $c_T(T) = b$, $(0, T)$ 上で C^∞ 級曲線
2. $\forall t \in (0, T),\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}(c_T(t), \frac{dc_T}{dt}(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(c_T(t), \frac{dc_T}{dt}(t))$
3. $\forall t \in (0, T),\ \frac{\partial L}{\partial v}(c_T(t), \frac{dc_T}{dt}(t)) \cdot \frac{dc_T}{dt}(t) - L(c_T(t), \frac{dc_T}{dt}(t)) = E$ □

ここで,Mañé's critical value の定義は,

$$c(L) \equiv \sup\{k \in \mathbb{R} : \exists T > 0,\ \exists\ a\ closed\ curve\ \gamma_T \text{ s.t. } \mathcal{A}_T(\gamma_T) + kT < 0\}$$

である. また,$c(L) = \inf\{k \in \mathbb{R} : \forall T > 0,\ \forall\ closed\ curves\ \gamma_T \text{ s.t. } \mathcal{A}_T(\gamma_T) + kT \geq 0\}$ が直ちに従う.

さて, 定理 2 との比較を考える.$c(L) \leq M$ であることに注意すれば, 定理 4 の L の条件 3 を満たさないことが相違点である.[5] では,A_E の連続性の証明で, この条件を本質的に使っているため, 定理 2 は少なくとも定理 4 とは異なる結果である. また, 定理 3 については $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ が境界を持つことや, エネルギーの範囲の十分条件が 0 も含むことも, 条件 3 と合わせて定理 4 とは異なっている.

4　今後の研究の方針

本筋からは逸れるが, コリオリ項を除いた平面 Hill 問題が点変換では変数分離系に移せないことはわかったので, 非可積分であるかどうかに興味がある.

本筋に沿った今後の方針としては, 平面 Kepler 問題, コリオリ項を除いた平面 Hill 問題に対し,$E \geq 0$ のエネルギーについては, 配位空間から勝手に異なる 2 点を選んで, そのエネルギーで 2 点間を結ぶ軌道の存在が保証されることがわかったので, 差し当たり, 平面 Kepler 問題に対し,$E < 0$ のエネルギーについて, 勝手に異なる 2 点を選んで, そのエネルギーで 2 点間を結ぶ軌道の存在が保証されるような配位空間の領域の十分条件を得たい.

参考文献

[1] 柴山允瑠, 特別講義 解析学 A「n 体問題の周期解の変分解析」, 神戸大学集中講義, https://sites.google.com/view/mitsurushibayama/.

[2] Y. Kajihara & M. Shibayama, Variational existence proof for multiple periodic orbits in the planar circular restricted three-body problem, Preprint.

[3] A. Chenciner, Action Minimizing Solutions of the Newtonian n-body Problem: From Homology to Symmetry, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vol. 3 (Beijing, 2002), 279-294, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

[4] E. Hille, Ordinary differential equations in the complex domain, Dover Publications, 1997.

[5] G. Contreras & R. Iturriaga, Global minimizers of autonomous Lagrangians, 22o Colóquio Brasileiro de Matemática, [22nd Brazilian Mathematics Colloquium], Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 1999.

平面 n 体問題の周期解と組みひも

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
梶原唯加 (Yuika KAJIHARA)

概要

平面 n 体問題の周期解に時間軸を付け加えて 3 次元上で解をプロットすると，n 本からなる組みひも (n-braid) ができる．このようにして平面 n 体問題の周期解から実現される n-braid を考えたとき，あらゆる組みひもが実現可能かどうか？という問いを n 体問題の研究で著名な Montgomery が近年の講演の中で提起している．本講演では，n 体問題と組みひもの研究背景を紹介し，既知の周期解から得られる組みひもについて考察する．

1 導入

n 体問題とは，n 個の質点が相互作用を受けながら動くとき，どのような振る舞いをするかを調べる問題を指す．Montgomery はこの数十年の間，n 体問題の研究の第一線で活躍する数学者の一人であり，特に，Chenciner と共に 3 体問題における 8 の字解 [1] の厳密な存在証明を初めて行ったことでも著名な人物である．彼は，近年の講演の中で n 体問題に関する open problem をいくつか提起した．この中の一つに次のようなものがある：

Q: 任意の (pure) braid に対してそれを実現するような周期解は存在するだろうか？

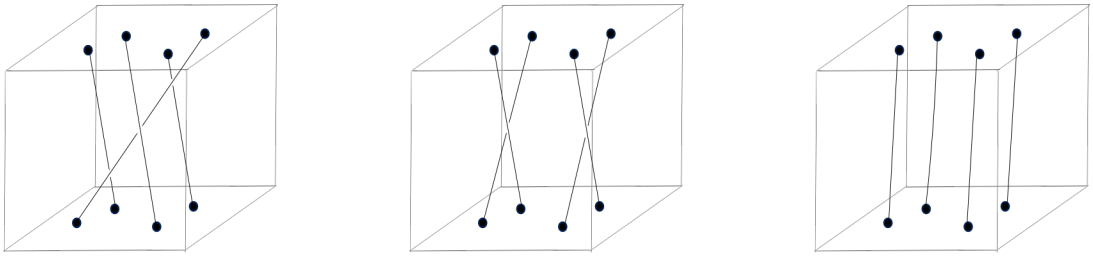
この表現は Montgomery の講演スライドの文章を少し意訳した形ではあるが，組みひもと n 体問題の周期解の振る舞いとの対応は，この分野において大きな研究テーマの一つである．

まず，n 体問題と周期解の関係について触れておこう．2 体問題は簡易な変形によってケプラー問題（原点に固定された質点から万有引力を受けて運動する質点の振る舞いを表すモデル）に帰着され，一般解を求めることができる．一方で．$n \geq 3$ の場合は一般には解けない（可積分でない）ことが知られている．そこで，$n \geq 3$ の場合の n 体問題の力学系を解析するにあたって，特殊解（特に周期解）を求めよう，という発想が出てくる．現在では様々な周期解の存在が知られているが，その中でも最も有名なのが冒頭に述べた 8 の字解である．これは等質量 3 体問題の周期解で，3 点が互いに 8 の字を描き，互いを追跡しあうふるまいをする平面 3 体問題の解である．8 の字解を含め，既知な周期解の多くが変分法によって存在証明がなされているが，詳しい議論はここでは割愛する．

1.1 組みひもの基本事項

この節では組みひもについての基本的な定義などを確認する．組みひもについてある程度知識のある方は読み飛ばしてもらって差し支えない．ここに記載してあることに関しては概ね [5] と [6] を参考にした．

組みひもとは，「立方体の向かい合ったある二つの面に同じ数の点を同じ位置にうち，これらを結んで出来上がる図形」である．（説明の簡略化のために，立方体としたが，立方体である必要はない．）例えば，図 1 はどれも 4 本の紐を結んでできる組みひもである．



(a) **(b)** **(c)**

図 1: 組みひもの例

組みひもを数学的に定義しよう．立方体 B を $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x, y, z \leq 1\}$ で定義し，

$$A_i(t) = (x_i(t), y_i(t), t) \in B \ (i = 1, ..., n)$$

とおく．ただし，各 i について $x_i, y_i \in C^0([0, 1])$，$i \neq j$ なら任意の $t \in [0, 1]$ で $(x_i(t), y_i(t)) \neq (x_j(t), y_j(t))$ とし，

$$\{(x_i(0), y_i(0)) \mid 1 \leq i \leq n\} = \{(x_i(1), y_i(1)) \mid 1 \leq i \leq n\}$$

とする．

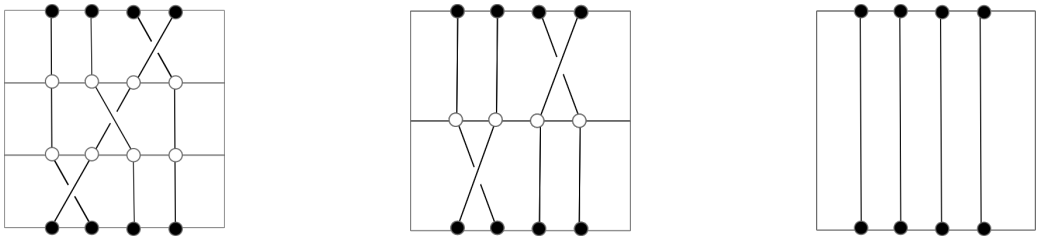
$$A([0, 1]) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i([0, 1])$$

としたとき，$A([0, 1])$ で定まる図形が n 次の組みひも（n-braid）である．特に，任意の i について $(x_i(0), y_i(0)) = (x_i(1), y_i(1))$ が成り立つときは pure braid と呼ばれる．ここで，$t = 0, 1$ の点を固定した元で，内部で紐が交わることなく連続変形によって写り合う組みひもは同値とみなす．

組みひもを式で表そうとすると少し回りくどいが，図に描いてみると，それらは基本的な要素によって構成されていることがわかる．簡略化のため $(x_i(0), y_i(0))$ は一直線上に並んでいるとし，左の点から順に $1, ..., n$ と番号付けされているとしよう．適当な連続変形を施すことによって「二つの紐の交わり」が各時刻で一組ずつしか起きないとしてよい．つまり，図 2 のように各ブロックごとに二つの紐の交わっている図形の積み重ねで表現できる．

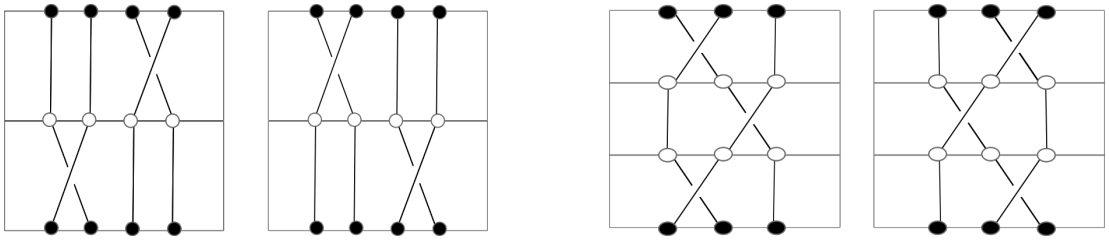
紐の交わり方はどちらが上か下かで 2 パターンある．i 番目と $i + 1$ 番目の紐の交わりを i 番目が上，下でそれぞれ σ_i, σ_i^{-1} としよう．例えば，図 2(a) の一番下のブロックが σ_1，真ん中が σ_2^{-1}，一番上が σ_3 である．ブロックは上から読んでいくとすると，図 2(a) は $\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_1$，(b) は $\sigma_3\sigma_1$ となる．また，紐同士の交わりが全くない組みひもは 1 と表すことにし，これを自明な組みひもと呼ぶ．例えば，4 次の場合は，図 1, 2 (c) が自明な組みひもである．組みひもの構成の仕方から以下の性質が成り立つことがわかる：

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \ (|i - j| \geq 2)$$
$$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$$



(a) $\sigma_3\sigma_2^{-1}\sigma_1$ **(b)** $\sigma_3\sigma_1$ **(c)** 1

図 2: 組みひもの分割



(a) $\sigma_3\sigma_1$ と $\sigma_1\sigma_3$ **(b)** $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ と $\sigma_2\sigma_1\sigma_2$

図 3: 同じ組みひも

これらは実際に図を描いてみるとわかりやすいので，図 3 を参照されたい．

そして，二つの別の組みひも同士を積み重ねることで，文字通り「積」を考えることができる．積み重ねると，立方体ではなくなってしまうが，ぎゅっと縦に圧縮して立方体とみなせばよい．積も上から順に読むとして，組みひも x の下に y を重ねたとき出来上がる組みひもを xy とする．

さて，上記で定義した積によって組みひも群が得られることを確認しよう．証明は平易であるので，事実だけ列挙する．

- 単位元の存在：単位元 e は自明な組みひもである．
- 逆元の存在：$x = \sigma_{k_1}^{l_1} \cdots \sigma_{k_m}^{l_m}$ とする．このとき $y = \sigma_{k_m}^{-l_m} \cdots \sigma_{k_1}^{-l_1}$ とすれば，$xy = yx = e$ が成り立つ．
- 結合法則：任意の組みひも x, y, z について $(xy)z = x(yz)$ が成り立つ．

以上より，組みひもは上記で定めた積によって群をなす．これを組みひも群と呼ぶ．以下，n 次の組みひも群を B_n と表す．

Remark 1. ここでは平面上の組みひもしか扱わないが，より一般には $n \geq 2$ の n 次元多様体 M 上で定義でき，また n 点が直線的に並んでいる必要もない．F_nM を

$$F_nM = \{(x_1, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^{n} M \mid x_i \neq x_j \ (i \neq j)\}$$

で定義すると，基本群 $\pi_1 F_n M$ が *pure braid group* を与える．さらに，$(x_1, ..., x_n)$ の添字の入れ替えによる違いを無視した（添字の順列で同値類をとった）ものを B_nM とすると，$\pi_1 B_n M$ が *braid group* を与える．

1.2 n 体問題の周期解と組みひも

さて，組みひもの性質がわかったところで話を平面 n 体問題の周期解の話題に戻そう．平面 n 体問題の周期解に対し，時間軸を z 軸として選んで軌道を 1 周期分プロットすると，n 次の組みひもができる．これらの関係について言及しているのが冒頭に述べた Montgomery の問いである．（ここで周期解としているのは，n 次の組みひもはその性質から立方体の上面と下面にある n 点が集合として同じであるから.）

8 の字解の場合は，3 点の集合は 1/3 周期で元の位置に戻ってくる．1/3 周期分の軌道の概略と braid を記したのが図 4 である．braid の積の取り方と見方が逆になってしまってわかりにくいが，図 4 の左側の時系列としては下から上にとってみていただきたい.

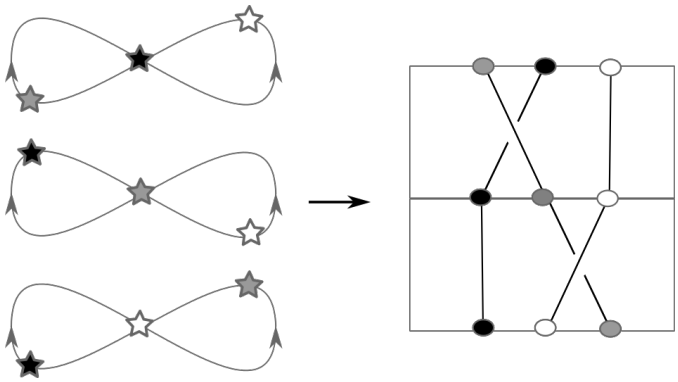


図 4: 8 の字解から得られる 3 次の組みひも

上記の操作によって平面 n 体問題の周期解から構成される組みひもにどのような性質があるのかを次節で見ていくことにしよう．ただし注意が必要なのは，前節では定義した組みひもをある一方向から見て描いていた．観測する方向を固定したもとで立方体をひっくり返したり，回転させたりすると組みひもの形は変わってしまう．周期解から組みひもを描いたときに，どの方向から見るかによって一つ一つ区別していては具合が悪い．そこで

$$\mathcal{B}_n = B_n/Z(B_n)$$

の共役類（braid type）を考える．ここで，$Z(B_n)$ とは，Δ_n^2 で生成される無限巡回群である．ただし，

$$\Delta_n = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-1})(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{n-2})\cdots(\sigma_1\sigma_2)\sigma_1$$

とする．Δ_n は half twist，Δ_n^2 は full twist と呼ばれる．なぜこのような呼び方をするかは，具体的に組みひもを想像するとわかりやすい．例えば $n = 3$ の場合，$\Delta_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$（図 3(b) の左側）となるが，これはよく目を凝らして見ると，自明な組みひもの底面を固定して，上面をくるっと π 回転させたものに等しい．したがって，Δ_3^2 は自明な組みひもの底面を固定して，上面をぐるっと 2π 回転させたものに等しくなる．half twist で共役をとることは，組みひもを後ろから見ることに対応する．実際，図 4 をみると 8 の字解の 1/3 周期分の braid は $\sigma_1^{-1}\sigma_2$ となるが，half twist （この場合

は $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$）によって共役を取ると，

$$\begin{aligned}(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2(\sigma_1\sigma_2\sigma_1) &= \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \\ &= \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1 (= \sigma_1\sigma_2\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1) \\ &= \sigma_2^{-1}\sigma_1\end{aligned}$$

となるから，$\sigma_1^{-1}\sigma_2$ と $\sigma_2^{-1}\sigma_1$ が共役であることがわかる．ここで，二つ目の等号は $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^2 = 1$ から，最後の等号は $(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)^2 = 1$ から導かれる．

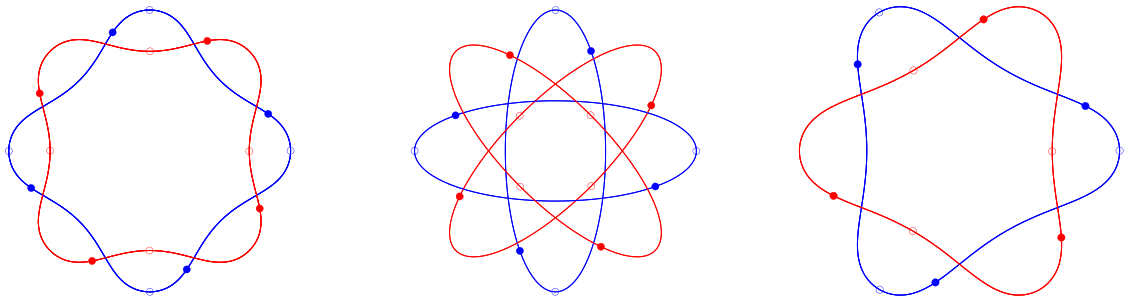
2　例

それでは平面 n 体問題の周期解から得られる組みひもの例を見ていこう．ここでは偶数体問題（$2n$ 体問題）と 3 体問題について考える．

2.1　2n 体問題の解から構成される組みひも

等質量 $2n$ 体問題には，$n \geq 2$ において，少なくとも各 n ごとに $\lfloor n/2 \rfloor$ 個の（かなり対称性の強い）周期解があることが [7] の結果からわかっている．ここで $\lfloor \cdot \rfloor$ はガウス記号を表す．この周期解を $x_{n,p}$ $(p = 1, ..., \lfloor n/2 \rfloor)$ と表し，適当なスケーリングで周期を 1 と仮定する．ここでは [7] で与えられた周期解から構成される組みひもを考えよう．

各周期解 $x_{n,p}$ は $2d$ 個の閉曲線上を互いに追跡し合う解である．ここで，$d = \gcd(n, p)$ とする．また奇数番と偶数番の質点は互いに逆向きに回っていて，どの時刻においても常に奇数番と偶数番の質点がそれぞれ正 n 角形を成している．柴山先生に提供していただいた図を用いていくつかの具体例を図 5 に載せよう．



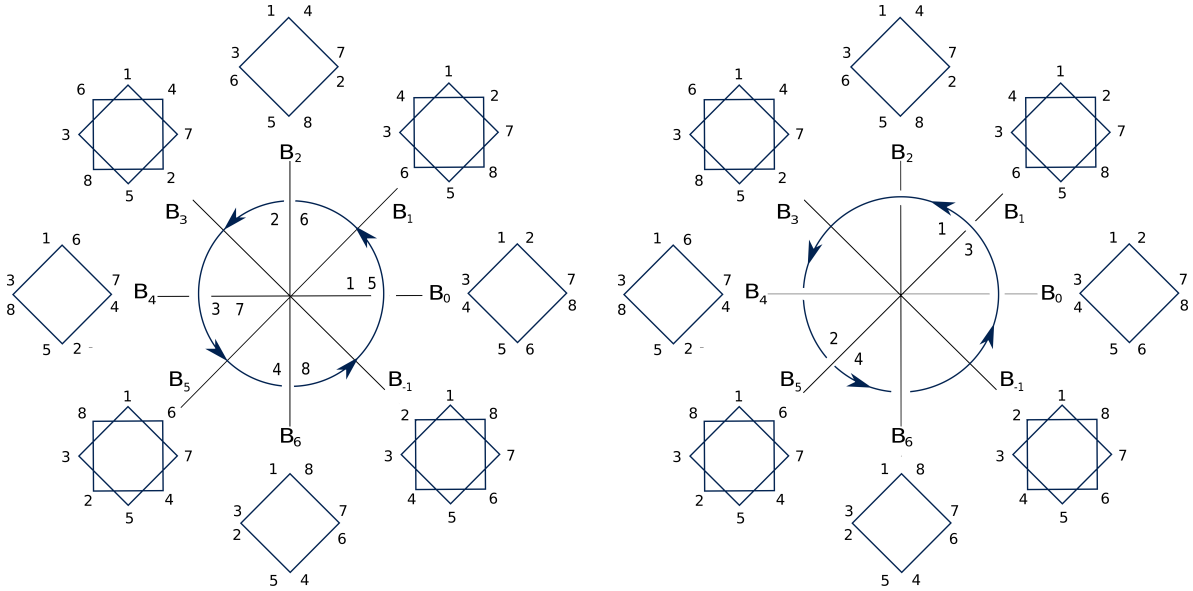
(a) $(n, p) = (4, 1)$　　**(b)** $(n, p) = (4, 2)$　　**(c)** $(n, p) = (3, 1)$

図 5: 周期解 $x_{n,p}$

図 5 において，赤と青の本質的な区別はないので，どちらを偶数，奇数と思ってもらっても構わない．ここでは赤を奇数，青を偶数と思うことにすると，奇数番の添字が振られた質点たちは時計回りに赤い閉曲線上をまわり，偶数番は半時計周りに青い閉曲線上を動いている．塗りつぶしの点の配置を $x_{n,p}(0)$ すると，白抜きになっている点は $x_{n,p}(d/2n)$ の配置を表している．

p が周期解のどのような幾何的性質を反映しているかをもう少し説明しよう．質点が成す 2 つの正 n 角形の大きさはどちらか一方がずっと大きい（あるいは小さい）のではなく，特定の時間ごとにその大小関係が入れ替わる．入れ替わる瞬間から次の入れ替わりの瞬間まで，奇数番と偶数番が「すれ

違う」回数を p は表している．「すれ違う」とは，ここでは奇数番と偶数番の質点と中心の 3 点が，（偶，奇，原点）または（奇，偶，原点）の順で同一直線上に並ぶ状態，つまりこの 3 点による syzygy を指す（syzygy については 2.2 節を参照）．詳しい証明は割愛するが，例えば周期解 $x_{4,1}$ の振る舞いを図示すると図 6 のようになる．矢印の番号は軌道が描く順に対応する．



(a) $(n, p) = (4, 1)$　　**(b)** $(n, p) = (4, 2)$

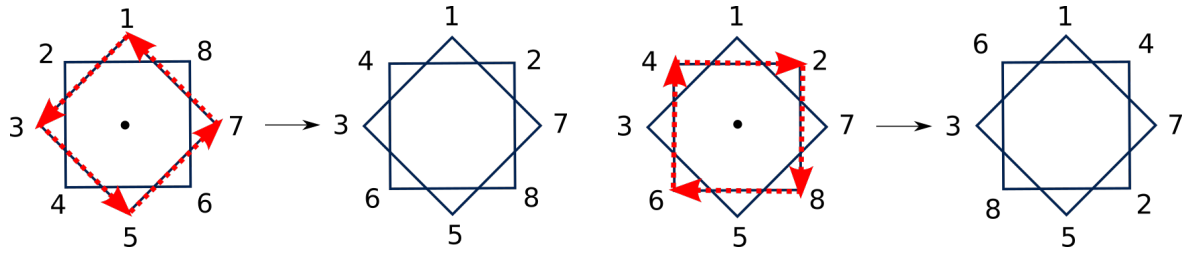
図 6: 配置の移り変わりの概略図

図 6 では奇数番の質点を固定し，偶数番だけ動かして考えている．また，正 n 角形（この場合は正方形）の大きさを全て同じ大きさで描いているが，実際には 1 3 という添字の振られた矢印と 5 7 という添字の振られた矢印上の軌道は奇数番の質点が成す正方形が小さく，一方，2 4 という添字の振られた矢印と 6 8 という添字の振られた矢印上の軌道は偶数番の質点が成す正方形が小さい．図 5 と図 6 とを見比べると， 図 5 において塗りつぶし点は青と赤と合わせて正 $2n$ 角形を成している（$x_{n,p}(0)$）．ここは図 6 の B_{-1} に対応している．そしてしばらく時間が経つと白抜きの点では赤と青がそれぞれ正 n 角形をなし，正 n 角形の傾きは等しくなる（$x_{n,p}(d/2n)$）．つまり正 n 角形の一辺の長さを同じとみなすと奇数番と偶数番の質点がピッタリ重なっている．これは B_0 に対応する．

さらに図 6 における奇数番の矢印上での添字の入れ替えと，偶数番の矢印上での添字の入れ替えに注目しよう．1 3 5 7 の矢印では奇数番の方が小さいから偶数番の「内側」を通って点が入れ替わる．2 4 6 8 の矢印についても同様で，合わせて図 7 のように表すことができる．ここで，図 6 と同様，図 7 は奇数番の質点を固定し，偶数番だけ動かして描いている．以下，これを奇数シフト，偶数シフトと呼ぶことにする．次に，図 7 の中心に原点を書き加え，この質点たちを連続的に移動させて一列に並べて描いてみると，図 8 のような振る舞いとみなせる．

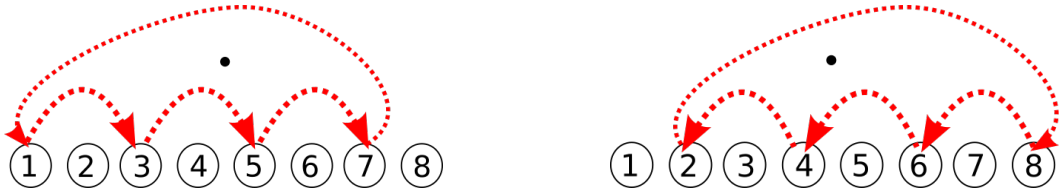
上の考察から対応する組みひもを描くと図 9 のようになる．$(n.p) = (4, 1)$ の場合に $t \in [0, d/4]$ では奇数シフトと偶数シフトが一回ずつ起こる．

$$a_n = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{2n-1})(\sigma_1\sigma_3\cdots\sigma_{2n-1})^{-1}$$
$$b_n = (\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{2n-1})^{-1}(\sigma_1\sigma_3\cdots\sigma_{2n-1})$$



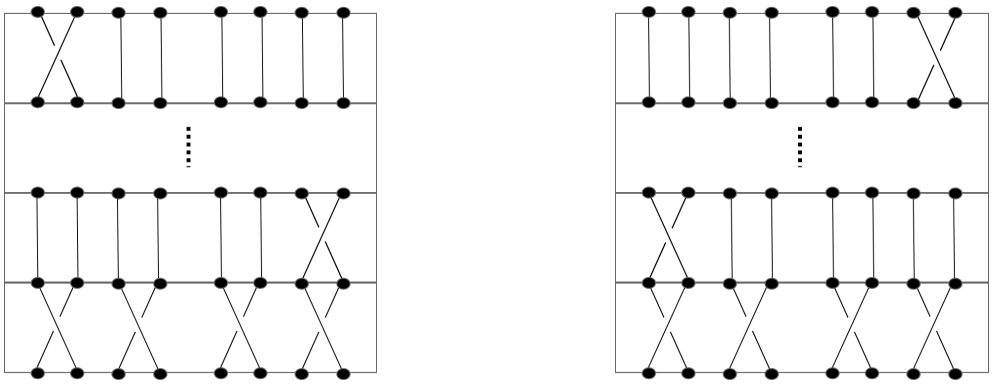
(a) 奇数シフト　　**(b)** 偶数シフト

図 7: $(n,p)=(4,2)$ におけるシフト



(a) 奇数シフト　　**(b)** 偶数シフト

図 8: 直線的に並べた場合



(a) a_n　　**(b)** b_n

図 9: $n=4$ の場合

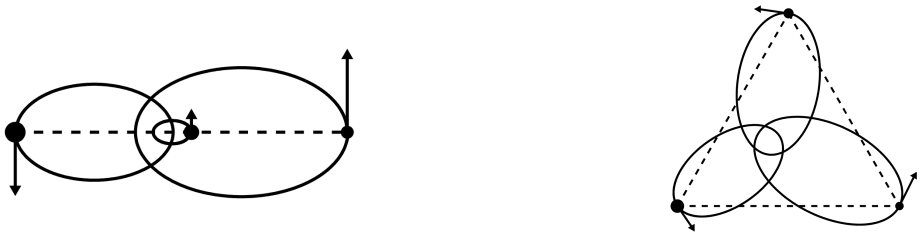
を用いると，この間に描く braid type は a_4b_4 とわかる．各区間 $t\in[(d/n)k,(d/n)(k+1)]$ $(k=1,...,(n/d)-1)$ での振る舞いは $t\in[0,d/4]$ と同様であるから，全体の braid type は $(a_4b_4)^{n/d}=(a_4b_4)^4$ とわかる．より一般に $p=1$ の場合は n を増やしても図 7 が正 4 角形から正 n 角形に変わるだけで，あとのふるまいは同様である．$t\in[0,d/n]$ での braid type が a_nb_n，全体の braid type は $(a_nb_n)^n$ とわかる．

では，$p=2$ 以上だとどうなるだろうか．p は大小関係が入れ替わるまでに奇数番と偶数番が「すれ違う」回数を表している．図 7 は 1 回分のすれ違いを表しているから，$p=2$ の場合は，図で表したシフトが奇数と偶数それぞれ 2 回ずつ繰り返しで起こることになる．したがって，$(n,p)=(4,2)$ の場合に $t\in[0,d/n]$ で描かれる braid type は $a_n^2b_n^2$ となる．より一般に，$x_{n,p}$ の $t\in[0,d/n]$ で描かれる braid type は $a_n^pb_n^p$ となり，全体は $(a_n^pb_n^p)^{n/d}$ となる．

2.2　3 体問題の解から構成される組みひも

2.2.1　Syzygy と 3 次の組みひも

3 次の組みひもを考えよう．平面 3 体問題の解は退化した三角形（3 点が一直線に並んだ状態）も含めて考えれば常に三角形をなしていることになる．このとき三角形の配置のパターンが全く変わらなければ，得られる braid type は自明なものになる．例えば，3 体問題にはオイラー解とラグランジュ解と呼ばれる周期解が存在することが知られている．図 10 を参照されたい．（こちらも柴山先生に提供してもらいました.）ちなみにこの解は等質量という制限はなく，3 質点の比は任意に選べる．



(a) a_n　　**(b)** b_n

図 10: Euler 解と Lagrange 解

オイラー解は常に 3 質点が退化した三角形をなした状態で回転するような軌道を描く．一方，ラグランジュ解は常に 3 質点が正三角形をなすような軌道である．ゆえに，オイラー解もラグランジュ解も三角形としての配置がずっと変わらない．ラグランジュ解の braid を描いてみると正三角形を保ったままくるっと回っていくから，これは full twist になる．したがって，braid type としては 1 となる．オイラー解も同様に braid type は 1 である．上の考察から，平面 3 体問題の周期解から自明でない braid type が現れるためには三角形としての配置が変わることが必要条件である．

では三角形の配置が変わるとはどういうことなのか考えると，それは syzygy（食）と呼ばれる現象と深く関わることがわかる（syzygy を起こすような n 体問題の解については [2] を参照されたい）．Syzygy とは質点が一直線上に並ぶ現象のことをさし，3 体問題の場合は真ん中の質点の番号によって 3 通りの syzygy がある．三角形の配置が変わるとき，その間に必ず syzygy が起こっている．三角形のとりうる配置としては，非退化なものが 2 種類．退化したものは 3 種類ある．それぞれの配置について，非退化な三角形で時計回りに見て 123 になるものを t_1．132 になるものを t_2，退化なもの（syzygy）は真ん中の点の番号に対応させて s_1, s_2, s_3 と表すことにする．三角形の配置が変わるもの（非自明なもの）を考えたいので，t_1, t_2 にそれぞれ映りあう状態を考えるとする．すると，t_1 から t_2 に至るまでに間にいずれかの s_i を経由するから．仮に t_1 から始めるとすると，

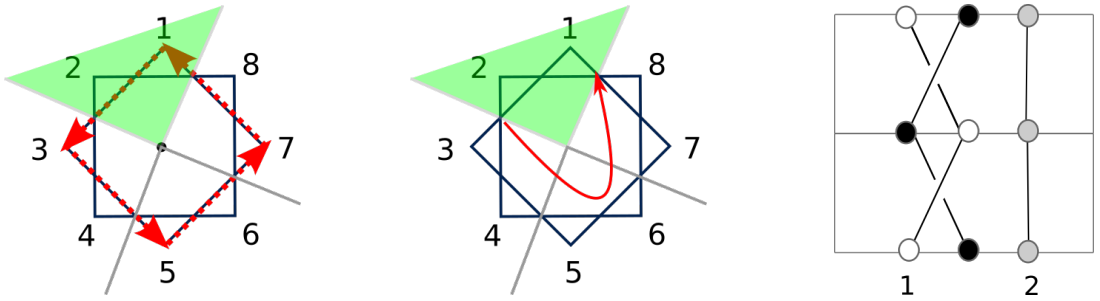
$$t_1 \to s_{n_1} \to t_2 \to s_{n_2} \to t_1 \to s_{n_3} \to \cdots$$

となる．ここで $\{n_k\}$ は $\{1,2,3\}$ からなる任意の点列とする．したがって，syzygy が起こる順番，つまり syzygy 列 $\{n_k\} \in \{1,2,3\}^{\mathbb{N}}$ を決めると，対応する braid が定まる．三角形の配置の変化と 3 次の組みひもとの対応については [4] を参照されたい．[4] はリサージュ図形の上に 3 質点を置き，そ

こからできる braid について考察した結果であるが，三角形の配置の移り変わりと braid の対応を求めているため，syzygy からできる braid についても応用ができる．

2.2.2　$2n$ 体問題と 3 次の組みひも

ここで再び $2n$ 体問題の話題に戻ろう．実は $x_{n,p}$ の braid は図 7 で加えた原点を含めて braid を考えることである意味で 3-braid とみなせる．図 7 を図 11 のように 4 分割してみよう．すると，奇数同士，偶数同士を同一視すれば緑で網がけした領域が基本領域になっていることがわかる．矢印が基本領域の外に出てしまったときは端同士を同一視して，(b) のような矢印を加えて考える．すると対応する braid として (c) が描ける．



(a) 基本領域　　**(b)** connection　　**(c)** 基本領域での奇数シフト

図 11: $x_{n,p}$ から得られる 3-braid

よって，a_n は 3-braid で考えると σ_1^2 に置き換わる．同様にして偶数シフトについても基本領域をとって考えると b_n は σ_2^{-2} になる．

3　なぜ組みひもを調べるのか？

そもそもの前提として，このように平面 n 体問題の周期解から構成される組みひもやそれらの関係性を調べることにどのような意義があるのか，という問題がある．その問いの答えのひとつとしては「周期解を組みひもによって何らかのクラス分けをする」ということが挙げられる．特に，2 章で紹介した $2n$ 体問題の周期解 $x_{n,p}$ から構成される braid type について，最近の金先生らとの共同研究で次のことがわかった：

定理 3.1 ([3])**.** 例で紹介した $2n$ 体問題の解 $x_{n,p}$ について，$x_{n,p}([0,d/n])$ から得られる *braid type* を $Y_{n,p}$，$x_{n,p}([0,1])$ から得られる *braid type* を $X_{n,p}$ とする．このとき，$Y_{n,p}$ は *stretch factor* $(\mathfrak{s}_{2p})^2$ をもつ *pseudo-Anosov* になり，$X_{n,p}$ は *stretch factor* $(\mathfrak{s}_{2p})^{\frac{2n}{d}}$ をもつ *pseudo-Anosov* になる．

ここで $\mathfrak{s}_k$ は metalic ratio，つまり，

$$\mathfrak{s}_k = \frac{1}{2}(k+\sqrt{k^2+4}) = k + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{k + \ddots}}$$

とする．（$\mathfrak{s}_2$ がいわゆる黄金比である．）

定理について少し説明しよう．D_n を n 次の穴あき disk として，写像類群（Mapping Class Group）を

$$\mathrm{MCG}(D_n) = \pi_0(\mathrm{Homeo}_+(D_n))/(isotopy)$$

で定義する．また $\pi_0(\mathrm{Homeo}_+(D_n))$ は向きを保つ同相写像の集合とする．ここで

$$\mathcal{B}_n \simeq \mathrm{MCG}(D_n)$$

となることが知られている．したがって，$x \in \mathcal{B}_n$ に対して，対応する $\phi \in \mathrm{MCG}(D_n)$ が取れる．ϕ はその性質によって次の 3 つに分類される：

- periodic :⇔ ある k があって，$\phi^k = 1$ が成り立つ．finite order とも呼ばれる．
- reducible :⇔ ある $e = c_1 \cup \cdots \cup c_j$ があって，$\phi(e) = e$．ただし，c_i は互いに非交和な単純閉曲線とする．
- pseudo-Anosov :⇔ それ以外．

ϕ が pseudo-Anosov であるとき，ϕ は豊かな力学系としての構造をもつ．対応する stretch factor と呼ばれる値 $\lambda = \lambda(\phi)$ が $\lambda > 1$ になることが知られている．また $\log(\lambda)$ は位相的エントロピーと呼ばれ，これは ϕ によって定まる力学系の不変量のひとつである．

ただし，定理 3.1 には素直に喜べない事情がある．$\mathfrak{s}_k$ は $x^2 - kx - 1 = 0$ の正の根と一致するが．定理の stretch factor に二次方程式の根が現れるのは，2.2.2 節に記載したような基本領域を考えることで 3-braid に帰着されることに由来する．このような操作ができるのはそもそも考えていた $2n$ 体問題の周期解 $x_{n,p}$ がかなり高い対称性を持った解だからである．3-braid と 3 次元力学系には深い繋がりがあるが，m 次元上の n 体問題の微分方程式は一般に $2mn$ 次元となり，角運動量が 0 などの仮定によって多少の reduction が可能なことを考慮したとしても，低次元力学系とは言い難い．したがって，組みひもから得られる stretch factor やエントロピーなどがどの程度元の n 体問題の力学系を反映しているかを明らかにすることが今後の課題として残っている．

参考文献

[1] A. Chenciner & R. Montgomery, A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses, *Annals of Mathematics*, **152** (2000), 881–901.

[2] 梶原唯加, Syzygy と n 体問題, 北海道大学数学講究録 = Hokkaido University technical report series in mathematics, **180** (2021).

[3] Y. Kajihara, E. Kin & M. Shibayama, Braids, metallic ratios and periodic solutions of the $2n$-body problem, in preparation.

[4] E. Kin, H. Nakamura & H. Ogawa, Lissajous 3-braids, https://arxiv.org/abs/2008.00585.

[5] 河野俊丈，新版 組みひもの数理，遊星社．2009.

[6] 村杉邦男，結び目理論とその応用，日本評論社．1993.

[7] M. Shibayama, Multiple symmetric periodic solutions to the $2n$-body problem with equal masses, *Nonlinearity*, **19** (2006), 2441–2453.

近可積分系の正則レベル集合近傍における可積分性の判定条件

京都大学大学院 情報学研究科 数理工学専攻
本永翔也 (Shoya MOTONAGA)

1 はじめに

微分方程式の可積分性とは，微分方程式が求積法により解けることを意味する．可積分判定の研究は Poincaré [1] の時代にまで遡るが，与えられた力学系の可積分性の判定については現在でも完全に解決されてはいない．また，可積分性とダイナミクスの関係を明らかにすることも重要である．本稿では，一般の自励的力学系に対する可積分性を取りあげ，近可積分系に対する非可積分性の十分条件を与える．また，主結果を周期摂動を受ける 1 自由度ハミルトン系に適用し，分数調波軌道とホモクリニック軌道に対するメルニコフの方法との関連についても述べる．

2 可積分性

滑らかな n 次元多様体 N 上のベクトル場 X が与える力学系を考える：

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in N. \tag{1}$$

与えられた常微分方程式 (1) の一般解を求めたい．現在では，一般には常微分方程式は求積不可能であるということがよく知られているが，「解ける」とはどういうことだろうか？ まずは簡単な「解ける」例を挙げることにする．

例 1. 自律的な（ベクトル場が時間に陽に依存しない）*1* 次元の常微分方程式を考える．

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0.$$

このとき，$\frac{\dot{x}}{f(x)} = 1$ より $t + C = \int \frac{dx}{f(x)}$ （C：任意定数）と表せられる．$F(x) := \int \frac{dx}{f(x)}$ とし，逆関数 F^{-1} を許せば

$$x(t) = F^{-1}(t + C)$$

となり，一般解が求められる．

高次元の場合には，素朴には何らかの方法で方程式を低次元のものに帰着させて解くことが考えられる．そのためには，以下で述べる第一積分や可換なベクトル場が必要となる．

2.1 第一積分（保存量）

定義 1. 多様体 N 上の C^∞ 関数 F がベクトル場 X の**第一積分**であるとは，関数 F が任意の点 $x \in M$ に対し $\frac{d}{dt}F(\phi_t^X(x)) = 0$ を満たすことをいう．

注意 1. 物理学においては，第一積分は保存量と呼ばれ，いわゆるエネルギー保存則や角運動量保存則などに対応する．

命題 1. C^∞ 関数 F がベクトル場 X の第一積分であることと以下の *(i)*〜*(iii)* は同値である：
(i) $dF(X) = 0$　*(ii)* $\mathcal{L}_X(F) = 0$（ただし $\mathcal{L}_X$ はリー微分）　*(iii)* $(\phi_t^X)^* F = F$ $(\forall t \in \mathbb{R})$

第一積分の定義より，初期点 x_0 を固定すると軌道 $\{\phi_t^X(x_0)\}$ は同じレベル集合上に留まる．したがって，値 $c \in \mathbb{R}$ に対するレベル集合 $F^{-1}(c) = \{x \in M : F(x) = c\}$ 上には誘導された力学系 $\phi_t^X|_{F^{-1}(c)}$ がある．c が F の正則値であれば $F^{-1}(c)$ は $n-1$ 次元多様体であり，このレベル集合上に力学系を制限することで方程式の次元を 1 つ下げることができる．この事実は標語的には「第一積分が一つ見つかれば，方程式の次元を 1 つ下げることができる」と説明される．

例 2. 摩擦と外力のない *Duffing* 方程式を考える：

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = x - x^3, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

$H(x,y) = \frac{1}{4}(2y^2 - 2x^2 + x^4)$ とおけば，方程式の解 $(x(t), y(t))$ に対して $\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = 0$ となり，H は第一積分である．つまり $H(x(t), y(t)) = C$（C：任意定数）となる．y について整理すれば $y = \pm\sqrt{2C + x^2 - x^4/2}$．つまり $\dot{x} = \pm\sqrt{2C + x^2 - x^4/2}$ という一階の微分方程式になり，例 1 に帰着される．

2.2 可換なベクトル場（連続対称性）

定義 2. ベクトル場 Y がベクトル場 X に対する**可換なベクトル場**であるとは，$[X, Y] = 0$ が成立することをいう．ここで $[X, Y] = XY - YX$ はリー括弧である．

注意 2. ベクトル場 X に対し X 自身は可換なベクトル場である．

注意 3. 物理学においては，可換なベクトル場とはいわゆる連続対称性のことであり，並進対称性や回転対称性などに対応する．

命題 2. ベクトル場 Y がベクトル場 X と可換であることと以下の *(i)*〜*(iii)* は同値である：
(i) $\phi_t^X \circ \phi_s^Y = \phi_s^Y \circ \phi_t^X$ $(\forall s, t \in \mathbb{R})$　*(ii)* $\mathcal{L}_X(Y) = 0$　*(iii)* $(\phi_t^X)_* Y = Y$ $(\forall t \in \mathbb{R})$

可換なベクトル場が存在するとき，簡単な計算から，$x(t)$ が解であれば $\phi_s^Y(x(t))$ も解であることが従う．したがって ϕ_s^Y に沿った方向に関しては 1 次元分の次元が潰せたものと見做すことができ，この事実も標語的には「可換なベクトル場が一つ見つかれば，方程式の次元を 1 つ下げることができる」と説明できる．

例 3. リミットサイクルを持つ，平面上の以下のような方程式を考える：

$$\dot{x} = \mu x - ay - (x^2 + y^2)x, \quad \dot{y} = ax + \mu y - (x^2 + y^2)y, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

ここで，$a, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は定数である．極座標変換 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ によって

$$\dot{r} = \mu r - r^3, \quad \dot{\theta} = a$$

となり *2* つの独立な *1* 次元の方程式が得られて例 1 に帰着する．

2.3 第一積分と可換なベクトル場の存在

与えられたベクトル場に対し，第一積分や可換なベクトル場はどれくらい存在するだろうか？ 実は一般に，ベクトル場の正則点（$X(x_0) \neq 0$ なる点）の近傍にはたくさんの局所的な第一積分と可換なベクトル場が存在する．以下，e_i を第 i 成分を 1，他の成分を 0 とした n 次元ベクトルとする．

定理 1. *(Flow-Box Theorem)* ベクトル場 X に対し $x_0 \in M$ は $X(x_0) \neq 0$ なる点とする．このとき，x_0 近傍にある局所座標 $(U; y_1, ..., y_n)$ が存在して X はこの局所座標のもとで $\dot{y} = e_1$ とできる．特に，U 上では，$n-1$ 個の独立な第一積分 $y_2, ..., y_n$ と n 個の独立な可換なベクトル場 $e_1, ..., e_n$ が存在する．

ここで，独立性については以下の定義を用いる．

定義 3. C^∞ 関数 $F_1, ..., F_k$ が**独立**であるとは，$dF_1, ..., dF_k$ が稠密な開集合上の各点で線形独立であることをいう．また，ベクトル場 $X_1, ..., X_k$ が独立であるとは，これらが稠密な開集合上の各点で線形独立であることをいう．

注意 4. 定理 *1* は，常微分方程式の解の存在と一意性に関する定理と同値である．このようにして「解ける」ことを「良い座標が存在する」ことに言い換えるのは，この後説明する *Liouville-Arnold* の定理の根幹となる．また，一般に，「解ける」ことの背景の一つに，線形化可能性があり，定理 *1* や *Liouville-Arnold* の定理（定理 *2*）だけでなく，無限次元可積分系における逆散乱法の枠組においても，非線形方程式を線形なものに帰着させることは重要になる．

滑らかな常微分方程式は，局所的には解けるが，大域的にはどうであろうか？ 素朴には，第一積分か可換なベクトル場が一つ存在するごとに系の次元を 1 つ下げられるのだから，第一積分と可換なベクトル場が合計 n 次元分あれば良さそうに思われる．これを数学的に定式化したものとして次の Bogoyavlenskij 可積分性 [2] が知られている．

定義 4. *(Bogoyavlenskij* 可積分性*)* n 次元可微分多様体上のベクトル場 X が ***Bogoyavlenskij* の意味で（*q,n-q*）-可積分**であるとは，q 個の独立なベクトル場 $X_1, ..., X_q$（ただし $X_1 = X$）と $n-q$ 個の独立な関数 $F_1, ..., F_{n-q}$ が存在して，$[X_i, X_j] = 0$ かつ $dF_i(X_j) = 0$ が任意の i, j について成立することをいう．特に全ての X_i, F_j が解析的であれば，解析的可積分などと呼ぶ．

注意 5. 解析力学においては，自由度の数だけポアソン可換な保存量を持つという *Liouville* 可積分

性が知られているが，m 自由度ハミルトン系が *Liouville* 可積分であるならば (m,m)-可積分であり，*Bogoyavlenskij* 可積分性は *Liouville* 可積分性の一般化になっている．

現在までに様々な可積分系が発見されている．以下に簡単な例を挙げておく：

例 4. 単振子

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sin x, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

は第一積分として $H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x$ を有し，自分自身を可換なベクトル場として持つため，*(1,1)*-可積分である．

例 5. *Lotka-Volterra* 方程式*:*

$$\dot{x} = ax - bxy, \quad \dot{y} = cxy - dy, \quad x, y \in \mathbb{R}_{>0}$$

（ここで，a,b,c,d は定数）は，第一積分として $H(x,y) = cx + by - d\log x - a\log y$ を有し，自分自身を可換なベクトル場として持つため，*(1,1)*-可積分である．

例 6. ケプラー問題

$$\dot{x}_i = y_i, \quad \dot{y}_i = -\frac{k}{||x||}x_i, \quad x = (x_1,x_2,x_3), y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3,$$

は，第一積分としてエネルギー $H = \frac{1}{2}||y||^2 - \frac{1}{||x||}$, 角運動量ベクトル $G = x \times y$ の各成分, およびルンゲ・レンツベクトル $L = \frac{1}{k}y \times G - \frac{x}{||x||}$ の各成分（うち *5* つが独立）を有す. また，各第一積分に対応するハミルトンベクトル場の中には可換なベクトル場が存在し，結果的に *(3,3)*-可積分でもあり， *(1,5)*-可積分でもあることが従う．

可積分な系の特徴として，以下のような性質が挙げられる．

定理 2. *(Liouville-Mineur-Arnol'd-Jost* の定理 *[2, 3])* n 次元連続力学系 X は可換なベクトル場と第一積分の組 $(Y_1,\ldots,Y_q,F_1,\ldots,F_{n-q})$ によって $(q,n-q)$ 可積分であるとする．$c \in \mathrm{Im}F$ に対し，レベル集合 $F^{-1}(c)$ の連結成分 $\mathcal{U}$ の任意の点で $Y_1,...,Y_q$ および $dF_1,...,dF_{n-q}$ は線形独立であり，かつ $\mathcal{U}$ はコンパクトであるとする．このとき $\mathcal{U}$ は埋め込まれた q 次元トーラスであり，さらに $\mathcal{U}$ の近傍 $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ と $\mathbb{R}^{n-q}$ の原点近傍 V，および微分同相写像 $\varphi : V \times \mathbb{T}^q \to \mathcal{N}(\mathcal{U}); (\theta, I) \mapsto x$ が存在して，$\dot{x} = X(x)$ は $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ 上

$$\dot{I} = 0, \quad \dot{\theta} = \omega(I), \quad (I,\theta) \in V \times \mathbb{T}^q, \tag{2}$$

と表せられる．ここで，$\omega(I) = (\omega_1(I),...,\omega_q(I))$ は I についての C^∞ 級ベクトル値関数である．

定理 2 における変数 (θ, I) を**作用各変数**という．このとき，式 (2) は I_0, θ_0 を定数として

$$(I(t),\theta(t)) = (I_0, \omega(I_0)t + \theta_0)$$

のように解け，軌道はトーラス上の線形フローとなることがわかる．よって，可積分な系のダイナミクスはトーラス上の線形な流れと同一視でき，この意味で軌道は単純な振る舞いをしていると言える．よく知られているように，トーラス上の線形な軌道は，ω が非共鳴なとき，つまり，どの ω_i も

有理比で表せられないとき，q 次元トーラスを稠密に埋め尽くし，いくつかの周波数が有理比で表せられるときには，一般に $k(<q)$ 次元トーラスを稠密に埋め尽くす．また，$\omega_1,\ldots,\omega_q$ が有理比で書けるときには，軌道は周期軌道となる．

2.4 可積分判定の歴史

可積分判定の歴史は Poincaré まで遡る．Poincaré は制限三体問題と呼ばれる，可積分系を摂動した方程式が，一般には（あるクラスで）非可積分であることを示した [1]．これによって常微分方程式に対しては，解を陽に求めることは不可能であると知られるようになったが，コワレフスカヤによるコマの方程式の解けるパラメータの発見や，決定論から従う複雑な挙動であるカオスと非可積分性との関連において，ようやく「解けないこと」の重要性が少しずつ認識されるように至った．殆どの方程式に対し可積分性は期待できないが，与えられた系の可積分性の判定は現在でも難しい問題である（強力な手法として Ziglin 解析や Morales-Ramis 理論などが知られている）．また，Poincaré が与えた，近可積分系に対する可積分性判定条件は殆どの場合チェックすることができず，可積分系の摂動系でさえ可積分判定は難しい．可積分系の摂動系は**近可積分系**と呼ばれ，様々な研究がなされているものの，可積分判定に関する結果は少ない．本稿では，対象とする方程式を近可積分系に限って，新たな可積分判定条件を与える．

3 主結果

以下，扱う関数やベクトル場はすべて解析的と仮定する．パラメータ ε に依存するベクトル場 X_ε が $X_\varepsilon = X^0 + \varepsilon X^1 + O(\varepsilon^2)$ と与えられているものとし，ベクトル場 X^0 が摂動を受ける形の n 次元力学系を考える：

$$\dot{x} = X_\varepsilon(x). \tag{3}$$

$\varepsilon = 0$ のとき式 (3) に対して以下を仮定する：

(A1) ベクトル場 $Y_1,...,Y_q$ (ただし，$Y_1 = X^0$) と第一積分 $F_1,...,F_{n-q}$ により $(q, n-q)$-解析的可積分であり，ある $c \in \mathbb{R}^{n-q}$ に対して $F^{-1}(c)$ は正則で，連結かつコンパクトであり，$Y_1,...,Y_q$ は $F^{-1}(c)$ の近傍で線型独立であって，式 (3) は $F^{-1}(c)$ の近傍で式 (2) の形に変換される．

(A2) $r \in \mathbb{Z}^q$ に対し $r \cdot \omega(I) \equiv 0$ ならば $r = 0$ となる．

(A3) $C^\omega(U)$ の**鍵集合**，すなわち，

$$\forall f, g \in C^\omega(U), f|_{D_\mathrm{R}} = g|_{D_\mathrm{R}} \Rightarrow f = g$$

を満たす集合 $D_\mathrm{R} \subset U$ が存在し，次が成り立つ．

$$\dim_{\mathbb{Q}}\langle \omega_1(I),...,\omega_q(I)\rangle = 1, \quad I \in D_\mathrm{R}$$

仮定 (A3) より $I \in D_\mathrm{R}$ に対し周期 T^I の周期軌道の族 $\{\gamma^I_\tau(t)\}_{\tau\in\mathbb{T}^q}$ が存在する．ベクトル値関数 $\mathscr{I} : \mathbb{T}^q \to \mathbb{R}^{n-q}$ を次式で定める：

$$\mathscr{I}^I(\tau) := \int_0^{T^I} dF(X^1)_{\gamma^I_\tau(t)} dt. \tag{4}$$

定理 3. (A1) から (A3) を仮定する．すべての $I \in D_{\mathrm{R}}$ に対し $\mathscr{I}^I(\tau)$ が零関数でないならば，$\varepsilon = 0$ の近傍において X_ε は $F^{-1}(c)$ の近傍で ε にも解析的に依存する $n-q$ 個の解析的第一積分をもたない．

(A1)-(A3) に加えて次を仮定する：

(A4) ある $I^* \in U$ において

$$\operatorname{rank} \frac{\partial \omega}{\partial I}(I^*) = n - q.$$

定理 4. (A1) から (A4) を仮定する．すべての $I \in D_{\mathrm{R}}$ に対し $\mathscr{I}^I(\tau)$ が定数関数でないならば，$\varepsilon = 0$ の近傍において X_ε は $F^{-1}(c)$ の近傍で第一積分や可換なベクトル場が ε にも解析的に依存した解析的可積分とはならない．

注意 6. 式 (2) に解析的な摂動を加えた系

$$\dot{I} = \varepsilon h(I, \theta; \varepsilon), \quad \dot{\theta} = \omega(I) + g(I, \theta; \varepsilon)$$

を考える．ここで，h, g は解析関数である．定理 3 を適用すると，$\hat{h}_r(I)$ を $h(\theta, I, 0)$ のフーリエ係数として

$$\mathscr{P} := \bigcup_{r \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\}} \{I \in U; r \cdot \omega(I) = 0, \hat{h}_r(I) \neq 0\}$$

が $C^\omega(U)$ の鍵集合となるならば，定理 4 の結論が成り立つ．これは Poincaré [1] の 近可積分系の非可積分定理の一般化に対応する．

4 周期外力を受ける 1 自由度系

周期外力を受ける 1 自由度系を考える：

$$\dot{x} = J \nabla H(x) + \varepsilon u(x, \nu t), \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{5}$$

ここで，$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ および $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ は解析的であり，J はシンプレクティック行列

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．$\varepsilon = 0$ のとき式 (5) に対して次を仮定する．

(M1) ある $\alpha_1 < \alpha_2$ に対し，$\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ について定数ではない周期 T^α の周期軌道の 1 パラメータ族 $x^\alpha(t)$ が存在する．

(M2) $x^\alpha(t)$ は $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ に関しても解析的である．

$\alpha = \alpha^{l/m}$ において共鳴条件 $2\pi/T^\alpha = m\nu/l$ $(l, m \in \mathbb{N}$ は互いに素$)$ が成立するものとし，**分数調波メルニコフ関数**を

$$M^{l/m}(\tau) := \int_0^{2\pi l/\nu} \nabla H(x^\alpha(t)) \cdot u(x^\alpha(t), \nu t + \tau) dt$$

により定める．定理 4 より次を得る．

定理 5. $C^\omega(\mathbb{R})$ の鍵集合 $D \subset \{\alpha^{l/m} \mid l, m \in \mathbb{N}\}$ が存在し，任意の $\alpha^{l/m} \in D$ に対して分数調波メルニコフ関数 $M^{l/m}(\tau)$ が定数関数でなければ，$\varepsilon = 0$ の近傍で式 (5) は定理 4 の意味で非可積分である．

さらに，$\varepsilon = 0$ のとき式 (5) に対して次を仮定する．

(M3) ホモクリニック軌道 $x^{\mathrm{h}}(t)$ を有する双曲的鞍点 p が存在し，

$$\lim_{\alpha \to \alpha_2} \sup_{t \in \mathbb{R}} d(x^\alpha(t), \Gamma) = 0$$

が成り立つ．ここで，$\Gamma = \{x^{\mathrm{h}}(t) \mid t \in \mathbb{R}\} \cup \{p\}$，$d(x, \Gamma) = \inf_{y \in \Gamma} |x - y|$ である．

ホモクリニック軌道に対するメルニコフ関数を

$$M(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} \nabla H(x^{\mathrm{h}}(t)) \cdot u(x^{\mathrm{h}}(t), \nu t + \tau) dt$$

により定める．$M(\tau)$ が単純零点を持てば，式 (5) は点 p 近傍の双曲型周期軌道に対する横断的ホモクリニック軌道を有し，解析的な第一積分を持たないことが知られている [4]．定理 5 において $l \to \infty$ の極限を考えることにより次を得る．

定理 6. メルニコフ関数 $M(\tau)$ が定数関数でなければ，$\varepsilon = 0$ の近傍で式 (5) は定理 4 の意味で非可積分である．

特に，$M(\tau)$ が単純零点をもたず，横断的ホモクリニック軌道が存在しない場合でも，式 (5) は非可積分となる．

定理 6 より，$\beta, \omega, \delta > 0$ を定数として，強制 Duffing 方程式

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_1^3 + \varepsilon(\beta \cos \nu t - \delta x_2)$$

は，非摂動系のホモクリニック軌道の近傍で，定理 4 の意味で非可積分であることが示される．

参考文献

[1] H. Poincaré, *New Methods of Celestial Mechanics*, Vol. 1-3, American Institute of Physics, 1993 (original 1892).

