



Title	Blended layerを含む繊維強化複合材積層板の面内・面外振動の解析と最適化に関する研究
Author(s)	印南, 信男
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第14876号
Issue Date	2022-03-24
DOI	<a href="https://doi.org/10.14943/doctoral.k14876">https://doi.org/10.14943/doctoral.k14876</a>
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/85315">https://hdl.handle.net/2115/85315</a>
Type	doctoral thesis
File Information	Michio_Innami.pdf



Blended layer を含む繊維強化複合材積層板の  
面内・面外振動の解析と最適化に関する研究

Study on the analysis and optimization  
for in-plane and out-of-plane vibrations  
of laminated fiber-reinforced composite plates  
including blended layers

印南 信男

2022 年 3 月



---

## 目次

第 1 章 序論	1
1.1 研究の背景	1
1.2 これまでの研究	2
1.3 本研究の目的	5
第 2 章 任意の境界条件を持つ対称積層板の面内振動	8
2.1 緒言	8
2.2 任意の境界条件を考慮した対称積層板の面内振動のリッツ解析	10
2.3 数値計算結果と考察	17
2.4 結言	28
第 3 章 対称積層板の面内振動の振動数最適設計	34
3.1 緒言	34
3.2 振動数設計問題と解析法	34
3.3 数値計算結果と考察	41
3.4 結言	53
第 4 章 対称積層板の面外振動の振動数最適化	54
4.1 緒言	54
4.2 メタヒューリスティクス	55
4.3 積層板の最適化に関するこれまでの研究	57
4.4 積層板の面外振動に関する理論	60
4.5 GA と PSO による最適解の探索	62

4.6	パラメータの設定 . . . . .	64
4.7	計算結果 . . . . .	67
4.8	結言 . . . . .	79
第 5 章	Blended layer を持つ積層板の面外振動解析	80
5.1	緒言 . . . . .	80
5.2	Blended layer を持つ対称積層板の面外振動の解析 . . . . .	83
5.3	数値計算例 . . . . .	89
5.4	リッツ法と FEM による解析精度の比較 . . . . .	91
5.5	結言 . . . . .	95
第 6 章	Blended layer を持つ積層板の最適化	96
6.1	緒言 . . . . .	96
6.2	複数のサブエリアを有する積層板の振動数最適化 . . . . .	98
6.3	結言 . . . . .	129
第 7 章	結論	131
	謝辞	134
	参考文献	135

目次

2.1	Laminated composite rectangular plate and coordinate system . . .	11
2.2	Numerical examples (Ex.1: Isotropic square plate, Ex.2: Isotropic rectangular plate ( $a/b = 1.5$ ), Ex.3: Specially orthotropic square plate $[0^\circ]$ , Ex.4 Alternating angle-ply square plate $[30^\circ / - 30^\circ]_S$ , Ex.5 Unidirectional square plate $[30^\circ]$ , Ex.6: Generally laminated square plate $[0^\circ/30^\circ]_S$ ) . . . . .	18
2.3	Transition of Classes from first five Classes in Ex.1 to Ex.2–4, and to Ex.5 & 6 with decreasing symmetric axes . . . . .	32
3.1	Numerical examples . . . . .	36
3.2	Ratio of Ex.2 $\Omega_{1,\max}[\theta / - \theta]_S$ divided by Ex.1 $\Omega_{1,\max}[\theta]$ of square plates, $a/b = 1$ , Design (1) . . . . .	47
3.3	Ratio of Ex.3 $\Omega_{1,\max}[\theta_1/\theta_2]_S$ divided by Ex.2 $\Omega_{1,\max}[\theta / - \theta]_S$ of square plates, $a/b = 1$ , Design (1) . . . . .	50
4.1	Laminated composite rectangular plate and coordintes . . . . .	59
4.2	Main effects plot (GA) . . . . .	70
4.3	Main effects plot (PSO) . . . . .	71
4.4	Transition of $\Omega_1$ with generation for CSFF . . . . .	75
4.5	Transition of $\Omega_1$ with generation for SSSS . . . . .	76
4.6	Transition of $\Omega_1$ with generation for CCF . . . . .	77
4.7	Transition of $\Omega_1$ with generation for CSSS . . . . .	78

5.1	Rectangular plate containing blended layers with two subareas and coordinte system . . . . .	84
5.2	Numerical examples for plates with two, three, four and five subareas in the targeted layers . . . . .	90
6.1	Convergence of $\Omega_1$ to the best solutions with the product of population size and generation in different boundary conditions and increments . . . . .	112
6.2	Five trials of convergence of $\Omega_1$ to the best solutions with the product of population size and generation in different boundary conditions and increments ( $\Delta\theta_1^{Ai} = 15^\circ$ ) . . . . .	117
6.3	Comparison of $\Omega_1$ between $\Delta\theta_1^{Ai} = 15^\circ$ and $10^\circ$ for square plates with (BL-1) through (BL-5) . . . . .	121
6.4	Mode shapes of optimized 12-layer square plates $[\theta_1/ - 45/0/45/90/ - 45]_S$ and $[(\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2})/ - 45/0/45/90/ - 45]_S$ , $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_1^{Ai} = 15^\circ$ , (frequencies corresponding to the modes are given in Table 6.5) . . . . .	123
6.5	Mode shapes of optimized 12-layer square plates $[\theta_1/ - 45/0/45/90/ - 45]_S$ and $[(\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2})/ - 45/0/45/90/ - 45]_S$ , $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_1^{Ai} = 10^\circ$ , (frequencies corresponding to the modes are given in Table 6.6) . . . . .	125

## 表目次

2.1	Convergence of frequency parameters $\Omega$ of square plates (Ex.1 and Ex.6) . . . . .	20
2.2	Comparison of frequency parameters $\Omega$ of square plates . . . . .	21
2.3	All Classes for frequency parameters $\Omega$ of (Ex.1) isotropic square plates with corresponding boundary conditions (RBM: Rigid-Body Motion) . . . . .	23
2.4	Type of rigid-body motion (RBM) of isotropic square plate for possible combinations. . . . .	27
2.5	Every ten Classes with frequency parameters $\Omega$ and boundary conditions of (Ex.2) isotropic rectangular plates ( $a/b = 1.5$ ) . . . . .	29
2.6	Every ten Classes with frequency parameters $\Omega$ and boundary conditions of (Ex.3) specially orthotropic square plates ( $a/b = 1$ ), $[0^\circ]$ . . . . .	29
2.7	Every ten Classes with frequency parameters $\Omega$ and boundary conditions of (Ex.4) angle-ply laminated square plates ( $a/b = 1$ ), $[30^\circ/-30^\circ]_s$ . . . . .	30
2.8	Every ten Classes with frequency parameters $\Omega$ and boundary conditions of (Ex.5) unidirectional square plates ( $a/b = 1$ ), $[30^\circ]$ . . . . .	30
2.9	Every ten Classes with frequency parameters $\Omega$ and boundary conditions of (Ex.6) generally laminated square plates ( $a/b = 1$ ), $[0^\circ/30^\circ]_s$ . . . . .	31
3.1	Convergence of frequency parameters by FEM . . . . .	43

3.2	Comparison of frequency parameters $\Omega$ by Ritz method with other results for square plates (Ex.1 and Ex.5) . . . . .	44
3.3	Maximum first frequency and higher frequencies of (Ex.1) single-layer $[\theta]$ and (Ex.2) four-layer $[\theta/ - \theta]_S$ square plates, $a/b = 1$ , Design (1) . . . . .	46
3.4	Maximum first frequency and higher frequencies of (Ex.3) four-layer $[\theta_1/\theta_2]_S$ and (Ex.4) eight-layer $[\theta_1/\theta_2/ - \theta_1/ - \theta_2]_S$ square plates, $a/b = 1$ , Design (1) . . . . .	49
3.5	Minimum first frequencies of Ex.1 $[\theta]$ , Ex.2 $[\theta/ - \theta]_S$ , Ex.3 $[\theta_1/\theta_2]_S$ and Ex.4 $[\theta_1/\theta_2/ - \theta_1/ - \theta_2]_S$ square plates, $a/b = 1$ , Design (2) . . . . .	51
3.6	Maximum difference $\Omega_{\text{dif,max}} = (\Omega_2 - \Omega_1)_{\text{max}}$ between the first and second frequencies of (Ex.1) single-layer $[\theta]$ and (Ex.2) balanced angle-ply $[\theta/ - \theta]_S$ square plates, $a/b = 1$ , Design (3) . . . . .	52
4.1	Orthogonal array $L_{16} (4^4)$ . . . . .	65
4.2	Factors and their levels of GA parameters . . . . .	66
4.3	Factors and their levels of PSO parameters . . . . .	66
4.4	Experimental results (GA) . . . . .	68
4.5	Experimental results (PSO) . . . . .	69
4.6	Selected parameters of GA . . . . .	72
4.7	Selected parameters of PSO . . . . .	72
4.8	Maximized $\Omega_1$ , stacking sequence and elapsed time . . . . .	73

---

5.1	Convergence and comparison of Ritz and FEM solutions for (BL-2) two-area square plates with $[(45^{A1}/0^{A2})/-45/0/45/90/-45]_S$ ( $b/a = 1, c_1/a = 0.6$ ) . . . . .	93
5.2	Convergence and comparison of Ritz and FEM solutions for (BL-4) four-area square plates with $[(30^{A1}/75^{A2}/45^{A3}/0^{A4})/-45/0/45/90/-45]_S$ ( $b/a = 1, c_1/a = 0.2, c_2/a = 0.6, c_3/a = 0.8$ ) .	94
6.1	Comparison of frequency parameters between (BL-1) no blended layer and (BL-2) two-area square plate with $[(\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2})/-45/0/45/90/0]_S$ and maximum fundamental frequency (CSFF) . .	100
6.2	Factors and levels on GA parameters used in Design of Experiment	103
6.3	Results on factors and levels for (BL-2) through (BL-5) and corresponding fundamental frequencies in Design of Experiment . . .	104
6.4	GA parameters determined by Design of Experiments . . . . .	105
6.5	Best solutions for square plates with $[(\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2}/\dots)/-45/0/45/90/-45]_S$ using GA with the Ritz method ( $\Delta\theta_1^{Ai} = 15^\circ$ ; $M \times N = 8 \times 8, b/a = 1$ ) . . . . .	107
6.6	Best solutions for square plates with $[(\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2}/\dots)/-45/0/45/90/-45]_S$ using GA with the Ritz method ( $\Delta\theta_1^{Ai} = 10^\circ$ ; $M \times N = 8 \times 8, b/a = 1$ ) . . . . .	109
6.7	Best solutions for square plates with $[(\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2}/\dots)/\theta_2/0/45/90/-45]_S$ using GA with the Ritz method ( $\Delta\theta_1^{Ai} = \Delta\theta_2 = 15^\circ$ ; $M \times N = 8 \times 8, b/a = 1$ ) . . . . .	128

---

6.8 Best solutions for square plates with  $[(\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2}/\dots)/\theta_2/0/45/90/-$   
 $45]_S$  using GA with the Ritz method ( $\Delta\theta_1^{Ai} = \Delta\theta_2 = 10^\circ$ ;  
 $M \times N = 8 \times 8, b/a = 1$ ) . . . . . 130

---

# 第 1 章 序論

## 1.1 研究の背景

平板を用いた構造は，工業分野の多岐にわたる構造体に用いられており，軽量化・高速化の技術的傾向の中，設計に際して振動の影響を無視することができない．共振現象が発生すると騒音の原因となるだけでなく，構造全体や構造要素に大きな負荷がかかり疲労破壊を引き起こす可能性がある．この対策の一つは，平板の固有振動数を精度よく解析して，とくに基本振動数を予測して共振の悪影響を避けることである．しかし従来の金属材料を用いた構造では，可能な設計上の対策は限られている．

機械とくに航空機や自動車など交通機械において，炭素繊維強化プラスチック (Carbon Fiber Reinforced Plastics: CFRP) の利用が進んでいる．CFRP は単位重量当たりの強度や剛性を表す比強度と比剛性の値が高いため，省資源の観点から軽量化が本質的に重要な分野で利用が広まってきた．以前はコストが課題であったが，製造方法の改善により低コスト化が進み，利用を加速させている．ただし力学面から等方性に見なせる金属と比べて，材料異方性が強く，さらに多層化して使われるため CFRP 構造の力学解析は容易ではない．そこで航空分野では，面内剛性を等方性化する疑似等方性板に積層して，異方性を活用することなく利用してきた．今後は，異方性を使用用途や位置により最適化する構造最適設計が期待される．他方，積層用のプリプレグシートは，今まで各層 (ラミナ) の繊維が一方向の直線強化繊維であった．現在では製造法の向上により，同一板内で繊維配向角度を位置により曲線的に変化させた構造も技術的に可能である．しかし製造時間を要するなど他の課題が浮き彫りになり，今は 1 枚のラミナにおいて，領域ごとに異なる直線繊維の繊維配向角度を設定する Blended layer が注目されている．この Blended layer を積層板に組み込むことで，

平板の性質をさらに細かく用途に応じてチューニングすることが低コストで可能となり、複合材料構造の現実的な設計法として期待されている。

Blended layer をはじめとした積層板を効果的に用いるためには、最適化によって各層の繊維配向角などのパラメータが適切に設定される必要がある。最も単純な方法は、考えられるすべてのパラメータの値について振動解析計算を行い、その中で一番優れた性質を示す組合せを見つけることである。しかし層数が多い場合や、繊維配向角が離散値から選定されるときにその解候補が多数設定されているような問題など、パラメータの組合せが多くなると、計算量が飛躍的に増大しいわゆる組合せ爆発が生じる。さらに、Blended layer において領域数が多いと、各領域の繊維配向角や領域間の境界位置のパラメータが増大することとなり、その傾向はさらに顕著になる。

総当たり法によってすべてのパラメータの組合せについて計算を行うことは、設計変数が少ない場合についてのみ適用可能であり、多い場合には実用的な方法ではない。しかし材料のさらなる高性能化が求められている現在、より細かいチューニングを行うために多くのパラメータを有する場合についても対応できる最適化の手法が求められている。

### 1.2 これまでの研究

初期には、平板として等方性を有する金属製の単層板が用いられていた。そのため研究の対象もそのような金属平板であり、Leissa [1.1] によってさまざまな長方形板の固有振動数の解析がなされた。その後、繊維強化プラスチック (Fiber Reinforced Plastics: FRP) が実用化され、材料の軽量化・高剛性化が可能となった。FRP はマトリックス (母材) 内に繊維が強化材として加えられた構造をなす。特に CFRP では、繊維が一方向に配置されており、直交異方性を有する。これまでよりも複雑な

構造を有するこのような複合材に対しても振動解析が必要となった。Vinson ら [1.2] や Reddy [1.3], Jones [1.4], Leissa ら [1.5] によってこれらを対象とした研究がなされた。

FRP は繊維方向に対しては引張荷重に強いがその垂直方向には弱いため、一般に薄い板状の層 (ラミナ) を互いに異なる繊維配向角にして複数枚重ねて成形される。この積層構造によってどの方向に対しても強度を保つことが可能となるが、構造が複雑となる。

現在、繊維は一方向だけでなく、曲線状に配置することも可能となり、同一層内で性質を変化させることが可能となっている。さらには層内の領域ごとに直線状の繊維を異なる配向角に設定する Blended layer が提案された。

これらの部材に対しては、最適設計を行うことによってその性能が活かされるようになる。設計変数の組合せが多く、そのすべてについて計算を行うことが実際的でない場合に最適化を行うための手法が、これまで多く提案されてきた。中でもメタヒューリスティックスは、自然現象をヒントにして準最適解を得るための発見的な手法であり、さまざまな種類が存在する。汎用性を有し多くの分野の最適化問題に対する適用が比較的容易であるため、広く用いられてきた。以下に主なものを挙げる。焼きなまし法 (Simulated Annealing: SA)[1.6] では、解析対象を材料の焼きなましに模して、温度をパラメータとして最適解への収束を試みる。タブー検索法 (Tabu Search)[1.7] は、直前のいくつかの解をタブーリストに載せて選択されないようにして、局所解に陥ることを回避する方法で、自然現象を模したものではない。シミュレーテッド・エボリューション (Simulated Evolution: SimE)[1.8] は生命の進化を模しており、各個体が全体の解を構成する部分要素となる。蟻コロニー最適化 (Ant Colony Optimization: ACO)[1.9] は、蟻の摂食行動をヒントに考えられた。餌を見つけた蟻

が分泌した揮発性を有するフェロモンを他の蟻がトレースする行動を模することによって、成績が良い解への経路が補強される。

メタヒューリスティクスの最も代表的な手法が、遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm: GA)[1.10] である。生物の自然淘汰をモデルとして 1975 年に Holland によって提案された。集団を構成する各個体はそれぞれ候補解として探索空間に存在する。個体は各世代において所定の確率の下で交叉・突然変異などの遺伝的操作を受け、次世代に受け継がれる。優れた解ほど次世代に選択される確率が高くなる。

Kennedy, Eberhart によって提案された粒子群最適化 (Particle Swarm Optimization: PSO)[1.11, 1.12] もメタヒューリスティクスの手法としてよく用いられている。鳥や魚の群れにおいて餌を見つけた個体 (粒子) が他の個体の行動に影響を与えることがモデル化されている。各粒子は探索空間内を移動し、自身の移動履歴中で最も優れた成績をもたらしたときの位置と、集団の全粒子の移動履歴中で最も優れた成績となったときの位置に向かうように速度ベクトルを調整する。この操作が所定の回数だけ繰り返される。

複合板の最適化については、Bert [1.13, 1.14] によって 1970 年代から研究が進められた。その後 Reiss ら [1.15], Fukunaga ら [1.16] によって対称積層板の最適化が試みられてきた。Narita [1.17] は層別最適化法を用いて最適化を行う方法を提案した。Abdalla ら [1.18] は可変剛性設計の最適化として積層パラメータを用いて基本振動数の最大化を試みた。Honda らは曲線繊維を持つ板の基本振動数を最大化する研究 [1.19], 非優越ソート GA による曲線状の繊維を決定する多目的最適化 [1.20], TFP マシンで製造された可変剛性複合材の多目的最適化 [1.21] に取り組んだ。

面内振動に関しては、Bardell ら [1.22] がリッツ法を用いて等方性長方形板の固有振動数と振動モードを求めた。Gorman [1.23] は解の重ね合わせ法を適用して解析

を行った。Gorman [1.24], Xing と Liu [1.25] は限定された条件の下で厳密解を求めた。直交異方性板の解析は Gorman [1.26], Liu と Xing [1.27] によってなされた。Woodcock ら [1.28] は繊維配向角と固有振動数の関係を研究した。Dozio [1.29] は一般的な積層板の固有振動数の解析を行っている。

### 1.3 本研究の目的

本研究では前半に Blended layer を含まない従来型の CFRP 積層板の未解決問題について面内振動と面外振動(曲げ振動)の振動解析方法を与える。その後、本解析方法の計算効率と精度を活用して、面内振動と面外振動の振動数特性の最適化法を提案する。後半では、新たに Blended layer を導入した積層板の面外振動の解析方法と最適化方法の適用を提案する。

積層板には、さまざまな拘束条件として、その4辺に自由辺(F: Free), 単純支持辺(S: Simply supported), 固定辺(C: Clamped)の各境界条件を辺ごとに設定する。ただし面内振動の場合には単純支持辺として、辺に沿った面内変位を拘束し、辺に垂直な面内変位を無拘束とする場合(S1)と、それとは反対に辺に垂直な面内変位を拘束し、辺に沿った面内変位を無拘束とする場合(S2)の2種類を区別して考える。以上の各境界条件における、振動に及ぼす影響について検証を行う。解析にはリッツ法を用いる。有限要素法(Finite Element Method: FEM)と比較して、計算に用いる固有方程式の配列のサイズが小さくなるため、計算リソースを節約し効率的な解析が期待できる。計算結果は有限要素法の自作プログラムによって得られた値と比較し、その精度の検証も行う。また積層板の性能を向上させるための最適化についての検討を行う。基本固有振動数を最大化するための条件を調べ、最適設計を試みる。積層板を構成する各層は、CFRPに代表されるマトリックス内に繊維が強化材として加えられたよう

な構造をなし、直交異方性を有するものを解析の対象とする。1枚のラミナにおいて領域ごとに異なる繊維配向角を有する Blended layer を含む積層板についても振動解析を行い、固有振動数に及ぼす影響を調べる。Blended layer が含まれると設計変数が多くなるため、そのすべての組合せについて計算を行うことは実用的ではない場合が生じる。そこで組合せが比較的少ない場合は総当たり法によって最適解を求める。一方設計変数が多い問題に対してはメタヒューリスティクス的手法である GA もしくは PSO を最適解の探索に用いる。メタヒューリスティクスによる探索では解が十分に収束するとは限らず、さらに局所解に陥る可能性も存在するため、真の最適解が得られる保証はない。そこで、GA と PSO による計算結果の比較、もしくは総当たり法によって得られた最適解と GA による解との比較によって、得られた値の妥当性について検証を行う。

本論文の次章以降は以下のような構成となっている。

第 2 章では長方形の対称積層板を対象として面内振動を取り扱う。振動解析にはリッツ法を用いる。その計算精度について、先行研究と比較することによって検証を行うとともに、積層板の境界条件として 4 辺に自由辺、単純支持辺 (S1, S2 の 2 種類)、固定辺のすべての組合せを適用し、それぞれに対して固有振動数を求める。さらに各境界条件間の関係について考察を加える。

第 3 章では、対称積層板の面内振動について、リッツ法と自作の有限要素法プログラムを用いて精度の検証を行い、固有振動数を目的関数として最適設計を試みる。設計の具体例として、(1) 1 次固有振動数の最大化、(2) 1 次固有振動数の最小化、(3) 1 次と 2 次の固有振動数の差の最大化の三つの事例を取り上げる。対称積層板の面内剛性の特性を利用して組合せ数を限定して、本章ではすべての設計変数の組合せについて総当たり法によって計算を行い、厳密な最適解を求める。

第4章では対称積層板の面外振動を取り扱う。1次固有振動数を最適化(最大化)するための各層の繊維配向角を求める。解の探索にはGAとPSOの2種類を用いる。最適化計算の効率化を目指して、両方の最適化アルゴリズムで用いられる計算パラメータ(個体数, 世代数, 突然変異率など)の最適値を本計算の前処理として実験計画法によって求めておく。これら最適化アルゴリズムによって得られた最適解と計算時間を比較することにより, 振動最適化問題における探索性能の検証を行う。

第5章では最外層にBlended layerを持つ対称積層板の面外振動の解析を行う。最外層のサブエリア(異なる繊維配向角度を持つ分割領域)の構成は5種類の例を設定する。Blended layerに対して, サブエリアごとに異なる剛性に対して領域積分を行い, 最終的に統合化するリッツ法を提案して, 数値解析により固有振動数の計算を試みる。得られた解の解析精度について, 自作の有限要素法プログラムによって求めた結果と比較することにより, Blended layerを有する積層板へ本解析法を適用することの妥当性を検証する。

第6章では第5章の検証結果をもとに, Blended layerを有する対称積層板の最適化について検討を行う。Blended layerは最外層に配置し, サブエリア数は1~5とする。設計変数は最外層の各サブエリアの繊維配向角とそれらの境界位置である。上記の設定に第2層の繊維配向角も設計変数として加える場合についても最適化を試みる。設計変数が少ない場合には総当たり法を適用し, 多い場合にはGAによる解の探索によって最適解を求める。またBlended layerの採用によって及ぼされる固有振動数への影響について検証する。

第7章で全体の結論を述べる。

## 第 2 章 任意の境界条件を持つ対称積層板の面内振動

### 2.1 緒言

平板状構造要素は、機械、土木、航空など幅広い工業分野で用いられている。それらの分野では、軽量化と高速化が進み必然的に構造要素の振動問題が重要である。板の振動問題は基本的に、板の曲げ振動 (面外振動) と面内振動に分類され、一般に曲げ振動の固有振動数は面内振動の固有振動数より低いため、研究の多くは曲げ振動を扱っている。その傾向は、板の曲げ振動のモノグラフ [2.1] から明らかである。このため板の曲げ振動に関する書籍もある [2.2, 2.3]。これに対して面内振動に関する研究は、取り扱いが少ない。しかし平板がわずかでも曲率を持つ場合には、曲げ振動と面内振動が連成する。また面内振動だけでも、構造の一部として板が音響エネルギーを伝えることが知られている。

等方性長方形板の面内振動に関しては、Bardell ら [2.4] が、1996 年に全周自由、単純支持、固定のリッツ法により、固有振動数と固有振動モードを求めた。2004 年には、Gorman が解の重ね合わせ法により、完全自由長方形板 [2.5] と固定板 [2.6] を解析した。さらに Gorman は、対辺が単純支持された場合にのみ可能な厳密解 [2.7] を導いた。Xing, Liu [2.8] も、同様の厳密解を得ている。Houmat [2.9] は、有限要素法により板形状が曲線を有する場合を解析した。Liu と Banerjee [2.10] は、Dynamic Stiffness 法を用いて面内振動問題を扱い、55 組の境界条件の組合せを解いた。こうした研究はさらに、周辺に面内ばねを配置した弾性支持板の面内振動の解析へと拡張された [2.11, 2.12]。

直交異方性板、すなわち板が直線辺に沿って炭素繊維などの直線強化繊維で補強された長方形板については、Gorman [2.13] と、Liu と Xing [2.14] が解析した。2014 年

には、弾性支持された直交異方性板の面内振動も解析されている [2.15]. さらに直線辺に斜交する強化繊維で補強される場合に、Woodcock ら [2.16] が繊維配向角度が固有振動数に与える影響を調べた. 一般的な積層板については Dozio [2.17] が固有振動数を求め、一般的な積層板について既知の研究がないと述べている. すなわち面内境界条件の任意の組合せに対して、対応可能な面内振動数の解析方法は報告されていない.

他方、面外振動については、こうした任意の境界条件の組合せに対しての解析方法は、ある程度存在していて、たとえば Leissa [2.18] は、21 組の面外境界条件の組合せに対して、固有振動数をリスト化している. また Bert と Malik [2.19] は、自由、単純支持、固定以外の通常は考慮しない境界条件 (境界での曲げモーメントとせん断力が同時にゼロ) を含めた場合に、55 通りの組合せが存在することを提起した. 最近 Eisenberger と Deutsch [2.20] は、同様に 55 通りの組合せに対して振動解を示した. このように面外振動では、存在可能な組合せに対して曲げ振動数の解が研究されている. また Narita [2.21] は、曲げ振動に関して、長方形板の可能な組合せ数について、代数的手法を提案した. しかしながら、面内振動に関しては、4 種類の面内境界条件を任意に組合せて解析する高精度の方法は確立されていない. 有限要素法は適用可能ではあるが、境界条件の変更は手数に要する作業である.

本章では、自由辺、2 種類の単純支持辺 (S1, S2), および固定辺の 4 種類を、各辺に任意に許す面内振動解析方法を提案する. 長方形板は、板を空間に固定して面内と面外の回転を許さない場合に、合計 256 (i.e.,  $4^4 = 256$ ) の見かけ上の組合せ数がある. 物理的には板の面内と面外の回転を許すことで、実質的な組合せ数が減じられる. 本章では、初めに提案する解析方法の精度を検証するため、級数解の収束を調べて後、特定の条件下で求められている他の研究者の数値解と比較する. 数値例題として、等方性、異方性、アングルプライ積層などの正方形板と長方形板を取り上げる. 数値実

験では、実際に 256 通りの冗長な組合せに関して計算を行い、数値的な確認を行う。

## 2.2 任意の境界条件を考慮した対称積層板の面内振動のリッツ解析

図 2.1 は、原点  $O$  を長方形の中心においた  $xy$  座標系を持つ一般的な積層長方形板である。板の寸法は、 $a \times b \times h$  (板厚) として、 $u(x, y, t)$  と  $v(x, y, t)$  は、それぞれ  $x$  と  $y$  方向の面内変位を表す。板の材質は、等方性、直交異方性 (異方性主軸が辺に平行な場合)、または繊維強化積層材料である。積層材料の場合は、各層が中央面に対称に配置され、それぞれの層の異方性の材料主軸を  $L$  軸と  $T$  軸とする。板の 4 辺は、図中に示すように、 $x = -a/2$  に位置する左辺から始めて、Edge(1), Edge(2), Edge(3), Edge(4) と反時計回りに定義する。

曲げ振動の場合は、4 辺に沿い一般に自由辺、単純支持辺、固定辺の 3 種類を考慮する。面内振動の場合は、同様に自由辺、単純支持辺、固定辺を定義するが、その内容は異なる。自由辺では二つの変位が共に拘束がない (面内応力がゼロ)、固定辺では二つの変位が共に剛に拘束され、曲げ振動の概念と一致する。しかし単純支持には 2 種類あり、本論文では  $S1$  と  $S2$  とする。過去の文献 [2.5–2.7] では、 $S1$  と  $S2$  の代わりに  $SS1$  と  $SS2$  とすることが多い。しかし非常に多くのデータを扱う本論文では、誤解がないことから  $S1$  と  $S2$  とする。 $S1$  境界条件は、直線辺に沿った面内変位は剛に拘束 (変位ゼロ) で、かつ辺に垂直な面内変位は無拘束 (垂直応力はゼロ) である。逆に  $S2$  境界条件は、直線辺に垂直な面内変位は剛に拘束 (変位ゼロ) で、かつ辺に沿った面内変位は無拘束 (せん断応力はゼロ) である。また自由辺を表す  $F$  では、辺に沿った変位と垂直な面内変位は同時に無拘束 (対応するせん断応力と垂直応力がゼロ) である。固定を表す  $C$  では、辺に沿った変位と垂直な面内変位を同時に剛に拘束する。これら 4 種類の異なる境界条件 ( $F, S1, S2, C$ ) を、四つの辺に沿って独立に考慮すると、合計

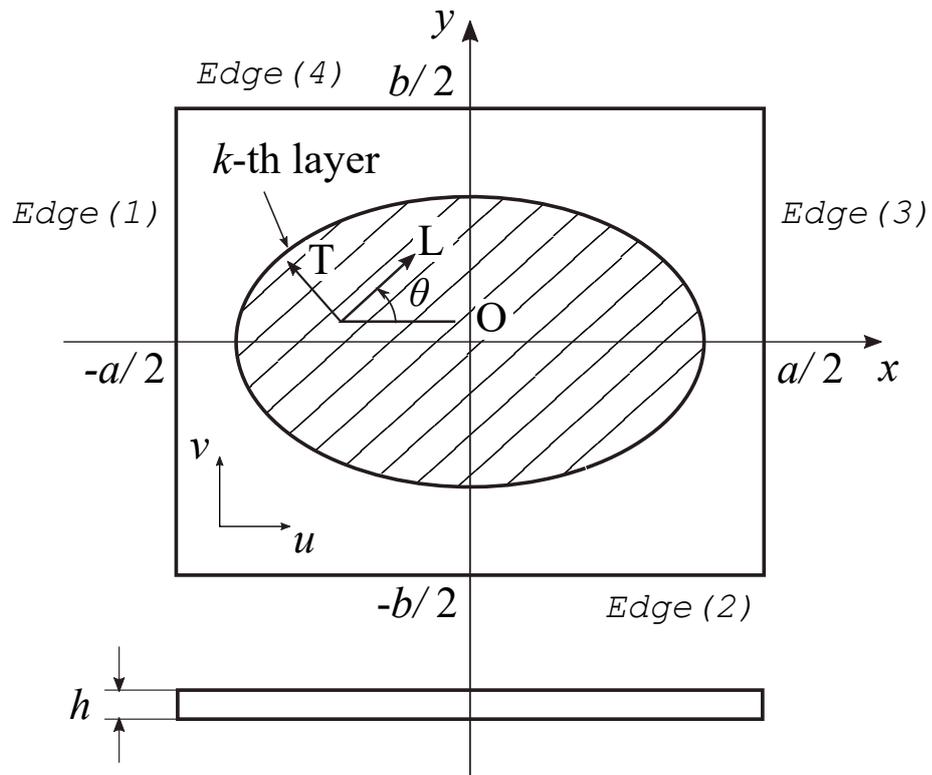


Fig. 2.1 Laminated composite rectangular plate and coordinate system

$4^4 = 256$  通りとなる。

以上述べた面内弾性問題を解くために、点  $(x, y)$  において線形弾性理論を適用すると

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.1)$$

となる。第  $k$  層の内部における応力-ひずみ関係は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

と与えられる。ここで定数  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  は弾性定数であり、第  $k$  層内の直線強化繊維が  $x$  軸となす角度  $\theta$  と、 $L, T$  軸に沿った弾性定数

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \\ Q_{12} &= \nu_{TL}Q_{11} \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \\ Q_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (2.3)$$

から求められる。式 (2.3) での  $E_L$  と  $E_T$  は、それぞれ  $L$  軸と  $T$  軸に沿った縦弾性係数、 $G_{LT}$  は面内のせん断弾性係数、 $\nu_{LT}$  と  $\nu_{TL}$  はポアソン比である。等方性材料の場合は、 $Q_{11} = Q_{22} = E/(1 - \nu^2)$ 、 $Q_{12} = \nu Q_{11}$ 、 $Q_{66} = G = E/\{2(1 + \nu)\}$  に還元される。

板厚全体にわたる合応力は、式 (2.2) を板厚にわたり定積分を行い、行列表示で

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon\} \quad (2.4)$$

となる。ここで  $\{N\}$  と  $\{\varepsilon\}$  は、それぞれ合応力ベクトルとひずみベクトルであり、

---

その要素は

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.5 \text{ a, b})$$

となる。係数行列は、板厚全体にわたる面内剛性であり、

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

で与えられる。その要素は

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^K \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (2.7)$$

ただし  $z_{k-1}, z_k$  は、それぞれ第  $k$  層の下面、上面の板全体の中央面からの距離を表す座標である。

本章では、この振動問題をリッツ法により扱う。このため運動エネルギーとひずみエネルギーから構成される面内振動に関わる汎関数を初めに求める。ひずみエネルギーは、

$$V = \frac{1}{2} \iint \{\varepsilon\}^T [A] \{\varepsilon\} dArea \quad (2.8)$$

運動エネルギーは

$$T = \frac{1}{2} \rho h \iint \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right\} dArea \quad (2.9)$$

となる。ここで  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>] は平均化された単位体積当たりの質量である。

以下の定式化では、無次元座標

$$\xi = \frac{2x}{a}, \quad \eta = \frac{2y}{b} \quad (2.10)$$

を使用する。面内変位を表す変位関数は、

$$u(\xi, \eta, t) = u^*(\xi, \eta) \sin \omega t = \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} P_{ij} X_i^u(\xi) Y_j^u(\eta) \sin \omega t \quad (2.11 \text{ a})$$

$$v(\xi, \eta, t) = v^*(\xi, \eta) \sin \omega t = \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{l=0}^{N-1} Q_{kl} X_k^v(\xi) Y_l^v(\eta) \sin \omega t \quad (2.11 \text{ b})$$

と表し、ここで  $P_{ij}$  と  $Q_{kl}$  は未定係数、 $X_i^u(\xi)$ ,  $Y_j^u(\eta)$ ,  $X_k^v(\xi)$ ,  $Y_l^v(\eta)$  は各辺での幾何的境界条件を満足する変位関数である。級数 (2.11 a), (2.11 b) の上限値  $M$ ,  $N$  は、独立に任意の項数とすることができるが、収束状況の確認のために簡単化して同じ上限値とする。

式 (2.8), (2.9) の各エネルギーの最大値をエネルギー汎関数に代入して、

$$L = T_{\max} - V_{\max} \quad (2.12)$$

を表し、それらの未知係数に関して極小値をとる。

$$\frac{\partial L}{\partial P_{ij}} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial Q_{kl}} = 0 \quad (i, k = 0, 1, 2, \dots, M-1; j, l = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (2.13)$$

式 (2.13) の極小化プロセスにより、未知係数  $\{P_{ij}, Q_{kl}\}$  に関する連立一次方程式を得る。その固有値問題を求めるため、係数行列の行列式をゼロとする。これにより、 $(M \times N) \times 2$  個の固有値を求め、最小の固有値から必要な数の固有値 (固有振動数) を定める。

本論文で用いる無次元固有振動数は、異方性を有する板と等方性板に対して、それ

ぞれ

$$\Omega = \omega a \left\{ \frac{\rho(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})}{E_T} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad \Omega = \omega a \left\{ \frac{\rho(1 - \nu^2)}{E} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

を用いる。

以上の定式化は、標準的なリッツ法の手順である。次に任意の境界条件を考慮するために、変位関数に新たな形式を導入する [2.22].

$$X_i^u(\xi) = \xi^i(1 + \xi)^{Bu1}(1 - \xi)^{Bu3}, \quad Y_j^u(\eta) = \eta^j(1 + \eta)^{Bu2}(1 - \eta)^{Bu4} \quad (2.15 \text{ a, b})$$

$$X_k^v(\xi) = \xi^k(1 + \xi)^{Bv1}(1 - \xi)^{Bv3}, \quad Y_l^v(\eta) = \eta^l(1 + \eta)^{Bv2}(1 - \eta)^{Bv4} \quad (2.15 \text{ c, d})$$

ここで、 $B_{rs}$  ( $r = u, v; s = 1, 2, 3, 4$ ) は、幾何的な境界条件を満足するように設定する境界条件インデックスである。大文字の  $B$  は boundary を表し、 $B_{rs}$  の 1 字目の添え字 “ $r$ ” は、二つの変位 ( $u$  or  $v$ ) のいずれかを表し、2 字目の添え字 “ $s$ ” は図 2.1 にある辺, Edge(1), ... or Edge(4) を示す。

二つの変位  $u, v$  に関して、 $B_{rs} = 0$  ( $r = u$  or  $v; s = 1, 2, 3, 4$ ) は、指定された変位と辺とが、無拘束 (自由) を示す。 $B_{rs} = 1$  は、指定された変位と辺が剛に拘束されていることを示す。この境界条件インデックスにより、四つの辺に沿って、二つの面内変位を独立に指定することが可能となる。境界条件インデックスの導入により、さまざまな組合せの拘束条件の導入が可能となる。長方形板の面内振動については、四つの辺に対して 4 種類の境界条件があるため、 $4^4 = 256$  の組合せが可能となるが、本解析法ではすべての場合に固有振動数が計算可能となる。その使用方法であるが、例

