HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	第19回数学総合若手研究集会 : 数学の交叉点
Author(s)	安孫子, 啓介; 藤江, 克徳; 高田, 佑太 他
Citation	Hokkaido University technical report series in Mathematics, 184, i, 1-ix, 808
Issue Date	2023-03
DOI	https://doi.org/10.14943/106347
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/88707
Type	departmental bulletin paper
File Information	MCYR19 Technical Reports.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

第 19 回数学総合若手研究集会

～数学の交叉点～

The 19th Mathematics Conference for Young Researchers

– MCYR19 –

世話人

安孫子啓介（代表） 藤江克徳 高田佑太 田嶌優 菅原朔見

大野優 齋藤琢弥 富樫大智 幡航太朗 廣瀬和也

札幌，北海道大学，2023

Series#184. March, 2023

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#165 A. Tsuchida, Y. Aikawa, K. Asahara, M. Abe, Y. Kabata, H. Saito, F. Nakamura and S. Honda, 第 12 回数学総合若手研究集会, 373 pages. 2016.

#166 S. -I. Ei, Y. Giga, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, H. Takaoka, Y. Tonegawa and K. Tsutaya, Proceedings of the 41st Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 110 pages. 2016.

#167 Kubo, Hideo and Ozawa, Tohru and Takamura, Hiroyuki, Mathematical Analysis for Stability in Nonlinear Dynamics - in honor of Professor Vladimir Georgiev on his 60th birthday -, 79 pages. 2016.

#168 F. Nakamura, Y. Aikawa, K. Asahara, M. Abe, D. Komori, H. Saito, S. Handa, K. Fujisawa, S. Honda, A. Rodrguez Mulet, 第 13 回数学総合若手研究集会, 501 pages. 2017.

#169 N. Tanaka (K. Kiyohara, T. Morimoto, K. Yamaguchi, Eds.), Geometric Theory of Systems of Ordinary Differential Equations I, 177 pages. 2017.

#170 N. Tanaka (K. Kiyohara, T. Morimoto, K. Yamaguchi, Eds.), Geometric Theory of Systems of Ordinary Differential Equations II, 519 pages. 2017.

#171 S. -I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, Y. Tonegawa, and K. Tsutaya, Proceedings of the 42nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations - In memory of Professor Taira Shirota - , 102 pages. 2017.

#172 Shigeru Kuroda, Takao Namiki, Akihiro Yamaguchi, Yutaka Yamaguchi, 複雑系数理の新展開：津田一郎教授退職記念研究集会報告集, 69 pages. 2018.

#173 S. Handa, D. Komori, K. Fujisawa, A. Rodriguez Mulet, M. Aoki, Y. kamijima, I. Fukuda, T. Yabu, 第 14 回数学総合若手研究集会, 580 pages. 2018.

#174 Yoshikazu Giga, Hideo Kubo, Tohru Ozawa, The 11th Mathematical Society of Japan - Seasonal Institute - The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations- , 160 pages. 2018.

#175 S. -I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, Proceedings of 43rd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 99 pages. 2018.

#176 I. Fukuda, M. Aoki, Y. Ueda, Y. Kamijima, T. Yabu, T. Niimura, N. Satoh, H. Toyokawa, K. Matsuzaka, S. Yamagata, K. Yoshida, 第 15 回数学総合若手研究集会, 657 pages. 2019.

#177 S. -I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, T. Ozawa, T. Sakajo, and K. Tsutaya, Proceedings of 44th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 115 pages. 2019.

#178 H. Toyokawa, Y. Otsuto, N. Satoh, K. Matsuzaka, S. Yamagata, K. Yoshida, R. Ashikaga, S. Okida, M. Oyama, K. Kuwata K. Misu, H. Ishii, T. Sukekawa, 第 16 回数学総合若手研究集会, 692 pages. 2020.

#179 S. -I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, T. Ozawa, T. Sakajo, K. Tsutaya, Proceedings of 45th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 106 pages. 2020.

#180 K. Misu, S. Okida, R. Ashikaga, M. Oyama, K. Kuwata, H. Ishii, I. Kudo, T. Sukekawa, M. Seki, A. Hasegawa, K. Hatano, 第 17 回数学総合若手研究集会, 595 pages. 2021.

#181 S.-I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, Y. Liu, T. Ozawa, T. Sakajo, and K. Tsutaya, Proceedings of 46th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 116 pages. 2021.

#182 Tsubasa Sukekawa(Representative organizer), Hiroshi Ishii, Isamu Kudo, Motoki Seki, Aoi Hasegawa, Kohei Hatano, Keisuke Abiko, Yu Tajima, Katsunori Fujie, Shinpei Makida, 第 18 回数学総合若手研究集会, 862 pages. 2022.

#183 S.-I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, Y. Liu, T. Ozawa, T. Sakajo, and K. Tsutaya, Proceedings of 47th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 120 pages. 2022.

はじめに

大学院生および若手研究者により組織・運営されている数学総合若手研究集会も 2022 年度で第 19 回を迎えることとなりました。当研究集会は、数学に関わる物理・化学・経済・工学・医学などの様々な分野の若手研究者の講演の場となることで、研究の発展および人的ネットワークの構築を目的として行われてきました。近年、多くの分野で数学的手法が取り入れられているなか、当研究集会のように数学を中心とした分野間交流を行うことは大変意義があるものであると信じております。

全国的に猛威を振るっていた新型コロナウイルス感染症の影響により、第 17 回と第 18 回はオンラインでの開催を余儀なくされておりました。今年度は対面とオンラインのハイブリッド形式で開催され、幅広い分野の若手研究者 100 名に講演していただきました。オンライン配信を前提とした事前準備などで参加者にご負担をおかけし、また期間中の機材トラブルなどでご迷惑をおかけしましたこと、この場を借りて深くお詫び申し上げます。重ねて、依然として新型コロナウイルスが猛威を振るう中、多くの方々にご来場いただき、感染拡大防止にご協力いただいたおかげで、研究集会を無事に開催することができました。心より感謝申し上げます。

当研究集会の講演は、口頭発表であるシングルセッション（60 分）とパラレルセッション（30 分）、そしてポスターセッションからなります。シングルセッションはあらゆる分野の参加者を対象とした講演であり、問題の背景・動機などの入門的な内容を含んだ講演となっております。パラレルセッションでは分野ごとに分かれ、より専門的な内容の講演が行われます。ポスターセッションは講演者と聴講者との自由な議論の場となっております。

このテクニカルレポート集は講演者の皆様から事前に提供して頂いた原稿をまとめたものです。テクニカルレポートはシングルセッション、パラレルセッション、そしてポスターセッションの順に並んで掲載されております。サブタイトルに「数学の交叉点」とありますように、数学が様々な分野の“交叉点”となることを目的とし、数学以外の分野の方々にもわかりやすく入門的な事項を含んだものとなっております。参加者の皆様が講演をより深く理解し、またご自身の研究を進展させる一助となればこの上ない喜びです。

開催にあたり

- 講演者の皆様、参加者の皆様
- 北海道大学理学部数学教室の先生方、および事務員の方々
- 過去の数学総合若手研究集会世話人の方々

から多大なるご支援を頂きました。この場を借りて心より感謝申し上げます。

なお、この研究集会は北海道大学大学院理学研究院数学部門の財政的援助を受けて開催されています。深く感謝いたしております。

2023 年 3 月
MCYR19 世話人
安孫子啓介（代表）　藤江克徳　高田佑太　田嶌優　菅原朔見
大野優　齋藤琢弥　富樫大智　幡航太朗　廣瀬和也

第19回 数学総合若手研究集会

～数学の交叉点～

The 19th Mathematics Conference for Young Researchers

日時： 2023 年 3 月 6 日（月）– 3 月 9 日（木）

場所： 北海道大学理学部 5 号館 + オンライン

S：5-203（シングルセッション会場） A：5-201（パラレルセッション会場）
B：5-205（パラレルセッション会場） C：5-206（パラレルセッション会場）
D：5-305（パラレルセッション会場） E：2 階コミュニティスペース（ポスター会場）

URL: `https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~wakate/mcyr/2023/ja/index.html`

• シングルセッション（会場Ｓ）

浜野 大 (Masaru Hamano) 早稲田大学理工学術院
長距離型の逆冪乗型ポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式の散乱解について 3

梶原 唯加 (Yuika Kajihara) 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
面積保存写像から定まる変分問題 13

臺信 直人 (Naoto Dainobu) 慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
楕円曲線の等分体のイデアル類群について 23

丸山 修平 (Shuhei Maruyama) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
混合交換子長と不変擬準同型 33

• パラレルセッション（会場Ａ）

信川 喬彦 (Takahiko Nobukawa) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
ある多変数 q 超幾何級数に付随する接続問題 45

上野 祐一 (Yuichi Ueno) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻, 皇學館大学 教育
2 変数量子 Garnier 系の多項式ハミルトニアン 55

水野 大樹 (Daiki Mizuno) 千葉大学大学院教育学研究科学校教育学専攻
特異拡散を含む擬放物型偏微分方程式の適切性 63

草場 竜之介 (Ryunosuke Kusaba) 早稲田大学大学院 先進理工学研究科 物理学及応用物理学専攻
Weighted estimates and large time behavior of solutions to the semilinear heat equation 71

野ヶ山 徹 (Toru Nogayama) 中央大学理工学部数学科
Morrey 空間と Strichartz 評価について 81

波多野 修也 (Naoya Hatano) 中央大学理工学研究科数学専攻
2 層ニューラルネットワークの大域的普遍近似定理 89

根上 春 (Haru Negami) 千葉大学大学院融合理工学府
Homological representation of braid groups 93

若尾 亮太 (Ryota Wakao) 岡山理科大学大学院理学研究科応用数学専攻
Yetter-Drinfeld データを用いた低次元ホップ・スーパー代数の分類について 97

島田 了輔 (Ryosuke Shimada) 東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
Semi-Modules and Crystal Bases via Affine Deligne-Lusztig Varieties 107

長田 祐輝 (Yuki Osada) 東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻
3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系に対する特異摂動問題 111

村松 亮 (Ryo Muramatsu) 東京理科大学大学院理学研究科数学専攻
電磁場中のシュレーディンガー方程式の解の特異性伝播について 121

新井 由美 (Yumi Arai) お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科理学専攻数学コース
ミドル・コンボリューションの q 変形とその q 差分方程式への応用 129

蓮井 太朗 (Taro Hasui) 九州大学大学院数理学府数理学専攻
ベッチ数を指定した連結 2 部グラフの数え上げ 139

幡 航太朗 (Kotaro Hata) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Uniform Weak Convergence to Additive Processes on [0,1] 149

Dáithí Ó hAodha 東北大学大学院理学研究科数学専攻
Large-Time Behaviour of Curl-Free Compressible Navier-Stokes Equations 155

石塚 健二郎 (Kenjiro Ishizuka) 京都大学理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系
ポテンシャルのついた非線形消散クライン・ゴルドン方程式の大域挙動 165

坪内 俊太郎 (Shuntaro Tsubouchi) 東京大学大学院 数理科学研究科 数理科学専攻
Continuous differentiability of weak solutions to certain very singular elliptic equations or systems involving one-Laplacian 175

田中 聖人 (Masato Tanaka) 京都大学理学研究科数学・数理解析専攻
coideal 上の 1-cocycle の話 185

内村 朝樹 (Tomoki Uchimura) 慶應義塾大学理工学研究科基礎理工学専攻
New morphisms between étale groupoids and between inverse semigroup actions 195

有本 諒也 (Ryoya Arimoto) 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系
Neretin 群とそのある開部分群について 205

Wentao Teng Mathmatics, School of Science and Technology, Kwansei Gakuin University
On the support of the generalized translation operator 211

Sadaf Habibi Graduate School of Science, Osaka City University
Applications of p-harmonic transplantation for functional inequalities involving a Finsler norm 221

• パラレルセッション（会場Ｂ）

古田 悠馬 (Yuma Furuta) 京都大学数理解析研究所
量子誤り訂正符号を用いた共形場理論の構成とブール関数による記述 233

堤 夏輝 (Natsuki Tsutsumi) 東京海洋大学学術研究院

データ駆動型微分方程式の導出 239

簗島 瞬 (Shun Yanashima) 東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻
2 曲線間に留まるよう条件付けられたランダムウォーク橋に対する不変原理 247

野萩 遼太郎 (Ryotaro Nohagi) 筑波大学大学院　理工情報生命学術院 数理物質科学研究群 数学学位プログラム
公約数ニムのグランディ数 255

黒川 大雅 (Taiga Kurokawa) 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
変分法によるポテンシャル系の孤立不変集合のコホモロジーの評価 261

松田 凌 (Ryo Matsuda) 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数学系
Construction of geodesics on Teichmüller spaces of Riemann surfaces with Z action 269

北村 駿介 (Shunsuke Kitamura) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
特性方向重み付き微分型非線形波動方程式の解析 279

中島 慶人 (Yoshihito Nakajima) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
非整数階時間微分を含む非線形抽象発展方程式の可解性とその応用 287

宮川 寛基 (Hiroki Miyakawa) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
Maximal regularity of distributional solutions to degenerate elliptic systems for locally integrable data 297

入野 耀太 (Yota Irino) 北陸先端科学技術大学院大学 先端科学技術研究科
三次の非線形項を持つある散逸・分散型方程式の解の高次漸近形 307

佐藤 光汰朗 (Kotaro Sato) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
不可逆的に時間発展する変分不等式の適切性について 317

伊城 慎之介 (Shinnosuke Ishiro) 日本大学大学院総合基礎科学研究科地球情報数理科学専攻
対数的正則局所環の正準加群について 327

戸澗 勇一郎 (Yuichiro Toma) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
Functional equation for the multiple L-function 331

中川 雄太 (Yuta Nakagawa) 京都大学大学院人間・環境学研究科共生人間学専攻
ギブス点過程に関するランダムシュレディンガー作用素の状態密度 339

甲斐 大貴 (Hirotaka Kai) 大阪市立大学理学研究科数物系専攻
アダマール多様体上のジャンプ拡散過程の性質 345

牧田 慎平 (Shimpei Makida) 北海道大学大学院理学院数学専攻
増大ネットワーク上の粘性解の安定性 351

三栖 邦康 (Kuniyasu Misu) 北海道大学大学院理学院数学専攻
平均曲率流方程式の障害物問題に対するゲーム理論的アプローチ 357

和知 秀忠 (Hidetada Wachi) 慶應義塾大学院理工学研究科基礎理工学専攻数理科学専修
Generalized exclusion process のスペクトルギャップの評価 365

田中 優帆 (Yuuho Tanaka) 早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
サイクルの二乗グラフ上の乱歩における期待到達時間の解析 375

• パラレルセッション（会場C）

高田 佑太 (Yuta Takada) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Lattice isometries and K3 surface automorphisms 387

杉本 奨吾 (Shogo Sugimoto) 早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
特殊多項式の Schur 多項式への変換公式 397

中山 勇祐 (Yusuke Nakayama) 早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学・応用数理専攻
Homogeneous ACM bundles on Grassmannianians of exceptional types 407

村上 慎太郎 (Shintaro Murakami) 弘前大学院理工学研究科安全システム工学専攻
単項式指数をもつ空隙級数の数論的性質について 411

東根 一樹 (Kazuki Higashine) 山形大学理学部
A criterion for the existence of a plane model with two inner Galois points for algebraic curves 417

高溝 史周 (Fumichika Takamizo) 大阪公立大学数学研究所
Finite beta expansions of natural numbers 427

杉本 貴海 (Takami Sugimoto) 山形大学大学院理工学研究科理学専攻
周期が 3 の連分数展開とペル方程式の解 437

服部 真宗 (Masamune Hattori) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Ding-Iohara 代数のダイナミカル類似 447

西中 祐介 (Yusuke Nishinaka) 名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
超対称頂点代数のオペラッド 457

大本 豊数 (Toyokazu Ohmoto) 岡山大学大学院自然科学研究科数理物理科学専攻
交代符号行列の高さ関数と順序イデアル 467

加藤 寛樹 (Hiroki Kato) 名古屋工業大学大学院工学専攻情報工学系プログラム情報数理分野
巡回グラフの同型問題 477

山口 徹 (Toru Yamaguchi) 九州大学大学院数理学府数理学専攻
超平面配置の free path について 485

松本 孝文 (Takafumi Matsumoto) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
放物接続のモジュライ空間の記述 493

星野 真生 (Mao Hoshino) 東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
量子等質空間上の同変有限被覆の分類 497

及川 瑞稀 (Mizuki Oikawa) 東京大学大学院数理科学研究科
On equivariantly braided tensor categories 501

鶴田 侑己 (Yuki Tsuruta) 山口大学大学院創成科学研究科基盤科学系専攻数理科学コース
最大公約数を含むオイラー関数の和公式について 507

山口 永悟 (Naganori Yamaguchi) 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻
遠アーベル幾何学における m 次可解グロタンディーク予想について 513

安藤 遼哉 (Ryoya Ando) 東京理科大学理工学研究科数学専攻
Noether とは限らない可換環上のホモロジー代数について 519

石塚 伶 (Ryo Ishizuka) 東京工業大学理学院数学系
Perfectoid almost Cohen-Macaulay 代数の明示的構成について 525

仲里 渓 (Kei Nakazato) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Noetherian perfectoid towers and their tilts 531

何 力 (He Li) 名古屋大学 大学院多元数理科学研究科
On Efimov K-theory 537

石塚 康介 (Kosuke Ishizuka) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
非アルキメデス的関数解析におけるコンパクト性 543

後藤 慶太 (Keita Goto) 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数学系
On Affine Structures coming from Berkovich Geometry 549

• パラレルセッション（会場D）

菅原 朔見 (Sakumi Sugawara) 北海道大学大学院理学院数学専攻
超平面配置の二重被覆と整係数の局所系係数コホモロジー 559

田邊 真郷 (Masato Tanabe) 北海道大学大学院情報科学院（情報理工学コース）
Tame topology における Lie 亜群の滑層分割 / Canonical stratification of Lie groupoids in a tame topology 569

深沢 尚希 (Naoki Fukasawa) 東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻
パーシステントコホモロジーの構造定理 577

長谷川 耀 (Yo Hasegawa) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
Gromov boundaries of non-proper hyperbolic geodesic spaces 583

橋堀 恭矢 (Kyoya Hashibori) 北海道大学大学院理学院数学専攻
曲面間の写像に関する Gauss-Bonnet 型公式 589

野本 統一 (Subaru Nomoto) 立命館大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
4 次元ユークリッド空間における正則曲線上の一般化されたビショップフレームについて 597

松家 拓稔 (Takumi Matsuka) 東京都立大学大学院　理学研究科　数理科学専攻
群作用のある距離空間の自由積 603

高野 暁弘 (Akihiro Takano) 東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
Virtual Thompson's group 609

児玉 悠弥 (Yuya Kodama) 東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻
A generalization of the Lodha-Moore group 619

只野 誉 (Homare Tadano) 山口大学 理学部 数理科学科
Bonnet–Myers Type Theorems via m-Bakry–¥'Emery Ricci Curvature with ¥$varepsilon$-range ... 625

大島 駿 (Shun Oshima) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
次元が負の場合の曲率次元条件の集中位相での安定性について 631

赤松 朋哉 (Tomoya Akamatsu) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
ハイパーグラフのリッチ曲率について 639

辻 寛 (Hiroshi Tsuji) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
対数 Sobolev 不等式と Talagrand 不等式の改良について 645

岡本 幸大 (Yukihiro Okamoto) 京都大学大学院理学研究科数理解析専攻
ストリングトポロジーを利用した Legendre 接触ホモロジーの研究 651

鈴木 英正 (Hidemasa Suzuki) 千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻数学・情報数理学コース
ユークリッド空間の余接束における概正則円盤の具体的記述について 661

磯島 司 (Tsukasa Isoshima) 東京工業大学理学院数学系数学コース
曲面結び目の自明な再接着により得られる trisection 671

若槇 洋平 (Yohei Wakamaki) 大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
第 2 Betti 数 9 の有理曲面のコルク 677

新井 克典 (Katsunori Arai) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
有向空間曲面図式の彩色に関する groupoid rack の普遍性について 683

米村 拳太郎 (Kentaro Yonemura) 九州大学大学院数理学府数理学専攻
球面カンドルの埋め込みと結び目の不変量 693

柳田 幸輝 (Koki Yanagida) 東京工業大学理学院数学系数学コース
絡み目の parabolic Dijkgraaf-Witten 不変量 699

大野 走馬 (Soma Ohno) 早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
Infinitesimal deformations of Killing spinors on nearly parallel G_2-manifolds 707

鹿俣 尚志 (Naoyuki Kanomata) 東京理科大学大学院理学研究科科学教育専攻
有限 Grosse-Wulkenhaar 模型における多点相関関数の厳密解 717

• ポスターセッション（会場Ｅ）

赤澤 涼 (Ryo Akazawa) 早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
The derived category of Debarre-Voisin 20-fold 729

原 渚彩 (Nagisa Hara) 京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻 数理解析系
Grothendieck inequality and its application 739

大楠 涼馬 (Ryoma Ogusu) 福岡大学大学院理学研究科応用数学専攻
トーリック曲面のフルヴィッツ多面体の頂点について 745

吉田 智輝 (Tomoki Yoshida) 早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
Full Exceptional Collections of Line Bundles on the Blow-up of P5 along Segre Threefold 753

青木 侑省 (Yusei Aoki) 名古屋工業大学大学院工学研究科博士前期課程工学専攻情報工学系プログラム
複素射影空間内の A 型実超曲面上の佐々木磁場の軌道とケーラー磁場 763

脇條 奈生子 (Naoko Wakijo) 東京工業大学理学院数学系数学コース
3 次元多様体の随伴表現のトーションについて 771

地引 知栄 (Chihaya Jibiki) 東京工業大学理学院数学系数学コース
群の帰納極限における左順序の孤立性について 779

村山 武来　(Burai Murayama)　北海道大学大学院総合化学院総合化学専攻
Weight Rank Clique Filtration を用いたパーシステント・ホモロジーによる実在分子の反応経路地図の可視化 785
佐藤 純　(Jun Sato)　東京工芸大学 工学部工学科 情報コース
確率過程と微分型非線形シュレディンガー方程式 795
弓林 司　(Tsukasa Yumibayashi)　株式会社ブレインパッド
体の拡大による高次元周期再帰方程式の生成 801

世話人：　安孫子啓介（代表）　藤江克徳　高田佑太　田嶌優　菅原朔見
大野優　齋藤琢弥　富樫大智　幡航太朗　廣瀬和也

Schedule

3月6日（月）

9:50-10:00	閉会			
10:00-11:00	浜野 大 (解析)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:20-11:50	信川 喬彦 (解析)	古田 悠馬 (数理科学)	高田 佑太 (代数)	菅原 朔見 (幾何)
12:00-12:30	上野 祐一 (解析)	堤 夏輝 (数理科学)	杉本 奨吾 (代数)	田邊 真郷 (幾何)
12:30-14:00	昼休み			
14:00-14:30	水野 大樹 (解析)		中山 勇祐 (代数)	深沢 尚希 (幾何)
14:40-15:10	草場 竜之介 (解析)	簗島 瞬 (数理科学)	村上 慎太郎 (代数)	長谷川 耀 (幾何)
15:30-16:00	野ヶ山 徹 (解析)			橋堀 恭矢 (幾何)
16:10-16:40		野萩 遼太郎 (数理科学)	東根 一樹 (代数)	野本 統一 (幾何)
16:50-17:20	波多野 修也 (解析)	黒川 大雅 (数理科学)	高溝 史周 (代数)	松家 拓稔 (幾何)
17:30-18:00	根上 春 (解析)		杉本 貴海 (代数)	

3月7日（火）

10:00-11:00	梶原 唯加 (数理科学)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:20-11:50	若尾 亮太 (代数)	松田 凌 (解析)	服部 真宗 (代数)	高野 暁弘 (幾何)
12:00-12:30	島田 了輔 (代数)	北村 駿介 (解析)	西中 祐介 (代数)	児玉 悠弥 (幾何)
12:30-13:50	昼休み			
13:50-15:20	ポスターセッション (会場 E)			
15:30-16:00	長田 祐輝 (解析)	中島 慶人 (解析)	大本 豊数 (代数)	只野 誉 (幾何)
16:10-16:40	村松 亮 (解析)	宮川 寛基 (解析)	加藤 寛樹 (代数)	大島 駿 (幾何)
16:50-17:20	新井 由美 (解析)	入野 耀太 (解析)	山口 徹 (代数)	赤松 朋哉 (幾何)
17:30-18:00	蓮井 太朗 (解析)	佐藤 光汰朗 (解析)	松本 孝文 (代数)	辻 寛 (幾何)

3月8日（水）

10:00-11:00	臺信 直人 (代数)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:20-11:50		伊城 慎之介 (代数)	星野 真生 (代数)	岡本 幸大 (幾何)
12:00-12:30	幡 航太朗 (解析)	戸澗 勇一郎 (代数)	及川 瑞稀 (代数)	鈴木 英正 (幾何)
12:30-14:00	昼休み			
14:00-14:30	Ó hAodha, Dáithí(解析)	中川 雄太 (解析)	鶴田 侑己 (代数)	磯島 司 (幾何)
14:40-15:10	石塚 健二郎 (解析)	甲斐 大貴 (解析)	山口 永悟 (代数)	若槇 洋平 (幾何)
15:30-16:00	坪内 俊太郎 (解析)		安藤 遼哉 (代数)	新井 克典 (幾何)
16:10-16:40	田中 聖人 (解析)	牧田 慎平 (解析)	石塚 伶 (代数)	米村 拳太郎 (幾何)
16:50-17:20	内村 朝樹 (解析)	三栖 邦康 (解析)	仲里 渓 (代数)	柳田 幸輝 (幾何)
17:30-18:00	有本 諒也 (解析)		何 力 (代数)	

3月9日（木）

10:00-11:00	丸山 修平 (幾何)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:20-11:50	Teng Wentao(解析)	和知 秀忠 (数理科学)	石塚 康介 (代数)	大野 走馬 (幾何)
12:00-12:30	Habibi Sadaf(解析)	田中 優帆 (数理科学)	後藤 慶太 (代数)	鹿俣 尚志 (幾何)

シングルセッション
会場Ｓ

長距離型の逆冪乗型ポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式の散乱解について

早稲田大学 理工学術院
浜野 大 (Masaru HAMANO)

概要

本講演は理化学研究所 AIP センター, 慶應義塾大学の池田正弘氏との共同研究に基づく. Guo 氏, Wang 氏, Yao 氏 [J. Math. Anal. Appl. 506 (2022), no. 2, Paper No. 125653, 30 pp] により空間遠方での減衰が速い短距離型のポテンシャルをもつ非線形シュレディンガー方程式について解が散乱するための十分条件が与えられた. 本講演では, 空間遠方での減衰が遅い長距離型のポテンシャルをもつ状況において解が散乱するための十分条件を球対称解に制限することにより与える.

1 導入

本稿では逆冪乗型ポテンシャルをもつ以下の非線形シュレディンガー方程式を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \Delta u(t,x) - \dfrac{\gamma}{|x|^\mu} u(t,x) = -|u(t,x)|^p u(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{NLS$_\gamma$}$$

ここで, 虚数単位 $i = \sqrt{-1}$, 時間微分 $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, 空間微分 $\Delta = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $d \geq 1$, $\gamma > 0$, $0 < \mu < \min\{2, d\}$, $1 < p < 2^* - 1$, 解 $u(t,x) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ は未知関数, 初期値 $u_0(x) : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ は既知関数である. ここで,

$$2^* - 1 := \begin{cases} \infty, & (d = 1, 2), \\ 1 + \frac{4}{d-2}, & (d \geq 3). \end{cases}$$

$\gamma < 0$, $\mu = 1$ のとき, 作用素 $-\Delta + \frac{\gamma}{|x|}$ は 2 つの荷電粒子間のクーロン力の量子力学的描写を与え, 正に帯電した原子核の存在により外部に引力的な長距離型ポテンシャルを持つことに対応する [19]. ここで, $0 < \mu \leq 1$ のとき $\frac{\gamma}{|x|^\mu}$ は長距離型ポテンシャルと呼ばれ, $1 < \mu < 2$ のとき $\frac{\gamma}{|x|^\mu}$ は短距離型ポテンシャルと呼ばれる. 量子物理学分野における水素原子のより多くのモデルに関しては [18, 24] を参照せよ.

$\gamma = 0$ のとき, (NLS$_\gamma$) は渦糸の運動, スピンの歳差運動, 光ファイバー中における超短パルスの電波などを記述する.

1.1 準備

非負値 X, Y に対して, ある $C > 0$ が存在して $X \leq CY$ が成り立つとき $X \lesssim Y$ と表現する. $X \lesssim Y \lesssim X$ が成り立つとき $X \sim Y$ と表現する. 関数空間 X に対して, $X_{\mathrm{rad}} := \{f \in X : f$ は球対称関数 $\}$ とする.

定義 1.1 (ルベーグ空間)**.** $p \geq 1$ において, ルベーグ空間 $L^p(\mathbb{R}^d)$ を

$$L^p(\mathbb{R}^d) := \{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{L^p} < \infty\}$$

で定義する. ここで, ルベーグノルム $\|\cdot\|_{L^p}$ は次である.

$$\|f\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, & (1 \leq p < \infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|, & (p = \infty). \end{cases}$$

定義 1.2 (フーリエ変換・フーリエ逆変換)**.** フーリエ変換とフーリエ逆変換を次のように定義する.

$$\begin{aligned} &(\text{フーリエ変換}) \quad \mathcal{F}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x\xi} f(x) dx, \\ &(\text{フーリエ逆変換}) \quad \mathcal{F}^{-1}f(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i x\xi} f(x) dx. \end{aligned}$$

定義 1.3 (ソボレフ空間)**.** 非斉次ソボレフ空間 $W^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ と斉次ソボレフ空間 $\dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d)$ を次で定義する.

$$\begin{aligned} W^{s,p}(\mathbb{R}^d) &:= \left\{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{W^{s,p}} < \infty\right\}, \\ \dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^d) &:= \left\{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{\dot{W}^{s,p}} < \infty\right\}. \end{aligned}$$

ここで, 非斉次ソボレフノルム $\|\cdot\|_{W^{s,p}}$ と斉次ソボレフノルム $\|\cdot\|_{\dot{W}^{s,p}}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} \|f\|_{W^{s,p}} &:= \|(1-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p} = \|\mathcal{F}^{-1}(1 + 4\pi^2|\cdot|^2)^{\frac{s}{2}} \mathcal{F}f\|_{L^p}, \\ \|f\|_{\dot{W}^{s,p}} &:= \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p} = \|\mathcal{F}^{-1}(2\pi|\cdot|)^s \mathcal{F}f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

$p = 2$ のとき $H^s(\mathbb{R}^d) := W^{s,2}(\mathbb{R}^d)$, $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d) := \dot{W}^{s,2}(\mathbb{R}^d)$ と表すこととする.

注意 1.4. $1 < p < \infty$, $s = 1$ のとき, 次が成り立つ.

$$\|f\|_{W^{1,p}} \sim \|f\|_{L^p} + \|\nabla f\|_{L^p}.$$

2 (NLS_γ) の時間局所適切

時間に依存した非線形偏微分方程式の研究は大きく分けると 2 つに分けられる. 1 つ目は時間局所適切の有無である. (NLS_γ) が時間局所適切であるとは, 次の (1)〜(4) が成り立つことである.

(1) (解の一意性) (NLS_γ) の解は一意である.

(2) (解の存在性) 任意の $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$ に対して, 時間区間 $(T_{\min}, T_{\max}) = (T_{\min}(u_0), T_{\max}(u_0))$ $(\ni 0)$ 上定義される (NLS_γ) の解 $u \in C((T_{\min}, T_{\max}); H^1(\mathbb{R}^d))$ が存在して, $(T_{\min}, T_{\max})$ を超えて (NLS_γ) の解は存在しない.

(3) (Blow-up alternative) もし $T_{\max} < \infty$ $(T_{\min} > -\infty)$ とすると,

$$\lim_{t \nearrow T_{\max}} \|u(t)\|_{H^1} = \infty, \qquad \left(\lim_{t \searrow T_{\min}} \|u(t)\|_{H^1} = \infty \right).$$

(4) (初期値への連続依存性) もし $u_{0,n} \longrightarrow u_0$ in H^1 とすると, 任意の閉区間 $I \subset (T_{\min}, T_{\max})$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n \geq n_0$ に対して $u_{0,n}$ を初期値にもつ (NLS_γ) の解 u_n は I 上で定義されて $u_n \longrightarrow u$ in $C(I; H^1(\mathbb{R}^d))$ $(n \to \infty)$ をみたす.

注意 2.1. (Blow-up alternative) より, 次が成り立つ.

$$\sup_{t \in (T_{\min}, T_{\max})} \|u(t)\|_{H^1} < \infty \implies (T_{\min}, T_{\max}) = \mathbb{R}.$$

(NLS_γ) は時間局所適切であることが知られている.

定理 2.2 ((NLS_γ) の時間局所適切, [3])**.** $d \geq 1$, $1 < p < 2^* - 1$, $\gamma > 0$, $0 < \mu < \min\{d, 2\}$ とする. このとき, (NLS_γ) は時間局所適切である.

(NLS_γ) は次の積分方程式に書き換えることができる.

$$u(t,x) = e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})} u_0(x) + i \int_0^t e^{i(t-s)(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})} (|u|^{p-1} u)(s,x) ds.$$

(NLS_γ) の時間局所適切は例えば, この積分方程式に次のストリッカーツ評価を適用した縮小写像の議論により得られる.

定理 2.3 (ストリッカーツ評価, [21])**.** $d = 3$, $0 < \mu < 2$, $\gamma > 0$, $0 \leq s \leq 1$ とする. $t_0 \in \mathbb{R}$ とし, 時間区間 I は t_0 を含むとする.

$$I_s := \begin{cases} \left\{ (q,r) : 2 \leq q \leq \infty,\ \dfrac{6}{3-2s} \leq r \leq \dfrac{6}{1-2s} \right\} & \left(0 \leq s < \dfrac{1}{2} \right), \\ \left\{ (q,r) : \dfrac{4}{3-2s} < q \leq \infty,\ \dfrac{6}{3-2s} \leq r < \infty \right\} & \left(\dfrac{1}{2} \leq s \leq 1 \right) \end{cases}$$

に対し,

$$\Lambda_s := \{ (q,r) \in I_s : \tfrac{2}{q} + \tfrac{3}{r} = \tfrac{3}{2} - s \}$$

を定義する. もし $(q_1, r_1) \in \Lambda_s$, $(q_2, r_2) \in \Lambda_0$ とすると

- $\|e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})} f\|_{L_t^{q_1} L_x^{r_1}} \lesssim \|f\|_{\dot{H}^s}$,
- $\left\| \int_{t_0}^t e^{i(t-s)(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})} F(\cdot, s) ds \right\|_{L_t^{q_1}(I; L_x^{r_1})} \lesssim \|F\|_{L_t^{q_2'}(I; \dot{W}_x^{s, r_2'})}$

が成り立つ.

定理 2.2 で得られた (NLS$_\gamma$) の解は質量とエネルギーを保存する.

定理 2.4 (保存則)**.** 定理 2.2 で得られた (NLS$_\gamma$) の解 u は次の質量とエネルギーを時間に関して保存する.

$$\begin{aligned}
&(\text{質量}) \quad M[f] := \|f\|_{L^2}^2, \\
&(\text{エネルギー}) \quad E_\gamma[f] := \frac{1}{2}\|\nabla f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\gamma}{|x|^\mu}|f(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1}\|f\|_{L^{p+1}}^{p+1}.
\end{aligned}$$

つまり,

$$M[u(t)] = M[u_0], \quad E_\gamma[u(t)] = E_\gamma[u_0], \qquad t \in (T_{\min}, T_{\max})$$

が成り立つ.

$\gamma = 0$ をもつ (NLS$_\gamma$), つまり

$$i\partial_t u(t,x) + \Delta u(t,x) = -|u(t,x)|^{p-1}u(t,x), \qquad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \tag{NLS$_0$}$$

は次のスケール変換に関して不変である.

$$u(t,x) \mapsto u_{[\lambda]}(t,x) := \lambda^{\frac{2}{p-1}} u(\lambda^2 t, \lambda x), \qquad (\lambda > 0).$$

つまり, u が (NLS$_0$) の解であるならば, $\lambda > 0$ に対して $u_{[\lambda]}$ もまた (NLS$_0$) の解である. この変換により初期値 u_0 は

$$u_0(x) \mapsto (u_0)_{\{\lambda\}}(x) := \lambda^{\frac{2}{p-1}} u_0(\lambda x)$$

と移り変わる. $s_c := \frac{d}{2} - \frac{2}{p-1}$ とすると, $\dot{H}^{s_c}$-ノルムはこの変換に関して不変である. つまり, $\|(u_0)_{\{\lambda\}}\|_{\dot{H}^{s_c}} = \|u_0\|_{\dot{H}^{s_c}}$ が成り立つ. そのため $p = 1 + \frac{4}{d}$ $(s_c = 0)$ のとき (NLS$_\gamma$) は L^2-臨界もしくは質量臨界, $p = 1 + \frac{4}{d-2}$ $(s_c = 1)$ のとき (NLS$_\gamma$) は $\dot{H}^1$-臨界もしくはエネルギー臨界と呼ばれる.

3 (NLS$_\gamma$) の解の時間挙動

時間局所適切が得られたとき, 解の時間発展による挙動を調べることが時間に依存した非線形偏微分方程式の研究の 2 つ目である. (NLS$_\gamma$) の解の時間発展を考えた際, 線形部分 $(i\partial_t u + \Delta u - \frac{\gamma}{|x|^\mu}u)$ は分散的にはたらき, 非線形部分 $(-|u|^{p-1}u)$ は吸引的にはたらく. 分散性は波を散らばらせ, 吸引性は波を集中させる.

分散性　　吸引性

線形部分と非線形部分の働きが逆であり, これらの兼ね合いにより様々な種類の時間挙動が存在する. 分散効果の方が吸引効果より強いとき, 解 u は空間遠方に向かっていく. そのため, 解 u 自身の相互作用が弱まり線形状態に近づく. このような挙動を散乱といい, このような解を散乱解と呼ぶ. 吸引

効果の方が分散効果より強いとき, 解 u はあるところに集中していく. このような挙動を爆発といい, このような解を爆発解と呼ぶ. 爆発は有限時間爆発と無限時間爆発の 2 つに分けられる. 分散効果と吸引効果が釣り合うとき, 時間に関して位相の周期的な変動しかない解が生じる. このような解を定在波解と呼ぶ. これらの挙動を数学的に記述すると以下のようになる.

定義 3.1 (散乱解, 有限時間爆発解, 無限時間爆発解, 定在波解)**.** $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, u は (NLS_γ) の解とする.

- (散乱解)
  (NLS_γ) の解 u が正 (負) の時間で散乱するとは, $T_{\max} = +\infty$ $(T_{\min} = -\infty)$ であり, さらに, ある $\psi_+ \in H^1(\mathbb{R}^d)$ $(\psi_- \in H^1(\mathbb{R}^d))$ が存在して
  $$\lim_{t\to+\infty} \|u(t) - e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}\psi_+\|_{H^1} = 0, \quad \left(\lim_{t\to-\infty} \|u(t) - e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}\psi_-\|_{H^1} = 0\right)$$
  が成立することである. 時間両方向で散乱するとき, 単に散乱すると呼ぶ. ここで, $e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}$ は線形シュレディンガー発展作用素であり, $e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}\psi$ は ψ を初期値にもつ線形方程式
  $$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \Delta u(t,x) - \dfrac{\gamma}{|x|^\mu} u(t,x) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \tag{LS_γ}$$
  の解である.
- (有限時間爆発解)
  (NLS_γ) の解 u が正 (負) の時間で有限時間爆発するとは, $T_{\max} < +\infty$ $(T_{\min} > -\infty)$ をみたすことである. 時間両方向で有限時間爆発するとき, 単に有限時間爆発すると呼ぶ.
- (無限時間爆発解)
  (NLS_γ) の解 u が正 (負) の時間で無限時間爆発するとは, $T_{\max} = +\infty$ $(T_{\min} = -\infty)$ であり, さらに,
  $$\limsup_{t\to+\infty} \|u(t)\|_{H^1} = \infty, \quad \left(\limsup_{t\to-\infty} \|u(t)\|_{H^1} = \infty\right)$$
  が成り立つことである. 時間両方向で無限時間爆発するとき, 単に無限時間爆発すると呼ぶ.
- (定在波解)
  ある $\omega \in \mathbb{R}$ に対して
  $$u(t,x) = e^{i\omega t} Q_{\omega,\gamma}(x), \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$
  の形をしているとき, 解 u は定在波解であるという. ここで, $Q_{\omega,\gamma} = Q_{\omega,\gamma}(x)$ は楕円型方程式
  $$-\omega Q_{\omega,\gamma} + \Delta Q_{\omega,\gamma} - \frac{\gamma}{|x|^\mu} Q_{\omega,\gamma} = -|Q_{\omega,\gamma}|^{p-1} Q_{\omega,\gamma} \tag{$\mathrm{SP}_{\omega,\gamma}$}$$
  の解である.

注意 3.2. $(\mathrm{SP}_{\omega,\gamma})$ の解は作用汎関数
$$S_{\omega,\gamma}(f) := \frac{\omega}{2} M[f] + E_\gamma[f]$$

により次のように特徴付けられる.

$$Q_{\omega,\gamma} \text{ が } (\mathrm{SP}_{\omega,\gamma}) \text{ の解} \iff (S_{\omega,\gamma})'(Q_{\omega,\gamma}) = 0.$$

4 先行結果

$\gamma = 0$ (ポテンシャルの項がない) とき：

- (定在波解の存在) $d \geq 1$, $1 < p < 2^* - 1$, $\omega > 0$ のとき $(\mathrm{SP}_{\omega,0})$ は解をもつ. 特に,

$$\mathcal{G}_{\omega,0} := \{\phi \in \mathcal{A}_{\omega,0} : S_{\omega,0}(\phi) \leq S_{\omega,0}(\psi) \text{ for any } \psi \in \mathcal{A}_{\omega,0}\}$$

  に属する基底状態と呼ばれる解が存在する [2, 25]. ここで,

$$\mathcal{A}_{\omega,0} := \{\phi \in H^1(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\} : (S_{\omega,0})'(\phi) = 0\}.$$

- (散乱) $d \geq 1$, $Q_{\omega,0}$ は $(\mathrm{SP}_{\omega,0})$ の基底状態とする.
  - $p = 1 + \frac{4}{d}$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $M[u_0] < M[Q_{1,0}]$ ならば, (NLS_0) の解 u は散乱する [5].
  - $1 + \frac{4}{d} < p < 2^* - 1$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$,

$$S_{\omega,\gamma}(u_0) < S_{\omega,0}(Q_{\omega,0}) \quad \text{for some} \quad \omega > 0, \tag{1}$$

$$K_\gamma(u_0) := 2\|\nabla u_0\|_{L^2}^2 + \mu \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\gamma}{|x|^\mu} |u_0(x)|^2 dx - \frac{d(p-1)}{p+1} \|u_0\|_{L^{p+1}}^{p+1} \geq 0 \tag{2}$$

    ならば, (NLS_0) の解 u は散乱する [1, 7, 8, 14] (関連した文献として [16] も挙げておく).
- (爆発) $d \geq 1$, $1 + \frac{4}{d} < p < 2^* - 1$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, (1),

$$K_\gamma(u_0) < 0 \tag{3}$$

  ならば, (NLS_0) の解 u は有限時間爆発もしくは無限時間爆発する [1, 6, 15]. さらに, $u_0 \in |x|^{-1}L^2(\mathbb{R}^d)$ もしくは "$u_0 \in H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 2$, $d = 2$ のとき $p \leq 5$" であるならば, (NLS_0) の解 u は有限時間爆発する [1, 9, 22].

$\gamma > 0$ (ポテンシャルの項がある) とき：

- (定在波解の存在) $d \geq 1$, $1 < p < 2^* - 1$, $0 < \mu < \min\{d, 2\}$, $\omega > 0$ のとき $(\mathrm{SP}_{\omega,\gamma})$ は解をもつ. 特に,

$$\mathcal{G}_{\omega,\gamma,\mathrm{rad}} := \{\phi \in \mathcal{A}_{\omega,\gamma,\mathrm{rad}} : S_{\omega,\gamma}(\phi) \leq S_{\omega,\gamma}(\psi) \text{ for any } \psi \in \mathcal{A}_{\omega,\gamma,\mathrm{rad}}\}$$

  に属する "球対称" 基底状態と呼ばれる解が存在する [11, 12]. ここで,

$$\mathcal{A}_{\omega,\gamma,\mathrm{rad}} := \{\phi \in H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\} : (S_{\omega,\gamma})'(\phi) = 0\}.$$

- (散乱) $d = 3$, $(1 + \frac{4}{3} =) \frac{7}{3} < p < 5 (= 1 + \frac{4}{3-2})$, $1 < \mu < 2$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, (1), (2) ならば, (NLS_γ) の解 u は散乱する [10].
- (爆発) $d \geq 1$, $1 + \frac{4}{d} < p < 2^* - 1$, $0 < \mu < \min\{d, 2\}$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, (1), (3) ならば (NLS_γ) の解 u は有限時間爆発もしくは無限時間爆発する [10, 12]. さらに $u_0 \in |x|^{-1}L^2(\mathbb{R}^d)$ もしくは "$u_0 \in H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 2$, $d = 2$ のとき $p \leq 5$" であるならば (NLS_γ) の解 u は有限時間爆発する [4, 12, 19].

5 主定理

$\gamma > 0$ のとき, 散乱の結果では $1 < \mu < 2$ を仮定している. $1 < \mu < 2$ と $0 < \mu \le 1$ では線形解 $e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}\psi$ ((LS$_\gamma$) の解) に関して次の違いがある.

- $1 < \mu < 2$:

$$\underset{\text{Guo–Wang–Yao [10]}}{(u(t) \rightsquigarrow)}\ e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}\psi \underset{\text{Mizutani [20]}}{\rightsquigarrow} e^{it\Delta}\psi_+ \ \text{ in } H^1\ (t \to \infty).$$

- $0 < \mu \le 1$:

$$\underset{?}{(u(t) \rightsquigarrow)}\ e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}\psi \underset{\text{Reed–Simon [23]}}{\not\rightsquigarrow} e^{it\Delta}\psi_+ \ \text{ in } L^2\ (t \to \infty).$$

つまり, $1 < \mu < 2$ のとき, 線形解 $e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}\psi$ は $t \to \infty$ として, ポテンシャルをもたない線形解 $e^{it\Delta}\psi_+$ に漸近する [20]. 一方で, $0 < \mu \le 1$ のとき, 線形解 $e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}\psi$ は $t \to \infty$ としても, ポテンシャルをもたない線形解 $e^{it\Delta}\psi_+$ に漸近しない [23]. Guo–Wang–Yao [10] は $1 < \mu < 2$ において非線形方程式の解 u ((NLS$_\gamma$) の解) が $t \to \infty$ として, 線形解 $e^{it(\Delta - \frac{\gamma}{|x|^\mu})}\psi$ に漸近するための初期値の十分条件を与えた. 本研究では $0 < \mu \le 1$ のときについて調べた.

定理 5.1 (H.–Ikeda, [13])**.** $d = p = 3$, $\gamma > 0$, $0 < \mu < 2$ とする. $Q_{\omega,\gamma}$ は (SP$_{\omega,\gamma}$) の "球対称" 基底状態解であるとする. もし $u_0 \in H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R})$ がある $\omega > 0$ に対して $S_{\omega,\gamma}(u_0) < S_{\omega,\gamma}(Q_{\omega,\gamma})$ と (2) をみたすとき (NLS$_\gamma$) の解 u は散乱する.

注意 5.2. 定理 5.1 は $1 < \mu < 2$ においても, Guo–Wang–Yao [10] で扱えていない初期値を扱えている. つまり, ある $u_0 \in H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^3)$ が存在して

$$S_{\omega,0}(Q_{\omega,0}) \le S_{\omega,\gamma}(u_0) < S_{\omega,\gamma}(Q_{\omega,\gamma}), \qquad K_\gamma(u_0) \ge 0$$

をみたす.

注意 5.3. $\mu = 1$ で非線形項が分散的にはたらく ($|u|^{p-1}u$ である) とき, つまり

$$i\partial_t u(t,x) + \Delta u(t,x) - \frac{\gamma}{|x|}u(t,x) = |u(t,x)|^{p-1}u(t,x), \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$$

に対しては, 次の結果が知られている.

$\gamma > 0$, $\frac{7}{3} < p < 5$, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ とする. このとき, 解 u は散乱する.

6 証明の概略

本稿では, Guo–Wang–Yao [10] と定理 5.1 の証明で異なる部分を紹介する. Guo–Wang–Yao [10] では, 初期値の列 $\{u_{0,n}\} \subset H^1(\mathbb{R}^3)$ に対して次のプロファイル分解を適用することで議論を行う.

定理 6.1 (プロファイル分解)**.** $d=p=3$, $\gamma>0$, $1<\mu<2$ とする．また $\{f_n\}$ は $H^1(\mathbb{R}^3)$ の有界列であるとする．部分列を取ると，ある $J^*\in\{0,1,\dots,\infty\}$, プロファイル $\{f^j\}\subset H^1(\mathbb{R}^3)$, パラメータ $\{(t_n^j,x_n^j)\}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, 剰余 $\{R_n^J\}\subset H^1(\mathbb{R}^3)$ が存在して，任意の $0\le J\le J^*$ $(J\in\mathbb{N})$, $n\in\mathbb{N}$ に対して次の分解が成り立つ．

$$f_n(x)=\sum_{j=0}^{J}\big[e^{-it_n^j\left(\Delta-\frac{\gamma}{|x+x_n^j|^\mu}\right)}f^j\big](x-x_n^j)+R_n^J(x).$$

$\{R_n^J\}$ は次の意味で剰余である．

$$\lim_{J\to J^*}\limsup_{n\to\infty}\|e^{it(\Delta-\frac{\gamma}{|x|^\mu})}R_n^J\|_{L_t^5L_x^5}=0. \tag{4}$$

注意 6.2. $\{(t_n^j,x_n^j)\}\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$, $\{R_n^J\}\subset H^1(\mathbb{R}^3)$ は他にもいくつかの性質をみたすが，ここでは省略する．

定理 6.1 の作用素 $e^{-it_n^j\left(\Delta-\frac{\gamma}{|x+x_n^j|^\mu}\right)}$ の性質を得るために仮定 $1<\mu<2$ は使用される．球対称関数に制限することで，定理 6.1 の x_n^j は恒等的に 0 にできることが知られている．例えば，[14, 17] などで見つけられる．[14] では，作用素 $e^{it\Delta}$ がフーリエ変換を用いて $\mathcal{F}^{-1}e^{-4\pi^2it|\xi|^2}\mathcal{F}$ と表されていることを利用している．そのため，今回の $e^{it(\Delta-\frac{\gamma}{|x|^\mu})}$ に対して，その証明は直接適用することができない．また [17] では，一度 x_n^j を含めた形 (定理 6.1 の形) で証明し，球対称であるとき $\{x_n^j\}$ が有界であることを導き，それを利用して証明する．それ故，その証明を直接適用すると $1<\mu<2$ の制限を取り除くことはできない．本研究では，埋め込み $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^3)\subset L^3(\mathbb{R}^3)$ がコンパクトであることのみを利用して，$\{f_n\}\subset H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^3)$, $0<\mu<2$, $x_n^j\equiv 0$ をもつ定理 6.1 を証明した．本稿では $\{f^j\}\subset H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^3)$, $\{t_n^j\}\subset\mathbb{R}$, $\{R_n^J\}\subset H^1(\mathbb{R}^3)$ の取り方のみ紹介する．

証明．補完不等式とストリッカーツ評価 (定理 2.3) より

$$\|e^{it(\Delta-\frac{\gamma}{|x|^\mu})}f\|_{L_t^5L_x^5}\le\|e^{it(\Delta-\frac{\gamma}{|x|^\mu})}f\|_{L_t^\infty L_x^3}^{1-\theta}\|e^{it(\Delta-\frac{\gamma}{|x|^\mu})}f\|_{L_t^qL_x^r}^{\theta}\lesssim\|e^{it(\Delta-\frac{\gamma}{|x|^\mu})}f\|_{L_t^\infty L_x^3}^{1-\theta}\|f\|_{\dot H_x^{\frac12}}^{\theta}.$$

ここで，$(q,r)\in\Lambda_{\frac12}$, $\theta\in(0,1)$ は $\frac15=\frac{1-\theta}{\infty}+\frac{\theta}{q}=\frac{1-\theta}{3}+\frac{\theta}{r}$ をみたす定数である．それ故，次が成り立てば (4) は成立する．

$$\lim_{J\to J^*}\limsup_{n\to\infty}\|e^{it(\Delta-\frac{\gamma}{|x|^\mu})}R_n^J\|_{L_t^\infty L_x^3}=0.$$

$\{f^1\}$, $\{t_n^1\}$, $\{R_n^1\}$ を構成する．
$A_0:=\limsup_{n\to\infty}\|e^{it(\Delta-\frac{\gamma}{|x|^\mu})}f_n\|_{L_t^\infty L_x^3}$．もし $A_0=0$ ならば，各 $j\ge1$ に対して $f^j\equiv0$ と取ることで主張が得られる．そこで，$A_0>0$ を仮定する．この仮定により部分列 $\{f_n\}$ (もとの列と同じ記号を用いる) を次をみたすように取ることができる．

$$\|e^{it(\Delta-\frac{\gamma}{|x|^\mu})}f_n\|_{L_t^\infty L_x^3}\ge\frac34A_0\quad\text{for each}\quad n\in\mathbb{N}.$$

そして，列 $\{t_n^1\}\subset\mathbb{R}$ を次をみたすように取る．

$$\|e^{it_n^1(\Delta-\frac{\gamma}{|x|^\mu})}f_n\|_{L_x^3}\ge\frac12A_0\quad\text{for each}\quad n\in\mathbb{N}. \tag{5}$$

今, $\|e^{it_n^1(\Delta-\frac{\gamma}{|x|^\mu})}f_n\|_{H_x^1}$ ($\sim \|f_n\|_{H^1}$ (作用素のユニタリ性より)) は有界列であるから, ある $f^1 \in H^1(\mathbb{R}^3)$ が存在して $e^{it_n^1(\Delta-\frac{\gamma}{|x|^\mu})}f_n \rightharpoonup f^1$ in $H^1(\mathbb{R}^3)$ as $n \to \infty$. $H^1_{\mathrm{rad}}(\mathbb{R}^3) \subset L^3(\mathbb{R}^3)$ のコンパクト性から $e^{it_n^1(\Delta-\frac{\gamma}{|x|^\mu})}f_n \longrightarrow f^1$ in $L^3(\mathbb{R}^3)$. (5) から $f^1 \neq 0$ である. 実際,

$$\frac{1}{2}A_0 \leq \lim_{n\to\infty} \|e^{it_n^1(\Delta-\frac{\gamma}{|x|^\mu})}f_n\|_{L_x^3} = \|f^1\|_{L^3}$$

が成り立つ. $R_n^1 := f_n - e^{-it_n^1(\Delta-\frac{\gamma}{|x|^\mu})}f^1$ とおく.

$\{f^2\}$, $\{t_n^2\}$, $\{R_n^2\}$ の構成について：

$A_1 := \limsup_{n\to\infty} \|e^{it(\Delta-\frac{\gamma}{|x|^\mu})}R_n^1\|_{L_t^\infty L_x^3}$ とおき, 上と同様の議論を行う.

以後, 帰納的に $\{f^j\}$, $\{t_n^j\}$, $\{R_n^j\}$ を構成していく. □

参考文献

[1] T. Akahori and H. Nawa, Blowup and scattering problems for the nonlinear Schrödinger equations. Kyoto J. Math. **53** (2013), no. 3, 629–672. MR3102564

[2] H. Berestycki and P.-L. Lions, *Nonlinear scalar field equations*, I. Existence of a ground state. Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), no. 4, 313–345. MR0695535

[3] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equations*, Courant Lecture Notes in Mathematics, 10. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xiv+323 pp. MR2002047

[4] V. D. Dinh, *On nonlinear Schrödinger equations with repulsive inverse-power potentials*, Acta Appl. Math. **171** (2021), Paper No. 14, 52 pp. MR4198524

[5] B. Dodson, *Global well-posedness and scattering for the mass critical nonlinear Schrödinger equation with mass below the mass of the ground state*, Adv. Math. **285** (2015), 1589–1618. MR3406535

[6] D. Du, Y. Wu, and K. Zhang, On blow-up criterion for the nonlinear Schrödinger equation. Discrete Contin. Dyn. Syst. **36** (2016), no. 7, 3639–3650. MR3485846

[7] T. Duyckaerts, J. Holmer, and S. Roudenko, *Scattering for the non-radial 3D cubic nonlinear Schrödinger equation*, Math. Res. Lett. **15** (2008), no. 6, 1233–1250. MR2470397

[8] D. Fang, J. Xie, and T. Cazenave, Scattering for the focusing energy-subcritical nonlinear Schrödinger equation. Sci. China Math. **54** (2011), no. 10, 2037–2062. MR2838120

[9] R. T. Glassey, *On the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **18** (1977), no. 9, 1794–1797. MR0460850

[10] Q. Guo, H. Wang, and X. Yao, *Dynamics of the focusing 3D cubic NLS with slowly decaying potential*, J. Math. Anal. Appl. **506** (2022), no. 2, Paper No. 125653, 30 pp. MR4315563

[11] M. Hamano and M. Ikeda, *Characterization of the ground state to the intercritical NLS with a linear potential by the virial functional*, Advances in harmonic analysis and partial differential equations, 279–307, Trends Math., Birkhäuser/Springer, Cham MR4174752

[12] M. Hamano and M. Ikeda, *Equivalence of conditions on initial data below the ground state to NLS with a repulsive inverse power potential*, J. Math. Phys. **63** (2022), no. 3, Paper No. 031509, 16 pp. MR4393612

[13] M. Hamano and M. Ikeda, *Scattering solutions to nonlinear Schrödinger equation with a long range potential*, preprint, arXiv : 2104. 13577.

[14] J. Holmer and S. Roudenko, *A sharp condition for scattering of the radial 3D cubic nonlinear Schrödinger equation*, Comm. Math. Phys. **282** (2008), no. 2, 435–467. MR2421484

[15] J. Holmer and S. Roudenko, *Divergence of infinite-variance nonradial solutions to the 3D NLS equation*, Comm. Partial Differential Equations **35** (2010), no. 5, 878–905. MR2753623

[16] C. E. Kenig and F. Merle, *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy-critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case*, Invent. Math. **166** (2006), no. 3, 645–675. MR2257393

[17] R. Killip, S. Masaki, J. Murphy, and M. Visan, *The radial mass-subcritical NLS in negative order Sobolev spaces*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **39** (2019), no. 1, 553–583. MR3918185

[18] A. Messiah, *Quantum mechanics*, Vol. I. Translated from the French by G. M. Temmer North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Interscience Publishers Inc., New York 1961 xv+504 pp. MR0129790

[19] C. Miao, J. Zhang, and J. Zheng, *A nonlinear Schrödinger equation with Coulomb potential*, Acta Math. Sci. Ser. B (Engl. Ed.) **42** (2022), no. 6, 2230–2256. MR4493675

[20] H. Mizutani, *Wave operators on Sobolev spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **148** (2020), no. 4, 1645–1652. MR4069201

[21] H. Mizutani, *Strichartz estimates for Schrödinger equations with slowly decaying potentials*, J. Funct. Anal. **279** (2020), no. 12, 108789, 57 pp. MR4156128

[22] T. Ogawa and Y. Tsutsumi, *Blow-up of H^1 solution for the nonlinear Schrödinger equation*, J. Differential Equations **92** (1991), no. 2, 317–330. MR1120908

[23] M. Reed and B. Simon, *Methods of Mathematical Physics*, New Academic, New York, Vols. 1, 2, 1975; Vols. 3, 4, 1978.

[24] G. Series, *Spectrum of Atomic Hydrogen*, Oxford University Press, Oxford, 1957.

[25] W. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. **55** (1977), no. 2, 149–162. MR0454365

面積保存写像から定まる変分問題

京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻
梶原 唯加 (Yuika KAJIHARA)

概要

2 次元面積保存写像 f がツイスト条件と呼ばれる性質を満たすとき，f に対して，ある関数 H が存在して，H の臨界点からもとの写像の軌道を定めることができる．つまり，H を用いて f に対する「離散系の変分問題」を考えることができる．本発表では，通常の変分問題 (微分方程式から定まる「連続系の変分問題」) の結果と比較しながら，周期軌道，ヘテロクリニック軌道，ホモクリニック軌道といった時間大域的なふるまいによって特徴づけされる写像の軌道を変分法によって構成する手法について述べる．

1　はじめに：変分構造とは何か

変分問題とは，文字通り変分を計算する問題である．そして，変分の計算（calculus of variations）とは，一般に関数上の微分を指す．高校数学の問題で $F'(x) = 0$ なる $x \in \mathbb{R}$ を調べて F のグラフを描けといった類の問題を誰しも目にしたことがあると思う．変分問題も本質的にはこのような問題と同じで，$F'(x) = 0$ なる x が存在するのか調べたり，x がどのような性質を持つのか調べたりするのが (連続系の) 変分問題である．ただし x は関数空間の元である．与えられた微分方程式系に対して，ある (汎) 関数 F があって，$F'(x) = 0$ なる x がもとの微分方程式系の解に対応するとき，その微分方程式系は「変分構造を持つ」と表現される．また次節で述べるように，写像および写像によって決定される軌道に対しても同様に変分構造を考えることができる．変分問題に含まれる話題は様々であるが，ここでは「変分問題を経由することで微分方程式系や写像によって定義される時間大域的に特徴づけられた解や軌道を得る」ことを考え，特に写像から定まる変分問題に重点を置いて述べる．

微分方程式論の演習などでよく扱われる線形微分方程式系などの例を除き，微分方程式は一般には解けないことが大半である．その一方で系が変分構造を持つとき，F の臨界点の存在を証明し，その性質を知ることができれば，微分方程式系の記述だけでは見えなかった特殊解の存在を示すことができる．そして，これと同様の議論が写像に対しても有用なことを次節以降で確認していく．

2　面積保存写像の変分問題

この節では 2 次元の面積保存写像が持つ変分構造や，その性質を通じてもとの写像によって定まる軌道を変分法によって捉える手法について述べる．面積保存写像および軌道とは，次で定義される．

定義 2.1 (面積保存写像, area-preserving map)**.** 写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $((x,y) \mapsto (\bar{x},\bar{y}))$ が

$$dx \wedge dy = d\bar{x} \wedge d\bar{y} \tag{1}$$

を満たすとき，面積保存写像と呼ぶ.

以下，f は C^1 級微分同相写像であると仮定する.

定義 2.2 (軌道, orbit)**.** 写像 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対し，$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が f の軌道であるとは，任意の $i \in \mathbb{Z}$ について，$x_{i+1} = f(x_i)$ が成り立つことをいう.（$\mathbb{Z}$ を $\{0,\cdots,n\}$ に置き換えて，有限列についても同様の性質を満たせば軌道と呼ぶこととする.）

2.1 有限列によって表される臨界点

まず，有限の長さの軌道について考えよう．写像の変分構造を考えるうえでは，ポアンカレの補題が本質的な役割を果たす.

補題 2.3 (ポアンカレの補題)**.** n 次元単連結領域上で定義された k 次の ω が閉形式である（つまり $d\omega = 0$）ならば，ある $k-1$ 次微分形式 η が存在して，$\omega = d\eta$ を満たす．ただし $1 \le k \le n$ とする.

簡易な変形により，(1) は $d(\bar{y}d\bar{x} - ydx) = 0$ と表すことができる．ここでポアンカレの補題（補題 2.3）より，ある $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ があって，

$$dh = \bar{y}d\bar{x} - ydx$$

を満たす．この h を用いて関数 H を

$$H(x_j,\ldots,x_k) := \sum_{i=j}^{k-1} h(x_i, x_{i+1}) \tag{2}$$

で与える．ここで次が成り立つ：

補題 2.4. (2) の臨界点は写像 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $((x,y) \mapsto (\bar{x},\bar{y}))$ の軌道を与える．ただし，f は次を満たすとする：

$$\text{ある } \delta > 0 \text{ があって，} \partial\bar{x}/\partial y \ge \delta \tag{3}$$

Proof. 以下，∂_i は i 番目の変数の偏微分を表すとする．(2) の臨界点を $x = (x_j,\ldots,x_k)$ とすると，$\partial_2 h(x_{i-1},x_i) + \partial_1 h(x_i,x_{i+1}) = 0$ が成り立つ．このとき，

$$y_i = -\partial_1 h(x_i, x_{i+1}) \tag{4}$$

とすると，(x_i, y_i) は f の orbit となる．実際，

$$f(x_i,y_i) = f(x_i, -\partial_1 h(x_i,x_{i+1})) = (x_{i+1}, \partial_2 h(x_i,x_{i+1})) = (x_{i+1}, -\partial_1 h(x_{i+1i}, x_{i+2}))$$

より明らか．ただし，(4) の右辺が多価関数になっていたり，発散しないことを示す必要がある．これを示すために，(3) を用いる．f は微分同相であるから，逆写像を考えて y が $\bar{x}$ を変数に持つものとしてみれば，(3) から $\partial y/\partial X > 0$ となる．(4) と合わせると，

$$\frac{\partial y_i}{\partial \bar{x}} = -\partial_2\partial_1 h(x_i,x_{i+1}) > 0$$

を得る．H は C^2 級だから，y_i は発散しない．また，y_i の単調性から多価関数にもなり得ない．以上より，f の軌道が臨界点から得られる． □

Remark 1. 上の補題において「軌道を与える」という，少し曖昧な表現をしているのは，臨界点そのものは軌道ではないからである．

Remark 2. 上の証明においては条件 (3) は，より弱い条件 $\partial\bar{x}/\partial y > 0$ に置き換えても問題ない．この条件は一般にツイスト条件と呼ばれる．したがって，写像に対して変分構造の存在を保証するためには，「面積保存写像かつツイスト条件を満たす」という仮定で十分である．（そうであるにもかかわらず，あえて条件 (3) を課している理由は 4.2 節で述べる．）

以上の議論から次が導かれる．

命題 2.5. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ が面積保存かつツイスト条件を満たすならば，変分構造を持つ．

2.2 無限列によって表される臨界点の例

2.1 節では生成関数 h を n 個足し合わせた関数 H を考え，H の臨界点から，f に対する有限長さ n の軌道 $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ を求めた．では，f の軌道 $\{(x_i, y_i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を臨界点から得るにはどうすればいいかを考えよう．最も単純な例は固定点（周期 1 の周期軌道）や k-周期軌道を考える場合である．ここで周期軌道は次で定義される：

定義 2.6 (周期軌道)**.** f を $\mathbb{R}^n$ 上の写像とし，$x_i \in \mathbb{R}^n$ とする．このとき，f の軌道 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が f の k-周期軌道（ただし $k \in \mathbb{Z}_{>0}$）であるとは，任意の i について，$x_{i+k} = x_i$ を満たすことをいう．また，このような $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ の最小値を最小周期と呼ぶ．

ただし，周期軌道を考えるのならば，h に対しても何らかの周期的な性質を仮定する必要がある．そこで次を仮定する：

$$\text{任意の } x, \bar{x} \in \mathbb{R} \text{ について，} h(x, \bar{x}) = h(x+1, \bar{x}+1) \tag{h_1}$$

この仮定を満たすための写像 f を考える場合は，$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の代わりに，$f\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ を考える．そのうえで f から定まる h が (h_1)（およびその他の「良い性質」）を満たすために，通常は (3) に加えて $y = 0, 1$ が f 上の不変曲線になっているという仮定を課して考えるが，詳細は割愛する．[2, 4] などを参照されたい．(h_1) を仮定したもとで，

$$h(x^*, x^*) = \min_{x\in\mathbb{R}} h(x, x) \tag{5}$$

を求める．このとき

$$\partial_2 h(x^*, x^*) + \partial_1 h(x^*, x^*) = 0$$

が成り立つから，$y^* = -\partial_1 h(x^*, x^*)$ として，任意の i について $(x_i, y_i) = (x^*, y^*)$ とおけば，$\{(x_i, y_i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が軌道になる．周期が 2 以上の周期点については次節で改めて述べる．

では，ヘテロクリニック軌道やホモクリニック軌道のように $i \to \pm\infty$ のふるまいによって特徴づけられるような軌道に対応する臨界点の存在を示すにはどうすればいいだろうか．ここで，ヘテロクリニック軌道およびホモクリニック軌道とは次で定義される．

定義 2.7 (ヘテロクリニック軌道)**.** f を $\mathbb{R}^n$ 上の写像とし，$x_i \in \mathbb{R}^n$ とする．このとき，f の軌道 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が f のヘテロクリニック軌道であるとは，ある異なる二つの固定点 u^0, u^1 が存在して，$x_i \neq u^0, u^1$ $(i \in \mathbb{Z})$ かつ $|x_i - u^0| \to 0$ $(i \to -\infty)$ かつ $|x_i - u^1| \to 0$ $(i \to \infty)$ を満たすことをいう．

定義 2.8 (ホモクリニック軌道)**.** f を $\mathbb{R}^n$ 上の写像とし，$x_i \in \mathbb{R}^n$ とする．このとき，f の軌道 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が f のホモクリニック軌道であるとは，ある固定点 u が存在して，$x_i \neq u$ $(i \in \mathbb{Z})$ かつ $|x_i - u| \to 0$ $(i \to \pm\infty)$ を満たすことをいう．

例えば f のホモクリニック軌道と，それに対応する h 上の臨界点 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を $\{(i, x_i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ の形でプロットしたグラフを考えると図 1, 2 のようになる．図 1 では $x = u^0, u^1$ および $y = -\partial_1 h(u^j, u^j)$ で定まる (x, y) を固定点としている．図 1 の青い軌道があるホモクリニック軌道を模式的に表している．過去には $x = u^0$ の固定点に収束するが，一度 $x = u^1$ の近傍に近づいて（図 2 で見ると 1 の部分），再び $x = u^1$ の近傍から離れて（図 2 で見ると 2 の部分），その後は $x = u^0$ の固定点に収束する．また，図 2 の中一度 $x = u^1$ の近傍に近づいたあと，$x = u^1$ の近傍から離れることなくそのまま $x = u^1$ に収束すれば，それは単調なヘテロクリニック軌道の一例になる．

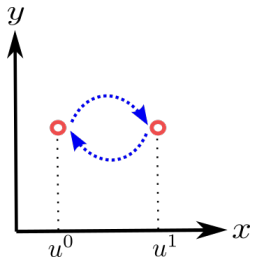


図 1: f 上のホモクリニック軌道

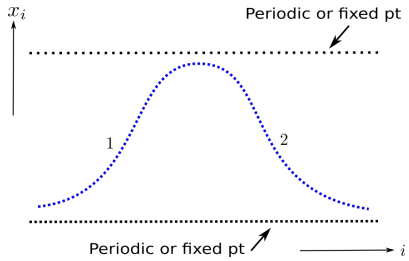


図 2: 図 1 に対応する H の臨界点

Remark 3. 力学系の文脈では周期点もある種の固定点のひとつとして扱われる．そのため周期点に収束するような軌道も同様にヘテロ/ホモクリニック軌道と呼ぶ．その意味で図 2 では「*Periodic or fixed pt(point)*」と表記した．

ではヘテロクリニック軌道やホモクリニック軌道のグラフを描く $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を臨界点として得る方法を考えよう．関数 $H\colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ を

$$H(x) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} h(x_i, x_{i+1}) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=-n}^{n} h(x_i, x_{i+1})$$

と定義するとどうか？これは lim が定義できるのかという問題が生じてしまう．lim が定義できる場合でも $i \to \pm\infty$ での $h(x_i, x_{i+1})$ が 0 に収束しないと常に発散してしまう．そこで，無限和が収束するような正規化を考える．定義にも記述したように，ヘテロ/ホモクリニック軌道は $i \to \pm\infty$ において特定の固定点に収束する．そこで，H の代わりに I を次のように定義する．

$$I(x) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} (h(x_i, x_{i+1}) - c) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=-n}^{n} (h(x_i, x_{i+1}) - c) \tag{6}$$

ここで，$c = \min_{x\in\mathbb{R}} h(x, x)$ である．上記の I に対して，ある特定の範囲や制約条件を課したもとでの最小点を考えることで，ヘテロ/ホモクリニック軌道の存在が証明できることを次節で見ていく．

3　臨界点の存在証明手法

ここでは臨界点として特に最小点（minimizer と呼ばれる）に着目して考えるとする．ただし，ここでの最小点とは global minimizer ではなく，local minimizer を意図していることに注意されたい．つまり，対象となる空間全体の中での最小点を見るのではなく，「ある特定の範囲や制約条件を課したもとでの最小点」を考える．

3.1　周期軌道

本稿では，固定点（周期 1 の周期点）に収束するようなヘテロ/ホモクリニック軌道についてのみ述べる．ただし，周期軌道の存在も同様に関数 H の臨界点から証明することができる．周期が 2 以上の周期点について考えよう．このとき $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ の「周期」を次で定義する．

定義 3.1 ((q,p)-周期)**.** $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が (q,p)-周期的であるとは，

$$x_{i+q} = x_i + p \tag{7}$$

が任意の $i \in \mathbb{Z}$ について成り立つことを指す．

$\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ が (q,p)-周期的であるとき，もとの f の軌道 (x_i, y_i) は q-周期的になる．このような周期点の存在は，いわゆる「周期境界条件」のもとでの最小点を考えればよい．

$$H(x^*) = \min_{x\in X_{q,p}} \sum_{i=0}^{q-1} h(x_i, x_{i+1}) \tag{8}$$

ここで，$H(x) = \sum h(x_i, x_{i+1})$ であり，

$$X_{q,p} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \mid x_{i+q} = x_i + p \ ({}^{\forall} i \in \mathbb{Z})\}$$

である．また，今回考える設定のもとでは結果的に p, q が互いに素な場合のみを考えればよいことが示せる．（この事実や x^* が存在することの証明については，[2] を参照されたい．）したがって，周期軌道は p, q の比 に着目すればよい．ここで $\mathcal{M}_{p/q}$ を次で定義する：

$$\mathcal{M}_{p/q} = \{x^* \in X_{q,p} \mid x^* \text{ は (8) を満たす }\}$$

3.2　ヘテロクリニック軌道

この節以降では固定点（周期 1 の周期点）に収束するようなヘテロ/ホモクリニック軌道の存在証明について考える．臨界点の中で，ヘテロクリニック軌道を与えるものの存在を示すにはどうすればいいだろうか．ヘテロクリニック軌道はいつでも存在するわけではない．したがって追加で仮定が必要である．そこで次を仮定する．

$$\text{ある } u^0, u^1 \in \mathcal{M}_0 \text{ があって，任意の } v \in \mathcal{M}_0 \text{ に対して，} v < u^0 \text{ または } u^1 < v \text{ である} \tag{9}$$

ここで，$x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ について $x < y$ とは，任意の i について $x_i < y_i$ であることを意味するとする．(9) は固定点の集合に「すき間」があることを仮定している．(9) を満たすような組 $\{u^0, u^1\}$ を [2] での呼び名に則って neighboring pair と呼ぶことにする．以下，記号を濫用して u^0, u^1 は特に $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ の元の意味でも，$\mathbb{R}^1$ の元でも用いるとする．（$u^j = \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ かつ任意の i について $x_i = u^j$ とする．）

neighboring pair $\{u^0, u^1\}$ に対して，$X := [u^0, u^1]^{\mathbb{Z}}$ とする．X 上にヘテロクリニック軌道が存在することを示そう．関数 $I\colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ を (6) で定義する．この節の冒頭で，「ある特定の範囲や制約条件を課したもとでの最小点」を考えると述べたが，これはつまり，X のある部分集合 Y に対して，

$$I(x^*) = \inf_{x\in Y} I(x) \tag{10}$$

という形で与えられる臨界点 x^* を考え，このとき，こちらが望む軌道を含むようにうまく仮定をした部分集合 Y を選ぶということである．今回のように，ヘテロクリニック軌道を考えるのであれば

$$Y = \{x \in [u^0, u^1]^{\mathbb{Z}} \mid |x_i - u^0| \to 0\ (i \to -\infty) \text{ かつ } |x_i - u^1| \to 0\ (i \to \infty)\} \tag{11}$$

と定義するのは自然だろう．もちろん，x^* が実際に X の元になっていることと，$x^* = \{x_i^*\}$ が u^0, u^1 と任意の i で一致していないことを確認する必要がある．（Y の ‘境界’ に x^* がのっている場合は x^* が臨界点であることが保証されないため．）詳しい証明は [6] を参照されたい．

上で定義した X はコンパクト性が保証されない．そこで次を思いだそう．

補題 3.2 (チコノフの定理)**.** 任意個のコンパクト空間の直積空間はコンパクトである．

この定理を利用することで別証明も考えられる．Y^0, Y^1 をそれぞれ

$$Y^j(l, p) = \{x \in X \mid |x_l - u^j| \le p\}\ (j = 0, 1)$$

によって定義し

$$\begin{aligned} K &= \{k = (k_i)_{i\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z} \mid k_0 = 0, k_i < k_{i+1}\} \\ P &= \left\{\rho = (\rho_i)_{i\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}_{>0} \mid 0 < \rho_i < (u^1 - u^0)/2\right\} \end{aligned} \tag{12}$$

とする．さらに $k \in K, \rho \in P$ に対して，Y を

$$Y = \left(\bigcap_{i\le 0} Y^0(k_i, \rho_i)\right) \cap \left(\bigcap_{i>0} Y^1(k_i, \rho_i)\right) \tag{13}$$

と定める．Y は X 上に無限個の「杭」を立てて，その杭の間を通るような軌道の集合である．次節以降で考える軌道も，この杭の選び方を変えることである程度共通の形で Y を記述できる．このとき，Y はコンパクト（より正確には点列コンパクト）であることが保証され，$x^* \in Y$ が直ちに導かれる．ただし，このような集合を選ぶことで別の困難も新たに生じてしまう．杭の先端（$x^* \in Y$ が $|x_l - u^j| = p$ 上）を通っていないことを示さなければならない．結果的には $k \in K, \rho \in P$ をうまく選ぶことで，(11) の場合と同様のヘテロクリニック軌道が得られることがわかる．

3.3 ホモクリニック軌道

3.2 節で得られたヘテロクリニック軌道の集合を X_{het} とおく．さらに，関数 $p_0\colon \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$ を $\{x_i\} \to x_0$ で定める．ヘテロクリニック軌道が存在しても，ホモクリニック軌道が存在するとは限ら

ない．そこで，3.2 節で得られたヘテロクリニック軌道の集合について次の仮定をする．

$$p_0(X_{\mathrm{het}}) \neq (u^0, u^1) \tag{14}$$

上記の (u^0, u^1) は $\mathbb{R}$ 上の開区間を意味する．これも周期軌道の neighboring pair と同様，ヘテロクリニック軌道に「すき間」を仮定しているものと考えてもらえばよいかと思う．図 2 のような最も「単純」なホモクリニック軌道（「単純」が意味するところは次節で言及する）の場合は

$$Y = \left(\bigcap_{i \neq 1,2} Y^0(k_i, \rho_i) \right) \cap \left(\bigcap_{i=1,2} Y^1(k_i, \rho_i) \right) \tag{15}$$

と選んで，(10) を考えればよい．このとき，u^1 側に立てる杭を 1 本ではなく 2 本，つまり $\bigcap_{i=1} Y^1$ ではなく $\bigcap_{i=1,2} Y^1$ 選ぶことが証明のポイントである．$(\bigcap_{i \neq 1} Y^0) \cap (\bigcap_{i=1} Y^1)$ としてしまうと，ヘテロクリニック軌道の証明で言及したことと同様に，x^* が杭の先端を通らないことが示せない．

Remark 4. このように設定した空間の「境界」上に臨界点がのっていないことを証明しなければならないことは，今回の話題に限らず，変分解析において共通の困難点である．

3.4 より複雑な軌道

3.2, 3.3 節では最も単純な形のヘテロクリニック軌道とホモクリニック軌道の存在について述べた．「単純」と表現したのは，各軌道の振る舞いとして，下図のように複数回固定点の近傍を行ったり来たりするようなパターンも考えられるからである．（ここで述べた設定とは少し異なるが，同様の手法で固定点の近傍を有限回行ったりきたりするヘテロ/ホモクリニック軌道の存在が [6] で示されている．）

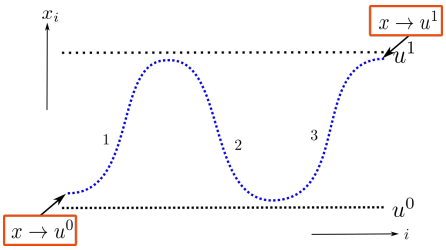


図 3: 単純（単調）でないヘテロクリニック軌道

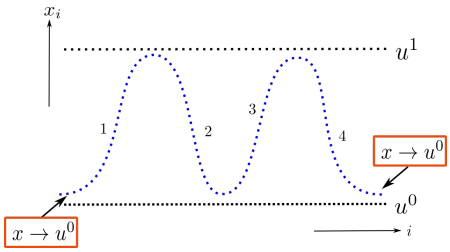


図 4: 単純でないホモクリニック軌道

しかしながら，この場合も Y の取り方としては (13), (15) と同様に無限個の杭を立てて，その立て方を少し変えるだけである．例えば，図 3 の軌道であれば図 5 に記すように杭を立てて制限する．

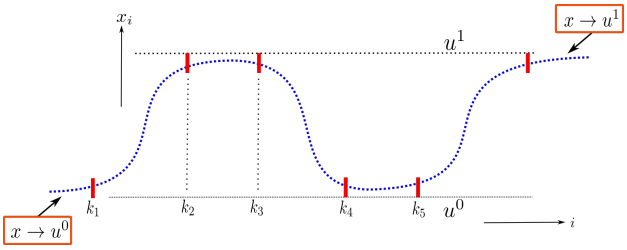


図 5: 3 回上下に振幅するヘテロクリニック軌道と杭

また，無限回上下に振幅し続けるような，ヘテロクリニックでもホモクリニックでもない軌道の存在も示すことができる．この場合は $a \equiv b \pmod 4$ として，

$$Y = \left(\bigcap_{i \equiv 0,1} Y^0(k_i, \rho_i) \right) \cap \left(\bigcap_{i=-1,2} Y^1(k_i, \rho_i) \right) \tag{16}$$

を考えればよい．つまり，図 6 に示すように，上下に 2 本ずつ交互に杭を打って，その間を通る軌道の集合を考える．

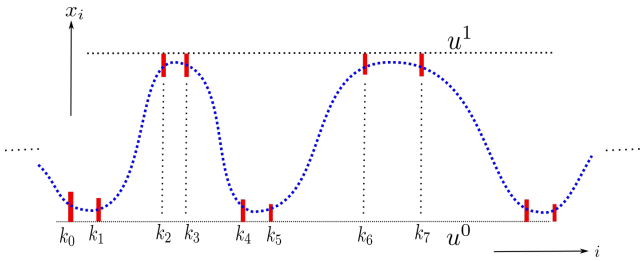


図 6: 無限回上下に振幅する軌道と杭

ただし，この場合，$I(x)$ は常に発散してしまう．そのため，ヘテロ/ホモクリニック軌道を考える際に (6) で記したような正規化をしたように，無限回の振幅をするような軌道を考える場合は，正規化した (6) に対してまたさらなる正規化を考えなくてはならない．無限回の振幅をするような軌道の存在証明については [3] を参照されたい．

4　その他の議論

4.1　連続系との比較

写像のヘテロ/ホモクリニック軌道を変分構造を用いて示す手法について述べてきたが，これまで記した大まかな手順は [5] に記されたポテンシャル系における周期解，ヘテロクリニック解，ホモクリニック解の存在証明に用いられた技法が元になっている．（ヘテロ/ホモクリニック解の定義は定義にある固定点を平衡点に読み替え，各ステップを表す i を時間 t に置き換えればよい．）

ポテンシャル系とは，ある滑らかな関数 $V\colon \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，$(t, x) \mapsto V(t, x)$ があって，

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x} \tag{17}$$

と表されるような微分方程式系を指す．（一般には右辺にマイナスがつく表記の方が多いが，変分解析ではしばしば (17) の表記で表される．）簡単のため一次元自励系として振り子の運動方程式（$V(x) = \sin(2\pi x)$）を考えよう．このとき（記号を濫用して再び H を用いて）

$$H(x) = \int_a^b \frac{1}{2}\dot{x} + V(x)dt \tag{18}$$

とすると，H の臨界点は振り子の運動方程式の解になっている．（連続系の場合は，写像と違い，$H'(x) = 0$ となるような関数 x そのものが解になる．）周期境界条件のもとでの最小点は $x = k$ $(k \in \mathbb{Z})$，つまり振り子が上向きに直立した状態であり，これ以外に最小点は存在しない．直感的には振り子が真下で静止した状態の臨界点が真っ先に想像されそうだが，この臨界点は最小点

ではない．したがって，例えば $x=0,1$ を選べば，これは前節で述べた neighboring pair に対応する．そして，$x=0,1$ は物理的には同じ位置を表すが，S^1 による同一視をやめて別の点とみなせば，$x=0$ に $t\to-\infty$ で，$x=2\pi$ に $t\to\infty$ に収束する軌道はヘテロクリニック解となる．写像の場合に見たように，平衡点での 1 周期分の (18) の値を引き算して，

$$I(x)=\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left(\int_i^{i+1}\frac{1}{2}\dot{x}+V(x)dt-c\right)$$

と I を定義し，(11) と同様に関数空間を設定して最小点をみることでヘテロクリニック解が得られる．関数空間の場合はチコノフの定理が適用できないため，前節で述べたような「無限 (整数) 個の杭を立てる」という方針は使えない．コンパクト性が保証されないため，関数列の収束に関する議論も重要になる．また，振り子はホモクリニック軌道の存在証明をするために仮定した (14) を満たさず，ホモクリニック解も存在しない．

一方で，振り子の視点に周期的な摂動を加えると，カオス的な振る舞いをすることが知られており，この場合はホモクリニック解が存在する．証明は次節で見たのと同様に「(有限個の) 杭を立てる」という操作を用いるが，詳細は割愛する．

4.2 h に関する諸注意

度々登場している h および，その元となる f の性質についていくつかコメントしておこう．まず，h は C^1 級の 2 次元写像 $f\colon\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}\to\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$ をもとに決まる関数であった．そして，この f のリフト $\tilde{f}\colon\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R},((x,y)\mapsto(X,Y))$ は面積保存写像であり，ある $\delta>0$ があって，$\partial X/\partial y\geq\delta$ を満たすような写像である．詳細は省くが，f に上記の仮定を課しておくと，f から定まる h について最小点を調べるうえで「良い性質」が成り立つ．したがって，あくまで今回述べた性質は h が「良い性質」を満たすための十分条件であるが，今回考えた話題のように

「写像 f からスタートして，その f が描く軌道を変分構造を用いて調べる」

というスタンスでは，そもそもの変分構造 h の存在を示すためには面積保存写像やツイスト条件という仮定は本質的なものである．また，力学系の観点から考えて f にある程度の滑らかさを仮定することも自然なことだろう．

一方，これまで記した面積保存写像の変分問題に関する話題は，Aubry-Mather 理論と呼ばれるものの一部であるが，この理論のもとになったのは Aubry らによる Frenkel-Kontorova model と呼ばれる，結晶格子の配置に関するモデルについての結果 [1] である．彼らの論文では

$$h(x,X)=\frac{1}{2}C(x-X)^2+V(x)+V(X) \tag{19}$$

に対して，$H=\sum_{i=0}^{n}h(x_i,x_{i+1})$ の臨界点を考える．そのとき，臨界点 $\{x_i\}$ そのものに物理的意味づけがなされている．このように，写像 f の軌道について調べるのではなく，

「ある関数 h の和によって定義された関数 H についての臨界点の性質について調べる」

という立場でこれまでの証明を考えると，例えば h が C^2 級であるという仮定は強すぎる．そこで，h がどのような仮定（「良い性質」）を満たしていれば，臨界点として周期点やヘテロクリニック点と

いった特徴的なものが得られるのかを調べたのが Bangert [2] である．Bangert が提示した仮定を満たすための十分条件であり，かつ f に課せられた仮定がなるべく簡明になる設定が今回用いた設定である．

Remark 5. *Aubry-Mather* 理論を数学の理論として発展させたのは *Mather* の功績によるところが大きい．そのきっかけとなった *Mather* の最初の論文は *[4]* である．*3.1* 節で周期軌道が p/q で表される有理数によって特徴づけられることをみたが，この論文では，無理数周期に対応する準周期軌道も含めて，周期軌道の存在を変分構造を用いて示している．

5　おわりに

本稿ではなるべく証明の大まかな流れがどのようなものかを伝えることを念頭に置き，証明の細部に立ち入ることは避けた．そのため，設定や主張がどこか曖昧に感じられた方もいるかもしれないが，その点はご了承いただきたい．また，1 節で述べたように，本稿で扱った事項は「変分問題を経由することで微分方程式系や写像によって定義される時間大域的に特徴づけられた解や軌道を得る」というテーマに基づく．このようなテーマに関する論文の主定理は「○○という系に対して，○○という条件を満たす解が存在する」といった形式で書かれることが多いが，今回はあえて定理は書かなかった．というのも（これは私個人の意見であるが）変分解析を用いた解や軌道の存在証明は，「○○という解が存在する」という定理の主張以上に，それを得るまでの証明のステップを楽しむ感覚の方が強い気がするからである．少しでも証明の楽しさが伝われば幸いである．

参考文献

[1] S. Aubry and P. Y. Le Daeron, *The discrete Frenkel-Kontorova model and its extensions. I. Exact results for the ground-states*, Phys. D **8** (1983), no. 3, 381–422.

[2] V. Bangert, *Mather sets for twist maps and geodesics on tori*, Dynam. Report. Ser. Dynam. Systems Appl. **1** (1988), 1–56.

[3] Y. Kajihara, *Variational structures for infinite transition orbits of monotone twist maps*, https://arxiv.org/abs/2212.01850.

[4] J. N. Mather, *Existence of quasiperiodic orbits for twist homeomorphisms of the annulus*, Topology **21** (1982), no. 4, 457–467.

[5] P. H. Rabinowitz, *The calculus of variations and the forced pendulum*, Hamiltonian dynamical systems and applications, NATO Sci. Peace Secur. Ser. B Phys. Biophys., Springer, Dordrecht, 2008, pp. 367–390.

[6] G. Yu, *Chaotic dynamics of monotone twist maps*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **38** (2022), 179–204.

楕円曲線の等分体のイデアル類群について

慶應義塾大学大学院理工学研究科 基礎理工学専攻
臺信 直人 (Naoto Dainobu)

Abstract

有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E に対し, その等分体と呼ばれる代数体 K が定まり, これは一般に $\mathbb{Q}$ 上の非 abel 拡大となる. 本稿では, E の等分体 K のイデアル類群の Galois 加群構造について, 筆者が最近得た結果を紹介する.

1 背景

以下, 有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大を代数体と呼ぶ. 代数体 K に対し, その**イデアル類群**と呼ばれる有限群 $\mathrm{Cl}(K)$ が定まる. 一応, その定義を紹介しておく.

定義 1.1. K を代数体とする. $I(K)$ を K の 0 でない分数イデアルのなす群, $P(K)$ を K の 0 でない単項分数イデアルのなす $I(K)$ の部分群とする. このとき, K のイデアル類群 $\mathrm{Cl}(K)$ を,

$$\mathrm{Cl}(K) := I(K)/P(K)$$

で定義する.

代数体のイデアル類群は整数論において大変重要な研究対象である. その研究の歴史は, Kummer による Fermat 予想の解決に向けた 19 世紀の仕事に始まる. 現代でもイデアル類群は, 乗法群 $\mathbb{G}_m$ に関する岩澤理論や同変玉河数予想などの整数論のとてもホットな話題において, その主要な登場人物として盛んに研究されている.

代数体 K が例えば $\mathbb{Q}$ 上の Galois 拡大であるとすると, Galois 群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ が $\mathrm{Cl}(K)$ に自然に作用する. このような状況において, $\mathrm{Cl}(K)$ を単なる群としてではなく, Galois 群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ の作用込みで調べる, つまり $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 加群として調べるということがよくなされる. 1.1 節の後半で述べるように, $K/\mathbb{Q}$ が abel 拡大 ($\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ が abel 群) の場合には, $\mathrm{Cl}(K)$ の $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 加群構造については多くのことが知られている. 一方で, K が $\mathbb{Q}$ 上の非 abel 拡大 ($\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ が非 abel 群) の場合には, $\mathrm{Cl}(K)$ の $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 加群構造については, まだまだわからないことが多い状況である.

本稿では, $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線に対して定まる**等分体**と呼ばれる $\mathbb{Q}$ の非 abel 拡大を考察の対象とし, そのイデアル類群の Galois 加群構造について筆者が得た結果について紹介する. 結果の位置づけを簡単に述べると, まず $\mathbb{Q}$ 上の円分体に関する **Herbrand-Ribet の定理** (定理 1.4) という有名な結果がある. Herbrand-Ribet の定理について, その楕円曲線の等分体における類似を考察した **Prasad-Shekhar の定理** (定理 1.9) を部分的に精密化したものが, 筆者の結果 (定理 2.3, 系 2.4) である.

1.1 円分体のイデアル類群

まずは $\mathbb{Q}$ 上の abel 拡大の典型例である円分体のイデアル類群について, 前述の Herbrand-Ribet の定理を含め, どのようなことが調べられてきたかを解説する.

p を奇素数とし, μ_p を複素数体 $\mathbb{C}$ の中の 1 の p 乗根のなす群とする. Kummer は, Fermat 予想の解決に向けた研究の中で, $\mathbb{Q}$ に μ_p を添加した円の p 分体 $\mathbb{Q}(\mu_p)$ のイデアル類群 $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\mu_p))$ を考察するに至った. 以下, A_p を $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\mu_p))$ の p-Sylow 部分群とする. 次の定理は Kummer の判定法と呼ばれる結果である.

定理 1.2 (Kummer)**.**

$$\exists k \in 2\mathbb{Z}_{>0} \ \text{ s.t } \ p \text{ が } \zeta(1-k) \text{ の分子を割る} \iff A_p \neq 0.$$

ここで $\zeta(s)$ は Riemann の ζ-関数であり, 解析接続して $\mathbb{C}$ 上の有理型関数と見ている. また, $\zeta(1-k)$ の値は有理数であることが知られている.

注意 1.3. 一見, 全然関係がないように見える ζ-関数の値とイデアル類群 $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\mu_p))$ とが, 定理 1.2 のように結びついていることはとても神秘的に感じられる. しかし, 話が逸れないように注意しておくと, 筆者の結果を含め, 1.2 節以降で紹介するイデアル類群に関する結果では, 残念ながら定理 1.2 に見られるような ζ-関数や, いわゆる L 関数とイデアル類群との結びつきは (まだ) 確認できない. この節では ζ-関数と $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\mu_p))$ の結びつきよりも, $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\mu_p))$ そのものについて何が調べられてきたか (定理 1.2, 1.4 の主張の右側) に注意して読んでいただきたい.

後に Herbrand [3] と Ribet [8] により, Kummer の結果の精密化が証明されている. 彼らは $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(\mu_p))$ を単なる群ではなく, この章の始めに述べたように Galois 群 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$ が作用する群, つまり $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$ 加群として扱った. 彼らは A_p を $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$ 加群として

$$A_p = \bigoplus_{k=0}^{p-2} A_p^{\omega_{\mathrm{cyc}}^k} \tag{1.1}$$

のように分解して考察した. ここで, $\omega_{\mathrm{cyc}} : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q}) \to \mathbb{Z}_p^\times$ は mod p 円分指標で, $A_p^{\omega_{\mathrm{cyc}}^k}$ は $\sigma \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$ が $\omega_{\mathrm{cyc}}^k(\sigma)$ 倍で作用するような A_p の部分空間である. ざっくりいうと, (1.1) では A_p を $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_p)/\mathbb{Q})$ の作用に関する幾つかの固有空間に細分化したのである. このとき, Herbrand と Ribet は次を得た.

定理 1.4 (Herbrand-Ribet)**.** k を $2 \leqslant k \leqslant p-3$ を満たす偶数とする. このとき

$$p \text{ が } \zeta(1-k) \text{ の分子を割る} \iff A_p^{\omega_{\mathrm{cyc}}^{1-k}} \neq 0.$$

これは定理 1.2 の精密化になっている. 注目していただきたいのは, Kummer は A_p 全体の非自明性を考察しているのに対し, Herbrand と Ribet は A_p を Galois 群の作用に関して分解して, その分解における幾つかの成分の非自明性を考察している点である.

現在では, Mazur と Wiles による岩澤主予想の帰結として $A_p^{\omega_{\mathrm{cyc}}^{1-k}}$ の位数も明らかにできる. また, 円分体に限らず一般の $\mathbb{Q}$ 上の abel 拡大のイデアル類群についても, 幾つかの仮定の下に岩澤主予想から同様のことを明らかにできる.

1.2 楕円曲線の等分体のイデアル類群

最近, Prasad [6] によって $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の等分体において, Herbrand-Ribet の定理の非 abel 類似が考察されている.

まず楕円曲線に関する用語を簡単にまとめる. ($\mathbb{Q}$ 上の) 楕円曲線とは, 基本的には $y^2 = x^3 + ax + b$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ の形で定義される代数曲線 E のことである. ただし, 定義方程式の右辺には重根がないものとする. E 上の $\bar{\mathbb{Q}}$ 値点全体の集合

$$E(\bar{\mathbb{Q}}) := \{(X, Y) \in \bar{\mathbb{Q}}^2 \mid \ Y^2 = X^3 + aX + b\}$$

を考える. ここで, $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\bar{\mathbb{Q}}$ $(\subset \mathbb{C})$ を一つ取って固定している. 楕円曲線の顕著な性質として, $E(\bar{\mathbb{Q}})$ と無限遠点と呼ばれる点 $\mathcal{O}$ を合わせた集合に abel 群の構造が入ることが知られている.

定義 1.5 (E の等分点)**.** 非負整数 N に対して, $E(\bar{\mathbb{Q}})$ と $\mathcal{O}$ のなす abel 群の N ねじれ元全体のなす部分群を $E[N]$ と書き, E **の** N **等分点**と呼ぶ.

楕円曲線 E と非負整数 N に対し, 次のような代数体を定義することができる.

定義 1.6 (E の等分体)**.** E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線とする. このとき E **の** N**-等分体** $\mathbb{Q}(E[N])$ を,

$$\mathbb{Q}(E[N]) := \mathbb{Q}(\{X, Y \mid (X, Y) \in E[N]\})$$

で定める.

注意 1.7. $E[N]$ には $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ が作用しており, $\mathbb{Q}(E[N])$ は $\mathbb{Q}$ 上の Galois 拡大である. 一般に $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(E[N])/\mathbb{Q})$ は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ の部分群で, 非 abel 群である.

p を再び奇素数とする. Prasad は [6] で, E の p 等分体 $\mathbb{Q}(E[p])$ のイデアル類群 $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(E[p]))$ を $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(E[p])/\mathbb{Q})$ 加群として扱い, 非 abel 拡大 $\mathbb{Q}(E[p])/\mathbb{Q}$ における定理 1.4 の類似を考察した. 以下, $A(E)_p$ を $\mathrm{Cl}(\mathbb{Q}(E[p]))$ の p-Sylow 部分群, $A(E)_p^{\mathrm{ss}}$ を $A(E)_p$ の $\mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(E[p])/\mathbb{Q})]$ 加群としての**半単純化**とする. ここで半単純化 $A(E)_p^{\mathrm{ss}}$ は, だいたい $A(E)_p$ の $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(E[p])/\mathbb{Q})$ 加群としての既約分解のようなものだと思ってよい. つまり $A(E)_p^{\mathrm{ss}}$ は,

$$A(E)_p^{\mathrm{ss}} = \bigoplus_M M^{\oplus r_M} \tag{1.2}$$

のように $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(E[p])/\mathbb{Q})$ 加群としての直和分解で表される. ただし, 上の直和の M は $\mathbb{F}_p$ 上の既約 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(E[p])/\mathbb{Q})$ 加群を全て走り, 非負整数 r_M は $A(E)_p^{\mathrm{ss}}$ における M 成分の重複度を表している.

この状況で, Prasad は次の問を提起した.

問 1.8. M を $\mathbb{F}_p$ 上の既約 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(E[p])/\mathbb{Q})$ 加群とする. (1.2) の分解において, いつ $r_M \neq 0$ となるか?

この問は勿論定理 1.4 に触発されたものである. [7] で Prasad と Shekhar は, $E[p]$ が既約 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(E[p])/\mathbb{Q})$ 加群である状況で, $M = E[p]$ の場合の問 1.8 に E の Selmer 群を用いて部分的回答を与えた.

定理 1.9 (Prasad-Shekhar)**.** E に関して, 次の条件を仮定する.

(1) E は p で良還元を持つ.

(2) $a_p(E) \equiv 1 \pmod p$ であり, E が $\mathbb{Q}_p$ の拡大体上で虚数乗法を持たなければ, $E[p]$ は $G_{\mathbb{Q}}$ の表現として p で暴分岐する. ここで, $a_p(E) := (p+1) - \#E(\mathbb{F}_p)$ である.

(3) 任意の素数 ℓ で, E の ℓ での玉河数が p と素である.

(4) $E[p]$ は $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(E[p])/\mathbb{Q})$ 加群として既約である.

このとき $\dim_{\mathbb{F}_p}(\mathrm{Sel}(G_{\mathbb{Q}}, E[p])) \geqslant 2$ であれば,

$$E[p] \subset A(E)_p^{\mathrm{ss}},$$

つまり $r_{E[p]} \neq 0$ が成立する. ここに, $\mathrm{Sel}(G_{\mathbb{Q}}, E[p])$ は E の p-Selmer 群である.

注意 1.10. Birch と Swinnerton-Dyer による予想 (BSD 予想) を仮定すると, この結果を楕円曲線 E の L 関数 $L(E,s)$ を用いて書き換えることができる. $L^*(E,1)$ を $L(E,s)$ の $s=1$ における Taylor 展開の先頭係数とする. このとき定理 1.9 から, 定理 1.9 の仮定と BSD 予想の下で,

$$p \text{ が } L^*(E,1)^{alg} \text{ の分子を割る} \Rightarrow E[p] \subset A(E)_p^{\mathrm{ss}}$$

という, 非 abel 拡大 $\mathbb{Q}(E[p])/\mathbb{Q}$ における定理 1.4 の類似と見れる主張が得られる. ここに, $L^*(E,1)^{alg}$ は $L^*(E,1)$ の有理数部分である.

次の章で述べる筆者の主結果は, この定理 1.9 の部分的精密化を与える. 後に両者の関係性を述べるために, ここで定理 1.9 の証明について簡単に述べる. 以下, E の p 等分体 $\mathbb{Q}(E[p])$ を単に K と書くことにする.

定理 1.9 の帰結 $E[p] \subset A(E)_p^{\mathrm{ss}}$ のためには, 群コホモロジー $H^1(G_{\mathbb{Q}}, E[p])$ の**全素点不分岐な類**の成す部分群 $H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p])$ の非自明性が十分である. 一応 $H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p])$ の定義を紹介しておく. 素数 ℓ に対し, ℓ での惰性群を I_ℓ とかく. I_ℓ は $G_{\mathbb{Q}}$ の部分群であり, $H^1(G_{\mathbb{Q}}, E[p])$ の元を I_ℓ に制限する写像

$$\mathrm{Res}_\ell : H^1(G_{\mathbb{Q}}, E[p]) \to H^1(I_\ell, E[p])$$

を考えることができる.

定義 1.11.

$$H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p]) := \bigcap_{\ell:\text{素数}} \mathrm{Ker}(\mathrm{Res}_\ell)$$

と定め, この群 $H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p])$ の元を $H^1(G_{\mathbb{Q}}, E[p])$ の全素点不分岐な類と呼ぶ.

この $H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p])$ はイデアル類群 $\mathrm{Cl}(K)$ と密接に関係している. コホモロジー類を $G_{\mathbb{Q}}$ から $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K)$ に制限する写像

$$\mathrm{Res} : H^1(G_{\mathbb{Q}}, E[p]) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})}(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K), E[p])$$

による $H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p])$ の像を考えると,

$$\begin{aligned} H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p]) &\xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})}(\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K), E[p]) \ (\subset \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})}(\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/K), E[p])) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})}(\mathrm{Cl}(K), E[p]) \end{aligned} \tag{1.3}$$

となる．ここに, K^{ur} は K の最大不分岐 abel 拡大であり, 2 行目は類体論による同型 $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ur}}/K) \cong \mathrm{Cl}(K)$ を用いた．(1.3) の Hom の集合に非自明な射 f があれば, $E[p]$ の既約性から f は全射になる．この全射 f の存在から, $E[p] \subset A(E)_p^{\mathrm{ss}}$ が帰結される．ここで, 定理 1.9 の仮定 (4) の下で Res は単射である．故に,

$$H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p]) \neq 0 \Rightarrow E[p] \subset A(E)_p^{\mathrm{ss}} \tag{1.4}$$

が従う．

[7] での定理 1.9 の証明の流れは, E の Selmer 群 $\mathrm{Sel}(G_{\mathbb{Q}}, E[p])$ $(\subset H^1(G_{\mathbb{Q}}, E[p]))$ の次元が十分大きければ (今の場合 2 以上ならば), Selmer 群の中に非自明な $H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p])$ の元が存在することを示し, (1.4) から定理の帰結を得るというものである．

2 主結果

この章で筆者の主結果を紹介する．まず, 問 1.8 の次の精密化を考える．

問 2.1. M を $\mathbb{F}_p$ 上の既約 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(E[p])/\mathbb{Q})$ 加群とする．(1.2) の分解において, r_M の値はいくつか?

筆者の主結果の一つ (系 2.4) は, $E[p]$ が既約な $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(E[p])/\mathbb{Q})$ 加群である状況で, $M = E[p]$ の場合の問 2.1 に部分的な回答を与えるものである．

2.1 全素点不分岐な有理点

まず, 主結果を述べるために重要な概念を導入する．

素数 ℓ に対し, $\mathbb{Q}_\ell$ を ℓ 進体, $\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{ur}}$ を $\mathbb{Q}_\ell$ の最大不分岐拡大とする．$\mathbb{Q}_\ell$ は局所体と呼ばれる体の最も基本的な例の一つだが, ここでは単に包含 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_\ell \subset \mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{ur}}$ があることをおさえていただければ良い．以下, 体 F を $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_\ell$, または $\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{ur}}$ のいずれかとして,

$$E(F) := \{(X, Y) \in F^2 \mid (X, Y) \text{ は } E \text{ 上の点}\}$$

と定め E の F-有理点と呼ぶ．$E(F)$ は $E(\bar{\mathbb{Q}})$ と同様に, 無限遠点 $\mathcal{O}$ と合わせて abel 群となる．

定義 2.2. n を正の整数とし, $E(\mathbb{Q})$ の部分群 $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p^n}$ を

$$E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p^n} := \mathrm{Ker}\left(E(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\prod_\ell \iota_\ell} \prod_{\ell:\text{素数}} \frac{E(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{ur}})}{p^n E(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{ur}})} \right)$$

で定める．ただし上の写像 $\iota_\ell : E(\mathbb{Q}) \to E(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{ur}})/p^n E(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{ur}})$ は, 包含写像 $E(\mathbb{Q}) \to E(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{ur}})$ と mod p^n 写像 $E(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{ur}}) \to E(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{ur}})/p^n E(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{ur}})$ の合成である．また, 非負整数 $r_{\mathrm{ur},p^n}(E)$ を

$$r_{\mathrm{ur},p^n}(E) := \mathrm{length}_{\mathbb{Z}_p}(E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p^n}/p^n E(\mathbb{Q}))$$

で定める．

この $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p^n}$ の元を E の全素点不分岐な有理点と呼ぶことにする．$E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p^n}$ は $E(\mathbb{Q})$ の元であって, 任意の素数 ℓ で局所的に $E(\mathbb{Q}_\ell^{\mathrm{ur}})$ の元と見たときに, その p^n 倍元となるような点のなす群である．非負整数 $r_{\mathrm{ur},p^n}(E)$ は, 全ての素数で局所的に p^n 倍点となる点の群 $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p^n}$ と, $E(\mathbb{Q})$ の p^n 倍点のなす群 $p^nE(\mathbb{Q})$ の間の差を測る量である．

全素点不分岐な有理点の群 $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p^n}$ の最も大事な性質は, その元から $H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p^n])$ の元を作れるということである．ここで, 前の節では $n=1$ の場合にしか $H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p])$ の定義を紹介していないが, 一般の正の整数 n に対しても $H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p^n])$ は同様に定義される．Kummer 写像

$$\kappa_n : E(\mathbb{Q})/p^nE(\mathbb{Q}) \hookrightarrow H^1(G_{\mathbb{Q}}, E[p^n])$$

という, E の $\mathbb{Q}$-有理点に $H^1(G_{\mathbb{Q}}, E[p^n])$ の類を対応させる写像がある．この κ_n に関して, $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p^n}$ の定義から直ちに

$$\kappa_n(E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p^n}/p^nE(\mathbb{Q})) \subset H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p^n]) \tag{2.1}$$

が成立する．

筆者の主結果の一つである定理 2.3 では, E の p^n 等分体 $K_n := \mathbb{Q}(E[p^n])$ のイデアル類群 $\mathrm{Cl}(K_n)$ を考察する．一般の正の整数 n についても (1.3) と同様に,

$$H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p^n]) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q})}(\mathrm{Cl}(K_n), E[p^n])$$

という, 比較的緩い条件 (定理 2.3 の (Inj)) の下で単射になる写像が存在する．包含 (2.1) を考慮すると, $\mathrm{Cl}(K_n)$ を調べる上で $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p^n}$ が重要になりそうな雰囲気がしてくる．

2.2 主結果

以下, E の p^n 等分体 $\mathbb{Q}(E[p^n])$ を前節の最後と同様に K_n とかく．特に $n=1$ のときは, 単に K_1 を K とかく．次が本稿における筆者の一つ目の主結果である．

定理 2.3 (D)**.** 次の 3 つの条件を仮定する．

(Add) $p=3$ ならば, E は 3 以外の素数で悪還元かつ潜在的良還元をもたない．

(Mult) 素数 ℓ に対し, $v_\ell(j(E)) < 0$ ならば, $p \nmid v_\ell(j(E))$ である．ここで v_ℓ は ℓ 進付値で, $j(E)$ は E の j 不変量である．

(Inj) $H^1(\mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q}), E[p^n]) = 0$.

このとき, 次が成立する．

(A) $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p^n} = \mathrm{Ker}\left(E(\mathbb{Q}) \to E(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}})/p^nE(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}})\right)$.

(B) $\mathrm{length}_{\mathbb{Z}_p}\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(K_n/\mathbb{Q})}(\mathrm{Cl}(K_n), E[p^n])\right) \geqslant r_{\mathrm{ur},p^n}(E)$.

主張 (A) は, 素数全てにわたる条件で定義されていた $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p^n}$ が, 定理 2.3 の条件 ((Add) と (Mult)) の下では, 固定した p での条件だけから決まるということを述べている．また主張 (B) によって, $r_{\mathrm{ur},p^n}(E)$ から $\mathrm{Cl}(K_n)$ の大きさを把握することができる．

$n=1$ で $E[p]$ が既約な状況では, 定理 2.3 は $M=E[p]$ の場合の問 2.1 に部分的な回答を与えることができる．

系 2.4 (D)**.** $n=1$ とする．定理 2.3 の条件 (Add), (j-inv), (Inj) と, $E[p]$ の $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ 加群としての既約性を仮定する．このとき,

$$E[p]^{\oplus r_{\mathrm{ur},p}(E)} \subset A(E)_p^{\mathrm{ss}}$$

が成立する．

つまり系 2.4 の仮定の下では, $A(E)_p$ の半単純化 (1.2) における $E[p]$ 成分の重複度 $r_{E[p]}$ の下界として, $r_{\mathrm{ur},p}(E)$ をとることができる．$r_{\mathrm{ur},p}(E)>1$ なる状況であれば, 系 2.4 は定理 1.9 よりも $A(E)_p^{\mathrm{ss}}$ の $E[p]$ 成分について精密なことが帰結できることになる．

注意 2.5. [4, Theorem 1, Theorem 2] において, 定理 2.3 の仮定 (Inj) が成立しない例が調べられている．この結果から $p \geqslant 13$ であれば, 任意の n と E に対して仮定 (Inj) は成立することがわかる．(Add) と (Mult) もそこまで強い仮定ではない．(大雑把なことを言ってしまうと, p が十分大きければ満たされる仮定である.)

定理 2.3 のポイントは二点あると考えている．一つは, 勿論 $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p^n}$ の導入である．$n=1$ の場合の定理 1.9 の帰結 $E[p] \subset A(E)_p^{\mathrm{ss}}$ には, (1.4) で述べた通り $H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p]) \neq 0$ が十分であった．これに対し, Prasad と Shekhar は定理 1.9 の証明で, Selmer 群の次元が十分大きければ $H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p])$ に非自明な元が存在することを示しただけで, 具体的に $H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p])$ の類を構成したわけではない．一方, 定理 2.3 では Kummer 写像を通して $H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p])$ の類を作る具体的な点の集合 $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p^n}$ を導入した．このことは, 定理 1.9 の帰結の精密化のみならず, いくつかの場合に定理の適応範囲の改良も可能にしている．(例 2.8, 注意 2.9 参照).

二つ目のポイントは主張 (A) において, 比較的緩い条件 (Add), (Mult) の下で, $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p^n}$ の考察を素数 p における $E(\mathbb{Q})$ の考察へ帰着させている点である．これは後に紹介するように, 具体的な状況で定理 2.3 や系 2.4 を適用するときに, $r_{\mathrm{ur},p}(E)$ を計算するのに重要となる．

2.3 系 2.4 の適用方法, 適用例

本稿の最後に, 系 2.4 の適用方法とその適用例を紹介する．系 2.4 を用いて, $A(E)_p^{\mathrm{ss}}$ の $E[p]$ 成分を考察するには, $r_{\mathrm{ur},p}(E) = \dim_{\mathbb{F}_p}(E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p}/pE(\mathbb{Q}))$ の計算が重要である．定理 2.3 の主張 (A) によると, 仮定 (Add), (Mult) の下では

$$E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p} = \mathrm{Ker}(E(\mathbb{Q}) \to E(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}})/pE(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ur}}))$$

となるのであった．

ここで点 $P \in E(\mathbb{Q})$ について, いつ $P \in \mathrm{Ker}(E(\mathbb{Q}) \to E(\mathbb{Q}_p)/pE(\mathbb{Q}_p))$ となるかを考える．このとき, 特に $P \in E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p}$ である．

補題 2.6. E の定義方程式が p で minimal であるとする．E に付随する形式群を $\hat{E}$ で表し, $\hat{E}$ の対数を $\log_{\hat{E}}$ とかく．$E_1(\mathbb{Q}_p)$ で法 p 還元 $E(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\mathrm{mod}\ p} E(\mathbb{F}_p)$ の核を表すものとする．このとき, 群の同型

$$E_1(\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} p\mathbb{Z}_p \quad (X,Y) \mapsto \log_{\hat{E}}(-X/Y)$$

が存在する．

証明は [9, Chapter VII, Proposition 2.2] 参照. 対数 $\log_{\hat{E}}$ については説明しないが,

$$\log_{\hat{E}}(-X/Y) \in p^2\mathbb{Z}_p \iff -X/Y \in p^2\mathbb{Z}_p$$

が成立する [9, Chapter VII, Theorem 6.4 (b)]. 故に, この補題から点 $P(X,Y)$ が $E_1(\mathbb{Q}_p)$ に属していれば, 単に $-X/Y$ の値を求め, その値 (の分子) が p^2 で割れていれば, $P \in pE_1(\mathbb{Q}_p) \subset pE(\mathbb{Q}_p)$ がわかる. 点 $P(X,Y)$ が $E_1(\mathbb{Q}_p)$ に属しているかどうかも簡単に判定でき, 実際 $v_p(X) < 0$ であれば良い. ここで v_p は p 進付値であり, $x \in \mathbb{Q}$ を $x = p^k \cdot \frac{c}{d}$ $(k \in \mathbb{Z},\ p \nmid c, d)$ と表したとき, $v_p(x) = k$ である.

まとめると, 次が得られたことになる.

命題 2.7. 定理 2.3 の仮定 (Add), (Mult) が満たされていて, E の定義方程式が p で minimal であるとする. $P(X,Y) \in E(\mathbb{Q})$ について,

$$v_p(X) < 0 \text{ かつ } v_p(X/Y) \geqslant 2 \Rightarrow P \in E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p}.$$

このことを用いて得られる例を二つ紹介する.

例 2.8. E を方程式 $y^2 = x^3 - 432x + 15120$ で定義される楕円曲線とする. $p = 13$ として, 系 2.4 を E に適用することで

$$E[13] \subset A(E)^{\mathrm{ss}}_{13} \tag{2.2}$$

が証明できる.

系 2.4 の仮定が満たされることをまず確認する. E はデータベース [5] において 43.a1 とラベリングされている楕円曲線である. [5] によると, $j(E) = 2^{12} \cdot 43^{-1}$ で定理 2.3 の仮定 (j-inv) は満たされている. 注意 2.5 から, 仮定 (Inj) も満たされている. $E[13]$ の既約性も, [5] でチェックできる.

[5] によると, 群 $E(\mathbb{Q})$ は $S := (0,0)$ によって生成され, $\mathbb{Z}$ と同型であることがわかる. 特に $S \notin 13E(\mathbb{Q})$ である. 点 S の 19 倍を計算すると,

$$19S = \left(\frac{-2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 61 \cdot 107}{\mathbf{13}^6 \cdot 37^2}, \frac{3^4 \cdot 11^2 \cdot 17 \cdot 59^2 \cdot 173 \cdot 211}{\mathbf{13}^9 \cdot 37^3} \right).$$

となる. 故に点 $19S$ は命題 2.7 の点 P の条件を満たしており, $19S \in E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},13}$ である (E の定義方程式が 13 で minimal であることもチェックできる). $19S \notin 13E(\mathbb{Q})$ であるから, $19S$ の $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},13}/13E(\mathbb{Q})$ のにおける像は非自明である. よって $r_{\mathrm{ur},13}(E) > 0$ であり, 系 2.4 から包含 (2.2) が得られる.

注意 2.9. [5] によると, BSD 予想のもとではあるが E の Tate-Shafarevich 群は自明であることがわかり, $\dim_{\mathbb{F}_{13}}(\mathrm{Sel}(G_{\mathbb{Q}}, E[13])) = 1$ である. この場合, 定理 1.9 は使えないことに注意する. この例のように, 定理 2.3 で $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},p}$ を具体的に調べることによって, $\dim_{\mathbb{F}_p}(\mathrm{Sel}(G_{\mathbb{Q}}, E[p])) \leqslant 1$ であっても (2.1) から $H^1_{\mathrm{ur}}(G_{\mathbb{Q}}, E[p]) \neq 0$ であることがわかり, (1.4) から包含 $E[p] \subset A(E)^{\mathrm{ss}}_p$ が得られる場合がある.

例 2.10. E を方程式 $y^2 = x^3 - 2401x + 1$ で定義される楕円曲線とする. $p = 7$ として, 系 2.4 を E に適用することで

$$E[7]^{\oplus 3} \subset A(E)^{\mathrm{ss}}_7 \tag{2.3}$$

が証明できる.

注意 2.11. 上の E は, [2] で扱われた二つのパラメーター $m, n \in \mathbb{Z}$ で定まる楕円曲線の族を, $m = 49$, $n = 1$ に特殊化したものである. E には $S := (0, 1)$, $T := (-49, 1)$, $U := (-1, 49)$ という $\mathbb{Q}$-有理点があることがわかるが, これらが $\mathbb{Z}$ 上一次独立であり, $E(\mathbb{Q})$ の基底に延長できることが [2, Theorem 1.1 (2)] で証明されている. 特に, $S, T, U \notin 7E(\mathbb{Q})$ がわかる.

系 2.4 の仮定が満たされることをまず確認する. $j(E) = 2^8 \cdot 3^3 \cdot 7^{12}/1069 \cdot 51791533$ より, 定理 2.3 の仮定 (j-inv) は満たされている. [4, Theorem 1.1] より, (Inj) も満たされていることがわかる. SageMath を用いた計算によって, $E[7]$ が既約 $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(E[p])/\mathbb{Q})$-加群であることも確かめられる.

注意 2.11 の点 $S, T, U \in E(\mathbb{Q})$ について,

$$3S = \left(\frac{-2^3 \cdot 79 \cdot 199 \cdot 367 \cdot 2399}{\mathbf{7}^{16}}, \frac{37 \cdot 4691 \cdot 19523423 \cdot 169609859}{\mathbf{7}^{24}} \right),$$

$$3T = \left(\frac{5^2 \cdot 13 \cdot 53 \cdot 181 \cdot 1777 \cdot 73483}{2^2 \cdot \mathbf{7}^4 \cdot 67^2 \cdot 439}, \frac{29 \cdot 31 \cdot 6151 \cdot 12992635846499}{2^3 \cdot \mathbf{7}^6 \cdot 67^3 \cdot 439^3} \right),$$

$$2U = \left(\frac{3^2 \cdot 139 \cdot 1153}{\mathbf{7}^4}, \frac{5 \cdot 345311039}{\mathbf{7}^6} \right)$$

が計算でき, 3 点 $3S, 3T, 2U$ は全て命題 2.7 の点 P の条件を満たしている (E の定義方程式が 7 で minimal であることもチェックできる). 故に, $3S, 3T, 2U \in E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},7}$ である. 注意 2.11 で述べたことから, $3S, 3T, 2U$ の $E(\mathbb{Q})_{\mathrm{ur},7}/7E(\mathbb{Q})$ における像はそれぞれ非自明で, かつそれらは $\mathbb{F}_7$ 上一次独立であることがわかる. よって $r_{\mathrm{ur},7}(E) \geqslant 3$ であることがわかり, 系 2.4 から包含 (2.3) が得られる.

References

[1] N. Dainobu, On ideal class groups of division fields of elliptic curves and everywhere unramifed rational points, in preparation.

[2] Y. Fujita and T. Nara, The Mordell-Weil bases for the elliptic curve of the form $y^2 = x^3 - m^2x + n^2$, Publ. Math. **92** (2018), 79-99.

[3] J. Herbrand, Sur les classes des corps circulaires, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **11** (1932), 417-441.

[4] T. Lawson, C. Wuthrich, Vanishing of some Galois cohomology groups for elliptic curves. In D. Loeffler, S. L. Zerbes (Eds.), Elliptic curves, modular forms and Iwasawa theory: in honour of John H. Coates' 70th birthday, Cambridge, UK, March 2015, Springer (2016).

[5] The LMFDB Collaboration, The L-functions and modular forms database, 2022. (https://www.lmfdb.org/)

[6] D. Prasad, A proposal for non-abelian Herbrand-Ribet, preprint

[7] D. Prasad, and S. Shekhar, Relating the Tate-Shafarevich group of an elliptic curve with the class group, Pacific Journal of Mathematics **312** (1) (2021), 203-218.

[8] K. Ribet, A modular construction of unramified p-extensions of $\mathbb{Q}(\mu_p)$, Invent. math. **34** (1976), 151-162.

[9] J. H. Silverman, The Arithmetic of Elliptic Curves, Graduate Texts inMathematics, **106**. Springer-Verlag, New York (1986).

混合交換子長と不変擬準同型

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
丸山修平 (Shuhei MARUYAMA)

概要

群 G の交換子群 $G' = [G, G]$ 上には交換子による語長 (交換子長) でノルム構造が入る．群 G とその正規部分群 N に対し, それらから定まる交換子群 $[G, N]$ にも混合交換子長という自然なノルムを定義することが出来る．本稿ではこのふたつのノルムの距離幾何的な「違い」について, とくに自由群や曲面群, 3 次元閉双曲多様体の基本群など幾何に由来する群の場合を中心に説明する．本稿は川崎盛通氏 (青山学院大学), 木村満晃氏 (京都大学), 松下尚弘氏 (琉球大学), 見村万佐人氏 (東北大学) との共同研究の内容を含む[*1].

1 序

本稿では G で群, N でその正規部分群を表し, 商群 G/N を Γ で表す.

S と T を G の部分集合とし, $s \in S$ と $t \in T$ に対し

$$[s, t] = sts^{-1}t^{-1} \in G$$

を (S, T)-単交換子という．(S, T)-単交換子全体を生成集合とする G の部分群を $[S, T]$ で表し, (S, T)-交換子部分群という．このとき, 上記生成集合による語長 (交換子長) $\mathrm{cl}_{S,T}$ により $[S, T]$ 上にノルムが入る．本稿の目的は, (G, N)-交換子部分群 $[G, N]$ 上に定まるふたつのノルム $\mathrm{cl}_G (= \mathrm{cl}_{G,G})$ と $\mathrm{cl}_{G,N}$ の違いを記述することである.

本稿の主定理は以下である:

定理 1.1 ([MMM22])**.** G を種数 2 以上の閉曲面の基本群とし, N をその交換子部分群とする．このとき, $\mathrm{cl}_G (= \mathrm{cl}_{G,G})$ と $\mathrm{cl}_{G,N}$ は双リプシッツ同値でない[*2].

G を 3 次元閉双曲写像トーラスの基本群, N をファイバーの基本群の交換子部分群とした場合にも同様の主張が成り立つ．これらは, 有限生成群 G とその正規部分群 N について $\mathrm{cl}_G (= \mathrm{cl}_{G,G})$ と $\mathrm{cl}_{G,N}$ の双リプシッツ非同値性が判明した初めての例である.

[*1] 本研究は JSPS 科研費 JP18J00765, JP21K13790, JP20H00114, JP21J11199, JP19K14536, JP17H04822, JP21K03241 の助成を受けたものです.

[*2] [MMM22] では交換子長を安定化した安定交換子長の双リプシッツ非同値性を述べているが, そこでの議論と同様に (むしろローテクで) 交換子長の非同値性も証明できる.

2 交換子長と擬準同型

まず古典的な交換子長について復習する．この章の内容に関する教科書として [Cal09] を挙げる．

群 G の交換子部分群 $[G,G]$ の元 z に対し, その**交換子長** $\mathrm{cl}_G(z)$ を

$$\mathrm{cl}_G(z) = \min\{n\colon z = [g_1,h_1]\cdots[g_n,h_n] \text{ for some } g_i,h_i \in G\}$$

で定める．ここで G の単位元 1_G に対しては $\mathrm{cl}_G(1_G)=0$ とおくと, 交換子長は $[G,G]$ 上の G 共役不変なノルムとなる．交換子長は, 単交換子全体からなる集合を生成集合と考えた場合の $[G,G]$ のケーリーグラフの自然な距離と思うこともできる．

交換子長のトポロジカルな見方として, 曲面の最小種数としての見方がある．X を位相空間として G を X の基本群 $\pi_1(X)$ とする．交換子部分群 $[\pi_1(X),\pi_1(X)]$ の元を任意に取ると, それを代表するループ γ に対し, ある (境界付き) 曲面 S と連続写像 $f\colon S\to X$ で $f|_{\partial S}=\gamma$ を満たすものが存在する．この写像 f を用いて, S の種数と同じ個数の単交換子の積で $[\gamma]$ を書き表すことが出来る．したがって, $[\gamma]\in[\pi_1(X),\pi_1(X)]$ の交換子長とは, そのループを張る曲面の最小種数に一致する．一般の群 G の交換子長に対しても, G の Eilenberg-MacLane 空間 $K(G,1)$ を通して上記の最小種数としての見方をすることが出来る．

交換子長の計算は一般には難しい．例えば, (非可換) 自由群の交換子長の決定問題は NP 完全なことが示されている ([Heu20], このプレプリントのタイトルは「Computing commutator length is hard」である)．交換子長の計算の難しさを表す一例として, 階数 2 の自由群 $F_2=\langle a,b\mid -\rangle$ を考える．単交換子 $[a,b]$ の 3 乗

$$[a,b]^3 = [a,b]\cdot[a,b]\cdot[a,b]$$

は, 定義から単交換子 3 つの積で書き表されている．自由群には relation が無いため, これが $[a,b]^3$ を表す単交換子数の最小値を与えているように思えるのだが, 実は次が成り立つ:

$$[a,b]^3 = [aba^{-1}, b^{-1}aba^{-2}][b^{-1}ab, b^2].$$

つまり $[a,b]^3$ の交換子長は 3 ではなく, 2 以下である．自由群のような relation が全くない群でもこのようなことが起こるため, 非自明な relation のある群に対しては更に縮約が起こり得て, 交換子長の計算は難しくなる．

さて, 上記自由群 F_2 の元 $[a,b]^3$ について, その交換子長が 2 以下となることが分かった．事実としてはこの元の交換子長は 2 に一致するのだが, この事実はどのように証明するのだろうか．以下ではその方法のひとつを説明する．

上記のことを示すためには, $[a,b]^3$ の交換子長が 2 以上となることを示せばよい．そのために, 与えられた元に対し, その交換子長の下からの評価を与える方法を考える．交換子長は群論的な対象なので, 例えば群 G 上の実数値準同型 $\phi\colon G\to\mathbb{R}$ を使おうとするのは自然だが, これはうまく行かない．実際, G 上の準同型 ϕ に交換子群の元 $z=[g_1,h_1]\cdots[g_n,h_n]$ を代入すると

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \phi([g_1,h_1]\cdots[g_n,h_n]) = \phi([g_1,h_1])+\cdots+\phi([g_n,h_n])\\ &= \phi(g_1)+\phi(h_1)+\phi(g_1^{-1})+\phi(h_1^{-1})+\cdots = 0\end{aligned}$$

となるため, G 上の実数値準同型の値を用いて交換子長の情報を取り出すことは出来ない.

少し唐突ではあるが, 準同型の定義の条件を以下のように緩めた写像 (斉次擬準同型) を導入する.

定義 2.1. G を群とする. 写像 $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ が**擬準同型**であるとは,

$$D(\mu) = \sup_{g,h} |\mu(gh) - \mu(g) - \mu(h)| < \infty$$

が成り立つときをいう. $D(\mu)$ を μ の **defect** という. また, 擬準同型 $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ が任意の $g \in G$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\mu(g^n) = n \cdot \mu(g)$$

を満たすとき, μ を**斉次擬準同型**という. G 上の斉次擬準同型全体のなす実ベクトル空間を $\mathrm{Q}(G)$ で表す.

定義から, 実数値準同型は斉次擬準同型である. したがって, 群 G 上の実数値準同型全体のなすベクトル空間を $\mathrm{H}^1(G)$ で表すと, $\mathrm{H}^1(G) \subset \mathrm{Q}(G)$ が成り立つ.

上記の議論から実数値準同型では交換子長の情報を取り出すことは出来ないが, 一方で斉次擬準同型を用いると交換子長の情報を取り出すことが出来る. 具体的には, 準同型でない斉次擬準同型 $\mu \in \mathrm{Q}(G) \setminus \mathrm{H}^1(G)$ と交換子群の元 z に対し

$$\mathrm{cl}_G(z) \geq \frac{|\mu(z)|}{2D(\mu)} + \frac{1}{2} \tag{1}$$

が成り立つ. この不等式は本稿において非常に重要であり, また斉次擬準同型における典型的な議論を多く含むため, 証明を与えておく.

命題 2.2. (i). 斉次擬準同型は共役不変である.

(ii). 任意の斉次擬準同型 $\mu \in \mathrm{Q}(G)$ と任意の $g, h \in G$ に対し, $|\mu([g,h])| \leq D(\mu)$ が成り立つ.

(iii). 不等式 (1) が成り立つ.

Proof. (i). 斉次擬準同型をひとつ取り, $\mu\colon G \to \mathbb{R}$ とおく. 群 G の元 g, h と整数 n に対し

$$\begin{aligned} n \cdot \mu(g^{-1}hg) &= \mu(g^{-1}h^n g) \underset{D(\mu)}{\sim} \mu(g^{-1}) + \mu(h^n g) \underset{D(\mu)}{\sim} \mu(g^{-1}) + \mu(h^n) + \mu(g) \\ &= -\mu(g) + n \cdot \mu(h) + \mu(g) = n \cdot \mu(h) \end{aligned}$$

となる. ここで実数 a, b, D に対し $a \underset{D}{\sim} b$ で $|a - b| \leq D$ を表す. したがって

$$n \cdot |\mu(g^{-1}hg) - \mu(h)| \leq 2D(\mu)$$

を得る. 整数 n は任意なので, $\mu(g^{-1}hg) = \mu(h)$ となる.

(ii). 共役不変性より

$$\mu([g,h]) = \mu(ghg^{-1}h^{-1}) \underset{D(\mu)}{\sim} \mu(ghg^{-1}) + \mu(h^{-1}) = \mu(h) - \mu(h) = 0$$

となり, $|\mu([g,h])| \leq D(\mu)$ を得る.

(iii). 交換子群の元 z が $z=[g_1,h_1]\cdots[g_n,h_n]$ と表されたとすると, (ii) より

$$\mu(z)=\mu([g_1,h_1]\cdots[g_n,h_n]) \underset{(n-1)D(\mu)}{\sim} \sum_{i=1}^{n}\mu([g_i,h_i]) \underset{nD(\mu)}{\sim} 0$$

となり, $|\mu(z)|\leq(2n-1)D(\mu)$ を得る. ここで $\mathrm{cl}_G(z)\leq n$ を合わせると不等式 (1) を得る. □

不等式 (1) は準同型でない任意の斉次擬準同型に対して成り立つため, 次が成り立つ:

$$\mathrm{cl}_G(z)\geq \sup_{\mu\in \mathrm{Q}(G)\setminus \mathrm{H}^1(G)}\frac{|\mu(z)|}{2D(\mu)}+\frac{1}{2}. \tag{2}$$

したがって, 準同型でない斉次擬準同型を用いることで交換子長を下から評価することが出来る. 自由群 F_2 の元 $[a,b]^3$ の交換子長が 2 以上であることを示すには, 自由群上の斉次擬準同型で $[a,b]^3$ での値がそれなりに大きいものを構成すればよく, 例えば Brooks による counting 擬準同型 [Bro81] を用いると証明できる.

自由群とは異なる例で, 斉次擬準同型の例と不等式 (2) の適用例を紹介する.

例 2.3. 円周の向きを保つ同相群を $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ で表す. $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ の普遍被覆群 $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ の記述のひとつに以下がある:

$$\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)=\{f\in \mathrm{Homeo}(\mathbb{R})\colon f\circ T=T\circ f\}.$$

ここで $T\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は $+1$ 平行移動である. $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ 上の実数値関数 $\tau\colon \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)\to\mathbb{R}$ を

$$\tau(f)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^n(0)}{n}$$

で定める. この極限は常に存在し, τ は $D(\tau)=1$ の斉次擬準同型となる. これを Poincaré translation number という ([Poi81]).

定義から $\tau(T^k)=k$ が成り立つため, 不等式 (2) より

$$\mathrm{cl}_{\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)}(T^k)\geq\frac{\tau(T^k)}{2D(\tau)}+\frac{1}{2}=\frac{k+1}{2}$$

が成り立つ. つまり $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ は交換子長に関して非有界な空間となる. これは $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ とは対照的な現象である. 実際, 任意の $f\in\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ は交換子一つで書けることが知られており [EHN81], $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ は交換子長に関して (半径が 1 の) 有界な空間となる.

3 混合交換子長と不変擬準同型

古典的な交換子長の類似として, $z\in[G,N]$ の**混合交換子長** $\mathrm{cl}_{G,N}(z)$ を

$$\mathrm{cl}_{G,N}(z)=\min\{n\colon z=[g_1,x_1]\cdots[g_n,x_n] \text{ for some } g_i\in G, x_i\in N\}$$

で定める.

$[G,N]$ は $[G,G]$ の部分群なので, $[G,N]$ 上で古典的な交換子長 cl_G を考えることも出来る. したがって, $[G,N]$ 上にふたつのノルム

$$\mathrm{cl}_{G,N}\colon [G,N] \to \mathbb{N}, \quad \mathrm{cl}_G\colon [G,N] \to \mathbb{N}$$

が得られる. 定義から, 任意の $z \in [G,N]$ に対し

$$\mathrm{cl}_G(z) \leq \mathrm{cl}_{G,N}(z)$$

が成り立つ.

定義からこの不等号は真に異なる場合が多いと期待される. このことを証明するためには, 混合交換子長を下から評価する方法が必要である. その際にうまく機能する概念が斉次擬準同型の不変性である.

定義 3.1. 斉次擬準同型 $\mu \in \mathrm{Q}(N)$ が G **不変**であるとは, 任意の $g \in G$ と $x \in N$ に対して

$$\mu(g^{-1}xg) = \mu(x)$$

が成り立つときをいう. N 上の G 不変斉次擬準同型全体の空間を $\mathrm{Q}(N)^G$ で表す.

命題 2.2 の (iii) と同様の計算により, 任意の $\mu \in \mathrm{Q}(N)^G$ と任意の $z = [g_1, x_1] \cdots [g_n, x_n] \in [G,N]$ に対し

$$|\mu(z)| \leq (2n-1)D(\mu)$$

の成立が分かり,

$$\mathrm{cl}_{G,N}(z) \geq \frac{|\mu(z)|}{2D(\mu)} + \frac{1}{2} \tag{3}$$

を得る.

交換子長と混合交換子長の違いを検知するには何を見ればよいかを考える. 例えば $z \in [G,N]$ が $g, h, g_i \in G$ と $x_i \in N$ を用いて $z = [g,h] = [g_1, x_1] \cdots [g_n, x_n]$ と表されていたとすると, 任意の $\mu \in \mathrm{Q}(G)$ に対し

$$\mu(z) \leq D(\mu)$$

が成り立つ. 一方で, 任意の $\mu \in \mathrm{Q}(N)^G$ に対しては

$$\mu(z) \leq (2n-1)D(\mu)$$

が成り立ち, 一般に $\mu(z) \leq D(\mu)$ が成り立つとは限らない. この違いが交換子長と混合交換子長の違いを検知していると見ることが出来る. 実際, $\mathrm{cl}_G(z) = 1$ なる $z \in [G,N]$ に対し, $|\mu(z)| > D(\mu)$ なる $\mu \in \mathrm{Q}(N)^G$ が見つかれば, $\mathrm{cl}_{G,N}(z) > 1$ が分かる. またこのとき, 上記の不等号のずれから, $\mu \in \mathrm{Q}(N)^G$ は G 上の斉次擬準同型に拡張不可能である[*3]. 以上のことをまとめると, 交換子長と混合交換子長の違いを具体的に観測するためには,

[*3] ここの記述は正確ではない. ただし商群 G/N が可解群のときにはこの記述は正当化でき, 以下で出てくる例では全てこの仮定を満たしている.

(1) (G,G)-交換子長が小さいことは分かるが, (G,N)-交換子長が小さいかどうかは不明な元 $z \in [G,N]$ と,
(2) G 上の斉次擬準同型に拡張不可能な, N 上の G 不変斉次擬準同型 $\mu \in \mathrm{Q}(N)^G$

を構成し, $\mu(z)$ がある程度大きくなることを計算できればよい. 次の章で, この方針が実行出来る例をひとつ紹介する.

4 円周作用を用いた不変擬準同型の構成と orbifold 基本群の交換子

まず [MMM22] で与えた不変擬準同型の構成のアイデアを説明する[*4].

G を円周に作用する群とし, 作用を $\rho\colon G \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ で表す. また, 正規部分群 N で, G の円周への作用の N への制限が $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ にリフトするものを考える. つまり, 次の図式が可換になる状況を考える:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\widetilde{\rho}"] \arrow[d, "i"] & \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) \arrow[d] \\ G \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Homeo}_+(S^1). \end{tikzcd}$$

群コホモロジーの一般論 (例えば [Bro82] 参照) から, 中心拡大 $0 \to \mathbb{Z} \to \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1) \to \mathrm{Homeo}_+(S^1) \to 1$ に対応する群コホモロジー類 $e \in \mathrm{H}^1(\mathrm{Homeo}_+(S^1);\mathbb{Z})$ を ρ で引き戻したコホモロジー類 $\rho^*e \in \mathrm{H}^1(G;\mathbb{Z})$ が非零だとすると, 準同型 $\rho\colon G \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ は準同型 $G \to \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ にリフト出来ない. したがって, $\widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ 上の Poincaré translation number(斉次擬準同型) は N には引き戻せるが, G には直ちには引き戻すことが出来ないという状況になる. これで N 上の斉次擬準同型であって G に拡張不可能なものを構成出来ているように思えるが, G 不変性が一般には成立しない. ここでさらにコホモロジー類 ρ^*e の $\mathbb{R}$ 係数化が商群からの引き戻し $\mathrm{H}^2(G/N;\mathbb{R}) \to \mathrm{H}^2(G;\mathbb{R})$ に属すると仮定すると,

$$\rho^*\tau + h\colon N \to \mathbb{R}$$

が G 不変斉次擬準同型となるような準同型 $h\colon N \to \mathbb{R}$ の存在を証明できる. この G 不変斉次擬準同型を μ_ρ とおくと, $D(\tau) = 1$ より $D(\mu_\rho) \leq 1$ が分かり, さらに次が成り立つ.

命題 4.1. コホモロジー類 ρ^*e が非自明のとき, μ_ρ は G に斉次擬準同型として拡張不可能である. また, $g_i \in G$ と $x_i \in N$ に対し,

$$\mu_\rho([g_1,x_1]\cdots[g_n,x_n]) = \tau\left([\widetilde{\rho(g_1)},\widetilde{\rho(x_1)}]\cdots[\widetilde{\rho(g_n)},\widetilde{\rho(x_n)}]\right)$$

が成り立つ. ここで $\widetilde{\rho(g_i)},\widetilde{\rho(x_i)} \in \widetilde{\mathrm{Homeo}}_+(S^1)$ はそれぞれ $\rho(g_i),\rho(x_i) \in \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ のリフトである.

これにより, 円周に作用する群 G については, 拡張不可能な G 不変擬準同型の構成法およびその計算公式が得られた.

[*4] orbifold 基本群の例に適用する際には, ここでの議論を "$\mathbb{R}$ 係数化" する必要がある. 詳しくは [MMM22] を参照.

次に (G,G)-交換子長が小さく, (G,N)-交換子長が小さいか不明な元を構成する. 群 G として以下の表示を持つ群を考える:

$$G = \langle a, b \mid [a,b]^{\ell} = 1_G \rangle$$

ここで ℓ は 2 以上の整数とする. この群 G は torsion 元を持つ one-relator 群なので双曲群である. 幾何的には, この群 G は種数 ℓ の閉曲面の自然な $2\pi/\ell$ 回転による商として現れる orbifold の orbifold 基本群である.

G の元 g_i と, 交換子部分群 $N = [G,G]$ の元 w_i を次で定める:

$$g_i = \begin{cases} bab^{-1} & i = 1 \\ {}^{ba^{2-i}b^{-1}}a^{i-1} & i > 1 \end{cases}, \quad w_i = \begin{cases} [b,a] & i = 1 \\ {}^{ba^{2-i}b^{-1}}[b,a^{-1}] & i > 1. \end{cases}$$

ここで, $x, y \in G$ に対し ${}^{x}y$ という記号で y の x による共役, つまり ${}^{x}y = xyx^{-1}$ を表す. このとき, 直接計算で次が分かる:

$$[g_1, w_1] \cdots [g_{\ell-1}, w_{\ell-1}] = ba^2b^{-1}a^{-2}[a,b]^{\ell}a^{2-\ell}ba^{\ell-2}b^{-1}.$$

ここで $y = {}^{ba^2}b^{-1}$, $z = {}^{ba^2}a^{-\ell}$ とおくと, $[a,b]^{\ell}$ が群 G で自明なことを合わせて次を得る:

$$[g_1, w_1] \cdots [g_{\ell-1}, w_{\ell-1}] = [y,z] \in [G,N]. \tag{4}$$

つまり, $[y,z] \in [G,N]$ は (G,G)-単交換子で書き表せるが, (G,N)-交換子の積として書き表す際は $(\ell-1)$ 個の (G,N)-交換子が (見かけ上は) 必要である. また, 準同型 $G \to \mathrm{Homeo}_+(S^1)$ をうまく作り, さらに ($\mathbb{R}$ 係数化して構成した) μ_ρ に $[y,z]$ を代入して値を計算すると, (3) と合わせて $\mathrm{cl}_{G,N}([y,z])$ が実際に 1 より大きいことが $\ell \geq 4$ で確認できる. つまり (4) の元は交換子長と混合交換子長が真に異なる元となっている.

5 交換子長と混合交換子長の双リプシッツ非同値性

4 章で交換子長と混合交換子長が真に異なる例をひとつ与えた. この章では, (4) の元 $[y,z]$ を用いて, 交換子長と混合交換子長の双リプシッツ非同値性まで示せることを説明する.

鍵となる式は以下である.

補題 5.1. G を群とし, $g, h \in G$ とする. このとき, 任意の整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対し次が成り立つ:

$$[g, h^n] = [g,h] \cdot {}^{h}[g,h] \cdot \cdots \cdot {}^{h^{n-2}}[g,h] \cdot {}^{h^{n-1}}[g,h].$$

この補題は直接計算で確認出来る.

補題 5.1 により, 4 章で構成した元 $[y,z]$ と不変擬準同型 μ_ρ に対し,

$$\begin{aligned} \mu_\rho([y,z^n]) &= \mu_\rho([y,z] \cdot {}^{z}[y,z] \cdot \cdots \cdot {}^{z^{n-2}}[y,z] \cdot {}^{z^{n-1}}[y,z]) \\ &\underset{(n-1)D(\mu_\rho)}{\sim} \mu_\rho([y,z]) + \mu_\rho({}^{z}[y,z]) + \cdots + \mu_\rho({}^{z^{n-2}}[y,z]) + \mu_\rho({}^{z^{n-1}}[y,z]) \\ &= n \cdot \mu_\rho([y,z]) \end{aligned}$$

が成り立つ．このことから $|\mu_\rho([y,z])| > D(\mu_\rho)$ であれば, $n \to \infty$ で $|\mu_\rho([y,z^n])| \to \infty$ となる．したがって $[y,z^n]$ の交換子長は常に 1 なのにも関わらず, $[y,z^n]$ の混合交換子長は無限大に発散する．つまり交換子長と混合交換子長は双リプシッツ同値でない．

4 章で扱った群 G には種数 ℓ の閉曲面の基本群 $\pi_1(\Sigma_\ell)$ からの自然な全射がある．この全射に関して上記の元 $[y,z^n]$ を適切に $\pi_1(\Sigma_\ell)$ に持ち上げ, また不変擬準同型 μ_ρ も引き戻すと, 曲面群とその交換子部分群に関しても交換子長と混合交換子長の双リプシッツ非同値性, つまり定理 1.1 が証明できる．

6 拡張不可能な不変擬準同型の空間

交換子長と混合交換子長の違いを検知するには拡張不可能な不変擬準同型が必要だった．準同型では交換子長の評価が出来ないことを踏まえると, cl_G と $\mathrm{cl}_{G,N}$ の違いの検知には以下の空間の非自明元が重要である:

$$\mathrm{Q}(N)^G/(\mathrm{H}^1(N)^G + i^*\mathrm{Q}(G)). \tag{5}$$

ここで i^* は包含写像 $i\colon N \to G$ による引き戻し, $\mathrm{H}^1(N)^G$ は N 上の G 不変準同型の空間である．空間 (5) が非自明であれば, その非自明元を用いて交換子長の比較が出来るかもしれない．

[KKM+21] において, 空間 (5) の次元決定を行った．まず空間 (5) が非自明となる例を挙げる．

定理 6.1 ([KKM+21])**.** (*i*). G が種数 2 以上の閉曲面の基本群で N が交換子部分群のとき, (5) の次元は 1 である．

(*ii*). G が 3 次元閉双曲写像トーラス X の基本群で N がファイバーの基本群の交換子部分群のとき, (5) の次元は $\mathrm{H}^2(X;\mathbb{R})$ の次元に一致する．

(*iii*). G が 4 章で用いた orbifold 基本群で N が交換子部分群のとき, (5) の次元は 1 である．

次に空間 (5) が自明となる例を挙げる．

定理 6.2 ([KKM+21])**.** 以下の G, N について, 空間 (5) は自明である．

(*i*). G が自由群, 向き付け不可能曲面の基本群, 結び目群, ブレイド群, 連結成分がふたつの双曲絡み目の基本群のいずれかで, N が交換子部分群のとき．

(*ii*). G が自由群の自己同型群 $\mathrm{Aut}(F_n)$ $(n \geq 2)$ で, N が IA-自己同型群 IA_n のとき．

定理 6.1 で挙げた全ての例で, 交換子長と混合交換子長の双リプシッツ非同値が示されている ([MMM22])．定理 6.2 の例においては双リプシッツ非同値を観測する不変擬準同型の候補が無い．交換子長 (resp. 混合交換子長) を安定化した安定交換子長 (resp. 安定混合交換子長) という概念があり, 空間 (5) が消滅するとき, 安定交換子長と安定混合交換子長の双リプシッツ同値性は成立する ([KKM+21])．つまり安定化した設定においては, 安定交換子長と安定混合交換子長の (双リプシッツの意味での) 違いを観測する不変擬準同型の候補が無い場合, そこには本当に違いが無いのである．

参考文献

[Bro81] Robert Brooks, *Some remarks on bounded cohomology*, Riemann surfaces and related topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978), Ann. of Math. Stud., vol. 97, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981, pp. 53–63.

[Bro82] Kenneth S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[Cal09] Danny Calegari, *scl*, MSJ Memoirs, vol. 20, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.

[EHN81] David Eisenbud, Ulrich Hirsch, and Walter Neumann, *Transverse foliations of Seifert bundles and self-homeomorphism of the circle*, Comment. Math. Helv. **56** (1981), no. 4, 638–660.

[Heu20] Nicolaus Heuer, *Computing commutator length is hard*, arXiv:2001.10230 (2020).

[KKM$^+$21] Morimichi Kawasaki, Mitsuaki Kimura, Shuhei Maruyama, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *The space of non-extendable quasimorphisms*, arXiv:2107.08571 (2021).

[MMM22] Shuhei Maruyama, Takahiro Matsushita, and Masato Mimura, *SCL and mixed SCL are not equivalent for surface groups*, arXiv:2203.09221 (2022).

[Poi81] Henri Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (i)*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **7 et 8** (1881), 375–422 et 251–296 (fre).

パラレルセッション
会場Ａ

ある多変数 q 超幾何級数に付随する接続問題

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
信川喬彦 (Takahiko NOBUKAWA)*

概要

一般 q 超幾何函数 ${}_{N+1}\varphi_N$ と q-Lauricella 超幾何函数 φ_D を同時拡張した多変数 q 超幾何函数が満たす q 差分方程式系の, 適当な領域における基本解を構成し, それらの間の接続行列を求める. この接続行列は, 1 変数の q 超幾何函数の接続公式を繰り返し用いるという手法により得られる.

1 導入：接続問題とは？

Gauss の超幾何函数とは, 次の級数で定義される函数である：

$$ {}_2F_1\left(\begin{array}{c}\alpha,\beta\\ \gamma\end{array};t\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n(1)_n}t^n \quad (|t|<1). $$

ここで, $(\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ である. この函数は "特殊函数の親玉" であり, 数学, 物理学, 工学などさまざまな場面に登場する, とても重要な函数である. Gauss の超幾何函数は, 次の微分方程式 (Gauss の超幾何方程式) を満たす：

$$ t(1-t)\frac{d^2y}{dt^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)t)\frac{dy}{dt}-\alpha\beta y=0. \tag{1.1} $$

Gauss の超幾何方程式は Riemann 球面上の 3 点 $\{0,1,\infty\}$ に特異点をもつ方程式である. 方程式 (1.1) は 2 階の方程式なので, 解の全体は $\mathbb{C}$ 上 2 次元のベクトル空間をなす. その基底 $y_1(t)$, $y_2(t)$ に対し $\boldsymbol{y}(t)={}^{\mathrm{T}}(y_1(t),y_2(t))$ を基本解という. ここで, ${}^{\mathrm{T}}A$ は A の転置を意味する. 方程式 (1.1) の場合, 特異点 $t=0$, 1, ∞ の近傍でそれぞれ次のような基本解が構成できる：

$$ \begin{aligned}
\boldsymbol{y}_0(t)&={}^{\mathrm{T}}\left({}_2F_1\left(\begin{array}{c}\alpha,\beta\\ \gamma\end{array};t\right),t^{1-\gamma}{}_2F_1\left(\begin{array}{c}\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1\\ 2-\gamma\end{array};t\right)\right),\\
\boldsymbol{y}_1(t)&={}^{\mathrm{T}}\left({}_2F_1\left(\begin{array}{c}\alpha,\beta\\ \alpha+\beta-\gamma+1\end{array};1-t\right),(1-t)^{\gamma-\alpha-\beta}{}_2F_1\left(\begin{array}{c}\gamma-\alpha,\gamma-\beta\\ \gamma-\alpha-\beta+1\end{array};1-t\right)\right),\\
\boldsymbol{y}_\infty(t)&={}^{\mathrm{T}}\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha}{}_2F_1\left(\begin{array}{c}\alpha,\alpha-\gamma+1\\ \alpha-\beta+1\end{array};\frac{1}{t}\right),\left(\frac{1}{t}\right)^{\beta}{}_2F_1\left(\begin{array}{c}\beta-\gamma+1,\beta\\ \beta-\alpha+1\end{array};\frac{1}{t}\right)\right).
\end{aligned} $$

$t=0$ の近傍での基本解 $\boldsymbol{y}_0$ を, 適当な path に沿って $t=1$ や $t=\infty$ の近傍へ解析接続する (ここでは, $t=\infty$ の近傍への場合を考える). このとき, $t=\infty$ の近傍では $\tilde{\boldsymbol{y}}_0$($\boldsymbol{y}_0$ を $t=\infty$ に解析接続した

* e-mail: tnobukw@math.kobe-u.ac.jp

もの) と $\boldsymbol{y}_\infty$ という 2 つの基本解が取れる．よって, 適当な $\mathbb{C}$ 値の行列 A を用いて $\tilde{\boldsymbol{y}}_0 = A\boldsymbol{y}_\infty$ となる．この行列 A を接続行列といい, 接続行列を求める問題を接続問題という．今の場合, 接続行列は Γ 函数を用いて

$$A = \begin{pmatrix} e^{-i\pi\alpha}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} & e^{-i\pi\beta}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \\ e^{i\pi(\gamma-\alpha-1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta-\gamma+1)} & e^{i\pi(\gamma-\beta+1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha-\gamma+1)} \end{pmatrix}$$

とかける．超幾何函数については, 青本-喜多 [7], 原岡 [8], 吉田 [9] など日本語の本も数多くあるので, より詳しく知りたい方はこれらの本を参照されたい．

上記のことの q 差分類似を考える．$q \in \mathbb{C}$ を $0 < |q| < 1$ ととり固定する．Heine の q 超幾何函数は Gauss の超幾何函数の q 類似として導入された次の級数である：

$${}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n (b;q)_n}{(c;q)_n (q;q)_n} t^n \quad (|t| < 1).$$

ここで, $(a;q)_n = \dfrac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}$, $(a;q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i)$ である．$a = q^\alpha$, $b = q^\beta$, $c = q^\gamma$ と置き $q \to 1$ とすれば, ${}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; t\right) \to {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix}; t\right)$ となる．Heine の q 超幾何函数は次の q 差分方程式 (Heine の q 超幾何方程式) を満たす：

$$\left[(1-T_t)(1-cq^{-1}T_t) - t(1-aT_t)(1-bT_t)\right] y = 0. \tag{1.2}$$

ここで T_t は t についての q シフト作用素である：$T_t y(t) = y(qt)$．Gauss の超幾何方程式 (1.1) の解の全体が $\mathbb{C}$ 上 2 次元のベクトル空間をなすように, Heine の q 超幾何方程式 (1.2) の解の全体も $K = \{C(t) \mid T_t C(t) = C(t)\}$ 上 2 次元のベクトル空間をなす．K の元を擬定数といい, K を擬定数体という．q 差分方程式の場合, $t = 0$ や $t = \infty$ は q シフト作用素 T_t の固定点になるため解の分岐点になり得るが, そのほかの点は分岐点になり得ない．このため, $t = 0$ と $t = \infty$ のみが方程式の特異点となる．Gauss の場合と同様に, Heine の q 超幾何方程式には $t = 0, \infty$ の近傍で収束する基本解が ${}_2\varphi_1$ を用いて構成できる：

$$\boldsymbol{u}_0(t) = {}^{\mathrm{T}}\left({}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; t\right), t^{1-\gamma}{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} aq/c, bq/c \\ q^2/c \end{matrix}; t\right)\right),$$
$$\boldsymbol{u}_\infty(t) = {}^{\mathrm{T}}\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{\alpha}{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, aq/c \\ aq/b \end{matrix}; \frac{cq}{abt}\right), \left(\frac{1}{t}\right)^{\beta}{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} bq/c, b \\ bq/a \end{matrix}; \frac{cq}{abt}\right)\right).$$

ここで, $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$, $c = q^\gamma$ とした．q 差分方程式の場合でも, $t = 0$ の近傍における基本解と $t = \infty$ の近傍における基本解の間の接続行列を考えることができる．今の場合,

$$\boldsymbol{u}_0 = B\boldsymbol{u}_\infty,$$
$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{(b, c/a; q)_\infty}{(c, b/a; q)_\infty} t^\alpha \dfrac{\theta(at)}{\theta(t)} & \dfrac{(a, c/b; q)_\infty}{(c, a/b; q)_\infty} t^\beta \dfrac{\theta(bt)}{\theta(t)} \\ \dfrac{(qb/c, q/a; q)_\infty}{(q^2/c, b/a; q)_\infty} t^{\alpha-\gamma+1} \dfrac{\theta(aqt/c)}{\theta(t)} & \dfrac{(qa/c, q/b; q)_\infty}{(q^2/c, a/b; q)_\infty} t^{\beta-\gamma+1} \dfrac{\theta(bqt/c)}{\theta(t)} \end{pmatrix},$$

である．ここで, $(a,b;q)_\infty$ は $(a;q)_\infty(b;q)_\infty$ の略記であり, $\theta(t)=(t,q/t;q)_\infty$ である．$\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{u}_\infty$ は擬定数体 K 上の基本解なので, 接続行列 B も擬定数値行列になることに注意しておく．

超幾何函数や q 超幾何函数の理論において, 接続問題を解くことは基本的かつ重要な問題である．本稿では, 次の多変数 q 超幾何函数が満たす q 差分方程式の接続問題を考える：

$$\mathcal{F}_{N,M}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right)=\sum_{m_1,\dots,m_M\ge 0}\prod_{j=1}^{N}\frac{(a_j)_{|m|}}{(c_j)_{|m|}}\prod_{i=1}^{M}\frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}}\prod_{i=1}^{M}t_i^{m_i}.$$

ここで, $|m|=m_1+\cdots+m_M$ であり, また $(a;q)_m$ を $(a)_m$ と略記した (以降も略記する)．この q 超幾何函数はモノドロミー保存変形の理論に関連する函数で Park [4] により導入された．$M=1$ の場合は一般 q 超幾何函数 ${}_{N+1}\varphi_N$, $N=1$ の場合は q-Lauricella 超幾何函数 φ_D となる．q 超幾何函数 $\mathcal{F}_{N,M}$ は次の q 差分方程式系 $E_{N,M}$ を満たす：

$$\left\{t_s\prod_{j=1}^{N}(1-a_jT)\cdot(1-b_sT_s)-\prod_{j=1}^{N}(1-c_jq^{-1}T)\cdot(1-T_s)\right\}\mathcal{F}=0\quad(1\le s\le M),$$
$$\{t_r(1-b_rT_r)(1-T_s)-t_s(1-b_sT_s)(1-T_r)\}\mathcal{F}=0\quad(1\le r<s\le M),$$

ここで, T_s は T_{t_s} の略記であり, $T=T_1T_2\cdots T_M$ である．この方程式系の rank は $MN+1$ であることが知られている [5]．以下では, この方程式系 $E_{N,M}$ の接続問題の解を与える．すなわち, 適当な領域で収束する基本解を構成し, その基本解たちの間の接続行列を求める．以降の内容は [3] に基づく．

2 $E_{N,M}$ の基本解

この章では, $E_{N,M}$ の基本解を紹介し, その特徴づけを与える．

Definition 2.1. $0\le L\le M$, $1\le k\le N$, $L+1\le l\le M$, $1\le l'\le L$ に対し, 函数 $\mathcal{F}^{L}_{N,M}$, $\mathcal{F}^{L;k,l}_{N,M}$, $\mathcal{G}^{L;k,l'}_{N,M}$ を次で定義する：

$$\mathcal{F}^{L}_{N,M}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right)$$
$$=\sum_{m_1,\dots,m_M\ge 0}\prod_{j=1}^{N}\frac{(a_j/b_{L+1}\cdots b_M)_{m(L)}}{(c_j/b_{L+1}\cdots b_M)_{m(L)}}\prod_{i=1}^{M}\frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}}\prod_{i=1}^{L}t_i^{m_i}\prod_{i=L+1}^{M}\left(\frac{q}{b_it_i}\right)^{m_i},\tag{2.1}$$

$$\mathcal{F}^{L;k,l}_{N,M}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le N}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right)=\sum_{m_1,\dots,m_M\ge 0}\left\{\prod_{j=1}^{N}\frac{(qa_k/c_j)_{m_{L+1}}}{(qa_k/a_j)_{m_{L+1}}}\right.$$
$$\times\prod_{i=1}^{L}\frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}}\prod_{i=L+1}^{l-1}\frac{(b_i)_{m_{i+1}}}{(q)_{m_{i+1}}}\prod_{i=l+1}^{M}\frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}}\frac{(a_k/b_{l+1}\cdots b_M)_{m(l)}}{(qa_k/b_l\cdots b_M)_{m(l)}}$$
$$\left.\times\prod_{i=1}^{L}\left(\frac{qt_i}{b_lt_l}\right)^{m_i}\prod_{i=L+1}^{l-1}\left(\frac{qt_i}{b_lt_l}\right)^{m_{i+1}}\prod_{i=l+1}^{M}\left(\frac{b_lt_l}{b_it_i}\right)^{m_i}\left(\prod_{j=1}^{N}\frac{c_j}{a_j}\cdot\frac{q}{b_lt_l}\right)^{m_{L+1}}\right\},\tag{2.2}$$

$$\mathcal{G}^{L;k,l'}_{N,M}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right)=\sum_{m_1,\dots,m_M\ge 0}\left\{\prod_{j=1}^{N}\frac{(qa_j/c_k)_{m_L}}{(qc_j/c_k)_{m_L}}\right.$$

$$\times \prod_{i=1}^{l'-1} \frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}} \prod_{i=l'+1}^{L} \frac{(b_i)_{m_{i-1}}}{(q)_{m_{i-1}}} \prod_{i=L+1}^{M} \frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}} \frac{(c_k/qb_{l'+1}\cdots b_M)_{m(l'-1)}}{(c_k/b_{l'}\cdots b_M)_{m(l'-1)}}$$

$$\times \prod_{i=1}^{l'-1} \left(\frac{qt_i}{b_{l'}t_{l'}}\right)^{m_i} \prod_{i=l'+1}^{L} \left(\frac{b_{l'}t_{l'}}{b_it_i}\right)^{m_{i-1}} \prod_{i=L+1}^{M} \left(\frac{b_{l'}t_{l'}}{b_it_i}\right)^{m_i} \cdot \left(\frac{b_{l'}t_{l'}}{q}\right)^{m_L} \Bigg\}. \tag{2.3}$$

ただし, $m(l) = m_1 + \cdots + m_l - (m_{l+1} + \cdots + m_M)$ である.

これらの級数はそれぞれ以下の領域で収束する：

$$\text{級数 (2.1)} : \left\{ |t_i| < 1,\ 1 \le i \le L,\ \left|\frac{c_1\cdots c_Nq}{a_1\cdots a_Nb_it_i}\right| < 1,\ L+1 \le i \le M \right\},$$

$$\text{級数 (2.2)} : \left\{ \left|\frac{c_1\cdots c_Nq}{a_1\cdots a_Nb_lt_l}\right| < 1,\ \left|\frac{qt_i}{b_lt_l}\right| < 1,\ 1 \le i \le l-1,\ \left|\frac{qt_l}{b_it_i}\right| < 1,\ l+1 \le i \le M \right\},$$

$$\text{級数 (2.3)} : \left\{ |t_l| < 1,\ \left|\frac{qt_i}{b_lt_l}\right| < 1,\ 1 \le i \le l-1,\ \left|\frac{qt_l}{b_it_i}\right| < 1,\ l+1 \le i \le M \right\}.$$

函数 $\mathcal{F}^L_{N,M}$, $\mathcal{F}^{L;k,l}_{N,M}$, $\mathcal{G}^{L;k,l'}_{N,M}$ を用いて, $E_{N,M}$ の基本解が構成できる.

Proposition 2.2 ([3]). $0 \le L \le M$, $\sigma \in \mathfrak{S}_M$ に対し,

$$u_0^{L,\sigma} = \prod_{i=L+1}^{M} t_{\sigma(i)}^{-\beta_{\sigma(i)}} \cdot \mathcal{F}^L_{N,M}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N}, \{b_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix}; \{t_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M}\right),$$

$$u_{k,l}^{L,\sigma} = \begin{cases} t_{\sigma(l)}^{1+\sum_{i=l+1}^{M}\beta_{\sigma(i)}-\gamma_k} \displaystyle\prod_{i=l+1}^{M} t_{\sigma(i)}^{-\beta_{\sigma(i)}} \cdot \mathcal{G}^{L;k,l}_{N,M}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N}, \{b_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix}; \{t_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M}\right), \\ \qquad\qquad 1 \le k \le N,\ 1 \le l \le L, \\ t_{\sigma(l)}^{-\alpha_k+\sum_{i=l+1}^{M}\beta_{\sigma(i)}} \displaystyle\prod_{i=l+1}^{M} t_{\sigma(i)}^{-\beta_{\sigma(i)}} \cdot \mathcal{F}^{L;k,l}_{N,M}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N}, \{b_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix}; \{t_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M}\right), \\ \qquad\qquad 1 \le k \le N,\ L+1 \le l \le M, \end{cases}$$

$$D^{L,\sigma} = \left\{ |t_{\sigma(i)}| < 1,\ 1 \le i \le L,\ \left|\prod_{j=1}^{N} \frac{c_j}{a_j} \cdot \frac{q}{b_{\sigma(i)}t_{\sigma(i)}}\right| < 1,\ L+1 \le i \le M, \right.$$
$$\left. \left|\frac{qt_{\sigma(i)}}{b_{\sigma(j)}t_{\sigma(j)}}\right| < 1,\ 1 \le i < j \le M \right\}$$

とおく. ただし, $a_j = q^{\alpha_j}$, $b_i = q^{\beta_i}$, $c_j = q^{\gamma_j}$ とする. このとき, パラメータが条件

$$a_j/a_k, c_j/c_k, a_j/b_{\sigma(i)}\cdots b_{\sigma(M)}, c_k/b_{\sigma(i)}\cdots b_{\sigma(M)} \notin q^{\mathbb{Z}}, \quad (1 \le i \le M+1, 1 \le j \ne k \le N),$$

を満たすならば,

$$\boldsymbol{u}^{L,\sigma} = {}^{\mathrm{T}}\big(u_0^{L,\sigma}, u_{1,1}^{L,\sigma}, \ldots, u_{1,M}^{L,\sigma}, u_{2,1}^{L,\sigma}, \ldots, u_{N,M}^{L,\sigma}\big),$$

は $D^{L,\sigma}$ 上で収束する $E_{N,M}$ の基本解となる.

この命題は, 以下の手順で証明できる.

step1 $u_0^{L,\sigma}$, $u_{k,l}^{L,\sigma}$ が $E_{N,M}$ を満たすことを示す.

$E_{N,M}$ の対称性により, $\sigma = \mathrm{id}$ のときに $E_{N,M}$ を満たすことを見ればよい. $u_0^{L,\mathrm{id}}$, $u_{k,l}^{L,\mathrm{id}}$ が $E_{N,M}$ を満たすことは直接計算でわかる.

step2 $u_0^{L,\sigma}$, $u_{k,l}^{L,\sigma}$ が擬定数体 $K = \{C(t) \mid T_i C(t) = C(t) \ \ (1 \le i \le M)\}$ 上一次独立であることを示す.

これは, 次の主張から従う：

Claim. $\delta_i = (\delta_{1,i}, \ldots, \delta_{M,i}) \in \mathbb{C}^M$ $(1 \le i \le n)$ とする. このとき任意の $i \neq j$ に対し $\delta_i \neq \delta_j$ であり,

$$f_i(t_1, \ldots, t_M) = t^{\delta_i}(1 + O(||t||))$$

ならば, $f_1, \ldots, f_n$ は擬定数体 K 上一次独立である. ここで, $t^{\delta_i} = t_1^{\delta_{1,i}} \cdots t_M^{\delta_{M,i}}$ である.

Claim の証明は Vandermonde 行列式に帰着させることで証明できる.

Remark 2.3. これらの基本解を発見した方法について少し述べておく. まず後述する手法 (${}_{N+1}\varphi_N$ の接続公式を繰り返し適用する手法) を用いて $\mathcal{F}_{N,M}$ の接続公式を計算する. この接続公式を整理すれば, 和 $\mathcal{F}_{N,M}^L$, $\mathcal{F}_{N,M}^{L;k,l}$ が現れる. これにより $\mathcal{F}_{N,M}^L$, $\mathcal{F}_{N,M}^{L;k,l}$ を用いた解を発見した. さらに $L = 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{N,M}^0\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N}, \{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix}; \{t_i\}_{1\le i\le M}\right)\\
&= \mathcal{F}_{N,M}\left(\begin{matrix}\{qb_1\cdots b_M/c_j\}_{1\le j\le N}, \{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{qb_1\cdots b_M/a_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix}; \left\{\frac{c_1\cdots c_N q}{a_1\cdots a_N b_i t_i}\right\}_{1\le i\le M}\right),
\end{aligned}$$

となるので, 上で求めた $\mathcal{F}_{N,M}$ の接続公式を $\mathcal{F}_{N,M}^0$ に適用することができる. $\mathcal{F}_{N,M}^0$ の接続公式を書き下してみることで, $\mathcal{G}_{N,M}^{L;k,l'}$ を用いた解が発見できた.

Remark 2.4. $N = 1$, $q \to 1$ のとき (すなわち, Lauricella 超幾何函数 F_D に付随する微分方程式のとき), 領域 $\{|t_1| \ll \cdots \ll |t_L| \ll 1 \ll |t_{L+1}| \ll \cdots \ll |t_M|\}$ における基本解が, 今日では GKZ 超幾何函数論と呼ばれる理論により

$$F_{D,j}\left(\begin{matrix}\tilde{\alpha}; \{\tilde{\beta}_i\}_{1\le i\le M}\\ \tilde{\gamma}\end{matrix}; \{x_i\}_{1\le i\le M}\right) = \sum_{m_1,\ldots,m_M \ge 0} \frac{(\tilde{\alpha})_{-m(j-1)}}{(\tilde{\gamma})_{-m(j-1)}} \prod_{i=1}^M \frac{(\tilde{\beta}_i)_{m_i}}{(1)_{m_i}} \prod_{i=1}^M x_i^{m_i},$$

という函数を用いて構成されている [2]. (ここでの $(\alpha)_n$ は $\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ の意味である.) $N = 1$ のとき, 解 $u_0^{L,\sigma}$, $u_{k,l}^{L,\sigma}$ は [2] による $F_{D,j}$ を用いた解の q 類似となっている.

また, 上記の基本解は漸近挙動で特徴づけることができる.

Proposition 2.5 ([3])**.** $f(t)$ を $E_{N,M}$ の, $D^{L,\mathrm{id}}$ 上で収束する解とする. $x_i = t_i/t_{i+1}$, $1 \le i < L$, $x_L = t_L$, $x_{L+1} = 1/t_{L+1}$, $x_i = t_{i-1}/t_i$, $L+1 < i \le M$ と変数変換する. このとき適当なパラメータ $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_M)$ を用いて

$$f(t) = t^{\delta}(1 + O(||x||)),$$

とかけるならば, $f(t)$ は $u_0^{L,\mathrm{id}}$, $u_{k,l}^{L,\mathrm{id}}$ のいずれかとなる.

実際 $E_{N,M}$ を

$$
\begin{cases}
\left\{\dfrac{t_s}{t_{s+1}}\cdots\dfrac{t_{L-1}}{t_L}t_L\displaystyle\prod_{j=1}^{N}(1-a_jT)\cdot(1-b_sT_s)-\prod_{j=1}^{N}\left(1-c_jq^{-1}T\right)\cdot(1-T_s)\right\}f(t)=0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1\le s\le L, \\
\left\{\displaystyle\prod_{j=1}^{N}(1-a_jT)\cdot(1-b_sT_s)-\dfrac{1}{t_{L+1}}\dfrac{t_{L+1}}{t_{L+2}}\cdots\dfrac{t_{s-1}}{t_s}\prod_{j=1}^{N}\left(1-c_jq^{-1}T\right)\cdot(1-T_s)\right\}f(t)=0, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad L+1\le s\le M,
\end{cases}
$$

$$
\left\{\frac{t_r}{t_s}(1-b_rT_r)(1-T_s)-(1-b_sT_s)(1-T_r)\right\}f(t)=0,\qquad 1\le r<s\le M,
$$

と書き直し, x の最低次の項を見ることで,

$$
\begin{cases}
\displaystyle\prod_{j=1}^{N}\left(1-c_jq^{-1}q^{\delta_1+\cdots+\delta_M}\right)\left(1-q^{\delta_s}\right)=0, \quad 1\le s\le L, \\
\displaystyle\prod_{j=1}^{N}\left(1-a_jq^{\delta_1+\cdots+\delta_M}\right)\left(1-b_sq^{\delta_s}\right)=0, \qquad L<s\le M,
\end{cases}
$$

$$
\left(1-b_sq^{\delta_s}\right)\left(1-q^{\delta_r}\right)=0,\qquad 1\le r<s\le M,
$$

がわかる. これを解くと,

$$
(\delta_1,\ldots,\delta_M)=(0,\ldots,0,-\beta_{L+1},\ldots,-\beta_M),
$$

$$
\begin{cases}
\left(1+\displaystyle\sum_{i=2}^{M}\beta_i-\gamma_k,-\beta_2,\ldots,-\beta_M\right), \\
\left(0,1+\displaystyle\sum_{i=3}^{M}\beta_i-\gamma_k,-\beta_3,\ldots,-\beta_M\right), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left(0,\ldots,0,1+\displaystyle\sum_{i=L+1}^{M}\beta_i-\gamma_k,-\beta_{L+1},\ldots,-\beta_M\right),
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\left(0,\ldots,0,-\alpha_k+\displaystyle\sum_{i=L+2}^{M}\beta_i,-\beta_{L+2},\ldots,-\beta_M\right), \\
\left(0,\ldots,0,-\alpha_k+\displaystyle\sum_{i=L+3}^{M}\beta_i,-\beta_{L+3},\ldots,-\beta_M\right), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(0,\ldots,0,-\alpha_k),
\end{cases}
$$

がわかり, $f(t)$ が $u_0^{L,\mathrm{id}}$, $u_{k,l}^{L,\mathrm{id}}$ のいずれかであることがわかる.

3 接続行列

この章では, 前章で構成した $E_{N,M}$ の基本解の間の接続行列を求める. すなわち, $\boldsymbol{u}^{L_1,\sigma_1}$ と $\boldsymbol{u}^{L_2,\sigma_2}$ の間の接続行列を求める. この問題は原理的には以下の行列を求めることで解ける：

- $\boldsymbol{u}^{L,\mathrm{id}}$ と $\boldsymbol{u}^{L+1,\mathrm{id}}$ の間の接続行列.
- $\boldsymbol{u}^{L,\mathrm{id}}$ と $\boldsymbol{u}^{L-1,\mathrm{id}}$ の間の接続行列.
- $\boldsymbol{u}^{M,\mathrm{id}}$ と $\boldsymbol{u}^{M,s_r}$ の間の接続行列.

ここで, $s_r=(r,r+1)\in\mathfrak{S}_M$ である. さらに, これらの問題は全て一般 q 超幾何函数 ${}_{N+1}\varphi_N$ の接続公式を用いて計算できる.

Lemma 3.1 ([6])**.** 一般 q 超幾何函数の接続公式は以下で与えられる：

$$
{}_{N+1}\varphi_N\left(\begin{matrix}a_1,\dots,a_{N+1}\\ b_1,\dots,b_N\end{matrix};t\right)=\sum_{k=1}^{N+1}\left\{\prod_{j=1}^{N}\frac{(b_j/a_k)_\infty}{(b_j)_\infty}\prod_{\substack{1\le j\le N+1\\ j\ne k}}\frac{(a_j)_\infty}{(a_j/a_k)_\infty}\right.
$$
$$
\left.\times\frac{\theta(ta_k)}{\theta(t)}{}_{N+1}\varphi_N\left(\begin{matrix}\{qa_k/b_j\}_{1\le j\le N},\,a_k\\ \{qa_k/a_j\}_{1\le j\le N+1,\,j\ne k}\end{matrix};\frac{b_1\cdots b_Nq}{a_1\cdots a_{N+1}t}\right)\right\}. \tag{3.1}
$$

この接続公式は以下の積分に Cauchy の積分定理を用いることで得られる：

$$
\int_C\frac{(b_1x,\dots,b_Nx,qx/t,t/x)_\infty}{(a_1x,\dots,a_{N+1}x,1/x)_\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}.
$$

ただし, 積分路 C は $1/(a_1x,\dots,a_{N+1}x)_\infty$ の極が C の外に, $1/(1/x)_\infty$ の極が C の内に来るように $x=0$ を反時計回りに一周するループである. この証明方法の詳細については, Gasper-Rahman [1] を参照されたい.

まず, $\boldsymbol{u}^{L,\mathrm{id}}$ と $\boldsymbol{u}^{L+1,\mathrm{id}}$ の間の接続行列を考える. 定義より,

$$
\begin{aligned}
&u_0^{L,\mathrm{id}}=\prod_{i=L+1}^{M}t_i^{-\beta_i}\cdot\mathcal{F}_{N,M}^{L}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right),\\
&\mathcal{F}_{N,M}^{L}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right)\\
&=\sum_{m_1,\dots,m_M\ge0}\prod_{j=1}^{N}\frac{(a_j/b_{L+1}\cdots b_M)_{m(L)}}{(c_j/b_{L+1}\cdots b_M)_{m(L)}}\prod_{i=1}^{M}\frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}}\prod_{i=1}^{L}t_i^{m_i}\prod_{i=L+1}^{M}\left(\frac{q}{b_it_i}\right)^{m_i}\\
&=\sum_{m_1,\dots,m_L,m_{L+2},\dots,m_M\ge0}\left\{\prod_{j=1}^{N}\frac{(a_j/b_{L+1}\cdots b_M)_{m(L)'}}{(c_j/b_{L+1}\cdots b_M)_{m(L)'}}\prod_{\substack{1\le i\le M\\ i\ne L+1}}\frac{(b_i)_{m_i}}{(q)_{m_i}}\prod_{i=1}^{L}t_i^{m_i}\prod_{i=L+2}^{M}\left(\frac{q}{b_it_i}\right)^{m_i}\right.\\
&\qquad\left.\times{}_{N+1}\varphi_N\left(\begin{matrix}\{qb_{L+1}\cdots b_M/c_jq^{m(L)'}\}_{1\le j\le N},\,b_{L+1}\\ \{qb_{L+1}\cdots b_M/a_jq^{m(L)'}\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\prod_{j=1}^{N}\frac{c_j}{a_j}\cdot\frac{q}{b_{L+1}t_{L+1}}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

とできる. 最右辺の ${}_{N+1}\varphi_N$ に接続公式 (3.1) を適用し, 整理することで以下を得る：

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{N,M}^{L}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right)\\
&=\prod_{j=1}^{N}\frac{(qb_{L+2}\cdots b_M/a_j,qb_{L+1}\cdots b_M/c_j)_\infty}{(qb_{L+1}\cdots b_M/a_j,qb_{L+2}\cdots b_M/c_j)_\infty}\cdot\frac{\theta(t_{L+1}a_1\cdots a_N/c_1\cdots c_N)}{\theta(t_{L+1}b_{L+1}a_1\cdots a_N/c_1\cdots c_N)}\\
&\qquad\times\mathcal{F}_{N,M}^{L+1}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right)
\end{aligned}
$$

$$
+\sum_{d=1}^{N}\left\{\prod_{j=1}^{N}\frac{(c_d/a_j)_\infty}{(qb_{L+1}\cdots b_M/a_j)_\infty}\prod_{\substack{1\le j\le N\\ j\ne d}}\frac{(qb_{L+1}\cdots b_M/c_j)_\infty}{(c_d/c_j)_\infty}\cdot\frac{(b_{L+1})_\infty}{(c_d/qb_{L+2}\cdots b_M)_\infty}\right.
$$

$$
\times\frac{\theta(t_{L+1}a_1\cdots a_Nc_d/qb_{L+2}\cdots b_Mc_1\cdots c_N)}{\theta(t_{L+1}b_{L+1}a_1\cdots a_N/c_1\cdots c_N)}
$$

$$
\left.\times\mathcal{F}_{N,M}^{L+1;d,L+1}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\{t_i\}_{1\le i\le M}\right)\right\}.
$$

また, $u_{k,L+1}^{L,\mathrm{id}}$ の接続も同様に求めることができる．さらに, $l\ne L+1$ のときは $u_{k,l}^{L,\mathrm{id}}=u_{k,l}^{L+1,\mathrm{id}}$ となる．以上より $\boldsymbol{u}^{L,\mathrm{id}}=A^{L,\mathrm{id}}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};t_{L+1}\right)\boldsymbol{u}^{L+1,\mathrm{id}}$ となる行列 $A^{L,\mathrm{id}}$ を, ${}_{N+1}\varphi_N$ の接続公式を用いることで明示的に求めることができる．このような,「多重和の一部を一般 q 超幾何函数 ${}_{N+1}\varphi_N$ とみなし, そこに接続公式を適用する」という手法を用いれば, $\boldsymbol{u}^{L,\mathrm{id}}=B^{L,\mathrm{id}}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};t_L\right)\boldsymbol{u}^{L-1,\mathrm{id}}$, $\boldsymbol{u}^{M,s_r}=S_{s_r}^{M,\mathrm{id}}\left(\begin{matrix}\{b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\dfrac{t_r}{t_{r+1}}\right)\boldsymbol{u}^{M,\mathrm{id}}$ となる行列 $B^{L,\mathrm{id}}$, $S_{s_r}^{M,\mathrm{id}}$ も同様に求めることができる．$A^{L,\mathrm{id}}$, $B^{L,\mathrm{id}}$, $S_{s_r}^{M,\mathrm{id}}$ の具体形については省略する ([3] を参照されたい)．さらに, $A^{L,\sigma}=A^{L,\mathrm{id}}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};t_{\sigma(L+1)}\right)$, $B^{L,\sigma}=B^{L,\mathrm{id}}\left(\begin{matrix}\{a_j\}_{1\le j\le N},\{b_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};t_{\sigma(L)}\right)$, $S_{s_r}^{M,\sigma}=S_{s_r}^{M,\mathrm{id}}\left(\begin{matrix}\{b_{\sigma(i)}\}_{1\le i\le M}\\ \{c_j\}_{1\le j\le N}\end{matrix};\dfrac{t_{\sigma(r)}}{t_{\sigma(r+1)}}\right)$ とおけば, $\boldsymbol{u}^{L,\sigma}=A^{L,\sigma}\boldsymbol{u}^{L+1,\sigma}$, $\boldsymbol{u}^{L,\sigma}=B^{L,\sigma}\boldsymbol{u}^{L-1,\sigma}$,$\boldsymbol{u}^{M,s_r\sigma}=S_{s_r}^{M,\sigma}\boldsymbol{u}^{M,\sigma}$ となる．以上により, 次の主定理を得る．

Theorem 3.2 ([3])**.** $0\le L_1,L_2\le M$, $\sigma_1,\sigma_2\in\mathfrak{S}_M$ に対し,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}^{L_2,\sigma_2}=A^{L_2,\sigma_2}A^{L_2+1,\sigma_2}\cdots A^{M-1,\sigma_2}S_{s_{r_1}}^{M,s_{r_2}\cdots s_{r_I}\sigma_1}S_{s_{r_2}}^{M,s_{r_3}\cdots s_{r_I}\sigma_1}\cdots S_{s_{r_I}}^{M,\sigma_1}\\
\times B^{M,\sigma_1}B^{M-1,\sigma_1}\cdots B^{L_1+1,\sigma_1}\boldsymbol{u}^{L_1,\sigma_1},
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

である．ただし, $\sigma_2=s_{r_1}\cdots s_{r_I}\sigma_1$, $s_r=(r,r+1)\in\mathfrak{S}_M$ とする．

参考文献

[1] Gasper G., Rahman M., Basic hypergeometric series, 2nd ed., *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Vol. 96, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[2] Gelfand I.M., Zelevinsky A.V., Kapranov M.M., Hypergeometric functions and toric varieties, *Funct. Anal. Appl.* **23** (1989), 94–106.

[3] Nobukawa T., Connection problem for an extension of q-hypergeometric system, *SIGMA* **18** (2022), 080, 21 pages, arXiv:2102.09175.

[4] Park K., A certain generalization of q-hypergeometric functions and their related monodromy preserving deformation, *J. Integrable Syst.* **3** (2018), xyy019, 14 pages, arXiv:1804.08921.

[5] Park K., A certain generalization of q-hypergeometric functions and their related monodromy preserving deformation II, arXiv:2005.04992.

[6] Watson G.N., The continuation of functions defined by generalized hypergeometric series, *Trans. Camb. Phil. Soc.* **21** (1910), 281–299.

[7] 青本和彦, 喜多通武, 超幾何関数論, 丸善出版, 1994.

[8] 原岡喜重, すうがくの風景 超幾何関数, 朝倉書店, 2002.

[9] 吉田正章, 私説超幾何関数 一対称領域による点配置空間の一意化一, 共立出版, 1997.

2変数量子Garnier系の多項式ハミルトニアン

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
皇學館大学 教育学部 教育学科
上野祐一 (Yuichi UENO)

概 要

Garnier 系とは，Painlevé 方程式の拡張であり，Frobenius 完全積分可能な多時間 Hamilton 系として与えられる．Garnier 系は Painlevé 方程式と同様に多項式 Hamiltonian H_{J} の Hamiltonian 系でかくことができる．ここでは，正則性により量子 Gariner 系を構築し，その特徴付けを行う．すなわち，Garnier 系の Hamiltonian 系がまた多項式 Hamiltonian 系に移るような正準変換を導入し，Hamiltonian がこの正則性によってただ一つに特徴付けることができることを示す．

1 Introduction

Painlevé 方程式 P_{J} $(\mathrm{J}=\mathrm{I},\cdots,\mathrm{VI})$ はある 2 階の線形常微分方程式

$$L_J : \frac{d^2y}{dx^2} = R_{\mathrm{J}}(x,\lambda,t)y$$

のモノドロミー保存変形やストークス係数を不変にする変形理論から導かれることが知られている [9]．このことは，P_{VI} については Fuchs により，他の P_{J} $(\mathrm{J}=\mathrm{I},\cdots,\mathrm{V})$ については Garnier によって最初に示された．これらの Painlevé 方程式は L_J の特異点の個数「4」の分割に対応させて考えることができる．

$$\begin{tikzcd}
 & & (2,2) \arrow[dr] & \\
(1,1,1,1) \arrow[r] & (1,1,2) \arrow[r] \arrow[ur] & (1,3) \arrow[r] & (4)
\end{tikzcd}$$

一方，N 変数 Garnier 系とは $N+3$ 個の確定特異点を持つ Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ 上の 2 階 Fuchs 型線型常微分方程式のモノドロミー保存変形から得られる N 個の時間変数を持つ Hamilton 系である．$N=1$ の場合は，Painlevé VI 型方程式と一致する．

また，H.Kimura により 2 変数の退化 Garnier 系が構築された．この 2 変数 Garnier 系には Painlevé 方程式の場合と同様に,「5」の分割に対応する次の退化系列がある [1, 2, 3].

$$\begin{tikzcd}
 & & (1,2,2) \arrow[r] \arrow[dr] & (2,3) \arrow[dr] & \\
(1,1,1,1,1) \arrow[r] & (1,1,1,2) \arrow[r] \arrow[ur] & (1,1,3) \arrow[r] \arrow[ur] & (1,4) \arrow[r] & (5)
\end{tikzcd}$$

古典 Painlevé 方程式の特徴付けには Takano やその共同研究者たちの仕事が知られている [4, 5, 14, 17]．これらの変換の下で， 古典 Painlevé 方程式は正則なハミルトニアン系に変換される [8]．さらには，古典 Painlevé 方程式がこれらの有理変換の下で，正則性によりただ一つに特徴付けられることを示した．これを**高野理論**と呼ぶ．

講演者は量子 Painlevé 方程式に対してもこれを適用し，高野理論の量子類似を構築した [18]．本稿では，量子 Painlevé 系において得られた結果を Garnier 系にも拡張し，$N = 2$ の場合の Garnier 系 G(1,1,1,1,1) を特徴付ける量子正準変換とその結果として得られる量子 Garnier 系の多項式ハミルトニアンを与え，2 変数量子 Garnier 系を構築する．また，残りの各場合については決定された Hamiltonian のみを述べる．

なお，退化の場合も含めた $N = 2$ の場合の Garnier 系 (G(1,1,1,1,2),G(1,1,3),G(1,2,2),G(1,4)) の各場合についても量子正準変換とその結果として得られる量子 Garnier 系の多項式ハミルトニアンが見つかっている．こちらについては現在論文を作成中である．

2　2 変数量子 Garnier 系

以下では，$N = 2$ の場合の Garnier 系について，その量子版を考える．

2 変数量子 Garnier 系を適切に定義するために，次のような Hamilton 系を考える．

$$
\begin{aligned}
dq_1 &= [H_1, p_1]dt + [H_2, p_1]ds, \qquad dp_1 = -[H_1, q_1]dt - [H_2, q_1]ds \\
dq_2 &= [H_1, p_2]dt + [H_2, p_2]ds, \qquad dp_2 = -[H_1, q_2]dt - [H_2, q_2]ds
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで，q_1, q_2, p_1, p_2 は $[q_i, p_j] = \delta_{i,j}h \quad (h \in \mathbb{C})$ を満たす正準変数であり，t, s は 2 つの時間発展の独立変数とする．

また，H_1, H_2 は§ 3. で定める量子正準変換により正則となるように決めた q_1, q_2, p_1, p_2 の非可換多項式 Hamiltonian とする．

3　量子正準変換と決定された Hamiltonian

§ 1. で述べたように古典 Painlevé 系における特徴付けは Takano と彼の共同研究者たちの仕事によるものである．Painlevé 系の多変数化である Garnier 系については，2 変数と 3 変数の場合の正準変換については Sasano や Suzuki の仕事により分かっている [11, 12, 15, 16]．

本論文では 2 変数量子 Garnier 系について，正則性に基づいたアプローチを試みる．そのために，Sasano の導入した有理正準変換を自然に量子化したものを考え，これらの変換に対して正則に変換されるような Hamiltonian を探す．もちろん，正準変換の量子化にも曖昧さの問題は生じるが，変数の単純な順序交換を考えるだけであればその効果はパラメータの読み替えに吸収することができるため，順序をどのように指定しても実質的に等価であり，一般性を失わない．そのため，ここでは変数 q_i が変数 p_j よりも，また変数 x_i が変数 y_j よりも左にくるように非可換変数の順序を指定する．

我々が出発点とする量子正準変換とその逆変換は次のものである．これらの変換式は，古典の場合の Sasano による変換式と同一のように見えるが，ここでは変数 q_i, p_j と x_j, y_j は交換関係 $[q_i, p_j] = \delta_{i,j}h, [x_i, y_j] = \delta_{i,j}h$ $(h \in \mathbb{C})$ を保つ量子正準変数，α_i はパラメータとする．

$$
\begin{aligned}
r_1 : q_1 &= \frac{1}{x_1}, & p_1 &= -x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - \alpha_1 x_1, \\
q_2 &= \frac{x_2}{x_1}, & p_2 &= x_1 y_2, \\
x_1 &= \frac{1}{q_1}, & y_1 &= -q_1^2 p_1 - q_1 q_2 p_2 - \alpha_1 q_1, \\
x_2 &= \frac{q_2}{q_1}, & y_2 &= q_1 p_2. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_2 : q_1 &= \frac{1}{x_1}, & p_1 &= -x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - \alpha_2 x_1, \\
q_2 &= \frac{x_2}{x_1}, & p_2 &= x_1 y_2, \\
x_1 &= \frac{1}{q_1}, & y_1 &= -q_1^2 p_1 - q_1 q_2 p_2 - \alpha_2 q_1, \\
q_2 &= \frac{x_2}{x_1}, & p_2 &= x_1 y_2. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_3 : q_1 &= -x_1 y_1^2 + \alpha_3 y_1, & p_1 &= \frac{1}{y_1}, \\
q_2 &= x_2, & p_2 &= y_2, \\
x_1 &= -q_1 p_1^2 + \alpha_3 p_1, & y_1 &= \frac{1}{p_1}, \\
x_2 &= q_2, & y_2 &= p_2. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_4 : q_1 &= x_1, & p_1 &= y_1, \\
q_2 &= -x_2 y_2^2 + \alpha_4 y_2, & p_2 &= \frac{1}{y_2}, \\
x_1 &= q_1, & y_1 &= p_1, \\
x_2 &= -q_2 p_2^2 + \alpha_4 p_2, & y_2 &= \frac{1}{p_2}. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_5 : q_1 &= -x_1 y_1^2 - x_2 y_1^2 + y_1^2 + \alpha_5 y_1 - x_2 + 1, & p_1 &= \frac{1}{y_1}, \\
q_2 &= x_2, & p_2 &= \frac{1}{y_1} + y_2 - y_1, \\
x_1 &= -q_1 p_1^2 - q_2 p_1^2 + p_1^2 + \alpha_5 p_1 - q_2 + 1, & y_1 &= \frac{1}{p_1}, \\
x_2 &= q_2, & y_2 &= \frac{1}{p_1} + p_2 - p_1. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_6 : q_1 &= -x_1y_1^2 - \frac{t}{s}x_2y_1^2 - \frac{t}{s}x_2 + t + ty_1^2 + \alpha_6 y_1, & p_1 &= \frac{1}{y_1}, \\
q_2 &= x_2, & p_2 &= \frac{t}{s}(\frac{1}{y_1} - y_1) + y_2, \\
x_1 &= -q_1p_1^2 - \frac{t}{s}q_2p_1^2 - \frac{t}{s}q_2 + t + tp_1^2 + \alpha_6 p_1, & y_1 &= \frac{1}{p_1}, \\
x_2 &= q_2, & y_2 &= \frac{t}{s}(\frac{1}{p_1} - p_1) + p_2. \qquad (7)
\end{aligned}
$$

このとき，次が成り立つ．

Theorem 3.1 正準変換 (2)-(7) の下で，正則性を持つ多項式 *Hamiltonian* は一意に決まり，それは次の *Hamiltonian* である．

1. G(1,1,1,1,1) の場合

The case of t - flow.

$$
\begin{aligned}
H_1 = \frac{1}{(-h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)t(t-1)(t-s)}&((t-s)q_1^3p_1^2 + 2(t-s)q_1^2q_2p_1p_2 \\
&+ (t-s)q_1q_2^2p_2^2 - (t+1)(t-s)q_1^2p_1^2 + 2t(s-1)q_1q_2p_1p_2 - t(t-1)q_1q_2p_1^2 - s(t-1)q_1q_2p_2^2 \\
&- (h-\alpha_1-\alpha_2)(s-t)q_1(q_1p_1+q_2p_2) + t(t-s)q_1p_1^2 \\
&+ (h(t-s) - (\alpha_1+\alpha_2)(s-t) + \alpha_3 t(t-s) + \alpha_4 s(t-1) + \alpha_5(t^2-t-st+s))q_1p_1 \\
&+ \alpha_4 s(t-1)q_1p_2 + \alpha_3 t(t-1)q_2p_1 - \alpha_3 t(s-1)q_2p_2 \\
&- \alpha_1\alpha_2(s-t)q_1 - \alpha_3 t(s-t)p_1).
\end{aligned} \qquad (8)
$$

The case of s - flow.

$$
\begin{aligned}
H_2 = \frac{1}{(-h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6)s(s-1)(s-t)}&((s-t)q_2^3p_2^2 - 2(s-t)q_1q_2^2p_1p_2 \\
&+ (s-t)q_1^2q_2p_1^2 - (s+1)(s-t)q_2^2p_2^2 + 2s(t-1)q_1q_2p_1p_2 - t(s-1)q_1q_2p_1^2 - s(s-1)q_1q_2p_2^2 \\
&- (h-\alpha_1-\alpha_2)(s-t)(q_1q_2p_1 + q_2^2p_2) + s(s-t)q_2p_2^2 - \alpha_4 s((t-1)q_1p_1 - (s-1)q_1p_2) \\
&- (h(t-s) + (\alpha_1+\alpha_2)(s-t) + \alpha_3 t(s-1) + \alpha_4 s(t-s) - \alpha_5(s^2-s-st+t))q_2p_2 \\
&+ \alpha_3 t(s-1)q_2p_1 + \alpha_1\alpha_2(s-t)q_2 - \alpha_4 s(s-t)p_2).
\end{aligned} \qquad (9)
$$

2. G(1,1,1,2) の場合

The case of t - flow.

$$H_1 = \frac{1}{(h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)t^2}(q_1^3p_1^2 + 2q_1^2q_2p_1p_2 + q_1q_2^2p_2^2 - tq_1^2p_1^2 - sq_1q_2p_2^2 + (\alpha_3+\alpha_4-h)(q_1^2p_1+q_1q_2p_2) + (\eta+(2h+\alpha_1)t)q_1p_1 + \alpha_2sq_1p_2 + \eta tq_2p_1 + \eta(1-s)q_2p_2 + \alpha_3\alpha_4q_1 - \eta tp_1). \tag{10}$$

The case of s - flow.

$$H_2 = \frac{1}{(h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5)st(s-1)}(t(q_1^2q_2p_1^2 + q_2^3p_2^2 + 2q_1q_2^2p_1p_2) + s(s-1)q_1q_2p_2^2 - t(2sq_1q_2p_1p_2 + (s+1)q_2^2p_2^2) + (\alpha_3+\alpha_4-h)t(q_1q_2p_1 + q_2^2p_2) + stq_2p_2^2 + \alpha_2stq_1p_1 + \alpha_2s(1-s)q_1p_2 + \eta t(1-s)q_2p_1 + (t(\alpha_1(s-1)+\alpha_2s-\alpha_3-\alpha_4+(2s-1)h)+\eta s(s-1))q_2p_2 + \alpha_3\alpha_4tq_2 - \alpha_2stp_2). \tag{11}$$

3. G(1,1,3) の場合

The case of t - flow.

$$H_1 = \frac{1}{(h-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4)(t-s)}(q_1^2p_1p_2 + q_2^2p_1p_2 - 2q_1q_2p_1p_2 + (t-s)(q_1^2p_1 - 2q_1p_1^2 - 2q_2p_1p_2) + (2t^2-2st-\alpha_3)q_1p_1 + \alpha_2q_1p_2 + \alpha_3q_2p_1 - \alpha_2q_2p_2 + \alpha_2(t-s)q_1 + 2\alpha_1(t-s)p_1). \tag{12}$$

The case of s - flow.

$$H_2 = \frac{1}{(-h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)(t-s)}(q_1^2p_1p_2 + q_2^2p_1p_2 - 2q_1q_2p_1p_2 - (t-s)(q_2^2p_2 - 2q_2p_2^2 - 2q_1p_1p_2) - \alpha_3q_1p_1 + \alpha_2q_1p_2 + \alpha_3q_2p_1 - (2st-2s^2+\alpha_2)q_2p_2 - \alpha_3(t-s)q_2 - 2\alpha_1(t-s)p_2). \tag{13}$$

4. G(1,2,2) の場合

The case of t - flow.

$$H_1 = \frac{1}{(2h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4)t(t-s)}((t-s)q_1^2p_1^2 + 2tq_1q_2p_1p_2 - sq_1^2p_1p_2 - tq_2^2p_1p_2 + (s-t)q_1^2p_1 + ((\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)t-(\alpha_1+\alpha_2)s)q_1p_1 - \alpha_1sq_1p_2 - \alpha_3tq_2p_1 + \alpha_1tq_2p_2) - \alpha_1(t-s)q_1 + t(t-s)p_1). \tag{14}$$

The case of s - flow.

$$H_2 = \frac{1}{(2h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4)t(t-s)}((t-s)q_2^2p_2^2 - 2sq_1q_2p_1p_2 + sq_1^2p_1p_2 + tq_1^2p_1p_2 + (s-t)q_2^2p_2 - \alpha_3sq_1p_1 + \alpha_1sq_1p_2 + \alpha_3tq_2p_1 + ((\alpha_2+\alpha_3)t-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)s)q_2p_2 - \alpha_3(t-s)q_2 + s(t-s)p_2). \tag{15}$$

5. G(1,4) の場合

The case of t - flow.

$$H_1 = \frac{1}{(2h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(t-s)}(-q_1^2p_1p_2 - q_2^2p_1p_2 + 2q_1q_2p_1p_2 + (s-t)q_1^2p_1 \\ + \alpha_2q_1p_1 - \alpha_1q_1p_2 - \alpha_2q_2p_1 + \alpha_1q_2p_2 + \frac{1}{2}(t-s)p_1(p_1-p_2) \\ - \alpha_1(t-s)q_1 - \frac{1}{2}t(t-s)p_1). \tag{16}$$

The case of s - flow.

$$H_2 = \frac{1}{(2h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)(t-s)}(q_1^2p_1p_2 + q_2^2p_1p_2 - 2q_1q_2p_1p_2 + (s-t)q_2^2p_2 \\ - \alpha_2q_1p_1 + \alpha_1q_1p_2 + \alpha_2q_2p_1 - \alpha_1q_2p_2 + \frac{1}{2}(t-s)(p_1p_2+p_2^2) \\ - \alpha_2(t-s)q_2 - \frac{1}{2}s(t-s)p_2). \tag{17}$$

Proof. Hamiltonian を一意に決定するための方法は数式処理ソフト Mathematica による具体的な計算によるものである．

その際，非可換変数 q_1, q_2, p_1, p_2 と x_1, x_2, y_1, y_2 に関して，$q = q_i, p = p_j$ の逆数について

$$pq^{-1} - q^{-1}p = hq^{-2}, p^{-1}q - qp^{-1} = hp^{-2}$$

のような公式を用いて計算を行っている．

このようにして得られた各 Hamiltonian (8)〜(17) を持つ Hamilton 系を **2 変数量子 Garnier 系**と呼ぶ．また各場合において，次が成り立つ．

Theorem 3.2 得られた *Hamiltonian* H_1, H_2 の *t-flow* と *s-flow* は可換（*Frobenius* 完全積分可能）である．

古典的に可換（ポアソン可換）な式から量子的に可換な式を得ることは一般には非自明である．今回は「正則性」という条件を課すことによってうまくいった．この結果は，正則性が「よい量子化」であることの一つの根拠となっている．

4 Conclusions

本稿では，正則性による 2 変数量子 Garnier 系の構築とその特徴付けについての報告を行った．得られた結果の拡張の方向としては次のようなものが考えられる．

- KZ 方程式との比較
  共形場理論の観点からは，KZ 方程式が量子 Garnier 系であると考えられている [6, 7]．それと今回の結果との比較することは興味深い．

- Sasano により構築された Sasano 系の量子化
  Sasano 系は Takano 理論を拡張し，正則性を持つ Hamiltonian 系として作られた方程式である [10, 13, 19]．特に，D_{n} 型の対称性を持つ方程式のシリーズは，Painlevé V, VI 型方程式の拡張となっている．

- 2 変数量子 Garnier 系を多変数の場合についての一般化
  古典の場合，n 変数 Garnier 系についての初期値空間の理論については Kimura によって構成されている．これをもとにして，一般の n 変数量子 Garnier 系の構築と正準変換の理論の量子版の構築を目指す．

謝辞
本研究にあたり，貴重なご助言と励ましをして下さった山田泰彦先生に心から感謝致します．

参考文献

[1] 木村弘信: 退化 Garnier 系の初期値空間について, 数理解析研究所講究録, (2000), 18-27.

[2] H. Kimura, The Degeneration of the Two Dimensional Garnier System and the Polynomial Hamiltonian Structure, Ann. Mat. Pura Appl., **155**(1989), 25-57.

[3] H. Kimura and K. Okamoto, On the polynomial Hamiltonian structure of the Garnier systems, J. Math. Pures Appl. **63** (1984), 129-146.

[4] T. Matano, A. Matsumiya, K. Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems II, J. Math. Soc. Japan, **51** (1999), 766-843.

[5] A. Matsumiya, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems III, Kumamoto J. Math., **10** (1997), 45-73.

[6] H. Nagoya, Integral Formulas for Quantum Isomonodromic Systems , KYOTO UNIV, PUBLICATIONS RESEARCH INST MATHEMATICAL SCIENCES., **49** (4) (2013), 651-678.

[7] H. Nagoya, On quantum Painlevé systems , RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B30** (2012), 209-221.

[8] M. Noumi, K. Takano and Y. Yamada, Bäcklund transformations and the manifolds of Painlevé systems, Funkcial. Ekvac., **45** (2002), 237-258.

[9] 岡本和夫: パンルヴェ方程式, 岩波書店, (2009).

[10] Y. Sasano, Higher order Painlevé equations of type $D_l^{(1)}$, RIMS Kokyuroku **1473** (2006), 143-163.

[11] Y. Sasano, Studies on the Garnier System in two variables, arXiv:0704.2869.

[12] Y. Sasano, Studies on the Garnier System in two variables II, arXiv:0706.0799.

[13] Y. Sasano and Y. Yamada, Symmetry and holomorphy of Painlevé type systems, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B2** (2007), 215-225.

[14] T. Shioda and K. Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems I, Funkcial. Ekvac., **40** (1997), 271-291.

[15] 鈴木正樹: 2 変数退化 Garnier 系の初期値空間について, 数理解析研究所講究録, (2001), 41-52.

[16] M. Suzuki, Space of initial conditions of Garnier system and its degenerate systems in two variables, J. Math. Soc. Japan., **58** (2006), 1079-1117.

[17] K. Takano, Defining manifolds for Painlevé equations, in *Toward the exact WKB analysis of differential equations, linear and nonlinear* (Eds. C. J. Howls, T. Kawai and Y. Takei), 261-269, Kyoto Univ. Press, Kyoto, 2000.

[18] Y. Ueno, Polynomial Hamiltonians for Quantum Painlevé Equations, Int. J. Math., **20** (2009), 1335-1445.

[19] 山田泰彦: Symmetries of generalized Painlevé systems, 表現論シンポジウム講演集, (2006), 64-70.

特異拡散を含む擬放物型偏微分方程式の適切性

千葉大学大学院教育学研究科 学校教育学専攻 理数・技術系
水野 大樹 (Daiki MIZUNO)

概要

本小論では, 特異拡散を含む項を緩和することによって得られる擬放物型偏微分方程式を考える. この問題は, 結晶粒界運動を記述するモデルや画像のノイズ除去問題のモデルなどで現れる, 特異拡散を含む放物型偏微分方程式を擬放物型近似することで得られる問題である. 初めに時間離散化によって得られる楕円型境界値問題の可解性や正則性を議論した後, 極限操作によって元の問題の可解性及び, 方程式の適切性について触れる. なお, 本小論は白川 健氏（千葉大学）との共同研究に基づく.

1 導入

本小論を通して, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \in \mathbb{N})$ は有界な領域とし, その境界 $\Gamma := \partial\Omega$ は十分なめらかであるとする. n_Γ は Γ の外向き単位法線ベクトルを表すものとする. $0 < T < \infty$ とし,

$$\begin{cases} Q := (0,T) \times \Omega,\ \Sigma := (0,T) \times \Gamma, \\ H := L^2(\Omega),\ V := H^1(\Omega),\ \mathscr{H} := L^2(0,T;\, H) \end{cases}$$

と置く.

本小論では, 以下の特異拡散を含む擬放物型偏微分方程式のクラス $(\mathrm{P})_\varepsilon$ $(\varepsilon \in [0,1])$ を考える:

$$(\mathrm{P})_\varepsilon := \begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(\alpha \partial \gamma_\varepsilon(\nabla u) + \beta \nabla \partial_t u) \ni f \quad \text{in } Q, \\ (\alpha \partial \gamma_\varepsilon + \beta \nabla \partial_t u) \cdot n_\Gamma \ni 0 \quad \text{on } \Sigma, \\ u(0,x) = u_0(x) \quad \text{for a.e. } x \in \Omega. \end{cases}$$

ここに, $f \in \mathscr{H}$, $0 \le \alpha \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $\beta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ とし,

$$\delta_* := \inf \beta(\Omega) > 0$$

とする. γ_ε は以下で定義される $\mathbb{R}^N$ 上の凸関数の族である:

$$\gamma_\varepsilon : y \in \mathbb{R}^N \mapsto \gamma_\varepsilon(y) := \sqrt{\varepsilon^2 + |y|^2} \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in [0,1].$$

ここに, $|\cdot|$ はユークリッドノルムである. 初期値 u_0 は次に定める解のクラス D_0 に属する関数である:

$$D_0 := \left\{ \varphi \in H^2(\Omega) \,|\, \nabla\varphi|_\Gamma \cdot n_\Gamma = 0 \text{ in } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\}.$$

定義 1. $u:(0,T)\longrightarrow H$ が方程式 $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の解であるとは, $u\in W^{1,2}(0,T;V)$ でかつ, 以下を満たすことである:

$$\exists \boldsymbol{w}\in\mathscr{H} \text{ s.t. } \boldsymbol{w}(t)\in\alpha\partial\gamma_\varepsilon(\nabla u(t)),\ \text{a.e. } t\in(0,T) \ \text{ and}$$
$$\int_\Omega \partial_t u(t)\varphi\,dx+\int_\Omega(\boldsymbol{w}(t)+\beta\nabla\partial_t u(t))\cdot\nabla\varphi\,dx=\int_\Omega f(t)\varphi\,dx,\ \forall\varphi\in V.$$

問題 $(\mathrm{P})_\varepsilon$ は次の特異拡散を含む初期値境界値問題を擬放物型近似することによって得られた問題である:

$$\begin{cases}\partial_t u-\operatorname{div}\left(\alpha\dfrac{Du}{|Du|}\right)=f \text{ in } Q,\\ \left(\alpha\dfrac{Du}{|Du|}\right)\cdot n_\Gamma=0 \text{ on } \Sigma,\\ u(0,x)=u_0(x) \text{ for a.e. } x\in\Omega.\end{cases}\tag{1.1}$$

(1.1) は結晶粒界運動を記述するモデル (cf. [8]) や, 画像のノイズ除去のモデル (cf. [5]) などで現れる方程式である. [3] により, (1.1) は

$$\inf\alpha(\Omega)>0 \ \text{ and } u_0\in BV(\Omega)\cap H$$

という条件のもとで, 次のような正則性を持つ解が存在することがわかっている:

$$u\in W^{1,2}(0,T;H) \text{ and } |u(\cdot)|_{BV(\Omega)}\in L^\infty(0,T).$$

本問題における大きな特徴に, 拡散の速度を表す項 $-\operatorname{div}(\beta\nabla\partial_t u)$ がある. このような項を加えて擬放物型近似した方程式には, 拡散が線形もしくは準線形の場合, [6,10,11] などによって次の正則性を持つ解の一意存在が確認されている:

$$u\in W^{1,2}(0,T;H^2(\Omega)).$$

本小論は, 特異性を持つ項による正則性の低下と擬放物型近似による正則性の向上という二つの相対する性質が解に与える影響に注目する.

2 準備

X を実 Hilbert 空間とする. $|\cdot|_X$ を X 上のノルムとし, $(\cdot,\cdot)_X$ は X 上の内積を表すとする. また, $|\cdot|$ はユークリッド空間におけるノルムを表すとし, $\mathbb{R}^d$ 上の内積を以下で記述する:

$$y\cdot\tilde{y}:=\sum_{i=1}^d y_i\tilde{y}_i,\quad \forall y=[y_1,\dots y_d],\ \tilde{y}=[\tilde{y}_1,\dots\tilde{y}_d]\in\mathbb{R}^d.$$

$\Psi:X\longrightarrow(-\infty,\infty]$ を適正下半連続凸関数とし, Ψ の実効領域を $\operatorname{dom}\Psi$ と表す. $u\in\operatorname{dom}\Psi$ における Ψ の劣微分 $\partial\Psi(u)$ を次で定義する:

$$\partial\Psi(u):=\{v\in X;\ (v,\varphi-u)_H\le\Psi(\varphi)-\Psi(u),\ \forall\varphi\in X\}.$$

また, $\{u\in X;\ \partial\Psi(u)\neq\emptyset\}$ を $\partial\Psi$ の定義域とする.

例 1. 先に定めた γ_ε について, $D(\partial\gamma_\varepsilon) = \mathbb{R}^N$ でかつ, 次が成り立つ:

$$\partial\gamma_\varepsilon(x) = \{\nabla\gamma_\varepsilon(x)\}\ (\varepsilon > 0),\ \partial\gamma_0(x) = \partial\left(|\cdot|\right)(x) = \mathrm{Sgn}(x).$$

例 2. 適正下半連続凸関数 $\Psi_\varepsilon : [H]^N \longrightarrow [0,\infty)$ を次で定める:

$$\Psi_\varepsilon(\boldsymbol{v}) := \int_\Omega \alpha\gamma_\varepsilon(\boldsymbol{v})\,dx,\ \forall \boldsymbol{v} \in [H]^N.$$

この時, $\partial\Psi_\varepsilon(\boldsymbol{v}) := \{\alpha\boldsymbol{w} \in [H]^N;\ \boldsymbol{w} \in \partial\gamma_\varepsilon(\boldsymbol{v})\}$ と表される. さらに, $\widehat{\Psi}_\varepsilon : [\mathscr{H}]^N \longrightarrow [0,\infty)$ を

$$\widehat{\Psi}_\varepsilon(\widehat{\boldsymbol{v}}) := \int_0^T \Psi_\varepsilon(\widehat{\boldsymbol{v}}(t))\,dt,\ \forall \widehat{\boldsymbol{v}} \in [\mathscr{H}]^N$$

として定める時, 以下が成り立つ:

$$\partial\widehat{\Psi}_\varepsilon(\widehat{\boldsymbol{v}}) = \{\alpha\widehat{\boldsymbol{w}} \in [\mathscr{H}]^N;\ \widehat{\boldsymbol{w}}(t) \in \partial\Psi_\varepsilon(\widehat{\boldsymbol{v}}(t)) \text{ a.e. } t \in (0,T)\}.$$

次に時間離散化に関する記法を導入する. $\tau > 0$ を時間幅を示す正定数とし, 時間の列 $\{t_i\}_{i=0}^\infty$ を

$$t_i := i\tau,\ \forall i = 0,1,2,\ldots$$

として定める. 任意の列 $\{t_i,\eta_i\}_{i=0}^\infty \subset [0,\infty)\times X$ に対して, 3 通りの補完 $[\overline{\eta}]_\tau \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,\infty);X)$, $[\underline{\eta}]_\tau \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,\infty);X)$, $[\eta]_\tau \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}([0,\infty);X)$ を次によって定める:

$$\begin{cases} [\overline{\eta}]_\tau(t) := \chi_{(-\infty,0]}\eta_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^\infty \chi_{(t_{i-1},t_i]}(t)\eta_i, & \\ [\underline{\eta}]_\tau(t) := \displaystyle\sum_{i=0}^\infty \chi_{(t_i,t_{i+1}]}(t)\eta_i, & \text{in } X,\ \forall t \geq 0 \\ [\eta]_\tau(t) := \displaystyle\sum_{i=1}^\infty \chi_{[t_{i-1},t_i)}(t)\left(\frac{t-t_{i-1}}{\tau}\eta_i + \frac{t_i-t}{\tau}\eta_{i-1}\right), & \end{cases}$$

ここに, $\chi_E : \mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$ は, 集合 $E \subset \mathbb{R}$ の特性関数とする. これらの補完について, 以下の性質が成り立つ:

命題 1. $q \in [1,\infty)$, $\eta \in L^q(0,T;X)$ とし,

$$\eta_i := \frac{1}{\tau}\int_{t_{i-1}}^{t_i} \eta(t)\,dt,\quad \text{in } X$$

として $\{\eta_i\}_{i=0}^\infty$ を定める時,

$$[\overline{\eta}]_\tau \to \eta,\ [\underline{\eta}]_\tau \to \eta,\ [\eta]_\tau \to \eta \text{ in } L^q(0,T;X) \text{ as } \tau \downarrow 0$$

が成り立つ.

最後に主定理の証明の鍵となる Mosco 収束について, 定義とその性質について紹介する.

定義 2 (cf. [9])**.** X を Hilbert 空間とする. $\Psi : X \longrightarrow (-\infty, \infty]$ を適正下半連続凸関数とし, $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を X 上で定義された適正下半連続凸関数の列とする. Ψ_n が Ψ に X 上で Mosco 収束するとは, 以下の条件 (M1), (M2) を満たすことである:

(M1) $\check{w} \in X$, $\{\check{w}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, が $\check{w}_n \to \check{w}$ weakly in X as $n \to \infty$ を満たす時, $\underline{\lim}_{n\to\infty} \Psi_n(\check{w}_n) \geq \Psi(\check{w})$ が成り立つ.

(M2) 任意の $\hat{w} \in D(\Psi)$ に対し, $\hat{w}_n \to \hat{w}$ in X, $\Psi_n(\hat{w}_n) \to \Psi(\hat{w})$as $n \to \infty$ を満たすような $\{\hat{w}_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ が存在する.

命題 2 (cf. [1], [7])**.** X, Ψ, $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は定義 2 で与えたものとする.

$$\Psi_n \to \Psi \text{ on } X, \text{ in the sense of Mosco, as } n \to \infty,$$

及び,

$$\begin{cases} [w, w^*] \in X \times X, \quad [w_n, w_n^*] \in \partial\Psi_n \text{ in } X \times X,\ n \in \mathbb{N}, \\ w_n \to w \text{ in } X \text{ and } w_n^* \to w^* \text{ weakly in } X, \text{ as } n \to \infty. \end{cases}$$

を仮定する時, 以下が成り立つ:

$$[w, w^*] \in \partial\Psi \text{ in } X \times X, \text{ and } \Psi_n(w_n) \to \Psi(w), \text{ as } n \to \infty.$$

補足 1. 例 2 において定義した $\widehat{\Psi}_\varepsilon$ について,

$$\widehat{\Psi}_\varepsilon \to \widehat{\Psi}_0 \text{ on } [\mathscr{H}]^N, \text{ in the sense of Mosco, as } \varepsilon \downarrow 0$$

が成り立つ (cf. [2,4]). 本小論においては, $\widehat{\Psi}_\varepsilon$ に対して命題 2 を適用する.

3 主定理

まず初めに, 境界における意味づけを与えるため, 作用素 $[(\cdot) \cdot n_\Gamma]_\Gamma$ を定義する:

定義 3. $[\,(\cdot) \cdot n_\Gamma\,]_\Gamma : \left\{\boldsymbol{w} \in [H]^N;\ \operatorname{div} \boldsymbol{w} \in H\right\} \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ を次の式によって定義する:

$$[\boldsymbol{v} \cdot n_\Gamma]_\Gamma(\varphi|_\Gamma) := \int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{v} \cdot \varphi \, dx + \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \nabla\varphi \, dx,\ \forall \boldsymbol{v} \in \{\boldsymbol{w} \in [H]^N;\ \operatorname{div} \boldsymbol{w} \in H\},\ \forall \varphi \in V.$$

本章では先の準備や記法を元として, 問題 $(\mathrm{P})_\varepsilon$ について得られた結果を記述する. 特異性を持つ項を緩和した $\varepsilon > 0$ と $\varepsilon = 0$ の場合の間には, 正則性や意味づけに関して幾らかの差異が見られた.

定理 1. 任意の $\varepsilon \in (0, 1]$ に対し, $(\mathrm{P})_\varepsilon$ は解 u_ε をただ一つ持ち, 次の $\mathbf{(S0)}_\varepsilon$–$\mathbf{(S2)}_\varepsilon$ を満たす:

$\mathbf{(S0)}_\varepsilon$ $u \in W^{1,2}(0, T;\ H^2(\Omega))$ and $u_\varepsilon(0) = u_0$ in H

$\mathbf{(S1)}_\varepsilon$ u_ε は境界において次の意味で特徴づけられる:

$$\nabla u(t)|_\Gamma \cdot n_\Gamma = \nabla\partial_t u(t)|_\Gamma \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Gamma, \quad \text{for a.e. } t \in (0, T)$$

$\mathbf{(S2)}_\varepsilon$ 初期値を $u_0^1, u_0^2 \in D_0$ とする時, 二つの解 $u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2$ は次の不等式を満たす:

$$\left|u_\varepsilon^1(t) - u_\varepsilon^2(t)\right|_V^2 \leq C_\beta |u_0^1 - u_0^2|_V^2,\ \forall t \in (0, T)$$

定理 2. $\varepsilon = 0$ の時, $(\mathrm{P})_0$ は解 u をただ一つ持ち, 次の **(S0)**–**(S2)** を満たす:

(S0) $u \in W^{1,2}(0,T;V)$ and $u(0) = u_0$ in H

(S1) 解 u は境界において次の意味で特徴づけられる:

$$[(\boldsymbol{w}(t) + \beta\nabla\partial_t u(t)) \cdot n_\Gamma]_\Gamma = 0 \text{ in } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{ for a.e. } t \in (0,T).$$

(S2) 初期値を $u_0^1, u_0^2 \in D_0$ とする時, 二つの解 u^1, u^2 は次の不等式を満たす:

$$\left|u^1(t) - u^2(t)\right|_V^2 \le C_\beta |u_0^1 - u_0^2|_V^2, \ \forall t \in (0,T)$$

4 証明の概要

本章は, 重要な補題の紹介および主定理の証明の概略を記述する.

4.1 証明のための準備

主定理において, 解は $\varepsilon > 0$ の場合における, $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の時間離散化スキームの極限によって得られる. $\tau > 0$ を時間幅とし, 以下の時間離散化スキームの解の存在を考える:
$(\mathrm{AP})_\tau^\varepsilon$: 以下の方程式を満たすような関数列 $\{u_{\varepsilon,i}\}_{i=1}^\infty \subset \{\varphi \in H^2(\Omega) \,|\, \nabla\varphi|_\Gamma \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Gamma\}$ を求める:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau}(u_{\varepsilon,i} - u_{\varepsilon,i-1}) - \operatorname{div}\left(\alpha\nabla\gamma_\varepsilon(\nabla u_{\varepsilon,i}) + \beta\nabla\left(\dfrac{u_{\varepsilon,i} - u_{\varepsilon,i-1}}{\tau}\right)\right) = f_i \text{ in } \Omega, \\ \nabla u_{\varepsilon,i}|_\Gamma \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Gamma, \quad i = 1,2,\ldots. \end{cases}$$

ここに, u_0 は先に与えた初期値とし, f_i は各時間幅における積分平均とする. すなわち:

$$f_i(x) := \frac{1}{\tau}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t,x)\,dt, \quad \forall x \in \Omega.$$

この方程式は次の楕円型境界値問題に帰着させることができる:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha\nabla\gamma_\varepsilon(\nabla u) + \beta\nabla u) + \alpha_0 u = f \text{ in } \Omega, \\ \nabla u|_\Gamma \cdot n_\Gamma = 0 \text{ on } \Gamma, \quad i = 1,2,\ldots. \end{cases}$$

ここで, $0 \le \alpha \in V \cap L^\infty(\Omega)$, $\beta \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\alpha_0 \in L^\infty(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega)$ とし,

$$\inf\beta(\Omega) \cup \inf\alpha_0(\Omega) > 0$$

とする. この問題には, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, クラス D_0 に属する解が一意に存在することが確かめられており, したがって $(\mathrm{AP})_\tau^\varepsilon$ には解 $\{u_{\varepsilon,i}\}_{i=1}^\infty \subset D_0$ がただ一つ存在する. すなわち, $\{u_{\varepsilon,i}\}_{i=1}^\infty$ は各 i について, 次の変分不等式を満たす:

$$\frac{1}{\tau}(u_{\varepsilon,i} - u_{\varepsilon,i-1}, \varphi)_H + \left(\alpha\nabla\gamma_\varepsilon(\nabla u_{\varepsilon,i}) + \frac{\beta}{\tau}\nabla(u_{\varepsilon,i} - u_{\varepsilon,i-1}), \nabla\varphi\right)_{[H]^N} = (f_i, \varphi)_H, \ \forall\varphi \in V.$$

4.2 主定理 1 の証明の概略

主定理の証明は主に Ascoli のコンパクトな埋め込み定理 (cf. [12, Corollary 4]) に依拠する．したがって, 次の有界性に関する補題を導くことが証明の鍵である.

補題 3. ある適当な τ_* が存在し, 任意の $\varepsilon \in (0,1)$, $\tau \in (0,\tau_*)$ に対して以下の不等式が成り立つ:

$$|[u_\varepsilon]_\tau|^2_{L^\infty(0,T;\,H^2(\Omega))} \le C_{\Omega,T,\alpha,\beta,f}(1+|u_0|^2_{H^2(\Omega)}), \tag{4.1}$$

$$|[u_\varepsilon]_\tau|^2_{W^{1,2}(0,T;\,V)} \le C_{\Omega,T,\alpha,\beta,f}(1+|u_0|^2_{V}), \tag{4.2}$$

$$|[u_\varepsilon]_\tau|^2_{W^{1,2}(0,T;\,H^2(\Omega))} \le \frac{1}{\varepsilon}\,C_{\Omega,T,\alpha,\beta,f}(1+|u_0|^2_{H^2(\Omega)}).$$

この補題により,

$$\tau_* > \tau_1 > \tau_2 > \cdots > \tau_n \downarrow 0 \text{ as } n \to \infty$$

を満たす列 $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と, 関数列の極限 $u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;\,H^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T;\,H^2(\Omega))$ が存在して,

$$[u_\varepsilon]_{\tau_n} \to u_\varepsilon \text{ in } C([0,T];\,V),\ \text{weakly in } W^{1,2}(0,T;\,H^2(\Omega)) \text{ as } n\to\infty,$$
$$[\overline{u_\varepsilon}]_{\tau_n} \to u_\varepsilon \text{ in } L^2(0,T;\,V) \text{ as } n\to\infty.$$

が成り立つ．これらの収束により,

$$\begin{aligned}(\partial_t u_\varepsilon(t),\varphi)_H + (\alpha\nabla\gamma_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon(t)) + \beta\nabla\partial_t u_\varepsilon(t),\varphi)_{[H]^N} = (f(t),\varphi)_H,\\ \forall\varphi\in V,\ \text{a.e. } t\in(0,T).\end{aligned} \tag{4.3}$$

及び,

$$\nabla u_\varepsilon(t)|_\Gamma\cdot n_\Gamma = \partial_t\left(\nabla u_\varepsilon(t)|_\Gamma\cdot n_\Gamma\right) = \nabla\partial_t u_\varepsilon(t)|_\Gamma\cdot n_\Gamma = 0,\ \text{on } \Gamma,\ \text{a.e. } t\in(0,T).$$

を得る．以上で $(\mathrm{S1})_\varepsilon$, $(\mathrm{S2})_\varepsilon$ が確かめられた．解の一意性, 連続依存性は (4.3) において $\varphi = u^1_\varepsilon - u^2_\varepsilon$ を代入することによって得られる.

4.3 主定理 2 の証明の概略

主定理 1 によって得られた関数列 $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ は (4.1), (4.2) から $L^\infty(0,T;\,H^2(\Omega))$ 及び $W^{1,2}(0,T;\,V)$ で有界である．また, 関数列 $\{\alpha\nabla\gamma_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)\}_{\varepsilon\in(0,1)}$ は $[\mathscr{H}]^N$ で有界である．したがって,

$$1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \cdots > \varepsilon_n \downarrow 0 \text{ as } n\to\infty$$

を満たす $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 及び, $u \in W^{1,2}(0,T;\,V)$, $\boldsymbol{w} \in [\mathscr{H}]^N$ が存在して,

$$u_{\varepsilon_n} \to u \text{ in } C([0,T];\,V),\ \text{weakly in } W^{1,2}(0,T;\,V) \text{ as } n\to\infty,$$
$$\alpha\nabla\gamma_\varepsilon(\nabla u_{\varepsilon_n}) \to \boldsymbol{w} \text{ weakly in } [\mathscr{H}]^N \text{ as } n\to\infty$$

が成り立つ．したがって,

$$(\partial_t u(t),\varphi)_H + (\boldsymbol{w}(t) + \beta\nabla\partial_t u(t),\varphi)_{[H]^N} = (f(t),\varphi)_H,\ \forall\varphi\in V,\ \text{a.e. } t\in(0,T). \tag{4.4}$$

また, 例 2 において定義した $\widehat{\Psi}_\varepsilon$ に対して,

$$\alpha\nabla u_{\varepsilon_n}(t) \in \partial\widehat{\Psi}_{\varepsilon_n}(\nabla u_{\varepsilon_n}(t)),\ \text{a.e. } t \in (0,T),\ \forall n \in \mathbb{N}$$

が成り立つ. 命題 2 を適用して,

$$\boldsymbol{w}(t) \in \partial\widehat{\Psi}_0(\nabla u(t)) = \alpha\partial\gamma_0(\nabla u(t)),\ \text{a.e. } t \in (0,T).$$

を得る. 以上により u は $(\mathrm{P})_0$ の解であることが示された.

次に, 境界において満たす性質を確かめる. (4.4) により,

$$\partial_t u(t) - \operatorname{div}(\boldsymbol{w}(t) + \beta\nabla\partial_t u(t)) = f \text{ in } H,\ \text{a.e. } t \in (0,T). \tag{4.5}$$

(4.4), (4.5) から,

$$\begin{aligned}&[(\boldsymbol{w}(t) + \beta\nabla\partial_t u(t)) \cdot n_\Gamma]_\Gamma (\varphi|_\Gamma)\\ &\quad = (\operatorname{div}(\boldsymbol{w}(t) + \beta\nabla\partial_t u(t)), \varphi)_H + (\boldsymbol{w}(t) + \beta\nabla\partial_t u(t), \nabla\varphi)_{[H]^N} = 0,\ \forall\varphi \in V,\ \text{a.e. } t \in (0,T)\end{aligned}$$

が成り立ち, (S2) が確かめられた. 連続依存性, 解の一意性は (4.4) において $\varphi = u^1 - u^2$ を代入することで容易に得られる.

参考文献

[1] H. Attouch. *Variational Convergence for Functions and Operators.* Applicable Mathematics Series. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1984.

[2] Pierluigi Colli, Gianni Gilardi, Ryota Nakayashiki, and Ken Shirakawa. A class of quasi-linear Allen–Cahn type equations with dynamic boundary conditions. *Nonlinear Anal.*, Vol. 158, pp. 32–59, 2017.

[3] Mi-Ho Giga and Yoshikazu Giga. Very singular diffusion equations: second and fourth order problems. *Jpn. J. Ind. Appl. Math.*, Vol. 27, No. 3, pp. 323–345, 2010.

[4] Yoshikazu Giga, Yohei Kashima, and Noriaki Yamazaki. Local solvability of a constrained gradient system of total variation. *Abstr. Appl. Anal.*, No. 8, pp. 651–682, 2004.

[5] Yoshikazu Giga, Hirotoshi Kuroda, and Noriaki Yamazaki. An existence result for a discretized constrained gradient system of total variation flow in color image processing. *Interdiscip. Inform. Sci.*, Vol. 11, No. 2, pp. 199–204, 2005.

[6] V. R. Gopala Rao and T. W. Ting. Solutions of pseudo-heat equations in the whole space. *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 49, pp. 57–78, 1972/73.

[7] N. Kenmochi. Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications. *Bull. Fac. Education, Chiba Univ.*, Vol. 30, pp. 1–87, 1981.

[8] Ryo Kobayashi, James A. Warren, and W. Craig Carter. A continuum model of grain boundaries. *Phys. D*, Vol. 140, No. 1-2, pp. 141–150, 2000.

[9] Umberto Mosco. Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. *Advances in Math.*, Vol. 3, pp. 510–585, 1969.

[10] Mariya Ptashnyk. Nonlinear pseudoparabolic equations as singular limit of reaction-diffusion equations. *Appl. Anal.*, Vol. 85, No. 10, pp. 1285–1299, 2006.

[11] R. E. Showalter and T. W. Ting. Pseudoparabolic partial differential equations. *SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 1, pp. 1–26, 1970.

[12] Jacques Simon. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, Vol. 146, pp. 65–96, 1987.

Weighted estimates and large time behavior of solutions to the semilinear heat equation

早稲田大学大学院 先進理工学研究科 物理学及応用物理学専攻 修士課程 2 年
草場 竜之介 (Ryunosuke KUSABA)*

概 要

本稿では, 熱半群の重み付き評価と漸近展開の精密化を基礎として, 冪乗型の非線形項を持つ半線形熱方程式に対する時間大域解の重み付き評価と長時間挙動を考察する. 尚, 本稿は小澤徹教授 (早稲田大学) との共同研究 [19] に基づく.

1 導入

本稿では, 次の半線形熱方程式の初期値問題を考える：

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f(u), & (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0) = \varphi, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{P}$$

但し, $u\colon [0,+\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は未知函数, $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は初期時刻 $t=0$ で与えられた初期値, Δ は $\mathbb{R}^n$ におけるラプラシアン, $\partial_t := \partial/\partial t$ である. さらに, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は冪乗型の非線形項で, ある $p \in (1,+\infty)$ により,

$$f(u) = \pm u^p, \ \ \pm |u|^p, \ \ \pm |u|^{p-1} u$$

のいずれかで表されるものとする. このような冪乗型の非線形項を持つ半線形熱方程式は, 数学以外の文脈でも様々な場面で登場し, 例えば燃焼反応を記述する数理モデルとして現れる (cf. [2, 22]).

初期値問題 (P) を数学的に解析した論文として Fujita [3] が先駆的である. この論文は, 空間次元 n と解の挙動の関係を探るために, 非線形項を $f(u) = u^p$ とした (P) を考案・解析し, 解の挙動が冪の指数 p と空間次元のみから定まる指数 $p_F(n) := 1 + 2/n$ の大小関係に応じて次のように変化することを明らかにした：

(1) $p > p_F(n)$ のとき, 十分に小さい非負の初期値に対して (P) は一意的な時間大域解を持つ.

(2) $p < p_F(n)$ のとき, 恒等的に零でない非負の初期値に対する (P) の解は有限時間で爆発する.

その後, Hayakawa [6] や Kobayashi-Sirao-Tanaka [18] などにより, $p = p_F(n)$ の場合は (2) に該当することが示された. また, 他の冪乗型の非線形項の場合も数多くの論文で解析されており, いずれの場合も $p_F(n)$ は解の挙動を特徴づける重要な指数の一つである (cf. [5, 1]). 以上のことから, $p_F(n)$ は発見者の名を冠して藤田指数と呼ばれている.

さて, 非線形項がいずれの場合でも, $p > p_F(n)$ ならば (非負とは限らない) 小さな初期値に対して (P) は一意的な時間大域解を持つことが知られている. 本稿では, その時間大域解に対する重み付き評価と長時間挙動に関して得た結果を報告する.

*ryu2411501@akane.waseda.jp

2　熱半群の基本評価と漸近展開

本研究に関連する先行研究を述べる前に, 熱半群の基本事項を纏めて置く. 以下, 非負整数全体の成す集合を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と表し, 各 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$|\alpha| \coloneqq \sum_{j=1}^n \alpha_j, \qquad \alpha! \coloneqq \prod_{j=1}^n \alpha_j!, \qquad x^\alpha \coloneqq \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j}, \qquad \partial^\alpha \coloneqq \prod_{j=1}^n \partial_j^{\alpha_j}, \qquad \partial_j \coloneqq \frac{\partial}{\partial x_j}$$

と定義する. また, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ が任意の $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $\alpha_j \leq \beta_j$ を満たすとき, $\alpha \leq \beta$ と表す. さらに, 各 $q \in [1, +\infty]$ に対して Lebesgue 空間 $L^q(\mathbb{R}^n)$ のノルムを $\|\cdot\|_q$ と表し, 各 $m \in \mathbb{N}$ に対して重み付き Lebesgue 空間 $L_m^1(\mathbb{R}^n)$ を,

$$L_m^1(\mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \,;\, |\alpha| \leq m \text{ なる任意の } \alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n \text{ に対して } x^\alpha \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)\right\}$$

と定義する. 但し, $x^\alpha \varphi$ は $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto x^\alpha \varphi(x) \in \mathbb{R}$ なる函数を表す.

各 $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $q \in [1, +\infty]$ に対し, φ を初期値とする線形熱方程式 ($f \equiv 0$ とした (P)) の $t \geq 0$ における解を $e^{t\Delta}\varphi$ と表す. 初期値に対する解の一意性より, $L^q(\mathbb{R}^n)$ 上の有界線形作用素の族 $\left(e^{t\Delta}; t \geq 0\right)$ は半群を成し, これを熱半群という. 特に $t > 0$ のとき, $e^{t\Delta}\varphi$ は Gauss 核

$$G_t(x) \coloneqq (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

を用いて,

$$\left(e^{t\Delta}\varphi\right)(x) = (G_t * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y)\,\varphi(y)\,dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

と表される. ここで, 各 $t > 0$ に対し, 伸長 δ_t を $L^1(\mathbb{R}^n)$ における等長作用素として,

$$(\delta_t \varphi)(x) = t^{-\frac{n}{2}} \varphi\left(t^{-\frac{1}{2}} x\right), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

と定義する. このとき, 任意の $q \in [1, +\infty]$ に対して,

$$\|\delta_t \varphi\|_q = t^{-\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right)} \|\varphi\|_q \tag{2.1}$$

が成り立つ. また, $G_t = \delta_t G_1$ より任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対して,

$$\partial^\alpha G_t = \partial^\alpha (\delta_t G_1) = t^{-\frac{|\alpha|}{2}} \delta_t (\partial^\alpha G_1)$$

が成り立ち,

$$\partial^\alpha e^{t\Delta}\varphi = (\partial^\alpha G_t) * \varphi = t^{-\frac{|\alpha|}{2}} (\delta_t (\partial^\alpha G_1)) * \varphi$$

と表される. よって, Hausdorff-Young の不等式と式 (2.1) より, $1 \leq q \leq p \leq +\infty$ ならば任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$, $t > 0$ に対して,

$$\left\|\partial^\alpha e^{t\Delta}\varphi\right\|_p \leq t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right) - \frac{|\alpha|}{2}} \|\partial^\alpha G_1\|_r \|\varphi\|_q \tag{2.2}$$

が成り立つ．但し, $r \in [1, +\infty]$ は $1/p + 1 = 1/r + 1/q$ なる指数である．次に, 熱半群の漸近展開を考える．そこで, 各 $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対し, α 次の多変数 Hermite 多項式 $\boldsymbol{H}_\alpha$ を,

$$\boldsymbol{H}_\alpha(x) \coloneqq (-1)^{|\alpha|} e^{|x|^2} \partial^\alpha e^{-|x|^2} = \sum_{2\beta \leq \alpha} \frac{(-1)^{|\beta|} \alpha!}{\beta! (\alpha - 2\beta)!} (2x)^{\alpha - 2\beta}, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

と定義し,

$$\boldsymbol{h}_\alpha(x) \coloneqq \boldsymbol{H}_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{2\beta \leq \alpha} \frac{(-1)^{|\beta|} \alpha!}{\beta! (\alpha - 2\beta)!} x^{\alpha - 2\beta}, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

と置く．このとき, 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して,

$$\begin{aligned}(\partial^\alpha G_1)(x) &= (-1)^{|\alpha|} 2^{-|\alpha|} G_1(x) \boldsymbol{H}_\alpha\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= (-1)^{|\alpha|} 2^{-|\alpha|} G_1(x) \boldsymbol{h}_\alpha(x)\end{aligned}$$

となる．さて, $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とすると, 熱半群の積分表示に現れる $G_t(x-y)$ の N 次の Taylor 展開は,

$$\begin{aligned}G_t(x-y) &= \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{1}{\alpha!} (-y)^\alpha (\partial^\alpha G_t)(x) \\ &\quad + \sum_{|\alpha| = N+1} \frac{N+1}{\alpha!} \int_0^1 (1-\theta)^N (-y)^\alpha (\partial^\alpha G_t)(x - \theta y)\, d\theta \\ &= \sum_{k=0}^N 2^{-k} t^{-\frac{k}{2}} \sum_{|\alpha| = k} \frac{1}{\alpha!} y^\alpha (\delta_t(\boldsymbol{h}_\alpha G_1))(x) \\ &\quad + 2^{-(N+1)} t^{-\frac{N+1}{2}} \sum_{|\alpha| = N+1} \frac{N+1}{\alpha!} \int_0^1 (1-\theta)^N y^\alpha (\delta_t(\boldsymbol{h}_\alpha G_1))(x - \theta y)\, d\theta\end{aligned}$$

と表される．よって, $\varphi \in L^1_{N+1}(\mathbb{R}^n)$ ならば任意の $q \in [1, +\infty]$, $t > 0$ に対して,

$$t^{\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right)} \left\| e^{t\Delta}\varphi - \sum_{k=0}^N 2^{-k} t^{-\frac{k}{2}} \sum_{|\alpha| = k} c_\alpha \delta_t(\boldsymbol{h}_\alpha G_1) \right\|_q \leq 2^{-(N+1)} t^{-\frac{N+1}{2}} \sum_{|\alpha| = N+1} \frac{1}{\alpha!} \|\boldsymbol{h}_\alpha G_1\|_q \|x^\alpha \varphi\|_1$$

が成り立つ．但し,

$$c_\alpha \coloneqq \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} y^\alpha \varphi(y)\, dy$$

である．本稿ではこのような漸近展開を N 次の漸近展開と呼ぶ[1].

[1]本質的には何も変わらないが, 殆どの文献で熱半群の漸近形は $(-1)^{|\alpha|} c_\alpha \partial^\alpha G_t$ であり, それが Hermite 多項式を用いて具体的に, かつ減衰部分 $t^{-k/2}$ と形状部分 $2^{-k} c_\alpha \delta_t(\boldsymbol{h}_\alpha G_1)$ の積として書き下せることを明示した文献は我々が知る限り他にない.

3 先行研究

初期値問題 (P) の時間大域解の漸近展開を導出した論文は数多くある．例えば, 0 次の漸近展開は [5, 16, 17, 20, 8, 21] などにより様々な方法で導出されている． また, 高次の漸近展開も [7, 9, 10, 12, 13] により得られているが, 0 次の漸近展開の場合と比較してその方法は豊富でないように思われる．実際, Ishige-Ishiwata-Kawakami [7] は熱半群の L^1 減衰評価を導出し, (P) の時間大域解をその L^1 ノルムの減衰率に応じて分類した．その中で, 非線形項の冪の指数 p がある程度大きいという仮定の下, 時間大域解の L^1 ノルムの減衰率に応じた漸近展開を得ている．この漸近展開に関する結果は Ishige-Kawakami [9] により改善され, 時間大域解の L^1 ノルムの減衰率や非線形項の冪の指数 p に余計な仮定を課さずに高次の漸近展開を得ている．しかし, その代償として解の漸近形は熱方程式の重要な構造の一つである放物型の自己相似性 (cf. [4, Section 1.2]) を失った．その後, [10, 12, 13] により他の半線形放物型偏微分方程式にも適用できるよう拡張された．この方法は, 熱方程式との関連が深い半線形消散型波動方程式の時間大域解の漸近展開を導出する際にも有効である [15, 14]．従って, [7, 9] によって導入・改良された方法は非常に強力なものであるが, これは高次の漸近展開だけでなく, 1 次の漸近展開を導出する方法としても我々が知る限り唯一の方法である．そこで我々は, 初期値問題 (P) の時間大域解の漸近展開を [7, 9] と異なる方法で導出した (定理 4.6, 4.7).

さらに, 熱半群の漸近展開からも推察できる通り, (P) の時間大域解の漸近展開を導出するためには解の重み付き評価が必要となる．多くの場合, 時間大域解の重み付き評価は比較原理を用いて導出されるが (cf. [7, Lemma 3.1]), そのためには解が比較原理を適用できる枠組みに入っているかどうかに注意を払う必要がある．また, [10, Theorem 3.1] や [11, Theorem 1.2] は線形方程式の解による逐次近似と Ascoli-Arzelà の定理に基づくコンパクト性の議論により解の重み付き評価を導出しているが, その際, 近似列の極限と (P) の解が一致していることを確認する必要がある．このような問題を払拭するために, 我々は熱半群の重み付き評価を精密化し, それを応用した直接計算によって時間大域解の重み付き評価を導出した (定理 4.1, 4.2, 4.5).

4 主定理

まず, 熱半群と掛け算作用素と見做した重み函数の交換関係の具体的表示とその評価に関する定理を述べる.

定理 4.1
$m \in \mathbb{N}$, $\varphi \in L^1_m(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき, $|\alpha| = m$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ と任意の $t > 0$ に対して $x^\alpha e^{t\Delta}\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ となり,

$$x^\alpha e^{t\Delta}\varphi - e^{t\Delta}x^\alpha\varphi = R_\alpha(t)\varphi \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^n) \tag{4.1}$$

が成り立つ．但し,

$$R_\alpha(t)\varphi := \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha \\ \beta\neq 0}} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}(-2t\partial)^\beta e^{t\Delta}x^\gamma\varphi + \sum_{\substack{\beta+\gamma\leq\alpha,\ |\beta+\gamma|\leq|\alpha|-2 \\ |\beta|+1\leq\ell\leq\frac{|\alpha|+|\beta|-|\gamma|}{2}}} C^\alpha_{\ell\beta\gamma} t^\ell \partial^\beta e^{t\Delta}x^\gamma\varphi \tag{4.2}$$

であり, $C^\alpha_{\ell\beta\gamma}$ は t, x, φ に依存しない実定数である.

定理 4.2
$m \in \mathbb{N}$ とする．このとき, ある $C_m > 0$ が存在し, 任意の $\varphi \in L^1_m(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$ に対して,

$$\sum_{|\alpha|=m} \left\| x^\alpha e^{t\Delta}\varphi - e^{t\Delta}x^\alpha\varphi \right\|_1 \le C_m \left\{ t^{\frac{1}{2}} \left\| |x|^{m-1}\varphi \right\|_1 + \left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{m}{2}} \right) \|\varphi\|_1 \right\} \tag{4.3}$$

が成り立つ.

熱半群の積分表示より, 任意の $m \in \mathbb{N}$, $\varphi \in L^1_m(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$ に対して,

$$\sum_{|\alpha|=m} \left\| x^\alpha e^{t\Delta}\varphi \right\|_1 \le C \left(\left\| |x|^m \varphi \right\|_1 + t^{\frac{m}{2}} \|\varphi\|_1 \right)$$

と評価される (cf. [7, Lemma 2.1])．上式と式 (4.3) を比較すると, 右辺に現れる重み函数の冪が式 (4.3) では m から $m-1$ に減少していることが分かる．この差が, 後に述べる (P) の時間大域解の重み付き評価を比較原理やコンパクト性の議論に依らない直接計算で導出する際に重要となる.

注意 4.3
定理 4.1, 4.2 より, 任意の $\varphi \in L^1_m(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$ に対して,

$$\sum_{|\alpha|=m} \|R_\alpha(t)\varphi\|_1 \le C_m \left\{ t^{\frac{1}{2}} \left\| |x|^{m-1}\varphi \right\|_1 + \left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{m}{2}} \right) \|\varphi\|_1 \right\} \tag{4.4}$$

が成り立つ．実は, $\varphi \in L^1_{m-1}(\mathbb{R}^n)$ であっても上式は成立する．このことは, $\varphi \in L^1_{m-1}(\mathbb{R}^n)$ ならば $|\alpha| = m$ なる任意の $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\ge 0}$ に対して $R_\alpha(t)\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ となることを反映している.

次に, (P) の時間大域解の重み付き評価と長時間挙動に関する定理を述べる．以下, 考える時間大域解は次の命題で与えられるものとする．この命題はよく知られたものであり, (P) に対応する積分方程式

$$u(t) = e^{t\Delta}\varphi + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} f(u(s))\, ds \tag{I}$$

に縮小写像の議論を適用することで示される.

命題 4.4 (cf. [11, Theorem 1.2], [21, Theorem 20.15])
$p > p_F(n)$ とする．このとき, ある $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n,p) > 0$ が存在し, $\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_\infty \le \varepsilon_0$ なる任意の $\varphi \in \left(L^1 \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$ に対して (P) の時間大域解

$$u \in X := (C \cap L^\infty)\left([0,+\infty); L^1(\mathbb{R}^n)\right) \cap (C \cap L^\infty)\left((0,+\infty); L^\infty(\mathbb{R}^n)\right)$$

が唯一つ存在する．さらに,

$$\sup_{q\in[1,+\infty]} \sup_{t\ge 0} (1+t)^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)} \|u(t)\|_q < +\infty \tag{4.5}$$

が成り立つ.

定理 4.5
$p > p_F(n)$, $m \in \mathbb{N}$ とする．さらに, $\varphi \in \left(L^1_m \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$ を $\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_\infty \le \varepsilon_0$ なるものとし, $u \in X$ を命題 4.4 で与えられる (P) の時間大域解とする．このとき, $u \in C\left([0,+\infty); L^1_m(\mathbb{R}^n)\right)$ である．さらに, ある $C_m > 0$ が存在し, 任意の $t \ge 0$ に対して,

$$\sum_{|\alpha|=m} \|x^\alpha u(t)\|_1 \le C_m \left(1 + t^{\frac{m}{2}}\right) \tag{4.6}$$

が成り立つ.

定理 4.6
$p > p_F(n)$ とする．さらに, $\varphi \in \left(L^1 \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$ を $\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_\infty \le \varepsilon_0$ なるものとし, $u \in X$ を命題 4.4 で与えられる (P) の時間大域解とする．このとき, 任意の $q \in [1, +\infty]$ に対してある $C_q > 0$ が存在し, 任意の $t > 1$ に対して,

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)} \left\|u(t) - e^{t\Delta}\varphi_1\right\|_q \le \begin{cases} C_q t^{-\sigma} & \text{if} \quad 0 < \sigma < 1, \\ C_q t^{-1} \log(1+t) & \text{if} \quad \sigma = 1, \\ C_q t^{-1} & \text{if} \quad \sigma > 1 \end{cases} \tag{4.7}$$

が成り立つ．但し,

$$\sigma \coloneqq \frac{n}{2}(p-1) - 1 > 0, \qquad \varphi_1 \coloneqq \varphi + \int_0^{+\infty} f(u(s))\, ds \in \left(L^1 \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$$

である．

定理 4.5, 4.6 と熱半群の漸近展開を組み合わせると, (P) の時間大域解の漸近展開を得る．

定理 4.7
$N \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, $p > 1 + (N+3)/n$ とする．さらに, $\varphi \in \left(L^1_{N+1} \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$ を $\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_\infty \le \varepsilon_0$ なるものとし, $u \in X$ を命題 4.4 で与えられる (P) の時間大域解とする. このとき, 任意の $q \in [1, +\infty]$ に対してある $C_q > 0$ が存在し, 任意の $t > 1$ に対して,

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)} \left\|u(t) - \sum_{k=0}^{N} 2^{-k} t^{-\frac{k}{2}} \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \delta_t(\boldsymbol{h}_\alpha G_1)\right\|_q \le \begin{cases} C_q t^{-\frac{1}{2}} & \text{if} \quad N = 0, \\ C_q t^{-1} & \text{if} \quad N \ge 1 \end{cases} \tag{4.8}$$

が成り立つ．但し,

$$\varphi_1 \coloneqq \varphi + \int_0^{+\infty} f(u(s))\, ds, \qquad c_\alpha \coloneqq \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} y^\alpha \varphi_1(y)\, dy$$

である．

注意 4.8
命題 4.4 と定理 4.5 より, $p > 1 + (N+3)/n$ は $\varphi_1 \in L^1_{N+1}(\mathbb{R}^n)$ であるための十分条件である．

注意 4.9
定理 4.5, 4.6, 4.7 において初期値の小ささ, 即ち $\|\varphi\|_1 + \|\varphi\|_\infty \le \varepsilon_0$ なる仮定は本質的でなく, いずれも式 (4.5) を満たす全ての時間大域解 $u \in X$ に対して成立する．しかし, (P) の解は必ずしも式 (4.5) を満たさない．実際, Kawanago [16] は $f(u) = u^p$, $p > p_{\mathrm{F}}(n)$ の場合に, 十分に大きい非負の初期値に対する (P) の解は式 (4.5) を満たさないことを示した．

定理 4.5 と定理 4.7 は, 結果だけに注目すると既に知られているものだが, 前節で述べたように, 我々の新規性はそれらの証明方法にある．また, 定理 4.7 で得た (P) の時間大域解の漸近形 $2^{-k} t^{-k/2} c_\alpha \delta_t(\boldsymbol{h}_\alpha G_1)$ は放物型の自己相似性を持っていることに注意する．しかし, $k \ge 2$ の場合, 漸近形は剰余項よりも (t に関して) 速く減衰するため, 剰余項の減衰評価には改善の余地がある．

5　主定理の証明の概略

各 $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対し, e_j を第 j 成分のみが 1 でその他の成分が全て 0 の多重指数とする.

定理 4.1 の証明の概略

定理の主張を $m \in \mathbb{N}$ に関する命題 $(\mathrm{A})_m$ と見做し, m に関する帰納法で示す. ここでは簡単のため $(\mathrm{A})_1$ と $(\mathrm{A})_2$ のみを示す. まず, $m = 1$ の場合を考える. 仮定と式 (2.2) より $e^{t\Delta}\varphi$, $\partial_j e^{t\Delta} x_j \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であり, 熱半群の積分表示より,

$$\begin{aligned}
\left(e^{t\Delta} x_j \varphi - 2t\partial_j e^{t\Delta}\varphi\right)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y)\, y_j \varphi(y)\, dy - 2t\partial_j \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y)\, \varphi(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y)\, y_j \varphi(y)\, dy + \int_{\mathbb{R}^n} (x_j - y_j)\, G_t(x-y)\, \varphi(y)\, dy \\
&= x_j \int_{\mathbb{R}^n} G_t(x-y)\, \varphi(y)\, dy \\
&= x_j \left(e^{t\Delta}\varphi\right)(x)
\end{aligned}$$

となる. よって, $x_j e^{t\Delta}\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であり,

$$x_j e^{t\Delta}\varphi = e^{t\Delta} x_j \varphi - 2t\partial_j e^{t\Delta}\varphi \tag{5.1}$$

が成り立つ. 次に, $m = 2$ の場合を考える. 仮定と $(\mathrm{A})_1$ より $x_k e^{t\Delta}\varphi$, $x_k e^{t\Delta} x_j \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であり,

$$x_k e^{t\Delta}\varphi = e^{t\Delta} x_k \varphi - 2t\partial_k e^{t\Delta}\varphi, \tag{5.2}$$

$$x_k e^{t\Delta} x_j \varphi = e^{t\Delta} x_j x_k \varphi - 2t\partial_k e^{t\Delta} x_j \varphi \tag{5.3}$$

が成り立つ. 一方, 仮定と式 (2.2) より式 (5.2) の右辺は $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ に属するから $\partial_j\left(x_k e^{t\Delta}\varphi\right) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であり,

$$\partial_j e^{t\Delta} x_k \varphi - 2t\partial_j\partial_k e^{t\Delta}\varphi = \partial_j\left(x_k e^{t\Delta}\varphi\right) = x_k \partial_j e^{t\Delta}\varphi + \delta_{jk} e^{t\Delta}\varphi \tag{5.4}$$

が成り立つ. よって, $x_k \partial_j e^{t\Delta}\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ であり, 式 (5.1), (5.3), (5.4) より,

$$\begin{aligned}
x_j x_k e^{t\Delta}\varphi &= x_k e^{t\Delta} x_j \varphi - 2t x_k \partial_j e^{t\Delta}\varphi \\
&= e^{t\Delta} x_j x_k \varphi - 2t\partial_k e^{t\Delta} x_j \varphi - 2t\partial_j e^{t\Delta} x_k \varphi + 4t^2 \partial_j\partial_k e^{t\Delta}\varphi + 2t\delta_{jk} e^{t\Delta}\varphi
\end{aligned}$$

となる. 特に, $x_j x_k e^{t\Delta}\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ である. 同様にして $(\mathrm{A})_m \Rightarrow (\mathrm{A})_{m+1}$ が成り立つことも示せる. 形式的には, $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $|\alpha| = m$ とすると,

$$\begin{aligned}
x_j x^\alpha e^{t\Delta}\varphi &= x_j e^{t\Delta} x^\alpha \varphi + x_j R_\alpha(t)\, \varphi \\
&= e^{t\Delta} x_j x^\alpha \varphi - 2t\partial_j e^{t\Delta} x^\alpha \varphi + x_j R_\alpha(t)\, \varphi
\end{aligned}$$

となるから, この等式が $L^1(\mathbb{R}^n)$ で意味を持ち, 最右辺の第二項と第三項が $R_{\alpha+e_j}(t)\, \varphi$ の形で表せることを示せばよい. □

定理 4.2 は, 定理 4.1 で得た等式の L^1 ノルムを式 (2.2) と Hölder の不等式を用いて評価することで得られる. その際, 各々の和の範囲に注意して Hölder の不等式を適用する.

定理 4.5 の証明の概略を述べる前に, 次の補題を準備する.

補題 5.1
$w \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき, 任意の $t > 0$ に対して,

$$\left\| we^{t\Delta}\varphi - e^{t\Delta}w\varphi \right\|_1 \leq \left(\|\Delta w\|_\infty t + \|\nabla w\|_\infty \|\nabla G_1\|_1 t^{\frac{1}{2}} \right) \|\varphi\|_1 \tag{5.5}$$

が成り立つ.

この補題は, 等式

$$\begin{aligned} we^{t\Delta}\varphi - e^{t\Delta}w\varphi &= \int_0^t \frac{d}{ds}\left(e^{(t-s)\Delta} we^{s\Delta}\varphi \right) ds \\ &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\left(-\Delta\left(we^{s\Delta}\varphi \right) + w\Delta e^{s\Delta}\varphi \right) ds \\ &= \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\left(-\Delta we^{s\Delta}\varphi - 2\nabla w \cdot \nabla e^{s\Delta}\varphi \right) ds \end{aligned}$$

の L^1 ノルムを式 (2.2) と Hölder の不等式を用いて評価することで得られる.

定理 4.5 の証明の概略
定理の主張を $m \in \mathbb{N}$ に関する命題 $(\mathrm{B})_m$ と見做し, m に関する帰納法で示す．ここでは, $(\mathrm{B})_m \Rightarrow (\mathrm{B})_{m+1}$ の証明の概略を説明する．そこで, ある $m \in \mathbb{N}$ に対して $(\mathrm{B})_m$ が成り立つと仮定し, $\varphi \in L^1_{m+1}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha' \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, $|\alpha'| = m+1$ とする．このとき, $|\alpha| = m$ なる $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 及びある $j \in \{1, \ldots, n\}$ が存在し, $\alpha' = \alpha + e_j$ と表される．また, $f(u) \in C\left([0, +\infty); L^1_m(\mathbb{R}^n)\right)$ である．次に, $\varepsilon \in (0, 1)$ を任意に取り, 函数 $w_{j,\varepsilon} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を,

$$w_{j,\varepsilon}(x) \coloneqq x_j e^{-\varepsilon|x|^2}, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

と定義する．このとき, $w_{j,\varepsilon} \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ であり,

$$\|\nabla w_{j,\varepsilon}\|_\infty \leq 2, \qquad \|\Delta w_{j,\varepsilon}\|_\infty \leq 2(n+4)\varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

と評価される．さらに, 補題 5.1 より任意の $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $t > 0$ に対して,

$$\left\| w_{j,\varepsilon}e^{t\Delta}\psi - e^{t\Delta}w_{j,\varepsilon}\psi \right\|_1 \leq 2\left((n+4)\varepsilon^{\frac{1}{2}}t + \|\nabla G_1\|_1 t^{\frac{1}{2}} \right) \|\psi\|_1 \tag{5.6}$$

が成り立つ．以上の準備の下, 各 $t > 0$ に対して $\|w_{j,\varepsilon}x^\alpha u(t)\|_1$ の ε に関する一様評価を導出する．そのために, 積分方程式 (I) の両辺に $w_{j,\varepsilon}x^\alpha$ を掛け, 定理 4.1 を用いて,

$$\begin{aligned} w_{j,\varepsilon}x^\alpha u(t) &= w_{j,\varepsilon}x^\alpha e^{t\Delta}\varphi + \int_0^t w_{j,\varepsilon}x^\alpha e^{(t-s)\Delta} f(u(s))\, ds \\ &= w_{j,\varepsilon}e^{t\Delta}x^\alpha\varphi + w_{j,\varepsilon}R_\alpha(t)\varphi \\ &\quad + \int_0^t \left(w_{j,\varepsilon}e^{(t-s)\Delta}x^\alpha f(u(s)) - e^{(t-s)\Delta}w_{j,\varepsilon}x^\alpha f(u(s)) \right) ds \\ &\quad + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}w_{j,\varepsilon}x^\alpha f(u(s))\, ds + \int_0^t w_{j,\varepsilon}R_\alpha(t-s) f(u(s))\, ds \end{aligned}$$

と分解する．任意の $\tau > 0$, $\psi \in L^1_m(\mathbb{R}^n)$ に対して $x_j R_\alpha(\tau)\psi$ は $R_{\alpha'}(\tau)\psi$ の一部として表され, 定理 4.1, 4.2 (注意 4.3 も参照) より,

$$\begin{aligned} \|w_{j,\varepsilon}R_\alpha(\tau)\psi\|_1 &\leq \|x_j R_\alpha(\tau)\psi\|_1 \\ &\leq C\tau^{\frac{1}{2}} \left\| |x|^m \psi \right\|_1 + C\left(\tau^{\frac{1}{2}} + \tau^{\frac{m+1}{2}} \right) \|\psi\|_1 \end{aligned}$$

と評価されることに注意すると, 帰納法の仮定 $(\mathrm{B})_m$ と式 (4.5), (5.6) より,

$$\|w_{j,\varepsilon}x^{\alpha}u(t)\|_1 \le C\left(1+t^{\frac{m+1}{2}}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}t^{\frac{m}{2}+1}\right)+C\int_0^t (1+s)^{-\frac{n}{2}(p-1)}\|w_{j,\varepsilon}x^{\alpha}u(s)\|_1\,ds$$

となる. 但し, C は t 及び ε に依存しない正定数である. よって, Grönwall の補題より,

$$\|w_{j,\varepsilon}x^{\alpha}u(t)\|_1 \le C\left(1+t^{\frac{m+1}{2}}+\varepsilon^{\frac{1}{2}}t^{\frac{m}{2}+1}\right) \tag{5.7}$$

と評価され, $\varepsilon \searrow 0$ とすると Fatou の補題より $x^{\alpha'}u(t)=x_jx^{\alpha}u(t)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ が従う. さらに, 積分方程式 (I) より $x^{\alpha'}u\in C\left([0,+\infty);L^1(\mathbb{R}^n)\right)$ が導かれる. また, 式 (5.7) において $\varepsilon\searrow 0$ とすれば, 求める不等式を得る. □

定理 4.6 は, 積分方程式 (I) を用いた分解

$$\begin{aligned}
&u(t)-e^{t\Delta}\varphi_1\\
&\quad=\int_0^{t/2}\left(e^{(t-s)\Delta}-e^{t\Delta}\right)f(u(s))\,ds+\int_{t/2}^t e^{(t-s)\Delta}f(u(s))\,ds-e^{t\Delta}\int_{t/2}^{+\infty}f(u(s))\,ds\\
&\quad=\int_0^{t/2}\int_0^1\frac{d}{d\theta}\left(e^{(t-s\theta)\Delta}f(u(s))\right)d\theta ds+\int_{t/2}^t e^{(t-s)\Delta}f(u(s))\,ds-e^{t\Delta}\int_{t/2}^{+\infty}f(u(s))\,ds\\
&\quad=-\int_0^{t/2}\int_0^1 s\Delta e^{(t-s\theta)\Delta}f(u(s))\,d\theta ds+\int_{t/2}^t e^{(t-s)\Delta}f(u(s))\,ds-e^{t\Delta}\int_{t/2}^{+\infty}f(u(s))\,ds
\end{aligned}$$

において, それぞれの L^1 ノルムを式 (2.2), (4.5), Hölder の不等式を用いて評価することで得られる. 特に, σ に関する場合分けは最右辺の第一項の評価より生じる. 最後に, 定理 4.7 の証明には, 定理 4.6 で得た不等式と $e^{t\Delta}\varphi_1$ の漸近展開を組み合わせればよい.

参考文献

[1] T. Cazenave, F. Dickstein, M. Escobedo, F. B. Weissler, *Self-similar solutions of a nonlinear heat equation*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **8** (2001), no. 3, 501–540.

[2] M. Fila (下條昌彦 記), 非線形熱方程式の爆発問題入門：Marek Fila 氏講義録, 東京大学数理科学レクチャーノート, 10, 2011.

[3] H. Fujita, *On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t=\Delta u+u^{1+\alpha}$*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I, **13** (1966), 109–124.

[4] M. Giga, Y. Giga, J. Saal, "Nonlinear Partial Differential Equations. Asymptotic Behavior of Solutions and Self-similar Solutions", Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 79, Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA, 2010.

[5] A. Gmira, L. Véron, *Large time behaviour of the solutions of a semilinear parabolic equation in $\mathbb{R}^N$*, J. Differential Equations, **53** (1984), no. 2, 258–276.

[6] K. Hayakawa, *On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations*, Proc. Japan Acad., **49** (1973), 503–505.

[7] K. Ishige, M. Ishiwata, T. Kawakami, *The decay of the solutions for the heat equation with a potential*, Indiana Univ. Math. J., **58** (2009), no. 6, 2673–2707.

[8] K. Ishige, T. Kawakami, *Asymptotic behavior of solutions for some semilinear heat equations in* $\mathbb{R}^N$, Commun. Pure Appl. Anal., **8** (2009), no. 4, 1351–1371.

[9] K. Ishige, T. Kawakami, *Refined asymptotic profiles for a semilinear heat equation*, Math. Ann., **353** (2012), no. 1, 161–192.

[10] K. Ishige, T. Kawakami, *Asymptotic expansions of solutions of the Cauchy problem for nonlinear parabolic equations*, J. Anal. Math., **121** (2013), 317–351.

[11] K. Ishige, T. Kawakami, K. Kobayashi, *Global solutions for a nonlinear integral equation with a generalized heat kernel*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S, **7** (2014), no. 4, 767–783.

[12] K. Ishige, T. Kawakami, K. Kobayashi, *Asymptotics for a nonlinear integral equation with a generalized heat kernel*, J. Evol. Equ., **14** (2014), no. 4-5, 749–777.

[13] K. Ishige, T. Kawakami, H. Michihisa, *Asymptotic expansions of solutions of fractional diffusion equations*, SIAM J. Math. Anal., **49** (2017), no. 3, 2167–2190.

[14] T. Kawakami, H. Takeda, *Higher order asymptotic expansions to the solutions for a nonlinear damped wave equation*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., **23** (2016), no. 5, Art. 54, 30 pp.

[15] T. Kawakami, Y. Ueda, *Asymptotic profiles to the solutions for a nonlinear damped wave equation*, Differential Integral Equations, **26** (2013), no. 7-8, 781–814.

[16] T. Kawanago, *Asymptotic behavior of solutions of a semilinear heat equation with subcritical nonlinearity*, Ann. Inst. H. Poincaré C. Anal. Non Linéaire, **13** (1996), no. 1, 1–15.

[17] T. Kawanago, *Existence and behaviour of solutions for* $u_t = \Delta(u^m) + u^l$, Adv. Math. Sci. Appl., **7** (1997), no. 1, 367–400.

[18] K. Kobayashi, T. Sirao, H. Tanaka, *On the growing up problem for semilinear heat equations*, J. Math. Soc. Japan, **29** (1977), no. 3, 407–424.

[19] R. Kusaba, T. Ozawa, *Weighted estimates and large time behavior of small amplitude solutions to the semilinear heat equation*, submitted.

[20] J. Taskinen, *Asymptotical behaviour of a class of semilinear diffusion equations*, J. Evol. Equ., **7** (2007), no. 3, 429–447.

[21] P. Quittner, P. Souplet, "Superlinear Parabolic Problems. Blow-up, Global Existence and Steady States", Second edition, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher, Birkhäuser/Springer, Cham, 2019.

[22] 山口昌哉, 「非線型現象の数学」, 朝倉書店, 2004.

Morrey 空間と Strichartz 評価について

中央大学 理工学部 数学科
野ヶ山徹 (Toru NOGAYAMA)*

概要

Morrey 空間は L^p 空間の 1 つの拡張であり，元々は 2 階楕円型偏微分方程式の解の正則性を研究するために用いられた関数空間である．一方，Schrödinger 方程式の解の解析において重要な評価の 1 つに Strichartz 評価がある．この評価は Morrey 空間をわずかに拡張した関数空間を用いると改良できることが示されている．本講演では，この関数空間の性質と Strichartz 評価との関連について紹介する．

1 導入

Morrey 空間は，1938 年に C.B.Morrey [8] によって 2 階楕円型偏微分方程式の解の局所的な振る舞いを解析するためにその原型となるノルムが導入され，1969 年の Peetre による survey [10] にて現在の形に定式化された．その後，この空間自身の研究のみならず，関数空間として拡張されたり偏微分方程式へ応用されるなど，多くの研究がなされている．Morrey 空間については [11] の本に非常に多くの結果がまとまっている．本講演では，その一般化の 1 つである「Bourgain–Morrey 空間」について紹介する．

ここで，1 つ記号を用意しておく．$\nu \in \mathbb{Z}$，$m = (m_1, m_2, \ldots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ とする．立方体 $Q_{\nu m}$ が

$$Q_{\nu m} \equiv \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{m_j}{2^\nu}, \frac{m_j+1}{2^\nu} \right)$$

と書けているとき，$Q_{\nu m}$ を 2 進立方体という．2 進立方体全体の集合を $\mathcal{D}$ で表し，体積が 2^{-kn} であるような 2 進立方体全体の集合を $\mathcal{D}_k$ で表す．2 進立方体の重要な性質の 1 つとして，$Q, R \in \mathcal{D}$ としたとき，$Q \cap R$ は $\emptyset, Q, R$ のいずれかになることが挙げられる．

まず，Morrey 空間を定義する．パラメータ p, q は $0 < q \leq p < \infty$ を満たすものとする．関数 $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対し，Morrey (quasi-) ノルムを

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} := \sup_{Q \in \mathcal{D}} |Q|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \left(\int_Q |f(y)|^q \mathrm{d}y \right)^{\frac{1}{q}}$$

と定義する．このとき，Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ を $\|f\|_{\mathcal{M}^p_q} < \infty$ となる関数 f 全体の集合とする．

* E-mail: toru.nogayama@gmail.com
本研究は JSPS 科研費 22J00614 の助成を受けたものである．本研究は波多野修也氏（中央大学），澤野嘉宏氏（中央大学），Denny Ivanal Hakim 氏（バンドン工科大学）との共同研究に基づく．

ここで，$q=p$ とすると，$\mathcal{M}^p_p(\mathbb{R}^n)=L^p(\mathbb{R}^n)$ となることに注意しておく．
Morrey 空間には以下のような性質がある．

(1) $1\le q\le p<\infty$ のとき，Banach 空間となる．
(2) $0<q_1<q_2\le p<\infty$ に対し

$$L^p(\mathbb{R}^n)=\mathcal{M}^p_p(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{M}^p_{q_2}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{M}^p_{q_1}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つ．
(3) $0<q<p<\infty$ に対し，$|x|^{-\frac{n}{p}}\in\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)\setminus L^p(\mathbb{R}^n)$ である．
(4) Morrey 空間は反射的でない．つまり，$0<q<p<\infty$ に対し，

$$(\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n))^{**}\neq\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$$

である．
(5) $0<q<p<\infty$ に対し，$L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ や $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ は $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ で稠密でない．

これらのことから，Morrey 空間は Lebesgue 空間の拡張であるにも関わらず，Lebesgue 空間とはかなり違った関数空間であることが分かる．一方で，2 つのパラメータ p,q はそれぞれある種の可積分性を表している．埋め込みの関係と定義から p は大域的な，q は局所的な可積分性をそれぞれ表していることが分かる．

次に，Morrey 空間の 1 つの一般化である Bourgain–Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ を定義する．この一般化のために Morrey ノルムのどの部分に注目するかというと，2 進立方体全体について上限を取る点である．この上限を

$$\sup_{Q\in\mathcal{D}}\quad\Longrightarrow\quad\sup_{\nu\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^n}$$

と書き直してみる．すると，これは立方体の列 $\{Q_{\nu m}\}_{\nu\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^n}$ の ℓ^∞ ノルムを取っていると見なすこともできる．そこで，この部分を ℓ^r ノルムに一般化することを考える．

Definition 1.1. パラメータ p,q,r を $0<q\le p<\infty$，$0<r\le\infty$ を満たすものとする．このとき，関数 $f\in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ に対し，(quasi-) ノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}$ を

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}=\left\|\left\{|Q_{\nu m}|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\left(\int_{Q_{\nu m}}|f(y)|^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}\right\}_{\nu\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{Z}^n}\right\|_{\ell^r}$$

と定義する．そして，$\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}}<\infty$ を満たす関数 f 全体の集合を $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ で表し，Bourgain–Morrey 空間と呼ぶ．

実はこの関数空間は 1990 年頃に Bourgain[2] により，その原型となるものが導入されている．このときは，Fourier 制限問題の考察のために用いられている．その後もこの関数空間が現れる研究はいくつかあり，その都度，少しずつ性質が明らかにされていった．しかし，関数空間自身に着目した研究はおそらくなく，制限問題や偏微分方程式，特に分散型方程式の解析へ応用するために用いられている．そこでこの関数空間自身の性質を調和解析，実解析的な側面から研究し，応用の更なる進展につなげようというのが，本研究に至った動機である．

結果について述べる前に，Bourgain–Morrey 空間が用いられている主な先行研究を紹介する．

(1) Stein–Thomas (Strichartz) 評価との関連

Bourgain [2] や Moyua, Vargas, Vega [9] らはこの関数空間を Stein–Thomas 評価の改良に用いている．特に，$\mathcal{M}^2_{p,4}$ $(p \geq 12/7)$ を用いているのだが，これは L^2 空間よりも広い関数空間である．[*1]（包含関係については 2.2 節を参照．）もう少し詳しく述べると，Moyua, Vargas, Vega は振動積分

$$\widehat{f\mathrm{d}\sigma}(\xi,\xi_3) = \int_{\{x\in\mathbb{R}^2:|x|\leq 1\}} e^{-2\pi i(x\cdot\xi+\Phi(x)\xi_3)} f(x)\mathrm{d}x, \quad (\xi,\xi_3)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}. \tag{1}$$

についての評価を考察している．ここで相関数 Φ には楕円型条件を課している．つまり，

$$\det\left(\mathrm{Hess}(\Phi)\right) > 1,$$

を満たす $\Phi \in C^\infty(\{x\in\mathbb{R}^2 : |x| < 2\})$ を扱っている．このとき，彼らは次の評価を得た：可測集合 $\Omega \subset \{x\in\mathbb{R}^2 : |x|\leq 1\}$ に対して，

$$\|\widehat{\chi_\Omega \mathrm{d}\sigma}\|_{L^4(\mathbb{R}^3)} \leq C\|\chi_\Omega\|_{\mathcal{M}^2_{p,4}}, \quad p \geq 4(\sqrt{2}-1) \tag{2}$$

が成り立つ．さらに，この p の条件が sharp であることも示している．(2) の評価はある可測集合の特性関数に対するものであるが，実は一般の関数に対してもこの評価を示すことできる（[9, Theorem 4.2]）．しかし，そのときは $p \geq 12/7$ という制限が付く．

(2) 分散型方程式との関連

さらに Moyua, Vargas, Vega は上で得た評価を応用して，次の分散型方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u = (-\Delta)^{\frac{a}{2}} u, & (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2, \quad a>0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^2, \end{cases} \tag{3}$$

の解の初期値への a.e. 収束性についても考察している．特に，(3) の解は

$$e^{it(-\Delta)^{\frac{a}{2}}} u_0(x) = u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi - it|\xi|^a}\widehat{u_0}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

と書けるので，(1) の典型例になっていることが分かる．

Merle と Vega は [7] において，(2) の評価を少し改良して，$p \geq 12/7$ に対して

$$\|e^{it(-\Delta)}u_0\|_{L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)} \leq C_0 \min\{\|u_0\|_{\mathcal{M}^2_{p,4}}, \|\widehat{u_0}\|_{\mathcal{M}^2_{p,4}}\}$$

という評価を示した．この評価を使うと，2 次元の非線形 Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u = i(\Delta u \pm |u|^2 u), & (t,x)\in(0,\infty)\times\mathbb{R}^2, \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^2 \end{cases}$$

に対して，初期値 u_0 が

$$\min\{\|u_0\|_{\mathcal{M}^2_{p,4}}, \|\widehat{u_0}\|_{\mathcal{M}^2_{p,4}}\} \leq \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

を満たすような時間大域解 $u \in L^4(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2)$ を構成することができる．さらに，大きい L^4 ノルムを持つ自由解の列に対するコンパクト性についても考察している．

[*1] 彼らは $\mathcal{M}^2_{p,4}$ の代わりに X_p という記号を使用している．

Bégout と Vargas は [1] において，次の非線形 Schrödinger 方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \gamma |u|^{\frac{4}{n}} u = 0, & (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{4}$$

を考察した．ここで，$\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は与えられたパラメータである．彼らは (4) の解の集中現象を解析するために，$\mathcal{M}^2_{p,\frac{2(n+2)}{n}}$ を用いて Strichartz 評価の改良を高次元へと拡張した．さらにこの評価を応用し，方程式 (4) の小さな初期値に対する時間大域解を構成した．

(3) 散乱理論との関連

Masaki は [4] において次の Schrödinger 方程式を扱っている：

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = -|u|^{2\alpha} u, & (t,x) \in I \times \mathbb{R}^n, \\ u(t_0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{5}$$

ここで，$I \subset \mathbb{R}$ は区間であり，$t_0 \in I$ とし，$u(t,x) : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ が未知関数である．この論文では mass-subcritical の場合にあたる $\alpha < 2/d$ のときに (5) の解の時間大域的な振る舞いに付随した 2 つの最小化問題を導入した．一般論として，偏微分方程式を研究する際には Sobolev 空間 H^s や重み付き L^2 空間などの関数空間は非常に扱いやすい．しかし，この最小化問題を考えるときには，上述のような L^2 空間をベースにした関数空間では問題を上手く解析できないことが分かっている．そこでその代替として，局所的に L^2 の性質を持ちながらも，大域的には可積分性をずらすことができる Bourgain–Morrey 空間を利用している．他にも，Masaki と Segata（[5, 6]）により，Bourgain–Morrey 空間は KdV 方程式や Airy 方程式などの各偏微分方程式に対応する Strichartz 評価の改良にも用いられている．

2 Bourgain–Morrey 空間の性質

2.1 基本的な性質と例

まず，Bourgain–Morrey 空間同士の埋め込みについて考察する．$r_1 \le r_2$ のとき，数列空間の埋め込み $\ell^{r_1} \subseteq \ell^{r_2}$ が成り立つことに注意すると，次の埋め込みが成り立つ．

Lemma 2.1. $0 < q \le p < r_1 \le r_2 \le \infty$ とすると，$\mathcal{M}^p_{q,r_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^p_{q,r_2}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．

また，Morrey 空間と同様に，パラメータ q についても埋め込みが成り立つ．

Lemma 2.2. $0 < q_2 \le q_1 \le p < r \le \infty$ とすると，$\mathcal{M}^p_{q_1,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^p_{q_2,r}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．

Lemma 2.1 と Lemma 2.2 から，次のような関係になっていることが分かる（ここでは $\mathbb{R}^n$ を省略する）：

$$\begin{array}{ccccccccc} L^p & = & \mathcal{M}^p_p & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_1} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_2} & \hookrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathcal{M}^p_{p,r_2} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_1,r_2} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_2,r_2} & \hookrightarrow & \cdots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathcal{M}^p_{p,r_1} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_1,r_1} & \hookrightarrow & \mathcal{M}^p_{q_2,r_1} & \hookrightarrow & \cdots \end{array}$$

この図から，Bourgain–Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ は Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ の部分集合となることは分かるのだが，どのくらい違いがあるのだろうか．

Example 2.3. $0 < q < p < r < \infty$ とする．このとき，$f(x) = |x|^{-\frac{n}{p}} \notin \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ である．

冒頭で述べたように, $|x|^{-\frac{n}{p}} \in \mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ であったので, Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ と Bourgain–Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ の間の包含は真の包含であることがわかる．

一方で，上の表からは Lebesgue 空間と Bourgain–Morrey 空間との間の包含関係はほとんど分からない．中には，Lebesgue 空間の方が広いものもあるように見える．しかし，次の定理が示すように，そのような空間は自明な元しか持たないことがわかる．

Theorem 2.4. $0 < q \le p < \infty$，$0 < r \le \infty$ とする．このとき，$\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n) \neq \{0\}$ であるための必要十分条件は $0 < q < p < r < \infty$ となるか，$0 < q \le p < r = \infty$ となることである．

では，Lebesgue 空間との包含関係はどのようになっているのか．これは次の補間不等式を経由することで考察できる．

2.2 補間不等式

Bégout, Vargas [1] や Masaki, Segata [5] らによって，以下のような補間不等式が示されている．

Theorem 2.5 ([1, Theorem 1.3], [5, Proposition A.1])**.** $0 < q < p < r < \infty$ とし，$\theta = \dfrac{p}{r}$ とする．もし，パラメータ s が

$$\frac{1-\theta}{s} + \frac{\theta}{p} < \frac{1}{q}, \quad s \le p$$

を満たしているとすると，

$$\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \le C\|f\|^{1-\theta}_{\mathcal{M}^p_s}\|f\|^{\theta}_{L^p} \tag{6}$$

が成り立つ．特に，$L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ が成り立つ．

では，Lebesgue 空間と Bourgain–Morrey 空間の間の包含関係が分かったところで，そこにはどの程度違いがあるのだろうか．次の例から，その包含が真であることが分かる．

Example 2.6. $0 < q < p < r < \infty$, $ap < 1 < ar$ とする．このとき

$$g(x) = |x|^{-\frac{n}{p}}(\log(|x|^{-1}))^{-a}\chi_{[0,1/2n]}(|x|) \in \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n) \setminus L^p(\mathbb{R}^n)$$

である．

3 Bourgain–Morrey 空間における積分作用素の有界性

新たに関数空間を定義した際に，いくつかの積分作用素の有界性を考察することは 1 つの重要な問題である．その中でも特に，Hardy–Littlewood の極大作用素の有界性はそのほかの作用素の有界性にも関わる重要な問題である．ここでは，Hardy–Littlewood の極大作用素について得られた結果を紹介する．

まず，Hardy–Littlewood の極大作用素とは，可測関数 f に対して，

$$Mf(x) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \frac{\chi_Q(x)}{|Q|} \int_Q |f(y)| \mathrm{d}y$$

と定義される作用素 M のことである．ここで，$\mathcal{Q}$ は立方体全体の集合を表し，上限は立方体全体に関して取ることとする．

Bourgain–Morrey 空間における M の有界性は以下の通りである．

Theorem 3.1 ([3, Lemma 4.1])**.** $1 < q \leq p < r \leq \infty$ とする．このとき，*Hardy-Littlewood* の極大作用素 M は $\mathcal{M}^p_{q,r}$ 上で有界である．つまり，以下の不等式が成り立つ：ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|Mf\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \leq C\|f\|_{\mathcal{M}^p_{q,r}} \quad (f \in \mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)).$$

Remark 3.2. この結果を利用することで，分数べき積分作用素や特異積分作用素などの積分作用素の有界性，また，Fefferman–Stein のベクトル値不等式などの結果も得ることができるが，ここでは注意のみにして詳しい結果については省略する．

4 Morrey 空間との違い

この節では，Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ と Bourgain–Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)(r < \infty)$ の違いを稠密性と双対性の観点から紹介する．

4.1 稠密性

冒頭に述べた性質 (5) から，Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ において，$C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ や $L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ は稠密でないことが知られている．そのため，例えば特異積分作用素などの作用素を近似によって $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ 上に定義することができず，定義の仕方を工夫しなければならない．一方で，Bourgain–Morrey 空間では，これらの空間が稠密であることを示すことができる．

Proposition 4.1 ([3, Corollary 2.21])**.** $0 < q < p < r < \infty$ とすると，$L^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ や $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ は $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ において稠密である．

4.2 反射性，回帰性

冒頭の性質 (4) から，Morrey 空間 $\mathcal{M}^p_q(\mathbb{R}^n)$ は反射的でないことが知られている．（例えば，[11, Section 9] を参照.）では，Bourgain–Morrey 空間ではどうなのだろうか．実はこれについてはパラメータを少し制限すれば，肯定的な結果が得られる．

Theorem 4.2 ([3, Theorem 5.5])**.** $1 < q < p < r < \infty$ であるとき $\mathcal{M}^p_{q,r}$ は反射的である．つまり，

$$(\mathcal{M}^p_{q,r})^{**} = \mathcal{M}^p_{q,r}$$

が成り立つ．

もちろん，Morrey 空間と Bourgain–Morrey 空間の違いは $r=\infty$ であるか $r<\infty$ であるかのみである．つまり，上限 sup が関係しているかどうかである．これは L^∞ が反射的ではないことと類似している．

Remark 4.3. Theorem 4.2 を証明するため，今回は $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ の双対空間を特定した．実は [4] において，Bourgain–Morrey 空間の前双対について考察がなされている．ここで，Banach 空間 B_1, B_2 に対して，$(B_1)^* = B_2$ となるとき，B_1 を B_2 の前双対という．つまり，[4] において考察された前双対が，今回特定した $\mathcal{M}^p_{q,r}(\mathbb{R}^n)$ の双対空間と一致するため，反射性が示せる．

参考文献

[1] P. Bégout and A. Vargas, *Mass concentration phenomena for the L^2-critical nonlinear Schrödinger equation*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 11, 5257–5282.

[2] J. Bourgain, *On the restriction and multiplier problems in $\mathbb{R}^3$*, Geometric aspects of functional analysis (1989–90), Lecture Notes in Math., vol. 1469, Springer, Berlin, 1991, 179–191.

[3] N. Hatano, T. Nogayama, Y. Sawano, D. I. Hakim, *Bourgain-Morrey spaces and their applications to boundedness of operators*, Journal of Functional Analysis, Vol.284,109720, 52pp, 2023.