[2] O.I. Bogoyavlenski, Extended integrability and bi-hamiltonian systems, *Comm. Math. Phys.*, 196 (1998), 19–51.

[3] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, 2nd ed., Springer, New York, 1989.

[4] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, New York, 1983.

CLASSIFICATION OF COMBINATORIAL WEAVING DIAGRAMS

SONIA MAHMOUDI, DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, TOHOKU UNIVERSITY

ABSTRACT. Weavings are historically well-known structures in materials science, and have more recently become a very active research topic in mathematics. We will first attempt to present a formal mathematical definition of a weave, as a three-dimensional entangled network embedded into the thickened Euclidean plane. Next, we will also introduce a new construction method to build and classify a class of weaving diagrams - which are projections of weaves as in knot theory – using topological and combinatorial arguments.

1. WEAVES AND THEIR DIAGRAMS

A weave W is defined as a three-dimensional object embedded in the topological ambient space $\mathbb{X}^3 = \mathbb{E}^2 \times \mathrm{I}$, with $\mathrm{I} = [-1,1]$. Here, we will only consider a class of *two-periodic* Euclidean weaves and we will study their two-dimensional projections by a map $\pi : \mathbb{X}^3 \to \mathbb{E}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x,y,0)$. Such a class is particular in that the weaves are constructed from straight lines which entangle in a cyclic pattern of overcrossings and undercrossings. We usually call such a structure a doubly periodic untwisted (p,q)-weave, but we will simply use the term weave from now on for simpler notation.

Definition 1.1. *A weave* W *is an embedding in* $\mathbb{X}^3$ *of infinitely many threads belonging to* $N \geq 2$ *disjoint sets of threads* $T_1, \ldots, T_N$*, entangled to each other with respect to a set of crossing sequences* $\{C_{i,j} \mid i,j \in (1,...,N), i \neq j\}$ *such that,*

- *a thread* t *is a set homeomorphic to* $\mathbb{R}$*, embedded in* $\mathbb{X}^3$ *as a geodesic ;*
- *two threads belong to different sets of threads if their respective projections onto* $\mathbb{E}^2$ *by* π *intersect only once ;*
- *a crossing* c *is an intersection between the projections of two distinct threads onto* $\mathbb{E}^2$ *by* π *with an over or under information ;*
- *a crossing sequence* $C_{i,j} = (p,q)$ *indicates that for any thread of the set* T_i*, there are cyclically* p *crossings in which this thread is over the other strands of* T_j*, followed by* q *crossings in which it is under.*

Then, a weave W in a general position on $\mathbb{X}^3$ can be projected onto the Euclidean plane by the map π, as in knot theory [1]. This projection leads to a planar quadrivalent connected graph W_0, meaning that all the vertices have a degree four, and like in [2]., in the particular case of a doubly periodic structure, any unit cell can be seen as a link in the thickened torus as described in Figure 1.

Definition 1.2. *The projection* W_0 *of a weave* W *onto* $\mathbb{X}^2$ *by the map* $\pi : \mathbb{X}^3 \to \mathbb{X}^2$*,* $(x,y,z) \mapsto (x,y,0)$ *is called a regular projection, and once an over or under information is given at each vertex of* W_0*, we say that this structure is an infinite weaving diagram* D_{W_0}*. Moreover, if* D_{W_0} *is doubly periodic, then any unit cell contains non-trivial simple closed curve components and is called a torus diagram.*

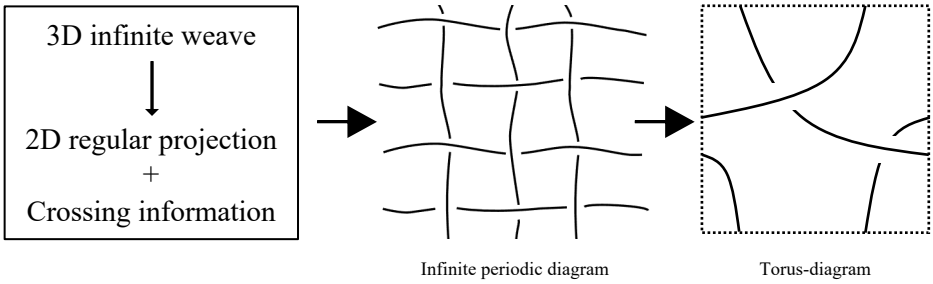


FIGURE 1. Weaving Diagram

2. EQUIVALENCE CLASSES OF WEAVES

Weaves are mainly characterized by a number N of disjoint sets of threads and a set of crossing sequences Σ, and as seen above, it is convenient to study their planar diagrams. Given a graph Γ satisfying the definition of a regular projection and a set Σ, it is possible to build a weaving diagram by assigning an over or under information to each vertex. However, this attribution is not unique as illustrated by some examples of existing woven materials showing that the weaving diagrams of two distinct weaves can be reconstruct from the same pair (Γ, Σ). The simplest cases are the diagrams related to the *basket weave (2,2)* and the *twill weave (2,2)*, showed in the Figure 2 below. Nevertheless, these two woven materials have distinct physical properties, such as strength or stiffness, and it is important to characterize these differences from a mathematical point of view.

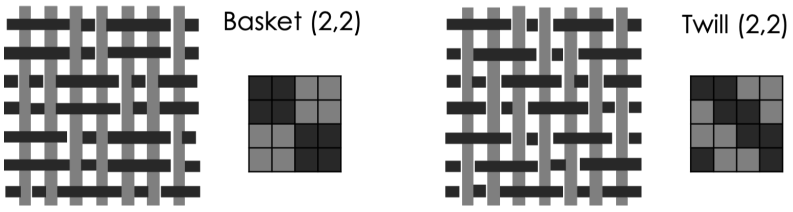


FIGURE 2. Twill and Basket $(2,2)$ square weaving diagram with their associate design.

This observation motivated the study of equivalence classes of weaves and the development of a new parameter Π, such that any weaving diagram constructed from the triple (Γ, Σ, Π) would be *unique*, up to equivalence. The notion of equivalence has been defined by S. Grishanov et al. by an extension of the classic *Reidemeister Theorem* for the case of doubly periodic weaves that can be studied from their torus diagrams [2].

Theorem 2.1. ***(Reidemeister Theorem for Weaves*** [2]***)***
Two weaves in $\mathbb{X}^3$ are ambient isotopic if and only if their torus diagrams can be obtained from each other by a sequence of Reidemeister moves Ω_1, Ω_2, and Ω_3, isotopies on the surface of the torus, and torus-twists.

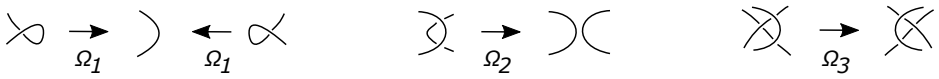


FIGURE 3. Reidemeister moves

To create our new parameter, we were inspired by the concept of *design* used for the classification of weaves in the textile industry. A design characterizes on a square grid the configuration of the crossings on a torus diagram according to the crossing sequence, for the restricted case of $N = 2$. More information on designs from a mathematical viewpoint can be found in the work of Grünbaum and Shephard in [3], and an example is given in Figure 3 for the basket and twill weaves mentioned above. To read them, consider that the rows represent the horizontal strands on a unit cell, the columns the vertical strands, and each square represents a crossing. Here, a gray square corresponds to a crossing where the horizontal strand is under the vertical strand, and conversely for a black square. Notice in Figure 2 that the gray and black squares have a *diagonal* organization for the case of twill weave, while they have a *bloc* organization for the case of basket weave. This illustrates the fact that there are different possibilities of assigning the crossing information to a same graph Γ, given a (set of) crossing sequence(s), and this justifies the different physical properties of the corresponding woven materials.

Our purpose is to generalize this concept to weaving diagrams with $N \geq 2$ sets of threads, so that it can describe the organization of crossings for each pair of sets of threads on a unit cell. Our approach consist in creating a set of *crossing matrices* associated with a flat torus diagram which would make it possible to distinguish the structures characterized by the same pair (Γ, Σ), and thus become a *weaving invariant* for the infinite diagram D_{W_0}. Our concept of crossing matrices is directly related to the crossing sequences of a weaving diagram D_{W_0}, which means that each matrix is associated with a pair of distinct sets of threads of the diagrams. The elements of a crossing matrix are the symbols $+1$ representing an overcrossing, or -1 representing an undercrossing. Each matrix encodes the crossing configuration between two sets of threads, from the point of view of one of them. This means that at an arbitrary crossing between two threads $t_1 \in T_1$ and $t_2 \in T_1$, with T_1 and T_2 two disjoint sets of threads, t_1 is over (or under) t_2, if we analyze the position of the threads of T_1 with respect to the threads of T_2, or conversely.

Definition 2.2. *Let $C_{i,j} = (p,q)$ be the crossing sequence of the sets T_i and T_j of a weaving diagram D_{W_0} with $N \geq 2$ sets of threads, $i, j \in \{1, \cdots, N\}$. Let $M_{i,j}$ be a $(m \text{ x } m)$ matrix consisting of symbols $+1$ and -1, where $m = p+q$ is called the module of $M_{i,j}$. Then, $M_{i,j}$ is called the crossing matrix of D_{W_0} associated with $C_{i,j}$, if each row and each column of $M_{i,j}$ simultaneously contains p symbol $+1$ and q symbols -1, considering cyclic and countercyclical permutations of the rows and columns of the matrix.*

This concept of crossing matrix makes it possible to distinguish two weaving diagrams characterized by the same pair (Γ, Σ), by assigning them a fixed sequence of crossing matrices $\Pi = \{M_{i,j} \setminus i, j \in \{1, \cdots, N\}\}$, and such that the sets of threads are indexed on W_0 in order to compare the strands having the same direction on the two diagrams. So now, it is possible to characterize the notion of equivalence classes for weaving diagrams of $\mathbb{E}^2$, using the triple (Γ, Σ, Π). Recall that the Reidemeister Theorem for Weaves defines the notion of equivalent weaves through the equivalence of their corresponding torus diagrams, so we will show the invariance by the Reidemeister moves and the torus' twists.

Theorem 2.3. *Let D_{W_1} and D_{W_2} be two torus-diagrams with $N \geq 2$ sets of threads, indexed such that their regular projections are identical, and with the same set of crossing sequences. Then, they are equivalent if and only if their crossing-matrices are pairwise equivalent, meaning that if at least one of the two conditions is satisfied:*

- *all the matrices of D_{W_2} are equivalent to the respective matrices of D_{W_1}, up to a same cyclic or countercyclical permutations of all the rows and/or columns;*
- *all the matrices of D_{W_2} are equivalent to the respective matrices of D_{W_1}, up to a same clockwise of counterclockwise rotation of $\frac{\pi}{4}$ or $\frac{\pi}{2}$, together with an inversion of all its symbols.*

One of the other great interests of these crossing matrices for the study of equivalence classes of weaving diagrams is that by defining any arbitrary weaving diagram by a triple (Σ', Σ, Π), we can find non equivalent structures with the same pair (Σ', Σ) just by using non-equivalent crossing matrices. This is very useful for the construction an classification of our diagrams.

3. Acknoledgement

This is a joint work with my supervisor Prof. Motoko Kotani and Dr. Mizuki Fukuda. This work is supported by a Research Fellowship from JST CREST Grant Number JPMJCR17J4.

References

[1] C. Adams. The knot book: an elementary introduction to the mathematical theory of knots. *American Mathematical Society, Providence, R.I* (2004).

[2] S. Grishanov, V. Meshkov and A. Omelchenko. Kauffman-type polynomial invariants for doubly periodic structures. *J. Knot Theory Its Ramif.* **16** (2007),779–788.

[3] B. Grünbaum and G.C. Shephard. Satins and Twills: An Introduction to the Geometry of Fabrics *Mathematics Magazine* **53** (1980), 139–161.

相空間のコンパクト化に基づく空間 1 次元退化放物型方程式における非負の進行波解の分類

明治大学大学院理工学研究科数学専攻
市田 優 (Yu ICHIDA)

概要

本レポートでは，相空間のコンパクト化や力学系理論により，多くのモデルを由来とする空間 1 次元退化放物型方程式におけるすべての非負の進行波解を分類し，それぞれの解の存在，形状に関する情報や漸近挙動について得られた結果を報告する．この問題は，我々の先行研究 [7, 8] でも考えられている．しかし，そこでは解析手法の都合から方程式に含まれるあるパラメータに自然数という仮定を課していた．そこで本研究ではその仮定を外すためにある変換を導入して得られる別の空間 1 次元退化放物型方程式を考え，得られる結果に対して変換を辿ることで元の問題に還元している．このレポートでは，その詳細と手法を説明しどのようなアイデアで先行研究で残された課題を克服するかという点について報告する．

1 はじめに

1.1 研究の背景：空間 1 次元退化放物型方程式

化学反応や惑星の運動のように，時間とともに変化する現象は数理科学の様々なところに現れる．これらを数学の立場から考える上で力学系理論は大変有用である．講演者は特に微分方程式の定性理論を扱う連続力学系を軸にして，現象由来の微分方程式の解の特徴や性質を調べることに興味を持っている．

ここでは，退化性（簡単に言えば最高階の消滅）に由来する特異性を持つような方程式として，次のような空間 1 次元退化放物型方程式：

$$U_t = U^p(U_{xx} + \mu U) - \delta U, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

を考える．ただし， $1 < p \in \mathbb{R}$，$\mu > 0$，$\delta = 0$ or 1 とする．$\delta = 0$ におけるこの方程式 (1.1) は多くの現象を背景に持つ方程式である．[3, 7, 8, 13] によると，例えば，燃焼熱，天文物理学での太陽フレア，平面曲線の時間発展問題，2 つの壁の間に閉じ込められたプラズマ内の力の働かない磁場の抵抗の拡散のモデルなどが挙げられる．さらに，数学的には $\delta = 0$ でのこの方程式の爆発解に関する多くの研究がなされており，特にどのように爆発するかという問いの答えにあたる爆発レートの導出に現在も興味が持たれている（例えば，[3, 13] 参照）．

Poon [13] は x を $x \in (-L, L)$ に制限し，$p \geq 2$ として，Dirichlet 境界条件もしくは周期境界条件のいずれかのもとで $\delta = 0$ での (1.1) の爆発レートの下界と上界を与えている．特に，$\delta = 1$ での (1.1) は $\delta = 0$ での (1.1) の解から変換することにより得られ，この方程式の進行波解は下界の導出

において重要な役割を果たす．

1.2 先行研究 [7, 8] のレビューと本研究の動機

[13] によって調べられた進行波解についてより詳細に調べる（つまり進行波解の分類を試みる）ことによって，より精密で洗練された (1.1) の爆発レートの導出への貢献，さらには (1.1) にどのような進行波解が存在し，そしてどのような性質を持つのかという数学的な興味から，[7, 8] では $1 < p \in \mathbb{N}$ に制限し，$\mu = 1$ として (1.1) の $\delta = 0$ と $\delta = 1$ の両方における進行波解の分類を与えている．より詳細に言えば，[7] は，力学系理論とポアンカレ・コンパクト化（次節で紹介）と特異点膨らまし（blow-up，詳細は例えば [1, 6] を参照せよ）と呼ばれるベクトル場の特異点解消に関する幾何学的手法を応用することにより，（弱い意味も含めた）進行波解の分類（p が偶数の場合にのみ存在，形状，漸近挙動）に関する結果を示した．ここで進行波解の分類というのは，これらの手法を用いることで，進行波座標を導入して得られる 2 次元常微分方程式系の無限遠方を含めたすべてのダイナミクスを明らかにしているという事実に基づいている．つまり，進行波解の分類をこの ODE 系の接続軌道の分類の問題に帰着させている．加えて，[8] では Lambert W 関数の性質などを用いることにより，[7] で得られた漸近挙動のより精密なものを導出している．

[7, 8] では，次のような問題が主な課題として残されている．

- [7] では，p が奇数のときに，進行波座標から導かれる ODE 系の特異点の近傍でのダイナミクスを決定することができない問題に直面する．より詳細に言えば，この考察のもとで 2 次元 ODE 系の非双曲型平衡点に対して特異点膨らましを行うことで特異性を解消したとしても，再度の特異点膨らまし変換が適用できないような新たな特異点が出現する問題に直面する．したがって，この場合における接続軌道の存在を完全に示すことができないため，進行波解に対応する接続軌道の存在を仮定することで結論を与えた．
- そもそも一般的な $p \in \mathbb{R}$ での議論がなされていない点．これは，特異点膨らましを用いる上で，その古典的な結果（[1, 4, 6]）から $p \in \mathbb{N}$ を仮定する必要があるためである．これらの結果を拡張し，一般の場合でも適用可能なものにすることは現状では困難であると認識している．もし $p \in \mathbb{N}$ を仮定することなく接続軌道の存在が $p \in \mathbb{R}$ のときに示されれば，この問題は解決される．

1.3 問題設定

上記で述べた課題を克服するために，(1.1) を扱うのではなく，$1 < p \in \mathbb{R}$ として変換 $u = U^p$ を施し，$\gamma = (p-1)/p$，$k = \mu p$ とおくことで得られる

$$u_t = uu_{xx} - \gamma(u_x)^2 + ku^2 - \delta pu, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{1.2}$$

を扱う．ただし， $0 < \gamma < 1$，$k > 0$，$1 < p \in \mathbb{R}$，$\delta = 0$ or 1 である．以下，(1.2) の非負値な進行波解に制限して考える．

この変換を導入することで，(1.1) では p が次数に現れていたのに対して，(1.2) では p が係数（例えば，γ に含まれている）に現れるように変換されていることを強調しておく．この変換の導入こそ

が以下の解析において，$p \in \mathbb{N}$ であることを要求することなく一般の $1 < p \in \mathbb{R}$ で非負進行波解の分類を与えることのできる重要な鍵である．この変換は [2] でも使われていることを指摘するが，進行波解の分類という意味で採用しているわけではないということを強調しておく．

さて，問題設定をまとめると，[7, 8] で解析手法の仮定から要請されていた $1 < p \in \mathbb{N}$ という仮定を外すために，(1.1) をそのまま調べるのではなく，[2] でも採用されていた上記の変換から導出される (1.2) の非負の進行波解の構造を $1 < p \in \mathbb{N}$ という仮定をすることなく調べる．そして得られる結果から，この変換を辿る（すなわち，$U = u^{1/p}$）ことで $1 < p \in \mathbb{R}$ での (1.1) の非負の進行波解を分類できるかという問題を考える．

そこで，次のような進行波座標を導入する：

$$\phi(\xi) = u(t, x), \quad \xi = x - ct, \quad 0 < c \in \mathbb{R}.$$

ここで，非負の進行波解を考えているので $\phi \geq 0$ を考えていることに注意せよ．すると，(1.2) から $\phi(\xi)$ の満たす方程式は

$$\phi\phi'' = -c\phi' + \gamma(\phi')^2 - k\phi^2 + \delta p\phi, \quad \left({}' = \frac{d}{d\xi}, \quad {}'' = \frac{d^2}{d\xi^2} \right)$$

であり，同値な方程式として次を得る：

$$\begin{cases} \phi' = \psi, \\ \psi' = -c\phi^{-1}\psi + \gamma\phi^{-1}\psi^2 - k\phi + \delta p, \end{cases} \qquad \left({}' = \frac{d}{d\xi} \right). \tag{1.3}$$

(1.3) は ϕ^{-1} を持つので，$\phi = 0$ で特異性を持つことがわかり，この ODE 系のダイナミクスを調べることは容易ではない．しかしながら，[7, 11, 12] に示すように，ポアンカレ・コンパクト化（次節で簡単に紹介）や古典的な力学系理論を組み合わせた枠組みで (1.3) の無限遠方までのダイナミクスを調べることができる．ここで，[7] の場合とは異なり，この枠組みでは特異点膨らましが含まれていないことに注意せよ．

本研究（[9]）の大まかな概要と展開を述べる．

(I) 上記で述べた手法を用いることで，まず，(1.3) で生成される無限遠方を含めた相空間 $\mathbb{R}^2 \cup \{(\phi, \psi) \mid \|(\phi, \psi)\| = \infty\}$（以下，ポアンカレ・ディスク）上の $\phi \geq 0$ でのすべてのダイナミクスを $1 < p \in \mathbb{N}$ を仮定することなく調べる．

(II) 次に，この結果から，ポアンカレ・ディスク上でのそれぞれの軌道に対応する (1.2) の非負の進行波解を分類することができる．すなわち，それぞれの進行波解の存在が明らかになり，それぞれの形状に関する情報や漸近挙動を得ることができる．

(III) 最後に，$u = U^p$ の変換を辿ることにより，[7, 8] で得られた (1.1) の非負の進行波解の分類を $1 < p \in \mathbb{R}$ の場合に拡張することができる．

紙面の都合から，主結果の詳細を報告することはできないが，結論から述べると上記のようなステップ (I) から (III) により [7, 8] で得られた (1.1) の非負の進行波解の分類を (1.2) を経由し，そこで得られた結果を還元することで $1 < p \in \mathbb{R}$ の場合に拡張することができた（詳細は [9]）．

本レポートの残りに構成は次の通りである．次節では，本研究の中心的な役割を果たすポアンカ

レ・コンパクト化についてその概略を説明する．そして，3 章では，この手法を使うことでどのようなことが得られるかを簡単に述べ，得られる主結果の一部を紹介する．詳細は講演時に述べる．

2 ポアンカレ・コンパクト化

本節では一般的な形式で述べる．そこで次の常微分方程式：

$$\begin{cases} \dot{\phi} = P(\phi, \psi) \\ \dot{\psi} = Q(\phi, \psi) \end{cases}$$

を考える．ここで，$\dot{}$ は d/dt とし，P と Q は変数 ϕ と ψ による任意の次数の多項式である．

まず，$\mathbb{R}^3$ 内の $\mathbb{R}^2$ 上の平面 $y = (y_1, y_2, y_3) = (\phi, \psi, 1)$ を考える．単位球面として

$$\mathbb{S}^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 \,|\, y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\}$$

を定め，これを**ポアンカレ球面**と呼ぶ．この球面を次の 3 つの部分に分割する：

$$H_+ = \{y \in \mathbb{S}^2 \,|\, y_3 > 0\}, \quad H_- = \{y \in \mathbb{S}^2 \,|\, y_3 < 0\}, \quad \mathbb{S}^1 = \{y \in \mathbb{S}^2 \,|\, y_3 = 0\}.$$

そこで，平面 $\mathbb{R}^2$ から単位球面 (ポアンカレ球面) $\mathbb{S}^2$ への射影として，

$$f^+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2, \quad f^- : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^2$$

を考える．ただし，

$$f^{\pm}(\phi, \psi) := \pm \left(\frac{\phi}{\Delta(\phi, \psi)}, \frac{\psi}{\Delta(\phi, \psi)}, \frac{1}{\Delta(\phi, \psi)} \right)$$

とし，$\Delta(\phi, \psi) := \sqrt{\phi^2 + \psi^2 + 1}$ と定義する．

次に，$\mathbb{S}^2$ 上の 6 つの局所座標系 (local charts) として

$$U_k = \{y \in \mathbb{S}^2 \,|\, y_k > 0\}, \quad V_k = \{y \in \mathbb{S}^2 \,|\, y_k < 0\}$$

を定め，$k = 1, 2, 3$ とする．また，局所的な射影 (local projection) を

$$g_k^+ : U_k \to \mathbb{R}^2, \quad g_k^- : V_k \to \mathbb{R}^2$$

とおき，$m < n$，$m, n \neq k$ について

$$g_k^+(y_1, y_2, y_3) = -g_k^-(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{y_m}{y_k}, \frac{y_n}{y_k} \right)$$

と定める．局所座標 U_k と V_k からそれぞれ射影された平面上のベクトル場として $\overline{U}_k = \{y \in \mathbb{R}^3 \,|\, y_k = 1\}$ と $\overline{V}_k = \{y \in \mathbb{R}^3 \,|\, y_k = -1\}$ が得られる．そこで，任意の k に対して $g_k^{\pm}(y)$ の値として (x, λ) と表すとする．

例えば，$k = 2$ として局所座標 $\overline{U}_2$ 平面への座標変換の式は

$$(x, \lambda) := (g_2^+ \circ f^+)(\phi, \psi) = \left(\frac{\phi}{\psi}, \frac{1}{\psi} \right)$$

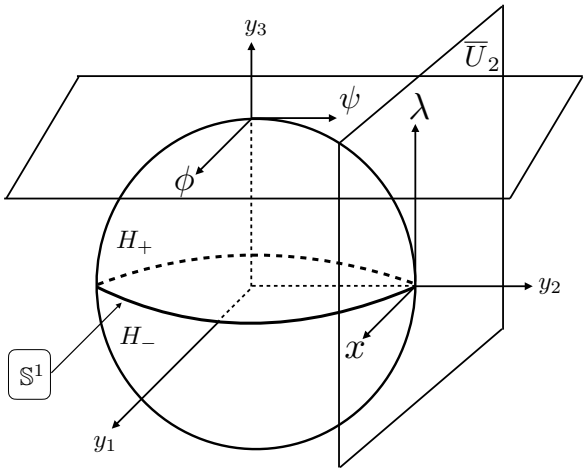


図 2.1　ポアンカレ球面と $\overline{U_2}$ 平面の位置関係

となる．従って，座標変換 $\phi = x/\lambda$ と $\psi = 1/\lambda$ により，局所座標 $\overline{U}_2$ 上のダイナミクスを得る．ポアンカレ球面や ϕ 平面と $\overline{U}_2$ 平面の位置関係については次の図の通りである．

以下，ポアンカレ・コンパクト化は上記の記号を用いる．また，$H_+ \cup \mathbb{S}^2$ 上（もしくはそれを上からみた $\mathbb{R}^2 \cup \{(\phi,\psi) \mid \|(\phi,\psi)\| = \infty\}$ 上）のダイナミクスを考察することが重要であり，これを**ポアンカレ・ディスク (Poincaré disk)** と呼ぶ．ポアンカレ・コンパクト化，及び擬ポアンカレコンパクト化の詳細はそれぞれ [6], [11] を参照されたし．

3　Dynamics on the Poincaré disk of (1.3)

本節ではまず，(1.3) で生成される無限遠方を含めた相空間（ポアンカレ・ディスク）上の $\phi \geq 0$ でのすべてのダイナミクスを調べる．[7, 8] での解析のアイデアと基本的には同じであるが，後に登場する平衡点もしくは無限遠方での平衡点に対して特異点膨らましを適用することなく，その周りのダイナミクスを調べることができる点で異なることに注意せよ．すなわち，以下の議論は $1 < p \in \mathbb{N}$ という仮定を課すことなく，$1 < p \in \mathbb{R}$ で議論されていることに注意せよ．

3.1　Dynamics near finite equilibria

まず，(1.3) の有限平衡点の周りでのダイナミクスを調べる．$\delta = 1$ の場合は，$\phi > 0$ である範囲において $E_1 : (\phi,\psi) = (\mu^{-1}, 0)$ という平衡点が存在する．この平衡点 E_1 でのヤコビ行列は

$$E_1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k & -c\mu \end{pmatrix}$$

であり，$c > 0$ のときに漸近安定であることがわかる．さらに，この周りでのダイナミクスはこのヤコビ行列の固有値に由来する $D = \mu^2 c^2 - 4k$ の符号によって異なる．

次に，(1.3) の特異性 $\phi = 0$ に対して，次のようなスケール変換により特異性を解消する：

$$ds/d\xi = \phi^{-1}.$$

今，非負の解（すなわち，$\phi \geq 0$）を考えているので，この時間変数の変換は時間の進む方向（軌道の方向）を保つ．この変換に関する数学的な注意などは [10] を参照されたし．すると，次を得る：

$$\begin{cases} \phi' = \phi\psi, \\ \psi' = -c\psi + \gamma\psi^2 - k\phi^2 + \delta p\phi, \end{cases} \qquad \left({}' = \frac{d}{ds} \right). \tag{3.1}$$

平衡点やその安定性について，以下に述べるように $\delta = 0$ と $\delta = 1$ で異なることに注意せよ．

- $\delta = 0$ の場合，(3.1) は次のような平衡点を持つ：

  $$E_0 : (\phi, \psi) = (0, 0), \quad E_2 : (\phi, \psi) = \left(0, c\gamma^{-1}\right), \quad 0 < \gamma < 1.$$

  これらの平衡点でのヤコビ行列は

  $$E_0 : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}, \quad E_2 : \begin{pmatrix} c\gamma^{-1} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

  である．E_2 は source である．一方，E_0 の周りでのダイナミクスは中心多様体定理（例えば，[5] を参照）により調べることができる．実際，中心多様体の近似は

  $$\{(\phi, \psi) \mid \psi(s) = -kc^{-1}\phi^2 + O(\phi^4)\}$$

  によって与えられ，その上でのダイナミクスは次のような方程式のダイナミクスと位相同値である：

  $$\phi'(s) = -kc^{-1}\phi^3 + O(\phi^5).$$

- $\delta = 1$ の場合，(3.1) は次のような平衡点を持つ：

  $$E_0 : (\phi, \psi) = (0, 0), \quad E_1 : (\phi, \psi) = (\mu^{-1}, 0), \quad E_2 : (\phi, \psi) = (0, c\gamma^{-1}), \quad 0 < \gamma < 1.$$

  E_1 については上記で述べた通りである．E_0 と E_2 におけるヤコビ行列は次である：

  $$E_0 : \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & -c \end{pmatrix}, \quad E_2 : \begin{pmatrix} c\gamma^{-1} & 0 \\ p & c \end{pmatrix}.$$

  E_2 は $\delta = 0$ の場合と同様に source であるが，この周りでのダイナミクスは $\delta = 0$ の場合と異なることに注意せよ．一方，E_0 の周りのダイナミクスは $\delta = 0$ の場合と異なり，この行列を標準形に変換後，中心多様体定理を適用することにより調べられる．実際，中心多様体の近似は

  $$\left\{(\phi, \psi) \mid \psi(s) = \frac{p}{c}\phi - \frac{p}{c^3}(\mu c^2 + 1)\phi^2 + O(\phi^3)\right\}$$

  によって与えられ，その上でのダイナミクスは次の方程式のダイナミクスと位相同値である：

  $$\phi'(s) = \frac{p}{c}\phi^2 - \frac{p}{c^3}(\mu c^2 + 1)\phi^3 + O(\phi^4).$$

ここまでの議論は $p \in 2\mathbb{N}$，$\mu = 1$ とすることで [7] と同じである．本研究では $u = U^p$ という変換を導入し，p が次数に出現しないように工夫した．そして非負の解に制限して (3.1) の変換を導入したことにより，[7] で p が奇数に場合に生じた特異点膨らましが起きないことがわかった．これにより，$1 < p \in \mathbb{N}$ という仮定を課すことなく $1 < p \in \mathbb{R}$ で議論することができている．

3.2 Dynamics on the local charts

次に，(3.1) の無限遠方までのダイナミクスを調べるために，2 章で紹介したポアンカレ・コンパクト化を適用する．$\phi \geq 0$ を考えているので，局所座標 $\overline{U}_j$ $(j = 1, 2)$ と $\overline{V}_2$ 上のダイナミクスを考えれば十分である．

まずは，局所座標 $\overline{U}_2$ 上でのダイナミクスを調べるために，次のような変換によって座標 (λ, x) を導入する：

$$\phi(s) = x(s)/\lambda(s), \quad \psi(s) = 1/\lambda(s).$$

すると，

$$\begin{cases} \lambda' = c\lambda - \gamma + kx^2 - \delta p\lambda x, \\ x' = p^{-1}\lambda^{-1}x + cx + k\lambda^{-1}x^3 - \delta p x^2 \end{cases}$$

となる．ここで，時間スケール変換として $d\tau/ds = \lambda^{-1}$ を導入することにより，

$$\begin{cases} \lambda_\tau = c\lambda^2 - \gamma\lambda + k\lambda x^2 - \delta p\lambda^2 x, \\ x_\tau = p^{-1}x + c\lambda x + kx^3 - \delta p\lambda x^2 \end{cases} \tag{3.2}$$

を得る．ただし，$\lambda_\tau = d\lambda/d\tau$ と $x_\tau = dx/d\tau$ である．(3.2) は平衡点 $E_3 : (\lambda, x) = (0, 0)$ を持つ．[7] では，対応する無限遠方の平衡点でのヤコビ行列の固有値がすべてゼロとなり，この特異性を解消するために特異点膨らまし変換を導入して調べていた．しかし，[7] と異なり，この無限遠方での平衡点はこのようなことにはならず，saddle であることが結論づけられる．つまり，$p \in \mathbb{N}$ という仮定を課す必要がないことがわかる．

局所座標 $\overline{V}_2$ と $\overline{U}_1$ 上のダイナミクスは上述と同様にして調べることができる．

3.3 Dynamics and connecting orbits on the Poincaré disk

以上の局所座標 $\overline{U}_j$ $(j = 1, 2)$ と $\overline{V}_2$ 上でのダイナミクスを組み合わせることにより，ポアンカレ・ディスク上での (1.3) のダイナミクスを得ることができる．さらに，ディスク内の各接続軌道に着目することによって，対応する (1.2) の進行波解の存在，形状，漸近挙動を分類することができる（図 3.1 を参照せよ）．

これをみると，$\delta = 0$ の場合は $\phi \geq 0$ の範囲では，平衡点 E_0 と E_2 を結ぶ軌道の族しかないことがわかる．言い換えれば，$\delta = 0$ における (1.2) の非負の進行波解はこれらの軌道に対応するタイプのものだけであると結論づけることができる．それはつまり，対応する (1.1) の進行波解も $\delta = 0$ の場合はこのタイプに対応するものしかないということを主張することができることに注意せよ．

Remark 1. 図 *3.1* で，$\delta = 0$ と $\delta = 1$ において平衡点 $E_0 : (\phi, \psi) = (0, 0)$ の取り扱いについて注意する必要がある．これは *[7]* の *Remark 1* と同じであるが再度述べる．ディスク上でパラメータ s を考えるとき，点 E_0 は (3.1) の平衡点である．しかしながら，E_0 はパラメータ ξ について特異性を持つ直線 $\{\phi = 0\}$ 上の点である．特異性 $\{\phi = 0\}$ を除いて，(1.3) と (3.1) によって定義されるベクトル場上で $d\phi/d\psi$ が同じ値をとることがわかる．もしパラメータ s について軌道が平衡点 E_0 から

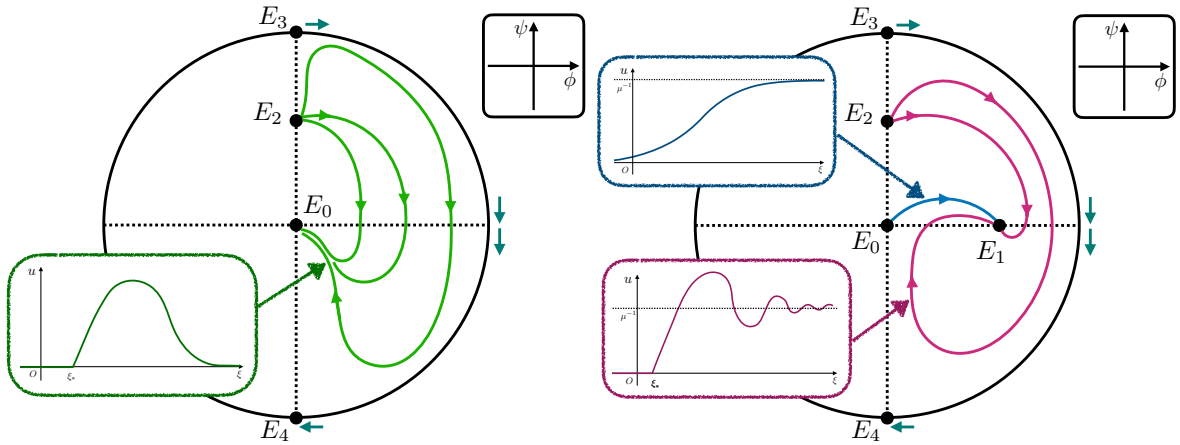


図 3.1　ポアンカレ・ディスク上の接続軌道と対応する (1.2) の進行波解の形状の概略図（左図が $\delta = 0$，右図が $\delta = 1$）．$u(\xi) \to 0$，$u_\xi \to C$ $(\xi \searrow \xi_* + 0)$ となるような点 ξ_* の位置は便宜的．図中の円周上は $\{(\phi, \psi) \mid \|(\phi, \psi)\| = \infty\}$ に相当することに注意せよ．

出発する（入ってくる）ならば，軌道は ξ について平衡点 E_0 から出発する（入ってくる）．これについては E_2 についても同様である．

ポアンカレ・ディスクにおける接続軌道の存在証明，一般の $1 < p \in \mathbb{R}$ での各接続軌道に対応する (1.2) の非負の進行波解の分類（存在，形状，漸近挙動の提示），$u = U^p$ の変換を辿ることで得られる (1.1) の非負の進行波解の分類に関する主結果（[7, 8] の結果の一般化）の詳細は講演時に述べる．

謝辞

本研究は科研費 (課題番号：21J20035) の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Álvarez, M.J., Ferragut, A., Jarque, X.: A survey on the blow up technique, Int. J. Bifurc. Chaos, **21**, 3108–3118 (2011).

[2] Anada, K., Fukuda, I., Tsutsumi, M.: Regional blow-up and decay of solutions to the initial-boundary value problem for $u_t = uu_{xx} - \gamma(u_x)^2 + ku^2$, Funkc. Ekvacioj, Ser. Int., **39**, No. 3, 367–387 (1996).

[3] Anada, K., Ishiwata, T.: Blow-up rates of solutions of initial-boundary value problems for a quasi-linear parabolic equation, J. Differential Equations, **262**, 181–271 (2017).

[4] Brunella, M., Miari, M.: Topological equivalence of a plane vector field with its principal part defined through Newton polyhedra, J. Differential Equations, **85**, 338–366 (1990).

[5] Carr, J.: Applications of Center Manifold Theory, Springer, Berlin (1981).

[6] Dumortier, F., Llibre, J., Artés, C.J.: Qualitative Theory of Planar Differential Systems, Springer (2006).

[7] Ichida, Y., Sakamoto, T. O.: Traveling wave solutions for degenerate nonlinear parabolic equations, J. Elliptic and Parabolic Equations, **6**, 795–832 (2020).

[8] Ichida, Y., Matsue, K., Sakamoto, T.O.: A refined asymptotic behavior of traveling wave solutions for degenerate nonlinear parabolic equations, JSIAM Lett., **12**, 65–68 (2020).

[9] Ichida, Y.: Classification of nonnegative traveling wave solutions for the 1D degenerate parabolic equations, submitted.

[10] Kuehn, C.: Multiple Time Scale Dynamics, Springer (2015).

[11] Matsue, K.: On blow-up solutions of differential equations with Poincaré type compactificaions, SIAM J. Appl. Dyn. Syst., **17**, 2249–2288 (2018).

[12] Matsue, K.: Geometric treatments and a common mechanism in finite-time singularities for autonomous ODEs, J. Differential Equations, **267**, 7313–7368 (2019).

[13] Poon, C.C.: Blowup rate of solutions of a degenerate nonlinear parabolic equation, Discrete Contin. Dyn. System. Ser. B, **24**, 5317–5336 (2019).

消散型波動方程式に対する準周期的時空均質化問題 *

東北大学 大学院理学研究科 数学専攻
岡 大将 (Tomoyuki OKA)

1 序

本小論では, 次の消散型波動方程式に対する**時空均質化問題** (*space-time homogenization problem*) について考察する.

$$(P_\varepsilon) \qquad \begin{cases} \partial_{tt}^2 u_\varepsilon + g_\varepsilon \partial_t u_\varepsilon = \operatorname{div}\left[a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon\right] & \text{in } \Omega \times (0,T), \\ u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_\varepsilon|_{t=0} = v_\varepsilon^0, \quad \partial_t u_\varepsilon|_{t=0} = v_\varepsilon^1. \end{cases}$$

ただし, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ は滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とし, $T > 0$, $\varepsilon > 0$ とする. また, $v_\varepsilon^0 \in H_0^1(\Omega)$, $v_\varepsilon^1 \in L^2(\Omega)$ はそれぞれ

$$v_\varepsilon^0 \to v^0 \text{ weakly in } H_0^1(\Omega), \quad v_\varepsilon^1 \to v^1 \text{ weakly in } L^2(\Omega)$$

を満たすとする. 以下では, $\square = (0,1)^N$, $J = (0,1)$ とし, $a = a(t,y) : (0,T) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{S}^{N\times N}$ を滑らかかつ $\square$-周期的な $N \times N$ 対称行列で一様楕円性条件, すなわち, ある $\lambda > 0$ が存在し, 任意の $\xi \in \mathbb{R}^N$ に対して $\lambda|\xi|^2 \leq a(t,y)\xi \cdot \xi \leq |\xi|^2$ for a.e. $(t,y) \in (0,T) \times \mathbb{R}^N$ を満たすものとし, $a_\varepsilon = a(t, \frac{x}{\varepsilon})$ とする. さらに, $g = g(s) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ を滑らかかつ任意の $s \in J$ に対して

$$g(s+1) = g(s) + C_* \quad \text{for some } C_* \geq 0$$

を満たす準周期関数[*1]とし, ある滑らかな J-周期関数 g_{per} を用いて

$$g(s) = g_{\mathrm{per}}(s) + C_* s$$

と表されるものであり, $g_\varepsilon = g(\frac{t}{\varepsilon^2})$ とする. 本小論では, (弱) 解 u_ε を次のように定義する.

定義 1.1 ((P_ε) の弱解)**.** 関数 $u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ が以下の (i)-(iii) を満たすとき, u_ε を (P_ε) の弱解と呼ぶ.

(i) $u_\varepsilon \in W^{2,2}(0,T;H^{-1}(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$.
(ii) $u_\varepsilon(t) \to v_\varepsilon^0$ strongly in $L^2(\Omega)$ as $t \to 0_+$ かつ $\partial_t u_\varepsilon(t) \to v_\varepsilon^1$ in $H^{-1}(\Omega)$ as $t \to 0_+$.
(iii) 任意の $\phi \in H_0^1(\Omega)$ に対して, 以下が成り立つ.

$$\langle \partial_{tt}^2 u_\varepsilon(t), \phi \rangle_{H_0^1(\Omega)} + \langle g_\varepsilon(t)\partial_t u_\varepsilon(t), \phi \rangle_{H_0^1(\Omega)} + (a_\varepsilon(t)\nabla u_\varepsilon(t), \nabla\phi)_{L^2(\Omega)} = 0$$

for a.e. in $t \in (0,T)$.

* 本研究は科学研究費補助金 (JP20J10143) 及び, 東北大学学際高等研究教育院の助成を受けたものである.
*1 特に, **算術的準周期関数** (*arithmetic quasi-periodic function*) と呼ばれる.

1.1 均質化問題とは

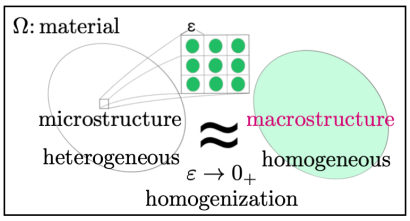


図 1　均質化問題の概念図

均質化問題は, 材料科学関連の分野で考案された均質化法に基づく数学的な問題である. 一般に, 材料は不均質で複雑かつ無数の**微細構造** (*microstructure*) を持ち, 材料特性はこれらに大きく影響されることが知られている. そのため, 全ての微細構造を考慮して解析していくことになるが, 微細構造の数を把握することは一般に困難であり, また, このような直接計算は, 莫大な計算コストを消費するため現実的ではない. そこで, これらの微細構造を適切に粗視化し, ある種の平均量を導出することが有効な解析手法だと考えられる. この粗視化の代表的な手法として均質化法が知られており, ここでは, 図 1 のように考察の対象となる (材料) Ω 内で周期的な微細構造を持つと仮定し, その周期幅 $\varepsilon > 0$ を $\varepsilon \to 0_+$ として考察対象である材料と等価な均質材に置き換える. その際, 均質材について考察することで材料全体の性質を表す**巨視構造** (*macrostructure*) を調べる. このプロセスは, 周期パラメータ $\varepsilon > 0$ に依存した係数を伴う偏微分方程式に対して, $\varepsilon \to 0_+$ としたときの解の収束極限が満たす**均質化方程式** (*homogenized equation*) について考察することに対応し, これを均質化問題と呼ぶ.

1.2 例

本節では, 代表例として知られている次の線形楕円型方程式を考える.

$$(E_\varepsilon) \qquad -\mathrm{div}\,(a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega).$$

ただし, $a = a(y) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N\times N}$ を滑らかで $\square$-周期的な一様楕円性条件を満たす $N \times N$ 行列とし, $a_\varepsilon = a(\frac{x}{\varepsilon})$, $f \in L^2(\Omega)$ とする. また, 係数行列 a_ε が図 1 に現れる微細構造に対応する. 古典的な解析手法として, 漸近展開法 [3] が知られており, ここでは解 u_ε がある $\square$-周期関数 $u_j = u_j(x,\cdot)$, $j \in \mathbb{N}$ を用いて次のように展開できると仮定する.

$$(1) \qquad u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x, \tfrac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 u_2(x, \tfrac{x}{\varepsilon}) + \cdots .$$

このとき, 解の勾配 ∇u_ε は

$$\nabla u_\varepsilon(x) = \nabla u_0(x) + \varepsilon \nabla u_1(x, \tfrac{x}{\varepsilon}) + \underbrace{\nabla_y u_1(x, \tfrac{x}{\varepsilon})}_{\not\to 0 \text{ as } \varepsilon\to 0_+} + \cdots, \quad y = \tfrac{x}{\varepsilon}$$

と表されるため, 各 u_j が有界ならば, $\varepsilon \to 0_+$ として $L^2(\Omega)$ 上で $u_\varepsilon \to u_0$ が期待されるが, u_1 の振動の影響により, $\nabla u_\varepsilon \not\to \nabla u_0$ となることに注意する. また, 係数行列 a_ε は $\varepsilon \to 0_+$ とすることで激しく振動するため, 一様楕円性と周期性から, 次のような平均値への弱収束性しか得られないことにも注意する.

$$a_\varepsilon \to \langle a \rangle_y := \int_\square a(y)\,dy \quad \text{weakly-}* \text{ in } L^\infty(\Omega).$$

従って, 均質化問題では $a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon$ の収束極限を考察する際, 極限 j_{hom} が存在することが得られても

$$(2) \qquad a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \to j_{\mathrm{hom}} \neq \langle a \rangle_y \nabla u_0 \quad \text{weakly in } [L^2(\Omega \times I)]^N$$

として特徴づけることが一般にできないため, 図 1 に現れる巨視構造は微細構造の単純平均として特徴づけられない. そのため, 巨視構造の特定がこの問題の難点として挙げられる. さらにここでは, 弱収束する関数同士の積の収束極限について考察しなければならず, 関数解析的な困難も生じる.