例えば  $x = -a/2$  に沿う一つの辺 Edge (1) について

$$B_{u1} = B_{v1} = 0 \quad \text{for the free edge (no constraint), denoted by F} \quad (2.16 \text{ a})$$

$$B_{u1} = 0, B_{v1} = 1 \quad \text{for the first-type simply supported edge, by S1} \quad (2.16 \text{ b})$$

$$B_{u1} = 1, B_{v1} = 0 \quad \text{for the second-type simply supported edge, by S2} \quad (2.16 \text{ c})$$

$$B_{u1} = B_{v1} = 1 \quad \text{for the clamped edge (fully constrained edge), by C} \quad (2.16 \text{ d})$$

である。また板全体に対して、例えば C-S1-S2-F からなる境界条件の組合せに対して、

$$B_{u1} = B_{v1} = 1 \quad \text{for the clamped edge along Edge(1)} \quad (2.17 \text{ a})$$

$$B_{u2} = 1, B_{v2} = 0 \quad \text{for the simply supported edge S1, along Edge(2)} \quad (2.17 \text{ b})$$

$$B_{u3} = 1, B_{v3} = 0 \quad \text{for the simply supported edge S2, along Edge(3)} \quad (2.17 \text{ c})$$

$$B_{u4} = B_{v4} = 0 \quad \text{for the free edge along Edge(4)} \quad (2.17 \text{ d})$$

ここで注意が必要なのは、(2.17 b) と (2.17 c) は異なる境界条件に対して同一に見えるが、これは Edge(2) と Edge(3) が互いに直交しているためである。

長方形板の境界条件に対称性 (例えば、C-F-C-F の場合) があり、材料主軸が直線辺に平行な場合は、 $x$  軸と  $y$  軸に関して固有振動モードは 4 種類に分類可能である。そ

のモード形は

$$\text{(i-mode)} \quad i = \text{odd and } j = \text{even for } u; k = \text{even and } l = \text{odd for } v \quad (2.18 \text{ a})$$

$$\text{(ii-mode)} \quad i = \text{odd and } j = \text{odd for } u; k = \text{even and } l = \text{even for } v \quad (2.18 \text{ b})$$

$$\text{(iii-mode)} \quad i = \text{even and } j = \text{even for } u; k = \text{odd and } l = \text{odd for } v \quad (2.18 \text{ c})$$

$$\text{(iv-mode)} \quad i = \text{even and } j = \text{odd for } u; k = \text{odd and } l = \text{even for } v \quad (2.18 \text{ d})$$

となる。i-mode は、 $u$  変位が  $y$  軸に逆対称形で  $x$  軸に対称形であり、 $v$  変位が  $y$  軸に対称で  $x$  軸に逆対称である。このような振動モード形状の対称・逆対称のモード分類は、扁平シェルの振動 [2.23, 2.24] と同様である。このモード分類が可能な場合は、振動数計算に利用する行列のサイズを減じることができる。例えば、2 方向の変位に 10 項とる場合 ( $M \times N = 10 \times 10$ ) にその行列サイズは  $(200 \times 200)$  であるが、モード対称形により奇数項または偶数項のものを選択して、 $(50 \times 50)$  まで減じることができる。また 1 方向のみに対称性が存在する場合、例えば片持ち板 C-F-F-F の場合、( $M \times N = 10 \times 10$ ) に対して、行列サイズは  $(100 \times 100)$  となる。

## 2.3 数値計算結果と考察

### 2.3.1 数値計算例と解の収束と比較

図 2.2 には、本章で用いた計算例を示す。Ex.1 は等方性正方形板、Ex.2 は等方性長方形板、Ex.3 は辺に平行な材料主軸を持つ直交異方性正方形板  $[0^\circ]$  を示す。Ex.4 はゼロ以外の任意の配向角度を持つ複合材料であり、アングルプライ対称積層 4 層正方形板  $[30^\circ/-30^\circ]_S$ 、Ex.5 は一方向強化単層正方形板  $[30^\circ]$ 、Ex.6 は一般的な対称積層 4

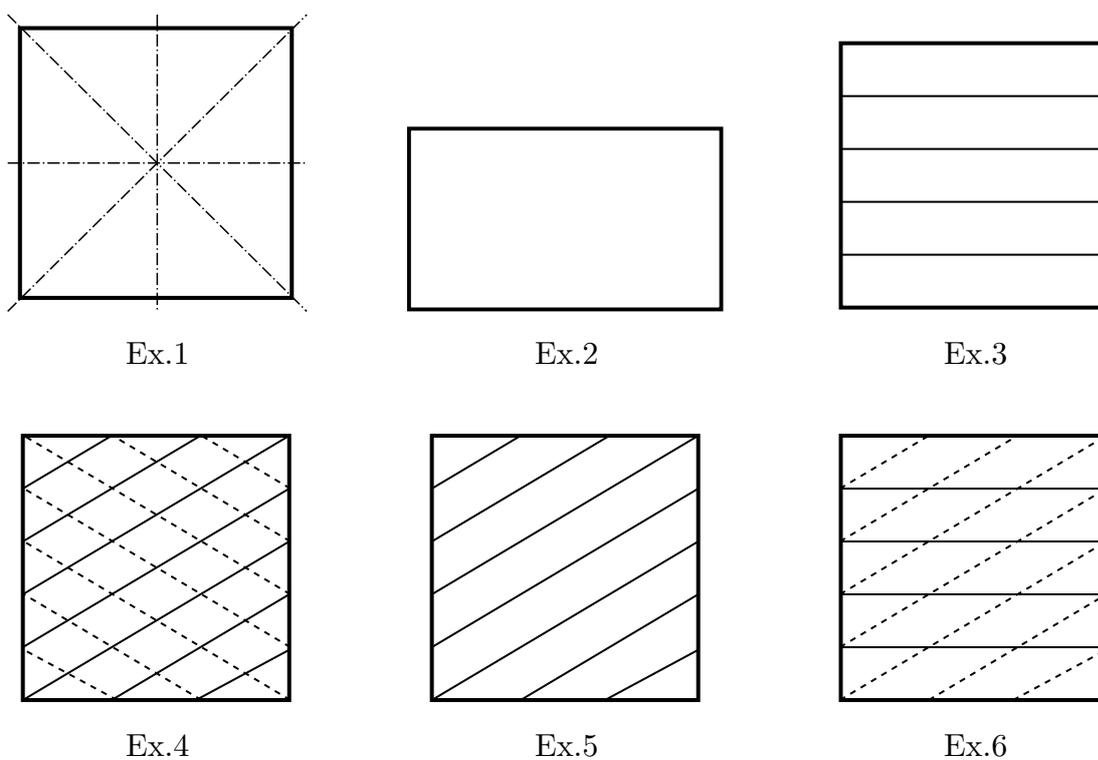


Fig. 2.2 Numerical examples (Ex.1: Isotropic square plate, Ex.2: Isotropic rectangular plate ( $a/b = 1.5$ ), Ex.3: Specially orthotropic square plate  $[0^\circ]$ , Ex.4 Alternating angle-ply square plate  $[30^\circ / -30^\circ]_S$ , Ex.5 Unidirectional square plate  $[30^\circ]$ , Ex.6: Generally laminated square plate  $[0^\circ/30^\circ]_S$ )

層正方形板  $[0^\circ/30^\circ]_S$  である。例題により物理的な積層数の数は異なるが、振動数パラメータでは全板厚により無次元化されているため、直接の比較が可能である。

表 2.1 は、例題 Ex.1 と Ex.6 について、級数解の式 (2.11) の項数を変化させた場合の 1 次から 5 次までの振動数パラメータの収束状況を示す。級数項は、 $6 \times 6$  から  $12 \times 12$  までとり、対応する振動数方程式の行列サイズは  $72 \times 72$  から  $288 \times 288$  となる。境界条件の組合せとして、初めに Ex.1 は F, S1, S2, C のすべてを含む C-S1-S2-F とした。境界条件に関して対称軸は存在しないため、振動モードの分離はしていない。その他は、全周単純支持の S1-S1-S1-S1 と、全周固定の C-C-C-C とした。S1-S1-S1-S1 と C-C-C-C では、全周にわたり一様な境界条件のため、式 (2.18) に示した 4 種類の振動モードに分類される。1 次から五つの振動数の範囲では、二つの iv-mode がある。全般に振動数パラメータの収束はかなり早く、とくに Ex.1 では、 $6 \times 6$  項の解は有効数字 4 桁で収束している。この結果から、今後の数値計算結果は  $10 \times 10$  解を用いている。

図 2.2 の Ex.3~Ex.6 では異方性材料を考慮するが、その材料定数については、

$$E_L = 150 \text{ GPa}, E_T = 10 \text{ GPa}, G_{LT} = 5 \text{ GPa}, \nu_{LT} = 0.3 \quad (2.19)$$

を用いる。これらの定数は、最近の炭素繊維強化プリプレグシートの平均を求めて離散化した値である。その値を使用する合理性については、文献 [2.22] に与える。本解析法の精度を確認するため収束性の確認に続いて、今まで他の研究者により得られた結果を、表 2.2 にて比較する。表の初めの 3 例は、Ex.1 (Isotropic square plate) において、周辺で一様に拘束された F-F-F-F, S1-S1-S1-S1, C-C-C-C の結果であり、文献 [2.6, 2.10, 2.11] と比較する。次の 2 例は、Ex.3 (Specially orthotropic square plate) において、S2-S2-S2-S2 と S2-C-S2-C の境界条件での結果を文献 [2.14] と比較する。

Table 2.1 Convergence of frequency parameters  $\Omega$  of square plates (Ex.1 and Ex.6)

Number of term $M \times N$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
Ex.1 Isotropic square plate (C-S1-S2-F)					
$6 \times 6$	0.847	2.548	2.797	3.325	3.596
$8 \times 8$	0.847	2.547	2.797	3.324	3.596
$10 \times 10$	0.847	2.547	2.797	3.324	3.596
$12 \times 12$	0.847	2.547	2.797	3.324	3.596
Ex.1 Isotropic square plate (S1-S1-S1-S1)					
	(ii-mode)	(iii-mode)	(i-mode)	(iv-mode)	(iv-mode)
$6 \times 6$	1.859	1.859	2.628	3.717	3.717
$8 \times 8$	1.859	1.859	2.628	3.717	3.717
$10 \times 10$	1.859	1.859	2.628	3.717	3.717
$12 \times 12$	1.859	1.859	2.628	3.717	3.717
Ex.6 Four-layer plate $[0^\circ/30^\circ]_S$ (C-S1-S2-F)					
$6 \times 6$	1.778	3.730	5.252	5.752	6.997
$8 \times 8$	1.778	3.729	5.246	5.749	6.975
$10 \times 10$	1.778	3.729	5.245	5.748	6.974
$12 \times 12$	1.777	3.729	5.245	5.748	6.974
Ex.6 Four-layer plate $[0^\circ/30^\circ]_S$ (C-C-C-C)					
	(ii-mode)	(iii-mode)	(iv-mode)	(iv-mode)	(i-mode)
$6 \times 6$	4.839	7.326	7.635	9.003	10.009
$8 \times 8$	4.839	7.326	7.635	9.003	9.993
$10 \times 10$	4.839	7.326	7.635	9.003	9.993
$12 \times 12$	4.839	7.326	7.635	9.003	9.993

Table 2.2 Comparison of frequency parameters  $\Omega$  of square plates

	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
Ex.1 Isotropic square plate (F-F-F-F)					
	(iv-mode)	(ii-mode)	(iii-mode)	(i-mode)	(i-mode)
Present	2.321	2.472	2.472	2.628	2.987
Ref. [2.10]	2.321	2.472	2.472	2.628	2.987
Ref. [2.11]	2.320	2.472	2.472	2.628	2.988
Ex.1 Isotropic square plate (S1-S1-S1-S1)					
	(ii-mode)	(iii-mode)	(i-mode)	(iv-mode)	(iv-mode)
Present	1.859	1.859	2.628	3.717	3.717
Ref. [2.6]	1.859	1.859	2.628	3.717	3.717
Ref. [2.10]	1.859	1.859	2.628	3.717	3.717
Ex.1 Isotropic square plate (C-C-C-C)					
	(ii-mode)	(iii-mode)	(iv-mode)	(iv-mode)	(i-mode)
Present	3.555	3.555	4.235	5.186	5.859
Ref. [2.6]	3.555	3.555	4.235	5.186	5.859
Ref. [2.10]	3.555	3.555	4.235	5.186	5.859
Ex.3 Specially orthotropic plate (S2-S2-S2-S2)					
	(ii-mode)	(i-mode)	(iii-mode)	(ii-mode)	(iii-mode)
Present	3.142	3.229	4.443	5.035	5.095
Ref. [2.14]	3.141	3.229	4.442	5.034	5.095
Ex.3 Specially orthotropic plate (S2-C-S2-C)					
	(ii-mode)	(iv-mode)	(iii-mode)	(ii-mode)	(iv-mode)
Present	3.142	3.593	4.714	5.162	6.187
Ref. [2.14]	3.141	3.592	4.714	5.162	6.187
Ex.4 Angle-ply square plate (C-F-F-F) $[30^\circ/-30^\circ]_S$ , $(E_L/E_T = 2)$					
Present	0.836	2.023	2.253	3.208	3.612
Ref. [2.17]	0.836	2.023	2.253	3.208	3.612
Ex.4 Angle-ply square plate (C-F-F-F) $[30^\circ/-30^\circ]_S$ , $(E_L/E_T = 20)$					
Present	1.900	3.381	4.775	5.132	6.085
Ref. [2.17]	1.897	3.379	4.772	5.131	6.085

以上の 5 例の計算例では、対称性があるため式 (2.18) で示したモード分類も併記している。

最後の 2 例は、Ex.4 (Angle-ply laminated square plate,  $[30^\circ/-30^\circ]_S$ ) の C-F-F-F (Cantilever) 板を文献 [2.17] と比較する。この 2 例は比較的異方性の程度が小さい  $E_L/E_T = 2$  を初めに、つぎに異方性の程度が大きい  $E_L/E_T = 20$  の場合を比較している。異方性が大きい方では本方法の結果とわずかに値が相違しているものの、手法の相違に関わらず全般に極めて良い一致を示す。以上、表 2.1 と表 2.2 の結果から、本章において用いた振動数計算の高い精度が実証された。

### 2.3.2 結果と考察

表 2.3 は、Ex.1 等方性正方形板の 4 辺の F, S1, S2, C の 256 組の組合せから、同一の値を与えるものを一つの組として整理した 55 種類の境界条件組合せに対する 1 次から 5 次までの振動数パラメータを与える。最も拘束の弱い完全自由の F-F-F-F (Class 1) から始まり、完全固定の C-C-C-C (Class 55) までを与える。基本的に徐々に、拘束の度合いを増やしている。この整理には、実際に 256 組の数値計算を行い、各次数について差異の絶対値の総和が 0.001 以下となる場合を同一の組と判定している。また 4 辺の拘束状態により、剛体運動を示す場合があり、その固有振動数はゼロ (他の振動数に対して微小な値) を与える。例えば、完全自由板 F-F-F-F では、 $x, y$  の 2 方向の並進運動二つと、面内の回転一つの剛体運動を生じる。

こうした 55 通りの境界条件組合せに対して生じる剛体運動を、表 2.4 に整理した。ここでは、 $x$  方向の並進運動を TRX (Translational movement in  $x$  direction),  $y$  方向の並進運動を TRY (Translational movement in  $y$  direction), また面内の回転運動は ROT (Rotational motion) と表し、生じる現象には○を記入している。さらに ROT には、境界条件により表中の A, B, C, D の中からどの点を中心とする回転が生

Table 2.3 All Classes for frequency parameters  $\Omega$  of (Ex.1) isotropic square plates with corresponding boundary conditions (RBM: Rigid-Body Motion)

Class	RBM	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	boundary conditions
1	3	2.321	2.472	2.472	2.628	2.987	F-F-F-F
2	2	1.634	2.363	2.628	2.683	3.375	S1-F-F-F, F-F-S1-F, F-S1-F-F, F-F-F-S1
3	1	0.977	1.480	2.392	2.602	3.073	S2-F-F-F, F-F-S2-F, F-S2-F-F, F-F-F-S2
4	0	0.628	1.507	1.691	2.686	2.897	C-F-F-F, F-F-C-F, F-C-F-F, F-F-F-C
5	1	1.236	1.862	2.484	3.050	3.257	S1-S2-F-F, F-F-S1-S2, F-S2-S1-F, S1-F-F-S2, S2-S1-F-F, F-F-S2-S1, F-S1-S2-F, S2-F-F-S1
6	0	1.314	1.494	1.726	2.523	3.022	S2-S2-F-F, F-S2-S2-F, S2-F-F-S2, F-F-S2-S2
7	0	1.450	1.611	1.949	2.847	3.541	C-S2-F-F, S2-C-F-F, F-C-S2-F, F-S2-C-F, C-F-F-S2, F-F-C-S2, S2-F-F-C, F-F-S2-C
8	1	1.160	2.152	2.628	2.643	3.421	S1-S1-F-F, F-S1-S1-F, S1-F-F-S1, F-F-S1-S1
9	0	0.780	1.606	2.222	2.919	3.070	C-S1-F-F, S1-C-F-F, F-C-S1-F, F-S1-C-F, C-F-F-S1, F-F-C-S1, S1-F-F-C, F-F-S1-C
10	0	1.470	1.884	2.255	3.403	3.843	C-C-F-F, F-C-C-F, C-F-F-C, F-F-C-C
11	1	1.408	1.859	2.628	3.249	3.364	S1-F-S1-F, F-S1-F-S1
12	0	0.514	1.480	2.334	2.444	2.987	S2-F-S1-F, S1-F-S2-F, F-S1-F-S2, F-S2-F-S1
13	0	1.486	1.507	2.446	3.058	3.303	C-F-S1-F, S1-F-C-F, F-C-F-S1, F-S1-F-C
14	1	1.859	1.866	3.059	3.423	3.425	S1-S2-S1-F, S1-F-S1-S2, S2-S1-F-S1, F-S1-S2-S1

Table 2.3 (Continued)

Class	RBM	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	boundary conditions
15	0	1.314	1.682	2.517	2.607	3.801	S2-S2-S1-F, S1-S2-S2-F, S2-S1-F-S2, S2-F-S1-S2, S1-F-S2-S2, F-S1-S2-S2, S2-S2-F-S1, F-S2-S2-S1
16	0	1.509	1.951	2.545	3.481	3.839	C-S2-S1-F, S1-S2-C-F, C-F-S1-S2, S1-F-C-S2, S2-C-F-S1, F-C-S2-S1, S2-S1-F-C, F-S1-S2-C
17	0	0.929	1.624	2.628	2.788	3.391	S1-S1-S1-F, S1-S1-F-S1, S1-F-S1-S1, F-S1-S1-S1
18	0	0.704	1.749	2.518	2.776	3.285	S2-S1-S1-F, S1-S1-S2-F, S1-S1-F-S2, F-S1-S1-S2, S1-S2-F-S1, S2-F-S1-S1, F-S2-S1-S1, S1-F-S2-S1
19	0	1.560	1.872	2.899	3.351	3.543	C-S1-S1-F, S1-S1-C-F, S1-C-F-S1, C-F-S1-S1, F-C-S1-S1, S1-F-C-S1, S1-S1-F-C, F-S1-S1-C
20	0	0.929	1.978	2.788	3.062	3.439	S1-C-S1-F, C-S1-F-S1, F-S1-C-S1, S1-F-S1-C
21	0	1.598	1.760	2.650	3.238	4.125	S2-C-S1-F, S1-C-S2-F, C-S1-F-S2, F-S1-C-S2, C-S2-F-S1, F-S2-C-S1, S2-F-S1-C, S1-F-S2-C
22	0	1.771	2.085	3.184	3.548	4.216	C-C-S1-F, S1-C-C-F, C-C-F-S1, F-C-C-S1, C-S1-F-C, C-F-S1-C, S1-F-C-C, F-S1-C-C
23	1	1.408	2.628	3.142	3.249	3.364	S2-F-S2-F, F-S2-F-S2
24	0	0.756	2.376	2.782	3.259	3.490	C-F-S2-F, S2-F-C-F, F-C-F-S2, F-S2-F-C
25	0	1.571	1.866	3.059	3.423	3.425	S2-S2-S2-F, S2-S2-F-S2, S2-F-S2-S2, F-S2-S2-S2
26	0	1.675	2.641	3.100	3.487	4.201	C-S2-S2-F, S2-S2-C-F, S2-C-F-S2, C-F-S2-S2, F-C-S2-S2, S2-F-C-S2, S2-S2-F-C, F-S2-S2-C

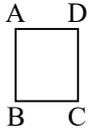
Table 2.3 (Continued)

Class	RBM	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	boundary conditions
27	1	1.624	2.628	3.142	3.391	3.449	S2-S1-S2-F, S1-S2-F-S2, F-S2-S1-S2, S2-F-S2-S1
28	0	0.847	2.547	2.797	3.324	3.596	C-S1-S2-F, S2-S1-C-F, S1-C-F-S2, F-C-S1-S2, C-F-S2-S1, S2-F-C-S1, S1-S2-F-C, F-S2-S1-C
29	0	1.571	1.978	3.062	3.439	4.162	S2-C-S2-F, C-S2-F-S2, F-S2-C-S2, S2-F-S2-C
30	0	1.708	2.726	3.112	4.078	4.405	C-C-S2-F, S2-C-C-F, C-C-F-S2, F-C-C-S2, C-S2-F-C, C-F-S2-C, S2-F-C-C, F-S2-C-C
31	0	1.694	3.019	3.121	3.351	3.745	C-F-C-F, F-C-F-C
32	0	2.262	3.047	3.232	3.829	4.536	C-S2-C-F, C-F-C-S2, S2-C-F-C, F-C-S2-C
33	0	1.774	3.078	3.399	3.425	3.890	C-S1-C-F, C-F-C-S1, S1-C-F-C, F-C-S1-C
34	0	2.270	3.163	3.409	4.306	4.718	C-C-C-F, C-C-F-C, C-F-C-C, F-C-C-C
35	1	1.859	2.628	3.142	3.717	4.156	S1-S2-S1-S2, S2-S1-S2-S1
36	0	1.571	2.078	3.351	3.512	3.832	S2-S2-S1-S2, S1-S2-S2-S2, S2-S1-S2-S2, S2-S2-S2-S1
37	0	1.571	2.205	3.422	3.865	4.241	C-S2-S1-S2, S1-S2-C-S2, S2-C-S2-S1, S2-S1-S2-C
38	0	0.929	2.078	2.788	3.351	3.512	S1-S1-S1-S2, S1-S2-S1-S1, S2-S1-S1-S1, S1-S1-S2-S1
39	0	1.314	2.221	2.939	2.939	3.943	S2-S1-S1-S2, S1-S1-S2-S2, S2-S2-S1-S1, S1-S2-S2-S1
40	0	1.638	2.479	2.999	3.809	4.153	C-S1-S1-S2, S1-S1-C-S2, C-S2-S1-S1, S2-C-S1-S1, S1-C-S2-S1, S1-S2-C-S1, S2-S1-S1-C, S1-S1-S2-C
41	0	0.929	2.788	2.811	3.450	4.265	S1-C-S1-S2, C-S1-S2-S1, S2-S1-C-S1, S1-S2-S1-C

Table 2.3 (Continued)

Class	RBM	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	boundary conditions
42	0	1.747	2.814	3.513	3.570	4.682	S2-C-S1-S2, C-S1-S2-S2, S1-C-S2-S2, S2-S1-C-S2, C-S2-S2-S1, S2-S2-C-S1, S2-S2-S1-C, S1-S2-S2-C
43	0	1.778	2.947	3.557	4.292	4.727	C-C-S1-S2, S1-C-C-S2, C-C-S2-S1, S2-C-C-S1, C-S2-S1-C, C-S1-S2-C, S1-S2-C-C, S2-S1-C-C
44	0	2.628	3.142	3.142	4.156	4.156	S2-S2-S2-S2
45	0	2.811	3.142	3.450	4.265	4.327	C-S2-S2-S2, S2-C-S2-S2, S2-S2-C-S2, S2-S2-S2-C
46	0	2.929	3.354	3.641	4.359	5.010	C-C-S2-S2, S2-C-C-S2, C-S2-S2-C, S2-S2-C-C
47	0	3.142	3.275	3.495	4.411	4.957	C-S2-C-S2, S2-C-S2-C
48	0	2.386	3.091	3.750	4.133	4.683	C-S1-C-S2, C-S2-C-S1, S2-C-S1-C, S1-C-S2-C
49	0	3.189	3.524	3.804	4.858	5.300	C-C-C-S2, C-C-S2-C, C-S2-C-C, S2-C-C-C
50	0	1.859	1.859	2.628	3.717	3.717	S1-S1-S1-S1
51	0	1.859	2.205	3.422	3.717	3.865	C-S1-S1-S1, S1-C-S1-S1, S1-S1-C-S1, S1-S1-S1-C
52	0	2.118	2.593	3.798	3.900	4.360	C-C-S1-S1, S1-C-C-S1, C-S1-S1-C, S1-S1-C-C
53	0	1.859	3.275	3.495	3.717	4.411	C-S1-C-S1, S1-C-S1-C
54	0	2.395	3.356	4.070	4.499	4.758	C-C-C-S1, C-C-S1-C, C-S1-C-C, S1-C-C-C
55	0	3.555	3.555	4.235	5.186	5.859	C-C-C-C

Table 2.4 Type of rigid-body motion (RBM) of isotropic square plate for possible combinations.

Class	1		2			
BC	F-F-F-F	S1-F-F-F	F-F-S1-F	F-S1-F-F	F-F-F-S1	
TRX	○	○	○	×	×	
TRY	○	×	×	○	○	
ROT	○*1	○*2	○*3	○*4	○*5	
Class	3				5	
BC	S2-F-F-F	F-F-S2-F	F-S2-F-F	F-F-F-S2	S1-S2-F-F	F-F-S1-S2
TRX	×	×	○	○	○	○
TRY	○	○	×	×	×	×
ROT	×	×	×	×	×	×
Class	5					
BC	F-S2-S1-F	S1-F-F-S2	S2-S1-F-F	F-F-S2-S1	F-S1-S2-F	S2-F-F-S1
TRX	○	○	×	×	×	×
TRY	×	×	○	○	○	○
ROT	×	×	×	×	×	×
Class	8				11	
BC	S1-S1-F-F	F-S1-S1-F	S1-F-F-S1	F-F-S1-S1	S1-F-S1-F	F-S1-F-S1
TRX	×	×	×	×	○	×
TRY	×	×	×	×	×	○
ROT	○*6	○*7	○*8	○*9	×	×
Class	14				23	
BC	S1-S2-S1-F	S1-F-S1-S2	S2-S1-F-S1	F-S1-S2-S1	S2-F-S2-F	F-S2-F-S2
TRX	○	○	×	×	×	○
TRY	×	×	○	○	○	×
ROT	×	×	×	×	×	×
Class	27				35	
BC	S2-S1-S2-F	S1-S2-F-S2	F-S2-S1-S2	S2-F-S2-S1	S1-S2-S1-S2	S2-S1-S2-S1
TRX	×	○	○	×	○	×
TRY	○	×	×	○	×	○
ROT	×	×	×	×	×	×

(Rotation with respect to) \*1: any point, \*2: A or B, \*3: C or D, \*4: B or C, \*5: D or A, \*6: B, \*7: C, \*8: D, \*9: A.

じるかを示している。

表 2.5, 2.6, 2.7 は、それぞれ Ex.2, Ex.3, Ex.4 に対する 100 種類の同一振動数を与える組合せに関する 1 次から 5 次までの振動数パラメータを与える。スペースの関係で、1 から 100 通りの組合せから、10 刻みに振動数を提示している。ここで観察されることは、Ex.2, Ex.3, Ex.4 において同一の振動数を与える組は最大 4 組までであり、表 2.3 の Ex.1 では 8 組であった。剛体の運動については、表 2.4 と同じである。

表 2.8, 2.9 は Ex.5 と Ex.6 の結果を与え、同一の振動数を与える組合せは 136 に増加した。異なる組合せを与えた Ex.4 と比較して、共に Ex.4, Ex.5, Ex.6 は複合材料からなる正方形板であるが、アングルプライ積層の Ex.4 は面内カップリングを与える剛性  $A_{16}$ ,  $A_{26}$  がゼロになるのに対して、Ex.5  $[30^\circ]$  と Ex.6  $[0^\circ/30^\circ]_S$  では、面内カップリングを与える剛性  $A_{16} \neq 0$ ,  $A_{26} \neq 0$  であることから、同一の振動数を生じる組合せ数が、100 から 136 に増加している。

こうした異方性や積層条件による同一の振動数を生じる境界条件の組合せ数が変化していく様子を表すため、図 2.3 は「Ex.1  $\rightarrow$  Ex.2, 3, 4  $\rightarrow$  Ex.5, 6」と板の特性が複雑化していく過程で、Ex.1 の 5 組の同一の振動数を与える組が、Ex.2, 3, 4 では 9 組に、Ex.5, 6 では 11 組に分化していく状況を図化している。こうした板の特性 (板形状, 異方性の有無, 積層角度の変化) が、同一の振動数を与える組合せ数の増加に寄与することは初めて明らかにされた。

## 2.4 結言

本章では、面内振動の 4 種類の境界条件 (自由辺, 単純支持辺 (S1), 単純支持辺 (S2), 固定辺) の任意の組合せに対して、等方性, 直交異方性, 対称積層の長方形板の固有振動数を計算する準解析的な方法を提案した。数値計算例では、物理的に意味あ

Table 2.5 Every ten Classes with frequency parameters  $\Omega$  and boundary conditions of (Ex.2) isotropic rectangular plates ( $a/b = 1.5$ )

Class	RBM	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	boundary conditions
1	3	2.196	2.881	2.915	3.938	3.971	F-F-F-F
10	1	1.440	2.297	3.123	3.543	4.133	S1-S1-F-F, F-S1-S1-F, S1-F-F-S1, F-F-S1-S1
20	1	2.228	2.788	3.169	3.520	4.233	S1-S2-S1-F, S1-F-S1-S2
30	0	0.660	2.215	2.963	3.910	4.270	C-F-S2-F, S2-F-C-F
40	0	2.791	3.325	3.738	5.244	5.292	C-C-C-F, C-F-C-C
50	0	1.311	3.181	3.891	4.313	4.725	S1-C-F-S2, F-C-S1-S2, S1-S2-F-C, F-S2-S1-C
60	0	2.042	4.160	4.216	5.041	5.176	S2-C-S1-S2, S1-C-S2-S2, S2-S2-S1-C, S1-S2-S2-C
70	0	3.342	4.755	4.800	5.996	6.118	C-C-C-S2, C-S2-C-C
80	0	0.929	2.788	2.939	3.943	4.647	S2-S1-S1-S1, S1-S1-S2-S1
90	0	2.933	3.745	4.581	5.658	5.999	C-C-C-S1, C-S1-C-C
100	0	4.113	4.925	5.403	6.564	6.603	C-C-C-C

Table 2.6 Every ten Classes with frequency parameters  $\Omega$  and boundary conditions of (Ex.3) specially orthotropic square plates ( $a/b = 1$ ),  $[0^\circ]$ 

Class	RBM	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	boundary conditions
1	3	2.653	2.775	3.132	4.165	4.658	F-F-F-F
10	1	1.388	2.684	3.250	3.542	4.398	S1-S1-F-F, F-S1-S1-F, S1-F-F-S1, F-F-S1-S1
20	1	2.215	2.585	4.430	4.553	5.061	S1-S2-S1-F, S1-F-S1-S2
30	0	1.053	3.204	3.284	4.369	5.408	C-F-S2-F, S2-F-C-F
40	0	2.668	4.582	5.168	6.325	6.702	C-C-C-F, C-F-C-C
50	0	0.991	2.930	3.469	4.545	5.207	S1-C-F-S2, F-C-S1-S2, S1-S2-F-C, F-S2-S1-C
60	0	3.273	4.528	6.112	6.227	6.334	S2-C-S1-S2, S1-C-S2-S2, S2-S2-S1-C, S1-S2-S2-C
70	0	3.834	5.391	6.638	7.323	7.564	C-C-C-S2, C-S2-C-C
80	0	1.107	3.256	3.322	4.524	5.537	S2-S1-S1-S1, S1-S1-S2-S1
90	0	2.712	4.689	5.190	6.389	6.820	C-C-C-S1, C-S1-C-C
100	0	3.835	5.395	6.640	7.325	7.578	C-C-C-C

Table 2.7 Every ten Classes with frequency parameters  $\Omega$  and boundary conditions of (Ex.4) angle-ply laminated square plates ( $a/b = 1$ ),  $[30^\circ/-30^\circ]_S$

Class	RBM	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	boundary conditions
1	3	2.959	3.145	5.181	5.264	5.652	F-F-F-F
10	1	2.826	3.685	4.378	5.463	6.399	S1-S1-F-F, F-S1-S1-F, S1-F-F-S1, F-F-S1-S1
20	1	3.804	4.388	5.452	7.230	7.374	S1-S2-S1-F, S1-F-S1-S2
30	0	2.152	4.053	6.127	6.241	6.685	C-F-S2-F, S2-F-C-F
40	0	5.175	7.413	7.922	8.842	9.997	C-C-C-F, C-F-C-C
50	0	2.006	4.009	5.580	6.532	7.368	S1-C-F-S2, F-C-S1-S2, S1-S2-F-C, F-S2-S1-C
60	0	3.416	5.785	6.498	7.376	7.462	S2-C-S1-S2, S1-C-S2-S2, S2-S2-S1-C, S1-S2-S2-C
70	0	6.512	8.796	8.822	9.255	10.485	C-C-C-S2, C-S2-C-C
80	0	2.726	2.852	6.230	6.775	7.045	S2-S1-S1-S1, S1-S1-S2-S1
90	0	5.738	7.594	8.740	9.633	10.073	C-C-C-S1, C-S1-C-C
100	0	6.597	9.094	9.301	9.846	11.703	C-C-C-C

Table 2.8 Every ten Classes with frequency parameters  $\Omega$  and boundary conditions of (Ex.5) unidirectional square plates ( $a/b = 1$ ),  $[30^\circ]$

Class	RBM	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	boundary conditions
1	3	2.765	2.918	3.140	3.634	3.841	F-F-F-F
10	1	1.998	2.995	3.307	3.692	4.468	S1-S1-F-F, F-F-S1-S1
20	1	1.448	2.554	2.998	4.155	4.625	F-S2-S1-F, S1-F-F-S2
30	0	1.746	3.086	4.144	4.922	5.567	S2-C-S1-F, S1-F-S2-C
40	1	2.670	3.342	3.713	4.908	5.499	S2-S1-S2-F, S2-F-S2-S1
50	0	2.798	4.721	5.204	6.194	7.256	C-S2-C-F, C-F-C-S2
60	1	2.195	3.258	3.763	4.752	5.190	S1-S2-F-S2, F-S2-S1-S2
70	0	3.093	4.479	5.487	6.133	6.404	C-C-F-S2, F-S2-C-C
80	0	2.914	3.740	5.269	5.983	6.288	S2-C-S1-S2, S1-S2-S2-C
90	0	3.531	3.993	5.087	6.037	6.363	S2-C-S2-S2, S2-S2-S2-C
100	0	3.802	5.502	6.357	7.195	7.962	C-C-C-S2, C-S2-C-C
110	0	1.649	2.766	4.025	4.920	5.688	S2-S1-S1-S1, S1-S1-S2-S1
120	0	1.771	3.793	4.512	5.084	6.204	S2-C-S2-S1, S2-S1-S2-C
136	0	3.808	5.559	6.384	7.272	8.017	C-C-C-C

Table 2.9 Every ten Classes with frequency parameters  $\Omega$  and boundary conditions of (Ex.6) generally laminated square plates ( $a/b = 1$ ),  $[0^\circ/30^\circ]_S$ .