[4] S. Masaki, *Two minimization problems on non-scattering solutions to mass-subcritical nonlinear Schrödinger equation*, Preprint arXiv:1605.09234

[5] S. Masaki and J. Segata, *Existence of a minimal non-scattering solution to the mass-subcritical generalized Korteweg–de Vries equation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **35** (2018), no. 2, 283–326.

[6] S. Masaki and J. Segata, *Refinement of Strichartz estimates for Airy equation in nondiagonal case and its application*, SIAM J. Math. Anal. **50** (2018), no. 3, 2839–2866.

[7] F. Merle and L. Vega, *Compactness at blow-up time for L^2 solutions of the critical nonlinear Schrödinger equation in 2D*, Internat. Math. Res. Notices (1998), no. 8, 399–425.

[8] C. B. Morrey Jr., *On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **43** (1938), no. 1, 126–166.

[9] A. Moyua, A. Vargas and L. Vega, *Restriction theorems and maximal operators related to oscillatory integrals in $\mathbb{R}^n$*, Duke Math. J. **96** (1999), no. 3, 547–574.

[10] J. Peetre, *On the theory of $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ spaces*, J. Funct. Anal. **4** (1969), 71–87.

[11] Y. Sawano, G. Di Fazio and D.I. Hakim, *Morrey spaces. Introduction and Applications to Integral Operators and PDE's. Vol. I and II.* Monographs and Research Notes in Mathematics. Chapman & Hall CRC Press, Boca Raton, FL, 2020.

2 層ニューラルネットワークの大域的普遍近似定理

中央大学 理工学研究科 数学専攻
波多野修也 (Naoya HATANO)

概要

機械学習においてニューラルネットワークの普遍性定理がよく知られている．ニューラルネットワークとは, 脳神経を数理モデルとして定式化したものとして導入された．また, ニューラルネットワークによってコンパクト集合上で連続関数を近似できることを普遍近似定理と呼ばれ, よく知られている．そこで, 本研究では関数空間の言葉で置き換えることで, 定義域の取り方に依存しない大域的なものに拡張した．

1 導入

すべての連続関数は

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \sigma(a_i x + b_i), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

の形の関数で近似できることがよく考えられている．ここで, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を活性化関数と呼ばれている．活性化関数は以下のようなものがよく考えられている．

例 1.1. $\sigma(t) = \dfrac{1}{1+e^{-t}}$, $\mathrm{ReLU}(t)$, $\chi_{[0,\infty)}(t)$, etc.

$$\mathrm{ReLU}(t) := \max(0,t) = \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \chi_{[0,\infty)}(t) := \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

さらに, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$\lim_{t \to \pm\infty} \sigma(t) = c_{\pm\infty} < \infty \text{ は収束する}, \quad c_{\infty} \neq c_{-\infty}$$

を満たす時, σ を sigmoidal という．

関数 (1) の族をニューラルネットワークと呼ばれている．

定義 1.2 (ニューラルネットワーク)**.** $\Omega \subset \mathbb{R}$ とする．活性化関数 $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し, Ω 上の関数の族を

$$H_\sigma(\Omega) := \left\{ \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \sigma(a_i \cdot + b_i) \,:\, r \in \mathbb{N},\, a_i \neq 0, b_i, c_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

とする．

局所的には近似が可能であることが従来の普遍近似定理である．

定理 1.3 (Cybenko [1] and Funahashi [2], 1989)**.** $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続かつ sigmoidal または ReLU とする．任意の $f \in \mathrm{C}([0,1])$ と $\varepsilon > 0$ に対して，ある $g \in H_\sigma([0,1])$ が存在して

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

を満たす．すなわち，$H_\sigma([0,1])$ は $(\mathrm{C}([0,1]), \|\cdot\|_{\mathrm{C}([0,1])})$ に稠密である．ただし，

$$\|f\|_{\mathrm{C}([0,1])} := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

である．

本研究では, この結果を大域的な場合に拡張した.

2 主結果

それぞれの活性化関数について, 主結果を述べる.

関数空間

$$\mathrm{BUC}(\mathbb{R}) := \{f \,:\, f \text{ は有界かつ一様連続な関数 }\}$$

にはノルム

$$\|f\|_{\mathrm{BUC}} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

が備わっている．このとき, σ が sigmoidal の場合は以下のように述べられる.

定理 2.1 (N.-Ikeda-Ishikawa-Sawano)**.** $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を連続かつ sigmoidal とする．このとき，$(\mathrm{BUC}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathrm{BUC}})$ で $H_\sigma(\mathbb{R})$ は閉部分空間

$$\mathfrak{X}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}) \,:\, \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = f(\pm\infty) < \infty \text{ は収束する} \right\}$$

に稠密である.

さらに, 関数空間

$$\mathcal{Y}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}) \,:\, \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{1+|x|} < \infty \text{ は収束} \right\}$$

にはノルム

$$\|f\|_{\mathcal{Y}} := \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+|x|}$$

が備わっている．このとき, σ が ReLU の場合は以下のように述べられる.

定理 2.2 (N.-Ikeda-Ishikawa-Sawano, [3])**.** $H_{\mathrm{ReLU}}(\mathbb{R})$ は $(\mathcal{Y}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ に稠密である.

最後に, 関数空間

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) := \{f \,:\, f \text{ は右連続かつ左極限をもつ }\}$$

には, ノルム

$$\|f\|_{\mathcal{C}} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$$

が備わっている．このとき, σ が Heaviside 関数 $\chi_{[0,\infty)}$ の場合は以下のように述べられる.

定理 2.3 (N.-Ikeda-Ishikawa-Sawano)**.** $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}})$ で $H_{\chi_{[0,\infty)}}(\mathbb{R})$ は閉部分空間

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \,:\, \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = f(\pm\infty) < \infty \text{ は収束する} \right\}$$

に稠密である.

3 補足

本講演では, 定理 2.2 の証明のみを紹介する. 証明のアイデアは以下の補題による関数空間 $\mathcal{Y}(\mathbb{R})$ の言い換え後, 双対性を用いる.

補題 3.1. 写像 $\mathcal{Y}(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \dfrac{f}{1+|\cdot|} \in \mathrm{BC}(\overline{\mathbb{R}})$ により, 関数空間 $\mathcal{Y}(\mathbb{R})$ と $\mathrm{BC}(\overline{\mathbb{R}})$ は同相となる. ただし, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ とする.

線形汎関数がニューラルネットワークの上で消滅していると仮定して, 全空間でも消滅していることを示すことで Hahn-Banach の定理から稠密性が証明できるという点は Cybenko や Funahashi によるアイデアによるものだが, それに加え, 上補題を用いた無限遠方での制御を行うことで本研究成果が得られた.

注意 3.2. それぞれの普遍近似定理定理の比較:

(1) ノルム評価

$$\|f\|_{\mathrm{C}([0,1])} \le \|f\|_{\mathrm{BUC}}, \quad \|f\|_{\mathrm{C}([0,1])} \le 2\|f\|_{\mathcal{Y}}$$

が成り立っているため, 定理 2.1 と定理 2.2 は単に定義域を制限することで *Cybenko, Funahashi* の結果, 定理 1.3 が再現できる.

(2) 定理 2.1 は活性化関数 σ の取り方によらず, 閉部分空間 $\mathfrak{X}(\mathbb{R})$ に稠密である.

(3) $\sigma_0(t) := \mathrm{ReLU}(t) - \mathrm{ReLU}(t-1)$ は sigmoidal な連続関数であり,

$$\sigma_0 \in H_{\mathrm{ReLU}}(\mathbb{R})$$

が成り立っているため, 活性化関数を ReLU とした方が sigmoidal のときよりも多くの関数を近似できる. さらに定理 2.2 の証明によると, $\mathrm{C_c}(\mathbb{R}) \cup \{\sigma_0, \sigma_0(-\cdot)\}$ は $\mathcal{Y}(\mathbb{R})$ に稠密であることもわかる. ただし, $\mathrm{C_c}(\mathbb{R})$ はコンパクト台を持つ連続関数全体とする.

(4) $\sigma_\varepsilon(t) := \mathrm{ReLU}(t+\varepsilon) - \mathrm{ReLU}(t)$, $\varepsilon > 0$ は sigmoidal な連続関数であり,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sigma_\varepsilon = \chi_{[0,\infty)} \in H_{\chi_{[0,\infty)}}(\mathbb{R})$$

が成り立っているため, 活性化関数を $\chi_{[0,\infty)}$ とした方が sigmoidal のときよりも多くの関数を近似できる.

参考文献

[1] G. Cybenko, Approximation by superpositions of a sigmoidal function, Math. Control Signals Systems (1989) 2:303–314.

[2] K. Funahashi, On the approximate realization of continuous mappings by neural networks, Neural Networks **2**, 183–192.

[3] N. Hatano, M. Ikeda, I. Ishikawa and Y. Sawano, A global universality of two-layer neural networks with ReLU activations, J. Funct. Spaces 2021.

Homological representation of braid groups

千葉大学大学院 融合理工学府
根上春 (Haru NEGAMI)

概要

ブレイド群 B_n は，$n-1$ 個の生成元で生成されブレイド関係式を満たすものである．ブレイド群の表現の分類は完了しておらず，既知の表現から新しい既約表現を得る手法の研究は有用である．本講演では，ブレイド群の既知の表現から新しい表現を得る手法である Long-Moody 構成（LM 構成）について概説したのち，その一般化について述べる．また，一般化された LM 構成の応用例として KZ 型方程式のモノドロミー表現との関連について述べる．

1 導入

1.1 ブレイド群

ブレイド群は 1925 年に E. Artin によって代数的に定義された [1]．そして，1962 年に R. H. Fox により n 点の順序なし配置空間の基本群と同型であることが示された [2]．1969 年には J. Birman により，n 点つき閉円盤の写像類群との同型が示された [3]．このように，ブレイド群には様々な解釈があるため，様々な分野への応用が知られている．その中でもブレイド群の表現の分類は未解決であり，ブレイド群の表現の構成方法の研究は重要である．本稿では，ブレイド群の表現の構成方法である Long-Moody 構成に注目し，その一般化を与え，KZ 型方程式のモノドロミー表現との関連に触れる．

定義 1.1 (Artin のブレイド群 B_n)**.** $n>1$ とする．$n-1$ 個の生成元 $\sigma_1,\cdots,\sigma_{n-1}$ で生成され，以下のブレイド関係式を満たすものを Artin のブレイド群 B_n という．

[BR1] $\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i$ $(|j-i|>1)$

[BR2] $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$ $(i=1,\cdots,n-2)$

定義 1.2 (純ブレイド群 P_n)**.** $\Pi\colon B_n\longrightarrow S_n$ の核を純ブレイド群という．

F_n を $x_1,\cdots,x_n$ で生成される階数 n の自由群とする．

定義 1.3 (F_n のブレイド自己同型群 $\widetilde{B_n}$)**.** $\widetilde{f}$ を F_n の自己同型写像とする．$\widetilde{f}$ が以下を満たすとき，ブレイド自己同型という．

1. ある $\mu\in S_n$ が存在して，すべての $i=1,\cdots,n$ で $\widetilde{f}(x_k)$ が $\widetilde{f}(x_{\mu(k)})$ と F_n で共役．
2. $\widetilde{f}(x_1x_2\cdots x_n)=x_1x_2\cdots x_n$.

定義からわかるようにブレイド自己同型写像の全体は群をなす．これをブレイド自己同型群 $\widetilde{B_n}$ という．そして以下の対応により $\widetilde{B_n}$ は B_n と同型となる．

まず，F_n と B_n の生成元をそれぞれ $x_j, \sigma_i, j = 1, \cdots, n, i = 1, \cdots, n-1$ とするとき，

$$\widetilde{\sigma_i}(x_j) = \begin{cases} x_{i+1} & (j = i) \\ x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1} & (j = i+1) \\ x_j & (j \neq i, i+1) \end{cases}$$

は F_n のブレイド自己同型となる．

このとき，$\sigma_i \mapsto \widetilde{\sigma_i}$ により $\widetilde{B_n}$ は B_n と同型となる．

1.2 Long-Moody 構成

以下，体をひとつ固定し，それを k とする．

Long と Moody [4] は，F_n と B_n の半直積の既知の線形表現から B_n の新しい線形表現を構成する方法（Long-Moody 構成）を与えた．Burau 表現 [5] や，純ブレイド群の表現である Gassner 表現，Hecke 環の表現とも関連の深い Lawrence-Krammer-Bigelow 表現などもこの方法を用いて構成出来ることが知られている．

ここで F_n と B_n の半直積は次の関係式で入れるものとする．F_n と B_n の生成元をそれぞれ $x_j, \sigma_i, j = 1, \cdots, n, i = 1, \cdots, n-1$ とするとき，

$$\sigma_i x_j \sigma_i^{-1} = \begin{cases} x_{i+1} & (j = i) \\ x_{i+1}^{-1} x_i x_{i+1} & (j = i+1) \\ x_j & (j \neq i, i+1) \end{cases} .$$

定理 1.4 (Long-Moody 構成)**.** V を有限次元ベクトル空間とする．

$$\rho \colon F_n \rtimes B_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

に対して，

$$\widetilde{\rho} \colon B_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V^{\oplus n})$$

を構成できる．

1.3 KZ 型方程式

定義 1.5 (KZ 型方程式)**.** $n > 1$, N を 自然数とし , $z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ とする．

$A_{i,j}$ を $N \times N$ の定数行列とし，以下の常微分方程式の Pfaffian system を KZ 型方程式という．

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_i} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=i+1}^{n} \frac{A_{ij}}{z_i - z_j} \Big) u$$

更に次の可積分条件を課すものとする．

$$[A_{i,j},\ A_{k,l}] = O\ (\{i,j\} \cap \{k,l\} \neq \emptyset)$$

$$[A_{i,j},\ A_{i,k} + A_{j,k}] = O\ (i \neq j, i \neq k, j \neq k)$$

KZ 型方程式の定義域の基本群は純ブレイド群になる．

$Q_n := \{z_1, \cdots, z_n\}$ とし，$\mathbb{C}$ 上の経路 σ_{ij} を, z_i を基点とし，Q_n の点では z_j のみを内部に含むような反時計回りの単純閉曲線とする．そして，この経路に沿った解析接続を σ_{ij*} と書くとする．このとき解析接続 σ_{ij*} に対応するモノドロミー行列は，方程式の解空間を $\mathcal{U}$ とすると，$\sigma_{ij*}\mathcal{U} = \mathcal{U}M_{ij}$ と書ける．

原岡は, この KZ 型方程式のモノドロミー表現 $(M_{ij})_{1\leq i<j\leq n-1}$ から新しいモノドロミー表現 $(N_{ij})_{1\leq i<j\leq n-1}$ を構成する方法を構築した [6]．N_{ij} は M_{ij} の多項式を成分に持つ $n-1 \times n-1$ 行列となる．

2 主結果

2.1 Long-Moody 構成の一般化

廣惠一希氏との共同研究により，Dettweiler-Reiter のコンボリューション [7] により，LM 構成の一般化である，$F_n \rtimes B_n$ の誘導表現を構成する手法を構築した．

定義 2.1 (Dettweiler-Reiter のコンボリューション)**.** V を体を k とする有限次元線形空間とする．

$\lambda \in k^\times, F_n$ の生成元を x_i とする．

与えられた $\rho\colon F_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ に対して，

$$\rho^c_\lambda\colon F_n \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

$$\rho^c_\lambda(x_i) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \lambda(\rho(x_1)-1) & \cdots & \lambda(\rho(x_{i-1})-1) & \lambda\rho(x_i) & \rho(x_{i+1})-1 & \cdots & \rho(x_n)-1 \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

を Dettweiler-Reiter のコンボリューションという．

定理 2.2. V を体を k とする有限次元線形空間とする．x_i を F_n の生成元とし，$\forall B \subseteq B_n$，$\lambda \in k^\times$ とする．このとき，

$$\rho\colon \quad F_n \rtimes B \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

に対して，群準同型 $\widetilde{\rho}^c_\lambda \colon F_n \rtimes B \longrightarrow \mathrm{GL}(V^{\oplus n})$ を次のようにして構成できる．

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho}^c_\lambda(x_i) :=& \rho^c_\lambda(x_i)\\ \widetilde{\rho}^c_\lambda(\sigma_i) :=& \rho(\sigma_i)\end{aligned}$$

2.2 KZ 型方程式との関連

前の章で構成した LM 構成の一般化の応用例を次に示す．原岡によるモノドロミー表現の構成は，KZ 型方程式の定義域の基本群が純ブレイド群であることに注意すると P_n の表現から P_n の誘導表現を構成する方法であるともみなせる．さらに，$P_n \simeq F_{n-1} \rtimes P_{n-1}$ であることから，今回構成した LM 構成の一般化との対応を作ることが出来る．

参考文献

[1] E. Artin. Theorie der zöpfe. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, Vol. 4, No. 1, pp. 47–72, Dec 1925.

[2] R. FOX and L. NEUWIRTH. The braid groups. *Mathematica Scandinavica*, Vol. 10, pp. 119–126, 1962.

[3] J. S. Birman. Mapping class groups and their relationship to braid groups. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. 22, No. 2, pp. 213–238, 1969.

[4] D.D. Long. Constructing representations of braid groups. *Communications in Analysis and Geometry*, Vol. 2, No. 2, pp. 217–238, 1994.

[5] W. Burau. Über zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte verkettungen. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, Vol. 11, No. 1, pp. 179–186, Dec 1935.

[6] Y. Haraoka. Multiplicative middle convolution for kz equations. *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 294, No. 3, pp. 1787–1839, 2020.

[7] M. Dettweiler and S. Reiter. Middle convolution of fuchsian systems and the construction of rigid differential systems. *Journal of Algebra*, Vol. 318, No. 1, pp. 1–24, 2007.

Yetter-Drinfeld データを用いた低次元ホップ・スーパー代数の分類について

岡山理科大学大学院 理学研究科 応用数学専攻
若尾亮太 (Ryota WAKAO)

概要

有限群のように有限次元ホップ代数の分類は盛んに行われている．一方で，有限次元ホップ・スーパー代数の分類は始まって間もない．本講演では，Yetter-Drinfeld データと呼ばれる，ボゾン化のある意味での逆操作を与える対象を考えることにより，ホップ・スーパー代数の研究が可能であることを説明する．特に，10 次元以下のホップ・スーパー代数の完全な分類を与える．

1 ホップ代数

以下で，標数 0 の代数閉体である基礎体 $\Bbbk$ を固定し，$\Bbbk$ 上のテンソル $\otimes_{\Bbbk}$ は $\otimes$ とかく．

1.1 ホップ代数

群 G に対して群環 $\Bbbk G$ は代数だけでなく，ホップ代数の構造をもつ．ここでホップ代数とは次のように与えられる代数系を指す：

定義 1.1. ベクトル空間 H が**ホップ代数**であるとは，代数射たち $m : H \otimes H \to H$ と $u : H \to \Bbbk$ と**余積** $\Delta : H \otimes H \to H$ と**余単位** $\varepsilon : H \to \Bbbk$ が存在して

(1) $m \circ (\mathrm{id}_H \otimes m) = m \circ (m \otimes \mathrm{id}_H)$
(2) $m \circ (\mathrm{id}_H \otimes u) = m \circ (u \otimes \mathrm{id}_H)$
(3) $(\mathrm{id}_H \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta$
(4) $(\mathrm{id}_H \otimes \varepsilon) \circ \Delta = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta$

の 4 条件を満たし，さらに

$$m \circ (S \otimes \mathrm{id}_H) \circ \Delta = u \circ \varepsilon = m \circ (\mathrm{id}_H \otimes S) \circ \Delta$$

を満たすような**対合射**と呼ばれる線型写像 $S : H \to H$ が存在するときをいう．さらに，線形写像 $\mathrm{flip} : H \otimes H \to H \otimes H; a \otimes b \mapsto b \otimes a$ とおく．このとき，ホップ代数 H が**余可換**であるとは $\Delta = \mathrm{flip} \circ \Delta$ が成り立つときをいう．

ホップ代数 H に対して $g.\ell(H) := \{g \in H \mid 0 \neq g, \Delta(g) = g \otimes g\}$ と定義して，この集合の元を **group like 元**という．

命題 1.2. $g.\ell(H)$ は H の積に関して群をなす．

群環 $\Bbbk G$ の場合は $g \in G$ に対して $\Delta(g) = g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$, $S(g) = g^{-1}$ とすることでホップ代数をなす．すぐにしたがうように群環 $\Bbbk G$ に対して，その group like 元全体は $g.\ell(\Bbbk G) = G$ となることがわかる．このことからホップ代数は群環を一般化した対象と思える．

例 1.3. 有限次元ホップ代数 H に対して双対空間 $H^* := \hom(H, \Bbbk)$ に積を $f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta$ とすることで代数をなし，代数射 $\Delta^* : H^* \to H^* \otimes H^*$, $u^* : H^* \to \Bbbk$ を

$$\Delta^*(f) := \sum f_1 \otimes f_2 \quad \text{with} \quad \text{「任意の } a, b \in H \text{ に対して } f(ab) = \sum f_1(a) f_2(b)\text{」}$$

$u : H^* \to \Bbbk; f \mapsto f(1_H)$，対合射 $S^* : H^* \to H^*$ は $a \in H$ に対して $S^*(f)(a) = S(f(a))$ と定義することでホップ代数をなす．

双対 H^* の余積は複雑であるが，group like 元 $g.\ell(H^*)$ は次のように比較的簡単に表すことが出来る．

命題 1.4. 有限次元ホップ代数 H に対して $g.\ell(A^*) = \mathsf{Alg}(A, \Bbbk) := \{ f \in A^* \mid f \text{ は環準同型} \}$ が成立．

群環は余可換なホップ代数をなしたが，次は非余可換なホップ代数をなす．

例 1.5. 自然数 $2 \leq n$ と $\Bbbk$ 上の 1 の原始 n 乗根 ζ_n をとり固定する．$\langle c, x \rangle$ は 2 元 c, x で生成されるような自由代数を表す．このとき

$$T_{n,\zeta_n} := \langle c, x \rangle / (c^n - 1, x^n, cx - \zeta_n xc)$$

上に Δ, ε, S を

$$\Delta(c) = c \otimes c,\ \Delta(x) = x \otimes 1 + c \otimes x, \quad \varepsilon(c) = 1, \varepsilon(x) = 0, \quad S(c) = c^{-1}, S(x) = -c^{-1}x.$$

と定義することで n^2 次元の余可換でないホップ代数をなす．これは **Taft 代数**と呼ばれる．

1.2 Yetter Drinfeld 加群

定義 1.6. H をホップ代数とする．ベクトル空間 V が**左 H-余加群**であるとは，次の 2 条件：

(1) $(\mathrm{id}_H \otimes \rho) \circ \rho = (\Delta \otimes \mathrm{id}_V) \circ \rho$
(2) $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_V) \circ \rho = \varphi$ with $\varphi : V \to \Bbbk \otimes V; v \mapsto 1 \otimes v$: 線型同型射．

が成り立つような線形写像 $\rho : V \to H \otimes V$ が存在するときをいう．この ρ を**余作用**という．左 H-余加群全体と上の条件を保つ射を考えることで，これは圏をなし ${}^H\mathcal{M}$ とかく．

ホップ代数として群環 $\Bbbk G$ が考えられたのだった．この余加群圏に関して，次が知られている．

事実 1.7. 群 G に対して ${}^{\Bbbk G}\mathcal{M}$ の対象全体は G で次数付けられるようなベクトル空間全体と一致する．

このもとで，“Yetter-Drinfeld 加群” という対象は，加群構造と今の余加群構造を両立させるようなものとして定義される．

定義 1.8. ホップ代数 H を固定する．このとき，ベクトル空間 V が **Yetter-Drinfeld 加群**であるとは，作用 $H \otimes V \to V; h \otimes v \mapsto h.v$ と余作用 $\delta : V \to H \otimes V; v \mapsto v_{-1} \otimes v_0$ が存在して，次の両立条件を満たす：

$$\delta(h.v) = h_1 v_{-1} S(h_3) \otimes h_2.v_0 \text{ for } h \in H,\ v \in V.$$

この条件を満たすベクトル空間全体と，両立条件を保つ線型写像を考えることで，これは圏をなす．以下では ${}^H_H\mathcal{YD}$ とかく．

1.3 ボゾン化（bosonization）

${}^H_H\mathcal{YD}$ を考える利点のひとつには，群論における半直積の一般化である “ボゾン化” を考えることができることにある．これは Radford-Majid[R85, Mj94] によってよく研究なされており，Andruskiewitsch-Schneider[AS02] は以下に述べる事実を体系的にまとめている．

事実 1.9. ホップ代数たち A, H を固定する．ホップ代数射たち $\pi : A \to H$ と $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_H$ を満たすような $\iota : A \to H$ が与えられたとき，

$$B := A^{\mathrm{co}(\pi)} := \{a \in A \mid (\mathrm{id}_A \otimes \pi)(\Delta_A(a)) = a \otimes 1_H\}$$

は次の構造で ${}^H_H\mathcal{YD}$ のホップ代数対象となる．

(1) $\Delta_H(h) = h_1 \otimes h_2$ と表示するとき，作用は $h \otimes a \mapsto \iota(h_1)a\iota(S(h_2))$.
(2) 余作用は $a \mapsto (\pi \otimes \mathrm{id}_A)(\Delta_A(a))$.
(3) B は A の部分代数をなす．
(4) $\Delta_A(a) = a_1 \otimes a_2$ と表示するとき，余積 Δ_B は $\Delta_B : B \to B \otimes B; a \mapsto a_1(\iota \circ \pi)(S(a_2)) \otimes a_3$.

他方で，次の操作が考えられる．

定義 1.10. ホップ代数 H と ${}^H_H\mathcal{YD}$ のホップ代数対象 B に対してテンソル積 $B\#H := B \otimes H$ 上に

$$\begin{aligned}(b\#h)(b'\#h') &:= b(h_1.b')\#h_2h' \\ \Delta(b\#h) &:= b^{(1)}\#(b^{(2)})_{-1}h_1 \otimes (b^{(2)})_0\#h_2\end{aligned}$$

と，積と余積を定めることが出来る．

この操作は**ボゾン化**と呼ばれる．ボゾン化に関して，以下の事実が成り立つ：

事実 1.11. この $B\#H$ はホップ代数をなす．さらに B, H が有限次元ならば双対 $(B\#H)^*$ は $B^*\#H^*$ とホップ代数同型になる．

事実 1.12. ホップ代数 H に対して以下には 1 対 1 対応がある．

- ${}^H_H\mathcal{YD}$ 圏のホップ代数対象．
- $H \subset A$ かつ $\pi|_H = \mathrm{id}_H$ を満たすようなホップ代数 A とホップ代数射 $\pi : A \to H$ の組 (A, π).

条件に出てきた π を **split epi** とよぶ．

さて，ホップ代数 H を固定する．ホップ代数全体を対象として，ホップ代数構造を保つ射をもつ圏を Hopf とかく．このとき，上記のことから

$$\mathcal{F}_H : \{{}^H_H\mathcal{YD}\text{のホップ代数対象}\} \longrightarrow \mathsf{Hopf};\ K \longmapsto K\#H.$$

という関手 $\mathcal{F}_H : \{{}^H_H\mathcal{YD}$のホップ代数対象 $\} \to$ Hopf を得たことになる．この $\mathcal{F}_H$ に関して，Hopf を事実 1.9 を満たすものたちに制限することで，これは圏同値となる．つまり ${}^H_H\mathcal{YD}$ のホップ代数対象 B に対して $(B\#H)^{\mathrm{co}(\pi)} \cong B$ が成立する．

2 ホップ・スーパー代数

2.1 ホップ・スーパー代数

スーパーとは, $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ で次数付けられた対象の理論である．通常のベクトル空間の代わりに $\mathbb{Z}_2$-graded ベクトル空間 $V = V_0 \oplus V_1$ を考え，この V を**スーパーベクトル空間**という．各部分空間には名前がついていて V_0 は **even part** と V_1 は **odd part** と呼ばれ，元 $v \in V_0 \cup V_1$ に関して（**斉次元**という）$v \in V_0$ のときは $|v| := 0$, $v \in V_1$ のときは $|v| := 1$ と定め，これを v の **parity** と呼ぶ．スーパーベクトル空間たち全体と $\mathbb{Z}_2$-grading を保つ線型写像を考えることで，圏をなしこれを sVec とかく．またスーパーベクトル空間たち V, W に対して

$$V \otimes W := ((V_0 \otimes W_0) \oplus (V_1 \otimes W_1)) \oplus ((V_1 \otimes W_0) \oplus (V_0 \otimes W_1))$$

と $V \otimes W$ をスーパーベクトル空間とみることで，テンソル圏をなす．さらに次の**スーパー対称性**により対称テンソル圏をなす．

$$V \otimes W \to W \otimes V\,;\, v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v.$$

ここで v, w は斉次元としてとっている．

定義 2.1. スーパーベクトル空間 $V = V_0 \oplus V_1$ が **purely even** であるとは $V_1 = 0$ のときをいう．

ホップ・スーパー代数は圏 sVec を用いて次のように定義される．

定義 2.2. $\mathcal{H}$ が**ホップ・スーパー代数**であるとは $\mathcal{H}$ が sVec のホップ代数対象となるときをいう．

命題 2.3. ホップ・スーパー代数 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ の余積 Δ は $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ とかくとき $\Delta(ab) = \sum (-1)^{|a_{(2)}||b_{(1)}|} a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)}$ を満たす．

2.2 ホップ・スーパー代数の例

ホップスーパー代数の例として，例えば次があげられる：

例 2.4. purely even であるような任意のホップ代数 H は自然にホップ・スーパー代数構造をもつ．

例 2.5. 自然数 n に対して**外積代数** $\bigwedge(\Bbbk^n) := \Bbbk\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle/(x_ix_j + x_jx_i,\, i, j \in \{1, \ldots, n\})$ は次の構造で n^2 次元のホップスーパー代数をなす．

$$\Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i, \quad \varepsilon(x_i) = 0, \quad S(x_i) = -x_i.$$

2.3 スーパーベクトル空間と Yetter-Drinfeld 加群

この節では，ホップ・スーパー代数に対しても §1.3 で紹介したボゾン化が可能であることを確かめる．

命題 2.6. sVec は ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ の full subcategory をなす.

Proof. 事実 1.7 から ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ の対象は少なくとも $\Bbbk\mathbb{Z}_2$ で次数付けられたベクトル空間になることから，対象に関して閉じていることはよい．スーパーベクトル空間 V を固定する．作用 $\Bbbk\mathbb{Z}_2 \otimes V \to V$ と余作用 $\delta : V \to \Bbbk\mathbb{Z}_2 \otimes V$ は $\mathbb{Z}_2 = \langle\sigma\rangle = \{e, \sigma\}$ と勝手な V の元 $v = v_0 + v_1$ with $v_0 \in V_0$, $v_1 \in V_1$ に対して

$$e.v = v,\ \sigma.v := v_0 - v_1, \quad \delta(v_0) = e \otimes v_0,\ \delta(v_1) = \sigma \otimes v_1$$

とすればよい．両立条件が成り立つことを示す．$\Bbbk\mathbb{Z}_2 = \Bbbk e \oplus \Bbbk\sigma$ の余積は $\Delta(\sigma^i) = \sigma^i \otimes \sigma^i$ で対合射は $S(\sigma^i) = \sigma^i$ であることに注意すると次の関係式

$$\delta(\sigma^i.v) = e \otimes v_0 + (-1)^i \sigma \otimes v_1$$

が任意の $v \in V$ に対して成り立てばよい．実際に $v = v_0 + v_1$ with $v_0 \in V_0, v_1 \in V_1$ に対して

$$\begin{aligned}\delta(\sigma^i.v) &= \delta(v_0 + (-1)^i v_1)\\ &= \delta(v_0) + (-1)^i \delta(v_1)\\ &= e \otimes v_0 + (-1)^i \sigma \otimes v_1\end{aligned}$$

となるので両立条件もよい．subcategory をなすことはこれでよく，full subcategory であることは sVec の射は $\mathbb{Z}_2$-次数付けを保つ射であったことからしたがう． □

このことからホップ・スーパー代数 $\mathcal{H}$ に対して事実 1.12 から（通常の）ホップ代数 $\hat{\mathcal{H}}$ を考えることができ，その構造たちは次のように書き下すことが出来る：

$$(a \otimes \sigma^i)(b \otimes \sigma^j) := a(b_0 + (-1)^i b_1) \otimes \sigma^{i+j}, \qquad 1_{\mathcal{H}} \otimes 1_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$$

ただし，$b = b_0 + b_1 \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ と表示しており $1_{\mathcal{H}}, 1_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$ はそれぞれの単位元である．

$$\widehat{\Delta}(a \otimes \sigma^i) := (a_{0(1)} \otimes \sigma^i) \otimes (a_{0(2)} \otimes \sigma^i) + (a_{1(1)} \otimes \sigma^{i+1}) \otimes (a_{1(2)} \otimes \sigma^i), \qquad \varepsilon_{\mathcal{H}} \otimes \varepsilon_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$$

と入れる．ただし，余積を $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ と表示しており $\varepsilon_{\mathcal{H}}, \varepsilon_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}$ はそれぞれの余単位である．これを $\hat{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2$ とかく．さらに対合射は次で与えられる：

$$\hat{S} : \hat{\mathcal{H}} \to \hat{\mathcal{H}}\,;\, a \otimes \sigma^i \mapsto (-1)^{i+1} S(a) \otimes \sigma^{i+|a|}.$$

ここで S は $\mathcal{H}$ の対合射である．

ホップスーパー代数 $\mathcal{H}$ に対して，$g.\ell(\mathcal{H}) = \{0 \neq g \in \mathcal{H}_0 \mid \Delta(g) = g \otimes g\}$ とおく．purely even でない有限次元ホップスーパー代数 $\mathcal{H}$ に対して，そのボゾン化は以下の基本的な性質を満たす：

命題 2.7. 次元に関して $\dim \hat{\mathcal{H}} = 2 \dim \mathcal{H}$ が成立する．

Proof. これは構成から明らかである． □

命題 2.8. 写像 $g.\ell(\mathcal{H}) \times \mathbb{Z}_2 \cong g.\ell(\hat{\mathcal{H}}); (h, \sigma^i) \mapsto h \otimes \sigma^i$ は群同型をなす．

Proof. 元 $h = h_0 + h_1 \in \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$ with $h_0 \in \mathcal{H}_0$, $h_1 \in \mathcal{H}_1$ について．$h \otimes \sigma^i \in g.\ell(\hat{\mathcal{H}})$ を仮定する．まずボゾン化の余積 $\hat{\Delta}$ の定義から $\Bbbk\mathbb{Z}_2$ の元を見ることで $h_1 = 0$ でなくてはならない．つまり

$$\hat{\Delta}(a \otimes \sigma^i) \in \big((\mathcal{H}_0 \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2) \otimes (\mathcal{H}_0 \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2)\big) \oplus \big((\mathcal{H}_1 \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2) \otimes (\mathcal{H}_1 \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2)\big)$$

となる．そこで簡単のため $\Delta(h) = x \otimes y + z \otimes w \in (\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_0) \oplus (\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1)$ と表示する．もし $z \neq 0$ が成り立つときは先の議論と同じように $h \otimes \sigma^i \in g.\ell(\hat{\mathcal{H}})$ に反するので $\Delta(h) = x \otimes y \in \mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H}_0$ の形となる．最初の仮定から，

$$(h \otimes \sigma^i) \otimes (h \otimes \sigma^i) = \hat{\Delta}(h \otimes \sigma^i) = (x \otimes \sigma^i) \otimes (y \otimes \sigma^i)$$

なので $\Delta(h) = h \otimes h$ を強いる．つまり $h \in g.\ell(\mathcal{H})$ となる． □

命題 2.9. ボゾン化 $\hat{\mathcal{H}}$ は非可換かつ非余可換なホップ代数をなす．

Proof. 仮定から $0 \neq x \in \mathcal{H}_1$ なる元がとれる．積のほうは

$$(x \otimes \sigma)(1 \otimes \sigma) = x \otimes e \neq -x \otimes e = (1 \otimes \sigma)(x \otimes \sigma)$$

となり非可換性はよい．余積のほうは $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ と表示すれば

$$\hat{\Delta}(x \otimes \sigma) = (x_{(1)} \otimes e) \otimes (x_{(2)} \otimes \sigma)$$

となり明らかに非余可換となる． □

補題 2.10. ホップ代数 $\Bbbk\mathbb{Z}_2$ と双対 $(\Bbbk\mathbb{Z}_2)^*$ はホップ代数として同型となる．

定理 2.11. ボゾン化 $\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2$ の双対 $(\hat{\mathcal{H}})^*$ は $\mathcal{H}^* \otimes \Bbbk\mathbb{Z}_2$ と同型となる．

さて，ホップ代数 A で事実 1.12 の 2 番目の条件を満たすものを与えれば，A の部分代数として ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ のホップ代数対象を得ることが出来る．ホップ・スーパー代数の分類を行うためには，対応で得られる $B \in {}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ がホップ・スーパー代数とみなすことができる，つまり次の条件：

$$B \in {}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD} \iff B \in \mathsf{sVec}.$$

が満たされるような B に関する必要十分条件を考察すればよいことになる．

2.4 YD データ

ホップ代数 A と位数 2 の元たち $g \in g.\ell(A)$, $\alpha \in g.\ell(A^*)$ であって $\alpha(g) = -1$ を満たす 3 つ組 (A, g, α) 全体を YD と定義する．

定義 2.12. 有限次元ホップ代数 A に対して

$$\mathsf{YD}(A) := \{(g, \alpha) \in g.\ell(A) \times g.\ell(A^*) \mid g^2 = 1,\ \alpha^2 = \varepsilon_A,\ \alpha(g) = -1\}$$

を A の YD（**Yetter-Drinfeld**）**データ**と呼ぶ．

この YD データは次のように特徴づけられる．

定理 2.13. 有限次元ホップ代数 A を固定する．次は 1 対 1 の対応を与える：

$$\mathsf{YD}(A) \longrightarrow \{{}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}\text{のホップ代数対象で } A \text{ に関する split epi を持つもの}\};\ (g, \alpha) \longmapsto A^{\mathrm{co}(\pi_{g,\alpha})}$$

ここで $\pi_{g,\alpha} : A \to \Bbbk\mathbb{Z}_2 = \Bbbk e \oplus \Bbbk\sigma$ は split epi であり，

$$\pi_{g,\alpha} : A \to \Bbbk\mathbb{Z}_2; a \mapsto \varepsilon(a)\boldsymbol{e}_0 + \alpha(a)\boldsymbol{e}_1 \quad \text{with} \quad \boldsymbol{e}_0 := \frac{1}{2}(e + \sigma),\ \boldsymbol{e}_1 := \frac{1}{2}(e - \sigma).$$

で与えられる．さらにこの対応の逆はボゾン化 $B \mapsto \hat{B} = B \# \Bbbk\mathbb{Z}_2$ である．

この定理 2.13 から各 $(g,\alpha)\in \mathsf{YD}(A)$ に対して ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ のホップ代数対象を得ることが出来る．しかし，今の構成では $(g,\alpha),(h,\beta)\in \mathsf{YD}(A)$ であってホップ代数同型 $A^{\mathrm{co}(\pi_{g,\alpha})}\cong A^{\mathrm{co}(\pi_{h,\beta})}$ が存在するような $A^{\mathrm{co}(\pi_{g,\alpha})}$ と $A^{\mathrm{co}(\pi_{h,\beta})}$ を区別できていない．したがって，同型類を分類するために $(g,\alpha),(h,\beta)\in \mathsf{YD}(A)$ に対して次の関係「$(g,\alpha)\sim(h,\beta) :\Longleftrightarrow\ f(g)=h,\ \alpha=\beta\circ f$ を満たすようなホップ代数同型射 $f:A\to A$ が存在する」を $\mathsf{YD}(A)$ 上にいれる．

命題 2.14. これは同値関係をなす．

Proof. 反射律は id_A でよい．対称律は仮定で与えられたホップ代数同型射 f の逆写像 f^{-1} を考えればよく，推移律は，ホップ代数同型 f,g たちの合成 $g\circ f$ (or $f\circ g$) が条件を満たすホップ代数同型射を与える． □

これにより，各 $(A,g,\alpha)\in \mathsf{YD}$ に対して ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ のホップ代数対象は $\mathsf{YD}(A)/\sim$ の元を明示的に与えられれば決定できることがわかった．

さらに得られた対象がホップ・スーパー代数とみなせるための条件 $B\in {}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}\iff B\in \mathsf{sVec}$ は次のように書き下すことができた．

補題 2.15. 上で得られた対象を $B=A^{\mathrm{co}(\pi_{g,\alpha})}\in {}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ とかくとき，任意の $b\in B$ に対して

$$m\circ(\alpha\otimes \mathrm{id}_B)\circ\Delta_A(b)=gbg^{-1}$$

が成立することと $B\in \mathsf{sVec}$ は必要十分条件を与える．

2.5 分類への応用

この節では §2.2 までの，分類への応用に用いることができる性質をまとめる．まずホップ代数 A であって次の条件 $(*)$ を満たすものを決定する．

「A は可換でも余可換でもなく，位数が 2 であるような元たち $g\in g.\ell(A)$ と $\alpha\in g.\ell(A^*)$ が存在する」

次に条件 $(*)$ を満たす各 A に対して商集合 $\mathsf{YD}(A)/\sim$ を決定する．同値類を次のように書き下す：

$$\mathsf{YD}(A)/\sim=\ \{[(g_i,\alpha_i)]\mid (g_i,\alpha_i)\in \mathsf{YD}(A)\}$$

各 $[(g_i,\alpha_i)]$ に対して $A^{\mathrm{co}(\pi_{g_i,\alpha_i})}$ with $\pi_{g_i,\alpha_i}:A\to \Bbbk\mathbb{Z}_2; a\mapsto \varepsilon(a)\boldsymbol{e}_0+\alpha_i(a)\boldsymbol{e}_1$ を知ればよい．すると，ホップ代数同型 $\widehat{A^{\mathrm{co}(\pi_{g_i,\alpha_i})}}\cong A$ を与えるような ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}_2}_{\Bbbk\mathbb{Z}_2}\mathcal{YD}$ のホップ代数対象 $A^{\mathrm{co}(\pi_{g_i,\alpha_i})}$ を決定できたことになる．さらに，$A^{\mathrm{co}(\pi_{g_i,\alpha_i})}$ たちのうちで，補題 2.15 で与えた同値条件を満たすものがホップ・スーパー代数である．

2.6 具体例

この節では分類への応用に則って，ある 8 次元のホップ・スーパー代数を具体的に構成する．“pointed” と呼ばれるクラスのうちで，条件 $(*)$ を満たす 16 次元ホップ代数は次のように与えられる．

$$A=H(C_2\times C_2,(2,2),(c^*,c^*d^*),(c,c),(0,0)),\ H(C_2\times C_2,(2,2),(c^*,d^*),(c,d),(0,0)),\dots$$

ここで，記号の定義は [CDR00] を参照されたい．

以下では，この A に対して $\mathsf{YD}(A)/\sim$ を決定する．まず，A の構造は次のように書き下すことが出来る．

$$A=\langle c,d,x_1,x_2\rangle/(c^2=1=d^2,x_i^2=0,cx_ic=-x_i,dx_1d=x_1,dx_2d=-x_2,x_1x_2=-x_2x_1)$$

$$c, d \in g.\ell(A), \quad \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + c \otimes x_i.$$

次に $\mathsf{YD}(A)$ を決定する．自明な id_A を除いて，位数 2 で与えられる $g.\ell(A^*)$ の元は命題 1.4 から次の $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ のいずれかになる．

(1) $\alpha_1(c) = -1, \alpha_1(d) = 1, \alpha_1(x_i) = 0,$
(2) $\alpha_2(c) = 1, \alpha_2(d) = -1, \alpha_2(x_i) = 0,$
(3) $\alpha_3(c) = -1, \alpha_3(d) = -1, \alpha_3(x_i) = 0.$

したがって，

$$\mathsf{YD}(A) \ = \ \{(c, \alpha_1), (cd, \alpha_1), (d, \alpha_2), (cd, \alpha_2), (c, \alpha_3), (d, \alpha_3)\}$$

商集合 $\mathsf{YD}(A)/\sim$ はホップ代数同型写像 $A \to A$ を考察することで次を得る：

定理 2.16. $\mathsf{YD}(A)$ の商集合 $\mathsf{YD}(A)/\sim$ は次で与えられる．

$$\mathsf{YD}(A)/\sim = \ \{[(c, \alpha_1)], [(cd, \alpha_1)], \ [(d, \alpha_2)]\}.$$

今得られた $\mathsf{YD}(A)/\sim$ の元たちからホップ・スーパー代数を具体的に表示すると次のようになる：

$$A^{\mathrm{co}(\pi_{c,\alpha_1})} \ = \ \langle d, x_1, x_2 \rangle \quad \text{with} \quad \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + 1 \otimes x_i.$$

$$A^{\mathrm{co}(\pi_{cd,\alpha_1})} \ = \ \langle d, x_1, x_2 \rangle \quad \text{with} \quad \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + d \otimes x_i.$$

$$A^{\mathrm{co}(\pi_{d,\alpha_2})} \ = \ \langle c, x_1, x_2 \rangle \quad \text{with} \quad \Delta(x_i) = x_i \otimes 1 + c \otimes x_i.$$

3 主結果

上記の方法を各ホップ代数に適用することで，次元が 10 以下のホップ・スーパー代数全てを決定することができた．以下に得られた対象の個数を，既に知られているホップ代数の分類結果と合わせて紹介する．

次元	非スーパーなホップ代数	#1	#2	合計
2	$\Bbbk C_2$	1	1	2
4	$\Bbbk C_4, \Bbbk C_2^2, T_{4,-1}$	3	6	9
6	$\Bbbk C_6, \Bbbk S_3, (\Bbbk S_3)^*$	3	4	7
8	$\Bbbk C_8, \Bbbk(C_2 \times C_4), \Bbbk C_2^3,$ $\Bbbk D_8, \Bbbk Q_8, (\Bbbk D_8)^*, (\Bbbk Q_8)',$ $A_{C_2}, A_{C_2 \times C_2}, A'_{C_4}, A_8,$ $A''_{C_4}, A'''_{C_4,q}, (A'''_{C_4})^*$	14	34	48
9	$\Bbbk C_9, \Bbbk C_3^2, T_{9,\zeta_3}, T_{9,\zeta_3^2}$	4	0	4
10	$\Bbbk C_{10}, \Bbbk D_{10}, (\Bbbk D_{10})^*$	3	4	7
p（奇素数）	$\Bbbk C_p$	1	0	1

ここで，#1 はホップ代数の同型類の個数で #2 は purely even でないホップ・スーパー代数の同型類の個数.

参考文献

[AS02] N. Andruskiewitsch and H.-J. Schneider, *Pointed Hopf Algebras*, in: Recent developments in Hopf algebra Theorey,MSRI Publications **43** (2002), 168,Cambridge Univ. Press.

[CDR00] S. Caenepeel, S. Dăscălescu and Ş. Raianu, *Classfifying pointed Hopf algebras of dimension 16*, Comm. Algebra **28**, No.2 (2000), 541-568.

[Mj94] S. Majid, *Crossed products by braided groups and bosonization*, J.Algebra **163** (1994),pp. 165-190.

[R85] D. Radford,*The structure of Hopf algebras with a projection*, J. Algebra **92** (1985), 322-347.

Semi-Modules and Crystal Bases via Affine Deligne-Lusztig Varieties

Ryosuke Shimada (島田了輔)
東京大学大学院数理科学研究科

Abstract

There are two combinatorial ways of parameterizing the J_b-orbits of the irreducible components of affine Deligne-Lusztig varieties for GL_n and superbasic b. One way is to use the extended semi-modules introduced by Viehmann. The other way is to use the crystal bases introduced by Kashiwara and Lusztig. In this paper, we give an explicit correspondence between them using the crystal structure.

1 Introduction

Let F be a non-archimedean local field with finite field $\mathbb{F}_q$ of prime characteristic p, and let L be the completion of the maximal unramified extension of F. Let σ denote the Frobenius automorphism of L/F. Further, we write $\mathcal{O}$, $\mathfrak{p}$ for the valuation ring and the maximal ideal of L. Finally, we denote by ϖ a uniformizer of F (and L) and by v_L the valuation of L such that $v_L(\varpi) = 1$.

Let G be a split connected reductive group over $\mathbb{F}_q$ and let T be a split maximal torus of it. Let B be a Borel subgroup of G containing T. For a cocharacter $\mu \in X_*(T)$, let ϖ^μ be the image of $\varpi \in \mathbb{G}_m(F)$ under the homomorphism $\mu\colon \mathbb{G}_m \to T$.

Set $K = G(\mathcal{O})$. We fix a dominant cocharacter $\mu \in X_*(T)_+$ and $b \in G(L)$. Then the affine Deligne-Lusztig variety $X_\mu(b)$ is the locally closed reduced $\overline{\mathbb{F}}_q$-subscheme of the affine Grassmannian $\mathcal{G}r$ defined as

$$X_\mu(b)(\overline{\mathbb{F}}_q) = \{xK \in G(L)/K \mid x^{-1}b\sigma(x) \in K\varpi^\mu K\} \subset \mathcal{G}r(\overline{\mathbb{F}}_q).$$

Left multiplication by $g^{-1} \in G(L)$ induces an isomorphism between $X_\mu(b)$ and $X_\mu(g^{-1}b\sigma(g))$. Thus the isomorphism class of the affine Deligne-Lusztig variety only depends on the σ-conjugacy class of b.

The affine Deligne-Lusztig variety $X_\mu(b)$ carries a natural action (by left multiplication) by the group

$$J_b = \{g \in G(L) \mid g^{-1}b\sigma(g) = b\}.$$

For $\mu_\bullet = (\mu_1, \ldots, \mu_d) \in X_*(T)_+^d$ and $b_\bullet = (1, \ldots, 1, b) \in G^d(L)$ with $b \in G(L)$, we can similarly define $X_{\mu_\bullet}(b_\bullet) \subset \mathcal{G}r^d$ and $J_{b_\bullet}$ using $\sigma_\bullet$ given by

$$(g_1, \ldots, g_d) \mapsto (g_2, \ldots, g_d, \sigma(g_1)).$$

The geometric properties of affine Deligne-Lusztig varieties have been studied by many people. One of the most interesting results among such studies is an explicit description of the set $J_b \backslash \operatorname{Irr}^{\mathrm{top}} X_\mu(b)$ of J_b-orbits of $\operatorname{Irr}^{\mathrm{top}} X_\mu(b)$, where $\operatorname{Irr}^{\mathrm{top}} X_\mu(b)$ denotes the set of top-dimensional irreducible components of $X_\mu(b)$.

Remark 1.1. In the equal characteristic case, $X_\mu(b)$ is equi-dimensional, see [2]. In the mixed characteristic case, the equi-dimensionality is not fully established, see [1, Theorem 3.4].

Let $\widehat{G}$ be the Langlands dual of G defined over $\overline{\mathbb{Q}}_l$ with $l \neq p$. Denote V_μ the irreducible $\widehat{G}$-module of highest weight μ. The crystal basis $\mathbb{B}_\mu$ was first constructed by Lusztig and Kashiwara (cf. [4]). In $X_*(T)$, there is a distinguished element λ_b determined by b. It is the "best integral approximation" of the Newton vector of b, but we omit the precise definition. For this, see [1, §2.1] (in fact, [1, Example 2.3] is enough for our purpose). In [5], Nie proved that there exists a natural bijection

$$J_b \backslash \operatorname{Irr}^{\mathrm{top}} X_\mu(b) \cong \mathbb{B}_\mu(\lambda_b).$$

In particular, $|J_b \backslash \operatorname{Irr}^{\mathrm{top}} X_\mu(b)| = \dim V_\mu(\lambda_b)$. The proof is reduced to the case where $G = \mathrm{GL}_n$ and b is superbasic. So this case is particularly important. The existence of this bijection is first conjectured by Miaofen Chen and Xinwen Zhu. The last equality is also proved by Rong Zhou and Yihang Zhu. See [8, §1.2] for the history. In the case where $G = \mathrm{GL}_n$ and b is superbasic, Viehmann [6] defined a stratification of $X_\mu(b)$ using extended semi-modules. For $\mu \in X_*(T)_+$ and superbasic $b \in \mathrm{GL}_n(L)$, let $\mathbb{A}_{\mu,b}^{\mathrm{top}}$ be the set of equivalence classes of top extended semi-modules, that is, the semi-modules whose corresponding strata are top-dimensional. Then $J_b \backslash \operatorname{Irr}^{\mathrm{top}} X_\mu(b)$ is also parametrized by $\mathbb{A}_{\mu,b}^{\mathrm{top}}$.

In [5, Remark 0.10], Nie pointed out that it would be interesting to give an explicit correspondence between $\mathbb{A}_{\mu,b}^{\mathrm{top}}$ and $\mathbb{B}_\mu(\lambda_b)$. The purpose of this paper is to study this question (for the split case). More precisely, we will propose a way of constructing (the unique lifts of) all the top extended semi-modules from crystal elements, which was unclear before this work.

From now and until the end of this paper, we set $G = \mathrm{GL}_n$. Let T be the torus of diagonal matrices, and we choose the subgroup of upper triangular matrices B as Borel subgroup. Let us define the Iwahori subgroup $I \subset K$ as the inverse image of the *lower* triangular matrices under the projection $K \to G(\overline{\mathbb{F}}_q),\ \varpi \mapsto 0$.

We assume b to be superbasic, i.e., its Newton vector $\nu_b \in X_*(T)_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}^n$ is of the form $\nu_b = (\frac{m}{n}, \dots, \frac{m}{n})$ with $(m,n) = 1$. Moreover, we choose b to be η^m, where $\eta = \begin{pmatrix} 0 & \varpi \\ 1_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$. We often regard η (and hence b) as an element of the Iwahori-Weyl group $\widetilde{W}$. Then the action of η is given by $v \mapsto s_1 s_2 \cdots s_{n-1} v + (1, 0, \dots, 0)$. Note that $\eta^n = \varpi^{(1,\dots,1)}$. For superbasic b, the condition that $X_\mu(b)$ (resp. $X_{\mu_\bullet}(b_\bullet)$) is non-empty is equivalent to $v_L(\det(\varpi^\mu)) = v_L(\det(b))$ (resp. $v_L(\det(\varpi^{\mu_1+\dots+\mu_d})) = v_L(\det(b))$) (cf. [3, Theorem 3.1]). In this paper, we assume this.

Since $X_\mu(b) = X_{\mu+c}(\varpi^c b)$ for any central cocharacter c, we may assume that $\mu(1) \geq \cdots \geq \mu(n-1) \geq \mu(n) = 0$, where $\mu(i)$ denotes the i-th entry of μ.

For $\mu_\bullet \in X_*(T)_+^d$ and $b_\bullet = (1, \dots, 1, b) \in G^d(L)$ with b superbasic, we define

$$\mathcal{A}^{\mathrm{top}}_{\mu_\bullet, b_\bullet} := \{\lambda_\bullet \in X_*(T)^d \mid \dim X^{\lambda_\bullet}_{\mu_\bullet}(b_\bullet) = \dim X_{\mu_\bullet}(b_\bullet)\}.$$

Here $X^{\lambda_\bullet}_{\mu_\bullet}(b_\bullet)$ denotes $X_{\mu_\bullet}(b_\bullet) \cap It^{\lambda_\bullet}K/K$. For $\lambda_\bullet, \lambda'_\bullet \in \mathcal{A}^{\mathrm{top}}_{\mu_\bullet, b_\bullet}$, we write $\lambda_\bullet \sim \lambda'_\bullet$ if $\lambda_\bullet = \eta^k \lambda'_\bullet = (\eta^k \lambda'_1, \dots, \eta^k \lambda'_d)$ for some $k \in \mathbb{Z}$. Let $\mathbb{A}^{\mathrm{top}}_{\mu_\bullet, b_\bullet}$ denote the set of equivalence classes with respect to $\sim$, and let $[\lambda_\bullet] \in \mathbb{A}^{\mathrm{top}}_{\mu_\bullet, b_\bullet}$ denote the equivalence class represented by $\lambda_\bullet \in \mathcal{A}^{\mathrm{top}}_{\mu_\bullet, b_\bullet}$. Then $J_{b_\bullet} \backslash \operatorname{Irr}^{\mathrm{top}} X_{\mu_\bullet}(b_\bullet)$ is also parametrized by $\mathbb{A}^{\mathrm{top}}_{\mu_\bullet, b_\bullet}$.

For $\mu \in X_*(T)_+$, let $\mu_\bullet \in X_*(T)_+^d$ be certain minuscule dominant cocharacters with $\mu = \mu_1 + \cdots + \mu_n$. Note that $\{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ is uniquely determined by μ. Let $\mathrm{pr}\colon \mathcal{G}r^d \to \mathcal{G}r$ be the projection to the first factor. This induces $\mathrm{pr}\colon \mathbb{A}^{\mathrm{top}}_{\mu_\bullet, b_\bullet} \to \sqcup_{\mu' \leq \mu} \mathbb{A}^{\mathrm{top}}_{\mu', b}$. Then our main result is the following:

Theorem A. For $\mathbf{b} \in \mathbb{B}_\mu(\lambda_b)$, using the crystal structure of $\mathbb{B}_\mu$, we can construct $\lambda^1_\bullet(\mathbf{b}), \lambda^2_\bullet(\mathbf{b}), \dots, \lambda^n_\bullet(\mathbf{b}) \in \mathcal{A}^{\mathrm{top}}_{\mu_\bullet, b_\bullet}$ such that $\lambda^i_\bullet(\mathbf{b}) = \eta^{i-1}\lambda^1_\bullet(\mathbf{b})$ and $[\lambda^1_\bullet(\mathbf{b})]$ is the unique equivalence class in $\mathbb{A}^{\mathrm{top}}_{\mu_\bullet, b_\bullet}$ whose image $\mathrm{pr}([\lambda^1_\bullet(\mathbf{b})])$ belongs to $\mathbb{A}^{\mathrm{top}}_{\mu_\bullet, b_\bullet}$ and maps to $\mathbf{b}$ under the bijection $J_b \backslash \operatorname{Irr}^{\mathrm{top}} X_\mu(b) \cong \mathbb{B}_\mu(\lambda_b)$ by Nie.

A crystal is a finite set with a weight map wt and Kashiwara operators $\tilde{e}_\alpha$ and $\tilde{f}_\alpha$ satisfying certain conditions. The merit of constructing $[\lambda^1_\bullet(\mathbf{b})]$ instead of constructing $\mathrm{pr}([\lambda^1_\bullet(\mathbf{b})])$ directly is that the J_b-orbit in $X_\mu(b)$ corresponding $[\lambda^1_\bullet(\mathbf{b})]$ is much more explicit. It is just $J_b \overline{X^{\lambda^1_\bullet(\mathbf{b})}_{\mu_\bullet}(b_\bullet)}$.

Acknowledgments: We would like to thank Eva Viehmann and Ulrich Görtz for helpful comments. The author is grateful to his advisor Yoichi Mieda for his constant support and encouragement. This work was supported by the WINGS-FMSP

program at the Graduate School of Mathematical Science, the University of Tokyo. This work was also supported by JSPS KAKENHI Grant number JP21J22427.

References

[1] P. Hamacher and E. Viehmann, *Irreducible components of minuscule affine Deligne-Lusztig varieties*, Algebra Number Theory **12** (2018), no. 7, 1611–1634.

[2] U. Hartl and E. Viehmann, *The Newton stratification on deformations of local G-shtukas*, J. Reine Angew. Math. **656** (2011), 87–129.

[3] X. He, *Some results on affine Deligne-Lusztig varieties*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Rio de Janeiro 2018. Vol. II. Invited lectures, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2018, pp. 1345–1365.

[4] J. Hong and S.-J. Kang, *Introduction to quantum groups and crystal bases*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 42, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.

[5] S. Nie, *Irreducible components of affine Deligne-Lusztig varieties*, Cambridge Journal of Mathematics **10** (2022), no. 2, 433–510.

[6] E. Viehmann, *The dimension of some affine Deligne-Lusztig varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **39** (2006), no. 3, 513–526.

[7] L. Xiao and X. Zhu, *Cycles on Shimura varieties via geometric Satake*, arXiv preprint arXiv:1707.05700 (2017).

[8] R. Zhou and Y. Zhu, *Twisted orbital integrals and irreducible components of affine Deligne-Lusztig varieties*, Camb. J. Math. **8** (2020), no. 1, 149–241.

3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系に対する特異摂動問題

東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻
長田祐輝 (Yuki OSADA)

概要

本講演では, 次の 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系に対して十分小さい ε に対する ground state の存在性および $\varepsilon \to +0$ における ground state のスパイクの位置について考察する:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u_1 + V_1(x) u_1 = |u_1|^{p-1} u_1 + \gamma u_2 u_3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta u_2 + V_2(x) u_2 = |u_2|^{p-1} u_2 + \gamma u_1 u_3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta u_3 + V_3(x) u_3 = |u_3|^{p-1} u_3 + \gamma u_1 u_2 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

ここで, $N \le 5$, $2 \le p < 2^* - 1$, $2^* = \infty$ $(N = 1, 2)$, $2^* = 2N/(N-2)$, $\varepsilon, \gamma > 0$. 正確には, $\rho(\mathbf{V}(x); \gamma)$ という関数を定義し, ある場合には $\varepsilon \to +0$ において ground state の全ての成分は $\rho(\mathbf{V}(x); \gamma)$ の最小点にピークをもつピーク解に漸近し, 別の場合には, ground state の 1 つの成分だけが対応するポテンシャル $V_j(x)$ の最小点にピークをもつピーク解に漸近し残り 2 つの成分は 0 に漸近するという結果を紹介する.

1 Introduction

本講演では, 次の 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系を考える:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u_1 + V_1(x) u_1 = |u_1|^{p-1} u_1 + \gamma u_2 u_3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta u_2 + V_2(x) u_2 = |u_2|^{p-1} u_2 + \gamma u_1 u_3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2 \Delta u_3 + V_3(x) u_3 = |u_3|^{p-1} u_3 + \gamma u_1 u_2 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

ここで, $N \le 5$, $2 \le p < 2^* - 1$, $2^* = \infty$ $(N \le 2)$, $2^* = 2N/(N-2)$ $(N \ge 3)$, $\varepsilon > 0$, $\gamma \ge 0$. また, ポテンシャル $V_j(x)$ $(j = 1, 2, 3)$ に対して次の基本的な条件を仮定する:

(V1) $\forall\, j = 1, 2, 3$, $V_j \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N)$,
(V2) $\forall\, j = 1, 2, 3$, $0 < V_{j,0} := \inf_{x \in \mathbb{R}^N} V_j(x) < \lim_{|x| \to \infty} V_j(x) =: V_{j,\infty}$.

方程式 $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ に対して付随する汎関数 I_ε および最小エネルギー c_ε を定義する:

$$\mathbf{u} := (u_1, u_2, u_3), \quad \mathbb{H} := H^1(\mathbb{R}^N)^3.$$

$$I_\varepsilon(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^2|\nabla u_j|^2 + V_j(x)u_j^2 - \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N}|u_j|^{p+1} - \gamma\int_{\mathbb{R}^N} u_1u_2u_3,$$

$$c_\varepsilon := \inf_{\mathbf{u}\in\mathcal{N}_\varepsilon} I_\varepsilon(\mathbf{u}), \quad \mathcal{N}_\varepsilon := \{\mathbf{u}\in\mathbb{H}\setminus\{(0,0,0)\} \mid G_\varepsilon(\mathbf{u}) = 0\},$$

$$G_\varepsilon(\mathbf{u}) := \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^2|\nabla u_j|^2 + V_j(x)u_j^2 - |u_j|^{p+1} - 3\gamma\int_{\mathbb{R}^N} u_1u_2u_3.$$

Rabinowitz [4] は $0 < \inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) < \liminf_{|x|\to\infty} V(x)$ の条件の下で, ε が十分小さいときに

$$-\varepsilon^2\Delta u + V(x)u = |u|^{p-1}u \quad \text{in } \mathbb{R}^N \tag{1}$$

の ground state の存在を示した.

Wang [5] は $\varepsilon \to +0$ における (1) の正値の ground state の漸近挙動について研究した. その解はポテンシャル $V(x)$ の最小点に凝集し, 一意の最大点をもち, 最小点の周りで指数減衰する.

Lin-Wei [1] は次のような方程式系を考えた:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u_1 + V_1(x)u_1 = \mu_1 u_1^3 + \beta u_1 u_2^2 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = \mu_2 u_2^3 + \beta u_1^2 u_2 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

この方程式系に対して, 彼らは $\beta < 0$ のとき, $\varepsilon \to +0$ において ground state は $V_j(x)$ の最小点に凝集することを示した. 一方, $\beta > 0$ のとき, ρ という関数を導入し, $\inf_{x\in\mathbb{R}^N}\rho(V_1(x), V_2(x); \beta) < d_1^{V_{1,0}} + d_1^{V_{2,0}}$ ならば ground state は $\rho(V_1(x), V_2(x); \beta)$ の最小点に凝集し, $\inf_{x\in\mathbb{R}^N}\rho(V_1(x), V_2(x); \beta) > d_1^{V_{1,0}} + d_1^{V_{2,0}}$ ならば $V_j(x)$ の最小点に凝集することを示した.

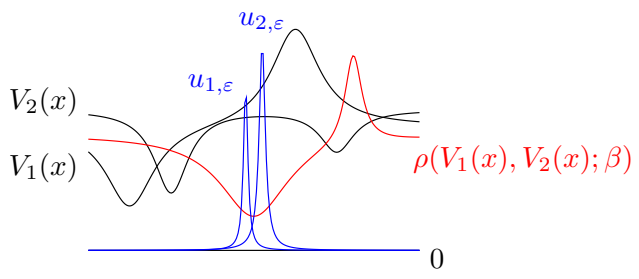


図 1 $\inf_{x\in\mathbb{R}^N}\rho(V_1(x), V_2(x); \beta) < d_1^{V_{1,0}} + d_1^{V_{2,0}}$

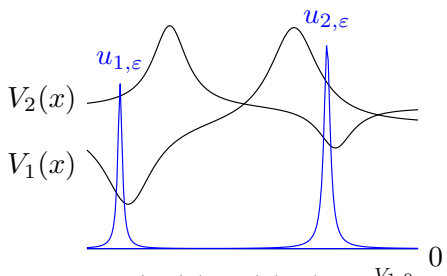


図 2 $\inf_{x\in\mathbb{R}^N}\rho(V_1(x), V_2(x); \beta) > d_1^{V_{1,0}} + d_1^{V_{2,0}}$

ここで $\rho(V_1(x_0), V_2(x_0); \beta)$, $d_1^{V_{j,0}}$ はそれぞれ次の方程式の ground state が持っているエネルギーである.

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + V_1(x_0)u_1 = u_1^3 + \beta u_1 u_2^2, \\ -\Delta u_2 + V_2(x_0)u_2 = u_2^3 + \beta u_1^2 u_2, \end{cases} \qquad -\Delta u + V_{j,0}u = u^3.$$

本講演の主結果を述べるために, 次の方程式系に付随する汎関数 $\tilde{I}^{\lambda,\gamma}$ および最小エネルギー

$\rho(\lambda;\gamma)$ を定義する:

$$\begin{cases} -\Delta v_1 + \lambda_1 v_1 = |v_1|^{p-1} v_1 + \gamma v_2 v_3, \\ -\Delta v_2 + \lambda_2 v_2 = |v_2|^{p-1} v_2 + \gamma v_1 v_3, \\ -\Delta v_3 + \lambda_3 v_3 = |v_3|^{p-1} v_3 + \gamma v_1 v_2, \end{cases} \tag{$\tilde{\mathcal{P}}^{\lambda,\gamma}$}$$

$$\begin{aligned} \lambda &:= (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \\ \tilde{I}^{\lambda,\gamma}(\mathbf{v}) &:= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_j|^2 + \lambda_j v_j^2 - \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N} |v_j|^{p+1} - \gamma \int_{\mathbb{R}^N} v_1 v_2 v_3, \\ \rho(\lambda;\gamma) &:= \inf_{\mathbf{v}\in\tilde{\mathcal{N}}^{\lambda,\gamma}} \tilde{I}^{\lambda,\gamma}(\mathbf{v}), \\ \tilde{\mathcal{N}}^{\lambda,\gamma} &:= \{\mathbf{v} \in \mathbb{H} \setminus \{(0,0,0)\} \mid \tilde{G}^{\lambda,\gamma}(\mathbf{v}) = 0\}, \\ \tilde{G}^{\lambda,\gamma}(\mathbf{v}) &:= \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_j|^2 + \lambda_j v_j^2 - |v_j|^{p+1} - 3\gamma \int_{\mathbb{R}^N} v_1 v_2 v_3. \end{aligned}$$

定義 1. $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ を $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の解とする. このとき $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の *scalar solution* であるとは, ある $j_0 \in \{1,2,3\}$ が存在して, $u_{j_0} \neq 0$ かつ $u_j = 0$ $(\forall j \neq j_0)$ となることである. 一方, $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の *vector solution* であるとは, $u_j \neq 0$ $(\forall j = 1,2,3)$ となることである.

定義 2. $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の非自明解であるとは, $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ をみたし, $\mathbf{u} \neq (0,0,0)$ となることである. $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の *ground state* であるとは, $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の非自明解であり, $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の任意の非自明解 $\mathbf{v}$ に対して $I_\varepsilon(\mathbf{u}) \leq I_\varepsilon(\mathbf{v})$ となることである. $\mathbf{u}$ が c_ε の *minimizer* であるとは, $\mathbf{u} \in \mathcal{N}_\varepsilon$ であり, $I_\varepsilon(\mathbf{u}) = c_\varepsilon$ となることである. $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の非負の *ground state* であるとは, $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の *ground state* であり, $u_j \geq 0$ $(j = 1,2,3)$ となることである. また, $\mathbf{u}$ が c_ε の非負の *minimizer* であるとは $\mathbf{u}$ が c_ε の *minimizer* であり, $u_j \geq 0$ $(j = 1,2,3)$ となることである.

注意 1. $\mathbf{u}$ が c_ε の *minimizer* であることと $\mathbf{u}$ が $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の *ground state* であることは同値である. $\rho(\lambda;\gamma)$,$(\tilde{\mathcal{P}}^{\lambda,\gamma})$ に対しても同様な結果が成り立つ.

注意 2. $\lambda_j > 0$ かつ $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ とする. *[3]* より, $(\tilde{\mathcal{P}}^{\lambda,\gamma})$ は非負の *ground state* をもつ.

2 主結果

ポテンシャルに対して次の条件を仮定する:

(C1)$_\gamma$ $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) < \rho(\mathbf{V}_\infty;\gamma)$.

本講演の主結果を述べる. まず, 十分小さい ε に対する $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の ground state の存在性に関する結果を述べる.

主結果 1 (O. [2] (2022) submitted)**.** *(V1),(V2)* を仮定し, γ を *(C1)*$_\gamma$ をみたすように固定する. このとき, 次が成り立つ.

$$c_\varepsilon \leq \varepsilon^N \left(\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) + o(1) \right) \quad \textit{as } \varepsilon \to +0.$$

さらに, ε が十分小さいとき, $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の非負の *ground state* が存在する.

注意 3. 次の *(V3)* から, 任意の $\gamma \geq 0$ に対して *(C1)*$_\gamma$ が成り立つ:

(V3) $\exists\, y_0 \in \mathbb{R}^N$ *s.t.* $0 < V_j(y_0) < V_{j,\infty} \quad \forall\, j = 1, 2, 3.$

次に, $\varepsilon \to +0$ における $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の ground state の漸近挙動に関する結果を述べる. 詳細な漸近挙動を得るために, 次の条件を導入する:

(C2)$_\gamma$ $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) < \min_{j=1,2,3} c_1^{V_{j,0}}$.

ここで,

$$
\begin{aligned}
&\lambda \in \mathbb{R},\\
I_1^\lambda(u) &:= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 - \frac{1}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p+1},\\
c_1^\lambda &:= \inf_{u\in\mathcal{N}_1^\lambda} I_1^\lambda(u), \quad \mathcal{N}_1^\lambda := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\} \mid G_1^\lambda(u) = 0\},\\
G_1^\lambda(u) &:= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \lambda u^2 - |u|^{p+1}.
\end{aligned}
$$

ここで, $\varepsilon \to +0$ における $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の非負の ground state の正確な漸近挙動について述べる.

主結果 2 (O. [2] (2022) submitted)**.** *(V1),(V2)* を仮定し, γ を *(C1)*$_\gamma$ と *(C2)*$_\gamma$ をみたすように固定する. $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,\infty)$ を $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となるものとし, $\mathbf{u}_n$ を $(\mathcal{P}_{\varepsilon_n})$ の非負の *ground state* とする. さらに $x_{j,n}$ を $u_{j,n}$ の最大点とする.

(1) このとき, 任意の $j = 1, 2, 3$ に対して $\{x_{j,n}\}_{n=1}^\infty$ は有界になる.

(2) 次が成り立つ:

$$
c_\varepsilon = \varepsilon^N \left(\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) + o(1) \right) \quad \textit{as } \varepsilon \to +0.
$$

(3) さらに, 部分列をとれば, ある $\mathbf{W}_0 \in \mathbb{H}$ と $x_0 \in \mathbb{R}^N$ が存在して,

$$
\begin{aligned}
&x_{j,n} \to x_0, \quad \frac{|x_{j,n} - x_{k,n}|}{\varepsilon_n} \to 0, \quad \textit{as } n \to \infty,\ j \neq k,\\
&\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) = \rho(\mathbf{V}(x_0);\gamma),\\
&u_{j,n}(x_{j,n} + \varepsilon_n y) \to W_{j,0} \quad \textit{in } H^1(\mathbb{R}^N),\\
&\mathbf{W}_0 \text{ は } (\tilde{\mathcal{P}}^{\mathbf{V}(x_0),\gamma}) \text{ の } \textit{ground state},\\
&W_{j,0} \text{ は正値, 球対称, 狭義単調減少 } (j = 1, 2, 3),
\end{aligned}
$$

where $\mathbf{V}(x_0) = (V_1(x_0), V_2(x_0), V_3(x_0))$.

(4) さらに, 任意の $0 < \eta < V_0$ に対して, ある $C_\eta > 0$ が存在して,

$$
u_{j,n}(x) \leq C_\eta e^{-\sqrt{\eta}|x - x_{j,n}|/\varepsilon_n} \quad \forall x \in \mathbb{R}^N,\ j = 1, 2, 3.
$$

ここで $V_0 := \min\{V_{1,0}, V_{2,0}, V_{3,0}\}$.

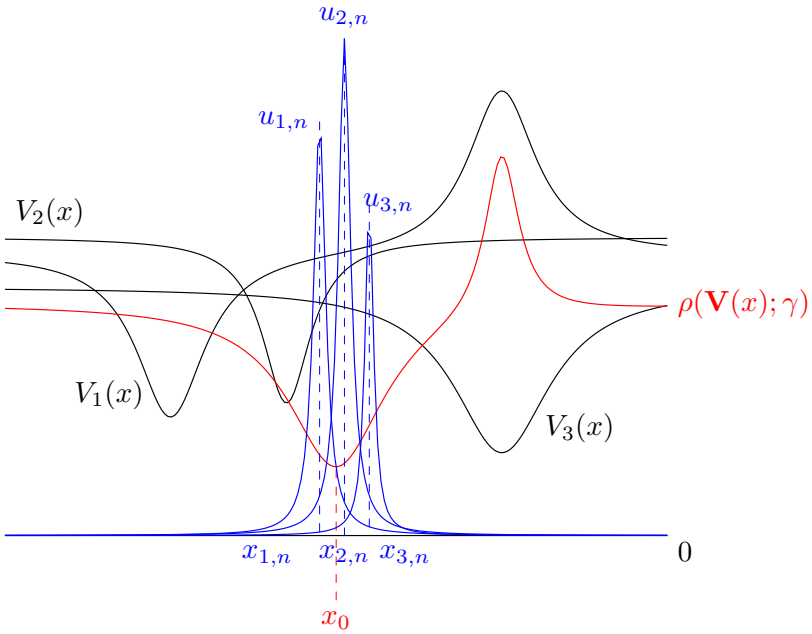


図 3　主結果 2 の結果の図示

以下では, $(\mathrm{C2})_\gamma$ が成り立たないケースを考える. $(\mathrm{C2})_\gamma$ が成り立たないとき, 以下が成り立つ:

$(\mathrm{C3})_\gamma$ $\inf_{x\in\mathbb{R}^N}\rho(\mathbf{V}(x);\gamma)=\min_{j=1,2,3}c_1^{V_{j,0}}$.

主結果 3 (O. [2] (2022) submitted)**.** *(V1),(V2)* を仮定し, γ を *(C1)*$_\gamma$ と *(C3)*$_\gamma$ が成り立つように固定する. さらに, *(C3)*$_{\gamma'}$ が成り立つような $\gamma'>\gamma$ が存在すると仮定する. $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty\subset(0,\infty)$ を $\varepsilon_n\to+0$ となるものとし, $\mathbf{u}_n$ を $(\mathcal{P}_{\varepsilon_n})$ の非負の *ground state* とする. $x_{j,n}$ を $u_{j,n}$ の最大点とする. このとき, 部分列をとれば, ある $l_0\in\{1,2,3\}$ と $x_{l_0,0}\in\mathbb{R}^N$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&x_{l_0,n}\to x_{l_0,0},\quad V_{l_0}(x_{l_0,0})=V_{l_0,0}=V_0,\\
&c_\varepsilon=\varepsilon^N\left(\min_{j=1,2,3}c_1^{V_{j,0}}+o(1)\right)=\varepsilon^N\left(c_1^{V_{l_0,0}}+o(1)\right),\quad \textit{as } \varepsilon\to+0,\\
&u_{l_0,n}(x_{l_0,n}+\varepsilon_n y)\to W\quad \textit{in } H^1(\mathbb{R}^N),\quad u_{j,n}(x_{j,n}+\varepsilon_n y)\to 0\quad \textit{in } H^1(\mathbb{R}^N)\quad j\neq l_0.
\end{aligned}
$$

ここで W は次の方程式の一意解である:

$$
\begin{cases}
-\Delta W+V_0W=W^p\quad \textit{in } \mathbb{R}^N,\quad W>0\quad \textit{in } \mathbb{R}^N,\\
W(0)=\max_{x\in\mathbb{R}^N}W(x),\quad W(x)\to 0\quad \textit{as } |x|\to\infty.
\end{cases}
$$

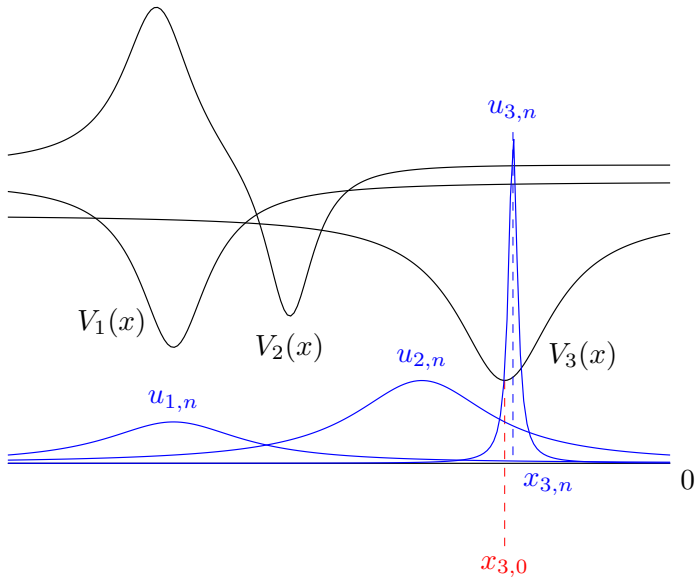


図 4　主結果 3 の結果の図示

注意 4. *(V1),(V2),(V3)* を仮定する．このときある $\gamma^* > 0$ が存在して，$\gamma > \gamma^*$ なら *(C2)*$_\gamma$ が成り立ち，$0 \le \gamma < \gamma^*$ なら，*(C3)*$_\gamma$ が成り立つ．したがって，$\gamma > \gamma^*$ なら主結果 *2* が成り立ち，$0 \le \gamma < \gamma^*$ なら主結果 *3* が成り立つ．

注意 5. *(C1)*$_\gamma$ は *ground state* の存在性を保証するための条件である．*(C2)*$_\gamma$, *(C3)*$_\gamma$ は $\varepsilon \to +0$ における *ground state* の漸近挙動を分類するための条件である．

3　主結果の証明の概略

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $z_0 \in \mathbb{R}^N$ に対して，

$$\mathbf{w}(y) = \mathbf{u}(z_0 + \varepsilon y) \tag{2}$$

とおく．次の方程式を考える．また付随する汎関数と最小エネルギーを定義する:

$$\begin{cases} -\Delta w_1 + V_1(z_0+\varepsilon y)w_1 = |w_1|^{p-1}w_1 + \gamma w_2 w_3, \\ -\Delta w_2 + V_2(z_0+\varepsilon y)w_2 = |w_2|^{p-1}w_2 + \gamma w_1 w_3, \\ -\Delta w_3 + V_3(z_0+\varepsilon y)w_3 = |w_3|^{p-1}w_3 + \gamma w_1 w_2, \end{cases} \tag{$\tilde{\mathcal{P}}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}$}$$

$$\mathbf{w} := (w_1, w_2, w_3),$$

$$\tilde{I}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}(\mathbf{w}) := \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_j|^2 + V_j(z_0+\varepsilon y)w_j^2 - \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N}|w_j|^{p+1} - \gamma\int_{\mathbb{R}^N} w_1 w_2 w_3,$$

$$\tilde{c}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma} := \inf_{\mathbf{w}\in\tilde{\mathcal{N}}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}} \tilde{I}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}(\mathbf{w}),$$

$$\tilde{\mathcal{N}}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma} := \{\mathbf{w} \in \mathbb{H} \setminus \{(0,0,0)\} \mid \tilde{G}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}(\mathbf{w}) = 0\},$$

$$\tilde{G}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}(\mathbf{w}) := \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_j|^2 + V_j(z_0+\varepsilon y)w_j^2 - |w_j|^{p+1} - 3\gamma\int_{\mathbb{R}^N} w_1 w_2 w_3.$$

(2) の下で次の関係式に注意する:

$$I_\varepsilon(\mathbf{u}) = \varepsilon^N \tilde{I}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}(\mathbf{w}), \quad G_\varepsilon(\mathbf{u}) = \varepsilon^N \tilde{G}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}(\mathbf{w}), \quad c_\varepsilon = \varepsilon^N \tilde{c}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}.$$

3.1 主結果 1 の証明の概略

Proof. $z_0 \in \mathbb{R}^N$ を

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma),$$

を達成する点とし, $\mathbf{w}_0$ を $\rho(\mathbf{V}(z_0);\gamma)$ の非負の minimizer とする (注意 2 参照). このとき $t_{0,\varepsilon}\mathbf{w}_0 \in \tilde{\mathcal{N}}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}$ となる $t_{0,\varepsilon} > 0$ が存在する. このとき

$$\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{j,0}|^2 + V_j(z_0+\varepsilon y) w_{j,0}^2 = t_{0,\varepsilon}^{p-1} \sum_{j=1}^{3} |w_{j,0}|^{p+1} + 3t_{0,\varepsilon}\gamma \int_{\mathbb{R}^N} w_{1,0}w_{2,0}w_{3,0}.$$

したがって, $\{t_{0,\varepsilon}\}_\varepsilon$ は有界である. したがって

$$\begin{aligned}
&\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) = \rho(\mathbf{V}(z_0);\gamma) = \tilde{I}^{\mathbf{V}(z_0),\gamma}(\mathbf{w}_0) \geq \tilde{I}^{\mathbf{V}(z_0),\gamma}(t_{0,\varepsilon}\mathbf{w}_0) \\
&= \frac{t_{0,\varepsilon}^2}{2} \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{j,0}|^2 + V_j(z_0) w_{j,0}^2 - \frac{t_{0,\varepsilon}^{p+1}}{p+1} \sum_{j=1}^{3} \int_{\mathbb{R}^N} w_{j,0}^{p+1} - t_{0,\varepsilon}^3 \gamma \int_{\mathbb{R}^N} w_{1,0}w_{2,0}w_{3,0} \qquad (3) \\
&= \tilde{I}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}(t_{0,\varepsilon}\mathbf{w}_0) + o(1) \geq \tilde{c}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma} + o(1), \quad \text{as } \varepsilon \to +0
\end{aligned}$$

を得る. したがって $c_\varepsilon = \varepsilon^N \tilde{c}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma}$ より,

$$c_\varepsilon \leq \varepsilon^N \left(\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) + o(1) \right) \quad \text{as } \varepsilon \to +0$$

を得る. さらに, $(\mathrm{C1})_\gamma$ と (3) より, 十分小さい ε に対して

$$\tilde{c}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma} < \rho(\mathbf{V}_\infty;\gamma) \tag{4}$$

が成り立つ. (4) より, $(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma})$ の ground state $\mathbf{w}$ が存在する (Pomponio [3] の議論を参照). $|\mathbf{w}| = (|w_1|, |w_2|, |w_3|)$ も $(\tilde{\mathcal{P}}^{\mathbf{V}(z_0+\varepsilon y),\gamma})$ の ground state になる. したがって $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の非負の ground state が存在する. □

3.2 主結果 2 と 3 の証明の概略

主結果 2 と 3 で共通に示せることを抜き出しておく. Osada [2] では記載していないが, 次の補題が成り立つ.

補題 1. *(V1),(V2),(C1)*$_\gamma$ を仮定する. $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty \subset (0,\infty)$ を $\varepsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$ となる数列とし, $\mathbf{u}_n$ を $(\mathcal{P}_{\varepsilon_n})$ の非負の *ground state* とする. さらに $x_{j,n}$ を $u_{j,n}$ の最大点とする. このとき, 部分列をとれば, ある $l_0 \in \{1,2,3\}$ と $x_{l_0,0} \in \mathbb{R}^N$ と $\mathbf{U}^{(l_0)} = (U_1^{(l_0)}, U_2^{(l_0)}, U_3^{(l_0)}) \in \mathbb{H}$ が存在して:

(0) $u_{j,n}(x_{l_0,n}+\varepsilon_n y) \rightharpoonup U_j^{(l_0)}(y)$ *weakly in* $H^1(\mathbb{R}^N)$ $(j=1,2,3)$, $\quad U_{l_0}^{(l_0)} \neq 0$.

(1) $\{x_{l_0,n}\}_{n=1}^{\infty}$ は有界.

(2) 以下が成り立つ:

$$c_\varepsilon = \varepsilon^N \left(\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) + o(1) \right) \quad \text{as } \varepsilon \to +0.$$

(3) 以下が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&x_{l_0,n} \to x_{l_0,0},\\
&\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) = \rho(\mathbf{V}(x_{l_0,0});\gamma),\\
&u_{j,n}(x_{l_0,n}+\varepsilon_n y) \to U_j^{(l_0)}(y) \quad \text{in } H^1(\mathbb{R}^N)\ (j=1,2,3),\\
&\mathbf{U}^{(l_0)} \text{ は } (\tilde{\mathcal{P}}^{\mathbf{V}(x_{l_0,0}),\gamma}) \text{ の ground state.}
\end{aligned}$$

補題 1 の証明の概略. $\mathbf{U}_n^{(l)}(y) := \mathbf{u}_n(x_{l,n}+\varepsilon_n y)$ $(l=1,2,3)$ とおく. このとき $\{\mathbf{U}_n^{(l)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{H}$ で有界になるので, 部分列をとれば, ある $\mathbf{U}^{(l)} \in \mathbb{H}$ が存在して, $\mathbf{U}_n^{(l)} \rightharpoonup \mathbf{U}^{(l)}$ weakly in $\mathbb{H}$ となる.

(0) このとき $V_j \in C^1(\mathbb{R}^N)$ と $\mathbf{U}_n^{(l)}$ がみたす方程式と正則性から $U_{j,n}^{(l)} \in C^2(\mathbb{R}^N)$ かつ $U_{j,n}^{(l)} \to U_j^{(l)}$ in $C^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ となる. さらに $V_0 \le 2(U_{1,n}^{(1)}(0)+U_{2,n}^{(2)}(0)+U_{3,n}^{(3)}(0))^{p-1}+\gamma(U_{1,n}^{(1)}(0)+U_{2,n}^{(2)}(0)+U_{3,n}^{(3)}(0))$ が成り立つ. したがってある $l_0 \in \{1,2,3\}$ が存在して $U_{l_0}^{(l_0)} \neq 0$ となる.

(1) $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{l_0,n}| = \infty$ とする. 部分列をとれば $|x_{l_0,n}| \to \infty$ となる. このとき $\mathbf{U}^{(l_0)} \neq (0,0,0)$ に注意すると

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) \ge \liminf_{n\to\infty} \frac{c_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n^N} = \liminf_{n\to\infty} \tilde{I}^{\mathbf{V}(x_{l_0,n}+\varepsilon_n y),\gamma}(\mathbf{U}_n^{(l_0)}) \ge \tilde{I}^{\mathbf{V}_\infty,\gamma}(\mathbf{U}^{(l_0)}) \ge \rho(\mathbf{V}_\infty;\gamma).$$

これは $(\mathrm{C1})_\gamma$ に反する.

(2),(3) (1) より部分列をとれば, ある $x_{l_0,0} \in \mathbb{R}^N$ が存在して $x_{l_0,n} \to x_{l_0,0}$ となる. (1) と同様にして

$$\begin{aligned}
&\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) \ge \liminf_{n\to\infty} \frac{c_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n^N} = \liminf_{n\to\infty} \tilde{I}^{\mathbf{V}(x_{l_0,n}+\varepsilon_n y),\gamma}(\mathbf{U}_n^{(l_0)})\\
&\ge \tilde{I}^{\mathbf{V}(x_{l_0,0}),\gamma}(\mathbf{U}^{(l_0)}) \ge \rho(\mathbf{V}(x_{l_0,0});\gamma) \ge \inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma)
\end{aligned}$$

を得る. このことから次が従う:

$$\begin{aligned}
&c_\varepsilon = \varepsilon^N \left(\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) + o(1) \right) \quad \text{as } \varepsilon \to +0, \quad \inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) = \rho(\mathbf{V}(x_{l_0,0});\gamma),\\
&\mathbf{U}^{(l_0)} \text{ は } (\tilde{\mathcal{P}}^{\mathbf{V}(x_{l_0,0}),\gamma}) \text{ の ground state}, \quad U_{j,n}^{(l_0)} \to U_j^{(l_0)} \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}$$

□

主結果 2 の証明の概略. $\mathbf{U}_n^{(l)}(y) := \mathbf{u}_n(x_{l,n}+\varepsilon_n y)$ とおく. このとき $\{\mathbf{U}_n^{(l)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{H}$ で有界になるので, 部分列をとれば, ある $\mathbf{U}^{(l)} \in \mathbb{H}$ が存在して, $\mathbf{U}_n^{(l)} \rightharpoonup \mathbf{U}^{(l)}$ weakly in $\mathbb{H}$ となる. このとき補

題 1 より, 部分列をとれば, ある $l_0 \in \{1,2,3\}$ と $x_{l_0,0} \in \mathbb{R}^N$ が存在して, 次が成り立つ:

$$U_{l_0}^{(l_0)} \neq 0, \quad \inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) = \rho(\mathbf{V}(x_{l_0,0});\gamma),$$
$$\mathbf{U}^{(l_0)} \text{ は } (\tilde{\mathcal{P}}^{\mathbf{V}(x_{l_0,0}),\gamma}) \text{ の ground state.}$$

(Step 1) $\mathbf{U}^{(l_0)}$ は vector.
もし $\mathbf{U}^{(l_0)}$ が scalar だとすると,

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) = \rho(\mathbf{V}(x_{l_0,0});\gamma) = \tilde{I}^{\mathbf{V}(x_{l_0,0}),\gamma}(\mathbf{U}^{(l_0)}) \geq \min_{j=1,2,3} c_1^{V_j(x_{l_0,0})} \geq \min_{j=1,2,3} c_1^{V_{j,0}}.$$

これは $(\mathrm{C2})_\gamma$ に反する.

(Step 2) 任意の $l = 1,2,3$ に対して $\mathbf{U}^{(l)}$ は vector.
もし $\mathbf{U}^{(k_0)} = (0,0,0)$ となる $k_0 \in \{1,2,3\}$ が存在すると, $U_{k_0}^{(l)} = 0$ $(\forall l \in \{1,2,3\})$. 特に $U_{k_0}^{(l_0)} = 0$. これは $\mathbf{U}^{(l_0)}$ が vector であることに反する. また, (Step 1) と同様に, $\mathbf{U}^{(l)}$ が scalar になるような $l \in \{1,2,3\}$ は存在しない.

(1) **(Step 3)** $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{l,n}| < \infty$ $(\forall l = 1,2,3)$.
(Step 2) より, $\mathbf{U}^{(l)} \neq (0,0,0)$ $(\forall l = 1,2,3)$. 補題 1 (1) と同様に, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{l,n}| < \infty$ $(\forall l = 1,2,3)$ が従う.

(2) は補題 1 (2) から従う.

(3) 補題 1 より, 部分列をとれば, 任意の $l = 1,2,3$ に対して, ある $x_{l,0} \in \mathbb{R}^N$ が存在して, 次が成り立つ:

$$x_{l,n} \to x_{l,0}, \quad c_\varepsilon = \varepsilon^N \left(\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) + o(1) \right) \quad \text{as } \varepsilon \to +0, \quad \inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) = \rho(\mathbf{V}(x_{l,0});\gamma),$$
$$\mathbf{U}^{(l)} \text{ は } (\tilde{\mathcal{P}}^{\mathbf{V}(x_{l,0}),\gamma}) \text{ の ground state}, \quad U_{j,n}^{(l)} \to U_j^{(l)} \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N).$$

(Step 4) $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{j,n} - x_{k,n}|/\varepsilon_n < \infty$ $(j \neq k)$.
ある $j,k \in \{1,2,3\}$ が存在して, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_{j,n} - x_{k,n}|/\varepsilon_n = \infty$ とすると, 部分列をとれば, $|x_{j,n} - x_{k,n}|/\varepsilon_n \to \infty$ となる. このとき,

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{c_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n^N} = \liminf_{n\to\infty} \tilde{I}^{\mathbf{V}(x_{j,n}+\varepsilon_n y),\gamma}(\mathbf{U}_n^{(j)}) \geq \min_{j=1,2,3} c_1^{V_{j,0}}$$

となる. これは $(\mathrm{C2})_\gamma$ に反する. (Step 4) より $x_{1,0} = x_{2,0} = x_{3,0} =: x_0$ が従う. $W_{j,0} := U_j^{(j)}$, $\mathbf{W}_0 := (W_{1,0}, W_{2,0}, W_{3,0})$ とおく. このとき $\mathbf{U}^{(l)}$ がみたす方程式の情報から $\mathbf{W}_0$ は正値, 球対称, 狭義単調減少になり, そのことから $(\tilde{\mathcal{P}}^{V(x_0),\gamma})$ の ground state になり, $|x_{j,n} - x_{k,n}|/\varepsilon_n \to 0$ が従う.

(4) は省略. □

主結果 3 の証明の概略. $\mathbf{U}_n^{(l)}(y) := \mathbf{u}_n(x_{l,n} + \varepsilon_n y)$ とおく. このとき $\{\mathbf{U}_n^{(l)}\}_{n=1}^{\infty}$ は $\mathbb{H}$ で有界になるので, 部分列をとれば, ある $\mathbf{U}^{(l)} \in \mathbb{H}$ が存在して, $\mathbf{U}_n^{(l)} \rightharpoonup \mathbf{U}^{(l)}$ weakly in $\mathbb{H}$ となる.
補題 1 と $(\mathrm{C3})_\gamma$ より, 部分列をとれば, $l_0 \in \{1,2,3\}$ と $x_{l_0,0} \in \mathbb{R}^N$ が存在して

$$
\begin{aligned}
&c_\varepsilon = \varepsilon^N \left(\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) + o(1) \right) = \varepsilon^N \left(\min_{j=1,2,3} c_1^{V_{j,0}} + o(1) \right) \quad \text{as } \varepsilon \to +0,\\
&x_{l_0,n} \to x_{l_0,0}, \quad \rho(\mathbf{V}(x_{l_0,0});\gamma) = \inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma),\\
&\mathbf{U}^{(l_0)} \text{ は } (\tilde{\mathcal{P}}^{V(x_{l_0,0}),\gamma}) \text{ の ground state}, \quad U_{j,n}^{(l_0)} \to U_j^{(l_0)} \text{ in } H^1(\mathbb{R}^N).
\end{aligned}
$$

$(\mathrm{C3})_\gamma$ と $(\mathrm{C3})_{\gamma'}$ より,

$$
\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) = \inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma').
$$

もし $\mathbf{U}^{(l_0)}$ が vector であると仮定すると,

$$
\inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma) > \inf_{x\in\mathbb{R}^N} \rho(\mathbf{V}(x);\gamma')
$$

となってしまい矛盾する. したがって $\mathbf{U}^{(l_0)}$ は scalar となり, $U_{l_0,n}^{(l_0)} \to U_{l_0}^{(l_0)}$, $U_{j,n}^{(l_0)} \to 0$ $(j \neq l_0)$ が従う. したがって $U_{j,n}^{(j)} \to 0$ $(j \neq l_0)$. $\tilde{I}^{\mathbf{V}(x_{l_0,n}+\varepsilon_n y),\gamma}(\mathbf{U}_n^{(l_0)})$ の上下からの評価より $V_{l_0}(x_{l_0,0}) = V_{l_0,0} = V_0 := \min_{j=1,2,3} V_{j,0}$ かつ $\min_{j=1,2,3} c_1^{V_{j,0}} = c_1^{V_{l_0,0}}$ が従う. したがって

$$
c_\varepsilon = \varepsilon^N \left(\min_{j=1,2,3} c_1^{V_{j,0}} + o(1) \right) = \varepsilon^N \left(c_1^{V_{l_0,0}} + o(1) \right) \quad \text{as } \varepsilon \to +0.
$$

また $U_{l_0}^{(l_0)}$ は

$$
\begin{cases}
-\Delta U + V_0 U = U^p, \quad U > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N,\\
U(0) = \max_{x\in\mathbb{R}^N} U(x), \quad U(x) \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty
\end{cases}
$$

をみたすので解の一意性より $U_{l_0}^{(l_0)} = W$ が従う. □

参考文献

[1] T.-C. Lin and J. Wei: Spikes in two-component systems of nonlinear Schrödinger equations with trapping potentials. J. Differential Equations, **229** (2006), 538–569.

[2] Y. Osada: A singular perturbation problem for a nonlinear Schrödinger system with three wave interaction. (2022), submitted.

[3] A. Pomponio: Ground states for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction. J. Math. Phys., **51** (2010), 093513, 20 pp.

[4] P. H. Rabinowitz: On a class of nonlinear Schrödinger equations. Z. Angew. Math. Phys., **43** (1992), 270–291.

[5] X. Wang: On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations. Comm. Math. Phys., **153** (1993), 229–244.

電磁場中のシュレーディンガー方程式の解の特異性伝播について *

東京理科大学 大学院理学研究科数学専攻 博士後期課程 3 年
村松 亮 (Ryo MURAMATSU)

概要

本研究では, 電磁場中のシュレーディンガー方程式の解の波面集合を, 波束変換を用いて初期値で特徴づけた. シュレーディンガー方程式は, 量子力学における電磁場中の荷電粒子の運動を記述する偏微分方程式である. 初期値の特異点が時間経過で解に伝播する現象を特異性伝播というが, シュレーディンガー方程式の解の特異性伝播は, シュレーディンガー方程式に対応する古典力学的粒子の運動が反映されている. 本研究では, 特異点の位置と伝播する方向を同時に記述する波面集合によって, 電磁場中のシュレーディンガー方程式の解の特異性伝播現象を明らかにすることが目的である.

1 導入

本研究では, 以下のベクトルポテンシャル付きシュレーディンガー方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\left(\nabla - i\boldsymbol{a}(t,x)\right)^2 u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $u(t,x)$, $u_0(x)$ はそれぞれ $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ についての複素数値関数であり, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n)$, $\boldsymbol{a} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ で, $\boldsymbol{a}(t,x) = (a_1(t,x), \cdots, a_n(t,x))$ とし, $(\nabla - i\boldsymbol{a}(t,x))^2 = \sum_{k=1}^n (\partial_{x_k} - ia_k(t,x))^2$ である. さらに, $\boldsymbol{a}(t,x)$ には以下の仮定 A, B のいずれか一方を課す.

仮定 A. $k = 1, \ldots, n$ に対し, $\boldsymbol{a}$ の第 k 成分 $a_k(t,x)$ は $b_{k,l} \in C^\infty(\mathbb{R})$ $(l, k = 1, \ldots, n)$ を用いて

$$a_k(t,x) = \sum_{l=1}^n b_{k,l}(t)x_l \tag{2}$$

と表される.

仮定 B. 各 $j = 1, \cdots, n$ に対し $a_j : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は C^∞ 級であり, $\rho < 1$ が存在して任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ に対し,

$$^\exists C_\alpha > 0 \text{ s.t. } ^\forall (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n;\ \max_{1\le j\le n} |\partial_x^\alpha a_j(t,x)| \le C_\alpha (1+|x|)^{\rho-|\alpha|}.$$

* 本研究は安部 文人氏 (東京理科大学) との共同研究に基づく.

関数の滑らかさはフーリエ変換の減衰の速さで置き換えることができる．波面集合は遠方での ξ の減少度を方向別にみることで, 関数の特異性を方向別に精密化した概念である．

定義 1.1 (波面集合)**.** $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対し, $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$ であるとは, x_0 の近傍上で $\chi(x) \equiv 1$ となる $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在し, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し $C_N > 0$ が存在して

$$|\widehat{\chi f}(\xi)| \leq C_N (1 + |\xi|)^{-N}, \quad \xi \in \Gamma$$

をみたすことである．

定義 1.2 (波束変換)**.** $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき, 窓関数 φ による f の波束変換 $W_\varphi f$ を, 以下で定める:

$$W_\varphi f(x, \xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y - x)} e^{-iy \cdot \xi} f(y) dy, \quad (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

2 主結果

本研究では, 仮定 A または仮定 B のいずれかをみたすベクトルポテンシャル $\boldsymbol{a}(t, x)$ を付与したシュレーディンガー方程式 (1) の解の波面集合を, 波束変換を用いて初期値によって特徴づけた．ここで, $x(\tau) = x(\tau; t_0, x, \lambda\xi)$ と $\xi(\tau) = \xi(\tau; t_0, x, \lambda\xi)$ は以下の常微分方程式の解とする．

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = (\nabla_\xi H)(\tau, x(\tau), \xi(\tau)), & x(t_0) = x, \\ \dot{\xi}(\tau) = -(\nabla_x H)(\tau, x(\tau), \xi(\tau)), & \xi(t_0) = \lambda\xi, \end{cases} \tag{3}$$

ただし, $H(t, x, \xi) = \frac{1}{2} |\xi - \boldsymbol{a}(t, x)|^2$.

主定理. $\boldsymbol{a}(t, x)$ は仮定 A または仮定 B のいずれかをみたすとし, $u(t, x)$ は $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ を初期値とする, $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する (1) の解とする．このとき, ある $b \in (0, 1)$ が存在して, 任意の $t_0 \in \mathbb{R}$ に対し, 以下は同値である．

(i) $(x_0, \xi_0) \notin WF(u(t_0, \cdot))$.

(ii) x_0 の近傍 K と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$, $\varphi_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ に対し, 正定数 $C_{N,a,\varphi_0} > 0$ が存在し, 任意の $\lambda \geq 1$, $x \in K$, $\xi \in \Gamma_a := \left\{\xi \in \Gamma \middle| a^{-1} \leq |\xi| \leq a\right\}$ に対し

$$\left| W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}} u_0(x(0; t_0, x, \lambda\xi), \xi(0; t_0, x, \lambda\xi)) \right| \leq C_{N,a,\varphi_0} \lambda^{-N} \tag{4}$$

をみたす．ただし, $W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}} u_0(x, \xi)$ は u_0 の $\varphi_\lambda^{(-t_0)}(x)$ を窓関数とした波束変換であり, $\varphi_\lambda^{(t)}(x)$ は, 初期値が $\varphi_{0,\lambda}(x) = \lambda^{nb/2} \varphi_0\left(\lambda^b x\right)$ で, 仮定 A のときは (1) を, 仮定 B のときは自由シュレーディンガー方程式をみたす初期値問題の解である．

(iii) $\varphi_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ と x_0 の近傍 K, ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$ に対し, 正定数 $C_{N,a} > 0$ が存在し, 任意の $\lambda \geq 1$, $x \in K$, $\xi \in \Gamma_a$ に対して (8) をみたす．

3 背景

波面集合は 1970 年代に L. Hörmander によって定義された概念であり, Hörmander は双曲型方程式の解の特異性伝播定理を波面集合を用いて示した. 双曲型方程式の最も簡単な場合である波動方程式を例にとろう. この場合, 解の特異点は初期値と特性曲線を用いて完全に決定される. すなわち, (x,ξ) が初期値の波面集合に入っているならば, $(x\pm\xi t,\xi)$ は時刻 t における解の波面集合に属する. これから, 初期値の特異点は速度 ξ で直線的にスライドして解に伝わるということがわかる. 平たく言えば, 初期値が微分可能でなければ, 解も微分可能ではない.

一方シュレーディンガー方程式の場合は, 解の特異性伝播は解の (超局所的) 平滑化作用, 物理的には波動関数のもつ分散性と関係している. このことを説明するために, まずシュレーディンガー方程式の解の平滑化作用について説明する. 自由シュレーディンガー方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x)+\frac{\Delta}{2}u(t,x)=0, & (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n,\\ u(0,x)=u_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^n), & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{5}$$

の解作用素は, フーリエ変換 $\mathcal{F}$ を用いて $e^{it\Delta/2}:=\mathcal{F}^{-1}e^{-it\xi^2/2}\mathcal{F}$ と表される. 解作用素と位置作用素 x との交換関係: $e^{it\Delta/2}x=(x+it\nabla)e^{it\Delta/2}$ により, もし $x^2u_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ ならば

$$\|(x+it\nabla)^2u(t,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|e^{it\Delta/2}(x^2u_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}=\|x^2u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}<\infty,$$

従って $t\neq 0$ で $u(t,x)\in H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ となることがわかる. 初期値には滑らかさの仮定を課していないため, これは初期値の空間遠方での減衰によって解の微分可能性が「回復した」ととらえることができる. これが (自由) シュレーディンガー方程式の解の平滑化作用である. 微分可能性が初期値の減衰度に依存すること, いくらでも回復するわけではないことが熱方程式のそれと異なる.

平滑化作用は Craig, Kappeler, Strauss によって超局所的な性質として一般化された ([1]). すなわち, 初期値がある方向の錐近傍 Γ 上で $x^Nu_0(x)\in L^2(\Gamma)$ $(N\in\mathbb{N})$ をみたすなら, $t>0$ での解 $u(t,x)$ は, その方向では滑らかになる. この結果は実際には波面集合を用いて記述されており, シュレーディンガー方程式のもつ超局所的平滑化作用が特異性伝播現象に関係することを示した最初の結果であろう. Craig らの結果はポテンシャル付きの変数係数シュレーディンガー作用素に対する結果として一般化した状態で記述されているが, 主要部は Δ に近く, ポテンシャルは増大度が小さい短距離型を仮定している. 長距離型ポテンシャルを含み, 各時刻における解の波面集合を初期値を用いて特徴づけた結果が中村 [10], [11] であり, Craig らの結果を最も精密にした結果の一つである. ここで, ポテンシャルが特異性伝播の結果にどのような影響を及ぼすのかについて, 平滑化作用の直観的な意味から説明する.

微分可能性はフーリエ変換後の変数 ξ に関する減衰度であるととらえることができる. この ξ は量子力学の文脈では古典粒子の運動量または速度に対応する. 平滑化作用が言っているのは, 自由シュレーディンガー方程式において特異性に関係する速度 ξ の大きい部分は初期時刻を離れた瞬間に無限遠方に飛び去り, $t\neq 0$ では ξ が小さい部分しか残らないため, 初期値がたとえ特異性を持ったとしても解は微分できるようになる, ということである. この原理に基づくと, 速度の大きい粒子が遠方に飛び去るような場合なら同様の平滑化作用が期待できるが, ポテンシャルによって

は粒子がポテンシャル中に閉じ込められる場合がある．典型例は調和振動子のポテンシャルであるが, 実際その場合は初期値の特異性が周期的に回帰する現象を観ることができる (Zelditch [16] や Kapitanski–Rodnianski–Yajima [3] 等を参照されたし)．さらに, ポテンシャルの空間増大度が 2 次よりも大きい場合, ポテンシャルによる粒子の閉じ込めが強くなった結果, 特異性が同じ場所に周期的に回帰するのではなくいたるところに爆発的に発生することが知られている．これについては谷島 [14] を参照されたい.

中村 [10], [11] の結果は, ポテンシャルの空間増大度が 2 未満であれば, 粒子がポテンシャル中に閉じ込められるということはあまり起こらず, 速度の大きい粒子はほとんど無限遠方に飛び去る自由の場合に近いであろう, という描像を示している．調和振動子の場合における特異性の回帰現象と比較すると, (ポテンシャルの空間増大度)= 2 が特異性伝播における分水嶺であることが察せられるが, ポテンシャルの増大度と特異性伝播について, 各時刻における解の波面集合の特徴づけという形で統一的に扱った研究は多くない.

一方, 波面集合を, 波束変換を用いることで特徴づけられることは以前から知られていた．具体的には, 次の命題が成立する:

命題 3.1 (G. B. Folland [2], T. Ōkaji [12] and [13], K. Kato–M. Kobayashi–S. Ito [7])**.** *$(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $0 < b < 1$ とする．このとき, 以下は同値である.*

(i) $(x_0, \xi_0) \notin WF(f)$

(ii) x_0 の近傍 K と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$, $\varphi_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ に対し, 正定数 $C_{N,a,\varphi_0} > 0$ が存在し, 任意の $\lambda \geq 1$, $x \in K$, $\xi \in \Gamma_a := \left\{\xi \in \Gamma \middle| a^{-1} \leq |\xi| \leq a\right\}$ に対して

$$|W_{\varphi_\lambda} f(x, \lambda\xi)| \leq C_{N,a,\varphi} \lambda^{-N} \tag{6}$$

をみたす．ただし, $\varphi_\lambda(x) = \lambda^{\frac{nb}{2}} \varphi\left(\lambda^b x\right)$.

(iii) $\varphi_0(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ と x_0 の近傍 K, ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$ に対し, 正定数 $C_{N,a} > 0$ が存在し, 任意の $\lambda \geq 1$, $x \in K$, $\xi \in \Gamma_a$ に対し (6) をみたす.

また, 加藤, 小林, 伊藤 [6] によって自由シュレーディンガー方程式の解を波束変換を用いて具体的に書き下すことができることが分かった．のちに調和振動子のシュレーディンガー方程式の解の波束変換を使った表示も得られ, 上記の命題 3.1 と組み合わせることで解の波面集合を波束変換を用いて特徴づけた結果 [5] が得られた．この結果は, 局所平滑化作用が発生する自由の場合と, 平滑化は起こらず特異性の回帰が起こる調和振動子の場合の波面集合の特徴づけが, 並列に論じられているという点で興味深い.

さらにこの結果は, 時間依存する長期型ポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \frac{\Delta}{2} u(t,x) = V(t,x)u(t,x), & (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{7}$$

の解に対しても拡張できることが分かった．以下がその結果である.

定理 3.2 (K. Kato–S. Ito [4])**.** *$u(t,x)$ は $u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ を初期値とする, $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ に属する*

(7) の解とする．さらに，$V(t,x)$ は $\rho<2$ が存在し，任意の多重指数 α に対して，$C_\alpha>0$ が存在して

$$|\partial_x^\alpha V(t,x)| \le C_\alpha(1+|x|)^{\rho-|\alpha|}$$

をみたすとする．このとき，ある $b\in(0,1)$ が存在して，任意の $t_0\in\mathbb{R}$ に対し，以下は同値である．

(i) $(x_0,\xi_0)\notin WF(u(t_0,\cdot))$.

(ii) x_0 の近傍 K と ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して，任意の $N\in\mathbb{N}$, $a\ge 1$, $\varphi_0(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ に対し，正定数 $C_{N,a,\varphi_0}>0$ が存在し，任意の $\lambda\ge 1$, $x\in K$, $\xi\in\Gamma_a:=\left\{\xi\in\Gamma\middle|a^{-1}\le|\xi|\le a\right\}$ に対し

$$\left|W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}}u_0(x(0;t_0,x,\lambda\xi),\xi(0;t_0,x,\lambda\xi))\right| \le C_{N,a,\varphi_0}\lambda^{-N} \tag{8}$$

をみたす．ただし，$W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}}u_0(x,\xi)$ は u_0 の $\varphi_\lambda^{(-t_0)}(x)$ を窓関数とした波束変換であり，$\varphi_\lambda^{(t)}(x)$ は，初期値が $\varphi_{0,\lambda}(x)=\lambda^{nb/2}\varphi_0\left(\lambda^b x\right)$ の自由シュレーディンガー方程式をみたす初期値問題の解である．

(iii) $\varphi_0(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\setminus\{0\}$ と x_0 の近傍 K, ξ_0 の錐近傍 Γ が存在して，任意の $N\in\mathbb{N}$, $a\ge 1$ に対し，正定数 $C_{N,a}>0$ が存在し，任意の $\lambda\ge 1$, $x\in K$, $\xi\in\Gamma_a$ に対して (8) をみたす．

ただし，$x(\tau)=x\left(\tau;t_0,x,\lambda\xi\right)$ と $\xi(\tau)=\xi\left(\tau;t_0,x,\lambda\xi\right)$ は以下の常微分方程式の解である．

$$\begin{cases}\dot{x}(\tau)=\xi(\tau), & x(t_0)=x,\\ \dot{\xi}(\tau)=-(\nabla_x V)(\tau,x(\tau)), & \xi(t_0)=\lambda\xi,\end{cases} \tag{9}$$

本研究は，この結果を磁場に対応するベクトルポテンシャルがついた方程式 (1) に対して応用したものである．磁場に対する結果は Mao による結果 [8, 9] が知られているが，例えば [8] ではポテンシャル $V(x)$ も考慮しているが時間依存しない場合に限られること，本研究の波面集合より弱い概念である H^s 波面集合を用いている点が本研究との違いである．さらに本研究の結果は，(時間に依存しない場合は) 一般に特異性の回帰が起こりやすい定磁場の場合 (仮定 A) と，局所平滑化が起こりやすい空間減衰磁場 (仮定 B) における解の波面集合を同時に記述しており，特異性伝播を統一的に研究しているという点が重要である．

4 証明の概略

$\boldsymbol{a}(t,x)$ が仮定 A をみたす場合と仮定 B をみたす場合とで証明の方法が変わるが，本稿では仮定 B をみたす場合のみ証明の概略を示す．

STEP1: **波束変換を用いた (1) の解の表示**

まず，$t\in\mathbb{R}$, $x,\xi\in\mathbb{R}^n$ に対し，特性曲線 $x(s)=x(s;t,x,\lambda\xi)$, $\xi(s)=\xi(s;t,x,\lambda\xi)$ を

$$\begin{cases}\dot{x}(s)=\xi(s)-\boldsymbol{a}(s,x(s)), & x(t)=x,\\ \dot{\xi}(s)=\nabla_x(\xi(s)\cdot\boldsymbol{a}(s,x(s))-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}^2(s,x(s))), & \xi(t)=\lambda\xi\end{cases} \tag{10}$$

の解とする．ただし $\dot{a} = \frac{d}{ds}a$．この特性曲線と波束変換を用いることで, 積分不等式による解の表示

$$\begin{aligned}\left|W_{\varphi_\lambda^{(t-t_0)}}u(t,x,\xi)\right| &\le \left|W_{\varphi_{0,\lambda}}u_0(x(0;t,x,\lambda\xi),\xi(0;t,x,\lambda\xi)\right| \\ &\quad + \left|\int_0^t \left|R_{\varphi_\lambda^{(\tau)}}u(\tau,x(\tau;t,x,\lambda\xi),\xi(\tau;t,x,\lambda\xi))\right| d\tau\right|\end{aligned} \tag{11}$$

が得られる．ここで,

$$\begin{aligned}R_{\varphi^{(\tau)}}u(\tau,x,\xi) &= \sum_{j=1}^n \xi_j \times \Bigg(\iiint \overline{\varphi_{k,l}(\tau,y-x)}\varphi(\tau,y-z)W_{\varphi^{(\tau)}}u(\tau,z,\eta) \\ &\qquad \times R_j(\tau,y,x)e^{iy\cdot(\eta-\xi)}dydz\bar{d}\eta\Bigg) + (\xi\text{の低階項}),\end{aligned}$$

$$R_j(\tau,y,x) = (a_j(t,y)\text{ を } x \text{ 周りでテイラー展開したものの 2 次以上の項}).$$

のちのために, 三角不等式を用いて次のように変形しておく:

$$\left|\left|W_{\varphi_\lambda^{(t-t_0)}}u(t,x(t),\xi(t))\right| - \left|W_{\varphi_{0,\lambda}}u_0(x(0),\xi(0))\right|\right| \le \left|\int_0^t \left|R_{\varphi_\lambda^{(\tau-t_0)}}u(\tau,x(\tau),\xi(\tau))\right| d\tau\right| \tag{12}$$

STEP2: **十分条件の用意**

$(ii) \Rightarrow (iii)$ は明らかだから, $(i) \Rightarrow (ii)$ および $(iii) \Rightarrow (i)$ を示せばよい．命題 3.1 より, $(i) \Rightarrow (ii)$ が成立することと,

“任意の $N \in \mathbb{N}$, $\varphi_0(x) \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$, $a \ge 1$ に対し, $C_{N,a,\varphi} > 0$ が存在し, 任意の $\lambda \ge 1$, $x \in K$, $\xi \in \Gamma_a$ に対して

$$\left|W_{\varphi_{0,\lambda}}u(t_0,x,\xi)\right| \le C_{N,a,\varphi_0}\lambda^{-N}$$

が成り立つならば, $C'_{N,a,\varphi} > 0$ が存在し, 任意の $\lambda \ge 1$, $x \in K$, $\xi \in \Gamma_a$ に対して

$$\left|W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}}u_0(x(0;t_0,x,\lambda\xi),\xi(0;t_0,x,\lambda\xi))\right| \le C'_{N,a,\varphi_0}\lambda^{-N}.$$

となる”ことに等しい．また $(iii) \Rightarrow (i)$ の成立も,

“$\varphi_0 \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ が存在して, 任意の $N \in \mathbb{N}$, $a \ge 1$ に対し, $C_{N,a} > 0$ が存在し, 任意の $\lambda \ge 1$, $x \in K$, $\xi \in \Gamma_a$ に対して

$$\left|W_{\varphi_\lambda^{(-t_0)}}u_0(x(0;t_0,x,\lambda\xi),\xi(0;t_0,x,\lambda\xi))\right| \le C_{N,a}\lambda^{-N}.$$

ならば, $C'_{N,a} > 0$ が存在し, 任意の $\lambda \ge 1$, $x \in K$, $\xi \in \Gamma_a$ に対して

$$\left|W_{\varphi_{0,\lambda}}u(t_0,x,\xi)\right| \le C'_{N,a}\lambda^{-N}$$

となる”ことと同値である．従って (12) の表示より, 次の補題が示されれば, 数学的帰納法を用いることで両方とも示すことができる．

補題 4.1. $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a \geq 1$, $\varphi_0 \in \mathcal{S} \setminus \{0\}$ とする．$C_{N,a,\varphi_0} > 0$ が存在して，任意の $\lambda \geq 1$, $x \in K$, $\xi \in \Gamma_a$, $t \in [0, t_0]$ に対して

$$\left| W_{\varphi_\lambda^{(t-t_0)}} u(t, x(t), \xi(t)) \right| \leq C_{N,a,\varphi_0} \lambda^{-N} \tag{13}$$

ならば，$C'_{N,a,\varphi_0} > 0$ と $b \in (0,1)$ が存在して，任意の $\lambda \geq 1$, $x \in K$, $\xi \in \Gamma_a$, $t \in [0, t_0]$ に対し

$$\left| \int_0^t \left| R_{\varphi_\lambda^{(\tau-t_0)}} u(\tau, x(\tau), \xi(\tau)) \right| d\tau \right| \leq C'_{N,a,\varphi_0} \lambda^{-N-2b}.$$

STEP3: **補題 4.1 の証明**

$R_{\varphi_\lambda^{(\tau-t_0)}} u(\tau, x(\tau), \xi(\tau))$ の中に $W_{\varphi_\lambda^{(t-t_0)}} u(t, x(t), \xi(t))$ があるから，(13) を用いて λ^{-N} の減衰は出すことができる．残りは λ^{-2b} の減衰であるが，$R_j(\tau, y, x(\tau))$ を，(i) テイラー多項式の項 と (ii) 剰余項の二つに分けて特性曲線を評価することで導出する．このとき，特性曲線の評価にかかわる次の 2 つの補題を用いる．

補題 4.2. $p < 1$ とする．このとき λ_0 が存在して，任意の $\lambda \geq \lambda_0$, $s : \lambda^{p-1} \leq |s - t_0| \leq t_0$, $x \in K$, $\xi \in \Gamma_a$ に対し

$$\begin{cases} \frac{1}{2a} |s - t_0| \lambda \leq |x(s - t_0)| \leq 2a|s - t_0|\lambda \\ \frac{1}{2a} \lambda \leq |\xi(s - t_0)| \leq 2a\lambda. \end{cases}$$

補題 4.3. $\delta > 0$ とする．このとき $T_0 \in (0,1)$ と $C_\delta > 0$ が存在して任意の $T \in (0, T_0)$, $t \in \mathbb{R}$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\int_0^T \frac{|\xi(\tau; t, x, \xi)|}{\langle x(\tau; t, x, \xi) \rangle^{1+\delta}} d\tau \leq C_\delta (1 + T).$$

ここで重要なのは，$a_j(t, y)$ のテイラー展開を十分大きい次数まで行うことである．$R_j(\tau, y, x(\tau))$ のうち剰余項の部分からはいくらでも λ の減衰が出せるが，テイラー多項式の部分は多項式の次数を十分大きくしないと λ^{-2b} を得ることができない． また，$R_{\varphi_\lambda^{(\tau-t_0)}} u(\tau, x(\tau), \xi(\tau))$ 内にある $\xi(\tau)$ の一次増大項が厄介であるが，定数 C'_{N,a,φ_0} が実は時刻 t_0 には依存してもよいことを踏まえて，予め $R_{\varphi_\lambda^{(\tau-t_0)}} u(\tau, x(\tau), \xi(\tau))$ の時間積分区間を非常に短い区間に切り分けることで補題 4.3 を用いて処理するのもポイントである．

参考文献

[1] W. Craig, T. Kappeler, W. Strauss, Microlocal dispersive smoothing for the Schrödinger equations, Commun. Pure Appl. Math. 48 (1995) 760–860.

[2] G.B. Folland, Harmonic Analysis in Phase Space, Prinston Univ. Press, 1989.

[3] L. Kapitanski, I. Rodnianski, K. Yajima, On the fundamental solution of a perturbed harmonic oscillator, Topological methods in nonlinear analysis, J. Juliusz Schauder Cent. 9 (1997) 77–106.

[4] K. Kato, S. Ito, Singularities for solutions time dependent Schrödinger equations with subquadratic potential, SUT J. Math. 50 (2014) 383–398.

[5] K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Remark on wave front sets of solutions to Schrödinger equation of a free particle and a harmonic oscillator, SUT J. Math. 47 (2011) 175–183.

[6] K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Representation of Schrödinger operator of a free particle via short time Fourier transform and its applications, Tohoku Math. J. 64 (2012) 223–231.

[7] K. Kato, M. Kobayashi, S. Ito, Remark on characterization of wave front set by wave packet transform, Osaka J. Math. 54 (2) (2017) 209–228.

[8] S. Mao, Singularities of solutions to Schrödinger equations with constant magnetic fields, Funkcial. Ekvac. 54 (2011) 157–171

[9] S. Mao, Singularities for solutions to Schrödinger equations with asymptotically constant magnetic fields, J. Math. Phys. 53 (2012) 073707, 15

[10] S. Nakamura, Propagation of the homogeneous wave front set for Schrödinger equations, Duke Math. J. 126 (2003) 349–367.

[11] S. Nakamura, Semiclassical singularities propagation property for Schrödinger equations, J. Math. Soc. Jpn. 61 (2009) 177–211.

[12] T. Ōkaji, A note on the wave packet transforms, Tsukuba J. Math. 25 (2001) 383–397.

[13] T. Ōkaji, Propagation of wave packets and its applications, Oper. Theory: Adv. Appl. J. Math. 126 (2001) 239–243.

[14] K. Yajima, Smoothness and nonsmoothness of the fundamental solution of time dependent Schrödinger equations, Commun. Math. Phys. 181 (1996) 605–629.

[15] K. Yajima, On fundamental solution of time dependent Schrödinger equations, Cotemp. Math. 217 (1998) 49–68.

[16] S. Zelditch, Reconstruction of singularities for solutions of Schrödinger's equation, Commun. Math. Phys. 90 (1983) 1–26.

ミドル・コンボリューションの q 変形と その q 差分方程式への応用

お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科 理学専攻 数学コース
新井由美 (Yumi ARAI)

概要

超幾何関数は重要な特殊関数の一つであり，微分方程式や積分表示の面で様々な結果が知られている．本研究では，q-middle convolution に関連する q 積分変換を再構成し，q-middle convolution の収束について考察した．具体的な q 差分方程式に q-middle convolution を適用することにより，q 超幾何方程式の標準形と次数 2 の変異版 q 超幾何方程式を導出した．またこれらの q 積分表示を得た．

本研究は竹村剛一教授との共同研究 ([2]) である．

1 導入

超幾何関数は重要な特殊関数の一つであり，整数論をはじめとする様々な分野との関わりをもち，数学のみならず物理学や工学においても重要な役割を担っている．

超幾何関数は，冪級数展開，積分表示，微分方程式という 3 通りの表示をもつ．超幾何級数は

$$ {}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\,\gamma(\gamma+1)}z^2 + \cdots + \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!(\gamma)_n}z^n + \ldots, \tag{1.1} $$

$$ \text{ただし } (\lambda)_n = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+n-1) $$

により定義され，超幾何微分方程式

$$ z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + (\gamma-(\alpha+\beta+1)z)\frac{dy}{dz} - \alpha\beta y = 0 \tag{1.2} $$

の解である．超幾何微分方程式は，3 つの確定特異点 $\{0,1,\infty\}$ をもつ 2 階の Fuchs 型微分方程式の標準形である．超幾何微分方程式の解の積分表示は，C を適当な積分路として

$$ y = \int_C w^{\alpha-\gamma}(1-w)^{\gamma-\beta-1}(z-w)^{-\alpha}dw \tag{1.3} $$

と書くことができる． (1.3) は Euler の積分表示と呼ばれる．

超幾何級数の q 類似である q 超幾何級数

$$ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^\alpha, q^\beta \\ q^\gamma \end{matrix};q,z\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q^\alpha;q)_n(q^\beta;q)_n}{(q;q)_n(q^\gamma;q)_n}z^n \tag{1.4} $$

は Heine により 1846 年に導入された．ここで，$(\lambda;q)_n$ は $(\lambda;q)_0 = 1$，また正の整数 n に対して

$$ (\lambda;q)_n = (1-\lambda)(1-\lambda q)(1-\lambda q^2)\ldots(1-\lambda q^{n-1}) \tag{1.5} $$

により定義される q-Pochhammer 記号である．q 類似とは，「パラメーター q によって変形されたもので，$q \to 1$ の極限でもとに戻るもの」である．実際，q 超幾何級数の各項 $z^n(q^\alpha;q)_n(q^\beta;q)_n/((q;q)_n(q^\gamma;q)_n)$ は $q \to 1$ で超幾何級数 (1.1) の項 $z^n(\alpha)_n(\beta)_n/(n!(\gamma)_n)$ に収束する．q 超幾何級数は q 差分方程式

$$(x-q)f(x/q) - ((q^\alpha + q^\beta)x - q - q^\gamma)f(x) + (q^{\alpha+\beta}x - q^\gamma)f(qx) = 0 \tag{1.6}$$

を満たす．この q 差分方程式は $q \to 1$ で超幾何微分方程式 (1.2) となる．

次数 2 の変異版 q 超幾何方程式 ([5]) は

$$\begin{aligned}&(x - q^{h_1+1/2}t_1)(x - q^{h_2+1/2}t_2)g(x/q) + q^{k_1+k_2}(x - q^{l_1-1/2}t_1)(x - q^{l_2-1/2}t_2)g(qx) \\ &- [(q^{k_1} + q^{k_2})x^2 + Ex + p(q^{1/2} + q^{-1/2})t_1t_2]g(x) = 0, \\ &p = q^{(h_1+h_2+l_1+l_2+k_1+k_2)/2}, \quad E = -p\{(q^{-h_2} + q^{-l_2})t_1 + (q^{-h_1} + q^{-l_1})t_2\}\end{aligned} \tag{1.7}$$

により定義される（ただし，$0 \neq t_1 \neq t_2 \neq 0$）．これは 3 つの特異点 $\{t_1, t_2, \infty\}$ をもつ 2 階の Fuchs 型微分方程式の q 類似である．次数 2 の変異版 q 超幾何方程式の解は [5, 7] においていくつか得られている．

middle convolution は Katz([6]) によって導入された操作であり，この Katz の理論により，任意の rigid な既約 Fuchs 型微分方程式は 1 階の Fuchs 型微分方程式に addition と middle convolution を有限回施すことにより得られることが示された．後に，Dettweiler と Reiter([3, 4]) が Katz の理論を

$$\frac{d}{dx}Y(x) = \Big(\frac{A_1}{x-t_1} + \frac{A_2}{x-t_2} + \cdots + \frac{A_r}{x-t_r}\Big)Y(x) \tag{1.8}$$

と書かれる Fuchs 型微分方程式系に対して線形代数的に書き直し，それによって上述の理論がよりわかりやすいものになった．ここで，$Y(x)$ は n 項ベクトル，$A_1, A_2, \ldots, A_r$ は $n \times n$ 定数行列である．

関数 $Y(x) = x^a(1-x)^b$ は 1 階の線形微分方程式 $dY(x)/dx = \{a/x + b/(x-1)\}Y(x)$ を満たす．この微分方程式に middle convolution を施すと，(1.8) で $r = 2$, $n = 2$ とした微分方程式系が得られる．$Y(x)$ の 2 つの成分それぞれに関する単独の 2 階 q 差分方程式を導出すると，それらは適当なパラメーターをもつ q 超幾何方程式となる．積分表示 (1.3) は，middle convolution に付随する解の対応として得られる．

middle convolution の q 変形は坂井, 山口両氏によって構築された ([8])．q-middle convolution の対象となるのは，線形 q 差分方程式系

$$E_{\mathbf{B},\mathbf{b}} : Y(qx) = B(x)Y(x), \quad B(x) = B_\infty + \sum_{i=1}^{N} \frac{B_i}{1 - x/b_i} \tag{1.9}$$

である．$B_\infty, B_1, \ldots, B_N$ は同じサイズの正方行列，$b_1, b_2, \ldots, b_N$ は相異なる 0 でない複素数である．坂井・山口の q-convolution([8]) は Jackson 積分

$$\int_0^\infty f(s)\, d_qs = (1-q) \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n f(q^n) \tag{1.10}$$

と関連している．

本講演では，q-middle convolution を用いることによって，q 超幾何方程式および変異版 q 超幾何方程式の解の積分表示の q 変形について調べる．この目的のため，坂井・山口の理論を拡張する．坂井・山口の理論における Jackson 積分 (1.10) を

$$\int_0^{\xi\infty} f(s)\, d_q s = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n \xi f(q^n\xi), \quad (\xi \in \mathbb{C}\setminus\{0\}) \tag{1.11}$$

に書き換える．これは青本氏の理論 ([1]) を踏まえたもので，坂井・山口の Jackson 積分 (1.10) は $\xi = 1$ の場合であると考えることができる．

複素数 q は $0 < |q| < 1$ を満たすものとして，次の記号を用いる．

$$(a;q)_\infty = \prod_{j=0}^{\infty}(1-q^j a), \quad (a_1, a_2, \ldots, a_N; q)_\infty = (a_1;q)_\infty (a_2;q)_\infty \ldots (a_N;q)_\infty. \tag{1.12}$$

2 q-middle convolution と収束

定義 2.1. (q−*convolution*[8])
$\mathbf{B} = (B_\infty; B_1, \ldots, B_N)$ を $m\times m$ 行列の組，$(b_1, b_2, \ldots, b_N)$ を 0 でない相異なる複素数の組とする．$B_0 = I_m - B_\infty - B_1 - \cdots - B_N$ とする．q-convolution $c_\lambda : (B_\infty; B_1, \ldots, B_N) \mapsto (F_\infty; F_1, \ldots, F_N)$ を次のように定義する．

$$\boldsymbol{F} = (F_\infty; F_1, \ldots, F_N) \text{ は } (N+1)m \times (N+1)m \text{ 行列の組}, \tag{2.1}$$

$$F_i = \begin{pmatrix} & & O & & \\ B_0 & \cdots & B_i - (1-q^\lambda)I_m & \cdots & B_N \\ & & O & & \end{pmatrix}(i+1), \quad 1 \le i \le N,$$

$$F_\infty = I_{(N+1)m} - \widehat{F}, \quad \widehat{F} = \begin{pmatrix} B_0 & \cdots & B_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_0 & \cdots & B_N \end{pmatrix}.$$

定義 2.1 の q-convolution により，線形 q 差分方程式の対応

$$Y(qx) = B(x)Y(x) \mapsto \widehat{Y}(qx) = F(x)\widehat{Y}(x), \tag{2.2}$$

$$B(x) = B_\infty + \sum_{i=1}^{N}\frac{B_i}{1-x/b_i},\ F(x) = F_\infty + \sum_{i=1}^{N}\frac{F_i}{1-x/b_i}$$

が引き起こされ，これは坂井・山口 ([8]) によって構成された q 積分変換と関連する．Jackson 積分を (1.11) で定義すると，この Jackson 積分の値は ξ に依存する．

坂井・山口の q-convolution に付随する q 積分表示の定理に収束条件を加えて書き直したものが次の定理である．

定理 2.2. (cf. [8, Theorem 2.1])
$Y(x)$ は $E_{\mathbf{B},\mathbf{b}}$ の解であって， 任意の $s \in \{q^n\xi | n \ge M_1,\ n \in \mathbb{Z}\}$ と $k = 1, \ldots, m$ に対して

$|[Y(s)]_k| \le C_1|s|^{\varepsilon_1}$ となる $\varepsilon_1, C_1 \in \mathbb{R}_{>0}$, $M_1 \in \mathbb{Z}$ が存在し, また, 任意の $s \in \{q^n\xi | n \le M_2, n \in \mathbb{Z}\}$, $k = 1, \ldots, m$ に対して $|[Y(s)]_k| \le C_2|s|^{\lambda-\varepsilon_2}$ となる $\varepsilon_2, C_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, $M_2 \in \mathbb{Z}$ が存在するものとする. このとき

$$\widehat{Y}_i(x) = \int_0^{\xi\infty} \frac{P_\lambda(x,s)}{s-b_i} Y(s)\, d_q s \quad (i = 0, \ldots, N), \quad \widehat{Y}(x) = \begin{pmatrix} \widehat{Y}_0(x) \\ \vdots \\ \widehat{Y}_N(x) \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

$$P_\lambda(x,s) = \frac{(q^{\lambda+1}s/x;q)_\infty}{(qs/x;q)_\infty}$$

で定められる関数 $\widehat{Y}(x)$ は収束し，方程式 $E_{c_\lambda(\mathbf{B}),\mathbf{b}}$ を満たす．ただし，$c_\lambda(\mathbf{B}) = \mathbf{F}$ は (2.1) によって定められた行列の組である．

定義 2.3. (q−*middle convolution*, [8])
$(\mathbb{C}^m)^{N+1}$ の部分空間 $\mathcal{K}$，$\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \ker B_0 \\ \vdots \\ \ker B_N \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L} = \ker(\widehat{F} - (1-q^\lambda) I_{(N+1)m}) \tag{2.4}$$

と定義する．$\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ は $\boldsymbol{F}$-不変である．F_k の商空間 $(\mathbb{C}^m)^{N+1}/(\mathcal{K}+\mathcal{L})$ での作用を $\overline{F}_k$ $(k = \infty, 1, \ldots, N)$ と記す．このとき q-middle convolution mc_λ は $E_{\mathbf{B},\mathbf{b}} \mapsto E_{\overline{\mathbf{F}},\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{F}} = (\overline{F}_\infty; \overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_N)$ という対応によって定義される．

q-convolution に付随する積分変換を用いることによって，q-middle convolution mc_λ についても解の積分変換を得られるが，その際，商空間 $\mathcal{K}+\mathcal{L} \subset (\mathbb{C}^m)^{N+1}$ を考慮する必要がある．

3 q 超幾何方程式の q 積分表示

本章では，関数 $y(x) = x^\mu(\alpha x;q)_\infty/(\beta x;q)_\infty$ に対して q-convolution を適用することによって q 超幾何方程式を導出する．α と β は異なるものとする．

$$y(qx) = (qx)^\mu \frac{(\alpha qx;q)_\infty}{(\beta qx;q)_\infty} = q^\mu \frac{1-\beta x}{1-\alpha x} y(x) = \Big(q^\mu \frac{\beta}{\alpha} + \frac{q^\mu(1-\beta/\alpha)}{1-\alpha x}\Big) y(x) \tag{3.1}$$

より，関数 $y(x)$ は線形 q 差分方程式 $y(qx) = B(x)y(x)$,

$$B(x) = B_\infty + \frac{B_1}{1-x/b_1}, \quad B_\infty = q^\mu \frac{\beta}{\alpha}, \quad B_1 = q^\mu\Big(1-\frac{\beta}{\alpha}\Big), \quad b_1 = \frac{1}{\alpha} \tag{3.2}$$

を満たす．このとき $B_0 = 1 - B_\infty - B_1 = 1 - q^\mu$．$q$-convolution c_λ を施すと，行列の組 $c_\lambda(\mathbf{B}) = \mathbf{F} = (F_1, F_\infty)$ は

$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B_0 & B_1 - (1-q^\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-q^\mu & q^\mu(1-\beta/\alpha) - 1 + q^\lambda \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$F_\infty = \begin{pmatrix} 1-B_0 & -B_1 \\ -B_0 & 1-B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q^\mu & -q^\mu(1-\beta/\alpha) \\ -(1-q^\mu) & 1-q^\mu(1-\beta/\alpha) \end{pmatrix}$$

と書ける．よって，方程式 $E_{\mathbf{F},b}$ は

$$\widehat{Y}(qx)=\Big(F_\infty+\frac{F_1}{1-\alpha x}\Big)\widehat{Y}(x)=\begin{pmatrix} q^\mu & -q^\mu(1-\beta/\alpha) \\ \dfrac{(1-q^\mu)\alpha x}{1-\alpha x} & \dfrac{(-\alpha+(\alpha-\beta)q^\mu)x+q^\lambda}{1-\alpha x}\end{pmatrix}\widehat{Y}(x) \tag{3.4}$$

と書ける．$\widehat{Y}(x)=\begin{pmatrix}\widehat{y}_0(x)\\ \widehat{y}_1(x)\end{pmatrix}$ とおくと，$\widehat{y}_0(x)$ に関する単独の 2 階 q 差分方程式

$$\begin{aligned}(x-q^{\lambda+1}\beta^{-1})\widehat{y}_0(x/q)+q^{-\mu}\beta^{-1}(\alpha x-q)\widehat{y}_0(qx)\\ -\{(q^{-\mu}\alpha\beta^{-1}+1)x-q\beta^{-1}(1+q^{\lambda-\mu})\}\widehat{y}_0(x)=0\end{aligned} \tag{3.5}$$

を得る．$\widehat{y}_0(x)=x^\lambda h(x)$ とおいてパラメーターの取り方を特殊化すると，関数 $h(x)$ が満たす q 差分方程式は，q 超幾何方程式の標準形

$$(x-q)g(x/q)+(abx-c)g(qx)-\{(a+b)x-q-c\}g(x)=0 \tag{3.6}$$

に対応することがわかる．同様に，$\widehat{y}_1(x)$ に関する q 差分方程式も q 超幾何方程式の標準形に対応する．

定理 2.2 の仮定を調べることにより，次の命題 3.1 を得る．

命題 3.1. $\xi,\alpha_1,\dots,\alpha_N,\beta_1,\dots,\beta_N\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，$\beta_1\xi,\dots,\beta_N\xi\notin q^{\mathbb{Z}}$ とする．

$$y(s)=s^\mu\frac{(\alpha_1 s,\dots,\alpha_N s;q)_\infty}{(\beta_1 s,\dots,\beta_N s;q)_\infty} \tag{3.7}$$

とおく．
(i) $\mu>0$ ならば，任意の $s\in\{q^n\xi|n\geq M_1,\ n\in\mathbb{Z}\}$ に対して $|y(s)|\leq C_1|s|^\varepsilon$ となる $\varepsilon,C_1\in\mathbb{R}_{>0}$，$M_1\in\mathbb{Z}$ が存在する．
(ii) $\nu\in\mathbb{R}$ とする．$|q|^{\nu-\mu}|\alpha_1\dots\alpha_N/(\beta_1\dots\beta_N)|<1$ ならば，任意の $s\in\{q^n\xi|n\leq M_2,\ n\in\mathbb{Z}\}$ に対して $|y(s)|\leq C_2|s|^{\nu-\varepsilon}$ となる $\varepsilon,C_2\in\mathbb{R}_{>0}$，$M_2\in\mathbb{Z}$ が存在する．

上述の $y(x)=x^\mu(\alpha x;q)_\infty/(\beta x;q)_\infty$ に対して q-convolution を適用した例については，命題 3.1 において $N=1$，$\nu=\lambda$ とすることで定理 2.2 の仮定が満たされる．よって，次の定理を得る．

定理 3.2. $\xi,\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$，$\beta\xi\notin q^{\mathbb{Z}}$ とする．$\mu>0$ かつ $|q|^{\lambda-\mu}|\alpha/\beta|<1$ ならば，

$$\begin{aligned}&\widehat{Y}(x)=\begin{pmatrix}\widehat{y}_0(x)\\ \widehat{y}_1(x)\end{pmatrix},\\ &\widehat{y}_0(x)=\int_0^{\xi\infty}\frac{P_\lambda(x,s)}{s}s^\mu\frac{(\alpha s;q)_\infty}{(\beta s;q)_\infty}\,d_qs,\quad \widehat{y}_1(x)=\int_0^{\xi\infty}\frac{P_\lambda(x,s)}{s-1/\alpha}s^\mu\frac{(\alpha s;q)_\infty}{(\beta s;q)_\infty}\,d_qs\end{aligned} \tag{3.8}$$

で定義される関数 $\widehat{Y}(x)$ は収束し，かつ方程式 $E_{\mathbf{F},\mathbf{b}}$(3.4) を満たす．

関数 $\widehat{y}_0(x)$ は

$$\widehat{y}_0(x)=\int_0^{\xi\infty}s^{\mu-1}\frac{(q^{\lambda+1}s/x,\alpha s;q)_\infty}{(qs/x,\beta s;q)_\infty}d_qs=(1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}(q^n\xi)^\mu\frac{(q^{\lambda+n+1}\xi/x,q^n\xi\alpha;q)_\infty}{(q^{n+1}\xi/x,q^n\xi\beta;q)_\infty} \tag{3.9}$$

と表される．これは ${}_2\psi_2$ という形の両側 q 超幾何級数である．ξ に特定の値を代入すると，片側の q 超幾何級数が得られる．$\xi = 1/\alpha$ とすれば, $n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ に対して $(q^n;q)_\infty = 0$ となることから,

$$\begin{aligned}\widehat{y}_0(x) &= (1-q)\sum_{n=1}^{\infty}(q^n/\alpha)^\mu \frac{(q^{\lambda+n+1}/(\alpha x), q^n;q)_\infty}{(q^{n+1}/(\alpha x), q^n\beta/\alpha;q)_\infty} \\ &= (1-q)\alpha^{-\mu}q^\mu \frac{(q^{\lambda+2}/(\alpha x), q;q)_\infty}{(q^2/(\alpha x), q\beta/\alpha;q)_\infty}\ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^2/(\alpha x), q\beta/\alpha \\ q^{\lambda+2}/(\alpha x)\end{matrix};q, q^\mu\right)\end{aligned} \tag{3.10}$$

となる．$\xi = q^{-\lambda}x$ のときも $\widehat{y}_0(x)$ は ${}_2\phi_1$ を用いて表すことができる．これらの場合，定理 2.2 の仮定は条件 $\mu > 0$ のみによって満たされる．

$\xi = 1/\beta$ とすると，定理 3.2 の仮定に反する．そこで関数 $P_\lambda(x,s)$，$y(s)$ を

$$P_\lambda(x,s) = (x/s)^\lambda \frac{(x/s;q)_\infty}{(q^{-\lambda}x/s;q)_\infty}, \quad y(s) = s^{\mu'}\frac{(q/(\beta s);q)_\infty}{(q/(\alpha s);q)_\infty}, \quad (\text{ただし } q^{\mu'}\alpha/\beta = q^\mu) \tag{3.11}$$

に取り替える．この $P_\lambda(x,s)$，$y(x)$ も元の関数と同じ q 差分方程式を満たす．q-convolution によって得られた関数 $\widehat{y}_0(x)$ は

$$\widehat{y}_0(x) = (1-q)x^\lambda \sum_{n=-\infty}^{\infty}(q^n\xi)^{\mu'-\lambda}\frac{(xq^{-n}/\xi, q^{1-n}/(\beta\xi);q)_\infty}{(xq^{-\lambda-n}/\xi, q^{1-n}/(\alpha\xi);q)_\infty} \tag{3.12}$$

と表され，これもまた収束条件の下で方程式 (3.5) を満たす．$\xi = 1/\beta$ ならば,

$$\widehat{y}_0(x) = (1-q)\beta^{\lambda-\mu'}x^\lambda \frac{(\beta x, q;q)_\infty}{(q^{-\lambda}\beta x, q\beta/\alpha;q)_\infty}\ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-\lambda}\beta x, q\beta/\alpha \\ \beta x\end{matrix};q, q^{\lambda-\mu}\frac{\alpha}{\beta}\right). \tag{3.13}$$

$\xi = x$ も (3.9) に代入できないので同様の計算をすると，$\widehat{y}_0(x)$ は ${}_2\phi_1$ を用いて表すことができる．これらの $\widehat{y}_0(x)$ は $|q|^{\lambda-\mu}|\alpha/\beta| < 1$ で収束する．

4 変異版 q 超幾何方程式の q 積分表示

本章では，q-middle convolution によって次数 2 の変異版 q 超幾何方程式 (1.7) を導出する．q-middle convolution は定義 2.3 において，不変な部分空間 $\mathcal{K}$，$\mathcal{L}$ で商空間をとることによって定められている．部分空間 $\mathcal{K}$，$\mathcal{L}$ のどちらか一方は 0 でないという条件の下で，$N = 2$ の場合を調べる．

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ は相異なるものとし,

$$y(x) = x^\mu \frac{(\alpha_1 x, \alpha_2 x;q)_\infty}{(\beta_1 x, \beta_2 x;q)_\infty} \tag{4.1}$$

とする．関数 $y(x)$ は線形 q 差分方程式 $y(qx) = B(x)y(x)$,

$$\begin{aligned} &B(x) = B_\infty + \frac{B_1}{1-x/b_1} + \frac{B_2}{1-x/b_2},\ b_1 = \frac{1}{\alpha_1},\ b_2 = \frac{1}{\alpha_2}, \\ &B_\infty = q^\mu\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}, \quad B_1 = q^\mu\frac{(\alpha_1-\beta_1)(\alpha_1-\beta_2)}{\alpha_1(\alpha_1-\alpha_2)}, \quad B_2 = q^\mu\frac{(\alpha_2-\beta_1)(\alpha_2-\beta_2)}{\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}\end{aligned} \tag{4.2}$$

を満たす．$B_0 = 1 - B_\infty - B_1 - B_2 = 1 - q^\mu$．$q$-convolution c_λ 後の q 差分方程式 $E_{\mathbf{F},b}$ は

$$\widehat{Y}(qx) = \left(F_\infty + \frac{F_1}{1-\alpha_1 x} + \frac{F_2}{1-\alpha_2 x}\right)\widehat{Y}(x), \quad \widehat{Y}(x) = \begin{pmatrix}\widehat{y}_0(x) \\ \widehat{y}_1(x) \\ \widehat{y}_2(x)\end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

定義 2.3 での部分空間 $\mathcal{K}$，$\mathcal{L}$ の定義より，$\mu=0$ ならば $\dim\mathcal{K}=1$，$q^\lambda=q^\mu\beta_1\beta_2/(\alpha_1\alpha_2)$ ならば $\dim\mathcal{L}=1$ となる．

本講演では，$q^\lambda=q^\mu\beta_1\beta_2/(\alpha_1\alpha_2)$ の場合について考察する．$q^\lambda=q^\mu\beta_1\beta_2/(\alpha_1\alpha_2)$ ならば，部分空間 $\mathcal{L}=\ker(\widehat{F}-(1-q^\lambda)I_3)$ の基底として ${}^t(1,1,1)$ がとれ，$\dim\ \mathcal{L}=1$．正則行列

$$P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

をとる．P の第 3 列には $\mathcal{L}$ の基底としてとった ${}^t(1,1,1)$ が，第 1 列および第 2 列には計算が簡単になるよう単位ベクトルが入っている．P で F_1，F_2，F_∞ を相似変換すると，

$$P^{-1}F_1P=\begin{pmatrix}B_1-(1-q^\lambda)&B_2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad P^{-1}F_2P=\begin{pmatrix}0&0&0\\B_1&B_2-(1-q^\lambda)&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \tag{4.5}$$
$$P^{-1}F_\infty P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-B_1&-B_2&1-B_0-B_1-B_2\end{pmatrix}.$$

$P^{-1}F_\infty P$, $P^{-1}F_1P$, $P^{-1}F_2P$ の左上の 2×2 小行列は，商空間 $\mathbb{C}^3/\mathcal{L}$ での 1 組の表現行列に対応する．こうして，$mc_\lambda(\mathbf{B})=\overline{\mathbf{F}}=(\overline{F}_\infty;\overline{F}_1,\overline{F}_2)$ は

$$\overline{F}_1=\begin{pmatrix}B_1-(1-q^\lambda)&B_2\\0&0\end{pmatrix},\ \overline{F}_2=\begin{pmatrix}0&0\\B_1&B_2-(1-q^\lambda)\end{pmatrix},\ \overline{F}_\infty=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \tag{4.6}$$

ととれ，方程式 $E_{\overline{\mathbf{F}},b}$ は

$$\begin{pmatrix}\bar g_1(qx)\\\bar g_2(qx)\end{pmatrix}=\Big(\overline{F}_\infty+\frac{\overline{F}_1}{1-\alpha_1x}+\frac{\overline{F}_2}{1-\alpha_2x}\Big)\begin{pmatrix}\bar g_1(x)\\\bar g_2(x)\end{pmatrix} \tag{4.7}$$

と書ける．これより，$\bar g_1(x)$ に関する q 差分方程式は

$$\begin{aligned}&\Big(x-\frac{q^{\mu+1}\beta_1}{\alpha_1\alpha_2}\Big)\Big(x-\frac{q^{\mu+1}\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\Big)\bar g_1(x/q)+q\Big(x-\frac{1}{\alpha_1}\Big)\Big(x-\frac{q}{\alpha_2}\Big)\bar g_1(qx)\\&-\Big\{(1+q)x^2-\Big(q^{\mu+1}\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{q}{\alpha_1}+\frac{q^2}{\alpha_2}\Big)x+\Big(1+\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\Big)\frac{q^{\mu+2}}{\alpha_1\alpha_2}\Big\}\bar g_1(x)=0\end{aligned} \tag{4.8}$$

と書ける．$x=1/z$，$\bar g_1(x)=x^\mu f(1/x)$ とすると，

$$\begin{aligned}&(z-\alpha_1)\Big(z-\frac{\alpha_2}{q}\Big)f(z/q)+\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\Big(z-q^{-\mu-1}\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1}\Big)\Big(z-q^{-\mu-1}\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_2}\Big)f(qz)\\&-\Big\{\Big(1+\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\Big)z^2-(q^{-1}(\beta_1+\beta_2)+q^{-\mu}\alpha_1+q^{-\mu-1}\alpha_2)z+q^{-\mu-2}(q+1)\alpha_1\alpha_2\Big\}f(z)=0\end{aligned} \tag{4.9}$$

となる．この方程式は，次数 2 の変異版 q 超幾何方程式 (1.7) において $k_1=0$ とした特別な場合であるが，$g(z)=z^{-k_1}f(z)$ とおくことによって，(4.9) は (1.7) に対応する．

命題 4.1. $f(z)$ は方程式 (4.9) を満たすものとする．$g(x)=x^{-k_1}f(x)$,

$$\begin{aligned}&\alpha_1=q^{h_1+1/2}t_1,\quad \alpha_2=q^{h_2+3/2}t_2,\\&\beta_1=q^{(h_1+h_2+l_1-l_2-k_1+k_2)/2+1}t_1,\quad \beta_2=q^{(h_1+h_2-l_1+l_2-k_1+k_2)/2+1}t_2\end{aligned} \tag{4.10}$$

とおく．すると，$g(x)$ は次数 2 の変異版 q 超幾何方程式 (1.7) を満たす．ただし，$\lambda = (h_1 + h_2 - l_1 - l_2 - k_1 + k_2 + 1)/2$.

q-middle convolution によって得られる q 積分表示の収束と q 積分表示が満たす実際の q 差分方程式について考察する．関数

$$\widehat{y}_i^{[K,L]}(x) = (1-q)\sum_{n=K}^{L} s^{\mu+1}\frac{P_\lambda(x,s)}{s-b_i}\frac{(\alpha_1 s, \alpha_2 s; q)_\infty}{(\beta_1 s, \beta_2 s; q)_\infty}|_{s=q^n\xi}, \quad (i=0,1,2), \tag{4.11}$$
$$b_0 = 0,\ b_1 = 1/\alpha_1,\ b_2 = 1/\alpha_2$$

を考える．$P_\lambda(x,s)$ の定義と行列 P による相似変換から，関数 $\bar{g}_1^{[K,L]}(x)$ が満たす非斉次項を含む q 差分方程式

$$\begin{aligned}
&\left(x - \frac{q^{\mu+1}\beta_1}{\alpha_1\alpha_2}\right)\left(x - \frac{q^{\mu+1}\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)\bar{g}_1^{[K,L]}(x/q) + q\left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x - \frac{q}{\alpha_2}\right)\bar{g}_1^{[K,L]}(qx) \\
&- \left\{(1+q)x^2 - \left(q^{\mu+1}\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{q}{\alpha_1} + \frac{q^2}{\alpha_2}\right)x + \left(1 + \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)\frac{q^{\mu+2}}{\alpha_1\alpha_2}\right\}\bar{g}_1^{[K,L]}(x) \\
&+ \frac{q^2(1-q)}{\alpha_1\alpha_2}\left\{\left(\frac{\alpha_2}{q}x - q^\lambda\right)Q^{[K,L]}(x/q) + \left(1 - \frac{\alpha_2}{q}x\right)Q^{[K,L]}(x)\right\} = 0, \\
&\qquad Q^{[K,L]}(x) = P_\lambda(x, q^{K-1}\xi)y(q^K\xi) - P_\lambda(x, q^L\xi)y(q^{L+1}\xi)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

が得られ，非斉次項は

$$\begin{aligned}
&\frac{q^2(1-q)(1-q^\lambda)}{\alpha_1\alpha_2}\left((q^K\xi)^\mu\frac{(q^{\lambda+K+1}\xi/x, q^K\xi\alpha_1, q^{K-1}\xi\alpha_2; q)_\infty}{(q^K\xi/x, q^K\xi\beta_1, q^K\xi\beta_2; q)_\infty}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - (q^{L+1}\xi)^\mu\frac{(q^{\lambda+L+2}\xi/x, q^{L+1}\xi\alpha_1, q^L\xi\alpha_2; q)_\infty}{(q^{L+1}\xi/x, q^{L+1}\xi\beta_1, q^{L+1}\xi\beta_2; q)_\infty}\right)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

と計算できる．

$\bar{g}_1^{[K,L]}(x)$ は P による相似変換より

$$\begin{aligned}
\bar{g}_1^{[K,L]}(x) &= -\widehat{y}_0^{[K,L]}(x) + \widehat{y}_1^{[K,L]}(x) \\
&= (q-1)\sum_{n=K}^{L} c_n, \quad c_n = (q^n\xi)^\mu\frac{(q^{\lambda+n+1}\xi/x, q^{n+1}\xi\alpha_1, q^n\xi\alpha_2; q)_\infty}{(q^{n+1}\xi/x, q^n\xi\beta_1, q^n\xi\beta_2; q)_\infty}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

と書け，これから，$\mu > 0$ ならば $\bar{g}_1^{[K,L]}(x)$ は $K \to -\infty$，$L \to +\infty$ で収束することがわかる．よって，

$$\bar{g}_1(x) = \lim_{\substack{K\to-\infty \\ L\to+\infty}} \bar{g}_1^{[K,L]}(x) = (q-1)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(q^n\xi)^\mu\frac{(q^{\lambda+n+1}\xi/x, q^{n+1}\xi\alpha_1, q^n\xi\alpha_2; q)_\infty}{(q^{n+1}\xi/x, q^n\xi\beta_1, q^n\xi\beta_2; q)_\infty} \tag{4.15}$$

と書ける．

非斉次項 (4.13) の $K \to -\infty$，$L \to +\infty$ での極限について調べる．$\mu > 0$，$\vartheta_q(x) =$

$(x, q/x, q; q)_\infty$，$q^\lambda = q^\mu \beta_1\beta_2/(\alpha_1\alpha_2)$ より

$$\lim_{L\to+\infty}(q^{L+1}\xi)^\mu \frac{(q^{\lambda+L+2}\xi/x, q^{L+1}\xi\alpha_1, q^L\xi\alpha_2; q)_\infty}{(q^{L+1}\xi/x, q^{L+1}\xi\beta_1, q^{L+1}\xi\beta_2; q)_\infty} = 0, \tag{4.16}$$

$$\lim_{K\to-\infty}(q^{K}\xi)^\mu \frac{(q^{\lambda+K+1}\xi/x, q^{K}\xi\alpha_1, q^{K-1}\xi\alpha_2; q)_\infty}{(q^{K}\xi/x, q^{K}\xi\beta_1, q^{K}\xi\beta_2; q)_\infty} = \xi^\mu \frac{\vartheta_q(q^{\lambda+1}\xi/x)\vartheta_q(\xi\alpha_1)\vartheta_q(q^{-1}\xi\alpha_2)}{\vartheta_q(\xi/x)\vartheta_q(\xi\beta_1)\vartheta_q(\xi\beta_2)}. \tag{4.17}$$

命題 4.2. $\mu > 0$ ならば，関数 $\bar{g}_1(x)$(4.15) は

$$\begin{aligned}&\left(x - \frac{q^{\mu+1}\beta_1}{\alpha_1\alpha_2}\right)\left(x - \frac{q^{\mu+1}\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)\bar{g}_1(x/q) + q\left(x - \frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x - \frac{q}{\alpha_2}\right)\bar{g}_1(qx) \\ &- \left\{(1+q)x^2 - \left(q^{\mu+1}\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha_1\alpha_2} + \frac{q}{\alpha_1} + \frac{q^2}{\alpha_2}\right)x + \left(1 + \frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)\frac{q^{\mu+2}}{\alpha_1\alpha_2}\right\}\bar{g}_1(x) \\ &+ \frac{q^2(1-q)(1-q^\lambda)}{\alpha_1\alpha_2}\xi^\mu \frac{\vartheta_q(q^{\lambda+1}\xi/x)\vartheta_q(\xi\alpha_1)\vartheta_q(q^{-1}\xi\alpha_2)}{\vartheta_q(\xi/x)\vartheta_q(\xi\beta_1)\vartheta_q(\xi\beta_2)} = 0\end{aligned} \tag{4.18}$$

を満たす．ただし，$q^\lambda = q^\mu\beta_1\beta_2/(\alpha_1\alpha_2)$.

(4.18) は (4.8) の非斉次方程式への拡張である．

命題 4.3. $\xi = 1/\alpha_1$ のとき

$$\begin{aligned}\bar{g}_1(x) = (q-1)\alpha_1^{-\mu}&\frac{(q^{\lambda+1}/(\alpha_1 x), q, \alpha_2/\alpha_1; q)_\infty}{(q/(\alpha_1 x), \beta_1/\alpha_1, \beta_2/\alpha_1; q)_\infty} \\ &\cdot {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q/(\alpha_1 x), \beta_1/\alpha_1, \beta_2/\alpha_1 \\ q^{\lambda+1}/(\alpha_1 x), \alpha_2/\alpha_1 \end{matrix}; q, q^\mu\right).\end{aligned} \tag{4.19}$$

$\xi = 1/\alpha_2$，$\xi = q^{-\lambda}x$ のときも，$\bar{g}_1(x)$ は ${}_3\phi_2$ を用いて表すことができる．ξ がこれらの値のとき，非斉次項 (4.13) は消える．従って，これら 3 つの $\bar{g}_1(x)$ は斉次の q 差分方程式 (4.8) を満たす．

$\xi = 1/\beta_1, \xi = 1/\beta_2$，$\xi = x$ の場合については，$q^{\mu'}\alpha_1\alpha_2/(\beta_1\beta_2) = q^\mu$，すなわち $q^{\mu'} = q^\lambda$ という条件で関数 $P_\lambda(x, s)$，$y(x)$ を

$$P_\lambda(x, s) = (x/s)^\lambda \frac{(x/s; q)_\infty}{(q^{-\lambda}x/s; q)_\infty},\ y(x) = x^{\mu'}\frac{(q/(\beta_1 x), q/(\beta_2 x); q)_\infty}{(q/(\alpha_1 x), q/(\alpha_2 x); q)_\infty} \tag{4.20}$$

に取り替えて考える．

命題 4.4. $\xi = 1/\beta_1$ のとき

$$\begin{aligned}\bar{g}_1(x) = \frac{(1-q)\beta_1}{\alpha_1}x^\lambda&\frac{(\beta_1 x, q, q\beta_1/\beta_2; q)_\infty}{(q^{-\lambda}x\beta_1, \beta_1/\alpha_1, q\beta_1/\alpha_2; q)_\infty} \\ &\cdot {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-\lambda}\beta_1 x, \beta_1/\alpha_1, q\beta_1/\alpha_2 \\ \beta_1 x, q\beta_1/\beta_2 \end{matrix}; q, q\right).\end{aligned} \tag{4.21}$$

$\xi = 1/\beta_2$，$\xi = x$ のときも，$\bar{g}_1(x)$ は ${}_3\phi_2$ を用いて表すことができる．これら 3 つの $\bar{g}_1(x)$ は非斉次

の q 差分方程式

$$\begin{aligned}&\left(x-\frac{q^{\mu+1}\beta_1}{\alpha_1\alpha_2}\right)\left(x-\frac{q^{\mu+1}\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)\bar{g}_1(x/q)+q\left(x-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x-\frac{q}{\alpha_2}\right)\bar{g}_1(qx)\\&-\left\{(1+q)x^2-\left(q^{\mu+1}\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}+\frac{q}{\alpha_1}+\frac{q^2}{\alpha_2}\right)x+\left(1+\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)\frac{q^{\mu+2}}{\alpha_1\alpha_2}\right\}\bar{g}_1(x)\\&+\frac{q(1-q)(1-q^{\lambda})}{\alpha_1}x^{\lambda+1}=0\end{aligned} \tag{4.22}$$

を満たす.

また，これら 3 つの解の差は斉次の q 差分方程式 (4.8) を満たす.

参考文献

[1] 青本和彦,「q-超幾何関数における 3 つの基本問題（q-差分方程式，漸近展開，接続問題）」, Oka Symposium, 2006 年 3 月 19 日.

[2] Y. Arai, K. Takemura, On q-middle convolution and q-hypergeometric equations, submitted, arXiv:2209.02227.

[3] M. Dettweiler, S. Reiter, An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem. Algorithmic methods in Galois theory, *J. Symbolic Comput.* **30** (2000), 761–798.

[4] M. Dettweiler, S. Reiter, Middle convolution of Fuchsian systems and the construction of rigid differential systems, *J. Algebra* **318** (2007), 1–24.

[5] N. Hatano, R. Matsunawa, T. Sato, K. Takemura, Variants of q-hypergeometric equation, *Funkcial. Ekvac.* **65** (2022), 159–190, arXiv:1910.12560.

[6] N. M. Katz, Rigid Local Systems, Princeton University Press, 1996.

[7] R. Matsunawa, T. Sato, K. Takemura, Variants of confluent q-hypergeometric equations, in Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics **366**, 161–180, Springer, Cham, 2021. arXiv:2005.13223.

[8] H. Sakai, M. Yamaguchi, Spectral types of linear q-difference equations and q-analog of middle convolution, *International Mathematics Research Notices* **2017** (2017), 1975–2013.

[9] 山口雅司,「線型 q 差分方程式の rigidity index と q middle convolution」，東京大学修士論文，2011.

ベッチ数を指定した連結 2 部グラフの数え上げ

九州大学大学院 数理学府 数理学専攻
蓮井 太朗 (Taro HASUI)

概要

与えられたベッチ数を持つ連結で単純な 2 部グラフの個数に対し，2 変数生成関数を用いた 1 階線形偏微分方程式が得られる．本講演ではこの生成関数を紹介し，その係数の漸近挙動を述べる．次に連結な 2 部単純グラフを分類する基本グラフ族を用い，ラベル付き 2 部の根付き木の本数の有理関数の基本グラフ上での和として，生成関数の別表現を与える．本講演は白井朋之氏 (九大 IMI) と藪奥哲史氏 (北九州高専) との共同研究 [HSY22] による．

1 先行研究

この節ではグラフ理論の予備知識をおよび主結果に関係した先行研究を述べる．

定義 1.1（グラフ） 集合 V に対して, その 2 元部分集合族 $E \subset V \times V$ から決まる構造 $G = G(V, E)$ を**グラフ (graph)** と呼ぶ．なお V を**頂点集合 (vertex set)**，E を**辺集合 (edge set)** と呼ぶ．グラフ G から任意の頂点と任意の辺を選択して取り出したグラフ G' を G の**部分グラフ (subgraph)** と呼ぶ．さらにグラフにおいて，辺の向きを考慮するグラフを**有向グラフ (derected graph)**，考慮しないグラフを**無向グラフ (underected graph)** と呼ぶ．またすべての頂点に辺が入った単純グラフを**完全グラフ (complete graph)** と呼ぶ.

定義 1.2（道，閉路，ループ） つながった辺の列を**道 (path)** という．また始点と終点が同じ道を**閉路 (cycle)** という．さらに同じ頂点対を持つ複数本の辺を**多重辺 (multiple edge)** と呼び，ある辺の両端点が等しいとき**ループ (loop)** と呼ぶ.

多重辺もループもないグラフを**単純グラフ**と呼ぶ．本稿の「グラフ」という表記はすべて単純で無向なグラフである．

さて，単純で無向なグラフ G を構成する頂点同士が辺でどのくらい繋がっているかを調べたい．そのために以下**連結性**を導入する．

定義 1.3（連結グラフ） 2 頂点間に道が存在する場合，2 つの頂点は**連結 (connect) している**といい，グラフ上の任意の 2 頂点が連結なグラフを**連結グラフ (connected graph)** と呼ぶ

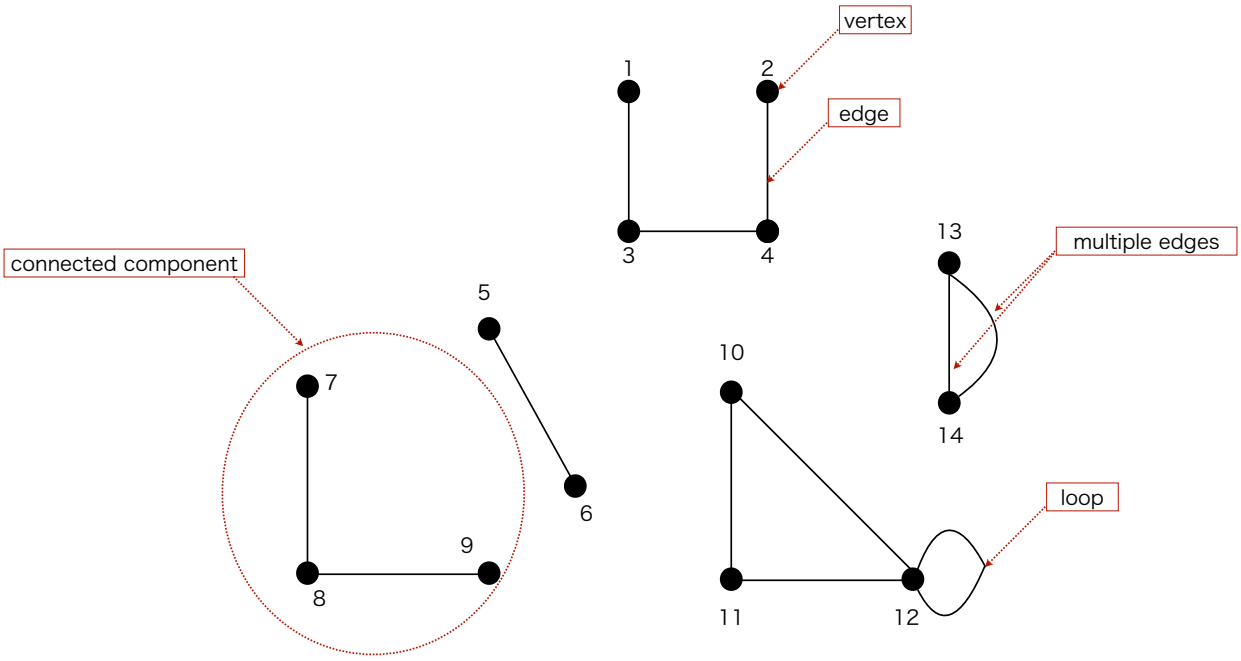


図 1: 非連結で単純でないグラフ

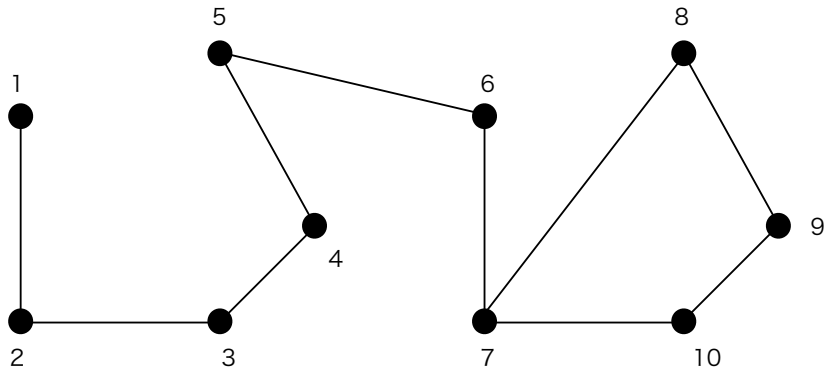


図 2: 連結で単純なグラフ

なお連結性はグラフだけでなく，**グラフの成分**，すなわちグラフを構成する頂点と辺の部分集合にも適用する．グラフ内の連結な成分を**連結成分 (connected component)** と呼ぶ．例えば図 1 は頂点集合 $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ 辺集合 $E = \{1-3, 3-4, 4-2, 5-6, 7-8, 8-9, 10-11, 11-12, 10-12, 12-12, 13-14, 13-14\}$ である．さらに図示したように連結成分として $\{7, 8, 9\}$ を持つ．当然 $\{7, 8, 9\}$ 以外にも，例えば $\{5, 6\}$ や $\{13, 14\}$ なども連結成分である．また頂点 1 つのみの成分も連結成分とみなす．例えば図 1 は連結成分を 5 個持つが，グラフとしては非連結グラフであり，一方図 2 は連結グラフである．当然図 2 の連結成分は 1 つである．グラフとしては非連結でも，そのグラフを構成する成分においては連結なものが存在する．

さて，連結グラフないし連結成分は数種類に分類できる．

定義 1.4（単純グラフの木，サイクル，コンプレックス） 単純グラフ $G = (V, E)$ において，$|E| -$

$|V| = k$ を考える．$k = -1$ となるグラフを**木 (tree)** と呼び，$k = 0$ となるグラフを**サイクル (cycle)** と呼ぶ．また $k \geq 1$ のとき $k-$ **コンプレックス (k-complex)** と呼ぶ．

連結グラフを扱っているので k は**ベッチ数（Betti number）**に相当する．すなわち各 $(r, s, r+s-1+k)$-グラフの第 1 ホモロジー群の階数と同値である．ただしこのような連結グラフは頂点よりも辺の数が $k-1$ 多い．文献によってはベッチ数相当の k において，$k-1$ を**エクセス（excess）** と呼ぶ場合もある．

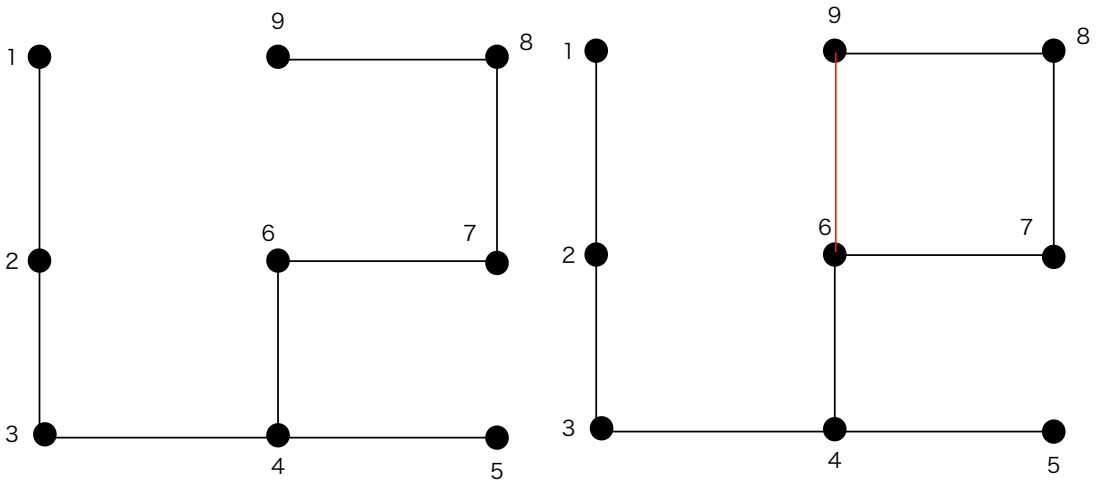
さて，繰り返すが定義 1.4 は連結成分にも適用できる．特に木において，あるグラフの全ての頂点と，そのグラフを構成する辺の一部分で構成される木を**全域木 (spanning tree)** と呼ぶ．以下 $G(V, E)$ において $|V| = n, |E| = q$ の場合，(n, q)-グラフと記述する．さらに連結な (n, q)-グラフの個数を $f(n, q)$ とする．さて，完全グラフ K_n 上の全域木は複数存在する．あるグラフの全域木の総数がいくつかは，[Cay89] によって以下のように知られている．

定理 1.1（Cayley's formula） $|V| = n$ の完全グラフ K_n 上の全域木の個数 $f(n, n-1)$ において，

$$f(n, n-1) = n^{n-2}$$

が成り立つ．

例えば図 3(a) は頂点数 $|V| = 9$ のグラフの全域木である．一方図 3(b) は赤の辺によってサイクルができており，サイクルを持たないという全域木の定義から外れている．なお当然図 3 以外にも全域木は存在し，その総数は定理 1.1 より，9^7 通り存在する．



(a) 全域木　　**(b)** 全域木ではない

図 3: $|V| = 9$ の全域木の一例

一方，$|V| = n, |E| = n$ の場合，すなわち連結な (n, n)-グラフの総数 $f(n, n)$ は [Rén59] によると以下のように知られる．

定理 1.2（**サイクルの総数お呼びその漸近挙動**） n 頂点完全グラフ K_n 上のサイクルグラフの総数

$f(n,n)$ において，

$$f(n,n) = \frac{1}{2}\left(\frac{h(n)}{n} - n^{n-2}(n-1)\right) \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}}n^{n-1/2} \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ．ただし，

$$h(n) = \sum_{s=1}^{n-1} \binom{n}{s} s^s (n-s)^{n-s}$$

である．

次に，単純グラフの頂点集合を 2 つに分割してできる **2 部グラフ**を定義する．

定義 1.5（2 部グラフ）　頂点集合 V を互いに素な集合 V_1, V_2 に分割でき，辺集合 E が $E \subseteq \{(e,e') \mid e \in V_1, e' \in V_2\}$ となるとき，このグラフを **2 部グラフ**と呼び，$BG(V_1, V_2, E)$ と書く．

定義 1.6（2 部グラフの木，サイクル，コンプレックス）　単純な 2 部グラフ $BG(V_1, V_2, E)$ において，辺の数 $|E| = |V_1| + |V_2| - 1 + k$ を考える．ただし $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である．$k = 0$ となるグラフを**木 (tree)** と呼び，$k \geq 1$ となるグラフを $k-$ **サイクル (k-cycle)** と呼ぶ．

2 部グラフにおいても k はベッチ数に対応する．すなわち k はサイクルの個数をあわらす．本稿ではこの 2 部グラフの連結性について主に論じる．なお，単純グラフの木および全域木はすべて 2 部グラフである．以下 2 部グラフ $BG(V_1, V_2, E)$ において，$|V_1| = r, |V_2| = s, |E| = q$ のとき (r,s,q)-グラフと記述しよう．さらに連結な (r,s,q)-グラフの総数を $f(r,s,q)$ とする．[Sco62] によると以下が成り立つ．

定理 1.3（2 部グラフの全域木の総数）　$|V_1| = r, |V_2| = s$ の完全グラフ $K_{r,s}$ 上の全域木の個数 $f(r,s,r+s-1)$ において，

$$f(r,s,r+s-1) = r^{s-1}s^{r-1}$$

が成り立つ．

つまり単純グラフの全域木と同じく，2 部グラフの全域木の総数も計算可能である．さて，図 4 は $(6,6,10)$-グラフの例である．2 つの頂点集合 V_1, V_2 の内部に辺が存在しない．また，図 1.5 は全域木だが，その総数は定理 1.3 より，$f(6,6,10) = 6^{6-1} \cdot 6^{6-1}$ 通り存在する．

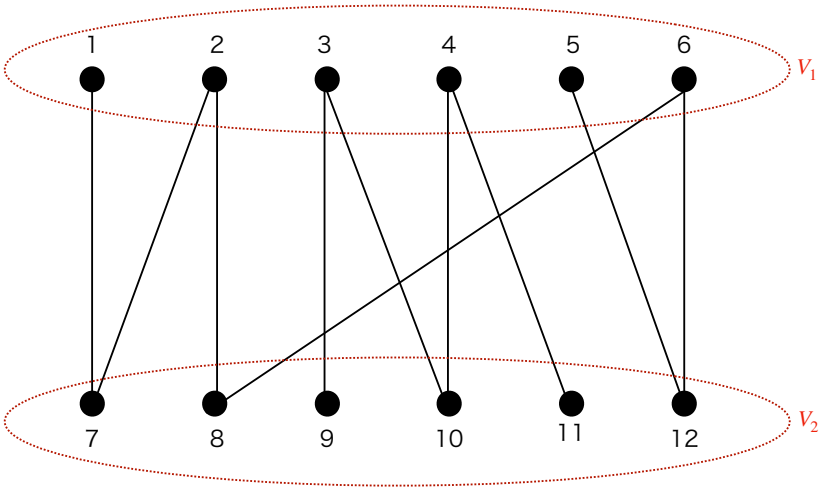


図 4: $|V_1| = |V_2| = 6$ の 2 部連結グラフ

2　主結果

この節では蓮井，白井，藪奥による [HSY22] の主結果を述べる．

さて，$f(r, s, r+s-1+k)$ を考えよう．ただし $k = 0, 1, \cdots$ である．また $r+s = n$ である．このとき $f(r, s, r+s-1+k)$ の指数型母関数を $F_k(x, y)$ とする．すなわち，

$$F_k(x, y) := \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{f(r, s, r+s-1+k)}{r!s!} x^r y^s$$

である．また $T := F_0(x, y)$ とする．すなわち $k = 0$ の場合だが，定理 1.3 より，自明な計算で，

$$\begin{aligned} T(x, y) &:= F_0(x, y) \\ &= x + y + \sum_{r,s=1}^{\infty} \frac{r^{s-1}s^{r-1}}{r!s!} x^r y^s \end{aligned}$$

となる．さらに記号を設定しよう．D_x, D_y を x, y のオイラー微分とする．すなわち，

$$\begin{aligned} D_x &:= x\frac{\partial}{\partial x} \\ D_y &:= y\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

である．さらにこの D_x, D_y に関して，以下のように記号を設定する．

$$\begin{aligned} T_x &:= D_x T \\ T_y &:= D_y T \\ Z &:= T_x + T_y \\ W &:= T_x T_y \end{aligned}$$

このとき以下が成り立つ．

命題 2.1（F_1 の T_x, T_y 表示）

$$F_1(x,y) = -\frac{1}{2}\left(\log\left(1 - T_x T_y\right) + T_x T_y\right)$$

また，$F_2(x,y)$ に関しても以下が成り立つ．

命題 2.2（F_2 の Z, W 表示）　指数型母関数 $F_2(x,y)$ を $F_2 = f_2(Z,W)$ と書くとする．このとき，

$$f_2(z,w) = \frac{w^2}{24(1-w)^3}\{(2+3w)z + 2w(6-w)\}$$

が成り立つ．

さて，命題 2.1 および命題 2.2 で重要なのは，$F_1(x,x), F_2(x,x)$ の係数である．$F_k(x,x)$ の係数は K_n 上のサイクルを k 個持つ連結な 2 部グラフの総数を意味する．例えば $k=1$ のとき，命題 2.1 は，簡単な計算で，

$$F_1(x,x) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{f(r,s,r+s)}{r!s!} x^n$$

となる．以下，指数型母関数 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ に対し，記号 $< \cdot >$ を，

$$\langle x^n \rangle A(x) := a_n$$

と定義する．$F_x(x,x)$ の $\frac{x^{r+s}}{r!s!}$ の係数 $\langle x^n \rangle F_k(x,x)$ は，n 個の頂点を持つベッチ数 k の連結 2 部グラフの総数を表す．または，$r+s=n$ より，連結な $(r,s,n-1+k)$-グラフの総数を数えるという意味である．さて，$k=0$ のとき，

$$F_0(x,x) = 2\left(x + \sum_{n=2}^{\infty} n^{n-2}\frac{x^n}{n!}\right)$$

である．さて，命題 2.1 と命題 2.2 より，$F_1(x,x), F_2(x,x)$ の係数の漸近挙動に関して以下が成り立つ．

定理 2.1（$F_1(x,x)$ 係数の漸近挙動）　$n = 4, 5, \cdots$ に対し，

$$\langle x^n \rangle F_1(x,x) = n^{n-1} \sum_{2 \le k \le n/2} \frac{n!}{(n-2k)!n^{2k}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{8}} n^{n-1/2} \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ．

定理 2.1 は頂点数 n の完全 2 部グラフ上のサイクルグラフの総数の漸近挙動に対応する．先行研究の定理 1.2 と比較すると，サイクルを 2 つ持つ n 頂点のグラフの漸近挙動の主要項が，サイクルを 1 つ持つ $r+s=n$ 頂点の 2 部グラフの漸近挙動の主要項と一致しているのが分かる．両者は有限の n では異なる．表 1 を見れば明らかであろう．なお $u_n := \langle x^n \rangle F_1(x,x)$ である．

また $F_2(x,x)$ の係数について以下も成立する．

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(n,n)$	1	15	222	3660	68295	1436568	33779340	880107840	25201854045
u_n	0	6	120	2280	46200	1026840	25102224	673706880	19745850960

表 1: $f(n,n)$ と u_n の $n = 3, 4, \cdots, 11$ までの比較

n	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(n,n+1)$	6	205	5700	156555	4483360	136368414	4432075200	154060613850
b_n	0	20	960	33600	1111040	37202760	1295884800	47478243120

表 2: $f(n,n)$ と b_n の $n = 4, 5, \cdots, 11$ までの比較

定理 2.2（$F_2(x,x)$ **係数の漸近挙動**）　$n \to \infty$ のとき，

$$\langle x^n \rangle F_2(x,x) \sim \frac{5}{48} n^{n+1}$$

が成り立つ．

定理 2.2 も定理 2.1 と同じく，頂点数 n の完全 2 部グラフ上のサイクルが 2 つあるようなグラフの総数の漸近挙動に対応する．なお [Wri77] において，K_n 上のサイクルが 2 個あるような連結グラフの総数の漸近挙動の主要項は $\frac{5}{24} n^{n+1}$ である．定理 2.2 の式の 2 倍である．

$F_1(x,x)$ の係数の場合と同じく，$F_2(x,x)$ の係数も有限の n では異なる．表 2 から明らかであろう．なお $b_n := \langle x^n \rangle F_2(x,x)$ とする．定理 1.3 によって F_0 が既知であるため，原理的には $F_k(x,y)$ は帰納的に計算できる．すなわち k に対し，$n \to \infty$ のとき，以下と予想できる．

予想 2.1（F_k **の値**）　$k \geq 2$ のとき，指数型母関数 $F_k(x,y)$ を $F_k = f_k(Z,W)$ と書くとする．このとき，

$$f_k(z,w) = \frac{w^2}{(1-w)^{3(k-1)}} \sum_{j=0}^{k-1} q_{k,j}(w) z^j$$

が成り立つ．ただし $q_{k,j}$ は w の多項式である．さらに，

$$\langle x^n \rangle F_k(x,x) \sim \frac{1}{2^{k-1}} \rho_{k-1} n^{n+(3(k-1)-1)/2}$$

も成り立つ．なお，

$$f(n,n+k) \sim \rho_k n^{n+(3k-1)/2} \quad (n \to \infty)$$

であり，ρ_k の明示的な値は [Wri77] で与えられる．

なお $F_k(x,y)$ の表示に関しては，次のような結果も得た．

定理 2.3（F_k の別表示）　$k \geq 2$ とする．このとき F_k は基本グラフを用いて，T_x, T_y の有理関数の和に分解される．

$$F_k(x,y) = \sum_{\mathcal{B} \in BG_k} J_{\mathcal{B}}(x,y)$$

ここで，

$$J_{\mathcal{B}}(x,y) = \frac{T_x^{r_{\mathrm{sp}}+a_1+2a_2+b_2+c_2} T_y^{s_{\mathrm{sp}}+2a_1+a_2+b_1+c_2}}{g_{\mathcal{B}} \left(1 - T_x T_y\right)^{a_1+a_2+b_1+b_2+c_1+c_2}},$$

である．なお BG_K は基本グラフ全体の集合．$g_{\mathcal{B}}, r_{\mathrm{sp}}, s_{\mathrm{sp}}, a_i, b_j, c_k (i,j,k=1,2)$ は基本グラフ $\mathcal{B}$ に関する情報である．

すなわち F_k は，$k \geq 2$ の場合は T_x, T_y の有理関数である．以下，定理 2.3 で初めて登場した基本グラフについて述べる．ただしページ数の都合上概略のみ説明する．正確な定義や証明は [HSY22] を参照されたい．

さて，基本グラフとはサイクルを 2 つ以上持つ（すなわち $k \geq 2$ となるような）連結な 2 部グラフから「葉（1 本だけ辺が接続している頂点）および葉に隣接する辺を除去する」という操作を、葉がなくなるまで繰り返して得られるグラフである．$k \geq 2$ となる連結な 2 部グラフ G の基本グラフ $\mathcal{B}$ は，必ず図 5 の各パーツを組み合わせた単純グラフになる．（図 5 の各パーツの辺を special path と呼び，頂点を special cycle と呼ぶ．）また基本グラフ $\mathcal{B}$ は 2 部グラフ G の連結性に関する情報を保有する．

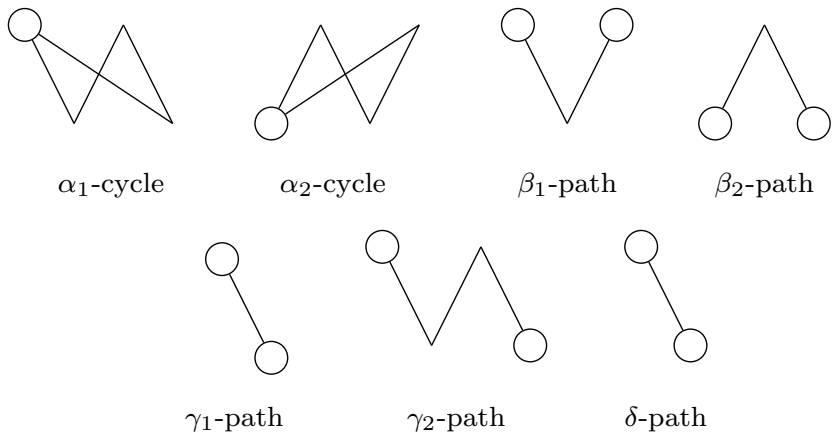


図 5: 基本グラフを構成するパーツ

定理 2.3 の系として以下も得た．

系 2.1（F_k の別表示）　$k \geq 2$ のとき，次を満たすような多項式 $\tilde{q}_k(x,y)$ が存在する．

$$F_k(x,y) = \frac{1}{\left(1 - T_x T_y\right)^{3(k-1)}} \tilde{q}_k\left(T_x, T_y\right)$$

この $\tilde{q}_k(x,y)$ は $1 - xy$ を因数に持たない．

参考文献

[Cay89] Arthur Cayley. A theorem on trees. *Quart. J. Math.*, 23:376–378, 1889.

[HSY22] Taro Hasui, Tomoyuki Shirai, and Satoshi Yabuoku. Enumeration of connected bipartite graphs with given betti number. *arXiv preprint arXiv:2208.03996*, 2022.

[Rén59] Alfred Rényi. *On connected graphs.* Akadémiai Kiadó, 1959.

[Sco62] H.I. Scoins. The number of trees with nodes of alternate parity. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 58, pages 12–16. Cambridge University Press, 1962.

[Wri77] Edward M. Wright. The number of connected sparsely edged graphs. *Journal of Graph Theory*, 1(4):317–330, 1977.

Uniform Weak Convergence to Additive Processes

幡　航太朗 (Kotaro Hata)*
(長谷部　高広 (Takahiro Hasebe)†氏との共同研究)

1　導入

無限分解可能分布は畳み込みの意味で n 乗根が存在する確率分布, すなわち $\mathbb{R}^d$ 上の確率分布 μ が無限分解可能であるとは任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, ある $\mathbb{R}^d$ 上の確率分布 μ_n が存在し, $\mu = \mu_n^{n*}$ が成立することをいう. 無限分解可能分布には顕著な性質がいくつか知られているがそのうちの一つとして, 無限分解可能分布による弱極限は無限分解可能分布となり, さらにこの弱収束は Levy の三つ組の各要素による 3 条件に置き換えられる, というものがある. また無限小三角配列の行和が弱収束することは, ある無限分解可能分布に従う確率変数が弱収束することと同値になる, ということも古典的事実のうちの一つである. そこで本研究は加法過程の各時刻の分布が無限分解可能分布になることに着目し, 無限小三角配列によってうまく確率過程を構成し, さらに確率過程間の収束を新たにうまく定義することで加法過程に対する同分布性を仮定しない極限定理を得ることができたので紹介をする.

2　準備

2.1　記号・用語

まず, 使用する記号・用語について準備をする.

- P_X : 確率変数 X の分布.
- $C_\sharp(\mathbb{R}^d) := \{f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\,;\, f$ は有界連続かつある原点近傍 U 上で $f = 0\}$.
- $C_{\sharp\sharp}(\mathbb{R}^d) := \{f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}\,;\, f$ は有界連続かつ $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{|x|^2} = 0\}$.
- $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ は原点近傍で $h(x) = x$ となる有界連続関数.
- 確率測度 μ に対して, $\mu = \langle A, \nu, \gamma\rangle$: 任意の $z \in \mathbb{R}^d$ に対して
  $\hat{\mu}(z) = \exp[-\frac{1}{2}\langle z, Az\rangle + i\langle z, \gamma\rangle + \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle z,x\rangle} - 1 - i\langle z, h(x)\rangle\right) \nu(dx)]$ が成り立つことを表す.
  (ここで A は $d \times d$ 半正定値対称行列, ν は $\nu(\{0\}) = 0$ かつ $\int_{\mathbb{R}^d} 1 \wedge |x|^2\, \nu(dx) < \infty$ なる測度, $\gamma \in \mathbb{R}^d$ である.)
- 確率変数による二重列 $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ と正の実数 $R > 0$ に対して, 第 i 成分が $\int_{|x|<R} x_i\, P_{Z_{n,j}}(dx)$ で定義される $\mathbb{R}^d$ の元を $b^R_{n,j}$ を書く.
- 確率変数による二重列 $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ が与えられたときに $S^n_t := \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t\rfloor} Z_{n,j}$ で定義される確率過程 $\{S^n_t\}_{t\in[0,1]}$ を単に二重列 $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ によって生成された確率過程と呼ぶ.
- $\mu = \langle A, \nu, \gamma\rangle$ を満たす確率測度 μ に対して, (i,j) 成分が $A_{i,j} + \int_{\mathbb{R}^d} h(x)_i h(x)_j\, \nu(dx)$ で定義された行列を ${}_h\tilde{A}$ と書く.

* 北海道大学大学院理学院数学専攻修士 2 年. 本研究の詳細をご希望の方は kotarohata1021[at]icloud.com までご連絡下さい
† 北海道大学大学院理学研究院准教授

2.2 無限分解可能分布に関する性質

この章では無限分解可能分布に関する事実を述べる．まず無限分解可能分布 μ に対して, ある $d \times d$ 半正定値対称行列 A, $\nu(\{0\}) = 0$ かつ $\int_{\mathbb{R}^d} 1 \wedge |x|^2 \, \nu(dx) < \infty$ なる測度 ν, 及び $\gamma \in \mathbb{R}^d$ が一意に存在して, $\mu = \langle A, \nu, \gamma \rangle$ となることが知られている．この μ に対して定まる三つ組 $\langle A, \nu, \gamma \rangle$ を Levy の三つ組という．

また無限分解可能分布がある確率測度に弱収束しているとき, その極限分布は無限分解可能分布になることが知られている．さらにこの収束は, Levy の三つ組によって次のように言い換えられることが知られている．

Fact 2.1 ([3, Chapter VII, Theorem 2.9])**.** 無限分解可能分布列 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ と無限分解可能分布 μ がそれぞれ $\mu_n = \langle A_n, \nu_n, \gamma_n \rangle$, $\mu = \langle A, \nu, \gamma \rangle$ を満たすものとする．このとき, μ_n が μ に弱収束することは以下の 3 条件が成り立つことと同値である．

(1) $\forall i, j = 1, 2, \ldots d$, $\lim_{n\to\infty} ({}_h\tilde{A}_n)_{i,j} = ({}_h\tilde{A})_{i,j}$.
(2) $\forall f \in C_\sharp(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\nu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\nu$.
(3) $\lim_{n\to\infty} \gamma_n = \gamma$.

重要な確率過程のクラスとして, 加法過程と Lévy 過程があるが (以下, 加法過程と Lévy 過程の定義は [5] で導入されたものとする.), 無限分解可能分布は Lévy 過程とある意味での一対一対応があることが知られており, また加法過程に対しては次の関係があることが知られている．

Fact 2.2 ([5, Theorem 9.8])**.** 加法過程 $\{X_t\}_{t\geq 0}$ の各時刻の分布は無限分解可能分布となる． さらに $P_{X_t} = \langle A_t, \nu_t, \gamma_t \rangle$ と表した時, 次の 3 条件が成り立つ．

(1) $A_0 = 0, \nu_0 = 0, \gamma_0 = 0$.
(2) $s \leq t$ ならば, 任意の $z \in \mathbb{R}^d$ に対して $\langle z, A_s z \rangle \leq \langle z, A_t z \rangle$, かつ任意のボレル集合 $B \subset \mathbb{R}^d$ に対して $\nu_s(B) \leq \nu_t(B)$.
(3) 任意の $z \in \mathbb{R}^d$ に対して $\lim_{s\to t} \langle z, A_s z \rangle = \langle z, A_t z \rangle$, かつ任意のボレル集合 $B \subset \mathbb{R}^d$ に対して $\exists \varepsilon > 0 \,\text{s.t.}\, B \subset \{x \,;\, |x| > \epsilon\} \Rightarrow \lim_{s\to t} \nu_s(B) = \nu_t(B)$, かつ $\lim_{s\to t} \gamma_s = \gamma_t$.

2.3 三角配列・無限小三角配列に関する性質

三角配列は極限定理を一般化するに際して現れる概念である．

Definition 2.3 (三角配列・無限小三角配列)**.** 確率変数による二重列 $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ が以下の条件 (1), (2) を満たすとき, $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ は三角配列であるという． これに加えてさらに (3) を満たす時, 特に $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ を無限小三角配列と呼ぶ．

(1) $k_n \to \infty$.
(2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{Z_{n,1}, Z_{n,2}, \ldots, Z_{n,k_n}\}$ は独立.
(3) $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \sup_{j=1,2,\ldots,k_n} P(|Z_{n,j}| > \varepsilon) = 0$.

無限小三角配列の行和に関する極限定理は無限分解可能分布の議論に落とし込むことができることが知られている．

Fact 2.4 ([4, Theorem 3.2.12])**.** $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ を無限小三角配列, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d$ を数列, Y を確率変数とする．このとき, $Z_{n,1} + Z_{n,2} + \cdots + Z_{n,k_n} - a_n$ が Y に弱収束することは, 任意の $R > 0$ に対して, 次を満たす確率変数列 Y_n が Y に弱収束することと同値である．

$$\forall z \in \mathbb{R}^d, \widehat{P_{Y_n}}(z) = \exp\left[i \left\langle \sum_{j=1}^{k_n} b_{n,j}^R - a_n, z \right\rangle + \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle z,x\rangle} - 1) \, P_{Z_{n,j} - b_{n,j}^R}(dx) \right].$$

3 主結果

3.1 問題設定

[1, Definition 2.3.] では次の収束概念が定められている.

Definition 3.1 (局所一様弱収束)**.** S, T を距離空間, $(\mu_t^n)_{t\in T}, (\mu_t)_{t\in T}$ を S 上の有限測度列とする. この時 $(\mu_t^n)_{t\in T}$ が $(\mu_t)_{t\in T}$ に局所一様弱収束するとは, 任意の有界集合 $B \subset T$ と任意の有界連続関数 $f\colon S \to \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in B} \left| \int_S f\, d\mu_t^n - \int_S f\, d\mu_t \right| = 0$$

が成り立つことである.

この局所一様弱収束に触発され, 次の一様弱収束を定義するに至った.

Definition 3.2 (一様弱収束)**.** $\{X_t^n\}_{t\in[0,1]}, \{X_t\}_{t\in[0,1]}$ を $\mathbb{R}^d$-値確率過程とする. この時, $\{X_t^n\}_{t\in[0,1]}$ が $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ に一様弱収束するとは, 任意の $z \in \mathbb{R}^d$ に対してその特性関数が一様収束すること, すなわち

$$\forall z \in \mathbb{R}^d,\ \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left| \widehat{P_{X_t^n}}(z) - \widehat{P_{X_t}}(z) \right| = 0$$

が成り立つことをいい, $\{X_t^n\}_{t\in[0,1]} \xrightarrow{\text{u.w.}} \{X_t\}_{t\in[0,1]}$ と書く.

実は [2, Theorem 2.6] によって, 一様弱収束は局所一様弱収束の特別な場合であることがわかっている.

3.2 主結果

本研究は Fact 2.1, 2.4 の手法を基にすることで, 無限小三角配列によって生成された確率過程が加法過程に一様弱収束することの必要十分条件を得たので, その結果を報告する.

Theorem 3.3. $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ を無限小三角配列, $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ を加法過程で $P_{X_t} = \langle A_t, \nu_t, \gamma_t \rangle$ を満たすものとする. このとき $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\ldots,k_n}$ によって生成された確率過程列 $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}$ に関して以下は同値である.

I) $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]} \xrightarrow{\text{u.w.}} \{X_t\}_{t\in[0,1]}$.

II) $\forall R > 0$,[*1]

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left| \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t \rfloor} \left(b_{n,j}^R + \int_{\mathbb{R}^d} h(x)\, P_{Z_{n,j} - b_{n,j}^R}(dx) \right) - \gamma_t \right| = 0.$

(2) $\displaystyle\forall i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, d,\ \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left| \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t \rfloor} \int_{\mathbb{R}^d} h(x)_{i_1} h(x)_{i_2}\, P_{Z_{n,j} - b_{n,j}^R}(dx) - ({}_h\tilde{A}_t)_{i_1,i_2} \right| = 0.$

(3) $\displaystyle\forall f \in C_{\sharp\sharp}(\mathbb{R}^d),\ \lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left| \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t \rfloor} \int_{\mathbb{R}^d} f\, dP_{Z_{n,j} - b_{n,j}^R} - \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\nu_t \right| = 0.$

特に [2, Theorem 3.4] より (II)-(3) と (II)-(2) は次の 2 条件と同値である.

(1) $\displaystyle\forall t \in [0,1], \forall i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, d,\ \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t \rfloor} \int_{\mathbb{R}^d} h(x)_{i_1} h(x)_{i_2}\, P_{Z_{n,j} - b_{n,j}^R}(dx) = ({}_h\tilde{A}_t)_{i_1,i_2}.$

(2) $\displaystyle\forall t \in [0,1], \forall f \in C_\sharp(\mathbb{R}^d),\ \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t \rfloor} \int_{\mathbb{R}^d} f\, dP_{Z_{n,j} - b_{n,j}^R} = \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\nu_t.$

無限小三角配列の各行に関してさらに同分布性を課すと次のことがわかる.

[*1] $\exists R > 0$ としてもよい.

Corollary 3.4. $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ を無限小三角配列で任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $Z_{n,1}\overset{\mathrm{d}}{=}Z_{n,2}\overset{\mathrm{d}}{=}\cdots\overset{\mathrm{d}}{=}Z_{n,k_n}$ を満たすものとする．このとき, $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ によって生成された確率過程列 $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}$ が加法過程 $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ に一様弱収束するならば $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ は Lévy 過程となる．さらに $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}$ が Lévy 過程 $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ に一様弱収束することは S_1^n が X_1 に弱収束することと同値である．

3.3 具体例の構成

各要素がデルタ分布に従う無限小三角配列が, ある加法過程に一様弱収束することの必要十分条件は以下で与えられる．ここで $a\in\mathbb{R}^d$ でのデルタ分布を δ_a で表す．

example 3.5. 数列 $(m_{n,j})\subset\mathbb{R}^d$ に対して, $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ を $\mathbb{R}^d$-値三角配列で $P_{Z_{n,j}}=\delta_{m_{n,j}}$ を満たすものとする．このとき $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ が無限小三角配列となる必要十分条件は以下である．

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{j=1,2,\dots,k_n}|m_{n,j}|=0.$$

さらに $\lim_{n\to\infty}\sup_{j=1,2,\dots,k_n}|m_{n,j}|=0$ が成立していると仮定する．このとき, $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ によって生成された確率過程列 $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}$ に対して以下は同値である．

(1) ある加法過程 $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ が存在して, $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}\xrightarrow{\text{u.w.}}\{X_t\}_{t\in[0,1]}$.

(2) ある数列 $(\gamma_t)_{t\in[0,1]}\subset\mathbb{R}^d$ が存在して, $\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}\left|\sum_{j=1}^{\lfloor k_n t\rfloor}m_{n,j}-\gamma_t\right|=0.$

上記が成り立つとき, $P_{X_t}=\langle 0,0,\gamma_t\rangle$ となる．

次に各要素がガウス分布に従う場合を考える．ここで平均 m, 分散 v の正規分布を $N(m,v)$ で表す．

example 3.6. 数列 $(m_{n,j})\subset\mathbb{R}$ に対して, $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ を $\mathbb{R}$-値三角配列で $P_{Z_{n,j}}=N(0,m_{n,j})$ を満たすものとする．このとき,$\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ が無限小三角配列となる必要十分条件は以下である．

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{j=1,2,\dots,k_n}m_{n,j}=0.$$

さらに $m_{n,j}$ が $\lim_{n\to\infty}\sup_{j=1,2,\dots,k_n}m_{n,j}=0$ を満たすと仮定する．このとき $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ によって生成された確率過程列 $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}$ に対して以下は同値である．

(1) ある加法過程 $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ が存在して, $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}\xrightarrow{\text{u.w.}}\{X_t\}_{t\in[0,1]}$.

(2) ある連続関数 $a\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ が存在して, $\forall t\in[0,1]$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{\lfloor k_n t\rfloor}m_{n,j}=a(t)$.

(3) ある連続関数 $a\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ が存在して, $\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}\left|\sum_{j=1}^{\lfloor k_n t\rfloor}m_{n,j}-a(t)\right|=0.$

上記が成り立つとき, $P_{X_t}=\langle a(t),0,0\rangle$ となる．

無限小三角配列の各要素が無限分解可能分布に従っているとき, 一様弱収束の定義から直接, 一様弱収束の言い換えが出る．つまり次が成り立ち, example 3.6 はその特殊な場合である．

Proposition 3.7. $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ を無限小三角配列で各 $Z_{n,j}$ は無限分解可能分布に従っている, すなわち, $P_{Z_{n,j}}=\langle A_{n,j},\nu_{n,j},\gamma_{n,j}\rangle$ を満たしているとする．さらに $\{X_t\}_{t\in[0,1]}$ を加法過程で $P_{X_t}=\langle A_t,\nu_t,\gamma_t\rangle$ を満たすものとする．このとき, $\{Z_{n,j}\}_{n\in\mathbb{N},\, j=1,2,\dots,k_n}$ によって生成された確率過程列 $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}$ に対して以下は同値である．

I) $\{S_t^n\}_{t\in[0,1]}\xrightarrow{\text{u.w.}}\{X_t\}_{t\in[0,1]}$.

II) (1) $\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}\left|\sum_{j=1}^{\lfloor k_n t\rfloor}\gamma_{n,j}-\gamma_t\right|=0.$

(2) $\forall i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, d$, $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left| \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t \rfloor} ({}_h\tilde{A}_{n,j})_{i_1,i_2} - ({}_h\tilde{A}_t)_{i_1,i_2} \right| = 0.$

(3) $\forall f \in C_{\sharp\sharp}(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \left| \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t \rfloor} \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\nu_{n,j} - \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\nu_t \right| = 0.$

特に [2, Theorem 3.4] より (II)-(2) と (II)-(3) は次の 2 条件と同値である.

(1) $\forall t \in [0,1], \forall i_1, i_2 = 1, 2, \ldots, d$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t \rfloor} ({}_h\tilde{A}_{n,j})_{i_1,i_2} = ({}_h\tilde{A}_t)_{i_1,i_2}$.

(2) $\forall t \in [0,1], \forall f \in C_{\sharp}(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\lfloor k_n t \rfloor} \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\nu_{n,j} = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\nu_t$.

4 謝辞

本研究は JSPS 二国間交流事業 JPJSBP120209921, JSPS 若手研究 19K14546, JSPS 基盤研究 (B) 18H01115 及び公益財団法人ウシオ財団様からの補助を受けたものである. ここに受けた援助に対して深く感謝の意を表する.

参考文献

[1] T. Hasebe and I. Hotta, Additive processes on the unit circle and Loewner chains, Int. Math. Res. Not. 2022 (2022), Issue 22, 17797–17848.

[2] T. Hasebe, I. Hotta and T. Murayama, Notes on locally uniform weak convergence with application to additive processes. arXiv:2301.04361.

[3] J. Jacod and A. N. Shiryaev, Limit Theorem for Stochastic Processes, Springer, 2003.

[4] M. M. Meerschaert and H. Scheffler, Limit Distributions for Sums of Independent Random Vectors Heavy Tails in Theory and Practice, Wiley InterScience, 2001.

[5] K. Sato, Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 68, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

Large-Time Behaviour of Curl-Free Compressible Navier-Stokes Equations

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
ダヒ・オーヘー (Dáithí Ó hAodha)

1 Introduction

This presentation is concerned with the barotropic compressible Navier-Stokes system

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \mathrm{div}(\rho u) = 0, & \text{in } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t(\rho u) + \mathrm{div}(\rho u \otimes u) - \mathrm{div}(2\mu D(u) + \lambda \mathrm{div}(u)\mathrm{Id}) + \nabla p = 0, & \text{in } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^3, \\ (u, \rho)|_{t=0} = (u_0, \rho_0), & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{1.1}$$

where $\rho : \mathbb{R}^3 \to [0, \infty)$, and $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ are unknown functions, representing the density and velocity of a fluid respectively. $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ is the pressure in the fluid, and the barotropic assumption gives us $p := P(\rho)$, for some smooth function P. μ, λ are viscosity coefficients, taken such that

$$\mu \geq 0, \quad 2\mu + \lambda \geq 0.$$

We define the deformation tensor

$$D(u) := \frac{1}{2}\Big(Du + Du^T\Big).$$

In what follows, we shall assume that the density approaches 1 at infinity; and so we are concerned with strong solutions which are small perturbations from a constant state $(\rho, u) = (1, 0)$. We shall also assume that μ, λ are constant, and set $a := \rho - 1$. Our system (1.1) can thus be rewritten into the following linearised problem:

$$\begin{cases} \partial_t a + \mathrm{div}(u) = f & \text{in } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t u - \mu \Delta u - (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div}(u) + P'(1)\nabla a = g & \text{in } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^3, \\ (a, u)\Big|_{t=0} = (a_0, u_0) & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

We apply the orthogonal projections $\mathcal{P}$ and $\mathcal{Q}$ over the divergence and curl-free fields, respectively (these will be defined later). Then, setting $\alpha := P'(1)$ and $\nu := \lambda + 2\mu$, we get the

system

$$\begin{cases} \partial_t a + \operatorname{div}(\mathcal{Q}u) = f & \text{in } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t \mathcal{Q}u - \nu \Delta \mathcal{Q}u + \alpha \nabla a = \mathcal{Q}g & \text{in } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t \mathcal{P}u - \mu \Delta \mathcal{P}u = \mathcal{P}g & \text{in } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{1.2}$$

We note that $\mathcal{P}u$ satisfies a simple heat equation, independent of a and $\mathcal{Q}u$. We thus focus on a and $\mathcal{Q}u$ in the first two equations. We set

$$v := |D|^{-1}\operatorname{div}(u), \text{ where } \mathcal{F}\Big[|D|^s u\Big](\xi) := |\xi|^s \hat{u}(\xi).$$

We note that one can obtain v from $\mathcal{Q}u$ by a 0-order Fourier multiplier. Thus, bounding v is equivalent to bounding $\mathcal{Q}u$ (see [1], Lemma 2.2).

Since the following rescaling solves (1.2) with $\alpha = \nu = 1$, we shall set those constants as such:

$$a(t,x) = \tilde{a}\Big(\frac{\alpha}{\nu}t, \frac{\sqrt{\alpha}}{\nu}x\Big), \quad u(t,x) = \sqrt{\alpha}\ \tilde{u}\Big(\frac{\alpha}{\nu}t, \frac{\sqrt{\alpha}}{\nu}x\Big).$$

Thus we get that (a, v) solves the following system:

$$\begin{cases} \partial_t a + |D|v = f & \text{in } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t v - \Delta v - |D|a = h := |D|^{-1}\operatorname{div}(g) & \text{in } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

In this presentation, we shall focus on the homogeneous case, where $f = g = 0$, and afterwards discuss the inhomogeneous case. We now introduce our main results, which feature some notation to be explained in the following section. The estimates from above are analogous to those found in [2, 3]. The estimate from below is original.

Theorem 1.1. Let $s \in \mathbb{R}$, $p \in [2, \infty]$, $q \in [1, \infty]$, and $t > 2$. Then

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} \right\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq Ct^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}(1-\frac{2}{p})} \left\| \mathcal{F}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{v}_0 \end{bmatrix} \right\|^l_{\dot{B}^s_{1,q}} + Ce^{-t} \left\| \mathcal{F}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{v}_0 \end{bmatrix} \right\|^h_{\dot{B}^{s+7/2}_{1,q}}.$$

For the high-frequency norm, we also have

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} \right\|^h_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq Ce^{-t} \left\| \mathcal{F}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{v}_0 \end{bmatrix} \right\|^h_{\dot{B}^{s+1/2}_{p,q}}.$$

Also, there exists initial data such that for all sufficiently large $t > 0$,

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} \right\|_\infty \geq Ct^{-2}.$$

2 Preliminaries

2.1 L^p Spaces

Definition 1. (L^p Space)

Let (Ω, M, μ) be a measure space. The set $L^p(\Omega)$, with $1 \leq p < \infty$, is defined as the set of all functions, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, such that

$$\|f\|_p := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} < \infty.$$

For $p = \infty$, the set is defined as the set of all functions whose essential supremum is finite.

$$\|f\|_\infty := \inf\{C \geq 0 \mid |f(x)| \leq C, \text{ for almost all } x \in \Omega\}.$$

Functions that agree almost everywhere (i.e. everywhere in Ω except on a subset with 0 measure) are considered a single element of $L^p(\Omega)$.

Notation. For $1 \leq p \leq \infty$, we denote by p' the conjugate exponent. That is,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

with the convention that $\frac{1}{\infty} := 0$ in this context.

Proposition 2.1. (Hölder's Inequality)

Let $f \in L^p(\Omega)$ and $g \in L^{p'}(\Omega)$, where $1 \leq p \leq \infty$. Then $fg \in L^1$, and

$$\int_\Omega |fg| \, \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Proposition 2.2. (Young's Convolution Inequality)

Let $f \in L^p$ and $g \in L^q$, where $1 \leq p, q \leq r \leq \infty$, such that

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1.$$

Then

$$\|f * g\| r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Here, $(f * g)$ denotes the convolution of f and g. That is,

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^2} f(x-y)g(y) \, \mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^2} f(y)g(x-y) \, \mathrm{d}y.$$

2.2 The Fourier Transform

For a function, f, we define the Fourier transform of f as follows:

$$\mathcal{F}[f](\xi) := \hat{f}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot\xi} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

The inverse Fourier transform is then defined as

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

For the purpose of calculating inequalities, we will frequently omit the factor of $1/2\pi$.

Proposition 2.3. (Plancherel Theorem)

Let $f \in L^1 \cap L^\infty$. Then the L^2 norm of f is invariant under the Fourier transform. That is,

$$\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2.$$

Proposition 2.4. (Orthogonal Projections on the divergence and curl-free fields)

We define the projection mappings $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ using the Fourier transform and the Kronecker delta, defined as follows:

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

The projection mapping $\mathcal{P}$ is a matrix with each component defined as follows for $i, j \in \{1, 2, 3\}$:

$$(\mathcal{P})_{i,j} := \delta_{i,j} + (-\Delta)^{-1}\partial_i\partial_j.$$

We then define $\mathcal{Q} := 1 - \mathcal{P}$. For $f \in (\dot{B}^s_{p,q}(\mathbb{R}^3))^3$, with $s \in \mathbb{R}$, and $p, q \in [1, \infty]$, we may write

$$\mathcal{P}f := (1 + (-\Delta)^{-1}\nabla\mathrm{div})f.$$

2.3 Besov Spaces

Definition 2. We use the Littlewood-Paley decomposition of unity to define homogeneous Besov spaces. Let $\{\hat{\phi}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ be a set of non-negative measurable functions such that

1. $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}_k(\xi) = 1,$ for all $\xi \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$,
2. $\hat{\phi}_k(\xi) = \hat{\phi}_0(2^{-k}\xi)$,
3. $\operatorname{supp}\hat{\phi}_k(\xi) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^2 \mid 2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}\}$.

For $f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$, we write

$$\dot{\Delta}_k f := \mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}_k\hat{f}],$$

The Besov norm is then defined as follows: for $1 \leq p, q \leq \infty$, and $s \in \mathbb{R}$, we define the

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} := \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{sqk}\|\dot{\Delta}_k f\|_p^q\Big)^{1/q}.$$

The set $\dot{B}^s_{p,q}$ is defined as the set of functions, $f \in \mathcal{S}'/\mathcal{P}$, whose Besov norm is finite. Finally, we also regularly use the following notation for so-called high and low-frequency norms:

$$\|f\|^h_{\dot{B}^s_{p,q}} := \Big(\sum_{k\geq 3} 2^{sqk}\|\dot{\Delta}_k f\|_p^q\Big)^{1/q}, \quad \|f\|^l_{\dot{B}^s_{p,q}} := \Big(\sum_{k\leq 2} 2^{sqk}\|\dot{\Delta}_k f\|_p^q\Big)^{1/q}.$$

3 Proof of Theorem

We begin our analysis of (a, v) which solves the system

$$\begin{cases} \partial_t a + |D|v = 0 & \text{in } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t v - \Delta v - |D|a = 0 & \text{in } \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Taking the Fourier transform over space, x, we can write the above system as

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = M_{|\xi|}\begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{v} \end{bmatrix}, \quad \text{with} \quad M_{|\xi|} := \begin{bmatrix} 0 & -|\xi| \\ |\xi| & -|\xi|^2 \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Then, by Duhamel's principle, we write the following formula for the solution to (3.1):

$$\begin{bmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} = e^{tM_{|\xi|}}\begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{v}_0 \end{bmatrix}.$$

We obtain the following eigenvalues for $M_{|\xi|}$, which differ between high and low frequencies:

$$\lambda_\pm(\xi) := \begin{cases} -\frac{|\xi|^2}{2}\Big(1 \pm i\sqrt{\frac{4}{|\xi|^2} - 1}\Big), & \text{for } |\xi| < 2, \\ -\frac{|\xi|^2}{2}\Big(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{|\xi|^2}}\Big), & \text{for } |\xi| > 2, \end{cases}$$

from which we obtain the matrices of eigenvectors

$$P = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{21} \\ v_{12} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \Big(1 - i\sqrt{\frac{4}{|\xi|^2} - 1}\Big)^{1/2} & \Big(1 + i\sqrt{\frac{4}{|\xi|^2} - 1}\Big)^{1/2} \\ \Big(1 + i\sqrt{\frac{4}{|\xi|^2} - 1}\Big)^{1/2} & -\Big(1 - i\sqrt{\frac{4}{|\xi|^2} - 1}\Big)^{1/2} \end{bmatrix}, & \text{for } |\xi| < 2, \\ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \Big(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{|\xi|^2}}\Big)^{1/2} & \Big(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{|\xi|^2}}\Big)^{1/2} \\ \Big(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{|\xi|^2}}\Big)^{1/2} & -\Big(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{|\xi|^2}}\Big)^{1/2} \end{bmatrix}, & \text{for } |\xi| > 2. \end{cases}$$

Using these eigenvalues and eigenvectors, we can rewrite the fundamental solution:

$$e^{tM_{|\xi|}} = P\begin{bmatrix} e^{t\lambda_+} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_-} \end{bmatrix}P^{-1}.$$

Looking again at our solution, if we left-multiply both sides of (3.1) by P^{-1}, we get

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\hat{m}_+\\ \hat{m}_-\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_+ & 0\\ 0 & \lambda_-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{m}_+\\ \hat{m}_-\end{bmatrix}, \text{ where } \begin{bmatrix}\hat{m}_+\\ \hat{m}_-\end{bmatrix} := P^{-1}\begin{bmatrix}\hat{a}\\ \hat{v}\end{bmatrix}.$$

We thus obtain

$$\begin{bmatrix}\hat{m}_+(t)\\ \hat{m}_-(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{t\lambda_+} & 0\\ 0 & e^{t\lambda_-}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{m}_+(0)\\ \hat{m}_-(0)\end{bmatrix}.$$

Before proceeding, we give some remarks on the relationship between a_0, v_0, and $\hat{m}_+(0), \hat{m}_-(0)$. We note the following relations for all $p \in [1, \infty]$:

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}_j v_{11} f]\right\|_p &\sim 2^{-j/2}\left\|\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}_j f]\right\|_p, \text{ for all } j \in \mathbb{Z},\\
\left\|\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}_j v_{21} f]\right\|_p &\sim 2^{-j/2}\left\|\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}_j f]\right\|_p, \text{ for all } j < 3,\\
\left\|\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}_j v_{21} f]\right\|_p &\sim \left\|\mathcal{F}^{-1}[\hat{\phi}_j f]\right\|_p, \text{ for all } j \geq 3.
\end{aligned}$$

The last inequality is due to the fact that

$$\left(1 + \sqrt{1 - (4/|\xi|^2)}\right)^{1/2} \sim 1$$

for high frequencies. This causes a small loss of regularity for our purposes, as we are forced to take advantage of the following chain of inequalities in order to obtain our estimates:

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq C\|Pf\|_{\dot{B}^{s+1/2}_{p,q}} \leq C\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}\cap\dot{B}^{s+1/2}_{p,q}}.$$

Proposition 3.1. ($L^1 - L^\infty$ estimates for high and low frequencies)

For all sufficiently large $t > 1$,

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[e^{t\lambda_+}\hat{\phi}_j\right]\right\|_\infty &\leq Ce^{-t}, \text{ for all } j \geq 3\\
\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[e^{t\lambda_-}\hat{\phi}_j\hat{m}_-(0)\right]\right\|_\infty &\leq 2^{3j}Ce^{-t}\|\Delta_j m_-(0)\|_1, \text{ for all } j \geq 3\\
\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[e^{t\lambda_\pm}\hat{\phi}_j\right]\right\|_\infty &\leq Ct^{-2}, \text{ for all } j \leq 2.
\end{aligned}$$

Proof. We start with the high-frequency case $j \geq 3$. Note that in this case we have

$$\operatorname{supp}\hat{\phi}_j \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^3 | 2 < |\xi|\},$$

and thus we are dealing with the high-frequency definitions of our eigenvalues $\lambda_\pm$. That is,

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\left[e^{t\lambda_-}\hat{\phi}_j\hat{m}_-(0)\right]\right\|_\infty = \left\|\int_{|\xi|>2} e^{ix\cdot\xi}e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2\left(1-\sqrt{1-\frac{4}{|\xi|^2}}\right)}\hat{\phi}(2^{-j}\xi)\hat{m}_-(0,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\|_{L^\infty_x}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2\left(1-\sqrt{1-\frac{4}{|\xi|^2}}\right)} \hat{\Phi}_j \hat{\phi}_j \hat{m}_-(0) \Big] \right\|_{L^\infty_x} \\
&= \left\| \mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2\left(1-\sqrt{1-\frac{4}{|\xi|^2}}\right)} \hat{\Phi}_j \Big] * \mathcal{F}^{-1}\Big[\hat{\phi}_j \hat{m}_-(0) \Big] \right\|_{L^\infty_x},
\end{aligned}
$$

where $\hat{\Phi}_j = \hat{\phi}_{j-1} + \hat{\phi}_j + \hat{\phi}_{j+1}$. We finally end by using Young's convolution inequality

$$
\begin{aligned}
&\left\| \mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2\left(1-\sqrt{1-\frac{4}{|\xi|^2}}\right)} \hat{\Phi}_j \Big] * \mathcal{F}^{-1}\Big[\hat{\phi}_j \hat{m}_-(0) \Big] \right\|_{L^\infty_x} \\
&\le \left\| \mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2\left(1-\sqrt{1-\frac{4}{|\xi|^2}}\right)} \hat{\Phi}_j \Big] \right\|_\infty \|\dot{\Delta}_j m_-(0)\|_1 \\
&\le \int_{\xi\in\mathbb{R}^3} e^{-2t\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{|\xi|^2}}\right)^{-1}} \hat{\Phi}_j(\xi)\,\mathrm{d}\xi \|\dot{\Delta}_j m_-(0)\|_1 \\
&\le 2^{3j+6} C e^{-t} \|\dot{\Delta}_j m_-(0)\|_1,
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\left\| \mathcal{F}^{-1}\Big[e^{t\lambda_+} \hat{\phi}_j \Big] \right\|_\infty &= \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \Big| \int_{2^{j-1}<|\xi|<2^{j+1}} e^{ix\cdot\xi} e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2\sqrt{1-\frac{4}{|\xi|^2}}} e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{\phi}(2^{-j}\xi)\,\mathrm{d}\xi \Big| \\
&\le C \int_{2^{j-1}<|\xi|<2^{j+1}} \Big| e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2} \hat{\phi}(2^{-j}\xi) \Big| \,\mathrm{d}\xi \\
&\le C e^{-t} \int_{\mathbb{R}^3} e^{-t|\xi|^2/4}\,\mathrm{d}\xi \\
&\le C e^{-t}, \text{ for all } j \ge 3,\ t > 1.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Next, for middling frequencies, $-1 < j \le 2$, the result follows similarly to the above. Finally, we are left with the low frequencies $j \le -1$. We start by extracting the heat-like decay by a change of variables.

$$
\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \Big| \int_{|\xi|\le 1} e^{ix\cdot\xi} e^{\pm it|\xi|^2\sqrt{\frac{4}{|\xi|^2}-1}} e^{-t|\xi|^2} \hat{\phi}(2^{-j}\xi)\,\mathrm{d}\xi \Big| \\
&= t^{-3/2} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \Big| \int_{|\xi|\le t^{1/2}} e^{i(t^{-1/2}x)\cdot\xi} e^{\pm it^{1/2}|\xi|^2\sqrt{\frac{4}{|\xi|^2}-t^{-1}}} e^{-|\xi|^2} \hat{\phi}(2^{-j}t^{-1/2}\xi)\,\mathrm{d}\xi \Big|.
\end{aligned}
$$

Thus it remains to extract a further decay of $t^{-1/2}$ from the L^∞ norm above. We fix $j \le -1$, and consider two cases with respect to time t.

First, let $\epsilon > 0$, and let $t_0 \ge C$, for some constant $C > 2$, such that

$$
2^j \ge t_0^{-1/2} + \epsilon.
$$

In this case, we easily obtain

$$
\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \Big| \int_{2^{j-1}t^{1/2}<|\xi|<2^{j+1}t^{1/2}} e^{i(t^{-1/2}x)\cdot\xi} e^{\pm it^{1/2}|\xi|^2\sqrt{\frac{4}{|\xi|^2}-t^{-1}}} e^{-|\xi|^2} \hat{\phi}(2^{-j}t^{-1/2}\xi)\,\mathrm{d}\xi \Big|
$$

$$\leq \int_{2^{j-1}t^{1/2}<|\xi|<2^{j+1}t^{1/2}} e^{-|\xi|^2}\,\mathrm{d}\xi$$
$$\leq \int_{|\xi|>(\epsilon t^{1/2})/2} e^{-|\xi|^2}\,\mathrm{d}\xi \leq t^{-1/2}.$$

Thus, for each fixed j, there exists a constant t_0 large enough such that for all $t \geq t_0$ our claim holds. This, however, is not sufficient, as this constant increases as $j \to -\infty$. We thus must consider the inverse case where, for $j \leq -1$ and $t \geq C$, for some constant $C > 2$, we have

$$2^{j+1} \leq t^{-1/2}.$$

Note that in this case, thanks to the presence of $\hat{\phi}_j$ in our integrand, we need only integrate over $|\xi| < 2^{j+1}t^{1/2} \leq 1$. The rest of this proof is focused on this one remaining case.

First note that, by radial symmetry, we can assume without loss of generality that $x = (x_1, 0, 0)$. Next, we decompose the frequency space into four parts.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^3 =& \{\xi \in \mathbb{R}^3 \ : \ |\xi_2|, |\xi_3| \leq t^{-1/4}\} \cup \{\xi \in \mathbb{R}^3 \ : \ |\xi_2| \geq t^{-1/4}, |\xi_3| \leq t^{-1/4}\} \\ &\cup \{\xi \in \mathbb{R}^3 \ : \ |\xi_2| \leq t^{-1/4}, |\xi_3| \geq t^{-1/4}\} \cup \{\xi \in \mathbb{R}^3 \ : \ |\xi_2|, |\xi_3| \geq t^{-1/4}\} \\ &:= B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4.\end{aligned}$$

We estimate our integral over each of these four subsets, and as the calculations involved are elementary, we skip the details for this report. □

Proposition 3.2. Let $j \in \mathbb{Z}$, $p \in [2, \infty]$, $s \in \mathbb{R}$, $q \in [1, \infty]$, and $t \geq C > 2$. Then

$$\left\| \mathcal{F}^{-1}\left[e^{t\lambda_+}\hat{m}_+(0)\right]\right\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq Ct^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}(1-\frac{2}{p})}\|m_+(0)\|^l_{\dot{B}^s_{1,q}} + Ce^{-t}\|m_+(0)\|^h_{\dot{B}^s_{1,q}},$$
$$\left\| \mathcal{F}^{-1}\left[e^{t\lambda_-}\hat{m}_-(0)\right]\right\|_{\dot{B}^s_{p,q}} \leq Ct^{-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}(1-\frac{2}{p})}\|m_-(0)\|^l_{\dot{B}^s_{1,q}} + Ce^{-2t}\|m_-(0)\|^h_{\dot{B}^{s+3}_{1,q}}.$$

The above proposition follows from interpolation between the L^∞-norm, which we've bounded by Proposition 3.1, and the L^2-norm, which decays at the same rate as the heat kernel.

Proposition 3.3. ($L^p - L^p$ estimates for high frequencies)

$$\left\| \mathcal{F}^{-1}\left[e^{t\lambda_+}\hat{\phi}_j\hat{m}_+(0)\right]\right\|_p \leq Ce^{-t}\|\dot{\Delta}_j m_+(0)\|_p, \text{ for all } j \geq 3,$$
$$\left\| \mathcal{F}^{-1}\left[e^{t\lambda_-}\hat{\phi}_j\hat{m}_-(0)\right]\right\|_p \leq Ce^{-t}\|\dot{\Delta}_j m_-(0)\|_p, \text{ for all } j \geq 3.$$

Proof. Since the proofs are similar, we only show for $\hat{m}_-(0)$. First, as noted in the previous proposition, we have

$$e^{-\frac{t}{2}|\xi|^2\left(1-\sqrt{1-\frac{4}{|\xi|^2}}\right)} = e^{-2t\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{|\xi|^2}}\right)^{-1}}$$

Next, note that

$$-t\big(1+\sqrt{1-4/|\xi|^2}\big)^{-1} = -\frac{t}{2} - \frac{2t}{|\xi|^2}\big(1+\sqrt{1-4/|\xi|^2}\big)^{-2}.$$

Thus, we can rewrite

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{F}^{-1}\Big[e^{t\lambda_-}\hat{\phi}_j\hat{m}_-(0)\Big]\right\|_p &= e^{-t}\left\|\mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-\frac{4t}{|\xi|^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{|\xi|^2}}\right)^{-2}}\hat{\phi}_j\hat{m}_-(0)\Big]\right\|_p \\ &\le e^{-t}\left\|\mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-\frac{4t}{|\xi|^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{|\xi|^2}}\right)^{-2}}\hat{\Phi}_j\Big]\right\|_1 \|\dot{\Delta}_j m_-(0)\|_p. \end{aligned} \tag{3.3}$$

We note that, for all $j \ge 4$,

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-\frac{4t}{|\xi|^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{|\xi|^2}}\right)^{-2}}\hat{\Phi}_j\Big]\right\|_1 &= \left\|\mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-\frac{4t}{2^{2j}|\xi|^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{2^{2j}|\xi|^2}}\right)^{-2}}\hat{\Phi}_0\Big]\right\|_1 \\ &\le C\left\|\mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-\frac{4t}{2^{2j}|\xi|^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{2^{2j}|\xi|^2}}\right)^{-2}}\hat{\Phi}_0\Big]\right\|_{W^{2,2}} \\ &\le C.\end{aligned}$$

The above sobolev norm is divergent for $j = 3$, and so we must instead use the following inequality:

$$\begin{aligned}&\left\|\mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-\frac{4t}{|\xi|^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{|\xi|^2}}\right)^{-2}}\hat{\Phi}_3\Big]\right\|_1 \le \left\|\mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-\frac{4t}{|\xi|^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{|\xi|^2}}\right)^{-2}}\hat{\Phi}_3\Big]\right\|_{\dot{B}^{3/2}_{2,\infty}} \\ &\le \left\|\mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-\frac{4t}{|\xi|^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{|\xi|^2}}\right)^{-2}}\hat{\Phi}_3\Big]\right\|_{\dot{B}^{1}_{2,\infty}} \left\|\mathcal{F}^{-1}\Big[e^{-\frac{4t}{|\xi|^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{4}{|\xi|^2}}\right)^{-2}}\hat{\Phi}_3\Big]\right\|_{\dot{B}^{2}_{2,\infty}} \le Ce^{-t}.\end{aligned}$$

The final step is calculated similarly to (3.2) using the presence of fixed $\hat{\Phi}_3$ inside the above norms. Thus, returning to (3.3), we have

$$\left\|\mathcal{F}^{-1}\Big[e^{t\lambda_-}\hat{\phi}_j\hat{m}_-(0)\Big]\right\|_p \le Ce^{-t}\|\dot{\Delta}_j m_-(0)\|_p.$$

□

We now discuss the optimality of the estimates in the previous section. In particular, we will prove that the low-frequency bound obtained is optimal.

Proposition 3.4. (Optimality of Low-Frequency Linear Estimate)

Let t be sufficiently large. There exist $j < 0$ and $C > 0$ independent of t, j such that

$$\|\mathcal{F}^{-1}[e^{t\lambda_\pm}\hat{\phi}_j]\|_\infty \ge Ct^{-2}.$$

Proof.

First, we observe that for all $t > 2$, there exists $j < 0$ such that

$$[1/4, 7/8] \subseteq [2^{j-1}t^{1/2}, 2^{j+1}t^{1/2}].$$

We fix $t > 2$ and take such $j < 0$. Next note that

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \Big| \int_{|\xi|\le 1} e^{ix\cdot\xi} e^{\pm it|\xi|^2\sqrt{\frac{4}{|\xi|^2}-1}} e^{-t|\xi|^2} \hat{\phi}(2^{-j}\xi)\,\mathrm{d}\xi \Big| \\
&\ge t^{-3/2} \Big| \int_{|\xi|\sim 2^j t^{1/2}} e^{\pm 2it^{1/2}\xi_1} e^{\pm it^{1/2}|\xi|^2\sqrt{\frac{4}{|\xi|^2}-t^{-1}}} e^{-|\xi|^2} \hat{\phi}(2^{-j}t^{-1/2}\xi)\,\mathrm{d}\xi \Big|,
\end{aligned}$$

where in the above, we chose the specific value $x = (\pm 2t, 0, 0)$.

Next, we divide the whole space into four sections as in the previous section.

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3 =& \{\xi \in \mathbb{R}^3 \ : \ |\xi_2|, |\xi_3| \le t^{-1/4}\} \cup \{\xi \in \mathbb{R}^3 \ : \ |\xi_2| \ge t^{-1/4}, |\xi_3| \le t^{-1/4}\} \\
&\cup \{\xi \in \mathbb{R}^3 \ : \ |\xi_2| \le t^{-1/4}, |\xi_3| \ge t^{-1/4}\} \cup \{\xi \in \mathbb{R}^3 \ : \ |\xi_2|, |\xi_3| \ge t^{-1/4}\} \\
&:= B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4.
\end{aligned}$$

Additionally, we divide B_1 further into two parts.

$$\begin{aligned}
B_1 &= B_{1,1} \cup B_{1,2}, \\
B_{1,1} &:= \{\xi \in B_1 \mid \xi_1 < -2^{j+1}t^{1/2} + 1/8\}, \\
B_{1,2} &:= B_1 \backslash B_{1,1}.
\end{aligned}$$

In our proof we obtain a bound the integral over $B_{1,1}$ from below by $t^{-1/2}$ times a harmless constant. We then may obtain bounds from above that decay at a faster rate for the integrals over every other set $B_{1,2}, B_2, B_3, B_4$ by calculations similar to those of Proposition 3.1. □

We lastly must find some suitable initial data (u_0, a_0) such that

$$\left\| \mathcal{F}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} \right\|_\infty \ge Ct^{-2}.$$

We propose that for sufficiently small a_0, the following initial velocity satisfies our main theorem:

$$u_0 := e^{-|x|^2}\vec{1}, \text{ with } \vec{1} := [1, 1, 1]^T.$$

参考文献

[1] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, and R. Danchin, *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 343, Springer, Heidelberg, 2011.

[2] D. Hoff and K. Zumbrun, *Multi-dimensional diffusion waves for the Navier-Stokes equations of compressible flow*, Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), no. 2, 603–676.

[3] T. Kobayashi and Y. Shibata, *Remark on the rate of decay of solutions to linearized compressible Navier-Stokes equations*, Pacific J. Math. **207** (2002), no. 1, 199–234.

ポテンシャルのついた非線形消散クライン・ゴルドン方程式の大域挙動

京都大学理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系
石塚健二郎 (Kenjiro ISHIZUKA)

概要

非線形消散クライン・ゴルドン方程式に対してポテンシャルのついた場合を考える。ポテンシャルのついていない場合においてはソリトンと呼ばれる波の形が単純で、Cote-Martel-Yuan(2021) によって解の時間無限大での漸近挙動が完全にわかっている。一方、ポテンシャルがついた場合はそのポテンシャルの影響でソリトンの形が多様化して解析が困難になる。本講演ではポテンシャルのついた場合での解の時間無限大での解の漸近挙動のパターンについて考察する。

1 導入

本講演では次の Dirac のデルタ関数をポテンシャルに持つ非線形消散クライン・ゴルドン方程式について考える.

$$\partial_t^2 u + 2\alpha\partial_t u - \partial_x^2 u + u - \gamma\delta_0 u - |u|^{p-1}u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \tag{1}$$

ここで $\alpha > 0, \gamma < 2, p > 2$ とする.δ_0 は原点で特異な Dirac のデルタ関数である. また,u は実数値の未知関数とする.
(1) の $\alpha = 0$ での初期値問題は [1] によって $\mathcal{H} := H^1(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ で局所適切であることがわかっている. この手法と同様の作業をすると,$\alpha > 0$ の場合でも $\mathcal{H}$ で初期値問題が局所適切なことがわかる. 即ち、以下が成立する.

- 任意の $\varphi \in \mathcal{H}$ に対して、初期値 φ の (1) の解が一意に存在する.
- (Blow up alternative) 解 $\vec{u}$ が (正の方向に) 大域解でないならその最大存在時刻を $T_{\max}$ とすると
$$\lim_{t\to T_{\max}-0} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} = \infty.$$
- 上の主張から $\varphi \in \mathcal{H}$ に対して初期値 φ での (1) の解の最大存在時刻を $T_{\max}(\varphi) \in [0,\infty]$ とおくと $T_{\max}$ は下半連続である. さらに, もし $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}$ がある $\varphi \in \mathcal{H}$ に収束するとき、$T < T_{\max}(\varphi)$ に対して,u_n を初期値 φ_n の (1) の解, u を初期値 φ の (1) の解とすると $u_n \to u$ in $C([0,T],\mathcal{H})$ $(n\to\infty)$ となる.

また, エネルギー関数 $E_\gamma : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ を

$$E_\gamma(u,v) = \frac{1}{2}(\|u\|_{H^1}^2 + \|v\|_{L^2}^2 - \gamma|u(0)|^2) - \frac{1}{p+1}\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

とすると,(1) の解 $\vec{u}$ に対して

$$\frac{d}{dt}E_\gamma(\vec{u}(t)) = -2\alpha\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 \tag{2}$$

が成立する. また,$|\gamma| < 2$ に対して Q_γ を

$$Q_\gamma(x) := [\frac{p+1}{2\cosh^2\{\frac{p-1}{2}|x| + \tanh^{-1}(\frac{\gamma}{2})\}}]^{\frac{1}{p-1}}$$

と定義すると,Q_γ は (1) の定常解

$$-{Q_\gamma}'' + Q_\gamma - \gamma\delta_0 Q_\gamma - |Q_\gamma|^p = 0$$

を $H^{-1}(\mathbb{R})$ の意味で満たす.
(1) に関して,$\gamma = 0$ の場合は Côte-Martel-Yuan [2] によって (1) の大域解 $\vec{u} = (u, \partial_t u)$ はある非負整数 K と $\sigma \in \{\pm 1\}$ と連続関数 $z_k : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ が存在し,

$$\vec{u}(t) = \sigma\sum_{k=1}^{K}(-1)^k(Q(\cdot - z_k(t)), 0) + o(1) \text{ in } \mathcal{H} \quad (t \to \infty)$$

と表せることが示された. ただし $Q(x) = Q_0(x)$ としていて,z_k に関しては $i < j$ なら $t \to \infty$ で $z_j(t) - z_i(t) \to \infty$ となる.

2 着想

まず着想について話す.$K_\gamma, J_\gamma : H^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を

$$K_\gamma(v) := \|v\|_{H^1}^2 - \gamma|v(0)|^2 - \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$
$$J_\gamma(v) := \frac{1}{2}(\|v\|_{H^1}^2 - \gamma|v(0)|^2) - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

と定義する. さらに d_γ を

$$d_\gamma := \inf\{J_\gamma(v) : v \in H^1(\mathbb{R})\backslash\{0\}\ ,\ K_\gamma(v) = 0\}$$

と定義する. このとき Fukuizumi-Jeanjean[3] によると,$\gamma \geq 0$ のときは $v = Q_\gamma$ のときに

$$d_\gamma = J_\gamma(Q_\gamma)\ ,\ K_\gamma(Q_\gamma) = 0$$

が成立する. すなわち,Q_γ が K_γ が 0 となる状態の中で J_γ が最小となる関数であることを意味する.
一方,$\gamma < 0$ のときは

$$d_\gamma = d_0$$

が成立し, さらにこのとき最小値となる $v \in H^1(\mathbb{R})$ は存在しない. 即ち

$$d_\gamma = J_\gamma(v)\ ,\ K_\gamma(v) = 0$$

となる v は存在しない (これも [3] に載っている). これはデルタポテンシャルの反発的な力によって無限遠方に Q が逃げていくイメージである.

また,d_γ を変分的に定義しているため, 基底状態より下では K_γ の符号によって解が 0 に収束するか, 爆発解になるかを分類することが予想できる. これは古くからある議論で,d_γ より下の範囲では解の大域挙動は研究されてきた. また,Krieger-Nakanishi-Schlag[4] の議論では,$\alpha = 0, \gamma = 0, p > 5$ の偶関数のときに解のエネルギーが d_γ を上回った場合でも位相的な議論を用いることで, 解が

- 0 に散乱する解 (消散効果がないので 0 に収束する解に対応する解となっている)
- 爆発解
- 基底状態 Q に散乱する解

のいずれかになることが示された. このような研究内容から,$\alpha > 0, \gamma \neq 0$ の場合でも位相的議論を用いることで (1) の解で

$$\vec{u}(t) = (Q(\cdot - z(t)), 0) + o(1) \text{ in } \mathcal{H} \quad , z(t) \to \infty \quad (t \to \infty)$$

となるような解が存在するのではないかと着目した.

また, 偶関数に制限して同様のことを考える.

$$r_\gamma = \inf\{J_\gamma(v) : v \in H^1(\mathbb{R})\backslash\{0\} \ , v(x) = v(-x) \ , \ K_\gamma(v) = 0\}$$

と定義する. このとき r_γ は $-2 < \gamma < 2$ のときは

$$r_\gamma = J_\gamma(Q_\gamma)$$

が成立する. そして $\gamma \leq -2$ のときは

$$r_\gamma = 2d_0$$

が成立し, さらに最小値となる偶関数 $v \in H^1(\mathbb{R})$ は存在しない (これも [3] に記載). よって $\gamma < -2$ の偶関数の場合も位相的な議論を用いることで

$$\vec{u}(t) = (Q(\cdot - z(t)), 0) + (Q(\cdot + z(t)), 0)o(1) \text{ in } \mathcal{H} \quad , z(t) \to \infty \quad (t \to \infty)$$

となる解が存在することが期待できる. 特にこのような解は $\gamma = 0$ のときは存在しなかった解なので, ポテンシャルの影響を含んだ解の時間無限大での挙動が期待できる.

3 主定理

これらの背景を踏まえて、(1) に関する基本的な性質を整備し, 以下の主張を得た.

定理 3.1. *$\vec{u}$ を (1) の大域解とする. このときある非負整数 K と $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$, $\{\sigma_k\}_{k\in\{1,2,\cdots,K\}} \subset \{-1, 1\}^K$ と連続関数 $z_k : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ $(1 \leq k \leq K)$ が存在して以下が成立する.*

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - \sigma Q_\gamma - \sum_{k=1}^{K} \sigma_k Q(\cdot - z_k(t))\|_{H^1} + \|\partial_t u(t)\|_{L^2} = 0$$

$$1 \leq k \leq K \text{ で } \lim_{t\to\infty} |z_k(t)| = \infty \ , \ 1 \leq k \leq K-1 \text{ で } \lim_{t\to\infty} \{z_{k+1}(t) - z_k(t)\} = \infty$$

注意 3.2. *$\gamma \leq -2$ のときは Q_γ が存在しないが, このとき $\sigma = 0$ と考えることで差支えない.*

4 準備

4.1 (1) の大域有界性

ここからは主定理の証明を記していく.(1) はデルタポテンシャルの影響により原点での値がエネルギーの値に影響を与えているが, ノルムとしては以下のように評価ができる.

命題 4.1. $\gamma < 2$ のとき, ある $C_\gamma > 1$ が存在して任意の $u \in H^1(\mathbb{R})$ に対して以下が成立する.

$$C_\gamma^{-1}\|u\|_{H^1}^2 \leqq \|u\|_{H^1}^2 - \gamma|u(0)|^2 \leqq C_\gamma\|u\|_{H^1}^2$$

証明. [2] の lemma2.3 を参照. □

この主張より $\|u\|_{H^1}^2 - \gamma|u(0)|^2$ が $H^1(\mathbb{R})$ と同値になる. これを用いて以下を示す.

命題 4.2. ある $F(0) = 0$ となる連続関数 $F : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が存在して以下が成立する.

$\vec{u}$ が (1) の大域解ならば以下が成立する.

$$\sup_{t\in[0,\infty)} \|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}} \leq F(\|\vec{u}(0)\|_{\mathcal{H}})$$

証明. $M, W, V : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を

$$\begin{aligned} M(t) &= \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 + \alpha\int_0^t \|u(s)\|_{L^2}^2 ds \\ W(t) &= \frac{1}{2}\|\vec{u}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\ V(t) &= W(t) - \frac{\gamma}{2}|u(t,0)|^2 \end{aligned}$$

とする. このとき $\gamma < 2$ なら

$$V(t) \sim W(t)$$

が成立することに注意する. ここで

$$\begin{aligned} M'(t) &= \int u(t)\partial_t u(t)dx + \alpha\|u(t)\|_{L^2}^2 \\ &= \int u(t)\partial_t u(t)dx + 2\alpha\int_0^t\int u(s)\partial_t u(s)dxds + \alpha\|u(0)\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

で,$E(t) := E(\vec{u}(t))$ とすると

$$\begin{aligned} M''(t) &= \|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 - (\|u(t)\|_{H^1}^2 - \gamma|u(t,0)|^2) + \|u(t)\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ &= \frac{p+3}{2}\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 + \frac{p-1}{2}(\|u(t)\|_{H^1}^2 - \gamma|u(t,0)|^2) - (p+1)E(t) \end{aligned}$$

$$V'(t) = -2\alpha\|\partial_t u(t)\|_{L^2}^2 + \int f(u(t))\partial_t u(t)dx$$

が成立する. これらの式を [2] と同様の議論で解析すると導ける.

□

4.2 コンパクト性の議論

次にコンパクト性の議論でソリトン分解に関する命題を示す.

命題 4.3. $\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H^1(\mathbb{R})$ が $H^1(\mathbb{R})$ で有界で

$$-\partial_x^2 u_n + u_n - \gamma\delta_0(x)u_n - f(u_n) \to 0 \ \text{ in } \ H^{-1}(\mathbb{R}) \ \ (n \to \infty) \tag{3}$$

が成立すると仮定する. このとき $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\sigma \in \{-1, 0, 1\}$ とある非負整数 K,$\{\sigma_k\}_{1 \leqq k \leqq K} \subset \{-1, 1\}^K$, $\{x_{k,n}\}_{1 \leqq k \leqq K, n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ が存在して以下が成立する.

- $\lim_{n\to\infty} \|v_n - \sigma Q_\gamma - \sum_{k=1}^{K} \sigma_k Q(\cdot - x_{k,n})\|_{H^1} = 0$
- $1 \leqq k \leqq K$ で $\lim_{n\to\infty} |x_{k,n}| = \infty$ が成立. さらに $1 \leq k \leq K-1$ で $\lim_{n\to\infty} \{x_{k+1,n} - x_{k,n}) = \infty$ が成立する.

証明に入る前に,$\psi \in H^{-1}(\mathbb{R})$ に $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$ を代入した値を $\langle \psi, \varphi \rangle$ と記すことに注意する.

証明. $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ が H^1 で有界なので $\{J_\gamma(u_n)\}_{n=1}^{\infty}$ も有界である. それゆえ $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ をうまく取り替えるとある $\kappa \in [0, \infty)$ が存在して $\lim_{n\to\infty} J_\gamma(u_n) = \kappa$ が成立する. また,(3) より, $\lim_{n\to\infty} K_\gamma(u_n) = 0$ なので

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} = \frac{p+1}{p-1}\{2J_\gamma(u_n) - K_\gamma(u_n)\} = \frac{2(p+1)}{p-1}\kappa$$

が成立する. この式より $\kappa \geq 0$ となり, さらにこのとき $\kappa = 0$ なら $K = 0, \sigma = 0$ の場合として題意を満たすので, 以後 $\kappa > 0$ を考える. このとき Lieb のコンパクト性定理より $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ をうまく取り替えると, ある $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ と $u \in H^1(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$ が存在して $n \to \infty$ で

$$\begin{aligned} u_n(\cdot - x_n) &\rightharpoonup u \ \text{ in } \ H^1(\mathbb{R}) \\ x_n &\to x \in [-\infty, \infty] \end{aligned}$$

が成立. ここで

- $x \in (-\infty, \infty)$ のときは $u_n \rightharpoonup u(\cdot + x) \ \text{ in } \ H^1(\mathbb{R})$ が成立するのでこの式から u は

  $$-\partial_x^2 u + u - \gamma\delta_0(\cdot - x)u - |u|^{p-1}u = 0$$

  が成立する. この常微分方程式の解は $|\gamma| \geq 2$ なら存在しなくて,$|\gamma| < 2$ なら $u = \pm Q_\gamma(\cdot - x)$ となるが, このとき

  $$u_n \rightharpoonup u(\cdot + x) = \pm Q_\gamma \ \text{ in } \ H^1(\mathbb{R})$$

  が成立する. ここで $u_n \rightharpoonup Q_\gamma$ の場合を考える.$w_n = u_n - Q_\gamma$ とおくと,Brezis-Lieb の補題より

  $$\lim_{n\to\infty} (\|u_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \|w_n\|_{L^{p+1}}^{p+1}) = \|Q_\gamma\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

  が成立するのでこれから

  $$\lim_{n\to\infty} \|w_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} = \frac{2(p+1)}{p-1}\kappa - \|Q_\gamma\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

となる. さらに任意の $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned}\langle -\partial_x^2 w_n + w_n - \gamma\delta_0 w_n - f(w_n), \varphi\rangle &= \langle -\partial_x^2 u_n + u_n - \gamma\delta_0 u_n - f(u_n), \varphi\rangle \\ &- \langle -\partial_x^2 Q_\gamma + Q_\gamma - \gamma\delta_0 Q_\gamma - f(Q_\gamma), \varphi\rangle \\ &- \langle f(w_n) - f(u_n) + f(Q_\gamma), \varphi\rangle\end{aligned}$$

で, 一番上の項は (3) から $n \to \infty$ で 0 に収束し, 真ん中の項は 0 となる. そして一番下の項について,「任意の実数 $R > 0$ に対して $f(w_n) - f(u_n) + f(Q_\gamma) \to 0 \ \text{ in } \ H^1([-R, R])$」に気を付けると,$G_n = f(w_n) - f(u_n) + f(Q_\gamma)$ としたら

$$\langle G_n, \varphi\rangle = \int_{|x|>R} (G_n\varphi) + \int_{-R}^{R} (G_n\varphi)$$

は R を十分大きくとり,R に比べて n を十分大きくとれば $|\langle G_n, \varphi\rangle|$ は小さくとれるので 0 に収束する. 以上の議論より任意の $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \langle -\partial_x^2 w_n + w_n - \gamma\delta_0 w_n - f(w_n), \varphi\rangle = 0$$

となるから

$$-\partial_x^2 w_n + w_n - \gamma\delta_0 w_n - f(w_n) \to 0 \ \text{ in } \ H^{-1}(\mathbb{R})$$

が成立する.$u_n \rightharpoonup -Q_\gamma$ のときも同様に $w_n = u_n + Q_\gamma$ とおくと
$-\partial_x^2 w_n + w_n - \gamma\delta_0 w_n - f(w_n) \to 0 \ \text{ in } \ H^{-1}(\mathbb{R})$ が成立する.

- $x = \pm\infty$ の場合を考える.$x = \infty$ のとき,$v_n = u_n(\cdot - x_n)$ とおくと $v_n \rightharpoonup u$ だが, ここで $R > 0$ を固定する.$\varphi \in H^1(\mathbb{R})$ が $|x| > R$ で $\varphi(x) = 0$ となる関数のとき, 仮定から

$$\lim_{n\to\infty} \langle -\partial_x^2 u_n + u_n - \gamma\delta_0 u_n - f(u_n), \varphi(\cdot + x_n)\rangle = 0$$

だが, 十分大きい n で

$$\langle -\partial_x^2 u_n + u_n - \gamma\delta_0 u_n - f(u_n), \varphi(\cdot + x_n)\rangle = \langle -\partial_x^2 v_n + v_n - f(v_n), \varphi\rangle$$

が成立するのでこれと $v_n \rightharpoonup u$ から

$$-\partial_x^2 u + u - f(u) = 0$$

が言える. この解はある $z \in \mathbb{R}$ を用いて $\pm Q(\cdot - z)$ と表せるが, このとき $x_n \to x_n - z$ と取り直すと $u_n(\cdot - x_n) \rightharpoonup \pm Q$ となる. ここで $u_n(\cdot - x_n) \rightharpoonup Q$ となるとき,$w_n = u_n - Q(\cdot + x_n)$ とおくと先と同様の議論から Brezis-Lieb の補題から

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} = \frac{2(p+1)}{p-1}\kappa - \|Q\|_{L^{p+1}}^{p+1}$$

で, 任意の $\varphi \in H^1(\mathbb{R})$ に対して

$$\begin{aligned}\langle -\partial_x^2 w_n + w_n - \gamma\delta_0 w_n - f(w_n), \varphi\rangle &= \langle -\partial_x^2 u_n + u_n - \gamma\delta_0 u_n - f(u_n), \varphi\rangle \\ &- \langle -\partial_x^2 Q + Q - f(Q), \varphi(\cdot - x_n)\rangle + \gamma Q(x_n)\varphi(0) \\ &- \langle f(w_n) - f(u_n) + f(Q(\cdot + x_n)), \varphi\rangle\end{aligned}$$

は一番上の項と真ん中の項は明らかに 0 に収束して, 一番下の項については,
$G_n := f(w_n) - f(u_n) + f(Q(\cdot + x_n))$ としたらテイラー展開からある $C > 0$ が存在して

$$|G_n(x)| \leq C(|Q(x+x_n)||u_n(x)|^{p-1} + |Q(x+x_n)|^{p-1}|u_n(x)|)$$

が成立する. ここで $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界で $H^1 \hookrightarrow L^\infty$ より $L := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{L^\infty} < \infty$ としたら

$$|G_n(x)| \leq C'(1+L^p)(Q(x+x_n) + |Q(x+x_n)|^{p-1})$$

が成立する. これより任意の $R > 0$ に対して,n を十分大きくとると R と L に依存した定数 $C_{R,L} > 0$ が存在して, 任意の $-R \leq x \leq R$ で

$$|G_n(x)| \leq C_{R,L} e^{-x_n}$$

が成立する. これゆえ

$$\langle G_n, \varphi \rangle = \int_{|x|>R} (G_n \varphi) + \int_{-R}^{R} (G_n \varphi)$$

を考えると R を十分大きくとり,n もそれに応じて十分大きくとると $|\langle G_n, \varphi \rangle|$ は十分小さくとれるので 0 に収束する. よって

$$\lim_{n\to\infty} \langle -\partial_x^2 w_n + w_n - \gamma\delta_0 w_n - f(w_n), \varphi \rangle = 0$$

が成立する.$u_n(\cdot - x_n) \rightharpoonup -Q$ のときや $x = -\infty$ のときも w_n をうまくとると同様の操作を考えることができる.

これらの議論より,u_n に対してある $\zeta \in \{\pm Q_\gamma, \pm Q\}$ とある点列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して,

$$w_n = u_n - \zeta(\cdot - x_n)$$

とするとある $c > 0$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} \|w_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} \leq \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^{p+1}}^{p+1} - c$$

が成立して, さらに

$$\lim_{n\to\infty} \langle -\partial_x^2 w_n + w_n - \gamma\delta_0 w_n - f(w_n), \varphi \rangle = 0$$

が成立する. この操作を繰り返し行うと $w_n \to 0$ となるので,u_n はある整数 m と正の整数 K, $\{\sigma_k\}_{1\leqq k\leqq K} \subset \{-1, 1\}^K$, $\{x_{k,n}\}_{1\leqq k\leqq K, n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ が存在して $|x_{k,n}| \to \infty$ が成立し, さらに

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - mQ_\gamma - \sum_{k=1}^{K} \sigma_k Q(\cdot - x_{k,n})\|_{H^1} = 0$$

が成立する. さらに (3) に気を付けると $|m| \leq 1$ かつ $i \neq j$ なら $\lim_{n\to\infty} |x_{i,n} - x_{j,n}| = \infty$ が成立する. よって最後に $\{x_{k,n}\}_{1\leqq k\leqq K, n\in\mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ を $1 \leq k \leq K-1$ で

$$\lim_{n\to\infty} (x_{k+1,n} - x_{k,n}) = \infty$$

が成立するように並び替えることで題意は示された. □

5 主定理の証明

これを用いて定理 1.1 を示す. そのためまず最初に以下の命題を示す.

命題 5.1. $\vec{u}$ が (1) の大域解となるとする. このとき $\sigma \in \{-1,0,1\}$ とある非負整数 K, $\{\sigma_k\}_{1\leqq k\leqq K} \subset \{-1,1\}^K$, $\{x_{k,n}\}_{1\leqq k\leqq K, n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$, そして $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して以下が成立する.

- $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$
- $\lim_{n\to\infty} \|u(t_n) - \sigma Q_\gamma - \sum_{k=1}^{K} \sigma_k Q(\cdot - x_{k,n})\|_{H^1} + \|\partial_t u(t_n)\|_{L^2} = 0$
- $1 \leqq k \leqq K$ で $\lim_{n\to\infty} |x_{k,n}| = \infty$ が成立. さらに $i \neq j$ なら $\lim_{n\to\infty} |x_{i,n} - x_{j,n}| = \infty$ が成立する.

このような「点列でのソリトン分解予想」は古くから研究されている. 実際,$\gamma = 0$ の場合でのソリトン分解予想はよく知られている. 今回は $\gamma \neq 0$ の場合も考えているが, このときはデルタポテンシャルの遠方のソリトンへの影響力の弱さから, 定常解以外にも無限遠方に逃げる Q が複数個ある可能性が示唆されている.

証明. $\vec{u}$ が (1) の解とするとき, 命題 4.2 より $\mathcal{H}$ で一様に有界になる. また,(1) の線形解は時間が経つと指数減衰するので,Duhamel 形式を考えることで

$$\lim_{t\to\infty} \{\|\partial_t u(t)\|_{L^2} + \|\partial_t^2 u(t)\|_{H^{-1}}\} = 0$$

が成立するので

$$\lim_{t\to\infty} \| - \partial_x^2 u(t) + u(t) - \gamma\delta_0 u(t) - f(u(t))\|_{H^{-1}} = 0$$

が成立する. これより $t_n = n$ として,$u_n = u(t_n)$ とおくと, 命題 4.3 から $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ をうまく取り替えるとそのような点列の存在がわかる.

□

これをふまえて定理 1.1 を示す. まず用語として $K \in \mathbb{N}$, $R > 0$ に対して

$$E_R = \{z \in \mathbb{R}^K : 1 \leq k \leq K \text{ で}, |z_k| > R, \quad 1 \leq k \leq K-1 \text{ で } z_{k+1} - z_k > R\}$$

と定義し, $* \in \{-1,0,1\}$, $\sigma \in \{-1,1\}^K$, $R > 0$, $\epsilon > 0$ に対して

$$A_{K,*,\sigma,R,\epsilon} = \{u \in H^1(\mathbb{R}) : \inf_{z\in E_R} \|u - *Q_\gamma - \sum_{k=1}^{K} \sigma_k Q(\cdot - z_k)\|_{H^1} < \epsilon\}$$

と定義する. さらに $u \in H^1(\mathbb{R})$ に対して

$$d_{u,K,*,\sigma,R} = \inf_{z\in E_R} \|u - *Q_\gamma - \sum_{k=1}^{K} \sigma_k Q(\cdot - z_k)\|_{H^1}$$

と定義する.

主定理の証明

まず大域解 $\vec{u}$ に対して命題 5.1 より $\tilde{*} \in \{-1,0,1\}$ とある非負整数 K, $\tilde{\sigma} = \{\tilde{\sigma}_k\}_{1\leqq k\leqq K} \subset \{-1,1\}^K$, $\{x_{k,n}\}_{1\leqq k\leqq K, n\in\mathbb{N}} \subset (0,\infty)$, そして $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在し

$$\lim_{n\to\infty} \|u(t_n) - \tilde{*}Q_\gamma - \sum_{k=1}^{K} \tilde{\sigma}_k Q(\cdot - x_{k,n})\|_{H^1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} |x_{k,n}| = \infty \ , \ \lim_{n\to\infty} (x_{k+1,n} - x_{k,n}) = \infty$$

が成立する. ここでまず $K \in \mathbb{N}$ の場合を考える. このときエネルギー減衰 (2) と上の点列での収束に気を付けると

$$\lim_{t\to\infty} E_\gamma(t) = |\tilde{*}| + Kd \tag{4}$$

が成立する. また, 十分大きい n において $u(t_n) \in A_{\tilde{*},\tilde{\sigma},R,\epsilon}$ である. ここで $R > 0$ が十分大きいときに

$$\limsup_{t\to\infty} d_{u(t),K,\tilde{*},\tilde{\sigma},R} > 0$$

と仮定する. このときある $\delta > 0$ とある点列 $\{t'_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して任意の正の整数 n で

$$d_{u(t'_n),K,\tilde{*},\tilde{\sigma},R} > \delta$$

が成立する. ここで $\epsilon > 0$ を δ より十分小さい正の数としたとき, 命題 5.1 の手法を用いると,(4) からある $\{\hat{t}_n\}_{n=1}^{\infty}$ と $\hat{*} \in \{-1,0,1\}$ とある $\hat{\sigma} \in \{-1,1\}^K$ と $\{y_{k,n}\}_{1\leq k\leq K, n\in\mathbb{N}}$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} \|u(\hat{t}_n) - \hat{*}Q_\gamma - \sum_{k=1}^{K} \hat{\sigma}_k Q(\cdot - y_{k,n})\|_{H^1} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} |y_{k,n}| = \infty \ , \ \lim_{n\to\infty} (y_{k+1,n} - y_{k,n}) = \infty$$

が成立する. ここで $R > 0$ が十分大きく $\epsilon > 0$ が十分小さいとき,

$$(*^\circ, \sigma^\circ) \neq (*^\bullet, \sigma^\bullet) \text{ ならば } \ A_{*^\circ,\sigma^\circ,R,\epsilon} \cap A_{*^\bullet,\sigma^\bullet,R,\epsilon} = \varnothing \tag{5}$$

が成立するので,$(\hat{*},\hat{\sigma}) \neq (\tilde{*},\tilde{\sigma})$ が成立する. ここで

$$A_{R,\epsilon} = \cup_{*\in\{-1,0,1\},\sigma\in\{-1,1\}^K} A_{*,\sigma,R,\epsilon}$$

と定義すると,(5) と $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{\hat{t}_n\}_{n=1}^{\infty}$ の取り方からある点列 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在して任意の正の整数 n に対して $u(s_n) \notin A_{R,\epsilon}$. 一方,$\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して命題 5.1 の考え方からある整数 N で $u(r_N) \in A_{R,\epsilon}$ となり矛盾. よって

$$\lim_{t\to\infty} d_{u(t),K,\tilde{*},\tilde{\sigma},R} = 0$$

となる. よって各 t に対して $z(t) \in \mathbb{R}^K$ をうまくとると

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - \sigma Q_\gamma - \sum_{k=1}^{K} \sigma_k Q(\cdot - z_k(t))\|_{H^1} = 0$$

が成立する. また, $\lim_{t\to\infty} \|\partial_t u(t)\|_{L^2} = 0$ なのでこれらから

$$\lim_{t\to\infty} \|u(t) - \sigma Q_\gamma - \sum_{k=1}^{K} \sigma_k Q(\cdot - z_k(t))\|_{H^1} + \|\partial_t u(t)\|_{L^2} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} |z_k(t)| = \infty \ , \ \lim_{t\to\infty} \{z_{k+1}(t) - z_k(t)\} = \infty$$

がわかる.$K = 0$ も同様の議論で容易にわかる.$1 \leq k \leq K$ での $z_k(t)$ の連続性に関しては $u \in C([0,\infty), H^1)$ から従うので題意は示された.

参考文献

[1] E. Csobo, F. Genoud, M. Ohta, and J. Royer, *Stability of standing waves for a nonlinear Klein-Gordon equation with delta potentials.* J.Differential Equations. **268** (2019) no. 1, 358–388.

[2] R. Côte, Y. Martel, and X. Yuan, *Long-time asymptotics of the one-dimensional damped nonlinear Klein-Gordon equation.* Arch. Ration. Mech. Anal. **239** (2021), no. 3, 1837–1874.

[3] R. Fukuizumi, and L. Jeanjean, *Stability of of standing waves for a nonlinear Schrödinger equation with a repulsive Dirac delta potential.* Discrete Contin . Dyn. Syst. **21** (2008), no. 1, 121-136

[4] J. Krieger, K. Nakanishi, and W. Schlag, *Global dynamics above the ground state energy for the one-dimensional NLKG equation.* Math Z. **272** (2012), no. 1-2, 297-316

Continuous differentiability of weak solutions to certain very singular elliptic equations or systems involving one-Laplacian

東京大学大学院 数理科学研究科 数理科学専攻
坪内 俊太郎 (Shuntaro TSUBOUCHI)*

概要

本講演では，1-ラプラス作用素と p-ラプラス作用素（ただし，$p \in (1, \infty)$ とする）の両方を含む特異楕円型方程式（および系）の弱解の連続微分可能性に関する結果を報告する．1-ラプラス作用素には，退化的・特異的な楕円性を同時に有するような異方拡散性があるため，この方程式（系）は解の平らな面において非一様楕円型となるのが問題である．これを解決するために，平らな面の外側での微分の連続度評価を与える手法を紹介する．

1 導入と主結果

本稿では，次の特異楕円型問題の解 u を考える．

$$L_{b,\,p}u := -b\Delta_1 u - \Delta_p u = f \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

ここで，$b \in (0, \infty)$, $p \in (1, \infty)$ は定数である．空間次元は $n \geq 2$ とし，Ω は有界 Lipschitz 領域とする．未知函数 u は Ω 上で $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ に値をとるものとして，f は Ω 上の既知函数であり $f \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^N)$ かつ $q \in (n, \infty]$ をみたすものとする．指数 $s \in [1, \infty)$ に対して発散形式の拡散作用素 Δ_s を $\Delta_s u := \operatorname{div}\left(|Du|^{s-2}Du\right)$ で定義し，これは s-Laplace 作用素と呼ばれる．ここで，Du は u の微分（Jacobi 行列）を表す．なお， u がスカラー値の時には微分を ∇u と書くことにする．2 階微分についても同様である．

本講演での主題は，問題 (1) の解の微分 Du の連続性である．係数が $b = 0$ の時（つまり，1-Laplace 作用素を含まない場合）には，問題 (1) とは p-Poisson 問題であり，弱解の微分が Hölder 連続であることはよく知られている（[3]，他にも多数の研究あり）．この意味で，p-Laplace 作用素は微分の連続性を保つ「盾」のようなものであると言える．しかし，こうした解の微分の連続性は，$p = 1$ では破綻する．実際，1 次元開区間上でスカラー値問題 $-\Delta_1 u = 0$ を考えると，絶対連続かつ単調非減少な函数 u が常に解となってしまう．この意味で，1-Laplace 作用素は微分の連続性を壊す「矛」のようなものであると言える．それでは，「矛」と「盾」の両作用素を含む問題 (1) において微分 Du の連続性はどうなるのか？この問は肯定的に解決できるということを本稿で概説する．

* *Email*: tsubos@ms.u-tokyo.ac.jp

1.1 弱解の正則性について

本稿の主結果や手法を理解するために最低限必要であろう数学解析の知識を大まかにまとめる．

まず「弱解」という用語は，滑らかさ（正則性）を欠いた函数に対して，微分を弱い枠組みで解釈して定義される解のことを意味する．弱解の枠組みとしては，部分積分に基づいた超関数の意味での弱解と，最大値原理に基づいた粘性解の意味での弱解の 2 つがよく知られている．本稿で触れるのは超関数の意味での弱解であり，これはエネルギー構造を持つ発散形式の問題に対してしばしば有効である．方程式系 (1) の左辺を素朴に計算すると 2 階微分が現れる（例えば，$\Delta_2 u = \Delta u = \partial_{x_1x_1}u + \cdots + \partial_{x_nx_n}u$ である）ため，これは 2 階問題である．しかし，こういった高階の微分を（各点で函数として意味をなす）古典的な意味で解釈せずに，むしろさらにもっと弱い正則性の下で方程式系 (1) の解 u を解釈する．今回の場合は，u は 1 階の Sobolev 空間 $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に属するものとして考える．特に，1 階微分 $Du = (\partial_{x_j}u^k)_{1\le j\le n,\,1\le k\le N}$ は超関数の性質

$$\int_\Omega \partial_{x_j}u^k\phi\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega u^k\partial_{x_j}\phi\,\mathrm{d}x \quad \text{for all } \phi\in C_c^\infty(\Omega)$$

および p-乗 Lebesgue 可積分性 $Du\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^n)$ をみたすものとする．方程式系 (1) の解を 1 階の Sobolev 空間という弱い枠組みで解釈することは，解をつかまえる際に有効である．実際，本問題は

$$\mathcal{E}(u) := \int_\Omega [E(Du) - f\cdot u]\,\mathrm{d}x \quad \text{with} \quad E(\zeta) := b|\zeta| + \frac{|\zeta|^p}{p}\,(\zeta\in\mathbb{R}^{Nn}) \tag{2}$$

というエネルギー汎函数の最小化問題と密接に関わりがあり，方程式系 (1) は凸汎函数 $\mathcal{E}$ の停留点がみたすべき Euler–Lagrange 方程式として導出される．この $\mathcal{E}$ を函数空間 $C^1(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ を定義域として解釈すること自体は可能であるが，$\mathcal{E}$ の最小値を達成するような函数 u を実際に見つける際には，この函数空間は狭すぎるため現実的ではない．そこで数学解析的により扱いやすい，より拡張された空間（p-乗積分が定めるノルムに関して完備化された空間）を考えると，Sobolev 空間 $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ が自然と現れるのである．このようにして十分に広げられた函数空間（定義域）であれば，変分解析の直接法 [5] により，エネルギー汎函数 $\mathcal{E}$ の最小値を達成する函数を見つけ出すことができるのである．

このように函数空間を広げることで，(1) のような発散形式の楕円 2 階方程式系の弱解を超関数の意味で捉えた際に問題となるのは，弱解の滑らかさをどこまで復元できるかということである．特に今回は，函数空間を完備化するという必要に迫られて，微分 Du を古典的な意味での微分ではなく Lebesgue 空間 $L^p(\Omega;\mathbb{R}^{Nn})$ に属する超函数の意味での微分として捉えている．こうした弱い意味での微分を，各点で意味をなす連続函数にまで正則性を復元できるかは数学的に興味深い問題となる．楕円型問題の弱解の正則性理論を簡単に概説するため，スカラー値問題（$N=1$）の楕円型方程式

$$-\operatorname{div}(A\nabla v) = f\in L^q(\Omega) \quad \text{in } \Omega$$

の弱解 $v\in W^{1,2}(\Omega)$ を考える．ここで $A = A(x,v,\nabla v)$ は n 次実対称行列であり，次の（古典的な意味での）一様楕円性を常にみたすものとする：

$$\lambda|z|^2 \le Az\cdot z \le \Lambda|z|^2 \quad \text{for all } z\in\mathbb{R}^n. \tag{3}$$

ここで，$0 < \lambda < \Lambda < \infty$ は定数とする．条件 (3) は固有値の範囲が閉区間 $[\lambda, \Lambda]$ に包含されることと同値である．ここでの一様有界性とは，A の固有値同士の比の上界 Λ/λ がいたる所で有界であることを意味しており，この値は弱解の正則性を持ち上げる際に重要な役割を果たす．今回は特に，弱解 v あるいはその勾配 ∇v の Hölder 連続性について大まかに触れる．正則性理論に関する教科書は数多くあるが，ここではモノグラフ [5, 8] を挙げておく．

まずは係数行列 A が定数の場合であるが，この場合は適当な回転と定数倍のスケール変換を行うことで，A は単位行列であるとしてよい．特に v は Poisson 方程式 $-\Delta v = f$ の弱解であり，$f \in L^q(\Omega)$ という条件の下で期待できる最適な正則性は勾配 ∇v の β-Hölder 連続性である．ここで現れる指数 $\beta \in (0, 1)$ とは $\beta = 1 - n/q$（$n < q < \infty$ のとき）であり，$q = \infty$ の時は任意の $\beta \in (0, 1)$ である．係数行列 $A = A(x, v, \nabla v)$ が各変数に関して適当な連続性が課されている場合にも，同様の正則性が得られる．よく知られた証明は，弱解 v を Laplace 方程式 $-\Delta w = 0$ をみたす調和函数 w と局所的に比較する方法である．この手法は，定数係数行列の場合との比較に基づいた手法であるため，しばしば係数凍結法と呼ばれる．しかしながら，係数行列 A の連続性が仮定されていない場合であっても，弱解 v の α-Hölder 連続性を得ることができる．ここで得られる指数 $\alpha \in (0, 1)$ は定数比 $\Lambda/\lambda \in (0, 1)$ に依存して決まる値である．係数行列に関する連続性を一切用いずに (3) の仮定のみで弱解の正則性を示す理論は，De Giorgi–Nash–Moser 理論（この問題解決に多大な貢献を果たした E. De Giorgi, J. Nash, J. Moser の 3 人の名前を冠している）として，今なお正則性理論において重要な役割を果たしている．ここで改めて強調すべきことは，係数行列 A の固有値の比に関する一様有界性こそが，弱解の正則性を復元できるかどうかの判断材料となっている点である．特に，条件 (3) とは違う設定であっても，De Giorgi–Nash–Moser 理論の手法が機能することはしばしばある．

1.2 背景・先行研究

方程式系 (1) は，粘性と可塑性の両方の性質を兼ね備えるような物質の挙動を記述する際にしばしば現れる．ここでは拡散作用素 p-Laplace 作用素・1-Laplace 作用素はそれぞれ物質の粘性・可塑性を反映している．流体力学の分野で現れる代表例はビンガム流体であり，[4] では $p = 2$ とした際の 2 階問題がスカラー値・ベクトル値の双方で紹介されている．もう一つの例として，結晶表面成長を記述する数理モデルとして高階（4 階）のスカラー値問題がある [7]．そこでは結晶表面エネルギーを記述する密度函数として，式 (2) において $p = 3$ とした時のエネルギー密度函数 E が現れる．これらの数理モデルに関して，解の微分の連続性を数学的に正当化する研究はこれまであまり行われていなかった．

2 階楕円型問題 (1) の解の微分の連続性は，解がスカラー値かつ凸の場合では既に証明されている（東京大学の儀我美一特任教授との共同研究 [6]）．そこでは凸解析と強最大値原理に基づく初等的な証明が与えられているが，解の凸性に大きく依存した議論であった．一方で，エネルギー密度函数 E の双対函数が現れる退化楕円型方程式系

$$-\operatorname{div}\left((|Dv| - b)^{p'-1}\frac{Dv}{|Dv|}\right) = f \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad \text{where} \quad p' := \frac{p}{p-1} \in (1, \infty), \tag{4}$$

の弱解の正則性についても近年研究されている．この方程式系 (4) は交通渋滞を考慮した最適交通流

の数理モデルとして現れるもので，ベクトル場

$$\sigma = (|Dv| - b)^{p'-1} \frac{Dv}{|Dv|} \tag{5}$$

が最適交通流にあたる．この写像 σ の連続性に関しては，2010 年代から研究されてきた [1, 2, 10]．これらの研究の内，[1] で用いられている手法を駆使することにより，スカラー値・ベクトル値の両方で，問題 (1) の解の連続微分可能性の数学的正当化に成功した [11, 12]．以下，プレプリント [11, 12] の内容に即して，近年の研究結果について報告する．

1.3 証明の方針と弱解の定義

解の微分の連続性を示す際に困難な点は，平らな面の周りで方程式系の一様楕円性が壊れることにある．これを説明するための準備として，各 $s \in [1, \infty)$ に対して， $\mathbb{R}^n$ 上の凸函数 $E_s(z) = |z|^s/s$ を導入する．また，簡単のため，しばらくはスカラー値問題（$N = 1$）を考える．ヘッセ行列 $\nabla^2 E_s(z_0)\,(z_0 \neq 0)$ の固有値を計算すると $(s-1)|z_0|^{s-2}$, $|z_0|^{s-2}$ となり，固有空間はそれぞれ $\mathbb{R}z_0$ とその直交補空間 $(\mathbb{R}z_0)^\perp$ となることがわかる．ここで注意すべきは $s = 1$ の場合には $\nabla^2 E_s$ の固有値の 1 つが常に 0 となることであり，これはちょうど $\Delta_1 u$ が Du の方向で退化楕円型になることと対応している．さらに，もう一方の固有値については $z_0 \to 0$ とすると無限大に発散する．これは平らな面 $\{\nabla u = 0\}$ （しばしばファセットと呼ばれる）において，拡散作用素 $\Delta_1 u$ が Du 以外の方向では特異的になっていることを表している．

勾配 $\nabla u = (\partial_{x_j} u)_{1 \le j \le n}$ の正則性を見るため，方程式 (1) を変数 x_j に関して微分すると

$$-\operatorname{div}\left(\nabla^2 E(\nabla u) \nabla \partial_{x_j} u\right) = \partial_{x_j} f \tag{6}$$

が形式的に得られる．ここで，$E = bE_1 + E_p$ は密度函数である．ヘッセ行列 $\nabla^2 E$ の一様楕円性を測る指標として (最大の固有値)/(最小の固有値) という比を計算する．これはしばしば ellipticity ratio (ER) と呼ばれる値であるが，今回の問題では，

$$(\text{ER of } \nabla^2 E(z_0)) = \frac{b|z|^{-1} + |z|^{p-2}}{(p-1)|z|^{p-2}} \simeq 1 + b|z|^{1-p}, \quad \text{when} \quad 0 < |z| \ll 1 \tag{7}$$

となる．指数 $1-p$ が負であることに留意すると，上の比は z_0 が原点に近づくにつれて無限大に発散するが，この意味で方程式 (1) はファセットの周りで非一様楕円型であると言える．このようなことが起きるのは，1-Laplace 作用素の楕円性が退化性と特異性の両方を有することによる．特に方程式 (6) において係数行列 $\nabla^2 E$ の一様楕円性がファセットの近くで崩れるため，De Giorgi–Nash–Moser 理論に見られる一般的な手法では，微分 $\partial_{x_j} u$ の Hölder 連続性は証明することが困難になる．このことが，微分の連続性を示す上で一番の障壁となる．なお，非一様楕円的な問題として non-standard growth problems や (p, q)-growth problems については解の正則性を含めて長らく盛んに研究がなされている [9] が，問題 (1) とは状況が根本的に異なる．実際，非一様楕円性が現れる（ER が無限大に発散する）ような場面は，前者は微分が発散する時であり，対して後者は微分が退化する時である．

微分の連続性を直接示そうとすると，拡散作用素 $L_{b,p}$ のファセットでの非一様楕円性が問題になることがわかった．その一方でファセットの外側については，拡散作用素 $L_{b,p}$ にはある程度良い構

造も持っている．実際，先の ER の計算結果を改めて見直すと，各 $\delta \in (0,\,1)$ に対して

$$(\text{ER of } \nabla^2 E(z_0)) \le C(p)\left(1 + b\delta^{1-p}\right) \quad \text{for all} \quad z_0 \in \{z \in \mathbb{R}^n \mid |z| > \delta\}$$

という評価が成立していることがわかる．これは，ファセットから離れている限りは方程式 (6) が局所的に一様楕円型になることを意味している．特に，微分が退化していないような領域（ファセットの外側）では微分の連続性を正当化する余地があるように思われる．

改めて $N \ge 1$ で (1) を考える．上の観察を踏まえ，切り捨てパラメータ $\delta \in (0,\,1)$ と合成函数

$$\mathcal{G}_\delta(\zeta) = (|\zeta| - \delta)_+ \frac{\zeta}{|\zeta|} \quad (\zeta \in \mathbb{R}^{Nn})$$

を導入して，微分 Du の代わりに合成写像 $\mathcal{G}_\delta(Du)$ の連続性を考えることにする．この $\mathcal{G}_\delta(Du)$ は集合 $\{|Du| \le \delta\}$ においてゼロとなるように上手く切り捨てられており，拡散作用素 $L_{b,\,p}$ の（平らな面における）非一様楕円構造の影響を受けていない．特に，微分 Du そのものの連続性を直接示すことは困難である一方で，「切り捨てられた微分」 $\mathcal{G}_\delta(Du)$ に対しては良い連続度評価を与えられると期待できる．また，切り捨ての仕方から，$\delta \to 0$ とすると， $\mathcal{G}_\delta(Du)$ が Du に一様収束することがわかる．特に，各 $\mathcal{G}_\delta(Du)$ の連続性から Du の連続性も従うのである．この方針により，以下の主定理が示される．

定理 1 （弱解の連続微分可能性）函数 $u \in W^{1,\,p}(\Omega;\,\mathbb{R}^N)$ が方程式系 (1) の弱解であるとする．点 $x_* \in \Omega$ と切り捨てパラメータ $\delta \in (0,\,1)$ を固定する．この時，高々 $\delta,\,b,\,n,\,N,\,p,\,q,\,\|f\|_{L^q(\Omega)}$, $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$, $d_* = \mathrm{dist}(x_*,\,\partial\Omega)$ のみに依存する指数 $\alpha \in (0,\,\beta)$，定数 $M,\,C \in (0,\,\infty)$ および半径 $\rho_0 \in (0,\,d_*)$ が存在して，局所 Hölder 評価

$$|\mathcal{G}_\delta(Du(x_1))| \le M \text{ and } |\mathcal{G}_\delta(Du(x_1)) - \mathcal{G}_\delta(Du(x_2))| \le C|x_1 - x_2|^\alpha \tag{8}$$

が任意の $x_1,\,x_2 \in B_{\rho_0}(x_*)$ において成立する．特に，$Du \in C^0(\Omega;\,\mathbb{R}^{Nn})$ である．

この類の正則性評価は退化楕円型問題 (4) に対しては既に示されている．先と同様に ER を計算してみると，方程式系 (4) もまた，$\{|Dv| > b\}$ では局所一様楕円型であるため，$\mathcal{G}_b(Dv)$ の連続性が示せる．式 (5) で与えられる最適交通流 σ は $\sigma = |\mathcal{G}_b(Dv)|^{p'-2}\mathcal{G}_b(Dv)$ と書けるため， σ の連続性も従うのである．今回の主結果（定理 1）はこれらの結果の特異楕円型版であると言えるが，[1] と比べると近似の方法に関して特に大きな違いがある．これについては，次節で触れることにする．

最後に，方程式系 (1) の弱解の定義を与えて，本節を終わりとする．

定義 1 函数 $u \in W^{1,\,p}(\Omega;\,\mathbb{R}^N)$ が (1) の弱解であるとは，ベクトル場 $Z \in L^\infty(\Omega;\,\mathbb{R}^{Nn})$ が存在して，等式

$$\int_\Omega Z \cdot D\phi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |Du|^{p-2} Du \cdot D\phi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \cdot \phi \,\mathrm{d}x$$

が任意の試験函数 $\phi \in W_0^{1,\,p}(\Omega;\,\mathbb{R}^N)$ に対して成立し，さらに

$$Z(x) \in \partial|\cdot|(Du(x))$$

がほとんどいたるところの $x \in \Omega$ で成り立つ．ここで，$\partial|\cdot|$ は絶対値函数 $|\cdot|\colon \mathbb{R}^{Nn} \to (0, \infty]$ の劣微分作用素を表し，各 $\zeta \in \mathbb{R}^{Nn}$ に対して

$$\mathbb{R}^{Nn} \supset \partial|\cdot|(\zeta) = \begin{cases} \{|\zeta|^{-1}\zeta\} & (\zeta \neq 0), \\ \{z \in \mathbb{R}^{Nn} \mid |z| \leq 1\} & (\zeta = 0), \end{cases}$$

と与えられる集合値函数である．

注意すべき点は，拡散作用素 $\Delta_1 u$ の取り扱い方であり，特に $|Du|^{-1}Du$ を $\{Du = 0\}$ においては多価函数と見なしている．これは絶対値函数 $|\cdot|$ が原点において微分不可能であるため，凸函数の劣微分のような緩い枠組みで微分を解釈する必要があるからである．

2　証明の概略

主定理の証明は，方程式系の近似と，近似解のア・プリオリ評価の 2 つに大きく分けられる．

2.1　近似問題

まず，方程式系 (1) の近似問題として

$$L^{\varepsilon}_{b,\,p} u_\varepsilon := -\mathrm{div}\left(\frac{bDu_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + |Du_\varepsilon|^2}} + \left(\varepsilon^2 + |Du_\varepsilon|^2\right)^{p/2-1} Du_\varepsilon\right) = f_\varepsilon \quad \text{in } \Omega \tag{9}$$

を考える．左辺にある拡散作用素 $L^{\varepsilon}_{b,\,p}$ は，エネルギー密度関数 $E(\zeta) = b|\zeta| + |\zeta|^p/p$ を

$$E_\varepsilon(\zeta) := b\sqrt{\varepsilon^2 + |\zeta|^2} + \frac{1}{p}\left(\varepsilon^2 + |\zeta|^2\right)^{p/2} \quad \text{for } \zeta \in \mathbb{R}^{Nn},\ \varepsilon \in (0,\, 1)$$

で近似すると自然と現れる．特に，1-Laplace 作用素は極少局面作用素で近似される．外力項 $f_\varepsilon \in L^q(\Omega;\, \mathbb{R}^N)$ については，弱収束

$$f_\varepsilon \rightharpoonup f \quad \text{in } \sigma\left(L^q(\Omega;\, \mathbb{R}^N),\, L^{q'}(\Omega;\, \mathbb{R}^N)\right) \tag{10}$$

を満たしていれば良いものとする．言い換えると，

$$\int_\Omega f_\varepsilon \cdot \phi \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega f \cdot \phi \,\mathrm{d}x$$

が任意の $\phi \in L^{q'}(\Omega;\, \mathbb{R}^N)$ に対して成立するものとする．特に，$f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega;\, \mathbb{R}^N)$ として差し支えない．このような設定の下で，以下の結果が得られる．

命題 1.1　函数 $u \in W^{1,\,p}(\Omega;\, \mathbb{R}^N)$ が方程式系 (1) の弱解であるとする．各 $\varepsilon \in (0,\, 1)$ に対して弱形式

$$\int_\Omega \left[\frac{bDu_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + |Du_\varepsilon|^2}} + \left(\varepsilon^2 + |Du_\varepsilon|^2\right)^{p/2-1} Du_\varepsilon\right] \cdot D\phi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f_\varepsilon \cdot \phi \,\mathrm{d}x \quad \text{for all } \phi \in W^{1,\,p}_0(\Omega;\, \mathbb{R}^N)$$

をみたす函数 $u_\varepsilon \in u + W^{1,\,p}_0(\Omega;\, \mathbb{R}^N)$ を考える．この時，0 に収束する減少列 $\{\varepsilon_j\}_j \subset (0,\, 1)$ が存在して，$W^{1,\,p}(\Omega;\, \mathbb{R}^N)$ の意味での強収束 $u_{\varepsilon_j} \to u$ および Ω 上での概収束（ほとんどいたるところでの各点収束） $Du_{\varepsilon_j} \to Du$ が成立する．

上の結果は，方程式系 (1) の弱解 $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ は Dirichlet 境界条件下の近似問題

$$\begin{cases} L^{\varepsilon}_{b,p}u_\varepsilon &= f_\varepsilon \quad \text{in} \quad \Omega, \\ u_\varepsilon &= u \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

の弱解 $u_\varepsilon \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ で上手く近似できるということを意味する．この近似解 u_ε の存在についても，変分解析の直接法から確認できる．命題 1.1 では，特に微分の L^p-強収束を示すのが一番の問題となるが，これは p-Laplace 作用素が持っている楕円性により解決できる．一方で 1-Laplace 作用素単体の楕円性は，勾配の方向で退化しているせいであまり良いものであるとは言えない．そのため，弱解の収束の正当化には p-Laplace 作用素の性質に頼る必要がある．

近似問題 (9) を導入した理由は，方程式系 (1) ではファセットの周りで一様楕円性が崩れるからである．方程式 (1) に対して，変数 x_j に関して形式的に微分を行って (6) を導出したが，この等式を（$W^{1,2}_0$ を試験関数とした）超関数 $W^{-1,2}$ の意味で数学的に正当化する必要がある．その際には 2 階微分 D^2u の L^2-可積分性と微分 Du の有界性を確認する必要があり，特に前者を確認する手法として標準的なものは差分商の方法がある．しかし，この差分商の方法では拡散作用素の一様楕円性に基づいた計算を行っていることが多いが，方程式 (6) には一様楕円的な構造がファセットの辺りで崩壊している．そのため，Hesse 行列を含むような方程式を弱形式として正当化する際に要する 2 階の Sobolev 正則性を得ることが容易ではないのである．このような問題は，拡散作用素 $L_{b,p}$ の非一様楕円型によるところが大きいため，これを非退化楕円型かつ一様楕円型な作用素 $L^{\varepsilon}_{b,p}$ で近似する必要があるのである．こうして導入された近似問題 (9) においては，左辺の作用素に一様楕円的な構造がある．実際，前節と全く同様に（簡単のため再び $N=1$ とするが）点 $z_0 \in \mathbb{R}^n$ での Hesse 行列 $\nabla^2 E_\varepsilon(z_0)$ の ER を計算してみると，点 $z_0 \in \mathbb{R}^n$ に関して一様有界である．実際，近似パラメーター $\varepsilon \in (0,1)$ を固定するごとに

$$(\text{ER of } \nabla^2 E_\varepsilon(z_0)) \le C(p)\left(1 + b\left(\varepsilon^2 + |z|^2\right)^{(1-p)/2}\right) \le C(p)\left(1 + b\varepsilon^{1-p}\right) < \infty \tag{11}$$

が成立する．この意味で，$L^{\varepsilon}_{b,p}$ は一様楕円型であると言えるため，差分商の方法などの標準的な議論により Sobolev 内部正則性を持ち上げることが可能となる．特に近似解 u_ε は局所的に $W^{2,2} \cap W^{1,\infty}$-正則性があるため，例えばスカラー値の場合であれば方程式 (6) の近似版に相当する

$$-\operatorname{div}\left(\nabla^2 E_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon)\nabla\partial_{x_j} u_\varepsilon\right) = \partial_{x_j} f_\varepsilon$$

は $W^{-1,2}$ の意味で局所的に意味をなす．ベクトル値問題においても同様である．さらに言えば，外力項 f_ε が十分滑らかな場合には，近似されたエネルギー密度函数 E_ε のなめらかさに着目することで，弱解 u_ε は何回でも連続微分可能な函数であることがわかる [8, Chapters IV–V]．特に，近似解 u_ε は (9) を古典的な意味で満たしているものとしても差し支えない．

ただし，ER の評価が (7) と (11) では微妙に異なっていることに注意すると，微分の切り捨て方についても微修正を行う必要がある．つまり，近似解 u_ε に対しては，微分を切り捨てる合成函数としては $\mathcal{G}_\delta$ ではなく

$$\mathcal{G}_{\delta,\varepsilon}(\zeta) := \left(\sqrt{\varepsilon^2 + |\zeta|^2} - \delta\right)_+ \frac{\zeta}{|\zeta|} \quad \text{for } \zeta \in \mathbb{R}^{Nn} \quad \text{with } 0 < \varepsilon < \delta$$

を考えることにする．これは，近似作用素 $L^{\varepsilon}_{b,p}$ においては，局所的な一様楕円性を計る「ものさし」としては $|Du_\varepsilon|$ よりもむしろ $V_\varepsilon := \sqrt{\varepsilon^2 + |Du_\varepsilon|^2}$ を採用した方が自然だからである．

退化楕円型問題の研究 [1] では，微分の切り捨て方に関する修正をしていない点が大きな違いである．これは，近似スキームの与え方が根本的に異なることによる．実際，方程式 (1) を近似する際には特異拡散作用素 $L_{b,\,p}$ そのものを近似したが，[1] で与えられている近似方程式系は

$$-\Delta v_\varepsilon - \operatorname{div}\left((|Dv_\varepsilon| - b)^{p'-1}\frac{Dv_\varepsilon}{|Dv_\varepsilon|}\right) = f \quad \text{in} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

で与えられている．この近似は粘性拡散項 $-\varepsilon\Delta$ を摂動として加えて近似するという粘性消滅法のアナロジーである．特に主要項の近似は一切行われていないことに注意すると，このような近似問題の解 v_ε に対しては微分の切り捨ての仕方を修正する必要がないのである．

2.2 近似解のア・プリオリ評価と証明の概略

設定 (10) と命題 1.1 より，近似パラメータ ε に依らない定数 $U \geq \|Du\|_{L^p(\Omega)}$, $F \geq \|f\|_{L^q(\Omega)}$ で

$$\|Du_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq U, \quad \|f_\varepsilon\|_{L^q(\Omega)} \leq F$$

をみたすようなものが取れる．命題 1.1 から，主定理の証明は以下のア・プリオリ評価に帰着される．

命題 1.2　切り捨てパラメータ $\delta \in (0,\,1)$ を固定し，近似パラメータ $\varepsilon \in (0,\,\delta/8)$ に対して，方程式系 (9) の弱解 u_ε を考える．この時，δ, b, n, N, p, q, F, L, $d_* = \operatorname{dist}(x_*,\,\partial\Omega)$ のみに依存する指数 $\alpha \in (0,\,\beta)$，定数 M, $C \in (0,\,\infty)$ および半径 $\rho_0 \in (0,\,d_*)$ が存在して，開球 $B_{\rho_0}(x_*) \Subset \Omega$ 上で局所 Hölder 評価

$$|\mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon(x_1))| \leq M \text{ and } |\mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon(x_1)) - \mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon(x_2))| \leq C|x_1 - x_2|^\alpha \tag{12}$$

が任意の x_1, $x_2 \in B_{\rho_0}(x_*)$ に対して成立する．

命題 1.2 から $\mathcal{G}_{2\delta}(Du)$ の α-Hölder 連続性が従う．実際，各点 $x_0 \in \Omega$ に対して，命題 1.2 にある開球 $B_{\rho_0}(x_*) \Subset \Omega$ をとると，評価 (12) により Ascoli–Arzelà の定理を使うことができる．特に，$\mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon)$ はとある α-Hölder 連続写像 $v_{2\delta}$ に $B_{\rho_0}(x_*)$ 上一様収束しているとしてよい．一方で，この $\mathcal{G}_{2\delta,\,\varepsilon}(Du_\varepsilon)$ は $\mathcal{G}_{2\delta}(Du)$ に Ω 上概収束しているとしてよい．実際，命題 1.1 により，Ω 上の微分の概収束 $Du_\varepsilon \to Du$ は認めてよいからである．特に，$\mathcal{G}_{2\delta}(Du)$ と α-Hölder 連続写像 $v_{2\delta}$ が $B_\rho(x_*)$ 上ほとんどいたるところで一致するため，$\mathcal{G}_{2\delta}(Du)$ の α-Hölder 連続性が示された．なお，主定理にある不等式評価 (8) についても上記の収束の議論とア・プリオリ評価 (12) から確認できる．

最後に，命題 1.2 の証明の概略を記して本稿を終わりとする．

準備として，証明に際して最低限必要となる記法を固定する．以下，切り捨てパラメータ $\delta \in (0,\,1)$ と近似パラメータ $\varepsilon \in (0,\,\delta/8)$ は固定して，開球 $B := B_{\frac{d_*}{2}}(x_*) \Subset \Omega$ を固定する．これに対して，スカラー値函数 $V_\varepsilon := \sqrt{\varepsilon^2 + |Du_\varepsilon|^2} \in W^{1,\,2}(B) \cap L^\infty(B)$ を定義する．まず注意すべきこととして，V_ε は近似パラメータ ε に依らずに一様有界であるとしてよい．実際，近似問題 (9) では，ファセットから十分離れた場所 $\{V_\varepsilon \geq 1\}$ においては，近似パラメータ $\varepsilon \in (0,\,1)$ に依存しない一様楕円性が担保されている．これは ER に関する評価 (11) から容易に確認できる．特に，台が $\{V_\varepsilon \geq 1\}$ に含まれる（従ってファセットとは決して交わり得ない）ような試験函数を注意深く選ぶことで，V_ε の局所有界性評価を与えることができる．特に，標準的な手法である Moser の逐次法 (Moser's

iteration) や De Giorgi の切り捨て法 (De Giorgi's truncation) を駆使することが可能である．結果として十分大きな定数 $M = M(d_*, b, n, N, p, q, F, U) \in (1, \infty)$ で， B 上で $V_\varepsilon \le M$ をみたすようなものが取れる．次に，より小さな開球 $B_\rho := B_\rho(x_0) \Subset B$ を考える．ここで，「切り捨てられた微分」のノルム $|\mathcal{G}_{\delta,\varepsilon}(Du_\varepsilon)|$ の局所的上界を表すパラメータ $\mu \in (0, M-\delta)$ を導入して，

$$\sup_{B_\rho} |\mathcal{G}_{\delta,\varepsilon}(Du_\varepsilon)| \le \mu \le \mu + \delta \le M, \quad \text{or equivalently} \quad \sup_{B_\rho} V_\varepsilon \le \mu + \delta \le M \tag{13}$$

とする．条件 (13) にある 2 つの不等式が同値であることは，等式 $|\mathcal{G}_{\delta,\varepsilon}(Du_\varepsilon)| \equiv (V_\varepsilon - \delta)_+$ によりわかる．さらに，定数 $\nu \in (0, 1)$ は後で十分小さく取って決めることにして，V_ε の上位集合

$$S_{\rho,\mu,\nu} := \{x \in B_\rho \mid V_\varepsilon(x) - \delta > (1-\nu)\mu\}$$

を定める．命題 1.2 の証明では，この上位集合の大きさに応じて異なる解析を 3 通り行う．

第 1 の場合．上位集合の Lebesgue 測度が十分大きい場合，言い換えると

$$|S_{\rho,\mu,\nu}| \ge (1-\nu)|B_\rho| \tag{14}$$

をみたす場合．粗く言ってしまうと，$0 < \nu \ll 1$ の場合では仮定 (14) は B_ρ のほぼ 100% の場所で， V_ε が上界値 $\delta + \mu$ のほぼ 100% の値をとっていることを意味する．特に，不等式

$$|Du_\varepsilon| \le V_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon^2 + |Du_\varepsilon|^2} \le \varepsilon + |Du_\varepsilon| \le \frac{\delta}{8} + |Du_\varepsilon|$$

に注意すると，微分 Du_ε 自体が B_ρ の中心 x_0 の周りで退化していないことが期待される．ただし，これを数学的に正当化するためには，半径 ρ と比率 $\nu \in (0, 1)$ を十分小さくとる必要があるが，これは D^2u に関する局所 L^2-評価によって定まる．なお，この L^2-評価を導出するために技術的な仮定 $0 < \delta < \mu$ が必要となる．結果として，この場合には微分 Du_ε の積分平均が決して退化しないということがわかる．具体的には

$$|(Du_\varepsilon)_r| := \left| \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} Du_\varepsilon \, \mathrm{d}x \right| \ge \delta + \frac{\mu}{4} \quad \text{even when } r \to 0$$

に相当する結果が得られる（正確に言うと r は 0 に収束する等比級数列の値として離散的にとった上で上の不等式を示している）．この結果は，微分 Du_ε が中心 x_0 の周りで退化していないことを意味しており，このような場合には係数凍結法が機能する．つまり，$\xi := (Du_\varepsilon)_r \in \mathbb{R}^{Nn}$ とおいた上で，定数係数行列 $A := \nabla^2 E_\varepsilon(\xi)$ が与える Laplace 方程式の弱解との比較を行うことにより，

$$\int_{B_r} |Du_\varepsilon - (Du_\varepsilon)_r|^2 \, \mathrm{d}x \le C \left(\frac{r}{\rho}\right)^{n+2\beta} \mu^2 \quad \text{for all } r \in (0, \rho]$$

を得ることができる．これは平均振動にあたる量を二乗積分した際に，2β の分だけ減衰のオーダーに余裕があることを意味しており，微分の β-Hölder 連続性がここから従う．上のような評価はしばしば Campanato 評価と呼ばれる．合成写像 $\mathcal{G}_{2\delta,\varepsilon}$ が $\varepsilon \in (0, \delta/8)$ に依らずに一様 Lipschitz 連続であることにより，実は上の Campanato 評価は $\mathcal{G}_{2\delta,\varepsilon}(Du_\varepsilon)$ に対しても成立することがわかる．

第 2 の場合．条件 (14) が成り立たない場合には，上にあるような分離法が機能しないため，ファセットの周りで解析をしてしまう可能性がある．この問題を解決するために，De Giorgi の切り捨て

法を用いて，非一様楕円性を駆除することにする．具体的には，スカラー値函数 $U_{\delta,\varepsilon} := (V_\varepsilon - \delta)_+^2$ がとある一様楕円型の楕円型方程式の劣解となっていることを証明する．特に注意すべき点は，函数 $U_{\delta,\varepsilon}$ の台が $\{\delta \le V_\varepsilon \le M\}$ に含まれており，この領域では問題 (9) が，(3) にあるような（古典的な意味での）一様楕円型問題になることである．特にこの函数 $U_{\delta,\varepsilon}$ は Caccioppoli 評価（Poincaré 不等式の逆向き版に相当するエネルギー評価）をみたすため，それを基にして De Giorgi の振動量補題（つまり，$U_{\delta,\varepsilon}$ に関する減衰評価）が得られる．最終的には，$U_{\delta,\varepsilon} \equiv |\mathcal{G}_{\delta,\varepsilon}(Du_\varepsilon)|^2$ と $|\mathcal{G}_{2\delta,\varepsilon}(Du_\varepsilon)| \le |\mathcal{G}_{\delta,\varepsilon}(Du_\varepsilon)|$ を踏まえれば，$|\mathcal{G}_{2\delta,\varepsilon}(Du_\varepsilon)|$ についての減衰評価も得られる．

第 3 の場合．最後に (14) かつ $0 < \mu < \delta$ となる場合が残っているが，この時は $|\mathcal{G}_{2\delta,\varepsilon}(Du_\varepsilon)|$ の振動量評価が自明なものとして成り立つ．実際，この場合には B_ρ 上で $\mathcal{G}_{2\delta,\varepsilon}(Du_\varepsilon) \equiv 0$ である．

半径 ρ を縮めていきながら，条件に応じて上の 3 通りの解析を繰り返し行なっていくことにより，近似パラメータ $\varepsilon \in (0, \delta/8)$ に依存しない Campanato 評価

$$\int_{B_\rho} |\mathcal{G}_{2\delta,\varepsilon}(Du) - (\mathcal{G}_{2\delta,\varepsilon}(Du_\varepsilon))_\rho|^2 \, \mathrm{d}x \le C \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{n+2\alpha} \mu^2 \quad \text{for all } r \in (0, \rho_*]$$

を導出することができる．なお，半径の上限 ρ_* は切り捨てパラメータ δ に依存しており，この値は係数凍結法と De Giorgi の切り捨て法が常に機能するようにして選ばれている．この積分評価が点 x_0 の位置に依らずに導出できるため，開球 $B_{\rho_*}(x_*)$ 上でア・プリオリ Hölder 評価が得られる．なお，De Giorgi の切り捨て法を用いることで非一様楕円性を上手く回避しているが，そこで得られた一様楕円性は切り捨てパラメータ $\delta \in (0, 1)$ に根本的に依存している．特に，Hölder 指数 $\alpha \in (0, \beta)$ は切り捨てパラメータ $\delta \in (0, 1)$ に依存することには注意しなくてはならない．

参考文献

[1] V. Bögelein, F. Duzaar, R. Giova, and A. Passarelli di Napoli. Higher regularity in congested traffic dynamics. Math. Ann., 2022.