漸近展開法では, (1) を (E_ε) に代入し, 各 u_j について考察する. このとき, 各 $\varepsilon^{-\ell}$, $\ell = 0, 1, 2$ 毎に得られる関係式について考察すると, u_0 は次の均質化方程式の解であることが得られる.

$$-\mathrm{div}\,(a_{\mathrm{hom}}\nabla u_0) = f \quad \text{in } \Omega, \quad u_0 \in H_0^1(\Omega).$$

ここで, 定数行列 a_{hom}(以下, **均質化行列**と呼ぶ) が図 1 に現れる巨視構造に対応し, a_{hom} は,

$$a_{\mathrm{hom}}e_k = \langle a(\cdot)(\nabla_y\Phi_k + e_k)\rangle_y, \quad k = 1, \ldots, N$$

として与えられ, その構成要素である $\Phi_k \in H^1_{\mathrm{per}}(\square)/\mathbb{R}$ は次の**セル問題** (*cell problem*) の解を表す.

$$(CP)_E \qquad -\mathrm{div}_y[a(y)(\nabla_y\Phi_k + e_k)] = 0 \quad \text{in } \square.$$

ただし, e_k は $\mathbb{R}^N$ の標準基底の k 番目の基本ベクトル, $H^1_{\mathrm{per}}(\square) := \overline{C^\infty_{\mathrm{per}}(\square)}^{\|\cdot\|_{H^1(\square)}}$, $C^\infty_{\mathrm{per}}(A) := \{\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)\colon \rho \text{ is } A\text{-periodic}\}$, $A \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ を表し, "/$\mathbb{R}$" は零平均 (すなわち, $\langle\Phi_k\rangle_y = 0$) を表すものとする.

漸近展開法は, 形式的な漸近展開に基づくため, ここで得られる結果は数学的に厳密ではないが, **H-収束** [10] や 2 **スケール収束** [1], [11], **unfolding 法** [5, 6] などを用いて正当化されている. また, Φ_k は $(CP)_E$ の非自明解であることから, 一般に (2) が従わないことに注意する. 以上より, 均質化問題では, 考える方程式に応じて定まるセル問題を特定することが均質化方程式を特徴づける上で重要となる.

1.3 先行研究

時間発展する線形方程式に対する均質化問題も [3] で考察されており, (P_ε) のように係数が時空間に依存して振動するような時空均質化問題では, 係数の時空間周期の対数比によってセル問題が $(CP)_E$ と異なることが知られている. 例えば, 次の熱方程式:

$$(H_\varepsilon) \qquad \partial_t u_\varepsilon = \mathrm{div}[a(\tfrac{x}{\varepsilon}, \tfrac{t}{\varepsilon^2})\nabla u_\varepsilon] \quad \text{in } \Omega \times (0, T)$$

に対して, 解 u_ε が次のように漸近展開できると仮定する.

$$(3) \qquad u_\varepsilon(x,t) = u_0(x,t) + \varepsilon u_1(x, t, \tfrac{x}{\varepsilon}, \tfrac{t}{\varepsilon^r}) + \varepsilon^2 u_2(x, t, \tfrac{x}{\varepsilon}, \tfrac{t}{\varepsilon^r}) + \cdots, \quad r > 0.$$

このとき, $r = 2$ として, (3) を (H_ε) に代入し, 各 u_j について考察すると u_0 が満たす均質化方程式は

$$\partial_t u_0 = \mathrm{div}[a_{\mathrm{hom}}\nabla u_0] \quad \text{in } \Omega \times (0, T), \quad a_{\mathrm{hom}}e_k = \langle a(\cdot,\cdot)(\nabla_y\Phi_k + e_k)\rangle_{y,s}$$

となり, Φ_k が満たすセル問題は次の放物型方程式となる.

$$\partial_s\Phi_k - \mathrm{div}_y[a(y,s)(\nabla_y\Phi_k + e_k)] = 0 \quad \text{in } \square \times J.$$

なお, ここで得られる形式的な結果は, [2] や [9] などで正当化されている.

その他にも, 次の波動方程式:

$$(W_\varepsilon) \qquad \partial_{tt}^2 u_\varepsilon = \mathrm{div}[a(\tfrac{x}{\varepsilon}, \tfrac{t}{\varepsilon})\nabla u_\varepsilon] \ \text{ in } \ \Omega \times (0,T)$$

に対して, $r = 1$ とした (3) を (W_ε) に代入し, 各 u_j について考察すると u_0 は次の均質化方程式の解になることが得られる.

$$\partial_{tt}^2 u_0 = \mathrm{div}[a_{\mathrm{hom}} \nabla u_0] \ \text{ in } \Omega \times (0,T), \quad a_{\mathrm{hom}} e_k = \langle a(\cdot,\cdot)(\nabla_y \Phi_k + e_k)\rangle_{y,s}.$$

その際, Φ_k が満たすセル問題は次の双曲型方程式となる.

$$\partial_{ss}^2 \Phi_k - \mathrm{div}_y[a(y,s)(\nabla_y \Phi_k + e_k)] = 0 \quad \text{ in } \ \square \times J.$$

以上より, 時空均質化問題では, 方程式の型に依存した時空間周期の対数比によってセル問題が変化することが知られており, それに伴い, 均質化行列が持つ定性的性質 (一様楕円性や対称性, 正則性など) が変化することも知られている. また, (P_ε) を含むような双曲型-放物型方程式も取り扱われており, [4] では, 係数が時間に関して振動しないが, 係数の空間周期性や正則性に関する一般化が行われており, [8] では, 領域内にパラメータ ε に依存した無数の孔を持つ perforated domain 上で係数が時空間に関して周期的に振動するマルチスケールの問題に拡張されている.

本小論では, 十分時間発展した際の消散型波動方程式の解と熱方程式の解の関連性から, 熱方程式の場合と同様, $r = 2$ の場合でも (P_ε) に対するセル問題が $(CP)_E$ とは異なる問題に変化するのではないかという点に注目し, その条件について考察する. その際, 消散項 g_ε の時間周期性の崩れに注目するに至った.

2 主結果

本小論では, (P_ε) に対して, $\varepsilon \to 0_+$ とした際に解 u_ε の収束極限が満たす均質化方程式について考察する. その際得られる次の定理が, 本小論の主結果である.

定理 2.1 (均質化定理, [12])**.** 関数 $u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ を (P_ε) の弱解とする. このとき, $u_0 \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ 及び, $h \in L^2_{\mathrm{loc}}((0,T];H^{-1}(\Omega))$ が存在し, 任意の $\sigma > 0$ に対して,

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon &\to u_0 && \textit{weakly-}* \textit{ in } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
u_\varepsilon &\to u_0 && \textit{strongly in } C([0,T];L^2(\Omega)),\\
g_\varepsilon \partial_t u_\varepsilon &\to \langle g_{\mathrm{per}}\rangle_s \partial_t u_0 + C_* h && \textit{weakly in } \begin{cases} L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \textit{ if } C_* = 0,\\ L^2(\sigma,T;H^{-1}(\Omega)) \textit{ if } C_* \neq 0,\end{cases}\\
\partial_{tt}^2 u_\varepsilon &\to \partial_{tt}^2 u_0 && \textit{weakly in } \begin{cases} L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \textit{ if } C_* = 0,\\ L^2(\sigma,T;H^{-1}(\Omega)) \textit{ if } C_* \neq 0,\end{cases}\\
a_\varepsilon \nabla u_\varepsilon &\to \langle a(t,\cdot)(\nabla u_0 + \nabla_y u_1)\rangle_y && \textit{weakly in } [L^2(\Omega \times (0,T))]^N
\end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $\langle w\rangle_s = \int_0^1 w(s)\,ds$, $\langle \hat{w}\rangle_y = \int_\square \hat{w}(y)\,dy$ であり, u_1 は

$$(4) \qquad u_1(x,t,y) = \sum_{k=1}^N \partial_{x_k} u_0(x,t)\Phi_k(t,y)$$

と表され, 各 $k=1,\dots,N$ に対して, Φ_k は次のセル問題の一意解とする.

$$(CP) \qquad C_* t\partial_t \Phi_k - \mathrm{div}_y\left[a(t,y)(\nabla_y \Phi_k + e_k)\right] = 0 \quad in \quad (0,T)\times\square.$$

さらに, u_0 は次の均質化方程式の一意的な弱解となる.

$$(P_0) \qquad \begin{cases} \partial_{tt}^2 u_0 + \langle g_{\mathrm{per}}\rangle_s \partial_t u_0 + C_* h = \mathrm{div}\left[a_{\mathrm{hom}}(t)\nabla u_0\right] & in\ \Omega\times(0,T), \\ u_0|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_0|_{t=0} = v^0, \quad \partial_t u_0|_{t=0} = \tilde{v}^1. \end{cases}$$

ただし, $C_* \neq 0$ ならば $u_0 \equiv v^0$ であり, また,

$$\tilde{v}^1 = \begin{cases} v^1 & if\ \ C_* = 0, \\ 0 & if\ \ C_* \neq 0 \end{cases}$$

であり, 均質化行列 $a_{\mathrm{hom}}(t)$ は次のように表される.

$$(5) \qquad a_{\mathrm{hom}}(t)e_k = \int_{\square} a(t,y)\left[\nabla_y \Phi_k(t,y) + e_k\right] dy, \quad k=1,2,\dots,N.$$

注意 2.2. 係数 g_ε が周期的な場合, すなわち, $C_* = 0$ のとき, (P_0) も消散型波動方程式となり, 均質化行列 a_{hom} の構成要素である Φ_k が満たす (CP) は楕円型方程式になることに注意する.

一方, g_ε が準周期的な場合, すなわち, $C_* \neq 0$ のとき, $u_0 \equiv v^0$ より, (P_0) は楕円型方程式となり, 方程式の型が (P_ε) とは異なることに注意する. さらに, (CP) は放物型方程式となるため, (CP) も方程式の型が周期的な場合と異なることに注意する. また, $g_\varepsilon = g(\frac{t}{\varepsilon^2})$ の場合のみ (CP) が放物型方程式となり, その他の場合 $(g_\varepsilon = g(\frac{t}{\varepsilon^r}),\ r\neq 2)$ については [12] を参照されたい.

セル問題を特定することによって, 均質化行列に関して次の性質が成り立つ.

命題 2.3 (均質化行列 a_{hom} に対する定性的性質)**.** 定理 2.1 の仮定の下, $a_{\mathrm{hom}}(t)$ を (5) で与えられた均質化行列とする. このとき, 次の (i) と (ii) が成り立つ.

(i) (一様楕円性) 係数行列 $a(t,y)$ の楕円定数を $\lambda > 0$ とすると

$$\begin{aligned} &\lambda|\xi|^2 + \lambda\|\nabla_y \Phi_\xi(t)\|^2_{L^2(\square)} + \frac{C_* t}{2}\frac{d}{dt}\|\Phi_\xi(t)\|^2_{L^2(\square)} \\ &\leq a_{\mathrm{hom}}(t)\xi\cdot\xi \leq |\xi|^2 + \|\nabla_y \Phi_\xi(t)\|^2_{L^2(\square)} + \frac{C_* t}{2}\frac{d}{dt}\|\Phi_\xi(t)\|^2_{L^2(\square)} \end{aligned}$$

for any $\xi\in\mathbb{R}^N$ *and a.e.* $t\in(0,T)$ が成り立つ. ここで, Φ_ξ は e_k を $\xi\in\mathbb{R}^N$ としたセル問題 (CP) の一意解である.

(ii) (非対称性) 係数行列 $a(t,y)$ が対称行列であったとしても $a_{\mathrm{hom}}(t)$ は非対称行列である.

注意 2.4. 係数行列 $a(t,y)$ の楕円定数は時間 $t\in(0,T)$ に依存していないが, 均質化行列 $a_{\mathrm{hom}}(t)$ の楕円定数は一般に時間 $t\in(0,T)$ に依存することに注意する.

一方, $g_\varepsilon = g(\frac{t}{\varepsilon^r}),\ r\neq 2$ の場合は, セル問題が時間発展しない観点から, 均質化行列 a_{hom} の楕円定数も時間に依存しない. また, 係数行列 $a(t,y)$ が対称行列ならば, 均質化行列 a_{hom} も対称行列になる. そのため, 時空間周期の対数比が放物型スケール比を維持しながら振動する場合, 時間周期の崩れにより, 均質化行列の性質が著しく異なるこるに注意する.

さらに, セル問題を特定することにより, 解の勾配 ∇u_ε に対しても次のような収束性が得られる.

定理 2.5 (Corrector result for time independent coefficients)**.** 係数行列を $a = a(y)$ とし, v_ε^0, v_ε^1 は滑らかとし, $(-\mathrm{div}(a(\frac{x}{\varepsilon})\nabla v_\varepsilon^0))$, (v_ε^1) はそれぞれ $L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ 上で有界とする. また, u_ε と u_0 をそれぞれ (P_ε) と (P_0) の一意的な弱解とする. このとき

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_0^T\int_\Omega \left|\nabla u_\varepsilon(x,t) - \left(\nabla u_0(x,t) + \nabla_y u_1(x,t,\tfrac{x}{\varepsilon})\right)\right|^2 dxdt = 0 \tag{6}$$

が成り立つ. ここで $u_1 = \sum_{k=1}^N \partial_{x_k} u_0 \Phi_k$ であり, $\Phi_k \in L^2(0,T; H^1_{\mathrm{per}}(\square)/\mathbb{R})$ はセル問題 (CP) の一意解である.

係数行列が $a = a(t,y)$ の場合についても追加の仮定をすることにより同様の結果が得られる.

系 2.6 (Corrector result for time dependent coefficients)**.** 定数 C_* を $C_* \neq 0$ とし, 係数行列 $a(t,y)$ 及び, 初期位置 v_ε^0 と初期速度 v_ε^1 に対して以下を仮定する.

$$\begin{aligned} &\partial_t a(t,y)\xi\cdot\xi \le 0 \qquad \textit{for all } \xi\in\mathbb{R}^N \textit{ and all } (t,y)\in(0,T)\times\mathbb{R}^N,\\ &-\mathrm{div}(a(0,\tfrac{x}{\varepsilon})\nabla v_\varepsilon^0) \to -\mathrm{div}(a_{\mathrm{hom}}(0)\nabla v^0) \textit{ strongly in } H^{-1}(\Omega),\\ &\lim_{\varepsilon\to 0_+}\|v_\varepsilon^1\|_{L^2(\Omega)} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

ここで, $a_{\mathrm{hom}}(t)$ は (5) で与えられた均質化行列である. さらに,

$$\partial_t a(t,y) = -a(t,y) \qquad \textit{for all } (t,y)\in(0,T)\times\mathbb{R}^N \tag{8}$$

を仮定する. このとき, u_ε と u_0 をそれぞれ (P_ε) と (P_0) の一意的な弱解とすると, 定理 2.5 と同様 (6) が成り立つ.

注意 2.7. 条件 (7) を満たすような初期位置 $v_\varepsilon^0 \in H_0^1(\Omega)$ は実際に構成することができる (詳細は [7, pp. 236] を参照).

注意 2.8. 臨界スケール以外 (すなわち, $g_\varepsilon = g(\frac{t}{\varepsilon^r})$, $r \neq 2$) では (8) なしに (6) が成り立つ.

注意 2.9. 定理 2.5 及び, 系 2.6 より, 一般に

$$u_\varepsilon \not\to u_0 \quad \text{ strongly in } L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

が $u_1(x,t,\frac{x}{\varepsilon})$ の振動の影響によって成り立つ. そのため, $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ 上の強コンパクト性の破れが生じるが, $u_1(x,t,\frac{x}{\varepsilon})$ を修正項として加えることにより, 強コンパクト性を回復することができる. 以上より, セル問題の解 Φ_k はしばしば**コレクター (corrector)** と呼ばれている.

3 時空 2 スケール収束理論

本節では, 定理 2.1 の証明で用いる時空 2 スケール収束に関するいくつかの性質を述べる. その際, 本節全体を通して, $1 < q < +\infty$ とし, $1 < q' < +\infty$ をその Hölder 共役指数 (すなわち, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ を満たす) とする. また, 以降では, 簡単のため $I := (0,T)$ として記述する.

定義 3.1 (時空 2 スケール収束)**.** 関数 $u_\varepsilon \in L^q(\Omega\times I)$ が $u\in L^q(\Omega\times I\times\square\times J)$ に時空 2 スケール収束 (*space-time two-scale convergence*) するとは, 任意の $\Psi\in L^{q'}(\Omega\times I; C_{\rm per}(\square\times J))$ に対して, 以下を満たすことを意味する.

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_0^T\int_\Omega u_\varepsilon(x,t)\Psi(x,t,\tfrac{x}{\varepsilon},\tfrac{t}{\varepsilon^2})\,dxdt=\int_0^T\int_\Omega\int_0^1\int_\square u(x,t,y,s)\Psi(x,t,y,s)\,dydsdxdt.$$

またこのとき, $u_\varepsilon \overset{2,2}{\rightharpoonup} u$ *in* $L^q(\Omega\times I\times\square\times J)$ と記述する.

注意 3.2. 関数 $u_\varepsilon\in L^q(\Omega\times I)$ が $u\in L^q(\Omega\times I\times\square\times J)$ に時空 2 スケール収束するならば, u_ε は u の $\square\times J$ 上の平均値に $L^q(\Omega\times I)$ 上で弱収束することに注意する. 実際, $\Psi=\Psi(x,t)$ とすれば, 次が成り立つ.

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+}\int_0^T\int_\Omega u_\varepsilon(x,t)\Psi(x,t)\,dxdt=\int_0^T\int_\Omega\left[\int_0^1\int_\square u(x,t,y,s)\,dyds\right]\Psi(x,t)\,dxdt.$$

また, 関数 u_ε が $\tilde{u}$ に $L^q(\Omega\times I)$ 上で強収束するならば, 時空 2 スケール収束極限は $\tilde{u}$ に一致する. この事実は, 強収束性の仮定とテスト関数の平均値への弱収束性から得られる (詳細は [9] を参照). 従って, 時空 2 スケール収束極限は変数 y,s に依存しないことに注意する. 以上より, 時空 2 スケール収束は弱収束と強収束の中間的概念であることに注意する.

以下, 時空 2 スケール収束に関する性質について述べる.

定理 3.3 (時空 2 スケールコンパクト性)**.** 任意の $L^q(\Omega\times I)$ 上の有界列 (u_ε) に対して, ある部分列 $(\varepsilon_n)\subset(\varepsilon)$ と $u\in L^q(\Omega\times I\times\square\times J)$ が存在して,

$$u_{\varepsilon_n}\overset{2,2}{\rightharpoonup}u\quad\text{ in } L^q(\Omega\times I\times\square\times J)$$

が成り立つ. さらに, (u_ε) が $W^{1,q}(\Omega\times I)$ 上で有界ならば, ある関数 $u_1\in L^q(\Omega\times I; W^{1,q}_{\rm per}(\square\times J)/\mathbb{R})$ が存在して

$$\nabla u_{\varepsilon_n}\overset{2,2}{\rightharpoonup}\nabla u+\nabla_y u_1\quad\text{ in }\ [L^q(\Omega\times I\times\square\times J)]^N$$

が成り立つ.

注意 3.4. 関数 u_1 の $\square$-周期性によって $\langle\nabla_y u_1\rangle_y=0$ が成り立つため, 勾配に対する時空 2 スケール収束では, 弱収束では取り扱うことができない情報を引き出していることに注意する.

定理 3.3 の系として以下が成り立つ.

系 3.5. 任意の $\phi\in C^\infty_{\rm c}(\Omega)$, $b\in C^\infty_{\rm per}(\square)/\mathbb{R}$, $\psi\in C^\infty_{\rm c}(I)$, $c\in C^\infty_{\rm per}(J)$ に対して

$$\int_0^T\int_\Omega\frac{u_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n}(x,t)\phi(x)b(\tfrac{x}{\varepsilon_n})\psi(t)c(\tfrac{t}{\varepsilon_n^2})\,dxdt\to\int_0^T\int_\Omega\int_0^1\int_\square u_1(x,t,y,s)\phi(x)b(y)\psi(t)c(s)\,dydsdxdt$$

が $\varepsilon_n\to 0_+$ として成り立つ. ここで, u_1 は定理 3.3 で現れた関数である.

注意 3.6. 系 3.5 ではテスト関数 $b(y)$ に $\langle b\rangle_y=0$ が追加されていることに注意する.

4　定理 2.1 の証明の概略

本節では, 定理 2.1 の証明の概略を述べる. 紙面の都合上, 主張や方針のみを記述する (詳細は [12] を参照). また, 命題 2.3 や定理 2.5, 系 2.6 の証明についても紙面の都合上 [12] を参照されたい.

まず, (P_ε) の弱解 u_ε に対して, パラメータ ε に関する一様評価を行う.

補題 4.1. 関数 $u_\varepsilon \in L^\infty(I;H_0^1(\Omega))$ を (P_ε) の弱解とし, 任意の $\sigma > 0$ に対して, $I_\sigma = (\sigma, T)$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

(i) (u_ε) は $L^\infty(I;H_0^1(\Omega))$ 上で有界.
(ii) $(\partial_t u_\varepsilon)$ は $L^\infty(I;L^2(\Omega))$ 上で有界.
(iii) $(\sqrt{t\varepsilon^{-2}}\partial_t u_\varepsilon)$ は $C_* \neq 0$ のとき $L^2(\Omega\times I)$ 上で有界.
(iv) $(\partial_{tt}^2 u_\varepsilon + g_\varepsilon \partial_t u_\varepsilon)$ は $L^2(I;H^{-1}(\Omega))$ 上で有界.
(v) $(\partial_{tt}^2 u_\varepsilon)$ は $C_* = 0$ のとき $L^2(I;H^{-1}(\Omega))$ 上で有界であり, $C_* \neq 0$ のとき $L^2(I_\sigma;H^{-1}(\Omega))$ 上で有界.
(vi) $(t\varepsilon^{-2}\partial_t u_\varepsilon)$ は $C_* \neq 0$ のとき $L^2(I_\sigma;H^{-1}(\Omega))$ 上で有界.

次に補題 4.1 と定理 3.3 を用いることで以下の収束性が得られる.

補題 4.2. 関数 $u_\varepsilon \in L^\infty(I;H_0^1(\Omega))$ を (P_ε) の弱解とする. このとき, ある部分列 $(\varepsilon_n) \subset (\varepsilon)$ とある極限 $u_0 \in L^\infty(I;H_0^1(\Omega))$, $w \in L^2(I;H^{-1}(\Omega))$, $h \in L^2_{\mathrm{loc}}((0,T];H^{-1}(\Omega))$ が存在し, 任意の $\sigma \in I$ に対して以下が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&u_{\varepsilon_n} \to u_0 && \textit{weakly-}* \ \textit{in}\ \ L^\infty(I;H_0^1(\Omega)),\\
&\partial_t u_{\varepsilon_n} \to \partial_t u_0 && \textit{weakly-}* \ \textit{in}\ \ L^\infty(I;L^2(\Omega)),\\
&\partial_{tt}^2 u_{\varepsilon_n} + g_{\varepsilon_n}\partial_t u_{\varepsilon_n} \to w && \textit{weakly in}\ \ L^2(I;H^{-1}(\Omega)), \qquad (9)\\
&\partial_{tt}^2 u_{\varepsilon_n} \to \partial_{tt}^2 u_0 && \textit{weakly in}\ \begin{cases} L^2(I;H^{-1}(\Omega)) & \textit{if}\ \ C_* = 0,\\ L^2(I_\sigma;H^{-1}(\Omega)) & \textit{if}\ \ C_* \neq 0,\end{cases}\\
&t\varepsilon_n^{-2}\partial_t u_{\varepsilon_n} \to h && \textit{weakly in}\ \ L^2(I_\sigma;H^{-1}(\Omega)) \quad \textit{if}\ \ C_* \neq 0, \qquad (10)\\
&u_{\varepsilon_n} \to u_0 && \textit{strongly in}\ \ C(\overline{I};L^2(\Omega)),\\
&\partial_t u_{\varepsilon_n} \to \partial_t u_0 && \textit{strongly in}\ \begin{cases} C(\overline{I};H^{-1}(\Omega)) & \textit{if}\ \ C_* = 0,\\ C(\overline{I}_\sigma;H^{-1}(\Omega)) & \textit{if}\ \ C_* \neq 0,\end{cases} \qquad (11)\\
&\sqrt{t}\partial_t u_{\varepsilon_n} \to 0 && \textit{strongly in}\ \ L^2(\Omega\times I) \quad \textit{if}\ \ C_* \neq 0.
\end{aligned}
$$

特に, $C_* \neq 0$ ならば, $\partial_t u_0(\cdot,t) \equiv 0$ *for a.e.* $t \in I$ となり, $u_0 = u_0(x)$ を意味する. さらに, ある $w_1 \in L^2(\Omega\times I;H^1_{\mathrm{per}}(\square\times J)/\mathbb{R})$ が存在し,

$$
a_{\varepsilon_n}\nabla u_{\varepsilon_n} \overset{2,2}{\rightharpoonup} a(t,y)(\nabla u_0 + \nabla_y w_1) \quad \textit{in}\ \ [L^2(\Omega\times I\times\square\times J)]^N \qquad (12)
$$

が成り立つ.

以上より,

$$j_{\mathrm{hom}}(x,t) := \Big\langle a(t,\cdot)\big(\nabla u_0(x,t) + \nabla_y w_1(x,t,\cdot,\cdot)\big)\Big\rangle_{y,s}$$

と定めると, (9) と (12) によって, 任意の $\phi \in H_0^1(\Omega)$ と $\psi \in C_c^\infty(I)$ に対して,

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle w(t),\phi\rangle_{H_0^1(\Omega)}\psi(t)\,dt &= \lim_{\varepsilon_n\to 0_+}\int_0^T \langle \partial_{tt}^2 u_{\varepsilon_n}(t) + g_{\varepsilon_n}(t)\partial_t u_{\varepsilon_n}(t),\phi\rangle_{H_0^1(\Omega)}\psi(t)\,dt\\ &= \lim_{\varepsilon_n\to 0_+}\int_0^T\int_\Omega a_{\varepsilon_n}\nabla u_{\varepsilon_n}(x,t)\cdot\nabla\phi(x)\psi(t)\,dxdt\\ &= \int_0^T\int_\Omega j_{\mathrm{hom}}(x,t)\cdot\nabla\phi(x)\psi(t)\,dt\end{aligned}$$

が成り立つ. このとき, $\psi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(I)$ に注意すると, w は (10), (11) と周期関数に対する平均値への弱収束性によって,

$$w = \partial_{tt}^2 u_0 + \langle g_{\mathrm{per}}\rangle_s \partial_t u_0 + C_* h$$

として定まり, また, $\psi \in C_c^\infty(I)$ の任意性から u_0 は次の均質化方程式の弱解であることが得られる.

$$(P_0)' \qquad \begin{cases}\partial_{tt}^2 u_0 + \langle g_{\mathrm{per}}\rangle_s\partial_t u_0 + C_* h = \operatorname{div} j_{\mathrm{hom}} & \text{in } \Omega\times I,\\ u_0|_{\partial\Omega} = 0, \quad u_0|_{t=0} = v^0, \quad \partial_t u_0|_{t=0} = \tilde{v}^1.\end{cases}$$

従って, 以下が示されると定理 2.1 の証明が完了する.

$$j_{\mathrm{hom}} = a_{\mathrm{hom}}(t)\nabla u_0(x,t). \tag{13}$$

ここで, $a_{\mathrm{hom}}(t)$ は定理 2.1 で与えられた均質化行列である. すなわち, (4) を示せば十分である. 実際, (4) が成り立つならば,

$$\begin{aligned}j_{\mathrm{hom}}(x,t) &= \int_\square a(t,y)\Big(\nabla u_0(x,t) + \sum_{k=1}^N \partial_{x_k}u_0(x,t)\nabla_y\Phi_k(t,y)\Big)\,dy\\ &= \sum_{k=1}^N \underbrace{\Big(\int_\square a(t,y)\left(\nabla_y\Phi_k(t,y) + e_k\right)\,dy\Big)}_{=a_{\mathrm{hom}}(t)e_k \text{ by (5)}}\partial_{x_k}u_0(x,t) = a_{\mathrm{hom}}(t)\nabla u_0(x,t)\end{aligned}$$

となり, (13) が得られる. さらに, (CP) の解の一意性から u_0 が (P_0) の一意的な弱解となり, 部分列に依存せず全列での収束性が得られ, 定理 2.1 の主張が得られる.

以下では, (4) を示すために, (P_{ε_n}) と $(P_0)'$ の差の極限について考察する. このとき, 任意の $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, $b \in C_{\mathrm{per}}^\infty(\square)$, $\psi \in C_{\mathrm{c}}^\infty(I)$ に対して,

$$\begin{aligned}&-\lim_{\varepsilon_n\to 0_+} C_*\int_0^T\int_\Omega \frac{u_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n}(x,t)\phi(x)b(\tfrac{x}{\varepsilon_n})\partial_t(t\psi(t))\,dxdt\\ &\quad+\lim_{\varepsilon_n\to 0_+}\int_0^T\int_\Omega a(t,\tfrac{x}{\varepsilon_n})\nabla u_{\varepsilon_n}(x,t)\cdot\phi(x)\nabla_y b(\tfrac{x}{\varepsilon_n})\psi(t)\,dxdt = 0\end{aligned}$$

が得られる. さらに, 系 3.5 と (12) とテスト関数の任意性によって,

$$\big\langle C_* t\partial_t w_1(x,t,\cdot), b\big\rangle_{H^1_{\mathrm{per}}(\square)/\mathbb{R}} + \int_\square a(t,y)\big(\nabla u_0(x) + \nabla_y w_1(x,t,y)\big)\cdot\nabla_y b(y)\,dy = 0 \tag{14}$$

for a.e. $(x,t) \in \Omega \times I$ が得られる. さらに, セル問題を (CP) と定めると (4) が成り立つ. 実際, w_1 を u_1 としても (14) を満たすため, $b = (w_1 - u_1)(x,t,\cdot)$ としてそれぞれの差を考えると,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \frac{C_* t}{2} \frac{d}{dt} \|(w_1 - u_1)(x,t)\|^2_{L^2(\square)} \, dt \\ &\quad + \int_0^T \int_\square a(t,y) \nabla_y (w_1 - u_1)(x,t,y) \cdot \nabla_y (w_1 - u_1)(x,t,y) \, dydt \\ &\geq \frac{C_* T}{2} \|(w_1 - u_1)(x,T)\|^2_{L^2(\square)} + C \int_0^T \|(w_1 - u_1)(x,t)\|^2_{L^2(\square)} \, dt \end{aligned}$$

が Poincaré-Wirtinger 不等式を用いることで得られるため, $w_1 = u_1$ が成り立ち, 証明が完了する.

参考文献

[1] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence, SIAM J. Math. Anal. **23** (1992), 1482–1518.

[2] M. Amar, D. Andreucci, D. Bellaveglia, The time-periodic unfolding operator and applications to parabolic homogenization, Rend. Lincei Mat. Appl. **28** (2017), 663–700.

[3] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, Studies in Mathematics and Its Applications, vol. 5, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[4] J. Casado-Díaz, J. Couce-Calvo, F. Maestre, J.-D. Martín-Gómez, Homogenization and corrector for the wave equation with discontinuous coefficients in time, J. Math. Anal. Appl. **379** (2011), 664–681.

[5] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso, The periodic unfolding method in homogenization, SIAM J. Math. Anal. **40** (2008), 1585–1620.

[6] D. Cioranescu, A. Damlamian, G. Griso, *The periodic unfolding method. Theory and applications to partial differential problems*, Series in Contemporary Mathematics, vol. 3, Springer, Singapore, 2018.

[7] D. Cioranescu, P. Donato, *An Introduction to Homogenization*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, vol. 17, Oxford University Press, New York, 1999.

[8] H. Douanla, E. Tetsadjio, Reiterated homogenization of hyperbolic-parabolic equations in domains with tiny holes, Electron. J. Differential Equations **59** (2017), 1–22.

[9] A. Holmbom, Homogenization of parabolic equations an alternative approach and some corrector-type results, Appl. Math. **42** (1997), 321–343.

[10] F. Murat, L. Tartar, H-convergence, In: Topics in the mathematical modelling of composite materials, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 31, Birkhäuser Boston, Boston, MA, pp.21–43, 1997.

[11] G. Nguetseng, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, SIAM J. Math. Anal. **20** (1989), 608–623.

[12] T. Oka, Space-time arithmetic quasi-periodic homogenization for damepd wave equations, `arXiv:2107.04966 [math-AP]`(2021), pp. 1–26.

二重冪の非線形シュレディンガー方程式の解の散乱について *

津田塾大学大学院理学研究科数学専攻後期博士課程 2 年・理化学研究所 AIP 数理科学チーム
渡邉南 (Minami WATANABE) †

Abstract

本研究の目標は質量臨界項とソボレフ劣臨界項の二重冪の非線形項を持つシュレディンガー方程式 (以下 (NLS) と書く) の解の大域挙動を解析することである．解の分散性を表すビリアル恒等式より，ビリアル汎関数の符号から解の挙動が予測できる．初期値の作用汎関数が基底状態より小さい場合には，変分法的特徴付けからビリアル汎関数の符号が不変であるポテンシャル井戸が定義できる．本発表では，ビリアル汎関数が正の場合にポテンシャル井戸を設定し，そこから出発した (NLS) の解が散乱する事について述べる．

1 導入

本講演では次の非線形シュレディンガー方程式について考察する．

$$i\frac{\partial u}{\partial t}+\Delta u+|u|^{\frac{4}{d}}u+|u|^{p-1}u=0. \tag{NLS}$$

ただし，$i=\sqrt{-1}$，$1+\frac{4}{d}<p<1+\frac{4}{d-2}$ で $\Delta=\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ はラプラシアンである．さらに (NLS) の質量 $\mathcal{M}(\psi)$ とハミルトニアン $\mathcal{H}(\psi)$ を次で導入する．

$$\mathcal{M}(u)=\frac{1}{2}\|u\|_{L^2}^2,\quad \mathcal{H}(u)=\frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2-\frac{d}{2(d+2)}\|u\|_{L^{\frac{2(d+2)}{d}}}^{\frac{2(d+2)}{d}}-\frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}. \tag{1.1}$$

任意の $u_0\in H^1(\mathbb{R}^d)$ に対して，ある時間 $T_{\max},T_{\min}>0$ と，$u|_{t=0}=u_0$ を満たす (NLS) の解 $u\in C((-T_{\min},T_{\max}),H^1(\mathbb{R}^d))$ が存在して，質量とハミルトニアンに対して保存則が成り立つ．つまり

$$\mathcal{M}(u(t))=\mathcal{M}(u_0),\quad \mathcal{H}(u(t))=\mathcal{H}(u_0)\quad \text{for all}\quad t\in(-T_{\min},T_{\max}). \tag{1.2}$$

例えば，Cazenave and Weissler[4] を参照．さらに，(NLS) の解 $u(t,x)$ は $|x|^2u_0\in L^2(\mathbb{R}^d)$ であるとき，次のビリアル恒等式を満たす．

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}^d}|x|^2|u(t,x)|^2dx=8\mathcal{K}(u(t))\quad \text{for all}\quad t\in(-T_{\min},T_{\max}). \tag{1.3}$$

ただし

$$\mathcal{K}(u)=\|\nabla u\|_{L^2}^2-\frac{d}{d+2}\|u\|_{L^{\frac{d}{2(d+2)}}}^{\frac{d}{2(d+2)}}-\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}. \tag{1.4}$$

(NLS) に対して定在波解 $\psi(t,x)=\mathrm{e}^{i\omega t}u(x)(\omega>0)$ を考えると、u は次の非線形楕円型方程式を満たす．

$$-\Delta u+\omega u-|u|^{\frac{4}{d}}u-|u|^{p-1}u=0,\quad u\in H^1(\mathbb{R}^d)\backslash\{0\} \tag{SP}$$

与えられた $\omega>0$ に対して，(SP) の作用汎関数 $\mathcal{S}_\omega$ を次で定義する．

$$\mathcal{S}_\omega(u):=\omega\mathcal{M}(u)+\mathcal{H}(u). \tag{1.5}$$

---

*本研究は菊池弘明氏 (津田塾大学) と浜野大氏 (埼玉大学) の共同研究に基づく．
†m18mwata@gm.tsuda.ac.jp

$\mathcal{S}'_\omega(Q_\omega) = 0$ であることと，$Q_\omega \in H^1(\mathbb{R}^d)$ が (SP) の弱解であることは同値である．また，基底状態とは，(SP) の非自明な解の中で対応する汎関数 $\mathcal{S}_\omega$ を最小にするものである．

解の大域挙動を調べるためには，その形状の変化の様子を調べる必要がある．それを調べるために，解の分散性を表すビリアル恒等式を用いる．初期値 u_0 の作用汎関数が基底状態より小さい場合には，変分法的特徴付けからビリアル汎関数 $\mathcal{K}(u)$ の符号が不変であるポテンシャル井戸が定義できる．本研究では，ビリアル汎関数の正負に分けてポテンシャル井戸を設定し，それぞれの集合から出発した (NLS) の解を調べる．これまでの研究 [4] では，質量臨界とソボレフ劣臨界 (臨界) の二重冪を含む一般の非線形項の場合について，負の場合に解が爆発することを示した．本講演では，質量臨界とソボレフ劣臨界の (NLS) について，ビリアル汎関数が正の場合に解の大域挙動を調べた結果について述べる．先行研究 [2] において，空間変数の次元が 4 以下の場合に解の散乱について結果を得られている．本研究ではその次元の制限を除くとともに，非線形項を一般化した．

2 主結果

最小化問題を以下のようにおく．

$$m_\omega := \inf\{\mathcal{S}_\omega(u) \colon u \in H^1(\mathbb{R}^d)\backslash\{0\},\ \mathcal{K}(u) = 0\}. \tag{2.1}$$

次の結果が得られた．

定理 2.1. $d \geq 4$ のとき，任意の $\omega > 0$ に対して，$m_\omega > 0$ であり，m_ω の最小元が存在する．さらに，m_ω の最小元は (SP) の基底状態である．

さらに、得られた基底状態に対してポテンシャル井戸を次のように定義する．

$$\mathcal{A}_{\omega,+} := \{u \in H^1(\mathbb{R}^d) \colon \mathcal{S}_\omega(u) < m_\omega,\ \mathcal{K}(u) > 0\}. \tag{2.2}$$

$\mathcal{A}_{\omega,+}$ は (NLS) の時間に関する不変集合であり，さらに集合から出発した解について、次の結果を得た．

定理 2.2. $d \geq 4$ とする．$\omega > 0$，$u_0 \in \mathcal{A}_{\omega,+}$ とし，$u|_{t=0} = u_0$ とする (NLS) の解とする．このとき，任意の $t \in (-T_{min}, T_{max})$ に対して $\mathcal{K}(u(t)) > 0$ であり，ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して

$$\inf_{t\in(-T_{min},T_{max})} \mathcal{K}(u(t)) \geq \varepsilon_0 \tag{2.3}$$

が成り立つ．さらに，$u_0 \in \mathcal{A}_{\omega,+}$ を初期値とする解は散乱する．つまり，ある $\phi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ が存在して

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|u(t) - \mathrm{e}^{it\Delta}\phi\|_{H^1} = 0 \tag{2.4}$$

3 鍵となる定理

以降，$1 + \frac{4}{d} < p < 1 + \frac{4}{d-2}$ とする．本研究では，先行研究における次元の制限を取り除くために，次のように散乱ノルムを定義した：s_p を ctitical regularity とする：

$$s_p := \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1} (0 < s_p < 1). \tag{3.1}$$

さらに

定義 3.1 (admissible pair)**.** (q, r) が *L^2-admissible* とは

$$\frac{2}{q} = d\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r}\right) \tag{3.2}$$

を満たすことである．ただし，$2 \leq r \leq \frac{2d}{d-2}$ ($2 \leq r \leq \infty$ *if* $d = 1$, $2 \leq r < \infty$ *if* $d = 2$).

さらに，q_1 を

$$(d-2)q_1 < 2d,\ p+1 < q_1 \tag{3.3}$$

を満たすようにとる．このとき，指数 r_0，r_1，そして $\tilde{r}_1$ を次のようにとる．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_0} &:= \frac{d}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_1}\right),\\
\frac{1}{r_1} &:= \frac{d}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_1} - \frac{s_p}{d}\right),\\
\frac{1}{\widetilde{r}_1} &:= \frac{d}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_1} + \frac{s_p}{d}\right).
\end{aligned}$$

ここで，(q_1, r_0) は L^2-admissible である．これらの指数に対してさらに (q_2, r_2) を

$$\frac{p-1}{q_2} = 1 - \frac{2}{q_1}, \quad \frac{1}{r_2} := \frac{d}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_2} - \frac{s_p}{d}\right). \tag{3.4}$$

を満たすようにとる．このとき，$I \subset \mathbb{R}$ に対して

$$X(I) := L_t^{\frac{2(d+2)}{d}}(I, L_x^{\frac{2(d+2)}{d}}) \cap L_t^2(I, L_x^{\frac{2d}{d-2}}) \cap L_t^{r_1}(I, L_x^{q_1}) \cap L_t^{r_2}(I, L_x^{q_2})$$

とおく．このとき以下の評価が成り立つ：

補題 3.2 (Strichartz estimate)**.** $I \subset \mathbb{R}$，$J = \bar{I}$，そして $t_0 \in J$ とする．もし (γ, ρ) が L^2-*admissible* に対して $f \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^d))$ であるなら，任意の *admissible pair*(q, r) に対して，

$$t \mapsto \Phi_f(t) = \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{i(t-s)\Delta} f(s) ds \quad \textit{fort} \in I \tag{3.5}$$

は $L^q(I, L^r(\mathbb{R}^d)) \cap C(J, L^2(\mathbb{R}^d))$ に属する．さらに，ある定数 C*(*I に依存しない*)* が存在して

$$\|\Phi_f\|_{L_t^r L_x^q} \le C_{st} \|f\|_{L_t^{\gamma'} L_x^{\rho'}} \quad \textit{for every} \quad f \in L \in L^{\gamma'}(I, L^{\rho'}(\mathbb{R}^d)). \tag{3.6}$$

補題 3.3 ([3])**.** $d \ge 3$，$2 + \frac{4}{d} < p + 1 < 2 + \frac{4}{d-2}$ とする．$t_1 \in \mathbb{R}$ で I を t_1 を含む区間とする．このとき，以下が成り立つ：

$$\| \int_{t_1}^{t} \mathrm{e}^{i(t-t')\Delta} F(t') dt' \|_{L_t^{r_1} L_x^{q_1} \cap L_t^{r_2} L_x^{q_2}} \le C_{st} \|F\|_{L_t^{\tilde{r}_1'} L_x^{q_1'}}. \tag{3.7}$$

このように設定したノルム $\|\cdot\|_{X(\mathbb{R})}$ に対して，次が成り立つことがわかった．

定理 3.4 (Scattering energy space)**.** $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ を (NLS) の解とし，以下を満たすとする：

$$\|u\|_{X(\mathbb{R})} < \infty, \quad \|u\|_{L_t^\infty(\mathbb{R}, H^1)} < \infty.$$

このとき次を満たす $\phi_\pm \in H^1(\mathbb{R}^d)$ が一意に存在する．

$$\lim_{t \to \pm\infty} \|u(t) - \mathrm{e}^{it\Delta}\phi_\pm\|_{H^1} = 0.$$

この定理を用いて

$$\forall u_0 \in \mathcal{A}_{\omega,+} \Longrightarrow \|u\|_{X(\mathbb{R})} < \infty$$

を示すことで，主結果を得た．

参考文献

[1] T. Cazenave and F. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schödinger equation in Hs.* Nonlinear Anal. **14** (1990), 807–836.

[2] X. Cheng, *Scattering for the mass super-critical perturbations of the mass critical nonlinear Schrödinger equations,* Illinois Journal of Mathematics Vol. **64**, No. 1(2020), 21–48.

[3] D. Foschi, *Inhomogeneous Strichartz estimate,* Journal of Hyperbolic Differential Equations Vol. **02**, No. 01(2005), 1–24.

[4] H. Kikuchi and M. Watanabe, *Existence of ground state and blowup solution for a class of nonlinear Schrödinger equations involving mass and energy critical exponents*, Nonlinear Differ. Equ. Appl. (2020).

3波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系に対する ground state energy の漸近展開

東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻
長田祐輝 (Yuki OSADA)

概 要

本稿では, 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式の ground state とそのエネルギーのパラメータ γ を無限大に近づけたときの漸近挙動について考える。さらに, γ^* より小さい γ に対しては ground state は scalar のみになり, 大きい γ に対しては vector のみになるような正の閾値 γ^* が存在するということを報告する.

1 導入

Cazenave-Lions [2] は

$$i\partial_t u + \Delta u + |u|^{p-1}u = 0 \tag{1}$$

の定在波解の存在および安定性について研究した. この方程式は様々な物理的, 生物学的文脈で現れ, 例えば, 非線形光学, ボーズ・アインシュタイン凝縮現象, DNA 構造のモデリング等に現れる. ここで定在波解とは, $u(t,x) = e^{i\omega t}\varphi(x)$ という形の (1) の解である. このとき φ は

$$-\Delta\varphi + \omega\varphi - |\varphi|^{p-1}\varphi = 0$$

をみたす. 方程式 (1) の線形部分には分散効果があり, 時間発展させると, 解を平らにする効果がある. また非線形部分には集中効果があり, 解を集中させる効果がある. この分散効果と集中効果が相殺したときに現れるのが定在波解である (Le Coz [10] も参照).

関連する問題設定の先行研究についても触れておく. Ardila [1] は以下の L^2 制限最小化問題に対して $N = 1$ かつ $1 < p < 5$, $\alpha, \beta > 0$ の設定で, 各 V_i が定数のときに解の存在性を示した: $a_1, a_2, a_3 > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
I_\alpha^\beta(a) &:= \inf_{\mathbf{u}\in M(a)} E_\alpha^\beta(\mathbf{u}), \quad a = (a_1, a_2, a_3),\\
M(a) &:= \{\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}^3) \mid \|u_i\|_2^2 = a_i \ (i = 1, 2, 3)\},\\
E_\alpha^\beta(\mathbf{u}) &:= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_i|^2 + V_i(x)|u_i|^2 - \frac{\beta}{p+1}\sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |u_i|^{p+1} - \alpha \mathrm{Re}\int_{\mathbb{R}^N} u_1 u_2 \overline{u}_3.
\end{aligned}$$

さらに Kurata-Osada [9] は Ardila の結果を $N \le 3$, $1 < p < 1 + 4/N$ かつ対称なポテンシャルをもつ場合に拡張した. また Osada [11] は, $\alpha = \beta^\kappa$ ($\kappa \in \mathbb{R}$) としたとき, κ の値によって $\beta \to \infty$ における $I_\alpha^\beta(a)$ およびその解の漸近挙動がどのように変わるのかについての結果を得た. 他の関連モデルに対しては例えば Tian-Wang-Zhao [13], Wang [14], Zhao-Zhao-Shi [15] やその中で参照されている文献を参照のこと.

Colin-Colin-Ohta [6, 7] は次の 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u_1 + \Delta u_1 + |u_1|^{p-1}u_1 = -\gamma u_3 \overline{u}_2, \\ i\partial_t u_2 + \Delta u_2 + |u_2|^{p-1}u_2 = -\gamma u_3 \overline{u}_1, \\ i\partial_t u_3 + \Delta u_3 + |u_3|^{p-1}u_3 = -\gamma u_1 u_2 \end{cases} \tag{2}$$

に対して, 定在波解の安定性に関する研究を行った. この方程式はラマン増幅というレーザーとプラズマの相互作用に関連した現象を記述する方程式である. この現象の物理的な背景は次の通りである. まず入射レーザー場がプラズマに侵入すると後方散乱してラマン場が生成される. さらに, この入射レーザー場と後方散乱したラマン場が相互作用して第 3 の波である電子プラズマ波を生成する. さらにこの 3 つの波が相互作用してイオンの密度変化を作り出す. このイオンの密度変化は先行する 3 つの波に影響を及ぼす. このような現象をラマン増幅という ([3, 4] も参照). Colin-Colin-Ohta の研究結果について詳しく述べる. 彼らは方程式 (2) の定在波解 $(e^{i\omega t}\varphi, 0, 0)$, $(0, e^{i\omega t}\varphi, 0)$ が任意の $\gamma > 0$ に対して安定であり, 定在波解 $(0, 0, e^{i\omega t}\varphi)$ に関しては, ある $\gamma^* > 0$ が存在して, $0 < \gamma < \gamma^*$ ならば安定, $\gamma > \gamma^*$ なら不安定であるということを示した (Colin-Ohta [5] についても参照のこと). ここで, φ は次の方程式の正値球対称解である:

$$-\Delta\varphi + \omega\varphi - \varphi^p = 0.$$

2 問題設定と主結果

以下の 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式を考える:

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + V_1(x)u_1 - |u_1|^{p-1}u_1 = \gamma u_2 u_3, \\ -\Delta u_2 + V_2(x)u_2 - |u_2|^{p-1}u_2 = \gamma u_1 u_3, \\ -\Delta u_3 + V_3(x)u_3 - |u_3|^{p-1}u_3 = \gamma u_1 u_2. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\gamma$}$$

ここで, $\mathbf{u} := (u_1, u_2, u_3)$, u_1, u_2, u_3 は実数値関数, $\gamma > 0$, $N \le 5$, $2 \le p < 2^* - 1$ とする.

$$2^* := \begin{cases} \infty & (N = 1, 2), \\ 2N/(N-2) & (N \ge 3). \end{cases}$$

さらにポテンシャル V_i に対しては以下の条件を課す:

(V1) $\forall i = 1, 2, 3$, $V_i \in L^\infty(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$.

(V2) $\forall i = 1, 2, 3$, $V_i(x) \le \lim_{|y|\to\infty} V_i(y) =: V_{i,\infty} \in \mathbb{R}$, a.e. $x \in \mathbb{R}^N$.

(V3) $\forall i = 1, 2, 3$, $0 < C_i \le V_i(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}^N$.

Pomponio [12] は $\gamma > 0$ が十分大きいときに $(\mathcal{P}_\gamma)$ の vector ground state (全ての成分が 0 でないエネルギー最小解) の存在性を研究した. しかし, 十分小さい γ に対する ground state が scalar (1 つの成分のみ 0 でない解) になるかどうかは明らかではなかった. 本稿ではこの問題に対して肯定的な答えを与える. さらに $\gamma \to \infty$ における ground state の詳細な漸近挙動を紹介する.

以下, 今回扱う問題設定の詳細を述べる. $\mathbb{H} := H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$ とおく. $(\mathcal{P}_\gamma)$ の解は次の汎関数の臨界点として特徴付けられる:

$$I_\gamma(\mathbf{u}) := \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \frac{1}{2}(|\nabla u_i|^2 + V_i(x)u_i^2) - \frac{1}{p+1}|u_i|^{p+1} \right\} - \gamma \int_{\mathbb{R}^N} u_1 u_2 u_3.$$

また, 最小エネルギーを以下のように定める:

$$c_\gamma := \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{N}_\gamma} I_\gamma(\mathbf{u}).$$

ここで

$$\mathcal{N}_\gamma := \{\mathbf{u} \in \mathbb{H} \setminus \{(0,0,0)\} \mid G_\gamma(\mathbf{u}) = 0\},$$
$$G_\gamma(\mathbf{u}) := \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_i|^2 + V_i(x)u_i^2 - |u_i|^{p+1}) - 3\gamma \int_{\mathbb{R}^N} u_1 u_2 u_3.$$

定義 2.1. $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\gamma)$ の *ground state* であるとは, $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\gamma)$ の非自明解であり, $(\mathcal{P}_\gamma)$ の任意の非自明解 $\mathbf{v}$ に対して $I_\gamma(\mathbf{u}) \leq I_\gamma(\mathbf{v})$ が成り立つことである.

詳細な漸近展開を述べるために次の極限問題を考える:

$$\begin{cases} -\Delta w_1 + V_1(x)w_1 = w_2 w_3, \\ -\Delta w_2 + V_2(x)w_2 = w_1 w_3, \\ -\Delta w_3 + V_3(x)w_3 = w_1 w_2. \end{cases} \tag{$\tilde{\mathcal{P}}_\infty$}$$

$(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の解は次の汎関数の臨界点として特徴づけられる:

$$\tilde{I}_\infty(\mathbf{w}) := \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}(|\nabla w_i|^2 + V_i(x)w_i^2) - \int_{\mathbb{R}^N} w_1 w_2 w_3.$$

ここで先ほどと同様に最小エネルギーを以下のように定める:

$$\tilde{c}_\infty := \inf_{\mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}_\infty} \tilde{I}_\infty(\mathbf{w}),$$
$$\tilde{\mathcal{N}}_\infty := \{\mathbf{w} \in \mathbb{H} \setminus \{(0,0,0)\} \mid \tilde{G}_\infty(\mathbf{w}) = 0\},$$
$$\tilde{G}_\infty(\mathbf{w}) := \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla w_i|^2 + V_i(x)w_i^2) - 3\int_{\mathbb{R}^N} w_1 w_2 w_3.$$

以下, 今回得られた主結果を述べる. その前に極限問題の最小化問題 $\tilde{c}_\infty$ の最小化列のコンパクト性についての命題を述べる. 証明については Kurata-Osada [8] を参照のこと.