Class	RBM	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	boundary conditions
1	3	2.891	3.098	4.539	5.522	5.782	F-F-F-F
10	1	2.303	3.022	4.577	5.216	5.607	S1-S1-F-F, F-F-S1-S1
20	1	1.525	3.234	4.210	5.275	6.084	F-S2-S1-F, S1-F-F-S2
30	0	1.912	4.578	4.701	5.998	6.943	S2-C-S1-F, S1-F-S2-C
40	1	2.844	4.036	4.468	6.212	6.647	S2-S1-S2-F, S2-F-S2-S1
50	0	3.765	5.933	6.821	7.854	8.620	C-S2-C-F, C-F-C-S2
60	1	2.560	4.065	5.591	6.140	6.616	S1-S2-F-S2, F-S2-S1-S2
70	0	3.660	5.364	6.080	6.411	7.236	C-C-F-S2, F-S2-C-C
80	0	3.409	5.217	6.226	7.016	7.268	S2-C-S1-S2, S1-S2-S2-C
90	0	3.580	4.772	6.844	7.058	7.264	S2-C-S2-S2, S2-S2-S2-C
100	0	4.820	7.305	7.546	8.878	9.984	C-C-C-S2, C-S2-C-C
110	0	1.804	3.342	5.119	5.758	6.356	S2-S1-S1-S1, S1-S1-S2-S1
120	0	1.746	3.932	5.509	5.766	7.028	S2-C-S2-S1, S2-S1-S2-C
136	0	4.839	7.326	7.635	9.003	9.993	C-C-C-C

Ex.1			Ex.2-4			Ex.5 & 6	
Class	BC		Class	BC		Class	BC
1	F-F-F-F	⇒	1	F-F-F-F	⇒	1	F-F-F-F
2	S1-F-F-F	⇒	2	S1-F-F-F	⇒	2	S1-F-F-F
	F-F-S1-F			F-F-S1-F			F-F-S1-F
	F-S1-F-F	⇒	9	F-S1-F-F	⇒	9	F-S1-F-F
	F-F-F-S1			F-F-F-S1			F-F-F-S1
3	S2-F-F-F	⇒	3	S2-F-F-F	⇒	3	S2-F-F-F
	F-F-S2-F			F-F-S2-F			F-F-S2-F
	F-S2-F-F	⇒	5	F-S2-F-F	⇒	5	F-S2-F-F
	F-F-F-S2			F-F-F-S2			F-F-F-S2
4	C-F-F-F	⇒	4	C-F-F-F	⇒	4	C-F-F-F
	F-F-C-F			F-F-C-F			F-F-C-F
	F-C-F-F	⇒	13	F-C-F-F	⇒	13	F-C-F-F
	F-F-F-C			F-F-F-C			F-F-F-C
5	S1-S2-F-F	⇒	6	S1-S2-F-F	⇒	6	S1-S2-F-F
	F-F-S1-S2			F-F-S1-S2			F-F-S1-S2
	F-S2-S1-F			F-S2-S1-F	⇒	20	F-S2-S1-F
	S1-F-F-S2			S1-F-F-S2			S1-F-F-S2
	S2-S1-F-F	⇒	11	S2-S1-F-F	⇒	11	S2-S1-F-F
	F-F-S2-S1			F-F-S2-S1			F-F-S2-S1
	F-S1-S2-F			F-S1-S2-F	⇒	38	F-S1-S2-F
	S2-F-F-S1			S2-F-F-S1			S2-F-F-S1
total 55 Classes			total 100 Classes			total 136 Classes	

Fig. 2.3 Transition of Classes from first five Classes in Ex.1 to Ex.2-4, and to Ex.5 & 6 with decreasing symmetric axes

る等方性正方形板の 55 種類，等方性長方形板，直交異方性正方形板，アングルプライ正方形板の 100 種類，一方向性異方性正方形板と任意積層正方形板の 136 種類の固有振動数の組合せを求めた．

これらの数値結果により，本解析手法はさまざまな複雑性を持つ長方形板の固有振動数を精度よく求められることを，合理的な収束状況と，特定の場合の過去の文献値と比較して良い精度が得られることによって確認した．

## 第 3 章 対称積層板の面内振動の振動数最適設計

### 3.1 緒言

積層板は各層における繊維配向角度を設計変数とすることで，その振動特性を目的関数として最適設計することが可能である．本章では，積層板の面内振動を対象として，1 次 (基本) 振動数の最大化や最小化，1 次と 2 次の振動数差の最大化などさまざまな面内固有振動数の設計を試みる．

長方形板の面内自由振動については，第 2 章で解説したように等方性板についての文献 [3.1–3.6]，周囲に面内弾性ばねが分布した問題 [3.7, 3.8] などの解析事例がある．本テーマの積層板に近いテーマとしては，直交異方性板の解析 [3.9–3.11]，限られた積層条件下の積層板の面内振動解析 [3.12, 3.13] がある．しかし本研究で取り上げたような面内振動の固有振動数の設計や最適化にまで考察した研究は見られない．本章では，一方向異方性板や対称積層長方形板の固有振動など，さまざまな振動数設計について新しい手法を提案するとともに，数値例からその有効性を検証する．

### 3.2 振動数設計問題と解析法

#### 3.2.1 振動数設計問題の定式化

本章で扱う積層板は第 2 章の図 2.1 と同じ，中央に原点を置く座標系を持つ，対称積層された長方形板である．2 辺の寸法は  $a \times b$ ，板厚を  $h$  とし， $u(x, y, t)$  と  $v(x, y, t)$  は  $x$  と  $y$  方向の面内変位である．積層板の各層内で，繊維方向と面内の平行繊維に直交する方向を  $L$  と  $T$  軸， $L$  軸と  $x$  軸のなす角度を  $\theta$  で定義する．長方形の 4 辺は， $x = -a/2$  に沿った辺を Edge(1) とし，反時計回りに Edge(1), Edge(2), Edge(3), Edge(4) とする．板の面内振動解析に用いる境界条件も，第 2 章と同じ形式である．

すなわち自由辺 (F) の 2 方向の面内変位は拘束せず、固定辺 (C) は二つの面内変位を完全にゼロとする。単純支持の境界条件は 2 種類あり、S1 と S2 として区別する。S1 は、直線辺に平行な変位は境界上で完全に拘束するが、辺に垂直な面内変位は全く拘束しない (直線辺に直角な垂直応力はゼロ)。他方 S2 は、直線辺に平行な変位は全く拘束しない (直線辺に沿ったせん断応力はゼロ) が、辺に垂直な面内変位は完全に拘束する。

これらの計算例について、本章では以下の固有振動数の設計問題を考察する。

Design (1) 1 次固有振動数  $\Omega_1$  の最大化

(Maximization of the lowest frequency parameter)

Design (2) 1 次固有振動数  $\Omega_1$  の最小化

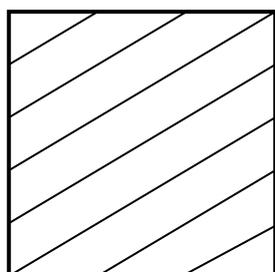
(Minimization of the lowest frequency parameter )

Design (3) 1 次と 2 次固有振動数差 ( $\Omega_2 - \Omega_1$ ) の最大化

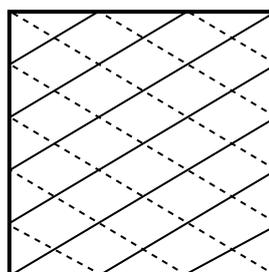
(Maximization of the difference between the lowest and second frequency parameters)

これらの最適化問題の解法には、計算回数を物理的な考察により反復を抑えて、効率的な振動解析手法を用いることで総当たり法 (permutation) を適用する。すなわち遺伝的アルゴリズム (GA) や数理計画法などの近似最適化法は使用しないため、仮定した繊維配向方向の角度変化 (angle increment)  $\Delta\theta$  の下では厳密な最適解となる。なお本章の数値例では、角度変化を  $\Delta\theta = 5^\circ$  としている。

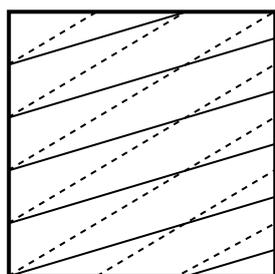
図 3.1 に示す計算例について、本報告では振動数パラメータの最適化を考える。ここで、Ex.1  $[\theta]$  は一方向強化の単層正方形板、Ex.2  $[\theta/-\theta]_S$  はアングルプライの対称 4 層正方形板、Ex.3  $[\theta_1/\theta_2]_S$  は非アングルプライの対称 4 層正方形板、Ex.4



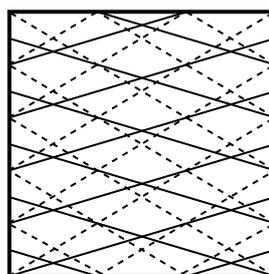
Ex.1  $[\theta]$   
Single-layer plate



Ex.2  $[\theta / -\theta]_S$   
Four-layer balanced plate



Ex.3  $[\theta_1 / \theta_2]_S$   
Four-layer plate



Ex.4  $[\theta_1 / \theta_2 / -\theta_1 / -\theta_2]_S$   
Eight-layer balanced plate

Fig. 3.1 Numerical examples

$[\theta_1/\theta_2/-\theta_1/-\theta_2]_S$  は非アングルプライの対称 8 層正方形板である。Ex.1 と Ex.2 は、物理的には異なる積層数であっても全板厚  $h$  で無次元化した振動数を比較し、最適設計問題としては一つの設計変数  $\theta$  しか持たない。このため最適化のため角度変化を  $\Delta\theta = 5^\circ$  とすると、共に 36 回の反復計算で済む。Ex.3 は、Ex.2 と同じ対称 4 層長方形板であるが、設計自由度を拡大して第 1 層 (最外層) と第 2 層は異なる角度  $[\theta_1/\theta_2]_S$  をとれるようにする。Ex.3 と Ex.4 の計算回数は共通で、見かけ上  $36 \times 36 = 1296$  である。しかし面内剛性  $A_{ij}$  は、面外剛性と異なり積層の順番は無関係のため、例えば  $[\theta_1/-\theta_1/\theta_2/-\theta_2]_S$  と  $[\theta_1/\theta_2/-\theta_1/-\theta_2]_S$  は同じ剛性値を与える。このため計算回数は、 $36 \times 36 = 1296$  を 666 へと減らすことができる。なお振動数パラメータでは、全板厚で振動数を無次元化しているため、層数が変化しても数値の直接の比較が可能である。

### 3.2.2 面内振動問題と積層パラメータ

本節では、目的とする固有振動数の最適設計についての基礎理論をまとめる。第 2 章と基礎とする弾性論は共通であるが、振動数設計に適した積層パラメータを用いる。微小弾性論では、固体内の点  $(x, y)$  におけるひずみベクトルは、

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right\}^T \quad (3.1)$$

応力-ひずみ関係式は、第  $k$  層において

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

ここで  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  は弾性定数で、各定数  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  は、

$$\begin{aligned}
 \bar{Q}_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\
 \bar{Q}_{12} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta \\
 \bar{Q}_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\
 \bar{Q}_{16} &= -\frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta \\
 \bar{Q}_{26} &= -\frac{1}{2}U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta \\
 \bar{Q}_{66} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

ただし  $U_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) は弾性不変量であり、

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3/8 & 3/8 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & -1/4 & -1/2 \\ 1/8 & 1/8 & 3/4 & -1/2 \\ 1/8 & 1/8 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \\ Q_{66} \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

となる。ここで

$$\begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{22} \\ Q_{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \begin{pmatrix} E_L \\ E_T \\ \nu_{TL}E_L \end{pmatrix}, \quad Q_{66} = G_{LT} \tag{3.5}$$

式 (3.5) 内の、 $E_L$  と  $E_T$  はそれぞれ  $L$  方向 (平行繊維方向) と  $T$  方向 (平行繊維と直角方向) のヤング率である。  $G_{LT}$  はせん断弾性係数、 $\nu_{LT}$  と  $\nu_{TL}$  はポアソン比である。ここで簡単化のため、第  $k$  層を示す添字 ( $k$ ) は省略している。なお等方性材料の場合は、 $Q_{11} = Q_{22} = E/(1 - \nu^2)$ 、 $Q_{12} = \nu Q_{11}$ 、 $Q_{66} = G = E/\{2(1 + \nu)\}$  と簡単化される。

式 (3.2) を板厚方向に積分すると、合応力

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

を得る。ここで係数の面内剛性は

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^K \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k - z_{k-1}) \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (3.7)$$

により与えられる。ただし、 $z_{k-1}$ 、 $z_k$  はそれぞれ第  $k$  層の下面、上面における板の中央面からの位置座標、 $K$  は層総数である。

### 3.2.3 有限要素法の定式化

本章では、リッツ法と有限要素法を用いる。リッツ法に関しては、第 2 章に示した解法と著者らの文献 [3.14] と同様であり省略する。有限要素法もエネルギー関数から始める。ひずみエネルギーは、式 (3.1)~(3.7) から

$$V = \frac{1}{2} \iint \{\varepsilon\}^T [A] \{\varepsilon\} dArea \quad (3.8)$$

面内振動に関する運動エネルギーは、 $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>] を平均密度として

$$T = \frac{1}{2} \rho h \iint \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right\} dArea \quad (3.9)$$

つぎに第 2 章で用いた異方性弾性論を用いて、有限要素法による定式化を行う。それに基づいて計算プログラムを作成して、数値計算結果をリッツ法による結果と比較を行い、リッツ解の精度を検証する。したがって有限要素の作成には、式 (3.1)~(3.7) を用いる。要素形状は長方形要素として、その四つの角の点を  $i, j, k, l$  とする。

$x$  方向と  $y$  方向, それぞれの面内変位を

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = [P]\{\beta\} \quad (3.10)$$

ただし

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\{\beta\} = \left\{ \beta_0 \quad \gamma_0 \quad \beta_1 \quad \gamma_1 \quad \beta_2 \quad \gamma_2 \quad \beta_3 \quad \gamma_3 \right\}^T \quad (3.12)$$

により定義する.

一つの有限要素にある四つの角の点, すなわち節点は,

$$\{d_e\} = \{d_i, d_j, d_k, d_l\}^T, \quad \{d_i\} = \{u_i, v_i\} \quad (3.13)$$

と表され, 式 (3.10) を四つの節点の座標  $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k), (x_l, y_l)$  に代入して

$$\{d_e\} = [C]\{\beta\}, \quad \{\beta\} = [C]^{-1} \{d_e\} \quad (3.14)$$

を得る. ひずみベクトルは

$$\{\varepsilon\} = [Q]\{\beta\} = [Q][C]^{-1} \{d_e\} \quad (3.15)$$

と書ける. それを用いて, 要素内のひずみエネルギーは, 式 (3.15) を式 (3.8) に代入して

$$V_e = \frac{1}{2} \{d_e\}^T [K_e] \{d_e\} \quad (3.16)$$

となる。ただし  $[K_e]$  は、要素剛性マトリックス

$$[K_e] = ([C]^{-1})^T \cdot \iint_{Area} [Q]^T [A] [Q] dA \cdot [C]^{-1} \quad (3.17)$$

である。同様に、要素の運動エネルギーは、

$$T_e = \frac{1}{2} \omega^2 \{d_e\}^T [M_e] \{d_e\} \quad (3.18)$$

ただし  $[M_e]$  は、要素質量マトリックス

$$[M_e] = ([C]^{-1})^T \cdot \iint_{Area} \rho (u^2 + v^2) dA \cdot [C]^{-1} \quad (3.19)$$

である。要素剛性マトリックスと要素質量マトリックスは、全体系に組み込まれる。

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\delta\} = 0 \quad (3.20)$$

ここで  $[K]$ ,  $[M]$ ,  $\{\delta\}$ ,  $\omega$  はそれぞれ全体剛性マトリックス, 全体質量マトリックス, 全体の変位ベクトル, 固有角振動数である。固有振動数は、前章と同様に振動数パラメータ

$$\Omega = \omega a \left\{ \frac{\rho (1 - \nu_{LT} \nu_{TL})}{E_T} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

にまとめられる。

### 3.3 数値計算結果と考察

本節の数値計算では、CFRP の材料定数について、第 2 章と同様に

$$E_L = 150 \text{ GPa}, E_T = 10 \text{ GPa}, G_{LT} = 5 \text{ GPa}, \nu_{LT} = 0.3 \quad (3.22)$$

を使用する [3.15].

表 3.1 は、前節に基づいて作成した有限要素プログラムによる振動数パラメータの収束状況である。正方形板の一辺に沿う要素分割数を、16, 20, 24 と変化させた場合の 1 次から 5 次までの振動数パラメータを示す。計算例は Ex.2 について、 $[30^\circ/-30^\circ]_S$  の積層を持つ C-F-F-F 板 (片持板), 全周単純支持の S1-S2-S1-S2 板, 全周固定の C-C-C-C 板である。さらに Ex.3  $[30^\circ/60^\circ]_S$  の単純支持対称 4 層板 S1-S2-S1-S2 と, Ex.4  $[30^\circ/-30^\circ/60^\circ/-60^\circ]_S$  の全周固定対称 8 層板 C-C-C-C である。2 辺に沿う有限要素数を増加させるにつれて、振動数パラメータはすべての例で単調に上の値から減少し、解が上限値を与えることを示している。小数点以下第 2 位で収束しており、リッツ法で計算した  $10 \times 10$  解とも良い一致を与えている。

表 3.2 は、リッツ解と既知の結果の比較である。Ex.1 の境界条件 S2-S1-S2-C と S2-F-S2-F を持つ二つの単層板の例では Liu ら [3.10] の結果とほぼ 4 桁の精度で一致する。また例題には相当しないが、対称 6 層板の片持ち板 C-F-F-F に対する Dozio [3.13] とも良い一致を示す。このように先行研究との比較によっても、リッツ解の精度が確かめられた。以下の表 3.3~3.6 の Design (1), Design (2), Design (3) の振動数設計では、固有振動数計算の数値計算効率から、第 2 章で展開されたリッツ法を用いる。

表 3.3 において、Ex.1  $[\theta]$  単層板と Ex.2  $[\theta/-\theta]_S$  の積層構成を持つ正方形板に対して、Design (1) の 1 次振動数の最大化設計を適用した。36 通りの総当たり計算により、最大の 1 次振動数を与える場合の角度  $\theta$  と、最大化された 1 次振動数を、C-F-F-F(片持板) から C-C-C-C(全周固定) まで 10 種類の境界条件の組合せに対して示す。1 次振動数の最大化が、高次振動数に与える影響を見るために、2 次から 5 次までの振動数も同時に与える。角度について、簡単化のため角度記号 “°” は省略して

Table 3.1 Convergence of frequency parameters by FEM

Number of finite elements	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
Ex.2 $[30^\circ / -30^\circ]_S$ (C-F-F-F)					
$16 \times 16$	1.693	3.151	4.309	4.544	5.483
$20 \times 20$	1.688	3.145	4.290	4.537	5.464
$24 \times 24$	1.684	3.141	4.280	4.534	5.453
Ritz ( $10 \times 10$ )	1.676	3.132	4.254	4.525	5.429
Ex.2 $[30^\circ / -30^\circ]_S$ (S1-S2-S1-S2)					
$16 \times 16$	4.122	5.461	5.820	8.401	9.247
$20 \times 20$	4.113	5.458	5.778	8.326	9.074
$24 \times 24$	4.108	5.456	5.755	8.285	8.981
Ritz ( $10 \times 10$ )	4.096	5.452	5.704	8.193	8.771
Ex.2 $[30^\circ / -30^\circ]_S$ (C-C-C-C)					
$16 \times 16$	6.626	9.232	9.423	10.01	12.14
$20 \times 20$	6.616	9.183	9.380	9.955	11.99
$24 \times 24$	6.610	9.156	9.357	9.922	11.90
Ritz ( $10 \times 10$ )	6.597	9.094	9.301	9.846	11.70
Ex.3 $[30^\circ / 60^\circ]_S$ (S1-S2-S1-S2)					
$16 \times 16$	3.203	5.160	5.354	6.544	7.340
$20 \times 20$	3.201	5.150	5.345	6.533	7.312
$24 \times 24$	3.200	5.146	5.340	6.527	7.296
Ritz ( $10 \times 10$ )	3.198	5.134	5.329	6.512	7.260
Ex.4 $[30^\circ / -30^\circ / 60^\circ / -60^\circ]_S$ (C-C-C-C)					
$16 \times 16$	8.663	8.663	10.81	13.07	14.04
$20 \times 20$	8.649	8.649	10.77	12.99	14.00
$24 \times 24$	8.642	8.642	10.75	12.95	13.98
Ritz ( $10 \times 10$ )	8.626	8.626	10.69	12.86	13.92

Table 3.2 Comparison of frequency parameters  $\Omega$  by Ritz method with other results for square plates (Ex.1 and Ex.5)

	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
Ex.1 Specially orthotropic plate $[0^\circ]$ (S2-S1-S2-C)					
Present	1.571	2.581	4.260	4.616	4.721
Ref. [3.10]	1.571	2.581	4.260	4.616	4.721
Ex.1 Specially orthotropic plate $[0^\circ]$ (S2-F-S2-F)					
Present	1.790	3.102	3.142	3.980	4.470
Ref. [3.10]	1.790	3.102	3.141	3.979	4.470
Ex.5 Laminate square six-layer plate $[30^\circ/30^\circ/-30^\circ]_S$ (C-F-F-F) ( $E_L/E_T = 2$ )					
Present	0.834	2.015	2.254	3.199	3.592
Ref. [3.13]	0.834	2.015	2.254	3.199	3.592
Ex.5 Laminate square six-layer plate $[30^\circ/30^\circ/-30^\circ]_S$ (C-F-F-F) ( $E_L/E_T = 20$ )					
Present	1.842	3.370	4.580	4.997	6.161
Ref. [3.13]	1.840	3.368	4.578	4.994	6.161

---

いる。面内振動ではとくに自由辺を複数含む場合に、板全体の剛体運動を示す時がある。しかし本報告では、剛体運動を含む境界条件については、実用的な観点から構造物に用いられることが希なため除外した。

ここで選択した 10 種の境界条件の組合せは、C-F-F-F から始まって徐々に 4 辺の拘束が強まっていくように配置する。したがって表 3.3 にある最大化された 1 次振動数も一部の例外を除き、C-F-F-F から始まり単調に増加していく。これに対して高次振動数の変化をみると、1 次振動数の最大化により、逆に 2 次振動数が減少して 1 次振動数に接近する様子が見られる。表では、Ex.1 と Ex.2 の結果を比較すると、同じ振動数計算の回数にも拘わらず、Ex.1 より Ex.2 の方が最大化された 1 次振動数の値がかなり大きい。なお積層数が異なっても、振動数パラメータ  $\Omega$  は板全体の厚さで固有振動数を無次元化しているため、直接の比較が可能である。この Ex.1 単層板  $[\theta]$  から Ex.2 アングル積層板  $[\theta/ - \theta]_S$  への振動数最大化への効果を調べるために新しいパラメータ

$$(ratio) = \frac{\Omega_{1,\max}[\theta/ - \theta]_S}{\Omega_{1,\max}[\theta]} \quad (3.23)$$

(すなわち振動数増加率 Ex.2/Ex.1) を導入した。その結果を図 3.2 に示すが、一方向板をアングルプライ積層にすることで、10 通りの境界条件の組合せに対して、1 次振動数を効果的に増大できることが分かる。

つぎに表 3.4 は、(Ex.3) 対称 4 層正方形板  $[\theta_1/\theta_2]_S$  と (Ex.4) 対称 8 層正方形板  $[\theta_1/\theta_2/ - \theta_1/ - \theta_2]_S$  に、Design (1) を適用して、最大化された 1 次振動数と対応する高次振動数を求めている。Ex.2 と Ex.3 は共に、対称 4 層積層板であるが、Ex.2 では設計変数は  $\theta$  の一つのみで探索回数も 36 回であるが、Ex.3 は 666 回となり 18.5 倍の計算量の増加となる。Ex.4 は同じ 666 回の計算量となる。Ex.2 と Ex.3 を比較す

Table 3.3 Maximum first frequency and higher frequencies of (Ex.1) single-layer  $[\theta]$  and (Ex.2) four-layer  $[\theta / -\theta]_S$  square plates,  $a/b = 1$ , Design (1)

Ex.1	$\theta$	$\Omega_{1,\max}$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
C-F-F-F	0	1.024	3.067	3.258	4.121	5.313
C-S1-F-F	-40	1.672	1.992	3.247	4.161	4.585
C-S1-S2-F	-30	1.822	3.380	4.183	4.790	5.694
C-S2-F-F	-10	1.875	3.231	4.741	5.042	5.330
S1-S1-S1-S1	-40	3.208	3.284	3.746	5.736	5.837
S2-S2-S2-S2	-30	3.516	3.637	4.511	5.632	6.326
C-S1-C-S2	55	3.666	4.776	5.893	6.230	6.605
C-C-C-S1	90	3.803	5.394	6.296	6.735	7.310
C-C-C-S2	0	3.834	5.391	6.638	7.323	7.564
C-C-C-C	90	3.835	5.395	6.640	7.325	7.578
Ex.2	$\theta$	$\Omega_{1,\max}$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
C-F-F-F	25	1.745	3.281	4.516	4.658	5.506
C-S1-F-F	30	2.082	3.749	4.408	5.036	6.200
C-S1-S2-F	40	2.554	4.371	6.103	6.401	7.422
C-S2-F-F	25	2.356	4.623	4.803	5.237	5.675
S1-S1-S1-S1	25	4.406	4.932	4.932	5.743	8.812
S2-S2-S2-S2	60	4.096	4.427	5.704	8.193	8.771
C-S1-C-S2	45	6.497	6.784	7.701	8.105	9.914
C-C-C-S1	50	6.600	6.905	8.678	9.537	10.777
C-C-C-S2	40	7.337	7.661	8.597	9.557	10.606
C-C-C-C	45	8.068	8.068	10.113	10.533	12.197

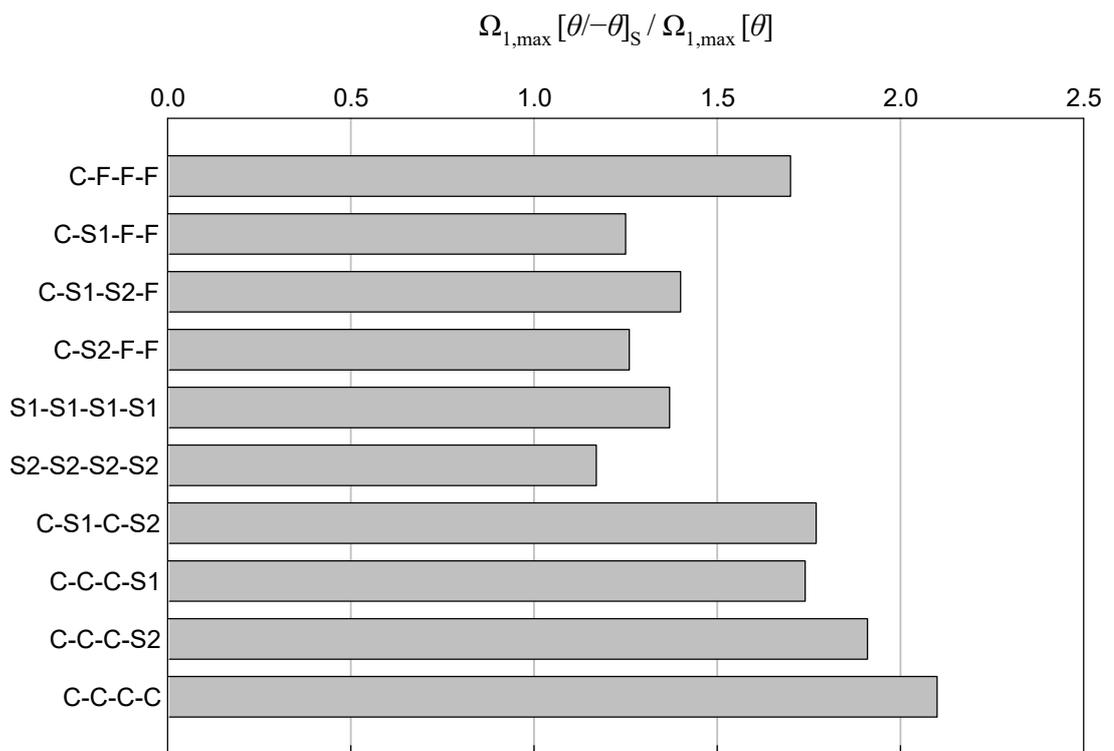


Fig. 3.2 Ratio of Ex.2  $\Omega_{1,\max}[\theta/\theta]_S$  divided by Ex.1  $\Omega_{1,\max}[\theta]$  of square plates,  $a/b = 1$ , Design (1)

ると、Ex.1 から Ex.2 では顕著な 1 次振動数の増加が見られたのに対して、あまり変化が見られない。これを確認するため、Ex.2 の対称アングル積層板  $[\theta / -\theta]_S$  を基準として、Ex.3 対称アングル積層板  $[\theta_1 / \theta_2]_S$  への振動数最大化への効果を調べるパラメータ

$$(ratio) = \frac{\Omega_{1,\max}[\theta_1 / \theta_2]_S}{\Omega_{1,\max}[\theta / -\theta]_S} \quad (3.24)$$

(すなわち振動数増加率 Ex.3/Ex.2) を導入した。その結果、図 3.3 に示すように、二つの境界条件の組、C-S2-F-F と S2-S2-S2-S2 を除くと、その増加率は残りの八つの組でほぼ 1.0、すなわち設計変数の増加が効果を上げないことが理解される。

つぎに Design (2) の 1 次振動数の最小化を、Ex.1~Ex.4 について実施した。表 3.5 には、10 組の境界条件に対して最小化された 1 次振動数とそれを与える角度を示す。ここで Design (1) の最大化では、10 組の境界条件と 4 つの異なる積層条件に対して、それぞれ異なる傾向を与えた。しかし Design (2) の振動数最小化では、表にあるように境界条件に対しては異なる振動数を生じるものの、Ex.1~Ex.4 に対して同じ積層条件の最適解 (1 次振動数) と角度を示した。すなわち最小化された 1 次振動数の値は境界条件の組合せごとに大きく異なるが、繊維配向角度は Ex.1~Ex.4 を通じて共通している。これは 1 次振動数の最大化では見られなかった現象であり、とても興味深い。

最後に Design (3) の 1 次振動数と 2 次振動数の差  $|\Omega_2 - \Omega_1|$  の最大化問題の結果を、表 3.6 に与える。対象とする積層板は、Ex.1 と Ex.2 である。Design (1) での 1 次振動数の最大化では、Ex.1 単層板  $[\theta]$  に対して Ex.2 アングル積層板  $[\theta / -\theta]_S$  では大きな変化を生じた。しかし本振動数差の最大化では、境界条件により多少の相違はあるものの顕著な増加は見られない。

Table 3.4 Maximum first frequency and higher frequencies of (Ex.3) four-layer  $[\theta_1/\theta_2]_S$  and (Ex.4) eight-layer  $[\theta_1/\theta_2/-\theta_1/-\theta_2]_S$  square plates,  $a/b = 1$ , Design (1)

Ex.3	$\theta_1/$ $\theta_2$	$\Omega_{1,\max}$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
C-F-F-F	25/-25	1.745	3.281	4.516	4.658	5.506
C-S1-F-F	-25/ 35	2.139	3.602	4.430	5.008	6.200
C-S1-S2-F	-35/ 40	2.558	4.400	6.143	6.335	7.482
C-S2-F-F	0/ 90	4.417	4.470	4.719	5.516	6.175
S1-S1-S1-S1	-65/ 70	4.488	4.580	4.621	5.927	8.602
S2-S2-S2-S2	0/ 90	8.718	8.886	8.886	9.578	9.873
C-S1-C-S2	-45/ 45	6.497	6.784	7.701	8.105	9.914
C-C-C-S1	-50/ 50	6.600	6.905	8.678	9.537	10.777
C-C-C-S2	0/ 90	8.925	9.148	9.351	10.025	10.454
C-C-C-C	0/ 90	9.149	9.149	9.623	10.192	11.057
Ex.4	$\theta_1/$ $\theta_2$	$\Omega_{1,\max}$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$
C-F-F-F	35/ 15	1.753	3.699	4.669	4.715	5.673
C-S1-F-F	-45/-20	2.144	4.221	4.830	5.529	7.415
C-S1-S2-F	-40/-40	2.554	4.371	6.103	6.401	7.422
C-S2-F-F	0/ 90	4.417	4.470	4.719	5.516	6.175
S1-S1-S1-S1	65/ 30	5.199	5.199	5.615	9.650	9.912
S2-S2-S2-S2	0/ 90	8.718	8.886	8.886	9.578	9.873
C-S1-C-S2	45/ 45	6.497	6.784	7.701	8.105	9.914
C-C-C-S1	-45/ 55	6.609	7.015	8.984	9.810	11.181
C-C-C-S2	0/ 80	8.931	9.022	9.466	10.303	10.982
C-C-C-C	0/ 90	9.149	9.149	9.623	10.192	11.057

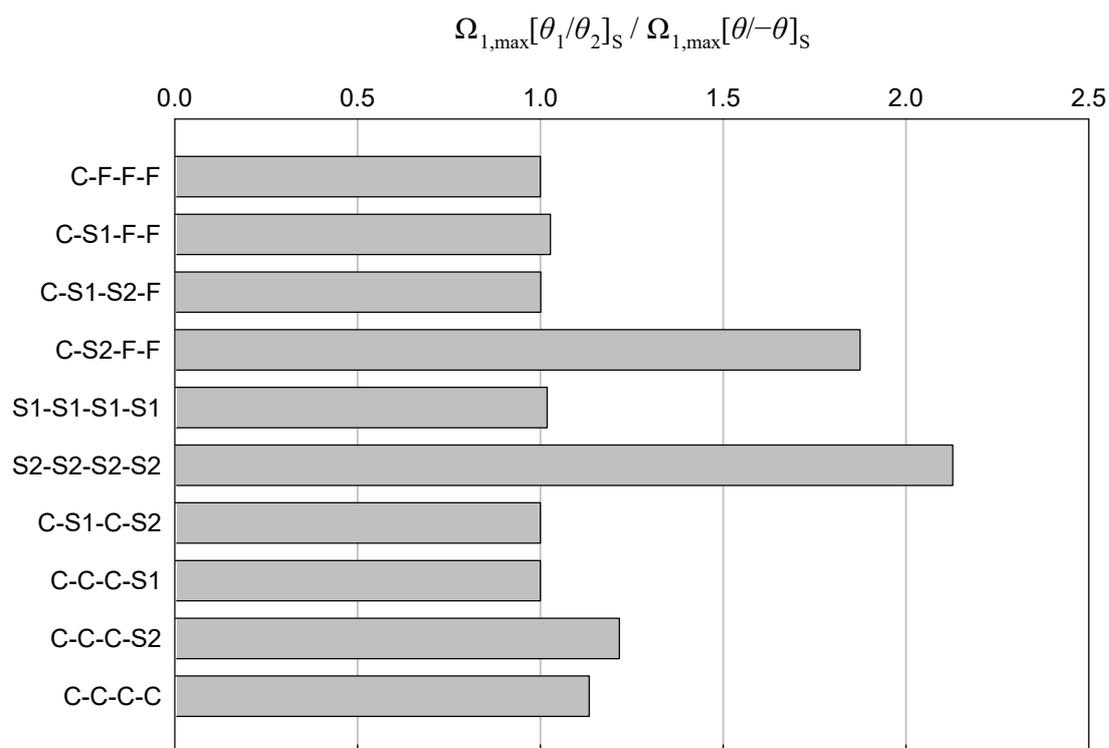


Fig. 3.3 Ratio of Ex.3  $\Omega_{1,\max}[\theta_1/\theta_2]_S$  divided by Ex.2  $\Omega_{1,\max}[\theta/-\theta]_S$  of square plates,  $a/b = 1$ , Design (1)

Table 3.5 Minimum first frequencies of Ex.1  $[\theta]$ , Ex.2  $[\theta / -\theta]_S$ , Ex.3  $[\theta_1 / \theta_2]_S$  and Ex.4  $[\theta_1 / \theta_2 / -\theta_1 / -\theta_2]_S$  square plates,  $a/b = 1$ , Design (2)

	Ex.1		Ex.2	
	$\theta$	$\Omega_{1,\max}$	$\theta$	$\Omega_{1,\max}$
C-F-F-F	90	0.690	90	0.690
C-S1-F-F	90	0.893	90	0.893
C-S1-S2-F	90	0.991	90	0.991
C-S2-F-F	90	1.567	90	1.567
S1-S1-S1-S1	0	2.215	0	2.215
S2-S2-S2-S2	-45	3.132	45	3.132
C-S1-C-S2	0	2.712	0	2.712
C-C-C-S1	0	2.712	0	2.712
C-C-C-S2	90	3.321	90	3.321
C-C-C-C	45	3.799	0	3.835
	Ex.3		Ex.4	
	$\theta_1 / \theta_2$	$\Omega_{1,\max}$	$\theta_1 / \theta_2$	$\Omega_{1,\max}$
C-F-F-F	90/90	0.690	90/90	0.690
C-S1-F-F	90/90	0.893	90/90	0.893
C-S1-S2-F	90/90	0.991	90/90	0.991
C-S2-F-F	90/90	1.567	90/90	1.567
S1-S1-S1-S1	0/ 0	2.215	0/ 0	2.215
S2-S2-S2-S2	45/45	3.132	45/45	3.132
C-S1-C-S2	0/ 0	2.712	0/ 0	2.712
C-C-C-S1	0/ 0	2.712	0/ 0	2.712
C-C-C-S2	90/90	3.321	90/90	3.321
C-C-C-C	0/ 0	3.835	0/ 0	3.835

Table 3.6 Maximum difference  $\Omega_{\text{dif,max}} = (\Omega_2 - \Omega_1)_{\text{max}}$  between the first and second frequencies of (Ex.1) single-layer  $[\theta]$  and (Ex.2) balanced angle-ply  $[\theta/-\theta]_S$  square plates,  $a/b = 1$ , Design (3)

Ex.1	$\theta$	$\Omega_{\text{dif,max}}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$
C-F-F-F	0	2.043	1.024	3.067	3.258	4.121
C-S1-F-F	10	2.124	1.043	3.166	3.355	4.293
C-S1-S2-F	65	2.186	1.230	3.417	3.781	4.462
C-S2-F-F	10	1.603	1.839	3.442	4.674	4.830
S1-S1-S1-S1	-30	0.698	2.860	3.559	3.691	5.245
S2-S2-S2-S2	-75	0.875	3.229	4.104	5.117	6.243
C-S1-C-S2	-5	1.981	2.738	4.718	5.200	6.386
C-C-C-S1	10	1.983	2.823	4.806	5.247	6.424
C-C-C-S2	-35	1.715	3.795	5.510	6.289	7.152
C-C-C-C	45	1.842	3.799	5.641	6.269	7.258
Ex.2	$\theta$	$\Omega_{\text{dif,max}}$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$
C-F-F-F	5	2.164	1.111	3.275	3.321	4.232
C-S1-F-F	5	2.134	1.164	3.298	3.475	4.416
C-S1-S2-F	0	2.175	1.080	3.255	3.306	4.450
C-S2-F-F	20	2.320	2.311	4.631	5.037	5.274
S1-S1-S1-S1	45	3.032	3.132	6.164	6.164	6.264
S2-S2-S2-S2	45	3.132	3.132	6.264	6.772	6.772
C-S1-C-S2	75	2.314	3.537	5.851	6.058	7.378
C-C-C-S1	10	2.209	3.353	5.561	6.098	7.332
C-C-C-S2	65	2.874	4.356	7.229	7.393	8.509
C-C-C-C	30	2.497	6.597	9.094	9.301	9.846

### 3.4 結言

本報告では、4種類の積層正方形板 Ex.1~Ex.4 の面内振動に関する固有振動数を計算して、総当たり法による固有振動数の最適設計を試みた。振動数の設計に際して、「Design (1): 1次固有振動数  $\Omega_1$  の最大化」「Design (2): 1次固有振動数  $\Omega_1$  の最小化」「Design (3): 1次と2次固有振動数差 ( $\Omega_2 - \Omega_1$ ) の最大化」を試みた。総当たり法では、計算回数を物理的な考察により反復回数を抑えて、効率的な振動解析手法を用いることでPCでの計算を可能とした。数値例では、角度変化 (angle increment) を  $\Delta\theta = 5^\circ$  とした。数値実験により、等しい厚さの単層板  $[\theta]$  に対して対称アングルプライ4層板  $[\theta/-\theta]_S$  では、同じ計算回数にも拘わらず1次振動数の著しい増加を実現できた。これに対して、1次振動数の最小化問題では、得られる振動数値は境界条件によって異なるものの、最小値を与える積層角度が等しくなることが明らかになった。