[2] M. Colombo and A. Figalli. Regularity results for very degenerate elliptic equations. J. Math. Pures Appl. (9), 101(1):94–117, 2014.

[3] E. DiBenedetto. $C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations. Nonlinear Anal., 7(8):827–850, 1983.

[4] G. Duvaut, and J.-L. Lions. Inequalities in Mechanics and Physics, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Vol 219. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[5] E. Giusti. Direct Methods in the Calculus of Variations. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2003.

[6] Y. Giga, and S. Tsubouchi. Continuity of derivatives of a convex solution to a perturbed one-Laplace equation by p-Laplacian. Arch. Ration. Mech. Anal., 244, 253-292, 2022.

[7] R. V. Kohn. Surface relaxation below the roughening temperature: some recent progress and open questions. Nonlinear partial differential equations, Abel Symp., Vol 7, 207–221. Springer, Heidelberg, 2012.

[8] O. A. Ladyzhenskaya, and N. N. Ural'tseva. Linear and Quasilinear Elliptic Equations. Academic Press, New York-London, 1968.

[9] G. Mingione, and V. Rădulescu. Recent developments in problems with nonstandard growth and nonuniform ellipticity. J. Math. Anal. Appl., 501(1):Paper No. 125197, 41, 2021.

[10] F. Santambrogio and V. Vespri. Continuity in two dimensions for a very degenerate elliptic equation. Nonlinear Anal., 73(12):3832–3841, 2010.

[11] S. Tsubouchi. Continuous differentiability of a weak solution to very singular elliptic equations involving anisotropic diffusivity. arXiv:2208.14640, 2022.

[12] S. Tsubouchi. A weak solution to a perturbed one-Laplace system by p-Laplacian is continuously differentiable. arXiv:2209.00004v1, 2022, to appear in Math. Ann.

coideal 上の 1-cocycle の話

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻
田中聖人 (Masato TANAKA)

概要

特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ は数学のいたるところに登場する興味深い対象であります。その表現論については戦後、Gelfand-Naimark、Bargmann、Harish-Chandra に始まり現在まで様々な研究が行われてきました。そして 2021 年 K. De Commer と J. R. D. Talla により $SL(2,\mathbb{R})$ の量子変形とその表現論が記述されました。. 本講演では coideal 上の 1-cocycle を定義し、量子 $SL(2,\mathbb{R})$ の表現論を用いて量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上の 1-cocycle を構成します。

1 導入

線形代数やら群論等を勉強しておりますと特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ なる対象に出くわすかと思います。この対象を具体的に記述しますればすなわち $SL(2,\mathbb{R}) := \{x \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid \det(x) = 1\}$ であります。特殊線形群はどういうわけか (筆者はその理由に明るくないのでありますが) 数学の様々な分野、例えば物理学、例えば保型形式の理論、例えばリー群論といった具合に実に多岐にわたる領域に出没するのであります。いろいろな世界に現れる数学的な対象という点において特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ は興味深く、また、深く考究せねばならぬ対象であるように思います。

それでは $SL(2,\mathbb{R})$ を如何にして考察すればよいのかという段階に至るのでありますが、これはリー群でありますから言うなれば「曲がった空間」であります。左様であるからして、このなんだかよく分からぬ空間を直接的に調べるというのは一寸技術的にむつかしいところがありましょう。自然界に現れるもの、例えば微分方程式や多様体は非線形なものばかりですが人間の直感はどういうわけか (この理由についても筆者は明るくないのですが) 線形なものの方が非線形なものよりも扱いやすいようであります。そうした理由によって群ではなく群環を考える、群上の連続関数のなす環を考える、群の表現論を調べるなどといったある種の「線形化」とでも呼ぶべき操作をして我々人類は群であるとか、群でありなおかつ多様体であるところのリー群を研究してきたわけであります。リー群に関してはもう一つ欠かすべからざる線形化の技法がありまして、それはリー群に対応する「リー代数」なるものを考えるという技術であります。リー代数といいますのは、ベクトル空間であってリー括弧というある種の積を持った対象であります。特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ に対応するリー代数とはベクトル空間 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) := \{x \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr}(x) = 0\}$ にリー括弧 $[x,y] := xy - yx$ を付与したもので、なるほど確かにベクトル空間である点と、ここから元の群の情報を殆ど引き出せるという点においては good news なのですが、しかしながら $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間であるという点は bad news とは言わないまでも一寸苦しい状況であります。と言いますのも、実数体 $\mathbb{R}$ は代数閉体ではありませんから、作用素の固有値 ($\in \mathbb{R}$) を考えられるとは限りません。関数解析、作用素環論の視点から見れば作

用素の固有値が議論できないというのは大きな痛手であります。そこでこの状況を脱する方法の一つとして $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ に複素数体 $\mathbb{C}$ を「かける」即ちテンソルするという方法もありますが、それよりは $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ を少し「膨らませて」普遍包絡環 $U(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ という $\mathbb{C}$ 上の代数を作るほうが状況は明るいでしょう。と言いますのも $U(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ の積は結合律を満たすいわゆる普通の積であって、リー括弧よりはずっと扱いやすく、環論的な技法が使いやすく、さらには $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ の情報は、従って $SL(2,\mathbb{R})$ の情報は、殆ど普遍包絡環サイドから理解することができるからであります。

さて、「量子群」などと呼ばれるものがございます。量子群とは何ぞやという疑問もありますけれども、ここでは正確な定義はせずに、普通のリー群 G からそれに対応する量子群 G_q を得る操作について大まかに考えることにいたしましょう。「リー群 G に対応するリー環 $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ を変形したものであるところの $U_q(\mathfrak{g})$ とそれの dual と思うべき対象 G_q が存在する」これが基本的な思想であり量子群を得る操作であります ([4][5] も参照されたし)。つまるところ「普遍包絡環を変形したらもともとのリー群も変形されたと思うべきである」というわけであります。このような視座の下、特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ を変形するとなればまずは普遍包絡環をこそ変形すべきでありましょう。去る 2021 年、普遍包絡環の量子変形をすることによって K. De Commer, J. R. D. Talla 両氏により量子 $SL(2,\mathbb{R})$([1]) が構成されたのでありますが、これを $SL_q(2,\mathbb{R})$ と書くことにしましょう。

特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ 及び $SL_q(2,\mathbb{R})$ の表現論についても言及しておきましょう。特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ の表現論の研究は比較的新しいもので、歴史を振り返れば 1946 年の Gelfand-Naimark、1947 年の Bargmann、1952 年の Harish-Chandra の仕事が fundamental であるという意味においても重要なのであります。特に既約ユニタリ表現の分類がなされたことは特筆すべきであります。既約ユニタリ表現がすべて分類されたことで $SL(2,\mathbb{R})$ の unitary dual(= 既約ユニタリ表現の同値類の代表元全体の集合) を考察することができます。この集合にちょうどよい位相 (Fell 位相) が入るという事も留意すべき事実であります。位相を入れて何になるのだという厳しい意見もありましょうが、この位相が入っていることによって群 $SL(2,\mathbb{R})$ の性質を、例えば property(T) や Haagerup property のありやなしやを、議論できるのであります。量子化された特殊線形群の既約ユニタリ表現については、論文 [1] にて分類されましたように、凡そ特殊線形群のそれと同様であります。論文 [1] 内では明示的には書かれておりませんが、Fell 位相の様子も凡そ特殊線形群のそれと同様であることが分かります。

特殊線形群であるとかその量子化の表現論が分かれば何が分かるのでありましょうか?いろいろ分かることはあるのでありまするが、今回は定義はあとで述べるものとして、非自明な (coboundary でない)1-cocycle なるものを構成することができるということを言及させていただこうかと思います。では 1-cocycle なるものから何が分かるのかということになるわけですが、群の場合においては、1-cocycle は群上のレヴィ過程を考えているに等しく、また群の Haagerup property であるとか property(T) であるとかが分かるのであります。ならば群の量子化の場合においても同様のことが言えるであろうという心持になります。また、具体的に非自明な 1-cocycle を具体的に構成すること自体も面白い問題であります。そうした事情によりまして、今回は筆者の論文 [8] をもとに $SL_q(2,\mathbb{R})$ 上の非自明な 1-cocycle を構成することを目標に (用紙の都合上あるいは筆者の都合上多少正確さは欠きますけれども) そのために必要な用語などを用意することにいたしましょう。

2 Hopf $*$-algebras, coideals, Drinfeld doubles

Definition 2.1 (Hopf $*$-algebras)**.** A を単位元を持ち積が結合律を満たす代数 (over $\mathbb{C}$) とします。積を線形写像 $A \otimes A \xrightarrow{m} A$、単位元のことを線形写像 $\mathbb{C} \xrightarrow{\eta} A$ であって任意の $a \in A$ について $m(\eta(1) \otimes a) = a = m(a \otimes \eta(1))$ を満たすものと考えることにします。この A が *Hopf $*$-algebra* であるとは、線形写像 $A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A$、$A \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C}$、$A \xrightarrow{S} A$ があって次を満たすことを言います:

$$\begin{aligned} \Delta \circ * &= (* \otimes *)\Delta \\ (\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta &= (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta \qquad \text{(余結合律)} \\ (\epsilon \otimes \mathrm{id})\Delta &= \mathrm{id} = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)\Delta \\ m(S \otimes \mathrm{id})\Delta &= \eta \circ \epsilon = m(\mathrm{id} \otimes S)\Delta \end{aligned}$$

線形写像 $A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A$, $A \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{C}$, $A \xrightarrow{S} A$ をそれぞれ *coproduct, counit, antipode* と呼びます。

Hopf $*$-algebra の計算をするにあたって Δ がらみの計算を強いられるのでありますが、毎度毎度正直に $\sum_i^{\text{有限和}} a_i \otimes b_i$ などと書いて居れば日が暮れること請け合いでありますからもっと簡明なる記号が要請されるのであります。例えば graphical notation などというものもありますけれども、ここでは Sweedler notation を用いることにします。即ち $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ と書いて計算するのでありますがこの記法が数学的に真っ当なものであるということは余結合律によって保証されます。

Example. coproduct などの詳細は省略しますが有限群 G にたいして、その群環 $\mathbb{C}[G]$ 及び群上の連続関数のなす環は Hopf $*$-algebra になっています。

Definition 2.2 (Unitary pairings, actions, Drinfeld doubles)**.** A と U とは Hopf $*$-algebra であるとします。線形写像 $(-,-)\colon A \otimes U \to \mathbb{C}$ であって $(\Delta(a), h \otimes k) = (a, hk)$, $(a \otimes b, \Delta(h))$, $(1, h) = \epsilon(h)$, $(a, 1) = \epsilon(a)$, $(a^*, h) = \overline{(a, S(h)^*)}$, $(a, h^*) = \overline{(S(a)^*, h)}$ for all $a, b \in A$ and $h, k \in U$ となるもののことを A と U の *unitary pairing* と呼びます。このとき *action* というものを次で定めることにします。

$$\begin{aligned} h \triangleright a &:= a_{(1)}(a_{(2)}, h) = (\mathrm{id} \otimes (\bullet, h))\Delta(a) \\ a \triangleleft h &:= (a_{(1)}, h)a_{(2)} = ((\bullet, h) \otimes \mathrm{id})\Delta(a) \\ a \triangleright h &:= h_{(1)}(a, h_{(2)}) = (\mathrm{id} \otimes (a, \bullet))\Delta(h) \\ h \triangleleft a &:= (a, h_{(1)})h_{(2)} = ((a, \bullet) \otimes \mathrm{id})\Delta(h) \end{aligned}$$

$(a \in A, h \in U)$. またそのような A と U から新たなる代数を次のごとく構成することができます。即ち、A と U の *Drinfeld double* $A \bowtie U$ とは A と U 及び commuting relations

$$\begin{aligned} ha &= a_{(2)}(S^{-1}(a_{(1)}) \triangleright h \triangleleft a_{(3)} = (a_{(3)}, h_{(1)})a_{(2)}h_{(2)}(a_{(1)}, S^{-1}(h_{(3)})) \\ ah &= h_{(2)}(S^{-1}(h_{(1)}) \triangleright a \triangleleft h_{(3)}) = (S^{-1}(a_{(3)}), h_{(1)})h_{(2)}a_{(2)}(a_{(1)}, h_{(3)}) \end{aligned}$$

$(a \in A, h \in U)$ から生成される $*$-algebra のことであります。

Definition 2.3 (Coideals)**.** U を Hopf $*$-algebra、I を unital $*$-subalgebra としましょう。I が U の unital left (resp. right) *coideal* $*$-subalgebra であるとは $\Delta(I) \subset U \otimes I$ (resp. $\Delta(I) \subset I \otimes U$). であることを言うのであります。Hopf $*$-algebra A と U の間に unitary pairing があるとします。I が Hopf $*$-algebra U の unital left coideal $*$-subalgebra であるとき $I^{\perp}$ を $\{a \in A \mid a \triangleleft h = \epsilon(h)a$ for all $h \in U\}$ で定めます。一方 I が unital right coideal $*$-subalgebra なら $I^{\perp} := \{a \in A \mid h \triangleright a = \epsilon(h)a$ for all $h \in U\}$ と定めます。

Remark 2.4. I が Hopf $*$-algebra U の unital left coideal $*$-subalgebra であるとき $I^{\perp}$ は A の unital right coideal $*$-subalgebra になります。証明は [1, Lemma 1.2] を参照なさってください。

3 量子 $SL(2,\mathbb{R})$ とその表現論

3.1 Hopf $*$-algebra $\mathcal{O}_q(SU(2))$ と $U_q(\mathfrak{su}(2))$

表題の Hopf $*$-algebra は両者ともに大変興味深い対象ではありますがここでは深く立ち入らず、定義と両者の unitary pairing について言及するにとどめることにいたします。

Definition 3.1. $\mathcal{O}_q(SU(2))$ とは生成元 α, γ と関係式

$\alpha^*\alpha + \gamma^*\gamma = 1, \alpha\alpha^* + q^2\gamma\gamma^* = 1, \gamma^*\gamma = \gamma\gamma^*, \alpha\gamma = q\gamma\alpha, \alpha\gamma^* = q\gamma^*\alpha.$

によって生成されるところの universal unital algebra であります。上述の関係式は行列 $U_{1/2} := [u_{i,j}]_{i,j=1/2,-1/2} := \begin{bmatrix} \alpha & -q\gamma^* \\ \gamma & \alpha^* \end{bmatrix}$ がユニタリーであるということに他なりません。coproduct は $\Delta(u_{i,j}) = \sum_k u_{i,k} \otimes u_{k,j}$ によって、counit ϵ と antipode S は $\epsilon(\alpha) = 1$, $\epsilon(\gamma) = 0$, $S(\alpha) = \alpha^*, S(\alpha^*) = \alpha, S(\gamma) = -q\gamma, S(\gamma^*) = -q^{-1}\gamma^*$. によって夫々定義されるものであります。

Definition 3.2. $U_q(\mathfrak{su}(2))$ とは生成元 k, k^{-1}, e, f と関係式

$$kk^{-1} = k^{-1}k = 1, \quad ke = q^2ek, \quad kf = q^{-2}fk, \quad [e,f] = \frac{k-k^{-1}}{q-q^{-1}}.$$

によって生成される universal unital algebra であります。Hopf $*$-algebra としての構造は次の通りであります:

$$\Delta(k^{\pm}) = k^{\pm} \otimes k^{\pm}, \quad \Delta(e) = e \otimes 1 + k \otimes e, \quad \Delta(f) = 1 \otimes f + f \otimes k^{-1}$$
$$\epsilon(k^{\pm}) = 1, \quad \epsilon(e) = 0, \quad \epsilon(f) = 0$$
$$S(k^{\pm}) = -k^{\mp}, \quad S(e) = -k^{-1}e, \quad S(f) = -fk$$

Hopf $*$-algebra $\mathcal{O}_q(SU(2))$ と $U_q(\mathfrak{su}(2))$ の unitary pairing は次の式によって与えられるもので

あります:

$$(U_{1/2}, k) = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{bmatrix},$$
$$(U_{1/2}, e) = \begin{bmatrix} 0 & q^{1/2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$(U_{1/2}, f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q^{-1/2} & 0 \end{bmatrix}.$$

ただし上式は例えば $(\alpha, k) = q, (-q\gamma^*, k) = 0$ などと読むものとします。これが実際に unitary pairing を与えているということはそれなりに簡単に証明できます。

3.2 $SL(2,\mathbb{R})$ の普遍包絡環の量子変形

Hopf $*$-algebra $U_q(\mathfrak{su}(2))$ の元 B_t を $B_t := q^{-1/2}(e - fk) - \sqrt{-1}(q - q^{-1})^{-1}tk \in U_q(\mathfrak{su}(2))$ によって定めます。また、線形写像 $R\colon U_q(\mathfrak{su}(2)) \to U_q(\mathfrak{su}(2))$ を $R(x) := k^{1/2}S(x)k^{-1/2} \quad (x \in U_q(\mathfrak{su}(2)))$ によって定めましょう。すると愚直に計算することで多項式環 $\mathbb{C}[R(B_t)]$ が $U_q(\mathfrak{su}(2))$ の unital right coideal $*$-subalgebra となるということが証明できます。いま $\mathcal{O}_q(S_t^2) := (\mathbb{C}[R(B_t)])^{\perp}$ と定めこれを *Podleś sphere* と呼びましょう。すると Drinfeld double $\mathcal{O}_q(SU(2)) \bowtie U_q(\mathfrak{su}(2))$ の部分空間として Drinfeld double $\mathcal{O}_q(S_t^2) \bowtie \mathbb{C}[R(B_t)]$ を構成することができますがこれこそが [1] で構成されましたところの $U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_t)$、即ち普遍包絡環の量子変形であります。(厳密に言いますれば、$\mathcal{O}_q(S_t^2) \bowtie \mathbb{C}[R(B_t)]$ を考えるというのは筆者の論文 [8] の convention なのでありまして、論文 [1] においては $U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_t)$ として $\mathbb{C}[B_t]^{\perp} \bowtie \mathbb{C}[B_t]$ が採用されております。1-cocycle の growth なるものを考える場合は $\mathcal{O}_q(S_t^2) \bowtie \mathbb{C}[R(B_t)]$ を考えたほうが自然であろうと思われます。)

3.3 量子 $SL(2,\mathbb{R})$ の表現論

以下 $t = q^a - q^{-a}$ とします。ここでは量子 $SL(2,\mathbb{R})$ の表現論について以下の節において必要になるものだけを手短に紹介します。詳細につきましてはぜひとも論文 [1](または筆者の論文 [8]) をご覧になってください。まず $\mathcal{I}_c$ という、ベクトル空間としては複素数体の加算個の直和に等しいものを導入します。いろいろな理解の仕方があるかと思いますが、$\mathcal{I}_c$ とはつまるところ $\mathcal{O}_q(S_t^2)^{\perp}$(において稠密なもの) と思っていただければよいかと思います。論文 [8] において記述されました通り、$U_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_t)$ の表現と $\mathcal{O}_q(S_t^2) \bowtie \mathcal{I}_c$ の表現にはある対応があるのでありまして、$\mathcal{O}_q(S_t^2) \bowtie \mathcal{I}_c$ の方がいくらか計算の面で労力が少ないのでこちらの表現を見ているということにいたしましょう。本稿で用いる $\mathcal{O}_q(S_t^2) \bowtie \mathcal{I}_c$ の表現は以下の 4 つであります:

1. 自明表現 $\mathbb{1}$
2. $(q + q^{-1}, a)$-basic module $\mathcal{M}_{q+q^{-1},a}$ これは大まかにいうと $\sqrt{-1}S(B_t)e_a = \dfrac{t}{q - q^{-1}}e_a$ なるベクトル e_a が cyclic となっているような表現のことであります。
3. 離散系列表現のひとつ $\mathcal{D}_2^+$ これは特殊線形群の場合の離散系列表現のひとつに相当するものであります。
4. 離散系列表現のひとつ $\mathcal{D}_2^-$ 上に同じ

これらを用いることで我々は所望の 1-cocycle を構成できるのであります。それを次とその次の節で考察いたしましょう。

4 coideal 上の 1-cocycle

CQG Hopf $*$-algebra などというものが出てきますが、細かな定義はそこまで気にしなくて大丈夫ですので、何かいい感じの Hopf $*$-algebra が CQG Hopf $*$-algebra なのだと思ってください。

Definition 4.1 (1-cocycles, coboundaries)**.** A を CQG Hopf $*$-algebra、B をその unital left coideal $*$-subalgebra とします。$\mathcal{H}$ を preHilbert space すなわち内積の定まった空間とし、$\pi\colon B \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$ を $*$-表現とします。このとき線形写像 $C\colon B \to \mathcal{H}$ が (π,ϵ)-1-*cocycle* であるとは $C(xy) = \pi(x)C(y) + C(x)\epsilon(y)$ for all $x, y \in B$ であることを言います。 線形写像 $C\colon B \to \mathcal{H}$ が *coboundary* であるとは C が $\pi(\bullet)\xi - \epsilon(\bullet)\xi$ for some $\xi \in \mathcal{H}$ という姿をしていることを言います。容易に分かりますように coboundary は 1-cocycle であります。

線形写像と $*$-表現とが与えられたときその線形写像が 1-cocycle であるのかどうか coboundary であるのかどうかを容易に判定することはできるでしょうか?答えは YES であります:

Proposition 4.2 (1-cocycle, coboundary であるための条件 [8])**.** $\pi\colon B \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$ を $*$-表現、$C\colon B \to \mathcal{H}$ を線形写像としましょう。$\tilde{\pi} := \begin{bmatrix} \pi & C \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix} : B \to \mathrm{End}(\mathcal{H} \oplus \mathbb{C})$ とおきます。このとき次が成立します。

1. C が 1-*cocycle* $\iff$ $\tilde{\pi}$ が表現
2. C が *coboundary* $\iff$ $\tilde{\pi} \simeq \pi \oplus \mathbb{1}$

1-cocycle のうち我々が相手にするものを以下で定めます。

Definition 4.3 (Yetter-Drinfeld condition[8])**.** B と I は unitary pairing をもつ Hopf $*$-algebra A, U の coideal 達ということにします。$\pi\colon B \bowtie I \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$ を $*$-表現とします。このとき (π,ϵ)-1-cocycle $C\colon B \to \mathcal{H}$ が *Yetter-Drinfeld condition* を満たすとは $\pi(\omega)C(x) = C(x \lhd S^{-1}(\omega))$ for all $x \in B$ and all $\omega \in I$ が成立するということであります。

1-cocycle が Yetter-Drinfeld condition を満たすとうれしいことがあります:

Proposition 4.4 (Drinfeld double に 1-cocycle が延びるための条件 [8])**.** 次は同値であります。

1. C は *Yetter-Drinfeld condition* をみたす。
2. C は 1-*cocycle* $\tilde{C}\colon B \bowtie I \to \mathcal{H}$ *such that* $\tilde{C}(x\omega) = C(x)\epsilon(\omega)$ *for all* $x \in B$ *and* $\omega \in I$ に延長する。

5 量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上の 1-cocycle の構成

さて以上の準備の下に早速本丸を構成の概要を説明いたしましょう。 まず我々は [8, Lemma. 4.1] により $\mathcal{O}_q(S_t^2) \bowtie \mathcal{I}_c$ の表現のなす短完全列

$$0 \to \mathcal{D}_2^+ \oplus \mathcal{D}_2^- \xrightarrow{\phi} \mathcal{M}_{q+q^{-1},a} \xrightarrow{p} \mathbb{1} \to 0$$

を持っております (ϕ は inclusion, p は canonical projection)。 ということはベクトル空間としては $\mathcal{M}_{q+q^{-1},a} \simeq \mathcal{D}_2^+ \oplus \mathcal{D}_2^- \oplus \mathbb{C}$ なのであります。したがって Proposition3.3 を考慮しますれば、表現 $\tilde{\pi}\colon \mathcal{M}_{q+q^{-1},a} \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$ の off-diagonal は 1-cocycle になるのであります。さらにはこの 1-cocycle は Yetter-Drinfeld condition を満たすのであります ([8, Lemma 4.6])。故に Proposition3.6 により $\mathcal{O}_q(S_t^2) \bowtie \mathcal{I}_c$ 上の 1-cocycle ができるわけであります。そして上述の短完全列は $\mathcal{O}_q(S_t^2) \bowtie \mathcal{I}_c$ の表現のなす列としては分裂しません ([8, Lemma 4.3]) ので、再び Proposition3.3 によりその 1-cocycle は coboundary ではございません。以上をまとめますと、次の定理を得るのであります:

Theorem 5.1 (非自明な 1-cocycle の存在 [8])**.** 線形写像 $\tilde{C}\colon \mathcal{O}_q(S_t^2) \bowtie \mathcal{I}_c \to \mathcal{D}_2^+ \oplus \mathcal{D}_2^-$ を $\tilde{C}(bx) := \tilde{\pi}(bx)e_a - \epsilon(bx)e_a \quad (b \in \mathcal{O}_q(S_t^2), x \in \mathcal{I}_c)$ で定めるとそれは量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上の *coboundary* でない 1-*cocycle* である。

6 これから

これから進むべき道はそれなりにございます。それらを以下に列挙しコメントを付してこの小論を終わらせていただきます。

1. 量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上のレヴィ過程の構成
   群や局所コンパクト量子群 [4] の場合を考えますと 1-cocycle にはレヴィ過程が対応しているのでありますが、coideal の場合はそうは問屋が卸さない状況にあるというのが現状であります。何が障壁になっておるのかと言いますれば即ち linear functional たちの convolution product が定義されぬ可能性があるというところであります。例えば [3] にあるような特殊な coideal であれば convolution product も意味を持ちますが量子 $SL(2,\mathbb{R})$ の場合はそれとは状況が違うのであります。しかしながら 1-cocycle にはレヴィ過程が対応しないというのはなんとも不自然で非理想的であるように思います。
2. 量子 $SL(2,\mathbb{R})$ の諸性質
   群のあるいは局所コンパクト量子群の性質で気になるものとして例えば property(T) であるとか Haagerup property などというものがございます。群や局所コンパクト量子群の場合 [4] を考えますと 1-cocycle の情報によってそれらの性質を引き出すことができるのであります。我々の 1-cocycle $\tilde{C}$ は proper という性質を持っています ([8, Theorem 5.10])。これによって例えば $SL_q(2,\mathbb{R})$ が Haagerup property を持っていると思うべきであるのですが、では Haagerup property なる性質をどのように定義するのが適切でしょうか?その特徴付けはどれ

程あるでしょうか?また property(T) についてはどうでしょうか?

3. 量子 $SL(3,\mathbb{R})$ の構成、規約表現の分類、1-cocycle の構成
これはきわめて安直な発想でありますが量子 $SL(3,\mathbb{R})$ の構成、規約表現の分類、1-cocycle の構成をするという方向もございます。もともとのリー群がランク 1 ではありませんからそれに伴う表現論の方面での困難があるであろうと思われます。

上記 3 つの 1-cocycle 関連の話以外にも道はございます:

4. 量子 $SL(2,\mathbb{R})$ の表現のテンソル積の既約分解
特殊線形群 $SL(2,\mathbb{R})$ の場合は [7] で論証されましたように表現のテンソル積の既約分解の様子が分かっております。では量子 $SL(2,\mathbb{R})$ の場合はどうなのかというとそれはまだ未知であります。そもそも量子 $SL(2,\mathbb{R})$ の表現圏に monoidal structure が入るのかという至極真っ当な疑問も沸き起こるのですが、それに関しては [2] にありますように問題ありません。しかしながら、その monoidal structure がこれまた難物でありまして、離散系列表現同士のテンソル積の既約分解すらむつかしいというのが現状であります。筆者は既約分解の様子は特殊線形群のそれと同じであろうと予想しております。
5. 量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上の確率論
量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上のレヴィ過程が構成できるにせよできないにせよ、今度は量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上の確率過程はどのようなものであるのかという疑問が生ずるのは自然なことと思います。量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上の確率過程を定義すること自体は可能でありますが、例えば、もっと具体的に量子 $SL(2,\mathbb{R})$ 上の random walk を考えて、poisson boundary を計算して、などといったことをするにはどうすればよいのでしょうか。そしてそこから何が帰結されるのでしょうか。

Email adress: tanakamasato.2121@gmail.com

参考文献

[1] K. De Commer, and J. R. Dzokou Talla, Quantum $SL(2,\mathbb{R})$ and its irreducible representations, preprint arXiv:2107.04258.

[2] K. De Commer, and J. R. Dzokou Talla, Invariant integrals on coideals and their Drinfeld doubles, preprint arXiv:2112.07476v1.

[3] B. Das, U. Franz and X. Wang, Invariant Markov semigroups on quantum homogeneous spaces, preprint arXiv:1901.00791v2.

[4] M. Daws, P. Fima, A. Skalski, S. White, The Haagerup property for locally compact quantum groups, *J. Reine Angew. Math.* **711** (2016), 189-229.

[5] A. Klimyk and K. Schmüdgen, Quantum groups and their representations, Texts and Monographs in Physics, Springer, 1997.

[6] S. Neshveyev and L. Tuset: Compact Quantum Groups and Their Representation Categories, Cours Spéc., **20**, Soc. Math. France, 2013.

[7] J. Repka, Tensor Products of Unitary Representations of $SL_2(\mathbb{R})$, *American Journal of Mathematics*, Aug., 1978, Vol. **100**, No.4, pp.747-774.

[8] M. Tanaka, A proper 1-cocycle on a Podleś sphere.

New Morphisms Between Étale Groupoids and Between Inverse Semigroup Actions

慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
内村 朝樹 (Tomoki UCHIMURA)

1 導入

作用素環論とは, 量子力学の厳密な数学的定式化のため, 1930 年代初頭に von Neumann が創始した関数解析の一分野である. 作用素環とは, Hilbert 空間上の有界線形作用素たちのなす代数に然るべき位相を入れたものである. 考える位相の違いに応じて, C^* 環と von Neumann 環の二種類が現れるが, 本稿では C^* 環を扱う. C^* 環論では, 非可換・無限次元の環が頻繁に登場するが, それらの扱いは一般に難しい. そこで, 比較的取り扱いの容易な数学的対象から C^* 環を構成し, C^* 環の性質を構成材料の性質を通して理解することがよくなされている. 本稿で取り上げる亜群や逆半群は, C^* 環の構成材料として従来からよく研究されてきた対象である.

亜群や逆半群は, 群をそれぞれ異なる方向へ一般化したものである. 逆半群 S から C^* 環 $C^*(S)$ を構成する方法は Duncan や Paterson らによって [DP85], 亜群 G から C^* 環 $C^*(G)$ を構成する方法は Renault によって研究された [Ren80]. また, Paterson は逆半群 S から亜群 $G_u(S)$ を構成し, それぞれから構成された C^* 環 $C^*(S)$ と $C^*(G_u(S))$ が同型であることを示した [Pat99]. 逆半群から C^* 環の構成は, それぞれの間に適切な射を設定することで, 逆半群の圏 **IS** から C^* 環の圏 $\mathbf{C^*_{alg}}$ への関手 C^* と見做すことができる. 一方で, 亜群の間によく用いられる亜群準同型は, 一般には $*$ 準同型を誘導しない. そこで本稿では, $*$ 準同型を誘導するような新しい亜群の間の射 couple morphism を導入し, 亜群と couple morphism が圏をなすことを示す. この圏を **EG** と呼ぶ. 本稿では他にも, 逆半群作用のなす圏 **ISA** を導入する. 逆半群作用は亜群を構成する際によく用いられる材料であり, Paterson も逆半群 S から逆半群作用を経由して亜群 $G_u(S)$ を構成している. **ISA** や **EG** を導入することで, これまで主に対象の間の結びつきしか論じられてこなかった亜群, 逆半群, C^* 環に対して, 射の対応を与えることが可能となる.

2 準備

2.1 C^* 環

積と対合と呼ばれる演算を備えた複素線型空間を $*$ 代数 ($*$-algebra) と呼ぶ. $*$ 代数 A がさらに完備なノルムを備えており, 任意の $a, b \in A$ に対して $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$, $\|a^*a\| = \|a\|^2$ を満たすとき, A を C^* 環 (C^*-algebra) と呼ぶ.

例 2.1. 局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対して, X 上の無限遠で消える複素数値連続関数全体のなす線形空間を $C_0(X)$ とする[*1]. 各点での積と複素共役によって積と対合を定め, ノルムを各 $f \in C_0(X)$ に対して $\|f\| := \sup_{x \in X} |f(x)|$ で定めると, $C_0(X)$ は可換な C^* 環になる.

例 2.2. 群 Γ に対して $\mathbb{C}(\Gamma)$ を, 有限個を除いた全ての $g \in \Gamma$ に対して $f(g) = 0$ を満たす Γ 上の複素関数 f 全体とする. $\mathbb{C}(\Gamma)$ は, 各点ごとの足し算・スララー倍で複素線型空間をなす. $\mathbb{C}(\Gamma)$ の積と対合を, 任意の $f_1, f_2, f \in \mathbb{C}(\Gamma)$, $g \in \Gamma$ に対して,

$$f_1 * f_2(g) := \sum_{g_1 g_2 = g} f_1(g_1) f_2(g_2), \qquad f^*(g) := \overline{f(g^{-1})}$$

で定めると, $\mathbb{C}(\Gamma)$ は $*$ 代数になる. $*$ 代数 $\mathbb{C}(\Gamma)$ を普遍ノルムと呼ばれるノルムで完備化したものを群 C^* 環 $C^*(\Gamma)$ と定義する.

C^* 環の間の積と対合を保つ写像を $*$ **準同型** ($*$-homomorphism) と呼ぶ. 本稿では, C^* 環と $*$ 準同型のなす圏を $\mathbf{C^*_{alg}}$ と書く.

例 2.3. 局所コンパクト空間 X, Y の間の写像として, 部分的に定義された連続写像 (partially defined continuous map), すなわち, X のある開集合 D_f 上で定義された連続写像 $f\colon X \supset D_f \to Y$ であって[*2], proper なものを考える[*3]. 任意の $f' \in C_0(Y)$ に対し, $\pi_f(f') := f' \circ f$ で定められる写像 $\pi_f\colon C_0(Y) \to C_0(X)$ は $*$ 準同型である[*4]. 例 2.1 の構成 $X \mapsto C_0(X)$ とこの構成 $f \mapsto \pi_f$ は, 局所コンパクトハウスドルフ空間と部分的に定義された proper な連続写像のなす圏 **LCHS** から $\mathbf{C^*_{alg}}$ への反変関手をなす[*5].

例 2.4. 群 Γ_1, Γ_2 の間の群準同型 θ に対して, $*$ 代数 $\mathbb{C}(\Gamma_1)$, $\mathbb{C}(\Gamma_2)$ の間の写像 σ_θ を任意の $f \in \mathbb{C}(\Gamma_1)$ と $h \in \Gamma_2$ に対して

$$\sigma_\theta(f)(h) := \sum_{\theta(g) = h} f(g) \tag{1}$$

と定義すると, この写像は $*$ 準同型である[*6]. この $*$ 準同型は, C^* 環 $C^*(\Gamma_1)$, $C^*(\Gamma_2)$ の間の $*$ 準同型に拡張できるが, 拡張された写像も同様に σ_θ と書く. 例 2.3 の構成 $\Gamma \mapsto C^*(\Gamma)$ とこの構成 $\theta \mapsto \sigma_\theta$ は, 群と群準同型のなす圏 **Gr** から $\mathbf{C^*_{alg}}$ への関手をなす.

[*1] X 上の連続関数 f が無限遠で消えるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\{x \in X \mid |f(x)| \geq \varepsilon\}$ がコンパクトになることである. X がコンパクトであるとき, $C_0(X)$ は連続関数全体 $C(X)$ と一致する.

[*2] 本稿では $f\colon X \supset D_f \to Y$ も単に $f\colon X \to Y$ とだけ書く.

[*3] 連続写像が proper であるとは, 任意の終域のコンパクト部分集合の逆像がコンパクトであること.

[*4] 正確には, 写像 $f' \circ f$ は D_f 上でしか定義されないため, D_f 外では 0 をとることにして X 上の写像に拡張する.

[*5] ここで, 部分的に定義された写像 $f_1\colon X \supset D_1 \to Y$, $f_2\colon Y \supset D_2 \to Z$ の合成は, 開集合 $f_1^{-1}(D_2) \subset X$ 上で定義された $f_2 \circ f_1$ と定める. **LCHS** は, 点付きコンパクトハウスドルフ空間と, 点を保つ連続写像のなす圏と圏同型である.

[*6] $*$ 準同型 σ_θ は $\delta_g \in \mathbb{C}(\Gamma_1)$ を $\delta_{\theta(g)} \in \mathbb{C}(\Gamma_2)$ に送る. ここで, $\delta_g, \delta_{\theta(g)}$ は $\{g\} \subset \Gamma_1, \{\theta(g)\} \subset \Gamma_2$ 上の定義関数である.

2.2 逆半群とその C^* 環

逆半群 S (inverse semigroup) とは, 半群であって, 各元 $s \in S$ に対して, 一般化逆元 $s^* \in S$ が唯一存在し, $ss^*s = s$ と $s^*ss^* = s^*$ を満たすものである. 以下では, S の冪等元 (idempotent), すなわち $e^2 = e$ を満たす元全体を $E(S)$ と置く. 任意の $s \in S$ に対して, s^*s や ss^* は $E(S)$ の元である. $E(S)$ は S の可換な部分半群であり, 逆半群論において重要な役割を果たす.

例 2.5. 群は冪等元が単位元しかない逆半群である. 一般化逆元は通常の逆元と一致する.

例 2.6. 位相空間 X に対して, X の開集合の間の同相写像全体を $I(X)$ と書く[*7]. $I(X)$ の元に対して, 部分的に定義された写像同士の合成を積とすれば, $I(X)$ は逆半群をなす. ここで, $f^* = f^{-1}$ であり, 冪等元は各開集合上の恒等写像である.

逆半群の間の積を保つ写像を**半群準同型** (semigroup homomorphism) という. 半群準同型は自動的に一般化逆元を保つ. 逆半群 S に対して, 例 2.2 と同様の方法で C^* 環 $C^*(S)$ が定義される. また, 逆半群 S, T の間の半群準同型 θ に対して, C^* 環 $C^*(S), C^*(T)$ の間の $*$ 準同型 σ_θ が例 2.4 と同様に定義される. 逆半群と半群準同型のなす圏を **IS** とする. **IS** は **Gr** を充満部分圏として含む. 逆半群 S からの C^* 環 $C^*(S)$ の構成と, 半群準同型 $\theta\colon S \to T$ からの $*$ 準同型 $\sigma_\theta\colon C^*(S) \to C^*(T)$ の構成は, **IS** から $\mathbf{C^*_{alg}}$ への関手をなす. この関手を C^* と書く.

2.3 亜群とその C^* 環

位相亜群 (topological groupoid) とは, 位相空間 G, unit space と呼ばれる G の部分空間 $G^{(0)}$, domain map $d\colon G \to G^{(0)}$, range map $r\colon G \to G^{(0)}$, 積写像

$$G^{(2)} := \{(g', g) \in G \times G \mid d(g') = r(g)\} \ni (g', g) \mapsto g'g \in G.$$

の組であって,

(i) 任意の $u \in G^{(0)}$ に対して, $d(u) = u$, $r(u) = u$,
(ii) 任意の $g \in G$ に対して, $r(g)g = g = gd(g)$,
(iii) 任意の $(g', g) \in G^{(2)}$ に対して, $r(g'g) = r(g')$, $d(g'g) = d(g)$,
(iv) 任意の $(g'', g'), (g', g) \in G^{(2)}$ に対して, $g''(g'g) = (g''g')g$,
(v) 任意の $g \in G$ に対して逆元 $g^{-1} \in G$ が存在して $g^{-1}g = d(g)$, $gg^{-1} = r(g)$

が成り立ち, 積写像 $(g', g) \mapsto g'g$ と逆元を対応させる写像 $g \mapsto g^{-1}$ が連続であるものをいう. 位相亜群 G が**エタール** (étale) であるとは, 以下の 2 条件を満たすことをいう.

(i) unit space $G^{(0)} \subset G$ が局所コンパクトハウスドルフである.
(ii) source map $d\colon G \to G^{(0)}$ が局所同相である. すなわち, 任意の $g \in G$ に対して, ある g の開近傍 $V_g \subset G$ が存在し, $d|_{V_g}$ が $G^{(0)}$ の開集合への同相写像になる.

[*7] $I(X)$ の元を部分的な同相写像 (partial homeomorphism) と呼ぶ.

エタール性を課すことで, 任意の $u \in G^{(0)}$ に対して, $G_u := d^{-1}(\{u\})$ や $G^u := r^{-1}(\{u\})$ が離散集合になり, 亜群 G に対する C^* 環を定義する際に本質的ではない困難を避けることができる. 本稿ではエタール亜群を単に亜群という. 亜群の簡単な例として, 以下の 2 つがある.

例 2.7. 任意の離散群 Γ は unit space が単位元 e のみである亜群である.

例 2.8. 任意の局所コンパクトハウスドルフ空間 X は, unit space が全体の空間 X と一致する亜群である.

より複雑な例として, 離散群作用から構成される変換亜群がある.

例 2.9. 離散群作用 (Γ, X, α) に対して, 全体の空間を $\Gamma \times X$, unit space を $\{(e,x) \mid x \in X\} \simeq X$, domain map, range map をそれぞれ $d(g,x) = x$, $r(g,x) := \alpha_g x$ とし, $x' = \alpha_g x$ を満たす $(g',x'),(g,x) \in \Gamma \times X$ に対して積を $(g',x')(g,x) := (g'g,x)$ と定める. ここで, $\Gamma \times X$ に直積位相を入れると, $\Gamma \times X$ は亜群をなす. この亜群を**変換亜群** (transformation groupoid) といい, $\Gamma \ltimes_\alpha X$ と書く. 例 2.7 は離散群 Γ が自明な空間に作用している場合, 例 2.8 は自明群が空間 X に作用している場合の変換亜群と見做すことができる.

以下, 亜群 G から C^* 環を構成する. 任意の G のハウスドルフな開集合 U に対して, コンパクト台を持つ U 上の複素連続写像全体を $C_c(U)$ で表す[*8]. 各 $C_c(U)$ の元は, $G \setminus U$ 上では常に 0 をとることにすると G 上の関数と見做すことができ, $C_c(U)$ は G 上の関数全体のなす複素線型空間の部分空間と見做すことができる. 各ハウスドルフ開集合 U ごとに定まる全ての部分空間 $C_c(U)$ が張る部分空間を $S(G)$ とする[*9]. $S(G)$ は任意の $f_1, f_2, f \in S(G)$ と $g \in G$ に対して積と対合を

$$f_1 * f_2(g) := \sum_{\substack{(g_1,g_2)\in G^{(2)} \\ g_1 g_2 = g}} f_1(g_1) f_2(g_2), \quad f^*(g) := \overline{f(g^{-1})}$$

と定めることで $*$ 代数をなす. この $*$ 代数を普遍ノルムと呼ばれるノルムで完備化したものを亜群 C^* 環 $C^*(G)$ と呼ぶ. 離散群 Γ に対する亜群 C^* 環は, 例 2.2 で挙げた群 C^* 環 $C^*(\Gamma)$ に一致する. また, 局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対する亜群 C^* 環は, 例 2.1 で挙げた C^* 環 $C_0(X)$ に一致する.

亜群 G, H の間の連続写像 φ で, 任意の $(g_1, g_2) \in G^{(2)}$ に対して $(\varphi(g_1), \varphi(g_2)) \in H^{(2)}$ かつ $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$ を満たすものを**亜群準同型** (groupoid homomorphism) という. 亜群準同型からは, 一般に $*$ 準同型が構成できないことが知られている. というのも, 亜群準同型は以下の相反する 2 つの例を含むからである.

例 2.10. 群 Γ_1, Γ_2 の間の亜群準同型は, 単なる群準同型である. 群準同型 $\theta\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ からは, 例 2.4 によって, 同変的に $*$ 準同型 $\sigma_\theta\colon C^*(\Gamma_1) \to C^*(\Gamma_2)$ が構成される.

例 2.11. コンパクト空間 X_1, X_2 の間の亜群準同型は, 単なる連続写像である. 連続写像 $f\colon X_1 \to$

[*8] U の複素連続写像 f がコンパクト台を持つとは, ある U のコンパクト部分集合 K が存在して, 任意の $x \in U \setminus K$ に対して $f(x) = 0$ を満たすことである.

[*9] G が局所コンパクトハウスドルフであるとき, $S(G)$ は $C_c(G)$ と一致する.

X_2 からは, 例 2.3 のようにして, 反変的に $*$ 準同型 $\pi_f\colon C(X_2) \to C(X_1)$ が構成される.

本稿で提案する亜群の間の新しい射 couple morphism は, これらの例をどちらも含み, かつそれぞれの $*$ 準同型の構成のどちらとも整合的に $*$ 準同型を誘導する.

2.4 逆半群から亜群へ

Paterson は逆半群から亜群を構成する際に, 逆半群作用を経由した. **逆半群作用** (inverse semigroup action) とは, 逆半群 S, 局所コンパクトハウスドルフ空間 X, 半群準同型 $\alpha\colon S \to I(X)$ の組である. 部分的な同相写像 α_s の定義域を D_s と書く. X の部分集合 V が α に関して**不変** (invariant) であるとは, 任意の $s \in S$ に対して $\alpha_s(D_s \cap V) \subset V$ が成り立つことをいう.

逆半群 S から次のようにして逆半群作用が得られる. 冪等元全体のなす部分半群 $E(S)$ から, $\{0,1\}$ に通常の積を入れた逆半群への 0 でない半群準同型全体を $\widehat{E(S)}$ と書く. $\widehat{E(S)}$ は $\{0,1\}^{E(S)}$ の部分空間として相対位相を入れると局所コンパクト空間になる. 各 $s \in S$ に対して, β_s^S を開集合

$$U_s := \left\{\zeta \in \widehat{E(S)} \;\middle|\; \zeta(s^*s) = 1\right\}, \quad U'_s := \left\{\zeta \in \widehat{E(S)} \;\middle|\; \zeta(ss^*) = 1\right\}$$

の間で, $\beta_s^S\zeta(e)\colon = \zeta(s^*es)$ によって定義された同相写像とすると, $\beta^S\colon S \to I\big(\widehat{E(S)}\big); s \mapsto \beta_s^S$ は S の $\widehat{E(S)}$ への作用である. この作用を逆半群 S の *spectral action* と呼ぶ. 混乱の恐れがなければ, β^S は単に β とだけ書く.

逆半群作用 (S, X, α) からは次のように亜群が構成される. 逆半群作用 (S, X, α) に対して, 集合 $S \ltimes_\alpha X$ を

$$S \ltimes_\alpha X := \{(s,x) \in S \times X \mid x \in D_s\}/\sim$$

とする. ここで, $S \times X$ 上の同値関係 $\sim$ を, 任意の $(s,x), (t,y) \in S \times X$ に対して

$$(s,x) \sim (t,y) :\iff x = y \text{ かつある } e \in E(S) \text{ が存在して } x \in D_e,\ se = te$$

と定義し, (s,x) の同値類を $[s,x]$ と書く. $S \ltimes_\alpha X$ の unit space を $\{[s^*s, x] \mid s \in S, x \in D_s\}$ とする[*10]. 更に, domain map, range map, 積写像を例 2.9 と同様に定める. 任意の $s \in S$ と開集合 $U \subset D_s$ に対し, $[s,U] := \{[s,x] \mid x \in U\}$ と定めると, 部分集合族 $\{[s,U] \mid s \in S, U \subset D_s\}$ は開基をなす. これらの構造によって $S \ltimes_\alpha X$ は亜群をなす. この亜群を, 群作用のときと同様に逆半群作用 (S, X, α) の**変換亜群** (transformation groupoid) と呼ぶ.

逆半群 S の spectral action $\big(S, \widehat{E(S)}, \beta\big)$ に対し, その変換亜群 $S \ltimes_\beta \widehat{E(S)}$ を S の**普遍亜群** (universal groupoid) と呼び, $G_u(S)$ と書く.

定理 2.12 ([Pat99, Theorem 4.4.1])**.** 逆半群 S に対して, 逆半群 C^* 環 $C^*(S)$ と, その普遍亜群の C^* 環 $C^*(G_u(S))$ は同型.

略証. $*$ 準同型 $\iota_S\colon C^*(S) \to C^*(G_u(S)); \delta_s \mapsto \delta_{[s,U_s]}$ が同型写像である. ここで U_s は, $s \in S$ の spectral action β_s の定義域であり, 開コンパクト集合である. また, $\delta_s, \delta_{[s,U_s]}$ はそれぞれ $\{s\} \subset S, [s,U_s] \subset G_u(S)$ の定義関数である. □

[*10] 任意の s に対して同値類 $[s^*s, x]$ は一致するため, unit space は写像 $[s^*s, x] \mapsto x$ を通して X の開集合 $\bigcup_{s \in S} D_s$ と同一視される

3 圏 ISA, EG の導入と関手 SP, TG, C^* の構成

本節では, 逆半群作用の間の射 (action morphism) と, 亜群の間の新しい射 (couple morphism) を導入する. これらはいずれも, 群の間の射と空間の間の射を組にしたような概念である.

定義 3.1. 2 つの逆半群作用 $(S, X, \alpha), (T, Y, \beta)$ に対して, (S, X, α) から (T, Y, β) への *action morphism* (θ, ξ) とは, 半群準同型 $\theta\colon S \to T$ と, Y の開集合 D_ξ 上で定義された X への proper な連続写像 ξ の組である. ここで, ξ の定義域 D_ξ は β に関して不変であること, 任意の $s \in S, y \in D_\xi$ に対して, $D_{\theta(s)} = \xi^{-1}(D_s)$, $\xi\left(\beta_{\theta(s)}(y)\right) = \alpha_s(\xi(y))$ が成り立つことを課す.

命題 3.2. 2 つの action morphism $(\theta_i, \xi_i)\colon (S_i, X_i, \alpha_i) \to (S_{i+1}, X_{i+1}, \alpha_{i+1})$ $(i = 1, 2)$ に対して, それぞれの合成の組 $(\theta_2 \circ \theta_1, \xi_1 \circ \xi_2)$ は (S_1, X_1, α_1) から (S_3, X_3, α_3) への action morphism である. これを合成と定めることにより, 逆半群作用と action morphsim は圏をなす. この圏を **ISA** と書く.

この圏の導入により, spectral action の構成を **IS** から **ISA** への関手と見做すことができる.

定理 3.3. 半群準同型 $\theta\colon S \to T$ に対して $\widehat{\theta}$ を, $\widehat{E(T)}$ の開集合 $D_{\widehat{\theta}} := \left\{\xi \in \widehat{E(T)} \;\middle|\; \xi \circ \theta \text{が } 0 \text{ でない}\right\}$ の上で, 任意の $\xi \in \widehat{E(T)}$ に対して $\widehat{\theta}(\xi) := \xi \circ \theta$ と定義された写像とする. このとき, $\left(\theta, \widehat{\theta}\right)$ は action morphism である. この構成 $\theta \mapsto \left(\theta, \widehat{\theta}\right)$ は合成を保つため, 逆半群から spectral action の構成 $S \mapsto \left(S, \widehat{E(S)}, \beta\right)$ と, 半群準同型から action morphism の構成 $\theta \mapsto \left(\theta, \widehat{\theta}\right)$ は **IS** から **ISA** への関手をなす. この関手を SP と書く.

一方, 亜群の間の新しい射として, couple morphism を導入する.

定義 3.4. 亜群 G, H の間の couple morphism とは, ある亜群 K と, 2 つの亜群準同型 $\varphi\colon K \to G$, $\psi\colon K \to H$ の組 $(\varphi, \psi; K)$ であって, 以下を満たすものをいう.

(i) 亜群準同型 $\varphi\colon K \to G$ は, φ の unit space への制限 $\varphi^{(0)}\colon K^{(0)} \to G^{(0)}$ が proper であって, 任意の $u \in K^{(0)}$ に対して, φ の制限 $\varphi_u\colon K_u \to G_u$ が全単射である.

(ii) 亜群準同型 $\psi\colon K \to H$ は, ψ の unit space への制限 $\psi^{(0)}\colon K^{(0)} \to H^{(0)}$ が $H^{(0)}$ の開集合への同相写像である.

上の定義における条件 (i) を満たす亜群準同型を type (S), 条件 (ii) を満たすものを type (G) と呼ぶ. G から H への 2 つの couple morphism $(\varphi_j, \psi_j; K_j)$ $(j = 1, 2)$ は, K_1 と K_2 の間に全単射亜群準同型 ι が存在して, 以下の図式を可換にするとき, 同一視する.

$$\begin{tikzcd}
 & K_1 \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\psi_1"] \arrow[dd, "\iota"] & \\
G & & H \\
 & K_2 \arrow[ul, "\varphi_2"] \arrow[ur, "\psi_2"'] &
\end{tikzcd}$$

また, $(\varphi, \psi; K)$ の同値類を $[\varphi, \psi; K]$, あるいは亜群 K を省略して $[\varphi, \psi]$ と書く.

例 3.5. 群の間の群準同型は type (G) を満たす亜群準同型であるため, 群準同型 $\theta\colon \Gamma_1 \to \Gamma_2$ は, couple morphism $\Gamma_1 \xleftarrow{\mathrm{id}} \Gamma_1 \xrightarrow{\theta} \Gamma_2$ と見做すことができる.

例 3.6. 局所コンパクトハウスドルフ空間の間の proper な連続写像は type(S) を満たす亜群準同型であるため, **LCHS** の射 $f\colon X_1 \supset D_f \to X_2$ は, couple morphism $X_2 \xleftarrow{f} D_f \xhookrightarrow{\iota} X_1$ と見做すことができる.

例 3.7. Buneci と Stachura は, エタールより広いクラスの位相亜群の間に algebraic morphism を導入した [BS05]. エタール亜群の間の彼らの射は, couple morphism $[\varphi, \psi; K]$ で, ψ の unit space への制限 $\psi^{(0)}$ が unit space 間の同相写像になっているものと一対一対応する. 定理 3.10 で couple morphism から $*$ 準同型を構成するが, この構成は algebraic morphism から $*$ 準同型を構成する方法と整合的である.

2 つの couple morphism $[\varphi_i, \psi_i; K_i]\colon G_i \to G_{i+1}$ $(i = 1, 2)$ に対して, 新たな亜群を次のように定める. 集合 $K_1 \times_H K_2$ を

$$K_1 \times_H K_2 := \left\{(k_1, k_2) \in K_1 \times K_2 \;\middle|\; \psi_1(k_1) = \varphi_2(k_2)\right\}$$

とし, unit space を $K_1^{(0)} \times K_2^{(0)}$, domain map, range map, 積写像は各成分ごとに K_1, K_2 の構造をそのまま用いて定義する. ここに直積位相を入れると, $K_1 \times_H K_2$ は亜群になる. 更に, $\widetilde{\varphi_2}$, $\widetilde{\psi_1}$ を各成分の射影とする[*11].

$$\begin{tikzcd}
 & & K_1 \times_H K_2 \arrow[dl, "\widetilde{\varphi_2}"'] \arrow[dr, "\widetilde{\psi_1}"] & & \\
 & K_1 \arrow[dl, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\psi_1"'] & & K_2 \arrow[dl, "\varphi_2"'] \arrow[dr, "\psi_2"] & \\
G_1 & & G_2 & & G_3
\end{tikzcd}$$

命題 3.8. 2 つの couple morphism $[\varphi_i, \psi_i; K_i]\colon G_i \to G_{i+1}$ $(i = 1, 2)$ に対して, $\widetilde{\varphi_2}$, $\widetilde{\psi_1}$ はそれぞれ type(S), type(G) であり, $\left[\varphi_1 \circ \widetilde{\varphi_2}, \psi_2 \circ \widetilde{\psi_1}; K_1 \times_H K_2\right]$ は couple morphism となる. これを合成と定めることで, 亜群と couple morphism は圏をなす. この圏を **EG** と呼ぶ.

群のなす圏 **Gr** は同変的に, 局所コンパクトハウスドルフ空間のなす圏 **LCHS** は反変的に **EG** に含まれる. 以下では **ISA** から **EG** への関手 TG と, **EG** から $\mathbf{C}^*_{\mathbf{alg}}$ への関手 C^* を構成する.

定理 3.9. 2 つの逆半群作用 $(S, X, \alpha), (T, Y\beta)$ の間の action morphism (θ, ξ) に対して, 逆半群作用 $(S, D_\xi, \beta\theta)$ の変換亜群 $S \ltimes_{\beta\theta} D_\xi$ を考える. ここで $\beta\theta$ とは, 任意の $s \in S$ に対して $\beta\theta_s := \beta_{\theta(s)}$ で定義される作用である. 2 つの亜群準同型を

$$\begin{aligned}
\varphi_\xi &\colon S \ltimes_{\beta\theta} D_\xi \to S \ltimes_\alpha X; [s, y] \mapsto [s, \xi(y)] \\
\psi_\theta &\colon S \ltimes_{\beta\theta} D_\xi \to T \ltimes_\beta Y; [s, y] \mapsto [\theta(s), y]
\end{aligned}$$

で定めると, φ_ξ, ψ_θ はそれぞれ type(S), type(G) であり, $\left[\varphi_\xi, \psi_\theta; S \ltimes_{\beta\theta} D_\xi\right]$ は couple morphism である. この構成は合成を保つため, 逆半群作用から変換亜群の構成 $(S, X, \alpha) \mapsto S \ltimes_\alpha X$ と, action

[*11] この亜群 $K_1 \times_H K_2$ と 2 つの亜群準同型 $\widetilde{\varphi_2}$, $\widetilde{\psi_1}$ は, 亜群と亜群準同型のなす圏における, 図式 $\psi_1\colon K_1 \to H \leftarrow K_2\colon \varphi_2$ の引き戻し (pull back) に他ならない.

morphism から couple morphism の構成 $(\theta, \xi) \mapsto [\varphi_\xi, \psi_\theta]$ は **ISA** から **EG** への関手をなす．この関手を TG と書く．

定理 3.10. 2 つの亜群 G, H の間の couple morphism $[\varphi, \psi; K]$ に対して，2 つの $*$ 準同型 $\sigma_\varphi \colon S(G) \to S(K)$, $\pi_\psi \colon S(K) \to S(H)$ を次のように定める．σ_φ は，任意の $f \in S(G)$ に対して，

$$\sigma_\varphi(f) := f \circ \varphi$$

と定める．π_ψ は任意の $f \in S(K)$ と $h \in H$ に対して，

$$\pi_\psi(f)(h) := \sum_{\psi(k)=h} f(k)$$

と定める．これらは C^* 環の間の $*$ 準同型に拡張される．これにより，couple morphism $[\varphi, \psi]$ から，これらを合成した $*$ 準同型 $\pi_\psi \circ \sigma_\theta$ が誘導される．この構成は well-defined である．また，この構成は合成を保つため，亜群から C^* 環の構成 $G \mapsto C^*(G)$ と，couple morphism から $*$ 準同型の構成 $[\varphi, \psi] \mapsto \pi_\psi \circ \sigma_\theta$ は **EG** から $\mathbf{C^*_{alg}}$ への関手をなす．この関手を C^* と書く．

上の定理における 2 つの構成 $\varphi \mapsto \sigma_\varphi$, $\psi \mapsto \pi_\psi$ は，それぞれ例 2.3, 例 2.4 の構成と対応している．

4 圏論的視点による先行研究の拡張

ここまでで我々は 2 つの圏 **ISA**, **EG** と 3 つの関手 SP, TG, C^* を導入した．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{IS} \arrow[rr, "C^*"] \arrow[dr, "\mathrm{SP}"] & & \mathbf{C^*_{alg}} \\
& \mathbf{ISA} \arrow[r, "\mathrm{TG}"] & \mathbf{EG} \arrow[u, "C^*"']
\end{tikzcd}$$

逆半群 S に対して，既存の関手 $C^* \colon \mathbf{IS} \to \mathbf{C^*_{alg}}$ は C^* 環 $C^*(S)$ を構成するが，新たに構成した 3 つの関手 SP, TG, C^* の合成は C^* 環 $C^*(G_u(S))$ を構成する．Paterson はこれらが同型であることを示したが，以下の定理は更にその同型写像が自然であることを主張する．

定理 4.1. 既存の関手 $C^* \colon \mathbf{IS} \to \mathbf{C^*_{alg}}$ と 3 つの関手 SP, TG, C^* の合成は自然同型である．

証明．以下の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
C^*(S) \arrow[r, "\iota_S"] \arrow[d, "\sigma_\theta"'] & C^*\left(S \ltimes \widehat{E(S)}\right) \arrow[d, "\pi_{\psi_\theta} \circ \sigma_{\varphi_{\widehat{\theta}}}"] \\
C^*(T) \arrow[r, "\iota_T"] & C^*\left(T \ltimes \widehat{E(T)}\right),
\end{tikzcd}$$

任意の $s \in S$ に対して

$$\pi_{\psi_\theta} \circ \sigma_{\varphi_{\widehat{\theta}}}\left(\delta_{[s,U_s]}\right) = \pi_{\psi_\theta}\left(\delta_{\left[s,U_{\theta(s)}\right]}\right) = \delta_{\left[\theta(s),U_{\theta(s)}\right]}$$

が成り立つことより従う． □

さらに, 関手 TG には随伴関手が構成できる. Exel は亜群 G に対して, slice action と呼ばれる逆半群作用を次のように構成した [Exe08]. 亜群 G の開集合 U で, domain map, range map d, r の U への制限 $d|_U, r|_U$ が同相写像となるものを *slice* と呼ぶ. 亜群 G 上の slice 全体を $\operatorname{Bis} G$ とすると, $\operatorname{Bis} G$ は

$$UV := \{uv \in G \mid u \in U, v \in V, (u, v) \in G^{(2)}\}$$

で逆半群をなす. 各 slice U に対して, $d(U)$ から $r(U)$ への同相写像 γ_U^G を $r|_U^{-1} d|_U$ で定めると, $\gamma^G \colon U \mapsto \gamma_U^G$ は $\operatorname{Bis} G$ の $G^{(0)}$ 上の作用である. 亜群 G から逆半群作用 γ^G の構成は, **EG** から **ISA** への対象間の対応を定めるものであるが, 以下のように射の間の対応も定めることができる.

定理 4.2. 2 つの亜群 G, H の間の couple morphism $[\varphi, \psi; K]$ に対して, 半群準同型

$$\operatorname{Bis} G \to \operatorname{Bis} K; U \mapsto \varphi^{-1}(U), \qquad \operatorname{Bis} K \to \operatorname{Bis} H; V \mapsto \psi(V)$$

を改めて φ^{-1}, ψ と書く. このとき $\left(\psi \circ \varphi^{-1}, \varphi^{(0)} \circ \left(\psi^{(0)}\right)^{-1}\right)$ は slice action の間の action morphism になる. ここで, $\left(\psi^{(0)}\right)^{-1}$ は, $\psi^{(0)}$ の像の上でのみ定義された写像である. また, この構成は合成を保つため, 亜群から逆半群作用の構成 $G \mapsto \gamma^G$ と, couple morphism から action morphism の構成 $[\varphi, \psi] \mapsto \left(\psi \circ \varphi^{-1}, \varphi^{(0)} \circ \left(\psi^{(0)}\right)^{-1}\right)$ は **EG** から **ISA** の関手をなす. この関手を SA と書く.

定理 4.3. 関手 SA は関手 TG の右随伴である.

これに加えて, 定理 3.3 で構成した関手 SP に対しては, 忘却関手 U がその右随伴である. 特に, SA と U の合成は SP と TG の合成の右随伴であるが, この結果は Buss, Exel, Meyer らの結果 [BEM12, Theorem 4.11] を一般化するものである.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{IS} \arrow[r, bend left, "\mathrm{SP}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{ISA} \arrow[l, bend left, "U"] \arrow[r, bend left, "\mathrm{TG}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathbf{EG} \arrow[l, bend left, "\mathrm{SA}"]
\end{tikzcd}$$

参考文献

[BEM12] A. Buss, R. Exel, and R. Meyer. Inverse semigroup actions as groupoid actions. *Semigroup Forum*, 85(2):227–243, 2012.

[BS05] M. R. Buneci and P. Stachura. Morphisms of locally compact groupoids endowed with Haar systems. Available at `https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0511613`, 2005.

[DP85] J. Duncan and A. L. T. Paterson. C^*-algebras of inverse semigroups. *Proc. Edinburgh Math. Soc. (2)*, 28(1):41–58, 1985.

[Exe08] R. Exel. Inverse semigroups and combinatorial C^*-algebras. *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 39(2):191–313, 2008.

[Pat99] A. L. T. Paterson. *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*, volume 170 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999.

[Ren80] J. Renault. *A groupoid approach to C^*-algebras*, volume 793 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1980.

Neretin 群とそのある開部分群について

京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系
有本諒也 (Ryoya ARIMOTO)

概要

Neretin 群とはある rooted tree の almost automorphism からなる完全不連結局所コンパクト群であり、様々な興味深い性質を持つことが知られている。本講演では、Neretin 群の定義とその性質を紹介し、最後には Neretin 群のある開部分群は I 型ではないという結果を紹介する。

1 はじめに

局所コンパクト群は数学における基本的な研究対象の 1 つである。本稿では、位相群は Hausdorff かつ第二可算なもののみを考える。局所コンパクト群 G が与えられたとき、その単位元を含む連結成分 G° は G の閉正規部分群であり、この正規部分群による商 G/G° は完全不連結局所コンパクト群となる。従って、G は連結な局所コンパクト群の完全不連結局所コンパクト群による拡大 $0 \to G^\circ \to G \to G/G^\circ \to 0$ であるため、一般の局所コンパクト群の研究は理論上、連結なものについての研究と完全不連結なものについての研究に分けられる。Gleason–山辺の定理により、連結局所コンパクト群は Lie 群の射影極限であるため、前者については Lie 群の豊かな理論が援用できる。一方、完全不連結局所コンパクト群については現在も研究が進められているところである。

完全不連結局所コンパクト群の例として、Neretin 群と呼ばれる群がある。これはある rooted tree の almost automorphism からなる群である。この群は、コンパクト生成で単純であるにも関わらず、格子を持たないなどといった様々な興味深い性質を持つ。2021 年には P.-E. Caprace, A. Le Boudec, N. Matte Bon によってこの群が I 型ではないということが示されている。

群が I 型であるとは、大雑把にはその群が表現論的によい振る舞いをするということであり、与えられた群が I 型かどうかを決定するということは基本的な問題である。離散群に対しては I 型群の特徴づけが知られているが、一般の局所コンパクト群に対する I 型群の特徴づけはまだ知られていない。

前述した Neretin 群には特徴的な開部分群が存在する。この開部分群が I 型であるかどうかということは自然な疑問であり、実際 Neretin 群が I 型でないことを示した 3 人の論文にもこのことが疑問として書かれている。本稿では、この疑問に対する解答である、Neretin 群の特徴的な開部分群は I 型ではないという結果を紹介する。I 型群の開部分群は I 型であるから、この結果を用いると Neretin 群が I 型でないことの別証明が得られる。

2　Neretin 群の定義と性質

Neretin 群とは、円周の微分同相群の p 進類似として Neretin により導入された群である ([10])。Neretin 群の定義や性質が述べられた文献としては [8] や [5, Section 6.3] などがある。

Neretin 群の定義を述べる。グラフや tree の基本事項については、[4, Appendix E] などを参考にされたい。なお、rooted tree とは root と呼ばれる、1 つの頂点が指定された tree のことである。さて、d, k は 2 以上の整数とし、rooted tree $\mathcal{T}_{d,k}$ を root は k 個の、他の頂点は $d+1$ 個の頂点とそれぞれ隣接しているようなものとする (図 1)。

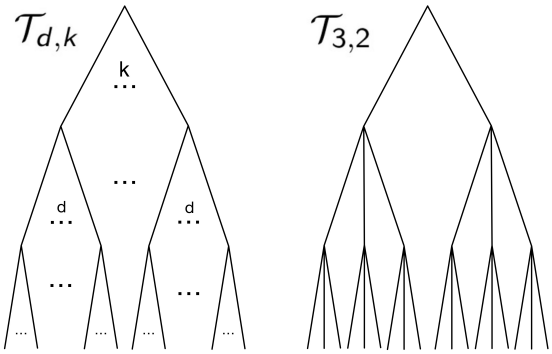


図 1　rooted tree $\mathcal{T}_{d,k}$

この tree の almost automorphism とは、3 つ組み (A, B, φ) である。ここで、A, B は $\mathcal{T}_{d,k}$ の root を含む有限 subtree であって、隣接する頂点の数が 1 であるような頂点の個数が等しいもので、$\varphi\colon \mathcal{T}_{d,k} \setminus A \to \mathcal{T}_{d,k} \setminus B$ は同型写像である。図 2 は $\mathcal{T}_{3,2}$ における almost automorphism の例である。

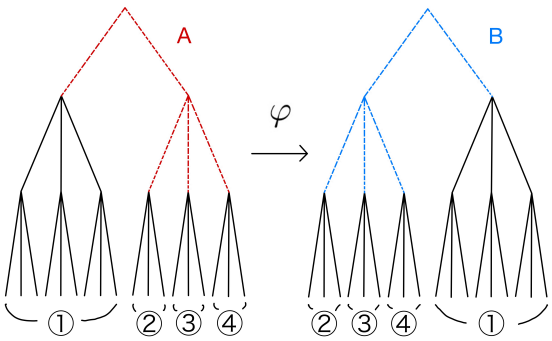


図 2　almost automorphism の例

2 つの almost automorphism $(A, B, \varphi), (A', B', \varphi')$ が同値であるということを、ある有限 subtree $\tilde{A} \subset \mathcal{T}_{d,k}$ であって、A, A' を含み、$\varphi|_{\mathcal{T}_{d,k} \setminus \tilde{A}} = \varphi'|_{\mathcal{T}_{d,k} \setminus \tilde{A}}$ となるものが存在することと定める。以上の準備の下に、**Neretin 群** $\mathcal{N}_{d,k}$ を $\mathcal{T}_{d,k}$ の almost automorphism の同値類がなす群とする。ここ

で、Neretin 群においては almost automorphism そのものではなく、その同値類を考えているため、それらの合成が well-defined に定まり、Neretin 群は本当に群となっていることに注意する。

次に、Neretin 群に位相を導入する。まず、$\mathcal{T}_{d,k}$ の自己同型全体 $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_{d,k})$ は、そのコンパクト開位相により完全不連結コンパクト群である。もちろん $\mathcal{T}_{d,k}$ の自己同型は almost automorphism なので、自然な単射群準同型 $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_{d,k}) \hookrightarrow \mathcal{N}_{d,k}$ が存在する。Neretin 群にはこの埋め込みが連続かつ開となるような位相がただ 1 つ存在する。この位相によって、Neretin 群は完全不連結局所コンパクト群である。

Neretin 群は数多くの興味深い性質を持つということが知られている。ここではそのうちのいくつかを紹介する。Neretin 群はコンパクト生成 ([5]) であり、単純 ([9]) である。そうであるにも関わらず格子を持たない ([2])。Neretin 群は単純であるが格子を持たない局所コンパクト群の最初の例である。2021 年には、P.-E. Caprace, A. Le Boudec, N. Matte Bon によって Neretin 群が I 型ではない (I 型の定義は後述) ということが示された ([6])。その証明は Glimm の定理を用いて行われる。

3 群 von Neumann 環と I 型群

この章では群 von Neumann 環と I 型群の定義、性質を紹介する。この章については、3.1 節に関しては [7] などを、3.2 節、3.3 節に関しては [3] などをそれぞれ参考にされたい。

3.1 von Neumann 環

von Neumann 環とは、恒等作用素を含み弱作用素位相に関して閉であるような $*$-部分代数 $M \subset B(H)$ のことである。ここで、H は (可分)Hilbert 空間であり、$B(H)$ は H 上の有界線型作用素全体のなす $*$-代数である。さらに $B(H)$ の弱作用素位相とは、セミノルムの族 $B(H) \ni x \to |\langle x\xi, \eta\rangle| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ $(\xi, \eta \in H)$ によって定まる局所凸位相である。さて、部分集合 $A \subset B(H)$ に対して $A' = \{x \in B(H) \mid \text{すべての } a \in A \text{ に対して } ax = xa\}$ と定める。二重可換子定理によると、恒等作用素を含む $*$-部分代数 $M \subset B(H)$ が von Neumann 環である (つまり、弱作用素位相に関して閉である) ことと、M が $M''(:= (M')')$ と等しくなることは同値である。

von Neumann 環には、I 型、II 型、III 型と呼ばれるものがある。I 型 von Neumann 環とは、$B(H)$ や可換 von Neumann 環、及びそれらの直和やテンソル積である。他の型についての説明は省略する。任意の von Neumann 環 M は $M = M_{\mathrm{I}} \oplus M_{\mathrm{II}} \oplus M_{\mathrm{III}}$ と一意的に直和分解できるということが知られている。ここで $M_{\mathrm{I}}, M_{\mathrm{II}}, M_{\mathrm{III}}$ はそれぞれ I 型、II 型、III 型 von Neumann 環である。

3.2 局所コンパクト群のユニタリ表現

局所コンパクト群 G の**ユニタリ表現** (π, H_π) とは G から Hilbert 空間 H_π 上のユニタリ作用素のなす群 $\mathcal{U}(H_\pi)$ への群準同型 $\pi\colon G \to \mathcal{U}(H_\pi)$ であって強作用素位相に関して連続なもの、つまり各 $\xi \in H_\pi$ に対して $G \ni g \mapsto \pi(g)\xi \in H_\pi$ が連続であるようなものである。ユニタリ表現の例としては、**左正則表現**がある。これは、局所コンパクト群 G の左 Haar 測度 μ に関して 2 乗可積分な関数のなす Hilbert 空間 $L^2(G)$ への表現 $\lambda\colon G \to \mathcal{U}(L^2(G))$ で $[\lambda(g)f](x) = f(g^{-1}x)$ $(g, x \in G,\ f \in L^2(G))$

によって定まるものである。局所コンパクト群 G のユニタリ表現 (π, H_π) が与えられたとき、この表現により生成される von Neumann 環 $\pi(G)'' \subset B(H_\pi)$ を考えることができる。左正則表現から定まる von Neumann 環 $\lambda(G)'' \subset B(L^2(G))$ を $L(G)$ で表し、G の**群 von Neumann 環**という。

3.3 I 型群

局所コンパクト群 G が **I 型**であるとは、全ての G のユニタリ表現について、その表現により生成される von Neumann 環が I 型となることをいう。I 型群はユニタリ表現の既約分解がうまくいくなど、表現論的によく振舞う群であり、逆に I 型ではない群では既約分解がうまくいかず、そのような群を既約表現を通して理解するのは絶望的である。

可換群やコンパクト群は I 型である。また、d-regular tree の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_d)$[*1] も I 型群である。さらに、I 型群の開部分群も I 型であることが知られている。

4 主結果

この章では主結果を紹介する。主結果は次に述べる Neretin 群のある開部分群 $\mathcal{O}_{d,k} < \mathcal{N}_{d,k}$ に関するものである。

4.1 開部分群 $\mathcal{O}_{d,k}$

先ほど定義した rooted tree $\mathcal{T}_{d,k}$ の 2 つの頂点 v, w に対して、$d(v, w)$ で v と w を結ぶ道の長さを表す。これは $\mathcal{T}_{d,k}$ の頂点集合上の距離である。自然数 n に対して、root からの距離が n 以下の頂点によって生成される $\mathcal{T}_{d,k}$ の subtree を B_n で表す。このとき、B_n は $\mathcal{T}_{d,k}$ の root を含む有限な subtree であるから、$\mathcal{T}_{d,k} \setminus B_n$ の自己同型は almost automorphism である。よって、$\mathcal{T}_{d,k} \setminus B_n$ の自己同型全体の集合を $\mathcal{O}_{d,k}^{(n)}$ で表すこととすると、これは Neretin 群 $\mathcal{N}_{d,k}$ のコンパクト開部分群となる。このコンパクト開部分群の増大列 $\mathrm{Aut}(\mathcal{T}_{d,k}) = \mathcal{O}_{d,k}^{(1)} < \mathcal{O}_{d,k}^{(2)} < \cdots$ の和集合を $\mathcal{O}_{d,k}$ で表すとすると、$\mathcal{O}_{d,k}$ も Neretin 群 $\mathcal{N}_{d,k}$ の開部分群である。

4.2 主結果

以上の準備のもとに、主結果を紹介する。

定理 4.1（[1]） Neretin 群 $\mathcal{N}_{d,k}$ の開部分群 $\mathcal{O}_{d,k}$ の群 von Neumann 環 $L(\mathcal{O}_{d,k})$ は II 型である。特に、この開部分群 $\mathcal{O}_{d,k}$ は I 型でない。

I 型群の開部分群は I 型であるから、この定理を使うと先述の Neretin 群は I 型ではないという主張の別証明が得られる。

定理の証明については詳しく紹介しないが、ある条件を満たす非自明な中心列を構成する[*2]ことで群 von Neumann 環が II 型であることを示すことができる。

[*1] この群はコンパクト開位相により完全不連結局所コンパクト群である。

[*2] 正確には、群 von Neumann 環のコーナーと呼ばれる部分環上に構成する。

参考文献

[1] R. Arimoto; *On the type of the von Neumann algebra of an open subgroup of the Neretin group*. Proc. Amer. Math. Soc. Ser. B, 9 (2022), 311–316.

[2] U. Bader, P.-E. Caprace, T. Gelander, and S. Mozes; *Simple groups without lattices*. Bull. Lond. Math. Soc., 44.1 (2012), 55-67.

[3] B. Bekka and P. de la Harpe; *Unitary Representations of Groups, Duals, and Characters*. Mathematical Surveys and Monographs, 250. American Mathematical Society, Providence, RI, 2020.

[4] N. P. Brown and N. Ozawa; *C^*-algebras and finite-dimensional approximations*. Graduate Studies in Mathematics, 88. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[5] P.-E. Caprace and T. De Medts; *Simple locally compact groups acting on trees and their germs of automorphisms*. Transform. Groups, 16.2 (2011), 375-411.

[6] P.-E. Caprace, A. Le Boudec, and N. Matte Bon; *Piecewise strongly proximal actions, free boundaries and the Neretin groups*. Preprint, arXiv:2107.07765v2, 2021.

[7] J. Dixmier; *Von Neumann Algebras*. North-Holland Mathematical Library, 27. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1981.

[8] Ł. Garncarek and N. Lazarovich; *The Neretin groups*. In P.-E. Caprace and N. Monod (Eds.), New Directions in Locally Compact Groups (London Mathematical Society Lecture Note Series, pp. 131-144). Cambridge University Press, Cambridge, 2018.

[9] C. Kapoudjian; *Simplicity of Neretin's group of spheromorphisms*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 49.4 (1999), 1225–1240.

[10] Yu. A. Neretin; *On combinatorial analogs of the group of diffeomorphisms of the circle*. Izv. Math., 41.2 (1993), 337-349.

On the support of the generalized translation operator

School of Science and Technology, Kwansei Gakuin University, Hyogo
Wentao TENG

Abstract

The (k, a)-generalized Fourier analysis is a far-reaching generalization of classical Fourier analysis developed by S. Ben Saïd, T. Kobayashi and B. Ørsted, where the parameter k comes from Dunkl theory, and the parameter a comes from the "interpolation" of the two $sl(2, \mathbb{R})$ actions on the Weil representation of the metaplectic group and the minimal unitary representation of the conformal group. We will investigate the support of the generalized translation in (k, a)-generalized Fourier analysis of the functions supported in the balls centered at the origin for $a = 1$ and 2 respectively, as well as the support of the measure associated to the spherical mean of the generalized translation operator.

1 Introduction

Dunkl theory is a far-reaching generalization of Fourier analysis and special function theory about root system R with a rich structure parallel to ordinary Fourier analysis and (k, a)-generalized Fourier analysis is a further far-reaching generalization of Dunkl theory. The study of Dunkl theory originates from a generalization of spherical harmonics, in which the finite reflection groups G play the role of orthogonal group $O(N)$ in the classical theory of spherical harmonics. The Lebesgue measure dx, which is invariant under $O(N)$, is substituted by the Dunkl weight measure $dm_k(x) = h_k(x)dx$ which is invariant under the finite reflection group G and parameterized by a multiplicity function k, where

$$h_k(x) = \prod_{\alpha \in R} |\langle \alpha,\ x\rangle|^{k(\alpha)}.$$

The Dunkl operator T_i (see [4]) was constructed in such a way that the intersection of space of the homogeneous polynomials P_m of degree m with the kernel of the corresponding Laplacian $\triangle_k = \sum_{j=1}^{N} T_j^2$ is orthogonal to that of lower degree with respect to the Dunkl weight measure dm_k. And the restrictions of the spaces $\mathcal{H}_k^m\left(\mathbb{R}^N\right) := P_m \cap ker\triangle_k,\ m = 0, 1, \cdots$ to the unit sphere $\mathbb{S}^{N-1}$ are called spherical h-harmonics. For the normalized root system R such that $\langle \alpha, \alpha\rangle = 2$ for all vectors $\alpha \in R$, the Dunkl Laplacian $\triangle_k$ has the following explicit expression $\triangle_k = D_k - E_k$, with

$$D_k = \triangle f(x) + 2 \sum_{\alpha \in R^+} k(\alpha) \frac{\langle \nabla f, \alpha\rangle}{\langle \alpha, x\rangle},$$

where ∇ is the Euclidean gradient and R^+ is any fixed positive subsystem of R, and

$$E_k = 2 \sum_{\alpha \in R^+} k(\alpha) \frac{f(x) - f(\sigma_\alpha(x))}{\langle \alpha, x\rangle^2}.$$

D_k is the G-invariant part of the Dunkl Laplacian. The Dunkl operators commute pairwise and they are in substitute of the ordinary partial derivatives in classical analysis. The joint

eigenfunctions of Dunkl operators (or the eigenfunctions of the Dunkl Laplacian $\triangle_k$) take the place of the exponential functions in classical Fourier transform. The Dunkl transform was then defined correspondingly (see [5]) and has many similar properties with Fourier transform. The discovery of Dunkl operators also gave an explicit expression of the radial part of the Laplacian operator on a flat symmetric space unintentionally. Moreover, Dunkl theory has extensive application in algebra, probability theory and mathematical physics.

More recently, S. Ben Saïd, T. Kobayashi and B. Ørsted [2] gave a further far-reaching generalization of Dunkl theory by introducing a parameter $a > 0$ arisen from the "interpolation" of two $sl(2, \mathbb{R})$ actions. The generalization was motivated by the definition of the classical Fourier transform on $L^2\left(\mathbb{R}^N\right)$ given by Howe [8], where the Fourier transform was defined using the harmonic oscillator $\mathbf{H} =: (\triangle - \|x\|^2)/2$ as

$$F := e^{i\pi N/4} \exp\left(\frac{\pi \mathrm{i}}{2}\mathbf{H}\right).$$

In [2], the authors deformed the Dunkl harmonic oscillator $\triangle_k - \|x\|^2$ via the parameter a such that the (k, a)-generalized harmonic oscillator $\triangle_{k,a} := \|x\|^{2-a} \triangle_k - \|x\|^a$ is symmetric on the Hilbert space $L^2\left(\mathbb{R}^N, \vartheta_{k,a}(x)\, dx\right)$, where $\vartheta_{k,a}(x) = \|x\|^{a-2} h_k(x)$. In the case of $k \equiv 0$, such a-deformed harmonic oscillator is also a deformation of the operator $\|x\| \triangle - \|x\|$ studied by Kobayashi and Mano [9, 10]. The generalized Fourier transform was then defined via the (k, a)-generalized harmonic oscillator as

$$F_{k,a} = e^{i\pi\left(\frac{2\langle k\rangle + N + a - 2}{2a}\right)} \exp\left(\frac{\pi i}{2a}\triangle_{k,a}\right).$$

It reduces to the classical Fourier transform when $k \equiv 0$ and $a = 2$, to the Kobayashi-Mano Hankel transform [9, 10] when $k \equiv 0$ and $a = 1$, and to the Dunkl transform [5] when $k \geq 0$ and $a = 2$. By Schwartz kernel theorem, the (k, a)-generalized Fourier transform has the following integral representation (see [2, (5.8)])

$$F_{k,a} f(\xi) = c_{k,a} \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\, B_{k,a}(\xi, y)\, \vartheta_{k,a}(y)\, dy, \quad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

where $c_{k,a} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\|x\|^a\right) \vartheta_{k,a}(x)\, dx\right)^{-1}$ and $B_{k,a}(x, y)$ is a symmetric kernel. The integral kernel $B_{k,a}(x, y)$ of the (k, a)-generalized Fourier transform takes the place of the exponential function $e^{-i\langle x,y\rangle}$ in classical Fourier transform. It is the eigenfunction of the operator $\|x\|^{2-a} \triangle_k$ for any fixed y (see [2, Theorem 5.7]), i.e.,

$$\|x\|^{2-a} \Delta_k^x B_{k,a}(x, y) = -\|\xi\|^a B_{k,a}(x, y).$$

So, we can consider the operator $\|x\|^{2-a} \Delta_k$ as the a-deformed Dunkl Laplacian in (k, a)-generalized Fourier analysis.

Assume $2\langle k\rangle + N + a - 3 \geq 0$. For $a = \frac{2}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, one can define the (k, a)-generalized translation on $L^2\left(\mathbb{R}^N, \vartheta_{k,a}(x)\, dx\right)$ as

$$F_{k,a}(\tau_y f)(\xi) := B_{k,a}(y, \xi)\, F_{k,a}(f)(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

The above definition makes sense because for $a = \frac{2}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $F_{k,a}$ is an isometry on $L^2(\mathbb{R}^N, \vartheta_{k,a}(x)\, dx)$ from the inversion formula [2, Theorem 5.3], and in this case its integral kernel $B_{k,a}(x, y)$ is uniformly bounded by 1 (see [3]). In this case the (k, a)-generalized translation can also be written via an integral as

$$\tau_y f(x) = c_{k,a} \int_{\mathbb{R}^N} B_{k,a}(x, \xi)\, B_{k,a}(y, \xi)\, F_{k,a}(f)(\xi)\, \vartheta_{k,a}(\xi)\, d\xi$$

for $f \in \mathcal{L}_k^1\left(\mathbb{R}^N\right)$, where $\mathcal{L}_k^1\left(\mathbb{R}^N\right) := \left\{f \in L^1\left(\mathbb{R}^N, \vartheta_{k,a}(x)\,dx\right) : \; F_{k,a}(f) \in L^1\left(\mathbb{R}^N, \vartheta_{k,a}(x)\,dx\right)\right\}$. This formula holds true on Schwartz space $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^N\right)$ since $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^N\right)$ is a subspace of $\mathcal{L}_k^1\left(\mathbb{R}^N\right)$.

For the two particular cases when $a = 1$ and $a = 2$ (the Dunkl case) assuming that $2\langle k\rangle + N + a - 3 \geq 0$ of (k, a)-generalized Fourier analysis, the analytic structure is much richer because we have the formula of the generalized translation operator for radial functions. The radial formula for $a = 2$ was found by Rösler [11] and for $a = 1$ that was found by S. Ben Saïd [1]. The case when $a = 2$ (Dunkl theory) was intensively studied in the last twenty years and the study for case when $a = 1$ is still at its infancy. The (k, a)-generalized translation τ_x corresponds to the classical translation operator $f \mapsto f(x - \cdot)$ for $a = 1$, and corresponds to $f \mapsto f(x + \cdot)$ for $a = 2$. This is because for $a = 1$, the inversion formula of the generalized Fourier analysis is $F_{k,1}^{-1}(f) = F_{k,1}(f)$, and for $a = 2$, the inversion formula is $\left(F_{k,2}^{-1} f\right)(x) = (F_{k,2} f)(-x)$ (see [2, Theorem 5.3]). We will focus on the two particular cases for $a = 1$ and $a = 2$ in this report, and investigate the support of the generalized translation for the two cases respectively.

2 The support of the generalized translation of f, $suppf = B(0, r)$

2.1 The case of $a = 2$ (the Dunkl case)

The following is the formula of the Dunkl translation (the case of $a = 2$) for radial functions

$$\tau_x f(-y) = \int_{\mathbb{R}^N} (\widetilde{f} \circ A)(x,\ y,\ \eta) d\mu_x(\eta),\ x,\ y \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

where $f(x) = \widetilde{f}(\|x\|)$ and

$$A(x,\ y,\ \eta) = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle y,\ \eta\rangle} = \sqrt{\|x\|^2 - \|\eta\|^2 + \|y - \eta\|^2},$$

It was first proved by Rösler [11] for Schwartz functions, and was then extended to all continuous radial functions in [6].

Denote $B(x, r)$ to be the closed ball $\{y \in \mathbb{R}^N : \|x - y\| \leq r\}$. We characterize the support of the the Dunkl translation of nonnegative radial functions on $L^2(m_k)$ in the following theorem.

Theorem 2.1. *([12]) If the multiplicity function $k > 0$ and let f be a nonnegative radial function on $L^2(m_k)$, $suppf = B(0, r)$, then for any $x \in \mathbb{R}^N$,*

$$supp\tau_x f(-\cdot) = \bigcup_{g \in G} B(gx,\ r).$$

Proof. Define the distance between the two orbits $G.x$ and $G.y$ for $a = 2$ as $d_G(x, y) := \underset{g \in G}{min}||g \cdot y - x||$. For the proof of $supp\tau_x f \subseteq \bigcup_{g \in G} B(gx, r)$, we only need to notice that

$$A(x,\ y,\ \eta) \geq d_G(x,\ y),\ \eta \in co(G.x).$$

For the converse part $\bigcup_{g \in G} B(gx, r) \subseteq supp\tau_x f$, we prove the theorem for continuous nonnegative radial functions from the radial formula (2) first, and then prove for all nonnegative radial function on $L^2\left(\mathbb{R}^N, \vartheta_{k,1}(x)\,dx\right)$. □

2.2 The case of $a = 1$

The following is the formula of the generalized translation for the case of $a = 1$ for radial functions For any radial function $f \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^N\right)$, i.e., τ_y can be expressed as follows (see [1])

$$\begin{aligned}\tau_y f(x) =& \frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}+\langle k\rangle\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{N-2}{2}+\langle k\rangle\right)}\times \\ & V_k\left(\int_{-1}^{1} f_0\left(\|x\|+\|y\|-\sqrt{2\left(\|x\|\,\|y\|+\langle\cdot,y\rangle\right)}u\right)\left(1-u^2\right)^{\frac{N}{2}+\langle k\rangle-2}du\right)(x), \qquad (2)\end{aligned}$$

where $f(x) = f_0(\|x\|)$ and $\langle k\rangle + \frac{N-2}{2} > 0$. This radial formula was prove for Schwartz dunctions in [1] and was then extended to all continuous radial functions in [13].

For $x, y \in \mathbb{R}^N$, define a function d from $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ to $\mathbb{R}$ as

$$\begin{aligned}d(x,y) :&= \sqrt{\|x\|+\|y\|-\sqrt{2\left(\|x\|\,\|y\|+\langle x,y\rangle\right)}} \\ &= \sqrt{\|x\|+\|y\|-2\sqrt{\|x\|\,\|y\|}\cos\frac{\theta}{2}} \geq \left|\sqrt{\|x\|}-\sqrt{\|y\|}\right|,\end{aligned}$$

where $\theta = \arccos\frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. It was shown in [13] that the function $d(x,y)$ is a metric and $\left(\mathbb{R}^N, d\right)$ is a complete metric space. Denote $B(x,r)$ to be the ball $B(x,r) := \left\{y \in \mathbb{R}^N : d(x,y) \leq r\right\}$. We can then give a characterization of support of the $(k,1)$-generalized translation of a function supported in $B(0,r) = \left\{y \in \mathbb{R}^N : \sqrt{\|y\|} \leq r\right\}$ via the metric $d(x,y)$.

Theorem 2.2. *([13]) Let $f = f_0(\|\cdot\|)$ be a nonnegative radial function on $L^2\left(\mathbb{R}^N, \vartheta_{k,1}(x)\,dx\right)$, $supp f = B(0,r)$, then*

$$supp\tau_x f = \bigcup_{g\in G} B(gx,r).$$

Proof. Define the distance between the two orbits $G.x$ and $G.y$ for $a = 1$ as $d_G(x,y) := \min_{g\in G} d(gx,y)$. For the proof of $supp\tau_x f \subseteq \bigcup_{g\in G} B(gx,r)$, we only need to notice that

$$\sqrt{\|x\|+\|y\|-\sqrt{2\left(\|x\|\,\|y\|+\langle\eta,y\rangle\right)}u} \geq d_G(x,y),\ \eta \in co(G.x),\ u \in [-1,1].$$

For the converse part $\bigcup_{g\in G} B(gx,r) \subseteq supp\tau_x f$, we prove the theorem for continuous nonnegative radial functions from the radial formula (2) first, and then prove for all nonnegative radial function on $L^2\left(\mathbb{R}^N, \vartheta_{k,1}(x)\,dx\right)$. □

3 The support of the measure associated to spherical mean

We conjecture the product formula of the integral kernels of the (k,a)-generalized Fourier transform

$$B_{k,a}(x,z)B_{k,a}(y,z) = \int_{\mathbb{R}^N} B_{k,a}(\xi,z)d\nu_{x,y}^{k,a}(\xi),\ z \in \mathbb{C}^N,$$

where the measures $d\nu_{x,y}^{k,a}$ are signed Borel measures on $\mathbb{R}^N$. This implies the following integral representation of the (k,a)-generalized translation

$$\tau_x f(y) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi)d\nu_{x,y}^{k,a}(\xi).$$

In the following we denote $\tau_x f(y) =: f(x * y)$ for convenience because it has the property $\tau_x f(y) = \tau_y f(x)$. Then we can define

$$B_{k,a}(x * y, z) := B_{k,a}(x, z) B_{k,a}(y, z)$$

from the above.

The generalized spherical mean operator $f \mapsto M_f$ on $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ is defined as

$$M_f(x,t) := \frac{1}{d_{k,a}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} f(x * ty) \vartheta_{k,a}(y) d\sigma(y), \quad (x \in \mathbb{R}^N,\, t \geq 0),$$

where $d\sigma$ is the spherical measure and $d_{k,a} = \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \vartheta_{k,a}(x)\, d\sigma(x)$.

Proposition 3.1. *([7, Proposition 5.7]) If $x, y \in \mathbb{R}^d$, $x = \rho x'$, $y = vy'$, then*

$$\frac{1}{d_{k,a}} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} B_{k,a}(x, vy') p(y') \vartheta_{k,a}(x)\, d\sigma(y') = \frac{e^{-\frac{i\pi m}{a}} \Gamma(\lambda_a + 1)}{a^{2m/a} \Gamma(\lambda_{k,a,m} + 1)} v^m j_{\lambda_{k,a,m}} \left(\frac{2}{a} (\rho v)^{a/2} \right) p(x),$$

where p is a polynomial of degree m and $j_{\lambda_{k,a,m}}(z)$ is the Bessel function.

For f to be $B_{k,a}(\cdot, z)$ with $z \in \mathbb{R}^N$, from Proposition 3.1,

$$M_f(x,t) = B_{k,a}(x,z) j_{\lambda_a} \left(\frac{2}{a} |tz|^{a/2} \right). \tag{3}$$

And for $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} M_f(x,t) &= \frac{c_{k,a}}{d_{k,a}} \int_{\mathbb{S}^{N-1}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} B_{k,a}(x,\xi) B_{k,a}(ty,\xi) F_{k,a}(f)(\xi) \vartheta_{k,a}(\xi)\, d\xi \right) \vartheta_{k,a}(y) d\sigma(y) \\ &= \frac{c_{k,a}}{d_{k,a}} \int_{\mathbb{R}^N} B_{k,a}(x,\xi) F_{k,a}(f)(\xi) \vartheta_{k,a}(\xi)\, d\xi \int_{\mathbb{S}^{N-1}} B_{k,a}(ty,\xi) \vartheta_{k,a}(y) d\sigma(y) \\ &= c_{k,a} \int_{\mathbb{R}^N} B_{k,a}(x,\xi) j_{\lambda_a} \left(\frac{2}{a} |t\xi|^{a/2} \right) F_{k,a}(f)(\xi) \vartheta_{k,a}(\xi)\, d\xi. \end{aligned} \tag{4}$$

For $\alpha \geq -1/2$, denote by A^t_α the singular Sturm-Liouville operator

$$A^t_\alpha := \partial_t^2 + \frac{2\alpha + 1}{t} \partial_t,\ t > 0.$$

For fixed $z \in \mathbb{C}$, the Bessel functions $j_\alpha(tz)$ are eigenfunctions of the Sturm-Liouville operator (see [11]). By substituting t by $\sqrt{\frac{2}{a}} t^{\frac{a}{2}}$, we get the a-deformed Sturm-Liouville operator

$$\begin{aligned} A^t_{a,\alpha} &= \frac{2}{a} \left(\frac{1}{t^{a-2}} \partial_t^2 + \left(1 - \frac{a}{2}\right) \frac{1}{t^{a-1}} \partial_t \right) + \frac{2\alpha + 1}{t^{a-1}} \partial_t \\ &= \frac{2}{a} \left(\frac{1}{t^{a-2}} \partial_t^2 + \frac{a\alpha + 1}{t^{a-1}} \partial_t \right). \end{aligned}$$

And for fixed $z \in \mathbb{C}$, the Bessel functions $j_\alpha \left(\frac{2}{a} (tz)^{a/2} \right)$ are eigenfunctions of the a-deformed Sturm-Liouville operator, i.e.,

$$A^t_{a,\alpha} j_\alpha \left(\frac{2}{a} (tz)^{a/2} \right) = -\frac{2}{a} z^a j_\alpha \left(\frac{2}{a} (tz)^{a/2} \right).$$

Therefore, $u = M_f(x,t)$ is the solution of the equation for the Darboux-type differential-reflection operator $2\,\|x\|^{2-a}\,\Delta_k^x - aA_{a,\lambda_a}^t$,

$$\begin{aligned} &(2\,\|x\|^{2-a}\,\Delta_k^x - aA_{a,\lambda_a}^t)u \;=\; 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+\,; \\ &u(x,0) = f(x),\; u_t(x,0) = 0 \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{5}$$

as $B_{k,a}\,(x,\cdot)$ is eigenfunction of the operator $\|x\|^{2-a}\,\triangle_k^x$.

For fixed $x \in \mathbb{R}^N$ and $t \geq 0$, consider the linear functional

$$\Phi_{x,t}\,:\, f \mapsto M_f(x,t).$$

It is represented by a compactly supported measure $\sigma_{x,t}^{k,a} \in M^1(\mathbb{R}^N)$, where $M^1(\mathbb{R}^N)$ stand for the spaces of regular bounded complex Borel measures on $\mathbb{R}^N$,

$$M_f(x,t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} f\,d\sigma_{x,t}^{k,a} \quad \text{for all } \; f \in C^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{6}$$

From (3) and (4), (6) is equivalent to the following product formula

$$B_{k,a}(x,z)j_{\lambda_a}\left(\frac{2}{a}\,t\,|z|^{a/2}\right) = \int_{\mathbb{R}^N} B_{k,a}(\xi,z)\,d\sigma_{x,t}^{k,a}(\xi).$$

We will investigate the support of the measure for $\sigma_{x,t}^{k,a}$ the case of $a = 2$ and $a = 1$ respectively.

3.1 The case of $a = 2$ (the Dunkl case)

We consider the domain of dependence of the wave equation associated to the G-invariant part D_k of the Dunkl Laplacian $\triangle_k$. Denote

$$C(x_0,t_0) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \,:\, |x - x_0| \leq t_0 - t\}$$

to be the wave cone. The following theorem shows that $C(x_0,t_0)$ is the domain of dependence of the wave equation. That is to say, the values in $C(x_0,t_0)$ of the solution u depend only on the initial values for $t = 0$ of u and u_t in $|x - x_0| \leq t_0$, regardless of the perturbation of the values outside of $|x - x_0| \leq t_0$.

Theorem 3.2. *(see [11, Theorem 4.4]) Suppose that u is a C^2-solution of the wave equation $(D_k - \partial_t^2)u = 0$, defined in the cone $C(x_0,t_0)$ and satisfying*

$$u_t(x,0) = u(x,0) = 0 \quad \textit{for all } x \in \mathbb{R}^N \textit{ with } |x - x_0| \leq t_0.$$

Then u vanishes in $C(x_0,t_0)$.

Proof. Energy method. □

We can then characterize the support of the measure associated to the spherical mean for $a = 2$.

Theorem 3.3. *(see [11, Theorem 4.1] For $a = 2$, the support of the measure $\sigma_{x,t}^k$ associated to $M_f(x,t)$ satisfies*

$$\textit{supp}\,\sigma_{x,t}^k \subseteq\; K(x,t) := \bigcup_{g \in G} \{\xi \in \mathbb{R}^N : |\xi - gx| \leq t\}.$$

Sketch of the Proof. We involve the Riemann-Liouville transform with parameter $\alpha > -1/2$ on $\mathbb{R}_+$. It is given by

$$\mathcal{R}_\alpha f(t) \;=\; \frac{2\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+1/2)} \int_0^1 f(st)(1-s^2)^{\alpha-1/2} ds \tag{7}$$

for $f \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, see [**?**]. The operator $\mathcal{R}_\alpha$ satisfies the intertwining property

$$A_\alpha \mathcal{R}_\alpha \;=\; \mathcal{R}_\alpha \frac{d^2}{dt^2}. \tag{8}$$

Put $u_f(x,t) := (\mathcal{R}_\lambda^t)^{-1} M_f(x,t)$, which is still G-invariant with respect to x. Then according to (5) and the above intertwining property, $u = u_f$ belongs to $C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+)$ and solves the initial value problem

$$\begin{aligned} &(D_k - \partial_t^2)u \;=\; 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+; \\ &u(x,0) = f(x),\; u_t(x,0) = 0 \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{9}$$

Now suppose in addition that $\operatorname{supp} f \cap K(x,t) = \emptyset$. Then Theorem 3.4 implies that $u_f(x,s) = 0$ for all $0 \le s \le t$. From the explicit form (7) of the Riemann-Liouville transform $\mathcal{R}_\lambda$ we further deduce that

$$\int_{\mathbb{R}^N} f \, d\widetilde{\sigma}^k_{x,t} \;=\; M_f(x,t) \;=\; \mathcal{R}_\lambda^t u_f(x,t) \;=\; 0$$

□

3.2 The case of $a = 1$ (Ongoing work)

Domain of dependence. Consider a class of special second-order linear partial differential equations of the form

$$u_{tt} + Lu = 0 \;\; (x \in \mathbb{R}^N,\; t > 0), \tag{10}$$

where L has the special form

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x) D_{ij} u,$$

with smooth symmetric coefficients $(a^{ij}(x))$ satisfying uniform ellipticity condition on $\mathbb{R}^N$. In this case, we say the operator $\partial_{tt} + L$ is uniformly hyperbolic.

Let $q(x)$ be a continuous function on $\mathbb{R}^N$, positive and smooth in $\mathbb{R}^N \backslash \{x_0\}$ and $q(x_0) = 0$, and assume that

$$\sum_{i,j=1}^N a^{ij}(x) D_i q(x) D_j q(x) \le 1,\; x \in \mathbb{R}^N \backslash \{x_0\}.$$

Consider the curved backward cone

$$C(x_0, t_0) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+ \,:\, q(x) \le t_0 - t\}.$$

Then it is well known in PDE that $C(x_0,t_0)$ is the domain of dependence of the hyperbolic equation (10). Now let $L = \|x\| \triangle$ and $q(x) = \sqrt{\|x\| + \|x_0\| - \sqrt{2\left(\|x\|\,\|x_0\| + \langle x, x_0\rangle\right)}}$. Then it can be verified that

$$\sum_{i=1}^N \|x\| \, D_i q(x) D_i q(x) = 1,\; x \in \mathbb{R}^N \backslash \{x_0\}.$$

And so

$$C(x_0,t_0)=\{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+\ : d(x,x_0)\le t_0-t\},$$

where $d(x,x_0)=\sqrt{\|x\|+\|x_0\|-\sqrt{2\left(\|x\|\,\|x_0\|+\langle x,x_0\rangle\right)}}$, is the domain of dependence of the hyperbolic equation (10) for $L=\|x\|\,\triangle$.

Now we consider the domain of dependence hyperbolic equation (10) for the deformed Dunkl Laplacian $\|x\|\,\triangle_k$ in $(k,1)$-generalized Fourier analysis.

Theorem 3.4. *Let u be a smooth solution to the wave equation $u_{tt}+\|x\|\,\triangle_k u=0$ $(x\in\mathbb{R}^N,\ t>0)$. If $u_t(x,0)=u(x,0)=0$ for all $x\in\mathbb{R}^N$ with $d(x,x_0)\le t_0$. Then u vanishes in $C(x_0,t_0)$.*

Proof. The proof is still ongoing. It will be given via a modification of the energy method for the hyperbolic equation (10). □

We can then characterize the support of the measure associated to the spherical mean for $a=1$.

Theorem 3.5. *For $a=1$, the support of the measure $\sigma^k_{x,t}$ associated to $M_f(x,t)$ satisfies*

$$supp\,\sigma^k_{x,t}\subseteq\ K(x,\sqrt{2t}),$$

where

$$K(x,t):=\bigcup_{g\in G}\{\xi\in\mathbb{R}^N : d(\xi,gx)\le t\}$$

and $d\,(x,y)=\sqrt{\|x\|+\|y\|-\sqrt{2\left(\|x\|\,\|y\|+\langle x,y\rangle\right)}}$.

Sketch of the Proof. The proof is ongoing. We substitude t by $\sqrt{2t}$ ($\sqrt{\frac{2}{a}}t^{\frac{a}{2}}$ for $a=1$) in (8)

$$A_{1,\alpha}\mathcal{R}_\alpha\ =\ \mathcal{R}_\alpha\left(2t\frac{d^2}{dt^2}+\frac{d}{dt}\right).$$

Put $u_f(x,t):=(\mathcal{R}^t_\lambda)^{-1}M_f(x,t)$. It is G-invariant with respect to x. Then according to (5) and the above intertwining property, $u=u_f$ belongs to $C^\infty(\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+)$ and solves the initial value problem

$$\begin{aligned}&(\|x\|\,\triangle_k-\left(2t\partial_t^2+\partial_t\right))u\ =\ 0\quad\text{in }\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}_+;\\&u(x,0)=f(x),\ (2tu_{tt}+u_t\,)\,(x,0)=0\quad\text{for all }x\in\mathbb{R}^N.\end{aligned}\tag{11}$$

Now suppose in addition that $\operatorname{supp} f\cap K(x,\sqrt{2t})=\emptyset$. Then Theorem 3.4 implies that $u_f(x,s)=0$ for all $0\le\sqrt{2s}\le\sqrt{2t}$. From the explicit form (7) of the Riemann-Liouville transform $\mathcal{R}_\lambda$ we further deduce that

$$\int_{\mathbb{R}^N}f\,d\widetilde{\sigma}^k_{x,t}\ =\ M_f(x,t)\ =\ \mathcal{R}^t_\lambda u_f(x,t)\ =\ 0$$

□

References

[1] S. Ben Saïd, L. Deleaval, Translation Operator and Maximal Function for the $(k,1)$-Generalized Fourier Transform, Journal of Functional Analysis, vol. 279, no. 8 (2020), 108706.

[2] S. Ben Saïd, T. Kobayashi and B. Ørsted, Laguerre semigroup and Dunkl operators, Compos. Math., 148(4)(2012), 1265–1336.

[3] D. Constales, H. De Bie and P. Lian, Explicit formulas for the Dunkl dihedral kernel and the (k, a)-generalized Fourier kernel, J. Math. Anal. Appl. 460(2) (2018) 900–926

[4] C.F. Dunkl, Differential-difference operators associated to reflection groups, Trans. Amer. Math. Soc., 311, no. 1(1989), 167–183.

[5] C.F. Dunkl, Hankel transforms associated to finite reflection groups, Hypergeometric Functions on Domains of Positivity, Jack Polynomials, and Applications, Proceedings of an AMS Special Session Held March 22-23, 1991 in Tampa, Florida, Vol. 138, p. 123, American Mathematical Soc..

[6] F. Dai, H. Wang, A transference theorem for the Dunkl transform and its applications, J. Funct. Anal. 258.12(2010), 4052–4074.

[7] D.V. Gorbachev, V.I. Ivanov, S.Yu. Tikhonov, On the kernel of the (κ, a)-generalized Fourier transform, arXiv:2210.15730.

[8] R. Howe, The oscillator semigroup. The mathematical heritage of Hermann Weyl (Durham, NC, 1987), 61–132, Proc. Sympos. Pure Math., 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988.

[9] T. Kobayashi, G. Mano, The inversion formula and holomorphic extension of the minimal representation of the conformal group, Harmonic Analysis, Group Representations, Automorphic Forms and Invariant Theory: In honor of Roger Howe, (eds. J. S. Li, E. C. Tan, N. Wallach and C. B. Zhu), World Scientific(2007), 159–223.

[10] T. Kobayashi, G. Mano, The Schrödinger model for the minimal representation of the indefinite orthogonal group $O(p, q)$, Mem. Amer. Math. Soc. 213(1000), 2011.

[11] M. Rösler, Positivity of Dunkl's intertwining operator. Duke Mathematical Journal, vol. 98, no. 3 (1999) pp. 445–463.

[12] W. Teng, Dunkl translations, Dunkl–type BMO space and Riesz transforms for the Dunkl transform on L^∞, Funct Anal Its Appl 55, 304–315 (2021).

[13] W. Teng, Imaginary powers of -generalized harmonic oscillator, Complex Anal. Oper. Theory 16, 89 (2022).

Applications of p-harmonic transplantation for functional inequalities involving a Finsler norm

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka City University
Sadaf Habibi

Abstract

We prove several inequalities such as Sobolev, Poincaré, logarithmic Sobolev, which involve a general norm (Finsler norm) with accurate information of extremals. These inequalities are valid for Finsler radially symmetric functions. We use a special case of p-harmonic transplantation between symmetric functions. This manuscript is based on our recent paper [7].

1 Introduction

The Sobolev inequality

$$S_{N,p}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{p^*}dx\right)^{p/p^*}\leq\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx \tag{1}$$

which holds for every $u\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, where $N\geq 2$, $1\leq p<N$, and $p^*=\frac{Np}{N-p}$, is one of the fundamental tools in analysis. The best constant $S_{N,p}$ is known as

$$\begin{cases} S_{N,p}=\pi^{p/2}N\left(\frac{N-p}{p-1}\right)^{p-1}\left(\frac{\Gamma(\frac{N}{p})\Gamma(1+\frac{N}{p'})}{\Gamma(N)\Gamma(1+\frac{N}{2})}\right)^{p/N}, & 1<p<N,\\ S_{N,1}=\pi^{1/2}\frac{N}{\left(\Gamma(1+\frac{N}{2})\right)^{1/N}}, & p=1,\end{cases} \tag{2}$$

where $p'=\frac{p}{p-1}$, see [1] and [12]. It is well-known that the best constant for $1<p<N$ is achieved by a family of functions of the form

$$U(x)=\left(a+b|x|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{-\frac{N-p}{p}},\quad a,b>0 \tag{3}$$

and its translation $U(x-x_0)$ for $x_0\in\mathbb{R}^N$. If we replace $\mathbb{R}^N$ by a domain Ω different from $\mathbb{R}^N$, then still Sobolev's inequality with the same best constant holds true for functions in $W_0^{1,p}(\Omega)$, however, the attainability of the constant is lost.

Recently, Ioku [9] obtained a new Sobolev type inequality for radially symmetric functions on the ball B_R with radius $R>0$, which admits extremals for the best constant in the inequality.

Theorem A (Ioku [9])

Let $N\geq 2$, $1<p<N$ and $p^*=\frac{Np}{N-p}$. Then for any radially symmetric function $v\in W_0^{1,p}(B_R)$, the inequality

$$S_{N,p}\left(\int_{B_R}\frac{|v(y)|^{p^*}}{\left(1-(\frac{|y|}{R})^{\frac{N-p}{p-1}}\right)^{\frac{p(N-1)}{N-p}}}dy\right)^{p/p^*}\leq\int_{B_R}|\nabla v(y)|^p dy$$

holds true. Here $S_{N,p}$ on the left-hand side is the same constant in (2)*. The equality occurs if and only if v is of the form*

$$v(y) = \left(a + b \left(|y|^{\frac{p-N}{p-1}} - R^{\frac{p-N}{p-1}} \right)^{\frac{p}{p-N}} \right)^{\frac{p-N}{p}}$$

for some $a, b > 0$.

Ioku obtained the above theorem by exploiting a transformation between radially symmetric functions on B_R and on the whole $\mathbb{R}^N$. Then the inequality in Theorem A is the "disguised" version of (1) under the transformation. His transformation is a special case of p-harmonic transplantation initiated by J. Hersh [8], see also [3]. This point of view is pursued in [11].

In this paper, we use the same transformation by Ioku, but between radially symmetric functions on the whole space (resp. on the ball) and *Finsler radially symmetric* functions on the ball (resp. on the whole space). The resulting inequalities include a general norm (Finsler norm) with the precise information on the extremizers of the best constant involved. These inequalities will be fundamental tools on the analysis of *anisotropy* in many fields of science, where the anisotropy is realized to introduce a general norm, instead of the usual (Euclidean) norm.

2 An integral formula for Finsler symmetric functions

Let $H : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$, $N \geq 2$ be a function such that H is convex, $H(\xi) \geq 0$, $H(\xi) = 0$ if and only if $\xi = 0$, and satisfies

$$H(t\xi) = |t|H(\xi), \quad \text{for any } \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ and for any } t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

By (4), H must be even: $H(-\xi) = H(\xi)$ for all $\xi \in \mathbb{R}^N$. We assume in this paper that $H \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. We call H a *Finsler norm* on $\mathbb{R}^N$. Since all norms on $\mathbb{R}^N$ are equivalent to each other, we see the existence of positive constants α and β such that

$$\alpha|\xi| \leq H(\xi) \leq \beta|\xi|, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

The dual norm of H is the function $H^0 : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$ defined by

$$H^0(x) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}} \frac{\xi \cdot x}{H(\xi)}.$$

It is well-known that H^0 is also a norm on $\mathbb{R}^N$ and satisfies the inequality

$$\frac{1}{\beta}|x| \leq H^0(x) \leq \frac{1}{\alpha}|x|, \quad \text{for any } x \in \mathbb{R}^N.$$

The set

$$\mathcal{W} = \{x \in \mathbb{R}^N \mid H^0(x) < 1\}$$

is called the *Wulff ball*, or the H^0-unit ball, and we denote $\kappa_N = \mathcal{H}^N(\mathcal{W})$, where $\mathcal{H}^N$ denotes the N-dimensional Hausdorff measure on $\mathbb{R}^N$. We also denote

$$\mathcal{W}_r = \{x \in \mathbb{R}^N \mid H^0(x) < r\}$$

for any $r > 0$.

Here we just recall some properties of H and H^0. These will be proven by using the homogeneity property of H and H^0.

Proposition 2.1. *Let H be a Finsler norm on $\mathbb{R}^N$. Then the following properties hold true:*

(1) $|\nabla_\xi H(\xi)| \leq C$ *for any* $\xi \neq 0$.

(2) $\nabla_\xi H(\xi) \cdot \xi = H(\xi)$, $\nabla_x H(x) \cdot x = H(x)$ *for any* $\xi \neq 0$, $x \neq 0$.

(3) $(\nabla_\xi H)(t\xi) = \frac{t}{|t|}(\nabla_\xi H)(\xi)$ *for any* $\xi \neq 0$, $t \neq 0$.

(4) $H\left(\nabla_x H^0(x)\right) = 1$, $H^0\left(\nabla_\xi H(\xi)\right) = 1$.

(5) $H^0(x)\left(\nabla_\xi H\right)\left(\nabla_x H^0(x)\right) = x$.

For a domain $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ and a Borel set $E \subset \mathbb{R}^N$, the *anisotropic H-perimeter* of a set E with respect to Ω is defined as

$$P_H(E;\Omega) = \sup\left\{\int_{E\cap\Omega} \mathrm{div}\sigma dx \mid \sigma \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N), H^0(\sigma(x)) \leq 1\right\}.$$

If E is Lipschitz, then it holds $P_H(E;\Omega) = \int_{\Omega\cap\partial^* E} H(\nu) d\mathcal{H}^{N-1}$, where $\partial^* E$ denotes the reduced boundary of the set E and $\nu(x)$ is the measure theoretic outer unit normal of $\partial^* E$.

If H^0 is Lipschitz, then $\partial\mathcal{W}$ is also Lipschitz and $\partial^*\mathcal{W} = \partial\mathcal{W}$ holds. In this case, the outer unit normal of $\mathcal{W}$ is given by $\nu = \frac{\nabla H^0}{|\nabla H^0|}$. Thus

$$\begin{aligned} P_H(\mathcal{W};\mathbb{R}^N) &= \int_{\partial\mathcal{W}} H(\nu(x))\, d\mathcal{H}^{N-1}(x) \\ &= \int_{\partial\mathcal{W}} H(\frac{\nabla H^0}{|\nabla H^0|})\, d\mathcal{H}^{N-1}(x) \\ &= \int_{\partial\mathcal{W}} \frac{1}{|\nabla H^0|}\, d\mathcal{H}^{N-1}(x). \end{aligned}$$

Here we have used $H(\nabla H^0(x)) = 1$ by Proposition 2.1 and the positive 1-homogeneity of H. Similarly, we have

$$P_H(\mathcal{W}_r;\mathbb{R}^N) = \int_{\partial\mathcal{W}_r} \frac{1}{|\nabla H^0|}\, d\mathcal{H}^{N-1}(x) \tag{5}$$

for any $r > 0$. On the other hand, by the fact $H^0(x) \equiv 1$ on $\partial\mathcal{W}$, the formula $x \cdot \nabla H^0(x) = H^0(x)$ by Proposition 2.1, and the divergence theorem, we have

$$\begin{aligned} P_H(\mathcal{W};\mathbb{R}^N) &= \int_{\partial\mathcal{W}} \frac{1}{|\nabla H^0|}\, d\mathcal{H}^{N-1}(x) \\ &= \int_{\partial\mathcal{W}} \frac{H^0(x)}{|\nabla H^0(x)|}\, d\mathcal{H}^{N-1}(x) \\ &= \int_{\partial\mathcal{W}} \frac{x \cdot \nabla H^0(x)}{|\nabla H^0(x)|}\, d\mathcal{H}^{N-1}(x) \\ &= \int_{\partial\mathcal{W}} x \cdot \nu\, d\mathcal{H}^{N-1}(x) \\ &= \int_{\mathcal{W}} \mathrm{div} x dx = N\mathcal{H}^N(\mathcal{W}). \end{aligned}$$

Thus we obtain

$$P_H(\mathcal{W};\mathbb{R}^N) = N\mathcal{H}^N(\mathcal{W}) = N\kappa_N. \tag{6}$$

Similarly, we have

$$P_H(\mathcal{W}_r;\mathbb{R}^N) = N\kappa_N r^{N-1} \quad (r > 0). \tag{7}$$

In the following, we call a function g of the form $g(x) = h(H^0(x))$ for some $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ as H^0-symmetric , or *Finsler symmetric* function.

The following is a key fact in this paper. Though the statement is widely known, we prove it here for the sake of completeness.

Proposition 2.2. (Polar formula) *Let $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ be such that $h \circ H^0 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Then it holds that*

$$\begin{aligned}\int_{H^0(x)<t} h(H^0(x))dx &= P_H(\mathcal{W};\mathbb{R}^N)\int_0^t h(s)s^{N-1}ds \\ &= N\kappa_N \int_0^t h(s)s^{N-1}ds. \end{aligned} \tag{8}$$

In particular, if $h \circ H^0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, then

$$\int_{\mathbb{R}^N} h(H^0(x))dx = N\kappa_N \int_0^\infty h(s)s^{N-1}ds$$

holds.

For the proof of Proposition 2.2, we use the coarea formula in the following form.

Theorem 2.3. (Coarea formula) *Let $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ be Lipschitz and let $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Then it holds that*

$$\int_{f(x)<t} g(x)dx = \int_0^t \int_{f(x)=s} \frac{g(x)}{|\nabla f(x)|} d\mathcal{H}^{N-1}(x)ds. \tag{9}$$

Proof of Proposition 2.2.

For $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ as above, put $g(x) = h(H^0(x))$, $f(x) = H^0(x)$ in Theorem 2.3. Then (9), (5), (7), and (6) yield that

$$\begin{aligned}\int_{H^0(x)<t} h(H^0(x))dx &\overset{(9)}{=} \int_0^t \int_{H^0(x)=s} \frac{h(H^0(x))}{|\nabla H^0(x)|} d\mathcal{H}^{N-1}(x)ds \\ &= \int_0^t h(s)\left(\int_{\partial\mathcal{W}_s} \frac{1}{|\nabla H^0(x)|} d\mathcal{H}^{N-1}(x)\right)ds \\ &\overset{(5)}{=} \int_0^t h(s)P_H(\mathcal{W}_s;\mathbb{R}^N)ds \\ &\overset{(7)}{=} \int_0^t h(s)P_H(\mathcal{W};\mathbb{R}^N)s^{N-1}ds \\ &= P_H(\mathcal{W};\mathbb{R}^N)\int_0^t h(s)s^{N-1}ds \\ &\overset{(6)}{=} N\kappa_N \int_0^t h(s)s^{N-1}ds.\end{aligned}$$

This completes the proof of Proposition 2.2. □

3 A transformation between symmetric functions

Let $u = u(x)$ be a radially symmetric function, thus, there exists a function U defined on $[0, +\infty)$ such that $u(x) = U(|x|)$. Also let $v = v(y)$ be a Finsler radially symmetric function on $\mathcal{W}_R$ of

the form $v(y) = V(H^0(y))$ for some $V = V(s)$, $s \in [0, R)$, where $R > 0$ be any number. Fix $1 < p < N$ and assume that u and v are related with each other by the transformation

$$\begin{cases} r = |x|, x \in \mathbb{R}^N, \\ s = H^0(y), y \in \mathcal{W}_R \subset \mathbb{R}^N, \\ r^{\frac{p-N}{p-1}} = s^{\frac{p-N}{p-1}} - R^{\frac{p-N}{p-1}}, \\ u(x) = U(r) = V(s) = v(y). \end{cases} \tag{10}$$

Throughout the paper, ω_{N-1} denotes the surface measure of the unit sphere $\mathbb{S}^{N-1}$ in $\mathbb{R}^N$. Under the transformation (10), we have the following equivalence.

Proposition 3.1. *Let $1 < p < N$ and let u, v be as above. Let $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be continuous. Then we have*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx = \frac{\omega_{N-1}}{N\kappa_N} \int_{\mathcal{W}_R} H(\nabla v)^p dy,$$
$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u(x))dx = \frac{\omega_{N-1}}{N\kappa_N} \int_{\mathcal{W}_R} \frac{F(v(y))}{\left(1 - \left(\frac{H^0(y)}{R}\right)^{\frac{N-p}{p-1}}\right)^{\frac{p(N-1)}{N-p}}} dy.$$

Proof. By (10), we see that if r runs from 0 to ∞, then s runs from 0 to R, and vice versa. Also by differentiating the relation $r^{-\frac{N-p}{p-1}} = s^{-\frac{N-p}{p-1}} - R^{-\frac{N-p}{p-1}}$ with respect to s, we have

$$\left(\frac{p-N}{p-1}\right) r^{\frac{p-N}{p-1}-1} \left(\frac{dr}{ds}\right) = \left(\frac{p-N}{p-1}\right) s^{\frac{p-N}{p-1}-1},$$

which implies

$$\frac{dr}{ds} = (r(s))^{\frac{N-1}{p-1}} s^{\frac{1-N}{p-1}}, \quad \frac{ds}{dr} = (s(r))^{\frac{N-1}{p-1}} r^{\frac{1-N}{p-1}}.$$

Since $U'(r) = V'(s)(\frac{ds}{dr})$, we compute

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |U'(r)|^p r^{N-1} dr &= \int_0^R |V'(s)|^p \left(\frac{ds}{dr}\right)^p r(s)^{N-1} \left(\frac{dr}{ds}\right) ds \\ &= \int_0^R |V'(s)|^p \left(\frac{ds}{dr}\right)^{p-1} r(s)^{N-1} ds \\ &= \int_0^R |V'(s)|^p \left(s^{\frac{N-1}{p-1}} r(s)^{\frac{1-N}{p-1}}\right)^{p-1} r(s)^{N-1} ds \\ &= \int_0^R |V'(s)|^p s^{N-1} ds. \end{aligned} \tag{11}$$

Now, for $v(y) = V(H^0(y))$, $y \in \mathcal{W}_R$, we compute

$$\begin{aligned} &\nabla v(y) = V'(H^0(y))\nabla H^0(y), \\ &H(\nabla v(y)) = H\left(V'(H^0(y))\nabla H^0(y)\right) = |V'(H^0(y))| H(\nabla H^0(y)) = |V'(H^0(y))|, \end{aligned} \tag{12}$$

here we used Proposition 2.1. Recalling Proposition 2.2 (8) with $h(s) = |V'(s)|^p$, we have

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx &= \omega_{N-1} \int_0^\infty |U'(r)|^p r^{N-1} dr \\ &\overset{(11)}{=} \frac{\omega_{N-1}}{N\kappa_N} N\kappa_N \int_0^R |V'(s)|^p s^{N-1} ds \\ &\overset{(8)}{=} \frac{\omega_{N-1}}{N\kappa_N} \int_{\mathcal{W}_R} |V'(H^0(y))|^p dy \\ &\overset{(12)}{=} \frac{\omega_{N-1}}{N\kappa_N} \int_{\mathcal{W}_R} H(\nabla v)^p dy.\end{aligned}$$

On the other hand, we compute

$$\begin{aligned}\int_0^\infty F(U(r)) r^{N-1} dr &= \int_0^R F(V(s)) r(s)^{N-1} \left(\frac{dr}{ds}\right) ds \\ &= \int_0^R F(V(s)) r(s)^{N-1} r(s)^{\frac{N-1}{p-1}} s^{\frac{1-N}{p-1}} ds \\ &= \int_0^R F(V(s)) r(s)^{(N-1)(1+\frac{1}{p-1})} s^{\frac{1-N}{p-1}+1-N} s^{N-1} ds \\ &= \int_0^R F(V(s)) \left(\left(s^{\frac{p-N}{p-1}} - R^{\frac{p-N}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p-N}}\right)^{(N-1)(\frac{p}{p-1})} s^{\frac{p(1-N)}{p-1}} s^{N-1} ds \\ &= \int_0^R \frac{F(V(s))}{s^{\frac{p(N-1)}{p-1}} \left(s^{\frac{p-N}{p-1}} - R^{\frac{p-N}{p-1}}\right)^{\frac{p(N-1)}{N-p}}} s^{N-1} ds \\ &= \int_0^R \frac{F(V(s))}{\left(1 - \left(\frac{s}{R}\right)^{\frac{N-p}{p-1}}\right)^{\frac{p(N-1)}{N-p}}} s^{N-1} ds. \qquad (13)\end{aligned}$$

Thus again Proposition 2.2 yields that

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} F(u(x)) dx &= \omega_{N-1} \int_0^\infty F(U(r)) r^{N-1} dr \\ &\overset{(13)}{=} \frac{\omega_{N-1}}{N\kappa_N} N\kappa_N \int_0^R \frac{F(V(s))}{\left(1 - \left(\frac{s}{R}\right)^{\frac{N-p}{p-1}}\right)^{\frac{p(N-1)}{N-p}}} s^{N-1} ds \\ &\overset{(8)}{=} \frac{\omega_{N-1}}{N\kappa_N} \int_{\mathcal{W}_R} \frac{F(v(y))}{\left(1 - \left(\frac{H^0(y)}{R}\right)^{\frac{N-p}{p-1}}\right)^{\frac{p(N-1)}{N-p}}} dy.\end{aligned}$$

This completes the proof. □

Next, let us replace the roles of u and v in Proposition 3.1. That is, let $v = v(y)$ be a radially symmetric function on $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N \ : \ |x| < R\}$, here $R > 0$. Thus, there exists a function V defined on $[0, R)$ such that $v(y) = V(|y|)$. Also let $u = u(x)$ be a Finsler radially symmetric function on $\mathbb{R}^N$ of the form $u(x) = U(H^0(x))$, $U = U(r)$, $r \in [0, +\infty)$. Assume u and v are

related by the transformation

$$\begin{cases} r = H^0(x), x \in \mathbb{R}^N, \\ s = |y|, y \in B_R \subset \mathbb{R}^N, \\ r^{\frac{p-N}{p-1}} = s^{\frac{p-N}{p-1}} - R^{\frac{p-N}{p-1}}, \\ u(x) = U(r) = V(s) = v(y), \end{cases} \tag{14}$$

where $1 < p < N$. Then as before, under the transformation (14), we have the following equivalence.

Proposition 3.2. *Let $1 < p < N$ and let u, v be as above. Let $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be continuous. Then we have*

$$\int_{B_R} |\nabla v|^p dy = \frac{\omega_{N-1}}{N\kappa_N} \int_{\mathbb{R}^N} H(\nabla u)^p dx,$$

$$\int_{B_R} F(v(y))dy = \frac{\omega_{N-1}}{N\kappa_N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{F(u(x))}{\left(1 + \left(\frac{H^0(x)}{R}\right)^{\frac{N-p}{p-1}}\right)^{\frac{p(N-1)}{N-p}}} dx.$$

The proof is similar as above, and we omit it here.

4 Functional inequalities for symmetric functions

In this section, we will prove several functional inequalities which hold for functions in the appropriate Sobolev space with some symmetry. Though many similar inequalities can be derived by the same idea, we record here few of them.

Following inequalities are direct consequences of Proposition 3.1, Proposition 3.2, and the known inequalities on $\mathbb{R}^N$ or B_R, with the information of extremals.

4.1 The sharp L^p-Sobolev inequality

First we treat the sharp L^p-Sobolev inequality.

Theorem 4.1. *Let $N \geq 2$, $1 < p < N$ and $p^* = \frac{Np}{N-p}$. Then for any Finsler radially symmetric function $v \in W_0^{1,p}(\mathcal{W}_R)$, the inequality*

$$\tilde{S}_{N,p} \left(\int_{\mathcal{W}_R} \frac{|v(y)|^{p^*}}{\left(1 - (\frac{H^0(y)}{R})^{\frac{N-p}{p-1}}\right)^{\frac{p(N-1)}{N-p}}} dy \right)^{p/p^*} \leq \int_{\mathcal{W}_R} H(\nabla v(y))^p dy$$

holds true. Here

$$\tilde{S}_{N,p} = S_{N,p} \left(\frac{\omega_{N-1}}{N\kappa_N}\right)^{p/p^*-1}$$

and $S_{N,p}$ is defined in (2). The equality occurs if and only if v is of the form

$$v(y) = \left(a + b\left((H^0(y))^{\frac{p-N}{p-1}} - R^{\frac{p-N}{p-1}}\right)^{\frac{p}{p-N}}\right)^{\frac{p-N}{p}}$$

for some $a, b > 0$.

Proof. For any Finsler radially symmetric function $v \in W_0^{1,p}(\mathcal{W}_R)$, define $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ as $u(x) = U(r) = V(s) = v(y)$, where $r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^N$ and $s = H^0(y)$, $y \in \mathcal{W}_R$. U and V are defining functions of u, v respectively. Then the L^p-Sobolev inequality (1) for u (with the information of extremals) and Proposition 10 yield the result. □

4.2 The Euclidean L^p-logarithmic Sobolev inequality

The Euclidean L^p-logarithmic Sobolev inequality states that

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p \log |u|^p dx \leq \frac{N}{p} \log \left(\mathcal{L}_p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \right) \tag{15}$$

holds for any function $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ such that $\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p dx = 1$. This form of inequality was first proved by Weissler [13] for $p = 2$, Ledoux [10] for $p = 1$, del Pino and Dolbeault [5] for $1 \leq p < N$, and finally generalized by Gentil [6] for $1 \leq p < \infty$. Actually, [6] extends the result in [5] not only for all $p \geq 1$, but also for any norm on $\mathbb{R}^N$ other than usual Euclidean norm. Here the sharp constant $\mathcal{L}_p$ is given by

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 = \frac{1}{N}\pi^{-1/2} \left(\Gamma(N/2+1)\right)^{1/N}, & p = 1, \\ \mathcal{L}_p = \frac{p}{N} \left(\frac{p-1}{e}\right)^{p-1} \pi^{-p/2} \left(\frac{\Gamma(N/2+1)}{\Gamma(N/p'+1)}\right)^{p/N}, & p > 1, \end{cases} \tag{16}$$

where $p' = \frac{p}{p-1}$ for $p > 1$. For $p = 1$, Beckner [4] proved that the extremal functions for (15) are the characteristic functions of balls. For $1 < p < N$, it is proved in [5] that the extremal functions of (15) must be of the form

$$u(x) = U(|x|) = C(N,p) \exp\left(-\frac{1}{\sigma}|x|^{p'}\right),$$

where $\sigma > 0$ and

$$C(N,p) = \left(\pi^{N/2} \left(\frac{\sigma}{p}\right)^{N/p'} \frac{\Gamma(N/p'+1)}{\Gamma(N/2+1)}\right)^{-1/p}, \tag{17}$$

and its translation. Finally, the same characterization of the equality case also holds true even when $p \geq N$; this fact is proved in the very recent paper [2], which solves a conjecture in [6].

When $1 < p < N$, by the same argument as in Theorem 4.1, we have

Theorem 4.2. *Let $1 < p < N$ and $R > 0$. Then*

$$\left(\frac{\omega_{N-1}}{N\kappa_N}\right) \int_{\mathcal{W}_R} \frac{|v(y)|^p \log |v(y)|^p}{\left(1 - \left(\frac{H^0(y)}{R}\right)^{\frac{N-p}{p-1}}\right)^{\frac{p(N-1)}{N-p}}} dy \leq \frac{N}{p} \log \left(\tilde{\mathcal{L}}_p \int_{\mathcal{W}_R} H(\nabla v)^p dy \right)$$

holds true for any Finsler radially symmetric function v satisfying

$$\left(\frac{\omega_{N-1}}{N\kappa_N}\right) \int_{\mathcal{W}_R} \frac{|v(y)|^p}{\left(1 - \left(\frac{H^0(y)}{R}\right)^{\frac{N-p}{p-1}}\right)^{\frac{p(N-1)}{N-p}}} dy = 1.$$

Here $\tilde{\mathcal{L}}_p = \left(\frac{\omega_{N-1}}{N\kappa_N}\right) \mathcal{L}_p$, where $\mathcal{L}_p$ is as in (16). The equality holds if and only if v is of the form

$$v(y) = C(N,p) \exp\left(-\frac{1}{\sigma}\left((H^0(y))^{\frac{p-N}{p-1}} - R^{\frac{p-N}{p-1}}\right)^{\frac{-p}{N-p}}\right),$$

where $C(N,p)$ is defined in (17).

4.3 The Poincaré inequality on balls

The L^p-Poincaré inequality on balls states that

$$\lambda_1(B_1)\int_{B_R}|v(y)|^p dy \le R^p\int_{B_R}|\nabla v(y)|^p dy \tag{18}$$

holds for any function $v \in W_0^{1,p}(B_R)$, where $B_R \subset \mathbb{R}^N$ is a ball with radius $R > 0$. Here, $\lambda_1(B_1)$ is the first eigenvalue of $-\Delta_p$ (p-Laplacian) with the Dirichlet boundary condition on the unit ball $B_1 \subset \mathbb{R}^N$. To the authors' knowledge, the explicit expression is not known for $\lambda_1(B_1)$ unless $p = 2$. The equality in (18) holds if and only if v is a constant multiple of the first eigenfunction of $-\Delta_p$ on B_R, which we denote $\phi_R \in W_0^{1,p}(B_R)$. Known regularity and symmetry results assure that the first eigenfunction of $-\Delta_p$ is $C^{1,\alpha}$ for some $\alpha \in (0,1)$ and radially symmetric. Thus we can write $\phi_R(y) = \Phi_R(|y|)$, $y \in B_R$, for some C^1-function Φ_R on $[0,R)$ with $\Phi_R(R) = 0$.

By these facts and Proposition 3.2, we have the following.

Theorem 4.3. *Let $1 < p < N$ and $R > 0$ be arbitrarily given. Then*

$$\lambda_1(B_1)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^p}{\left(1+\left(\frac{H^0(x)}{R}\right)^{\frac{N-p}{p-1}}\right)^{\frac{p(N-1)}{N-p}}}dx \le R^p\int_{\mathbb{R}^N}H(\nabla u)^p dx$$

holds true for any Finsler radially symmetric function $u(x) = U(H^0(x)) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ such that $u(\infty) = 0$. For fixed $R > 0$, the equality holds if and only if u is the constant multiple of

$$\Phi_R\left(\left((H^0(x))^{\frac{p-N}{p-1}} + R^{\frac{p-N}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p-N}}\right)$$

where $\Phi_R \in C^1([0,R))$ is such that $\phi_R(y) = \Phi_R(|y|)$, $y \in B_R$, is the first eigenfunction of $-\Delta_p$ on B_R.

Proof. The proof follows for a given Finsler radially symmetric function $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, define a radially symmetric function $v(y) = V(|y|)$ as $v(y) = V(s) = U(r) = u(x)$ where $s = |y|$, $y \in B_R$ and $r = H^0(x)$, $x \in \mathbb{R}^N$. Then use Proposition 3.2. □

References

[1] T. Aubin: *Problèms isopérimétriques et space de Sobolev*, J. Differ. Geom., **11** (1976), 573–598.

[2] Z. M. Balogh, S. Don, and Alexandru Kristály: *Sharp weighted log-Sobolev inequalities: characterization of equality cases and applications*, arXiv:2202.05578

[3] C. Bandle, A. Brillard, and M. Flucher: *Green's function, harmonic transplantation, and best Sobolev constant in spaces of constant curvature,* Trans. Amer. Math. Soc., **350**, (1998), no. 3, 1103–1128.

[4] W. Beckner: *Geometric asymptotics and the logarithmic Sobolev inequality,* Forum Math. **11** (1999), 105–137.

[5] M. del Pino, and J. Dolbeault: *The optimal Euclidean L^p-Sobolev logarithmic inequality*, J. Funct. Anal. **197** (2003), 151–161.

[6] I. Gentil: *The general optimal L^p-Euclidean logarithmic Sobolev inequality by Hamilton-Jacobi equations.*, J. Funct. Anal. **201** no.2 (2003), 591-?599.

[7] S. Habibi, and F. Takahashi: *Applications of p-harmonic transplantation for functional inequalities involving a Finsler norm*, Partial Differential Equations and Applications (Springer Nature PDEA) (2022) 3:32, 17 pages.

[8] J. Hersh: *Transplantation harmonique, transplantation par modules, et théorèmes isopérimètriques,* Comment. Math. Helv., **44** (1969) 354–366.

[9] N. Ioku: *Attainability of the best Sobolev constant in a ball,* Math. Ann., **375** no.1-2, (2019), 1–16.

[10] M. Ledoux: *Isoperimetry and Gaussian analysis*, Lectures on Probability Theory and Statistics (Saint-Flour, 1994) Lecture Notes in Mathematics, **1648**, Springer, Berlin, (1996) 165–294.

[11] M. Sano, and F. Takahashi: *Critical Hardy inequality on the half-space via the harmonic transplantation*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, volume 61, Article number: 158 (33 pages), (2022)

[12] G. Talenti: *Best constant in Sobolev inequality,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **110** (1976), 353–372

[13] F. B. Weissler: *Logarithmic Sobolev inequalities for the heat-diffusion semigroup*, Trans. Amer. Math. Soc. **237** (1978), 255–269.

パラレルセッション
会場Ｂ

量子誤り訂正符号を用いた共形場理論の構成とブール関数による記述

京都大学 数理解析研究所
古田悠馬 (Yuma FURUTA)

概要

共形場理論と誤り訂正符号の間には深いつながりがあり，古典的な誤り訂正符号を用いた正則な共形場理論の構成が知られていた。この構成を用いると共形場理論の物理的な量を誤り訂正符号によって記述できるなどのメリットがある。今回は近年発見された量子誤り訂正符号による Narain CFT という非正則な共形場理論の構成について紹介する。この構成を考えることの理論物理的な動機やブール関数による上の構成の記述とその数学的な意味について発表する予定である。

1 導入

まず，先行研究である Dymarsky, Shapere の結果 [1] を大まかにレビューすることで量子誤り訂正符号を用いた Narain CFT の構成について紹介する。

1.1 Narain CFT

まず簡単に Narain CFT を導入する。まず共形不変な場の量子論で，作用

$$\mathcal{S} = \frac{1}{4\pi\kappa}\iint \mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau\left(h^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^I\partial_\beta X_I + 2B_{IJ}\dot{X}^I X'^J\right)$$

を考える。ただし $h^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$, $I = 0,\ldots,n-1$。さらに場 $\vec{X}(\tau,\sigma)$ に，ある格子 Γ による同一視

$$\vec{X} \sim \vec{X} + 2\pi\vec{e}, \quad \vec{e}\in\Gamma$$

をすることで得られる共形場理論を Narain CFT という。これは各状態をラベルするベクトルを

$$\vec{p}_L = \frac{2\vec{P} + (B+I)\vec{e}}{2}$$
$$\vec{p}_R = \frac{2\vec{P} + (B-I)\vec{e}}{2}$$

で定義される $(\vec{p}_L, \vec{p}_R)$ ととることができる。さらにこれらのベクトルが張る格子は偶自己双対であることが分かる。ただし，計量は Lorentz 型計量 $g = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$。すなわち，偶自己双対格子を構成

すれば Narain CFT が構成できるのである。言い換えれば，Narain CFT とは Lorentz 計量をもつ偶自己双対格子から作られる Lattice CFT ともいえる。[*1]

1.2 量子誤り訂正符号

次に，量子誤り訂正符号について述べる。これは量子情報通信において用いられる技術であり，通信において発生するエラーをある程度訂正することができる。

今回は特にスタビライザ符号という種類の符号を用いる。これは以下のように定められる。n-qubit からなる Hilbert 空間 $\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ の k 次元部分空間 $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}$ をひとつ定め，符号空間と呼ぶ。符号空間の固定化群 $\mathscr{S}_{\mathcal{C}}$ を

$$\mathscr{S}_{\mathcal{C}} \coloneqq \left\{ s : \mathcal{H} \to \mathcal{H} \mid s\,|\psi\rangle = |\psi\rangle \text{ for } {}^{\forall}\,|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{C}} \right\}$$

で定義する。ここで，各演算子 $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ は Pauli 演算子で生成されると仮定している。すると各生成子 s_i は Pauli 演算子を用いて

$$s_i = i^{\alpha\cdot\beta}\epsilon\left(X^{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes X^{\alpha_n}\right)\left(Z^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes Z^{\beta_n}\right),\ \alpha, \beta \in \{0,1\}^n$$

と書ける（ϵ はある定数)。つまり各生成子を長さ $2n$ のバイナリベクトル (α, β) とみなせる。さらに，$\mathscr{S}_{\mathcal{C}}$ の生成子同士の積は (α, β) の $\mathbb{F}_2$ 上の和であるから，スタビライザ符号 $\mathcal{C}$ は生成行列

$$H = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \cdots & \cdots \\ \alpha_{n-k} & \beta_{n-k} \end{pmatrix} \tag{1}$$

を持つ長さ $2n$，k 次元の $\mathbb{F}_2$ 上の符号とみなせる。以下ではこのスタビライザ符号を用いて，つまり上記の生成行列 (1) により実自己双対符号を構成することを考える。

1.3 Narain CFT の構成

次に，この量子スタビライザ符号を用いて Narain CFT を構成する方法を紹介する。それには 1.1 章で述べたように偶自己双対格子を構成すればよい。そこで，量子スタビライザ符号 $\mathcal{C}$ を用いて以下のように格子 $\Lambda(\mathcal{C})$ を構成する。

$$\Lambda(\mathcal{C}) \coloneqq \left\{ v \in \mathbb{Z}^{2n} \mid v \equiv^{\exists} c \bmod 2,\ c \in \mathcal{C} \right\} / \sqrt{2}$$

とすると，$\mathcal{C}$ が実自己双対であることと $\Lambda(\mathcal{C})$ が偶自己双対であることが同値になることが分かる。すなわち，偶自己双対格子を構成すれば Narain CFT が構成できることが分かった。この構成に基づくと，符号の量と CFT の物理量が表 1 のように対応することが分かる。

例えば，CFT の分配関数 $\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau})$ は次のように書ける。

$$\mathcal{Z}(\tau, \bar{\tau}) = \frac{1}{|\eta(\tau)|^{2n}} W_{\mathcal{C}}\left(\frac{b\bar{b} + c\bar{c}}{2}, \frac{b\bar{b} - c\bar{c}}{2}, \frac{a\bar{a}}{2}\right)$$

[*1] 知られている事実として，(n, n) 型の計量を持つ偶自己双対格子は同型を除いて唯一つしか存在しないが，同じ同型類に属す lattice から作られる CFT でも物理的には異なるものになることがある。これにより，物理ではより弱い同値関係である “T-duality” を用いる。

符号	CFT
長さ	中心電荷
重み多項式	分配関数
binary distance	spectral gap

表 1　符号と CFT の対応関係

ここで

$$a(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+1/2)^2/2},\ b(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n^2/2)},\ c(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2/2}$$

はヤコビテータ関数で，$W_{\mathcal{C}}(x,y,z)$ は量子スタビライザ符号の重み多項式。今回は CFT の spectral gap という量に着目する。これは符号の binary distance という量に対応することが [1] により分かった。従って spectral gap が大きい CFT を得るには binary distance が大きい符号を得ればよいことになる。しかし binary distance を大きくする構成法はいまだ知られていない。そこで本研究ではこの binary distance をブール関数によって表し，binary distance を大きくする構成を探る。

1.4　ブール関数

まず実自己双対スタビライザ符号はある 2 次斉次ブール関数と 1:1 に対応することを説明する。実自己双対符号 $\mathcal{C}$ の生成行列は $n \times 2n$ 行列で，同値変形により

$$\begin{pmatrix} B & I \end{pmatrix}$$

の形にできることが分かっている。ただし B, I はそれぞれ $n \times n$ 行列である。ここで $\mathcal{C}$ が実自己双対であるという条件から B はあるグラフの隣接行列とみなせることがいえる。この隣接行列を用いて $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i<j} B_{ij} x_i x_j$ という多項式を定義する。この多項式を $\mathbb{Z}_2^n$ から $\mathbb{Z}_2$ への関数とみなしたとき，f は $\mathcal{C}$ に付随したブール関数と呼ぶ。このブール関数を用いて binary distance を表したのが本研究の主結果である。

2　主結果

まずブール関数の Extended Propagation Criteria (EPC) を次で定義する。

定義 1. $a, \mu, k \in \mathbb{Z}_2^n$ とする。

$$v(a,\mu,k) = \sum_{x \in k + V_{\bar{\mu}}} (-1)^{f(x)+f(x+a)}, \quad k \preceq \mu$$

をブール関数の *fixed-extended autocorrelation function* という。ただし $x \succeq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i$ for ${}^\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $V_a \coloneqq \{x \in \mathbb{Z}_2^n \mid x \preceq a\}$。$f(x)$ が q 次の *EPC*(l) をみたすとは，$k \preceq \mu$ かつ $1 \leq w(a) \leq l$, $0 \leq w(\mu \& \bar{a}) \leq q$ なる全ての a, μ, k に対し $v(a,\mu,k) = 0$ となること。

またブール関数の EPC 距離を次で定義する。

定義 2. ブール関数の *EPC* 距離が d であるとは，$l+q<d$ で $(l,q)\neq 0$ なる全ての整数 $l\geq 1,\ q\geq 0$ に対して $f(x)$ が q 次の *EPC(l)* をみたすこととである。

このとき，次が成り立つことが分かった。

定理 1 (主結果)**.** 実自己双対スタビライザ符号 $\mathcal{C}$ の *binary distance* はそれに付随したブール関数の *EPC* 距離に一致する。

証明の概略. EPC 距離は以下を満たすような長さ $2n$ の nonzero ベクトル $(a,b)\in\mathbb{Z}_2^{2n}$ の重み（値が 1 の成分の数）の最小値に等しい。

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{f(x)+f(x+a)+b\cdot x}\neq 0 \tag{2}$$

一方，a の値が 1 の成分に対応する qubit に σ_x，b の値が 1 の成分に対応する qubit に σ_z をかけるエラー演算子を $\mathcal{E}$ とする。$|\psi'\rangle=\mathcal{E}|\psi\rangle$ の各係数を並べると $s'=(-1)^{f(x+a)+b\cdot x}$ となる。ここで式 (2) の左辺は $s\cdot s'$ つまり $|\psi\rangle$ と $|\psi'\rangle$ の内積を表している。従って演算子 $\mathcal{E}$ によるエラー状態 $\mathcal{E}|\psi\rangle$ の誤りが復元できることと $|\psi\rangle$ と $\mathcal{E}|\psi\rangle$ が直交することが同値になる。よって式 (2) を満たす (a,b) は $\mathbb{F}_2$ 上の符号としての $\mathcal{C}$ の元とみなせる。つまり式 (2) を満たす (a,b) の重みの最小値 $=w_b$ の最小値，すなわち符号の binary distance に一致する。 □

以上の定理から，binary distance を大きくする代わりに EPC 距離を大きくすればよいことが分かる。そこで Danielsen 氏によって調べられた APC 距離と PAR の関係 [2] を利用する。それは，APC 距離と PAR の間には負の相関関係にある，すなわち APC 距離が大きいほど PAR は小さくなる傾向にある。APC 距離は EPC 距離の定義とほぼ同じものであるため，EPC 距離も PAR と同様の関係にあると考えた。そこで，次の Parker 氏, Tellambura 氏の結果 [3] を用い，PAR が小さくなるような構成を通じて EPC 距離が大きいかどうか考察する。

定理 2. $n=Lt$,θ_j,γ_j は $\mathbb{Z}_2^t$ 内の置換で

$$p(x)=\sum_{j=0}^{L-2}\theta_j(\mathbf{x}_j)\gamma_j(\mathbf{x}_j)+\sum_{j=0}^{L-1}g_j(\mathbf{x}_j)$$

とすると，$s=(-1)^{p(x)}$ に対し $\mathrm{PAR}_{LUUT}(s)\leq 2^t$ となる。

この構成は nested clique graph というグラフを含んでいる。これは t 次の完全グラフを t 次の完全グラフの構造でネストしたもので，$[K_t[K_t]]$ と書く。これは各完全グラフの繋ぎ方に自由度があり，$\frac{1}{2}(t-1)(t-2)$ 個の t 次の置換を選ぶ。そこで本研究では t を奇素数とし，次のように構成した。

$$\sigma_k=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & t\\ m & m+l & \cdots & m+(t-1)l\end{pmatrix} \tag{3}$$

この構成を $t=3,5,7,11$ のとき実際行い，対応するブール関数の EPC 距離を計算した。すると EPC 距離は $d=4,8,12,21$ となり，全て $2t-2$ を超えることが分かった。これは長さに対して平方根程度の大きさを持っており，現状得られる実自己双対符号の中では比較的性質が良いといえる。従ってこの関係は一般の奇素数 t で成り立つという予想を設定した。

予想. t を奇素数とする。式 (3) に従って構成した *nested clique graph* から作られる実自己双対スタビライザ符号は長さ t^2 で *binary distance* は $2t-2$ 以上。

3 結論

本研究では，Narain CFT の spectral gap が量子スタビライザ符号の binary distance と関係することを動機に，大きい spectral gap を得るために binary distance を大きくする方法を探索した。そこで量子スタビライザ符号の binary distance はそれに付随したブール関数の EPC 距離に等しいことを示した。すると EPC 距離と PAR の間の負の相関関係を利用することができ，Parker 氏, Tellambura 氏の結果より PAR が小さくなるような構成を参考にできるようになった。本研究ではその中でも nested clique graph に着目し，式 (3) のように構成した。そしてこの構成では長さの平方根程度の binary distance が得られることをいくつかの t で検証した。そこで一般の奇素数 t でも同程度の binary distance が得られると予想した。今後の課題としてはこの予想を証明・反証を行うことが挙げられる。また PAR をより小さくするような構成を考え，さらに性質の良い量子スタビライザ符号を構成することも今後の課題である。

参考文献

[1] Anatony Dymarsky and Alfred Shapere. Quantum stabilizer codes and lattices and CFTs. *J High Energ Phys 2021 160*, 2020.

[2] Lars Eirik Danielsen. On Self-Dual Quantum Codes, Graphs, and Boolean Functions. *ArXivquant-Ph0503236*, March 2005.

[3] M.G. Parker and C. Tellambura. A construction for binary sequence sets with low peak-to-average power ratio. In *Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory*, p. 239, Lausanne, Switzerland, 2002. IEEE.

データ駆動型微分方程式の導出 *

東京海洋大学大学院学術研究院
堤夏輝 (Natsuki Tsutsumi)

概要

本研究では，決定論的時系列データから微分方程式の導出を行う．はじめに時系列データから時間微分値の推定を行ったのち，それに対して動径基底関数を用いて回帰を行うことで，非線形の次数などの仮定をせずにデータを表現できる微分方程式を導出する．導出された微分方程式は短期軌道を近似するだけでなく，統計的性質や不変集合も近似している．本手法は偏微分方程式や遅延微分方程式などから生成される時系列データにも適用可能であり，流体現象の表現にも成功している．

1 はじめに

時系列データに基づいて将来の変化を予測する技術は多くの場面で求められる．そのため，そのような技術は現在に至るまで多く研究されている．その中に，決定論的時系列の変化を予測するための技術としてデータから微分方程式を推定する手法がある．時系列データを支配する微分方程式が導出できると，将来の短期的な変化だけでなく，力学的性質なども把握することができる．また，そのようにして導出された微分方程式が低次の多項式のような解析的に扱いやすい形であると，理論的発展にも貢献することができる．SINDy[1] では Lasso といわれる線形回帰の手法を用いて少ない項数で時系列データの変化を十分表現できる微分方程式を推定している．この手法は得られている時系列データを表現する微分方程式が低次の多項式で表現可能であるという条件を必要としている．応用上は時系列データを生成している力学系が低次の多項式であっても，すべての変数を観測することが困難であったり，どの変数を用いればよく表現できるかが未知である場合も多く，この条件を満たさないことが多い．そこで，我々は最近この条件を緩めた場合にも適用可能である手法の提案を行った [5]．提案手法では，表現方法を低次の多項式に限定せず，より広範に適用できるようにしている．

本稿では，我々が提案した手法を用いて流体力学のマクロ変数の変動を記述する微分方程式の導出を行う．流体現象の基礎方程式は Navier-Stokes 方程式として知られているが，マクロ変数の変動を記述する閉じた支配方程式の解析的導出は一般に成功していない．そこで，数値的にマクロ変数の時系列データを計算し，それを用いて閉じた微分方程式の導出を行う．はじめに，2 章で流体力学のマクロ変数について紹介する．3 章では，我々が提案した手法を流体時系列データに適用しながら説明する．そのようにして導出された微分方程式を数値積分し推定軌道を得る手法の紹介とその精度評価を 4 章で行う．最後に 5 章で，本レポートのまとめと応用可能性についての考察を行う．

* 本研究は一橋大学齊木吉隆教授，東京海洋大学中井拳吾助教との共同研究である．

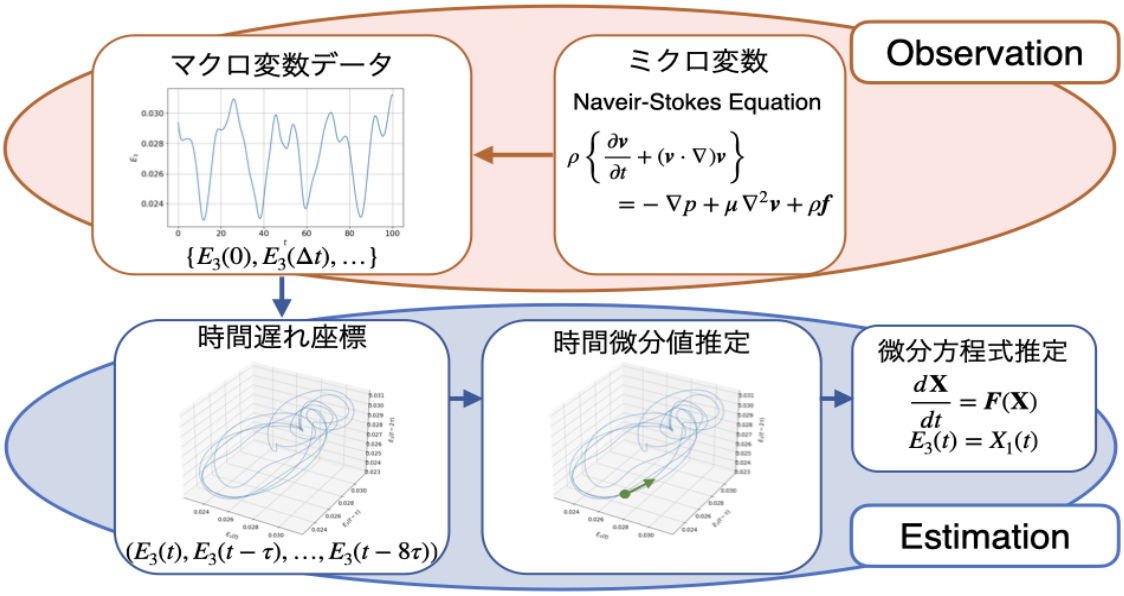


図 1　微分方程式推定の手順.

2　流体力学のマクロ変数

3 次元流体の基礎方程式として Navier-Stokes 方程式が知られている．これは 3 次元のベクトル場の変化を記述している．このベクトル場をフーリエ変換し一定の周波数帯ごとに絶対値を合計したものは，その周波数帯のエネルギーを意味しており，本稿ではこの流体マクロ変数に注目する．このマクロ変数の変動を表現する閉じた微分方程式を Navier-Stokes 方程式から解析的に導出することは困難である．Navier-Stokes 方程式を数値的に解くことで，マクロ変数の時系列データを計算することができる．今回は，[2] で導入されている流体マクロ変数 $E_3(t)$ の変動を表現できる微分方程式を数値計算による時系列データから導出することを行う．

3　微分方程式モデリング

最近，我々はカオス性を持つ時系列データからその変化を記述する微分方程式を推定する手法を提案した [5]．本章ではその手法を前章で導入した流体の $E_3(t)$ 時系列データに適応しながら説明する．手順を図 1 に示している．

3.1　時間遅れ項による埋め込み

はじめに，時系列の時間遅れ座標を作成する．あるカオス性を持つデータの変動を自励系常微分方程式として表現するするためには 3 次元以上が必要であることが知られている．また，スカラー時系列からアトラクタを再構成するために時間遅れ座標系が有用であることも知られている [4]．そこで，$E_3(t)$ 時系列の変動を記述する微分方程式を推定するにあたり，その時間遅れ項を変数として追加する：

$$\mathbf{X}(t) := (E_3(t), E_3(t-\tau), \ldots, E_3(t-8\tau)) \ (\tau = 1.5). \tag{1}$$

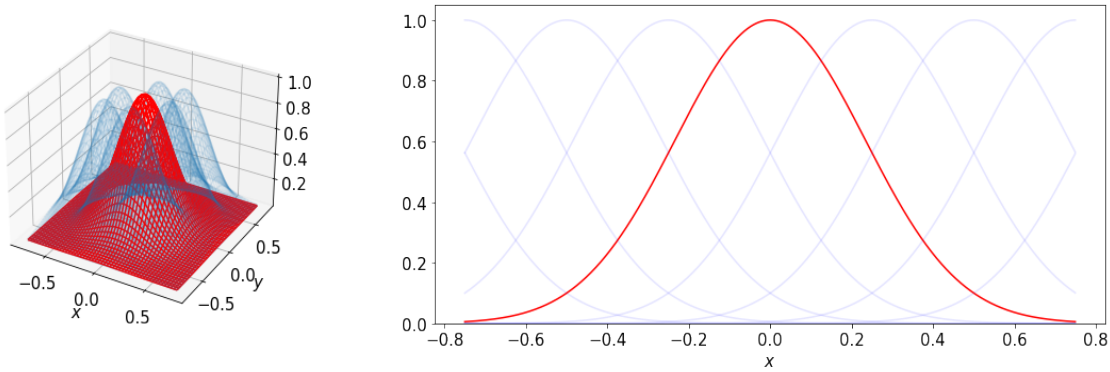


図 2　**Gauss 型動径関数の概形 [5].** Gauss 型動径関数 $\phi_j(\boldsymbol{x})$ の概形を 2 次元 (左図) と 1 次元 (右図) で表している．中心点 $\mathbf{c}_j$ に近いと最大値 1 に近く，遠くなると 0 に近くなる．Gauss 型動径関数は局所的な構造を表現することに有用である．

この 9 次元データの変動を記述する微分方程式を推定することで，$E_3(t)$ の表現を達成する．

3.2　時間微分値の推定

次にデータの各時点における時間微分値を推定する．離散時間で得られた $\mathbf{X}(t)$ $(t = \tilde{t} + k\delta)$ を用いて，テイラー近似によって時間微分値を推定する．本研究では以下の 6 次テイラー展開による：

$$\frac{d\mathbf{X}(\tilde{t})}{dt} \approx \frac{1}{60\delta}\{\mathbf{X}(\tilde{t}+3\delta) - 9\mathbf{X}(\tilde{t}+2\delta) + 45\mathbf{X}(\tilde{t}+\delta) \\ - 45\mathbf{X}(\tilde{t}-\delta) + 9\mathbf{X}(\tilde{t}-2\delta) - \mathbf{X}(\tilde{t}-3\delta)\}.$$

本研究では δ を手元データの時間間隔としているが，データにノイズが含まれる場合は δ を大きくとることでノイズによる推定誤差を小さくすることができる．また，推定結果はこの δ やテイラー展開次数に強く依存しない．

3.3　Gauss 型動径関数の導入と線形モデル

データから微分方程式を推定するにあたり，線形回帰を用いる．線形回帰とは，事前に用意した関数（慣習的に基底関数と呼ばれる）の線形和で近似したい関数を表現 (線形モデル) し，その係数をデータから推定することで，関数近似を達成する手法である．本節では今回用いた線形モデルを説明し，データから係数を推定する手法は次節で紹介する．

今回の設定では，$\mathbf{X}(t)$ の時間微分値が $\mathbf{X}(t)$ の低次多項式で表現されることは期待されない．つまり，線形モデルとして各変数の多項式を用いたモデルはうまく適用できないと考えられる．そのような場合，Gauss 型動径関数という局在化した関数 $\phi_j(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}^9)$ を用いることが有用である [5]．今回は一次多項式と ϕ_j を組み合わせた，以下の線形モデルを用いる：

$$\frac{dX_i}{dt} \approx \beta_0^{(i)} + \sum_{d=1,\ldots,D} \beta_d^{(i)} X_d + \sum_{j=1,\ldots,J} \beta_{D+j}^{(i)} \phi_j(\mathbf{X}) \ (i = 1, \ldots, D) \ . \tag{2}$$

ここで，$D = 9$ は $\mathbf{X}$ の次元であり，X_d は $\mathbf{X}$ の第 d 成分，J は導入した Gauss 型動径関数の

総数である．また，Gauss 型動径関数 $\phi_j(\boldsymbol{x})$ は以下で表される関数である：

$$\phi_j(\boldsymbol{x}) := \exp\left\{\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}_j|^2}{\sigma^2}\right\}. \tag{3}$$

ここで，$\boldsymbol{c}_j$ は j 番目の中心点で δ_{grid} 間隔の格子状に配置されており，σ^2 は $\phi_j(\boldsymbol{x})$ の実質的なサポートを決定するパラメータで 2 つのパラメータ m，p によって次のように設定される：

$$\sigma^2 := \frac{((m-1)\delta_{gird})^2}{-\log_e p}. \tag{4}$$

Gauss 型動径関数の概形は図 2 に示している．本研究においては $(\delta_{grid}, m, p) = (0.50, 3, 0.10)$ とした．

3.4 Ridge 回帰

線形モデル (式 (2)) の係数を推定する方法について説明する．本節では，一般的な線形モデル

$$y \approx \sum_{k=1,\ldots,K} \beta_k x_k \tag{5}$$

における推定を考える．今回は Ridge 回帰と呼ばれる手法を用いる．Ridge 回帰とは以下の目的関数 (L) を最小化するパラメータ $\boldsymbol{\beta}(:= \{\beta_k\})$ を推定値とする手法である：

$$L(\boldsymbol{\beta}) := \frac{1}{N}||\mathbf{y} - \mathrm{X}\boldsymbol{\beta}||_{l_2}^2 + \lambda||\boldsymbol{\beta}||_{l_2}^2. \tag{6}$$

ここで，N は推定に用いるデータ数，$\mathbf{y} := \{y_n\}_{n=1,\ldots,N}$，$\mathrm{X} := \{x_k^{(n)}\}_{(n,k)}$，$\lambda$ は正則化パラメータと呼ばれる事前に決めたパラメータである．第 1 項は予測値とデータ値の誤差の二乗平均を表している．これだけだと，手元データに過適合してしまい汎化性能が落ちてしまう過学習が起こりやすいことが知られている．それを抑えるために，目的関数にパラメータの L_2 ノルムである第 2 項を追加している．式 (6) の最小化は解析的に行うことができるため，Ridge 推定量 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{Ridge}}$ は以下で記述できる：

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{Ridge}} = (\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{X} + \lambda N I)^{-1}\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}. \tag{7}$$

ただし，I は単位行列を表している．今回は $\lambda = 10^{-7}$ としている．

4 精度評価

本章では推定された微分方程式を用いた近似軌道生成とその軌道の評価を行う．また，長期軌道生成を行う Stagger and Step 法の概要を説明する．

4.1 短期軌道

まずはじめに短期軌道について考える．推定された $\mathbf{X}$ に関する微分方程式を 4 次 Runge-Kutta 法を用いて数値積分した結果を図 3 に示している．これを見ると，$t = 80$ までは本来の

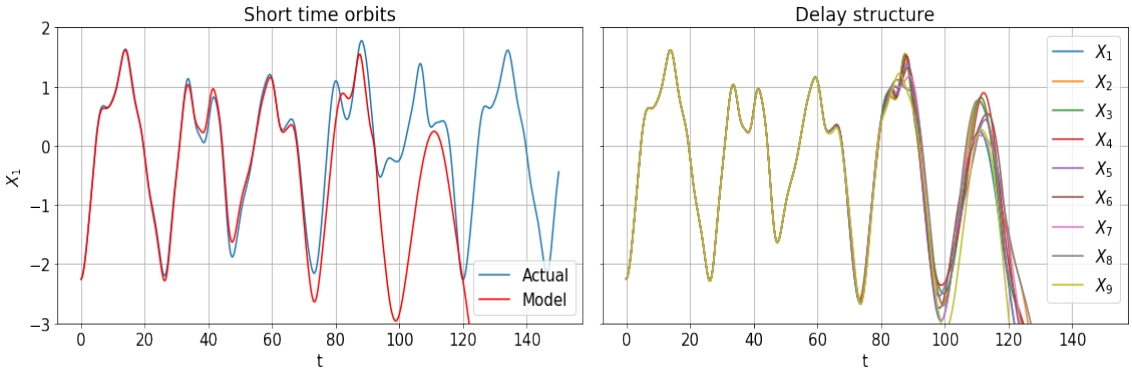


図 3　**Runge-Kutta 法によって数値積分した短期軌道．** 3 章で推定した微分方程式を数値積分することで，$E_3(t)$ の推定軌道を求めることができる．4 次 Runge-Kutta 法によって数値積分した $X_1(t)$(Model) とそれが近似したい時系列である $E_3(t)$(Actual) を一緒に左図に示している．$t = 80$ までは本来の軌道をよく近似しているが，それ以降は逸れはじめ，その後発散していることがわかる．さて，$\mathbf{X}$ は $E_3(t)$ の時間遅れ座標であるため，数値積分によって推定された軌道も時間遅れ構造をもっていることが望ましい．それを確認するために，各変数を適切な時間並行移動した結果を右図に示している．推定軌道が本来の軌道をよく近似していた $t = 80$ までは時間遅れ構造が保たれているが，それ以降は時間遅れ構造が失われている．このことから，時間遅れ構造の再現度によって推定軌道が本来の軌道を表現できているかを判定できると考えられる．

$E_3(t)$ 時系列と推定された軌道 $X_1(t)$ が類似していることがわかる．また，その期間においては変数間の時間遅れ構造，すなわち

$$X_1(t) \approx X_2(t+\tau) \approx \ldots \approx X_9(t+8\tau), \tag{8}$$

が成立していることもわかる．しかし，$t = 80$ 以降は 2 つの時系列の差は拡大していき，推定された $X_1(t)$ 軌道は発散している．それと同じタイミングで，時間遅れ構造である式 (8) が成り立たなくなっている．つまり，数値積分した軌道がよく本来の軌道を近似している時は時間遅れ構造が保たれており，そうでない時は時間遅れ構造が失われている．以上のことより，推定された微分方程式はベクトル場としてよく近似できているが，それのアトラクタ上に近似したい $E_3(t)$ の軌道が表現されていないということができる．これにより，短期の予測は成功しても，長期に近似する軌道を計算することに失敗しているといえる．

4.2　長期軌道

前節では，推定された微分方程式はベクトル場をよく近似しているが，Runge-Kutta 法では長期軌道を生成できないことを確認した．本節では，長期軌道を生成する手法として Stagger and Step 法 [3] を導入し，推定された長期軌道の統計的性質が $E_3(t)$ 時系列のそれを近似していることを確認する．

推定された微分方程式はデータの流れをベクトル場としてよく近似している．そのため，適切に数値積分することが可能であれば，長期軌道も生成できると思われる．しかし，表現したい軌道は推定された微分方程式のアトラクタ上に表現されていないため，Runge-Kutta 法による数値積分では長期軌道を得ることができない．実は，それはカオティックサドルという不変集合上に表現されていることが以降の解析によりわかる．カオティックサドルとは，吸引しな

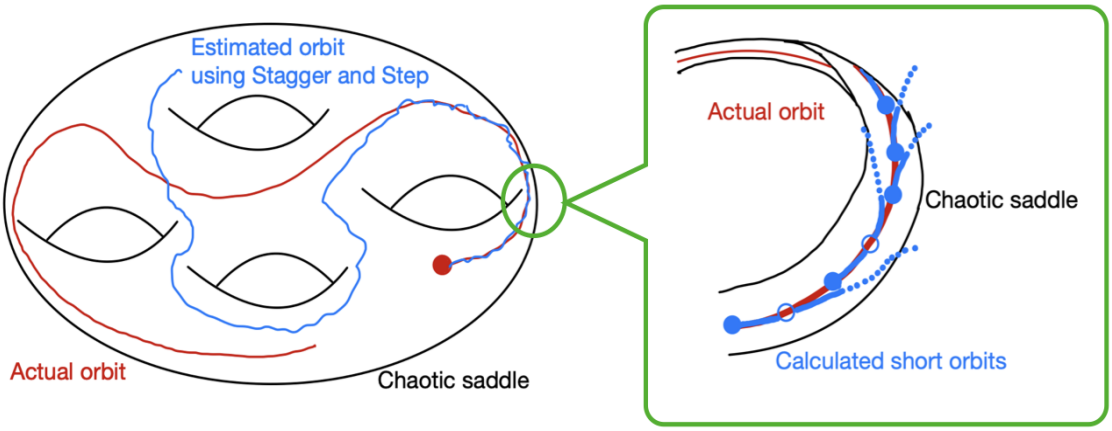


図 4　**Stagger and Step 法による軌道生成イメージ．** 近傍を吸引しない領域をもつカオス的不変集合をカオティックサドルといい，3 章で推定された微分方程式において，表現したい $E_3(t)$ 軌道はその上にあると考えられる．そのために Runge-Kutta 法による数値積分では軌道が発散してしまった．カオティックサドル上の軌道を生成する手法の 1 つに Stagger and Step 法が存在する．Stagger and Step 法は短期軌道の繋ぎ合わせとして長期軌道を生成する．今回は時間遅れ構造が再現されているかで計算された軌道がカオティックサドル上に存在しているかを判定している．時間遅れ構造が失われた場合は，一定時間戻った地点にノイズを加え，時間遅れ構造が保たれる点を探している．カオス性により Stagger and Step 法により生成された軌道は本来の軌道と一定時間後にずれることに注意が必要である．

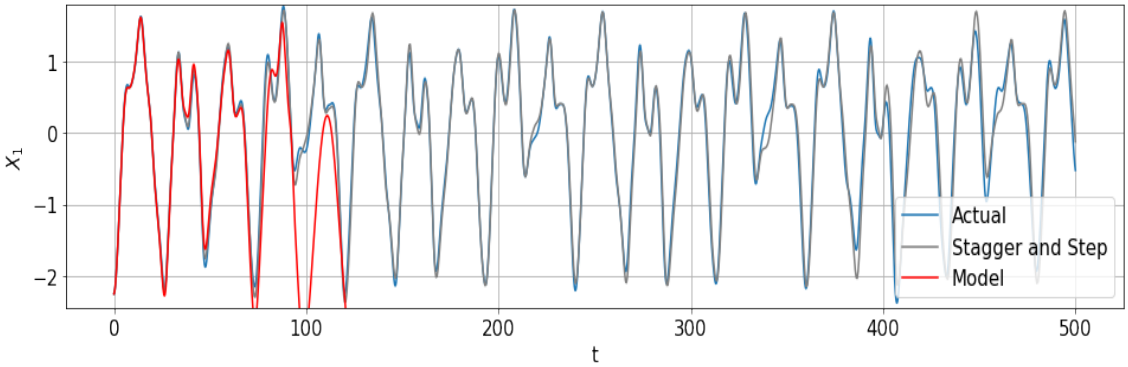


図 5　**Stagger and Step 法による短期軌道．** Stagger and Step 法によって計算された短期軌道　(Stagger and Step) を図 3 に示した軌道 (Actual も Model) とともに示している．Stagger and Step 法を適用することで，推定軌道は発散せずに本来の軌道と似た軌道となっている．ただし，カオス性により一定時間後に Actual と Stagger and Step の軌道がずれている点に注意が必要である．

い近傍を持つカオス的不変集合のことであり，その上の軌道を数値計算によって推定すると，推定された軌道は数値計算の誤差が影響しその不変集合から逸脱する．そこで，カオティックサドル上の軌道を生成する手法として Stagger and Step 法が提案されている．Stagger and Step 法は，数値計算誤差によって不変集合上から軌道がずれないように微小なノイズを入れることによって，不変集合上を振る舞い続ける軌道断片として長期軌道を生成するものである．Stagger and Step 法による軌道生成のイメージを図 4 に示している．

実際に Stagger and Step 法によって生成した軌道を図 5 に示している．軌道が発散せず，

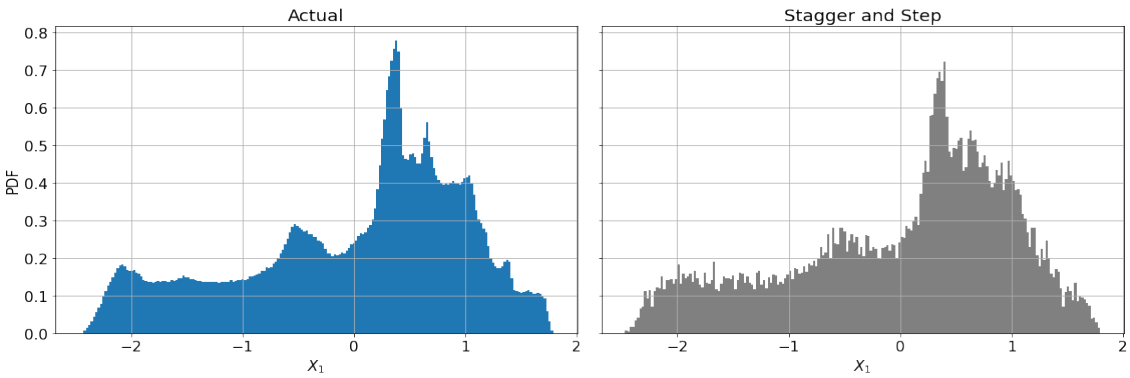


図 6　**Stagger and Step 法による長期軌道の不変密度分布．** Stagger and Step 法を用いることで発散しない軌道を生成できるため，それによる長期軌道から不変密度分布を推定した (右図)．本来の $E_3(t)$ 軌道の不変密度分布 (左図) と比較すると，似たような不変密度分布となっていることがわかる．このことから，推定された微分方程式は $E_3(t)$ の力学的性質も表現していることがわかる．

本来の $E_3(t)$ 軌道と似た軌道が長く生成できていることがわかる．ただし，カオス性によりしばらくすると軌道がずれている点に注意が必要である．また，長期軌道によって計算された不変密度分布も本来のものをよく近似していることが図 6 からわかる．以上により Stagger and Step 法によって，推定された微分方程式から本来の軌道に類似する軌道を生成できていると言える．この意味で推定された微分方程式は元の力学系をよく表現していることがわかる．

5　議論

本稿は，解析的に閉じた微分方程式を導出することが困難な流体マクロ変数を表現する微分方程式をデータから推定することを行った．推定された微分方程式を Runge-Kutta 法で数値積分すると，元の時系列を短期的によく近似する軌道を生成することができた．しかし，表現したい軌道はアトラクタ上の軌道としては表現されておらず，長期の軌道は発散してしまった．そこで，Stagger and Step 法を用いることで，元の時系列の統計的性質をよく近似している発散しない長期軌道を生成することができた．以上のことから，流体マクロ変数を閉じた微分方程式の変数として表現することに成功したといえる．

今回用いた手法 [5] は，式 (2) の左辺を入れ替えることで同じ力学系から生成された他の変数に応用が可能である．我々は $E_3(t)$ の変動を表現する微分方程式と同じ線形モデルを用いて他の流体マクロ変数を表現することにも成功している．つまり，$E_3(t)$ の時間遅れ座標系によって $E_i(t)(i \neq 3)$ の変動を再現することができ，それは $E_3(t)$ 時系列に他のマクロ変数の変動を表現するのに十分な情報が含まれていることを意味している．このように，今回用いた手法はスカラー時系列の軌道やその構造推定だけでなく，変数間の関係なども記述可能であると考えられる．

参考文献

[1] S. L. Brunton, J. L. Proctor, and J. N. Kutz. Discovering governing equations from data by sparse identification of nonlinear dynamical systems. *Proceedings of the National*

Academy of Sciences, 113(15):3932–3937, 2016.

[2] K. Nakai and Y. Saiki. Machine-learning inference of fluid variables from data using reservoir computing. *Physical Review E*, 98(2):023111, 2018.

[3] D. Sweet, H. E. Nusse, and J. A. Yorke. Stagger-and-step method: Detecting and computing chaotic saddles in higher dimensions. *Physical Review Letter*, 86:2261–2264, 2001.

[4] F. Takens. Detecting strange attractors in turbulence. In D. Rand and L.-S. Young, editors, *Dynamical Systems and Turbulence, Warwick 1980*, pages 366–381, Berlin, Heidelberg, 1981. Springer Berlin Heidelberg.

[5] N. Tsutsumi, K. Nakai, and Y. Saiki. Constructing differential equations using only a scalar time-series about continuous time chaotic dynamics. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 32(9):091101, 2022.

2 曲線間に留まるよう条件付けられたランダムウォーク橋に対する不変原理

東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻
簗島瞬 (Shun Yanashima)

概要

離散確率過程の最も基本的な例としてランダムウォークがある．連続関数の空間において，ランダムウォークの線形補間が Brown 運動に弱収束するという事実は Donsker の不変原理として知られている ([5])．この結果は様々な形で拡張されており，種々の条件付ランダムウォークの弱収束によって Brown 運動に関連した確率過程が得られることが示されてきた ([8], [3])．本講演では，これらの結果について総括した後，講演者の新規の結果である「2 曲線の間に留まるよう条件付けられたランダムウォーク橋の弱収束」について紹介する．※本講演は栗山一輝氏，石谷謙介氏 (東京都立大学) との共同研究の内容に基づく．

1 導入 〜ランダムウォーク〜

「コイントスをして，表ならば 1 歩進み，裏ならば 1 歩戻る，というゲームを繰り返す」，「勝てば 1 点加点され，負ければ 1 点減点される公平な賭けを繰り返し行う」，….

このような問題設定は，高校数学でも度々登場し，見覚えのある方も多いと思われる．前述の問題について，「n 回繰り返した結果はどうなるか？」，「n 回繰り返した時の変動の軌跡はどのようになっているか？」といった疑問は，賭け事が盛んだった中世ヨーロッパで自然発生的に起こり，その後の確率論の発展において中心的話題の一つになっていった．

「時刻 n での値が，それまでに観測された (独立同分布な)n 回の試行の和で決まる」という現象を数学的に定式化したものが**ランダムウォーク**であり，定義は次の通りである:

定義 1.1 (ランダムウォーク)**.** $d \in \mathbb{N}$ とする．$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ をこの空間上の $\mathbb{R}^d$ 値独立同分布の確率変数列 (independent and identically distributed, i.i.d.) とする．$a \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$S_0 = a, \quad S_n = a + \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \ (n \in \mathbb{N})$$

とおき，$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を a 出発の d 次元ランダムウォークとよぶ．

例 1.2 (ランダムウォークの例)**.** $d \in \mathbb{N}$ とし，$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ を $\mathbb{R}^d$ の標準基底とする．$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，$X_1, X_2, \ldots$ を

$$P(X_i = \mathbf{e}_l) = P(X_i = -\mathbf{e}_l) = \frac{1}{2^d} \quad (l = 1, \ldots, d, i = 1, 2, \ldots)$$

である i.i.d. とし,

$$S_0 = \mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d, \quad S_n = \mathbf{a} + X_1 + \cdots + X_n \ (n \in \mathbb{N})$$

とおく. $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathbf{a}$ 出発の d 次元単純ランダムウォークとよぶ. $d = 1$ のとき, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は本節冒頭で述べた具体的問題の数学的定式化になっている.

ランダムウォークは,「独立な個々の振る舞いを集団としてみたときの挙動」や「独立な事象が時系列に沿って積算されていくときの挙動」をモデル化する際に有用であり, 自然科学や数理ファイナンス等に応用されている ([14], [10]). 数学的にも様々な興味深い性質が知られているが, 本稿では特に**ランダムウォークの極限**に注目したい.

本題に入る前に, 確率論・数理統計における基本的な定理である**中心極限定理 (central limit theorem)** について復習する. 中心極限定理という呼び名は G. Pölya によるもので,「確率論において中心的な役割を果たす定理」ということに由来するようである ([13] Section 3.3.). 歴史的には, De Moivre によって 2 項分布の場合について中心極限定理の原型が予想され, Laplace によって母関数を用いて正確な証明が与えられた. その後, Lyapunov と Lévy は母関数の代わりに分布の特性関数を用いることで, De Moivre-Laplace の結果を一般化し, さらに証明の簡略化に成功した. この特性関数による方法は確率論の多くの教科書に述べられている ([6], [12]). なお, ここでは 1 次元の場合について述べるが, d 次元の場合も同様の結果が成り立つことが知られている ([11]).

定理 1.3 (中心極限定理)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, この空間上の確率変数列 $X_1, X_2, \ldots$ が i.i.d. で, 平均 $\mu := E[X_1]$ と分散 $\sigma^2 := \mathrm{Var}[X_1]$ が存在するとする. このとき, $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma}$ は標準正規分布 $N(0, 1)$ に分布収束する.

中心極限定理により, ランダムウォークの増分 $S_n - S_{n-1} = \xi_n$ $(n \in \mathbb{N})$ が平均 0, 分散 1 をもつとき, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ は (増分 ξ_n の分布によらずに)$n \to \infty$ での分布が標準正規分布に従うことがわかる. では, ランダムウォークの軌跡については増分の分布によらない連続極限が現れるだろうか？次節では, 連続関数の空間における中心極限定理とも呼ぶべき Donsker の不変原理について述べる.

2 Brown 運動, Donsker の不変原理

区間 $[t_1, t_2]$ 上の連続関数全体を $C([t_1, t_2], \mathbb{R})$ で表し, ノルム

$$\|f\| := \sup_{u \in [t_1, t_2]} |f(u)| \quad (f \in C([t_1, t_2], \mathbb{R}))$$

から定まる位相に関する Borel 集合族を $\mathcal{B}(C([t_1, t_2], \mathbb{R}))$ で表す.

定義 2.1 (連続確率過程)**.** 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の $C([t_1, t_2], \mathbb{R})$-値確率変数, すなわち $\mathcal{F}/\mathcal{B}(C([t_1, t_2], \mathbb{R}))$-可測関数を, 実数値連続確率過程とよぶ.

連続確率過程 X に対し, $\omega \in \Omega$ を固定するごとに連続関数 $t \mapsto X(t, \omega)$ が定まる.

定義 2.2 (サンプルパス)**.** 連続確率過程 X に対し, $\omega \in \Omega$ を固定したときの連続関数 $t \in [t_1, t_2] \mapsto X(t, \omega)$ を, X のサンプルパスとよぶ.

一方で, 連続確率過程 X に対し, $t \in [t_1, t_2]$ を固定したとき, 関数 $\omega \in \Omega \mapsto X(t, \omega)$ は実数値可測関数となることがわかる. そこで, 確率論においては連続確率過程 X を, t で添字付けられた実数値確率変数の族として, $X = \{X(t)\}_{t \in [t_1, t_2]}$ と書く.

連続確率過程の代表的な例として, Brown 運動がある:

定義 2.3 (Brown 運動)**.** *$a \in \mathbb{R}$ に対し, 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の連続確率過程 $W = \{W(t)\}_{t \in [t_1, t_2]}$ が次を満たすとき, a 出発の Brown 運動 (Wiener 過程) とよぶ:*

1. *$P(W(t_1) = a) = 1$.*
2. *任意の $n = 1, 2, \ldots$ と任意の $t_1 \leq s_0 < s_1 < \cdots < s_n \leq t_2$ に対し, 増分 $\{W(s_i) - W(s_{i-1})\}_{i=1,2,\ldots,n}$ は独立で, それぞれ平均 0, 分散 $s_i - s_{i-1}$ の正規分布に従う.*

なお, 一般に時刻の区間が $[0, \infty)$ である連続確率過程, Brown 運動を考えることができるが, 本稿では有限区間の場合のみ扱う.

今, 0 出発の Brown 運動 $W = \{W(t)\}_{t \in [0,1]}$ が与えられたとし, $n \in \mathbb{N}$ を固定する. 区間 $[0, 1]$ の n 分点 $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1$ を考え,

$$\xi_k := \sqrt{n}\left(W\left(\frac{k}{n}\right) - W\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

とおく. Brown 運動の増分 $W\left(\frac{k}{n}\right) - W\left(\frac{k-1}{n}\right)$ $(k = 1, \ldots, n)$ は独立かつ平均 0, 分散 $\frac{1}{n}$ の正規分布に従うことから, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ は標準正規分布に従う i.i.d. である. このことは, Brown 運動を離散化することでランダムウォークを実現できることを示唆している. では逆に, ランダムウォークを用いて Brown 運動を近似することはできるだろうか.

記号 2.4 (線形補間)**.** *$n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n < m$ と $0 \leq s < t$ に対し, 写像 $\psi^{n,m}_{[s,t]} : \mathbb{R}^{m-n+1} \to C([s, t], \mathbb{R})$ を次で定める:*
$S = \{S_k\}_{k=n}^m \in \mathbb{R}^{m-n+1}$ に対し,

$$\begin{aligned}(\psi^{n,m}_{[s,t]}(S))(u) &:= \sqrt{\frac{t-s}{m-n}}\left\{S_{[\frac{(m-n)(u-s)}{t-s}]+n} + \left(\frac{(m-n)(u-s)}{t-s} - \left[\frac{(m-n)(u-s)}{t-s}\right]\right)\right. \\ &\qquad \left.\times\left(S_{[\frac{(m-n)(u-s)}{t-s}]+n+1} - S_{[\frac{(m-n)(u-s)}{t-s}]+n}\right)\right\}, \quad (s \leq u < t), \\ (\psi^{n,m}_{[s,t]}(S))(t) &:= \sqrt{\frac{t-s}{m-n}} S_m.\end{aligned}$$

$\psi^{n,m}_{[s,t]}(S) : \mathbb{R}^{m-n+1} \to \quad C([s, t], \mathbb{R})$ は $m - n + 1$ 個の点 $S_n, S_{n+1}, \ldots, S_m$ を繋いだ折線を区間 $[s, t]$ 上の関数になるようにスケール変換したものである.

次の定理は **Donsker の不変原理** (invariance principle), または中心極限定理の無限次元版として **functional central limit theorem** とよばれている. 証明は Donsker の原論文 ([5]) や [1], [9], [11] を参照されたい.

定理 2.5 (Donsker の不変原理)**.** *$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ を平均 0, 分散 1 をもつこの空間上の i.i.d. とし, この確率変数列から定義されるランダムウォークを $S = \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ とする. $n \in \mathbb{N}$ に対し, S の線形補間 $\psi^{0,n}_{[0,1]}(S)$ によって誘導される $C([0, 1], \mathbb{R})$ 上の測度を P_n とする. この*

とき, $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある測度 P^* に弱収束する. P^* の下で, $C([0,1],\mathbb{R})$ の座標写像過程

$$W_t(\omega) := \omega(t) \quad (\omega \in C([0,1],\mathbb{R}), t \in [0,1])$$

は 0 出発の Brown 運動である.

この定理により, 連続関数の空間において, ランダムウォークの線形補間が Brown 運動に弱収束することがわかる. つまり, ランダムウォークによって Brown 運動を「弱収束の意味で」近似できることがわかる.

3 条件付ランダムウォークの不変原理

Donsker の不変原理は様々な条件付ランダムウォークの場合に拡張されている. ここでは, 代表的な 2 つの結果を紹介する.

まず, 正に条件付けられたランダムウォークに関する結果を紹介する. この結果は Iglehart[8] によって強い仮定の下で示され, Bolthausen[2] によって仮定が緩められた. また, さらに一般的な設定の下での結果が Doney[4] によって示されている. ここでは Bolthausen の結果を紹介する.

定理 3.1 ([2])**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ を平均 0, 分散 1 をもつこの空間上の i.i.d. とし, この確率変数列から定義されるランダムウォークを $S = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とする. $n \in \mathbb{N}$ に対し, S の線形補間 $\psi_{[0,1]}^{0,n}(S)$ によって誘導される $C([0,1],\mathbb{R})$ 上の測度を P_n とする. さらに,

$$Q_n(A) := P_n(A \mid C([0,1],[0,\infty))) \quad (A \in \mathcal{B}(C([0,1],\mathbb{R})))$$

とする. このとき, $\{Q_n\}_{n=1}^{\infty}$ はある測度 P^+ に弱収束する. P^+ の下で, $C([0,1],\mathbb{R})$ の座標写像過程

$$W_t(\omega) := \omega(t) \quad (\omega \in C([0,1],\mathbb{R}), t \in [0,1])$$

は 0 出発の Brownian meander である. ただし, 0 出発の Brown 運動 $W = \{W(t)\}_{t\in[0,1]}$ と

$$\tau := \sup\{t \in [0,1] \mid W(t) = 0\}$$

によって

$$W^+(t) := \frac{1}{\sqrt{1-\tau}} |W(\tau + (1-\tau)t)| \quad (0 \le t \le 1)$$

と定義される確率過程 W^+ を, 区間 $[0,1]$ 上の 0 出発の Brownian meander とよぶ.

この定理により, 正に条件付けられたランダムウォークの線形補間が Brownian meander に弱収束することがわかる.

次に, 端点固定かつ正に条件付けられたランダムウォーク (ランダムウォーク橋) に関する結果を紹介する.

$n, m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ $(n < m), 0 \le a < b$ とする. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, この空間上の $S_n = a$ を満た

すランダムウォーク $\{S_k\}_{k=n}^m$ に対し, $\mathbb{R}^{m-n+1}$ 上の測度 $\mathbf{P}_{n,m}^{a,b,(\uparrow)}$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_{n,m}^{a,b,(\uparrow)}(I_n \times \cdots \times I_m) \\
&:= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P\left(S_n \in I_n, \cdots, S_{m-1} \in I_{m-1}, S_m \in I_m \mid S_n \in [0,\infty), \cdots, S_{m-1} \in [0,\infty), S_m \in [b-\varepsilon, b+\varepsilon]\right) \\
&= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{P\left(S_n \in I_n \cap [0,\infty), \cdots, S_{m-1} \in I_{m-1} \cap [0,\infty), S_m \in I_m \cap [b-\varepsilon, b+\varepsilon]\right)}{P\left(S_n \in [0,\infty), \cdots, S_{m-1} \in [0,\infty), S_m \in [b-\varepsilon, b+\varepsilon]\right)}.
\end{aligned}$$

ただし, I_k $(n \le k \le m)$ を $\mathbb{R}$ の区間とする.

さらに, $C([s,t],\mathbb{R})$ 上の測度 $\mathcal{P}_{[s,t],n,m}^{a,b,(\uparrow)}$ を次で定める:

$$\mathcal{P}_{[s,t],n,m}^{a,b,(\uparrow)} := \mathbf{P}_{n,m}^{\frac{a}{\sqrt{t-s}}, \frac{b}{\sqrt{t-s}}, (\uparrow)} \circ \psi_{[s,t]}^{n,m-1}.$$

確率空間 $(C([s,t],\mathbb{R}), \mathcal{B}(C([s,t],\mathbb{R})), \mathcal{P})$ を考え, $X = \{X(u)\}_{u \in [s,t]}$ をこの空間上の座標過程とする. $P_{[s,t]}^{a,b,(\uparrow)}$ を次で定める:

$$P_{[s,t]}^{a,b,(\uparrow)}(\cdot) := \mathcal{P}(\cdot \mid \forall u \in [s,t],\ X(u) \ge 0, X(s) = a,\ X(t) = b).$$

以上の記号の下で, 次の定理が成り立つ ([3]):

定理 3.2 ([3] Corollary 2.5)**.** *$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ を平均 0, 分散 1 をもつこの空間上の i.i.d. とし, この確率変数列から定義されるランダムウォークを $S = \{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ とする. $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が次の仮定を満たすとする:*

1. *P の下での S_1 の分布は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度に絶対連続.*
2. *ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, S_n の密度関数 $f_n(x) := P(S_n \in dx)/dx$ は $f_n \in L^\infty$ を満たす.*

このとき, 測度の列 $\{\mathcal{P}_{[0,1],0,2n}^{\sqrt{n}a, \sqrt{n}b, (\uparrow)}\}_{n=1}^\infty$ は測度 $P_{[0,1]}^{a,b,(\uparrow)}$ に弱収束する.

この定理によって, 端点固定かつ正に条件付けられたランダムウォークの線形補間が 3 次元 Bessel bridge とよばれる確率過程に弱収束することがわかる.

4 2 曲線間に留まるよう条件付けられたランダムウォーク橋に対する不変原理

定理 3.2 では端点固定かつ正に条件付けられたランダムウォークを考えたが, ランダムウォークの動く範囲についてさらに条件を付加した場合どのような弱収束が議論できるだろうか. 本節ではこのことについて, 筆者による主結果を 2 つ紹介する.

$n, m \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ $(n < m), 0 \le s < t, h : [s,t] \to \mathbb{R}$ とする. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, この空間上の $S_n = a$ を満たすランダムウォーク $\{S_k\}_{k=n}^m$ に対し, $\mathbb{R}^{m-n+1}$ 上の測度 $\mathbf{P}_{[s,t],n,m}^{a,b,(h\uparrow)}$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_{[s,t],n,m}^{a,b,(h\uparrow)}(I_n \times \cdots \times I_m) \\
&:= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} P\Big(S_n \in I_n, \cdots, S_{m-1} \in I_{m-1}, S_m \in I_m \ \Big| \\
&\qquad\qquad S_{n+k} \ge \sqrt{\frac{m-n}{t-s}} h\left(s + k\frac{t-s}{m-n}\right)\ (0 \le k \le m-n-1),\ S_m \in [b-\varepsilon, b+\varepsilon]\Big).
\end{aligned}$$

ただし, I_k $(n \le k \le m)$ を $\mathbb{R}$ の区間とする.

また, $C([s,t],\mathbb{R})$ 上の測度 $\mathcal{P}^{a,b,(h\uparrow)}_{[s,t],n,m}$ を次で定める:

$$\mathcal{P}^{a,b,(h\uparrow)}_{[s,t],n,m} := \mathbf{P}^{\frac{a}{\sqrt{t-s}},\frac{b}{\sqrt{t-s}},(h\uparrow)}_{n,m} \circ \psi^{n,m-1}_{[s,t]}.$$

さらに,

$$A^{(h\downarrow)}_{[s,t],n,m} := \prod_{k=0}^{m-n}\left(-\infty, \sqrt{\frac{m-n}{t-s}}h\left(s+k\frac{t-s}{m-n}\right)\right],$$
$$K^{(h\downarrow)}_{[s,t]} := \{f \in C([s,t],\mathbb{R}) \mid f(u) \le h(u)\ (s \le u \le t)\}$$

とおく.

まず, ランダムウォークの上側の境界である関数 h が定数関数 $h \equiv b > 0$ であるときの結果として, 次を得た:

定理 4.1 (主結果 1)**.** $b > 0$ とする. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ を標準正規分布に従うこの空間上の i.i.d. とし, この確率変数列から定義されるランダムウォークを $S = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とする. このとき, 測度の列 $\{\mathcal{P}^{0,\sqrt{n}b,(0\uparrow)}_{[0,1],0,2n}\left(\cdot \mid K^{(b\downarrow)}_{[0,1]}\right)\}_{n=1}^{\infty}$ はある測度 P^H に弱収束する. 測度 P^H は Brownian house-moving$H^{0\to b} = \{H^{0\to b}(t)\}_{t\in[0,1]}$ の分布である.

Brownian house-moving は出発点と到達点の間に留まる 1 次元 Brownian bridge であり, その構成方法は [7] で与えられている. 定理 4.1 により, [7] とは異なる Brownian house-moving の構成方法を与えることができた.

次に, ランダムウォークの動く範囲が 2 曲線の間の場合を考える.

$b > 0$ とし, $h^+, h^- \in C^2([0,1],\mathbb{R}), h^-(t) < h^+(t)\ (t \in [0,1]), h^-(0) = 0, h^+(1) = b$ とする. $0 \le s < t$ とし, $f \in C^2[s,t]$ に対して Cameron-Martin density$M_{s,t}(f)$ を

$$M_{s,t}(f) := \exp\left(\int_s^t f'(u)dx(u) - \frac{1}{2}\int_s^t f'(u)^2 du\right)$$

と定義する. ただし, 積分 $\int_s^t f'(u)dx(u)$ は x に関する確率積分.

また, $h^+, h^- \in C^2([0,1],\mathbb{R}), h^-(t) < h^+(t)\ (t \in [0,1]), h^-(0) = 0, h^+(1) = b$ と $y \in [h^-(1/2), h^+(1/2)]$ に対して

$$k_{[0,\frac{1}{2}]}(y) := \frac{P\left(W^+_{[0,\frac{1}{2}]}(1/2) \in dy - h^-(1/2)\right)}{dy} P^{0,(y-h^-(1/2),(0\uparrow)}_{[0,\frac{1}{2}]}\left(K^{((h^+-h^-)\downarrow)}_{[0,\frac{1}{2}]}\right)$$
$$\times E^{0,(y-h^-(1/2)),(0\uparrow)}_{[0,\frac{1}{2}]}\left[M_{[0,\frac{1}{2}]}(h^-)^{-1} \mid K^{((h^+-h^-)\downarrow)}_{[0,\frac{1}{2}]}\right]$$

$$k_{[\frac{1}{2},1]}(y) := \frac{P\left(W^+_{[\frac{1}{2},1]}(1/2) \in b - dy - (b - h^+(1/2))\right)}{dy} P^{0,(h^+(1/2)-y),(0\uparrow)}_{[\frac{1}{2},1]}\left(K^{((h^+-h^-)\downarrow}_{[\frac{1}{2},1]}\right)$$
$$\times E^{0,(h^+(1/2)-y),(0\uparrow)}_{[\frac{1}{2},1]}\left[M_{[\frac{1}{2},1]}(b - \overleftarrow{h^+})^{-1} \mid K^{((h^+-h^-)\downarrow}_{[\frac{1}{2},1]}\right]$$

とし,

$$k(y) := k_{[0,\frac{1}{2}]}(y)k_{[\frac{1}{2},1]}(y)$$

とおく. ただし, $0 \le s < t$ に対して $W^{+}_{[s,t]}$ は区間 $[s,t]$ 上の Brownian meander を表す.

このとき, 2 曲線 h^-, h^+ の間に留まるよう条件付けられたランダムウォーク橋の確率密度関数の収束に関する次の結果を得た:

定理 4.2 (主結果 2)**.** *$b > 0$ とし, $h^+, h^- \in C^2([0,1],\mathbb{R}), h^-(t) < h^+(t)$ $(t \in [0,1]), h^-(0) = 0, h^+(1) = b$ とする. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし, $\xi_1, \xi_2, \ldots$ を標準正規分布に従うこの空間上の i.i.d. とし, この確率変数列から定義されるランダムウォークを $S = \{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ とする. 任意の $y \in [h^-(1/2), h^+(1/2)]$ に対し, 以下が成り立つ:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d}{dy} \mathbf{P}^{0,\sqrt{2N}b,(h^-\uparrow)}_{[0,1],0,2N} \left(\mathbb{R}^N \times (-\infty, \sqrt{2N}y] \times \mathbb{R}^N \mid A^{(h^+\downarrow)}_{[0,1],0,2N} \right) = \frac{k(y)}{\int_{h^-(1/2)}^{h^+(1/2)} k(z)dz}$$

参考文献

[1] P. Billingsley: Convergence of Probability Measures, Wiley, New York (1968).

[2] E. Bolthausen: *On a functional central limit theorem for random walks conditioned to stay positive*, Ann. Probab. **4**, no.3, 480-485 (1976).

[3] F. Caravenna and L. Chaumont: *An invariance principle for random walk bridges conditioned to stay positive*, Electronic Journal of Probability **18**, no.60, 1-32 (2013).

[4] R. A. Doney: *Conditional Limit Theorems for Asymptotically Stable random Walks*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **70**, 351-360 (1985).

[5] M. D. Donsker: *An invariance principle for certain probability limit theorems*, Mem, Amer. Math. Soc. **6**, 1-12 (1951).

[6] 舟木 直久: 確率論, 朝倉書店, 講座　数学の考え方 **20** (2004).

[7] D. Hatakenaka, K. Ishitani and K. Suzuki: *Construction and sample path properties of Brownian house-moving between two curves*, arXiv:2006.02726v3.

[8] D. L. Iglehart: *Functional central limit theorems for random walks conditioned to stay positive*, Ann. Probab. **2**, 608-619 (1974).

[9] I. Karatzas and S. E. Shreve: Brownian motion and Stochastic calculus, Springer, Science+Business Media Inc. (1998).

[10] J. Klafter and I. M. Sokolov: ランダムウォーク はじめの一歩 -自然現象の解析を見すえて-, 共立出版 (2018).

[11] 小谷　眞一: 測度と確率, 岩波書店 (2005).

[12] 清水 泰隆: 統計学への確率論, その先へ, 内田老鶴圃 (2019).

[13] A. N. Shiryaev: Probability 2nd. Ed, Springer-Verlag. New York (1996).

[14] S. Shreve: Stochastic Calculus for Finance I: The Binomial Asset Pricing Model, Springer Science+Business Media Inc. (2004).

公約数ニムのグランディ数

筑波大学大学院 理工情報生命学術院 数理物質科学研究群 数学学位プログラム
野萩遼太郎 (Ryotaro Nohagi)

概要

有限型不偏ゲーム (以下, ゲームと略記する) では, 各局面において, 先手もしくは後手の一方のみに必勝戦略があることが保証されている. (与えられた) ゲームの局面全体の集合 $\mathcal{P}$ から, 0 以上の整数全体の集合 $\mathbb{N}$ への関数である, Sprague-Grundy 関数の値 (Sprague-Grundy 数, グランディ数) を求める事によって, 局面の必勝判定が可能になる. しかし, グランディ数は終了局面から再帰的に定まる値であるため, 原理的に計算するだけなら計算量爆発を起こしてしまう. 今回の研究では, m 山公約数ニムというゲームを導入し, そのグランディ数を決定した.

1 有限型不偏ゲーム

この節では, 有限型不偏ゲームの基礎的な理論を紹介する. 詳細については, [1], [2] などを参照して頂きたい.

定義 1.1 ([1, 第 2 章 2.2 節])**.** 有限型不偏ゲームとは, 2 人のプレイヤーが交互に手を打つゲームであり, 以下を満たすもののことである.
条件 1 (確定性). 偶然的要素を含まない.
条件 2 (完全情報性). 両プレイヤーにとって隠された情報がない.
条件 3 (対称性). 同一局面では各プレイヤーが打てる手に差がない.
条件 4 (有限性). 有限回の手順で必ず勝敗が決まる.

断らない限り, 本論文でのゲームとは, 有限型不偏ゲームのことを指す. ゲームの局面全体の集合を $\mathcal{P}$ で表す. $P \in \mathcal{P}$ の後続局面（P から一手で移動可能な局面）全体を $N(P)$ で表す. $P \in \mathcal{P}$ が与えられたとき, P における先手とは, P に着手するプレイヤーのことをいい, 後手とは先手ではないプレイヤーのことをいう. それ以上着手できない局面, つまりゲームの勝敗がつく局面のことを終了局面とよぶ. $\mathcal{E}$ を終了局面全体の集合とする. 局面 $P \in \mathcal{P}$ に対して, P から始まり, 終了局面に辿り着くまでの指し手の最大回数を局面 P の長さといい, $l(P)$ と表す. ゲームの有限性とは, 任意の局面 $P \in \mathcal{P}$ に対して, $l(P)$ が有限に定まることである.

有限型不偏ゲームの代表例に, m 山ニムがある.

定義 1.2. m 山ニムは以下で定まる有限型不偏ゲームである.

(i) 局面全体の集合 $\mathcal{P}$ は $\mathbb{N}^m$ である.

(ii) $P = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathcal{P}$ に対して,

$$N(P) := \left\{ (n'_1, \ldots, n'_m) \in \mathbb{N}^m \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } 1 \le i \le m \text{ が唯一つ存在して} \\ n'_j = n_j \ (1 \le j \le m,\ j \ne i), \\ 0 < n_i - n'_i \le n_i \end{array} \right\}.$$

このとき, 終了局面は $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ のみである.

例 1.3. 2 山ニムについて, $P := (2,1) \in \mathcal{P}$ をとると, $N(P) = \{(1,1), (0,1), (2,0)\}$ である.

補題 1.4 ([1, 第 2 章 2.3 節])**.** 局面 $P \in \mathcal{P}$ に対して, 何度か着手することで再度局面 P に辿り着くことはない. また Q が P の後続局面であるとき, $l(P) > l(Q)$ である.

証明. 前者はゲームの有限性からいえる. 後者も有限性と $l(P)$ の定義からいえる. □

定理 1.5 ([1, 定理 2.3])**.** ゲームの各局面 $P \in \mathcal{P}$ は先手必勝か, 後手必勝のいずれかである. ここで, 先手 (後手) 必勝局面とは, 先手 (後手) にのみ必勝戦略がある局面のことである.

ゲームの局面全体の集合 $\mathcal{P}$ から, 0 以上の整数全体の集合 $\mathbb{N}$ への関数である, Sprague-Grundy 関数の値 (Sprague-Grundy 数, グランディ数) を求める事によって, 局面の必勝判定が可能になる.

定義 1.6 ([1, 第 3 章 3.1 節])**.** $\mathbb{N}$ を 0 以上の整数全体の集合とする. $\mathbb{N}$ の真部分集合 T に対して, $\operatorname{mex} T := \min(\mathbb{N} - T)$ を T の最小除外数という.

例 1.7. $\operatorname{mex}\{0,1,2,3,4,6,8\} = 5,\ \operatorname{mex}\{1,2,3,\ldots,512460,512461\} = 0.$

定義 1.8 ([1, 第 3 章 3.1 節])**.** ゲーム $\mathcal{G}$ に対して, $P \in \mathcal{P}$ のグランディ数 $\operatorname{sg}(P) = \operatorname{sg}_{\mathcal{G}}(P)$ を, $l(P)$ に関して帰納的に, $\operatorname{sg}_{\mathcal{G}}(P) := \operatorname{mex}\{\operatorname{sg}_{\mathcal{G}}(P') \mid P' \in N(P)\}$ で定める. また, 関数 $\operatorname{sg}_{\mathcal{G}} : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$ を Sprague-Grundy 関数という.

例 1.9. 2 山ニムを例に考える. $(1,1) \in \mathcal{P}$ をとると, $N(1,1) = \{(1,0), (0,1)\}$ であり, $N(1,0) = N(0,1) = \{(0,0)\}$ となり, $N(0,0) = \emptyset$ である. Sprague-Grundy 数は終了局面から帰納的に各局面に対し定まる値であるので, 終了局面から考える. $N(0,0) = \emptyset$ より, $\operatorname{sg}(0,0) = 0$ である. よって, $(1,0), (0,1)$ ともに $\operatorname{sg}(1,0) = \operatorname{sg}(0,1) = \operatorname{mex}\{\operatorname{sg}(0,0)\} = 1$ である. 最後に $\operatorname{sg}(1,1) = \operatorname{mex}\{\operatorname{sg}(1,0), \operatorname{sg}(0,1)\} = 0.$

定理 1.10 (必勝判定の基本原理 [1, 補題 2.4])**.** 局面全体の集合 $\mathcal{P}$ の部分集合 $\mathcal{B}, \mathcal{W}$ が $\mathcal{P} = \mathcal{B} \sqcup \mathcal{W}$ かつ以下をみたすとする.

(i) $\mathcal{W} \supset \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ は終了局面全体の集合).
(ii) $P \in \mathcal{B}$ ならば $N(P) \cap \mathcal{W} \ne \emptyset$.
(iii) $P \in \mathcal{W}$ ならば $N(P) \cap \mathcal{W} = \emptyset$ (すなわち, $N(P) \subset \mathcal{B}$).

このとき, $\mathcal{W}$ は後手必勝局面全体の集合で, $\mathcal{B}$ は先手必勝局面全体の集合である.

先手必勝局面に着手し, 後手必勝局面へ遷移させ続けることでゲームに勝つことができる. そのためにも, 以下の定理は重要である.

定理 1.11 ([1, 定理 3.1])**.** 局面全体の集合 $\mathcal{P}$ を

$$\mathcal{B} := \{P \in \mathcal{P} \mid \mathrm{sg}(P) > 0\},$$

$$\mathcal{W} := \{P \in \mathcal{P} \mid \mathrm{sg}(P) = 0\}$$

の 2 つに分けると $\mathcal{B}$ は先手必勝局面全体の集合であり, $\mathcal{W}$ は後手必勝局面全体の集合である.

証明. $\mathcal{B}$ と $\mathcal{W}$ が定理 1.10 の条件を満たしていることを確認する. 終了局面 $E \in \mathcal{E}$ は後続局面が存在しないので, $\mathrm{sg}(E) = 0$. よって, $\mathcal{W} \supseteq \mathcal{E}$. $\mathrm{sg}(P) > 0$ とすると, グランディ数の定義より, ある $P' \in N(P)$ が存在して $\mathrm{sg}(P') = 0$ となる. よって $N(P) \cap \mathcal{W} \neq \emptyset$. 他方 $\mathrm{sg}(P) = 0$ とすれば, グランディ数の定義から, 任意の後続局面は $\mathrm{sg}(P') \neq 0$ をみたすので $N(P) \cap \mathcal{W} = \emptyset$ となる. □

したがって定理 1.11 から, グランディ数を決定することができれば, 局面が後手必勝局面であるか否かを判定できる. さらに, グランディ数を求めることによって, 入江 [6] や安福-多田 [3] の研究のように, 表現論などの他分野との繋がりが生まれることもある. また, 通常のニムのように, 他の成分とは独立に, ある 1 つの成分だけを変化させるのであれば,「ゲームの和のグランディ数についての定理 (定理 1.17)」を用いることで, 一般の $m \geq 1$ の場合の Sprague-Grundy 数の計算を, $m = 1$ の場合の Sprague-Grundy 数の計算に帰着させることができ, 簡単である.「ゲームの和のグランディ数についての定理」を紹介するために必要な概念を整理する.

定義 1.12 (ゲームの同型)**.** 各 $i \in \{1, 2\}$ に対して, ゲーム $\mathcal{G}_i$ の局面全体の集合を $\mathcal{P}_i$ としたとき, $\mathcal{G}_1$ と $\mathcal{G}_2$ が同型なゲームであるとは, ある全単射 $\psi : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ が存在して, 任意の $P \in \mathcal{P}_1$ に対して, $\psi(N(P)) = N(\psi(P))$ が成り立つことと定める. また, $\mathcal{G}_1$ と $\mathcal{G}_2$ が同型なゲームであるとき, $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2$ と表す.

定義 1.13 (ゲームの和 [1, 第 3 章 3.3 節])**.** $\mathcal{G}_1$ と $\mathcal{G}_2$ をゲームとし, $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ をそれぞれの局面全体の集合, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ をそれぞれの終了局面全体の集合とする. このとき, ゲーム $\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2$ を以下で定める.

- 局面全体の集合は直積集合 $\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ とする.
- $(P_1, P_2) \in \mathcal{P}$ に対して,

  $$N(P_1, P_2) = \{(P_1', P_2) \mid P_1' \in N(P_1)\} \cup \{(P_1, P_2') \mid P_2' \in N(P_2)\}$$

  と定める. このとき, 終了局面全体の集合は $\mathcal{E} := \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ となる.

注意 1.14 ([1, 第 3 章 3.3 節])**.** 各 $i = 1, 2, 3$ に対して, ゲーム $\mathcal{G}_i$ の局面全体の集合を $\mathcal{P}_i$, 終了局面全体の集合を $\mathcal{E}_i$ とする. このとき, $(\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2) + \mathcal{G}_3 \cong \mathcal{G}_1 + (\mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_3)$ が成立する. 実際, 各 $i = 1, 2, 3$ に対して, $P_i \in \mathcal{P}_i$ とすると, 局面全体の集合について $(\mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2) \times \mathcal{P}_3$ と $\mathcal{P}_1 \times (\mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_3)$ は, $(P_1 \times P_2) \times P_3 \mapsto P_1 \times (P_2 \times P_3)$ によって自然に同一視される. あとは, $N((P_1, P_2), P_3) = N(P_1, (P_2, P_3))$ が成り立つことを見ればよい. $P := (P_1, P_2) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$,

$Q := (P_2, P_3) \in \mathcal{P}_2 \times \mathcal{P}_3$ とおくと

$$\begin{aligned}
N(P, P_3) &= \{(P', P_3) \mid P' \in N(P)\} \cup \{(P, P_3') \mid P_3' \in N(P_3)\} \\
&= \{((P_1', P_2), P_3) \mid P_1' \in N(P_1)\} \cup \{((P_1, P_2'), P_3) \mid P_2' \in N(P_2)\} \\
&\quad \cup \{(P, P_3') \mid P_3' \in N(P_3)\} \\
&= \{(P_1', Q) \mid P_1' \in N(P_1)\} \cup \{(P_1, Q') \mid Q' \in N(Q)\} \\
&= N(P_1, Q)
\end{aligned}$$

が成立するので, $(\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2) + \mathcal{G}_3 \cong \mathcal{G}_1 + (\mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_3)$ がわかった.

定義 1.15 ([1, 第 1 章 1.4 節])**.** $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, $m \oplus n$ を m と n の繰り上がりなし 2 進和と定める. つまり, $m \oplus n$ とは, m と n の各々を 2 進数表記して, 各桁の排他的論理和をとる演算である.

例 1.16. $4 = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2$, $5 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2$ と表せるため,

$$4 \oplus 5 = (0 \oplus 1)2^0 + (0 \oplus 0)2^1 + (1 \oplus 1)2^2 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 = 1$$

定理 1.17 (ゲームの和のグランディ数 [1, 定理 3.4])**.** 各 $i \in \{1, 2\}$ に対して, ゲーム $\mathcal{G}_i$ の局面全体の集合を $\mathcal{P}_i$ とする. このとき, $P_1 \in \mathcal{P}_1, P_2 \in \mathcal{P}_2$ について,

$$\mathrm{sg}_{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2}(P_1, P_2) = \mathrm{sg}_{\mathcal{G}_1}(P_1) \oplus \mathrm{sg}_{\mathcal{G}_2}(P_2)$$

が成り立つ.

系 1.18. 注意 1.14 と定理 1.17 より, 各 $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して, ゲーム $\mathcal{G}_i$ の局面全体の集合を $\mathcal{P}_i$ とする. このとき, 各 $P_i \in \mathcal{P}_i$ について,

$$\mathrm{sg}_{\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \cdots + \mathcal{G}_m}(P_1, P_2, \ldots, P_m) = \mathrm{sg}_{\mathcal{G}_1}(P_1) \oplus \mathrm{sg}_{\mathcal{G}_2}(P_2) \oplus \ldots \mathrm{sg}_{\mathcal{G}_m}(P_m)$$

が成り立つ.

2 公約数ニムについて

定義 2.1. m 山公約数ニムは以下で定まる有限型不偏ゲームである:

(i) 局面全体の集合 $\mathcal{P}$ は $\mathbb{N}^m$ である.

(ii) $P = (n_1, \ldots, n_m) \in \mathcal{P}$ に対して,

$$N(P) := \left\{ (n_1', \ldots, n_m') \in \mathbb{N}^m \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{ある } 1 \le i \le m \text{ が唯一つ存在して} \\ n_j' = n_j \ (1 \le j \le m,\ j \ne i), \\ n_i - n_i' \text{ は } n_1, \ldots, n_m \text{ の正の公約数} \end{array} \right\}.$$

但し, 0 の約数は全ての正の整数とする. このとき, 終了局面は $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$ のみである.

この節では, 断らない限り, m 山公約数ニムを考える.

例 2.2 ($m=3$ の場合)**.** $P:=(6,3,2)\in\mathcal{P}=\mathbb{N}^3$ である．このとき, $6,3,2$ の公約数は 1 のみであるから, $N(P)=\{(5,3,1),(6,2,2),(6,3,1)\}$ である．$P':=(6,2,2)$ については, $6,2,2$ の公約数は $1,2$ であるから, $N(P')=\{(5,2,2),(6,1,2),(6,2,1),(4,2,2),(6,0,2),(6,2,0)\}$ である．

このように m 山公約数ニムは通常のニムの変形である．着手前と着手後で変化する（減少する）成分が 1 つだけという点は通常のニムと同じであるが，グランディ数の視点から見た場合に，本質的な大きな違いの 1 つは，その変化が他の成分の影響を受けている点である．すなわち, 公約数ニムの場合には,「ゲームの和のグランディ数についての定理」を用いることはできず，そのグランディ数の計算は一般には困難である．実際,（少し状況は違うが）有名な例として，$m=2$ の場合のニムに,「両方の成分から一度に同じ正の整数を引くことができる」というルールを付け加えたチャヌシッチ（Wythoff のゲームともいう； [8],[1, 第 9 章],[2, 第 6 章] などを参照）については，必勝判定はできるが，Sprague-Grundy 数は決定されていない．記号をいくつか導入し, 主定理を述べる．

定義 2.3. $a\in\mathbb{N}$ に対して,

$$\mathrm{ord}_2(a):=\begin{cases}\max\{L\in\mathbb{N}\mid 2^L \text{ が } a \text{ の約数}\} & (a\neq 0 \text{ のとき}),\\ +\infty & (a=0 \text{ のとき})\end{cases}$$

と定める．但し, 上記の $+\infty$ とは, 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して, $n<+\infty$ を満たすものとする．

局面 $P=(n_1,\ldots,n_m)\in\mathcal{P}=\mathbb{N}^m$ に対して,

$$\lambda(P):=\min\bigl\{\mathrm{ord}_2(n_i)\mid 1\le i\le m\bigr\}, \tag{1}$$

$$\iota(P):=\#\bigl\{1\le i\le m\mid \mathrm{ord}_2(n_i)=\lambda(P)\bigr\} \tag{2}$$

とおく．次の定理が本論文の主結果である．

定理 2.4. $P=(n_1,\ldots,n_m)\in\mathcal{P}$ に対して,

$$\mathrm{sg}(P)=\begin{cases}\lambda(P)+1 & (P\neq\mathbf{0} \text{ かつ } \iota(P) \text{ が奇数のとき}),\\ 0 & (P\neq\mathbf{0} \text{ かつ } \iota(P) \text{ が偶数のとき}),\\ 0 & (P=\mathbf{0} \text{ のとき})\end{cases}$$

が成り立つ．

例 2.5 ($m=2$ の場合)**.** $P:=(1,2)\in\mathcal{P}=\mathbb{N}^2$ とする．まずグランディ数を定義通り計算すると, $N(P)=\{(0,2),(1,1)\}$ である．$N(0,2)=\{(0,1),(0,0)\}$, $N(0,1)=\{(0,0)\}$ であるから, $\mathrm{sg}(0,1)=\mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(0,0)=0\}=1$ が得られる．よって, $\mathrm{sg}(0,2)=\mathrm{mex}\{0,1\}=2$ となる．$N(1,1)=\{(0,1),(1,0)\}$ であり, $\mathrm{sg}(1,0)=\mathrm{sg}(0,1)=1$ となるから, $\mathrm{sg}(1,1)=\mathrm{mex}\{1\}=0$ が得られる．よって, $\mathrm{sg}(P)=\mathrm{mex}\{\mathrm{sg}(0,2),\mathrm{sg}(1,1)\}=\{2,0\}=1$ がわかった．一方, $\mathrm{ord}_2(1)<\mathrm{ord}_2(2)$ だから, $\lambda(P)=\mathrm{ord}_2(1)=0$. よって, $\iota(P)=1\in 2\mathbb{Z}+1$. 定理 2.4 から, $\mathrm{sg}(P)=0+1=1$ となり, 定義通り計算した場合とも一致した．

参考文献

[1] 佐藤文広, 石取りゲームの数学 ゲームと代数の不思議な関係, 数学書房, 2014.

[2] 一松信, 石取りゲームの数理, 森北出版株式会社, 2003.

[3] T.Abuku and M.Tada, *Multiple hook removing game whose starting position is a rectangular young diagram with the unimodal numbering,* arXiv:2112.12963.

[4] C.L.Bouton, *Nim, a game with a complete mathematical theory*, The Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 3, No. 1/4, pp.35-39, 1901-1902.

[5] P.Grundy, *Mathematics and games*, Eureka 2, pp6–8, 1939.

[6] Y.Irie, *A base-p Sprague-Grundy type theorem for p-calm subtraction games: Welter's game and representations of generalized symmetric groups,* Integers 21B (To the Three Forefathers of Combinatorial Game Theory: The John Conway, Richard Guy, and Elwyn Berlekamp Memorial Volume), A15, pp.1–27, 2021.

[7] R.Sprague, *Über mathematische Kampfspiele*, Tohoku Mathematical Journal 41, pp.438-444, 1935-1936.

[8] W.A.Wythoff, *A modification of the game of Nim*, Nieuw Arch. Wiskd.7, pp.199–202, 1907.

変分法によるポテンシャル系の孤立不変集合のコホモロジーの評価

京都大学大学院 情報学研究科 数理工学専攻
黒川大雅 (Taiga KUROKAWA)

概要

サドル・センター近傍においては, Lyapunov の中心定理により, そのエネルギーより僅かに大きなエネルギーについて, 孤立不変集合が唯一の周期軌道からなることが保証される. Moeckel(2005) は, PCR3BP の直線平衡点 L2 について, 変分法を用いてエネルギー固定条件下で遷移軌道の存在を示し, Easton(1970) の結果を用いて孤立不変集合のコホモロジーの評価を行うことで, より大きなエネルギーについて孤立不変集合の位相的構造を調べることを可能にしている. 本研究では, より一般のポテンシャル系に対し, 同様の方法で孤立不変集合のコホモロジーの評価を行った. また, 遷移軌道の存在証明に, Moeckel の用いた変分構造の他に別の変分構造を利用できることを明らかにした. 本講演では, これらの結果について紹介する. なお, 本研究は指導教員である柴山允瑠先生 (京都大学) との共同研究である.

1 動機と背景

1.1 非線形 ODE と不変集合

非線形 ODE については, 一般解を陽に書き下すような統一的な求積法が存在しないことがよく知られている. 例えば, 平面円制限 3 体問題 (PCR3BP) は, 一般解を陽に書き下すことのできない代表的な例である. そこで, 非線形 ODE のダイナミクスを調べる一つのアプローチとして, その不変集合を調べることがよく行われる. 本研究では, 非線形なポテンシャル系について, その孤立不変集合の位相的性質を調べた.

1.2 Lyapunov の中心定理

本研究で, 考察の対象としたポテンシャル系は, 次の関数 $U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ をポテンシャル関数とするものである.

$$\exists A, B > 0 \text{ s.t. } -Ax^2 \leq U(x, \mathbf{0}),\ U(x, \boldsymbol{y}) < B|\boldsymbol{y}|^2$$

これは, Lyapunov の中心定理の結果を"拡張"することを動機としたものである.

ここでは, まず, Moser [3] によって証明された Lyapunov の中心定理の一般化にあたる結果を紹介する. そこで, 原点をサドル・センターとする, 次の自励的 Hamilton 系について考える.

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = J \cdot^T DH(z)$$

$$\left\{\lambda \in \boldsymbol{C} | \det(J \cdot D^2 H(0) - \lambda I_4) = 0\right\} = \{\pm\lambda, \pm i\mu \neq 0\}$$

また, Hamiltonian $H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ は原点近傍で実解析的な関数であるとする．この Hamilton 系についての Moser の定理の主張は次の通りである．

定理 (Moser)**.** 原点近傍で解析的座標変換

$$\begin{aligned} x_i &= \phi_i(\xi, \eta, \zeta, \bar{\zeta}), \\ y_i &= \psi_i(\xi, \eta, \zeta, \bar{\zeta}) \end{aligned}$$

が存在して, さらに $\alpha(\xi\eta, |\zeta|^2) = \lambda + O_1(\xi\eta, |\zeta|^2) \in \mathbb{R}$, $\beta(\xi\eta, |\zeta|^2) = -i\mu + O_1(\xi\eta, |\zeta|^2) \in i\mathbb{R}$ が存在し, 各初期値 $\xi_0, \eta_0 \in \boldsymbol{R}, \zeta_0 \in \boldsymbol{C}$ に関する初期値解が次のように表せる．

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0 e^{t\alpha(\xi_0\eta_0, |\zeta_0|^2)}, & \eta(t) &= \eta_0 e^{-t\alpha(\xi_0\eta_0, |\zeta_0|^2)}, \\ \zeta(t) &= \zeta_0 e^{t\beta(\xi_0\eta_0, |\zeta_0|^2)}, & \bar{\zeta}(t) &= \bar{\zeta}_0 e^{-t\beta(\xi_0\eta_0, |\zeta_0|^2)}. \end{aligned}$$

また, この座標系で, Hamiltonian は次の通りである．

$$H(\xi, \eta, \zeta, \bar{\zeta}) = \lambda\xi\eta + \frac{1}{2}|\zeta|^2 + O_2(\xi\eta, |\zeta|^2)$$

□

この定理は, 原点より僅かに大きなエネルギーについて, その等エネルギー集合上で原点近傍に $\mathbb{S} \times [0, 1]$ と微分同相な孤立化ブロックが取れて, その最大不変集合が, 周期軌道であることを保証している．

1.3 孤立不変集合と遷移軌道

次に, 本研究でいかにして, 前節の Lyapunov の中心定理を”拡張”するかについて説明する．Moeckel [2] は, PCR3BP の直線平衡点 L2 近傍の遷移軌道の存在証明を Maupertuis 汎関数による変分構造を用いて行った．PCR3BP に関しては, 宇宙機の軌道設計の観点で, 遷移軌道の存在そのものに興味が持たれているが, Moeckel は, Easton [1] の結果を用いれば, 孤立化ブロックの境界間の遷移軌道の存在保証は, すなわち, 孤立不変集合のコホモロジー評価を可能にしていると指摘している．本研究では, このアイデアを用いて, サドル・センター近傍において, 前節の Lyapunov の中心定理より, 大きく, 具体的なエネルギーについて, 変分法的手法を用いて, 孤立化ブロックの境界間の遷移軌道の存在保証を行うことで, 孤立不変集合のコホモロジー評価, すなわち位相的構造を解明することを考える．この意味で Lyapunov の中心定理を”拡張”する．

2　エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造

2.1　Maupertuis 汎関数による変分構造

ポテンシャル系の Maupertuis 汎関数とは, 次のように $\mathcal{C}_1^{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}$ 上で定義される関数である.

$$\mathcal{M}_h(c) := \int_0^1 \sqrt{2(h - U(c(t)))} \cdot |\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}(t)| \ \mathrm{d}t$$

$c_* \in \mathcal{C}_1^{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}$ が, この汎関数の最小点であるとき, 時間パラメータを適切に変換して, エネルギーを h とするポテンシャル系の古典解にできることを示す.

c_* は特に臨界点である, すなわち, 次の $\delta\mathcal{M}_h(c_*) = 0$ の関係式が成り立つ.

$$0 = \int_0^1 \frac{\sqrt{2(h - U(c_*(t)))}}{|\dot{c}_*(t)|} \frac{\mathrm{d}c_*}{\mathrm{d}t}(t) \cdot \dot{\delta}(t) \ \mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{|\dot{c}_*(t)|}{\sqrt{2(h - U(c_*(t)))}} \nabla U(c_*(t)) \cdot \delta(t) \ \mathrm{d}t$$

まず, 時間パラメータを適切に変換することで, $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ なる範囲が孤立点からなる最小点が構成できる. 実際, $\mathcal{M}_h$ は, $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ なる範囲で 0 であり, 曲線の時間パラメータの変換について不変であるから, $\frac{\mathrm{d}c_*}{\mathrm{d}t}(t) \neq 0$ なる範囲を拡大するように時間パラメータを変換すれば, $\mathcal{M}_h$ の値を変えることなく, $\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ なる範囲を孤立点からなるようにできる.

次に, $\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}(t) = 0$ なる孤立点を除いて, 次のような時間パラメータの変換を考える.

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{|\dot{c}_1(t)|}{\sqrt{2(h - U(c_1(t)))}}$$

ただし, $\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}(t_*) = 0$ なる時刻については, $s_* := \int_0^{t_*} \frac{|\dot{c}_1(t)|}{\sqrt{2(h-U(c_1(t)))}} \ \mathrm{d}t$ と変換する. すなわち, $\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}s}(s) \neq 0$ なる範囲で, 次の関係を満たすような変換である.

$$\frac{1}{2}|\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}s}(s)|^2 + U(c_2(s)) = \frac{1}{2}|\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}t}(t(s))|^2 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s)^2 + U(c_1(s)) = h$$

c_1 についての, 先の関係式と同様の関係式 $\delta\mathcal{M}_h(c_1) = 0$ を, c_2 の時間パラメータに変換すると, $\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}s}(s) \neq 0$ なる範囲で, $|\dot{c}_2(s)| = \sqrt{2(h - U(c_2(s)))}$ が成り立っていることに注意すれば, 次の関係式が成立する.

$$\int_0^T \frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}s}(s) \cdot \dot{\delta}(s) \ \mathrm{d}s = \int_0^T \nabla U(c_2(s)) \cdot \delta(s) \ \mathrm{d}s$$

ただし, $T := \int_0^1 \frac{|\dot{c}_1(t)|}{\sqrt{2(h-U(c_1(t)))}} \ \mathrm{d}t$ とした. よって, c_2 は C^2 級であり, 次の方程式を満たすことがわかる.

$$\frac{\mathrm{d}^2 c_2}{\mathrm{d}s^2}(s) = -\nabla U(c_2(s))$$

従って, $\frac{1}{2}|\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}s}(s)|^2 + U(c_2(s))$ は定数であり, $(0, T)$ 全域で, 次の方程式を満たすことがわかる.

$$\frac{1}{2}|\frac{\mathrm{d}c_2}{\mathrm{d}s}(s)|^2 + U(c_2(s)) = h$$

2.2 Lagrange 汎関数による変分構造

ポテンシャル系の Lagrange 汎関数とは, 各所要時間 $T > 0$ について, 次のように $\mathcal{C}_T^{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}$ 上で定義される関数である.

$$\mathcal{A}^T(c^T) \coloneqq \int_0^T \frac{1}{2}|\frac{\mathrm{d}c^T}{\mathrm{d}t}(t)|^2 - U(c^T(t))\ \mathrm{d}t$$

$c_*^T \in \mathcal{C}_T^{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}$ が, この汎関数の最小点であるとき, ポテンシャル系の古典解であることがよく知られている. 実際, c_*^T は臨界点であり, すなわち, 次の $\delta\mathcal{A}^T(c_*^T) = 0$ の関係式が成り立つ.

$$\int_0^T \frac{\mathrm{d}c_*^T}{\mathrm{d}t}(t) \cdot \dot{\delta}(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^T \nabla U(c_*^T(t)) \cdot \delta(t)\ \mathrm{d}t$$

よって, c_*^T は C^2 級であり, 次の方程式を満たすことがわかる.

$$\frac{\mathrm{d}^2 c_*^T}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\nabla U(c_*^T(t))$$

また, エネルギー h について, 次のように変形した Lagrange 汎関数を考える.

$$\mathcal{A}_h^T(c^T) \coloneqq \int_0^T \frac{1}{2}|\frac{\mathrm{d}c^T}{\mathrm{d}t}(t)|^2 - U(c^T(t)) + h\ \mathrm{d}t$$

$c_*^{T_*} \in \mathcal{C}_{T_*}^{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}$ が, 所要時間についても最小点であるとき, エネルギーを h とするポテンシャル系の古典解であることを示す.

$c^{\lambda T_*}(t) \coloneqq c_*^{T_*}(\frac{t}{\lambda})$ として, $c^{\lambda T_*} \in \mathcal{C}_{\lambda T_*}^{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}$ であり, $c_*^{\lambda T_*}$ の定義から, 次が成り立つ.

$$\mathcal{A}_h^{\lambda T_*}(c^{\lambda T_*}) \geq \mathcal{A}_h^{\lambda T_*}(c_*^{\lambda T_*})$$

さらに, $c_*^{T_*}$ の定義から, 次が成り立つ.

$$\mathcal{A}_h^{\lambda T_*}(c^{\lambda T_*}) \geq \mathcal{A}_h^{\lambda T_*}(c_*^{\lambda T_*}) \geq \mathcal{A}_h^{T_*}(c_*^{T_*})$$

よって, 次の $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left\{\mathcal{A}_h^{\lambda T_*}(c^{\lambda T_*})\right\}_{\lambda=1} = 0$ の関係式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left\{\mathcal{A}_h^{\lambda T_*}(c^{\lambda T_*})\right\}_{\lambda=1} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left\{\int_0^{\lambda T_*} \frac{1}{2}|\frac{\mathrm{d}c^{\lambda T_*}}{\mathrm{d}t}(t)|^2 - U(c^{\lambda T_*}(t)) + h\ \mathrm{d}t\right\}_{\lambda=1} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left\{\int_0^{T_*} \frac{1}{2\lambda}|\frac{\mathrm{d}c_*^{T_*}}{\mathrm{d}s}(s)|^2 - \lambda U(c_*^{T_*}(s)) + \lambda h\ \mathrm{d}s\right\}_{\lambda=1} \\
&= \int_0^{T_*} h - \left(\frac{1}{2}|\frac{\mathrm{d}c_*^{T_*}}{\mathrm{d}s}(s)|^2 + U(c_*^{T_*}(s))\right)\ \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

ここで, $c_*^{T_*}$ がポテンシャル系の古典解であったから, $\frac{1}{2}|\frac{\mathrm{d}c_*^{T_*}}{\mathrm{d}s}(s)|^2 + U(c_*^{T_*}(s))$ は定数であり, $(0, T)$ 全域で, 次の方程式を満たすことがわかる.

$$\frac{1}{2}|\frac{\mathrm{d}c_*^{T_*}}{\mathrm{d}s}(s)|^2 + U(c_*^{T_*}(s)) = h$$

3 主結果

3.1 考察の対象

改めて以降の主結果では, 次のポテンシャル系を考察の対象とする.

$$\exists A, B > 0 \text{ s.t. } -Ax^2 \leq U(x, \mathbf{0}),\ U(x, \boldsymbol{y}) < B|\boldsymbol{y}|^2$$

ここで, 一つ目の条件について, 注意を述べておきたい. サドル・センター近傍では, より強い関係 $-Ax^2 \leq U(x, \boldsymbol{y})$ が成り立つが, 以下の議論では, この条件で十分である.

ここで, 以下の説明のために, 記号の導入を行う. $h \in \mathbb{R}$ に対し, 各集合を次のように定義する.

$$N_h \coloneqq \left\{(q,p) \mid \frac{1}{2}|p|^2 + U(q) = h\right\} \qquad N_h(a,b) \coloneqq \{(q,p) \in N_h | a \leq x \leq b\}$$
$$T_h \coloneqq \{q \mid U(q) \leq h\} \qquad T_h(a,b) \coloneqq \{q \in T_h | a \leq x \leq b\}$$
$$\Gamma_h(a) \coloneqq \{q \in T_h | x = a\} \qquad \Gamma_h(b) \coloneqq \{q \in T_h | x = b\}$$

3.2 Maupertuis 汎関数による結果

主結果 1. 次の条件を満たす C^∞ 級関数 $U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ と,

$$\exists A, B > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R}, -Ax^2 \leq U(x, 0),\ \forall (x, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^d, U(x, \boldsymbol{y}) < B|\boldsymbol{y}|^2$$

$h > 0, c > 0$ について, 次の条件 1-2 が成り立つと仮定する.

1. $\forall (x, \boldsymbol{y}) \in \Gamma_h(-c),\ \frac{\partial U}{\partial x}(x, \boldsymbol{y}) > 0, \forall (x, \boldsymbol{y}) \in \Gamma_h(c),\ \frac{\partial U}{\partial x}(x, \boldsymbol{y}) < 0$
2. $\sqrt{A\frac{c^2}{h}(1 + A\frac{c^2}{h})} + \log\left(\sqrt{A\frac{c^2}{h}} + \sqrt{1 + A\frac{c^2}{h}}\right) < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{A}{B}}$

このとき, U をポテンシャル関数とするポテンシャル系の局所解で, エネルギーが h で, $(-c, 0)$ から $(c, 0)$ へ至るものが存在する. □

証明の概略. $R \coloneqq [-c, c] \times \{|\boldsymbol{y}| \leq \sqrt{\frac{h}{B}}\}$ をとり, $\boldsymbol{z}_S \coloneqq (-c, 0)$ と $\boldsymbol{z}_G \coloneqq (c, 0)$ を結ぶエネルギー h の遷移軌道の存在証明を行う. 証明は, PCR3BP について Moeckel が行った議論と同様にして行うことができる. すなわち, Maupertuis 汎関数は曲線の時間パラメータの変換について不変である parametric integrand であるから, その一般論から $\mathcal{C}_1^{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(R)$ に関する最小点の存在が保証される. あとは, この最小点が R の境界に接しないことさえ示せば, Sec.2.1 と同様の議論で, エネルギー h の遷移軌道であることがわかる. まず, $x = \pm c$ の境界に接しないことは, parametric integrand に関する Weierstrass の定理と条件 1 から従う. 最後に, $|\boldsymbol{y}| = \sqrt{\frac{h}{B}}$ の境界に接しないことは, 接しない曲線 $\mathcal{C}_1^{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(R)$ に関する最小値の上からの評価と,

$$\inf_{\boldsymbol{z} \in \mathcal{C}_1^{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(R)} \mathcal{M}_h(\boldsymbol{z}) \leq \frac{\sqrt{2}h}{\sqrt{A}} \left\{\sqrt{A\frac{c^2}{h}(1 + A\frac{c^2}{h})} + \log\left(\sqrt{A\frac{c^2}{h}} + \sqrt{1 + A\frac{c^2}{h}}\right)\right\}$$

接する曲線 $\tilde{\mathcal{C}}_1^{\boldsymbol{z}_S\to\boldsymbol{z}_G}(R)$ に関する最小値の下からの評価を用いて, 条件を与えることで保証できる.

$$\inf_{\boldsymbol{z}\in\tilde{\mathcal{C}}_1^{\boldsymbol{z}_S\to\boldsymbol{z}_G}(R)}\mathcal{M}_h(\boldsymbol{z})\geq\frac{\pi h}{\sqrt{2B}}$$

この条件が条件 2 である. □

系 1. 主結果 1 の仮定のもとで, さらに $N_h(-c,c)$ が孤立化ブロックの条件を満たすとき, $N_h(-c,c)$ の最大不変集合 I は, $\check{H}^{2d-3}(I)\neq\{0\}$ を満たす. □

3.3 Lagrange 汎関数による結果

主結果 2. 次の条件を満たす C^∞ 級関数 $U:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ と,

$$\exists A,B>0 \text{ s.t. } \forall x\in\mathbb{R}, -Ax^2\leq U(x,0),\ \forall(x,\boldsymbol{y})\in\mathbb{R}^d, U(x,\boldsymbol{y})<B|\boldsymbol{y}|^2$$

$h>0,c>0$ について, 次の条件 1-4 が成り立つと仮定する.

1. $\forall(x,\boldsymbol{y})\in\Gamma_h(-c),\ \frac{\partial U}{\partial x}(x,\boldsymbol{y})>0,\forall(x,\boldsymbol{y})\in\Gamma_h(c),\ \frac{\partial U}{\partial x}(x,\boldsymbol{y})<0$
2. $\frac{c^2}{h}<\frac{1}{B}$
3. $\sqrt{A\frac{c^2}{h}(1+A\frac{c^2}{h})}+\log\left(\sqrt{A\frac{c^2}{h}}+\sqrt{1+A\frac{c^2}{h}}\right)<\sqrt{AB}\frac{c^2}{h}+\sqrt{\frac{A}{B}}$
4. $2(\frac{c^2}{h}+\frac{1}{B})\frac{1}{T_+}\geq\sqrt{2A}\left\{\tanh(\sqrt{2A}T_+)^{-1}+\sinh(\sqrt{2A}T_+)^{-1}\right\}\frac{c^2}{h}+T_+$

このとき, U をポテンシャル関数とするポテンシャル系の局所解で, エネルギーが h で, $(-c,0)$ から $(c,0)$ へ至るものが存在する.
ただし, T_+ は, 次のように定義した.

$$T_+\coloneqq\frac{1}{\sqrt{2A}}\left\{\sqrt{A\frac{c^2}{h}(1+A\frac{c^2}{h})}+\log\left(\sqrt{A\frac{c^2}{h}}+\sqrt{1+A\frac{c^2}{h}}\right)\right\}$$
$$+\sqrt{\frac{1}{2A}\left\{\sqrt{A\frac{c^2}{h}(1+A\frac{c^2}{h})}+\log\left(\sqrt{A\frac{c^2}{h}}+\sqrt{1+A\frac{c^2}{h}}\right)\right\}^2-2\frac{c^2}{h}}$$

□

証明の概略. Maupertuis 汎関数による結果と同様に, $R\coloneqq[-c,c]\times\{|\boldsymbol{y}|\leq\sqrt{\frac{h}{B}}\}$ をとり, $\boldsymbol{z}_S\coloneqq(-c,0)$ と $\boldsymbol{z}_G\coloneqq(c,0)$ を結ぶエネルギー h の遷移軌道の存在証明を行うことを考える.

R に制限したため, その上で, 上に有界なポテンシャル系であり, $A_h(T)\coloneqq\inf_{\mathcal{C}_T^{\boldsymbol{z}_S\to\boldsymbol{z}_G}(R)}\mathcal{A}_h^T(c^T)$ は $(0,\infty)$ 上の実数値関数で, さらに, 連続関数であり, $A_h(T)\to\infty(T\to+0,\infty)$ が成り立つことがわかる. 従って A_h の最小点が存在する.

あとは, この最小点が R の境界に接しないことさえ示せば, Sec.2.2 と同様の議論で, エネルギー h の遷移軌道であることがわかる. まず, $x=\pm c$ の境界に接しないことは, Lagrange 汎関数に関する次の補題 1 と条件 1 から従う. (この補題の証明を行なっている文献は見当たらないため, この補題の証明も本研究の成果の一つであると考える.)

補題 1. $U:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は, C^∞ 級関数であるとする. このとき, 次のことが成り立つ.

$$
\begin{aligned}
&\forall \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^d,\ \exists \delta > 0 : \\
&\quad \forall \epsilon \in (0,\delta),\ \exists \delta_1, \delta_2 > 0 : \\
&\qquad \forall |\boldsymbol{z}_S - \boldsymbol{z}|, |\boldsymbol{z}_G - \boldsymbol{z}| < \delta_1,\ \forall T \in (0,\delta_2),\ \exists \boldsymbol{z}_* \in \mathcal{C}_T^{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(B_\epsilon(\boldsymbol{z})) : \\
&\qquad\quad \forall t \in (0,T),\ \ddot{\boldsymbol{z}}_*(t) = -U_z(\boldsymbol{z}_*(t)), \\
&\qquad\quad \forall \boldsymbol{z}^T (\neq \boldsymbol{z}_*) \in \mathcal{C}_T^{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(B_\epsilon(\boldsymbol{z})),\ \mathcal{A}^T(\boldsymbol{z}_*) < \mathcal{A}^T(\boldsymbol{z}^T).
\end{aligned}
$$

□

最後に, $|\boldsymbol{y}| = \sqrt{\frac{h}{B}}$ の境界に接しないことは, A_h の最小点 T_0 で, $B_h(T_0) > A_h(T_0)$ を満たすものが存在するための十分条件を考えれば十分である. ここで, B_h は, A_h と同様に, 境界に接する曲線 $\tilde{\mathcal{C}}_T^{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(R)$ に関して, $B_h(T) := \inf_{\tilde{\mathcal{C}}_T^{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(R)} \mathcal{A}_h^T(c^T)$ と定義した関数である. そのために (1) まず, A_h の上下それぞれからの評価 $A_h^\pm$ と, B_h の下からの評価 B_h^- を与え, (2) 次に, $A_h^\pm$ を用いて, 極小点が少なくとも一つ含まれる範囲を調べ, (3) 最後に, この範囲において, $B_h^-(T) > A_h^+(T)$ が成立するための十分条件を与えることで保証できる. この条件が条件 2-4 である.

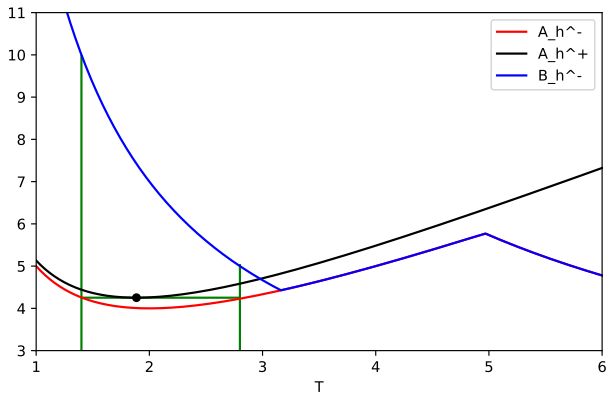


図 1: 証明のイメージ ($A = 1, B = 1, h = 1, c = \sqrt{2}$)

最後の証明のイメージを伝えるため, 図 1 に, $A = 1, B = 1, h = 1, c = \sqrt{2}$ について, $A_h^\pm, B_h^-$ のグラフ, A_h^+ の最小値, 極小点が少なくとも一つ含まれる範囲を表し, さらに, その範囲で $B_h^- > A_h^+$ が成立していることを示した. □

系 2. 主結果 2 の仮定のもとで, さらに $N_h(-c,c)$ が孤立化ブロックの条件を満たすとき, $N_h(-c,c)$ の最大不変集合 I は, $\check{H}^{2d-3}(I) \neq \{0\}$ を満たす. □

参考文献

[1] R.W. Easton, Existence of invariant sets inside a submanifold convex to the flow, Journal of Differential Equations, 7:54-68, 1970.

[2] R. Moeckel, A variational proof of existence of transit orbits in the restricted three-body problem, Dynamical Systems, 20(1):45-58, 2005.

[3] J. Moser, On the generalization of a theorem of Liapunov, Communications on Pure and Applied Mathematics, 11:257-271, 1958.

Construction of geodesics on Teichmüller spaces of Riemann surfaces with Z action

松田 凌 *
京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数学系 博士課程一年
@ 第 19 回数学総合若手研究集会

1 序論

本公演では, 解析的無限型 Riemann 面 R と, その Teichmüller 空間 Teich(R) の Teichmüller 距離に関する測地線について考える. R の Teichmüller 空間とは, R 上の Beltrami 微分の成す空間: $L_\infty(R) := \{\boldsymbol{\mu} \mid \boldsymbol{\mu} = \mu d\bar{z}/dz, \|\mu\|_\infty := \text{ess sup}\,|\mu| < \infty\}$ の単位球 $\mathrm{Bel}(R) := \{\mu \in L_\infty(R) \mid \|\mu\|_\infty < 1\}$ を Teichmüller 同値で割った空間とする. ただし, $\mu, \nu \in \mathrm{Bel}(R)$ が Teichmüller 同値であるとは, それぞれを歪曲度にもつ擬等角写像 f^μ と f^ν に対して, ある等角写像 $c : f^\mu(R) \to f^\nu(R)$ が存在して, R の理想境界を固定して, $(f^\nu)^{-1} \circ c \circ f^\mu$ が id_R と homotopic であることを言う.

まず初めに, 測地線と密接な関係を持つ極値 Beltrami 係数について考察する. 極値 Beltrami 係数とは, 点 $[\mu] \in \mathrm{Bel}(R)/\sim$ の中でノルムが最小の Beltrami 微分のことをという. Hamilton-Krushkaĺ の定理から, 極値 Beltrami 係数 μ_0 に対して, $[0,1] \ni t \mapsto [t\mu_0]$ は $[0]$ と $[\mu_0]$ を結ぶ測地線になることが知られており, 測地線を構成する上で重要な役割を果たす. 極値性と被覆について, 次の問いは長らく興味を持たれていた: “二つの Riemann 面 R, S と被覆 $\pi : R \to S$ が与えられたとき, S 上の極値 Beltrami 係数 μ_0 の π にする持ち上げ $\pi_*(\mu_0) := \mu_0 \circ \pi(\overline{\pi'}/\pi')$ が極値的になるための被覆 π (または被覆変換群 Γ) に対する条件は何か”. Ohtake は被覆変換群が有限生成 Abel 群であることが十分条件であることを示した ([O]). McMullen は被覆変換群が従順群であることが必要十分条件であることを証明した ([Mc]) (ただし, S が有限型であることが必要である). 今回は, R が $\mathbb{Z}$ 作用を持つとき, 極値 Beltrami 係数の持ち上げの極値性について説明する.

次に, 測地線について考える. R が解析的有限型の場合, 2 点を結ぶ測地線は一意的であることが知られている, 一方で, R が解析的無限型の場合, 2 点を結ぶ測地線は一意的とは限らない. Li は $R = \mathbb{D}$ の場合, 測地線が一意的でない 2 点を構成した ([L1]). 一般の Riemann 面については, Tanigawa([Th]), Li([L2]) らがそれぞれ独立に測地線が一意的でない十分条件を求めている. 二人が求めた十分条件の下では, 2 点を結ぶ測地線の族として, 開集合 $D \subset \mathbb{C}$ で複素解析的に係数づけされるものが存在することが示されている. ただし, 解析的無限型の場合に, $[0]$ と $[\mu]$ を結ぶ測地線が一意的であるための必要十分条件として, 次の二つの条件が知られている ([EKK]):

$$\begin{cases} \text{(a)} \cdots \mu_0 \text{ が同値類の中で唯一の極値的な元,} \\ \text{(b)} \cdots |\mu_0(z)| = \|\mu_0\| \quad \text{a.e..} \end{cases}$$

[L1] において, (a)⇒(b) なる予想がされたが, 後に反例が構成された [BLMM]. 今回は, 被覆による極値 Beltrami 係数の持ち上げを用いて, (b) の条件を保ったまま測地線が構成する方法を与える. 最後に, $R = \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ の場合, l^∞ の開集合で複素解析的に係数づけられる測地線の族の構成について述べる.

*mail : matsuda.ryou.82c [at] st.kyoto-u.ac.jp

2　準備

主結果を述べるのに必要な事柄を, 簡単に述べる. R の Fuchs 群モデルを Γ とし, Γ に関する可積分正則二次微分を $Q(\Gamma)$, その単位球面 $\{\varphi \in Q(\Gamma) \mid \|\varphi\|_{Q(\Gamma)} = 1\}$ を $Q_1(\Gamma)$ と書くこととする. これらは, Riemann 面上の可積分正則二次微分 $Q(R)$ とその単位球面 $Q_1(R)$ と等長同型である.

2.1　Poincaré 級数

$0, 1, \infty \in C \subset \hat{\mathbb{C}}$ とし,

$$\begin{aligned} Q(C) &:= \left\{ \varphi\colon \mathbb{C} \setminus C_0 \text{ 上正則関数} \mid \|\varphi\|_{Q(C)} := \iint_{\hat{\mathbb{C}} \setminus C} |\varphi| \, dxdy < \infty \right\} \\ Q(\Gamma, C) &:= \left\{ \varphi : \hat{\mathbb{C}} \setminus C \text{ 上 正則} \middle| \varphi \circ B \cdot B'^2 = \varphi \ (\forall B \in \Gamma),\ \|\varphi\|_{Q(\Gamma,C)} := \iint_{\omega} |\varphi| \, dxdy \right\} \end{aligned}$$

とおく. (ただし, ω は Γ の基本領域). このとき, 次の作用素 :

$$\Theta : Q(C) \ni F \mapsto \sum_{B \in \Gamma} (F \circ B \cdot B'^2)$$

を, Poincaré Theta Series という.

Theorem A (Poincaré series ([G], 4.3 , Theorem 3))
上の級数は, $\hat{\mathbb{C}} \setminus C$ 上広義一様収束し, 基本領域上で L^1 可積分である. また, 全射有界線型写像であって, $\|\Theta\| \leq 1$ がわかる. さらに

$$\Delta_{Q(\Gamma,C)} \left(0; \frac{1}{3} \right) \subset \Theta(\Delta_{Q(C)}(0; 1)),$$

ここに, 距離空間 (X, d) において, $\Delta(x; R)$ は, $x \in X$ 中心, 半径 $R > 0$ の開円盤である.

Corollary
$\tilde{R} \cong \mathbb{H}/\tilde{G}$ を *Riemann* 面とし, ある $\Gamma < \mathrm{Aut}(\tilde{R})$ が $\tilde{R}$ に推移的かつ不連続に作用しているとする. このとき, 左剰余類 $\Gamma := G/\tilde{G}$ とする. このとき,

$$\Theta_{G/\tilde{G}} : Q(\tilde{G}) \ni F \mapsto \sum_{B \in \Gamma} (F \circ B \cdot B'^2) \in Q(G)$$

とすると, 級数は広義一様に収束し, 基本領域上で L^1 可積分である. また, 全射有界線型写像であって, $\|\Theta_{G/\tilde{G}}\| \leq 1$ がわかる.

2.2　極値性の判定条件

Definition 1 (極値的 Beltrami 係数)
$\mu \in \mathrm{Bel}(R)$ が極値的であるとは,

$$\forall \nu \in [\mu] \text{ に対して}, \|\mu\|_\infty \leq \|\nu\|_\infty$$

を満たすことをいう. また, 極値的な元が同値類の中に一つしか存在しないとき, 一意極値的であるという.

Remark
任意の $[\mu] \in \mathrm{Teich}(R)$ は, 必ず 極値的な元を持つ.

Theorem B (The Hamilton–Krushkal condition ([G], 6.1, Theorem 1 / 6.7 , Theorem 6))
$\mu \in \mathrm{Bel}(R)$ が極値的であるための必要十分条件は,

$$\|\mu\|_\infty = \sup\left\{\left\|\iint_R \mu\varphi\ dxdy\right\| \middle| \varphi \in Q_1(R)\right\}$$

である.

上の定理から, 極値 Beltrami 係数に対して, ある $Q_1(R)$ 上の列 (φ_n) で,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\iint_R \mu\varphi_n\ dxdy\right| = \|\mu\|_\infty$$

を満たすものが存在する. これを, μ の Hamilton 列という.

3 Extremality under $\mathbb{Z}$ action

Theorem 1 (主結果 1, [Mat])
R は *Riemann* 面 S の被覆面であるとし, その被覆変換群は, 無限巡回群 $\langle\gamma\rangle$ であるとする. $\mu \in \mathrm{Bel}(R)$ 次の条件 : ある $\varphi \in Q_1(S)$ が存在し,

$$\mu \circ \gamma_n \cdot \frac{\overline{\gamma_n'}}{\gamma_n'} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} k\frac{|\tilde{\varphi}|}{\tilde{\varphi}} \quad (a.e.\ z \in \omega_0)$$

を満たすとき, 極値的になる. ここに, $k = \|\mu\|_\infty$ $\tilde{\varphi}$ は φ の持ち上げ, $\gamma_n := \gamma^{\circ n}$ である. 加えて, ω_0 を $\langle\gamma\rangle$ の基本領域とする.

定理 1 の仮定を満たすような Beltrami 係数の例を構成してみる.

Eg. 1
$R := \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ とすると, $z \mapsto z+1$ によって生成される無限巡回群が作用する. そこで, $S := R/\langle\gamma : z \mapsto z+3\rangle$ とし, 基本領域の一つ $\omega_0 := \{z \in R \mid 0 < \mathrm{Re}\, z \leq 3\}$ をとっておく. S は *Riemann* 球面 $\hat{\mathbb{C}}$ から *5* 点除いたものに等角同型であるから, *Riemann-Roch* の定理より, $\dim_{\mathbb{C}} Q(S) = 2$ である.
φ^r, $\varphi^l \in Q(S)$ を線型独立とし, $[0,1)$ 上の列 (a_n), (b_n) を, $a_n + b_n \neq 0$ かつ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1, \lim_{n\to-\infty} a_n = 0, \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \lim_{n\to-\infty} b_n = 1.$$

を満たすものとする. このとき, R 上の *Beltrami* 係数

$$\mu_{a_n,b_n} := k\frac{|a_n\varphi^r + b_n\varphi^l|}{a_n\varphi^r + b_n\varphi^l} \quad (z \in \omega_n),$$

と定義する. ここに, $k \in [0,1)$, $\omega_n := \gamma^{\circ n}(\omega_0)$ とし, ω_n と S を同一視し, φ^r と φ^l を定義する. このように構成すると, 定理 *1* より極値的であることがわかる.
例えば, $a_n \equiv 1$, $b_n \equiv 0$ とすると, μ_{a_n,b_n} は $k\overline{\varphi^r}/\varphi^r$ の持ち上げになっているから, *Ohtake[O]* の結果の一般化になっていることがわかる.

4　測地線の構成

極値的 Beltrami 係数 μ_0 が, $|\mu_0(z)| = \|\mu_0\|$ a.e. z を満たすとき, $[0]$ と $[\mu]$ を結ぶ測地線を “たくさん” 構成することを考えたい. そこで, 極値 Beltrami 係数は測地線を与えることから, 次の条件を満たすような Beltrami 係数の族 $\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を構成することを目標にする:

1. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, μ_λ は極値的である.
2. 任意の $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ に対して, μ_{λ_1} と μ_{λ_2} は Teichmüller 同値である.
3. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば, 二つの測地線 $[0,1] \ni t \mapsto [t\mu_{\lambda_1}]$ と $[0,1] \ni t \mapsto [t\mu_{\lambda_2}]$ は (集合として) 異なる.
4. ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して, $|\mu_{\lambda_0}(z)| = \|\mu_{\lambda_0}\|$ a.e.

もちろん, この族を用いて, $l_\lambda : [0,1] \ni t \mapsto [t\mu_\lambda]$ を考えれば良い. また, 三番目の条件は, 二つの測地線が Teich(R) の原点 $[0]$ で与える接ベクトルの向きが異なっていれば良い. このことは, Li によって次の形で十分条件が与えられている.

Theorem C (Li ([L2], Theorem3.1))
μ_1, μ_2 を R 上の極値 *Beltrami* 係数とする. このとき, 二つの測地線 $[0,1] \ni t \mapsto [t\mu_1]$ と $[0,1] \ni t \mapsto [t\mu_2]$ が (集合として) 異なる十分条件は, ある $\varphi \in Q(R)$ が存在して,

$$\int_R (\mu_1 - \mu_2)\varphi \neq 0$$

が成り立つことである.

このように Beltrami 係数を接ベクトルとして区別することを, 無限小に区別するという. 以下では, 3) の条件は, 定理 C の十分条件に置き換えたものを構成する.

目的を達するために, ある開集合 $U \subset R$ と一つとり, U 上の Beltrami 係数の族 $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ と R 上の極値 Beltrami 係数 μ_0 を固定し,

$$\mu_\lambda := \chi_U \tau_\lambda + \chi_{R\setminus U}\mu_0$$

なる R 上の族を考えることで, 上の条件を満たすものを構成する. μ_0 と U をうまく選ぶことで, 1),2) が満たされるようにし, $\{\tau_\lambda\}$ をうまく選ぶことで, 3),4) が満たされるようにする.

4.1　τ_λ の構成

Lemma 2
$R > 0$ とし, $T_R := \{\zeta \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}\zeta < R\}$, $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im}\lambda| < 1, \operatorname{Re}\lambda > 0\}$ とおく. このとき, T_R 上の *Beltrami* 係数の族 $\{\widehat{\tau_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ で以下の条件を満たすものが存在する:

- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, $\widehat{\tau_\lambda}$ と 0 は *Teichmüller* 同値である.
- $\lambda \in \mathbb{R} \cap \Lambda$ ならば $|\widehat{\tau_\lambda}|$ は定数関数である.
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば $\int_{T_R/\langle\zeta\mapsto\zeta+2\pi\rangle} (\widehat{\tau_{\lambda_1}} - \widehat{\tau_{\lambda_2}})1 \, dxdy \neq 0$
- $\widehat{\tau_*} : \Lambda \ni \lambda \mapsto \widehat{\tau_\lambda} \in L_\infty(T_R)$ は正則写像

Proof:
T_R の自己 affine 写像 $F_\lambda : T_R \to T_R$ を

$$T_R(\xi + i\eta) := \begin{cases} \xi + \lambda\eta + i\eta & 0 < \eta \leq \frac{R}{2}, \\ \xi + \lambda(R - \eta) + i\eta & \frac{R}{2} \leq \eta < R. \end{cases}$$

を考えれば良い. □

$\pi : T_R \ni \zeta \mapsto e^{i\zeta} \in \mathbb{A}_{r_0} := \{z \in \mathbb{C} \mid r_0 < |z| < 1\}$ なる被覆写像を考える ($r_0 := e^{-R}$). F_λ は $\zeta \mapsto \zeta + 2\pi$ と可換であるから, $\mathbb{A}_{r_0}$ の擬等角写像を誘導する. また, T_R 上 $d\zeta^2$ と書かれる正則二次微分の π による押し出しは, dz^2/z^2 であることから次が成り立つ :

Corollary 3

$\mathbb{A}_r$ 上の *Beltrami* 係数の族 $\{\nu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で以下の条件を満たすものが存在する*:*

- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, ν_λ は 0 と *Teichmüller* 同値である.
- $\lambda \in \mathbb{R} \cap \Lambda$ ならば, $|\nu_\lambda|$ は定数関数である.
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば, ある可積分正則関数 g が存在して, $\int_{\mathbb{A}_r} (\nu_{\lambda_1} - \nu_{\lambda_2}) g \, dxdy \neq 0$.
- $\nu_* : \Lambda \ni \lambda \mapsto \nu_\lambda \in L_\infty(\mathbb{A}_r)$ が正則写像.

Proof:

ν_λ を具体的に計算すると,

$$\nu_\lambda = \begin{cases} \dfrac{-i\lambda}{2+i\lambda}\dfrac{z}{\bar{z}} & (r < |z| \leq \sqrt{r}), \\ \dfrac{i\lambda}{2-i\lambda}\dfrac{z}{\bar{z}} & (\sqrt{r} \leq |z| < 1). \end{cases}$$

であることからわかる. □

Remark

ν_λ たちを無現小に区別する正則函数は, T_R に持ち上げると, 定数函数である. 従って, h を $\mathbb{A}_r$ 上の正則函数で, $1/z^2$ の係数が 0 であるとすると,

$$\int_{\mathbb{A}_r} \nu_\lambda h \, dxdy = 0$$

である. T_R において, 正則二次微分と *Beltrami* 係数の*"Cuppling"* についてより精密に計算する. $\tilde{\varphi}_*$ を $\mathbb{T}_R := T/\langle\iota\rangle$ 上の正則二次微分とすると,

$$\tilde{\varphi}_*(\zeta) = \tilde{\varphi}_* \circ \iota(\zeta) \cdot (\iota'(\zeta))^2 = \tilde{\varphi}_*(\zeta + 2\pi)$$

が成り立つ ($\iota(\zeta) = \zeta + 2\pi$). つまり, $\tilde{\varphi}_*$ は周期函数である. そこで, $\tilde{\varphi}_*$ を *Fourier* 展開をすると,

$$\int_{\mathbb{T}_R} \nu_\lambda \tilde{\varphi}_* = \tilde{\varphi}_*(0)\mathrm{Area}\ (\mathbb{T}_R)\left(\frac{i\lambda}{2-ic} - \frac{i\lambda}{2+i\lambda}\right) = \tilde{\varphi}_*(0)\mathrm{Area}\ (\mathbb{T}_R)\frac{\lambda^2}{4+\lambda^2},$$

をうる. 以下では特に, $h(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ ($|\alpha| \leq r_0$) とすると, $1/z^2$ の係数は α であるから,

$$\iint_{\mathbb{A}_r} \nu_\lambda \frac{1}{z-\alpha} = \frac{2\pi\alpha}{i}\frac{\lambda^2}{4+\lambda^2}$$

をうる. ■

次に, $\mathbb{D}$ の上の Beltrami 係数の族で同じ性質を持つものを構成したい. これは, Lemma 2 において T_R から $\mathbb{D} \setminus [-t, t]$ への被覆写像が取れるから, それを介して, $\mathbb{D}$ 上の Beltrami 係数の族を同様に構成できる. 以下では, 三つ目の条件における g を具体的に書き下したいため, 楕円函数を用いた別の構成法を紹介する.

Theorem 4 (主結果 2, [Mat])

$\mathbb{D}$ 上の *Beltrami* 係数の族 $\{\tau_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で以下の条件を満たすものが存在する*:*

a'). 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, τ_λ と 0 は *Teichmüller* 同値である.
b'). $\lambda \in \mathbb{R} \cap \Lambda$ ならば $|\tau_\lambda|$ は定数関数である.
c'). $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば ある正則関数 g が存在して, $\int_{\mathbb{D}} (\tau_{\lambda_1} - \tau_{\lambda_2}) g \, dxdy \neq 0$
d'). $\tau_* : \Lambda \ni \lambda \mapsto \tau_\lambda \in L_\infty(\mathbb{D})$ は正則写像

Proof:
Riemann の写像定理より, 任意の $R \in (0, \infty)$ に対して, ある $t \in (0,1)$ が存在して, 被覆写像 $\rho : T_R \to D_t := \mathbb{D} \setminus [-t, t]$ が取れる. 特に, ρ を境界まで同相に拡張したとき, $\rho(\{\zeta | \operatorname{Im} \zeta = R\}) = [-t, t]$ を満たすようにしておく. これにより, ρ は一意的に決まる.

ρ を反転によって拡張するとこれは楕円函数になる, 従って, 次の微分方程式を満たすことに注意する.

$$(\rho')^2 = (\rho - t)(\rho + t)\left(\rho - \frac{1}{t}\right)\left(\rho + \frac{1}{t}\right).$$

以下では, D_t 上の Beltrami 係数を構成する. F_λ は $\zeta \mapsto \zeta + 2\pi$ と可換であるから,

$$\begin{tikzcd} T_R \arrow[r, "F_\lambda"] \arrow[d, "\rho"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T_R \arrow[d, "\rho"] \\ D_t \arrow[r, "\exists \tilde{f}_\lambda"] & D_t \end{tikzcd}$$

を満たす $\tilde{f}_\lambda$ が存在する. この Beltrami 係数を τ_λ とおく. このような族 $\{\tau_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が a'), b'), d') を満たすのは明らかである. c') が成り立つことを示す.