命題 2.2. $\{\mathbf{w}_n\}_{n=1}^\infty \subset \tilde{\mathcal{N}}_\infty$ を $\tilde{c}_\infty$ の最小化列とする. このとき部分列をとれば, ある $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^N$ と $(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の *ground state* $\mathbf{w} \in \mathbb{H}$ が存在して

$$\|\mathbf{w}_n(\cdot + \xi_n) - \mathbf{w}\|_{\mathbb{H}} \to 0$$

が成り立つ. $(V_1, V_2, V_3) \not\equiv (V_{1,\infty}, V_{2,\infty}, V_{3,\infty})$ のとき, $\xi_n = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ととれる.

ここで, $(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の ground state は vector になる. 命題 2.2 を用いて, c_γ の漸近展開公式を得る.

定理 2.3. $\gamma \to \infty$ のとき

$$c_\gamma = \tilde{c}_\infty/\gamma^2 + o(1/\gamma^2).$$

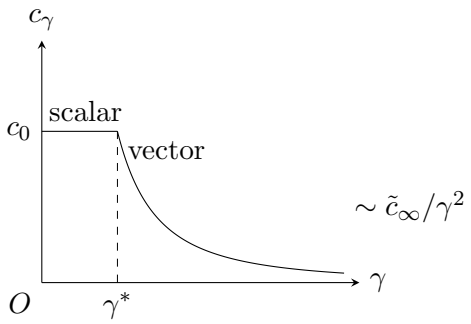
また, $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,\infty)$ を $\gamma_n \to \infty$ となる数列とし, $\mathbf{u}_n$ を $(\mathcal{P}_{\gamma_n})$ の *ground state* とする. このとき部分列をとれば, ある $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^N$ と $(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の *ground state* $\mathbf{w}$ が存在して

$$\|\gamma_n \mathbf{u}_n(\cdot + \xi_n) - \mathbf{w}\|_{\mathbb{H}} \to 0$$

が成り立つ. $(V_1, V_2, V_3) \not\equiv (V_{1,\infty}, V_{2,\infty}, V_{3,\infty})$ のとき, $\xi_n = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ととれる.

Pomponio [12] の Remark 1.1 より, c_γ は偶関数になるので $\gamma \in [0,\infty)$ のみを考える.

定理 2.4. c_γ は $[0,\infty)$ で単調減少かつ連続である. また, ある $\gamma^* > 0$ が存在して $c_\gamma = c_0$ $(\gamma \le \gamma^*)$ かつ $c_\gamma < c_0$ $(\gamma > \gamma^*)$ となる. さらに, $\gamma < \gamma^*$ のとき $(\mathcal{P}_\gamma)$ の *ground state* は *scalar* になり, $\gamma > \gamma^*$ のときは *vector* になる.



3 定理 2.3 の証明

以下のように汎関数 I_γ や c_γ をスケール変換する:
$\mathbf{u} \in \mathbb{H}$ に対して, $\mathbf{w} = \gamma \mathbf{u}$ とおく. このとき

$$I_\gamma(\mathbf{u}) = \frac{1}{\gamma^2}\tilde{I}_\gamma(\mathbf{w}),$$
$$G_\gamma(\mathbf{u}) = \frac{1}{\gamma^2}\tilde{G}_\gamma(\mathbf{w}),$$
$$c_\gamma = \frac{1}{\gamma^2}\tilde{c}_\gamma$$

となる. ここで

$$\tilde{I}_\gamma(\mathbf{w}) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_i|^2 + V_i(x) w_i^2 - \frac{1}{p+1}\frac{1}{\gamma^{p-1}}\sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |w_i|^{p+1} - \int_{\mathbb{R}^N} w_1 w_2 w_3,$$
$$\tilde{c}_\gamma := \inf_{\mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma} \tilde{I}_\gamma(\mathbf{w}),$$
$$\tilde{\mathcal{N}}_\gamma := \{\mathbf{w} \in \mathbb{H} \setminus \{(0,0,0)\} \mid \tilde{G}_\gamma(\mathbf{w}) = 0\},$$
$$\tilde{G}_\gamma(\mathbf{w}) := \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ |\nabla w_i|^2 + V_i(x) w_i^2 - \frac{1}{\gamma^{p-1}}|w_i|^{p+1} \right\} - 3\int_{\mathbb{R}^N} w_1 w_2 w_3.$$

また $(\mathcal{P}_\gamma)$ を変換すると

$$\begin{cases} -\Delta w_1 + V_1(x)w_1 - |w_1|^{p-1}w_1/\gamma^{p-1} = w_2w_3, \\ -\Delta w_2 + V_2(x)w_2 - |w_2|^{p-1}w_2/\gamma^{p-1} = w_1w_3, \\ -\Delta w_3 + V_3(x)w_3 - |w_3|^{p-1}w_3/\gamma^{p-1} = w_1w_2. \end{cases} \tag{$\tilde{\mathcal{P}}_\gamma$}$$

となる. これより定理 2.3 の証明は次の命題を示すことに帰着される:

命題 3.1. $\tilde{c}_\gamma \to \tilde{c}_\infty$ $(\gamma \to \infty)$ が成り立つ. さらに $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,\infty)$ を $\gamma_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ となる数列とし, $\mathbf{w}_n$ を $(\tilde{\mathcal{P}}_{\gamma_n})$ の *ground state* とする. このとき部分列をとれば, ある $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^N$ と $(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の *ground state* $\mathbf{w}$ が存在して

$$\|w_{i,n}(\cdot + \xi_n) - w_i\|_{H^1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ. $\mathbf{V} \not\equiv \mathbf{V}_\infty$ なら $\xi_n = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ととれる.

命題 3.1 の証明の前に次の補題を用意する.

補題 3.2 (c.f. Lemma 2.3 in Pomponio [12]). 任意の $\mathbf{w} \in \mathbb{H} \setminus \{(0,0,0)\}$ に対して,

$$s_\gamma \mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma, \quad \tilde{I}_\gamma(s_\gamma \mathbf{w}) = \max_{s>0} \tilde{I}_\gamma(s\mathbf{w})$$

となる $s_\gamma > 0$ がただ一つ存在する.

証明. $\mathbf{w} \in \mathbb{H} \setminus \{(0,0,0)\}$ とする. $s > 0$ に対して

$$f(s) := \tilde{I}_\gamma(s\mathbf{w}) = \frac{A}{2}s^2 - \frac{B}{p+1}s^{p+1} - Cs^3,$$

$$A := \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_i|^2 + V_i(x)w_i^2 > 0,$$

$$B := \frac{1}{\gamma^{p-1}} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |w_i|^{p+1} > 0,$$

$$C := \int_{\mathbb{R}^N} w_1w_2w_3 \in \mathbb{R}$$

とおく. $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ が一意の最大点をもつことを示す.

$$\lim_{s\to+0} \frac{f(s)}{s^2} = A > 0, \quad \lim_{s\to\infty} f(s) = -\infty$$

より, f は $(0,\infty)$ で少なくとも一つ最大点をもつ. すなわち, ある $s_\gamma > 0$ が存在して

$$f(s_\gamma) = \max_{s>0} f(s)$$

をみたす. $s > 0$ が f の最大点ならば

$$f'(s) = As - Bs^p - 3Cs^2 = 0 \Longleftrightarrow A = Bs^{p-1} + 3Cs. \tag{3}$$

s_γ が (3) の一意解であることを示せばよい. $C \geq 0$ のときは明らか. $C < 0$ のとき, $D := -C$ とおく. さらに

$$g(s) := A - Bs^{p-1} + 3Ds$$

とおく. このとき $g'(s) = -(p-1)Bs^{p-2} + 3D$ となるから, $g'(s)$ は $(0,\infty)$ においてただ一つの零点 $s_0 > 0$ をもち, $g'(s) > 0$ $(0 < s < s_0)$ かつ $g'(s) < 0$ $(s > s_0)$ を得る. したがって $g(s)$ は $(0,\infty)$ においてただ一つの零点をもつ. (3) より $s_\gamma \mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma$ を得る. □

命題 3.1 の証明. (Step 1) まず upper bound $\tilde{c}_\gamma \le \tilde{c}_\infty$ $(\forall \gamma > 0)$ を示す. $\mathbf{w}$ を $(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の ground state とする. 補題 3.2 より, $s_\gamma \mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma$ となる $s_\gamma > 0$ が存在する. このとき

$$\tilde{c}_\infty = \tilde{I}_\infty(\mathbf{w}) \ge \tilde{I}_\infty(s_\gamma \mathbf{w}) \ge \tilde{I}_\gamma(s_\gamma \mathbf{w}) \ge \tilde{c}_\gamma.$$

(Step 2) 次に lower bound $\tilde{c}_\gamma \ge \tilde{c}_\infty + o(1)$ as $\gamma \to \infty$ を示す. まず次を示す:

$$\exists C > 0 \ \text{ s.t. } \ \forall \gamma \ge 1, \ \forall \mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma, \ \ \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}} \ge C.$$

実際, $\gamma \ge 1$ と $\mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma$ に対して

$$\begin{aligned} C\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}^2 &\le \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_i|^2 + V_i(x) w_i^2 = \frac{1}{\gamma^{p-1}} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |w_i|^{p+1} + 3\int_{\mathbb{R}^N} w_1 w_2 w_3 \\ &\le C(\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}^{p+1} + \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}^3). \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって

$$C \le \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}^{p-1} + \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}$$

が成り立つ. $p = 2$ のときは明らか. $p > 2$ とすると

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}^{p-1} + \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}} \le \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}^{p-1} + \frac{1}{p-1}\left(\frac{\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}}}{\varepsilon}\right)^{p-1} + \frac{p-2}{p-1}\varepsilon^{(p-1)/(p-2)}$$

となるので $C - \frac{p-2}{p-1}\varepsilon^{(p-1)/(p-2)} > 0$ となるくらい十分小さい $\varepsilon > 0$ をとればよい. 以上より, ある $C > 0$ が存在して任意の $\gamma \ge 1$ と $\mathbf{w} \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma$ に対して $\|\mathbf{w}\|_{\mathbb{H}} \ge C$ が成り立つ.

$\mathbf{w}_\gamma$ を $(\tilde{\mathcal{P}}_\gamma)$ の ground state とする. このときある $\gamma_0 \ge 1$ と $C > 0$ が存在して, 任意の $\gamma \ge \gamma_0$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_{1,\gamma} w_{2,\gamma} w_{3,\gamma} \ge C$$

が成り立つ. 実際, $\tilde{c}_\gamma$ の upper bound より,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_\infty \ge \tilde{c}_\gamma &= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{i,\gamma}|^2 + V_i(x) w_{i,\gamma}^2 + \frac{1}{\gamma^{p-1}} \frac{p-2}{3(p+1)} \int_{\mathbb{R}^N} |w_{i,\gamma}|^{p+1} \\ &\ge C\|\mathbf{w}_\gamma\|_{\mathbb{H}}^2, \quad \forall \gamma > 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって $\{\mathbf{w}_\gamma\}_{\gamma>0}$ は $\mathbb{H}$ で有界である. $\mathbf{w}_\gamma \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma$ であるから,

$$\begin{aligned} C \le C\|\mathbf{w}_\gamma\|_{\mathbb{H}}^2 &\le \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{i,\gamma}|^2 + V_i(x) w_{i,\gamma}^2 \\ &= \frac{1}{\gamma^{p-1}} \sum_{i=1}^3 \int_{\mathbb{R}^N} |w_{i,\gamma}|^{p+1} + 3\int_{\mathbb{R}^N} w_{1,\gamma} w_{2,\gamma} w_{3,\gamma} \\ &\le \frac{1}{\gamma^{p-1}} C + 3\int_{\mathbb{R}^N} w_{1,\gamma} w_{2,\gamma} w_{3,\gamma} \end{aligned}$$

となる. したがって 十分大きな γ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}^N} w_{1,\gamma} w_{2,\gamma} w_{3,\gamma} \ge C \tag{4}$$

が成り立つ. 十分大きな γ に対して, $t_\gamma > 0$ を $t_\gamma \mathbf{w}_\gamma \in \tilde{\mathcal{N}}_\infty$ となるものとする (この事実は補題 3.2 と同様の方法で示せる). このとき

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{i,\gamma}|^2 + V_i(x) w_{i,\gamma}^2 = 3t_\gamma \int_{\mathbb{R}^N} w_{1,\gamma} w_{2,\gamma} w_{3,\gamma}. \tag{5}$$

$\mathbf{w}_\gamma \in \tilde{\mathcal{N}}_\gamma$ であるから,

$$\sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{i,\gamma}|^2 + V_i(x) w_{i,\gamma}^2 = \frac{1}{\gamma^{p-1}} \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} |w_{i,\gamma}|^{p+1} + 3 \int_{\mathbb{R}^N} w_{1,\gamma} w_{2,\gamma} w_{3,\gamma} \tag{6}$$

を得る. (4),(5),(6) より,

$$\begin{aligned} &3(t_\gamma - 1) \int_{\mathbb{R}^N} w_{1,\gamma} w_{2,\gamma} w_{3,\gamma} = \frac{1}{\gamma^{p-1}} \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} |w_{i,\gamma}|^{p+1}, \\ &0 \le t_\gamma - 1 \le \frac{C}{\gamma^{p-1}}, \end{aligned}$$

すなわち, $t_\gamma \to 1$ $(\gamma \to \infty)$ を得る. したがって

$$\tilde{c}_\gamma = \tilde{I}_\gamma(\mathbf{w}_\gamma) \ge \tilde{I}_\gamma(t_\gamma \mathbf{w}_\gamma) = \tilde{I}_\infty(t_\gamma \mathbf{w}_\gamma) + o(1) \ge \tilde{c}_\infty + o(1), \quad \text{as } \gamma \to \infty.$$

したがって

$$\begin{aligned} &\tilde{c}_\gamma \to \tilde{c}_\infty, \quad \text{as } \gamma \to \infty, \\ &\tilde{I}_\infty(t_\gamma \mathbf{w}_\gamma) \to \tilde{c}_\infty, \quad \text{as } \gamma \to \infty \end{aligned}$$

を得る.

(Step 3) $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$ を $\gamma_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ となる数列とする. $\mathbf{w}_n$ を $(\tilde{\mathcal{P}}_\gamma)$ の ground state とする. (Step 2) と同様の議論により, 十分大きな γ_n に対して, ある $t_n > 0$ が存在して

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{w}_n\|_{\mathbb{H}}^2 \le C, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n \to 1, \text{ as } n \to \infty, \\ &t_n \mathbf{w}_n \in \tilde{\mathcal{N}}_\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \tilde{I}_\infty(t_n \mathbf{w}_n) \to \tilde{c}_\infty, \quad \text{as } n \to \infty \end{aligned} \tag{7}$$

が成り立つ. 命題 2.2 より, 部分列をとれば, $(\tilde{\mathcal{P}}_\infty)$ の ground state $\mathbf{w}$ と $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^N$ (もし $\mathbf{V} \not\equiv \mathbf{V}_\infty$ なら $\xi_n = 0$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ととれる) が存在して

$$\|t_n w_{i,n}(\cdot + \xi_n) - w_i\|_{H^1} \to 0, \quad \text{as } n \to \infty.$$

さらに (7) より,

$$\|w_{i,n}(\cdot + \xi_n) - w_i\|_{H^1} \to 0, \quad \text{as } n \to \infty$$

を得る. □

4 定理 2.4 の証明

定理 2.4 の証明を与える前に, いくつか補題を述べる.

補題 4.1. $\gamma \in \mathbb{R}$ とし $\mathbf{u}$ を $(\mathcal{P}_\gamma)$ の *ground state* で $\gamma \int_{\mathbb{R}^N} u_1u_2u_3 = 0$ となるものとする *(*もし $\gamma = 0$ なら自動的にみたす*)*. このとき $c_\gamma = \min_{i=1,2,3} c(i)$ かつ $\mathbf{u} = (u_1, 0, 0)$ *or* $(0, u_2, 0)$ *or* $(0, 0, u_3)$ となる. ここで

$$
\begin{aligned}
I_{V_i}(u_i) &:= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}(|\nabla u_i|^2 + V_i(x)u_i^2) - \frac{1}{p+1}|u_i|^{p+1}, \\
\mathcal{N}(i) &:= \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} \mid I'_{V_i}(u)[u] = 0\}, \\
c(i) &:= \inf_{u \in \mathcal{N}(i)} I_{V_i}(u) > 0.
\end{aligned}
$$

補題 4.2. $\{\gamma_n\}_{n=1}^\infty \subset (0, \infty)$ を $\gamma_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となるものとし, $\mathbf{u}_n$ を $(\mathcal{P}_{\gamma_n})$ の *ground state* とする. このときある $i \neq j$ で $u_{i,n}, u_{j,n} \to 0$ *in* $H^1(\mathbb{R}^N)$ となるものが存在する.

定理 2.4 の証明. Claim 1. c_γ は $[0, \infty)$ で単調減少する. Claim 1 は [12] の Lemma 2.5 と同様の議論によって示せる.

Claim 2. c_γ は $[0, \infty)$ で連続である. c_γ の連続性の証明は本稿では省略する. 詳しくは Kurata-Osada [8] を参照.

Claim 3. ある $\gamma^* \geq 0$ が存在して $c_\gamma = c_0$ $(0 \leq \gamma \leq \gamma^*)$ かつ $c_\gamma < c_0$ $(\gamma > \gamma^*)$ となる. $\{\gamma \geq 0 \mid c_\gamma = c_0\}$ は有界閉区間である. 実際, $c_\gamma = c_\infty/\gamma^2 + o(1/\gamma^2)$ as $\gamma \to \infty$ であるから, 有界集合である. また閉集合であることは c_γ の連続性から従う. また区間であることは c_γ の単調性から従う. したがって $\{\gamma \geq 0 \mid c_\gamma = c_0\}$ の最大値が存在する. $\gamma^* := \max\{\gamma \geq 0 \mid c_\gamma = c_0\}$ とおく. このとき $c_\gamma = c_0$ $(0 \leq \gamma \leq \gamma^*)$ かつ $c_\gamma < c_0$ $(\gamma > \gamma^*)$ となる.

Claim 4. $\gamma^* > 0$ となる. もし $\gamma^* = 0$ とすると, $\gamma_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となる $\gamma_n > 0$ と $(\mathcal{P}_{\gamma_n})$ の vector ground state $(u_{1,n}, u_{2,n}, u_{3,n})$ が存在する. 補題 4.2 より, $u_{2,n}, u_{3,n} \to 0$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$ と仮定してよい. $\{u_{1,n}\}_{n=1}^\infty$ は $H^1(\mathbb{R}^N)$ で有界である. ここで

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{2,n}|^2 + V_2(x)u_{2,n}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_{2,n}|^{p+1} + \gamma_n \int_{\mathbb{R}^N} u_{1,n}u_{2,n}u_{3,n}, \\
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_{3,n}|^2 + V_3(x)u_{3,n}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} |u_{3,n}|^{p+1} + \gamma_n \int_{\mathbb{R}^N} u_{1,n}u_{2,n}u_{3,n}
\end{aligned}
$$

を得る. さらに

$$
C(\|u_{2,n}\|_{H^1}^2 + \|u_{3,n}\|_{H^1}^2) \leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_{2,n}|^{p+1} + |u_{3,n}|^{p+1} + 2\gamma_n \int_{\mathbb{R}^N} u_{1,n}u_{2,n}u_{3,n}
$$

が成り立つ. Sobolev の埋め込みに注意すると

$$
\begin{aligned}
2\int_{\mathbb{R}^N} |u_{1,n}||u_{2,n}||u_{3,n}| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_{1,n}|(|u_{2,n}|^2 + |u_{3,n}|^2) \\
&\leq C\|u_{1,n}\|_{L^3}(\|u_{2,n}\|_{H^1}^2 + \|u_{3,n}\|_{H^1}^2) \\
&\leq C(\|u_{2,n}\|_{H^1}^2 + \|u_{3,n}\|_{H^1}^2)
\end{aligned}
$$

を得る. $\gamma_0 > 0$ を $\gamma_0 C \leq 1/2$ となるものとする. すると $0 < \gamma_n < \gamma_0$ に対して,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\|u_{2,n}\|_{H^1}^2 + \|u_{3,n}\|_{H^1}^2) &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |u_{2,n}|^{p+1} + |u_{3,n}|^{p+1} \\
&\leq C\left(\|u_{2,n}\|_{H^1}^2 + \|u_{3,n}\|_{H^1}^2\right)^{(p+1)/2}
\end{aligned}
$$

を得る. $u_{2,n} \neq 0$ かつ $u_{3,n} \neq 0$ であるから,

$$\frac{1}{2} \leq C \left(\|u_{2,n}\|_{H^1}^2 + \|u_{3,n}\|_{H^1}^2 \right)^{(p-1)/2}$$

を得る. これは $u_{2,n}, u_{3,n} \to 0$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$ となることに反する.

Claim 5. $\gamma > \gamma^*$ に対して, $(\mathcal{P}_\gamma)$ の任意の ground state は vector になり c_γ は狭義単調減少する. さらに $0 < \gamma < \gamma^*$ のとき $(\mathcal{P}_\gamma)$ の任意の ground state は scalar になる.

$\gamma > \gamma^*$ とする. このとき $c_\gamma < c_0$ となる. $\mathbf{u}$ を $(\mathcal{P}_\gamma)$ の ground state とする. $c_\gamma < c_0$ より, $\mathbf{u}$ は vector になる. $\gamma_1, \gamma_2 > \gamma^*$ を $\gamma_1 < \gamma_2$ となるものとする. $\mathbf{u}$ を $(\mathcal{P}_{\gamma_1})$ の ground state とする. $c_{\gamma_1} < c_0$ であるから, $\mathbf{u}$ は vector になり, 補題 3.2, 補題 4.1 より

$$\max_{t>0} I_{\gamma_1}(t\mathbf{u}) = I_{\gamma_1}(\mathbf{u}),$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} u_1 u_2 u_3 > 0$$

をみたす. $\bar{t} > 0$ を $\bar{t}\mathbf{u} \in \mathcal{N}_{\gamma_2}$ となるものとする. このとき

$$c_{\gamma_1} = I_{\gamma_1}(\mathbf{u}) \geq I_{\gamma_1}(\bar{t}\mathbf{u}) > I_{\gamma_2}(\bar{t}\mathbf{u}) \geq c_{\gamma_2}.$$

を得る. 次に $0 < \gamma < \gamma^*$ のとき $(\mathcal{P}_\gamma)$ の任意の ground state は scalar になることを示す. もしそうでないとすると, ある $\gamma_1 \in (0, \gamma^*)$ と $(\mathcal{P}_{\gamma_1})$ の vector ground state が存在する. 先ほどと同様に $c_{\gamma_1} > c_{\gamma_2}$ $(\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma^*)$ が成り立つ. これは $c_\gamma = c_0$ $(\forall \gamma \in [0, \gamma^*])$ となることに反する. □

参考文献

[1] A. H. Ardila, Orbital stability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction, *Nonlinear Anal.*, **167** (2018), 1–20.

[2] T. Cazenave and P.-L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Math. Phys.*, **85** (1982), 549–561.

[3] M. Colin and T. Colin, On a quasilinear Zakharov system describing laser-plasma interactions, *Differ. Integral Equ.*, **17** (2004), 297–330.

[4] M. Colin and T. Colin, A numerical model for the Raman amplification for laser-plasma interaction, *J. Comput. Appl. Math.*, **193** (2006), 535–562.

[5] M. Colin and M. Ohta, Bifurcation from semitrivial standing waves and ground states for a system of nonlinear Schrödinger equations, *SIAM J. Math. Anal.*, **44** (2012), 206–223.

[6] M. Colin, T. Colin and M. Ohta, Instability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three-wave interaction, *Funkcial. Ekvac.*, **52** (2009), 371–380.

[7] M. Colin, T. Colin and M. Ohta, Stability of solitary waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **26** (2009), 2211–2226.

[8] K. Kurata and Y. Osada, Asymptotic expansion of the ground state energy for nonlinear Schrödinger system with three wave interaction, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **20** (2021), 4239–4251. doi: 10.3934/cpaa.2021157

[9] K. Kurata and Y. Osada, Variational problems associated with a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, (2021), 37 pp. doi: 10.3934/dcdsb.2021100

[10] S. Le Coz, Standing waves in nonlinear Schrödinger equations, Analytical and Numerical Aspects of Partial Differential Equations, de Gruyter, Berlin, (2009), 151-192.

[11] Y. Osada, Energy asymptotic expansion for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction, submitted (2021).

[12] A. Pomponio, Ground states for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction, *J. Math. Phys.*, **51** (2010), 093513.

[13] R. Tian, Z. Q. Wang and L. Zhao, Schrödinger systems with quadratic interactions, *Commun. Contemp. Math.*, **21** (2019), 1850077.

[14] J. Wang, Solitary waves for coupled nonlinear elliptic system with nonhomogeneous nonlinearities, *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, **56** (2017), 1–38.

[15] L. Zhao, F. Zhao and J. Shi, Higher dimensional solitary waves generated by second-harmonic generation in quadratic media, *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, **54** (2015), 2657–2691.

セゲディウォークが対応する佐藤ゼータ函数

横浜国立大学大学院 理工学府 数物・電子情報系理工学専攻
石川彩香 (Ayaka Ishikawa)

1 概要

量子ウォークとはランダムウォークのウォーカーにスピンという状態を付与した数理モデルであり，ランダムウォークの量子版と言われている．現在，量子ウォークは多岐にわたる分野で研究されており，例えば量子探索や金融データの解析，さらには放射性同位体分離などでも応用されている (e.g., [8, 10, 11])．量子ウォークの挙動を解析するのはランダムウォークに比べて格段に難しく，「グラフ・量子ウォークモデル・初期状態」をどう設定するかによって挙動の特徴は大きく変わる．特に我々が扱っている有限グラフ上の離散時間量子ウォークは，その遷移を定める「遷移行列」の固有値を求めることで「局在化」や「周期性」などの遷移の特徴を掴むことができる．特に，量子ウォークの代表的なモデルの一つであるグローヴァーウォーク [2] は，「佐藤ゼータ」というグラフゼータを用いて遷移行列の特性多項式を与えることができる [7]．これは，佐藤ゼータの行列式表示の一つである「橋本表示」を構成する「辺行列」[9] が，遷移行列と類似した構成になっていることが要因となっている．さらに，もう一つの行列式表示である「伊原表示」に変形することで，グローヴァー遷移行列の固有値を明示的に与えることが可能となった [7]．本稿の主題にもある「セゲディウォーク」とはグローヴァーウォークを一般化したモデルである [13]．先行研究のグラフゼータにはセゲディウォークに対応するようなものは存在せず，本研究にて初めて定義された [4]．本講演では，このセゲディ遷移行列の固有値を与えるために，セゲディウォークに対応するグラフゼータの伊原表示について紹介する．

先の話にも既に出てきたが，改めてグラフゼータについて簡単に紹介しよう．グラフゼータとはグラフ上定義されたセルバーグゼータの類似である．1966 年に伊原 [6] によって初めて定義されて以来，様々なグラフ上で多くの種類のゼータが定義・研究されてきた (e.g. [1, 12])．グラフゼータにおける大きな研究の話題として，グラフゼータのもつ「表示」が挙げられる．一般に，グラフゼータはオイラー積（以下，オイラー表示と呼ぶ）で定義されるのが通例であり, 指数関数を用いた「指数表示」や橋本表示，伊原表示の導出は各グラフゼータで別個に導出されてきた．その中で，森田氏 [9] は「指数表示・オイラー表示・橋本表示」が同様の手法によって導出されている点に注目し, グラフゼータの三種の表示が互いに変形可能であることを示した．しかし，グラフゼータでしか観察されていない伊原表示については，どのような条件下で変形可能かは述べられていない．さらに，グラフが有向か無向かによって伊原表示に現れる行列が若干異なることが，既存のグラフゼータを特別な場合にもつ「一般荷重ゼータ」において確認された [3, 5]．本稿で紹介するゼータは一般荷重ゼータには含まれないが，伊原表示をもつことが確認された [4]．また，一般荷重ゼータと同様に，グラフが有向か

無向かによって伊原表示は異なり，有向グラフに対するゼータの伊原表示にはこれまでに観察されてこなかった行列が現れた．この結果は，伊原表示の存在性を議論するにあたって，そもそもの伊原表示の定義を拡張する必要性が出てきたということである．

本稿で扱うグラフは有限であり，特に断りがない限り多重辺（多重アーク）や多重ループを許す．$\mathbb{C}$ 上正方行列 M に対し，M の固有値全体の集合を $\mathrm{Spec}(M)$ と書く．命題 P に対し，δ_P を P が真の時に 1，偽の時に 0 を返す関数とする．

なお．本研究は今野紀雄氏との共同研究であり，JSPS 特別研究員奨励費 (課題番号:20J20590) の助成を受けたものである．

2 定義

集合 V と，V のいくつかの 2 元集合からなる集合 E からなる組 $G = (V, E)$ をグラフといい，V, E の元をそれぞれ頂点，辺と呼ぶ．グラフを描画する場合，辺 $\{u, v\} \in E$ は頂点 u, v を実線で結んで表される．V, E が共に有限集合の場合，G を有限グラフという．辺 $\{u, u\} \in E$ をループと呼ぶ．各 2 頂点間に辺が高々 1 つしか存在せず，さらにはどの頂点にもループが存在しないとき，そのようなグラフは単純であるという．頂点 u に接続する辺の個数 $\#\{\{u, v\} \in E | v \in V\}$ を u の次数といい，$\deg(u)$ で表す．

V を頂点集合，いくつかの頂点順序対からなる集合を $\mathcal{A}$ とおく．このとき，集合の組 $\Delta = (V, \mathcal{A})$ を有向グラフといい，$\mathcal{A}$ の元をアーク（有向辺）と呼ぶ．有向グラフを描画する場合，各アーク $a = (u, v)$ は頂点 v 側に矢尻が来るような u, v を結ぶ矢印で表される．また，このようなアーク a に対し，u, v をそれぞれ尾 (tail)，頭 (head) といい，$\mathfrak{t}(a), \mathfrak{h}(a)$ で表す．頂点 $u, v \in V$ に対し，次のアーク部分集合を定義する: $\mathcal{A}_{uv} := \{a \in \mathcal{A} \mid \mathfrak{t}(a) = u, \mathfrak{h}(a) = v\}$, $\mathcal{A}_{u*} := \{a \in \mathcal{A} | \mathfrak{t}(a) = u\}$, $\mathcal{A}_{*v} := \{a \in \mathcal{A} \mid \mathfrak{h}(a) = v\}$, $\mathcal{A}(u, v) := \mathcal{A}_{uv} \cup \mathcal{A}_{vu}$. 無向グラフ $G = (V, E)$ に対して，アーク集合 $\mathcal{A}(G) := \{(u, v), (v, u) | e = \{v, u\} \in E\}$ を定義する．このとき，有向グラフ $\Delta(G) = (V, \mathcal{A}(G))$ を G に対する対称有向グラフという．また，元のグラフの辺に対応する 2 つのアークを互いに他の逆アークとする．$a, a' \in \mathcal{A}(G)$ が互いに逆アークであるとき，$\overline{a} = a'$ と書く．

2.1 セゲディウォーク

$G = (V, E)$ を単純グラフ，$\Delta(G) = (V, \mathcal{A})$ を G に対する対称有向グラフとする．任意の頂点 v に対し, $\sum_{a \in \mathcal{A}(G), \mathfrak{t}(a) = v} p(a) = 1$ を満たす写像 $p : \mathcal{A} \to (0, 1]$ を G 上の遷移確率という．セゲディウォーク [13] とは，以下の遷移行列 $U_{\mathrm{SZ}} = (u_{\mathrm{SZ}}(a, a'))_{a, a' \in \mathcal{A}}$ で定義される量子ウォークモデルである:

$$u_{\mathrm{SZ}}(a, a') := 2\sqrt{p(a)p(\overline{a'})}\delta_{\mathfrak{t}(a)\mathfrak{h}(a')} - \delta_{a'\overline{a}}.$$

ただし, $\delta_{\mathfrak{t}(a)\mathfrak{h}(a')}$ はクロネッカーのデルタである．これは, 次の遷移行列 $U_{\mathrm{GR}} = (u_{\mathrm{GR}}(a, a'))_{a, a' \in \mathcal{A}}$ で定義されるグローヴァーウォークの一般化と言われている:

$$u_{\mathrm{GR}}(a, a') := \frac{2}{\deg \mathfrak{t}(a)}\delta_{\mathfrak{t}(a)\mathfrak{h}(a')} - \delta_{a'\overline{a}}.$$

実際，各 $a \in \mathcal{A}(G)$ に対して $p(a) = \frac{2}{\deg \mathfrak{t}(a)}$ とおくと $U_{\mathrm{SZ}} = U_{\mathrm{GR}}$ が成り立つ．

2.2 佐藤ゼータ

グラフ G に対する対称有向グラフ $\Delta(G) = (V, \mathcal{A}(G))$ を考える．任意の写像 $\tau : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ に対し，写像 $\theta^{\mathrm{S}} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ を

$$\theta^{\mathrm{S}}(a, a') = \tau(a')\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')} - \delta_{a'\overline{a}}$$

と定義する．これを佐藤ゼータの荷重と呼ぶ．$|\mathcal{A}(G)|$ 次正方行列 $M_{\mathrm{S}} = (\theta^{\mathrm{S}}(a, a'))_{a,a' \in \mathcal{A}(G)}$ を辺行列と呼ぶ．これを用いて佐藤ゼータを以下のように定義する:

$$Z_{\Delta(G)}(t; \theta^{\mathrm{S}}) = \frac{1}{\det(I - tM_{\mathrm{S}})}.$$

このような行列式表示を橋本表示という．元々の論文 [12] ではオイラー表示という別の表示で定義されていたが，この荷重は隣接条件 (see [9]) を満たすので，オイラー表示は橋本表示へ常に変形できる．本稿では量子ウォークとの関係を観察しやすくするため，橋本表示で定義した．

$|V|$ 次正方行列 $A^{\mathrm{S}}_{\Delta(G)}$, $D^{\mathrm{S}}_{\Delta(G)}$ を以下で定義する:

$$(A^{\mathrm{S}}_{\Delta(G)})_{uv} = \sum_{a \in \mathcal{A}_{uv}} \tau(a), \quad (D^{\mathrm{S}}_{\Delta(G)})_{uv} = \delta_{uv} \sum_{a \in \mathcal{A}_{u*}} \tau(a)$$

これらを用いて，佐藤ゼータは次の行列式表示に変形できる．

命題 1 (Sato [12])**.**

$$Z_{\Delta(G)}(t; \theta^{\mathrm{S}}) = \frac{1}{(1-t^2)^{|E|-|V|} \det(I - tA^{\mathrm{S}}_{\Delta(G)} + t^2(D^{\mathrm{S}}_{\Delta(G)} - I))}.$$

このような行列式表示を伊原表示と呼ぶ．

注意 1. $\tau(a') = \frac{2}{\deg \mathfrak{t}(a')}$ と定めると，$U_{\mathrm{GR}} = {}^t M_{\mathrm{S}}$ が成り立つ．一方で，セゲディ遷移行列と等しくなるような τ の設定はできないことに注意されたい．

以上の佐藤ゼータとグローヴァーウォークの関係を用いて，グローヴァー遷移行列の固有値集合が与えられる．

命題 2. 単純グラフ G に対して，グローヴァー遷移行列の特性多項式は次のように表せる*:*

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - U_{\mathrm{GR}}) &= (\lambda^2 - 1)^{|E|-|V|} \det((\lambda^2 + 1)I - 2\lambda T) \\ &= (\lambda^2 - 1)^{|E|-|V|} \prod_{\mu \in \mathrm{Spec}(T)} ((\lambda^2 + 1) - 2\mu\lambda). \end{aligned}$$

ただし，$T = (T_{uv})_{u,v \in V}$ は以下で定義される行列である*:*

$$T_{uv} = \begin{cases} \frac{1}{\deg(u)} & \textit{if } \{u, v\} \in E, \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

さらに，グローヴァー遷移行列の固有値集合は次の通りである*:*

$$\mathrm{Spec}(U_{\mathrm{GR}}) = \{\pm 1\}^{|E|-|V|} \sqcup \{\lambda \mid \lambda^2 - 2\mu\lambda + 1 = 0, \text{ for each } \mu \in \mathrm{Spec}(T)\}.$$

3　セゲディウォークに対応するゼータとその伊原表示

冒頭にも述べた通り，ここで新しく導入するグラフゼータはグラフが有向か無向かにより導出される伊原表示が異なる．その要因は「逆アーク」の設定にある．先の佐藤ゼータは無向グラフに対する対称有向グラフ上で定義されていたが，そこでは各アークに対して必ず逆が 1 つ定まるように「逆アーク」を定義していた．しかし，多重アークや多重ループが存在するような有向グラフ上でゼータを考えるとき，そのような逆の一対一対応がうまく作れない場合がある．この状況に対して，どのような有向グラフ上でも定義できるような逆の定義を与えたのが I-森田-佐藤 [5] である．そこでは，各アークに対して「それとは逆向きのアーク全てを逆アーク」と定義した．本稿では，この 2 つの逆アークの定義により，伊原表示がどのように変わるかを以下で述べていく．

改めて「逆アーク」の定義を明記しよう．グラフ $G=(V,E)$ に対し，$\Delta(G)=(V,\mathcal{A}(G))$ を G に対する対称有向グラフとする．各辺 $e\in E$ には 2 つのアーク $a,a'\in\mathcal{A}(G)$ が対応し，それらを互いに他の逆アークとする．一方，有向グラフ $\Delta=(V,\mathcal{A})$ において，各 $u,v\in V$，各アーク $a\in\mathcal{A}_{uv}$ に対して，任意のアーク $a'\in\mathcal{A}_{vu}$ を a の逆アークとする．ただし，ループ $a\in\mathcal{A}_{uu}$ の逆アークの集合は $\mathcal{A}_{uu}$ であり，a 自身も a の逆アークに含まれる．今後，「逆」の定義に依らずアーク a の逆アークの集合を a^{-1} と書くこととする．また，グラフ G に対する対称有向グラフを考える際には前者の「逆」の定義を，一般の有向グラフを考える際には後者の「逆」の定義を用いることとする．

$\Delta=(V,\mathcal{A})$ を有限有向グラフとする．ただし，この Δ は対称有向グラフか一般の有向グラフかは問わない．写像 $\tau_1,\tau_2:\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ に対し，写像 $\tau:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ を $\tau(a,a')=\tau_1(a)\tau_2(a')$ と定義する．さらに, 写像 $\theta:\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathbb{C}$ を $\theta(a,a')=\tau(a,a')\delta_{\mathfrak{h}(a)\mathfrak{t}(a')}-\delta_{a'\in a^{-1}}$ と定める．前述の通り, 逆アークの定義は扱うグラフによって変化するので注意されたい．辺行列 $M=(\theta(a,a'))_{a,a'\in\mathcal{A}}$ を用いて, 以下のようにグラフゼータを定義する:

$$Z_\Delta(t;\theta)=\frac{1}{\det(I-tM)}.$$

このゼータは森田 [9] で示された三種の表示をもつための条件を満たし，「指数表示・オイラー表示・橋本表示」は常に可変であることから，ここではセゲディウォークと関係のある橋本表示で定義する．

それでは，まずは無向グラフに対するゼータの伊原表示を示す．グラフ G に対する対称有向グラフ $\Delta(G)=(V,\mathcal{A}(G))$ について，$|V|$ 次正方行列 $A_{\Delta(G)},D_{\Delta(G)}$ を次で定義する:

$$(A_{\Delta(G)})_{uv}:=\sum_{a\in\mathcal{A}_{uv}}\tau(a,a),\qquad (D_{\Delta(G)})_{uv}:=\delta_{uv}\sum_{a\in\mathcal{A}_{u*}}\tau(\overline{a},a).$$

定理 1 (無向グラフに対する $Z_{\Delta(G)}(t;\theta)$ の伊原表示 (I-Konno [4]))**.** グラフ G に対する対称有向グラフ $\Delta(G)=(V,\mathcal{A}(G))$ に対し，

$$Z_{\Delta(G)}(t;\theta)=\frac{1}{(1-t^2)^{|E|-|V|}\det(I-tA_{\Delta(G)}+t^2(D_{\Delta(G)}-I))}$$

が成り立つ.

行列 $A_{\Delta(G)}$ の (u,v) 成分は u から v へ向かうアーク a の $\tau(a,a)$ の総和を取っている．$\tau_1=\tau_2=1$ とすれば, $A_{\Delta(G)}$ はグラフ G の隣接行列となることからも, これは隣接行列の類似と言える．また, 同様に $\tau_1=\tau_2=1$ のとき $D_{\Delta(G)}$ は次数行列となることより, これは次数行列の類似と言える．

次に，対称有向グラフではない一般の有向グラフ $\Delta=(V,\mathcal{A})$ 上のゼータの伊原表示を示す．各頂点 $u,v\in V$ に対し，行列 $J(u,v)=(\delta_{a\in a^{-1}})_{a,a'\in\mathcal{A}(u,v)}$ を定義する．さらに，$f(t;u,v)=\det(I+tJ(u,v))$ とおくと，

$$f(t;u,v):=\det(I+tJ(u,v))=\begin{cases}1-|\mathcal{A}_{uv}||\mathcal{A}_{vu}|t^2 & \text{if } u\neq v,\\ 1+|\mathcal{A}_{uu}|t & \text{otherwise}\end{cases}$$

が成り立つ．さらに，$|V|$ 次正方行列 $A_\Delta,\overline{D}_\Delta,\overline{X}_\Delta$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}(A_\Delta)_{uv}&:=\sum_{a\in\mathcal{A}_{uv}}\tau(a,a),\\ (\overline{D}_\Delta)_{uv}&:=\delta_{uv}\sum_{x\in V}f(t;u,x)^{-1}\sum_{a\in\mathcal{A}_{ux},a'\in a^{-1}}\tau(a',a),\\ (\overline{X}_\Delta)_{uv}&:=f(t;u,v)^{-1}|\mathcal{A}(u,v)\backslash\mathcal{A}_{uv}|\sum_{a,a'\in\mathcal{A}_{uv}}\tau(a,a').\end{aligned}$$

定理 2 (有向グラフに対する $Z_\Delta(t;\theta)$ の伊原表示 (I-Konno [4]))**.** 多重アークや多重ループを許す有限有向グラフ $\Delta=(V,\mathcal{A})$ 上の $Z_{\Delta(G)}(t;\theta)$ は以下のように書ける*:*

$$Z_\Delta(t;\theta)=\frac{1}{\prod_{u,v\in V}f(t;u,v)\det(I-tA_\Delta+t^2\overline{D}_\Delta-t^3\overline{X}_\Delta)}.$$

行列 $\overline{D}_\Delta$ は $Z_{\Delta(G)}(t;\theta)$ における $(1-t^2)^{-1}D_{\Delta(G)}$ に相当するものである．対称有向グラフにおいては，互いに逆アークとなる 2 つのアーク $a,\overline{a}$ に対する $\tau(\overline{a},a)$ の総和を取っている．一般の有向グラフでは各アークに対する逆アークは一意に決まらないので，a とその逆アーク $a'\in a^{-1}$ 全てに対して荷重 $\tau(a',a)$ の総和を取ることになる．この背景により，対称有向グラフにおける行列 $J(u,v)$ は，各辺 e とそれに対応する 2 つのアーク $a,\overline{a}$ に対して $J(e):=(\delta_{a'\in a^{-1}})_{a,a'\in\{a,\overline{a}\}}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ に相当している．よって，$f(t;u,v)$ も対称有向グラフにおいては $\det(I+tJ(e))=(1-t^2)$ にあたる．まとめると，行列 $\overline{D}_\Delta$ は $(1-t^2)D_{\Delta(G)}$ に対応し，これは次数行列の類似といえる．行列 A_Δ は $A_{\Delta(G)}$ と同様の定義であるが，$\overline{D}_\Delta,D_{\Delta(G)}$ の差により，実は A_Δ は $(1-t^2)^{-1}A_{\Delta(G)}$ に相当している．これも隣接行列の類似と言えよう．行列 $\overline{X}_\Delta$ は，この $A_\Delta,A_{\Delta(G)}$ 間の差によるもので生じた行列であることがわかる．

これまで, 伊原表示とはグラフの隣接行列と次数行列, またはそれらの類似で表される行列式表示であると捉えられてきたが, 既存のグラフゼータの荷重を少し拡張し, 有限有向グラフ上で考えると, $\overline{X}_\Delta$ のような行列が出現することが明らかになった．今後, より一般的な荷重をもつグラフゼータを考える上では,「伊原表示」の定義を改めて議論する必要がある．

参考文献

[1] L. Bartholdi (1999), *Counting paths in graphs*, Enseign. Math, Vol. 45, pp. 83-131.

[2] Lov K. Grover (1996), *A fast quantum mechanical algorithm for database search*, Proceedings of the Twenty-Eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pp. 212-219.

[3] Y. Ide, A. Ishikawa, H. Morita, I. Sato and E. Segawa (2021), *The Ihara expression for the generalized weighted zeta function of a finite simple graph*, Linear Algebra and its Applications, Vol. 627, pp. 227-241.

[4] A. Ishikawa and N. Konno, *A weighted graph zeta function involved in the Szegedy walk*, Quantum Information and Computation, in press.

[5] A. Ishikawa, H. Morita and I. Sato, *The Ihara expression for generalized weighted zeta functions of Bartholdi type on finite digraphs*, in preparation.

[6] Y. Ihara (1966), *On discrete subgroups of the two by two projective linear group over p-adic fields*, Journal of the Mathematical Society of Japan, Vol. 18, pp.219-235.

[7] N. Konno and I. Sato (2012), *On the relation between quantum walks and zeta functions*, Quantum Information Processing, Vol. 11, pp.341-349.

[8] L. Matsuoka, A. Ichihara, M. Hashimoto, and K. Yokoyama (2011), *Theoretical study for laser isotope separation of heavy-element molecules in a thermal distribution*, In Proceedings of the International Conference Toward and Over the Fukushima Daiichi Accident (GLOBAL 2011), 392063.

[9] H. Morita (2020), *Ruelle zeta functions for finite digraphs*, Linear Algebra and its Applications, Vol. 603, pp.329-358.

[10] D. Orrell (2020), *A quantum walk model of financial options*, SSRN Electronic Journal.

[11] R. Portugal (2018), *Quantum Walks and Search Algorithms*, Springer International Publishing, 2nd edition.

[12] I. Sato (2007), *A new Bartholdi zeta function of a graph*, International Journal of Algebra, Vol. 1, pp.269-281.

[13] M. Szegedy (2004), *Quantum speed-up of markov chain based algorithms*, In 45th Annual IEEE symposium on foundations of computer science, pp.32-41.

一様格子上の空間離散モデルにおけるパターン形成

公立はこだて未来大学大学院 システム情報科学研究科 複雑系情報科学領域
南 彩菜 *(Ayana MINAMI)
田中 吉太郎 †(Yoshitaro TANAKA)

概要

従来の多細胞生物におけるパターン形成を説明する理論は，細胞の大きさを考慮しない数理モデルが多い．しかし，実際の多細胞生物において，細胞の大きさがパターンに与える影響は大きい．そこで，本研究では，細胞の大きさを考慮した数理モデルを構築し，解析を行なった．構築した数理モデルにおいて，拡散の効果から安定な平衡点が不安定化する拡散誘導不安定化が起こる条件を解析的に求め，数値計算を行なった．また，細胞の大きさがパターンに与える影響を理論的に明らかにした．

1 導入

多細胞生物の発生現象や，熱帯魚の模様といったパターンの形成を理論的に調べるために，空間方向の独立変数が離散量であるモデル (以後，離散モデル) が既に多く提案されている [1]．現象の再現性が良いことや，実験との相性が良いことが分かっているが，解析が難しいことが多い．

一方，偏微分方程式など，空間方向の独立変数が連続量であるモデル (以後，連続モデル) に関しては多くの理論が提唱されている．例えば，A.Turing は拡散の効果によって平衡解が不安定化し，パターンが自発的に形成されることを理論的に示した [5].