## 第 4 章 対称積層板の面外振動の振動数最適化

### 4.1 緒言

長繊維強化複合材料を用いた薄板構造要素は、軽量、高剛性、高強度であるために長期的な視点ではむしろ経済性に優れ、航空宇宙、自動車、海洋、土木などの分野で幅広く使用されている。

このようなさまざまな用途において最適設計を行うために、解析モデルや数値有限要素 (FE) モデルなどの構造モデルが最適化手法と組合せて用いられている。工学的最適化のためには、数理計画法 [4.1] をはじめとしてメタヒューリスティックス [4.2] に至るまで多くの手法が存在する。数理計画法には、よく知られている勾配法、線形計画法 (LP) のシンプレックスアルゴリズム、二次計画法、動的計画法、分岐・結合法などが存在する。1975 年に Holland [4.3] によって提案された遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm: GA) に代表されるメタヒューリスティックスは、この数十年間のうちに盛んに用いられるようになった。1980 年代後半に Goldberg [4.4] は GA を初めて構造設計に適用した。最近では、GA 以外にも自然現象にヒントを得た新たな手法が考案されており、その中で注目されているものの一つが粒子群最適化 (Particle Swarm Optimization: PSO)[4.5–4.7] である。

メタヒューリスティックスが広く用いられるようになった理由は、プログラミングが簡単で、局所解に陥ることなく準最適解が得られるという特長である。解探索のための計算には時間を要するが、近年の計算機の性能向上がその欠点を補っている。

本研究では、目的関数 (ここでは 1 次固有振動数) を最大化するために、対称な長方形積層板における各層の最適な繊維配向角を探索する積層構成最適化問題を取り扱う。メタヒューリスティックスの代表的な二つの手法である GA と PSO を用いて、両

手法の探索性能を評価するために比較を行う。基本振動数を最大化するような解探索性能を評価するためにベンチマーク問題を設定し、本計算の前処理として実験計画法 (Design of Experiments: DoE) を用いて適切な探索パラメータを決定する。

## 4.2 メタヒューリスティクス

### 4.2.1 GA の基本概念

GA は、自然界における自然淘汰の過程にヒントを得たメタヒューリスティックな手法であり、進化的アルゴリズム (Evolutionary Algorithm: EA) の一種である。GA は生物の進化と同様に、一般に選択、交叉、突然変異などの操作を適用することによって、工学的な探索問題に対して準最適解を求めるために用いられてきており [4.4]、過去数十年のうちに一般的な最適化手法として認識されるようになった。Holland は 1970 年代に研究を始めた後にその成果をまとめ [4.3]、共同研究者らとともに GA の基本的な枠組みを確立した。

GA では個体から構成される集団に対して、よりよい解に向けての改善を続けていく。各個体が有する性質は遺伝子型として定義されており、計算を進める過程でこれらに組み換えや変異が施される。遺伝子は 0 または 1 の 2 値の文字で表されることが一般的である。計算 (進化) は、集団内の各個体がランダムに生成される第 1 世代から始まる。すべての個体について適合度が評価される。通常、適合度として最適化の対象となる目的関数の値が用いられる。より高い適合度を持つ個体は、ルーレット選択などの方法によって高い確率で次世代に残される。世代ごとに行われるこれらの操作は、反復して適用される。この反復プロセスは、規定の世代数に達するまで、またはあらかじめ設定された適合度の条件を満足する個体が集団の中に出現するまで繰り返される。

GA の本質は、親の選択と交叉、突然変異の適用を繰り返すことにある。特に交叉と突然変異は最も重要な GA オペレータとして知られている。それらの適用確率はそれぞれ交叉率、突然変異率と呼ばれる GA パラメータであり、探索性能に影響を与える。集団を構成する個体の数は、扱う問題に応じて適切に設定を行う。

### 4.2.2 PSO の基本概念

GA が自然界の原理にヒントを得た手法であるのと同様に、PSO もメタヒューリスティクス的一种であり、進化的アルゴリズムに属する [4.4]。PSO の利点は、問題に勾配情報を必要としないことと、広大な実行可能解の空間を探索できることである。PSO は GA と同様に、定義された適応度関数に基づいて個々の解の更新を反復することによって最適化を行う数値計算手法である。探索空間内を移動させるために候補解の集団が必要であるが、GA のような親の選定、交叉、突然変異のような概念は存在せずに世代交代が行われる。

PSO では、個体に相当する各粒子の位置と速度のベクトルを用いて、簡単な数式によって繰り返し処理を行う。更新後の位置は、粒子の慣性ベクトル (現在と過去の位置ベクトルの差)、個々の粒子の移動履歴中に得られた最善の位置 (パーソナルベスト) に向かうベクトル、集団の全粒子の移動履歴中に得られた最善の位置 (グローバルベスト) に向かうベクトルの三つのベクトルを加えることで決定される。各ベクトルには係数が掛けられ、入力パラメータとして調整される。

PSO は Kennedy, Eberhart [4.6] によって最初に提案され、鳥や魚の群れにおける運動の社会的行動をシミュレートするために考案された。Kennedy と Eberhart は、PSO と群知能の理論的側面についての記述を行っている [4.7]。PSO の広範な応用に関しては、Poli によってまとめられた [4.8, 4.9]。最近になって、Bonyadi と Michalewicz が PSO の理論的・実験的研究に関する包括的な論評を公表した [4.10]。

上述のように、PSO アルゴリズムは粒子 (候補解) の群 (集団) を持ち、粒子はいくつかの簡単な式にしたがって探索空間を移動する。反復の過程でそれまでよりも優れた位置が発見されると、その位置が群のその後の移動における指針の一つとなる。以上の手順は、最終的に最も優れた解が発見されるまで繰り返されるが、数学的に厳密な収束が保証されているわけではない。

### 4.3 積層板の最適化に関するこれまでの研究

積層複合板の機械的性質の最適化については、Bert [4.11, 4.12] が先駆的な研究を行い、積層板の基本振動数 (目的関数) を最大化するような繊維配向角 (設計変数) を求めた。これらの研究をはじめとして、積層板の振動数と座屈荷重を最大化するような各層の構成を特定するために、さまざまな方法が用いられてきた。メタヒューリスティックな手法やそれを実行するための計算環境が十分ではなかった初期の頃に、Fukunaga ら [4.13] は積層パラメータと数理計画法を組合せて使用した。Zhao と Narita [4.14] は、この問題にシンプレックス法を拡張した複素数法を用いた。Todoroki と Haftka [4.15] は修復戦略を用いた GA を使用した。複合材に関するこれまでの設計と最適化の研究に関する本 [4.16] が、1999 年に出版された。

2000 年代に入ると、GA やその他のメタヒューリスティックスを用いた解法が進展し、Todoroki らがいくつかの論文を発表している [4.17–4.19]。また Narita は、物理学的な特性から解を求める過程を導いた層別最適化法を提案し、関連する論文を多数発表した [4.20–4.22]。

2010 年代には、GA と PSO、さらにそれらを結合した GA-PSO を用いて積層板における構成の最適化が行われ、大きな進展が見られた。Le-Manh と Lee [4.23] は、GA を用いて積層複合板の強度を最大にするための積層構成の最適化について研究を

行った。Ehsani と Rezaeepazhand [4.24] は、積層複合格子板の最大座屈荷重を得るため同様の最適化を GA を用いて行った。Ho-Huu ら [4.25] は改良された差分進化を用いて、積層複合板の座屈荷重が最大になるような最適化を行った。Schaedler と Almeida [4.26] は、調和探索アルゴリズムによって最大座屈荷重を最適化した。2017 年には、Herath ら [4.27] が GA を用いて、自己旋回複合材ハイドロフォイルの構造強度と積層板の最適化を行った。Vosoughi ら [4.28, 4.29] は、高剛性の積層複合板の座屈荷重を最大化するために、混合有限要素と改良された GA を用いる手法を発表した。彼らは異なる手法を組合せる学術的な努力も行っており、FE-GAs-PSO という複合的な解法による座屈荷重の最大化を行った。

Zhou らは複数巡回セールスマン問題を対象として、改良された GA と PSO による解探索に関する比較研究を行った [4.30]。Pathan ら [4.31] は、複合材積層板の減衰応答を最適化するために、単純 GA を改良した手法を用いた。Javidrad ら [4.32] は、PSO と焼きなまし法 (Simulated Annealing: SA) を組合せ、ハイブリッド PSO-SA 法と名づけた。Akmar ら [4.33] は、積層ハイブリッド複合材料の確率的なマルチスケール最適化における最近の進展をまとめている。以上 GA, PSO, ヒューリスティックの手法の応用について概観してきた。積層複合板の積層構成問題への GA や PSO の応用については多くの研究がなされているが、GA と PSO の探索性能の比較研究は十分に行われていない。そこで本研究では、両者の性能の違いを明らかにすることを目的とした検証を行う。

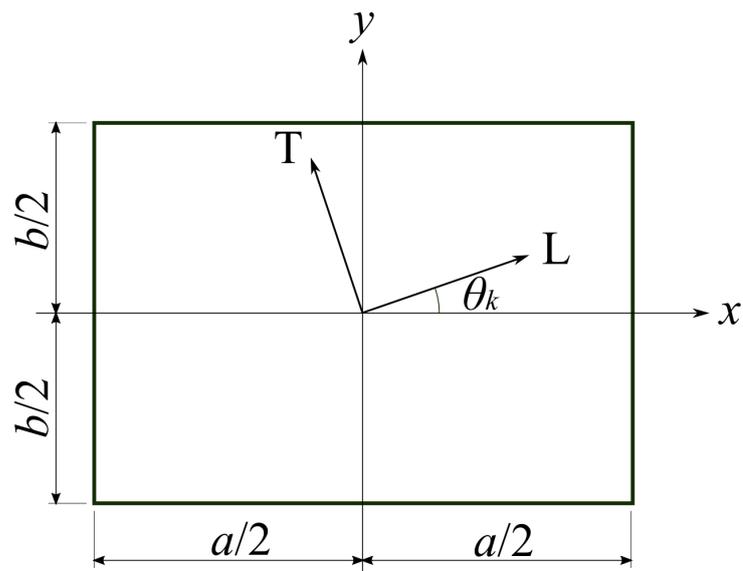


Fig. 4.1 Laminated composite rectangular plate and coordintes

## 4.4 積層板の面外振動に関する理論

図 4.1 のような直交異方性の薄板からなる積層板を考える．第  $k$  層の応力-ひずみ方程式は次のように表される．

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

ここで， $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) は，第  $k$  層における弾性的な拘束を示しており，以下の式で与えられる直交異方性板における Hooke の法則から導かれる  $Q_{ij}^{(k)}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) に対して座標変換を行ったものである．

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \\ Q_{12} &= \nu_{TL}Q_{11} = \nu_{LT}Q_{22} \\ Q_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (4.2)$$

ここで， $E_L$  と  $E_T$  はそれぞれ図 4.1 における  $L$  方向と  $T$  方向の縦弾性係数， $G_{LT}$  はせん断弾性係数， $\nu_{LT}$  と  $\nu_{TL}$  はポアソン比である．最大ひずみエネルギー  $U_{\max}$  と最大運動エネルギー  $T_{\max}$  はそれぞれ以下の式で表される．

$$U = \frac{1}{2} \iint_A \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} dA \quad (4.3)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho h \iint_A \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dA \quad (4.4)$$

ここで  $\{\kappa\}$  は次式で定義される曲率ベクトルである．

$$\{\kappa\} = \left\{ -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (4.5)$$

$[D]$  は曲げ剛性マトリックス,  $A$  は板の面積,  $\rho$  は CFRP の密度,  $h$  は板厚,  $W$  はたわみ関数である. 解析を簡単にするために, 正規化された座標系  $O-\xi\eta$  ( $-1 \leq \xi \leq 1$ ,  $-1 \leq \eta \leq 1$ ) を次式で定義する.

$$\xi = \frac{2x}{a}, \eta = \frac{2y}{b} \quad \text{and} \quad \Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_0}} \quad (4.6)$$

ここで,  $\xi, \eta$  は無次元座標,  $\Omega$  は無次元振動数パラメータ,  $\omega$  は角振動数,  $D_0$  は以下の式で表される基準曲げ剛性である.

$$D_0 = \frac{E_T h^3}{12(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})} \quad (4.7)$$

たわみは次式で表される.

$$W(\xi, \eta, t) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} A_{mn} X_m(\xi) Y_n(\eta) \sin \omega t \quad (4.8)$$

ただし,

$$\begin{aligned} X_m(\xi) &= \xi^m (\xi + 1)^{bc1} (\xi - 1)^{bc3} \\ Y_n(\eta) &= \eta^n (\eta + 1)^{bc2} (\eta - 1)^{bc4} \end{aligned} \quad (4.9)$$

ここで,  $A_{mn}$  は未知の係数,  $X_m(\xi)$  と  $Y_n(\eta)$  は境界条件を満たすように設定された変位関数である.  $bci$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) は各辺における境界条件を満たすための境界条件インデックスであり, 次のように定義される [4.34].

$$bc1, bc2, bc3, bc4 = \begin{cases} 0 & \text{(Free)} \\ 1 & \text{(Simply supported)} \\ 2 & \text{(Clamped)} \end{cases} \quad (4.10)$$

エネルギーに関する停留値は次式によって求められる。

$$\frac{\partial(U_{\max} - T_{\max})}{\partial A_{mn}} = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, M - 1; n = 0, 1, 2, \dots, N - 1) \quad (4.11)$$

式 (4.11) から、未定係数  $A_{mn}$  に関する以下の振動数方程式が得られる。

$$|[K] - \Omega^2[M]| = 0 \quad (4.12)$$

ここで、 $[K]$  は全体剛性マトリックス、 $[M]$  は全体質量マトリックスである。この固有方程式を解くことによって、最適化された無次元振動数パラメータ  $\Omega$  が求められる。

## 4.5 GA と PSO による最適解の探索

### 4.5.1 問題の設定

本研究では、設定した問題に対して GA と PSO を用いて最適解の探索を行う。設計変数となる積層板における各層の繊維配向角は連続値とする。図 4.1 に示す 8 層からなる CFRP 対称積層板を解析の対象とする。寸法と材料定数は以下の通りである。

$$a = b = 150 \text{ mm}, h = 15 \text{ mm}$$

$$E_L = 138 \text{ GPa}, E_T = 8.96 \text{ GPa}, G_{LT} = 7.1 \text{ GPa}$$

$$\nu_{LT} = 0.3, \rho = 1578 \text{ kg/m}^3$$

なお振動数パラメータは  $h$  で基準化されているため、 $a/h$  の値に影響を受けない。本研究では、積層板の基本固有振動数を最大とするような各層の繊維配向角の探索を試みる。境界条件は CSFF, SSSS, CCFE, CSSS とする。これらの 4 文字は左から順に積層板の左辺、下辺、右辺、上辺における拘束の種類を表し、F, S, C はそれぞれ非拘束 (Free), 単純支持 (Simply supported), 固定 (Clamped) を意味する。

## 4.5.2 GA

連続値の設計変数は、各個体の染色体上の遺伝子に格納される。次世代に残す個体はルーレット選択によって決定する。さらに選択が効果的に行われるように、次式で示される線形スケーリングによって適合度の変換を行う。

$$\begin{aligned}
 f_s &= af + b \\
 a &= \frac{(c-1)f_{\text{avg}}}{f_{\text{max}} - f_{\text{avg}}} \\
 b &= \frac{f_{\text{avg}}(f_{\text{max}} - cf_{\text{avg}})}{f_{\text{max}} - f_{\text{avg}}}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

ここで、 $f_{\text{max}}$  と  $f_{\text{avg}}$  はそれぞれ元の関数の最大値と平均値である。定数  $c$  は 2 に設定する。またエリート戦略、2点交叉、突然変異を採用する。

## 4.5.3 PSO

群を構成する各粒子は  $n$  次元の解探索空間に配置され、それらの位置と速度のベクトルはそれぞれ以下の式で定義される。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}_i^{k+1} &= w\mathbf{v}_i^k + c_1r_1(\mathbf{pbest}_i - \mathbf{x}_i^k) + c_2r_2(\mathbf{gbest} - \mathbf{x}_i^k) \\
 \mathbf{x}_i^{k+1} &= \mathbf{x}_i^k + \mathbf{v}_i^{k+1}
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

ここで、 $\mathbf{x}_i^k, \mathbf{v}_i^k$  はそれぞれ粒子  $i$  の世代  $k$  における  $n$  次元の位置ベクトル、速度ベクトルである。 $\mathbf{pbest}_i, \mathbf{gbest}$  はそれぞれ粒子  $i$ , 粒子全体の移動履歴の中で目的関数が最良値となったときの位置ベクトルである。 $w, c_1, c_2$  は定数、 $r_1, r_2$  は 0 から 1 の間の一様乱数である。

## 4.6 パラメータの設定

GA と PSO においては、パラメータの値が探索性能に影響を及ぼすため、それらの設定を適切に行うことは重要である。本研究では、それらを決定するために実験計画法 (DoE) [4.35] を採用した。GA と PSO のそれぞれについて、因子として四つのパラメータが選択され、それぞれについて 4 水準が設定される。パラメータの組合せは  $4^4 (= 256)$  通り存在するが、DoE に基づく実験計画によって実験回数を極端に減らすことが可能となる。表 4.1 に示す直交配列表  $L_{16}(4^4)$  にしたがえば、16 通りのパラメータの組合せについてのみ実験を行えばよい。

### 4.6.1 GA のパラメータ

集団の個体数、エリート個体数、交叉率、突然変異率を DoE の因子に選定した。表 4.2 に因子とそれぞれの水準を示す。集団の個体数のどの水準においても、(集団の個体数) $\times$ (最終の世代数) が同じ値となるように、最終の世代数を設定した。これはいずれの場合も計算コストがほぼ等しくなるようにするためである。

### 4.6.2 PSO のパラメータ

PSO に関しては、集団の粒子数、 $w, c_1, c_2$  の 4 パラメータを DoE の因子とした。表 4.3 に因子とそれぞれの水準を示す。GA の場合と同様に、集団の粒子数を因子とするすべての水準に対して、反復回数 (最終の世代数) との積が等しくなるように設定を行った。

Table 4.1 Orthogonal array  $L_{16}(4^4)$ 

Experiment	Level			
	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	1	4	4	4
5	2	1	2	3
6	2	2	1	4
7	2	3	4	1
8	2	4	3	2
9	3	1	3	4
10	3	2	4	3
11	3	3	1	2
12	3	4	2	1
13	4	1	4	2
14	4	2	3	1
15	4	3	2	4
16	4	4	1	3

Table 4.2 Factors and their levels of GA parameters

	Factor	Level			
		1	2	3	4
A	Population size	20	40	80	160
	Max. generation	200	100	50	25
B	Elite count	1	3	5	10
C	Crossover rate	0.3	0.5	0.7	0.9
D	Mutation rate	0.01	0.03	0.05	0.10

Table 4.3 Factors and their levels of PSO parameters

	Factor	Level			
		1	2	3	4
A	Population size	20	40	80	160
	Max. generation	200	100	50	25
B	$w$	0.3	0.5	0.7	0.9
C	$c_1$	1.0	1.5	2.0	2.5
D	$c_2$	1.0	1.5	2.0	2.5

## 4.7 計算結果

表 4.1 の直交配列表に基づいた実験計画にしたがって，パラメータ決定のための予備実験を 3 回ずつ行った．表 4.4, 4.5 は，これらの実験をそれぞれ GA と PSO によって行った結果得られた基本振動数を示したものである．図 4.2, 4.3 は，因子ごとに各水準を用いた場合の基本振動数 (目的関数) を示している．これらの結果から GA と PSO のパラメータとして，それぞれ表 4.6, 4.7 に示す値が選択された．なお解の収束性向上のため，最終世代数 (反復回数) は表 4.2, 4.3 の値を 10 倍して，いずれも 500 としている．

次に本計算として，上述のパラメータを用いて GA, PSO それぞれについて 3 回ずつ探索計算を行った．計算にはノートパソコン (Core 2 Duo, T9300, 2.50 GHz, 4 GB RAM, Windows 10 64-bit) を用い，プログラム開発環境として Java 1.8.0 を使用した．

計算結果を表 4.8 に示す．表中の “Converged” は，基本固有振動数  $\Omega_1$  が最終値に到達したときの世代数もしくは反復回数を表す．

それぞれの探索計算における，世代数もしくは反復回数に対する  $\Omega_1$  の値の推移を図 4.4~4.7 に示す．図中の “×” は， $\Omega_1$  が最終値に到達した世代を示す．以上の結果から，GA と PSO の 1 世代あたりに要する計算時間はほぼ同じであるが，最終的な  $\Omega_1$  は，PSO の方が GA よりもわずかに良い値となることがわかった．さらに，PSO による探索は GA の場合よりも収束が早いことが明らかとなった．PSO では少なくとも第 40 世代目までに解はほぼ収束していることが認められる．一方 GA では，500 世代目でも十分に収束してはいないと考えられる．

Table 4.4 Experimental results (GA)

Experiment	Level				Results			
	A	B	C	D	Trial 1	Trial 2	Trial 3	Mean
1	1	1	1	1	16.363	16.292	16.340	16.332
2	1	2	2	2	16.359	16.361	16.388	16.369
3	1	3	3	3	16.389	16.295	16.327	16.337
4	1	4	4	4	16.371	16.349	16.285	16.335
5	2	1	2	3	16.342	16.376	16.379	16.366
6	2	2	1	4	16.316	16.359	16.357	16.344
7	2	3	4	1	16.401	16.412	16.330	16.381
8	2	4	3	2	16.319	16.242	16.259	16.273
9	3	1	3	4	16.371	16.298	16.315	16.328
10	3	2	4	3	16.406	16.355	16.339	16.367
11	3	3	1	2	16.319	16.366	16.366	16.350
12	3	4	2	1	16.353	16.369	16.363	16.362
13	4	1	4	2	16.394	16.335	16.384	16.371
14	4	2	3	1	16.396	16.371	16.360	16.376
15	4	3	2	4	16.333	16.385	16.352	16.357
16	4	4	1	3	16.278	16.325	16.295	16.299

Table 4.5 Experimental results (PSO)

Experiment	Level				Results			
	A	B	C	D	Trial 1	Trial 2	Trial 3	Mean
1	1	1	1	1	16.410	16.308	16.410	16.376
2	1	2	2	2	16.415	16.415	16.415	16.415
3	1	3	3	3	16.344	16.331	16.368	16.348
4	1	4	4	4	16.278	16.242	16.187	16.236
5	2	1	2	3	16.415	16.415	16.415	16.415
6	2	2	1	4	16.415	16.415	16.415	16.415
7	2	3	4	1	16.381	16.307	16.375	16.354
8	2	4	3	2	16.338	16.269	16.301	16.303
9	3	1	3	4	16.393	16.404	16.314	16.370
10	3	2	4	3	16.326	16.393	16.314	16.344
11	3	3	1	2	16.413	16.412	16.411	16.412
12	3	4	2	1	16.291	16.332	16.363	16.329
13	4	1	4	2	16.376	16.402	16.378	16.385
14	4	2	3	1	16.389	16.336	16.359	16.361
15	4	3	2	4	16.310	16.364	16.389	16.354
16	4	4	1	3	16.329	16.373	16.367	16.356

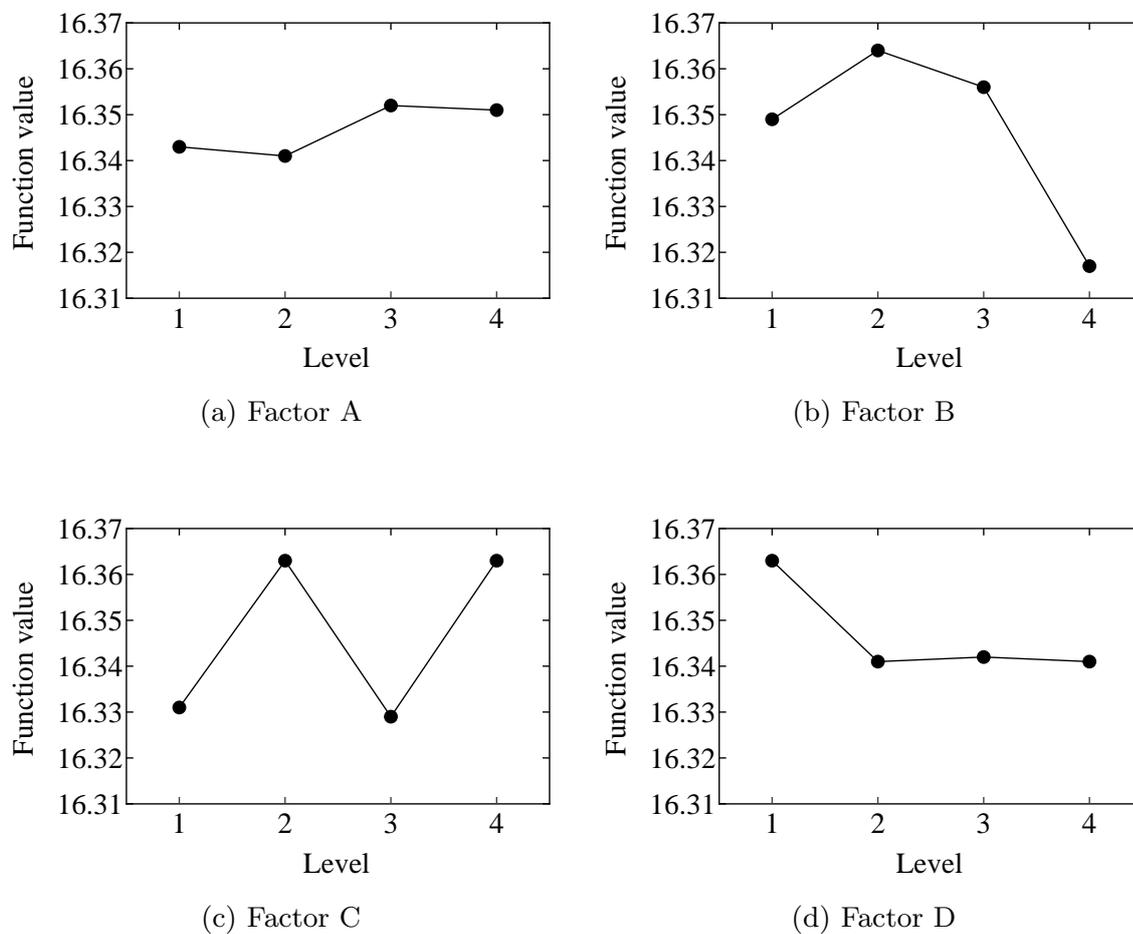


Fig. 4.2 Main effects plot (GA)

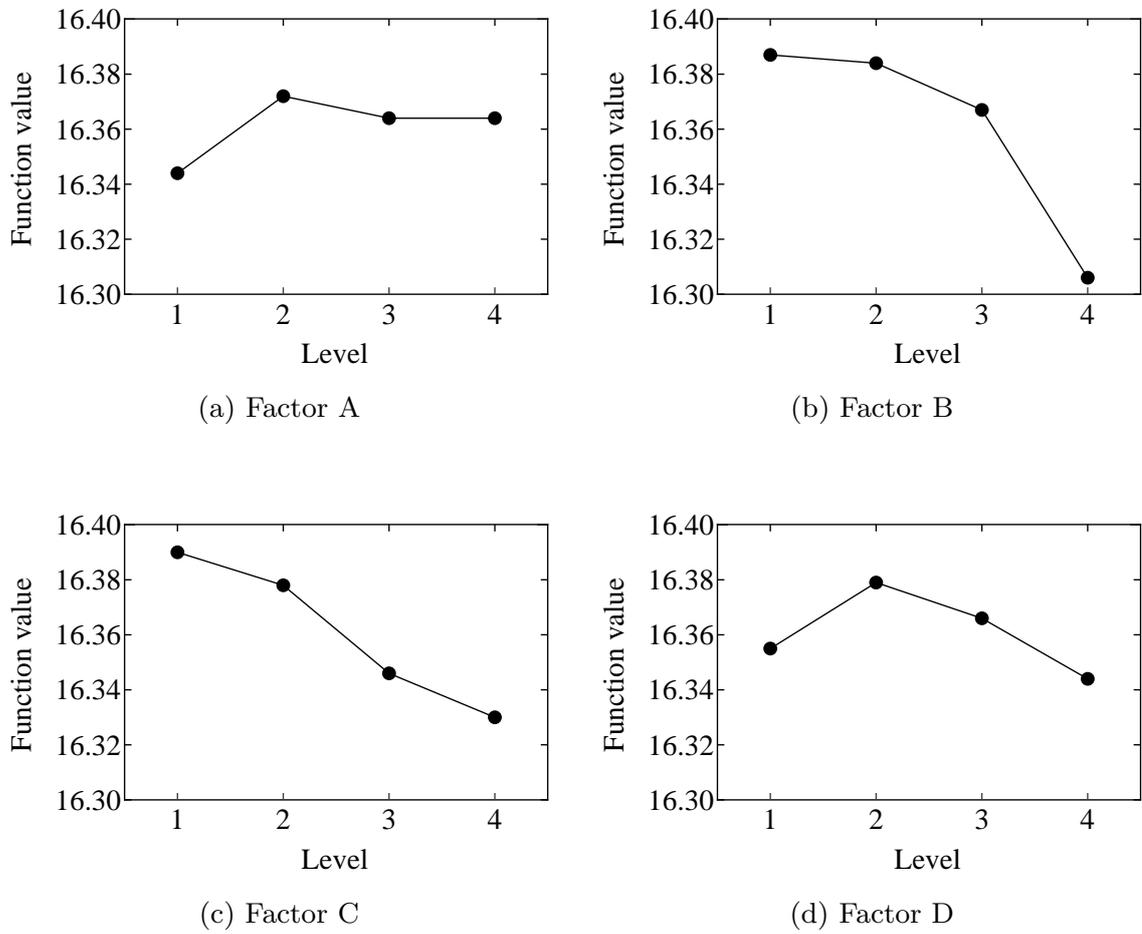


Fig. 4.3 Main effects plot (PSO)

Table 4.6 Selected parameters of GA

Population size	80
Maximum generation	500
Elite count	3
Crossover rate	0.5
Mutation rate	0.01

Table 4.7 Selected parameters of PSO

Population size	80
Maximum generation	500
$w$	0.3
$c_1$	1.0
$c_2$	1.5

Table 4.8 Maximized  $\Omega_1$ , stacking sequence and elapsed time

(a) CSFF						
	Trial	Final		Converged		Stacking sequence
		$\Omega_1$	Time (s)	Generation	Time (s)	
GA	1	16.399	16898	488	16494	[21.1/−45.4/18.7/−41.7] <sub>s</sub>
	2	16.403	16261	186	6079	[22.6/−42.5/17.5/19.3] <sub>s</sub>
	3	16.402	15941	107	3439	[21.2/−45.9/20.3/5.6] <sub>s</sub>
	Mean	16.401	16367	260	8671	
PSO	1	16.410	16757	20	705	[21.9/−44.0/21.9/−44.0] <sub>s</sub>
	2	16.415	17236	22	794	[21.5/−44.4/21.5/21.5] <sub>s</sub>
	3	16.415	16638	19	668	[21.5/−44.4/21.5/21.5] <sub>s</sub>
	Mean	16.413	16877	20	722	
(b) SSSS						
	Trial	Final		Converged		Stacking sequence
		$\Omega_1$	Time (s)	Generation	Time (s)	
GA	1	56.290	35198	379	26698	[−43.8/44.1/42.5/49.3] <sub>s</sub>
	2	56.224	35266	61	4371	[48.1/−43.9/−42.7/−50.5] <sub>s</sub>
	3	56.182	35083	236	16592	[45.4/−45.7/−40.4/−22.6] <sub>s</sub>
	Mean	56.232	35182	225	15887	
PSO	1	56.319	36084	34	2570	[−45.0/45.0/45.0/45.0] <sub>s</sub>
	2	56.319	35331	37	2790	[−45.0/45.0/45.0/45.0] <sub>s</sub>
	3	56.319	35125	34	2456	[45.0/−45.0/−45.0/−45.0] <sub>s</sub>
	Mean	56.319	35513	35	2605	

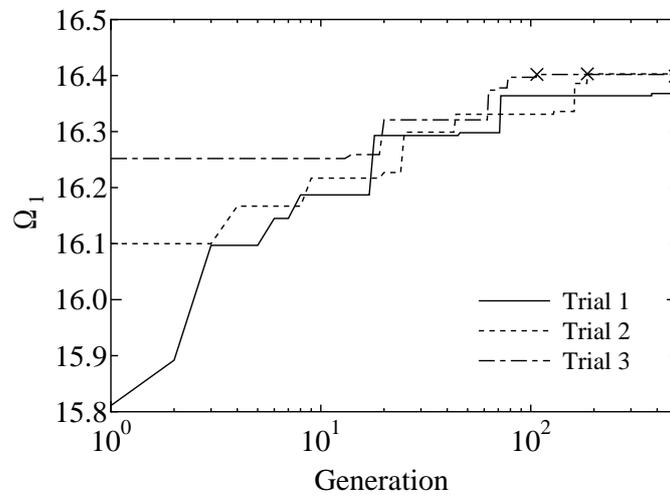
Table 4.8 (Continued)

(c) CCFF

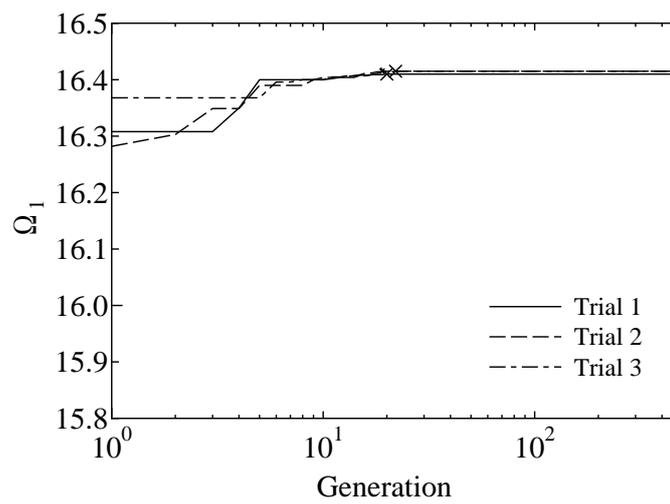
	Trial	Final		Converged		Stacking sequence
		$\Omega_1$	Time (s)	Generation	Time (s)	
GA	1	19.025	22510	18	850	[48.0/−45.5/43.3/2.3] <sub>S</sub>
	2	19.028	22756	104	4773	[45.3/−46.6/37.4/−5.5] <sub>S</sub>
	3	19.032	22201	453	20125	[45.4/−45.8/44.5/−57.9] <sub>S</sub>
	Mean	19.028	22489	192	8583	
PSO	1	19.035	22789	15	729	[45.0/−45.0/45.0/−45.0] <sub>S</sub>
	2	19.028	22480	12	586	[44.6/−44.4/44.6/90.0] <sub>S</sub>
	3	19.035	22868	14	688	[45.0/−45.0/45.0/−45.0] <sub>S</sub>
	Mean	19.033	22712	14	668	

(d) CSSS

	Trial	Final		Converged		Stacking sequence
		$\Omega_1$	Time (s)	Generation	Time (s)	
GA	1	66.710	68529	364	49910	[−28.1/31.2/35.7/10.6] <sub>S</sub>
	2	66.709	66771	483	64505	[28.2/−30.0/−31.9/−48.8] <sub>S</sub>
	3	66.756	66767	286	38371	[−28.5/31.5/33.2/26.0] <sub>S</sub>
	Mean	66.725	67356	378	50929	
PSO	1	66.765	66917	21	2940	[27.7/−31.8/−31.8/−31.8] <sub>S</sub>
	2	66.765	68934	20	2888	[−27.7/31.8/31.8/31.8] <sub>S</sub>
	3	66.765	68659	21	3015	[−27.7/31.8/31.8/31.8] <sub>S</sub>
	Mean	66.765	68170	21	2948	

