学　位　論　文　内　容　の　要　旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　　桑田　健

学　位　論　文　題　名

Representation of Geometric Objects by Path Integrals
（経路積分による幾何的対象の表現）

物理においてボソンとフェルミオンを入れ替える操作を超対称変換と呼び，その変換でラグランジアンが不変となるときその模型は超対称性を持つという．特に，リーマン多様体上の超対称性をもつシグマ模型ではその模型の経路積分を用いて多様体のオイラー数やHirzebruch 指数などを得られることが知られている[SL]．このように超対称性を持つ物理模型を用いて幾何学的な対象を表現することが本研究の目的である．本論文では二つの問題に取り組んでいる．１つは位相的シグマ模型と呼ばれる物理模型にポテンシャル項を加えることで Bott の留数定理[RB]と呼ばれる特性類の積分公式を得ることである．これは特性類の多様体上での積分を多様体上の正則ベクトル場の零点の連結成分からの寄与の和に分解できる公式である．私は秦泉寺雅夫氏とともにこの公式を，超対称性を持つ物理模型と相関関数を用いることで導出する方法を発見した[JK]．以下，その流れを説明する．リーマン面からケーラー多様体への写像に対する超対称性をもつ位相的シグマ模型において超対称変換（この超対称変換を BRST 変換と呼んでいる）の生成子は微分形式における外微分形式と同様に冪零性を持ち，模型の観測量は多様体のドラームコホモロジーの元と対応付けられることが知られている[MJ]. 我々はこの模型に正則ベクトル場からなるポテンシャル項を加え超対称性を持つような模型を作った．この時, 超対称変換はオリジナルのものとは異なるがこの超対称性も BRST 変換であり，オリジナルの A 模型を参考にすることで観測量を構成することができた．我々はポテンシャルがないときに特性類になるような観測量を構成し，その相関関数を計算した．まずポテンシャル項をパラメーター付け，相関関数がパラメーターに依存しないことを示す．この時, 相関関数は考えている写像の次数に応じて分解できる．特に次数が 0 の相関関数に注目する．ポテンシャルの寄与が小さいときは相関関数のラグランジアンはオリジナルの A 模型のラグランジアンになる．オリジナルの A 模型の次数が 0 の部分の相関関数は観測量の多様体上での積分に帰着できる．逆にポテンシャルの寄与が大きい場合では相関関数の値はポテンシャル項が消えるところに局在しているので各零点近傍からの寄与の和を計算すればよいことになる．特にポテンシャルの寄与が大

きい場合の計算を具体的に実行することで Bott の留数定理を得た．

もう１つの研究は，Mathai-Quillen formalism[MQ]と Atiyah-Jeffrey 構成[AJ]と呼ばれる手法を用いてグラスマン多様体のオイラー数を経路積分によって再現できる物理模型を構成することである[IJK]．リーマン多様体上の実ベクトル束のオイラー数はオイラー類という特性類を多様体上で積分することで得られる．このオイラー類はベクトル束の Thom 類を多様体からベクトル束への切断によって引き戻すことで得ることができる．Mathai-Quillen formalism はファイバー方向に沿ってガウシアン的に急減少する Thom 類を構成する方法である．これを多様体が群作用による商空間になる場合に対して定式化する方法が Atiyah と Jeffrey によって与えられ我々はこれを Atiyah-Jeffrey 構成と呼んでいる．今西翔一郎氏は修士論文においてこれらの研究を整理し，Atiyah-Jeffrey 構成をグラスマン多様体の特別な場合や複素射影空間に用いることでそれらオイラー数を得た．特に彼はグラスマン多様体における計算において現れるフェルミオンの表記はグラスマン多様体のコホモロジー環の表現であることを示唆していた．私は彼らとともに一般的なグラスマン多様体に対し適用しオイラー数を得ることを試みるとともに，グラスマン多様体のコホモロジー環が模型に現れるフェルミオンで表現されていることを確かめた[IJK]．これにより，グラスマン多様体のコホモロジー環を生成する Chern 類（正確にはグラスマン多様体の普遍部分束の双対の Chern 類）の積分はフェルミオンの積分によって求めることが出来るので，いくつかの例に対して実際にこの方法によって積分の値を求めることにも取り組んだ[KK]．

参考文献

[AJ] M. F. Atiyah, L. Jeffrey, Topological Lagrangians and cohomology, J. Geom. Phys., 7, 119-136 (1990).

[RB] R. Bott. A residue formula for holomorphic vector fields, J.Differential Geometry, 1,311-330 (1967).

[IJK] S. Imanishi, M. Jinzenji, K. Kuwata, Evaluation of Euler Number of Complex Grassmann Manifold G(k, N) via Mathai-Quillen Formalism, preprint, arXiv:hep-th/2108.13623, (2021).

[MJ] M. Jinzenji, Classical Mirror Symmetry, SpringerBriefs in Mathematical Physics, 29, Springer, (2018).

[JK] M. Jinzenji, K. Kuwata, Holomorphic Vector Field and Topological Sigma Model on CP^1 World Sheet, International Journal of Modern Physics A, Vol. 35, No. 30, 2050192 (35 pages), (2020).

[KK] K. Kuwata, Schubert cycles and Grassmann variables, preprint, arXiv:2110.15940, (2021).

[SL] S. Li, Supersymmetric Quantum Mechanics and Lefschetz fixed-point formula, arXiv:hep-th/0511101, (2005).

[MQ] V. Mathai, D. Quillen, Superconnections, Thom classes, and equivariant differential forms, Topology, 25, 85-110 (1986).