このように連続モデルでは理論的にパターンが自発的に形成されることが報告されている．また，離散モデルにおいても自発的にパターンを形成するようなモデルが報告されている ([2]，[3]) が，離散的な空間構造自体に着目した離散モデルの一般論はまだ報告されていないようである．

しかし，図 1 に示すように実際の多細胞生物では細胞の大きさや形状といった離散的な空間構造がパターン全体に強く影響していると考えられる．よって，本研究では細胞の大きさを考慮した離散モデルにおいて，細胞の大きさがパターンにどのような影響を与えるかを理論的に明らかにすることを目的とする．

* Email address: g2121052@fun.ac.jp
† Email address: y-tanaka@fun.ac.jp

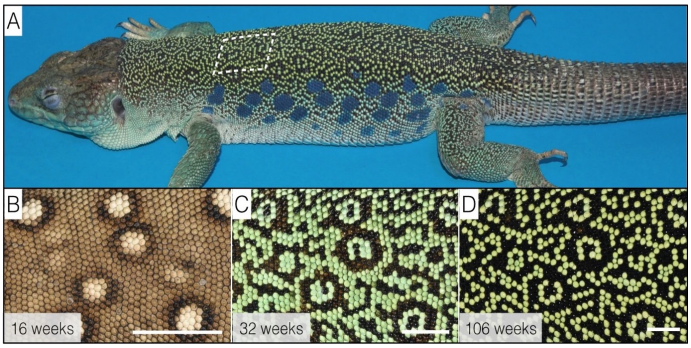


図 1　ホウセキカナヘビの表皮パターンが成長により変化する様子，[4]Fig.1 より引用

2　Turing の拡散誘導不安定化

本節では連続モデルにおいて，自発的なパターン形成を説明する基本的な理論である Turing の拡散誘導不安定化 [5] を説明する．そもそも拡散とは，物質の濃度が場所によって異なる際に，時間経過と共に濃度が一様化する現象を指す．Turing の拡散誘導不安定化とはこの拡散によって空間非一様化が促進するというパラドクスである．つまり，拡散によって，濃度が一様である平衡点が不安定化することを意味する．

Turing の拡散誘導不安定化を理論的に説明するために，時刻 $t > 0$ における座標 x 地点の反応物質の濃度をそれぞれ $u(x,t)$，$v(x,t)$ とし，次の 1 次元領域 $\boldsymbol{B}$ での反応拡散系を考える．

$$\begin{cases} u_t = f(u,v) + u_{xx}, \\ v_t = g(u,v) + dv_{xx}, \end{cases} t > 0,\ x \in \boldsymbol{B} \tag{2.1}$$

ここで f，g は物質の化学反応を表す関数，d は物質 u が拡散される速さを 1 としたときの v の拡散される速さを表しており，ここでは拡散係数比と呼称することにする．また，$\partial\boldsymbol{B}$ は反応拡散領域 $\boldsymbol{B}$ の閉じた境界を表し，境界条件と初期条件を

$$\begin{aligned} &u_x = v_x = 0,\ x \in \partial\boldsymbol{B} \\ &u(x,0) = u_0(x),\ v(x,0) = v_0(x) \end{aligned} \tag{2.2}$$

とする．

このような系において，Turing の拡散誘導不安定化が起きる条件を考える．式 (2.1) には，常微分方程式の意味で安定な平衡点 (u^*, v^*) が存在すると仮定する．つまり，

$$\begin{cases} f(u^*, v^*) = 0 \\ g(u^*, v^*) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

が成立し，

$$f_u + g_v < 0, \tag{2.4}$$

$$f_u g_v - f_v g_u > 0 \tag{2.5}$$

が成立すると仮定する．ただし，ここでは $f_u = f_u(u^*, v^*)$ のように表すとする．この仮定は，拡散の効果がない状況では平衡点に小さな摂動を与えても，平衡点が線形安定であることを意味する．つまり，拡散を考慮しない単独の細胞内においては，小さな濃度変化があってもいずれ一様な濃度に収束することを仮定している．平衡点におけるヤコビ行列 $\boldsymbol{A}$ を

$$A := \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

と定義する．[6] より，拡散によって平衡点が不安定化する条件として，

$$df_u + g_v > 0 \tag{2.7}$$

$$d_+ := (df_u + g_v)^2 - 4d(f_u g_v - f_v g_u) > 0 \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} f_u > 0,\ g_v < 0 \\ d > 1 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} f_u < 0,\ g_v > 0 \\ 0 < d < 1 \end{cases} \tag{2.9}$$

が得られる．

注 2.1. ここで式 (2.8) を満たせば，式 (2.7) を満たしていることに注意する．また，式 (2.9) は式 (2.4) および式 (2.7) から導出される．

3　離散構造を持つ数理モデルの構築

本節では細胞の大きさを考慮した数理モデルの構築について説明する．1 次元領域に N 個の細胞が並んでいる状況を考える．細胞の大きさを l とし，i 番目の細胞 C_i における，2 つの物質の濃度をそれぞれ $u_i(t)$，$v_i(t)$ とする．

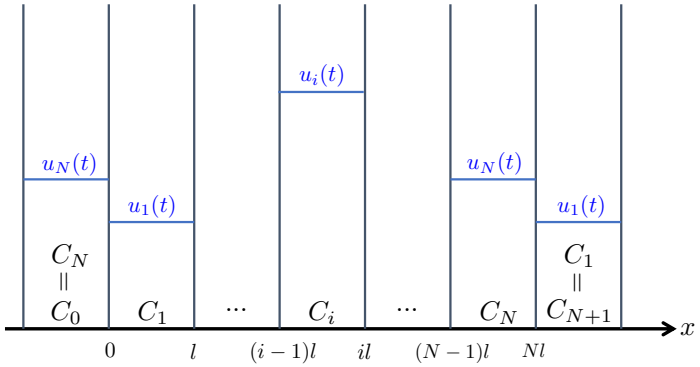


図 2　離散モデルが想定する状況

細胞の大きさを考慮した数理モデルにおける，Turing の拡散誘導不安定化が起きる条件を考えた

いため，次のような離散モデルを考える必要がある．

$$\begin{cases} u_{i,t} = f(u_i, v_i) + \dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{l^2}, \\ v_{i,t} = g(u_i, v_i) + \dfrac{d(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1})}{l^2}, \end{cases} \quad t > 0,\ i = 1, \cdots, N \tag{3.10}$$

また，初期条件と境界条件を

$$\begin{aligned} &u_i(0) = u_{i,0},\ v_i(0) = v_{i,0},\quad i = 1, \cdots, N \\ &u_0(t) = u_N(t),\ u_{N+1}(t) = u_1(t), v_0(t) = v_N(t),\ v_{N+1}(t) = v_1(t),\ t > 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

とする．

離散モデルのままでは解析を行ないにくいため，上記の離散モデルを連続化することを考える．連続化する際に取られる一般的な手法の 1 つとして，細胞の大きさ l の $+0$ 極限をとる，というものがある．しかし，本研究では細胞の大きさがパターン形成にどのような影響を及ぼすのかを明らかにしたいため，この手法は不適であると考えた．

そこで，離散構造を残したまま連続化する先行研究 [7] を用いて，細胞の大きさ l を考慮した数理モデルの構築を行なう．まず，特性関数

$$\chi_{C_i}(x) = \begin{cases} 1 & x \in C_i, \\ 0 & x \notin C_i, \end{cases} \tag{3.12}$$

を用いて，

$$u(x,t) := \sum_{i=1}^{N} u_i(t)\chi_{C_i}(x), \quad v(x,t) := \sum_{i=1}^{N} v_i(t)\chi_{C_i}(x),$$

と定義する．この関数 u, v を用いて，次のような離散構造を持つ数理モデル

$$\begin{cases} u_t = f(u,v) + L_\Delta(u), \\ v_t = g(u,v) + dL_\Delta(v), \end{cases} \quad x \in [0, Nl),\ t > 0 \tag{3.13}$$

を構築した．ただし，ここで

$$L_\Delta(w) := \frac{w(x-l) - 2w + w(x+l)}{l^2}$$

とする．ここで注意すべきは，拡散の分母に l^2 が含まれている点である．また，初期条件と境界条件は，

$$\begin{aligned} &u(x,0) = \sum_{i=1}^{N} u_{i,0}\chi_{C_i}(x),\ v(x,0) = \sum_{i=1}^{N} v_{i,0}\chi_{C_i}(x) \\ &u(x,t) = u(Nl \pm x, t), \quad v(x,t) = v(Nl \pm x, t), \end{aligned} \tag{3.14}$$

となる．構築した数理モデルは連続モデルの形を取っているが，元々の離散モデル (3.10) と各点的に同値であること，初期値を離散的に与えることで元の離散モデルと同値になることが先行研究 [7] からわかっている．

4　構築したモデルにおける解析結果

前節にて構築した数理モデルにおいて，Turing の拡散誘導不安定化が起きる条件を求めた．ここで，以下の記号と関数を導入する:

$$d_+ := \frac{f_u g_v - 2f_v g_u + 2\sqrt{-f_v g_u |A|}}{f_u^2}, \qquad l_c := \frac{4|A| + 4\sqrt{-f_v g_u |A|}}{f_u |A|},$$
$$d_1(l^2) := \frac{8g_v}{f_u(8 - l^2 f_u)} - \frac{g_v}{f_u}, \qquad d_2(l^2) := \frac{l^2(4g_v - l^2|A|)}{4(4 - l^2 f_u)}.$$

まず，$L_\Delta(u)$ に対して，以下の補題を与える．

補題 4.1. $E_n(x)$ を

$$E_n(x) := \sum_{j=1}^{N} v_n^j \chi_{C_j}(x)$$

とおく．ただし，ここで

$$v_n^j := \cos\frac{2n\pi \times j}{N} + \sin\frac{2n\pi \times j}{N}$$

とする．このとき

$$L_\Delta(E_n(x)) = \frac{C_n}{l^2} E_n(x), \quad C_n = 2\left(\cos\frac{2n\pi}{N} - 1\right), \tag{4.15}$$

(直交性)　$$\frac{1}{Nl}\int_0^{Nl} E_n(x)E_m(x)dx = \delta_{nm} \tag{4.16}$$

が成り立つ．すなわち，L_Δ の固有値は $\dfrac{C_n}{l^2}$，固有関数は $E_n(x)$ である．

注 4.2. $L_\Delta(u)$ の固有値を $\Lambda(k)$ とおく．周期境界条件では，補題 4.1 から

$$\Lambda(k) := \frac{C_n}{l^2} \tag{4.17}$$

となる．

注 4.3. 上記に示した $\Lambda(k)$，v_n^j は周期境界条件に対する L_Δ の固有値と固有関数であり，これらは境界条件に依存する．境界条件がディリクレ境界条件 $(u_0 = u_N = 0)$ の場合は

$$\Lambda(k) := \frac{2}{l^2}\left(\cos\frac{k\pi}{N+1} - 1\right),\ v_n^j := \sin\frac{n\pi \times j}{N+1} \tag{4.18}$$

となり，ノイマン境界条件 $(u_0 = u_1, u_N = u_{N+1})$ の場合は

$$\Lambda(k) := \frac{2}{l^2}\left(\cos\frac{k\pi}{N} - 1\right),\ v_n^j := \frac{\sin\dfrac{n\pi \times j}{N} + \sin\dfrac{n\pi \times (j-1)}{N}}{\sin\dfrac{n\pi}{N}} \tag{4.19}$$

となる．

また，平衡点 (u^*, v^*) まわりの線形化作用素の固有値 $\lambda(k)$ を，特性方程式

$$\begin{aligned} &\lambda(k)^2 - (f_u + g_v + \frac{d+1}{l^2}C_n)\lambda(k) + h(n) = 0, \\ &h(n) := \frac{d}{l^4}\left(C_n + \frac{l^2(df_u + g_v)}{2d}\right)^2 - \frac{(df_u + g_v)^2}{4d} + |A| \end{aligned} \tag{4.20}$$

の解とする．

定理 4.4.

$$df_u + g_v > 0, \tag{4.21}$$

$$\begin{cases} f_u > 0,\ g_v < 0, \\ d > 1, \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} f_u < 0,\ g_v > 0, \\ 0 < d < 1 \end{cases} \tag{4.22}$$

を仮定する．さらに，

$$\begin{cases} 0 < l^2 \leq \dfrac{8}{f_u} \text{に対して}, d > d_+ \\ \dfrac{8}{f_u} < l^2 < l_c \text{に対して}, d > d_+ \text{かつ } d \leq d_1(l^2) \end{cases} \tag{4.23}$$

または

$$\frac{8}{f_u} < l^2 \text{に対して}, d > d_1(l^2) \text{ かつ } d > d_2(l^2) \tag{4.24}$$

を仮定する．このとき，$Re\ \lambda(k) > 0$ となる $k \in \mathbb{N}$ が存在する．

本論文では式 (4.22) の 1 つ目の場合を考える．また，式 (4.21) と (4.22) の 1 つ目の条件と (4.23) を満たす領域を領域 A，式 (4.21) と (4.22) の 1 つ目の条件と (4.24) を満たす領域を領域 B と呼ぶことにする (図 3)．$d_1(l^2)$ の漸近線は $l^2 = \dfrac{8}{f_u}$，$d_2(l^2)$ の漸近線は $l^2 = \dfrac{4}{f_u}$ である．また，$d_1(l^2)$ と $d_2(l^2)$ の交点は (l_c, d_+) であり，(l_c, d_+) は $d_2(l^2)$ の極小点になっている．

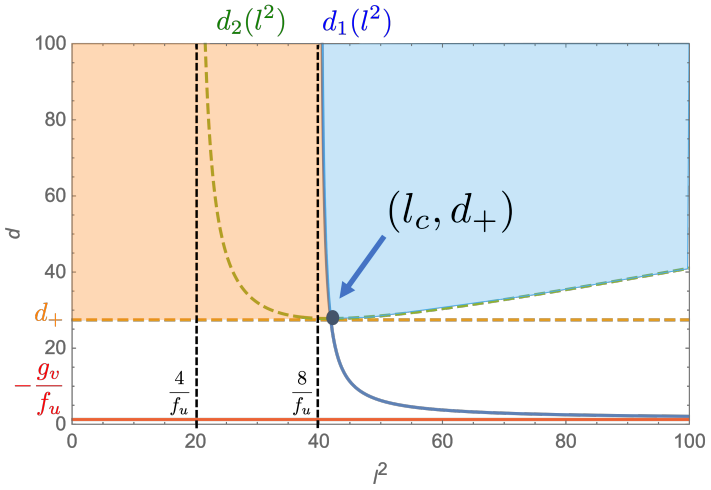


図 3　拡散誘導不安定化が起きる条件．領域 A をオレンジ，領域 B を水色で示した．

注 4.5. 斉次ディリクレ境界条件，斉次ノイマン境界条件の場合においても，式 (3.13) に対する *Turing* の拡散誘導不安定化の十分条件は定理 4.4 と同じである．

式 (4.21)，(4.22) は連続モデルに対する Turing の拡散誘導不安定化が起きる条件と完全に一致している．式 (4.23) には連続モデルに対する Turing の拡散誘導不安定化が起きる条件と一致した領域があるが，(4.24) では部分的に異なっていることがわかる．特に，細胞の大きさ l が一定の大きさ l_c よりも大きくなった際，連続モデルに対する Turing の拡散誘導不安定化の条件を満たしているが，式 (4.24) を満たさない状況が存在する．

また，Turing の拡散誘導不安定化が起きた際の臨界波数 n_c および臨界拡散係数比 d_c についても以下のように求められた．ここでの臨界波数 n_c や臨界拡散係数比 d_c は Turing の拡散誘導不安定化が起きるか起きないかの分岐となる値，つまり，$\lambda(k) = 0$ が成り立つときの波数と拡散係数比の値である．

定理 4.6. $d_c = d_+$かつ $l^2 < l_c$ のとき，波数 n は

$$n = \frac{N}{2\pi} \arccos\left(1 - \frac{l^2}{2}\sqrt{\frac{|A|}{d_+}}\right), \text{または}, n = N - n_c \tag{4.25}$$

である．すなわち，$\lambda(n) = 0$ を満たす．また，$d_c = d_2(l^2)$ かつ $l^2 \geq l_c$ のとき，波数 n は

$$\begin{cases} n = \dfrac{N}{2} & (N : \text{偶数}) \\ n = \dfrac{N-1}{2}, \dfrac{N+1}{2} & (N : \text{奇数}) \end{cases} \tag{4.26}$$

である．すなわち，$\lambda(n) = 0$ を満たす．

以上の結果は周期境界条件を採用した場合のものである．境界条件を斉次ディリクレ境界条件や斉次ノイマン境界条件とした場合の臨界波数 n_c と臨界係数比 d_c について，以下にまとめる．

注 4.7. ディリクレ境界条件を採用した場合を考える．$d_c = d_+$かつ $l^2 < l_c$ のとき，波数 n は

$$n = \frac{N+1}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{l^2}{2}\sqrt{\frac{|A|}{d_+}}\right) \tag{4.27}$$

である．すなわち，$\lambda(n) = 0$ を満たす．また，$d_c = d_2(l^2)$ かつ $l^2 \geq l_c$ のとき，波数 n は

$$n = N \tag{4.28}$$

である．すなわち，$\lambda(n) = 0$ を満たす．

同様に，ノイマン境界条件を採用した場合を考える．$d_c = d_+$かつ $l^2 < l_c$ のとき，波数 n は

$$n = \frac{N}{\pi} \arccos\left(1 - \frac{l^2}{2}\sqrt{\frac{|A|}{d_+}}\right) \tag{4.29}$$

である．すなわち，$\lambda(n) = 0$ を満たす．また，$d_c = d_2(l^2)$ かつ $l^2 \geq l_c$ のとき，波数 n は

$$n = N \tag{4.30}$$

である．すなわち，$\lambda(n) = 0$ を満たす．

以上の結果から，斉次ディリクレ境界条件，斉次ノイマン境界条件を採用した場合においても臨界波数の条件式に細胞の大きさ l が含まれていることがわかる．このことから，細胞の大きさ l は Turing の拡散誘導不安定化が起きた際に形成されるパターンに影響を与えていると言える．

5　証明概要

前節で述べた，構築した数理モデルにおいて Turing の拡散誘導不安定化が起きる条件の導出について概要を説明する．まず，式 (3.13) を平衡点 (u^*, v^*) で線形化を行うことで，

$$w_t = Aw + DL_\Delta(w), D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} u - u^* \\ v - v^* \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

が得られる．式 (5.31) に $w(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \gamma_n \mathrm{e}^{\lambda(k)t} E_n(x)$ を代入し，固有値問題

$$\lambda(k)\gamma_n = A\gamma_n + \frac{C_n}{l^2} D\gamma_n, \tag{5.32}$$

を考えると，特性方程式 (4.20) が得られる．次に拡散がある場合に平衡点 (u^*, v^*) が不安定化する条件を考える．つまり $\lambda(k)$ の実部が正になる条件を考える．$\lambda(k)$ の実部が正になるためには，

① $\lambda(k)$ の係数が負

② $h(n) < 0$ となる $n \in \mathbb{Z}$ が存在

のいずれかを満たしている必要があるが，仮定により①は起こり得ないので，②の場合のみを考える．$-4 \leq C_n \leq 0$ であることから，場合分けを行い，$h(n)$ の最小値が負となる条件を導出することで式 (4.23)，(4.24) を得られる．

6　数値計算結果

自己触媒反応の化学反応モデルである Schnakenberg モデル [8] における反応項 f, g

$$\begin{aligned} f(u,v) &= -u + u^2 v + 0.2 \\ g(u,v) &= -u^2 v + 0.3 \end{aligned} \tag{6.33}$$

を用いて, 構築した数理モデルで数値計算を行なった．この時, 平衡点 (u^*, v^*) は $(u^*, v^*) = (0.5, 1.2)$ である．

次に，その数値計算結果を図 4 に示す．

さらに，同じ反応項 (6.33) を用いて，2 次元に拡張し，数値計算を行なった．その数値計算結果を図 5 に示す．

数値計算の結果からも細胞の大きさ l によって，Turing の拡散誘導不安定化が起きた際に形成されるパターンが異なっていることが確認できた．

7　まとめ

構築した数理モデルを解析した結果について述べた．主な結果としては次の 2 つである．

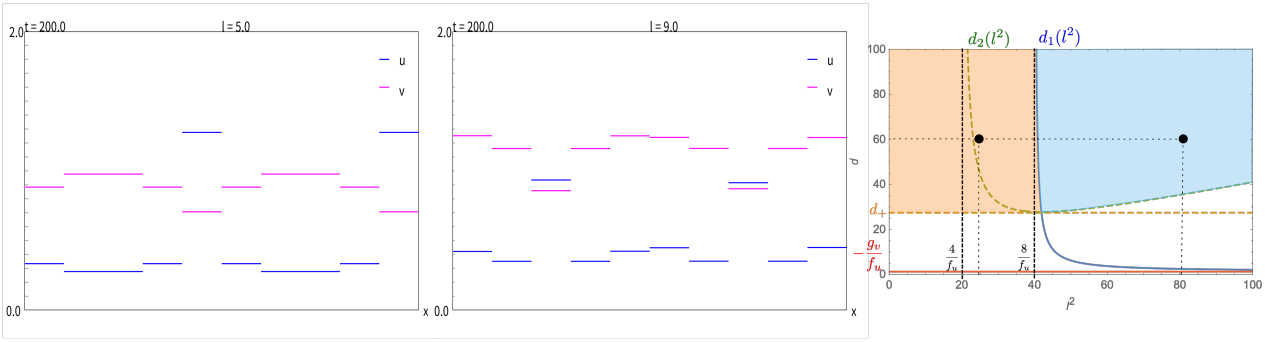


図 4　1 次元における数値計算結果．$d = 60, N = 10$ とした．左: $l = 5.0$，中央: $l = 9.0$，右: 図 3 におけるパラメータの位置．

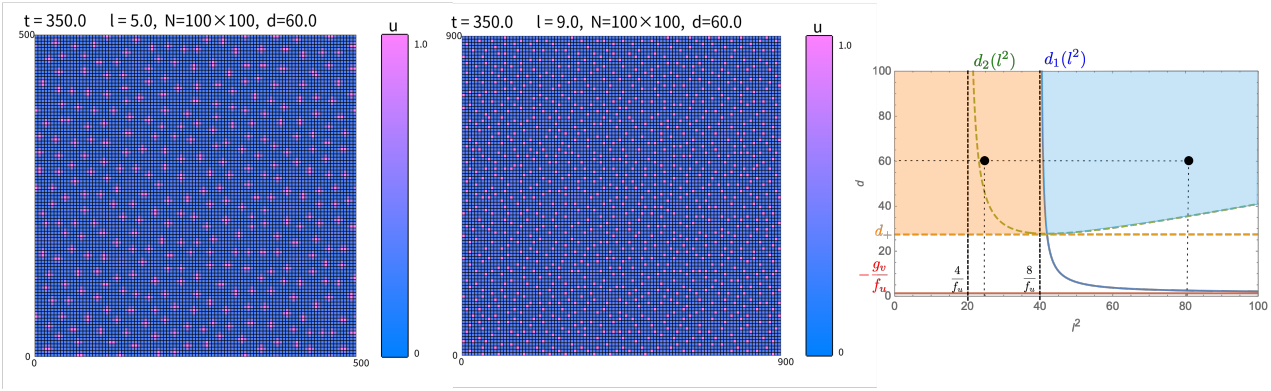


図 5　2 次元における数値計算結果．$d = 60, N = 10$ とした．左: $l = 5.0$，中央: $l = 9.0$，右: 図 3 におけるパラメータの位置．

1 つ目は，構築した離散モデルにおける Turing の拡散誘導不安定化が起きる条件を明らかにした点である．先述した連続モデルにおいて Turing の拡散誘導不安定化が起きる条件と部分的に異なる条件を求めることができた．この結果から，細胞の大きさ l がある一定の大きさ l_c を超えた場合，連続モデルにおける Turing の拡散誘導不安定化が起きる条件を満たしているが，構築したモデルにおける Turing の拡散誘導不安定化が起きる条件を満たさない状況が存在する．また，拡散係数比 d を固定し，細胞の大きさ l を小さくすると，濃度が一様なパターンから非一様なパターンに変化すると考えられるため，細胞の小ささがパターンを担保していると言える．

また，構築した数理モデルにおいて Turing の拡散誘導不安定化が起きる条件は境界条件に依らない．このことから，離散構造上特有のパターン形成機構であると考えられる．

2 つ目は，臨界波数の条件式を明らかにした点である．臨界波数が細胞の大きさ l に依存することから，構築した数理モデルにおいて，Turing の拡散誘導不安定化が起きた際に形成されるパターンは細胞の大きさ l に依存している．

また，上記 2 つの結果を踏まえた実験を提案可能であると考えている．結果から推測される数値を用いて，実際の実験系で上記の考察事例が確認できるかどうかを検証する．

参考文献

[1] E.Plahte. Pattern formation in discrete cell lattices. J. Math. Biol., Vol. 43, pp. 411- 445. (2001)

[2] M.Li, B.Han, L.Xu and G.Zhang. Spiral patterns near Turing instability in a discrete reaction diffusion system, Chaos, Solitons and Fractals, Vol. 49, pp. 1-6. (2013)

[3] G.Zhang, R.Zhang and Y.Yan. The diffusion-driven instability and complexity for a single-handed discrete Fisher equation, Applied Mathematics and Computation, Vol. 371, pp.124946. (2020)

[4] A.Fofonjka, M.C.Milinkovitch, Reaction-diffusion in a growing 3D domain of skin scales generates a discrete cellular automaton. Nat Commun, Vol. 12, 2433 (2021)

[5] A.M.Turing. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B, Biological Sciences, Vol. 237, No. 641, pp. 37-72. (Aug. 14, 1952)

[6] J.D.Murray. Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications, Springer-Verlag New York. (2003)

[7] S.Ei, H.Ishii, M.Sato, Y.Tanaka, M.Wang and T.Yasugi. A continuation method for spatially discretized models with nonlocal interactions conserving size and shape of cells and lattices. J. Math. Biol., Vol. 81, pp. 981-1028 (2020).

[8] J. Schnakenberg. Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour. Journal of Theoretical Biology, Vol. 81, No. 3, pp. 389- 400. (1979)

パラレルセッション
会場Ｅ

可微分関数の Reeb グラフとグラフの具体的な可微分関数の Reeb グラフとしての実現

北澤直樹(Naoki Kitazawa)　(九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)*

多様体をみる, 位相や可微分多様体としての構造を調べるということは, 幾何学の, ひいては数学の基本的で重要な問題である. (可微分)多様体を, その上の, 自身より次元の高くない空間への良い(可微分)写像を用いてみ, 調べるという, Morse 関数という良い可微分関数を用いて多様体を調べる理論を原点とした手法は, 自然で重要である. 多様体の代数的位相幾何学, 微分位相幾何学等あらゆる幾何学の研究において多くの大きな面白い貢献をしてきており今もし続けている. その際, 逆像の連結成分からなる定義域の多様体の商空間 Reeb 空間が重要な道具のひとつである. 本稿, 本発表では, 関連した自然で重要な問題として, 与えられたグラフを性質の良い可微分関数の Reeb 空間として実現できるかという問題について, 基本的な部分や歴史, 著者の研究を紹介する.

1. Reeb 空間(グラフ).

Reeb 空間は, 位相空間の間の写像の逆像の連結成分からなる空間である. $c : X \to Y$ を位相空間の間の(連続)写像とする. X の任意の点 x_1,x_2 について, 同じ Y の点 y の逆像 $c^{-1}(y)$ の同じ連結成分にあるときかつその時に限り $x_1 \sim_c x_2$ をみたすよう, X 上の関係 $\sim_c$を定義する. これは同値関係である.

Definition **1.** 商空間 $W_c := X/\sim_c$ を c の Reeb 空間と呼ぶ.

$q_c : X \to W_c$ で商写像を表し $\bar{c}$ で $c = \bar{c} \circ q_c$ をみたす写像とする(連続写像として一意に定まる).

本稿, 本発表で, 多様体は基本的な空間, 対象である. 多様体, 可微分多様体や可微分関数(写像)について, 数学系の学科で学部で学ぶ程度の内容は既知とする. 題名を含め既に"可微分"という用語を数回用いているが, 基本的に滑らかつまり C^∞ 級のものを考える. 今後, 滑らかな多様体の間の滑らかな写像で, 定義域の多様体の方が値域の多様体より次元の高いようなものとその Reeb 空間を考える. 多様体上の可微分関数や写像の Reeb 空間に関し, [18] が関連した初期の論文の一つである.

以降 $f : M \to N$ で滑らかな多様体 M から滑らかな多様体 N への滑らかな写像を表す. f の特異点とは, M の点 $p \in M$ でそこでの微分 df_p について階数が M, N 双方の次元より低いものとする. ある特異点 p での値として表せる $f(p)$ を f の特異値と呼ぶ. 特異値でない N の点を f の正則値と呼ぶ.

滑らかな多様体の微分同相型を, 以下で定義する: 滑らかな多様体からなるクラスを考え, 二つの滑らかな多様体について, 一方から他方への滑らかで特異点をもたないような同相写像つまり微分同相写像が存在するときかつその時に限り同値とし, 同値類をその多様体の微分同相型と呼ぶ(もちろんここで考えた関係は同値関係である). 多様体 M_1 と M_2 の微分同相型が等しいとき M_1 は M_2 に(M_1 と M_2 は) 微分同相であるという.

今後 $k > 0$ 次元 Euclid 空間を $\mathbb{R}^k$ で表す. これは自然な k 次元の滑らかな多様体であり, 自然な計量も入った Riemann 多様体でもある. $x \in \mathbb{R}^k$ と原点 0 の間の距離を $||x|| \geq 0$ で表す. $S^k := \{x \in \mathbb{R}^{k+1} \mid ||x|| = 1.\}$ で k 次元単位球面を表す(ただし k は 0 以上の整数). これは k 次元の滑らかな閉部分多様体で境界をもたずコンパクトである. また $k \geq 1$ ならば連結である. $D^k := \{x \in \mathbb{R}^k \mid ||x|| \leq 1.\}$ で k 次元

* e-mail: n-kitazawa@imi.kyushu-u.ac.jp
web: https://naokikitazawa.github.io/NaokiKitazawa.html

単位球体を表す(ただし k は 1 以上の整数). これは k 次元の滑らかな閉部分多様体で境界をもちコンパクトである.

f がさほど病的でなく適切な意味で一般的な滑らかな写像のとき, W_f は値域の空間と同次元の多面体(で, 一般に滑らかな多様体から自然に一意に多面体の構造が定まることがよく知られている中, 値域の多様体に定まるそれを引き戻す形で自然に誘導されるもの)となることが知られている. Reeb 空間 W_f が多面体であるという状況について, f が関数の場合 Reeb 空間 W_f はグラフになる.

Theorem 1 ([21])**.** コンパクト多様体上の滑らかな関数 f で特異値が高々有限個であるようなものについて, W_f は 1 次元コンパクト多面体つまりグラフと同相である. 閉多様体上の滑らかな関数 f で特異値が高々有限個であるようなものについて, W_f は, 頂点集合を q_f で考えた逆像が特異点を含むようなもの全体からなる集合であるとしたときグラフとなる.

Definition **2.** 閉多様体上の滑らかな関数 f で, W_f が, 頂点集合を q_f で考えた逆像が特異点を含むようなもの全体からなる集合であるとしてグラフとなるとき, Reeb グラフと呼ぶ.

例えば, Morse(-Bott) 関数のような特異点のまわりでの型が複雑でないような関数 f では, Reeb グラフ W_f が得られる.

以下、Morse(-Bott) 関数を定義する. 古典的な有名文献として, Morse 関数の理論に関して [16], [17], Morse-Bott 関数に関して [1] がある. Morse 関数の理論は, 一般に(略して) Morse 理論と呼ばれるが, [14] は Morse 理論の有名な教科書的な文献である.

Definition **3.**

1. m 次元多様体上の滑らかな関数 f の特異点が境界になく, 特異点 p で整数 $0 \leq i(p) \leq m$ と適切な座標があって $(x_1, \cdots, x_m) \mapsto \Sigma_{j=1}^{m-i(p)} {x_j}^2 - \Sigma_{j=1}^{i(p)} {x_{m-i(p)+j}}^2 + f(p)$ と表せるとき, f は Morse 関数であるという.

2. 滑らかな関数 f が, 特異点の周りで, うまく座標をとって局所的に特異点のない滑らかな写像と Morse 関数の合成で表せているとき, f は Morse(-Bott)関数であるという.

Morse 関数で, 値の大小を考慮して座標をとれば, $i(p)$ は一意である. Morse 関数の特異点は離散的に現れる. Morse-Bott 関数の特異点全体の集合は, 定義域の多様体の滑らかで境界を持たないような閉部分多様体である. 以下 Figure 1 と Figure 2 で Morse 関数 Morse-Bott 関数とその Reeb グラフの例を紹介する. 例えば, 単位球面の高さを考えて得られる関数が Morse 関数であることを調べることは, 多様体論や Morse 理論に関する練習問題であることも補足する.

さて, Reeb 空間が値域の空間と同次元の多面体になるということについて, [12] で次元 3 以上の閉多様体から平面への, 特異点の観点からして一般的な滑らかな写像, いわゆる安定写像で示されている. 安定写像という滑らかな写像のクラスは, 各特異点で値が異なるような閉多様体上の Morse 関数全体を含むようなクラスである(閉多様体上の滑らかな関数の場合そういう関数であることと安定であることは同値である). 安定写像等の説明を含む可微分写像の特異点理論に関する教科書的文献として [2] がある. Reeb 空間が値域の空間と同次元の多面体になるということに話を戻すが, [24] ではかなり一般的な状況で示された. このような状況で, Reeb 空間は多様体を簡単にとらえる. 定義等の説明が長くなってしまったが, Reeb グラフや Reeb 空間は, 多様体をみる, 位相や可微分多様体としての構造を調べるという幾何学の, ひいては数学の基本的で重要な問題において, 基本的で強力な道具と

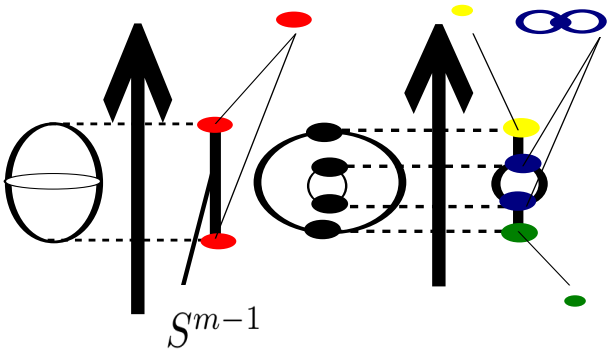


Figure 1: 次元 2 以上の単位球面の自然な高さを考えて得られる Morse 関数と Reeb グラフ(左). 3 次元の Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ に自然な形で埋め込まれたトーラス($S^1 \times S^1$)に対し自然な高さを考えて得られる Morse 関数と Reeb グラフ(右). グラフの点を指し示す線の先にある点や円周等の図形や単位球面 "S^{m-1}"の表記は, その点の q_f で考えた逆像を示す.

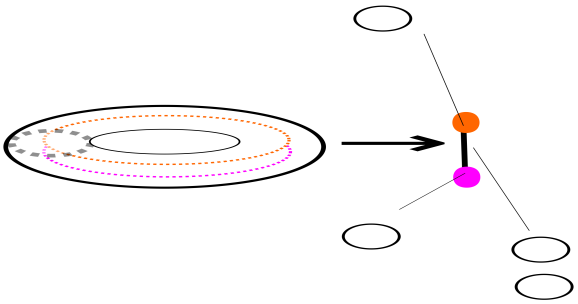


Figure 2: 3 次元の Euclid 空間 $\mathbb{R}^3$ に自然な形で埋め込まれたトーラスに対し自然な高さを考えて得られる Morse-Bott 関数と Reeb グラフ. グラフを指し示す線の先にある円周は, Figure 1 同様逆像を示す.

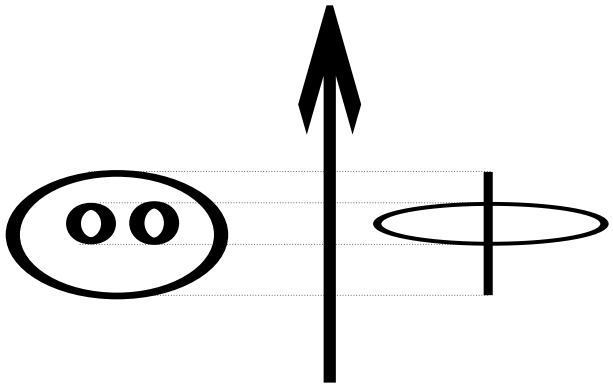


Figure 3: 与えられたグラフ(右)と閉曲面上の滑らかな関数(左).

なる. 時にはホモロジー群コホモロジー環等多様体の代数的な情報をある程度握る. [19, 22] 他著者の論文プレプリント, [3, 4, 5, 7, 8] 等に関連した話がある.

2. グラフの具体的な可微分関数の Reeb グラフとしての実現.

今後グラフが基本的で重要な位相的対象となる. グラフについて基本的な用語の説明等は省略する. 今回, 以下の問題を考える.

Problem **1.** 与えられたグラフを Reeb 空間とした性質の良い滑らかな関数を構成できるか ? ただし定義域の多様体を前もって詳細に指定するようなことはしない(次元を制限する等定義域多様体のクラス程度は制限する).

特に, 発表者が本質的に創始し既に多く結果を得ている, 以下の問題について紹介する.

Problem **2.** Problem 1 において, 正則値の逆像まで前もって指定して, 性質の良い滑らかな可微分関数を構成できるか? ただしこちらも定義域の多様体を前もって詳細に指定するようなことはしない.

これらの問題は, 基本的で自然で重要であるが, 一般には「具体的に(可微分)写像を構成することの難しさ」というものがあり難しい. この研究に至るまでの研究の歴史を紹介する.

- 特定の条件を満たすようなグラフと同型なグラフを Reeb グラフとするような, 閉曲面上の滑らかな関数の構成([23]). なお Sharko は Problem 1 のような問題の創始者である.
- 任意の有限でループを持たないグラフに対し, それと同型なグラフを Reeb グラフとするような, 閉曲面上の滑らかな関数を構成([13]).
- 適切な条件を満たすようなグラフについて, それと同型なグラフが Reeb グラフとなるように, Morse 関数で正則値の逆像が単位球面の非交和と微分同相になるようなものを構成([15]).

Figure 3 は, 右のグラフに対し, 左の方で表されているような滑らかな関数を得ていることを表す. これはいわゆる種数 2 の向き付け可能な閉曲面上の関数を示す. 今後このような次元 2 の閉多様体(閉曲面)が多く出てくるが, いわゆる穴の数を表す種数等基本的概念について, ある程度は既知とする. 一応書かせて頂くが, S^2 は種数が 0 でトーラスは種数が 1 である. この流れの中で, まず以下を得た.

Main Theorem 1 ([6])**.** $G := (V, E)$ を有限で連結で辺 1 個以上を有するようなグラフとする(V を頂点集合 E を辺集合とする). $g : G \to \mathbb{R}$ を連続関数で各辺 $e \in E$ 上で単射であるようなものとする. l を, E 上の非負の整数を値とするような関数とする. このとき, ある 3 次元向き付け可能連結閉多様体 M とその上の滑らかな関数 $f : M \to \mathbb{R}$ があり以下を満たす.

1. Reeb グラフ W_f が定まり W_f と G は同型(以降適切な同一視を定めて考える).
2. a を辺 e の内部の点とすると, ${q_f}^{-1}(a)$ は種数 $l(e)$ の向き付け可能な閉曲面.
3. p が特異点のとき $q_f(p) \in V$, つまり $q_f(p)$ は $W_f = G$ の頂点で, $g(q_f(p)) = f(p)$.
4. $q_f(p) \in V$ が g の極値を与えないような頂点であり p が特異点のとき, f は p の周りで Morse 関数となる.
5. $q_f(p) \in V$ が g の極値を与えるような頂点であり次数は 1 で, $e \ni v$ であるような辺 $e \in E$ について $l(e) = 0$ とする. p が特異点のとき, f は p の周りで Morse 関数となる.
6. p が直前の 2 パターンに当てはまらないような特異点のとき, f は p の周りで Morse 関数とはならない. しかしこのような特異点の周りでの f について, 有限個のもの以外の周りでは, Mose-Bott 関数として表せる.

証明の概略を述べる. グラフの頂点のまわりでの局所的な関数を構成し, 残りの部分は射影を構成して最後に貼り合わせるという形で滑らかな関数を構成する. グラフの頂点の周りでの構成のみ簡単に紹介する.

まず, 極値を与えないような頂点の周りでは, Morse 関数の特異点と多様体のハンドル が対応しているという古くからの有名な事実を利用する. ハンドルとは, 単位球体の直積で表される(いわゆる角のある)多様体と微分同相な多様体で, 滑らかでコンパクトな次元 $m \geq 1$ の多様体は, 自然に m 次元のハンドルたちを微分同相写像を用いて境界同士で貼り合わせていくことで得られることが知られている. まず局所的に, Reeb 空間がその頂点 v とそれを含む辺全体の和集合として表される元のグラフの部分空間と同相で, 頂点の逆像のみ特異点を含んでいて(他の点の逆像は含んでおらず), 像が閉区間で, 特異値が丁度 1 個でさらに像の内部にあるような Morse 関数を得る.

極値を与える頂点のまわりについても説明する. まず頂点 v の次数が 2 以上の時から説明する. まず頂点を含むような辺全体の集合を空でない 2 つの集合に分割する(空でない 2 つの集合ならば何でも良い). それぞれ値が特異値以下になるような部分, 特異値以上になるような部分となるようにまず局所的に, Reeb 空間が 1 個の頂点とそれを含む辺全体の和集合として表される元のグラフの部分空間と同相で, 頂点の逆像のみ特異点を含んでいて他の点の逆像は特異点を含んでいないような関数を得る. v が極値を与えない時のように, Morse 関数として構成できる. 丁度 1 個ある特異値のところで最大または最小となるように, 像を閉区間とみなしその上の二次関数を使って平面に埋め込み, 最後に垂直方向への射影を合成する. 頂点 v の次数が 1 の時についても簡単に触れる. 頂点を含む辺での l の値が 0 のときは単位球体 D^3 の高さを考えて得られる Morse 関数, D^3 上の $x \mapsto \pm||x||^2 + g(v)$ の形で定義される関数を考えれば良い. l の値が正の整数であるときは少し説明が必要である.

詳細は原論文や発表させて頂く予定のポスターに譲る.

さて, Main Theorem 1 に関連し, [21] で以下が得られている.

Theorem 2 ([21])**.** $m > 1$ を整数とする. $G := (V, E)$ を有限で連結で辺 1 個以上を有するようなグラフとする(V を頂点集合 E を辺集合とする). $g : G \to \mathbb{R}$ を連続関数で各辺 $e \in E$ 上で単射であるようなものとする. l を, E 上の, 以下を満たすような写像とする.

- l の値域は $m-1$ 次元の滑らかな連結閉多様体の微分同相型全体からなる集合である.
- 各頂点 $v \in V$ について, L_v をそこでの g の値が $g(v)$ 以下であるような v を含む辺全体の集合, U_v をそこでの g の値が $g(v)$ 以上であるような v を含む辺全体の集合とする. L_v の各辺 e について $l(e)$ に属するような滑らかな多様体をとりそれらの非交和 $F_{L,v}$ をとり, U_v で同様に多様体 $F_{U,v}$ をとる. このときこれらの非交和 $F_{L,v} \sqcup F_{U,v}$ を境界とするような m 次元の滑らかで連結なコンパクト多様体がある.

このとき, ある m 次元連結閉多様体 M とその上の滑らかな関数 $f : M \to \mathbb{R}$ があり以下を満たす.

1. Reeb グラフ W_f が定まり W_f と G は同型(以降適切な同一視を定めて考える).
2. a を辺 e の内部の点とすると, ${q_f}^{-1}(a)$ は $l(e)$ に属する多様体と微分同相.
3. p が特異点のとき $q_f(p) \in V$, つまり $q_f(p)$ は $W_f = G$ の頂点で, $g(q_f(p)) = f(p)$.

Remark **1.** Theorem 2 について, 詳細は省略するが, $m-1$ 次元の滑らかな連結閉多様体の微分同相型, それらの非交和を境界とするような滑らかで連結なコンパクト多様体について, 向きを込め考えた場合, M として向きが入ったものを得ることができる.

この結果は, 次元や逆像に出てくる多様体についてかなり一般的な状況を扱っている. 一方, 特異点がいかなる型のものか等については触れられていない. 滑らかであるが実解析的でない関数を用いてとにかく関数を構成するという形で結果が得られる. 次に, 今回扱っている研究とは独立に既に知られていた結果を紹介する. レンズ空間は 3 次元向き付け可能連結閉多様体の中でも, ある意味で球面や球面の直積の次に単純で, 基本的で重要なものである.

Theorem 3 ([20])**.** 3 次元向き付け可能連結閉多様体 M が, Morse 関数で Main Theorem 1 において l の値が 0 か 1 である場合のものを有するとき, M は 3 次元単位球面 S^3, $S^2 \times S^1$ やレンズ空間またはそれの連結和として表される多様体と微分同相となる. 逆にそのような多様体 M にはそのような Morse 関数がある.

最近得られたもうひとつの結果も. Main Theorem として紹介しておく.

Main Theorem 2 ([10])**.** $G := (V, E)$ を有限で連結で辺 1 個以上を有するようなグラフとする(V を頂点集合 E を辺集合とする). $g : G \to \mathbb{R}$ を連続関数で各辺 $e \in E$ 上で単射であるようなものとする. l を, E 上の, 以下を満たすような写像とする.

- l の値域は 3 次元の滑らかで向き付け可能な連結閉多様体の微分同相型全体からなる集合である.
- $v \in V$ を $g(v)$ が極値となるような頂点とする. このとき v の次数は 1 で, $e \ni v$ である辺 $e \in E$ について $l(e)$ は S^3 の微分同相型.

このとき, 4 次元の連結な向き付け可能閉多様体 M とその上の Morse 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ があり以下を満たす.

1. Reeb グラフ W_f が定まり W_f と G は同型(以降適切な同一視を定めて考える).

2. a を辺 e の内部の点とすると, ${q_f}^{-1}(a)$ は $l(e)$ に属するような多様体と微分同相.

3. p が特異点のとき $q_f(p) \in V$, つまり $q_f(p)$ は $W_f = G$ の頂点で, $g(q_f(p)) = f(p)$.

証明には, 先述の Morse 関数の特異点とハンドルに関する理論, そして 3 次元多様体に固有の有名な理論を用いる(プレプリントはもう少し一般的な状況で議論している).

3. 補足.

今後の問題を挙げておく.

Problem **3.** Main Theorem 1, Main Theorem 2 を, **特異点ができる限り具体的に分かるような関数のクラスを考えるようにして**どこまで良くしていけるか ?

最近, [9], [11] で, 正則値の逆像が向き付け可能とは限らない閉曲面であるような場合のある意味である程度満足のいく結果を紹介させて頂いている. これらのプレプリントは随時修正中である.

Problem **4.** Theorem 3 のような, 特定の多様体の族を特徴づけるような結果は得られるか.

Theorem 3 の [20] は, 正則値の逆像の連結成分が常に位相的には球面であるものの単位球面と微分同相とは限らないような Morse 関数と, その定義域の多様体に関する論文でもある(というよりそのような関数の話がメインである). この状況ではある程度完全な結果は得られているといえる. 他の状況については, 例えば現時点では, Main Theorem 1, Main Theorem 2 の状況で Morse 関数のみ考えて, さらに, 向き付け可能な正則値の逆像の連結成分を球面かトーラスに制限し, 向き付け不可能な正則値の逆像の連結成分を種数が 1 か 2 であるようなもの, つまり実射影曲面か Klein bottle に制限する等をしないと難しいと思われる. 閉曲面は種数が上がるといろいろ複雑になる. 一般の閉多様体が出てくると遥かに難しい.

最後に, 現時点で案の段階で公表はできないという程度の進捗である, 以下を挙げる.

Problem **5.** グラフを与え, 値域が $\mathbb{R}$ で Reeb グラフがそれと同型であるような, 性質の良い滑らかな写像の構成を考えてきた. では, 次元 $n \geq 1$ の多面体(CW 複体)を与え, 値域を $\mathbb{R}^n$ として, 同様の問題を考え解けるか?

最後に, Reeb グラフや Reeb 空間は, 応用としてデータ解析や可視化等でも重要な道具であることにも触れておく. 尤も著者は, 関連したことについては現在学習, 調査中の身である. 一つ, 今回扱った問題は, 空間内にデータセットがあるとき, 射影するときにもとのデータを尊重するようにいくつか逆像を適合させ, さらに滑らかな多様体や関数や写像を適合させるときに活用できるかもしれないと浅学ながら夢見ている. データセットに多様体(主に曲面)を適合させる, いわゆる多様体学習等の世界に新たな布石となれば大変うれしく思う. Figure 4 は, 多様体学習に関し解説したある有名な HP の画像である.

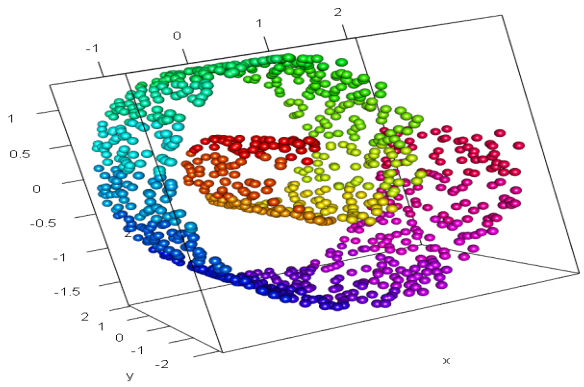


Figure 4: 多様体学習で 2 次元の曲面を適合させようとしているもの, いわゆる Swiss-roll と呼ばれる有名なデータセット(”https://blog.albert2005.co.jp/2014/12/11/高次元データの可視化の手法をswiss-rollを例に見てみよ/” より).

4. 謝辞.

本内容は 2021 年度科学研究費補助金基盤研究 (S)「研究代表者：佐伯 修(課題番号：17H06128)」の補助を受けたものである. また幾何学を中心に数学にも明るいデータ解析系の研究者の協力も得て, 高次元データの解析に, 著者の「良い可微分関数やその高次元にあたるものを駆使して多様体をみていく調べていくというスタイルの数学研究」を応用しようという目論みの下実施した, 共同研究のプロジェクト”九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 2020 年度若手研究-短期共同研究”「代表者：北澤 直樹(課題番号：20200027)」(https://joint.imi.kyushu-u.ac.jp/research-reports/year-2021/) の援助も得ている. これらのプロジェクトの関係者の日々の支えに感謝申し上げたい.

最後に, 本稿に誤った記述や分かりにくい図や記述があれば, それは全て著者の至らなさによるものである. 誤りのご指摘やコメント等あれば是非ともして下されば幸いである.

References

[1] R. Bott, *Nondegenerate critical manifolds*, Ann. of Math. 60 (1954), 248–261.

[2] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*, Graduate Texts in Mathematics (14), Springer-Verlag (1974).

[3] N. Kitazawa, *On round fold maps* (in Japanese), RIMS Kokyuroku Bessatsu B38 (2013), 45–59.

[4] N. Kitazawa, *On manifolds admitting fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Doctoral Dissertation, Tokyo Institute of Technology (2014).

[5] N. Kitazawa, *Fold maps with singular value sets of concentric spheres*, Hokkaido Mathematical Journal Vol.43, No.3 (2014), 327–359.

[6] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on 3-dimensional closed orientable manifolds with finitely many singular values*, accepted for publication in Topol. Methods in Nonlinear Anal. after refereeing process, arxiv:1902.08841.

[7] N. Kitazawa, *Special generic maps and fold maps and information on triple Massey products of higher dimensional differentiable manifolds*, submitted to a refereed journal, arxiv:2006.08960.

[8] N. Kitazawa, *Closed manifolds admitting no special generic maps whose codimensions are negative and their cohomology rings*, submitted to a refereed journal, arxiv:2008.04226v4.

[9] N. Kitazawa, *On Reeb graphs induced from smooth functions on 3-dimensional closed manifolds which may not be orientable*, submitted to a refereed journal, arxiv:2108.01300.

[10] N. Kitazawa, *Realization problems of graphs as Reeb graphs of Morse functions with prescribed preimages*, submitted to a refereed journal, arXiv:2108.06913.

[11] N. Kitazawa, *Smooth functions with simple structures on 3-dimensional closed manifolds with prescribed Reeb graphs and preimages of regular values*, arxiv:2109.00221.

[12] M. Kobayashi and O. Saeki, *Simplifying stable mappings into the plane from a global viewpoint*, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 2607–2636.

[13] Y. Masumoto and O. Saeki, *A smooth function on a manifold with given Reeb graph*, Kyushu J. Math. 65 (2011), 75–84.; doi: 10.2206/kyushujm.65.75.

[14] 松本 幸夫, Morse 理論の基礎, 岩波書店, 2005.

[15] L. P. Michalak, *Realization of a graph as the Reeb graph of a Morse function on a manifold*. Topol. Methods in Nonlinear Anal. 52 (2) (2018), 749–762, arxiv:1805.06727.; doi: 10.12775/TMNA.2018.029.

[16] J. Milnor, *Morse theory*, Ann. Math. Studies, Princeton Univ. Press,1963.

[17] J. Milnor, *Lectures on the h-cobordism theorem*, Math. Notes, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J. 1965.

[18] G. Reeb, *Sur les points singuliers d´une forme de Pfaff complétement intègrable ou d´une fonction numérique*, Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de I´Académie des Sciences 222 (1946), 847–849.

[19] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. 49 (1993), 265–293.

[20] O. Saeki, *Morse functions with sphere fibers*, Hiroshima Math. J. Volume 36, Number 1 (2006), 141–170.

[21] O. Saeki, *Reeb spaces of smooth functions on manifolds*, International Mathematics Research Notices, maa301, https://doi.org/10.1093/imrn/maa301, arxiv:2006.01689.

[22] O. Saeki and K. Suzuoka, *Generic smooth maps with sphere fibers*, J. Math. Soc. Japan Volume 57, Number 3 (2005), 881–902.; doi: 10.2969/jmsj1158241939.

[23] V. Sharko, *About Kronrod-Reeb graph of a function on a manifold*, Methods of Functional Analysis and Topology 12 (2006), 389–396.

[24] M. Shiota, *Thom's conjecture on triangulations of maps*, Topology 39 (2000), 383–399. ; doi: 10.1016/S0040-9383(99)00022-1.

1欠陥付非ユニタリ量子ウォークのスペクトル

松本洋平
(信州大学大学院総合理工学研究科工学専攻)

概 要

量子ウォーク (QW) は古典ランダムウォークの量子版として知られる数理モデルであり，量子コンピュータの発展に伴い，近年活発に研究されている．カイラル対称性を有するQWは，トポロジカル相の観点からも重要である．また、開放量子系の観点から，非ユニタリなQWの研究も進められている．本研究では，1次元格子上のカイラル対称性を持つ1欠陥付非ユニタリQWに対して，母関数法を用いて固有値問題を解き，スペクトルの計算を行った．

1 導入

量子ウォーク（QW）は，古典ランダムウォークの量子版とみなすことができ，最近では，量子コンピュータなどさまざまな分野に関連して，広く研究されている．そうした応用の観点からも，QWの長時間極限における様子を明らかにするのは重要なことである．QWには，「局在化」と「線型的拡散」といった特徴的な漸近的振舞があるが，それらを表す極限定理が2種類ある．1つ目は，局在化に対応する時間平均極限測度である [1]．Konno [2] らが議論したように，この測度は，QWの定常測度とも関連している．2つ目は，線型的拡散も記述するリスケールされた弱収束極限定理である [3]．QWの主な解析手法として，フーリエ法 [4]，定留位相法 [5]，CGMV法 [6]，母関数法 [7] などがある．

一方，QWの固有値は，局在化と深く関連し，スペクトル理論の観点からも重要なテーマである．また，スペクトル散乱理論を応用すると，弱収束極限定理を証明できることが知られている [8]．カイラル対称なQWは，トポロジカル相の研究のために導入された [9]. 近年では，現実の物理系における，外界とエネルギーの出入りがある開放量子系を研究するために，QWが用いられている [7]．開放量子系のハミルトニアンはエルミート性を失うが，QWにおいては，時間発展のユニタリ性が失われる．そのような，非ユニタリQWのモデルの1つとして，Mochizuki-Kim-Obuseモデルがある [10]．このモデルは光ファイバーのループを用いた実験モデルで，時間発展の1ステップごとに系にエネルギーのゲインとロスが発生するモデルである．ユニタリQWでは時間発展のスペクトルが単位円周上にあらわれるが，このモデルでは非ユニタリ性のためにスペクトルが単位円周および実軸上にあらわれる．

本研究では，母関数法の1つである”the splitted generating function method（SGF法）” [11] を用いて，1次元格子上のカイラル対称な1欠陥付非ユニタリQWの固有値問題を解き，スペクトルも求める．従来，SGF法は，QWの固有値問題を解き，定常測度を見つけるため

に考案された手法である．また，フーリエ解析を用いて，我々のモデルの本質的スペクトルを導出した．本稿では，先行研究として，$\mathbb{Z}$ 上の 1 欠陥付きユニタリ QW の結果を簡単にレビューをし，その後，我々のモデルと主結果を紹介する．

2 モデル

2.1 $\mathbb{Z}$ 上の量子ウォーク

我々のモデルを導入する前に，$\mathbb{Z}$ 上の 2 状態 QW について，簡単なレビューを行う．まず量子系の状態空間として，2 乗総和可能な $\mathbb{Z}$ 上の $\mathbb{C}^2$-値関数全体のなすヒルベルト空間

$$\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}^2) = \left\{ \Psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^2 \;\middle|\; \sum_{x\in\mathbb{Z}} \|\Psi(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 < \infty \right\}, \quad x \in \mathbb{Z} \tag{2.1}$$

を考える．$\mathcal{H}$ のベクトル Ψ を

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} \Psi^L(x) \\ \Psi^R(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

のようにあらわす．一般に，$\mathbb{Z}$ 上の 2 状態 QW の時間発展作用素は，$\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素であるシフト作用素 S とコイン作用素 C の積 $U = SC$ で与えられる．ここで，シフト作用素 S とコイン作用素 C を

$$S = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L^* \end{bmatrix}, \quad C = \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} C(x) \tag{2.2}$$

で定義する．上式の L は $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上の左シフト作用素で $(Lf)(x) = f(x+1)$ で定義されるユニタリ作用素である．また，L^* はその共役で右シフトになる．また，$C(x)$ は 2 次のユニタリ行列であり，$\mathcal{H}$ を $\oplus_{x\in\mathbb{Z}}\mathbb{C}^2$ と同一視している．

2.2 先行結果

ここでは，先行研究 [11] について紹介する．このモデルのコイン作用素は

$$C(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & (x = \pm 1, \pm 2, \cdots) \\ \dfrac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & (x = 0, \omega = e^{2i\pi\phi}, \phi \in (0,1)) \end{cases} \tag{2.3}$$

で定義される．

このモデルの固有値問題

$$U\Psi = \lambda\Psi \tag{2.4}$$

を解き，固有ベクトルが

$$\Psi(x) = \begin{cases} (\theta_s)^x \begin{bmatrix} \alpha \\ (1-\omega)\alpha + \omega\beta \end{bmatrix} & (x = 1, 2, \cdots) \\ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} & (x = 0) \\ (\theta_s)^{|x|} \begin{bmatrix} (\omega-1)\beta + \omega\alpha \\ \beta \end{bmatrix} & (x = -1, -2, \cdots) \end{cases}$$

となることが得られた、ここで，$\alpha = \Psi^L(0)$, $\beta = \Psi^R(0)$ であり，固有値と λ と θ_s は，次のようになる．

(1) $\beta = i\alpha$ のとき

$$\lambda^2 = \frac{\omega(1-2\omega+\omega^2) - i\omega(1-\omega+\omega^2)}{1-2\omega+2\omega^2} \tag{2.5}$$

$$\theta_s^2 = \frac{\omega}{\omega^2-3\omega+1-i(\omega^2-1)} \tag{2.6}$$

(2) $\beta = -i\alpha$ のとき

$$\lambda^2 = \frac{\omega(1-2\omega+\omega^2) + i\omega(1-\omega+\omega^2)}{1-2\omega+2\omega^2} \tag{2.7}$$

$$\theta_s^2 = \frac{\omega}{\omega^2-3\omega+1+i(\omega^2-1)} \tag{2.8}$$

が得られた．

この帰結から，固有値 λ は単位円周上の本質的スペクトルの間を動くことがわかる [12].