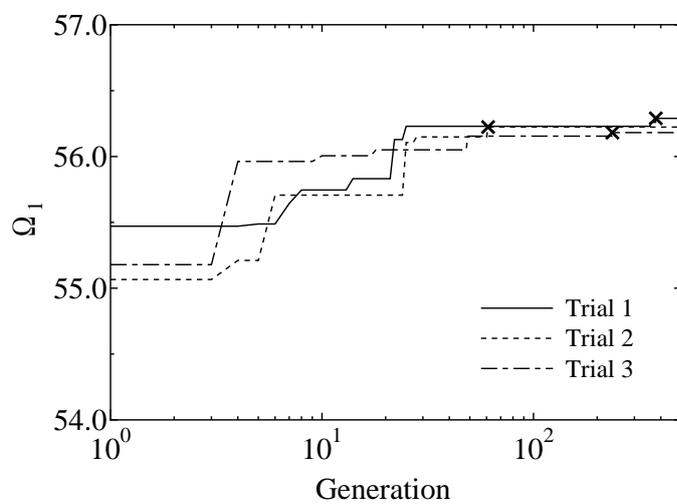


(a) GA

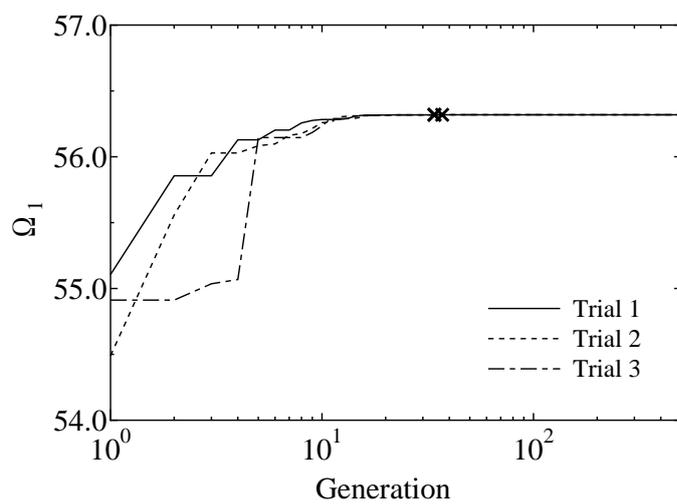


(b) PSO

Fig. 4.4 Transition of  $\Omega_1$  with generation for CSFF

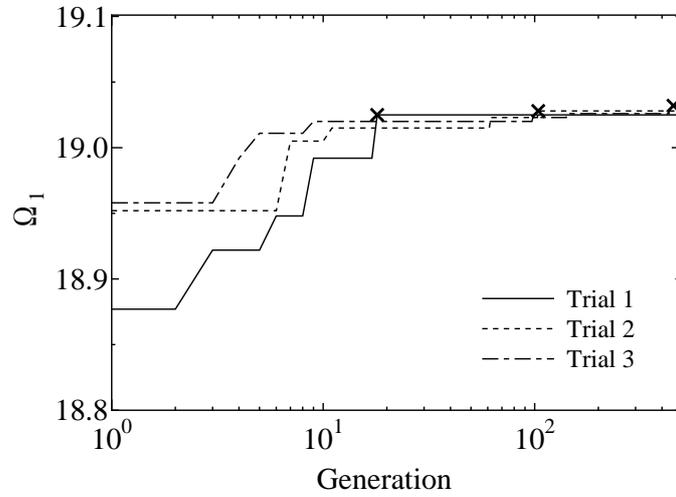


(a) GA

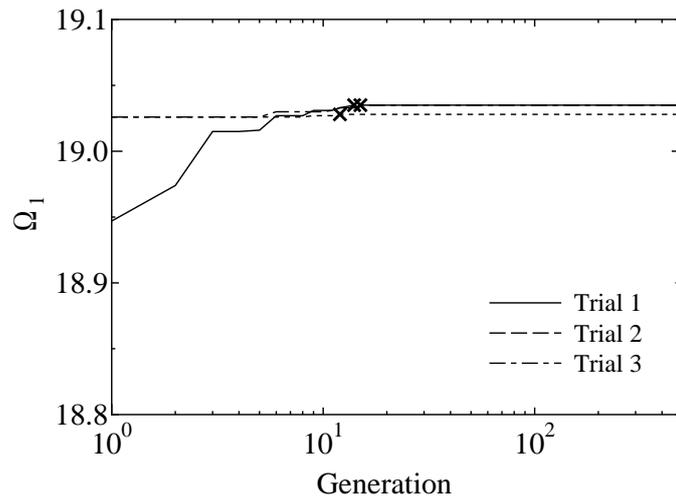


(b) PSO

Fig. 4.5 Transition of  $\Omega_1$  with generation for SSSS

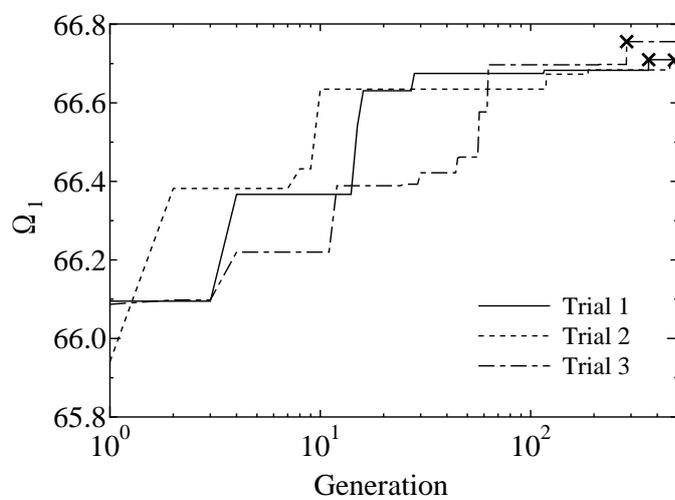


(a) GA

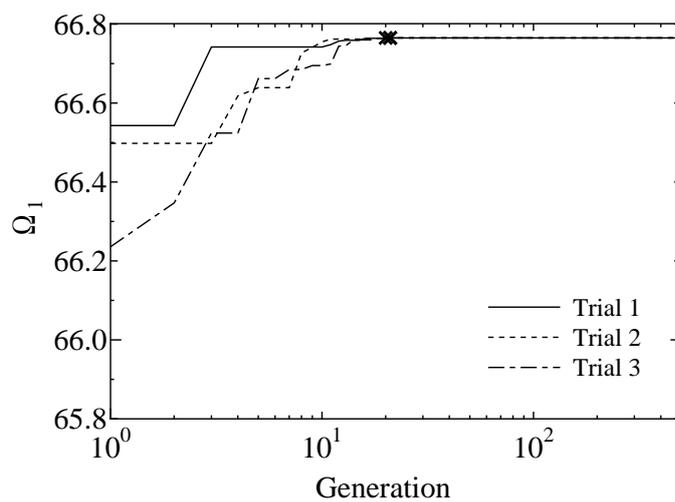


(b) PSO

Fig. 4.6 Transition of  $\Omega_1$  with generation for CCFF



(a) GA



(b) PSO

Fig. 4.7 Transition of  $\Omega_1$  with generation for CSSS

## 4.8 結言

本研究では，基本固有振動数を最適化するための探索性能について，GA と PSO の比較を行った．GA と PSO の適切なパラメータを，DoE によって効率的に選択した．本研究で取り上げた最適化問題に対して，PSO を用いた探索は GA を用いた場合よりも優れた性能を示すことが明らかとなった．すなわち  $\Omega_1$  の最大化問題では，PSO を用いることによってより大きな値が得られた．さらに PSO では GA よりも解の収束が速く，すべての解が第 40 世代目までに収束することが示された．

## 第 5 章 Blended layer を持つ積層板の面外振動解析

### 5.1 緒言

#### 5.1.1 研究の目的

本章では Blended layer を有する平板の曲げ振動を解析するための二つの実用的な方法を提案する。Blended layer を持つ均一な厚さの積層平板を対象として、その簡単かつ正確な振動解析の例示を行う。“Blended”とは、一般に異なる種類の物質をミックスして所望する品質の製品を作ることを意味する。Blended layer は、異なる直線状の繊維の配向を持つ複数のサブエリアから構成されており、積層板のいくつかの層に組み込まれる。AFP(Automated Fiber Placement) に代表される最新の製造装置の出現により、Blended layer の製造は以前より容易となった。Blended layer を採用することで、各サブエリアの繊維配向角やサブエリア間の境界位置など、パラメータが増加するため、材料により細かいチューニングを施すことが期待できる。そのため積層数や重量を増やすことなく、複合材料をより高性能化することが可能である。

本研究で取り扱う数値解析には、領域内に異なる曲げ剛性を有する対象物に対しても適用が可能なリッツ法を用いることとし、積層板の 4 辺には一般的によく用いられる境界条件を設定する。ひずみエネルギーの値は、すべてのサブエリアの値を積分することによって求められる。積層板全体の平面に対して一つの単純な多項式関数を仮定しているため、固有方程式のサイズが小さくなり計算コストを低くすることができるとともに、最適化問題への対応も容易となる。

リッツ法による計算結果を評価するため、同じ薄板理論を用いて有限要素法 (FEM) のプログラムの作成を行った。FEM のパッケージソフトはアルゴリズムがブラックボックスとなっており、曖昧さを避けるために使用しなかった。プログラムは対象と

---

する問題に最適化することを考慮して作成し，計算の効率化を図った。

### 5.1.2 研究の背景

等方性平板の振動に関する文献は，膨大な数が存在する．これは工学的な構造物の多くが金属板の部品を使用しており，多くの場合設計の過程で振動の挙動を定量的に評価することが求められるためである．1969年に出版された Leissa による著名な論文 (1993年に復刻)[5.1] は，現在でも関連の論文に引用されており，さまざまな等方性長方形板について固有振動数の一覧が提供されている [5.2]．また等方性平板の力学に関するいくつかの教科書やハンドブック [5.3–5.5] が出版されている．

さらに，ここ数十年の間に構造物への繊維強化プラスチック (FRP) 複合材の使用が実用化されるようになり，複合板の振動解析に関するより多くの情報が求められるようになった．Vinson と Sierakowski [5.6], Reddy [5.7], Jones [5.8], Leissa と Qatu [5.9] によって，複合板の力学に関する多くの教科書が出版された．炭素繊維強化プラスチック (CFRP) は，当初高コストであったため，主に航空宇宙産業のような費用対効果と軽量化が特に要求される分野で用いられてきた [5.10]．そのため航空機構造用の複合材料に特化した教科書が出版された [5.11]．最近では例えば [5.12] のように，航空機構造におけるモーフィング要素について，より革新的な応用についての研究が行われている．

航空宇宙産業での成功に続き，コスト削減が進んだことで自動車産業においてもこれらの材料の適用が重要なテーマとなった．自動車構造部品への繊維強化複合材料の使用に関して，それまでに発表された論文のリストや実用例を紹介するレビュー記事 [5.13, 5.14] が公開されている．[5.15] では繊維強化複合材を用いた薄い部品のモデリングに関して，自動車の屋根やフェンダーを中心としてまとめられている．

本研究では複合材料として，マトリックス (エポキシ樹脂など) に埋め込まれた直線

状の繊維 (ここでは炭素繊維) からなるラミナを有する積層体を考える。繊維はマトリックスよりも剛性が高いため、各層は材料の直交異方性すなわち面内の繊維方向と繊維に直交する方向で異なる弾性定数を有する。このような方向性の存在は力学的には複雑になるが、層を適切に重ねることで積層体に対し意図する性質を持たせるように設計することができる。

現在では、繊維を曲線状に配置した複合材の製造が可能となっている。この繊維によって同一層内であっても局所的に異方性が変化するために、自由度がさらに増大しよりフレキシブルな設計を行うことが可能となった。そのため、適切にレイアウトされた曲線状の繊維が埋め込まれた積層複合材は、直線状の繊維が用いられた従来の複合材よりも高い機械的特性を有することが期待できる。このような複合材は、TFP(Tailored Fiber Placement) マシンを使用して製造することができる [5.16]。TFP マシンは、水平方向に回転するボビンから糸状の繊維が供給されて、ソーイングヘッドによって縫いつける動きを行う。

性質が一様でなく異方性が領域内で異なるような複合材の考え方はすでに以前から存在し、1990 年には直線状の繊維を不均一に配置することが提案されていた [5.17]。さらに、直線状の繊維の配向角度が互いに異なる複数のサブエリアから構成される Blended layer を使用することによって、曲線状の繊維の生成に要する高コストや最適化に伴う設計の複雑さを回避しつつ、積層板の軽量化、高剛性化が期待できる。Soremekun ら [5.18] は、積層板を軽量化するために、積層板の 2 次元配列化を提案した。3×3 枚の配列のパネルと 18 枚のパネルの組を使用する場合の計算例が示された。

## 5.2 Blended layer を持つ対称積層板の面外振動の解析

### 5.2.1 リッツ法による解析

図 5.1 に示すように、分割されたサブエリアを有する対称積層板を考える。サブエリアごとに繊維配向角は一様な値となっている。 $k$  番目の層のサブエリア  $p$  の応力-ひずみ関係は以下の式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k,p)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k,p)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

ここで、 $\bar{Q}_{ij}^{(k,p)}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) は剛性係数  $Q_{ij}^{(k,p)}$  を  $xy$  平面に垂直な  $z$  軸のまわりに角度  $\theta_{k,p}$  だけ回転したときに相当する値である。 $Q_{ij}^{(k,p)}$  は以下のように求められる。

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}} \\ Q_{12} &= \nu_{TL}Q_{11} = \nu_{LT}Q_{22} \\ Q_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (5.2)$$

ただし、添字  $k, p$  は省略した。 $E_L, E_T$  はそれぞれ繊維方向とその直角方向の縦弾性係数、 $\nu_{LT}$  と  $\nu_{TL}$  はそれぞれの方向におけるポアソン比、 $G_{LT}$  はせん断弾性係数である。

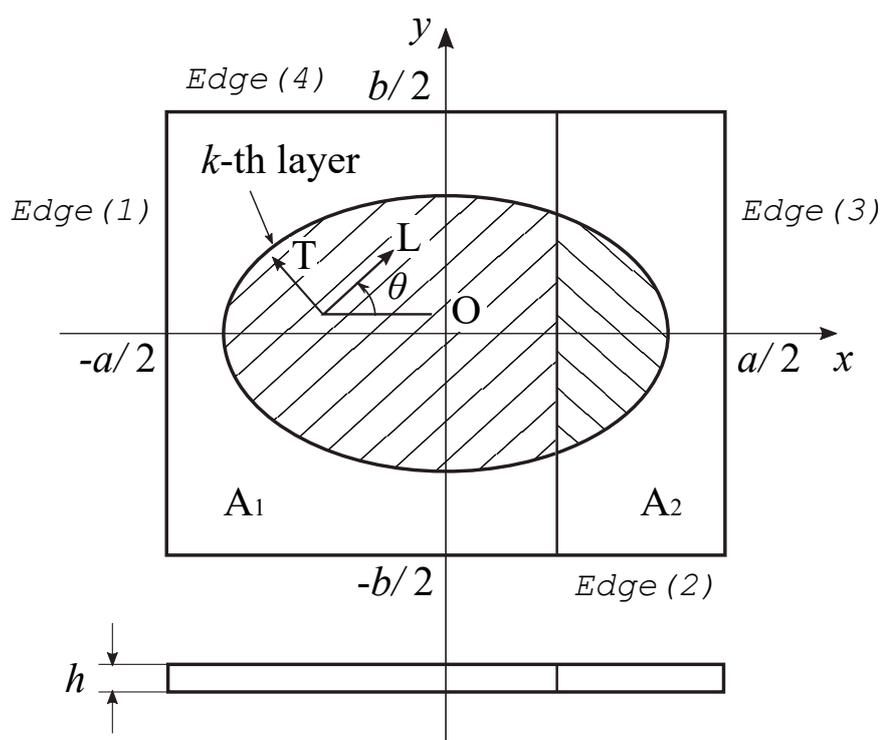


Fig. 5.1 Rectangular plate containing blended layers with two subareas and coordinte system

ひずみエネルギーと運動エネルギーは、それぞれ式 (5.3), (5.4) で与えられる.

$$U = \sum_{p=1}^P \frac{1}{2} \iint_A \{\kappa\}^T [D_p] \{\kappa\} dA_p \quad (5.3)$$

$$T = \frac{1}{2} \rho h \iint_A \left( \frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 dA \quad (5.4)$$

ここで  $\rho$  [ $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ] は平均密度であり、層全体で同一の材料を使用しているものとする. 曲率ベクトル  $\{\kappa\}$  は以下のように定義される.

$$\{\kappa\} = \left\{ -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (5.5)$$

$[D_p]$  はサブエリア  $p$  の全厚についての曲げ剛性マトリックスで、その成分は以下の式で表される.

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^K \bar{Q}_{ij}^{(k,p)} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (5.6)$$

ここで  $z_{k-1}, z_k$  はそれぞれ第  $k$  層の下面、上面の中立面を基準とした厚さ方向の座標である. 式 (5.3)~(5.6) において、 $W, A, h, K$  は、それぞれたわみ関数、断面積、厚さ、層数である. 解析を簡単にするため以下の無次元量を導入する.

$$\xi = \frac{2x}{a}, \eta = \frac{2y}{b} \quad \text{and} \quad \Omega = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_0}} \quad (5.7)$$

$\xi, \eta$  は無次元化された座標、 $\Omega$  は無次元振動数、 $\omega$  は角振動数、 $D_0$  は次式で定義される基準板剛性である.

$$D_0 = \frac{E_T h^3}{12(1 - \nu_{LT}\nu_{TL})} \quad (5.8)$$

たわみは以下の式で与えられる.

$$W(\xi, \eta, t) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} A_{mn} X_m(\xi) Y_n(\eta) \sin \omega t \quad (5.9)$$

ただし,

$$X_m(\xi) = \xi^m (\xi + 1)^{bc1} (\xi - 1)^{bc3} \quad (5.10)$$

$$Y_n(\eta) = \eta^n (\eta + 1)^{bc2} (\eta - 1)^{bc4}$$

式 (5.9) において,  $A_{mn}$  は未定係数であり,  $X_m(\xi)$ ,  $Y_n(\eta)$  は境界条件を幾何学的に満たす関数である.  $bci$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) は境界条件インデックス [5.19] であり, 以下の値をとる.

$$bci = \begin{cases} 0 & \text{(Free)} \\ 1 & \text{(Simply supported)} \\ 2 & \text{(Clamped)} \end{cases} \quad (5.11)$$

無次元振動数である固有値  $\Omega$  に関する振動数方程式は以下の式から求められる.

$$\frac{\partial}{\partial A_{mn}} (T_{\max} - U_{\max}) = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots, M-1; n = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (5.12)$$

式 (5.12) から次式が導かれる.

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} ([K] - \Omega^2 [M]) \{A_{mn}\} = 0 \quad (5.13)$$

ここで,  $[K]$  と  $[M]$  はそれぞれ全体剛性マトリックス, 全体質量マトリックスである.

Blended layer が繊維配向角の異なる  $P$  個のサブエリア  $A_1, A_2, \dots, A_P$  から構成されているとき,  $[K]$  は以下の式から求められる.

$$[K] = \sum_{p=1}^P [K_p] \quad (5.14)$$

ここで  $[K_p]$  はサブエリア  $A_p$  に関する剛性マトリックスである。

### 5.2.2 FEM による解析

本節でとりあげる FEM による定式化は前節と同じ薄板理論に基づいており、リッツ法による解析の精度を検証するために有効である。定式化は、リッツ法の場合と同様にエネルギー式 (5.3), (5.4) から行う。要素は、頂点  $i, j, k, l$  を節点とする長方形である。

境界を含む要素内部のたわみを次式のように仮定する。

$$W(x, y, t) = w(x, y) \sin \omega t = \{P\} \{\alpha\} \sin \omega t \quad (5.15)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \{P\} &= \left\{ 1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3 \right\} \\ \{\alpha\} &= \left\{ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \quad \alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12} \right\}^T \end{aligned} \quad (5.16)$$

節点  $i$  における変位を以下のように定義する。

$$\{\delta_i\} = \left\{ W_i \quad \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_i \quad \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)_i \right\}^T \quad (5.17)$$

要素の 4 節点の変位は以下のように表す。

$$\{\delta_e\} = \{\delta_i \quad \delta_j \quad \delta_k \quad \delta_l\}^T \quad (5.18)$$

式 (5.15) を 4 節点座標に代入することによって得られる  $[C]$  を用いて、 $w$  は以下のように表すことができる。

$$w(x, y) = \{P\}[C]^{-1}\{\delta_e\} \quad (5.19)$$

さらに式 (5.19) を式 (5.5) に代入して得られる  $[Q]$  を用いて曲率ベクトルは以下のよう  
に表される。

$$\{\kappa\} = [Q][C]^{-1}\{\delta_e\} \quad (5.20)$$

要素のひずみエネルギーは以下の式によって求められる。

$$U_e = \frac{1}{2} \iint_A \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} dA = \frac{1}{2} \{\delta_e\}^T [K_e] \{\delta_e\} \quad (5.21)$$

ここで,  $[K_e]$  は以下の式で表される要素剛性マトリックスである。

$$[K_e] = ([C]^{-1})^T \left( \iint_A [Q]^T [D] [Q] dA \right) [C]^{-1} \quad (5.22)$$

式 (5.22) の曲げ剛性マトリックス  $[D]$  は Blended layer のサブエリアの状態によって  
決まる。同様にして要素運動エネルギーの最大値は以下のように与えられる。

$$T_e = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \iint_A w^2 dA = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \{\delta_e\}^T [M_e] \{\delta_e\} \quad (5.23)$$

ここで,  $[M_e]$  は式 (5.19) を用いて求められる要素質量マトリックスである。

$$[M_e] = ([C]^{-1})^T \left( \iint_A \{P\} \{P\}^T dA \right) [C]^{-1} \quad (5.24)$$

要素剛性マトリックスと要素質量マトリックスは全体マトリックスに組み入れられる。  
また Blended layer においてそれぞれ異なる繊維配向角を有する各サブエリアの要素  
剛性マトリックスは, 式 (5.22) によって求められる。以上の結果から, 次式が導か  
れる。

$$([K] - \omega^2 [M]) \{\delta\} = 0 \quad (5.25)$$

ここで  $[K]$ ,  $[M]$ ,  $\{\delta\}$ ,  $\omega$  はそれぞれ全体剛性マトリックス, 全体質量マトリックス, 全体変位ベクトル, 角振動数である. 式 (5.25) の  $\omega$  は式 (5.7) を用いて無次元値に変換される.

### 5.3 数値計算例

図 5.2 に本研究でとりあげる四つの場合を示す. 図 5.2 の (a), (b), (c), (d) はそれぞれサブエリア数が 2, 3, 4, 5 の場合であり, 以下 BL-2, BL-3, BL-4, BL-5 と表す. また Blended layer を採用しない 1 領域の場合は BL-1 と表現する. Blended layer は縫製機によってサブエリア間では連続的に生成されており, サブエリアの境界位置で繊維配向角が変更する. サブエリア間における角度の変化は, 繊維のよじれなく生成を行えるために  $45^\circ$  以下に制限することとする.

曲げ剛性は, 中立面を基準とする厚さ方向の座標  $z$  の 3 乗に比例することが知られており, (効果)/(コスト) の点から Blended layer を最外層もしくはその近傍の層に配置することが合理的である. 本研究では, 12 層から構成される対称積層板を考える. Blended layer を用いない積層板 (BL-1) における各層の繊維配向角は,  $[\theta_1^\circ/\theta_2^\circ/0^\circ/45^\circ/90^\circ/-45^\circ]_S$  と表される. かっこの外の “S” は対称であることを表し, 図 5.1 のとおり整数は  $x$  軸を基準とした繊維配向角を表す (以下, 度を示す “ $^\circ$ ” は省略する). 上記の設定では, 外側の 2 層のみの繊維配向角を変数とする.

下線を付した対称的な  $[0/45/90/-45]_S$  の集合は, 面内張力ではマクロの視点で等方性を示すが, 曲げについては等方性を示さない. 図 5.2 に示す Blended layer にお

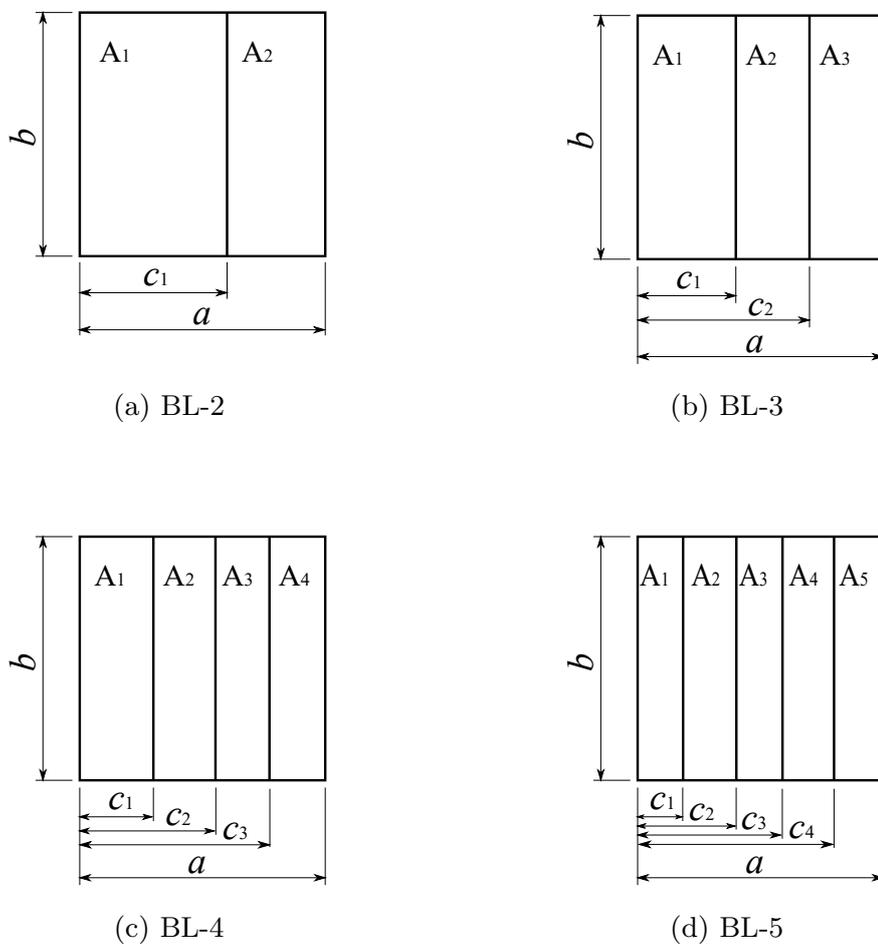


Fig. 5.2 Numerical examples for plates with two, three, four and five subareas in the targeted layers

いて、最適化を行うための繊維配向角を次式のように設定した。

$$\begin{aligned}
 \text{BL-2} &: [(\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2})/\theta_2/0/45/90/ - 45]_S \\
 \text{BL-3} &: [(\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2}/\theta_1^{A3})/\theta_2/0/45/90/ - 45]_S \\
 \text{BL-4} &: [(\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2}/\theta_1^{A3}/\theta_1^{A4})/\theta_2/0/45/90/ - 45]_S \\
 \text{BL-5} &: [(\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2}/\theta_1^{A3}/\theta_1^{A4}/\theta_1^{A5})/\theta_2/0/45/90/ - 45]_S
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

等方な板では、ヤング率  $E$  とポアソン比  $\nu$  の 2 定数のみが弾性特性を定義するために必要である。一方積層板の場合に弾性特性を記述するには、独立した 4 弾性定数が必要となる。過去の文献では、研究がまだ開発途上であったことから、測定によって得られた値や化学会社から提供されたデータが弾性定数として用いられており、それぞれ異なるものであった。

本研究では、以下の材料定数を用いることとする。

$$E_L = 150 \text{ GPa}, E_T = 10 \text{ GPa}, G_{LT} = 5 \text{ GPa}, \nu_{LT} = 0.3 \tag{5.27}$$

式 (5.27) は CFRP プリプレグの平均的な値を示しており、文献 [5.20] で検証が行われている。

## 5.4 リッツ法と FEM による解析精度の比較

リッツ法と FEM による数値解の収束特性を調べ、それぞれの無次元振動数を比較することによって精度を評価する。表 5.1 は、 $b/a = 1$  なる正方形の BL-2 積層板における 5 次までの無次元振動数  $\Omega_1 \sim \Omega_5$  を両解法で求めた結果である。なお各層の繊維配向角は次式のとおりである。

$$[(45^{A1}/0^{A2})/ - 45/0/45/90/ - 45]_S, \quad c_1/a = 0.6 \tag{5.28}$$

ここで、最外層の左側と右側の各サブエリアにおける配向角はそれぞれ  $\theta_1^{A1} = 45^\circ$ ,  $\theta_1^{A2} = 0^\circ$  であり、両サブエリアの境界位置は  $c_1/a = 0.6$  であることを示している。境界条件として CSSF, SSSS, CCCC, CFFF の 4 種類を設定した。C, S, F はそれぞれ固定支持, 単純支持, 非拘束 (自由) であることを表し、これらの記号からなる 4 文字は順に図 5.1 の辺 (1), (2), (3), (4) における支持の状態を示す。

表 5.1 はリッツ法による計算を項数  $M \times N$  が  $6 \times 6, 8 \times 8, 10 \times 10, 12 \times 12$  すなわち行列の要素数が  $36 \times 36, 64 \times 64, 100 \times 100, 144 \times 144$  の場合について行った結果である。数値解は項数が多くなるほど減少し、上位 3 桁か 4 桁で収束している。一方 FEM では、 $x, y$  方向の要素数を  $10 \times 10, 15 \times 15, 20 \times 20$  とした。マトリックスの行数、列数はいずれも  $\{(1 \text{ 辺の要素数}) + 1\}^2 \times 3$  となるため、上記の行列の要素数はそれぞれ  $363 \times 363, 768 \times 768, 1323 \times 1323$  となる。計算時間に影響する行列のサイズがリッツ法と FEM では大きく異なることがわかる。

このように、いずれの場合も無次元振動数は収束する傾向を示す。リッツ法による解は上限値を示し、厳密解の存在を仮定するとそれらはより低い値となるはずである。FEM では、要素数が増加するほど収束する傾向を示し、有効数字 3~4 桁程度の値を得ることができる。ただしリッツ法による数値解とは異なり、FEM では要素数の増加に伴って値が増加するものと減少するものが存在する。これは、隣接する要素の境界に沿った面の傾きが連続しているという条件が考慮されておらず、適合条件が満たされないためである。表中にリッツ法に対する FEM の数値解の差異 (%) =  $[\Omega(\text{FEM } 20 \times 20) - \Omega(\text{Ritz } 12 \times 12)] / \Omega(\text{Ritz } 12 \times 12)$  が記載されているが、いずれも 1% 以内に収まっている。

Table 5.1 Convergence and comparison of Ritz and FEM solutions for (BL-2) two-area square plates with  $[(45^{A1}/0^{A2})/-45/0/45/90/-45]_S$  ( $b/a = 1$ ,  $c_1/a = 0.6$ )

			$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	
CSSF	Ritz	$6 \times 6$	44.59	76.90	142.96	145.40	185.21	
		$8 \times 8$	44.48	76.82	141.83	145.05	184.91	
		$10 \times 10$	44.44	76.80	141.78	144.95	184.82	
		$12 \times 12$	44.42	76.79	141.76	144.89	184.77	
	FEM	$10 \times 10$	44.37	76.21	140.23	145.06	182.83	
		$15 \times 15$	44.33	76.50	141.04	144.83	183.79	
		$20 \times 20$	44.32	76.61	141.33	144.74	184.13	
	dif. (%)			-0.22	-0.23	-0.30	-0.10	-0.34
	SSSS	Ritz	$6 \times 6$	50.38	110.35	138.51	202.56	210.51
			$8 \times 8$	50.36	110.30	138.33	201.47	208.68
$10 \times 10$			50.35	110.28	138.26	201.42	208.55	
$12 \times 12$			50.34	110.27	138.21	201.40	208.49	
FEM		$10 \times 10$	50.05	109.23	136.99	198.23	205.33	
		$15 \times 15$	50.19	109.78	137.57	199.91	206.92	
		$20 \times 20$	50.24	109.98	137.78	200.52	207.52	
dif. (%)			-0.20	-0.26	-0.31	-0.43	-0.46	
CCCC		Ritz	$6 \times 6$	89.89	163.49	202.56	272.27	280.15
			$8 \times 8$	89.87	163.44	202.35	272.00	279.79
	$10 \times 10$		89.85	163.42	202.25	271.96	279.70	
	$12 \times 12$		89.85	163.42	202.25	271.96	279.70	
	FEM	$10 \times 10$	88.85	160.78	199.64	265.88	273.40	
		$15 \times 15$	89.35	162.13	200.83	269.01	276.44	
		$20 \times 20$	89.54	162.65	201.29	270.20	277.69	
	dif. (%)			-0.35	-0.47	-0.48	-0.65	-0.72
	CFFF	Ritz	$6 \times 6$	8.54	22.35	52.83	60.94	76.53
			$8 \times 8$	8.51	22.31	52.36	60.35	76.25
$10 \times 10$			8.51	22.29	52.25	60.31	76.14	
$12 \times 12$			8.51	22.29	52.19	60.28	76.06	
FEM		$10 \times 10$	8.50	22.27	52.16	60.27	75.95	
		$15 \times 15$	8.50	22.27	52.06	60.24	75.89	
		$20 \times 20$	8.50	22.26	52.03	60.22	75.86	
dif. (%)			-0.07	-0.10	-0.31	-0.10	-0.27	

Table 5.2 Convergence and comparison of Ritz and FEM solutions for (BL-4) four-area square plates with  $[(30^{A1}/75^{A2}/45^{A3}/0^{A4})/-45/0/45/90/-45]_S$  ( $b/a = 1$ ,  $c_1/a = 0.2$ ,  $c_2/a = 0.6$ ,  $c_3/a = 0.8$ )

			$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	
CSSF	Ritz	6 × 6	43.49	79.68	130.39	162.70	173.40	
		8 × 8	43.43	79.53	129.66	161.34	172.51	
		10 × 10	43.38	79.48	129.57	161.28	172.34	
		12 × 12	43.36	79.45	129.47	161.22	172.31	
	FEM	10 × 10	43.29	78.82	129.62	159.41	170.12	
		15 × 15	43.26	79.09	129.36	160.30	171.07	
		20 × 20	43.25	79.19	129.27	160.63	171.42	
	dif. (%)			-0.25	-0.33	-0.15	-0.37	-0.52
	SSSS	Ritz	6 × 6	50.13	123.34	128.31	198.64	250.92
			8 × 8	50.06	123.22	127.98	198.34	247.36
10 × 10			50.04	123.11	127.86	198.13	247.26	
12 × 12			50.02	123.07	127.82	198.10	247.20	
FEM		10 × 10	49.65	121.66	126.42	193.61	244.24	
		15 × 15	49.80	122.25	127.01	195.79	245.71	
		20 × 20	49.85	122.47	127.23	196.60	246.27	
dif. (%)			-0.34	-0.49	-0.46	-0.76	-0.38	
CCCC		Ritz	6 × 6	96.43	189.05	193.75	276.94	338.33
			8 × 8	96.37	188.87	193.61	276.63	336.99
	10 × 10		96.36	188.80	193.59	276.55	336.78	
	12 × 12		96.35	188.77	193.55	276.46	336.61	
	FEM	10 × 10	95.26	185.98	190.65	267.66	331.34	
		15 × 15	95.80	187.31	192.09	272.10	333.62	
		20 × 20	96.00	187.82	192.64	273.79	334.52	
	dif. (%)			-0.36	-0.50	-0.47	-0.97	-0.62
	CFFF	Ritz	6 × 6	8.73	21.89	50.56	63.00	76.85
			8 × 8	8.71	21.81	50.35	62.17	76.48
10 × 10			8.70	21.79	50.27	62.12	76.28	
12 × 12			8.69	21.77	50.24	62.10	76.25	
FEM		10 × 10	8.66	21.73	50.23	61.95	76.05	
		15 × 15	8.66	21.72	50.15	61.98	76.05	
		20 × 20	8.66	21.72	50.12	61.99	76.05	
dif. (%)			-0.35	-0.23	-0.24	-0.18	-0.26	

表 5.2 は、BL-4 積層板について各層の繊維配向角と最外層のサブエリアの境界を

$$[(30^{A1}/75^{A2}/45^{A3}/0^{A4})/\underline{-45/0/45/90/-45}]_S \quad (5.29)$$

$$c_1/a = 0.2, c_2/a = 0.6, c_3/a = 0.8$$

と設定し、5 次までの無次元振動数  $\Omega_1 \sim \Omega_5$  を表 5.1 と同じ形式で示したものである。式 (5.29) は、最外層の各サブエリアの繊維配向角が  $\theta_1^{A1} = 30^\circ$ ,  $\theta_1^{A2} = 75^\circ$ ,  $\theta_1^{A3} = 45^\circ$ ,  $\theta_1^{A4} = 0^\circ$  であることを表している。境界条件は BL-2 積層板の場合と同じ 4 種類である。

解の収束は表 5.1 の場合と同様の傾向を示しており、リッツ法による解は FEM の解よりも大きい値となっている。両者によって得られた振動数の差異はすべて 1% 以下であることが確認された。これまでの研究では、Blended layer を有する積層板をリッツ法によって解析した結果の正当性について論じられたものは見られなかったが、本研究での FEM の解との比較を行うことによってリッツ解の有効性が示された。次章における最適設計のための計算は、すべてリッツ法を用いて行う。

## 5.5 結言

本研究では、最外層に Blended layer を有する正方形対称積層板の面外曲げ振動の解析をリッツ法を応用して行った。最外層に 2~5 領域のサブエリアを有する Blended layer を持ち 12 層からなる対称積層板について固有振動数を求めた。計算の妥当性を検証するために、FEM のプログラムを用いた数値解析をあわせて行った。リッツ法と FEM による解析結果は非常によく一致し、5 次までの固有振動数の差異はいずれも 1% 以内であることが明らかとなった。

以上の結果から、Blended layer を有する積層板に対しても、リッツ法による振動解析によって実用的な結果が得られることが確かめられた。

## 第 6 章 Blended layer を持つ積層板の最適化

### 6.1 緒言

#### 6.1.1 研究の目的

これまで Blended layer に関連する内容の文献はいくつか発表されているが、その振動の最適化を論じているものは見当たらない。そこで本章では、その最適化について取り扱う。

第 5 章で取り扱った Blended layer を有する積層板を対象とし、面外振動の解析を行う。設計変数が比較的少ない最適化問題に対しては、実用時間内ですべての解候補の組合せについて計算を行うことが可能であるため、総当たり法を用いる。一方設計変数が多い問題には、遺伝的アルゴリズム (GA) を用いて準最適解を求める。最大となる基本振動数とそのときの各パラメータを求め、繊維配向角が一樣なラミナのみから構成された積層板と比較してその有効性を検証する。

#### 6.1.2 研究の背景

直交異方性のラミナから構成される積層体において、数理計画法を用いて積層の最適化が行われた [6.1]。Gürdal ら [6.2] によって、複合材料の構造最適設計に関する教科書が出版された。

複合板への最適化の試みは、1970 年代の Bert による研究 [6.3, 6.4] に始まり、1990 年代まで続いた [6.5, 6.6]。設計問題に対し積層パラメータを用いることは、典型的な手法であった [6.6, 6.7]。積層板の最適化において、問題を単純化して容易に解を得る層別最適化法が Narita [6.8–6.10] によって提案された。このような平行な直線繊維が層内に一樣に分布している積層板では、剛性は板内で均一となる。このクラスの問題

は、剛性一定の最適化と呼ばれている。これについて Ghiasi ら [6.11] は、剛性が一定となる設計の 2009 年までの成果をまとめている。

繊維の配向角を空間的に変化させることが Gürdal と Olmedo [6.12] によって提案され、穴の周りに曲線状の繊維を導入することによって応力集中を緩和する方法が検討された [6.13]。また振動する板の基本振動数を最大化するために、剛性を変化させる研究が行われた [6.14]。このような領域内の剛性が不均一となるような複合板について、可変剛性設計の最適化と題して 2010 年までの文献のレビューが Ghiasi らによってまとめられた [6.15]。曲線状に配置された繊維を内包するマトリックスについての研究も続けられた [6.16, 6.17]。Honda らは、曲線に沿って補強された複合長方形板の振動解析 [6.18] や、複合板に短繊維を最適配置して振動数を最大化するための設計 [6.19] などに関する論文を発表した。また Honda らは、形状が最適化された曲線繊維を持つ板の基本振動数最大化に関する論文 [6.20]、短繊維と曲線繊維によって生じる局所的な異方性を持つ板の設計に関する論文 [6.21]、任意の曲線繊維に沿った形状を持つ板の解析に関する論文 [6.22] を発表している。さらには、GA を拡張した非優越ソート GA (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm: NSGA) を用いて、板材における曲線状の繊維を決定する多目的最適化問題に取り組んだ [6.23]。その他に、TFP マシンで製造された可変剛性複合材の多目的最適化に関する論文 [6.24] も発表した。上述の文献 [6.12–6.24] で言及されている可変剛性の考え方は、自由度が高い設計を可能にする一方で多くの設計変数が必要となり、計算コストの増加をもたらす。また実際には TFP マシンを使用すると、直線状の繊維を用いる複合材の場合よりも製造に要する時間が大幅に増大する。

モーフィングフラップ [6.25] については、Panesar と Weaver [6.26] が混合双安定積層板の最適化について論じている。整数計画法によって、階段状の厚さを持つ

Blended layer 板の重量を最小化する解が求められた [6.27]. 積層パラメータを最適化に用いる場合に, 静的問題で Blended layer に対する制約が定式化され, 18 パネルの馬蹄形混合問題が例示された [6.28]. 同じベンチマーク問題について, Yang ら [6.29] は PDS (Ply-Drop Sequence) という概念を提案した. これも同じ範疇の積層複合材問題に属するものである. Muc [6.30] は GA を用いて, 座屈の制約下における混合テーパー積層板の設計を行った.

