学位論文内容の要約

博士の専攻分野の名称：博士 (文学)　　　　氏名： 村井　涼

学位論文題名
Proof-Theoretic Study of Distributed Knowledge
（分散知識の証明論的研究）

認識論理は、様相論理の一種として 1950 年代から 1960 年代にかけて哲学者の von Wright や Hintikka が定式化した、知識に関わる推論を記述する論理である。1980 年代以降は計算機科学者や経済学者の関心も集め、学際的な分野として発展してきている。認識論理では、「エージェント a が命題 φ を知っている」という事態が様相演算子 K_a を用いて「$K_a\varphi$」という論理式で表現される。

認識論理の重要なトピックとして集団知識がある。本論文は、認識論理の枠組みで研究されてきた集団知識概念のうちの一つである「分散知識」の概念を研究対象とする。命題 φ が集団 G の分散知識であること（$D_G\varphi$ と表記される）は、多くの文献で「G 内で各成員の知識の集約をしたときに φ がわかること」として説明されてきたが、「G の外部にいる第三者が G の各成員の知識にアクセスできるときに φ を知りうること」という説明がより正確なものとしてÅgotnes と Wáng によって提案されている。例えば、エージェント a が命題 $p \to q$ を、エージェント b が命題 p を知っているとき、それらの知識にアクセスできる第三者はモーダス・ポネンス（$p \to q, p.$ よって q）により命題 q を得るので、集団 $\{a, b\}$ は分散知識 q を持つ（$D_{\{a,b\}}q$）。形式的には、$D_G\varphi$ の意味はクリプキ意味論（状態間の到達可能性関係に基づく意味論）において次のように解釈される。すなわち、$D_G\varphi$ が状態 w で成り立つことは、すべての $a \in G$ について wR_av を満たすような任意の状態 v において φ が成り立つこととして定義される。 ここで、R_a は状態の集合上のエージェント a についての二項関係である。

以下、本論文の各章について述べる。

第 1 章は序論である。前半部分では、認識論理や分散知識についての概説ののちに本研究の直接の背景と概要が述べられる。後半部分では、本論文の本論部分である第 2 章から第 4 章で扱われる論理体系の基礎となる既知の論理体系についての諸定義・諸結果が述べられる。

第 2 章では、既存の分散知識を持つ認識論理（以下、「分散知識論理」と呼ぶ）の証明論を扱う。論理体系の研究においては伝統的にモデル論的（意味論的）アプローチと証明論的アプローチの二種のアプローチが存在する。前者は当該論理体系を解釈するための数学的枠組みである意味論（あるいはその具体的対象であるモデル）を重視し、後者は当該論理体系に対応す

る証明体系での形式的証明に着目する。しかし、これまでの分散知識論理の研究はモデル論的アプローチによるものがほとんどであった。証明論的アプローチでは「シークエント計算」と呼ばれる証明体系を用いるのが標準的である。シークエントとは、論理式の多重集合 Γ と Δ の対であり、「$\Gamma \Rightarrow \Delta$」と表記される。これは直観的には「$\Gamma$ のすべての論理式が成り立つとき、Δ のうちのいずれかの論理式が成り立つ」ことを意味する。分散知識論理のシークエント計算に関する先行研究は、(1)Hakli と Negri によるもの、(2)Pliuškevičius と Pliuškevičienė によるもの及び Giedra によるものの二種がこれまで知られている。前者は、分散知識のクリプキ意味論上の定義を陽に組み込んだ定式化であるが、意味論の概念を陽に含むがゆえに分散知識論理における推論を直截に記述しているとは言い難い。後者は分散知識演算子が集団でパラメータ化されていないという点で、本研究で対象とするもの(「D_G」)より一般性に欠けるものになっている。本章で与えるシークエント計算は、既存の Gentzen 流の様相論理のシークエント計算を分散知識演算子が集団でパラメータ化された分散知識論理に直接一般化することによって得られたものであり、上記の先行研究の問題点を克服したものとなっている。具体的には以下の結果が示される。既知の様相論理の公理系に対応した 5 つの分散知識論理 $\mathbf{K}_D$、$\mathbf{KT}_D$、$\mathbf{K4}_D$、 $\mathbf{S4}_D$、 $\mathbf{S5}_D$ に対応するシークエント計算が導入され、それぞれの論理のヒルベルト系との等価性が示される。そのうち $\mathbf{K}_D$、$\mathbf{KT}_D$、$\mathbf{K4}_D$、 $\mathbf{S4}_D$ の 4 つの論理のシークエント計算については、シークエント計算の研究において重要な位置を占めるカット除去定理が証明され、前原の手法により、論理学上も応用上も重要とされるクレイグ補間定理がカット除去定理を用いて証明される。

