



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Functionals of a Wishart matrix and a normal vector and its application to linear discriminant analysis [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	米永, 航志朗
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(経済学)
Dissertation Number	甲第14922号
Issue Date	2022-03-24
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/85618
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Koshiro_Yonenaga_review.pdf, 審査の要旨



学位論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称：博士（経済学）

氏名：米永 航志朗

審査委員	主査	教授	柿沢	佳秀
	副査	教授	高木	真吾
	副査	教授	鈴木	晶夫

学位論文題名

Functionals of a Wishart matrix and a normal vector and its
application to linear discriminant analysis

（ウィッシュャート行列と正規ベクトルの関数とその線形判別分析への応用）

本論文では、ウィッシュャート分布に従う確率行列と多変量正規分布に従う確率ベクトルの関数の分布について議論している。多変量正規分布は、数理統計学における確率分布として最も重要な確率分布の一つで、ウィッシュャート分布は分散共分散行列の推測に登場する。本論文の貢献はそのようなウィッシュャート行列と多変量正規ベクトルの関数（主に、それらの積）について確率表現、密度関数、モーメント公式、近似公式を導出したことにある。

本論文は3つのテーマから構成されている。第2章では、ウィッシュャート行列と多変量正規ベクトルが独立であるとき、それらの積の分布を考察している。さらに、第3章では、ウィッシュャート行列と多変量正規ベクトルの間に、ある種の従属性があるとき、それらの積の分布を考察している。ウィッシュャート行列と多変量正規ベクトルの関数が重要な役割を果たす状況の一つとして、第4章ではフィッシャー線形判別分析を題材とし、その誤判別確率に関するベイズ推測について議論している。以下、これらの概要と評価について報告する。

(1) 独立なウィッシュャート行列と多変量正規ベクトルの積の確率分布に関して、Bodnar を中心とするグループはこの10年間、いくつかの結果を導いた。特に、Bodnar et al. (2013)は、ウィッシュャート行列の期待値行列と多変量正規ベクトルの分散共分散行列が比例することを仮定していたが、第2章において、これらの制約を設けずに、ウィッシュャート行列と多変量正規ベクトルの積を扱っている。

その意味において、第2章は Bodnar et al. (2013)の結果の一般化である。また、それらの積の4次までのモーメント公式が、2通りの異なる方法（確率表現による方法とウィッシュャート分布のモーメント公式による方法）から導出されている。なお、モーメント公式は Bodnar et al. (2013)では導出されておらず、積の分布の歪度や尖度を評価した点も貢献がある。

(2) 第3章では、ウィッシュャート行列と多変量正規ベクトルとの間に、ある種の従属性が存在する場合、それらの積の分布について論じている。Bauder et al. (2018, 2020)は、そのような従属性のもとで、積の分布の確率表現と2次までのモーメント公式を与えていたが、第3章の貢献は、彼らの確率表現と異なる表現を与えた点にある。導出された確率表現は、Bauder et al. (2018, 2020)に比べてシンプルで、乱数生成の効率化において重要であるだけでなく、この確率表現によれば、積の分布が Barndorff-Nielsen et al. (1982)の正規分散平均混合分布であることが示され、これから密度関数や4次までのモーメント公式が導出されている。さらに、モーメント公式を用いて、積の分布に対する漸近展開公式が与えられている。このように、示された確率表現は、従属的なウィッシュャート行列と正規ベクトルの積の分布の諸性質を調べるうえで非常に有用である。

(3) フィッシャー線形判別関数は、2群の正規母集団(分散共分散行列は共通)を判別する問題に登場する。第4章で、線形判別の誤判別確率に対するベイズ推測を扱っているが、そこでは母平均ベクトルと母分散共分散行列に対する事前分布としてジェフリーズ事前分布、及び、正規・逆ウィッシュャート事前分布の2通りの事前分布を仮定し、それぞれの事前分布のもと、線形判別関数の事後予測分布の密度関数、4次までのモーメント公式、分布関数を解析的に導出している。また誤判別確率の事後平均に対する近似式を提案している。なお、Geisser (1967)では、ジェフリーズ事前分布のみに限定されていたし、第4章において3次・4次のモーメント公式を補完した点も貢献がある。

以上のように、本論文を数理統計学的に高く評価して、審査委員全員一致で、博士（経済学）の学位を授与するに値すると判断した（なお、令和4年2月3日（木）の11時から12時においてzoomで口述試験を行った）。