## 6.2 複数のサブエリアを有する積層板の振動数最適化

### 6.2.1 BL-2 積層板の総当たり法による最適化

本節では最外層に BL-2 の Blended layer を有する対称積層板をとりあげる. 各層の繊維配向角を以下のように設定する.

$$\left[ (\theta_1^{A1}/\theta_2^{A2}) / -45/0/45/90/-45 \right]_S, \quad c_1/a = 0.6 \quad (6.1)$$

Blended layer は最外層のみに採用される. 2 層目の繊維配向角は  $-45^\circ$  であり, その内側の下線で示された各層は全体として準等方性の性質を示すとみなすことができる. 最適化問題は次のような形で定式化することができる.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize the fundamental frequency } \Omega_1 \\ & \text{Design variables : } \theta_1^{A1}, \theta_1^{A2}, c_1/a \\ & \text{Constraint : } |\theta_1^{A1} - \theta_1^{A2}| \leq 45^\circ \end{aligned} \quad (6.2)$$

なお繊維配向角は離散値をとるものとし,  $\theta_1^{A1}, \theta_1^{A2}$  についてはそれぞれ  $\Delta\theta_1^{A1}, \Delta\theta_1^{A2}$  の倍数の値を解候補とする. サブエリア間の境界位置の解候補も離散値とし,  $\Delta c_1/a$  の倍数をとるものとする. 式 (6.2) 第 3 式の制約条件は, 実際の製造を考慮し繊維の方向が急激に変化することを避けるために設定した.

最適解を求めるためには、設計変数が取り得るすべての可能な組合せについて目的関数を計算し、その中から最適値 (最大値もしくは最小値) を抽出することが、最も簡単な方法である。この方法を用いるためには、実用時間内で計算が終了するために、設計変数のすべての組合せの数が多すぎず適切であり、目的関数を繰り返し計算するための高速な計算解析が可能であることが必要である。本研究では、 $\Delta\theta_1^{A1} = \Delta\theta_1^{A2} = 15^\circ$  または  $10^\circ$ 、 $\Delta c_1/a = 0.05$  を満たすすべての設計変数の組合せについて目的関数の計算を行った。式 (6.2) 第 3 式の制約のもとでは、組合せの総数は  $\Delta\theta_1^{A1} = \Delta\theta_1^{A2} = 15^\circ$  のとき 1380、 $\Delta\theta_1^{A1} = \Delta\theta_1^{A2} = 10^\circ$  のとき 2754 である。計算にはノートパソコン (OS: Windows 10, 64 bit, CPU: Core i5-5300U 2.30 GHz, RAM: 12 GB) を用い、プログラム言語には Java 1.8.0 を使用した。 $\Delta\theta_1^{A1} = \Delta\theta_1^{A2} = 15^\circ, 10^\circ$  の場合、計算にはそれぞれ約 28 分、約 79 分を要した。

表 6.1 に正方形積層板 BL-1 ( $[\theta_1 / -45 / 0 / 45 / 90 / -45]_S$ ) と BL-2 ( $[(\theta_1^{A1} / \theta_1^{A2}) / -45 / 0 / 45 / 90 / -45]_S$ ) について、計算によって得られた基本振動数が最適値 (最大値) となるときの最外層の繊維配向角  $\theta_1$ 、 $(\theta_1^{A1} / \theta_1^{A2})$  とサブエリアの境界座標  $c_1/a$  (BL-2 のみ) を、5 次までの振動数とともに示した。繊維配向角を  $15^\circ$  の倍数とした条件において、BL-1 では  $[30 / -45 / 0 / 45 / 90 / -45]_S$  のときに最大基本振動数  $\Omega_{1, \max} = 15.41$  が、BL-2 では  $[(0^{A1} / 30^{A2}) / -45 / 0 / 45 / 90 / -45]_S$ 、 $c_1/a = 0.20$  のときに最大基本振動数  $\Omega_{1, \max} = 15.98$  が得られた。2 領域の Blended layer BL-2 を用いることで  $\Omega_{1, \max}$  が 3.70% 改善した。同様に繊維配向角を  $10^\circ$  の倍数とすると、BL-2 では BL-1 に対して 3.82% の改善が得られた。その一方で、 $\Omega_1$  が向上しても高次モードの振動数のいくつかでは BL-1 より値が小さくなった。繊維配向角の解候補を  $5^\circ$  の倍数に設定するとより精度の高い解が期待できるが、この場合 BL-2 積層板におけるすべての組合せについての計算時間は約 5 時間と予想される。さらに Blended

Table 6.1 Comparison of frequency parameters between (BL-1) no blended layer and (BL-2) two-area square plate with  $[(\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2})/ - 45/0/45/90/0]_S$  and maximum fundamental frequency (CSFF)

(a) $\Delta\theta_1^{A1} = \Delta\theta_1^{A2} = 15^\circ$									
Outermost layers	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$c_1/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	30	-	-	15.41	41.72	70.14	101.20	116.60	-
BL-2	0	30	0.20	15.98	41.30	71.78	100.61	117.00	3.70

(b) $\Delta\theta_1^{A1} = \Delta\theta_1^{A2} = 10^\circ$									
Outermost layers	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$c_1/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	20	-	-	15.45	39.72	72.98	96.51	113.37	-
BL-2	10	40	0.30	16.04	43.12	69.65	104.28	121.36	3.82

layer の分割領域が増えると、より多くの時間を要することとなり実用的ではない。そのような場合には近似解法を用いることが必要となる。

### 6.2.2 Blended layer を有する積層板への GA の適用

複数のサブエリアを有する Blended layer 積層板のより複雑な問題に対して、近似解法の代表的な手法として知られる遺伝的アルゴリズム (GA)[6.31, 6.32] を用いて最適解の探索を試みる。本節では最外層に BL-3, BL-4, BL-5 の Blended layer を有する積層板についてとりあげる。これらの場合については、総当たりによる解法では実用時間内での計算を行うことができない。

前節と同様に  $\Delta\theta_1^{A_i} = 15^\circ$  または  $10^\circ$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ), すなわち各サブエリアの繊維配向角は  $15^\circ$  または  $10^\circ$  の倍数, サブエリア間の境界の座標については  $\Delta c_i/a = 0.05$  を満たす値を解候補とする。

GA による探索は以下の方針によって行う。

1. GA パラメータを後述のとおり決定する。
2. 設計変数となる繊維配向角, サブエリア間の境界座標については, グレイコード [6.33, 6.34] によって符号化を行う。
3. 各個体の染色体に 2 点交叉とビットごとの突然変異を所定の確率で作用させる。
4. エリート戦略 [6.35] を採用する。
5. 所定の世代に達した後,  $\Omega_1$  が最大値をとる個体の設計変数の値を準最適解とみなす。

GA の探索性能は, GA パラメータの値に依存することはよく知られている。そこで本計算の前処理として, 実験計画法 [6.36] によって GA パラメータの値を決定する。

因子を A : 個体数と最大世代数の組合せ, B : エリート個体数 / (全) 個体数, C : 交

又率, D : 突然変異率 とした. 各因子の水準を表 6.2 に示す. 因子 A では, いずれの水準も 個体数  $\times$  最大世代数 が等しくなるように設定した. このため計算コストにはほぼ差はないと考えられる. 予備実験では境界条件を CSFF, 繊維配向角の解候補を  $15^\circ$  の倍数 ( $\Delta\theta_1^{A^i} = 15^\circ$ ) とし, 表 4.1 に示す直交配列表  $L_{16}$  ( $4^4$ ) にしたがって各実験について 3 回ずつの探索計算を行った. なおサブエリア数が多くなると設計変数の数も増加するため, 染色体長さはサブエリア数によって異なる. そこで最適な GA パラメータもそれぞれの場合で異なる値となることが予想されるため, BL2~BL5 の場合ごとに独立して予備計算を行った. 表 6.3 に各因子の水準ごとに, 3 回の試行で得られた基本振動数  $\Omega_1$  の平均値を示す. この中からそれぞれの因子について  $\Omega_1$  が最大となる水準を選択することにより, 探索が最適化される GA パラメータの組合せが得られると考えられる. 表 6.4 にサブエリア数ごとに上記の方法で決定された, 本計算で用いられる GA パラメータを示す. ただし最大世代数については, より精度の高い解を求めるため水準の 2 倍の値を採用した.

対象とする図 5.2 に示す積層板の各繊維配向角は次式のように表される.

$$\left[ (\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2}/\dots/\theta_1^{An_r}) / -45/0/45/90/-45 \right]_S \quad (n_r = 2, 3, 4, 5) \quad (6.3)$$

問題は式 (6.2) と同様にして, 次式のとおり定義される.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize the fundamental frequency } \Omega_1 \\ & \text{Design variables : } \theta_1^{A1}, \theta_1^{A2}, \dots, \theta_1^{An_r}; \frac{c_1}{a}, \frac{c_2}{a}, \dots, \frac{c_{n_r-1}}{a} \quad (n_r = 2, 3, 4, 5) \\ & \text{Constraint : } |\theta_1^{A^i} - \theta_1^{A^{i+1}}| \leq 45^\circ \quad (i = 1, 2, \dots, n_r - 1) \end{aligned} \quad (6.4)$$

境界条件は SSSS, CFFF, CSFF, CCCC とする. 計算は BL-2 から BL-5 までの各積層板について, 境界条件ごとに 5 回ずつ行う.

Table 6.2 Factors and levels on GA parameters used in Design of Experiment

	Factor	Level			
		1	2	3	4
A	Population size	10	20	40	80
	Max. generation	160	80	40	20
B	$\frac{\text{Elite count}}{\text{Population size}}$	0.1	0.2	0.3	0.4
C	Crossover rate	0.5	0.6	0.7	0.8
D	Mutation rate	0.01	0.02	0.03	0.04

Table 6.3 Results on factors and levels for (BL-2) through (BL-5) and corresponding fundamental frequencies in Design of Experiment

Factor	Level	Mean of $\Omega_1$			
		BL-2	BL-3	BL-4	BL-5
A	1	15.897	15.967	15.936	15.707
	2	15.962	15.953	15.944	15.970
	3	15.969	15.989	15.970	15.933
	4	15.969	16.010	16.002	15.954
B	1	15.921	15.932	15.944	15.683
	2	15.967	16.023	15.969	15.974
	3	15.947	16.013	16.008	15.972
	4	15.962	15.950	15.930	15.935
C	1	15.924	15.973	16.002	15.734
	2	15.960	15.954	15.924	15.867
	3	15.956	15.986	15.968	16.005
	4	15.958	16.005	15.958	15.959
D	1	15.915	15.916	15.955	15.626
	2	15.957	15.981	15.915	15.942
	3	15.963	15.999	15.993	15.969
	4	15.962	16.023	15.988	16.026

Table 6.4 GA parameters determined by Design of Experiments

---

	BL-2	BL-3	BL-4	BL-5
Population size	40	80	80	20
Max. generation	80	40	40	160
Elite count	8	16	24	4
Crossover rate	0.6	0.8	0.5	0.7
Mutation rate	0.03	0.04	0.03	0.04

---

## 6.2.3 最外層に Blended layer を有する積層板の GA による設計結果

前節で述べた計算方法によって得られた結果から、 $\Delta\theta_i = 15^\circ$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) の条件の下で  $\Omega_1$  を最大化する (準) 最適解を表 6.5 に示す。ただし、BL-1 積層板については、総当たり法で得られた最適解が記載されている。BL-2~BL-5 については、最外層の Blended layer において  $\theta_1^{A_i} = \theta_1^{A_{i+1}}$  となった場合は、隣接する  $i$  番目と  $i+1$  番目のサブエリアの繊維配向角が同一であることを意味しており、サブエリアを分割する効果がないことを示す。そこでこの場合には両者を同一サブエリアである とみなし、まとめて角度を表示し (両者間の境界位置は記載しない)、余剰となる後ろの欄に直前の繊維配向角と境界位置の値をカッコ内に表示している。表の dif. in  $\Omega_1$  (%) の欄には、BL-1 を基準としたときの  $\Omega_1$  の差異 (%) を示す。

境界条件が SSSS のとき、ほぼすべてのサブエリアで繊維配向角は  $45^\circ$  が最適値となっており、サブエリア数は  $\Omega_1$  の最大値を上昇させるための影響をほとんど及ぼさない。CFFF においても同様に、サブエリアの数を増やしても最適化にはあまり寄与しない。その一方でより拘束の度合いが増す CSFF と CCCC では、サブエリアの数が増えるほど  $\Omega_1$  の上昇が顕著になり、BL-5 積層板では BL-1 よりもそれぞれ 4.8%、9.2% 増大した。

表 6.6 に、 $\Delta\theta_i = 10^\circ$  ( $i = 1, 2, \dots, 5$ ) としたときの最適化の結果を表 6.5 と同様に示した。表 6.5 で示される角度が  $\Delta\theta_i = 15^\circ$  の場合よりも細かく設定されていて解空間がより広くなるにも関わらず、SSSS では  $\Omega_1$  の最適値が低下している。この理由は SSSS で正方形板における繊維配向角の最適値である  $45^\circ$  が解候補に含まれていないためである。

ここで総当たり法と GA による計算時間についての比較を行う。境界条件 CSFF の下で BL-2 積層板を対象とする場合に、 $\Delta\theta_1^{A1} = \Delta\theta_1^{A2} = 15^\circ$  の条件で GA による計

Table 6.5 Best solutions for square plates with  $[(\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2}/\dots)/-45/0/45/90/-45]$ s using GA with the Ritz method ( $\Delta\theta_1^{A_i} = 15^\circ$ ;  $M \times N = 8 \times 8$ ,  $b/a = 1$ )

(a) SSSS																
Type	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$\theta_1^{A3}$	$\theta_1^{A4}$	$\theta_1^{A5}$	$c_1/a$	$c_2/a$	$c_3/a$	$c_4/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	45	-	-	-	-	-	-	-	-	52.932	118.603	132.876	206.780	228.428	257.966	-
BL-2	45	(45)	-	-	-	(0.00)	-	-	-	52.932	118.603	132.876	206.780	228.428	257.966	0.000
BL-3	45	15	45	-	-	0.45	0.50	-	-	52.940	117.944	132.014	206.490	224.849	262.209	0.015
BL-4	45	0	45	(45)	-	0.45	0.50	(0.50)	-	52.953	117.975	131.775	206.562	224.436	262.927	0.039
BL-5	45	0	45	(45)	(45)	0.45	0.50	(0.50)	(0.50)	52.953	117.975	131.775	206.562	224.436	262.927	0.039

(b) CFFF																
Type	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$\theta_1^{A3}$	$\theta_1^{A4}$	$\theta_1^{A5}$	$c_1/a$	$c_2/a$	$c_3/a$	$c_4/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	0	-	-	-	-	-	-	-	-	11.351	20.738	49.911	71.467	85.652	109.094	-
BL-2	0	15	-	-	-	0.75	-	-	-	11.352	21.065	50.144	71.525	86.984	109.944	0.011
BL-3	0	15	(15)	-	-	0.75	(0.75)	-	-	11.352	21.065	50.144	71.525	86.984	109.944	0.011
BL-4	0	15	60	-75	-	0.75	0.90	0.95	-	11.353	21.341	54.600	71.730	88.527	122.076	0.020
BL-5	0	15	-15	-60	(-60)	0.75	0.85	0.90	(0.90)	11.353	21.097	52.463	71.547	88.353	113.932	0.018

Table 6.5 (Continued)

(c) CSFF

Type	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$\theta_1^{A3}$	$\theta_1^{A4}$	$\theta_1^{A5}$	$c_1/a$	$c_2/a$	$c_3/a$	$c_4/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	30	-	-	-	-	-	-	-	-	15.413	41.717	70.142	101.198	116.598	177.234	-
BL-2	0	30	-	-	-	0.20	-	-	-	15.980	41.305	71.782	100.607	117.003	178.723	3.678
BL-3	0	15	30	-	-	0.10	0.30	-	-	16.052	41.229	71.921	100.288	117.100	180.115	4.141
BL-4	15	45	75	-60	-	0.35	0.65	0.70	-	16.131	47.873	63.137	108.702	124.966	163.971	4.654
BL-5	15	45	60	-75	-60	0.35	0.70	0.75	0.80	16.154	47.995	64.916	113.174	122.646	164.871	4.803

(d) CCCC

Type	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$\theta_1^{A3}$	$\theta_1^{A4}$	$\theta_1^{A5}$	$c_1/a$	$c_2/a$	$c_3/a$	$c_4/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	75	-	-	-	-	-	-	-	-	90.526	170.032	198.169	270.959	297.221	364.203	-
BL-2	75	30	-	-	-	0.80	-	-	-	93.088	176.170	199.202	274.685	309.717	363.400	2.830
BL-3	15	60	15	-	-	0.15	0.85	-	-	96.374	186.437	194.796	282.140	332.981	336.806	6.461
BL-4	30	75	45	0	-	0.20	0.80	0.85	-	97.359	185.920	201.123	280.511	326.589	363.143	7.549
BL-5	0	45	90	60	15	0.15	0.25	0.70	0.85	98.882	186.518	205.350	276.920	329.576	369.844	9.230

Table 6.6 Best solutions for square plates with  $[(\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2}/\dots)/-45/0/45/90/-45]_s$  using GA with the Ritz method ( $\Delta\theta_1^{A_i} = 10^\circ$ ;  $M \times N = 8 \times 8, b/a = 1$ )

(a) SSSS																
Type	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$\theta_1^{A3}$	$\theta_1^{A4}$	$\theta_1^{A5}$	$c_1/a$	$c_2/a$	$c_3/a$	$c_4/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	40	-	-	-	-	-	-	-	-	52.803	116.011	135.024	205.613	220.822	265.568	-
BL-2	40	50	-	-	-	0.90	-	-	-	52.829	116.132	134.897	205.877	220.882	264.830	0.048
BL-3	50	40	50	-	-	0.10	0.90	-	-	52.854	116.253	134.768	206.141	220.942	264.110	0.095
BL-4	50	40	50	(50)	-	0.10	0.90	(0.90)	-	52.854	116.253	134.768	206.141	220.942	264.110	0.095
BL-5	50	40	10	40	50	0.10	0.50	0.55	0.90	52.867	115.634	134.000	205.853	217.751	267.894	0.121

(b) CFFF																
Type	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$\theta_1^{A3}$	$\theta_1^{A4}$	$\theta_1^{A5}$	$c_1/a$	$c_2/a$	$c_3/a$	$c_4/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	0	-	-	-	-	-	-	-	-	11.351	20.738	49.911	71.467	85.652	109.094	-
BL-2	0	10	-	-	-	0.65	-	-	-	11.353	20.991	50.192	71.476	86.406	109.919	0.021
BL-3	0	10	(10)	-	-	0.65	(0.65)	-	-	11.353	20.991	50.192	71.476	86.406	109.919	0.021
BL-4	0	10	(10)	(10)	-	0.65	(0.65)	(0.65)	-	11.353	20.991	50.192	71.476	86.406	109.919	0.021
BL-5	0	10	-30	-70	-80	0.40	0.85	0.90	0.95	11.354	21.133	54.997	71.575	88.062	119.616	0.030

Table 6.6 (Continued)

(c) CSFF																
Type	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$\theta_1^{A3}$	$\theta_1^{A4}$	$\theta_1^{A5}$	$c_1/a$	$c_2/a$	$c_3/a$	$c_4/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	20	-	-	-	-	-	-	-	-	15.452	39.720	72.983	96.510	113.371	174.741	-
BL-2	10	40	-	-	-	0.30	-	-	-	16.040	43.124	69.650	104.280	121.359	176.210	3.809
BL-3	10	30	40	-	-	0.25	0.50	-	-	16.109	52.795	70.616	103.773	121.594	177.304	4.252
BL-4	0	10	30	-40	-	0.10	0.25	0.50	-	16.142	42.669	70.716	103.612	121.621	177.272	4.467
BL-5	10	40	80	-60	(-60)	0.30	0.75	0.80	(0.80)	16.224	47.264	66.978	114.361	120.488	167.521	4.999

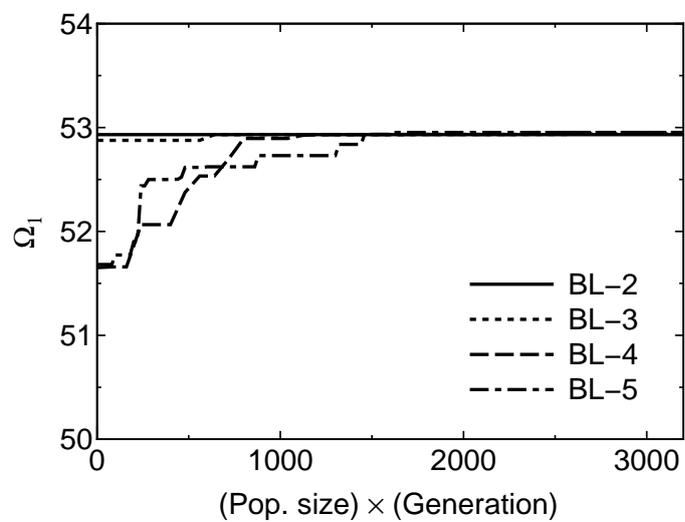
  

(d) CCCC																
Type	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$\theta_1^{A3}$	$\theta_1^{A4}$	$\theta_1^{A5}$	$c_1/a$	$c_2/a$	$c_3/a$	$c_4/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	80	-	-	-	-	-	-	-	-	90.646	168.322	200.675	268.771	295.110	370.711	-
BL-2	30	70	-	-	-	0.20	-	-	-	92.743	177.748	195.816	275.619	312.914	354.596	2.313
BL-3	10	50	10	-	-	0.15	0.85	-	-	95.472	177.473	199.044	280.051	309.767	350.085	5.324
BL-4	10	50	80	40	-	0.15	0.25	0.75	-	96.742	184.019	202.499	277.616	326.370	365.839	6.725
BL-5	0	-40	-70	80	40	0.10	0.15	0.20	0.80	96.345	182.601	203.878	279.347	319.585	371.120	6.287

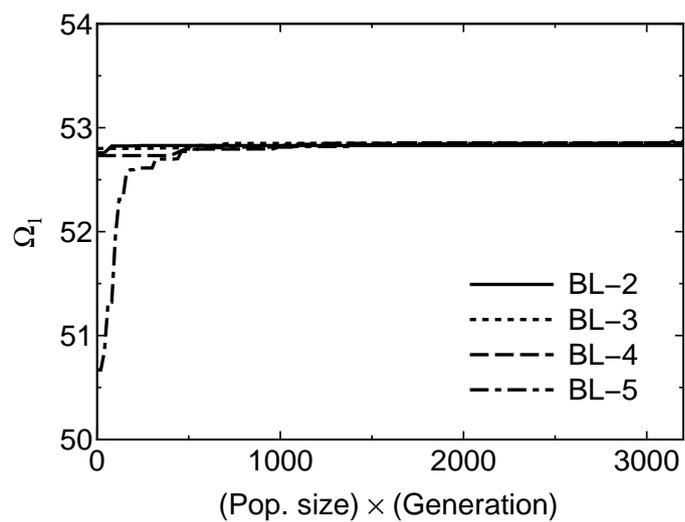
算を行ったところ、5 試行のうち 4 回で表 6.1 に示す総当たり法によって得られた最適解と同一の値を得ることができた。最適解に到達したときの世代数は約 40 で、計算時間は約 18 分であった。最終世代である 80 世代目までに最適解に到達しなかった試行は 1 回のみで、そこまでの計算時間は約 36 分であった。一方、総当たり法における解探索では、前節で述べたように計算に約 28 分を要している。 $\Delta\theta_1^{A1} = \Delta\theta_1^{A2} = 10^\circ$  の場合には、GA によるすべての試行で総当たり法と同じ結果となり、最適解が得られた。いずれも 7~41 世代目に最適解に到達しており、ここまでの所要時間は 3~18 分であった。

なお GA による計算には、総当たり法の計算で用いたものと同じのノートパソコンを使用した。上記の結果から、GA の実用性が示された。解空間が広がった場合でも、総当たり法と比較して GA では最適解を探索するために要する時間への影響は少ないと考えられるため、設計変数の数が多い問題では更なる優位性を有する。図 6.1 は、個体数  $\times$  世代数を横軸にとり、 $\Omega_1$  の推移を示したグラフである。境界条件は、(a)(b) が SSSS, (c)(d) が CFFF, (e)(f) が CSFF, (g)(h) が CCCC であり、(a)(c)(e)(g) では  $\Delta\theta_1^{Ai} = 15^\circ$ , (b)(d)(f)(h) では  $\Delta\theta_1^{Ai} = 10^\circ$  である。Blended layer のサブエリア数が多くなるほど、 $\Omega_1$  の収束が遅くなる傾向が認められる。特に拘束が強い CCCC の場合にはその傾向が顕著である。

図 6.2 は、BL-2 と BL-5 における  $\Delta\theta_1^{Ai} = 15^\circ$  の 5 回の試行それぞれについて、 $\Omega_1$  の推移を示している。(a)(c)(e)(g) の BL-2 積層板では、個体数  $\times$  世代数が 500 に達するまでに解がほぼ収束しているが、(b)(d)(f)(h) の BL-5 積層板の場合には、500 となってもほとんどの試行で解が収束していないことがわかる。横軸の個体数  $\times$  世代数が 3200 に達した時点で計算を終了しているが、(h) の CCCC では計算を続けていれば解がさらに改善されたことが予想される。 $\Delta\theta_1^{Ai}$  が  $15^\circ$ ,  $10^\circ$  のどちらであって

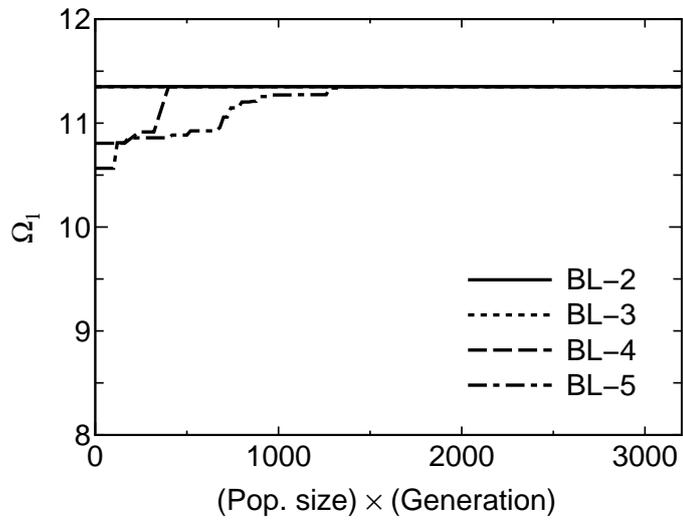


(a) SSSS ( $\Delta\theta_1^{A_i} = 15^\circ$ )

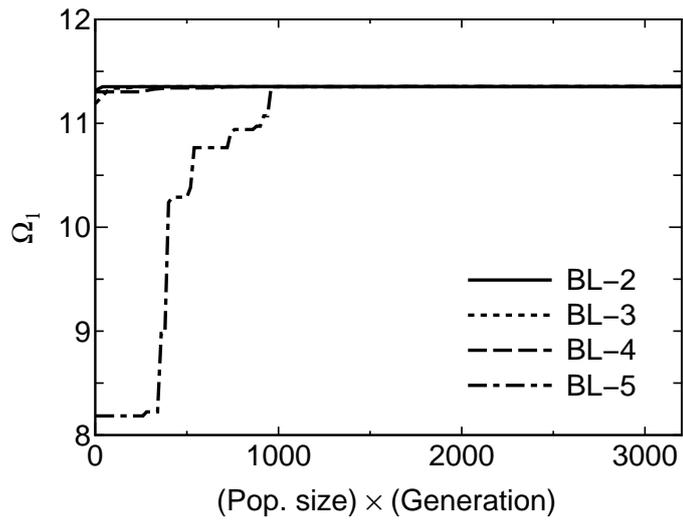


(b) SSSS ( $\Delta\theta_1^{A_i} = 10^\circ$ )

Fig. 6.1 Convergence of  $\Omega_1$  to the best solutions with the product of population size and generation in different boundary conditions and increments

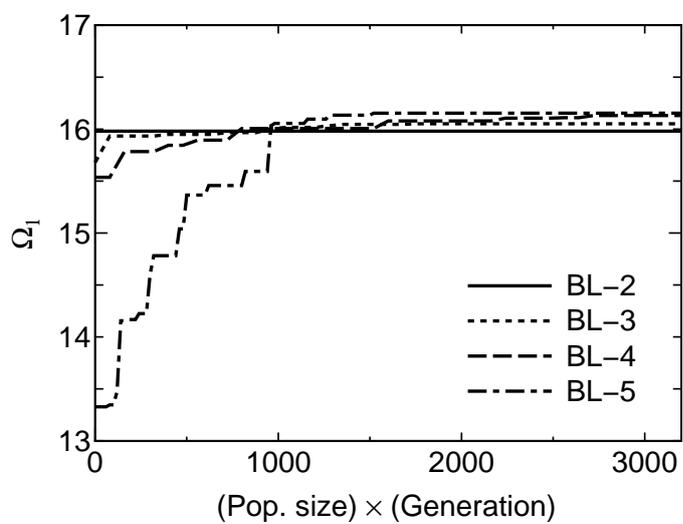


(c) CFFF ( $\Delta\theta_1^{A_i} = 15^\circ$ )

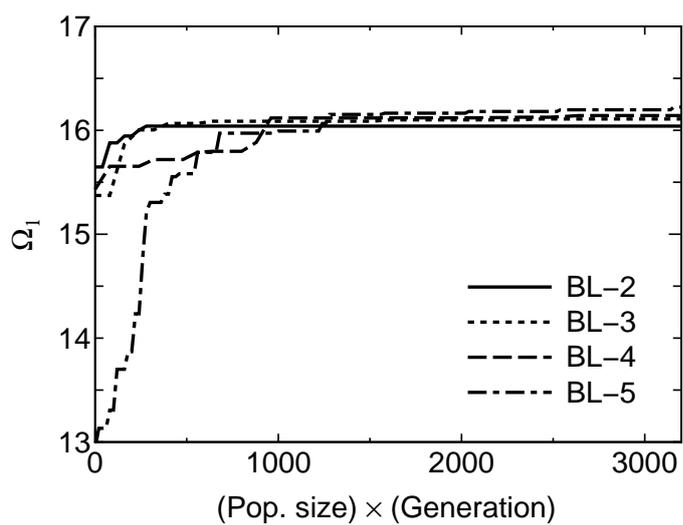


(d) CFFF ( $\Delta\theta_1^{A_i} = 10^\circ$ )

Fig. 6.1 (Continued)

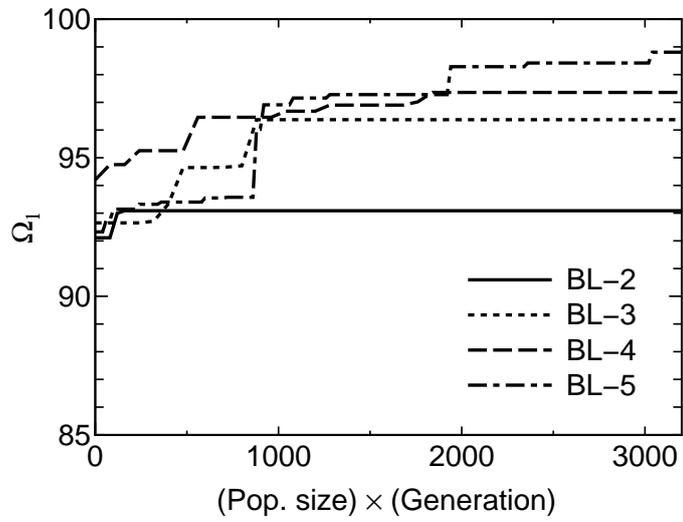


(e) CSFF ( $\Delta\theta_1^{A_i} = 15^\circ$ )

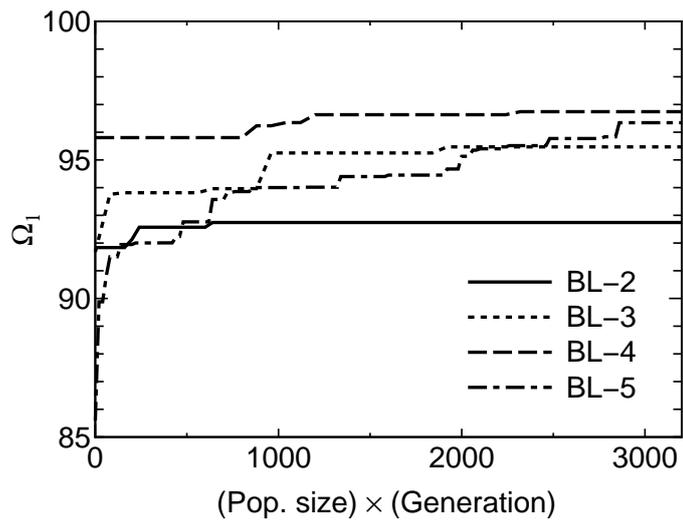


(f) CSFF ( $\Delta\theta_1^{A_i} = 10^\circ$ )

Fig. 6.1 (Continued)



(g) CCC ( $\Delta\theta_1^{A_i} = 15^\circ$ )



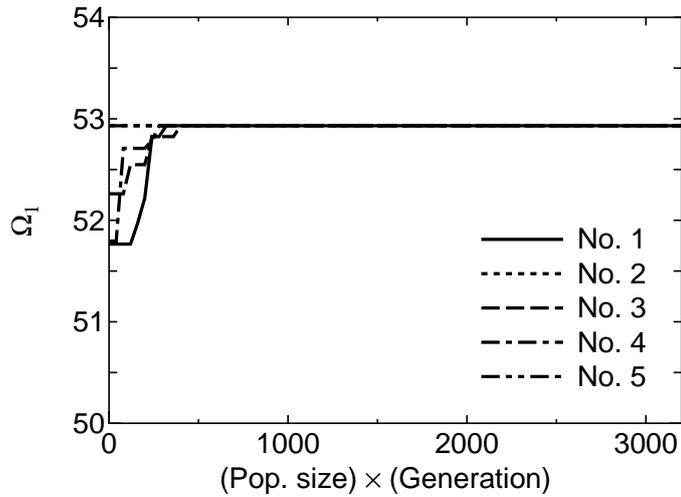
(h) CCC ( $\Delta\theta_1^{A_i} = 10^\circ$ )

Fig. 6.1 (Continued)

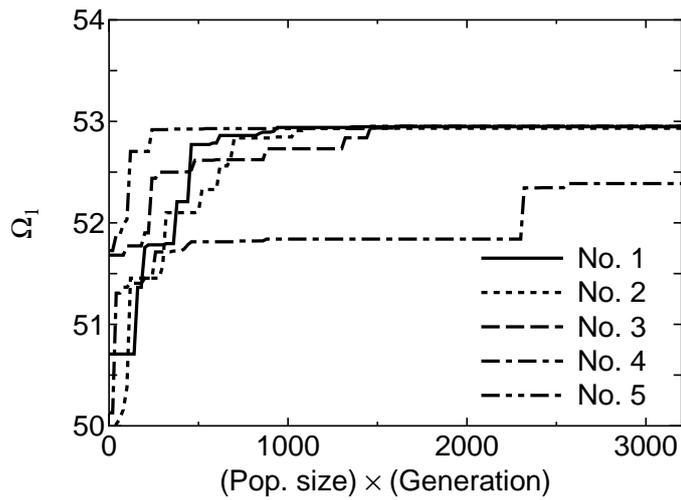
も、境界条件が SSSS と CFFF の場合には、BL-1 を基準としたときの Blended layer による  $\Omega_1$  の増加はほとんどの場合 0.1% 以下であるのに対し、CSFF と特に CCCC ではその増加が % のオーダーとなった。これらの場合では、サブエリア数が多いほど最適化された目的関数  $\Omega_1$  が大きな値をとることが示された。以上の結果から、境界条件として拘束の度合いが強いほど Blended layer は効果的であると考えられる。

図 6.3 は、各境界条件における  $\Delta\theta_1^{A_i}$  が  $15^\circ$ ,  $10^\circ$  の場合の  $\Omega_1$  の最適解を比較のために示したものである。(b) CFFF と (c) CSFF では  $\Delta\theta_1^{A_i} = 10^\circ$  の場合に  $\Omega_1$  がわずかに大きな値を示した。一方、(a) SSSS と (d) CCCC では  $\Delta\theta_1^{A_i} = 10^\circ$  のときよりも  $\Delta\theta_1^{A_i} = 15^\circ$  の方が解候補が少ないにもかかわらず  $\Omega_1$  の値はより大きくなった。SSSS や CCCC のように板の 4 辺が一様に拘束される境界条件において  $\Delta\theta_1^{A_i} = 15^\circ$  の場合に解がより良い値を示すのは、 $\theta = 45^\circ$  が解候補に含まれているためであると考えられる。 $\Delta\theta_1^{A_i}$  が  $15^\circ$  と  $10^\circ$  における差異は、CCCC の場合以外はいずれも 0.5% 以下である。なお CCCC の BL-5 において、 $\Delta\theta_1^{A_i} = 10^\circ$  のときの  $\Omega_1$  の値は BL-4 のものよりも小さいことから、計算が最終世代までに収束していないことは明らかであり、最適解ではない。