Corollary 3 の Remark を思い出すと, T_R 上の正則関数 φ_* であって, その引き戻し $\tilde{\varphi}_* := \rho^*(\varphi_* \, dz^2)$ が, $\tilde{\varphi}_*(0) \neq 0$ を満たせば良い. そこで, ρ が満たす微分方程式を思い出すと,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_*(0) &= \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\varphi}_*(\tilde{x}) \, d\tilde{x} = 2 \int_0^{\pi} \tilde{\varphi}_*(\tilde{x}) \, d\tilde{x} \\ &= 2 \int_0^{\pi} \varphi_* \circ \rho \cdot (\rho')^2 \, d\tilde{x} \\ &= 2 \int_0^{t} \varphi_*(x) \cdot (\rho') \, dx \\ &= 2 \int_0^{t} \varphi_*(x) \cdot \sqrt{(x-t)(x+t)\left(x - \frac{1}{t}\right)\left(x + \frac{1}{t}\right)} \, dx. \end{aligned}$$

と計算される. 最後の積分の根号の中身はある区間上で < 0 の函数を積分しているから, R が十分大きければ (t が十分小さければ)$\tilde{\varphi}_*(0) \neq 0$ を満たすことができる. □

Remark

Reich (Kra [K]) は, 次のような $\mathbb{D}$ 上の *Beltrami* 係数の族 $\{\mu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を構成している. $\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1/2\}$ であって,

- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して, μ_λ は 0 と *Teichmüller* 同値.
- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならな $\mathbb{D}$ 上のある正則関数 g が存在して $\int_{\mathbb{D}} (\tau_{\lambda_1} - \tau_{\lambda_2}) g \, dxdy \neq 0$.
- $\tau_* : \Lambda \ni \lambda \mapsto \tau_\lambda \in L^\infty(\mathbb{D})$ は正則写像.

を満たす.

4.2 support が非交和な Beltrami 係数の和について

次に, 条件 2) について考察する. R を二つの部分曲面 R_1, R_2 に分ける. それぞれ, 連結である必要はない. このとき, R_2 上の Beltrami 係数 μ を一つ固定した時, 次の写像を考える.

$$\mathrm{Bel}(R_1) \ni \tau \mapsto \tau + \mu \in \mathrm{Bel}(R).$$

Theorem 5 ([Mat])
上の写像は,

$$\mathrm{Teich}(R_1) \ni [\tau] \mapsto [\tau + \mu] \in \mathrm{Teich}(R)$$

を誘導する. つまり, τ_1 と τ_2 が R_1 上 *Teichmüller* 同値ならば, $\tau_1 + \mu$ と $\tau_2 + \mu$ は R 上 *Teichmüller* 同値である.

Remark
Taniguchi, Maitani が R_1 が単連結の場合をより精密に研究している *([Tm], [Mai]). Tanigawa* は, U が単連結の場合, *Theorem 5* に現れる写像が単射であることを証明している. *([Th], Lemma 3.3 Lemma 3.4).*

4.3 結論

最後に, 無限小で区別するための正則二次微分の存在を確認しておく.

Lemma 6
R 上の *puncture* α に対して, その点で *1* 位の極を持つ可積分正則二次微分が存在する.

Proof:
$R' := R \cup \{\alpha\}$ とし, R' の Fuchs 群を Γ' とする. ただし, 被覆写像 $\pi : \mathbb{D} \to R'$ に対して, $\pi(0) = a_n$ となるようにしておく.
$\psi(z) := 1/z$ とおくと, これは $\mathbb{D}$ 上の可積分有理型函数である. 従って, $\Psi := \Theta(\phi)$ とすれば良い. □

以上より次が示せる.

Theorem 7 ([Mat])
R に無限巡回群 $\langle\gamma\rangle$ が作用しているとき, ある *Beltrami* 係数 μ が存在して次を満たす:

1. μ は極値的
2. $|\mu|$ は定数
3. ある極値的 *Beltrami* 係数の族 $\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在して,
   (a) μ を含む
   (b) 含まれる *Beltrami* 係数は全て *Teichmüller* 同値
   (c) μ_λ は λ に $L_\infty(R)$ 値の意味で複素解析的に依存する
   (d) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば μ_{λ_1} と μ_{λ_2} は無限小の意味で同値でない. つまり, ある $\varphi \in Q(R)$ が存在して, $\int_R (\mu_{\lambda_1} - \mu_{\lambda_2})\varphi \neq 0$.
   (e) ある $U \subset R$ が存在して $\mu_\lambda|_{R\setminus U} = \mu|_{R\setminus U}$

U は $\mathbb{D}$ または $\mathbb{D}^*$ または 円環領域 $\mathbb{A}$ と等角同型にできる.

構成は次の通り．まず, $S := R/\langle\gamma\rangle$ とし, Eg. 1 にならって Beltrami 係数 μ_0 を構成する．次に, U として, 境界まで込めて解析的に $\mathbb{D}$ または $\mathbb{D}^*$ または $\mathbb{A}$ と等角同型な部分領域を一つとる．このようにして,

$$\mu_\lambda := \chi_U \tau_\lambda + \chi_{R\setminus U}\mu_0$$

とすれば良い．極値性は, Theorem 1 からわかる．また, λ として, $\left|\frac{\frac{-i\lambda}{2}}{1+\frac{i\lambda}{2}}\right| = \|\mu_0\|$ を満たすものを取れば, $|\mu_\lambda(z)| = \|\mu_\lambda\|$ a.e. z を満たす.

極値 Beltrami 係数の族が構成できた．特に, 無限小に区別されているから, 次が成り立つ.

Theorem 8 ([Mat])

R に対して, $\mathbb{Z}$ が不連続に作用するとき．R 上の Beltrami 係数 μ で次を満たすものが存在する:

1. *μ は極値的*
2. *$|\mu|$ は定数*
3. *$[0]$ と $[\mu]$ を結ぶある測地線の族 $\{l_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ が存在して, l_λ は λ に複素解析的に依存する．また, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば二つの測地線 $l_{\lambda_1}, l_{\lambda_2}$ は相異なる.*

測地線をさらに構成するための, 技術的な障害は, 無限小に区別するための $Q(R)$ の存在である．例えば, R が特別な場合にはより多くの測地線が構成できる.

Theorem 9 ([Mat])

$R = \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ とする．このとき, ある Beltrami 係数 μ と開集合 $D \subset l^\infty$ が存在して次を満たす:

1. *μ は極値的*
2. *$|\mu|$ は定数*
3. *ある極値的 Beltrami 係数の族 $\{\mu_\lambda\}_{\lambda\in D}$ が存在して,*
   - *(a) μ を含む*
   - *(b) 含まれる Beltrami 係数は全て Teichmüller 同値*
   - *(c) μ_λ は λ に $L_\infty(R)$ 値の意味で複素解析的に依存する*
   - *(d) $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば μ_{λ_1} と μ_{λ_2} は無限小の意味で同値でない．つまり, ある $\varphi \in Q(R)$ が存在して, $\int_R (\mu_{\lambda_1} - \mu_{\lambda_2})\varphi \neq 0$.*
   - *(e) ある $U \subset R$ が存在して $\mu_\lambda|_{R\setminus U} = \mu|_{R\setminus U}$, $\mathrm{Cl}(U) \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$*

構成を述べる.

まず, $S := \mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}/\langle z \mapsto z+3\rangle$ とし, Eg. 1 にならって Beltrami 係数 μ_0 を構成する．$k := \|\mu_0\|$ とし, K を $\left|\frac{-\frac{iK}{2}}{1+\frac{iK}{2}}\right| = k$ を満たすようにとる．径数を, 次に, $D := \{(\lambda_j) \in l^\infty \mid \lambda_j \in \Lambda, |\lambda_j| \in [0, K]\}$ とおく.

$j \in \mathbb{N}$ とする．このとき,

$$\mathbb{A}_j := \Delta\left(3j + \frac{3}{2}; \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{|j|}}\right) \setminus \Delta\left(3j + \frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

とおく．また, $\alpha_j = 3j+1, \beta_j := 3j+2$ とし, $U := \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} \mathbb{A}_j$ とおく.

各 $(\lambda_j) \in D$ に対して,

$$\mu_{(\lambda_j)} := \chi_{(\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z})\setminus U}\mu_0 + \sum_{j\in\mathbb{Z}} \nu_{\lambda_j}\chi_{\mathbb{A}_j}$$

とおく．ただし, ν_j は, 円環領域の Beltrami 係数の族で, Corollary 3 で構成したものをとっている．それぞれは,

$$\iint_{\mathbb{A}_j} \nu_j \frac{1}{z-\alpha_j} = \frac{2\pi\alpha_j}{i}\frac{\lambda^2}{4+\lambda^2} \quad \iint_{\mathbb{A}_j} \nu_j \frac{1}{z-\beta_j} = \frac{2\pi\beta_j}{i}\frac{\lambda^2}{4+\lambda^2},$$

を満たす．さらに．$\Delta(3j+3/2;1)$ の閉包を含む単連結領域上で正則な函数 φ に対して，

$$\int_{\mathbb{A}_j} \nu_j \varphi = 0$$

を満たすことに注意しておく．a), b), c) e) については明らかである．例えば，$\mu_{(\lambda_j)}$ は全て Teichmüller 同値なことは，Theorem 5 よりわかる．

最後に条件 d) を確認する．対偶: “$\mu_{(\lambda_j)}$ と $\mu_{(\tilde{\lambda}_j)}$ が無限小に区別できないならば，$\lambda_j = \tilde{\lambda}_j$ $(\forall j)$” を示す．$L > 0$ とする．

$$\varphi_{\alpha_j} := \frac{1}{(z-\alpha_j)(z-3L)(z-6L)}, \quad \varphi_{\beta_j} := \frac{1}{(z-\beta_j)(z-3L)(z-6L)},$$

とし，α, β からなる長さ $2L+1$ の有限文字列 $(\cdot_j)_{|j|\le L}$ に対して，

$$\varphi_{(\cdot)} := \sum_{|j|\le L} \varphi_{\cdot_j}$$

とおく．$\mu_{(\lambda_j)}$ と $\mu_{(\tilde{\lambda}_j)}$ が無限小に区別できないから，文字列 $(\alpha, \alpha, \cdots, \alpha)$ を適用すると，

$$0 = \int_{\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}} (\mu_{(\lambda_j)} - \mu_{(\tilde{\lambda}_j)})\varphi_{(\cdot)} = \frac{2\pi}{i} \sum_{-L\le j\le L} \alpha_j \left(\frac{\lambda_J^2}{4+\lambda_J^2} - \frac{\tilde{\lambda}_J^2}{4+\lambda_J^2} \right)$$

(φ_j ($|j| \le L$) の極は，$\mathbb{A}_{j'}$ ($|j'| \ge L$) の内側には存在しないことに注意する.) ここで，$-L \le J \le L$ を一つ固定する．このとき，文字列 $(\cdot)$ の J 番目を α から β に，置き換える．置き換えた式を，再び無限小に区別できないことに適用して，上の式と引き合わせると，

$$\frac{\lambda_J^2}{4+\lambda_J^2} - \frac{\tilde{\lambda}_J^2}{4+\tilde{\lambda}_J^2} = 0$$

である．よって，$\lambda_J = \tilde{\lambda}_J$．$L$ は任意であったから，$(\lambda_j) = (\tilde{\lambda}_j)$.

参考文献

[BLMM] V. Bozin, N. Lakic, V. Markovic, M. Mateljevic, Unique extremality, J. Anal. Math.,**75** (1998), 299–338.

[EKK] C. Earle,I. Kra and S. Krushkaĺ, Holomorphic motions and Teichmüller spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **343** (1994), 927–948.

[G] Frederick. P. Gardiner, *Teichmüller Theory and quadratic differentials*, John Wiley and Sons, 1987.

[K] I. Kra. I, On Nielsen–Thurston–Bers type of self-maps of Riemann surfaces, Acta Math., **146** (1981), 231–270.

[L] Li Zhong, On the existence of extremal Teichmüller mappings, Comment. Math. Helv., **57** (1982), 511–517.

[L1] Li Zhong, Nonuniqueness of geodesics in infinite dimensional Teichmüller spaces(I), Complex Variables Theory Appl., **16** (1991), 261–272.

[L2] Li Zhong, Nonuniqueness of geodesics in infinite dimensional Teichmüller spaces(II), Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. Math., **18** (1993), 355–367.

[Mc] C. McMullen Amenability, Poincaré series and quasiconformal maps, Invent. Math., **97** (1989), 95–127.

[Mai] F. Maitani, On the rigidity of an end under conformal mappings preserving the infinite homology bases, Complex Variables Theory Appl., **24** (1994), no. 3–4, 281–287.

[Mat] R. Matsuda, *Construction of geodesics on Teichmüller spaces of Riemann surfaces with* $\mathbb{Z}$ *action*, arXiv: 2022.03290, (2022).

[O] H. Ohtake Lifts of extremal quasiconformal mappings of arbitrary Riemann surfaces, J. Math. Kyoto Univ., **22** (1982), 191–200.

[Th] H. Tanigawa, Holomorphic families of geodesic discs in infinite dimensional Teichmüller spaces, Nagoya Math. J., **127** (1992), 117–128.

[Tm] M. Taniguchi, On the rigidity of an infinite Riemann surface, Complex Variables Theory Appl., **14**(1990), 161–167.

特性方向重み付き微分型非線形波動方程式の解析 *

東北大学大学院理学研究科数学専攻 博士 1 年
北村駿介 (Shunsuke KITAMURA)

1 導入

偏微分方程式論においては、物理や工学、生命科学、社会学などを背景に持つ具体的な現象から導かれた方程式を解析する方針と、これらの背景や導出過程に因らない頑強な理論、いわゆる一般論を構築する方針があり、これらは相互に作用しながら発展を続けている。今回の講演では一般論の構築を見据えたモデル方程式の解析の結果について述べる。導入では、初めに一般論とはどういう形で記述されるかを述べた後、モデル方程式が担う役割について述べる。

最初に、非線形項が未知関数 u とその偏微分によって構成されている場合を考察する。一次元の非線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}) & \text{in} \quad \mathbf{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varepsilon f(x),\ u_t(x, 0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases} \tag{1}$$

に対して、添え字は偏微分を表わすとし、既知関数 H, f, g と初期値の大きさを表わすパラメータ ε を

$$H, f, g\ ;\text{十分滑らか},\ \mathrm{supp}\{f, g\}\ ;\text{コンパクト},\ 0 < \varepsilon \ll 1$$

と仮定する。初期値問題 (1) の解の最大存在時間を lifespan として、$\widetilde{T}(\varepsilon)$ という記号で下記のように定義する。

$$\widetilde{T}(\varepsilon) := \sup\{t > 0; \text{適当に固定した } (f, g) \text{ に対して (1) の古典解 } u(x, t) \text{ が存在する }\}.$$

lifespan について、$\widetilde{T}(\varepsilon) = \infty$ を満たすならば時間大域解を持つと言い、$\widetilde{T}(\varepsilon) < \infty$ を満たす、つまり有限時間で解 u が発散するならば時間局所解を持つと言う。

また、解析を行う上で初期値に対して $(f, g) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$ が成り立たなければ解の一意性が崩れてしまうので、$H(0) = 0$ が成り立ってほしい。この条件は H をマクローリン展開したときに定数部分が 0 という条件と同値であり、高次の剰余項を R_{n+1} として展開すると次のようになる。

$$H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{\alpha!} (u\partial_{\lambda_0} + u_x\partial_{\lambda_1} + u_t\partial_{\lambda_2} + u_{xx}\partial_{\lambda_3} + u_{xt}\partial_{\lambda_4})^{\alpha} H(\hat{\lambda})\Big|_{\hat{\lambda}=0} + R_{n+1}.$$

この展開は初期値問題 (1) の ε が十分小さいことから解 u も小さいので成立する。上記において $\alpha = 1$ の項は線形より、この項を入れると波動方程式では無くなってしまう。従って解 u は小さい

* 本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2102 の支援を受けたものである。

ので、線形項の主な部分は $\alpha \geq 2$ の低次の項であると考えることができる。このような考察のもと、Li, Yu and Zhou[6] によって初期値問題 (1) に対して次のような初期値に条件を課さない古典解の長時間存在が示されている。

定理 1.1　初期値問題 (1) が自然数 α を用いて $\hat{\lambda} = 0$ の近傍において $H(\hat{\lambda}) = O(|\hat{\lambda}|^{1+\alpha})$ を満たすとき、ある正定数 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f, g, \alpha)$ が存在して、任意の $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ を満たす ε に対して下記が成立する。

$$\widetilde{T}(\varepsilon) \geq \begin{cases} C\varepsilon^{-\alpha/2} & \text{in general case,} \\ C\varepsilon^{-\alpha(1+\alpha)/(2+\alpha)} & \text{if} \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0, \\ C\varepsilon^{-\alpha} & \text{if} \quad \partial_u^{\beta} H(\hat{0}) = 0,\ (1+\alpha \leq \beta \leq 2\alpha). \end{cases}$$

ここで、$C > 0$ は ε に因らない定数である。

この定理 1.1 の H に対する原点近傍の条件はまさに考察から得られた非線形項の低次の項について条件付けをしている。また、定理 1.1 の場合分けは最初の 2 つは強 Huygens の原理により、$\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0$ の場合は初期値の影響が空間次元が高次元の場合と同じようになることに起因する。最後の場合分けは非線形項に u の冪が低次で入るときは単純なエネルギー法によって解を構成できず、別の不等式を使う際に逐次近似の評価が悪くなることに起因する。

また、$f \equiv g \equiv 0$ のとき、解の一意性より (1) の解は $u \equiv 0$ となり $\widetilde{T}(\varepsilon) = \infty$ を満たす。従って、時間局所解を持つ (1) に対して $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \widetilde{T}(\varepsilon) = \infty$ が成り立つことが予想できるため、lifespan の下から ε^{-1} を変数に持つ関数によって評価されるのは自然である。このような、lifespan の ε の関数による下からの評価を一般論という。

この一般論に対して、さらに良い ε のオーダーの関数では評価できない、つまり一般論が最適な評価であることを示す為には、特別な初期値と非線形項を用いて同じ ε のオーダーの関数によって lifespan が上から評価されることを示せば良い。特に最適性は、滑らかさを犠牲にして詳細な解析が可能になる $H = |u|^p$ や $H = |u_t|^p$ $(p > 1)$ と定義したモデル方程式によって示される。定理 1.1 の最初の 2 つの場合は Zhou[8] により非線形項を $H = |u|^{1+\alpha}$ と、最後の場合に対しては Zhou[9] により非線形項を $H = |u|^{\gamma}|u_t|^{1+\alpha-\gamma}$ $(0 \leq \gamma \leq \alpha)$ と置くことによって最適性が示されている。

注意として、これらのモデル方程式による最適性で空間一次元の一般の場合の解析が網羅されたわけでは無い。モデル方程式の結果を一般の場合に適用するには、非線形項の冪が偶数の場合はそのままで良いが、奇数の場合は解 u に正値性などが必要になる。また、Morisawa, Sasaki and Takamura[7] によるモデル方程式 $H = |u_t|^p + |u|^q (p, q > 1)$ の解析によって、空間一次元の一般論のより細かい場合分けが必要であることが示されている。

従って、モデル方程式の解析は一般の場合の解の存在性を議論する上で最適性を保証するものでありながら、モデル方程式の lifespan 評価を行うことによって一般の場合も解析できる場合もある上、モデル方程式の lifespan 評価から非線形項が一般の場合の最適な lifespan 評価を予想することができる。つまり、モデル方程式の解析と一般論の構築は表裏一体の関係にあると言える。

一方、より現実の現象に近い方程式では係数が時空変数を持つ関数になっている場合がある。送電線の電位及び電流のモデル方程式などに現れる消散波動方程式は波動方程式と熱方程式の中間的な性

質を持ち、その境界が判明しつつある。その境界に位置する、特別ではあるが非常に重要なモデルの

$$u_{tt} - \Delta u + \frac{2}{1+t}u_t = |u|^p \ (p > 1)$$

は、リュービル変換 $v(x,t) = (1+t)u(x,t)$ によって半線形波動方程式

$$v_{tt} - \Delta v = \frac{|v|^p}{(1+t)^{p-1}} \ (p > 1)$$

に変換される。この方程式による初期値問題は Kato, Takamura and Wakasa[2] によって有限時間爆発する $1 < p \leq 3$ の場合の古典解の lifespan 評価が得られており、臨界指数が非線形熱方程式の藤田指数 $p_F(1) = 1 + 2/1 = 3$ であることから熱的だと思われていたにもかかわらず、lifespan が初期値の全空間積分によって場合分けされるということから波動的であることを示した。このような事実から、一般論の非線形項を時空変数を含む形、つまり

$$\tilde{H} = (x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt})$$

と拡張することが求められる。しかしながら、時空変数に対する条件が不明なため、モデル方程式の解析から一般論の条件を考察する。非線形項に対して時空の変数 (x,t) を含む場合を考察するため、モデル方程式の非線形項は重み関数 $F = F(x,t)$ を持ち、今回は重み関数を冪の形で入れる。加えて、非線形項に u が低次で含まれている場合のモデル方程式の解析は既に先行研究で行われたので、一般の場合を考察する上で議論の穴を埋める意味で、非線形項が $|u_t|^p$ である場合に対して解析を行う。

2 準備

一次元空間上の実数値未知関数 $u = u(x,t)$ に対して、非線形項に時空の変数の重みを持つ非線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F(x,t)|u_t|^p & \text{in} \quad \mathbf{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \varepsilon f(x), \ u_t(x,0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases} \tag{2}$$

を考える。ここで $p > 1$ かつ、初期値について $f \in C_0^2(\mathbf{R})$ かつ $g \in C_0^1(\mathbf{R})$ かつ $0 < \varepsilon \ll 1$ とする。加えて重み F に対しては十分滑らかであると仮定する。また、$R(> 1)$ に対して $\mathrm{supp}\{f,g\} \subset \{|x| \leq R\}$ を満たすとして一般性を失わない。これらの仮定の下では、Duhamel の原理により、次の積分方程式と同値になる。

$$u(x,t) = \varepsilon u^0(x,t) + L(F|u_t|^p)(x,t). \tag{3}$$

ここで、積分方程式の線形な部分は

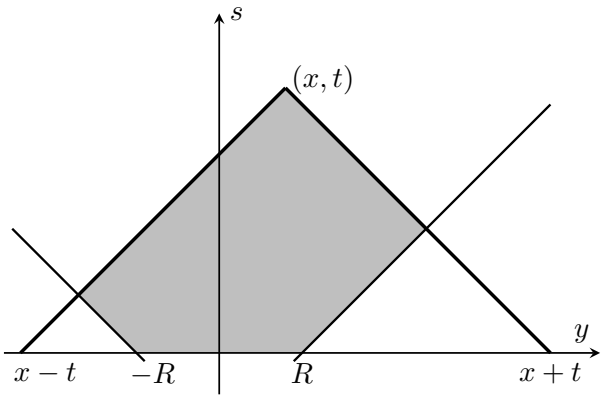
$$u^0(x,t) := \frac{1}{2}\{f(x+t) + f(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy,$$

Duhamel の項は

$$L(v)(x,t) := \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} v(y,s)dy \quad \text{for} \quad v \in C(\mathbf{R} \times [0,\infty))$$

によって定義される。解の有限伝播性により u_t は $\mathrm{supp}\ u_t \subset \{|x| \le t+R\}$ を満たすので、L の積分領域は頂点 (x,t) の三角形領域のうち、次の (図 0) のように色塗りされた部分になる。

(図 0) L の積分領域



積分方程式 (3) に着目すると、u が u_t によって記述されているので、そのまま逐次近似法によって解を構成することが出来ない。従って (3) の両辺を形式的に t で偏微分した積分方程式

$$u_t(x,t) = \varepsilon u_t^0(x,t) + L'(F|u_t|^p)(x,t) \tag{4}$$

から解を構成する。ここで、線形部分は

$$u_t^0(x,t) := \frac{1}{2}\{f'(x+t) - f'(x-t) + g(x+t) + g(x-t)\}$$

となり、Duhamel の項の微分は

$$L'(v)(x,t) := \frac{1}{2}\int_0^t v(x+t-s,s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t v(x-t+s,s)ds \quad \text{for} \quad v \in C(\mathbf{R}\times[0,\infty))$$

となる。この積分作用素 L' は、L の積分変数 (y,s) について、$(x+t,0)$ から (x,t) までと $(x-t,0)$ から (x,t) までの線積分を表わしている。この微分した積分方程式 (4) に対して連続解 w が得られれば、微積分学の基本定理により

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,s)ds + \varepsilon f(x)$$

は積分方程式 (3) の C^1 級解となる。さらに、微分した積分方程式 (4) を更に x によって微分した積分方程式

$$u_{tx}(x,t) = \varepsilon u_{tx}^0(x,t) + L'(F_x|u_t|^p + F|u_t|^{p-2}u_t u_{tx})(x,t)$$

と積分方程式 (4) を連立して時空一様空間での逐次近似法によって連続解が得られれば、u_{tt} と u_{xx} は u_{tx} と u_t によって表わすことが出来るので、u は積分方程式 (3) の古典解となる。$p>1$ より、u_t を変数として持つ関数 $|z|^{p-2}z$ は指数 $(p-1)$ の Hölder 連続性を持つため、連続解を得られる。従って、任意の $p>1$ に対して積分方程式 (3) の古典解が得られるため、モデル方程式の lifespan を同様に $T(\varepsilon)$ という記号で下記のように定義する。

$$T(\varepsilon) := \sup\{T>0; \text{適当に固定した } (f,g) \text{ に対して古典解 } u(x,t) \text{ が } 0 \le t \le T \text{ で存在する }\}.$$

ここで、定理 1.1 とその最適性より有限時間において解が爆発することが予想できるため、$\varepsilon \to 0$ のときの $T(\varepsilon)$ の増大度を調べることによって重みの影響を考察することが出来る。先に主結果を述べ、先行研究と比較する。また、$T(\varepsilon) \sim A(\varepsilon, C)$ なる記号は、C_1 と C_2 という ε に無関係な正定数が存在して、不等式 $A(\varepsilon, C_1) \le T(\varepsilon) \le A(\varepsilon, C_2)$ を満たすことを表す。

3 主結果

$\langle x \rangle := \sqrt{1+x^2}$ と記号を定義する。(2) について、$a, b \in \mathbf{R}$ によってパラメータ付けされた特性方向の重み $F(x,t) = \langle t + \langle x \rangle \rangle^{-1-a} \langle t - \langle x \rangle \rangle^{-1-b}$ を持つ一次元半線形波動方程式

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = \dfrac{|u_t|^p}{\langle t + \langle x \rangle \rangle^{1+a} \langle t - \langle x \rangle \rangle^{1+b}} & \text{in } \mathbf{R} \times (0, \infty), \\ u(x,0) = \varepsilon f(x), \quad u_t(x,0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases}$$

の古典解の lifespan について、我々は下記の結果を得た。

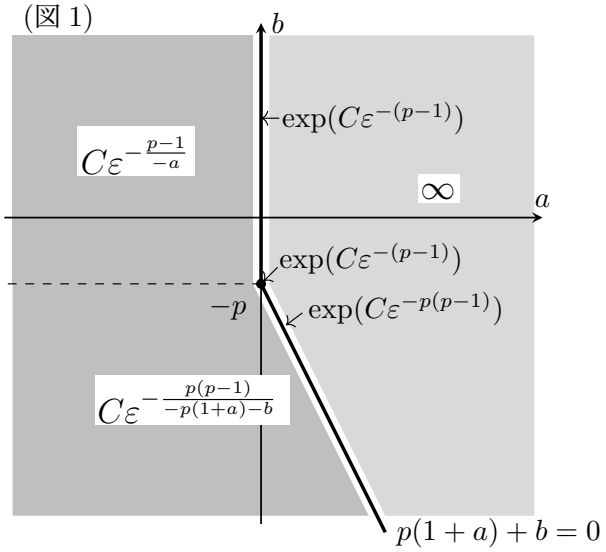
定理 3.1　$a > 0$ かつ $p(1+a) + b > 0$ ならば、ある正定数 $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(a, b, f, g, p)$ が存在して、任意の $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$ を満たす ε に対して $T(\varepsilon) = \infty$ が成立する。(図 1)

定理 3.2　ある正定数 $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(a, b, f, g, p)$ が存在して、任意の $0 < \varepsilon \le \varepsilon_2$ を満たす ε に対して下記が成立する。(図 1)

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} \exp(\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{for} \quad a = 0 \text{ and } b \ge -p, \\ \exp(\varepsilon^{-p(p-1)}) & \text{for} \quad a > 0 \text{ and } p(1+a) + b = 0, \\ \varepsilon^{-(p-1)/(-a)} & \text{for} \quad a < 0 \text{ and } b \ge -p, \\ \varepsilon^{-p(p-1)/(-p(1+a)-b)} & \text{for} \quad p(1+a) + b < 0 \text{ and } b < -p. \end{cases}$$

(a, b)-平面上に主結果を表わすと下記の通りになる。

(図 1)



4 先行研究

先行研究による既知の結果と主結果を比較する。初期値問題 (2) について $F \equiv 1$ の場合、つまり重みが無い場合において、Zhou[9] により lifespan の最適な評価が得られている。主結果の記号を用いて下記のように書ける。

$$T(\varepsilon) \sim C\varepsilon^{-(p-1)}$$

これは主結果の $a = b = -1$ の場合と一致している。

また、空間変数重みの場合 $F = \langle x \rangle^{-(1+a)}$ は Kitamura, Morisawa and Takamura[4] により次の結果が得られている。

$$T(\varepsilon) = \infty \qquad \text{for} \quad a > 0,$$
$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} \exp\left(C\varepsilon^{-(p-1)}\right) & \text{for } a = 0, \\ C\varepsilon^{-(p-1)/(-a)} & \text{for } a < 0. \end{cases}$$

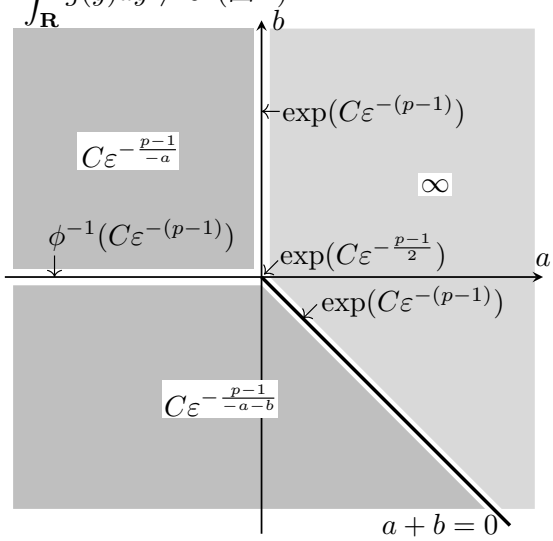
これは主結果における $b \geq -p$ の場合と一致している。理由としては、lifespan を決定する各点のアプリオリ評価が得られる $t - |x| = 0$ の近傍では、$\langle t + \langle x \rangle \rangle \sim \langle x \rangle \sim (1 + t)$ と、重みが同値になるからである。従って、時間変数重みの場合 $F = (1 + t)^{-(1+a)}$ の場合も同じ結果になることが容易に分かる。

非線形項が $|u|^p$ の場合、つまり偏微分方程式が

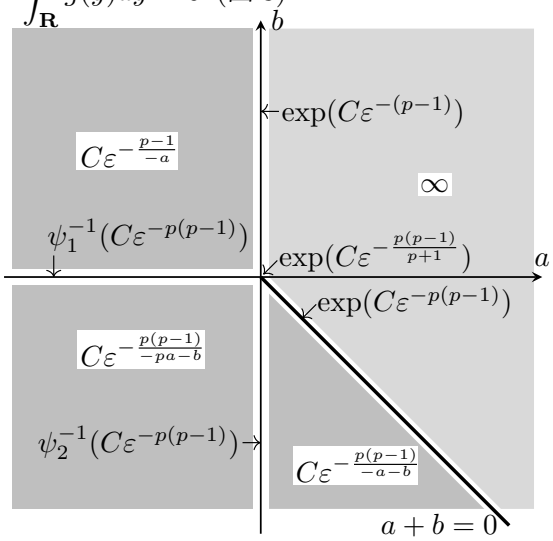
$$u_{tt} - u_{xx} = \frac{|u|^p}{\langle t + \langle x \rangle \rangle^{1+a} \langle t - \langle x \rangle \rangle^{1+b}} \quad \text{in } \mathbf{R} \times (0, \infty)$$

の場合の初期値問題は、Kitamura, Takamura and Wakasa[5] によって次の (図 2) 及び (図 3) で示される lifespan 評価が得られている。

$\int_{\mathbf{R}} g(y)dy \neq 0$ (図 2)



$\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0$ (図 3)



ϕ_1^{-1} と ψ_1^{-1}、ψ_2^{-1} はそれぞれ

$$\phi_1(s) = s^{-a} \log(2 + s), \ \psi_1(s) = s^{-pa} \log(2 + s), \ \psi_2(s) = s^{-b} \log^{p-1}(2 + s)$$

で定義される関数の逆関数である。主結果とは異なり、初期速度の全空間積分の値によって場合分けされている特徴がある。この理由は、微分した積分方程式 (4) の線形部分 u_t^0 は領域

$$\{(x,t) \in \mathbf{R} \times [0,T] : |x| + R \leq t\}$$

で恒等的に零になるという強 Huygens の原理が常に成り立つため、同様に強 Huygens の原理が働く (図 3) の初期速度の全空間積分の値が零の場合と類似した計算になるためである。その証拠に、$\langle t + \langle x \rangle \rangle$ 重みと $\langle t - \langle x \rangle \rangle$ 重みが相互作用する第 4 象限の斜めの直線上では、lifespan 評価が $\exp(C\varepsilon^{-p(p-1)})$ で一致している。また、この重みが相互作用する直線の傾きも主結果の $p(1+a)+b=0$ と異なっている。これは主結果の場合は最適な lifespan 評価が 1 度目の Iteration ではなく 2 度目の Iteration によって得られるため、非線形項の指数 p が lifespan 評価の場合分けの条件に含まれている。

また、$\langle t - \langle x \rangle \rangle$ と $\langle x \rangle$ は原点付近で同値ではないため、非線形項が $|u|^p \langle x \rangle^{-(1+a)}$ という空間変数のみの重みを持つ場合の lifespan 評価は特性重みの場合とは異なる部分がある。実際、Kitamura, Morisawa and Takamura[3] によって次の結果が得られている。

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} C\varepsilon^{-(p-1)} & \text{for } a > 0, \\ \phi^{-1}(C\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{for } a = 0, \\ C\varepsilon^{-(p-1)/(1-a)} & \text{for } a < 0 \end{cases} \quad \text{if } \int_{\mathbf{R}} g(x)dx \neq 0, \quad \Big(\phi(s) := s\log(2+s)\Big)$$

and

$$T(\varepsilon) \sim \begin{cases} C\varepsilon^{-p(p-1)} & \text{for } a > 0, \\ \psi_p^{-1}(C\varepsilon^{-p(p-1)}) & \text{for } a = 0, \\ C\varepsilon^{-p(p-1)/(1-pa)} & \text{for } a < 0, \end{cases} \quad \text{if } \int_{\mathbf{R}} g(x)dx = 0. \quad \Big(\psi_p(s) := s\log^{p-1}(2+s)\Big)$$

以上より、解の有限伝播性から $\langle t + \langle x \rangle \rangle \sim (1+t)$ が成り立つため、一般論を時空変数 (x,t) が含むように拡張する場合には、その lifespan の下からの評価の場合分けには変数として $(1+t)$ と $\langle x \rangle$ と $\langle t - \langle x \rangle \rangle$ の 3 種類について条件付けをすれば良いだろうと予想を立てることが出来る。

5 主結果の証明の概略

主結果の lifespan の上下からの評価を纏めた定理は lifespan $T(\varepsilon)$ の定義より、

・$T > 0$ が $T \leq A(\varepsilon, C_1)$ を満たすとき、古典解 $u \in C^2(\mathbf{R} \times [0,T])$ が存在する。$\Rightarrow T(\varepsilon) \geq A(\varepsilon, C_1)$

・$T > 0$ が $T \geq A(\varepsilon, C_2)$ を満たすとき、古典解 $u \in C^2(\mathbf{R} \times [0,T])$ が存在しない。$\Rightarrow T(\varepsilon) \leq A(\varepsilon, C_2)$

によって表現される 2 定理を合わせた表現である。前半は解の存在を示し、後半は解の爆発を示す。また、後半の定理に対しては

・$T \geq A(\varepsilon, C_2)$ を満たす $T > 0$ に対して連続解 $u_t \in C(\mathbf{R} \times [0,T])$ が存在すると仮定すると、$u_t(x,t) = \infty$ を満たす点 $(x,t) \in \mathbf{R} \times [0,T]$ が存在し、連続解であることに矛盾する。

という形の背理法を用いる。解の存在は John[1] と同様な手法である、積分方程式 (4) の各点評価の Iteration によって得られる。解の爆発に関しては、$b \geq -p$ の場合、つまり $\langle t - \langle x \rangle \rangle$ 重みが効かない領域で爆発する場合は、Zhou[9] の積分方程式 (3) に着目して常微分方程式に落とし込む方法を用いて証明し、$b < -p$ の場合、つまり $\langle t - \langle x \rangle \rangle$ 重みが効く領域で爆発する場合は、積分方程式 (4) に対する John[1] の手法を用いることで証明される。

参考文献

[1] F.John, *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math. **28** (1979), 235-268.

[2] M. Kato, H. Takamura and K. Wakasa, *The lifespan of solutions of semilinear wave equations with the scale-invariant damping in one space dimension*, Differential Integral Equations **32** (2019), no. 11-12, 659-678.

[3] S. Kitamura, K. Morisawa and H. Takamura, *The lifespan of classical solutions of semilinear wave equations with spatial weights and compactly supported data in one space dimension*, J. Differential Equations **307** (2022), 486-516.

[4] S. Kitamura, K. Morisawa and H. Takamura, *Semilinear wave equations of derivative type with spatial weights in one space dimension*, arXiv:2112.01015, to appear in Nonlinear Analysis, RWA.

[5] S. Kitamura, H. Takamura and K. Wakasa, *The lifespan estimates of classical solutions of one dimensional semilinear wave equations with characteristic weights*, arXiv:2204.00242

[6] T.-T. Li, X. Yu, and Y.Zhou, *Life-span of classical solutions to one-dimensional nonlinear wave equations*, Chinese Ann. Math. Ser. B **13** (1992) no. 3, 266-279. A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A **13** (1992), no. 4, 516.

[7] K. Morisawa, T. Sasaki and H. Takamura, *The combined effect in one space dimension beyond the general theory for nonlinear wave equations*, arXiv:2205.07198

[8] Y. Zhou, *Life span of classical solutions to* $u_{tt} - u_{xx} = |u|^{1+\alpha}$, Chinese Ann. Math. Ser. B **13** (1992) no. 2, 230-243. A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A **13** (1992), no. 2, 280.

[9] Y.Zhou, *Blow up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear wave equations*, Chinese Ann. Math. Ser. B **22** (2001), 275-280.

非整数階時間微分を含む非線形抽象発展方程式の可解性とその応用

東北大学大学院理学研究科数学専攻
中島慶人 (Yoshihito NAKAJIMA)

概要

整数階微積分学ではライプニッツ則や連鎖律など多くの計算公式が古典的な微分法と比べて複雑化するため, 応用上さまざまな困難をもたらす. 特にヒレ・吉田の定理やブレジス・高村理論に代表される古典的な発展方程式の理論と比べると, 非整数階時間微分作用素を伴う抽象発展方程式の研究は未だ発展途上にあると言える. 本稿では, 非整数階時間微分作用素を含む実ヒルベルト空間上の非凸汎関数に対する勾配流型発展方程式の可解性について考え, その応用例として非整数階時間偏微分作用素を含む爆発項付きの退化放物型方程式に対する初期値境界値問題の可解性について論じる. 本発表は赤木剛朗教授（東北大学）との共同研究に基づく.

1 導入

本稿では, 実ヒルベルト空間 H に於ける次の非線形発展方程式の可解性について考える.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u-u_0)\right](t)+\partial\varphi(u(t))-\partial\psi(u(t))\ni f(t),\quad 0<t<T. \tag{P}$$

ただし, $\partial\varphi,\partial\psi : H\to 2^H$ はそれぞれ適正 $(\varphi,\psi\not\equiv+\infty)$ 下半連続凸汎関数 $\varphi,\psi : H\to[0,+\infty]$ の劣微分作用素 (定義 3.1 参照) を表し, $u_0\in D(\varphi)$, $T>0$, $f\in L^2(0,T;H)$ とする. 以後, 作用素 $A : X\to 2^Y$ とグラフ $G(A)\subset X\times Y$ を同一視する. また非整数階時間微分作用素を例として含むように, 積分核 $k=k(t)$ は次の仮定をみたすものとする:

(A.0) 関数 k は $L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ に属する非負値単調非増加関数とし, さらにある非負値単調非増加関数 $\ell\in L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ が存在して $k*\ell\equiv 1$ が成り立つ (以後, この条件を $(k,\ell)\in P.C.$ とあらわすことにする).

ただし, 合成積 $*$ は次により定義する.

$$(f*g)(t):=\int_0^t f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s\quad \text{for}\ \ t>0. \tag{1}$$

仮定 (A.0) を満たす積分核 k (および ℓ) の具体例としては, 以下が挙げられる: $\alpha\in(0,1)$ に対して

$$k(t)=\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},\quad \ell(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\quad \text{for}\ \ t>0.$$

このとき対応する微分作用素 $(d/dt)[k*(u-u_0)]$ は α 階のリーマン・リュービル微分 $\partial_t^\alpha(u-u_0)$ と一致する.

論文 [1] では, いわゆる Brézis-高村理論と呼ばれるヒルベルト空間上の凸汎関数に対する勾配流方程式に関する理論を非整数階時間微分を含む問題 (すなわち $\psi \equiv 0$ の場合) へと拡張し, その応用例として非整数階時間微分を含む非線形拡散方程式や Allen-Cahn 方程式の時間大域的適切性を証明した. しかし, [1] では対応する汎関数が λ-convex である場合に制限されているため, 汎関数が λ-convex にならない場合 (たとえば爆発項を伴うような問題) は扱えていなかった. それゆえ解が有限時間で爆発しうるような場合は適用範囲に含まれない. 一方, 時間微分が 1 階の古典的な場合については, 論文 [4] の結果が知られており, そこで得られた結果は p-Laplacian を含む爆発項付きの放物型方程式の時間局所可解性の証明に応用されている. 本研究では, [4] の結果を非整数階時間微分を含む問題 (P) へ拡張し, それを非整数階時間微分を含む爆発項付き退化放物型方程式に対する初期値境界値問題に応用することを目的とする.

2 主結果

問題 (P) の強解を次のように定義する.

定義 2.1 ((P) の強解)**.** 与えられた関数 $f \in L^2(0,T;H)$, $u_0 \in D(\varphi)$ および $S \in (0,T]$ に対して, 次の 2 つの条件が成立するとき, $u \in L^2(0,S;H)$ を $[0,S]$ における問題 (P) の**強解**と呼ぶ.

(i) $k * (u - u_0) \in W^{1,2}(0,S;H)$ であり, $[k * (u - u_0)](0) = 0$ が成り立つ.

(ii) ほとんどすべての $t \in (0,S)$ に対して $u(t) \in D(\partial\varphi) \cap D(\partial\psi)$ であり, また次をみたすような $g_1, g_2 \in L^2(0,S;H)$ が存在する:

- ほとんどすべての $t \in (0,S)$ に対して $g_1(t) \in \partial\varphi(u(t))$, $g_2(t) \in \partial\psi(u(t))$ が成り立つ.
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k * (u - u_0)] + g_1 - g_2 = f$ in $L^2(0,S;H)$ が成り立つ.

次に主結果で用いる仮定を導入する. ただし, 証明の概略を簡単にするため, 少し強い仮定を導入する.

(A.1) 任意の実数 L に対して, 集合 $\{u \in H \colon \varphi(u) \le L\}$ は H の強位相に関してコンパクトである.

(A.2) $D(\partial\varphi) \subset D(\partial\psi)$ が成り立つ. さらに, 次をみたすような定数 $\nu_1 \in [0,1)$ および単調増加関数 $M : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ が存在する.

$$|\partial\mathring{\psi}(u)|_H \le \nu_1 |\partial\mathring{\varphi}(u)|_H + M(\varphi(u)) \quad \text{for all} \quad u \in D(\partial\varphi).$$

ただし $\partial\mathring{\varphi}(u)$, $\partial\mathring{\psi}(u)$ はそれぞれ $\partial\varphi(u)$, $\partial\psi(u)$ の minimal section すなわち, $\partial\mathring{\varphi}(u)$ は $\partial\varphi(u)$ の元で H のノルムを最小にするものである (その存在, 一意性は命題 3.3 参照).

(A.3) $D(\varphi) \subset D(\psi)$ が成り立つ. さらに, 次をみたすような定数 $\nu_2 \in [0,1)$, $C > 0$, $\beta \in [0,2)$ が存在する.

$$\psi(u) \le \nu_2 \varphi(u) + C(|u|_H^\beta + 1) \quad \text{for all} \quad u \in D(\varphi).$$

主結果は以下のとおりである.

定理 2.1 (時間局所解の存在)**.** 仮定 (A.0), (A.1), (A.2) が成立するとき, 任意の $u_0 \in D(\varphi)$, およ

び $\ell * |f|_H^2 \in L^\infty(0,T)$ をみたす $f \in L^2(0,T;H)$ に対して, ある $0 < T_0 \le T$ が存在し, $[0,T_0]$ における (P) の強解 $u \in L^2(0,T_0;H)$ が存在する.

定理 2.2 (時間大域解の存在)**.** 仮定 (A.0), (A.1), (A.2), (A.3) が成立するとき, 任意の $u_0 \in D(\varphi)$ および $f \in W^{1,2}(0,T;H)$ に対して, $[0,T]$ における (P) の強解 $u \in L^2(0,T;H)$ が存在する.

次に定理 2.1 および定理 2.2 の偏微分方程式への応用例について述べる. まず $\alpha \in (0,1)$, $1 < p, q < \infty$ とし, $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$ はなめらかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とする. 次の初期値境界値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha \big(u - u_0\big)(t,x) - \Delta_p u(t,x) - |u(t,x)|^{q-2}\, u(t,x) = f(t,x), & (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u(t,x) = 0, & (t,x) \in (0,T) \times \partial\Omega. \end{cases} \tag{PP}$$

ここで ∂_t^α は α 階のリーマン・リュービル微分を表し, また $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ は p-Laplace 作用素とする. 上で述べた主結果を応用することで次の結果が得られる.

定理 2.3. $1 < p, q < \infty$ かつ $p^* > 2$, $q \le (p^*/2) + 1$ とする. ただし $p^* = Np/(N-p)_+$ はソボレフ臨界指数とする. このとき, 任意の $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, および $\ell * |f|_{L^2(\Omega)}^2 \in L^\infty(0,T)$ をみたす $f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ に対して, 以下が成立する.

(i) ある $T_0 \in (0,T]$ が存在し, $[0,T_0]$ における (PP) の強解 $u \in L^2(0,T_0;L^2(\Omega))$ が存在する.
(ii) 特に $q < p$ および $f \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$ が成立するとき, $[0,T]$ における (PP) の強解 $u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ が存在する.

また $p = 2$ の場合, 仮定 $q \le (2^*/2) + 1$ をソボレフ劣臨界条件 $q < 2^*$ に置き換えても, 上の主張が成立する.

3 準備

3.1 劣微分作用素

定義 3.1. 実ヒルベルト空間 H における適正 $(\varphi \not\equiv \infty)$ 下半連続凸関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ に対して, 次をみたす多価作用素 $\partial\varphi \subset H \times H$ を φ の **劣微分作用素** と呼ぶ.

$$\partial\varphi = \{[w,\xi] \in H \times H : \text{任意の } z \in H \text{ に対して } \varphi(z) - \varphi(w) \ge (\xi, z-w)_H\}.$$

また, $D(\varphi) := \{u \in H : \varphi(u) < \infty\}$, $D(\partial\varphi) := \{u \in H : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$ とする.

劣微分作用素の例として, 次の例が挙げられる.

例 3.1 ([2], Proposition 2.7, Theorem 2.18)**.** $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ を有界開集合, $p, q \in (1,\infty)$ とする. また, $\varphi_p, \psi_q : L^2(\Omega) \to [0,\infty]$ を以下の適正下半連続凸関数とする.

$$\varphi_p(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x & \text{if } u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad \psi_q(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}\displaystyle\int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x & \text{if } u \in L^q(\Omega), \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき, φ_p, ψ_q の劣微分作用素 $\partial\varphi_p$, $\partial\psi_q$ は $D(\partial\varphi_p) = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^2(\Omega) : -\Delta_p u \in L^2(\Omega)\}$, $D(\partial\psi_q) = L^{2(q-1)}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ であり, 次をみたす作用素となる.

$$\partial\varphi_p(u) = \{-\Delta_p u\} \quad \text{if } u \in D(\partial\varphi_p), \quad \partial\psi_q(u) = \{|u|^{q-2}u\} \quad \text{if } u \in D(\partial\psi_q).$$

まず, 次の命題が成立することが知られている.

命題 3.1 ([2], Proposition 1.1)**.** 適正下半連続凸関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ に対して, 次をみたすような $a \in H$, $b \in \mathbb{R}$ が存在する.

$$\varphi(u) \geq (a, u)_H + b \quad \text{for all} \quad u \in H.$$

命題 3.2 ([2], Theorem 2.10)**.** 適正下半連続凸関数 $\varphi, \psi : H \to (-\infty, \infty]$ に対して $D(\varphi) \cap \mathrm{int}D(\psi) \neq \emptyset$ とする. このとき, $D(\partial(\varphi + \psi)) = D(\partial\varphi) \cap D(\partial\psi)$ であり, 次の性質をみたす.

$$\partial(\varphi + \psi)(u) = \partial\varphi(u) + \partial\psi(u) := \{v_1 + v_2 : v_1 \in \partial\varphi(u),\ v_2 \in \partial\psi(u)\} \quad \text{for all} \quad u \in H.$$

注意 3.1. 適正下半連続凸関数 $\varphi, \psi : H \to (-\infty, +\infty]$ に対して, 命題 3.1 より, 次をみたすような $a_1, a_2 \in H$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ が存在する.

$$\begin{aligned} \varphi(u) &\geq (a_1, u)_H + b_1 \quad \text{for all} \quad u \in H, \\ \psi(v) &\geq (a_2, v)_H + b_2 \quad \text{for all} \quad v \in H. \end{aligned}$$

ここで, $L_1(\cdot) := -(a_1, \cdot)_H - b_1$, $L_2(\cdot) := -(a_2, \cdot)_H - b_2$, $\widehat{\varphi} := \varphi + L_1$, $\widehat{\psi} := \psi + L_2$ とする. このとき, 適正下半連続凸関数 L_1, L_2 の劣微分作用素 ∂L_1, ∂L_2 は $D(\partial L_1) = D(\partial L_2) = H$ であり, 次をみたす作用素となる.

$$\partial L_1(u) = \{-a_1\} \quad \text{for all } u \in H, \quad \partial L_2(v) = \{-a_2\} \quad \text{for all } v \in H.$$

命題 3.2 より適正下半連続凸関数 $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi} : H \to [0, \infty]$ の劣微分作用素 $\partial\widehat{\varphi}, \partial\widehat{\psi}$ は $D(\partial\widehat{\varphi}) = D(\partial\varphi)$, $D(\partial\widehat{\psi}) = D(\partial\psi)$ であり $\partial\widehat{\varphi} = \partial\varphi + \{-a_1\}$, $\partial\widehat{\psi} = \partial\psi + \{-a_2\}$ をみたす. 従って, $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}$ および $\widehat{f} := f - a_1 - a_2$ に対して定理 2.1, 定理 2.2 を適用することにより, 非負値とは限らない適正下半連続凸関数 $\varphi, \psi : H \to (-\infty, \infty]$ に対しても定理 2.1, 定理 2.2 が成立する.

また, 適正下半連続凸関数の劣微分作用素は極大単調作用素であることが知られている ([2], Theorem 2.8 参照). 極大単調作用素の理論を用いることにより, 次の命題が成り立つ.

命題 3.3 ([2], Proposition 2.1)**.** 適正下半連続凸関数 $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ の劣微分作用素 $\partial\varphi$ は次の性質をみたす.

任意の $u \in D(\partial\varphi)$ に対して, H の部分集合 $\partial\varphi(u)$ は凸集合かつ閉集合である.

特に, ヒルベルト空間の性質から, 任意の $u \in D(\partial\varphi)$ に対して $\partial\varphi(u)$ の minimal section $\partial\mathring{\varphi}(u)$ が一意に存在する.

命題 3.4 ([2], Theorem 2.9)**.** 適正下半連続凸関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ と任意の $\lambda > 0$ に対して, $\varphi_\lambda : H \to (-\infty, \infty]$ を以下の関数とする (関数 φ_λ を φ のモロー・吉田正則化と呼ぶ).

$$\varphi_\lambda(u) := \inf\left\{\varphi(v) + \frac{1}{2\lambda}|v - u|_H^2 : v \in H\right\} \quad \text{for } u \in H.$$

このとき, φ_λ は次の性質をみたす.

(i) φ_λ は凸であり, H 上全体でフレシェ微分可能である.

(ii) 任意の $u \in H$, $\lambda > 0$ に対して, $\varphi(J_\lambda u) \le \varphi_\lambda(u) \le \varphi(u)$ である. ただし $J_\lambda = (I + \lambda\partial\varphi)^{-1}$ とする. また $\lambda \to +0$ とすると, $\varphi_\lambda(u) \to \varphi(u)$ となる.

(iii) 任意の $\lambda > 0$ に対して, $\partial(\varphi_\lambda)(u) = \{\varphi'_\lambda(u)\}$, $|\varphi'_\lambda(u)|_H \le |\partial\mathring{\varphi}(u)|_H$ である. ここで, $\varphi'_\lambda(u)$ は点 u における φ_λ のフレシェ微分である. また, $\partial\varphi$ の吉田近似 $(\partial\varphi)_\lambda$ と φ_λ の劣微分作用素 $\partial(\varphi_\lambda)$ は一致する (以後, $\partial(\varphi_\lambda)(u)$ の括弧を省略して $\partial\varphi_\lambda(u)$ と書く. また, $\partial\varphi_\lambda$ を多価関数ではなく関数 $\partial\varphi_\lambda : H \to H$ と同一視する).

(iv) 任意の $\lambda > 0$ に対して, $\partial\varphi_\lambda : H \to H$ はリプシッツ連続である.

(v) 任意の点列 $v_n = \partial\varphi_{1/n}(u_n)$ および $(u, v) \in H \times H$ に対して, u_n が u に H 上で強収束し, v_n が v に H 上で弱収束するならば, $(u, v) \in \partial\varphi$ となる.

劣微分作用素の吉田近似の例として, 次の例が挙げられる.

命題 3.5 ([5], IV.Example 2.C)**.** 測度有限な可測集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \in \mathbb{N})$, 適正下半連続凸関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ に対して, $\Psi^\varphi : L^2(\Omega; H) \to (-\infty, +\infty]$ を以下の適正下半連続凸関数とする.

$$\Psi^\varphi(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \varphi(u(x))\,\mathrm{d}x & \text{if } \varphi(u(\cdot)) \in L^1(\Omega), \\ +\infty & \text{if } \varphi(u(\cdot)) \notin L^1(\Omega). \end{cases}$$

このとき, Ψ^φ は次の性質が成り立つ.

(i) 任意の $\lambda > 0$ に対して, 適正下半連続凸関数 Ψ^φ のモロー・吉田正則化 Ψ^φ_λ は次をみたす関数となる.

$$\Psi^\varphi_\lambda(u) = \int_\Omega \varphi_\lambda(u(x))\,\mathrm{d}x \quad \text{for all} \quad u \in L^2(\Omega; H).$$

また, 劣微分作用素 $\partial\Psi^\varphi$ の吉田近似 $\partial\Psi^\varphi_\lambda$ は次をみたす作用素となる.

$$\partial\Psi^\varphi_\lambda(u) = \varphi_\lambda(u(\cdot)) \quad \text{for all} \quad u \in L^2(\Omega; H).$$

(ii) 劣微分作用素 $\partial\Psi^\varphi$ は次をみたす作用素となる.

$$\partial\Psi^\varphi(u) = \{g \in L^2(\Omega; H) : g(x) \in \partial\varphi(u(x)) \text{ for a.e. } x \in \Omega\} \quad \text{for all } u \in L^2(\Omega; H).$$

3.2 連鎖律

通常の 1 階微分の場合, 次の凸汎関数に関する連鎖律がよく知られている.

命題 3.6 ([5], IV Lemma 4.3)**.** 適正下半連続凸関数 $\varphi : H \to [0, \infty]$ と $u \in W^{1,2}(0, T; H)$ に対して, $g_u(t) \in \partial\varphi(u(t))$ for a.e. $t \in (0, T)$ をみたす $g_u \in L^2(0, T; H)$ が存在するとする. このとき, $\varphi(u(\cdot)) \in W^{1,1}(0, T)$ であり, 次の等式が成立する.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(u(t)) = \left(h, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t)\right)_H \quad \forall\, h \in \partial\varphi(u(t)) \quad \text{for a.e. } t \in (0, T).$$

非整数階時間微分のように合成積を伴う微分の場合, 次の連鎖律が成り立つ.

命題 3.7 ([1], Proposition 3.4)**.** 適正下半連続凸関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ に対して, $u_0 \in D(\varphi)$ とする. また $k \in W^{1,1}(0,T)$ は $k(t) \geq 0, k'(t) \leq 0$ for a.e. $t \in (0,T)$ をみたすとする. さらに $u, g \in L^2(0,T;H)$ は $\varphi(u(\cdot)) \in L^1(0,T)$ および $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ for a.e. $t \in (0,T)$ をみたすとする. このとき, 次の不等式が成立する.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k * (u - u_0)](t), g(t)\right)_H \geq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[k * (\varphi(u(\cdot)) - \varphi(u_0))\big](t) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T).$$

しかし非整数階時間微分を考える場合, 考える積分核 k_α は非負かつ非増加であるが, 原点で特異性を持つためソボレフ空間 $W^{1,1}(0,T)$ の元にならず, 上の命題をそのまま適用することができない. しかし, 増大作用素の理論, および completely positive kernel の理論を用いることにより, 命題 3.7 と同等の不等式を得ることができる.

3.3 増大作用素

定義 3.2. 実バナッハ空間 X に対し, 次をみたす多価作要素 $A \subset X \times X$ を A の **増大作用素** と呼ぶ.

$$|x_1 - x_2|_X \leq |(x_1 + \alpha y_1) - (x_2 + \alpha y_2)|_X \quad \text{for all } [x_1, y_1] \in A,\ [x_2, y_2] \in A,\ \alpha > 0.$$

さらに, 増大作用素 $A \subset X \times X$ が次をみたすとき, A を **m-増大作用素** と呼ぶ.

任意の $\alpha > 0$, $w \in X$ に対して, $w = x + \alpha y$ をみたすような $[x, y] \in A$ が存在する.

また, $D(A) = \{u \in X : Au \neq \emptyset\}$ とする.

定義 3.3. 任意の $\lambda > 0$, m-増大作用素 A に対して, $J_\lambda^A : X \to D(A)$, $A_\lambda : X \to X$ を以下の作用素とする.

$$J_\lambda^A(u) := (I + \lambda A)^{-1}(u) \quad \text{for all } u \in X, \quad A_\lambda := \frac{1}{\lambda}\left(I - J_\lambda^A\right)(u) \quad \text{for all } u \in X.$$

ここで, $I : X \to X$ は恒等写像とする.

命題 3.8 ([5], IV Proposition 7.1, IV Proposition 7.2)**.** m-増大作用素 $A \subset X \times X$ は次の性質をみたす.

(i) 任意の $u \in X$, $\lambda > 0$ に対して, $A_\lambda u \in A(J_\lambda^A u)$ である.
(ii) 任意の $u \in \overline{D(A)}^X$ に対して, $\lim_{\lambda \to +0} J_\lambda^A(u) = u$ である.
(iii) グラフ $A \subset X \times X$ は閉である. 特に A が線形作用素のとき, グラフ A が凸集合となるため弱閉となり次が成立する.

任意の数列 $(u_n, v_n) \in A$ および $(u, v) \in X \times X$ に対して,
u_n が u に弱収束し, v_n が v に弱収束するならば $(u, v) \in A$ である.

3.4 Completely positive kernels

まず, 次の命題が成り立つことが知られている.

命題 3.9 ([3], Theorem 2.2)**.** $(k,\ell) \in P.C.$ とする. 任意の $\lambda > 0$ に対して, $s_\lambda \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ を次のボルテラ方程式の解とする.

$$s_\lambda + \lambda(\ell * s_\lambda) = 1.$$

このとき, $s_\lambda \geq 0$, $s'_\lambda \leq 0$ をみたす. 特に, $k_\lambda := \lambda s_\lambda \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ とすると $k_\lambda \geq 0$, $k'_\lambda \leq 0$ となる.

ここで, X を実バナッハ空間, $1 \leq p \leq \infty$ とし, 線形作用素 $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset L^p(0,T;X) \to L^p(0,T;X)$ を次で定める.

$$\begin{aligned} D(\mathcal{B}) &:= \{v \in L^p(0,T;X) : k * v \in W^{1,p}(0,T;X),\ k * v(0) = 0\}, \\ \mathcal{B}v &:= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k * v) \quad \text{for } v \in D(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

このとき, 命題 3.9 から次の事実が成り立つ. 特に, $\mathcal{B}$ は m-増大作用素となる.

- 任意の $f \in L^p(0,T;X)$ に対して, $J_\lambda(f) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\ell * k_\lambda * f]$ とすると, $J_\lambda(f) + \dfrac{1}{\lambda}J_\lambda(f) = f$.
- 任意の $f, g \in L^p(0,T;X)$ に対して, $|J_\lambda(f) - J_\lambda(g)|_{L^p(0,T;X)} \leq |f - g|_{L^p(0,T;X)}$.

従って, 命題 3.8 より, 次の命題が従う.

命題 3.10 ([1], Section 3)**.** 実バナッハ空間 X, $1 \leq p \leq \infty$, $(k,\ell) \in P.C.$ とする. また, $v \in L^p(0,T;X)$ であり, $k * v \in W^{1,p}(0,T;X)$ かつ $(k * v)(0) = 0$ とする. このとき,

$$k_n \to k \quad \text{in } L^1(0,T), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k_n * v] \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k * v] \text{ in } L^p(0,T;X).$$

また, 任意の点列 $u_n \in D(\mathcal{B})$ および $v_n := \mathcal{B}u_n$ に対して, u_n が u に $L^p(0,T;X)$ 上で弱収束し, v_n が v に $L^p(0,T;X)$ 上で弱収束するならば, $u \in D(\mathcal{B})$ であり, $v = \mathcal{B}u$ となる.

命題 3.7 および命題 3.10 を組み合わせることにより, 次の主張が成立する.

命題 3.11. 適正下半連続凸関数 $\varphi : H \to [0,+\infty]$ に対して, $u_0 \in D(\varphi)$, $(k,\ell) \in P.C.$ とする. さらに, $u \in L^2(0,T;H)$ が $k * (u - u_0) \in W^{1,2}(0,T;H)$, $[k * (u - u_0)](0) = 0$, $\varphi(u(\cdot)) \in L^1(0,T)$ をみたすとする. また, $g(t) \in L^2(0,T;H)$ が $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ for a.e. $t \in (0,T)$ をみたすとする. このとき, 次の不等式が成立する.

$$\begin{aligned} &\left[\ell * \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[k * (u - u_0)](\cdot), g(\cdot)\right)_H\right](t) \geq \varphi(u(t)) - \varphi(u_0) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T), \\ &\int_0^t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[k * (u - u_0)](s), g(s)\right)_H \mathrm{d}s \geq [k * (\varphi(u(\cdot)) - \varphi(u_0))](t) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T). \end{aligned}$$

3.5 強コンパクト性定理

強収束する部分列が存在することを保証するために, 次の命題を用いる.

命題 3.12 ([6], Theorem 1)**.** X を実バナッハ空間とし, $1 \le p < \infty$ とする. また, 集合 $\mathcal{F} \subset L^p(0,T;X)$ が次の性質をみたすとする.

(i) $\left\{\int_{t_1}^{t_2} f(s)\,\mathrm{d}s : f \in \mathcal{F}, 0 < t_1 < t_2 < T\right\}$ は X 上で相対コンパクトである.
(ii) $|f(t+h) - f(t)|_{L^p(0,T-h;X)} \to 0 \quad \text{as} \quad h \to +0 \quad \text{uniformly in } f \in \mathcal{F}.$

このとき, $\mathcal{F}$ は $L^p(0,T;X)$ 上で相対コンパクトである.

4 証明の概略

定理 2.3 は, 定理 2.1, 定理 2.2 に例 3.1 を適用して得られる結果であるため, ここでは時間局所解の存在に関する定理 2.1 および時間大域解の存在に関する定理 2.2 の証明のみについて述べる.

4.1 定理 2.1 の証明の概略

まず, 近似方程式の可解性を証明する. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次の問題 (P) にあらわれる劣微分作用素 $\partial\psi$ をその吉田近似 $\partial\psi_{1/n}$ によって近似した問題 (P_n) の可解性を考える.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u - u_0)\right](t) + \partial\varphi(u(t)) - \partial\psi_{1/n}(u(t)) \ni f(t), \quad 0 < t < T. \tag{P_n}$$

すると, (P_n) の可解性を証明することができる.

補題 4.1. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次をみたす $(u_n, \xi_n) \in L^\infty(0,T;H) \times L^2(0,T;H)$ が一意に存在する.

$$\begin{aligned}
&k * (u_n - u_0) \in W^{1,2}(0,T;H),\ \left[k * (u_n - u_0)\right](0) = 0,\\
&\varphi(u_n) \in L^\infty(0,T),\\
&\xi_n(t) \in \partial\varphi(u_n(t)) \qquad \text{for a.e. } t \in (0,T),\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u_n - u_0)\right] + \xi_n - \partial\psi_{1/n}(u_n) = f.
\end{aligned} \tag{2}$$

つぎに, ア・プリオリ評価を行う. 方程式 (2) の両辺に ξ_n をかけ, ℓ と合成積をとると, 次の等式が得られる.

$$\ell * \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u_n - u_0)\right], \xi_n\right)_H + \ell * |\xi_n|_H^2 - \ell * \left(\partial\psi_{1/n}(u_n), \xi_n\right)_H = \ell * (f, \xi_n)_H$$

for a.e. $t \in (0,T)$. ここで, 仮定 (A.2) と命題 3.4 より, 次の不等式が成立する.

$$|\partial\psi_{1/n}(u_n)|_H \le \nu_1 |\xi_n|_H + M(\varphi(u_n)).$$

また命題 3.11 で述べたように, 次の連鎖律不等式が成立する.

$$\varphi(u_n(t)) - \varphi(u_0) \le \left[\ell * \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[k*(u_n-u_0)], \xi_n\right)_H\right](t) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T).$$

ヘルダーの不等式を用いて変形を行うことにより, 次が得られる.

$$\begin{cases} \exists C_0 \in [0,\infty),\ \forall n \in \mathbb{N} \\ \varphi(u_n) + \ell * |\xi_n|_H^2 \le C_0\left(1 + \left(\ell * \left[M(\varphi(u_n))\right]\right)\right) \text{ for a.e. } t \in (0,T). \end{cases} \tag{3}$$

ここで, (3) から, $\varphi(u_n)$ の局所有界性を証明することができる.

$$\exists T_0 \in (0,T],\ \exists C \ge 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad |\varphi(u_n(\cdot))|_{L^\infty(0,T_0)} \le C.$$

さらに, $\varphi(u_n)$ の局所有界性, (2), (3) から次のア・プリオリ評価が成立する.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\ell * |\xi_n|_H^2\right|_{L^\infty(0,T_0)} < \infty,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|_{L^2(0,T_0;H)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |k*\ell*|\xi_n|_H^2|_{L^\infty(0,T_0)} < \infty.$$
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\partial\psi_{1/n}(u_n)|_{L^2(0,T_0;H)} < \infty,\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |(d/dt)\,[k*(u_n-u_0)]|_{L^2(0,T_0;H)} < \infty.$$

特に, $G_n := f - \partial\psi_{1/n}(u_n) - \xi_n \in L^2(0,T_0;H)$ とすると, $\sup_{n\in\mathbb{N}} |G_n|_{L^2(0,T_0;H)} < \infty$ である. 最後に, 近似解の収束を証明する. 次の同程度連続性が, G_n の評価および (2) から得られる.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n(\cdot+h) - u_n(\cdot)|_{L^2(0,T_0-h;H)} \to 0 \quad \text{as } h \to +0.$$

また, 上のア・プリオリ評価と仮定 (A.1) を用いることにより, 次の事実が成り立つ.

$$\left\{\int_{t_1}^{t_2} u_n(s)\,\mathrm{d}s : n \in \mathbb{N}, 0 < t_1 < t_2 < T_0\right\} \text{ は } H \text{ 上で相対コンパクトである.}$$

従って, 命題 3.12 から強収束する部分列が存在する.

$$\exists u \in L^2(0,T_0;H),\ \exists \{u_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{u_n\}_{n=1}^\infty\ u_{n_k} \to u \ \text{ in } L^2(0,T_0;H).$$

ここで命題 3.4, 命題 3.5, 命題 3.10 を用いると, u が $[0,T_0]$ における (P) の強解であることを示すことができる.

4.2 定理 2.2 の証明の概略

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次の (P) にあらわれる劣微分作用素 $\partial\psi$ を $\partial\psi_{1/n}$ により近似をし, さらに $(1/n)(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(u-u_0)$ を加えた近似問題 (P''_n) の可解性を考える.

$$\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_n-u_0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u-u_0)\right](t) + \partial\varphi(u(t)) - \partial\psi_{1/n}(u(t)) \ni f(t), \quad 0 < t < T. \tag{P''_n}$$

このとき, (P''_n) の可解性を証明することができる.

補題 4.2. 次をみたす $(u_n, g_{u_n}) \in W^{1,2}(0,T;H) \times L^2(0,T;H)$ が一意に存在する.

$$\begin{aligned} &u_n(0) = u_0, \quad g_{u_n}(t) \in \partial\varphi(u_n(t)) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T), \\ &\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_n-u_0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u_n-u_0)\right] + g_{u_n} - \partial\psi_{1/n}(u_n) = f. \end{aligned} \tag{4}$$

ここで, 時間局所解の存在とは異なり $(1/n)(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(u-u_0)$ の項を付け加えることによって, 命題 3.6 の連鎖律を用いることができるため, より多くの一様評価が成り立つような近似問題となっている. つぎにア・プリオリ評価を導出する. 方程式 (4) の両辺に $(d/dt)(u_n-u_0)$ をかけ, $(0,t)$ で積分を行うことにより, 命題 3.6 および命題 3.11 の連鎖律を用いて次の不等式を示すことができる.

$$\begin{aligned}&\int_0^t \frac{1}{n}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(u_n-u_0)(s)\right|_H^2 \mathrm{d}s + \left[\ell * \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}k*(u_n-u_0)\right|_H^2\right](t) + \varphi(u_n(t)) - \psi_{1/n}(u_n(t))\\ \le&\varphi(u_0)+\psi(u_0)+f(t)(u_n-u_0)(t) - \int_0^t \left((u_n-u_0)(s), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}f(s)\right)_H \mathrm{d}s\end{aligned}$$

for a.e. $t\in(0,T)$. ここで, 次の不等式が成立することに注意する.

$$|u_n(t)-u_0|_H^2 \le |\ell|_{L^1(0,T)}\left[\ell * \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}k*(u_n-u_0)\right|_H^2\right](t) \quad \text{for a.e. } t\in(0,T). \tag{5}$$

仮定 (A.3) および (5) を用いることにより, $\varphi(u_n)+|u_n|_H$ の一様有界性が得られる.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi(u_n)+|u_n|_H|_{L^\infty(0,T)} < \infty$$

以降の証明は, 定理 2.1 の証明と同様である.

参考文献

[1] G. Akagi, Fractional flows driven by subdifferentials in Hilbert spaces, Israel J. Math. **234** (2019), 809–862.

[2] V. Barbu, *Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2010.

[3] Ph. Clément and J.A. Nohel, Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations with completely positive kernels, SIAM J. Math. Anal., **12** (1981), 514–535.

[4] M. Ôtani, On the existence of strong solutions for $du/dt(t)+\partial\psi^1(u(t))-\partial\psi^2(u(t))\ni f(t)$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **24** (1977), 575–605.

[5] R.E. Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 49, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[6] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **146** (1987), 65–96.

Maximal regularity of distributional solutions to degenerate elliptic systems for locally integrable data

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
宮川寛基 (Hiroki MIYAKAWA)

概要

p-Laplacian に代表される退化楕円型作用素を含む楕円型方程式においては, 与えられた外力項にある程度の可積分性がある場合，その弱解の存在が知られている．しかし外力の可積分性が低い場合には，弱解の存在はよく分かっていない．本発表では，p-Laplacian 型の楕円型作用素とそれよりも高い増大度を持つ吸収項を伴う楕円型方程式系を考え，局所可積分な外力項に対するある種の弱解の存在およびその正則性について論じる．本発表は赤木剛朗教授（東北大学）との共同研究に基づく．

1 導入

本小論では $d, N \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を非有界な Lipschitz 領域とする．そして次の方程式系を考える．

$$(\mathsf{P}) \begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{r-2}u = -\mathrm{div}(|f|^{p-2}f) + |g|^{r-2}g & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

ただし $1 < p < r < \infty$, $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $\Delta_p u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ とする．また $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N})$, $g \in L^s_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ は与えられた関数で, $\max\{1, p-1\} < q < p$, $\max\{1, r-1\} < s < r$ とする．

問題 (P) に関する研究は $\Omega = \mathbb{R}^d$, $p = 2$, $N = 1$, $f \equiv 0$, $|g|^{r-2}g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ の場合に対する Brezis [1] の結果が先駆的である．Brezis は吸収項にまつわるある種のエネルギー評価を用いることで局所可積分なデータに対して超関数解が存在することを示したが, 一方で超関数解の正則性, 特に最大正則性に関しては十分な議論が成されていなかった．

ここで楕円型方程式の解の最大正則性とは, 与えられたデータから期待されうる超関数解 u の最大の正則性を意味する．例えば

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = -\mathrm{div}(|f|^{p-2}f) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

という方程式では, $f \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N})$ のとき, 方程式において対応している ∇u についても, $\nabla u \in L^q(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N})$ であることが期待される．実際, $p \leq q$ のときには p-Laplacian が, $W^{1,p}_0(\Omega; \mathbb{R}^N)$ から $(W^{1,p}_0(\Omega; \mathbb{R}^N))^*$ への極大単調作用素であることを用いてこれを証明することができる．

問題 (P) の場合であれば, $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N})$, $g \in L^s_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ に対して, $\nabla u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N})$, $u \in L^s_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ が, 最大正則性にあたる．一方, 有界領域や可積分なデータに対しては, 近年,

p-Laplacian に代表される非線形楕円型作用素を含む問題 (ただし吸収項は伴わない) に対しても最大正則性に関する結果が得られるようになり (例えば [3] を参照), 線形楕円型方程式に対するいわゆる楕円型正則性理論の p-Laplacian 版が盛んに研究されている. 特に $q < p$, $s < r$ の場合には relative truncation 法を用いた新しいエネルギー評価法の発展が重要な役割を果たしている. 一方, relative truncation 法が非有界領域における局所可積分な外力項を持つ方程式にどの程度適用できるかは未知数であり, 実際, (P) で挙げた問題に対する解の最大正則性に関する結果は見当たらない. 本小論の目的は, 局所可積分な外力項を備えた方程式 (P) に対する超関数解の存在と, その最大正則性評価について議論することである.

2 準備

準備としていくつかの定義を与える.

定義 2.1. (i) 可測関数 $\omega : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ が $\omega > 0$ a.e. in $\mathbb{R}^d$ をみたすとき, ω は**重み関数**であるという.

(ii) 指数 $\rho \in (1, \infty)$ と重み関数 $\omega \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ に対し, ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の開球 $B \subset \mathbb{R}^d$ に対して

$$\left(\fint_B \omega \,\mathrm{d}x\right)\left(\fint_B \omega^{-(\rho'-1)} \,\mathrm{d}x\right)^{1/(\rho'-1)} \le C$$

が成り立つとき, ω は **Muckenhoupt class** $\mathcal{A}_\rho$ に属しているといい, $\omega \in \mathcal{A}_\rho$ とかく. ただし, $\rho' = \rho/(\rho-1)$ は ρ の Hölder 共役指数であり, $\fint_B \omega \,\mathrm{d}x = \mu(B)^{-1}\int_B \omega \,\mathrm{d}x$ である. ここで μ は Lebesgue 測度とする.

(iii) 指数 $\rho \in [1, \infty)$, 重み関数 ω および可測集合 $D \subset \mathbb{R}^d$ に対して,

$$L^\rho_\omega(D;\mathbb{R}^N) := \left\{ f : D \to \mathbb{R}^N : f \text{ は可測関数で} \int_D |f|^\rho \omega \,\mathrm{d}x < +\infty \right\},$$
$$W^{1,\rho}_\omega(D;\mathbb{R}^N) := \left\{ f \in L^\rho_\omega(D;\mathbb{R}^N) \ : \ \nabla f \in L^\rho_\omega(D;\mathbb{R}^{d\times N}) \right\}$$

と定める. 関数空間 $L^\rho_\omega(D;\mathbb{R}^N)$ と $W^{1,\rho}_\omega(D;\mathbb{R}^N)$ は, ノルムをそれぞれ

$$\|f\|_{L^\rho_\omega(D;\mathbb{R}^N)} := \left(\int_D |f|^\rho \omega \,\mathrm{d}x\right)^{1/\rho}, \quad \|f\|_{W^{1,\rho}_\omega(D;\mathbb{R}^N)} := \|f\|_{L^\rho_\omega(D;\mathbb{R}^N)} + \|\nabla f\|_{L^\rho_\omega(D;\mathbb{R}^{d\times N})}$$

で定めれば, どちらも回帰的 Banach 空間である.

(iv) 基礎空間を $X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N) := \overline{C^\infty_c(\Omega;\mathbb{R}^N)}^{\|\cdot\|_{X^{p,r}}}$ とし, そのノルムを

$$\|u\|_{X^{p,r}} := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})} + \|u\|_{L^r(\Omega;\mathbb{R}^N)}$$

と定める.

(v) 任意の $\varphi \in C^\infty_c(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{r-2} u \cdot \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f|^{p-2} f \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |g|^{r-2} g \cdot \varphi \,\mathrm{d}x$$

が成り立つような関数 $u \in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ を (P) の**弱解**と呼ぶ.

(vi) まず $\rho_R \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ を, $0 \le \rho_R \le 1$ in $\mathbb{R}^d$, $\rho_R \equiv 1$ on $B_R := \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < R\}$, $\operatorname{supp} \rho_R \subset \overline{B_{2R}}$, およびある定数 $C > 0$ が存在して $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} |\nabla \rho_R(x)| \le C/R$ をみたすような関数とする. このとき, 次のように境界条件を課す.

$$\text{任意の } R > 0 \text{ に対して } u\rho_R \in W_0^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^N). \tag{BC}$$

(vii) 任意の $\varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{r-2}u \cdot \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f|^{p-2} f \cdot \nabla\varphi \,\mathrm{d}x + \int_\Omega |g|^{r-2} g \cdot \varphi \,\mathrm{d}x$$

が成り立ち, さらに (BC) を満たすような関数 $u \in W_{\mathrm{loc}}^{1,\max\{1,p-1\}}(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L_{\mathrm{loc}}^{\max\{1,r-1\}}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ を (P) の**超関数解**と呼ぶ.

注意 2.1. 上の境界条件 (BC) は, もし $u \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^N)$ ならば任意の $R > 0$ に対して $\mathrm{Tr}(u\rho_R) = u\rho_R$ on $\partial\Omega$ であるため, $u\rho_R = 0$ on $\partial\Omega$ と同値であり, $R > 0$ の任意性から $u = 0$ on $\partial\Omega$ と同値である. ここで $\mathrm{Tr} : W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^N) \to L^1(\partial\Omega;\mathbb{R}^N)$ はトレース作用素である.

3 主定理

可積分な関数 $f \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$, $g \in L^r(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対しては, Nemitskii 作用素と単調作用素の理論により (P) の弱解 $u \in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ の一意存在が示される. 一方, 以下の場合には一般に弱解の存在を示すことができない.

- 指数 $q < p$, $s < r$ に対して $f \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$ または $g \in L^s(\Omega;\mathbb{R}^N)$ の場合.
- 関数 f, g のいずれかが Ω 上で局所可積分でしかない場合.

本小論の主定理は以下の通りである.

定理 3.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を非有界な Lipschitz 領域とし, $1 < p < r < \infty$ とする. このとき, ある $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(p,r,d,N,\Omega) \in (0, p/r]$ が存在して, 任意の $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ に対し, $q := p - \varepsilon$, $s := r - \varepsilon$ とおき, $f \in L_{\mathrm{loc}}^q(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$ および $g \in L_{\mathrm{loc}}^s(\Omega;\mathbb{R}^N)$ とするとき, 次が成り立つ.

(i) (P) の超関数解 $u \in W_{\mathrm{loc}}^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L_{\mathrm{loc}}^s(\Omega;\mathbb{R}^N)$ が存在する.

(ii) 任意に $R > 0$ をとるたびに, 重み関数 $\omega := (M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}] + 1)^{-\varepsilon}$ に対して $u \in W_\omega^{1,p}(\Omega_R;\mathbb{R}^N) \cap L_\omega^r(\Omega_R;\mathbb{R}^N)$ となる.

(iii) さらにある定数 $C = C(p,r,\varepsilon,d,N,\Omega) > 0$, $C_R = C_R(R,p,r,\varepsilon,d,N,\Omega) > 0$ が存在して, 次の不等式が成り立つ.

$$\int_{\Omega_R} |\nabla u|^p \omega \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_R} |u|^r \omega \,\mathrm{d}x \le C\left(\int_{\Omega_{2R}} |f|^p \omega \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{2R}} |g|^r \omega \,\mathrm{d}x\right) + C_R. \tag{3.1}$$

ただし $\Omega_R := \Omega \cap B_R$ とし, $M[\,\cdot\,]$ は Hardy-Littlewood の極大関数を表す.

注意 3.1. 上の定理の (i) では, 外力から期待できる最大の可積分性をもつ超関数解の存在が示されている. 次に (ii) では, 得られた超関数解がより強い可積分性を局所的にもつことが示されてい

る．与えられた関数 f, g についてはそれぞれ $f \notin L^p(\Omega_R;\mathbb{R}^{d\times N})$ および $g \notin L^r(\Omega_R;\mathbb{R}^N)$ であるが，f, g の特異性を抑えるような重み関数 ω をかけることによって，$f \in L^p_\omega(\Omega_R;\mathbb{R}^{d\times N})$ および $g \in L^r_\omega(\Omega_R;\mathbb{R}^N)$ となる．最後に (iii) では，(ii) で得た可積分性に対応する局所エネルギー評価を得ている．

4 いくつかの重要な補題

ここでは，証明に必要ないくつかの補題を記す．まずは基礎空間に関する補題である．

補題 4.1. 関数空間 $X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ は回帰的な Banach 空間であり，

$$W^{1,p}_0(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L^r(\Omega;\mathbb{R}^N) \subset X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N) \not\subset W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$$

が成り立つ．さらに，作用素 $T : u \in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N) \mapsto -\Delta_p u + |u|^{r-2}u \in (X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$ は極大単調作用素である．

補題 4.2. 任意の $F \in (X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$ に対して，ある $F_1 \in L^{p'}(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$ および $F_2 \in L^{r'}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ が存在して

$$\langle F, u\rangle_{X^{p,r}} = \int_\Omega F_1 \cdot \nabla u \,\mathrm{d}x + \int_\Omega F_2 \cdot u \,\mathrm{d}x \quad \text{for } u \in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$$

が成り立つ．

次に，重み付きの Lebesgue 空間から通常の Lebesgue 空間への埋め込みに関する補題を与える．

補題 4.3 ([2, pp. 1125,1126])**.** $1 < p < \infty$, $\omega \in \mathcal{A}_p$ とする．このとき，ある $s \in (1,p)$ が存在して，任意の有界領域 $D \subset \mathbb{R}^d$ に対して，連続な埋め込み $L^p_\omega(D;\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(D;\mathbb{R}^N)$ が成り立つ．

また任意の $s \in (1,p)$ に対して，重み関数 ω として特別なものを考えれば，$L^p_\omega(D;\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(D;\mathbb{R}^N)$ および $L^{s'}(D;\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p'}_{\omega^{1-p'}}(D;\mathbb{R}^N)$ が成り立つ．すなわち次が成り立つ．

補題 4.4. $D \subset \mathbb{R}^d$ を有界領域，$1 < s < p < \infty$，および重み関数 ω に対し，$\omega^{-1} \in L^{s/(p-s)}(D)$ を仮定する．このとき，連続な埋め込み $L^p_\omega(D;\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(D;\mathbb{R}^N)$ および $L^{s'}(D;\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p'}_{\omega^{1-p'}}(D;\mathbb{R}^N)$ が成り立つ．さらに $\omega \le 1$ a.e. in D が成り立つとき，連続な埋め込み $L^{p'}_{\omega^{1-p'}}(D;\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p'}_\omega(D;\mathbb{R}^N)$ が成り立ち，したがって連続な埋め込み $L^{s'}(D;\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p'}_\omega(D;\mathbb{R}^N)$ が成り立つ．

最後に，数列の漸化不等式に関する補題を述べる．

補題 4.5 (An interpolation lemma [4, Lemma 4.3])**.** 非負数列 (Y_n) は有界であり，ある $C > 0$, $b > 1$ および $\alpha \in (0,1)$ が存在して

$$Y_n \le C b^n Y_{n+1}^{1-\alpha} \quad \text{for } n \in \mathbb{Z}_{\ge 0},$$

が成り立つとする．このとき

$$Y_0 \le \left(\frac{2C}{b^{1-1/\alpha}}\right)^{1/\alpha}$$

が成り立つ．

5 弱解の存在と一意性

ここでは, $p=q$, $r=s$ の下で, (P) の弱解が存在することとその一意性を, 単調作用素の理論を用いて示す.

命題 5.1. $p=q$, $r=s$ の下, (P) の弱解は一意に存在する.

この命題を示すために, いくつかの準備をする. 作用素 $\mathcal{B}:X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)\to(X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$ を, $u\in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対して $\mathcal{B}u:=-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)+|u|^{r-2}u$ と定める. すなわち任意の $\varphi\in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\langle\mathcal{B}u,\varphi\rangle_{X^{p,r}}:=\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x+\int_\Omega|u|^{r-2}u\cdot\varphi\,\mathrm{d}x$$

と定める. このとき次が成り立つ.

補題 5.1. 任意の $u\in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対して, $\mathcal{B}u\in(X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$ である.

証明. 任意に $u\in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ をとる. このとき, まず積分の線形性によって $\mathcal{B}u$ は線形である. さらに

$$\begin{aligned}|\langle\mathcal{B}u,\varphi\rangle_{X^{p,r}}|&=\left|\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x+\int_\Omega|u|^{r-2}u\cdot\varphi\,\mathrm{d}x\right|\\&\le\||\nabla u|^{p-2}\nabla u\|_{L^{p'}}\|\nabla\varphi\|_{L^p}+\||u|^{r-1}\|_{L^{r'}}\|\varphi\|_{L^r}\\&\le(\|\nabla u\|_{L^p}^{p-1}+\|u\|_{L^r}^{r-1})\|\varphi\|_{X^{p,r}}\end{aligned}$$

が成り立つから $\mathcal{B}u$ は有界作用素である. したがって, $\mathcal{B}u\in(X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$ である. □

さらに次の補題が成り立つ:

補題 5.2. 作用素 $\mathcal{B}:X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)\to(X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$ は単調作用素である.

証明. まず $n\in\mathbb{Z}_{\ge1}$, $1<t<\infty$, $v,w\in L^t(\Omega;\mathbb{R}^n)$ を任意にとると Young の不等式によって

$$\begin{aligned}\langle|v|^{t-2}v-|w|^{t-2}w,v-w\rangle_{L^t}&=\|v\|_{L^t}^t+\|w\|_{L^t}^t-\langle|v|^{t-2}v,w\rangle_{L^t}-\langle v,|w|^{t-2}w\rangle_{L^t}\\&\ge\|v\|_{L^t}^t+\|w\|_{L^t}^t-\left(\frac{\|v\|_{L^t}^t}{t'}+\frac{\|w\|_{L^t}^t}{t}\right)-\left(\frac{\|v\|_{L^t}^t}{t}+\frac{\|w\|_{L^t}^t}{t'}\right)\\&=0.\end{aligned}$$

よって任意の $u_1,u_2\in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ をとり, $(n,t,v,w):=(d\times N,p,\nabla u_1,\nabla u_2)$, (N,r,u_1,u_2) に対して上の議論を適用することで, $\mathcal{B}$ が単調作用素であることがわかる. □

補題 5.3. 作用素 $\mathcal{B}:X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)\to(X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$ は強圧的かつ連続である.

以上で Proposition 5.1 の証明の準備ができた.

命題 5.1 の証明.

まず $f \in L^p(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$, $g \in L^r(\Omega;\mathbb{R}^N)$ であるから, (P) の右辺である $-\mathrm{div}(|f|^{p-2}f)+|g|^{r-2}g$ を

$$\langle -\mathrm{div}(|f|^{p-2}f)+|g|^{r-2}g,\varphi\rangle_{X^{p,r}} := \int_\Omega |f|^{p-2}f\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |g|^{r-2}g\cdot\varphi\,\mathrm{d}x \quad \text{for } \varphi\in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$$

と表すと, 積分の線形性と Hölder の不等式から $-\mathrm{div}(|f|^{p-2}f)+|g|^{r-2}g \in (X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N))^*$ であることがわかる. ここで単調性と連続性から, $\mathcal{B}$ は極大単調作用素である. さらに強圧性から $\mathcal{B}$ は全射である. よって, ある (P) の弱解 $u\in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ が存在する.

次に (P) の弱解の一意性を示す. まず $u_1,u_2\in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ が (P) の弱解であるとする. このとき, テスト関数として $u_1-u_2\in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ をとり, 弱形式の差を考えれば,

$$\int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 - |\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\cdot\nabla(u_1-u_2)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega (|u_1|^{r-2}u_1-|u_2|^{r-2}u_2)\cdot(u_1-u_2)\,\mathrm{d}x = 0$$

が成り立つ. ここで p-Laplacian の単調性と, 関数 $x\mapsto |x|^{r-2}x$ の狭義単調性から

$$u_1 = u_2 \quad \text{a.e. in } \Omega$$

が成り立ち, (P) の弱解の一意性が示された. □

6 局所エネルギー評価

ここでは, 弱解に対するア・プリオリ評価を行う. [3, Proposition 4.1] の議論を非有界領域および局所可積分なデータの場合に拡張することで, 次の命題が示される.

命題 6.1. $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ を非有界 Lipschitz 領域とし, $1<p<r<\infty$ とする. このとき, 次をみたすような $\varepsilon_1>0$ が存在する. 任意に $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1)$, $h\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)\backslash\{0\}$, $0\le\delta\le 1$ をとり固定する. そして $f\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^{d\times N})$, $g\in L^r(\Omega;\mathbb{R}^N)$ とし, $u\in X^{p,r}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ を, f および g に対応する (P) の弱解とする. このとき各 $R>0$ に対して, 定数 $C=C(\Omega,d,N,p,r,\varepsilon)>0$ および $C_R=C_R(R,\Omega,d,N,p,r,\varepsilon)>0$ が存在して,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_R}|\nabla u|^p\omega\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_R}|u|^r\omega\,\mathrm{d}x \\ &\qquad \le C_R\left(\int_{\Omega_{2R}}|u|^p\omega\,\mathrm{d}x+1\right) + C\left(\int_{\Omega_{2R}}|f|^p\omega\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{2R}}|g|^r\omega\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned} \tag{6.1}$$

が成り立つ. ただし $\omega=(M[h\chi_{\Omega_{2R}}]+\delta)^{-\varepsilon}$ とする.

この命題の証明では, [3, Proposition 4.1] とは異なり領域 Ω が非有界であるため, cut-off 関数 $\rho_R\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ を用いる. ここで ρ_R は 2 節で定義したものとする. そのため, (6.1) の両辺の積分領域には差がある. また, この命題は主定理の証明における重要なステップであるが, 証明は非常に複雑であるため, 紙面の都合上割愛する.

7 主定理の証明

まず $\varepsilon_0 > 0$ を, 命題 6.1 でとった ε_1 を用いて

$$\varepsilon_0 := \min\left\{\varepsilon_1, \frac{p}{r}\right\}$$

により定める．次に任意に $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ をとり固定する．この ε に対して $q := p - \varepsilon$, $s := r - \varepsilon$ と定め, $f \in L^q_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N}), g \in L^s_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ および $R > 0$ を任意にとり固定する． $f^k := \min\{k, |f|\}(f/|f|) \cdot \chi_{B_k} \in L^p(\Omega; \mathbb{R}^{d\times N})$, $g^k := \min\{k, |g|\}(g/|g|) \cdot \chi_{B_k} \in L^r(\Omega; \mathbb{R}^N)$ と定め, $u^k \in X^{p,r}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ を

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u^k|^{p-2}\nabla u^k) + |u^k|^{r-2}u^k = -\operatorname{div}(|f^k|^{p-2}f^k) + |g^k|^{r-2}g^k & \text{in } \Omega, \\ u^k = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の弱解とする．この弱解および $h := |f|+|g|$, $\delta := 1$ に対して命題 6.1 を適用すると,

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_R} \frac{|\nabla u^k|^p}{(M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}]+1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_R} \frac{|u^k|^r}{(M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}]+1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}x \\
&\quad \le C_R\left(\int_{\Omega_{2R}} \frac{|u^k|^p}{(M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}]+1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}x + 1\right) \\
&\qquad + C\left(\int_{\Omega_{2R}} \frac{|f^k|^p}{(M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}]+1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{2R}} \frac{|g^k|^r}{(M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}]+1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}x\right) \\
&\quad \le C_R\left(\int_{\Omega_{2R}} \frac{|u^k|^p}{(M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}]+1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}x + 1\right) \\
&\qquad + C\left(\int_{\Omega_{2R}} \frac{|f|^p}{(M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}]+1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{2R}} \frac{|g|^r}{(M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}]+1)^\varepsilon}\,\mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ．さらに次が成り立つ．

命題 7.1. 任意の $R > 0$ に対し, $\omega := (M[(|f|+|g|)\chi_{\Omega_{2R}}]+1)^{-\varepsilon}$ とおくと, $(u^k)_k$ は $L^r_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ ノルムに関して有界である．

証明. $R_0 := R$, $R_n := R + \sum_{j=1}^n \frac{R}{2^j}$ とおき, $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ を, $0 \le \rho_n \le 1$ in $\mathbb{R}^d$, $\operatorname{supp}\rho_n \subset \overline{B_{R_{n+1}}}$, $\rho_n|_{B_{R_n}} \equiv 1$ で, $|\nabla\rho_n| \le C2^{n+1}/R$ と $R > 0$ によらない定数 C で表せるものとする．そこで次のような場合分けをする:

(i) ある $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ が存在して $\int_{\Omega_{R_{n+1}}} |u^k|^r \omega\,\mathrm{d}x$ が k について有界であるとき:
このときは $\int_{\Omega_R} |u^k|^r \omega\,\mathrm{d}x$ も k について有界である．

(ii) 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対して $\int_{\Omega_{R_{n+1}}} |u^k|^r \omega\,\mathrm{d}x$ が k について有界でないとき:
このときは背理法で示す．すなわち $\int_{\Omega_R} |u^k|^r \omega\,\mathrm{d}x$ が k について有界でないと仮定する．
命題 6.1 の証明で用いる cut-off 関数 ρ_R として ρ_n を用いると,

$$\int_{\Omega_{R_n}} |\nabla u^k|^p \omega\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{R_n}} |u^k|^r \omega\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&\le C_n \left(\int_{\Omega_{R_{n+1}}} |u^k|^p \omega \,\mathrm{d}x + 1 \right) \\
&\quad + C \left(\int_{\Omega_{R_{n+1}}} |f^k|^p \omega \,\mathrm{d}x + \int_{\Omega_{R_{n+1}}} |g^k|^r \omega \,\mathrm{d}x \right)
\end{aligned}
$$

となる．ここで C_n は

$$
C_n \le C \left[\left(\frac{2^{n+1}}{R} \right)^p + \left(\frac{2^{n+1}}{R} \right)^{p'} + \left(\frac{2^{n+1}}{R} \right)^{p'r'/(p'-r')} \right]
$$

をみたす定数である．さらに $\omega \le 1$ a.e. に注意し, 単位球の体積を $|\omega_d|$ と表す．Hölder の不等式により,

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_{R_{n+1}}} |u^k|^p \omega \,\mathrm{d}x &\le \left(\int_{\Omega_{R_{n+1}}} |u^k|^r \omega^{r/p} \,\mathrm{d}x \right)^{p/r} \left(2R - \frac{R}{2^{n+1}} \right)^{d(r-p)/r} |\omega_d|^{(r-p)/r} \\
&\le \left(\int_{\Omega_{R_{n+1}}} |u^k|^r \omega \,\mathrm{d}x \right)^{p/r} \left((2R)^d |\omega_d| \right)^{(r-p)/r}
\end{aligned}
$$

であることを用いて評価をすれば, 結果としてある定数 $\gamma, C > 0$ が存在して, 十分大きな k に対して

$$
\int_{\Omega_{R_n}} |u^k|^r \omega \,\mathrm{d}x \le C 2^{\gamma n} \left(\int_{\Omega_{R_{n+1}}} |u^k|^r \omega \,\mathrm{d}x \right)^{p/r}
$$

が成り立つ．よって, 補題 4.5 により背理法の仮定に矛盾し, $\int_{\Omega_R} |u^k|^r \omega \,\mathrm{d}x$ が k について有界であることがわかる．

従って, いずれの場合にも主張を示すことができた． □

注意 7.1. 主定理における $p < r$ という仮定は, 補題 4.5 を適用するために必要となる．

命題 7.2. 各 $R > 0$ に対して, $(u^k)_k$ は $L^p_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$, $L^q(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ および $L^s(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ で有界であり, さらに $(\nabla u^k)_k$ は $L^p_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^{d\times N})$ および $L^q(\Omega_R; \mathbb{R}^{d\times N})$ で有界である．

証明. 命題 7.1 の途中の議論によって $(u^k)_k$ は $L^p_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ で有界である．よって命題 6.1 により $(\nabla u^k)_k$ は $L^p_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^{d\times N})$ で有界である．さらに補題 4.4 より, $L^p_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$, $L^p_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^{d\times N}) \hookrightarrow L^q(\Omega_R; \mathbb{R}^{d\times N})$ および $L^r_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^s(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ は連続な埋め込みだから, $(u^k)_k$ は $L^q(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ と $L^s(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ で, $(\nabla u^k)_k$ は $L^q(\Omega_R; \mathbb{R}^{d\times N})$ でそれぞれ有界である．したがって主張が示された． □

次に各関数空間の回帰性によって適切な部分列をとれば, $R > 0$ によらない $u \in W^{1,p}_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N) \cap L^r_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$, $v_1 \in L^{p'}_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^{d\times N})$ および $v_2 \in L^{r'}_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N)$ が存在して

$$
\begin{aligned}
u^k \to u \qquad & \text{weakly in } W^{1,q}(\Omega_R; \mathbb{R}^N), \\
& \text{weakly in } L^r_\omega(\Omega_R; \mathbb{R}^N), \\
& \text{weakly in } L^s(\Omega_R; \mathbb{R}^N),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|u^k|^{r-2}u^k &\to v_2 && \text{weakly in } L^{r'}_\omega(\Omega_R;\mathbb{R}^N),\\
\nabla u^k &\to \nabla u && \text{weakly in } L^p_\omega(\Omega_R;\mathbb{R}^{d\times N}),\\
& && \text{weakly in } L^q(\Omega_R;\mathbb{R}^{d\times N}),\\
|\nabla u^k|^{p-2}\nabla u^k &\to v_1 && \text{weakly in } L^{p'}_\omega(\Omega_R;\mathbb{R}^{d\times N})
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

命題 7.3. もし $p-q \le p/r$ ならば, 任意の $\varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対して

$$
\lim_{k\to\infty}\int_\Omega |u^k|^{r-2}u^k\cdot\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega v_2\cdot\varphi\,\mathrm{d}x.
$$

注意 7.2. 主定理では $\varepsilon_0 \le p/r$ としているため, $\varepsilon = p-q \le p/r$ はみたされている.

ここで u^k は (P) の弱解であったから, 任意の $\varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ に対して

$$
\int_\Omega |\nabla u^k|^{p-2}\nabla u^k\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u^k|^{r-2}u^k\cdot\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f^k|^{p-2}f^k\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |g^k|^{r-2}g^k\cdot\varphi\,\mathrm{d}x
$$

が成り立つ. 上式で $k\to\infty$ とすると

$$
\int_\Omega v_1\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega v_2\cdot\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f|^{p-2}f\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |g|^{r-2}g\cdot\varphi\,\mathrm{d}x
$$

が成り立つ. 最後に弱極限の特定を行うことで,

$$
\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u|^{r-2}u\cdot\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f|^{p-2}f\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |g|^{r-2}g\cdot\varphi\,\mathrm{d}x
$$

を得る. この弱極限の特定は非自明である. 重み付き div-curl lemma [2, Theorem 2.6] などを用いて証明できるが, ここでは紙面の都合上省略する.

以上によって超関数解 u の存在が示された. また, 局所評価 (3.1) に関しては, 近似解 u^k の弱収束性と各ノルムの弱下半連続性から示される.

最後に境界条件 (BC) をみたしていることを確かめる. $R>0$ を任意にとり固定する. まず $u^k \in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ より, $u^k\rho_R \in W_0^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ である. さらに $\mathrm{supp}(u^k\rho_R)$ は有界なので, $u^k\rho_R \in W_0^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ である. そして $(u^k\rho_R)_k$ は $W_0^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ で有界なので, 回帰性からある $v \in W_0^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ が存在して,

$$
u^k\rho_R \to v \quad \text{weakly in } W_0^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N) \tag{7.1}
$$

が適切な部分列をとれば成り立つ. 一方で $u^k \to u$ weakly in $W^{1.q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ であり, 各 $R>0$ に対して埋め込み $W^{1.q}(\Omega_{2R};\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\Omega_{2R};\mathbb{R}^N)$ はコンパクトであるから, $u^k \to u$ in $L^q(\Omega_{2R};\mathbb{R}^N)$ および,

$$
u^k\rho_R \to u\rho_R \quad \text{in } L^q(\Omega_{2R};\mathbb{R}^N) \text{ and a.e. in } \Omega_{2R} \tag{7.2}
$$

が適切な部分列に対して成り立つ. そして (7.1), (7.2) および $R>0$ の任意性によって $u\rho_R = v$ in Ω なので, $u\rho_R \in W_0^{1,q}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ が成り立つ. さらに supp ρ_R は有界であるから, $u\rho_R \in W_0^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ が成り立つ. したがって境界条件 (BC) が示された.

注意 7.3. ここまでの議論は, (P) を一般化した境界値問題

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A(\cdot, \nabla u) + |u|^{r-2}u = -\operatorname{div}(|f|^{p-2}f) + |g|^{r-2}g & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

に対しても適用できる．ここで $A : \Omega \times \mathbb{R}^{d\times N} \to \mathbb{R}^{d\times N}$ は Carathéodory 関数であって, 次の仮定をみたすものとする．ある定数 $C_1,\ C_2 > 0$ と, ある非負値関数 $\beta_1 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\beta_2 \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ が存在して,

$$\begin{aligned} A(x, z_1) \cdot z_1 &\geq C_1|z_1|^p - \beta_1(x), && \text{(強圧性)} \\ |A(x, z_1)| &\leq C_2|z_1|^{p-1} + \beta_2(x), && \text{(有界性)} \\ (A(x, z_1) - A(x, z_2)) \cdot (z_1 - z_2) &\geq 0 && \text{(単調性)} \end{aligned}$$

が任意の $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{d\times N}$ とほとんどすべての $x \in \Omega$ に対して成り立つ.

参考文献

[1] Brezis, H., Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without conditions at infinity, Applied Math. Optimization **12** (1984), 271–282.

[2] Bulíčhek, M., Diening, A., Schwarzacher, S., Existence, uniqueness and optimal regularity results for very weak solutions to nonlinear elliptic systems, Anal. PDE **9** (2016), 1115–1151.

[3] Bulíčhek, M., Schwarzacher, S., Existence of very weak solutions to elliptic systems of p-Laplacian type, Calc. Var. Partial Differ. Equ. **55** (2016), art. 52, 14 pp.

[4] DiBenedetto, E., *Degenerate Parabolic Equations*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 1991.

三次の非線形項を持つ
ある散逸・分散型方程式の解の高次漸近形

入野耀太 (Yota IRINO)*
北陸先端科学技術大学院大学 先端科学技術研究科
福田一貴 (Ikki FUKUDA)†
信州大学 工学部 工学基礎部門

1 導入

本研究では, 三次の非線形項を伴う, 次の散逸・分散型方程式の初期値問題について考える：

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} - D_x^\alpha \partial_x u + \beta u^2 u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで, $u = u(x,t)$ は実数値の未知関数を表し, $u_0(x)$ は与えられた初期データとする. また, $1 < \alpha < 3$, $\beta \in \mathbb{R}$ とする. 添字の t と x は, それぞれ変数 t と x での偏微分を表すとする. 一方, D_x^α は非整数階の微分を表すものであり, Fourier 変換を用いて次のように定義される.

$$D_x^\alpha f(x) := \mathcal{F}^{-1}\left[|\xi|^\alpha \hat{f}(\xi)\right](x).$$

本研究の目的は, (1.1) の時間大域解の漸近挙動を解析することである. 特に, 解の高次漸近展開に関する考察を行う. はじめに, この問題を研究する意義について, 方程式の持つ物理的背景を説明するとともに, 関連する問題に対する既知の結果等を詳しく紹介する.

まず, この方程式 (1.1) は次の KdV–Burgers 方程式の一般化の一つである (詳しくは次節を参照).

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} + u_{xxx} + (u^2)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

この方程式 (1.2) は, 移流 $(u^2)_x$, 散逸 u_{xx}, 分散 u_{xxx} の三つの効果を考慮した, 一般の非線形波動を記述する方程式の 1 つとして知られており, 応用先としては, プラズマ中のイオン音波などの研究が存在する (cf. [10]).

次に, (1.1) 及び (1.2) に現れる各項の物理的な意味について説明する. まず, 移流項 $(u^3)_x$, $(u^2)_x$ の意味について考える. ここでは, 単純な場合として, 次の線形移流方程式の解説から議論を始める.

$$\begin{aligned} &u_t + a u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

ここで, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ とする. この問題の解は簡単な計算により, $u(x,t) = u_0(x - at)$ と書けることがわかる. よって, 波は初期波形を保ったまま一定速度 a で進行していく様子が見て取れる. 次に, (1.3) の線形の移流項 u_x を非線形な移流項 uu_x に置き換えた以下の方程式を考える.

$$\begin{aligned} &u_t + b u u_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

* E-mail: s2210019@jaist.ac.jp
† E-mail: i_fukuda@shinshu-u.ac.jp
本研究は JSPS 科研費, 若手研究 (課題番号：22K13939) の助成を受けたものである.

ここで, $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}$ とする．このとき, この方程式 (1.4) の解は, 特性曲線法を用いて解くことで, $u(x,t) = u_0(x - but)$ と表現出来ることが知られている (cf. [8])．よって, 波は速度 bu で進行するが, 線形の場合 (1.3) とは異なり, 波が進行する速度は解 $u(x,t)$ 自身に依存することがわかる．従って, この方程式の解で記述される波は, 振幅の大きいところ程速く進行し, 小さいところ程遅く進行することになる．故に, 波は時間と伴に急峻化しながら進行する様子がわかる．一般の移流項についても同様に考えることが出来て, 今回対象とする方程式 (1.1) 内の移流項 $(u^3)_x$ についても同様の考察が与えられる．

次に, 散逸項 u_{xx} の効果を説明するために, 以下の単純な偏微分方程式について考える．

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{1.5}$$

この方程式は熱方程式または拡散方程式と呼ばれるものである．特に，(1.5) は (2.7) で定義された熱核と呼ばれる関数を基本解として持つことが知られている．この関数の形状からもわかるように，熱核は減衰しながら広がっていく．実際, 熱核に対しては次の減衰評価が成り立つことが知られている (cf. [3])．

$$\|G(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le Ct^{-\frac{1}{2}}, \quad \|\partial_x G(\cdot,t)\|_{L^\infty} \le Ct^{-1}, \quad t > 0.$$

最後に, 分散項について説明するために, 例として, 次の単純な分散型方程式について考える．

$$u_t + u_{xxx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{1.6}$$

この方程式 (1.6) は, $u(x,t) = \sin k(x - \frac{\omega}{k}t)$ を解に持つことが簡単な計算でわかる．ここで, $k > 0$ が波数, $\omega > 0$ が各周波数に対応しており, $\omega/k = -k^2$ の関係がある．このとき, 波の速度 ω/k は波数 k に依存する．このような性質を波の分散性という (cf. [9])．また, この (1.6) は線形方程式なので, 重ね合わせの原理により, これらの波を合わせた次の関数もまた (1.6) の解となる．

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \sin k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{1.7}$$

ここで, $N \in \mathbb{N}$ である．波形が (1.7) のように種々の波数の波の重ね合わせで記述されるとき, 各成分波ごとに速度が異なるため, 初めはまとまった波の形をしていても, 時間経過に伴って波は複数の波形に分かれる．一般の非整数階の分散項 $D_x^\alpha \partial_x u$ についても同様の考察が出来る．

上記で説明した移流項, 散逸項, 分散項を組み合わせることで, より一般の波動を記述することが可能となる．KdV–Burgers 方程式 (1.2) やその一般化である (1.1) はその一部となっており, これらの方程式に対する数学解析を行うことで, 非線形波動理論の更なる学術的発展への貢献が期待できる．

記号. 実数 $1 \le p \le \infty$ に対して, $L^p(\mathbb{R})$ は通常の Lebesgue 空間を表すとする．関数 $f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ に対して, f の Fourier 変換と g の Fourier 逆変換を以下で定義する．

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx, \quad \mathcal{F}^{-1}[g](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} g(\xi)d\xi.$$

整数 $k \ge 0$ に対して, Sobolev 空間を次で定義する．

$$H^k(\mathbb{R}) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R});\ \|f\|_{H^k} := \left(\sum_{l=0}^{k} \left\|\partial_x^l f\right\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

$I \subseteq [0,\infty)$ を区間, X を Banach 空間とする．このとき, $L^\infty(I;X)$ は X に値を取る I 上の本質的に有界な可測関数の全体を表す．同様に, $C(I;X)$ は X に値を取る I 上の連続関数の全体を表すとする．

関数 $f(x)$ と $g(x)$ の畳み込みを $(f * g)(x)$ と表す．また, 二変数関数 $F(x,t)$ の場合には, $g(x)$ との x 変数についての畳み込みを $(F(t) * g)(x)$ などと表記する．

本稿を通して, C は様々な正の定数を表すこととし, 互いに異なるものであっても同じ C で表すことに注意する．この定数 C は各種パラメータに依存することはあるが, 変数 x と t には依存しないことに注意する．

2 既知の結果

まず, 今回の問題に関する既知の結果を紹介するために, (1.1) を更に一般化した次の問題を考える：

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xx} - D_x^\alpha \partial_x u + (u^q)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで, $1 < \alpha < 3$, $q \geq 2$ とする．なお, 非線形項 u^q は u が負または q が非整数の場合には, $|u|^q$ または $|u|^{q-1}u$ と解釈することとする．また, $q = 3$ のとき (2.1) は (1.1) で $\beta = 3$ とした場合となることに注意する．本研究の主題は (1.1) の解の漸近挙動の解析であるが, そのために, まず一般化された方程式 (2.1) に関して, 時間大域解の存在と減衰評価に関する基本的な結果を紹介する．はじめに, 次の関数 $S_\alpha(x,t)$ を導入する．

$$S_\alpha(x,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-t\xi^2 + it|\xi|^\alpha \xi}\right](x). \tag{2.2}$$

このとき, Duhamel の原理を用いることで, (2.1) を次の積分方程式に書き換えることが出来る．

$$u(x,t) = \left(S_\alpha(t) * u_0\right)(x) - \int_0^t \left(\partial_x S_\alpha(t-\tau) * u^q(\tau)\right)(x) d\tau. \tag{2.3}$$

更に, 縮小写像の原理を積分方程式 (2.3) に適用することで, (2.1) の時間大域解の存在と減衰評価が示される．実際, Karch [6] によって, 以下の結果が得られている．

命題 2.1 ([6])**.** $1 < \alpha < 3$, $q \geq 2$ とし, $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ とする．このとき, $T > 0$ と初期値問題 (2.1) の時間局所解 $u \in C([0,T); H^1(\mathbb{R}))$ が唯一つ存在する．更に, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ かつ $\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1}$ が十分小さいとすると, 次を満たす初期値問題 (2.1) の時間大域解が唯一つ存在する．

$$u \in L^\infty([0,\infty); L^\infty(\mathbb{R})), \quad t^{\frac{1}{4}} u \in L^\infty((0,\infty); L^2(\mathbb{R})).$$

また, $2 \leq p \leq \infty$ に対して, 解 $u(x,t)$ は次の評価を満たす．

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \quad t \geq 0, \quad \|u(\cdot,t)\|_{L^1} \leq C\left(1 + t^{-\frac{\alpha-1}{4}}\right), \quad t > 0. \tag{2.4}$$

更に加えて, 次の評価が成り立つ．

$$\|\partial_x u(\cdot,t)\|_{L^2} \leq C t^{-\frac{3}{4}}, \quad t > 0. \tag{2.5}$$

以下, (2.1) に対する上記の解について考えることとし, その長時間漸近挙動に関する既知の結果を紹介する．解の漸近形は非線形項の指数 q に強く依存し, それに応じて挙動が変化することが知られている．特に, $q = 2$ と $q = 3$ は漸近形の形状が本質的に変化する臨界指数になっており, この意味で特殊な場合である．はじめに, $q = 2$ の場合に関する結果を紹介しよう．この状況に関しては, 著者の知る限り $\alpha = 2$ の場合についてのみが研究されており, このとき (2.1) は KdV–Burgers 方程式 (1.2) となる．この解の長時間挙動に関する研究は, はじめに Amick–Bona–Schonbek [1] によって行われた．彼らは (1.2) をはじめとする散逸・分散型の方程式に対して, 解の時間減衰評価を示した．特に, 初期値が $u_0 \in H^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ の場合には, (2.4) の第一式と同様の L^p-減衰評価が与えられた．更に, Karch [7] では (1.2) がより詳しく解析され, [1] での結果が一般化された．実際, この方程式の解は, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ のとき, $1 \leq p \leq \infty$ に対して次の漸近公式を満たす．

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \|u(\cdot,t) - \chi(\cdot,t)\|_{L^p} = 0. \tag{2.6}$$

ここで, $\chi(x,t)$ は次の Burgers 方程式の自己相似解であり, 陽に与えられることが知られている (cf. [8]).

$$\chi_t - \chi_{xx} + (\chi^2)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

また, Hayashi–Naumkin [4] では $p=\infty$ の場合に関して, (2.6) で与えられた漸近レートが改善された. 更に, Kaikina–Ruiz-Paredes [5] によって, $xu_0 \in L^1(\mathbb{R})$ という付加条件の下で, $p=\infty$ の場合の $\chi(x,t)$ への最適な漸近レートが $t^{-1}\log t$ となることが, 解の第二次漸近形を構成することで証明されている.

次に, より一般の $q>2$, $\alpha>1$ の場合について, (2.1) の解の漸近挙動に関する先行研究を紹介しよう. (2.1) で $q>2$ のときには, $q=2$ の場合と比べて $(u^q)_x$ が早く減衰するため, 非線形性が弱いと言える. このため, 解の漸近形は (1.2) とは本質的に異なるものが与えられる. 実際, Karch [6] によって (2.1) の解 $u(x,t)$ の主要部は線形熱方程式の解で与えられることが示されている. 更に, (2.1) の線形部分 (i.e. (2.3) の $(S_\alpha(t)*u_0)(x)$) に対する高次漸近展開が得られている. 特に, その高次漸近展開は, 分散項の効果, すなわち指数 α に強く依存するということがポイントである. この結果を説明するために, 次の記号を導入する.

$$G(x,t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}, \quad M := \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx, \quad m := \int_{\mathbb{R}} xu_0(x)dx. \tag{2.7}$$

この記号の下, $(S_\alpha(t)*u_0)(x)$ に関して次の漸近公式が成立する.

定理 2.2 ([6]). $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ かつ $xu_0 \in L^1(\mathbb{R})$ を仮定する. このとき, 以下の漸近公式が成立する.

(i) $2<\alpha<3$ のとき, 任意の $1 \le p \le \infty$ に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \left\| S_\alpha(t)*u_0 - MG(t) + m\partial_x G(t) \right\|_{L^p} = 0. \tag{2.8}$$

(ii) $\alpha = \dfrac{N+1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$ のとき, 任意の $1 \le p \le \infty$ に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \left\| S_\alpha(t)*u_0 - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{t^k}{k!}(D_x^\alpha \partial_x)^k \left\{MG(t) - m\partial_x G(t)\right\} - \frac{M}{N!}(tD_x^\alpha\partial_x)^N G(t) \right\|_{L^p} = 0. \tag{2.9}$$

(iii) $\dfrac{N+2}{N+1} < \alpha < \dfrac{N+1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$ のとき, 任意の $1 \le p \le \infty$ に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \left\| S_\alpha(t)*u_0 - \sum_{k=0}^{N} \frac{t^k}{k!}(D_x^\alpha \partial_x)^k \left\{MG(t) - m\partial_x G(t)\right\} \right\|_{L^p} = 0. \tag{2.10}$$

ここで, $S_\alpha(x,t)$ は (2.2) で定義されたものであり, $G(x,t)$, M, m は (2.7) で定義されたものである.

ここで, 上記の漸近公式 (2.8), (2.9), (2.10) では全ての場合において, 展開の第一項が $G(x,t)$ で与えられることに注意する. 更に, 強調すべき点としては, (2.9) と (2.10) では展開の第二項以降から分散の効果が強く現れることに注意する. 一方, (2.8) では分散の影響が弱く, 解の挙動は熱方程式の解のそれと同じになる.

上では線形解の漸近展開が与えられたため, 残りは (2.3) の Duhamel 項の漸近展開が得られれば, (2.1) の解 $u(x,t)$ に対する漸近公式を得ることが出来る. 実際, Karch [6] は, $q>2$ で $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ かつ $xu_0 \in L^1(\mathbb{R})$ の場合, (2.3) の Duhamel 項の漸近形を構成することに成功しており, 漸近形が $2<q<3$; $q=3$; $q>3$ の場合で異なることが示されている. 今回の研究では, 臨界の場合である $q=3$ に着目する. この場合は, Duhamel 項の漸近形が線形であるが, $\log t$ が乗算されているという意味で, 特殊な状況となる. より正確には, 以下の漸近公式が証明されている.

定理 2.3 ([6]). $1<\alpha<3$, $q=3$ とする. また, $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ かつ $\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1}$ が十分小さいと仮定する. このとき, $u(x,t)$ を命題 2.1 で述べた初期値問題 (2.1) の時間大域解とすると, 任意の $1 \le p \le \infty$ に対して, 次の漸近公式が成立する.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}}}{\log t} \left\| u(\cdot,t) - (S_\alpha(t)*u_0)(\cdot) + \frac{M^3}{4\sqrt{3}\pi}(\log t)\partial_x G(\cdot,t) \right\|_{L^p} = 0. \tag{2.11}$$

ここで, $S_\alpha(x,t)$ は (2.2) で定義されたものであり, $G(x,t)$ と M は (2.7) で定義されたものである.

上述の定理 2.2, 2.3 を合わせることで, $q=3$ の場合の (2.1) の解に対する高次漸近展開を得ることが出来る. しかし, (2.11) で得られた漸近形への漸近レート $o(t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}\log t)$ は (2.8), (2.9), (2.10) よりも $o(\log t)$ 分だけ遅いものであることに注意する. 従って, 解 $u(x,t)$ の高次漸近展開に関する漸近レートもまた (2.8), (2.9), (2.10) より遅くなってしまう. このため, より良いオーダーで展開を行うには, (2.11) で与えられた漸近レートを改善することが望ましい. これを議論するには, (2.3) の Duhamel 項の第二次漸近形を構築することが有効だと考えられる. 本研究では, (2.1) において $q=3$ として, パラメーター $\beta\in\mathbb{R}$ を付与した方程式 (1.1) について解析を行い, Karch [6] の結果を改良することに成功した.

3 主結果

この節では本研究の主結果を紹介する. 今回我々は, 以下で述べる積分方程式 (3.1) の Duhamel 項の第二次漸近形を新規に構成することで, Karch [6] によって与えられた (2.11) における漸近レートを改良した. 主結果を述べるため, はじめに, Duhamel の原理を適用することで (1.1) を積分方程式に書き換える.

$$u(x,t)=\left(S_\alpha(t)*u_0\right)(x)+I_{\alpha,\beta}[u](x,t). \tag{3.1}$$

ここで, $S_\alpha(x,t)$ は (2.2) で定義されたものであり, $I_{\alpha,\beta}[u](x,t)$ は次で定義されたものとする.

$$I_{\alpha,\beta}[u](x,t):=-\frac{\beta}{3}\int_0^t\left(\partial_x S_\alpha(t-\tau)*u^3(\tau)\right)(x)d\tau. \tag{3.2}$$

更に, 主結果を述べるために, 次の関数 $\Psi(x,t)$ を導入する.

$$\Psi(x,t):=t^{-1}\Psi_*\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),\quad \Psi_*(x):=\frac{d}{dx}\left(\int_0^1\left(G(1-s)*F(s)\right)(x)ds\right), \tag{3.3}$$

$$F(y,s):=s^{-\frac{3}{2}}F_*\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right),\quad F_*(y):=\frac{1}{8\sqrt{\pi^3}}e^{-\frac{3y^2}{4}}-\frac{1}{8\sqrt{3\pi^3}}e^{-\frac{y^2}{4}}. \tag{3.4}$$

加えて, 定数 $\mathcal{M}$ を次で定義する.

$$\mathcal{M}:=\int_0^1\int_{\mathbb{R}}u^3(y,\tau)dyd\tau+\int_1^\infty\int_{\mathbb{R}}\left(u^3-(MG)^3\right)(y,\tau)dyd\tau. \tag{3.5}$$

上記の記号の下, (3.1) の Duhamel 項 $I_{\alpha,\beta}[u](x,t)$ の第二次漸近形が得られる.

定理 3.1 ([2])**.** $1<\alpha<3$, $\beta\in\mathbb{R}$ とする. $u_0\in H^1(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$ かつ $xu_0\in L^1(\mathbb{R})$ とし, $\|u_0\|_{H^1}+\|u_0\|_{L^1}$ が十分小さいと仮定する. このとき, 命題 2.1 で述べた性質を全て満たす初期値問題 (1.1) の時間大域解 $u(x,t)$ が唯一つ存在する. 更に, $u(x,t)$ について, 任意の $1\le p\le\infty$ に対して, 次の漸近公式が成立する.

$$\lim_{t\to\infty}t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}}\left\|I_{\alpha,\beta}[u](\cdot,t)+\frac{\beta M^3}{12\sqrt{3}\pi}(\log t)\partial_x G(\cdot,t)+\frac{\beta\mathcal{M}}{3}\partial_x G(\cdot,t)+\frac{\beta M^3}{3}\Psi(\cdot,t)\right\|_{L^p}=0. \tag{3.6}$$

ここで, $I_{\alpha,\beta}[u](x,t)$ は (3.2) で定義されたものであり, $G(x,t)$ と M は (2.7) で定義されたものである. また, $\Psi(x,t)$ と $\mathcal{M}$ は, それぞれ (3.3) および (3.5) で定義されたものである.

これは, 導入で述べた Karch [6] による定理 2.3 の改良となっている. 実際, $t\to\infty$ で次が成り立つ.

$$\left\|I_{\alpha,\beta}[u](\cdot,t)+\frac{\beta M^3}{12\sqrt{3}\pi}(\log t)\partial_x G(\cdot,t)\right\|_{L^p}=\left(C_*+o(1)\right)t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}.$$

ここで, $C_*:=\|(\beta\mathcal{M}/3)\partial_x G(\cdot,1)+(\beta M^3/3)\Psi_*(\cdot)\|_{L^p}$ である. また, 上に示した主結果である定理 3.1 と, Karch [6] による定理 2.2, および (3.1) を組み合わせることで, (1.1) の解に対する次の高次漸近展開を得る.

系 3.2 ([2])**.** 定理 3.1 と同様の仮定の下で, (1.1) の解 $u(x,t)$ に対して, 以下の漸近公式が成立する.

(i) $2<\alpha<3$ のとき, 任意の $1\le p\le\infty$ に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}}\Bigg\| u(\cdot,t)-MG(\cdot,t)+\frac{\beta M^3}{12\sqrt{3}\pi}(\log t)\partial_x G(\cdot,t) + \left(m+\frac{\beta\mathcal{M}}{3}\right)\partial_x G(\cdot,t)+\frac{\beta M^3}{3}\Psi(\cdot,t)\Bigg\|_{L^p}=0.$$

(ii) $\alpha=\dfrac{N+1}{N}$, $N\in\mathbb{N}$ のとき, 任意の $1\le p\le\infty$ に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}}\Bigg\| u(\cdot,t)-\sum_{k=0}^{N-1}\frac{t^k}{k!}(D_x^\alpha\partial_x)^k\left\{MG(\cdot,t)-m\partial_x G(\cdot,t)\right\}-\frac{M}{N!}(tD_x^\alpha\partial_x)^N G(\cdot,t) + \frac{\beta M^3}{12\sqrt{3}\pi}(\log t)\partial_x G(\cdot,t)+\frac{\beta\mathcal{M}}{3}\partial_x G(\cdot,t)+\frac{\beta M^3}{3}\Psi(\cdot,t)\Bigg\|_{L^p}=0.$$

(iii) $\dfrac{N+2}{N+1}<\alpha<\dfrac{N+1}{N}$, $N\in\mathbb{N}$ のとき, 任意の $1\le p\le\infty$ に対して, 次が成り立つ.

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}}\Bigg\| u(\cdot,t)-\sum_{k=0}^{N}\frac{t^k}{k!}(D_x^\alpha\partial_x)^k\left\{MG(\cdot,t)-m\partial_x G(\cdot,t)\right\} + \frac{\beta M^3}{12\sqrt{3}\pi}(\log t)\partial_x G(\cdot,t)+\frac{\beta\mathcal{M}}{3}\partial_x G(\cdot,t)+\frac{\beta M^3}{3}\Psi(\cdot,t)\Bigg\|_{L^p}=0.$$

ここで, $G(x,t)$, M, m は (2.7) で定義されたものである. また, $\Psi(x,t)$ と $\mathcal{M}$ は, それぞれ (3.3) および (3.5) で定義されたものである.

4 準備

この節では, 主結果を証明するために必要な補題と命題を紹介する. まず, 関数 $S_\alpha(x,t)$ の幾つかの性質を述べよう. この関数は (2.7) で定義された熱核 $G(x,t)$ と同様の減衰評価を持つことが知られている. 加えて, $\alpha>1$ のとき, $S_\alpha(x,t)$ は $t\to\infty$ では $G(x,t)$ により近似することが出来る. より正確には, 以下の評価 (4.2) が成立する. 証明については [6] の補題 3.1 と補題 3.2 を参照せよ.

補題 4.1 ([6])**.** $\alpha>1$, l を非負整数とする. このとき, $2\le p\le\infty$ に対して, 以下の評価が成り立つ.

$$\begin{aligned}&\left\|\partial_x^l S_\alpha(\cdot,t)\right\|_{L^p}\le Ct^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{l}{2}},\quad t>0,\\ &\left\|\partial_x^l S_\alpha(\cdot,t)\right\|_{L^1}\le Ct^{-\frac{l}{2}}\left(1+t^{-\frac{\alpha-1}{4}}\right),\quad t>0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

補題 4.2 ([6])**.** $\alpha>1$, l を非負整数とする. このとき, $1\le p\le\infty$ に対して, 次が成り立つ.

$$\left\|\partial_x^l\left(S_\alpha(\cdot,t)-G(\cdot,t)\right)\right\|_{L^p}\le Ct^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{\alpha-1}{2}-\frac{l}{2}},\quad t>0.\tag{4.2}$$

熱核 $G(x,t)$ に対しては, 次の L^p-減衰評価が成立する. 証明については [2] の補題 3.3 を参照せよ.

補題 4.3 ([2])**.** $\alpha>1$, $k\ge0$, l を非負整数とする. このとき, $1\le p\le\infty$ に対して, 次が成り立つ.

$$\left\|(D_x^\alpha\partial_x)^k\partial_x^l G(\cdot,t)\right\|_{L^p}\le Ct^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{k(\alpha+1)}{2}-\frac{l}{2}},\quad t>0.$$

更に, 熱核 $G(x,t)$ については, 次の漸近公式が成り立つことが知られている (cf. [3, 6]).

補題 4.4 ([3, 6])**.** l を非負整数, $1 \le p \le \infty$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R})$ かつ $xu_0 \in L^1(\mathbb{R})$ とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\left\|\partial_x^l \left((G(t) * u_0)(\cdot) - MG(\cdot,t)\right)\right\|_{L^p} \le Ct^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}-\frac{l}{2}}, \quad t > 0.$$

ここで, $G(x,t)$ と M は (2.7) で定義されたものである.

最後に, 定理 3.1 を証明する上で重要な命題を紹介する. 証明については [2] の命題 3.5 を参照せよ.

命題 4.5 ([2])**.** $1 < \alpha < 3$, $\beta \in \mathbb{R}$ とする. $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ かつ $xu_0 \in L^1(\mathbb{R})$ とし, $\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1}$ が十分小さいとする. このとき, (1.1) の解 $u(x,t)$ について, 任意の $1 \le p \le \infty$ に対して, 次が成り立つ.

$$\left\|u^3(\cdot,t) - (MG)^3(\cdot,t)\right\|_{L^p} \le Ct^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-1}\left\{t^{-\frac{\min\{\alpha-1,1\}}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\log(2+t)\right\}, \quad t \ge 1. \tag{4.3}$$

ここで, $G(x,t)$ と M は (2.7) で定義されたものである.

5 主結果の証明の概略

本節では, 主結果である定理 3.1 の証明の概略を述べる. はじめに, 次の関数を導入する.

$$v(x,t) := \int_1^t \left(\partial_x G(t-\tau) * G^3(\tau)\right)(x)d\tau, \quad V(x,t) := \frac{1}{4\sqrt{3}\pi}(\log t)\partial_x G(x,t), \tag{5.1}$$

$$W(x,t) := \int_0^1 \left(\partial_x G(t-\tau) * u^3(\tau)\right)(x)d\tau + \int_1^t \left(\partial_x G(t-\tau) * \left(u^3 - (MG)^3\right)(\tau)\right)(x)d\tau. \tag{5.2}$$

この記号の下, (3.1), (3.2), (3.5), (5.1), (5.2) により, 次の関係が成立することがわかる.

$$\begin{aligned} &I_{\alpha,\beta}[u](x,t) + \frac{\beta M^3}{12\sqrt{3}\pi}(\log t)\partial_x G(x,t) + \frac{\beta\mathcal{M}}{3}\partial_x G(x,t) + \frac{\beta M^3}{3}\Psi(x,t) \\ &= -\frac{\beta}{3}\left\{\int_0^t \left(\partial_x(S_\alpha - G)(t-\tau) * u^3(\tau)\right)(x)d\tau\right\} - \frac{\beta}{3}\left\{W(x,t) - \mathcal{M}\partial_x G(x,t)\right\} \\ &\quad - \frac{\beta M^3}{3}\left\{v(x,t) - V(x,t) - \Psi(x,t)\right\}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

従って, 定理 3.1 の証明を行うためには, (5.3) の右辺の各項を全て評価すればよい. そのために, 以下では右辺の評価を後述の三つの命題に分けて行う. まず, 第一項に関しては, 次の評価が成立する.

命題 5.1 ([2])**.** $1 < \alpha < 3$, $\beta \in \mathbb{R}$ とする. $u_0 \in H^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ かつ $xu_0 \in L^1(\mathbb{R})$ とし, $\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1}$ が十分小さいとする. このとき, (1.1) の解 $u(x,t)$ について, 任意の $1 \le p \le \infty$ に対して, 次が成り立つ.

$$\left\|\int_0^t \partial_x(S_\alpha - G)(t-\tau) * u^3(\tau)d\tau\right\|_{L^p} \le Ct^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{\alpha}{2}}\log(2+t), \quad t \ge 2.$$

ここで, $S_\alpha(x,t)$ と $G(x,t)$ は, それぞれ (2.2) と (2.7) で定義されたものである.

証明の概略. ここでは, $p = \infty$ の場合について, 証明の概略を述べる. まず, (2.4), (2.5), (4.1) などを用いて, 非線形項の評価を用意する. 特に, $u^3(x,t)$ と $\partial_x(u^3(x,t))$ に対する以下の減衰評価を示す.

$$\left\|u^3(\cdot,t)\right\|_{L^1} \le C(1+t)^{-1}, \quad t \ge 0, \qquad \left\|\partial_x\left(u^3(\cdot,t)\right)\right\|_{L^\infty} \le Ct^{-2}, \quad t \ge 1. \tag{5.4}$$

これを用いると, Young の不等式と (4.2) および (5.4) により, 次の評価が得られる.

$$\left\|\int_0^t \partial_x(S_\alpha - G)(t-\tau) * u^3(\tau)d\tau\right\|_{L^\infty}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \int_0^{\frac{t}{2}} \|\partial_x(S_\alpha - G)(\cdot, t-\tau)\|_{L^\infty} \left\|u^3(\cdot,\tau)\right\|_{L^1} d\tau + \int_{\frac{t}{2}}^t \|(S_\alpha - G)(\cdot, t-\tau)\|_{L^1} \left\|\partial_x\left(u^3(\cdot,\tau)\right)\right\|_{L^\infty} d\tau \\
&\le C\int_0^{\frac{t}{2}} (t-\tau)^{-\frac{1}{2}-\frac{\alpha-1}{2}-\frac{1}{2}}(1+\tau)^{-1} d\tau + C\int_{\frac{t}{2}}^t (t-\tau)^{-\frac{\alpha-1}{2}}\tau^{-2} d\tau \\
&\le Ct^{-1-\frac{\alpha-1}{2}}\log(2+t) + Ct^{-1-\frac{\alpha-1}{2}} \le Ct^{-1-\frac{\alpha-1}{2}}\log(2+t), \quad t \ge 2, \quad 1<\alpha<3.
\end{aligned}
$$

同様の方針で $p=1$ の場合も評価を行い, あとは補間不等式を利用すればよい. □

次に, (5.3) の右辺の第二項を評価する. 実際, $W(x,t)$ が $\mathcal{M}\partial_x G(x,t)$ で近似出来ることが示せる.

命題 5.2 ([2]). $1<\alpha<3$, $\beta\in\mathbb{R}$ とする. $u_0 \in H^1(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$ かつ $xu_0 \in L^1(\mathbb{R})$ とし, $\|u_0\|_{H^1} + \|u_0\|_{L^1}$ が十分小さいとする. このとき, (1.1) の解 $u(x,t)$ について, 任意の $1\le p\le\infty$ 対して, 次が成り立つ.

$$
\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \|W(\cdot,t) - \mathcal{M}\partial_x G(\cdot,t)\|_{L^p} = 0. \tag{5.5}
$$

ここで, $W(x,t)$, $G(x,t)$, $\mathcal{M}$ は, それぞれ (5.2), (2.7), (3.5) で定義されたものである.

証明の概略. 簡単のため, 次の関数 $\rho(x,t)$ を定義する.

$$
\rho(x,t) := \left(u^3 - (MG)^3\right)(x,t). \tag{5.6}
$$

ここで, この関数に対しては, (4.3) と (5.6) から, 次の評価が成立することに注意する.

$$
\|\rho(\cdot,t)\|_{L^p} \le Ct^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-1}\left\{t^{-\frac{\min\{\alpha-1,1\}}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}\log(2+t)\right\}, \quad t\ge 1. \tag{5.7}
$$

さらに, 以下で定義される定数 $\mathcal{M}_0$ と $\mathcal{M}_1$ を導入する.

$$
\mathcal{M}_0 := \int_0^1\int_{\mathbb{R}} u^3(y,\tau)dyd\tau, \quad \mathcal{M}_1 := \int_1^\infty\int_{\mathbb{R}} \rho(y,\tau)dyd\tau.
$$

この記号の下, $W(x,t)$ の定義 (5.2) および $\mathcal{M}$ の定義 (3.5) から, 次の関係が得られる.

$$
\begin{aligned}
W(x,t) - \mathcal{M}\partial_x G(x,t) = &\int_1^t \left(\partial_x G(t-\tau) * \rho(\tau)\right)(x)d\tau - \mathcal{M}_1\partial_x G(x,t) \\
&+ \int_0^1 \left(\partial_x G(t-\tau) * u^3(\tau)\right)(x)d\tau - \mathcal{M}_0\partial_x G(x,t).
\end{aligned}
$$

従って, (5.5) の証明を行うためには, 任意の $1\le p\le\infty$ に対して, 次が成立することを示せばよい.

$$
\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \left\|\int_1^t \partial_x G(t-\tau)*\rho(\tau)d\tau - \mathcal{M}_1\partial_x G(\cdot,t)\right\|_{L^p} = 0, \tag{5.8}
$$

$$
\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \left\|\int_0^1 \partial_x G(t-\tau)*u^3(\tau)d\tau - \mathcal{M}_0\partial_x G(\cdot,t)\right\|_{L^p} = 0. \tag{5.9}
$$

上記の漸近公式 (5.8) と (5.9) を示すには, (5.7) の評価に注意して, 放物型方程式の解の漸近解析の手法をそのまま適用すればよい. 詳しい証明は, オリジナルの論文 [2] の命題 4.2 を参照せよ. □

最後に, (5.3) の右辺の第三項を評価する. 即ち, $v(x,t) - V(x,t)$ の主要部が $\Psi(x,t)$ であることを示す.

命題 5.3 ([2]). l を非負整数とする. このとき, 任意の $1\le p\le\infty$ に対して, 次の評価が成り立つ.

$$
\left\|\partial_x^l\left(v(\cdot,t) - V(\cdot,t) - \Psi(\cdot,t)\right)\right\|_{L^p} \le C\left\|yF_*\right\|_{L^1} t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-1-\frac{l}{2}}, \quad t>1. \tag{5.10}
$$

ここで, $v(x,t)$ と $V(x,t)$ は (5.1) で定義されたものであり, $\Psi(x,t)$ と $F_*(y)$ は, それぞれ (3.3) および (3.4) で定義されたものである.

証明. はじめに, $V(x,t)$ の定義 (5.1) から, 以下の初期値問題が得られる：

$$
\begin{aligned}
&V_t - V_{xx} = \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} t^{-1} \partial_x G(x,t), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 1, \\
&V(x,1) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

従って, $V(x,t)$ は次の形に書き換えることが出来る.

$$
V(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \int_1^t \left(G(t-\tau) * \left(\tau^{-1} \partial_x G(\tau) \right) \right)(x) d\tau. \tag{5.11}
$$

上記の (5.11) と $v(x,t)$ の定義 (5.1), および $F_*(y)$ の定義 (3.4) により, 次が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
v(x,t) - V(x,t) &= \int_1^t \left(\partial_x G(t-\tau) * \left(G^3(\tau) - \frac{1}{4\sqrt{3}\pi} \tau^{-1} G(\tau) \right) \right)(x) d\tau \\
&= \int_1^t \int_{\mathbb{R}} \partial_x G(x-y, t-\tau) \left(\frac{1}{8\sqrt{\pi^3}} \tau^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{3y^2}{4\tau}} - \frac{1}{8\sqrt{3\pi^3}} \tau^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{y^2}{4\tau}} \right) dy d\tau \\
&= \partial_x \left(\int_1^t \tau^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} G(x-y, t-\tau) F_* \left(\frac{y}{\sqrt{\tau}} \right) dy d\tau \right) =: \partial_x K(x,t).
\end{aligned} \tag{5.12}
$$

ここで, (5.12) の右辺の $K(x,t)$ に対して, 変数変換を複数回行うことで, (2.7) と (3.4) により, 次が得られる.

$$
\begin{aligned}
K(x,t) &= \int_1^t \tau^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} G(x-y, t-\tau) F_* \left(\frac{y}{\sqrt{\tau}} \right) dy d\tau \\
&= \int_1^t \tau^{-1} \int_{\mathbb{R}} G(x - \sqrt{\tau} z, t-\tau) F_*(z) dz d\tau \quad \left(z = \frac{y}{\sqrt{\tau}} \right) \\
&= \int_{\frac{1}{t}}^1 s^{-1} \int_{\mathbb{R}} G\left(x - \sqrt{ts} z, t(1-s) \right) F_*(z) dz ds \quad (\tau = ts) \\
&= t^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{t}}^1 s^{-1} \int_{\mathbb{R}} G\left(\frac{x}{\sqrt{t}} - \sqrt{s} z, 1-s \right) F_*(z) dz ds \\
&= t^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{t}}^1 s^{-\frac{3}{2}} \int_{\mathbb{R}} G\left(\frac{x}{\sqrt{t}} - y, 1-s \right) F_* \left(\frac{y}{\sqrt{s}} \right) dy ds \quad (y = \sqrt{s} z) \\
&= t^{-\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{t}}^1 \left(G(1-s) * F(s) \right) \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) ds.
\end{aligned}
$$

故に, 上式と (5.12) を組み合わせれば, 次が成り立つ.

$$
v(x,t) - V(x,t) = t^{-\frac{1}{2}} \partial_x \left(\int_{\frac{1}{t}}^1 \left(G(1-s) * F(s) \right) \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) ds \right). \tag{5.13}
$$

一方, $\Psi(x,t)$ の定義 (3.3) から, $\Psi(x,t)$ は次の形で書き換えることが出来る.

$$
\Psi(x,t) = t^{-\frac{1}{2}} \partial_x \left(\int_0^1 \left(G(1-s) * F(s) \right) \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right) ds \right). \tag{5.14}
$$

これより, (5.13) と (5.14) を用いれば,

$$
\begin{aligned}
&\left\| \partial_x^l \left(v(\cdot,t) - V(\cdot,t) - \Psi(\cdot,t) \right) \right\|_{L^p} \\
&= t^{-\frac{1}{2}} \left\| \partial_x^{l+1} \left(\int_0^{\frac{1}{t}} \left(G(1-s) * F(s) \right) \left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}} \right) ds \right) \right\|_{L^p} \\
&= t^{-1+\frac{1}{2p}-\frac{l}{2}} \left\| \partial_x^{l+1} \left(\int_0^{\frac{1}{t}} \left(G(1-s) * F(s) \right)(\cdot)\, ds \right) \right\|_{L^p}
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

が得られる．次に，$\int_{\mathbb{R}} F_*(y)dy = 0$ に注意して変数変換を行い，Young の不等式と補題 4.3 を用いれば，

$$
\begin{aligned}
&\left\| \partial_x^{l+1} \left(\int_0^{\frac{1}{t}} \left(G(1-s) * F(s) \right)(\cdot)\, ds \right) \right\|_{L^p} \\
&= \left\| \partial_x^{l+1} \int_0^{\frac{1}{t}} \int_{\mathbb{R}} G(\cdot - y, 1-s) s^{-\frac{3}{2}} F_* \left(\frac{y}{\sqrt{s}} \right) dy ds \right\|_{L^p} \\
&= \left\| \int_0^{\frac{1}{t}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^1 \partial_x^{l+2} G(\cdot - \eta y, 1-s) d\eta \right) y s^{-\frac{3}{2}} F_* \left(\frac{y}{\sqrt{s}} \right) dy ds \right\|_{L^p} \\
&= \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-1} \int_0^1 \left\| \int_{\mathbb{R}} \partial_x^{l+2} \left(\frac{1}{\eta} G \left(\frac{\cdot}{\eta} - y, \frac{1-s}{\eta^2} \right) \right) \frac{y}{\sqrt{s}} F_* \left(\frac{y}{\sqrt{s}} \right) dy \right\|_{L^p} d\eta ds \\
&\le C \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-1} \left(\int_0^1 \eta^{-1} \eta^{-(l+2)} \eta^{\frac{1}{p}} \eta^{1-\frac{1}{p}+(l+2)} d\eta \right) (1-s)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{l+2}{2}} s^{\frac{1}{2}} \left\| y F_* \right\|_{L^1} ds \\
&\le C \left\| y F_* \right\|_{L^1} \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{1}{2}} (1-s)^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{l+2}{2}} ds \le C \left\| y F_* \right\|_{L^1} \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{1}{2}} ds \\
&\le C \left\| y F_* \right\|_{L^1} t^{-\frac{1}{2}}, \quad t > 1
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

が得られる．最後に，(5.15) と (5.16) を組み合わせることで，所望の評価 (5.10) が成立する． □

定理 3.1 の証明．(5.3) に命題 5.1, 5.2, 5.3 を適用すれば，(3.6) が直ちに従い，定理 3.1 が示される． □

参考文献

[1] C.J. Amick, J.L. Bona and J.L. Schonbek: *Decay of solutions of some nonlinear wave equations*, J. Differ. Equ. **81** (1989) 1–49.

[2] I. Fukuda and Y. Irino: *Higher-order asymptotic profiles for solutions to the Cauchy problem for a dispersive-dissipative equation with a cubic nonlinearity*, arXiv.2211.04667v1.

[3] M.-H. Giga, Y. Giga and J. Saal: *Nonlinear partial differential equations–Asymptotic behavior of solutions and self-similar solutions–*, Birkhäeuser, Boston, Basel, Berlin, 2010.

[4] N. Hayashi and P.I. Naumkin: *Asymptotics for the Korteweg-de Vries–Burgers equation*, Acta Math. Sin. Engl. Ser. **22** (2006) 1441–1456.

[5] E.I. Kaikina and H.F. Ruiz-Paredes: *Second term of asymptotics for KdVB equation with large initial data*, Osaka J. Math. **42** (2005) 407–420.

[6] G. Karch: *Large-time behavior of solutions to non-linear wave equations: higher-order asymptotics*, Math. Meth. Appl. Sci. **22** (1999) 1671–1697.

[7] G. Karch: *Self-similar large time behavior of solutions to Korteweg-de Vries–Burgers equation*, Nonlinear Anal. **35** (1999) 199–219.

[8] 松村昭孝, 西原健二：非線形微分方程式の大域解–圧縮性粘性流の数学解析–, 日本評論社, 2004.

[9] 戸田盛和：波動と非線形問題 30 講, 朝倉書店, 1995.

[10] M. Tribeche and A. Berbri: *Weakly nonlinear dust ion-acoustic waves in a charge varying dusty plasma with non-thermal electrons*, J. Plasma Physics **74** (2008) 245–259.

不可逆的に時間発展する変分不等式の適切性について

東北大学大学院理学研究科数学専攻
佐藤光汰朗 (Kotaro SATO)

1 導入

本稿で考える問題は次の非線形発展方程式である.

$$
(1.1)\qquad \begin{cases} \partial I_{(-\infty,0]}(\partial_t z) - \Delta z + \lambda z + \sigma\gamma(z) \ni f & \text{in } \Omega\times(0,T), \\ z = 0 & \text{on } \partial_D\Omega\times(0,T), \\ \partial_\nu z = 0 & \text{on } \partial_N\Omega\times(0,T), \\ z(x,0) = z_0(x) & \text{for } x\in\Omega. \end{cases}
$$

ここで $I_{(-\infty,0]}$ は $(-\infty,0]$ 上に台を持つ指示関数とし, $\partial I_{(-\infty,0]}$ はその劣微分作用素とする. 劣微分作用素は一般に多価であるため, 第 1 式は等式ではなく集合の包含関係によって記述されている. 方程式 (1.1) は, 次の偏微分方程式系にその出自を持つ.

$$
(1.2)\qquad \begin{cases} -\operatorname{div}\left\{(z(x,t)^2+\rho_\varepsilon)\nabla u(x,t)\right\} = f(x,t) & \text{in } \Omega\times(0,T), \\ \partial I_{(-\infty,0]}(\partial_t z(x,t)) - \varepsilon\Delta z(x,t) + \dfrac{1}{\varepsilon}(z(x,t)-1) + z(x,t)\left|\nabla u(x,t)\right|^2 \ni 0 & \text{in } \Omega\times(0,T). \end{cases}
$$

ただし初期条件および境界条件は

$$
\begin{cases} z(x,t) = u(x,t) = 0 & \text{on } \partial_D\Omega\times(0,T), \\ \partial_\nu z(x,t) = 0, \quad \partial_\nu u(x,t) = g(x,t) & \text{on } \partial_N\Omega\times(0,T), \\ z(x,0) = z_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \Omega \end{cases}
$$

で与えられるものとする. ここで $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ は有界領域で, 滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つとする. また, $\partial_D\Omega, \partial_N\Omega \subset \partial\Omega$ は $\partial_D\Omega\cap\partial_N\Omega = \emptyset$, $\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega\setminus(\partial_D\Omega\cup\partial_N\Omega)) = 0$ を満たすとする. ただし $\mathcal{H}^d$ は d 次元 Hausdorff 測度を表す. また, ν で $\partial\Omega$ における外向き単位法線ベクトルを表す. さらに, 時間微分項にかかる作用素 $\partial I_{(-\infty,0]}$ は, 指示関数 $I_{(-\infty,0]}$ の劣微分作用素として定まる多価関数である (定義は次節で述べる). 方程式系 (1.2) は, Ambrosio-Tortorelli 汎関数

$$
AT_\varepsilon(u,z) = \int_\Omega \left(z^2+\rho_\varepsilon\right)|\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla z|^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega (1-z)^2\,\mathrm{d}x, \quad u,z\in H^1(\Omega)
$$

(ただし $\varepsilon>0$, $\varepsilon\gg\rho_\varepsilon>0$ は定数, 以下 AT 汎関数と略記) の形式的な Euler-Lagrange 方程式として導かれる (cf. [3,4]). 一方, 方程式系 (1.2) の可解性に関して直ちに適用可能な一般論はないため,

簡単のためモデルケースとして空間 1 次元の場合を考えると, (1.2) は次のように表現できる.

$$
(1.3)\qquad \begin{cases} -\partial_x\left((z^2+\rho_\varepsilon)u_x\right)=f & \text{in } I\times(0,T),\\ \partial I_{(-\infty,0]}\left(\partial_t z\right)-\varepsilon z_{xx}+\varepsilon^{-1}(z-1)+z\left|u_x\right|^2\ni 0 & \text{in } I\times(0,T),\\ z(x,t)=h(x,t),\quad u_x(x,t)=g(x,t) & \text{on } \{0,1\}\times(0,T),\\ z(x,0)=z_0(x),\quad u(x,0)=u_0(x) & \text{in } I. \end{cases}
$$

ここで I は $\mathbb{R}$ 上の有界開区間とする. また z と u には, 簡単のため Dirichlet 境界条件および Neumann 境界条件をそれぞれ課す. このとき, 系 (1.3) は次のようにして, 形式的に u を消去して z に関する単独方程式に帰着させることができる. 第 1 式を $(0,x)$ で積分すると

$$
\begin{aligned}\int_0^x f(y,t)\,\mathrm{d}y &= -\left(z(x,t)^2+\rho_\varepsilon\right)u_x(x,t)+\left(z(0,t)^2+\rho_\varepsilon\right)u_x(0,t)\\ &= -\left(z(x,t)^2+\rho_\varepsilon\right)u_x(x,t)+\left(h(t)^2+\rho_\varepsilon\right)g(0,t)\end{aligned}
$$

を得る. これによって, u_x を z および与えられたデータを用いて

$$
\left|u_x(x,t)\right|^2=\frac{1}{(z(x,t)^2+\rho_\varepsilon)}\left\{\left(h(0,t)^2+\rho_\varepsilon\right)g(0,t)-\int_0^x f(y,t)\,\mathrm{d}y\right\}^2,\quad (x,t)\in I\times(0,T)
$$

と表すことができる. これを系 (1.3) の第 2 式に代入することで次式を得る.

$$
\partial I_{(-\infty,0]}\left(\partial_t z\right)-\varepsilon z_{xx}+\frac{1}{\varepsilon}(z-1)+\frac{z}{(z(x,t)^2+\rho_\varepsilon)}\left\{\left(h(0,t)^2+\rho_\varepsilon\right)g(0,t)-\int_0^x f(y,t)\,\mathrm{d}y\right\}^2\ni 0.
$$

ここで, $\lambda:=\varepsilon^{-2}$ として,

$$
\begin{aligned}
\sigma(x,t) &:= \left\{\left(h(0,t)^2+\rho_\varepsilon\right)g(0,t)-\int_0^x f(y,t)\,\mathrm{d}y\right\}^2 && \text{for } (x,t)\in I\times(0,T),\\
\gamma(s) &:= \frac{s}{\varepsilon\left(s^2+\rho_\varepsilon\right)^2} && \text{for } s\in\mathbb{R},\\
f(x,t) &:= \lambda && \text{for } (x,t)\in I\times(0,T)
\end{aligned}
$$

とおくと

$$
(1.4)\qquad \partial I_{(-\infty,0]}\left(\partial_t z\right)-z_{xx}+\lambda z+\sigma\gamma\left(z\right)\ni f\quad \text{in } I\times(0,T)
$$

が導かれる. 本稿で扱う方程式 (1.1) はいわば (1.4) の N 次元版であり, さらに非線形関数 γ を一般化したものである.

方程式 (1.1) は, 大まかには二重非線形方程式に分類される. このような二重非線形型の方程式を扱った研究は数多く存在するが (cf. [5,6,8,10]), 方程式 (1.1) を直接的に包含するような一般論は存在しない. 実際, 方程式 (1.1) に含まれる劣微分作用素 $\partial I_{(-\infty,0]}$ は, $s\in(-\infty,0)$ に対して 0 を含む一点集合を, $s=0$ に対して 0 以上の全ての実数を含む集合を対応させる. このように作用素 $\partial I_{(-\infty,0]}$ が $(-\infty,0)$ で退化していることは本方程式の大きな特徴であり, それによって解のアプリオリ評価を得ることが困難となるという難点を内包している. そこで本稿では, (1.1) の解の構成およびアプリオリ評価の導出に焦点を当て, その詳細を述べる (cf. Thoerem 3.2). 一方, 見方を変えれば, 方程式 (1.1) は非常に弱い放物性を持つ, すなわちある意味で楕円型方程式に近い性質を持つと考えられ, 特にある種の H^1 エネルギーが保存されるなど, 一般的には楕円型方程式において顕著な性質が成り立つことが確認できる (cf. Theorem 3.3).

2 準備

2.1 指示関数

有界もしくは非有界な区間 $K \subset \mathbb{R}$ に対して, K 上の**指示関数** (*indicator function*) $I_K : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を次で定義する.

$$I_K(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } \ x \in K, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

劣微分作用素について復習する. 劣微分は Fréchet 微分の一般化として位置付けられる多価関数である. 具体的には, 実 Hilbert 空間 H 上定義される汎関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ に対し, その**劣微分作用素** (*subdifferential operator*) $\partial\varphi : H \to 2^H$ を

$$\partial\varphi(u) = \{\, \xi \in H \colon \varphi(v) - \varphi(u) \geq (\xi,\, v - u)_H \ \text{ for } \ v \in D(\varphi) \,\}$$

で定義される集合値関数とする. なお, $D(\varphi) = \{\, x \in H \colon \varphi(x) \neq +\infty \,\}$ は φ の有効領域とし, $\partial\varphi$ の定義域を

$$D(\partial\varphi) = \{\, u \in D(\varphi) \colon \partial\varphi(u) \neq \emptyset \,\}$$

で定める. 適正凸下半連続汎関数 φ の劣微分 $\partial\varphi$ が極大単調作用素となることはよく知られている.

2.2 楕円型正則性

本稿では, 混合境界条件を考慮に入れる. その際, いわゆる楕円型正則性条件の取り扱いが繊細となることに注意する (cf. [9]). 具体的には, まず境界 $\partial\Omega$ に対して, 部分集合 $\partial_D\Omega, \partial_N\Omega \subset \partial\Omega$ を $\partial_D\Omega \cap \partial_N\Omega = \emptyset$, $\mathcal{H}^{N-1}(\partial\Omega \setminus (\partial_D\Omega \cup \partial_N\Omega)) = 0$ を満たすものとする. また, 部分空間 $V \subset H^1(\Omega)$ を $V := \{\, v \in H^1(\Omega) \colon v = 0 \ \ \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. on } \ \partial_D\Omega \,\}$ で定める. 作用素 $B : V \to V^*$ を

$$\langle Bu, v \rangle_V := \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, \mathrm{d}x \quad \text{ for } \ u, v \in V$$

で定めると, B は V から V^* への全単射となり, したがって逆写像 $B^{-1} : V^* \to V$ が定義できる.

本稿を通して, 特に断りのない限り常に

$$B^{-1}\varphi \in H^2(\Omega) \quad \text{ for } \ \varphi \in L^2(\Omega) \tag{2.1}$$

を仮定する. 条件 (2.1) はしばしば楕円型正則性と呼ばれる. これは十分滑らかな境界を持つ領域において, Dirichlet 境界条件を課す場合 ($\partial_N\Omega = \emptyset$) または Neumann 境界条件を課す場合 ($\partial_D\Omega = \emptyset$) に成り立つことがよく知られているが, 両条件が混在した問題を考える場合は状況がやや複雑である. 本稿では, 問題 (1.1) の物理的応用を視野に入れて混合境界条件を考慮に入れるため, 楕円型正則性条件 (2.1) をあらかじめ仮定しておく.

3 主定理

有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ とその境界の部分集合 $\partial_D\Omega$, $\partial_N\Omega \subset \partial\Omega$ は第 2 節で述べたものとする. L^2-空間の部分空間 V, X を以下で定める.

$$V := \{\, u \in H^1(\Omega) \colon u = 0 \ \ \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. on } \partial_D\Omega \,\},$$
$$X := \{\, u \in H^2(\Omega) \colon \partial_\nu u = 0 \ \ \mathcal{H}^{N-1}\text{-a.e. on } \partial_N\Omega \,\}.$$

ここで ν は $\partial\Omega$ の外向き単位法線ベクトルを表し, ∂_ν は勾配の ν 方向成分を表すとする (V と X は正確にはトレース作用素を用いて定式化される). 各空間において H^1 ノルムおよび H^2 ノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_V$, $\|\cdot\|_X$ とも書く. さらに, $f, g \in V^*$ に対し

$$\langle f, v\rangle_V \le \langle g, v\rangle_V \qquad \text{for any} \ \ v \in V \ \ \text{s.t. } v \ge 0 \ \ \text{a.e. in} \ \ \Omega$$

が成り立つとき, $f \le g$ in V^* と書く. また, 本稿では, $\Omega \times (0,T)$ 上定義された関数に対してしばしば $z(t) := z(\cdot, t) : \Omega \to \mathbb{R}$, $t \in (0,T)$ などと書く.

以下, λ は正定数とし, $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Lipschitz 連続な関数とする. また, $f, \sigma : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$, $z_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ はそれぞれ与えられたデータとする. 本稿の主結果は, 十分な正則性を持つ空間における (1.1) の強解の存在に関するもの (Theorem 3.2) とその強解の定性的性質 (Theorem 3.3) である. 主結果の主張を述べる前に, (1.1) の強解の意味を明らかにする. 実数 p, q に対して $q \in \partial I_{(-\infty,0]}(p)$ が成り立つことと $p \le 0$, $q \ge 0$ および $pq = 0$ が同時に成り立つことは同値であることに注意して, (1.1) の強解の意味を次で定める.

Definition 3.1. 関数 $z \in C([0,T]; L^2(\Omega))$ が (1.1) の**強解** (*strong solution*) であるとは, 以下の (i)–(iv) が成り立つことをいう.

(i) $z \in W^{1,2}(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; X \cap V)$;
(ii) $\partial_t z \le 0, \ -\Delta z + \lambda z + \sigma\gamma(z) \le f \quad$ a.e. in $\Omega \times (0,T)$;
(iii) $\partial_t z\,(-\Delta z + \lambda z + \sigma\gamma(z) - f) = 0 \quad$ a.e. in $\Omega \times (0,T)$;
(iv) $z(x,0) = z_0(x) \quad$ for a.e. $x \in \Omega$.

以下に問題 (1.1) の解の存在に関する主定理を述べる. なお, 特に断りがない限り, 楕円型正則性条件 (2.1) の成立を常に仮定するものとする.

Theorem 3.2. 正定数 $\lambda > 0$, 与えられた関数 $z_0 \in X \cap V$, $f \in L^2(0,T; L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T; V^*)$, $\sigma \in L^\infty(\Omega \times (0,T)) \cap W^{1,2}(0,T; L^{N/2}(\Omega))$ および $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は以下を満たすとする.

(i) ある関数 $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ が存在し, $f \ge \tilde{f}$ a.e. in $\Omega \times (0,T)$ を満たす.
(ii) 定数 $L \ge 0$ が存在し, 関数 $s \mapsto \gamma(s) + Ls$ は単調増加かつ $L\|\sigma\|_{L^\infty(\Omega\times(0,T))} < \lambda$ が成り立つ.
(iii) 定数 $C \ge 0$ が存在し, 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対して $|\gamma(s)| \le C(|s| + 1)$ が成り立つ.
(iv) $-\Delta z_0 + \lambda z_0 + \sigma(\cdot, 0)\gamma(z_0) \le f(\cdot, 0)$ in V^* が成り立つ.

このとき, (1.1) の強解 $z = z(x,t) \in W^{1,2}(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T; X \cap V)$ で, さらに $z \in$

$W^{1,2}(0,T;V)$ を満たすものが存在する.

また, 汎関数 $E : V \times [0,T] \to \mathbb{R}$ を

$$E(u,t) := \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \sigma(t)\hat{\gamma}(u)\,\mathrm{d}x - \langle f(t), u\rangle_V, \quad u \in V,\ t \in [0,T]$$

で定める. ただし $\hat{\gamma}$ は γ の原始関数とする.

Theorem 3.3. 関数 $f, \sigma : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$, $z_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ および $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は Theorem 3.2 の仮定を満たすとし, $z \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;X \cap V)$ を (1.1) の強解とする. このとき, 次の (i)–(iii) が成り立つ.

(i) $\partial_t z \le 0$ a.e. in $\Omega \times (0,T)$.

(ii) 任意の $v \in V$ に対して, $v \le z(t) \Rightarrow E(z(t),t) \le E(v,t)$ for a.e. $t \in (0,T)$.

(iii) 写像 $t \mapsto E(z(t),t)$ は $[0,T]$ 上絶対連続であって,

$$E(z(t),t) - E(z(s),s) = \int_s^t \int_\Omega \partial_t \sigma(r)\hat{\gamma}(z(r))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r - \int_s^t \langle \partial_t f(r), z(r)\rangle_V\,\mathrm{d}r \quad \text{for } s,t \in [0,T]$$

が成り立つ.

4 時間離散問題

本節では, Theorem 3.2 の証明のための準備について説明する. Theorem 3.2 の証明はいわゆる minimizing movement scheme に基づく. すなわち, 区間 $[0,T]$ を有限個の小区間に分け, 各時間ステップにおける (静的) 障害物問題の解を繋ぎ合わせることで問題 (1.1) の解を構成する.

区間 $(0,T)$ を m 等分し, その 1 区間の幅を τ とする. すなわち, 自然数 $m \in \mathbb{N}$ に対し $\tau := T/m$ とおく. また, 各 $k = 0,1,\dots,m$ に対し $t_k := k\tau$ とおく. これによって, 関数の族 $\{f_k\}_{k=0,\dots,m}$, $\{\sigma_k\}_{k=0,\dots,m}$ を

$$f_k := \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\cdot,s)\,\mathrm{d}s \in L^2(\Omega) \quad \text{for } k = 1,2,\dots,m, \tag{4.1}$$

$$\sigma_k := \frac{1}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sigma(\cdot,s)\,\mathrm{d}s \in L^N(\Omega) \quad \text{for } k = 1,2,\dots,m, \tag{4.2}$$

および $f_0 := f(\cdot,0) \in V^*$, $\sigma_0 := \sigma(\cdot,0) \in L^{N/2}(\Omega)$ によって定め, 定常障害物問題

$$\begin{cases} \partial I_{(-\infty,0]}(z_k - z_{k-1}) - \Delta z_k + \lambda z_k + \sigma_k \gamma(z_k) \ni f_k & \text{in } \Omega, \\ z_k = 0 & \text{on } \partial_D\Omega, \\ \partial_\nu z_k = 0 & \text{on } \partial_N\Omega \end{cases} \tag{4.3}$$

を考える. このとき, 次が成り立つ.

Theorem 4.1. Theorem 3.2 と同じ仮定の下で, 各 $k = 1,\dots,m$ に対し (4.3) の強解 $z_k \in X \cap V$ が一意に存在する.

Proof. 例えば [1,2] などを参照. □

5 Theorem 3.2 の証明

この節では Theorem 3.2 の証明について, その一部を簡潔に述べる. 時間離散化された定常障害物問題 (4.3) の解を z_k とする. (4.1), (4.2) によって定まる f_k, σ_k に対して, その区分的線形補間 f_τ, σ_τ と 区分的定数補間 $\overline{f}_\tau$, $\overline{\sigma}_\tau$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} f_\tau(x,t) &:= f_{k-1}(x) + \frac{t-t_{k-1}}{\tau}\left(f_k(x) - f_{k-1}(x)\right), \\ f_\tau(0) &:= f_0 \in V^*, \\ \sigma_\tau(x,t) &:= \sigma_{k-1}(x) + \frac{t-t_{k-1}}{\tau}\left(\sigma_k(x) - \sigma_{k-1}(x)\right), \\ \sigma_\tau(x,0) &:= \sigma_0(x), \end{aligned}$$

および

$$\overline{f}_\tau(x,t) := f_k(x), \quad \overline{\sigma}_\tau(x,t) := \sigma_k(x),$$

$x \in \Omega$, $t_{k-1} < t \le t_k$, $k = 1,\dots,m$ によって定める. このとき $f_\tau \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T;V^*)$, $\sigma_\tau \in W^{1,2}(0,T;L^N(\Omega))$ が成り立つ. また, z についても同様に

$$\begin{aligned} z_\tau(x,t) &:= z_{k-1}(x) + \frac{t-t_{k-1}}{\tau}\left(z_k(x) - z_{k-1}(x)\right), \\ \overline{z}_\tau(x,t) &:= z_k(x), \end{aligned}$$

$x \in \Omega$, $t_{k-1} < t \le t_k$, $k = 1,\dots,m$ と定める. このとき $z_\tau \in W^{1,2}(0,T;X \cap V)$ および $\overline{z}_\tau \in L^\infty(0,T;X \cap V)$ が成り立つことに注意する. 以下, (z_τ) および $(\overline{z}_\tau)$ についての各種アプリオリ評価を準備する. まず, (z_τ) の V での有界性について述べる.

Lemma 5.1. 定数 $C > 0$ が τ と独立に存在して, $\|\overline{z}_\tau\|_{L^\infty(0,T;V)} \le C$ を満たす.

Proof. 各 $k = 1,\dots,m$ に対して $\eta_k := \Delta z_k - \lambda z_k - \sigma_k\gamma(z_k) + f_k \in L^2(\Omega)$ とおく. また, $k = 0$ に対して $\eta_0 := \Delta z_0 - \sigma(0)\gamma(z_0) + f(0) \in V^*$ とおく. 関数 η_k に $z_k - z_{k-1}$ をテストすると

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \eta_k\left(z_k - z_{k-1}\right)\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla z_k \cdot \nabla\left(z_k - z_{k-1}\right)\mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega z_k\left(z_k - z_{k-1}\right)\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_\Omega \sigma_k\gamma(z_k)\left(z_k - z_{k-1}\right)\mathrm{d}x = \int_\Omega f_k\left(z_k - z_{k-1}\right)\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5.1}$$

を得る. 左辺第一項の値は 0 である (実際, $\eta_k \in \partial I_{(-\infty,0]}(z_k - z_{k-1})$ より従う). ここで Theorem 3.2 の仮定 (ii) より, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $(L+\varepsilon)\sigma \le \lambda$ a.e. in $\Omega \times (0,T)$ かつ $(L+\varepsilon)\sigma \not\equiv \lambda$ が成り立つ. これに対して $\tilde{L} := L + \varepsilon$, $\beta_\varepsilon(s) := \tilde{L}s + \gamma(s)$ for $s \in \mathbb{R}$ とし, $\hat{\beta}_\varepsilon$ を β_ε の原始関数とすると, $0 \le \lambda - \tilde{L}\sigma_k$ a.e. in Ω に注意して, (5.1) と Young の不等式より

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\|\nabla z_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega (\lambda - \tilde{L}\sigma_k)\left|z_k\right|^2\mathrm{d}x\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\|\nabla z_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega (\lambda - \tilde{L}\sigma_{k-1})\left|z_{k-1}\right|^2\mathrm{d}x\right) \\ &\quad + \int_\Omega \sigma_k\beta_\varepsilon(z_k)\left(z_k - z_{k-1}\right)\mathrm{d}x - \int_\Omega f_k z_k\,\mathrm{d}x + \int_\Omega f_{k-1}z_{k-1}\,\mathrm{d}x \\ &\le -\left\langle f_k - f_{k-1}, z_{k-1}\right\rangle_V - \frac{\tilde{L}}{2}\int_\Omega (\sigma_k - \sigma_{k-1})\left|z_{k-1}\right|^2\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{5.2}$$

が成り立つ．さらに, $\hat{\beta}_\varepsilon$ は凸だから

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \sigma_k \beta_\varepsilon(z_k)\,(z_k - z_{k-1})\,\mathrm{d}x \\
&\qquad \geq \int_\Omega \sigma_k \left(\hat{\beta}_\varepsilon(z_k) - \hat{\beta}_\varepsilon(z_{k-1})\right)\mathrm{d}x \\
&\qquad = \int_\Omega \left(\sigma_k \hat{\beta}_\varepsilon(z_k) - \sigma_{k-1}\hat{\beta}_\varepsilon(z_{k-1})\right)\mathrm{d}x - \int_\Omega (\sigma_k - \sigma_{k-1})\,\hat{\beta}_\varepsilon(z_{k-1})\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって, (5.2) の両辺を k に関して足し合わせると,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(\|\nabla z_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega (\lambda - \tilde{L}\sigma_k)\,|z_k|^2\,\mathrm{d}x\right) + \int_\Omega \sigma_k \hat{\beta}_\varepsilon(z_k)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f_k z_k\,\mathrm{d}x \\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\left(\|\nabla z_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_\Omega (\lambda - \tilde{L}\sigma_0)\,|z_0|^2\,\mathrm{d}x\right) + \int_\Omega \sigma_0 \hat{\beta}_\varepsilon(z_0)\,\mathrm{d}x - \langle f_0, z_0\rangle_V \\
&\qquad\quad - \tau \sum_{l=1}^{k} \left\{ \left\langle \frac{f_l - f_{l-1}}{\tau}, z_{l-1} \right\rangle_V + \frac{\tilde{L}}{2}\int_\Omega \frac{\sigma_l - \sigma_{l-1}}{\tau}\,|z_{l-1}|^2\,\mathrm{d}x \right. \\
&\qquad\quad \left. - \int_\Omega \frac{\sigma_l - \sigma_{l-1}}{\tau}\,\hat{\beta}_\varepsilon(z_{l-1})\,\mathrm{d}x \right\},
\end{aligned}
$$

for $k = 1, \ldots, m$ が成り立つ．ここで $\hat{\beta}_\varepsilon(s) = \hat{\gamma}(s) + (L+\varepsilon)s^2/2$ であり, 仮定より $\hat{\gamma}(s) + Ls^2/2$ は凸であることに注意すると, ある定数 $C > 0$ が存在して

$$
C\left(s^2 - 1\right) \leq \hat{\beta}_\varepsilon(s) \quad \text{for} \quad s \in \mathbb{R}
$$

とできる．したがって, Theorem 3.2 の仮定 (iii) より

$$
\begin{aligned}
\|z_k\|_V^2 &\leq C\Bigg\{1 + \|z_0\|_V^2 + \|f_k\|_{V^*}^2 + \|f_0\|_{V^*}^2 \\
&\qquad + \tau \sum_{l=1}^{k} \left(\left\| \frac{f_l - f_{l-1}}{\tau} \right\|_{V^*} \|z_{l-1}\|_V + \left\| \frac{\sigma_l - \sigma_{l-1}}{\tau} \right\|_{L^{N/2}(\Omega)} \|z_{l-1}\|_V^2 \right) \Bigg\} \\
&\leq C\Bigg\{1 + \|z_0\|_V^2 + \sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_{V^*}^2 \\
&\qquad + \tau \sum_{l=1}^{k} \left\| \frac{f_l - f_{l-1}}{\tau} \right\|_{V^*}^2 + \sum_{l=1}^{k} \left(\tau \left\| \frac{\sigma_l - \sigma_{l-1}}{\tau} \right\|_{L^{N/2}(\Omega)} + 1 \right) \|z_{l-1}\|_V^2 \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

が成り立つ．ここで $f \in W^{1,2}(0,T;V^*)$ を用いた．さらに, $\{f_k\}$, $\{\sigma_k\}$ の定め方より

$$
\tau \sum_{k=1}^{m} \left\| \frac{f_k - f_{k-1}}{\tau} \right\|_{V^*}^2 \leq C\,\|\partial_t f\|_{L^2(0,T;V^*)}^2, \quad \tau \sum_{k=1}^{m} \left\| \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{\tau} \right\|_{L^{N/2}(\Omega)} \leq C\,\|\partial_t \sigma\|_{L^2(0,T;L^{N/2}(\Omega))}
$$

である．したがって, 式 (5.3) に Gronwall の不等式 (の離散版, cf. [7]) を適用して,

$$
\begin{aligned}
\|z_k\|_V^2 &\leq C\left(1 + \|z_0\|_V^2 + \sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_{V^*}^2 + \|\partial_t f\|_{L^2(0,T;V^*)}^2\right) \exp\left(\tau \sum_{l=1}^{k} \left\| \frac{\sigma_l - \sigma_{l-1}}{\tau} \right\|_{L^{N/2}(\Omega)} + 1\right) \\
&\leq C\left(1 + \|z_0\|_V^2 + \sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_{V^*}^2 + \|\partial_t f\|_{L^2(0,T;V^*)}^2\right) \exp\left(\|\partial_t \sigma\|_{L^1(0,T;L^{N/2}(\Omega))} + 1\right)
\end{aligned}
$$

for $k = 1, 2, \ldots, m$ が成り立つ．よって結論が従う． □

これを用いて $(\partial_t z_\tau)$ の V ノルムおよび $(\overline{z}_\tau)$ の X ノルムに関する次の評価を得るが, 紙面の都合によりそれらの証明は省略する.

Lemma 5.2. 定数 $C > 0$ が τ および T とは独立に存在して, 次を満たす.

$$\|\partial_t z_\tau(t)\|_V^2 \le C\left(\|\partial_t \sigma_\tau(t)\|_{L^{N/2}(\Omega)}^2 + \|\partial_t f_\tau(t)\|_{V^*}^2\right) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T) \text{ and all } \tau > 0. \tag{5.4}$$

Lemma 5.3. 定数 τ に依存しない定数 $C > 0$ が存在して,

$$\tau \sum_{k=1}^m \|z_k\|_X^2 \le C\tau \sum_{k=1}^m \left(\|z_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f_k\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\sigma_k\|_{L^{N/2}(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|z_0\|_X^2\right).$$

不等式 (5.4) の証明に代えて, その難点をかいつまんで説明する. 拡散方程式のように $\partial_t z$ を陽に含む方程式に対しエネルギー法を用いて $\partial_t z$ の H^1 ノルム評価を得たいならば, 例えばテスト関数として $\partial_t z$ を選ぶのが一般的である. しかし方程式 (1.1) では時間微分項に非線形作用素 $\partial I_{(-\infty,0]}$ が作用しており, さらにそれは次の意味で退化している: u, $v \in L^2(\Omega)$ に対して $v \in \partial I_{(-\infty,0]}(u)$ in $L^2(\Omega)$ が成り立っているならば, $uv = 0$ a.e. in Ω, 特に $(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv\,\mathrm{d}x = 0$. そのため方程式に $\partial_t z$ をテストしたとしても, $\partial_t z$ が方程式から消えてしまい, 我々が求めている評価を得ることができない. そこで方程式の代わりに, 方程式を時間微分したものに $\partial_t z$ をテストする操作を考える. 前節で定式化した (1.1) の時間離散化 (4.3) はこの操作を正当化するための一つの手段であり, またこれにより形式計算では到達し得ない非線形項の精密な評価が得られる.

最後に (z_τ) の相対コンパクト性を示す. これにより強収束部分列を抜き出すことができるようになる. 証明はいわゆる Ascoli-Arzelá の定理による.

Lemma 5.4. 集合 (z_τ) は $C([0,T];V)$ 上プレコンパクトである.

Proof. 初めに (z_τ) の $C([0,T];V)$ 上での同程度連続性をいう. Lemma 5.2 により, 各 $t, s \in [0,T]$ に対して

$$\|z_\tau(t) - z_\tau(s)\|_V \le \int_s^t \|\partial_t z_\tau(r)\|_V\,\mathrm{d}r \le |t-s|^{1/2}\,\|\partial_t z_\tau\|_{L^2(0,T;V)} \le C\,|t-s|^{1/2}$$

が成り立つ. よって (z_τ) は $C([0,T];V)$ 上同程度連続である. さらに, (z_τ) は $L^2(0,T;X)$ 上有界である. 実際,

$$\|\Delta z_\tau(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \le \frac{t_k - t}{\tau}\|\Delta z_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{t - t_{k-1}}{\tau}\|\Delta z_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{for a.e. } t \in (t_{k-1}, t_k)$$

が $k = 1, \ldots, m$ で成り立ち, これにより

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\Delta z_\tau(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\,\mathrm{d}t \le \frac{\tau}{2}\|\Delta z_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{2}\|\Delta z_k\|_{L^2(\Omega)}^2$$

が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}\int_0^T \|\Delta z_\tau(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\Delta z_\tau(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \,\mathrm{d}t \\ &\le \frac{\tau}{2}\sum_{k=1}^m \|\Delta z_{k-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\tau}{2}\sum_{k=1}^m \|\Delta z_k\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\le \frac{\tau}{2}\|\Delta z_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta \overline{z}_\tau\|_X^2\end{aligned}$$

であり, Lemma 5.3 により $(\overline{z}_\tau)$ は $L^2(0,T;X)$ 上有界であるから, (z_τ) は $L^2(0,T;X)$ 上有界である．ここで X は V にコンパクトに埋め込まれるから, [11, Theorem 3] を用いると (z_τ) は $C([0,T];V)$ 上プレコンパクトである． □

上記の Lemma 5.2 – 5.4 により, (z_τ) と $(\overline{z}_\tau)$ は弱収束部分列を持つことが分かる．正確には, 部分列 $(\tau') \subset (\tau)$ と関数 $z \in W^{1,2}(0,T;V) \cap L^2(0,T;X)$ が存在して,

$$\begin{aligned} z_{\tau'} \to z \quad & \text{weakly in } W^{1,2}(0,T;V), \\ & \text{strongly in } C([0,T];V), \\ \overline{z}_{\tau'} \to z \quad & \text{weakly in } L^2(0,T;X) \end{aligned}$$

を満たす．以下, 部分列 (τ') を改めて (τ) と書くことにする．

最後に, 弱極限 z が方程式 (1.1) の解であることを確かめる．証明の方針はいわゆる Minty's trick の応用である．

Lemma 5.5. 極限 z は (1.1) の強解である．

Proof. 証明は [2] などを参照． □

以上で Theorem 3.2 の証明が完了する．

6 解の定性的性質

本節では問題 (1.1) の解の満たす定性的性質について述べた Theorem 3.3 を証明する．

Proof of Theorem 3.3. 関数 $z = z(x,t)$ を (1.1) の強解とする．不可逆性 (i) は, z が (1.1) の解であることから直ちに従う．以下, (ii) と (iii) が成り立つことをいう．関数 z について,

$$-\Delta z(t) + \lambda z(t) + \sigma(t)z(t) - f(t) \le 0 \quad \text{a.e. in } \Omega \tag{6.1}$$

がほとんどすべての $t \in [0,T]$ について成り立つ．実数 $s \in \mathbb{R}$ に対して $\beta(s) = \gamma(s) + Ls$ とおく．ただし $L > 0$ は Theorem 3.2 の仮定に現れる定数とする．このとき, ほとんどすべての $t \in [0,T]$

と $v \le z(t)$ a.e. in Ω を満たす関数 $v \in V$ に対して, (6.1) より

$$
\begin{aligned}
0 &\le \int_\Omega \left(-\Delta z(t) + \lambda z(t) + \sigma(t)\gamma(z(t)) - f(t)\right)(v - z(t))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega \left(-\Delta z(t) + (\lambda - L\sigma(t))z(t) + \sigma(t)\beta(z(t)) - f(t)\right)(v - z(t))\,\mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2}\|\nabla z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega (\lambda - L\sigma(t))\,|v|^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega (\lambda - L\sigma(t))\,|z(t)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega \sigma(t)\big(\hat{\beta}(v) - \hat{\beta}(z(t))\big)\,\mathrm{d}x - \langle f(t), v\rangle_V + \langle f(t), z(t)\rangle_V \\
&= E(v,t) - E(z(t),t)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. ここで $s \mapsto \beta(s)$ は単調であることと, $\lambda - L\sigma \ge 0$ a.e. in $\Omega \times (0,T)$ であることを使った. また, $t \mapsto E(z(t),t)$ は $[0,T]$ 上連続 (実際は絶対連続まで分かる) であるから, (ii) が従う.

(iii) について, 関数 $t \mapsto E(z(t),t)$ を t で微分すると, 連鎖率により

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E(z(t),t) &= \int_\Omega \left(-\Delta z(t) + \lambda z(t) + \sigma(t)\gamma(z(t)) - f(t)\right)\partial_t z(t)\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega \partial_t\sigma(t)\hat{\gamma}(z(t))\,\mathrm{d}x - \langle \partial_t f(t), z(t)\rangle_V \\
&= \int_\Omega \partial_t\sigma(t)\hat{\gamma}(z(t))\,\mathrm{d}x - \langle \partial_t f(t), z(t)\rangle_V \qquad \text{for a.e. } t \in (0,T)
\end{aligned}
$$

が成り立つ. したがって, 任意の $s, t \in [0,T]$ に対して

$$
E\left(z(t),t\right) - E\left(z(s),s\right) = \int_s^t \int_\Omega \partial_t\sigma(r)\hat{\gamma}(z(r))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r - \int_s^t \langle \partial_t f(r), z(r)\rangle_V\,\mathrm{d}r
$$

が成り立つ. □

参考文献

[1] G. Akagi and M. Kimura, Unidirectional evolution equations of diffusion type, J. Differential Equations **266** (2019), no. 1, 1–43.

[2] G. Akagi and K. Sato, Evolution equations with complete irreversibility and energy conservation, submitted.

[3] L. Ambrosio and V.M. Tortorelli, Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via Γ-convergence, Comm. Pure Appl. Math. **43** (1990), no. 8, 999–1036.

[4] L. Ambrosio and V. M. Tortorelli, On the approximation of free discontinuity problems, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **6** (1992), no. 1, 105–123.

[5] T. Arai, On the existence of the solution for $\partial\varphi(u'(t)) + \partial\psi(u(t)) \ni f(t)$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo sec. IA Math. **26** (1979), 75–96.

[6] V. Barbu, Existence theorems for a class of two point boundary problems, J. Differential Equations **17** (1975), 236–257.

[7] D.S. Clark, Short proof of a discrete Gronwall inequality, Discrete Appl. Math. **16** (1987), no. 3, 279–281.

[8] P. Colli and A. Visintin, On a class of doubly nonlinear evolution equations, Comm. Partial Differential Equations **15** (1990), no. 5, 737–756.

[9] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 24, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[10] T. Senba, On some nonlinear evolution equation, Funkcial. Ekvac. **29** (1986), no. 3, 243–257.

[11] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **146** (1987), 65–96.

対数的正則局所環の正準加群について

日本大学大学院　総合基礎科学研究科　地球情報数理科学専攻
伊城　慎之介 (Shinnosuke Ishiro)

1　導入

対数的正則性とはベースを持たないトーリック多様体の理論を構築するために加藤和也氏によって導入された概念である ([Kat94])。これは環やスキームに対して定義される概念で、可換環論的にも興味深い性質を数多く持っている。さらに任意の標数で定義されるため、近年急速に発展を遂げている混標数の特異点論の重要な具体例になることが期待できる。このような動機から講演者は対数的正則局所環の環論的な性質の解析に着手し、その第一歩目の研究として対数的正則局所環の正準加群の構造と Gorenstein 性の判定法を与えた。本稿ではこれらについて紹介する。

以下、環やモノイドは常に可換であるとする。

2　正準加群

まずは正準加群の定義を紹介する。

定義 2.1.
1. $(R, \mathfrak{m}, k)$ を Cohen-Macaulay 局所環とする。R-加群 ω_R が型 (type) が 1 の極大 Cohen-Macaulay 加群かつ入射次元が有限のとき、これを**正準加群**という。
2. R が (局所でない)Cohen-Macaulay 環とする。任意の R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に関する局所化 $(\omega_R)_{\mathfrak{m}}$ が局所環 $R_{\mathfrak{m}}$ の正準加群であるとき ω_R を**正準加群**という。

注意 2.2. 局所環の正準加群は同型を除いて一意的であるが、局所環でない場合は一意的とは限らない。

正準加群の定義は抽象的であるが、明示的に書き下すことができるクラスも存在する。よく知られている例の 1 つが 4 節で説明する半群環である。

3　対数的構造と対数的正則性

対数的正則性を定義するために必要な性質を紹介する。モノイドや対数的構造に関する用語は [Ogus] に基づく。

定義 3.1. $\mathcal{Q}$ をモノイドとする。

1. 任意の $q, q', p \in \mathcal{Q}$ に対して $q + p = q' + p$ ならば $q = q'$ が成り立つとき、$\mathcal{Q}$ は **integral** であるという。
2. $\mathcal{Q}$ が有限生成かつ integral であるとき、$\mathcal{Q}$ は **fine** であるという。
3. $\mathcal{Q}^* = 0$ であるとき、$\mathcal{Q}$ は **sharp** であるという。
4. $\mathcal{Q}$ が次の 2 条件を満たすとき $\mathcal{Q}$ は **saturated** であるという。
   (a) $\mathcal{Q}$ は integral である。
   (b) $q \in \mathcal{Q}^{gp}$ が $nq \in \mathcal{Q}$ ならば $q \in \mathcal{Q}$ である。

例 3.2. (1) $\mathbb{N}^r$ は fine, sharp, saturated である。
(2) $\mathcal{Q}_1$ を $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(1,3)$ で生成される $\mathbb{N}^2$ の部分モノイドとする。このとき $\mathcal{Q}_1$ は fine, sharp, saturated である。
(3) $\mathcal{Q}_2$ を $(1,0)$, $(1,2)$, $(1,3)$ で生成される $\mathbb{N}^2$ の部分モノイドとする。このとき $\mathcal{Q}_2$ は fine, sharp だが saturated でない。

定義 3.3. R を環、$\mathcal{Q}$ をモノイド、$\alpha : \mathcal{Q} \to R$ をモノイド準同型とする。このとき、三つ組 $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ を**対数的環（log ring）**という。また R が局所環で、$\alpha^{-1}(R^\times) = \mathcal{Q}^*$ を満たすとき、対数的環 $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ を**対数的局所環（local log ring）**という。

例 3.4. R を環、$\mathcal{Q}$ をモノイドとする。また R 上のモノイド代数 $R[\mathcal{Q}]$ とするとき $(R[\mathcal{Q}], \mathcal{Q}, \iota)$ は対数的環であるが対数的局所環ではない。ただし $\iota : \mathcal{Q} \hookrightarrow R[\mathcal{Q}]$ は包含写像とする。

次に対数的正則局所環の定義を紹介する。

定義 3.5. $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ を対数的局所環とする。また R はネーター環、$\overline{\mathcal{Q}} = \mathcal{Q}/\mathcal{Q}^*$ が fine, saturated と仮定する。また I_α を Q^+ の α による像で生成される R のイデアル(つまり $I_\alpha = \langle \alpha(x) \mid x \in \mathcal{Q} \backslash \mathcal{Q}^* \rangle$) とする。このとき以下の条件を満たすとき $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ を**対数的正則局所環**という。

(1) R/I_α は正則局所環である。
(2) $\dim R = \dim R/I_\alpha + \dim \mathcal{Q}$ が成り立つ。

条件 (1) は対数的正則局所環の特異点の情報はモノイドから来ることを表しており、条件 (2) は環とモノイドの間のある種の互換性を表している。

注意 3.6. $\mathcal{Q} \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{Q}}$ は split な全射なので、R の性質を調べる際はモノイドの取り替えによって $\mathcal{Q}$ を fine, sharp, saturated であると仮定して良い。

対数的正則局所環は半群環と類似の性質を持つが、その多くは次の構造定理より従う。

定理 3.7. $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ を対数的局所環とする。ただし R はネーター環、$\mathcal{Q}$ は fine, sharp, saturated であるとする。このとき以下が成り立つ。

1. R は等標数であると仮定する。このとき R が対数的正則局所環であることと次の図式が可換

であることは同値である。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Q} \arrow[r] \arrow[d] & k[\![\mathcal{Q} \oplus \mathbb{N}^r]\!] \arrow[d, "\phi", "\cong"'] \\ R \arrow[r] & \widehat{R}. \end{tikzcd}$$

ただし k は R の剰余体である。

2. R は混標数であると仮定する。このとき R が対数的正則局所環であることと次の図式が可換であることは同値である。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Q} \arrow[r] \arrow[d] & C(k)[[\mathcal{Q} \oplus \mathbb{N}^r]] \arrow[d, two heads, "\phi"] \\ R \arrow[r] & \widehat{R} \end{tikzcd}$$

ただし $C(k)$ は剰余体 k の Cohen 環（剰余体が k であるような完備離散付値環)、$\operatorname{Ker}\phi$ は単項生成であり、生成元の定数項は p である。

つまり完備対数的正則局所環は、等標数の場合は完備なモノイド代数（完備半群環)、混標数の場合は完備なモノイド代数を単項イデアルで割った剰余環と同型である。また定義 3.5 の条件 1 や定理 3.7 より対数的正則局所環はモノイド部分と正則部分を持つことがわかる。

半群環との類似性で代表的なものとして以下の定理が成り立つ。

定理 3.8. $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ を対数的正則局所環とする。このとき R は Cohen-Macaulay かつ normal である。

4 対数的正則局所環の正準加群

本稿の主結果を述べる前に半群環（$k[\mathcal{Q}]$）の正準加群について紹介する。半群環は可換環論において非常によく研究されているクラスの一つであり、Hochster によって Cohen-Macaialy 環であることが示されている。またその正準加群は以下のような形をしている。

定理 4.1 ([BH, Theorem 6.3.5 (1)])**.** k を体、$\mathcal{Q}$ を $\mathbb{N}^l$ の部分モノイドとする。このときイデアル

$$\langle q \in k[\mathcal{Q}] \mid q \in \operatorname{relint} \mathcal{Q} \rangle$$

は $k[\mathcal{Q}]$ の正準加群である。ただし $\operatorname{relint} \mathcal{Q}$ は $\mathcal{Q}$ の相対内部である。

例 4.2. 例 3.2 の $\mathcal{Q}_1$ を考える。このとき $\operatorname{relint} \mathcal{Q}_1$ は $\langle (1,1), (1,2) \rangle$ で生成される。このとき $k[\mathcal{Q}_1]$ は $k[x, xy, xy^2, xy^3]$ と同型であり、$\omega_{k[\mathcal{Q}_1]}$ は xy, xy^2 で生成される $k[x, xy, xy^2, xy^3]$ のイデアルと同型である。

次に対数的正則局所環の正準加群について述べる。対数的正則局所環の正準加群は次のような形をしている。

定理 4.3 ([Ish22])**.** $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ を対数的正則局所環とする。また $\mathcal{Q} \subseteq \mathbb{N}^l$ と仮定する。このとき

$$\omega_R := \langle (x_1 \cdots x_d)\alpha(q) \mid q \in \operatorname{relint} Q \rangle$$

は R の正準加群である。

注意 4.4. 注意 2.2 でも述べた通り局所環の正準加群は同型の違いを除いて一意的である。したがって ω_R は $(x_1 \cdots x_d)$ 倍写像を用いることで $\langle \alpha(q) \mid q \in \operatorname{relint} \mathcal{Q} \rangle$ と同型なので半群環の場合と同じ表記を持つこともわかる。

定理 4.3 を用いることで対数的正則局所環に対してトーリック環と Gorenstein 性の判定法 ([BH, Theorem 6.3.5 (2)]) と同様のものを与えることができる。したがって以下のようにまとめることができる。

系 4.5 ([Ish22])**.** 定理 4.3 と同様の設定のもとで以下は同値である。

1. R は Gorenstein 環である。
2. $k[\mathcal{Q}]$ は Gorenstein 環である。
3. ある $c \in \operatorname{relint} \mathcal{Q}$ が存在して $c + \mathcal{Q} = \operatorname{relint} \mathcal{Q}$ が成り立つ。

最後に 2 次元の場合を考察する。系 4.5 を用いてトーリック環の場合に帰着させることで、次の定理を得ることができる。

命題 4.6 ([Ish22])**.** $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ を対数的正則局所環とする。さらに $\mathcal{Q} \subset \mathbb{N}^2$ の次元が 2 であると仮定する。このとき R が Gorenstein 環であることと $\mathcal{Q} \cong \langle (n+1, 0), (1, 1), (0, n+1) \rangle$ であることは同値である (ただし、$n \geq 1$)。

この命題から例 3.2 に現れるモノイド $\mathcal{Q}_1$ を対数的構造に持つ対数的正則局所環 $(R, \mathcal{Q}_1, \alpha)$ は Gorenstein ではないことがわかる。

参考文献

[BH] W. Bruns and H. J. Herzog, *Cohen-macaulay rings*, Cambridge studies in advanced mathematics **39** Cambridge university press.

[GR22] O. Gabber and L. Ramero, *almost rings and perfectoid rings*, `math.univ-lille1.fr/~ramero/hodge.pdf`.

[Ish22] S. Ishiro, *The canonical module of a local log-regular ring*, arXiv:2209.04828.

[Kat94] K. Kato, *Toric singularities*, American Journal of Mathematics, 116 (5) 1073–1099 (1994).

[Ogus] A. Ogus, *Lectures on logarithmic geometry*, Cambridge studies in advanced mathematics **178**, Cambridge University Press.

Functional equation for the multiple L-function

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
戸澗勇一郎 (Yuichiro TOMA)

概要

多重ゼータ (L-) 関数はそれぞれ, Riemann ゼータ (Dirichlet L-) 関数の類似であり, いくつかの多重ゼータ (L-) 関数は Tricomi 型合流超幾何関数を含むある種の対称性を持っていることが知られている. 本稿では Mordell-Tornheim 型多重 L-関数の関数等式の結果を紹介する. これは, Mellin-Barnes 積分公式を用いて先行研究の証明を簡略化するものでもある.

1 導入

複素数 $s_j = \sigma_j + it_j$ $(j = 1, \ldots, r+1)$, 自然数 r に対して, r 重 Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数は以下の多重級数で定義される.

$$\zeta_{MT,r}(s_1, \ldots, s_r, s_{r+1}) = \sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty} \frac{1}{m_1^{s_1} \ldots m_r^{s_r} (m_1 + \cdots + m_r)^{s_{r+1}}}. \tag{1.1}$$

この多重級数は

$$\sum_{\ell=1}^{j} \mathrm{Re}(s_{k_\ell}) + \mathrm{Re}(s_{r+1}) > j, \tag{1.2}$$

の領域で絶対収束する. ただし, $1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_j \le r$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ である ([11, Lemma 2.1]). 松本 [8] は Mellin-Barnes 積分 (後述の (2.2)) を用いることで, (1.1) が $\mathbb{C}^{r+1}$ 全域へ有理型に接続されることを示し, その possible singularities を与えた.

この級数の起源は Tornheim に遡る. Tornheim は 1950 年代に $\zeta_{MT,2}(p, q, r)$ $(p, q, r \in \mathbb{N})$ の特殊値を最初に考察した. また, 独立して Mordell が $\zeta_{MT,2}(k, k, k)$ $(k \in \mathbb{N})$ や,

$$\sum_{m_1,\ldots,m_r=1}^{\infty} \frac{1}{m_1 \ldots m_r (m_1 + \cdots + m_r + a)} \quad (a > -r)$$

を研究している. これらが級数 (1.1) が Mordell-Tornheim 型と呼ばれる所以である. 特に $r = 2$ の場合は Tornheim 型 2 重ゼータ関数や Tornheim 型 2 重和とも呼ばれる. また, (1.1) の定式化は松本 [7] による.

多重ゼータ関数は Riemann ゼータ関数の多重級数への一般化であり, $r = 1$ の場合は Riemann ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

となる．右辺の級数は $\sigma > 1$ で絶対収束するが, $s = 1$ を除く $\mathbb{C}$ 平面へ解析接続される．また, Riemann ゼータ関数は関数等式

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(s/2)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma((1-s)/2)\zeta(1-s)$$

を満たす. 関数等式の $s \leftrightarrow 1-s$ の関係から Riemann ゼータ関数が $\sigma = 1/2$ で対称性を持っていることが分かる.

では, 関数等式を多重ゼータ関数へ一般化することは可能なのであろうか. 松本 [9] は Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数を考察した. Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数は

$$\zeta_{EZ,2}(s_1, s_2) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^{s_1}(m+n)^{s_2}}. \tag{1.3}$$

で定義される. Zhao [14], 秋山-江上-谷川 [1] により独立に (1.3) は $\mathbb{C}^2$ 全域へ有理型に接続されることが知られている.

今, $\zeta_{EZ,2}(s_1, s_2)$ の modefied 関数として $g(s_1, s_2)$ を定める:

$$g(s_1, s_2) = \zeta_{EZ,2}(s_1, s_2) - \frac{\Gamma(1-s_1)\Gamma(s_1+s_2-1)}{\Gamma(s_2)}\zeta(s_1+s_2-1).$$

また, $\sigma_\alpha(k) = \sum_{d|k} d^\alpha$ を約数関数, $\Psi(a, c; x)$ は Tricomi 型合流超幾何関数

$$\Psi(a, c; x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty e^{i\phi}} e^{-xy}y^{a-1}(1+y)^{c-a-1}dy \tag{1.4}$$

とする. ただし, $\mathrm{Re}(a) > 0, -\pi < \phi < \pi, |\phi + \arg x| < \pi/2$ ([3, 6.5 (2)]).

このとき, 以下の等式が成り立つ.

Theorem 1.1 ([9, Theorem 1])**.**

$$\begin{aligned}\frac{g(s_1, s_2)}{(2\pi)^{s_1+s_2-1}\Gamma(1-s_1)} &= \frac{g(1-s_2, 1-s_1)}{i^{s_1+s_2-1}\Gamma(s_2)} \\ &\quad + 2i\sin\left(\frac{\pi}{2}(s_1+s_2-1)\right)\sum_{k=1}^{\infty}\sigma_{s_1+s_2-1}(k)\Psi(s_2, s_1+s_2; 2\pi ik),\end{aligned}$$

が成り立つ.

この定理から $s_1 \leftrightarrow 1-s_2$ の間に対応があることが分かる．この等式は多重ゼータ関数の関数等式と呼ばれている．松本 [9] は contour 積分を用いて Theorem 1.1 を示した．同様の手法を用いて (1.3) の和の分子に指標などを付加させた 2 重 L 関数の関数等式の結果が知られている．(例えば, [5], [6], [2], [11]). 岡本-小野塚 [11] は松本と同様の手法を用いて (1.1) の関数等式を示した. (1.1) の modefied 関数 g_r とする:

$$\begin{aligned}g_r(s_1, \ldots, s_r, s_{r+1}) &= \zeta_{MT,r}(s_1, \ldots, s_r, s_{r+1}) \\ &\quad - \frac{\Gamma(1-s_r)\Gamma(s_r+s_{r+1}-1)}{\Gamma(s_{r+1})}\zeta_{MT,r-1}(s_1, \ldots, s_{r-1}, s_r+s_{r+1}-1).\end{aligned}$$

このとき,

Theorem 1.2 ([11, Theorem 1.2])**.**

$$
\begin{aligned}
&\frac{g_r(-s_1,\dots,-s_{r-1},1-s_{r+1},1-s_r)}{i^{s_r+s_{r+1}-1}\Gamma(s_{r+1})}\\
&+e^{\frac{\pi i}{2}(s_r+s_{r+1}-1)}F_r^+(s_1,\dots,s_r,s_{r+1})+e^{-\frac{\pi i}{2}(s_r+s_{r+1}-1)}F_r^-(s_1,\dots,s_r,s_{r+1})\\
&=\frac{g_r(s_1,\dots,s_{r-1},s_r,s_{r+1})}{(2\pi)^{s_r+s_{r+1}-1}\Gamma(1-s_r)}\\
&+e^{-\frac{\pi i}{2}(s_r+s_{r+1}-1)}\sum_{\ell_1,\dots,\ell_{r-1}=1}^{\infty}\sigma_{MT,r-1}(s_1,\dots,s_{r-1},s_r+s_{r+1}-1;\ell_1,\dots,\ell_{r-1})\\
&\times\{\Psi(s_{r+1},s_r+s_{r+1};2\pi i(\ell_1+\cdots+\ell_{r-1}))+\Psi(s_{r+1},s_r+s_{r+1};-2\pi i(\ell_1+\cdots+\ell_{r-1}))\}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ただし，

$$
\begin{aligned}
F^{\pm}(s_1,\dots,s_r,s_{r+1})=&\sum_{\ell_1,\dots,\ell_{r-1}=1}^{\infty}\frac{\sigma_{s_1+\cdots+s_r+s_{r+1}-1}(\gcd(\ell_1,\dots,\ell_{r-1}))}{\ell_1^{s_1}\dots\ell_{r-1}^{s_{r-1}}}\\
&\times\Psi(s_{r+1},s_r+s_{r+1};\pm 2\pi i(\ell_1+\cdots+\ell_{r-1})),
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

$$
\sigma_{MT,r}(s_1,\dots,s_{r-1},s_{r+1};\ell_1,\dots,\ell_r)=\sum_{\substack{d_1|\ell_1,\dots,d_r|\ell_r\\ d_j\geq\frac{\ell_j}{\gcd(\ell_1,\dots,\ell_r)}}}d_1^{s_1}\dots d_r^{s_r}(d_1+\cdots+d_r)^{s_{r+1}}. \tag{1.6}
$$

Remark 1.3. Theorem 1.2は $g_2(0,s_1,s_2)$ とすれば, Thoerem 1.1を復元する．したがって, 岡本-小野塚 [11] の結果は松本 [9] の一般化になっている.

2 主結果

本稿では, 岡本-小野塚 [11] による結果を多重 L-関数類似を考察した．Mordell-Tornheim 型の多重 Dirichlet L-関数は, $q>1$ を法とする Dirichlet 指標 $\chi_1,\dots,\chi_r$ をに対して

$$
L_{MT,r}(s_1,\dots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\dots,\chi_r)=\sum_{m_1,\dots,m_r=1}^{\infty}\frac{\chi_1(m_1)\dots\chi_r(m_r)}{m_1^{s_1}\dots m_r^{s_r}(m_1+\cdots+m_r)^{s_{r+1}}} \tag{2.1}
$$

と定義される．この多重 Dirichlet 級数は Maoxiang Wu [12] により導入され, Wu は (2.1) が $\mathbb{C}^{r+1}$ 全域へ有理型に接続されることを示した ([10, Theorem 3] 参照)．さらに [12] で, Wu は $\chi_1,\dots,\chi_r$ がすべて principal でなければ, $L_{MT,r}$ は整関数であり, k 個の principal な指標 $\chi_{j_1},\dots\chi_{j_k}$ があれば, 以下の possible singularities:

$$
\sum_{a=1}^{h}s_{j_{i(a)}}+s_{r+1}=h-\ell\left(1-\left[\frac{h}{r}\right]\right)\quad(1\leq h\leq k,1\leq i(1)<\cdots<i(h)\leq k,\ell\in\mathbb{N}_0)
$$

を持つことを示した.

主定理を述べる前に記号を準備しておく．関数

$$
\begin{aligned}
&F^{\pm}(s_1,\dots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\dots,\chi_{r-1},\chi_r)\\
&\quad=\sum_{\ell_1,\dots,\ell_{r-1}=1}^{\infty}\frac{\sum_{n|\gcd(\ell_1,\dots,\ell_{r-1})}n^{s_1+\dots+s_r+s_{r+1}-1}\chi_1(\frac{\ell_1}{n})\dots\chi_{r-1}(\frac{\ell_{r-1}}{n})\chi_r(n)}{\ell_1^{s_1}\dots\ell_{r-1}^{s_{r-1}}}\\
&\quad\times\Psi(s_{r+1},s_r+s_{r+1};\pm 2\pi i(\ell_1+\dots+\ell_{r-1})/q)
\end{aligned}
$$

を定める．また,

$$
\kappa_j=\kappa(\chi_j)=\begin{cases}0 & if \quad \chi_j(-1)=1\\ 1 & if \quad \chi_j(-1)=-1\end{cases}
$$

とし, $\tau(\chi)=\sum_{a=1}^{q}\chi(a)e^{2\pi i\frac{a}{q}}$ を Gauss 和とする．このとき, 本稿の主結果である以下が得られる:

Theorem 2.1. *primitive な Dirichlet 指標* χ_r *mod* $q>1$ *に対して,*

$$
\begin{aligned}
&L_{MT,r}(s_1,\dots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\dots,\chi_r)\\
&=\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{s_r+s_{r+1}-1}\tau(\chi_r)i^{-\kappa_r}\Gamma(1-s_r)\\
&\quad\times\Big\{e^{\pi i\frac{s_r+s_{r+1}+\kappa_r-1}{2}}F^{+}(s_1,\dots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\dots,\chi_{r-1},\overline{\chi}_r)\\
&\qquad+e^{-\pi i\frac{s_r+s_{r+1}+\kappa_r-1}{2}}F^{-}(s_1,\dots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\dots,\chi_{r-1},\overline{\chi}_r)\Big\}.
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

この主結果で, $L_{MT,r}(s_1,\dots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\dots,\chi_r)$ と $L_{MT,r}(-s_1,\dots,-s_{r-1},1-s_{r+1},1-s_r;\chi_1,\dots,\chi_r)$ を組み合わせれば, Thoerem 1.2の χ 類似の式が得られる．特に, $q=1$ とすると Thoerem 1.2と一致する．岡本-小野塚 [11] は松本 [9] が用いた Hankel contour 積分 ([13, Section 12.22, p. 245] 参照) を Mordell-Tornheim 型多重ゼータ関数に応用することで Theorem 1.2を証明したが, 今回は Mellin-Barnes 積分を用いることによって Thoerem 2.1の証明を与えた．これは

$$
(1+\lambda)^{-s}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(s+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s)}\lambda^z dz, \tag{2.2}
$$

ただし, $s,\lambda\in\mathbb{C}$, $\sigma=\mathrm{Re}(s)>0, |\arg\lambda|<\pi, \lambda\neq 0$ であり, $c\in\mathbb{R}$ は $-\sigma<c<0$ を満たし, 積分路 (c) は虚軸に平行な直線 $\mathrm{Re}(z)=c$ である ([13, Section 14.51, p. 289, Corollary] 参照)．この Mellin-Banes 積分を用いるアイディアは木内-谷川-Zhai [4, Section 2] から来ており, [4, Section 2] で彼らは Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数 (1.3) の Mellin-Barnes 積分表示と Tricomi 型合流超幾何関数 (1.4) の Mellin-Banes 積分表示

$$
\Psi(a,c;x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\gamma)}\frac{\Gamma(a+z)\Gamma(-z)\Gamma(1-c-z)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)}x^z dz \tag{2.3}
$$

を結びつけた．ただし, $-\mathrm{Re}(a)<\gamma<\min\{0,1-\mathrm{Re}(c)\}, -3\pi/2<\arg x<3\pi/2$ ([3, 6.5 (5)])．本稿では [4, Section 2] の手法を Mordell-Tornheim 型多重 L-関数に一般化することで主結果の証明を与えた．次の Section でその証明の概略について説明していく．

3 主結果の証明の概略

ここでは主結果である Theorem 2.1の証明の概略を述べる．最初に $(s_1,\dots,s_r,s_{r+1})\in\mathbb{C}^{r+1}$ は絶対収束領域 (1.2) に入っていると仮定する．このとき Mellin-Banes 積分 (2.2) を適用することで,

$$\begin{aligned}
&L_{MT,r}(s_1,\dots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\dots,\chi_r)\\
&=\sum_{m_1,\dots,m_r=1}^{\infty}\frac{\chi_1(m_1)\dots\chi_r(m_r)}{m_1^{s_1}\dots m_r^{s_r}\left(m_r\left(1+\frac{m_1+\dots+m_{r-1}}{m_r}\right)\right)^{s_{r+1}}}\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{(c)}\frac{\Gamma(s_{r+1}+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_{r+1})}L_{MT,r-1}(s_1,\dots,s_{r-1},-z;\chi_1,\dots,\chi_{r-1})\\
&\quad\times L(s_r+s_{r+1}+z,\chi_r)dz
\end{aligned}$$

を得る．ただし, $\max\{1-\sigma_r-\sigma_{r+1},-\sigma_{r+1}\}<c<\min_{1\le j\le r-1}\{0,\sum_{\ell=1}^{j}\mathrm{Re}(s_{k_\ell})-j\}$ $(1\le k_1<k_2<\dots<k_j\le r-1)$．ここで $\sigma_r<0$ を仮定する．このとき $-\sigma_{r+1}<-\sigma_r-\sigma_{r+1}<1-\sigma_r-\sigma_{r+1}$ となるので $-\sigma_{r+1}<\eta<-\sigma_r-\sigma_{r+1}$ となるような $\eta\in\mathbb{R}$ をとる．

積分路を (c) から (η) へ左へ移動させて, さらに Dirichlet L-関数の関数等式

$$L(1-s,\chi)=\varepsilon(\chi)L(s,\overline{\chi})2^{1-s}\pi^{-s}q^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(s)\cos\frac{\pi(s-\kappa)}{2}\tag{3.1}$$

を用いて (ただし, $\varepsilon(\chi)=\tau(\chi)/i^{\kappa_j}\sqrt{q}$) 計算すると,

$$\begin{aligned}
&L_{MT,r}(s_1,\dots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\dots,\chi_r)\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta)}\frac{\Gamma(s_{r+1}+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_{r+1})}L_{MT,r-1}(s_1,\dots,s_{r-1},-z;\chi_1,\dots,\chi_{r-1})\\
&\quad\times\varepsilon(\chi_r)\frac{(2\pi)^{s_r+s_{r+1}+z}}{\pi}q^{\frac{1}{2}-s_r-s_{r+1}-z}\Gamma(1-s_r-s_{r+1}-z)L(1-s_r-s_{r+1}-z,\overline{\chi_r})\\
&\quad\times\cos\frac{\pi(1-s_r-s_{r+1}-z-\kappa_r)}{2}dz.\\
&=q^{-\frac{1}{2}}\varepsilon(\chi_r)\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{s_r+s_{r+1}-1}\\
&\quad\times\sum_{\ell_1,\dots,\ell_{r-1}\ge1}\frac{\sum_{n|\gcd(\ell_1,\dots,\ell_{r-1})}n^{s_1+\dots+s_r+s_{r+1}-1}\chi_1(\frac{\ell_1}{n})\dots\chi_{r-1}(\frac{\ell_{r-1}}{n})\overline{\chi_r}(n)}{\ell_1^{s_1}\dots\ell_{r-1}^{s_{r-1}}}\\
&\quad\times\frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta)}\frac{\Gamma(s_{r+1}+z)\Gamma(-z)}{\Gamma(s_{r+1})}\Gamma(1-s_r-s_{r+1}-z)\\
&\quad\times\left(e^{\pi i\left(\frac{s_r+s_{r+1}+\kappa_r-1}{2}+\frac{z}{2}\right)}+e^{-\pi i\left(\frac{s_r+s_{r+1}+\kappa_r-1}{2}+\frac{z}{2}\right)}\right)\left(\frac{2\pi}{q}(\ell_1+\dots+\ell_{r-1})\right)^{z}dz.
\end{aligned}$$

ここで (2.3) を用いることで

$$\begin{aligned}
&L_{MT,r}(s_1,\dots,s_r,s_{r+1};\chi_1,\dots,\chi_r)\\
&=q^{-\frac{1}{2}}\varepsilon(\chi_r)\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{s_r+s_{r+1}-1}\Gamma(1-s_r)
\end{aligned}$$

$$\times \sum_{\ell_1,\dots,\ell_{r-1}\geq 1} \frac{\sum_{n|\gcd(\ell_1,\dots,\ell_{r-1})} n^{s_1+\dots+s_r+s_{r+1}-1}\chi_1(\frac{\ell_1}{n})\dots\chi_{r-1}(\frac{\ell_{r-1}}{n})\overline{\chi_r}(n)}{\ell_1^{s_1}\dots\ell_{r-1}^{s_{r-1}}}$$
$$\times \Big\{ e^{\pi i\frac{s_r+s_{r+1}+\kappa_r-1}{2}}\Psi(s_{r+1}, s_r+s_{r+1}; 2\pi i(\ell_1+\dots+\ell_{r-1})/q)$$
$$+ e^{-\pi i\frac{s_r+s_{r+1}+\kappa_r-1}{2}}\Psi(s_{r+1}, s_r+s_{r+1}; -2\pi i(\ell_1+\dots+\ell_{r-1})/q)\Big\}. \tag{3.2}$$

この等式 (3.2) は Mordell-Tornheim 型多重 L-関数の絶対収束領域 (1.2) かつ, $\sigma_r<0$ でのみでしか意味を持たないが, $\Psi(a,c;x)$ の漸近公式

$$\Psi(a,c;x)=\sum_{k=0}^{N-1}\frac{(-1)^k(a-c+1)_k(a)_k}{k!}x^{-a-k}+\rho_N(a,c;x)$$

(ただし, N は任意の非負整数, $(a)_k=\Gamma(a+k)/\Gamma(k)$ は Pochhammer 記号) を用いることで, (3.2) は $\mathbb{C}^{r+1}$ 上全域へ有理型へ接続することができる.

最後に Tricomi 型合流超幾何関数 $\Psi(a,c;x)$ の反転公式 [3, 6.5 (6)]

$$\Psi(a,c;x)=x^{1-c}\Psi(a-c+1,2-c;x)$$

を用いることで多重ゼータ関数の関数等式は Tricomi 型合流超幾何関数の対称性へ帰着される.

Remark 3.1. 主結果の Theorem 2.1では, Thoerem 1.2と違い, modefied 関数 g_r は現れない. これは primitive な Dirichlet 指標の L-関数は Riemann ゼータ関数と違い, $s=1$ で正則であるから Mellin-Barnes 積分の積分路を移動する際に留数が出てこないためである.

Remark 3.2. Mellin-Banes 積分を用いた今回の手法は (1.1) にも適用できて, (3.1) の代わりに Riemann ゼータ関数の関数の関数等式を使えば, Thoerem 1.2の別証明を与える.

4 特殊な場合

最後に, $r=2$ の場合 Theorem 2.1は小森-松本-津村 [6] による 2 重 L-関数の関数等式を復元することを紹介する. 小森-松本-津村 [6] は, χ_1,χ_2 は $q>1$ を法とする primitive な Dirichlet 指標に対して,

$$L_2^{\sqcup\!\sqcup}(s_1,s_2;\chi_1,\chi_2)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_1(m)\chi_2(n)}{m^{s_1}(m+n)^{s_2}}$$

を定め, 以下の関数等式を証明した ([6, Corollary 2.3]):

$$\left(\frac{2\pi i}{q}\right)^{\frac{1-s_1-s_2}{2}}\frac{\Gamma(s_2)}{\tau(\chi_1)}L_2^{\sqcup\!\sqcup}(s_1,s_2;\chi_1,\chi_2)=\left(\frac{2\pi i}{q}\right)^{\frac{s_1+s_2-1}{2}}\frac{\Gamma(1-s_1)}{\tau(\overline{\chi_1})}L_2^{\sqcup\!\sqcup}(1-s_2,1-s_1;\overline{\chi_2},\overline{\chi_1})$$

が超平面

$$\begin{cases} s_1+s_2=2k+1 & (k\in\mathbb{Z},\chi_1(-1)\chi_2(-1)=1)\\ s_1+s_2=2k & (k\in\mathbb{Z},\chi_1(-1)\chi_2(-1)=-1)\end{cases} \tag{4.1}$$

上で成り立つ.

primitive な Dirichlet 指標 $\chi_1, \chi_2 \mod q > 1$ に対して，$L_{MT,2}(0, s_1, s_2; \chi_1, \chi_2) = L_2^{\sqcup}(s_1, s_2; \chi_1, \chi_2)$ であり，超平面 (4.1) 上では合流超幾何関数を含む項は消えるので，Theorem 2.1は [6, Corollary 2.3] の Mordell-Tornheim 型多重 L-関数への一般化である．

参考文献

[1] Akiyama, S., Egami, S., Tanigawa, Y.: Analytic continuation of multiple zeta-functions and their values at non-positive integers, Acta Arith., **98**, 107-–116 (2001)

[2] Choie, Y., Matsumoto, K.: Functional equations for double series of Euler type with coefficients, Adv. Math, **292** (2016), 529-–557.

[3] Erdélyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F. G.: Higher Transcendental functions I, McGraw-Hill, New York (1953)

[4] Kiuchi, I., Tanigawa, Y., Zhai W.: Analytic properties of double zeta-functions, Indag. Math. (N.S.) **21**(1-2), 16-–29, (2011)

[5] Komori, Y., Matsumoto, K., Tsumora, H.: Functional equations and functional relations for the Euler double zeta-function and its generalization of Eisenstein type, Publ. Math. Debrecen **77**(1-2), 15–31 (2010)

[6] Komori, Y., Matsumoto, K., Tsumora, H.: Functional equations for double L-functions and values at non-positive integers, Int. J. Number Theory **7**, 1441–1461 (2011)

[7] Matsumoto, K.: On analytic continuation of various multile zeta-functions, in Number Theory for the Millennium II, Proc. of the Millennial Conference on Number Theory, M. A. Bennett et al. (eds.), pp. 417–440, A K Peters, Wellesley (2002)

[8] Matsumoto, K.: On Mordell-Tornheim and other multiple zeta-functions, in: Proceedings of the Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations (Bonn, 2002), D. R. Heath-Brown and B. Z. Moroz (eds.), Bonner Math. Schriften 360, Bonn, no. 25, 17 pp. (2003)

[9] Matsumoto, K.: Functional equations for double zeta-functions, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **136**(1), 1–7, (2004)

[10] Matsumoto, K.: Analytic properties of multiple zeta-functions in several variables, in “Number Theory: Tradition and Modernization”, Proc. 3rd China-Japan Seminar (Xi’an, 2004), (eds. W. Zhang and Y. Tanigawa), Springer, pp. 153-–173 (2006)

[11] Okamoto, T., Onozuka, T.: Functional equation for the Mordell-Tornheim multiple zeta-function, Funct. Approx. Comment. Math. **55**(2), 227–241, (2016)

[12] Wu, M.: On analytic continuation of Mordell-Tornheim and Apostol-Vu L-functions, Master Thesis, Nagoya University (2003)

[13] Whittaker, E.T., Watson, G.N.: A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press, Cambridge (1927)

[14] Zhao, J. Q.: Analytic continuation of multiple zeta function, Proc. Amer. Math. Soc. **128**,

1275–1283 (2000)

ギブス点過程に関するランダムシュレディンガー作用素の状態密度

京都大学大学院 人間・環境学研究科 共生人間学専攻
中川雄太 (Yuta NAKAGAWA)

概要

空間内にランダムに点を配置し、各点を中心として一点当たりのポテンシャルを置いてできるポテンシャルに関するシュレディンガー作用素を考える。累積状態密度関数 $N(\lambda)$ は、単位体積当たりの λ 以下の固有値の個数を意味する。本講演では、点同士に相互作用があるようなランダムな点の配置 (ギブス点過程) における $N(\lambda)$ ($\lambda \downarrow -\infty$) の漸近挙動が、相互作用の決め方によって大きく変わることを見る。特に、相互作用が無い場合 (ポアソン点過程) と比較する。

1 導入

ガラスに代表されるような結晶構造を持たない物質をアモルファス物質という。アモルファス物質はその構造ゆえに金属結晶とは異なる電子的性質を持つ。例えば、アモルファス物質特有の性質として、状態密度が基底エネルギー付近で希薄になるになる現象が知られている。アモルファス物質の量子力学的モデルとして $L^2(\mathbb{R}^d, dx)$ 上のランダムシュレディンガー作用素

$$H_\Gamma = -\Delta + V_\Gamma, \quad V_\Gamma(x) = \sum_{y\in\Gamma} u(x-y) \tag{1}$$

を考える。ここで、Δ はラプラシアン、Γ は $\mathbb{R}^d$ 内のランダムな点の配置で点同士に相互作用が無いようなもの (ポアソン点過程という) とし、u は $\mathbb{R}^d$ 上のコンパクトな台を持つ実数値連続関数とする。関数 u はアモルファス物質を構成する原子 (または分子)1 つ当たりのポテンシャルを表している。

シュレディンガー作用素 (1) の累積状態密度関数 (integrated density of states, IDS)$N(\lambda)$ は $\mathbb{R}$ 上の関数で、状態密度を $-\infty$ から λ まで積分したものであり、形式的には

$$N(\lambda) = \lim_{L\to\infty} \frac{\#\{\lambda \text{ 以下の } H_{\Gamma,L} \text{ の固有値 }\}}{(2L)^d}$$

で定義される。ここで、$H_{\Gamma,L}$ は H_Γ の $(-L,L)^d$ へのディリクレ条件での制限である。ポアソン点過程の平行移動に関するエルゴード性により、H_Γ の IDS とスペクトルは Γ の実現値によらず定まる。さらに、IDS は非負広義単調増加関数で、スペクトル上でのみ増加する。IDS の厳密な定義と、IDS やスペクトルの性質については [1] を参照せよ。

スペクトルの下限で IDS は 0 となるが、λ が上からスペクトルの下限に近づくときに $N(\lambda)$ が指数的に減衰するということが、ランダムシュレディンガー作用素の典型的な性質として知られてい

る。このことは Lifshitz[6] によって初めて指摘され、中尾 [7] は Donsker-Varadhan[3] の手法を用いて、一点当たりのポテンシャル u が非負である場合に、

$$\log N(\lambda) \sim -C\lambda^{-d/2} \quad (\lambda \downarrow 0)$$

となることを示した。ここで C は次元 d にのみよる定数である。様々なモデルで、IDS の減衰挙動の研究がなされている。ポアソン点過程 Γ と非正の一点当たりのポテンシャル u に対して、スペクトルの下限は $-\infty$ であり、Pastur[9] は

$$\log N(\lambda) \sim -\frac{|\lambda| \log |\lambda|}{\max |u|} \quad (\lambda \downarrow -\infty) \tag{2}$$

であることを証明した。

本講演では、[8] に基づいて、式 (1) において u が非正で Γ がギブス点過程である場合の IDS の減衰挙動を考える。ギブス点過程とは、ランダムな点の配置で点同士に相互作用があるものをいう。新たに一点を追加するときのエネルギー変化量が有界であるような相互作用の場合、対応する IDS の減衰挙動はポアソン点過程の場合の減衰挙動 (2) と一致することを示す。また、相互作用が二点間相互作用の場合、対応する IDS はポアソン点過程の場合の IDS よりも遥かに速く減衰する場合があることを示す。

2 ギブス点過程

この章では [2] を参考にしてギブス点過程を導入する。集積点を持たないような $\mathbb{R}^d$ の部分集合全体の集合を $\mathcal{C}$ とし、σ-加法族 $\mathcal{F}$ を $\{M_\Lambda\}_{\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ によって生成されるものとする。ここで、$\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\mathcal{C}$ 上の関数 M_Λ を $M_\Lambda(\eta) = \#(\eta \cap \Lambda)$ で定めるものとする。点過程とは、$(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ に値をとる確率変数のことをいう。強度 z のポアソン点過程 Γ とは、

- 任意の有界集合 $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して、$M_\Lambda(\Gamma)$ が平均値 $z|\Lambda|$ のポアソン分布に従う。
- 任意の互いに素な有限個の集合 $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して、$M_{\Lambda_1}(\Gamma), \ldots, M_{\Lambda_n}(\Gamma)$ が独立な確率変数になる。

という性質により一意に定まる点過程のことをいう。

ギブス点過程とは点同士に相互作用があるような点過程である。$\mathbb{R}^d$ の有限部分集合全体の集合を $\mathcal{C}_f$ と書くことにすると、点同士の相互作用は $\mathcal{C}_f$ 上の関数 U(エネルギー関数と呼ぶ) により表される。本講演では簡単のために、エネルギー関数は $+\infty$ を値に取らず実数値のみを取るとする。局所エネルギー関数 h を、

$$h(x, \eta) = U(\{x\} \cup \eta) - U(\eta) \quad (x \in \mathbb{R}^d,\ \eta \in \mathcal{C}_f)$$

で定義する。局所エネルギー関数は、点の集合に新たに一点を追加したときのエネルギー変化量を表している。本講演では、

- エネルギー関数 U は、平行移動に関して不変である。
- 局所エネルギー関数 h は下に有界である。

- エネルギー関数 U が有限レンジ $R > 0$ を持つ。つまり任意の $x \in \mathbb{R}^d,\ \eta \in \mathcal{C}_f$ に対して $h(x,\eta) = h(x, \eta \cap B(x,R))$ が成立する。

ということを仮定する。ここで、$B(x,R)$ は中心 x 半径 R の閉球を表す。これらの仮定は、ギブス点過程の研究では度々置かれる仮定である。

有界集合 $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して、

$$U_\Lambda(\eta_\Lambda \cup \gamma_{\Lambda^c}) = U(\eta_\Lambda \cup \gamma_{\Lambda_R}) - U(\gamma_{\Lambda_R}) \quad (\eta, \gamma \in \mathcal{C})$$

と定める。ここで、η_Λ は集合 $\eta \cap \Lambda$ を表すとし、$\Lambda_R = \{x + y \mid x \in \Lambda,\ |y| \le R\} \setminus \Lambda$ とする。

定義 1. エネルギー関数 U に関するギブス点過程とは、C 上の分布 P_{Gib} が、任意の有界集合 $\Lambda \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ と C 上の有界可測関数 f に対して、

$$\int_{\mathcal{C}} f(\eta) P_{\mathrm{Gib}}(d\eta) = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{Z_\Lambda(\gamma)} \int_{\mathcal{C}} f(\eta_\Lambda \cup \gamma_{\Lambda^c}) e^{-U_\Lambda(\eta_\Lambda \cup \gamma_{\Lambda^c})} P_{\mathrm{Poi}}(d\eta) P_{\mathrm{Gib}}(d\gamma) \tag{3}$$

を満たすような点過程である。ここで、P_{Poi} は強度 1 のポアソン点過程の分布であり、$Z_\Lambda(\gamma) = \int_{\mathcal{C}} e^{-U_\Lambda(\eta_\Lambda \cup \gamma_{\Lambda^c})} P_{\mathrm{Poi}}(d\eta)$ である。

エネルギー関数 U が恒等的に 0 であるとき、対応するギブス点過程は強度 1 のポアソン点過程となる。式 (3) は Dobrushin-Lanford-Ruelle 方程式 (DLR 方程式) と呼ばれる。本講演の設定では、エネルギー関数 U に対応する DLR 方程式の解は必ず存在するが、一意性が成り立つとは限らない [2]。一般に、R が十分に小さいときに一意性が成立することが知られている [5]。また、解が一意に存在するとき、対応するギブス点過程は平行移動に関して定常かつエルゴード性を持つことが知られている [11]。

エネルギー関数の例を挙げてこの章を終える。

例 1 (二点間相互作用)**.** $\mathcal{C}_f$ 上の関数 U で、

$$U(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{x \ne y \in \eta} \phi(|x - y|) \tag{4}$$

と表されるものは、エネルギー関数となる。ここで、ϕ は $[0, \infty)$ 上の非負値関数で、$x > R$ ならば $\phi(x) = 0$ が成立しているものとする。このとき、局所エネルギー関数 h は非負であるが、ϕ が恒等的に 0 である場合を除いて、上に有界ではない。

例 2 (area interaction)**.** $\mathcal{C}_f$ 上の関数 U で、

$$U(\eta) = \Big| \bigcup_{x \in \eta} B(x,R) \Big|$$

と表されるものは、エネルギー関数となる。このとき、局所エネルギー関数 h は $0 \le h \le |B(0,R)|$ を満たす。

3　主定理

式 (1) において、Γ を平行移動に関して定常かつエルゴード性を持つギブス点過程としても IDS は定義され、Γ の実現値によらず定まる [1]。本講演の主定理は次の 2 つである。

定理 1 ([8])**.** 一点当たりのポテンシャル u が非正連続関数でコンパクトな台を持つとする。さらに、点過程 Γ がギブス点過程で、平行移動に関して定常かつエルゴード性を持ち、その局所エネルギー関数が有界であるとする。このとき、対応する IDS は式 (2) を満たす。

定理 2 ([8])**.** 一点当たりのポテンシャル u が非正連続関数でコンパクトな台を持つとする。さらに、点過程 Γ が、式 (4) で定義されたエネルギー関数に対応するギブス点過程であり、平行移動に関して定常かつエルゴード性を持つとする。ただし、$\phi(x) = a \cdot 1_{[0,R]}(x)$ $(0 < a < \infty)$ とする。ここで、1_A は集合 A の定義関数を表す。このとき、対応する IDS は、

$$\log N(\lambda) \sim -\frac{a}{2\|u\|_R^2}\lambda^2 \quad (\lambda \downarrow -\infty)$$

を満たす。ここで、

$$\|u\|_R^2 = \sup\{\sum_{i=1}^{\infty} u(x_i)^2 \mid |x_i - x_j| > R \ (i \neq j)\}$$

とする。

定理 2 の場合の IDS は、ポアソン点過程の場合の IDS よりも遥かに速く減衰することが分かる (cf. (2))。

4　証明の方針

4.1　減衰挙動の上からの評価

ポアソン点過程の場合の IDS の減衰挙動 (2) の証明 [10] と同様の考え方から、ギブス点過程のラプラス汎関数

$$\int_{\mathcal{C}} \exp(-t\sum_{x\in\eta} u(x)) P_{\mathrm{Gib}}(\eta)$$

の $t \to \infty$ のときの漸近挙動を調べることが IDS の減衰挙動の上からの評価を得るための鍵となる。

局所エネルギー関数が下に有界のとき、ギブス点過程のラプラス汎関数は、ある強度のポアソン点過程のラプラス汎関数で上から評価されることが知られている [4]。したがって、定理 1 における上からの評価は、ポアソン点過程の場合の評価に帰着させることができる。

しかし、定理 2 のような二点間相互作用のギブス点過程のラプラス汎関数は、ポアソン点過程のラプラス汎関数によって十分な評価をすることができない。そこで、u を単関数で近似し、その単関数に関するギブス点過程のラプラス汎関数を上から評価することを考える。その評価のために重要なのが次の補題である。

補題 1 ([8])**.** 定数 $c>0,\ v_1,\dots,v_k>0$ と、集合 $\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \mid 1\le i<j\le k\}$ の部分集合 I に対して、

$$\limsup_{t\to\infty} t^{-2}\log\sum_{n_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_k=0}^{\infty}\exp(-c\sum_{i=1}^{k}n_i^2-2c\sum_{(i,j)\in I}n_in_j+t\sum_{i=1}^{k}v_in_i)$$
$$\le\frac{1}{4c}\max_{J\in K_I}\sum_{i\in J}v_i^2$$

が成立する。ここで、$K_I=\{J\subset\{1,\dots,k\}\mid i,j\in J$ ならば $(i,j)\notin I\}$ である。

4.2 減衰挙動の下からの評価

ポアソン点過程の場合の下からの評価 [10] と同様に、$V_\Gamma(0)<\lambda$ となる確率の評価から、IDS の減衰挙動の下からの評価が得られる。Γ がポアソン点過程の場合、その確率は、沢山の点が 1 つの小領域に密集する事象に影響を受ける。Γ が局所エネルギー関数が有界なギブス点過程の場合、その確率は、ポアソン点過程の場合と同じ事象に影響を受ける。したがって、定理 1 における下からの評価もポアソン点過程の場合に帰着させることができる。

一方、Γ が定理 2 のような二点間相互作用のギブス点過程の場合、反発力により小領域に沢山の点が密集するという事象は起こりにくくなり、むしろ、互いに距離が R より離れたいくつかの小領域に沢山の点が分散している事象の影響が大きくなる。このことに注意して確率の評価を行うことで定理 2 における下からの評価が得られる。

参考文献

[1] Carmona, R., Lacroix, J.: Spectral Theory of Random Schrödinger Operators. Probability and its Applications, Birkhäuser, Boston, Inc., Boston, MA (1990)

[2] Dereudre, D.: Introduction to the theory of Gibbs point processes, in Stochastic Geometry 181–229, Lecture Notes in Math., 2237. Springer, Cham (2019)

[3] Donsker, M.D., Varadhan, S.R.S.: Asymptotics for the Wiener sausage. Comm. Pure Appl. Math. **28**, 525–565 (1975)

[4] Georgii, H.-O., Küneth, T.: Stochastic comparison of point random fields. J. Appl. Probab. **34**, 868–881 (1997)

[5] Hofer-Temmel, C., Houdebert, P.: Disagreement percolation for Gibbs ball models. Stochastic Process. Appl. **129**, 3922–3940 (2019)

[6] Lifshitz, I.M. Energy spectrum structure and quantum states of disordered condensed systems. Uspehi Fiz. Nauk **83**, 617–663 (in Russian); translated as Soviet Physics Uspekhi **7** 549–573 (1965)

[7] Nakao, S.: On the spectral distribution of the Schrödinger operator with random potential. Japan. J. Math. (N.S.) **3**, 111–139 (1977)

[8] Nakagawa, Y.: Asymptotic behaviors of the integrated density of states for random Schrödinger operators associated with Gibbs Point Processes. Preprint, arXiv:2210.11381 (2022)

[9] Pastur, L.A.: The behavior of certain Wiener integrals as $t \to \infty$ and the density of states of Schrödinger equations with random potential. Teoret. Mat. Fiz. **32**, 88–95 (1977) (in Russian)

[10] Pastur, L., Figotin, A.: Spectra of Random and Almost-Periodic Operators. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 297, Springer-Verlag, Berlin (1992)

[11] Preston, C.: Random Fields, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 534. Springer-Verlag, Berlin-New York (1976)

アダマール多様体上のジャンプ拡散過程の性質

大阪市立大学大学院 理学研究科 数物系専攻
甲斐大貴 (Hirotaka Kai)

概要

Markov 過程とは，未来の状態の確率に，過去の情報が反映されず，現在の状態のみに依存する運動の事である．Lèvy 過程はユークリッド空間上の Markov 過程で定常増分性を持つ確率連続な確率過程である．この確率過程についての大域的性質については様々な先行研究がある．本講演では確率過程の大域的性質として，既約性，再帰性，過渡性，保存性を取り上げる．既約的な Lèvy 過程は再帰性か過渡性のどちらかを満たすことは良く知られている．そして Chung-Fuchs [4] は Lèvy 過程が再帰性をもつ必要十分条件を特性関数を使って特徴づけを行なった．特に 3 次元以上の非退化な Lèvy 過程は過渡的であることが Chung-Fuchs [4] の結果から分かる．一方で Lèvy 過程をリーマン多様体上に構成する試みが様々な研究者によって行われてきた．Elles-Malliavin-Elworthy は正規直交枠束上の確率微分方程式の解を底空間に射影することによって Brown 運動を構成した．実際対応する生成作用素は多様体上の Laplace-Beltrami 作用素である．Applebaum [2] はこの構成方法を発展させて，生成作用素が Lèvy 過程のそれに類似しているジャンプ拡散過程をリーマン多様体上に構成した．リーマン多様体上のジャンプ拡散過程については次のような先行研究がある．Ichihara [10] はリーマン多様体上の Brown 運動が再帰的，過渡的になるための十分条件を断面曲率，Ricci 曲率の観点から求めた． Masamune-Uemura-Wang [14] は対称なジャンプ拡散過程が保存性を持つための多様体の測地球の体積増加レートを求めた．

このような背景の下，我々は断面曲率が負の定数で pinch されていれば，ジャンプ拡散過程は既約性，過渡性，保存性を持つことを示した．本講演では上記の結果をジャンプ拡散過程の radial part を評価することで得られることを示す．

1 導入

(M, g) を $m(\geq 2)$ 次元単連結完備リーマン多様体とし無限遠点 ∂_M による 1 点コンパクト化を $\widehat{M}$ とする．更に ∇ を Levi-Civita 接続とする．M の枠束を $\mathcal{F}(M)$ とし，$\mathcal{F}(M)$ から M への射影を π と書く．$\mathcal{F}(M)$ の部分多様体 $O(M)$ を次のように定義する．

$$O(M) = \{u = ((v_1)_{\pi u}, \ldots, (v_m)_{\pi u}); (v_1)_{\pi u}, \ldots, (v_m)_{\pi u} \text{は } \mathrm{T}_{\pi u}M \text{ の正規直交基底 }\}$$

$u \in O(M)$ を次の関係で $\mathrm{T}_{\pi u}M$ から $\mathbb{R}^m$ への線形同型写像と考える．

$$\mathbb{R}^m \ni z \mapsto \sum z^i (v_i)_{\pi u} \in \mathrm{T}_{\pi u}M$$

勝手な $z \in \mathbb{R}^m$ に対して，$Hz(u) \in \mathrm{T}_u O(M)$ を $uz \in \mathrm{T}_{\pi u}M$ の水平持ち上げと定義すると Hz は $O(M)$ 上のベクトル場となる．特に $\mathbb{R}^m$ 上の正規直交基底 $e_1, \ldots, e_m$ に対して，$H_i(u) = He_i$ と書

くことにする．$O(M)$ 上の常微分方程式

$$\frac{\partial \Xi_t}{\partial t} = Hz(\Xi_t),\ \Xi_0 = id$$

の解を $\Xi_z^t = \mathrm{Exp}(tHz)$ と書く．

$\{B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^m); 0 \le t < \infty\}$ を m 次元 Brown 運動とし $N(dz, ds)$ を $\nu(dz)ds$ を intensity に持つ Poisson ランダム測度とする．ただし $\nu(dz)$ は

$$\int_{\mathbb{R}_0^m} (1 \wedge |z|^2)\nu(dz)$$

を満たす Lèvy 測度である．これらの記号の下，$\{U_t; 0 \le t < e\}$ を次の確率微分方程式の解とする．

$$\begin{aligned} F\left(U_t^u\right) - F\left(u\right) = \sigma \int_0^t \sum_{i=1}^m H_i F\left(U_{s-}^u\right) \circ dB_s^i \qquad (1) \\ + \int_0^t \int_{|z|>1} \left\{ (F \circ \Xi_z)\left(U_{s-}^u\right) - F\left(U_{s-}^u\right) \right\} N\left(dz, ds\right) \\ + \int_0^t \int_{|z|\le 1} \left\{ (F \circ \Xi_z)\left(U_{s-}^u\right) - F\left(U_{s-}^u\right) \right\} \widetilde{N}\left(dz, ds\right) \\ + \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^m} \left\{ (F \circ \Xi_z)\left(U_{s-}^u\right) - F\left(U_{s-}^u\right) - \sum_{i=1}^m z^i H_i F\left(U_{s-}^u\right) 1_{\{|z|\le 1\}} \right\} \nu\left(dz\right) ds \\ \forall F \in C^\infty(M). \end{aligned}$$

ここで $e = \inf\{t > 0; X_t \notin M\}$ は爆発時刻，σ は 0 か 1 に値を取る定数とし，$\circ dB_s^i$ は Stratonovich 積分である．この確率微分方程式の解の射影 $\{X_t = \pi U_t; 0 \le t < e\}$ を M 上の Lèvy 型確率過程と呼ぶ．一般に $\{U_t; 0 \le t < e\}$ は Markov 過程であるが $\{X_t = \pi U_t; 0 \le t < e\}$ は Markov 過程かどうかは分からない．次の定理は $\{X_t = \pi U_t; 0 \le t < e\}$ が Markov 性を持つ十分条件を与えている．

定理 1 (Applebaum, D. and Estrade, A. (2000))**.** *Lèvy* 測度 $\nu(dz)$ が回転不変であるとき，$\{X_t = \pi U_t; 0 \le t < e\}$ は出発点 x のフレームの選び方に依らない．従って，$\{X_t = \pi U_t; 0 \le t < e\}$ は *Markov* 過程となる．

これで，本研究に必要な基本的な設定は終わりである．ここからは本研究の主結果について述べたいと思う．

2 主結果

まずは，Markov 過程の再帰性，過渡性，既約性についての定義をまとめる．

定義 1. D を M 上の滑らかな境界を持つ相対コンパクト集合とし，到達時刻，最終脱出時刻をそれぞれ

$$T_D = \inf\{t > 0;\ X_t \in D\}$$
$$\sigma_D = \sup\{t > 0;\ X_t \notin D\}$$

と定義する．このとき

- $\mathbb{P}_x[\sigma_D = \infty] = 1$ が全ての x,D で成り立つとき，$\{X_t; 0 \le t < e\}$ は再帰的である．
- $\mathbb{P}_x[\sigma_D < \infty] = 1$ が全ての x,D で成り立つとき，$\{X_t; 0 \le t < e\}$ は過渡的である．
- $\mathbb{P}_x[T_D < \infty] = 1$ が全ての x,D で成り立つとき，$\{X_t; 0 \le t < e\}$ は既約的である．

既約的な右連続 Markov 過程は再帰性か過渡性のどちらかを持つ．また，再帰的な右連続 Markov 過程は爆発しないことに注意する．詳細は Getoor[7] を参照すること．

仮定 1. 以下の条件を仮定する．

- $\nu(dz)$ は回転不変である
- $\nu(dz)$ は $\mathbb{R}_0^m$ 上の *Lebesgue* 測度に対して絶対連続であり，その *Radon-Nikodým* 微分 $h(z) = \frac{\nu(dz)}{dz}$ は連続かつ $\{|z| \le 1\}$ 上で $h(z) > 0$ である．
- $\int_{|z|>1} |z|^2 \nu(dz) < \infty$
- X_t に対して密度関数 $p(t,x,y)$ が存在し，x に関して C^2 級である．
- y についての可積分関数 $G_1(t,y), G_2(t,y)$ が存在して $|\nabla_x p(t,x,y)| \le G_1(t,y)$, $|\nabla_x \nabla_x p(t,x,y)| \le G_2(t,y)$ を満たす

$\mathrm{dist}(\cdot,\cdot) : M \times M \to [0,\infty)$ を M 上の距離関数とする．また, M の基準となる点 $o \in M$ を一つ固定して，$r(\cdot) = \mathrm{dist}(o,\cdot)$ と定義する．

定理 2. ある負の定数 β が存在して，M の断面曲率 K が $K \le \beta < 0$ を満たすとき，次の不等式が成り立つような定数 $C(\beta,m) > 0$ が存在する．

$$r(X_t) \ge r(x) + \sigma W_t + M_t + C(\beta,m)t$$

ただし，W_t,M_t は次のように定義される．

$$W_t = \int_0^t \langle \nabla r(X_{s-}), dB_s \rangle,$$

$$M_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}_0^m} \Big(r \circ \xi_z(X_{s-}) - r(X_{s-}) \Big) \widetilde{N}(dz,ds).$$

この定理から次のことが分かる．

定理 3.

$$\mathbb{P}_x[\lim_{t\to\infty} r(X_t) = \infty,\ e = \infty] = \mathbb{P}_x[e = \infty]$$

が全ての $x \in M$ で成り立つ．従って，$\{X_t; 0 \le t < e\}$ は過渡的である．

定義 2. *Markov* 過程 $\{X_t; 0 \le t < e\}$ が保存的であるとは，

$$\mathbb{P}_x[e = \infty] = 1$$

が全ての $x \in M$ で成り立つことである．

以下の定理によって，保存性を示すためには $\mathbb{P}_x[e = \infty] = 1$ となる $x \in M$ を一つ見つけてくるだけで十分であることが分かる．

定理 4. $j(x) = \mathbb{P}_x[e = \infty]$ と定義する．このとき次のいずれかが成り立つ．

- 全ての $x \in M$ に対して，$j(x) = 1$.
- 全ての $x \in M$ に対して，$j(x) = 0$.
- 全ての $x \in M$ に対して，$0 < j(x) < 1$.

また断面曲率に更なる条件を加えることで次の定理が導かれる．

定理 5. 任意の $\delta > 0$ に対して，停止時刻を

$$T(\delta) = \inf\{t > 0;\ r(X_t) < 2\delta\}$$

と定義する．断面曲率 K に対して $\alpha \leq K \leq \beta < 0$ を満たす負の定数 α, β が存在すると仮定する．このとき次のことが成り立つ．

定数 $C(\alpha, m, \delta)$ が存在し，$\{t < e \wedge T(\delta)\}$ 上で

$$r(X_t) \leq r(x) + \sigma W_t + M_t + C(\alpha, m, \delta)t$$

が成り立つ．

定理 6. 任意の $x \in M$ に対して，

$$\mathbb{P}_x\left[\limsup_{t\to\infty} |W_t| < \infty\right] = 1$$

$$\mathbb{P}_x\left[\limsup_{t\to\infty} |M_t| < \infty\right] = 1$$

が成り立つ．

これらの定理から $\{X_t; 0 \leq t < e\}$ が保存的であることが導かれる．一方で，リーマン多様体上のブラウン運動を従属操作することによってジャンプ拡散過程を得ることが出来る．従属操作によって得られたジャンプ拡散過程に対して過渡性，保存性が示すことが出来る．

定理 7. $\{T_t;\ 0 \leq t < \infty\}$ を *subordinator* とし，$\{X_t;\ 0 \leq t < e\}$ を M 上のブラウン運動とする．さらに，$0 > Ric \geq \alpha,\ K \leq \beta < 0$ を満たすとする．このとき，$\{X_{T_t};\ t \leq t < e\}$ は過渡的，保存的である．

参考文献

[1] Applebaum ,D. and Estrade ,A.: *Isotropic Lèvy processes on Riemannian manifolds*, *Ann. Probab.* **28** (2000), 166-184.

[2] Applebaum, D.: *A horizontal Lévy process on the bundle of orthonormal frames over a complete Riemannian manifold. Séminarie de Probabilités.* XXIX, 166-180. Lecture Notes in Math., **1613**. *Springer, Berlin* (1995)

[3] Fujiwara, T.: *Stochastic differential equations of jump type on manifolds and Lévy flows. J. Math. Kyoto. Univ.* **31** (1991), 99-119.

[4] Chung, K. L. and Fuchs, W. H.: *On the distribution of values of sums of random variables. Amer. Math. Soc.* **6** (1951).

[5] Fujiwara, T.: *Stochastic differential equations of jump type on manifolds and Lévy flows. J. Math. Kyoto. Univ.* **31** (1991), 99-119.

[6] Fujiwara, T., Kunita, H.: *Stochastic differential equations of jump type and Lévy processess in diffeomorphisms group. J. Math. Kyoto. Univ.* **25** (1985), 71-106.

[7] Getoor, R. K.: *Transience and recurrence of Markov processes*, *Seminar on Probability, XIV(Paris, 1978/1979)(French),* 397-409, Lecture Notes in Math., **784**, *Springer, Berlin,* (1980).

[8] Hsu, E.: *Stochastic analysis on manifolds. Amer. Math. Soc.* (2002).

[9] Hunt, G. A.: *Semigroups on measures on Lie groups*, *Trans. Amer. Math. Soc* **81** (1956), 264-293.

[10] Ichihara, K.: *Curvature, geodesics and the Brownian motion on a Riemannian manifold. II. Explosion properties*, *Nagoya Math. J.* **87** (1982), 115-125.

[11] Kai ,H. and Takeuchi ,A.: *Gradient formula for jump processes on Riemannian manifolds*, *Electron. J. Probab.* **26** (2021), article no. 101, 1 –15.

[12] Kobayashi ,S. and Nomizu ,K.: *Foundations of Differential Geometry. Volume I*, *Wiley, NewYork*, (1963).

[13] Kunita, H.: *Stochastic Flows and Jump-Diffusions. Springer,* (2019).

[14] J. Masamune, T. Uemura, and J. Wang.: *On the conservativeness and the recurrence of symmetric jump-diffusions. J. Funct. Anal.* **263** (2012), 3984-4008.

[15] Takeuchi, A.: *Bismut-Elworthy-Li-type formulae for stochastic differential equations with jumps. J. Theoret. Probab.* **23** (2010), 576-604.

増大ネットワーク上の粘性解の安定性

北海道大学大学院 理学院 数学専攻　博士課程一年
牧田　慎平 (Shimpei MAKIDA)

概要

我々はユークリッド空間に埋め込まれたネットワークの列に対して, ハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解の安定性を示した. ここでいうネットワークはグラフの意味でなく, 線分の集まりで構成されるものを指す. 我々はネットワークの列の極限に比較的自然な制限を加えた上で, 粘性解の安定性が成立する条件を調べた. その副産物として, 粘性解を考えられるようなネットワークの列の極限の特徴付けを得た.

1　導入

$\mathbf{R}^d$ に埋め込まれた増大ネットワーク $\{\mathcal{N}^n\}_{n\in\mathbf{N}_{\geq 0}}$ とその $n\to\infty$ における極限 $\mathcal{N}$ を考える. $\mathcal{N}$ 上のハミルトン・ヤコビ方程式:

$$\partial_t u(t,x) + H(x,|\nabla u(t,x)|) = 0,\ (t,x)\in(0,T)\times\mathcal{N}, \tag{1.1}$$
$$u(0,x) = g(x),\ x\in\mathcal{N} \tag{1.2}$$

を考える. ここで, ハミルトニアン $H:\mathcal{N}\times[0,\infty)\to\mathbf{R}$ を

$$H(x,p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(x),$$

$V:\mathcal{N}\to\mathbf{R}$ は連続関数で定め, 初期関数 $g:\mathcal{N}\to\mathbf{R}$ をリプシッツ連続関数で定めておく. これに対して, 各ネットワーク $\mathcal{N}^n$ 上で対応するハミルトン・ヤコビ方程式:

$$\partial_t u(t,x) + H_n(x,|\nabla u(t,x)|) = 0,\ (t,x)\in(0,T)\times\mathcal{N}^n, \tag{1.3}$$
$$u(0,x) = g_n(x),\ x\in\mathcal{N}^n \tag{1.4}$$

を考える. なお, $H_n = H|_{\mathcal{N}^n}, g_n = g|_{\mathcal{N}^n}$ と定める.

自然な問いとして, (1.3), (1.4) の解 u_n は収束して (1.1), (1.2) の解になるか, という問いがある. このような問いは偏微分方程式の解の空間安定性の問題に分類される. ハミルトン・ヤコビ方程式に関しての研究として, [1, 2] がある. また楕円型, 放物型偏微分方程式に関しては 1970 年代から盛んに研究されている. 例えば, [6] やその参考文献を参照してほしい.

本講演の目的は得られた空間安定性の結果の周辺に関して紹介することである. そのため本稿では, 研究の動機, 主定理を述べるための言葉の準備, 主定理と証明の概略を簡単に述べる.

2 準備

この章では結果を述べるために, 主定理に用いられている用語の簡単な説明をする.

2.1 増大ネットワーク

まずはグラフとネットワークを定めていく. ネットワークの定義は [3] に従った.

定義 2.1. $V = \{v_i, i \in I\}$ を $\mathbf{R}^d$ の有限個の異なる点の集合とする. $\{\pi_j, j \in J\}$ を以下の条件 (1)-(4) を満たす有限個の非自己交差な線分の集合とする.

$$\pi_j : [0,1] \to \mathbf{R}^d, \quad j \in J$$

に対して, $e_j = \pi_j((0,1))$, $\bar{e}_j = \pi_j([0,1])$, $E = \{e_j, j \in J\}$ と定める.

(1) 任意の $j \in J$ に対して, $\pi_j(0), \pi_j(1) \in V$.
(2) 任意の $j \in J$ に対して, $\#(\bar{e_j} \cap V) = 2$.
(3) 任意の $j, k \in J$, $j \neq k$ に対して, $\bar{e}_j \cap \bar{e}_k \in V$, $\#(\bar{e}_j \cap \bar{e}_k) \leq 1$.
(4) 任意の $v, w \in V$ に対して, v, w を結ぶ道が存在する.

このとき, (V, E) をグラフと呼び, $\mathcal{N} = \bigcup_{j \in J} \bar{e}_j$ をグラフ (V, E) に対応するネットワークと呼ぶ.

増大ネットワークの定義を与える. ネットワークの族 $\{\mathcal{N}^n\}_{n \in \mathbf{N}_{\geq 0}}$ はグラフの族 (V^n, E^n) に対応するものとし, 種々の量を上付き n で表記する. 例えば, 辺集合 E^n は $\{e_j^n, j \in J^n\}$ と表記する. また, ここでのネットワークの意味は, 線分で構成された図形のことを指す. 正確な定義は [3] を参照されたい.

定義 2.2. ネットワークの族 $\{\mathcal{N}^n\}_{n \in \mathbf{N}_{\geq 0}}$ が以下の条件を満たすとき, $\{\mathcal{N}^n\}_{n \in \mathbf{N}_{n \geq 0}}$ は増大ネットワークと定める.

(1) 任意の $n \in \mathbf{N}_{\geq 0}$ に対して,
$$\mathcal{N}^n \subset \mathcal{N}^{n+1}, \quad V^n \subset V^{n+1}.$$

(2) (1) の条件のもと, 任意の頂点 $v_j^n \in V^n$ に対して以下の性質が成り立つ. $l \geq n$ に対してある $r_l > 0$ が存在して,
$$B_{r_l}(v_j^n) \cap \mathcal{N}^l = B_{r_l}(v_j^n) \cap \mathcal{N}^n.$$

2.2 ハウスドルフ距離

ハウスドルフ距離は集合間の距離である. (X, d) を距離空間とする. まず, $A \subset X$ として, 集合 A からの距離 d_A を次の式で定めておく.

$$d_A(x) = \inf_{y \in A} d(y, x).$$

d_A を用いて, A の ϵ 近傍を,

$$N(A,\epsilon)=\{x\in X : d_A(x)\le\epsilon\}$$

と定める. これらの準備のもと, ハウスドルフ距離を定義する.

定義 2.3. $A,B\subset X$ に対して, ハウスドルフ距離 $d_H(A,B)$ を,

$$d_H(A,B)=\inf\{\epsilon\ge 0 : B\subset N(A,\epsilon), A\subset N(B,\epsilon)\}$$

で与える.

2.3 距離空間上の粘性解

本研究では, グラフや距離空間におけるハミルトン・ヤコビ方程式の解概念として, Gangbo, Święch による粘性解の定式化を採用した [4, 5]. 以下ではこの流儀における粘性解の定義を与える. (Ω,d) を完備測地空間, $x_0\in\Omega$ を基準点とする. まず距離空間上の関数に対する微分に対応する概念を用意しておく. $T>0$ とする. $v:(0,T)\times\Omega\to\mathbf{R}$ に対して, $(t,x)\in(0,T)\times\Omega$ における v のプラススロープ とマイナススロープをそれぞれ

$$|\nabla^+v(t,x)|=\limsup_{y\to x}\frac{[v(t,y)-v(t,x)]_+}{d(y,x)},\ |\nabla^-v(t,x)|=\limsup_{y\to x}\frac{[v(t,y)-v(t,x)]_-}{d(y,x)},$$

スロープを

$$|\nabla v(t,x)|=\limsup_{y\to x}\frac{|v(t,y)-v(t,x)|}{d(y,x)}$$

と定める. ただし, 関数 $f:(0,T)\times\Omega\to\mathbf{R}$ の正成分 $[f(t,x)]_+$, 負成分 $[f(t,x)]_-$ はそれぞれ,

$$[f(t,x)]_+=\max\{0,f(t,x)\},\ [f(t,x)]_-=\max\{0,-f(t,x)\}$$

と, 定義している.

定義 2.4. 関数 $\phi:(0,T)\times\Omega\to\mathbf{R}$ が以下の性質を満たすとき, ϕ が (劣) テスト関数であると定める.

(1) 局所リプシッツ関数 $\phi_1,\phi_2:(0,T)\times\Omega\to\mathbf{R}$ が存在して $\phi=\phi_1+\phi_2$ の形でかける.
(2) ϕ_1,ϕ_2 は, $(0,T)\times\Omega$ 上で局所有界かつ局所リプシッツであり, $(0,T)\times\Omega$ 上, $|\nabla\phi_1(t,x)|=|\nabla^-\phi_1(t,x)|$ が成立し, $(0,T)\times\Omega$ 上 $|\nabla\phi_1(t,x)|$ は連続である.
(3) $(0,T)\times\Omega$ 上, $\partial_t\phi_1,\partial_t\phi_2$ はそれぞれ連続である.

劣テスト関数の集合全体を $\underline{\mathcal{C}}$ と表記する.

同様に, $\phi:(0,T)\times\Omega\to\mathbf{R}$ に対して, $-\psi\in\underline{\mathcal{C}}$ が成立するとき, ψ が (優) テスト関数であると定める. (優) テスト関数の集合全体を $\overline{\mathcal{C}}$ と表記する.

例 2.5. $\mathbf{R}$ 上で $f(x)=|x|$ を考える. これは $x\neq 0$ では $|\nabla f(x)|=|\nabla^-f(x)|$ が成立するが $x=0$ においては成立しない. というのも $x=0$ においては $|\nabla f(x)|=1$, $|\nabla^-f(x)|=0$ であるためである.

ハミルトン・ヤコビ方程式を考える.

$$\partial_t u(t,x) + H(x, |\nabla u(t,x)|) = 0,\ (t,x) \in (0,T) \times \Omega, \tag{2.1}$$
$$u(0,x) = g(x),\ x \in \Omega. \tag{2.2}$$

ただし, ハミルトニアン $H : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を,

$$H(x,p) = \frac{1}{2}|p|^2 + V(x),$$

$V : \Omega \to \mathbf{R}$ は連続関数, 初期関数 $g : \Omega \to \mathbf{R}$ をリプシッツ関数で定める. 関数 $f : (0,T) \times \Omega \to \mathbf{R}$ に対して, 上半連続包 f^*, 下半連続包 f_* を以下のように定めておく.

$$f^*(t,x) = \limsup_{(s,y)\to(t,x)} f(s,y),\ f_*(t,x) = \liminf_{(s,y)\to(t,x)} f(s,y).$$

準備が整ったので, ハミルトン・ヤコビ方程式 (2.1), (2.2) の粘性解の定義を与える.

定義 2.6. (1) 局所有界な上半連続関数 $u : [0,T) \times \Omega \to \mathbf{R}$ に対して, もし Ω 上で $u(0,x) \le g(x)$ を満たし, かつ $u - \phi$ ($\phi \in \underline{\mathcal{C}}$) が $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$ で局所最大値を取るならば,

$$\partial_t \phi + H(x, |\nabla \phi_1(t,x)| - |\nabla \phi_2(t,x)|^*) \le 0$$

が成立するとき, u はハミルトン・ヤコビ方程式 (2.1), (2.2) の粘性劣解であると定める.

(2) 局所有界な下半連続関数 $u : [0,T) \times \Omega \to \mathbf{R}$ に対して, もし Ω 上で $u(0,x) \ge g(x)$ を満たし, かつ $u - \phi$ ($\phi \in \overline{\mathcal{C}}$) が $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$ で局所最小値を取るならば,

$$\partial_t \phi + H(x, |\nabla \phi_1(t,x)| + |\nabla \phi_2(t,x)|_*) \ge 0$$

が成立するとき, u はハミルトン・ヤコビ方程式 (2.1), (2.2) の粘性優解であると定める.

(3) u がハミルトン・ヤコビ方程式 (2.1), (2.2) の粘性劣解かつ粘性優解であるとき, u がハミルトン・ヤコビ方程式 (2.1), (2.2) の粘性解であると定める.

3 結果

初めの問いの答えとして, 以下の結果を得た [7].

定理 3.1. u_n を (1.3), (1.4) の一意な粘性解とする. 以下の条件を仮定する.

(1) 増大ネットワーク $\{\mathcal{N}^n\}_{n\in\mathbf{N}_{\ge 0}}$ に対して, あるコンパクト集合 $\mathcal{N}$ が存在して,

$$d_H(\mathcal{N}^n, \mathcal{N}) \to 0, \quad n \to \infty$$

が成立する. d_H は $\mathbf{R}^d$ 上のハウスドルフ距離とする.

(2) 距離 δ_n, $\tilde{d}$ は以下の連続性を持つ: $a, b \in \mathcal{N}$ に $\tilde{d}$ に関して収束する数列 $a_n, b_n \in \mathcal{N}^n$ に対して,

$$\delta_n(a_n, b_n) \to \tilde{d}(a,b).$$

(3) $\mathcal{N}$ 上, $d_E \to 0$ ならば, $\tilde{d} \to 0$ が成立する. ただし $\tilde{d}$ は $\mathcal{N}$ の内的距離とする. また, 内的距離とは 2 点を結ぶ曲線の長さの最小として与えられる距離のことである.

(4) 距離 $\tilde{d}$ は $\mathcal{N}$ 上で有限.

このとき, ある (1.1), (1.2) の粘性解 $u : [0,T) \times \mathcal{N} \to \mathbf{R}$ が存在して, 各 $[0,T) \times \mathcal{N}^m$ 上で $u_n (n \geq m)$ は u に一様収束する.

補足 3.2. $\mathcal{N}$ が粘性解を適用できるような適切な距離空間である必要性があるが, このことは定理の仮定のもとに保証される [7].

簡単に証明の概略を説明したい. 方針はアスコリ・アルツェラの定理を用いて, (1.3), (1.4) の粘性解 $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ から極限関数 u を取り出し, u が (1.1), (1.2) の粘性解であることを確かめる, というものである. 難しい (面白い) 点として, ハウスドルフ距離における極限として $\mathcal{N}$ を特徴付けるために $\mathcal{N} = \overline{\bigcup_{l=0}^{\infty} \mathcal{N}^l}$ と表せるが, この閉包がネットワークの列の極限空間としての幾何学的な構造を壊してしまう. この困難を粘性解の言い換えの命題を用いて回避する.

参考文献

[1] Achdou, Yves and Tchou, Nicoletta, Hamilton-Jacobi equations on networks as limits of singularly perturbed problems in optimal control: dimension reduction, Comm. Partial Differential Equations 40, 652–693, 2015.

[2] Camilli, Fabio and Capitanelli, Raffaela and Marchi, Claudio, Eikonal equations on the Sierpinski gasket, Math. Ann. 364, 1167-1188, 2016.

[3] Camilli, Fabio and Schieborn, Dirk, Viscosity solutions of Eikonal equations on topological networks, Calc. Var. Partial Differential Equations 46, 671–686, 2013.

[4] Gangbo, Wilfrid and Święch, Andrzej, Optimal transport and large number of particles, Discrete Contin. Dyn. Syst. 34, 1397-1441, 2014.

[5] Gangbo, Wilfrid and Święch, Andrzej, Metric viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations depending on local slopes, Calc. Var. Partial Differential Equations 54, 1183-1218, 2015.

[6] Jimbo, Shuichi, The singularly perturbed domain and the characterization for the eigenfunctions with Neumann boundary condition, J. Differential Equations 77, 322–350, 1989.

[7] Makida Shimpei, Stability of viscosity solutions on expanding networks, submitted.

[8] Nakayasu Atsushi, Homogenization of Hamilton-Jacobi equations on the Sierpinski gasket, in preparation.

平均曲率流方程式の障害物問題に対するゲーム理論的アプローチ

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
三栖邦康 (Kuniyasu MISU)

概要

[*1]本研究では, 平均曲率流方程式のある種の障害物問題の解の漸近形を考える. 平面上において, 障害物が初期曲線の内側にある場合, 初期曲線と障害物についてのある種の仮定の下, 曲線に囲まれる領域が, 時間無限大で障害物の凸包に収束することを示した. また, 駆動力項付きの方程式についても考察し, いくつかの計算例を与えた. 証明においては, Kohn-Serfaty(2006) [9] で与えられているゲームを拡張したゲームを用いる. そのゲームにおいて, プレイヤーの簡単な戦略の組み合わせで, ゲームの駒の到達可能性を考える.

1 導入

1.1 平均曲率流方程式の障害物問題

平均曲率流方程式とは, 曲面がその各点での平均曲率の速さで, 法線方向に動く様子を表す方程式である. 曲面の内側を開集合で表現することにより, それはしばしば次のように書かれる.

$$V = -\kappa \text{ on } \partial D_t. \tag{1}$$

ここで, $\{D_t\}_{t>0}$ は $\mathbb{R}^d$ の未知の開集合の族である. V は ∂D_t 上の点の外向き法線方向の速度であり, κ はその点での ∂D_t の平均曲率である. 時間発展で動く曲面 $\{\partial D_t\}_{t\geq 0}$ を指定するためには, 開集合 D_0 を初期集合として与える. 平均曲率流方程式は, 材料化学者の Mullins によって, 金属を焼きなます時の粒界の動きを記述する方程式として最初に発表されたもので, 現在ではノイズ除去等の画像処理への応用もあり, 数学のみならず, 自然科学, 工学と幅広い分野で関心を持たれている方程式である.

一方, **障害物問題**とは, 障害物と呼ばれる, 解が透過できない領域を持つ問題のことである. 本研究では主に次のような障害物問題を考える.

$$\begin{cases} V = -\kappa \text{ on } \partial D_t, \\ O_- \subset D_t. \end{cases} \tag{2}$$

ここで, O_- は与えられた障害物であり, $\mathbb{R}^d$ の開集合である. 本研究の主目的は, (2) の解の漸近挙動（特に $d = 2$ の場合）を調べることである.

[*1] 本研究は, JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2119 の支援を受けたものである.

曲線や曲面を表現する方法には, グラフ表示, パラメタ表示, 等高面表示などがあるが, ここでは等高面表示を考えることにしよう. 例えば, (1) に従う曲面の時間発展 $\{\partial D_t\}_{t\geq 0}$ を, $\mathbb{R}^d \times [0,\infty)$ 上の関数 u を用いて, $\partial D_t = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u(x,t) = 0\}$ と表現することにすると, 関数 u は次のような偏微分方程式を満たすべきであることが分かる.

$$\begin{cases} u_t(x,t) - |Du(x,t)|\mathrm{div}\left(\frac{Du(x,t)}{|Du(x,t)|}\right) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{3}$$

ここで, u_0 は $\partial D_0 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u_0(x) = 0\}$ を満たす関数である. このように, 等高面表示に使われる関数が満たす方程式のことを**等高面方程式**といい, 等高面方程式を用いて曲面の時間発展を考える方法のことを**等高面法**という. 等高面方程式を数学的に厳密に扱うには, 方程式の可解性, 解の一意性の他, 幾何性を確かめる必要がある. 幾何性とは, 曲面の時間発展が曲面の表示の仕方に依らないという性質のことである. すなわち, $\partial D_0 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u_0(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid v_0(x) = 0\}$ を満たす初期関数 u_0, v_0 に対する解をそれぞれ u, v とすると, $\{x \in \mathbb{R}^d \mid u(x,t) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid v(x,t) = 0\}$ が任意の $t > 0$ で成り立つということである. Evans-Spruck [5] および陳・儀我・後藤 [1] は, 等高面方程式に対して, **粘性解**という弱解を考えることで, これらの条件をクリアした. 粘性解に関しては Crandall-石井-Lions [2] を, 等高面方程式の数学解析に関しては儀我 [6] を, 参考文献として加えて挙げておく.

Mercier [10] によると, 等高面法は平均曲率流方程式の障害物問題に対しても, 尚有効である. (2) に対応する等高面方程式は

$$\begin{cases} u_t(x,t) - |Du(x,t)|\mathrm{div}\left(\frac{Du(x,t)}{|Du(x,t)|}\right) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}^d, \\ \Psi_-(x) \leq u(x,t) & \text{in } \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \end{cases} \tag{4}$$

である. ここで, Ψ_- は障害物を表す関数であり, $O_- = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \Psi_-(x) > 0\}$ を満たすリプシッツ連続関数とする. 本研究では, この偏微分方程式の粘性解を通して, (2) の解の挙動を調べる.

1.2 ゲーム解釈

さて, (4) の粘性解を調べるわけであるが, そのためにその粘性解を更に近似することを考えよう. 古典解（微分ができる解）で近似するというやり方（石井・鎌田・小池 [8]）もあるが, ここではあるゲームの値関数によって, 粘性解を近似する.

ゲームについて説明するにあたって, 粘性解とゲームの関係について先に述べておこう. 粘性解の概念は元々, Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式において, ある種の最適制御問題の値関数を一意的な解として捕捉する解概念として, Crandall-Lions [3] により導入された. 粘性解の概念は Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程式においても有効で, この場合は微分ゲームに現れる値関数を捕捉している（Evans-Souganidis [4]）. ここでいう微分ゲームは二人零和確定ゲームであり, その値関数とは, 微分ゲームにおける初期位置等の入力に対して, 両プレイヤーが最善の戦略を取った場合の, 片方のプレイヤーのコスト（つまりはもう片方のプレイヤーの利益）を出力する関数のことである.

Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式や Hamilton-Jacobi-Isaacs 方程式は 1 階の方程式であるが, (3) のような 2 階の方程式を最適制御問題やゲームで捉える場合, 通常はランダムの要素が入り, 確率解

析が必要となる．そんな中, (3) の粘性解を表現する確定ゲームが, Kohn-Serfaty [9] により与えられた．このゲームは, 障害物問題 (4) に対応するゲームを考える上でのベースとなるので, ここでそのルールを特に $d = 2$ の場合で説明する．

ゲームにおける二人のプレイヤーは先後が決まっているので, それぞれ先手, 後手と呼ぶことにする．平面上に駒が一つあり, 決められた時間の間, 先手と後手の選択に応じて駒が動き, ゲーム終了時の駒の位置によって得点が決まる．駒の初期位置 $x \in \mathbb{R}^2$, ゲームが行われる時間 $t > 0$, 近似パラメーター $\epsilon > 0$ は固定する．プレイヤーは時間 ϵ^2 ごとに選択をし, それに応じて駒が動く．すなわち, ゲームは $N = \lceil t\epsilon^{-2} \rceil$ ラウンド（$\lceil r \rceil$ は r 以上の最小の整数を表す．）からなる．各ラウンド i（$i = 1, 2, \ldots, N$）において以下が行われる．

1. 先手が平面上の単位ベクトル v_i を選ぶ.
2. 後手が先手の選択を見た後, $b_i \in \{\pm 1\}$ を選ぶ.
3. 両者の選択に応じて, 駒が以下のように動く.

$$x_i = x_{i-1} + \sqrt{2}\epsilon b_i v_i.$$

ここで, x_i はラウンド i での駒の位置を表し, $x_0 = x$ である．$u_0(x_N)$ が先手の得点（すなわち後手のコスト）となる．

このゲームにおいて, 両プレイヤーが最善の選択をした場合の先手の得点を $u^\epsilon(x, t)$ とし, これが値関数である．値関数 u^ϵ は (3) の粘性解を近似する．収束の意味については次章にて改めて述べる．

2 結果

2.1 方程式 (4) のゲーム解釈

Kohn-Serfaty [9] のゲームに基づき, 障害物問題 (4) のゲーム解釈を与えた．障害物が加わったことに伴い, ゲームのルールが次のように修正される．

各ラウンド i におけるアクションは,

1. **先手がこのラウンドでゲームを辞めるかどうかを決める.**
2. 先手が平面上の単位ベクトル v_i を選ぶ.
3. 後手が先手の選択を見た後, $b_i \in \{\pm 1\}$ を選ぶ.
4. 両者の選択に応じて, 駒が以下のように動く.

$$x_i = x_{i-1} + \sqrt{2}\epsilon b_i v_i.$$

となる．先手が最後までゲームを辞めなかった場合の先手の得点は先述と同様 $u_0(x_N)$ であり, ラウンド i で辞めた場合は, $\Psi_-(x_i)$ が先手の得点となる．

このゲームの値関数 u^ϵ に対して, 次の極限を考える．

$$\overline{u}(x, t) := \overline{\lim_{\substack{(y,s)\to(x,t)\\ \epsilon\searrow 0}}} u^\epsilon(y, s),\ \underline{u}(x, t) := \underline{\lim_{\substack{(y,s)\to(x,t)\\ \epsilon\searrow 0}}} u^\epsilon(y, s).$$

命題 1. $\overline{u}$, $\underline{u}$ はそれぞれ (4) の粘性劣解, 粘性優解である．

(4) の粘性解の比較原理（[10, 8]）と, この収束の結果から, $\epsilon \searrow 0$ で u^ϵ が粘性解 u に局所一様収束することが得られる.

このゲームは **optimal stopping time problem** と呼ばれるものの一種でもあり, Ψ_- は stopping cost と呼ばれる. 障害物を表す関数を stopping cost と見なす考え方は最適制御理論においては標準的である.

尚, 以降では多次元の場合や駆動力項が付いた場合も登場するが, それらの場合でも対応するゲーム解釈が得られる.

2.2 方程式 (2) の解の漸近挙動

まず, 本稿にて用いる (2) の解の定義を述べる. $\mathbb{R}^d$ 上の有界開集合 D_0 に対して, $E_0 := \overline{D_0}$ とし, 初期関数 u_0 を $D_0 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u_0(x) > 0\}$, $E_0 = \{x \in \mathbb{R}^d \mid u_0(x) \geq 0\}$ を満たすものとする. u を初期関数 u_0 の時の (4) の粘性解とする. $D_t := \{x \in \mathbb{R}^d \mid u(x,t) > 0\}$, $E_t := \{x \in \mathbb{R}^d \mid u(x,t) \geq 0\}$ とし, 開集合族 $\{D_t\}_{t\geq 0}$ と閉集合族 $\{E_t\}_{t\geq 0}$ の組を (2) の解とする.

集合族 $\{D_t\}_{t\geq 0}$ に対して, 集合の上極限と下極限を

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} D_t := \bigcap_{\tau>0} \bigcup_{t>\tau} D_t, \quad \underline{\lim_{t\to\infty}} D_t := \bigcup_{\tau>0} \bigcap_{t>\tau} D_t$$

で定義する. 特に $\overline{\lim}_{t\to\infty} D_t = \underline{\lim}_{t\to\infty} D_t$ の時,

$$\lim_{t\to\infty} D_t := \overline{\lim_{t\to\infty}} D_t = \underline{\lim_{t\to\infty}} D_t$$

と書く.

次に漸近形についての結果を述べるために, 初期集合 D_0 と障害物 O_- に対して, 以下のように（グラフ理論の意味での）グラフ $G = (V, E)$ を定義する.

$$V := \{O \subset \mathbb{R}^2 \mid O \text{ は } O_- \text{ の連結成分 }\},$$

$$E := \{\langle O, P\rangle \mid O, P \in V \text{ かつ, ある } x \in O \text{ と } y \in P \text{ について } l_{x,y} \subset D_0\},$$

ここで, $l_{x,y}$ は x, y を両端に持つ線分を表すものとする. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は非順序対を表すものとする.

以下が主結果である.

定理 2. *$d = 2$ およびグラフ G が連結グラフであることを仮定する（図 1）. この時,*

$$Co(O_-) \subset \underline{\lim_{t\to\infty}} D_t \subset \overline{\lim_{t\to\infty}} D_t \subset \overline{Co(O_-)}$$

および

$$Co(O_-) \subset \underline{\lim_{t\to\infty}} E_t \subset \overline{\lim_{t\to\infty}} E_t \subset \overline{Co(O_-)}$$

が成り立つ. ただし, $Co(O_-)$ は O_- の凸包を表すものとする.

次の定理は, O_- にある種の狭義凸性を仮定した場合に, 有限の時間が経過すると, 曲面が障害物にぴったり張り付くことを表す. この結果は $d = 2$ である必要はない.

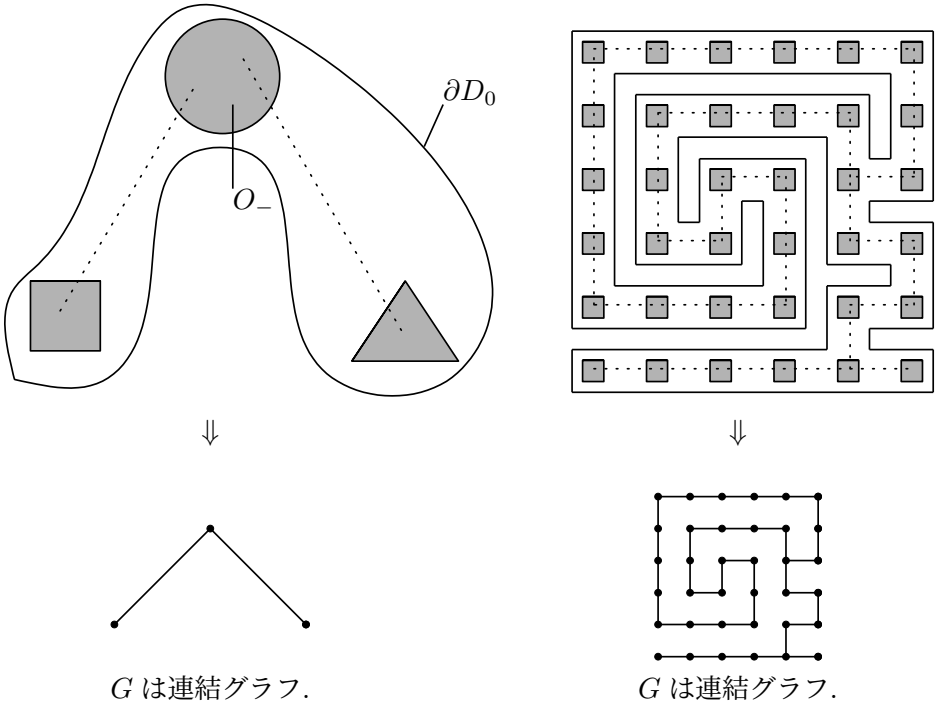


図 1　定理 2 の仮定を満たす D_0 と O_- の例

定理 3. O_- に対して, 以下の条件を仮定する:

$$\exists r > 0,\ \forall w \in \partial O_-,\ \exists z \in B_r(w),\ s.t.\ O_- \subset B_{|z-w|}(z).$$

但し, $B_r(w) := \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x - w| < r\}$ とする.

この時,

$$\lim_{t\to\infty} D_t = O_-$$

および

$$\lim_{t\to\infty} E_t = \overline{O_-}$$

が成立する. 更に, ある $\tau > 0$ が存在して, $D_t = D_\tau = O_-$ および $E_t = E_\tau = \overline{O_-}$ が, 任意の $t \geq \tau$ で成立する.

2.3　駆動力項付きの場合の解の漸近挙動

(2) の他に,

$$\begin{cases} V = -\kappa + \nu \text{ on } \partial D_t, \\ O_- \subset D_t, \end{cases} \tag{5}$$

および

$$\begin{cases} V = -\kappa + \nu \text{ on } \partial D_t, \\ D_t \subset O_+, \end{cases} \tag{6}$$

といった駆動力項付きの方程式の解の挙動も考察した．ここで $\nu > 0$ は定数である．

(5) を考える上で以下の条件を仮定する．

(A1) ある $z \in \mathbb{R}^2$ と $R < \nu^{-1}$ について, $D_0 \subset B_R(z)$ が成り立つ．

定理 2 のように簡潔で一般的な結果は得られていないが, 漸近形の外側からの評価に関しては, 仮定 (A1) を満たす任意の $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ に対して行える．

命題 4. (A1) を仮定する．

$$A := \bigcap \left\{ \overline{B_{\nu^{-1}}(z)} \mid O_- \subset \overline{B_{\nu^{-1}}(z)},\ z \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

とする．この時,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} E_t \subset A$$

が成り立つ．

ここでは詳細は省くが, いくつかの具体的な形の O_- に対して, 漸近形の内側からの評価も得られた．すなわち

$$A^{int} \subset \underline{\lim_{t\to\infty}} D_t \subset \overline{\lim_{t\to\infty}} D_t \subset A$$

および

$$A^{int} \subset \underline{\lim_{t\to\infty}} E_t \subset \overline{\lim_{t\to\infty}} E_t \subset A$$

となることを示した．

(6) に関しては, O_+ が正方形の内部になるようなものについて, 漸近形を計算した．正方形の大きさ（と初期集合 D_0）によって, 漸近形は異なる．尚, ここで得られた計算結果は, 別のやり方で計算している, 儀我-三竹-Tran [7, Section 6] での計算結果を含む．

3 証明の概要

2.2 節と 2.3 節で述べた結果に共通することを述べる．x が解の漸近形の内部にあることを示すためには, 大まかに言えば, 駒の初期位置が x のゲームで, 先手の得点が必ず正になるような先手の戦略を一つ与えればよい．なぜなら, ある一つの戦略で先手の得点が正になるなら, 先手が最善を尽くせば当然正になり, 値関数が正になるからである．逆に x が解の漸近形の外側にあることを示すには, 先手の得点が必ず負になるような後手の戦略を一つ与えればよい．

その意味では, 先手の得点が正になれば先手の勝ちであり, 負になれば後手の勝ちである．2.1 節にて述べたゲームのルールに基づいて更にいうと, 先手の勝利条件は

- ゲーム終了時に駒が D_0 の中にある．

または

- あるラウンド i で, O_- に駒が到達する．

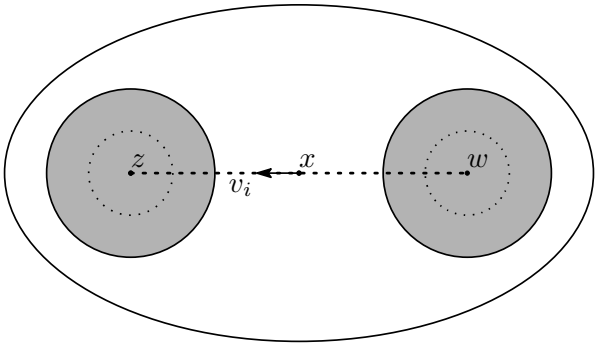


図 2　先手の戦略の例

であり, 後手の勝利条件はその逆である.

例えば, 図 2 の x を初期位置とすれば, 先手は単位ベクトル v_i を線分 $l_{z,w}$ と並行になるように取り続け, 駒が O_- に入ればゲームを辞めることにすれば, $x \in l_{z,w}$ かつ $l_{z,w} \subset D_0$ なので, 先手が勝つことができる.

$l_{z,w}$ のような線分が多くあると, 先手が勝てる位置が多くなる. 定理 2 のような仮定をすれば, 示しやすくなることをなんとなく掴んでもらえれば幸いである.

参考文献

[1] Y. G. Chen, Y. Giga, and S. I. Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean-curvature flow equations. *J. Differential Geom.*, 33(3):749–786, 1991.

[2] M. G. Crandall, H. Ishii, and P. L. Lions. Users guide to viscosity solutions of 2nd-order partial-differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27:1–67, 1992.

[3] M. G. Crandall and P. L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277:1–42, 1983.

[4] L. C. Evans and P. E. Souganidis. Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 33(5), 1984.

[5] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean-curvature.1. *J. Differential Geom.*, 33:635–681, 1991.

[6] Y. Giga. *Surface evolution equations. A level set approach.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[7] Y. Giga, H. Mitake, and H. V. Tran. On asymptotic speed of solutions to level-set mean curvature flow equations with driving and source terms. *SIAM J. Math. Anal.*, 48:3515–3546, 2016.

[8] K. Ishii, H. Kamata, and S. Koike. Remarks on viscosity solutions for mean curvature flow with obstacles. *Springer Proc. Math. Stat.*, 215:83–103, 2017.

[9] R. Kohn and S. Serfaty. A deterministic-control-based approach to motion by curvature. *Commun. Pure Appl. Math.*, 59:344–407, 2006.

[10] G. Mercier. Mean curvature flow with obstacles: a viscosity approach. arXiv:1409.7657v3.

Generalized exclusion process のスペクトルギャップの評価

慶應義塾大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻 数理科学専修
和知秀忠 (Hidetada WACHI)

概要

スペクトルギャップはマルコフ過程の緩和時間の評価において重要な値であるが、複雑なマルコフ過程のスペクトルギャップを計算により直接求めることは困難である。今回は interchange process が持つ対称性と群作用に注目することで、generalized exclusion process のスペクトルギャップが, 同一グラフ上の random walk のスペクトルギャップに一致することを示した (Theorem 4.3)。本研究は鐘ケ江和菜氏 (慶應義塾) との共同研究である。

1 イントロダクション

スペクトルギャップはマルコフ連鎖の時間発展に関する研究において重要な役割を果たしている. Process $P = P(S, C)$ を状態空間と呼ばれる集合 S と遷移率 $C : S \times S \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ であって, $C(x, x) = 0$, $x \in S$ を満たすものと定義する. $f : S \to \mathbb{R}$ に対して, 無限小生成作用素 $\mathcal{L}^P$ を

$$\mathcal{L}^P f(x) = \sum_{y \in S} C(x, y)(f(y) - f(x))$$

と定義する. $-\mathcal{L}^P$ が半正定値であるとき, $-\mathcal{L}^P$ の 0 でない最小の固有値 λ_1^P を process P のスペクトルギャップと呼ぶ. C が推移確率を与えているとき, process P の連続時間マルコフ連鎖において, 状態 $x \in S$ が時刻 t において状態 $y \in S$ になる確率がある $a_{x,y}$ を用いて

$$P_x(X_t = y) = \nu(x) + a_{x,y} e^{-\lambda_1^P t} + o(e^{-\lambda_1^P t}), \quad y \to \infty$$

と表される. ただし, ν はこのマルコフ連鎖の定常分布である. そのため, この連続時間マルコフ連鎖の緩和時間として $\frac{1}{\lambda_1^P}$ が参照されることがあり, λ_1^P の値を求めることがマルコフ連鎖の時間発展を解析する上で重要である. しかし, その計算は一般に困難であり任意の process に適用できる効率的な手法は確立されていない. その中で Aldous' Conjecture は interchange process の spectral gap をより計算が容易な random walk の spectral gap を求めることで決定できること主張しており, spcetral gap を求める問題において重要な結果である.

Theorem 1.1 ([2, Theorem 1.1])**.** 有限グラフ $X = (V, E)$ 上の *interchange process* と *random walk* のスペクトルギャップをそれぞれ λ_1^{IP}, λ_1^{RW} とおくと,

$$\lambda_1^{IP} = \lambda_1^{RW}$$

が成立する.