2.3 本研究モデル

我々のモデルのシフト作用素とコイン作用素を次のように定義する．

$$S = \begin{bmatrix} 0 & L \\ L^* & 0 \end{bmatrix}, \qquad C(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & (x = \pm1, \pm2, \cdots) \\ \dfrac{\omega}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & (x = 0, \omega \in \mathbb{R}) \end{cases} \tag{2.9}$$

このモデルは，先行結果と同様に 1 欠陥モデルであるが，以下の点が異なっている．まず，

シフト作用素がユニタリかつ自己共役になっている点である．次に，原点において$\omega \in \mathbb{R}$となっていることにより，$\omega \neq \pm 1$ではコインがユニタリ行列ではなく自己共役になっている点である．これにより，我々のモデルはユニタリ性を失うが，次の意味でカイラル対称性をもつことが示される．

一般に，有界作用素Uがカイラル対称性をもつとは，

$$\Gamma U \Gamma = U^*$$

となるユニタリかつ自己共役な作用素Γが存在することをいう．実際，$\Gamma = S$とおくと，(2.9)のSはユニタリかつ自己共役であり，$\Gamma U \Gamma = S^2 C S = U^*$となる．ここで，$S^2 = SS^* = 1$となることを用いた．

さて，我々のモデルの固有値問題を解くために，各点xで固有方程式を計算すると次のようになる． $x \neq \pm 1$のとき

$$\lambda \begin{bmatrix} \Psi^L(x) \\ \Psi^R(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^L(x-1) \\ \Psi^R(x-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^L(x+1) \\ \Psi^R(x+1) \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

$x = 1$のとき

$$\lambda \begin{bmatrix} \Psi^L(1) \\ \Psi^R(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega}{\sqrt{2}} & \frac{\omega}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^L(0) \\ \Psi^R(0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\omega}{\sqrt{2}} & -\frac{\omega}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^L(2) \\ \Psi^R(2) \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

$x = -1$のとき

$$\lambda \begin{bmatrix} \Psi^L(-1) \\ \Psi^R(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\omega}{\sqrt{2}} & \frac{\omega}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^L(-2) \\ \Psi^R(-2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\omega}{\sqrt{2}} & -\frac{\omega}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi^L(0) \\ \Psi^R(0) \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

これを用いて，SGF 法により，このモデルの固有値問題を解いていく．そのために，母関数

$$f_+^j(z) = \sum_{x=1}^{\infty} \Psi^j(x) z^x, \quad f_-^j(z) = \sum_{x=-1}^{-\infty} \Psi^j(x) z^x \quad (j = L, R)$$

を定義する．式 (2.10)〜(2.12) を用いると，次の Lemma1 を得る．

Lemma 1　$\boldsymbol{f}_{\pm}(z) = \begin{bmatrix} f_{\pm}^{L}(z) \\ f_{\pm}^{R}(z) \end{bmatrix}$ とおくと

$$A\boldsymbol{f}_{\pm}(z) = \boldsymbol{a}_{\pm}(z)$$

が成り立つ．ここで，

$$A = \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{\sqrt{2}z} & \frac{1}{\sqrt{2}z} \\ -\frac{z}{\sqrt{2}} & \lambda - \frac{z}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_{+}(z) = \begin{bmatrix} -\lambda\alpha \\ \dfrac{\omega z(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \boldsymbol{a}_{-}(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\omega(\alpha+\beta)}{\sqrt{2}z} \\ -\lambda\beta \end{bmatrix}$$

ここで，$\omega \in \mathbb{R}$，$\alpha = \Psi^{L}(0)$，$\beta = \Psi^{R}(0)$ である．

Lemma1 より，

$$\det A = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}z}\left\{z^2 - \sqrt{2}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)z + 1\right\} \tag{2.13}$$

である．いま，θ_s，$\theta_l \in \mathbb{C}$ は．

$$\det A = -\frac{\lambda}{\sqrt{2}z}(z-\theta_s)(z-\theta_l) \tag{2.14}$$

を満たし，$|\theta_s| \leq 1 \leq |\theta_l|$ となるようにとる．また，解と係数の関係より $\theta_s\theta_l = 1$ である．

$\det A \neq 0$ のときは，A の逆行列が存在して，母関数が計算できる．

(1) f_{+}^{L} を考える．Lemma1 より，

$$\begin{aligned} f_{+}^{L}(z) &= \frac{1}{\det A}\left\{\left(\frac{z}{\sqrt{2}} - \lambda\right)(\lambda\alpha) - \frac{\omega}{2}(\alpha+\beta)\right\} \\ &= \frac{1}{\det A}\cdot\frac{\lambda\alpha}{\sqrt{2}}\left\{z - \frac{\sqrt{2}}{\lambda\alpha}\left(\lambda^2\alpha + \frac{\omega}{2}(\alpha+\beta)\right)\right\} \end{aligned}$$

ここで，$\theta_s = \frac{\sqrt{2}}{\lambda\alpha}\left(\lambda^2\alpha + \frac{\omega}{2}(\alpha+\beta)\right)$ とおくと，

$$\begin{aligned} f_{+}^{L}(z) &= -\frac{\alpha z}{z-\theta_l} = -\frac{\alpha z}{z-\frac{1}{\theta_s}} = \alpha\frac{z\theta_s}{-z\theta_s+1} \\ &= -\alpha(\theta_s z)\{1 + (\theta_s z) + (\theta_s z)^2 + (\theta_s z)^3 + \cdots \end{aligned}$$

よって，

$$f_+^L(z) = \alpha \sum_{x=1}^{\infty} (\theta_s z)^x \tag{2.15}$$

これにより，

$$\Psi^L(x) = \alpha(\theta_s)^x \quad (x = 1, 2, \cdots)$$

が求められた．このとき，

$$\theta_s = \frac{\sqrt{2}}{\lambda\alpha}\left\{\lambda^2\alpha + \frac{\omega}{2}(\alpha+\beta)\right\} \tag{2.16}$$

である．

(2) f_+^R を考える．

Lemma1 より，

$$\begin{aligned} f_+^R(z) &= \frac{1}{\det A}\left\{ -\frac{z}{\sqrt{2}}\lambda\alpha + \frac{\omega z(\alpha+\beta)}{\sqrt{2}}\lambda - \frac{\omega(\alpha+\beta)}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{\det A}\cdot\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\{(\omega-1)+\omega\beta\}\left\{z - \frac{\sqrt{2}}{2\lambda}\cdot\frac{\omega(\alpha+\beta)}{(\omega-1)\alpha+\omega\beta}\right\} \end{aligned}$$

ここで，$\theta_s = \frac{\omega(\alpha+\beta)}{\sqrt{2}\lambda\{(\omega-1)\alpha+\omega\beta}$ とおくと，

$$\begin{aligned} f_+^R(z) &= -\frac{z\{(\omega-1)\alpha+\omega\beta\}}{z-\theta_l} = -\frac{z\{(\omega-1)\alpha+\omega\beta\}}{z-\frac{1}{\theta_s}} \\ &= \{(\omega-1)\alpha+\omega\beta\}\sum_{x=1}^{\infty}(\theta_s z)^x \end{aligned} \tag{2.17}$$

これにより，

$$\Psi^R(x) = \{(\omega-1)\alpha+\omega\beta\}(\theta_s)^x \quad (x = 1, 2, \cdots)$$

が求められた．このとき，

$$\theta_s = \frac{\omega(\alpha+\beta)}{\sqrt{2}\lambda\{(\omega-1)\alpha+\omega\beta\}} \tag{2.18}$$

である．

(3) f_-^L を考える.

Lemma1 より,

$$f_-^L(z) = \frac{\omega(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}\lambda(z-\theta_s)(z-\theta_l)}\left(z - \frac{\sqrt{2}\lambda\{\omega\alpha+(1-\omega)\beta\}}{\omega(\alpha-\beta)}\right)$$

ここで, $\theta_l = \frac{\sqrt{2}\lambda\{\omega\alpha+(1-\omega)\beta\}}{\omega(\alpha-\beta)}$ とおくと,

$$\begin{aligned} f_-^L(z) &= \frac{\omega(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}\lambda}\cdot\frac{1}{z-\theta s} = \frac{\omega(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}\lambda}\cdot\frac{1}{\theta_s}\cdot\frac{\theta_s}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{\theta_s}{z}} \\ &= \frac{\omega(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}\lambda}\cdot\frac{1}{\theta_s}\left\{\frac{\theta_s}{z}+\left(\frac{\theta_s}{z}\right)^2\cdots\right\} \end{aligned}$$

よって,

$$f_-^L(z) = \frac{\omega(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}\lambda}\cdot\left(\frac{\theta_s}{z}\right)\sum_{x=-1}^{-\infty} = \{\omega\alpha+(1-\omega)\beta\}\sum_{x=-1}^{-\infty}(\theta_s^{-1}z)^x \tag{2.19}$$

これにより,

$$\Psi^L(x) = \{\omega\alpha+(1-\omega)\beta\}(\theta_s)^{-x}(x=-1,-2,\cdots)$$

が求められた. このとき,

$$\theta_s = \frac{\omega(\alpha-\beta)}{\sqrt{2}\lambda\{\omega\alpha+(1-\omega)\beta\}} \tag{2.20}$$

である.

(4) f_-^R を考える.

Lemma1 より,

$$f_-^R(z) = \frac{\sqrt{2}z}{\lambda(z-\theta_s)(z-\theta_l)}\cdot\frac{(\omega+2\lambda^2)\beta-\omega\alpha}{2z}\cdot\left(z-\frac{2\lambda\beta}{-\sqrt{2}\omega\alpha+\sqrt{2}(\omega+2\lambda^2)\beta}\right)$$

ここで, $\theta_l = \frac{2\lambda\beta}{-\sqrt{2}\omega\alpha+\sqrt{2}(\omega+2\lambda^2)\beta}$ とおくと,

$$\begin{aligned} f_-^R(z) &= \frac{1}{2}\{(\omega+2\lambda^2)\beta-\omega\alpha\}\cdot\frac{2\beta}{(\omega+2\lambda^2)\beta-\omega\alpha}\cdot\frac{\theta_s}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{\theta_s}{z}} \\ &= \beta\cdot\frac{\theta_s}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{\theta_s}{z}} \end{aligned}$$

よって,

$$f_{-}^{R}(z) = \beta \sum_{x=-1}^{-\infty} (\theta_s^{-1} z)^x \tag{2.21}$$

これにより,

$$\Psi^R(x) = \beta(\theta_s)^{-x} \quad (x = -1, -2, \cdots)$$

が求められた．このとき,

$$\theta_s = \frac{\sqrt{2}}{\lambda\beta}\left(-\frac{\omega}{2}\alpha + (\frac{\omega}{2} + \lambda^2)\beta \right) \tag{2.22}$$

である．

3　主結果

SGF 法を本モデルに適用すると，固有値問題 $U\Psi = \lambda\Psi$ を次のように解くことができる．

Proposition 1 *(*固有値問題の解*)* $\alpha = \Psi^L(0)$，$\beta = \Psi^R(0)$，$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1(\alpha, \beta \in \mathbb{C})$ とすると，固有値問題

$$U\Psi = \lambda\Psi \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$

の解は，以下のようになる．

$$\Psi(x) = \begin{cases} (\theta_s)^x \begin{bmatrix} \alpha \\ (\omega-1)\alpha + \omega\beta \end{bmatrix} & (x = 1, 2, \cdots) \\ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} & (x = 0) \\ (\theta_s)^{|x|} \begin{bmatrix} \omega\alpha + (1-\omega)\beta \\ \beta \end{bmatrix} & (x = -1, -2, \cdots) \end{cases} \tag{3.23}$$

但し，$\beta^2 = -\alpha^2$，つまり $\beta = i\alpha$ または $\beta = -i\alpha$ となる．

また $\omega \neq 1$ のときは，$\Psi \in \mathcal{H}$ であるので，対応する λ は固有値となる．一方，$\omega = 1$ のときは，固有方程式を満たすが，$\Psi \notin \mathcal{H}$ のため，対応する λ は固有値とならない．
さらに，λ と θ_s は次を満たす．

(1)$\beta = i\alpha$ のとき

$$\lambda^2 = \frac{\omega(-1+2\omega-\omega^2) - i\omega(1-\omega+\omega^2)}{1-2\omega+2\omega^2} \tag{3.24}$$

$$\theta_s^2 = \frac{-\omega}{\omega^2-3\omega+1+i(\omega^2-1)} \tag{3.25}$$

(2)$\beta = -i\alpha$ のとき

$$\lambda^2 = \frac{\omega(-1+2\omega-\omega^2) + i\omega(1-\omega+\omega^2)}{1-2\omega+2\omega^2} \tag{3.26}$$

$$\theta_s^2 = \frac{-\omega}{\omega^2-3\omega+1+i(1-\omega^2)} \tag{3.27}$$

最後に，得られた固有値と本質的スペクトルを数値的にプロットしたので，その図を紹介する．ω は，$\omega = (-\infty, \infty)$ かつ $\omega \neq 1$ である．

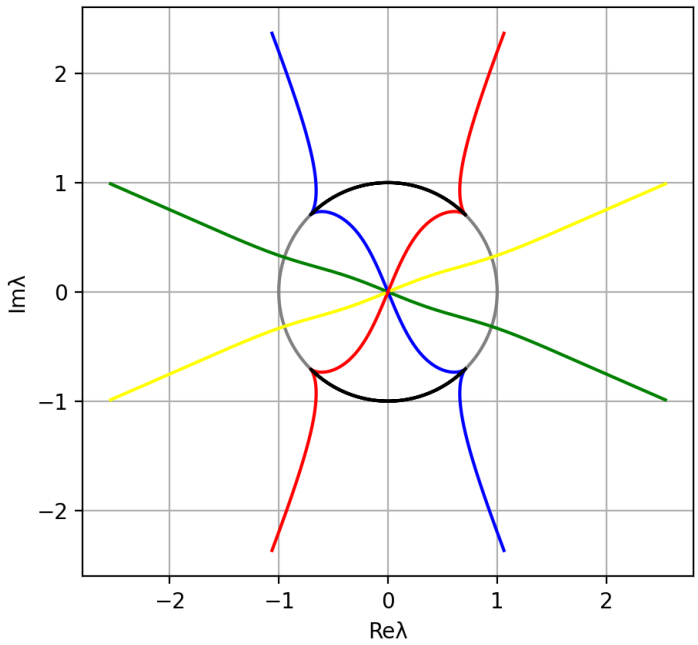


図 1: 固有値 λ，本質的スペクトルのプロット図

青線：(1)　$\beta = i\alpha$，$\omega \geq 0$
緑線：(2)　$\beta = i\alpha$，$\omega < 0$
赤線：(3)　$\beta = -i\alpha$，$\omega \geq 0$
黄線：(4)　$\beta = -i\alpha$，$\omega < 0$
黒線：(5)　本質的スペクトル　に対応している．

参考文献

[1] N. Konno: Localization of an inhomogeneous discrete time quantum walk on the line. *Quantum Information Proccessing*,**9**,405-418,(2010)

[2] N. Konno, T. Łuczak and E. Segawa: Limit measures of inhomogeneous discrete-time quantum walks in one dimension. *Quantum Information Processing* **12**,33-35(2013)

[3] N. Konno: Quantum random walks in one dimension. *Quantum Information Proccessing*,**1**,345-354,(2002)

[4] G. Grimmett, S. Janson and P. Scudo: Weak limits for quantum random walks. *Phys. Rev. E*, **69**, 026119 (2004).

[5] C. K. Ko and H. J. Yoo: The generator and quantum Markov semigroup for quantum walks. *Kodai Math. J.*, **36**, 363-385 (2013).

[6] M. J. Cantero, F. A. Grunbaum, L. Moral and L. Velazquez: One-dimensional quantum walks with one defect. *Rev. Math. Phys.*, **24**, 1250002 (2012).

[7] K. Chisaki, M. Hamada, N. Konno and E. Segawa: Limit theorems for discrete-time quantum walks on trees,. *Interdisciplinary Information Sciences*, **15**, 423-429 (2009).

[8] A. Suzuki :Asymptotic velocity of a position-dependent quantum walk. *Quantum Information Proccessing*,**15**,103-119,(2016)

[9] T. Kitagawa: Topological phenomena in quantum walks: elementary introduction to the physics of topological phases. *Quantum Information Proccessing*,**11**, 1107–1148 (2012)

[10] K.Mochisuki,D.Kim and H.Obuse: Explicit definition of PT symmetry for nonunitary quantum walks with gain and loss. *Physical Review A* **93**,062116(2016)

[11] T. Endo and N. Konno: The stationary measure of a space-inhomogeneous quantum walk on the line. *Yokohama Mathematical Journal*,**60**,33-47(2014)

[12] S. Endo, T. Endo,T. Komatsu and N. Konno: Eigenvalues of two-state quantum Walks induced by the hadamard walk. *Entropy*,**127**,22(1)(2020)

Prime-representing functions and Hausdorff dimension

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
齋藤 耕太 (Kota SAITO)

概要

実数列 $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ を固定し，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $c_k \geq 2$ が成立するものとする．2010 年に Matomäki は $A^{c_1 \cdots c_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ の整数部分が常に素数となる $A > 1$ を集めた集合について研究した．結果として彼女は，その集合が非可算濃度，nowhere dense，かつルベーグ測度が 0 となることを示した．本発表では，実数列 $(c_k)_{k=1}^{\infty}$ がさらに有界であるとき，その集合のハウスドルフ次元を計算し，1 となることを示す．このレポートでは研究の背景や先行研究のサーベイを中心に議論し，最後に本研究の結果について述べる．

1 はじめに

正整数全体の集合を $\mathbb{N}$ と表し，$\lfloor x \rfloor$ を実数 x の整数部分と定義する．関数 $f(k)$ が任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して素数となるとき，f を素数表現関数と呼ぶ．正の実数列 $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ を固定する．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$C_k = c_1 \cdots c_k$ と定義する．本研究はある定数 A が存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\lfloor A^{C_k} \rfloor$ が素数となるような素数表現関数について議論する．この形の素数表現関数は Mills によって初めて与えられた:

Theorem 1 ([Mil47, Theorem])**.** ある定数 $A > 1$ が存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\lfloor A^{3^k} \rfloor$ が素数となる．

Theorem 1 の証明はセクション 2.1 で行う．セクション 2.1 ではさらに， ある $A > 1$ が存在して，$\lfloor A^{c^k} \rfloor$ が素数表現関数となるような $c > 1$ の十分条件について議論する．そして，この指数 c が素数の短区間上の分布と関係していることを観察する．

セクション 2.2 では，Wright による Mills の表現関数の一般化や幾何学的なアプローチについて紹介する．より詳しく述べると，まず $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{N}$ を空でない集合とし，実関数列 $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ を固定する．Wright は任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\lfloor \lambda_k \circ \cdots \circ \lambda_1(A) \rfloor \in \mathcal{B}$ となる表現関数について研究した．さらに，そのような $A > 1$ を集めた集合の幾何学的性質について結果を得た．例えば，$c_1 > 0$, $c_{k+1} > 1$ $(k \in \mathbb{N})$ を満たす任意の正の実数列 $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ に対して，

$$\mathcal{W}(c_k) = \{A > 1 \colon \lfloor A^{C_k} \rfloor \text{が素数表現関数となる}\} \tag{1}$$

と定義する．ただし，$C_k = c_1 \cdots c_k$ とする．このとき，Wright の結果 ([Wri54, Section 6]) から

本研究は科研費 (課題番号: 19J20878) の助成を受けたものである．
Email: m17013b@math.nagoya-u.ac.jp

任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $c_k \geq 2.65805$ となるとき，$\mathcal{W}(c_k)$ は非加算濃度，nowhere dense，Lebesgue 測度が 0 となることがわかる．ここで，位相空間 X に対して，X の閉包の内部が空となるとき，X は nowhere dense であるという．Wright 以前の研究では $\mathcal{W}(c) \neq \emptyset$ となる定数 c の十分条件を求めていたが，Wright の研究で初めて $\mathcal{W}(c_k)$ の幾何学的性質が注目された．

さらに，セクション 2.3 では，Wright の結果が成立するような c_k の条件を $c_k \geq 2.65805$ から $c_k \geq 2$ へと拡張する．この結果は Matomäki によって与えられた [Mat10, Theorem 3]．このレポートでは次の簡単な場合を示す:

Theorem 2 ([Mat10, Corollary 4])**.** ある定数 $A > 1$ が存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\lfloor A^{2^k} \rfloor$ が素数となる．

条件 $c_k \geq 2$ は従来の素数表現関数の構成方法からみると驚くべき結果である．これについてはセクション 2.1 とセクション 2.2 で詳細を述べる．しかし， Matomäki が示した集合 $\mathcal{W}(c_k)$ の幾何学的性質については Wright と同じ「非加算，nowhere dense，測度 0」であり，Wright の研究以降の進展はなかった．そこで本研究では，フラクタル幾何学的アプローチによって，集合 $\mathcal{W}(c_k)$ のより詳細な幾何学的構造を明らかにした．より厳密に言うと，実数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が有界で任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $c_k \geq 2$ を満たすとき，$\mathcal{W}(c_k)$ の Hausdorff 次元が 1 となることを示した [Sai21]. 詳しく述べるために，セクション 3 では Hausdorff 次元を導入し，セクション 4 で主結果について述べる．

Notation 3. 素数全体の集合を $\mathcal{P}$ と表す．任意の有限集合 X に対して，$\#X$ を X の元の個数と定義する．f, g を $D \subseteq \mathbb{R}$ 上の実関数とし，h を D 上の非負関数とする．ある定数 $K > 0$ が存在して任意の $x \in D$ に対して $|f(x) - g(x)| \leq Kh(x)$ が成立するとき，$f(x) = g(x) + O(h(x))$ と書く．定数 K が x 以外のパラメータ $a, b, c, \ldots$ に依存するとき，$f(x) = g(x) + O_{a,b,c,\ldots}(h(x))$ とも書く．

2 先行研究のサーベイ

2.1 Mills の構成法

このセクションでは Theorem 1 に証明を与えることを目標とし，短区間上の素数分布との関連性を観察する．まずは Ingham によって示された次の補題を準備する．

Lemma 4 ([Ing37])**.** ある十分大きい $x_0 > 0$ が存在して, 任意の $x \geq x_0$ に対して区間 $[x, x+x^{5/8}]$ が少なくとも 1 つ素数を含む.

Remark 5. 実際には Ingham の結果から Lemma 4 より強いことが成立する．任意の正数 ε を固定する．[Ing37] により，$\theta = 577/925 + \varepsilon$ とおいたとき，$\#(\mathcal{P} \cap [x, x + x^\theta]) \sim x^\theta/(\log x)$ (as $x \to \infty$) が成立する．ただし，$f(x)/g(x) \to 1$ (as $x \to \infty$) となるとき $f(x) \sim g(x)$ (as $x \to \infty$) と書く．ここで，$5/8 = 0.625$ で $577/925 = 0.6237\cdots$ である．よって，$\theta = 577/925 + \varepsilon$ の方が若干よい評価になっている．実際の Mills の証明には，ある定数 $K > 0$ が存在して，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$p_{n+1} - p_n \leq K p_n^{5/8} \tag{2}$$

という評価が使われている．ただし，p_n は n 番目の素数である．

Lemma 4 に $x = m^3$ を代入すると，任意の十分大きい自然数 m に対して，ある素数 p が存在して，次が成立する:

$$m^3 \leq p < p+1 \leq m^3 + m^{15/8} + 1 < m^3 + 3m^2 < (m+1)^3. \tag{3}$$

Proof of Theorem 1. p_1 を十分大きい素数とする．このとき，(3) に $m := p_1$ を代入すると，ある素数 p_2 が存在して $p_1^3 \leq p_2 < p_2 + 1 < (p_1+1)^3$ が成立する．

次に，素数の単調増大列 $p_1 < \ldots < p_k$ が与えられ，任意の $j = 2, 3, \ldots, k$ に対して，$p_{j-1}^3 \leq p_j < p_j + 1 < (p_{j-1}+1)^3$ が成立すると仮定する．このとき，(3) に $m := p_k$ を代入すると，

$$p_k^3 \leq p_{k+1} < p_{k+1} + 1 < (p_k+1)^3 \tag{4}$$

なる素数 p_{k+1} が存在する，したがって，帰納法により，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して (4) が成立するような素数からなる数列 $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ を構成することができる．したがって，(4) に $k = 1, 2, \ldots$ と代入していくと，不等式

$$p_1^{1/3} \leq p_2^{1/3^2} \leq p_3^{1/3^3} \leq \cdots < (p_3+1)^{1/3^3} < (p_2+1)^{1/3^2} < (p_1+1)^{1/3} \tag{5}$$

を得る．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$a_k = p_k^{1/3^k}$，$b_k = (p_k+1)^{1/3^k}$ とおくと，不等式 (5) により，数列 $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ は上に有界な単調増大列であり，$(b_k)_{k=1}^{\infty}$ は下に有界な単調増大列である．したがって，$\lim_{k\to\infty} a_k$ と $\lim_{k\to\infty} b_k$ は収束する．それぞれの極限を A, B とおく．このとき，(5) により，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $p_k^{1/3^k} \leq A \leq B < (p_k+1)^{1/3^k}$ が成立する．よって，$p_k \leq A^{3^k} < p_k + 1$ となり，$\lfloor A^{3^k} \rfloor = p_k$ が任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ． □

この証明では Lemma 4 に $x := m^3$ を代入し不等式 (3) を得た．この指数 3 は素数表現関数の指数 $\lfloor A^{3^k} \rfloor$ の 3^k に対応している．ここで，この指数 3 をより一般のものに拡張することを考える．

Theorem 6. 任意の実数 $c > 1/(1-577/925) = 925/348 = 2.65804\cdots$ に対して，ある定数 $A > 1$ が存在して，$\lfloor A^{c^k} \rfloor$ が素数表現関数となる．

Proof. $\theta = 577/925$ とおく．実数 $c > 1/(1-\theta)$ を固定する．ここで，$1/(1-x)$ は $0 < x < 1$ 上で連続関数であるからある正数 $\varepsilon > 0$ が存在して，$c \geq 1/(1-(\theta+\varepsilon))$ が成立する．不等式 (3) では，十分大きい連続する立法数の間に p と $p+1$ が含まれることを示し，$\lfloor A^{3^k} \rfloor$ が素数表現関数となる A を構成した．同様にして，十分大きい連続する c 乗数の間に p と $p+1$ が含まれることを示せば, 素数表現関数 $\lfloor A^{c^k} \rfloor$ を構成できる．Remark 5 により Lemma 4 の $[x, x+x^{5/8}]$ を $[x, x+x^{\theta+\varepsilon}]$ に取り替えたものも成立する．そこで，取り替えた Lemma 4 に $x := m^c$ を代入する．このとき，ある素数 p が存在して，$m^c \leq p < p+1 \leq m^c + m^{c\cdot(\theta+\varepsilon)} + 1$ が成立する． 最右辺が $(m+1)^c$ で上から抑えられることを示したい．まず，$m^{c\cdot(\theta+\varepsilon)}$ の指数について

$$c \cdot (\theta+\varepsilon) \leq c \cdot (1 - 1/c) = c - 1$$

となる．また Taylor 展開することで，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $(m+1)^c = m^c + cm^{c-1} + O_c(m^{c-2})$

が成立する．したがって，c にのみ依存する定数 $K > 0$ が存在して，

$$\begin{aligned}(m+1)^c - (m^c + m^{c\cdot(\theta+\varepsilon)} + 1) &\geq (m^c + cm^{c-1} - Km^{c-2}) - (m^c + m^{c-1} + 1)\\ &\geq (c-1)m^{c-1} - Km^{c-2} - 1.\end{aligned}$$

ここで，$c > 1$ であるから，m が十分大きいとき，この不等式の最右辺は 0 以上となる．よって，十分大きい任意の m に対して，ある素数 p が存在して $m^c \leq p < p+1 \leq (m+1)^c$ が成立する．Mills の構成法と同様にして Theorem 6 を得る． □

Remark 7. Mills の結果の一般化である $\lfloor A^{c^k} \rfloor$ なる素数表現関数については Kupers が Niven などが研究を行った．まず，Kupers は任意の整数 $c \geq 3$ に対して，$A > 1$ が存在して，$\lfloor A^{c^k} \rfloor$ が素数表現関数となることを示した [Kup50]. 後に Niven がこの結果を $c > 8/3 = 2.6666\cdots$ なる実数に拡張した [Niv51]．しかし，これらは Theorem 6 の $c > 925/348$ よりも弱い．おそらくこれは Mills が Ingham の結果による最良の評価よりも少し弱い (2) を用いたからであると思われる．セクション 2.2 で述べる Wright の論文 [Wri54, p.70] の注釈をみると，Ingham の結果 [Ing37] による最良な評価は (2) の指数 5/8 を $577/925 + \varepsilon$ としたものという指摘がなされている．

実数 $\gamma \in (0,1)$ に対して，次の条件を定める:

> 条件 $P(\gamma)$: ある十分大きい実数 $x_0 > 0$ が存在して，任意の $x \geq x_0$ に対して区間 $[x, x + x^\gamma]$ が少なくとも 1 つ素数を含む.

Theorem 6 の議論によって，実数 $\gamma > 0$ が $P(\gamma)$ を満たすとき，任意の $c \geq 1/(1-\gamma)$ に対して，ある $A > 1$ が存在して，$\lfloor A^{c^k} \rfloor$ が素数表現関数となることがわかる．現在知られている $P(\gamma)$ を満たすもっとも小さい γ の値は $\gamma = 21/40$ である．これは Baker, Harman, Pintz によって示された [BHP01]．したがって，次を得る:

Theorem 8. 任意の $c \geq 1/(1-21/40) = 40/19 = 2.105263\cdots$ に対して，ある $A > 0$ が存在して，$\lfloor A^{c^k} \rfloor$ が素数表現関数となる.

2.2 Wright の一般化

Wright は Mills とは異なるタイプの素数表現関数を研究した．彼は次の数列が常に素数になるような実数 α が存在することを示した:

$$\lfloor 2^\alpha \rfloor, \quad \lfloor 2^{2^\alpha} \rfloor, \quad \lfloor 2^{2^{2^\alpha}} \rfloor, \quad \cdots \tag{6}$$

一見すると全く別種の素数表現関数にも思えるかもしれないが，この数列の構成方法は Mills の方法ととてもよく似ている．Mills は Ingham の結果 (Lemma 4) を用いて素数表現関数を構成したが，Wright は Bertrand-Chebyshev の定理*から数列 (6) が常に素数となるような α を構成した．詳しくは [Wri51] をみよ.

---

* 任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して，区間 $[n, 2n]$ が少なくとも 1 つ素数を含む．この定理はベルトラン仮説という名前でも知られている.

さらに，Wright は Mills のタイプの素数表現関数や素数からなる数列 (6) を含むような一般の表現関数の理論を整備した．まず，$\mathcal{B}$ を任意の自然数の部分集合とする．任意の実関数列 $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ を固定し，$\phi_k = \lambda_k \circ \lambda_{k-1} \circ \cdots \circ \lambda_1$ と定義する．ただし，各 λ_k の定義域を D_k としたとき，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$D_{k+1} \supseteq \lambda_k \circ \cdots \circ \lambda_1(D_1)$$

を満たすものとする．Wright はある $A > 1$ が存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\lfloor \phi_k(A) \rfloor \in \mathcal{B}$ が成立するような関数列 $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ について議論した．例えば，Mills の素数表現関数は，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda_k(x) = x^3$ とおけば，$\lfloor \phi_k(A) \rfloor = \lfloor A^{3^k} \rfloor$ と表すことができる．さらに，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\lambda_k(x) = 2^x$ とおくと，数列 (6) の第 k 項は $\lfloor \phi_k(\alpha) \rfloor$ と書ける．Wright の功績はこのような一般化に留まらず，集合

$$\mathcal{W} = \{A > 1 \text{: 任意の } k \in \mathbb{N} \text{ に対して } \lfloor \phi_k(A) \rfloor \in \mathcal{B}\}$$

の幾何について考察した．彼の結果 [Wri54, Section 6] から次の定理が導かれる:

Theorem 9. 任意の小さい $\varepsilon > 0$ を固定する．数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $c_k \geq 925/348 + \varepsilon$ となるものとする． $\lfloor A^{C_k} \rfloor$ が素数表現関数になる $A > 1$ を集めた集合は非可算濃度，nowhere dense，ルベーグ測度が 0 である．

Remark 10. Wright はより一般の表現関数 $\lfloor \phi_k(A) \rfloor$ と一般の $\mathcal{B}$ に対して，$\mathcal{W}$ が非可算濃度，nowhere dense, ルベーグ測度が 0 となるような十分条件をそれぞれ与えている ([Wri54, Theorem 5, Theorem 6, Theorem 7]).

Theorem 9 により，実数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ が Theorem 9 の仮定を満たせば $\mathcal{W}(c_k)$ は非加算集合である．よって，超越数である $A \in \mathcal{W}(c_k)$ が非加算個存在する．ただし，ゼロ多項式を除いた任意の有理数係数の多項式の根にならない複素数を超越数と呼ぶ．しかし，与えられた $A \in \mathcal{W}(c_k)$ に対して，A が無理数であるか否か決定するのは非常に難しい問題である．面白いことに，数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ がある条件を満たすとき，Alcauskas と Dubickus は超越数となる $A \in \mathcal{W}(c_k)$ の存在を構成的に示した．しかし，彼らの方法は Mills が構成した素数表現関数 $\lfloor A^{3^k} \rfloor$ に適応することはできず，$\mathcal{W}(3)$ の最小値が有理数か無理数かは未だに解決されていない．超越性についての結果も非常に面白いが，今回の話とは離れるためこれ以上は議論しないでおく．

Theorem 9 が成立するようなの c_k の下界に関しても条件 $P(\gamma)$ が関連している．実数 $\gamma > 0$ を $P(\gamma)$ を満たすものとする．このとき，Theorem 9 の仮定の $c_k \geq 925/348 + \varepsilon$ を $c_k \geq 1/(1-\gamma)$ に入れ替えたとしても，Theorem 9 は成立する．したがって，Baker, Harman, Pintz の結果 [BHP01] によって $\gamma = 21/40$ ととれるので，$c_k \geq 1/(1 - 21/40) = 40/19 = 2.105263\cdots$ を満たす任意の実数列 $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ に対して，$\mathcal{W}(c_k)$ は非加算濃度，nowhere dense，ルベーグ測度 0 となる．ここで，Riemann 予想を仮定したとき，$\gamma = 1/2 + \varepsilon$ が $P(\gamma)$ を満たすことが知られている[†]．したがって，

[†] Riemann 予想仮定下では $\gamma = 1/2 + \varepsilon$ よりもさらに詳しくある定数 $B > 0$ が存在して，任意の $x \geq 2$ に対して区間 $[x, x + Bx^{1/2} \log x]$ が素数を含むことが知られている [Cra21]. $\gamma = 1/2 + \varepsilon$ が $P(\gamma)$ を満たすことを保証するには，Riemann 予想よりも弱い Density hypothesis と呼ばれるリーマンゼータ関数の非自明零点の密度に関する予想を仮定すれば十分である．

Riemann 予想仮定下では Theorem 9 が成立するための c_k の下界を $2+\varepsilon$ とすることができる．さらに，Cramér 予想[‡] を仮定すると，任意の小さい正数 ε に対して $\gamma = \varepsilon$ は $P(\gamma)$ を満たす．したがって，この予想が成立すれば c_k の下界を $1+\varepsilon$ とすることができる．

2.3 Matomäki の構成法

面白いことに，Matomäki は Mills の構成法を発展させ，Theorem 9 の c_k の下界を unconditional に 2 まで下げた．すなわち，Mills の流の構成法では $c_k \geq 2+\varepsilon$ とするには Riemann 予想が必要であったが，Matomäki は Riemann 予想を仮定することなく $c_k \geq 2$ まで押し下げた．より詳しく述べると，次を示した:

Theorem 11 ([Mat10, Theorem 3])**.** $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $c_k \geq 2$ が成立するような任意の実数列とする．各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，$C_k = c_1 \cdots c_k$ とおく．このとき， 集合 $\mathcal{W}(c_k)$ は非加算濃度，nowhere dense，ルベーグ測度 0 となる．

このレポートでは簡単のために Theorem 2 を示す．まずは次の補題を用意する．これは本質的に [Mat07, Lemma 1.2] の証明から従う:

Lemma 12 ([Mat10, Lemma 7])**.** ある定数 $0 < d < 1$ と $D > 0$ が存在して，十分大きい x に対して，区間 $[x, 2x]$ に含まれ，不等式 $\#(\mathcal{P} \cap [n, n+n^{1/2}]) \leq dn^{1/2}/(\log n)$ を満たす互いに交差を持たない区間 $[n, n+n^{1/2}]$ の個数は高々 $Dx^{1/6}$ 個である．

Proof of Theorem 2. 十分大きい正数のパラメータ M をとる．$B = \sqrt{3/2}$ とおく．M を十分大きく取ることで素数定理によって

$$\#([M, BM] \cap \mathcal{P}) \geq ((B-1)/2) \cdot M/\log M \tag{7}$$

が成立する．さらに，任意の $p \in [M, BM]$ に対して，

$$M^2 \leq p^2 < p^2 + p \leq (3/2)M^2 + \sqrt{3/2}M \leq 2M^2$$

となる．したがって，(7) により，$[M^2, 2M^2]$ に含まれ，互いに交差を持たない区間 $[p^2, p^2+p]$ $(p \in \mathcal{P})$ は少なくとも $((B-1)/2)M/\log M$ 個存在する．Lemma 12 で $x = M^2$ を代入することによって，区間 $[M^2, 2M^2]$ に含まれ，不等式

$$\#(\mathcal{P} \cap [n, n+n^{1/2}]) \leq dn^{1/2}/(\log n)$$

を満たす互いに交差を持たない区間 $[n, n+n^{1/2}]$ の個数は高々 $DM^{1/3}$ 個である．したがって，少なくとも

$$((B-1)/2) \cdot M/\log M - DM^{1/3} \tag{8}$$

個の区間 $[p^2, p^2+p] \subseteq [M^2, 2M^2]$ $(p \in \mathcal{P})$ に対して

$$\#(\mathcal{P} \cap [p^2, p^2+p]) \geq \frac{d}{2}\frac{p}{\log p} \tag{9}$$

[‡] ある定数 $B > 0$ が存在して，任意の $x \geq 2$ に対して区間 $[x, x+B(\log x)^2]$ が少なくとも 1 つ素数を含むだろうという予想.

が成立する．M を十分大きくとることで，(8) が正となる．よって，ある $p_1 \in [M, BM]$ が存在して (9) を満たす．

ここで，任意の $k \geq 1$ を固定する．不等式 (9) を満たす $p = p_k \geq M$ が存在すると仮定する．このとき，$\mathcal{P}_k = \mathcal{P} \cap [p_k^2, p_k^2 + p_k]$ とおく．任意の $p \in \mathcal{P}_k$ に対して，

$$\begin{aligned} p_k^4 \leq p^2 < p^2 + p \leq (p_k^2 + p_k)^2 + (p_k^2 + p_k) \leq p_k^4 + 2p_k^3 + 2p_k^2 + p_k \\ \leq p_k^4 + 5p_k^3 \leq p_k^4(1 + 5p_k^{-1}) \leq p_k^4(1 + 5M^{-1}) \leq 2p_k^4 \end{aligned}$$

が成立する．よって，帰納法の仮定から $[p_k^4, 2p_k^4]$ に含まれ， 互いに交差を持たない区間 $[p^2, p^2 + p]$ $(p \in \mathcal{P}_k)$ の個数は少なくとも $dp_k/(2\log p_k)$ 個存在する．Lemma 12 で $x = p_k^4$ を代入することによって，区間 $[p_k^4, 2p_k^4]$ に含まれ，不等式

$$\#(\mathcal{P} \cap [n, n + n^{1/2}]) \leq dn^{1/2}/(\log n)$$

を満たす互いに交差を持たない区間 $[n, n + n^{1/2}]$ の個数は高々 $Dp_k^{2/3}$ 個である．よって，$p_k \geq M$ であるから，少なくとも $dp_k/(2\log p_k) - Dp_k^{2/3} > 0$ 個の区間 $[p^2, p^2 + p] \subseteq [p_k^4, 2p_k^4]$ $(p \in \mathcal{P}_k)$ に対して (9) が成立する．したがって，ある $p_{k+1} \in \mathcal{P}_k$ が存在して，$p = p_{k+1} \geq M$ が (9) を満たす．帰納法から，素数の列 $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ が存在して，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $p_k^2 \leq p_{k+1} \leq p_k^2 + p_k < (p_k + 1)^2 - 1$ が成立する．よって，

$$p_1^{1/2} \leq p_2^{1/2^2} \leq p_3^{1/2^3} \leq \cdots < (p_3 + 1)^{1/2^3} < (p_2 + 1)^{1/2^2} < (p_1 + 1)^{1/2}$$

が成り立つ．よって，Mills の構成法と同様にして，$A = \lim_{k\to\infty} p_k^{1/2^k}$ が存在する．また，任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\lfloor A^{2^k} \rfloor = p_k$ が成立する． □

3 Hausdorff 次元

Matomaki は c_k の下界を広げたが $\mathcal{W}(c_k)$ の幾何については Wright の結果からの進展はなかった．そこで本研究ではフラクタル幾何学的観点から，集合 $\mathcal{W}(c_k)$ のより詳細な幾何学的構造を明らかにした．より厳密にいうと，$\mathcal{W}(c_k)$ のハウスドルフ次元を求めた. ここで，主結果について述べる前に Hausdorff 次元について議論をする．フラクタルやフラクタル次元について詳しくは [Fal14] を見よ．任意の集合 $U \subseteq \mathbb{R}$ に対して, U の直径を $\mathrm{diam}(U) = \sup_{x,y\in U} |x - y|$ と定める．$\delta > 0$ を固定する．任意の $F \subseteq \mathbb{R}$ と $s \geq 0$ に対して，

$$\mathcal{H}_\delta^s(F) = \inf\left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{diam}(U_j)^s \colon F \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j,\ (\forall j \in \mathbb{N})\ \mathrm{diam}(U_j) \leq \delta \right\},$$

と定義する．ここで，任意の $\delta_1 > \delta_2 > 0$ に対して，下限の定義から，$\mathcal{H}_{\delta_1}^s(F) \leq \mathcal{H}_{\delta_2}^s(F)$ が成立する．よって，$\mathcal{H}^s(F) = \lim_{\delta\to+0} \mathcal{H}_\delta^s(F)$ は収束するか無限大に発散する．この極限 $\mathcal{H}^s(F)$ を集合 F の s **次元 Hausdorff 測度**と呼ぶ.

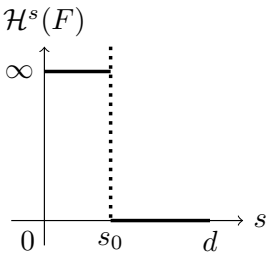
Proposition 13. $F \subseteq \mathbb{R}^d$ とする．任意の $0 \leq s < t$ に対して，$\mathcal{H}^s(F) < \infty$ ならば $\mathcal{H}^t(F) = 0$ となる.

Proof. まず，$\alpha = \mathcal{H}^s(F)$ とおく．任意の $\delta \in (0,1)$ を固定する．このとき，$\mathcal{H}^s_\delta(F) \leq \mathcal{H}^s(F) < 2\alpha$ となるから，ある集合族 $(U_j)_{j=1}^\infty$ が存在して，任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して $\mathrm{diam} U_j \leq \delta$ となり，$F \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty U_j$，$\sum_{j=1}^\infty \mathrm{diam}(U_j)^s \leq 2\alpha$ となる．よって，

$$\mathcal{H}^t_\delta(F) \leq \sum_{j=1}^\infty \mathrm{diam}(U_j)^t \leq \sum_{j=1}^\infty \mathrm{diam}(U_j)^s \mathrm{diam}(U_j)^{t-s} \leq \delta^{t-s} 2\alpha$$

が成立する．したがって，$\delta \to +0$ とすることで，$\mathcal{H}^t(F) = 0$ を得る． □

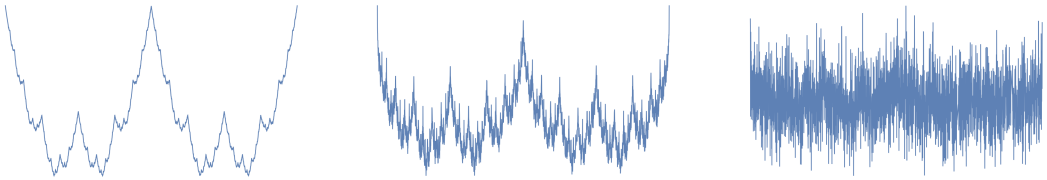
この命題から $\{(s, \mathcal{H}^s(F))\colon s \in [0,d]\}$ を図示すると以下の図を得る．



このグラフの特異点 s_0 を $F \subseteq \mathbb{R}^d$ の Hausdorff 次元と定義する．すなわち，

$$\dim_{\mathrm{H}} F = \inf\{s \in [0,d]\colon \mathcal{H}^s(F) = 0\}$$

と定める．Hausdorff 次元は一般に整数次元をとるとは限らない．Weierstrass 関数と呼ばれる関数のグラフ例を挙げると，以下の図のようになる [She18].



1.1 次元　　1.7 次元　　1.99 次元

平面図形についてはハウスドルフ次元が 2 に近づくほどより平面的な広がりをもち，1 に近づくほど，より滑らかな曲線に近づいていく．これと同様のことが実数の部分集合にも言える．ハウスドルフ次元が 1 に近いほど，線分を含む図形に近づき，0 に近いほど離散的な点に近づく．

では話を $\mathcal{W}(c_k)$ に戻そう．$\mathcal{W}(c_k)$ のハウスドルフ次元はいくつであるのか？すなわち，フラクタル次元という尺度でみたとき，$\mathcal{W}(c_k)$ は離散に近いのか，それとも連続的な図形に近いのだろうか？

4　主結果

Theorem 14 ([Sai21, Theorem 2]). $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ を任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $c_k \geq 2$ なる有界な実数列とする．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $C_k = c_1 \cdots c_k$ とおく．このとき，

$$\dim_{\mathrm{H}} \mathcal{W}(c_k) = \dim_{\mathrm{H}} \{A > 1\colon \lfloor A^{C_k} \rfloor \text{が素数表現関数}\} = 1$$

が成立する．

すなわち，Hausdorff 次元という視点からこの集合を観察すると，集合 $\mathcal{W}(c_k)$ は Theorem 14 の条件下では線分を含む図形 (連続) に近いということがわかった．さらに，Matomäki の結果 [Mat10, Theorem 3] と Theorem 14 を合わせることで，集合 $\mathcal{W}(c_k)$ は nowhere dense, ルベーグ測度 0, ハウスドルフ次元 1 であることもわかる．ただし，$(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ は定理の条件を満たすものとする．したがって，$c_1 = c_2 = \cdots = 2$ を代入することで，次が明らかとなった:

Corollary 15 ([Sai21, Corollary 1])**.** 変数 $k \in \mathbb{N}$ についての関数 $\lfloor A^{2^k} \rfloor$ が素数表現関数となる $A > 1$ を集めた集合は nowhere dense, Lebesgue 測度 0, Hausdorff 次元 1 である．

参考文献

[BHP01] R. C. Baker, G. Harman, and J. Pintz, *The difference between consecutive primes. II*, Proc. London Math. Soc. (3) **83** (2001), no. 3, 532–562. MR 1851081

[Cra21] H. Cramér, *Some theorems concerning prime numbers.*, Ark. Mat. Astron. Fys. **15** (1921), no. 5, 33 p.

[Fal14] Kenneth Falconer, *Fractal geometry*, third ed., John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2014, Mathematical foundations and applications. MR 3236784

[Ing37] A. E. Ingham, *On the difference between consecutive primes*, The Quarterly Journal of Mathematics **os-8** (1937), no. 1, 255–266.

[Kui50] L. Kuipers, *Prime-representing functions*, Nederl. Akad. Wetensch., Proc. **53** (1950), 309–310 = Indagationes Math. 12, 57–58 (1950). MR 34797

[Mat07] K. Matomäki, *Large differences between consecutive primes*, Q. J. Math. **58** (2007), no. 4, 489–518. MR 2371468

[Mat10] ———, *Prime-representing functions*, Acta Math. Hungar. **128** (2010), no. 4, 307–314. MR 2670990

[Mil47] W. H. Mills, *A prime-representing function*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 604. MR 20593

[Niv51] Ivan Niven, *Functions which represent prime numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 753–755. MR 43804

[Sai21] K. Saito, *Prime-representing functions and Hausdorff dimension*, Acta Math. Hungar. **165** (2021), no. 1, 203–217. MR 4323595

[She18] W. Shen, *Hausdorff dimension of the graphs of the classical Weierstrass functions*, Math. Z. **289** (2018), no. 1-2, 223–266. MR 3803788

[Wri51] E. M. Wright, *A prime-representing function*, Amer. Math. Monthly **58** (1951), 616–618. MR 43805

[Wri54] ———, *A class of representing functions*, J. London Math. Soc. **29** (1954), 63–71. MR 57892

確率的なリセットによる集団振動の抑制

東京大学大学院 新領域創成科学研究科 複雑理工学専攻
小澤歩 (Ayumi OZAWA)

概要

振動子が相互作用などによりリズムを揃える現象は同期現象と呼ばれ，自然界で広く観察される．例えば，細胞内でタンパク質の修飾状態が同期して変化し，集団的なリズムを生み出すことがある．一方，細胞内ではこれらのタンパク質の分解や新規合成も絶えず行われている．この摂動が集団的なリズムに及ぼす影響を理解するために，位相が確率的にリセットされる蔵本モデルを解析した．数値解析および定常解の摂動論的な解析は，リセットが集団振動を抑制することを示唆した．

1 導入

1.1 生物のリズム現象と同期現象

周期的に時間変化する系（振動子）は自然界に広く観察される．多くの動物が約 1 日単位で繰り返す活動と睡眠のリズムはその例である．このリズムは概日リズムと呼ばれ，太陽光などの時刻を知るための手がかりが全く無くても維持されうることが知られている [1].

複数の振動子が相互作用すると，互いに振動のタイミングを揃えて集団的な振動を示すことがあり，この現象は同期現象と呼ばれる [2]．例えば，概日リズムの研究によく用いられる単細胞性のシアノバクテリア *Synechococcus* では，細胞内に多数存在するタンパク質の修飾状態が同期して変化することで一細胞単位の概日リズムが生み出されると考えられている [3, 4].

