Title	Two Constructions of Hopf Algebroids Based on the FRT Construction and Their Relations [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	乙戸, 勇大; Otsuto, Yudai
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第14775号
Issue Date	2022-03-24
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/85803
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Yudai_Otsuto_abstract.pdf, 論文内容の要旨

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　　乙 戸 勇 大

学 位 論 文 題 名

Two Constructions of Hopf Algebroids Based on the FRT Construction and Their Relations
（FRT 構成法に基づくホップ亜代数の 2 つの構成法とそれらの関係性）

FRT 構成法は量子ヤン・バクスター方程式（QYBE）の解を用いてホップ代数を構成する方法である。本構成法によるホップ代数とその商からすべての余擬三角なホップ代数を構成することができる。QYBE が様々なテンソル圏上の方程式として拡張されるにつれて、FRT 構成法も同様に拡張されてきた。

Etingof-Varchenko (1998) は QYBE にパラメータを加えて一般化した量子ダイナミカル・ヤン・バクスター方程式（QDYBE）の解から $\mathfrak{h}$-双亜代数を構成した。QDYBE の解が rigid 性と呼ばれる性質を持つとき、$\mathfrak{h}$-双亜代数は対合射を持ち、$\mathfrak{h}$-ホップ亜代数と呼ばれる。彼らは $\mathfrak{h}$-ホップ亜代数が得られる QDYBE の解の具体例も与えている。

QDYBE の集合論的類似解にあたる、ダイナミカル・ヤン・バクスター写像（DYBM）（澁川、2005）がある。澁川-竹内（2010）は DYBM σ を用いて左双亜代数 A_σ が構成できることを明らかにした。QDYBE と同様、DYBM がリジッドであるとき、この左双亜代数はホップ亜代数となる。リジッドな DYBM の具体例は、擬群とある性質を満たす 3 項系により構成される（澁川、2016）。

一方、林（1993）は箙上の QYBE の解 w から、面代数（弱双代数）$\mathfrak{A}(w)$ を構成した。通常の FRT 構成法と同様、このような面代数は余擬三角となり、その商を用いることによりすべての余擬三角な面代数を構成することができる。また、林（1996）は可閉な面代数を用いてホップ閉包と呼ばれるホップ面代数を構成した。可閉性は箙上の QYBE の解に関する条件に書き換えることができ、このような解 w によってホップ閉包 $\mathrm{Hc}\big(\mathfrak{A}(w)\big)$ が得られる。

近年では、QYBE や FRT 構成法の一般化に対し、それらの関係を論じる研究も行われている。松本-清水（2018）は有限なパラメータ集合を持つ DYBM σ を用いて箙上の QYBE の解 w_σ が導かれることを明らかにした。さらに、これらの解から得られる 2 つの弱双代数 $\mathfrak{A}(w_\sigma)$ 、A_σ の間に準同型写像を構成した。

本論文では FRT 構成法の 2 通りの一般化を行い、それらの関係をホップ亜代数の準同型を構成することにより明らかにする。

まず初めに、DYBM を用いたホップ亜代数の構成法の一般化とその具体例の構成を行う。本研究は澁川陽一氏（北海道大学）との共同研究である。従来の方法では、有限なパラメータ集合 H をもつ DYBM の場合、base ring（H から体への写像全体がなす代数）がフロベニウス分離代数となるため、得られるホップ亜代数は弱ホップ代数の構造を持つ。そのため、弱ホップ代数とはならないホップ亜代数の具体例を得るためには、無限なパラメータ集合をもち定義域が有限集合となる DYBM を構成する必要があった。本研究では base ring を一般の代数 L とすることで、ホップ亜代数 A_σ を構成することを試みる。構成においては有限集合 X から定まる L の元の族 $\sigma = \{\sigma_{cd}^{ab}\}_{a,b,c,d\in X}$ および群 G の元 $\deg(a)$ $(a \in X)$ が必要になるが、A_σ が左双亜代数になるときの σ が満たすべき条件は以下で与えられる。

$$\sigma_{ac}^{bd}\big(T_{\deg(d)} \circ T_{\deg(b)}\big)(l) = \big(T_{\deg(c)} \circ T_{\deg(a)}\big)(l)\sigma_{ac}^{bd}\ \ (\forall l \in L) \tag{1}$$