この定理は Aldous [1] によって 1992 年に予想され, 最終的に Caputo, Ligget and Richthammer [2] によって 2009 年に解決された. また, Aldous' conjecture は Piras [3] によって, simple block shuffle に対して一般化されている. 今回は Caputo らによる結果を用いて, 特定の相互条件を持つ generalized exclusion process のスペクトルギャップが, 計算がより簡単な random walk のスペクトルギャップに等しくなることを示した (Theorem 4.3).

2 Process とスペクトルギャップ

2.1 Process and sub-process

はじめに Aldous' spectral gap conjecture の重要なポイントを説明するために sub-process という概念を導入したい. そのために, process の射を定義する. この定義は, [2, §1.1] における sub-process の定義と同値である.

Definition 2.1. 二つの process $P_1 = (S_1, C_1)$, $P_2 = (S_2, C_2)$ について, P_1 から P_2 への process の射とは, 集合の写像 $\varphi : S_1 \to S_2$ であって, 任意の $f \in M^{P_2}$ に対して

$$\mathcal{L}^{P_1}(f \circ \varphi) = (\mathcal{L}^{P_2} f) \circ \varphi$$

を満たすもののことである.

Subprocess は process の射を用いて次のように定義される.

Definition 2.2. Process P_2 が process P_1 の sub-process であるとは, P_1 から P_2 への process の射 φ で集合の射として全射なものが存在することをいう. 特に φ が全単射であるとき, P_1 と P_2 を同型な process と呼び, $P_1 \cong P_2$ と表す.

次の命題のように, sub-process はその無限小生成作用素の固有空間が元の process の無限小生成作用素の固有空間に含まれているということを意味している.

Proposition 2.3 ([2, §1.1])**.** *P_2 を P_1 の sub-process, sub-process を定める射を $\varphi : P_1 \to P_2$ とおく. このとき, $-\mathcal{L}^{P_2}$ の固有値は全て $-\mathcal{L}^{P_1}$ の固有値である. 特に, P_1 が半正定値ならば P_2 も半正定値になる. したがって, P_1, P_2 のスペクトルギャップ $\lambda_1^{P_1}$, $\lambda_1^{P_2}$ の間には*

$$\lambda_1^{P_1} \leq \lambda_1^{P_2}$$

が成立する.

一般にスペクトルギャップを求める問題は process よりも sub-process の方が, 無限小生成作用素の表現行列の次数 (状態空間のサイズ) が小さいという点で容易である. そのため, スペクトルギャップを求めたい process が別の process の sub-process になることを示せたとしても, 問題が容易になるとは限らない. また, [2] でも指摘されているように random walk は interchange process の sub-process

になっていることが知られている. そのため, Aldous' conjecture において,

$$\lambda_1^{IP} \leq \lambda_1^{RW}$$

という不等式が成り立つことは容易にわかる. したがって, 定理の証明の困難さは反対向きの不等号を示す部分にあり, この困難が解決されたおかげで interchange process のスペクトルギャップを求める問題が, より計算が容易な random walk のスペクトルギャップを求める問題に帰着されたのである.

2.2 Group process

この節では, 我々の GEP のスペクトルギャップの評価において重要になってくる process である group process について定義したい. このレポートでは G を有限群とする.

Definition 2.4. 群 G を集合とみなして $\hat{S} := \mathrm{Set}(G)$ とおく. このとき $\hat{S}$ には群 G の右作用と左作用が自然に入っている. また, 写像 $C_G : G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ で $C_G(e) = 0$ を満たすものを一つとる. このとき, 任意の $x, y \in \hat{S}$ に対して $y = gx$ となる $g \in G$ を用いて, $\hat{C}(x, y) = C_G(g)$ と定めることで, $\hat{C} : \hat{S} \times \hat{S} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を得る. このようにして得られる process $\hat{P} = \hat{P}(G, C_G) = (\hat{S}, \hat{C})$ を群 G に付随する group process と呼ぶ.

Group process の利点の一つは自然な群作用の商によって簡単に sub-process を容易に構成することができることである.

Definition 2.5. $\hat{P}(G, C_G)$ を群 G に付随する group process とする. 部分群 $H, H' \subset G$ の組 (H, H') が, 任意の $g \in G$ 対して

$$C_G(g) = C_G(hgh^{-1}),\ h \in H \tag{$\spadesuit$}$$

を満たすとき, $\bar{S} := H \backslash \hat{S} / H'$ と定めて, $x \in \hat{S}$ に対して $[x] = HxH' \in \bar{S}$ とおく. $\bar{C} : \bar{S} \times \bar{S} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$\bar{C}([x], [y]) = \sum_{y' \in [y]} \hat{C}(x, y'),\ x, y \in \hat{S}$$

と定めれば, $\bar{P} = H \backslash P / H' := (\bar{S}, \bar{C})$ は process になる. ただし, $\bar{C}$ が代表元の取り方によらないことが ($\spadesuit$) と簡単な計算からわかる. このとき, $\bar{P}$ を組 (H, H') による group process $\hat{P}$ の quotient process と呼ぶ.

Quotient process は sub-process 同士の比較が容易である. 次の命題は, quotient process のスペクトルギャップについて重要な関係を示している.

Lemma 2.6. $\hat{P}(G, C_G)$ を群 G に付随する *group process* とする. 部分群の組 (H_i, H_i'), $i = 1, 2$ に対して, $\bar{P}_i = H_i \backslash P / H_i'$ とおく. $H_1 \subset H_2$, $H_1' \subset H_2'$ が成立するならば, $\bar{P}_2$ は $\bar{P}_1$ の *sub-process* になる.

この補題は二つの quotient process を構成する部分群 (H_i, H_i') を比較すれば, スペクトルギャップの大小関係がわかるということを主張している. 一方で, 次の補題はこの補題と逆向きの大小関係を与えるものであり, 前節で述べた困難を克服する手段を与えるものである.

Lemma 2.7. $C_G(g) = C_G(g^{-1})$ を満たすと仮定する．$\hat{P}(G, C_G)$ を G に付随する *group process* とする．部分群の組 (H_0, H), (H_0, H_a) に対して，$\bar{P} = H_0 \backslash \hat{P}/H$, $\bar{P}_a = H_0 \backslash \hat{P}/H_a$ とおく．また，$H^a := \{hHh^{-1} \mid h \in H_a\}$ とおく．H, H_a が次の 3 つの条件を満たすとき，

$$\lambda_1^{\hat{P}} = \lambda_1^{\bar{P}_a}$$

が成立する．

1. $H_b = \cap_{H_\alpha \in H^a} H_\alpha \subset H'$ を満たす．
2. $\lambda_1^{\hat{P}} = \lambda_1^{\bar{P}}$ が成立する．
3. 任意の $H_\alpha \subset H^a$ に対して，$\langle H_\alpha, \cap_{H_\beta \in H^a \backslash \{H_\alpha\}} H_\beta \rangle = G$ が成立する．

3 様々な process

この章ではグラフ上の多粒子系 Markov 連鎖の process を group process の言葉を用いて記述する．特に Definition 3.2 で定義する interchange process は重要で，様々な多粒子系 Markov 連鎖の process を interchange process の quotient process として記述することができる．

Notation 3.1. V を集合として，$n = |V|$ とおく．$E = \{(u, w) \in V \times V \mid u \neq w\}$ とおく．$o, t : E \to V$ を $o((u, w)) = u$, $t((u, w)) = w$ と定め，$e \in E$ に対して $e_o := o(e)$, $e_t := t(e)$ と表す．また，$e = (u, w) \in E$ に対して，$\bar{e} := (w, u) \in E$ とおく．n 頂点完全グラフとは，組 $X = (V, E)$ のことであって，V を X の頂点集合，E を X の辺集合と呼ぶ．

写像 $r_X : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を X の辺重みと呼び，組 (X, r_X) を辺重み付きグラフと呼ぶ．特に，任意の $e \in E$ に対して $r_X(e) = r_X(\bar{e})$ が成立するとき，r_X は対称であるといい，(X, r_X) を対称な辺重み付き n 頂点完全グラフと呼ぶ．

また，任意の n 頂点完全グラフ X に対して全単射 $\xi_X : V \to \{1, \ldots, n\}$ を一つ固定しておく．以下では，重み r_X と ξ_X は混乱を招かない場合には，添字を省略する．

3.1 Interchange process

Definition 3.2. (Interchange process) (X, r) を対称な辺重み付き n 頂点完全グラフとする．集合 $S_{IP} = S_{IP}(X)$ を

$$S_{IP} := \mathrm{Bij}(V, \{1, \ldots, n\})$$

で定め，$x \in S_{IP}$, $v \in V$ に対して $x(v)$ を v の x-label，または x に拘らない場合には単に label と呼ぶ．任意の $e \in E$ に対して，$\eta_e : V \to V$ を

$$\eta_e(v) = \begin{cases} w & v = e_o \\ u & v = e_t \\ v & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める．$C_{IP} = C_{IP}(r) : S_{IP} \times S_{IP} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $x, y \in S_{IP}$ について

$$C_{IP}(x, y) = \begin{cases} r(e) & \exists e \in E \text{ s.t. } x \circ \eta_e = y \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める．このとき, $P_{IP} = P_{IP}(X, r) = (S_{IP}, C_{IP})$ は process であり interchange process (以下, IP) と呼ばれる．これは辺重み付きグラフ上の label の交換から定まるマルコフ連鎖に対応している．(cf. 図 1)

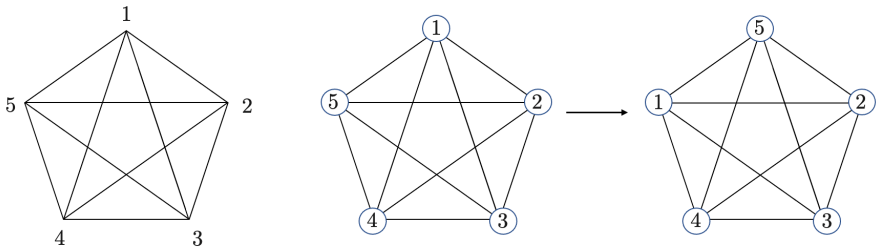


図 1　$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上の interchange process に対応するマルコフ連鎖. 図はプロセスが定義されているグラフと, $S_{IP} \simeq \mathfrak{S}_n$ とみなすことで $x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ から $y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ への遷移を表している.

IP は group process の言葉を用いると以下のように記述される.

Proposition 3.3. (X, r) を辺重み付き n 頂点完全グラフとする．$C_r : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$C_r(g) = \begin{cases} r((\xi^{-1}(i), \xi^{-1}(j))) & g = (ij), i \neq j \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

で定める．このとき, *IP* $P_{IP}(X, r)$ は $\hat{P}(\mathfrak{S}_n, C_r)$ に同型である.

今回は IP の場合のみ証明を与えるが, そのほかの process と group process の同型を示すときも方針は同様である.

Proof. 集合の全単射 $\varphi : \hat{S} \to S_{IP}$ を

$$\varphi(x) = x \circ \xi$$

によって定めると, これは全単射になっている．従って, これが process の射になっていることを示せば良い．しかし, これは $x \in S$ に対して

$$\hat{C}(x, gx) = C_r(g) = C_{IP}(\varphi(x), \varphi(gx))$$

となることからわかる．従って, $\hat{P} \cong P_{IP}$ であることがわかった. □

3.2　random walk

この節では random walk を定義し, IP の quotient process として記述する.

Definition 3.4. (X, r) を辺重み付き n 頂点完全グラフとする．粒子数 $l \geq 1$ を定める．集合 $S_{RW} = S_{RW}(X)$ を

$$S_{RW} := \left\{ x : V \to \{0, 1\} \,\middle|\, \#x^{-1}(1) = 1 \right\}$$

で定める. また, $C_{RW} = C_{RW}(r) : S_{RW} \times S_{RW} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $x, y \in S_{ASEP}$ に対して,

$$C_{RW}(x, y) := \begin{cases} r(e) & \exists e \in E \text{ s.t. } y = x \circ \eta_e, x(e_o) = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める. このとき, $P_{RW} = P_{RW}(X, r) = (S_{RW}, C_{RW})$ は process であり random walk(以下, RW と書く) と呼ぶ.

Remark 3.5. r が対称ならば RW は正定値になるが, 一般には正定値ではない.

Proposition 3.6. r が対称であると仮定する. *IP* $P_{IP}(X, r)$ に対応する *group process* を $\hat{P} = \hat{P}(\mathfrak{S}_n, C_r)$ とおく. $\rho : \{1, \ldots, n\} \to \{0, 1\}$ で $\rho \circ \xi \in S^{RW}$ となるものを一つ固定する. $H_0 \subset \mathfrak{S}_n$ を $\rho^{-1}(0)$ の並び替えに対応する $\mathfrak{S}_n$ の部分群とすると, $\bar{P} = \hat{P}/H_0$ は $P_{RW}(X, r)$ と同型である.

3.3 Generalized Exclusion Process

この節では, generalized exclusion process を定義し, IP の quotient process として記述する. 特にこの quotient process としての表示が §4 における generalized exclusion process のスペクトルギャップの評価で重要になる.

Definition 3.7. (Generalized exclusion process) (X, r) を対称な辺重み付き n 頂点完全グラフとする. 各頂点 $v \in V$ に対して許容数 $k_v \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を一つ定め, $k = (k_v)_{v \in V}$ とおく. $N = \sum_{v \in V} k_v$ とおき, 粒子数 $1 < l < N$ を固定する. 集合 $S_{GEP} = S_{GEP}(X, r, (k_v), l)$ を

$$S_{GEP} := \left\{ x : V \to \{0, \ldots, l\} \,\middle|\, x(v) \leq k_v, \sum_{v \in V} x(v) = l \right\}$$

で定める.

関数 $\mu : E \times S_{GEP} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を一つ定め, これを遷移率と呼ぶ. $e := (u, w) \in E$ に対して, $\sigma^e : V \to \{-1, 1\}$ を

$$\sigma^e(v) := \begin{cases} -1 & v = e_o \\ 1 & v = e_t \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定める. 写像 $C_{GEP} = C_{GEP}(r, \mu) : S_{GEP} \times S_{GEP} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を $x, y \in S_{GEP}$ に対して,

$$C_{GEP}(x, y) := \begin{cases} \mu(e, x) r(e) & \text{if } \exists e \in E \text{ s.t. } y = x + \sigma^e \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める. このとき, $P_{GEP} = P_{GEP}(X, r, (k_v), l, \mu) = (S_{GEP}, C_{GEP})$ は process であり Generalized exclusion process (以下, GEP と書く) と呼ばれる. GEP は各頂点に複数個の粒子がとどまれる exclusion process である. (cf. 図 2)

特別な遷移率 μ として, $uw \in E$, $x \in S_{GEP}$ に対して $\mu(e, x) = x(e_o)(k_{e_t} - x(e_t))$ となる場合の GEP について, そのスペクトルギャップを評価する. そこで, この遷移率 μ を持つ GEP を標準 GEP (standart GEP, 以下 sGEP) と呼び, μ を省略して $P_{sGEP} = P_{sGEP}(X, r, (k_v), l)$ と表すことにする.

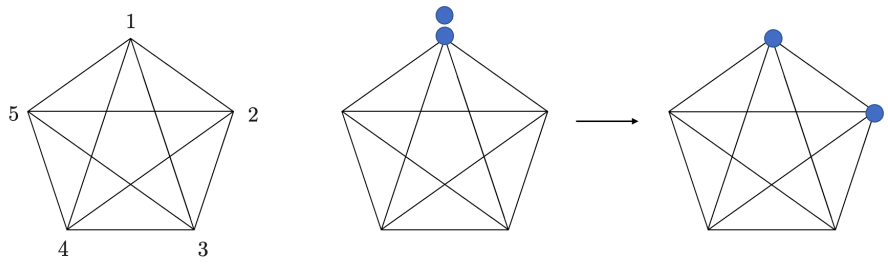


図 2　$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上の $l = 2$, $k_v = 2$, $v \in V$ の generalized exclusion process に対応したマルコフ連鎖. 図はプロセスが定義されているグラフと, ξ を恒等写像としたときの σ^{12} による状態の遷移を表している.

Remark 3.8. sGEP の遷移率は, 粒子が移動するにあたって始点に存在する粒子数が多く, 終点に存在する粒子数が少ないほど動きやすいという様子を最もシンプルに表していると考えられる. その意味で"標準的である"と言える.

以下では sGEP がある対称な辺重み付き N 頂点完全グラフ上の IP の sub-process とみなせることを示す.

対称な重み付き N 頂点グラフ $\tilde{X} = (\tilde{V}, \tilde{E})$, $\tilde{r} : \tilde{E} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を以下のように構成する. $\tilde{V} = \{(v, m) \mid v \in V, m = 1, \ldots, k_v\}$ と定め, $\tilde{E} = \{(u, w) \in \tilde{V} \times \tilde{V} \mid u \neq w\}$ とおく. $\tilde{e} = ((u, m_u), (w, m_w)) \in \tilde{E}$ に対して, $e \in E$ を $e = (u, w)$ と表すことにして,

$$\tilde{r}(\tilde{e}) := \begin{cases} r(e) & e_o \neq e_t \\ \left(\max_{u,w \in V} \frac{k_u}{k_w}\right) \sum_{e_o \neq v} r((e_o, v)) & e_o = e_t \end{cases}$$

と定める. このとき, $\tilde{X} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ は次のような N 頂点完全グラフになっている. (cf. 図 3)

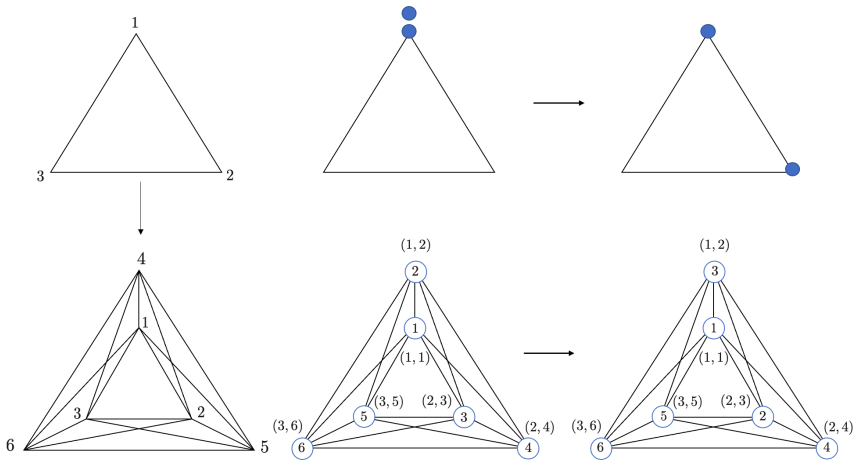


図 3　グラフ X 上 $l = 2$, $k_v = 2$, $v \in V$ の generalized exclusion process とそれに対応するグラフ $\tilde{X}$ 上の interchange process. 図はプロセスが定義されているグラフと, Proposition 3.9 で得られる対応を表している.

$\varphi_V : \tilde{V} \to V$ を $(v, m) \mapsto v$ によって定める. $\tilde{\xi} = \xi_{\tilde{X}} : \tilde{V} \to \{1, \ldots, N\}$ 一つ固定しする. $\tilde{\xi}$ は全単射なので, 集合の射

$$\varphi_N := \xi \circ \varphi_V \circ \tilde{\xi}^{-1}$$

を定めることができる. $v \in V$ に対して $\mathfrak{S}_n$ の部分群で $\tilde{\xi}(\varphi_V^{-1}(v))$ の置換に対応する置換群を $H_v \subset \mathfrak{S}_N$ とおく. 部分群 $H_0, H_1 \subset \mathfrak{S}_N$ をそれぞれ $\{l+1, \ldots, N\}$, $\{1, \ldots, l\}$ の置換群とする.

このとき, 次の命題が成立する.

Proposition 3.9. $P_{sGEP} = P_{sGEP}(X, r, (k_v), l)$ は, *group process* $\hat{P}(\mathfrak{S}_N, C_{\tilde{r}})$ の $(\prod_{v \in V} H_v, H_0 H_1)$ による *quotient process* $\bar{P} = (\bar{S}, \bar{C})$ と同型である.

Remark 3.10. $\prod_{v \in V} H_v$ で割ることが IP を構成するために増やした頂点の同一視, H_1 で割ることが label を粒子とみなすこと, H_0 で割ることが label を粒子のいない空白とみなすことにそれぞれ生じる同一視を表している.

Remark 3.11. Prosposition 2.3、Proposition 3.9 から, P_{sGEP} は半正定値である.

4 GEP のスペクトルギャップの評価

この節では sGEP のスペクトルギャップがある RW のスペクトルギャップと一致することを示す. 繰り返しにはなるが, Lemma 2.7, Proposition 3.9 より $\lambda_1^{\tilde{P}IP} \leq \lambda_1^{sGEP}$ であることは既にわかっているが, これは λ_1^{sGEP} の計算や評価が容易になったことを意味していない.

この章では次の条件 (♣) を満たす (X, r) を対称な辺重み付き n 頂点完全グラフと sGEP $P_{sGEP} = P_{sGEP}(X, r, (k_v), l)$ を固定する.

♣1 P_{sGEP} は既約である. Process $P = (S, C)$ が既約であるとは, 任意の $x, y \in S$ に対して S の元の列 $x_0 = x, x_1, \ldots, x_m = y$ が存在して,

$$C(x_0, x_1) \cdots C(x_{m-1}, x_m) \neq 0$$

が成立することをいう.

♣2 粒子数 l は $0 < l < N = \sum_{v \in V} k_v$ を満たす. もし, $l = 0, N$ だと S_{sGEP} が一点集合になってしまい, 無限小生成作用素は 0 以外の固有値を持たない.

$r_0 : E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

$$r_0(e) = k_{e_t} r(e)$$

定め, 辺重み付き n 頂点完全グラフ (X, r_0) 上の RW を $P_{RW}(X, r_0)$ とおく. $\tilde{X}$ と $\tilde{r}$ を §3.3 で定めたグラフと辺重みとする. $G = \mathfrak{S}_N$ とおき, $1 \leq m \leq N$ に対して H_m を $\{1, \ldots, m\}$ の並び替えに対応する置換群, H'_m を $\{m+1, \ldots, N\}$ の並び替えに対応する置換群, $v \in V$ に対して H_v を $\tilde{\xi}(\tilde{\varphi}^{-1}(v))$ の並び替えに対応する置換群とする.

Lemma 4.1. P_{RW} は *group process* $\hat{P}(G, C_{\tilde{r}})$ の $(\prod_{v \in V} H_v, H_{N-1})$ に関する *quotient process* $\bar{P} = (\bar{S}, \bar{C})$ と同型である.

$\tilde{X}$ 上の RW を $\tilde{P}_{RW} = P_{RW}(\tilde{X}, \tilde{r})$ とおく. このとき, [3, Proposition 3.1] の一般化が成立する.

Lemma 4.2 (c.f. [3, Proposition 3.1])**.** $\tilde{P}_{RW}$ と P_{RW} のスペクトルギャップ は一致する.

このとき, 次の定理が成立する.

Theorem 4.3. 上の条件において,

$$\lambda_1^{sGEP} = \lambda_1^{RW}$$

が成立する.

Proof. 次の図式にしたがって証明する. この図式ではスペクトルギャップが小さい方から大きい方へ矢印が引かれている.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{P}_{IP} \arrow[rrrr

参考文献

[1] David Aldous, `https://www.stat.berkeley.edu/users/aldous/Research/OP/index.html`

[2] Pietro Caputo, Thomas M. Liggett, and Thomas Richthammer, *Proof of Aldous' spectral gap conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), no. 3, 831-851, DOI 10.1090/S0894-0347-10-00659-4. MR2629990

[3] Daniele Piras, *Generalizations of Aldous' Spectral gap Conjecture* (2010). thesis.

サイクルの二乗グラフ上の乱歩における期待到達時間の解析

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
田中 優帆（Yuuho TANAKA）

1　はじめに

本研究は，土井 義耀氏，今野 紀雄氏，中上川 友樹氏，佐久間 雅氏，瀬川 悦生氏，篠原 英裕氏，田村 駿也氏，豊田 晃典氏との共同研究である．

端末を頂点，ケーブルを辺と見なすことで，コンピューターネットワークはグラフとして描くことができる．コンピューターネットワークにおいて，ある端末から目的の端末までパケットを届けるためにかかる時間の指標は，グラフにおける期待到達時間で表現できる．

定義 1.1 (期待到達時間). u, v をグラフの頂点とする．このとき，頂点 u から（単純）乱歩を開始し，はじめて頂点 v へ到達するまでのステップ数の期待値のことを u から v への期待到達時間と呼ぶ．頂点 u から頂点 v への期待到達時間を $h(G; u, v)$ で表す．

サイクルの二乗グラフの期待到達時間を表す公式は，実は既に 2014 年に Chair [1] によって与えられていた．これはラプラシアン行列の固有値，固有ベクトルを用いて，グラフの 2 点間の抵抗を表す公式を適用することによって導いている．

定理 1.1 ([1]). サイクルの二乗グラフ C_N^2 における期待到達時間は以下で与えられる．
$N = 2n$ ならば，

$$h(C_N^2; 0, \ell) = \frac{2}{5}\ell\,(N-\ell) + (-1)^{\ell+1}\frac{2N}{\sqrt{5}}F_\ell^2\left(\frac{1+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^N}{1-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^N}\right) + (-1)^\ell\frac{2N}{5}F_{2\ell}.$$

$N = 2n+1$ ならば，

$$h(C_N^2; 0, \ell) = \frac{2}{5}\ell\,(N-\ell) + (-1)^{\ell+1}\frac{2N}{\sqrt{5}}F_\ell^2\left(\frac{1-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^N}{1+(\frac{3-\sqrt{5}}{2})^N}\right) + (-1)^\ell\frac{2N}{5}F_{2\ell}.$$

上記の通り，その式は閉じた式，すなわち，$\sum$ や $\ldots$ を使わずに表すことができるような式であったが，頂点数の偶奇に依った複雑な式であった．しかし，我々は，考案した連立一次方程式を用いる手法により，頂点数の偶奇に依らず，かつ，先行研究よりも簡単な閉じた式で期待到達時間を表すことができたのである．さらに，期待到達時間の公式から抵抗や Kirchhoff index の公式も得ることができた．

第 2 節では，サイクルグラフの期待到達時間を与える．第 3 節では，サイクルグラフから辺を増やした，サイクルの二乗グラフの期待到達時間を与える．さらに，抵抗や Kirchhoff index の公式も与える．第 4 節では，無向辺ではなく，有向辺を持つサイクルの二乗グラフに対象を変えて期待到達時間を与える．無向辺を持つサイクルの二乗グラフの場合と同様に，頂点数の偶奇に依らない形で期待到達時間の公式を表すことができた．

2　サイクルグラフ

定義 2.1 (サイクルグラフ). N 頂点サイクルグラフ $C_N = (V(C_N), E(C_N))$（$N \geq 5$）とは，頂点集合 $V(C_N) = \mathbb{Z}_N$（N 次巡回群），辺集合 $E(C_N) = \{\{i,j\} \mid i,j \in \mathbb{Z}_N,\ i-j=1\}$ により定義される．

ここで，乱歩は，一般性を失わず，頂点 0 から開始してよい．さらに，サイクルグラフの対称性により，

$$h(C_N;0,\ell) = h(C_N;k,k+\ell) = h(C_N;k+\ell,k) \quad (\forall k,\ell \in \mathbb{Z})$$

が成り立つ．

具体例として，C_7 における期待到達時間を考える．このとき，サイクルの対称性より，

$$h(C_7;0,1) = h(C_7;0,6),\ h(C_7;0,2) = h(C_7;0,5),\ h(C_7;0,3) = h(C_7;0,4).$$

したがって，期待到達時間は $h(C_7;0,3)$ まで考えれば良いから，以下が成り立つ．

$$\begin{cases} h(C_7;0,1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + h(C_7;6,1)) \\ h(C_7;0,2) = \frac{1}{2}(1 + h(C_7;1,2)) + \frac{1}{2}(1 + h(C_7;6,2)) \\ h(C_7;0,3) = \frac{1}{2}(1 + h(C_7;1,3)) + \frac{1}{2}(1 + h(C_7;6,3)) \end{cases}$$

さらに，上記の式は，以下のように書き直せる．

$$\begin{cases} h(C_7;0,1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + h(C_7;0,2)) \\ h(C_7;0,2) = \frac{1}{2}(1 + h(C_7;0,1)) + \frac{1}{2}(1 + h(C_7;0,3)) \\ h(C_7;0,3) = \frac{1}{2}(1 + h(C_7;0,2)) + \frac{1}{2}(1 + h(C_7;0,3)) \end{cases}$$

この連立方程式を解くと，以下のような期待到達時間の公式が得られる．

$$h(C_N;0,\ell) = \ell(7-\ell).$$

一般の C_N に拡張させると，サイクルグラフ C_N（$N \geq 5$）に対して，以下のような期待到達時間の公式が得られる．

$$h(C_N;0,\ell) = \ell(N-\ell).$$

3　サイクルの二乗グラフ

3.1　期待到達時間

対称性を高く保ったまま，サイクルグラフに辺を増やすとサイクルの二乗グラフと呼ばれるグラフになる．これについても考えてみよう．

定義 3.1 (サイクルの二乗グラフ). N 頂点サイクルの二乗グラフ $C_N^2 = (V(C_N^2), E(C_N^2))$（$N \geq 5$）とは，頂点集合 $V(C_N^2) = \mathbb{Z}_N$（N 次巡回群），辺集合 $E(C_N^2) = \{\{i,j\} \mid i,j \in \mathbb{Z}_N,\ i-j=1,2\}$ により定義される．

定義 3.2 (Fibonacci 数列). 漸化式 $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$（$n = 0,1,2,\ldots$）によって決まる数列 F_n を Fibonacci 数列という.

サイクルグラフと同様に，乱歩は，一般性を失わず，頂点 0 から開始してよい．さらに，対称性により，

$$h(C_N^2;0,\ell)=h(C_N^2;k,k+\ell)=h(C_N^2;k+\ell,k)\quad(\forall k,\ell\in\mathbb{Z})$$

が成り立つ．

このとき，以下のような連立方程式が得られる．N が奇数の時，

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(C_N^2;0,1) \\ h(C_N^2;0,2) \\ h(C_N^2;0,3) \\ h(C_N^2;0,4) \\ \vdots \\ h(C_N^2;0,\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-2) \\ h(C_N^2;0,\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1) \\ h(C_N^2;0,\lfloor\frac{N}{2}\rfloor) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ \vdots \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

N が偶数の時，

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(C_N^2;0,1) \\ h(C_N^2;0,2) \\ h(C_N^2;0,3) \\ h(C_N^2;0,4) \\ \vdots \\ h(C_N^2;0,\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-2) \\ h(C_N^2;0,\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1) \\ h(C_N^2;0,\lfloor\frac{N}{2}\rfloor) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ \vdots \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

サイクルグラフやサイクルの二乗グラフでは，係数行列において，頂点数が偶数の場合と奇数の場合で値が異なる行や列が存在する．例えばサイクルの二乗グラフの場合の係数は下 2 行の成分が異なっており，定数ベクトルの一番最後の行の成分も異なっていることがわかる．

$\lfloor\frac{N}{2}\rfloor\times\lfloor\frac{N}{2}\rfloor$ の係数行列を H_N とし，行列 $U_N=[U_N(i,j)]$ を次のように定義する．

$$U_N(i,j)=\begin{cases}1 & (i-j\le 0)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}$$

さらに，以後の議論に必要となる行列 $W_N=[W_N(i,j)], D_N=[D_N(i,j)]$ を以下のように定義すると，定理 3.1 が成り立つ．

$$W_N(i,j)=\begin{cases}1 & (i=j)\\ \frac{F_{2j-1}}{F_{2j+1}} & (i=j-1)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases},\ D_N(i,j)=\begin{cases}\frac{F_{2j+1}}{F_{2j-1}} & (i=j,\ i\neq\lfloor\frac{N}{2}\rfloor)\\ \frac{F_N}{F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}} & (i=j=\lfloor\frac{N}{2}\rfloor)\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases}.$$

定理 3.1 ([2])**.**

$$H_N=U_N^{-1}W_N{D_N}^t{W_N}^tU_N^{-1}.$$

ここで，新しい変数ベクトルとして $\mathbf{y} = {}^tU_N^{-1}\begin{bmatrix} h(C_N^2;0,1) \\ h(C_N^2;0,2) \\ \vdots \\ h(C_N^2;0,\lfloor\frac{N}{2}\rfloor) \end{bmatrix}$ を用意すると，

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_\ell \\ \vdots \\ y_{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(C_N^2;0,1) \\ h(C_N^2;0,2)-h(C_N^2;0,1) \\ \vdots \\ h(C_N^2;0,\ell)-h(C_N^2;0,\ell-1) \\ \vdots \\ h(C_N^2;0,\lfloor\frac{N}{2}\rfloor)-h(C_N^2;0,\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1) \end{bmatrix} = 2{}^tW_N^{-1}D_N^{-1}W_N^{-1}\begin{bmatrix} N-1 \\ N-3 \\ \vdots \\ N-2\ell+1 \\ \vdots \\ N-1-2(\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1) \end{bmatrix}$$

と，書き表すことができる．

さらに，新しい変数ベクトル $\mathbf{z} = {}^tW_N\mathbf{y}$ を用意すると，行列方程式は，

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1} \\ z_{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1+\frac{F_1}{F_3}y_2 \\ y_2+\frac{F_3}{F_5}y_3 \\ \vdots \\ y_{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}+\frac{F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-3}}{F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}}y_{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor} \\ y_{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor} \end{bmatrix} = 2D_N^{-1}W_N^{-1}\begin{bmatrix} N-1 \\ N-3 \\ \vdots \\ N-1-2(\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-2) \\ N-1-2(\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1) \end{bmatrix}$$

と書き表すことができる．この行列方程式を解くと次の補題が得られる．

補題 3.1. $1 \le \ell \le \lfloor\frac{N}{2}\rfloor - 1$ のとき，

$$z_\ell = \frac{2}{5}\left\{N-2\ell+1+\frac{(N-2\ell-1)F_{2\ell-1}+2N(-1)^{\ell-1}}{F_{2\ell+1}}\right\}$$

である．ただし，$\ell = \lfloor\frac{N}{2}\rfloor$ のとき，

$$z_{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor} = \frac{2}{5F_N}\left\{\left(N-2\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor\right)\left(F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor+1}+F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}\right)+F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}+2N(-1)^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}\right\}$$

である．

証明. z_ℓ の一般式は以下の行列計算をすることによって，得ることができる．

$$\begin{aligned} z_\ell &= 2D_N^{-1}W_N\begin{bmatrix} N-1 \\ N-3 \\ \vdots \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{F_{2\ell+1}}\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{\ell-k}(N-2k+1)F_{2k-1} \\ &= \frac{2}{F_{2\ell+1}}\left\{(N+1)\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{\ell-k}F_{2k-1}-2\sum_{k=1}^{\ell}kF_{2k-1}\right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{F_{2\ell+1}}\left\{(N+1)F_\ell^2 - \frac{2}{5}F_{2\ell-1} + \frac{2}{5}(-1)^{\ell-1}(2\ell-1) - 2\ell F_\ell^2\right\} \\
&= \frac{2}{5F_{2\ell+1}}\left\{(N-2\ell+1)(F_{2\ell-1}+F_{2\ell+1}) + (-1)^{\ell-1}(2N-4\ell+2) - 2F_{2\ell-1} + (-1)^{\ell-1}(4\ell-2)\right\} \\
&= \frac{2}{5F_{2\ell+1}}\left\{(N-2\ell-1)F_{2\ell-1} + (N-2\ell+1)F_{2\ell+1} + 2N(-1)^{\ell-1}\right\} \\
&= \frac{2}{5}\left\{(N-2\ell+1) + \frac{(N-2\ell-1)F_{2\ell-1} + 2N(-1)^{\ell-1}}{F_{2\ell+1}}\right\}
\end{aligned}
$$

また，$\mathbf{y} = {}^tW_N^{-1}\mathbf{z}$ と補題 3.1 より，以下の補題が得られる．

補題 3.2.

$$
y_\ell = \frac{2}{5}\left\{(N-2\ell+1) + 2N\frac{(-1)^{\ell-1}F_{N-2\ell+1}}{F_N}\right\}
$$

証明. z_ℓ を y_ℓ について解くと，以下のように書ける．

$$
y_\ell = F_{2\ell-1}\sum_{i=\ell}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}(-1)^{\ell+i}\frac{z_i}{F_{2i-1}} + (-1)^{\ell+\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}\frac{F_{2\ell-1}}{F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}}z_{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
y_\ell &= \frac{2}{5}F_{2\ell-1}\sum_{i=\ell}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}(-1)^{\ell+i}\frac{(N-2i+1)F_{2i+1} + (N-2i-1)F_{2i-1} + 2N(-1)^{i-1}}{F_{2i-1}F_{2i+1}} \\
&\quad + \frac{2}{5}F_{2\ell-1}\frac{(-1)^{\ell+\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}}{F_N F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}}\left\{\left(N-2\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor+1\right)F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor+1} + \left(N-2\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor-1\right)F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1} + 2N(-1)^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}\right\} \\
&= \frac{2}{5}F_{2\ell-1}\left[\sum_{i=l}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}(-1)^{\ell+i}\left\{\frac{(N-2i-1)(F_{2i+1}+F_{2i-1}) + 2F_{2i+1} - 2N(-1)^i}{F_{2i-1}F_{2i+1}}\right\}\right. \\
&\quad \left. + \frac{(-1)^{\ell+\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}}{F_N F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}}\left\{(N-2\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor+1)F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor+1} + (N-2\left\lfloor\frac{N}{2}\right\rfloor-1)F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1} + 2N(-1)^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1})\right\}\right] \\
&= \frac{2}{5}F_{2\ell-1}\left\{\frac{N-2\ell+1}{F_{2l-1}} + 2N(-1)^{\ell-1}\sum_{i=\ell}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}\frac{1}{F_{2i-1}F_{2i+1}} + \frac{2N(-1)^{\ell-1}}{F_N F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}}\right\} \\
&= \frac{2}{5}F_{2\ell-1}\left\{\frac{N-2\ell+1}{F_{2\ell-1}} + 2N(-1)^{\ell-1}\sum_{i=l}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}\left(\frac{F_{2i+2}}{F_{2i-1}} - \frac{F_{2i}}{F_{2i-1}}\right) + \frac{2N(-1)^{\ell-1}}{F_N F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}}\right\} \\
&= \frac{2}{5}F_{2\ell-1}\left\{\frac{N-2\ell+1}{F_{2\ell-1}} + 2N(-1)^{\ell-1}\left(\frac{F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}}{F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}} - \frac{F_{2\ell}}{F_{2\ell-1}}\right) + 2N(-1)^{\ell-1}\left(\frac{F_{N+1}}{F_N} - \frac{F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}}{F_{2\lfloor\frac{N}{2}\rfloor-1}}\right)\right\} \\
&= \frac{2}{5}F_{2\ell-1}\left\{\frac{N-2\ell+1}{F_{2\ell-1}} + 2N(-1)^{\ell-1}\left(\frac{F_N}{F_{N-1}} - \frac{F_{2\ell}}{F_{2\ell-1}} + \frac{F_{N+1}}{F_N} - \frac{F_N}{F_{N-1}}\right)\right\} \\
&= \frac{2}{5}\left\{N-2\ell+1+2N\frac{(-1)^{\ell-1}F_{N-2\ell+1}}{F_N}\right\}
\end{aligned}
$$

補題 3.1，3.2 に，$h(C_N^2;0,\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} y_i$ という事実を組み合わせると，次のように $h(C_N^2;0,\ell)$ についての簡明な閉じた式を得る．

定理 3.2 ([2])**.** **グラフ C_N^2 において，点 0 から点 ℓ への期待到達時間 $h(C_N^2;0,\ell)$ は**

$$h(C_N^2;0,\ell)=\frac{2}{5}\left\{\ell\,(N-\ell)+2N\frac{F_\ell\cdot F_{N-\ell}}{F_N}\right\}.$$

証明.

$$\begin{aligned}
h(C_N^2;0,\ell)&=\sum_{i=1}^{\ell}\frac{2}{5}\left\{(N-2i+1)+2N\frac{(-1)^{i-1}F_{N-2i+1}}{F_N}\right\}\\
&=\frac{2}{5}\ell(N+1)-\frac{4}{5}\sum_{i=1}^{\ell}i-\frac{4N}{5F_N}\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^i(F_{N-1}F_{2i-1}-F_NF_{2i-2})\\
&=\frac{2}{5}\ell(N-\ell)-\frac{4N}{5F_N}\left\{F_{N-1}\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^iF_{2i-1}-F_N\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^iF_{2i-2}\right\}\\
&=\frac{2}{5}\ell(N-\ell)+\frac{4N}{5F_N}\left\{(-1)^{\ell-1}F_{N-1}F_\ell^2+(-1)^\ell F_N\cdot F_{\ell-1}\cdot F_\ell\right\}\\
&=\frac{2}{5}\ell(N-\ell)+\frac{4N}{5F_N}F_\ell\cdot F_{N-\ell}\\
&=\frac{2}{5}\left\{\ell(N-\ell)+2N\frac{F_\ell\cdot F_{N-\ell}}{F_N}\right\}.
\end{aligned}$$

さらに，定理 3.1 **より，以下のように H_N^{-1} の各成分を求めることができる．**

$$H_N^{-1}(i,j)=\begin{cases}\dfrac{F_iF_jF_{N-i}F_{N-j}}{F_NF_{N-1}}+\displaystyle\sum_{k=1}^{i-1}\frac{F_{i-k}F_{j-k}F_{N-i-k}F_{N-j-k}}{F_{N-2k+1}F_{N-2k-1}} & (\text{if } i\le j),\\[2ex] \dfrac{F_iF_jF_{N-i}F_{N-j}}{F_NF_{N-1}}+\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1}\frac{F_{i-k}F_{j-k}F_{N-i-k}F_{N-j-k}}{F_{N-2k+1}F_{N-2k-1}} & (\text{otherwise}).\end{cases}$$

これも用いると，以下の命題を得られる．

命題 3.1.

$$h(C_N^2;0,1)=\frac{2}{F_N}\sum_{i=0}^{N}F_iF_{N-i}.$$

Proof.

$$\begin{aligned}
h(C_N^2;0,1)&=4\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}H_N^{-1}(1,j)\\
&=4\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}\frac{F_1F_jF_{N-1}F_{N-j}}{F_NF_{N-1}}\\
&=4\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor}\frac{F_jF_{N-j}}{F_N}\\
&=\frac{2}{F_N}\sum_{j=0}^{N}F_jF_{N-j}.
\end{aligned}$$

□

3.2　全域木，抵抗

定義 3.3 (全域木)**.** 連結であり，閉路がないグラフを木という．グラフ G に対して，

$$E(G') \subseteq E(G), V(G') = V(G)$$

を満たす G' を G の全域部分グラフであるという．連結グラフ G における全域部分グラフ G' が木であるとき，G' をグラフ G の全域木という．$t(G)$ をグラフ G が持つ全域木の総数とする．また，$t(G;x,y)$ を G の 2 頂点 x,y を同一視したグラフ（ただし，多重辺ができた場合にはそれを残す）における全域木の総数と定義する．

定義 3.4 (グラフの抵抗)**.** グラフ G の 2 頂点 x,y 間の抵抗値 $r(G;x,y)$ とは，G の各辺を 1ω の抵抗と見なして測定した頂点 x,y 間の抵抗値のことである．

グラフを用いて期待到達時間を求めることができると，ネットワークにおける経路の構築手順や経路の構成を知ることに有用な，グラフにおける全域木の総数を数え上げることも可能になる．また，その他にも，電気回路における抵抗値等も求めることができ，これはネットワークの複雑性を解析することに役に立つ．

まず，以降の議論に必要となる定理をいくつか紹介する．

定理 3.3 ([3])**.**

$$r(G;x,y) = \frac{t(G;x,y)}{t(G)}.$$

定理 3.4 ([5])**.**

$$r(G;x,y) = \frac{h(G;x,y) + h(G;y,x)}{|2E(G)|}.$$

定理 3.5 ([4])**.**

$$t(C_N^2) = F_N^2.$$

グラフ G の Kirchhoff index $Kf(G)$ を以下の式により定義すると，定理 3.6 が成り立つ．

$$Kf(G) := \sum_{i<j} r(G;i,j).$$

定理 3.6 ([2])**.**

$$\mathrm{Kf}(C_N^2) = \frac{N(N-1)(5N+17)}{300} + \frac{2N^2}{25}\frac{F_{N-1}}{F_N}.$$

Proof. 命題 3.1，定理 3.2 より，以下の式が導き出せる．

$$\sum_{i=0}^{N} F_i F_{N-i} = \frac{1}{5}((N-1)F_N + 2NF_{N-1}).$$

このとき，以下の式が導き出せる．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Kf}(C_N^2) &= \sum_{x<y} r(C_N^2; x, y) \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) r(C_N^2; 0, i) \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) \frac{h(C_N^2; 0, i) + h(C_N^2; i, 0)}{2|E(C_N^2)|} \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} (N-i) \frac{h(C_N^2; 0, i)}{2N} \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} \frac{(N-i)}{5N} \left(i(N-i) + 2N \frac{F_i F_{N-i}}{F_N} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(N \sum_{i=1}^{N-1} i - \sum_{i=1}^{N-1} i^2 + \frac{2N}{F_N} \sum_{i=1}^{N-1} F_i F_{N-i} \right) - \frac{1}{5N} \left(N \sum_{i=1}^{N-1} i^2 - \sum_{i=1}^{N-1} i^3 + \frac{2N}{F_N} \sum_{i=1}^{N-1} i F_i F_{N-i} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(N \sum_{i=1}^{N-1} i - 2 \sum_{i=1}^{N-1} i^2 + \frac{2N}{F_N} \sum_{i=1}^{N-1} F_i F_{N-i} \right) - \frac{1}{5N} \left(- \sum_{i=1}^{N-1} i^3 + \frac{N^2}{F_N} \sum_{i=1}^{N-1} F_i F_{N-i} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(N \sum_{i=1}^{N-1} i - 2 \sum_{i=1}^{N-1} i^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} i^3 + \frac{N}{F_N} \sum_{i=1}^{N-1} F_i F_{N-i} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{N^2(N-1)}{2} - \frac{N(N-1)(2N-1)}{3} + \frac{N(N-1)^2}{4} + \frac{N}{5F_N} ((N-1)F_N + 2NF_{N-1}) \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{N(N-1)(N+1)}{12} + \frac{N}{5F_N} (2NF_{N-1} + (N-1)F_N) \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{N(N-1)(N+1)}{12} + \frac{2N^2 F_{N-1}}{5F_N} + \frac{N(N-1)}{5} \right) \\
&= \frac{1}{5} \left(\frac{N(N-1)(5N+17)}{60} + \frac{2N^2 F_{N-1}}{5F_N} \right) \\
&= \frac{N(N-1)(5N+17)}{300} + \frac{2N^2}{25} \frac{F_{N-1}}{F_N}.
\end{aligned}
$$

□

さらに，以下の定理が成り立つ．

命題 3.2.

$$
t(C_N^2; 0, \ell) = \frac{F_N}{5} \left(\ell(N-\ell) F_N + 2N F_\ell F_{N-\ell} \right).
$$

Proof. 定理 3.2，3.3，3.4，3.5 より，以下の式が導き出せる．

$$\begin{aligned} t(C_N^2;0,\ell) &= r(C_N^2;0,\ell)t(C_N^2) \\ &= \frac{h_N(0,\ell)F_N^2}{2} \\ &= \frac{F_N^2}{5}(\ell(N-\ell)+2N\frac{F_\ell F_{N-\ell}}{F_N}) \\ &= \frac{F_N}{5}(\ell(N-\ell)F_N+2NF_\ell F_{N-\ell}). \end{aligned}$$

□

前節，本節で期待到達時間等を求めたグラフは無向グラフであり，サイクルの二乗グラフの期待到達時間の公式には Fibonacci 数が現れていた．

4 有向辺を持つサイクルの二乗グラフ

定義 4.1 (ケイリーグラフ)**.** G を群，S を G の部分集合とする．ケイリーグラフ $\mathrm{Cay}(G,S) = (V(\mathrm{Cay}(G,S)), E(\mathrm{Cay}(G,S)))$ とは，頂点集合 $V(\mathrm{Cay}(G,S)) = G$，辺集合 $E(\mathrm{Cay}(G,S)) = \{\{g, gs\} \mid g \in G,\ s \in S\}$ により定義される．

ケイリーグラフの定義より，C_N は $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{\pm 1\})$，$C_N^2$ は $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{\pm 1, \pm 2\})$ だと見なすことができる．有向辺を持つサイクルの二乗グラフとして，$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\})$ を対象に，同様の手法で期待到達時間を求める．$X = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_N, \{+1, +2\})$ とおく．このとき，以下のような連立方程式が得られる．

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(X;0,1) \\ h(X;0,2) \\ h(X;0,3) \\ \vdots \\ h(X;0,N-2) \\ h(X;0,N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ \vdots \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$(N-1) \times (N-1)$ の係数行列を H_N とおくと，以下の定理が成り立つ．

定義 4.2 (Jacobsthal 数列)**.** 漸化式 $J_0 = 0, J_1 = 1, J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$（$n = 0, 1, 2, \ldots$）によって決まる数列 J_n を Jacobsthal 数列という．

定義 4.3 (Jacobsthal-Lucas 数列)**.** 漸化式 $JL_0 = 2, JL_1 = 1, JL_{n+2} = JL_{n+1} + 2JL_n$（$n = 0, 1, 2, \ldots$）によって決まる数列 JL_n を Jacobsthal-Lucas 数列という．

X について H_N^{-1} の成分表示や期待到達時間の公式を与えることは，新たに発見した内容であり，Jacobsthal 数列や Jacobsthal-Lucas 数列を用いて，以下のような定理を得た．

定理 4.1 ([6])**.** 行列 $H_N^{-1} = [H_N^{-1}(i,j)]$ の成分表示は以下の通りである．

$$H_N^{-1}(i,j) = \begin{cases} \frac{J_i J_{N-i-1}}{J_N} & (j = i+1) \\ \frac{J_{i-j+1}(3J_{N-i+j-3} + JL_{N-i+j-3}) - (-1)^{i+j} J_{j-1} J_{N-i-1}}{J_N} & (j < i+1) \\ \frac{J_i J_{N-j}(3J_{j-i-2} + JL_{j-i-2})}{J_N} & (j > i+1) \\ \frac{J_{N-1}}{J_N} & ((i,j) = (N-1, 1)) \end{cases}$$

これを用いると，X に対しても期待到達時間の公式を与えることができる．

定理 4.2 ([6])**.** $1 \leq \ell \leq N-2$ のとき，

$$h(X;0,\ell) = \frac{2}{J_N}(J_\ell J_{N-\ell-1} + \sum_{1\leq j\leq \ell}(J_{\ell-j+1}(3J_{N-\ell+j-3} + JL_{N-\ell+j-3}) - (-1)^{\ell+j}J_{j-1}J_{N-\ell-1}) + \sum_{\ell+2\leq j\leq N-1}(J_\ell J_{N-j}(3J_{j-\ell-2} + JL_{j-\ell-2}))$$

である．ただし，$\ell = N-1$ のとき，

$$h(X;0,N-1) = \frac{2}{J_N}(J_{N-1} + \sum_{2\leq j\leq N-1}(J_{N-j}(3J_{j-2} + JL_{j-2})).$$

数列の関係式を用いれば，さらに簡明な式になる可能性もあり，それについては現在解析中である．また，全域木や抵抗値等についても，どのような式が与えられるのかは現在解析中である．

5 最後に

本講演では，C_N や C_N^2 における期待到達時間を，頂点数の偶奇に依らない閉じた式で与えた．さらに C_N^2 の抵抗や Kirchhoff index を与え，類似した有向グラフ $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \{+1,+2\})$ における期待到達時間についても得られた事実を述べた．なお，本稿の内容は，[2] に基づく．

今後の展望としては，グラフ $C_N^{2,3}$ や $C_N^{1,2,n}$，それらに類似した有向グラフにおける期待到達時間の公式や抵抗，Kirchhoff index を解析する事が考えられる．

参考文献

[1] N. Chair. : The Effective Resistance of the N-Cycle Graph with Four Nearest Neighbors, *Journal of Statistical Physics*, **154** (2014) 1177-1190.

[2] Y. Doi, N. Konno, T. Nakamigawa, T. Sakuma, E. Segawa, H. Shinohara, S. Tamura, Y. Tanaka, K. Toyota : On the average hitting times of the squares of cycles, *Discrete Applied Mathematics 313*, (2022) 18-28.

[3] G. Kirchhoff. : Uber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird, *Annalen Physik und Chemie*, **72** (1847) 497-508

[4] D. J. Kleitman, B. Golden. : Counting Trees in a Certain Class of Graphs, *The American Mathematical Monthly*, **82** No.1 (1975) 40-44

[5] C. S. J. A. Nash-Williams. : Random walk and electric currents in networks. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Mathematical and Physical Sciences*, **55** (1959) 181-194.

[6] Y. Tanaka. : On the average hitting times of $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \{+1,+2\})$, in preparation.

パラレルセッション
会場Ｃ

Lattice isometries and K3 surface automorphisms

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
高田佑太 (Yuta TAKADA)

概要

講演者は「どのような多項式がユニモジュラー偶格子上の自己同型の固有多項式として実現されるか」という問題に関する Bayer-Fluckiger の定理を，自己同型の行列式が -1 である場合に拡張した．その応用として，20 次のすべての Salem 数の対数が（非射影的）K3 曲面の自己同型のエントロピーとして実現されることが証明できる．本講演ではこれらについて紹介する．

1 導入

「どのような多項式がユニモジュラー偶格子上の自己同型の固有多項式として実現されるか」という問題が 2002 年に Gross と McMullen により取り上げられた [4]．**格子**とは階数有限の自由 $\mathbb{Z}$ 加群 Λ とその上の内積 $b : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$ の組のことである．ここで**内積**とは非退化対称双線型形式のことである（正値性は仮定しない）．格子 (Λ, b) が**ユニモジュラー**であるとは Λ がその双対 $\Lambda^\vee := \{y \in \Lambda \otimes \mathbb{Q} \mid b(x, y) \in \mathbb{Z} \text{ for all } x \in \Lambda\}$ に一致すること，**偶**であるとはすべての $x \in \Lambda$ に対して $b(x, x) \in 2\mathbb{Z}$ が成り立つことである．格子 (Λ, b) 上の自己同型といえば，加群としての自己同型 $t : \Lambda \to \Lambda$ で内積を保存する，つまり任意の $x, y \in \Lambda$ に対して $b(t(x), t(y)) = b(x, y)$ をみたすものを指す．以下，格子 (Λ, b) を単に Λ とかくこともある．

上の問題は純粋に整数論的だが，あとで述べるように，K3 曲面とよばれる複素曲面の自己同型への応用がある．実際，彼らは [4] の中で K3 曲面への応用についても述べている．

上の問題について考える前に少し言葉を用意する．$F(X)$ を定数項 $F(0)$ が 0 でないモニック[*1]多項式とする．F が **$*$-対称**であるとは $F(X)$ が $F^*(X) := F(0)^{-1} X^{\deg F} F(X^{-1})$ に一致するときにいう．F が $*$-対称であるとき定数項 $F(0)$ は 1 または -1 である．これに応じて F は **$+1$-対称**または **-1-対称**であるという．一般に標数が 2 でない体上の内積空間の自己同型の固有多項式は $*$-対称であることがいえる．

さて，$F \in \mathbb{Z}[X]$ を符号数 (r, s) のユニモジュラー偶格子上の自己同型の固有多項式とする．このとき F は $*$-対称で，さらに $m(F)$ を絶対値が 1 より大きい F の根の重複も数えた個数として次の 2 条件 (Sg)，(Sq) をみたす：

$$r, s \geq m(F) \text{ かつ「} F(1)F(-1) \neq 0 \text{ ならば } r \equiv s \equiv m(F) \bmod 2\text{」}. \tag{Sg}$$

$$|F(1)|, |F(-1)|, (-1)^{(\deg F)/2} F(1)F(-1) \text{ はすべて平方数}. \tag{Sq}$$

[*1] 多項式が**モニック**であるとは最高次の係数が 1 であることである．

これらのことは F が分離的，すなわち重根をもたないという仮定の下で，Gross と McMullen[4] によって証明されている．実際には分離的であるという仮定は不要であることが Bayer-Fluckiger[3] により（別の方法で）で示されている[*2]．

Gross と McMullen は $+1$-対称なモニック多項式 F が**既約であれば**，条件 (Sg)，(Sq) が，符号数 (r,s) のあるユニモジュラー偶格子上の自己同型の固有多項式として F が実現されるための十分条件でもあると予想し，部分的に証明した．Bayer-Fluckiger と Taelman[1] はこの予想が正しいことを，局所-大域的な議論を用いることで証明した．一方でこの予想は，[4] の中でも指摘されているように，F が可約の場合には正しくない．Bayer-Fluckiger は [2, 3] の中で F が可約かつ $+1$-対称である場合にも議論を進め，F が符号数 (r,s) のあるユニモジュラー偶格子上の半単純な自己同型の固有多項式として実現されるための必要十分条件を与えた．講演者はこれを F が -1-対称である場合にも拡張した [9]．以下，これらのことを定式化する．

r,s を非負整数，$F \in \mathbb{R}[X]$ を条件 (Sg) をみたす $*$-対称なモニック多項式とする．また V を符号数 (r,s) の $\mathbb{R}$ 上の内積空間とする．固有多項式が F であるような V 上の半単純な自己同型 t が与えられたとき，V は

$$V = \bigoplus_{f:F\text{の既約因子}} V(f;t), \quad \text{ただし } V(f;t) = \{v \in V \mid f(t)v = 0\}$$

と分解される．F の $\mathbb{R}[X]$ 内での $*$-対称な既約因子全体の集合を $I(\mathbb{R})$ とおき，写像 $\mathrm{idx}_t : I(\mathbb{R}) \to \mathbb{Z}$ を

$$\mathrm{idx}_t(f) = r_f - s_f, \quad \text{ただし } (r_f, s_f) \text{ は } V(f;t) \text{ の符号数}$$

で定める．さらにこのようにして得られる写像全体の集合を $\mathrm{Idx}_{r,s}(F)$ で表す：

$$\mathrm{Idx}_{r,s}(F) = \{\mathrm{idx}_t \mid t \text{ は固有多項式が } F \text{ であるような } V \text{ 上の半単純な自己同型 }\}.$$

$\iota \in \mathrm{Idx}_{r,s}(F)$ に対して $\mathrm{idx}_t = \iota$ となるような自己同型 $t : V \to V$ を短く (F,ι)-**自己同型**とよぶことにする．格子上の自己同型 t が (F,ι)-自己同型とは t の線型拡張 $\Lambda \otimes \mathbb{R} \to \Lambda \otimes \mathbb{R}$ が (F,ι)-自己同型であることである．

定理 1.1 r,s を $r \equiv s \mod 8$ をみたす非負整数[*3]，$F \in \mathbb{Z}[X]$ を (Sg), (Sq) をみたす $*$-対称なモニック多項式，$\iota \in \mathrm{Idx}_{r,s}(F)$ とする．このとき以下は同値である：

(i) 符号数 (r,s) のユニモジュラー偶格子で，半単純な (F,ι)-自己同型をもつものが存在する．

(ii) $\mathrm{ob} : \Omega \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が零写像である．ここで Ω, ob はそれぞれ F と ι から決まる群と準同型である．

Ω, ob の定義を含め，§2 でより詳しくこの定理について述べる．完全な証明は [9] をみてほしい．

次に，上の結果の K3 曲面への応用について述べる．**K3 曲面**とはコンパクト複素曲面[*4]のひとつのクラスで，単連結かつ標準束が自明なコンパクト複素曲面として定義される．最近の話題として，

[*2] Bayer-Fluckiger の証明では自己同型が半単純であることを仮定しているが，その仮定も外すことができる．

[*3] 次のことが知られている：$r \equiv s \mod 8$ をみたす非負整数 r,s に対して符号数 (r,s) のユニモジュラー偶格子が存在する．逆に (r,s) がユニモジュラー偶格子の符号数ならば $r \equiv s \mod 8$ が成り立つ．

[*4] 複素曲面とは 2 次元の複素多様体で，実次元は 4 である．

K3 曲面上の自己同型の位相的エントロピーとして現れる数を決定する，というエントロピースペクトラムの問題がある．K3 曲面の自己同型のエントロピーは 0 でなければ高々 22 次の Salem 数の対数になることが知られている．ここで **Salem 数**とは，実の代数的整数 $\lambda > 1$ で，λ^{-1} と共役，かつ $\lambda^{\pm 1}$ 以外の共役が絶対値 1 であるような数のことである．また，どんな K3 曲面 X も中間コホモロジー群 $H^2(X, \mathbb{Z})$ が交叉形式によって符号数 $(3, 19)$ のユニモジュラー偶格子となる．このような格子上の自己同型は一定の条件の下で K3 曲面の自己同型と対応する．

これを利用して Bayer-Fluckiger と Taelman は 22 次の Salem 数 λ に対して，$\log \lambda$ が K3 曲面の自己同型のエントロピーであるためには，λ の最小多項式が (Sq) をみたすことが必要十分であることを示した [1]．さらに Bayer-Fluckiger は次数が $4, 6, 8, 12, 14, 16$ の任意の Salem 数 λ に対して，$\log \lambda$ が（非射影的）K3 曲面の自己同型でエントロピーとして実現されることを示している [3]．講演者はこの流れに続いて，定理 1.1 を用いて次のことを証明した [9].

定理 1.2 λ を 20 次の任意の Salem 数とする．このとき非射影的 K3 曲面とその上の自己同型でエントロピーが $\log \lambda$ であるようなものが存在する．

§3 で K3 曲面の自己同型と格子の自己同型の関係をより詳しく述べ，上の定理の概略を与える．

2 定理 1.1 の証明の概略

r, s を $r \equiv s \mod 8$ をみたす非負整数，$F \in \mathbb{Z}[X]$ を (Sg), (Sq) をみたす $*$-対称なモニック多項式，$\iota \in \mathrm{Idx}_{r,s}(F)$ とする．定理 1.1 では (ii)⇒(i) の証明が本質的なのでその概略を述べる．まず，固有多項式が F の半単純な線型変換 α をもつ $\mathbb{Q}$ ベクトル空間 M を定義する．その後に，以下の条件をみたす符号数 (r, s) の内積 $b : M \times M \to \mathbb{Q}$ が存在するための条件を考える：

$$\begin{aligned} &\alpha : M \to M \text{ は内積 } b \text{ を保つ自己同型で } \mathrm{idx}_\alpha = \iota \text{ をみたし，さらに} \\ &\alpha\text{-不変なユニモジュラー偶格子が } (M, b) \text{ 内に存在する．} \end{aligned} \tag{1}$$

ここで一般に内積空間 (M, b) 内の格子 Λ といえば，M のある基底が $\mathbb{Z}$ 上生成する自由 $\mathbb{Z}$ 加群 Λ で，b の Λ への制限によって Λ が格子となるものを指す．上のような内積 b が M に定義できるための必要十分条件が (ii) であり，それが局所-大域的な議論によって示されるのである．ここでいう局所-大域的な議論とは，$\mathbb{Q}$ 上の問題をその“局所化”である p 進数体や実数体 $\mathbb{R}$ 上で考えたり，そうして局所的に考えた問題ともとの“大域的な”問題（いまの場合は $\mathbb{Q}$ 上の問題）との関係を議論したりすることを指す．§2.1 で局所-大域的な議論のための準備をし，§2.2 で証明の概略を 4 つの段階に分けてより詳しく述べる．なお，証明のアイデアの大枠は Bayer-Fluckiger[3] によるものである．定理 1.1 の完全な証明は [9] をみてほしい．

2.1 準備

まず, 内積空間の不変量について考える．(V, b) を一般の体 K 上の内積空間とし $e_1, \ldots, e_d$ を V の基底とする．次元 d は明らかに (V, b) の不変量である．$d \times d$ 行列 $(b(e_i, e_j))_{ij}$ の行列式は $K^\times / K^{\times 2}$ の元とみて基底に依らずに決まるから，これも (V, b) の不変量である．ここで $K^\times := K \setminus \{0\}$, $K^{\times 2} := \{x^2 \mid x \in K^\times\}$ である．$\det(b(e_i, e_j))_{ij} \in K^\times / K^{\times 2}$ を (V, b) の**行列式**といい $\det b$ で表す．

K が p 進数体 $\mathbb{Q}_p$（p は素数）のときは，これらに加えて **Hasse-Witt 不変量**とよばれる，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ に値をとる不変量が重要である．$\mathbb{Q}_p$ 上の内積空間 (V, b) に対し，その Hasse-Witt 不変量を $\epsilon_p(b)$ で表す．本稿では Hasse-Witt 不変量の定義は割愛する[*5]が，例えば以下の事実が Hasse-Witt 不変量の重要性を端的に表している．

事実 2.1（[8, §4, Theorem 7]） p を素数とする．$\mathbb{Q}_p$ 上のふたつの内積空間は，同じ次元，同じ行列式，同じ Hasse-Witt 不変量をもつとき，かつそのときに限り同型である．

つまり，次元，行列式，Hasse-Witt 不変量が $\mathbb{Q}_p$ 上の内積空間の完全不変量である．なお，実数体 $\mathbb{R}$ 上の内積空間は符号数が完全不変量だが，Hasse-Witt 不変量を定義することができる．$\mathbb{R}$ 上の内積空間にも Hasse-Witt 不変量を考えることで，局所-大域的な議論が可能となる．

以下では $\mathbb{Q}$ の素点[*6]全体を $\mathcal{V}$ で表し，無限素点 ∞ に対して $\mathbb{Q}_\infty$ は実数体 $\mathbb{R}$ を表すとする．また，$\mathbb{Q}$ 上の内積空間 (V, b) と素点 $v \in \mathcal{V}$ に対して，b の $\mathbb{Q}_v$ ベクトル空間 $V \otimes \mathbb{Q}_v$ への線型拡張を $b \otimes \mathbb{Q}_v$ で表し，$\epsilon_v(b) := \epsilon_v(b \otimes \mathbb{Q}_v)$ とする．次の事実は $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ 上の内積空間にも Hasse-Witt 不変量を考えるひとつ理由としてみることができる．

事実 2.2（[8, §4.3]） (V, b) を $\mathbb{Q}$ 上の内積空間とする．このときほとんどすべての素点 v で（i.e., 有限個の素点を除いて）$\epsilon_v(b) = 0$ で，かつ $\sum_{v \in \mathcal{V}} \epsilon_v(b) = 0$ が成り立つ．

2.2 定理 1.1 の証明の概略

r, s を $r \equiv s \mod 8$ をみたす非負整数，$F \in \mathbb{Z}[X]$ を (Sg), (Sq) をみたす $*$-対称なモニック多項式，$\iota \in \mathrm{Idx}_{r,s}(F)$ とする．以下，定理 1.1 の (ii)⇒(i) の証明の概略を 4 つの段階に分けて述べる．

Step 1. **固有多項式が F の半単純な線型変換をもつ $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を定義．** F の $\mathbb{Q}[X]$ 内での既約因子 f に対して，n_f を F における f の重複度とし $M^f := [\mathbb{Q}[X]/(f)]^{n_f}$ とおく．そして M^f たちを直和して得られる $\mathbb{Q}$ ベクトル空間を M とする：$M := \bigoplus_{f:F\text{の既約因子}} M^f$．このとき $\mathbb{Q}[X] \twoheadrightarrow M$ における X の像を α とすると，（M を $\mathbb{Q}$ 代数 $\prod_f M^f$ とみたときの）α 倍写像 $M \to M$ は F を固有多項式とする半単純な線型変換である．

Step 2. **局所化．** 仮に条件 (1) をみたす M の内積 b が存在するならば，各素点 v に対して $b_v = b \otimes \mathbb{Q}_v$ として，明らかに次の (P1)，(P2) が成り立つ．

$$\alpha : M_v \to M_v \text{ は内積 } b_v \text{ を保つ自己同型である．} \tag{P1}$$

$$\begin{aligned} &v \text{ が素数 } p \text{ ならば } \alpha\text{-不変な } \mathbb{Z}_p\text{-ユニモジュラー偶格子が } (M_p, b_p) \text{ 内に存在する．} \\ &\text{また } v = \infty \text{ ならば } \mathrm{idx}_\alpha = \iota. \end{aligned} \tag{P2}$$

[*5] Hasse-Witt 不変量の定義は，例えば [8, §4.2] をみるとよい．ただし，本稿では値を $\{0, 1\}$ にとるものとしている（加法的）が，[8] では値を $\{1, -1\}$ にとるものとしている（乗法的）．流儀の違いであって本質的な違いではない．

[*6] 本稿では素点の定義は割愛するが，もし知らなければ，ここでは素数または無限素点とよばれる記号 ∞ と思えばよい．

ここで $\mathbb{Z}_p$ は p 進整数環で，$\mathbb{Z}_p$**-格子**とは §1 で述べた格子の定義の $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}_p$ で置き換えたものである．また，非自明だが $F(\pm 1) = 0$ の場合は次の (P3) も各素点 v に対して成り立つ．

$$\det(b_v|_{M^{X\mp 1}}) = \begin{cases} (-1)^{s_\pm}|G(\pm 1)| & \text{if } n_- \text{ is even} \\ (-1)^{s_\pm} 2|G(\pm 1)| & \text{if } n_- \text{ is odd} \end{cases} \quad \text{in } \mathbb{Q}_v^\times/\mathbb{Q}_v^{\times 2}. \tag{P3}$$

ただし $G(X) = F(X)/((X-1)^{n_{X-1}}(X+1)^{n_{X+1}})$, $s_\pm = (n_{X\mp 1} - \iota(X \mp 1))/2$ である．

そこで M_v 上の内積 b_v の族 $\{b_v\}_{v\in\mathcal{V}}$ であって，各 b_v に対して (P1)–(P3) が成り立ち，かつ

$$\#\{(v, f) \in \mathcal{V} \times I \mid \epsilon_v(b_v|_{M^f}) = 1\} < \infty \tag{2}$$

をみたすもの全体を $\mathcal{B}$ とおく：

$$\mathcal{B} = \{\{b_v\}_{v\in\mathcal{V}} \mid \text{各 } b_v \text{ は (P1)–(P3) をみたし，かつ (2) が成り立つ }\}.$$

ただし，I は多項式 F の $\mathbb{Q}[X]$ 内での $*$-対称な既約因子全体の集合である．$\mathcal{B}$ は空でないことが証明できる．

Step 3. **局所-大域原理．** $\{b_v\}_v \in \mathcal{B}$ が

$$\sum_{v\in\mathcal{V}} \epsilon_v(b_v|_{M^f}) = 0 \quad \text{for all } f \in I \tag{3}$$

をみたすならば，$\alpha : M \to M$ によって保存される M の内積 b で，すべての $v \in \mathcal{V}$ で $b \otimes \mathbb{Q}_v \cong b_v$ が成り立つものが存在する．標語的に言えば「(3) をみたす局所的な内積の族は同型を除いて大域的な内積に持ち上がる」．定理 1.1 の主張に現れる Ω や ob は，(3) をみたす $\{b_v\}_v \in \mathcal{B}$ が存在するための必要十分条件を記述するのに用いられる．これについては §2.3 で改めて述べる．以下，(3) をみたす $\{b_v\}_v \in \mathcal{B}$ が存在すると仮定し，それをひとつ固定する．また b を上のような M の内積とする．

Step 4. **仕上げ．** 各素数 p に対して $(M_p, b \otimes \mathbb{Q}_p)$ 内の α-不変な $\mathbb{Z}_p$-ユニモジュラー偶格子 Λ_p を適当に選ぶと

$$\Lambda := \{x \in M \mid \text{すべての素数 } p \text{ 対して } (x \text{ の } M \to M_p \text{ における像}) \in \Lambda_p\}$$

が (M, b) 内の α-不変なユニモジュラー偶格子となる．また，$b \otimes \mathbb{Q}_\infty \cong b_\infty$ は (P2) をみたすので M の（したがって Λ の）符号数は (r, s) で $\mathrm{idx}_\alpha = \iota$ が成り立っている．こうして，(F, ι)-自己同型をもつ符号数 (r, s) のユニモジュラー偶格子の存在が示される．

2.3 局所-大域障害

ここでは (3) をみたす $\{b_v\}_v \in \mathcal{B}$ が存在するための必要十分条件を記述する．記号は §2.2 の通りとし，$C(I) := \{\gamma : I \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus I}$ とおく．また，$\eta : \mathcal{B} \to C(I)$ を $\beta = \{b_v\}_v \in \mathcal{B}$ に対して

$$\eta(\beta) = (f \mapsto \sum_{v\in\mathcal{V}} \epsilon_v(b_v|_{M^f}))$$

で定義する．$\beta \in \mathcal{B}$ に対して，(3) は $\eta(\beta) = \mathbf{0}$ と書き換えることができて，さらに

$$\eta(\beta) \cdot c = 0 \quad \text{for all } c \in C(I) \tag{4}$$

と同値である．ただし $\gamma, c \in C(I)$ に対して $\gamma \cdot c = \sum_{f \in I} \gamma(f) c(f)$ である．この言い換えは明らかだが重要である．

次に η の像 $\eta(\mathcal{B}) \subset C(I)$ がどのような集合か考える．簡単のため n_{X-1}, n_{X+1} はともに 1 でも 2 でもないと仮定する．このとき $f, g \in I$ に対して素数の集合 $\Pi_{f,g}$ を次をみたす素数 p 全体の集合として定義する：

f, g それぞれの $\mathbb{Z}_p[X]$ 内での $*$-対称な既約因子 $\widehat{f}, \widehat{g}$ で，$\mathbb{F}_p[X]$ 内で
$\widehat{f} \bmod p$ と $\widehat{g} \bmod p$ が共通の $*$-対称な既約因子をもつものが存在する．

ただし $\mathbb{F}_p$ は位数 p の有限体である．さらに $C(I)$ に同値関係 $\sim$ を次の 2 項関係 R で生成されるものとして定義する：

$$R(\gamma, \gamma') \iff \gamma' = \gamma + \mathbf{1}_{\{f,g\}} \quad \text{for some } f, g \text{ with } \Pi_{f,g} \neq \emptyset$$

ただし $H \subset I$ に対して $\mathbf{1}_H \in C(I)$ は特性関数である．以上の準備の下で次が成り立つ．

定理 2.3 $\eta(\beta) \subset C(I)$ は $\sim$ に関するひとつの同値類である．

この定理を用いてさらに条件 (3) を言い換える．$C_\sim(I) := \{c \in C(I) \mid c(f) = c(g) \text{ if } \Pi_{f,g} \neq \emptyset\}$ とおく．$\gamma, \gamma' \in C(I)$ に対して $\gamma \sim \gamma'$ ならば任意の $c \in C_\sim(I)$ に対して $\gamma \cdot c = \gamma' \cdot c$ が成り立つ．したがって $\text{-}\cdot\text{-} : C(I) \times C(I) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は $C(I)/\sim \times C_\sim(I) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ を誘導する．とくに定理 2.3 より

$$C_\sim(I) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z};\ c \mapsto \eta(\beta) \cdot c \quad \text{for some } \beta \in \mathcal{B} \tag{5}$$

が well-defined である．さらに実は $\beta \in \mathcal{B}$ に対して $\eta(\beta) \cdot \mathbf{1}_I = 0$ がいえる．そこで $\Omega := C_\sim(I)/\{\mathbf{0}, \mathbf{1}_I\}$ とおくと (5) から $\Omega \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が誘導される．この準同型を ob で表す[*7]．このとき ob が零写像であることが (4) と同値であり，したがって (3) とも同値である．

つまり，$\mathrm{ob} : \Omega \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ が零写像ならば，§2.2 で述べたように，(F, ι)-自己同型をもつ符号数 (r, s) のユニモジュラー偶格子が存在する．以上が定理 1.1 の (ii)⇒(i) の証明の概略である．

以下，定理 1.1 の簡単な適用例に触れておく．

例 2.4 Ω が自明群ならば $\mathrm{ob} : \Omega \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は零写像であるしかない．例えば F が既約であれば Ω は自明群である．つまり定理 1.1 から，「F が既約ならば（任意の ι に対して）符号数 (r, s) のユニモジュラー偶格子で，半単純な (F, ι)-自己同型をもつものが存在する」ということがいえる．これは Bayer-Fluckiger と Taelman による結果 [1] に他ならない．

より具体的な例として次のようなこともいえる．

例 2.5 $F(X) = (X^4 - X^2 + 1)(X - 1)^4$ とする．F は $+1$-対称で $(r, s) = (8, 0)$ と $(4, 4)$ の両方に対して条件 (Sg) が成り立つ．また，条件 (Sq) も成り立つ．いまの場合，$\Pi_{X^4 - X^2 + 1, X - 1}$ は空集合で $\Omega \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である．とくに ob は必ずしも零とは限らない．実際，$(r, s) = (8, 0)$ の場合は ob が消

[*7] ob は「障害（obstruction）」に因んでいる．この障害が消えるとき，かつそのときに限り局所的な内積の族 $\{b_v\}_v$ で大域的な内積に持ち上がるものが存在するのである．

えない．これは F が符号数 $(8,0)$ のユニモジュラー偶格子，つまり E_8 型格子の自己同型の固有多項式ではあり得ないことを意味する．

一方で F は符号数 $(4,4)$ のユニモジュラー偶格子の自己同型の固有多項式としては実現できる．実際，X^4-X^2+1 と $(X-1)^4$ はそれぞれ $+1$-対称で条件 (Sq) をみたす．さらに $(r,s)=(2,2)$ に対して条件 (Sg) が成り立つから，X^4-X^2+1 と $(X-1)^4$ はそれぞれ符号数 $(2,2)$ のユニモジュラー偶格子の自己同型の固有多項式として実現できる．あとはそれらを直和すればよい．

3　K3 曲面への応用

K3 曲面とは，Enriques-Kodaira の分類とよばれる，コンパクト複素曲面の分類によるひとつのクラスで，単連結かつ標準束が自明なコンパクト複素曲面として定義される．標準束が自明なことは至るところ消えない正則 2-形式が存在することを意味する．K3 曲面の具体例としては，複素射影空間 $\mathbb{P}^3$ 内の非特異 4 次曲面，とくに $\{[x:y:z:w]\in\mathbb{P}^3 \mid x^4+y^4+z^4+w^4=0\}$ などが挙げられるが，本稿では具体的な K3 曲面というよりは曲面のクラスとしての性質が中心になる．この節では，K3 曲面の自己同型とユニモジュラー偶格子の自己同型の関係を述べ，定理 1.2 の証明の概略を与える．

3.1　自己同型のリフト

まず，どんな K3 曲面も微分同相であることが知られており，とくに（特異）コホモロジー群はどんな K3 曲面に対しても共通に次のようになっている：K3 曲面 $\mathcal{X}$[*8]に対して

$$H^0(\mathcal{X},\mathbb{Z})\cong H^4(\mathcal{X},\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z},\quad H^1(\mathcal{X},\mathbb{Z})=H^3(\mathcal{X},\mathbb{Z})=0,\quad H^2(\mathcal{X},\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}^{22}.$$

さらに 2 次コホモロジー群 $H^2(\mathcal{X},\mathbb{Z})$ は交叉形式（カップ積）によって符号数 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子となる．符号数 $(3,19)$ のユニモジュラー偶格子を **K3 格子**とよぶ．一般に不定値のユニモジュラー偶格子は同型を除いて一意的であることが知られており，とくに K3 格子も一意的である．

次に，K3 曲面の 2 次コホモロジー群に Hodge 構造と Kähler 錐とよばれる複素構造を反映した 2 つの構造が存在することを述べる．$\mathcal{X}$ を K3 曲面とし，$\mathcal{X}$ 上の消えない正則 2-形式を $\omega_{\mathcal{X}}$ で表す．このとき $H^2(\mathcal{X},\mathbb{C})=H^2(\mathcal{X},\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}$ の次の直和分解を $\mathcal{X}$ の **Hodge 構造**という：

$$H^2(\mathcal{X},\mathbb{C})=H^{2,0}(\mathcal{X})\oplus H^{1,1}(\mathcal{X})\oplus H^{0,2}(\mathcal{X}).$$

ここで $H^{2,0}(\mathcal{X})=\mathbb{C}\omega_{\mathcal{X}}, H^{0,2}(\mathcal{X})=\mathbb{C}\overline{\omega_{\mathcal{X}}}$ で $H^{1,1}(\mathcal{X})$ は交叉形式に関する $H^{2,0}(\mathcal{X})\oplus H^{0,2}(\mathcal{X})$ の直交補空間，また $\overline{\cdot}$ は複素共役である．なお，$H^{2,0}(\mathcal{X})\oplus H^{0,2}(\mathcal{X})$ の符号数は $(2,0)$，したがって $H^{1,1}(\mathcal{X})$ の符号数は $(1,19)$ である．さらに，$\mathcal{X}$ の Kähler 類[*9]全体 $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ は $H^{1,1}(\mathcal{X})$ の実部 $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(\mathcal{X})=\{x\in H^{1,1}(\mathcal{X})\mid\overline{x}=x\}$ 内の錐をなす．これを $\mathcal{X}$ の **Kähler 錐**という．

[*8] ここでは K3 曲面を表すのに（多項式の不定元 X との重複を避けて）筆記体の $\mathcal{X}$ を用いているが，一般にこのような慣習があるわけではない．

[*9] Kähler 類の定義は割愛するが，Kähler 計量とよばれる“よい”軽量から定まる実 $(1,1)$-形式が代表するコホモロジー類のことである．

逆に，K3 格子に形式的に Hodge 構造と Kähler 錐を定義することができる．(Λ, b) を K3 格子とする．$\Lambda_{\mathbb{C}} := \Lambda \otimes \mathbb{C}$ 内のベクトル ω で $\mathbb{C}\omega \oplus \mathbb{C}\overline{\omega}$ が正定値となるようなものは，$\Lambda_{\mathbb{C}}$ の分解

$$\Lambda_{\mathbb{C}} = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$$

を定める．ただし $H^{2,0} = \mathbb{C}\omega, H^{0,2} = \mathbb{C}\overline{\omega}$ で $H^{1,1}$ は $H^{2,0} \oplus H^{0,2}$ の直交補空間である．以下ではこの分解の代わりに単に上のようなベクトル $\omega \in \Lambda_{\mathbb{C}}$ を Λ の **Hodge 構造**という．さらに，$H^{1,1}$ の実部に，ルート系 $\Delta = \{r \in \Lambda \cap H^{1,1} \mid b(r,r) = -2\}$ のひとつの Weyl の部屋として錐 $\mathcal{K}$ が得られる．このような錐 $\mathcal{K}$ を Λ の **Kähler 錐**という．Λ の Hodge 構造と Kähler 錐の組を **K3 構造**とよぶことにする．

K3 格子上の K3 構造を保つ自己同型は次の意味で K3 曲面上の自己同型に“持ち上がる”．例えば [6, §6] をみるとよい．

事実 3.1　Λ を K3 格子とし，$t : \Lambda \to \Lambda$ をある K3 構造 $(\omega, \mathcal{K})$ を保つ自己同型とする．このとき以下をみたす K3 曲面 $\mathcal{X}$ の自己同型 φ と格子としての同型写像 $\tau : H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \to \Lambda$ が存在する：$\tau(\omega_{\mathcal{X}}) \in \mathbb{C}\omega, \tau(\mathcal{K}_{\mathcal{X}}) = \mathcal{K}$ かつ図式

$$\begin{tikzcd} H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d, "\tau"] & H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \arrow[d, "\tau"] \\ \Lambda \arrow[r, "t"] & \Lambda \end{tikzcd}$$

が可換.

3.2　エントロピー

コンパクト位相空間上の自己写像には，**位相的エントロピー**（以下，単にエントロピーという）とよばれる力学系的な[*10]量が定義される．エントロピーは非負の実数で，自己写像のある種の複雑さを定量化したものである．エントロピーが大きいほど写像は複雑であると考えることができて，例えば位数有限の写像のエントロピーは 0 である．本稿ではエントロピーの定義は割愛するが，次の事実によって K3 曲面上の自己同型のエントロピーを求めることができる．

事実 3.2　$\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ を K3 曲面 $\mathcal{X}$ 上の自己同型とする．このとき φ のエントロピーは誘導準同型 $\varphi^* : H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \to H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ のスペクトル半径 $\max\{|\lambda| \mid \lambda$ は φ の固有値 $\}$ の対数に等しい.

これは Gromov や Yomdin による定理の特別な場合である．さらにこの事実から，K3 曲面の自己同型のエントロピーは 0 でなければ高々 22 次の Salem 数の対数になることがいえる．詳しくは [5, §3] をみるとよい．ここで次のようなエントロピースペクトラムの問題が生じる．

問題 3.3　どのような Salem 数の対数が K3 曲面の自己同型のエントロピーとして実現されるか？

事実 3.1，3.2 によって，この問題は「どのような Salem 数が，K3 格子のある K3 構造を保つ自己同型のスペクトル半径として実現されるか？」という，ユニモジュラー偶格子の自己同型の問題に帰

[*10] ここで力学系とは自己写像の反復合成を指す.

着する．現在までに知られている K3 曲面のエントロピースペクトラムの問題に対する結果は，ほとんどがこのような格子理論からのアプローチによって得られたものである（と思う）．

最後に定理 1.2 の証明の概略を述べる．まず，λ を 20 次の Salem 数とし $S(X)$ をその最小多項式とする．このとき，定理 1.1 を用いると実は以下の条件をみたすような K3 格子 Λ 上の自己同型 t の存在がいえる：

- t の固有多項式は $F(X) := (X-1)(X+1)S(X)$ である．
- $S(X)$ の根 δ で，δ に対応する t の固有ベクトルを $\omega \in \Lambda \otimes \mathbb{C}$ とすると $\mathbb{C}\omega \oplus \mathbb{C}\overline{\omega}$ が正定値であるものが存在する．

上のような t を固定する．t のスペクトル半径は λ で，ω は t で保たれる Λ の Hodge 構造である．いま Λ の Kähler 錐 $\mathcal{K}$ を好きに固定する．一般には t は $\mathcal{K}$ を保たないが，スペクトル半径を変えない変形で $\mathcal{K}$ を保つようにできる．つまり次をみたす Λ 上の自己同型 $\widetilde{t}$ が存在する：

$$\widetilde{t} \text{ は K3 構造 } (\omega, \mathcal{K}) \text{ を保ち，かつ，そのスペクトル半径は } \lambda \text{ に等しい．}$$

したがって事実 3.1，3.2 より $\log\lambda$ は K3 曲面の自己同型のエントロピーとして実現される．

なお，上の証明では対応する K3 曲面は必ず非射影的になる．ここで複素多様体が**射影的**であるとは（ある次元の）複素射影空間への埋め込みが存在することである．上の方法で，与えられたエントロピーをもつ射影的な K3 曲面の自己同型の存在を示そうとすると，K3 格子の自己同型が Kähler 錐を保つ条件を考えたときにより難しい問題が生じる（例えば [7] をみるとよい）．これが理由で，射影的な K3 曲面のエントロピースペクトラムの問題に対して，非射影的な場合のような結果はまだ得られていない．射影的な場合は今後の課題である．

参考文献

[1] Bayer-Fluckiger, E., Taelman, L.: Automorphisms of even unimodular lattices and equivariant Witt groups. J. Eur. Math. Soc. **22** (2020), 3467–3490.

[2] Bayer-Fluckiger, E.: Isometries of lattices and Hasse principles. arXiv:2001.07094v3.

[3] Bayer-Fluckiger, E.: Isometries of lattices and automorphisms of K3 surfaces. arXiv: 2107.07583v1.

[4] Gross, B.H., McMullen, C.T.: Automorphisms of even unimodular lattices and unramified Salem numbers. J. Algebra **257** (2002), no. 2, 265–290.

[5] McMullen, C.T.: Dynamics on K3 surfaces: Salem numbers and Siegel disks. J. Reine Angew. Math. **545** (2002), 201–233.

[6] McMullen, C.T.: K3 surfaces, entropy and glue. J. Reine Angew. Math. **658** (2011), 1–25.

[7] McMullen, C.T.: Automorphisms of projective K3 surfaces with minimum entropy. Invent. Math. **203** (2016), no. 1, 179–215.

[8] Serre, J.P.: A Course in Arithmetic. Springer Sience+Business Media New York, 1973.

[9] Takada, Y.: Lattice isometries and K3 surface automorphisms: Salem numbers of degree 20. arXiv:2210.12946v1.

特殊多項式のSchur多項式への変換公式

杉本奨吾（Sugimoto Shogo）

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻

Abstract

Schur 多項式は表現論では対称群や一般線型群の指標を表す特殊多項式であり, Schubert calculus においては, Grassmann 多様体のコホモロジー環の Schubert 類を表す特殊多項式である. 多項式の特徴としては, 整数係数対称多項式環の基底である. つまり任意の対称多項式は Schur 多項式の和であらわすことができる. Schubert calculus には Schur 多項式以外にも様々な特殊多項式が現れ, ここでは対称な特殊多項式たちの Schur 多項式への変換を考える.

この研究は早稲田大学の中山勇祐氏との共同研究である.

1 Introduction

Schur 多項式は一般線型群の既約な多項式表現の指標であり, さらに Schubert calculus においては Grassmann 多様体のコホモロジー環の Schubert 類をあらわす特殊多項式である.

Schur 多項式は partiton で添字づけられる多変数多項式である. ここで partition とは有限の正整数の広義単調減少列である. Schur 多項式の多項式としての特徴としては対称であり, 整数係数対称多項式環の基底になる. つまり任意の対称多項式は Schur 多項式の線型結合で表すことができる. Schubert calculus には Schur 多項式以外にも様々な対称な特殊多項式が現れる. Schubert calculus にあらわれる対称な特殊多項式の Schur 多項式での展開を考える.

2 Schur 多項式と Schubert calculus

Schur 多項式が Schubert calculus では Schubert class をあらわす特殊多項式になっている. このことについて簡単に説明する. 詳しくは池田岳先生の本 [8] をみられたい.

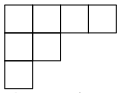
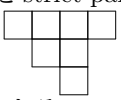
2.1 Schubert 多様体

定義 2.1. 正整数の有限広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell)$ を *partition* という. このとき ℓ を λ の *length* という. λ を *partition* とする. $\mathbb{D}(\lambda) := \{(i,j) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0} | 1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq \lambda_i\}$ を λ の *Young diagram* という. $|\lambda|$ で $|\lambda| := \lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell$ をあらわす.

- $\mathcal{P}$ *:the set of all partitions*
- $\mathcal{P}_m := \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) \in \mathcal{P} | \ell \leq m\}$
- $\mathcal{P}_m(n) := \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) \in \mathcal{P} | \ell \leq m, \lambda_1 \leq n\}$

定義 2.2. 正整数の狭義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell)$ を *strict partition* という. ℓ を λ の *length* という. λ を *strict partittion* とする. $\mathbb{SD}(\lambda) := \{(i,j) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}_{>0} | 1 \leq i \leq \ell, i \leq j \leq \lambda_i + i - 1\}$ を λ の *shifted Young diagram* という. *Partition* と同様に $|\lambda|$ で $|\lambda| := \lambda_1 + \cdots + \lambda_\ell$ をあらわす.

- $\mathcal{SP}$ *:the set of all strict partitions*
- $\mathcal{SP}_m := \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) \in \mathcal{P} | \ell \leq m\}$
- $\mathcal{SP}(m) := \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) \in \mathcal{P} | \lambda_1 \leq m\}$

λ を length ℓ の partition とする．この λ に対して 1 行目に λ_1 個の箱を横に並べ，2 行目に λ_2 個の箱を並べ,$\cdots$ ℓ 行目に λ_ℓ の箱を並べた箱の集まりを考える．$\mathbb{D}(\lambda)$ はこの箱の集まりと同一視する．つまり $\mathbb{D}(4,2,1) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(3,1)\} =$  と同一視する．ここで $\mathbb{D}(\lambda)$ の元 (i,j) は箱の位置を表している．同様に $(4,2,1)$ を strict partition とみなすと $\mathbb{SD}(4,2,1) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ であるから，次の箱の集まり  と同一視する．

これ以降 partition とその Young diagram, strict partition とその shifted Young diagram は断りなく同一視する．

定義 2.3. *2 つの prtitions* $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell), \mu = (\mu_1, \cdots, \mu_{\ell'})$ に対して $\ell \leq \ell'$ かつ $\lambda_i \leq \mu_i, \forall i = 1, \cdots, \ell$ のとき $\lambda \subset \mu$ とあらわす．

定義 2.4. $Gr(m, \mathbb{C}^n) := \{V \subset \mathbb{C}^n | \dim V = m\}$ を *Grassmann* 多様体という．$\lambda \in \mathcal{P}_m(n-m) = \{\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) | \ell \leq d, \lambda_1 \leq n-d\}$ と $\mathbb{C}^n$ の旗 $F^\bullet : \{0\} = F^n \subset F^{n-1} \subset \cdots \subset F^0 = \mathbb{C}^n, \dim F^i = n-i$ に対して *Schubert* 多様体 $\Omega_\lambda(F^\bullet)$ を

$$\Omega_\lambda(F^\bullet) := \{V \in Gr(m, \mathbb{C}^n) | \dim(F^{\lambda_i + d - i} \cap V) \geq i, 1 \leq i \leq m\}$$

で定義する．

Schubert 多様体には次の特徴がある．

- $\Omega_\lambda(F^\bullet)$ は $Gr(m, \mathbb{C}^n)$ の irreducible closed subvariety になる．
- $\Omega_\lambda(F^\bullet)$ は $H^{2|\lambda|}(Gr(m, \mathbb{C}^n))$ の元 $[\Omega_\lambda(F^\bullet)]$ を定め，またこの class は選んだ旗に寄らない．
- $\sigma_\lambda := [\Omega_\lambda(F^\bullet)]$ を Schubert Class とよび，これらの class たち $\{\sigma_\lambda | \lambda \in \mathcal{P}_m(n-m)\}$ は，コホモロジー環 $H^*(Gr(m, \mathbb{C}^n))$ の $\mathbb{Z}$-基底になる．
- 整数 $c^\nu_{\lambda,\mu}$ を $\sigma_\lambda \sigma_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda,\mu} \sigma_\nu$ で定義する．お互いに十分一般の旗を選べば $\#(\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(F'^\bullet) \cap \Omega_{\nu^\vee}(F''^\bullet))$ は一定の有限の値をとり，この値は $c^\nu_{\lambda,\mu}$ に一致する．ここで $\nu^\vee$ は $\nu^\vee_i = n - m - \nu_{m+1-i}$ である partition である．$c^\nu_{\lambda,\mu}$ を Schubert 構造定数という．

2.2 Schur 多項式

定義 2.5. $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) \in \mathcal{P}_m$ を *partition* とする．*Schur* 多項式 $s_\lambda(x_1, \cdots, x_m)$ を

$$s_\lambda(x_1, \cdots, x_m) := \frac{\det(x_j^{\lambda_i + m - i})_{1 \leq i,j \leq m}}{\det(x_j^{m-i})_{1 \leq i,j \leq m}}$$

で定義する．

この多項式は対称多項式環 $\mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_m]^{S_m}$ の $\mathbb{Z}$-基底になっている．次の定理は Schubert calculus において基本的な事実である．

定理 2.6. 次の写像 π_m は全射な $\mathbb{Z}$ 代数としての準同型である．

$$\begin{aligned} \pi_m : \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_m]^{S_m} &\longrightarrow H^*(Gr(m, \mathbb{C}^n)) \\ s_\lambda(x_1, \cdots, x_m) &\mapsto \begin{cases} \sigma_\lambda & \lambda \in \mathcal{P}_m(n-m) \\ 0 & \lambda \notin \mathcal{P}_m(n-m) \end{cases} \end{aligned}$$

この対応により構造定数を代数的な計算から求めることができる．

3 そのほかの特殊多項式

Schubert 多様体は Grassmann 多様体以外の多様体でも定義することができ, さらに Schubert class も K 理論的環でも (他にも同変版や量子版などでも) 定義できる.

定義 3.1. *(Lascoux–Schützenberger[4])*
$\lambda \in \mathcal{P}_m$ を *partition* とする. *Grothendieck* 多項式 $G_\lambda^{(\beta)}(x_1, \cdots, x_m)$ を

$$G_\lambda^{(\beta)}(x_1, \cdots, x_m) = \frac{\det(x_i^{\lambda_j+m-j}(1+\beta x_i)^{j-1})_{1\le i,j\le m}}{\det(x_j^{m-i})_{1\le i,j\le m}}$$

で定義する.

Grothendieck 多項式には次の特徴がある.

- $G_\lambda^{(\beta)}(x_1, \cdots, x_m)$ は次数が $|\lambda|$ $(\deg(\beta) := -1)$ の斉次な対称多項式である.
- $\{G_\lambda^{(\beta)}(x_1, \cdots, x_m) | \lambda \in \mathcal{P}_m\}$ は $\mathbb{Z}[\beta][x_1, \cdots, x_m]^{S_m}$ の $\mathbb{Z}[\beta]$ 基底をなす.
- $G_\lambda^{(0)}(x_1, \cdots, x_m) = s_\lambda(x_1, \cdots, x_m)$
- Schubert calculus においては Grassmann 多様体の K 理論の Schubert class を表す特殊多項式である.

定義 3.2. *(Schur[6], Ikeda–Naruse[3])* $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell) \in \mathcal{SP}_n$ を *strict partition* とする.
Schur P, Schur Q 多項式, *GP, GQ* 多項式をそれぞれ次で定義する.

$$\begin{aligned}
P_\lambda(x_1, \cdots, x_n) &= \frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{w\in S_n} w\left[x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_\ell^{\lambda_\ell}\prod_{1\le i<j\le n, i\le \ell}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\right]\\
Q_\lambda(x_1, \cdots, x_n) &= \frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{w\in S_n} w\left[x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_\ell^{\lambda_\ell}\prod_{i=1}^{\ell}(2+\beta x_i)\prod_{1\le i<j\le n, i\le \ell}\frac{x_i+x_j}{x_i-x_j}\right]\\
GP_\lambda^{(\beta)}(x_1, \cdots, x_n) &= \frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{w\in S_n} w\left[x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_\ell^{\lambda_\ell}\prod_{1\le i<j\le n, i\le \ell}\frac{x_i\oplus x_j}{x_i\ominus x_j}\right]\\
GQ_\lambda^{(\beta)}(x_1, \cdots, x_n) &= \frac{1}{(n-\ell)!}\sum_{w\in S_n} w\left[x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_\ell^{\lambda_\ell}\prod_{i=1}^{\ell}(2+\beta x_i)\prod_{1\le i<j\le n, i\le \ell}\frac{x_i\oplus x_j}{x_i\ominus x_j}\right].
\end{aligned}$$

ここで演算 $\oplus, \ominus$ はそれぞれ $x \oplus y := x + y + \beta xy, x \ominus y := \frac{x-y}{1+\beta y}$ で定義する. また S_n は n 次の対称群をあらわし 対称群の元 $w \in S_n$ は $x = (x_1, \cdots, x_n)$ の添字に自然に作用する.

Grothendieck 多項式とおなじようにこれらの多項式も Schubert class を表す特殊多項式である. 特にこれらの多項式は対称であるから, Schur 多項式で展開できるはずである. よってここで考えたい問題は「Grothendieck 多項式, Schur P, Schur Q, GP, GQ 多項式をそれぞれ Schur 多項式で展開」することである.

4 多項式たちの関係

Schur 多項式,Grothendieck 多項式, Schur P, Schur Q, GP, GQ 多項式を導入した. これらの多項式の関係を説明する. $\Lambda_{\mathbb{Z},m} := \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_m]^{S_m}$ を m 変数の対称多項式環という. $\rho_n : \Lambda_{\mathbb{Z},n+1} \longrightarrow \Lambda_{\mathbb{Z},n} \quad f(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \mapsto f(x_1, \cdots, x_n, 0)$ で準同型が存在する. この準同型から環 $\Lambda_\mathbb{Z} := \varprojlim \Lambda_{\mathbb{Z},m}$ が定義できこの環を対称関数環という. さらに $s_\lambda(x_1, \cdots, x_n, 0) = s_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$ が成立する. Schur 関数を $s_\lambda(x) := \varprojlim s_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$ で定義する.

同様に $G_\lambda(x), P_\lambda(x), GP_\lambda(x), Q_\lambda(x), GQ_\lambda(x)$ も定義する.

4.1 GP 関数と GQ 関数

命題 4.1. $\lambda \in \mathcal{SP}_n$ を長さ ℓ の *strict partition* とする．このとき次の等式が成立する．

$$P_\lambda(x) = 2^{-\ell} Q_\lambda(x).$$

上の等式を Schur P 関数の定義とすることもある．

定義 4.2. *2* つの *strict partitions* $\lambda \supset \mu$ に対して *skew diagram* $\mathbb{SD}(\lambda/\mu) := \mathbb{SD}(\lambda) \setminus \mathbb{SD}(\mu)$ の各行が *2* 個以上の箱を持たないときこの *diagram* を *shape* λ/μ の *vartical strip* という．また $|\lambda/\mu|$ で $|\lambda| - |\mu|$ をあらわす．

命題 4.3. *(Chiu–Marberg[2])* $\mu \in \mathcal{SP}_n$ を長さ ℓ の *strict partition* とする．

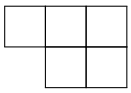
$$GQ_\mu^{(\beta)}(x) = 2^\ell \sum_\lambda (-1)^{cols(\lambda/\mu)} \left(\frac{-\beta}{2}\right)^{|\lambda/\mu|} GP_\lambda^{(\beta)}(x)$$

ただし右辺の *partition* λ は $\lambda \supset \mu, \ell(\lambda) = \ell$ かつ $|\lambda/\mu|$ は *vertical strip* をみたすように動く．また $cols(\lambda/\mu)$ は λ/μ の列の個数である．

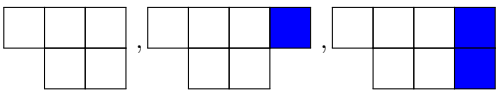
この等式は $\beta = 0$ を代入すると上の Schur P, Schur Q の関係が得られる．

例 1.

$$GQ_{(3,2)}^{(\beta)}(x) = 4GP_{(3,2)}^{(\beta)}(x) + 2\beta GP_{(4,2)}^{(\beta)}(x) - \beta^2 GP_{(4,3)}^{(\beta)}(x)$$

$\mathbb{SD}(\mu) =$ 

であるから, 右辺の λ は

$\mathbb{SD}(\lambda) =$ 

をみたす *strict partition* $(3,2), (4,2), (4,3)$ である．

4.2 Schur 多項式と Grtohendieck 多項式

定義 4.4. *2* つの *partitions* $\lambda \supset \mu$ に対して *skew diagram* $\mathbb{D}(\lambda/\mu)$ を $\mathbb{D}(\lambda) \setminus \mathbb{D}(\mu)$ で定義する．また $|\lambda/\mu|$ で $|\lambda| - |\mu|$ をあらわす．

定義 4.5. *2* つの *partitions* $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ が $\lambda \supset \mu$ を満たすとする．T を *skew Young diagram* $\mathbb{D}(\lambda/\mu)$ の各 *box* に次の条件で正の整数を入れたものとする．これを *shape* μ/λ の *strict tableau* という．

(1) $T(i,j) < T(i,j+1)$,

(2) $T(i,j) < T(i+1,j)$.

命題 4.6. *(Lenart[5]) Grothendieck* 多項式は *Schur* 多項式の線型結合として次のように表せる．

$$G_\lambda^{(\beta)}(x_1, \cdots, x_m) = \sum_{\lambda \subset \mu \subset \hat{\lambda}} \beta^{|\mu/\lambda|} g_{\lambda,\mu} s_\mu(x_1, \cdots, x_m)$$

$\hat{\lambda}$ は $\lambda + (0, 1, 2, \cdots, m-1)$ を表し, μ は λ を含み $\hat{\lambda}$ に含まれる *partition* である．$g_{\lambda,\mu}$ は各 i 行の *entry* を $1, 2, \cdots, i-1$ に制限した *shape* μ/λ の *strict tableaux* の個数である．ここで i 行とは λ, μ の i 行と一致するようにとる．また $g_{\lambda,\lambda} := 1$ とおく．

例 2.

$$G^{(\beta)}_{(3,1,1)}(x_1,x_2,x_3) = s_{(2,1)}(x_1,x_2,x_3) + \beta s_{(2,2)}(x_1,x_2,x_3) + 2\beta s_{(3,1)}(x_1,x_2,x_3) + 2\beta^2 s_{(3,2)}(x_1,x_2,x_2) + \beta^3 s_{(3,3)}(x_1,x_2,x_2)$$

である．$\lambda = (3,1)$ のとき，$\hat{\lambda} = (3,1) + (0,1,2) = (3,2,2)$ は *partition* であるから右辺の *partition* は $(3,1)$ と $(3,2,2)$ の間を動き，各係数は次で求める．

$$g_{(2,1),(2,2)} = \#\left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & 1 \\ \cline{1-2} \end{array} \right\} = 1 \quad , \quad g_{(2,1),(3,1)} = \#\left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline \\ \cline{1-1} 1 \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline \\ \cline{1-1} 2 \end{array} \right\} = 2,$$

$$g_{(2,1),(3,2)} = \#\left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & 1 \\ \cline{1-2} 1 \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & 1 \\ \cline{1-2} 2 \end{array} \right\} = 2 \quad , \quad g_{(2,1),(3,3)} = \#\left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & 1 \\ \cline{1-2} 1 & 2 \end{array} \right\} = 1.$$

定義 4.7. *2 つの partitions* $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ *が* $\lambda \subset \mu$ *を満たすとする．*T *を skew Young diagram* $\mathbb{D}(\mu/\lambda)$ *の各 box に次の条件で番号を入れたものとする．これを shape* μ/λ *の strict tableau という．*

(1) $T(i,j) \le T(i,j+1)$,

(2) $T(i,j) < T(i+1,j)$.

命題 4.8. *(Lenart[5]) Schur 多項式は Grothendieck 多項式の線型結合で次のように表せる．*

$$s_\lambda(x_1,\cdots,x_m) = \sum_{\lambda\subset\mu,\ell(\mu)\le m,\mu_1=\lambda_1} (-\beta)^{|\mu/\lambda|} f_{\lambda,\mu} G^{(\beta)}_\mu(x_1,\cdots,x_m)$$

$f_{\lambda,\mu}$ *は shape* μ/λ *の semistandard tableau で各* i *行が* $1,\cdots,i-1$ *であるものの個数．ここで* i *行とは* λ,μ *の* i *行と一致するようにとる．また* $f_{\lambda,\lambda} := 1$ *とおく．*

例 3.

$$\begin{aligned} s_{(3,3)}(x_1,x_2,x_3) &= G^{(\beta)}_{(3,3)}(x_1,x_2,x_3) - \beta(G^{(\beta)}_{(4,3)}(x_1,x_2,x_3) + 2G^{(\beta)}_{(4,3,1)}(x_1,x_2,x_3)) \\ &\quad + \beta^2(2G^{(\beta)}_{(4,3,2)}(x_1,x_2,x_3) + 3G^{(\beta)}_{(4,4)}(x_1,x_2,x_3)) - 3\beta^3 G^{(\beta)}_{(5,4)}(x_1,x_2,x_3) + 3\beta^4 G^{(\beta)}_{(5,5)}(x_1,x_2,x_3) \end{aligned}$$

である．実際，$\lambda = (3,2)$ のとき，右辺の *pratition* μ は $\mu_1 = \lambda_1, \ell(\mu) \le 3, \lambda \subset \mu$ を満たすものであるから $(3,2) \subset \mu \subset (3,3,3)$ を動き，各係数は次で求める．

$$f_{(3,3),(3,3)} = \#\left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \cline{1-3} \end{array} \right\} = 1 \quad , \quad f_{(3,3),(4,3)} = \#\left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2} 1 \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2} 2 \end{array} \right\} = 2$$

$$f_{(3,3),(4,4)} = \#\left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \cline{1-3} 1 \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \cline{1-3} 2 \end{array} \right\} = 2 \quad , \quad f_{(3,3),(5,3)} = \#\left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2} 1 & 1 \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2} 1 & 2 \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & \\ \cline{1-2} 2 & 2 \end{array} \right\} = 3$$

$$f_{(3,3),(5,4)} = \#\left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \cline{1-3} 1 & 1 \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \cline{1-3} 1 & 2 \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \cline{1-3} 2 & 2 \end{array} \right\} = 3 \quad , \quad f_{(3,3),(5,5)} = \#\left\{ \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \cline{1-3} 1 & 1 & 2 \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \cline{1-3} 1 & 2 & 2 \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline & & 1 \\ \cline{1-3} 2 & 2 & 2 \end{array} \right\} = 3$$

4.3 Schur P 関数と Schur 多項式

Schur P 関数の Schur 多項式への展開公式は Stembridge[7] によって与えられたが, ここでは Assaf[1] の方法を紹介する.

定義 4.9. n を正の整数, とする. 部分集合 $D \subset \{1, 2, \cdots, n-1\}$ に対して関数 $F_{D,n}$ を

$$F_{D,n} := \sum_{\substack{i_1 \leq \cdots \leq i_n \\ j \in D \Rightarrow i_j < i_{j+1}}} x_{i_1} \cdots x_{i_n}$$

で定める. この関数を *slide* 関数という.

この関数は対称ではないが任意の対称関数はこれらの線型結合で表せることが知られている.

命題 4.10. *(Assaf, Gessel)* $\lambda \in \mathcal{P}, \mu \in \mathcal{SP}$ とする.

$$\begin{aligned} s_\lambda(x) &= \sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda, |\lambda|)} F_{Des(T), |\lambda|} \\ P_\mu(x) &= \sum_{T \in \mathcal{T}'(\mu, |\mu|)} F_{Des(T), |\mu|} \\ Q_\mu(x) &= \sum_{T \in \mathcal{T}''(\mu, |\mu|)} F_{Des(T), |\mu|} \end{aligned}$$

($\mathcal{T}(\lambda, |\lambda|), Des(T)$ の定義は次の章で与える) この関係を使い Assaf は Schur P 関数の Schur 多項式への展開を次の方法で与えた.

- $\mathcal{T}'(\mu, |\mu|)$ にある involutions $\{\psi_i\}_{1<i<|\mu|}$ を入れる.
- この involutions は自然に $\mathcal{T}'(\mu, |\mu|)$ に同値関係を定義する.
- 任意の同値類 $\forall [T] \in \mathcal{T}'(\mu, |\mu|)/\sim$ に対して, $\sum_{U \in [T]} F_{Des(U), |\mu|} = s_\lambda$ となる λ が存在する.

5 GP, GQ 関数と Grothendieck 多項式

5.1 Tableaux と words

定義 5.1. $\lambda \in \mathcal{P}$, s を 0 以上の整数とする. T を *Young diagram* $\mathbb{D}(\lambda)$ の各 *box (箱)* に次の条件で整数 $1, 2, \cdots, |\lambda| + s$ を入れたものとする. このとき T を *standard tableau* という.

(1) $T(i,j) < T(i, j+1)$ ($(i, j+1) \in \mathbb{D}(\lambda)$ である全ての $(i,j) \in \mathbb{D}(\lambda)$ で),

(2) $T(i,j) < T(i+1, j)$ ($(i+1, j) \in \mathbb{D}(\lambda)$ である全ての $(i,j) \in \mathbb{D}(\lambda)$ で).

(3) T は各整数 $i = 1, 2, \cdots, |\lambda| + s$ をちょうど *1* 回使う.

- $\mathcal{T}(\lambda, |\lambda| + s)$ を *shape* λ の *standard tableaux* からなる集合を表す.

例 4.

$$\mathcal{T}\left(\begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \end{array}, 4\right) = \left\{ \begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 4 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 3 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 23 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 24 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 34 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 24 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 23 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 34 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array} \right\}$$

また $\ell(\lambda) > m$ のとき $\mathcal{T}(\lambda, m) = \emptyset$ である.

定義 5.2. λ を *strict partition*, s を 0 以上の整数とする．$\mathbb{SD}(\lambda)$ の各 *box* に順序付き *alphabet* $1' < 1 < 2' < 2 \cdots < (|\lambda|+s)' < |\lambda|+s$ の空でない部分集合を次の条件 *(1)*, $\cdots$, *(4)* をみたすように入れた *tableau* T を *shifted standard tableau* という．

(1) $\max T(i,j) < \min T(i,j+1)$

(2) $\max T(i,j) < \min T(i+1,j)$

(3) $T(i,i) \subset \{1,2,\cdots,|\lambda|+s\}$

(4) 各 $t = 1,\cdots,|\lambda|+s$ に対して T のなかに t, t' はちょうど一度現れる．

- $\mathcal{T}'(\lambda, |\lambda|+s)$ を *shape* λ の *shifted semistandard tableaux* からなる集合を表す．
- $\mathcal{T}''(\lambda, |\lambda|+s)$ を (4) の条件を外した *shape* λ の *shifted semistandard tableaux* からなる集合を表す．

例 5. $\mathcal{T}'(\ydiagram{2,1}, 4)$ は次の *tableaux* で構成される．

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 3 \\ \hline & 4 \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 3' \\ \hline & 4 \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 23 \\ \hline & 4 \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2'3 \\ \hline & 4 \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 23' \\ \hline & 4 \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2'3' \\ \hline & 4 \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline & 34 \\ \hline\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2' \\ \hline & 34 \\ \hline\end{array}$$

Standard tableaux と shifted standard tableaux に対しての word のよみかたを例を用いて説明する．
最初に standard tableaux の word について説明する．次の standard tableau T

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1,2 & 4 & 8 & 12 \\ \hline 3 & 5,9 & 11,13 \\ \cline{1-3} 6,7,10 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

を例に考える．この tableau の word $w(T)$ は $10,7,6,3,9,5,13,11,2,1,4,8,12$ である．これは次のように得られる．
一番下の行から上に, 各行左から右によむ．つまり次の番号の box からよむ．

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \cline{1-3} 1 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

このとき同じ box に入っている整数は大きい方からよむ．これより $w(T) = 10,7,6,3,9,5,13,11,2,1,4,8,12$ がわかる．Word $w = w_1,\cdots,w_n$ に対して descent $Des(w)$ を $Des(w) := \{i | i$ は $i+1$ の右にある $\}$ で定義する．$T \in \mathcal{T}(\lambda, |\lambda|+s)$ に対する word を $w(T)$ とする．Tableau T の descent $Des(T)$ を $Des(T) := Des(w(T))$ で定義する．T が上の tableau のとき $Des(T) = \{1,2,4,5,6,8,9,12\}$ である．次に shifted standard tableau T の word を与える．$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 23' & 4'6' \\ \hline & 5 \\ \cline{2-2}\end{array}$ とする．この tableau の shape は $\ydiagram{3,1}$ である．この図形の転置した図形 $\ydiagram{1,2,1}$ を T にくっつける．このときこの tableau は $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \blacksquare & 1 & 23' & 4'6' \\ \hline \blacksquare & \blacksquare & 5 \\ \cline{2-3} \blacksquare \\ \cline{1-1}\end{array}$ となる．最後にこの tableau の prime 付きの整数を prime

をのぞいて対応する転置した位置に移す．このときこの tableau は $\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & 1 & 2 & \\ \hline 3 & & 5 & \\ \hline 46 & & & \\ \hline \end{array}$ となる．T をこの tableau と同一視する．$w(T), Des(T)$ をこの tableau の word で standard tableau の word と同じように定義する．今の例では $w(T) = 6, 4, 3, 5, 1, 2, Des(T) = \{2, 3, 5\}$ である．

5.2 Slide 関数への展開

次の結果は Assaf, Gessel の結果を拡張である．

定理 5.3. *(Nakayama–Sugimoto)* $\lambda \in \mathcal{P}, \mu \in \mathcal{SP}$ とする．

$$\begin{aligned} G_{\lambda}^{(\beta)}(x) &= \sum_{s \geq 0} \beta^s \left(\sum_{T \in \mathcal{T}(\lambda, |\lambda|+s)} F_{Des(T), |\lambda|+s} \right) \\ GP_{\mu}^{(\beta)}(x) &= \sum_{s \geq 0} \beta^s \left(\sum_{T \in \mathcal{T}'(\mu, |\mu|+s)} F_{Des(T), |\mu|+s} \right) \\ GQ_{\mu}^{(\beta)}(x) &= \sum_{s \geq 0} \beta^s \left(\sum_{T \in \mathcal{T}''(\mu, |\mu|+s)} F_{Des(T), |\mu|+s} \right) \end{aligned}$$

この公式から $\mu = (k)$ という特別な場合の GP, GQ 関数の Grothendieck 多項式への展開公式が得られる．

系 1.

$$GP_{(k)}^{(\beta)}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} G_{(k-i, 1^i)}^{(\beta)}(x) + \beta \sum_{k=1}^{k-1} GP_{(k+1-i, 1^i)}^{(\beta)}(x)$$

例 6.

$$\begin{aligned} GP_{\ydiagram{1}}^{(\beta)}(x) &= G_{\ydiagram{1}}^{(\beta)}(x) \\ GP_{\ydiagram{2}}^{(\beta)}(x) &= G_{\ydiagram{2}}^{(\beta)}(x) + G_{\ydiagram{1,1}}^{(\beta)}(x) + \beta G_{\ydiagram{2,1}}^{(\beta)}(x) \\ GP_{\ydiagram{3}}^{(\beta)}(x) &= G_{\ydiagram{3}}^{(\beta)}(x) + G_{\ydiagram{2,1}}^{(\beta)}(x) + G_{\ydiagram{1,1,1}}^{(\beta)}(x) + \beta \Big(G_{\ydiagram{3,1}}^{(\beta)}(x) + G_{\ydiagram{2,1,1}}^{(\beta)}(x) \Big) \\ GP_{\ydiagram{4}}^{(\beta)}(x) &= G_{\ydiagram{4}}^{(\beta)}(x) + G_{\ydiagram{3,1}}^{(\beta)}(x) + G_{\ydiagram{2,1,1}}^{(\beta)}(x) + G_{\ydiagram{1,1,1,1}}^{(\beta)}(x) + \beta \Big(G_{\ydiagram{4,1}}^{(\beta)}(x) + G_{\ydiagram{3,1,1}}^{(\beta)}(x) + G_{\ydiagram{2,1,1,1}}(x) \Big) \end{aligned}$$

わかりやすくするために *Grothendieck* 多項式の添字は *partiton* でなくその *Young diagram* で表している．

命題 4.6 と系 1 を合わせることで length が 1 の場合の GP 多項式を Schur 多項式で書き換えることができる．

References

[1] S. Assaf, Shifted dual equivalence and Schur P-positivity, J. Comb. 9 (2018), no. 2, 279-308.

[2] Yu-Cheng Chiu and Eric Marberg, Expanding K-theoretic Schur Q-functions, arXiv:2111.08993 .

[3] Takeshi Ikeda and Hiroshi Naruse, K-theoretic analogues of factorial Schur P-and Q-functions, Advances in Mathematics 243 (2013) 22-66.

[4] A. Lascoux and M.P. Schützenberger, Symmetry and flag manifolds. In Invariant theory, pp. 118- 144. Springer, 1983.

[5] C. Lenart, Combinatorial Aspects of the K-Theory of Grassmannians, Annals of Combinatorics, 4(1): 67-82, 2000.

[6] I. Schur,Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen, J. Reine Angew. Math. 139 (1911), 155-250.

[7] J.R. Stembridge, Shifted tableaux and the projective representations of symmetric groups, Adv. Math., 74(1):87-134, 1989.

[8] 池田　岳 , 数え上げ幾何学講義シューベルト・カルキュラス入門, 東京大学出版会, 2018.

Homogeneous ACM bundles on Grassmannianians of exceptional types

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学・応用数理専攻
中山 勇祐 (Yusuke Nakayama)

Abstract

Picard rank one の等質多様体上の homogeneous arithmetically Cohen-Macaulay (ACM) bundles の分類は A 型の場合 Costa と Miró-Roig によって知られていた．最近 B, C, D 型の場合は Du, Fang および Ren によって与えられた．

本公演では, 例外型の Picard rank one の等質多様体上の homogeneous ACM bundles の分類に関する結果を紹介する．応用として, 例外型の Picard rank one の等質多様体上の既約な homogeneous ACM bundles は line bundles のテンソルを除いて有限個であることを紹介する．さらに, Cayley Plane 上の既約な homogeneous bundles がどのような highest weight を持つ時に ACM bundles になるのかを決定する．時間が許せば Freudenthal variety でも同様の結果を紹介する．

1 等質多様体上の等質 ACM 束の先行研究と今回得られた内容

射影多様体上のベクトル束は長年にわたって研究されてきた．例えば, Horrocks [3] は標数が 0 である体上の射影多様体上のベクトル束が直線束の直和として分解することとそのベクトル束の中間のコホモロジー群が消えることが同値であることを示した．この結果が確立されてから, 中間のコホモロジー群が消えるようなベクトル束の研究は多くの数学者の注目を集めてきた．Arithmetically Cohen-Macaulay (ACM) 束はそのようなベクトル束の一つである．

定義 1.1. $\iota : X \subset \mathbb{P}^N$ を $\mathcal{O}_X(1) := \iota^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ をみたす射影多様体とする．X 上のベクトル束 E が *arithmetically Cohen−Macauley (ACM)* とは次の性質をみたすときを言う*:*

$$H^i(X, E(t)) = 0, \text{ where } E(t) := E \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(t), \text{ for all } i = 1, \cdots, \dim X - 1 \text{ and } t \in \mathbb{Z}.$$

射影多様体として特に等質多様体の場合を考える．グラスマン多様体上の等質 ACM 束は Costa と Miró-Roig [1] によって分類された．最近になり B, C, D 型の等方型グラスマン多様体上の等質 ACM 束の分類が Du, Fang および Ren [2] によってなされた．

ここでは, Picard rank one の等質多様体上の等質 ACM 束の分類に関する結果を紹介する．この結果は Costa と Miró-Roig および Du, Fang と Ren の仕事の一般化である．特に, 証明は統一的に与えて例外型の Picard rank one の等質多様体も含まれていてそれらが新しい．応用として, Picard rank one の等質多様体上の既約な等質 ACM 束は直線束のテンソルを除いて有限個であることを紹介する．さらに, Cayley Plane や Freudenthal 多様体などを含むいくつかの例外型の等質多様体上の既約な等質ベクトル束ががどのような最高ウェイトを持つ時に ACM 束になるのかを決定する．

2 主結果とその応用と例

2.1 主結果とその応用

G を複素数体上の半単純線形代数群とし, P_{α_k} を単純ルート α_k に付随する極大放物型部分群とする．等質多様体 G/P_{α_k} 上のベクトル束 E が等質ベクトル束であるとは $E \cong G \times_\rho V$ となるような P_{α_k} の表現 $\rho : P_{\alpha_k} \to GL(V)$ が存在する時をいう．もしこの表現が既約であれば E を既約な等質ベクト

ル束と呼ぶ. 最高ウェイト λ を持つ P_{α_k} の既約表現から生じる既約な等質ベクトル束を E_λ と書く. $\Phi^+_{k,G}$ を以下のように定義する:

$$\Phi^+_{k,G} := \{\alpha \in \Phi^+_G \mid (\varpi_k, \alpha) \neq 0\},$$

ここで Φ^+_G は正ルートの集合で $(,)$ は Killing 形式を表し, ϖ_k は基本ウェイトを表す. 任意の $\alpha \in \Phi^+_{k,G}$ に対して, (ϖ_k, α) を $c_{\alpha,k}$ と書く. さらに, 等質多様体 G/P_{α_k} 上の最高ウェイト λ を持つ任意の既約な等質ベクトル束 E_λ に対して, $T^G_{\lambda,k}$ を次のように定義する:

$$T^G_{\lambda,k} := \left\{ \frac{1}{c_{\alpha,k}}(\lambda + \rho, \alpha) \mid \alpha \in \Phi^+_{k,G} \right\}.$$

任意の正整数 n に対して, $\{1, 2, \cdots, n\}$ を $[1, n]$ で表す. ここで, 技術的ではあるが次の定義を用意する. 等質多様体 G/P_{α_k} 上のベクトル束 E が *initialized* であるとは次の性質をみたすときをいう.

$$H^0(G/P_{\alpha_k}, E(-1)) = 0 \quad \text{and} \quad H^0(G/P_{\alpha_k}, E) \neq 0.$$

次の定理が今回の主結果である.

定理 2.1. E_λ を等質多様体 G/P_{α_k} 上の最高ウェイト λ を持つ *initialized* 既約な等質ベクトル束とする. この時, E_λ が *ACM* 束であることと $T^G_{\lambda,k} \cap \mathbb{Z} = [1, M^G_{\lambda,k}]$ を満たすことは必要十分である, ここで $M^G_{\lambda,k}$ は $T^G_{\lambda,k}$ の最大元を表す.

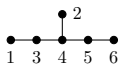
この定理から次の系を得ることができる.

系 2.2. 等質多様体 G/P_{α_k} 上の等質 *ACM* 束は直線束のテンソルを除いて有限個である.

さらに, 定理 2.1 を用いれば Cayley Plane や Freudenthal 多様体などを含むある特定の等質多様体上の既約な等質ベクトル束ががどのような最高ウェイトを持つ時に ACM 束になるのかを決定することができる. 最後の節でそれを紹介する.

2.2 定理 2.1 の例

ここでは, E_6 型に対する $M^{E_6}_{\lambda,k}$ と定理の例を与える. 以下この節では E_6 と書けば以下の Dynkin 図形を持つ単連結な単純線形代数群とする.



単純ルートを以下のように選ぶ.

$$\Delta_{E_6} = \{\alpha_1 := \frac{1}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4 - \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8),\ \alpha_2 := \epsilon_1 + \epsilon_2,\ \alpha_i := \epsilon_{i-1} - \epsilon_{i-2}\ (3 \leq i \leq 6)\}.$$

このとき, $M^{E_6}_{\lambda,k}$ は以下で与えられる.

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_6 + 11 & \text{if } k = 1, 6 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 2a_5 + a_6 + 10 & \text{if } k = 2 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 + 2a_4 + a_5 + a_6 + 8 & \text{if } k = 3, 5 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + 6 & \text{if } k = 4 \end{cases}.$$

例を考察するために, 記号を準備する. $\alpha_{(i_1,\cdots,i_j)}$ $(1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq 7;\ j \text{ is even.})$ と書けば ϵ_{i_l} $(l = 1, \cdots, j)$ の係数が $-\frac{1}{2}$ であって残りの係数は $\frac{1}{2}$ であるような正ルートとする.

例 2.3. E_λ と E_μ を E_6/P_{α_2} 上の $\lambda = 2\varpi_1 + \varpi_3$ と $\mu = \varpi_4 + \varpi_5$ であるような *initialized* 既約な等質ベクトル束とする. Φ^+_{2,E_6} は $\epsilon_i + \epsilon_j$, $\alpha_{i,j,6,7}(1 \leq i < j \leq 5)$ もしくは $\alpha_{6,7}$ から成り, この集合の

濃度は E_6/P_{α_2} の次元と等しいことに注意する．定理の主張を見やすくするために次の行列を導入する．

$$\frac{1}{c_{\alpha,2}}\begin{pmatrix} 0 & (\lambda+\rho,\epsilon_1+\epsilon_2) & (\lambda+\rho,\epsilon_1+\epsilon_3) & (\lambda+\rho,\epsilon_1+\epsilon_4) & (\lambda+\rho,\epsilon_1+\epsilon_5) \\ (\lambda+\rho,\alpha_{1,2,6,7}) & 0 & (\lambda+\rho,\epsilon_2+\epsilon_3) & (\lambda+\rho,\epsilon_2+\epsilon_4) & (\lambda+\rho,\epsilon_2+\epsilon_5) \\ (\lambda+\rho,\alpha_{1,3,6,7}) & (\lambda+\rho,\alpha_{2,3,6,7}) & 0 & (\lambda+\rho,\epsilon_3+\epsilon_4) & (\lambda+\rho,\epsilon_3+\epsilon_5) \\ (\lambda+\rho,\alpha_{1,4,6,7}) & (\lambda+\rho,\alpha_{2,4,6,7}) & (\lambda+\rho,\alpha_{3,4,6,7}) & 0 & (\lambda+\rho,\epsilon_4+\epsilon_5) \\ (\lambda+\rho,\alpha_{1,5,6,7}) & (\lambda+\rho,\alpha_{2,5,6,7}) & (\lambda+\rho,\alpha_{3,5,6,7}) & (\lambda+\rho,\alpha_{4,5,6,7}) & (\lambda+\rho,\alpha_{6,7}) \end{pmatrix}$$

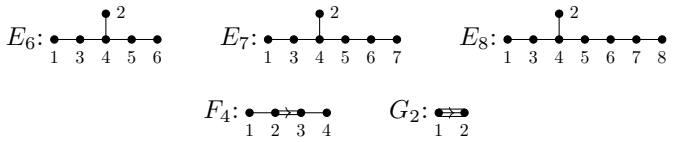
ここで α は各行列の成分に現れる *pairing* の中に含まれる Φ^+_{2,E_6} の正ルートを表す．この行列と $T^{E_6}_{\lambda,2}$ を同一視する．E_μ に関しても同様に考える．このとき，

$$T^{E_6}_{\lambda,2}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 14 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 13 & 11 & 0 & 6 & 7 \\ 12 & 10 & 9 & 0 & 8 \\ 11 & 9 & 8 & 7 & \frac{15}{2} \end{pmatrix},\ T^{E_6}_{\mu,2}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \\ 15 & 0 & 4 & 6 & 7 \\ 13 & 12 & 0 & 8 & 9 \\ 11 & 10 & 8 & 0 & 11 \\ 10 & 9 & 7 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

である．E_λ について，$M^{E_6}_{\lambda,2}=14$ であって（$T^{E_6}_{\lambda,2}$ の行列要素を再び集合の要素として見て）$T^{E_6}_{\lambda,2}\cap\mathbb{Z}=[1,M^{E_6}_{\lambda,2}]$ であることが確認できる．したがって定理 *2.1* より，E_λ は *ACM* 束である．一方，$M^{E_6}_{\mu,2}=15$ であって $2,14\notin T^{E_6}_{\mu,2}\cap\mathbb{Z}$ であるから $T^{E_6}_{\mu,2}\cap\mathbb{Z}\neq[1,M^{E_6}_{\mu,2}]$ であることがわかる．したがって定理 *2.1* より，E_μ は *ACM* 束ではない．

3 いくつかの例外型の等質多様体上の等質 ACM 束の決定

最後にこの節では定理 2.1 の系として，ある特定の等質多様体上の既約な等質ベクトル束ががどのような最高ウェイトを持つ時に ACM 束になるのかを決定できるという結果を紹介する．以下 G は以下のいずれかの Dynkin 図形を持つ単連結な単純線形代数群とする．



3.1 Cayley Plane

まずは Cayley Plane E_6/P_{α_1} 上の等質 ACM 束を決定する．

系 3.1. *E_λ を Cayley Plane E_6/P_{α_1} 上の最高ウェイト $\lambda=\sum_{i=1}^6 a_i\varpi_i$ を持つ initialized 既約な等質ベクトル束とする．このとき，E_λ が ACM 束であるためには $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6)$ が $(0,0,0,0,i,j)$ と等しいことが必要十分である，ここで $i=0,1$ and $j=0,1,2,3$.*

3.2 Freudenthal 多様体

次に Freudenthal 多様体 E_7/P_{α_7} 上の等質 ACM 束を決定する．

系 3.2. *E_λ を Freudenthal 多様体 E_7/P_{α_7} 上の $\lambda=\sum_{i=1}^7 a_i\varpi_i$ をもつ initialized 既約な等質ベクトル束とする．このとき，E_λ が ACM 束であることと $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)$ が $(0,i,0,0,0,0,0)$ と等しいことが必要十分である，ここで $i=0,1,2$.*

3.3 E_8 型

ここでは単純ルート α_8 に付随する放物型部分群で割った等質多様体 E_8/P_{α_8} を考えよう．このとき，次の結果が得られた．

系 3.3. E_λ を等質多様体 E_8/P_{α_8} 上の $\lambda = \sum_{i=1}^{8} a_i\varpi_i$ をもつ *initialized* 既約な等質ベクトル束とする．このとき，E_λ が *ACM* 束であることと $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8)$ が $(i, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(i, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$, $(j, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ もしくは $(0, k, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ と等しいことが必要十分である，ここで $0 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 4$ そして $1 \leq k \leq 2$.

3.4 F_4 型

等質多様体 F_4/P_{α_1} 上の等質 ACM 束に関しても定理 2.1 を用いれば決定することができる．

系 3.4. E_λ を等質多様体 F_4/P_{α_1} 上の $\lambda = \sum_{i=1}^{4} a_i\varpi_i$ をもつ *initialized* 既約な等質ベクトル束とする．このとき，E_λ が *ACM* 束であることと (a_1, a_2, a_3, a_4) が $(0, 0, 0, i)$ もしくは $(0, 0, 1, j)$ と等しいことが必要十分である，ここで $0 \leq i \leq 4$, $j = 0, 1, 2, 3, 5$.

3.5 G_2 型

最後に G_2 型について考察する．G_2/P_{α_k} 上の等質 ACM 束に関しては k が 1 もしくは 2 のどちらの場合でも決定することができる．

系 3.5. E_λ を等質多様体 G_2/P_{α_1} 上の $\lambda = a_1\varpi_1 + a_2\varpi_2$ をもつ *initialized* 既約な等質ベクトル束とする．このとき，E_λ が *ACM* 束であることと $a_1 = a_2 = 0$ であることは必要十分である．

系 3.6. E_λ を等質多様体 G_2/P_{α_2} 上の $\lambda = a_1\varpi_1 + a_2\varpi_2$ をもつ *initialized* 既約な等質ベクトル束とする．このとき，E_λ が *ACM* 束であることと $a_1 = 0, 1$ *or* 2 かつ $a_2 = 0$ であることは必要十分である．

References

[1] L. Costa and R. Maria Miró-Roig, Homogeneous ACM bundles on a Grassmannian, *Advances in Mathematics*, 289:95 − 113, 2016.

[2] R. Du, X. Fang, and P. Ren, Homogeneous ACM bundles on isotropic Grassmannians, arXiv:2206.09172v1.

[3] G. Horrocks, Vector bundles on the punctured spectrum of local ring, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(4):689 − 713, 1964.

[4] Y. Nakayama, Arithmetically Cohen–Macaulay bundles on homogeneous varieties of Picard rank one, arXiv:2211,00950v2.

単項式指数をもつ空隙級数の数論的性質について

弘前大学大学院 理工学研究科 安全システム工学専攻
村上慎太郎 (Shintaro Murakami)

概要

2019 年, V. Kumar は Kronecker の稠密定理を用いて, ある条件の下で単項式指数をもつ空隙級数の線形独立性に関する結果を与えた. 本講演では, Kumar の定理における条件を取り除き, 線形独立性に関する結果の一般化をいくつか示す. 証明では, S. Chowla(1947) と P. Erdős(1948) らによる合同式を用いた空隙の発見法および, K. Mahler(1953) の結果から導かれる不定方程式の解の有限性を用いる.

1 導入

Eisenstein 級数の値の代数的独立性を与えた Nesterenko[7] の結果を受けて, D. Bertrand[1] および, D. Duverney, Ke. Nishioka, Ku. Nishioka, I. Shiokawa[3] はヤコビテータ関数の代数的数における有理数体上の代数独立性をそれぞれ独立に示した. この 2 つの結果の特別な場合として次の定理が導かれる.

定理 1. 複素数 q $(0 < |q| < 1)$ に対し, $\theta_3(q)$ を次のように定める.

$$\theta_3(q) := 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}.$$

このとき, 任意の代数的数 α $(0 < |\alpha| < 1)$ に対し, $\theta_3(\alpha), \theta_3'(\alpha), \theta_3''(\alpha)$ は超越数.

この定理から特に次のことがわかる.

系 1. 任意の代数的数 α $(0 < |\alpha| < 1)$ に対し,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^2}$$

は超越数.

一方, 3 以上の整数 k に対する $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{n^k}$ の超越性は現在未解決である.
また, V. Kumar[5] は, 有理数体上における級数の線形独立性に関する定理を示した. Kumar の定理の詳細については 3 章で述べる. 本講演では Kumar の定理における条件を取り除き、線形独立性に関する結果の一般化をいくつか示す.

2　空隙

本節ではタイトルにある空隙について説明する．はじめに, 無理性に関する次の命題を述べる．

命題 1. 実数 $0 < \alpha < 1$ の b 進法展開を次で定める．

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b^n}.$$

ここで, $a_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ $(n = 1, 2, \dots)$. このとき, ある整数 t $(0 < t \leq b-1)$ に対し, $a_i = t$ となる正整数 i が無限個存在して, かつ任意の正整数 N に対して, $a_k = a_{k+1} = \cdots = a_{k+N} = 0$ となる正整数 k が存在するとき, α は無理数である．

例 1. 命題 1 を用いて

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4n^2}} \tag{1}$$

は無理数であることを示す．いま, (1) の 2 進展開を次で定める．

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4n^2}} =: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

ここで, $a_n \in \{0, 1\}$ $(n = 1, 2, \dots)$. このとき, 繰り上がりを考慮すれば、

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = (2k-1)^2, 4k^2 - 1 \ (k = 1, 2, \dots) \\ 0 & \text{その他.} \end{cases}$$

これより, 任意の正整数 N に対し, $a_{(2N+1)^2} = 1, a_{(2N+1)^2+1} = \cdots = a_{(2N+1)^2+N} = 0$. よって, 命題 1 より, (1) は無理数.

例 1 では線形結合の 2 進展開において, 零でない a_n の周りに任意の長さの零列をもつことを示した．以降, このような零列を空隙と呼ぶ．3 章及び 4 章にて紹介する定理の証明の基本方針は任意の長さの空隙をもつことを示すことである．本講演では各定理における空隙の発見法についても説明していく．

3　先行結果

2019 年に Kumar は, 次の定理を示した．

定理 2 (V. Kumar, 2019). $k, b \geq 2$ を整数とする．また, 整数 $1 \leq a_1 < \cdots < a_m$ に対して, $\sqrt[k]{a_i/a_j}$ $(i \neq j)$ は無理数とする．このとき,

$$1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{a_1 n^k}}, \quad \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{a_m n^k}}$$

は有理数体上線形独立性である．

Kumar は定理 2 の証明においてクロネッカーの稠密定理を用いて空隙を発見した．定理 2 の具体的な例を 1 つ挙げる．

例 2.

$$1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{3n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{5n^2}}$$

は有理数体上線形独立である．

定理 2 は $\sqrt[k]{a_i/a_j}(i \neq j)$ が無理数であるという条件がある．これにより, 例えば次の数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4n^2}}$$

の線形独立性を定理 2 を用いて示すことはできない．定理 2 の条件を取り除き, 一般化した結果を 4 章で解説する．

4 主定理

定理を述べる為の準備をする．$M := \{(i,j) \mid i = 1, 2, \ldots, j = 2, 3, \ldots\}$ とする．各 $(i,j) \in M$ に対して, 集合 $S_{i,j}$ を初項 $h_{i,j}$, 公差 $d_{i,j} > 0$ が互いに素である等差数列上の素数をすべて含む $\mathbb{N}$ の無限部分集合とする．例えば, $S_{i,j}$ として $\mathbb{N}$, 4 を法として 1 と合同な素数全体の集合, 奇数全体の集合などが選択できる．また, $\{a_{i,j}(n)\}$ を有界な非零整数列とする．例えば, $a_{i,j}(n)$ として, ある定数の級数や交代級数をとることができる．このとき, 次が成り立つ．

定理 3 (M. , Y. Tachiya, 2022+). $b \geq 2$ を整数とする．このとき,

$$1, \quad \sum_{n \in S_{i,j}} \frac{a_{i,j}(n)}{b^{in^j}}, \quad (i,j) \in M$$

は有理数体上線形独立である．

定理 3 では S. Chowla[2] と P. Erdős[4] らによる合同式を用いた空隙の発見法が用いられている．
定理 3 において, 任意の $(i,j) \in M$ に対して, $S_{i,j} = \mathbb{N}$, $a_{i,j}(n) = 1$ とすると, 次の系を得る．

系 2. $b \geq 2$ を整数とする．このとき,

$$1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^{in^j}}, \quad (i,j) \in M$$

は有理数体上線形独立である．

系 2 は定理 2 の拡張を与える．系 2 の例を 1 つ挙げる．

例 3.

$$1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^2}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n^2}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{3n^2}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{4n^2}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{5n^2}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{5n^3}}$$

は有理数体上線形独立である.

例 3 の結果は例 1, 例 2 の結果の拡張になっている.
さて, 定理 3 における集合 $S_{i,j}$ には条件が課されていたが, これを一般の $\mathbb{N}$ の無限部分集合に置き換えた場合, 定理 4 は成り立たない. 例えば,

$$\sum_{n=2k}\frac{1}{2^{n^3}},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{8n^3}}$$

は有理数体上線形従属である. 実は, 定理 2 における Kumar の条件を考慮することにより, 集合 $S_{i,j}$ を一般の $\mathbb{N}$ の無限部分集合に置き換えることができる.

定理 4 (M. , Y. Tachiya, 2022+). $b \geq 2$ を整数, L を M の部分集合とする. このとき, 任意の無限集合 $T_{i,j} \subset \mathbb{N}$ $((i,j) \in L)$ に対して

$$1,\quad \sum_{n\in T_{i,j}}\frac{a_{i,j}(n)}{b^{in^j}},\qquad (i,j)\in L$$

が有理数体上線形独立となるための必要十分条件は, 次の (i), (ii) が満たされることである.
(i) $(i_1,j_1),(i_2,j_2) \in L$ が相異なるとき, すべての整数 u,v に対して $i_1u^{j_1} \neq i_2v^{j_2}$.
(ii) $j=2$ となる $(i,j)\in L$ は高々 1 つ.

定理 4 の証明においては, K. Mahler[6] の結果から導かれる不定方程式の解の有限性を用いて空隙を発見している. 定理 4 において, j を $k \geq 3$ で固定することにより, 次の系を得る.

系 3. $k \geq 3, b \geq 2$ を整数とする. また, 整数 $1 \leq a_1 < \cdots < a_m$ に対して, $\sqrt[k]{a_i/a_j}$ $(i \neq j)$ は無理数とする. このとき, 任意の無限集合 $T_{i,j} \subset \mathbb{N}$ $((i,j)\in L)$ に対して,

$$1,\quad \sum_{n\in T_1}\frac{1}{b^{a_1n^k}},\quad \ldots,\quad \sum_{n\in T_m}\frac{1}{b^{a_mn^k}}$$

は有理数体上線形独立性である.

系 3 は定理 2 の (系 2 とは別の) 拡張を与える. 系 3 の例を 1 つ挙げる.

例 4.

$$1,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n^3}},\quad \sum_{n:\text{prime}}\frac{1}{2^{2n^3}},\quad \sum_{n=2k}\frac{1}{2^{3n^3}},\quad \sum_{n=k^2}\frac{1}{2^{4n^3}},\quad \sum_{\substack{n\equiv 5\\ (\mathrm{mod}\ 10)}}\frac{1}{2^{5n^3}}$$

は有理数体上線形独立である.

例 4 では T_i として偶数全体の集合, 平方数の集合, 10 を法として 5 と合同な正数の集合などを選んでいる. これらの集合は定理 4 における集合 $S_{i,j}$ として選ぶことはできない.

5　今後の研究について

実数 $x(|x|<1)$ に対し,

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}, \quad g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \sin \frac{\pi n}{2}$$

とおく. 1947 年に Chowla[2] は次の定理を示した.

定理 5 (S. Chowla, 1947). 任意の整数 $t \geq 5$ に対して, $g(1/t)$ は無理数.

また, 1948 年に Erdős[4] は定理 5 を拡張して任意の整数 $t > 1$ に対して, $f(1/t), g(1/t)$ は無理数であることを示した. Chowla と Erdős らは合同式を用いて空隙を発見しており, 4 節で説明した通り, 定理 3 の証明においても利用している. これまでの手法を拡張することで, 任意の整数 $t > 1$ に対し,

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^n - 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^{in^j}}, \quad (i,j) \in M$$

は有理数体上で線形独立であることを示す研究を現在行っている.

参考文献

[1] D. Bertrand, *Theta functions and transcendence*, Ramanujan J. 1 (1997), 339-350.

[2] S. Chowla, *On series of the Lambert type which assume irrational values for rational values of the argument*, Proc. Natl. Inst. Sci. India Part A 13 (1947), 171-173.

[3] D. Duverney, Ke. Nishioka, Ku. Nishioka, and I. Shiokawa, *Transcendence of Jacobi's theta series,* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 72 (1996), 202-203.

[4] P. Erdős, *On arithmetical properties of Lambert series*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) 12 (1948), 63-66.

[5] V. Kumar, *Linear independence of certain numbers*, Arch. Math. (Basel) 112 (2019), 377-385.

[6] K. Mahler, *On the greatest prime factor of* $ax^m + by^n$, Nieuw Arch. Wisk. 1 (1953), 113-122.

[7] Yu. V. Nesterenko, *Modular functions and transcendence questions*, Mat. Sb. 187 (1996) 65-96; English transl. Sb. Math. 187 1319-1348.

A criterion for the existence of a plane model with two inner Galois points for algebraic curves

山形大学 理学部
東根一樹 (Kazuki HIGASHINE)

概要

本稿では論文 [14] の内容を基にして "内 Galois 点を 2 つもつ平面曲線の存在に関する判定法" とそれを用いた例の構成について述べる.

1 導入

k を標数 $p \geq 0$ の代数閉体とし, $C \subset \mathbb{P}^2$ を k 上定義された次数 $d = \deg(C) \geq 2$ の平面 (代数) 曲線とする. C の特異点集合を $\mathrm{Sing}(C)$, 関数体を $k(C)$ で表す. また, 相異なる 2 点 $P, Q \in \mathbb{P}^2$ に対して, P と Q を結ぶ $\mathbb{P}^2$ 内の直線を $\overline{PQ}$ で表す.

1 点 $P \in \mathbb{P}^2$ をとり, P からの射影 $\pi_P : C \dashrightarrow \mathbb{P}^1; Q \mapsto \overline{PQ}$ を考える. π_P は支配的な有理写像であるから, 関数体の拡大 $k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$ をひきおこす. この状況で吉原久夫氏 (新潟大学) は次の定義を与えた.

定義 (吉原久夫, 1996, [3, 16, 19])**.** *$k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$ が Galois 拡大であるとき, P を C の Galois 点という.*

Galois 点について, あとで用いる用語と記号を定義する.

定義. *P を Galois 点とする.*

(1) *$P \in C$ (resp. $P \notin C$) であるとき, P を内 Galois 点 (resp. 外 Galois 点) という.*
(2) *$P \in C \setminus \mathrm{Sing}(C)$ (resp. $P \in \mathrm{Sing}(C)$) であるとき, P を smooth Galois 点 (resp. non-smooth Galois 点) という.*
(3) *$G_P := \mathrm{Gal}(k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1))$ を P における Galois 群という.*

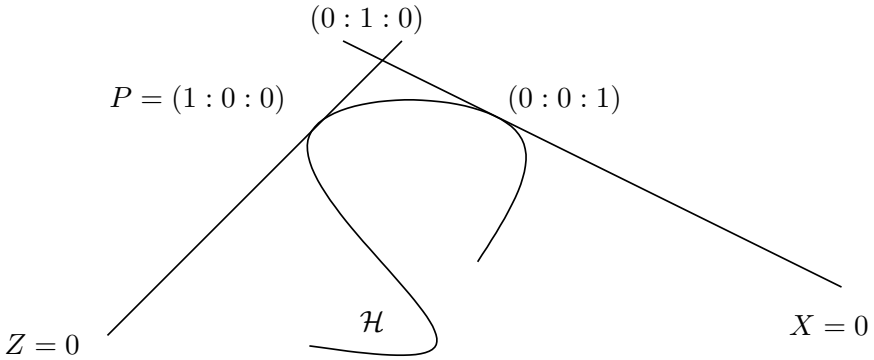
まず, Galois 点の例を観察しよう.

例. $q = p^n \geq 2$ とする. Hermitian 曲線とよばれる非特異平面曲線

$$\mathcal{H} : X^q Z + Z^q X - Y^{q+1} = 0$$

を考える. このとき, $P = (1 : 0 : 0)$ は内 Galois 点であり, P における $\mathcal{H}$ の接線 $Z = 0$ は $\mathcal{H}$ と P において $q+1$ 重に交わっている (このような点を total flex という). 一方で, $(0 : 0 : 1)$ も内 Galois

点であり, $X=0$ を接線とする total flex となっている. さらに, 直線 $X=0$ と直線 $Z=0$ の交点 $(0:1:0)$ は外 Galois 点である (下図参照).



上の例における外 Galois 点のように "Galois 点は変曲点における接線や, 多重接線たちの交点になる" ということができる. (しかしながら, 逆にそのような直線たちの交点だからといって Galois 点になるとは限らない.)

本稿では「2 つ以上の Galois 点をもつような (平面曲線) C」について考えていきたい. (Galois 点に関する問題については [20] 参照). まず, 非特異な C に対しては, 吉原氏, 三浦敬氏 (宇部高専), 本間正明氏 (神奈川大学), 深澤知氏 (山形大学) によって C の完全な分類が与えられている ([4]). それに続いて「C が特異点をもつことも許したうえで, 2 つ以上の Galois 点をもつような C にはどんなものがあるか？そのような C を見つけるにはどうしたらよいか？」ということが問題となる. 2018 年, 深澤氏は代数曲線の自己同型群の観点から前述のような C が存在するための判定法を与えた.

判定法 (深澤知, 2018, [6])**.** X を非特異既約射影曲線, G_1, $G_2 \subset \mathrm{Aut}(X)$ を有限部分群, P_1, P_2 を X 上の相異なる 2 点とする. このとき, 以下の (I), (II) は同値である.

(I) 双有理埋めこみ $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$ であって, $\varphi(X)$ は相異なる smooth Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ をもち, かつ $G_{\varphi(P_i)} = G_i$ $(i=1,2)$ となるようなものが存在する.

(II) 以下の 3 条件が成立する.
  (a) $X/G_1 \simeq \mathbb{P}^1$, $X/G_2 \simeq \mathbb{P}^1$,
  (b) $G_1 \cap G_2 = \{1\}$,
  (c) $P_1 + \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2) = P_1 + \sum_{\tau \in G_2} \tau(P_1)$ (as divisors).

ここで, 双有理埋め込み $X \to \mathbb{P}^2$ とは, 射であって像への双有理写像をひきおこすようなものである. $i=1,2$ に対して, X/G_i は, $k(X)$ の G_i による固定体 $k(X)^{G_i}$ を関数体にもつ k 上の非特異既約射影曲線を表す. また, $\mathrm{Aut}(X)$ は X の k 上の自己同型群を表す.

上記の判定法を用いることで, 2 つ以上の Galois 点をもつような C の新たな例がたくさん構成されている ([6, 7, 9, 11, 12]).

上記深澤氏の判定法は, 2 つ以上の smooth Galois 点をもつような全ての C に適用することが可能である. 一方, Galois 点の研究においては 2 つ以上の non-smooth Galois 点をもつような例も知られている. そのような例には (他に smooth Galois 点が 2 つあるような状況でなければ) 上記深澤

氏の判定法を適用することはできない．その 1 例として, Artin-Schreier-Mumford (略して ASM) 曲線とよばれる例を観察してみよう ([8, Theorem 1 参照]).

例. $q := p^n \geq 3$ $(p = \mathrm{char}(k))$, $c \in k \setminus \{0\}$ とするとき,

$$\mathbb{P}^2 \supset C : (X^q + XZ^{q-1})(Y^q + YZ^{q-1}) - cZ^{2q} = 0$$

を ASM 曲線という．この ASM 曲線 C について

$$\mathrm{Sing}(C) = C \cap \{Z = 0\} = \{P_1 := (1:0:0), P_2 := (0:1:0)\}$$

であり, P_1, P_2 いずれも重複度 q の特異点であるが, P_1, P_2 いずれも non-smooth Galois 点である．実際, P_1 からの射影は有理写像として $\pi_{P_1} = (y:1)$ のように計算できる．誘導される関数体の拡大 $k(C)/\pi_P^* k(\mathbb{P}^1)$ は $k(x,y)/k(y)$ で, x の $k(y)$ 上の最小多項式は $T^q + T - \frac{c}{y^q+y} \in k(y)[T]$ である．ここで, アフィン開集合 $\{Z \neq 0\}$ 上の正則関数 $\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}$ が定める $C \cap \{Z \neq 0\}$ 上の正則関数をそれぞれ x, y で表した．体拡大 $k(x,y)/k(y)$ は $\{(x,y) \mapsto (x+\alpha, y) \mid \alpha^q + \alpha = 0\}$ を Galois 群にもつ Galois 拡大であり, P_1 は non-smooth Galois 点である．P_2 が non-smooth Galois 点であることも同様である．

その他, 2 つ以上の non-smooth Galois 点を持つような例として, Ballico-Hefez 曲線 ([5] 参照), いくつかの自己双対曲線 ([13] 参照), Giulietti-Korchmáros 曲線のある平面モデル ([10] 参照), (q^3, q^2)-Frobenius nonclassical 曲線 ([1] 参照) が知られている．また, 高橋剛氏 (新潟大学) は, 平面 5 次曲線 $C \subset \mathbb{P}^2$ で 2 重点 P をもつようなものについて, P が Galois 点のときの C の定義方程式の形を決定している ([18] 参照)．しかし, 上記以外に non-smooth Galois 点の例が明示的に与えられているものや, non-smooth Galois 点を体系的に研究したものは, 筆者の知る限り見当たらないように思う．

このような事情から, 深澤氏の判定法を non-smooth Galois 点の場合を含んだすべての場合に適用可能な形に拡張することは, non-smooth Galois 点研究を進めるために有用であると考えられる．本稿ではこの深澤氏の判定法の拡張について述べる．また, Galois 点における群と軌道の情報を用いて, Galois 点における order sequence (後述) がわかることについても述べる．さらに, 拡張された判定法を用いることで, non-smooth Galois 点を 2 つもつ平面曲線の例を構成する．

2 準備

ここでは, いくつかの基本的な事実を確認する．X を非特異既約射影曲線, $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$ を双有理埋め込みとする．すなわち, φ は射であって, 像との双有理写像をひきおこすようなものである．$\varphi(X)$ は直線ではないとする．はじめに, order sequence の概念を思い出そう ([15, Chapter 7] 参照)．直線 $L \subset \mathbb{P}^2$ に対して, $\varphi(X)$ と L の交わりがひきおこす X 上の (Weil) 因子を $\varphi^* L$ で表す．φ に対応する X 上の線形系は

$$\Lambda = \{\varphi^* L \mid L \text{ is a line contained in } \mathbb{P}^2\}$$

である．因子 $\varphi^* L$ のサポートを $\mathrm{Supp}(\varphi^* L)$ で表す．X 上の点 P に対して, P における $\varphi^* L$ の重複度を $\mathrm{ord}_P(\varphi^* L)$ で表す．いま

$$\alpha_P = \min\{\mathrm{ord}_P(\varphi^* L) \mid \varphi^* L \in \Lambda, P \in \mathrm{supp}(\varphi^* L)\}$$

とおくと, 直線 $\widetilde{L}$ であって, $\beta_P := \mathrm{ord}_P(\varphi^*\widetilde{L}) > \alpha_P$ をみたすものがただ 1 つ存在する. この直線 $\widetilde{L}$ を P における osculating line とよぶことにする. また, $(0, \alpha_P, \beta_P)$ を (Λ, P)-order sequence という. 点 $\varphi(P)$ を通る直線 $\widetilde{L}$ が $\varphi(P)$ での接線であることを, $\widetilde{L}$ が $\varphi^{-1}(\varphi(P))$ に含まれるある点での osculating line であることとして定義する. 直線 $\widetilde{L}$ が $\varphi(P)$ における接線であるための必要十分条件は, $m_{\varphi(P)} < I_{\varphi(P)}(\varphi(X), \widetilde{L})$ となることである. ここで, $I_{\varphi(P)}(\varphi(X), \widetilde{L})$ は $\varphi(X)$ と $\widetilde{L}$ の $\varphi(P)$ における交差重複度, $m_{\varphi(P)}$ は $\varphi(X)$ の $\varphi(P)$ における重複度を表す.

次に, $\varphi(P)$ からの射影 $\pi_{\varphi(P)}$ を考え, $\hat{\pi}_{\varphi(P)} := \pi_{\varphi(P)} \circ \varphi : X \to \mathbb{P}^1$ とおく. 射影と分岐指数の関係を思い出そう. $\varphi^{-1}(\varphi(P)) = \{P_1, \ldots, P_n\}$ とし, $(0, \alpha_{P_i}, \beta_{P_i})$ を (Λ, P_i)-order sequence とする. $Q \in X$ における $\hat{\pi}_{\varphi(P)}$ の分岐指数を $e_Q(\hat{\pi}_{\varphi(P)})$ で表す. 次の事実はよく知られている.

命題 2.1. *$Q \in X \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$ とするとき, 次が成り立つ.*

(1) $e_Q(\hat{\pi}_{\varphi(P)}) = \mathrm{ord}_Q(\varphi^*\overline{\varphi(P)\varphi(Q)})$.
(2) $i = 1, \ldots, n$ に対して, $e_{P_i}(\hat{\pi}_{\varphi(P)}) = \beta_{P_i} - \alpha_{P_i}$.

最後に, Galois 被覆に関する次の事実を思い出す ([17, III. 7.1, 7.2, 8.2] 参照).

命題 2.2. *$\theta : X \to Y$ を非特異既約射影曲線間の全射な射とし, θ が誘導する関数体の拡大 $k(X)/\theta^*k(Y)$ が Galois 群 G をもつ Galois 拡大であるとする. このとき, 次が成立.*

(1) $P, Q \in X$ で $\theta(P) = \theta(Q)$ ならば, $\sigma \in G$ が存在して $\sigma(P) = Q$ となる.
(2) $P, Q \in X$ で $\theta(P) = \theta(Q)$ ならば, $e_P(\theta) = e_Q(\theta)$.
(3) 各点 $P \in X$ に対して, $|G(P)| = e_P(\theta)$.

ここで, $G(P)$ は P の G における固定部分群を表す.

3 主定理

X を k 上の非特異既約射影曲線とし, $k(X)$ を X の関数体とする. X の k 上の自己同型群を $\mathrm{Aut}(X)$ で表す. 有限部分群 $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ と $P \in X$ に対して, P の G における固定部分群 (resp. G による P の軌道) を $G(P)$ (resp. $G \cdot P$) で表す. また, X の G による商曲線, すなわち, $k(X)$ の G による固定体 $k(X)^G$ に対応する非特異既約射影曲線を X/G で表す. ここで, 自然に $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Aut}_k(k(X))$ と考えていて, 以下もこのように同一視する. 次が導入の部分で述べた, 深澤氏の判定法 [6] を拡張したもの (の一部) である.

定理 3.1. *G_1, G_2 を $\mathrm{Aut}(X)$ の有限部分群, P_1, P_2 を X 上の相異なる 2 点とする. このとき, 以下の (I), (II) は同値である.*

(I) 双有理埋め込み $\varphi : X \to \mathbb{P}^2$ であって, $\varphi(X)$ は相異なる内 Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ をもち, $i = 1, 2$ に対して $G_{\varphi(P_i)} = G_i$ で, $L := \overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ は $\varphi(P_1)$ における接線ではなく, かつ L は $\varphi(P_2)$ における接線であるようなものが存在する.
(II) 以下の 3 条件が成立する.

(a) $X/G_1 \cong \mathbb{P}^1, X/G_2 \cong \mathbb{P}^1$,

(b) $G_1 \cap G_2 = \{1\}$,

(c) $P_1 \notin G_1 \cdot P_2$, $G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1 \neq \emptyset$ かつ $|G_1(P_2)| > |G_2(P_1)|$.

定理 3.1(I) にあるような φ に対して, 次が成り立つ.

定理 3.2. φ を定理 3.1(I) にあるような双有理埋め込みとし, Λ を φ に対応する X 上の線形系, $(0, \alpha_P, \beta_P)$ を (Λ, P)-order sequence とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) 因子 $\sum_{P \in \varphi^{-1}(\varphi(P_1))} \alpha_P P$ は次に等しい.

$$\sum_{Q \in G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_2(P_1)| Q.$$

(2) 因子 $\sum_{P \in \varphi^{-1}(\varphi(P_2))} \alpha_P P$ は次に等しい.

$$\sum_{R \in G_1 \cdot P_2 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_1(P_2)| R + \sum_{S \in G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1} (|G_1(P_2)| - |G_2(P_1)|) S.$$

(3) 因子 $\varphi^* L$ は次に等しい.

$$\sum_{Q \in G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_2(P_1)| Q + \sum_{R \in G_1 \cdot P_2} |G_1(P_2)| R.$$

(4) 各点 $P \in G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1$ に対して, 等式 $\beta_P = |G_1(P_2)|$ が成り立つ.

したがって, 定理 3.1(II) の条件をみたすものが与えられたとき, それらの情報を用いてガロア点における重複度や order sequence が計算できる. 実際, 定理 3.1, 3.2 を射影直線 $\mathbb{P}^1$ に適用し, 次のように例が構成できる.

定理 3.3. 次のような双有理埋め込み $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ が存在する: $p \neq 2, 5$, $\deg(\varphi(\mathbb{P}^1)) = 16$ であり, non-smooth Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2) \in \varphi(\mathbb{P}^1)$ があり, $m_{\varphi(P_1)} = 4$, $m_{\varphi(P_2)} = 11$, $G_{\varphi(P_1)} \cong \mathbf{A}_4$, $G_{\varphi(P_2)} \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ で, $L = \overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ は $\varphi(P_1)$ における接線ではなく, L は $\varphi(P_2)$ における接線である. 各 $Q \in G_{\varphi(P_1)} \cdot P_2 \setminus \{P_2\}$ (resp. 各 $Q \in G_{\varphi(P_2)} \cdot P_1$) において, second order は 2 (resp. 1) に等しく, P_2 において, third order は 2 に等しい.

4 定理 3.1, 3.2 の証明

定理 3.1 の証明については, 例の構成に必要な (II) $\Rightarrow$ (I) における φ の作り方のみ与える.

定理 3.1 の証明. 定理 3.1 の条件 (a), (b), (c) が成り立つとする. 条件 (a) により, $f, g \in k(X)$ であって, f, g はそれぞれ $k(X)^{G_1}$, $k(X)^{G_2}$ の k 上の生成元であり,

$$(f)_\infty = \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2),\ (g)_\infty = \sum_{\tau \in G_2} \tau(P_1)$$

となるものがとれる. ここで, $(f)_\infty$ (resp. $(g)_\infty$) は f (resp. g) の極因子である. この f, g を用いて, 射 $\varphi = (f : g : 1) : X \to \mathbb{P}^2$ を考える. 条件 (b), (c) により, これが条件をみたすものである. □

続いて, 定理 3.2 を示す. ガロア点における重複度や order sequence がどうなっているのかを理解するためにも詳しく証明を述べる.

定理 3.2 の証明. φ を定理 3.1 にあるような双有理埋め込みとし, Λ を φ に対応する X 上の線形系とする. いま

$$\varphi^{-1}(\varphi(P_1)) = \{P_{11} = P_1, P_{12}, \ldots, P_{1n_1}\},$$
$$\varphi^{-1}(\varphi(P_2)) = \{P_{21} = P_2, P_{22}, \ldots, P_{2n_2}\}$$

とおき, 各 i, j に対して, $(0, \alpha_{P_{ij}}, \beta_{P_{ij}})$ を (Λ, P_{ij})-order sequence とする.

はじめに, 定理 3.2 (1) を示そう. 射 $\hat{\pi}_{\varphi(P_1)}$ に対応する X 上の線形系は

$$\left\{ E - \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{P_{1i}} P_{1i} \;\middle|\; E \in \Lambda, E \geq \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{P_{1i}} P_{1i} \right\}$$

であり, $\hat{\pi}_{\varphi(P_1)}$ は Galois 被覆より, 次の因子の等式が成り立つ.

$$\varphi^* L - \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{P_{1i}} P_{1i} = (\hat{\pi}_{\varphi(P_1)})^*([L]) = \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2).$$

ここで, $[L]$ は直線 L に対応する点 $[L] \in \mathbb{P}^1$ の因子を表す. 命題 2.1 (1), 命題 2.2 より, 等式 $|G_2(P_1)| = \mathrm{ord}_{P_{1i}}(\varphi^* L)$ がすべての i について成り立つ. L は $\varphi(P_1)$ における接線ではないので, 等式 $\alpha_{P_{1i}} = |G_2(P_1)|$ がすべての i で成り立つ. 容易にわかるように, 等式

$$(\varphi^{-1}(\varphi(P_1))) \cup (G_1 \cdot P_2) = \mathrm{supp}(\varphi^* L) = (G_2 \cdot P_1) \cup (G_1 \cdot P_2)$$

が成り立つ. $\varphi^{-1}(\varphi(P_1))$ と $G_1 \cdot P_2$ の交わりは空だから,

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(\varphi(P_1)) &= ((\varphi^{-1}(\varphi(P_1))) \cup (G_1 \cdot P_2)) \setminus (G_1 \cdot P_2) \\ &= G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1) \end{aligned}$$

を得る. ゆえに, 等式

$$\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{P_{1i}} P_{1i} = \sum_{Q \in G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_2(P_1)| Q$$

が成り立ち, 定理 3.2 (1) を得る.

次に, 定理 3.2 (3) を示そう. 上の計算より, 等式

$$\varphi^* L = \sum_{Q \in G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_2(P_1)| Q + \sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2)$$

が成り立つ. ここで,

$$\sum_{\sigma \in G_1} \sigma(P_2) = \sum_{R \in G_1 \cdot P_2} |G_1(P_2)| R$$

であるから, 定理 3.2 (3) を得る.

最後に, 定理 3.2 (2), (4) を示そう. 等式

$$\sum_{\tau \in G_2} \tau(P_1) = \sum_{S \in G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1} |G_2(P_1)| S + \sum_{Q \in G_2 \cdot P_1 \setminus (G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1)} |G_2(P_1)| Q$$

が成り立つから, 以下の因子の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&\sum_{R\in G_1\cdot P_2\setminus(G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1)} |G_1(P_2)|R \\
&+\sum_{S\in G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1} (|G_1(P_2)|-|G_2(P_1)|)S+\sum_{\tau\in G_2}\tau(P_1) \\
=&\left(\sum_{R\in G_1\cdot P_2\setminus(G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1)} |G_1(P_2)|R+\sum_{S\in G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1} |G_1(P_2)|S\right) \\
&+\sum_{Q\in G_2\cdot P_1\setminus(G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1)} |G_2(P_1)|Q \\
=&\sum_{Q\in G_2\cdot P_1\setminus(G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1)} |G_2(P_1)|Q+\sum_{R\in G_1\cdot P_2} |G_1(P_2)|R \\
=&\varphi^*L.
\end{aligned}$$

ここで, 最後の等式は定理 3.2 (3) より従う. ゆえに, 因子の等式

$$\begin{aligned}
\varphi^*L-\sum_{\tau\in G_2}\tau(P_1)=&\sum_{R\in G_1\cdot P_2\setminus(G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1)} |G_1(P_2)|R \\
&+\sum_{S\in G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1} (|G_1(P_2)|-|G_2(P_1)|)S
\end{aligned}$$

が成り立つ. 一方で, 射 $\hat{\pi}_{\varphi(P_2)}$ に対応する X 上の線形系は

$$\left\{E-\sum_{j=1}^{n_2}\alpha_{P_{2j}}P_{2j}\;\middle|\;E\in\Lambda, E\geq\sum_{j=1}^{n_2}\alpha_{P_{2j}}P_{2j}\right\}$$

であり, $\hat{\pi}_{\varphi(P_2)}$ は Galois 被覆であるから, 以下の因子の等式が成り立つ.

$$\varphi^*L-\sum_{j=1}^{n_2}\alpha_{P_{2j}}P_{2j}=(\hat{\pi}_{\varphi(P_2)})^*([L])=\sum_{\tau\in G_2}\tau(P_1).$$

ゆえに, 因子の等式

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n_2}\alpha_{P_{2j}}P_{2j}=\varphi^*L-\sum_{\tau\in G_2}\tau(P_1)& \\
=&\sum_{R\in G_1\cdot P_2\setminus(G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1)} |G_1(P_2)|R \\
&+\sum_{S\in G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1} (|G_1(P_2)|-|G_2(P_1)|)S
\end{aligned}$$

が成り立ち, 定理 3.2 (2) を得る. また,

$$0<|G_1(P_2)|-|G_2(P_1)|<|G_1(P_2)|$$

である. 定理 3.2 (3) より, 等式 $|G_1(P_2)|=\mathrm{ord}_P(\varphi^*L)$ が各点 $P\in G_1\cdot P_2$ について成り立つ. 定理 3.2 (2) より, 各 $P\in G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1$ において, second (Λ,P)-order は $|G_1(P_2)|-|G_2(P_1)|$ と一致する. ゆえに, 各点 $P\in G_1\cdot P_2\cap G_2\cdot P_1$ において, third (Λ,P)-order は $|G_1(P_2)|$ と一致する. よって, 定理 3.2 (4) が成り立つ. □

5 定理 3.3 の証明

定理 3.1 と 3.2 を射影直線 $\mathbb{P}^1$ に適用することを考える．この場合, 定理 3.1 の条件 (a) は Lüroth の定理よりいつも成り立つ．以下, $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ を射影変換群 $\mathrm{PGL}(2,k)$ と同一視する．また, $Q_\infty := (1:0)$, $a \in k$ に対して, $Q_a := (a:1) \in \mathbb{P}^1$ とおく．

定理 3.3 の証明. $p \neq 2,5$ とし, $i \in k$ を多項式 $T^2+1 \in k[T]$ の根, ξ を 1 の原始 5 乗根とする．$P_1 = Q_\xi$, $P_2 = Q_1$ とする．G_1, G_2 として

$$G_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \right\rangle, \ G_2 = \left\langle \begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

を考える．$G_2 \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ である．また,

$$G_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \rtimes \left\langle \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \right\rangle \cong \mathbf{A}_4$$

である．([2, Theorem C] 参照.) ここで, $\mathbf{A}_4$ は交代群である．5 と 12 は互いに素であるから, 定理 3.1 の条件 (b) が成り立つ．直接計算により, 次が成り立つことがわかる．

$$G_1 \cdot P_2 = \{Q_{-i}, Q_{-1}, Q_0, Q_1, Q_i, Q_\infty\},$$

$$G_2 \cdot P_1 = \{Q_1, Q_\xi, Q_{\xi^2}, Q_{\xi^3}, Q_{\xi^4}\},$$

$$G_1 \cdot P_2 \cap G_2 \cdot P_1 = \{Q_1 = P_2\},$$

$$G_1(P_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$G_2(P_1) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

したがって, 定理 3.1 の条件 (c-iii) が成り立つ．よって, 双有理埋め込み $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ であって, $\varphi(\mathbb{P}^1)$ は相異なる内 Galois 点 $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$ をもち, $G_{\varphi(P_1)} \cong \mathbf{A}_4$, $G_{\varphi(P_2)} \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ で, $L = \overline{\varphi(P_1)\varphi(P_2)}$ は $\varphi(P_1)$ における接線ではなく, L は $\varphi(P_2)$ における接線であるようなものが存在する．定理 3.2 (1), (2), (3) より, $m_{\varphi(P_1)} = 4$, $m_{\varphi(P_2)} = 11$, $\deg(\varphi(\mathbb{P}^1)) = 16$ である．定理 3.2 (1), (2), (4) により, 各 $Q \in G_1 \cdot P_2 \setminus \{P_2\}$ (resp. 各 $Q \in G_2 \cdot P_1$) において, second order は 2 (resp. 1) に等しく, P_2 において, third order は 2 に等しい． □

参考文献

[1] H. Borges and S. Fukasawa, Galois points for double-Frobenius nonclassical curves, Finite Fields Appl. **61** (2020), 101579, 8 pages.

[2] X. Faber, Finite p-irregular subgroups of $\mathrm{PGL}_2(k)$, preprint, arXiv:1112.1999.

[3] S. Fukasawa, Galois points for a plane curve in arbitrary characteristic, Geom. Dedicata **139** (2009), 211–218.

[4] S. Fukasawa, Complete determination of the number of Galois points for a smooth plane curve, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **129** (2013), 93–113.

[5] S. Fukasawa, Galois points for a non-reflexive plane curve of low degree, Finite Fields Appl. **23** (2013), 69–79.

[6] S. Fukasawa, A birational embedding of an algebraic curve into a projective plane with two Galois points, J. Algebra **511** (2018), 95–101.

[7] S. Fukasawa, Birational embeddings of the Hermitian, Suzuki and Ree curves with two Galois points, Finite Fields Appl. **57** (2019), 60–67.

[8] S. Fukasawa, Galois lines for the Artin-Schreier-Mumford curve, Finite Fields Appl., **75**(2021), 101894, 10 pages.

[9] S. Fukasawa and K. Higashine, A birational embedding with two Galois points for certain Artin–Schreier curves, Finite Fields Appl. **52** (2018), 281–288.

[10] S. Fukasawa and K. Higashine, Galois lines for the Giulietti-Korchmáros curve, Finite Fields Appl. **57** (2019), 268–275.

[11] S. Fukasawa and K. Waki, Examples of plane rational curves with two Galois points in positive characteristic, Finite Fields and their Applications: Proceedings of the 14th International Conference on Finite fields and their Applications, Vancouver, June 3–7, 2019, pp.181–188, De Gruyter, 2020.

[12] S. Fukasawa and K. Waki, Examples of plane rational curves with two Galois points in positive characteristic, II, preprint, arXiv:2103.022118.

[13] H. Hayashi and H. Yoshihara, Galois group at each point for some self-dual curves, Geometry **2013** (2013), Article ID 369420, 6 pages.

[14] K. Higashine, A criterion for the existence of a plane model with two inner Galois points for algebraic curves, Hiroshima Math. J., **51** (2021), 163–176.

[15] J. W. P. Hirschfeld, G. Korchmáros and F. Torres, Algebraic curves over a finite field, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.

[16] K. Miura and H. Yoshihara, Field theory for function fields of plane quartic curves, J. Algebra **226** (2000), 283–294.

[17] H. Stichtenoth, Algebraic function fields and codes, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[18] T. Takahashi, Non-smooth Galois points on a quintic curve with one singular point, Nihonkai Math. J. **16** (2005), 57–66.

[19] H. Yoshihara, Function field theory of plane curves by dual curves, J. Algebra **239** (2001), 340–355.

[20] H. Yoshihara and S. Fukasawa, List of problems, available at:
https://sites.google.com/sci.kj.yamagata-u.ac.jp/fukasawa-lab/open-questions-english

Finite beta-expansions of natural numbers

大阪公立大学数学研究所
高溝 史周 (Fumichika Takamizo)

概要

$\beta > 1$ とし $[0,1]$ 上の変換 T を $T(x) = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor$ で定義する．変換 T により各 $x \geq 0$ は

$$x = c_1\beta^{L-1} + \cdots + c_{L-1}\beta + c_L + \frac{c_{L+1}}{\beta} + \cdots + \frac{c_{n+1}}{\beta^n} + \cdots,$$

$$\beta^{L-1} \leq x < \beta^L,\ c_n = \lfloor \beta T^{n-1}(\beta^{-L}x) \rfloor$$

と展開される．これをベータ展開という．本発表では, $\mathbb{N}$ の各要素が有限ベータ展開を持つための十分条件を与え, さらにその有限性条件を満たす β で positve finiteness と呼ばれる有限性条件を満たさない例を紹介する．

1 導入

$a, b \in \mathbb{Z}$ $(a \leq b)$ に対し $[\![a,b]\!] = [a,b] \cap \mathbb{Z}$ とする．任意の $x \in [0,\infty)$ は $c_n \in [\![0,9]\!]$ によって $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{\ell-n}$ と 10 進展開できる．この展開は次のように $\beta > 1$ の場合に一般化できる．まず $y \in \mathbb{R}$ に対し, 整数部分を $\lfloor y \rfloor$, 小数部分を $\{y\}$ で表し, $T_\beta : [0,1] \mapsto [0,1)$ を

$$T_\beta(x) = \{\beta x\} = \beta x - \lfloor \beta x \rfloor$$

によって定義する．このとき, 各 $x \in [0,1)$ に対し $c_n = \lfloor \beta T_\beta^{n-1}(x) \rfloor$ とおくと,

$$T_\beta^{n-1}(x) = \frac{c_n}{\beta} + \frac{T_\beta^n(x)}{\beta}$$

が成り立つ．この等式を繰り返し利用することにより x の展開

$$x = \frac{c_1}{\beta} + \frac{T_\beta(x)}{\beta} = \frac{c_1}{\beta} + \frac{c_2}{\beta^2} + \frac{T_\beta^2(x)}{\beta^2} = \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\beta^n},\quad c_n \in [\![0, \lfloor \beta \rfloor]\!]$$

が得られる．これを x のベータ展開といい,

$$d_\beta(x) = c_1 c_2 \cdots c_n \cdots$$

と表す．一方, $x \geq 1$ に対するベータ展開は

$$x = c_1\beta^{L-1} + \cdots + c_{L-1}\beta + c_L + \frac{c_{L+1}}{\beta} + \cdots + \frac{c_{L+n}}{\beta^n} + \cdots,$$

ただし $L = L(x) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid x\beta^{-n} < 1\}$ かつ $d_\beta(\beta^{-L}x) = c_1 c_2 \cdots c_n \cdots$

によって定義される. x のベータ展開の末尾が 0 のみとなるとき, x は有限ベータ展開をもつという. 今後, 有限ベータ展開をもつ $x \in [0, \infty)$ の全体を $\mathrm{Fin}(\beta)$ と表す.

すべての整数は有限な 10 進展開をもつ. Frougny と Solomyak はこの性質の一般化として β に関する 3 種類の有限性条件

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{F}_1) & \mathbb{N} \subset \mathrm{Fin}(\beta) \\ (\mathrm{PF}) & \mathbb{Z}_{\geq 0}[1/\beta] \subset \mathrm{Fin}(\beta) \\ (\mathrm{F}) & \mathbb{Z}[1/\beta]_{\geq 0} \subset \mathrm{Fin}(\beta) \end{array}$$

を考えた ([6]). (PF) が (F) を含むクラスであり, (F_1) が (PF) を含むクラスであることは明らかである. また β が (F_1) を満たすとき, β は代数的整数となることが知られている ([6]). 特に (F_1) については次の事実が知られている.

Theorem 1.1 ([2, 6]) *β が (F_1) を満たすなら β は Pisot 数である. ここで代数的整数 β が Pisot 数であるとは, $\beta > 1$ かつ β のすべての共役 γ $(\neq \beta)$ に対し $|\gamma| < 1$ が成り立つときにいう.*

定義から 1 次の Pisot 数は 2 以上の自然数となる. そのため, 1 次の Pisot 数は (F) を満たす. 一方, 2 次の Pisot 数については次が知られている.

Theorem 1.2 ([6]) *β が 2 次の Pisot 数なら β は (PF) を満たす.*

(PF) 及び (F) については様々な結果が知られている (セクション 2 を参照). その一方, (PF) を満たさないが (F_1) を満たす β の存在は知られていなかった. セクション 3 では (F_1) の新たな十分条件を与え, 主結果である (PF) を満たさないが (F_1) を満たす β の例について紹介する.

2 (F) 及び (PF) に関する先行研究

T_β による展開は 1 に対しても考えることができる. これを Rényi 展開といい, $d_\beta(1)$ で表す. $d_\beta(x)$ の末尾が 0 のみとなるとき, $d_\beta(x)$ は有限であるという.

(PF) と (F) の関係は $d_\beta(1)$ によって特徴づけることができる.

Theorem 2.1 ([6]) *β が (F) を満たすことの必要十分条件は β が (PF) を満たし, かつ $d_\beta(1)$ が有限となることである.*

(PF) を満たす Pisot 数 β についてはその最小多項式が Akiyama によって特徴づけられた.

Theorem 2.2 ([5]) *β が (F) を満たさずに (PF) を満たすなら, β は Pisot 数でかつ最小多項式が次で与えられる:*

$$x^d - (\lfloor \beta \rfloor + 1)x^{d-1} + \sum_{j=2}^{d} a_j x^{d-j},\ a_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ a_d \in \mathbb{N},\ \sum_{j=2}^{d} a_j < \lfloor \beta \rfloor.$$

一方, (F) を満たす β の最小多項式については (PF) のような特徴づけが得られていない. しかし, (F) を満たすための十分条件についてはいくつか知られている.

Proposition 2.3 ([6, 7]) 代数的整数 $\beta > 1$ の最小多項式を

$$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - \cdots - a_1 x - a_0 \ (a_k \in \mathbb{Z})$$

とし, 次のいずれかを満たすとする.

(FS) $a_{d-1} \geq \cdots \geq a_1 \geq a_0 \geq 1$.
(H) $a_j \geq 0$ かつ $a_{d-1} > \sum_{0 \leq n \leq d-2} a_n$.

このとき, β は *(F)* を満たす.

β が 3 次の場合に限れば次が知られている.

Proposition 2.4 ([9]) *Pisot* 数 β の最小多項式を

$$x^3 - ax^2 - bx - c \ (a, b, c \in \mathbb{Z})$$

とし, 次のいずれかを満たすとする.

(A1) $0 \leq a < b$, $2a - 2b + c \geq -1$, $b - 2c \geq -1$.
(FS) $a \geq b \geq c \geq 1$.
(H_m) $a \geq b \geq 0$, $a - b - c \leq 0$, $b - c = -1$.
(H) $a \geq b \geq 0$, $a - b - c > 0$, $c \geq 1$.
(A2) $-a < -c \leq b < 0$, $a + b - c \geq 0$.

このとき, β は *(F)* を満たす.

上述の命題は Akiyama による 3 次の Pisot 単数の特徴づけ (Theorem 3 of [2]) の一般化になっている. またこの命題のうち, (H_m) を除く場合については次のセクションで述べる *Shift radix system* を利用したアプローチで (F) であることが証明されている ([4]).

一般に, β が (F) を満たすための十分条件を発見するのは難しい問題である. しかし, β が (F) を満たすかどうかを判定するアルゴリズムが存在することが知られている ([1]).

2.1 Shift Radix System

代数的整数 $\beta > 1$ の最小多項式を

$$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - \cdots - a_1 x - a_0$$

とする. $\boldsymbol{\ell} = (l_1, l_2, \cdots, l_{d-1}) \in \mathbb{Z}^{d-1}$ に対し $\lambda_\beta : \mathbb{Z}^{d-1} \to \mathbb{R}$, $\tau_\beta : \mathbb{Z}^{d-1} \to \mathbb{Z}^{d-1}$ をそれぞれ

$$\lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}) = l_1 a_0 \beta^{-1} + \cdots + l_j \left(\sum_{i=1}^{j} a_{j-i} \beta^{-i} \right) + \cdots + l_{d-1} \left(\sum_{i=1}^{d-1} a_{d-1-i} \beta^{-i} \right)$$
$$\tau_\beta(\boldsymbol{\ell}) = (l_2, \cdots, l_{d-1}, -\lfloor \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}) \rfloor)$$

と定義し, $(\mathbb{Z}^{d-1}, \tau_\beta)$ を shift radix system (SRS) と呼ぶ. 特に

$$\{\lambda_\beta\}(\boldsymbol{\ell}) := \{\lambda_\beta(\boldsymbol{\ell})\}$$

とすると, $\{\lambda_\beta\}:\mathbb{Z}^{d-1}\to\mathbb{Z}[\beta]\cap[0,1)$ は全単射で次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{Z}^{d-1} & \xrightarrow{\tau_\beta} & \mathbb{Z}^{d-1}\\ \{\lambda_\beta\}\big\downarrow & & \big\downarrow\{\lambda_\beta\}\\ \mathbb{Z}[\beta]\cap[0,1) & \xrightarrow[T_\beta]{} & \mathbb{Z}[\beta]\cap[0,1)\end{array}$$

したがって, τ_β は T_β の一般化である. また SRS については次の結果が知られている.

Theorem 2.5 ([3, 4]) $W\subset\mathbb{Z}^{d-1}$ が次を満たすとする:

(i) $\pm\boldsymbol{e}_k\in W$ $(k=1,2,\cdots,d-1)$. ただし $\boldsymbol{e}_k=(0,\cdots,0,\overset{k}{\overset{\vee}{1}},0,\cdots,0)\in\mathbb{Z}^{d-1}$.
(ii) $\boldsymbol{\ell}\in W\Rightarrow\{\tau_\beta(\boldsymbol{\ell}),\tau_\beta^*(\boldsymbol{\ell})\}\subset W$. ただし $\tau_\beta^*(\boldsymbol{\ell}):=-\tau_\beta(-\boldsymbol{\ell})$.
(iii) $^\forall\boldsymbol{\ell}\in W$, $^\exists k\in\mathbb{N}$, *s.t.* $\tau_\beta^k(\boldsymbol{\ell})=\boldsymbol{0}$

このとき, β は *(F)* を満たす.

Theorem 2.5 の条件 (i) と (ii) を満たす集合 W は *set of witnesses* と呼ばれる. Akiyama et al. は τ_β のパラメータ $(a_0\beta^{-1},a_1\beta^{-1}+a_0\beta^{-2},\cdots,\sum_{1\le i\le d-1}a_{d-1-i}\beta^{-i})$ を $\boldsymbol{r}=(r_1,r_2,\cdots,r_{d-1})\in\mathbb{R}^{d-1}$ の場合へ一般化して議論し, 一般化された (F) を導入した ([3]). さらに [4] では, 小さい多面体 $H\subset\mathbb{R}^{d-1}$ が与えられたとき, すべての $\boldsymbol{r}\in H$ に対し $\tau_{\boldsymbol{r}}$ が一般化された (F) を満たすか否かを判定するアルゴリズムを構成することに成功し, (F) を満たすための十分条件をいくつか発見した.

3 主結果

Theorem 3.1 x^3-4x^2+4x-2 の根 $\beta>1$ は *(PF)* を満たさないが *(F$_1$)* を満たす.

Theorem 3.1 の β が Pisot 数であることは Akiyama の結果 (Lemma 1 of [2]) から確認できる. さらに Theorem 2.2 の対偶によりこの β が (PF) を満たさないことも示される. 以下, (F$_1$) の十分条件について考察する.

3.1 Key Lemma

この小節では $\beta>1$ は実数とする. また $x\in[0,\infty)$ に対し,

$$f_p(x)=\sum_{n\ge L(x)+1}c_n\beta^{L(x)-n}\quad\text{ただし}\ d_\beta(x\beta^{-L(x)})=c_1c_2\cdots$$

と定義する. $f_p(x)$ はベータ展開における x の小数部分である.

Lemma 3.2 任意の $x\in[0,\infty)$ に対し, $\theta\in\{0,1\}$ と 非負整数列 $\{\varepsilon_n\}_{1\le n\le r}$ が存在して次が成り立つ.

$$f_p(x+1)-f_p(x)=\theta-\sum_{n=1}^{r}\varepsilon_nT_\beta^n(1)$$

Lemma 3.2 の証明の概略を述べる前に補足と記号の導入をする．今後,

$$d_\beta^*(1) = d_1 d_2 \cdots := \begin{cases} (b_1 b_2 \cdots b_{q-1}(b_q - 1))^\infty & \text{if } d_\beta(1) = b_1 b_2 \cdots b_{q-1} b_q 0^\infty,\ b_q > 0 \\ d_\beta(1) & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおく．$d_\beta^*(1)$ を利用することで, 与えられた記号列がベータ展開に現れるか否かを判定できる．

Remark 3.1 ([8, 10]) 以下の 2 条件は同値である．

(1) $c_1 c_2 \cdots \in d_\beta([0,1))$.

(2) $0^\infty \leq_{lex} c_n c_{n+1} \cdots <_{lex} d_\beta^*(1)$, ${}^\forall n \in \mathbb{N}$.

ただし, $<_{lex}$ は辞書式順序であり, $\leq_{lex}$ は $<_{lex}$ または $=$ を意味する．

$x \in [0, \infty)$ に対し,

$$D_\beta(x) := \begin{cases} c_1 c_2 \cdots c_{L(x)}.c_{L(x)+1} \cdots & \text{if } L(x) \geq 1 \\ .c_1 c_2 \cdots & \text{if } L(x) = 0 \end{cases}$$

と定義する．ただし, $d_\beta(\beta^{-L(x)} x) = c_1 c_2 \cdots$ である．また,

$$\mathscr{D} := \{0^n D_\beta(x) \mid x \in [0, \infty),\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

とおく．以下の Lemma 3.2 の証明では,

$$\xi_n := d_n \beta^{-1} + d_{n+1} \beta^{-2} + \cdots = \sum_{k \geq n} d_k \beta^{n-k-1}$$

とする．このとき, $d_\beta^*(1)$ の定義より任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $\xi_k = T^\ell(1)$ を満たす $\ell \geq 0$ が存在する．

Sketch of the proof of Lemma 3.2. $x \in [0, \infty)$ とし, $\ell = L(x+1)$ とおく．さらに

$$c_1 c_2 \cdots = 0^{\ell - L(x)} D_\beta(x)$$

とする．このとき,

$$x + 1 = \sum_{n=2}^{\ell} c_{\ell-n+1} \beta^{n-1} + c_\ell + 1 + \sum_{n=\ell+1}^{\infty} c_n \beta^{\ell-n}$$

が成り立つ．ここで

$$c_1 \cdots c_{\ell-1}(c_\ell + 1).c_{\ell+1} \cdots \in \mathscr{D} \Rightarrow f_p(x+1) = \sum_{n=\ell+1}^{\infty} c_n \beta^{\ell-n} = f_p(x)$$

であるから, $c_1 \cdots c_{\ell-1}(c_\ell + 1).c_{\ell+1} \cdots \notin \mathscr{D}$ の場合を考えればよい．このとき,

$$k_0 = 0 \quad \text{かつ} \quad k_i < k_{i+1} \quad \text{かつ} \quad c_{k_i+j} \begin{cases} = d_j & \text{if } 1 \leq j \leq k_{i+1} - k_i - 1 \\ < d_j & \text{if } j = k_{i+1} - k_i \end{cases} \quad (i \geq 0)$$

を満たす自然数列 $\{k_i\}_{i=0}^\infty$ が存在する．ここで

$$k_i < \ell \leq k_{i+1}$$

としてよい．今, $\{\ell_n\}_{n\geq 1}$ と $\{y_n\}_{n\geq 1}$ を次のように帰納的に定義する．最初に

$$\begin{aligned} y_1 &:= \theta + f_p(x) - \xi_{\ell-k_i+1} \\ \ell_1 &:= L(y_1) \end{aligned}$$

とおく．ただし,

$$\theta = c_\ell + 1 - d_{k_{i+1}-k_i} = \begin{cases} 0 & \text{if } \ell = k_{i+1} \\ 1 & \text{if } \ell \neq k_{i+1} \end{cases}$$

とする．y_1 の定義を図解すると以下のようになる．今 $\overline{a} := -a$ とし, $\overset{\nu}{=}$ で数値化が等しい記号列を表すとする．このとき, y_1 は

$$\begin{array}{cccccccccc} & c_1 & \cdots & c_{k_i-1} & c_{k_i} & c_{k_i+1} & \cdots & c_{\ell-1} & (c_\ell+1). & c_{\ell+1} & \cdots \\ +) & 0 & \cdots & 0 & 1 & \overline{d_1} & \cdots & \overline{d_{\ell-k_i-1}} & \overline{d_{\ell-k_i}}. & \overline{d_{\ell-k_i+1}} & \cdots \\ \hline & c_1 & \cdots & c_{k_i-1} & (c_{k_i}+1) & 0 & \cdots & 0 & \theta. & (c_{\ell+1}-d_{\ell-k_i+1}) & \cdots \\ \overset{\nu}{=} & c_1 & \cdots & c_{k_i-1} & (c_{k_i}+1) & & 0^{\ell-k_i-\ell_1} & & D_\beta(y_1) & & \end{array}$$

となっている．次に $y_n \geq 0$ と $\ell_n \geq 0$ が定義され, かつ $c_1 \cdots c_{k_{i-n}-1}(c_{k_{i-n}}+1)0^{\ell-k_{i-n}-\ell_n} D_\beta(y_n) \notin \mathscr{D}$ のとき,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &:= y_n - \xi_{\ell-k_{i-n-1}+1} \\ \ell_{n+1} &:= L(y_{n+1}) \end{aligned}$$

と定義する．すなわち y_{n+1} については

$$\begin{array}{cccccccc} & c_1 & \cdots & c_{k_{i-n-1}} & c_{k_{i-n-1}+1} & \cdots & (c_{k_{i-n}}+1) & 0^{\ell-k_{i-n}-\ell_n} & D_\beta(y_n) \\ +) & 0 & \cdots & 1 & \overline{d_1} & \cdots & \overline{d_{k_{i-n}-k_{i-n-1}}} & \cdots & \cdots \\ \hline & c_1 & \cdots & (c_{k_{i-n-1}}+1) & 0 & \cdots & 0 & 0^{\ell-k_{i-n}-\ell_n} & D_\beta(y_n - \xi_{\ell-k_{i-n-1}+1}) \\ \overset{\nu}{=} & c_1 & \cdots & (c_{k_{i-n-1}}+1) & & & 0^{\ell-k_{i-n-1}-\ell_{n+1}} & & D_\beta(y_{n+1}) \end{array}$$

となっている．このとき, 次が成り立つ．

(i) $c_1 \cdots c_{k_{i-n}-1}(c_{k_{i-n}}+1)0^{\ell-k_{i-n}-\ell_n} D_\beta(y_n) \notin \mathscr{D}$ ならば $y_{n+1} \geq 0$.

(ii) ある $n < i$ が存在して $c_1 \cdots c_{k_{i-n}-1}(c_{k_{i-n}}+1)0^{\ell-k_{i-n}-\ell_n} D_\beta(y_n) \in \mathscr{D}$.

(iii) $c_1\beta^{\ell-1} + \cdots + c_{k_{i-n}-1}\beta^{\ell-k_{i-n}+1} + y_n = x+1$.

(i) により y_n と ℓ_n が帰納的に定義できることが保証される．次に (ii) により $c_1 \cdots c_{k_{i-n}-1}(c_{k_{i-n}}+1)0^{\ell-k_{i-n}-\ell_n} D_\beta(y_n) \in \mathscr{D}$ となったときにこの操作をやめ, そして (iii) により操作をやめたときに得られた列 $c_1 \cdots c_{k_{i-n}-1}(c_{k_{i-n}}+1)0^{\ell-k_{i-n}-\ell_n} D_\beta(y_n)$ が $x+1$ のベータ展開になっていることが分かる．さらに実際には

$$f_p(x+1) \in \{y_n, y_n - \beta^{\ell_n-1}\}$$

となることも示される．$f_p(x+1) = y_n$ なら定理が示されているから, $f_p(x+1) = y_n - \beta^{\ell_n-1}$ の場合を考えればよい．しかしこのとき, $y_n < 2$ より $D(y_n) = 10^{\ell_n-1}.d_\beta(f_p(y_n))$ となるため $d_1 d_2 \cdots d_{\ell_n-1} = 10^{\ell_n-2}$ が成り立つ．これにより $\beta^{\ell_n-1} = 1 + \sum_{1\leq j\leq p} \xi_j$ を満たす $\{\xi_j\}_{1\leq j\leq p}$ の存在を証明することができ, 定理が成り立つ． □

Lemma 3.2 より次を得る．

Corollary 3.3 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し, 非負整数列 $\{\varepsilon_n\}_{1 \le n \le r}$ が存在して次が成り立つ.

$$f_p(N) = \left\{ -\sum_{n=1}^{r} \varepsilon_n T_\beta^n(1) \right\}$$

3.2 (F_1) の十分条件

この小節では $\beta > 1$ を代数的整数とし, β の最小多項式を

$$x^d - a_{d-1}x^{d-1} - \cdots - a_1 x - a_0$$

とする.

Remark 3.2 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $T_\beta^n(1) = \{\lambda_\beta\}(\tau_\beta^{n-1}(0, \cdots, 0, 1))$.

Proof. T_β と λ_β の定義から $T_\beta(1) = \beta - \lfloor \beta \rfloor = \{\lambda_\beta\}(0, \cdots, 0, 1)$. よってセクション 2.1 の可換図式により $T_\beta^n(1) = \{\lambda_\beta\}(\tau_\beta^{n-1}(0, \cdots, 0, 1))$ $(n \in \mathbb{N})$. □

次に,

$$F_\beta := \{\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{Z}^{d-1} \mid {}^\exists k \ge 0;\ \tau_\beta^k(\boldsymbol{\ell}) = \mathbf{0}\}$$

とおく. 今, Corollary 3.3 と Remark 3.2 から次が示される.

Remark 3.3 任意の $r \in \mathbb{N}$ と非負整数列 $\{\varepsilon_n\}_{1 \le n \le r}$ に対し,

$$-\sum_{n=1}^{r} \varepsilon_n \tau_\beta^{n-1}(0, \cdots, 0, 1) \in F_\beta$$

が成り立つとする. このとき, β は *(F_1)* を満たす.

さらに

$$Q_\beta = \left\{ \boldsymbol{\ell} \in \mathbb{Z}^{d-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^\exists N \in \mathbb{N},\ {}^\exists \{\boldsymbol{\ell}_n\}_{n=1}^N \text{ s.t. } \boldsymbol{\ell}_1 = (0, \cdots, 0, 1), \\ \boldsymbol{\ell}_N = \boldsymbol{\ell},\ \boldsymbol{\ell}_{n+1} \in \{\tau_\beta(\boldsymbol{\ell}_n), \tau_\beta^*(\boldsymbol{\ell}_n)\} \end{array} \right\}$$

$$P_\beta = \{\boldsymbol{\ell} \in Q_\beta \setminus \{0\} \mid {}^\exists N \in \mathbb{N};\ \tau_\beta^N(\boldsymbol{\ell}) = \boldsymbol{\ell}\}$$

とおく. 一般に β が Pisot 数なら Q_β は有限集合である ([11]). さらに β が 3 次の Pisot 数なら Q_β は set of witnesses になることが知られている ([9]).

これまでの準備から次の定理を得る.

Theorem 3.4 *Pisot* 数 β が次を満たすとする.

(i) $-Q_\beta = \{-\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{Z}^{d-1} \mid \boldsymbol{\ell} \in Q_\beta\} \subset Q_\beta$.
(ii) $\tau_\beta^{-1}(P_\beta) = \{\boldsymbol{\ell} \in \mathbb{Z}^{d-1} \mid \tau_\beta(\boldsymbol{\ell}) \in P_\beta\} \subset P_\beta$
(iii) $R \subset F_\beta$. ただし R は

$$R := [\![-\delta, \delta]\!]^{d-1} \cap \{-\sum_{n=1}^{r} \varepsilon_n \tau_\beta^{n-1}(0, \cdots, 0, 1) \mid r \in \mathbb{N},\ \{\varepsilon_n\}_{n=1}^r \text{ は非負整数列 }\},$$

であり, また $\delta := \max\{|l_j| \mid (l_1, l_2, \cdots, l_{d-1}) \in P_\beta,\ j \in [\![1, d-1]\!]\}$ である.

このとき, β は (F_1) を満たす.

Proof. 証明は以下の 3 段階に分ける.

step 1: $\boldsymbol{\ell}, \boldsymbol{\ell}' \in \mathbb{Z}^{d-1}$ に対し $\tau_\beta(\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\ell}') \in \{\tau_\beta(\boldsymbol{\ell}) - \tau_\beta(\boldsymbol{\ell}'), \tau_\beta(\boldsymbol{\ell}) - \tau_\beta^*(\boldsymbol{\ell}')\}$.

Proof of step 1: $\tau_\beta(\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{\ell}')$ の第 $d-1$ 成分について考えれば十分である. 今,

$$\lfloor \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}) \rfloor - (\lfloor \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}') \rfloor + 1) = \lfloor \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}) \rfloor - \lfloor \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}') \rfloor - 1 \leq \lfloor \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}) - \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}') \rfloor \leq \lfloor \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}) \rfloor - \lfloor \lambda_\beta(\boldsymbol{\ell}') \rfloor$$

が成り立つ. これより主張を得る.

step 2: $\boldsymbol{\ell} \in F_\beta$ かつ $\boldsymbol{k}_1 = \tau_\beta^{n-1}(0, \cdots, 0, 1)$ $(n \in \mathbb{N})$ とする. このとき,

$$\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{k}_1 \notin F_\beta \Rightarrow \boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{k}_1 \in P_\beta.$$

Proof of step 2: step 1 より $\{\boldsymbol{k}_n\}_{n \geq 2} \subset Q_\beta$ で

$$\tau_\beta(\tau_\beta^{n-2}(\boldsymbol{\ell}) - \boldsymbol{k}_{n-1}) = \tau_\beta^{n-1}(\boldsymbol{\ell}) - \boldsymbol{k}_n \text{ かつ } \boldsymbol{k}_n \in \{\tau_\beta(\boldsymbol{k}_{n-1}), \tau_\beta^*(\boldsymbol{k}_{n-1})\}$$

を満たすものが存在する. そこで $\tau_\beta^{N-1}(\boldsymbol{\ell}) \neq \mathbf{0}$ かつ $\tau_\beta^N(\boldsymbol{\ell}) = \mathbf{0}$ とすると,

$$\tau_\beta^N(\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{k}_1) = \tau_\beta^N(\boldsymbol{\ell}) - \boldsymbol{k}_{N+1} = -\boldsymbol{k}_{N+1} \in -Q_\beta \subset Q_\beta.$$

ここで $\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{k}_1 \notin F_\beta$ であるから $-\boldsymbol{k}_{N+1} \notin F_\beta$. 特に $\tau_\beta^{-1}(P_\beta) \subset P_\beta$ の仮定から $-\boldsymbol{k}_{N+1} \in P_\beta$ となる. よって再度 $\tau_\beta^{-1}(P_\beta) \subset P_\beta$ により $\boldsymbol{\ell} - \boldsymbol{k}_1 \in P_\beta$ を得る.

step 3: 主張の証明.

Proof of step 3: Remark 3.3 より次を示せばよい.

$$V := \{-\sum_{n=1}^{r} \varepsilon_n \tau_\beta^{n-1}(0, \cdots, 0, 1) \mid r \in \mathbb{N},\ \{\varepsilon_n\}_{n=1}^r \text{ は非負整数列 } \} \subset F_\beta$$

そこで $R_n \subset \mathbb{Z}^{d-1}$ を $R_0 := R$,

$$R_n := \left\{ \boldsymbol{\ell} \in V \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} R_k \;\middle|\; \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}' - \tau_\beta^{j-1}(0, \cdots, 0, 1),\ \boldsymbol{\ell}' \in R_{n-1},\ j \in \mathbb{N} \right\}$$

で定義する. このとき $\cup_{n \geq 0} R_n = V$ が成り立つ. よって $R_n \subset F_\beta$ を帰納法で示せばよい. そこで $R_{n-1} \subset F_\beta$ とし, さらに $\boldsymbol{\ell} \in R_n \setminus F_\beta$ が存在したと仮定する. このとき $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}' - \tau_\beta^{j-1}(0, \cdots, 0, 1)$, $\boldsymbol{\ell}' \in R_{n-1}$ と表せるため, step 1 から $\tau_\beta^N(\boldsymbol{\ell}) \in Q_\beta$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ が存在し, step 2 から $\tau_\beta^N(\boldsymbol{\ell}) \in P_\beta$ となる. したがって $\tau_\beta^{-1}(P_\beta) \subset P_\beta$ により $\boldsymbol{\ell} \in P_\beta$ を得る. 特に $\boldsymbol{\ell} \in V$ より, δ の定義から $\boldsymbol{\ell} \in R_0$ となる. これは $R_n \cap R_0 = \emptyset$ に矛盾する.

□

3.3 Proof of Theorem 3.1

以下, $\beta > 1$ の最小多項式は $x^3 - 4x^2 + 4x - 2$ とする. Theorem 3.1 の証明の前に準備を行う.

Remark 3.4 $-Q_\beta \subset Q_\beta$.

Proof. $\boldsymbol{\ell} \in -Q_\beta$ とすると,

$$^{\exists}\{\boldsymbol{\ell}_n\}_{n=1}^N \text{ s.t. } \boldsymbol{\ell}_1 = (0,-1),\ \boldsymbol{\ell}_N = \boldsymbol{\ell},\ \boldsymbol{\ell}_{n+1} \in \{\tau_\beta(\boldsymbol{\ell}_n), \tau_\beta^*(\boldsymbol{\ell})\}$$

が成り立つ. 今, τ による $(0,1)$ の軌道を調べると,

$$(0,1) \overset{\tau_\beta}{\to} (1,2) \overset{\tau_\beta}{\to} (2,2) \overset{\tau_\beta}{\to} (2,1) \overset{\tau_\beta}{\to} (1,0) \overset{\tau_\beta}{\to} (0,0).$$

であるから $\boldsymbol{\ell}_1 = (0,-1) = \tau_\beta^*(1,0) \in Q_\beta$. よって $\boldsymbol{\ell}_n \in Q_\beta$ $(n \in [\![1,N]\!])$ より $\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}_N \in Q_\beta$. □

また定理の証明では次の Remark を認めるものとする.

Remark 3.5 β について次が成り立つ.

(1) $P_\beta = \{(1,1)\}$. *(2)* $2\beta^{-1} < 1$.

Proof of Theorem 3.1. 今, Remark 3.4 より β は Theorem 3.4 の条件 (i) は満たしている. 次に条件 (ii) を満たすことを示す. $\tau_\beta(\zeta,1) = (1,1)$ $(\zeta \in \mathbb{Z})$ とすると $\lfloor (2\zeta-4)\beta^{-1} + 2\beta^{-2} \rfloor = -1$ より,

$$\begin{cases} -1 \le (2\zeta-4)\beta^{-1} + 2\beta^{-2} & \cdots (1) \\ (2\zeta-4)\beta^{-1} + 2\beta^{-2} < 0 & \cdots (2) \end{cases}$$

ここで $1 = 4\beta^{-1} - 4\beta^{-2} + 2\beta^{-3}$ と (1) より,

$$0 \le 2\zeta\beta^{-1} - 2\beta^{-2} + 2\beta^{-3}$$

となる. よって $\beta^{-1} < 1$ より,

$$0 \le 2\zeta\beta^{-1} - 2\beta^{-2} + 2\beta^{-3} = 2\zeta\beta^{-1} - 2(1-\beta^{-1})\beta^{-2} < 2\zeta\beta^{-1},$$

すなわち $\zeta \ge 1$ を得る. 他方, (2) と Remark 3.5-(2) より,

$$0 > (2\zeta-4)\beta^{-1} + 2\beta^{-2} > (2\zeta-4)\beta^{-1},$$

すなわち, $\zeta < 2$ を得る. したがって $\zeta = 1$. これより $\tau_\beta^{-1}(\{(1,1)\}) = \{(1,1)\}$. 最後に (iii) を満たすことを確認する. そこで,

$$K_0 := \{\boldsymbol{\ell} \in [\![-1,1]\!]^2 \mid \boldsymbol{\ell} = -\tau_\beta^{n-1}(0,1),\ n \in \mathbb{N}\}$$
$$K_n := \{\boldsymbol{\ell} \in [\![-1,1]\!]^2 \mid \boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{\ell}_1 + \boldsymbol{\ell}_2,\ \boldsymbol{\ell}_1, \boldsymbol{\ell}_2 \in K_{n-1}\}$$

とおく. このとき, $K_n \subset K_{n+1}$ かつ十分大きな n に対し $R \subset K_n$ が成り立つ. 今, K_n を調べると

$$K_1 = \{(-1,-1), (0,-1), (-1,0), (0,0)\}$$

及び $n \geq 1$ に対し $R \subset K_n$ となることが確認できる．さらに

$$(-1,0) \overset{\tau_\beta}{\to} (0,1) \overset{\tau_\beta}{\to} (1,2) \overset{\tau_\beta}{\to} (2,2) \overset{\tau_\beta}{\to} (2,1) \overset{\tau_\beta}{\to} (1,0) \overset{\tau_\beta}{\to} (0,0)$$
$$(-1,-1) \overset{\tau_\beta}{\to} (-1,0) \overset{\tau_\beta}{\to} \cdots \overset{\tau_\beta}{\to} (0,0)$$
$$(0,-1) \overset{\tau_\beta}{\to} (-1,-1) \overset{\tau_\beta}{\to} \cdots \overset{\tau_\beta}{\to} (0,0)$$

より $K_1 \subset F_\beta$ も確認できる．以上から Theorem 3.4 により β は (F_1) を満たす． □

参考文献

[1] S. Akiyama, Pisot numbers and greedy algorithm, Number Theory, Diophantine, Computatinal and Algebraic Aspects, Edited by K. Györy, A. Pethö and V.T Sós, 9-21, de Gruyter 1998.

[2] S. Akiyama, Cubic Pisot units with finite beta expansions, 'Algebraic Number Theory and Diophantine Analysys', ed. by Halter-Koch and R.F. Tichy, de Gruyter (2000), 11-26.

[3] S. Akiyama, T. Borbély, H. Brounotte, A. Pethö and J. M. Thuswaldner, Generalized radix representations and dynamical systems I, Acta Math. Hungar., **108** (2005), 207-238.

[4] S. Akiyama, H. Brounotte, A. Pethö and J. M. Thuswaldner, Generalized radix representations and dynamical systems II, Acta Arith **121** (2006) no. 1, 21-61.

[5] S. Akiyama, Positive Finiteness of Number Systems, Number Theory, 1-10. Dev. Math., 15 Springer, New York, 2006.

[6] C. Frougny and B. Solomyak, Finite beta-expansions, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **12** (1992), no. 4, 713-723.

[7] M. Hollander, Linear numeration systems, finite beta expansions, and discrete spectrum of substitution dynamical systemms, Ph. D. thesis, University of Washington, 1996.

[8] Sh. Ito and Y. Takahashi, Markov subshifts and realization of β-expansions, J. Math. Soc. Japan, 26(1974), 33-55.

[9] F. Takamizo and M. Yoshida, Some class of cubic Pisot numbers with finiteness property, Tsukuba J. MATH., **46** (2022), no. 1, 67-119.

[10] W. Parry, On the β-expansion of real numbers, Acta Math. Acad. Sci. Hungar, **11** (1960), 401-416.

[11] M. Yoshida and F. Takamizo, Finite β-spansion and odometers, Tsukuba J. MATH., **45** (2021), no. 2,135-162.

周期が3の連分数展開とペル方程式の解

山形大学大学院 理工学研究科 理学専攻
杉本貴海 (Takami SUGIMOTO)

概 要

$\sqrt{d}$ の連分数展開の周期が 3 となる平方数でない自然数 d の形を決定する．また, 連分数展開からペル方程式 $x^2-dy^2=\pm1$ の基本解を求め, その上でペル方程式 $x^2-dy^2=\pm1$ の全ての自然数解を一般フィボナッチ数列と一般リュカ数列で表す．さらに, ペル方程式 $x^2-dy^2=\pm4$ の場合にも全ての自然数解を一般フィボナッチ数列と一般リュカ数列で表す.

1 導入

平方数でない自然数 d に対して,

$$x^2-dy^2=\pm1 \quad \text{または,} \quad x^2-dy^2=\pm4$$

の形の不定方程式をペル方程式という．一般的にペル方程式には, 自然数解が無限に存在することが知られている.

Jones [5] は, $d=k^2\pm1$ および, $k^2\pm4$ の場合にペル方程式の自然数解について考察し, 自然数解が一般フィボナッチ数列と一般リュカ数列を用いて表現できることを示した．また, Keskin-Güney [6] はこれらの自然数 d に対して, $\sqrt{d}$ の連分数展開を具体的に明らかにし, Jones の結果の別証を与えた.

連分数展開の周期の長さに着目したとき, Jones の結果において $d=k^2+1$ の場合は $\sqrt{d}$ の連分数展開の周期の長さが 1 の場合と見ることができる．本論文では, $\sqrt{d}$ の連分数展開の周期の長さが 3 となる場合についてペル方程式

$$x^2-dy^2=\pm1, \quad x^2-dy^2=\pm4$$

の全ての自然数解について考察する.

2 準備

2.1 ペル方程式と連分数展開

ここでは, 連分数展開の基本事項について説明する.

定義 2.1. 実数 α に対して,

$$\alpha=[a_0,a_1,a_2,\ldots]=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ldots}} \quad (a_0\in\mathbb{Z},\ a_1,a_2,\ldots\in\mathbb{N})$$

を α の連分数展開という．定義から, $\lfloor\alpha\rfloor=a_0$ である．ただし, $\lfloor x\rfloor$ は x のガウス記号である.

補題 2.1. 平方数でない自然数 d について, $\sqrt{d}$ の連分数展開を,

$$\sqrt{d} = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$$

で表す. このとき, ある自然数 l が存在して,

$$\sqrt{d} = [a_0, a_1, \ldots, a_l, a_1, \ldots, a_l, a_1, \ldots]$$

と表せる.

上記の場合において, 循環部分を,

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \ldots, a_l}]$$

のように上線で表す. このとき, $\sqrt{d}$ は周期 l で循環するといい, 周期の長さを, $l(\sqrt{d}) = l$ で表す.

補題 2.2.

(1) $\sqrt{d}$ の連分数展開は,

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, 2a_0}]$$

の形で表せる.

(2) $\sqrt{d}$ の連分数展開の循環節は回文的である. つまり,

$$[a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}, 2a_0}] = [a_0, \overline{a_{l-1}, a_{l-2}, \ldots, a_1, 2a_0}]$$

となる.

Proof. 参考文献 [1] pp.41-43 を参照のこと. □

次に, ペル方程式の解を求める上で重要となる $\sqrt{d}$ の近似分数を定義する.

定義 2.2. $\sqrt{d} = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ のとき,

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

を $\sqrt{d}$ の n 次近似分数という.

ここで, 連分数展開を用いてペル方程式の解を求める方法について紹介する.

定義 2.3. 平方数でない自然数 d に対して,

$$x^2 - dy^2 = \pm 1 \quad \text{または,} \quad x^2 - dy^2 = \pm 4$$

の形の不定方程式をペル方程式という.

定義 2.4. 整数の組 (a, b) をペル方程式の解とする. ここで, a, b がともに正のとき, (a, b) をペル方程式の自然数解という. さらに, ペル方程式の自然数解の中で, $a + b\sqrt{d}$ が最小となるとき, (a, b) をペル方程式の基本解という.

まずは, $x^2 - dy^2 = \pm 1$ の基本解について見る.

補題 2.3. $l(\sqrt{d}) = l$ とする.

(1) l が偶数ならば基本解は以下で与えられる.

(1-i) $x^2 - dy^2 = 1$ の基本解は (p_{l-1}, q_{l-1}).

(1-ii) $x^2 - dy^2 = -1$ は解を持たない.

(2) l が奇数の時, 基本解は以下で与えられる.

(2-i) $x^2 - dy^2 = 1$ の基本解は (p_{2l-1}, q_{2l-1}).

(2-ii) $x^2 - dy^2 = -1$ の基本解は (p_{l-1}, q_{l-1}).

Proof. 参考文献 [1] pp.87-88 を参照のこと. □

次に, $x^2 - dy^2 = \pm 1$ と $x^2 - dy^2 = \pm 4$ の基本解の対応について見ていく.

補題 2.4. $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ または, $d \equiv 1 \pmod 8$ とする. このとき, $x^2 - dy^2 = \pm 1$ と, $x^2 - dy^2 = \pm 4$ の自然数解は, $(a, b) \mapsto (2a, 2b)$ により 1 対 1 に対応する. この対応で $x^2 - dy^2 = \pm 1$ の基本解は $x^2 - dy^2 = \pm 4$ の基本解に対応する.

Proof. 参考文献 [1] pp.88-92 を参照のこと. □

補題 2.5. $d \equiv 5 \pmod 8$ とし, (a, b) は $x^2 - dy^2 = -4$ の基本解とする. このとき, a, b がともに偶数ならば, $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ が $x^2 - dy^2 = -1$ の基本解となる.

Proof. 参考文献 [1] pp.85-87 を参照のこと. □

ペル方程式は基本解が与えられていれば, そこからすべての自然数解を導くことができる.

定理 2.1. (x_1, y_1) を $x^2 - dy^2 = 1$ の基本解とする．このとき, $x^2 - dy^2 = 1$ のすべての自然数解 (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \dots)$ は,

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n$$

で与えられる．

Proof. 参考文献 [2] p.123 の (V) を参照のこと． □

定理 2.2. (x_1, y_1) を $x^2 - dy^2 = -1$ の基本解とする．このとき, $x^2 - dy^2 = -1$ のすべての自然数解 (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \dots)$ は,

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^{2n-1}$$

で与えられる．また, $x^2 - dy^2 = 1$ の基本解 $(x_1^{'}, y_1^{'})$ は,

$$x_1^{'} + y_1^{'}\sqrt{d} = \left(x_1 + y_1\sqrt{d}\right)^2$$

で与えられる．

Proof. 参考文献 [2] pp.123-124 の (VI) を参照のこと． □

次に, $x^2 - dy^2 = \pm 4$ の自然数解について見ていく．

定理 2.3. (x_1, y_1) を $x^2 - dy^2 = 4$ の基本解とする．このとき, $x^2 - dy^2 = 4$ のすべての自然数解 (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \dots)$ は,

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^n}{2^{n-1}}$$

で与えられる．

Proof. 参考文献 [2] の定理 3.9 を参照のこと． □

定理 2.4. (x_1, y_1) を $x^2 - dy^2 = -4$ の基本解とする．このとき, $x^2 - dy^2 = -4$ のすべての自然数解 (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \dots)$ は,

$$x_n + y_n\sqrt{d} = \frac{(x_1 + y_1\sqrt{d})^{2n-1}}{4^{n-1}}$$

で与えられる．また, $x^2 - dy^2 = 4$ の基本解 $(x_1^{'}, y_1^{'})$ は,

$$\frac{x_1^{'} + y_1^{'}\sqrt{d}}{2} = \left(\frac{x_1 + y_1\sqrt{d}}{2}\right)^2$$

で与えられる．

Proof. 参考文献 [2] の定理 3.9 を参照のこと． □

2.2 一般フィボナッチ数列と一般リュカ数列

次に, 一般フィボナッチ数列と一般リュカ数列の性質を確認していく.

定義 2.5. $f, g \in \mathbb{Z}$ $(f \neq 0, g \neq 0, f^2 + 4g > 0)$ とする. このとき, 一般フィボナッチ数列 $U_n(f, g)$ と一般リュカ数列 $V_n(f, g)$ を,

$$U_0(f,g) = 0,\ \ U_1(f,g) = 1,\ \ U_{n+1}(f,g) = fU_n(f,g) + gU_{n-1}(f,g),$$

$$V_0(f,g) = 2,\ \ V_1(f,g) = f,\ \ V_{n+1}(f,g) = fV_n(f,g) + gV_{n-1}(f,g)$$

で定義する.

補題 2.6. 定義 2.5 において,

$$\alpha = \frac{f + \sqrt{f^2 + 4g}}{2},\ \ \beta = \frac{f - \sqrt{f^2 + 4g}}{2}$$

とおく. このとき,

$$U_n(f,g) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},\ \ V_n(f,g) = \alpha^n + \beta^n$$

が成り立つ.

3 連分数展開に関する結果

3.1 周期 3 の連分数展開

ここでは, 周期が 3 になる連分数展開について決定する.

定理 3.1. $l(\sqrt{d}) = 3$ であることと,

$$a < k,\ \ d = k^2 + \frac{4ak + 1}{4a^2 + 1}$$

となる自然数 k, a が存在することは同値である. また, このとき $\sqrt{d} = [k, \overline{2a, 2a, 2k}]$ $(k \in \mathbb{N})$ となる.

Proof. $l(\sqrt{d}) = 3$ を仮定する. このとき, 補題 2.2 より, $\sqrt{d} = [k, \overline{2a, 2a, 2k}]$ と表すことができる. ここで,

$$\sqrt{d} = k + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{2k + \sqrt{d} - k}}}.$$

この式から, $d = k^2 + \dfrac{4ak+1}{4a^2+1}$ が得られる. d は自然数より, $4ak+1 \geq 4a^2+1$. よって $k \geq a$. ここで, $k = a$ とすると, $l(\sqrt{d}) = 1$ となり矛盾する. 従って, $k > a$ である.

逆に, $k > a$ で, $d = k^2 + \dfrac{4ak+1}{4a^2+1}$ となる自然数 k, a が存在すると仮定する. このとき, $k^2 + \dfrac{4ak+1}{4a^2+1}$ は自然数より $k \equiv a \pmod{4a^2+1}$ であるから, $k = (4a^2+1)n + a$ $(n \in \mathbb{N})$ とかける. $\lfloor \sqrt{d} \rfloor = k$ より,

$$\sqrt{d} = k + \frac{1}{\dfrac{\sqrt{d}+k}{d-k^2}} = k + \frac{1}{\dfrac{\sqrt{d}+k}{4an+1}} \tag{1}$$

と変形できる. 分子の $\sqrt{d}+k$ について,

$$\lfloor \sqrt{d}+k \rfloor = 2k = 8a^2n + 2n + 2a = 2a(4an+1) + 2n$$

であり, $2n < 4an+1$ であるから,

$$\left\lfloor \frac{\sqrt{d}+k}{d-k^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{d}+k}{4an+1} \right\rfloor = 2a$$

となる. 次に,

$$\frac{\sqrt{d}+k}{d-k^2} = 2a + \left(\frac{\sqrt{d}+k}{4an+1} - 2a \right) = 2a + \frac{1}{\dfrac{4an+1}{\sqrt{d}-(4a^2n-n+a)}}$$

であり,

$$\frac{4an+1}{\sqrt{d}-(4a^2n-n+a)} = \frac{(4an+1)(\sqrt{d}+4a^2n-n+a)}{d-(4a^2n-n+a)^2} = \frac{\sqrt{d}+4a^2n-n+a}{4an+1} \tag{2}$$

となる. よって, 分子について,

$$\lfloor \sqrt{d}+4a^2n-n+a \rfloor = k + 4a^2n - n + a = 2a(4an+1)$$

であるから,

$$\left\lfloor \frac{4an+1}{\sqrt{d}-(4a^2n-n+a)} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\sqrt{d}+4a^2n-n+a}{4an+1} \right\rfloor = 2a$$

となる. 式 (2) より,

$$\frac{4an+1}{\sqrt{d}-(4a^2n-n+a)} = 2a + \left(\frac{\sqrt{d}+4a^2n-n+a}{4an+1} - 2a \right) = 2a + \frac{1}{\dfrac{4an+1}{\sqrt{d}-k}}.$$

さらに,

$$\frac{4an+1}{\sqrt{d}-k} = \frac{(4an+1)(\sqrt{d}+k)}{\dfrac{4ak+1}{4a^2+1}} = \sqrt{d}+k.$$

また, $\lfloor \sqrt{d}+k \rfloor = 2k$ より,

$$\sqrt{d}+k = 2k + (\sqrt{d}+k-2k) = 2k + \frac{1}{\dfrac{\sqrt{d}+k}{d-k^2}}.$$

これと式 (1) より, $\sqrt{d} = [k, \overline{2a, 2a, 2k}]$ と表すことができる. 仮定より, $a \neq k$ であるから $l(\sqrt{d}) = 3$ が判る. □

定理 3.1 に関して, 後のセクションで必要となる性質を紹介する.

補題 3.1. $l(\sqrt{d}) = 3$ ならば, $4 \nmid d$ となる.

Proof. 証明略. □

4 $l(\sqrt{d}) = 3$ におけるペル方程式の自然数解について

4.1 ペル方程式 $x^2 - dy^2 = \pm 1$ のケース

以降, $l(\sqrt{d}) = 3$ と仮定する. このとき,

$$a < k, \quad d = k^2 + \frac{4ak+1}{4a^2+1}$$

をみたす自然数 a, k が存在する. また, 周期が奇数より, $x^2 - dy^2 = 1$ と $x^2 - dy^2 = -1$ のどちらも解を持つことに注意する.

定理 4.1. $x^2 - dy^2 = -1$ の基本解 (x_1, y_1) は,

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = (k(4a^2+1)+2a) + (4a^2+1)\sqrt{d}$$

で与えられる.

Proof. 補題 2.3 より判る. □

定理 4.2. $x^2 - dy^2 = 1$ の基本解 (x_1, y_1) は,

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = ((k(4a^2+1)+2a) + (4a^2+1)\sqrt{d})^2$$

で与えられる.

Proof. 定理 2.2, 4.1 より判る. □

次に, $x^2 - dy^2 = \pm 1$ のすべての自然数解が一般フィボナッチ数列と一般リュカ数列で表せることを示す.

定理 4.3. $(f, g) = (2k(4a^2+1)+4a, 1)$ とすると,

(i) $x^2 - dy^2 = 1$ のすべての自然数解 (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \dots)$ は,

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{2}V_{2n}(f,g), (4a^2+1)U_{2n}(f,g)\right)$$

で与えられる.

(ii) $x^2 - dy^2 = -1$ のすべての自然数解 (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \dots)$ は,

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{2}V_{2n-1}(f,g), (4a^2+1)U_{2n-1}(f,g)\right)$$

で与えられる.

Proof. 定理 2.1, 2.2, 4.1, 4.2 より $x^2 - dy^2 = \pm 1$ のすべての自然数解 (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \dots)$ は,

$$x_n + y_n\sqrt{d} = ((k(4a^2+1)+2a) + (4a^2+1)\sqrt{d})^n$$

で与えられる. さらに, n が偶数のときは, $x^2 - dy^2 = 1$ の解, 奇数のときは $x^2 - dy^2 = -1$ の解となることに注意する. ここで,

$$\alpha = (k(4a^2+1)+2a) + (4a^2+1)\sqrt{d},$$

$$\beta = (k(4a^2+1)+2a) - (4a^2+1)\sqrt{d}$$

とおくと, $\alpha^n = x_n + y_n\sqrt{d}$, $\beta^n = x_n - y_n\sqrt{d}$ となる. さらに,

$$x_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2}, \quad y_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{d}}$$

が判る. ここで, 一般フィボナッチ数列と一般リュカ数列における f, g を,

$$(f, g) = (2k(4a^2+1)+4a, 1)$$

とすると,

$$x_n = \frac{\alpha^n + \beta^n}{2} = \frac{1}{2}V_n(f,g),$$

$$y_n = (4a^2+1)\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = (4a^2+1)U_n(f,g)$$

を得る. □

4.2 ペル方程式 $x^2 - dy^2 = \pm 4$ のケース

周期が奇数より, $x^2 - dy^2 = 4$ と $x^2 - dy^2 = -4$ のどちらも解を持つことに注意する.

補題 4.1. $l(\sqrt{d}) = 3$, $d \equiv 5 \pmod 8$ ならば, $x^2 - dy^2 = -4$ の基本解 (x, y) に関して, x, y はどちらも偶数になる.

Proof. 証明略. □

定理 4.4. $x^2 - dy^2 = -4$ の基本解 (x_1, y_1) は,

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = 2(k(4a^2+1)+2a) + 2(4a^2+1)\sqrt{d}$$

で与えられる.

Proof. 定理 4.1, 補題 2.4, 2.5, 3.1, 4.1 より判る. □

定理 4.5. $x^2 - dy^2 = 4$ の基本解 (x_1, y_1) は,

$$x_1 + y_1\sqrt{d} = 2((k(4a^2+1)+2a) + (4a^2+1)\sqrt{d})^2$$

で与えられる.

Proof. 定理 2.4, 4.4 より従う. □

最後に, $l(\sqrt{d}) = 3$ のとき, $x^2 - dy^2 = \pm 4$ の自然数解を一般フィボナッチ数列と一般リュカ数列で表す.

定理 4.6. $(f, g) = (2k(4a^2+1)+4a, 1)$ とすると,

(i) $x^2 - dy^2 = 4$ のすべての自然数解 (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \dots)$ は,

$$(x_n, y_n) = (V_{2n}(f, g), 2(4a^2+1)U_{2n}(f, g))$$

で与えられる.

(ii) $x^2 - dy^2 = -4$ のすべての自然数解 (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \dots)$ は,

$$(x_n, y_n) = (V_{2n-1}(f, g), 2(4a^2+1)U_{2n-1}(f, g))$$

で与えられる.

Proof. 定理 2.3, 2.4, 4.4, 4.5 より, 定理 4.3 の証明と同様に示せる. □

参考文献

[1] 有澤健治, 『平方根の連分数とペル方程式』, http://ar.nyx.link/cf/pell.pdf.

[2] 河田敬義, 『数論 I』, 岩波書店, 1978.

[3] ジョセフ · H · シルヴァーマン, 『はじめての数論』, 丸善出版, 2014.

[4] 高倉亘, 『$\sqrt{n}$ の連分数展開に関する考察』,
http://izumi-math.jp/W_Takakura/renbun/renbun.pdf.

[5] J.P.Jones, Representation of Solutions of Pell Equations Using Lucas Sequences, Acta Acad. Paedagog. Agriensis Sect. Mat. (N.S.). **30**, (2003), 75-86.

[6] R.Keskin, M.Güney, Positive Integer Solution of Some Pell Equations, Palest. J. Math. **8**, (2019), No. 2, 213-226.

Ding-Iohara 代数のダイナミカル類似

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科
服部真宗 (Masamune HATTORI)

概要

複素パラメータ q, 形式的パラメータ p, 有限ルート系 X_l およびいわゆる Ding-Iohara 条件を満たす関数の組 g によって決まるダイナミカル Hopf 亜代数の族を構成した．この亜代数の構造関数をある種のテータ関数にとることで, 今野氏の楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ が復元される．また $p \to 0$ の極限を考えることで Ding-Iohara 代数 $U_q(g, A_l)$ が復元される．この意味で今回導入した Hopf 亜代数は, Ding-Iohara 代数のダイナミカル類似と考えられる．また副産物として, Ding-Iohara 代数の non-simply-laced なルート系の場合への拡張を得た.

1 導入

量子代数とは Kac-Moody 代数 [Ka90] の関係式を q 変形して得られる結合代数である．特に有限型, アフィン型の Cartan 行列に付随する量子代数を, それぞれ量子群, 量子アフィン環という．量子代数は Hopf 代数構造, すなわち余積, 余単位射, 対合射という付加的な (反) 代数射を備え, この構造を通して統計力学における Yang-Baxter 方程式や, 結び目理論の不変量などと関係することが知られている ([Kas95]).

一般に量子代数は Chevalley 型の生成元を用いて記述される．Drinfeld[D89] は (非捩型) 量子アフィン環を Chevalley 型とは異なる無数の生成元と関係式で記述し, さらに従来のものとは異なる余積も構成した．この構成を Drinfeld 実現という．Drinfeld 実現の存在は, アフィン Lie 代数が Kac-Moody 代数の他に, ループ代数の中心拡大という描像をもつことに対応する.

Drinfeld 実現は, 生成元の母関数 (カレントという) を用いて簡潔に表される [J+99, Appendex.A]. この場合の関係式には $z - q^{\pm b_{ij} w}, q^{\pm b_{ij} z - w}$ という 2 つの関数が現れる．その比 $g_{ij}(z) = \frac{q^{-b_{ij}}(1-q^{b_{ij}} z)}{1-q^{-b_{ij}} z}$ は $g_{ij}(z^{-1}) = g_{ji}(z)^{-1}$ なる性質を満たす点で非常に特徴的である.

Drinfeld 実現の直接の一般化として, Ding-Iohara 代数 [DI97] が挙げられる．これは A, D, E 型のルート系に関して, Drinfeld 実現の関係式に現れる関数 $g_{ij}(z)$ を, 同様の性質を満たす解析的関数の組に置き換えて得られる位相的代数である．Ding-Iohara 代数は Drinfeld 型の余積によって (位相的)Hopf 代数となる．このクラスの重要な例としては, 量子アフィン環の他に Ding-Iohara-Miki 代数がある．これは A_1 型の Ding-Iohara 代数であるが, 変形 W 代数 [M07] や Macdonald 理論 [F+09] などとの関連が指摘されている.

少し話題を変えて, 楕円量子群 [Ko20] について簡単に説明する．楕円量子群は, 量子アフィン環のダイナミカルかつ楕円的な類似物として今野氏によって導入された位相的代数である．大雑

把には, Drinfeld 実現の関係式を楕円テータ関数で書き換えることで楕円量子群が得られる. 楕円量子群は, H-Hopf 亜代数と呼ばれる Hopf 代数の類似構造を備え, この構造を通してダイナミカル Yang-Baxter 方程式や Macdonald 理論との関係が調べられている. また楕円 stable-envelope という幾何学的対象を用いた表現論が提唱されるなど, その研究は非常に盛んである.

上記の文脈では, 楕円量子群の余積は RLL 関係式という関係式との整合性に基づくものが用いられる [Ko20]. 一方で楕円量子群は Drinfeld 型の余積も持つことが知られており, この意味では Drinfeld 実現の別の一般化になっていると考えられる. 私はこの観点に着目し, 柳田氏との共同研究 [HY22] において, Ding-Iohara 代数と楕円量子群を包括するような位相的 H-Hopf 亜代数のクラス (ダイナミカル Ding-Iohara 代数) を任意の有限ルート系に対して与えた. この研究の副産物として, A, D, E 型以外のルート系に付随する Ding-Iohara 代数が定義される.

本紙では, Ding-Iohara 代数, H-Hopf 亜代数, 楕円量子群の基本事項を説明したのち, simply-laced な場合のダイナミカル Ding-Iohara 代数の構成を紹介する. 議論の詳細および non-simply-laced な場合の構成については [HY22] に記述がある.

最後に本紙で用いる記号をまとめておく.

- 可換環 k と不定元 x に関して, Laurent 多項式環を $k[x^{\pm 1}]$, 形式的冪級数環を $k[\![x]\!]$, Laurent 級数環を $k(\!(x)\!)$, そして形式的 Laurent 級数の成す k 上の加群を $k[\![x^{\pm 1}]\!]$ で表す.
- q-shifted factorials を次のように表す.

$$(x;q)_\infty := \prod_{n=0}^{\infty}(1-xq^n), \quad (x_1,\dots,x_n;q)_\infty := \prod_{i=1}^{n}(x_i;q)_\infty.$$

- q を $0<|q|<1$ を満たす複素数とする. $i \in I$ と $m \le n$ を満たす $m, n \in \mathbb{N}$ に対して, 次のように定義する.

$$q_i := q^{d_i}, \quad [n]_i := \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad [n)_i := \frac{q^n - q^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}, \tag{1.1}$$

$$[n]_i! := [n]_i[n-1]_i \cdots [1]_i, \quad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix}_i := \frac{[m]_i!}{[n]_i!\,[m-n]_i!}. \tag{1.2}$$

2 Ding-Iohara 代数

2.1 Ding-Iohara 代数の代数構造

$A = (a_{ij})$ を ADE 型の有限ルート系 X_l の Cartan 行列とし, $I := \{1, \dots, l\}$ とおく. 更に

$$\mathcal{A} := \{\, z = 0, \infty \text{ 以外に極を持たない解析的関数} \,\}$$

とする. 構造関数 $g := \{\, g_{ij}(z) \mid i, j \in I \,\}$ を以下の条件 (DI 条件) を満たす関数の集合とする.

(1) 任意の $(i,j) \in I^2$ に対して $G_{ij}^{\pm}(z) \in \mathcal{A}$ が存在して $g_{ij}(z) = G_{ij}^{+}(z)/G_{ij}^{-}(z)$ が成り立つ.

(2) 任意の $i, j \in I$ に対して $g_{ij}(z^{-1}) = g_{ji}(z)^{-1}$ が成り立つ.

また q を $0<|q|<1$ を満たす複素数とする. 以上のデータを用いて定義される位相的 Hopf 代数 $U_q(g, X_l)$(定義 2.1.1, 定理 2.1.2) を Ding-Iohara 代数と総称する.

定義 2.1.1. $U = U_q(g, X_l)$ は $\mathbb{C}$ 上の単位的かつ結合的な位相的代数で, 以下の生成元を持つ.

$$q^{\pm c/2},\ e_{i,n},\ f_{i,n},\ \psi^+_{i,n},\ \psi^-_{i,n} \quad (i \in I,\ n \in \mathbb{Z}).$$

生成カレントを, 形式的な変数 z を用いて

$$e_i(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_{i,n} z^{-l}, \quad f_i(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_{i,n} z^{-l}, \quad \psi^\pm_i(z) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \psi^\pm_{i,n} z^{-n}$$

と定める. ただし $q^{\pm c/2}$ はこれ自体を一つの不定元とみなす. さらに $\psi^\pm_i(z)$ は z の級数として可逆と仮定する. 関係式は, Drinfeld 実現の関係式で, $z - q^{\pm b_{ij} w}, q^{\pm b_{ij} z - w}$ をそれぞれ $G^+_{ij}(z)$, $G^-_{ij}(z)$ と置き換え, 更に Serre 関係式に現れる q-整数 [2] を以下の関数で置き換えたものである.

$$h_{ij}(x, y) := \frac{(g_{ii}(x/y) + 1)(g_{ij}(x) g_{ij}(y) + 1)}{g_{ij}(y) + g_{ii}(x/y) g_{ij}(x)}.$$

定理 2.1.2. 位相的代数 $U = U_q(g, X_l)$ は, Drinfeld 型の (位相的)Hopf 代数構造 (Δ, ε, S) をもつ. この位相的 Hopf 代数 $U_q(g, X_l)$ を, (X_l 型の)Ding-Iohara 代数という.

注意 2.1.3. Ding-Iohara 代数の関係式には, 次のような無限和が現れる.

$$\psi^+_{i,m} e_{j,n} = \sum_{k=-N^+}^{\infty} g_{ij,k} q^{-kc/2} e_{j,n-k} \psi^+_{i,m+k} \quad (m, n \in \mathbb{Z}). \tag{2.1}$$

この問題を回避するためには, 例えば以下のような仮定をおけばよい.

- $\psi^+_i(z)$ が上に有界かつ $\psi^-_i(z)$ が下に有界と仮定する. このとき (2.1) は有限和となる.
- 構造関数 $g_{ij}(z)$ がパラメータ p を含み, $g_{ij}(z) = g_{ij}(z; p)$ が $g_{ij}(z; p) = \sum_{k=-N}^{\infty} g_{ij,k}(z) p^k \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]((p))$ と展開されると仮定する. このとき無限和 (2.1) は p 進位相により意味を持つ. p 進位相および位相的代数に関する詳細は [Kas95] を参照せよ.

例 2.1.4. [DI97, Example 2.1, Case I]
構造関数 $g = \{g_{ij}(z) \mid i, j \in I\}$ を

$$g_{ij}(z) = \frac{G^+_{ij}(z)}{G^-_{ij}(z)} := \frac{q^{-a_{ij}}(1 - q^{a_{ij}} z)}{1 - q^{-a_{ij}} z}.$$

とおく. 更に $\psi^+_{i,n} = 0$, $\psi^-_{i,-n} = 0 \quad (n > 0)$, $\psi^+_{i,0}\psi^-_{i,0} = 1$ と定めると, U は Drinfeld 余積を備えた量子アフィン環 $U_q(A_{l+1})$ に他ならない . 詳細は [DI97] を参照.

例 2.1.5. ルート系を A_1 型にとり, 構造関数を

$$g(z) := \frac{(1 - qz)(1 - z/t)(1 - tz/q)}{(1 - z/q)(1 - tz)(1 - qz/t)}$$

としたものを, Ding-Iohara-Miki 代数という. これに関しては [F+09, M07] などの研究がある.

3 H-Hopf 亜代数

3.1 H 代数, H 双亜代数と H-Hopf 亜代数

[Ko20] に基づき, H 代数, H 双亜代数および H-Hopf 亜代数を定義する. H を $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間, H^* はその双対空間とする. H^* 上の有理型関数が成す体を $\mathbb{F}$ とおく.

定義 3.1.1. A を $\mathbb{C}$ 上の代数とする. A が H 代数であるとは, A が次の条件を満たすことをいう.

- A は H^* の元を二重次数にもつ. すなわち $\bigoplus_{\alpha,\beta\in H^*} A_{\alpha,\beta}$.
- 左 (右) モーメント写像と呼ばれる代数的単射 $\mu_l, \mu_r : \mathbb{F} \to A_{0,0}$ が存在し, 次を満たす.

$$\mu_l(f)x = x\mu_l(T_\alpha f), \quad \mu_r(f)x = x\mu_r(T_\beta f) \quad (x \in A_{\alpha,\beta}).$$

T_α は $\alpha \in H^*$ に関する差分作用素. 二重次数とモーメント写像を保つ代数射を H 代数射という.

定義 3.1.2. A, B を H 代数とする. A と B のテンソル空間 $A \mathbin{\widetilde{\otimes}} B$ を次で定める.

$$A \mathbin{\widetilde{\otimes}} B := \bigoplus_{\alpha,\beta\in H^*} \left(A \mathbin{\widetilde{\otimes}} B\right)_{\alpha,\beta}, \quad (A \mathbin{\widetilde{\otimes}} B)_{\alpha,\beta} := \bigoplus_{\gamma\in H^*} \left(A_{\alpha,\gamma} \mathbin{\widetilde{\otimes}} B_{\gamma,\beta}\right).$$

ただし $A_{\alpha,\gamma} \mathbin{\widetilde{\otimes}} B_{\gamma,\beta}$ は $A_{\alpha,\gamma} \otimes_{\mathbb{C}} B_{\gamma,\beta}$ を,

$$\mu_r^A(f)a \otimes b - a \otimes \mu_l^B(f)b \quad (a \in A, b \in B, f \in \mathbb{F})$$

が生成する空間で割って得られる空間. $A \mathbin{\widetilde{\otimes}} B$ は以下の H 代数構造をもつ.

$$(a \mathbin{\widetilde{\otimes}} b)(a' \mathbin{\widetilde{\otimes}} b') := aa' \mathbin{\widetilde{\otimes}} bb', \quad \mu_l := \mu_l^A \mathbin{\widetilde{\otimes}} 1, \quad \mu_r := 1 \mathbin{\widetilde{\otimes}} \mu_r^B.$$

また $f : A \to B,\ f' : A' \to B'$ が H 代数射であるとき, 以下の代数射が得られる.

$$f \mathbin{\widetilde{\otimes}} f' : A \mathbin{\widetilde{\otimes}} A' \to B \mathbin{\widetilde{\otimes}} B'\ ;\ a \mathbin{\widetilde{\otimes}} a' \mapsto f(a) \mathbin{\widetilde{\otimes}} f'(a').$$

例 3.1.3. $\mathbb{F}$ 上の差分作用素環 $\mathcal{D} := \{\sum_i f_i T_{\alpha_i} \mid f \in \mathbb{F}, \alpha_i \in H^*\}$ は以下の H 代数構造をもつ.

$$\mathcal{D}_{\alpha,\alpha} := \mathbb{F}T_{-\alpha}\ (\alpha \in H^*),\ \mathcal{D}_{\alpha,\beta} := 0\ (\alpha \neq \beta \in H^*),\ \mu_l(f) = \mu_r(f) := fT_0.$$

命題 3.1.4. A を任意の H 代数とする. このとき次の同型が成り立つ.

$$A \mathbin{\widetilde{\otimes}} \mathcal{D} \simeq A \simeq \mathcal{D} \mathbin{\widetilde{\otimes}} A.$$

注意. H 代数の圏は $\widetilde{\otimes}$ に関してモノイダル圏を成す. 命題 3.1.4より, $\mathcal{D}$ はその単位対象である.

続いて H 代数の余積と余単位射を導入し, H 双亜代数を定義する.

定義 3.1.5. A を H 代数とする. H 代数射 $\Delta : A \to A \mathbin{\widetilde{\otimes}} A, \quad \varepsilon : A \to \mathcal{D}$ がそれぞれ余積, 余単位射であるとは, 命題 3.1.4の同一視の下で次が成り立つことをいう.

$$(\Delta \mathbin{\widetilde{\otimes}} 1) \circ \Delta = (1 \mathbin{\widetilde{\otimes}} \Delta) \circ \Delta, \quad (\varepsilon \mathbin{\widetilde{\otimes}} 1) \circ \Delta = 1 = (1 \mathbin{\widetilde{\otimes}} \varepsilon) \circ \Delta.$$

余積 Δ と余単位射 ε を備えた H 代数を H 双亜代数という.

例 3.1.6. H^* 上の差分作用素環 $\mathcal{D}$ は以下の (Δ, ε) で H 双亜代数となる.

$$\Delta(fT_\alpha) := fT_\alpha \widetilde{\otimes} t_\alpha, \quad \varepsilon := 1_{\mathcal{D}}.$$

最後に [Ko20] の定義にもとづいて H-Hopf 亜代数を導入する.

定義 3.1.7. A を H 双亜代数とする. 対合射 $S : A \to A$ とは, $\mathbb{C}$ 線形写像で次を満たすもの.

(1) $S(\mu_r(f)a) = S(a)\mu_l(f), \quad S(a\mu_l(f)) = \mu_r(f)S(a) \quad (a \in A,\ f \in \mathbb{F})$,

(2) $\sum_{(a)} a'S(a'') = \mu_l(\varepsilon((a)1), \quad \sum_{(a)} S(a')a'' = \mu_r(T_\alpha(\varepsilon(a)1)) \quad (a \in A)$.

対合射をもつ H 双代数を H-Hopf 亜代数という.

例 3.1.8. H^* 上の差分作用素環 $\mathcal{D}$ は H-Hopf 亜代数である.

4 楕円量子群

4.1 ダイナミカルパラメータ

$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ を有限ルート系 X_l 型の Cartan 行列とする. A の対称化 $A = DB$ を固定し, 対称行列 B の成分を $B = (b_{ij})_{i,j \in I}$ と書く [Ka90, §2.3]. また A の実現 $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$[Ka90, §1.1] を固定し, 対応する Kac-Moody 代数を $\mathfrak{g}$ と書く. さらに対称化から定まる $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}^*$ 上の双線形形式をどちらも $(\cdot|\cdot)$ と書く. ルート格子 $\mathcal{Q}$, 余ルート格子 $\mathcal{Q}^\vee$, ウェイト格子 $\mathcal{P}$ を次で定める.

$$\mathcal{Q} := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i \subset \mathfrak{h}^*, \quad \mathcal{Q}^\vee := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee \subset \mathfrak{h}, \quad \mathcal{P} := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall i \in I, \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\}.$$

$\mathbb{C}$ 上の線型空間 $\mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{h}^* = \mathcal{P} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ とみなし, そのコピー $H := \{P_\mu \mid \mu \in \mathfrak{h}^*\}$ を考える. H の演算は, $P_{c_1\mu_1 + c_2\mu_2} = c_1 P_{\mu_1} + c_2 P_{\mu_2}$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{C},\ \mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{h}^*)$ で定める. H の基底は $(P_{\alpha_1}, \ldots, P_{\alpha_l})$ で与えられる. 次に $\mathbb{C}$ 上の $2l$ 次元線型空間 $\widetilde{H}$ を次で定義する.

$$\widetilde{H} := \sum_{i \in I} \mathbb{C}\big(P_i + h_i\big) + \sum_{i \in I} \mathbb{C}P_i.$$

$h = \sum_{i \in I} c_i \alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}$ に対し, $P + h := \sum_{i \in I} c_i(P_i + h_i)$ と表す. $(P_i + h_i) - P_i = h_i$ を $\alpha_i^\vee$ と同一視して, 線型同型 $\widetilde{H} \cong H \oplus \mathfrak{h}$ を得る. この同一視の下で, 線型空間 $\widetilde{H}$ は次の基底を持つ.

$$\{P_i, h_i \mid i \in I\}, \quad P_i = P_{\alpha_i}, \quad h_i \cong \alpha_i^\vee. \tag{4.1}$$

元 P_i をダイナミカルパラメータと呼ぶ. また双対空間 H^* および $\widetilde{H}^*$ を次のように導入する.

$$H^* = \{Q_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{h}^*\} = \sum_{i \in I} \mathbb{C}Q_i, \ \widetilde{H}^* = \sum_{i \in I} \mathbb{C}(Q_i + \alpha_i) + \sum_{i \in I} \mathbb{C}Q_i \quad (Q_i := Q_{\alpha_i}).$$

ここで H^* は $\mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{h}^* = \mathcal{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ とみなし, そのコピーとして扱う. H^* は次の基底をもつ.

$$\{Q_i, \alpha_i \mid i \in I\}, \quad Q_i := Q_{\alpha_i}.$$

Q_i を双対 (ダイナミカル) パラメータと呼ぶ．Q_i と α_i は次のように定める．H^* の基底と H の基底 (4.1) に対して，自然なペアリング $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon H^*\times H\to\mathbb{C}$ が次の値をとるようにする．

$$\langle Q_i, P_j\rangle = (\alpha_i\,|\,\alpha_j) = b_{ij},\quad \langle\alpha_i, h_j\rangle = a_{ji},\quad \text{その他はすべて } 0.$$

双対空間 $\widetilde{H}^*$ 上の有理型関数の成す体 $\mathbb{F} := \mathcal{M}(\widetilde{H}^*)$ を考える．$F\in\mathbb{F}$ の元は，関数 $F = F(P+h,P)$ として表せる．ただし変数は $P+h=(P_i+h_i)_{i\in I}$ と $P=(P_i)_{i\in I}$ をわたる．F の点 $\mu\in\widetilde{H}^*$ での値は $F(\mu)=F\bigl(\langle\mu,P+h\rangle,\langle\mu,P\rangle\bigr)$ と表される．特に $\widetilde{H}$ の元は $\widetilde{H}^*$ 上の有理型関数とみなせる．変数 $P+h$，或いは P のみを含む関数を $f(P+h)$, $f(P)\in\mathbb{F}$ と略記する．

4.2 楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ の定義

§4.1の記号を引き続き用いる．形式的変数 p を固定し，p 進位相に関する $\mathbb{C}[\![p]\!]$ 上の位相的代数を考える．

定義 4.2.1. $A=A(X_l)=(a_{ij})_{i,j\in I}$ を X_l 型の Cartan 行列とする．A に関する楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})=U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}}(X_l))$ とは $\mathbb{C}[\![p]\!]$ 上の位相的代数で，次の生成元と関係式からなるものをいう．

- 生成元: $\mathcal{M}(\widetilde{H}^*)$, $q^{\pm c/2}$, d, $K_i^{\pm}$, $e_{i,m}$, $f_{i,m}$, $\alpha_{i,n}^{\vee}$ $\quad(i\in I,\, m\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\})$.
- 関係式: $\mathcal{M}(\widetilde{H}^*)$ は部分代数．$q^{\pm c/2}$ は中心元で，$q^{c/2}q^{-c/2}=1$．$K_i^{\pm}$ は可逆．
  - 生成カレントを z に関する形式的 Laurent 級数として，次のように定義する．

$$e_i(z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} e_{i,m}z^{-m},\quad f_i(z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_{i,m}z^{-m}\quad (i\in I).$$

    $\mathbb{F}$ の元を含む関係式は次のように与えられる．

$$\begin{aligned}
&F(P+h)\,d = d\,F(P+h),\ F(P)\,d = d\,F(P),\\
&F(P+h)\,K_i^{\pm} = K_i^{\pm}\,F\bigl(P+h\mp\langle Q_i,P+h\rangle\bigr), F(P)\,K_i^{\pm} = K_i^{\pm}\,F\bigl(P\mp\langle Q_i,P\rangle\bigr),\\
&F(P+h)\,e_i(z) = e_i(z)\,F(P+h),\ F(P)\,e_i(z) = e_i(z)\,F(P-\langle Q_i,P\rangle),\\
&F(P+h)\,f_i(z) = f_i(z)\,F(P+h-\langle Q_i,P+h\rangle),\ F(P)\,f_i(z) = f_i(z)\,F(P),\\
&F(P+h)\,\alpha_{i,n}^{\vee} = \alpha_{i,n}^{\vee}\,F(P+h),\ F(P)\,\alpha_{i,n}^{\vee} = \alpha_{i,n}^{\vee}\,F(P).
\end{aligned}$$

  - $d, K_i^{\pm}$ を含む残りの関係式は次で与えられる．

$$\begin{gathered}
[d,K_i^{\pm}]=0,\quad [d,e_{i,m}]=me_{i,m},\quad [d,f_{i,m}]=mf_{i,m},\quad [d,\alpha_{j,n}^{\vee}]=n\alpha_{i,n}^{\vee},\\
K_i^{\pm}e_j(z)=q_i^{\mp a_{ij}}e_j(z)K_i^{\pm},\quad K_i^{\pm}f_j(z)=q_i^{\pm a_{ij}}f_j(z)K_i^{\pm},\quad [K_i^{\pm},\alpha_{j,n}^{\vee}]=0.
\end{gathered}$$

  - (1.1) を用いて，$\alpha_{i,n}^{\vee}$ を含む残りの関係式は次で与えられる．

$$\begin{aligned}
&[\alpha_{i,m}^{\vee},\alpha_{j,n}^{\vee}] = \delta_{m+n,0}\frac{[a_{ij}m]_i[cm)_j}{m}\frac{1-p^m}{1-p^{*m}}q^{-cm},\\
&[\alpha_{i,m}^{\vee},e_j(z)] = \frac{[a_{ij}m]_i}{m}\frac{1-p^m}{1-p^{*m}}q^{-cm}z^m e_j(z),\ [\alpha_{i,m}^{\vee},f_j(z)] = -\frac{[a_{ij}m]_i}{m}z^m f_j(z).
\end{aligned}$$

    以降，$p^* := pq^{-2c}$ と書く．また $\frac{1}{1-p^{*m}}$ は形式的級数 $\sum_{n\geq 0}p^{*mn}$ と理解する．

– 残りの関係式を簡潔に表示するために, 新たな生成カレントを次のように定義する.

$$\psi_i^+(q^{-c/2}z) := K_i^+ \exp\Big(-(q_i - q_i^{-1})\sum_{n>0}\frac{\alpha_{i,-n}^\vee}{1-p^n}z^n\Big)\exp\Big((q_i - q_i^{-1})\sum_{n>0}\frac{p^n\alpha_{i,n}^\vee}{1-p^n}z^{-n}\Big),$$

$$\psi_i^-(q^{c/2}z) := K_i^- \exp\Big(-(q_i - q_i^{-1})\sum_{n>0}\frac{p^n\alpha_{i,-n}^\vee}{1-p^n}z^n\Big)\exp\Big((q_i - q_i^{-1})\sum_{n>0}\frac{\alpha_{i,n}^\vee}{1-p^n}z^{-n}\Big).$$

ここで $\exp(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n!}x^n$ とし, $\frac{1}{1-p^n}$ は $\sum_{k\geq 0}p^{kn}$ と理解する. 各生成カレントの右辺の係数は p 進位相で well-defined. このとき残りの関係式は次で与えられる.

* 任意の $i,j\in I$ に対して, $e_{i,m}$ と $f_{i,m}$ の間の 2 次関係式が次で与えられる.

$$z\,\gamma(\tfrac{w}{z};q^{b_{ij}},p^*)e_i(z)e_j(w) = -w\,\gamma(\tfrac{z}{w};q^{b_{ij}},p^*)e_j(w)e_i(z),$$
$$z\,\gamma(\tfrac{w}{z};q^{-b_{ij}},p)f_i(z)f_j(w) = -w\,\gamma(\tfrac{z}{w};q^{-b_{ij}},p)f_j(w)f_i(z).$$

ここで構造関数 γ は $\gamma(x;q,p) := \frac{(qx;p)_\infty}{(pq^{-1}x;p)_\infty} \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}][\![p]\!]$ で定義される.

* $i,j\in I$ は $a := 1-a_{ij}\geq 2$ を満たすとする. 次の p の形式的冪級数を導入する.

$$\widetilde{\gamma}(x;q,p) := (pqx;p)_\infty/(pq^{-1}x;p)_\infty.$$

このとき (1.2) を用いて, Serre 型関係式が次で定義される.

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_a}\prod_{1\leq m<n\leq a}\widetilde{\gamma}(\tfrac{z_{\sigma(n)}}{z_{\sigma(m)}};q^2,p^*)\\&\quad\cdot\sum_{s=0}^{a}(-1)^s\begin{bmatrix}a\\s\end{bmatrix}_i\prod_{m=1}^{s}\widetilde{\gamma}(\tfrac{w}{z_{\sigma(m)}};q^{b_{ij}},p^*)\prod_{m=s+1}^{a}\widetilde{\gamma}(\tfrac{z_{\sigma(m)}}{w};q^{b_{ij}},p^*)\\&\quad\cdot e_i(z_{\sigma(1)})\cdots e_i(z_{\sigma(s)})e_j(w)e_i(z_{\sigma(s+1)})\cdots e_i(z_{\sigma(a)}) = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_a}\prod_{1\leq m<n\leq a}\widetilde{\gamma}(\tfrac{z_{\sigma(n)}}{z_{\sigma(m)}};q^{-2},p)\\&\quad\cdot\sum_{s=0}^{a}(-1)^s\begin{bmatrix}a\\s\end{bmatrix}_i\prod_{m=1}^{s}\widetilde{\gamma}(\tfrac{w}{z_{\sigma(m)}};q^{-b_{ij}},p)\prod_{m=s+1}^{a}\widetilde{\gamma}(\tfrac{z_{\sigma(m)}}{w};q^{-b_{ij}},p)\\&\quad\cdot f_i(z_{\sigma(1)})\cdots f_i(z_{\sigma(s)})f_j(w)f_i(z_{\sigma(s+1)})\cdots f_i(z_{\sigma(a)}) = 0.\end{aligned}$$

* 最後に, $e_{i,m}$ と $f_{i,m}$ の間の関係式が次で与えらえる.

$$[e_i(z),f_j(w)] = \frac{\delta_{i,j}}{q-q^{-1}}\big(\delta(q^{-c}\tfrac{z}{w})\psi_i^-(q^{c/2}w) - \delta(q^{c}\tfrac{z}{w})\psi_i^+(q^{-c/2}z)\big).$$

ここで $\mathfrak{S}_a$ は次数 a の対称群, δ は形式的デルタ関数 $\delta(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}}x^n$ を表す.

次に楕円量子群 $U := U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}})$ が H-Hopf 亜代数構造をもつことを説明する. $\mathbb{C}[\![p]\!]$ の上で議論を行うため, $\mathbb{F} := \mathcal{M}(H^*)$ を $\mathbb{F}[\![p]\!] := \mathbb{F}\otimes_{\mathbb{C}}[\![p]\!]$ に延長する. $F\in\mathbb{F}[\![p]\!]$ を

$$F = F(P,p) = \sum_{n\in\mathbb{N}}p^nF_n(P),$$

のように表す. ここで各 $n\in\mathbb{N}$ に対して $F_n(P)$ は $\mathbb{F}$ の元である.

補題 4.2.2. 楕円量子群 U は, 次の位相的 H 代数構造をもつ.

$$U_{\alpha,\beta} := \{a \in U \mid q^P a q^{-P} = q^{\langle \alpha, P\rangle} a,\ q^{P+h} a q^{-P-h} = q^{\langle \beta, P+h\rangle} a \quad (P, P+h \in \widetilde{H})\},$$
$$\mu_l(F) := F(P, p^*), \quad \mu_r(F) := F(P+h, p) \quad (F = F(P,p) \in \mathbb{F}[\![p]\!]).$$

命題 4.2.3. [HY22] 位相的 H 代数 U は, Drinfeld 型の H-Hopf 亜代数構造 (Δ, ε, S) をもつ.

5 Ding-Iohara 代数のダイナミカル類似

5.1 ADE 型のダイナミカル Ding-Iohara 代数

§4.1の記号を使用する. また本節では X_l は $X_l = A_l, D_l, E_{6,7,8}$ 型の有限ルート系とする.

定義 5.1.1. p を形式的変数, $\{G^{\pm}_{ij}(z;p) \mid i,j \in I\}$ を次の DI 条件を満たす関数の集合とする.

(i) $G^{\pm}_{ij}(z;p) \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}][\![p]\!]$ であり, $\mathbb{C}(\!(z)\!)[\![p]\!]$ において可逆.

(ii) 級数 $g_{ij}(z;p) := \frac{G^{+}_{ij}(z;p)}{G^{-}_{ij}(z;p)} \in \mathbb{C}(\!(z)\!)[\![p]\!]$ が関係式 $g_{ij}(z^{-1};p) = g_{ji}(z;p)^{-1}$ を満たす.

このような $g := \{g_{ij}(z;p) \mid i,j \in I\}$ を構造関数と呼ぶ.

注意 5.1.2. $\overline{G}^{\pm}_{ij}(z) := \lim_{p\to 0} G^{\pm}_{ij}(z;p) \in \mathbb{C}[z^{\pm 1}]$ が定義できることに注意する. これらは $\mathbb{C}(\!(z)\!)$ で可逆なので, $\overline{g}_{ij}(z) := \frac{\overline{G}^{+}_{ij}(z)}{\overline{G}^{-}_{ij}(z)} \in \mathbb{C}(\!(z)\!)$, が定義できて, $\overline{g}_{ij}(z^{-1}) = \overline{g}_{ji}(z)^{-1}$ を満たす.

定義 5.1.3. $A = A(X_l)$ を, X_l 型の Cartan 行列とする. q を $0 < |q| < 1$ を満たす複素数, p を形式的パラメータとする. 構造関数 $g = \{g_{i,j} \mid i,j \in I\}$(定義 5.1.1) を固定する. $U_{q,p}(g, X_l)$ を以下の生成元と関係式で位相的に定義される $\mathbb{C}[\![p]\!]$ 上の位相的代数とする.

- 生成元: $\mathcal{M}(\widetilde{H}^*),\ q^{\pm c/2},\ d,\ K^{\pm}_i,\ e_{i,m},\ f_{i,m},\ \psi^{\pm}_{i,m} \quad (i \in I,\ m \in \mathbb{Z})$.
- 関係式: 以下の生成カレントを用いる. 生成元の関係式は p で展開して得られる.

$$e_i(z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} e_{i,m} z^{-m}, \quad f_i(z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_{i,m} z^{-m}, \quad \psi^{\pm}_i(z) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} \psi^{\pm}_{i,m} z^{-m},$$

  - $\mathcal{M}(\widetilde{H}^*)$ は部分代数, $q^{\pm c/2}$ は中心元かつ $q^{c/2}q^{-c/2} = 1$, $\psi^{\pm}_i(z)$, $K^{\pm}_i$ は可逆.
  - $F(P), F(P+h) \in \mathcal{M}(\widetilde{H}^*)$ は次を満たす.

$$\begin{aligned}
&F(P+h)d = dF(P+h),\ F(P)d = dF(P),\\
&F(P+h)K^{\pm}_i = K^{\pm}_i F(P+h \mp \langle Q_i, P+h\rangle),\ F(P)K^{\pm}_i = K^{\pm}_i F(P \mp \langle Q_i, P\rangle),\\
&F(P+h)e_i(z) = e_j(z)F(P+h),\ F(P)e_i(z) = e_i(z)F(P - \langle Q_i, P\rangle),\\
&F(P+h)f_i(z) = f_i(z)F(P+h-\langle Q_i, P+h\rangle),\ F(P)f_i(z) = f_i(z)F(P),\\
&F(P+h)\psi^{\pm}_i(z) = \psi^{\pm}_i(z)F(P+h-\langle Q_i, P+h\rangle),\ F(P)\psi^{\pm}_i(z) = \psi^{\pm}_i(z)F(P-\langle Q_i, P\rangle).
\end{aligned}$$

  - d, $K^{\pm}_i$ に関する残りの関係式は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
&[d, K^{\pm}_i] = 0, \quad [d, e_{i,m}] = m e_{i,m}, \quad [d, f_{i,m}] = m f_{i,m}, \quad [d, \psi^{\pm}_i] = m\psi^{\pm}_{i,m},\\
&K^{\pm}_i e_j(z) = q_i^{\mp a_{ij}} e_j(z) K^{\pm}_i, \quad K^{\pm}_i f_j(z) = q_i^{\pm a_{ij}} f_j(z) K^{\pm}_i, \quad [K^{\pm}_i, \psi^{\pm}_{i,m}] = 0.
\end{aligned}$$

– これ以降, 次の記号を用いる.

$$g_{ij}(z) := g_{ij}(z;p), \quad g^*_{ij}(z) := g_{ij}(z;p^*), G^{\pm}_{ij}(z) := G^{\pm}_{ij}(z;p), \quad G^{\pm *}_{ij}(z) := G^{\pm}_{ij}(z;p^*).$$

このとき $\psi_i^{\pm}$ を含む残りの関係式は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
&\psi_i^{\pm}(z)\psi_j^{\pm}(w) = \frac{g^*_{ij}(\frac{z}{w})}{g_{ij}(\frac{z}{w})}\psi_j^{\pm}(w)\psi_i^{\pm}(z),\ \psi_i^{+}(z)\psi_j^{-}(w) = \frac{g^*_{ij}(q^{-c}\frac{z}{w})}{g_{ij}(q^{c}\frac{z}{w})}\psi_j^{-}(w)\psi_i^{+}(z),\\
&\psi_i^{+}(z)e_j(w) = g^*_{ij}(q^{-c/2}\tfrac{z}{w})e_j(w)\psi_i^{+}(z),\ \psi_i^{+}(z)f_j(w) = g_{ij}(q^{c/2}\tfrac{z}{w})^{-1}f_j(w)\psi_i^{+}(z),\\
&\psi_i^{-}(z)e_j(w) = g^*_{ij}(q^{c/2}\tfrac{z}{w})e_j(w)\psi_i^{-}(z),\ \psi_i^{-}(z)f_j(w) = g_{ij}(q^{-c/2}\tfrac{z}{w})^{-1}f_j(w)\psi_i^{-}(z).
\end{aligned}$$

– 残りの関係式のうち 2 次式から成るものは, $i,j \in I$ に対して.

$$\begin{aligned}
&G^{-*}_{ij}(\tfrac{z}{w})e_i(z)e_j(w) = G^{+*}_{ij}(\tfrac{z}{w})e_j(w)e_i(z), \quad G^{+}_{ij}(\tfrac{z}{w})f_i(z)f_j(w) = G^{-}_{ij}(\tfrac{z}{w})f_j(w)f_i(z),\\
&[e_i(z), f_j(w)] = \frac{\delta_{i,j}}{q-q^{-1}}\big(\delta(q^{-c}\tfrac{z}{w})\psi_i^{-}(q^{c/2}w) - \delta(q^{c}\tfrac{z}{w})\psi_i^{+}(q^{c/2}z)\big).
\end{aligned}$$

また $a_{ij} = -1$ なる $i,j \in I$ に関して, $\widetilde{g}^*_{ij}(z) := \overline{g}_{ij}(z)/g^*_{ij}(z)$, $\widetilde{g}_{ij}(z) := g_{ij}(z)/\overline{g}_{ij}(z)$,

$$h_{ij} := \frac{(\overline{g}_{ii}(\frac{z_1}{z_2})+1)(\overline{g}_{ij}(\frac{z_1}{z})\overline{g}_{ij}(\frac{z_2}{z})+1)}{\overline{g}_{ij}(\frac{z_2}{z})+\overline{g}_{ii}(\frac{z_1}{z_2})\overline{g}_{ij}(\frac{z_1}{z})},$$

と定める. このとき e_i, e_j に関する Serre 型関係式は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
&\widetilde{g}^*_{ii}(\tfrac{z_1}{z_2})\widetilde{g}^*_{ij}(\tfrac{z_1}{z})\widetilde{g}^*_{ij}(\tfrac{z_2}{z})e_i(z_1)e_i(z_2)e_j(z) - h_{ij}\widetilde{g}^*_{ii}(\tfrac{z_1}{z_2})\widetilde{g}^*_{ij}(\tfrac{z_1}{z})e_i(z_1)e_j(z)e_i(z_2)\\
&+\widetilde{g}^*_{ii}(\tfrac{z_1}{z_2})e_j(z)e_i(z_1)e_i(z_2) + \widetilde{g}^*_{ij}(\tfrac{z_1}{z})\widetilde{g}^*_{ij}(\tfrac{z_2}{z})e_i(z_2)e_i(z_1)e_j(z)\\
&-h_{ij}\widetilde{g}^*_{ij}(\tfrac{z_2}{z})e_i(z_2)e_j(z)e_i(z_1) + e_j(z)e_i(z_2)e_i(z_1) = 0.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

(5.1) で e_i を f_i, $\widetilde{g}^*$ を $\widetilde{g}$ に置き換えて f_i, f_j の間の Serre 関係式を定める.

次に $H = \sum_{i\in I}\mathbb{C}P_i$ に関して, $U := U_{q,p}(g, X_l)$ が H-Hopf 亜代数構造を持つことを説明する.

補題 5.1.4. $U = U_{q,p}(g, X_l)$ は以下の位相的 H 代数構造をもつ.

$$\begin{aligned}
&U_{\alpha,\beta} := \{a \in U \mid q^P a q^{-P} = q^{\langle\alpha,P\rangle}a,\ q^{P+h}aq^{-P-h} = q^{\langle\beta,P+h\rangle}a \quad (P, P+h \in \widetilde{H})\},\\
&\mu_l(F) := F(P,p^*), \quad \mu_r(F) := F(P+h,p) \quad (F = F(P,p) \in \mathbb{F}[\![p]\!]).
\end{aligned}$$

定理 5.1.5. H 代数 U は, Drinfeld 型の (位相的)H-Hopf 亜代数構造 (Δ, ε, S) をもつ.

定義 5.1.6. H-Hopf 亜代数 $U_{q,p}(g, X_l)$ を, (X_l 型) ダイナミカル Ding-Iohara 亜代数という.

5.2 Ding-Iohara 代数および楕円量子群との関係

ダイナミカル Ding-Iohara 代数 $U_{q,p}(g, X_l)$ から Ding-Iohara 代数 $U_q(g, X_l)$ および楕円量子群 $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}}(X_l))$ が復元されることを説明する. 初めに $U_{q,p}(g, X_l)$ と $U_q(\overline{g}, X_l)$ の関係を述べる.

命題 5.2.1. $U''_{q,p}(g, X_l)$ を, 以下の元から生成される $U_{q,p}(g, X_l)$ の H-Hopf 部分亜代数とする.

$$q^{\pm c/2},\ e_{i,m},\ f_{i,m},\ \psi^{\pm}_{i,m} \quad (i \in I,\ m \in \mathbb{Z}).$$

このとき $U''_{q,p}(g, X_l)$ の極限 $p \to 0$ を考えると, 次の Hopf 代数の同型を得る.

$$\lim_{p \to 0} U''_{q,p}(g, X_l) \cong U_q(\overline{g}, X_l).$$

ここで $\overline{g} := \{\overline{g}_{ij}(z) \mid i, j \in I\}$ は構造関数の極限から成る集合. また $U_q(\overline{g}, X_l)$ は simply-laced なルート系 X_l と構造関数 $\overline{g}$ に付随する Ding-Iohara 代数を表す.

$U_{q,p}(g, X_l)$ と $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}}(X_l))$ の関係は次のように述べられる.

系 5.2.2. $A = A(X_l)$ を X_l 型 Cartan 行列とし, $g = \{g_{ij}(z; p) \mid i, j \in I\}$ を次で定める.

$$g_{ij}(x; p) = \frac{G^+_{ij}(x; p)}{G^-_{ij}(x; p)} := \frac{q^{-b_{ij}}\theta(q^{b_{ij}}x; p)}{\theta(q^{-b_{ij}}x; p)}.$$

このとき生成元同士の対応により, 次の位相的 H-Hopf 亜代数の同型を得る.

$$U_{q,p}(g, X_l) \cong U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{g}}(X_l)).$$

参考文献

[DI97] J. Ding, K. Iohara, *Generalization of Drinfeld Quantum Affine Algebras*, Lett. Math. Phys., **41**, 181–193 (1997).

[D89] V. G. Drinfeld, *New realization of Yangian and quantum affine algebra*, Soviet Math. Dokl., **36**, 212–216 (1988).

[F+09] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida, *A commutative algebra on degenerate* $\mathbb{CP}^1$ *and Macdonald polynomials*, J. Math. Phys., **50**, no. 9, 095215, 42pp. (2009).

[HY22] M. Hattori, S. Yanagida, *A dynamical analogue of Ding-Iohara quantum algebras*, arXiv:2210.02777.

[J+99] M. Jimbo, H. Konno, S. Odake, J. Shiraishi, *Elliptic algebra* $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$*: Drinfeld currents and vertex operators*, Comm. Math. Phys., **199**, 605–647 (1999).

[Ka90] V. G. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[Kas95] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, **155**. Springer-Verlag, New York, 1995.

[Ko20] H. Konno, *Elliptic Quantum Groups*, Springer Briefs in Math. Phys., **37**, Springer, 2020.

[M07] K. Miki, *A* (q, γ) *analog of the* $W_{1+\infty}$ *algebra*, J. Math. Phys., **48**, 123520, 35pp. (2007).

超対称頂点代数のオペラッド

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
西中祐介 (Yusuke NISHINAKA)

概要

代数的なオペラッドと超対称頂点代数について概説し, 超対称頂点代数の構造を記述するオペラッドを導入する. このオペラッドを用いて超対称頂点代数の加群を係数にもつコチェイン複体が定義できることを説明し, その低次のコホモロジーの具体的な形を与える.

本稿は名大多元数理の柳田伸太郎准教授との共同研究 [NY22] に基づく.

1 導入

頂点代数は 1980 年代に Borcherds によって導入された代数系で, 二次元共形場理論の代数構造を記述する枠組みとして知られている. 頂点代数は線形空間 V と V 上の線形変換 T, V の元 $|0\rangle$ および線形写像 $Y\colon V \to (\operatorname{End} V)[\![z^{\pm 1}]\!]$ の組 $(V, T, |0\rangle, Y)$ でいくつかの条件を満たすものである (例えば [FBZ04, Definition 1.3.1]). Bakalov, De Sole, Heluani, Kac は [BDHK19, §6] で線形空間 V と V 上の線形変換 T に対して, オペラッド P_V^{ch} を構成し (V, T) 上の非単位的頂点代数の構造と Lie オペラッド $\mathcal{L}ie$ から P_V^{ch} へのオペラッドの射が一対一に対応することを示した. この意味でオペラッド P_V^{ch} は (V, T) 上の頂点代数の構造を記述していると言える. §2 では本稿に必要な範囲でオペラッドについて説明する.

[NY22] では [BDHK19] のオペラッド P_V^{ch} の超対称類似として, 超対称頂点代数の構造を記述するオペラッドを定義した. ここで超対称頂点代数 [HK07] とは, 頂点代数が線形空間 V の各元 a をボソン的な変数 z をもつ場 $Y(a, z)$ へ対応させるのに対し, 線形超空間 V の各元 a をボソン的な変数 z と N 個のフェルミオン的な変数 $\zeta^1, \ldots, \zeta^N$ をもつ超場 $Y(a, z, \zeta^1, \ldots, \zeta^N)$ へ対応させるものである. §3 では超対称頂点代数を定義し, そのオペラッドの構成について説明する. なお超対称頂点代数には N_W 型と N_K 型とよばれる 2 つのクラスがあるが, 本稿では N_W 型に限って話をする.

また [BDHK19, §7] ではオペラッド P_V^{ch} を用いて, 頂点代数 V の加群に係数をもつコチェイン複体を定義し低次のコホモロジーを調べている. §4 ではこの超対称類似について説明する.

記号と用語

- $\mathbb{N}$ は非負整数全体を表す: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. また集合 $\{1, \ldots, n\}$ を $[n]$ で表す.
- $k, n \in \mathbb{N}$ に対し, 多重指数 $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ で $n_1 + \cdots + n_k = n$ を満たすもの全体のなす集合を $\mathbb{N}_n^k$ で表す.
- $\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする. 単に線形空間や線形写像といったときは全て $\mathbb{K}$ 上のものとする. また $\mathbb{K}$ 上の線形空間のテンソル積 $\otimes_{\mathbb{K}}$ は $\mathbb{K}$ を省略して $\otimes$ と書く. 断らない限り, 代数といったら $\mathbb{K}$ 上の単位的な結合代数のこととする.
- $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-次数付き線形空間のことを線形超空間とよぶ. 線形超空間の偶奇 (parity) を p で表す. また線形超空間の偶奇を入れ替える関手を Π で表す.

2 オペラッド

この節では [LV12, Chapter 5] を参考にして, オペラッドとオペラッド上の代数という概念を導入する. オペラッドは任意の対称モノイダル圏 $\mathcal{M}$ で定義でき, 超対称頂点代数のオペラッドは $\mathcal{M}$ が線形超空間のなす圏の場合である. ここでは簡単のために $\mathcal{M}$ が線形空間のなす圏の場合に説明する.

対称群を $\mathfrak{S}_n$ で表し, 群環 $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$ 上の右加群のことを単に $\mathfrak{S}_n$-右加群とよぶ.

定義 2.1. 各 $n \in \mathbb{N}$ を $\mathfrak{S}_n$-右加群へ対応させる写像 $\mathcal{P}\colon n \mapsto \mathcal{P}(n)$ を $\mathfrak{S}$-加群とよぶ.

$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ を $\mathfrak{S}$-加群とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n\colon \mathcal{P}(n) \to \mathcal{Q}(n)$ が $\mathfrak{S}_n$-右加群の準同型であるとき, 族 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathcal{P}$ から $\mathcal{Q}$ への $\mathfrak{S}$-加群の準同型とよぶ. $\mathfrak{S}$-加群全体のなすクラスは $\mathfrak{S}$-加群の準同型を射として圏をなす. この圏を $\mathfrak{S}$-Mod で表す.

以下では多重指数 $\nu = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}_n^k$ に対し, 次の記号を用いる.

- 直積群 $\mathfrak{S}_{n_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{n_k}$ を $\mathfrak{S}_\nu$ で表し $\mathfrak{S}_n$ の部分群とみなす.
- $\mathfrak{S}$-加群 $\mathcal{P}$ に対し $\mathfrak{S}_\nu$-右加群 $\mathcal{P}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(n_k)$ を $\mathcal{P}(\nu)$ で表す.

定義 2.2. $\mathfrak{S}$-加群 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ に対し $\mathfrak{S}$-加群 $\mathcal{P} \circ \mathcal{Q}$ を

$$\begin{aligned}(\mathcal{P} \circ \mathcal{Q})(n) &\coloneqq \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Big(\mathcal{P}(k) \otimes_{\mathfrak{S}_k} \bigoplus_{\nu\in\mathbb{N}_n^k} \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\nu}^{\mathfrak{S}_n} \mathcal{Q}(\nu)\Big) \\ &= \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \Big(\mathcal{P}(k) \otimes_{\mathbb{K}[\mathfrak{S}_k]} \bigoplus_{(n_1,\ldots,n_k)\in\mathbb{N}_n^k} \big(\mathcal{Q}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{Q}(n_k)\big) \otimes_{\mathbb{K}[\mathfrak{S}_{n_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{n_k}]} \mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]\Big).\end{aligned}$$

により定義する. ただし $\mathfrak{S}_k$ は $\bigoplus_{\nu\in\mathbb{N}_n^k} \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_\nu}^{\mathfrak{S}_n} \mathcal{Q}(\nu)$ に $\mathcal{Q}(\nu) = \mathcal{Q}(n_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{Q}(n_k)$ の "テンソル積の成分の入れ替え" で左から作用している[1]. $\mathcal{P} \circ \mathcal{Q}$ を $\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の合成とよぶ.

$\mathfrak{S}$-加群の圏 $\mathfrak{S}$-Mod は合成 $\circ$ をテンソル積, $E \coloneqq (\delta_{n,1}\mathbb{K})_{n\in\mathbb{N}} = (0, \mathbb{K}, 0, \ldots)$ を単位対象としてモノイダル圏をなす.

定義 2.3. モノイダル圏 $(\mathfrak{S}\text{-Mod}, \circ, E)$ のモノイド対象をオペラッドとよぶ. すなわちオペラッドとは $\mathfrak{S}$-加群 $\mathcal{P}$ および $\mathfrak{S}$-加群の準同型 $\gamma\colon \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ と $\eta\colon E \to \mathcal{P}$ の組 $(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ でモノイドの公理を満たすものである.

$(\mathcal{P}, \gamma, \eta)$ がオペラッドであるとき, γ を合成写像とよび η を単位射とよぶ. 各 $k, n \in \mathbb{N}$ と $\nu \in \mathbb{N}_n^k$ に対し, 合成写像を

$$X \circ (Y_1 \odot \cdots \odot Y_k) \coloneqq \gamma(X \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_k) \quad (X \in \mathcal{P}(k),\ Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_k \in \mathcal{P}(\nu))$$

と表す. また $\mathrm{id} \coloneqq \eta_1(1_{\mathbb{K}}) \in \mathcal{P}(1)$ と表し id を $\mathcal{P}$ の単位元とよぶ.

オペラッド全体のクラスがなす圏を Op で表す. オペラッドの射は $\mathfrak{S}$-Mod のモノイド対象としての射である.

オペラッドの例を挙げよう.

例 2.4. 自己準同型オペラッド $\mathcal{E}nd_V$ ([LV12, §5.2.11]): 線形空間 V に対し $\mathcal{E}nd_V(n) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V^{\otimes n}, V)$ とすると $\mathcal{E}nd_V = (\mathcal{E}nd_V(n))_{n\in\mathbb{N}}$ は次のようにしてオペラッドをなす.

- $\mathcal{E}nd_V(n)$ には $\mathfrak{S}_n$ を $V^{\otimes n}$ のテンソル積の成分の入れ替えで作用させる.

1) 正確には $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ を $Q(\nu)$ にテンソル積の成分の入れ替えで作用させた後 σ と $\nu \in \mathbb{N}_n^k$ から定まる $\mathfrak{S}_n$ の元を右から作用させる.

- $k, n \in \mathbb{N}$ と $\nu \in \mathbb{N}_n^k$ に対し, 合成写像 $\gamma_\nu \colon \mathcal{E}nd_V(k) \otimes \mathcal{E}nd_V(\nu) \to \mathcal{E}nd_V(n)$ は写像の合成

$$\gamma_\nu(f \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_k) \coloneqq f \circ (g_1 \otimes \cdots \otimes g_k) \quad (f \in \mathcal{E}nd_V(k),\ g_1 \otimes \cdots \otimes g_k \in \mathcal{E}nd_V(\nu))$$

として定義する. (γ_ν が $\gamma \colon \mathcal{E}nd_V \circ \mathcal{E}nd_V \to \mathcal{E}nd_V$ を誘導する.)
- 単位元は $\mathrm{id}_V \in \mathcal{E}nd_V(1)$ とする.

例 2.5. (1) 結合オペラッド $\mathcal{A}ssoc$ [LV12, §5.2.10, Example 1]: $\mathfrak{S}$-加群としては $\mathcal{A}ssoc(n) \coloneqq \mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$ ($\mathfrak{S}_n$ の正則表現) である.

(2) 可換オペラッド $\mathcal{C}om$ [LV12, §5.2.10, Example 2]: $\mathfrak{S}$-加群としては $\mathcal{C}om(n) \coloneqq \mathbb{K}$ ($\mathfrak{S}_n$ の自明表現) である.

(3) Lie オペラッド $\mathcal{L}ie$ [LV12, §5.2.10, Example 3]: $\mathcal{L}ie(n)$ は n 個の文字 $x_1, \ldots, x_n$ が生成する自由 Lie 代数のうち, 各 x_i ($i \in [n]$) がちょうど 1 つ現れる Lie 多項式が張る部分空間である. $\mathcal{L}ie(n)$ には $\mathfrak{S}_n$ を $x_1, \ldots, x_n$ の添字の入れ替えで作用させる. 例えば $\mathcal{L}ie(2) \cong \mathbb{K}c$ ($\mathfrak{S}_2$ の符号表現) となる.

定義 2.6. $\mathcal{O}$ をオペラッドとし V を線形空間とする. オペラッドの射 $\alpha \colon \mathcal{O} \to \mathcal{E}nd_V$ のことを V 上の $\mathcal{O}$ 代数の構造とよび, 組 (V, α) を $\mathcal{O}$ 代数とよぶ.

例 2.7. V を線形空間とする.

(1) $\mathcal{A}ssoc(2) = \mathbb{K}\,\mathrm{id} + \mathbb{K}(1,2)$ ($\mathfrak{S}_2$ の正則表現) であったことを思い出す. V 上の $\mathcal{A}ssoc$ 代数の構造 α に対し $\mu \coloneqq \alpha_2(\mathrm{id}) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V^{\otimes 2}, V)$ とおくと (V, μ) は非単位的な結合代数となる. これにより $\mathcal{A}ssoc$ 代数の構造と V 上の非単位的な結合代数の構造が一対一に対応する.

(2) $\mathcal{C}om(2) = \mathbb{K}$ ($\mathfrak{S}_2$ の自明表現) であった. V 上の $\mathcal{C}om$ 代数の構造 α に対し $\mu \coloneqq \alpha_2(1_{\mathbb{K}})$ とおくと (V, μ) は非単位的な可換代数となる. これにより $\mathcal{C}om$ 代数の構造と V 上の非単位的な可換代数の構造が一対一に対応する.

(3) $\mathcal{L}ie(2) \cong \mathbb{K}c$ ($\mathfrak{S}_2$ の符号表現) であった. V 上の $\mathcal{L}ie$ 環の構造 α に対し $\mu \coloneqq \alpha_2(c)$ とおくと (V, μ) は Lie 環となる. これにより $\mathcal{L}ie$ 代数の構造と V 上の Lie 環の構造が一対一に対応する.

線形空間 V 上の $\mathcal{L}ie$ 代数の構造を次のように一般化する.

定義 2.8. オペラッド $\mathcal{P}$ に対し, オペラッドの射 $\alpha \colon \mathcal{L}ie \to \mathcal{P}$ のことを $\mathcal{P}$ 上の $\mathcal{L}ie$ 代数の構造とよぶ.

オペラッド $\mathcal{P}$ が与えられると dg Lie 環 $L(\mathcal{P}) = \bigoplus_{n \geq -1} L^n(\mathcal{P})$ が定まり $\mathcal{P}$ 上の $\mathcal{L}ie$ 代数の構造は $L(\mathcal{P})$ の Maurer-Cartan 方程式の解全体のなす集合 $\mathrm{MC}(L(\mathcal{P}))$ と一対一に対応する. このことを説明しよう.

まず線形空間としては, 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$ について

$$L^n(\mathcal{P}) \coloneqq \{X \in \mathcal{P}(n+1) \mid X^\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma) X \ (\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1})\}$$

である. ここで $X \in \mathcal{P}(n+1)$ への $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$ の右作用を X^σ と書いた. $X \in L^m(\mathcal{P})$, $Y \in L^n(\mathcal{P})$ に対し

$$X \square Y \coloneqq \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1,m}} (X \circ_1 Y)^{\sigma^{-1}}$$

とすることで, 線形写像 $\square \colon L(\mathcal{P}) \otimes L(\mathcal{P}) \to L(\mathcal{P})$ が定まる. ただし

$$\mathfrak{S}_{k,l} \coloneqq \{\sigma \in \mathfrak{S}_{k,l} \mid \sigma(1) < \cdots < \sigma(k), \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+l)\},$$
$$X \circ_1 Y \coloneqq X \circ (Y \odot \mathrm{id} \odot \cdots \odot \mathrm{id}) \in \mathcal{P}(m+n+1)$$

である. $L(\mathcal{P})$ は

$$[X,Y] \coloneqq X\square Y - (-1)^{mn} Y\square X \quad (X \in L^m(\mathcal{P}),\ Y \in L^n(\mathcal{P}))$$

を括弧積とし, 微分を自明なものとすることで dg Lie 環をなす. dg Lie 環 $L(\mathcal{P})$ の Maurer-Cartan 方程式の解全体のなす集合は

$$\mathrm{MC}(L(\mathcal{P})) = \{X \in L^1(\mathcal{P}) \mid X\square X = 0\}$$

である.