1.2 蔵本モデルと非同期-同期転移

相互作用により同期する振動子の数理モデルで解析的に取り扱いやすいものとして，蔵本モデルが知られている [5, 6]．このモデルでは 1 つの振動子の状態を位相と呼ばれる 1 つの変数で表し，その時間発展を以下のように与える：

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i(t)}{\mathrm{d}t} = \omega_i + \frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\theta_j(t) - \theta_i(t)\right). \tag{1}$$

ここで，$i = 1, 2, \ldots, N$ であり，N は振動子の総数である．また $\theta_i \in [0, 2\pi)$ は振動子 i の位相である．右辺第一項の ω_i は固有振動数と呼ばれ，振動子間の相互作用が無い場合の振動子 i の振動数を表す．右辺第二項は振動子間の相互作用を表しており，その強さ $\kappa \geq 0$ は結合強度と呼ばれる．

振動子集団の状態を表す変数として以下のように複素秩序変数を導入する：

$$r(t) := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} e^{\mathrm{i}\theta_j(t)} \tag{2}$$

ここで，i は虚数単位を表す．複素秩序変数は，複素平面の単位円周上に，位相を偏角として振動子を配置したときの重心に対応する (図 1)．また，

$$R(t) := |r(t)|, \tag{3a}$$
$$\Theta(t) := \arg r(t) \tag{3b}$$

とおけば，$0 \leq R \leq 1$ は位相の揃い具合の指標になる．例えば，位相が $[0, 2\pi)$ 上に一様に分布していれば $R = 0$ となる．また，全ての振動子が同じ位相をもつ必要十分条件は $R = 1$ である．本稿では R を蔵本秩序変数と呼ぶ．



図 1　複素秩序変数の図示．黒く塗りつぶされた円が複素平面の単位円上に配置された振動子を表す．赤い矢印が複素秩序変数を表す．矢印の長さが R に，矢印の指す向きが Θ に対応する．

振動子数 N が十分大きいとき，式 (1) で結合強度 κ を大きくすると，ある κ の値を境に $R(t)$ の長時間平均 $\langle R \rangle$ が急激に大きくなる (図 2)．さらに，その傾向は振動子数 N が大きくなるほど顕著になる．

式 (1) の $N \to \infty$ の極限に対応するモデルとして，以下の式がしばしば用いられる [5, 7]：

$$\frac{\partial p(\theta,\omega,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\hat{v}(\theta,\omega,t)p(\theta,\omega,t)\right] \tag{4a}$$
$$\hat{v}(\theta,\omega,t) = \omega + \kappa \int_0^{2\pi} \sin\left(\phi - \theta\right) p(\phi,t)\mathrm{d}\phi. \tag{4b}$$

ここで $p(\theta,\omega,t)$ は時刻 t において固有振動数が ω で位相が θ である振動子の密度を表す．式 (1) から式 (4) の厳密な導出は [8] で与えられている．

蔵本は，振動子数 $N \to \infty$ の極限において，固有振動数 ω_i の分布 $g(\omega)$ が単峰形で $\omega = \omega_0$ に関して対称であるとき，結合強度 κ が $\frac{2}{\pi g(\omega_0)} =: \kappa_c$ を越えると $\langle R \rangle \neq 0$ を満たす解が出現することを見出した [5]．後に，式 (4) では $\kappa = \kappa_c$ で分岐が生じて非同期状態に対応する解が不安定化し，同期状態に対応する解が生じることが千葉により示された [9, 10]．

1.3　タンパク質の分解・合成と位相のリセット

蔵本モデルでは，振動子は振動の途中で消滅したり増殖したりしない．一方，1.1 節で触れたタンパク質は，細胞内で新規合成されたり分解されたりする．このような代謝は集団振動にどのように影響するだろうか．

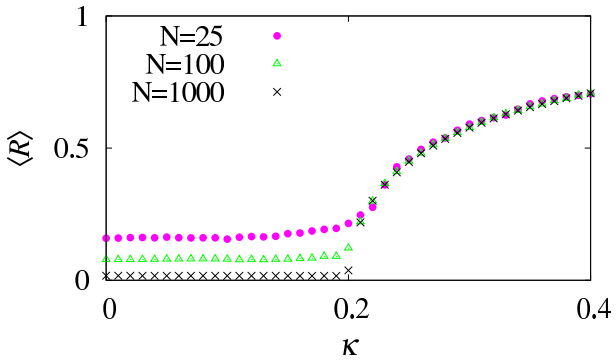


図 2　式 (1) における蔵本秩序変数の長時間平均 $\langle R\rangle$ の結合強度 κ 依存性．結合強度 $\kappa=\kappa_c(=0.2)$ 程度を境に $\langle R\rangle$ が立ち上がる様子が見て取れる．この傾向は振動子数 N が大きいほど顕著になる．

本研究では，新規合成と分解のレートが同程度の場合について，代謝の効果を取り込んだ振動子集団のモデルを考え，解析する．合成されるタンパク質の個数と分解されるタンパク質の個数が釣り合っていると仮定すると，代謝は一部の振動子を新規合成後に対応する状態へとリセットすることにより表現されるだろう．そこで，位相が確率的にリセットされる蔵本モデルを考え，さらに，その振動子数無限大の極限を記述する偏微分方程式を提案する．この偏微分方程式の定常解の摂動論的な安定性解析は，位相のリセットが集団振動を抑制することを示唆する．この解析結果は，有限個の振動子に関する数値シミュレーション結果とよく合致する．

2　リセットを受ける蔵本モデル

2.1　位相方程式による記述

以下のような位相振動子モデルを考える：

$$\theta_i(t+\Delta t)=\begin{cases}\phi_i\sim f & (\text{with probability } \alpha\Delta t),\\ \theta_i(t)+\left[\omega+\frac{\kappa}{N}\sum_{j=1}^{N}\sin\left(\theta_j-\theta_i\right)\right]\Delta t & (\text{otherwise}),\end{cases}\qquad i=1,2,\ldots,N. \tag{5}$$

ここで，$\theta_i\in[0,2\pi)$ は振動子 i の位相を，N は振動子の総数を，κ は結合強度を，Δt は小さな時間を表す．また，固有振動数はどの振動子も ω であるとする．リセット率 $\alpha\geq 0$ は単位時間あたりに位相がリセットされる確率を表す．リセット直後の位相は $\int_0^{2\pi}f(\phi)\mathrm{d}\phi=1$ を満たす関数 f にしたがって与えられるとする．以後 f をリセット分布と呼ぶ．

式 (5) は式 (3) で定義した R と Θ を用いて以下のように書き直すことができる：

$$\theta_i(t+\Delta t)=\begin{cases}\phi_i\sim f & (\text{with probability } \alpha\Delta t),\\ \theta_i(t)+v(\theta_i(t),t)\Delta t & (\text{otherwise}),\end{cases} \tag{6}$$

$$v(\theta,t)=\omega+\kappa R(t)\sin\left(\Theta(t)-\theta\right). \tag{7}$$

式 (5) で振動子数 $N=8000$ とした場合の数値シミュレーション結果の例を図 3 に示す．複素秩序変数が振動する解 (図 3(a)) やほぼ定常になる解 (図 3(b)) の存在が示唆される．

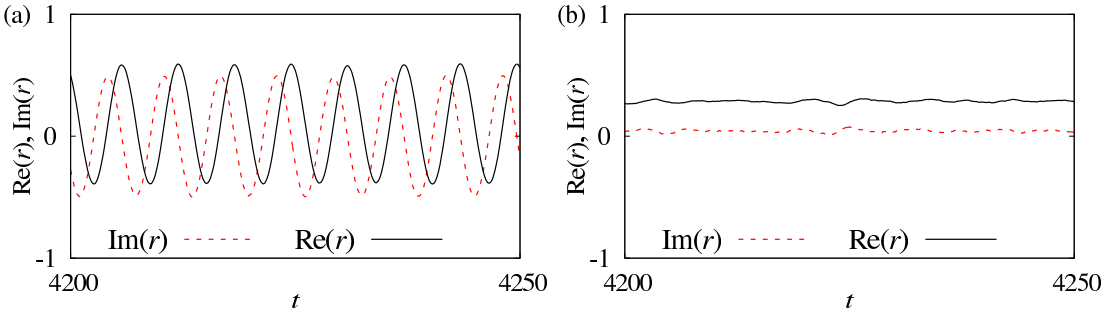


図 3　秩序変数のダイナミクス．(a) リセット率 $\alpha = 0.1$(b) リセット率 $\alpha = 0.3$．その他のパラメータは $\omega = 1, \kappa = 0.3$．また，リセット分布 $f(\phi)$ はディラックのデルタ関数 $\delta(\phi)$ とした．

2.2　偏微分方程式による記述

振動子 $1, 2, \ldots, N$ の時間発展方程式は，$R(t), \Theta(t)$ が与えられたもとでの 1 つの振動子の時間発展方程式と同じ形をしていることが式 (6), (7) よりわかる．そこで，これらの式を，既知の関数 $v(\theta, t)$ に依存する 1 つの振動子の時間発展方程式とみなして確率密度関数 $p(\theta, t)$ の時間発展方程式を形式的に求め，さらに $\Delta t \to 0$ とすると，以下の式を得る：

$$\frac{\partial p(\theta,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left[v(\theta,t)p(\theta,t)\right] - \alpha p(\theta,t) + \alpha f(\theta). \tag{8}$$

ここで，式 (7) より関数 $v(\theta, t)$ は本来 N 個の振動子の位相に依存するはずである．しかし，振動子数が十分大きければ以下のように近似できると仮定する：

$$v(\theta,t) \approx \omega + \int_0^{2\pi} \sin(\phi - \theta) p(\phi,t) \mathrm{d}\phi =: \hat{v}(\theta,t) \tag{9}$$

これにより，リセットを受ける蔵本振動子のモデル式として以下を得る：

$$\frac{\partial p(\theta,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\hat{v}(\theta,t)p(\theta,t)\right] - \alpha p(\theta,t) + \alpha f(\theta), \tag{10a}$$

$$\hat{v}(\theta,t) = \omega + \kappa \int_0^{2\pi} \sin\left(\phi - \theta\right) p(\phi,t) \mathrm{d}\phi. \tag{10b}$$

式 (10) の数値シミュレーション結果は，式 (5) で N が大きな場合の数値シミュレーション結果をよく再現する (図 4)．一方，式 (10) の厳密な導出は今後の課題である．

3　解析

3.1　複素秩序変数のゆらぎ ζ

式 (4) は非同期状態に対応する一様定常解 $p(\theta, t) = \frac{1}{2\pi}$ を解にもち，この解が実現するとき $\langle R \rangle = 0$ である．一方，振動子が位相を揃えて一つの振動子のように振る舞えば $\langle R \rangle > 0$ となる．したがって，$\langle R \rangle$ は同期した集団振動の現れを検出するのに役立つ．一方，式 (10) は $\alpha > 0$ のとき一

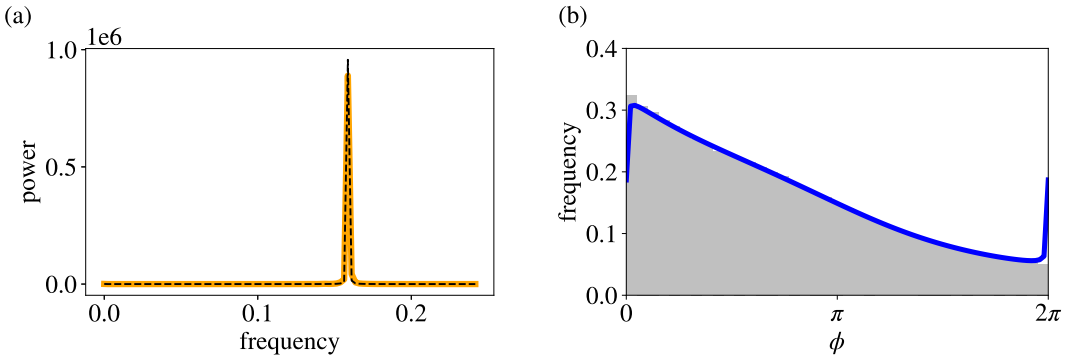


図 4　式 (5) と式 (10) の比較．(a) 図 3(a) のパラメータを用いた場合の $R\cos(\Theta)$ のパワースペクトル．黄色い実線は有限個 ($N = 8000$) の振動子の数値シミュレーションにより得た．黒い点線は偏微分方程式 (10) のシミュレーションにより得た．(b) 図 3(b) のパラメータを用いた場合の定常解の位相分布．ヒストグラムは有限個 ($N = 8000$) の振動子のシミュレーションにより得た．青い実線は偏微分方程式 (10) のシミュレーションにより得た．

様な定常解 $p(\theta, t) = \frac{1}{2\pi}$ をもたない．その代わり，$\langle R \rangle > 0$ となる一様でない定常解をもつことが図図 3(b), 図 4(b) から予想される．

そこで，集団振動の現れを検出するために，複素秩序変数のゆらぎの大きさを表す以下の変数を導入する [11]：

$$\zeta(t) = |r(t) - \langle r \rangle| \,. \tag{11}$$

この変数の長時間平均 $\langle \zeta \rangle$ は複素秩序変数 r が定常なとき 0 であり，r が振動するとき正の値をとる．

3.2　数値シミュレーション

複素秩序変数のゆらぎの長時間平均 $\langle \zeta \rangle$ がモデルのパラメータ κ, α にどのように依存するかを式 (5) の数値シミュレーションにより調べた (図 5)．リセット率 α が大きくなるにつれて，集団振動が生じるのに必要な κ が大きくなっていることが観察される．

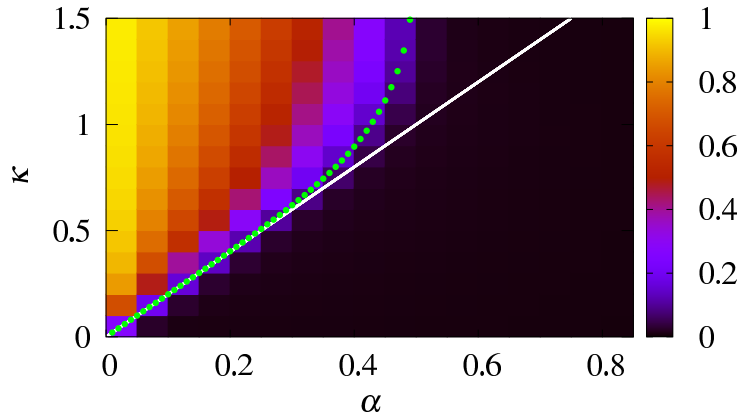


図 5　複素秩序変数のゆらぎの長時間平均 $\langle \zeta \rangle$ のパラメータ依存性．カラースケールが $\langle \zeta \rangle$ の大きさを表す．

3.3 定常解の線形安定性解析

複素秩序変数 r が振動するパラメータ領域を求めたいが，式 (4) とは異なり式 (10) は一様な定常解をもたないため，定常解の安定性解析を厳密に行うのは難しい．そこで，リセット率 α を微小量として定常解の安定性を摂動論的な解析により調べる．定常解が

$$\hat{p}(\theta) = \frac{1}{2\pi} + \alpha q(\theta) + \alpha^2 w(\theta) + \dots \tag{12}$$

と展開できると仮定し，この定常解の周りの線形化方程式を求めると，以下のようになる：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = (\mathcal{L} + \alpha\mathcal{S} + \alpha^2\mathcal{T})\rho(\theta, t) + \mathcal{O}\big(\alpha^3\big), \tag{13}$$

$$\mathcal{L}\rho(\theta) = -\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\omega\rho + \frac{\kappa}{2\pi}\int \rho(\theta')\sin(\theta' - \theta)\mathrm{d}\theta'\right\}, \tag{14}$$

$$\mathcal{S}\rho(\theta) = -\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\kappa q(\theta)\int \rho(\theta')\sin(\theta' - \theta)\mathrm{d}\theta' + \kappa\rho(\theta)\pi\mathrm{i}\left[q_1 e^{\mathrm{i}\theta} - q_{-1}e^{-\mathrm{i}\theta}\right]\right\} - \rho, \tag{15}$$

$$\mathcal{T}\rho(\theta) = -\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\kappa w(\theta)\int \rho(\theta')\sin(\theta' - \theta)\mathrm{d}\theta' + \kappa\rho(\theta)\pi\mathrm{i}\left[w_1 e^{\mathrm{i}\theta} - w_{-1}e^{-\mathrm{i}\theta}\right]\right\}. \tag{16}$$

ここで，q_j, w_j $(j = \pm 1)$ はそれぞれ $q(\theta)$, $w(\theta)$ を複素フーリエ級数展開したときの $e^{\mathrm{i}j\theta}$ の係数である．線形作用素 $\mathcal{L}$ は $e^{\mathrm{i}m\theta} =: u_m^{(0)}(\theta)(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ を固有関数としてもち，対応する固有値は

$$\lambda_m^{(0)} = \begin{cases} 0 & (m = 0) \\ \frac{\kappa}{2} - \mathrm{i}m\omega & (m = \pm 1) \\ -\mathrm{i}m\omega & (|m| \geq 2) \end{cases} \tag{17}$$

である．さらに，$u_m^{(0)}(\theta)$ は $\mathcal{L}$ の共役な作用素 $\mathcal{L}^*$ の固有関数にもなっており，その固有値は $\lambda_{-m}^{(0)}$ である．式 (13) の固有値と固有関数がそれぞれ

$$\lambda_m = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda_m^{(l)} \alpha^l, \tag{18}$$

$$u_m(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} u_m^{(l)}(\theta)\alpha^l \tag{19}$$

と展開できると仮定して λ_m を α の 1 次の項まで求めると，

$$\lambda_0 = -\alpha, \tag{20a}$$

$$\lambda_{\pm 1} = \frac{\kappa}{2} - \alpha \mp \mathrm{i}\omega, \tag{20b}$$

$$\lambda_m = -\alpha - \mathrm{i}m\omega \qquad (|m| \geq 2), \tag{20c}$$

となる．式 (20) で λ_m が κ に依存するのは $m = \pm 1$ のときのみである．よって α に関して 2 次以上の摂動が無視できる場合，結合強度の増加に伴って不安定化するモードは $m = \pm 1$ に限定される．この不安定化が生じる結合強度 κ の値は，式 (20b) 右辺の実部が 0 になる κ の値により近似される：

$$\kappa_c \approx 2\alpha \tag{21}$$

式 (21) で与えられる直線を図 5 に白線で示す．小さな α の領域でシミュレーション結果とよく合致していることが観察される．

同様に，λ_m を α の 2 次の項まで求めると，

$$\lambda_0 = -\alpha, \tag{22a}$$

$$\lambda_1 = \frac{\kappa}{2} - \mathrm{i}\omega - \alpha + \alpha^2(\kappa\pi)^2 \left[-\frac{|q_2|^2}{2\mathrm{i}\omega} - \frac{4|q_1|^2}{\mathrm{i}\omega + \frac{\kappa}{2}} \right], \tag{22b}$$

$$\lambda_2 = -2\mathrm{i}\omega - \alpha + 2\alpha^2(\kappa\pi)^2 \left[\frac{2|q_1|^2}{\mathrm{i}\omega + \frac{\kappa}{2}} - \frac{3|q_1|^2}{\mathrm{i}\omega} \right], \tag{22c}$$

$$\lambda_m = -\mathrm{i}m\omega - \alpha - \frac{2m\pi^2\alpha^2\kappa^2|q_1|^2}{\mathrm{i}\omega}, \tag{22d}$$

およびこれらの複素共役をとったものが得られる．これらの実部は以下で与えられる：

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_0) = -\alpha, \tag{23a}$$

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_1) = \frac{\kappa}{2} - \alpha - 2\alpha^2|q_1|^2\pi^2 \frac{\kappa^3}{\omega^2 + \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2}, \tag{23b}$$

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_2) = -\alpha + 2\alpha^2|q_1|^2\pi^2 \frac{\kappa^3}{\omega^2 + \left(\frac{\kappa}{2}\right)^2}, \tag{23c}$$

$$\mathrm{Re}\,(\lambda_m) = -\alpha. \tag{23d}$$

式 (23b) 右辺を 0 とおくと，κ について 3 次方程式になる．その解を図 5 に黄緑色の点線で示す．式 (21) よりも広範囲でシミュレーション結果と合致する様子が観察される．

4　まとめと今後の課題

相互作用する振動子の集団振動に代謝が与える影響について調べるために，位相が確率的にリセットされる蔵本モデルを考えた．有限個の数値シミュレーションから，リセット率 α が大きくなると集団振動に必要な相互作用強度が大きくなること，つまり，リセットは集団振動を抑制する効果があることが示唆された．さらに，振動子数無限大に対応する偏微分方程式を提案した．この方程式が定常解をもつことを仮定してその安定性を摂動的に評価すると，シミュレーション結果とよく合致した．

振動子数 $N \to \infty$ のモデルとして提案した偏微分方程 (10) の厳密な導出は今後の課題である．また，数値計算は固有値と固有関数の摂動展開の妥当性を支持しているものの，摂動展開の可否や固有値以外のスペクトルに関する解析は行えていない．

本稿では述べなかったものの，図 5 で考慮した範囲より大きな結合強度 κ を用いると，$[0, 2\pi)$ よりも狭い台をもつ定常解が現れるという結果が予備的なシミュレーションにより得られている．この解の出現は $\hat{v}(\theta, t) = 0$ を満たす θ の出現に対応すると予想しており，今後詳細に解析する予定である．

参考文献

[1] A T Winfree. *The Geometry of Biological Time*. Springer, New York, 2nd edition, 2001.

[2] A Pikovsky, M Rosenblum, and J Kurths. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. 2001.

[3] Ishiura Masahiro, Kutsuna Shinsuke, Aoki Setsuyuki, Iwasaki Hideo, Andersson Carol R., Tanabe Akio, Golden Susan S., Johnson Carl H., and Kondo Takao. Expression of a Gene Cluster kaiABC as a Circadian Feedback Process in Cyanobacteria. *Science (80-.).*, Vol. 281, No. 5382, pp. 1519–1523, sep 1998.

[4] Masato Nakajima, Keiko Imai, Hiroshi Ito, Taeko Nishiwaki, Yoriko Murayama, Hideo Iwasaki, Tokitaka Oyama, and Takao Kondo. Reconstitution of Circadian Oscillation of Cyanobacterial KaiC Phosphorylation in Vitro. *Science (80-.).*, Vol. 308, No. 5720, pp. 414 LP – 415, apr 2005.

[5] Y Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer, New York, 1984.

[6] Y Kuramoto. International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics. In H Araki, editor, *Lect. Notes Phys.*, pp. 420–422. Springer, N.Y., 1975.

[7] Hidetsugu Sakaguchi, Shigeru Shinomoto, and Yoshiki Kuramoto. Mutual Entrainment in Oscillator Lattices with Nonvariational Type Interaction. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 79, No. 5, pp. 1069–1079, may 1988.

[8] Carlo Lancellotti. On the Vlasov Limit for Systems of Nonlinearly Coupled Oscillators without Noise. *Transp. Theory Stat. Phys.*, Vol. 34, No. 7, pp. 523–535, jan 2005.

[9] Hayato Chiba and Isao Nishikawa. Center manifold reduction for large populations of globally coupled phase oscillators. *Chaos An Interdiscip. J. Nonlinear Sci.*, Vol. 21, No. 4, p. 43103, oct 2011.

[10] Hayato Chiba. A proof of the Kuramoto conjecture for a bifurcation structure of the infinite-dimensional Kuramoto model. *Ergod. Theory Dyn. Syst.*, Vol. 35, No. 3, pp. 762–834, 2015.

[11] Shigeru Shinomoto and Yoshiki Kuramoto. Phase Transitions in Active Rotator Systems. *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 75, No. 5, pp. 1105–1110, may 1986.

最近接有向パーコレーションに対するレース展開

上島芳倫 (KAMIJIMA Yoshinori)*

概要

有向パーコレーションは感染症の細菌の生存・死滅を記述するモデルである．数学的には，格子グラフ $\mathbb{L}^d$ と非負整数全体 $\mathbb{Z}_+$ の直積 $\mathbb{L}^d \times \mathbb{Z}_+$ の辺集合に対して，開・閉なる状態をランダムに与えることで定義される．開の辺で繋がった頂点数の期待値には冪乗則 $(p_{\mathrm{c}} - p)^{-\gamma}$ が予想されており，特に $d > 4$ ならば $\gamma = 1$ だと信じられている．講演者らはこれを単純立方格子では $d+1 = 183+1$ で，体心立方格子では $d+1 = 9+1$ で証明したので，それを紹介する．本講演は陳隆奇教授（國立政治大學，台湾）と半田悟氏 (atama plus Inc.) との共同研究 [4] に基づく．

1 導入

1957 年に Broadbend と Hammersley [3] は有向パーコレーションと呼ばれる確率論的な模型を導入した．これは多孔質材料への水の浸透現象や，感染症の細菌が生存・死滅するまでの過程を記述するモデルの一種である．例えば，単純立方格子[1] $\mathbb{Z}^d$ 上に感染する対象が配置されているとしよう．非負整数の時間 $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \sqcup \{0\}$ を考え，時刻 0 で原点 o の対象のみ感染していたとする．さらに，時刻が 1 進むたびに前の時刻で感染していた者からランダムな確率 $p \in [0,1]$ で感染が起こるとする．このとき，確率 p を変化させると，それに伴って時刻 ∞ までの感染者数（クラスター・サイズ）が変化する．自明な場合として，$p = 0$ では時刻 1 の時点で細菌が死滅（感染者数が 1）し，$p = 1$ では時刻 ∞ までの全ての者が感染（感染者数が ∞）する．実は，$d \geq 1$ ならば或る非自明な確率 $0 < p_{\mathrm{c}} < 1$ が存在して，任意の $p > p_{\mathrm{c}}$ で感染者数の期待値が発散することが知られている．以上のように，パラメータ（今の場合は確率 p）を変化させたときに，モデルに対して定義された関数が特異な振る舞いをすることを相転移と呼ぶ．

相転移は統計物理学に於ける重要な研究対象の一つである．相転移の身近な例の一つとして，水の三態が挙げられる．水という物質は分子 ($\mathrm{H_2O}$) の集まりであることはよく知られているものの，原子論の観点から液体と気体を区別することは非自明な問題である（力学的に分子一つ一つが互いに相互作用を及ぼし合って運動している，という観点では液体も気体も同じである）．この意味で，相転移を数学的に研究することには価値がある．

有向パーコレーションでは，前述のようにクラスター・サイズの期待値を見ることで，相転移が起こることがわかる．特に，各相の境 p_{c} を臨界点と呼び，その周りではクラスター・サイズなどの関数に対して冪乗則が成り立つと予想されている．このような現象を臨界現象という．具体的には，或

* Postdoctoral Fellow, Mathematics Division, National Center for Theoretical Sciences, Taiwan

[1] 固体物理学で専ら使われる呼び方．数学では「整数格子」などと呼び，あまりこのような用語は使わないだろう．本稿では，後述の体心立方格子——これも固体物理学の用語——に合わせて，$\mathbb{Z}^d$ もこのように呼ぶ．

る正の指数 γ が存在して，$p \uparrow p_{\mathrm{c}}$ で漸近的にクラスター・サイズの期待値が $(p_{\mathrm{c}}-p)^{-\gamma}$ のように振る舞うと予想されている．この指数を臨界指数という．一般に臨界指数は複雑な実数値を取るものの，空間次元が十分大きい $d > d_{\mathrm{c}} = 4$ ときには $\gamma = 1$ に退化すると予想されている．これらの値は相互作用の無いモデルの臨界指数に対応することが知られており，平均場臨界指数と呼ぶ．平均場臨界指数への退化が起こるぎりぎりの次元 d_{c} を（上部）臨界次元と呼ぶ．

水の例でいうと，その温度と圧力に関する相図を見たときに，気相と液相を区別する線が途中で切れている点がある．この点が臨界点である．臨界点の近傍では，気相と液相の体積密度の差に対して，前述のような冪乗則が実験的に観測されている．特に興味深いのは，水に限らず様々な物質でも，臨界点の値が変わる一方で臨界指数は同じ値になることである．すなわち，臨界指数はモデルの詳細（格子の種類など）によらず，対称性や次元にのみ依存すると予想されている．このような臨界指数の普遍性を解明することは統計物理学に於ける重要な課題の一つである．

本稿では，最近接有向パーコレーションに対する高次元臨界現象を取り扱う．本研究の目的は臨界次元の予想 $d_{\mathrm{c}} = 4$ を数学的に証明することである．高次元臨界現象の解析にはレース展開と呼ばれる手法が使われてきた [9, 10] ので，本研究でもそれを利用する．また，本研究では単純立方格子以外に体心立方格子を導入する．詳しくは後述するが，体心立方格子上のランダム・ウォークを考えると，その再帰確率が小さく評価しやすいので，レース展開の展開係数の収束性を示す際に役に立つ．結果として（臨界次元の予想値よりも大きいものの）単純立方格子 $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$ 上では $d+1 \geq 183+1$ で，体心立方格子 $\mathbb{L}^d \times \mathbb{Z}_+$ 上では $d+1 \geq 9+1$ で平均場臨界現象への退化を示せた．先行研究 [9] では，$\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$ 上の最近接有向パーコレーションに対して平均場臨界指数への退化を示しているものの「十分高次元 $d \gg 4$」と書いてあるのみで，レース展開の解析が成り立つ具体的な次元を特定していなかった．以下では，その主張の数学的な定式化と証明について紹介する．

2　モデルの定義

2.1　格子の定義とランダム・ウォーク

まず，体心立方格子 (body-centered cubic lattice) $\mathbb{L}^d$ を定義する．最近接点の集合を $\mathscr{N}^d_{\mathrm{BCC}} = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d \mid \prod_{i=1}^d |x_i| = 1\}$ とする．体心立方格子 $\mathbb{L}^d$ とは，原点を含み $o = (0, \dots, 0) \in \mathbb{L}^d$，かつ最近接点の集合 $\mathscr{N}^d$ を平行移動することによって生成されるグラフ[2)]である．同様に，単純立方格子 (simple cubic lattice) $\mathbb{Z}^d$ とは，原点を含み，かつ最近接点の集合 $\mathscr{N}^d_{\mathrm{SC}} = \{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d \mid \sum_{i=1}^d |x_i| = 1\}$ を平行移動することによって生成されるグラフと見なす．以下では，両方のグラフを纏めて扱うために，$\mathbb{G}^d = \mathbb{Z}^d$ or $\mathbb{L}^d$ および $\mathscr{N}^d = \mathscr{N}^d_{\mathrm{SC}}$ or $\mathscr{N}^d_{\mathrm{BCC}}$ と書く．

つぎに，各 $x \in \mathbb{G}^d$ に対して，$\mathbb{G}^d$ 上の d 次元ランダム・ウォークの遷移確率を[3)4)]

$$D(x) := \frac{1}{|\mathscr{N}^d|} \mathbb{1}_{\{x \in \mathscr{N}^d\}}$$

[2)] グラフ理論の観点からはグラフ $G = (V, E)$ とその頂点集合 V とを厳密に区別するべきであるものの，本稿では便宜上それらを区別せずに “$x \in \mathbb{G}^d$” のように書く．$\mathscr{N}^d$ の平行移動で定義したため，辺集合は $\{\{x, y\} \subset \mathbb{Z}^d \mid y - x \in \mathscr{N}^d\}$ で与えられることにも注意されたい．

[3)] $\mathbb{1}_{\{\bullet\}}$ は命題 $\{\bullet\}$ が真ならば 1，偽ならば 0 を返す定義関数．

[4)] $|A|$ は集合 A の濃度を表す．

で定義する．これを用いて，ランダム・ウォークのループ $(i=1)$ およびバブル $(i=2)$ をそれぞれ

$$\varepsilon_i^{(\nu)} := \sum_{n=\nu}^{\infty} D^{*2n}(o) \times \begin{cases} 1 & [i=1], \\ (n-\nu+1) & [i=2] \end{cases} \tag{1}$$

で定義する[5]．この内，ループは「原点出発のランダム・ウォークが 2ν 歩費やして戻る確率」を意味する．特に，$\mathbb{G}^d = \mathbb{L}^d$ のときには，最近接点の定義によって，d 次元ランダム・ウォークの遷移確率が 1 次元ランダム・ウォークの遷移確率の積で表される[6]：$D(x) = \prod_{j=1}^{d} (\delta_{|x_j|,1}/2)$．体心立方格子のこの性質はランダム・ウォーク量 (1) の上界を評価する際に，Stirling の公式を使えるため便利である．本稿では，紙面の都合上その計算の詳細を省き，表 1 に数値計算の結果[7]を示すに留める．また，$\mathbb{G}^d = \mathbb{Z}^d$ のときには，第 1 種変形 Bessel 関数と数値積分を用いることで評価できる [7, Appendix A].

表 1: 体心立方格子に於けるランダム・ウォーク量の上界.

d	$\varepsilon_1^{(1)}$	$\varepsilon_1^{(2)}$	$\varepsilon_2^{(1)}$	$\varepsilon_2^{(2)}$
3	$3.932\,160 \times 10^{-1}$	$2.682\,160 \times 10^{-1}$	∞	∞
4	$1.186\,367 \times 10^{-1}$	$5.613\,669 \times 10^{-2}$	∞	∞
5	$4.682\,556 \times 10^{-2}$	$1.557\,556 \times 10^{-2}$	$1.125\,787 \times 10^{-1}$	$6.575\,313 \times 10^{-2}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9	$2.143\,604 \times 10^{-3}$	$1.904\,782 \times 10^{-4}$	$2.410\,377 \times 10^{-3}$	$2.667\,729 \times 10^{-4}$

2.2 有向パーコレーション

まず，時空間について説明する．本稿では，直積集合 $\mathbb{G}^d \times \mathbb{Z}_+$ を時空間と呼び，その元を太字で $\boldsymbol{x} = (x,t) \in \mathbb{G}^d \times \mathbb{Z}_+$ と表す．以下では，特に断らずに時空間の点 $\boldsymbol{x}$ の空間成分を通常のフォント $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{G}^d$ に対応させ，また $\boldsymbol{x}$ の時間成分を $\tau(\boldsymbol{x})$ と記す．時空間のボンドを順序付けられた組 $((x,t),(y,t+1)) \in (\mathbb{G}^d \times \mathbb{Z}_+)^2$ で定義する．つぎに，有向パーコレーションの定義を述べる．有向パーコレーションとは，各ボンド $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ と $p \in [0, \|D\|_\infty^{-1}]$ に対して[8]，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ が開である確率を $q_p(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) := pD(y-x)\delta_{\tau(\boldsymbol{y})-\tau(\boldsymbol{x}),1}$ で，閉である確率を $1-q_p(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$ で与えるモデルである．ただし，各々のボンドに対して，開と閉の状態は独立に与える．以上のようにして与えた，ボンドに関する Bernoulli 確率変数の結合分布を $\mathbb{P}_p$，さらにこの確率測度に関する期待値を $\mathbb{E}_p$ と書く．

有向パーコレーションの二点関数と感受率（クラスター・サイズ）を次のように定義する．時空間の 2 点 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が連結であるとは，時空間のボンドの列 $\{\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_{\tau(\boldsymbol{y})-\tau(\boldsymbol{x})}\}$ が存在して全ての $\boldsymbol{b}_i$

---

[5] 関数 $f, g\colon \mathbb{G}^d \to \mathbb{R}$ に対して，$(f*g)(x) = \sum_{y\in\mathbb{G}^d} f(y)g(x-y)$ は畳み込みを表す．また，関数の肩に乗せたものは n 重畳み込み $f^{*n}(x) = \sum_{y\in\mathbb{G}^d} f^{*(n-1)}(y)f(x-y)$ を意味する．

[6] $\delta_{\bullet,\bullet}$ は Kronecker デルタ．

[7] この表の数値を得るために（および下記の bootstrap argument を確認するために）Python のプログラムを作成した．ソースコードは `https://gitlab.com/ykami/comp-lace_for_op` から取得できる．

[8] $f\colon \mathbb{G}^d \to \mathbb{R}$ に対して，$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{G}^d} |D(f)|$．また，第 1 節では p を確率としていたが，以下では D と掛け合わせた $pD(\bullet)$ が確率である．

$(i = 1, \dots, \tau(\boldsymbol{y}) - \tau(\boldsymbol{x}))$ が開であることをいい，$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{y}$ と書く．このとき，$\boldsymbol{x} = (x, t) \in \mathbb{G}^d \times \mathbb{Z}_+$ に対して，有向パーコレーションの二点関数 φ_p を

$$\varphi_p(\boldsymbol{x}) = \mathbb{P}_p(\boldsymbol{o} \to \boldsymbol{x})$$

によって定義する．ここで，$\boldsymbol{o} := (o, 0)$ である．また，$\mathcal{C}(\boldsymbol{o}) = \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{G}^d \times \mathbb{Z}_+ \mid \boldsymbol{o} \to \boldsymbol{x} \,\}$ を（原点を含む）クラスターと呼ぶ．これを用いて，有向パーコレーションの感受率 χ_p と臨界点 p_c を[9]

$$\chi_p = \mathbb{E}_p[|\mathcal{C}(\boldsymbol{o})|] = \sum_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{G}^d \times \mathbb{Z}_+} \varphi_p(\boldsymbol{x}), \qquad p_\mathrm{c} = \sup\left\{\, p \in [0, \|D\|_\infty^{-1}] \,\middle|\, \chi_p < \infty \,\right\},$$

によって定義する．臨界指数 γ は感受率の臨界点近傍 $(p \uparrow p_\mathrm{c})$ での漸近的な振る舞いを特徴付けるものとして，$\chi_p \asymp (p_\mathrm{c} - p)^{-\gamma}$ で定義する．ここで，$x \to a$ で $f(x) \asymp g(x)$ とは，$\mathcal{O}(g(x)) \le f(x) \le \mathcal{O}(g(x))$ となることである．

2.3 Fourier-Laplace 変換

主結果を述べるために必要となるので，Fourier-Laplace 変換とそれに関連する結果について列挙する．二点関数 $\varphi_p(x, t)$ の x に関する Fourier 変換を $\Phi_p(k; t) = \sum_{x \in \mathbb{G}^d} \varphi_p(x, t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k \cdot x}$ とすると，$\{\log \Phi_p(k; t)/t\}_{t=1}^\infty$ が劣加法的数列になることによって，極限 $m_p^{-1} = \lim_{t \uparrow \infty} \Phi_p(k; t)^{1/t}$ が存在する [5, Appendix. II]．ただし，$k \in \mathbb{T}^d = [-\pi, \pi]^d$ はトーラスの点であり，$x \cdot k$ は Euclid 内積である．$p < p_\mathrm{c}$ では $m_p < 1$ であり，特に $m_{p_\mathrm{c}} = 1$ が成り立つ [10]．このように定義すると，m_p は Laplace 変換

$$\widehat{\varphi}_p(k, z) := \sum_{t \in \mathbb{Z}_+} \Phi_p(k; t) z^t = \sum_{(x,t) \in \mathbb{G}^d \times \mathbb{Z}_+} \varphi_p(x, t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k \cdot x} z^t$$

の収束半径となる．

また，ランダム・ウォークの二点関数を $Q_p(x, t) = p^t D^{*t}(x) \mathbb{1}_{\{\, t \in \mathbb{Z}_+ \,\}}$ で定義する．$Q_1(x, t)$ の Laplace 変換として，ランダム・ウォークの Green 関数が

$$S_p(x) := \sum_{t \in \mathbb{Z}_+} Q_1(x, t) p^t = \sum_{t \in \mathbb{Z}_+} p^t D^{*t}(x) \quad (x \in \mathbb{G}^d,\ p \in [0, 1])$$

で与えられる．Bool の不等式[10]によって，$p \in [0, 1)$ に対して $\varphi_p(x, t) \le Q_p(x, t)$ が示される．この不等式の両辺の和を取ることで $p_\mathrm{c} \ge 1$ が示される．

3 主結果

Aizenman と Newman [1] はトライアングル条件と呼ばれる十分条件を満たせば（有向でない）無向パーコレーションの臨界指数が平均場臨界指数 $\gamma = 1$ に退化することを示した．Barsky と Aizenman [2] はこの条件を有向パーコレーションにも適用できるように統一的な形で再定義し

[9] 集合 C に対して，$|C|$ は集合の濃度．

[10] 事象列 $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ に対して，$\mathbb{P}_p(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) \le \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}_p(A_i)$.

た．$\|(x,t)\|_2 = (\sum_{i=1}^d |x_i|^2 + t^2)^{1/2}$ および時空間の畳み込みを $\varphi_p^{\star n}(x,t) = (\varphi_p^{\star(n-1)} \star \varphi_p)(x,t) := \sum_{(y,s)\in\mathbb{C}^d\times\mathbb{Z}_+} \varphi_p^{\star(n-1)}(y,s)\varphi_p(x-y,t-s)$ と書けば，トライアングル条件は

$$\lim_{R\to\infty} \sup \left\{ \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^d\times\mathbb{Z}_+} \varphi_{p_{\mathrm{c}}}^{\star 2}(\boldsymbol{y})\varphi_{p_{\mathrm{c}}}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \,\middle|\, \|\boldsymbol{x}\|_2 \geq R \right\} = 0 \tag{2}$$

と表される．もし (2) が成り立てば，$\chi_p^{-2}\,\mathrm{d}\chi_p/\mathrm{d}p = -\,\mathrm{d}\chi_p^{-1}/\mathrm{d}p$ に注意して微分不等式

$$\epsilon_R \left(1 - \sup \left\{ \sum_{\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^d\times\mathbb{Z}_+} \varphi_p^{\star 2}(\boldsymbol{y})\varphi_p(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \,\middle|\, \|\boldsymbol{x}\|_2 \geq R \right\} \right) \chi_p^2 \leq \frac{\mathrm{d}\chi_p}{\mathrm{d}p} \leq \chi_p^2 \tag{3}$$

の各辺を積分することで，$\gamma = 1$ が得られる．ただし，ϵ_R は $R \gg 1$ を固定したとき $\epsilon_R \ll 1$ となるような定数である．

トライアングル条件 (2) を確認するために，次の赤外評価を証明する．これが本研究の主結果である．なお，赤外評価が (2) を導くことは [9] を参照されたい．

定理 1 (赤外評価 [Chen, Handa and K.]). 単純立方格子 $\mathbb{Z}^{d\geq 183}\times\mathbb{Z}_+$ および体心立方格子 $\mathbb{L}^{d\geq 9}\times\mathbb{Z}_+$ 上の最近接有向パーコレーションに対して，定数 $K \in (0,\infty)$ が存在して，

$$|\hat{\varphi}_p(k,z)| \leq \frac{K}{\left|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}\hat{D}(k)\right|} = K|\hat{S}_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}}(k)| \tag{4}$$

が $p \in [0,p_{\mathrm{c}})$ と $k \in \mathbb{T}^d$ と $|z| \in [1,m_p)$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ で一様に成り立つ．

4 主結果の証明

4.1 Bootstrap argument

定理 1 の証明は bootstrap argument と呼ばれる手法に基づく．その詳細については [12, Lemma 5.9] や [6, Lemma 8.1]，あるいは講演者の数学総合若手研究集会に於ける過去のテクニカルレポートに譲ることとし，本稿では必要となる命題についてのみ言及する．

$k,l \in \mathbb{T}^d$ と $|\mu| \in [0,1]$ を満たす $\mu \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\hat{U}_\mu(k,l) = (1-\hat{D}(k))\left(\frac{|\hat{S}_\mu(l+k)| + |\hat{S}_\mu(l-k)|}{2}|\hat{S}_\mu(l)| \right.$$
$$\left. + (1-\hat{D}(2l))|\hat{S}_\mu(l)||\hat{S}_\mu(l+k)||\hat{S}_\mu(l-k)| \right), \tag{5}$$

および $p \in [0,p_{\mathrm{c}})$ と $|z| \in [1,m_p)$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\mu_p(z) = \left(1 - \hat{\varphi}_p(0,|z|)^{-1}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg z}$$

とおく．また，$\mathbb{T}^d$ 上の関数 $\hat{f}$ に対して，$\hat{\Delta}_k\hat{f}(l) = \hat{f}(l+k) + \hat{f}(l-k) - 2\hat{f}(l)$ と書く．以上から

$\{g_i\}_{i=1}^3$ を

$$g_1(p,m) := p\max\{1,m\}, \tag{6}$$

$$g_2(p,m) := \sup_{\substack{k\in\mathbb{T}^d,\\ z\in\mathbb{C}\colon |z|\in\{1,m\}}} \frac{\left|\widehat{\varphi}_p(k,z)\right|}{\left|\widehat{S}_{\mu_p(z)}(k)\right|}, \tag{7}$$

$$g_3(p,m) := \sup_{\substack{k,l\in\mathbb{T}^d,\\ z\in\mathbb{C}\colon |z|\in\{1,m\}}} \frac{\left|\frac{1}{2}\widehat{\Delta}_k(\widehat{q}_p(l,z)\widehat{\varphi}_p(l,z))\right|}{\widehat{U}_{\mu_p(z)}(k,l)} \tag{8}$$

によって定義する．以下の命題は [12, Lemma 5.9] の十分条件である．これらが示されれば，各 $i=1,2,3$ に対して K_i が存在して $g_i(p,m)<K_i$ が成り立つ，すなわち $i=2$ の上界から主結果 1 が帰結される．

命題 2 (連続性). $p\in[0,p_{\mathrm{c}})$ を固定する毎に，$m\in[1,m_p)$ に関して $\{g_i\}_{i=1}^3$ は連続である．また，$p\in[0,p_{\mathrm{c}})$ に関して $\{g_i(p,1)\}_{i=1}^3$ は連続である．

命題 3 (初期条件). 或る有限な定数 $\{K_i\}_{i=1}^3$ が存在して，全ての $i=1,2,3$ に対して $g_i(0,1)<K_i$ が成り立つ．

命題 4 (Bootstrap argument)**.** $\mathbb{Z}^{d\geq 183}\times\mathbb{Z}_+$ および $\mathbb{L}^{d\geq 9}\times\mathbb{Z}_+$ 上の最近接有向パーコレーションに対して，$p\in(0,p_{\mathrm{c}})$ と $|z|\in(1,m_p)$ を満たす $z\in\mathbb{C}$ を固定する．このとき，命題 3 と同じ $\{K_i\}_{i=1}^3$ に対して，

$$\forall i=1,2,3,\quad [g_i(p,m)\leq K_i \implies g_i(p,m)<K_i]$$

が成り立つ．

命題 2 と命題 3 の証明は [4, 7] に譲り，本稿では特に命題 4 の証明の概略についてのみ述べる．

4.2 レース展開

ランダム・ウォークの二点関数 Q_p に対して，再生方程式

$$Q_p(\boldsymbol{x}) = \delta_{\boldsymbol{o},\boldsymbol{x}} + (q_p\star Q_p)(\boldsymbol{x})$$

が成り立つことはよく知られている．ここで，$\boldsymbol{x}=(x,t)\in\mathbb{C}^d\times\mathbb{Z}_+$ に対して，$\delta_{\boldsymbol{o},\boldsymbol{x}}=\delta_{o,x}\delta_{o,t}$ とした．レース展開は有向パーコレーションの二点関数 φ_p に対する或る種の Q_p からの摂動展開を与えるものである．

命題 5 (レース展開 [9, 11]). 任意の $p<p_{\mathrm{c}}$ と $N\in\mathbb{Z}_+$ に対して，$\mathbb{C}^d\times\mathbb{Z}_+$ 上の非負関数 $\{\pi_p^{(n)}\}_{n=0}^N$ が存在して，再生方程式

$$\varphi_p(\boldsymbol{x}) = \delta_{o,\boldsymbol{x}} + \Pi_p^{(N)}(\boldsymbol{x}) + \left((\delta_{\boldsymbol{o},\bullet}+\Pi_p^{(N)})\star q_p\star\varphi_p\right)(\boldsymbol{x}) + (-1)^{N+1}R_p^{(N+1)}(\boldsymbol{x}), \tag{9}$$

が成り立つ．ただし，

$$\Pi_p^{(N)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\pi_p^{(n)}(\boldsymbol{x})$$

であり，剰余項 $R_p^{(N+1)}(\boldsymbol{x})$ は

$$0 \le R_p^{(N+1)}(\boldsymbol{x}) \le \left(\pi_p^{(N)} \star \varphi_p\right)(\boldsymbol{x}).$$

と評価される．

下記の補題 6 により，$\{\pi_p^{(N)}\}_{N=1}^{\infty}$ の交代級数が絶対収束することがわかる．ゆえに，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{G}^d \times \mathbb{Z}_+$ に対して，$\lim_{N\to\infty} \pi_p^{(N)}(\boldsymbol{x}) = 0$ を仮定してよい．このとき，$N \to \infty$ で $R_p^{(N)}(\boldsymbol{x}) \to 0$ となるから，無限級数

$$\Pi_p(\boldsymbol{x}) := \lim_{N\to\infty} \Pi_p^{(N)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N \pi_p^{(N)}(\boldsymbol{x}) \tag{10}$$

は well-defined である．

4.3 レース展開係数の評価

レース展開の絶対収束性を示すために，交代級数 (10) の上界を得る必要がある．$\varphi_p^{(m)}(x,t) = m^t \varphi_p(x,t)$ とおき，$\lambda, \rho \in \mathbb{N}$ と $m > 0$ と $k \in \mathbb{T}^d$ に対して，

$$B_{p,m}^{(\lambda,\rho)} := \sup_{\boldsymbol{x}} \sum_{\boldsymbol{y}} \left(q_p^{\star\lambda} \star \varphi_p\right)(\boldsymbol{y}) \left(m^\rho q_p^{\star\rho} \star \varphi_p^{(m)}\right)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}), \tag{11}$$

$$T_{p,m}^{(\lambda,\rho)} := \sup_{\boldsymbol{x}} \sum_{\boldsymbol{y}} \left(q_p^{\star\lambda} \star \varphi_p^{\star 2}\right)(\boldsymbol{y}) \left(m^\rho q_p^{\star\rho} \star \varphi_p^{(m)}\right)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}), \tag{12}$$

$$\hat{V}_{p,m}^{(\lambda,\rho)}(k) := \sup_{\boldsymbol{x}} \sum_{\boldsymbol{y}} \left(q_p^{\star\lambda} \star \varphi_p\right)(\boldsymbol{y}) (1 - \cos k \cdot y) \left(m^\rho q_p^{\star\rho} \star \varphi_p^{(m)}\right)(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}). \tag{13}$$

と定義する．さらに，$\Pi_p(\boldsymbol{x})$ を二つに分ける．すなわち $\Pi_p^{\mathrm{even}}(\boldsymbol{x}) = \sum_{N=1} \pi_p^{(2N)}(\boldsymbol{x})$ および $\Pi_p^{\mathrm{odd}}(\boldsymbol{x}) = \pi_p^{(1)}(\boldsymbol{x}) - \pi_p^{(0)}(\boldsymbol{x}) + \sum_{N=1} \pi_p^{(2N+1)}(\boldsymbol{x})$ とする．

補題 6. $\varepsilon = \varepsilon_1^{(1)}\varepsilon_1^{(2)} \vee \varepsilon_1^{(1)}\varepsilon_2^{(2)} \vee \varepsilon_1^{(2)}\varepsilon_2^{(1)} \vee \varepsilon_2^{(1)}\varepsilon_2^{(2)} \vee (\varepsilon_1^{(1)})^3 \vee (\varepsilon_2^{(1)})^3$ とおく．$2T_{p,m}^{(1,1)} < 1$ が成り立つならば，交代級数 (10) が絶対収束し，かつ

$$\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0,m) \le \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m) \le \frac{1}{2} B_{p,m}^{(2,2)} + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$\sum_{(x,t)} \left(\Pi_p^{\mathrm{even}}(x,t) + \Pi_p^{\mathrm{odd}}(x,t)\right) m^t t \le \frac{1}{2}\left(B_{p,m}^{(2,2)} + T_{p,m}^{(2,2)}\right) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$\sum_{(x,t)} \left(\Pi_p^{\mathrm{even}}(x,t) + \Pi_p^{\mathrm{odd}}(x,t)\right) m^t (1 - \cos k \cdot x) \le \frac{1}{2}\hat{V}_{p,m}^{(2,2)}(k) + 2\hat{V}_{p,1}^{(2,2)}(k) B_{p,m}^{(0,2)} + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

と評価できる．

この補題は [4, Lemma 3.2] あるいは [7, Lemma 3.4.4] の簡易版である．誤差項 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ は実際には主要項と同様に (11)–(13) を用いて表される．しかしながら，数値計算を行うと，誤差項は主要項に比べて 1 桁以上小さい．Bootstrap argument を確認するに当たっては上の主張の程度でも大雑把に理解できると考えたので，本稿では簡易版を載せるに留める．実際の数値計算の結果を見たければ，やはりプログラム等を動かす必要がある．

4.4 Bootstrap 関数の評価

交代級数 (10) が絶対収束すると仮定する．(9) の両辺の Fourier-Laplace 変換を取ると，

$$\hat{\varphi}_p(k,z) = \frac{1+\hat{\Pi}_p(k,z)}{1-\hat{q}_p(k,z)(1+\hat{\Pi}_p(k,z))}. \tag{14}$$