第 3 章では、直観主義論理上の分散知識論理を扱う。認識論理はこれまで主に古典論理をベースとして研究されてきたが、複数の観点からいくつかの直観主義認識論理も提案されてきている。哲学的論理学者は、真理に関する検証主義の観点から直観主義認識論理を提案し、Fitch の可知性パラドックスのような哲学上の問題に応用してきた。他方、計算機科学においては分散コンピューティングの解析のために直観主義認識論理が提案されている。Jäger と Marti は、筆者の知る限り初めて、直観主義論理上の分散知識論理を定式化した。この体系は、上記の種々の直観主義認識論理とは異なり、検証主義的な知識概念の分析や計算機科学上の問題への応用を直接に志向してはおらず、従来の分散知識論理の土台を古典論理から直観主義論理に自然に変更したものと考えることができる。具体的には、Jäger と Marti は直観主義分散知識論理 **IK**、**IKT** のヒルベルト系の意味論的完全性を証明している。本章で扱う論理は、基本的には Jäger と Marti による論理をベースにしているが、以下の点で異なっている。第一に、本章の論理では、分散知識演算子は集団でパラメータ化されているのに対し、Jäger と Marti はエージェント全体の分散知識のみを扱っている。第二に、Jäger と Marti が扱う様相論理の公理は (K), (T) だけであるのに対し、本章では加えて (4)、(D) も扱っている。具体的には、本章では、直観主義論理を土台とする分散知識論理 **IK**、 **IKT**、 **IKD**、 **IK4**、 **IK4D**、 **IS4** を扱っている。公理 (D) について一点注意を述べる。本章の論理における公理

(D) は $\neg D_{\{a\}}\bot$ であり分散知識演算子が一人のエージェントに対するものに制限されている。これは、公理 (D) に対応する各到達可能性関係 R_a の性質である継起性（任意の状態 w について wR_av なる状態 v が存在する）は、関係同士の交わりを取るという操作に関して保存されず（すなわち、R_a, R_b が継起的でも $R_a \cap R_b$ が継起的とならないことがありうる)、それゆえ $\neg D_G\bot$ を公理として含む論理は、$D_G\bot$ の解釈が関係同士の交わり $\bigcap_{a\in G} R_a$ に基づいてなされるために、到達可能性関係が継起的であるクリプキフレームに関して健全ではないからである。ここで「健全」とは、ある証明体系において証明可能な論理式が対応する意味論において妥当であることを意味する重要な性質である。第三に、本章では Jäger と Marti とは異なり、意味論的完全性の証明については、「疑似モデル」という概念を用いた分散知識の研究においてより標準的な方法を採用している。また、後述の理由で、意味論的完全性については、通常のクリプキフレームのクラスに対するものと安定性と呼ばれる性質を持つクリプキフレームのクラスに対するものの二つを証明している。第四に、本章ではシークエント計算に基づく証明論にも取り組んでいる。本章では、第 2 章と同様の発想で、上記 6 種の論理についてカット除去定理の成り立つシークエント計算を提案し、前原の方法によってカット除去定理の帰結としてクレイグ補間定理を証明した。また、カット規則の適用のない導出木についての Gentzen による議論に則り、カット除去定理を用いて決定可能性を証明している。すなわち、あるシークエントが導出可能かどうかを有限時間内に判定するアルゴリズムが存在する。これは論理体系にとって重要な性質であるが Jäger と Marti による研究では示されていなかった。

第 4 章では、第 3 章で扱った直観主義論理上の分散知識論理を公開告知演算子 $[\varphi]$ によって拡張する。近年、出来事や行為がエージェントの知識にもたらす影響を記述する動的認識論理が認識論理の研究において重要な位置を占めている。公開告知論理はすべてのエージェントに対する命題の告知（公開告知演算子 $[\varphi]$ で表される）によるエージェントの知識の変化を表現することを可能にする論理であり、動的認識論理のうちで最も基礎的なものである。公開告知論理によって、例えば Muddy Children Puzzle のような知識に関する問題の分析ができることが知られている。公開告知論理については本章の内容と直接関係する範囲で以下の変種・拡張が知られている。直観主義論理上の公開告知論理の研究としては Ma らによるものがある。これは、Fischer Servi が考案した直観主義様相論理 **IK** と Prior が考案した直観主義様相論理 **MIPC** を公開告知演算子で拡張したものである。また、分散知識を持つ（古典論理上の）公開告知論理としては、Wáng と Ågotnes によるものがある。これは、既存の（古典論理上の）分散知識論理を自然に公開告知演算子で拡張したものである。しかしながら、分散知識を持つ直観主義論理上の公開告知論理はこれまで知られていなかった。本章では、第 3 章の論理を公開告知演算子で拡張することにより、分散知識を持つ直観主義論理上の公開告知論理を構築した。ただし、公理 (D) を持つ論理、すなわち **IKD** と **IK4D** は除外している。公開告知演算子のクリプキ意味論上での解釈ではクリプキモデルの更新が必要となるが、公理 (D) に対応するクリプキモデルの性質である継起性がこの更新のもとで保存されないからである。意味論的

完全性は、還元公理を用いて公開告知演算子で拡張する前の静的な論理（本章の公開告知論理の場合、第 3 章の直観主義論理上の分散知識論理）の意味論的完全性に帰着させるという動的認識論理の研究における標準的な方法で示されている。ただし、対象とするクリプキフレームのクラスは安定性と呼ばれる性質を持つものに限っている。これは、この性質を持たないクリプキフレームのクラスに対して分散知識演算子用の還元公理が健全とならないためである。第 3 章において安定性を持つクリプキフレームのクラスに対する意味論的完全性を示したのはこのことによる。本章では、還元公理を自然に推論規則に変換することによってシークエント計算も構築しており、当該シークエント計算についてカット除去定理とクレイグ補間定理を示している。カット除去定理の証明は、カット論理式の複雑さとして通常の定義ではなく意味論的完全性の証明において用いられる複雑さの定義を用いることで可能となっている。

第 5 章は結論であり、第 2 章から第 4 章までの結果がまとめられた上で、今後のありうる研究の道筋が述べられる。