命題 2.9. オペラッド $\mathcal{P}$ に対し, 全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Op}}(\mathcal{L}ie, \mathcal{P}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{MC}(L(\mathcal{P}))$ が存在する.

[BDHK19, §6] では, 線形空間 V と V 上の線形変換 T に対しオペラッド P_V^{ch} が定義されている. そして [BDHK19, Theorem 6.12] より, 全単射

$$\{(V,T) \text{ 上の頂点代数の構造}\} \xrightarrow{\sim} \mathrm{MC}(L(P_V^{\mathrm{ch}}))$$

の存在が分かる. したがって定義 2.8 の言葉を用いれば, 命題 2.9 より「(V,T) 上の頂点代数の構造とはオペラッド P_V^{ch} 上の $\mathcal{L}ie$ 代数の構造である」と言える.

3 超対称頂点代数のオペラッド

この節では $N_W = N$ 超対称頂点代数を定義し, そのオペラッド $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}$ を導入する. §1 では状態と場の対応 (state-field correspondence) Y を用いて頂点代数や超対称頂点代数を説明したが, ここでは超対称頂点代数を超対称 Lie 共形代数 (定義 3.3) 上に積が与えられた代数系として定義する. これら 2 つの定義は同値であることが知られている. 超対称頂点代数の詳細については [HK07] を参照されたい.

定義 3.1. A を集合とし各 $\alpha \in A$ 対して, 集合の列 $\Lambda_\alpha = (\lambda_\alpha, \theta_\alpha^1, \dots, \theta_\alpha^N)$ が与えられているとする. このとき偶なる λ_α $(\alpha \in A)$ と奇なる ζ_α^i $(\alpha \in A,\ i \in [N])$ を生成元とする $\mathbb{K}$ 上の自由可換超代数を $\mathbb{K}[\Lambda_\alpha]_{\alpha\in A}$ で表す. 各 Λ_α を $\mathbb{K}[\Lambda_\alpha]_{\alpha\in A}$ の $(1|N)_W$-超変数 ($(1|N)_W$-supervariable) とよぶ. $A = [n]$ のときは $\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k\in[n]}$ の代わりに $\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ と表す.

線形超空間 V と $(1|N)_W$-超変数 Λ_α $(\alpha \in A)$ に対し, 線形超空間 $V[\Lambda_\alpha]_{\alpha\in A}$ を

$$V[\Lambda_\alpha]_{\alpha\in A} \coloneqq \mathbb{K}[\Lambda_\alpha]_{\alpha\in A} \otimes V$$

により定める.

超対称頂点代数の定義を簡潔に述べるため, 便宜的に次の超代数 $\mathcal{H}_W$ を導入する.

定義 3.2. $\mathcal{H}_W$ を偶なる T と奇なる S^i $(i \in [N])$ を生成元とする $\mathbb{K}$ 上の自由可換超代数とする.

$\Lambda = (\lambda, \theta^1, \dots, \theta^N)$ を $(1|N)_W$-超変数とするとき $\mathcal{H}_W$ と $\mathbb{K}[\Lambda]$ は $T \mapsto -\lambda$, $S^i \mapsto -\theta^i$ $(i \in [N])$ により超代数として同型である.

以下, この節では $(1|N)_W$-超変数 $\Lambda = (\lambda, \theta^1, \dots, \theta^N)$ を一つ固定する.

定義 3.3. [HK07, Definition 3.2.2] V を $\mathcal{H}_W$-左超加群とし $[\cdot_\Lambda \cdot]\colon V \otimes V \to V[\Lambda]$ を偶奇 $\overline{N}$ の線形写像とする. 次の (i) から (iii) が成り立つとき, $(V, [\cdot_\Lambda \cdot])$ を $N_W = N$ 超対称 Lie 共形代数 ($N_W = N$ SUSY Lie conformal algebra) とよぶ.

(i) (半線形性) 任意の $a, b \in V$ に対し

$$[Ta_\Lambda b] = -\lambda[a_\Lambda b], \qquad [a_\Lambda Tb] = (\lambda + T)[a_\Lambda b],$$
$$[S^i a_\Lambda b] = -(-1)^N \theta^i [a_\Lambda b], \quad [a_\Lambda S^i b] = (-1)^{p(a)+\overline{N}}(\theta^i + S^i)[a_\Lambda b] \quad (i \in [N]).$$

(ii) (歪対称性) 任意の $a, b \in V$ に対し

$$[b_\Lambda a] = -(-1)^{p(a)p(b)+\overline{N}}[a_{-\Lambda-\nabla} b].$$

ただし $\nabla \coloneqq (T, S^1, \ldots, S^N)$ とおいた.

(iii) (Jacobi の恒等式) 任意の $a, b, c \in V$ に対し

$$[a_{\Lambda_1}[b_{\Lambda_2} c]] = (-1)^{(p(a)+\overline{N})\overline{N}}[[a_{\Lambda_1} b]_{\Lambda_1+\Lambda_2} c] + (-1)^{(p(a)+\overline{N})(p(b)+\overline{N})}[b_{\Lambda_2}[a_{\Lambda_1} c]].$$

ただし Λ_1, Λ_2 は $(1|N)_W$-超変数である.

$N_W = N$ 超対称頂点代数を定義しよう. そのために次のような積分記号を導入する.

V を線形超空間とする. V 上の偶なる線形変換 F, G に対し, 線形写像 $\int_F^G d\Lambda \colon V[\Lambda] \to V$ を

$$\int_F^G d\Lambda\, \Lambda^{m|I} v \coloneqq \frac{\delta_{I,[N]}}{m+1}(G^{m+1}v - F^{m+1}v) \quad (m \in \mathbb{N}, I \subset [N], v \in V) \tag{3.1}$$

により定義する. $\int_F^G d\Lambda \colon V[\Lambda] \to V$ は偶奇 $\overline{N}$ の線形写像である. また V が (単位的とも結合的とも限らない) 代数であるとき $a \in V$ と V 上の偶なる線形変換 F, G に対し, 線形写像 $\int_F^G d\Lambda\, a \colon V[\Lambda] \to V$ を

$$\left(\int_F^G d\Lambda\, a\right) \Lambda^{m|I} v \coloneqq \left(\int_F^G d\Lambda\, \Lambda^{m|I} a\right) v \quad (m \in \mathbb{N}, I \subset [N], v \in V)$$

で定める. ただし右辺の $\int_F^G d\Lambda\, \Lambda^{m|I} a$ は (3.1) で定義されているものである.

定義 3.4. [HK07, Definition 3.3.15] $(V, [\cdot_\Lambda \cdot])$ を $N_W = N$ 超対称 Lie 共形代数とし $\mu \colon V \otimes V \to V$ を偶なる線形写像とする. 次の (i) から (iv) が成り立つとき $(V, [\cdot_\Lambda \cdot], \mu)$ を非単位的 $N_W = N$ 超対称頂点代数 (non-unital $N_W = N$ SUSY vertex algebra) とよぶ. ただし各 $a, b \in V$ について $ab \coloneqq \mu(a \otimes b)$ とおく.

(i) 任意の $a, b \in V$ に対し

$$T(ab) = (Ta)b + a(Tb), \quad S^i(ab) = (S^i a)b + (-1)^{p(a)} a(S^i b) \quad (i \in [N]).$$

(ii) (擬可換性) 任意の $a, b \in V$ に対し

$$ab - (-1)^{p(a)p(b)} ba = \int_{-T}^0 d\Lambda\, [a_\Lambda b].$$

(iii) (擬結合性) 任意の $a, b, c \in V$ に対し

$$(ab)c - a(bc) = \left(\int_0^T d\Lambda\, a\right)[b_\Lambda c] + (-1)^{p(a)p(b)} \left(\int_0^T d\Lambda\, b\right)[a_\Lambda c].$$

(iv) (Wick の公式) 任意の $a, b, c \in V$ に対し

$$[a_\Lambda bc] = [a_\Lambda b]c + (-1)^{(p(a)+\overline{N})p(b)} b[a_\Lambda c] + \int_0^\lambda d\Gamma\, [[a_\Lambda b]_\Gamma c].$$

ただし Γ は $(1|N)_W$-超変数である.

$(V, [\cdot_\Lambda \cdot], \mu)$ が非単位的 $N_W = N$ 超対称頂点代数であるとき $[\cdot_\Lambda \cdot]$ を V 上の Λ-括弧積とよび μ を V 上の積とよぶ.

定義 3.5. V を非単位的 $N_W = N$ 超対称頂点代数とする. V の偶なる元 $|0\rangle$ で任意の $a \in V$ に対し $a\,|0\rangle = |0\rangle\, a = a$ を満たすものが存在するとき V を $N_W = N$ 超対称頂点代数とよぶ.

次に $\mathcal{H}_W$-左超加群 V に対してオペラッド $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}$ を構成しよう. 以下では $\Lambda = (\lambda, \theta^1, \ldots, \theta^N)$ に加えて $\Lambda_k = (\lambda_k, \theta_k^1, \ldots, \theta_k^N)$ $(k \in \mathbb{Z}_{>0})$ も $(1|N)_W$-超変数とする.

正の整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ は次のようにして $(\mathcal{H}_W^{\otimes n}, \mathcal{H}_W)$-両側超加群の構造をもつ: まず $\mathcal{H}_W \cong \mathbb{K}[\Lambda]$ より $\mathcal{H}_W$ の任意の元は, ある $\varphi(\Lambda) \in \mathbb{K}[\Lambda]$ を用いて $\varphi(\nabla)$ と一意的に表せることに注意する. すると $\varphi_1(\nabla) \otimes \cdots \varphi_n(\nabla) \in \mathcal{H}_W^{\otimes n}$ $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n)$ を各 $a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \in \mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ に

$$(\varphi_1(\nabla) \otimes \cdots \otimes \varphi_n(\nabla)) \cdot a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) = \varphi_1(-\Lambda_1) \cdots \varphi_n(-\Lambda_n) a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)$$

と作用させることで $\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ は $\mathcal{H}_W^{\otimes n}$-左超加群となる. また $\mathcal{H}_W$ の生成元 $\nabla = (T, S^1, \ldots, S^N)$ を各 $a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \in \mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ に

$$a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \cdot T \coloneqq a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \left(-\sum_{k=1}^n \lambda_k \right), \quad a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \cdot S^i \coloneqq a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \left(-\sum_{k=1}^n \theta_k^i \right)$$

と作用させることで $\mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ は $\mathcal{H}_W$-右超加群となる.

定義 3.6. V を $\mathcal{H}_W$-左超加群とする. 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\mathcal{H}_W^{\otimes n}$-左超加群 $V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ を

$$V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n \coloneqq \mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n \otimes_{\mathcal{H}_W} V$$

により定める. また $n = 0$ のとき $V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ は線形超空間

$$V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n \coloneqq \mathbb{K} \otimes_{\mathcal{H}_W} V \cong V/\nabla V$$

を表すものとする. ただし $\nabla V \coloneqq TV + \sum_{i=1}^N S^i V \subset V$ とおいた.

以下では $V[\Lambda_k]_{k=1}^n$ の元を $a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)v$ $(a \in \mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n,\ v \in V)$ のようにテンソル積を省略して表し, $V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ の元は $a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \otimes v$ と表す. 次の補題 3.7 は $\mathcal{H}_W$ の作用の定義より明らかである.

補題 3.7. V を $\mathcal{H}_W$-左超加群とする. このとき $V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ から $V[\Lambda_k]_{k=1}^{n-1}$ への線形写像

$$a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \otimes v \mapsto a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1}, -\Lambda_1 - \cdots - \Lambda_{n-1} - \nabla)v \quad (a \in \mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n,\ v \in V)$$

により $V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ と $V[\Lambda_k]_{k=1}^{n-1}$ は線形超空間として同型である.

定義 3.8. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とし $Z_k = (z_k, \zeta_k^1, \ldots, \zeta_k^N)$ $(k \in [n])$ を $(1|N)_W$-超変数とする. $k, l \in \mathbb{N}$ に対し

$$z_{k,l} \coloneqq z_k - z_l, \quad \zeta_{k,l}^i \coloneqq \zeta_k^i - \zeta_l^i, \quad (i \in [N]), \quad Z_{k,l} \coloneqq (z_{k,l}, \zeta_{k,l}^1, \ldots, \zeta_{k,l}^N)$$

とおく.

- $\mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}} \subset \mathbb{K}[Z_k]_{k=1}^n[z_{k,l}^{-1}]_{1 \le k < l \le n}$ を $\{z_{k,l}^{\pm 1} \mid 1 \le k < l \le n\} \cup \{\zeta_{k,l}^i \mid i \in [N], 1 \le k < l \le n\}$ で生成される部分超代数とする.
- $\mathcal{D}_n \subset \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[Z_k]_{k=1}^n)$ を $Z_k = (z_k, \zeta_k^1, \ldots, \zeta_k^N)$ と $\partial_{Z_k} = (\partial_{z_k}, \partial_{\zeta_k^1}, \ldots, \partial_{\zeta_k^N})$ $(k \in [n])$ で生成される部分超代数とする.
- $\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}} \subset \mathcal{D}_n$ を $\{z_{k,l}, \zeta_{k,l}^i \mid i \in [N], 1 \le k < l \le n\} \cup \{\partial_{z_k}, \partial_{\zeta_k^i} \mid i \in [N], k \in [n]\}$ で生成される部分超代数とする.

以下, この節では $\mathcal{H}_W$-左超加群 V を固定する.

正の整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $V^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$ は次のような $\mathcal{D}_n$-右超加群の構造をもつ: 各 $v \in V^{\otimes n}$ と $f \in \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$ に対し

$$(v \otimes f) \cdot z_k \coloneqq v \otimes f z_k, \quad (v \otimes f) \cdot \zeta_k^i \coloneqq v \otimes f \zeta_k^i \quad (i \in [N], k \in [n])$$

および

$$\begin{aligned}
&(v \otimes f) \cdot \partial_{z_k} \coloneqq T^{(k)} v \otimes f - v \otimes \partial_{z_k} f, \\
&(v \otimes f) \cdot \partial_{\zeta_k^i} \coloneqq (-1)^{p(v)+p(f)} (S^i)^{(k)} v \otimes f + (-1)^{p(f)} v \otimes \partial_{\zeta_k^i} f \quad (i \in [N], k \in [n]).
\end{aligned}$$

ここで線形変換 $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ に対し $\varphi^{(k)}$ は $V^{\otimes n}$ 上の線形変換 $\varphi^{(k)} \coloneqq \mathrm{id}_V \otimes \cdots \otimes \overset{k}{\varphi} \otimes \cdots \mathrm{id}_V$ を表す.

正の整数 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n \cong V[\Lambda_k]_{k=1}^{n-1}$ は次のような $\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}$-右超加群の構造をもつ: 各 $a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \in \mathbb{K}[\Lambda_k]_{k=1}^n$ と $v \in V$ に対し

$$\begin{aligned}
&\big(a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1}, \Gamma) v\big) \cdot z_k \coloneqq -\partial_{\lambda_k} a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1}, \Gamma) v, \\
&\big(a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1}, \Gamma) v\big) \cdot \zeta_k^i \coloneqq -(-1)^{p(a)} \partial_{\theta_k^i} a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_{n-1}, \Gamma) v,
\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
&\big(a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \otimes v\big) \cdot \partial_{z_k} \coloneqq -\lambda_k a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \otimes v, \\
&\big(a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \otimes v\big) \cdot \partial_{\zeta_k^i} \coloneqq -(-1)^{p(a)+p(v)} \theta_k^i a(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \otimes v.
\end{aligned}$$

ただし $\Gamma = -\Lambda_1 - \cdots - \Lambda_{n-1} - \nabla$ とおいた.

$\mathcal{D}_n$ の作用を $\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}$ に制限することで $V^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}$ と $V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ は $\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}$-右超加群となる.

定義 3.9. V を $\mathcal{H}_W$-左超加群とする. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 線形超空間 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n)$ を次のようにして定める:

$$\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}}(V^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}, V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n).$$

つまり $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n)$ は線形写像 $X \colon V^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}} \to V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ で

$$X((v \otimes f) \cdot \varphi) = X(v \otimes f) \cdot \varphi \quad (v \in V^{\otimes n}, f \in \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}, \varphi \in \mathcal{D}_n^{\mathrm{T}})$$

を満たすもの全体が張る $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}, V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n)$ の部分線形超空間である. $(1|N)_W$-超変数 $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ を強調するために $X \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n)$ を $X_{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n}$ とも表す.

例 3.10. $n = 0, 1$ に対し $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n)$ は次のようになる:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(0) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}, V/\nabla V) \cong V/\nabla V, \\
&\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(1) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_1^{\mathrm{T}}}(V, V_\nabla[\Lambda]) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{H}_W} V.
\end{aligned}$$

定義 3.11. $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ と線形写像 $X \colon V^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}} \to V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ に対し, 線形写像 $X^\sigma \colon V^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}} \to V_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n$ を

$$X^\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes f) \coloneqq X_{\sigma(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n)}(\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) \otimes \sigma f) \quad (v_1, \ldots, v_n \in V,\ f \in \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}})$$

により定義する. ただし

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \prod_{\substack{1 \le i < j \le n \\ \sigma(i) > \sigma(j)}} (-1)^{p(v_i)p(v_j)} (v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}),$$

$$\sigma(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) \coloneqq (\Lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, \Lambda_{\sigma^{-1}(n)}), \quad (\sigma f)(Z_{k,l}) \coloneqq f(Z_{\sigma^{-1}(k), \sigma^{-1}(l)})$$

である.

$X \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n)$ ならば $X^\sigma \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}$ $(\sigma \in \mathfrak{S}_n)$ であり, この $\mathfrak{S}_n$ の作用で $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n)$ は $\mathfrak{S}_n$-右超加群となる. よって $\mathfrak{S}$-超加群 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W} \coloneqq \left(\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ が得られた.

定義 3.12. $k, n \in \mathbb{N}$, $(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}_n^k$ とし $N_i \coloneqq n_1 + \cdots + n_i$ $(i \in [k])$ とおく.

(i) 線形写像 $Y_i \colon V^{\otimes n_i} \otimes \mathcal{O}_{n_i}^{\star \mathrm{T}} \to V_\nabla[\Lambda_l]_{l=1}^{n_i}$ $(i \in [k])$ に対し, 線形写像

$$Y_1 \odot \cdots \odot Y_k \colon V^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star \mathrm{T}} \to \bigotimes_{i=1}^k V_\nabla[\Lambda_l]_{l=N_{i-1}+1}^{N_i} \otimes \mathcal{O}_k^{\star \mathrm{T}} \cong \bigotimes_{i=1}^k V[\Lambda_l]_{l=N_{i-1}+1}^{N_i - 1} \otimes \mathcal{O}_k^{\star \mathrm{T}}$$

を次のようにして定める: $v_1, \ldots, v_n \in V$ に対し

$$\begin{aligned}
&(Y_1 \odot \cdots \odot Y_k)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes f) \\
&\coloneqq \pm (Y_1)_{\Lambda_1 - \partial_{Z_1}, \ldots, \Lambda_{N_1} - \partial_{Z_{N_1}}} (w_1 \otimes f_1) \otimes \cdots \\
&\qquad \cdots \otimes (Y_k)_{\Lambda_{N_{k-1}+1} - \partial_{Z_{N_{k-1}+1}}} (w_k \otimes f_k) \otimes f_0|_{Z_j = Z_{N_i} \ (N_{i-1}+1 \le j \le N_i)}.
\end{aligned}$$

ただし

$$w_i \coloneqq v_{N_{i-1}+1} \otimes \cdots \otimes v_{N_i}, \quad \pm \coloneqq \prod_{1 \le i < j \le k} (-1)^{(p(w_i) + p(f_i))p(Y_j)}$$

とおいた. また f を

$$f(Z_1, \ldots, Z_n) = f_0(Z_1, \ldots, Z_n) \prod_{i=1}^k f_i(Z_{N_{i-1}+1}, \ldots, Z_{N_i}),$$

$$(f_0 \text{ は各 } N_{i-1} + 1 \le j \le N_i \text{ について } z_j = z_i \text{ に極をもたない})$$

と表した.

(ii) 線形写像 $X \colon V^{\otimes k} \otimes \mathcal{O}_k^{\star \mathrm{T}} \to V_\nabla[\Lambda_l]_{l=1}^k$ と $Y_i \colon V^{\otimes n_i} \otimes \mathcal{O}_{n_i}^{\star \mathrm{T}} \to V_\nabla[\Lambda_l]_{l=1}^{n_i}$ $(i \in [k])$ に対し, 線形写像の合成

$$V^{\otimes k} \otimes \mathcal{O}_n^{\star \mathrm{T}} \xrightarrow{Y_1 \odot \cdots \odot Y_k} \bigotimes_{i=1}^k V[\Lambda_l]_{l=N_{i-1}+1}^{N_i - 1} \otimes \mathcal{O}_k^{\star \mathrm{T}} \xrightarrow{X_{\Lambda'_1, \ldots, \Lambda'_k}} V_\nabla[\Lambda_l]_{l=1}^n$$

を $X \circ (Y_1 \odot \cdots \odot Y_k) \colon V^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star \mathrm{T}} \to V_\nabla[\Lambda_l]_{l=1}^n$ で表す. ただし $\Lambda'_i \coloneqq \Lambda_{N_{i-1}+1} + \cdots + \Lambda_{N_i}$ とおいた. また $X_{\Lambda'_1, \ldots, \Lambda'_k}$ は各 $a_i \in \mathbb{K}[\Lambda_l]_{l=N_{i-1}+1}^{N_i - 1}$ と $v_i \in V$ $(i \in [k])$ および $f \in \mathcal{O}_k^{\star \mathrm{T}}$ に対し

$$a_1 v_1 \otimes \cdots \otimes a_k v_k \otimes f \mapsto \pm (a_1 \cdots a_k) X_{\Lambda'_1, \ldots, \Lambda'_k}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes f),$$

$$\pm \coloneqq \prod_{1 \le i < j \le k} (-1)^{p(v_i)p(a_j)} \cdot \prod_{i=1}^k (-1)^{p(a_i)p(X)}$$

とすることで定まる線形写像を表す.

$k, n \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{N}_n^k$ とする．このとき $X \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(k)$ と $Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_k \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(\nu)$ に対して

$$X \circ (Y_1 \odot \cdots \odot Y_k) \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(n)$$

が成り立つ．

命題 3.13. $\mathfrak{S}$-超加群 $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}$ は $X \otimes Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_k \mapsto X \circ (Y_1 \odot \cdots \odot Y_k)$ を合成写像, $\mathrm{id}_V \in \mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}(1)$ を単位元としてオペラッドになる．

定義 3.14. $\mathcal{H}_W$-左超加群 V に対し, オペラッド $\mathcal{P}_V^{\mathrm{ch}N_W}$ を V 上の $N_W = N$ 超対称カイラルオペラッド ($N_W = N$ SUSY chiral operad) とよぶ．

次の定理 3.15 が本稿の主定理である．

定理 3.15. V を $\mathcal{H}_W$-左超加群とする．このとき

(1) $\mathrm{MC}\big(L(\mathcal{P}_{\Pi^N V}^{\mathrm{ch}N_W})\big)$ の偶なる元 X に対し, 線形写像 $[\cdot_\Lambda \cdot]_X \colon V \otimes V \to V[\Lambda]$ と $\mu_X \colon V \otimes V \to V$ を

$$[a_\Lambda b]_X \coloneqq (-1)^{p(a)\overline{N}} X_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a \otimes b \otimes 1_{\mathbb{K}}),$$
$$\mu_X(a \otimes b) \coloneqq (-1)^{p(a)\overline{N}+\overline{1}} \operatorname{Res}_\Lambda\big(\lambda^{-1} X_{\Lambda,-\Lambda-\nabla}(a \otimes b \otimes z_{1,2}^{-1})\big) \quad (a, b \in V)$$

により定める．すると $(V, [\cdot_\Lambda \cdot]_X, \mu_X)$ は非単位的 $N_W = N$ 超対称頂点代数である．

(2) 写像 $X \mapsto ([\cdot_\Lambda \cdot]_X, \mu_X)$ は, 全単射

$$\mathrm{MC}\big(L(\mathcal{P}_{\Pi^N V}^{\mathrm{ch}N_W})\big)_{\overline{0}} \xrightarrow{\sim} \{V \text{ 上の非単位的 } N_W = N \text{ 超対称頂点代数の構造}\}$$

を与える．

4 超対称頂点代数のコホモロジー

$N_W = N$ 超対称頂点代数 V に対して V 上の加群に係数をもつコホモロジーを定義し, 低次のコホモロジーの具体的な形を与える．超対称頂点代数の加群の定義は省略する．[NY22, Definition 4.2.2] を参照されたい．

定義 4.1. V を非単位的 $N_W = N$ 超対称頂点代数とし M を V 上の加群とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $C^n(V, M)$ を

$$X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_n^{\mathrm{T}}}((V \oplus M)^{\otimes n} \otimes \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}}, M_\nabla[\Lambda_k]_{k=1}^n) \subset \mathcal{P}_{V\oplus M}^{\mathrm{ch}N_W}(n)$$

であり

$$X^\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma) X \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n), \quad X(x \otimes f) = 0 \quad (x \in M^{\otimes n},\ f \in \mathcal{O}_n^{\star\mathrm{T}})$$

を満たすもの全体がなす $\mathcal{P}_{V\oplus M}^{\mathrm{ch}N_W}(n)$ の部分線形超空間とする．$C^n(V, M) \subset L^{n-1}\big(\mathcal{P}_{V\oplus M}^{\mathrm{ch}N_W}\big)$ が成り立つ．

以下 V を非単位的 $N_W = N$ 超対称頂点代数とし M を V 上の加群とする．M の加群構造を

$$V \otimes M \to M[\Lambda], \quad a \otimes x \mapsto a_\Lambda x,$$
$$V \otimes M \to M, \quad a \otimes x \mapsto a \cdot x$$

と表す．定理 3.15 を用いて, 微分 $\partial^n \colon C^n(V, M) \to C^{n+1}(V, M)$ を定めよう．

線形写像 $[\cdot_\Lambda\cdot]\colon V\oplus M\to (V\oplus M)[\Lambda]$ と $\mu\colon V\oplus M\to V\oplus M$ を, 各 $a,b\in V$ と $x,y\in M$ に対し

$$[(a+x)_\Lambda(b+y)]\coloneqq [a_\Lambda b]+a_\Lambda y+x_\Lambda b,\quad \mu((a+x)\otimes(b+y))\coloneqq ab+a\cdot y+x\cdot b$$

とすることで定める. すると $\mathcal{H}_W$-左超加群 $V\oplus M$ はこの $[\cdot_\Lambda\cdot]$ と μ により非単位的 $N_W=N$ 超対称頂点代数をなす. 定理 3.15 より, この構造に対応する $\mathrm{MC}\big(L(\mathcal{P}^{\mathrm{ch}N_W}_{\Pi^N(V\oplus M)})\big)$ の偶なる元が存在する. それを X としよう.

任意の $Y\in C^n(\Pi^N V,\Pi^N M)$ に対し $[X.Y]\in C^{n+1}(\Pi^N V,\Pi^N M)$ であることが分かる. そこで ∂^n を

$$\partial^n\colon C^n(\Pi^N V,\Pi^N M)\to C^{n+1}(\Pi^N V,\Pi^N M),\quad Y\mapsto [X,Y]$$

と定めると $X\square X=0$ より $\partial^{n+1}\circ\partial^n=0$ がしたがう. よってコチェイン複体

$$C^\bullet(\Pi^N V,\Pi^N M)\coloneqq (C^n(\Pi^N V,\Pi^N M),\partial^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

が得られた. これを V の M に係数をもつコチェイン複体とよぶ. $C^\bullet(\Pi^N V,\Pi^N M)$ の n 次のコホモロジーを

$$H^n_{\mathrm{ch}}(\Pi^N V,\Pi^N M)\coloneqq H^n(C^\bullet(\Pi^N V,\Pi^N M))=\operatorname{Ker}\partial^n/\operatorname{Im}\partial^{n-1}$$

と表す. $n=0,1,2$ のコホモロジーは次のようになる.

定理 4.2. V を非単位的 $N_W=N$ 超対称頂点代数とし M を V 上の加群とする.

(1) 0 次のコホモロジーについて

$$H^0_{\mathrm{ch}}(V,M)\cong \mathrm{Cas}(V,M).$$

ただし $\mathrm{Cas}(V,M)$ は Casimir 元 ([NY22, Definition 4.2.8]) 全体のなす線形超空間である.

(2) 1 次のコホモロジーについて

$$H^1_{\mathrm{ch}}(V,M)\cong \mathrm{Der}(V,M)/\operatorname{Inder}(V,M).$$

ただし $\mathrm{Der}(V,M)$ と $\operatorname{Inder}(V,M)$ はそれぞれ V から M への微分全体と内部微分全体 ([NY22, Definition 4.2.10]) のなす線形超空間である.

(3) 2 次のコホモロジーについて, 偶部分 $H^2_{\mathrm{ch}}(V,M)_{\bar{0}}$ は M による V の $\mathcal{H}_W$-分裂拡大 ([NY22, Definition 4.2.11]) 全体のなす線形空間と同型である.

参考文献

[BDHK19] B. Bakalov, A. De Sole, R. Heluani, V. G. Kac, *An operadic approach to vertex algebra and Poisson vertex algebra cohomology*, Jpn. J. Math., **14**, 249–342 (2019).

[FBZ04] E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, 2nd ed., Math. Surv. Monog., **88**, Amer. Math. Soc., Province RI (2004).

[HK07] R. Heluani, V. G. Kac, *Supersymmetric Vertex Algebras*, Comm. Math. Phys., **271**, 103–178 (2007).

[LV12] J-L. Loday, B. Vallette, *Algebraic Operads*, Grundlehren Math. Wiss., **346**, Springer (2012).

[NY22] Y. Nishinaka, S. Yanagida, *Algebraic Operad of SUSY Vertex Algebra*, preprint (2021), arXiv:2209.14617.

交代符号行列の高さ関数と順序イデアル

岡山大学大学院 自然科学研究科 数理物理科学専攻
大本豊数 (Toyokazu OHMOTO)

概要

置換行列のある種の一般化である交代符号行列には高さ関数と呼ばれる行列を定めることができ, それを用いて交代符号行列全体の集合に順序構造を導入できる. 特に有限分配束を成すが, 有限分配束の基本定理により, 有限分配束 L には, ある順序集合 P が同型を除いて一意的に存在して, P の順序イデアルの成す順序集合 $J(P)$ と L が同型になる. 主に高さ関数の各成分について, 取りうる値の範囲に関する命題に注目し, それぞれの命題の関係性に基づいてそのような P の考察を行う.

1 導入

ここで取り扱う交代符号行列とは, Mills-Robbins-Rumsey [4] によって数え上げ問題が提唱された対象である. 数え上げ問題自体は Kuperberg [3], Zeilberger [7] などによって解決されているが, Kuperberg [3] による証明において, 数理物理学に由来する六頂点モデルが用いられており, 今日ではそれらを用いての特徴付けが進められている. 六頂点モデルは離散数学におけるグラフ理論的なアプローチを与える対象であり, グラフを用いてのジャイレーションと呼ばれる操作による特徴付けなどが挙げられる. 一方で, 交代符号行列に高さ関数と呼ばれる行列を定義することによって半順序を導入することができるが, Striker-Williams [1] によって, 順序集合論的なアプローチによるジャイレーションの記述が示されている. 本稿では, 交代符号行列の順序構造について着目していく.

2 交代符号行列と高さ関数

2.1 交代符号行列

n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元は, 成分が 0 と 1 から成り, 置換行列と呼ばれる n 次正方行列によって表されることが知られている. 例えば, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対応する置換行列は $\left(\delta_{j,\sigma(i)}\right)_{1\le i,j\le n}$ である.

ここで, 構成する成分を 0 と 1 に加えて -1 の 3 種類に拡張し, n 次の置換行列のある種の一般化となるような n 次正方行列として n 次の交代符号行列を導入する.

定義 2.1. n 次正方行列 $(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ が以下を満たすとき, n 次の**交代符号行列** (*Alternating sign*

matrix) という.

$$
\begin{aligned}
&a_{i,j} \in \{0,1,-1\} && (1 \le i,j \le n)\,,\\
&\sum_{1\le i\le k} a_{i,j},\ \sum_{1\le j\le k} a_{i,j} \in \{0,1\} && (1 \le i,j,k \le n)\,,\\
&\sum_{1\le i\le n} a_{i,j} = \sum_{1\le j\le n} a_{i,j} = 1 && (1 \le i,j \le n)\,.
\end{aligned}
$$

また, n の交代符号行列全体の集合を $\mathcal{A}_n$ と書く.

例 2.1. 4 次の交代符号行列の具体例として以下が挙げられる.

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0\\
1 & -1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

2.2 六頂点モデル

n 次の交代符号行列は, n^2+4n 個の頂点から成る格子状のグラフ L_n を用いて後述する六頂点モデルを対応付けられることが知られている. まず, 格子状のグラフ L_n について説明する. ここでは, 頂点 u と頂点 v の間の無向辺を非順序対 $\{u,v\}$ で表すことにする.

定義 2.2. $V(L_n) = V_0(n) \sqcup V_1(n)$ を頂点集合, $E(L_n) = E_0(n) \sqcup E_1(n)$ を辺集合とする無向グラフ $L_n = (V(L_n), E(L_n))$ を以下のように定める. まず, 頂点集合について,

$$
\begin{aligned}
V_0(n) &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, 1 \le x,y \le n\right\}\\
V_1(n) &:= \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, 1 \le x \le n, y \in \{0,n+1\}\right\} \sqcup \left\{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, x \in \{0,n+1\}, 1 \le y \le n\right\}
\end{aligned}
$$

と定め, $V_0(n)$ の元を**内部頂点** (*interior vertex*), $V_1(n)$ の元を**境界点** (*boundary vertex*) と呼ぶ. 次に, 辺集合について

$$
\begin{aligned}
E_0(n) &:= \{\{(x,y),(x+1,y)\} \,|\, 1 \le x < n, 1 \le y \le n\}\\
&\quad \sqcup \{\{(x,y),(x,y+1)\} \,|\, 1 \le x \le n, 1 \le y < n\}\\
E_1(n) &:= \{\{(x,y),(x+1,y)\} \,|\, x \in \{0,n\}, 1 \le y \le n\}\\
&\quad \sqcup \{\{(x,y),(x,y+1)\} \,|\, 1 \le x \le n, y \in \{0,n\},\}
\end{aligned}
$$

と定め, $E_1(n)$ の元を**境界辺** (*boundary edge*) と呼ぶ.

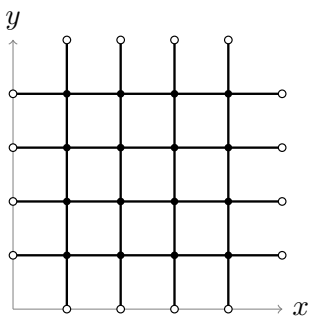


図 1: L_4

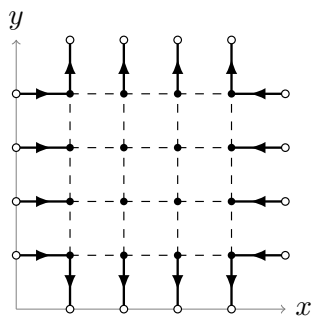


図 2: 開境界条件

図 1 において内部頂点を $\bullet$, 境界点を $\circ$ として L_4 を記す. 特に, 内部頂点が n^2 個, 境界点が $4n$ 個であり, 境界点に接続する合計 $4n$ 本の辺が L_n の境界辺である. また, L_n の各内部頂点 $v \in V_0(n)$ には 4 本の辺が接続している.

ここで, グラフの頂点の順序対 (u, v) を用いて u を始点, v を終点とする有向辺を表すことにして, $\tilde{E}(L_n) := \bigsqcup_{\{u,v\} \in E(L_n)} \{(u, v), (v, u)\}$ とする. いま, 写像 $\varphi\colon E(L_n) \to \tilde{E}(L_n)$ が $\varphi(\{u, v\}) = (u, v)$ または $\varphi(\{u, v\}) = (v, u)$ を満たすとき, φ を L_n の**辺の向き付け**と呼ぶ. 特に, $4n$ 本の境界辺の向き $\varphi|_{E_1(n)}$ を固定して向き付けを考えることが多く, $\varphi|_{E_1(n)}$ を φ の**境界条件** (*boundary condition*) と呼ぶ. また, 図 2 のように南北の境界辺が境界点を終点, 東西の境界辺が境界点を始点とするような境界条件であるとき, **開境界条件** (*open boundary condition*) を持つという.

さて, L_n の辺の向き付け φ および内部頂点 $v \in V_0(n)$ について, v に接続する辺は 4 本だったが, そのうち 2 本が v を始点, 残りの 2 本が v を終点とするとき, φ は v について 2-*in* 2-*out* という. また, L_n の辺の向き付け φ が全ての内部頂点について 2-in 2-out であるとき, L_n 上の**六頂点モデル** (*six vertex model*) の state という.

特に, 開境界条件を持つ L_n 上の六頂点モデルの state 全体の集合と n 次交代符号行列全体の集合 $\mathcal{A}_n$ との間に全単射が構成できることが知られており, n 次交代符号行列の (i, j)-成分と, 内部頂点 $(j, n-i+1) \in V_0(n)$ に接続する 4 本の辺の向きが対応している. 詳細は後述する.

2.3 高さ関数

さらに, n 次交代符号行列には対応する六頂点モデルの state を用いることで, 高さ関数と呼ばれる $n+1$ 次正方行列を定めることができる.

定義 2.3. $n+1$ 次正方行列 $(h_{i,j})_{0 \le i,j \le n}$ が以下を満たすとき, **高さ関数** (*height function*) という.

$$h_{0,j} = h_{j,0} = h_{n-j,n} = h_{n,n-j} = j \qquad (0 \le j \le n) \tag{1a}$$

$$|h_{i,j} - h_{i-1,j}| = |h_{j,i} - h_{j,i-1}| = 1 \qquad (1 \le i \le n,\ 0 \le j \le n) \tag{1b}$$

L_n の成す面に高さ関数の成分を対応させ, 面を隔てる辺の向き付けによって, 隣り合う成分同士の大小を決定する. このとき各 $1 \le i, j \le n$ について, 内部頂点 $(j, n-i+1)$ の南東の面から時計回りに $h_{i,j}$, $h_{i,j-1}$, $h_{i-1,j-1}$, $h_{i-1,j}$ をそれぞれ対応させる. ただしこの場合の東, 北はそれぞれ x 軸方向, y 軸方向のことを言う. 図 4 は例 2.1 に対応した六頂点モデルの state および高さ関数である.

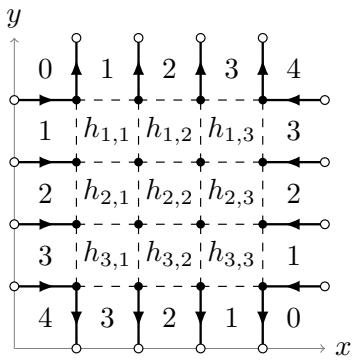


図 3: $n = 4$ のとき

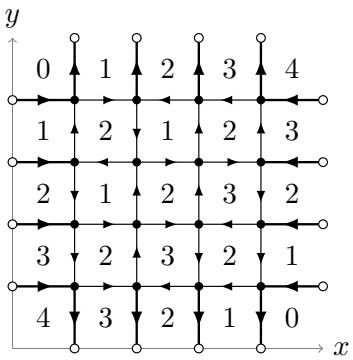
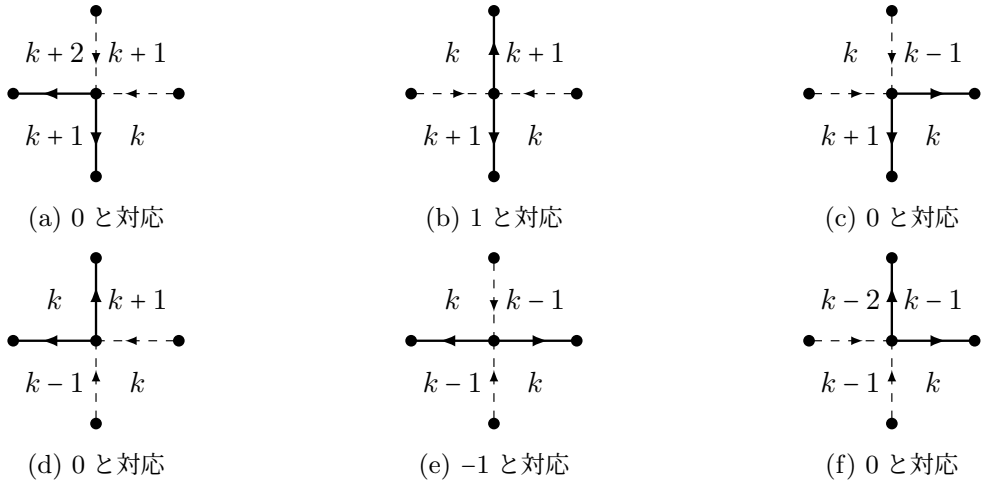


図 4: $n = 4$ のときの高さ関数の例

さて, $h_{i,j} = k$ と固定したとき, 条件 (1b) を満たす組 $(h_{i,j}, h_{i,j-1}, h_{i-1,j-1}, h_{i-1,j})$ は 6 種類のいずれかであり, 内部頂点 $(j, n-i+1)$ が 2-in 2-out であるときの $(j, n-i+1)$ に接続する 4 本の辺の向きの付け方も 6 種類のいずれかである. 図 5 において, 内部頂点 $(j, n-i+1)$ に接続する 4 本の辺の向き, 高さ関数の成分の組 $(h_{i,j}, h_{i,j-1}, h_{i-1,j-1}, h_{i-1,j})$ および対応した交代符号行列の (i, j)-成分を示す.



(a) 0 と対応 (b) 1 と対応 (c) 0 と対応

(d) 0 と対応 (e) −1 と対応 (f) 0 と対応

図 5: 高さ関数の決定の仕方

2.4 半順序

高さ関数を用いて $\mathcal{A}_n$ には半順序を導入する前に, まず半順序に関する基本的な事項について説明する. 本稿では P が有限集合であるようなものに限定して議論していく.

定義 2.4. P を集合, $\leq$ を P 上の二項関係とする. 以下の 3 つの条件を満たすとき $\leq$ を P 上の**半順序** (*partial order*) といい, $(P, \leq)$ を半順序集合 (*partially ordered set*) あるいはポセット (*poset*) と

いう．また, 順序が明らかなとき, 省略して単に P を半順序集合ということもある．

任意の $x \in P$ に対して, $x \leq x$ を満たす． (反射律)
任意の $x, y \in P$ に対して, $x \leq y$ かつ $y \leq x$ を満たすならば $x = y$ を満たす． (反対称律)
任意の $x, y, z \in P$ に対して, $x \leq y$ かつ $y \leq z$ を満たすならば $x \leq z$ を満たす． (推移律)

特に $x \leq y$ かつ $x \neq y$ を満たす半順序集合 $(P, \leq)$ の元 $x, y \in P$ について, $z \neq x, y$ かつ $x \leq z \leq y$ を満たすような $z \in P$ が存在しないとき y は x をカバーする (y *cover* x) という．半順序集合はカバーの関係を用いて, **ハッセ図** (*Hasse diagram*) と呼ばれる図式で表される．半順序集合 $(P, \leq)$ のハッセ図は, P を頂点集合, $\{(u, v) \mid v$ は u をカバーする.$\}$ を辺集合とする有向グラフとして定義できる．ハッセ図は基本的にカバーする元を紙面の上側, カバーされる元を下側に配置する．

例 2.2. (ポジティブルートポセット)
半順序集合の例として A 型ポジティブルートポセット $\Phi^+(A_n)$ を紹介する．まず, $n+1$ 次元ユークリッド空間の部分集合 $\Phi^+(A_n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を標準基底 e_i $(1 \leq i \leq n+1)$ を用いて以下のように定める．

$$\Phi^+(A_n) := \{e_i - e_j \mid 1 \leq i < j \leq n+1\}$$

このとき, $e_i - e_{i+1}$ $(1 \leq i \leq n)$ を $\Phi^+(A_n)$ の単純ルートと呼び, 以下のように $\Phi^+(A_n)$ に半順序を定めたものを A 型ポジティブルートポセットという．

$$\alpha \leq \beta \underset{\text{def}}{\iff} \beta - \alpha \text{が単純ルートの非負整数係数の和で表せる．}$$

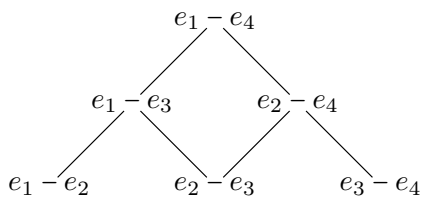


図 6: $\Phi^+(A_n)$ のハッセ図

次に, 半順序集合 $(P, \leq)$ に対して誘導される半順序集合 $J(P)$ について説明する．P の部分集合 I が 任意の $x, y \in P$ に対して, $x \in I$ かつ $y \leq x$ ならば $y \in I$ を満たすとき, I のことを $(P, \leq)$ の**順序イデアル** (*order ideal*) という．$(P, \leq)$ の順序イデアル全体の成す集合を $J(P)$ と書き, 集合の包含関係 $\subseteq$ によって半順序を定める．

いま, 半順序集合 $(P, \leq_P)$, $(Q, \leq_Q)$ に対して, 写像 $\varphi: P \to Q$ が任意の $a, b \in P$ について $a \leq_P b$ ならば$\varphi(a) \leq_Q \varphi(b)$ を満たすとき, φ は順序を保つ写像という．特に, 順序を保つ全単射が存在するとき, 順序同型であるという．

3 交代符号行列の順序構造

n 次交代符号行列の集合 $\mathcal{A}_n$ に対して, 高さ関数を用いて以下のように半順序を定める．

定義 3.1. $A, B \in \mathcal{A}_n$ および $(h_{i,j})_{0\le i,j\le n}$ を A の高さ関数, $(g_{i,j})_{0\le i,j\le n}$ を B の高さ関数とする．このとき, 以下のように $\mathcal{A}_n$ に半順序を定める．

$$A \le B \underset{\text{def}}{\iff} \text{任意の } 0 \le i, j \le n \text{ について } h_{i,j} \le g_{i,j} \text{を満たす.}$$

対称群 $\mathfrak{S}_n$ は A 型 Weyl 群と呼ばれ, Bruhat order と呼ばれる順序が定まることが知られている．一方で, 高さ関数によって定まる $\mathcal{A}_n$ の順序は $\mathfrak{S}_n$ の Bruhat order の Dedekind-MacNeille completion と呼ばれる拡大になっており, さらに有限分配束と呼ばれる特別な半順序集合を成していることが知られている．一般の有限分配束に対して, 以下のような基本定理が成り立つ．

定理 3.1. (有限分配束の基本定理)
L を有限分配束とする．このとき, ある順序集合 P が同型を除いて一意的に存在して, $L \cong J(P)$ を満たす．

この有限分配束の基本定理を動機に, 本稿では $\mathcal{A}_n \cong J(\mathbb{P}_n)$ となる $\mathbb{P}_n$ を構成し, n 次交代符号行列を別のある順序集合の順序イデアルで表すためのアイデアを紹介していく．

3.1 順序イデアルの構成

順序イデアルの成す半順序集合への順序を保つ写像 $\varphi\colon L \to J(P)$ を構成するためにはまず, 各 $x \in P$ に対して L の元に関する条件 $p(x)$ を用意する． ただし, 任意の $x, y \in P$ に対して $x \le y$ ならば $p(y) \Rightarrow p(x)$ を満たすように定める． このとき, 各 $l \in L$ について $\varphi(l) = \{x \in P \,|\, l \text{ は } p(x) \text{ を満たす.}\}$ と定めれば順序を保つ写像が得られる．また, $I \in J(P)$ が与えられたとき, 各 $x \in I$ について条件 $p(x)$ を満たし, 各 $y \in P \setminus I$ について条件 $p(y)$ を満たさないような $l \in L$ が一意的に定まれば全単射になる．

ここで添え字の集合 $\mathcal{I}(n)$ を $\mathcal{I}(n) := \left\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \,\middle|\, 1 \le i, j \le n-1\right\}$ とおく．このとき, 各添え字 $(i,j) \in \mathcal{I}$ に対して, 高さ関数の (i,j)-成分 $h_{i,j}$ が定まれば高さ関数 $(h_{i,j})_{0\le i,j\le n}$ が決定できる．$I \in J(\mathbb{P}_n)$ が与えられたときに, 各添え字 $(i,j) \in \mathcal{I}(n)$ について $h_{i,j}$ が一意的に定まるような $\mathbb{P}_n$ を構成していく．まず, 各添え字 $(i,j) \in \mathcal{I}(n)$ について集合 $P_{i,j}$ を用意し, それらを用いて $\mathbb{P}_n$ を構成する．準備として, $\mathcal{I}(n)$ を $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 個の集合に分ける．

定義 3.2. $l \in \left\{1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}$ に対して, T_l を以下のように定め, l 番目のトラックと呼ぶ．

$$\begin{aligned} T_l := &\{(l,j) \,|\, l \le j \le n-l\} \cup \{(i, n-l) \,|\, l \le i \le n-l\} \\ &\cup \{(n-l, n-j) \,|\, l \le j \le n-l\} \cup \{(n-i, l) \,|\, l \le i \le n-l\} \end{aligned}$$

注 1. このとき, 以下のことに注意が必要である．

(i) n が偶数かつ $l = \frac{n}{2}$ のとき, $T_l = \left\{\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)\right\}$.
(ii) それ以外のとき, $T_l = \bigsqcup_{l \le j \le n-l-1} \{(l,j), (j, n-l), (n-l, n-j), (n-j, l)\}$.

ここで, $h_{i,j}$ の取りうる値で最小の値を $m_{i,j}$ とすると, $l \le j \le n-l$ について, $m_{l,j} = m_{n-l,n-i} = j - l$ および $m_{j,n-l} = m_{n-j,l} = n - j - l$ となる． また, $(i,j) \in T_l$ のとき, $h_{i,j}$ の取りうる値は

$m_{i,j}, m_{i,j}+2, m_{i,j}+4, \ldots, m_{i,j}+2l$ の $l+1$ 種類である．いま，$(i,j) \in T_l$ に対して，$P_{i,j}$ を以下のように定める．

定義 3.3. $1 \le l \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ および $(i,j) \in T_l$ とする．このとき，集合 $P_{i,j}$ を以下のように定める．

$$P_{i,j} := \left\{ (i,j,k) \in \mathbb{Z}^3 \,\middle|\, 1 \le k \le l \right\}$$

また，各 $(i,j,k) \in P_{i,j}$ に対して，高さ関数の (i,j)-成分 $h_{i,j}$ に関する条件を定める．

定義 3.4. $1 \le l \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ および $(i,j) \in T_l$ とする．また，$A \in \mathcal{A}_n$ および $(h_{i,j})_{0 \le i,j \le n}$ を A の高さ関数としたとき，各 $(i,j,k) \in P_{i,j}$ に対して条件 $p(i,j,k)$ を以下のように定める．

$$A \text{ が条件 } p(i,j,k) \text{ 満たす．} \underset{\text{def}}{\iff} h_{i,j} \ge m_{i,j} + 2k \text{ を満たす．}$$

特に，任意の $(i,j,k), (i,j,k') \in P_{i,j}$ について，$k < k'$ ならば $p(i,j,k)$ は $p(i,j,k')$ の必要条件になっている．また，$(i,j) \in T_l$ のとき，$1 \le k \le l-1$ について以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
h_{i,j} = m_{i,j} &\iff h_{i,j} \text{は } p(i,j,1) \text{ を満たさない．} \\
h_{i,j} = m_{i,j} + 2k &\iff \begin{array}{l} h_{i,j} \text{は } p(i,j,k) \text{ を満たし，} \\ p(i,j,k+1) \text{ を満たさない．} \end{array} \\
h_{i,j} = m_{i,j} + 2l &\iff h_{i,j} \text{は } p(i,j,l) \text{ を満たす．}
\end{aligned}$$

ここで，$\mathbb{P}_n := \bigsqcup_{(i,j) \in \mathcal{I}(n)} P_{i,j}$ とおき，以下のようなカバー関係を用いて半順序を定める．

$$\begin{aligned}
&(i',j',k') \text{ が } (i,j,k) \text{ をカバーする} \\
\iff &\begin{cases} |i'-i| = 1 \\ j' = j \\ m_{i',j'} + 2k' = m_{i,j} + 2k + 1 \end{cases} \text{または} \begin{cases} i' = i \\ |j'-j| = 1 \\ m_{i',j'} + 2k' = m_{i,j} + 2k + 1 \end{cases} \text{を満たす．}
\end{aligned}$$

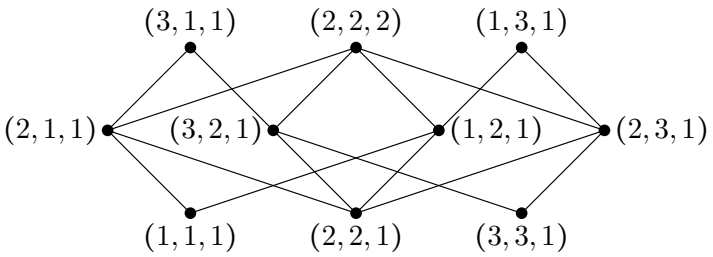


図 7: $\mathbb{P}_4$ のハッセ図

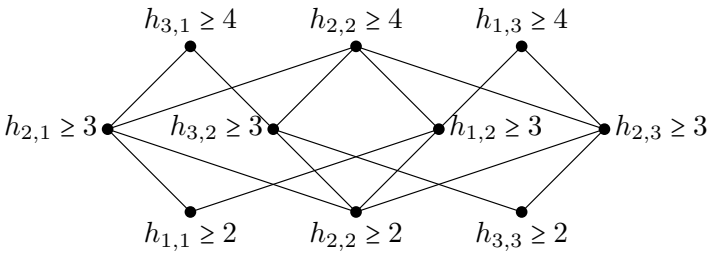


図 8: $\mathbb{P}_4$ の各元に対応する条件

このとき, 以下の主張が成り立つ.

命題 3.1. $\varphi\colon \mathcal{A}_n \to \mathbb{P}_n$ を各 $A \in \mathcal{A}_n$ について, $\varphi(A) := \{(i,j,k) \in \mathbb{P}_n \mid A$ の高さ関数が $p(i,j,k)$ を満たす.$\}$ と定めると φ は順序を保つ全単射となる.

逆写像は $I \in J(\mathbb{P}_n)$ が与えられたとき, 各添え字 $(i,j) \in \mathcal{I}(n)$ について, $(i,j) \in T_l$ のとき, 次のように $h_{i,j}$ を定めれば良い.

(i) $(i,j,1) \notin I$ のとき, $h_{i,j} = m_{i,j}$.
(ii) $(i,j,k) \in I$ かつ $(i,j,k+1) \notin I$ のとき, $h_{i,j} = m_{i,j} + 2k$. $(1 \leq k \leq l-1)$
(iii) $(i,j,l) \in I$ のとき, $h_{i,j} = m_{i,j} + 2l$.

先ほど構成した $\mathbb{P}_n$ について, 元の個数を計算してみると

$$\#\mathbb{P}_{2m} = \sum_{1 \leq k \leq m-1} 4k(2m-2k) + m = \frac{1}{3}m(2m-1)(2m+1) = \sum_{1 \leq k \leq 2m-1} \binom{k+1}{2},$$
$$\#\mathbb{P}_{2m+1} = \sum_{1 \leq k \leq m} 4k(2m+1-2k) = \frac{2}{3}m(m+1)(2m+1) = \sum_{1 \leq k \leq 2m} \binom{k+1}{2}.$$

特に, 例 2.2 で紹介した A 型ポジティブルートポセットを用いて

$$\#\mathbb{P}_n = \sum_{1 \leq k \leq n-1} \#\Phi^+(A_n)$$

と表せて, 図 9 および図 10 のように $\mathbb{P}_n$ は $\Phi^+(A_1) \sqcup \Phi^+(A_2) \sqcup \cdots \sqcup \Phi^+(A_{n-1})$ と表せる.

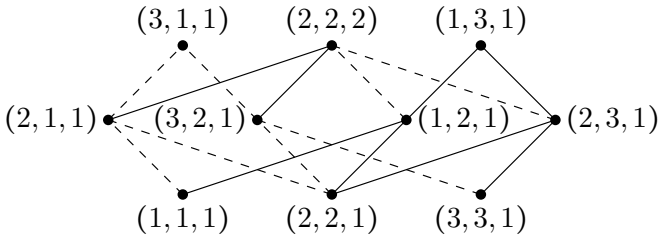


図 9: $\mathbb{P}_4$ のハッセ図の分解

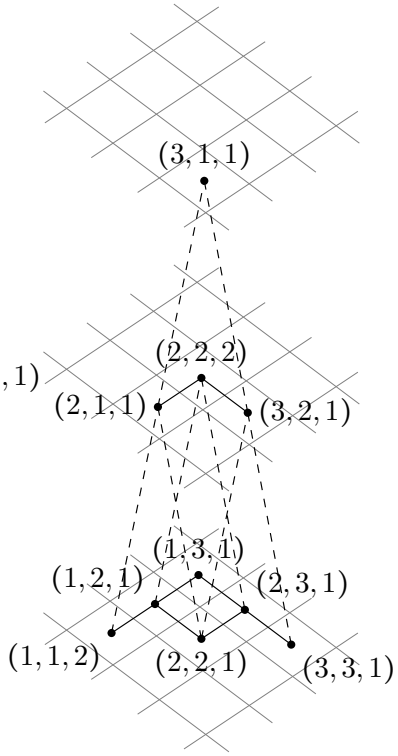


図 10: $\mathbb{P}_4$ のハッセ図の分解

参考文献

[1] J. Striker and N. Williams, "Promotion and rowmotion", *European J. Combin.*, **33** (2012) 1919 – 1942.

[2] J. de Gier, "Loops, matchings and alternating-sign matrices", *Discrete Math.*, **298** (2005) 365 – 388.

[3] G. Kuperberg, "Classes of Alternating-Sign Matrices under One Roof", *Ann. of Math.*, **156** (2002) 835 – 866.

[4] W.H. Mills, David P. Robbins, and Howard Rumsey, Jr., "Alternating Sign Matrices and Descending Plane Partitions", *J. Combin. Theory Ser. A*, **34** (1983) 340 – 359.

[5] Davis M. Bressoud, *Proofs and Confirmations — The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, Cambridge University Press (1999).

[6] S. Okada, "Enumeration of Symmetry Classes of Alternating Sign Matrices and Characters of Classical Groups", *J. Algebraic Combin.*, **23** (2006) 43 – 69.

[7] Doron Zeilberger, "Proof of the Alternating Sign Matrix Conjecture" *Elec. J. Comb.*, **3** (1996) R13

[8] Luigi Cantini and Andrea Sportiello, "Proof of Razumov-Stroganov conjecture", *J. Combin. Theory Ser. A*, **5** (2011) 1549 –1574

[9] B. Wieland, "Large Dihedral Symmetry of the set of Alternating Sign Matrices, *Electr. J. Comb.*, **7** (2000) R37

[10] Richard P. Stanley, *Enumerative Combinatorics Volume 1 second edition*, Cambridge University Press(2011)

巡回グラフの同型問題

名古屋工業大学大学院 工学専攻 情報工学系プログラム 情報数理分野
加藤寛樹 (Hiroki KATO)

1 導入

一般にグラフの同型を判定することは NP である．しかし, グラフの範囲を限定すれば同型問題がやさしくなることが期待される．隣接行列が巡回行列であるようなグラフを巡回グラフという．巡回グラフは通信ネットワーク, VLSI 設計, 分散計算など多くのアプリケーションで利用されており, 文献上でも広く研究されている [5]．巡回グラフに対する同型問題の研究は古くから行われており, 1967 年に Ádám [1] は巡回グラフが同型であるための簡単な判定条件を予想した．Ádám 予想に対して, 反例はいくつか発見されているが, 反例構成の組織的な研究はあまり見当たらない．本講演では, 頂点数 n が 2 のべきの場合に, 次数最小の反例をすべて求めたことを報告する．

2 巡回グラフ

本節では, 一般のグラフの定義をして, 巡回グラフと共役の定義について述べる．無限グラフは考えない．

定義 2.1 (グラフ)**.** グラフ G は 2 つの有限集合 $V = V(G)$ と $E = E(G)$ から構成される．V の各要素は頂点と呼ばれる．E の各要素は 2 つの相異なる頂点のペアからなり, 辺と呼ばれる (本稿ではループは許容しないものとする)．集合 E を頂点の順序付きペアの集合に置き換えると, 有向グラフが得られる．$a, b \in V$ に対し, a から b に向かう有向辺を (a, b) で表す．

定義 2.2 (連結グラフ)**.**

(i) 無向グラフにおいて, 任意の 2 頂点が有限個の辺を通って結ばれているとき, 連結グラフであるという．

(ii) 有向グラフの場合は, 向きを忘れて自然に得られる無向グラフが連結なときに連結と定める．

本稿ではグラフは有向な連結グラフのみ考える．

定義 2.3 (グラフの同型)**.** グラフ G, H が同型であるとは, 次の条件を満たす全単射写像 $f : V(G) \to V(H)$ が存在することである．

$$(x, y) \in E(G) \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E(H) \ (\forall x, y \in V(G))$$

グラフの中でも特にケーリーグラフを以下のように定義する．

定義 2.4 (ケーリーグラフ)**.** G を有限群, Δ をその部分集合とする. G を頂点集合とし, G の 2 つの元 g, h に対し, $h = sg$ となる $s \in \Delta$ があるとき, (g, h) が辺であると定義する. このようにして得られるグラフをケーリーグラフといい, $\mathrm{Cay}(G, \Delta)$ と表す.

注 2.5.

1. $\mathrm{Cay}(G, \Delta)$ が連結であるための必要十分条件は Δ が G を生成すること.
2. $\Delta = \Delta^{-1} = \{s^{-1} | s \in \Delta\}$ のとき, $\mathrm{Cay}(G, \Delta)$ は無向グラフとみなせる.

定義 2.6 (巡回グラフ)**.** $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta)$ を巡回グラフという. ここで $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

名前の由来は巡回置換 $(0, \ldots, n-1)$ が $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta)$ の自己同型となっているからである. また, 巡回グラフの隣接行列は巡回行列である. $\mathbb{Z}_n$ は加法群なので, 演算を加法的に書く. 特に単位元は 0 である. $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta)$ はループをもたないと仮定するので, 以下では $0 \notin \Delta$ とする.

例 2.7. $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \{-1, 1\})$ はサイクルグラフ. また, $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n \backslash \{0\})$ は完全グラフ.

補題 2.8. $d = \gcd(s_1, s_2, \ldots, s_r, n)$ のとき, $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \{s_1, s_2, \ldots, s_r\})$ は d 個の連結成分に分かれ, 各連結成分は $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_{n/d}, \{s_1/d, s_2/d, \ldots, s_r/d\})$ に同型である.

巡回グラフが同型であるための十分条件である共役という性質を定義する.

定義 2.9. $\Delta, \Delta' \subset \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ に対し, ある $m \in \mathbb{Z}_n^*$ が存在して $\Delta' = m\Delta$ が成り立つとき, Δ と Δ' は共役であるという.

補題 2.10. Δ, Δ' が共役であるとき, $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta) \simeq \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta')$ である.

Ádám は逆に巡回グラフが共役ならば同型であると予想した.

予想 2.11 (Ádám 1967 [1])**.** $\Delta, \Delta' \subset \mathbb{Z}_n \backslash \{0\}$ に対し, $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta) \simeq \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta')$ となる必要十分条件は Δ と Δ' が共役であることである.

Ádám の予想に対し以下のような反例を Elspas-Turner は発見した.

反例 2.12 (Elspas-Turner 1970 [4])**.** $\{1, 5, 2\}, \{1, 5, 6\} \subset \mathbb{Z}_8$ は共役でないが, $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_8, \{1, 5, 2\}) \simeq \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_8, \{1, 5, 6\})$ である.(図 1, 図 2 参照) 同型を与える写像 f として, 例えば置換 (2 6)(3 7) がある.(例 3.14 参照)

1979 年には Ádám 予想に対して別の反例が見つかった.

反例 2.13 (Alspach-Parsons 1979 [2],Egorov-Markov 1979 [3])**.**

(i) p を奇素数とするとき, 頂点数 $n = p^2$ で反例が存在する.
(ii) 頂点数が n で反例が存在するならば, 頂点数が mn のときも反例が存在する.

上の反例から以下が分かる.

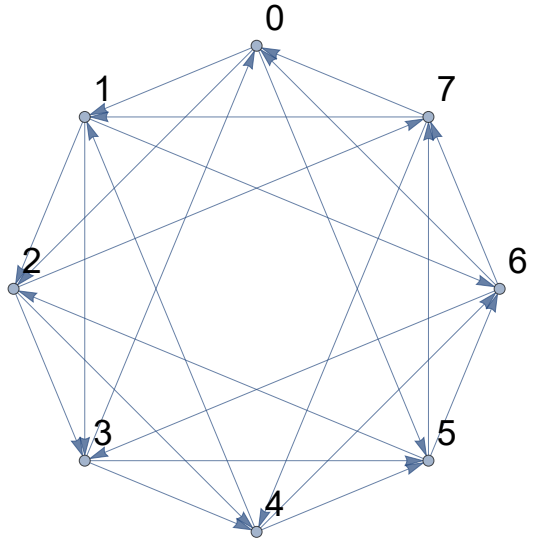


図 1　$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_8, \{1, 5, 2\})$

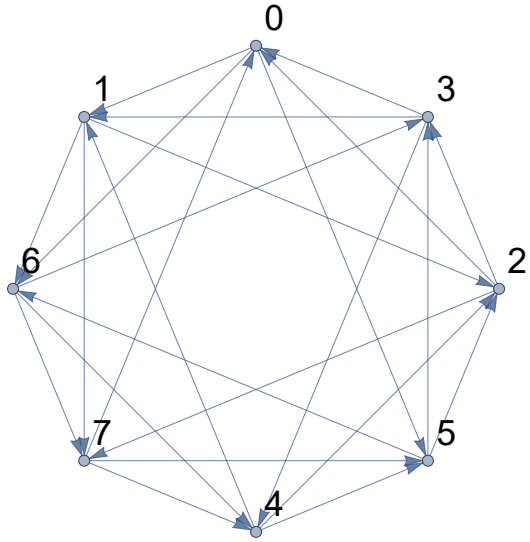


図 2　$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_8, \{1, 5, 6\})$

系 2.14. $8|n$ または $p^2|n(\exists p$: 奇素数) のとき Ádám 予想の反例が存在する.

Pálfy [9] は, これ以外の n に対しては反例は存在しないと予想し, この予想は Muzychuk [6][7] によって証明された.

3　キーと解集合

本節では, Muzychuk [8] に従って, 巡回グラフの同型問題を解決するキーという概念を導入する. [8] では一般の頂点数 n に対して巡回グラフの同型問題が解決されているが, 本稿では p を素数, $\alpha \geq 1, n = p^\alpha$ とする.

3.1　キー

定義 3.1. キー空間 K_n は以下の条件を満たす全ての整数ベクトル $(k_1, \ldots, k_\alpha)$ から成る.

$$0 \leq k_i < i \quad (i = 1, \ldots, \alpha), \quad k_{i-1} \leq k_i \quad (i = 2, \ldots, \alpha).$$

キー空間の元をキーという.

キー空間 K_n に以下のような自然な半順序 $\leqslant$ を導入する. $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_\alpha), \mathbf{m} = (m_1, \ldots, m_\alpha)$ に対し,

$$\mathbf{k} \leqslant \mathbf{m} \Leftrightarrow k_i \leq m_i \quad (\forall i).$$

半順序集合 $(K_n, \leqslant)$ は束であり, 交わり $\mathbf{k} \wedge \mathbf{m}$ と結び $\mathbf{k} \vee \mathbf{m}$ は以下のようになる.

$$(\mathbf{k} \wedge \mathbf{m}) \text{ の } i \text{ 成分} = \min(k_i, m_i),$$
$$(\mathbf{k} \vee \mathbf{m}) \text{ の } i \text{ 成分} = \max(k_i, m_i).$$

例 3.2. キー空間

$$K_8 = \{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,1),(0,0,2),(0,1,2)\}$$

のハッセ図は図 3 のようになる.

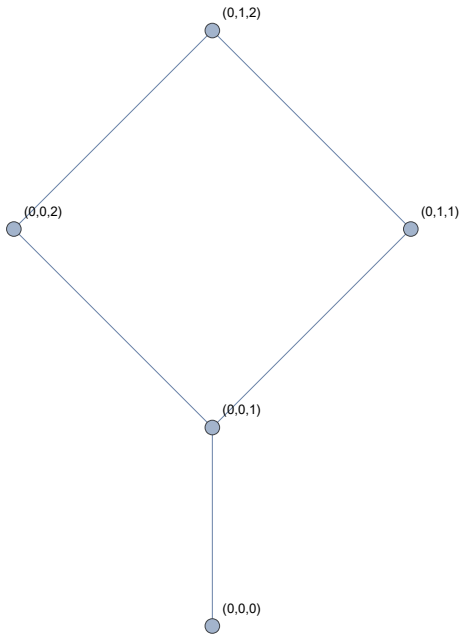


図 3　K_8 のハッセ図

定義 3.3. $\{S_1,\ldots,S_r\}(S_i \subset \mathbb{Z}_n)$ が $\mathbb{Z}_n$ の分割であるとは,

$$S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_r = \mathbb{Z}_n,\ S_i \cap S_j = \emptyset (i \neq j)$$

を満たすことである. $\mathrm{Part}(\mathbb{Z}_n)$ を $\mathbb{Z}_n$ のすべての分割から成る集合とする.

定義 3.4. $\Delta, \Sigma \in \mathrm{Part}(\mathbb{Z}_n), \Delta = \{S_1,\ldots,S_r\}, \Sigma = \{T_1,\ldots,T_s\}$ とする. 以下が成り立つとき, Δ は Σ の細分であるといい, $\Sigma \sqsubseteq \Delta$ と表す.

$$\forall S_i, \exists T_j\ s.t.\ S_i \subseteq T_j$$

関係 $\sqsubseteq$ は半順序である. 半順序集合 $(\mathrm{Part}(\mathbb{Z}_n), \sqsubseteq)$ は束であり, Δ と Σ の交わりを $\Delta \wedge \Sigma$, 結びを $\Delta \vee \Sigma$ で表す.

定義 3.5. キー $\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_\alpha) \in K_n$ に対し, $\mathbb{Z}_n$ の分割 $\Sigma(\mathbf{k})$ を以下のように定義する. ここで, $g \in \mathbb{Z}_n$ の位数を $o(g)$ と記し, β は $o(g) = p^\beta$ によって定める.

$$\Sigma(\mathbf{k}) := \{\{0\}\} \cup \{g + \langle p^{\alpha - k_\beta} \rangle | g \in \mathbb{Z}_n \backslash \{0\}\}.$$

例 3.6. K_8 のキー $\mathbf{k}$ と $\Sigma(\mathbf{k})$ は表 1 のようになる.

表 1　K_8 のキー $\mathbf{k}$ と $\Sigma(\mathbf{k})$

$\mathbf{k}$	$\Sigma(\mathbf{k})$
$(0,0,0)$	{{0},{2},{4},{6},{1},{3},{5},{7}}
$(0,0,1)$	{{0},{2},{4},{6},{1,5},{3,7}}
$(0,1,1)$	{{0},{4},{2,6},{1,5},{3,7}}
$(0,0,2)$	{{0},{4},{2},{6},{1,3,5,7}}
$(0,1,2)$	{{0},{4},{2,6},{1,3,5,7}}

命題 3.7. キー $\mathbf{k}$, $\mathbf{m} \in K_n$ に対して以下が成り立つ.

(1) $\mathbf{k} \leqslant \mathbf{m} \Rightarrow \Sigma(\mathbf{m}) \sqsubseteq \Sigma(\mathbf{k})$
(2) $\Sigma(\mathbf{k}) \wedge \Sigma(\mathbf{m}) = \Sigma(\mathbf{k} \vee \mathbf{m})$
(3) $\Sigma(\mathbf{k}) \vee \Sigma(\mathbf{m}) = \Sigma(\mathbf{k} \wedge \mathbf{m})$
(4) $\Sigma(\mathbf{0}) = \{\{g\} | g \in \mathbb{Z}_n\} \quad (\mathbf{0} := (0,0,\ldots,0))$

定義 3.8. $\Delta \subset \mathbb{Z}_n \backslash \{0\}$ に対し,$\{\mathbb{Z}_n \backslash \Delta, \Delta\} \sqsubseteq \Sigma(\mathbf{k})$ を満たす $\mathbf{k} \in K_n$ の中で最大のものを $\mathbf{k}(\Delta)$ と定義する.

例 3.9. $\Delta = \{1,5,2\} \subset \mathbb{Z}_8$ とする. 表 1 より

$$\{\mathbb{Z}_8 \backslash \Delta, \Delta\} \sqsubseteq \Sigma((0,0,1)), \quad \{\mathbb{Z}_8 \backslash \Delta, \Delta\} \not\sqsubseteq \Sigma((0,1,1))$$

が成り立つので $\mathbf{k}(\Delta) = (0,0,1)$ である. 同様に $\Delta' = \{1,5,6\} \subset \mathbb{Z}_8$ に対し, $\mathbf{k}(\Delta') = (0,0,1)$ である.

3.2　解集合

同型な巡回グラフを発見する際に必要となる解集合を定義する. 引き続き $n = p^\alpha$ とする.

定義 3.10.

(*i*) $\mathbb{Z}_n^{**} := \{(m_1,\ldots,m_\alpha) \in \mathbb{N}^\alpha | \forall i, \gcd(m_i,p) = 1\}$
(*ii*) キー $\mathbf{k} \in K_n$ に対し $\mathbb{Z}_n^{**}(\mathbf{k})$ を $m_\delta \equiv m_{\delta-1} \pmod{p^{\delta-k_\delta-1}}$, $2 \leq \forall\delta \leq \alpha$ をみたす $\mathbf{m} = (m_1,\ldots,m_\alpha) \in \mathbb{Z}_n^{**}$ の全体からなる集合として定義する.
(*iii*) $\mathbb{Z}_n^{**}(\mathbf{k})^o$ を $m_\delta \in \{1,2,\ldots,p^{\delta-k_\delta}-1\}$, $1 \leq \forall\delta \leq \alpha$ をみたす $\mathbf{m} = (m_1,\ldots,m_\alpha) \in \mathbb{Z}_n^{**}(\mathbf{k})$ の全体からなる集合として定義する.
(*iv*) $\mathbf{m} = (m_1,\ldots,m_\alpha) \in \mathbb{Z}_n^{**}$ に対し, $f_\mathbf{m} : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ を

$$x = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} x_\beta p^\beta, \quad x_\beta \in \{0,\ldots,p-1\}$$

に対して,

$$x^{f_{\mathbf{m}}} = \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} m_{\alpha-\beta} x_\beta p^\beta$$

と定義する.

(v) 解集合 $P(\mathbf{k})$ を $P(\mathbf{k}) := \{f_{\mathbf{m}} | \mathbf{m} \in \mathbb{Z}_n^{**}(\mathbf{k})^o\}$ と定義する.

例 3.11. $p = 2, \alpha = 3, \mathbf{k} = (0,0,1)$ とする. このとき,

$$\mathbb{Z}_8^{**}(\mathbf{k})^o = \{(1,1,1),(1,1,3),(1,3,1),(1,3,3)\}, \quad P(\mathbf{k}) = \{f_{(1,1,1)}, f_{(1,1,3)}, f_{(1,3,1)}, f_{(1,3,3)}\}$$

となる. 置換で表すと $f_{(1,1,1)}$ は恒等置換であり,

$$f_{(1,1,3)} = (1\ 3\ 5\ 7), \quad f_{(1,3,1)} = (2\ 6)(3\ 7), \quad f_{(1,3,3)} = (1\ 3)(2\ 6)(5\ 7)$$

となる.

定義 3.12. $\Delta \subset \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ と $\mathbb{Z}_n$ の置換 f に対し

$$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta)^f := \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta^f)$$

と定義する.

定理 3.13 (Muzychuk 2004 [8])**.** $\Delta, \Delta' \subset \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ に対し, 以下が成り立つ.

1. $\mathbf{k}(\Delta) \neq \mathbf{k}(\Delta') \Rightarrow \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta) \not\simeq \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta')$
2. $\mathbf{k}(\Delta) = \mathbf{k}(\Delta') = \mathbf{k}$ ならば, 以下は同値
   (a) $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta) \simeq \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta')$
   (b) $\exists f \in P(\mathbf{k})\ s.t.\ \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta)^f = \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta')$
   (c) $\exists f \in P(\mathbf{k})\ s.t.\ \Delta^f = \Delta'$

例 3.14. 例 3.9 より, $\Delta = \{1,5,2\}, \Delta' = \{1,5,6\} \subset \mathbb{Z}_8$ に対し $\mathbf{k}(\Delta) = \mathbf{k}(\Delta') = (0,0,1)$. 例 3.11 より, $f_{(1,3,1)} = (2\ 6)(3\ 7) \in P((0,0,1))$ であり, $\Delta^{f_{(1,3,1)}} = \Delta'$ となる. よって, $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_8, \{1,5,2\}) \simeq \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_8, \{1,5,6\})$ である.

4 $|\Delta|$ が最小の反例

2 節で述べたように Ádám 予想 (予想 2.11) の反例が存在するような頂点数 n は完全にわかっている. そこで, 具体的な反例を全て求めることを考える. 本節では, n が 2 のべきのとき, $|\Delta|$ が最小の反例を全て求める. 補題 2.8 より連結なグラフについて考えればよい. 補題 2.8 より $\mathbb{Z}_n^*$ に属する元 $s \in \Delta$ が存在し, Δ と $s^{-1}\Delta$ は共役で $1 \in s^{-1}\Delta$ であるから, 最初から $1 \in \Delta$ と仮定してよい. 頂点数 $n = 2, 4$ で同型な巡回グラフはすべて共役なので反例は存在しない. 以降では $n = 2^\alpha, \alpha \geq 3$ とする.

補題 4.1.

(*i*) $n/2+1 \notin \Delta \subset \mathbb{Z}_n \backslash \{0\} \Rightarrow \mathbf{k}(\Delta) = \mathbf{0}$.
(*ii*) $\mathbf{0} \in K_n$ に対し, $P(\mathbf{0})$ は共役写像以外を含まない.

この補題から次のことが容易に分かる.

系 4.2. $\Delta \subset \mathbb{Z}_n \backslash \{0\}, |\Delta| \leq 2$ のとき, Ádám 予想の反例は存在しない.

$|\Delta| = 3$ の場合の反例を調べる. 補題 4.1 より $1, n/2+1 \in \Delta$ と仮定してよい. $m \in \mathbb{Z}_n, m \neq 0, 1, n/2+1$ に対し,

$$\Delta_{n,m} = \{1, 1+n/2, m\} \subset \mathbb{Z}_n \backslash \{0\}$$

とおき, $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta_{n,m})$ を考えればよい. $\Delta_{n,m}$ のキーは次のように計算される.

命題 4.3. m を整数と考えて素因数分解した際に現れる 2 の指数を e とする. このとき,

$$\mathbf{k}(\Delta_{n,m}) = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{\alpha-e}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{e}).$$

命題 4.4. m が奇数のとき, $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta_{n,m})$ に対して, Ádám 予想の反例は存在しない.

証明. 命題 4.3 より, $\mathbf{k}(\Delta_{n,m}) = \mathbf{0}$. よって, 補題 4.1(ii) より $P(\mathbf{k}(\Delta_{n,m}))$ は共役写像以外を含まないので, Ádám 予想の反例は存在しない. □

われわれの主結果は次の通りである.

定理 4.5. $n = 2^\alpha, \alpha \geq 3, m \in \mathbb{Z}_n, 2|m, 0 < m < n/2$ とする. このとき, $\Delta_{n,m}$ と $\Delta_{n,m+n/2}$ は共役でなく,

$$\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta_{n,m}) \simeq \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta_{n,m+n/2})$$

が成り立つ. すなわち, これらの巡回グラフは Ádám 予想の反例を与える.

証明の概略は次の通りである. まず, $\Delta_{n,m}$ と $\Delta_{n,m+n/2}$ が共役でないことは簡単にわかる. 次に, 命題 4.3 から $\mathbf{k}(\Delta_{n,m}) = \mathbf{k}(\Delta_{n,m+n/2})$ である. 定義 3.10 より

$$\mathbf{m} = (\overbrace{1, \ldots, 1}^{\alpha-e-1}, 1+2^{\alpha-e-1}, \overbrace{1, \ldots, 1}^{e}) \in \mathbb{Z}_n^{**}(\mathbf{k}(\Delta_{n,m}))^o$$

に対して, $f_{\mathbf{m}} \in P(\mathbf{k}(\Delta_{n,m}))$ とわかる. この $f_{\mathbf{m}}$ に対し, $\Delta_{n,m}^{f_{\mathbf{m}}} = \Delta_{n,m+n/2}$ となるので定理 3.13 より $\mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta_{n,m}) \simeq \mathrm{Cay}(\mathbb{Z}_n, \Delta_{n,m+n/2})$ である.

$|\Delta| = 3$ のとき, Ádám 予想の反例は定理 4.5 で挙げたものに限られる. $m = n/2$ のとき, $\mathbf{k}(\Delta_{n,m})$ とキーが等しくなる Δ が存在しないため, 反例は存在しない. それ以外の場合は補題 4.1 と命題 4.3 よりキーが $\mathbf{0}$ となり, 補題 4.1 より反例が存在しない.

参考文献

[1] A.Ádám, ‘Research problems 2-10’ J. Combin. Theory 2 (1967) 393.

[2] Alspach, Brian; Parsons, T. D. Isomorphism of circulant graphs and digraphs. Discrete Math. 25 (1979), no. 2, 97–108.

[3] Egorov, V. N.; Markov, A. I. Ádám's conjecture for graphs with circulant adjacency matrices. (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR 249 (1979), no. 3, 529–532; translation in Soviet Math. Dokl. 20 (1979), 1292–1296.

[4] Elspas, Bernard; Turner, James. Graphs with circulant adjacency matrices. J. Combinatorial Theory 9 (1970), 297–307.

[5] Mans, Bernard; Pappalardi, Francesco; Shparlinski, Igor. On the spectral Ádám property for circulant graphs. Discrete Math. 254 (2002), no. 1-3, 309–329.

[6] Muzychuk, Mikhail. Ádám's conjecture is true in the square-free case. J. Combin. Theory Ser. A 72 (1995), no. 1, 118–134.

[7] Muzychuk, Mikhail. On Ádám's conjecture for circulant graphs. Discrete Math. 176 (1997), no. 1-3, 285–298.

[8] Muzychuk, M. A solution of the isomorphism problem for circulant graphs. Proc. London Math. Soc. (3) 88 (2004), no. 1, 1–41.

[9] Pálfy, P. P. Isomorphism problem for relational structures with a cyclic automorphism. European J. Combin. 8 (1987), no. 1, 35–43.

超平面配置の free path について

九州大学大学院 数理学府 数理専攻
山口徹 (Toru YAMAGUCHI)

概要

超平面配置とはベクトル空間中の超平面の有限集合であり, その対数的ベクトル場のなす加群が自由加群となるような超平面配置を特に自由配置と呼ぶ. 超平面配置の研究では, 様々な観点から研究がなされているが, 代数的側面から行う本研究では, 上記の自由配置に着目して研究を行なっている. 超平面を除去する操作は, 超平面配置において基本的な操作であり, 自由配置から超平面を一枚除去した配置についても研究が進んでおり, その構造についても多くのことが明らかとなっている. その一方で, 複数枚の超平面を除去した配置については, あまり研究が進んでいないのが現状である. そこで本講演では, 自由性を保つように複数枚の超平面を除去する道 (free path) を定義, 考察することで得られた, 自由配置の遺伝性に関する研究結果を紹介する. なお本研究は, 九州大学の阿部拓郎氏との共同研究に基づくものである.

1 導入

この章では超平面配置に関する基本的な事項を紹介し, 本研究で重要な自由配置の定義とその性質について紹介していく.

$\mathbb{K}$ を体, $V = \mathbb{K}^\ell$, $S := \mathrm{Sym}(V^*)$ とする. すなわち, V^* の基底を $x_1, \ldots, x_\ell$ とすると, $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_\ell]$. $H \subset V$ が**超平面**であるとは, ある $\alpha \in V^* \setminus \{0\}$ とある $c \in \mathbb{K}$ が存在して, $H = \{\, x \in V \mid \alpha(x) = c \,\}$ と表されものをいう. $\mathcal{A}$ が**超平面配置**とは, 超平面の有限集合のことをいう. 考えているベクトル空間の次数が重要であるとき, しばしば ℓ **次元配置**ということもある. また, $\mathcal{A}$ の元がすべて原点を通る, すなわち $c = 0$ のとき, 特に $\mathcal{A}$ を中心的配置といい, 本稿では中心的な配置のみを扱う.

定義 1.1.
$H \in \mathcal{A}$ に対して $\mathrm{Ker}(\alpha_H) = H$ なる $\alpha_H \in V^*$ をひとつ決めて固定する. このとき,

$$Q(\mathcal{A}) := \prod_{H \in \mathcal{A}} \alpha_H$$

を, $\mathcal{A}$ の**定義多項式**という.

定義 1.2.

$$L(\mathcal{A}) := \{ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \neq 0 \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \}$$

を $\mathcal{A}$ の**交差束**という．ただし, $\mathcal{B}=\emptyset$ のときは V と定義する．

次に超平面配置に対する重要かつ基本的な操作を挙げておく．

定義 1.3.
$X \in L(\mathcal{A})$ に対し,

$$\mathcal{A}_X := \{H \in \mathcal{A} \mid X \subset H\}$$

を $\mathcal{A}$ の X での**局所化**といい,

$$\mathcal{A}^X := \{H \cap X \mid H \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_X\}$$

を $\mathcal{A}$ の X への**制限**という．

$\mathcal{A}^X$ は $X \simeq \mathbb{K}^{\dim X}$ 中の超平面配置である．特に $H \in \mathcal{A}$ をとると, $\mathcal{A}^H$ は $\mathcal{A}$ より次元が一つ低い配置になる．

$\mathrm{Der}S$ を S の $\mathbb{K}$-線形な S 導分全体の集合, すなわち $\mathrm{Der}S = \bigoplus_{i=1}^{\ell} S\partial_{x_i}$ とする．S は自然な多項式次数を次数とする次数付き環であるため, $\mathrm{Der}S$ はその次数構造を引き継いで次数付き S 加群となる．ここで整数 $d \geqq 0$ に対して, $\theta \in \mathrm{Der}S$ が次数 d の**斉次元**であるとは, $\theta(\alpha)$ が $\alpha(\neq 0) \in V^*$ に対して, 常に次数 d の斉次式となるときにいう．超平面配置の代数では, 以下で定義する $\mathrm{Der}S$ の部分加群 $D(\mathcal{A})$ が主要な研究テーマである．

定義 1.4.
$\mathcal{A}$ の**対数的ベクトル場** $D(\mathcal{A})$ を,

$$D(\mathcal{A}) := \{\theta \in \mathrm{Der}S \mid \theta(\alpha_H) \in H \ (\forall H \in \mathcal{A})\}$$

で定義する．これは次数付き S 加群の構造を持つ．

一般の対数的ベクトル場 $D(\mathcal{A})$ で成り立つことをいくつか紹介する．

定義 1.5.
Euler 微分 $\theta_E \in D(\mathcal{A})$ を次で定義する．

$$\theta_E := \sum_{i=1}^{\ell} x_i \partial_{x_i}$$

θ_E は一次の斉次元であり, 任意の $\mathcal{A}$ に対して $\theta_E \in D(\mathcal{A})$ となる．

補題 1.6. 超平面配置 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ ならば, $D(\mathcal{B}) \supset D(\mathcal{A})$.

$D(\mathcal{A})$ は一般には自由加群ではないが, 自由加群であれば $D(\mathcal{A})$ の階数は ℓ になる．また次数付き

加群の性質から, 基底の各元が斉次元となるように基底をとることができる. これらに注意して, 自由配置を次で定義する.

定義 1.7.
$\mathcal{A}$ が**指数** $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_\ell)$ をもつ**自由配置**とは, $D(\mathcal{A})$ が自由 S 加群で斉次基底 $\theta_1, \ldots, \theta_\ell$ をもち, $\deg \theta_i = d_i (i = 1, \ldots, \ell)$ となることをいう.

次に紹介する定理は斎藤の判定法と呼ばれる, 超平面配置の自由性に必要十分条件を与える定理である. これは自由配置に関する研究に欠かせない大変重要な定理である. まずは斎藤行列について以下で定義する.

命題 1.8 ([4]).
$\theta_1, \ldots, \theta_\ell \in D(\mathcal{A})$ に対して,

$$M = M(\theta_1, \ldots, \theta_\ell) := (\theta_i(x_j))$$

をその**斎藤行列**という. このとき, $\det M \in SQ(\mathcal{A})$.

定理 1.9 (斎藤の判定法 [4]).
$\theta_1, \ldots, \theta_\ell \in D(\mathcal{A})$ に対して以下は同値.

(1) $\mathcal{A}$ は $\theta_1, \ldots, \theta_\ell$ を $D(\mathcal{A})$ の基底とする自由配置.
(2) 斎藤行列 M に対してある $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ が存在して, $\det M = cQ(\mathcal{A})$.
(3) $\theta_1, \ldots, \theta_\ell$ を斉次に取れて, S 上独立かつ $\sum_{i=1}^{\ell} \deg \theta_i = |\mathcal{A}|$.

斎藤の判定法を用いた自由性を決定する簡単な例として, 以下のようなものがある.

系 1.10. 任意の 2 次元配置 $\mathcal{A}$ は自由配置で, その指数は $\exp(\mathcal{A}) = (1, |\mathcal{A} - 1|)$.
$\because$) 座標を取り替えて $\mathcal{A}$ が超平面 $\{x = 0\}$ を含むようにできる. このとき, θ_E, $\dfrac{Q(\mathcal{A})}{x}\partial_x$ はともに $D(\mathcal{A})$ に含まれ, 斎藤の判定法から $D(\mathcal{A})$ の基底になることがわかる.

2 準備

本研究では, 自由配置から超平面を複数枚除去した配置の構造を考察することを目標としている. そのために, その準備としてこの章では, 自由配置から超平面を一枚除去した配置, そして一枚加えた配置に関する定理をいくつか紹介する.

定理 2.1 ([3]).
$\mathcal{A}$ を ℓ 次元配置, $H \in D(\mathcal{A})$ とし, $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{H\}$ とおく. このとき以下の (1), (2), (3) のうち二つ

が成立すれば, 残り一つも成立する.

(1) $\mathcal{A}$ が自由配置で, $\exp(\mathcal{A}) = (d_1, \ldots, d_{\ell-1}, d_\ell)$.
(2) $\mathcal{A}'$ が自由配置で, $\exp(\mathcal{A}') = (d_1, \ldots, d_{\ell-1}, d_\ell - 1)$.
(3) $\mathcal{A}^H$ が自由配置で, $\exp(\mathcal{A}^H) = (d_1, \ldots, d_{\ell-1})$.

$\mathcal{A}$ か $\mathcal{A}'$ が自由配置のとき, もう一方が自由配置であるかどうかを調べるには, $\mathcal{A}^H$ を調べればよい. ここで $\mathcal{A}^H$ は次元が一つ低い配置であり, 直接 $\mathcal{A}$ や $\mathcal{A}'$ を調べるより計算が簡単であることが多い.

定義 2.2 ([1] の Definition 1.1).
超平面配置 $\mathcal{A}$ が次の極小自由分解を持つとき, $\mathcal{A}$ は**指数** $\mathrm{POexp}(\mathcal{A})= (d_1, \ldots, d_\ell)$, **level** d の **POG 配置**という.

$$0 \longrightarrow S[-d-1] \xrightarrow{(\alpha, f_1, \cdots, f_\ell)} S[-d] \oplus (\oplus_{i=1}^{\ell} S[-d_i]) \longrightarrow D(\mathcal{A}) \longrightarrow 0.$$

特に $\alpha \neq 0$ のとき, $\mathcal{A}$ を **SPOG 配置**という.

つまり SPOG 配置とは, $\ell + 1$ つの生成元を持ち, その生成元の間に関係式が 1 つ存在する配置のことである. これは自由配置より構造が少しだけわるい配置といえる.

定理 2.3 ([1] の Theorem 1.4).
$\mathcal{A}$ を指数 $\exp = (d_1, \ldots, d_\ell)$ をもつ自由配置とし, $H \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{H\}$ とする.
このとき, $\mathcal{A}'$ が自由配置でないならば, $\mathcal{A}'$ は SPOG 配置で指数 $\mathrm{POexp}(\mathcal{A}')=(d_1, \ldots, d_\ell)$, level $d = |\mathcal{A}'| - |\mathcal{A}^H|$ をもつ.

この定理から自由配置から超平面を一枚除去した配置は, 自由または SPOG 配置であり, 極端に構造がわるくなることはないとわかる. それでは次に一枚加えた配置についても見ていくとする.

定理 2.4 ([3]).
$H \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{H\}$ とする.
このとき, 次数が $|\mathcal{A}| - |\mathcal{A}^H| - 1$ である斉次多項式 B が存在して, 任意の $\theta \in \mathcal{A}'$ に対して $\theta(\alpha_H) \in (\alpha_H, B)$ を満たすものが存在する.
この B を $(\mathcal{A}', H)$ の多項式 B という.

今 $D(\mathcal{A}) \subset D(\mathcal{A}')$ であるが, 多項式 B は $D(\mathcal{A}')$ の元 θ がどの程度 $D(\mathcal{A})$ からはみ出すかを表す. つまり多項式 B を使えば, H を加えたときの各元 θ の様子がわかる. 実際, 次の系がわかる.

系 2.5. $\theta \in D(\mathcal{A}')$ が, $(\mathcal{A}', H)$ の多項式 B に対して, $\deg \theta < \deg B$ ならば $\theta \in D(\mathcal{A})$.

$\because$) $\theta(\alpha_H) \in (\alpha_H, B)$ より $\theta(\alpha_H) = f\alpha_H + gB$ $(f, g \in S)$ とかける．$g \neq 0$ ならば, $\deg\theta = \deg(f\alpha_H + gB) \geqq \deg B$. よって $g = 0$ となり, $\theta \in D(\mathcal{A})$ がわかる．

では次に一枚加えたときの配置全体の構造について見ていく．

定義 2.6 ([2] の Definition 3.2).
$\mathcal{A}$ を超平面配置, $H \in \mathcal{A}$ に対する $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{H\}$ を自由配置とする．
このとき, $\mathcal{FB}(\mathcal{A}')$ を $D(\mathcal{A}')$ の基底の組をすべて含む集合とし, 各 $X := \{\theta_1, \ldots, \theta_\ell\} \in \mathcal{FB}(\mathcal{A}')$ に対して,

$$NT(X) := |\{i \mid 1 \leqq i \leqq \ell, \theta_i \notin D(\mathcal{A})\}|$$

と定義する．また,

$$SNT(\mathcal{A}', H) := \min\{NT(X) \mid X \in \mathcal{FB}(\mathcal{A}')\}$$

と定義する．

系 2.7. $\mathcal{A}'$ を $SNT(\mathcal{A}', H) = 1$ なる自由配置とすると, $\mathcal{A}$ は自由配置．
$\because$) $D(\mathcal{A}')$ の基底で, $\theta_1, \ldots, \theta_{\ell-1} \in D(\mathcal{A})$, $\theta_\ell \notin D(\mathcal{A})$ なる $\theta_1, \ldots, \theta_\ell \in D(\mathcal{A}')$ がとれる．このとき, 斎藤の判定法から $\theta_1, \ldots, \theta_{\ell-1}, \alpha_H\theta_\ell$ が $D(\mathcal{A})$ の基底になることがわかる．

定理 2.8 ([1] の Theorem 1.9, [2] の Propotision 3.5).
$\mathcal{A}'$ を $SNT(\mathcal{A}', H) = 2$ なる自由配置とし, $\theta_1, \ldots, \theta_\ell \in D(\mathcal{A}')$ を $\theta_i, \theta_j \notin D(\mathcal{A}), \theta_k \in D(\mathcal{A})$ $(k \neq i, j)$ なる $D(\mathcal{A}')$ の基底とする．
このとき, ある次数が $\deg\,\theta_i + \deg\,\theta_j - |\mathcal{A}'| + |\mathcal{A}^H|$ なる $D(\mathcal{A})$ の元 φ が存在して, $D(\mathcal{A})$ は $\{\theta_k\}_{k \neq i,j} \cup \{\alpha_H\theta_i, \alpha_H\theta_j, \varphi\}$ で生成される．特に, $\mathcal{A}$ は SPOG 配置になる．

系 2.9. $\ell = 3$ のとき, $\mathcal{A}'$ が自由配置ならば $\mathcal{A} = \mathcal{A}' \cup \{H\}$ は自由または SPOG 配置．
$\because$) $\theta_E \in D(\mathcal{A}')$ より, $SNT(\mathcal{A}', H) \leqq 2$.

命題 2.10 ([2] の Proposition 3.4).
$\mathcal{A}'$ を $SNT(\mathcal{A}', H) \geqq 3$ なる自由配置とすると, $\mathcal{A}$ は自由配置でも SPOG 配置でもない．

3 主結果

この章では, 我々の研究の成果について紹介させてもらう．そのためにまず, 超平面配置の自由性の遺伝に関する用語を定義する．

定義 3.1.

$H_1, H_2, \cdots, H_n \in \mathcal{A}$, $\mathcal{B} := \mathcal{A} \setminus \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ とする.
ある n 次対称群の元 σ が存在し, 超平面配置 $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \setminus \{H_{\sigma(1)}\}$, $\mathcal{A} \setminus \{H_{\sigma(1)}, H_{\sigma(2)}\}$, $\cdots$, $\mathcal{A} \setminus \{H_{\sigma(1)}, H_{\sigma(2)}, \cdots, H_{\sigma(n)}\}$ がすべて自由配置となるとき, 超平面配置の組 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は **free path** をもつという.

free path をもつとは, すなわち $\mathcal{A}$ から $\mathcal{B}$ まで自由性を保ちながら超平面を除去するやり方が存在するということである. 例えば $n = 2$ のときを考えてみる. このとき $\mathcal{B}$ は $\mathcal{A}$ から 2 枚の超平面 H_1 と H_2 を除去した配置であるが, その除去の仕方は 2 通りある. H_1 を除去してから H_2 を除去するやり方 $\mathcal{A} \xrightarrow{-H_1} \mathcal{A} \setminus \{H_1\} \xrightarrow{-H_2} \mathcal{B}$, そして H_2 を除去してから H_1 を除去するやり方 $\mathcal{A} \xrightarrow{-H_2} \mathcal{A} \setminus \{H_2\} \xrightarrow{-H_1} \mathcal{B}$ の 2 通りである. $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ が free path を持つとは, いずれかの方法で, 経由する超平面配置が常に自由配置になるように順に超平面を除去できるということである. 次に示すこの free path についての定理が我々の研究の主結果である.

主定理 3.2.
$\mathcal{A} : \ell$ 次元配置とし, $H_1, H_2 \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}'' := \mathcal{A} \setminus \{H_1, H_2\}$ とする.
このとき, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}''$ がともに自由配置ならば, $(\mathcal{A}, \mathcal{A}'')$ は free path をもつ.
すなわち, $\mathcal{A} \setminus \{H_1\}$ または $\mathcal{A} \setminus \{H_2\}$ は自由配置.

例えば, 指数がわかっている 3 次元配置 $\mathcal{A}$ から二枚の超平面を除去した配置の自由性について考えてみる. このとき系 1.10 から任意の超平面 $H \in D(\mathcal{A})$ での制限 $\mathcal{A}^H$ は自由配置であり, その指数も $|\mathcal{A}^H|$ によって定まる. よって, 定理 2.1 から $|\mathcal{A}^H|$ の値がわかれば, 超平面を一枚除去した配置について, その自由性と指数が決定する. すなわち, 自由配置から一枚除去した配置の構造は（次元が低ければ）比較的簡単に計算することができるわけだ. ここで $\mathcal{A} \setminus \{H_1\}$ と $\mathcal{A} \setminus \{H_2\}$ のいずれかが自由であれば, $\mathcal{A}''$ は自由配置から一枚除去した配置であり, 自由配置であるかどうか, 簡単に確かめることができる. 逆に $\mathcal{A} \setminus \{H_1\}$ と $\mathcal{A} \setminus \{H_2\}$ のいずれも自由配置でないのであれば, 主定理 3.2 から $\mathcal{A}''$ が少なくとも自由配置ではないことがわかる. より高次元の場合も, 計算は複雑になるものの, 次元を一つ落とした配置の問題に帰着できるという点は変わらない.

$\ell = 3$ の場合に限定したとき, より強い結果が得られることが本研究で判明したので, 最後にそれを紹介する,

主定理 3.3.
$\mathcal{A} : 3$ 次元配置 とし, $H_1, H_2, H_3 \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}''' := \mathcal{A} \setminus \{H_1, H_2, H_3\}$ とする.
このとき, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'''$ がともに自由配置ならば, $(\mathcal{A}, \mathcal{A}''')$ は free path をもつ.

参考文献

[1] Takuro Abe, Plus-one generated and next to free arrangements of hyperplanes, Int. Math. Res. Not. IMRN 2021, no. 12, 9233-9261.

[2] Takuro Abe, Generalizaion of the addition and restriction theorems from free arrangements to the class of projective dimension one, arXiv: 2206.15059.

[3] Hiroaki Terao, Arrangements of hyperplanes and their freeness I. II. J. Fac, Sci. Univ. Tokyo 27(1980), 293-320.

[4] Kyoji Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector field. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 27(1980), 265-291.

[5] Peter Orlik and Hiroaki Terao, Arrangements of Hyperplanes. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 300. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

放物接続のモジュライ空間の記述

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
松本 孝文 (Takafumi MATSUMOTO)

概 要

放物接続は線形微分方程式系の幾何学的対応物であり、そのモジュライ空間は接続の階数が 2 階の場合は具体的な記述がなされている。本講演では射影直線上の 3 点で確定特異点を持つ 3 階の放物接続のモジュライ空間とそのコンパクト化の記述について紹介する。

1 導入

放物接続のモジュライ空間とは、ざっくりと言えば線形微分方程式系の同値類全体のなす空間である。このモジュライ空間はいくつかのパラメータをもつが、あるパラメータにおいては Painlevé 第 VI 方程式の初期値空間と一致する。言い変えれば、Painlevé 第 VI 方程式の初期値空間は接続のモジュライ空間として実現される、ということである。Painlevé 方程式の初期値空間は良いコンパクト化を持つが、第 VI 方程式の場合はそのコンパクト化もモジュライ理論から得られることが知られている [IIS2]。すると、他のタイプの Painlevé 方程式についても、その初期値空間と良いコンパクト化が接続のモジュライ空間として実現されるのではないか、という考えが自然と湧き上がる。ところで、Painlevé 方程式の初期値空間とその良いコンパクト化はあるタイプの非特異射影有理曲面として特徴付けられる。このタイプの有理曲面は坂井氏 [Sa] により分類されている。Arinkin-Borodin[AB] はあるタイプの差分方程式のモジュライ空間が坂井氏の分類における $A_2^{(1)*}$ 型曲面から反標準因子を除いた空間に同型であることを証明した。このタイプの差分方程式は Mellin 変換により射影直線上の 3 点で確定特異点を持つ 3 階の線形微分方程式系に対応する。このことから射影直線上 3 点確定特異 3 階接続のモジュライ空間も上記の有理曲面であることがしたがう。しかしながら、Arinkin-Borodin はモジュライ空間そのもののコンパクト化は扱っておらず、彼らの方法では $A_2^{(1)*}$ 型曲面全体を得られていない。本講演では、$A_2^{(1)*}$ 型曲面全体が見かけの特異点理論を用いることで放物 ϕ-接続のモジュライ空間から得られることを説明する。本稿では必要な定義や主な結果について紹介する。

2 安定放物接続のモジュライ空間

この節では放物接続を定義し放物接続のモジュライ空間の性質を述べる。本稿では各定義を複素射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の 3 階の場合に行うが、一般の階数や種数についても同様に定義される。$\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ を $\mathbb{P}^1$ の異なる n 点の組とし、$D = t_1 + \cdots + t_n$ を $\mathbb{P}^1$ 上の有効因子とする。

定義 2.1. $\boldsymbol{\nu} = (\nu_{i,j})_{0\le j\le 2}^{1\le i\le n} \in \mathbb{C}^{3n}$ とする。以下の条件を満たす組 $(E, \nabla, l_* = \{l_{i,*}\}_{1\le i\le n})$ を $(\mathbb{P}^1, \mathbf{t})$ 上の 3 階の $\boldsymbol{\nu}$-放物接続と呼ぶ。

(1) E は $\mathbb{P}^1$ 上の 3 階のベクトル束。

(2) $l_{i,*}\colon E|_{t_i} := E \otimes k(t_i) = l_{i,0} \supsetneq l_{i,1} \supsetneq l_{i,2} \supsetneq l_{i,3} = \{0\}$ は E の t_i における放物構造。

(3) $\nabla\colon E \to E \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(D)$ は $(\mathbb{P}^1, \mathbf{t})$ 上の対数的接続、すなわち、任意の $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, s \in E$ に対し $\nabla(fa) = s \otimes df + f\nabla(s)$ を満たす。さらに ∇ は任意の i, j に対し $(\mathrm{res}_{t_i}(\nabla) - \nu_{i,j}\mathrm{id})(l_{i,j}) \subset l_{i,j+1}$ を満たす。ここで $\mathrm{res}_{t_i}(\nabla)$ とは ∇ が定める $E|_{t_i}$ の自己準同型である。

$U \subset \mathbb{P}^1$ をある開集合、z をその座標とし、$t_1, \ldots, t_n \in U$ とする。E が U 上自明である、すなわち $E|_U \cong \mathcal{O}_U^{\oplus 3}$ であるとき、対数的接続 ∇ は U 上

$$d + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z - t_i} dz$$

と表すことができる。ここで d は外微分であり、A_i は複素数値の 3 次正方行列である。接続が線形微分方程式系の幾何学的対応物であるとはこのような意味である。なお、このとき $\mathrm{res}_{t_i}\nabla$ とは A_i が定める線形写像に他ならない。定義 2.1 の条件 (3) より A_i は $\nu_{i,0}, \nu_{i,1}, \nu_{i,2}$ を固有値に持つことがわかる。

対数的接続の各特異点における固有値たちは次の関係式を満たす。

補題 2.2. (Fuchs 関係式) (E, ∇, l_*) を $(\mathbb{P}^1, \mathbf{t})$ 上の $\boldsymbol{\nu}$-放物接続とする。このとき、

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{2} \nu_{i,j} + \deg E = 0$$

が成立する。

自然数 n と整数 d に対し、集合 $\mathcal{N}_{n,d}$ を

$$\mathcal{N}_{n,d} := \left\{ (\nu_{i,j})_{0 \le j \le 2}^{1 \le i \le n} \in \mathbb{C}^{3n} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{2} \nu_j^{(i)} + d = 0 \right\}$$

で定義する。$\mathcal{N}_{n,d}$ は n 個の特異点を持つ次数 d の対数的接続の固有値のデータになりうる複素数の組の集合である。

重み $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_{i,j}\}_{1 \le j \le 3}^{1 \le i \le n}$ を各 $i = 1, \cdots, n$ に対し $0 < \alpha_{i,1} < \alpha_{i,2} < \alpha_{i,3} < 1$ であり、さらに $(i,j) \neq (i',j')$ なる組に対し $\alpha_{i,j} \neq \alpha_{i',j'}$ となる有理数の集合とする.

定義 2.3. $\boldsymbol{\nu}$-放物接続 (E, ∇, l_*) が $\boldsymbol{\alpha}$-安定であるとは、ゼロでない部分束 $F \subsetneq E$ で $\nabla(F) \subset F \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(D)$ なる全ての F に対し、不等式

$$\frac{\deg F + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{3} \alpha_{i,j} \dim((F|_{t_i} \cap l_{i,j-1})/(F|_{t_i} \cap l_{i,j}))}{\mathrm{rank}\, F} < \frac{\deg E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{3} \alpha_{i,j}}{\mathrm{rank}\, E}$$

が成り立つときをいう。

T_n を $\mathbb{P}^1$ の相異なる n 点の組の集合とする。すなわち

$$T_n := \{(t_i)_{1 \le i \le n} \in (\mathbb{P}^1)^n \mid t_i \neq t_j, i \neq j\}$$

とする。

定理 2.4. ([IIS1][In]) $\boldsymbol{\alpha}$-安定な 3 階の放物接続の相対的な粗モジュライ空間

$$M_n^{\boldsymbol{\alpha}}(d) \longrightarrow T_n \times \mathcal{N}_{n,d}$$

が存在する。このとき、各 $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu}) \in T_n \times \mathcal{N}_{n,d}$ 上のファイバー $M_n^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu})$ は次数が d である $(\mathbb{P}^1, \boldsymbol{t})$ 上の $\boldsymbol{\alpha}$-安定な $\boldsymbol{\nu}$-放物接続のモジュライ空間である。また、$M_n^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu})$ は $6n - 16$ 次元の非特異準射影的多様体である。

3 安定放物 ϕ-接続のモジュライ空間

この節では放物 ϕ-接続を定義し主結果 1 について述べる。2 階の放物 ϕ-接続はモジュライ空間のコンパクト化のため稲場・岩﨑・齋藤 [IIS1][IIS2] により導入された。本稿における放物 ϕ-接続は高階への一般化を目指して導入したものである。

定義 3.1. 以下の条件を満たす組 $(E_1, E_2, \phi, \nabla, l_*^{(1)} = \{l_{i,*}^{(1)}\}_{1\le i\le n}, l_*^{(2)} = \{l_{j,*}^{(2)}\}_{1\le j\le n})$ を $(\mathbb{P}^1, \boldsymbol{t})$ 上の 3 階の $\boldsymbol{\nu}$-放物 ϕ-接続と呼ぶ。

(1) E_1, E_2 は $\mathbb{P}^1$ 上の 3 階のベクトル束。

(2) $l_{i,*}^{(1)}\colon E_1|_{t_i} = l_{i,0}^{(1)} \supsetneq l_{i,1}^{(i)} \supsetneq l_{i,2}^{(i)} \supsetneq l_{i,3}^{(i)} = \{0\}$, $l_{i,*}^{(2)}\colon E_2|_{t_i} = l_{i,0}^{(2)} \supsetneq l_{i,1}^{(2)} \supsetneq l_{i,2}^{(2)} \supsetneq l_{i,3}^{(2)} = \{0\}$ はそれぞれ E_1, E_2 の t_i における放物構造。

(3) $\phi\colon E_1 \to E_2$ はベクトル束の準同型で任意の i, j に対し $\phi_{t_i}(l_{i,j}^{(1)}) \subset l_{i,j}^{(2)}$ を満たす。

(4) $\nabla\colon E_1 \to E_2 \otimes \Omega^1_{\mathbb{P}^1}(t_1 + \cdots + t_n)$ は対数的 ϕ-接続、すなわち任意の $f \in \mathcal{O}^1_{\mathbb{P}}, s \in E$ に対し $\nabla(fs) = \phi(s) \otimes df + f\nabla(s)$ を満たす。さらに ∇ は任意の i, j に対し $(\mathrm{res}_{t_i}(\nabla) - \nu_{i,j}\phi_{t_i})(l_j^{(1)}) \subset l_{j+1}^{(2)}$ を満たす。

$\boldsymbol{\nu}$-放物接続 (E, ∇, l_*) に対し組 $(E, E, \mathrm{id}, \nabla, l_*, l_*)$ は $\boldsymbol{\nu}$-放物 ϕ-接続となる。逆に ϕ が同型であるとき、$\boldsymbol{\nu}$-放物 ϕ-接続 $(E_1, E_2, \phi, \nabla, l_*^{(1)}, l_*^{(2)})$ はある $\boldsymbol{\nu}$-放物接続 (E, ∇, l_*) により得られる $\boldsymbol{\nu}$-放物 ϕ-接続 $(E, E, \mathrm{id}, \nabla, l_*, l_*)$ と同型となる。

$k = 1, 2$ に対し、$\boldsymbol{\alpha}_k = \{\alpha_{i,j}^{(k)}\}_{1\le j\le 3}^{1\le i\le n} \in (0,1)^{3n}$ を各 $i = 1, \ldots, n$ に対し不等式 $0 < \alpha_{i,1}^{(k)} < \alpha_{i,2}^{(k)} < \alpha_{i,3}^{(k)} < 1$ を満たし、さらに $(i, j) \ne (i', j')$ なる組に対し $\alpha_{i,j}^{(k)} \ne \alpha_{i',j'}^{(k)}$ となる有理数の集合とする。

定義 3.2. $\boldsymbol{\nu}$-放物 ϕ-接続 $(E_1, E_2, \phi, \nabla, l_*^{(1)}, l_*^{(2)})$ が $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$-安定であるとは、任意の部分束 $F_1 \subseteq E_1, F_2 \subseteq E_2, (F_1, F_2) \ne (0, 0)$ で $\phi(F_1) \subset F_2$ かつ $\nabla(F_1) \subset F_2 \otimes \Omega^1_C(D)$ なる組 (F_1, F_2) に対し不等式

$$\frac{\deg F_1 + \deg F_2(-\gamma) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^2 \alpha_{i,j}^{(1)} d_{i,j}^{(1)}(F_1) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^2 \alpha_{i,j}^{(2)} d_{i,j}^{(2)}(F_2)}{\mathrm{rank}\, F_1 + \mathrm{rank}\, F_2}$$
$$< \frac{\deg E_1 + \deg E_2(-\gamma) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^2 \alpha_{i,j}^{(1)} d_{i,j}^{(1)}(E_1) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^2 \alpha_{i,j}^{(2)} d_{i,j}^{(2)}(E_2)}{2\mathrm{rank}\, E}$$

が成立するときをいう。ここで $k = 1, 2$ に対し $d_{i,j}^{(k)}(F) = \dim(F|_{t_i} \cap l_{i,j}^{(k)})/(F|_{t_i} \cap l_{i,j+1}^{(k)})$ である。

主結果 1

(1) $(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$-安定な 3 階の放物 ϕ-接続の相対的な粗モジュライ空間

$$\overline{M_n^{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}}(d) \longrightarrow T_n \times \mathcal{N}_{n,d}$$

が存在する。また、$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$ が generic なとき $\overline{M_n^{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}}(d)$ は $T_n \times \mathcal{N}_{n,d}$ 上射影的である。特に各 $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu}) \in T_n \times \mathcal{N}_{n,d}$ 上のファイバー $\overline{M_n^{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu})$ は射影多様体となる。

(2) $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\alpha}_2$ とする。 このとき部分集合

$$U_{\mathrm{isom}} := \left\{ (E_1, E_2, \phi, \nabla, l_*^{(1)}, l_*^{(2)}) \in \overline{M_n^{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu}) \;\middle|\; \phi \text{ は同型写像} \right\}$$

は $\overline{M_n^{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu})$ の Zariski 開集合である。さらに U_{isom} は $\boldsymbol{\alpha}$-安定な $\boldsymbol{\nu}$-放物接続のモジュライ空間 $M_n^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu})$ と同型である。

4 モジュライ空間の記述

最後の節では射影直線上の 3 点で確定特異点を持つ 3 階の放物接続のモジュライ空間の記述について紹介する。

L_1, L_2, L_3 を $\mathbb{P}^2$ 上の 1 点 p を通る相異なる 3 本の直線とし、各 $i = 1, 2, 3$ に対し $p_{i,1}, p_{i,2}, p_{i,3} \in L_i \setminus \{p\}$ を相異なる点とする。$\pi\colon S \to \mathbb{P}^2$ を 9 点 $\{p_{i,j}\}_{1\le i,j\le 3}$ を Blow-up することで得られる曲面とし、$L_i' = \overline{\pi^{-1}(L_i \setminus \{p_{i,1}, p_{i,2}, p_{i,3}\})}$ とする。このとき $\cup_{i=1}^3 L_i'$ は S の反標準因子を与える。また L_1', L_2', L_3' の交差をグラフで表すとディンキン図形 $A_2^{(1)*}$ が現れる。この S を $A_2^{(1)*}$ 型曲面と呼ぶ。

$d=-2$ とし、$\boldsymbol{\nu}\in\mathcal{N}_{3,-2}$ は条件

$$\nu_{1,0}+\nu_{1,1}+\nu_{1,2}=\nu_{2,0}+\nu_{2,1}+\nu_{2,2}=0,\quad \nu_{3,0}+\nu_{3,1}+\nu_{3,2}=2$$

を満たすとする。このとき任意の $\boldsymbol{\nu}$-放物接続 (E,∇,l_*) に対し $(\wedge^3E,\mathrm{tr}\nabla)\cong(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2t_3),d)$ が成立することに注意する。

主結果 2 各 $i=1,2,3$ に対し $\nu_{i,0},\nu_{i,1},\nu_{i,2}$ は相異なるとする。このとき適当な $\boldsymbol{\alpha}$ に対し $\overline{M_3^{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\nu})$ は $A_2^{(1)*}$ 型曲面 S と同型となる。また、

$$Y(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\nu}):=\{\wedge^3\phi=0\}\subset\overline{M_3^{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\nu})$$

は $\overline{M_3^{\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha}}}(\boldsymbol{t},\boldsymbol{\nu})$ の反標準因子をなす。

参考文献

[AB] D. Arinkin and A. Borodin, Moduli spaces of d-connections and difference Painleve equations, em Duke Math. J., 134(3):515–556, 2006. Math/0411584.

[IIS1] M. Inaba and K. Iwasaki and M. -H. Saito, Moduli of stable parabolic connections, Riemann-Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. I, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 42 (2006), no. 4, 987–1089.

[IIS2] M. Inaba and K. Iwasaki and M. -H. Saito, Moduli of stable parabolic connections, Riemann-Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. II, Adv. Stud. Pure Math., 45, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2006).

[In] M. Inaba, Moduli of parabolic connections on curves and the Riemann-Hilbert correspondence, J. Algebraic Geom. 22 (2013), no. 3, 407–480.

[Sa] H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, Comm. Math. Phys., 220(1):165–229, 2001.

量子等質空間上の同変有限被覆の分類

東京大学大学院 数理科学研究科 数理科学専攻
星野 真生 (Mao HOSHINO)

概要

Gelfand-Naimark 双対性によると，可換 C*環とコンパクト Hausdorff 空間は完全に等価な概念である．したがって原理的には被覆写像も C*環の言葉で言い表すことができ，実際に対応する条件が一般の C*環の間の単射に対して定義できる．本講演ではそのような「非可換な被覆空間」に対する作用素環的・テンソル圏論的なアプローチを概説し，最後に量子群同変な場合における結果を紹介する．

作用素環論と呼ばれる関数解析の一分野がある．これは Murray と von Neumann による 1930 年代の研究に端を発する分野であり，雑に言ってしまえば Hilbert 空間上の有界作用素のなす環であって，然るべき位相について閉集合になっており，また随伴をとる操作で閉じているものを研究する分野である．ここでいう「然るべき位相」は作用素ノルムによる位相と強位相と呼ばれる位相の 2 種類があり，そのどちらを考えるかでそれぞれ **C*環**と **von Neumann 環**と呼ばれる．一見限定的な対象を考えているように思えるこの分野は，幾何学や数理物理学など様々な他分野と交流を持ちながら発展を遂げてきた．その大きな原動力となったのが次の定理である．

定理 1 (Gelfand-Naimark 双対性)**.** コンパクト Hausdorff 空間とその間の連続写像のなす圏と可換 C*環のなす圏は反変的に圏同値である．また，この圏同値はコンパクト Hausdorff 空間 X に対して X 上の複素数値連続関数全体 $C(X)$（に構造を付与したもの）を対応させることで得られる．

この定理はコンパクト Hausdorff 空間に対してできることは必ず可換 C*環に対してもできると主張しており，例えばコンパクト Hausdorff 空間の間の連続写像が被覆写像であるための必要十分条件をその上の関数環を用いて記述することができる．

定理 2 (c.f. [Wa90, Proposition 2.8.9.])**.** $\pi\colon Y \longrightarrow X$ をコンパクト Hausdorff 空間の間の連続写像とする．また $\pi^*\colon C(X) \longrightarrow C(Y)$ を $\pi^*(f) = f \circ \pi$ で定める．このとき π が被覆写像であるための必要十分条件は，次の条件を満たす $E\colon C(Y) \longrightarrow C(X)$ が存在することである：

(i) $C(Y)$ を π^* により両側 $C(X)$ 加群とみなしたとき，E は両側 $C(X)$ 加群準同型.
(ii) $E(1_Y) = 1_X$.
(iii) $f \geq 0 \Rightarrow E(f) \geq 0$.

(iv) $(\phi_i)_{i=1}^n \subset C(Y)$ で任意の $f \in C(Y)$ に対して次の等式を満たすものが存在する：

$$f = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \pi^*\big(E(\overline{\phi_i} f)\big).$$

ここで重要なのはこれらの条件がいずれも一般の C*環に対しても意味をもつことである．一般に（単位的）C*環 B とその部分 C*環 A が与えられたとき，両側 A 加群準同型 $E\colon B \longrightarrow A$ で $E(1) = 1$ かつ $b \geq 0 \Rightarrow E(b) \geq 0$ を満たすものを B から A への**条件付期待値**という．また E が**指数有限**であるとは，$(v_i)_{i=1}^n \subset B$ で任意の $b \in B$ に対して次の等式を満たすものが存在することをいう ([Wa90, Definition 1.2.2.])：

$$b = \sum_{i=1}^{n} v_i E(v_i^* b).$$

これらの語彙を用いることにすれば，先程の定理 2 は全空間及び底空間がコンパクト Hausdorff 空間であるような被覆空間は可換 C*環の包含で指数有限な条件付期待値を持つようなものと等価であると主張していると理解できる．

さて，Gelfand-Naimark 双対性の重要な側面の 1 つに「**可換でない作用素環は空間の非可換化とみなせる**」という指導原理を与えていることが挙げられる．このことを踏まえると，C*環の包含であって指数有限な条件付期待値を持つものは或る種非可換な被覆空間と捉えることができる．被覆空間は良い条件下で基本群作用を用いた分類ができることが知られているため，この「非可換な被覆空間」についても何らかの分類結果を期待するのは自然である．そこで重要になるのが **C*（多重）テンソル圏** ([NT13, Definition 2.2.1.]) である．これは半単純な $\mathbb{C}$ 線型圏に射の随伴やノルム，また対象のテンソル積などを付与したものであり，例えば Hilbert 空間のなす圏 Hilb やコンパクト Hausdorff 空間 X 上のエルミート計量付き複素ベクトルバンドルのなす圏が典型例である．今回の「非可換な被覆空間」で重要な役割を果たすのは後者の非可換版とも言える A 上の **correspondence** のなす圏 Corr_A である．A 上の correspondence とは，両側 A 加群 M に写像 $\langle -,- \rangle_A : E \times E \longrightarrow A$ で以下の条件を満たすものを付与したものの中で，然るべきノルムについて完備なもののことである：

$$\langle \xi, \xi \rangle_A \geq 0, \quad \langle \xi, \eta \rangle_A = \langle \eta, \xi \rangle_A^*, \quad \langle \xi, \eta a \rangle_A = \langle \xi, \eta \rangle_A a, \quad \langle \xi, a\eta \rangle_A = \langle a^* \xi, \eta \rangle_A .$$

例えば指数有限な条件付期待値 $E\colon B \longrightarrow A$ が与えられると，そこから A 上の correspondence B_E が得られる．これは B（の適切な完備化）に $\langle b, b' \rangle_A = E(b^* b')$ により右 A 値内積を入れたものである．ここで重要なのは E が指数有限であるおかげで積写像が有界両側 A 準同型 $m\colon B_E \otimes_A B_E \longrightarrow B_E$ を与えることである（ここでのテンソル積の意味は省略する）．したがって組 $(B_E, m, A \subset B_E)$ は Corr_A 内の代数対象のようなものを与える．より正確には **Q-system** ([LR97, Section 6]) と呼ばれる代数対象の C*環版と呼ぶべきものが構成されており，逆に Corr_A 内の Q-system が与えられると，そこから指数有限な条件付期待値をもつ包含 $A \subset B$ を作ることができる．

以上のことから A を底空間とする非可換な被覆空間を分類することは，Corr_A 内の Q-system を分類することに帰着される．もちろん多くの場合に Corr_A は非常に巨大な圏であるためこのような分類を完全に遂行することはできないが，それでも分類をする際には非常に大きな指針となるものである．

今回の私の研究では以上の話をコンパクト量子群作用が入った状況で取り扱い，単連結コンパクト Lie 群の神保-Drinfeld q 変形という広く興味を持たれているコンパクト量子群の作用について，分類問題をその極大トーラスの作用に関する分類問題に帰着できることを示した．

定理 3 (H.)**.** $\mathbb{G}$ をコンパクト量子群，$\mathbb{K}$ をその最大 Kac 型部分量子群とする．もし $\mathbb{K}$ がコンパクト群であれば，任意の $\mathbb{K}$ の量子等質空間 A について，誘導関手 $\mathrm{Ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}\colon \mathbb{K}\text{-}\,\mathrm{Corr}_A^{\mathrm{rf}} \longrightarrow \mathbb{G}\text{-}\,\mathrm{Corr}_{\mathrm{Ind}_{\mathbb{K}}^{\mathbb{G}}A}^{\mathrm{rf}}$ は C*テンソル圏の圏同値を与える．

もし $\mathbb{G}$ が単連結コンパクト Lie 群 G の神保-Drinfeld q 変形 G_q である場合，その最大 Kac 型部分量子群は極大トーラス T に一致する ([To07, Lemma 4.10.])．また A を自明な T 作用付き C*環 $\mathbb{C}$ とすれば，その誘導作用 $\mathrm{Ind}_T^{G_q}\mathbb{C}$ は $C(T\backslash G_q)$ に一致する．$T\text{-}\,\mathrm{Corr}_{\mathbb{C}}^{\mathrm{rf}} \cong \mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}T$ が容易に観察できるため，以上のことから次のような系を得ることができる．

系 4 (H.)**.** $C(T\backslash G_q)$ 上の G_q 同変有限被覆は，T 作用付き有限次元 C*環により分類される．

参考文献

[DY13] K. De Commer, M. Yamashita, *Tannaka-Krein duality for compact quantum homogeneous spaces. I. General theory*, Theory Appl. Categ. **28** (2013), No. 31, 1099-1138.

[HKLS] R. Høegh-Krohn, M. Landstad, E. Størmer, *Compact ergodic groups of automorphisms*, Ann. of Math., **114** (1981), 75-86.

[LR97] R. Longo, J. E. Roberts, *A theory of dimension*, K-Theory **11** (1997), 103-159.

[Ne14] S. Neshveyev, *Duality theory for nonergodic actions*, Münster J. Math. **7** (2014), no. 2, 413-437.

[NT13] S. Neshveyev, R. Tuset, *Compact quantum groups and their representation categories*, Specialized Courses, vol. 20. SMF, 2013.

[NY14] S. Neshveyev, M. Yamashita, *Categorical duality for Yetter-Drinfeld algebras*, Doc. Math. **19** (2014), 1105-1139.

[NY17] S. Neshveyev, M. Yamashita, *Poisson boudaries of monoidal categories*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **50** (2017), no. 4, 927-972.

[Sc13] G. Schaumann, *Traces on module categories over fusion categories*, J. Algebra **379** (2013), 382-425.

[To07] R. Tomatsu, *A characterization of right coideals of quotient type and its application to classification of Poisson boudaries*, Comm. Math. Phys. **275** (2007), no. 1, 271-296.

[To15] R. Tomatsu, *On product type actions of G_q*, Adv. Math. **269** (2015), no. 10, 162-196.

[Wa90] Y. Watatani, *Index for C*-subalgebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **83** (1990), no. 424, vi+117 pp.

On equivariantly braided tensor categories

東京大学大学院数理科学研究科
及川瑞稀 (Mizuki OIKAWA)

概要

組紐（braided）テンソル圏は可換環の圏化であり、トポロジーや代数的場の量子論などの領域で研究されている。一方、代数的場の量子論においてはさらに非可換群環の圏化が自然に現れ、当然組紐圏論では定式化できない。本講演では、Turaev により定式化された同変組紐圏論について紹介する。時間があれば、講演者により導入された同変組紐圏の直積にあたる構成などにも触れたい。

本講演は、講演者による準備中の結果 [Oik] に基づく。本研究は、理化学研究所の大学院生リサーチ・アソシエイト制度の下での成果である。

1 導入

圏化 (categorification) とは、広い意味で既知の数学的対象の「圏バージョン」を考えることである。例えば次のようなものである。

例 1.1. 群 G に対し、対象を体 k 上の有限次元 G-次数付き線型空間 (つまり k 上の有限次元線型空間 V とその直和分解 $V = \bigoplus_{g\in G} V_g$) とし、射を G-次数を保つ線型写像 (つまり線形写像 $f : V \to W$ であって任意の $g \in G$ に対し $f(V_g) \subset W_g$ となるもの) として得られる半単純 k-線型アーベル圏を Vec_G^k で表す。この圏は以下の意味で群環 $\mathbb{Z}[G]$ の圏化である:

- Vec_G^k の対象の同型類は $\mathbb{Z}[G]$ の元と 1 対 1 に対応する。
- 上の対応のもとで Vec_G^k の直和は $\mathbb{Z}[G]$ の和と対応する。
- G-次数付き線型空間の**テンソル積** $\otimes : \mathrm{Vec}_G^k \times \mathrm{Vec}_G^k \to \mathrm{Vec}_G^k$ を

$$\left(\bigoplus_{g\in G} V_g\right) \otimes \left(\bigoplus_{h\in G} W_h\right) := \bigoplus_{k\in G} \left(\bigoplus_{\substack{g,h\in G\\ gh=k}} V_g \otimes W_h\right)$$

  で定義すると、これは上の対応のもとで $\mathbb{Z}[G]$ の積と対応する。

つまり、環の圏化とは、環の元を圏の対象に置き換え、和を直和に置き換え、積を「テンソル積」と呼ぶべき函手に置き換えてみることである。一般には次のような定義になる:

定義 1.2. (概略) 体 k 上の**テンソル圏 (tensor category)** $\mathcal{C}$ とは

- k-線型アーベル圏 $\mathcal{C}$

- 双線型双完全函手 $\otimes^{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$
- 自然同型 $a^{\mathcal{C}} : (- \otimes -) \otimes - \cong - \otimes (- \otimes -)$
- $\mathbf{1}_{\mathcal{C}} \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$
- 自然同型 $l^{\mathcal{C}} : \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \otimes - \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$
- 自然同型 $r^{\mathcal{C}} : - \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{C}} \cong \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$

の組であって、いくつかの公理を満たすものである。正確な定義は [EGNO15, Definitions 2.1.1 and 4.1.1] を見られたい。

ここで、$\mathbf{1}_{\mathcal{C}}$ は (単位的非可換) 環の単位元に対応している。注意してほしいのは、$a^{\mathcal{C}}$ が結合律に対応し、$l^{\mathcal{C}}$ と $r^{\mathcal{C}}$ が単位元律に対応していることだ。たとえば例 1.1 の最も簡単な場合として、G が自明な場合、つまり k 上の有限次元ベクトル空間の圏を考えよう。函手 $\otimes$ は各対象 V, W に対し $V \otimes W$ を固定することで定まる。このとき、一般には $(V \otimes W) \otimes X \neq V \otimes (W \otimes X)$ であるが、そのことには興味がなく、むしろカノニカルな同型 $(V \otimes W) \otimes X \cong V \otimes (W \otimes X)$ が存在することの方が大事だ。このように、環の元に対する等式の圏化は、等式ではなく自然同型となるべきなのである。

同様に、環の可換性も自然同型で定式化される:

定義 1.3. (概略) **組紐 (braided) テンソル圏** $\mathcal{C}$ とは、テンソル圏 $\mathcal{C}$ と自然同型 $b^{\mathcal{C}} = \{b^{\mathcal{C}}_{\lambda,\mu} : \lambda \otimes \mu \cong \mu \otimes \lambda\}$ であっていくつかの公理を満たすものである。正確な定義は [EGNO15, Definitions 2.1.1 and 8.1.1] を見られたい。

例 1.4. 可環群 A に対し Vec^k_A は自然に組紐テンソル圏になる。

例 1.5. 群 G に対し、体 k 上の有限次元表現のなす圏 $\mathrm{Rep}^k G$ は表現のテンソル積について組紐テンソル圏になる。

ここで、圏化を考えるモチベーションとして、個人的な観点を少しだけ述べておく。**代数的場の量子論 (algebraic quantum field theory, AQFT)** という枠組みでは、**カイラル共形場理論 (chiral conformal field theory)** という場の量子論の一種は、**共形ネット (conformal net)** と呼ばれる von Neumann 環の族を考え、その表現を「粒子」とみなすことで実現される。共形ネットの性質が充分良いとき、その表現圏は「粒子の入れ替え」により組紐テンソル圏になる (**Doplicher–Haag–Roberts (DHR) 理論** [DHR71])。この場合、粒子がボゾンかフェルミオンか、**エニオン (anyon)** かということが組紐テンソル圏の枠組みで定義できる。さらに、カイラル共形場理論から**フル (full) 共形場理論**を構成する手続きが組紐テンソル圏の枠組みで理解できる。この手続きが極めて非自明な $SL(2,\mathbb{Z})$-不変量を与える [CIZ87] ことから、講演者はこの不変量に興味を持ってテンソル圏論を研究している。

2　同変組紐テンソル圏

例 1.1 において、群 G が非可換であれば、$gh \neq hg$ なる $g, h \in G$ に対し

$$k_g \otimes k_h \cong k_{gh} \ncong k_{hg} \cong k_h \otimes k_g$$

なので、Vec_G^k は組紐テンソル圏にはならない。ここで、k_g はベクトル空間としては k で、G-次数付けの g-成分のみがノンゼロなものとする。注意したいのは、代わりに

$$k_g \otimes k_h \cong k_{gh} = k_{ghg^{-1}g} \cong k_{ghg^{-1}} \otimes k_g$$

が成り立っていることだ。つまり、Vec_G^k に組紐構造の意味での可換性はないが、2 つの対象を入れ替えたときに片方に何か効果がつくという、一般化された意味での可換性はあるのだ。ここでの効果は、${}^g k_h := k_{ghg^{-1}}$ という Vec_G^k への**群作用**のことだと理解できる。テンソル圏への群作用の正確な定義は [EGNO15, Definitions 2.7.1 and 4.15.1] を見られたい。「群に一般化された可換性」は次のような定義になる:

定義 2.1. (Turaev 2000 [Tur00]) (概略) G を群とする。**G-組紐テンソル圏**とは

- テンソル圏 $\mathcal{C}$
- 充満部分アーベル圏の族 $\{\mathcal{C}_g\}_{g \in G}$ による $\mathcal{C}$ の G-次数付け $\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$
  (つまり $\mathcal{C}$ の任意の対象は $\mathcal{C}_g$ たちの対象の直和で書け、任意のノンゼロな射は G-次数を保つ。普遍性でも定義できる)
- G の $\mathcal{C}$ への群作用
- 自然同型 $b^{\mathcal{C}} = \{b^{\mathcal{C}}_{\lambda,\mu} : \lambda \otimes \mu \cong {}^g(\mu) \otimes \lambda\}_{\lambda \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g), \mu \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}), g \in G}$

の組であって

- $\mathcal{C}_g \otimes \mathcal{C}_h \subset \mathcal{C}_{gh}$
- $\mathbf{1}_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}_e$
- $b^{\mathcal{C}}$ についての組紐テンソル圏と同様の公理

を満たすものである。

共形場理論の例では、共形ネットに適切な意味で群作用があるとき、表現の一般化である**捻れ表現 (twisted representation)** の概念を考えることができ、共形ネットの性質が良いときその圏は G-組紐テンソル圏になる [Müg05]。

3　同変組紐テンソル圏のテンソル積

組紐構造の一般化として G-組紐構造を定義したので、自然と「**組紐テンソル圏の理論はすべて G-組紐テンソル圏の理論に拡張できるか？**」という（漠然とした）問いが生まれる。講演者は、この答えは**肯定的であるが、実際の拡張はかなり非自明である**と考えている。ここでは、講演者の結果 [Oik] の一部を紹介することでその例を見よう。

まず、古典的に知られている組紐テンソル圏の **Deligne テンソル積**を紹介しよう。

定理 3.1. (Deligne 1990 [Del90]) $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ をテンソル圏とする。このときアーベル圏 $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ と双完全函手 $\boxtimes : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ があって、任意のアーベル圏 $\mathcal{E}$ に対し $\boxtimes$ の合成が圏同値 $[\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}, \mathcal{E}] \simeq [\mathcal{C}, [\mathcal{D}, \mathcal{E}]]$ を与える。ここで括弧は完全函手の圏を表す。$\boxtimes(c, d)$ $(c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}), d \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D}))$ を $c \boxtimes d$ と書くことにし、

$$(c_1 \boxtimes d_1) \otimes^{\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}} (c_2 \boxtimes d_2) \coloneqq (c_1 \otimes^{\mathcal{C}} c_2) \boxtimes (d_1 \otimes^{\mathcal{D}} d_2) \tag{1}$$

$(c_1, c_2 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}), d_1, d_2 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D}))$ とおくと $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ はテンソル圏になる。さらに、$\mathcal{C}$ と $\mathcal{D}$ が組紐テンソル圏だった場合、$\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ は自然に組紐テンソル圏になる。

この定理で、$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ が G-組紐テンソル圏である場合はどうなるだろうか？まず、$\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ 上の G-次数の定義として一番自然に思いつくのは、$c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g), d \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D}_h)$ だったら $c \boxtimes d \in \mathrm{Obj}((\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D})_{gh})$ と定めることである。しかし、定理 3.1 で定義したテンソル積はこの G-次数付けを保たないことがわかる。実際、$c_i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{g_i}), d_i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D}_{h_i})$ $(i = 1, 2)$ とすると、式 (1) の左辺の次数は $g_1 h_1 g_2 h_2$ で、右辺の次数は $g_1 g_2 h_1 h_2$ である。実は、テンソル積の定義を変更すればうまくいく:

定理 3.2. (O. [Oik]) $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を G-組紐テンソル圏とする。このとき、$c_1 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}), c_2 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{g_2}), d_1, d_2 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D})$ に対し

$$(c_1 \boxtimes d_1) \otimes^{\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}} (c_2 \boxtimes d_2) \coloneqq (c_1 \otimes^{\mathcal{C}} c_2) \boxtimes ({}^{g_2^{-1}}(d_1) \otimes^{\mathcal{D}} d_2) \tag{2}$$

とおくことにより (アーベル圏としては $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ に一致する) テンソル圏 $\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ を定義できる。さらに、$\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D}$ の次数付けを $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ のものと同じとすると、単位元成分 $D(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \coloneqq (\mathcal{C} \ltimes \mathcal{D})_e$ は自然に G-組紐テンソル圏になる。ここで、$D(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ の次数付けは、$c \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_g), d \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ に対し $c \boxtimes d \in \mathrm{Obj}(D(\mathcal{C}, \mathcal{D})_g)$ であると定める。

式 (2) で $c_i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C}_{g_i}), d_i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{D}_{h_i})$ $(i = 1, 2)$ とすると、G-組紐テンソル圏の公理 (定義 2.1) から、右辺の ($\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{D}$ での) 次数が $g_1 g_2 (g_2^{-1} h_1 g_2) h_2 = g_1 h_1 g_2 h_2$ となり、左辺の次数と一致することに注意されたい。

以上により、組紐テンソル圏のテンソル積の概念を G-組紐テンソル圏に拡張しようとすると、テンソル積を「半直積」に変形し、さらに単位元成分を取るという非自明な操作が必要になることがわかった。

参考文献

[CIZ87] Andrea Cappelli, Claude Itzykson, and Jean-Bernard Zuber. The A-D-E classification of minimal and $A_1^{(1)}$ conformal invariant theories. *Comm. Math. Phys.*, 113(1):1–26, 1987.

[Del90] P. Deligne. Catégories tannakiennes. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, volume 87 of *Progr. Math.*, pages 111–195. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[DHR71] Sergio Doplicher, Rudolf Haag, and John E. Roberts. Local observables and particle statistics. I. *Comm. Math. Phys.*, 23:199–230, 1971.

[EGNO15] Pavel Etingof, Shlomo Gelaki, Dmitri Nikshych, and Victor Ostrik. *Tensor categories*, volume 205 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[Müg05] Michael Müger. Conformal orbifold theories and braided crossed G-categories. *Comm. Math. Phys.*, 260(3):727–762, 2005.

[Oik] Mizuki Oikawa. Frobenius algebras associated with the α-induction for twisted representations of conformal nets. *In preparation.*

[Tur00] Vladimir Turaev. Homotopy field theory in dimension 3 and crossed group-categories. *arXiv preprint math/0005291*, 2000.

最大公約数を含むオイラー関数の和公式について

鶴田 侑己 Yuki Tsuruta

山口大学大学院創成科学研究科基盤科学系専攻数理科学コース

概要

正整数 $n_1, \cdots, n_k$ に対して, $\gcd(n_1, \cdots, n_k)$ を $n_1, \cdots, n_k$ の最大公約数とする. Euler 関数 ϕ を $\mathrm{id} * \mu$ によって定義する. 但し, μ を Möbius 関数とする. 本研究では, 任意に十分大きな実数 $x > 3$ と 任意に固定された整数 $k(\geq 2)$ に対して,

$$\sum_{n_1 \cdots n_k \leq x} \phi(\gcd(n_1, \ldots, n_k))$$

の漸近公式を求めたので報告する. [*1]

1 導入

f と g を自然数で定義された実数値関数とする (数論的関数という). そのとき, 任意の正整数 n に対して, Dirichlet convolution を $(f * g)(n) := \sum_{dk=n} f(d)g(k)$ によって定義する. その際に用いられる関数を紹介しておく. 任意の正整数に対して, 恒等関数 id を $\mathrm{id}(n) = n$, $\mathbf{1}$ を $\mathbf{1}(n) = 1$, Möbius 函数 μ を

$$\mu(n) := \begin{cases} 1 & n = 1 \text{ のとき}, \\ (-1)^k & n = p_1 p_2 \cdots p_k \text{ のとき}, \\ 0 & \text{その他}, \end{cases}$$

Euler 関数 ϕ を $\phi(n) = (\mathrm{id} * \mu)(n)$ によって定義する. さらに, Riemann ゼータ関数 ζ を $\mathrm{Re}\ s > 1$ に対して,

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

と定義し, この関数の s による微分 ζ' と ζ'' をそれぞれ 第 1 次導関数, 第 2 次導関数を表す. すなわち

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^s}, \qquad \zeta''(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^2}{n^s}.$$

$\gcd(k, j)$ を正の整数 k と j の最大公約数とする. 1885 年に, Casáro [1] は最大公約数の和関数を導入し, 任意の数論的関数 f に対して, 以下の公式を得た.

$$\sum_{j=1}^{k} f(\gcd(k, j)) = (f * \phi)(k).$$

[*1] 本研究は, 山口大学の木内功氏との共同研究です.

正整数 $k \geq 2$ を固定し, 正整数 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ の最大公約数を $\gcd(n_1, n_2, \cdots, n_k)$ と定義し, 約数関数 τ_k を $\underbrace{\mathbf{1} * \mathbf{1} * \cdots * \mathbf{1}}_{k\text{ 個}}$ によって定義する. この関数を Piltz の約数関数という. 任意に十分大きな実数 $x > 3$ に対して, $f(\gcd(n_1, n_2, \cdots, n_k))$ の総和を $S_{f,k}$ によって定義する. すなわち

$$S_{f,k} := \sum_{n_1 n_2 \ldots n_k \leq x} f(\gcd(n_1, n_2, \cdots, n_k)). \tag{1.1}$$

2012 年に Krätzel, Nowak, Tóth [3] は, (1.1) を次ように置き換えて様々な公式を導いている:

$$S_{f,k}(x) = \sum_{n \leq x} g_{f,k}(n).$$

但し,

$$g_{f,k}(n) := \sum_{n = m^k l} (\mu * f)(m) \tau_k(l). \tag{1.2}$$

例えば, $f = \mathrm{id}$ のとき, (1.1) の精密な漸近公式を示している. このとき, (1.2) を生成関数とする Dirichlet 級数は, $\mathrm{Re}\ s > 1$ に対して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_{\mathrm{id},k}(n)}{n^s} = \frac{\zeta^k(s)\zeta(ks-1)}{\zeta(ks)}$$

と書くことができ, 解析的な手法と指数和の理論などを駆使することで以下の公式を, Krätzel, Nowak, Tóth [3] によって示された：

$$\sum_{ab \leq x} \gcd(a, b) = P_2(\log x)x + O\left(x^{\theta}(\log x)^{\theta'}\right)$$

但し, $\frac{1}{2} < \theta < 1$ と θ' は実数である. 複素積分を利用することで, $\theta = \frac{2}{3}$ を, 指数和と fractional part sums を利用することで, $\theta = \frac{925}{1392}$ を得ている. ここで, P_2 は

$$P_2(\log x) := \operatorname*{Res}_{s=1} \frac{\zeta^2(s)\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)} \frac{x^{s-1}}{s}$$

を満たす 2 次多項式である. また, $k = 3$ のときも同様に以下の公式を導いている:

$$\sum_{abc \leq x} \gcd(a, b, c) = M_3(x) + O(x^{\frac{1}{2}}(\log x)^5)$$

ここで, $M_3(x)$ は主要項を表す. すなわち,

$$\begin{aligned} M_3(x) &= \sum_{s_0 = 1, \frac{2}{3}} \operatorname*{Res}_{s=s_0} \left(\frac{\zeta^3(s)\zeta(3s-1)}{\zeta(3s)} \frac{x^s}{s} \right) \\ &= x(0.6842... \log^2 x - 0.6620... \log x + 4.845...) - 4.4569... x^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

2 ϕ を含む総和公式

本研究の目的は, (1.1) において $f=\phi$, かつ $k=2,3,4,5$ の場合の総和公式を考察することにある. そのとため, Dirichlet 級数 (1.2) を次のように表現する. すなわち

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_{\phi,k}(n)}{n^s}=\frac{\zeta^k(s)\zeta(ks-1)}{\zeta^2(ks)}\qquad(\mathrm{Re}\ s>1). \tag{2.1}$$

最初に, $k=2$ のときは, 小数部分和 (fractional part sums) と指数和を組み合わせることで 以下の漸近公式を得ることができる:

定理 2.1 任意に十分大きな実数 $x>3$ に対して,

$$\begin{aligned}\sum_{ab\le x}\phi(\gcd(a,b))&=\frac{1}{4\zeta^2(2)}x\log^2x+\frac{1}{\zeta^2(2)}\left(2\gamma-\frac{1}{2}-2\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)x\log x\\&+\frac{1}{2\zeta^2(2)}\left(5\gamma^2+6\gamma_1-4\gamma+1-4(4\gamma-1)\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}-4\frac{\zeta''(2)}{\zeta(2)}+12\left(\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\right)^2\right)x\\&+O\left(x^{\frac{37}{56}+\varepsilon}\right)\end{aligned} \tag{2.2}$$

が成り立つ. 但し, γ と γ_1 はそれぞれ, Euler 定数 と Stieltjes 定数を表す.

注意 2.1 $\frac{37}{56}=\frac{1}{2}+\frac{9}{56}<\frac{925}{1392}=\frac{1}{2}+\frac{229}{1392}<\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ に注意する.

今, 数論的関数 h を生成関数とする Dirichlet 級数 $F_h(s)$ を

$$F_h(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h(n)}{n^s}=\zeta^2(s)\zeta(2s-1)\zeta^M(2s)\qquad(\mathrm{Re}\ s>1)$$

によって定義する. 但し, M を任意の整数とおく. 2013 年に Kühleitner–Nowak [4] は, h の総和公式を求めることで誤差項のオメガ結果を求めた. この関係を (2.2) の誤差項の評価に関するオメガ結果に適用すると

$$\Omega\left(x^{\frac{1}{2}}\frac{\log^2x}{\log\log x}\right)$$

が示される. これらのことから次のことが予想される.

予想 2.1 (2.2) の誤差項のオーダー評価は, ある正数 A が存在して

$$O\left(x^{\frac{1}{2}}(\log x)^A\right).$$

次に, $k=3$ のときは, (2.1) と複素関数論の理論を用いることで, 以下の漸近公式が示せる.

定理 2.2 任意に十分大きな実数 $x > 3$ に対して,

$$\sum_{abc \le x} \phi(\gcd(a,b,c)) = \frac{\zeta(2)}{2\zeta^2(3)} x \log^2 x$$
$$+ \frac{\zeta(2)}{\zeta^2(3)} \left(3\gamma - 1 + 3\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 6\frac{\zeta'(3)}{\zeta(3)} \right) x \log x$$
$$+ \frac{\zeta(2)}{\zeta^2(3)} \left(3\gamma^2 + 3\gamma_1 - 3\gamma + 1 + 3(3\gamma - 1)\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} - 6(3\gamma - 1)\frac{\zeta'(3)}{\zeta(3)} \right) x$$
$$+ \frac{\zeta(2)}{\zeta^2(3)} \left(27 \left(\frac{\zeta'(3)}{\zeta(3)} \right)^2 + \frac{9}{2}\frac{\zeta''(2)}{\zeta(2)} - 9\frac{\zeta''(3)}{\zeta(3)} - 18\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}\frac{\zeta'(3)}{\zeta(3)} \right) x$$
$$+ O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^5 x \right)$$

更に, $k = 4$ のときも $k = 3$ と同様に解析的方法を利用することで, 以下の漸近公式が示せる.

定理 2.3 任意に十分大きな実数 $x > 3$ に対して,

$$\sum_{abcd \le x} \phi(\gcd(a,b,c,d)) = x P_{\phi,4}(\log x) + O\left(x^{\frac{1}{2}} \log^{\frac{17}{3}} x \right).$$

但し, $P_{\phi,4}(u)$ は u の 3 次多項式を表す.

最後に, $k = 5$ では Pilitz の約数問題の総和式

$$\sum_{n \le x} \tau_5(n) = Q_4(\log x) x + O\left(x^{\frac{11}{20}+\varepsilon} \right)$$

を用いて $\sum_{abcde \le x} \phi(\gcd(a,b,c,d,e))$ の漸近公式を求める. ここで, $Q_4(u)$ は u の 4 次多項式を表す ([2] の定理 13.2 などを参照). そうすることで, 以下の定理が導ける. すなわち

定理 2.4 任意に十分大きな実数 $x > 3$ に対して,

$$\sum_{abcde \le x} \phi(\gcd(a,b,c,d,e)) = x P_{\phi,5}(\log x) + O\left(x^{\frac{11}{20}+\varepsilon} \right). \tag{2.3}$$

但し, $P_{\phi,4}(u)$ は u の 4 次多項式を表す.

上記の誤差項の評価を小さくするには約数問題の解決が待たれる. そこで, Riemann ゼータ関数の Lindelöf 予想 を仮定するならば, 誤差項の評価を少しでも小さくできるのではないかと考えることはごく自然な発想である.

予想 2.2 (Lindelöf 予想) $\sigma \ge \frac{1}{2}$とし, 十分小さな正の数 ε に対して,

$$\zeta(\sigma + it) \ll (1 + |t|)^{\varepsilon}.$$

この Lindelöf 予想 は, 任意に十分大きな実数 $T > 3$ と任意に固定された整数 $k \geq 1$ に対して, $\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt \ll T^{1+\varepsilon}$ と書き換えることが知られている (例えば, [5] の定理 13.2 を参照). すると, (2.3) の誤差項の評価が $O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right)$ とできる. さらに, $k \geq 5$ のとき, Lindelöf 予想を仮定するならば, $S_{\phi,k}(x)$ の漸近公式は解析的な手法を利用することで, 以下のことが予想される. すなわち

命題 2.1 Lindelöf 予想を仮定する. $k \geq 5$ のとき, 任意に十分大きな実数 $x > 3$ に対して,

$$\sum_{n_1 n_2 \cdots n_k \leq x} \phi(\gcd(n_1, n_2, \cdots, n_k)) = x P_{\phi,k}(\log x) + O\left(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

但し, $P_{\phi,k}(u)$ は u の $k-1$ 次多項式を表す.

参考文献

[1] E. Cesáro, Étude moyenne du plus grand common diviseur de deux nombres, Ann. Mat Pure Appl.**13**(1885), 235-250

[2] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function*, Theory and Applications Dover publications, Inc. Mineola, New York 1985.

[3] E. Krätzel, W. G. Nowak and Tóth On certain arithmetic functions involving the greatest common divisor, Cent. Eur. J.Math **10** (2012), 761–774.

[4] M. Kühleitner and W. G Nowak, On a quastion of A. Schinzel: Omega estimate for a special type of arithmetic functions, Cent. Eur. J. Math. **10** (2012), 761–774.

[5] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann Zeta-Function (revised by D. R. Heath-Brown)*, Oxford University Press, 1986.

遠アーベル幾何学における m 次可解グロタンディーク予想について

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻
山口永悟 (Naganori YAMAGUCHI)

概要

グロタンディーク予想とは「曲線の基本群からその曲線の情報を完全に復元できる」という予想であり、遠アーベル幾何学において重要な問題の一つである。これ自体は 1990 年代に中村博昭氏、玉川安騎男氏、望月新一氏らによって解決された。本講演では、グロタンディーク予想の m 次可解化、つまり「曲線の基本群の "最大幾何的 m 次可解商" からその曲線の情報を完全に復元できる」という予想の詳細と、現在の状況を述べる。

1 導入

遠アーベル幾何学とは、代数多様体という幾何的対象を、その代数多様体に付随するエタール基本群という代数的対象を使って研究する分野である。遠アーベル幾何学には、グロタンディーク予想 (または遠アーベル予想) と呼ばれる主要な研究対象がある。この予想はある種の代数多様体の情報がそのエタール基本群に "完全に" 含まれている事を主張する。この予想の m 次可解化が本研究の主な研究対象になるが、まずこの予想について見ていく前に、遠アーベル幾何学のより身近な例として、ノイキルヒ-内田の定理を紹介する。

1.1 ノイキルヒ-内田の定理

以下、K を体とし、K の代数閉包 $\overline{K}$ を一つ固定する。$\overline{K}$ に含まれる K の有限次ガロア拡大 K' に対し、次の群を拡大 K'/K のガロア群と呼ぶ。

$$\mathrm{G}(K'/K) := \left\{ \phi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{field}}(K') \;\middle|\; \begin{tikzcd} K' \arrow[rr, "\phi"] & & K' \\ & K \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \text{ は可換} \right\}$$

また、K の絶対ガロア群 G_K を同様に $\{\phi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{field}}(\overline{K}) \mid \phi|_K = \mathrm{id}_K\}$ と定義する。$\mathrm{G}(K'/K)$ は有限群であるが、これに離散位相を入れることにより $\mathrm{G}(K'/K)$ を位相群とみなす。$\overline{K}$ に含まれる K の有限次ガロア拡大を全て走るような射影極限 $\varprojlim_{K'/K:\mathrm{fin.Gal.}} \mathrm{G}(K'/K)$ を考えると、これは自然な写像によって G_K と同型となる。$\mathrm{G}(K'/K)$ の離散位相の射影極限として得られる位相を G_K に入れることにより、G_K を位相群とみなす事が出来る。このようにして定義された位相群 G_K であるが、

これは K の情報をどれほど含んでいるであろうか？代数体の場合のこの疑問への回答が 1970 年代に証明された次のノイキルヒ-内田の定理である。

定理 1 (ノイキルヒ-内田の定理)**.** K、L を代数体と仮定する。また、$\mathrm{Inn}(G_L)$ を G_L の内部自己同型群とする。この時、次の自然な写像

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{field}}(K,L) \to \mathrm{Isom}_{\mathrm{top.group}}(G_K, G_L)/\mathrm{Inn}(G_L)$$

は全単射となる。特に、G_K と G_L が位相群として同型の時、K と L は体として同型である。

ガロア理論は、$\mathrm{G}(K'/K)$ が拡大 K'/K の全ての中間体の情報を含んでいることを主張している。定理 1 はガロア理論の拡張と考えることができ、K の構造を調べる事と G_K の構造を調べる事が等価であることを示している。従って、この定理は体 K と (位相) 群 G_K という全く異なる二つの代数的構造の完全な橋渡しを与えていると言える。遠アーベル幾何学においては、定理 1 の K、L を代数曲線に置き換えた予想を考える。これが、以下に述べるグロタンディーク予想である。

1.2 グロタンディーク予想

以下、k を体とし、U を k 上の代数多様体とする。U の関数体 $K(U)$ の代数閉包 $\overline{K(U)}$ を一つ固定し、対応する射 $\mathrm{Spec}(\overline{K(U)}) \to U$ を $\overline{u}$ と書く。体の有限次分離拡大の類似として、我々は U の有限次エタール被覆 $(\overline{u} \to)\ U' \to U$ を考える。この時、

$$\mathrm{Aut}_U(U') := \left\{ \phi \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{scheme}}(U') \;\middle|\; \begin{tikzcd} U' \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr] & & U' \arrow[dl] \\ & U & \end{tikzcd} \text{ は可換} \right\}$$

は有限群となる。(離散位相群とみなす。) $U' \to U$ の $\overline{u}$ におけるファイバーへの $\mathrm{Aut}_U(U')$ の作用が推移的であるとき、我々は $U' \to U$ をガロア被覆と呼ぶ。U の全てのガロア被覆を走るような射影極限を考える事により、我々は U の ($\overline{u}$ に関する) エタール基本群 $\pi_1(U,\overline{u}) := \varprojlim_{U'/U:\mathrm{fin.Gal.}} \mathrm{Aut}_U(U')$ を得る。($\mathrm{Aut}_U(U')$ の離散位相の射影極限を考えて $\pi_1(U,\overline{u})$ を位相群とみなす。) エタール基本群の簡単な例として、我々は 1.1 節で定義した体の絶対ガロア群を、次のようにとらえなおすことが出来る。

$$\pi_1(\mathrm{Spec}(K), \overline{\omega}) \cong G_K$$

ここで、K の代数閉包 $\overline{K}$ を一つ固定し、対応する射 $\mathrm{Spec}(\overline{K}) \to \mathrm{Spec}(K)$ を $\overline{\omega}$ と書いた。このように、エタール基本群とは体の絶対ガロア群の拡張であるとみなせる。一方、$k \subset \mathbb{C}$ の場合には、代数多様体 $U_{\mathbb{C}}$ から得られる複素解析空間 U^h の位相空間としての基本群 $\pi_1^{\mathrm{top}}(U^h, \overline{u}^h)$ と $U_{\overline{k}}$ のエタール基本群の間には次のような同型が存在する。

$$\pi_1(U_{\overline{k}}, \overline{u}) \cong \widehat{\pi_1^{\mathrm{top}}(U^h, \overline{u}^h)}$$

ここで、群 G に対し、$\hat{G}$ は G の副有限完備化 (i.e., G の有限剰余群全てを走る射影極限) を表す。このように、エタール基本群は位相空間の基本群とも強い関係を持っている。

エタール基本群を使うことにより、我々は定理 1 の代数多様体への拡張を考える事が出来る。これは Alexander Grothendieck 氏が Gerd Faltings 氏への手紙の中で述べた予想であり、双曲的代数曲線の場合は正確には次のようになる。(以下、記号の見やすさのため、数論的基本群 $\pi_1(U,\overline{u})$ を Π_U、幾何的基本群 $\pi_1(U_{\overline{k}},\overline{u})$ を $\overline{\Pi}_U$ でそれぞれ表す。自然な全射 $\Pi_U \to G_k$ があることに注意する。)

定理 2 (グロタンディーク予想、中村-玉川-望月の定理)**.** k を $\mathbb{Q}$ 上有限生成と仮定し、U、V を k 上の双曲的代数曲線と仮定する。$\overline{v}:\mathrm{Spec}(\overline{K(V)}) \to V$ を $\overline{u}$ と同様に取り、$\Pi_V := \pi_1(V,\overline{v})$、$\overline{\Pi}_V := \pi_1(V_{\overline{k}},\overline{v})$ を同様に定める。この時、次の自然な写像

$$\mathrm{Isom}_k(U,V) \to \mathrm{Isom}_{G_k}(\Pi_U,\Pi_V)/\mathrm{Inn}(\overline{\Pi}_V)$$

は全単射となる。特に、Π_U と Π_V が G_k 上の位相群として同型の時、U と V は k 上のスキームとして同型である。

定理 2 は、U が種数 0 の場合を中村博昭氏が、アフィンの場合を玉川安騎男氏がそれぞれ証明しており、最終的には望月新一氏が完全に証明した。また、グロタンディーク予想には k が正標数の場合の類似も存在し、それも玉川安騎男氏、望月新一氏、及び Jakob Stix 氏によって解決された。定理 2 により U の構造を調べる事と Π_U の構造を調べる事が等価であることが分かる。従って、この定理は双曲的代数曲線 U と位相群 Π_U という全く異なる二つの対象の完全な橋渡しを与えていると言える。定理 2 自体はすでに証明されているが、我々は次の節でこの定理の拡張を考える。

2 m 次可解グロタンディーク予想とその現状

以下、k、U、$\overline{K(U)}$、$\overline{u}$、Π_U 及び $\overline{\Pi}_U$ を 1.2 節と同様に定義する。また、$\overline{\Pi}_U$ の交換子群 $\overline{[\overline{\Pi}_U:\overline{\Pi}_U]}$ を $\overline{\Pi}_U^{[1]}$ と書き、$\overline{\Pi}_U^{[m]}(m \geq 1)$ の交換子群 $\overline{[\overline{\Pi}_U^{[m]},\overline{\Pi}_U^{[m]}]}$ を $\overline{\Pi}_U^{[m+1]}$ と書く。さらに $\overline{\Pi}_U^{m} := \overline{\Pi}_U/\overline{\Pi}_U^{[m]}$ 及び $\Pi_U^{(m)} := \Pi_U/\overline{\Pi}_U^{[m]}$ と記号を定める。

定理 2 では、我々は U の情報との対応先として、Π_U の全ての情報を使った。しかしながら、定理 2 が証明される以前から、定理 2 の Π_U をある種の商に置き換えても同様の結果が得られるのではないかという形の予想が考えられていた。その予想のうちの一つ、Π_U を $\Pi_U^{(m)}$ に置き換えたものが今回の主題である m 次可解グロタンディーク予想であり、正確には次のようになる。

記号 3. U を k 上の双曲的代数曲線と仮定し、U のスムースコンパクト化 U^{cpt} の種数を g_U と置く。さらに、カスプの成す (被約) スキーム $U^{\mathrm{cpt}} - U$ の k 上の次数を r_U と置く。l を体とし、V を l 上の双曲的代数曲線とする (2 節では V は k 上であったので、この記号は 2 節とは異なる)。$\overline{v}:\mathrm{Spec}(\overline{K(V)}) \to V$ を $\overline{u}$ と同様に取り、$\Pi_V := \pi_1(V,\overline{v})$、$\overline{\Pi}_V := \pi_1(V_{\overline{l}},\overline{v})$ を同様に定める。

予想 4 ((相対版)m 次可解グロタンディーク予想)**.** $m \geq 2$ を整数とする。k を $\mathbb{Q}$ 上有限生成な体と仮定し、$k = l$ とする。この時、次が成り立つ。

(i) $\Pi_U^{(m)}$ と $\Pi_V^{(m)}$ が G_k 上の位相群として同型の時、U と V は k 上のスキームとして同型である。

(ii) n を $m > n \geq 0$ を満たす整数とし、$\mathrm{Isom}_{G_k}^{(m)}(\Pi_U^{(m-n)},\Pi_V^{(m-n)})$ を写像 $\mathrm{Isom}_{G_k}(\Pi_U^{(m)},\Pi_V^{(m)}) \to$

$\mathrm{Isom}_{G_k}(\Pi_U^{(m-n)}, \Pi_V^{(m-n)})$ の像として定める。この時、次の自然な写像

$$\mathrm{Isom}_k(U,V) \to \mathrm{Isom}_{G_k}^{(m)}(\Pi_U^{(m-n)}, \Pi_V^{(m-n)})/\mathrm{Inn}(\overline{\Pi}_V^{m-n})$$

は全単射となる。

(k が有限体上有限生成な体である場合にも類似の予想が存在する。以下、これを正標数類似と呼ぶ。)

注意として、予想 4 は m 及び n が小さいほど強い結果となる。定理 2 では U の構造を調べる事と Π_U の構造を調べる事の等価性を見たが、予想 4 はより強く、U の構造を調べる事と (Π_U の商) $\Pi_U^{(m)}$ の構造を調べる事が等価であると主張している。予想 4 には、以下のような 3 つの先行研究が存在している。

- [中村、1990] $m \geq 2$、k がある種の代数体、かつ U、V が 4 点抜き射影直線の場合の (i)
- [望月、1999] $m \geq 5$ かつ $m > n \geq 3$ の場合の (ii)、特に $m \geq 5$ の場合の (i)
- [山口、2020] $m \geq 3$ かつ U、V が種数 0 の場合の (i)

本研究では、U がアフィンの場合に予想 4 の多くの部分を解決した。以下、本研究の主定理を述べる。

定理 5 (素体上有限生成の場合)**.** k を $\mathbb{Q}$ 上 (resp. 有限体 $\mathbb{F}_p$ 上) 有限生成な体とし、$k = l$ を仮定する。さらに、U をアフィン (resp. かつ $U_{\overline{k}}$ が $\overline{\mathbb{F}}_p$ 上の代数曲線に降下しない) と仮定する。この時、次が成り立つ。

(i) m に対し、$r_U < 3$ または $(g_U, r_U) = (0,3), (0,4)$ の場合は $m \geq 5$ を、それ以外の場合は $m \geq 4$ を仮定する。この時、予想 4(i) (resp. 予想 4(i) の正標数類似) が成り立つ。

(ii) $m \geq 5$ かつ $m > n \geq 4$ を仮定する。この時、予想 4(ii) (resp. 予想 4(ii) の正標数類似) が成り立つ。

k の標数が 0 または $g_U = 0$ の場合、定理 5 は中村博昭氏、望月新一氏、及び筆者の上記の先行研究と部分的に重なっているが、標数が正かつ $g_U \geq 1$ の場合には予想 4 に対する完全に新しい結果を与えている。また、本研究では、k が有限体の場合の結果も得て、それを用いて定理 5 を証明した。有限体の場合は次のように予想 4 を絶対版として定式化することが必要となる。

定理 6 (有限体の場合)**.** k、l を有限体と仮定する。さらに、U をアフィンと仮定する。この時、次が成り立つ。

(i) m に対し、$r_U < 3$ または $(g_U, r_U) = (0,3), (0,4)$ の場合は $m \geq 3$ を、それ以外の場合は $m \geq 2$ を仮定する。この時、$\Pi_U^{(m)}$ と $\Pi_V^{(m)}$ が位相群として同型の時、U と V はスキームとして同型である。

(ii) $m \geq 3$ を仮定し、n を $m > n \geq 2$ を満たす整数とする。$\mathrm{Isom}_{\mathrm{top.group}}^{(m)}(\Pi_U^{(m-n)}, \Pi_V^{(m-n)})$ を写像 $\mathrm{Isom}_{\mathrm{top.group}}(\Pi_U^{(m)}, \Pi_V^{(m)}) \to \mathrm{Isom}_{\mathrm{top.group}}(\Pi_U^{(m-n)}, \Pi_V^{(m-n)})$ の像として定める。この時、次の自然な写像

$$\mathrm{Isom}_{\mathrm{scheme}}(U,V) \to \mathrm{Isom}_{\mathrm{top.group}}^{(m)}(\Pi_U^{(m-n)}, \Pi_V^{(m-n)})/\mathrm{Inn}(\Pi_V^{(m-n)})$$

は全単射となる。

k が有限体の場合には、予想 4 (の絶対版) が証明されているケースはなかったので、定理 6 は有限体上の予想に対する完全に新しい結果である。 また重要な点として、$r_U \geq 3$ かつ $(g_U, r_U) \neq (0,3)$, $(0,4)$ の場合は、(i) を $m = 2$ の場合に証明できており、これは予想 4(i) (の絶対版) としては best possible な結果となる。

3 最後に

2 節で見たように m 次可解グロタンディーク予想についてさまざまな結果が得られているが、いまだ完全な解決を見てはいない。特に、k が有限体上有限生成な体の場合の予想 4（の正標数類似）は、U が固有な場合には手つかずである。今後の展望として、我々はまずこの場合の予想 4 を証明することが必要であると考えている。また、2 節で述べたように予想 4 は m が小さいほど強い結果となり、$m = 2$ の場合が best possible な結果である。しかしながら、$\mathbb{Q}$ 上有限生成な体に関する $m = 2$ での予想 4 については未だ中村博昭氏の結果 [中村、1990] が存在するのみである。予想 4 の証明において、$m \geq 3$ の場合と $m = 2$ の場合では証明の様相が大きく変わるであろうと筆者は考えており、今後我々が予想 4 を完全な形で証明する事を目指す際、$m = 2$ の場合が $m \geq 3$ の場合に比べて遥かに大きな課題となるだろうと考えている。

参考文献

[望月、1999] Shinichi Mochizuki. The local pro-p anabelian geometry of curves. *Invent. Math.*, 138(2): 319–423, 1999.

[中村、1990] Hiroaki Nakamura. Rigidity of the arithmetic fundamental group of a punctured projective line. *J. Reine Angew. Math.*, 405: 117–130, 1990.

[山口、2020] Naganori Yamaguchi. The m-step solvable Grothendieck conjecture for genus 0 curves over finitely generated fields. *Preprint, arXiv*: 2010.00290 [math.AG], 2020.

Noetherとは限らない可換環上のホモロジー代数について *

東京理科大学 理工学研究科 数学専攻
安藤 遼哉 (Ryoya ANDO)

1 はじめに

本稿を通して，環といえば 1 を持つ可換環のこととする．特に断らない限り Noether 性は課さない．

可換環論において，イデアル論的不変量とホモロジー代数的な不変量の関係をしらべ，“よい” 関係があるような環のクラスを探索しようという研究がある．その一例として正則局所環が挙げられる．これは Krull により純粋にイデアル論的な動機で導入されたが，Serre によって次の定理が示された．

定理 1.1 (Serre [Ser56]).
Noether 局所環 A が正則局所環であることと，$\dim A = \mathrm{gl.dim}\, A$ であることが同値である．

ここで $\dim A$ は Krull 次元（イデアル論的不変量）であり，$\mathrm{gl.dim}\, A$ は大域次元（ホモロジー代数的不変量）である．また CM(Cohen–Macaulay) 局所環は，イデアル論的なデータである Krull 次元がホモロジカルな量である depth（コホモロジー (Ext) についてのデータ）と一致する局所環として特徴付けられる．すなわち；

定義 1.2.
$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．以下の等式；

$$\dim A = \inf \left\{ i \in \mathbb{N} \;\middle|\; \mathrm{Ext}^i_A(A/\mathfrak{m}, A) \neq 0 \right\}$$

が成り立つとき，A は CM(Cohen–Macaulay) であるという．

CM 環のクラスは Hochster–Huneke [HH91] が “the Cohen–Macaulay condition (possibly on the local rings of a variety) is just what is needed to make the theory work.” と述べているようにとてもよい性質を持っている．

このように，環の性質をホモロジカル（ホモロジー代数的）な条件で特徴づけ，イデアル論的な性質とホモロジー代数的不変量の間の関係を探ることは可換環論の研究において 1 つの潮流をなしている．Noether 局所環上の有限生成加群に関するホモロジカルな問題群のことをホモロジカル予想と呼ぶ．歴史的に重要なものをいくつか紹介する（これらはすべて解決済みである）．

定理 1.3 (新交叉予想).
A を Noether 局所環とする．有限生成自由加群のなす長さ m の複体 $F_\bullet$ について，$F_\bullet$ は完全でなく，任意の $0 \leq i \leq m$ に対して $H_i(F_\bullet)$ は長さ有限（すなわち Artin かつ Noether）であるとする．このとき $\dim A \leq m$ である．

* 第 19 回数学総合若手研究集会

定理 1.4 (直和因子予想).
A を正則局所環とする．$B \supset A$ を A 加群として有限生成であるような A 代数とする．このとき A は A 加群として B の直和因子となる．

定理 1.5 (単項式予想).
A を Noether 局所環とし，$a_1, \ldots, a_d$ を A の巴系とする．任意の正整数 $t > 0$ に対して，$a_1^t \cdots a_d^t \notin (a_1^{t+1}, \ldots, a_d^{t+1})$ が成り立つ．

これらの問題群に取り組むに当たり，次の big CM 加群が重要な役割を果たす．

定義 1.6 (big CM 加群).
A を Noether 局所環とする．A 加群 M について，ある A の巴系 $a_1, \ldots, a_d$ であって，$a_1, \ldots, a_d$ が M 正則列をなすときものが存在するとき，M を **big CM 加群**という．

M に有限性を課したものを small CM 加群というが，small CM 加群は環が一般の場合には存在しないことがあり，さらに Hochster [Hoc17, Conjecture 2.2] によって完備局所整域であっても存在しないだろう，という予想が提出されている．ここでは有限性を課さずともホモロジカル予想に取り組むには十分であることが大切である．

ホモロジカル予想については日本語では [高木・高橋 10] が詳しい（現代では big CM 予想は André によって完全に解決されているなど，多少古くなっている部分もある）．他には [Hoc04], [Hoc07], [MS19] などが参考になる．

上に挙げた問題群を含む多くのホモロジカル予想が次の big CM 予想から導かれる．これは André [And18] によって証明され，多くのホモロジカル予想が解決した（新交差予想は Roberts [Rob87] によって解決済み）．

定理 1.7 (big CM 予想).
$(A, \mathfrak{m})$ を Noether 局所環とする．A 代数 B であって，以下の条件；

(i) $B \neq \mathfrak{m}B$ である．
(ii) ある A の巴系 $a_1, \ldots, a_d$ で，$a_1, \ldots, a_d$ が B の正則列であるようなものが存在する．

を満たすようなものが存在する．

このような B を big CM 代数という．big CM 加群の場合と同様に，B は必ずしも Noether になるとは限らず，A 自身が CM でなければ B の知られている具体例はほぼ Noether にはならない．例えば，標数 $p > 0$ の局所優秀整域 A に対して，A^+ を A の商体の代数閉包における整閉包（これを**絶対整閉包 (absolute integral closure)** という）とすると，A^+ は A の big CM 代数となる．

また，André による big CM 予想の証明にはパーフェクトイド代数と概可換環論 (almost ring theory) が用いられており，非 Noether 環を本質的な道具として扱っている．これらについては [下元 22] をぜひ一読されたい．これらに登場する非 Noether 環の構造を解析するためには，Noether にとらわれない枠組みでの道具を取り扱う必要があり，既存の技法では太刀打ち出来ないことが多い．次節では，局所コホモロジーを非 Noether の場合に取り扱う際に重要な役割を果たす**弱副正則列 (weakly proregular sequence)** を紹介する．

2 弱副正則列

まず局所コホモロジーを定義しよう．$\mathrm{Mod}(A)$ で A 上の加群のなす圏を表すことにする．

定義 2.1 (局所コホモロジー).
A を環とし，I をそのイデアルとする．関手 $\Gamma_I : \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(A)$ を；

$$\Gamma_I(-) := \varinjlim \mathrm{Hom}_A(A/I^n, -)$$

で定める．これを **I-捻関手 (torsion functor)** という．Γ_I は左完全であり，これの導来関手を $H_I^\bullet(-)$ で表して**局所コホモロジー (local cohomology)** という．

$M \in \mathrm{Mod}(A)$ について，局所コホモロジーの 0 次部分は；

$$\Gamma_I(M) = \left\{ x \in M \;\middle|\; \text{ある } n \in \mathbb{N} \text{ について } I^n x = 0 \text{ である.} \right\}$$

によって計算できるが，高次の部分を定義から計算することは一般には難しい．そこで Čech コホモロジーを利用する．A を環とし，点列 $\underline{a} := a_1, \ldots, a_r$ をとる．$\mathcal{I} := \{j_1, \ldots, j_i\} \subset \{1, \ldots, r\}$ について $a_{\mathcal{I}} := a_{j_1} \ldots a_{j_i}$ とおく．同様に A^r の基底を $e_1, \ldots, e_r$ とし，$e_{\mathcal{I}} := e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}$ とする．

定義 2.2 (Čech 複体).
A を環とし，点列 $\underline{a} = a_1, \ldots, a_r \in A$ をとる．各 $1 \le i \le r$ について次のように定義する．

$$C^i(\underline{a}) := \sum_{\#\mathcal{I}=i} A_{a_{\mathcal{I}}} e_{\mathcal{I}},$$

$$d^i : C^i(\underline{a}) \to C^{i+1}(\underline{a}); x e_{\mathcal{I}} \mapsto \sum_{j=1}^{n} x e_{\mathcal{I}} \wedge e_j.$$

ただし，x の像は $a_{\mathcal{I} \cup \{j\}}$ による局所化 $A_{a_{\mathcal{I} \cup \{j\}}}$ への像とする．さらに $i = 0$ について $C^0(\underline{a}) := A, d^0 : a \mapsto \sum_{j=1}^{r} a e_j$ とすると，$(C^i(\underline{a}), d^i)$ は複体をなす．これを **Čech 複体 (Čech complex)** という．また Čech 複体のコホモロジーを $\check{H}^i(\underline{a})$ とかいて，**Čech コホモロジー**という．

A 加群 M については $C^\bullet(\underline{a}, M) := C^\bullet(\underline{a}) \otimes M$ で定義する．さらに Čech コホモロジーは Koszul コホモロジーで表示することもできる．点列 $\underline{a} = a_1, \ldots, a_r$ に対して $\underline{a}^n := a_1^n, \ldots, a_r^n$ とおくと，任意の $M \in \mathrm{Mod}(A)$ に対して；

$$\check{H}^i(\underline{a}, M) \cong \varinjlim_n H^i(\underline{a}^n, M)$$

が成り立つ．これら Čech, Koszul コホモロジーはある程度計算しやすい．Noether 環論では次の定理により，局所コホモロジーが取り扱いやすくなる．

定理 2.3.
A を Noether 環とする．$\underline{a} = a_1, \ldots, a_r \in A$ とそれが生成するイデアル $I = (a_1, \ldots, a_r)$ に対して，任意の $M \in \mathrm{Mod}(A)$ と $i \ge 0$ に対して関手的な同型；

$$H_I^i(M) \cong \check{H}^i(\underline{a}, M)$$

が存在する．

Noether 性を外した場合について，Schenzel [Sch03] によってこの定理が拡張された．

定理 2.4 ([Sch03, Theorem 3.2])．
A を環とする．$\underline{a} = a_1, \ldots, a_r \in A$ とイデアル $I = (a_1, \ldots, a_r)$ に対して，任意の $M \in \mathrm{Mod}(A)$ と $i \geq 0$ に対して関手的な同型；

$$H_I^i(M) \cong \check{H}^i(\underline{a}, M)$$

が存在することと，$\underline{a}$ が**弱副正則列 (weakly proregular sequence)** であることは同値である．

定義 2.5 ([Sch03, Definition 2.3])．
A を環とする．$\underline{a} = a_1, \ldots, a_r \in A$ が**弱副正則 (weakly proregular)** であるとは，任意の $1 \leq i \leq r$ と $n \geq 0$ に対して，$m \geq n$ が存在して，自然な $\varphi_{mn} : H_i(\underline{a}^m) \to H_i(\underline{a}^n)$ が 0 であることをいう．

ここで定義は述べないが，Greenlees–May [GM92, Definition 1.8] による**副正則列 (proregular sequence)** というものがあり，正則列ならば副正則列，副正則列ならば弱副正則列である．
A が Noether ならば任意の点列は弱副正則であることが確かめられ，Schenzel の定理が定理 2.3 の一般化であることがわかる．

命題 2.6 ([Sch03, Sect. 2])．
A を Noether 環とすると，任意の $a_1, \ldots, a_r$ は副正則列であり，特に弱副正則列をなす．

Schenzel は [Sch03] において定理 2.4 を導来圏を用いて証明したが，我々は [And22] において Abel 圏の範疇におけるより簡単な別証明を与えた．鍵は次の命題を Abel 圏において証明することである．

命題 2.7 (A.)．
A を環とする．$\underline{a} = a_1, \ldots, a_r \in A$ に対して，$\underline{a}$ が弱副正則であることと，任意の $i > 0$ に対して $\check{H}^i(\underline{a}, -)$ が消去的な関手であることは同値である．

3 弱副正則列の応用と課題

弱副正則列は近年 [BIM19] によってパーフェクトイド代数，特に混標数の Noether 可換環論に応用され，第１節で述べたような，非 Noether 環を解析するための手法の代表例となっている．ここではパーフェクトイド代数の細部について立ち入る余裕はないので，[BIM19] について解説することはできないが，弱副正則列の異なる応用の１つとして，非 Noether 環上へ Cohen–Macaulay 性を一般化する研究と，その課題について紹介しよう．

定義 3.1 ([HM07, Definition 3.1, Definition 4.1])．
A を（Noether とは限らない）環とする．$\underline{a} := a_1, \ldots, a_r \in A$ に対して，$I := (a_1, \ldots, a_r)$ とおく．$\underline{a}$ が次の条件；

1. $\underline{a}$ は弱副正則列である．
2. $I \neq A$ である．
3. 任意の I を含む素イデアル P に対して $H_I^r(A)_P \neq 0$ である．

を満たすとき，$\underline{a}$ は**巴列 (parameter sequence)** であるという．$\underline{a}$ が**強巴列 (strong parameter sequence)**

であるとは，任意の $1 \leq i \leq r$ に対して $a_1, \ldots, a_i$ が巴列であることをいう．

任意の強巴列が正則列であるとき，A を **Cohen–Macaulay** であるという．

巴列 (parameter sequence) とは Noether 局所環における巴系 (system of parameters) の一般化である ([HM07, Remark 3.2]) ので，この定義は Noether の場合の一般化になっている．

この定義のもとで；

- 0 次元の環は CM 環である．
- 1 次元整域は CM 環である．
- 優秀整域 A で標数 $p > 0$ であるものに対する A^+ は CM 環である．

が成り立つことが [HM07] により示されている．上の２つの事実はちょうど Noether の場合の一般化であり，最後の事実は A^+ が big CM 代数という "Noether CM 環の近似" の例であったことから，Hamilton–Marley の意味の CM 環がよい振る舞いをしていることを表している．

この一般化した CM 環の振る舞いについては，次の問題が未解決である．

予想 3.2.

A を（Hamilton–Marley の意味での）CM 環とする．このとき $A[X]$ も CM 環であろう．

この問題に関しては Kim–Walker [KW20] によって次の部分的な結果が得られている．

命題 3.3 ([KW20, Threorem 25])**.**

A を有限次元の付値環（より広く有限次元 Prüfer 整域，すなわち射影加群の有限生成部分加群がすべて射影的であるような整域）とすると，$A[X_1, \ldots, X_n]$ は locally CM 環である．

参考文献

[And22] R. Ando (2022) "A note on weakly proregular sequences", *Moroccan Journal of Algebra and Geometry with Applications*, Vol. 1, pp. 98–107.

[And18] Y. André (2018) "La conjecture du facteur direct", *Publications mathématiques de l'IHÉS*, Vol. 127, No. 1, pp. 71–93, DOI: 10.1007/s10240-017-0097-9.

[BIM19] B. Bhatt, S. B. Iyengar, and L. Ma (2019) "Regular rings and perfect(oid) algebras", *Comm. Alg.*, Vol. 47, No. 6, pp. 2367–2383, DOI: 10.1080/00927872.2018.1524009.

[GM92] J. P. C. Greenlees and J. P. May (1992) "Derived functors of I-adic completion and local homology", *J. Algebra*, Vol. 149, No. 2, pp. 438–453, DOI: 10.1016/0021-8693(92)90026-I.

[HM07] T. D. Hamilton and T. Marley (2007) "Non-Noetherian Cohen–Macaulay rings", *J. Algebra*, Vol. 307, No. 1, pp. 343–360, DOI: 10.1016/j.jalgebra.2006.08.003.

[Hoc04] M. Hochster (2004) "Current state of the homological conjectures", Five talks of a VIGRE-funded minicourse at the University of Utah.

[Hoc07] M. Hochster (2007) "Homological conjectures, old and new", *Illinois J. Math.*, Vol. 51, No. 1, pp. 151 – 169, DOI: 10.1215/ijm/1258735330.

[Hoc17] M. Hochster (2017) "Homological Conjectures and Lim Cohen-Macaulay Sequences", in *Homo-*

logical and Computational Methods in Commutative Algebra , Vol. 20 of Springer INdAM, pp. 173–197 : Springer.

[HH91] M. Hochster and C. Huneke (1991) "Absolute integral closures are big Cohen-Macaulay algebras in characteristic P", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, Vol. 24, No. 1, pp. 137–143, DOI: 10.1090/S0273-0979-1991-15970-7.

[KW20] Y. Kim and A. Walker (2020) "A note on Non-Noetherian Cohen–Macaulay rings", *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 148, No. 3, pp. 1031–1042, DOI: 10.1090/proc/14836.

[MS19] L. Ma and K. Schwede (2019) "Recent applications of p-adic methods to commutative algebra", *Notices of the Amer. Math. Soc.*, Vol. 66, pp. 820–831, 6, DOI: 10.1090/noti1896.

[Rob87] P. Roberts (1987) "Le théorème d'intersection", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 304, No. 7, pp. 177–180.

[Sch03] P. Schenzel (2003) "Proregular sequences, local cohomology, and completion", *Math. Scand.*, Vol. 92, No. 2, pp. 161–180, DOI: 10.7146/math.scand.a-14399.

[Ser56] J.-P. Serre (1956) "Sur la dimension homologique des anneaux et des modules Noethériens", in *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Number Theory : Tokyo & Nikko, September 1955* , pp. 201–215 : Organizing Committee.

[下元 22] 下元数馬 (2022)「パーフェクトイド空間とその直和因子予想への応用」,『数学』, 第 74 巻, 第 4 号, 356–380 頁.

[高木・高橋 10] 高木俊輔・高橋亮 (2010)「可換環論の発展—ホモロジカル予想を中心として—」,『第 54 回代数学シンポジウム報告集』, 31–46 頁.

Perfectoid almost Cohen-Macaulay 代数の明示的構成について

東京工業大学 理学院 数学系
石塚伶 (Ryo ISHIZUKA)

概要

与えられた Noether 環に対して、その上の non-Noether な代数の存在性や性質は可換環論において重要な役割を果たしている。このような代数の性質としてとくに perfectoid 性や almost Cohen-Macaulay 性が考えられており、正標数において完全閉包はこれらの性質を持つ。今回の講演では混標数において完全閉包の類似を構成し、perfectoid の手法を用いてそれが同じ性質を持つことを示す。本内容は下元数馬氏 (日本大学) との共同研究に基づくものである。

1 導入

本稿では環と言ったら単位的な可換環とする。また、$(R, \mathfrak{m}, k)$ を次元 d の完備 Noether 局所整域であって剰余体 k が完全であるとし、$x_1, \ldots, x_n$ を $\mathfrak{m}$ の生成元であって $x_1, \ldots, x_d$ が R の system of parameter になっているとする（[AM94] 参照)。また、R^+ を次のように定義する。

定義 1.1. R の商体の代数閉包における R の整閉包を R の**絶対整閉包**といい、これを R^+ と書く。

与えられた Noether 環に対して、その上の non-Noether な代数の存在性やその性質は Noether 環の理論においても重要な役割を果たしている。正標数において例えば次の Kunz の定理が知られている。

定理 1.2 ([Kun69]). 正標数 p の Noether 局所環 A に対して A が正則局所環であることと、標準的な射 $A \to A_{\mathrm{perf}} \coloneqq \mathrm{colim}\{A \xrightarrow{F} A \xrightarrow{F} \cdots\}$ が平坦であることは同値。ただし $F\colon A \to A$ は $a \mapsto a^p$ で定まる Frobenius 射である。

この A_{perf} のことを A の**完全閉包** *(perfect closure)* と言い、A が整域のときはとくに A^+ において

$$A_{\mathrm{perf}} = \{a \in A^+ \mid \exists n \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\, a^{p^n} \in A\} \tag{1}$$

と書ける。定義から明らかに A_{perf} 上の Frobenius 射は全単射である（この全単射性を環が**完全** *(perfect)* であるという)。一般に完全閉包は Noether 環であるかどうかはわからないが、このように A の非特異性を A_{perf} への射で特徴づけることができる。このような対応を混標数でも行いたいというのが目的の 1 つである。

完全閉包の大事な性質のうちの 1 つはその完全性である。そのためにまずは完全性の混標数類似

である perfectoid 性について述べる。これは P.Scholze 氏によって [Sch12] で定義され、今では数論幾何学において非常に重要な役割を果たしている。さらに Y.André 氏によって可換環論において長年の未解決問題であった直和因子予想が perfectoid の理論を用いて解決され（[And18b, And18a]）、それ以降、perfectoid は可換環論においても重要な位置を占めている。

まずは perfectoid の定義を行うが、ここでは主定理の証明に必要な範囲で定義する。p をある素数とする。

定義 1.3 ([BMS18, Shi18]). $\mathbb{Z}_{(p)}$-代数 A が *perfectoid ring* であるとは、ある元 $\pi \in A$ が存在して次を満たすことである。

1. A において π^p は p を割り切る。
2. A は π-torsion free かつ π-adically complete である。
3. Frobenius 射から誘導される射 $A/\pi A \xrightarrow{F} A/\pi^p A$ は同型になる。

注意 1.4. とくに A の標数が p のときには $\pi = p = 0$ と取ることができるから、A が perfectoid ring であることと A が完全であることは同値である。このことから分かる通り、この perfectoid ring は正標数における完全性の混標数への一般化と見なすことが出来る。

また、定義だけではなく、例えば次のように Kunz の定理の混標数への一般化も行うことが出来ている。

定理 1.5 ([BIM19]). 環 A が p をその Jacobson 根基に含んでいるとする。このとき A が正則環であることと、ある perfectoid ring S への忠実平坦な射 $A \to S$ が存在することは同値である。

2 正標数において

正標数においてその完全閉包 R_{perf} は完全性だけでなく $(R, \mathfrak{m}, k)$ に対してさらに良い性質がわかっている。まずは次の用語を用意する。

定義 2.1. （正標数とは限らない）環 A の元 a の A における**整合的な p 乗根の列** *(compatible sequence of p-power roots)* $\{a^{1/p^j}\}_{j\geq 0}$ とは、$a^{1/p^0} = a$ であって任意の $j \geq 0$ で $a^{1/p^j} \in A$ かつ $(a^{1/p^{j+1}})^p = a^{1/p^j}$ であるような点列のことである。

とくに A が完全であるとすると、とくに Frobenius 射の単射性から $a \in A$ に対して $\{a^{1/p^j}\}_{j\geq 0}$ は一意的に定まる。絶対整閉包 R^+ では任意の元に対する整合的な p 乗根の列が取れていることに注意する。

定理 2.2 ([RSS07]). ここでは R は正標数であるとし、さらに R^+ における整合的な p 乗根の列 $\{x_1^{1/p^j}\}_{j\geq 0}, \ldots, \{x_n^{1/p^j}\}_{j\geq 0}$ を取る。このとき R の完全閉包 R_{perf} は

$$R_{\mathrm{perf}} = \bigcup_{j\geq 0} R[x_1^{1/p^j}, \ldots, x_n^{1/p^j}] \tag{2}$$

となる。さらにある $g \in R_{\mathrm{perf}}$ と、その整合的な p 乗根の列 $\{g^{1/p^j}\}_{j\geq 0}$ が R_{perf} に存在して R_{perf}

は $x_1, \ldots, x_d$ に関して $(g)^{1/p^\infty}$-almost Cohen-Macaulay algebra になる。

ただし、almost Cohen-Macaulay algebra とは次で定義されているものである。これは Cohen-Macaulay 性の almost mathematics における類似である（[RSS07, GR03] 参照）。

定義 2.3. R 代数 A がある元 $\pi \in A$ に対して、整合的な p 乗根の列 $\{\pi^{1/p^j}\}_{j\geq 0}$ を持っているとする。このとき A 加群 M が $x_1, \ldots, x_d$ に関して $(\pi)^{1/p^\infty}$*-almost Cohen-Macaulay algebra* であるとは、次の 2 条件をみたすことである。

1. 各 $1 \leq k \leq d$ について
$$(\pi)^{1/p^j} \cdot \frac{((x_1, \ldots, x_k)M :_M x_{k+1})}{(x_1, \ldots, x_k)M} = 0 \tag{3}$$
が任意の $j \geq 0$ に対して成り立つ。
2. 剰余加群 $M/\mathfrak{m}M$ がある $j \geq 0$ に対して $\pi^{1/p^j} \cdot M/\mathfrak{m}M \neq 0$ となる。

以上より、正標数において R から標準的に作られる Noether 環とは限らない環 R_{perf} は完全かつ almost Cohen-Macaulay algebra という良い性質を持っていることがわかる。ただし、この定義には正標数においてしか環準同型にならない Frobenius 射 F を用いているため、混標数でそのまま同じように構成することは難しい。

そこで、R_{perf} と一致する式 (2) の右辺は標数によらず構成することができることに着目した。これと同様の構成を混標数でも行えるが、[IS] では以下の通りそれが正標数における性質の類似、つまり perfectoid かつ almost Cohen-Macaulay を持つことを示した（定理 3.3）。

3 主定理

まず、主定理の証明で本質的に用いる操作である perfectoid ring に対する tilt を定義する。実際、perfectoid ring の構造の利点の 1 つはこの tilt によって混標数から正標数へ移行できることにある。なお、正標数から混標数に戻る untilt という操作もあり、これらによって adic space の間の同相や étale site の同型が示される（[Sch12]）が、今回の発表では使用しないため詳細は省く（[BMS18] 参照）。

定義 3.1 ([BMS18]). A を perfectoid ring とする。このとき A の *tilt* とは
$$A^\flat := \lim\{\cdots \xrightarrow{F} A/\pi A \xrightarrow{F} A/\pi A\} \tag{4}$$
のことである。とくにこれは完全な正標数の環になる。また、第 1 成分の射影を $\sharp\colon A^\flat \to A/pA$ と定義する。

命題 3.2. 上で定義した tilt $A^\flat$ について、ある $\pi^\flat \in A^\flat$ が存在して $\sharp(\pi^\flat) = \pi \in A$ となる。さらに $\sharp$ によって（正標数の環同士の）同型
$$\sharp\colon A^\flat/\pi^\flat A^\flat \xrightarrow{\cong} A/\pi A \tag{5}$$
が誘導される。

上述した通り、正標数の場合の定理 2.2 とほとんど同様に混標数において構成したものが、求める性質を満たしていることを示したのが [IS] の主定理である次の定理である。

定理 3.3 ([IS]). ここでは R を混標数 $(0,p)$ であり $x_1 = p$ と取れているとする。定理 2.2 と同様に $\{p^{1/p^j}\}_{j\geq 0}, \ldots, \{x_n^{1/p^j}\}_{j\geq 0}$ を固定する。このとき $\widetilde{R}_\infty$ (resp. $C(R_\infty)$) を

$$R_\infty := \bigcup_{j\geq 0} R[p^{1/p^j}, \ldots, x_n^{1/p^j}] \tag{6}$$

の $R_\infty[1/p]$ での整閉包 (resp. p-root closure) とする。それぞれの p 進完備化 $\widehat{R}_\infty$ と $\widehat{\widetilde{R}}_\infty$ と $\widehat{C(R_\infty)}$ について、ある非零な $g \in \widehat{R}_\infty$ とその整合的な p 乗根の列 $\{g^{1/p^j}\}_{j\geq 0} \subset \widehat{R}_\infty$ が存在し、次を満たす。

1. 標準的な射 $\varphi\colon \widehat{R}_\infty \to \widehat{\widetilde{R}}_\infty$ について、任意の $n > 0$ で $p^{1/p^n} \cdot \mathrm{Coker}(\varphi) = 0$ となる（すなわち φ は $(p)^{1/p^\infty}$-almost surjective になる）。
2. $\widehat{\widetilde{R}}_\infty$ は perfectoid な整域であり R^+ の p 進完備化 $\widehat{R^+}$ の部分環になる。さらに g の $\widehat{\widetilde{R}}_\infty$ への像は非零である。
3. $\widehat{\widetilde{R}}_\infty$ と $\widehat{C(R_\infty)}$ は $p, x_2, \ldots, x_d$ に関して $(pg)^{1/p^\infty}$-almost Cohen-Macaulay algebra である。
4. もし R が整閉整域であったとすると、ある不分岐な完備正則局所環 A とその非零元 h が存在して $\widetilde{R}_\infty$ は A 上の整拡大になり、$A[1/h] \to \widetilde{R}_\infty[1/h]$ は $\widetilde{R}_\infty[1/h]$ に含まれる有限 étale な $A[1/h]$ 代数の順極限と一致する。

それぞれについて証明の方針を述べる。

Proof.
1. 一様完備化という操作を行い、[BCK19, Lemma 2.9.12 page at 120] を用いる。
2. R_∞ の $R_\infty[1/p]$ での p-root closure $C(R_\infty)$ が perfectoid であることと、自然な包含写像 $C(R_\infty) \hookrightarrow \widetilde{R}_\infty$ が $(p)^{1/p^\infty}$-almost surjective になることを示す。この 2 つから perfectoid であることがわかり、整域であることは [Hei22] によって $\widehat{R^+}$ が整域になっていることから従う。
3. 正標数へ tilt を取って移行し、そこである完備 Noether 局所整域の完全閉包との間に almost isomorphism があることを示し、定理 2.2 と定理 3.2 を利用する。
4. $\widetilde{R}_\infty$ が $R_k := R[p^{1/p^k}, x_2^{1/p^k}, \ldots, x_n^{1/p^k}]$ の $R_k[1/p]$ での整閉包の順極限になることを用いる。

□

参考文献

[AM94] Michael. F. Atiyah and Ian. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, February 1994.

[And18a] Yves André, *La conjecture du facteur direct*, Publ.math.IHES **127** (2018), no. 1, 71–93.

[And18b] ———, *Le lemme d'Abhyankar perfectoide*, Publ.math.IHES **127** (2018), no. 1, 1–70.

[BCK19] Bhargav Bhatt, Bryden Cais, and Kiran S Kedlaya, *Perfectoid spaces: Lectures from the 2017 Arizona Winter School*, Mathematical Surveys and Monographs, no. volume 242, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2019.

[BIM19] Bhargav Bhatt, Srikanth B. Iyengar, and Linquan Ma, *Regular rings and perfect(oid) algebras*, Communications in Algebra **47** (2019), no. 6, 2367–2383.

[BMS18] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze, *Integral p-adic Hodge theory*, Publ.math.IHES **128** (2018), no. 1, 219–397.

[GR03] Ofer Gabber and Lorenzo Ramero, *Almost Ring Theory*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.

[Hei22] Raymond C. Heitmann, *R+ˆ is surprisingly an integral domain*, Journal of Pure and Applied Algebra **226** (2022), no. 1, 106809.

[IS] Ryo Ishizuka and Kazuma Shimomoto, *A mixed characteristic analogue of the perfection of rings and its almost Cohen-Macaulay property*, 24, In preparation.

[Kun69] Ernst Kunz, *Characterizations of Regular Local Rings of Characteristic p*, American Journal of Mathematics **91** (1969), no. 3, 772–784.

[RSS07] Paul Roberts, Anurag K. Singh, and V. Srinivas, *Annihilators of local cohomology in characteristic zero*, Illinois Journal of Mathematics **51** (2007), no. 1, 237–254.

[Sch12] Peter Scholze, *Perfectoid Spaces*, Publ.math.IHES **116** (2012), no. 1, 245–313.

[Shi18] Kazuma Shimomoto, *Integral perfectoid big Cohen–Macaulay algebras via André's theorem*, Math. Ann. **372** (2018), no. 3, 1167–1188.

Noetherian perfectoid towers and their tilts

Graduate School of Mathematics, Nagoya University
Kei NAKAZATO （仲里 渓）

Abstract

The theory of perfectoid spaces is recognized also as a powerful tool for studying commutative ring theory, but it heavily relies on delicate nature of non-Noetherian rings. To establish a general framework to apply the perfectoid theory in a Noetherian setting, we introduce a certain class of sequences of ring extensions that provide Noetherian approximation of perfectoid rings, and discuss their "tilts". As an application, we prove a mixed characteristic analogue of Polstra's finiteness theorem on divisor class groups of strongly F-regular rings. This talk is based on a joint work with Shinnosuke Ishiro and Kazuma Shimomoto.

1 Introduction

Nowadays the theory of perfectoid spaces established by Scholze ([10]) is recognized also as a powerful tool for studying commutative ring theory. In this theory, a certain ring theoretic operation called *tilting* plays a significant role: it makes a bridge between objects in characteristic 0 and positive characteristic. However, this operation behaves well only for huge algebraic/geometric objects; those are highly non-Noetherian.

Our primary aim is to modify the tilting operation so that it can be applied to a certain tower of Noetherian rings, and the resulting positive characteristic object is also Noetherian and its singularities reflect some features coming from the original one. To achieve the goal, we first introduce a nice class of towers of rings, called *perfectoid towers* (Definition 3.2).

We then consider a variant of the tilting operation with several desired properties for perfectoid towers (Definition 3.3). We call the resulting positive characteristic objects *small tilts*. In this talk, we discuss several fundamental properties of perfectoid towers and their small tilts. The most important feature is recorded in Main Theorem 1.

We apply these results to the divisor class group of local log-regular rings. The divisor class group of Noetherian normal domains is an important invariant but it is often hard to compute (indeed, a classical result of Claborn [3] asserts that an arbitrary abelian group can be realized as a divisor class group of some Dedekind domain). However, if one restricts to a certain class of Noetherian rings, the type of a divisor class group appearing is limited. For example, Polstra recently proved that for a strongly F-regular local ring, the torsion part of the divisor class group is finite ([9]). As an application of perfectoid towers, we establish a mixed characteristic analogue of Polstra's result (Main Theorem 2).

Throughout this report, we follow the following convention.

- We consistently fix a prime $p > 0$. If we need to refer to another prime different from p, we denote it by ℓ.
- All rings are assume to be commutative and contain a unity (unless otherwise stated; cf. Main Theorem 1). We mean by a *ring map* a unital ring homomorphism.
- We mean by a *pair* a pair (A, I) consisting of a ring A and and an ideal $I \subseteq A$.

2 Perfectoid rings and tilting

Let us recall the definition of perfectoid rings in the sense of Bhatt-Morrow-Scholze ([1, Definition 3.5]). For a ring R, we set the inverse limit

$$R^{\mathrm{frep}} := \varprojlim\{\cdots \to R/pR \to R/pR \to \cdots \to R/pR\},$$

where each transition map is the Frobenius endomorphism on R/pR. It is called the *inverse perfection* of R. Moreover, we denote by $W(R)$ the ring of p-typical Witt vectors over R. If R is p-adically complete and separated, we denote by $\theta_R : W(R^{\mathrm{frep}}) \to R$ the unique ring map such that the diagram:

$$\begin{tikzcd} W(R^{\mathrm{frep}}) \arrow[r, "\theta_R"] \arrow[d] & R \arrow[d] \\ R^{\mathrm{frep}} \arrow[r] & R/pR \end{tikzcd}$$

(where the vertical maps are induced by reduction modulo p and the bottom map is the first projection) commutes.

Definition 2.1. ([1, Definition 3.5]) A ring S is *perfectoid* if the following conditions hold.

1. S is ϖ-adically complete and separated for some element $\varpi \in S$ such that ϖ^p divides p.
2. The Frobenius endomorphism on S/pS is surjective.
3. The kernel of $\theta_S : W(S^{\mathrm{frep}}) \to S$ is principal.

For a perfectoid ring S, the inverse perfection S^{frep} is called the *tilt of* S and denoted by $S^\flat$.

3 Axioms for perfectoid towers

To state our axioms for perfectoid towers, we first recall (or give) some notations.

Notation 3.1. Let R be a ring, and let $I \subseteq R$ be an ideal. Let M be an R-module.

1. We say that an element $m \in M$ is *I-torsion* if for every $x \in I$, there exists some integer $n(x) > 0$ such that $x^{n(x)}m = 0$. We denote by $M_{I\text{-tor}}$ the R-submodule of M consisting of all I-torsion elements in M.
2. We denote by $\varphi_{I,M} : M_{I\text{-tor}} \to M/IM$ the composition of natural A-linear maps:

$$M_{I\text{-tor}} \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/IM.$$

Now let us give our axioms for perfectoid towers.

Definition 3.2 (Perfectoid towers)**.** Let R be a ring, and let $I_0 \subseteq R$ be an ideal. Then we call a direct system of rings $\{R_0 \xrightarrow{t_0} R_1 \xrightarrow{t_1} R_2 \xrightarrow{t_2} \cdots\}$ a *perfectoid tower arising from* (R, I_0) if it satisfies the following axioms.

(a) $R_0 = R$ and $p \in I_0$.

(b) For every $i \geq 0$, the ring map $\overline{t_i} : R_i/I_0R_i \to R_{i+1}/I_0R_{i+1}$ induced by t_i is injective.

(c) For every $i \geq 0$, the Frobenius endomorphism on R_{i+1}/I_0R_{i+1} factors as

$$R_{i+1}/I_0R_{i+1} \to R_i/I_0R_i \xrightarrow{\overline{t_i}} R_{i+1}/I_0R_{i+1}. \tag{3.1}$$

(d) For every $i \geq 0$, the former map of (3.1) (which will be denoted by F_i below) is surjective.

(e) For every $i \geq 0$, R_i is I_0-adically Zariskian.

(f) I_0 is a principal ideal, and R_1 contains a principal ideal I_1 that satisfies the following axioms.

(f-1) $I_1^p = I_0R_1$.

(f-2) For every $i \geq 0$, $\mathrm{Ker}(F_i) = I_1(R_{i+1}/I_0R_{i+1})$.

(g) For every $i \geq 0$, $I_0(R_i)_{I_0\text{-tor}} = (0)$. Moreover, there exists a bijective map $(F_i)_{\mathrm{tor}} : (R_{i+1})_{I_0\text{-tor}} \to (R_i)_{I_0\text{-tor}}$ such that the diagram:

$$\begin{tikzcd}
(R_{i+1})_{I_0\text{-tor}} \arrow[r, "\varphi_{I_0,R_{i+1}}"] \arrow[d, "(F_i)_{\mathrm{tor}}"'] & R_{i+1}/I_0R_{i+1} \arrow[d, "F_i"] \\
(R_i)_{I_0\text{-tor}} \arrow[r, "\varphi_{I_0,R_i}"'] & R_i/I_0R_i
\end{tikzcd}$$

commutes.

We then introduce a tower theoretic variant of the tilting operation, as follows.

Definition 3.3 (Tilts of perfectoid towers)**.** Let $(\{R_i\}_{i\geq 0}, \{t_i\}_{i\geq 0})$ be a perfectoid tower arising from some pair (R, I_0).

1. For an integer $j \geq 0$, we define the *j-th small tilt of* $(\{R_i\}_{i\geq 0}, \{t_i\}_{i\geq 0})$ *associated to* (R, I_0) as the limit:

$$(R_j)^{s.\flat}_{I_0} := \varprojlim\{\cdots \to (R_{j+i+1}/I_0R_{j+i+1}) \xrightarrow{F_{j+i}} (R_{j+i}/I_0R_{j+i}) \to \cdots \xrightarrow{F_j} R_j/I_0R_j\}.$$

2. For any $j \geq 0$, we define an injective ring map $(t_j)^{s.\flat}_{I_0} : (R_j)^{s.\flat}_{I_0} \hookrightarrow (R_{j+1})^{s.\flat}_{I_0}$ by the rule:

$$(t_j)^{s.\flat}_{I_0}((a_i)_{i\geq 0}) := (\overline{t_{j+i}}(a_i))_{i\geq 0}.$$

Moreover, we call the resulting tower $(\{(R_i)^{s.\flat}_{I_0}\}_{i\geq 0}, \{(t_i)^{s.\flat}_{I_0}\}_{i\geq 0})$ *the tilt of* $(\{R_i\}_{i\geq 0}, \{t_i\}_{i\geq 0})$ *associated to* (R, I_0).

Example 3.4. Let $(R, \mathfrak{m}, k)$ be a d-dimensional regular local ring whose residue field k is perfect and let $x_1, \ldots, x_d$ be a regular sequence of parameters. Then, by Cohen's structure theorem, R is isomorphic to

$$W(k)[|x_1, \ldots, x_d|]/(p - f)$$

where $f = x_1$ or $f \in (p, x_1, \ldots, x_d)^2$. For every $i \geq 0$, set $R_i = W(k)[|x_1^{1/p^i}, \ldots, x_d^{1/p^i}|]/(p - f)$, and let $t_i : R_i \to R_{i+1}$ be the natural injection. Then $(\{R_i\}_{i\geq 0}, \{t_i\}_{i\geq 0})$ is a perfectoid tower arising from $(R, (p))$. Moreover, the tilt $(\{(R_i)^{s.\flat}_{(p)}\}_{i\geq 0}, \{(t_i)^{s.\flat}_{(p)}\}_{i\geq 0})$ is isomorphic to the tower:

$$k[|x_1, \ldots, x_d|] \hookrightarrow k[|x_1^{1/p}, \ldots, x_d^{1/p}|] \hookrightarrow k[|x_1^{1/p^2}, \ldots, x_d^{1/p^2}|] \hookrightarrow \cdots.$$

This method of constructing perfectoid towers is naturally extended to *complete local log-regular rings* (see [8] for foundations of local log-regular rings). The resulting perfectoid towers are applied to obtain our main result (Main Theorem 2).

4 Main results

In this section, we fix a perfectoid tower $(\{R_i\}_{i\geq 0}, \{t_i\}_{i\geq 0})$ arising from some pair (R_0, I_0), and let $I_1 \subseteq R_1$ denote the ideal given in the axiom (f) in Definition 3.2. Moreover, we denote by $(\{R_i^{s.\flat}\}_{i\geq 0}, \{t_i^{s.\flat}\}_{i\geq 0})$ the tilt of $(\{R_i\}_{i\geq 0}, \{t_i\}_{i\geq 0})$ associated to (R_0, I_0). For $j = 0, 1$, let $I_j^{s.\flat} \subseteq R_j^{s.\flat}$ denote the inverse image of $I_j(R_j/I_0R_j)$ via the first projection map $R_j^{s.\flat} \to R_j/I_0R_j$. In particular, by the axiom (d) in Definition 3.2, the projection $R_0^{s.\flat} \to R_0/I_0R_0$ induces an isomorphism:

$$R_0^{s.\flat}/I_0^{s.\flat}R_0^{s.\flat} \xrightarrow{\cong} R_0/I_0R_0. \tag{4.1}$$

The following result is at the technical core of our theory of perfectoid towers.

Main Theorem 1. *$I_0^{s.\flat}$ and $I_1^{s.\flat}$ are principal ideals, and $(I_1^{s.\flat})^p = I_0^{s.\flat}R_1^{s.\flat}$. Moreover, we have isomorphisms of (possibly) non-unital rings $(R_i^{s.\flat})_{I_0^{s.\flat}\text{-tor}} \cong (R_i)_{I_0\text{-tor}}$ $(i \geq 0)$ that are compatible with $\{t_i\}_{i\geq 0}$ and $\{t_i^{s.\flat}\}_{i\geq 0}$.*

This result provides numerous important information on perfectoid towers. For example, the following corollary is essential for the application to analysis of divisor class groups.

Corollary 4.1. *Keep the notation as in Main Theorem 1. Set $R_\infty := \varinjlim_{i\geq 0} R_i$ and $R_\infty^{s.\flat} := \varinjlim_{i\geq 0} R_i^{s.\flat}$. Then the following assertions hold.*

1. *$(\{R_i^{s.\flat}\}_{i\geq 0}, \{t_i^{s.\flat}\}_{i\geq 0})$ is a perfectoid tower arising from $(R_0^{s.\flat}, I_0^{s.\flat})$.*
2. *The I_0-adic completion $\widehat{R_\infty}$ of R_∞ and the $I_0^{s.\flat}$-adic completion $\widehat{R_\infty^{s.\flat}}$ of $R_\infty^{s.\flat}$ are perfectoid rings. Moreover, $\widehat{R_\infty^{s.\flat}} \cong (\widehat{R_\infty})^\flat$.*

By combining Corollary 4.1 with Cesnavicius-Scholze's comparison theorem for etale cohomology groups via tilting of perfectoid rings ([2]), we obtain a noetherian variant of it.

Proposition 4.2. *For every $i \geq 0$, suppose that R_i is I_0-adically Henselian, and $t_i : R_i \to R_{i+1}$ is a module-finite extension of Noetherian normal domains whose generic extension is of p-power degree. Fix a Zariski-open subset $U \subseteq \mathrm{Spec}(R_0)$ such that $\mathrm{Spec}(R_0) \setminus V(I_0) \subseteq U$ and the corresponding open subset $U^{s.\flat} \subseteq \mathrm{Spec}(R_0^{s.\flat})$ via the isomorphism (4.1). Let ℓ be a prime different from p. Then, for any fixed $k, n \geq 0$ such that $|H^k(U_{\mathrm{et}}^{s.\flat}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})| < \infty$, one has*

$$|H^k(U_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})| \leq |H^k(U_{\mathrm{et}}^{s.\flat}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})|.$$

In particular, if $H^k(U_{\mathrm{et}}^{s.\flat}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) = 0$, then $H^k(U_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) = 0$.

By applying Proposition 4.2 and Fujiwara-Gabber's formal base change theorem ([4], [5]), we establish the following result. It can be regarded as a mixed characteristic analogue of Polstra's theorem (Theorem 4.3).

Main Theorem 2. *Let $(R, \mathcal{Q}, \alpha)$ be a local log-regular ring of mixed characteristic with perfect residue field k of characteristic $p > 0$, and denote by $\mathrm{Cl}(R)$ the divisor class group with its torsion subgroup $\mathrm{Cl}(R)_{\mathrm{tor}}$. Assume that $\widehat{R^{\mathrm{sh}}}[\frac{1}{p}]$ is locally factorial, where $\widehat{R^{\mathrm{sh}}}$ is the completion of the strict Henselization R^{sh}. Then $\mathrm{Cl}(R)_{\mathrm{tor}} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ is a finite group. In other words, the ℓ-primary subgroup of $\mathrm{Cl}(R)_{\mathrm{tor}}$ is finite for all primes $\ell \neq p$ and vanishes for almost all primes $\ell \neq p$.*

The proof is carried out by reduction to the positive characteristic case, which is settled by Polstra's theorem below.

Theorem 4.3 (Polstra)**.** *Let $(R, \mathfrak{m})$ be a Noetherian local $\mathbb{F}_p$-algebra, where we set $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Suppose that R is an F-finite strongly F-regular domain. Then the torsion subgroup of the divisor class group of R is finite.*

References

[1] B. Bhatt, M. Morrow, and P. Scholze, *Integral p-adic Hodge theory*, Publ. Math. de l'IHÉS **128** (2018), 219–397.

[2] K. Cesnavicius and P. Scholze, *Purity for flat cohomology*, `https://arxiv.org/abs/1912.10932`.

[3] L. Claborn, *Every abelian group is a class group*, Pacific J. Math. **18** (1966), 219–222.

[4] K. Fujiwara, *Theory of tubular neighborhood in étale topology*, Duke Math. J. **80** (1995), 15–57.

[5] O. Gabber, *Affine analog of the proper base change theorem*, Israel J. Math. **87** (1994), 325–335.

[6] S. Ishiro, K. Nakazato and K. Shimomoto, *Perfectoid towers and their tilts: with an application to étale cohomology groups of local log-regular rings*, arXiv:2203.16400.

[7] K.S. Kedlaya and R. Liu, *Relative p-adic Hodge theory, I: Foundations*, Astérisque **371** (2015).

[8] A. Ogus, *Lectures on logarithmic geometry*, Cambridge studies in advanced mathematics **178**, Cambridge University Press.

[9] T. Polstra, *A theorem about maximal Cohen-Macaulay modules*, to appear in Int. Math. Res. Not.

[10] P. Scholze, *Perfectoid spaces*, Publ. Math. de l'IHÉS **116** (2012), 245–313.

On Efimov K-theory

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Nagoya University
He Li

Abstract

We give the definition of Efimov (or continuous) K-theory of dualizable presentable stable ∞-categories and introduce some basic properties of Efimov K-theory.

1 Introduction

There is a long history about the algebraic K-theory. Grothendieck firstly defined the K_0-group and Quillen later defined the higher algebraic K-theory. After the development of the theory of ∞-categories established by Joyal, Lurie and so on, Barwick defined the algebraic K-theory for Waldhansen ∞-categories in [2] and Blumberg-Gepner-Tabuada defined the algebraic K-theory for small stable ∞-categories in [1].
Recently, Efimov defined the continuous extension of this algebraic K-theory to the ∞-category of dualizable presentable stable ∞-categories, which we call it *Efimov* K-*theory*. See [6].

2 Introduction to ∞-categories

We will give a basic introduction to the theory of ∞-categories. For a much more thorough introduction, see [3].
Let $[n] = \{0 < 1 < \cdots < n\}$ and let Δ be the category of objects of the form $[n]$ and the maps are given by the nondecreasing maps.

Definition 2.1. A *simplicial set* X is a functor $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$.

Definition 2.2. A simplicial set X is called an ∞-*category*, if it has the extension property for all inner horn inclusion $\Lambda^n_i \to \Delta^n$, for any n and any $0 < i < n$.

Example 2.3. If all arrows in an ∞-category X are equivalences, then we refer to X as an ∞-*groupoid*, or *space*, or *anima*. The ∞-category of all (small) anima is denoted by An.

There is a special kind of ∞-categories, called stable ∞-categories, which is fundamental. We refer to [4] for a thorough introduction.

Definition 2.4. We say an ∞-category $\mathcal{C}$ is *pointed*, if $\mathcal{C}$ amdits zero objects. That is, the initial objects and final objects coincide. We say a pointed ∞-category $\mathcal{C}$ is *stable*, if $\mathcal{C}$ admits finite limits and finite colimits, and finite limits coincide with finite colimits.

Definition 2.5. For a pointed ∞-category $\mathcal{C}$, and $X \in \mathcal{C}$, we define $\Sigma(X) := \mathrm{fib}(0 \to X)$ and $\Omega(X) := \mathrm{cofib}(X \to 0)$. Hence we have two endofunctors $\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ and $\Omega : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. One can show that if $\mathcal{C}$ is a stable ∞-category, then Σ and Ω are equivalences.

Example 2.6. The ∞-category Sp of all spectra is a stable ∞-category.

In order to give the definition of presentable ∞-categories, we need to fix a Grothendieck universe.

Definition 2.7. We say an ∞-category $\mathcal{C}$ is *κ-accessible* if $\mathcal{C} \simeq \mathrm{Ind}_\kappa(\mathcal{C}_0)$ for some small ∞-category $\mathcal{C}_0$. And we say $\mathcal{C}$ is *accessible* if $\mathcal{C}$ is κ-accessible for some cardinal κ.

Definition 2.8. An ∞-category $\mathcal{C}$ is *presentable* if $\mathcal{C}$ is accessible and admits small colimits.

Example 2.9. We say ∞-category $\mathcal{C}$ is *κ-compactly generated* if $\mathcal{C}$ is presentable and κ-accessible. In particular, if $\kappa = \omega$, we will simply refer to κ-compactly generated as compactly generated.

We always consider the presentable stable ∞-categories. We denote the ∞-category of all presentalbe stable ∞-categories by $\mathcal{P}\mathrm{r}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}}$, where the functors between two presentalbe stable ∞-categories are colimit-preserving functors.

Definition 2.10. We say a presentable stable ∞-category $\mathcal{C}$ is *dualizable*, if $\mathcal{C}$ is a retract of compactly generated stable ∞-category in $\mathcal{P}\mathrm{r}^{\mathrm{L}}_{\mathrm{st}}$. That is, there exists a compactly generated stable ∞-category $\mathcal{D}$, with colimit-preserving functors $U : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ and $V : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, s.t. $V \circ U \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$. We denote the ∞-category of all dualizable presentable stable ∞-categories with compact functors by $\mathcal{P}\mathrm{r}^{\mathrm{dual}}_{\mathrm{st}}$. Here, A functor F is *compact*, if F admits a right adjoint G and G preserves filtered colimits.

3 Algebraic K-theory

In this section, we recall the algebraic K-theory of a small stable ∞-category. There are many equivalent definitions for algebraic K-theory. Here we adapt the definition given by the Q-construction. See [9] for example.

For an ∞-category $\mathcal{C}$, we have the mapping anima functor $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathrm{An}$. By Grothendieck construction (see [8] for example), the right fibration classifying $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{C} \to \mathrm{An}$ is given by the twisted arrow category $(s, t) : \mathrm{TwAr}(\mathcal{C}) \to \mathcal{D} \times \mathcal{D}^{\mathrm{op}}$.

Definition 3.1. For an ∞-category $\mathcal{C}$ with finite limits, we define $\mathrm{Q}_n(\mathcal{C})$ to be the full subcategory of $\mathrm{Fun}(\mathrm{TwAr}[n], \mathcal{C})$ spanned by those diagrams which take every square of the form

$$\begin{tikzcd} (i \leq \ell) \arrow[r] \arrow[d] & (j \leq \ell) \arrow[d] \\ (i \leq k) \arrow[r] & (j \leq k) \end{tikzcd}$$

to a cartesian square in $\mathcal{C}$.

Hence, we get a simplicial category $\mathrm{Q}_\bullet(\mathcal{C}) : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Cat}^{\mathrm{lex}}_\infty$. One can show that $\mathrm{Q}_\bullet(\mathcal{C})$ is functorial in $\mathcal{C}$, hence we get the functor

$$\mathrm{Q}_\bullet(-) : \mathrm{Cat}^{\mathrm{lex}}_\infty \to \mathrm{Fun}(\Delta^{\mathrm{op}}, \mathrm{Cat}^{\mathrm{lex}}_\infty); \mathcal{C} \mapsto \mathrm{Q}_\bullet(\mathcal{C}).$$

For the ∞-category $\mathrm{Q}_n(\mathcal{C})$, taking the maximal subgroupoid of $\mathrm{Q}_n(\mathcal{C})$, we get an anima $\mathrm{Q}_n(\mathcal{C})^{\simeq} \in \mathrm{An}$. Hence $\mathrm{Q}_\bullet(\mathcal{C})^{\simeq}$ is a simplicial anima. By taking the geometric realization of the simplicial anima $\mathrm{Q}_\bullet(\mathcal{C})^{\simeq}$, we get the anima $|\mathrm{Q}_\bullet(\mathcal{C})^{\simeq}|$. And we can make the following definition.

Definition 3.2. For a small stable ∞-category $\mathcal{C}$, we define

$$\mathrm{K}(\mathcal{C}) := \Omega|\mathrm{Q}_\bullet(\mathcal{C})^{\simeq}|.$$

Hence, we have the functor

$$\mathrm{K} : \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{ex}} \to \mathrm{An}.$$

Next, we introduce the universal property of algebraic K-theory. We first introduce the concept of grouplike additive functors.

Definition 3.3. Let $\mathcal{C}$ be an ∞-category with finite products. We define $\mathrm{CMon}(\mathcal{C})$ to be the full subcategory of $\mathrm{Fun}(\mathrm{Fin}_*, \mathcal{C})$ spanned by all functors $X : \mathrm{Fin}_* \to \mathcal{C}$, s.t.

$$X(\langle n \rangle) \simeq \prod_n X(\langle 1 \rangle),$$

for any n. Objects in $\mathrm{CMon}(\mathcal{C})$ are called *commutative monoid objects* in $\mathcal{C}$.

In particular, we have the ∞-category $\mathrm{CMon}(\mathrm{An})$ of commutative monoid objects in An. Note that we have the functor $\pi_0 : \mathrm{An} \to \mathrm{Set}$, which induces a functor

$$\pi_0 : \mathrm{CMon}(\mathrm{An}) \to \mathrm{CMon}(\mathrm{Set}) = \mathrm{CMon}.$$

Definition 3.4. $X \in \mathrm{CMon}(\mathrm{An})$ is *grouplike*, if $\pi_0(X)$ is a group. We denote the full subcategory of $\mathrm{CMon}(\mathrm{An})$ spanned by grouplike commutative monoid objects in An by $\mathrm{CMon}(\mathrm{An})^{\mathrm{gp}}$. And we say a functor $F : \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{ex}} \to \mathrm{An}$ is *grouplike*, if for any $\mathcal{C} \in \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{ex}}$, $F(\mathcal{C})$ lies in $\mathrm{CMon}(\mathrm{An})^{\mathrm{gp}}$.

Definition 3.5. Consider the functor $F : \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{ex}} \to \mathrm{An}$ with $F(0) \simeq *$. We say F is *additive* if F sends every split exact sequence $\mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{ex}}$ to a fiber sequence in An.

Theorem 3.6 (Blumberg-Gepner-Tabuada, [1])**.** $\mathrm{K} : \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{ex}} \to \mathrm{An}$ *is the initial grouplike additive functor under* $(-)^{\simeq} : \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{ex}} \to \mathrm{An}$.

4 Efimov K-theory

For a dualizable presentable stable ∞-category $\mathcal{C}$, the yoneda embedding $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ factors through $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathrm{Ind}(\mathcal{C}^\kappa)$, which admits a left adjoint $\mathrm{colim} : \mathrm{Ind}(\mathcal{C}^\kappa) \to \mathcal{C}$. We define the Calkin category of $\mathcal{C}$ to be

$$\mathrm{Calk}_\kappa(\mathcal{C}) := \ker(\mathrm{Ind}(\mathcal{C}^\kappa) \to \mathcal{C}).$$

One can show that $\mathrm{Calk}_\kappa(\mathcal{C})$ is a compactly generated stable ∞-category. That is, $\mathrm{Calk}_\kappa(\mathcal{C}) = \mathrm{Ind}(\mathrm{Calk}_\kappa(\mathcal{C})^\omega)$. In particular, $\mathrm{Calk}_\kappa(\mathcal{C})^\omega$ is a small stable ∞-category. Hence, we can make the following definition.

Definition 4.1 (Efimov K-theory)**.** For a dualizable presentable stable ∞-category $\mathcal{C}$, we define the *Efimov* K*-theory* or *continuous* K*-theory* to be

$$\mathrm{K}_{\mathrm{cont}}(\mathcal{C}) := \Omega \mathrm{K}(\mathrm{Calk}_\kappa(\mathcal{C})^\omega).$$

In fact, for any additive invariant and localizing invariant $E : \mathrm{Cat}_\infty^{\mathrm{perf}} \to \mathrm{Sp}$, we can defnie the continuous extension of E to $\mathcal{P}\mathrm{r}_{\mathrm{st}}^{\mathrm{dual}}$.

Example 4.2. If $\mathcal{C}$ is a compactly generated stable ∞-category, then $\mathrm{K}_{\mathrm{cont}}(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{K}(\mathcal{C}^\omega)$.

Similar to the main result in [1], we have the following result.

Theorem 4.3 ([7])**.** *The functor* $(\mathcal{U}_{\mathrm{add}})_{\mathrm{cont}} : \mathcal{P}\mathrm{r}_{\mathrm{st}}^{\mathrm{dual}} \to \mathrm{Mot}_{\mathrm{add}}$ *is the universal additive invariant.*

And we also have the following co-representability.

Theorem 4.4 (Co-representability, [7]). *Let $\mathcal{C}$ be a dualizable presentable stable ∞-category, then we have*

$$\mathrm{map}((\mathcal{U}_{\mathrm{add}})_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sp}), (\mathcal{U}_{\mathrm{add}})_{\mathrm{cont}}(\mathcal{C})) \simeq \mathrm{K}_{\mathrm{cont}}(\mathcal{C}).$$

And we have similar results from algebraic K-theory.

Proposition 4.5 ([7]). *The functors $\mathrm{K}_{\mathrm{cont}}$ admits a lax symmetric monoidal structure and $\mathrm{K}_{\mathrm{cont}}$ is initial in $\mathrm{Fun}^{\mathrm{lax}}_{\mathrm{add}}(\mathcal{P}\mathrm{r}^{\mathrm{dual}}_{\mathrm{st}}, \mathrm{Sp})$.*

Theorem 4.6 ([7]). *Let $\{\mathcal{C}_i\}_{i\in I}$ be a family of dualizable presentable stable ∞-categories, then we have*

$$\mathrm{K}_{\mathrm{cont}}(\prod_{i\in I}\mathcal{C}_i) \simeq \prod_{i\in I}\mathrm{K}_{\mathrm{cont}}(\mathcal{C}_i).$$

Definition 4.7 (Efimov). Let $\{\mathcal{C}_n\}$ be an inverse sequence of dualizable presentable stable ∞-categories, s.t. the transition functors $f_{nm}, n \geq m$ are compact. Let g_{nm} the right adjoint functors of f_{nm}. We say that $\{\mathcal{C}_n\}$ is a *Mittag-Leffler inverse system*, if the following conditions hold:

(1) For any $n \geq 0$, the inverse sequence $(f_{kn}g_{kn})_{k\geq n}$is essentially constant in the category $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_n)$.

(2) For any $n, m \geq 0$, the functor

$$\varprojlim_{k\geq n,m} f_{km}g_{kn} : \mathcal{C}_n \to \mathcal{C}_m$$

is compact and has a left adjoint.

The following result of Efimov justifies the name of *continuous* K*-theory*, which means that it commutes with the Mittag-Leffler inverse limits.

Theorem 4.8 (Efimov, [10] Theorem 7). *If $\{\mathcal{C}_i\}$ is a Mittag-Leffler sequence of dualizable presentable stable ∞-categories, then we have*

$$\mathrm{K}_{\mathrm{cont}}(\varprojlim_i{}^{\mathrm{dual}}\mathcal{C}_i) \simeq \varprojlim_i \mathrm{K}_{\mathrm{cont}}(\mathcal{C}_i).$$

In particular, Efimov computed the continuous K-theory of nuclear $A^\wedge_I$-modules for a noetherian ring A with an ideal I. Note that the concept of nuclear modules is introduced by Clausen-Scholze in condensed mathematices. See [5].

Theorem 4.9 (Efimov, [10]). *Let A be a Noetherian ring and $I \subset A$ is an ideal, then we have*

$$\mathrm{K}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Nuc}(A^\wedge_I)) \simeq \varprojlim_n \mathrm{K}(A/I^n).$$

The following result us given by Efimov is about Efimov K-theory of sheaves on locally compact Hausdorff spaces.

Theorem 4.10 (Efimov, [6] Theorem 15). *Let $\mathcal{C}$ be a dualizable presentable stable ∞-category, then we have*

$$\mathrm{K}_{\mathrm{cont}}(\mathrm{Shv}(\mathbb{R}^n, \mathcal{C})) \simeq \Omega^n\mathrm{K}_{\mathrm{cont}}(\mathcal{C}).$$

References

[1] Andrew J. Blumberg, David Gepner, Goncalo Tabuada: A universal characterization of higher algebraic K-theory, 2013, https://arxiv.org/abs/1001.2282

[2] C. Barwick: On the algebraic K-theory of higher categories, 2015, https://arxiv.org/abs/1204.3607

[3] Jacob Lurie: Higher topos theory, 2009, https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HTT.pdf

[4] Jacob Lurie: Higher algebra, 2017, https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf

[5] Clausen, Scholze: Condensed mathematics and complex geometry, 2022, https://people.mpim-bonn.mpg.de/scholze/Complex.pdf

[6] Hoyois: K-theory of dualizable categories, 2018, https://hoyois.app.uni-regensburg.de/papers/efimov.pdf

[7] L. He: On Efimov K-theory, 2022, master thesis.

[8] AaronMazel-Gee: On the Grothendieck construction for ∞-categories, https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022404919300416

[9] Fabian Hebestreit, Andrea Lachmann, Wolfgang Steimle: The localisation theorem for the K-theory of stable ∞-categories, 2022, https://arxiv.org/abs/2205.06104

[10] Efimov: K-theory of inverse limits, 2022, https://publications.mfo.de/bitstream/handle/mfo/3971/OWR_2022_35.pdf?sequence=1&isAllowed=y

非アルキメデス的関数解析におけるコンパクト性

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
石塚康介 (Kosuke ISHIZUKA)

概要

一般に完備非アルキメデス的付値体は局所コンパクトでないため, 通常のコンパクト性は非アルキメデス的関数解析において, 一般論を記述するのにふさわしくない. コンパクト性の代替物としてコンパクトイドという概念が, Gruson と van der Put によって導入され, van Rooij や Schikhof などによってコンパクトイドが研究された. 本稿では, コンパクトイド性の一種である局所コンパクトイドについて得られた結果を紹介する.

1 導入

非アルキメデス的関数解析とは, 係数体が (完備) 非アルキメデス的付値体であるような関数解析のことをいう. 付値は三角不等式を満たすため, 古典的な場合 (係数体が実数体, 複素数体である関数解析) と同様に, 開写像原理, 一様有界性原理などは非アルキメデス的関数解析においても成り立つ. しかし, 非アルキメデス的付値体は, 局所コンパクトではない, 強三角不等式と呼ばれる次の不等式

$$|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$$

を満たすなど, 実数体, 複素数体と異なる特徴をもつため, 非アルキメデス的関数解析特有の現象が起きることがある. 例えば, ハーン-バナッハの定理は, 非アルキメデス的関数解析においては一般に成立しない. このような事情から, 非アルキメデス的関数解析の研究では, 古典的な概念と類似した概念を, まず定義し, そして古典的な場合との違いを調べるということが一つのテーマとなる.

そのような研究テーマの中に, コンパクト性の類似であるコンパクトイドというものがある. 既に述べた通り, 非アルキメデス的付値体は一般に局所コンパクトではない. よって, 古典的なコンパクト作用素などの概念を, 非アルキメデス的関数解析に導入したところで, その概念が機能するはずがない. ゆえに, 通常のコンパクト性は非アルキメデス的関数解析において一般論を記述するのにふさわしくないといえる. そこで, コンパクト性の代替物であるコンパクトイドを扱う. コンパクトイドは 1974 年に Gruson と van der Put によって導入された概念であり, 主に van Rooij や Schikhof によって研究された. 本稿では, コンパクトイドを更に拡張した概念である局所コンパクトイドについて得られた結果を報告する.

2 コンパクトイドの概説

K は非自明な付値 $|\cdot| : K \to [0, \infty)$ による, 完備非アルキメデス的付値体とする. $B_K := \{x \in K : |x| \leq 1\}$ によって K の整数環を表す. まず, 局所凸空間を導入する. 局所凸空間は非アルキメデ

ス的関数解析における基本的な対象である.

定義 2.1. E を K 上のベクトル空間, $\mathcal{P}$ を E 上のセミノルムの族とする. $\mathcal{P}$ が生成する E 上の局所凸位相とは, 0 の基本近傍系が

$$\left\{\{x \in E : \max_{1 \le i \le n} p_i(x) \le r\} : n \in \mathbb{N},\, p_1, \cdots, p_n \in \mathcal{P},\, r > 0\right\}$$

で与えられる K 上の位相的ベクトル空間としての位相である. このような位相を備えた位相的ベクトル空間 E を局所凸空間という.

断らない限り, E は局所凸空間を表すことにする. また慣習的な理由から B_K-加群 $A \subseteq E$ を絶対凸集合とよぶことにする. コンパクトイドを導入する前に, コンパクトの定義を復習しておく. 通常のコンパクトの定義ではなく, 位相群である E に埋め込まれた集合のコンパクト性を確認する:

$X \subseteq E$ がコンパクトであるとは, 任意の 0 の近傍 U に対して, $a_1, \cdots, a_n \in E$ が存在して, $X \subseteq U + \{a_1, \cdots, a_n\}$ を満たすことをいう.

さて, コンパクトイドを導入するが, 上に述べたコンパクトの定義と比較するとよい.

定義 2.2. $X \subseteq E$ がコンパクトイドであるとは, 任意の 0 の近傍 U に対して, $a_1, \cdots, a_n \in E$ で, $X \subseteq U + \mathrm{aco}\{a_1, \cdots, a_n\}$ を満たすものが存在するときにいう. ここで, $Y \subseteq E$ に対して, $\mathrm{aco}Y$ は Y で生成される絶対凸集合である.

注意 2.3. 一般に B_K はコンパクトではないが, コンパクトイドであることは明らかである. コンパクトイドを用いることで, 古典的な関数解析におけるコンパクト性による議論を, 非アルキメデス的関数解析においても展開することができる.

コンパクトイドの定義のなかで一つだけ留意すべき点がある. それは, $a_1, \cdots, a_n$ という有限個の元を, X ではなく E から選ぶという点である. 何が問題かというと, コンパクト性は位相的な性質であるため埋め込みによらないが, コンパクトイドという性質の「埋め込み」への依存性は, 定義から直ちに分かることではないということである. コンパクトイドの定義は, B_K-加群的な性質によるので「埋め込み」によらないとは, B_K-加群の同型によらないと考えることが適切である. 問題点をまとめると次のようになる:

絶対凸集合 $A \subseteq E$ がコンパクトイドとする. 局所凸空間 F と, 絶対凸集合 $B \subseteq F$ に対して, 位相的 B_K-加群の同型 $\phi : A \to B$ があるとする. このとき, $B \subseteq F$ はコンパクトイドであるか?

この問題に対しては, 次の定理により肯定的に解決される.

定理 2.4 ([2], 3.8.9)**.** $X \subseteq E$ をコンパクトイドとする. このとき次が成り立つ:

(1) K の付値が離散的であるときは, 任意の 0 の近傍 U に対して, 有限集合 $G \subseteq X$ で, $X \subseteq U + \mathrm{aco}G$ を満たすものが存在する.

(2) K の付値は稠密で, $\lambda \in K$, $|\lambda| > 1$ とする. このとき, 任意の 0 の近傍 U に対して, 有限集合 $G \subseteq \lambda X$ で, $X \subseteq U + \mathrm{aco}G$ を満たすものが存在する.

続いて, 局所コンパクトイドを導入する.

定義 2.5. $X \subseteq E$ が E で局所コンパクトイドであるとは, 任意の 0 の近傍 U に対して, $a_1, \cdots, a_n \in$

E で, $X \subseteq U + [a_1, \cdots, a_n]$ を満たすものが存在するときにいう. ここで, $Y \subseteq E$ に対して, $[Y]$ は Y で生成される部分空間である.

コンパクトイドと違い, 局所コンパクトイドは埋め込みによることが知られている. 反例を紹介する前に記号を導入する. 添え字集合 I に対して,

$$c_0(I) := \{(x_i)_{i \in I} \in K^I : \text{任意の}\, \epsilon > 0 \,\text{に対し, 有限個の}\, i \in I \,\text{を除いて}\, |x_i| \leq \epsilon\},$$

とする. $I = \mathbb{N}$ のときは I を省略して, $c_0 := c_0(\mathbb{N})$ と書くことがある. $c_0(I)$ 上のノルムを, $\|(x_i)_{i \in I}\| := \sup_I |x_i|$ で定める.

例 2.6 ([3], 3.6)**.** $\lambda \in K$, $|\lambda| > 1$ とする. $(c_0, \|\cdot\|)$ の元 $f_1, f_2, \cdots$ を

$$f_1 := (\lambda, \lambda^{-1}, 0, 0, \cdots),\ f_2 := (\lambda^2, 0, \lambda^{-2}, 0, 0, \cdots),\ \cdots\cdots \in c_0$$

と定める. このとき, $A := \mathrm{aco}\{f_1, f_2, \cdots\}$ は $(c_0, \|\cdot\|)$ で局所コンパクトイドであるが, $[A]$ で局所コンパクトイドではない.

局所コンパクトイドは埋め込みによることが分かったが, 局所コンパクトイドに完備性を課すと, この問題点は克服される. まず, 完備局所コンパクトイドの性質をいくつか紹介する.

定理 2.7 ([3], 2.3)**.** $A \subseteq E$ を完備な絶対凸集合で E で局所コンパクトイドであるとする. D を A に含まれる最大の部分空間とするとき, コンパクトイド $B \subseteq A$ が存在して, 包含写像から誘導される写像 $D \times B \to A$ は同相写像である.

定理 2.8 ([3], 3.4)**.** $A \subseteq E$ を完備な絶対凸集合で E で局所コンパクトイドであるとする. このとき次が成り立つ.
(1) K の付値が離散的であるときは, 任意の 0 の近傍 U に対して, 有限集合 $G \subseteq A$ と, 有限次元部分空間 $D \subseteq A$ で, $A \subseteq U + \mathrm{aco}G + D$ を満たすものが存在する.
(2) K の付値は稠密で, $\lambda \in K$, $|\lambda| > 1$ とする. このとき, 任意の 0 の近傍 U に対して, 有限集合 $G \subseteq \lambda A$ と, 有限次元部分空間 $D \subseteq A$ で, $A \subseteq U + \mathrm{aco}G + D$ を満たすものが存在する.

[3] では, 定理 2.8 によって完備局所コンパクトイドの局所コンパクトイド性は埋め込みによらないことが指摘されている. 定理 2.7, 2.8 に対して次の考察をした.

考察
(1) 完備局所コンパクトイドはコンパクトイドと有限型空間の和である. ここで, 局所凸空間 F が有限型であるとは, F 上の任意の連続なセミノルム p に対して, $F/\{p = 0\}$ が有限次元空間であることをいう.
(2) コンパクトイド性は埋め込みによらず, また有限型空間も埋め込みによらないので, コンパクトイドと有限型空間の和である局所コンパクトイドは, 埋め込みによらず局所コンパクトイドである.

考察 (1) では, 完備性が本質的であるが, 完備性を課さなくても同様のことが成立すると考え, 次の問題を提起した.

問題 1. $X \subseteq E$ を E で局所コンパクトイドであるとする．このとき, コンパクトイド $B \subseteq E$ と, 有限型空間 $F \subseteq E$ が存在して, $X \subseteq B + F$ となるか?

考察 (2) から分かるように, コンパクトイドと有限型空間の和である局所コンパクトイドは扱いやすいので, 十分条件について考えた.

問題 2. 局所コンパクトイドが, コンパクトイドと有限型空間の和である十分条件はどのようなものがあるか?

定理 2.7 によると, 完備であることは十分条件であるといえる.

3 主結果

本稿における主な結果は, 定理 3.1, 例 3.3, 定理 3.4 である.

まず, 問題 1 に対しては, 部分的な結果を得た.

定理 3.1 ([1], 3.1)**.** $(E, \|\cdot\|)$ をノルム空間, $X \subseteq E$ を E で局所コンパクトイドである集合とする. このとき, コンパクトイド $B \subseteq E$ と, 有次元部分空間 $F \subseteq E$ が存在して, $X \subseteq B + F$ を満たす.

全体空間が一般の局所凸空間である場合は未解決である.

次に, 問題 2 について考える．例 2.6 によると, 局所コンパクトイド A で, $[A]$ では局所コンパクトイドではない集合が存在した．そこで, 逆に $[A]$ で局所コンパクトイドである A が良い性質を持つかどうかを考察してみたが, そのような A で, コンパクトイドと有限型空間の和でないものが存在することが分かった.

例 3.2. $\lambda \in K$, $|\lambda| > 1$ とする．$(c_0, \|\cdot\|)$ の元 $f_1, f_2, \cdots$ を

$$f_1 := (\lambda, \lambda^{-1}, 0, 0, \cdots),\ f_2 := (\lambda^2, 0, \lambda^{-2}, 0, \cdots),\ \cdots\cdots \in c_0$$

と定める．また, $e_1 := (1, 0, \cdots) \in c_0$ とする．このとき, $A := \mathrm{aco}\{e_1, f_1, f_2, \cdots\}$ は $[A]$ で局所コンパクトイドであるが, コンパクトイドと有限型空間の和でない.

Proof. $A \subseteq [e_1] + \{(x_n)_n \in [A] : |x_n| \leq |\lambda|^{-(n-1)}\}$ より, A は $[A]$ で局所コンパクトイドである. また, 第一成分への射影を考えると, A はコンパクトイドと有限型空間の和でないことが分かる． □

考察 (2) によるとコンパクトイドと有限型空間の和である局所コンパクトイドは, 埋め込みによらず局所コンパクトイドであった．逆が成り立つかどうかを考える．すなわち, 埋め込みによらず局所コンパクトイドである場合, コンパクトイドと有限型空間の和であるかということである．上の例の A は, 埋め込みによらず局所コンパクトイドかどうかを調べることが容易ではない．しかし, 次の例ではその問題を解決できる．次の例は [1], Example 3.3 を改良して得られた.

例 3.3. $I := \mathbb{N} \amalg \mathbb{N}^2 \amalg \{\omega\}$, $(E, \|\cdot\|) := (c_0(I), \|\cdot\|)$ とする．また, $\alpha \in I$ について, e_α を α 成分のみが 1 であるベクトルとする．$\lambda \in K$, $|\lambda| > 1$ を 1 つ固定する．絶対凸集合 $A \subseteq E$ を,

$$A := \mathrm{aco}\{e_\omega\} + \mathrm{aco}\{\lambda^n e_\omega + \lambda^{-n} e_n : n \in \mathbb{N}\} + \mathrm{aco}\{\lambda^{-n} e_n + \lambda^{-j} e_{(n,j)} : n, j \in \mathbb{N}\}$$

と定める．ここで, $(n, j) \in \mathbb{N}^2$ である．このとき, A は埋め込みによらず局所コンパクトイドであるが, コンパクトイドと有限型空間の和でない.

問題 2 に対する十分条件とし, 次の定理を示した.

定理 3.4 ([1], 3.4)**.** $(E, \|\cdot\|)$ をノルム空間, $A \subseteq E$ を E で局所コンパクトイドである絶対凸集合とする．このとき, $[A]$ がバナッハ空間であれば, $[A]$ は有限次元空間である.

系 3.5 ([1], 3.5)**.** $(E, \|\cdot\|)$ をノルム空間, $A \subseteq E$ を E で局所コンパクトイドである絶対凸集合とする．このとき, $[A]$ がバナッハ空間であれば, コンパクトイドと有限型空間の和である.

参考文献

[1] K. Ishizuka, Some compact-like properties in non-archimedean functional analysis, arXiv preprint arXiv:2207.13476v2 (2022).

[2] C. Perez-Garcia, W.H. Schikhof, Locally convex spaces over non-archimedean valued fields, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 119. Cambridge University Press, Cambridge (2010).

[3] W.H. Schikhof, p-Adic local compactoids, Report 8802, Department of Mathematics, Catholic University, Nijmegen, The Netherlands (1987).

On Affine Structures coming from Berkovich Geometry

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻数学系
後藤 慶太 (Keita Goto)

概要

ミラー対称性の数学的理解の一つとして特異点を許す整アファイン多様体 (IAMS) を用いたミラーの構成が注目されている．この構成は元々 Strominger-Yau-Zaslow により提唱された SYZ 予想と呼ばれる物理学の予想 [SYZ96] に由来しており，特に Calabi-Yau 多様体の退化族から IAMS を得る段階（SYZ Picture）で微分幾何学的な議論が必要となる．2006 年に Kontsevich-Soibelman はこの構成を代数幾何学的に捉えるために,（後に）Non-Archimedean SYZ Picture と呼ばれる Calabi-Yau 多様体の退化族から IAMS を得る新たな手法を生み出した [KS06]．このとき，Calabi-Yau 多様体の退化族に対して上記 2 種類の構成から得られる IAMS が「同じ」であることが期待されている（cf. [KS06, Conjecture 3]）ものの，一般的な解決には至っていない．講演者は，偏極アーベル多様体の K-trivial な有限商の極大退化族に対して，SYZ Picture と Non-Archimedean SYZ Picture の両方で得られる IAMS を具体的に決定し，直接比較することで偏極アーベル多様体の K-trivial な有限商の極大退化族に対して両者の一致を証明することに成功した．また，hybrid 解析化という比較的新しい枠組みを用いることによって，この一致を幾何学的に特徴づけることに成功した．今回の講演ではこれらの結果について紹介する．これらの結果は [Got22] 及び [GO22] に基づく．

目次

1 導入 1

2 準備 2

2.1 SYZ fibration 4

2.2 Non-Archimedean SYZ fibration 5

3 主結果 6

1 導入

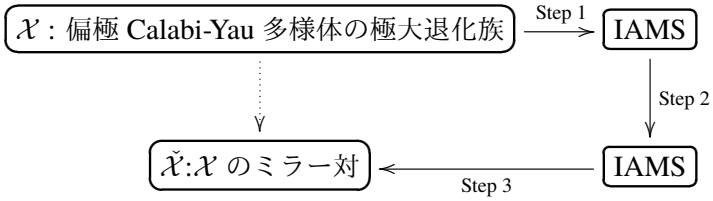
2006 年に Kontsevich-Soibelman は [KS06] において次のような予想を提唱した．

Conjecture 1.1 (cf. [KS06, Conjecture 3])**.** 極大退化している偏極 *Calabi-Yau* 多様体の族に対して，*special Lagrangian torus fibration* を用いて構成した *IAMS* と非アルキメデス幾何学を用いて構成した *IAMS* は一致する．

但し，この IAMS というのは，**特異点を許す整アファイン多様体** (Integral Affine Manifold with Singularities) の略であり，n 次元位相多様体 B が *IAMS* であるとは，余次元 2 の部分集合を除いたところで変換関数が整アファイン関数 ($\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^n$) となるような極大アトラスが存在する (**整アファイン構造**を持つ) ことを指す．同様に，B が**アファイン構造**を持つとは，B に変換関数がアファイン関数 ($\in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$) となるような極大アトラスが存在することを指し，B が**特異点を許すアファイン構造**を持つとは，余次元 2 の部分集合を除いたところで B がアファイン構造を持つことを指す．

この予想が提唱された背景としてあるのが，元々理論物理学でその存在が予見され現在に至るまで盛んに研究されているミラー対称性である．ミラー対称性は数学的にいくつかの定式化が知られているが今回は Strominger-Yau-Zaslow が [SYZ96] において提唱した SYZ 予想と呼ばれる定式化（正確にはその変種）に注目する．特に，SYZ 予想は偏極 Calabi-Yau 多様体の極大退化族に対しそのミラー対の構成を IAMS を用いて理解できるということを示唆している（図 1 ）．

図 1 : SYZ 予想に基づくミラー対の構成



Step 1: *SYZ Picture* (special Lagrangian torus fibration を用いた構成)
Step 2: Legendre transform
Step 3: Step 1 の逆問題を解く．

しかし，図 1 における Step 1 (SYZ Picture) には複素微分幾何学の議論が必要で，それを代数幾何学的に理解するのは難しいという問題点があった．そこで，この Step 1 に相当する代数幾何学的な操作として採用されたのが Kontsevich-Soibelman が [KS06] にて考案した非アルキメデス幾何学を用いたアプローチ (non-Archimedean SYZ Picture) である．非アルキメデス幾何学は元々代数幾何学の研究から生まれた分野であるため代数幾何学との相性が良いことは良く知られており，non-Archimedean SYZ Picture は代数幾何的な解釈として注目されることになった．つまり，Conjecture 1.1 はこの SYZ 予想に基づくミラー対の構成に対する代数幾何的解釈の正当性を主張する一連の予想の一つなのである．

本講演では，Conjecture 1.1 の解決に向けた講演者の結果を紹介する．

2 準備

主結果を述べるにあたって，用語をいくつか準備する．

Definition 2.1 (variety)**.** K を体とする．X が K 上の *variety* であるとは，X が K 上分離的かつ有限型の整スキームであることを指す．

Definition 2.2 (Calabi-Yau variety)**.** K を体とする．X が K 上の *Calabi-Yau variety* であるとは，X が K 上の smooth proper variety であって canonical bundle ω_X が自明となるもののことを指す．

Remark 2.3. 一般的には，X が n 次元 Calabi-Yau variety というのは，上記の条件に加えて，$1 \leq i \leq n-1$ に対して $H^i(X, \mathcal{O}_X) = 0$ となることも仮定する．但し，$\mathcal{O}_X$ は X の構造層とする．特に Definition 2.2 の意味ではアーベル多様体 (Definition 2.10) も Calabi-Yau variety である．

Remark 2.4. 一般に $\mathbb{C}$ 上の Calabi-Yau variety X の複素解析化 $X(\mathbb{C}) := \mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}, X)$ は Kähler 構造を持つとは限らない．しかし，X が $\mathbb{C}$ 上 projective であれば，ample line bundle L が定める $\mathbb{P}(H^0(X, L)^\vee)$ への埋め込みによって，$\mathbb{P}(H^0(X, L)^\vee)$ 上の Fubini-Study metric を引き戻すことにより Kähler 構造が定まる．特に，$\omega_{FS}(L)$ を引き戻しによって定義されたその Kähler 計量とするとき，$H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ 上で $[\omega_{FS}(L)] = c_1(L)$ が成立する．但し，$c_1(L)$ は L の first Chern class である．

Definition 2.5 (Calabi-Yau manifold)**.** コンパクト複素多様体 M が (algebraic) *Calabi-Yau manifold* であるとは，Kähler 構造を持ち，ある $\mathbb{C}$ 上の Calabi-Yau variety X が存在して $M \cong X(\mathbb{C})$ を満たすことを指す．

Calabi-Yau manifold に対して，次の定理が重要である．

Theorem 2.6 ([Yau78, Theorem 2])**.** *Calabi-Yau manifold* M に対して，ω を所与の *Kähler form* とする．このとき, ω と *cohomology class* が同じ M 上のある *Kähler form* ω' $\big($*i.e.* $[\omega] = [\omega'] \in H^2(M, \mathbb{R})\big)$ であって，ω' に付随する *Ricci form* $\mathrm{Ric}(\omega')$ について $\mathrm{Ric}(\omega') = 0$ となるものが一意に存在する．

$\mathrm{Ric}(\omega) = 0$ となるような Kähler form ω に付随する metric g のことを *Ricci flat metric* と呼ぶ．

Remark 2.7. X を projective とすれば，Remark 2.4 のように所与の Kähler form として，任意の X 上の ample line bundle L に付随する $\omega_{FS}(L)$ を取ることができる．このとき，Theorem 2.6 を用いると，任意の ample line bundle L に対し，$[\omega] = c_1(L) \in H^2(X(\mathbb{C}), \mathbb{R})$ となるような Ricci flat metric に付随する Kähler form ω が一意に存在することが分かる．特にこの構成において，Ricci flat metric に付随する Kähler form ω は L ではなく $c_1(L)$ に依存していることに注意する．

Remark 2.8. Theorem 2.6 は Monge-Ampère 方程式という多様体上の非線形な偏微分方程式を解く問題に帰着されるのだが，後に Tian や Chen-Donaldson-Sun により Fano 多様体に対して Monge-Ampère 方程式の解が存在することと接束の K-poly 安定性と呼ばれる代数幾何的な条件が等価であることが示されている．

ここまでで Calabi-Yau variety と Calabi-Yau manifold を定義したが，両者を特に区別せず，まとめて *Calabi-Yau* 多様体と呼ぶ．

Definition 2.9 (極大退化族)**.** Δ を $\mathbb{C}$ の原点中心の開円盤とし，その穴あき円盤を $\Delta^* := \Delta \setminus \{0\}$ とする．flat family $f : \mathcal{X} \to \Delta$ として $t \neq 0$ 上で $\mathcal{X}_t := f^{-1}(t)$ が n 次元 Calabi-Yau 多様体，$t = 0$ 上で $\mathcal{X}_0 := f^{-1}(t)$ は特異であるようなものを考える．このような $\mathcal{X}$ を**退化**といい，$\mathcal{X}^* := f^{-1}(\Delta^*) \to \Delta^*$ を**退化族**という．より強く，$\mathcal{X}$ が**極大退化**であるとは，$t \neq 0$ に対しモノドロミー変

換 $T : H^n(\mathcal{X}_t, \mathbb{Q}) \to H^n(\mathcal{X}_t, \mathbb{Q})$ が $(T-I)^{n+1} = 0$ 及び $(T-I)^n \neq 0$ を満たしていることを指す．また，極大退化 $f : \mathcal{X} \to \Delta$ に対して $\mathcal{X}^* \to \Delta^*$ を**極大退化族**という．

Definition 2.10 (アーベル多様体)**.** K を体とする．X が K 上の**アーベル多様体**であるとは，群演算 $m : X \times X \to X$ として m や逆元を与える射が多様体の射となっているようなものが存在する K 上の proper variety のことを指す．

一般にアーベル多様体は projective であることが知られている．また，$\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体 X については次が知られている．

Fact 2.11 (cf. [Mum70])**.** X を $\mathbb{C}$ 上の g 次元アーベル多様体とする．このとき次が成立する．

- 適当な格子 $\Lambda(\cong \mathbb{Z}^{2g}) \subset \mathbb{C}^g$ が存在して $X(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g/\Lambda$ を満たす．
- $\mathrm{Pic}^0 X$ を X の *Picard* 群 $\mathrm{Pic} X$ の部分群であって単位元と代数的同値になるような元からなる部分群とするとき，$\mathrm{Pic}^0 X$ は $\mathbb{C}$ 上のアーベル多様体の構造を持つ．

$X(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^g/\Lambda$ の下，$x \in X(\mathbb{C})$ による *translation* $t_x : X(\mathbb{C}) \to X(\mathbb{C})$ を $t_x(y) := x + y$ で定める．このとき，付随する射も $t_x : X \to X$ と書く．L を X 上の ample line bundle とするとき，$x \mapsto t_x^*(L) \otimes L^{-1}$ により群準同型 $\phi_L : X \to \mathrm{Pic}^0 X$ が誘導される．このような群準同型 $\phi = \phi_L : X \to \mathrm{Pic}^0 X$ を X の**偏極**という．偏極を指定したアーベル多様体のことを**偏極アーベル多様体**という．

Remark 2.12. 偏極は ample line bundle L に依存しているように見えるが，より正確には，その first Chern class $c_1(L)$ に依存している．

Definition 2.13 (有限群作用)**.** 偏極アーベル多様体の (極大) 退化族 $\mathcal{A}^* \to \Delta^*$ に**有限群 G が作用している**とは，群準同型 $\varphi : G \to \mathrm{Aut}_{\Delta^*}\mathcal{A}^*$ が存在して，各 $\varphi(g)$ が任意の $t \in \Delta^*$ に対して $\mathcal{A}_t$ 上の偏極 ϕ_t を保つような自己同型であることを指す．

偏極アーベル多様体の (極大) 退化族 $\mathcal{A}^* \to \Delta^*$ に有限群 G が作用しているとき，自然に $\mathcal{X}^* := \mathcal{A}^*/G \to \Delta^*$ が定義できる．特に，各ファイバー $\mathcal{X}_t = \mathcal{A}_t/G$ はアーベル多様体の有限商になっており，$\mathcal{X}^* \to \Delta^*$ はそのような有限商の退化族を与えている．$\mathcal{X}_t$ が *K-trivial* であるとは，dualizing sheaf $\omega_{\mathcal{X}_t}$ が自明となることを指す．但し，$\mathcal{X}_t$ は smooth とは限らないため，一般に canonical bundle の代わりに dualizing sheaf を考える必要があることに注意する．

Remark 2.14. 上の議論において $\mathcal{X}_t$ は normal であるため，$\mathcal{X}_t$ の smooth locus 上で canonical divisor を考えて，その closure をとることで dualizing sheaf は Weil divisor として実現される．

2.1 SYZ fibration

この節において，M は常に $\mathbb{C}$ 上の n 次元 Calabi-Yau 多様体とし，ω を M の Ricci flat metric に対応する Kähler form，Ω を M 上の holomorphic volume form とする．

Definition 2.15 (special Lagrangian submanifold)**.** M の実 n 次元部分多様体 N が *special Lagrangian submanifold* とは，N が $\omega|_N = 0$ 及び $\mathrm{Im}\Omega|_N = 0$ を満たしていることを指す．

Definition 2.16 (SYZ fibration)**.** B を位相多様体とする．fibration $f : M \twoheadrightarrow B$ が *special Lagrangian torus fibration* であるとは，任意のファイバー $M_b := f^{-1}(b)$ が M の special Lagrangian submanifold であって実トーラスと可微分同相であることを指す．この fibration のことを *SYZ fibration* ともいう．

SYZ fibration $f : M \to B$ は B に二つのアファイン構造 (∇_A, ∇_B) と一つの計量 g を与えることが知られている．特に，∇_B は $\mathrm{Im}\Omega$ によって定まっているため (B, ∇_B) は複素構造を反映しているアファイン構造であり，後述の non-Archimedean SYZ fibration で与えられる IAMS と比較すべきアファイン構造である．

2.2 Non-Archimedean SYZ fibration

この節では，X を $K := \mathbb{C}((t))$ 上の Calabi-Yau 多様体とし，K の DVR を $R := \mathbb{C}[[t]]$，剰余体を $k \cong \mathbb{C}$ とおく．また，K 上の離散付値（但し，乗法的な記法を採用する）として，$||t|| = e^{-1}$ によって正規化したものを考える．

Definition 2.17 (semivaluation)**.** A を K 上有限型代数とする．写像 $|\cdot| : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が A 上の *semivaluation* であるとは，任意の $f, g \in A$ に対して $|f+g| \leq |f| + |g|$ 及び $|f| \cdot |g| = |fg|$ が成立し，任意の $a \in K \hookrightarrow A$ に対し $|a| = ||a||$ が成立することを指す．

Definition 2.18 (Berkovich 解析化)**.** K 上有限型代数 A に対し，$U := \mathrm{Spec}A$ とおくとき，U の *Berkovich* 解析化 U^{an} を A 上の semivaluation 全体と定義する．また U^{an} の位相として，任意の $f \in A$ に対し，$|\cdot| \mapsto |f|$ で定まる写像 $f : U^{\mathrm{an}} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ が連続となる最も粗い位相を入れる．より強く，U^{an} には G-topology が自然に定義され，それによって構造層が定義できるが，詳細は [Ber90] に譲る．一般の K 上局所有限型 scheme X に対しても，各 affine open subscheme $U \subset X$ に対して U^{an} を構成し，それらを貼り合わせることによって *Berkovich* 解析化 X^{an} を定義することができる．X^{an} も U^{an} 同様に G-topology を持ち，構造層 $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ が定義できる．

Definition 2.19 (model)**.** flat R-algebraic space $\mathcal{X}$ が，同型 $\mathcal{X}_K := \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}R} \mathrm{Spec}K \cong X$ を備えているとき，この $\mathcal{X}$ を X の *model* という．さらに，この $\mathcal{X}$ が normal scheme で，特異ファイバー $\mathcal{X}_k (= \mathcal{X} \times_{\mathrm{Spec}R} \mathrm{Spec}k)$ の被約化 $\mathcal{X}_{k,\mathrm{red}}$ の各既約成分が $\mathbb{Q}$-Cartier，そして pair $(\mathcal{X}, \mathcal{X}_k)$ が minimal dlt model であるときに，$\mathcal{X}$ を X の *good minimal dlt model* という．

Definition 2.20 (dual complex)**.** $(\mathcal{X}, \mathcal{X}_k)$ を dlt pair とするとき，$\mathcal{X}$ の *dual complex* $\Delta(\mathcal{X})$ とは，次で定まる正則 CW 複体である：
$\mathcal{X}_k^{=1}$ を divisor としての $\mathcal{X}_k$ における係数が 1 であるような prime divisor 全体の成す divisor とする．そのような prime divisor E_i を用いて $\mathcal{X}_k^{=1} = \bigcup_{i \in I} E_i$ とおくとき，$\bigcap_{i \in J} E_i \neq \emptyset$ なる $J \subset I$ を考える．ここで $\bigcap_{i \in J} E_i$ の各既約成分に対して，$|J| - 1$ 次元の cell を対応させる．このとき任意の $j \in J$ に対し，$\bigcap_{i \in J} E_i$ の各既約成分は $\bigcap_{i \in J \setminus \{j\}} E_i$ の複数の既約成分に含まれてしまうことはない．このことから各 cell 同士の間の attaching map が誘導され CW 複体となる．

$\mathcal{X}$ を X の proper な good minimal dlt model とするとき，dual complex $\Delta(\mathcal{X})$ は X の Berkovich 解析化 X^{an} の部分集合とみなすことが出来る上に，X^{an} から $\Delta(\mathcal{X})$ への retraction $\rho_{\mathcal{X}} : X^{\mathrm{an}} \to \Delta(\mathcal{X})$ が誘導されることが知られている (cf.[BFJ16, Corollary 3.2])．このとき，X^{an} の部分集合としての $\Delta(\mathcal{X})$ は good minimal dlt model $\mathcal{X}$ の取り方に依らないことも知られており [MN12, §4.5]，これを X の *essential skelton* と呼び，$\mathrm{Sk}(X)$ と書く．また，こうして $\mathcal{X}$ から誘導される retraction $\rho_{\mathcal{X}} : X^{\mathrm{an}} \to \mathrm{Sk}(X)$ を $\mathcal{X}$ に付随する *non-Archimedean SYZ fibration* という．SYZ fibration がアファイン構造を与えていたように，non-Archimedean SYZ fibration も $\mathrm{Sk}(X)$ に IAMS 構造を与えることが知られている [NXY19, Theorem 6.1].

3 主結果

さて，主結果を述べていこう．以下，Δ を十分小さい半径を持つ $\mathbb{C}$ の原点中心の開円盤とし，その穴あき円盤を $\Delta^* := \Delta \setminus \{0\}$ とする．

Theorem 3.1 (cf. [GO22, Theorem 2.8])**.** 任意の偏極アーベル多様体の *K-trivial* な有限商の Δ^* 上の極大退化族 $\mathcal{X}^*$ に対して，各ファイバー $\mathcal{X}_t$ がある *fibration* $f_t : \mathcal{X}_t \to \mathcal{B}_t$ を持ち，$\mathcal{B}_t$ の余次元 *2* を除いたところで *SYZ fibration* になっている．しかも，その f_t の定める $\mathcal{B}_t$ 上の二つの特異点を許すアファイン構造と一つの計量の組 $(\mathcal{B}_t, \nabla_A(t), \nabla_B(t), g_t)$ は適当な意味で $t \to 0$ で収束し，その極限 $(\mathcal{B}_0, \nabla_A(0), \nabla_B(0), g_0)$ は明示的に書き下せる．特に，$(\mathcal{B}_0, \nabla_B(0))$ は *IAMS* である．

Remark 3.2. 一般の Calabi-Yau 多様体に対して SYZ fibration が存在するかどうかという問題は未解決問題である．[GO22, Theorem 2.8] では，後述するように，各ファイバーに対し SYZ fibration が存在するだけでなく，SYZ fibration の族として Δ^* 上の連続写像として与えられることも示している．この SYZ fibration の族の存在に関して，我々の結果以外では，一般の K3 曲面に対しても正しいことが知られている [OO21, Chapter 4].

Theorem 3.3 (偏極アーベル多様体の K-trivial な有限商に対する Conjecture 1.1 の肯定的解決．cf. [Got22, Theorem 5.31])**.** 有限群作用が適当な条件を満たすような偏極アーベル多様体の *K-trivial* な有限商に対する Δ^* 上の極大退化族 $\mathcal{X}^*$ を考える．この時，*Theorem 3.1* で与えられた $(\mathcal{B}_0, \nabla_B(0))$ は，適当な有限次拡大に相当する *base change* $\mathrm{Spec}K' \to \mathrm{Spec}K$ の後に，$X := \mathcal{X}^*_K$ に対するある *non-Archimedean SYZ fibration* $\rho_{\mathcal{X}} : X^{\mathrm{an}} \to \mathrm{Sk}(X)$ が定める *IAMS* $(\mathrm{Sk}(X), \rho_{\mathcal{X}})$ とスケールの差を除いて *IAMS* として同型となる．

Remark 3.4. Theorem 3.3 で述べた non-Archimedean SYZ fibration を与えるような good minimal dlt model $\mathcal{X}$ はアーベル多様体の退化の理論を応用することで与えられる．このアーベル多様体の退化は [FC90] において非常に良く調べられており，実際 Theorem 3.3 で述べた non-Archimedean SYZ fibration により定まる IAMS は [FC90] において degeneration data と呼ばれているものによって明示的に記述することができる．この degeneration data から所望の good minimal dlt model $\mathcal{X}$ を構成する過程において，アーベル多様体の退化を cone decomposition に結び付ける [Mum72] の議論を有限群作用付きに深化させた [Kün98] の理論が重要になるのだが，[Kün98] での議論は誘導される

IAMS を明示的に記述する上で不十分なものであった．Theorem 3.3 における講演者の最も大きな貢献は，[Kün98] の議論を発展させることで，この IAMS が明示的に記述できるような good minimal dlt model $\mathcal{X}$ を構成したことにある．

最後の定理を述べるための準備をしよう．Theorem 3.3 と同様の偏極アーベル多様体の K-trivial な有限商の極大退化族 $\mathcal{X}^*$ と $X = \mathcal{X}^*_K$ の minimal dlt model $\mathcal{X}$ を考える．このとき，$\mathcal{X}$ の *hybrid* 解析化 $\mathcal{X}^{\mathrm{hyb}}$ が存在して次の性質を満たすことが知られている [BJ17, §4 and Appendix].

1. $\mathcal{X}^{\mathrm{hyb}}$ は位相空間であり，連続写像 $\pi : \mathcal{X}^{\mathrm{hyb}} \twoheadrightarrow \Delta$ が存在する．
2. 次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\Delta^*) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{X}^* \arrow[d] \\ \Delta^* \arrow[r, "="] & \Delta^* \end{tikzcd}$$

3. $\pi^{-1}(0) \cong X^{\mathrm{an}}$ が成り立つ．

Theorem 3.5 (Theorem 3.3 の幾何学的特徴づけ cf. [GO22, Theorem 3.2, Theorem 4.9])**.** 上で定めた *hybrid* 解析化 $\mathcal{X}^{\mathrm{hyb}}$ に対して，*Theorem 3.1* で主張した各ファイバー $\mathcal{X}_t (t \neq 0)$ 上の *SYZ fibration* を f_t とし，$\mathcal{X}$ の定める *non-Archimedean SYZ fibration* を $\rho_{\mathcal{X}}$ とするとき，ある Δ 上の位相多様体 $\mathcal{B}$ と連続写像 $f^{\mathrm{hyb}} : \mathcal{X}^{\mathrm{hyb}} \twoheadrightarrow \mathcal{B}$ (我々はこれを hybrid SYZ fibration と呼んでいる) が存在し次を満たす．

1. $t \in \Delta^*$ に対して $f^{\mathrm{hyb}}|_t = f_t$.
2. $f^{\mathrm{hyb}}|_{t=0} = \rho_{\mathcal{X}}$.

Remark 3.6. 特に，f^{hyb} は $\mathcal{B}$ の各ファイバー $\mathcal{B}_t$ にそれぞれ SYZ fibration もしくは non-Archimedean SYZ fibration により特異点を許すアファイン構造を誘導しているが，$(\mathcal{B}_t, \nabla_B(t))$ に注目すると，$t = 0$ を含めて連続的にアファイン構造が変化していることが分かる．これは Theorem 3.3 に対して幾何的な描像を与えている．また，Fermat 型超曲面の族に対して, この hybrid 解析化を用いた同種の結果が報告されている [PS22, Proposition 5.8].

参考文献

[Ber90] V. Berkovich, *Spectral Theory and Analytic Geometry Over Non-Archimedean Fields*, American Mathematical Society, 1990.

[BFJ16] S. Boucksom, C. Favre, and M. Jonsson, *Singular semipositive metrics in non-Archimedean geometry*, Journal of Algebraic Geometry **25** (2016), no. 1, 77 - 139.

[BJ17] S. Boucksom and M. Jonsson, *Tropical and non-Archimedean limits of degenerating families of volume forms*, Journal de l'École polytechnique - Mathématiques **4** (2017), 87–139.

[FC90] G. Faltings and C. L. Chai, *Degeneration of abelian varieties*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 22, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[GO22] K. Goto and Y. Odaka, *Special Lagrangian fibrations, Berkovich retraction, and crystallographic groups*, arXiv:2206.14474, 2022 (submitted).

[Got22] K. Goto, *On The Two Types Of Affine Structures For Degenerating Kummer Surfaces — Non-Archimedean VS Gromov-Hausdorff Limits —*, arXiv:2203.14543, 2022 (submitted).

[KS06] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Affine Structures and Non-Archimedean Analytic Spaces*, The Unity of Mathematics: In Honor of the Ninetieth Birthday of I.M. Gelfand (2006), 321–385.

[Kün98] K. Künnemann, *Projective regular models for abelian varieties, semistable reduction, and the height pairing*, Duke Mathematical Journal **95** (1998), no. 1, 161 – 212.

[MN12] M. Mustaţă and J. Nicaise, *Weight functions on non-Archimedean analytic spaces and the Kontsevich-Soibelman skeleton*, Algebraic Geometry **2** (2012).

[Mum70] D. Mumford, *Abelian varieties*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, vol. 5, Oxford University Press, 1970.

[Mum72] ———, *An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings*, Compositio Mathematica **24** (1972), no. 3, 239–272.

[NXY19] J. Nicaise, C. Xu, and T. Y. Yu, *The non-archimedean SYZ fibration*, Compositio Mathematica **155** (2019), no. 5, 953–972.

[OO21] Y. Odaka and Y. Oshima, *Collapsing K3 Surfaces, Tropical Geometry and Moduli Compactifications of Satake, Morgan-Shalen Type*, MSJ Memoir, vol. 40, MATHEMATICAL SOCIETY OF JAPAN, 2021.

[PS22] L. Pille-Schneider, *Hybrid toric varieties and the non-archimedean SYZ fibration on Calabi-Yau hypersurfaces*, arXiv:2210.05578, 2022.

[SYZ96] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow, *Mirror symmetry is T duality*, Nuclear Physics **479** (1996), 243–259.

[Yau78] S.T. Yau, *On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation*, Communications on Pure and Applied Mathematics **31** (1978), no. 3, 339–411.

パラレルセッション
会場Ｄ

超平面配置の二重被覆と整係数の局所系係数コホモロジー

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
菅原 朔見 (Sakumi SUGAWARA)

概要

超平面配置のトポロジーにおいて，「様々な位相不変量が組み合わせ的に決まるか？」というのは中心的な問題であり，これまで多くの研究があった．「補集合の局所系係数ホモロジーや，Milnor ファイバーや被覆空間のトーションが組み合わせ的に決まるか？」というのは未解決問題である．本講演では，二重被覆の 2-トーションに対する公式が得られたので，それについて紹介する．また，超平面配置の整係数の局所系係数コホモロジーの最近の進展についても併せて紹介する．本講演の内容は石橋卓氏 (株式会社 ARISE analytics) と吉永正彦氏 (大阪大学) との研究に基づく．

1 導入 1 –超平面配置–

本節では，本研究の題材である超平面配置について必要事項を説明する．超平面配置の一般論については [12] を参照.

定義 1.1. ベクトル空間 $\mathbb{C}^\ell$ もしくは射影空間 $\mathbb{C}P^\ell$ 内の超平面の有限集合 $\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_n\}$ を超平面配置という．その補集合を $M(\mathcal{A}) = \mathbb{C}^\ell \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$ (or $\mathbb{C}P^\ell \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$) と表す.

超平面配置からは，超平面たちの交わり方の組み合わせ的な情報が定まる.

定義 1.2. 超平面配置 $\mathcal{A}$ の交叉半順序集合 $L(\mathcal{A})$ を以下で定める.

$$L(\mathcal{A}) = \{ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \mid \mathcal{B} \subset \mathcal{A},\ \bigcap_{H \in \mathcal{B}} H \neq \emptyset \}$$

ただし，$\mathcal{B} = \emptyset$ のときは $\mathbb{K}^\ell = \bigcap_{H \in \emptyset} H$ と約束し，半順序は $X \leq Y \Leftrightarrow X \supset Y$ と定める.

超平面配置のトポロジーにおいては，補集合 $M(\mathcal{A})$ や次節で定義を与える Milnor ファイバー $F_{\mathcal{A}}$ のトポロジーが交叉半順序集合 $L(\mathcal{A})$ の情報のみに記述されるか？すなわち，組み合わせ論的情報によりきまるか？というのが大きな問題意識である.