となる．この表式を用いると，g_1 の上界

$$g_1(p,m) \le \frac{1}{1+\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0,m)-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m)} \le \frac{1}{1-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m)} \tag{15}$$

が得られる．補題 6 で評価された量が現れていることに注目されたい．また，[12, Lemma 5.7] を若干修正した補題 [4, Lemma 4.4] を用いることによって，g_3 の上界

$$\begin{aligned} g_3(p,m) \le \max\left\{1, \frac{g_2(p,m)}{1-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0,m)-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m)}\right\}^3 K_1^2 \\ \times \left(1+2\left(\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0,m)+\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m)\right)\right. \\ \left. +2\left\|\frac{(\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0,m)+\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m))-(\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(\bullet,m)+\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(\bullet,m))}{1-\hat{D}(\bullet)}\right\|_\infty\right)^2 \end{aligned} \tag{16}$$

も得られる．これらは単純立方格子 $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$ でも体心立方格子 $\mathbb{L}^d \times \mathbb{Z}_+$ でも成り立つ．

一方で，g_2 の上界はそれぞれの格子で変わる上に，次の命題と補題を必要とする：

命題 7. 体心立方格子 $\mathbb{L}^d$ 上では，$g_2(p,m)$ の上限を計算するために k の範囲を $[-\pi/2,\pi/2]^d$ にすれば十分である．すなわち，

$$g_2(p,m) = \sup_{\substack{k\in\mathbb{T}^d,\\ z\in\mathbb{C}:\,|z|\in\{1,m\}}} \frac{|\hat{\varphi}_p(k,z)|}{|\hat{S}_{\mu_p(z)}(k)|} = \sup_{\substack{k\in[-\pi/2,\pi/2]^d,\\ z\in\mathbb{C}:\,|z|\in\{1,m\}}} \frac{|\hat{\varphi}_p(k,z)|}{|\hat{S}_{\mu_p(z)}(k)|}.$$

補題 8. 不等式 $\hat{D}(k) \ge 0$ を満たす任意の $k \in \mathbb{T}^d$，および任意の $r \in [0,1]$ と $\theta \in \mathbb{T}$ に対して，

$$\left|1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\hat{D}(k)\right| \ge \frac{1}{2}\left(\frac{|\theta|}{\pi}+1-\hat{D}(k)\right).$$

これらを用いると，

$$\begin{aligned} g_2(p,m) \le \frac{1+\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0,m)+\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m)}{1-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m)} + \frac{K_2}{1-\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m)}\left(2\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0,m)\right. \\ + cK_1\max\left\{\pi\sum_{(x,t)}\left(\Pi_p^{\mathrm{even}}(x,t)+\Pi_p^{\mathrm{odd}}(x,t)\right)m^t t, \right. \\ \left.\left. \sum_{(x,t)}\left(\Pi_p^{\mathrm{even}}(x,t)+\Pi_p^{\mathrm{odd}}(x,t)\right)m^t\frac{1-\cos k\cdot x}{1-\hat{D}(k)}\right\}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

が得られる．ただし，単純立方格子，体心立方格子それぞれに対して $c = 4, 2$ である．命題 7 と補題 8 は先行研究 [9] に無く，講演者らは新たに証明する必要があった．詳しくは [4, Remark 2] を参照されたい．体心立方格子上では命題 7 で k の範囲を縮めていたのに対し，単純立方格子 $\mathbb{Z}^d$ 上では θ の範囲を縮めることができる (関連する論文 [8] 現在執筆中である)．これに伴って，補題 8 も異なるものを使う必要があるため，上の定数 c の違いが現れる．

4.5 ランダム・ウォーク量によるダイアグラムの評価

上で定義した $B_{p,m}^{(\lambda,\rho)}$, $T_{p,m}^{(\lambda,\rho)}$ および $V_{p,m}^{(\lambda,\rho)}(k)$ は次の補題のように評価できる．これらの上界は（単なる定数を除いて）$\{K_i\}_{i=1}^3$ とランダム・ウォーク量 (1) のみで表されていることに注目されたい．

補題 9. $g_i(p,m) \le K_i$, $i = 1,2,3$ を仮定する．各 $\mu, \rho \in \mathbb{N}$ と $p \in [0, p_{\mathrm{c}})$ と $m \in [1, m_p)$ に対して，

$$B_{p,m}^{(\lambda,\rho)} \le K_1^{\lambda+\rho} K_2^2 \varepsilon_1^{(\lfloor(\lambda+\rho)/2\rfloor)}, \tag{18}$$

$$T_{p,m}^{(\lambda,\rho)} \le \sqrt{2} K_1^{\lambda+\rho} K_2^3 \varepsilon_2^{(\lfloor(\lambda+\rho)/2\rfloor)}, \tag{19}$$

$$\left\| \frac{\hat{V}_{p,m}^{(\lambda,\rho)}}{1-\hat{D}} \right\|_\infty \le \begin{cases} K_1^2 \|D\|_\infty + K_1^3 K_2 \sqrt{\varepsilon_1^{(2)}} + \left\| \dfrac{\hat{V}_{p,m}^{(2,1)}}{1-\hat{D}} \right\|_\infty & [\lambda = \rho = 1], \\ \lambda(\lambda-1) K_1^{\lambda+\rho} K_2^2 \varepsilon_1^{(\lfloor(\lambda+\rho-1)/2\rfloor)} & \\ \quad + \lambda K_1^{\lambda+\rho-1} K_2 K_3 (\sqrt{2}+4) \varepsilon_2^{(\lfloor(\lambda+\rho-1)/2\rfloor)} & [\lambda \ge 2 \text{ or } \rho \ge 2]. \end{cases} \tag{20}$$

4.6 命題 4 の証明

以上の評価を合わせると，命題 4 が証明できる．体心立方格子の場合についてのみ示す（単純立方格子でも数値が変わる程度で同様）．具体的に

$$d = 9, \quad K_1 = 1.0020, \quad K_2 = 1.0500, \quad K_3 = 1.2500,$$

を代入する（これらは命題 3 を満たすように取る）．補題 9 と表 1 によって，

$$B_{p,m}^{(2,2)} \le 2.116\,88 \times 10^{-4}, \quad B_{p,m}^{(0,2)} \le 2.372\,79 \times 10^{-3},$$
$$T_{p,m}^{(2,2)} \le 4.402\,47 \times 10^{-4}, \quad T_{p,m}^{(1,1)} \le 3.961\,90 \times 10^{-3},$$
$$\frac{\hat{V}_{p,m}^{(2,2)}(k)}{1-\hat{D}(k)} \le 3.922\,76 \times 10^{-2}$$

を得る．この内，4 番目の不等式は補題 6 の十分条件であることに注意されたい．さらに，補題 6 によって，

$$\hat{\Pi}_p^{\mathrm{even}}(0,m) \le 1.000\,00 \times 10^{-5},$$
$$\hat{\Pi}_p^{\mathrm{odd}}(0,m) \le 1.158\,44 \times 10^{-4},$$
$$\sum_{(x,t)} \left(\Pi_p^{\mathrm{even}}(x,t) + \Pi_p^{\mathrm{odd}}(x,t) \right) m^t t \le 4.000\,00 \times 10^{-4},$$
$$\sum_{(x,t)} \left(\Pi_p^{\mathrm{even}}(x,t) + \Pi_p^{\mathrm{odd}}(x,t) \right) m^t \frac{1-\cos k \cdot x}{1-\hat{D}(k)} \le 2.100\,00 \times 10^{-2}$$

となるから，交代級数 (10) が絶対収束する．最後に，(15) と (17) と (16) によって，

$$g_1(p,m) \leq 1.0002 < K_1, \qquad g_2(p,m) \leq 1.0445 < K_2, \qquad g_3(p,m) \leq 1.2433 < K_3$$

を得る．これは $d = 9$ のみで bootstrap argument を示したに過ぎない．しかし，ランダム・ウォーク量 (1) は次元 d に関して単調減少なので，補題 9 の上界は同じ $\{K_i\}_{i=1}^3$ の数値かつ $d > 9$ に対しても成り立つ．したがって，$d \geq 9$ で命題 4 が成り立つ． □

参考文献

[1] M. Aizenman and C. M. Newman. “Tree Graph Inequalities and Critical Behavior in Percolation Models”. In: *J Stat Phys* 36.1-2 (July 1984), pp. 107–143. DOI: 10.1007/BF01015729.

[2] D. J. Barsky and M. Aizenman. “Percolation Critical Exponents under the Triangle Condition”. In: *The Annals of Probability* (1991), pp. 1520–1536.

[3] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. “Percolation Processes: I. Crystals and Mazes”. In: *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 53.3 (July 1957), pp. 629–641. DOI: 10.1017/S0305004100032680.

[4] L.-C. Chen, S. Handa, and Y. Kamijima. “Mean-Field Behavior of Nearest-Neighbor Oriented Percolation on the BCC Lattice above $8+1$ Dimensions”. In: (June 27, 2021). DOI: 10.48550/arXiv.2106.14211.

[5] G. Grimmett. *Percolation*. Red. by S. S. Chern et al. Vol. 321. Grundlehren Der Mathematischen Wissenschaften. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1999. DOI: 10.1007/978-3-662-03981-6.

[6] M. Heydenreich and R. van der Hofstad. *Progress in High-Dimensional Percolation and Random Graphs*. CRM Short Courses. Cham: Springer International Publishing, 2017. DOI: 10.1007/978-3-319-62473-0.

[7] Y. Kamijima. “Mean-Field Behavior for Percolation Models”. theses (doctoral). 北海道大学, Mar. 25, 2021.

[8] Y. Kamijima. “Mean-field Behavior of Nearest-Neighbor Oriented Percolation on $\mathbb{Z}^{d\geq 183} \times \mathbb{Z}_+$”. In preparation. 2022.

[9] B. G. Nguyen and W.-S. Yang. “Triangle Condition for Oriented Percolation in High Dimensions”. In: *The Annals of Probability* (1993), pp. 1809–1844.

[10] B. G. Nguyen and W.-S. Yang. “Gaussian Limit for Critical Oriented Percolation in High Dimensions”. In: *J Stat Phys* 78.3-4 (Feb. 1995), pp. 841–876. DOI: 10.1007/BF02183691.

[11] A. Sakai. “Mean-Field Critical Behavior for the Contact Process”. In: *Journal of Statistical Physics* 104.1 (2001), pp. 111–143.

[12] G. Slade. *The Lace Expansion and Its Applications*. Vol. 1879. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006. DOI: 10.1007/b128444.

Poisson Algebas II

Maram Alossaimi

The University of Sheffield

Abstract

The concept of Poisson algebras is one of the most important concepts in mathematics that make a link between commutative and non-commutative algebra. Poisson algebras can be defined as Lie algebras that satisfy the Leibniz rule. Our research is about classifying a large Poisson algebra class $\mathcal{A} = K[t][x, y]$, that is a Poisson polynomial algebra in two variables x and y with coefficients on the Poisson polynomial algebra $K[t]$, where K is an algebraic closure field with zero characteristic. There are three main cases of the classification of the Poisson algebra class $\mathcal{A}$. We are interested in the Poisson spectrum of $\mathcal{A}$, minimal and maximal Poisson ideals of $\mathcal{A}$. I presented the first case of the classification in the poster called 'Poisson Algebras I' and in this poster, I will present a part of the second case of the classification and its Poisson spectrum.

1. Introduction

A commutative algebra D over a field K is called a *Poisson algebra* if there exists a bilinear product $\{\cdot,\cdot\} : D \times D \to D$, called a *Poisson bracket*, such that

1. $\{a, b\} = -\{b, a\}$ for all $a, b \in D$ (anti-commutative),
2. $\{a, \{b, c\}\} + \{b, \{c, a\}\} + \{c, \{a, b\}\} = 0$ for all $a, b, c \in D$ (Jacobi identity), and
3. $\{ab, c\} = a\{b, c\} + \{a, c\}b$ for all $a, b, c \in D$ (Leibniz rule).

Definition. Let D be a Poisson algebra. An ideal I of the algebra D is a *Poisson ideal* of D if $\{D, I\} \subseteq I$. Moreover, a Poisson ideal P of the algebra D is a *Poisson prime ideal* of D provided

$$IJ \subseteq P \Rightarrow I \subseteq P, \quad \text{or} \quad J \subseteq P$$

where I and J are Poisson ideals of D. A set of all Poisson prime ideals of D is called the *Poisson spectrum* of D and is denoted by $\mathrm{PSpec}(D)$.

Definition. Let D be a Poisson algebra over a field K. A K-linear map $\alpha : D \to D$ is a *Poisson derivation* of D if α is a K-derivation of D and

$$\alpha(\{a, b\}) = \{\alpha(a), b\} + \{a, \alpha(b)\} \quad \text{for all } a, b \in D.$$

A set of all Poisson derivations of D is denoted by $\mathrm{PDer}_K(D)$.

2. How do we get our Poisson algebra class $\mathcal{A}$?

Lemma. [Oh3] *Let D be a Poisson algebra over a field K, $c \in K$, $u \in D$ and $\alpha, \beta \in \mathrm{PDer}_K(D)$ such that*

$$\alpha\beta = \beta\alpha \quad \textit{and} \quad \{d, u\} = (\alpha + \beta)(d)u \quad \textit{for all } d \in D. \tag{1}$$

Then the polynomial ring $D[x,y]$ becomes a Poisson algebra with Poisson bracket

$$\{d,y\}=\alpha(d)y,\quad \{d,x\}=\beta(d)x \quad \textit{and} \quad \{y,x\}=cyx+u \ \textit{ for all } \ d\in D. \tag{2}$$

The Poisson algebra $D[x,y]$ with Poisson bracket (2) is denoted by $(D;\alpha,\beta,c,u)$.

---

3. How do we classify $\mathcal{A}$?

We aim to classify all the Poisson algebra's $\mathcal{A}=(K[t];\alpha,\beta,c,u)$, where K is an algebraically closed field of characteristic zero and $K[t]$ is the polynomial Poisson algebra (with necessarily trivial Poisson bracket, i.e. $\{a,b\}=0$ for all $a,b\in K[t]$). Notice that, it follows from the second part of equality (1) that

$$0=\{d,u\}=(\alpha+\beta)(d)u \quad \text{for all } \ d\in K[t],$$

which implies that precisely one of the three cases holds:

(Case I: $\alpha+\beta=0$ and $u=0$), (Case II: $\alpha+\beta=0$ and $u\neq 0$) or (Case III: $\alpha+\beta\neq 0$ and $u=0$).

---

4. What have we done so far?

The next lemma states that in order to complete the classification of Poisson algebra class $\mathcal{A}$. This lemma describes all commuting pairs of derivations of the polynomial Poisson algebra $K[t]$.

Lemma. *Let $K[t]$ be the polynomial Poisson algebra with trivial Poisson bracket and $\alpha,\beta\in \mathrm{PDer}_K=\mathrm{Der}_K(K[t])=K[t]\partial_t$ such that $\alpha=f\partial_t$ and $\beta=g\partial_t$, where $f,\ g\in K[t]\backslash\{0\}$, $\partial_t=d/dt$ then*

$$\alpha\beta=\beta\alpha \quad \textit{if and only if} \quad g=\frac{1}{\lambda}f \quad \textit{for some} \quad \lambda\in K^\times:=K\backslash\{0\}. \tag{3}$$

By using the previous lemma, we can assume that $\alpha=f\partial_t$, $\beta=\frac{1}{\lambda}f\partial_t$, $c\in K$, $u\in K[t]$, where $f\in K[t]$ and $\lambda\in K^\times$. Then we have the class of Poisson algebras $\mathcal{A}=K[t][x,y]=(K[t];\alpha=f\partial_t,\beta=\frac{1}{\lambda}f\partial_t,c,u)$ with Poisson bracket defined by the rule:

$$\{t,y\}=fy,\qquad \{t,x\}=\frac{1}{\lambda}fx \quad \text{and} \quad \{y,x\}=cyx+u. \tag{4}$$

The first case of the classification

The first case (Case I) of the Poisson algebra class $\mathcal{A}$ has two main subcases: Case I.1 and Case I.2. The results were indicated in these six subcases $\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3,\mathcal{A}_6,\mathcal{A}_7,\mathcal{A}_9$ and $\mathcal{A}_{10}$. Also, we presented some of their Poisson spectrum in diagrams in the poster called '*Poisson Algebras I*', see the diagram 1.



Diagram 1: The 'Poisson Algebras I' poster

The first part of second case (Case II) of the classification is presented in this poster and the next diagram shows the second case structure.

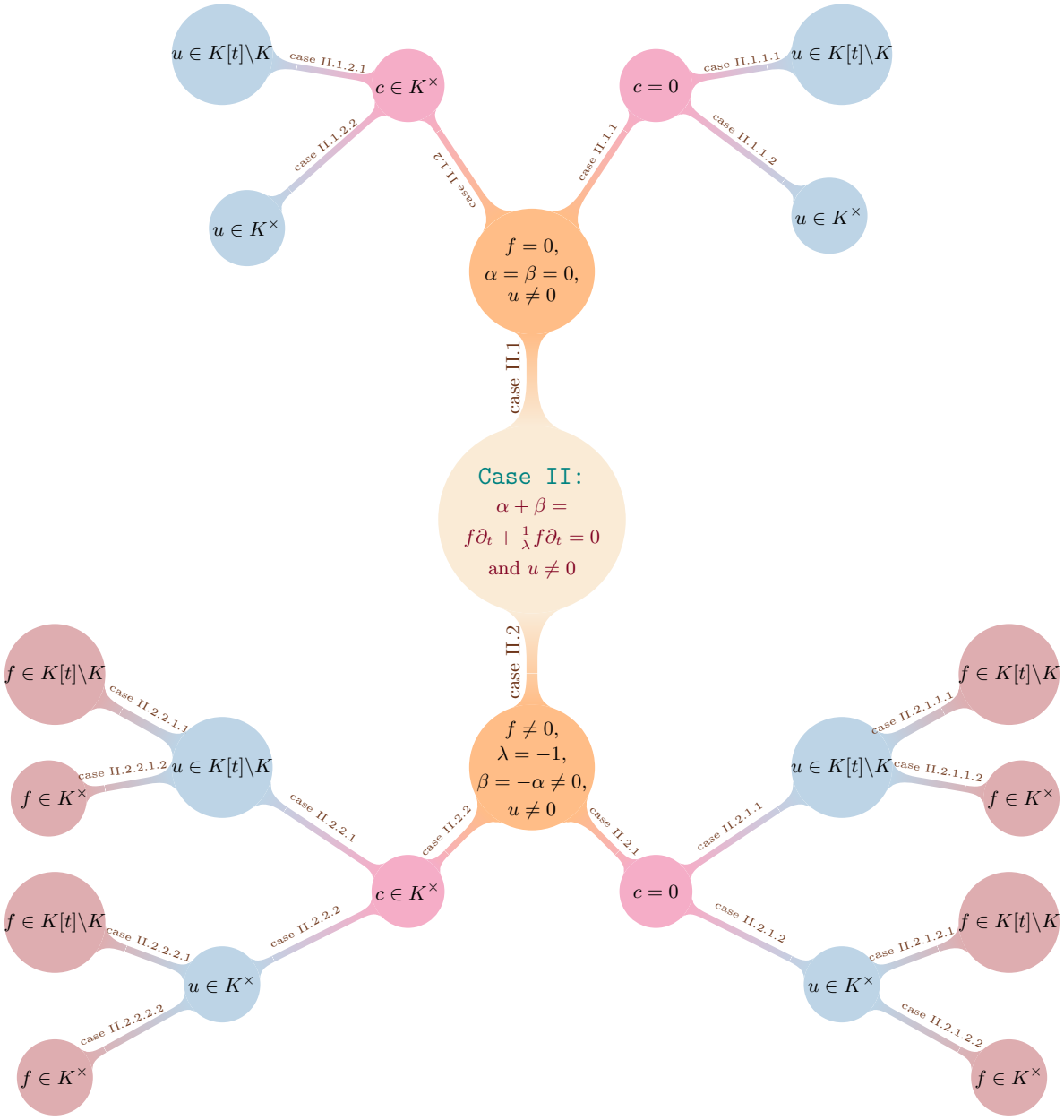


Diagram 2: Structure of the second case of Poisson algebra class $\mathcal{A}$

Case II: $\alpha+\beta=f\partial_t+\frac{1}{\lambda}f\partial_t=(1+\frac{1}{\lambda})f\partial_t=0$ and $u\neq 0$

Case II.1:

If $f=0$, i.e. $\alpha=\beta=0$ and $u\in K[t]\backslash\{0\}$ then we have the Poisson algebra $\mathcal{A}_{11}=(K[t];0,0,c,u)$

with Poisson bracket

$$\{t, y\} = 0, \quad \{t, x\} = 0 \text{ and } \{y, x\} = cyx + u. \tag{5}$$

There are two subcases: $c = 0$ and $c \in K^\times$.

Case II.1.1: If $c = 0$ then we have the Poisson algebra $\mathcal{A}_{12} = (K[t]; 0, 0, 0, u)$ with Poisson bracket

$$\{t, y\} = 0, \quad \{t, x\} = 0 \text{ and } \{y, x\} = u. \tag{6}$$

There are two subcases: $u \in K[t]\backslash K$ and $u \in K^\times$.

Case II.1.1.1:
If $u \in K[t]\backslash K$ and $R_u = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ is the set of distinct roots of u then $\mathcal{A}_{13} = (K[t]; 0, 0, 0, u)$ is a Poisson algebra with Poisson bracket (6), we found PSpec($\mathcal{A}_{14}$), see diagram 3.

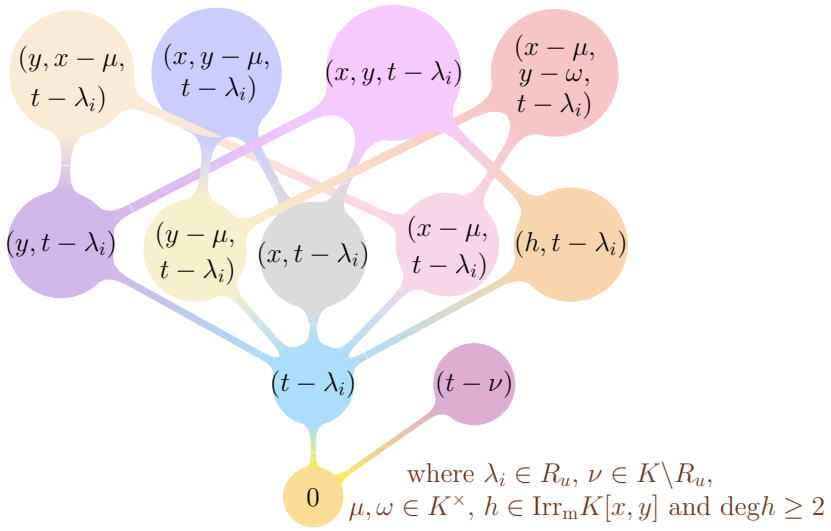


Diagram 3: The containment information between Poisson prime ideals of $\mathcal{A}_{13}$

Case II.1.1.2:
If $u = a \in K^\times$, i.e. $R_a = \emptyset$ then we have the Poisson algebra $\mathcal{A}_{14} = (K[t]; 0, 0, 0, a)$ with Poisson bracket

$$\{t, y\} = 0, \quad \{t, x\} = 0 \text{ and } \{y, x\} = a. \tag{7}$$

The PSpec($\mathcal{A}_{14}$) $= \{\mathfrak{p} \otimes K[x, y] \mid \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(K[t])\} \subseteq$ PSpec($\mathcal{A}_{13}$).

Case II.1.2: If $c \in K^\times$ then we have the Poisson algebra $\mathcal{A}_{15} = (K[t]; 0, 0, c, u)$ with Poisson bracket

$$\{t, y\} = 0, \quad \{t, x\} = 0 \text{ and } \{y, x\} = cyx + u := \rho. \tag{8}$$

There are two subcases: $u \in K[t]\backslash K$ and $u \in K^\times$.

Case II.1.2.1:
If $u \in K[t]\backslash K$ and $R_u = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ is the set of distinct roots of u then $\mathcal{A}_{16} = (K[t]; 0, 0, c, u)$ is a Poisson algebra with Poisson bracket

$$\{t, y\} = 0, \quad \{t, x\} = 0 \text{ and } \{y, x\} = cyx + u. \tag{9}$$

It follows that the element $\rho = cyx + u$ is an irreducible polynomial in $\mathcal{A}_{16}$. Moreover, we found PSpec($\mathcal{A}_{16}$), see diagram 4

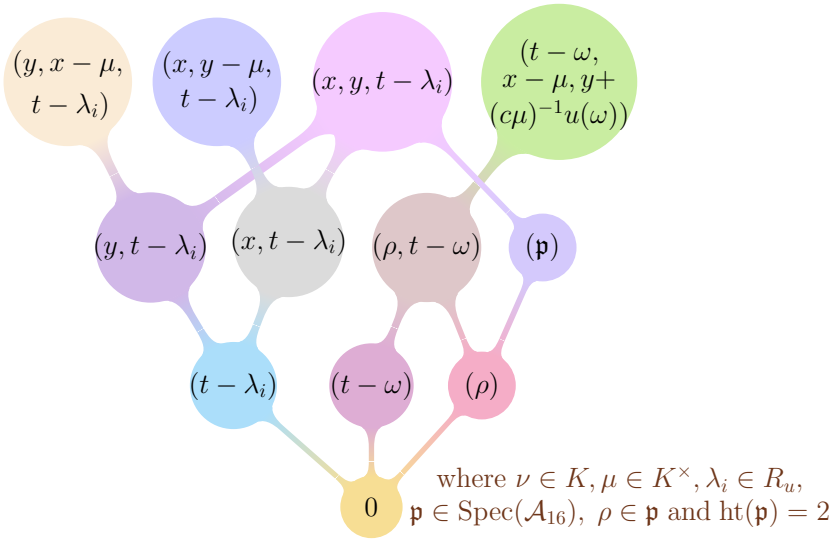


Diagram 4: The containment information between Poisson prime ideals of $\mathcal{A}_{16}$

Case II.1.2.2:
If $u = a \in K^\times$, i.e. $R_a = \emptyset$ then we have the Poisson algebra $\mathcal{A}_{17} = (K[t]; 0, 0, c, a)$ with Poisson bracket

$$\{t, y\} = 0, \quad \{t, x\} = 0 \text{ and } \{y, x\} = cyx + a. \tag{10}$$

It follows that $\mathcal{A}_{17} = K[t] \otimes K[x, y]$ is a tensor product of the trivial Poisson algebra $K[t]$ and the Poisson algebra $K[x, y]$ with $\{y, x\} = \rho$. The element $\rho = cyx + a$ is an irreducible polynomial in $\mathcal{A}_{17}$. Moreover, we found PSpec($\mathcal{A}_{17}$), see diagram 5.

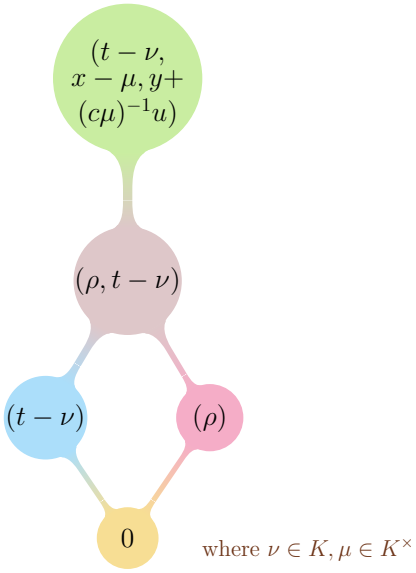


Diagram 5: The containment information between Poisson prime ideals of $\mathcal{A}_{17}$

5. Conclusion / Future research

A classification of Poisson prime ideals of $\mathcal{A}$ was obtained in 10 cases out of 22. We will complete the classification of $\mathcal{A}$. Then we aim to classify some simple finite dimension modules over the class $\mathcal{A}$.

Acknowledgements

I would like to thank my supervisor Vlad for providing guidance and feedback throughout this research. Also, I would like to thank my sponsor the University of Imam Mohammad Ibn Saud Islamic.

References

[Bav6] V. V. Bavula, The Generalized Weyl Poisson algebras and their Poisson simplicity criterion. *Letters in Mathematical Physics*, **110** (2020), $105-119$.

[Bav7] V. V. Bavula, The PBW Theorem and simplicity criteria for the Poisson enveloping algebra and the algebra of Poisson differential operators, submitted, arxiv.2107.00321.

[GoWa] K. R. Goodearl and R. B. Warfield. *An introduction to noncommutative noetherian rings*. 2nd ed. New York: Cambridge University Press. (2004), pages $1-85$, $105-122$ and $166-186$.

[Oh3] S.-Q. Oh, Poisson polynomial rings. *Communications in Algebra*, **34** (2006), $1265-1277$.

高次元局所体上の代数群の不変測度

大阪大学大学院理学研究科 (数学専攻)
森政興 (Mori Masaoki)

1 局所体と不変測度

定義 1.1. 体 F が非自明な離散付値 $v_F\colon F \longrightarrow \mathbb{Z}\cup\{\infty\}$ を持ち、v_F が定める位相で F が完備であるとき、F は完備離散付値体であるといいます. さらにその剰余体が有限体のとき、F のことを **局所体** と呼びます.

局所体は $\mathbb{Q}_p$ や $\mathbb{F}_p((t))$ の有限次拡大体であることが知られています.F が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体の場合には、整数環 $\mathcal{O}_F$ は $\mathbb{Z}_p$ の整閉包であり、F が $\mathbb{F}_p((t))$ の有限次拡大体の場合には、$\mathbb{F}_p[[t]]$ の整閉包になります. 環 $\mathcal{O}_F$ は唯一つの極大イデアル $\mathfrak{m}_F$ を持ち、このイデアルは素元と呼ばれる元で生成された単項イデアルであることが知られています. さらに剰余体 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}_F$ は有限体になっています.

例 1.2. (1) $F=\mathbb{Q}_p$ のとき、$\mathcal{O}_F$ は $\mathbb{Z}_p$ のことであり、極大イデアルは素数 p で生成された $p\mathbb{Z}_p$ のことです. 剰余体は $\mathbb{F}_p \simeq \mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ です.

(2) $F=\mathbb{F}_p((t))$ のとき、$\mathcal{O}_F$ はもちろん $\mathbb{F}_p[[t]]$ のことです. 極大イデアルは不定元 t で生成されたイデアル $t\mathbb{F}_p[[t]]$ のことであり、この場合も剰余体は $\mathbb{F}_p$ になります.

局所体 F、あるいはその整数環 $\mathcal{O}_F$ の位相的な性質について考えてみましょう.$\mathcal{O}_F$ は環として

$$\mathcal{O}_F = \varprojlim_i \mathcal{O}_F/\mathfrak{m}_F^i$$

という射影極限としての表示を持つので、各成分 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}_F^i$ の位相から $\mathcal{O}_F$ の位相構造が誘導されます. ところが各成分 $\mathcal{O}_F/\mathfrak{m}_F^i$ はすべて有限なので、この射影極限が誘導する $\mathcal{O}_F$ の位相は副有限位相と呼ばれる位相になります. 特に $\mathcal{O}_F$ はコンパクト位相環であり、F は局所コンパクトな位相体になります.

局所コンパクトな位相体 F を加法群として、局所コンパクト位相群であると見なせば、F は **Haar 測度** と呼ばれる不変測度を持ちます. 一般に、局所コンパクト位相群は定数倍を除けば唯一つの不変測度を持つことが知られています. ここで、不変測度とはどういうものか紹介しましょう.

局所コンパクト位相群 G のコンパクト開集合全体のなす集合を $\mathcal{J}(G)$ と書くことにしましょう.K を G のコンパクト開部分群とし、まず $\mu_G(K)\in\mathbb{R}$ を適当な正の実数としましょう. このとき、他のコンパクト開部分群 $K^{'}$ に対して、コンパクト性から、共通部分 $K\cap K^{'}$ は K と $K^{'}$ の指数有限な開部分群になっています. このとき、

$$\mu_G(K^{'}) = \frac{[K^{'}:K\cap K^{'}]}{[K:K\cap K^{'}]}\mu_G(K)$$

とすると、これは $K^{'}$ の “大きさ” を与えていると考えることができます. さらに任意のコンパクト開集合 $X\in\mathcal{J}(G)$ に対して、有限個の $a_1,\ldots,a_n\in G$ とコンパクト開部分群 $K_1,\ldots,K_n$ が存在して、

$$X=\coprod_{i=1}^{n} a_iK_i$$

と書けるので、$\mu_G(X)$ を

$$\mu_G(X) := \sum \mu_G(K_i)$$

と定めると、これが X の “大きさ” であると考えられます. 最初に取ったコンパクト開部分群 $K \subset G$ や定数 $\mu_G(K) \in \mathbb{R}_{>0}$ をどのように選ぶかにより、写像 $\mu_G \colon \mathcal{J}(G) \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は変化しますが、その変化は、定数倍の違いを与えるだけで、μ_G の性質は変化しません.

例 1.3. $G = \mathbb{Q}_p$ とし、$K = \mathbb{Z}_p$ とします.G のコンパクト開部分群は必ず $p^n\mathbb{Z}_p$ という形をしており、このとき、

$$\mu_{\mathbb{Q}_p}(p^n\mathbb{Z}_p) = p^{-n}\mu_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Z}_p)$$

となります. これはコンパクト開部分群 $p^n\mathbb{Z}_p$ の大きさが基準となるコンパクト開部分群 $\mathbb{Z}_p$ の大きさの p^{-n} 倍であることを示しています. 例えば $p^2\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p$ の大きさは $\mathbb{Z}_p$ の $\frac{1}{p^2}$ 倍です. また、$\mathbb{Q}_p$ のコンパクト開集合 X は必ず

$$X = \coprod_{i=1}^{m} (a_i + p^{n_i}\mathbb{Z}_p) \ \ (a_i \in \mathbb{Q}_p, n_i \in \mathbb{Z})$$

という形をしており、このとき

$$\mu_{\mathbb{Q}_p}(X) = \sum p^{-n_i}\mu_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Z}_p)$$

となります.

$\mu_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Z}_p)$ の値は、正の実数なら何でもよいのですが、ほとんどの場合、$\mu_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Z}_p) = 1$ と置くこと多いようです.

2 高次元局所体

さて、前節では、局所体上の測度を紹介しましたが、上記のような話を高次元局所体に拡張することが私の研究テーマになります. このような研究は、20 世紀の後半から S. Bloch や J. Tate といった数学者たちの関心事だったようです. 局所体の不変測度の高次元への拡張として、最初の定式化を行ったのは、I. Fesenko の論文 [F] です.

ここでは、測度について紹介する前に、そもそも高次元局所体とは何かについて、簡単に説明したいと思います. 局所体とは剰余体が有限であるような完備離散付値体のことでした (1.1).

定義 2.1. **高次元局所体** を以下の通り帰納的に定義します.

(1) 有限体のことを 0 次元局所体と呼ぶことにします.
(2) 体 F が完備離散付値体であって、その剰余体が $n-1$ 次元の局所体であるとき、F を n 次元局所体と呼びます.

高次元局所体には、高次元局所類体論と呼ばれる局所類体論の高次元版があることが知られています ([K]).

F を n 次元局所体とすれば、まず F の素元 t_n が取れます. さらに、F の剰余体 F_{n-1} の素元 $\overline{t}_{n-1}$ の付値環 $\mathcal{O}_F$ の持ち上げ t_{n-1} を取ることができます. さらに F_{n-2} の素元を $\mathcal{O}_{F_{n-1}}$ に持ち上げ、さらに $\mathcal{O}_F$ に持ち上げた t_{n-2} を選び、といった感じで **局所パラメーター系** $t_1, \ldots, t_n \in F$ を選ぶことができます. また、これに付随して、付値

$$v_F \colon F \longrightarrow \mathbb{Z}^n \cup \{\infty\}$$

があります. ただし、$\mathbb{Z}^n$ には、辞書式順序が入ります.

付値 $v_F \colon F \longrightarrow \mathbb{Z}^n \cup \{\infty\}$ に付随する付値環

$$O_F = \{x \in F \mid v_F(x) \geq (0, \ldots, 0)\}$$

のことを F の **階数 n の付値環** と呼びます.

例 2.2. $F=\mathbb{F}_p((t_1))\dots((t_n))$ は n 次元局所体であり、$n-1$ 次元の局所体 $F_{n-1}=\mathbb{F}_p((t_1))\dots((t_{n-1}))$ を剰余体として持ちます. 局所パラメーター系は不定元の列 $t_1,\dots,t_n$ であり、階数 n の付値環 O_F は

$$O_F=\mathbb{F}_p[[t_1]]+t_2\mathbb{F}_p((t_1))[[t_2]]+\cdots+t_n\mathbb{F}_p((t_1))\dots((t_{n-1}))[[t_n]]$$

です.

$F=F_n$ を n 次元局所体で、F_{n-1} がその剰余体であることを $F>F_{n-1}$ と書くことにします. このとき、体の列

$$F=F_n>F_{n-1}>\ldots>F_1>F_0$$

があります. また、O_F は n 個の素イデアルからなる列 $(t_n)\subset(t_{n-1})\subset\ldots\subset(t_1)$ を持ち、剰余環 $O_F/(t_i)$ は F_{i-1} の階数 $i-1$ の付値環 $O_{F_{i-1}}$ と同型になります. ただし $i=1$ のときは (t_1) は極大イデアルなので、有限体 $O_F/(t_1)\simeq F_0$ です. 実際に、上記の例 $F=\mathbb{F}_p((t_1))\dots((t_n))$ のときは、

$$O_F=\mathbb{F}_p[[t_1]]+t_2\mathbb{F}_p((t_1))[[t_2]]+\cdots+t_n\mathbb{F}_p((t_1))\dots((t_{n-1}))[[t_n]]$$

の素イデアル (t_i) による剰余環は

$$O_{F_{i-1}}=\mathbb{F}_p[[t_1]]+t_2\mathbb{F}_p((t_1))[[t_2]]+\cdots+t_{i-1}\mathbb{F}_p((t_1))\dots((t_{i-2}))[[t_{i-1}]]$$

であり、これが $\mathbb{F}_p((t_1))\dots((t_{i-1}))$ の階数 $i-1$ の付値環であることが分かると思います.

3 高次元不変測度

ここからは私のプレプリント [Mo] の内容について紹介します. F が 1 次元局所体のとき、例えば $F=\mathbb{Q}_p$ のときには、F の測度を基準となるコンパクト開部分群 $\mathcal{O}_F=\mathbb{Z}_p$ の volume を使って構成できました.

F が n 次元局所体のとき、同様の考察をしてみましょう. このときは O_F を “コンパクト開部分群” であるという気持ちで、F の可測集合を構成できます. 実際には O_F は、例えば $\mathbb{F}_p[[t_1]]+t_2\mathbb{F}_p((t_1))[[t_2]]+\cdots+t_n\mathbb{F}_p((t_1))\dots((t_{n-1}))[[t_n]]$ のようにコンパクトらしさはないのですが、それでもこれを気持ちの上では、“コンパクト” っぽく思うと、F の可測集合として

$$a+t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}O_F\ (a\in F,(i_n,\dots,i_1)\in\mathbb{Z}^n)$$

のような部分集合を考えることできます.F 上の測度は $\mathbb{R}_{(n)}=\mathbb{R}((X_2))\dots((X_n))$ に値を取ります. ただし、変数は X_2 から X_n までの $n-1$ 個あること、したがって $\mathbb{R}_{(1)}=\mathbb{R}$ であることに注意してください.

定義 3.1. n 次元局所体 F に対して、

$$\mathcal{J}(F)=\{a+t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}O_F\mid a\in F,(i_n,\dots,i_1)\in\mathbb{Z}^n\}$$

と置くと、写像

$$\mu_F\colon\mathcal{J}(F)\longrightarrow\mathbb{R}_{(n)}$$

を $\mu_F(a+t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n}O_F)=q^{-i_1}X_2^{i_2}\cdots X_n^{i_n}$ と定義することができます. ただし、q は有限体 F_0 の位数のことです.

記号の簡略化のために、多重指数 $i=(i_n,\dots,i_1)\in\mathbb{Z}^n$ に対して、$t^i:=t_1^{i_1}\cdots t_n^{i_n},X^i:=q^{-i_1}X_2^{i_2}\cdots X_n^{i_n}$ とします. また、$x\in F$ に対して、$||x||=X^{v_F(x)}$ と置きます.

プレプリント [Mo] においては、F だけでなく、有限次元のベクトル空間 F^d に対しても、可測集合を考えています. 可測集合として最初に思い浮かぶのは

$$\mathcal{J}(F)^{\oplus d}=\left\{\left.\begin{pmatrix}a_1+t^{\alpha_1}O_F\\ \vdots\\ a_d+t^{\alpha_d}O_F\end{pmatrix}\right|\begin{array}{c}a_1,\dots,a_d\in F,\\ \alpha_1,\dots,\alpha_d\in\mathbb{Z}^n\end{array}\right\}$$

のようなものです. これを F^m の可測集合の集合として考えてみましょう. しかしこれだけだと例えば、$T \in GL_d(F)$ と $A \in \mathcal{J}(F)^{\oplus d}$ に対して、$T(A)$ が必ずしも $\mathcal{J}(F)^{\oplus d}$ の元になりません.$n = 1$ の場合でも $T(A) \notin \mathcal{J}(F)^{\oplus d}$ ですが、局所コンパクト性から、$T(A)$ の volume を $\mathcal{J}(F)^{\oplus d}$ の元の volume の有限倍で表示できました. しかし、$n > 1$ のときは、局所コンパクト性のような便利な位相的性質がないため、$\mathcal{J}(F)^{\oplus d}$ の元の volume を決めたとしても、それを $T \in GL_d(F)$ で写しただけで、volume が決まらなくなってしまいます. そのため、F^d 上の測度を考えるためには、$\mathcal{J}(F)^{\oplus d}$ よりも大きな集合を考える必要があります.F^d の可測集合の集合として、

$$\mathcal{J}(F^d) = \sum_{s \geq d} \sum_{\substack{T:F^s \to F^d, \\ \mathrm{rank}(T)=d}} T\left(\mathcal{J}(F)^{\oplus s}\right)$$

というものを考えれば、上述の問題を解決できます. 全射 $T\colon F^s \longrightarrow F^d$ と

$$B = \begin{pmatrix} b_1 + t^{\beta_1} O_F \\ \vdots \\ b_s + t^{\beta_s} O_F \end{pmatrix}$$

に対して

$$\mu_{F^d}(T(B)) = ||\mathrm{Det}(T\mathrm{diag}(t^{\beta_1}, \ldots, t^{\beta_s}))||$$

とすると、d 次元ベクトル空間 F^d 上の測度

$$\mu_{F^d}\colon \mathcal{J}(F^d) \longrightarrow \mathbb{R}_{(n)}$$

が定まります. ここで、階数 d の正方でない行列 $T \in M_{d,s}(F)$ の行列式のようなもの $\mathrm{Det}(T)$ について説明します. 単因子論のように T に対して、$P \in GL_d(O_F)$ と $Q \in GL_s(O_F)$ を適当に選べば、P, Q の選び方に依存しない $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ があり、

$$PTQ = \begin{pmatrix} t^{\alpha_1} & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & t^{\alpha_d} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

という形に整理できます. このとき、$\mathrm{Det}(T) = t^{\alpha_1 + \cdots \alpha_d}$ と書きます.$C_c^\infty(F^d)$ を $\mathcal{J}(F^d)$ の元の特性関数で $\mathbb{R}_{(n)}$ 上生成された加群とすれば、測度 μ_{F^d} に付随して、積分

$$I_{F^d}\colon C_c^\infty(F^d) \longrightarrow \mathbb{R}_{(n)}; \sum a_i \mathbb{I}_{A_i} \longmapsto \sum a_i \mu_{F^d}(A_i)$$

を定義することができます.$f \in C_c^\infty(F^d)$ に対して、

$$I_{F^d}(f) = \int_{F^d} f(x) d\mu_{F^d}(x)$$

と書くことにすると、私はこの積分が逐次積分として計算できることを証明しました. すなわち、

$$\int_{F^d} f(x) d\mu_{F^d}(x) = \int_F \cdots \int_F f(x_1, \ldots, x_d) d\mu_F(x_1) \cdots d\mu_F(x_d)$$

が成り立ちます. さらにこれは可算加法的になります.

命題 3.2. 任意の $f_1, f_2 \in C_c^\infty(F^d)$ に対して、以下の主張が成り立ちます.

(1) $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_{(n)}$ とすると

$$I_{F^d}(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 I_{F^d}(f_1) + a_2 I_{F^d}(f_2)$$

である.

(2) 積 $f_1 f_2$ も $C_c^\infty(F^d)$ の元である.

(3) さらに畳み込み積を

$$f_1 * f_2(x) = \int_{F^d} f_1(y) f_2(x - y) d\mu_{F^d}(y)$$

と定めれば、$f_1 * f_2 \in C_c^\infty(F^d)$ となる.

4 GL_d 上の不変測度

最も基本的な代数群である GL_d の F 有理点のなす群 $GL_d(F)$ の不変測度について考察しましょう.$GL_d(F)$ は行列代数 $M_d(F)$ の中で、正則なもの全体のなす乗法群のことなので、$GL_d(F)$ 上の測度を $M_d(F)$ 上の測度を使って構成します. ここで、$M_d(F)$ を d^2 次元のベクトル空間と見なしています.

命題 4.1. 任意の $g \in GL_d(F)$ と $A \in \mathcal{J}(M_d(F))$ に対して、等式

$$\mu_{M_d(F)}(gA) = \mu_{M_d(F)}(Ag) = ||\det(g)||^d \mu_{M_d(F)}(A)$$

が成り立ちます.

そこで、$C_c^\infty(GL_d(F))$ を関数 $f\colon GL_d(F) \longrightarrow \mathbb{R}_{(n)}$ であって、

$$GL_d(F) \longrightarrow \mathbb{R}_{(n)}; x \longmapsto f(x)||\det(x)||^{-d}$$

を $M_d(F)\backslash GL_d(F)$ に 0 延長した関数が $C_c^\infty(M_d(F))$ に属する全体のなす加群として定義すると、積分

$$I_{GL_d(F)}\colon C_c^\infty(GL_d(F)) \longrightarrow \mathbb{R}_{(n)}; f \longmapsto \int_{M_d(F)} f(x)||\det(x)||^{-d} d\mu_{M_d(F)}(x)$$

を考えることができます. さらに d の分割 $d = d_1 + \cdots + d_r$ に対応して、ブロック対角行列への制限

$$M_d(F) \longrightarrow \prod_{i=1}^r M_{d_i}(F)$$

が

$$C_c^\infty(GL_d(F)) \longrightarrow C_c^\infty\left(\prod_{i=1}^r GL_{d_i}(F)\right)$$

を与えます. さらに $C_c^\infty\left(\prod_{i=1}^r GL_{d_i}(F)\right)$ 上の積分は逐次的に計算が可能です. すなわち、$f \in C_c^\infty\left(\prod_{i=1}^r GL_{d_i}(F)\right)$ に対して、

$$\int_{GL_d(F)} f(x) d\mu_{GL_d(F)}(x) = \int_{GL_{d_1}(F)} \cdots \int_{GL_{d_r}(F)} f(x_1, \ldots, x_r) d\mu_{GL_{d_1}(F)}(x_1) \cdots d\mu_{GL_{d_r}(F)}(x_r)$$

が成り立ちます.

5 先行研究の紹介と比較

Fesenko の [F] が一般の高次元局所体 F 上の不変測度と調和解析というテーマを研究した論文です. それ以前にも彼は,2 次元局所体の場合や, 数論的曲面に対しても解析的手法を用いて, 高次元 ζ 積分を考え出していました.Fesenko は F^d などのベクトル空間上の可測関数に関しては,F 上の可測関数の d 個のテンソル積の有限和で書き表せるものを考えています. ただ, これだと本文中で述べたように, 線形変換でずらしただけで, すぐに可測性が崩れてしまうので,“よい定義” とは言えないでしょう. Morrow は Fesenko とは, 少し異なったアプローチを使って, 積分を構築しました ([M1],[M2]).Morrow の研究, 特に [M2] の優れた点は Fesenko の上記の問題を克服している部分です. しかし彼のアプローチでは, 可算加法性などの性質を示すことができず, 高次元 ζ 積分を与える測度として, 不十分なもののようです.Waller は,[W] で, この点を指摘して,$GL_2(F)$ 上の可算加法的な測度を構成し, 高次元 ζ 関数の積分表示を与えました. 彼のアプローチでは, 基本的な可測集合として

$$K_{i,j} = 1 + t_1^i t_2^j M_2(O_F)$$

のような合同部分群を考え, こうした群を左移動させた集合が生成する $GL_2(F)$ の部分集合の族を “可測集合” の族と見なしています. この族は集合の和, 差, 交わりについて閉じているので, 扱いやすいのが特徴です. 一方, 彼のアプローチでは, 上記の合同部分群が考察の中心ですので, このような群を共役でずらすだけで, 可測性が崩れてしまいます.

私の研究は,Fesenko,Morrow,Waller らの手法の良い点を取り入れながら, 上で述べた欠点を克服するような測度論のアプローチを与えました.

参考文献

[F] I. Fesenko, *Measure, integration and elements of harmonic analysis on generalized loop spaces*. Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society, Volume XII (2005), English translation in AMS Transl. Series2, vol.219, (2006).

[K] K. Kato, *A generalization of local class field theory by using K-groups II*, Fac. Sci. Univ. Tokyo **27**(1980), 603-683.

[M1] M. Morrow, *Integration on Valuation Fields over Local Fields*. Tokyo J. Math. Volume 33, Number 1, (2010), 235-281.

[M2] M. Morrow, *Integration on product spaces and GL_n of a valuation field over a local field*, Communications in Number Theory and Physics, Volume 2, Number 3, 563-592, 2008.

[M3] M. Morrow, *Fubini's theorem and non-linear change of variables over a two-dimensional local field*, arXiv:0712.2177v3 [math.NT] 10 Jan, 2010.

[Mo] M. Mori, *Translation invariant measures and integrals on GL_d and its parabolic subgroup over a higher dimensional local field*, preprint.

[P] A. Parshin, *Higher dimensional local fields and L-function*. Invitation to higher local fields, Part II, section 1, pages 199-213.

[W] R. Waller, *Masure and Integration on GL_2 over a Two-Dimensional Local Field*. New York J. Math. 25 (2019), 396–422.

索 引

Alossaimi Maram, 837
Chandra Evan (William), 697
Mahmoudi Sonia, 733
Mai Cong Hung, 297
Ó hAodha Dáithí, 537
Tsai Daniel, 127

■ア行

青木 基記, 527
浅野 喜敬, 363
安達 駿弥, 459
安孫子 啓介, 429
新井 克典, 253
安沢 拓真, 203
石川 彩香, 771
石田 あかり, 691
石塚 健二郎, 547
石塚 天, 613
石橋 和葵, 499
伊城 慎之介, 135
市田 優, 737
今里 優樹, 243
岩木 隼太, 271
太田 洋平, 177
大野 走馬, 663
岡 大将, 747
長田 祐輝, 761
小澤 歩, 819

■カ行

甲斐 大貴, 557
梶原 唯加, 715
金子 尚弥, 53
上島 芳倫, 827
喜多 航佑, 601
北澤 直樹, 789
北村 駿介, 451
木村 藍貴, 93
木村 直記, 657
清原 悠貴, 233
黒川 大雅, 705
紅村 冬大, 33
児玉 悠弥, 407
小林 愼一郎, 307

■サ行

齋藤 耕太, 809
齋藤 琢弥, 161
笹谷 晃平, 571
佐藤 光汰朗, 509
島田 了輔, 187
下地 優作, 3
軸丸 芳揮, 671
菅原 朔見, 223
杉本 奨吾, 189
鈴木 龍正, 323
宋 珠愛, 141

■タ行

高田 佑太, 313
高野 暁弘, 371
田代 賢志郎, 333
田嶌 優, 341
只野 誉, 13
田中 悠也, 425
谷口 晃一, 489
谷口 雄大, 391
曺 永旻, 687
千代 祐太朗, 495
辻 寛, 349
堤 夏輝, 647
豊田 和人, 637

■ナ行

中川 彬雄, 43
中村 悠人, 213
中山 勇祐, 23
長坂 篤英, 381
根本 裕介, 147
野本 慶一郎, 109

■ハ行

橋本 悠香, 609
浜野 大, 441
藤井 幹大, 469
藤江 克徳, 561
星野 秀朋, 631

■マ行

松田 隼一朗, 519
松村 朋直, 63
松本 孝文, 155
松本 洋平, 799
丸山 修平, 413

水野 雄貴, 193
道本 裕太, 479
南 彩菜, 777
宮川 明裕, 581
宮澤 仁, 357
村松 滉平, 287
村松 亮, 437
本永 翔也, 725
森 祥仁, 281
森澤 功暁, 595
森 友佑, 73
■ヤ行
矢城 信吾, 99
安田 順平, 399
簗島 瞬, 623
山下 龍生, 589
吉崎 彪雅, 171
吉田 裕哉, 681
米村 拳太郎, 263
■ラ行
■ワ行
若尾 亮太, 83
渡辺 将一, 119
渡邉 南, 757