境界条件 SSSS, CFFF, CSFF, CCCC における BL-1, BL-2 の各正方形板について、最適解のときの振動モード図を  $\Delta\theta_1^{A_1} = \Delta\theta_1^{A_2} = 15^\circ, 10^\circ$  の場合について、それぞれ図 6.4, 6.5 に示す。これらのモード形状に対応する繊維配向角などのパラメータは表 6.5, 6.6 に記載されている。4 次モードに若干の違いが認められるが、全体として振動モード形状に Blended layer による大きな影響は見られない。

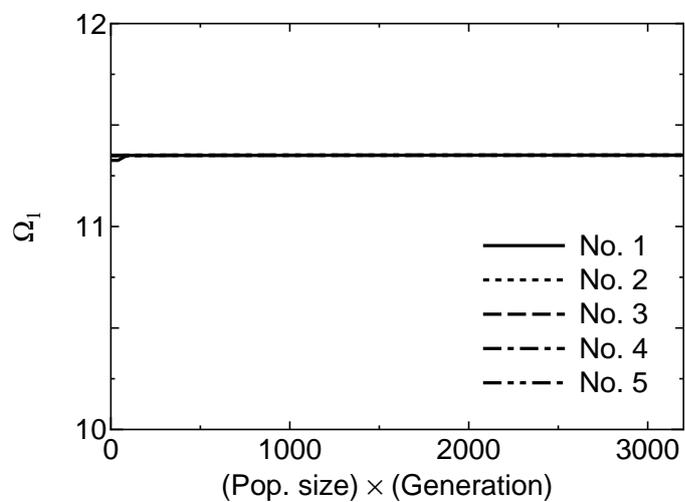


(a) SSSS (BL-2)

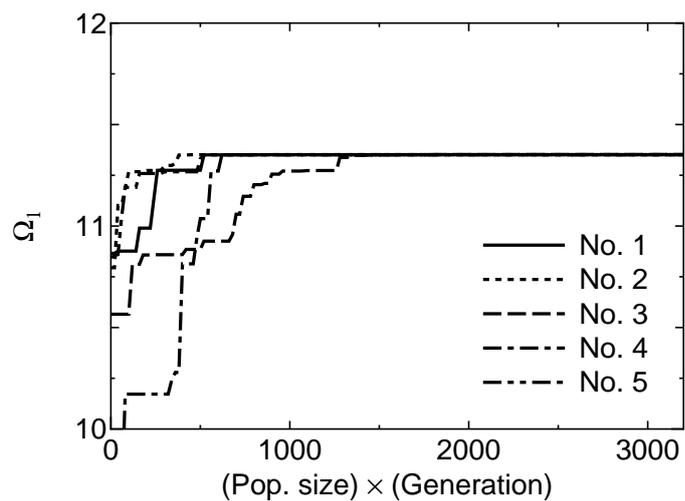


(b) SSSS (BL-5)

Fig. 6.2 Five trials of convergence of  $\Omega_1$  to the best solutions with the product of population size and generation in different boundary conditions and increments ( $\Delta\theta_1^{A^i} = 15^\circ$ )

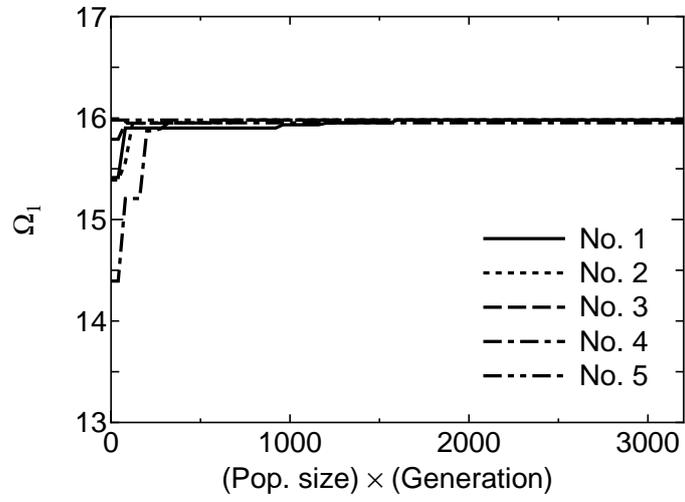


(c) CFFF (BL-2)

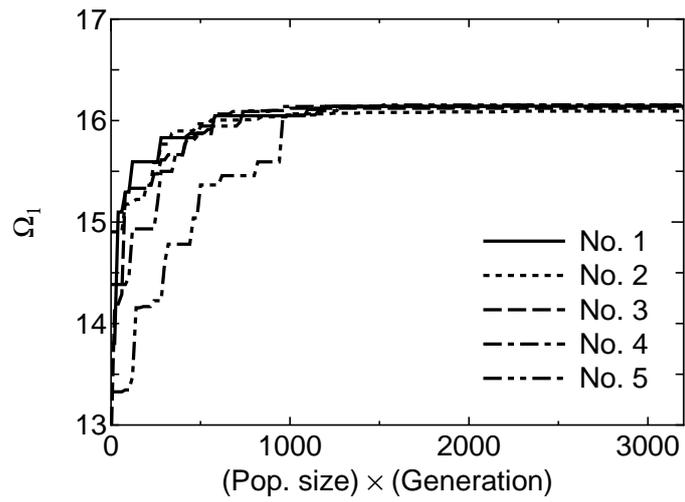


(d) CFFF (BL-5)

Fig. 6.2 (Continued)

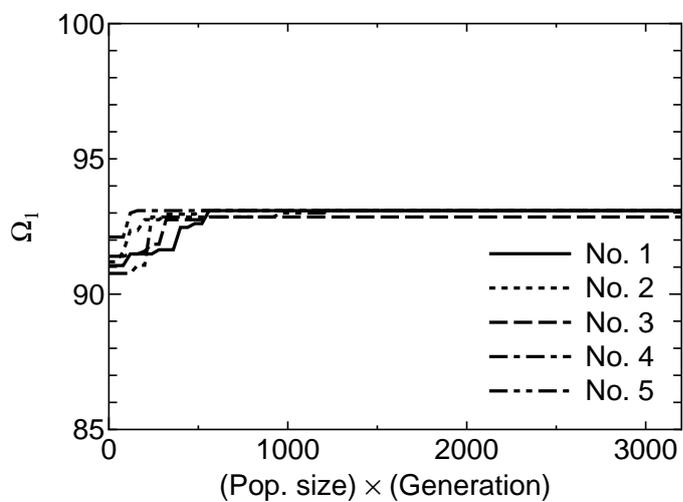


(e) CSFF (BL-2)

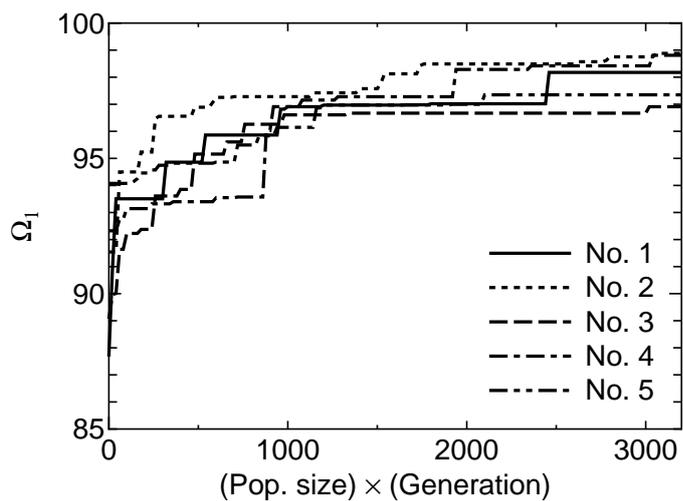


(f) CSFF (BL-5)

Fig. 6.2 (Continued)

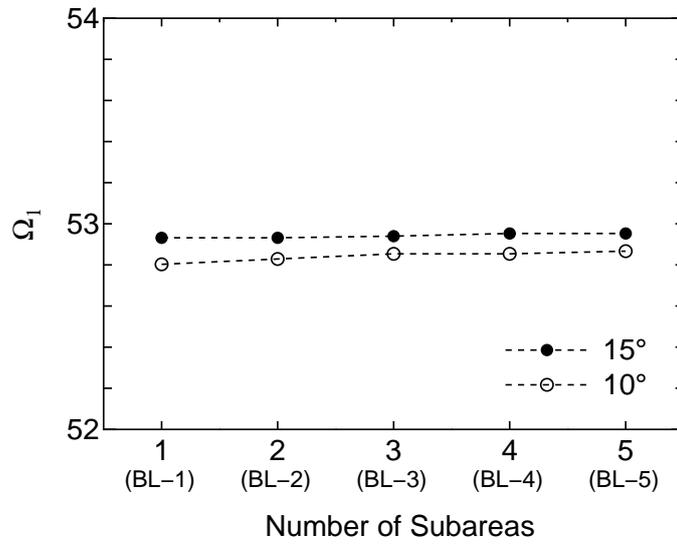


(g) CCCC (BL-2)

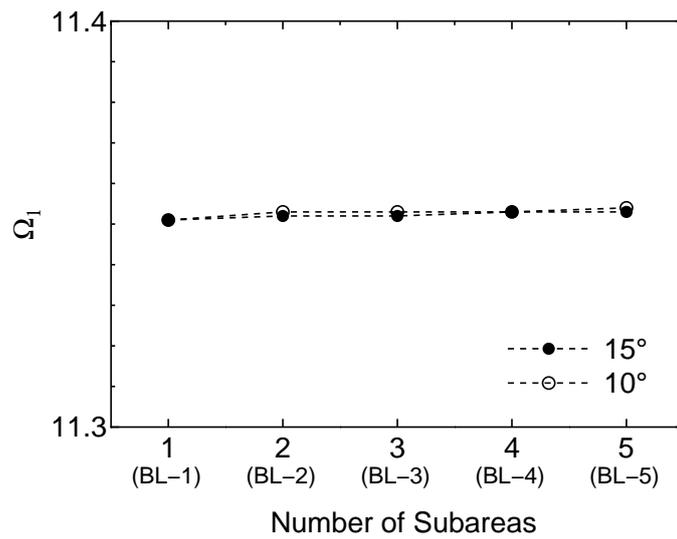


(h) CCCC (BL-5)

Fig. 6.2 (Continued)

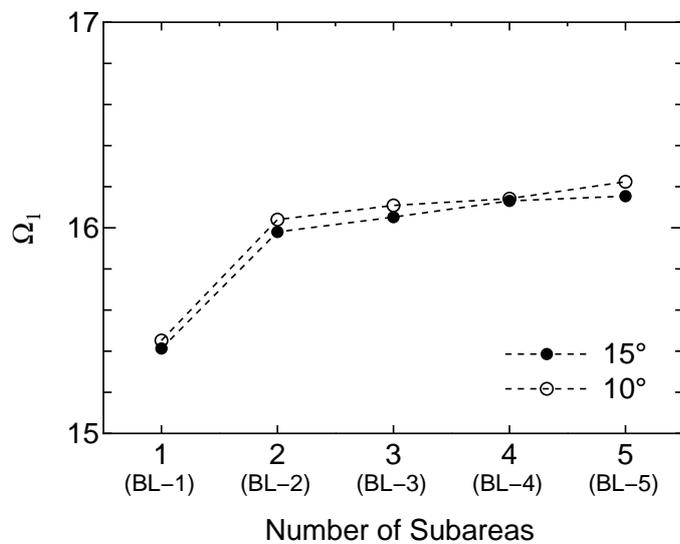


(a) SSSS

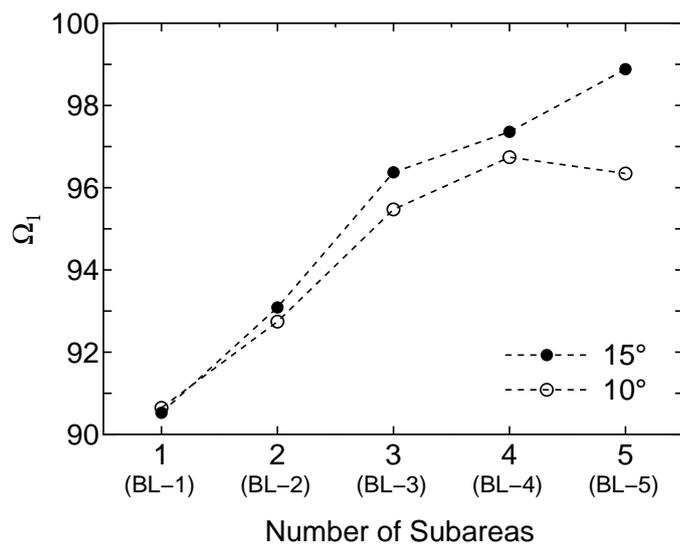


(b) CFFF

Fig. 6.3 Comparison of  $\Omega_1$  between  $\Delta\theta_1^{Ai} = 15^\circ$  and  $10^\circ$  for square plates with (BL-1) through (BL-5)



(c) CSFF



(d) CCCC

Fig. 6.3 (Continued)

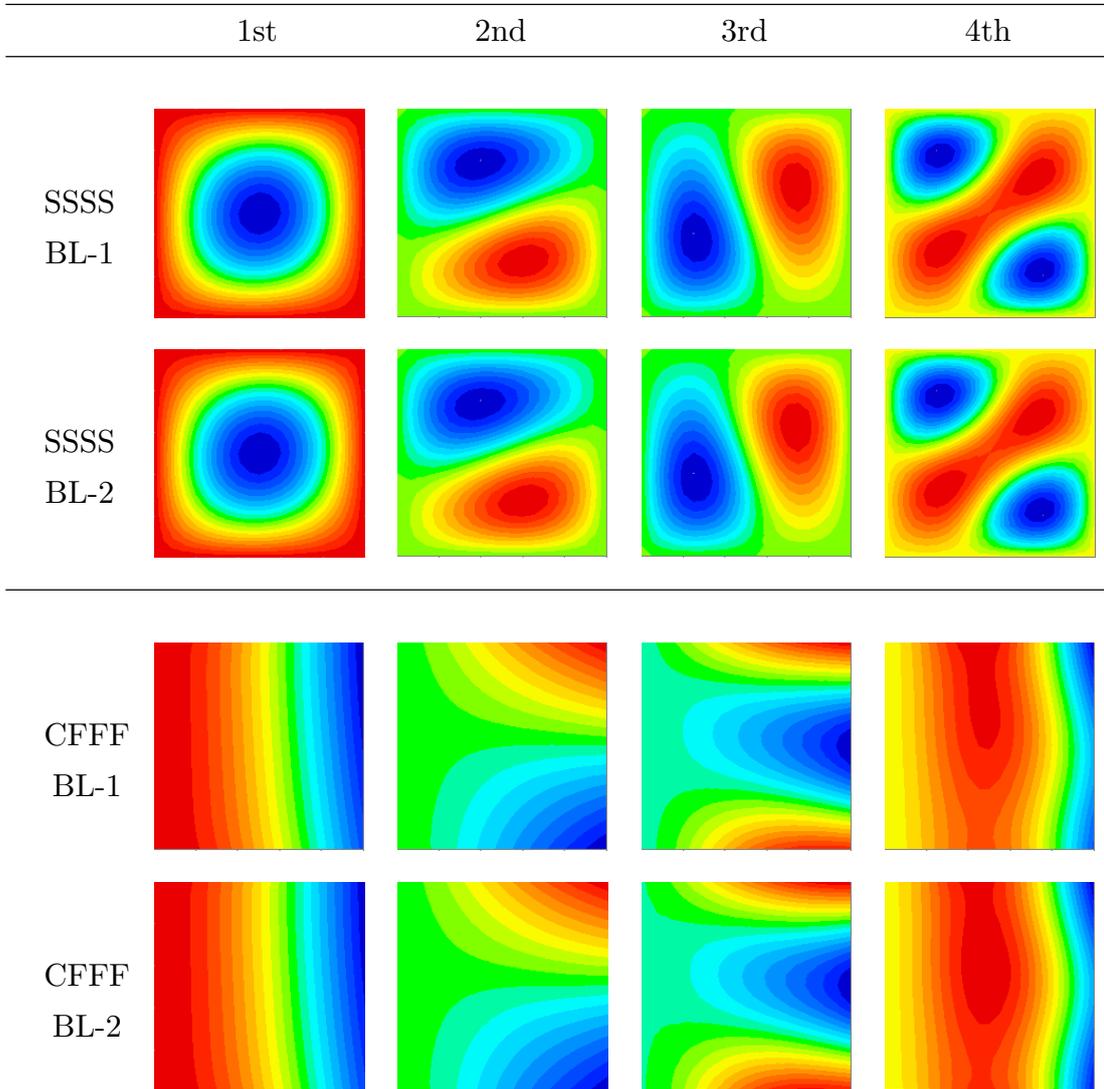


Fig. 6.4 Mode shapes of optimized 12-layer square plates  $[\theta_1 / -45/0/45/90 / -45]_S$  and  $[(\theta_1^{A1} / \theta_1^{A2}) / -45/0/45/90 / -45]_S$ ,  $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_1^{Ai} = 15^\circ$ , (frequencies corresponding to the modes are given in Table 6.5)

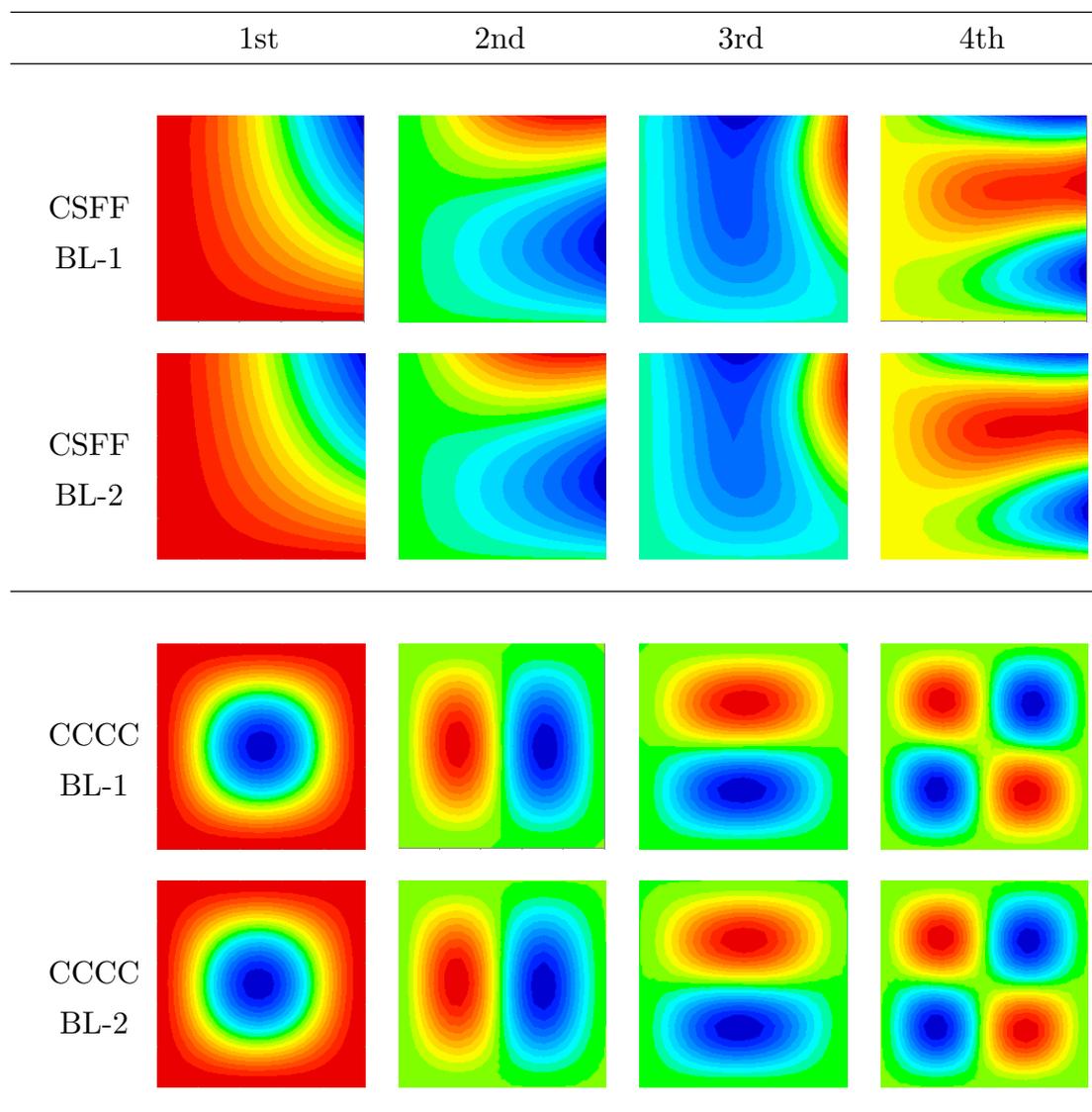


Fig. 6.4 (Continued)

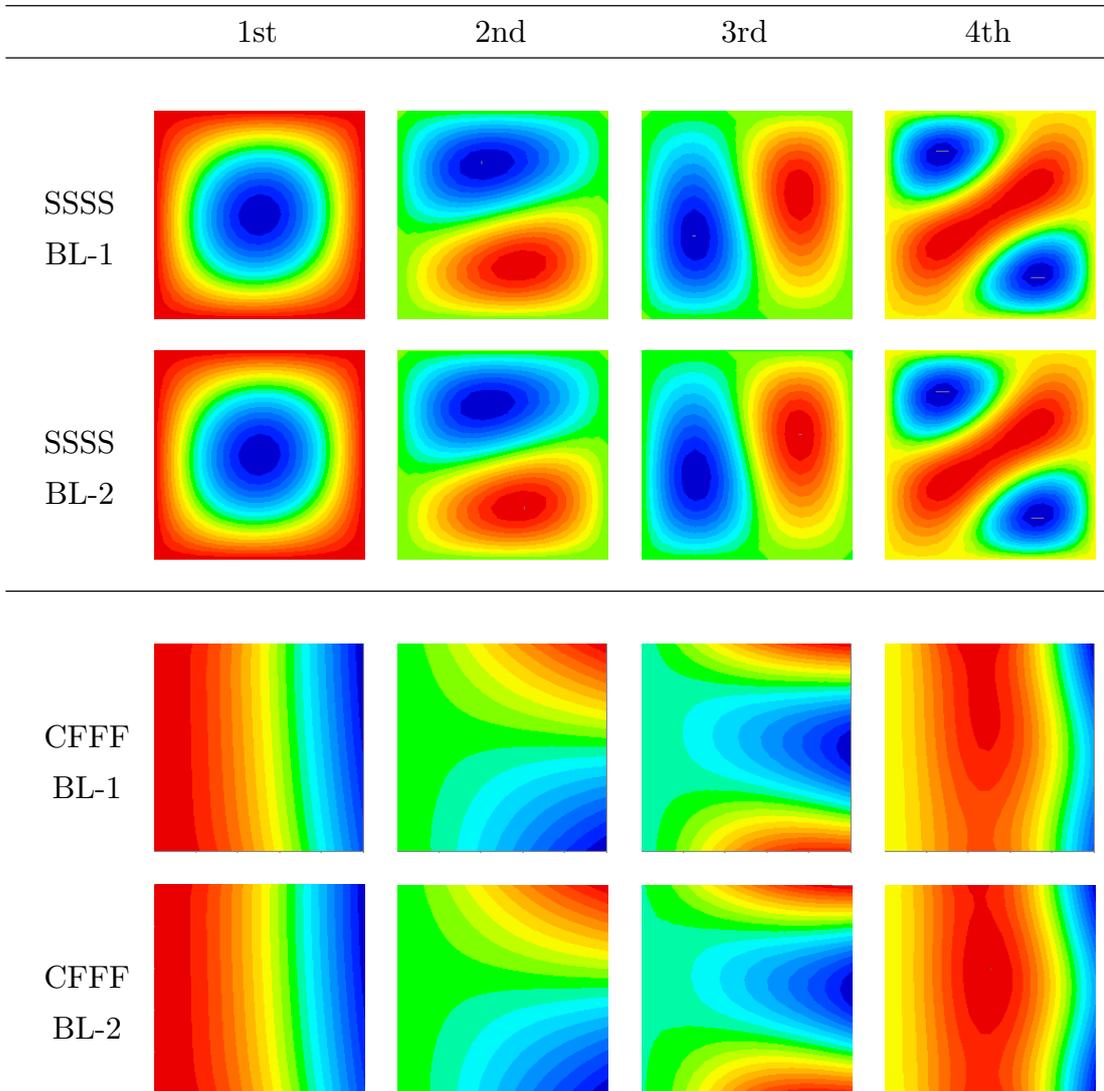


Fig. 6.5 Mode shapes of optimized 12-layer square plates  $[\theta_1 / -45/0/45/90 / -45]_S$  and  $[(\theta_1^{A1} / \theta_1^{A2}) / -45/0/45/90 / -45]_S$ ,  $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_1^{Ai} = 10^\circ$ , (frequencies corresponding to the modes are given in Table 6.6)

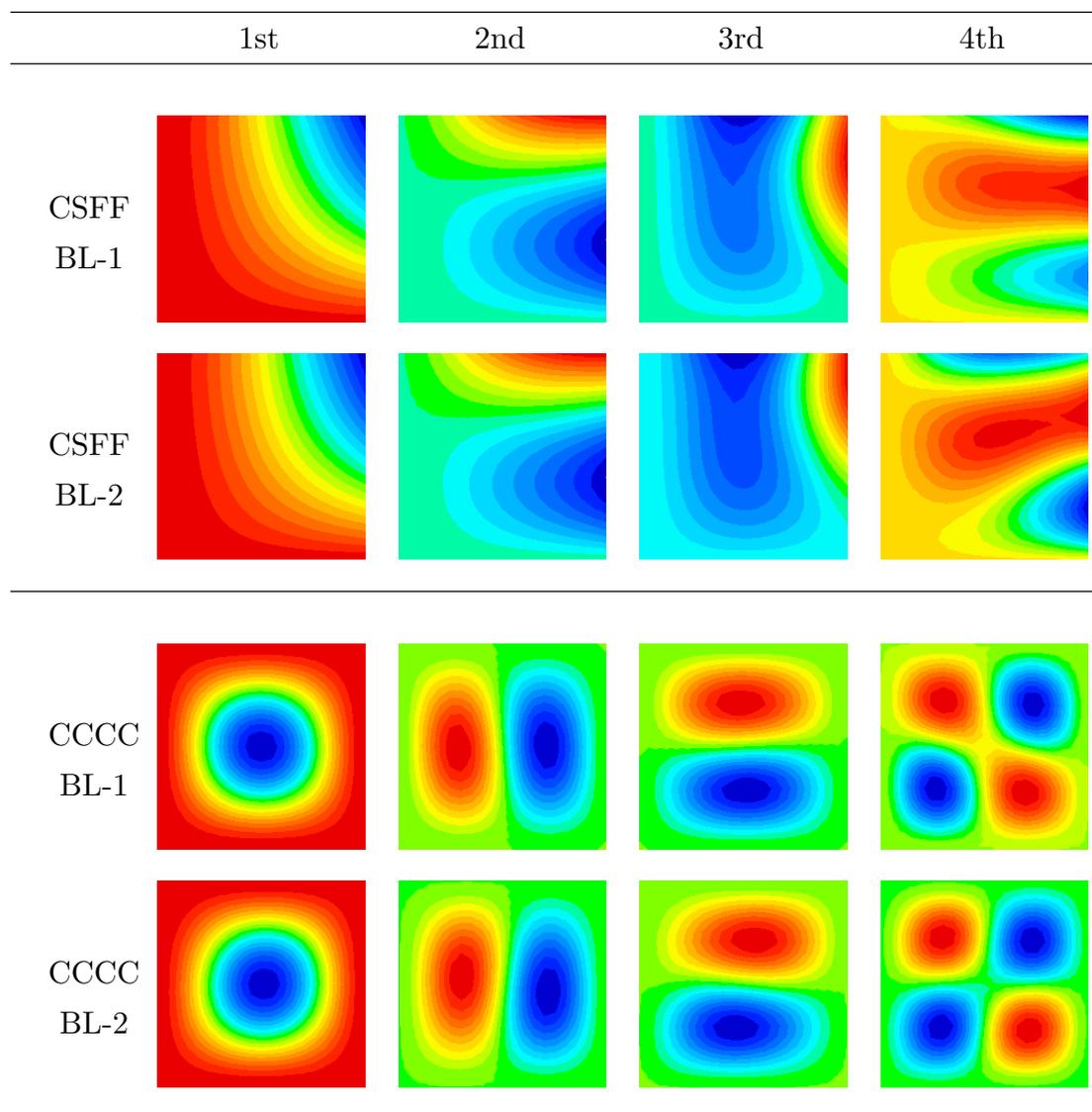


Fig. 6.5 (Continued)

## 6.2.4 最外層の Blended layer とその隣接層の最適化に関する GA による設計結果

最後に、最外層に加えて隣接する第 2 層の繊維配向角も設計変数とした場合についても最適化を試みる。

$$\left[ (\theta_1^{A1} / \theta_1^{A2} / \dots / \theta_1^{An_r}) / \theta_2 / 0 / 45 / 90 / -45 \right]_S \quad (n_r = 1, 2, 5) \quad (6.5)$$

境界条件はこれまでと同様に SSSS, CFFF, CSFF, CCCC とする。最外層は BL-1 の他に Blended layer の BL-2, BL-5 を対象とし、第 2 層は単一の繊維配向角  $\theta_2$  を有するものとする。BL-1 積層板の場合についてのみ総当たり法で計算を行い、それ以外については表 6.4 に示すパラメータを用いて GA による計算を行った。

表 6.7 に  $\Delta\theta_1^{Ai} = \Delta\theta_2 = 15^\circ$  としたときに得られた最適解の計算結果を示す。境界条件が SSSS の場合には、BL-1, BL-2, BL-5 のいずれについても最外層のすべてのサブエリアで繊維配向角は一様に  $-45^\circ$  となったため  $\Omega_1$  が同一の値を示し、Blended layer の効果は見られなかった。一方、CFFF から CCCC にかけて境界の拘束の度合いが強くなるほど、サブエリアの増加による  $\Omega_1$  の上昇の効果が顕著となる傾向が確認された。最も拘束が強い CCCC の境界条件において、BL-5 積層板では最適化された  $\Omega_1$  の値が BL-1 の場合よりも約 9% 増加している。表 6.5 と表 6.7 の比較から、第 2 層を設計変数に加えても最適化に対する効果はあまり認められないことがわかる。

表 6.8 は、表 6.7 より解候補が多い  $\Delta\theta_1^{Ai} = \Delta\theta_2 = 10^\circ$  の場合についての計算結果である。表 6.7 の  $\Delta\theta_1^{Ai} = \Delta\theta_2 = 15^\circ$  の場合と比較して、解空間が増大した効果はほとんど認められない。むしろ SSSS, CCCC のような一様に拘束された条件に対しては、繊維が対角線方向となる  $\theta_1^{Ai} = 45^\circ$  が解候補に含まれないため、 $\Omega_1$  の値が小さくなっている。境界条件 CSFF, CCCC については、Blended layer によって最外層に複数のサブエリアを設けたときに、第 2 層の繊維配向角は BL-1 の場合とは異なる値

Table 6.7 Best solutions for square plates with  $[(\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2}/\dots)/\theta_2/0/45/90/-45]$  using GA with the Ritz method ( $\Delta\theta_1^{A_i} = \Delta\theta_2 = 15^\circ; M \times N = 8 \times 8, b/a = 1$ )

(a) SSSS																	
Type	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$\theta_1^{A3}$	$\theta_1^{A4}$	$\theta_1^{A5}$	$\theta_2$	$c_1/a$	$c_2/a$	$c_3/a$	$c_4/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	-45	-	-	-	-	45	-	-	-	-	53.366	120.898	132.326	213.066	226.766	257.860	-
BL-2	-45	(-45)	-	-	-	45	(0.00)	-	-	-	53.366	120.898	132.326	213.066	226.766	257.860	0.000
BL-5	-45	(-45)	(-45)	(-45)	(-45)	45	(0.00)	(0.00)	(0.00)	(0.00)	53.366	120.898	132.326	213.066	226.766	257.860	0.000
(b) CFFF																	
Type	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$\theta_1^{A3}$	$\theta_1^{A4}$	$\theta_1^{A5}$	$\theta_2$	$c_1/a$	$c_2/a$	$c_3/a$	$c_4/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	0	-	-	-	-	0	-	-	-	-	12.930	17.923	40.265	81.042	85.926	90.614	-
BL-2	0	-15	-	-	-	0	0.75	-	-	-	12.932	18.392	40.963	80.947	86.794	92.243	0.016
BL-5	0	-15	-30	(-30)	(-30)	0	0.75	0.90	(0.90)	(0.90)	12.932	18.751	41.655	80.952	88.272	93.672	0.016
(c) CSFF																	
Type	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$\theta_1^{A3}$	$\theta_1^{A4}$	$\theta_1^{A5}$	$\theta_2$	$c_1/a$	$c_2/a$	$c_3/a$	$c_4/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	30	-	-	-	-	-45	-	-	-	-	15.413	41.717	70.142	101.142	116.598	177.234	-
BL-2	0	-45	-	-	-	30	0.40	-	-	-	16.974	42.126	71.295	101.916	118.248	178.856	10.126
BL-5	15	-30	-60	-45	(-45)	30	0.40	0.45	0.60	(0.60)	17.028	42.539	70.050	104.270	116.806	178.069	10.473
(d) CCCC																	
Type	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$\theta_1^{A3}$	$\theta_1^{A4}$	$\theta_1^{A5}$	$\theta_2$	$c_1/a$	$c_2/a$	$c_3/a$	$c_4/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	90	-	-	-	-	0	-	-	-	-	91.378	186.138	190.764	259.654	347.900	349.205	-
BL-2	-30	-75	-	-	-	15	0.40	-	-	-	93.613	186.549	193.500	268.221	337.570	355.325	2.446
BL-5	-15	-60	90	-45	0	0	0.15	0.25	0.75	0.85	99.564	191.568	206.714	270.623	345.623	380.252	8.958

を示した。さらに BL-5 では  $\Omega_1$  が約 10% 増加した。他方、境界条件 SSSS, CFFF ではそのような違いはほとんど認められなかった。

### 6.3 結言

積層板の最外層に採用された Blended layer の各サブエリアの繊維配向角を  $15^\circ$  または  $10^\circ$  ずつ変化させて、基本振動数を最大化するような最適化問題に取り組んだ。比較的単純な例としてとりあげた二つのサブエリアを有する正方形積層板に対して、本研究で提案した高速で計算が行えるリッツ法によって、すべての組合せについて計算を行う総当たり法によって最適解を求めた。サブエリアの数が 3 以上となる、設計変数がより多い問題については、遺伝的アルゴリズム (GA) による最適化を試みた。その際、実験計画法によってあらかじめ最適な GA パラメータを求めた。リッツ法と GA による最適化を組合せた数値実験では、Blended layer の各サブエリアにおける繊維配向角の準最適解を求めることができた。

GA による計算では、可能なすべての組合せについて値を求めた総当たりによる手法とほぼ同等の効果と精度が得られた。また一般に Blended layer のサブエリアが増加するほど基本振動数の最適値が大きくなることが確かめられた。この傾向は 4 辺を固定支持する CCCC のような剛性の高い境界条件の場合に顕著であり、4 辺を単純支持する SSSS, 片持の CFFF のような剛性が低くなるような条件の場合には、サブエリアの増加は基本振動数の増加にあまり影響を及ぼさないことが示された。

本研究によってその優位性が明らかとなった Blended layer が、さまざまな積層板に採用され、性能の向上に寄与することを期待したい。

Table 6.8 Best solutions for square plates with  $[(\theta_1^{A1}/\theta_1^{A2}/\dots)/\theta_2/0/45/90/-45]$ s using GA with the Ritz method ( $\Delta\theta_1^{A_i} = \Delta\theta_2 = 10^\circ$ ;  $M \times N = 8 \times 8$ ,  $b/a = 1$ )

(a) SSSS																	
Type	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$\theta_1^{A3}$	$\theta_1^{A4}$	$\theta_1^{A5}$	$\theta_2$	$c_1/a$	$c_2/a$	$c_3/a$	$c_4/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	-40	-	-	-	-	40	-	-	-	-	53.108	115.477	136.735	210.379	213.687	270.821	-
BL-2	-40	(-40)	-	-	-	40	(0.00)	-	-	-	53.108	115.477	136.735	210.379	213.687	270.821	0.000
BL-5	-50	-40	-50	-40	-50	50	0.05	0.10	0.15	0.90	53.112	119.912	132.500	212.205	224.445	258.659	0.008
(b) CFFF																	
Type	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$\theta_1^{A3}$	$\theta_1^{A4}$	$\theta_1^{A5}$	$\theta_2$	$c_1/a$	$c_2/a$	$c_3/a$	$c_4/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	0	-	-	-	-	0	-	-	-	-	12.930	17.923	40.265	81.042	85.926	90.614	-
BL-2	0	-10	-	-	-	0	0.65	-	-	-	12.933	18.253	40.823	80.822	86.254	91.979	0.022
BL-5	0	-10	-40	-80	(-80)	0	0.35	0.90	0.95	(0.95)	12.933	18.769	46.174	80.853	89.591	103.841	0.023
(c) CSFF																	
Type	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$\theta_1^{A3}$	$\theta_1^{A4}$	$\theta_1^{A5}$	$\theta_2$	$c_1/a$	$c_2/a$	$c_3/a$	$c_4/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	20	-	-	-	-	-40	-	-	-	-	15.423	39.052	73.767	92.821	113.512	173.690	-
BL-2	0	-40	-	-	-	30	0.40	-	-	-	16.788	41.201	71.951	97.563	117.477	178.655	8.851
BL-5	10	30	0	-40	-50	30	0.30	0.45	0.50	0.55	17.171	42.968	71.775	104.266	117.387	175.509	11.335
(d) CCCC																	
Type	$\theta_1^{A1}$	$\theta_1^{A2}$	$\theta_1^{A3}$	$\theta_1^{A4}$	$\theta_1^{A5}$	$\theta_2$	$c_1/a$	$c_2/a$	$c_3/a$	$c_4/a$	$\Omega_1$	$\Omega_2$	$\Omega_3$	$\Omega_4$	$\Omega_5$	$\Omega_6$	dif. in $\Omega_1$ (%)
BL-1	90	-	-	-	-	-10	-	-	-	-	91.391	187.156	189.404	261.343	344.750	349.710	-
BL-2	-40	-80	-	-	-	10	0.25	-	-	-	93.184	187.528	193.169	264.794	340.674	357.992	1.962
BL-5	10	50	90	50	10	-20	0.20	0.25	0.80	0.85	99.205	193.805	201.586	273.056	349.265	368.375	8.551

---

## 第7章 結論

本研究では、長形状の対称積層平板に対して振動解析を行った。面内・面外の振動について、平板に自由辺、単純支持辺、固定辺の境界条件を設定し、固有振動数の計算を行った。計算にはリッツ法を用いた。FEMによる解析結果や過去の研究と比較することにより、リッツ法の計算精度が十分であることが確認された。積層板の1次固有振動数を最大化させるためなどの最適設計を試み、総当たり法、GA、PSOを用いて探索計算を行った。サブエリアごとに繊維配向角が異なる Blended layer を最外層に採用した積層平板についてもリッツ法による面外振動解析を行い、その適用が妥当であることが確かめられた。また Blended layer を含む積層板について、1次固有振動数が最大となるような最適化を試みて、その性能評価を行った。各章において、以下に示す結果を導き出すことができた。

第2章では、対称積層板について面内振動の解析を行った。リッツ法を用いた面内振動の計算精度が十分であることが確かめられた。配向角の組合せなどが異なる単層板と積層板あわせて6種類を対象として、その4辺に自由(F)、辺方向の変位のみを拘束する単純支持(S1)、辺に垂直な方向の変位のみを拘束する単純支持(S2)、固定(C)のすべての組合せを境界条件として課し、それらを固有振動数によってクラス分けするとともに、積層板の構成による各クラス間の関係について明らかにした。

第3章では、単層板やアングルプライ4層板など4種類の積層正方形板について総当たり法によって固有振動数の最適解を求めた。(1)1次固有振動数の最大化、(2)1次固有振動数の最小化、(3)1次と2次の固有振動数の差の最大化について取扱った。(1)については、ほとんどの境界条件において単層板よりもアングルプライ積層板の方が、設計変数の数が同一にもかかわらず明らかな優位性を示すことが認められた。一

方, 対称 4 層積層板と対称 8 層積層板では, ごく一部の境界条件を除いて 1 次固有振動数最大化に対する効果の違いはほぼ認められない結果となった. (2) については, 境界条件ごとに得られた繊維配向角が 4 種類の積層板で同じ値となった. (3) については, 単層板とアングルプライ積層板における 1 次と 2 次の固有振動数の差は, (1) で見られるほどの違いは生じなかった.