2 導入 2 –Milnor ファイブレーション–

本節では，本研究のモチベーションとなる超平面配置の Milnor ファイバーについて概要を説明する．$Q = Q(x_1, \cdots, x_{\ell+1}) \in \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_{\ell+1}]$ を複素係数の $\ell + 1$ 変数の多項式とし，とくに Q が線

形な一次式 $\alpha_i(x_1, \cdots, x_n)$ の積で表されていると仮定する．

$$Q(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \alpha_i(x_1, \cdots, x_n).$$

Q は多項式函数 $Q : \mathbb{C}^{\ell+1} \to \mathbb{C}$ を定める．簡単な計算により，Q の臨界値は $0 \in \mathbb{C}$ のみであることがわかる．超平面 $H_i = \alpha_i^{-1}(0)$ と定めると，Q が一次式 α_i たちの積で書かれていることから，臨界値 0 の逆像は

$$Q^{-1}(0) = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$$

となり，$Q^{-1}(0)$ は超平面の和集合として表すことができる．従って，多項式 Q は $\mathbb{C}^{\ell+1}$ 内の超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_n\}$ を定めるといえる．

多項式函数 Q の超平面配置の補集合への制限 $Q : M(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}^\times$ を考える．これはファイバー束になることが知られており [10]，Milnor ファイブレーションと呼ばれる．

定義 2.1. ファイバー束 $Q : M(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}^\times$ のファイバーを $F_{\mathcal{A}} := Q^{-1}(1)$ とおく．これは超平面配置 $\mathcal{A}$ の Milnor ファイバーと呼ばれる．

また，Q は線形な一次式の積であり，とくに斉次多項式となる．したがって，Q は射影空間 $\mathbb{C}P^\ell$ 内の超平面配置 $\overline{\mathcal{A}} = \{\overline{H}_1, \cdots, \overline{H}_n\}$ を定める．ここで各 $\overline{H}_i$ は

$$\overline{H}_i = \{[x_1, \cdots, x_{\ell+1}] \in \mathbb{C}P^\ell \mid \alpha_i(x_1, \cdots, x_{\ell+1}) = 0\}$$

である．こうして得られる $\mathbb{C}P^\ell$ 内の超平面配置の補集合を $M(\overline{\mathcal{A}}) = \mathbb{C}P^\ell \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{H}_i$ と表す．

さて，前節のおわりに超平面配置の補集合や Milnor ファイバーのトポロジーが組み合わせ論的情報により決まるか？というのが大きな問題意識であると述べた．これについて，以下が成り立つことが知られている．

定理 2.2. (Orlik-Solomon [11]) 超平面配置の補集合 $M(\mathcal{A})$ の Betti 数 $b_k(M(\mathcal{A}))$ やコホモロジー環 $H^*(M(\mathcal{A}), \mathbb{Z})$ の構造は組み合わせ論的情報により記述される．同様のことが $M(\overline{\mathcal{A}})$ についても成り立つ．

そこで，Milnor ファイバー $F_{\mathcal{A}}$ に対しても同様のことが成り立つと考えるのは自然である．しかしながら，Milnor ファイバーについてこれは (1 次の Betti 数でさえも) 未解決である．(2022 年現在)

問題 2.3. 超平面配置の Milnor ファイバーの Betti 数 $b_k(F_{\mathcal{A}})$ やコホモロジー環 $H^*(M(\mathcal{A}), \mathbb{Z})$ は組み合わせ論的情報により記述されるか？特に 1 次 Betti 数 $b_1(F_{\mathcal{A}})$ はどうか？

これについて，関連する二つの問題が考えられていた．

(i) Papadima-Suciu により Milnor ファイバーの Betti 数 $b_k(F_{\mathcal{A}})$ を組み合わせ的に記述する公式が予想された．([14], Conjecture1.9)
(ii) Milnor ファイバーのホモロジー $H_1(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{Z})$ はトーションを持つか？

本研究では，これらの間に密接な関係があることがわかった．詳細は次の節で述べる．

組み合わせ論的記述の観点からは，超平面配置の補集合に比べて，Milnor ファイバーを調べるのは難しいと言える．しかし Milnor ファイバーと補集合はモノドロミーについての基本的な考察をすることで，関連づけられる．

多項式 Q は斉次多項式で次数は n である．したがって，Milnor ファイバー $F_{\mathcal{A}}$ にはモノドロミーとして，巡回群 $\langle \lambda \in \mathbb{C}^{\times} \mid \lambda^n = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ が作用する．具体的にはモノドロミー写像 $h : F \to F$ は $h(x) = \lambda \cdot x$ により与えられる．また, モノドロミー h はホモロジーの自己同型 $h_* : H_k(F) \to H_k(F)$ を誘導する．このとき，以下の命題が成り立つ．（証明や詳細な議論については例えば [3] の Section 1 などを参照）

命題 2.4. モノドロミーの作用による商空間 $F_{\mathcal{A}}/\mathbb{Z}_n$ は $M(\overline{\mathcal{A}})$ と同相になる．とくに，F は $M(\overline{\mathcal{A}})$ 上の n 次巡回被覆となる．

また，Milnor ファイバーの $\mathbb{C}$-係数のホモロジーについて，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} H_k(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C}) &\cong \bigoplus_{\lambda^n = 1} H_k(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\lambda} \\ &\cong \bigoplus_{\lambda^n = 1} H_k(M(\mathcal{A}), \mathcal{L}_{\lambda}). \end{aligned}$$

ここで，$H_k(F_{\mathcal{A}}, \mathbb{C})_{\lambda}$ はモノドロミー h_* に関する λ-固有空間，$H_k(M(\overline{\mathcal{A}}), \mathcal{L}_{\lambda})$ は各 λ に対応する $M(\overline{\mathcal{A}})$ 上の階数 1 の複素係数の局所系 $\mathcal{L}_{\lambda}$ の局所系係数ホモロジーである．

この命題から，超平面配置の補集合上の被覆空間や，局所系係数ホモロジーを研究することは Milnor ファイバーを調べる上で重要であるといえる．そこで本研究では，超平面配置の補集合の二重被覆空間や，これまで研究がほとんどなかった整係数の局所系係数ホモロジーについて研究を行った．

3 二重被覆

本節では，Papadima-Suciu により予想された公式の精密化とも言える，二重被覆空間の 2-トーションの個数に関して得られた結果を述べる．本節を通して，X を CW 複体の構造をもつ連結な位相空間とする．0 でない元 $\omega \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)$ を一つ固定する．このとき，同型 $H^1(X, \mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Hom}(H_1(X, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{Z}_2)$ があるので，ω は群準同型 $\pi_1(X) \to \mathbb{Z}_2 \cong \{\pm 1\}$ を定める．$\omega \neq 0$ よりこれは全射である．この群準同型の核 $\mathrm{Ker}(\pi_1(X) \to \{\pm 1\})$ は $\pi_1(X)$ の指数 2 の部分群である．従って，ω は二重被覆 $p_{\omega} : X^{\omega} \to X$ を定める．また，$\pi_1(X) \to \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}^{\times} = \mathrm{Aut}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$ は階数 1 の $\mathbb{Z}$ 係数の局所系 $\mathcal{L}_{\omega}$ を定める．

定義 3.1. 局所系 $\mathcal{L}_{\omega}$ の k 次元の局所系係数ホモロジーの階数を $\rho_k(\omega)$ と表す．すなわち

$$\rho_k(\omega) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} H_k(X, \mathcal{L}_{\omega}) = \dim_{\mathbb{C}} H_k(X, \mathcal{L}_{\omega} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})$$

とする．

命題 3.2. 二重被覆空間のホモロジーのモノドロミー固有分解は以下のようになる*:*

$$H_k(X^{\omega}, \mathbb{C}) \cong H_k(X, \mathbb{C}) \oplus H_k(X, \mathcal{L}_{\omega} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}).$$

特に，Betti 数について

$$b_k(X^\omega) = b_k(X) + \rho_k(\omega)$$

が成り立つ．

以後，はじめに固定した $\omega \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)$ が $\omega \wedge \omega = 0$ を満たすと仮定する．このとき，ω をかけるという写像

$$\omega \wedge - : H^k(X, \mathbb{Z}_2) \to H^{k+1}(X, \mathbb{Z}_2)$$

はコチェイン複体 $(H^\bullet(X, \mathbb{Z}_2), \omega \wedge -)$ を誘導する．このコチェイン複体は mod 2 青本複体と呼ばれる．

定義 3.3. mod 2 青本複体の k 次のコホモロジーを $\alpha_k(\omega)$ と表す．すなわち，

$$\alpha_k(\omega) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2} H^k(H^\bullet(X, \mathbb{Z}_2), \omega \wedge -) \text{ と定める．}$$

注意 3.4. 特に $X = M(\mathcal{A})$ が超平面配置の補集合の場合を考える．$\alpha_k(\omega)$ はコホモロジーの環構造のみを用いて定義されるので，定理 2.2 より $\alpha_k(\omega)$ は組み合わせ論的情報により記述される数であることがわかる．

Papadima-Suciu により次の不等式が示されている．

定理 3.5. (Papadima-Suciu [13])

$$\rho_k(\omega) \leq \alpha_k(\omega).$$

彼らは $X = M(\mathcal{A})$ が超平面配置の補集合であり，被覆 $F \to M(\mathcal{A})$ が超平面配置 $\mathcal{A}$（のコーニング）の Milnor ファイバーである場合には，等式 $\rho_k(\omega) = \alpha_k(\omega)$ が成り立つと予想した [14]．これが前節で述べた Papadima-Suciu により予想された公式 (の一部) である．

最近，吉永によりこの等式に対する反例が発見された [17]．$\mathcal{A}_{\mathcal{ID}} = \{H_1 \cdots, H_{15}\}$ を図 1 のような $\mathbb{C}^2$ 内の直線配置（二十・十二面体配置と呼ばれる）とする．$e_1, \cdots, e_{15} \in H^1(M(\mathcal{A}_{\mathcal{ID}}), \mathbb{Z}_2)$ を各直線のメリディアンにより定まる $H_1(M(\mathcal{A}_{\mathcal{ID}}), \mathbb{Z}_2)$ の双対基底とする．$\omega = \sum_{i=1}^{15} e_i$ とする．このとき $\rho_1(\omega) = 0$，$\alpha_1(\omega) = 1$ となる（計算の詳細は [17] の Theorem 4.3 の証明を参照）．これにより不等式

$$\rho_1(\omega) < \alpha_1(\omega)$$

が得られる．

一方で，対応する二重被覆のホモロジー $H_1(M(\mathcal{A}_{\mathcal{ID}})^\omega, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{15} \oplus \mathbb{Z}_2$ となり，2-トーションを持つことが知られている．さらに，$\mathcal{A}_{\mathcal{ID}}$ をコーニングして得られる $\mathbb{C}^3$ 内の平面配置 $c\mathcal{A}_{\mathcal{ID}}$ の Milnor ファイバーについても $H_1(F_{c\mathcal{A}_{\mathcal{ID}}}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{15} \oplus \mathbb{Z}_2$ となることがわかっている．これは Milnor ファイバーのホモロジーにトーションがあらわれる初めての例である．

本研究では，上記の不等式のギャップがホモロジーの 2-トーションに由来するものであるとわかった．そのことについて述べていく．

定義 3.6. 二重被覆空間 X^ω の 2-トーション部分を

$$H_k(X^\omega, \mathbb{Z})[2] = \{a \in H_k(X^\omega, \mathbb{Z}) \mid 2a = 0\}$$

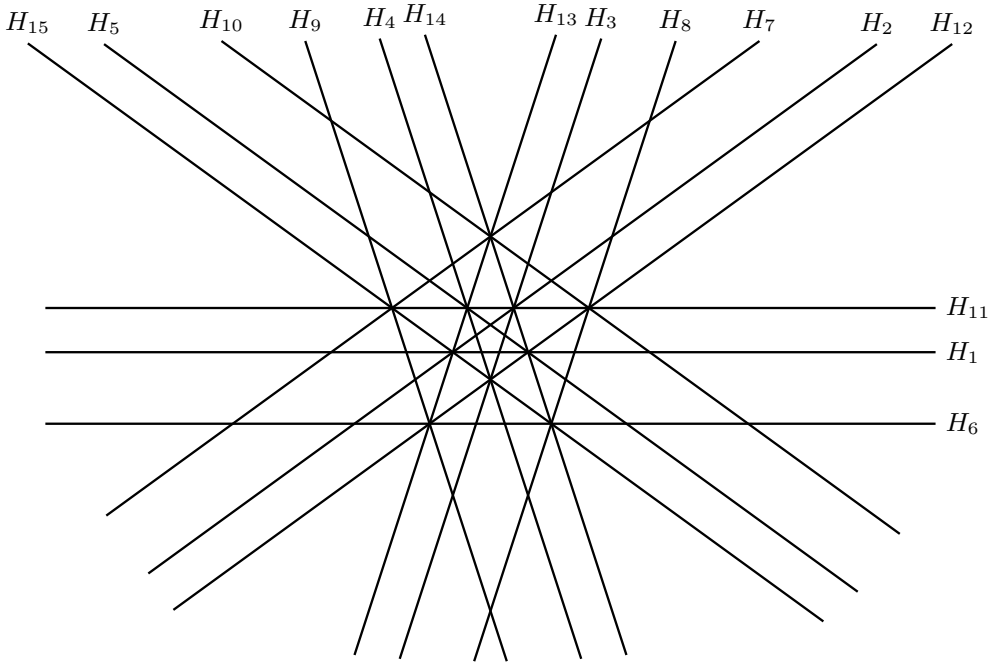


図 1　（デコーニングされた）二十・十二面体配置 $\mathcal{A}_{\mathcal{ID}} = \{H_1, \ldots, H_{15}\}$

と表す．これは $\mathbb{Z}_2$ 上のベクトル空間とみなすことができ，その階数を

$$\tau_k(X^\omega) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2} H_k(X^\omega, \mathbb{Z})[2]$$

と表す．$\tau_k(X^\omega)$ は $H_k(X^\omega, \mathbb{Z})$ を巡回群の直和で表した際の偶数位数の直和成分の個数に他ならない．

定理 3.7. (石橋-菅原-吉永 [6]) X を連結な CW 複体とし，$\omega \in H^1(X^\omega, \mathbb{Z}_2)$ が $\omega \wedge \omega = 0$ を満たすとする．このとき，以下が成り立つ：

$$\alpha_k(\omega) = \rho_k(\omega) + \tau_k(X^\omega) + \tau_{k-1}(X^\omega).$$

特に，$\alpha_k(\omega) = \rho_k(\omega)$ が成り立つことと，$H_k(X^\omega, \mathbb{Z})$ と $H_{k-1}(X^\omega, \mathbb{Z})$ がともに 2-トーションを持たないことが同値である．

Proof. 証明は $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2} H^k(X^\omega, \mathbb{Z}_2)$ を二通りの方法で計算することで得られる．初めに，普遍係数定理を用いると以下の同型が得られる;

$$H^k(X^\omega, \mathbb{Z}_2) \cong \mathrm{Hom}(H_k(X^\omega, \mathbb{Z}).\mathbb{Z}_2) \oplus \mathrm{Ext}(H_{k-1}(X^\omega, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_2).$$

この右辺の階数を計算することで,

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2} H^k(X^\omega, \mathbb{Z}_2) = b_k(X) + \rho_k(\omega) + \tau_k(X^\omega) + \tau_{k-1}(X^\omega)$$

となることがわかる．一方，吉永 ([17]) により transfer 完全系列を用いることで以下の公式が得られている:

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_2} H^k(X^\omega, \mathbb{Z}_2) = b_k(X) + \alpha_k(\omega).$$

これらを比較することにより，定理の等式が得られる．　□

特に $k=1$ の場合には次が得られる．

系 3.8.

$$\alpha_1(\omega) = \rho_1(\omega) + \tau_1(X^\omega)$$

であり，$\alpha_1(\omega) > \rho_1(\omega)$ であることと，$H_1(X^\omega, \mathbb{Z})$ が非自明な 2-トーションを持つことは同値である．

Proof. $H_0(X^\omega, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ であるから，常に $\tau_0(X^\omega) = 0$ となることより従う． □

注意 3.9. 再び $X = M(\mathcal{A})$ が超平面配置の補集合である場合を考える．上記の系から二重被覆の Betti 数 $b_1(M(\mathcal{A})^\omega) = b_1(M(\mathcal{A})) + \alpha_1(\omega) - \tau_1(M(\mathcal{A})^\omega)$ となる．$b_1(M(\mathcal{A}))$ や $\alpha_1(\omega)$ は組み合わせ論的情報により記述されることがわかっているので，「二重被覆の Betti 数 $b_1(M(\mathcal{A})^\omega)$ が組み合わせ的に記述できるか？」という問題については，二重被覆のホモロジーの 2-トーションの個数 $\tau_1(M(\mathcal{A})^\omega)$ の組み合わせ的な記述が関わってくる．

4 整係数の局所系係数コホモロジー

本節では，最近研究が盛んになっている整係数の局所系係数コホモロジーについて述べる．局所系や局所系係数コホモロジーの一般論については，例えば [5] の第 6 章などを参照されたい．また，本節では $M = M(\mathcal{A})$ を $\mathbb{C}^\ell$ 内の超平面配置の補集合とし，整係数，複素係数のことをそれぞれ $\mathbb{Z}$-係数，$\mathbb{C}$-係数と書くことにする．

係数となる代数 $R = \mathbb{Z}$ or $\mathbb{C}$ とする．M 上の階数 1 の R-係数の局所系 $\mathcal{L}$ は特性準同型

$$\rho : \pi_1(M) \to \mathrm{Aut}_R(R) \cong R^\times$$

を定めることにより得られる．ここで $R^\times$ は単元からなる群である．$R = \mathbb{Z}$ の場合は $R^\times = \{\pm 1\}$ であり，$R = \mathbb{C}$ の場合は $R^\times = \mathbb{C}^\times$ である．

超平面配置の補集合の $\mathbb{C}$-係数の局所系係数コホモロジーは，超幾何積分の文脈で盛んに研究されてきた．その中でも代表的なもの結果として，generic な局所系に対する「消滅定理」と呼ばれるものがいくつかある（[1][9][2] など）．Cohen，Dimca，Orlik により示された消滅定理は以下の通りである．

定理 4.1. (Cohen-Dimca-Orlik [2]) $\mathbb{C}^\ell$ 内の超平面配置の補集合 M 上の $\mathbb{C}$-係数の階数 1 の局所系 $\mathcal{L}$ が「CDO 条件」を満たすと仮定する．このとき，以下が成り立つ．

$$H^k(M, \mathcal{L}) \cong \begin{cases} \mathbb{C}^{|\chi(M(\mathcal{A}))|} & (k = \ell), \\ 0 & (k \neq \ell). \end{cases}$$

ここで $\chi(M)$ は M の Euler 数である．

CDO 条件の定義はここでは紹介しないが，ある generic な条件である．([16] の Definition 2.1 を参照) また，超平面配置の補集合 M の Euler 数が組み合わせ的に記述できることを踏まえると，次が成り立つことがわかる．

系 4.2. M 上の $\mathbb{C}$-係数の階数 1 の局所系が CDO 条件を満たすとき，局所系係数コホモロジー $H^*(M,\mathcal{L})$ は組み合わせ的に記述することができる．

本稿で紹介するのは，CDO 条件の下での $\mathbb{Z}$-係数の局所系係数コホモロジーのふるまいである．これについて，次が成り立つことが示された．

定理 4.3. (菅原 [16]，Liu-Maxim-Wang [8]) $\mathbb{C}^\ell$ 内の超平面配置の補集合 M 上の $\mathbb{Z}$-係数の階数 1 の局所系 $\mathcal{L}$ が CDO 条件を満たすと仮定する．このとき，以下が成り立つ．

$$H^k(M(\mathcal{A}),\mathcal{L}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^{\beta_\ell} \oplus \mathbb{Z}_2^{\beta_{\ell-1}} & (k=\ell), \\ \mathbb{Z}_2^{\beta_{k-1}} & (1 \le k \le \ell-1), \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

ここで $\beta_k = |\sum_{i=0}^{k}(-1)^i \cdot b_i(M)|$ である．

この定理は初めに菅原 [16] により複素化された実超平面配置の場合に示された．[16] の方法は実構造を用いたコホモロジーの計算方法を用いることで定理を示している．後に，Liu-Maxim-Wang[8] により一般の複素超平面配置の補集合に対してこの定理が成り立つことが示された．彼らは偏屈層の理論を用いてコホモロジーを計算している．

$\beta_\ell = |\sum_{i=0}^{\ell}(-1)^i \cdot b_i(M)| = \chi(M)$ であるから，$\mathbb{C}$ をテンソルすることで，$\mathbb{C}$-係数に対する元の CDO 定理を復元することがわかる．また，超平面配置の補集合 M の Betti 数が組み合わせ的に記述できることを踏まえると，次が成り立つことがわかる．

系 4.4. M 上の $\mathbb{Z}$-係数の階数 1 の局所系が CDO 条件を満たすとき，局所系係数コホモロジー $H^*(M,\mathcal{L})$ は組み合わせ的に記述することができる．

前の節では，$\omega \in H^1(M,\mathbb{Z}_2)$ を一つ固定することで，$\mathbb{Z}$-係数の階数 1 の局所系 $\mathcal{L}_\omega$ と二重被覆 $p_\omega : M^\omega \to M$ が与えられることを見た．そこで，対応する局所系係数ホモロジー $H_k(M,\mathcal{L}_\omega)$ と二重被覆空間のホモロジー $H_k(M^\omega,\mathbb{Z})$ に関係があると推測するのは自然な発想である．これらの間に密接な関係があることが Liu-Liu により示された．特に $k=1$ の場合については以下が成り立つ．

定理 4.5. (Liu-Liu [7]) M を $\mathbb{C}^\ell$ 内の超平面配置の補集合とする．このとき，二重被覆のホモロジーと対応する局所系係数ホモロジーについて

$$H_1(M^\omega,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_1(M)+r} \oplus \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_k}$$

が成り立つことと

$$H_1(M,\mathcal{L}_\omega) \cong \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{2d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{2d_k} \oplus (\mathbb{Z}_2)^{b_1(M)-r-k-1}$$

が成り立つことは同値である．ここで $d_1,\cdots,d_k$ は $1 < d_1 \mid \cdots \mid d_k$ をみたす整数である．

注意 4.6. 彼らは二重被覆空間のセル複体に対する Laurent 多項式環の作用を調べることで公式を得ている．また，上記の定理は超平面配置の補集合に限らず，一般の極小 CW 複体 ($=k$ セルの個数が k 次 Betti 数と等しくなる CW 複体) に対して成り立つことが知られている．超平面配置の補集合が極小 CW 複体とホモトピー同値になることは，Papadima-Dimca [4]，Randell [15] 等により知られている．

定理 4.3，4.5 を踏まえると次が成り立つことが直ちにわかる．

系 4.7. 超平面配置の補集合 M 上の階数 1 の $\mathbb{Z}$-局所系が CDO 条件を満たすとする．このとき，二重被覆 M^ω のホモロジーについて

$$H_1(M^\omega, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{b_1(M)}$$

が成り立つ．特に，$H_1(M^\omega, \mathbb{Z})$ は組み合わせ論的情報から記述することができる．

参考文献

[1] K. Aomoto, On vanishing of cohomology attached to certain many valued meromorphic functions, *J. Math. Soc. Japan*, **27** (1975), 248-255.

[2] D. Cohen, A. Dimca, P. Orlik, Nonresonance conditions for arrangements. *Ann. Inst. Fourier* **53** (2003), 1883–1896.

[3] D. C. Cohen, A. Suciu, On Milnor fibrations of arrangements. *J. London. Math. Soc.* **51** (1995), no. 2, 105-119.

[4] A. Dimca, S. Papadima, Hypersurface complements, Milnor fibers, and higher homotopy groups of arrangements. *Ann. of Math. (2)* **158** (2003), no. 2, 473–507.

[5] 服部晶夫，位相幾何学，岩波基礎数学選書

[6] S. Ishibashi, S. Sugawara, M. Yoshinaga, Betti numbers and torsions in homology groups of double coverings, Preprint, arXiv:2209.02237

[7] Y. Liu, Y. Liu, Integral homology groups of double coverings and rank one $\mathbb{Z}$-local system for minimal CW complex, preprint, arXiv:2209.14535.

[8] Y. Liu, L. Maxim, B. Wang, Chomology of $\mathbb{Z}$-local systems on complex hyperplane arrangements, preprint, arXiv:2209.13193.

[9] T. Kohno, Homology of a local system on the complement of hyperplanes, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **62** (1986), no. 4, 144-147.

[10] J. W. Milnor, Singular points in complex hypersurfaces, *Ann. of Math. Studies* **61**, Princeton University Press, 1968.

[11] P. Orlik, L. Solomon, Combinatorics and topology of complements of hyperplanes, *Invent. Math.*, **56**(2), 167-189, 1980.

[12] P. Orlik, H. Terao, Arrangements of Hyperplanes. Grundlehren Math. Wiss. **300**, Springer-Verlag, New York, 1992.

[13] S. Papadima, A. Suciu, The spectral sequence of an equivariant chain complex and homology with local coefficients. *Trans. A. M. S.*, **362** (2010), no. 5, 2685-2721.

[14] S. Papadima, A. Suciu, The Milnor fibration of a hyperplane arrangement: from modular resonance to algebraic monodromy, *Proc. London Math. Soc* **114** (2017), no. 6, 961-1004.

[15] R. Randell, Morse theory, Milnor fibers, and minimality of hyperplane arrangements. *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), no. 9, 2737–2743.

[16] S. Sugawara, $\mathbb{Z}$-local system cohomology of hyperplane arrangements and a Cohen-Dimca-Orlik type theorem, Preprint, arXiv:2209.02237

[17] M. Yoshinaga, Double coverings of arrangement complements and 2-torsion in Milnor fiber homology, *Eur. J. Math.* **6** (2020), no. 3, 1097-1109.

Tame topology における Lie 亜群の滑層分割

北海道大学大学院 情報科学院 （情報理工学コース）
田邊真郷 (Masato TANABE)

概要

1970 年代から 1980 年代に架けて、J. N. Mather と V. A. Vassiliev は独立に、実代数群の作用を受ける非特異実代数多様体とその軌道空間に対して標準的な滑層分割を構成した。本稿における我々の主結果は、その Mather–Vassiliev 型の滑層分割を精密化し、それをより広いクラスの空間——半代数的、劣解析的、より一般に実数体上の順序極小構造、塩田の $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-category といった 'tame topology' における Lie 亜群——で構成したものである。本稿では、その主結果および舞台となる 'tame topology' について紹介する。

1 序

1.1 滑層分割

幾何的対象を調べる際、その「よい」分割を求めることがしばしばなされる。代表的なものとしては三角形分割、胞体分割、ハンドル分解が知られているが、ここでは以下に述べる滑層分割というものを考えてみる: C^r 級多様体 M の部分集合 V の C^r 級**滑層分割** *(stratification)* とは、V の局所有限な分割であって、それぞれのメンバーが M の C^r 級（正則）部分多様体であるようなものをいう。また、このときの分割のメンバーを V の**滑層** *(stratum)* という。古典的な例を以下に挙げる:

例 1.1 (代数多様体)**.** $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とし、$V \subset \mathbb{K}^n$ を d 次元代数多様体とする。このとき、ΣV で V の特異点集合を表し、$\Sigma^i V \coloneqq \Sigma(\Sigma^{i-1}V)$ と書くと、フィルトレーション

$$V \coloneqq \Sigma^0 V \supset \Sigma^1 V \supset \Sigma^2 V \supset \cdots \supset \Sigma^{d+1} V = \varnothing$$

から得られる分割 $\{\Sigma^i V - \Sigma^{i+1} V\}_{i=0}^d$ は V の滑層分割である。

例 1.2 (線型代数)**.** $M = \mathrm{M}(m, n; \mathbb{K})$ で $\mathbb{K}$ 係数の $m \times n$ 型行列全体が成す空間を表す。このとき、$\Gamma^i \coloneqq \{A \in M \mid \dim \mathrm{Ker} A \geqslant i\}$ と書くと、フィルトレーション

$$M = \Gamma^0 \supset \Gamma^1 \supset \Gamma^2 \supset \cdots \supset \Gamma^{n+1} = \varnothing$$

から得られる分割 $\{\Gamma^i - \Gamma^{i+1}\}_{i=0}^n$ は M の滑層分割である。

例 1.3 (滑層分割を許容しない例)**.** $V \coloneqq \{0\} \cup \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ は滑層分割を許容しない。実際、V を $\mathbb{R}$ の部分多様体によって分割すると $\{\{a\}\}_{a \in V}$ となるが、これは局所有限ではない。

注意 1.4. 本稿では詳しく述べないが、滑層分割を考えるとき、滑層たちに「よい」隣接関係を要請

することがある。その代表的な一つが *Whitney* **滑層分割** *(Whitney stratification)* である。例 1.1の滑層分割は一般に Whitney 滑層分割にはならない（例えば Whitney の傘: $\{xy^2 - z^2 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$）。

滑層分割の概念は H. Whitney による代数多様体の分割に端を発し、その後 R. Thom や J. Mather らの手によって理論が整備され、C^0 構造安定性問題の解決という目覚ましい貢献を見せた [4]。現代においても滑層分割の理論や精神は生き続けており、例えば滑層たちの（Whitney でない）隣接関係や、conically smooth stratification といった話題がなお研究されている [1, 6, 12]。

さて、滑層分割の基本的な問題意識として

Q1. どのようなクラスの空間が滑層分割を許容するのか？
Q2. 滑層分割はどれだけよい条件を充たすように得られるか？

というものが考えられる。本稿では、この二つの問いに対する答として、古典的な事実と筆者の主結果を紹介する。

1.2 半代数幾何

まず、Q1 の答となる最も代表的なものが半代数的集合のクラスである。実 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 X が**半代数的集合** *(semialgebraic set)* であるとは、X が有限個の実係数多項式による方程式・不等式で定義されることをいう。また、半代数的集合 $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^p$ の間の連続写像 $f\colon X \to Y$ が**半代数的写像** *(semialgebraic map)* であるとは、そのグラフ $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^{n+p}$ が半代数的集合であることをいう。例えば実代数的集合、したがって実代数多様体は半代数的集合であり、半代数的集合の幾何学（半代数幾何）は実代数幾何における重要な道具として用いられている。半代数幾何において次のことが知られている。これは前述の Q1, Q2 に対する一つの答である:

定理 1.5. 任意の半代数的集合は、有限個の半代数的な滑層から成る C^ω 級 Whitney 滑層分割を許容する。

さて、J. N. Mather は実代数幾何における群作用を考え、1976 年に以下の滑層分割を構成した。これもまた Q2 に対する答であり、本稿における我々の先行研究の一つである:

定理 1.6 ([8, Theorem 1])**.** G をアファイン実代数群、M を d 次元アファイン非特異実代数多様体、G が M 上に実代数的に作用しているとする。このとき、M はフィルトレーション

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_{d+1} = \varnothing$$

であって、以下を充たすものを許容する: 任意の $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し、

(1) M_i は M の閉集合であり、半代数的かつ G 不変である;
(2) $M^i = M_i - M_{i+1}$ は M の余次元 i なる C^ω 級部分多様体である（ただし空かもしれない）;
(3) 商空間 M^i/G は、C^ω 級多様体構造であって、商写像 $M^i \to M^i/G$ が局所自明な C^ω 級ファイブレーションとなるものを許容する。

注意 1.7. V. A. Vassiliev [13, Theorem 8.6.6] も 1985 年に同様の滑層分割を（独立に）構成して

いることに注意しておく。本稿では詳しく述べないが、彼らのモチベーションは**可微分写像の特異点論**にあり、主たる具体例は微分同相芽のジェットが成す群のジェット空間上への作用、すなわち特異点分類が成す滑層分割であった。実際、Mather は同論文の中で、C^∞ 級写像空間の "滑層分割" が構成できることを主張している [8, Theorem 3]。(しかし、その証明は未だどこにもない。)

1.3 主結果バージョン 1

Mather–Vassiliev の滑層分割に対して、Q1, Q2 を再び見ると

Q1'. より広いクラスの空間で Mather–Vassiliev 型の滑層分割は構成できるか?
Q2'. 商空間 M^i や商写像の構造はどれだけ精密化できるか?

ということが考えられる。我々はその一つの答として主結果を得た。まずは Q2' のみに対する答として、半代数幾何バージョンの主結果を述べる:

定理 1.8 (主結果バージョン 1 [11, Theorem 1.1])**.** G をアファイン実代数群、M を d 次元アファイン非特異実代数多様体とし、G が M 上に実代数的に作用しているとする。このとき、M はフィルトレーション

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_{d+1} = \varnothing$$

であって、以下を充たすものを許容する: 任意の $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し、

(1) M_i は M の閉集合であり、半代数的かつ G 不変である;
(2) $M^i = M_i - M_{i+1}$ は M の余次元 i なる C^ω 級部分多様体であり(ただし空かもしれない)、$\{M^i\}_{i=0}^d$ は M の Whitney 滑層分割である;
(3) 商空間 M^i/G は、piecewise algebraic な C^ω 級多様体構造であって、商写像 $M^i \to M^i/G$ が局所自明で piecewise algebraic な C^ω 級ファイブレーションとなるものを許容する。

本質的な変更点は (3) である。ここで、piecewise algebraic な空間とは、局所コンパクト空間であって局所表示先や座標変換がすべて半代数的なものをいう(cf. Kontsevich–Soivelman [5])。つまり、主結果バージョン 1 は**「軌道空間に誘導される多様体構造も半代数的にできる」**というものである。証明の大きな流れは Mahter の方針と同様であったが、多様体構造を得る段階で、Mather とは本質的に異なる道具として塩田の結果を用いた。詳しくは最終節 §3 を参照されたい。

では、Q1' の答として何が考えられるか?本稿では、次に述べる二方向への一般化を考える。

第一に、半代数幾何の解析的類似にあたる**劣解析幾何** *(subanalytic geometry)*、そしてそれらの公理的一般化にあたる塩田の $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-*category* への一般化である [9]。$\mathfrak{X}_0$-category は実数体上の**順序極小構造** *(o-minimal structure)* と同一の概念である [14]。これらの category では任意の対象に対する Whitney 滑層分割・三角形分割可能性が示されており、しかも位相空間論的に病的な例が生じないことから、Grothendieck の提唱した 'tame topology' の代表的な候補となっている。本稿のタイトルにある 'tame topology' とは、本稿ではこれらのカテゴリーを指す。

そして第二に、群作用の公理的一般化にあたる**亜群** *(groupoid)*——ここでは幾何構造も込めて Lie 亜群と呼ぶのが正しい——への一般化である。近年の研究では、固有な C^∞Lie 亜群の滑層分割に関

する結果が上がっている [3]。

まとめると、我々は Mather–Vassiliev 型の滑層分割を *'tame topology'* **における** *Lie* **亜群**に対して考える。こうして得られたものが、後述する主結果バージョン 2 である。以降は、我々が舞台とする塩田の $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-category の導入（§2)、主結果バージョン 2 およびその証明に用いた技術の紹介（§3）に費やされる。

2 塩田の $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-category

本節では、半代数幾何から出発し、塩田の $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-category を導入する。詳しくは [2, 10, 9] を参照されたい。

半代数的集合全体が成す集合族は、以下の 4 公理を充たす最小の集合族 $\mathfrak{S}_0 \subset \coprod_{n=0}^{\infty} 2^{\mathbb{R}^n}$ として特徴づけられる:

$(\mathsf{I})_0$ 任意の実代数的集合は $\mathfrak{S}_0$ の元である;
$(\mathsf{II})_0$ $X_1, X_2 \in \mathfrak{S}_0$ ならば、$X_1 \cap X_2,\ X_1 - X_2,\ X_1 \times X_2 \in \mathfrak{S}_0$;
$(\mathsf{III})_0$ $X \in \mathfrak{S}_0,\ X \subset \mathbb{R}^n$ かつ写像 $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ が線型ならば、$p(X) \in \mathfrak{S}_0$;
$(\mathsf{IV})_0$ $X \in \mathfrak{S}_0,\ X \subset \mathbb{R}^1$ ならば、それは有限個の点と区間たちの合併である。

非自明な性質は $(\mathsf{III})_0$ のみだが、これは Tarski–Seidenberg の原理という量化子除去定理の帰結として知られている。また、半代数的集合の位相的内部・閉包・境界もまた半代数的集合になるし、半代数的集合の半代数的写像による順像・逆像もまた半代数的集合になる。このように、半代数的集合のクラスは非常によい性質を持っており、さらに Grothendieck が提唱した 'tame topology'——空間充填曲線や Banach–Tarski のパラドクスのような位相的に病的な例・現象を持たない空間のクラス——の代表的な候補にもなっている。

さて、塩田の $\mathfrak{X}_0$-category とは、上記の公理を充たす 'tame topology' のことである。正確には:

定義 2.1. $\mathfrak{X}_0 \subset \coprod_{n=0}^{\infty} 2^{\mathbb{R}^n}$ を、上記の 4 公理 $(\mathsf{I})_0$–$(\mathsf{IV})_0$ を充たす集合族とする。このとき

- $\mathfrak{X}_0$ の元を $\mathfrak{X}_0$-*set* といい、
- $\mathfrak{X}_0$-set 間の連続写像であって、そのグラフがまた $\mathfrak{X}_0$-set であるものを $\mathfrak{X}_0$-*map* という。

そして、$\mathfrak{X}_0$-set の全体と $\mathfrak{X}_0$-map の全体の二つ組を $\mathfrak{X}_0$-*category* という。

半代数的集合の全体よりも真に広い例を挙げておこう。

例 2.2 (Wilkie の例)**.** $\mathfrak{W}_n \coloneqq \{p^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n \mid p \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}]\}$ と置く。このとき、$\coprod_{n=0}^{\infty} \mathfrak{W}_n$ を包む最小の $\mathfrak{X}_0$-category が存在する。

注意 2.3. $\mathfrak{X}_0$-category は、実数体 $\mathbb{R}$ 上の順序極小構造と同一の概念である。

さらに、半代数的集合の解析的類似として、**劣解析的集合** *(subanalytic set)* が知られている。本来の定義は煩雑であるため、ここでは特徴づけのみ述べる。劣解析的集合全体が成す集合族は、以下の 3 公理を充たす最小の集合族 $\mathfrak{S} \subset \coprod_{n=0}^{\infty} 2^{\mathbb{R}^n}$ として特徴づけられる:

(I)' 任意の実解析的集合は $\mathfrak{S}$ の元である;
(II)' $X_1, X_2 \in \mathfrak{S}$ ならば、$X_1 \cap X_2,\ X_1 - X_2 \in \mathfrak{S}$;
(III)' $X \in \mathfrak{S},\ X \subset \mathbb{R}^n$ かつ写像 $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ が線型であり $p|\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^n} X$ が固有ならば、$p(X) \in \mathfrak{S}$.

公理 (III)' は半代数的な場合よりも仮定が厳しい。これは実解析的集合の線型写像による像が時に病的な例となるためである。例えば、$\{(0,0)\} \cup \{(x, 1/x) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$ の第 2 成分への射影は例 1.3となってしまう。

さて、上述と同様にこの公理的一般化として $\mathfrak{X}$-category を定義したいが、$\coprod_{n=0}^{\infty} 2^{\mathbb{R}^n}$ 自体も公理 (I')–(III') を充たしてしまう。また、必ずしも解析的な例を含まないものも対象とするために、少し公理を変更する:

定義 2.4. $\mathfrak{X} \subset \coprod_{n=0}^{\infty} 2^{\mathbb{R}^n}$ を、下記の 4 公理を充たす集合族とする:

(I) 任意の実代数的集合は $\mathfrak{X}$ の元である;
(II) $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}$ ならば、$X_1 \cap X_2,\ X_1 - X_2,\ X_1 \times X_2 \in \mathfrak{X}$;
(III) $X \in \mathfrak{X},\ X \subset \mathbb{R}^n$ かつ写像 $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ が線型であり $p|\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^n} X$ が固有ならば、$p(X) \in \mathfrak{X}$;
(IV) $X \in \mathfrak{X},\ X \subset \mathbb{R}^1$ ならば、X は任意の点 $x \in \mathbb{R}^1$ の近くで有限個の点と区間たちの合併である。

このとき

- $\mathfrak{X}$ の元を $\mathfrak{X}$-*set* といい、
- $\mathfrak{X}$-set 間の連続写像であって、そのグラフがまた $\mathfrak{X}$-set であるものを $\mathfrak{X}$-*map* という。

そして、$\mathfrak{X}$-set の全体と $\mathfrak{X}$-map の全体の二つ組を $\mathfrak{X}$-*category* という。

公理 (I), (II) はそれぞれ $(\mathrm{I})_0$, $(\mathrm{II})_0$ と同じものである。また、劣解析的集合全体が成す集合族は $\mathfrak{X}$-category である。

以下では、$\mathfrak{X}_0$-*category* または $\mathfrak{X}$-*category* を一つ固定する。そして、順序極小構造の分野での慣習に倣い、$\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-set を *definable set*、$\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-map を *definable map* と呼ぶことにする。この他にも、この category 上で定義される概念には *definable* という形容詞をつける。

注意 2.5. 半代数幾何・劣解析幾何の諸結果の多くは一般の $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-category に受け継がれるが、正則性に関しては注意が必要である。例えば、定理 1.5の $\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-category バージョンは「$1 \leqslant r < \infty$ とする。任意の definable set は、有限個の definable set な滑層から成る C^r 級 Whitney 滑層分割を許容する」となる。$r = \infty, \omega$ に対して、$\mathfrak{X}_0, \mathfrak{X}$-category の一般論はまだ存在しない。また、$\mathfrak{X}$-category においては、公理 (III), (IV) の事情から、集合や写像に対して有界性を課すことが多い。

3 主結果について

本節では、主結果バージョン 2 およびその証明を紹介する。

3.1 Lie 亜群

主結果を述べるために、Lie 亜群の定義を復習する。Lie 亜群は、ラフに言えば「滑らかな構造を持った可逆圏」のことである。Lie 亜群の一般論は [7] を参照されたい。

定義 3.1. *C^r 級 Lie* **亜群** *(C^r Lie groupoid)* $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ とは、以下のデータたちの組であって、以下の整合性条件 $(*)$ を充たすものをいう:

(射の集合および対象の集合) C^r 級多様体 $\mathcal{G}, M$;
(source map および target map) C^r 級沈め込み $s, t\colon \mathcal{G} \to M$;
(合成) C^r 級写像 $c\colon \mathcal{G}^{(2)} \to \mathcal{G},\ g \cdot h := c(g,h)$、ただし $\mathcal{G}^{(2)} := \{(g,h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mid s(g) = t(h)\}$;
(単位) C^r 級埋め込み $u\colon M \to \mathcal{G}$;
(逆) C^r 級微分同相 $i\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G},\ g^{-1} := i(g)$.

$(*)$ 任意の $g, h, k \in \mathcal{G}$ と任意の $m \in M$ に対して、以下の等式が意味を持つ限り成り立つ:

(合成) $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$;
(単位) $s(u(m)) = t(u(m)) = m$;
(逆) $g^{-1} \cdot g = u(s(g)),\ g \cdot g^{-1} = u(t(g))$.

例 3.2. $G \curvearrowright M$ を C^r 級 Lie 群の C^r 級多様体への C^r 級作用とする。このとき $\mathcal{G} := G \times M$ とし、$s(g,m) := m,\ t(g,m) := g.m$ と定めれば C^r 級 Lie 亜群を得る。

例 3.3. $f\colon M \to N$ を C^r 級多様体間の全射 C^r 級沈め込みとすると、$\mathcal{G} := M \times_N M$ は M 上の同値関係である。このとき、$s = \mathrm{pr}_1,\ t = \mathrm{pr}_2$ と定めれば C^r 級 Lie 亜群を得る。

例 3.4. C^r 級 Lie 亜群 $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ に関して、$(s,t)\colon \mathcal{G} \to M \times M$ が固有写像であり、s, t が共に C^r 級局所微分同相であるとする。このとき、Lie 亜群 $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ は *orbifold groupoid* と呼ばれる。

定義 3.5. $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ を C^r 級 Lie 亜群とする。このとき、点 $x \in M$ に対して、その**軌道** *(orbit)* を

$$\mathcal{G}.x := t(s^{-1}(x))$$

で定める。また、M 上に同値関係

$$x \sim y \iff \text{或る } g \in \mathcal{G} \text{ に対して } s(g) = x \text{ かつ } t(g) = y \text{ が成り立つ}$$

を定め、商空間 $M/\mathcal{G} := M/\sim$ を Lie 亜群 $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ の**軌道空間** *(orbit space)* という。

さて、C^r 級 Lie 亜群が *definable* であるとは、そのデータにおけるすべての集合と写像が definable であることとする。

3.2 主結果バージョン 2 およびその証明

それでは我々の主結果バージョン 2 を述べる。本節を通して、r は category が半代数的または劣解析的のとき ω とし、一般のとき $1 \leqslant r < \infty$ なる整数とする。

定理 3.6 (主結果バージョン 2 [11, Theorem 3.1])**.** $\mathcal{G} \rightrightarrows M$ を definable な C^r 級 Lie 亜群、$d = \dim M$ とする。さらに、$\mathfrak{X}$-category の場合、$\mathcal{G}$ および M は有界とする。このとき、M はフィルトレーション

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_{d+1} = \varnothing$$

であって、以下を充たすものを許容する: 任意の $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し、

(1) M_i は M の閉集合であり、definable かつ $\mathcal{G}$ 不変である;
(2) $M^i = M_i - M_{i+1}$ は M の余次元 i なる definable な C^r 級部分多様体であり（ただし空かもしれない）、$\{M^i\}_{i=0}^d$ は M の Whitney 滑層分割である;
(3) 商空間 $M^i/\mathcal{G}$ は、piecewise definable な C^r 級多様体構造であって、商写像 $M^i \to M^i/\mathcal{G}$ が局所自明で piecewise definable な C^r 級ファイブレーションとなるものを許容する。

注意 3.7. $M/\mathcal{G}$ は一般に Hausdorff になるとも限らない空間である。上記の定理は、それが $\{M^i/\mathcal{G}\}_{i=0}^d$ という "滑層分割" を持つことを主張している。

主結果の証明は、以下に箇条書きするような方針に沿うことで得ることができる。これは Mather のスケッチに基づいている。詳しくは Mather の原論文または筆者のプレプリントを参照されたい。

(i) 所望のフィルトレーションが $M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_i$ まで得られたとする。欲しいのは M_{i+1} である。
(ii) M_i 上の軌道の族 $\mathcal{R}_i := \coprod_{x \in M_i} \{x\} \times \mathcal{G}.x$ を考える。このとき、射影 $\mathrm{pr}_1 \colon \mathcal{R}_i \to M_i$ が $M^i = M_i - M_{i+1}$ 上で局所自明となるように、不良集合 M_{i+1} を定める。
(iii) M^i の軌道に対するスライスを取り、その上で軌道の族を自明化する。このとき、スライスが $M^i/\mathcal{G}$ の局所座標を定め、族の局所自明性が商写像 $M^i \to M^i/\mathcal{G}$ の局所自明性に対応する。

Mather の証明との相違点は、ステップ (ii) において局所自明性を得るための技術である。まず、Mather は軌道の族をファイバー方向にコンパクト化した上で、以下の *Thom* **のアイソトピー補題**を用いた。

定理 3.8. N, Y を C^∞ 級多様体、$X \subset N$ を部分集合、$\{X_\alpha\}$ を X の C^∞ 級 Whitney 滑層分割とする。$f \colon X \to Y$ は固有な C^∞ 級写像（つまり、f は X の N における開近傍 U 上へと C^∞ 級に延長可能）であり、各 α について $f|_{X_\alpha} \colon X_\alpha \to Y$ は C^∞ 級沈め込みであるとする。このとき、f は C^0 級で局所自明であり、この局所自明化の下で、各 $f|_{X_\alpha}$ は C^∞ 級で局所自明である。

すると、滑層 $\mathcal{R}_i \cap (\mathrm{pr}_1)^{-1}(M^i)$ だけに注目すれば pr_1 は C^∞ 級で局所自明なことが分かる。この後、それぞれの局所自明化写像を C^ω 級に近似すればよい。しかし、Thom のアイソトピー補題はベクトル場の積分を用いて証明された事実であり、得られる局所自明化は definable 性を一般に持たない。これを解決するのが、以下の**塩田のアイソトピー補題**である。

定理 3.9. $Y \subset \mathbb{R}^p$ を definable な C^1 級多様体、$X \subset \mathbb{R}^n$ を部分集合、$\{X_\alpha\}$ を X の definable な C^1 級 Whitney 滑層分割とする。$f \colon X \to Y$ は固有かつ definable な C^1 級写像であって、各 α について $f|_{X_\alpha} \colon X_\alpha \to Y$ は C^1 級沈め込みであるとする。このとき、f は definable かつ C^0 級で局所

自明であり、この局所自明化の下で、各 $f|_{X_\alpha}$ は C^1 級で局所自明である。

この定理は、ベクトル場の積分ではなく局所自明化の延長補題を利用して示される。そのため、局所自明化も definable になることが保証される。この定理を用いた後、definable な写像の C^r 級近似定理を適用することで、definable かつ C^r 級の局所自明性が得られるのである。筆者はこの方法を用いて主結果の条件 (3) を得た。以上が主結果の証明の概略である。

参考文献

[1] D. Ayala, J. Francis, and H. L. Tanaka: *Local structures on stratified spaces*, Adv. Math. **307** (2017) 903–1028.

[2] J. Bochnak, M. Coste, and M. F. Roy: *Real Algebraic Geometry*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) **36**, Springer–Verlag (1998).

[3] M. Crainic and J. N. Mestre: *Orbispaces as differentiable stratified spaces*, Lett. Math. Phys. **108** (2018) 805–859.

[4] C. G. Gibson, K. Wirthmüller, Andrew A. du Plessis, and Eduard J. N. Looijenga: *Topological Stability of Smooth Mappings*, LNM **552**, Springer–Verlag (1976).

[5] M. Kontsevich and Y. Soibelman: *Deformations of algebras over operads and the Deligne conjecture*, In Conférence Moshé Flato 1999, Vol. I (Dijon), Math. Phys. Stud. **21**, Kluwer Acad. Publ. (2000) 255–307.

[6] J. Lurie: *Higher Algebra*, `https://www.math.ias.edu/~lurie/papers/HA.pdf` (2017).

[7] K. Mackenzie: *General theory of lie groupoids and lie algebroids*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **213**, Cambridge Univ. Press (2005).

[8] J. N. Mather: *Infinite Dimensional Group Actions*, Société mathématique de France, Astérisque **32–33** (1976) 165–172.

[9] M. Shiota: *Geometry of Subanalytic and Semialgebraic Sets*, Progress in Math. **150**, Birkhäuser, Boston (1997).

[10] M. Shiota: *Nash Manifolds*, LNM **1269**, Springer-Verlag (1987).

[11] M. Tanabe: *Canonical stratification of definable groupoids*, arXiv:2205.13306 [math.AG], preprint (2022).

[12] D. Trotman: *Stratification theory*, Cisneros-Molina José Luis, Dũng Tráng Lê, Seade José (Eds.): *Handbook of Geometry and Topology of Singularities I* (2020).

[13] V. A. Vassiliev: *Lagrange and Legendre characteristic classes*, Adv. Stud. Contemp. Math. **3**, Gordon and Breach, New York (1988).

[14] L. van den Dries: *Tame Topology and O-minimal Structures*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **248**, Cambridge Univ. Press (1998).

パーシステントコホモロジーの構造定理

東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻
深沢尚希 (Naoki FUKASAWA)

1 はじめに

単体複体のフィルトレーションにホモロジー関手を適応することでパーシステントホモロジーが得られる．パーシステントホモロジーの本質は, 各ホモロジー類がどこで生まれ, どの程度持続 (persist) するかにある．それを表すのが区間分解定理で, 主な証明方法に [1] のクイバーによる表現と, [2] の次数付き $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ 加群の構造定理を用いたものがある．両者の違いは, 後者は区間を表すホモロジー類の代表元も求まる所にある．この代表元を代表サイクルとよぶ．区間を集めて座標平面に視覚化したものはパーシステンス図とよばれ, これを用いて安定性定理という本分野の重要な結果が示される．

パーシステントコホモロジーはクイバーの表現を用いてパーシステントホモロジーと同じ区間を持つ事が分かる．しかし, コホモロジー群にはカップ積により環構造が入り, [3] はこれを用いてパーシステンス図より多くの情報を持つカップ長関数を導入した．カップ積を計算するには, 各区間を代表するコホモロジー類の代表元 (代表コサイクル) を求める必要がある．代表コサイクルを求めるアルゴリズムは [4] で提唱されているが, 講演者はカップ長関数を計算するための理論整備のために構造定理のコホモロジー版の形でまとめた．本講演ではその概説と, 代表コサイクルを用いて計算できるカップ長関数について紹介する．

2 パーシステントホモロジー

最初にパーシステントホモロジーの定義から安定性定理まで述べる．

定義 2.1. 有限単体複体の部分複体からなるフィルトレーション $\mathbb{K}\colon K_0 \subset K_1 \subset \cdots K_n$ にホモロジー関手を適応させた $H_*(\mathbb{K})\colon H_*(K_0) \to H_*(K_1) \to \cdots \to H_*(K_n)$ を $\mathbb{K}$ のパーシステントホモロジーとよぶ．

チェイン複体の係数は一般の体でも以降の議論はできるが, 計算の簡易化のために $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ として考える．フィルトレーションの添え字のことを時刻とよぶ．先述のように, $H_*(\mathbb{K})$ の本質は各ホモロジー類がどの時刻で発生し, どの程度持続するかである．

定理 2.2. [1] $H_*(\mathbb{K})$ は区間の集まり $\{[p,q]\}$ を用いて

$$H_*(\mathbb{K}) \simeq \bigoplus_{[p,q]} I[p,q]$$

と表される．ここで $I[p,q]$ は

$$I[p,q] = 0 \to 0 \to \cdots \to \underset{\hat{p}}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \cdots \to \underset{\hat{q}}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \to 0 \to \cdots \to 0$$

である．

これは各時刻 t における $H_*(K_t)$ の階数に着目して示されているため, 区間を表す具体的なホモロジー類については言及していない．ホモロジー類の代表元（代表サイクル）も求めることができるのは次の構造定理である．

定理 2.3. [2] $t > n$ なら $K_t = K_n$ とする．$H_*(\mathbb{K})$ の各時刻で直和を取った $\bigoplus_{t=0}^{n} H_*(K_t)$ には次数付き $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ 加群の構造が入り, ある斉次元 $\{[e_i]\}_{i\in E\sqcup F}$, $E, F \subset \{1, ..., N\}$ と $l_i \in \mathbb{N}$ を用いて

$$\bigoplus_{t=0}^{\infty} H_*(K_t) \simeq \bigoplus_{i\in E\sqcup F} \langle [e_i] \rangle,$$
$$\mathrm{Ann}([e_i]) = \begin{cases} 0 & (i \in E) \\ (x^{l_i}) & (i \in F) \end{cases}$$

と表される．

定理 2.2 に現れる区間 $[p,q]$ との対応は次にとおりである．各 $[e_i]$ には次数 $\deg([e_i])$ が定まっており, これが区間の開始時点 p に対応している．また, 零化イデアル Ann が 0 なら, $[e_i]$ はフィルトレーションの最後まで生き残るサイクルを表しており $q = n$ となる．$\mathrm{Ann}([e_i]) = (x^{l_i})$ なら, $q = \deg([e_i]) + l_i - 1$ となり, 時刻 $\deg([e_i]) + l_i$ で消滅するサイクルを表す．

3 REDUCE アルゴリズム

各 $[e_i]$ は時刻 n での境界準同型の表現行列を掃き出すことで求めることができる．この掃き出しのアルゴリズムはしばしば REDUCE アルゴリズムとよばれる．
K_n には時刻と面関係に関して単調非減少になるように全順序 $K_n = \{\sigma_1 < \sigma_2 < \cdots < \sigma_N\}$ が定まっているとする．時刻 n での境界準同型 ∂ の, この順に並べた基底に関する表現行列を B とする．すなわち $[\partial\sigma_1\ \partial\sigma_2\ \cdots\ \partial\sigma_N] = [\sigma_1\ \sigma_2\ \cdots\ \sigma_N]B$ で B を定める．B は上三角行列である．B を次の REDUCE アルゴリズムで掃き出しをする．

ここで行列 A に対し, A_j で A の j 列目を表し, $L(A,j)$ は $A_j \neq 0$ なら, $A_{ij} \neq 0$ なる最大の i とし, $A_j = 0$ なら 0 とする．4 行目は j 列目に i 列目をを加える操作を表している．REDUCE アルゴリズムによる B の出力を $\hat{B}$ とすると, 基本行列の積 V を用いて $\hat{B} = BV$ と表される．実はこの $\hat{B}$ と V の列を見ることで, 代表サイクルとその区間の情報を得る事ができる (例えば [4] を参照).

Algorithm 1 REDUCE アルゴリズム

$B \leftarrow \partial$ の基底 $\{e_1, ..., e_N\}$ に関する表現行列
for $j = 1, ..., N$ **do**
  while $\exists i < j$ $s.t.$ $L(B, i) = L(B, j) \neq 0$ **do**
    $B_j \leftarrow B_j + B_i$
  end while
end for
return B

4 パーシステントコホモロジーの構造定理

フィルトレーション $\mathbb{K}\colon K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n$ にコホモロジー関手を適応して得られる $H^*(\mathbb{K})\colon H^*(K_0) \leftarrow H^*(K_1) \leftarrow \cdots \leftarrow H^*(K_n)$ を $\mathbb{K}$ のパーシステントコホモロジーとよぶ. パーシステントコホモロジー版の構造定理も次のように表現できる.

定理 4.1. （主結果）$t < 0$ なら $H^*(K_t) = 0$ とする. $\bigoplus_{t=-\infty}^{n} H^*(K_t)$ には次数付き $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[x]$ 加群として, ある斉次元 $\{[e^j]\}_{i \in E' \sqcup F'}$, $E', F' \subset \{1, ..., N\}$ と $l_i \in \mathbb{N}$ を用いて

$$\bigoplus_{t=-\infty}^{n} H^*(K_t) \simeq \bigoplus_{i \in E' \sqcup F'} \langle [e^i] \rangle$$
$$\mathrm{Ann}([e^i]) = (x^{l_i}) \ (i \in E' \sqcup F')$$

と表される.

ホモロジーの場合と包含写像から誘導される射の向きが違うため, 時刻の順で見たときに最後まで残るコサイクルと途中で消えるコサイクルの差は $\deg([e^j])$ で表現される. 証明はホモロジーのときと同様に, 時刻 n における余境界準同型 δ の表現行列 D に REDUCE アルゴリズムを適応して求めることができる. ただし, ここでは双対基底を逆に並べて, $[\delta\sigma_N^* \ \delta\sigma_{N-1}^* \cdots \delta\sigma_1^*] = [\sigma_N^* \ \sigma_{N-1}^* \cdots \sigma_1^*]D$ で定める. D に REDUCE アルゴリズムを適応して得られる出力を $\hat{D} = DU$ とすると, 今度は U の列をみることで代表コサイクルとその区間の情報を得ることができる. これは既に [4] で提唱されており Python ライブラリの Ripser ([5]) で実装されている. しかし, 証明では相対パーシステントコホモロジーを経由したり, 時刻 0 から順に代表コサイクルを変形したりすることで示しており, 次のカップ長関数を考えるには適応させにくい. そこで講演者は, 時刻 n で $C^*(K_n)$ 基底を変換し, それを包含写像から誘導される準同型を用いて n 未満の時刻へ写す方法でまとめることで, Ripser の出力を活用する方法を示した.

5 カップ長関数

[3] が提唱したカップ長関数についてまとめる. カップ積に関する理論は [6] を参考にしている.

定義 5.1. （カップ積）$c^p \in C^p(K)$, $c^q \in C^q(K)$ のカップ積 $c^p \cup c^q \in C^{p+q}(K)$ を, $[v_0, v_1, ..., v_{p+q}] \in K$ に対し,

$$c^p \cup c^q([v_0, v_1, ..., v_{p+q}]) = c^p([v_0, ..., v_p]) \cdot c^q([v_p, ..., v_{p+q}])$$

で定める.

このカップ積はアルゴリズム的に計算できる. カップ積は $H^*(K)$ 上に誘導され, 環構造 $(H^*(K), +, \cup)$ が定まる. ある環の長さとは, 非零になる積の長さの最大値のことをいう.

定義 5.2. （環の長さ）環 $R = (R, +, \times)$ に対し, $\mathrm{len}(R)$ を $\mathrm{len}(R) = \max\{l \in \mathbb{N} \mid a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_l\}$ で定める.

定義 5.3. （カップ長関数）$\mathbb{K}$ のカップ長関数 $\mathrm{cup}(K)$ を, $0 \leq s \leq t \leq n$ に対し

$$\mathrm{cup}(K)([s, t]) = \mathrm{len}(\mathrm{Im}(H^*(K_t) \to H^*(K_s)))$$

で定める.

6 安定性

パーシステントホモロジーの文脈で, データのノイズ耐性を示すものとして, 安定性定理がある. 安定性定理はいくつか種類があり, 構成する単体複体のフィルトレーションによっても異なる. 今回はリップス複体から得られるフィルトレーションについて考える.

定義 6.1. X を有限距離空間とする. $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ に対し, $\mathrm{Rips}_r(X)$ を

$$\{v_0,\ ...,\ v_k\} \text{ が } k \text{ 単体} \Leftrightarrow d(v_i,\ v_j)\ \leq r\ (\forall i, j)$$

で定める.

$r \leq r'$ なら $\mathrm{Rips}_r(X)$ は $\mathrm{Rips}_{r'}(X)$ の部分複体になる. r を 0 から大きくして得られるフィルトレーションをリップスフィルトレーションとよび, $\mathrm{Rips}(X)$ とかく. リップス複体は組み合わせ的に計算できるためよく使われる.
もとの距離空間の近さを表す指標として次のグロモフハウスドルフ距離がある.

定義 6.2. 距離空間 Z のコンパクト部分空間 X, Y ハウスドルフ距離 $d_H(X, Y)$ を

$$d_H(X, Y) = \max\{\sup_{y \in Y}\{d(y, X), \sup_{x \in X} d(x, Y)\}$$

で定める. また, コンパクト距離空間 X, Y のグロモフハウスドルフ距離 $d_{GH}(X, Y)$ を

$$d_{GH}(X, Y) = \inf\{d_H(i_X(X), i_Y(Y)) \mid \text{ある距離空間 } Z \text{ と等長埋め込み } i_X : X \to Z,\ i_Y : Y \to Z \text{ が存在}\}$$

2 つのカップ長関数の間にはイローション距離 d_E が定まる. この d_E に関して, リップスフィルトレーションから定まるカップ長関数には次の安定性が成り立つ.

定理 6.3. [3] 有限距離空間 X, Y に対し,

$$d_E(\mathrm{cup}(\mathrm{Rips}(X)), \mathrm{cup}(\mathrm{Rips}(Y))) \leq 2 \cdot d_{GH}(X, Y)$$

が成り立つ.

グロモフハウスドルフ距離は一般に下からの評価が難しい. 一方 d_E は X, Y の距離行列さえ与えられればアルゴリズム的に計算可能である.

参考文献

[1] Oudot, Steve Y. Persistence theory: from quiver representations to data analysis. Vol. 209. American Mathematical Soc., 2017.

[2] Zomorodian, Afra, and Gunnar Carlsson. "Computing persistent homology." Proceedings of the twentieth annual symposium on Computational geometry. 2004.

[3] Contessoto, Marco, et al. "Persistent cup-length." arXiv preprint arXiv:2107.01553 (2021).

[4] De Silva, Vin, Dmitriy Morozov, and Mikael Vejdemo-Johansson. "Dualities in persistent (co) homology." Inverse Problems 27.12 (2011): 124003.

[5] Bauer, Ulrich. "Ripser: efficient computation of Vietoris–Rips persistence barcodes." Journal of Applied and Computational Topology 5.3 (2021): 391-423.

[6] Munkres, James R. *Elements of algebraic topology.* CRC press, 2018.

Gromov boundaries of non-proper hyperbolic geodesic spaces

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻
長谷川 耀（Yo HASEGAWA）

概 要

数学の一分野として幾何学的群論と呼ばれるものがある. 幾何学的群論とは一言でいうならば, 無限離散群の性質を幾何学的手法で研究する分野といえる. この分野では, 群に対し Cayley グラフを考えることにより, 群そのものを幾何学的対象, つまり距離空間（測地空間）としてみなすのが常套手段である. 1980 年代, Gromov は距離空間に対して Gromov 積を定義し, それを用いて距離空間が双曲的であるという性質を定義した. また, Gromov は有限生成群が双曲的であるという性質を, 「Cayley グラフが双曲的測地空間となるような有限生成系が存在する」として定義し, 多くの重要な事実を示した. これが双曲群の理論の始まりであり, 幾何学的群論の研究で主要な役割を演じる理論の一つとなっている. 双曲群を研究するにあたって強力な武器となるのが双曲的測地空間における“無限遠”の概念である. その一つに Gromov 境界がある. 本稿では双曲的測地空間の Gromov 境界に関する既知の事実と新しく得られた結果について述べることにする. 詳細に関しては [1,2,3,4,5] を参照されたい.

1 双曲的測地空間

定義 1. (X,d) を距離空間とする. 3 点 $x,y,z \in X$ に対して, Gromov 積 $(y|z)_x$ を

$$(y|z)_x = \frac{1}{2}\{d(y,x) + d(z,x) - d(y,z)\}$$

で定義する. 距離空間 (X,d) が双曲的であるとは, 任意の 4 点 $x_0,x,y,z \in X$ に対して,

$$(x|y)_{x_0} \geq \min\{(x|z)_{x_0}, (y|z)_{x_0}\} - \delta$$

が成り立つような $\delta \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が存在することである. また, 距離空間 (X,d) の任意の 2 点が測地線で結べるとき, X は測地空間であるという.

2 点列境界

定義 2. X を基点 x_0 を持つ距離空間とするとき, $\lim_{i,j\to\infty}(x_i|x_j)_{x_0} = \infty$ を満たす点列 $\{x_i \in X\}$ を無限遠に収束する点列という.

この定義は基点 x_0 のとり方によらない. 以降基点を問題にしない場合は明示しないこととする.

定義 3. 双曲的空間 X に対して, $S_\infty(X)$ で無限遠に収束する X の点列全体の集合を表すことにし, $S_\infty(X)$ に関係 R を, $\{x_i\}R\{y_i\} \Leftrightarrow \lim_{i,j\to\infty}(x_i|y_i) = \infty$ によって定める. すると, X が双曲的であることから R が同値関係であることが従う. このとき, 商集合 $S_\infty(X)/R$ を X の点列境界と呼び, $\partial_s X$ で表す. 点列 $\{x_i\}$ が $\partial_s X$ の同値類 x を表すとき, $\{x_i\}$ は x に収束するという. $x,y \in X \cup \partial_s X$ であるとき, x に収束する点列 $\{x_i\}$ と y に収束する点列 $\{y_i\}$ について $\liminf_{i\to\infty}(x_i|y_i)$ を考え, x,y に収束する点列全体で inf をとったものを $(x|y)$ と定義する. $X \cup \partial_s X$ に次の 2 種類の部分集合を基とする位相を入れ, この部分空間として点列境界 $\partial_s X$ にも位相が入る.

- 中心 $x \in X$, 半径 $r > 0$ の開球 $\{y \in X \mid d_X(x,y) < r\}$.
- $x \in \partial_s X$ と $r > 0$ に対して, $\{y \in X \cup \partial_s X \mid (y|x) > r\}$.

3 測地境界

定義 4. X を基点 p を持つ測地空間とする.

(i) X の測地境界 $\partial_g X$ を次で定義する.

$$\partial_g X := \left\{ r\colon [0,\infty) \to X \;\middle|\; r \text{ は測地半直線} \right\} / \sim.$$

ただし, 2 つの測地半直線 $r, r'\colon [0,\infty) \to X$ に対して, $\mathrm{im}\, r$ と $\mathrm{im}\, r'$ の Hausdorff 距離が有限であるとき, $r \sim r'$ と定める.

(ii) X の点 p に関する測地境界 $\partial_{g,p} X$ を次で定義する.

$$\partial_{g,p} X := \left\{ r\colon [0,\infty) \to X \;\middle|\; r \text{ は点 } p \text{ を発する測地半直線} \right\} / \sim.$$

ただし, 同値関係 $\sim$ は上と同様である.

(iii) X の（点 p を発する）測地半直線全体の集合には広義一様収束の位相が入るので, $\partial_g X$（$\partial_{g,p} X$）にはその商位相を入れる.

ここで, 基点に関するものとそうでないものとがあるが, 固有な測地空間（つまり任意の有界閉集合がコンパクトである測地空間）に対しては, これら 2 つの境界が位相も込めて一致することが知られている.

4 点列境界 vs. 測地境界

点列境界と測地境界の間には次のよく知られた事実がある.

定理 5 ([2,4,5])**.** X を固有な双曲的測地空間とし, p を X 内の点とする. このとき X の点列境界 $\partial_s X$ と点 p に関する測地境界 $\partial_{g,p} X$ は同相である.

すなわち, 固有な双曲的測地空間に対しては, 点列境界と（基点に関する）測地境界が位相も込めて一致する. 例えば, n 次元双曲空間 $\mathbb{H}^n$ は固有な双曲的測地空間であるので, その点列境界が $n-1$ 次元球面 S^{n-1} に同相であることが, Poincaré disk model において原点に関する測地境界を考えることにより容易にわかる. ここで双曲的測地空間が固有であるという条件は外せない. つまり, 固有でない双曲的測地空間に対しては, 必ずしも点列境界と基点に関する測地境界は一致しない. 例としては次のようなものがある.

例 6. $\mathbb{B}^2$ を双曲平面の Poincaré disk model とし, $p = (0,0)$ を $\mathbb{B}^2$ 内の基点とする. $\mathbb{B}^2$ から open half disk を取り除いた後, 点 p を通る測地直線から開半直線を取り除く（図 1 を参照）. こうして得られる固有でない双曲的測地空間を考える. すると, 点列 $\{x_i\}$ で点列境界の点 x に収束するものは存在するが, 点 p を発する測地半直線で点 x に伸びるものは存在しない. ゆえに, 点列境界と基点に関する測地境界は一致しない.

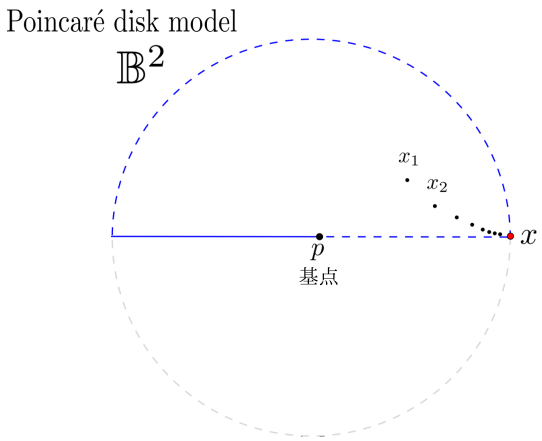


図 1: 点列境界と基点に関する測地境界が一致しない例

5 擬測地境界

ここでは測地空間に定義される測地境界の概念を少し緩めた, 擬測地空間に定義される擬測地境界について紹介する. そのための準備として $\mathcal{Q} := [1,\infty) \times [0,\infty)$ とし, $(c,b),(c',b') \in \mathcal{Q}$ に対して $c \le c'$ かつ $b \le b'$ のとき $(c,b) \le (c',b')$ と定める. このとき $(\mathcal{Q},\le)$ は有向集合となる.

定義 7. 距離空間 (X,d) が擬測地空間であるとは, ある定数 $(c,b) \in \mathcal{Q}$ が存在し, X の任意の 2 点が (c,b)-擬測地線で結べるときをいう. ここで, $\gamma\colon I \to X$ が (c,b)-擬測地線であるとは, 任意の $t,t' \in I$ に対して,

$$\frac{1}{c}\,|t-t'| - b \le d(\gamma(t),\gamma(t')) \le c\,|t-t'| + b$$

を満たすことをいう. ただし, I は $\mathbb{R}$ の閉区間である.

定義より, $(1,0)$-擬測地空間は測地空間になっている.

定義 8. 以下, X を基点 p を持つ擬測地空間とし, $(c,b) \in \mathcal{Q}$ とする.

(i) (a) (c,b)-擬測地半直線全体の集合を $QGR^{(c,b)}(X)$ と書く, i.e.

$$QGR^{(c,b)}(X) := \left\{ r\colon [0,\infty) \to X \;\middle|\; r \text{ は } (c,b)\text{-擬測地半直線} \right\}.$$

(b) X の擬測地境界 $\partial_q X$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}\partial_q X &:= \left\{ r\colon [0,\infty) \to X \;\middle|\; r \text{ は擬測地半直線} \right\}/\!\sim \\ &= \bigcup_{(c,b)\in\mathcal{Q}} QGR^{(c,b)}(X) \Big/ \sim.\end{aligned}$$

ただし, 2 つの擬測地半直線 $r,r'\colon [0,\infty) \to X$ に対して, $\mathrm{im}\, r$ と $\mathrm{im}\, r'$ の Hausdorff 距離が有限であるとき, $r \sim r'$ と定める.

(ii) (a) 点 p を発する (c,b)-擬測地半直線全体の集合を $QGR_p^{(c,b)}(X)$ と書く, i.e.

$$QGR_p^{(c,b)}(X) := \left\{ r\colon [0,\infty) \to X \;\middle|\; r \text{ は点 } p \text{ を発する } (c,b)\text{-擬測地半直線} \right\}.$$

(b) X の基点 p に関する擬測地境界 $\partial_{q,p}X$ を次で定義する.

$$\begin{aligned}\partial_{q,p}X &:= \left\{ r\colon [0,\infty) \to X \;\middle|\; r \text{ は点 } p \text{ を発する擬測地半直線} \right\} / \sim \\ &= \bigcup_{(c,b)\in\mathcal{Q}} QGR_p^{(c,b)}(X) \Big/ \sim.\end{aligned}$$

ただし, 同値関係 $\sim$ は上と同様である.

(iii) 各集合 $QGR^{(c,b)}(X)$ $(QGR_p^{(c,b)}(X))$ には広義一様収束の位相が入るので, $\partial_q X$ $(\partial_{q,p}X)$ には $QGR^{(c,b)}(X)$ $(QGR_p^{(c,b)}(X))$ から誘導される順極限位相の商位相を入れる.

ここで, 基点に関するものとそうでないものとがあるが, 擬測地空間に対してこれら 2 つの境界が位相も込めて一致することが確かめられる.

6 点列境界 vs. 擬測地境界

固有でない双曲的測地空間に対して, 点列境界と測地境界は一致しなかったが, 点列境界と擬測地境界に対しては次が成り立つ.

定理 9 ([3])**.** X を双曲的測地空間とし, p を X 内の点とする. このとき X の点列境界 $\partial_s X$ と点 p に関する擬測地境界 $\partial_{q,p}X$ は同相である.

すなわち, 固有とは限らない双曲的測地空間に対しては, 点列境界と（基点に関する）擬測地境界が位相も込めて一致する. Arzelà-Ascoli の定理より, 固有な測地空間に対して測地境界と擬測地境界が同相であることは確かめられるため, これは定理 5 の一般化になっている.

7 Gromov 境界

最後に, 本稿の題目でもある Gromov 境界についてであるが, 実は Gromov 境界は点列境界の別名と考えて問題ない. ただ点列境界と異なり, Gromov 境界は次のように“総称”として定義される場合も多い.

- 固有な双曲的測地空間 X に対して, その Gromov 境界 ∂X とは点列境界または（基点に関する）測地境界のことである.

つまり, 定理 5 より固有な双曲的測地空間においては点列境界と（基点に関する）測地境界は位相空間として同じものであったので, そのような位相空間を Gromov 境界と呼ぼうということである. 双曲的測地空間が固有でない場合においても, 定理 9 より点列境界と（基点に関する）擬測地境界は位相空間として同じものであるので, 次のように定義して良いことがわかる.

- 固有でない双曲的測地空間 X に対して, その Gromov 境界 ∂X とは点列境界または（基点に関する）擬測地境界のことである.

参考文献

[1] M. R. Bridson and A. Haefliger, Metric spaces of non-positive curvature, Springer, Bellin, 1999.

[2] C. Druţu, M. Kapovich, Geometric Group Theory, Colloquium Publications vol. 63, American Mathematical Society, 2018

[3] Y. Hasegawa, Gromov boundaries of non-proper hyperbolic geodesic spaces, Tokyo J. Math. Vol. 45, No. 2, 2022

[4] I. Kapovich and N. Benakli, Boundaries of hyperbolic groups. In Combinatorial and geometric group theory (New York, 2000/Hoboken, NJ, 2001), volume 296 of Contemp. Math., pages 39–93, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[5] K. Ohshika, Discrete groups, Translation of Math. Monographs vol. 207, American Mathematical Society, 2001.

曲面間の写像に関する Gauss-Bonnet 型公式

北海道大学大学院 理学院 数学専攻
橋堀 恭矢 (Kyoya HASHIBORI)

概要

Gauss-Bonnet の定理は微分幾何学的量である Gauss 曲率と位相幾何学的量である Euler 数を結びつける定理であるが，この定理が意味を持つのは正則曲面上，つまり，特異点を持たない曲面上である．実際，Gauss 曲率は特異点では定義されない．では，特異点を持つ曲面上で成り立つような Gauss-Bonnet の定理の類似はあるのだろうか．ここでは，その 1 つの答えを曲面間の写像を使った議論を通して解説する．また，ここで得られた Gauss-Bonnet 型公式の応用として，Euler 数と回転数を結びつける Levine の公式を解説する．

1 導入

当講演では，波面の内在的定式化である “連接接束” の諸性質を，曲面間の写像の言葉を用いて書き下すことにより，連接接束という抽象的概念を具体的に理解することを目指す．連接接束という概念は，Riemann 多様体上の接束を一般化したものであり，佐治・梅原・山田によって導入された (曲面上の連接接束の定義は論文 [6] を，一般次元の多様体上の連接接束の定義は論文 [7] を参照)．その後，境界をもつ曲面上の連接接束の概念が，Domitrz・Zwierzyński によって定義され，彼らは，佐治・梅原・山田によって導出された境界を持たない曲面についての Gauss-Bonnet 型公式を，境界を持つ曲面の場合の公式に一般化した ([2, Theorem 2.20] を参照)．

ここで，論文 [2] に基づいて，境界を持ちうる曲面上の連接接束の概念を正確に定義しよう．

定義 1.1 M を境界を持ちうる向きづけられた曲面とする．M 上の**連接接束**とは，次の 2 つの条件を満たす 5 つ組のデータ $(M, \mathcal{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle, D, \varphi)$ のことである．

(i) $\mathcal{E}$ は M 上の階数 2 の向きづけ可能なベクトル束であり，$\mathcal{E}$ は内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ とこの内積と整合性をもつ接続 D を持つ．

(ii) $\varphi : TM \to \mathcal{E}$ はベクトル束の準同型写像で，任意の M 上のベクトル場 X, Y に対して，次の式を満たすものである．

$$D_X\varphi(Y) - D_Y\varphi(X) = \varphi([X, Y]).$$

例 1.2 (M, g) が Riemann 曲面であるとき，$\mathcal{E} := TM$, $\langle\cdot,\cdot\rangle := g$, $D := \nabla$, $\varphi := \mathrm{id}$ とおけば，定義より，$(M, TM, g, \nabla, \mathrm{id})$ は連接接束であることがわかる．ここで，∇ は g の Levi-Civita 接続である．このことから，連接接束は Riemann 曲面上の接束の一般化であることがわかる．

それから，[2, Theorem 2.20] を，当講演で解説する場合に還元した形で述べておく．

事実 1.3 ([2, Theorem 2.20]**)** $(M, \mathcal{E}, \langle\cdot,\cdot\rangle, D, \varphi)$ をコンパクトで向きづけられた境界を持つ曲面 M 上の連接接束とする．φ は第 1 種の特異点と許容的な第 2 種の特異点だけを許容すると仮定し，φ の特異点集合 Σ と境界 ∂M は横断的であると仮定する．このとき，次の 2 つの式が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\int_M K dA + 2\int_\Sigma \kappa_s ds + \int_{\partial M} \kappa_g ds \\ &= 2\pi\chi(M) + \sum_{p\in(\Sigma\cap\partial M)^{\mathrm{null}}} (2\alpha_+(p) - \pi),\end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}&\int_M K d\widehat{A} + \int_{\partial M\cap M^+} \kappa_g ds - \int_{\partial M\cap M^-} \kappa_g ds \\ &= 2\pi\left(\chi(M^+) - \chi(M^-)\right) + 2\pi\left(\#S^+ - \#S^-\right) \\ &\quad +\pi\left(\#(\Sigma\cap\partial M)^+ - \#(\Sigma\cap\partial M)^-\right).\end{aligned} \tag{1.2}$$

事実 1.3 の中の記号たちは，第 2 節の中で，曲面間の写像の言葉を使った形で定義される．

もちろん，曲面が境界を持たなければ，式 (1.1), (1.2) は次の形に還元される．

$$\int_M K dA + 2\int_\Sigma \kappa_s ds = 2\pi\chi(M), \tag{1.3}$$

$$\int_M K d\widehat{A} = 2\pi\left(\chi(M^+) - \chi(M^-)\right) + 2\pi\left(\#S^+ - \#S^-\right). \tag{1.4}$$

さらに，佐治・梅原・山田は，論文 [7] の中で，Gauss-Bonnet 型公式の，曲面間の写像へのいくつかの応用を与えた．例えば，式 (1.3) を用いて “曲面版”Levine の公式を，式 (1.4) を用いて Quine の公式を導出できることを示した ([7, Proposition 3.6, Corollary 3.8] を参照)．なお，“曲面版” と書いたのは，Levine は偶数次元多様体の場合に公式を示したからである (論文 [5] を参照)．それから，Domitrz と Zwierzyński は，式 (1.2) を用いて福田-石川の公式の特別な場合を導出した ([2, Proposition 4.1] を参照)．なお，福田-石川の公式は，Quine の公式を境界を持つ曲面の場合に一般化した公式である．

以上のような背景に基づくと，我々は曲面版 Levine の公式を境界つき曲面に一般化することに興味をもつことは自然である．

当講演は次のような内容で構成されている．まず，曲面間の写像の言葉を用いて，連接接束の諸概念を見る．それから，曲面間の写像の言葉を使って，事実 1.3 を書き直す．最後に，曲面間の写像に関する Gauss-Bonnet 型公式を用いて，境界を持つ曲面についての Levine の公式を導出する．

2 曲面間の写像から誘導される連接接束と Gauss-Bonnet 型公式

曲面間の写像の言葉を使って連接接束の諸概念を考えることができるのは，次の例による．

例 2.1 ([7, Example 2.3]**)** M を向きづけられた曲面，(N, g) を向きづけられた Riemann 曲面，$f : M \to N$ を C^∞ 級写像とする．f^*TN を接束 TN の f による引き戻しとする．このとき，Riemann 計量 g の f による引き戻しが f^*TN 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を与え，g の Levi-Civita 接続 ∇ の f^*TN への制限 D が内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と整合性をもつ f^*TN 上の接続を与える．さらに，f の微分写像

$df : TM \to f^*TN$ がベクトル束の準同型写像を与え，M 上の任意のベクトル場 X, Y に対して，

$$D_X df(Y) - D_Y df(X) = df([X, Y])$$

を満たす．よって，5 つ組 $(M, f^*TN, \langle\cdot,\cdot\rangle, D, df)$ は M 上の連接接束である．これを**曲面間の写像 f から誘導される連接接束**と呼ぶ.

以下，境界を持つコンパクトで向きづけられた曲面 M と向きづけられた Riemann 曲面 (N, g) と C^∞ 級写像 $f : M \to N$ を固定することにより，f から誘導される連接接束 $(M, f^*TN, \langle\cdot,\cdot\rangle, D, df)$ を考える．内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ の f による引き戻し $ds^2 := f^*\langle\cdot,\cdot\rangle$ を M 上の**第 1 基本形式**と呼ぶ．点 $p \in M$ が f の**特異点**であるとは，f が p ではめ込みでないこと，すなわち，ds^2 が p において正定値でないことであり，f の特異点全体の集合を Σ で表す．$M \backslash \Sigma$ に含まれる点を f の**正則点**と呼ぶ.

N の向きに同調する局所座標系 $(V; x, y)$ をとる．TN の V への制限 $TN|_V$ 上の正の正規直交基底の場 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ をとり，$\{\omega_1, \omega_2\}$ をその双対基底とする．このとき，$dA_N := \omega_1 \wedge \omega_2$ は V 上の正の正規直交基底の場の選び方によらないので，dA_N は N 上全体で定義される．dA_N を N 上の**面積要素**と呼び，dA_N の f による引き戻し $d\widehat{A} := f^*dA_N$ を M 上の**符号つき面積要素**と呼ぶ.

M の向きに同調する局所座標系 $(U; u, v)$ を $f(U) \subset V$ となるようにとる．このとき，

$$\lambda := d\widehat{A}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = (dA_N)_f\,(f_u, f_v) \quad \left(f_u := df\left(\frac{\partial}{\partial u}\right), f_v := df\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\right)$$

で与えられる U 上の C^∞ 級関数 λ を**符号つき面積密度関数**と呼ぶ．定義より, U 上で $d\widehat{A} = \lambda du \wedge dv$ と書けるのは明らかである．また，U 上の特異点集合は次のように表現される:

$$\Sigma \cap U = \{p \in U \mid \lambda(p) = 0\}.$$

さらに，$dA := |\lambda| du \wedge dv$ とおくと，dA は M の向きに同調する局所座標系の選び方によらないので，dA は M 上全体で定義される連続な 2 次微分形式を与える．dA を M 上の**面積要素**と呼ぶ.

さて，M 上の 2 次微分形式 $d\widehat{A}$ と dA を用いて，M の 2 つの開部分多様体 M^+ と M^- をそれぞれ次のように定義する:

$$M^+ := \left\{p \in M \backslash \Sigma \mid dA_p = d\widehat{A}_p\right\},\ M^- := \left\{p \in M \backslash \Sigma \mid dA_p = -d\widehat{A}_p\right\}.$$

すると，U 上の符号つき面積密度関数 λ を用いて，M^+ と M^- の局所的表現をそれぞれ次のように書くことができる:

$$M^+ \cap U = \{p \in U \mid \lambda(p) > 0\},\ M^- \cap U = \{p \in U \mid \lambda(p) < 0\}.$$

次に，接続形式を定義する．g の Levi-Civita 接続 ∇ の定義より，$f^{-1}(V)$ 上の任意のベクトル場 X に対して，

$$\langle D_X(\boldsymbol{e}_i \circ f), \boldsymbol{e}_i\rangle = g\left(\nabla_{df(X)}\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_i\right) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

が成り立つ．このことは $D_X(\boldsymbol{e}_i \circ f)$ と $\boldsymbol{e}_i$ が内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して直交していることを示している．よって，

$$D_X(\boldsymbol{e}_1 \circ f) = -\omega(X)\boldsymbol{e}_2,\ D_X(\boldsymbol{e}_2 \circ f) = \omega(X)\boldsymbol{e}_1$$

を満たす $f^{-1}(V)$ 上の 1 次微分形式 ω が一意的に存在し，これを**接続形式**と呼ぶ．ω の外微分 $d\omega$ は正の正規直交基底の場の選び方によらないので，$d\omega$ は M 上全体で定義された 2 次微分形式を定める．そして，f の正則点集合上で，$d\omega = Kd\widehat{A}$ が成り立つので，$d\omega$ の連続性から，$Kd\widehat{A}$ を M 上全体に滑らかに拡張することができる．ここで，K は M 上の ds^2 に関する Gauss 曲率である．

一方，ω_N を N 上の Levi-Civita 接続 ∇ に関する接続形式とすると，

$$D_X(\boldsymbol{e}_1 \circ f) = -f^*\omega_N(X)\boldsymbol{e}_2,\ D_X(\boldsymbol{e}_2 \circ f) = f^*\omega_N(X)\boldsymbol{e}_1$$

が成り立つから，$\omega = f^*\omega_N$ を得る．そして，古典的な接続の理論より，ω_N の外微分 $d\omega_N$ は $K_N dA_N$ に等しい．ここで，K_N は N 上の g に関する Gauss 曲率である．よって，

$$Kd\widehat{A} = d\omega = d(f^*\omega_N) = f^*(d\omega_N) = f^*(K_N dA_N) = (K_N \circ f)d\widehat{A} \tag{2.1}$$

が f の正則点集合上で成り立つ．

次に，非退化な特異点を定義し，それを 2 種類に分類することを考える．f の特異点 p が**非退化**であるとは，符号つき面積密度関数 λ の外微分 $d\lambda$ が p において消えないことである．p が非退化な特異点であるならば，陰関数定理により，p の十分に小さい近傍 U が存在して，U 上の特異点集合 $\Sigma \cap U$ を正則曲線 $\gamma(t)$ $(\gamma(0) = p)$ によってパラメータ表示することができる．このような曲線を**特異曲線**と呼び，接ベクトル $\gamma'(t) := d\gamma/dt(t)$ の方向を**特異方向**と呼ぶ．一方，f の p における微分写像 $df_p : T_pM \to T_{f(p)}N$ の階数は 1 であるから，$\mathrm{Ker}df_p$ の次元は 1 である．この T_pM の部分ベクトル空間 $\mathrm{Ker}df_p$ の方向を**退化方向**と呼ぶ．これら 2 つの方向を用いて，非退化な特異点を次のように分類する．すなわち，非退化な特異点における特異方向と退化方向が異なるとき，その点を**第 1 種の特異点**と呼び，そうでないとき，その点を**第 2 種の特異点**と呼ぶ．さらに，第 2 種の特異点 p の近傍 U で，$U \backslash \{p\}$ 上の特異点たちが全て第 1 種の特異点であるようなものが存在するとき，p は**許容的**であると言う．以下，f は第 1 種の特異点と許容的な第 2 種の特異点だけを許容すると仮定する．

例 2.2 曲面間の C^∞ 級写像 $f : M \to N$ の特異点 p が**折り目** (resp. **カスプ**) であるとは，p における f の写像芽が原点 0 における $(u, v) \mapsto (u, v^2)$ (resp. $(u, v) \mapsto (u^3 - 3uv, v)$) の写像芽に右左同値であることである．ここで，2 つの写像芽 $f_1, f_2 : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ が**右左同値**であるとは，微分同相写像芽 $\varphi, \Phi : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$ で，$\Phi \circ f_1 = f_2 \circ \varphi$ が成り立つようなものが存在することである．このとき，p は第 1 種の特異点 (resp. 許容的な第 2 種の特異点) であることが確かめられる．

次に，特異曲線の特異曲率を定義する．特異点 p が第 1 種であると仮定する．もちろん，p を通る特異曲線 $\gamma(t)$ $(\gamma(0) = p)$ が存在する．p の十分に小さい近傍 U をとると，$U \cap \mathrm{Im}\gamma$ が第 1 種の特異点だけからなるようにできるので，γ に沿う退化ベクトル場 $\eta(t)$ を，$\{\gamma'(t), \eta(t)\}$ が U の向きに同調するようにとることができる．$\gamma(t)$ が非退化な特異点であることを思い出すと，df の階数は 1 であるから，$f'(\gamma(t))$ は常に消えない．一方，$\lambda(\gamma(t)) = 0$ の両辺を t について微分すると，$d\lambda_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = 0$ を得る．再び $\gamma(t)$ が非退化な特異点であることを思い出すと，$\mathrm{Ker}d\lambda_{\gamma(t)}$ の次元は 1 であるから，$d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t))$ は常に消えない．このような考察のもと，γ の**特異曲率** κ_s を

$$\kappa_s(t) := -\mathrm{sgn}(d\lambda_{\gamma(t)}(\eta(t)))\frac{\langle \boldsymbol{n}'(t), f'(\gamma(t))\rangle}{|f'(\gamma(t))|^2}$$

によって定義する．ここで，$\boldsymbol{n}(t)$ は γ に沿う f^*TN の切断で，$\{f'(\gamma(t))/|f'(\gamma(t))|, \boldsymbol{n}(t)\}$ が γ に沿う f^*TN 上の正の正規直交基底の場を与えるものであり，$\boldsymbol{n}'(t)$ は $\boldsymbol{n}(t)$ の $\gamma'(t)$ 方向に関する共変微分 $D_{d/dt}\boldsymbol{n}(t)$ のことである．

注意 2.3 特異曲率は測地的曲率の極限であるという解釈をすることができる．実際，第 1 種の特異点のまわりに M の向きに同調する座標近傍 $(U; u, v)$ で，u 軸は第 1 種の特異点からなる特異曲線であり，u 軸に沿う退化方向は v 軸に平行であるようなものをとる．そして，U 上の正則曲線 $\gamma_c(t)$ $(c \in (-\varepsilon, \varepsilon))$ を $\gamma_c(t) = (t, c)$ で定義する．ここで，ε は十分に小さい正の実数である．すると，γ_c $(c \neq 0)$ の**測地的曲率** κ_g^c が

$$\kappa_g^c(t) := -\mathrm{sgn}(\lambda(\gamma_c(t)))\frac{\langle \boldsymbol{n}_c'(t), f'(\gamma_c(t))\rangle}{|f(\gamma_c'(t))|^2}$$

によって定義される．ここで，$\boldsymbol{n}_c(t)$ は γ_c に沿う f^*TN の切断で，$\{f'(\gamma_c(t))/|f'(\gamma_c(t))|, \boldsymbol{n}_c(t)\}$ が γ_c に沿う f^*TN 上の正の正規直交基底の場を与えるものであり，$\boldsymbol{n}_c'(t)$ は $\boldsymbol{n}_c(t)$ の $\gamma_c'(t)$ 方向に関する共変微分 $D_{d/dt}\boldsymbol{n}_c(t)$ のことである．このとき，$\gamma = \gamma_0$ の特異曲率 κ_s と γ_c $(c \neq 0)$ の測地的曲率 κ_g^c の間に，次のような関係が成り立つ ([8, Remark 1.7]):

$$\lim_{c \to +0} \kappa_g^c(t) = \kappa_s(t), \ \lim_{c \to -0} \kappa_g^c(t) = -\kappa_s(t).$$

次に，M を三角形分割することによって得られる三角形たちの内角の総和について考える．まず，M の内部 $M \backslash \partial M$ の中の第 2 種の特異点 p に集まる三角形たちの内角の総和について考える．p を中心とする M の向きに同調する局所座標系 (u, v) で，p を通る特異曲線に沿う退化方向が u 軸に平行であるようなものをとると，次の式が成り立つ ([6, Theorem A]):

$$\alpha_+(p) + \alpha_-(p) = 2\pi, \ \alpha_+(p) - \alpha_-(p) \in \{-2\pi, 0, 2\pi\}.$$

ここで，$\alpha_+(p)$ (resp. $\alpha_-(p)$) は p に集まる三角形たちの M^+ 側 (resp. M^- 側) の内角の総和である．$\alpha_+(p) - \alpha_-(p) = 2\pi$ (resp. 0, -2π) であるとき，p を**正** (resp. **零**，**負**) の特異点と言う．次に，境界 ∂M 上の特異点 p に集まる三角形たちの内角の総和を考える．p における退化方向が ∂M に横断的に交わる場合，p を中心とする局所座標系 (u, v) で，上のようなものをとると，次の式が成り立つ ([2, Theorem 2.13]):

$$\alpha_+(p) + \alpha_-(p) = \pi, \ \alpha_+(p) - \alpha_-(p) \in \{-\pi, \pi\}.$$

一方，p における退化方向が ∂M に接する場合，p を中心とする局所座標系 (u, v) で，やはり上のようなものをとると，次の式が成り立つ ([2, Theorem 2.13]):

$$\alpha_+(p) - \alpha_-(p) = 0.$$

$\alpha_+(p) - \alpha_-(p) = \pi$ (resp. 0, $-\pi$) であるとき，p を**正** (resp. **零**，**負**) の特異点と言う．

以上までで解説した概念たちを用いることにより，曲面間の写像に関する Gauss-Bonnet 型公式を得る．

定理 2.4 M を境界を持つコンパクトで向きづけられた曲面，(N,g) を向きづけられた Riemann 曲面，$f:M\to N$ を C^∞ 級写像とする．f は第 1 種の特異点と許容的な第 2 種の特異点だけを許容すると仮定し，f の特異点集合 Σ と境界 ∂M は横断的であると仮定する．このとき，次の式が成り立つ:

$$\begin{aligned}&\int_M (K_N\circ f)dA+2\int_\Sigma \kappa_s ds+\int_{\partial M}\kappa_g ds\\ &=2\pi\chi(M)+\sum_{p\in(\Sigma\cap\partial M)^{\mathrm{null}}}(2\alpha_+(p)-\pi)\,,\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}&\int_M (K_N\circ f)d\widehat{A}+\int_{\partial M\cap M^+}\kappa_g ds-\int_{\partial M\cap M^-}\kappa_g ds\\ &=2\pi\left(\chi(M^+)-\chi(M^-)\right)+2\pi\left(\#S^+-\#S^-\right)\\ &\quad+\pi\left(\#(\Sigma\cap\partial M)^+-\#(\Sigma\cap\partial M)^-\right).\end{aligned}\tag{2.3}$$

ここで，S^+ (resp. S^-) は $M\backslash\partial M$ の中の正 (resp. 負) の第 2 種の特異点全体の集合を表し，$(\Sigma\cap\partial M)^+$ (resp. $(\Sigma\cap\partial M)^{\mathrm{null}}$, $(\Sigma\cap\partial M)^-$) は ∂M 上の正 (resp. 零，負) の特異点全体の集合を表す．

証明 曲面間の写像 f は連接接束 $(M,f^*TN,\langle\cdot,\cdot\rangle,D,df)$ を誘導することを思い出すと，事実 1.3 が成り立つ．そして，式 (2.1) が成り立つことを思い出すと，式 (1.1) と (1.2) から，式 (2.2) と (2.3) が導かれる． □

なお，(2.2) は [2, Proposition 4.2] の公式の一般化である．実際，折り目特異点とカスプ特異点はそれぞれ第 1 種の特異点，許容的な第 2 種の特異点の例である．

3 定理 2.4 の応用

Gauss-Bonnet 型公式を用いることにより，曲面版 Levine の公式と，Quine の公式を示すことができるということが [7] の中で紹介されている ([7, Proposition 3.6, Corollary 3.8])．それから，Gauss-Bonnet 型公式を用いることにより，Quine の公式の境界を持つ曲面への一般化である福田・石川の公式を示すことができるということが [2] の中で紹介されている ([2, Proposition 4.1])．ここでは，Gauss-Bonnet 型公式を用いることにより，曲面版 Levine の公式の境界を持つ曲面への一般化を与える．

定理 3.1 M を境界を持つコンパクトで向きづけられた曲面とし，$f:M\to\mathbb{R}^2$ を C^∞ 級写像とする．f は第 1 種の特異点と許容的な第 2 種の特異点だけを許容すると仮定し，f の特異点集合 Σ と境界 ∂M は交わらないと仮定する．$\{c_1,\cdots,c_r\}$ を Σ の連結成分の全体とし，$\{e_1,\cdots,e_s\}$ を ∂M の連結成分の全体とする．このとき，次の式を満たすような $\{c_1,\cdots,c_r\}$ と $\{e_1,\cdots,e_s\}$ の向きがそれぞれ唯 1 つ存在する:

$$\frac{\chi(M)}{2}=\sum_{i=1}^r I(c_i)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^s I(e_i).\tag{3.1}$$

ここで，$I(c_i)$ (resp. $I(e_i)$) は c_i (resp. e_i) の回転数を表す．

証明 f は曲面と平面の間の写像であるから，f は連接接束 $(M, f^*T\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle, D, df)$ を誘導する．$\mathbb{R}^2$ の Gauss 曲率は 0 であるという事実と Σ が ∂M に交わらないという仮定により，式 (2.2) は次のように還元される:

$$2\int_{\Sigma}\kappa_s ds + \int_{\partial M}\kappa_g ds = 2\pi\chi(M). \tag{3.2}$$

ここで，[9, Theorem 5.4.8] により，各 $f(c_i)$ $(i = 1, \cdots, r)$ の平面曲線としての曲率は，c_i の特異曲率に一致するから，

$$\int_{\Sigma}\kappa_s ds = 2\pi\sum_{i=1}^{r} I(c_i) \tag{3.3}$$

が成り立つ．さらに，各 $f(e_i)$ $(i = 1, \cdots, s)$ の平面曲線としての曲率は，e_i の測地的曲率に一致するから，

$$\int_{\partial M}\kappa_g ds = 2\pi\sum_{i=1}^{s} I(e_i) \tag{3.4}$$

が成り立つ．最後に，式 (3.2)-(3.4) を組み合わせることによって，式 (3.1) を得る． □

注意 3.2 定理 3.1 は，次の意味で [4] の曲面版 Levine の公式の一般化になっている．実際，[4] では，曲面と平面の間の写像は安定であるという仮定のもとで導かれた公式である．ここで，C^∞ 級写像 $f : M \to \mathbb{R}^2$ が**安定**であるとは，f の近傍 $N(f) \subset C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$ で，$N(f)$ に含まれる全ての C^∞ 級写像が f に右左同値であるようなものが存在することである．ここで，$C^\infty(M, \mathbb{R}^2)$ は M から $\mathbb{R}^2$ への C^∞ 級写像全体の集合で，Whitney C^∞ 位相が与えられているものである．そして，f の特異点集合 Σ と境界 ∂M が交わらなければ，f は特異点として折り目とカスプしか許容しないことが知られている ([1]).

参考文献

[1] J. W. Bruce, P. J. Giblin, *Projections of surfaces with boundary.* Proc. London Math. Soc. (3) **60** (1990), no. 2, 392–416.

[2] W. Domitrz, M. Zwierzyński, *The Gauss-Bonnet theorem for coherent tangent bundles over surfaces with boundary and its applications.* J. Geom. Anal. **30** (2020), no. 3, 3243–3274.

[3] T. Fukuda, G. Ishikawa, *On the number of cusps of stable perturbations of a plane-to-plane singularity.* Tokyo J. Math. 10 (1987), no. 2, 375–384.

[4] H. Levine, *Computing the Euler characteristic of a manifold with boundary.* Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), no. 8, 2563–2567.

[5] H. Levine, *Mappings of manifolds into the plane.* Amer. J. Math. 88 (1966), 357–365.

[6] K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, *Behavior of corank-one singular points on wave fronts.* Kyushu J. Math. **62** (2008), no. 1, 259–280.

[7] K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, *Coherent tangent bundles and Gauss-Bonnet formulas for wave fronts.* J. Geom. Anal. **22** (2012), no. 2, 383–409.

[8] K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, *The geometry of fronts*. Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 2, 491–529.

[9] M. Umehara, K. Saji, K. Yamada, *Differential geometry of curves and surfaces with singularities*. Translated from the 2017 Japanese original by Wayne Rossman. Series in Algebraic and Differential Geometry, 1. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ 2022.

4次元ユークリッド空間における正則曲線上の一般化されたビショップフレームについて

立命館大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻
野本 統一 (Subaru NOMOTO)

概 要

本研究は立命館大学の野澤啓先生との共同研究による 4 次元ユークリッド空間における一般化されたビショップフレームについての研究である．3 次元ユークリッド空間において, R.L.Bishop[B] がビショップフレームというものを考案したが, Bishop の考察を 4 次元に拡張し, 新たにいくつかのフレームが考えられた．それらフレームの相互の関係性について調べ, フレーム間にはある種の階層性があることが分かった.

1 導入

曲線におけるフルネフレームは, 1847 年に J.F.Frenet[F] に, また 1851 年に J.A.Serret[S] によってそれぞれ独立に導入された．フルネフレームは空間曲線の研究において重要な役割を果たし, 古典的な道具でもある．I を開区間, $\mathbb{E}^3$ を 3 次元ユークリッド空間とし, γ を弧長パラメータ表示された C^∞ 級正則曲線 $\gamma : I \to \mathbb{E}^3$ とする．以降曲線は滑らかな曲線を考えるものとする．$T = \frac{d\gamma}{ds} : I \to \mathbb{E}^3$ を γ の接ベクトル場, N を γ の主法線ベクトル場, B を γ の従法線ベクトル場としたとき, $\{T, N, B\}$ がフレームであるとは, 曲線の各点で, $\{T(s), N(s), B(s)\}$ が $\mathbb{E}^3$ の正規直交基底をなすときにいう．また, フレーム $\{T, N, B\}$ がフルネフレームであるとは, フレームの微分とフレームの 1 次結合が次のような形で書き表される時にいう.

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

ここで $\kappa > 0$ であり, κ, τ をそれぞれ曲率, 捩率という．また, 行列の部分を係数行列と呼ぶことにする．次の定理は, 曲線が曲率と捩率により決まるという事を述べている.

定理 1 空間内の 2 曲線 γ と $\tilde{\gamma}$ の曲率, 捩率をそれぞれ $\kappa(s), \tau(s), \tilde{\kappa}(s), \tilde{\tau}(s)$ とすると, $\kappa = \tilde{\kappa}$ かつ $\tau = \tilde{\tau}$ になるための必要十分条件は, 回転と平行移動を使って, $\gamma(s)$ と $\tilde{\gamma}(s)$ を重ねることができることである.

しかし一般にフルネフレームを許容しない曲線が存在する．次の例はフルネフレームを許容しない例である.

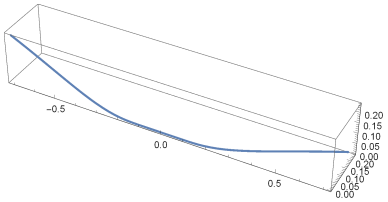


図 1: $\gamma(t) = \begin{cases} \left(t, e^{-\frac{1}{t}}, 0\right) & t > 0 \\ (0,0,0) & t = 0 \\ \left(t, 0, e^{\frac{1}{t}}\right) & t < 0. \end{cases}$

この例は $t = 0$ において, 主法線ベクトル場が定義できない.
一方, R.L.Bishop によって導入されたビショップフレームは C^2 級正則曲線ならばいつでも許容される.
このビショップフレームは次の条件を持つ法ベクトル場を用いて定義される. M を曲線 γ に沿った法ベクトル場とする. 法ベクトル場 M に対して, $M' = fT$ を満たすような $f \in C^\infty(I)$ が存在する時, M は relatively parallel であるという. これらを用いて, ビショップフレームは次のように定義される.

定義 1 $\gamma(s)$ を正則曲線とし, T を曲線に沿った接ベクトル場, M_1, M_2 を *relatively parallel* な法ベクトル場としたとき, フレーム $\{T, M_1, M_2\}$ をビショップフレームという.

また, ビショップフレームの微分とフレームの 1 次結合は次のような形で書き表される.

$$\begin{pmatrix} T' \\ M_1' \\ M_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ -b_1 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$$

Bishop はこのビショップフレームを導入する際に, 係数行列について次のような考察を行った.

$$\begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ -b_1 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & g \\ -f & -g & 0 \end{pmatrix}$$

(1) (2) (3)

(1) はフルネフレームの係数行列であり, (2) はビショップフレームの係数行列である. (3) に関しては, 2 つの法ベクトル場の入れ替えによって, (1) の形になるので, 3 次元においては, 本質的にはフルネフレームとビショップフレームの 2 種類になる. 我々はこの考察を 4 次元に拡張し, 一般化されたビショップフレームというものを定義した.

2 一般化されたビショップフレームについて

4 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^4$ において Bishop の考察を拡張すると, 次のようにフレームが定義できる.

定義 2 $\mathbb{E}^4$ において曲線のフレームの微分とフレームの 1 次結合の関係を表す際に出てくる係数行列 (a_{ij}) が上三角行列において多くとも 3 つの 0 でない成分を持つとき, そのフレームを一般化されたビショップフレームという.

$$\begin{pmatrix} 0 & \blacksquare & 0 & 0 \\ & 0 & \blacksquare & 0 \\ & & 0 & \blacksquare \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

また次の条件の係数行列を非退化なフレームとして定義した.

定義 3 一般化されたビショップフレームにおいて, どの行も 0 行列でないような係数行列をもつフレームを非退化なフレームという.

この定義によって, 16 通りの係数行列の形が考えられたが, これらは, 法ベクトル場の入れ替えによって次 4 つのうちのいずれかの形になる.

$$X_{\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} 0 & f_1 & 0 & 0 \\ -f_1 & 0 & f_2 & 0 \\ 0 & -f_2 & 0 & f_3 \\ 0 & 0 & -f_3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_{\mathbb{D}} = \begin{pmatrix} 0 & d_1 & 0 & 0 \\ -d_1 & 0 & d_2 & d_3 \\ 0 & -d_2 & 0 & 0 \\ 0 & -d_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

F 型　　D 型

$$X_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_2 & 0 \\ -c_1 & 0 & 0 & c_3 \\ -c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad X_{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ -b_1 & 0 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 & 0 \\ -b_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C 型　　B 型

これらの係数行列を持つフレームを我々は, F 型, D 型, C 型, B 型のフレームと名付けた. B 型のフレームは 4 次元ユークリッド空間におけるビショップフレームそのものである. また, フルネフレームは F 型のフレームにおいて, 係数行列の f_1, f_2 がともに正であるものをいう. これらの定義をもとに正則曲線があるフレームを許容する時, 他のフレームを許容するか調べることより, フレーム間の階層性を調べた.

3 主結果

D 型のフレームの特徴づけとして, 次のような事が分かっている.

命題 1 [*NN*] $\mathbb{E}^4$ において γ を正則曲線とする. 次の事は, 同値である.

1. γ が D 型のフレームを許容する.
2. $T' = d_1\mathbb{D}_1$ となる滑らかな単位法ベクトル場 $\mathbb{D}_1$ と滑らかな関数 d_1 が存在する.

また, フルネフレームと F 型のフレームの関係は次のようになる.

命題 2 [*NN*] $\mathbb{E}^4$ において, 正則曲線 γ がフルネフレーム $\{T, \mathbb{F}_1, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3\}$ を許容するとする. この時, γ の F 型の全てのフレーム $\{T, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3\}$ は, 符号の差を除いてフルネフレームと一致する. また, フレーム $\{T, \mathbb{Z}_1, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3\}$ の係数行列の全ての成分は, 符号の差を除いて, フルネフレームの係数行列の対応する成分に等しい.

これらを用いて, あるフレームを許容しない曲線の例が構成される. また, 曲線があるフレームを許容する時, 別のフレームを許容するかいう事を次の補題を用いて調べた.

補題 1 [*NN*] $\gamma : I \to \mathbb{E}^4$ を正則曲線とする．$\mathbb{Z}_0$ を γ 上のフレームで $\mathbb{Z}_0' = X_0\mathbb{Z}_0$ を満たすものとし, $X_1 : I \to \mathfrak{o}(4)$ を関数とする．γ 上のフレーム $\mathbb{Z}_1$ で次の条件を満たすものを考える．

$$\mathbb{Z}_1' = X_1\mathbb{Z}_1. \tag{1}$$

このとき, $\hat{G} = \mathbb{Z}_1\mathbb{Z}_0^{-1}$ によって与えられる $\mathbb{Z}_0$ から $\mathbb{Z}_1$ への変換 $\hat{G} : I \to O(4)$ は微分方程式

$$\hat{G}' = X_1\hat{G} - \hat{G}X_0. \tag{2}$$

を満たす．逆に, $\hat{G} : I \to O(4)$ が微分方程式 (2) を満たすならば, $\mathbb{Z}_1 = \hat{G}\mathbb{Z}_0$ によって与えられる $\mathbb{Z}_1$ は微分方程式 (1) を満たす．

フレーム間の階層性について次のような事が分かった．

定理 2 [*NN*] γ を $\mathbb{E}^4$ における正則曲線とする．この時, 次の事が成り立つ．

1. γ が F 型のフレームを許容するならば, γ は D 型のフレームを許容する．
2. γ が D 型のフレームを許容するならば, γ は C 型のフレームを許容する．

ここで, 全ての C^2 級正則曲線は, B 型のフレームを許容する事に注意する．
また次の主張は, フレーム間の階層性が自明でないという事を述べている．

定理 3 [*NN*]

1. D 型のフレームを許容するが F 型のフレームを許容しない正則曲線が存在する．
2. C 型のフレームを許容するが D 型のフレームを許容しない正則曲線が存在する．
3. C 型のフレームを許容しない正則曲線が存在する．

これらの結果より, 我々の定義において正則曲線がフレームを持つ条件として B 型のフレームを持つ条件が最も緩く, F 型のフレームを持つ条件が最も厳しい条件と思うことができる．
次に曲線のクラスとして次のようなものを考える．

定義 4 曲線が 2-*regular* であるとは, 曲線の各点で接ベクトルと加速度ベクトルがどこも消えていないような曲線をいう．

次の結果は, 定理 2 の系である．

系 1 [*NN*] $\mathbb{E}^4$ において 2-*regular* な曲線 γ が F 型のフレームを許容するならば, B 型, C 型, D 型の全ての型のフレームを許容する．特に,γ がフルネフレームを許容するならば, 全ての型のフレームを許容する．

また次の結果より 2-*regular* な曲線ならば全ての型のフレームを持つというわけではない．

定理 4 [*NN*] $\mathbb{E}^4$ において, F 型のフレームを許容しない 2-*regular* な曲線が存在する．

これらの結果より, 曲線があるフレームを許容するという事は, 曲線の新たな分類方法と考えることができる．

4　今後の研究の方向性

まず初めに研究の方向性として考えられるのは, この理論の 5 次元への拡張が考えうる. 5 次元の場合, 非退化なフレームの係数行列は, 法ベクトル場の入れ替えの差を除いて全部で 11 種類になる. ある係数行列を持つフレームで, どの成分も恒等的には 0 でないようなものから, 他のある係数行列を持つフレームへの変換が存在しない事が 4 次元の時と同様の手法でわかる. これは, 4 次元の時には, 見られなかった現象である. また, 他分野への応用を考えることも意義があると思う. 我々の研究とは独立に, 石川剛郎先生 [I] のフロンタルの研究において, D 型の係数行列の形が現れた. 応用面を探すことによって理論としてさらに発展していくと思う. また, 4 次元において全てのフレームの型を許容する特別な曲線を探すという方向性も考えられる. 3 次元ユークリッド空間において特殊な条件の曲線を用いて, 野水克己先生 [N] が曲率 0 を許す形でフルネフレームの構成方法を示した. この方法を 4 次元に拡張できれば, 我々が示した定理などから解析的な曲線が全ての型のフレームを許容する曲線と考えられる.

参考文献

[B] R. L. Bishop, There is more than one way to frame a curve, *Amer. Math. Monthly*, **82**(3) (1975), 246–251.

[F] J. F. Frenet, Sur les courbes à double courbure. *J. Math. Pures Appl. (1)* **17** (1852), 437–447.

[I] G. Ishikawa, Normal and tangent maps to frontals. *J. Math. Sci. (N.Y.)* **255** (2021), no. 5, Problems in mathematical analysis. No. 109, 664–677.

[K] S. Kobayashi, 曲線と曲面の微分幾何学 1995 裳華房

[N] K. Nomizu, On Frenet equations for curves of class C^∞, *Tohoku Math. J. (2)* **11** (1959), no. 1, 106–112.

[NN] S. Nomoto, H. Nozawa, Generalized Bishop frames of regular curves in $\mathbb{E}^4$, to appear in *Hokkaido Math. J.*

[S] J. A. Serret, Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure. *J. Math. Pures Appl.* **16** (1851), 193–207.

群作用のある距離空間の自由積

東京都立大学大学院　理学研究科　数理科学専攻
松家拓稔 (Takumi MATSUKA)

概要

我々は群 G および H が距離空間 X および Y に幾何学的に作用するとき, 距離空間の自由積とみなせるものを定義した. この空間に対し群の自由積 $G * H$ は幾何学的に作用する. さらに粗凸空間との関係を調べ, 距離空間 X および Y が粗凸であるならば, 自由積 $X * Y$ も粗凸であるという結果を得た. このとき $X * Y$ において粗バウム・コンヌ予想が成立する. 本講演は現在進行中の深谷友宏氏 (東京都立大学) との共同研究に基づきます.

1　導入

粗幾何学とは多様体とは限らない空間を扱う幾何学の一種である. **粗同値**と呼ばれる, 等長同型を大きく弱めた同値関係により距離空間を同一視する. 粗幾何学は**幾何学的群論**という分野に動機付けされ発達した. 幾何学的群論とは群という代数的な対象を, その群が作用する距離空間を通して幾何学的に考察する分野である. その嚆矢はデーンによる「語の問題」の研究にある. すなわち有限生成群 G に対して, その生成元による語として書かれた任意の 2 つの元が等しいかどうかを決定するアルゴリズムを与えよという問題である. デーンは曲面の基本群に対し「語の問題」を肯定的に解決した. その際に曲面の基本群が双曲平面に「良い」作用をすることに注目し, 「語の問題」を双曲平面の幾何学的な性質を調べることに帰着させた. このように群という代数的な対象をそれが作用する距離空間から幾何学的に考察するという視点は大変有用である. **このような視点においては, 群と空間を同一視し考察するが, この同一視の適切な基準を与えるのが粗幾何学である.**

幾何学的群論の隆盛のきっかけとなったのはグロモフによる「負曲率をもつ」群, **双曲群**の導入である. この双曲群は活発に研究され, 様々な結果が存在する. さらに「非正曲率をもつ」距離空間や群を定義しようという研究も行われている. 深谷友宏氏および尾國新一氏により定義された**粗凸空間**はその 1 つである [1]. 粗凸空間は**非正曲率をもつ単連結完備リーマン多様体の粗幾何学における対応物**とみなせるものである. グロモフ双曲空間はもちろん, 様々な重要な例がある. また粗バウム・コンヌ予想とは「良い」固有距離空間の位相幾何的情報と解析的情報が一致するとのべる, 非可換幾何学においても重要な予想である. 深谷友宏氏と尾國新一氏は距離が固有である粗凸空間において粗バウム・コンヌ予想が成り立つことを示した [1, Theorem 1.3].

我々は群の自由積を幾何学群論的視点より考察した. 群 G および H が距離空間 X および Y に幾何学的に作用するとき, X と Y の自由積とみなせるものが定義される. この空間に対し群の自由積 $G * H$ は幾何学的に作用する. 我々は粗凸空間との関係を調べ, 距離空間 X および Y が粗凸であるならば, 自由積 $X * Y$ も粗凸であるという結果を得た. このとき距離空間 $X * Y$ において粗バウム・

コンヌ予想が成り立つ. 粗幾何学全般および粗凸空間のすぐれた解説として, 深谷友宏氏のモノグラフ [7] をあげる. また洋書としては [3] をあげる.

2 粗同値とシュバルツ, ミルナーの定理

粗同値の定義を述べる. また群とその群が作用する距離空間を同一視する上で粗同値が適切な同値関係であることをしめす定理を紹介する.

Definition 1 (粗同値)**.** (X, d_X) および (Y, d_Y) を距離空間とする. 次の 2 条件を満たす写像 $f : X \to Y$ が存在するとき X と Y は**粗同値**であるという.

(1) 発散する非減少関数 $\rho_-, \rho_+ : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が存在し, 任意の $x, x' \in X$ に対して

$$\rho_-(d_X(x, x')) \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq \rho_+(d_X(x, x'))$$

を満たす. 写像 f を**粗埋め込み写像**という. 距離空間 X から Y に粗埋め込み写像 $f : X \to Y$ が存在するとき, X は Y に**粗埋め込み可能**であるという.

(2) 定数 $C > 0$ が存在し, 任意の $y \in Y$ に対して $x \in X$ が存在して $d_Y(y, f(x)) < C$ を満たす.

この 2 条件を満たす写像 $f : X \to Y$ を粗同値写像という.

条件 (1) において定義中の関数 $\rho_-, \rho_+ : [0, \infty) \to [0, \infty)$ が恒等関数としてとれるならば, 写像 $f : X \to Y$ は等長写像である. 続いてシュバルツ, ミルナーの定理を述べるための準備をする. まず「良い」作用を定義する.

Definition 2 (幾何学的な作用)**.** (X, d_X) を距離空間とし, G は X に等長に作用する群とする.

(1) 任意のコンパクト集合 $B \subset X$ に対し, 集合 $\{g \in G \mid g(B) \cap B \neq \emptyset\}$ が有限集合となるとき, 作用は**固有**であるという.

(2) あるコンパクト集合 $K \subset X$ で, $G(K) = X$ なるものが存在するとき, 作用は**余コンパクト**であるという.

(3) 作用が固有かつ余コンパクトであるとき, 作用は**幾何学的**であるという.

Definition 3 (擬測地線および擬測地空間)**.** (X, d_X) を距離空間とする. 定数 $\lambda \geq 1$ および $k \geq 0$ が存在し, 任意の 2 点 $x, x' \in X$ に対して次の 2 条件を満たす写像 $\gamma : [a, b] \to X$ が存在する.

(1) $\gamma(a) = x$ および $\gamma(b) = x'$ が成り立つ.

(2) 任意の $t, t' \in [a, b]$ に対して,

$$\lambda^{-1}|t - t'| - k \leq d_X(\gamma(t), \gamma(t')) \leq \lambda|t - t'| + k$$

が成り立つ.

このとき, 距離空間 (X, d_X) を**擬測地空間**といい, 写像 $\gamma : [a, b] \to X$ を (λ, k)**-擬測地線**とよぶ.

Definition 4 (固有距離空間)**.** X を距離空間とする. X の任意の有界閉集合がコンパクトであると

き, X の距離は固有であるという. 固有な距離をもつ距離空間を**固有距離空間**という.

シュバルツ, ミルナーの定理は群とその群が作用する距離空間を同一視する上で粗同値が適切な同値関係であることをしめす定理であり, 粗幾何学において重要である.

Theorem 1 (シュバルツ, ミルナーの定理)**.** X を固有な距離をもつ擬測地空間とし, X に群 G が幾何学的に作用しているとする. このとき, 次が成り立つ.

(1) G は有限生成である.
(2) 任意の点 $x_O \in X$ の軌道 $G \to X\colon g \mapsto g(x_O)$ は粗同値写像である. すなわち, G と X は粗同値である. ただし, G にはある有限生成系に関する語距離[*1] を入れる.

3 距離空間の自由積

群をそれが作用する空間から幾何学的に調べる幾何学的群論の視点から群の自由積を考察する. 群 G および H を有限生成群とする. そのとき, 群 G が幾何学的に作用する距離空間としてケイリーグラフとよばれるものが自然に考えられる. ゆえに自由積に対してもまたケイリーグラフが定まる.

一方, 群 G と H のケイリーグラフから「機械的に」自由積 $G * H$ が幾何学的に作用するグラフを得る方法もある. Pisanski と Tucker は群 G と H のケイリーグラフの「自由積」を定義し, 自由積 $G * H$ が幾何学的に作用するグラフを得た [5]. 我々はこの方法を一般化し, 幾何学的な群作用をもつ距離空間 X および Y に対し, **距離空間の自由積** $X * Y$ を定義した.

Definition 5 (距離空間の自由積)**.** (X, d_X, e_X) および (Y, d_Y, e_Y) を基点つきの距離空間とする. さらに**群 G, H が X, Y にそれぞれ幾何学的に作用していると仮定する.** この仮定のもとで X と Y の自由積を定義する. まず $X_0^* = \{g(e_X) \mid g \in G\} \setminus \{e_X\}$ また $Y_0^* = \{h(e_Y) \mid h \in H\} \setminus \{e_Y\}$ と定める. このとき **X と Y の自由積** $X * Y$ を

$$\begin{aligned} X * Y :=& \{x_0 y_0 x_1 y_1 \cdots z \mid x_i \in X_0^*, y_j \in Y_0^*, z \in X \cup Y\} \\ & \bigcup \{e_X y_0 x_1 y_1 \cdots z \mid x_i \in X_0^*, y_j \in Y_0^*, z \in X \cup Y\} \end{aligned}$$

以上のように X_0^* と Y_0^* の元を文字として交互に並べ, 最後の文字のみ X または Y の元がならぶ語の集合として定義する. また空語を ϵ とする.

自由積 $X * Y$ を形式的に定義したが, 幾何学的に考察するため各元を空間の点とみなしたい. そこで自由積 $X * Y$ の幾何学的実現を定義する.

Definition 6 (幾何学的実現)**.** 上述の設定のもとで Y_0^* の元で終わる語を

$$W^X = \{\tilde{x} y_0 x_1 y_1 \cdots x_k y_k \mid \tilde{x} \in G(e_X), x_i \in X_0^*, y_j \in Y_0^*\}$$

とし, $G(e_X)$ の元で終わる語を

$$W^Y = \{\tilde{x} y_0 x_1 y_1 \cdots x_{l-1} y_{l-1} x_l \mid \tilde{x} \in G(e_X), x_i \in X_0^*, y_j \in Y_0^*\}$$

[*1] 語距離とは有限生成群に対し純粋に代数的な操作のみで定まる距離である.

とする[*2]. 空間 $|X*Y|$ を以下のように構成される空間とし, 自由積 $X*Y$ の**幾何学的実現**とよぶ.

- 面: $\{\omega\}\times X$ および $\{\tau\}\times Y$ より成る. ただし $\omega\in\{\epsilon\}\cup W^X$, $\tau\in W^Y$ とする.
- 面の点を以下のように同一視する.
  (1) 任意の $x\in G(e_X)$ に対して, $(\epsilon,x)\in\{\epsilon\}\times X$ と $(x,e_Y)\in\{x\}\times Y$ を同一視する.
  (2) 任意の $\omega\in W^X$ と任意の $x\in X_0^*$ に対して, $(\omega,x)\in\{\omega\}\times X$ と $(\omega x,e_Y)\in\{\omega x\}\times Y$ を同一視する.
  (3) 任意の $\tau\in W^Y$ と任意の $y\in Y_0^*$ に対して, $(\tau,y)\in\{\tau\}\times Y$ と $(\tau y,e_X)\in\{\tau y\}\times X$ を同一視する.

自由積の元 $\omega=x_0y_0x_1y_1\cdots x_ny_nx$ は $|X*Y|$ の元 $(x_0y_0x_1y_1\cdots x_ny_n,x)$ と対応する. このようにして自由積 $X*Y$ とその幾何学的実現 $|X*Y|$ を同一視する.

また幾何学的実現 $|X*Y|$ には, その構造から距離 d_* が自然に定まる. いま $\omega,\omega'\in|X*Y|$ が共通語 u をもち, $\omega=ux_0y_0\cdots x_ny_nx$ および $\omega'=ux_0'y_0'\cdots x_m'y_m'x'$ と表せるものとする. このとき d_* を

$$\begin{aligned}d_*(\omega,\omega'):=&d_X(x_0,x_0')\\&+\sum_{i=1}^{n}d_X(e_X,x_i)+\sum_{i=0}^{n}d_Y(e_Y,y_i)+\sum_{j=1}^{m}d_X(e_X,x_j')+\sum_{j=0}^{m}d_Y(e_Y,y_j')\\&+d_X(e_X,x)+d_X(e_X,x')\end{aligned}$$

と定義する. 関数 d_* は幾何学的実現 $|X*Y|$ の距離である.

Remark 1. 距離空間 $(|X*Y|,d_*)$ に対し群の自由積 $G*H$ の作用を次のように定める. まず作用する元の語尾と作用される点の語頭が異なる場合, たとえば $g_0h_0g_1h_1\in G*H$ が $x_0y_0x_1y_1x\in|X*Y|$ に作用する場合は

$$g_0h_0g_1h_1\cdot x_0y_0x_1y_1x:=g_0(e_X)h_0(e_Y)g_1(e_X)h_1(e_Y)x_0y_0x_1y_1x$$

と定義する. また作用する元の語尾と作用される点の語頭が同じ場合, たとえば $g_0h_0g_1\in G*H$ が $x_0y_0x_1y_1x\in|X*Y|$ に作用する場合を考える. ただし, $x_0=g(e_X)$ とする. このとき

$$g_0h_0g_1\cdot x_0y_0x_1y_1x:=g_0(e_X)h_0(e_Y)g_1g(e_X)y_0x_1y_1x$$

と定義する. この作用は群 G および H が距離空間 X および Y に幾何学的に作用するという仮定のもとで, 幾何学的である. よって, シュバルツ, ミルナーの定理から群の自由積 $G*H$ と距離空間の自由積 $X*Y$ は粗同値である.

[*2] X_0^* 以外の元で終わる語であると強調するため, W^X という記法を用いている. 3 つ以上の距離空間の自由積を考える際にこの記法は有用である.

4 粗凸空間と粗バウム・コンヌ予想

本節の詳細な解説として [7, 第 6 章, 第 8 章] を参考にされたい. 深谷友宏氏と尾國新一氏は粗凸空間とよばれる距離空間のクラスを導入した [1]. これは非正曲率をもつ単連結完備リーマン多様体の粗幾何学における対応物とみなせるものである. 以下のような重要な例がある.

(1) ブーゼマン非正曲率空間.
(2) 有限次元シストーリック複体 [4].
(3) Hierarchically hyperbolic spaces [2].

さらに, 粗凸空間の成す距離空間のクラスは粗同値に関して閉じている. すなわち, 擬測地空間 X および Y が粗同値であり, X が粗凸空間ならば Y も粗凸空間である. また直積に関しても閉じている. 粗凸空間は距離空間に対して, 性質の良い擬測地線の族の存在を仮定し定義される.

Definition 7 (粗凸空間)**.** (X, d_X) を距離空間とする. $\lambda \geq 1, k \geq 0, E \geq 1$ および $C \geq 0$ を定数とする. また, $\theta : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を非減少関数とする. そして $\mathcal{L}$ を (λ, k)-擬測地線分の族とする. 以下の条件が成り立つとき, X は $(\lambda, k, E, C, \theta, \mathcal{L})$-**粗凸**であるという.

(CC1) 2 点 $v, w \in X$ に対し, 閉区間 $[0, a]$ 上で定義された擬測地線分 $\gamma \in \mathcal{L}$ で $\gamma(0) = v$ および $\gamma(a) = w$ を満たすものが存在する.

(CC2) 2 つの擬測地線分 $\gamma : [0, a] \to X$ および $\eta : [0, b] \to X$ が $\gamma, \eta \in \mathcal{L}$ を満たせば, 任意の $t \in [0, a], s \in [0, b]$, および $c \in [0, 1]$ に対し, 次の不等式が成り立つ.

$$d_X(\gamma(ct), \eta(cs)) \leq (1 - c)Ed_X(\gamma(0), \eta(0)) + cEd_X(\gamma(t), \eta(s)) + C.$$

(CC3) 2 つの擬測地線分 $\gamma : [0, a] \to X$ および $\eta : [0, b] \to X$ が $\gamma, \eta \in \mathcal{L}$ を満たせば, 任意の $t \in [0, a], s \in [0, b]$ に対し, 次の不等式が成り立つ.

$$|t - s| \leq \theta(d_X(\gamma(0), \eta(0)) + d_X(\gamma(t), \eta(s))).$$

条件 (CC1), (CC2) および (CC3) を満たす族 $\mathcal{L}$ を**良い擬測地線分の族**といい, 元 $\gamma \in \mathcal{L}$ を**良い擬測地線分**という. 特に族 $\mathcal{L}$ が測地線分から成るとき, X を**測地的粗凸**であるという.

粗バウム・コンヌ予想とは性質の良い固有距離空間においてはその粗 K ホモロジーとロー代数の K 群が一致すると主張するものである. この予想は「良い」固有距離空間においてはその位相幾何的情報と解析的情報が一致するとのべる, 非可換幾何学においても重要な予想である. 深谷友宏氏と尾國新一氏は距離が固有である粗凸空間において粗バウム・コンヌ予想が成り立つことを示した [1, Theorem 1.3]. そして我々は距離空間の自由積と粗凸空間の関係について次を示した.

Theorem 2 (Fukaya-M)**.** 幾何学的な群作用のある固有距離空間 X および Y が測地的粗凸空間であるとする. このとき自由積 $X * Y$ は固有距離空間であり測地的粗凸空間である.

先述の [1, Theorem 1.3] により, 幾何学的な群作用のある固有距離空間 X および Y が測地的粗凸空間であるとき, 自由積 $X * Y$ において粗バウム・コンヌ予想が成り立つ. またこのとき, 群の自由

積 $G*H$ が $X*Y$ に幾何学的に作用することから群の自由積 $G*H$ においても粗バウム・コンヌ予想が成り立つ.

一方, 固有距離空間 X および Y が有界幾何学をもち, ヒルベルト空間に粗埋め込み可能であるならば, 自由積 $X*Y$ もまた同じ条件を満たす. このときユーの定理 [6, Theorem 1.1] から自由積 $X*Y$ において粗バウム・コンヌ予想が成り立つ. ただし一般に, 幾何学的な群作用のある測地的粗凸な固有距離空間がヒルベルト空間に粗埋め込み可能とは限らないので, Theorem 2 は包含されない.

参考文献

[1] Tomohiro Fukaya and Shin-ichi Oguni. A coarse Cartan-Hadamard theorem with application to the coarse Baum-Connes conjecture. *J. Topol. Anal.*, Vol. 12, No. 3, pp. 857–895, 2020.

[2] Thomas Haettel, Nima Hoda, and Harry Petyt. Coarse injectivity, hierarchical hyperbolicity, and semihyperbolicity, 2020.

[3] Piotr W. Nowak and Guoliang Yu. *Large scale geometry.* EMS Textb. Math. Zürich: European Mathematical Society (EMS), 2012.

[4] Damian Osajda and Piotr Przytycki. Boundaries of systolic groups. *Geom. Topol.*, Vol. 13, No. 5, pp. 2807–2880, 2009.

[5] Tomaž Pisanski and Thomas W. Tucker. Growth in products of graphs. *Australas. J. Comb.*, Vol. 26, pp. 155–169, 2002.

[6] Guoliang Yu. The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space. *Invent. Math.*, Vol. 139, No. 1, pp. 201–240, 2000.

[7] 深谷友宏. 粗幾何学入門, SGC ライブラリ, 第 152 巻. サイエンス社, 2019.

Virtual Thompson's group

東京大学大学院数理科学研究科 数理科学専攻
高野 暁弘 (Akihiro TAKANO)*

概要

Jones は 2017 年，Thompson 群 F の元から絡み目を構成する方法を提唱し，全ての絡み目が F の元から得られることを示した．本講演では，F を部分群として含む群 VF を新たに定義し，絡み目の一般化である仮想絡み目が，全て VF の元から得られることを紹介する．この研究は，児玉悠弥氏（東京都立大学）との共同研究である．

1 導入

1.1 仮想結び目理論

定義 1.1. **仮想絡み目図式**とは，いくつかの円周の $\mathbb{S}^2(=\mathbb{R}^2\cup\{\infty\})$ へのはめ込みであって，多重点は横断的 2 重点のみで図 1 のいずれかの情報を持つものである．成分数が 1 つの場合は，**仮想結び目図式**とも呼ぶ.

図 1: 実交点（左図）および仮想交点（右図）

定義 1.2. 2 つの仮想絡み目図式が**同値**であるとは，平面上の同位変形と有限回の **generalized Reidemeister move**，すなわち classical Reidemeister move（図 2），virtual Reidemeister move（図 3），および mixed move（図 4）で移りあうときをいう．また，その同値類を**仮想絡み目**という．成分数が 1 つの場合は，**仮想結び目**とも呼ぶ.

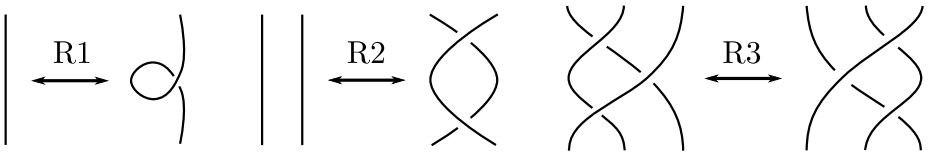


図 2: Classical Reidemeister move

* E-mail: takano@ms.u-tokyo.ac.jp

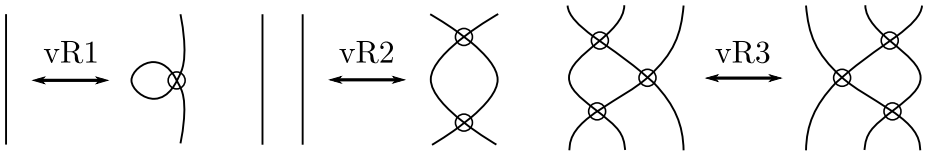


図 3: Virtual Reidemeister move

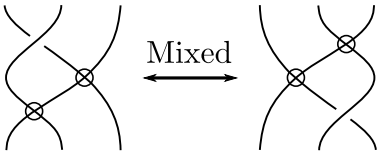


図 4: Mixed move

仮想結び目理論は，Kauffman [7] により導入された，結び目理論の一般化である．古典的な結び目理論が $\mathbb{S}^2 \times [0,1]$ 内の結び目とみなせる一方で，仮想結び目理論は $\Sigma_g \times [0,1]$ 内の結び目とみなすことが出来る．ただし Σ_g は種数 $g \geq 1$ の向きづけ可能閉曲面である．

仮想結び目理論に対しても，古典的な結び目理論の場合と同様に，仮想組み紐という概念を考えることが可能である．組み紐とは，簡単に言うといくつかの紐を垂らして編んだものである．ただし，これらの紐は重力にしたがって常に上から下になっているとする．2 つの組み紐があると，一方の組み紐をもう一方に繋げることで新たな組み紐が得られ，これを演算と思うことで組み紐群が定義できる．また，組み紐の両端を繋げる（**閉包**という）ことで絡み目が得られる．逆に，任意の絡み目はある組み紐の閉包として表すことができることが知られており，これを Alexander の定理という．したがって，組み紐群は結び目理論の群論的な視点を与えていると言える．組み紐を平面に射影し図式として表すことで 2 次元的に扱うことができ，また組み紐の射影図の 2 重点に図 1 のような情報を与えることで，仮想組み紐が定義される．鎌田 [6]，および Kauffman-Lambropoulou [8] は仮想組み紐群を定義し，さらに Alexander の定理を独立に証明した:

定理 1.3 ([6, Proposition 3], [8, Theorem 1])**.** 任意の仮想絡み目は，ある仮想組み紐の閉包として実現される．

1.2 Thompson 群と絡み目

Thompson 群 F とは，Richard Thompson により導入された群でありいくつかの同値な定義がある．群論のみならず，幾何学的群論，ホモトピー論など様々な分野に登場し，また，群論における様々な反例を構成する際に用いられるなど非常に面白い性質を持った群である．そして，2017 年に Jones [5] によって結び目理論にも登場することとなる．Jones は，planar algebra と呼ばれる代数を用いて Thompson 群のユニタリ表現を構成し，その “内積” をとることで絡み目が構成されることを示した．また，その方法を図形的に解釈し，より簡単な絡み目の構成法を定義した．さらに，任意の絡み目が Thompson 群のある元から得られることを示し，具体的にそのアルゴリズムも開発した．これは Thompson 群における Alexander の定理と言うべきものであり，Aiello [1] によって有向絡

み目に対しても同様の定理が成り立つことが示された.

本研究では，Jones の構成を仮想絡み目へと拡張する．すなわち，仮想 Thompson 群 VF と呼ばれる群を定義し，Jones の構成を拡張することで VF の元から仮想絡み目が得られることを示す．さらに，仮想絡み目の場合でも Alexander の定理が成立することをアルゴリズムを具体的に構成して証明する:

定理 1.4 ([10, Theorem 1.1])**.** 任意の仮想絡み目は，仮想 *Thompson* 群 VF のある元から得られる．

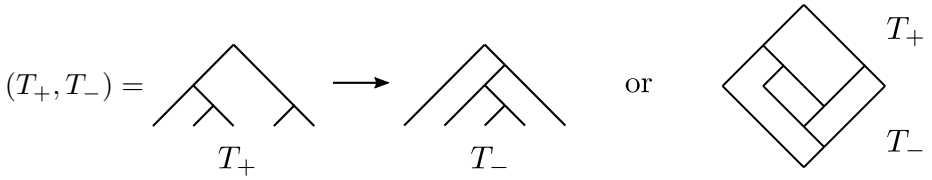
2 Thompson 群 F

2.1 定義

ここでは，Thompson 群 F を 2 分木を用いて定義する．まず，集合 F を

$$F := \left\{ \text{葉の数が同じ根付き 2 分木の組 } (T_+, T_-) \right\} / \sim .$$

とする．2 分木の組 (T_+, T_-) を **tree diagram** といい，



のように表す．また，同値関係 $\sim$ を次のように定義する: 2 つの tree diagram が同値であるとは，葉への有限回の opposing caret ◇ の追加および削除で移りあうときをいう（図 5 参照）．上のような opposing caret がない tree diagram を **reduced tree diagram** といい，F の任意の元はある reduced tree diagram を用いて一意的に表されることが知られている [2].

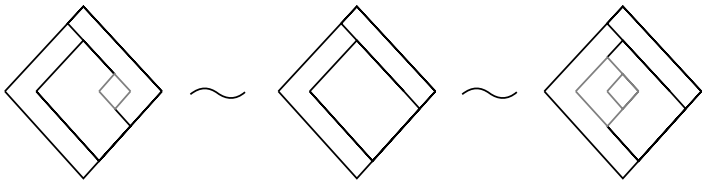


図 5: 同値な tree diagram たち．真ん中の tree diagram は reduced である．

2 つの tree diagram (T_{1+}, T_{1-}) と (T_{2+}, T_{2-}) の積を次で定める: opposing caret の追加および削除により，それぞれと同値な tree diagram $(T'_{1+}, T'_{1-}), (T'_{2+}, T'_{2-})$ であって，T'_{1-} と T'_{2+} が同じ 2 分木となるように変形できる．このとき，積 $(T_{1+}, T_{1-}) \cdot (T_{2+}, T_{2-})$ を (T'_{1+}, T'_{2-}) で定義する．この演算のもと集合 F は群をなし，これを **Thompson 群**という．F の単位元は，任意の 2 分木 T を用いて (T, T) と表され，tree diagram (T_+, T_-) の逆元は (T_-, T_+) で与えられる．

Thompson 群 F は次のような表示を持つことが知られている [2, Theorem 3.1]:

$$\begin{aligned} F &\cong \left\langle x_0, x_1, x_2, \ldots \;\middle|\; x_i^{-1} x_j x_i = x_{j+1} \ (i < j) \right\rangle \\ &\cong \left\langle x_0, x_1 \;\middle|\; [x_0 x_1^{-1}, x_0^{-1} x_1 x_0], [x_0 x_1^{-1}, x_0^{-2} x_1 x_0^2] \right\rangle . \end{aligned}$$

ここで，$[x,y]$ は x と y の交換子を表し，また x_0, x_1 および x_2 は図 6 の tree diagram に対応する．

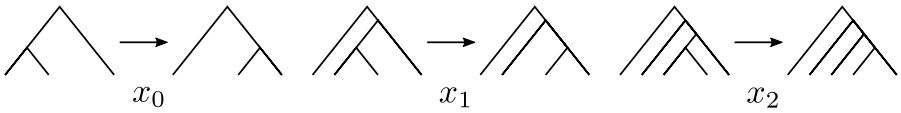


図 6: F の生成元

2.2 絡み目の構成

この節では，Jones [5] により導入された Thompson 群から絡み目を得る図式的な方法を紹介する．(T_+, T_-) を葉の数が $n+1$ の reduced tree diagram とし，各葉を平面上の点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{3}{2}, 0\right), \ldots, \left(\frac{2n+1}{2}, 0\right)$ に置く．

Step 1: Γ-grpah $\Gamma(T_+, T_-)$ の構成

(T_+, T_-) の Γ-graph $\Gamma(T_+, T_-)$ を次の平面グラフとして定義する: $\Gamma(T_+, T_-)$ の頂点は $(0,0), (1,0), \ldots, (n,0)$ に置く．また，$\Gamma(T_+, T_-)$ の辺は T_+ の ╱ のような辺もしくは T_- の ╲ のような辺と 1 度だけ横断的に交わり，それ以外の (T_+, T_-) の辺とは交わらない（図 7 参照）．

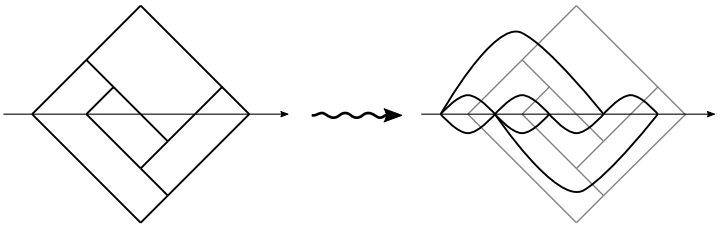


図 7: (T_+, T_-) から得られる平面グラフ $\Gamma(T_+, T_-)$

Step 2: medial graph $M(\Gamma(T_+, T_-))$ の構成

一般に，連結な平面グラフ G に対して，その **medial grpah** $M(G)$ は次のように定義される: $M(G)$ の頂点を G の各辺上に置く．また，G の各領域（非有界なものも含む）に対して，その領域上で G の 2 辺がある G の頂点を共有しているとき，対応する $M(G)$ の頂点を辺で繋ぐ（図 8 参照）．

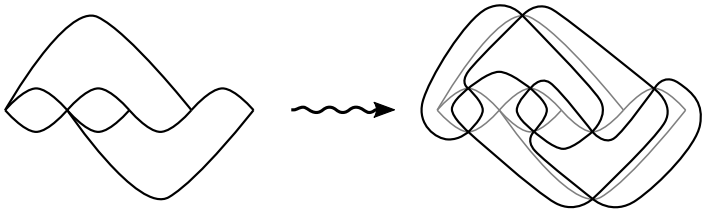


図 8: $\Gamma(T_+, T_-)$ の medial graph $M(\Gamma(T_+, T_-))$

Step 3: 絡み目図式 $\mathcal{L}(T_+, T_-)$ の構成

一般に，medial graph は 4 価頂点，すなわち各頂点は 4 つの辺をもつので，このグラフをある絡み目の射影図と捉えることが出来る．そこで，$M(\Gamma(T_+, T_-))$ の各頂点を次のようなルールで交点に

取り換えることで絡み目図式 $\mathcal{L}(T_+, T_-)$ を得る: 上半平面にある頂点は とし，下半平面にある頂点は とする[*1]（図 9 参照）.

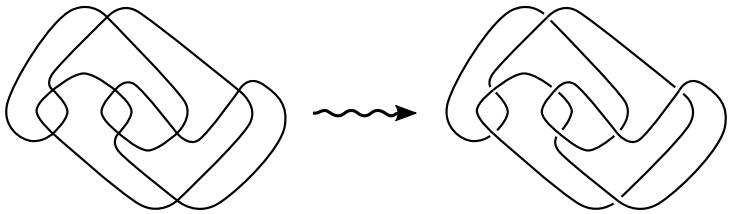


図 9: $M(\Gamma(T_+, T_-))$ から得られる絡み目図式 $\mathcal{L}(T_+, T_-)$

補足 2.1. reduced でない tree diagram に対しても上の構成は適用できるが，一般に reduced tree diagram から得られる絡み目とは異なるものが出来る．具体的には，(T_+, T_-) を reduced tree diagram とし，(T'_+, T'_-) を (T_+, T_-) に opposing caret を 1 つ追加した tree diagram とする（特に，これら 2 つの tree diagram は同値である）．このとき，$\mathcal{L}(T'_+, T'_-) = \mathcal{L}(T_+, T_-) \sqcup \bigcirc$ が成立する．上述の通り，F の元 g の reduced tree diagram は一意に定まる．そこで，g から得られる絡み目を，その reduced tree diagram を用いて構成し，$\mathcal{L}(g)$ と書くこともある．

3 仮想 Thompson 群 VF

Jones の構成は，本質的には 2 分木の一部の辺（T_+ 内の や T_- 内の ）が絡み目の交点に対応しているので，仮想絡み目に拡張するにはこれらの辺に実交点または仮想交点の情報（ラベル）を乗せることが必要になる．そのために，diagram 群と呼ばれる群を導入する．この群は，半群の有限表示およびその生成集合上の語の組から得られる群であり，Thompson 群も diagram 群の一つであることが知られている（詳細は例えば [4] を参照）.

3.1 Diagram 群

半群の有限表示 $\mathcal{P} = \langle \Sigma \mid \mathcal{R} \rangle$ を一つとる．ここで，Σ は生成元の有限集合，$\mathcal{R}$ は関係子の有限集合である．また，関係子 $(u, v) \in \mathcal{R}$ は $u \to v$ と書くこととする．ただし u, v は Σ 上の語である．diagram 群を定義する際は，$\mathcal{R}$ には $u \to u$ という関係子は無いことを仮定する．また，簡単のため $u \to v \in \mathcal{R}$ ならば $v \to u \in \mathcal{R}$ であるとする．

生成集合 Σ 上の語 w を一つ固定する．このとき，集合 $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ を

$$\mathcal{D}(\mathcal{P}, w) := \left\{ \text{有限列 } w = w_1 \to w_2 \to \cdots \to w_{n-1} \to w_n = w \right\} / \sim$$

とする．有限列 $w = w_1 \to w_2 \to \cdots \to w_{n-1} \to w_n = w$ を **diagram** という．ここで，$w_i \to w_{i+1}$ は，「w_i を $\mathcal{R}$ 内のある関係子を用いて w_{i+1} に書き換える」ことを意味する．つまり，w_i および w_{i+1} は，ある語 w', w'' とある関係子 $p_i \to p_{i+1} \in \mathcal{R}$ を用いて $w_i = w'(p_i)w'', w_{i+1} = w'(p_{i+1})w''$ と書け

[*1] 結び目理論（とグラフ理論）を知っている人向けに説明すると，$\Gamma(T_+, T_-)$ は $\mathcal{L}(T_+, T_-)$ の Tait graph である．

る．したがって，diagram とは，「語 w を $\mathcal{R}$ 内の関係子を用いて書き換えを行い，再び w へ戻ってくるまでに得られる語たちの有限列」である．一回の書き換え $w_i = w'(p_i)w'' \to w'(p_{i+1})w'' = w_{i+1}$ またはそれに用いる関係子 $p_i \to p_{i+1}$ を **cell** という．関係 $\sim$ は次の 2 つで生成される同値関係とする:

dipole の消去および挿入 diagram $w = w_1 \to w_2 \to \cdots \to w_{n-1} \to w_n = w$ の一部が，ある関係子 $p \to q$ を用いて

$$\cdots \to w(q)w' \to w(p)w' \to w(q)w' \to \cdots$$

と表せるとき，その部分を $\cdots \to w(p)w' \to \cdots$ に変える．この操作および逆操作を **dipole**[*2]**の消去および削除**という．

分離した cell の可換性 diagram $w = w_1 \to w_2 \to \cdots \to w_{n-1} \to w_n = w$ の一部が，ある関係子 $p_i \to q_i$ $(i = 1, 2)$ を用いて

$$\cdots \to w(p_1)w'p_2w'' \to w(q_1)w'p_2w'' = wq_1w'(p_2)w'' \to wq_1w'(q_2)w'' \to \cdots$$

と表せるとき，その部分を

$$\cdots \to wp_1w'(p_2)w'' \to wp_1w'(q_2)w'' = w(p_1)w'p_2w'' \to w(q_1)w'q_2w'' \to \cdots$$

に変える．つまり，互いに影響しない語の書き換えはどちらが先でも良いという関係である．

2 つの diagram $w = a_1 \to \cdots \to a_n = w$ と $w = b_1 \to \cdots \to b_m = w$ の積を

$$w = a_1 \to \cdots \to a_n = w = b_1 \to \cdots \to b_m = w$$

で定義する．この演算は上述した同値関係の下 well-defined であり，集合 $\mathcal{D}(\mathcal{P}, w)$ 上に群構造を定める．この群を **diagram 群**という．

diagram 群の元はグラフを用いて記述することも出来る．そのために，まずは語をグラフとして表すことを説明する．$w = w_1w_2 \cdots w_n$ を Σ 上の語とする．ここで各 w_i $(1 \leq i \leq n)$ は Σ の元である．このとき，語 w に対して，次のような有向グラフを定義する: 頂点を $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ とし，辺を $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_n, v_{n+1})$ とする．各辺 (v_i, v_{i+1}) にはこの順で向きがついており，w_i というラベルがついているとする．このグラフを語 w の **trivial geometric diagram** という．また，一般に有向グラフの頂点 v に対して，v を終点とする辺（resp. 始点とする辺）を v の **incoming edge**（resp. **outgoing edge**）という．

次に，1 つの cell $p \to q \in \mathcal{R}$ をとり，$p = p_1 \cdots p_n, q = q_1 \cdots q_m$ とする．v_{p_1}（resp. v_{p_n}）を p の trivial geometric diagram の頂点であって p_1（resp. p_n）のラベルが付いた辺を outgoing edge（resp. incoming edge）として持つものとする．同様にして，v_{q_1}, v_{q_m} を定義する．p と q の trivial geometric diagram を，v_{p_1}, v_{p_n} をそれぞれ v_{q_1}, v_{q_m} に貼り合わせて得られるグラフを **geometric** (p, q)**-cell** という．

最後に，一般の diagram $w = w_1 \to w_2 \to \cdots \to w_{n-1} \to w_n = w$ に対して，次のように有向グラフを構成する: まず，cell $w_1 = w'(p_1)w'' \to w'(p_2)w'' = w_2$ に対して，w_1 の trivial geometric

[*2] dipole（双極子）とは大きさが等しい正負の単極子（電荷など）の対を少し離れた位置に置いたものである．例えば電荷を置いた時に発生する電気力線の様子と，後述する図を用いた diagram の説明の中での dipole の様子が似ていることが分かると思う．

diagram の p_1 に対応する部分グラフに沿って geometric (p_1, p_2)-cell を貼り合わせたグラフを考える．つまり，このグラフは w_1 と w_2 の trivial geometric diagram を w' と w'' に対応する部分で貼り合わせたものになっている．次に，cell $w_2 \to w_3$ に対して，先ほど構成した $w_1 \to w_2$ に対するグラフの w_2 に対応する trivial geometric diagram に上と同様の方法で geometric (p_2, p_3)-cell を貼り合わせたグラフを考える．この操作を diagram の最後の cell まで繰り返して得られたグラフを w の **geometric diagram** という．

以上の構成により，diagram と geometric diagram を同一視し，diagram の同値関係と同様に，geometric diagram 全体の集合上にも同値関係を定義する．消去出来る dipole を持たない (geometric) diagram を，**reduced (geometric) diagram** といい，diagram 群の各元（同値類）は，ただ一つの reduced geometric diagram を持つことが知られている [9].

例 3.1. 半群の有限表示 $\mathcal{P} = \langle a, b \mid a \to ab, b \to aa, a \to aa \rangle$ および語 $w = a$ を考える．図 10 はこの表示に対する trivial geometric diagram や geometric cell の例である．また，次のような diagram を考える:

$$(a) \to (ab) = a(b) \to a(aa) \to a(a) = (aa) \to (a).$$

このとき，対応する geometric diagram は図 11 のようになる．

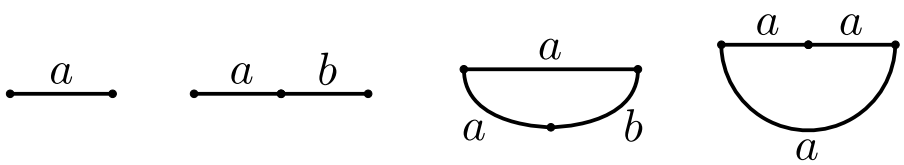


図 10: a と ab の trivial geometric diagram，および geometric (a, ab)-cell と (aa, a)-cell

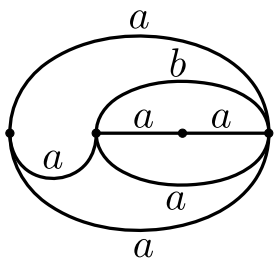


図 11: 例 3.1 の diagram に対応する geometric diagram

例 3.2. 半群の有限表示 $\mathcal{P}_F = \langle x \mid x \to xx \rangle$ を考える．このとき，diagram 群 $\mathcal{D}(\mathcal{P}_F, x)$ は Thompson 群 F と同型である．$\mathcal{D}(\mathcal{P}_F, x)$ の geometric diagram と F の tree diagram の対応は次のように得られる: reduced geometric diagram を考える（生成元は 1 つだけなので辺のラベルは省略する）．各 (a, aa)-cell および (aa, a)-cell に対して，図 12 の上図のように tree を対応させる．ここで，語 a に対応する tree の頂点を根とみなし，aa に対応する 2 つの頂点は葉とみなす．そして，それらの tree を繋げていくことで図 12 の下図のように reduced tree diagram を得る．ここで，T_+ と T_- の

境目は diagram 内の長さが最大の語に対応する trivial geometric diagram である．

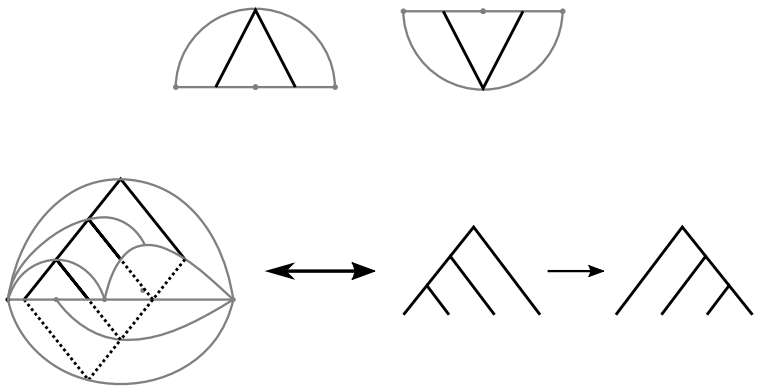


図 12: cell と tree の対応（上図），および geometric diagram と tree diagram の対応（下図）．実線が T_+ で破線が T_- になっている．

定義 3.3. 半群の有限表示 $\mathcal{P}_{VF}$ を次で定義する:

$$\mathcal{P}_{VF} := \left\langle x, v \;\middle|\; \begin{array}{l} x \to xx, x \to xv, x \to vx, x \to vv \\ v \to xx, v \to xv, v \to vx, v \to vv \end{array} \right\rangle.$$

このとき，diagram 群 $\mathcal{D}(\mathcal{P}_{VF}, x)$ を VF と書き，**仮想 Thompson 群**という．

仮想 Thompson 群の代数的な性質はいくつか分かっているが，ここでは省略する．

3.2 仮想絡み目の構成

上述の通り，tree diagram から Jones の方法を真似て仮想絡み目を構成するためには，tree の辺に実交点か仮想交点かの情報を乗せる必要があった．仮想 Thompson 群は diagram 群として定義されたが，図 12 のように geometric diagram を tree diagram に書き換え，そしてラベルを対応する tree の辺に付ける．そして，x のラベルがついている辺には実交点を，v のラベルがついている辺には仮想交点を対応させれば Jones の方法がそのまま使えると思われる．しかし，この過程で Thompson 群では現れなかった別の問題が浮上する．それは，一般には仮想 Thompson 群の元は tree diagram の形では書けないということである．例えば，図 13 のような状況を考えると，Thompson 群の場合はラベルが無いため dipole となっており削除することが出来たが，仮想 Thompson 群では削除出来ず残ることになる．そのため，Jones の構成を別の視点で考える必要がある．Golan-Sapir [3] は，Thompson 群を diagram 群 $\mathcal{D}(\mathcal{P}_F, x)$ として扱い，Jones の構成を geometric diagram の文脈で書き直した．我々は，この方法を仮想 Thompson 群に拡張することでこの問題を解決した．ただし，ここでは詳しい方法は述べない．実は，Alexander の定理を証明する際に，与えられた仮想絡み目を実現するような仮想 Thompson 群の元を実際に構成するのであるが，その元は図 13 のような変な状況は起こらず，tree diagram として書けるようなものなのである．したがって，ここでは Jones の方法をそのまま用いて，仮想絡み目を構成する方法を説明する．

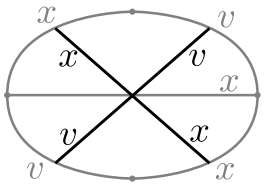


図 13: $xv \to x \to vx$ なので，これは VF において dipole とはならない．

Step 1: ラベル付き tree diagram の構成

仮想 Thompson 群 VF の reduced geometric diagram をとる．ただし，図 13 のような cell は持たないとする．図 12 のように各 cell に対して tree を対応させる．その際，根と葉を繋ぐ辺に，葉の頂点に対応する geometric diagram の辺に乗っているラベルを乗せる．これらを繋げていくことで，ラベル付きの tree diagram が得られる（図 14 参照）．

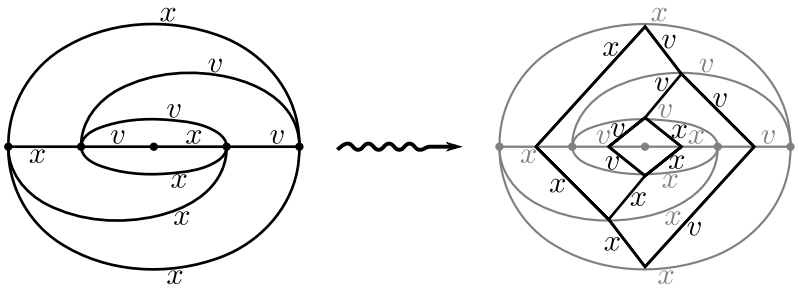


図 14: VF の geometric diagram から得られるラベル付き tree diagram

Step 2: ラベル付き Γ-graph の構成

まず，2.2 節の Step 1 の時と同様にして（ラベル無しの）Γ-graph を構成する．各辺は，tree diagram のただ一つの辺と交わっているので，そのラベルを Γ-graph の辺にも付けることでラベル付き Γ-graph が出来る（図 15 参照）．

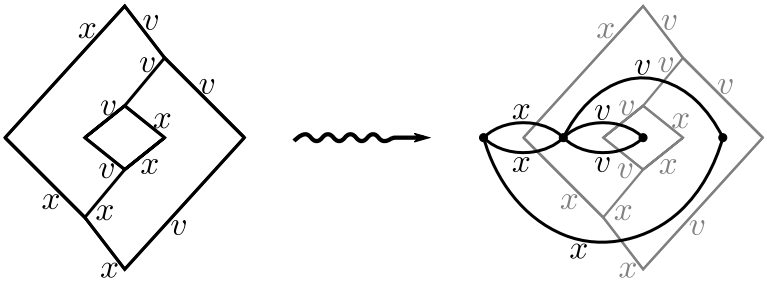
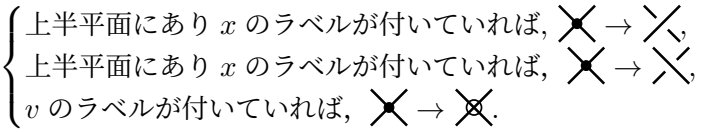


図 15: ラベル付き tree diagram から得られるラベル付き Γ-graph

Step 3: 仮想絡み目図式の構成

2.2 節の Step 2 の時と同様にして medial graph を構成し，各（4 価）頂点に実交点または仮想交

点を次のように割り振る（図 16 参照）：対応する Γ-graph の辺が



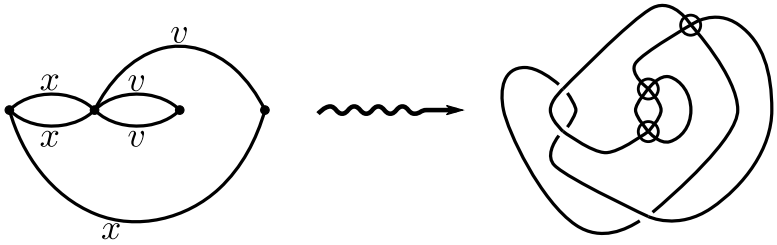


図 16: ラベル付き Γ-graph から得られる仮想絡み目

以上により，（全てではないが）仮想 Thompson 群の元から仮想絡み目が構成された．

3.3 Alexander の定理

最後に，Alexander の定理（定理 1.4）の証明の概要を述べる．簡単に言えば，Jones の構成を逆にたどるのである．最も本質的な部分は，（仮想）Thompson 群の（ラベル付き）Γ-graph となるような連結平面グラフを特徴づけることである．古典的な場合は Jones [5] によって示されており，与えられた絡み目の Tait graph を条件を満たすように Reidemeister move を使って変形することが，いわゆるアルゴリズムにあたるところである．仮想絡み目の場合も同様の条件を構成することで，Jones の証明と同じ流れをたどることが出来る．実は，アルゴリズムに必要な Reidemeister move は R1 と R2 のみであるので，welded 絡み目や特異絡み目に対しても同様の結果が成り立つ．

参考文献

[1] V. Aiello, *On the Alexander Theorem for the oriented Thompson group F*, Algebraic & Geometric Topology **20** (2020), no. 1, 429–438.

[2] J. W. Cannon, W. J. Floyd, and W. R. Parry, *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, Enseign. Math. (2) **42** (1996), no. 3-4, 215–256.

[3] G. Golan and M. V. Sapir, *On Jones' subgroup of R. Thompson group F*, Journal of Algebra **470** (2017), 122–159.

[4] V. S. Guba and M. V. Sapir, *Diagram groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **130** (1997), no. 620, viii+117.

[5] V. Jones, *Some unitary representations of Thompson's groups F and T*, J. Comb. Algebra **1** (2017), no. 1, 1–44.

[6] S. Kamada, *Braid presentation of virtual knots and welded knots*, Osaka J. Math. **44** (2007), no. 2, 441–458.

[7] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, European J. Combin. **20** (1999), no. 7, 663–690.

[8] L. H. Kauffman and S. Lambropoulou, *Virtual braids*, Fund. Math. **184** (2004), 159–186.

[9] V. Kilibarda, *On the algebra of semigroup diagrams*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1994. Thesis (Ph.D.)–The University of Nebraska - Lincoln.

[10] Y. Kodama and A. Takano, *Virtual Thompson's group*, arXiv:2210.15990 (2022). preprint.

A generalization of the Lodha–Moore group

東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻
児玉悠弥 (Yuya KODAMA)

概要

幾何学的群論における主要な研究対象に, Thompson 群 F と呼ばれる有限表示無限群がある. F が従順群であるかどうかは未だ未解決であるが, 近年 F によく似た非従順群が提案された. 本稿では, 筆者により導入された, この群を一般化したクラスについて概説する.

1 導入

1965 年に, Richard Thompson によって F, T, V という 3 つの群が定義された. これらの群は, ある種の有限性を持ちながらも多くの不思議な性質を持つ群で, 現在でも様々な手法を用いて研究されている. この中でも F は, "自由群を含まない非従順群" の例として期待されていた. 自由群を含まないことはすでに知られているが, その従順性は現在でも未解決である.

F の従順性に関する研究から, 近年 Lodha–Moore 群 G_0 と呼ばれる, F によく似た群が導入された [3]. G_0 は F と代数的に似た性質を持ち, さらに非従順な群である. F の生態をさらに明らかにするために, また, G_0 と F の "違い" を明らかにするために, G_0 のさらなる研究が不可欠である.

筆者は文献 [2] において, G_0 の性質をより深く理解するために, $G_0(2) = G_0$ を満たす群のクラス $\{G_0(n)\}_{n\geq 2}$ を導入した. また, 次が成り立つことを証明した.

Theorem 1.1 ([2]) n, m を 2 以上の自然数とする. このとき,

1. $G_0(n)$ の各元には一意なノーマルフォームが存在する.
2. $G_0(n)$ は有限表示群である.
3. $G_0(n)$ は非従順である.
4. $G_0(n)$ は自由群 F_2 を部分群として含まない.
5. $G_0(n)$ にはねじれ元が存在しない.
6. $G_0(n)$, $G_0(m)$ が同型であることと, $n = m$ であることは同値である.
7. $G_0(n)$ の交換子部分群は単純である.
8. $G_0(n)$ の中心は自明である.

この定理における特筆すべき点は, 自由群を部分群として含まない点である. 本稿では紙面の都合上詳細な証明を述べないが, $G_0(n)$ は G_0 や F を部分群として含む群であることが知られている. G_0 や F は自由群を部分群として含まないが, この事実は一般には $G_0(n)$ の部分群の判定に用いることはできず, 従って, 新たな証明を与える必要がある.

本稿では, 従順群, Thompson 群 F, Lodha–Moore 群 G_0, そしてそれを一般化した群 $G_0(n)$ の定義をそれぞれ説明する.

2 従順群

従順性の概念は, Hausdorff–Banach–Tarski のパラドックスの本質的な性質を取り出すために, von Neumann によって導入された. 以下で述べるように, 有限群や可換群はすべて従順群である. また, 従順性はいくつかの操作に関して閉じている, 非常に振る舞いの良い性質であることが知られている.

以下では簡単のため, G を有限生成群とする. 群が従順であることの定義は多く存在するが, ここでは次の定義を用いる.

Definition 2.1 群 G が**従順**であるとは, 次の条件を満たす写像 $\mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ が存在することをいう.

1. 任意の $g \in G$ と任意の G の部分集合 A に対して, $\mu(gA) = \mu(A)$.
2. $\mu(G) = 1$.
3. G の部分集合 A, B が交わらないとき, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Proposition 2.2 次が成り立つ.

1. 有限群は従順である.
2. 可換群は従順である.
3. ランク 2 の自由群 F_2 は非従順である.
4. 従順群の部分群は従順である.
5. 従順性は擬等長不変量[*1]である.

特に, もし G が F_2 を部分群として含めば, G も非従順であることがわかる. その逆を問うたのが von Neumann–Day である.

Question 2.3 (von Neumann–Day problem) 任意の非従順群は, 自由群を部分群に含むか？

今日では, この主張は一般には成り立たないことが知られている. 一番初めに見つけられた反例は [4], 有限表示群 (ねじれ元あり) での初めての例は [5], そして有限表示でねじれのない初めての例が Lodha–Moore 群 G_0[3] である. また, 有限生成ではないが, Monod の群 H も F_2 を含まない非従順群の一例として知られている. G_0 は H の部分群であることが知られており[*2], G_0 が F_2 を含まないことはこの事実から導かれる[*3].

[*1] 本稿では定義を述べないが, 群を幾何学的な側面から調べる際の適切な枠組みのひとつが, 擬等長同型によって定まる同値関係による同一視である.

[*2] 実際には G_0 を H の部分群として定義した後に, それと同型な群として本稿で述べる定義が導入される.

[*3] 3 以上の n に対して, $G_0(n)$ が H の部分群であるかは未解決の問題である. 従って, 現時点では H を用いて $G_0(n) \not\succ F_2$ を示すことはできない.

3 Thompson 群 F と Lodha–Moore 群

Thompson 群 F とは, Richard Thompson が 1965 年に初めて導入したことが知られている無限群である．通常は閉区間 $[0,1]$ 上の区分線形写像のなす群の部分群として定義されるが, ここでは Cantor 空間上の同相群の部分群として定める．

2 点集合 $\{0,1\}$ に離散位相を入れ, その可算無限直積空間を $2^{\mathbb{N}} := \prod_{i\in\mathbb{N}}\{0,1\}$ とする．このとき各元は, 0 と 1 からなる無限列で表される．また, 閉区間を 3 等分し, その “真ん中” を取り除く操作を繰り返すことで得られる (よく知られた)Cantor 集合と $2^{\mathbb{N}}$ は同相である．

Definition 3.1 Thompson 群 F とは, 次の $2^{\mathbb{N}}$ 上の同相写像が生成する群である．

$$x_0(\zeta) = \begin{cases} 0\eta & \zeta = 00\eta \\ 10\eta & \zeta = 01\eta \\ 11\eta & \zeta = 1\eta, \end{cases} \qquad x_1(\zeta) = \begin{cases} 0\eta & \zeta = 0\eta \\ 10\eta & \zeta = 100\eta \\ 110\eta & \zeta = 101\eta \\ 111\eta & \zeta = 11\eta. \end{cases}$$

ただし, 演算は写像の合成で定める．

Thompson 群の基本的な性質については, 例えば [1] を参照していただきたい．

Lodha–Moore 群 G_0 とは, $2^{\mathbb{N}}$ 上の同相写像からなる群の部分群で, F を含むものである．その定義を述べる前に, $2^{\mathbb{N}}$ 上の “特別な同相写像 y” を定義する．

Definition 3.2 次のルールに従って帰納的に定義される同相写像を y という．

$$\begin{aligned} &y : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}} && y^{-1} : 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}} \\ &y(00\zeta) = 0y(\zeta) && y^{-1}(0\zeta) = 00y^{-1}(\zeta) \\ &y(01\zeta) = 10y^{-1}(\zeta) && y^{-1}(10\zeta) = 01y(\zeta) \\ &y(1\zeta) = 11y(\zeta), && y^{-1}(11\zeta) = 1y^{-1}(\zeta). \end{aligned}$$

Definition 3.3 Lodha–Moore 群 G_0 とは, x_0, x_1 と次の $2^{\mathbb{N}}$ 上の同相写像が生成する群である．

$$y_{10}(\zeta) = \begin{cases} 10y(\eta), & \zeta = 10\eta \\ \zeta, & \text{otherwise} \end{cases}$$

定義から明らかに, F は G_0 の部分群である．また, G_0 は F の部分群になりえないことも知られている．

4 一般化 Lodha–Moore 群

あまり一般的な記法ではないが, $\boldsymbol{N} := \{0,1,\ldots,n-1\}$ とし, n 進 Cantor 空間を通常の Cantor 空間 $2^{\mathbb{N}}$ と同様に定め, $\boldsymbol{N}^{\mathbb{N}}$ と表すことにする．以下で定める一般化 Lodha–Moore 群 $G_0(n)$ とは, $\boldsymbol{N}^{\mathbb{N}}$ 上の同相写像からなる群の部分群である．なお, n 進 Cantor 空間 $\boldsymbol{N}^{\mathbb{N}}$ と $2^{\mathbb{N}}$ は同相であるが, この事実はあまり重要ではない．

まずは, F を一般化した群 $F(n)$ を定義する. この群は現在でも統一的な呼称が定まっていないが, 本稿ではこの群を明示的に導入した Brown の名前を用いて, Brown–Thompson 群と呼ぶことにする.

Definition 4.1 次の n 個の元が生成する, $\boldsymbol{N}^{\mathbb{N}}$ 上の同相写像からなる群を **Brown–Thompson 群** $F(n)$ という.

$$x_0(\zeta) = \begin{cases} 0\eta & (\zeta = 00\eta) \\ 1\eta & (\zeta = 01\eta) \\ & \vdots \\ (n-2)\eta & (\zeta = 0(n-2)\eta) \\ (n-1)0\eta & (\zeta = 0(n-1)\eta) \\ (n-1)1\eta & (\zeta = 1\eta) \\ & \vdots \\ (n-1)(n-1)\eta & (\zeta = (n-1)\eta), \end{cases}$$

$$x_1(\zeta) = \begin{cases} 0\eta & (\zeta = 0\eta) \\ 1\eta & (\zeta = 10\eta) \\ 2\eta & (\zeta = 11\eta) \\ & \vdots \\ (n-2)\eta & (\zeta = 1(n-3)\eta) \\ (n-1)0\eta & (\zeta = 1(n-2)\eta) \\ (n-1)1\eta & (\zeta = 1(n-1)\eta) \\ (n-1)2\eta & (\zeta = 2\eta) \\ & \vdots \\ (n-1)(n-1)\eta & (\zeta = (n-1)\eta), \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-2}(\zeta) = \begin{cases} 0\eta & (\zeta = 0\eta) \\ & \vdots \\ (n-3)\eta & (\zeta = (n-3)\eta) \\ (n-2)\eta & (\zeta = (n-2)0\eta) \\ (n-1)0\eta & (\zeta = (n-2)1\eta) \\ & \vdots \\ (n-1)(n-2)\eta & (\zeta = (n-2)(n-1)\eta) \\ (n-1)(n-1)\eta & (\zeta = (n-1)\eta), \end{cases}$$

and

$$x_{0[(n-1)]}(\zeta) = \begin{cases} (n-1)x_0(\eta) & (\zeta = (n-1)\eta) \\ \zeta & (\zeta \neq (n-1)\eta). \end{cases}$$

定義から明らかに, $F(2) = F$ が成り立つ.

G_0 のときと同様に, まず $\boldsymbol{N}^{\mathbb{N}}$ 上の "特別な同相写像" を定義する. n に依存して定まる写像ではあるが, 簡単のため, 同じ y を用いて表す.

Definition 4.2 次のルールに従って機能的に定義される同相写像を y という.

$$
\begin{aligned}
y &: \boldsymbol{N}^{\mathbb{N}} \to \boldsymbol{N}^{\mathbb{N}} & y^{-1} &: \boldsymbol{N}^{\mathbb{N}} \to \boldsymbol{N}^{\mathbb{N}} \\
y(00\zeta) &= 0y(\zeta) & y^{-1}(0\zeta) &= 00y^{-1}(\zeta) \\
y(01\zeta) &= 1\zeta & y^{-1}(1\zeta) &= 01\zeta \\
&\vdots & &\vdots \\
y(0(n-2)\zeta) &= (n-2)\zeta & y^{-1}((n-2)\zeta) &= 0(n-2)\zeta \\
y(0(n-1)\zeta) &= (n-1)0y^{-1}(\zeta) & y^{-1}((n-1)0\zeta) &= 0(n-1)y(\zeta) \\
y(1\zeta) &= (n-1)1\zeta & y^{-1}((n-1)1\zeta) &= 1\zeta \\
&\vdots & &\vdots \\
y((n-2)\zeta) &= (n-1)(n-2)\zeta & y^{-1}((n-1)(n-2)\zeta) &= (n-2)\zeta \\
y((n-1)\zeta) &= (n-1)(n-1)y(\zeta) & y^{-1}((n-1)(n-1)\zeta) &= (n-1)y^{-1}(\zeta)
\end{aligned}
$$

$n=2$ のときとの重要な違いは, $0, n-1$ 以外の文字が存在したとき, y が "消える" ことである.

Definition 4.3 一般化 Lodha–Moore 群 $G_0(n)$ とは, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{0[(n-1)]}$ と次の $\boldsymbol{N}^{\mathbb{N}}$ 上の同相写像が生成する群である.

$$
y_{(n-1)0}(\zeta) = \begin{cases} (n-1)0y(\eta), & \zeta = (n-1)0\eta \\ \zeta, & \text{otherwise} \end{cases}
$$

定義から明らかに, $F(n)$ は $G_0(n)$ の部分群である. また, $x_0 \mapsto x_0$, $x_1 \mapsto x_{0[(n-1)]}$, $y_{10} \mapsto y_{(n-1)0}$ と定めることで, G_0 も $G_0(n)$ に埋め込むことができる. 従って, G_0 の非従順性から $G_0(n)$ の非従順性が従う.

参考文献

[1] J. W Cannon, W. J Floyd, and W. R Parry, *Introductory notes on Richard Thompson's groups*, Enseignement Mathématique **42** (1996), 215–256.

[2] Y. Kodama, *A generalization of the Lodha–Moore group*, arXiv preprint arXiv:2204.08230 (2022).

[3] Y. Lodha and J. T. Moore, *A nonamenable finitely presented group of piecewise projective homeomorphisms*, Groups, Geometry, and Dynamics **10** (2016), no. 1, 177–200.

[4] A. Y. Ol'shanskii, *On the question of the existence of an invariant mean on a group*, Uspekhi Mat. Nauk **35** (1980), no. 4(214), 199–200.

[5] A. Y. Ol'shanskii and M. V Sapir, *Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups*, Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques **96** (2003), no. 1, 43–169.

Bonnet–Myers Type Theorems via m-Bakry–Émery Ricci Curvature with ε-range*

山口大学 理学部 数理科学科
只野 誉（Homare TADANO）†

概要

リーマン幾何学において最も重要な研究対象のひとつはリーマン多様体の曲率と位相の関係を明らかにすることである．本稿では完備リーマン多様体がコンパクトになるための古典的な十分条件を幾つか紹介し, 筆者によるそれらの一般化を紹介する．本稿は第 18 回数学総合若手研究集会テクニカルレポートで筆者が述べた内容を拡張したものである．興味がある読者の方々はそちらもご覧戴ければ幸いである．

1 導入

本稿を通して $n \geqslant 2$ を自然数とし, (M, g) を n 次元の完備リーマン多様体とする．リーマン幾何学において最も自然かつ重要な問題のひとつはリーマン計量から定まる曲率が多様体に及ぼす幾何学的性質を解き明かすことである．リーマン計量から定まる曲率には主にリーマン曲率, リッチ曲率, スカラー曲率の 3 つがある．その中でリッチ曲率は曲面のガウス曲率を高次元に一般化した体積の膨張度を測るような曲率であり, リーマン幾何学の重要な定理の多くはリッチ曲率の言葉を用いて記述される．1982 年に S.-T. Yau は

3 次元以上の多様体はリッチ曲率が常に負となるようなリーマン計量を許容するか？

という問題を提案した．この問題は多くの数学者たちによって研究され, 3 次元の場合は L.Z Gao と S.-T. Yau [6] によって肯定的に解決され, 3 次元以上の場合は J. Lohkamp [9] によって肯定的に解決された． 対照的に S.B. Myers [11] は完備リーマン多様体のリッチ曲率が下から正の定数で抑えられるならば, そのような多様体はコンパクトになり, 直径は上から抑えられることを証明した．

定理 1 (S.B. Myers [11])**.** *If there exists some positive constant $\lambda > 0$ such that the Ricci curvature satisfies $\mathrm{Ric}_g \geqslant \lambda g$, then (M, g) is compact and the diameter satisfies*

$$\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \pi\sqrt{\frac{n-1}{\lambda}}.$$

---

* 第 19 回数学総合若手研究集会（2023 年 3 月・北海道大学）テクニカルレポート

† 本研究は科研費の助成を受けたものである（課題番号：18K13417・22K13915）

定理 1 の帰結として非コンパクトな完備リーマン多様体のリッチ曲率は下から正の定数で抑えられないことが導かれ, 下から正の定数で抑えられるようなリッチ曲率を持つ完備リーマン計量が存在するための位相的な障害を与える. リッチ曲率とリーマン多様体の位相の関係については多くの先行研究があるにも関わらず完全な理解には程遠い状況で, 現在でも活発に研究されている重要な話題である. 定理 1 はリッチ曲率が下から正の定数で抑えられているという条件を弱い条件に置き換えることで様々な方向へ一般化されてきた. ここではそのような一般化のうち幾つかを紹介する. W. Ambrose [1] は測地線に沿ったリッチ曲率の積分を考えることで 定理 1 の最初の一般化を与えた.

定理 2 (W. Ambrose [1]). *If there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma\colon [0,+\infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))dt = +\infty,$$

then (M,g) is compact.

完備リーマン多様体 (M,g) のリッチ曲率が正の定数 $\lambda > 0$ に対して $\mathrm{Ric}_g \geqslant \lambda g$ を満たせば, 定理 1 より (M,g) はコンパクトであり, その直径は $\mathrm{diam}(M,g) \leqslant \pi\sqrt{\frac{n-1}{\lambda}}$ を満たす. このとき任意の単位速度の測地線 $\gamma = \gamma(t)$ に対して $\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)) \geqslant \lambda$ となり,

$$\max\{\lambda - \mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)), 0\} = 0 \tag{1.1}$$

が成り立つ. J.-G. Yun [23] は (1.1) を弱めることで 定理 1 の一般化を証明した.

定理 3 (J.-G. Yun [23]). *For any positive constants $\lambda > 0$ and $\kappa > 0$, there exists an explicit positive constant $\delta = \delta(n,\lambda,\kappa) > 0$ such that if there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma\colon [0,+\infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\int_0^{+\infty} \max\{\lambda - \mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)), 0\}dt < \delta(n,\lambda,\kappa),$$

then (M,g) is compact and the diameter from p satisfies $\mathrm{diam}_p(M,g) \leqslant \pi\sqrt{\frac{n-1}{\lambda}} + \kappa$.

また, E. Calabi [3] はリッチ曲率が非負であるという仮定の下で, 完備リーマン多様体がコンパクトになるための十分条件を与えた.

定理 4 (E. Calabi [3]). *Suppose that the Ricci curvature is non-negative. If there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma : [0,+\infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\limsup_{s\to+\infty}\left\{\int_0^s \sqrt{\mathrm{Ric}_g(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))}dt - \frac{\sqrt{n-1}}{2}\ln s\right\} = +\infty,$$

then (M,g) is compact.

さらに, J. Cheeger, M. Gromov, M. Taylor [5] はある領域の外側でリッチ曲率の 2 次の減衰を仮定して, 完備リーマン多様体がコンパクトになるための十分条件を与えた.

定理 5 (J. Cheeger, M. Gromov, and M. Taylor [5])**.** *If there exist some point $p \in M$ and positive constants $r_0 > 0$ and $\nu > 0$ such that the Ricci curvature satisfies*

$$\mathrm{Ric}_g(x) \geqslant (n-1)\frac{(\frac{1}{4}+\nu^2)}{r^2(x)}g(x)$$

for all $x \in M$ satisfying $r(x) \geqslant r_0$, where $r(x)$ denotes the distance between p and x, then (M, g) is compact. Moreover, the diameter from p satisfies

$$\mathrm{diam}_p(M, g) \leqslant r_0 \exp\left(\frac{\pi}{\nu}\right).$$

2 結果

ここからはリッチ曲率を拡張する曲率を導入し, 定理 1 やその一般化に対する対応物を紹介する. リーマン多様体 (M, g) 上で定義された滑らかな関数 $f\colon M \to \mathbb{R}$ と定数 $m \in (-\infty, 1] \cup [n, +\infty]$ に対して **m-Bakry–Émery リッチ曲率** [2] を

$$\mathrm{Ric}_f^m := \begin{cases} \mathrm{Ric}_g & m = n, \\ \mathrm{Ric}_g + \mathrm{Hess}\, f - \dfrac{1}{m-n} df \otimes df & m \in (-\infty, 1] \cup (n, +\infty), \\ \mathrm{Ric}_g + \mathrm{Hess}\, f & m = +\infty \end{cases}$$

で定義する. ここで $\mathrm{Hess}\, f$ は関数 f のヘッシアンを表す. $f : M \to \mathbb{R}$ を **ポテンシャル関数** という. 与えられた定数 $m \in (-\infty, 1] \cup [n, +\infty]$ に対して定数 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ を次の範囲で考える.

$$\varepsilon = 0 \quad \text{for} \quad m = 1, \qquad |\varepsilon| < \sqrt{\frac{m-1}{m-n}} \quad \text{for} \quad m \neq 1, n, \qquad \text{and} \qquad \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \text{for} \quad m = n \tag{2.1}$$

ただし $m = +\infty$ の場合は $\frac{m-1}{m-n} = 1$ と解釈する. また, 定数 $c = c(m, \varepsilon)$ を $m \neq 1$ のとき

$$c := \frac{1}{n-1}\left(1 - \varepsilon^2 \frac{m-n}{m-1}\right) > 0$$

と定義し, $m = 1$ のとき $c := \frac{1}{n-1}$ と定義する. m-Bakry–Émery リッチ曲率はリッチ曲率を用いて書き表される多くの重要な定理をポテンシャル関数に関する適切な仮定の下で自然に拡張することが知られており, 多くの数学者が定理 1 やその一般化を m-Bakry–Émery リッチ曲率を用いて拡張している [2,4,7,8,10,12–22]. Y. Lu, E. Minguzzi, S. Ohta [10] は定理 1 と Z. Qian [12], W. Wylie [22], 筆者 [20] による定理 1 の一般化を (2.1) の設定へ拡張して, 完備リーマン多様体がコンパクトになるための十分条件を与えた.

定理 6 (Y. Lu, E. Minguzzi, and S. Ohta [10])**.** *Let $m \in (-\infty, 1] \cup [n, +\infty]$ and ε be in the range (2.1). If there exist some positive constants $\lambda > 0$ and $b > 0$ such that*

$$\mathrm{Ric}_f^m \geqslant \lambda e^{-\frac{4(1-\varepsilon)}{n-1}f} g$$

and $e^{\frac{2(1-\varepsilon)}{n-1}f} \leqslant b$, then (M, g) is compact and the diameter satisfies $\mathrm{diam}(M, g) \leqslant \frac{b\pi}{\sqrt{c\lambda}}$.

定理 1 が様々な方向へ一般化されるように, 我々は定理 6 の様々な一般化を得ることができる. 実際, 定理 2 と M.P. Cavalcante, J.Q. Oliveira, M.S. Santos [4] および筆者 [19] による定理 2 の一般化の (2.1) の設定への拡張が既に K. Kuwae と Y. Sakurai [8] によって得られている. 次の定理は定理 3 と M.S. Santos [14] および筆者 [18] による定理 3 の一般化を (2.1) の設定へ拡張するものである.

定理 7 ([21]). *Let $m \in (-\infty, 1] \cup [n, +\infty]$ and ε be in the range (2.1). Suppose that there exists some positive constant $b > 0$ such that $v := e^{\frac{1-\varepsilon}{n-1}f} \leqslant b$. For any positive constants $\lambda > 0$ and $\kappa > 0$, there exists an explicit positive constant $\delta = \delta(c, b, \lambda, \kappa) > 0$ such that if there exists some point $p \in M$ for which every geodesic $\gamma\colon [0, +\infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\int_0^{+\infty} \max\left\{\lambda - v^2(\gamma(t))\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)), 0\right\} dt < \delta(c, b, \lambda, \kappa),$$

then (M, g) is compact and the diameter from p satisfies $\mathrm{diam}_p(M, g) \leqslant \frac{b\pi}{\sqrt{c\lambda}} + \kappa$.

また, 次の定理は定理 4 と M. Rimoldi [13] および筆者 [19] による定理 4 の一般化を (2.1) の設定へ拡張するものである.

定理 8 ([21]). *Let $m \in (-\infty, 1] \cup [n, +\infty]$ and ε be in the range (2.1). Suppose that there exists some positive constant $b > 0$ such that $v := e^{\frac{1-\varepsilon}{n-1}f} \leqslant b$. If the m-Bakry–Émery Ricci curvature is non-negative and there exist some point $p \in M$ and positive constant $t_0 > 0$ for which every geodesic $\gamma : [0, +\infty) \to M$ emanating from p satisfies*

$$\limsup_{s \to +\infty} \left\{ \int_{t_0}^{s} \sqrt{v^2(\gamma(t))\,\mathrm{Ric}_f^m(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}dt - \frac{b}{2\sqrt{c}} \ln s \right\} = +\infty,$$

then (M, g) is compact.

とくに, 定理 8 から定理 5 と筆者 [17, 19] による定理 5 の一般化を (2.1) の設定へ拡張する次の系を得ることができる.

系 ([21]). *Let $m \in (-\infty, 1] \cup [n, +\infty]$ and ε be in the range (2.1). Suppose that there exists some positive constant $b > 0$ such that $v := e^{\frac{1-\varepsilon}{n-1}f} \leqslant b$. If there exist some point $p \in M$ and positive constants $r_0 > 0$ and $\nu > 0$ such that*

$$v^2(x)\,\mathrm{Ric}_f^m(x) \geqslant \frac{b^2}{c} \frac{(\frac{1}{4} + \nu^2)}{r^2(x)} g(x)$$

for all $x \in M$ satisfying $r(x) \geqslant r_0$, where $r(x)$ denotes the distance between p and x, then (M, g) is compact.

紙面の都合上, 指摘すべき多くの文献を割愛した. m-Bakry–Émery リッチ曲率を用いた定理 1 とその一般化の拡張については解説論文 [15, 16] も参考にして戴きたい.

参考文献

[1] W. Ambrose, *A theorem of Myers*, Duke Math. J. **24** (1957), 345–348.

[2] D. Bakry and M. Émery, *Diffusions hypercontractives*, in: Séminaire de Probabilités, XIX, 1983/84, in: Lecture Notes in Math., vol. 1123, Springer, Berlin, 1985, pp. 177–206.

[3] E. Calabi, *On Ricci curvature and geodesics*, Duke Math. J. **34** (1967), 667–676.

[4] M.P. Cavalcante, J.Q. Oliveira, and M.S. Santos, *Compactness in weighted manifolds and applications*, Results Math. **68** (2015), 143–156.

[5] J. Cheeger, M. Gromov, and M. Taylor, *Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), 15–53.

[6] L.Z. Gao and S.-T. Yau, *The existence of negatively Ricci curved metrics on three-manifolds*, Invent. Math. **85** (1986), 637–652.

[7] K. Kuwae and X.-D. Li, *New Laplacian comparison theorem and its applications to diffusion processes on Riemannian manifolds*, Bull. Lond. Math. Soc. **54** (2022), 404–427.

[8] K. Kuwae and Y. Sakurai, *Rigidity phenomena on lower N-weighted Ricci curvature bounds with ε-range for nonsymmetric Laplacian*, Illinois J. Math. **65** (2021), 847–868.

[9] J. Lohkamp, *Metrics of negative Ricci curvature*, Ann. of Math. (2) **140** (1994), 655–683.

[10] Y. Lu, E. Minguzzi, and S. Ohta, *Comparison theorems on weighted Finsler manifolds and spacetimes with ϵ-range*, Anal. Geom. Metr. Spaces **10** (2022), 1–30.

[11] S.B. Myers, *Riemannian manifolds with positive mean curvature*, Duke Math. J. **8** (1941), 401–404.

[12] Z. Qian, *Estimates for weighted volumes and applications*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **48** (1997), 235–242.

[13] M. Rimoldi, *Rigidity results for Lichnerowicz Bakry–Emery Ricci tensors*, Ph.D. thesis, Università degli Studi di Milano, 2011.

[14] M.S. Santos, *Compactness theorems for the Bakry-Emery Ricci tensor on semi-Riemannian manifolds*, Comment. Math. Univ. Carolin. **58** (2017), 79–86.

[15] H. Tadano, *Some Myers type theorems and Hitchin–Thorpe inequalities for shrinking Ricci solitons*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **73** (2015), 183–199.

[16] _____, *Some Myers type theorems and Hitchin–Thorpe inequalities for shrinking Ricci solitons, II*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino **77** (2019), 83–111.

[17] _____, *Some Cheeger–Gromov–Taylor type compactness theorems via m-Bakry–Émery and m-modified Ricci curvatures*, Nonlinear Anal. **199** (2020), 112045.

[18] _____, *m-Bakry–Émery Ricci curvatures, Riccati inequalities, and bounded diameters*, Differential Geom. Appl. **80** (2022), 101832.

[19] _____, *Ambrose and Calabi type theorems via m-Bakry–Émery and m-modified Bakry–Émery Ricci curvatures*, Preprint, 2020.

[20] _____, *Diameter estimates under integral radial m-Bakry–Émery Ricci curvature bounds*, Preprint, 2021.

[21] _____, *Bonnet–Myers type theorems via m-Bakry–Émery Ricci curvature with ε-range*, Preprint, 2021.

[22] W. Wylie, *Sectional curvature for Riemannian manifolds with density*, Geom. Dedicata **178** (2015), 151–169.

[23] J.-G. Yun, *A note on the generalized Myers theorem*, Bull. Korean Math. Soc. **46** (2009), 61–66.

次元が負の場合の曲率次元条件の集中位相での安定性について

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
大島 駿 (Shun OSHIMA)

1 導入

n 次元重み付きリーマン多様体 $(M^n, g, e^{-f}\,\mathrm{vol}_g)$ と $N \in (n, \infty]$ に対し, 重み付き Ricci 曲率 Ric_N が

$$\mathrm{Ric}(v,v) := \mathrm{Ric}_g(v,v) + \mathrm{Hess}\, f(v,v) - \frac{g(\nabla f(x), v)^2}{N-n} \qquad (v \in T_x M^n)$$

と定義されている. ($N = \infty$ のときは, 第 3 項を 0 として扱う) このとき, この Ric_N が

$$\mathrm{Ric}_N \geq Kg$$

を満たすという条件を曲率次元条件 ($\mathrm{CD}(K,N)$ 条件, $K \in \mathbb{R}$, $N \in (1, \infty]$) といい, リーマン多様体においては "Ricci 曲率が K 以上かつ, 次元が N 以下である" ということと同値である. この曲率次元条件を満たす重み付きリーマン多様体はよく研究されており, 近年は Ric_N の定義を $N < 0$ の場合にも考えることで, 曲率次元条件を $N < 0$ の場合に拡張したものも扱われている. 測度距離空間は測度空間の構造を持った距離空間であり, リーマン計量から定まる距離 (リーマン距離) と体積測度を持つリーマン多様体の一般化として定義された. そして, この $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件を測度距離空間上に定式化したものが Lott-Villani [4] と Sturm [10], [11] らによりそれぞれ独立に与えられ, さらに, 太田 [7] により $N < 0$ の場合も定式化がなされた. この条件を満たす測度距離空間を $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間といい, $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間は Ricci 曲率が K 以上かつ, 次元が N 以下のリーマン多様体の性質を多く引き継いでいることが知られている.

$\mathrm{CD}(K,N)$ 空間の研究において重要な命題の一つに "$\mathrm{CD}(K,N)$ 空間の列がある測度距離空間に収束したとき, その極限も $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間であるか" というものがあり, このような命題を "$\mathrm{CD}(K,N)$ 条件の安定性" と呼ぶ. ここでいう測度距離空間の収束は, 現在色々な種類が知られており, 例えば以下のようなものがある.

(1) 点付き測度付き Gromov-Hausdorff 収束 (pmGH 収束)
(2) 点付き測度付き Gromov 収束 (pmG 収束)
(3) Sturm の $\mathbb{D}$-収束
(4) $\square$ 収束
(5) 集中

これらはそれぞれ, 測度距離空間の定義によって考えられる範囲に差はあるが, 特に測度距離空間の定義としては一番狭い範囲である確率測度を持つ測度距離空間 (mm-空間という) に限って言えば, (1) から (5) の全てを考えることができ, その中でも Gromov [2] により導入された (5) が一番弱い収束であると知られている.

これまで知られていた $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件の安定性に関する結果は, 例えば船野-塩谷 [1] や, 数川-小澤-鈴木 [3] らにより次のような結果が得られており,

定理 1.1. ([1], 定理 1.2, [3], 定理 1.1)
$K \in \mathbb{R}$ とする. このとき, $\mathrm{CD}(K,\infty)$ 条件を満たす mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある mm-空間 Y に集中しているなら, Y も $\mathrm{CD}(K,\infty)$ 空間である.

これにより $\mathrm{CD}(K,\infty)$ 条件は集中位相において安定性を持つとわかっている. また, $N<0$ の場合の $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件の安定性については Magnabosco-Rigoni-Sosa [5] によって次のような結果が得られている.

定理 1.2. ([5], 定理 4.1)
$K \in \mathbb{R}$, $N<0$ とする. 測度距離空間の列 $\{(X_n, d_{X_n}, \mu_{X_n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ が $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件を満たし, $K<0$ のときはさらに

$$\limsup_{n\to\infty} \operatorname{diam} X_n < \frac{\pi}{\sqrt{-K}}$$

を満たすとする. そして X_n がある測度距離空間 (Y, d_Y, μ_Y) に pmG 収束しているなら, Y も $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間である.

ただし, Magnabosco らは一般的な測度距離空間の定義よりもさらに広い枠組みの中でこの安定性を示しており, この定理 1.2 はそれを一般的な測度距離空間の定義まで狭めたものであることには注意しておく.

2 主定理

本講演における主定理は $N<0$ の場合の $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件の安定性が pmG 収束よりも弱い収束である集中についても成立することを示したものである.

主定理 2.1 ([8], 主定理 1.3)**.** $K \in \mathbb{R}$, $N<0$ とする. $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件を満たし, $K<0$ のときはさらに

$$\limsup_{n\to\infty} \operatorname{diam} X_n < \frac{\pi}{\sqrt{-K}} \tag{1}$$

を満たすような mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が, ある mm-空間 Y に集中しているなら, Y も $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間である.

また, $K<0$ における式 (1) を仮定することの必要性はある程度妥当であることが示せ,

主定理 2.2 ([8], 主定理 1.5)**.** $K<0$, $N<0$ とし, $D \in \mathbb{R}$ を $D \geq \pi\sqrt{(N-1)/K}$ となるものとする. このとき $\operatorname{diam} Y = D$ である 2 点からなる mm-空間 Y と, ある円周上の滑らかな関数列

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(\mathbb{S}^1)$ が存在して,

$$(X_n, d_{X_n}, \mu_{X_n}) := (\mathbb{S}^1, d_g, e^{-f_n}\,\mathrm{vol}_g)$$

(ただし, g は $\mathbb{S}^1$ 上の標準計量を $\mathrm{diam}\,\mathbb{S}^1 = D$ となるようにスケーリングしたもの) とするとき, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件を満たす mm-空間の列であって, X_n は Y に $\square$ 収束する.

特に, 2 点からなる mm-空間は $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間ではないため, $\square$ 収束するならば集中するという性質 (命題 3.19) と併せて考えると, 主定理 2.2 の X_n と Y は式 (1) を仮定しない場合の主定理 2.1 の反例になっているといえる. この結果は, 定理 1.1 のように空間の直径の仮定なしで任意の $K \in \mathbb{R}$ について $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間の集中位相による極限が $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間となった $1 < N \leq \infty$ の場合とは明らかに異なるものである.

3 曲率次元条件と集中位相

(X, d_X) を完備かつ可分な距離空間とし, $\mathcal{P}(X)$ を X 上の Borel 確率測度全体とする.

定義 3.1 (測地線)**.** 距離空間 (X, d_X) 上の曲線 $\gamma : [0,1] \to X$ が ($\gamma(0)$ から $\gamma(1)$ への) **測地線**であるとは, 任意の $s, t \in [0,1]$ に対し,

$$d_X(\gamma(s), \gamma(t)) = |s-t| \cdot d_X(\gamma(0), \gamma(1))$$

を満たすことをいう.

定義 3.2 (Wasserstein 空間)(cf. [12])**.** $\mathcal{P}_2(X) \subset \mathcal{P}(X)$ を

$$\mathcal{P}_2(X) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(X) \,\middle|\, \exists x_0 \in X \text{ s.t. } \int_X d_X(x, x_0)^2 d\mu(x) < \infty \right\}$$

と定め, $W_2 : \mathcal{P}_2(X) \times \mathcal{P}_2(X) \to [0,\infty)$ を以下のように定める.

$$W_2(\mu,\nu) := \inf_{\pi \in \mathrm{Cpl}(\mu,\nu)} \left(\int_{X\times X} d_X(x,y)^2 d\pi(x,y) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

ただし $\mathrm{Cpl}(\mu,\nu) := \{\pi \in \mathcal{P}(X \times X) \mid \pi : \mu \text{ と } \nu \text{ の coupling}\}$ とする. このとき $(\mathcal{P}_2(X), W_2)$ は距離空間となり, これを **Wasserstein 空間**という. また, $\pi \in \mathrm{Cpl}(\mu,\nu)$ で, 式 (2) の inf を実現するものを optimal coupling といい, その全体を $\mathrm{Opt}(\mu,\nu)$ と書く.

定義 3.3 (測度距離空間)**.** (X, d_X, μ_X) が**測度距離空間**であるとは, (X, d) が完備かつ可分な距離空間で, μ_X が X 上の局所有限な Borel 測度となることをいう. ここで, μ_X が局所有限であるとは, 任意の $x \in X$ に対し, x の開近傍 U で $\mu_X(U) < \infty$ となることをいう. また測度距離空間 (X, d_X, μ_X) が $\mu_X \in \mathcal{P}(X)$ を満たすとき, **mm-空間**という.

以降は, 測度距離空間 (または mm-空間) (X, d_X, μ_X) を単に X と表記する.

次に, 測度距離空間における曲率次元条件を定義するために必要なものを定義する. $\kappa \in \mathbb{R}$ に対し,

$s_\kappa : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ を

$$s_\kappa(\theta) := \begin{cases} \dfrac{\sin\sqrt{\kappa}\theta}{\sqrt{\kappa}\theta} & (\kappa > 0) \\ 1 & (\kappa = 0) \\ \dfrac{\sinh\sqrt{-\kappa}\theta}{\sqrt{-\kappa}\theta} & (\kappa < 0) \end{cases}$$

とし, $t \in [0,1]$, $K \in \mathbb{R}$, $N < 0$ に対し $\tau_{K,N}^{(t)} : [0,\infty) \to [0,\infty]$ を

$$\tau_{K,N}^{(t)}(\theta) := \begin{cases} \infty & \left(K < 0\ ,\ \theta \geq \pi\sqrt{(N-1)/K}\right) \\ t\left(\dfrac{s_{K/(N-1)}(t\theta)}{s_{K/(N-1)}(\theta)}\right)^{1-\frac{1}{N}} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定める. 以降, $\tau_{K,N}^{(t),0} := \tau_{K,N}^{(1-t)}$, $\tau_{K,N}^{(t),1} := \tau_{K,N}^{(t)}$ とする.

定義 3.4 (Rényi エントロピー)**.** $N < 0$ に対し, $S_{N,\mu_X} : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ を

$$S_{N,\mu_X}(\nu) := \begin{cases} \int_X \rho^{1-\frac{1}{N}} d\mu_X & (\nu = \rho\mu_X) \\ \infty & (\nu \not\ll \mu_X) \end{cases}$$

と定め, この $S_{N,\mu_X}(\nu)$ を ν の μ_X に対する **Rényi エントロピー**という. また, $\mathcal{D}(S_{N,\mu_X}) := \{\nu \in \mathcal{P}(X) \mid S_{N,\mu_X}(\nu) < \infty\}$ とする.

定義 3.5 (曲率次元条件)(e.g. [7], 定義 4.4)**.** $K \in \mathbb{R}$, $N < 0$ とする. 測度距離空間 X が $\mathrm{CD}(K,N)$ **空間**である (または $\mathrm{CD}(K,N)$ **条件を満たす**) とは, 任意の $\nu_0 = \rho_0\mu_X, \nu_1 = \rho_1\mu_X \in \mathcal{P}_2(X) \cap \mathcal{D}(S_{N,\mu_X})$ に対し, ある $(\mathcal{P}_2(X), W_2)$ 上の ν_0 から ν_1 への測地線 $\{\nu_t\}_{t\in[0,1]}$ と $\pi \in \mathrm{Opt}(\nu_0,\nu_1)$ が存在して, 任意の $t \in [0,1]$ と $\nu_0, \nu_1 \in \mathcal{D}(S_{N',\mu_X})$ を満たす任意の $N' \in [N,0)$ に対し,

$$S_{N',\mu_X}(\nu_t) \leq \sum_{i=0}^{1} \int_{X\times X} \tau_{K,N'}^{(t),i}\left(d_X(x_0,x_1)\right) \rho_i(x_i)^{-\frac{1}{N'}} d\pi(x_0,x_1) \tag{3}$$

が成立することをいう.

例 3.6 ([6], 定理 1.1)**.** $n \geq 2$, $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ で $|x| < 1$ を満たすものとし, g を $\mathbb{R}^{n+1}$ から誘導される $\mathbb{S}^n$ 上の標準計量とする. また, $\varphi : \mathbb{S}^n \to [0,\infty)$ を

$$\varphi(y) := \frac{c_x^{n,\alpha}}{|y-x|^{n+\alpha}}$$

と定める. (ただし, $c_x^{n,\alpha} > 0$ は $\varphi\,\mathrm{vol}_g \in \mathcal{P}(\mathbb{S}^n)$ となるような定数とする.) このとき, 測度距離空間 $(\mathbb{S}^n, d_g, \varphi\,\mathrm{vol}_g)$ は $\mathrm{CD}(n-1-\frac{n+\alpha}{4}, -\alpha)$ 空間である.

次に, mm-空間の収束である集中を定義する.

定義 3.7. (オブザーバブル直径)
X を mm-空間とし, $\alpha \geq 0$ とする. このとき,

$$\mathrm{diam}(X;\alpha) = \mathrm{diam}(\mu_X;\alpha) := \inf\{\mathrm{diam}\,A \mid A \in \mathcal{B}_X, \mu_X(A) \geq \alpha\}$$

と定め, X の**部分直径**という. そして, $\kappa \geq 0$ に対し,

$$\mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa) := \sup\{\mathrm{diam}(f_*\mu_X; 1-\kappa) \mid f \in \mathcal{L}ip_1(X)\}$$
$$\mathrm{ObsDiam}(X) := \inf_{\kappa>0}(\kappa \vee \mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa))$$

と定め, それぞれ X の **κ-オブザーバブル直径**, **オブザーバブル直径**という.

注意 3.8. κ-オブザーバブル直径は κ について単調非増加であり, $\kappa \geq 1$ のとき, $\mathrm{ObsDiam}(X; -\kappa) = 0$ であるから, 以降は基本的に $\kappa < 1$ として考える.

定義 3.9. (Lévy 族)
mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が **Lévy 族**であるとは, 任意の $\kappa > 0$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{ObsDiam}(X_n; -\kappa) = 0$$

が成立すること, あるいは同値なことだが

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{ObsDiam}(X_n) = 0$$

が成立することをいう. また, 注意 3.8 より, 十分小さな任意の $\kappa > 0$ としても同値である.

定義 3.10. (セパレーション距離)
X を mm-空間とし, $N \in \mathbb{N}$, $\kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_N > 0$ とする. このとき, X の**セパレーション距離** $\mathrm{Sep}(X; \kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_N)$ を $\min_{i\neq j} \mathrm{dist}(A_i, A_j)$ の上限として定める. ここで $A_0, A_1, \ldots, A_N$ は X の Borel 部分集合で, $\mu_X(A_i) \geq \kappa_i$ $(i = 0, 1, \ldots, N)$ を満たすものを動くとする.

定義 3.11 (mm-同型)**.** 2 つの mm-空間 X, Y が **mm-同型**であるとは, ある等長写像 $f : \mathrm{supp}\,\mu_X \to \mathrm{supp}\,\mu_Y$ が存在して, $f_*\mu_X = \mu_Y$ を満たすことをいう. また, mm-空間の同型類全体を $\mathcal{X}$ と書く.

ここで $I := [0, 1)$ とし, I は Lebesgue 測度 $\mathcal{L}^1$ によって確率測度空間となる.

定義 3.12 (パラメータ)**.** X を mm-空間とする. Borel 写像 $\varphi : I \to X$ が $\varphi_*\mathcal{L}^1 = \mu_X$ を満たすとき, φ は X **のパラメータ**であるという.

命題 3.13 ([9], 補題 4.2)**.** 任意の mm-空間 X に対し, X のパラメータが存在する.

定義 3.14 (ボックス距離)**.** mm-空間 X, Y に対し,

(1) $\mathcal{L}^1(\tilde{I}) \geq 1 - \varepsilon$
(2) 任意の $s, t \in \tilde{I}$ に対し, $|d_X(\varphi(s), \varphi(t)) - d_Y(\psi(s), \psi(t))| \leq \varepsilon$

を満たす Borel 集合 $\tilde{I} \subset I$, X のパラメータ φ, Y のパラメータ ψ が存在するような $\varepsilon > 0$ の下限を $\square(X, Y)$ と書き, これを **X と Y のボックス距離**という. そして $\square$ を単にボックス距離という.

定義 3.15 (Ky Fan 距離)**.** I 上の Borel 可測関数 $f, g : I \to \mathbb{R}$ に対し, d_{KF} を

$$d_{\mathrm{KF}}(f, g) := \inf\left\{\varepsilon > 0 \mid \mathcal{L}^1(\{x \in I \mid |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon\right\}$$

と定めるとき, この d_{KF} を **Ky Fan 距離**という.

mm-空間 X に対し, X 上の 1-Lipschitz 関数全体を $\mathcal{L}ip_1(X)$ と書き, さらに, X のパラメータ φ に対して, $\varphi^*\mathcal{L}ip_1(X) := \{f \circ \varphi \mid f \in \mathcal{L}ip_1(X)\}$ と定める.

定義 3.16 (オブザーバブル距離)**.** mm-空間 X, Y に対し, X と Y **のオブザーバブル距離** $d_{\mathrm{conc}}(X, Y)$ を

$$d_{\mathrm{conc}}(X, Y) := \inf_{\varphi,\psi} d_H^{\mathrm{KF}}\left(\varphi^*\mathcal{L}ip_1(X), \psi^*\mathcal{L}ip_1(Y)\right)$$

と定める. ただし, d_H^{KF} は d_{KF} に関する Hausdorff 距離であり, φ, ψ はそれぞれ X, Y のパラメータ全体を動くものとする. このとき d_{conc} を単にオブザーバブル距離という.

命題 3.17 ([9], 定理 4.10, 定理 4.14, 定理 5.16)**.** $\square$, d_{conc} はどちらも $\mathcal{X}$ 上の距離であり, 特に, $(\mathcal{X}, \square)$ は完備距離空間である.

定義 3.18 ($\square$ 収束, 集中)**.** mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある mm-空間 Y に $\mathcal{X}$ 上の距離 $\square$ (resp. d_{conc}) について収束するとき, X_n が Y に $\square$ **収束する** (resp. **集中する**) といい, $X_n \xrightarrow{\square} Y$ (resp. $X_n \xrightarrow{\mathrm{conc}} Y$) と書く.

命題 3.19 ([9], 命題 5.5)**.** 任意の mm-空間 X, Y に対し $d_{\mathrm{conc}}(X, Y) \leq \square(X, Y)$ が成立する. 特に mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が mm-空間 Y に $\square$ 収束しているとき, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Y に集中している.

命題 3.20. ([9], 命題 5.7, 系 5.8)
X を mm-空間とし, $*$ を 1 点からなる mm-空間, つまり $* := (\{*\}, d_*, \delta_*)$ とするとき

$$d_{\mathrm{conc}}(X, *) \leq \mathrm{ObsDiam}(X) \leq 2\, d_{\mathrm{conc}}(X, *)$$

が成立する. 特に, mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Lévy 族であることと $X_n \xrightarrow{\mathrm{conc}} *$ が同値である.

例 3.21. 正規化された体積測度を持つ n 次元単位球面の列は Lévy 族である.

例 3.22. 例 3.6 で挙げた $(\mathbb{S}^n, d_g, \varphi\,\mathrm{vol}_g)$ は Lévy 族である. (後述の系 3.27 より従う.)

命題 3.23 ([9], 命題 9.31)**.** mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が mm-空間 Y に集中しているとする. このとき, ある Borel 写像 $p_n : X_n \to Y$, コンパクト集合 $\tilde{X}_n \subset X_n$, $\varepsilon_n > 0$ が存在して以下を満たす.

(1) $d_H^{\mathrm{KF}}(\mathcal{L}ip_1(X_n), p_n^*\mathcal{L}ip_1(Y)) \leq \varepsilon_n$ かつ $\varepsilon_n \to 0$
(2) $(p_n)_*\mu_{X_n}$ は μ_Y に弱収束する.
(3) 任意の $x, x' \in \tilde{X}_n$ に対し $d_Y(p_n(x), p_n(x')) \leq d_{X_n}(x, x') + \varepsilon_n$
(4) $\mu_{X_n}(\tilde{X}_n) \geq 1 - \varepsilon_n$
(5) 任意の $y \in Y$ に対し $\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in X_n\setminus\tilde{X}_n} d_Y(p_n(x), y) < \infty$

ここで, 主定理の他に, $N < 0$ の場合の $CD(K, N)$ 空間に関する結果がいくつか得られているので, それらを紹介する. まず, 次の定理は船野-塩谷 [1] の系 1.4 を $\mathrm{CD}(0, N)$ 空間に拡張したもので, この証明は [1] の時とほぼ同様だが, 主定理 2.1 の $K = 0$ の場合を適用することで得られる.

定理 3.24. [[8], 定理 6.5] $N<0$ とする. コンパクトなリーマン多様体の列 $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が, 以下の 2 条件を満たすとする.

(a) M_n は $\mathrm{CD}(0,N)$ 空間である.
(b) ある $k\in\mathbb{N}$ について $\lim_{n\to\infty}\lambda_k(M_n)=\infty$ が成立する.

(ここで, $\lambda_k(M_n)$ は M_n の第 k 固有値である.) このとき, $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Lévy 族である.

次に, K が大きくなると, $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間は小さくなっていくという結果を $N<0$ の場合に示したもので, $N\in(1,\infty]$ におけるこの定理は [10] の定理 4.26 や [11] の系 2.6 からわかる.

定理 3.25 ([8], 定理 8.3)**.** (X,d_X,μ_X) を測度距離空間とする. ある $N<0$ が存在して, 任意の $K>0$ に対して X が $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間となるとき, $|\operatorname{supp}\mu_X|=1$ となる.

また, 次の 2 つは [9] の命題 9.26, 系 9.27 をそれぞれ $N<0$ の $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間の場合に拡張したものである.

定理 3.26 ([8], 定理 4.1)**.** $K>0$, $N<0$ とし, X を $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件を満たす mm-空間とする. このとき, $\kappa_0+\kappa_1<1$ を満たす任意の $\kappa_0,\kappa_1>0$ と任意の $\kappa\in(0,1)$ に対し,

(1) $\mathrm{Sep}(X;\kappa_0,\kappa_1)\le 2\sqrt{\dfrac{1-N}{K}}\cosh^{-1}\left(\left(\dfrac{\kappa_0^{1/N}+\kappa_1^{1/N}}{2}\right)^{\frac{-N}{1-N}}\right)$

(2) $\mathrm{ObsDiam}(X;-\kappa)\le 2\sqrt{\dfrac{1-N}{K}}\cosh^{-1}\left(\left(2\kappa^{-1}\right)^{\frac{1}{1-N}}\right)$

が成立する. (ただし, $\cosh^{-1}$ は cosh の逆関数であり, $x\ge 1$ に対し, $\cosh^{-1}(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1})$ である.)

系 3.27 ([8], 系 4.3)**.** $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$, $\{N_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset(-\infty,0)$ とし, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ を $\mathrm{CD}(K_n,N_n)$ 条件を満たす mm-空間の列とする. このとき, $K_n\to\infty$ なら $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Lévy 族である.

この系 3.27 は N が動いても良いので, 主定理 2.1 と定理 3.25 から直ちに従うわけではない.

4 主定理の証明の概略

主定理 2.1 の証明の方針は基本的に定理 1.1 に基づいている.

主定理 2.1 の証明の概略. X_n が Y に集中しているという仮定から, 命題 3.23 より得られる $p_n: X_n\to Y$ が存在する. 任意の $\nu_0,\nu_1\in\mathcal{P}_2(Y)\cap\mathcal{D}(S_{N,\mu_Y})$ に対し, $(p_n)_*\nu_0^n\to\nu_0$, $(p_n)_*\nu_1^n\to\nu_1$ となるような $\nu_0^n,\nu_1^n\in\mathcal{P}_2(X_n)\cap\mathcal{D}(S_{N,\mu_{X_n}})$ が取れる. X_n は $\mathrm{CD}(K,N)$ 条件を満たすので, $(\mathcal{P}_2(X_n),W_2)$ 上の ν_0^n から ν_1^n への測地線 $\{\nu_t^n\}_{t\in[0,1]}$ と $\pi^n\in\mathrm{Opt}(\nu_0^n,\nu_1^n)$ がとれて, これらは式 (3) を満たす. このとき, 部分列を取ることで $(p_n\times p_n)_*\pi^n\to\exists\pi\in\mathrm{Opt}(\nu_0,\nu_1)$, $t\in[0,1]$ について

$(p_n)_*\nu_t^n \to \exists \nu_t \in \mathcal{P}_2(Y)$ とすることが出来て

$$\begin{aligned}
&S_{N',\mu_Y}(\nu_t) \le \liminf_{n\to\infty} S_{N',\mu_X}(\nu_t^n) \\
\le &\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{1} \int_{X_n\times X_n} \tau_{K,N'}^{(t),i}\left(d_{X_n}(x_0,x_1)\right)\rho_i^n(x_i)^{-\frac{1}{N'}}\, d\pi^n(x_0,x_1) \\
\le &\sum_{i=0}^{1} \int_{Y\times Y} \tau_{K,N'}^{(t),i}\left(d_Y(y_0,y_1)\right)\rho_i(y_i)^{-\frac{1}{N'}}\, d\pi(y_0,y_1)
\end{aligned}$$

と評価できる. □

主定理 2.2 の証明の概略. $f_n : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ を

$$f_n(x,y) := -(N-1)\log\left(a_n \cdot \log\left(2\cosh(ny)\right)\right)$$

と定める. (ただし, $a_n > 0$ は正規化定数, つまり

$$a_n := n\left(\int_{\mathbb{S}^1} (2\cosh(ny))^{N-1} d\,\mathrm{vol}_g(x,y)\right)^{-\frac{1}{N-1}}$$

とする) このとき, $f_n \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ であり, $(\mathbb{S}^1, g, e^{-f_n}\,\mathrm{vol}_g)$ が $\mathrm{CD}(K,N)$ 空間になることが証明でき, なおかつ $e^{-f_n}\,\mathrm{vol}_g$ が $\frac{1}{2}(\delta_{(-1,0)} + \delta_{(1,0)})$ に弱収束することから, 2 点空間 $Y = \{(-1,0),(1,0)\}$ へ □ 収束することがわかる. □

参考文献

[1] K. Funano and T. Shioya, *Concentration, Ricci curvature, and eigenvalues of Laplacian*, Geom. Funct. Anal. **23** (2013), no. 3, 888–936.

[2] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Reprint of the 2001 English edition, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007. Based on the 1981 French original; With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes; Translated from the French by Sean Michael Bates.

[3] D. Kazukawa, R. Ozawa, and N. Suzuki, *Stabilities of rough curvature dimension condition*, J. Math. Soc. Japan **72** (2020), no. 2, 541–567.

[4] J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 3, 903–991.

[5] M. Magnabosco, C. Rigoni, and G. Sosa, *Convergence of metric measure spaces satisfying the CD condition for negative values of the dimension parameter*. preprint (2021), arXiv:2104.03588.

[6] E. Milman, *Harmonic measures on the sphere via curvature-dimension*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **26** (2017), no. 2, 437–449.

[7] S.-i. Ohta, *(K,N)-convexity and the curvature-dimension condition for negative N*, J. Geom. Anal. **26** (2016), no. 3, 2067–2096.

[8] S. Oshima, *Stability of curvature-dimension condition for negative dimensions under concentration topology*. preprint (2022), arXiv:2209.03587.

[9] T. Shioya, *Metric measure geometry. Gromov's theory of convergence and concentration of metrics and measures*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol. 25, EMS Publishing House, Zürich, 2016.

[10] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. I*, Acta Math. **196** (2006), no. 1, 65–131.

[11] ———, *On the geometry of metric measure spaces. II*, Acta Math. **196** (2006), no. 1, 133–177.

[12] C. Villani, *Optimal transport, old and new*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 338, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

ハイパーグラフの Ricci 曲率

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻
赤松朋哉 (Tomoya AKAMATSU) *

概要

リーマン多様体の Ricci 曲率の概念は Ollivier によって最適輸送理論を介してランダムウォーク付き距離空間上へ一般化された．Lin–Lu–Yau はグラフにおいてその定義を修正し，離散 Ricci 曲率（LLY 曲率）を導入した．グラフの LLY 曲率の観点によるグラフの幾何解析は近年盛んに研究されており，実問題への応用もなされている．講演では，LLY 曲率をハイパーグラフ上へ一般化する研究について説明する．

1 導入

Ricci 曲率はリーマン多様体の体積増大度と深く関わる幾何学的量である．近年では特に「Ricci 曲率が下に有界」という条件を測度距離空間や離散空間上に一般化した概念が盛んに研究されている．ここではまず，Ollivier [Ol] によって最適輸送理論を用いて導入された測度距離空間の粗 Ricci 曲率について簡単に説明しておく．

(X,d) を完備可分距離空間とする．X 上の確率測度 μ で，ある点 $o \in X$ に対して $\int_X d(o,x)\,\mathrm{d}\mu(x) < \infty$ が成り立つもの全体の集合を $\mathscr{P}(X)$ と記す．各点 $x \in X$ における遷移確率測度 $m_x \in \mathscr{P}(X)$ の族 $\{m_x\}_{x\in X}$ を X 上の**ランダムウォーク**という．以下，ランダムウォークが指定された完備距離空間を**ランダムウォーク付き距離空間**と呼ぶ．Ollivier のアイデアは，ランダムウォーク付き距離空間において，2 点 $x,y \in X$ 間の距離と x,y での遷移確率測度の輸送距離を比較することでそれらに沿う “Ricci 曲率”を表現するというものであった．ここでいう輸送距離とは次の L^1-Wasserstein 距離である．

Definition 1.1 (L^1-Wasserstein 距離)**.** $\mathscr{P}(X)$ 上の **L^1-Wasserstein 距離** W_1 を

$$W_1(\mu,\nu) \coloneqq \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \int_{(x,y)\in X\times X} d(x,y)\,\mathrm{d}\pi(x,y)$$

と定義する．ここで，$\Pi(\mu,\nu)$ は $\mu,\nu \in \mathscr{P}(X)$ の**カップリング**全体の集合である，すなわち $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ は任意のボレル集合 $A \subset X$ に対して

$$\pi(A\times X) = \mu(A), \quad \pi(X\times A) = \nu(A)$$

を満たす．

* u149852g@ecs.osaka-u.ac.jp

Definition 1.2 (粗 Ricci 曲率 [Ol, Definition 3])**.** $(X, d, \{m_x\}_{x \in X})$ をランダムウォーク付き距離空間とする．異なる 2 点 $x, y \in X$ に対し，x, y に沿う**粗 Ricci 曲率** $\kappa(x, y)$ を

$$\kappa(x, y) \coloneqq 1 - \frac{W_1(m_x, m_y)}{d(x, y)}$$

と定義する．

この値を Ricci 曲率と呼ぶことの妥当性はここでは説明しない（[Ol, Proposition 6 and Example 7] などを参照）．リーマン多様体上での議論と同様に，粗 Ricci 曲率によって Bonnet–Myers 型評価 ([Ol, Proposition 23])，Lichnerowicz 型評価 ([Ol, Proposition 30])，Lipschitz 縮約 ([Ol, Proposition 29]) などの測度距離空間の幾何学的性質が導かれる．

Example 1.3 ([Ol, Example 5])**.** グラフ距離の入った n 次元整数格子 $\mathbb{Z}^n$ 上で単純ランダムウォークを考える．このとき，任意の 2 点 $x, y \in \mathbb{Z}^n$ に対して $\kappa(x, y) = 0$ が成り立つ．

2 ハイパーグラフ

本章ではまず舞台となるハイパーグラフについて復習する．

ハイパーグラフ $H = (V, E, w)$ とは，**頂点**の集合 V，V の部分集合である**ハイパーエッジ** $e \in 2^V$ の集合 E，ハイパーエッジの**重み** $w : E \to \mathbb{R}_{>0}$ の三つ組みである．ハイパーエッジ e は，$\#e = 1$ のとき**ループ**，$\#e = 2$ のとき**辺**と呼ばれる．特に任意の $e \in E$ が $\#e \leq 2$ であるとき，H を**グラフ**と呼ぶ．

Definition 2.1. 重み付きハイパーグラフ $H = (V, E, w)$ に対し，以下のように定義する：

- 頂点 $x, y \in V$ に対し，$x, y \in e$ なるハイパーエッジ $e \in E$ が存在するとき，x, y は**隣接している**といい，$x \sim y$ と記す．
- 関数 $d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を

  $$d(x, y) \coloneqq \min\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid x = v_1 \sim \cdots \sim v_n = y\}$$

  と定義する．d は頂点集合上の距離関数となり，これによってハイパーグラフ H は距離空間 (V, d) と見なせる．この距離 d を**グラフ距離**と呼ぶ．
- ハイパーグラフが**連結**であるとは，任意の 2 頂点 $x, y \in V$ に対し，$d(x, y) < \infty$ が成り立つことをいう．
- 頂点 $v \in V$ に対し，**重み付き次数** d_v を $d_v \coloneqq \sum_{e \in E_v} w(e)$ と定義する．また，**重み付き次数行列** $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を $D \coloneqq \mathsf{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ とおく．
- ハイパーグラフが**局所有限**であるとは，任意の頂点 $v \in V$ に対して $d_v < \infty$ であることをいう．
- ハイパーグラフ H の**直径** $\mathsf{diam}(H)$ を $\mathsf{diam}(H) \coloneqq \max_{x, y \in V} d(x, y)$ と定める．

Example 2.2. ハイパーグラフの例を図 2.1に記す．ハイパーエッジ e_2 は辺，ハイパーエッジ e_3 はループである．

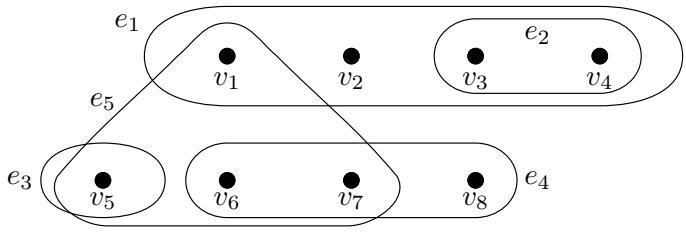


図 2.1　ハイパーグラフ $H_1 = (V, E)$.

3　グラフの Ricci 曲率

Lin–Lu–Yau [LLY] は Definition 1.2を以下のように修正し，グラフの離散曲率を定義した．

以下では断りの限り，多重辺を持たず局所有限な重み付きグラフを考える．まずグラフ距離を入れてグラフを距離空間とみる．次に遷移確率測度を次のように定める．

Definition 3.1. $\lambda \in [0,1]$ とする．各頂点 $x \in V$ に対し，確率測度 $m_x^\lambda \in \mathscr{P}(V)$ を

$$m_x^\lambda(y) \coloneqq \begin{cases} 1-\lambda & (y = x), \\ \lambda \cdot \dfrac{w_{xy}}{d_x} & (y \sim x), \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

定義より $m_x^0 = \delta_x$ (頂点 x における **Dirac 測度**) である．また，$\{m_x^1\}_{x \in X}$ は単純ランダムウォークである．

次にまず λ 版の粗 Ricci 曲率を定義する．

Definition 3.2 (λ-粗 Ricci 曲率)**.** $\lambda \in [0,1]$ とする．異なる 2 頂点 x, y に対し，x, y に沿う **λ-粗 Ricci 曲率** $\kappa_\lambda(x,y)$ を

$$\kappa_\lambda(x,y) \coloneqq 1 - \frac{W_1(m_x^\lambda, m_y^\lambda)}{d(x,y)}$$

と定義する．

$W_1(\delta_x, \delta_y) = d(x,y)$ が成り立つため $\kappa_0(x,y) = 0$ となる．Ollivier [Ol] では主に $\lambda = 1/2, 1$ の場合を考えていたが，Lin–Lu–Yau [LLY] は次の $\lambda \downarrow 0$ での極限値を考える．

Definition 3.3 (LLY 曲率)**.** 異なる 2 頂点 x, y に対し，x, y に沿う **LLY 曲率** $\kappa_{\mathrm{LLY}}(x,y)$ を

$$\kappa_{\mathrm{LLY}}(x,y) \coloneqq \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\kappa_\lambda(x,y)}{\lambda}$$

と定義する．

右辺の極限値は存在する ([LLY, Lemma 2.1 and Lemma 2.2]).

Definition 3.4. グラフ G の任意の辺 e に対して $\kappa_{\mathrm{LLY}}(e) = \kappa$ であるとき，$\kappa_{\mathrm{LLY}}(G) = \kappa$ と書く．

Example 3.5 (完全グラフ [LLY, Example 1])**.** 頂点数 n の完全グラフを K_n とおくと，$\kappa_{\mathrm{LLY}}(K_n) = n/(n-1)$ が成り立つ．

Example 3.6 (サイクルグラフ [LLY, Example 2])**.** 頂点数 n のサイクルグラフを $\mathcal{C}_n$ とおくと，

$$\kappa_{\mathrm{LLY}}(\mathcal{C}_n) = \begin{cases} 3 - \dfrac{n}{2} & (n = 2, 3, 4, 5), \\ 0 & (n \geq 6) \end{cases}$$

が成り立つ．

LLY 曲率によってリーマン多様性上の議論の類似がグラフ上でも行える．例として Bonnet–Myers 型評価と Lichnerowicz 型評価を紹介する．

Theorem 3.7 (Bonnet–Myers 型評価 [LLY, Theorem 4.1])**.** $\kappa > 0$ とする．グラフ G の任意の辺 $xy \in E$ に対して $\kappa_{\mathrm{LLY}}(x, y) \geq \kappa$ が成り立つとする．このとき

$$\mathsf{diam}(G) \leq \frac{2}{\kappa}$$

が成り立つ．

頂点集合 V 上の関数全体の集合を $\mathbb{R}^V$ と表す．

Definition 3.8 (グラフラプラシアン)**.** **グラフラプラシアン** $\Delta : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^V$ を

$$\Delta f(x) := \sum_{y \in V} \frac{w(xy)}{d_x} \{f(x) - f(y)\}$$

と定義する．ラプラシアン Δ の非零最小固有値を λ_1 と記す．

Theorem 3.9 (Lichnerowicz 型評価 [LLY, Theorem 4.2])**.** $\kappa > 0$ とする．頂点数有限のグラフ G の任意の辺 $xy \in E$ に対して $\kappa_{\mathrm{LLY}}(x, y) \geq \kappa$ が成り立つとする．このとき $\lambda_1 \geq \kappa$ が成り立つ．

また，グラフラプラシアンを用いて LLY 曲率を表すこともできる．

Theorem 3.10 (Curvature via the Laplacian [MW, Theorem 2.1])**.** 頂点集合 V 上の関数で（グラフ距離に関して）*1-Lipschitz* 連続なもの全体の集合を $\mathsf{Lip}^1(V)$ とおく．異なる *2* 頂点 x, y に対し

$$\kappa_{\mathrm{LLY}}(x, y) = \inf \left\{ \frac{\Delta f(x) - \Delta f(y)}{d(x, y)} \;\middle|\; f \in \mathsf{Lip}^1(V),\ f(x) - f(y) = d(x, y) \right\}$$

が成り立つ．

LLY 曲率はグラフ上の線型計画問題を解くことで求められることが [BCLMP, CK, CKLLS] などの研究で知られている．LLY 曲率は 2 頂点間の熱の伝わりやすさを表す量であり，それゆえネットワークのコミュニティ検出などと相性が良いと期待されている．例えば [NLLG] などで LLY 曲率に基づく Ricci flow を活用した応用研究がなされている．

4　ハイパーグラフの Ricci 曲率

ハイパーグラフは共著者ネットワークなどのグラフでは表しきれない非線型な関係をも表現できる．従って LLY 曲率をハイパーグラフに一般化することは応用の観点からも有意義だと考えられる．しかし，ハイパーグラフ上のランダムウォークや最適輸送問題をどのように考えるべきかという問題があり，Lin–Lu–Yau による手法は直接一般化できない．LLY 曲率のハイパーグラフへの一般化に関する研究としては，multi-marginal な最適輸送問題を扱ってハイパーエッジに対する曲率を定めた [AGE]，有向ハイパーグラフにおける最適輸送問題を定式化して有向ハイパーエッジに対する曲率を定めた [EJ]，ハイパーグラフに付随する非線型集合値ラプラシアンを導入して 2 頂点に対する曲率を定めた [IKTU]，（無向）ハイパーグラフにおける最適輸送問題を定式化して 2 頂点に対する曲率を定めた [Ak] などがある．講演では，幾何学的性質が豊富なラプラシアンが軸となる Ikeda–Kitabeppu–Takai–Uehara [IKTU] による曲率の導入・性質などについて説明する（[Yo, IMTY, TMIY, KM] なども参照）．

参考文献

[Ak] T. Akamatsu, *A new transport distance and its associated Ricci curvature of hypergraphs*, Anal. Geom. Metr. Spaces. **10**(1) (2022), 90–108.

[AGE] S. Asoodeh, T. Gao and J. Evans, *Curvature of hypergraphs via multi-marginal optimal transport*, In: IEEE Conference on Decision and Control. (2018), 1180–1185.

[BCLMP] D. P. Bourne, D. Cushing, S. Liu, F. Münch and N. Peyerimhoff, *Ollivier-Ricci idleness functions of graphs*, SIAM J. Discrete Math. **32**(2) (2018), 1408–1424.

[CK] D. Cushing and S. Kamtue, *Long-scale Ollivier Ricci curvature of graphs*, Anal. Geom. Metr. Spaces. **7**(1) (2019), 22–44.

[CKLLS] D. Cushing, R. Kangaslampi, V. Lipiäinen, S. Liu and G. W. Stagg, *The Graph Curvature Calculator and the curvatures of cubic graphs*, Exp. Math. (2019), 13pp.

[EJ] M. Eidi and J. Jost, *Ollivier Ricci Curvature of Directed Hypergraphs*, Sci Rep **10**, 12466 (2020), 14pp, https://doi.org/10.1038/s41598-020-68619-6.

[IKTU] M. Ikeda, Y. Kitabeppu, Y. Takai and T. Uehara, *Coarse Ricci curvature of hypergraphs and its generalization*, preprint (2021), available at https://arxiv.org/abs/2102.00698, 37pp.

[IMTY] M. Ikeda, A. Miyauchi, Y. Takai and Y. Yoshida, *Finding Cheeger cuts in hypergraphs via heat equation*, Theoret. Comput. Sci. **930** (2022), 123.

[KM] Y. Kitabeppu and E. Matsumoto, *Cheng maximal diameter theorem for hypergraphs*, Tohoku Math. J. (to appear), available at https://arxiv.org/abs/2102.09765, 10pp.

[LLY] Y. Lin, L. Lu and S.-T. Yau, *Ricci curvature of graphs*, Tohoku Math. J. (2) **63**(4) (2011), 605–627.

[MW] F. Münch and R. K. Wojciechowski, *Ollivier Ricci curvature for general graph Laplacians: heat equation, Laplacian comparison, non-explosion and diameter bounds*, Adv.

Math. 356 (2019), 106759, 45pp.

[NLLG] C.-C. Ni, Y.-Y. Lin, F. Luo and J. Gao, *Community Detection on Networks with Ricci Flow*, Sci Rep **9**, 9984 (2019), 12pp.

[Ol] Y. Ollivier, *Ricci curvature of Markov chains on metric spaces*, J. Funct. Anal. **256**(3) (2009), 810–864.

[TMIY] Y. Takai, A. Miyauchi, M. Ikeda and Y. Yoshida, *Hypergraph clustering based on Pagerank*, 26nd ACM SIGKDD Conference on Knowledge Discovery and Data mining (2020), 1970–1978.

[Yo] Y. Yoshida, *Cheeger inequalities for submodular transformations*, In: Proceedings of the Thirtieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. (2019), 2582–2601.

対数 Sobolev 不等式と Talagrand 不等式の改良について

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻
辻　寛 (Hiroshi TSUJI)

概要

対数 Sobolev 不等式と Talagrand 不等式は相対エントロピーと，Fisher 情報量または最適輸送距離を用いて記述される不等式であり，重みつきリッチ曲率に関する幾何学の研究において，適切な条件のもと成立することが知られている．本講演では，特別な場合であるユークリッド空間上の正規分布に基づくこれらの不等式の改良について考える．とくに，インプットする分散がある意味で大きい場合に最適な形で不等式が改良されることを報告する．本研究は埼玉大学の Neal Bez 氏と大阪大学の中村昌平氏との共同研究に基づく．

1　序文

本予稿では Euclid 空間上の対数 Sobolev 不等式と Talagrand 不等式について議論する．これらは，二つの相異なる確率測度の間の“距離”を測る尺度として用いられている，相対エントロピー，Fisher 情報量，及び最適輸送距離の大小比較を与える不等式であり，幾何解析や確率論などの様々な分野において利用されている．ここでは特に Gauss 測度に基づく対数 Sobolev 不等式と Talagrand 不等式について考察する．以下でこれらの不等式について詳しく紹介する．

一般に $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ によって $\mathbb{R}^n$ 上の確率測度全体の集合を表すことにし，$\mathcal{P}^2(\mathbb{R}^n)$ をその中で二次モーメントが有限な確率測度だけを集めた集合とする．ここで確率測度 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ の二次モーメントが有限であるとは,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 \, d\mu(x) < +\infty$$

となることを指す（$|\cdot|$ は通常の Euclid ノルムとしている）．また $\mathbb{R}^n$ 上の標準正規分布を

$$d\gamma(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} \, dx$$

とし，γ に絶対連続な $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$，$\mathcal{P}^2(\mathbb{R}^n)$ 内の確率測度をそれぞれ $\mathcal{P}_{\mathrm{ac}}(\mathbb{R}^n;\gamma)$，$\mathcal{P}^2_{\mathrm{ac}}(\mathbb{R}^n;\gamma)$ とあらわすことにする．標準正規分布 γ はすべての上記クラスに属していることを注意しておく．

与えられた確率測度 $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ に対して，Gauss 測度に基づく μ の相対エントロピーは次で定義される：

$$\mathrm{Ent}_\gamma(\mu) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} \rho \log \rho \, d\gamma & \mu \ll \gamma \text{ and } \rho = \frac{d\mu}{d\gamma} \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

また $\rho(\log \rho)_+$ が γ に関して可積分でない場合には, 負の部分の可積分性によらずに $\mathrm{Ent}_\gamma(\mu) := +\infty$ と約束する．このとき Jensen の不等式により，相対エントロピーは常に非負であることが保証され

る．特に相対エントロピーが 0 となるのは μ が標準正規分布 γ に一致するときであり，またそのときに限る．この意味で，相対エントロピーは標準正規分布との近さを測る $\mathcal{P}_{ac}(\mathbb{R}^n;\gamma)$ 上の“距離”とみなされる．しかしながら，相対エントロピーは正確な意味での距離関数ではないことを注意しておく．

また，γ に関して局所リプシッツ連続な確率密度関数を持つ確率測度 $\mu = \rho\,\gamma \in \mathcal{P}_{\mathrm{ac}}(\mathbb{R}^n;\gamma)$ に対して，Gauss 測度に基づく μ の Fisher 情報量は次で与えられる：

$$I_\gamma(\mu) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^n} \rho|\nabla \log \rho|^2\, d\gamma.$$

ここで $\rho^{-1}(0)$ 上での上記の積分は 0 とする．定義から明らかなように，Fisher 情報量も常に非負である．さらに，その量が 0 となるのは $\mu = \gamma$ となるときであり，またそのときに限る．

以上の量を用いて，対数 Sobolev 不等式は次のように記述される．

定理 1.1. 任意の $\mu = \rho\,\gamma \in \mathcal{P}_{\mathrm{ac}}(\mathbb{R}^n;\gamma)$ に対して，ρ が局所リプシッツ連続であれば，

$$\mathrm{Ent}_\gamma(\mu) \le \frac{1}{2} I_\gamma(\mu) \tag{1.1}$$

が成り立つ．また等号成立は μ が標準正規分布 γ，またはそれを平行移動した測度に一致するときであり，またそのときに限る．

対数 Sobolev 不等式は最初に Gross[4] によって与えられた．また等号成立条件については Carlen[2] によって調べられている．対数 Sobolev 不等式の重要な点は，その不等式内に空間次元があらわれない点である．この利点は無限次元空間上での解析を行う際に非常に有効であり，確率論などの文脈において広く利用されている．

次に Talagrand 不等式を紹介する．そのために，まず最適輸送理論の文脈で知られている最適輸送距離を導入する．一般に二つの確率測度 $\mu, \nu \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R}^n)$ に対して，μ と ν の間の L^2-Wasserstein 距離は次で与えられる：

$$W_2(\mu,\nu) \coloneqq \left(\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |x-y|^2\, d\pi(x,y) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

ここで，$\Pi(\mu,\nu)$ は μ と ν のカップリング全体の集合であり，確率測度 $\pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ が μ と ν のカップリングであるとは，

$$\pi(A \times \mathbb{R}^n) = \mu(A), \quad \pi(\mathbb{R}^n \times A) = \nu(A)$$

が任意の Borel 集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して成り立つことを指す．上記で与えられた最適輸送距離は，その名が表すように，一方の分布をもう一方の分布に輸送する際にかかるコストを最小化した量となっている．任意の $\mu, \nu \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R}^n)$ に対して常に $W_2(\mu,\nu) < +\infty$ であり，W_2 は $\mathcal{P}^2(\mathbb{R}^n)$ 上の距離関数となっている．特に $(\mathcal{P}^2(\mathbb{R}^n), W_2)$ は L^2-Wasserstein 空間と呼ばれる．最適輸送距離に関するより詳しい性質や，関連する話題などについては [7], [8] などに詳しい．

以上の量を用いて Talagrand 不等式は次のように記述される．

定理 1.2. 任意の $\mu \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R}^n)$ に対して，

$$\frac{1}{2}W_2(\mu,\gamma)^2 \leq \mathrm{Ent}_\gamma(\mu) \tag{1.2}$$

が成り立つ．等号成立は μ が標準正規分布 γ，またはそれを平行移動した測度に一致するときであり，またそのときに限る．

この不等式ははじめ Talagrand[6] によって発見され，測度の集中を容易に導くことができる不等式として考案された．この不等式の利点もまた，空間次元が不等式内にあらわれない点であることを注意しておく．

注意 1.3. これまで述べてきた対数 Sobolev 不等式と Talagrand 不等式は標準正規分布に基づくものであったが，同様の不等式は正規分布とは限らない測度に対しても考えることができる．より一般に，上述した不等式たちは重みつきの測度を備えたリーマン多様体や測度距離空間等の枠組みでも意味を成す．このような空間の上において，いつ対数 Sobolev 不等式や Talagrand 不等式が成り立つかという問題が自然に考えられるが，この問題に対する一つの回答として曲率次元条件と呼ばれる枠組みが存在する．この条件は，荒く言えばリッチ曲率の下限と次元の上限を与えるものである．より詳細な定義や，これらの条件の下での不等式の構成などについては例えば [8] に詳しい．しかしながら，本予稿ではこれらの枠組みには立ち入らない．

本予稿では (1.1) と (1.2) を適切な条件下で改良することを考える．その目的のために, 次の deficit と呼ばれる量を導入することが好ましい．与えられた $\mu \in \mathcal{P}_{\mathrm{ac}}(\mathbb{R}^n;\gamma)$ に対して，対数 Sobolev 不等式の deficit を

$$\delta_{\mathrm{LSI}}(\mu) \coloneqq \frac{1}{2}I_\gamma(\mu) - \mathrm{Ent}_\gamma(\mu)$$

によって定める．同様に $\mu \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R}^n)$ に対して，Talagrand 不等式の deficit は

$$\delta_{\mathrm{Tal}}(\mu) \coloneqq \mathrm{Ent}_\gamma(\mu) - \frac{1}{2}W_2(\mu,\gamma)^2$$

によって与えられる．いずれの場合においても，$\infty - \infty = \infty$ と約束する．(1.1), (1.2) より，これらの deficit は常に非負であることがわかる．次の節以降では，これらの deficit の非自明な下界評価について議論する．

2 分散が小さい場合の改良

この節では，我々の結果の動機となる先行研究についてご紹介したい．そのためには次の共分散行列の概念が必要となる．確率測度 $\mu \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R}^n)$ が与えられたとき，μ の共分散行列は次で与えられる：

$$\mathrm{cov}(\mu) \coloneqq \left(\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, d\mu(x) - \left(\int_{\mathbb{R}^n} x_i \, d\mu(x)\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} x_j \, d\mu(x)\right)\right)_{i,j=1,2,\ldots,n}.$$

共分散行列の直感的意味を理解するために次の Gauss 測度の例を考える．

今，$\beta > 0$ に対して，Gauss 測度 γ_β を

$$d\gamma_\beta(x) \coloneqq \frac{1}{(2\pi\beta)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2\beta}|x|^2} \, dx$$

と定める．$\beta = 1$ のときは $\gamma_1 = \gamma$ であることを注意しておく．この γ_β に対して，その共分散行列は

$$\mathrm{cov}(\gamma_\beta) = \beta I_n \tag{2.1}$$

となる．ここで I_n は n 次単位行列を指す．例えば，β が十分大きいとき，$\mathrm{cov}(\gamma_\beta)$ は大きくなるが，このときの γ_β のグラフは平たくつぶれたような山のグラフとなる．一方で，β が十分小さいとき，$\mathrm{cov}(\gamma_\beta)$ も小さくなるが，このときの γ_β のグラフは原点まわりに鋭い山を形成するようなフラフとなる．このように，共分散行列の値の大きさ（正確にはその固有値）は，その分布がどの程度散らばっているかを定量的に測る指標として理解される．

以上で導入した共分散行列を用いて，各不等式の deficit に関する次の結果が知られている．

定理 2.1 ([3], [5])**.** 定数 $\beta > 0$ は $0 < \beta \leq 1$ を満たすとし，$\mu \in \mathcal{P}^2_{\mathrm{ac}}(\mathbb{R}^n; \gamma)$ とする．このとき，μ が $\mathrm{cov}(\mu) \leq \beta I_n$ [*1] をみたすならば，

$$\delta_{\mathrm{LSI}}(\mu) \geq \delta_{\mathrm{LSI}}(\gamma_\beta) = \frac{n}{2}(\log \beta - 1 + \frac{1}{\beta}), \tag{2.2}$$

$$\delta_{\mathrm{Tal}}(\mu) \geq \frac{n(2(1-\beta) + (\beta+1)\log\,\beta)}{2(\beta-1)} \tag{2.3}$$

が成り立つ．

(2.2) は Eldan–Lehec–Shenfeld[3] らによって与えられ，(2.3) は Mikulincer[5] によって示された．定数 β が $\beta \neq 1$ のとき，(2.2), (2.3) の各右辺は真に正である．特に，(2.1) より (2.2) はシャープな改良となっている．一方で，$\beta \neq 1$ のとき，

$$\delta_{\mathrm{Tal}}(\gamma_\beta) = n(\sqrt{\beta} - \frac{1}{2}\log\beta - 1) > \frac{n(2(1-\beta) + (\beta+1)\log\,\beta)}{2(\beta-1)}$$

であることも注意しておく．特に (2.3) はシャープな改良ではないと考えられる．

定理 2.1 を受けて，次の問題が自然に考えられる：共分散行列が大きい場合には同様の結果が成り立つか．より正確には，$\beta \geq 1$ と $\mu \in \mathcal{P}^2_{\mathrm{ac}}(\mathbb{R}^n; \gamma)$ が与えられたとき，μ が $\mathrm{cov}(\mu) \geq \beta I_n$ を満たすならば，(2.2), (2.3) は成り立つか．実際，$\beta > 1$ が与えられた場合，任意の $\beta' \geq \beta$ に対して

$$\delta_{\mathrm{LSI}}(\gamma_{\beta'}) \geq \delta_{\mathrm{LSI}}(\gamma_\beta),$$

$$\delta_{\mathrm{Tal}}(\gamma_{\beta'}) \geq \delta_{\mathrm{Tal}}(\gamma_\beta) > \frac{n(2(1-\beta) + (\beta+1)\log\,\beta)}{2(\beta-1)}$$

が成り立つことが確認できるため，上の問題が正しいことが十分期待される．しかしながら，実際には上記の問題は否定的であることが [3], [5] において言及されている．実際，かれらは各々の研究において具体的な反例を与えた．ここでは δ_{LSI} に対する [3] での反例を紹介する．[5] では，δ_{Tal} に対して同様の反例を構成している．

今，各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{R}$ 上の確率測度 γ^k を中心が k^2，分散が 1 となる Gauss 測度とし，$\mathbb{R}$ 上の確率測度 μ^k を，

$$\mu^k := (1 - \frac{1}{k})\gamma + \frac{1}{k}\gamma^k$$

[*1] 一般に対称行列 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ が $A \geq B$ を満たすとは，任意の $x \in \mathbb{R}^n$ に対して，$\langle Ax, x\rangle \geq \langle Bx, x\rangle$ となることを指す．

として定める．このとき，$(\mu^k)_{k\in\mathbb{N}}$ は $k \to +\infty$ において，

$$\mathrm{cov}(\mu^k) \to +\infty$$

だが，

$$\delta_{\mathrm{LSI}}(\mu^k) \to 0$$

となることが確認できる．特に，この例は上記で述べた問題に対する反例を与えている．

しかしながら，上述したような反例がある一方で，Gauss 測度 $(\gamma_{\beta'})_{\beta'\geq\beta}$ に対して上述した問題は肯定的でもある．次節ではこのような事実を受けて，どのような枠組みであれば“共分散行列が大きい”場合にも同様の結論が得られるかについて考える．

3　分散が大きい場合の改良

前節で述べたように，共分散行列が大きい場合に deficit の改良を与えるためには，共分散行列に制限を与えるだけでは不十分であることがわかった．この節では共分散行列を考える代わりに，次のような概念を考える．

定義 3.1. 定数 $\beta > 0$ と C^2 級関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ を固定する．このとき，f が

- β-semi-log-convex であるとは，
$$\nabla^2 \log f \geq -\frac{1}{\beta} I_n.$$
- β-semi-log-concave であるとは，
$$\nabla^2 \log f \leq -\frac{1}{\beta} I_n.$$
- β-semi-log-subharmonic であるとは，
$$\Delta \log f \geq -\frac{n}{\beta}.$$

ここで，トレースを考えることにより，

$$\beta\text{-semi-log-convex} \quad \Rightarrow \quad \beta\text{-semi-log-subharmonic}$$

が直ちに従うことを注意しておく．上で導入された概念は次の命題を通して，共分散行列と関連していることがわかる．

命題 3.2. 定数 $\beta > 0$ と C^2 級関数 $f\colon \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ を固定し，f を確率密度関数にもつ確率測度 $d\mu(x) := f(x)\,dx$ は $\mu \in \mathcal{P}^2(\mathbb{R}^n)$ であるとする．このとき，

- $$\nabla^2 \log f \geq -\frac{1}{\beta} I_n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{cov}(\mu) \geq \beta I_n.$$
- $$\nabla^2 \log f \leq -\frac{1}{\beta} I_n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{cov}(\mu) \leq \beta I_n.$$

- $$\Delta \log f \geq -\frac{n}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tr}\operatorname{cov}(\mu) \geq n\beta.$$

これらの性質は特に，β-semi-log-convexity または β-semi-log-subharmonicity は分散が大きい場合に対応しており，β-semi-log-concavity は分散が小さい場合に対応していることを意味している．

これらの概念に基づいて，次の結果が確認できることが本予稿の主結果である．

定理 3.3 ([1])**.** 定数 $\beta > 0$ と $\mu \in \mathcal{P}^2_{\mathrm{ac}}(\mathbb{R}^n;\gamma)$ を固定し，$f := d\mu/dx$ は正値 C^2 級関数とする．このとき，μ と β が，$\beta \geq 1$ かつ f が *β-semi-log-subharmonic*，または，$\beta \leq 1$ かつ f が *β-semi-log-concave*，のいずれかを満たすならば，(2.2) が成り立つ．

定理 3.4 ([1])**.** 定数 $\beta > 0$ と $\mu \in \mathcal{P}^2_{\mathrm{ac}}(\mathbb{R}^n;\gamma)$ を固定し，$f := d\mu/dx$ は正値 C^2 級関数とする．このとき，μ と β が，$\beta \geq 1$ かつ f が *β-semi-log-convex* と $\nabla^2 \log f \leq 0$，または，$\beta \leq 1$ かつ f が *β-semi-log-concave*，のいずれかを満たすならば，次が成り立つ：

$$\delta_{\mathrm{Tal}}(\mu) \geq \delta_{\mathrm{Tal}}(\gamma_\beta) = n(\sqrt{\beta} - \frac{1}{2}\log\beta - 1). \tag{3.1}$$

命題 3.2 より，$\beta \geq 1$ かつ f が β-semi-log-subharmonic，または β-semi-log-convex を満たす場合は，μ の共分散行列が大きいことを意味しているため，2 節において述べた問題に対するある種の回答を与えている．とくに，定理 3.3 は Eldan–Lehec–Shenfeld[3] らによる対数 Sobolev 不等式の改良と対をなす改良であるとみなせる．一方で，$\beta \leq 1$ かつ f が β-semi-log-concave を満たす場合は，μ の共分散行列が小さい場合を意味しているため，対数 Sobolev 不等式に対する新しい改良は与えていない．一方で，Talagrand 不等式の deficit に関してはその限りではなく，Mikulincer[5] による deficit の評価よりもよい評価を提示している．

参考文献

[1] N. Bez, S. Nakamura, H. Tsuji, *Stability of hypercontractivity, the logarithmic Sobolev inequality, and Talagrand's cost inequality*, arXiv:2201.12478.

[2] E. Carlen, *Supper additivity of Fisher's information and logarithmic Sobolev inequalities*, J. Funct. Anal. **101** (1991), 194–211.

[3] R. Eldan, J. Lehec, Y. Shenfeld, *Stability of the logarithmic Sobolev inequality via the Föllmer process*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **56** (2020), 2253–2269.

[4] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. **97** (1975), 1061–1083.

[5] D. Mikulincer, *Stability of Talagrand's Gaussian transport-entropy inequality via the Föllmer process*, Israel J. Math. **242** (2021), 215–241.

[6] M. Talagrand, *Transportation cost for Gaussian and other product measures*, Geom. Funct. Anal. **6** (1996), no. 3, 587–600.

[7] C. Villani, *Topics in optimal transportation*, Graduate Studies in Mathematics, 58, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[8] C. Villani, *Optimal transport, old and new*, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

ストリングトポロジーを利用した Legendre 接触ホモロジーの研究

京都大学大学院 理学研究科 数理解析専攻
岡本幸大 (Yukihiro OKAMOTO) *

概要

接触多様体の Legendre 部分多様体に対して、Legendre 接触ホモロジーと呼ばれるアイソトピー不変量がある。これは Floer 理論の一部であり、良い条件の下、擬正則曲線を用いて定義される。しかし現状、具体例に関する研究は低次元 (Legendre 結び目) を除くと未発達である。本講演では部分多様体の単位余法束 (これは単位余接束の Legendre 部分多様体である) の Legendre 接触ホモロジーを考え、ストリングトポロジーを利用した研究を紹介する。

1 導入

1.1 シンプレクティック多様体と擬正則曲線

本稿では多様体および部分多様体は全て滑らかなものとする.

定義 1.1. W を $2n$ 次元多様体, L を W の n 次元部分多様体とする.

1. $\omega \in \Omega^2(W)$ を W 上の閉 2-形式とする. ω が非退化であるとき, ω を**シンプレクティック形式**と呼び, 組 (W, ω) を**シンプレクティック多様体**と呼ぶ.
2. $\omega|_L = 0 \in \Omega^2(L)$ が成り立つとき, L を (W, ω) の **Lagrange 部分多様体**であるという.

$J \in \mathrm{End}(TW)$ を W 上の概複素構造とする. テンソル $g_J := \omega(\cdot, J\cdot)\colon TW^{\otimes 2} \to \mathbb{R}$ が W 上の Riemann 計量となるとき, J は ω に**整合的**であるという. (ω に整合的な概複素構造全体の空間は空でなく, さらに可縮である.)

定義 1.2. (Σ, j) を Riemann 面とする (j は複素構造). 滑らかな写像 $u\colon \Sigma \to W$ が非線形 Cauchy-Riemann 方程式

$$(du)^{0,1} = 0 \tag{1}$$

を満たすとき、u を**擬正則曲線**と呼ぶ. ここで $(du)^{0,1} := \frac{1}{2}(du + J \circ du \circ j) \in \Omega^{0,1}(u^*TW)$ は du の反 $\mathbb{C}$-線形部分である.

Σ の局所座標 $z = s + \sqrt{-1}t$ を取った時, 方程式 (1) は局所的に $\partial_s u + J\partial_t u = 0$ と表せる. これは

* yukihiro@kurims.kyoto-u.ac.jp

楕円型偏微分方程式である．また, 本稿で扱う Σ は全て境界付きである．このとき一般に, $\partial\Sigma$ の各連結成分 $\partial_\alpha\Sigma$ に対して Lagrange 部分多様体 $L_\alpha \subset W$ を選び, 擬正則曲線 $u\colon \Sigma \to W$ に対して境界条件 $u(\partial_\alpha\Sigma) \subset L_\alpha$ を課す．これは非線形 Cauchy-Riemann 写像に対して Fredholm 性を成立させるためである．理想的な条件の下, 境界条件を課した擬正則曲線全体の空間は有限次元多様体の構造を持ち, さらに「Gromov コンパクト化」と呼ばれるコンパクト化が存在する．詳細は [9] を参照する．

Gromov の 1985 年の論文から始まり, 擬正則曲線の空間 (モジュライ空間) を幾何学的に調べることでシンプレクティック多様体や Lagrange 部分多様体の研究が発展した．特に Hamiltonian Floer ホモロジーや Lagrangian Floer ホモロジーなどの代数的な不変量が, 次元が 0 のモジュライ空間に属する擬正則曲線の個数を数えることで定義され, その計算や代数的性質の解明が進められてきた．

1.2 Legendre 接触ホモロジー

定義 1.3. M を $(2n-1)$ 次元多様体, Λ を M の $(n-1)$ 次元部分多様体とする．

1. M 上の 1-形式 $\alpha \in \Omega^1(M)$ が任意の $x \in M$ において次の条件を満たすとき, α を M 上の**接触形式**であるという:

$$\alpha_x \neq 0 \text{ かつ } (d\alpha)_x|_{\operatorname{Ker}\alpha_x} \text{ は非退化である.}$$

   組 (M,α) を接触形式 α を持つ**接触多様体**と呼ぶ．
2. $\alpha|_\Lambda = 0 \in \Omega^1(\Lambda)$ を満たすとき, Λ は (M,α) の **Legendre 部分多様体**であるという．
3. 接触形式 α に対して, M 上のベクトル場 R_α が条件

$$\iota_{R_\alpha}\alpha = 1,\ \iota_{R_\alpha}(d\alpha) = 0$$

   によって一意に定まる．これを α に付随する **Reeb ベクトル場**と呼ぶ．R_α の積分曲線 $c\colon [0,T] \to M$ $(T>0)$ であって $c(0), c(T) \in \Lambda$ を満たすものを, Λ の **Reeb コード**と呼ぶ．

2 つの Legendre 部分多様体 Λ_0, Λ_1 に対して, Λ_0 から Λ_1 への部分多様体のアイソトピー $(\Lambda_t)_{0\le t\le 1}$ であって, 全ての $t \in [0,1]$ において Λ_t が Legendre 部分多様体であるものが存在するとき, Λ_0 は Λ_1 に **Legendre アイソトピック**であるという．接触幾何の問題として, この同値関係による Legendre 部分多様体の分類がある．この章で導入する **Legendre 接触ホモロジー**は Legendre アイソトピーに関する不変量であり, この問題を解くための強力な道具である．

接触多様体 (M,α) とその Legendre 部分多様体 Λ に対して, シンプレクティック多様体 $(\mathbb{R}\times M, d(e^r\alpha))$ と Lagrange 部分多様体 $\mathbb{R}\times\Lambda$ が付随する (r は $\mathbb{R}$ の座標である)．$\mathbb{R}\times M$ 内の擬正則曲線 (境界条件は $\mathbb{R}\times\Lambda$ で与えられる) を利用した接触多様体や Legendre 部分多様体の不変量は, Chekanov[3] や Eliashberg[7] によって導入され, 現在は「シンプレクティック場の理論」の一部と見なされている．

不変量の定義の準備を行う．まず, $D := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1\}$ とする．$\mathbf{p} = \{1, p_1, \dots, p_m\} \subset \partial D$ $(1, p_1, \dots, p_m$ は $1 \in \partial D$ から時計回りに並べた順序) に対して境界付き Riemann 面 $D_{\mathbf{p}} := D \setminus \mathbf{p}$ を定義する．各点 $1, p_1, \dots, p_m$ に対して双正則写像 $\begin{cases} \psi_0\colon [0,\infty)\times[0,1] \to D\setminus\{1\}, \\ \psi_k\colon (-\infty,0]\times[0,1] \to D\setminus\{p_k\}\ (k=1,\dots,m) \end{cases}$

は $\begin{cases} \psi_0([0,\infty)\times\{0,1\}) \subset \partial D \setminus \{1\}, \\ \psi_k((-\infty,0]\times\{0,1\}) \subset \partial D \setminus \{p_k\}, \end{cases}$ 及び $t \in [0,1]$ について一様に $\begin{cases} \lim_{s\to\infty} \psi_0(s,t) = 1, \\ \lim_{s\to-\infty} \psi_k(s,t) = p_k, \end{cases}$ を満たすものとする.

さらに $s \in \mathbb{R}$ に対して, $\tau_s \colon \mathbb{R}\times M \to \mathbb{R}\times M \colon (r,x) \mapsto (r+s,x)$ とする. J を $d(e^r\alpha)$ に整合的な $\mathbb{R}\times M$ 上の概複素構造であって, $J(\partial_r) = R_\alpha$ かつ全ての $s \in \mathbb{R}$ に対して $\tau_s^* J = J$ を満たすものとする.

本稿では [5, 6] の結果を参照する. そのために以下の技術的な仮定を置く:

- $c_1(TP) = 0$ を満たす Liouville 多様体 (P,λ) と微分同相 $\varphi \colon M \to P\times\mathbb{R}$ が存在し, $\varphi^*(dz+\lambda) = \alpha$ が成り立つ (z は $\mathbb{R}$ の座標である).
- Λ はコンパクトなスピン多様体である. さらに Maslov class と呼ばれる $H^1(\Lambda,\mathbb{Z})$ の元が 0 である.

この時, generic な Λ と J に対して次数付き R-微分代数 $(\mathcal{A}_*(\Lambda),\partial)$ が定義される [5, 6]. ただし本稿では $R \in \{\mathbb{Z},\mathbb{R},\mathbb{Z}[\pi_1(\Lambda)]\}$ とする. そのホモロジー

$$\mathrm{LCH}_*(M,\Lambda;R) \coloneqq \operatorname{Ker}\partial / \operatorname{Im}\partial$$

を (M,Λ) の **Legendre 接触ホモロジー**と呼ぶ. この次数付き R-代数の同型類は J の取り方に依らず, さらに Λ の Legendre アイソトピーで不変である.

次に, $(\mathcal{A}_*(\Lambda),\partial)$ の構成について説明する. $\mathcal{A}_*(\Lambda)$ は Λ の Reeb コード全体で自由に生成された単位的非可換な次数付き R-代数である. ここで Reeb コードの次数は「Maslov 指数」を用いて定義される. $\partial \colon \mathcal{A}_*(\Lambda) \to \mathcal{A}_{*-1}(\Lambda)$ は $R \in \{\mathbb{Z},\mathbb{R}\}$ の場合, 次の式によって定義される微分写像である:

$$\partial c \coloneqq \sum_{|c_1|+\cdots+|c_m|=|c|-1} \#_{\mathrm{sign}}\left(\mathcal{M}_J(c;c_1,\ldots,c_m)/\mathbb{R}\right) c_1\cdots c_m$$

ただし, $\#_{\mathrm{sign}}$ は向きを考慮して数えた個数を表す. ($R = \mathbb{Z}[\pi_1(\Lambda)]$ の場合は省略する.) ここで, Λ の Reeb コード $c \colon [0,T] \to M,\ c_k \colon [0,T_k] \to M\ (k=1,\ldots,m)$ に対して, $\mathcal{M}_J(c;c_1,\ldots,c_m)$ は J についての擬正則曲線 $u \colon D_{\mathbf{p}} \to \mathbb{R}\times M$ ($\mathbf{p} = \{1,p_1,\ldots,p_m)$ であって, 以下の条件を満たすもののモジュライ空間である:

- $u(\partial D_{\mathbf{p}}) \subset \mathbb{R}\times\Lambda$.
- $s_0,s_1,\ldots,s_m \in \mathbb{R}$ が存在し,

$$\begin{cases} \lim_{s\to\infty}(\tau_{-s}\circ u\circ\psi_0)(s,t) = (s_0,c(Tt)), \\ \lim_{s\to-\infty}(\tau_{-s}\circ u\circ\psi_k)(s,t) = (s_k,c_k(T_k t)) \quad (k=1,\ldots,m), \end{cases}$$

  が成り立つ. ただし収束に関する正確な定義は [5] を見よ.

この空間の上には自然な $\mathbb{R}$ 作用 $s\cdot u \coloneqq \tau_s\circ u$ $(s\in\mathbb{R})$ が存在する. $\mathcal{M}_J(c;c_1,\ldots,c_m)/\mathbb{R}$ は有限次元多様体の構造を持ち, Λ のスピン構造から向きが定められる. その次元は $|c| - 1 - \sum_{k=1}^m |c_k|$ で与えられる.

本講演ではこの Legendre アイソトピー不変量を, 以下で定義される接触多様体と Legendre 部分多様体の組 (UT^*Q,Λ_K) に適用する: 一般に Q を多様体, K をその部分多様体とする. 余

接束 T^*Q は標準的な Liouville 形式 λ_Q を持つ．Q 上に Riemann 計量を与えた時, 単位余接束 $UT^*Q \coloneqq \{(q,p) \in T^*Q \mid |p| = 1\}$ は標準的な接触形式 $\alpha_Q \coloneqq \lambda_Q|_{UT^*Q}$ を持つ．さらに, K の単位余法束

$$\Lambda_K \coloneqq \{(q,p) \in UT^*Q \mid q \in K,\ p|_{T_qK} = 0\}$$

は (UT^*Q, α_Q) の Legendre 部分多様体である．特に, $Q = \mathbb{R}^n$ かつ標準的な計量が与えられたとき, 微分同相

$$\varphi\colon UT^*\mathbb{R}^n \to T^*S^{n-1} \times \mathbb{R}\colon (q,p) \mapsto ((p, q - \langle q,p\rangle p), \langle q,p\rangle)$$

について $\varphi^*(dz + \lambda_{S^{n-1}}) = \alpha_{\mathbb{R}^n}$ が成り立つ．従って [5, 6] の結果から, K の単位余法束の Legendre 接触ホモロジー

$$\mathrm{LCH}_*(UT^*\mathbb{R}^n, \Lambda_K; R)$$

が定義される．

注意 1.4. $\mathrm{LCH}_*(UT^*Q, \Lambda_K)$ は $Q = \mathbb{R}^n$ 以外の場合でも適当な条件の下で定義可能だと思われるが, 講演者が知る限り, 現時点で厳密な構成を与えた文献は存在しない．

2 Floer 理論とストリングトポロジー

擬正則曲線とループ及びパス空間の関係は Floer 理論の研究の中で注目されてきた．代表的な結果として以下が知られている．(ホモロジーは全て $\mathbb{Z}$ 係数とする．証明は [1] を参照せよ.)

定理 2.1. Q を閉スピン多様体とする．このとき, T^*Q のシンプレクティックコホモロジーは, Q の自由ループ空間のホモロジーと同型である．この同型を通して, シンプレクティックコホモロジーの pair-of-pants 積はループ空間のホモロジー上の Chas-Sullivan 積に一致する．

第一の主張は「Viterbo の定理」と呼ばれる [12]．第二の主張に現れる Chas-Sullivan 積とは [2] によって創始された**ストリングトポロジー**の一部である．これはパスの連結や分裂からホモロジーに誘導される代数的操作を研究する代数的トポロジーの一分野である．

Q を Riemann 多様体, K を Q のコンパクト部分多様体とする．あるクラスの組 (Q,K) に対して (UT^*Q, Λ_K) の Legendre 接触ホモロジーが定義されたとする．すると, 次の naive な主張が成り立つことが期待される:

主張. 各 (Q,K) に対して純粋にトポロジー的な手法で定義される, すなわち擬正則曲線を用いない, 次数付き R-代数であって, 次を満たすものが構成できる:

- 同型類は K の滑らかなアイソトピーで不変である．
- $\mathrm{LCH}_*(UT^*Q, \Lambda_K; R)$ と同型である．

この主張は $Q = \mathbb{R}^3$ かつ K が結び目の場合には既に確認されている．Cieliebak, Ekholm, Latschev, Ng は [4] において, $\operatorname{codim} K = 2$ かつ向き付けられた組 (Q,K) に対して, 「**ストリングホモロジー**」と呼ばれる次数付き $\mathbb{Z}[\pi_1(\Lambda_K)]$-代数を定義した．本稿ではこれを $H_*^{\mathrm{CELN}}(Q,K)$ と書

く．この名前は構成にストリングトポロジーのアイデアを用いていることに由来する．このアイデアについては次章及び講演内で説明する．

K が $Q = \mathbb{R}^3$ 内の結び目であるとき, 彼らは次の二つの結果を証明した．

定理 2.2. [4]

(i) 次数 0 の部分 $H_0^{\mathrm{CELN}}(\mathbb{R}^3, K)$ は, K の**コード代数**と同型である．このコード代数とは, $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ と $\mathbb{Z}[\pi_1(\Lambda_K)]$ で生成された代数である．(定義は [4, 10] を参照せよ.)

(ii) $\mathbb{Z}[\pi_1(\Lambda_K)]$-代数の同型

$$\mathrm{LCH}_0^{\mathrm{refine}}(UT^*\mathbb{R}^3, \Lambda_K; \mathbb{Z}[\pi_1(\Lambda_K)]) \cong H_0^{\mathrm{CELN}}(\mathbb{R}^3, K)$$

が存在する．ここで, $\mathrm{LCH}_*^{\mathrm{refine}}$ は 1.2 章で述べた不変量 LCH_* の精密化を意味する．

結果 (ii) は $Q = \mathbb{R}^3$ かつ K が結び目の場合に, 先に述べた naive な主張が次数 0 において成立することを意味し, 結果 (i) はそのトポロジー的な表示の次数 0 の部分について, 具体的な計算が可能であることを保証する．

本研究は彼らの $H_*^{\mathrm{CELN}}(Q, K)$ の構成を拡張することで, $\mathrm{LCH}_p(UT^*Q, \Lambda_K; R)$ のトポロジー的な表示を Q の次元, K の余次元, 次数 p に制約なく与えること, そして得られたトポロジー的な表示を計算することで, Legendre 部分多様体の分類へ応用することを目指している．

注意 2.3. [4] でも述べられているが, 結果 (ii) は 一般の $\mathbb{R}^n$ と $\operatorname{codim} K = 2$ の $K \subset \mathbb{R}^n$ に対しても成り立つと予想される．しかし (ii) の同型が高次数でも成立するかは不明である．

3 主結果

[11] で講演者が得た主結果は次のように述べられる:

- 一般の向き付けられた多様体とその向き付けられた部分多様体の組 (Q, K) に対して, ある次数付き $\mathbb{R}$-代数 $H_*^{\mathrm{string}}(Q, K)$ を, トポロジー的な手法のみを用いて構成した．

ここで, K の余次元に制約が無く, 全ての次数で定義されていることに注意する．さらに, この $H_*^{\mathrm{string}}(Q, K)$ に関する基本的な性質を示した．

命題 3.1. [11]

1. $H_*^{\mathrm{string}}(Q, K)$ は K の滑らかなアイソトピーで不変である．
2. $\operatorname{codim} K = 2$ の場合, $H_0^{\mathrm{string}}(Q, K)$ は $H_0^{\mathrm{CELN}}(Q, K)$ を簡約した $\mathbb{R}$-代数と同型である．

この章では $H_*^{\mathrm{string}}(Q, K)$ の構成, 具体例の計算, そして Legendre 接触ホモロジーとの関係について説明する．

3.1 不変量の構成

ここでは構成の概略について説明し, 講演内でより詳細に述べる. まず, $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と $a \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して, P_m^a を m 個のパスの列 $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ であって, 以下を満たすものからなる空間とする:

- $\gamma_k \colon [0, T_k] \to Q$ は滑らかなパスであって, $\gamma(0), \gamma(T_k) \in K$ を満たす $(k = 1, \ldots, m)$.
- $\sum_{k=1}^m \mathrm{length}\gamma_k < a$

$m = 0$ の場合は P_0^a は 1 点集合とする. Cieliebak らは [4] で P_m^a の特異鎖を用いたのに対し, 我々は P_m^a の「**de Rham 鎖**」を用いる. de Rham 鎖の定義は [8] を参照する. これは $\mathbb{Z}$ 係数では議論できないが, 「鎖のファイバー積」が自然に定義できる点が特徴であり, 今回の構成に適していた.

始めに, (Q, K) に対して幾つかの補助的なデータを選ぶ. この中には Q 上の完備な Riemann 計量が含まれる. $H_*^{\mathrm{string}}(Q, K)$ は次数付きベクトル空間として

$$H_*^{\mathrm{string}}(Q, K) \coloneqq \varinjlim_{a \to \infty} \varprojlim_{(\varepsilon, \delta) \colon \varepsilon \to 0} H_* \left(\bigoplus_{m=0}^{\infty} C_*^{<a}(\varepsilon, m), D_\delta \right)$$

と定義される. ここで, (ε, δ) は $\varepsilon > 0$ と de Rham 鎖 δ のペアであり, $(\bigoplus_{m=0}^{\infty} C_*^{<a}(\varepsilon, m), D_\delta)$ は $a \in \mathbb{R}_{>0}$ と (ε, δ) に依存して構成される鎖複体である.

各 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $C_*^{<a}(\varepsilon, m)$ は $P_m^{a+m\varepsilon}$ の de Rham 鎖で生成される次数付き $\mathbb{R}$-ベクトル空間をある同値関係で割ったものである. すると, de Rham 鎖の境界作用素から

$$\partial^{\mathrm{dR}} \colon C_*^{<a}(\varepsilon, m) \to C_{*-1}^{<a}(\varepsilon, m)$$

が定義される. さらに, $k = 1, \ldots, m$ に対して, δ に依存する次数 (-1) の線形写像

$$f_{k,\delta} \colon C_*^{<a}(\varepsilon, m) \to C_{*-1}^{<a}(\varepsilon, m+1)$$

が定義される. この作用素はストリングトポロジーのある余積に関係し, $H_*^{\mathrm{string}}(Q, K)$ の構成の核心である. これらを用いて, $D_\delta(x)$ $(x \in C_*^{<a}(\varepsilon, m))$ は

$$D_\delta(x) \coloneqq \partial^{\mathrm{dR}}(x) + \sum_{k=1}^{m} f_{k,\delta}(x)$$

と定義される. $H_*^{\mathrm{string}}(Q, K)$ の $\mathbb{R}$-代数としての積構造は自然な写像

$$P_m^a \times P_{m'}^{a'} \to P_{m+m'}^{a+a'} \colon ((\gamma_1, \ldots, \gamma_m), (\gamma_1', \ldots, \gamma_{m'}')) \to (\gamma_1, \ldots, \gamma_m, \gamma_1', \ldots, \gamma_{m'}')$$

から誘導され, 単位元は $1 \in \mathbb{R} = C_0^{<a}(\varepsilon, 0)$ から誘導される. また, $H_*^{\mathrm{string}}(Q, K)$ の同型類は最初に選んだ補助的なデータに依存しない.

3.2 具体例の計算

[11] では以下で与える具体例 $(\mathbb{R}^{2d-1}, K_i)$ $(d \geq 2,\ i = 0, 1)$ に対して, $H_*^{\mathrm{string}}(\mathbb{R}^{2d-1}, K_i)$ を計算した.

$z_2^* \in \mathbb{R}^{d-1} \setminus \{0\}$ とし, $\mathbb{R}^{2d-1} = \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d-1}$ の $(d-1)$ 次元部分多様体 K_0, K_1 を

$$K_0 \coloneqq \{(z_0, z_1, 0) \in \mathbb{R}^{2d-1} \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\} \sqcup \{(z_0, z_1, z_2^*) \in \mathbb{R}^{2d-1} \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\},$$
$$K_1 \coloneqq \{(z_0, z_1, 0) \in \mathbb{R}^{2d-1} \mid |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1\} \sqcup \{(0, z_1, z_2) \in \mathbb{R}^{2d-1} \mid |z_1 - 1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$

で定義する. これらはそれぞれ $\mathbb{R}^3$ 内の自明な絡み目と Hopf 絡み目の高次元化となっている. $\mathbb{R}^{2d-1}$ には標準的な向きを与える. K_0, K_1 の各連結成分の向きは, $S^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$ (これは単位球の境界として向き付けられる) との自然な同一視から誘導される向きと符号 $(-1)^{d-1}$ の分だけ異なる.

以下で定義する集合 $\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$ を用いて, $\mathcal{A}_*^0$ を $\mathcal{C}$ が自由生成する単位的非可換な次数付き $\mathbb{R}$-代数, $\mathcal{A}_*^1$ を $\mathcal{C} \cup \mathcal{D} \cup \mathcal{E}$ が自由生成する単位的非可換な次数付き $\mathbb{R}$-代数とする:

$$\mathcal{C} \coloneqq \{c_{i,j}^0\}_{i \neq j} \cup \{c_{i,i}^1\}_i \cup \{c_{i,j}^1, \bar{c}_{i,j}^1\}_{i \neq j} \cup \{c_{i,j}^2\}_{i,j},$$
$$\mathcal{D} \coloneqq \{d_{i,i}^1\}_i \cup \{d_{i,j}^2\}_{i,j},\ \mathcal{E} \coloneqq \{e_{i,i}^1\}_i \cup \{e_{i,j}^2\}_{i,j},$$

ここで i, j は $\{0, 1\}$ を走る. 次数は以下のように与える:

$$|c_{i,j}^0| = d-2,\ |c_{i,i}^1| = |c_{i,j}^1| = |\bar{c}_{i,j}^1| = 2d-3\ (i \neq j),$$
$$|c_{i,i}^1| = 2d-3,\ |c_{i,j}^2| = 3d-4,$$
$$|d_{i,j}^1| = 2d-3,\ |d_{i,j}^2| = 3d-4,\ |e_{i,i}^1| = 2d-4,\ |e_{i,j}^2| = 3d-5.$$

これらから, 次数付き微分代数 $(\mathcal{A}_*^0, 0)$, $(\mathcal{A}_*^1, D)$ を定義する. ここで $D\colon \mathcal{A}_*^1 \to \mathcal{A}_{*-1}^1$ は, 各生成元に対して, 以下のように定義される:

$$Dc_{i,j}^0 = 0,\ Dc_{0,0}^1 = (-1)^d e_{0,0}^1 + c_{0,1}^0 c_{1,0}^0,\ Dc_{1,1}^1 = (-1)^d e_{1,1}^1 + c_{1,0}^0 c_{0,1}^0,$$
$$Dc_{i,j}^1 = D\bar{c}_{i,j}^1 = 0,$$
$$Dc_{0,0}^2 = -e_{0,0}^2 + (\bar{c}_{0,1}^1 c_{1,0}^0 + (-1)^d c_{0,1}^1 c_{1,0}^0),\ Dc_{1,1}^2 = -e_{1,1}^2 + (\bar{c}_{1,0}^1 c_{0,1}^0 + (-1)^d c_{1,0}^1 c_{0,1}^0),$$
$$Dc_{0,1}^2 = -e_{0,1}^2,\ Dc_{1,0}^2 = -e_{1,0}^2,$$
$$Dd_{i,i}^1 = e_{i,i}^1,\ Dd_{i,j}^2 = e_{i,j}^2,\ De_{i,i}^1 = 0,\ De_{i,j}^2 = 0.$$

命題 3.2. [11]

1. 以下の次数付き $\mathbb{R}$-代数の同型が存在する：

$$H_*^{\mathrm{string}}(\mathbb{R}^{2d-1}, K_0) \cong H_*(\mathcal{A}_*^0, 0),$$
$$H_*^{\mathrm{string}}(\mathbb{R}^{2d-1}, K_1) \cong H_*(\mathcal{A}_*^1, D).$$

   ここで $H_*(\cdot)$ は次数付き微分代数のホモロジーを意味する.
2. $H_*(\mathcal{A}_*^1, 0)$ と $H_*(\mathcal{A}_*^2, D)$ は同型でない. したがって, $H_*^{\mathrm{string}}(\mathbb{R}^{2d-1}, K_1) \ncong H_*^{\mathrm{string}}(\mathbb{R}^{2d-1}, K_2)$ が示される.

注意 3.3. K_0 の場合の計算は K_1 の場合と比較すると容易である. $\Delta \subset (S^{d-1} \sqcup S^{d-1})^2$ を対角埋込の像とすると, $H_*(\mathcal{A}_*^0, 0) = \mathcal{A}_*^0$ は $H_{*-d+2}((S^{d-1} \sqcup S^{d-1})^2, \Delta)$ のテンソル代数と一致する.

3.3 Legendre 接触ホモロジーとの関係

3.1 章で説明した $H_*^{\mathrm{string}}(Q,K)$ に対して次の予想を立て, その証明の方針を与えた. 解析的な詳細を含めた厳密な証明は別の論文として準備中である.

予想. 次数付き $\mathbb{R}$-代数の同型

$$\Phi\colon \mathrm{LCH}_*(UT^*\mathbb{R}^n,\Lambda_K;\mathbb{R}) \to H_*^{\mathrm{string}}(\mathbb{R}^n,K)$$

が存在する.

注意 3.4. $Q=\mathbb{R}^n$ 以外の場合も, 注意 1.4 で述べたように左辺の Legendre 接触ホモロジーが定義されるならば, この予想は拡張可能であると考えられる.

証明の計画を 4 つのステップに分ける (以下, $\varepsilon>0$ は十分小さいものとする):

1. $\mathcal{A}_*^{<a}(\Lambda_K)$ を, $\mathcal{A}_*(\Lambda_K)$ の $\mathbb{R}$-部分空間であって, $\sum_{k=1}^m \int (c_k)^*\alpha < a$ を満たす語 $c_1\cdots c_m$ で生成されるものとする. すると部分複体 $(\mathcal{A}_*^{<a}(\Lambda_K),\partial)$ が定義される. 我々は特定の δ を取り, $(\mathcal{A}_*^{<a}(\Lambda_K),\partial)$ から $(\bigoplus_{m=0}^\infty C_*^{<a}(\varepsilon,m),D_\delta)$ へのチェイン写像 $\Phi_\varepsilon^{<a}$ を定義する. $\Phi_\varepsilon^{<a}$ の構成には $T^*\mathbb{R}^n$ 内の擬正則曲線であって, 境界条件が二つの Lagrange 部分多様体 (i) $T^*\mathbb{R}^n$ のゼロセクション, (ii) K の余法束, で与えられるもののモジュライ空間を利用する. このモジュライ空間のコンパクト化の境界を観察することで, 3.1 章で言及したストリングトポロジーの操作が現れる.
2. $(\Phi_\varepsilon^{<a})_*\colon H_*(\mathcal{A}_*^{<a}(\Lambda_K),\partial) \to H_*(\bigoplus_{m=0}^\infty C_*^{<a}(\varepsilon,m),D_\delta)$ が, $\varepsilon\to 0$, $a\to\infty$ の極限を取った時, 次数付き $\mathbb{R}$-代数の準同型

$$\Phi\colon \mathrm{LCH}_*(UT^*\mathbb{R}^n,\Lambda_K;\mathbb{R}) \to H_*^{\mathrm{string}}(\mathbb{R}^n,K)$$

   を誘導することを確かめる.
3. 任意の $c\in\mathbb{R}_{>0}$ に対して $a,b\in\mathbb{R}_{>0}$ $(a<c<b)$ であって, $\Phi_\varepsilon^{<b}$ が誘導する商複体の間のチェイン写像

$$\Phi_\varepsilon^{[a,b)}\colon \mathcal{A}_*^{<b}(\Lambda_K)/\mathcal{A}_*^{<a}(\Lambda_K) \to \bigoplus_{m=0}^\infty C_*^{<b}(\varepsilon,m)/C_*^{<a}(\varepsilon,m)$$

   が擬同型であるものが存在することを示す.
4. ステップ 3 の結果から, 任意の $b\in\mathbb{R}_{>0}$ に対して $\Phi_\varepsilon^{<b}$ が擬同型であることを示す. するとステップ 2 により Φ が同型であることが証明される.

参考文献

[1] M. Abouzaid. Symplectic cohomology and Viterbo's theorem. In *Free loop spaces in geometry and topology*, volume 24 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 271–485. Eur. Math. Soc., Zürich, 2015.

[2] M. Chas and D. Sullivan. String topology. *arXiv preprint math/9911159*, 1999.

[3] Y. Chekanov. Differential algebra of Legendrian links. *Invent. Math.*, 150(3):441–483, 2002.

[4] K. Cieliebak, T. Ekholm, J. Latschev, and L. Ng. Knot contact homology, string topology, and the cord algebra. *J. Éc. polytech. Math.*, 4:661–780, 2017.

[5] G. Dimitroglou Rizell. Lifting pseudo-holomorphic polygons to the symplectisation of $P \times \mathbb{R}$ and applications. *Quantum Topol.*, 7(1):29–105, 2016.

[6] T. Ekholm, J. Etnyre, and M. Sullivan. Legendrian contact homology in $P \times \mathbb{R}$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(7):3301–3335, 2007.

[7] Y. Eliashberg. Invariants in contact topology. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998)*, number Extra Vol. II, pages 327–338, 1998.

[8] K. Irie. A chain level Batalin-Vilkovisky structure in string topology via de Rham chains. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (15):4602–4674, 2018.

[9] D. McDuff and D. Salamon. *J-holomorphic curves and symplectic topology*, volume 52 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2012.

[10] L. Ng. Framed knot contact homology. *Duke Math. J.*, 141(2):365–406, 2008.

[11] Y. Okamoto Toward a topological description of Legendrian contact homology of unit conormal bundles. *to appear.*

[12] C. Viterbo. Generating functions, symplectic geometry, and applications. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 537–547. Birkhäuser, Basel, 1995.