ただし、T_α $(\alpha \in G)$ は L 上の同型写像であり、$T_\alpha \circ T_{\alpha^{-1}} = id_L$ を満たす。また、A_σ が右双亜代数になるときの σ が満たすべき条件は上の条件よりも強い。これらは不変条件を満たす DYBM から構成される σ の性質を代数的に整理したものである。この σ に対してリジッド性が定義され、本条件を満たすときに A_σ はホップ亜代数となる。A_σ がホップ亜代数となる σ の具体例は、base ring L を有限集合 H から代数 R への写像全体とし、リジッド性の十分条件を用いることで得られ

る。このとき、R をフロベニウス分離でないものにすることにより、弱ホップ代数の構造を持たないホップ亜代数 A_σ が得られる。フロベニウス分離でない R の例は、線形独立な 3 つの 2 次正方行列から構成することができる。

次に箙上の QYBE の解を用いたホップ亜代数 $\mathfrak{U}(w)$ の構成を行う。この $\mathfrak{U}(w)$ は林（1998）による $\mathrm{Hc}\big(\mathfrak{A}(w)\big)$ の自由代数を用いた表示を参考にして構成されるが、一部の関係式が少し弱められている。Base ring は有限箙 $(Q, \mathfrak{s}, \mathfrak{t})$ の頂点集合から一般の代数 R への写像全体がなす代数で与えられる。構成において R の中心に含まれる元の族 $w = \left\{\mathbf{w}\left[c\,{}^{a}_{d}\,b\right]\right\}_{(a,b),(c,d)\in Q^{(2)}}$ （$Q^{(2)}$は箙のファイバー積）が必要になるが、A_σ とは異なり、$\mathfrak{U}(w)$ が左双亜代数になる条件と右双亜代数になる条件は同じであり、以下で与えられる。

$$\mathfrak{s}(a) \neq \mathfrak{s}(c) \text{ or } \mathfrak{t}(b) \neq \mathfrak{t}(d) \Rightarrow \mathbf{w}\left[c\,{}^{a}_{d}\,b\right] = 0 \tag{2}$$

これは箙のファイバー積 $Q^{(2)}$ 上の準同型から構成される w の性質を代数的に整理したものである。w においてもリジッド性を定義することができ、本条件の下で $\mathfrak{U}(w)$ はホップ亜代数となる。

最後に 2 つのホップ亜代数 A_σ 、$\mathfrak{U}(w)$の関係を論じる。A_σ の base ring を有限集合 Λ から代数 R への写像全体 M とし、Λ 上の全単射 $\deg(a)$ $(a \in X)$ および M の中心に含まれる元の族 σ を以下で定める。

$$(\deg(b) \circ \deg(d))(\lambda) \neq (\deg(a) \circ \deg(c))(\lambda) \Rightarrow \sigma_{ac}^{bd}(\lambda) = 0 \tag{3}$$

本条件により、A_σ は左（右）双亜代数となる。また、Λ を頂点集合とする有限箙 $Q \coloneqq \Lambda \times Q$ に対し、 R の元の族 w を以下で定義する。

$$\mathbf{w}\left[(\mu, c)\,{}^{(\lambda, a)}_{(\mu', d)}\,(\lambda', b)\right] = \delta_{\lambda,\mu}\sigma_{dc}^{ba}(\lambda) \quad \big(\forall\big((\lambda, a), (\lambda', b)\big), \big((\mu, c), (\mu', d)\big) \in Q^{(2)}\big) \tag{4}$$

この w は条件(2)を満たすため、左（右）双亜代数 $\mathfrak{U}(w_\sigma) \coloneqq \mathfrak{U}(w)$ が構成される。これらの間には同型写像 $\Phi\colon \mathfrak{U}(\mathrm{w}_\sigma) \to A_\sigma$ を構成できる。この同型写像 Φ を用いて、(3)による M の元の族 σ のリジッド性と(4)による R の元の族 w のリジッド性が同値であることが示される。A_σ 、$\mathfrak{U}(w_\sigma)$ がともにホップ亜代数であるとき、Φ はストリクトなホップ亜代数の同型写像となる。