第 4 章では, 対称積層平板の面外振動について 1 次固有振動数を最大化するような最適化を試みた. 振動を最適化するための積層板を構成する各層の繊維配向角をリッツ法とメタヒューリスティックスの GA もしくは PSO を用いて, 両手法の解の探索性能を比較した. なお両メタヒューリスティックスで用いられるパラメータは実験計画法によってあらかじめ決めておいた. その結果, PSOの方が GA よりも解の収束が早いことが明らかとなった.

第 5 章では最外層にサブエリア数 1~5 の Blended layer を持つ積層板について, リッツ法を用いて面外振動の解析を行った. 求められた 1 次から 5 次までの固有振動数は FEM によって得られた値とよく一致しており, その差異はいずれも 1% 以内であった. 以上のことから Blended layer を有する積層板に対してもその適用の妥当性が確認された.

第 6 章では再度 Blended layer を有する積層板をとり上げ, 面外振動について 1 次固有振動数を最大化することを目的とする最適化を試みた. Blended layer 板の存在によって設計の自由度が増す一方で, パラメータが増加し計算コストも増大する. そこで設計変数が少ない問題に対しては総当たり法を, 多い問題に対しては GA を用いてリッツ法による数値解析を行った. その結果, 拘束の程度が大きな CCCC などの境界条件では, Blended layer のサブエリア数を増加することによって明らかな改善が認められた. また GA によって, 実用的な準最適解が総当たり法よりも短い時間で得

---

られることが確認された。

本研究によって得られた知見が，積層板の振動解析の発展に貢献することを期待したい。

## 謝辞

本研究を実施するにあたり，北海道大学工学研究院の成田吉弘教授（当時，現大和大学理工学部教授），主査の佐々木克彦教授，本田真也准教授に多大なるご指導を賜りましたことに深甚なる謝意を表します。

成田教授には忍耐強くご指導いただき，研究分野に関する多くのご助言のみならず研究に対する姿勢をもご教示いただきました。北海道大学を去られた後も，それまでと変わらずに引き続いてご懇篤なるご助言を賜りまして感謝に堪えません。

佐々木教授には，その後の研究指導を継続戴き，論文執筆に関することから博士課程における諸手続きに至るまで，多岐にわたり親身にアドバイスを賜りましたことを厚くお礼申し上げます。

本田准教授には，研究を進める過程で生じるさまざまな疑問について丁寧にお答えいただくとともに，論文執筆に際して，適切にご指摘を賜りましたことを深謝申し上げます。

印南 信男

---

## 参考文献

### 第 1 章

- [1.1] A.W. Leissa, Vibration of plates. Reprinted by the Acoustical Society of America, U.S. Government Printing Office. 1969, Washington D.C.: NASA SP-160.
- [1.2] J.R. Vinson, R.L. Sierakowski, The behavior of structures composed of composite materials, *J Appl Mech.* 54 (1987) 249. <https://doi.org/10.1115/1.3172985>.
- [1.3] J.N. Reddy, Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. 1997, Boca Raton, FL: CRC Press.
- [1.4] R.M. Jones, Mechanics of composite materials, second ed. 1999, Taylor and Francis. <https://doi.org/10.1201/9781498711067>.
- [1.5] A.W. Leissa, M.S. Qatu, Vibration of continuous systems. 2011, McGraw-Hill Professional Pub.
- [1.6] S. Kirkpatrick, C.D. Gelatt, M.P. Vecchi, Optimization by simulated annealing, *Science* 220 (1983) 671–680. <https://doi.org/10.1126/science.220.4598.671>.
- [1.7] F. Glover, Future paths for integer programming and links to artificial intelligence, *Comput Oper Res.* 13 (1986) 533–549. [https://doi.org/10.1016/0305-0548\(86\)90048-1](https://doi.org/10.1016/0305-0548(86)90048-1).
- [1.8] R.M. Kling, P. Banerjee, A placement algorithm for execution on distributed processors, *Proc. Intl Conf on Computer-Aided Design.* (1987) 354–357.
- [1.9] M. Dorigo, Optimization, learning and natural algorithms, Ph. D. thesis. 1992, Politecnico di Milano.
- [1.10] J.H. Holland, Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence. 1975 & 1992, A Bradford Book.
- [1.11] J. Kennedy, R. Eberhart, Particle swarm optimization, *Proc. IEEE Intl Conf on Neural Networks. IV.* (1995)1942–1948. <http://dx.doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968>.
- [1.12] J. Kennedy, R.C. Eberhart, Swarm intelligence. 2001, Morgan Kaufmann.
- [1.13] C.W. Bert, Optimal design of a composite-material plate to maximize its fundamental frequency, *J Sound Vib.* 50 (1977) 229–237. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(77\)90357-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(77)90357-1).

- 
- [1.14] C.W. Bert, Design of clamped composite-material plates to maximize fundamental frequency, *J Mech Design*. 100 (1978) 274–278. <https://doi.org/10.1115/1.3453911>.
- [1.15] R. Reiss, S. Ramachandran, Maximum frequency design of symmetric angle-ply laminates, *Compos Struct*. 4 (1987) 476–487. [https://doi.org/10.1007/978-94-009-3455-9\\_37](https://doi.org/10.1007/978-94-009-3455-9_37).
- [1.16] H. Fukunaga, H. Sekine, M. Sato, Optimal design of symmetric laminated plates for the fundamental frequency, *J Sound Vib*. 171 (1994) 219–229. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1115>.
- [1.17] Y. Narita, Layerwise optimization for the maximum fundamental frequency of laminated composite plates, *J Sound Vib*. 263 (2003) 1005–1016. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00270-0](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00270-0).
- [1.18] M.M. Abdalla, S. Setoodeh, Z. Gürdal, Design of variable stiffness composite panels for maximum fundamental frequency using lamination parameters, *Compos Struct*. 81 (2007) 283–291. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2006.08.018>.
- [1.19] S. Honda, Y. Narita, K. Sasaki, Maximizing the fundamental frequency of laminated composite plates with optimally shaped curvilinear fibers, *J Syst Des Dyn*. 3 (2009) 867–876. <https://doi.org/10.1299/jsdd.3.867>.
- [1.20] S. Honda, T. Igarashi, Y. Narita, Multi-objective optimization of curvilinear fiber shapes for laminated composite plates by using NSGA-II, *Compos Part B Eng*. 45 (2013) 1071–1078. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.07.056>.
- [1.21] S. Honda, Multi-objective optimization of variable-stiffness composites fabricated by tailored fiber placement machine, *EPI Int J Eng*. 2 (2019) 14–18. <https://doi.org/10.25042/epi-ije.022019.04>.
- [1.22] N.S. Bardell, R.S. Langley, J.M. Dunson, On the free in-plane vibration of isotropic rectangular plates, *J Sound Vib*. 191 (1996) 459–467. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0134>.
- [1.23] D.J. Gorman, Free in-plane vibration analysis of rectangular plates by the method of superposition, *J Sound Vib*. 272 (2004) 831–851. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00421-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00421-8).
- [1.24] D.J. Gorman, Exact solutions for the free in-plane vibration of rectangular plates with two opposite edges simply supported, *J Sound Vib*. 294 (2006) 131–161. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.10.023>.
-

- 
- [1.25] Y.F. Xing, B. Liu, Exact solutions for the free in-plane vibrations of rectangular plates, *Int J Mech Sci.* 51 (2009) 246–255. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2008.12.009>.
- [1.26] D.J. Gorman, Accurate in-plane free vibration analysis of rectangular orthotropic plates, *J Sound Vib.* 323 (2009) 426–443. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.12.021>.
- [1.27] B. Liu, Y. Xing, Comprehensive exact solutions for free in-plane vibrations of orthotropic rectangular plates, *Eur J Mech A/Solid.* 30 (2011) 383–395. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2011.01.003>.
- [1.28] R.L. Woodcock, R.B. Bhat, I.G. Stiharu, Effect of ply orientation on the in-plane vibration of single-layer composite plates, *J Sound Vib.* 312 (2008) 94–108. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.10.028>.
- [1.29] L. Dozio, In-plane free vibrations of single-layer and symmetrically laminated rectangular composite plates, *Compos Struct.* 93 (2011) 1787–1800. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.01.021>.

## 第 2 章

- [2.1] A.W. Leissa, *Vibration of plates*. Reprinted by the Acoustical Society of America, U.S. Government Printing Office. 1969, Washington D.C.: NASA SP-160.
- [2.2] D.J. Gorman, *Vibration analysis of plates by the superposition method*. 1999, World Scientific Publishing. <https://doi.org/10.1142/3967>.
- [2.3] A.W. Leissa, M.S. Qatu, *Vibration of continuous systems*. 2011, McGraw-Hill Professional Pub.
- [2.4] N.S. Bardell, R.S. Langley, J.M. Dunson, On the free in-plane vibration of isotropic rectangular plates, *J Sound Vib.* 191 (1996) 459–467. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0134>.
- [2.5] D.J. Gorman, Free in-plane vibration analysis of rectangular plates by the method of superposition, *J Sound Vib.* 272 (2004) 831–851. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00421-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00421-8).
- [2.6] D.J. Gorman, Accurate analytical type solutions for the free in-plane vibration of clamped and simply supported rectangular plates, *J Sound Vib.* 276 (2004) 311–333. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.07.037>.
- [2.7] D.J. Gorman, Exact solutions for the free in-plane vibration of rectangular plates
-

- 
- with two opposite edges simply supported, *J Sound Vib.* 294 (2006) 131–161. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.10.023>.
- [2.8] Y.F. Xing, B. Liu, Exact solutions for the free in-plane vibrations of rectangular plates, *Int J Mech Sci.* 51 (2009) 246–255. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2008.12.009>.
- [2.9] A. Houmat, In-plane vibration of plates with curvilinear plan-forms by a trigonometrically enriched curved triangular p-element, *Thin-Walled Struct.* 46 (2008) 103–111. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.08.013>.
- [2.10] X. Liu, J.R. Banerjee, A spectral dynamic stiffness method for free vibration analysis of plane elastodynamic problems, *Mech Syst Signal Pr.* 87 (2017) 136–160. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.10.017>.
- [2.11] D.J. Gorman, Free in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastic support normal to the boundaries, *J Sound Vib.* 285 (2005) 941–966. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.09.017>.
- [2.12] J. Du, W.L. Li, G. Jin, T. Yang, Z. Liu, An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges, *J Sound Vib.* 306 (2007) 908–927. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.06.011>.
- [2.13] D.J. Gorman, Accurate in-plane free vibration analysis of rectangular orthotropic plates, *J Sound Vib.* 323 (2009) 426–443. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.12.021>.
- [2.14] B. Liu, Y. Xing, Comprehensive exact solutions for free in-plane vibrations of orthotropic rectangular plates, *Eur J Mech A/Solid.* 30 (2011) 383–395. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2011.01.003>.
- [2.15] Y. Zhang, J. Du, T. Yang, Z. Liu, A series solution for the in-plane vibration analysis of orthotropic rectangular plates with elastically restrained edges, *Int J Mech Sci.* 79 (2014) 15–24. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.11.018>.
- [2.16] R.L. Woodcock, R.B. Bhat, I.G. Stiharu, Effect of ply orientation on the in-plane vibration of single-layer composite plates, *J Sound Vib.* 312 (2008) 94–108. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.10.028>.
- [2.17] L. Dozio, In-plane free vibrations of single-layer and symmetrically laminated rectangular composite plates, *Compos Struct.* 93 (2011) 1787–1800. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.01.021>.
- [2.18] A.W. Leissa, The free vibration of rectangular plates, *J Sound Vib.* 31 (1973)
-

- 
- 257–293. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(73\)80371-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80371-2).
- [2.19] C.W. Bert, M. Malik, Frequency equations and modes of free vibrations of rectangular plates with various edge conditions, *P I Mech Eng C-J Mec.* 208 (1994) 307–319. [https://doi.org/10.1243/PIME\\_PROC\\_1994\\_208\\_133\\_02](https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1994_208_133_02).
- [2.20] M. Eisenberger, A. Deutsch, Solution of thin rectangular plate vibrations for all combinations of boundary conditions, *J Sound Vib.* 452 (2019) 1–12. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.03.024>.
- [2.21] Y. Narita, Combinations for the free-vibration behaviors of anisotropic rectangular plates under general edge conditions, *ASME J Appl Mech.* 67 (2000) 568–573. <https://doi.org/10.1115/1.1311959>.
- [2.22] Y. Narita, M. Innami, D. Narita, The effect of using different elastic moduli on vibration of laminated CFRP rectangular plates, *EPI Int J Eng.* 2 (2019) 19–27. <https://doi.org/10.25042/epi-ije.022019.05>.
- [2.23] Y. Narita and A.W. Leissa, Vibrations of completely free shallow shells of curvilinear planform, *J Appl Mech, Trans. ASME*, 53 (1986) 647–651. <https://doi.org/10.1115/1.3171825>.
- [2.24] A.W. Leissa, Y. Narita, Vibrations of completely free shallow shells of rectangular planform, *J Sound Vib.* 96 (1984) 207–218. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(84\)90579-0](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90579-0).

### 第 3 章

- [3.1] N.S. Bardell, R.S. Langley, J.M. Dunson, On the free in-plane vibration of isotropic rectangular plates, *J Sound Vib.* 191 (1996) 459–467. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1996.0134>.
- [3.2] D.J. Gorman, Free in-plane vibration analysis of rectangular plates by the method of superposition, *J Sound Vib.* 272 (2004) 831–851. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00421-8](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00421-8).
- [3.3] D.J. Gorman, Accurate analytical type solutions for the free in-plane vibration of clamped and simply supported rectangular plates, *J Sound Vib.* 276 (2004) 311–333. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.07.037>.
- [3.4] D.J. Gorman, Exact solutions for the free in-plane vibration of rectangular plates with two opposite edges simply supported, *J Sound Vib.* 294 (2006) 131–161. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.10.023>.

- 
- [3.5] Y.F. Xing, B. Liu, Exact solutions for the free in-plane vibrations of rectangular plates, *Int J Mech Sci.* 51 (2009) 246–255. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2008.12.009>.
- [3.6] X. Liu, J.R. Banerjee, A spectral dynamic stiffness method for free vibration analysis of plane elastodynamic problems, *Mech Syst Signal Pr.* 87 (2017) 136–160. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2016.10.017>.
- [3.7] D.J. Gorman, Free in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastic support normal to the boundaries, *J Sound Vib.* 285 (2005) 941–966. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.09.017>.
- [3.8] J. Du, W.L. Li, G. Jin, T. Yang, Z. Liu, An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges, *J Sound Vib.* 306 (2007) 908–927. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.06.011>.
- [3.9] D.J. Gorman, Accurate in-plane free vibration analysis of rectangular orthotropic plates, *J Sound Vib.* 323 (2009) 426–443. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.12.021>.
- [3.10] B. Liu, Y. Xing, Comprehensive exact solutions for free in-plane vibrations of orthotropic rectangular plates, *Eur J Mech A/Solid.* 30 (2011) 383–395. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2011.01.003>.
- [3.11] Y. Zhang, J. Du, T. Yang, Z. Liu, A series solution for the in-plane vibration analysis of orthotropic rectangular plates with elastically restrained edges, *Int J Mech Sci.* 79 (2014) 15–24. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.11.018>.
- [3.12] R.L. Woodcock, R.B. Bhat, I.G. Stiharu, Effect of ply orientation on the in-plane vibration of single-layer composite plates, *J Sound Vib.* 312 (2008) 94–108. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.10.028>.
- [3.13] L. Dozio, In-plane free vibrations of single-layer and symmetrically laminated rectangular composite plates, *Compos Struct.* 93 (2011) 1787–1800. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.01.021>.
- [3.14] Y. Narita, M. Inami, Identifying all combinations of boundary conditions for in-plane vibration of isotropic and anisotropic rectangular plates, *Thin-Walled Struct.* 164 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107320>.
- [3.15] Y. Narita, M. Inami, D. Narita, The effect of using different elastic moduli on vibration of laminated CFRP rectangular plates, *EPI Int J Eng.* 2 (2019) 19–27. <https://doi.org/10.25042/epi-ije.022019.05>.
-

---

## 第 4 章

- [4.1] R.T. Haftka, Z. Gürdal, M.P. Kamat, Elements of structural optimization. 1990, Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-7862-2>.
- [4.2] K.L. Du, M.N.S. Swamy, Search and optimization by metaheuristics: techniques and algorithms inspired by nature. 2016, Birkhäuser. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-41192-7>.
- [4.3] J.H. Holland, Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence. 1975 & 1992, A Bradford Book.
- [4.4] D.E. Goldberg, Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. 1989, Addison-Wesley Professional.
- [4.5] A. E. Olsson, Particle swarm optimization: theory, techniques and applications. 2011, Nova Science Pub Inc.
- [4.6] J. Kennedy, R. Eberhart, Particle swarm optimization, Proc. IEEE Intl Conf on Neural Networks. IV. (1995)1942–1948. <http://dx.doi.org/10.1109/ICNN.1995.488968>.
- [4.7] J. Kennedy, R.C. Eberhart, Swarm Intelligence. 2001, Morgan Kaufmann.
- [4.8] R. Poli, An analysis of publications on particle swarm optimisation applications, Technical Report CSM-469. 2007, Department of Computer Science, University of Essex, UK.
- [4.9] R. Poli, Analysis of the publications on the applications of particle swarm optimization, J Artif Evol Appl. (2008) 1–10. <https://doi.org/10.1155/2008/685175>.
- [4.10] M.R. Bonyadi, Z. Michalewicz, Particle swarm optimization for single objective continuous space problems: a review. Evol Comput. 25 (2017) 1–54. [https://doi.org/10.1162/EVC0\\_r\\_00180](https://doi.org/10.1162/EVC0_r_00180).
- [4.11] C.W. Bert, Optimal design of a composite-material plate to maximize its fundamental frequency, J Sound Vib. 50 (1977) 229–237. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(77\)90357-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(77)90357-1).
- [4.12] C.W. Bert, Design of clamped composite-material plates to maximize fundamental frequency, J Mech Design. 100 (1978) 274–278. <https://doi.org/10.1115/1.3453911>.
- [4.13] H. Fukunaga, H. Sekine, M. Sato, Optimal design of symmetric laminated plates for the fundamental frequency, J Sound Vib. 171 (1994) 219–229. <https://doi.org/10.1115/1.3453911>.

---

org/10.1006/jsvi.1994.1115.

- [4.14] X. Zhao, Y. Narita, Maximization of fundamental frequency for generally laminated rectangular plates by the complex method, *Trans JSME*. 63C (1997) 364–370 (in Japanese). <https://doi.org/10.1299/kikaic.63.364>.
- [4.15] A. Todoroki, R.T. Haftka, Stacking sequence optimization by a genetic algorithm with a new recessive gene like repair strategy, *Compos Part B*. 29 (1998) 277–285. [https://doi.org/10.1016/S1359-8368\(97\)00030-9](https://doi.org/10.1016/S1359-8368(97)00030-9).
- [4.16] Z. Gürdal, R.T. Haftka, P. Hajela, *Design and optimization of laminated composite materials*. 1999, Wiley-Interscience.
- [4.17] A. Todoroki, T. Ishikawa, Design of experiments for stacking sequence optimizations with genetic algorithm using response surface approximation, *Compos Struct*. 64 (2004) 349–357. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2003.09.004>.
- [4.18] R. Matsuzaki, A. Todoroki, Stacking-sequence optimization using fractal branch-and-bound method for unsymmetrical laminates, *Compos Struct*. 78 (2007) 537–550. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2005.11.015>.
- [4.19] A. Todoroki, M. Sekishiro, Stacking sequence optimization to maximize the buckling load of blade-stiffened panels with strength constraints using the iterative fractal branch and bound method, *Compos Part B*. 39 (2008) 842–850. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2007.10.003>.
- [4.20] Y. Narita, Layerwise optimization for the maximum fundamental frequency of laminated composite plate, *J Sound Vib*. 263 (2003) 1005–1016. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00270-0](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00270-0).
- [4.21] Y. Narita, G.J. Turvey, Maximizing the buckling loads of symmetrically laminated composite rectangular plates using a layerwise optimization approach, *J Mech Eng Sci*. 218 (2004) 681–691. <https://doi.org/10.1243/0954406041319554>.
- [4.22] Y. Narita, Maximum frequency design of laminated plates with mixed boundary conditions, *Int J Solids Struct*. 43 (2006) 4342–4356. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.104>.
- [4.23] T. Le-Manh, J. Lee, Stacking sequence optimization for maximum strengths of laminated composite plates using genetic algorithm and isogeometric analysis, *Compos Struct*. 116 (2014) 357–363. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.05.011>.
- [4.24] A. Ehsani, J. Rezaeepazhand, Stacking sequence optimization of laminated com-

- 
- posite grid plates for maximum buckling load using genetic algorithm, *Int J Mech Sci.* 119 (2016) 97–106. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2016.09.028>.
- [4.25] V. Ho-Huu, T.D. Do-Thi, H. Dang-Trung, T. Vo-Duy, T. Nguyen-Thoi, Optimization of laminated composite plates for maximizing buckling load using improved differential evolution and smoothed finite element method, *Compos Struct.* 146 (2016) 132–147. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.03.016>.
- [4.26] F. Schaedler, de Almeida, Stacking sequence optimization for maximum buckling load of composite plates using harmony search algorithm, *Compos Struct.* 143 (2016) 287–299. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.02.034>.
- [4.27] M.T. Herath, B.G. Prusty, A.W. Phillips, N.S. John, Structural strength and laminate optimization of self-twisting composite hydrofoils using a Genetic Algorithm, *Compos Struct.* 176 (2017) 359–378. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.05.012>.
- [4.28] A.R. Vosoughi, A. Darabi, N. Anjabin, U. Topal, A mixed finite element and improved genetic algorithm method for maximizing buckling load of stiffened laminated composite plates, *Aerosp Sci Technol.* 70 (2017) 378–387. <https://doi.org/10.1016/j.ast.2017.08.022>.
- [4.29] A.R. Vosoughi, A. Darabi, H. Dehghani, Forkhorji, Optimum stacking sequences of thick laminated composite plates for maximizing buckling load using FE-GAs-PSO, *Compos Struct.* 159 (2017) 361–367. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.09.085>.
- [4.30] H. Zhou, M. Song, W. Pedrycz, A comparative study of improved GA and PSO in solving multiple traveling salesmen problem, *Appl Soft Comput.* 64 (2018) 564–580. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2017.12.031>.
- [4.31] M.V. Pathan, S. Patsias, V.L. Tagarielli, A real-coded genetic algorithm for optimizing the damping response of composite laminates, *Comput Struct.* 198 (2018) 51–60. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2018.01.005>.
- [4.32] F. Javidrad, M. Nazari, H.R. Javidrad, Optimum stacking sequence design of laminates using a hybrid PSO-SA method, *Compos Struct.* 185 (2018) 607–618. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.11.074>.
- [4.33] A.B.I. Akmar, O. Kramer, T. Rabczuk, Probabilistic multi-scale optimization of hybrid laminated composites, *Compos Struct.* 184 (2018) 1111–1125. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.10.032>.
-

- 
- [4.34] Y. Narita, Series and Ritz-type buckling analyses. In: Turvey G.J., Marshall I.H. (eds) *Buckling and postbuckling of composite plates*. 1995, Dordrecht: Springer. 33–57 (Chap 2). [https://doi.org/10.1007/978-94-011-1228-4\\_2](https://doi.org/10.1007/978-94-011-1228-4_2).
- [4.35] S.D. Dao, K. Abhary, R. Marian, Maximising performance of genetic algorithm solver in Matlab. *Engineering Letters*. 24 (2016) 75–83.

## 第 5 章

- [5.1] A.W. Leissa, *Vibration of plates*. Reprinted by the Acoustical Society of America, U.S. Government Printing Office. 1969, Washington D.C.: NASA SP-160.
- [5.2] A.W. Leissa, The free vibration of rectangular plates, *J Sound Vib*. 31 (1973) 257–293. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(73\)80371-2](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(73)80371-2).
- [5.3] R.D. Blevins, *Formulas for natural frequency and mode shape*. 1979, New York: Van Nostrand Reinhold Co.
- [5.4] D.J. Gorman, *Free vibration analysis of rectangular plates*. 1982, New York: Elsevier.
- [5.5] D.J. Gorman, *Vibration analysis of plates by the superposition method*. 1999, World Scientific Publishing. <https://doi.org/10.1142/3967>.
- [5.6] J.R. Vinson, R.L. Sierakowski, The behavior of structures composed of composite materials, *J Appl Mech*. 54 (1987) 249. <https://doi.org/10.1115/1.3172985>.
- [5.7] J.N. Reddy, *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. 1997, Boca Raton, FL: CRC Press.
- [5.8] R.M. Jones, *Mechanics of composite materials*, second ed. 1999, Taylor and Francis. <https://doi.org/10.1201/9781498711067>.
- [5.9] A.W. Leissa, M.S. Qatu, *Vibration of continuous systems*. 2011, McGraw-Hill Professional Pub.
- [5.10] C.E. Harris, J.H. Starnes, M.J. Shuart, Design and manufacturing of aerospace composite structures, state-of-the-art assessment, *J Aircr*. 39 (2002) 545–560. <https://doi.org/10.2514/2.2992>.
- [5.11] S. Dutton, D. Kelly, A. Baker, *Composite materials for aircraft structures*, second ed. 2004, AIAA Education. <https://doi.org/10.2514/4.861680>.
- [5.12] C.G. Diaconu, P.M. Weaver, F. Mattioni, Concepts for morphing airfoil sections using bi-stable laminated composite structures, *Thin-Walled Struct*. 46 (2008) 689–701. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.11.002>.

- 
- [5.13] G. Koronis, A. Silva, M. Fontul, Green composites: a review of adequate materials for automotive applications, *Compos Part B Eng.* 44 (2013) 120–127. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.07.004>.
- [5.14] G. Rathnakar, P.P. Pandion, A review on the use and application of polymer composites in automotive industries, *Int J Res Appl Sci Eng Technol.* 3 (2015) 898–903.
- [5.15] D. Narita, Y. Narita, Modelling of thin structural polymer composites for use of automobiles -review-, *EPI Int J Eng.* 1 (2018) 13–20. <https://doi.org/10.25042/epi-ije.022018.03>.
- [5.16] S. Honda, Multi-objective optimization of variable-stiffness composites fabricated by tailored fiber placement machine, *EPI Int J Eng.* 2 (2019) 14–18. <https://doi.org/10.25042/epi-ije.022019.04>.
- [5.17] A.W. Leissa, A.F. Martin, Vibration and buckling of rectangular composite plates with variable fiber spacing, *Compos Struct.* 14 (1990) 339–357. [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(90\)90014-6](https://doi.org/10.1016/0263-8223(90)90014-6).
- [5.18] G. Soremekun, Z. Gürdal, C. Kassapoglou, D. Toni, Stacking sequence blending of multiple composite laminates using genetic algorithms, *Compos Struct.* 56 (2002) 53–62. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(01\)00185-4](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(01)00185-4).
- [5.19] Y. Narita, Series and Ritz-type buckling analyses. In: Turvey G.J., Marshall I.H. (eds) *Buckling and postbuckling of composite plates*. 1995, Dordrecht: Springer. 33–57 (Chap 2). [https://doi.org/10.1007/978-94-011-1228-4\\_2](https://doi.org/10.1007/978-94-011-1228-4_2).
- [5.20] Y. Narita, M. Innami, D. Narita, The effect of using different elastic moduli on vibration of laminated CFRP rectangular plates, *EPI Int J Eng.* 2 (2019) 19–27. <https://doi.org/10.25042/epi-ije.022019.05>.

## 第 6 章

- [6.1] R.T. Haftka, Z. Gürdal, M.P. Kamat, *Elements of structural optimization*. 1990, Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-015-7862-2>.
- [6.2] Z. Gürdal, R.T. Haftka, P. Hajela, *Design and optimization of laminated composite materials*. 1999, Wiley-Interscience.
- [6.3] C.W. Bert, Optimal design of a composite-material plate to maximize its fundamental frequency, *J Sound Vib.* 50 (1977) 229–237. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(77\)90357-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(77)90357-1).

- 
- [6.4] C.W. Bert, Design of clamped composite-material plates to maximize fundamental frequency, *J Mech Design*. 100 (1978) 274–278. <https://doi.org/10.1115/1.3453911>.
- [6.5] R. Reiss, S. Ramachandran, Maximum frequency design of symmetric angle-ply laminates, *Compos Struct*. 4 (1987) 476–487. [https://doi.org/10.1007/978-94-009-3455-9\\_37](https://doi.org/10.1007/978-94-009-3455-9_37).
- [6.6] H. Fukunaga, H. Sekine, M. Sato, Optimal design of symmetric laminated plates for the fundamental frequency, *J Sound Vib*. 171 (1994) 219–229. <https://doi.org/10.1006/jsvi.1994.1115>.
- [6.7] S. Honda, Y. Narita, K. Sasaki, Discrete optimization for vibration design of composite plates by using lamination parameters, *Adv Compos Mater*. 18 (2009) 297–314. <https://doi.org/10.1163/156855109X434739>.
- [6.8] Y. Narita, Layerwise optimization for the maximum fundamental frequency of laminated composite plates, *J Sound Vib*. 263 (2003) 1005–1016. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(03\)00270-0](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00270-0).
- [6.9] Y. Narita, J.M. Hodgkinson, Layerwise optimisation for maximising the fundamental frequencies of point-supported rectangular laminated composite plates, *Compos Struct*. 69 (2005) 127–135. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.05.021>.
- [6.10] Y. Narita, Maximum frequency design of laminated plates with mixed boundary conditions, *Int J Solids Struct*. 43 (2006) 4342–4356. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.06.104>.
- [6.11] H. Ghiasi, D. Pasini, L. Lessard, Optimum stacking sequence design of composite materials Part I: Constant stiffness design, *Compos Struct*. 90 (2009) 1–11. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.01.006>.
- [6.12] Z. Gürdal, R. Olmedo, In-plane response of laminates with spatially varying fiber orientation: variable stiffness concept, *AIAA J*. 31 (1993) 751–758. <https://doi.org/10.2514/3.11613>.
- [6.13] J. Huang, R.T. Haftka, Optimization of fiber orientations near a hole for increased load-carrying capacity of composite laminates, *Struct Multidiscip Optim*. 30 (2005) 335–341. <https://doi.org/10.1007/s00158-005-0519-z>.
- [6.14] M.M. Abdalla, S. Setoodeh, Z. Gürdal, Design of variable stiffness composite panels for maximum fundamental frequency using lamination parameters, *Compos Struct*. 81 (2007) 283–291. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2006.08.018>.
-

- 
- [6.15] H. Ghiasi, K. Fayazbakhsh, D. Pasini, L. Lessard, Optimum stacking sequence design of composite materials Part II: Variable stiffness design, *Compos Struct.* 93 (2010) 1–13. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.06.001>.
- [6.16] H. Akhavan, P. Ribeiro, Natural modes of vibration of variable stiffness composite laminates with curvilinear fibers, *Compos Struct.* 93 (2011) 3040–3047. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.04.027>.
- [6.17] P. Ribeiro, H. Akhavan, A. Teter, J. Warmiński, A review on the mechanical behaviour of curvilinear fibre composite laminated panels, *J Compos Mater.* 48 (2014) 2761–2777. <https://doi.org/10.1177/0021998313502066>.
- [6.18] S. Honda, Y. Oonishi, Y. Narita, K. Sasaki, Vibration analysis of composite rectangular plates reinforced along curved lines, *J Syst Des Dyn.* 2 (2008) 76–86. <https://doi.org/10.1299/jsdd.2.76>.
- [6.19] S. Honda, Y. Narita, Design for the maximum natural frequency of laminated composite plates by optimally distributed short fibers, *J Syst Des Dyn.* 2 (2008) 1195–1205. <https://doi.org/10.1299/jsdd.2.1195>.
- [6.20] S. Honda, Y. Narita, K. Sasaki, Maximizing the fundamental frequency of laminated composite plates with optimally shaped curvilinear fibers, *J Syst Des Dyn.* 3 (2009) 867–876. <https://doi.org/10.1299/jsdd.3.867>.
- [6.21] S. Honda, Y. Narita, Vibration design of laminated fibrous composite plates with local anisotropy induced by short fibers and curvilinear fibers, *Compos Struct.* 93 (2011) 902–910. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.07.003>.
- [6.22] S. Honda, Y. Narita, Natural frequencies and vibration modes of laminated composite plates reinforced with arbitrary curvilinear fiber shape paths, *J Sound Vib.* 331 (2012) 180–191. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.08.019>.
- [6.23] S. Honda, T. Igarashi, Y. Narita, Multi-objective optimization of curvilinear fiber shapes for laminated composite plates by using NSGA-II, *Compos Part B Eng.* 45 (2013) 1071–1078. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2012.07.056>.
- [6.24] S. Honda, Multi-objective optimization of variable-stiffness composites fabricated by tailored fiber placement machine, *EPI Int J Eng.* 2 (2019) 14–18. <https://doi.org/10.25042/epi-ije.022019.04>.
- [6.25] C.G. Diaconu, P.M. Weaver, F. Mattioni, Concepts for morphing airfoil sections using bi-stable laminated composite structures, *Thin-Walled Struct.* 46 (2008) 689–701. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.11.002>.
-

- 
- [6.26] A.S. Panesar, P.M. Weaver, Optimisation of blended bistable laminates for a morphing flap, *Compos Struct.* 94 (2012) 3092–3105. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.05.007>.
- [6.27] S. Zein, M. Bruyneel, A bilevel integer programming method for blended composite structures, *Adv Eng Softw.* 79 (2015) 1–12. <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2014.08.008>.
- [6.28] T. Macquart, M.T. Bordogna, P. Lancelot, R. De Breuker, Derivation and application of blending constraints in lamination parameter space for composite optimisation, *Compos Struct.* 135 (2016) 224–235. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.09.016>.
- [6.29] J. Yang, B. Song, X. Zhong, P. Jin, Optimal design of blended composite laminate structures using ply drop sequence, *Compos Struct.* 135 (2016) 30–37. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.08.101>.
- [6.30] A. Muc, Design of blended/tapered multilayered structures subjected to buckling constraints, *Compos Struct.* 186 (2018) 256–266. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.12.001>.
- [6.31] J.H. Holland, *Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence.* 1975 & 1992, A Bradford Book.
- [6.32] D.E. Goldberg, *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning.* 1989, Addison-Wesley Professional.
- [6.33] A.D. Bethke, *Genetic algorithms as function optimizers*, Ph. D. thesis. 1978, Ann Arbor, MI: University of Michigan.
- [6.34] R.A. Caruana, J.D. Schaffer, Representation and hidden bias: Gray vs. binary coding for genetic algorithms, *Mach Learn Proc.* (1988) 153–161. <https://doi.org/10.1016/b978-0-934613-64-4.50021-9>.
- [6.35] K.A. De Jong, *An analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems*, Ph. D. thesis. 1975, Ann Arbor, MI: University of Michigan.
- [6.36] K. Yang, B. El-Haik, *Design for six sigma: a roadmap for product development.* 2003, New York: McGraw-Hill.
-