ユークリッド空間の余接束における概正則円盤の具体的記述について

千葉大学大学院 融合理工学府
数学情報科学専攻 数学・情報数理学コース
鈴木英正 (Hidemasa SUZUKI)

概要

シンプレクティック多様体におけるフレアーホモロジーや深谷圏を具体的に構成するにあたって，概正則円盤の数え上げを欠かすことはできない．それが困難である 1 つの理由として具体的に構成されている概正則円盤の例が少ないことが挙げられる．本稿は勾配樹木と概正則円盤を定義し，$T^*\mathbb{R}$ における直線に囲まれる概正則円盤について，その基本的な例を与える Schwarz-Christoffel 写像について解説したのちに，それを応用した概正則円盤の構成例について紹介する．

1 導入

深谷圏の具体的な構成やラグランジュ交差のフレアーホモロジーの具体的な計算は困難な場合が多い．それはフレアー鎖複体における境界準同型や深谷圏における射の高次の積を考える上で概正則円盤の数え上げは必須であるが，具体的に構成されるラグランジュ部分多様体たちを境界にもつ概正則円盤の例は少ないことが 1 つの要因である．一般に，多様体 M の余接束 T^*M のラグランジュ切断は M 上の関数の外微分のグラフとして記述できる．論文 [1] は与えられた複数の T^*M のラグランジュ切断が零切断に十分に近いとき，それらに囲まれる T^*M 上の概正則円盤のモジュライ空間がラグランジュ切断に対応する M 上の関数で構成される勾配樹木のモジュライ空間と多様体として微分同相であることを示した．本稿では $M = \mathbb{R}$，かつラグランジュ切断が全てアファインであるときについて，上述の勾配樹木と概正則円盤について議論する．まず，深谷圏の積構造に対応する，関数が 3 つの場合の勾配樹木を分類する．一方，単位円盤から複素平面内の多角形への双正則写像として Schwarz-Christoffel 写像が存在する．これにより，$M = \mathbb{R}$ の場合，勾配樹木に対応する概正則円盤は 3 つの直線に囲まれる三角形への Schwarz-Christoffel 写像で記述できる．さらに，$M = \mathbb{R}^2$ においても Schwarz-Christoffel 写像を応用した勾配樹木に対応する概正則円盤の具体的構成例について紹介する．

2　準備

2.1　勾配樹木と概正則円盤

勾配樹木と概正則円盤を定義する前に次を定義する．

定義 2.1. ループを持たない 1 次元有限単体複体を**樹木**という．また，樹木を T として T に含まれる 0 次元単体複体 v と 1 次元単体複体 e をそれぞれ T の**頂点**，T の**辺**という．特に T の頂点 v がただ 1 つの辺にのみ含まれるとき，その v を T の**端点**という．

この樹木を単位円に樹木の端点が円周上に写像するように埋め込むと，単位円は有限個の領域に分割される（図 1）．そこで次を定義する．以下，D を複素平面上の原点中心の単位円とする．

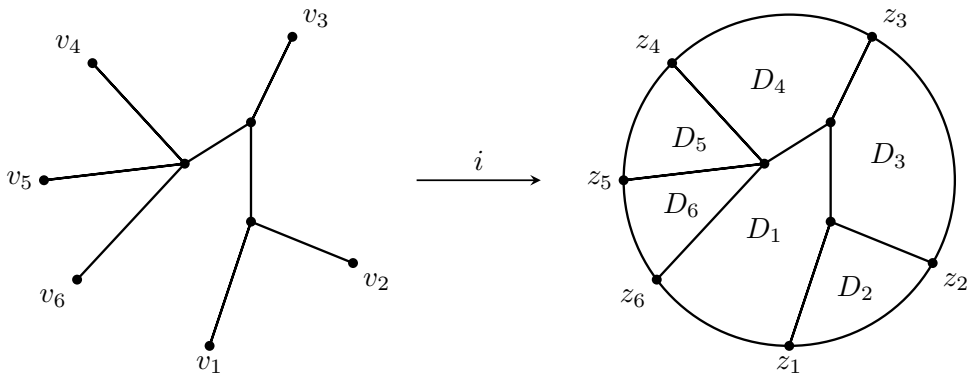


図 1　樹木による単位円の分割

定義 2.2. T を樹木とする．$i : T \longrightarrow D$ が任意の端点 $v \in T$ に対して $i(v) \in \partial D$ が成り立ち，$i(T) \cap \partial D$ が T の全ての端点からなるような埋め込みであるとき，組 (T, i) のことを**リボン樹木**という．

(T, i) を $\#\{i(T) \cap \partial D\} = k$ を満たすリボン樹木であるとする．この k 個の点を反時計回りに $z_1, z_2, \cdots, z_k$ と番号づけをし，それぞれの逆像を v_i とする．そして v_i を端点に持つ辺を e_i とする．さらに $i(T)$ によって分割された D の領域を次のように番号をつける．辺 $i(e_i)$ を点 z_i から D の内部に進む時に $i(e_i)$ の左側に隣接する領域を D_i，右側に隣接する領域を D_{i+1} とする（$D_{n+1} = D_1$ であることに注意）．このとき，T がループを持たないことから T を構成するすべての辺の i による像は必ずある 2 つの領域 D_i, D_j に挟まれる．これらを踏まえて以下のように多様体 M 上の勾配樹木と余接束 T^*M 内の概正則円盤を定義する．

定義 2.3. M を多様体，g をその多様体がもつリーマン計量，$f_1, \cdots, f_k$ を任意の i に対して $f_{i+1} - f_i (f_{k+1} = f_1)$ がモース関数となるような M 上の実数値関数とする．また，(T, i) を $\#\{i(T) \cap \partial D\} = k$ を満たすリボン樹木とし，$\{v_1, \ldots, v_k\}$ を T の端点全体の集合とする．このとき，連続写像 $I : T \longrightarrow M$ に対して

- p_i を $f_{i+1} - f_i$ の非退化な臨界点とすると $I(v_i) = p_i$
- e_i を $(-\infty, 0]$ と同一視して

$$\frac{dI|_{e_i}}{dt} = -grad_g(f_{i+1} - f_i) \text{ (以下 } grad_g \text{は勾配ベクトル場)}$$

- $e \neq e_i (i = 1, 2, \cdots, k)$ のとき e を $[0, l(e)]$（$l(e)$ は e の長さに相当）と同一視して，更に $D_{lef(e)}, D_{rig(e)}$ をそれぞれ $i(e)$ の向きに対して左に隣接している領域と右に隣接している領域とすると

$$\frac{dI|_e}{dt} = -grad_g(f_{rig(e)} - f_{lef(e)})$$

が成り立つとき，I またはその像を M 上の**勾配樹木**という．

本稿では上で定義した勾配樹木を構成した上でそれに対応した概正則円盤を具体的に構成する．概正則円盤を定義する前にシンプレクティック多様体とそのラグランジュ部分多様体について定義する．

定義 2.4. M を $2n$ 次元実多様体とする．M が $\omega^{\wedge n} \neq 0$ となる M 上の閉 2 次形式 ω をもつとき，M を**シンプレクティック多様体**という．L を M の n 次元部分多様体とし，$\omega|_L = 0$ を満たすとき，L を M の**ラグランジュ部分多様体**という．

さらに，シンプレクティック多様体は偶数次元の実多様体だから，概複素構造をもつ．

定義 2.5. $J : M \longrightarrow \mathrm{hom}(TM, TM); p \longmapsto J_p \in \mathrm{hom}(T_pM, T_pM)$ が M の**概複素構造**であるとは，M の任意の点 p に対して $J_p^2 = -\mathrm{id}_{T_pM}$ が成り立つものをいう．

以上を踏まえ，複数個のラグランジュ部分多様体に囲まれるシンプレクティック多様体上の概正則円盤を定義する．

定義 2.6. D を $\mathbb{C}$ における原点中心の半径 1 の開円盤，$z_i (i = 1, \cdots, n)$ を ∂D 上の反時計回りに順序づけされた n 個の点として，$\partial_i D$ を z_{i-1} と z_i を端点にもちこの 2 点以外の点 z_j を含まない円弧とする．また，M をシンプレクティック多様体，$L_i (i = 1, \cdots, n)$ を M のラグランジュ部分多様体とする．そして，$M, \mathbb{C}$ がもつ概複素構造をそれぞれ J, j とする．このとき，$w : D \longrightarrow M$ が

$$dw \circ j = J \circ dw,\ w(\partial_i D) \subset L_i,\ w(z_i) \in L_i \cap L_{i+1}\ (i = 1, \cdots, n, L_{n+1} = L_1)$$

を満たすとき，それを $L_1, \cdots L_n$ に囲まれる**概正則円盤**という．

以上で定義した勾配樹木と概正則円盤は，樹木の端点が 3 つ，かつ $M = \mathbb{R}$ のとき，図 2 のように対応している．論文 [1] ではラグランジュ部分多様体が f_i を用いて $graph(df_i)$ と記述できる場合で勾配樹木に対応する概正則円盤を求めた．ちなみに $graph(df_i)$ の元は任意の点 $p \in M$ に対して $(p, (df_i)_p)$ と書ける．また，論文 [1] では任意の i に対して $graph(df_i)$ が零切断に十分に近いならば f_i を generic にとると勾配樹木と概正則円盤それぞれに関するモジュライ空間は多様体として微分同相になることが示されている．更に $f_1, \cdots, f_k$ で構成される勾配樹木と概正則円盤に関するモジュライ空間を定義する．

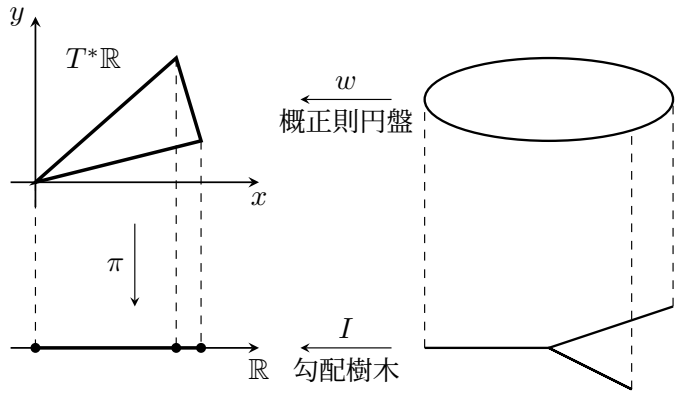


図 2　勾配樹木と概正則円盤の対応

定義 2.7. M をリーマン計量 g をもつ n 次実多様体，$\vec{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_k)$ は定義 1.3 を満たす f_i の組，p_i を $f_{i+1} - f_i$ の非退化な臨界点として $\vec{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_k)$ とする．また，J を T^*M の概複素構造，$\vec{L} = (L_1, L_2, \cdots, L_k)$ を T^*M のラグランジュ部分多様体 L_i の組，$x_i \in L_i \cap L_{i+1}$ として $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$ とする．このとき，$\mathcal{M}_g(M : \vec{f}, \vec{p})$ を $I(v_i) = p_i$ を満たす勾配樹木 I 全体の集合，$\mathcal{M}_J(T^*M : \vec{L}, \vec{x})$ を $w(z_i) = x_i$ を満たす概正則円盤 w 全体の集合とすると，前者を勾配樹木に関するモジュライ空間，後者を概正則円盤に関するモジュライ空間という．

さらに，勾配樹木に関するモジュライ空間と概正則円盤に関するモジュライ空間はジェネリックな f_i に対してどちらも

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(p_i) - (k-1)n + (k-3)$$

の次元を持つ実多様体になる．[1] ここで，$\mu(p_i)$ は点 p_i における $f_{i+1} - f_i$ の Morse 指数とする．この事実は勾配樹木を分類する際に用いる．

2.2　Schwarz-Christoffel 写像

以下は概正則円盤を具体的に構成するために必要な単位円から多角形への双正則写像である Schwarz-Christoffel 写像について解説する．

定理 2.8 ([2])**.** P を $z_1, \cdots, z_n$ を頂点に持ち，点 z_i における内角が $\pi - \pi\mu_i$ である多角形の内部とする．上半平面から P への等角写像は必ずある $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ と $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ を使って

$$f(z) = \alpha \int_0^z \frac{dz}{(z-a_1)^{\mu_1} \cdots (z-a_n)^{\mu_n}} + \beta$$

と表され，$f(a_i) = z_i$ が成り立つ．

Proof. Γ を P の境界とする．また，$\mu_i > 0$ のときこれは w_i における外角に相当し，$\mu_i > 0$ のとき P は w_i で凹んでいることがわかる．これにより $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 2$ である．$a_i \in \mathbb{R}$ を z_i に対応させる点とし，n 個の点によって実軸を分割する．ここで鏡像原理を実軸に対して適用すると，今考えている関数は下半平面にまで解析接続され，その像は P を Γ のいずれかの辺に対して対称移動したもの D'

になる．もう一度鏡像原理を実軸に対して使うと再び上半平面へ解析接続され，その像は D' の境界のいずれかの辺に対して対称移動したもの D'' になる．すると，D'' は D を回転移動または平行移動したものになる．これにより，上半平面から D, D'' にそれぞれに写像する関数をそれぞれ f, f_1 とすると，$A, B \in \mathbb{C}$ を使って $f_1(z) = Af(z) + B$ と書ける．これにより

$$\frac{f_1''(z)}{f_1'(z)} = \frac{f''(z)}{f'(z)}$$

が成り立つ．この等式の右辺を $g(z)$ とすると，g は単価関数であり，$a_1, \cdots a_n$ を特異点に持つ．次に a_i の近傍で

$$h(z) = [f(z) - f(a_i)]^{\frac{1}{\alpha_i}}$$

を考える．これは

$$f(z) = f(a_i) + [h(z)]^{1-\mu_i}$$

とも書ける．$h(z)$ は a_i の近傍では特異点ではないことと，$h(a_i) = 0$ より，$h_1(a_i) \neq 0$ となる a_i を特異点に持たない h_1 を用いて

$$f(z) = f(a_i) + (z - a_i)^{1-\mu_i}[h_1(z)]^{1-\mu_i}$$

と表される．これより， a_i を特異点に持たない $k(z)$ を使って

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\frac{\mu_i}{z - a_i} + k(z)$$

が成り立つ．よって $g(z) + \frac{\mu_i}{z-a_i}$ は a_i を特異点に持たない．以上の操作を $i = 1, \cdots, n$ に対して行うと，

$$g_1(z) := g(z) + \sum_{i=i}^{n} \frac{\mu_i}{z - a_i}$$

は $a_1, \cdots, a_n$ を特異点に持たない．リウヴィルの定理より g_1 は定数であり，0 になる．ゆえに

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = -\sum_{i=i}^{n} \frac{\mu_i}{z - a_i}$$

が成り立つ．これを積分することによって定理が得られる． □

この定理で登場する写像を上半平面における Schwarz-Christoffel **写像**という．さらに上半平面と単位円はメビウス変換によってそれぞれの点を 1 対 1 に対応させることができるので，変数変換を行うことで単位円における Schwarz-Christoffel 写像を考えることも可能である．

3 研究結果

本章では $T^*\mathbb{R}$ 内の概正則円盤を具体的に構成する．特にそれぞれの 3 つのアファインラグランジュ切断を境界にもつ概正則円盤で，かつただ一つに定まる勾配樹木対応するものについて考察する．また，ラグランジュ切断は局所的に必ずある $\mathbb{R}$ 上の関数 f を用いて $graph(df)$ と書くことがで

きる．さらに，アファインラグランジュ切断を用いるので，用いるべき関数 f は少なくとも $\mathbb{R}$ 上の 2 次多項式でなければならない．これをもとに次の 3 つの関数を用意する．

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2 \\ f_3 = a_3x^2 + b_3x + c_3 \end{cases}$$

この 3 つの関数が $f_{i+1} - f_i$ がモース関数になり，勾配樹木のモジュライ空間の多様体としての次元が 0 であるように係数を定めなければならない．

補題 3.1. $i = 1, 2, 3$ に対して $f_{i+1} - f_i$ がモース関数になり，勾配樹木のモジュライ空間の多様体としての次元が 0 であるための必要十分条件は

$$\begin{cases} a_3 < a_2 < 0 \\ a_2 < 0 < a_3 \\ 0 < a_3 < a_2 \end{cases}$$

のいずれかを満たすことである．

Proof. まず勾配樹木のモジュライ空間の多様体としての次元が 0 であると仮定すると p_i を $f_{i+1} - f_i$ の非退化な臨界点，$\mu(p_i)$ をその点における $f_{i+1} - f_i$ の Morse 指数として

$$\sum_{i=1}^{3} \mu(p_i) - (3-1) + (3-3) = \sum_{i=1}^{3} \mu(p_i) - 2 = 0$$

が成り立つ．これを満たす指数の組み合わせ $(\mu(p_1), \mu(p_2), \mu(p_3))$ は

$$(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$$

である．次に指数の組み合わせが実現するための必要十分条件を求める．そのためには $f_{i+1} - f_i$ のヘッセ行列を求め，その負の固有値の個数について考察すれば良い．すると，

$$d(f_2 - f_1) = a_2, d(f_3 - f_2) = a_3 - a_2, d(f_1 - f_3) = -a_2$$

であるため，

$$\begin{cases} (\mu(p_1), \mu(p_2), \mu(p_3)) = (1, 1, 0) \Longleftrightarrow a_3 < a_2 < 0 \\ (\mu(p_1), \mu(p_2), \mu(p_3)) = (1, 0, 1) \Longleftrightarrow a_2 < 0 < a_3 \\ (\mu(p_1), \mu(p_2), \mu(p_3)) = (0, 1, 1) \Longleftrightarrow 0 < a_3 < a_2 \end{cases}$$

が成り立つ．これにより命題が示された． □

以下 a_2, a_3 を補題 3.1 にある大小関係のいずれかを満たすことを仮定する．勾配樹木を考察するために，臨界点の指数が $0, 1$ である場合で勾配曲線がどのように変化するかについて述べる．

補題 3.2. 関数 $f_{i+1} - f_i = ax^2 + bx + c$ の非退化な臨界点 p_i を通る勾配曲線は以下の通りである．

$$x(t) = \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} \ (a > 0) \\ x(0)e^{-2at} - \dfrac{b}{2a} \ (a < 0) \end{cases}$$

Proof. $a \neq 0$ とすると関数 $f(x) = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ は非退化な臨界点 $x = -\frac{b}{2a}$ をもつ．この点における関数 f の指数は $a > 0$ のとき 0，$a < 0$ のとき 1 である．臨界点から出る勾配曲線は

$$\frac{d\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)}{dt} = -2a\left(x + \frac{b}{2a}\right), \quad \lim_{t \to -\infty} x(t) = -\frac{b}{2a}$$

で求めることができる．この解は $x = Ae^{-2at} - \frac{b}{2a}$（$A$ は実定数）である．ここで $a < 0$ の時 e^{-2at} は $t \to -\infty$ で 0 に収束するので，$A = x(0)$ とすれば良い．また，$a > 0$ の時 e^{-2at} は $t \to -\infty$ で発散してしまうので $A = 0$ となる． □

この補題を踏まえ勾配樹木を構成する．$f_{i+1} - f_i$ の非退化な臨界点 p_i を求めると

$$p_1 = -\frac{b_2}{2a_2}, p_2 = -\frac{b_3 - b_2}{2(a_3 - a_2)}, p_3 = -\frac{b_3}{2a_3}$$

となる．なお，p_i から出る勾配曲線を I_i とする．例えば $(\mu(p_1), \mu(p_2), \mu(p_3)) = (0, 1, 1)$ のとき，この指数を実現させるための必要十分条件は $0 < a_3 < a_2$ であるから勾配樹木は

$$I_1(t) = -\frac{b_2}{2a_2}, I_2(t) = -\frac{b_2}{2a_2}e^{-2(a_3-a_2)t} - \frac{b_3 - b_2}{2(a_3 - a_2)}, I_3(t) = -\frac{b_2}{2a_2}e^{-2a_3t} - \frac{b_3}{2a_3 - a_2}$$

となる．他の指数の組み合わせの時も同様に構成することができる．
次に，この勾配樹木に対応する概正則円盤を構成する．その結果は以下の通りである．

定理 3.3. a_2, a_3 が補題 4.1 に挙げた 3 つの条件のいずれかを満たすとき，$\mathbb{R}$ 上の関数 f_i から得られる勾配樹木に対応する $T^*\mathbb{R}$ 上の概正則円盤の一つは Schwarz-Christoffel 写像であり，その像は直線に囲まれる三角形になる．

Proof. df_i のグラフは $T^*\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ 上で以下の通りである．

$$y = 0, y = 2a_2x + b_2, y = 2a_3x + b_3 \ (x, y \text{ は } \mathbb{R}^2 \text{上の座標})$$

また，$graph(df_i)$ と $graph(df_{i+1})$ の交点 x_i を求めると以下の通りである．

$$x_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{b_2}{2a_2} \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{b_3 - b_2}{2(a_3 - a_2)} \\ \dfrac{-a_2b_3 + a_3b_2}{a_3 - a_2} \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} -\dfrac{b_3}{2a_3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

a_2, a_3 が補題 3.1 に挙げられる 3 つの条件のいずれかを満たすとき

$$a_2a_3(a_3 - a_2) < 0$$

となるので，

$$\begin{aligned}\left(-\frac{b_2}{2a_2} + \frac{b_3}{2b_3}\right) \cdot \frac{-a_2b_3 + a_3b_2}{a_3 - a_2} &= \frac{-a_3b_2 + a_2b_3}{2a_2a_3} \cdot \frac{-a_2b_3 + a_3b_2}{a_3 - a_2} \\ &= -\frac{(-a_2b_3 + a_3b_2)^2}{2a_2a_3(a_3 - a_2)} > 0\end{aligned}$$

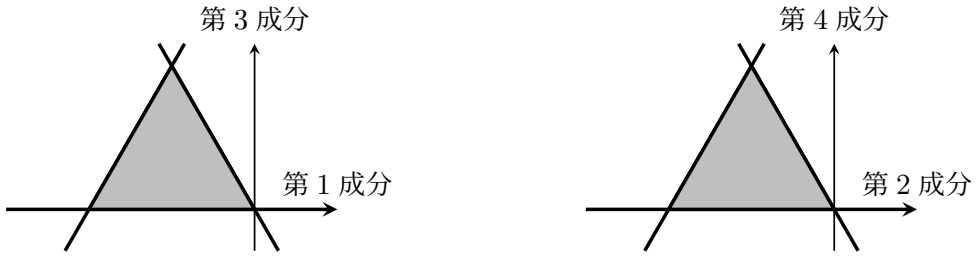


図 3　$graph(df_i)$ を 2 成分ごとに射影

が成り立つ．これにより，

$$\begin{cases} -\dfrac{b_2}{2a_2} < -\dfrac{b_3}{2b_3}, \dfrac{-a_2b_3+a_3b_2}{a_3-a_2} < 0 \\ -\dfrac{b_2}{2a_2} > -\dfrac{b_3}{2b_3}, \dfrac{-a_2b_3+a_3b_2}{a_3-a_2} > 0 \end{cases}$$

のどちらかを満たすので，x_i を通る円を描くと円周上には反時計回りに x_i が並ぶ．このことと概正則円盤が満たすべき方程式は単位円上のコーシーリーマン方程式と同値であることから，今から求める概正則円盤の 1 つとして単位円から x_i を頂点とする三角形への等角写像を考えることができる．その等角写像は Schwarz-Christoffel 写像である．　□

さらに，$M = \mathbb{R}^2, k = 3$ で概正則円盤を具体的に構成できる場合が存在する．最後に概正則円盤を構成できる例を 1 つ挙げる．まず，$M = \mathbb{R}$ の場合と同様に $\mathbb{R}^2$ 上の 2 次多項式を用意する．ここでは f_i を

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ f_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}y^2 \\ f_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}y^2 + 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}y \end{cases}$$

とする．勾配樹木のモジュライ空間の次元を 0 にするための必要十分条件は，$\sum_{i=1}^{3} \mu(p_i) = 4$ であるが，この場合 $\mu(p_1) = 2, \mu(p_2) = 0, \mu(p_3) = 2$ となるのでモジュライ空間の次元は 0 であり，実際に勾配樹木は一意に得られる．次にこの勾配樹木に対応する概正則円盤を具体的に構成する．$graph(df_i)$ はそれぞれ

$$\begin{aligned} graph(df_1) &= \{(x, y, 0, 0) | x, y \in \mathbb{R}\} \\ graph(df_2) &= \left\{ \left(x, y, -\sqrt{3}x, -\sqrt{3}y\right) \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} \\ graph(df_3) &= \left\{ \left(x, y, \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}, \sqrt{3}y + 2\sqrt{3}\right) \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

となる．そこで，3 つのアファインラグランジュ切断をそれぞれ $T^*\mathbb{R}^2$ を第 1 成分と第 3 成分のみ，第 2 成分と第 4 成分のみ射影したものを考えると図 3 を得る．なお，太線が $graph(df_i)$ を射影したものである．すると，図 3 で得られる直線に囲まれる 2 つの三角形の頂点は反時計回りにたどるべきであることが p_i の情報から明らかであるので，Schwarz-Christoffel 写像を用いることができる．ここで単位円から図 3 のそれぞれの三角形に写す Schwarz-Christoffel 写像をそれぞれ w_1, w_2 として単位円から $T^*\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}^2$ への写像 w を $w(z) = (w_1(z), w_2(z))$ とすると，これは $graph(df_i)$ に囲ま

れる概正則円盤の 1 つになる．実際に w_1, w_2 は同じ写像であるため任意の単位円周上の点で同じ値を取るので，単位円周上の点 z に対して $w(z)$ は $graph(df_i)$ 上の点になる．

さらに f_i を

$$\begin{cases} g_1 = 0 \\ g_2 = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\epsilon_2\right)x^2 + \epsilon_2 xy + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\epsilon_2\right)y^2 \\ g_3 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\epsilon_3\right)x^2 + \epsilon_3 xy + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\epsilon_3\right)y^2 + 2\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}y \end{cases}$$

と変形させると $graph(dg_i)$ の交点は前の具体例で得られるものと一致するが，ϵ_2, ϵ_3 を $\mu(p_1) = 2, \mu(p_2) = 0, \mu(p_3) = 2$ が成り立つようにとると g_i によって構成される勾配樹木は前の例と一致する．また，その勾配樹木に対応するような $graph(dg_i)$ に囲まれる概正則円盤の 1 つは，前の例と同様の考察をすることによって前の例で構成した概正則円盤であることが確かめられる．

参考文献

[1] K. Fukaya, Y.-G. Oh. Zero loop open strings in the cotangent bundle and Morse homotopy. Asian J. Math, **1**(1), 96–180(1997)

[2] Z. Nehari, Conformal Mapping, Dover Publications, Inc.(1952)

[3] 佐藤全，平面上の勾配樹木の分類について，令和 2 年度 千葉大学大学院融合理工学府 修士論文

[4] 鈴木英正，ユークリッド空間の余接束における概正則円盤の具体的記述について，令和 4 年度 千葉大学大学院融合理工学府 修士論文（執筆中）

曲面結び目の自明な再接着により得られる trisection

東京工業大学理学院数学系数学コース
磯島 司 (Tsukasa ISOSHIMA)*

概要

3つの4次元の1ハンドル体による4次元閉多様体の分解を trisection という．境界付き4次元多様体の trisection は relative trisection と呼ばれている．ある条件を満たす2つの relative trisection に対し，それらの適切な貼り合わせにより，4次元閉多様体の trisection を構成することが出来る．本稿では，これを曲面結び目の自明な切り貼りに適用した際に得られた結果を紹介する．この結果は，Heegaard 分解における Waldhausen の定理の4次元的アナロジーである予想に関連する結果である．

1　4次元多様体の trisection

本稿では，4次元多様体は全て滑らか，コンパクト，連結かつ向き付けられているとする．また，曲面結び目は，4次元多様体に滑らかに埋め込まれた閉曲面を指すこととする．

本章では，4次元多様体の trisection に関する基本事項を紹介する．Gay-Kirby[GK16] により導入された4次元多様体の trisection とは，4次元多様体を3つの4次元の1ハンドル体により分解することをいう．trisection は，3次元における基本概念の1つである，3次元多様体の分解である Heegaard 分解の4次元的アナロジーとみなすことができる．

定義 1.1. X を4次元閉多様体とする．3つ組 $T\colon = (X_1, X_2, X_3)$ は以下を満たすとき，$(g; k_1, k_2, k_3)$**-trisection** と呼ばれる．ここで g, k_i $(i = 1, 2, 3)$ は $0 \leq k_i \leq g$ を満たす整数である．

- $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$
- $i = 1, 2, 3$ に対し，X_i は境界連結和 $\natural_{k_i} S^1 \times D^3$ に微分同相である．
- $i = 1, 2, 3$ に対し，$X_i \cap X_{i+1} = \partial X_i \cap \partial X_{i+1}$ は $\natural_g S^1 \times D^2$ に微分同相である．ここで $X_4 = X_1$ である．
- $X_1 \cap X_2 \cap X_3$ は向き付けられた種数 g の閉曲面 $\Sigma_g\colon = \#_g S^1 \times S^1$ に微分同相である．

3つ組 T を trisection と呼ぶ代わりに，$X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ を trisection と呼ぶこともある．定義 1.1 において，$k_1 = k_2 = k_3 =: k$ のときは **balanced** trisection と呼ばれ，(g, k)-trisection と表される．それ以外の場合は **unbalanced** trisection と呼ばれる．g は trisection の**種数**と呼ばれる．$H_\alpha\colon = X_3 \cap X_1$, $H_\beta\colon = X_1 \cap X_2$, $H_\gamma\colon = X_2 \cap X_3$ に対し，$H_\alpha \cup H_\beta \cup H_\gamma$ を **spine** という．

* 本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2112 の支援を受けたものである。

trisection は spine により一意的に定まる [LP72].

例 1.2.

- 4-ball 3つによる S^4 の自然な3分割は種数 0，つまり $(0,0)$-trisection である．
- $B_{i,j,k} := \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{C}P^2 \mid \|z_i\|, \|z_j\| \leq \|z_k\|\}$ とする．このとき，$\mathbb{C}P^2 = B_{0,1,2} \cup B_{2,0,1} \cup B_{1,2,0}$ は $(1,0)$-trisection である．

3次元多様体を図示する Heegaard 図式と同様に，trisection diagram と呼ばれる，4次元多様体を表す図式を定義することが出来る．

定義 1.3. $T = (X_1, X_2, X_3)$ を $(g; k_1, k_2, k_3)$-trisection とし，$\Sigma = X_1 \cap X_2 \cap X_3$ とする．4つ組 $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ は以下を満たすとき，$(g; k_1, k_2, k_3)$**-trisection diagram** と呼ばれる．

- (Σ, α, β) は $\#_{k_1} S^1 \times S^2$ の Heegaard 図式である．
- (Σ, β, γ) は $\#_{k_2} S^1 \times S^2$ の Heegaard 図式である．
- (Σ, γ, α) は $\#_{k_3} S^1 \times S^2$ の Heegaard 図式である．

すなわち，それぞれの3つ組が曲面の微分同相と，同族曲線間のハンドルスライドにより図1に移るとき，4つ組 $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ は trisection diagram と呼ばれる．α, β, γ は全て g 本の Σ 上の単純閉曲線の組であり，図2，3のようにそれぞれ赤，青，緑で表される．

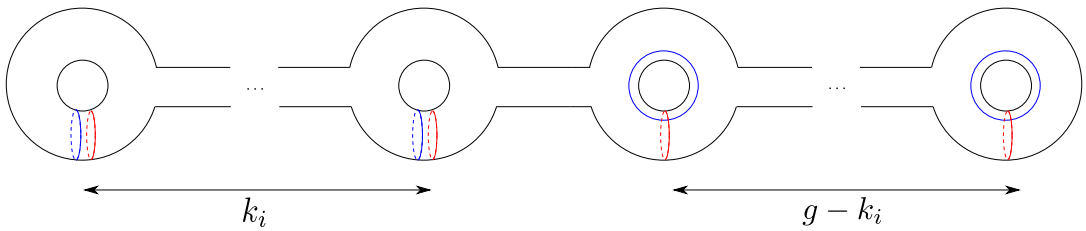


図 1: $\#_{k_i} S^1 \times S^2$ の標準的な種数 g の Heegaard 図式.

例 1.4. 図2は例1.2の $\mathbb{C}P^2$ の $(1,0)$-trisection diagram を表す．

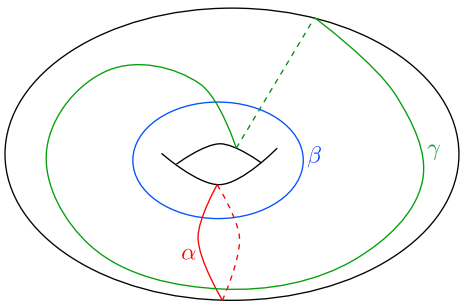


図 2: $\mathbb{C}P^2$ の $(1,0)$-trisection diagram.

定義 1.5. X を４次元閉多様体とし，$T = (X_1, X_2, X_3)$, $T' = ({X_1}', {X_2}', {X_3}')$ を X の trisection とする．X の自己微分同相写像 $h\colon X \to X$ で，$h(X_i) = {X_i}'$ を満たすものが存在するとき，T と T' は**微分同相**であるという．また，X の isotopy $\{h_t\}_{t\in[0,1]}$ で，$h_0 = id$, $h_1(X_i) = {X_i}'$ を満たすものが存在するとき，T と T' は **isotopic** であるという．

注意 1.6. T と T' が微分同相であることと，それぞれに対応する trisection diagram が，曲面の微分同相写像と同族曲線間のハンドルスライドで移りあうことは同値である．

Heegaard 分解における stabilization と同様に，trisection に対して stabilization を定めることが出来る．

定義 1.7. $X = (X_1, X_2, X_3)$ を trisection とする．また，C を，$X_i \cap X_j$ にプロパーに埋め込まれた boundary parallel な arc であるとする．このとき，X_i', X_j', X_k' $(\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\})$ を次のように定める．

- $X_i' = X_i - \nu(C)$
- $X_j' = X_j - \nu(C)$
- $X_k' = X_k \cup \overline{\nu(C)}$

このとき，trisection (X_1, X_2, X_3) を (X_1', X_2', X_3') に置き換える操作を k**-stabilization** という．ここで，(X_1', X_2', X_3') も X の trisection になることに注意する．また，stabilization の反対の操作を **destabilization** という．

stabilization は trisection diagram に対しても定義することが出来る．

定義 1.8. $(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ を trisection diagram とする．$(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ と図 3 のいずれかとの連結和をとる操作のことを，$(\Sigma, \alpha, \beta, \gamma)$ の **stabilization** という．左から順に，1, 2, 3-stabilization に対応している．

図 3 は左から順に S^4 の $(1; 1, 0, 0)$, $(1; 0, 1, 0)$, $(1; 0, 0, 1)$-trisection diagram を表している．$(g; k_1, k_2, k_3)$-trisection に対して 1, 2, 3-stabilization を行って得られる trisection の type はそれぞれ $(g + 1; k_1 + 1, k_2, k_3)$, $(g + 1; k_1, k_2 + 1, k_3)$, $(g + 1; k_1, k_2, k_3 + 1)$ である．

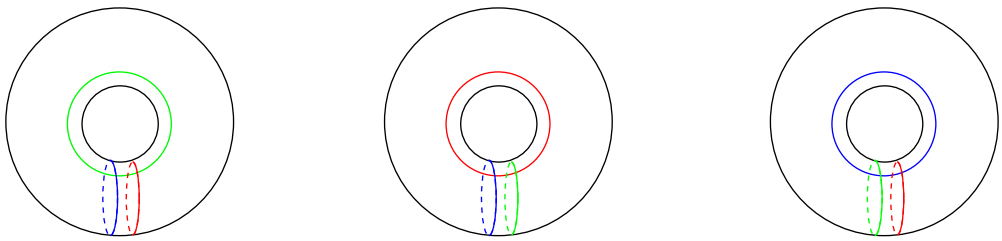


図 3: S^4 の unbalanced な種数 1 の trisection diagram

定理 1.9. 任意の４次元閉多様体は trisection を許容する．同じ４次元閉多様体に対する任意の２つ

の trisection は stably isotopic である．

すなわち，trisection は stabilization の差を除いて一意的である．

次の予想は，Heegaard 分解における Waldhausen の定理の４次元的アナロジーであり，**４次元の Waldhausen 予想**と呼ばれている．

予想 1.10 ([MSZ16])**.** S^4 の任意の trisection は種数 0 の trisection かその stabilization に isotopic である．

注意 1.6 により，曲面の微分同相と同族曲線間のハンドルスライドにより種数 0 の trisection diagram の stabilization に移らないような S^4 の trisection diagram が存在した場合，それは４次元の Waldhausen 予想に反例を与える．

上記は４次元閉多様体，つまり境界がない場合に対する trisection を考えていたが，境界付き４次元多様体に対しても trisection は導入されており，それは **relative trisection** と呼ばれている．また，結び目の bridge 分解の４次元的アナロジーとして，曲面結び目に対する **bridge trisection** が導入されているが，本稿ではこれらの紹介は省略する．relative trisection に関しては [Cas16, CGPC18, CO19] 等が，bridge trisection に関しては [MZ17, MZ18] 等が詳しい．

2　主結果

本章では，[Iso22] で得た結果を紹介する．

$i = 1, 2$ とする．境界付き４次元多様体 X_i（簡単のため，境界成分は連結とする）とその relative trisection T_i に対し，T_i が境界 ∂X_i に誘導する open book 分解を $\mathcal{O}_i$ とする．このとき，$\mathcal{O}_1$ を $\mathcal{O}_2$ に移す，向きを反対にする微分同相写像 $f\colon \partial X_1 \to \partial X_2$ があれば，T_1 と T_2 の貼り合わせにより，４次元閉多様体 $X = X_1 \cup_f X_2$ の trisection を構成することが出来る．本章ではこれを曲面結び目の自明な切り貼りで考える．

X を４次元閉多様体とし，その trisection を $T_X = (X_1, X_2, X_3)$ とする．また，$S \subset X$ を曲面結び目とする．このとき，S の外部 $X - \nu(S)$ は $X_i - \nu(S)$ $(i = 1, 2, 3)$ による自然な３分割を持つ．しかし，これは S が 2-knot でない限り relative trisection にはならない．これを改善するために，Kim-Miller[KM20] は **boundary-stabilization** と呼ばれる操作を導入した．つまり，その自然な３分割に boundary-stabilization を行って得られる３分割は S の外部の relative trisection になる．これを T_2 と表すこととする．一方で，$\overline{\nu(S)}$ には，その relative Kirby diagram から自然に定まる relative trisection があり，これを T_1 と表すこととする．このとき，$\overline{\nu(S)}$ と $X_i - \nu(S)$ の自明な接着に対応するように T_1 と T_2 を貼り合わせることで，X の新しい trisection T_S を構成することが出来る．この自明な貼り合わせにより得られる４次元閉多様体は X であるため，多様体の改変操作の観点から言えばこの操作には非自明な点はない．しかし，T_S の構成には boundary-stabilization という非自明な操作を用いているため，T_S と T_X に関しては次のような問題を考えることが出来る．

問題 2.1 ([Iso22])**.** T_S は T_X の stabilization に微分同相か？特に isotopic か？

この問題に対し，次を示した．

定理 2.2 ([Iso22])**.** $K \subset X$ を，normal Euler number $e(K)$ が 0 である 2-knot とし，$P_\pm \subset X$ を，$e(P_\pm) = \pm 2$ である unknotted P^2-knot とする．そして，$S = K \# P_\pm$ とする．このとき，T_S は T_X の stabilization に微分同相である．

Proof. T_S に対応する trisection diagram を変形することで証明される．T_S の trisection diagram は図 4 で与えられる． □

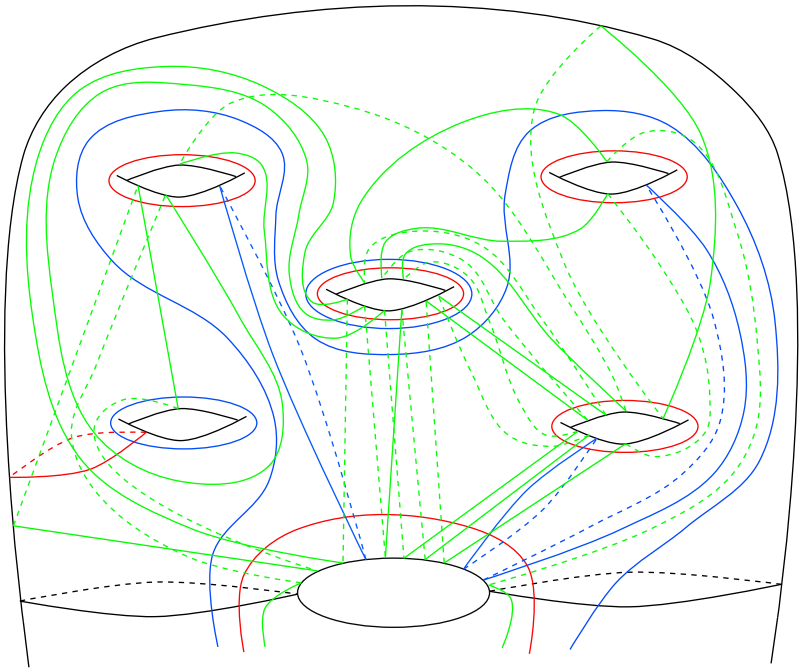


図 4: T_S の trisection diagram．描かれていないところは，(X, K) の doubly-pointed trisection diagram から基点の開近傍を取り除いて得られる，$X - \nu(K)$ の arced relative trisection diagram を表す．

系 2.3. $X = S^4$，$S = K \# P_\pm$ のとき，T_S は S^4 の種数 0 の trisection に微分同相である．

もし S^4 の微分同相な任意の 2 つの trisection が isotopic であれば，系 2.3 の T_S は 4 次元の Waldhausen 予想の主張を満たす．

系 2.3 の S は**樹下型**と呼ばれている P^2-knot である．樹下型の P^2-knot に関して次の予想が知られている．

予想 2.4 (樹下予想)**.** S^4 内の任意の P^2-knot は樹下型である．

参考文献

[Cas16] Nickolas Andres Castro, *Relative trisections of smooth 4-manifolds with boundary*, Ph.D. thesis, University of Georgia, 2016.

[CGPC18] Nickolas A. Castro, David T. Gay, and Juanita Pinzón-Caicedo, *Diagrams for relative trisections*, Pacific J. Math. **294** (2018), no. 2, 275–305.

[CO19] Nickolas A. Castro and Burak Ozbagci, *Trisections of 4-manifolds via Lefschetz fibrations*, Math. Res. Lett. **26** (2019), no. 2, 383–420.

[GK16] David Gay and Robion Kirby, *Trisecting 4-manifolds*, Geom. Topol. **20** (2016), no. 6, 3097–3132.

[Iso22] Tsukasa Isoshima, *Trisections obtained by trivially regluing surface-knots*, 2022, arXiv:2205.04817.

[KM20] Seungwon Kim and Maggie Miller, *Trisections of surface complements and the Price twist*, Algebr. Geom. Topol. **20** (2020), no. 1, 343–373.

[LP72] François Laudenbach and Valentin Poénaru, *A note on* 4*-dimensional handlebodies*, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 337–344.

[MSZ16] Jeffrey Meier, Trent Schirmer, and Alexander Zupan, *Classification of trisections and the generalized property R conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 11, 4983–4997.

[MZ17] Jeffrey Meier and Alexander Zupan, *Bridge trisections of knotted surfaces in* S^4, Trans. Amer. Math. Soc. **369** (2017), no. 10, 7343–7386.

[MZ18] ———, *Bridge trisections of knotted surfaces in 4-manifolds*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **115** (2018), no. 43, 10880–10886.

第 2 Betti 数 9 の有理曲面のコルク

大阪大学大学院 情報科学研究科 情報基礎数学専攻
若槇洋平 (Yohei WAKAMAKI)

概要

互いにエキゾチックな（同相だが微分同相でない）単連結閉 4 次元多様体 X, Y は，コルクと呼ばれる部分多様体の切り貼りで移り合う．その重要性のためコルクの研究は多く存在する一方，第 2 Betti 数の小さい単連結閉 4 次元多様体の微分構造を変えるコルクの具体例は少ない．例えば盛んにエキゾチック微分構造が研究されている $\mathbb{CP}^2\#k\overline{\mathbb{CP}^2}(k \geq 2)$ でさえ，そのコルクが見つかっている最小の k の値は $k = 9$ である．本講演では $\mathbb{CP}^2\#8\overline{\mathbb{CP}^2}$ の微分構造を変える具体的なコルクを与え，関連する研究を紹介する．

1 導入

本稿では，明記しない限り多様体はすべて滑らかな閉多様体を意味するものとする．多様体の組 (X, Y) が**エキゾチック対**であるとは，X と Y が互いに同相であるが微分同相ではないことを意味する．また，X が標準的な[*1]（$S^2 \times S^2, \mathbb{CP}^2$ とその逆向き, $K3$ 曲面とその逆向きの有限個の連結和で表わされる）4 次元多様体であるとき Y は**エキゾチック $\boldsymbol{X}$**，または **$\boldsymbol{X}$ のエキゾチック微分構造**と呼ばれたりする．4 次元多様体のエキゾチック微分構造については 1980 年代から活発に研究が続けられているが，多くの未解決問題が残されている状況である．特に第 2 ベッチ数 b_2 が小さいほど単連結閉 4 次元多様体のエキゾチック微分構造の構成は難しく，b_2 が 2 以下の単連結閉 4 次元多様体のエキゾチック微分構造の存在は 1 つも知られていない．

単連結閉 4 次元多様体のエキゾチック微分構造を調べる上で，最も重要と思われる対象の 1 つにコルクと呼ばれるものがある．コンパクトで可縮な 4 次元多様体 C とその境界 ∂C 上の対合写像 τ の組 (C, τ) が**コルク**であるとは，τ が C の自己同相写像に拡張するが，C の自己微分同相には拡張しないことを意味する．コルク (C, τ) に関して，C が 4 次元多様体 X に埋め込まれているとき $X_{(C,\tau)} := X - \mathrm{int}(C) \cup_\tau C$ と定め，この C の切り貼り操作（または $X_{(C,\tau)}$ 自体）を**コルク $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{\tau})$ に沿った $\boldsymbol{X}$ のコルクツイスト**という．τ が C の自己同相に拡張されることから，コルクツイストは X の同相類を変化させないことが分かる．コルク (C, τ) に沿ったコルクツイストが X の微分構造を変化させるとき，コルク (C, τ) を **$\boldsymbol{X}$ のコルク**という．コルクの重要性は，次の定理によく表れている．

定理 1.1 (Curtis-Freedman-Hsiang-Stong [7], Matveyev [9])**.** 任意の単連結閉 4 次元多様体のエキゾチック対 (X, Y) に対して，X のあるコルク (C, τ) で，コルクツイスト $X_{(C,\tau)}$ が Y と微分同相で

[*1] $\frac{11}{8}$ 予想という予想が正しければ単連結閉 4 次元多様体の位相型は標準的なものしかないことが分かる．

あるようなものが存在する．

この定理から特に，標準的な単連結閉 4 次元多様体 X のどのようなエキゾチック微分構造も，必ず X をコルクツイストすることで得られるということが分かる．では，どのようなコルクとそのコルクツイストが X のエキゾチック微分構造を生み出すのか？ と問うのは自然だろう．実際，これまでに多くの標準的な単連結閉 4 次元多様体に対して，そのコルクが発見されてきている（[1, 6, 4, 2, 5]）．一方で興味深いのは，現状においてコルクの具体例が発見されている標準的な単連結閉 4 次元多様体は第 2 Betti 数が 10 以上のものしかないということである．この事実から，次のような問題を考えることができる．

問題 1.2. 第 2 Betti 数 b_2 が 9 以下の標準的な単連結閉 4 次元多様体のコルクの具体例を発見せよ．

2 主定理

本稿の主定理は以下の 2 つである．

定理 2.1. 図 1 の Kirby 図式で表わされるコルク (W_1, f_1) は，$\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}$ のコルクである．

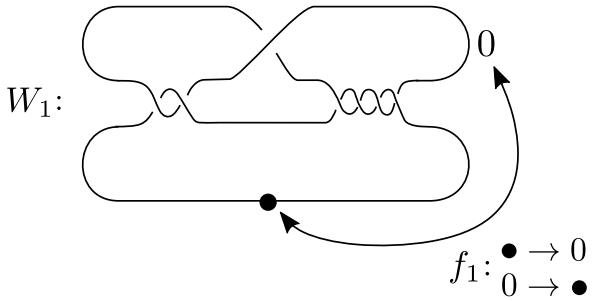


図 1　コルク (W_1, f_1)．但し，f_1 は 0 とドットの交換で定義される ∂W_1 上の対合写像とする．

定理 2.2. 図 2 の Kirby 図式で表わされるコルク (W_2, f_2) は，$\mathbb{CP}^2\#8\overline{\mathbb{CP}^2}$ のコルクである．

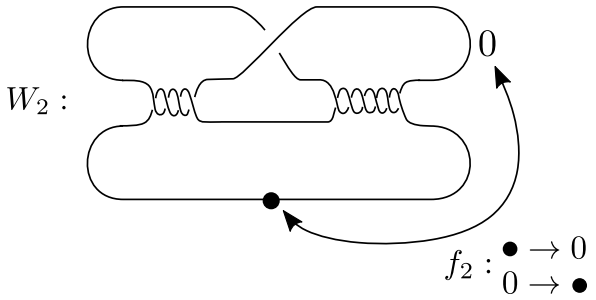


図 2　コルク (W_2, f_2)．但し，f_2 は 0 とドットの交換で定義される ∂W_2 上の対合写像とする．

これまで $\mathbb{CP}^2\#k\overline{\mathbb{CP}^2}$ のコルクが発見されているような k は，$k = 9$ が最小であった（[2]）．定理 2.2 は，そのような k の最小値を更新し，問題 1.2 の $b_2 = 9$ の場合に対して 1 つの解答を与える事に注意されたい．なお，定理 2.1 のコルクは，[2] において発見された $\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}$ のコルクとは異なる

ものであることに注意されたい．

3　Kirby 図式

この章では，定理 2.2 の主張を理解するために Kirby 図式について説明を行う．4 次元多様体の Kirby 図式とは，4 次元多様体のハンドル分解における各ハンドルの接着を表わす図式のことである．従って多様体のハンドル分解から説明をする．

3.1　多様体のハンドル分解

以下，k 次元円板を D^k で表わすものとする．このとき，$D^k \times D^{n-k}$ を**（n 次元）k ハンドル**と呼ぶ．k ハンドルに対して，$\partial D^k \times D^{n-k}$ を**接着領域**と呼ぶ．接着領域の中心部分 $\partial D^k \times \{0\}$ を**接着球面**と呼ぶ．境界付き n 次元多様体 X の境界 ∂X への埋め込み $\varphi : \partial D^k \times D^{n-k} \to \partial X$ を k ハンドルの**接着写像**という．接着写像を用いて構成される多様体[*2] $X \cup_\varphi (D^k \times D^{n-k}) = X \sqcup (D^k \times D^{n-k})/\varphi$ を **X に k ハンドルを φ で接着して得られた多様体**と呼ぶ（図 5）．

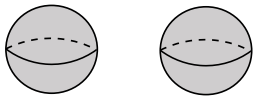


図 3　4 次元 1 ハンドル $D^1 \times D^3$ の接着領域 $\partial D^1 \times D^3$.

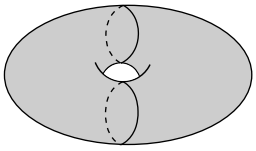


図 4　4 次元 2 ハンドル $D^2 \times D^2$ の接着領域 $\partial D^2 \times D^2$.

0 ハンドル D^n にハンドルを有限回接着して得られる多様体を**ハンドル体**と呼ぶ．多様体 X があるハンドル体と微分同相であるとき，X は**ハンドル分解を持つ**といい，そのハンドル体を **X のハンドル分解**と呼ぶ．コンパクト n 次元多様体はハンドル分解を持つことが知られており，特に連結なコンパクト n 次元多様体は次の 3 つの条件を同時に満たすようなハンドル分解を持つことが知られている（図 6）．

(1) 0 ハンドルをちょうど 1 つ持つ．
(2) ハンドル達は指数に関して昇順に接着されている．指数が同じハンドルに関してはどのような順番で接着してもよい．
(3) 境界を持たない場合はちょうど 1 つの n ハンドルを持つ．境界を持つ場合は n ハンドルを持たない．

3.2　Kirby 図式による 4 次元多様体の表示

以下では，4 次元多様体 X のハンドル分解における各ハンドルの接着がどのように描かれるのか説明する．また，X は連結，コンパクト，向き付け可能であり，上述の条件 (1)∼(3) を満たすよう

[*2] 正確には角の解消という操作をする必要がある．

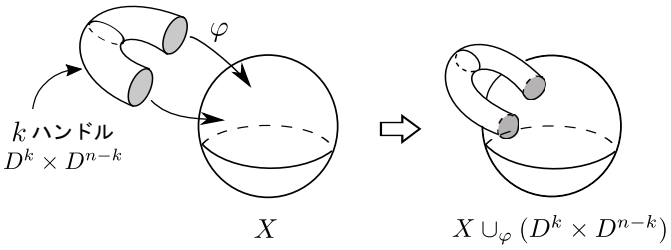


図 5　ハンドルの接着のイメージ.

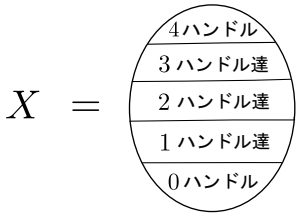


図 6　閉 4 次元多様体のハンドル分解のイメージ.

にハンドル分解されているものとする．指数が i 以下のハンドルからなる X の部分ハンドル体を X_i と表わすことにする．

(1) （1 ハンドルの接着）1 ハンドルの接着写像は 2 つの 3 次元球体 $D^3 \sqcup D^3$ の $S^3 = \partial D^4 = \partial X_0$ への埋め込みである．従って，1 ハンドルの接着写像は図 3 のように $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 内に 3 次元球体 D^3 を 2 つ描くことで表わされる．但し，1 ハンドルの接着を表わすために，これらの D^3 は間にある平面に関して鏡映で同一視されているとする（図 7）.

(2) （2 ハンドルの接着）2 ハンドルの接着写像はソリッドトーラス $S^1 \times D^2$ の ∂X_1 への埋め込みである．この埋め込みは結び目（接着球面 $S^1 \times \{0\}$ の埋め込み）とフレーミング係数（ソリッドトーラスが D^2 方向に何回捻じれているか[*3]を表わす整数）で決定できることが知られている．従って，2 ハンドルの接着写像は結び目とそれに付随するフレーミング係数で表わされる（図 8）．但し，結び目が 1 ハンドルの上を通ることがあることに注意されたい（図 10 内の赤い成分）.

(3) （3, 4 ハンドルの接着）閉 4 次元多様体のハンドル分解は 3, 4 ハンドルの接着によらず微分同相類が一意に定まることが知られている．従って，3, 4 ハンドルはいくつ接着されているかだけを図式中に書いておくことにする．境界がある場合も，3, 4 ハンドルの接着を表示しなくてよいための十分条件が知られている（[10]）.

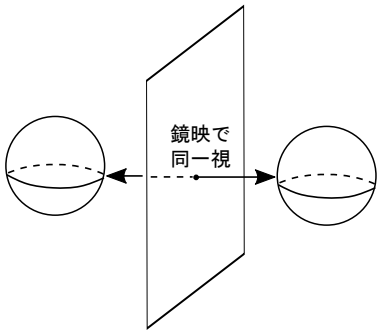


図 7　1 ハンドルの接着領域の間の関係.

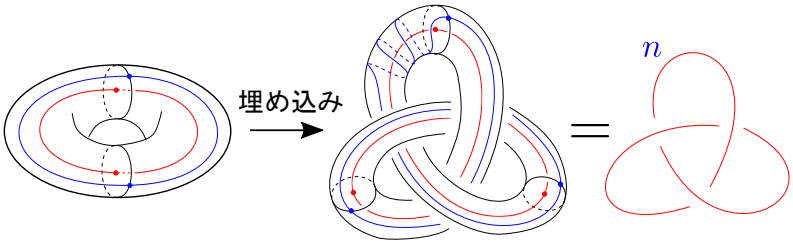


図 8　2 ハンドルの接着の表現.

[*3] 基準となる 0 回捻じれている埋め込みの定め方はいろいろあるが，簡単のためここでは述べない．詳しくは [8] の第 4 章参照.

以上の手順により描かれる図式を，4 次元多様体 X の **Kirby 図式**という（図 10）.

注意 3.1 (1 ハンドルのドット付き円周による表現)**.** 1 ハンドルの接着領域である二つの D^3 を互いに近づけたとき，間に現れる円板の境界の円周にドットを付け，このドット付き円周で 1 ハンドルの接着領域を指定することもある．ドット付き円周は常に自明な結び目になることに注意されたい.

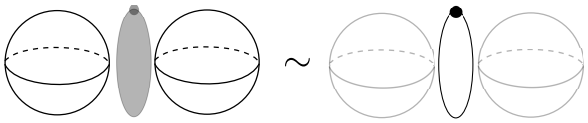


図 9　1 ハンドルのドット付き円周による表現.

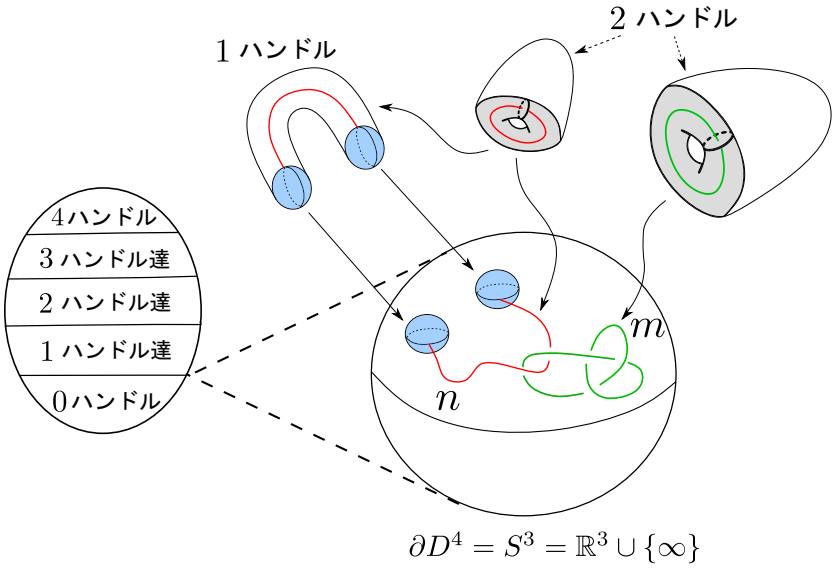


図 10　Kirby 図式のイメージ.(cf.[3, pp.2])

4　主定理の証明の概略

定理 2.2 の証明についてのみ述べる．証明は大きく 3 つのステップに分かれる．まず，[11] で構成されたエキゾチック $\mathbb{CP}^2\#8\overline{\mathbb{CP}^2}$（以下，$R_8$ と表わすことにする.）に対して明示的な Kirby 図式を与える．これまで上記の R_8 の明示的な Kirby 図式は与えられていなかったことに注意されたい．次に，R_8 の Kirby 図式を変形することで図式内に W_2 を構成する．最後に，R_8 の (W_2, f_2) に沿ったコルクツイストが通常の $\mathbb{CP}^2\#8\overline{\mathbb{CP}^2}$ に一致していることを図式の変形を用いて証明する．コルクツイストは可逆であることから，$\mathbb{CP}^2\#8\overline{\mathbb{CP}^2}$ を (W_2, f_2) に沿ってコルクツイストをすると R_8 が得られることが分かる．以上の手順により，定理 2.2 が証明される.

参考文献

[1] S. Akbulut *A fake compact contractible* 4*-manifold*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 2, 335–356.

[2] S. Akbulut, *The Dolgachev surface. Disproving the Harer-Kas-Kirby conjecture*, Comment. Math. Helv. **87** (2012), no. 1, 187–241.

[3] S. Akbulut, 4*-manifolds*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 25, Oxford University Press, Oxford, 2016.

[4] S. Akbulut and K. Yasui, *Corks, plugs and exotic structures*, J. Gökova Geom. Topol. GGT **2** (2008), 40–82.

[5] D. Auckly, H. J. Kim, P. Melvin and D. Ruberman, *Stable isotopy in four dimensions*, J. Lond. Math. Soc. (2) **91** (2015), no. 2, 439–463.

[6] Ž. Bižaca and R. E. Gompf, *Elliptic surfaces and some simple exotic* R^4*'s*, J. Differential Geom. **43** (1996), no. 3, 458–504.

[7] C. L. Curtis, M. H. Freedman, W. C. Hsiang and R. Stong, *A decomposition theorem for h-cobordant smooth simply-connected compact* 4*-manifolds*, Invent. Math. **123** (1996), no. 2, 343–348.

[8] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, 4*-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics, **20**. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[9] R. Matveyev, *A decomposition of smooth simply-connected h-cobordant* 4*-manifolds*, J. Differential Geom. **44** (1996), no. 3, 571–582.

[10] B. Trace, *On attaching* 3*-handles to a* 1*-connected* 4*-manifold*, Pacific J. Math. **99** (1982), no. 1, 175–181.

[11] K. Yasui, *Small exotic rational surfaces without* 1*- and* 3*-handles,* Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 11, 5893–5907.

有向空間曲面図式の彩色に関する groupoid rack の普遍性について

大阪大学大学院 理学研究科 数学専攻
新井克典 (Katsunori ARAI)*

概要

有向空間曲面は S^3 に埋め込まれた境界付き有向コンパクト曲面であり, S.Matsuzaki 氏によって有向空間曲面図式とその Reidemiester 変形が導入された. 本講演では有向空間曲面図式の Reidemeister 変形に対応する公理を持った代数系である groupoid rack を紹介し, groupoid rack が有向空間曲面図式の彩色に関して普遍的な代数であることを述べる.

1 結び目とカンドル

μ (≥ 1) 個の円周 S^1 の非交和の S^3 への埋め込み $S^1 \sqcup S^1 \sqcup \cdots \sqcup S^1 \hookrightarrow S^3$ の像を μ 成分の**絡み目 (link)** という. とくに 1 成分の絡み目を**結び目 (knot)** という. 2 つの絡み目 L と L' が**同値 (equivalent)** であるとは, L と L' が S^3 内で全同位であることをいい, このとき $L \cong L'$ と書く. μ 成分絡み目 $L = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_\mu$ の**向き (orientation)** とは, 各成分 K_i $(1 \leq i \leq \mu)$ の 1 次元多様体としての向きを意味する. 向きが指定されている絡み目を**有向絡み目 (oriented link)** という. 2 つの有向絡み目 L と L' が**同値 (equivalent)** であるとは, L と L' が S^3 内で向きを込めて全同位であることをいい, このときも $L \cong L'$ と書く.

L を絡み目とする. 射影 $\pi : S^3 \to S^2$ による L の像 $\pi(L)$ が L の**正則射影図 (regular projection)** であるとは, $\pi(L)$ の多重点が高々有限個の横断的 2 重点であることをいう. 正則射影図 $\pi(L)$ の 2 重点を**交差 (crossing)** という. 交差 $p \in \pi(L)$ の逆像と絡み目 L との共通部分を $\pi^{-1}(p) \cap L = \{p_1, p_2\}$ とする. p_1 の z 座標が p_2 の z 座標より大きいとき, p_1 を**上交差点 (over crossing)**, p_2 を**下交差点 (under crossing)** という. 絡み目 L の正則射影図に対して, 各交差の上下の情報を付加したものを L の**図式 (diagram)** という. 絡み目図式は全ての下交差点の十分小さな近傍を取り除いたものの正則射影 π による像で表される. 絡み目図式の各連結成分を**弧 (arc)** という. 絡み目図式 D の弧全体の集合を $\mathcal{A}(D)$ と書く. 絡み目図式の各交差 χ において, χ の十分小さな近傍上で連結な弧を交差 χ における**上方弧 (over-arc)** と呼ぶ. 絡み目図式 D において, D の全ての弧を交差でさらに区切ったとき, 各連結成分を D の**準弧 (semi-arc)** という. 絡み目図式 D の準弧全体の集合を $\mathcal{SA}(D)$ と書く.

定理 1.1. ([9])**.** L_1 と L_2 を絡み目とし, D_1 と D_2 をそれぞれ L_1 と L_2 の図式とする. L_1 と L_2 が

* e-mail:u068111h@ecs.osaka-u.ac.jp

同値であることと D_1 と D_2 がライデマイスター変形 (図 1) と S^2 上のアイソトピー変形を有限回施して移り合うことは同値である.

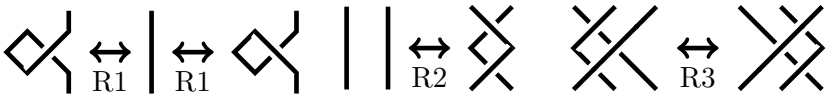


図 1: ライデマイスター変形

L が有向絡み目のとき, 図式 D にも向きが与えられる. 有向絡み目に対して次の定理が成り立つ.

定理 1.2. ([8])**.** L_1 と L_2 を有向絡み目とし, D_1 と D_2 をそれぞれ L_1 と L_2 の図式とする. L_1 と L_2 が同値であることと D_1 と D_2 が有向ライデマイスター変形 (図 2) と S^2 上のアイソトピー変形を有限回施して移り合うことは同値である.

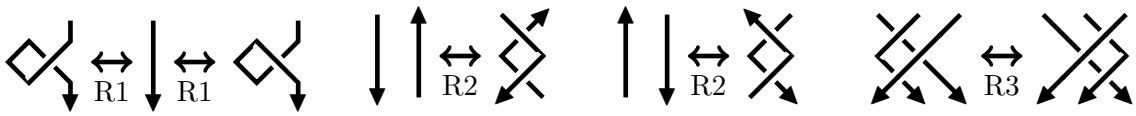


図 2: 有向ライデマイスター変形

定義 1.3. ([1, 2, 7])**.** 空でない集合 X とその上の 2 項演算 $* : X \times X \ni (x, y) \mapsto x * y \in X$ の組 $X = (X, *)$ が**ラック (rack)** であるとは, $*$ が次の条件を満たすことをいう.

2. 任意の $y \in X$ に対して, 写像 $S_y : X \ni x \mapsto x * y \in X$ は全単射である.
3. 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$.

特に, ラック X が次の条件を満たすとき $X = (X, *)$ を**カンドル (quandle)** という.

1. 任意の $x \in X$ に対して, $x * x = x$.

ラックの公理 2, 3 はそれぞれ有向ライデマイスター変形 R2 と R3 変形に対応し, カンドルの公理 1-3 はそれぞれ有向ライデマイスター変形 R1-R3 に対応している (図 4).

$X = (X, *)$ をラックとする. 任意の $x, y \in X$ と任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $S_y^n(x)$ を $x *^n y$ で表す. ただし, $S_y^0 = \mathrm{id}_X$ である.

定義 1.4. ([2, 7])**.** X をカンドルとし, D を有向絡み目図式とする. 写像 $C : \mathcal{A}(D) \to X$ が D の X **彩色 (X-coloring)** であるとは, D の各交差で図 3 の条件を満たすことである. X 彩色全体の集合を $\mathrm{Col}_X^{\mathrm{qdle}}(D)$ と書く.

図 4 より, 次の命題が得られる.

命題 1.5. ([2, 7])**.** X をカンドルとし, D_1, D_2 を同値な有向絡み目を表す図式とする. このとき, $\mathrm{Col}_X^{\mathrm{qdle}}(D_1)$ と $\mathrm{Col}_X^{\mathrm{qdle}}(D_2)$ の間に全単射が存在する. 特に $\mathrm{Col}_X^{\mathrm{qdle}}(D_1)$ の濃度 $\left|\mathrm{Col}_X^{\mathrm{qdle}}(D_1)\right|$ は有向絡み目の不変量である. この不変量を**カンドル彩色数 (quandle coloring number)** という.

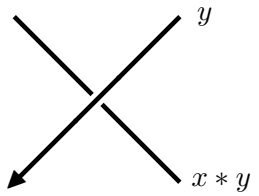


図 3: カンドル彩色条件 $(x, y \in X)$

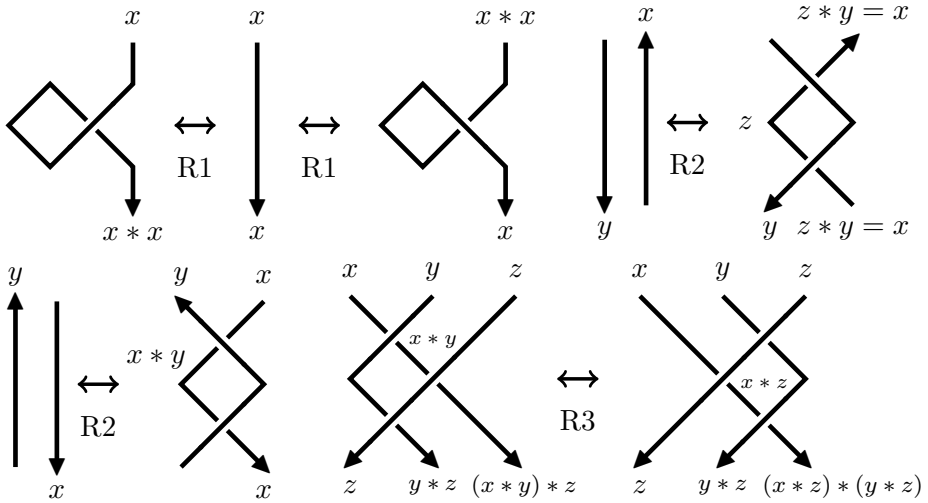


図 4: 有向結び目図式のライデマイスター変形とカンドル彩色 $(x, y, z \in X)$

絡み目の彩色には次の対称カンドルを用いる.

定義 1.6. ([3, 4])**.** $X = (X, *)$ をラックとする. 写像 $\rho : X \to X$ が**良い対合写像 (good involution)** とは次の条件を満たすことをいう.

1. ρ は対合的, すなわち, $\rho \circ \rho = \mathrm{id}_X$ を満たす.
2. 任意の $x, y \in X$ に対して, $\rho(x * y) = \rho(x) * y$.
3. 任意の $x, y \in X$ に対して, $x * \rho(y) = x *^{-1} y$.

ラック $X = (X, *)$ と良い対合写像 ρ の組 (X, ρ) を**対称ラック (symmetric rack)** という. 特に X がカンドルのとき, 組 (X, ρ) を**対称カンドル (symmetric quandle)** という.

(X, ρ) を対称カンドル, D を絡み目図式とする. 各準弧 a に向きを与え, その向きを $\frac{\pi}{2}$ 回転させた向きを a の**法線方向 (normal orientation)** と呼ぶ. D の各準弧に対して, X の元と法線方向を対応させる写像 C が**対称カンドル彩色条件 (coloring condition)** を満たすとは, 図 5 の条件を満たすことをいう.

絡み目図式 D の各準弧に対して, 対称カンドル (X, ρ) の元と法線方向が与えられているとする. 準弧 a に対する**基本逆変形 (basic inversion)** とは, a に与えられた X の元 x を $\rho(x)$ に取り換え, さらに a の法線方向を逆向きにする変形 (図 6) をいう.

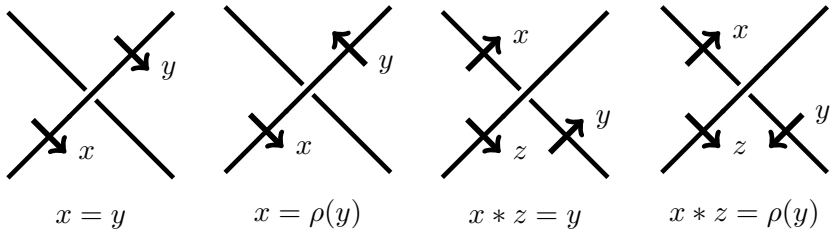


図 5: 対称カンドル彩色条件 $(x, y, z \in X)$

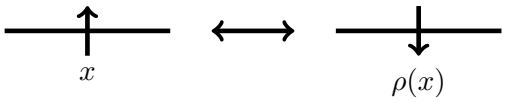


図 6: 基本逆変形 $(x \in X)$

定義 1.7. ([3])**.** (X, ρ) を対称カンドル, D を絡み目図式とする. D の各準弧に対して X の元と法線方向を対応させる写像 C で対称カンドル彩色条件を満たすもの全体の集合を, 有限回の基本逆変形で移り合うという同値関係で割った商集合の元を, D の (X, ρ) **彩色** **(**(X, ρ)**-coloring)** という.

命題 1.8. ([3])**.** (X, ρ) を対称カンドルとする. D_1 と D_2 を同値な絡み目を表す絡み目図式とする. このとき, D_1 の (X, ρ) 彩色全体の集合と D_2 の (X, ρ) 彩色全体の集合の集合の間に全単射が存在する.

2 有向空間曲面

空間 3 価グラフ (spatial trivalent graph) とは, S^3 に埋め込まれた有限 3 価グラフのことである. 本論文では, S^1 の埋め込みを S^1 **成分** **(**S^1**-component)** と呼び, 空間 3 価グラフの 1 つの辺と考える.

Y 向き付けされた空間 3 価グラフ (Y-oriented spatial trivalent graph) とは, 全ての頂点の入次数, 出次数がともに 1 以上であるような有向空間 3 価グラフのことである. ここで入次数とはその頂点を終点としてもつ辺の本数をいい, 出次数とはその頂点を始点としてもつ辺の本数をいう. 全ての空間 3 価グラフはいくつかの Y 向き付けをもつ.

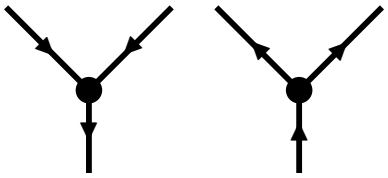


図 7: 空間 3 価グラフの Y 向き付け

G を空間 3 価グラフとする. 射影 $\pi : S^3 \to S^2$ による G の像 $\pi(G)$ が G の**正則射影図 (regular projection)** であるとは, $\pi(G)$ の多重点が高々有限個の横断的 2 重点であることをいう. 正則射影図 $\pi(G)$ の 2 重点を**交差 (crossing)** という. 交差 $p \in \pi(G)$ の逆像 $\pi^{-1}(p)$ と空間 3 価グラフ G と

の共通部分を $\pi^{-1}(p) \cap G = \{p_1, p_2\}$ とする. p_1 の z 座標が p_2 の z 座標より大きいとき, p_1 を**上交差点 (over crossing)**, p_2 を**下交差点 (under crossing)** という. 空間 3 価グラフ G の正則射影図に対して, 各交差の上下の情報を付加したものを G の**図式 (diagram)** という. 図式は全ての下交差点の十分小さな近傍を取り除いたものの正則射影 π による像で表される. 図式の各連結成分をさらに頂点で区切ったものを**弧 (arc)** という. 空間 3 価グラフ図式 D の弧全体の集合を $\mathcal{A}(D)$ と書く.

有向空間曲面 (oriented spatial surface) [5] とは, 3 次元球面 $S^3 = \mathbb{R}^3 \sqcup \{\infty\}$ に埋め込まれた有向コンパクト曲面で次を満たすもののことである.

- 各連結成分は空でない境界を持つ.
- 2 次元閉円板成分を持たない.

注意 2.1. [5] では, 境界付き有向空間曲面 (oriented spatial surface with boundary) と呼ばれている.

有向空間曲面 F_1 と F_2 が**同値 (equivalent)** であるとは, F_1 を向きを込めて F_2 に移す S^3 上の全同位が存在することをいい, このとき $F_1 \cong F_2$ と書く.

原点を中心とする単位球面 S^2 に, 原点から無限遠点 ∞ へ向かう向きを正の法線方向とする向きを与える. S^2 上の空間 3 価グラフ図式 D に対して, S^2 上での正則近傍 $N(D)$ を取る. D の各上方弧の近傍に対応する $N(D)$ の部分集合を S^2 の正の法線方向に沿って全同位で動かすことで曲面 F を得る. F は各交差近傍を除いて S^2 上にあるので, S^2 から誘導される向きを与え, 有向空間曲面 F を得る (図 8). 任意の有向空間曲面は図 8 の方法で得られるある有向空間曲面と同値である. このとき, 有向空間曲面 F の**図式 (diagram)** を, 空間 3 価グラフ図式 D で定める.

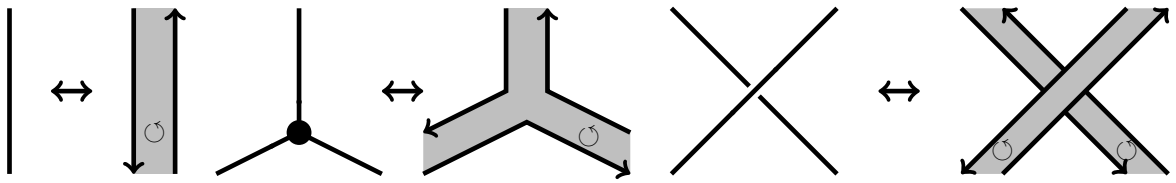


図 8: 空間 3 グラフ図式から有向空間曲面を得る方法

定理 2.2. ([5])**.** F_1 と F_2 を有向空間曲面とし, D_1 と D_2 をそれぞれ F_1 と F_2 の図式とする. このとき, F_1 と F_2 が同値であることと D_1 と D_2 が有限回の有向空間曲面図式のライデマイスター変形 (図 9) と S^2 上のアイソトピー変形で移り合うことは同値である.

定理 2.3. ([6])**.** F_1 と F_2 を有向空間曲面とし, D_1 と D_2 をそれぞれ F_1 と F_2 の Y 向き付けされた有向空間曲面図式とする. このとき, F_1 と F_2 が同値であることと D_1 と D_2 が Y 向き付けされた有向空間曲面図式のライデマイスター変形, S^1 成分の向きを反転させる操作, そして S^2 上のアイソトピー変形を有限回施して移り合うことは同値である.

ここで Y 向き付けられた R6 変形は図 10 で与えられる.

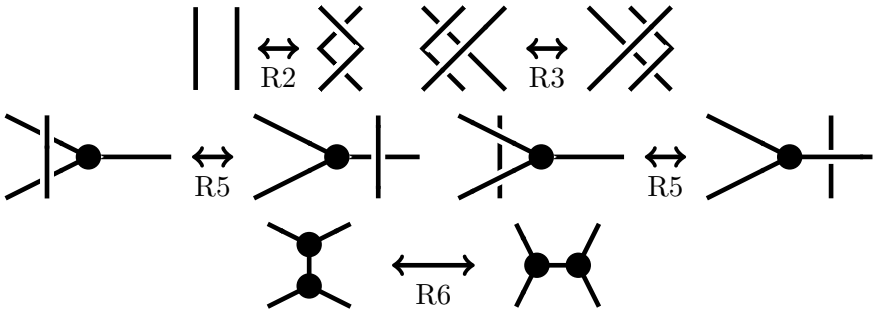


図 9: 有向空間曲面図式のライデマイスター変形

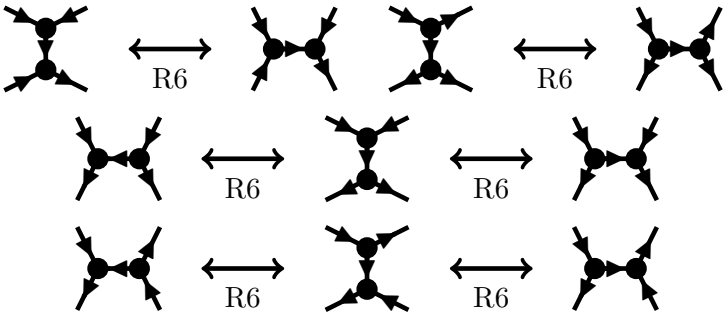


図 10: Y 向き付けられた R6 変形

3 Groupoid rack

全ての射が同型射であるような圏を**亜群 (groupoid)** と呼ぶ.

定義 3.1. $\mathcal{C}$ を亜群とし, $X = \mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ とする. X と X 上の 2 項演算 $* : X \times X \to X$ の組 $X = (X, *)$ が **groupoid rack** であるとは, $*$ が次の条件を満たすことをいう.

1. 任意の $x \in X$ と任意の $f : \lambda \to \mu,\ g : \mu \to \nu$ に対して, $x * (fg) = (x * f) * g,\ x * \mathrm{id}_\xi = x$ を満たす. ここで id_ξ は対象 ξ の恒等射である.
2. 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ を満たす.
3. 任意の $x \in X$ と任意の $f : \lambda \to \mu,\ g : \nu \to \nu$ に対して, $\mathrm{cod}(f * x) = \mathrm{dom}(g * x),\ (fg) * x = (f * x)(g * x)$ を満たす.

groupoid rack の公理 $1, 3$ は R2 と R5 変形に対応し, 2 は R3 変形に対応している. また亜群の射の結合法則は R6 変形に対応している.

定義 3.2. X を groupoid rack とし, D を Y 向き付けされた有向空間曲面図式とする. 写像 $C : \mathcal{A}(D) \to X$ が X **彩色 (X-coloring)** であるとは, 各交差と各 3 価頂点で図 11 の条件を満たすことをいう. X 彩色全体の集合を $\mathrm{Col}_X(D)$ と書く.

定理 3.3. X を groupoid rack とし, D_1 と D_2 を同値な有向空間曲面の Y 向き付けされた図式とす

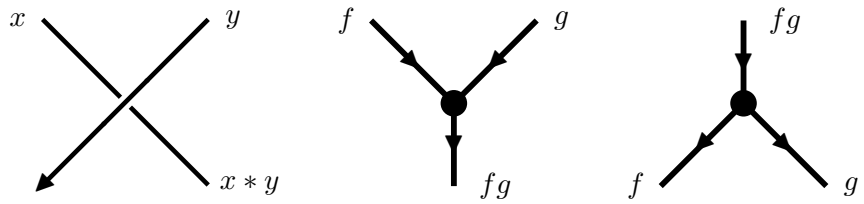


図 11: groupoid rack 彩色条件 $(x, y, f, g \in X,\ \mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g))$

る．このとき, $\mathrm{Col}_X(D_1)$ と $\mathrm{Col}_X(D_2)$ の間に全単射が存在する．特に $\mathrm{Col}_X(D_1)$ の濃度 $|\mathrm{Col}_X(D_1)|$ は有向空間曲面の不変量である．

次の定理は有向空間曲面図式の彩色に関する groupoid rack の普遍性を示すものである．

定理 3.4. $(R, *, \rho)$ を対称ラックとする．部分集合 $P \subset R \times R$ と写像 $\mu : P \to R$ が次の条件を満たすとき $R' = \bigcup_{(a,b)\in P} \{a, b\}$ は groupoid rack である．ここで $\mu(a, b)$ を ab で表す．

1. 任意の $a, b, c \in R$ に対して次は同値である．
$$(a, b) \in P \wedge (ab, c) \in P, \quad (b, c) \in P \wedge (a, bc) \in P.$$
2. 任意の $(a, b),\ (ab, c) \in P$ に対して
$$(ab)c = a(bc).$$
3. 任意の $a, b, x \in R$ に対して次は同値である．
$$(a, b) \in P, \quad (\rho(b), \rho(a)) \in P, \quad (a * x, b * x) \in P.$$
4. 任意の $(a, b) \in P$ に対して
$$(b, \rho(ab)) \in P, \quad (\rho(ab), a) \in P.$$
5. 任意の $(a, b) \in P,\ x \in R$ に対して
$$\rho(b)\rho(a) = \rho(ab), \quad (ab)\rho(b) = a, \quad (ab) * x = (a * x)(b * x), \quad x * (ab) = (x * a) * b.$$

証明の前に, 定理 3.4 がどのようにして得られるかについて述べる．

有向空間曲面図式のライデマイスター変形 (図 9) は R2, R3 変形を含むので, 有向空間曲面図式の彩色には対称ラックの構造が必要である．$R = (R, *, \rho)$ を対称ラックとし, μ を $R \times R$ の部分集合 P から R への写像とする．$R' = \bigcup_{(a,b)\in P} \{a, b\}$ とおく．また 3 価頂点周りの彩色条件 (図 12) は, 部分的に定義された積 μ を用いて定める．ただし, $\mu(a, b)$ を ab で表すこととする．

3 価頂点周りの彩色 (図 13) の well-defined 性から次の条件が得られる．

- 任意の $a, b \in R$ に対して次は同値である．
$$(a, b) \in P, \quad (\rho(b), \rho(a)) \in P.$$
- 任意の $(a, b) \in P$ に対して次は同値である．
$$(b, \rho(ab)) \in P, \quad (\rho(ab), a) \in P, \quad (ab, \rho(b)) \in P, \quad (\rho(a), ab) \in P.$$

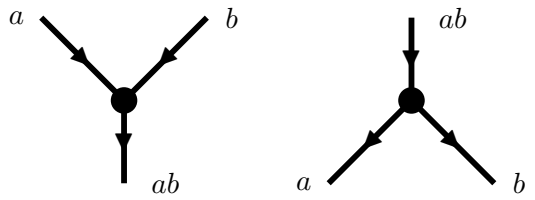


図 12: 3 価頂点周りの彩色条件 ($(a,b) \in P$)

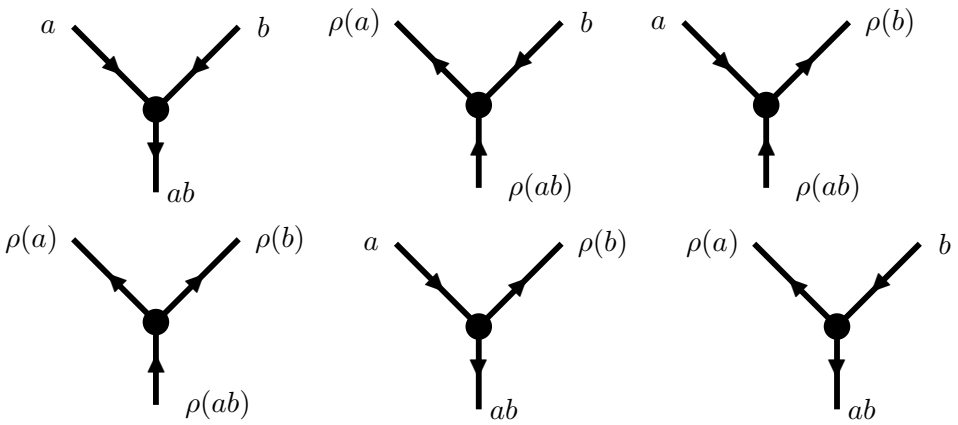


図 13: 3 価頂点周りの彩色

- 任意の $(a,b) \in P$ に対して

$$b\rho(ab) = \rho(a), \quad \rho(ab)a = \rho(b), \quad \rho(b)\rho(a) = \rho(ab), \quad (ab)\rho(b) = a, \quad \rho(a)(ab) = b.$$

注意 3.5. ここで次の条件は他の条件から導かれる.

- 任意の $(a,b) \in P$ に対して $(ab, \rho(b)) \in P, \quad (\rho(a), ab) \in P.$
- 任意の $(a,b) \in P$ に対して $b\rho(ab) = \rho(a), \quad \rho(ab)a = \rho(b), \quad \rho(a)(ab) = b.$

Y 向き付けされた R5 変形 (図 14) に対して整合的な彩色を与える条件は次で与えられる.

- 任意の $a, b, x \in R$ に対して次は同値である.

$$(a,b) \in P, \quad (a * x, b * x) \in P.$$

- 任意の $(a,b) \in P$ と任意の $x \in R$ に対して

$$(ab) * x = (a * x)(b * x), \quad x * (ab) = (x * a) * b.$$

最後に Y 向き付けられた R6 変形 (図 15) に対して整合的な彩色を与える条件は次で与えられる.

- 任意の $a, b, c \in R$ に対して次は同値である.

$$(a,b) \in P \wedge (ab,c) \in P, \quad (b,c) \in P \wedge (a,bc) \in P.$$

- 任意の $(a,b) \in P,\ (ab,c) \in P$ に対して

$$(ab)c = a(bc).$$

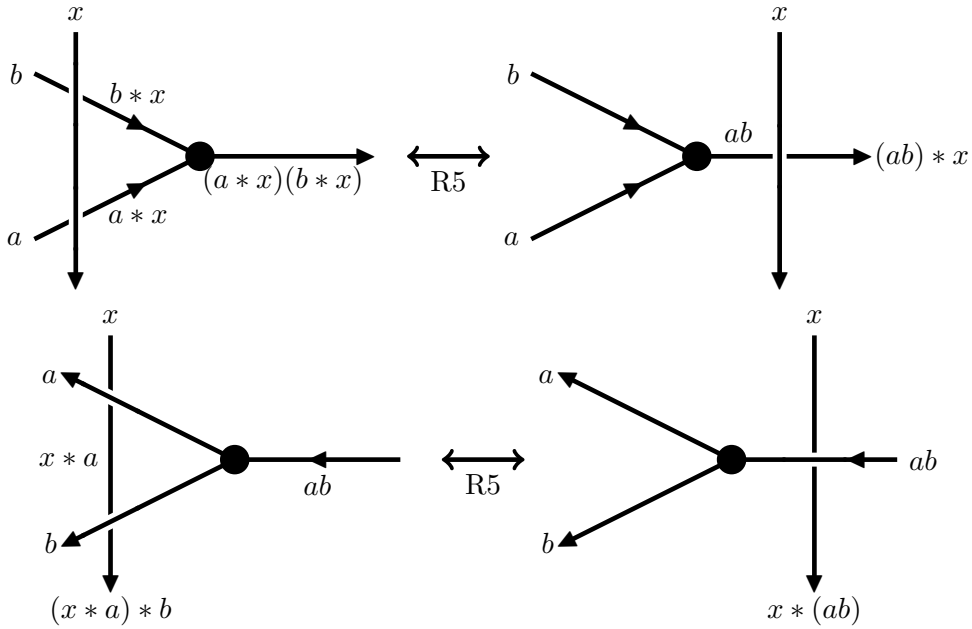


図 14: Y 向き付けされた R5 変形

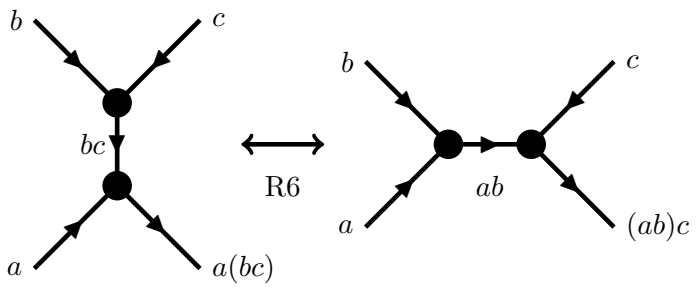


図 15: Y 向き付けられた R6 変形

以上から, 定理 3.4 の条件が得られる.

注意 3.6. Y 向き付けされた R5, R6 変形は図 14, 15 で与えられている変形以外にも存在するが、得られる条件は同じである.

補題 3.7. 任意の $a \in R'$ に対して, $(\rho(a), a) \in P$ かつ $(a, \rho(a)) \in P$ が成り立つ.

補題 3.8. 任意に $a \in R'$ を取る. このとき, 次が成り立つ.

1. 任意の $(x, a\rho(a)) \in P$ に対して $x(a\rho(a)) = x$.
2. 任意の $(a\rho(a), y) \in P$ に対して $(a\rho(a))y = y$.

補題 3.9. $\rho(R') = R'$.

補題 3.10. 任意の $x \in R$ に対して $S_x(R') = R'$.

補題 3.9, 3.10 より, $R' = (R', *, \rho)$ は $R = (R, *, \rho)$ の部分対称ラックである.

定理 3.4 の証明. $X = \bigcup_{(a,b)\in P} \{s_a, s_b, t_a, t_b\}$ とする. $\{(t_a, s_b) \mid (a,b) \in P\} \subset X \times X$ を含む最小の同値関係を $\sim$ とし, $x \in X$ の同値類を $[x]$ で表す. このとき, 亜群 $\mathcal{C}$ を次で定める.

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = X/\sim$,
- $x, y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x,y) = \{a \in R \mid s_a \in x,\ t_a \in y\}$,
- $[s_a] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対する恒等射は $a\rho(a)$,
- 射 $a : [s_a] \to [t_a]$ の逆射は $\rho(a) : [t_a] \to [s_a]$.

ここで恒等射は補題 3.7 から定義可能で well-defined である, すなわち, $[s_a] = [s_b]$ のとき, $a\rho(a) = b\rho(b)$ である. 実際, $(a\rho(a)) = (a\rho(a))(b\rho(b)) = a((\rho(a)b)\rho(b)) = a(\rho(\rho(b)a))\rho(b) = \rho(\rho(b))\rho(b) = b\rho(b)$ が成り立つ.

このとき, $R' = \mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ であり, μ と亜群 $\mathcal{C}$ の射の合成は写像として一致する. さらに R' 上のラック演算 $*$ と μ は定義 3.1 の条件を満たす. 従って R' は groupoid rack である. □

参考文献

[1] Roger Fenn and Colin Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), no. 4, 343–406. MR1194995

[2] David Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65. MR638121

[3] Seiichi Kamada, *Quandles with good involutions, their homologies and knot invariants*, Intelligence of low dimensional topology 2006, 2007, pp. 101–108. MR2371714

[4] Seiichi Kamada and Kanako Oshiro, *Homology groups of symmetric quandles and cocycle invariants of links and surface-links*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 10, 5501–5527. MR2657689

[5] Shosaku Matsuzaki, *A diagrammatic presentation and its characterization of non-split compact surfaces in the 3-sphere*, J. Knot Theory Ramifications **30** (2021), no. 9, Paper No. 2150071, 32. MR4358334

[6] ———, *Multiple group racks and cocycle invariants of surfaces in the* 3*-sphere*, Quandles and symmetric spaces 2021, 2022, pp. 84–88.

[7] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. (N.S.) **119(161)** (1982), no. 1, 78–88, 160. MR672410

[8] Michael Polyak, *Minimal generating sets of Reidemeister moves*, Quantum Topol. **1** (2010), no. 4, 399–411. MR2733246

[9] Kurt Reidemeister, *Elementare Begründung der Knotentheorie*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927), no. 1, 24–32. MR3069462

球面カンドルの埋め込みと結び目の不変量

九州大学大学院数理学府数理学専攻
米村拳太郎 (Kentaro YONEMURA) *

1 考える問題

次のような問題を筆者は考えている。

予想 1.1（埋め込み予想） 代数的連結かつ位相的連結な smooth quandle X に対し、適当な Lie 群 G と、滑らかな埋め込み $\iota : X \looparrowright G$ でカンドル準同型であるものが存在する。

未定義語は後述の説明を参照されたい。気分としては、等質空間上に位相と整合性のある代数構造を定めると、位相構造と代数構造を Lie 群に埋め込めるであろう、というものである。この文献では、予想 1.1 が「球面カンドル」と呼ばれる場合に成り立つことを示す。

2 カンドル

2.1 カンドルの基礎

この節では、カンドル (quandle) について、必要な事項をまとめる。詳細は [7, 10] を参照されたい。カンドルは Joyce [6] と Matveev [8] によってそれぞれ独立に定義された代数系であり、歴史的には結び目理論への応用するため生みだされた。定義は次のようになる。

定義 2.1（[6, 8]） 空でない集合 X と二項演算 $\triangleright : X \times X \to X$ の組 $(X, \triangleright)$ が次の 3 つのの条件 Q1〜Q3 を満たすとき、カンドルという。

Q1 （冪等性）任意の $x \in X$ に対して $x \triangleright x = x$ が成り立つ。
Q2 （逆元）任意の $x, y \in X$ に対して $x = z \triangleright y$ を満たす $z \in X$ が一意に存在する。
Q3 （自己分配性）任意の $x, y, z \in X$ に対して $(x \triangleright y) \triangleright z = (x \triangleright z) \triangleright (y \triangleright z)$ が成り立つ。

カンドルの定義に現れる条件 Q1〜Q3 は、結び目の射影図に対する「Reidemeister 移動」と呼ばれる操作を抽出したものだ (図 1 参照) というのが、結び目理論の専門家の見解である。

この文献を読む上で必要になるカンドルの例をいくつか述べておく。

例 2.2 群 G に新たな演算を $x \triangleright y = y^{-1}xy$ $(x, y \in G)$ と定めるとカンドルとなる。これを共役カンドルといい、$\mathrm{Conj}\, G$ と書く。

例 2.3 群 G とその同型写像 $\phi : G \to G$ に対して、演算を $x \triangleright y = \phi(xy^{-1})y$ $(x, y \in G)$ と定めるとカンドルとなる。これを 一般化 Alexander カンドルという。共役カンドルも一般化 Alexander カンドルの一種であ

* e-mail: yonemura.kentaro.527@s.kyushu-u.ac.jp

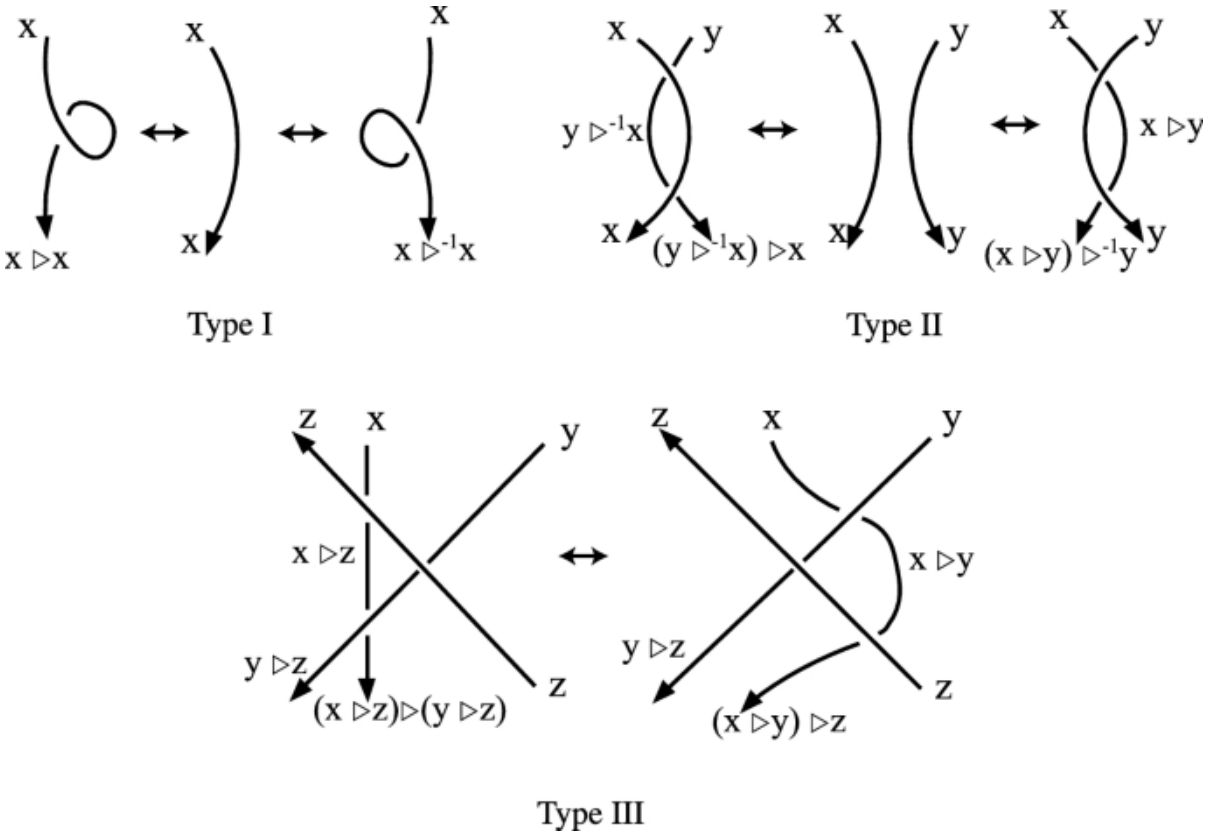


図 1　カンドル演算の幾何学的解釈

る。さらに、固定点のなす群 $G_0 = \{x \in G \mid \phi(x) = x\}$ の任意の部分群 H に対し、$H\backslash G$ には自然にカンドル構造が一般化 Alexander カンドルから誘導される。

例 2.4（[1]）　$\langle -, - \rangle$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の Euclid 内積とする。このとき、n 次元球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x \rangle = 1\}$ 上に演算 $x \triangleright y = 2\langle x, y \rangle y - x$ $(x, y \in S^n)$ と定めるとカンドルとなる。これを球面カンドルといい、$S^n_{\mathbb{R}}$ と書く。

カンドルの構造を調べる上で、内部自己同型群と呼ばれる群が重要な役割を果たす。残りでは、その説明を行いたい。カンドル準同型とは、$f(x \triangleright y) = f(x) \triangleright f(y)$ $x, y \in X$ を満たすカンドル間の写像 $f : X \to Y$ のことであり、特に全単射なカンドル準同型は同型であるという。重要な例として、カンドルの定義中に現れる写像

$$S_y : X \to X \quad x \mapsto x \triangleright y$$

があり、カンドル自己同型であることが知られている。自己同型の族 $\{S_y\}_{y \in X}$ により生成される自己同型群の部分群 $\mathrm{Inn}\, X$ をカンドル X の内部自己同型群という。内部自己同型群 $\mathrm{Inn}\, X$ は X に右から自然に作用する。この作用が推移的なカンドルを (代数的) 連結なカンドルという。球面カンドルは代数的連結なカンドルの例である。

2.2　smooth quandle

“smooth quandle” という概念は、石川 [5] によって定義された概念である。多様体構造を持つカンドルである。正確に述べると、次のようになる。

定義 2.5（[5]）　X を滑らかな多様体とする。滑らかな演算 $\triangleright : X \times X \to X$ がカンドル構造を定め、各 $y \in X$ に対して自己同型 $S_y : X \to X$ が微分同相であるとき、$(X, \triangleright)$ を smooth quandle という。

代表的な例として、球面カンドルや Lie 群から得られる共役カンドルなどがある。また例 2.3 を用いて、大量に構成することが出来る。次の定理により、代数的連結なカンドルは等質空間としての構造を持つことが知られている。

定理 2.6（[5]）　$(X, \triangleright)$ を代数的連結かつ位相的連結な smooth quandle とする。このとき、内部自己同型群 $\operatorname{Inn} X$ は Lie 群であり、その単位元連結成分 $\operatorname{Inn}^0 X$ も X に推移的に作用する。

この文献で扱う球面カンドルの場合は野坂 [11] により、球面カンドルの自己同型群 $\operatorname{Inn} S^n_{\mathbb{R}}$ は $SO(n+1)$ または $O(n+1)$ と同型となることが知られており、上記の定理が成り立つことは見やすい。次で定まる滑らかな写像は、定理 4.1 を示す上でも重要である：

$$S^n_{\mathbb{R}} \to \operatorname{Inn} S^n_{\mathbb{R}} \quad y \mapsto S_y.$$

3　Lie 群の作用に関する準備

この節では、定理 4.1 を示す上で重要な概念である、被覆を用いた Lie 群による作用の持ち上げについて述べる。この節の内容は [9] のものを定理 4.1 の証明で使いやすいように再構成したものである。

3.1　Lie 群の作用と Lie-Palais の定理

G を有限次元 Lie 群、M を滑らかな多様体とする。このとき、群作用 $M \curvearrowleft G$ は反群準同型 $\tau : G \to \operatorname{Diff}(M)$ だと思うことが出来る。ここから、G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の M への極小作用 (infinitesimal action)、つまり Lie 代数射 $d\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ が次のようにして定まる：$X \in \mathfrak{g}$ に対して、

$$(X_M(x))(\xi) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \xi(x \cdot \exp tX)$$

として定まるベクトル場 $X_M \in \mathfrak{X}(M)$ が得られる。ただし、$x \in M$ であり ξ は x の近傍で定義される C^∞ 級関数である。これにより

$$d\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M) \quad X \to X_M$$

が定まる。

逆に、Lie 代数射 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ が与えられたとき、群作用は構成されるのか、という問題を考えることが出来る。これへの解答のひとつが Lie-Palais の定理である。

定理 3.1（Palais）　M を滑らかな多様体、G を連結かつ単連結な Lie 群とし、$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする。Lie 代数射 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ に対して、$d\tau = \phi$ を満たす群作用 $\tau : G \to \operatorname{Diff}(M)$ が一意に存在する。

3.2　群作用の持ち上げ

[9] に述べられている群作用の被覆を通した持ち上げを構成する。ただし、本文中ではなく、[9, Remark2.2] で述べられている同値な構成方法のスケッチを復元したものである。

$\pi : \tilde{M} \to M$ を連結な多様体 M を底とした被覆写像、$p : \tilde{G} \to G$ を連結 Lie 群 G を底とする普遍被覆写像とする。特に、p は Lie 代数としての同型 $p_* : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}$ を誘導する。

滑らかな群作用 $M \curvearrowleft G$ が構成されているとき、対応する反群準同型 $\tau : G \to \mathrm{Diff}\, M$ が得られ、そこから Lie 代数射 $d\tau : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$ が得られる。ここで、被覆写像が局所同型であることを用いると、各 $X \in \mathfrak{g}$ に対して、

$$\begin{cases} p_*(\tilde{X}) = X \\ d\pi \tilde{X}_{\tilde{M}} = X_M \circ \pi \end{cases}$$

を満たす $\tilde{X} \in \tilde{\mathfrak{g}}$ と $\tilde{M}$ 上のベクトル場 $\tilde{X}_{\tilde{M}} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ が一意に存在する。これにより、Lie 代数射

$$\phi : \tilde{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{X}(\tilde{M}) \quad \tilde{X} \mapsto \tilde{X}_{\tilde{M}}$$

が得られる。Lie-Palais の定理により、$d\tilde{\tau} = \phi$ を満たす群作用 $\tilde{\tau} : \tilde{G} \to \mathfrak{X}(\tilde{M})$ が誘導される。以上より、群作用 $M \curvearrowleft G$ から群作用 $\tilde{M} \curvearrowleft \tilde{G}$ が誘導される。

3.3 被覆により誘導された群作用と被覆射の関係

Lie 群 G が多様体 M に右から滑らかに作用しているとする。M の普遍被覆 $\pi : \tilde{M} \to M$ と被覆 $\pi_N : N \to M$ と群作用 $M \curvearrowleft G$ を考えると、前節の議論により、$\tilde{M}$ と N にそれぞれ普遍被覆群の右作用が定まる。このとき、2 つの性質を述べておこう。

命題 3.2　まず、$p : \tilde{G} \to G$ を被覆写像とすると、図式

$$\begin{tikzcd} N \times \tilde{G} \arrow[r, "\mathrm{action}"] \arrow[d, "\pi_N \times p"'] & N \arrow[d, "\pi_N"] \\ M \times G \arrow[r, "\mathrm{action}"] & M \end{tikzcd}$$

は可換である。

また、次の図式

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[r, "q_N"] \arrow[d, "\pi"'] & N \arrow[dl, "\pi_N"] \\ M & \end{tikzcd}$$

を可換にする被覆射 $q_N : \tilde{M} \to N$ が誘導される。誘導された群作用と被覆射の関係を述べておきたい。

命題 3.3　誘導された群作用と被覆射は可換である。

4 球面カンドルの埋め込み

この節での目的は次の定理の証明と応用について述べる。この定理は、埋め込み予想が球面カンドルの場合は成り立つことを示している。事実自体は、証明なしで 2014 年に Eisermann [3, Remark 3.12] で述べられている。

定理 4.1（主定理）　滑らかな埋め込み $\iota_m : S^m \to Pin(m+1)$ で、S^m を球面カンドル、$Pin(m+1)$ を共役カンドルとみたとき、カンドル準同型となるものが存在する。

4.1 証明の概略

次の 4 つのステップを経由して証明を行う。

- 群作用 $\mathbb{R}P^n \curvearrowleft SO(n+1)$ と普遍被覆 $S^n \to \mathbb{R}P^n$ から、群作用を持ち上げ、群作用 $S^n \curvearrowleft Spin(n+1)$ を構成する。
- 球面カンドルの内部自己同型群が $SO(n+1)$ または $O(n+1)$ と同型であることから、$\mathbb{R}P^n$ を $O(n+1)$ に埋め込めることを示す。
- $\mathbb{R}P^n$ の $O(n+1)$ への埋め込みから S^n を $Pin(n+1)$ へ埋め込めることを示す。
- 球面を球面カンドル、$Pin(n+1)$ を共役カンドルとするとき、構成した埋め込みがカンドル準同型であることを示す。この際、3.3 節の性質を用いる。

4.2 応用

定理 4.1 は、結び目理論における応用が 2 つある。まず、Clark-Saito [2] により構成された longitudinal mapping への応用である。次に、結び目の補空間[*1]の Chern-Simons 不変量の計算である。元々、Inoue-Kabaya [4] が主 $PSL(2,\mathbb{C})$ 束に関する Chern-Simons 不変量 (複素体積) を計算する手法を開発していた。それまでは 3 次元多様体論を駆使して苦労しないと求められなかったが、「彩色とカンドル 2 コサイクル」という 2 つの情報に集約して、比較的簡潔に求められるようになった。定理 4.1 により、Inoue-Kabaya [4] の手法を援用すれば、主 $SU(2)(\cong Spin(3))$ 束に関する Chern-Simons 不変量を計算することが出来るようになると思われる。

5 将来の課題

恐らく、予想は正しくないのではないかと著者は考えている。そのため、次の 2 つの課題がある：

- 予想が成り立つ smooth quandle のクラスの特徴づけ、
- 予想の反例の構成。

予想が成り立つクラスとして、Riemann 対称空間上に定まるカンドルが挙げられる。これは証明することが出来れば、定理 4.1 の拡張となる。「Riemann 対称空間上に定まるカンドル」の定義を述べて終わりにしたい。

定義 5.1　Riemann 対称空間 X とその点対称の族 $\{s_y\}_{y\in X}$ を考える。二項演算を $x \triangleright y = s_y(x)$ と定めると、$(X, \triangleright)$ はカンドルとなる。

参考文献

[1] Hiiseyin Azcan and Roger Fenn. Spherical representations of the link quandles. *Turkish J. of Mathematics*, Vol. 18, pp. 102–110, 1994.

[2] W. Edwin Clark and Masahico Saito. Longitudinal mapping knot invariant for SU(2). *J. Knot Theory Ramifications*, Vol. 27, No. 11, pp. 1843014, 22, 2018.

[3] Michael Eisermann. Quandle coverings and their Galois correspondence. *Fund. Math.*, Vol. 225, No. 1, pp. 103–168, 2014.

[4] Ayumu Inoue and Yuichi Kabaya. Quandle homology and complex volume. *Geometriae Dedicata*, Vol. 171, No. 1, pp. 265–292, 2014.

[5] Katsumi Ishikawa. On the classification of smooth quandles. preprint.

[*1] 結び目の補空間はトーラスと同相な境界を持つ 3 次元多様体である。

[6] David Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *J. Pure Appl. Algebra*, Vol. 23, No. 1, pp. 37–65, 1982.

[7] Seiichi Kamada. *Surface-knots in 4-space*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Singapore, 2017. An introduction.

[8] S. V. Matveev. Distributive groupoids in knot theory. *Mat. Sb. (N.S.)*, Vol. 119(161), No. 1, pp. 78–88, 160, 1982.

[9] James Montaldi and Juan-Pablo Ortega. Notes on lifting group actions. 2008.

[10] Takefumi Nosaka. *Quandles and topological pairs;Symmetry, knots, and cohomology*. SpringerBriefs in Mathematics.

[11] Takefumi Nosaka. Central extensions of groups and adjoint groups of quandles (geometry and analysis of discrete groups and hyperbolic spaces). *RIMS Kokyuroku Bessatsu*, No. 66, pp. 167–184, 2017.

絡み目の parabolic Dijkgraaf-Witten 不変量

東京工業大学理学院数学系数学コース
柳田幸輝 (Koki Yanagida)

概 要

Dijkgraaf-Witten 不変量とは有向閉三次元多様体の不変量であった。これをもとに、本研究では $SL_2(\mathbb{F}_q)$ の parabolic 表現を用い、絡み目の不変量となる parabolic DW 不変量を新たに定義した。この DW 不変量は、分岐被覆空間のテクニックまたは、カンドルコサイクルを用いる事で、“部分的に”比較的容易に計算できる。本講演では、その定義とその計算例を紹介する。加えて Karuo 氏が考案した reduced DW 不変量は parabolic DW 不変量から還元され、氏の不変量が任意の結び目で図式だけで計算可能な事も紹介する。

1 導入

絡み目とは、三次元球面 S^3 に埋め込まれた $\bigsqcup_{i=1}^{r} S^1$ $(r \in \mathbb{N})$ のことを言う。特に $r = 1$ の場合、これを**結び目**という。また、絡み目の**図式**とは、絡み目を平面に射影したもので、その交点の上下が明示された図のことである（図 1)。二つの絡み目が同値か否かを図式から判定することは困難である。そのため、絡み目全体の幾何的構造を伴った仕分けは、結び目理論において大きな問題である。そこで、絡み目の有用な不変量の研究がおこなわれてきた。同様の背景で、向き付けられた三次元多様体の不変量である Dijkgraaf-Witten 不変量から、結び目の不変量を構成する試みが成されている [Kar21a, Kar21b]。しかしながら、任意に与えられた絡み目の Dijkgraaf-Witten 不変量を具体的に評価することは困難であった。

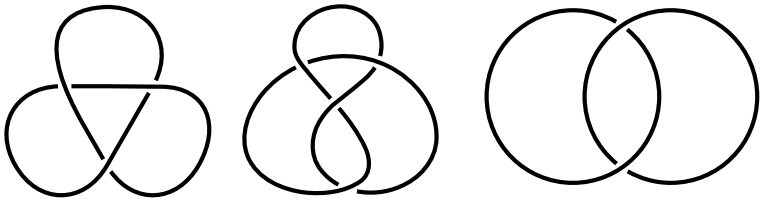


図 1: 三つ葉結び目（左）と八の字結び目（中)、ホップ絡み目（右）の図式

そこで本研究では、S^3 の絡み目で分岐する被覆空間に着目することで、絡み目の不変量となる parabolic Dijkgraaf-Witten 不変量を新たに構成した。これは、その定義に S^3 の分岐被覆空間へ、$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ の parabolic な準同型が持ちあがる事実を用いている。そのため、分岐被覆空間の手法を応用することで “部分的な”情報が計算可能である。加えて、parabolic な準同型と対応のあるカンドル代数を用いれば、図式のみから “部分的な”情報を導出できる。

本レポートでは、節 2 で parabolic Dijkgraaf-Witten 不変量とその性質を述べる。節 3 では、カンドル代数を用いた計算手法を紹介する。また、本レポートを通して q は素数 p の素冪であり、$\mathbb{F}_q$ は位数 q の有限体を意味する。

2 絡み目の parabolic Dijkgraaf-Witten 不変量

まず初めに、絡み目の parabolic Dijkgraaf-Witten invariant を定義する（Definition 2.1）。そのために通常の Dijkgraaf-Witten invariant[DW90] から導入しよう。M を向き付けられた閉三次元多様体とし、$[M] \in H_3(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ はその基本類とする。また、群 G にたいして BG を $(G,1)$ 型の Eilenberg-Maclane 空間とし、さらに $\iota : M \to B\pi_1(M)$ は分類写像とする（これらの用語の定義については [Bro94] 参照）。BG の通常のホモロジー群と G の群のホモロジー群が一致することから、群の準同型 $f : \pi_1(M) \to G$ が与えられたとき、$f_* = (Bf)_* \circ \iota_* : H_3(M;\mathbb{Z}) \to H_3(BG;\mathbb{Z})$ が定まる。ここで $Bf : B\pi_1(M) \to BG$ は f によって誘導される写像である。有限群 G に対して *Dijkgraaf-Witten* **不変量**（以下、DW 不変量と略記する）は以下の形式和として定義される。

$$\mathrm{DW}_G(M) = \sum_{f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M),G)} f_*([M]) \in \mathbb{Z}[H_3(BG;\mathbb{Z})].$$

この DW 不変量のもとで、基本群から有限群への準同型に制限を設けることで parabolic DW 不変量を定める。以降、G を $\mathbb{F}_q$ 上の特殊線形群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ とし、$L \subset S^3$ は絡み目とする。準同型 $\rho : \pi_1(S^3 \setminus L) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ が *parabolic* であるとは、L の各経線の ρ による像が、$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ において $\begin{bmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ に共役 であるときを指す。parabolic な準同型全体は $\mathrm{Hom}_{\mathrm{para}}(\pi_1(S^3 \setminus L), \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q))$ と書くこととする。

この parabolic な準同型は、絡み目で分岐する被覆空間上へと持ちあがる事が分かる。$E_L^p \to S^3 \setminus L$ を絡み目の外部補空間の p 重被覆とし、$B_L^p \to S^3$ は絡み目 L で分岐する p 重被覆としよう。$\pi(E_L^p)$ は $\pi(S^3 \setminus L)$ の部分群とみなせるから準同型 $f : \pi(S^3 \setminus L) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ から制限写像 $\mathrm{res}(f) : \pi_1(E_L^p) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ を考えることができる。f が parabolic であれば、$\mathrm{res}(f)$ における E_L^p の各経線の像は単位行列である。ここで、B_L^p は E_L^p の各経線を消去するようにソリッドトーラスを貼り合わせて構成するのであったから、$\mathrm{res}(f)$ から $\bar{f} : \pi_1(B_L^p) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ が自然に誘導される。この分岐被覆空間へと持ち上がった準同型を用いて、絡み目の不変量を以下で定義する。

Defnition 2.1. $\mathbb{F}_q$ を位数 q の有限体、$L \subset S^3$ は絡み目とする。*parabolic Dijkgraaf-Witten* **不変量** $\mathrm{DW}_q(L)$ を形式和

$$\mathrm{DW}_q(L) := \sum_{f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{para}}(\pi_1(S^3 \setminus L), \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q))} \bar{f}_*([B_L^p]) \in \mathbb{Z}[H_3(B\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q);\mathbb{Z})]$$

として定義する。

parabolic DW 不変量 $\mathrm{DW}_q(L)$ は絡み目の不変量である事は定義から従う。更に、L が結び目で q が素数の場合は、Karuo 氏が定めた reduced DW 不変量 $\widehat{\mathrm{DW}}_q(L)$ [Kar21a, Kar21b] を還元できることが分かる。

Remark 2.2. $q \neq 2, 2^2, 2^3, 3, 3^2, 3^3, 5$ の場合、同型 $H_3(B\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/q^2 - 1$ が成り立つことが知られている [Hut13]。このような素冪 q のことを、このレポート内では *generic* と呼ぶ。

計算面において、一般の $\bar{f}_*([B_L^p])$ の計算は困難だが、分岐被覆空間がレンズ空間やブリ—スコーンホモロジー球面となる場合に、その部分的情報が比較的容易に計算可能である。特に次の結果

が得られる。

Theorem 2.3. q を *generic* な素冪とする。このとき、$(2, 2m)$-トーラスリンクと $2m$-*twist knot* の *parabolic DW* 不変量は、m について周期 $q(q+1)^2(q-1)^2$ をもつ。

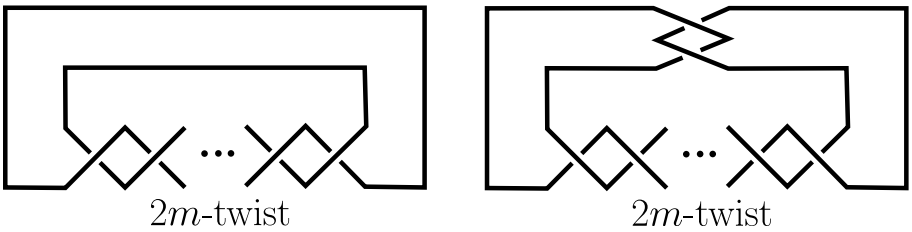


図 2: $(2, 2m)$-トーラスリンク（左）と $2m$-twist knot（右）

3 カンドルコサイクル不変量を用いた parabolic Dijkgraaf-Witten 不変量の計算

parabolic DW 不変量は群環 $\mathbb{Z}[H_3(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q); \mathbb{Z})]$ に値を持つ絡み目の不変量である。そのため、pre-Bloch group $\mathcal{P}(\mathbb{F}_q)$ から誘導される群 $\hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$ が存在し、準同型 $H_3(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q); \mathbb{Z}) \to \hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$ を考えることができる。この節では、カンドル代数と絡み目の彩色を用いて、parabolic DW 不変量の $\hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$ における像を計算する方法を紹介する。以降、素冪 q は generic かつ奇数であると仮定する。

3.1 カンドルコサイクル不変量

初めに、parabolic なカンドルと、絡み目の彩色について紹介する。$r \in \mathbb{F}_q^\times = \mathbb{F} \setminus \{0\}$ に対して、X_r は $\mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \setminus \{(0,0)\}$ を同値関係 $(x, y) \sim (-x, -y)$ で割った集合とする。この集合上に、二項関係 $\triangleleft : X_r \times X_r \to X_r$ を

$$(a, b) \triangleleft (c, d) = (a, b) \begin{pmatrix} 1 + rcd & rd^2 \\ -rc^2 & 1 - rcd \end{pmatrix}$$

によって定めることで、$(X_r, \triangleleft)$ はカンドルを成す。これを、*parabolic* **カンドル**とよぶ (詳細は [Nos17] の Example 3.15 参照)。parabolic カンドルによる絡み目の彩色と、絡み目の parabolic な準同型にはある対応が存在する。

その対応を見るために、続いて絡み目の彩色を定義しよう。$D \subset \mathbb{R}^2$ を絡み目 L の図式としたとき、写像 $\mathcal{C} : \{D \text{ の弧}\} \to X_r$ が図 3 左の等式を満たすならば、$\mathcal{C}$ を X_r-**彩色**であるという。更に、X_r-彩色 $\mathcal{C}$ が与えられたときに、写像 $\lambda : \{\mathbb{R}^2 \setminus D \text{ の領域}\} \to X_r$ が、有界でない領域を $(1, 0) \in X_r$ に写し、更に図 3 右の等式を満たすときに組 $(\mathcal{C}, \lambda)$ を *shadow* X_r-**彩色**と呼ぶ。以降、shadow X_r-彩色全体の集合を $\mathrm{Col}_{X_r}(D)$ と表そう。この $\mathrm{Col}_{X_r}(D)$ と $\mathrm{Hom}_{\mathrm{para}}(\pi_1(S^3 \setminus L), \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q))$ の間に次の一対一対応を与える写像 $\mathcal{F}$ の存在が知られている（詳細は [Nos17, Example 3.16] 参照）。

$$\mathcal{F} : \bigcup_{r \in \mathbb{F}_q^\times} \mathrm{Col}_{X_r}(D) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathrm{para}}(\pi_1(S^3 \setminus L), \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)). \tag{1}$$

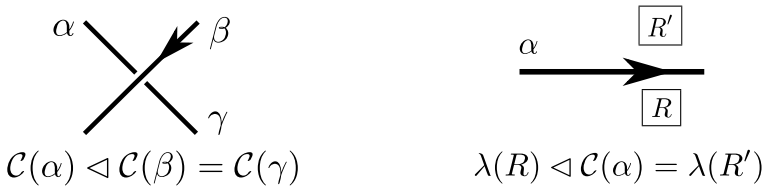


図 3: 絡み目の交点と領域における彩色条件

次にカンドルホモロジーを導入し、絡み目の彩色と parabolic DW 不変量の関係を見る。$C_n^R(X_r)$ を X_r^n によって生成される自由 $\mathbb{Z}$-加群とし、さらに準同型 $\partial_n^R : C_n^R(X_r) \to C_{n-1}^R(X_r)$ を

$$\sum_{2 \le i \le n} (-1)^i \big((x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) - (x_1 \lhd x_i, \ldots, x_{i-1} \lhd x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\big)$$

で定める。このとき $\partial_{n-1}^R \circ \partial_n^R = 0$ を満たすので、組 $(C_*^R(X_r), \partial_*^R)$ は複体を成す。更に $C_*^D(X_r)$ を $\{(x_1, \ldots, x_n) \in X_r^n \mid \text{ある } i \in \mathbb{N} \text{ が存在して } x_i = x_{i+1}\}$ によって生成される自由 $\mathbb{Z}$-加群とする。この $C_*^D(X_r)$ は $(C_*^R(X_r), \partial_*^R)$ の部分複体になることが確かめられ、よってその商複体 $\big(C_*^Q(X_r), \partial_*\big)$ を考えることができる。$\big(C_*^Q(X_r), \partial_*\big)$ によるホモロジーは X_r の**カンドルホモロジー**と呼ばれ、$H_n^Q(X_r)$ と表す。双対的な議論をアーベル群 A に対して施すことで、**カンドルコホモロジー** $H_Q^*(X_r; A)$ を構成することが可能である。

絡み目 L の図式 D における X_r-彩色 $\mathcal{S} \in \mathrm{Col}_{X_r}(D)$ が与えられたとき、各交点についての和 $\sum_{\tau : D \text{ の各交点}} \epsilon_\tau(x, y, z) \in C_3^Q(X_r)$ は 3-cycle を成すことが知られている。ただし、$x, y, z \in X_r$ と $\epsilon_\tau \in \{\pm 1\}$ は図 4 に対応するように取っている。この 3-cycle が表すホモロジー類を $\mathcal{S}$ **の基本類**と呼び、$[\mathcal{S}] \in H_3^Q(X_r)$ で表す。[Nos15] もしくは [Nos17, Corollrary 6.20] によれば、全射準同型 $\mathcal{I} : H_3^Q(X_r) \twoheadrightarrow H_3(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q); \mathbb{Z})$ が存在して、任意の彩色 $\mathcal{S} \in \mathrm{Col}_{X_r}(D)$ について

$$\mathcal{I}([\mathcal{S}]) = \overline{\mathcal{F}(\mathcal{S})}_*([B_L^p]) \in H_3(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q); \mathbb{Z})$$

を満たすことが示されている。すなわち、$\mathcal{F}$ による式 (1) の一対一対応を考えれば、形式的な和 $\sum_{\mathcal{S} \in \mathrm{Col}_{X_r}(D)} [\mathcal{S}] \in \mathbb{Z}[H_3^Q(X_r)]$ と parabolic DW 不変量は同値であることが分かる。よって $[\mathcal{S}]$ の導出が目標となるが、$H_3^Q(X_r)$ における $[\mathcal{S}]$ の評価は一般に困難である。そこで、カンドル 3-cocycle $\psi \in C_Q^3(X; A)$ とのペアリング $\langle \psi, [\mathcal{S}] \rangle \in A$ を考える。これを**カンドルコサイクル不変量**という [CKS01]。

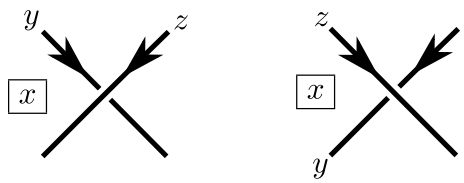


図 4: 正の交点（左）と負の交点（右）

3.2 カンドル 3-cocycle ψ の構成

カンドルコサイクル不変量を求めるためには、可換群 A とカンドル 3-cocycle $\psi \in C_Q^3(X; A)$ を具体的に定める必要がある。本小節では、A に pre-Bloch group から定まる群 $\hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$ を用いるこ

とでペアリング $\langle \psi, [\mathcal{S}] \rangle \in A$ が計算可能であること紹介する。

初めに $\hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$ の定義を述べたい。まず *pre-Bloch group* $\mathcal{P}(\mathbb{F}_q)$ を、生成元 $[x]$ $(x \in \mathbb{F}_q \setminus \{0,1\})$ と関係子

$$[x] - [y] + [\frac{y}{x}] - [\frac{1-x^{-1}}{1-y^{-1}}] + [\frac{1-x}{1-y}] = 0, \quad x \neq y \in \mathbb{F}_q \setminus \{0,1\}$$

であるアーベル群として定める。次に群 $\tilde{\wedge}^2 \mathbb{F}_q^\times$ は、$\mathbb{F}_q^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_q^\times$ を $a \otimes b + b \otimes a$ で生成される部分群で割った剰余群としよう。このとき、自然な準同型 $\mathcal{P}(\mathbb{F}_q) \to \tilde{\wedge}^2 \mathbb{F}_q^\times$ が $[x]$ を $x \wedge (1-x)$ を写すものとして定まる。この準同型の核を *Bloch group* と呼び、$\mathcal{B}(\mathbb{F}_q)$ と表す。加えて、$\hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$ は $\mathcal{P}(\mathbb{F}_q)$ に関係子

$$[x] = [1 - \frac{1}{x}] = [\frac{1}{1-x}] = -[\frac{1}{x}] = -[\frac{x-1}{x}] = -[1-x]$$

を新たに加えることで得られるアーベル群とする。更に、商写像 $\mathcal{P}(\mathbb{F}_q) \twoheadrightarrow \hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$ による Bloch group $\mathcal{B}(\mathbb{F}_q)$ の像を $\hat{\mathcal{B}}(\mathbb{F}_q)$ と表す。この $\hat{\mathcal{B}}(\mathbb{F}_q)$ について次の同型が知られている [Oht]。

$$\hat{\mathcal{B}}(\mathbb{F}_q) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(\frac{q+1}{2})\mathbb{Z}, & \text{if } q \equiv 1, 9 \mod 12, \\ \mathbb{Z}/(\frac{q+1}{4})\mathbb{Z}, & \text{if } q \equiv 3, 7 \mod 12, \\ \mathbb{Z}/(\frac{q+1}{6})\mathbb{Z}, & \text{if } q \equiv 5 \mod 12, \\ \mathbb{Z}/(\frac{q+1}{12})\mathbb{Z}, & \text{if } q \equiv 11 \mod 12. \end{cases}$$

次に 3-cocycle $\psi : H_3^Q(X_r) \to \hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$ を定めるため、斉次複体を導入する。以降、Y を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ が右から作用する集合とする。ここでは Y として、parabolic カンドル X_r や射影空間 $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q) := \mathbb{F}_q \cup \{\infty\}$ を想定している。$C_n^\Delta(Y)$ は Y^{n+1} によって生成される $\mathbb{Z}$-自由加群とし、境界準同型を

$$\partial_n^\Delta : C_n^\Delta(Y) \to C_{n-1}^\Delta(Y), \qquad (y_0, \ldots, y_n) \mapsto \sum_{t=0}^{n} (-1)^t (y_0, \ldots, y_{t-1}, y_{t+1}, \ldots, y_n)$$

で定めれば、これは複体となる。$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ の Y への作用は $C_n^\Delta(Y)$ の対角作用を誘導するため、テンソル積 $C_*^\Delta(Y)_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)} := C_*^\Delta(Y) \otimes_{\mathbb{Z}[\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)]} \mathbb{Z}$ を考えることができる。この複体の詳しい研究が Hutchinson 氏によってなされている [Hut13, Section 2]。

$Y = X_r$ の場合に、*Inoue-Kabaya* **鎖写像**という鎖写像 $\varphi_* : C_*^R(X_r) \to C_*^\Delta(X_r)_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)}$ を定めることができる。すなわち、これは準同型 $\varphi_* : H_3^Q(X_r) \to H_3^\Delta(X_r)_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)}$ を誘導する。特に $n = 2, 3$ において、以下のように定義される。

$$\begin{aligned} \varphi_2(a,b) &= (p_0, a, b) - (p_0, a \lhd b, b), \\ \varphi_3(r,a,b) &= (p_0, r, a, b) - (p_0, r \lhd a, a, b) - (p_0, r \lhd b, a \lhd b, b) + (p_0, (r \lhd a) \lhd b, a \lhd b, b). \end{aligned}$$

$n > 3$ においても定義されるが、ここでは紹介しない（詳細は [IK14]）。

最後に準同型 $H_3^\Delta(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q))_{SL_2(\mathbb{F}_q)} \to \hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$ を複比を用いて構成する。すなわち、任意の $(x, y, z) \in$

$C_n^{\Delta}(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q))$ に対して、

$$\phi(x,y,z) := \begin{cases} (z-x)(x-y)(z-y)^{-1}, & \text{if } x,y,z \neq \infty, \\ (y-z)^{-1}, & \text{if } x = \infty, \\ z-x, & \text{if } y = \infty, \\ x-y, & \text{if } z = \infty, \end{cases}$$

と定め、さらに $\Phi : C_3^{\Delta}(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)) \to \hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$ を

$$\Phi(x_1,x_2,x_3,x_4) = \begin{cases} \left[\frac{\phi(x_1,x_2,x_4)}{\phi(x_1,x_2,x_3)}\right], & \text{if } x_1,x_2,x_3,x_4\text{が互いに異なる}, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

と定める。このとき、Φ は準同型 $H_3^{\Delta}(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q))_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)} \to \hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_q)$ を誘導することがわかる [Hut13]。加えて、その像は $\hat{\mathcal{B}}(\mathbb{F}_q)$ に包含されることが示される。以上をまとめれば、

Proposition 3.1. proj : $X_r \to \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ を標準的な射影とする。次の合成写像 ψ はカンドル 3-*cocycle* である。

$$\psi : H_3^Q(X_r) \xrightarrow{\varphi_3} H_3^{\Delta}(X_r)_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)} \xrightarrow{\mathrm{proj}_*} H_3^{\Delta}(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q))_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)} \xrightarrow{\Phi_*} \hat{\mathcal{B}}(\mathbb{F}_q)$$

更に次が分かっている。

Proposition 3.2. $\sum_{\mathcal{S}\in\mathrm{Col}_{X_r}(D)} \langle \psi, [\mathcal{S}] \rangle$ は *reduced DW* 不変量 $(p-1)\widehat{\mathrm{DW}}_p(K)$ に等しい。

3.3 Some computation examples with Quandle cocycle invariant

上記の議論によって、具体的なカンドル 3-cocycle を定めることができる。よって、プログラミングを用い X_r-彩色を求めることによって、カンドルコサイクル不変量 $\langle \psi, [\mathcal{S}] \rangle \in \hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_p)$ を計算することができる。以下の表は、いくつかの結び目を除いた七交点以下の結び目に対するカンドルコサイクル不変量である。

ここで $t \in \hat{\mathcal{P}}(\mathbb{F}_p)$ は p に対応する生成元を表している。ただし、$\hat{\mathcal{B}}(\mathbb{F}_{11})$ は自明な群であるため、$p = 11$ の場合は省いた。

	6_2	6_3	7_3
$p = 7$	96	12	12
$p = 13$	24	24	$312t^2 + 336$
$p = 17$	$544t + 576$	$544t^2 + 544t + 32$	32
$p = 19$	720	36	36
$p = 23$	$1012t + 44$	2068	$2024t + 44$
$p = 29$	$3248t^4 + 1624t^2 + 56$	$1624t^3 + 1624t^2 + 56$	56
$p = 31$	60	$1860t^7 + 1860t + 60$	$1860t^7 + 1920$
$p = 37$	72	72	$2664t^{16} + 72$

	7_5	7_6	7_7
$p=7$	12	$84t+12$	12
$p=13$	24	24	336
$p=17$	32	32	$544t^2+1120$
$p=19$	36	$684t^4+36$	$684t^2+684t+36$
$p=23$	1056	$1012t+44$	3080
$p=29$	56	$1624t^2+1680$	$1624t+56$
$p=31$	60	$1860t^4+60$	$1860t^4+60$
$p=37$	$2664t^{17}+2664t^{13}+72$	$2664t^2+72$	$5328t+72$

表 1: 素数 p と結び目 K にたいする $2(p-1)\widehat{\mathrm{DW}}_p(K)$ の値

参考文献

[Bro94] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1994.

[CKS01] J. S. Carter, S. Kamada, and M. Saito, *Geometric interpretations of quandle homology*, Journal of knot theory and its ramifications **10** (2001), no. 03, 345–386.

[DW90] R. Dijkgraaf and E. Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, Comm. Math. Phys. **129** (1990), no. 2, 393–429.

[Hut13] K. Hutchinson, *A Bloch-Wigner complex for* SL_2, J. K-Theory **12** (2013), no. 1, 15–68.

[IK14] A. Inoue and Y. Kabaya, *Quandle homology and complex volume*, Geometriae Dedicata **171** (2014), no. 1, 265–292.

[Kar21a] H. Karuo, *The reduced Dijkgraaf-Witten invariant of double twist knots in the Bloch group of* $\mathbb{F}_p$, J. Knot Theory Ramifications **30** (2021), no. 7, Paper No. 2150055, 52.

[Kar21b] ———, *The reduced Dijkgraaf-Witten invariant of twist knots in the Bloch group of a finite field*, J. Knot Theory Ramifications **30** (2021), no. 3, Paper No. 2150014, 70.

[Nos15] T. Nosaka, *Homotopical interpretation of link invariants from finite quandles*, Topology and its Applications **193** (2015), 1–30.

[Nos17] ———, *Quandles and topological pairs*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, Singapore, 2017, Symmetry, knots, and cohomology.

[Oht] T. Ohtsuki, *On the bloch groups of finite fields and their quotients by the relation corresponding to a tetrahedral symmetry*, preprint.

[Wak92] M. Wakui, *On Dijkgraaf-Witten invariant for* 3*-manifolds*, Osaka J. Math. **29** (1992), no. 4, 675–696.

Infinitesimal deformations of Killing spinors on nearly parallel G_2-manifolds.

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
大野走馬 (Soma OHNO)

概要

キリングスピノールを持つ多様体はアインシュタイン多様体である．従って, アインシュタイン変形をキリングスピノールを用いて調べることが出来る．我々は [13] において, キリングスピノールの無限小変形を nearly parallel G_2 多様体上で調べた．実は 7 次元スピン多様体上でキリングスピノールと nearly parallel G_2 構造が 1 対 1 に対応することから, 我々の結果は Alexandrov と Semmelmann の nearly parallel G_2 構造の無限小変形に関する結果 [1] に新しい証明を与えたことになる．また, キリングスピノールの無限小変形を調べるのと同様の手法を用いることによって, nearly parallel G_2 多様体上の Rarita-Schwinger 場についても結果を得た．今回はこれらの結果の概要を説明していく．

1 導入

スピン群 $\mathrm{Spin}(n)$ は特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ の普遍被覆として定義される．これは二重被覆となり, 被覆写像を $\mathrm{Ad} : \mathrm{Spin}(n) \to \mathrm{SO}(n)$ と書くことにする．

定義. 向き付きリーマン多様体 (M, g) 上の主 $\mathrm{Spin}(n)$ 束 $\mathbf{Spin}(M)$ 及び次の可換図式を満たす束準同型 Φ を**スピン構造**という．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Spin}(M) \times \mathrm{Spin}(n) \arrow[r, "\Phi\times\mathrm{Ad}"] \arrow[d] & \mathbf{SO}(M) \times \mathrm{SO}(n) \arrow[d] \\
\mathbf{Spin}(M) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"] & \mathbf{SO}(M) \arrow[d, "\pi"] \\
M \arrow[r, "="] & M
\end{tikzcd}$$

スピン構造 $(\mathbf{Spin}(M), \Phi)$, $(\mathbf{Spin}'(M), \Phi')$ が同値であるとは, 主束の同型 $f : \mathbf{Spin}(M) \to \mathbf{Spin}'(M)$ で $\Phi' \circ f = \Phi$ となるものが存在することである．また, スピン構造が入った (M, g) を**スピン多様体**と呼ぶ.

スピン構造を持つことの同値条件はある特性類を用いて述べることができる.

定理. (M, g) を向き付きリーマン多様体とする．このとき, 次は同値になる.

- (M, g) がスピン構造を持つ.

- M の 2 次スティーフェル-ホイットニー類 $\omega_2(M)$ が自明になる.

例えば n 次元球面 $S^n (n \geq 3)$ や奇数次元の複素射影空間 $\mathbb{C}P^{2n+1}$, 及びすべてのカラビヤウ多様体はスピン構造を持つ.

定義. (M^n, g) をスピン多様体, $\mathbf{Spin}(M)$ をスピン構造とする. このとき, スピノール表現 (Δ_n, W_n) に関する同伴ベクトル束

$$S_{1/2} \coloneqq \mathbf{Spin}(M) \times_{\Delta_n} W_n$$

を**スピノール束**という. また, このスピノール束の切断を**スピノール場**とよぶ. n が偶数のとき, スピノール束は $S_{1/2} = S_{1/2}^+ \oplus S_{1/2}^-$ と分解することに注意しておく.

スピン幾何学において重要な楕円型形式的自己共役作用素であるディラック作用素 $D : \Gamma(S_{1/2}) \to \Gamma(S_{1/2})$ を次で定義する.

$$D \coloneqq \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}.$$

ここで, $e_i \cdot$ を TM の局所正規直交枠 $\{e_i\}$ によるクリフォード積としている. 歴史的には, ディラック作用素はミンコフスキー空間におけるダランベール作用素 (ユークリッド空間におけるラプラス作用素) の二乗根として現れた. 後にスピノール束上に定義されたが, 一般にディラック作用素の二乗根はラプラス作用素とは一致しない. その代わりとなる有名な結果が次のリヒネロヴィッツ公式である.

$$D^2 = \nabla^* \nabla + \frac{\mathrm{scal}}{4}.$$

この公式の重要な応用として, コンパクトリーマン多様体上で接続ラプラシアン $\nabla^* \nabla$ が非負であることから, スカラー曲率が正 $(\mathrm{scal} > 0)$ のときに $\ker D = 0$ となる. また, この $\ker D$ の元のことを調和スピノールと呼ぶ. 同様に, $\mathrm{scal} \equiv 0$ のときに調和スピノールの空間と平行スピノールの空間は一致する, つまり $\ker D = \ker \nabla$ が成り立つ.

次に, ディラック作用素の固有値を評価してみる. リヒネロヴィッツ公式を用いることにより, ディラック作用素の固有値 λ の二乗は $\lambda^2 \geq \min_{x \in M} \mathrm{scal}(x)/4$ と評価できる. Friedrich [6] によって, さらに良い評価がなされた.

定理 ([6])**.** (M, g) を n 次元コンパクトスピン多様体とする. このとき, ディラック作用素の固有値 λ は

$$\lambda^2 \geq \frac{n}{4(n-1)} \min_{x \in M} \mathrm{scal}(x)$$

を満たす.

実はこの評価より厳しい評価は存在しない. つまり, イコールを満たすようなスピノールが存在するということである. このスピノールが, 次の節で定義するキリングスピノールである.

このようなスピン幾何学の基礎について詳しく知りたい人は [5], [9], [10] などを参照してほしい.

2　キリングスピノール

前節でも述べたように, キリングスピノールは Friedrich の固有値評価のイコールを満たすスピノールとして現れる. 一方物理学においても, 超重力理論や超弦理論で用いられるなど重要な概念である. 今節ではキリングスピノールの定義とそれらを持つ多様体の分類について話していく.

(M^n, g) をスピン多様体, $S_{1/2}$ をスピノール束とする.

定義. ある定数 $c \in \mathbb{C}$ に対して, スピノール場 $\kappa \in \Gamma(S_{1/2})$ が次を満たすときに**キリングスピノール**という.

$$\nabla_X \kappa = cX \cdot \kappa \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

ここで, ∇ はスピン接続, $\cdot$ はクリフォード積であり, 定数 c をキリング数と呼ぶ.

計算することにより, キリング数 c のキリングスピノールを持つ多様体はリッチ曲率が $\mathrm{Ric} = 4c^2(n-1)g$ を満たすことが分かる. つまりアインシュタイン定数 $4c^2(n-1)$ のアインシュタイン多様体である. このことから, キリング数は零, 実数, 純虚数のいずれかになり, それぞれに対応するキリングスピノールをそれぞれ平行スピノール, 実キリングスピノール, 虚キリングスピノールと呼ぶことにする.

実は, これらのスピノールを持つ多様体は分類されている. 平行スピノールを持つ多様体に関しては, Wang が分類した.

定理 ([15])**.** (M, g) を完備単連結既約 n 次元スピン多様体とする. さらに,

$$\mathcal{N} \coloneqq \{\phi \in \Gamma(S_{1/2}) \mid \nabla\phi = 0\}, \quad \mathcal{N}_\pm \coloneqq \{\phi \in \Gamma(S^\pm_{1/2}) \mid \nabla\phi = 0\}$$

としたときに, 非自明な平行スピノールを持つ (M, g) は表 1 のいずれかに一致する.

表 1　平行スピノールを持つ多様体

$\dim M$	幾何構造	$\dim \mathcal{N}$ or $(\dim \mathcal{N}_+, \dim \mathcal{N}_-)$
$4k$	カラビヤウ	$(2, 0)$
$4k+2$	カラビヤウ	$(1, 1)$
$4k$	超ケーラー	$(k+1, 0)$
7	G_2	1
8	Spin(7)	$(1, 0)$

次に実キリングスピノールを持つ多様体であるが, これはリーマン錐を用いて Bär [2] によって分類された. (M, g) を n 次元リーマン多様体としたときに, **リーマン錐**という $n+1$ 次元リーマン多様体 $(\bar{M}, \bar{g})$ を考えることができる. ここで,

$$\bar{M} = M \times \mathbb{R}^+, \quad \bar{g} = r^2 g + dr^2$$

により与えられている. 実は, M 上に実キリングスピノールが存在することと, $\bar{M}$ 上に平行スピノールが存在することは同値である. 従って, 次の分類が得られる.

定理 ([2])**.** (M,g) を完備単連結スピン多様体で非自明な実キリングスピノールを持つとする.

$$K_{\pm} \coloneqq \{c \in \mathbb{R} \text{ かつ } c \gtrless 0 \text{ となるキリングスピノール}\}$$

としたとき, M は表 2 のいずれかに一致する.

表 2　実キリングスピノールを持つ多様体

$\dim M$	幾何構造	$(\dim K_+, \dim K_-)$
n	n-球面 S^n	$(2^{[n/2]}, 2^{[n/2]})$
$4k-1\ (k \geq 3)$	佐々木-アインシュタイン	$(2,0)$
$4k+1\ (k \geq 1)$	佐々木-アインシュタイン	$(1,1)$
$4k-1\ (k \geq 3)$	3-佐々木	$(k+1,0)$
6	nearly Kähler	$(1,1)$
7	nearly parallel G_2	$(1,0)$ or $(2,0)$ or $(3,0)$

重要な性質として, 実キリングスピノールを持つ多様体は正のアインシュタイン多様体になる. 更に完備とすると, コンパクトになる. 最後に, 虚キリングスピノールを持つ多様体については, Baum [3] による次の結果が知られている.

定理 ([3])**.** (M,g) を完備連結スピン多様体で, キリング数 $\sqrt{-1}\mu$ の非自明な虚キリングスピノールを持つとする. このとき, (M,g) はリーマン積

$$(F^{n-1} \times \mathbb{R}, e^{-4\mu t} g_F + dt^2)$$

と等長同型になる. ここで, (F^{n-1}, g_F) は平行スピノールを持つ完備連結スピン多様体である. 逆に,(F^{n-1}, g_F) が完備連結スピン多様体で平行スピノールを持つとすると, $(F^{n-1} \times \mathbb{R}, e^{-4\mu t} g_F + dt^2)$ は虚キリングスピノールを持つ.

実キリングスピノールを持つ多様体と異なり, 虚キリングスピノールを持つ多様体は負のアインシュタイン多様体であり, 必ず非コンパクトである.

3　キリングスピノールの無限小変形

この節以降はキリング数が零でないキリングスピノールのみ考えることにする. 2 節で見たように, 実 (虚) キリングスピノールを持つ多様体は正 (負) のアインシュタイン多様体である. 従って, アインシュタイン変形をキリングスピノールを用いて考察することが出来る. まずは無限小アインシュタイン変形を思い出そう.

定義. (M^n, g) を n 次元アインシュタイン多様体とする. アインシュタイン計量 g の**無限小アインシュタイン変形**とは, 以下を満たす対称テンソル場 $h \in \Gamma(\mathrm{Sym}\, M)$ のことである.

$$\Delta h = \frac{2\,\mathrm{scal}}{n} h, \quad \delta h = 0, \quad \mathrm{tr}\, h = 0.$$

ここで, Δ は微分形式上のラプラス作用素の類似物であるリヒネロヴィッツのラプラス作用素であり, δ はダイバージェンス作用素である.

アインシュタイン変形の基礎を知りたい人は [4] を参照してほしい. また, これから述べるキリングスピノールの変形理論についての詳しいことは [16] を参照してほしい. キリングスピノールの無限小変形の話をする前に, 微分作用素や記号をいくつか定義する.

(M^n, g) をスピン構造 $\mathbf{Spin}(M) \to \mathbf{SO}(M)$ を持つスピン多様体, $S_{1/2}$ をスピノール束, TM を接束とする. このとき, $S_{1/2} \otimes TM$ 上の**捩れディラック作用素** D_{TM} を次で定義する:

$$D_{TM} \coloneqq \sum_{i=1}^{n} (e_i \cdot \otimes \mathrm{Id}_{TM}) \nabla_{e_i}.$$

ここで, ∇ をレビチビタ接続から導かれる $S_{1/2} \otimes TM$ 上の共変微分である. 次に, 束写像 $\beta : TM \to TM$ とスピノール場 $\kappa_0 \in \Gamma(S_{1/2})$ に対してテンソル場 $\Psi^{(\beta,\kappa_0)} \in \Gamma(T^*M \otimes S_{1/2})$ を以下で定義する.

$$\Psi^{(\beta,\kappa_0)}(X) \coloneqq \beta(X) \cdot \kappa_0, \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M).$$

g-対称な自己同型写像 $\alpha : TM \to TM$ に対して, 新しい計量を次のように定義する.

$$g^\alpha(X, Y) \coloneqq g(\alpha^{-1}X, \alpha^{-1}Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

この新しい計量 g^α に対する正規直交フレーム束を $\mathbf{SO}^\alpha(M)$, その二重被覆を $\mathbf{Spin}^\alpha(M)$ と書くことにする. α によって, 同型 $\mathbf{SO}(M) \cong \mathbf{SO}^\alpha(M)$ が与えられ, さらにスピン構造の同型 $\mathbf{Spin}(M) \cong \mathbf{Spin}^\alpha(M)$ も与えられる. 従って, スピノール束の同型 $S_{1/2} \cong S^\alpha_{1/2}$ も得られるが, その同型写像を $\tilde{\alpha} : S_{1/2} \to S^\alpha_{1/2}$ と書くことにする.

さて, $\alpha(t)$ を $\alpha(0) = \mathrm{Id}_{TM}$ を満たし, 各 $\alpha(t)$ に対して $g^{\alpha(t)}$ がキリングスピノール $\kappa_t^\#$ を持つ対称自己同型写像とする. $\nabla_X^{\alpha(t)} \kappa_t^\# = cX \cdot_t \kappa_t^\#$ が成り立つことから, 次が得られる.

$$\mathcal{L}^c(\alpha(t), \kappa_t)(X) \coloneqq \tilde{\nabla}_X^{\alpha(t)} \kappa_t - c\alpha(t)^{-1}(X) \cdot \kappa_t = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{X}(M). \tag{1}$$

ここで, κ_t は $\widetilde{\alpha(t)}^{-1}(\kappa_t^\#)$ であり, $\tilde{\nabla}^{\alpha(t)}$ は $\nabla^{\alpha(t)}$ のスピノール束 $S_{1/2}$ への引き戻し $\tilde{\nabla}^{\alpha(t)} \coloneqq \widetilde{\alpha(t)}^{-1} \circ \nabla^{\alpha(t)} \circ \widetilde{\alpha(t)}$ である. 式 (1) を満たす $(\alpha(t), \kappa_t)$ を**キリングスピノール** κ_0 **の変形**という.

我々は $t = 0$ での $\alpha(t)$ と κ_t の微分をそれぞれ $\dot{\alpha}, \dot{\kappa}$ と書くことにする. このとき, 式 (1) で定義した $\mathcal{L}^c$ の点 (Id, κ_0) での微分 $d\mathcal{L}^c$ は次で与えられる.

定理 ([16])**.** (M, g) をキリング数 c のキリングスピノールを持つスピン多様体とする. このとき,

$$d\mathcal{L}^c(\dot{\alpha}, \dot{\kappa})(X) = \nabla_X \dot{\kappa} - cX \cdot \dot{\kappa} + c\dot{\alpha}(X)\kappa_0 - \frac{1}{2}\sum_i e_i \cdot (\nabla_{e_i}\dot{\alpha})(X)\kappa_0 + \frac{1}{2} g(\delta\dot{\alpha}, X)\kappa_0.$$

ここで, M がコンパクトで $\operatorname{tr}\dot{\alpha} = 0, \delta\dot{\alpha} = 0$ を満たすと仮定したとき,

$$d\mathcal{L}^c(\dot{\alpha}, \dot{\kappa}) = 0 \Leftrightarrow \nabla_X \dot{\kappa} = cX \cdot \dot{\kappa} \text{ かつ } D_{TM}\Psi^{(\dot{\alpha},\kappa_0)} = nc\Psi^{(\dot{\alpha},\kappa_0)}$$

となる.

この定理から, 我々が扱うキリングスピノールの無限小変形を次で定義する.

定義 ([16])**.** 対称な束写像 $\beta : TM \to TM$ とスピノール場 $\kappa \in \Gamma(S_{1/2})$ が次を満たすとき, この組 (β, κ) を (キリング数 c の) **キリングスピノール** κ_0 **の無限小変形**と呼ぶ.

(i) κ はキリング数 c のキリングスピノールである.
(ii) $\operatorname{tr}\beta = 0,\ \delta\beta = 0.$
(iii) $D_{TM}\Psi^{(\beta,\kappa_0)} = nc\Psi^{(\beta,\kappa_0)}.$

注意として, 対称準同型 β に対応する対称テンソルを $h(X,Y) \coloneqq -2g(\beta(X),Y)$ とすると, この h は無限小アインシュタイン変形になる.

4 nearly parallel G_2 多様体

今回我々が扱うのは実キリングスピノールを持つ多様体 (表 2) の中でも nearly parallel G_2 多様体である. この節では定義といくつかの性質について軽く述べよう. nearly parallel G_2 多様体について知りたい人は [7] などを参照してください.

$(e_1, \ldots, e_7)$ を $\mathbb{R}^7$ 上の標準基底, $(e^1, \ldots, e^7)$ をその双対基底とする. このとき, $\mathbb{R}^7$ 上の 3-form ϕ_0 を次で定義する.

$$\phi_0 \coloneqq e^{123} + e^{176} + e^{257} + e^{653} + e^{145} + e^{246}.$$

ここで, $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$ というようにウェッジ積を省略して書いている.

定義. M を向き付き 7 次元多様体, ϕ を 3-form とする. 各点 $x \in M$ に対して $u^*\phi_0 = \phi_x$ を満たす向きを保つ同型写像 $u : T_xM \to \mathbb{R}^7$ が存在するとき, ϕ を**概 G_2 構造**という.

向き付き 7 次元多様体 M 上に概 G_2 構造が存在するときに, M の構造群は G_2 に簡約する. また $\mathrm{G}_2 \subset \mathrm{SO}(7)$ という関係があるため, 概 G_2 構造 ϕ から自然にリーマン計量 g が導かれる. 従って, 我々は (M, ϕ, g) という三つ組みを概 G_2 多様体と呼ぶことにする.

定義. 7 次元概 G_2 多様体 $(M.\phi, g)$ がある定数 $\tau_0 \neq 0$ に対して次を満たすときに **nearly parallel G_2 多様体**という.

$$*d\phi = \tau_0\phi.$$

この nearly parallel G_2 構造は次で定義される**クロス積** $A : TM \times TM \to TM$ を導く.

$$g(X, A(Y,Z)) = \phi(X,Y,Z) \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M).$$

またこのクロス積の束準同型を $A_XY \coloneqq A(X,Y)$ と書くことにする.

nearly parallel G_2 多様体上には, **標準的な G_2 接続** $\bar{\nabla}$ と呼ばれる次の自然な接続がある.

$$\bar{\nabla}_XY \coloneqq \nabla_XY - \frac{\tau_0}{12}A_XY, \quad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

この接続 $\bar{\nabla}$ は $\bar{\nabla}g = 0$ と $\bar{\nabla}\phi = 0$ を満たし, 捩率は $\bar{T}(X,Y) = -\frac{\tau_0}{6}A_XY$ となる. この標準的な G_2 接続は, 群 G_2 によるベクトル束の分解を保つ.

nearly parallel G_2 多様体の性質をいくつか紹介しよう．2 節でも述べたが, nearly parallel G_2 多様体は実キリングスピノールを持つ．従って, 正のアインシュタイン多様体となる．さらに, スピン多様体が実キリングスピノールを持つことと, そのリーマン錐が平行スピノールを持つことは同値だと述べたが, nearly parallel G_2 多様体と対応するリーマン錐は Spin(7) 多様体である．次の性質として, 7 次元スピン多様体において,

$$\text{nearly parallel } \mathrm{G}_2 \text{ 構造} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \text{キリングスピノール}$$

という対応がある．さて, 先ほど実キリングスピノールが存在するといったが, その次元によって nearly parallel G_2 多様体を 3 つに分類できる．$K = K_+ \oplus K_-$ としたとき,

- type 1: $\dim K = 1 \rightsquigarrow$ proper nearly parallel G_2 多様体
- type 2: $\dim K = 2 \rightsquigarrow$ 佐々木-アインシュタイン多様体
- type 3: $\dim K = 3 \rightsquigarrow$ 3-佐々木多様体

ここでは佐々木-アインシュタイン多様体及び 3-佐々木多様体について詳しくは述べないが, カラビヤウ多様体や超ケーラー多様体の奇数次元版として面白い対象である．

具体的な nearly parallel G_2 多様体の例について, Friedrich, Kath, Moroianu, Semmelmann [7] が単連結コンパクトな等質 nearly parallel G_2 多様体を分類した．それは以下に示す 6 つである:

$$(S^7, g_{\mathrm{round}}) = \mathrm{Spin}(7)/\,\mathrm{G}_2,\ (S^7, g_{\mathrm{squashed}}) = \frac{\mathrm{Sp}(2)\times\mathrm{Sp}(1)}{\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)},$$
$$\mathrm{SO}(5)/\,\mathrm{SO}(3),\ M(3,2) = \frac{\mathrm{SU}(3)\times\mathrm{SU}(2)}{\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)},$$
$$Q(1,1,1) = \mathrm{SU}(2)^3/\,\mathrm{U}(1)^2,\ N(k,l) = \mathrm{SU}(3)/S^1_{k,l}\ (k,l\in\mathbb{Z}).$$

これらの空間の等質構造は例えば [14] にまとめられている．

以後, 我々は $\tau_0 = 4$ と正規化して考えることにする．このとき, キリング数は 1/2 となる．

5 主結果

我々は [13] において, キリングスピノールの無限小変形を nearly parallel G_2 多様体上で調べた．

定理 (O 2022 [13])**.** (M,ϕ,g) を 7 次元でコンパクトな nearly parallel G_2 多様体, κ_0 を nearly parallel G_2 構造 ϕ と対応する (キリング数 1/2 の) キリングスピノールとする．このとき,

$$\{\kappa_0 \text{ の無限小変形 }\} \cong \{\gamma\in\Omega^3_{27}M \mid *d\gamma = -4\gamma\}\oplus K_+.$$

ここで, $\wedge^3_{27}M$ は $\wedge^3 M$ の群 G_2 で既約な 27 次元部分空間である．

Alexandrov と Semmelmann [1] によって, nearly parallel G_2 構造の変形の空間が $\{\gamma\in\Omega^3_{27}M \mid *d\gamma = -4\gamma\}\oplus\{f_1\in\Omega^1 M \mid \nabla f_1 = -f_1 \lrcorner\, \phi\}$ と同型になることが示された．ここで, $\{f_1\in\Omega^1 M \mid \nabla f_1 = -f_1 \lrcorner\, \phi\}$ は type 2, type 3 の場合にそれぞれ佐々木-アインシュタイン構造, 3-佐々木構造を与える．また, キリングスピノールの空間を $K_+ = \langle\kappa_0\rangle\oplus{\kappa_0}^{\perp}$ と直交直和分解したときに,

$D_1 \cong {\kappa_0}^{\perp}$ を示すことができる．従って我々の結果は [1] の結果の別証明になっている．また，論文 [1] において nearly parallel G_2 構造の無限小変形が 4 節であげたいくつかの例で調べられた．空間 $\{\gamma \in \Omega^3_{27}M \mid *d\gamma = -4\gamma\}$ は，$\frac{\mathrm{Sp}(2)\times\mathrm{Sp}(1)}{\mathrm{Sp}(1)\times\mathrm{Sp}(1)}$, $\mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(3)$ 上では消えて，$\frac{\mathrm{SU}(3)\times\mathrm{SU}(2)}{\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)}$ 上では 8 次元存在する．しかし，$\frac{\mathrm{SU}(3)\times\mathrm{SU}(2)}{\mathrm{U}(1)\times\mathrm{SU}(2)}$ 上の等質 nearly parallel G_2 構造の無限小変形は全て可積分でないことが Nagy と Semmelmann [11] によって示されている．

上の主定理を得るのと同様のテクニックを用いることによって，nearly parallel G_2 多様体の Rarita-Schwinger 場についても結果が得られた．束写像 $\Pi : S_{1/2} \otimes TM \ni \zeta \otimes X \mapsto X \cdot \zeta \in S_{1/2}$ に対して，$S_{3/2} := \ker \Pi$ をスピン 3/2 のスピノール束という．このとき，**Rarita-Schwinger 場**とは $D_{TM}\varphi = 0$ を満たすスピン 3/2 スピノール場 $\varphi \in \Gamma(S_{3/2})$ である．

定理 (O 2022 [13])**.** (M, ϕ, g) を 7 次元でコンパクトな nearly parallel G_2 多様体とする．このとき，

$$\{\text{Rarita-Schwinger 場}\} \cong \left\{ \gamma \in \Omega^3_{27}M \;\middle|\; *d\gamma = -\frac{1}{2}\gamma \right\}.$$

Rarita-Schwinger 場についての数学的な扱い方については [8] を参照のこと．また，今回は実キリングスピノールを持つ多様体 (表 2) の中で，nearly parallel G_2 多様体を扱ったが，nearly Kähler 多様体上のキリングスピノールの無限小変形及び Rarita-Schwinger 場については Ohno, Tomihisa [12] が調べている．

参考文献

[1] B. Alexandrov, U. Semmelmann. *Deformations of nearly parallel* G_2*-structures.* Asian J. Math. 16 (2012), no. 4, 713–744.

[2] C. Bär. *Real Killing spinors and holonomy.* Comm. Math. Phys. 154 (1993), no. 3, 509–521.

[3] H. Baum. *Complete Riemannian manifolds with imaginary Killing spinors.* Ann. Global Anal. Geom. 7 (1989), no. 3, 205-226.

[4] A. L. Besse. *Einstein manifolds.* Springer-Verlag, Berlin, 1987. xii+510 pp.

[5] J. P. Bourguignon, O. Hijazi, J. L. Milhorat, A. Moroianu, S. Moroianu. *A spinorial approach to Riemannian and conformal geometry.* EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015. ix+452 pp.

[6] T. Friedrich. *Der erste Eigenwert des Dirac-Operators einer kompakten, Riemannschen Mannigfaltigkeit nichtnegativer Skalarkrümmung.* Math. Nachr. 97 (1980), 117-146.

[7] Th. Friedrich, I. Kath, A. Moroianu, U. Semmelmann. *On nearly parallel* G_2*-structures.* J. Geom. Phys., 23:3-4, 1997. pp. 259–286.

[8] Y. Homma, U. Semmelmann. *The kernel of Rarita-Schwinger operator on Riemannian spin manifolds.* Comm. Math. Phys. 370 (2019), no. 3, 853-871.

[9] 本間泰史. スピン幾何学 スピノール場の数学 森北出版, (2016)

[10] H. B. Lawson, M.-L. Michelsohn. *Spin geometry.* Princeton Mathematical Series, 38. Prince-

ton University Press, Princeton, NJ, 1989. xii+427 pp.

[11] P.-A. Nagy, U. Semmelmann. *Deformations of nearly* G_2 *structures.* J. Lond. Math. Soc. (2) 104 (2021), no. 4, 1795-1811.

[12] S. Ohno, T. Tomihisa. *Rarita-Schwinger fields on nearly Kähler manifolds.* arXiv:2105.11129 [math.DG].

[13] S. Ohno. *Infinitesimal deformations of Killing spinors on nearly parallel* G_2*-manifolds.* arXIv:2210.01623 [math.DG]

[14] R. Singhal. *Deformations of* G_2*-instantons on nearly* G_2 *manifolds.* Ann. Grobal Anal. Geom. 62 (2022), no. 2, 329-366.

[15] M. Y. Wang. *Parallel spinors and parallel forms.* Ann. Global Anal. Geom. 7 (1989), no. 1, 59-68.

[16] M. Y. Wang. *Preserving parallel spinors under metric deformations.* Indiana Univ. Math. J. 40 (1991), no. 3, 815-844.

有限 Grosse-Wulkenhaar 模型における多点相関関数の厳密解

東京理科大学大学院 理学研究科 科学教育専攻
鹿俣尚志 (Naoyuki Kanomata)

概要

エルミート行列の行列模型であり 3 点相互作用がある Grosse-Wulkenhaar 模型に関心がある．この模型は非可換空間であるモヤル空間のスカラー ϕ^3 理論にあるポテンシャルを入れた場の理論に対応する．先行研究では，Ward-Takahashi 恒等式を使って多点相関関数の Schwinger-Dyson 方程式を導出し，ラージ N, V 極限のもとで求められた．本研究では，極限操作を行わず，有限 Grosse-Wulkenhaar 模型における多点相関関数の厳密解を求めた [1]．任意の多点相関関数は，外場 J が対角行列の場合の多点相関関数を使って計算できるということが知られている．したがって外場 J が対角行列の場合の多点相関関数を厳密に計算した．なお，本研究は佐古彰史氏との共同研究である．

1 Φ_2^3 行列模型（Grosse-Wulkenhaar 模型）について

この章では先行研究 [3],[4],[6] に基づいて Φ_2^3 行列模型（Grosse-Wulkenhaar 模型）についてレヴューを行う．$\Phi = (\Phi_{mn})$ を $m, n = 1, 2, \ldots, N$ のエルミート行列，$V \in \mathbb{R}$，e は $e(0) = 0$ となる単調増加する微分可能な関数とする．そのとき $E_{m-1} = \mu^2 \left(\frac{1}{2} + e\left(\frac{m-1}{\mu^2 V}\right)\right)$ と定義される．ただし μ^2 は質量 μ の 2 乗，$E = (E_{m-1}\delta_{mn})$ は $m, n = 1, \ldots, N$ の対角行列，$\kappa \in \mathbb{R}$ は繰りこみ定数，$\lambda \in \mathbb{R}$ は結合定数，$i = \sqrt{-1}$ とする．このとき Φ_2^3 行列模型の作用 $S[\Phi]$ は $S[\Phi] := iV\mathrm{tr}\left(E\Phi^2 + \kappa\Phi + \frac{\lambda}{3}\Phi^3\right)$ と定義する．外場 $J = (J_{mn})$ を $m, n = 1, 2, \ldots, N$ のエルミート行列，測度は $\mathcal{D}\Phi := \prod_{m=1}^{N} d\Phi_{mm} \prod_{1 \le m < n \le N} d\mathrm{Re}\Phi_{mn} d\mathrm{Im}\Phi_{mn}$ と定義する．このとき Φ_2^3 行列模型の多点相関関数の生成汎関数は $\mathcal{Z}[J] := \int \mathcal{D}\Phi \exp\left(-S[\Phi] + iV\mathrm{tr}(J\Phi)\right)$ と定義される．$\log \frac{\mathcal{Z}[J]}{\mathcal{Z}[0]}$ を使って $\sum_{i=1}^{B} N_i$ 点関数 $G_{|a_1^1 \ldots a_{N_1}^1| \ldots |a_1^B \ldots a_{N_B}^B|}$ は

$$\log \frac{\mathcal{Z}[J]}{\mathcal{Z}[0]} := \sum_{B=1}^{\infty} \sum_{1 \le N_1 \le \cdots \le N_B}^{\infty} \sum_{p_1^1, \ldots, p_{N_B}^B = 1}^{N} (iV)^{2-B} \frac{G_{|p_1^1 \ldots p_{N_1}^1| \ldots |p_1^B \ldots p_{N_B}^B|}}{S_{(N_1, \ldots, N_B)}} \prod_{\beta=1}^{B} \frac{\mathbb{J}_{p_1^\beta \ldots p_{N_\beta}^\beta}}{N_\beta}$$

と定義される．この $\sum_{i=1}^{B} N_i$ 点関数 $G_{|a_1^1 \ldots a_{N_1}^1| \ldots |a_1^B \ldots a_{N_B}^B|}$ は幾何学的に解釈することが可能で，B 個のバウンダリー（パンクチャー）を持つリーマン面の三角形分割に対応するファインマン図（リボングラフ）のある規則での全ての足し上げに対応する．各 $|a_1^i \cdots a_{N_i}^i|$ は i 番目のバウンダリー（パンクチャー）から N_i 本の線が出ているファインマン図（リボングラフ）に対応している．そ

して $N_i+1\equiv 1$ となる $\mathbb{J}_{p_1\dots p_{N_i}} := \prod_{j=1}^{N_i} J_{p_j p_{j+1}}$，$(N_1,\dots,N_B)=(\underbrace{N'_1,\dots,N'_1}_{\nu_1},\dots,\underbrace{N'_s,\dots,N'_s}_{\nu_s})$，$S_{(N_1,\dots,N_B)}=\prod_{\beta=1}^{s}\nu_\beta!$ とする．

2 分配関数 $\mathcal{Z}[J]$ の計算

ここでは Φ_2^3 行列模型（Grosse-Wulkenhaar 模型）の生成汎関数 $\mathcal{Z}[J]$ を計算するにあたってエルミート行列の非対角成分の積分は Harish-Chandra-Itzykson-Zuber 積分 [7] を使って計算する．エルミート行列の対角成分の積分はエアリー関数を使って計算する．

$\widetilde{E}=(\widetilde{E_m}\delta_{mn})=\frac{1}{\lambda}E=\left(\frac{E_{m-1}}{\lambda}\delta_{mn}\right)$ を $m,n=1,\dots,N$ のエルミート行列，$\frac{\kappa}{\lambda}=\widetilde{\kappa}$ とする．そのとき $\mathcal{Z}[J]$ は

$$\mathcal{Z}[J]=\int\mathcal{D}\Phi\exp\left(-2i\lambda V\mathrm{tr}\left(\frac{\widetilde{E}\Phi^2}{2}+\frac{\widetilde{\kappa}\Phi}{2}+\frac{1}{3!}\Phi^3\right)\right)\exp\left(iV\mathrm{tr}\left(J\Phi\right)\right)$$

と計算される．ここで $\Phi=X-\widetilde{E}$ とするために新しい変数 X を導入する．ただし $X=(X_{mn})$ はエルミート行列とする．次に測度 $\mathcal{D}\Phi$ を以下のように変数変換する．

$$d\Phi_{ij}=\sum_{m,n=1}^{N}\frac{\partial\Phi_{ij}}{\partial X_{mn}}dX_{mn}=dX_{ij}.$$

$\mathrm{tr}\left(\frac{\widetilde{E}\Phi^2}{2}+\frac{\widetilde{\kappa}\Phi}{2}+\frac{1}{3!}\Phi^3\right)$ を変数変換することによって

$$\mathrm{tr}\left(\frac{\widetilde{E}\Phi^2}{2}+\frac{\widetilde{\kappa}\Phi}{2}+\frac{1}{3!}\Phi^3\right)=\mathrm{tr}\left(\frac{(X)^3-3(\widetilde{E})^2X+2(\widetilde{E})^3+3\widetilde{\kappa}X-3\widetilde{\kappa}\widetilde{E}}{6}\right)$$

と計算される．そのとき $\mathcal{Z}[J]$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[J]=&\exp\left(-i\lambda V tr\left(\frac{2}{3}(\widetilde{E})^3-\widetilde{\kappa}\widetilde{E}+\frac{1}{\lambda}J\widetilde{E}\right)\right)\\&\times\int\mathcal{D}X\exp\left(-i\frac{\lambda V}{3}\mathrm{tr}(X^3)\right)\exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}\mathrm{tr}\{(M-I+K)X\}\right)\end{aligned}\tag{1}$$

と計算される．ここで $M=\frac{(\widetilde{E})^2}{\widetilde{\kappa}}=\frac{E^2}{\lambda\kappa}$，$K=\frac{J}{\kappa}$，$I$ は単位行列とする．測度 $\mathcal{D}X$ は

$$\mathcal{D}X=\left(\prod_{i=1}^{N}dx_i\right)\left(\prod_{1\le k<l\le N}(x_l-x_k)^2\right)dU$$

と定義される [8][2]．ただし x_i は $i=1,\cdots,N$ の行列 X の固有値，dU はユニタリ群 $U(N)$ 上の

Haar 測度である．そのとき (1) は以下のように計算をすることができる．

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[J] =& \exp\left(-i\lambda V tr\left(\frac{2}{3}(\widetilde{E})^3 - \widetilde{\kappa}\widetilde{E} + \frac{1}{\lambda}J\widetilde{E}\right)\right)\\ &\int\left(\prod_{i=1}^{\mathrm{N}} dx_i \exp\left(-i\frac{\lambda V}{3}x_i^3\right)\right)\left(\prod_{1\le k<l\le N}(x_l - x_k)^2\right)\\ &\int dU \exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}\mathrm{tr}\{(M-I+K)U\widetilde{X}U^*\}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

ただし $\widetilde{X} = U^*XU$ とする．また以下のような公式を使う．

Fact. ユニタリ群 $U(n)$ 上での Harish-Chandra-Itzykson-Zuber 積分 [7] は

$$\int_{U(n)} \exp\left(t\mathrm{tr}\left(AUBU^*\right)\right) dU = c_n \frac{\det\limits_{1\le i,j\le n}\left(\exp\left(t\lambda_i(A)\lambda_j(B)\right)\right)}{t^{\frac{(n^2-n)}{2}}\Delta(\lambda(A))\Delta(\lambda(B))} \tag{3}$$

として表される．ここでは $A = (A_{ij})$ と $B = (B_{ij})$ は $i = 1, \cdots, n$ の $\lambda_i(A)$ と $\lambda_i(B)$ を固有値に持つエルミート行列，$t \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$，$\Delta(\lambda(A)) := \prod\limits_{1\le i<j\le n}(\lambda_j(A) - \lambda_i(A))$ はヴァンデルモンド行列式，$c_n := \left(\prod\limits_{i=1}^{n-1} i!\right) \times \pi^{\frac{n(n-1)}{2}}$ は定数，$(\exp\left(t\lambda_i(A)\lambda_j(B)\right))$ は $\exp\left(t\lambda_i(A)\lambda_j(B)\right)$ を成分に持つ i 行 j 列の $n \times n$ 行列とする．

Harish-Chandra-Itzykson-Zuber 積分 (3) を (2) の $\int dU \exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}\mathrm{tr}\{(M-I+K)U\widetilde{X}U^*\}\right)$ へ適用すると結果は

$$\int dU \exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}\mathrm{tr}\{(\mathrm{M}-\mathrm{I}+\mathrm{K})U\widetilde{X}U^*\}\right) = \frac{C}{N!}\frac{\det\limits_{1\le i,j\le N}\exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}x_i s_j\right)}{\prod\limits_{i<j}(x_j - x_i)\prod\limits_{i<j}(s_j - s_i)}$$

となる．ただし s_t は $t = 1, \cdots, N$ の行列 $M - I + K$ の固有値，$C = \left(\prod\limits_{p=1}^{N} p!\right) \times \left(\frac{\pi}{i\lambda V\widetilde{\kappa}}\right)^{\frac{N(N-1)}{2}}$ とする．$(\exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}x_i s_j\right))$ は $\exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}x_i s_j\right)$ を成分にもつ i 行 j 列の $N \times N$ 行列とする．そのとき生成汎関数 $\mathcal{Z}[J]$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[J] =& \frac{C}{N!}\exp\left(-i\lambda V tr\left(\frac{2}{3}(\widetilde{E})^3 - \widetilde{\kappa}\widetilde{E} + \frac{1}{\lambda}J\widetilde{E}\right)\right)\frac{1}{\prod\limits_{1\le t<u\le N}(s_u - s_t)}\\ &\int\left(\prod_{i=1}^{N} dx_i \exp\left(-i\frac{\lambda V}{3}x_i^3\right)\right)\left(\prod_{1\le k<l\le N}(x_l - x_k)\right)\det_{1\le m,n\le N}\exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}x_m s_n\right)\\ =& C\exp\left(-i\lambda V tr\left(\frac{2}{3}(\widetilde{E})^3 - \widetilde{\kappa}\widetilde{E} + \frac{1}{\lambda}J\widetilde{E}\right)\right)\frac{1}{\prod\limits_{1\le t<u\le N}(s_u - s_t)}\\ &\int\left(\prod_{i=1}^{N} dx_i \exp\left(-i\frac{\lambda V}{3}x_i^3\right)\exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}x_i s_i\right)\right)\prod_{1\le k<l\le N}(x_l - x_k) \end{aligned} \tag{4}$$

として表される．$\prod_{1\le k<l\le N}(x_l-x_k)=\det_{1\le k,l\le N}\left(x_k^{l-1}\right)$ を使って (4) の右側の残っている積分を計算する．

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{N}dx_i\exp\left(-i\frac{\lambda V}{3}x_i^3\right)\exp\left(i\lambda V\widetilde{\kappa}s_ix_i\right)\right)\det_{1\le k,l\le \mathrm{N}}\left(x_l^{k-1}\right)\\
=&\sum_{\sigma\in S_{\mathrm{N}}}\mathrm{sgn}\sigma\prod_{i=1}^{N}\phi_{\sigma(i)}(s_i)\\
=&\det_{1\le i,j\le N}\left(\phi_i(s_j)\right).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ただし $\phi_k(z)$ は

$$
\begin{aligned}
\phi_k(z)=&\int_{-\infty}^{\infty}dx\ \ x^{k-1}\exp\left(-i\frac{\lambda V}{3}x^3+iV\kappa xz\right)\\
=&\left(\frac{i}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\right)^{k-1}\left(\frac{-2\pi}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\right)\left(\frac{d}{dy}\right)^{k-1}Ai\left[y\right]\Bigg|_{y=-\frac{V\kappa z}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

と計算される．ただし $Ai[y]$ はエアリー関数，$(\phi_i(s_j))$ は $\phi_i(s_j)$ を成分にもつ i 行 j 列の $N\times N$ 行列とする．(4)，(5)，(6) の結果をまとめると，以下の結果を得る．

Proposition 2.1. 上で定義された $\mathcal{Z}[J]$ は以下で得られる．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}[J]=&\int\mathcal{D}\Phi\exp\left(-iV\mathrm{tr}\left(E\Phi^2+\kappa\Phi+\frac{\lambda}{3}\Phi^3\right)\right)\exp\left(iV\mathrm{tr}\left(J\Phi\right)\right)\\
=&C'\frac{e^{\frac{-iV}{\lambda}\mathrm{tr}(JE)}A_N(y_1,\cdots,y_N)}{\prod_{1\le t<u\le N}(s_u-s_t)}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

ここで $C'=\exp\left(-\frac{iV}{\lambda^2}\mathrm{tr}\left(\frac{2}{3}E^3-\lambda\kappa E\right)\right)\left(\prod_{p=1}^{N}p!\right)\frac{(-2)^N\pi^{\frac{N(N+1)}{2}}}{\lambda^{\frac{N(N+1)}{6}}V^{\frac{N(2N-1)}{3}}\kappa^{\frac{N(N-1)}{2}}}$，$s_t$ は $t=1,\cdots,N$ の行列 $\frac{E^2}{\lambda\kappa}-I+\frac{J}{\kappa}$ の固有値である．そして $j=1,\cdots,N$ の $y_j=-\frac{V\kappa s_j}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}$ とする．$A_N(y_1,\cdots,y_N)=\left(\prod_{1\le i<j\le N}(\partial_{y_i}-\partial_{y_j})\right)Ai[y_1]\cdots Ai[y_N]$ と定義する．

3 n 点関数 $G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ の計算

(7) で得られた生成汎関数 $\mathcal{Z}[J]$ を $G_{|a^1|\ldots|a^n|}$ を計算するために使う．$G_{|a^1|\ldots|a^n|}$ の厳密解は，外場 J を対角行列とした $\log\mathcal{Z}[J]$ における $\partial^n/\partial J_{a^1a^1}\cdots\partial J_{a^na^n}$ の n 回微分を計算することによって得ることができる．この計算に先行研究 [5] の公式を適用させて計算をした結果，$G_{|a^1|\ldots|a^n|}$ の厳密

解を得ることに成功した.

$$
\begin{aligned}
&G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}\\
=&(iV)^{n-2}\frac{\partial^n}{\partial J_{a^1a^1}\dots\partial J_{a^na^n}}\log\frac{\mathcal{Z}[J]}{\mathcal{Z}[0]}\bigg|_{J=0}\\
=&(iV)^{n-2}\mathcal{C}\sum_{\pi}\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^{|\pi|}(\log x)\bigg|_{x=\mathcal{Z}[0]}\right\}\\
&\prod_{B\in\pi}\sum_{S\subset B}\left(\left(\prod_{i\in S}\left(-iV\frac{E_{a^i-1}}{\lambda}\right)\right)\sum_{M\subset\overline{S}}\left(\left(\left\{\prod_{k\in M}\left(-\frac{V}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\right)\partial_{a^k}\right\}A_N(z_1,\dots,z_N)\right)\right.\right.\\
&\left.\left.\left(\left\{\prod_{q\in\overline{M}}\frac{\partial}{\partial t_{a^q}}\right\}\frac{1}{\prod\limits_{1\le l<j\le N}(t_j-t_l)}\right)\right)\right).
\end{aligned}
$$

ただし $B=S\sqcup\overline{S}$, $\overline{S}=M\sqcup\overline{M}$ とする. $j=1,\dots,N$ において $z_j=-\dfrac{VE_{j-1}^2}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}\lambda}+\dfrac{V\kappa}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}$ とする. $\partial_{a^k}=\dfrac{\partial}{\partial z_{a^k}}$ $(k\in M)$, $l=1,\dots,N$ において $t_l=\dfrac{(E_{l-1})^2}{\lambda}$ とする. $\mathcal{C}=C'\kappa^{\frac{N(N-1)}{2}}$. ただし, $\sum\limits_{\pi}$ は集合 $\{1,\dots,n\}$ を π で分割し, その分割可能な π のパターン全てを足し上げる. $\prod\limits_{B\in\pi}$ は分割 π の要素 B の総乗を計算する. $|S|$ は集合 S の濃度とする. $\sum\limits_{S\subset B}$ は B の部分集合 S が取り得る全ての和を計算する. $\sum\limits_{M\subset\overline{S}}$ は $\overline{S}=B\backslash S$ の部分集合 M が取り得る全ての和を計算する. そして関数 $F(S,M,\overline{M})$ を以下のように定義する.

$$
\begin{aligned}
&F(S,M,\overline{M})\\
:=&\left(\prod_{i\in S}\left(-iV\frac{E_{a^i-1}}{\lambda}\right)\right)\left(\left\{\prod_{k\in M}\left(-\frac{V}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\right)\partial_{a^k}\right\}A_N(z_1,\dots,z_N)\right)\\
&\left(\left\{\prod_{q\in\overline{M}}\frac{\partial}{\partial t_{a^q}}\right\}\frac{1}{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}\right).
\end{aligned}
$$

Proposition 3.1. $F(S,M,\overline{M})$ を使うと n 点関数 $G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ は

$$
G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}=(iV)^{n-2}\mathcal{C}\sum_{\pi}\left\{\left(\frac{d}{dx}\right)^{|\pi|}(\log x)\bigg|_{x=\mathcal{Z}[0]}\right\}\prod_{B\in\pi}\sum_{S\subset B}\sum_{M\subset\overline{S}}F(S,M,\overline{M})
$$

として表される.

先行研究 [3] において $\sum\limits_{i=1}^{B}N_i$ 点関数 $G_{|a_1^1\dots a_{N_1}^1|\dots|a_1^B\dots a_{N_B}^B|}$ は

$$
\begin{aligned}
&G_{|a_1^1\dots a_{N_1}^1|\dots|a_1^B\dots a_{N_B}^B|}\\
=&\lambda^{N_1+\cdots+N_B-B}\sum_{k_1=1}^{N_1}\cdots\sum_{k_B=1}^{N_B}G_{|a_{k_1}^1|\dots|a_{k_B}^B|}\left(\prod_{l_1=1,l_1\neq k_1}^{N_1}P_{a_{k_1}^1a_{l_1}^1}\right)\cdots\left(\prod_{l_B=1,l_B\neq k_B}^{N_B}P_{a_{k_B}^Ba_{l_B}^B}\right)
\end{aligned}
$$

であることが知られている．ただし $i=1,\dots,B$ において $2\le B$，$N_i>1$ である．また $P_{ab}:=\dfrac{1}{E_{a-1}^2-E_{b-1}^2}$ と定義する．求めた $G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ の厳密解を適用すると Φ_2^3 行列模型の多点相関関数の厳密解を求めることができる．

4　2 点関数 $G_{|a|b|}$ の計算

この節では Proposition 3.1 の公式を適用して具体的に 2 点関数 $G_{|a|b|}$ の厳密解を求める．以下では $a=a^1$，$b=a^2$ とする．始めに $\pi=\{\{1,2\}\}$ の場合の計算をする．

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{|\pi|}(\log x)\bigg|_{x=\mathcal{Z}[0]}\prod_{B\in\pi}\frac{\partial^{|B|}\mathcal{Z}[J]}{\prod_{j\in B}\partial J_{a^ja^j}}\bigg|_{J=0}=\frac{1}{\mathcal{Z}[0]}\frac{\partial^2\mathcal{Z}[J]}{\partial J_{aa}\partial J_{bb}}\bigg|_{J=0}. \tag{8}$$

集合 S，M，$\overline{M}$ のすべての場合の計算をすると，以下のような結果を得ることができる．$F(\{1,2\},\emptyset,\emptyset)$ の場合では，

$$F(\{1,2\},\emptyset,\emptyset)=\left(-iV\frac{E_{a-1}}{\lambda}\right)\left(-iV\frac{E_{b-1}}{\lambda}\right)A_N(z_1,\dots,z_N)\frac{1}{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}$$

となる．$F(\{1\},\{2\},\emptyset)$ の場合では，

$$F(\{1\},\{2\},\emptyset)=\left(-iV\frac{E_{a-1}}{\lambda}\right)\left(-\frac{V}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\right)\partial_bA_N(z_1,\dots,z_N)\frac{1}{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)} \tag{9}$$

となる．$F(\{2\},\{1\},\emptyset)$ も同様にして (9) のように計算をすることができる．(9) における文字 a と b を入れ替える．$F(\emptyset,\{1,2\},\emptyset)$ の場合では，

$$F(\emptyset,\{1,2\},\emptyset)=\left(-\frac{V}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\right)^2\partial_a\partial_bA_N(z_1,\dots,z_N)\frac{1}{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}$$

となる．$F(\{1\},\emptyset,\{2\})$ の場合では，

$$F(\{1\},\emptyset,\{2\})=\left(-iV\frac{E_{a-1}}{\lambda}\right)A_N(z_1,\dots,z_N)\frac{-1}{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}\sum_{i=1,i\ne b}^{N}\frac{1}{t_b-t_i} \tag{10}$$

となる．$F(\{2\},\emptyset,\{1\})$ も同様にして (10) のように計算をすることができる．(10) における文字 a と b を入れ替える．$F(\emptyset,\{1\},\{2\})$ の場合では，

$$F(\emptyset,\{1\},\{2\})=\left(-\frac{V}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\right)\partial_aA_N(z_1,\dots,z_N)\frac{-1}{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}\sum_{i=1,i\ne b}^{N}\frac{1}{t_b-t_i} \tag{11}$$

となる．$F(\emptyset,\{2\},\{1\})$ も同様にして (11) のように計算をすることができる．(11) における文字 a と b を入れ替える．$F(\emptyset,\emptyset,\{1,2\})$ の場合では,

$$
\begin{aligned}
&F(\emptyset,\emptyset,\{1,2\})\\
=&A_N(z_1,\ldots,z_N)\frac{1}{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}\left(\sum_{i=1,i\neq a}^{N}\frac{1}{t_a-t_i}\sum_{j=1,j\neq b}^{N}\frac{1}{t_b-t_j}-\frac{1}{(t_a-t_b)^2}\right)
\end{aligned}
$$

となる．これより (8) は以下のように計算をすることが可能である．

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathcal{Z}[0]}\frac{\partial^2\mathcal{Z}[J]}{\partial J_{aa}\partial J_{bb}}\bigg|_{J=0}\\
=&\left(\frac{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}{A_N(z_1,\ldots,z_N)}\right)\Bigg\{F(\{1,2\},\emptyset,\emptyset)+F(\emptyset,\{1,2\},\emptyset)+F(\emptyset,\emptyset,\{1,2\})\\
&+\sum_{l,n=1,l\neq n}^{2}\Big(F(\{l\},\{n\},\emptyset)+F(\{l\},\emptyset,\{n\})+F(\emptyset,\{l\},\{n\})\Big)\Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

次は $\pi=\{\{1\},\{2\}\}$ の場合を計算する．

$$
\left(\frac{d}{dx}\right)^{|\pi|}(\log x)\bigg|_{x=\mathcal{Z}[0]}\prod_{B\in\pi}\frac{\partial^{|B|}\mathcal{Z}[J]}{\prod\limits_{j\in B}\partial J_{a^ja^j}}\bigg|_{J=0}=-\frac{1}{\mathcal{Z}[0]^2}\frac{\partial\mathcal{Z}[J]}{\partial J_{aa}}\bigg|_{J=0}\frac{\partial\mathcal{Z}[J]}{\partial J_{bb}}\bigg|_{J=0}.
\tag{13}
$$

集合 S, M, $\overline{M}$ のすべての場合の計算をすると，以下のような結果を得ることができる．

$$
F(\{1\},\emptyset,\emptyset)=-iV\frac{E_{a-1}}{\lambda}A_N(z_1,\ldots,z_N)\frac{1}{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}.
$$

$$
F(\emptyset,\{1\},\emptyset)=\left(-\frac{V}{(\lambda V)^{\frac{1}{3}}}\right)\partial_aA_N(z_1,\ldots,z_N)\frac{1}{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}.
$$

$$
F(\emptyset,\emptyset,\{1\})=A_N(z_1,\ldots,z_N)\frac{-1}{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}\sum_{i=1,i\neq a}^{N}\frac{1}{t_a-t_i}.
$$

これらの結果は以下のようにまとめることができる．

$$
\frac{1}{\mathcal{Z}[0]}\frac{\partial\mathcal{Z}[J]}{\partial J_{aa}}\bigg|_{J=0}=\left(\frac{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}{A_N(z_1,\ldots,z_N)}\right)\Big\{F(\{1\},\emptyset,\emptyset)+F(\emptyset,\{1\},\emptyset)+F(\emptyset,\emptyset,\{1\})\Big\}.
\tag{14}
$$

$B=\{1\}$ のときも $B=\{2\}$ と同じ方法で計算をすることができる．

$$
\frac{1}{\mathcal{Z}[0]}\frac{\partial\mathcal{Z}[J]}{\partial J_{bb}}\bigg|_{J=0}=\left(\frac{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}{A_N(z_1,\ldots,z_N)}\right)\Big\{F(\{2\},\emptyset,\emptyset)+F(\emptyset,\{2\},\emptyset)+F(\emptyset,\emptyset,\{2\})\Big\}.
\tag{15}
$$

(13) へ (14) と (15) の計算結果を適用すると以下のような結果を得る．

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\mathcal{Z}[0]^2}\frac{\partial \mathcal{Z}[J]}{\partial J_{aa}}\bigg|_{J=0}\frac{\partial \mathcal{Z}[J]}{\partial J_{bb}}\bigg|_{J=0}\\
&=-\left(\frac{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}{A_N(z_1,\dots,z_N)}\right)^2\prod_{l=1}^{2}\Big(F(\{l\},\emptyset,\emptyset)+F(\emptyset,\{l\},\emptyset)+F(\emptyset,\emptyset,\{l\})\Big).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

最終的に (12) と (16) を合わせると 2 点関数 $G_{|a|b|}$ は以下のような結果を得る．

$$
\begin{aligned}
G_{|a|b|}&=\frac{1}{\mathcal{Z}[0]}\frac{\partial^2 \mathcal{Z}[J]}{\partial J_{aa}\partial J_{bb}}\bigg|_{J=0}-\frac{1}{\mathcal{Z}[0]^2}\frac{\partial \mathcal{Z}[J]}{\partial J_{aa}}\bigg|_{J=0}\frac{\partial \mathcal{Z}[J]}{\partial J_{bb}}\bigg|_{J=0}\\
&=\left(\frac{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}{A_N(z_1,\dots,z_N)}\right)\Bigg\{F(\{1,2\},\emptyset,\emptyset)+F(\emptyset,\{1,2\},\emptyset)+F(\emptyset,\emptyset,\{1,2\})\\
&\quad+\sum_{l,n=1,l\neq n}^{2}\Big(F(\{l\},\{n\},\emptyset)+F(\{l\},\emptyset,\{n\})+F(\emptyset,\{l\},\{n\})\Big)\Bigg\}\\
&\quad-\left(\frac{\det\limits_{1\le l,j\le N}\left(t_l^{j-1}\right)}{A_N(z_1,\dots,z_N)}\right)^2\prod_{l=1}^{2}\Big(F(\{l\},\emptyset,\emptyset)+F(\emptyset,\{l\},\emptyset)+F(\emptyset,\emptyset,\{l\})\Big).
\end{aligned}
$$

これより，Proposition 3.1 の公式を適用すると 2 点関数 $G_{|a|b|}$ の厳密解を得られる．

5 まとめ

本研究では，Φ_2^3 有限行列模型における多点相関関数の厳密解を求めた．Φ_2^3 行列模型では，多点相関関数は $\sum_{i=1}^{B}N_i$ 点関数 $G_{|a_1^1\dots a_{N_1}^1|\dots|a_1^B\dots a_{N_B}^B|}$ として表される．$\sum_{i=1}^{B}N_i$ 点関数 $G_{|a_1^1\dots a_{N_1}^1|\dots|a_1^B\dots a_{N_B}^B|}$ は $G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ を使って展開できることが知られている [3]．つまり $G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ を求めることで一般の場合の多点相関関数を求められるので，$G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ の厳密解を求める方法を導いた．

2 節では，生成汎関数 $\mathcal{Z}[J]$ の計算を行った．エルミート行列の非対角成分の積分は Harish-Chandra-Itzykson-Zuber 積分 [7] を使って計算した．また, エルミート行列の対角成分の積分は Airy 関数を使って計算した．3 節では，$G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ を計算するために 2 節で得られた生成汎関数 $\mathcal{Z}[J]$ を使った．$G_{|a^1|\dots|a^n|}$ の厳密解は, 外場 J を対角行列とした $\log\mathcal{Z}[J]$ における $\partial^n/\partial J_{a^1a^1}\cdots\partial J_{a^na^n}$ の n 回微分を計算することによって得られる．$G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ の厳密解は Proposition 3.1 として表された．Proposition 3.1 における $G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ の公式では，積分が残っていない．より具体的には，$G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ は変数が $S\subset B$，M，$\overline{M}(B\backslash S=M\sqcup\overline{M})$ である関数 $F(S,M,\overline{M})$ によって決定された．4 節では Proposition 3.1 の公式を適用して具体的に 2 点関数 $G_{|a|b|}$ の厳密解を求めた．$\sum_{i=1}^{B}N_i$ 点関数 $G_{|a_1^1\dots a_{N_1}^1|\dots|a_1^B\dots a_{N_B}^B|}$ は $G_{|a^1|a^2|\cdots|a^n|}$ を使って展開することが可能なので，Φ_2^3 有限行列模型の全ての厳密解を求めることが可能である．

参考文献

[1] N. Kanomata and A. Sako, Exact solution of the Φ_2^3 finite matrix model, Nucl. Phys. B **982**, 115892 (2022) doi:10.1016/j.nuclphysb.2022.115892 [arXiv:2205.15798 [hep-th]].

[2] B. Eynard, T. Kimura and S. Ribault, Random matrices, No Journal (2015), 1510.04430.

[3] H. Grosse, A. Sako and R. Wulkenhaar, Exact solution of matricial Φ_2^3 quantum field theory, Nucl. Phys. B **925**, 319-347 (2017) doi:10.1016/j.nuclphysb.2017.10.010 [arXiv:1610.00526 [math-ph]].

[4] H. Grosse, A. Sako and R. Wulkenhaar, The Φ_4^3 and Φ_6^3 matricial QFT models have reflection positive two-point function, Nucl. Phys. B **926**, 20-48 (2018) doi:10.1016/j.nuclphysb.2017.10.022 [arXiv:1612.07584 [math-ph]].

[5] M. Hardy, Combinatorics of partial derivatives, Electron. J. Combin. 13 (2006), Research Paper 1, 13.

[6] A. Hock, Matrix field theory, Ph.D. Thesis, WWU Münster, 2020, arXiv:2005.07525.

[7] C. Itzykson and J. B. Zuber, The Planar Approximation. 2., J. Math. Phys. **21**, 411 (1980) doi:10.1063/1.524438

[8] M. L. Mehta, Random Matrices, vol. 142 of Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 3rd ed., 2004.

ポスターセッション
会場E

The derived category of Debarre-Voisin 20-fold

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
赤澤涼 (Ryo AKAZAWA)

概要

高次元の Fano 多様体の導来圏の半直交分解およびその Kuznetsov component の研究は, 古典的な射影代数幾何学的問題意識と抽象的な層のモジュライ理論を結びつける重要な研究対象である. 本稿では非可換 K3 曲面と呼ばれる性質を満たす Kuznetsov component に着目し, いくつかのトピックについて概説する.

1 導入

1.1 代数多様体と導来圏

代数幾何学とは**代数多様体** (algebraic variety, または単に variety) と呼ばれる図形を, ありとあらゆる手練手管でもって分析する分野である. 代数幾何学では $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} := \mathbb{C}^n$ を affine ($\mathbb{C}$) 空間と呼ぶ. もっとも基本的な代数多様体の例は, ひとつの $\mathbb{C}$ 係数多項式 $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ を用いて,

$$V(f) := \{ P = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^n \mid f(P) = f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \} \subset \mathbb{A}^n$$

と表される集合 (のうち, $\mathbb{A}^n$ の Zariski 位相と呼ばれる位相に関して既約なもの) である. これは $\mathbb{A}^n$ の affine 超曲面と呼ばれ, 特に f として次数 2 の 2 変数多項式をとれば, 中学校や高校で学ぶような平面 2 次曲線であり, 我々にとってきわめて馴染み深い対象といえる.

たとえば 6 変数の 3 次多項式ひとつ $f \in k[x_0, \ldots, x_5]$ を用いて定義される $V(f)$ は 5 次元射影空間 $\mathbb{P}^5$ 内の超曲面を定めるが, これは **4 次元 3 次超曲面** (cubic fourfold) と呼ばれ, 古典的な対象ながら現代においても多くの研究が盛んに行われている. 以下, 4 次元 3 次超曲面といえば $\mathbb{C}$ 上定義された非特異なものを指すこととする.

ここで**射影空間** (projective space) $\mathbb{P}^n$ は, affine 空間 $\mathbb{A}^n$ に点を付け加えさまざまな面で扱いやすくした空間で, 代数多様体を考えるカンバスとしてもっとも定着している空間である. 代数多様体 X は, 射影空間に双有理同値 (“ほとんどの部分” で同値) であるとき**有理的** (rational) であるという. 4 次元 3 次超曲面について, 古典的な大問題として以下が知られている：

問題 1.1
4 次元 3 次超曲面 $Y \subset \mathbb{P}^5$ はいつ有理的となるか？ また, 非有理的な 4 次元 3 次超曲面は存在するか？

3 次元 3 次超曲面の場合は非有理的なものの存在が Clemens, Griffiths によって既に知られている [CG72]. 4 次元の場合も同様の事実が成り立つことが期待されているが, 2022 年現在, 非有理的であることが示された 4 次元 3 次超曲面は**存在しない**. このように, 一見では素朴とすら思える対象についても, 明らかとなっていない問題が代数幾何学には多数存在している.

代数多様体の性質を調べる手法のデファクトスタンダードのひとつは, その上の**層係数コホモロジー** (sheaf cohomology) を用いるものである. これは非常に強力なツールであり, 幾何的にはまったく非自明な結果を, ホモロジー代数的議論の延長で次々に導くことができる. コホモロジーの活用により代数幾何学は大きく発展した. しかしながらコホモロジーには欠点もある. 代数多様体上にコホモロジーを定義する方法はいくつかあるが, いずれも**複体** (complex) と呼ばれる, 対象と写像の列において商空間をとって定義する. ここで商をとることによって情報が大きく失われてしまい (それがコホモロジーの扱いやすさの源泉でもあるが) 当然に成り立って欲しいいくつかのホモロジー代数的性質の証明がいたずらに複雑化してしまう傾向を持つ.

この難点を回避するためには, コホモロジーをとらずにコホモロジー的情報を扱うという, 一見相反するような要求に適う概念が求められる. ここで現れるのが**導来圏** (derived category) である. 導来圏はコホモロジーをとる前の複体とその間の射からなる圏であるが, 同じコホモロジーを持つ複体は同型となるように射を (人工的に) 付け加えることによって得られる. これにより導来圏の対象はコホモロジー的な情報を, コホモロジーをとらずして持つのである.

導来圏の概念は, 上述のようにあくまでホモロジー代数的問題の解消のため, 技術的困難の回避のため, 1960 年代に Grothendieck, Verdier らによって考案された. しかしながら 1990 年代から 2000 年代にかけての Bondal, Orlov, 向井らの研究により, 代数多様体 X 上の連接層と呼ばれる良い条件を満たす層のなす (有界) 導来圏 $\mathrm{D^b}(X)$ が, もとの代数多様体の非常に多くの情報を持っているということが明らかとなっていった. とりわけエポックメイキングな発見は, 次の定理であろう :

定理 1.2 ([BO01])
X を非特異射影代数多様体であって, 標準束 ω_X または反標準束 ω_X^{-1} が豊富であるものとする. このとき, 非特異射影代数多様体 Y および連接層の導来圏の間の同値 $\mathrm{D^b}(X) \simeq \mathrm{D^b}(Y)$ が存在するならば, X と Y は同型である.

すなわち, 標準束の豊富性の条件を満たせば, 導来圏は代数多様体の同型類についての情報を持っているということが判明したのである. これらの研究を背景に, 代数幾何学において導来圏の持つ重要性は徐々に浸透していき, 現在では主要な研究対象の一つとみなされている.

それでは, 導来圏を理解するためにはどのような手法を取ればよいのであろうか? 導来圏はホモロジー代数的条件をもとにテクニカルに構成された対象であるから, その意味するところや構造を調べることは一般には容易ではない. しかしながらいくつかの代数多様体の連接層の導来圏は**半直交分解** (semi-orthogonal decomposition) と呼ばれる比較的性質の良い分解を持つことが知られる. A. Kuznetsov は主に 2000 年代から多くの興味深い代数多様体の半直交分解を構成しその性質を明らかにしてみせ, さらに分解のもっとも "主要な" パーツ——本稿では **Kuznetsov component** と呼ぶ——が, 多様体の幾何を良く反映していることを示してきた. とりわけ, Kuznetsov component が

後述の **K3 曲面**と何らかの形で関連を持つような代数多様体は注目に値する.

1.2 Fano 多様体と K3 曲面

K3 曲面 (K3 surface)[*1] は, その豊かな幾何的性質から 1900 年代より大いに興味を持たれて研究されている曲面のクラスである. $\mathbb{P}^5$ の 4 次元 3 次超曲面は, いくつかの意味で K3 曲面と類似点があることが知られる.

Hodge 理論的類似

K3 曲面 S の 2 次のコホモロジー $H^2(S,\mathbb{Z})$ や, 4 次元 3 次超曲面 Y の 4 次のコホモロジー $H^4(Y,\mathbb{Z})$ には**格子** (lattice) と呼ばれる構造が入り, **Hodge 理論**の側面からさまざまな洞察を与えることができる. この方向性において 4 次元 3 次超曲面と K3 曲面の類似性は古くから知られる. これらのコホモロジー環は Hodge 分解 (Hodge decomposition) を持ち, そこから定まる Hodge 数を規則的に並べた Hodge diamond は, 多様体の幾何について多くの情報を与える. 特に, K3 曲面の格子は次の意味で K3 曲面の幾何を決定してしまう：

定理 1.3 (Torelli の定理)
K3 曲面 S_1, S_2 が同型であることと, Hodge isometry (向井格子の構造を保つ同型) $H^2(S_1,\mathbb{Z}) \simeq H^2(S_2,\mathbb{Z})$ が存在することは同値である.

驚くことに, 4 次元 3 次超曲面に対してもこの定理の類似が成立することが知られている：

定理 1.4 (Torelli の定理, 4 次元 3 次超曲面の場合)
4 次元 3 次超曲面 Y_1, Y_2 が同型であることと, Hodge isometry $H^4(Y_1,\mathbb{Z}) \simeq H^4(Y_2,\mathbb{Z})$ であって, 超平面のクラス h に対し h^2 を保つようなものが存在することは同値である.

Hassett [Has00] によれば, special という条件を満たす 4 次元 3 次超曲面 W に対して, 自然に付随する K3 曲面を考えることができる場合がある. 大雑把にいえば, special な 4 次元 3 次超曲面が含む, 超平面の完全交叉に homologous でない平面 T と, 超平面の自己交叉の類 h^2 が張る $H^4(W,\mathbb{Z})$ の階数 2 の部分格子の直交部分 (orthogonal part) $\langle h^2, T\rangle^\perp$ が, 偏極 K3 曲面 (S,l) のコホモロジーの原始的部分 (のツイスト) に同型となるようなケースが存在する. さらに Hassett は, このような偏極 K3 曲面 (S,l) が存在する数値的な必要十分条件を与えた [Has00, Theorem5.1.3].

導来圏における類似

4 次元 3 次超曲面 Y の導来圏的側面からの研究は Kuznetsov によって強力に推し進められた [Ku10]. $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ は $\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y(1), \mathcal{O}_Y(2)$ を**例外列** (exceptional collection) として持ち, その右直交部

[*1] 曲面論に大いに貢献した数学者, Kummer, Kähler, 小平 (Kodaira) 邦彦の “3 人の K” および, 1952 年まで未踏峰であった世界第 2 位の標高をもつ K2 にちなんで Weil が名付けたという.

分圏,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}u(Y) &:= \langle \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y(1), \mathcal{O}_Y(2)\rangle^{\perp} \\ &:= \{\, E \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y) \mid i = 0,1,2 \text{ に対して } \mathrm{RHom}(\mathcal{O}_Y(i), E) = 0 \,\}\end{aligned}$$

を Y の **Kuznetsov component** と呼ぶ．このとき,

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y) = \langle \mathcal{K}u(Y), \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y(1), \mathcal{O}_Y(2)\rangle$$

なる**半直交分解**が存在する．この$\mathcal{K}u(Y)$ が複数の点で K3 曲面の導来圏と類似の性質を持つことが知られている．

Kuznetsov は [Ku10] においていくつかの 4 次元 3 次超曲面に対し $\mathcal{K}u(Y)$ が実際の射影的 K3 曲面の連接層のなす導来圏に同値であることを示しており, さまざまな状況証拠から以下の予想を提示した：

> **予想 1.5** (Kuznetsov's conjecture)
> Y を 4 次元 3 次超曲面とする．Y が有理的であることは, その Kuznetsov component がある K3 曲面の導来圏と同値であることと同値である．

これは Kuznetsov component がもとの多様体の重要な情報を反映することを意味しており, 代数多様体およびその導来圏の研究において Kuznetsov component を調べることがその本質的な情報を得るための基本的な手法となり得ることを示唆する, ひとつのわかりやすい例である．また, Kuznetsov component の対象と**モジュライ空間** (moduli space) との関係も重要な問題であるが, 紙幅の都合で詳細は述べられない．

■ 非可換 K3 曲面と Fano 多様体

Kuznetsov component が K3 曲面の導来圏と類似の性質を持つような対象は他にもいくつか知られている．とりわけ次の Fano 多様体,

(1) 4 次元 3 次超曲面,
(2) Gushel-Mukai 多様体,
(3) Debarre-Voisin 20-fold,

が典型的な例として知られる．Fatighenti はこれらを指して triumvirate (三頭政治) と述べている [Fa22]．これらの導来圏の Kuznetsov component は一部で**非可換 K3 曲面**[*2] (non-commutative K3 surfece) と呼ばれ [MS19], 注目が集まっている．この中で (3) はその Hodge 理論的性質において 4 次元 3 次超曲面と類似の性質がいくつも成り立つことが判明しつつあるが, 導来圏の性質や構造の研究は途上である．以下, これらの概念の技術的な概要と, 研究の方向性やあらましを述べる．

[*2] 必ずしも一般に定着している用語ではない．しかし特徴的な性質を持つこれらの部分圏に共通の名称は必要であると考え, 本稿ではこの用語を用いることにする．

2 導来圏の半直交分解と Kuznetsov component

2.1 連接層の導来圏と Serre 関手

圏と関手, 導来圏の詳細な定義や基本的な性質については, 例えば [Hu06] を参照願いたい. 導来圏は**三角圏** (triangulated category) と呼ばれる構造を持ち, その対象 $\mathcal{E}$ と任意の整数 i に対し, その**シフト** (shift) と呼ばれる対象 $\mathcal{E}[i]$ が定まる. 導来圏の間に定義される次の関手は重要である：

定義 2.1
$\mathcal{A}$ を k 線型圏とする. k 線型な圏同値 $S\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ が **Serre 関手** (Serre functor) であるとは, 任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し, k 線型空間の同型,

$$\eta_{A,B}\colon \operatorname{Hom}(A,B) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}(B, S(A))^*$$

であって, A, B について関手的であるものが存在するときにいう.

X を n 次非特異射影代数多様体とする. $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ の自己同値関手 S_X を,

$$S_X(-) := - \otimes \omega_X[\dim X]$$

で定める. ここで ω_X は X の標準層である.

定理 2.2 ([Hu06, Theorem3.12, Serre duality])
X を体 k 上の非特異射影代数多様体とする. このとき, 上述の関手

$$S_X\colon \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) \longrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$$

は Serre 関手である.

注意 2.3
定理の主張を書き下せば, $\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$ に対し関手的な同型

$$\eta\colon \operatorname{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet \otimes \omega_X[n])^*$$

が存在する. ここで $\operatorname{Ext}^i(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) = \operatorname{Hom}_{\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)}(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet[i])$ であることを用いれば, $i \in \mathbb{Z}$ に対し,

$$\operatorname{Ext}^i(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^{n-i}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{E}^\bullet \otimes \omega_X)^*$$

を得る.

注意 2.4
$\omega_X \simeq \mathcal{O}_X$ が成り立つ非特異射影代数多様体, すなわち **Calabi-Yau 多様体** (Calabi-Yau variety) に

おいては, $S_X \simeq [\dim X]$ である. これを一般化し, Serre 関手が n 回のシフト $[n]$ に同値な三角圏を **Calabi-Yau 圏** (Calabi-Yau category) と呼ぶ.

2.2 半直交分解と例外生成列

導来圏を何らかの意味で "分解" することを考える. いくつかの代数多様体に対しては, Kuznetsov component と呼ばれる非自明なひとつの部分圏と, 自明なパーツたちから成る特徴的な分解の存在が知られており, 代数多様体の導来圏を調べる上で重要な意味を持つ. $\mathcal{D}$ を三角圏とする.

定義 2.5
$\mathcal{D}$ の充満許容部分圏

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{\perp} &:= \{\, A \in \mathcal{D} \mid \text{任意の } B \in \mathcal{C} \text{ に対し } \mathrm{Hom}(B, A) = 0 \,\}, \\ {}^{\perp}\mathcal{C} &:= \{\, A \in \mathcal{D} \mid \text{任意の } B \in \mathcal{C} \text{ に対し } \mathrm{Hom}(A, B) = 0 \,\} \end{aligned}$$

をそれぞれ $\mathcal{C}$ の $\mathcal{D}$ における**右直交部分圏** (right orthogonal subcategory) , **左直交部分圏** (left orthogonal subcategory) と呼ぶ.

定義 2.6 (1) $\mathcal{D}$ の充満部分三角圏の列, $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ が**半直交列** (semi-orthogonal collection) であるとは, 任意の $1 \le i < j \le n$ および $C_i \in \mathcal{C}_i, C_j \in \mathcal{C}_j$ に対し,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(C_j, C_i) = 0$$

を満たすときにいう.

(2) $\mathcal{D}$ の半直交列 $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ が $\mathcal{D}$ を生成する, すなわち, すべての $\mathcal{C}_i$ を含む最小の充満部分三角圏が (包含を通じて) $\mathcal{D}$ と同値であるとき, $\mathcal{D}$ の**半直交分解** (semi-orthogonal decomposition) であるという. このとき,

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n \rangle$$

と記す.

定義 2.7 (1) $\mathcal{D}$ を k 線型三角圏とする. 対象 $E \in \mathcal{D}$ が**例外** (exceptional) であるとは,

$$\mathrm{Hom}(E, E[l]) = \begin{cases} k & l = 0 \text{ のとき}, \\ 0 & l \neq 0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

を満たすことをいう.

(2) 例外対象の系列 $E_1, \ldots, E_n$ が**例外列** (exceptional sequence, exceptional collection) であ

るとは, 任意の $1 \leq i < j \leq n$ および l に対し,

$$\mathrm{Hom}(E_j, E_i[l]) = 0$$

を満たすときにいう. すなわち,

$$\mathrm{Hom}(E_j, E_i[l]) = \begin{cases} k & l = 0, i = j \text{ のとき}, \\ 0 & i < j \text{ または } l \neq 0, i = j \text{ のとき}, \end{cases}$$

を満たすときにいう.

(3) 例外列が**例外生成列** (full exceptional sequence) であるとは, $\{E_i\}$ によって $\mathcal{D}$ が生成されるときにいう. このとき,

$$\mathcal{D} = \langle E_1, \ldots, E_n \rangle$$

と記す.

例 2.8

$E_1, \ldots, E_n$ を $\mathcal{D}$ の例外列とする. このとき, $\langle E_i \rangle$ は $i = 1, \ldots, n$ に対し許容部分三角圏となり [Hu06, Lemma 1.58], $C_1 := \langle E_1 \rangle, \ldots, C_n := \langle E_n \rangle$ とすると, $C_1, \ldots, C_n$ は半直交列である. すなわち, 半直交分解

$$\mathcal{D} = \langle C, C_1, \ldots, C_n \rangle \tag{1}$$

が存在する. ここで,

$$C := \langle C_1, \ldots, C_n \rangle^{\perp}$$

である. また, 多くの場合に分解 (1) を

$$\mathcal{D} = \langle C, E_1, \ldots, E_n \rangle$$

と記す. $E_1, \ldots, E_n$ が例外生成列であれば, $\langle C_1, \ldots, C_n \rangle = \langle E_1, \ldots, E_n \rangle$ は $\mathcal{D}$ の半直交分解を与える [Hu06, Example 1.60]. すなわち,

$$\mathcal{D} = \langle E_1, \ldots, E_n \rangle$$

である.

2.3 Calabi-Yau 圏と非可換 K3 曲面

4 次元 3 次超曲面の導来圏について, 以下が知られている.

定理 2.9 ([Ku10])

4 次元 3 次超曲面 $Y \subset \mathbb{P}^5$ に対し, 半直交分解

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(Y) = \langle \mathcal{K}u(Y), \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_Y(1), \mathcal{O}_Y(2) \rangle$$

が存在する．また $\mathcal{K}u(Y)$ は 2-Calabi-Yau 圏である．

さらに, $\mathcal{K}u(Y)$ は, 次の意味で非可換 K3 曲面である：

定義 2.10 ([MS19]) (1) k 上線型な三角圏 $\mathcal{D}$ が**非可換非特異射影代数多様体** (non-commutative smooth projective variety) であるとは, k 上の非特異射影代数多様体 X および忠実充満 k 線型完全関手,

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X)$$

であって左・右随伴を持つものが存在するときにいう．

(2) 非可換非特異射影代数多様体 $\mathcal{D}$ が n 次の**非可換 Calabi-Yau 多様体** (non-commutative Calabi-Yau variety) または n-Calabi-Yau 圏 (n-Calabi-Yau category) であるとは, $\mathcal{D}$ の Serre 関手 $S_{\mathcal{D}}$ が n 回のシフト $[n]$ と同値であるときにいう．

(3) 非可換非特異射影代数多様体 $\mathcal{D}$ が**非可換 K3 曲面** (non-commutative K3 surface) であるとは, $\mathcal{D}$ が連結な 2-Calabi-Yau 圏であって, その Hochschild (コ) ホモロジーが K3 曲面のものと一致するときにいう．ここで非可換非特異射影代数多様体 $\mathcal{D}$ が連結であるとは, 0 次の Hochschild コホモロジーについて $HH^0(\mathcal{D}) = 0$ が成り立つときにいう．

Debarre と Voisin は, [DV10] において, 現在 Debarre-Voisin 多様体と呼ばれる多様体 Y_σ を導入し, それが hyperkähler fourfold の新たな例であることを示した．

定義 2.11 (Debarre-Voisin, [DV10])
V_{10} を 10 次元複素ベクトル空間, $\sigma \in \bigwedge^3 V_{10}^*$ とする．**Debarre-Voisin 多様体** (Debarre-Voisin variety) を,

$$Y_\sigma := \{\, V_6 \in \mathrm{Gr}(6, V_{10}) \mid \sigma|_{V_6} = 0 \,\}$$

として定める．また,

$$F_\sigma := \{\, V_3 \in \mathrm{Gr}(3, V_{10}) \mid \sigma|_{V_3} = 0 \,\}$$

とする．

自然な incidence correspondence,

$$\begin{tikzcd} G_\sigma = \{([W_3],[W_6]) \in F_\sigma \times Y_\sigma \mid W_3 \subset W_6\} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & F_\sigma \\ Y_\sigma & \end{tikzcd}$$

が存在する．ここで F_σ は例外列を持ち, その Kuznetsov component が定義される．これは 20 次元の Fano 多様体であることがわかり, Debarre-Voisin の 20-fold と呼ばれる [Fa22].

3 グラスマン多様体の半直交分解

3.1 Fonarev's collection と Debarre-Voisin 20-fold の導来圏

グラスマン多様体の導来圏については, Fonarev [Fo13] によってその半直交分解, 特に最短 Lefschetz 分解が得られている.

命題 3.1 ([Fo13, Theorem4.1])
$\gcd(k,n) = 1$ とする. このとき $\mathrm{Gr}(k,n)$ は長方形型 Lefschetz 半直交分解

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Gr}(k,n)) = \langle \mathcal{B}, \mathcal{B}(1), \ldots, \mathcal{B}(n-1) \rangle$$

を持つ. ここで $\mathcal{B}$ はランク k の普遍部分束 $\mathcal{U}$ に対して $\Sigma^{\alpha}\mathcal{U}^{\vee}$ からなる例外列によって生成されており, α は $k-1$ 列以下, p 列の長さは $(n-k)(k-p)/k$ 以下のヤング図形を渡る：

$$\mathcal{B} = \langle\, \Sigma^{\alpha}\mathcal{U}^{\vee} \mid \alpha_1 < (n-k)(k-1)/k, \alpha_2 < (n-k)(k-2)/k, \ldots, \alpha_{k-1} < (n-k)/k \,\rangle.$$

また, Σ^{α} はヤング図形 α に対応するシューア関手 (Schur functor) である.

この命題と超曲面の半直交分解に関する結果 [Ku17, Corollary4.4] を合わせて具体的に計算を実行すると, 特に次の基本的な結果を得る：

命題 3.2
$X \subset \mathrm{Gr}(3,10)$ を超平面とする. このとき, 半直交分解,

$$\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(X) = \langle \mathcal{K}u(X), \mathcal{B}_X, \mathcal{B}_X(1), \ldots, \mathcal{B}_X(8) \rangle$$

が存在する. ここで $\mathcal{B}$ は分割 $\lambda = \{0\}, \{1\}, \{1,1\}, \{2\}, \{2,1\}, \{2,2\}, \{3\}, \{3,1\}, \{3,2\}, \{4\}, \{4,1\}, \{4,2\}$ にそれぞれ付随する Schur 関手を $\mathcal{U}^{\vee}$ に適用した対象が生成する部分圏である. また, $\mathcal{K}u(X)$ は非可換 K3 曲面である.

3.2 展望

Addington, Thomas は 4 次元 3 次超曲面 Y に対し $\mathcal{K}u(Y)$ 上の **K 群** (K-group) を定義し, そのコホモロジー環および格子構造との関係を詳らかとし, Hodge 理論的に付随する K3 曲面と導来圏的に付随する K3 曲面の同値性を証明した [AT14].

命題 3.2 の $\mathcal{K}u(X)$ にも同様に K 群は定義でき, さらにグラスマン多様体の超平面切断であることからコホモロジー環はシューベルトサイクルを用いて組み合わせ論的に記述することができる. また, **変異** (mutation) と呼ばれる操作でもって, $\mathcal{K}u(X)$ への射影を考えることができる. 4 次元 3 次超曲

面の場合と異なり, 例外対象が 108 個と多いため計算量が大きくなるが, Macaulay2 などの計算機代数を援用することで具体例の計算を実行した. 特に, 交叉環のレベルで $\mathrm{K}_{\mathrm{num}}(\mathcal{K}u(X))$ と関連する射の具体的な記述を得た. さらに $\mathcal{K}u(X)$ の具体的な格子構造の詳細を調査し, 付随する K3 曲面との関連を明らかにすべく, この方向での研究が続行中である.

参考文献

[AT14] N. Addington, R. Thomas, *Hodge theory and derived categories of cubic fourfolds*, Duke Math. J. **163**, 1885-1927, 2014.

[BO01] A. Bondal, D. Orlov, *Reconstruction of a Variety from the Derived Category and Groups of Autoequivalences*, Compositio Mathematica, **125**, 327-344, 2001.

[CG72] C. Herbert Clemens, Phillip A. Griffiths, *The Intermediate Jacobian of the Cubic Threefold*, Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 95, No. 2, pp. 281-356, 1972.

[DV10] O. Debarre, C. Voisin, *Hyper-Kähler fourfolds and Grassmann geometry*, J. reine angew. Math. **649**, 63-87, 2010.

[Fa22] E. Fatighenti, *Topics on Fano varieties of K3 type*, arXiv:2206.06204, 2022.

[Fo13] A.V.Fonarev, *Minimal Lefschetz decompositions of the derived categories for Grassmannians*, I zv. Math. **77**, no. 5, 1044-1065, 2013.

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag New York, 1977.

[Has00] B. Hassett, *Special cubic fourfolds*, Comp. Math. **120** (1), 1-23, 2000.

[Hu06] Daniel Huybrechts, *Fourier-Mukai Transforms in Algebraic Geometry*, Oxford Science Publications, 2006.

[Ku10] A. Kuznetsov, *Derived Categories of Cubic Fourfolds*, In Cohomological and geometric approaches to rationality problems, Progr. Math. **282**, 219-243, 2010.

[Ku17] A. Kuznetsov, *Calabi-Yau and fractional Calabi-Yau categories*, J. Reine Angew. Math., 2017.

[MS19] E. Macrì, P. Stellari, *Lectures on Non-commutative K3 Surfaces, Bridgeland Stability, and Moduli Spaces, Bridgeland stability, and moduli spaces, in Birational Geometry of Hypersurfaces*, ed. by A. Hochenegger et al. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, vol. 26, Springer, Cham, 2019.

Grothendieck inequality and its application

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻 数理解析系
原渚彩 (Nagisa Hara)

概要

Grothendieck の定理は, Banach 空間論における中心的な定理のひとつであり, これまで C^* 環論, 作用素空間論の枠組みにおいて, そのアナロジーが研究されてきた. また, この定理は興味深いことに, 全く異なる文脈で発展してきた量子情報理論 (QIT) やコンピューターサイエンスにおいて, 深い関連性や応用があることがわかっている. 以来, 数学の枠組みにとどまらず, 他分野と双方向に影響を及ぼし合い, 研究されてきた. 本稿では, Grothendieck の定理の最近の進展と共に, 特に QIT との関連性を議論する.

1 導入

関数解析において, Banach 空間は基本的な設定である. Banach 空間とは, 線型空間に適当なノルム（位相）を備えた完備な距離空間であった. 特に L_p 空間 $(1 \leq p \leq \infty)$ が重要な例となる. ここで L_p 空間とは, ある (Ω, μ) 測度空間が存在して, その上の可測函数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ のうち, $\|f\|_p = (\int |f|^p d\mu)^{1/p}$ というノルムについて閉じた函数空間を指す.

そして, Banach 空間の性質を解析するにあたって, テンソル積は欠かせない. 一般にテンソル積は双線型写像を線型化するために用いられる技術であるが, 二つの線型空間から大きな一つの線型空間を構成する手続きでもある. Banach 空間に対してはさらにテンソル積上のノルムを考えることによって, 線型写像, 双線型写像, テンソル積の対応（ダイアグラム）を追いながら議論ができる.

このテンソル積の研究を始めた数学者は複数人いて, 中でも 1950 年代の Grothendieck の功績は大きい. 彼は"Résumé"[7] のなかでテンソル積とその上のノルムを考察し, Hilbert 空間 (L_2) と Banach 空間 (特に L_1, L_∞) の非自明な関係を明らかにした. 彼の業績が広く知られるところとなるには出版から 15 年の月日を要したものの, そのアイデアは C^* 環論, 作用素空間論へと受け継がれて今日に至る.

このように関数解析の枠組みで Grothendieck の定理が発展していく一方で, 量子情報理論 (QIT) やコンピューターサイエンス (CS) においてもその応用が議論されている. QIT では, Bell の不等式と Grothendieck の不等式の関連性が指摘され, CS では PvsNP 問題へ適用できることが確認されている. このようにして, 純粋数学にとどまらず, 他分野へも大きな影響を今なお与え続けいている.

以下, 特に断りのない限り M_n は体 $\mathbb{K}$ 上の $n \times n$ 行列環とする. また, Hilbert 空間 H 上の有界線型作用素全体からなる空間を $B(H)$ と表す.

2 Grothendieck 不等式

Grothendieck の定理の本質は, テンソル積上のノルムに関するものであると考える. しかし, いくつか同値の主張が存在するので, 以降の議論のため, この中で最も初等的なものを挙げよう. 詳しくは [6], [10] を参照されたい.

定理 2.1. $n \times n$ 行列 $[a_{i,j}]_{i,j} \in M_n$ として, 任意の H :Hilrbert 空間と $x_i, y_j \in H$ について, 次の不等式が成り立つ.

$$\sup_{\|x_i\|,\|y_j\|\leq 1} |\sum a_{i,j}\langle x_i, y_j\rangle| \leq K \sup_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} |\sum a_{i,j}\alpha_i\beta_j| \tag{1}$$

ただし, K はユニバーサル定数. この不等式を任意の n, H について満たす定数 K のうち, 極小のものを K_G と表す.

このとき, 式 (1) を Grothendieck の不等式といい, K_G を Grothendieck 定数と呼ぶ. ちなみに, 複素線型上あるいは実線型空間上の主張かによって K_G の値は異なるが, その正確な値は未だ知られていない. 実線型空間上の場合, その値はおよそ $1.66 \leq K_G \leq 1.783$ であることがわかっている.

上の主張は, 双線型形式 $T : \ell_\infty^N \times \ell_\infty^N \to \mathbb{R}$ に対する不等式とみなすこともできる. 式 (1) の右辺は, 明らかに T の作用素ノルム $\|T\| := \sup_{\|x\|_\infty,\|y\|_\infty\leq 1} |T(x,y)|$ である. 一方で, 左辺も完全有界ノルム $\|T\|_{\mathrm{cb}}$ とよばれるノルムが対応する. しかし, 非自明であるので, 定義だけ述べることにする.

$$\begin{aligned} T_n : M_n(\ell_\infty^N) \times M_n(\ell_\infty^N) &\to M_{n^2}(\mathbb{R}) \\ (a \otimes x, b \otimes y) &\mapsto T(x,y)a \otimes b \end{aligned} \tag{2}$$

$(x, y \in \ell_\infty, a, b \in M_n(\mathbb{C}))$ と定めたとき, 同様に作用素ノルム $\|T_n\|$ を考えられるが,

$$\|T\|_{\mathrm{cb}} := \sup_{n\geq 1}\|T_n\|$$

を T の完全有界ノルム (completely bounded norm) と定める. ただし, 標準的な埋め込み $\ell_\infty^N \subset B(\ell_2^N) = M_N$ によって, $M_n(\ell_\infty^N)$ 上のノルムは, $M_n \otimes M_N = M_{n+N}$ で与えられている.

3 関数解析から QIT

今日では, 量子力学はミクロな世界を記述する言語として, 広く認められている. しかし, 20 世紀前半, Einstein をはじめとする一部の物理学者は量子力学を痛烈に批判していた. 彼らは, （量子もつれに関する）量子実験に特徴的なランダム性を, 量子論の統計的な解釈ではなく, 決定論（古典）的に解釈することを試みた. そのために, 観測者には測定できない「隠れた」変数を導入した. これと相対論から要請される局所性-いかなる情報も光速より速く伝達しない-を合わせて, 局所隠れ変数モデルを提唱した.

次の実験を考えたい. いま, Alice と Bob が充分距離が離れた位置にいて, 測定結果として ± 1 を得るような観測 $\{A_i\}_{i=1}^N$, $\{B_j\}_{j=1}^N$ を行う. このとき, A_iB_j の期待値を考えたい. 局所隠れ変数モデル

を仮定すると, その期待値は

$$\langle A_i B_j \rangle = \int A_i(s) B_j(s) p(s) d\mu(s) \tag{3}$$

と表せる．ただし, s はある確率分布 $pd\mu$ に従う隠れ変数とし, これにより測定値が s の関数 $A_i(s), B_j(s) \in \{\pm 1\}$ で与えられると考えた．一方, 量子力学では, 系の状態は Hilbert 空間 H に作用する密度行列（演算子）ρ で表され, 測定 A_i, B_j はオブザーバブル (自己共役作用素) になり, その固有値が測定結果に対応するのであった．　すると, 量子力学を仮定した場合, 期待値は

$$\langle A_i B_j \rangle = \mathrm{tr}(\rho A_i \otimes B_j) \tag{4}$$

となる．ただし $\mathrm{tr}(\cdot)$ はトレース.

（中心極限定理より）実験を何回も繰り返すことによって, $A_i B_j$ の期待値を良い精度で測定することができることに注意すると, 式 (3) と式 (4), いずれかがより正しく実験結果を説明できるのか, 確かめることはできないであろうか．これを考察したのが J. S. Bell[2] である．結論から言えば, 期待値 $\langle A_i B_j \rangle$ の線型結合を考えればよい．$[T_{i,j}] \in M_m(\mathbb{R})$ を実行列として, その線型結合を以下のように表す.

$$|\sum_{i,j} T_{i,j} \langle A_i B_j \rangle| \tag{5}$$

これのとりうる最大値に, 二つの仮定の差異が現れる.

局所隠れ変数モデルを仮定すると式 (5) は最大値

$$\sup_{a_i, b_j = \pm 1} |\sum T_{i,j} a_i b_j|$$

をとりうる．従って, もし量子力学モデルがこの局所隠れ変数モデルで記述可能ならば, 式 (4) を仮定した線型結合は常に以下の不等式（Bell の不等式)

$$|\sum T_{i,j} \mathrm{tr}(\rho A_i \otimes B_j)| \leq \sup_{a_i, b_j = \pm 1} |\sum T_{i,j} a_i b_j| \tag{6}$$

を満たすべきである．しかし, この不等式は一般に成り立たないことが知られている．実際,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

に対応する線型結合 $|\langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_1 B_2 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle - \langle A_2 B_2 \rangle|$(Bell-CHSH 不等式) を考えると, 式 (6) の左辺は最大値 $2\sqrt{2}$ を取りうるのに対し, 右辺は 2 となる．あとは実際に実験をし, 期待値 $\langle A_i B_j \rangle$ の測定値が $2\sqrt{2}$ に近い値であるならば, 量子力学の妥当性を検証（あるいは局所隠れ変数モデルの棄却）ができる．詳しい物理的な背景知識は, 実際にこの Bell の実験を成功させた物理学者のうちの一人, 2022 年度のノーベル物理学賞受賞者である A. Aspect[1] を参照されたい.

ところで, Bell の不等式が成り立たないのであるならば, 式（6) の左辺の上限は一般に求められるのだろうか．それは前節の Grothendieck の定理, 式 (1) によって既に与えられていて,

$$\sup_{\rho, -I \leq A_i, B_j \leq I} |\sum_{i,j=1}^{N} T_{i,j} \mathrm{tr}(\rho A_i \otimes B_j)| \leq K_G \sup_{a_i, b_j = \pm 1} |\sum_{i,j=1}^{N} T_{i,j} a_i b_j| \tag{7}$$

が成り立つ. K_G はグローバル定数であったが, 特に $N=2$ と固定したときは, K_G は $\sqrt{2}$(Tsirelson's bound) で置き換えられることがわかっている. ここに Bell の不等式と Grothendieck の不等式の関係性を見ることができた. この事実は 1980 年頃に, B. S. Tsirelson[4][12][13] によって指摘されていて, 以来, 関数解析 (作用素環）と量子情報理論が双方向に発展していく.

それでは, 観測者が Alice と Bob の二人だけではなく, Charlie という三人目がいた場合にも同様な不等式が成り立つのであろうか. この問題を考えるために, 物理設定を忘れて, ひとまず式 (7) を抽象化しよう. 行列 $[T_{i,j}] \in M_N(\mathbb{R})$ を, 双線型形式 $T : \ell_\infty^N \times \ell_\infty^N \to \mathbb{R}$ とみなす ($T_{i,j} \leftrightarrow T(e_i, e_j)$) ことにする. このとき, 式 (7) は, 前節から

$$\|T\|_{\mathrm{cb}} \leq K_G \|T\| \tag{8}$$

と表すことができたことを思い出す. このとき考えるべき命題は, 三重線型形式 $T : \ell_\infty^N \times \ell_\infty^N \times \ell_\infty^N \to \mathbb{R}$ についても同様な不等式が成り立つのであろうか, ということである.

4 最近の進展

2008 年, M. Junge et. al[9] によって, 三重線型形式において式 (8) の反例が構成され, 予想は否定的に説かれた. 証明は von Neumann 環や作用素空間のテクニックに依存したものであり, その構成方法は非常に抽象的なものであった. (一方で, 通信複雑性理論 (communication complexity), 量子暗号 (quantum cryptography) など, QIT の分野への応用が議論されている点で興味深い論文である.)

2013 年, random matrix theory を用いた, 幾分 explicit な構成の反例が J. Briët と T. Vidick によって与えられた [3]. (なお, 彼らは非局所ゲームにおける文脈で議論を行っていた.) ここでは, G. Pisier によって幾分改善された主張 [11] を挙げる.

定理 4.1. ある定数 $C > 0$ が存在して, 任意の N に対して, 次を満たす $\ell_\infty^{N^2}$ 上で定義された三重線型形式 T が存在する.

$$\|T\|_{cb} \geq C N^{1/2} (\log N)^{-3/2} \|T\|$$

M. Junge 等の反例よりも tight な不等式を得られたという意味で前進があった. しかし, この反例は確率的に構成されたものであるため, なお explicit で, より tight な評価の反例の構成が待たれる.

5 QIT から関数解析

前節の random matrix theory のテクニックを用いて, 対称三重線型形式 (symmetric trilinear form) についてもアナロジーを見出すことができる. なお, 本節は [5] に基づいた [8] の結果である. まず, ベクトル空間 V 上の m 次線型形式 T が対称 (symmetric) であるとは, S_m は m 次対称群として

$$T(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) = T(x_1, \ldots, x_m) \quad \forall x_i \in V, \forall \sigma \in S_m$$

を満たすことであった. 一方で, 一般の m 次形式 T に対して, $T_s = \sum_{\sigma \in S_m} T \circ \sigma$ と定めれば対称な写像を得ることができる (一般論として, 任意の対称な写像は, （正規化を除いて）このような形で表

すことができる). この議論を定理 4.1 の証明のテクニックを適用することで, 次の定理を得ることだできる.

定理 5.1. 充分大きな N について, ある対称三重線型形式 $\varphi \in \ell_\infty^{N^2} \otimes \ell_\infty^{N^2} \otimes \ell_\infty^{N^2}$ が存在して, 次の不等式を満たす

$$\|\varphi\|_{\mathrm{cb}} \geq C' N^{1/2} (\log N)^{-3/2} \|\varphi\|$$

ここで, C' はある正の定数.

ここで, *homogeneous polynomial* の定義を思い出したい. ノルム空間を V, W として, 写像 $p : V \to W$ が, m-homogeneous polynomial であるとは, ある m 次線型写像 $\varphi : V \times \cdots \times V \to W$ が存在し, $p(x) = \varphi(x, \ldots x)$, $x \in V$ を満たすことであった. この m-homogeneous polynomial 全体からなる線型空間を $P^m(V; W)$ と表す. また, p に自然なノルムを

$$\|p\| := \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|p(x)\|_W$$

定めることで, 連続な m-homogeneous polynomial 全体からなるノルム空間 $\mathscr{P}^m(V; W)$ を得る.

ところで, 上で定義される p :m-homogeneous polynomial には, ある $\hat{p}$ で $p(x) = \hat{p}(x, \ldots, x)$, $x \in V$ を満たす m 次対称線型写像と, 一対一対応があることが知られている. 従って, homogeneous polynomial に関する議論を, 対称線型写像を経由して考察することにする.

いま, $P^m(\ell_\infty)$ を考えたい. 注意として, 自然な埋め込み $M_n(\ell_\infty) \subset M_n(B(\ell_2))$ によって, $M_n(\ell_\infty)$ 上にノルムが定まっている. $p \in P^m(\ell_\infty)$ について, これを $M_n(\ell_\infty)$ の上に拡張しよう. 例えば, 適当な性質を満たす行列積 $\lambda_n : M_n \times \cdots \times M_n \to M_{\tau(n)}$ を考える. これと, p に対応する m 次線型写像 $\hat{p}$ をテンソルし,

$$\begin{aligned} \hat{p}_{\lambda_n} = \hat{p} \otimes \lambda_n : M_n(\ell_\infty) \times \cdots \times M_n(\ell_\infty) &\to M_{\tau(n)} \\ (a_1 \otimes x_1, \ldots, a_m \otimes x_m) &\mapsto \lambda_n(a_1, \ldots, a_m) \otimes \hat{p}(x_1, \ldots, x_m) \end{aligned}$$

$(a_i \in M_n, x_i \in \ell_\infty)$ を得る. そして, $p_{\lambda_n}(x) = \hat{p}_{\lambda_n}(x, \ldots, x)$, $x \in M_n(\ell_\infty)$ とすれば $p_{\lambda_n} \in P^m(M_n(\ell_\infty))$ となり $M_n(\ell_\infty)$ 上に拡張ができた. また,

$$\|p\|_\lambda := \sup_{n \geq 1} \|p_{\lambda_n}\|$$

と定めると, ノルム空間

$$\mathscr{P}_\lambda^m(\ell_\infty) := \{p \in P^m(\ell_\infty) : \|p\|_\lambda < \infty\}$$

を得る.

特に λ_n として,

$$\begin{aligned} &\text{Schur Product: } \bullet_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \alpha_1 \bullet \cdots \bullet \alpha_m \text{ with } \tau(n) = n \\ &\text{Kronecker Product: } \otimes_n (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_m \text{ with } \tau(n) = n^m \end{aligned}$$

($\bullet$ は, Schur 積 $(\alpha_1 \bullet \cdots \bullet \alpha_m)_{i,j} = (\alpha_1)_{i,j} \cdots (\alpha_m)_{i,j}$) を考える. $\hat{p}_{\otimes_n}$ は (2) で与えた $\hat{p}_n$ であることに注意. すると, これらの行列積に対して, クロネッカー多項式 $\mathscr{P}_\otimes^m(\ell_\infty)$ とシューア多項式 $\mathscr{P}_\bullet^m(\ell_\infty)$ が得られる.

ところで, このクロネッカー多項式とシューア多項式が異なるものかどうか知られていなかった. 特に, $m = 3$ のとき (Banach 空間として)$\mathscr{P}^3_{\otimes}(\ell_\infty) \neq \mathscr{P}^3_{\bullet}(\ell_\infty)$ と予想されていたものの, 完全な証明が与えられていなかった. しかし, 定理 5.1 の手法を用いれば,

系 5.2 ([8])**.**

$$\mathscr{P}^3_{\otimes}(\ell_\infty) \neq \mathscr{P}^3(\ell_\infty)$$

が分かり, これと $\mathscr{P}^3(\ell_\infty) = \mathscr{P}^3_{\bullet}(\ell_\infty)$([5], Theorem 9.5) を併せて, この予想の肯定的な証明を与えることができた.

References

[1] A. Aspect. "Bell's theorem: the naive view of an experimentalist". In: *Quantum [un]speakables (Vienna, 2000)*. Springer, Berlin, 2002, pp. 119–153.

[2] J. S. Bell. "On the Einstein Podolsky Rosen paradox". In: *Phys. Phys. Fiz.* 1.3 (1964), pp. 195–200.

[3] J. Briët and T. Vidick. "Explicit lower and upper bounds on the entangled value of multiplayer XOR games". In: *Comm. Math. Phys.* 321.1 (2013), pp. 181–207.

[4] B. S. Cirel'son. "Quantum generalizations of Bell's inequality". In: *Lett. Math. Phys.* 4.2 (1980), pp. 93–100.

[5] A. Defant and D. Wiesner. "Polynomials in operator space theory". In: *J. Funct. Anal.* 266.9 (2014), pp. 5493–5525.

[6] J. Diestel, J. H. Fourie, and J. Swart. *The metric theory of tensor products*. Grothendieck's résumé revisited. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008, pp. x+278.

[7] A. Grothendieck. "Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques". In: *Bol. Soc. Mat. São Paulo* 8 (1953), pp. 1–79.

[8] N. Hara. "Tripartite Bell Iinequality for Homogeneous Polynomials in Operator Space Theory". 2023.

[9] M. Junge et al. "Unbounded violations of bipartite Bell inequalities via operator space theory". In: *Comm. Math. Phys.* 300.3 (2010), pp. 715–739.

[10] G. Pisier. "Grothendieck's theorem, past and present". In: *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 49.2 (2012), pp. 237–323.

[11] G. Pisier. "Tripartite Bell inequality, random matrices and trilinear forms". In: *arXiv preprint arXiv:1203.2509* (2012).

[12] B. S. Tsirelson. "Quantum analogues of Bell's inequalities. The case of two spatially divided domains". In: vol. 142. Problems of the theory of probability distributions, IX. 1985, pp. 174–194, 200.

[13] B. S. Tsirelson. "Some results and problems on quantum Bell-type inequalities". In: *Fundamental questions in quantum physics and relativity*. Hadronic Press Collect. Orig. Artic. Hadronic Press, Palm Harbor, FL, 1993, pp. 32–48.

トーリック曲面のフルヴィッツ多面体の頂点について

福岡大学大学院理学研究科 応用数学専攻
大楠涼馬 (Ryoma OGUSU)

概要

射影的代数多様体 $X^n \subset \mathbb{P}^N$ の Hurwitz 形式とは，X と接する $(N-n)$ 次元部分空間がなす Grassmann 多様体 $\mathbb{G}(N-n, \mathbb{P}^N)$ の超曲面の定義多項式である．そのウエイト多面体を Hurwitz 多面体と呼ぶ．本稿では，X がトーリック曲面の場合の Hurwitz 多面体について [5] の結果の一部を紹介する．

1 導入

1.1 終結式と判別式

与えられた連立代数方程式

$$f(x) = a_m x^m + \cdots + a_0 = 0,\ a_m \neq 0$$
$$g(x) = b_n x^n + \cdots + b_0 = 0,\ b_n \neq 0$$

が共通解を持つための条件を与える a_i，b_j を変数とする多項式を f, g の終結式（Resulant）と呼び，$\mathrm{Res}(f, g)$ と書く．また，$f(x) = 0$ が重解 α を持つための条件を与える a_i を変数とする多項式を判別式と呼び，$\Delta(f)$ と書く．これらは連立代数方程式の理論（消去理論）において古典的な研究対象である．

終結式・判別式は，次のように射影的代数多様体に対して拡張される．$\mathbb{P}^N$ 内の k 次元部分空間からなる Grassmann 多様体を $\mathbb{G}(k, \mathbb{P}^N)$ と書く．$X \subset \mathbb{P}^N$ を線形正規かつ既約な n 次元射影的代数多様体とする．さらに X の次数 d_X および X の特異集合の余次元を 2 以上であると仮定する．このとき

$$\{L \in \mathbb{G}(N-n-1, \mathbb{P}^N) \mid L \cap X \neq \emptyset\}$$

は $\mathbb{G}(N-n-1, \mathbb{P}^N)$ の超曲面を与える．この定義多項式を X の **Chow 形式** と呼び，R_X と書く．また

$$\{H \in (\mathbb{P}^N)^\vee = \mathbb{G}(N-1, \mathbb{P}^N) \mid \mathbb{T}_p X \subset H \text{ for some regular point } p \in X\}$$

の Zariski 閉包を X の双対多様体と呼び，$X^\vee$ と書く．ただし，$\mathbb{T}_p X \subset \mathbb{P}^N$ を $\mathbb{P}^N$ に埋め込まれた X の接空間とする．$X^\vee$ が余次元 1 を持つとき，その定義多項式を Δ_X と書き，X の**判別式**と呼ぶ．一般には $X^\vee$ の余次元は 1 であるとは限らないことに注意する．Chow 形式 R_X と判別式 Δ_X は，X と接する（または，交わる）k 次元部分空間がなす Grassmann 多様体の部分多様体

$$\{L \in \mathbb{G}(k, \mathbb{P}^N) \mid L \text{ intersects non-transversely } X\} \tag{1}$$

の一種としてみなすことができる．(1) において $k = N - n - 1$ のときは Chow 形式が定める超曲面，$k = N - 1$ のときは判別式が定める超曲面に対応する．

1.2 Hurwitz 形式

Sturmfels [8] は (1) において $k = N - n$ のときに得られる $\mathbb{G}(N-n, \mathbb{P}^N)$ の部分多様体

$$\{L \in \mathbb{G}(N-n, \mathbb{P}^N) \mid \sharp(L \cap X) < d_X\}$$

が超曲面をなすことを示し，その定義多項式を **Hurwitz 形式**と名付けた．本稿では，その多項式を Hu_X と書くことにする．多項式 Hu_X は $\mathbb{G}(N-n, \mathbb{P}^N)$ の座標環の既約元である．Hurwitz 形式は Chow 形式と判別式の中間に位置する多項式であるが，次のように言い換えられることが知られている [8]．X に対して Segre 埋め込み

$$X \times \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^{n(N+1)-1}$$

の双対多様体 $(X \times \mathbb{P}^{n-1})^\vee$ は常に余次元 1 であり，その定義多項式は**超判別式** $\Delta_{X \times \mathbb{P}^{n-1}}$ と呼ばれている [6]．多項式 $\Delta_{X \times \mathbb{P}^{n-1}}$ は Hu_X を Plücker 座標から Stiefel 座標に書き直して得られる多項式に等しい [8]．

1.3 Hurwitz 形式と幾何学的不変式論

Mumford の幾何学的不変式論 [3] の意味での（半）安定な Chow 形式全体は与えられた次元および次数をもつ代数的サイクルのモジュライ空間（Chow 多様体）を与える．一方，偏極多様体上に標準 Kähler 計量（例えば，スカラー曲率一定計量）が存在することと多様体の安定性のひとつである K-安定性（またはその改良版）が同値であるという予想（Yau-Tian-Donaldson 予想）がある．Paul [6] は，上記の予想に対して，Chow 形式と超判別式の組に対して幾何学的不変式論を拡張した安定性を提案した．このような背景から，Hurwitz 形式（超判別式）および Chow 形式を具体的に求めることは Kähler 幾何学の一つの課題となる．

2 トーリック多様体の Hurwitz 多面体

2.1 Hurwitz 多面体

一般に Chow 形式や判別式は膨大な数の項をもつ多項式であり，それらを求めることは難しい問題である．しかし，前節で述べた安定性の問題を考える場合，多項式そのものよりも，トーラス作用に関するウエイト多面体が分かれば十分である．$\mathbb{T}$ を $(N+1)$ 次元複素トーラス $(\mathbb{C}^\times)^{N+1}$ とすると，$\mathbb{T}$ の $\mathbb{P}^N$ への自然な作用は $\mathbb{G}(k, \mathbb{P}^N)$ およびその座標環への作用を誘導する．この作用に対する Hurwitz 形式のウエイト多面体を **Hurwitz 多面体** $\mathcal{W}(\mathrm{Hu}_X)$ と呼ぶ．これは $\mathbb{R}^{N+1}$ 内の凸多面体となる．Hurwitz 形式を超判別式とみなすと $\mathcal{W}(\mathrm{Hu}_X)$ は，以下のように定義されるウエイト多面体と等しい．$\mathbb{T}$ を第一成分には自然な作用，第二成分には自明な作用として $\mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^{n-1}$ へ作用させる．この作用は $(\mathbb{P}^{n(N+1)-1})^\vee$ への作用を誘導する．この作用に関する $\Delta_{X \times \mathbb{P}^{n-1}}$ のウエイト多面

体 $\mathcal{W}(\Delta_{X\times\mathbb{P}^{n-1}})$ は $\mathcal{W}(\mathrm{Hu}_X)$ と等しい．後者には次節で説明する Gelfand-Kapranov-Zelevinsky [1] らの理論（以下，GKZ 理論）を直接適用できる．

2.2 massive GKZ ベクトル

X がトーリック多様体の場合，GKZ 理論により，トーリック多様体に対応する多面体の分割の組み合わせ論的情報から Chow 形式や判別式のウエイト多面体が求められる．格子 $\mathbb{Z}^n$ 上の点配置 $A=\{\omega_1,\cdots,\omega_{N+1}\}$ に対して，$\mathbb{P}^N$ に埋め込まれた n 次元トーリック多様体 X_A が次のように対応する．

$$X_A=\overline{\left\{[\mathbf{t}^{\omega_1}:\ldots:\mathbf{t}^{\omega_{N+1}}]\in\mathbb{P}^N \,\middle|\, \mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_n)\in(\mathbb{C}^\times)^n\right\}}^{\mathrm{Zariski}}$$

ただし $\mathbf{t}^{\omega_i}=\prod_{j=1}^n t_j^{\omega_{ij}}$ とする．このとき，凸包 $Q:=\mathrm{Conv}(A)$ は X_A の運動量写像の像である．

[1] により，トーリック多様体 X_A の判別式のウエイト多面体の頂点は (Q,A) の単体分割とそれに対応するベクトルで与えられる．(Q,A) の単体分割 T に含まれる k 次元単体 σ が Q の k 次元面（フェイス）であるとき，σ を massive であると言う．ただし，n 次元単体はすべて massive であると定義する．点 $\omega_i\in A$ に対して，ω_i を含む k 次元 massive 単体の体積の和を

$$\eta_{T,k}(\omega_i):=\sum_{\omega_i\prec\sigma}\mathrm{Vol}_{\mathbb{Z}}(\sigma)$$

と書き，それらを成分に持つベクトルを

$$\eta_{T,k}:=(\eta_{T,k}(\omega_1),\cdots,\eta_{T,k}(\omega_{N+1}))$$

とする．ここで $\mathrm{Vol}_{\mathbb{Z}}$ は各次元において単位単体の体積を 1 とするように正規化されているとする．ベクトル $\eta_{T,k}$ の k に関する交代和で得られるベクトル

$$\eta_T:=\sum_{k=0}^n(-1)^{n-k}\eta_{T,k}\in\mathbb{Z}^{N+1}$$

を **massive GKZ ベクトル**と呼ぶ．また，$\eta_{T,n}$ を **GKZ ベクトル**と呼ぶ．(Q,A) の単体分割 T に関して区分的線形で下に凸な関数 $g:Q\to\mathbb{R}$ が存在するとき，T を**正則単体分割**と呼ぶ．

定理 2.1 ([1])**.** $X^\vee$ の余次元が 1 ならば，$(N+1)$ 次元複素トーラス $\mathbb{T}$ の自然な作用に対する X の判別式の Newton 多面体は，すべての正則単体分割 T の massive GKZ ベクトル η_T の凸包と等しい．

ここで $(N+1)$ 次元複素トーラス $\mathbb{T}$ の自然な作用に対する X の判別式の Newton 多面体はウエイト多面体 $\mathcal{W}(\Delta_X)$ と等しいことに注意する．

2.3 超判別式のウエイト多面体

定理 2.1 を直積 $X\times\mathbb{P}^{n-1}$ に適用する．直積 $X\times\mathbb{P}^{n-1}$ は Cartesian 積

$$\widetilde{A}=\{\widetilde{\omega}_{i,j}:=(\omega_i,\mathbf{e}_j)\in\mathbb{R}^{2n-1}\mid \omega_i\in A,\,1\le i\le N+1,\,1\le j\le n-1\}$$

に対応するトーリック多様体である．ただし，$\mathbf{e}_j$ は $\mathbb{R}^{n-1}$ の基本単位ベクトルとする．$\widetilde{A}$ の凸包を $\widetilde{Q}$ とする．このとき定理 2.1 より，$n(N+1)$ 次元複素トーラスの自然な作用に対する $X \times \mathbb{P}^{n-1}$ の判別式のウエイト多面体は massive GKZ の凸包

$$\mathrm{Conv}(\{\eta_{\widetilde{T}} \mid \widetilde{T}: \text{ regular triangulation of } (\widetilde{Q}, \widetilde{A})\}) \subset \mathbb{R}^{n(N+1)}$$

と等しい．しかし，我々が考えている $\mathcal{W}(\Delta_{X\times\mathbb{P}^{n-1}})$ は $(N+1)$ 次元複素トーラス $\mathbb{T}$ の作用に対するウエイト多面体であったことに注意すると，$\mathcal{W}(\Delta_{X\times\mathbb{P}^{n-1}})$ は $\eta_{\widetilde{T},k}(\widetilde{\omega}_{i,j})$ を j について和をとって得られるベクトルの凸包

$$\mathrm{Conv}\left\{\nu_{\widetilde{T}} := \left(\sum_j \sum_k (-1)^{n-k} \eta_{\widetilde{T},k}(\widetilde{\omega}_{1,j}), \cdots, \sum_j \sum_k (-1)^{n-k} \eta_{\widetilde{T},k}(\widetilde{\omega}_{N+1,j})\right)\right\}_{\widetilde{T}} \subset \mathbb{R}^{N+1}$$

と等しいことがわかる．さらに TOPCOM [7] を用いることで，$\mathcal{W}(\Delta_{X\times\mathbb{P}^{n-1}})$ を計算機で実行することが可能となる．

2.4 問題

しかし，$\mathcal{W}(\Delta_{X\times\mathbb{P}^{n-1}})$ を計算機を用いて計算する上で困難な点がある．もともと多面体の正則単体分割の数は A の元の個数が大きくなるにつれ急激に増える上に，$\mathcal{W}(\Delta_{X\times\mathbb{P}^{n-1}})$ を計算するためには (Q, A) ではなく $(\widetilde{Q}, \widetilde{A})$ の正則単体分割を取らなければならない．後者は前者に比べて，その数が非常に多い．例えば，点配置

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

の場合，(Q, A) の正則単体分割は 32 個であるにもかかわらず，$(\widetilde{Q}, \widetilde{A})$ の正則単体分割は 928930 個ある．これにより Q の次元が 2 であっても，A の元の個数が大きくなると計算機での $\mathcal{W}(\Delta_{X\times\mathbb{P}^{n-1}})$ の計算も困難になる．

2.5 Cayley トリック

前節の問題を考える上で，終結式と判別式を結びつける結果を思い出そう．古典的な結果として，多項式 $f(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$ の判別式は

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \frac{1}{a_m} \mathrm{Res}(f, df/dx)$$

の形の終結式として得られる．多変数版では以下の等式が成り立つ（これを **Cayley トリック**と呼ぶ）．

$$\Delta_{X_A \times \mathbb{P}^n} = R_{X_A} \tag{3}$$

一方で定理 2.1 のように Chow 多面体は (Q, A) の正則単体分割 T の GKZ ベクトル $\eta_{T,n}$ の凸包に等しいことが知られている [1]．この凸包を **secondary 多面体**と呼ぶ．(3) とここまで述べた結果を合わせると，以下の対応が得られる．

2.4 節で述べた問題の解決に向けて，以下の問題を設定する．

判別式	多面体	分割	ベクトル
$\Delta_{X\times\mathbb{P}^n} = R_X$	secondary 多面体	(Q,A) の正則単体分割	GKZ ベクトル $\eta_{T,n}$
$\Delta_{X\times\mathbb{P}^{n-1}} = \mathrm{Hu}_X$	Hurwitz 多面体	?	?
$\Delta_{X\times\mathbb{P}^0} = \Delta_X$	判別式多面体	(Q,A) の正則単体分割	mGKZ $\eta_T = \sum(-1)^{n-k}\eta_{T,k}$

問題 2.2. Hurwitz 多面体 $\mathcal{W}(\mathrm{Hu}_X)$ を (Q,A) の正則単体分割に付随するベクトルの凸包として表すことができるか？

3 主結果

本稿の主結果は問題 2.2 に対する部分的解答である．まず，(Q,A) の正則単体分割に付随するベクトルとして以下のベクトルを導入する．

定義 3.1 ([5])**.** 点配置 $A \subset \mathbb{Z}^n$ に対して (Q,A) の正則単体分割を T とする．このとき

$$\xi_T := n\eta_{T,n} - \eta_{T,n-1}$$

を T に対する **Hurwitz ベクトル**と呼ぶ.

[5] において，$n=2$ のときに次の部分的解答を得た.

定理 3.2 ([5])**.** 点配置 $A \subset \mathbb{Z}^2$ に対するトーリック曲面 X_A が滑らかとする．このとき，Hurwitz ベクトル ξ_T の凸包は Hurwitz 多面体に含まれる，つまり，

$$\mathrm{Conv}(\{\xi_T \mid T : \text{regular triangulation of } (Q,A)\}) \subset \mathcal{W}(\mathrm{Hu}_X) \tag{4}$$

が成り立つ.

系 3.3. 点配置 $A \subset \mathbb{Z}^2$ に対するトーリック曲面 X_A が滑らかとする．このとき，Plücker 座標に関する Hu_X の次数 $\deg(\mathrm{Hu}_X)$ について以下が成り立つ.

$$\deg(\mathrm{Hu}_X) = 3\mathrm{Vol}_{\mathbb{Z}}(Q) - \mathrm{Vol}_{\mathbb{Z}}(\partial Q)$$

系 3.3 は [6] で与えられていた超判別式の次数公式と等しい．多面体 $\mathcal{W}(\mathrm{Hu}_X)$ を決定するためには (4) の逆を示す必要があるが，次の予想が成り立つことが期待できる.

予想 3.4 ([5])**.** 点配置 $A \subset \mathbb{Z}^2$ に対するトーリック曲面 X_A が滑らかとする．このとき次が成り立つ.

$$\mathrm{Conv}(\{\xi_T \mid T : \text{regular triangulation of } (Q,A)\}) = \mathcal{W}(\mathrm{Hu}_X)$$

以下の例において予想 3.4 が正しいことを確認した.

- Segre 埋め込み $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^3$
- Veronese 埋め込み $\mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$
- Gorenstein トーリックファノ曲面の一部

最初の 2 例は [8] に $\mathcal{W}(\mathrm{Hu}_X)$ が記載されているが，Hurwitz ベクトルによって $\mathcal{W}(\mathrm{Hu}_X)$ を復元できた．最後の例については TOPCOM を用いて $\mathcal{W}(\Delta_{X\times\mathbb{P}^1})$ を計算することで予想 3.4 が正しいことを確認した（表 1）．Gorenstein トーリックファノ多様体は反射的多面体によって分類されている．特に 2 次元においては 16 個の同型類に分類されることが知られている（例えば [4] 命題 3.4.1 を参照せよ）．表 1 の第 1 列は [4] の命題 3.4.1 のラベルに従って分類している．第 2 列は (Q, A) の正則単体分割の数，第 3 列は $(\widetilde{Q}, \widetilde{A})$ の正則単体分割の数を表している．第 4 列は $\mathcal{W}(\mathrm{Hu}_X)$ の頂点の数を表している．

表 1　予想を検証した反射的多角形

Q	T	$\widetilde{T}$	$\mathcal{W}(\mathrm{Hu}_X)$	Conj 3.4
3	2	84	2	真
$4a$	3	544	3	真
$4b$	4	1270	4	真
$4c$	4	844	4	真
$5a$	10	26540	10	真
$5b$	12	33380	12	真
$6a$	32	928930	32	真

参考文献

[1] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov and A. V. Zelevinsky, “Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants”, Birkhäuser, Boston, 1994.

[2] M. M. Kapranov, B. Sturmfels and A. V. Zelevinsky, “Chow polytopes and general resultants”, Duke Math. J. **67** (1992), no.1, 189–218.

[3] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, “Geometric Invariant Theory”, 3rd enlarged ed., Ergeb. Math. **34**, Springer-Verlag, Heidelberg, 1994.

[4] B. Nill, “Gorenstein toric Fano varieties”, Dissertation, Universität Tübingen, (2005).

[5] R. Ogusu and Y. Sano, “On the vertices of the Hurwitz polytopes of toric varieties”, preprint (2022).

[6] S. T. Paul, “Hyperdiscriminant polytopes, Chow polytopes, and Mabuchi energy”, Ann. Math. **175** (2012), no.1, 255–296.

[7] J. Rambau, “TOPCOM: Triangulations of Point Configurations and Oriented Matroids”, Mathematical Software (2002), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 330–340.

[8] B. Sturmfels, “The Hurwitz form of a projective variety”, J. Symbolic Comput. **79** (2017), part 1, 186–196.

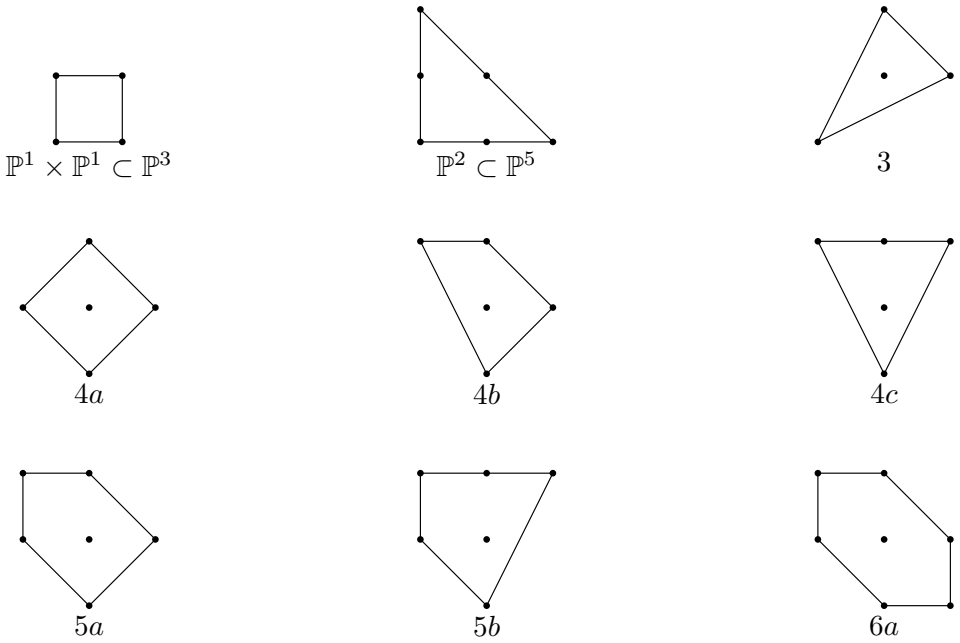


図 1　予想を検証した点配置

Full Exceptional Collections of Line Bundles on the Blow-up of $\mathbb{P}^5$ along Segre Threefold

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻
吉田智輝 (Tomoki YOSHIDA)

概 要

代数多様体上の連接層の導来圏において，Kuznetsov の fullness 予想とは，例外列の生成性とその長さの同値性を主張するものであり，連接層の導来圏分野における重要な予想の一つである．本発表では，5 次元射影空間を Segre 3-fold に沿って爆発することにより得られる多様体上では，直線束からなる例外列について Kuznetsov の fullness 予想が成立することを具体的な計算と分類によって示す．

1 導入

代数多様体上の連接層の導来圏 (定義 2.4) は，連接層のアーベル圏の対象のなす複体のホモトピー圏を局所化することで得られる，連接層の複体からコホモロジー的な情報のみを抜き出すためにつくられる圏である．ここで，(三角) 圏の局所化とは，環の局所化と同様，圏の中で指定したクラスを可逆にしてしまう操作である．導来圏の世界では，コホモロジカルな情報のみを複体から取り出したいわけであったから，2 つの複体が互いに等しいコホモロジーをもつとき，同型な対象となるように局所化のクラスを与える．具体的には，**擬同型** (定義 2.3) と呼ばれる，複体の射であって各次数のコホモロジー上に誘導される任意の射が同型であるようなもののなす積閉系によりホモトピー圏を局所化する．このようなアーベル圏の複体の圏の擬同型による局所化を通じて得られた導来圏の対象は，実際に各次数でのコホモロジーが一致するとき，またそのときに限って同型となる．従って多様体のコホモロジカルな情報を含む導来圏は，元の代数多様体の持つ幾何学的性質の情報を多く反映している．導来圏において最も重要な定理の 1 つが，次の Bondal-Orlov reconstruction Theorem である．

Theorem 1.1. ([BO01]) 非特異射影代数多様体 X の標準束が豊富，もしくは反豊富であるとする，非特異射影代数多様体 Y であって，導来圏の間の同値 $D^b(X) \simeq D^b(Y)$ が存在するとき，$X \simeq Y$ である．

しかし，一般には導来圏の構造を調べるのは容易ではない．現在知られている最も有効な手段の一つが，導来圏の**半直交分解**である．これは導来圏をいくつかの小さい三角圏に分割するものであり，ある種の導来圏における既約分解である．その中でも最も単純な構造を持つのが**例外生成列** (定義 2.10) と呼ばれる種類の半直交分解である．非特異射影代数多様体 X の導来圏が長さ l の例外生成列を持てば，X の Grothendieck 群は $K_0(X) \simeq \mathbb{Z}^{\oplus l}$ であるため，その長さは概括的な導来圏の大きさの基準となっている．しかし残念なことに，極大な半直交分解は一意には定まらない．特に，その構成要素の順番を入れ替える**変異関手**を通じて組みひも群が作用し，ひとつの半直交分解からいくつかの別の表示を作ることができる．

では，導来圏内の最大の長さを持つ例外列は常に例外生成列になるだろうか？話はそう単純ではない．Böhning らは，[BGvBKS15] にて長さ最大な例外列であって例外生成列にならないようなものを構成した．その例外列の左直交成分（つまり，例外列のあまりの部分）は，非自明な対象を持ちながら，自明な Grothendieck 群を持つ．このような性質を持つ部分三角圏は，phantom 部分圏と呼ばれている．Phantom 部分圏の存在/非存在性問題は現在盛んに研究されている問題のひとつである (例えば，[GO13] 参照)．Phantom 部分圏の非存在性問題は難解な問題であり，古典的に知られている曲線の場合を除き，射影平面 $\mathbb{P}^2$ の場合のみ示されている ([Pir20])．Phantom 部分圏の非存在性から条件を緩めたものに，次の Kuznetsov の fullness 予想がある．

Conjecture 1.2. (Kuznetsov の fullness 予想 [Kuz14]) X を非特異射影代数多様体とする．X の導来圏 $D^b(X)$ が長さ l の例外生成列をもつとき，$D^b(X)$ の任意の長さ l の例外列は例外生成列である．

上の予想を満たすことは，導来圏が phantom 部分圏を持たないための必要条件となることは，導来圏の Grothendieck 群を経由した議論を用いて示すことができる．この予想はいくつかの場合で示されている．例えば，del Pezzo 曲面（[Pir20]），Hirzebruch 曲面（[Hil04]），ピカール数 3 か 4 を持つ Toric 曲面 ([HI13]) である．さらに条件を緩めた，上記予想の直線束版，つまり次の予想も近年研究されている．

Conjecture 1.3. (Kuznetsov の fullness 予想　直線束版) X を非特異射影代数多様体とする．X の導来圏 $D^b(X)$ が長さ l の例外生成列をもつとき，$D^b(X)$ の任意の長さ l の直線束からなる例外列は例外生成列である．

本予想は，[LYY19] にて $\mathbb{P}^3$ の 1 点，直線，twisted cubic curve C にそれぞれ沿った爆発，$\mathrm{Bl}_{pt}(\mathbb{P}^3)$，$\mathrm{Bl}_l(\mathbb{P}^3)$，$\mathrm{Bl}_C(\mathbb{P}^3)$ に対して示された．その後，Altmann らは Toric の手法を用いて任意のピカール数 2 を持つ Toric 多様体に対して上記の予想を示した ([AW21])．

本稿では，以下に定義する超平面切断の関係にある 3 つの多様体，X_0，X_1，X_2 について考える．Y_0 を Segre 埋め込み $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ の像とする．Y_0 は 2×3 の generic determinantal variety である．H_1 と H_2 を $\mathbb{P}^5$ の一般の超平面とし，Y_0 の超平面切断を $Y_1 \coloneqq Y_0 \cap H_1 \subset \mathbb{P}^4$，$Y_2 \coloneqq Y_0 \cap H_1 \cap H_2 \subset \mathbb{P}^3$ とする．このとき，Y_0 が determinantal variety であることに注意すると，Y_1 は Hirzebruch surface $\mathbb{F}_1 \subset \mathbb{P}^4$ に同型であり，Y_2 は twisted cubic curve $C \subset \mathbb{P}^3$ に同型となる．以上の記法のもとで，$X_i \coloneqq \mathrm{Bl}_{Y_i}\mathbb{P}^{5-i}$ と定める．Y_2 が $\mathbb{P}^3$ 内の twisted cubic curve に同型であったことから，X_2 が直線束版の Kuznetsov の fullness 予想を満たすことは既に示されている ([LYY19])．

Theorem 1.4. X_0 上の導来圏の任意の長さ 12 の直線束からなる例外列は例外生成列である．

Theorem 1.5. X_1 上の導来圏の任意の長さ 9 の直線束からなる例外列は例外生成列である．

証明は，X_i 上の直線束からなる長さ最大の例外列を分類したのち，それらが生成列であることを示す．計算のキーとなるのは，これらの多様体が射影空間の Blowing-up の構造に加え，射影空間上の射影空間束の構造を持っていることである．実際 Ray は，これらの爆発 X_i $(i = 0, 1, 2)$ が $\mathbb{P}^2$ 上の射影空間束の構造をもっていることを示した [Ray20, Theorem 3.1, Theorem 3.4, and Corollary 3.6]．本稿では，続く Section にて導来圏の定義と半直交分解に関する概説をする．特に，本研究で対象となる，半直交分解のなかでも最も単純な構造を持つ，直線束からなる例外列と Cohomologically zero 直線束との関係，また，半直交分解から別の半直交分解を得るプロセスである変異関手について定義と基本的な性質を紹介する．最後に，定理 1.4 の証明の概略を述べる．定理 1.5 の証明は定理 1.4 の証明と基本的にパラレルである．

2　導来圏と半直交分解

本節では，導来圏に関する定義や基本的な結果を紹介する．より詳しくは，[BK89], [Bon89], [Huy06], [Orl92] などを参照されたい．

2.1　導来圏

本節では，導来圏の定義を復習する．

Definition 2.1. (Abel 圏の複体の圏) $\mathcal{A}$ を Abel 圏とする．$\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ で Abel 圏 $\mathcal{A}$ の複体の圏，つまり，対象は複体

$$A^\bullet : \cdots \to A^0 \to A^1 \to A^2 \to \cdots$$

であり，射は複体の射であるような圏とする．

本稿では，複体といえば一般に有界であるとする．つまり $|i| \gg 0$ で $A^i = 0$ であるとする．

Definition 2.2. ($\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ のホモトピー圏) $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}(\mathcal{A})}(A, B)$ に対し．$f \sim g$ で複体の射のホモトピー同値を表す．$\mathrm{Kom}(\mathcal{A})$ のホモトピー圏 $K(\mathcal{A})$ を，$\mathrm{Ob}(K(\mathcal{A})) := \mathrm{Ob}(\mathrm{Kom}(\mathcal{A}))$, $\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A, B) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Kom}(\mathcal{A})}(A, B)/\sim$ により定める．

Definition 2.3. (擬同型射) 射 $f \in \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(A, B)$ が擬同型であるとは，任意の $i \in \mathbb{Z}$ に対して，誘導されたコホモロジー間の写像，$H^i(f) : H^i(A) \to H^i(B)$ が同型写像となるときをいう．$Qis(\mathcal{A})$ で，$K(\mathcal{A})$ のすべての擬同型射を集めた集合とする．

Definition 2.4. (Abel 圏の導来圏) Abel 圏 $\mathcal{A}$ に対し，その導来圏 $D(\mathcal{A})$ を，ホモトピー圏 $K(\mathcal{A})$ の $Qis(\mathcal{A})$ による局所化と定める．

代数多様体 X に対して，X 上の連接層のなす Abel 圏 $\mathrm{Coh}(X)$ から得られる導来圏を $D^b(X)$ と書く．この導来圏を単に X の導来圏とよぶこともある．

2.2　導来圏の半直交分解

分解の定義を与える前に，半直交分解の成分となりうる部分圏の条件を与える．次の許容部分三角圏は導来圏において，群における正規部分群のような役割を果たす．

Definition 2.5. (許容部分圏）$\mathcal{D}$ を三角圏，$\mathcal{C}$ を $\mathcal{D}$ の充満部分圏とする．$\mathcal{C}$ が許容部分圏 とは，包含関手 $i : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{D}$ が右随伴関手 $i^!$, と左随伴関手 i^* をもつときをいう．

今後，部分圏といえは，特に断らない限り許容部分三角圏を指すものとする．

導来圏の半直交分解は，興味ある対象である導来圏を，より小さいいくつかの三角圏に取り換える操作であり，導来圏を調べる際に基本的な役割を果たす．

Definition 2.6. (半直交分解) $\mathcal{D}$ を三角圏とする．部分圏の列 $\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_l\}$ が $\mathcal{D}$ の半直交分解であるとは，次の条件を満たすときである:

(1) $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_m, \mathcal{C}_n) = 0$ for $m > n$,

(2) 各対象 $D \in \mathcal{D}$ に対し，次の列

$$0 = D_l \to D_{l-1} \to \cdots \to D_1 \to D_0 = D$$

であって，$Cone(D_i \to D_{i-1}) \in \mathcal{C}_i$ を満たすものが存在.

$\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_l\}$ が $\mathcal{D}$ の半直交分解を与えるとき, $\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_l \rangle$ と書く.

Example 2.7. $\mathcal{D}$ を三角圏，$\mathcal{C}$ をその許容部分三角圏とする．このとき，次の半直交分解が存在する.

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}^{\perp}, \mathcal{C} \rangle = \langle \mathcal{C}, {}^{\perp}\mathcal{C} \rangle,$$

ここで，$\mathcal{C}^{\perp} := \{A \in \mathcal{D}\} \mid \mathrm{Hom}(\mathcal{C}, A) = 0\} \subset \mathcal{D}$，${}^{\perp}\mathcal{C} := \{A \in \mathcal{D}\} \mid \mathrm{Hom}(A, \mathcal{C}) = 0\} \subset \mathcal{D}$ である.

Example 2.8. (Beilinson Collection [Beĭ78]) n 次元射影空間 $\mathbb{P}^n$ の導来圏は，$\mathbb{P}^n$ の超平面のクラスを H と書くとき，次の半直交分解を持つ.

$$D^b(\mathbb{P}^n) = \langle \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(H), \ldots, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}((n-1)H), \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(nH) \rangle.$$

Y を非特異射影的代数多様体，$\mathscr{E}$ を Y 上のランク $r+1$ 局所自由層とし，$\pi\colon X = \mathbb{P}(\mathscr{E}) \to Y$ を projective bundle，$\mathscr{O}_X(1)$ でその Grothendieck tautological line bundle を表す.

Theorem 2.9. (Orlov's projective bundle formula [Orl92]) 上記の設定の下，次の半直交分解が存在.

$$D^b(X) = \langle \pi^* D^b(Y), \pi^* D^b(Y) \otimes \mathscr{O}_X(1), \ldots, \pi^* D^b(Y) \otimes \mathscr{O}_X(r) \rangle.$$

2.3 直線束からなる例外列と Cohomologically zero 直線束

部分圏の中でも，最も単純な構造を持つもののひとつは，例外対象と呼ばれるひとつの対象から生成される部分圏である.

Definition 2.10. (例外対象と例外列) 三角圏の対象 $E \in \mathcal{D}$ が例外的であるとは，次の条件を満たすときをいう.

$$\mathrm{Hom}(E, E[i]) = \begin{cases} 0, & i \neq 0 \\ k, & i = 0. \end{cases}$$

$\{E_1, \ldots, E_l\}$ を $\mathcal{D}$ 内の例外対象からなる列とする．この列が *exceptional collection* であるとは，任意の $i > j$ と $l \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\mathrm{Hom}(E_i, E_j[l]) = 0.$$

が成り立つときをいう.

Definition 2.11. (例外生成列) $\mathcal{D}$ 内の例外列 $\{E_1, \ldots, E_l\}$ が生成列であるとは，次を満たすときをいう:

$$\langle E_1, \ldots, E_l \rangle^{\perp} = 0.$$

Definition 2.12. (直線束からなる正規例外列) 直線束からなる例外列 $\{\mathscr{O}_X(D_0), \ldots, \mathscr{O}_X(D_n))\}$ が正規例外列であるとは，$\mathscr{O}_X(D_0) \simeq \mathscr{O}_X$ であるときをいう.

Proposition 2.13. (例外列の正規化 [LYY19, Lemma 3.4]) 直線束からなる例外列 $\{\mathscr{O}_X(D_0), \cdots, \mathscr{O}_X(D_n)\}$ に対して, $\mathscr{O}_X(-D_0)$ をテンソルすることによって得られる列, $\{\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X(D_1 - D_0), \cdots, \mathscr{O}_X(D_n - D_0)\}$, は再び例外列である．更に，もとの例外列が生成列であることと，その正規化が生成列であることは同値である．

Proposition 2.14. ([LYY19, Lemma 2.9]) $\mathcal{D}$ 内の二つの例外列が，同じ長さを持ちかつ高々一つの対象のみ異なる成分を持つとき，片方の例外列が生成列であることともう一方が生成列であることは同値である．

Definition 2.15. (Cohomologically zero 直線束) $\mathscr{L}$ を非特異射影代数多様体 X 上の直線束とする．$\mathscr{L}$ が *cohomologically zero* 直線束であるとは，任意の i に対して, $H^i(X, \mathscr{L}) = 0$ が成り立つときをいう．

Remark. X の導来圏 $D^b(X)$ が直線束からなる (正規化された) 例外生成列 $\{\mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X(D_1), \ldots, \mathscr{O}_X(D_l)\}$ を持つとする．このとき各直線束 $\mathscr{O}_X(-D_i)$ は cohomologically zero である．実際，半直交分解 $D^b(X) = \langle \mathscr{O}_X, \ldots, \mathscr{O}_X(D_l) \rangle$ の半直交性から，

$$H^i(\mathscr{O}_X(-D_j)) = \mathrm{Hom}_{D^b(X)}(\mathscr{O}_X(D_j), \mathscr{O}_X[i]) = 0$$

となるのである．

2.4 変異関手

導来圏の半直交分解や例外生成列は一般に一意には定まらない．特に，一つの半直交分解からその順番を入れ替えることで別の分解表示を作り出す操作が存在する．この操作は変異関手を通じて定義される．より詳細には，[BK89] を参照されたい．

Definition 2.16. (変異関手) $\mathcal{C}$ を $\mathcal{D}$ の許容部分三角圏とする．このとき，各対象 $F \in \mathcal{D}$ に対し，次の二つの完全三角が存在する:

$$\mathbb{R}_{\mathcal{C}}(F) \longrightarrow F \longrightarrow ii^*(F) \xrightarrow{[1]} \mathbb{R}_{\mathcal{C}}(F)[1],$$

$$ii^!(F) \longrightarrow F \longrightarrow \mathbb{L}_{\mathcal{C}}(F) \xrightarrow{[1]} ii^!(F)[1].$$

これらの対応によって，右変異関手 $\mathbb{R}_{\mathcal{C}}$ と左変異関手 $\mathbb{L}_{\mathcal{C}}$ を定める．

Proposition 2.17. 三角圏の半直交分解 $\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_l \rangle$ が存在するとする．このとき，変異関手は次の半直交分解を誘導する．

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{i-2}, \mathcal{C}_i, \mathbb{R}_{\mathcal{C}_i}(\mathcal{C}_{i-1}), \ldots, \mathcal{C}_l \rangle,$$

$$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{i-1}, \mathbb{L}_{\mathcal{C}_i}(\mathcal{C}_{i+1}), \mathcal{C}_i, \ldots, \mathcal{C}_l \rangle.$$

Proposition 2.18. 非特異射影代数多様体 X が，2 つの成分からなる半直交分解 $D^b(X) = \langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \rangle$ を持つとする．このとき，変異関手は次のように表現される：

$$\mathbb{R}_{\mathcal{C}_2}(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_1 \otimes \omega_X^{-1}, \quad \mathbb{L}_{\mathcal{C}_1}(\mathcal{C}_2) = \mathcal{C}_2 \otimes \omega_X.$$

Proposition 2.19. 三角圏 $\mathcal{D}$ が半直交分解 $\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1}, \ldots, \mathcal{C}_n \rangle$ を持ちかつ，ある k について，$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_k, \mathcal{C}_{k+1}) = 0$ を満たすとする．このとき，

$$\mathbb{L}_{\mathcal{C}_k}(\mathcal{C}_{k+1}) = \mathcal{C}_{k+1}, \quad \mathbb{R}_{\mathcal{C}_{k+1}}(\mathcal{C}_k) = \mathcal{C}_k$$

である．つまり，この場合変異関手は半直交分解の隣り合った 2 つの成分を入れ替える作用になるのである．

Example 2.20. (Mutations of full exceptional collections) $\{E_1, \ldots, E_l\}$ を $D^b(X)$ の例外生成列とする．$\mathcal{C}_1 = \langle E_1 \rangle$，$\mathcal{C}_2 = \langle E_2, \ldots, E_l \rangle$ とみることにより, Proposition 2.18 を適用して，次の例外生成列を得る:

$$\{E_2, \ldots, E_l, E_1 \otimes \omega^{-1}\}.$$

本稿では，例外生成列 $\langle \mathscr{O}_X(D_0), \ldots, \mathscr{O}_X(D_n) \rangle$ から Proposition 2.18 を適用し，正規化することによって例外生成列

$$\langle \mathscr{O}_X, \mathscr{O}_X(D_2 - D_1), \ldots, \mathscr{O}_X(D_n - D_1), \mathscr{O}_X(D_0 - K_X - D_1) \rangle$$

を得る操作を"*mutation of Serre type and normalization*" と呼ぶことにする．

3 定理 1.4 の証明の概略

本節では，主定理 1.4 の証明概要を紹介する．また，節を通じて，Y を Segre 埋め込み $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^5$ の像，$X \coloneqq \mathrm{Bl}_Y \mathbb{P}^5$ とする．定理 1.5 の証明は 1.4 とパラレルである．初めに，Grothendieck-Riemann-Roch を用いて $\chi(\mathscr{O}_X(aH + bE))$ を計算する．

Proposition 3.1.

$$\chi(\mathscr{O}_X(aH + bE)) = \frac{1}{120}(a + 2b + 1)(a + 2b + 2)(a + 2b + 3) f(a, b),$$

where $f(a, b) \coloneqq a^2 - 6ab - 6b^2 + 9a - 12b + 20$.

Proof. (Outline)

- Normal bundle$\mathscr{N}_{Y_0/\mathbb{P}^5}$ の Chern 類を計算する,
- 交点数 $H^i.E^{5-i} \quad (i = 0 \sim 5)$ を計算する,
- 以上の結果を用いて，次の Hirzebruch-Riemann-Roch の定理から従う．

$$\chi(\mathscr{O}_X(aH + bE)) = \int_X \mathrm{ch}(\mathscr{O}_X(aH + bE)) \mathrm{Td}(X).$$

□

上の計算結果を用いると，cohomologically zero 直線束を分類することができるのである．

Proposition 3.2. $\mathscr{O}_X(aH + bE)$ は，次のいずれかを満たせば cohomologically zero 直線束である．

1. $a + 2b = -1, -2, -3,$

2. $(a,b) = (-1,-2), (-1,1), (-2,-1), (-2,1), (-4,0), (-4,2), (-5,0), (-5,3)$.

Proof. (Outline) $\mathscr{O}_X(aH+bE)$ が cohomologically zero であれば，$\chi(\mathscr{O}_X(aH+bE)) = 0$ であるので, $a+2b = -1, -2-3$ もしくは $f(a,b) = 0$ が成り立つ．従って上記の候補が導かれるが，それらが実際に cohomologically zero であることは各々のコホモロジーの消滅を計算することによって示す． □

Remark. 上の命題で挙げられた cohomologically zero 直線束の一覧は，すべての $\chi = 0$ の整数解を列挙しているわけではない．しかし，今後の議論によって絶対値の大きい整数解は，主定理の証明のためには考慮する必要がないことがわかる．

ここで，今後の煩雑さを避けるため，divisor に関する Notation を導入しておく．
$B_{0,b_0} = (1+2b_0)H - b_0E$, $B_{1,b_1} = (2+2b_1)H - b_1E$, $B_{2,b_2} = (3+2b_2)H - b_2E$, $B_3 = H+2E$, $B_4 = H-E$, $B_5 = 2H+E$, $B_6 = 2H-E$, $B_7 = 4H$, $B_8 = 4H-2E$, $B_9 = 5H$, $B_{10} = 5H-3E$.

$\{\mathscr{O}, \mathscr{O}(D_1, \ldots, \mathscr{O}(D_k))\}$ が正規化された直線束からなる例外列であるとする．このとき第 2 項以降，cohomologically zero 直線束であったから，Prroposition3.2 により，各 D_i は B_j $(j = 1, 2, \ldots, 10)$ に一致する．また，半直交性から任意の $i < j$ に対して，

$$0 = \mathrm{Hom}(\mathscr{O}(D_j), \mathscr{O}(D_i)) = H^i(\mathscr{O}(D_i - D_j))$$

が成り立つ．表 1 は，$i, j = 0, \ldots, 10$ に対し，その差が再び cohomologically zero であるかどうかを示した図である．例えば，B_4 と B_5 のチェックマークは，$\mathscr{O}(B_5 - B_4)$ が B_i のいずれかに一致する，つまり cohomologically zero 直線束になることを示している．表 1 を用いると，直線束からなる例外列を作ることができる．例えば，第 2 項として B_7 をとると，表の行をみることで，第 3 項以降に来うるのは $B_{2,-1}$，$B_{2,3}$，B_3，B_9 に限られることがわかる．更に第 3 項として B_9 をとると，同様に表からこの例外列は長さが 4 以上になることはないことがわかる．

簡単のため，正規化された例外列 $\{\mathscr{O}, \mathscr{O}(D_1), \ldots, \mathscr{O}(D_k)\}$ を $\{D_1, \ldots, D_k\}$ と略記する．

	B'_0	B'_1	B'_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}
B_0	$b'_0 = b_0+1$, b_0+2	✓	✓	$b_0 = -1$, -2		✓	$b_0 = 0$, -2	✓	$b_0 = 1$, -1	$b_0 = 0$, 1	
B_1	$b'_0 = b_1+1$, b_1+3	$b'_1 = b_1+1$, b_1+2	✓	✓		✓		✓		✓	
B_2		$b'_1 = b_2+1$, b_2+3	$b'_2 = b_2+1$, b_2+2	✓		✓		✓		✓	
B_3						✓				✓	
B_4	✓	✓	$b'_2 = 0, 1$			✓	✓		✓		✓
B_5			$b'_2 = 0, 2$	✓				✓		✓	
B_6	✓	✓	✓					✓	✓		
B_7			$b'_2 = 1, 3$	✓						✓	
B_8	✓	✓	✓							✓	✓
B_9											
B_{10}	✓	✓	$b'_2 = 2, 3$		✓		✓		✓		

表 1: 例外列となる直線束のペア

Proposition 3.3. $D_1 = B_6$ であるような長さ 12 の例外列は以下のいずれかに一致する．

1. $\{B_6, B_8, B_{0,b_0}, B_{0,b_0+1}, B_{0,b_0+2}, B_{1,b_1}, B_{1,b_1+1}, B_{1,b_1+2}, B_{2,b_2}, B_{2,b_2+1}, B_{2,b_2+2}\}$
2. $\{B_6, B_8, B_{0,b_0}, B_{0,b_0+1}, B_{1,b_0+1}, B_{0,b_0+2}, B_{1,b_0+2}, B_{1,b_0+3}, B_{2,b_2}, B_{2,b_2+1}, B_{2,b_2+2}\}$
3. $\{B_6, B_8, B_{0,b_0}, B_{0,b_0+1}, B_{1,b_0-1}, B_{0,b_0+2}, B_{1,b_0}, B_{1,b_0+1}, B_{2,b_2}, B_{2,b_2+1}, B_{2,b_2+2}\}$
4. $\{B_6, B_8, B_{0,b}, B_{0,b+1}, B_{1,b+1}, B_{0,b+2}, B_{1,b+2}, B_{2,b+2}, B_{1,b+3}, B_{2,b+3}, B_{2,b+4}\}$
5. $\{B_6, B_8, B_{0,b}, B_{0,b+1}, B_{1,b+1}, B_{0,b+2}, B_{1,b+2}, B_{2,b}, B_{1,b+3}, B_{2,b+1}, B_{2,b+2}\}$
6. $\{B_6, B_8, B_{0,b}, B_{0,b+1}, B_{1,b-1}, B_{0,b+2}, B_{1,b}, B_{2,b}, B_{1,b+1}, B_{2,b+1}, B_{2,b+2}\}$
7. $\{B_6, B_8, B_{0,b}, B_{0,b+1}, B_{1,b-1}, B_{0,b+2}, B_{1,b}, B_{2,b-2}, B_{1,b+1}, B_{2,b-1}, B_{2,b}\}$
8. $\{B_6, B_{0,-1}, B_8, B_{0,0}, B_{1,0}, B_{0,1}, B_{1,1}, B_{2,1}, B_{1,2}, B_{2,2}, B_{2,3}\}$
9. $\{B_6, B_{0,1}, B_8, B_{0,2}, B_{1,2}, B_{0,3}, B_{1,3}, B_{2,3}, B_{1,4}, B_{2,4}, B_{2,5}\}$
10. $\{B_6, B_{0,-1}, B_8, B_{0,0}, B_{1,0}, B_{0,1}, B_{1,1}, B_{2,-1}, B_{1,2}, B_{2,0}, B_{2,1}\}$
11. $\{B_6, B_{0,1}, B_8, B_{0,2}, B_{1,2}, B_{0,3}, B_{1,3}, B_{2,1}, B_{1,4}, B_{2,2}, B_{2,3}\}$
12. $\{B_6, B_{0,-1}, B_8, B_{0,0}, B_{1,-2}, B_{0,1}, B_{1,-1}, B_{2,-1}, B_{1,0}, B_{2,0}, B_{2,1}\}$
13. $\{B_6, B_{0,1}, B_8, B_{0,2}, B_{1,0}, B_{0,3}, B_{1,1}, B_{2,1}, B_{1,2}, B_{2,2}, B_{2,3}\}$
14. $\{B_6, B_{0,-1}, B_8, B_{0,0}, B_{1,-2}, B_{0,1}, B_{1,-1}, B_{2,-3}, B_{1,0}, B_{2,-2}, B_{2,-1}\}$
15. $\{B_6, B_{0,1}, B_8, B_{0,2}, B_{1,0}, B_{0,3}, B_{1,1}, B_{2,-1}, B_{1,2}, B_{2,0}, B_{2,1}\}$

Proof. (Outline) Orlov の projective bundle formula(Theorem 2.9) から，$D^b(X)$ は長さ 12 の例外生成列を持つ．従って簡単な考察により例外列の長さは 12 を超えることはないことがわかる．上で議論したように，表から分岐を数え上げると．上のリストが得られる． □

変異関手を用いると，Proposition で得られた 1 つの例外列から mutation of Serre type and normalization によって新たな (正規化された) 例外列を得ることができる．例えば，次の表 2 は Proposition の (10) の例外列に対して繰り返し mutation of Serre type and normalization を適用することで得られる例外列を表したものである．

このようにして得られた例外列は 171 種類になり，また初等的な分岐の組み合わせによって長さ最大の例外列はこの 171 種類のいずれかに一致することがわかる．したがって問題は，これらの例外列のすべてが例外生成列であるかどうかである．

Theorem 3.4. 任意の X 上の長さ 12 の直線束からなる例外列は例外生成列である．

Proof. (Outline) 変異関手は生成性を保つから，命題内の B_6 を第 2 項に持つ 15 の例外列に対して示せば十分である．Orlov's projective bundle formula (Theorem 2.9) から例外列 (1) は例外生成列である．更に，(1) の b_0，b_1，b_2 に適切な値を代入し，Proposition2.19 を適用することで (2) から (15) の列も得られる．ここに Proposition2.14 を使えば生成性を示すことができる． □

以上により，主定理が示された．

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}
0	B_6	$B_{0,-1}$	B_8	$B_{0,0}$	$B_{1,0}$	$B_{0,1}$	$B_{1,1}$	$B_{2,-1}$	$B_{1,2}$	$B_{2,0}$	$B_{2,1}$
1	$B_{0,-2}$	B_6	$B_{0,-1}$	$B_{1,-1}$	$B_{0,0}$	$B_{1,0}$	$B_{2,-2}$	$B_{1,1}$	$B_{2,-1}$	$B_{2,0}$	B_7
2	B_{10}	B_6	$B_{0,1}$	B_8	$B_{0,2}$	$B_{1,0}$	$B_{0,3}$	$B_{1,1}$	$B_{1,2}$	$B_{2,2}$	$B_{2,3}$
3	$B_{0,-2}$	$B_{1,-2}$	$B_{0,-1}$	$B_{1,-1}$	$B_{2,-3}$	$B_{1,0}$	$B_{2,-2}$	$B_{2,-1}$	B_5	B_7	B_3
4	$B_{0,0}$	B_6	$B_{0,1}$	$B_{1,-1}$	$B_{0,2}$	$B_{1,0}$	$B_{1,1}$	$B_{2,1}$	$B_{2,2}$	B_7	$B_{2,3}$
5	B_4	B_6	$B_{0,-1}$	B_8	$B_{0,0}$	$B_{0,1}$	$B_{1,1}$	$B_{1,2}$	$B_{2,0}$	$B_{1,3}$	$B_{2,1}$
6	$B_{0,0}$	$B_{1,-2}$	$B_{0,1}$	$B_{1,-1}$	$B_{1,0}$	$B_{2,0}$	$B_{2,1}$	B_5	$B_{2,2}$	B_7	B_9
7	$B_{0,-2}$	B_6	$B_{0,-1}$	$B_{0,0}$	$B_{1,0}$	$B_{1,1}$	$B_{2,-1}$	$B_{1,2}$	$B_{2,0}$	B_7	$B_{2,1}$
8	B_{10}	B_6	B_8	$B_{0,2}$	$B_{0,3}$	$B_{1,1}$	$B_{0,4}$	$B_{1,2}$	$B_{2,2}$	$B_{1,3}$	$B_{2,3}$
9	$B_{0,-2}$	$B_{0,-1}$	$B_{1,-1}$	$B_{1,0}$	$B_{2,-2}$	$B_{1,1}$	$B_{2,-1}$	B_5	$B_{2,0}$	B_7	B_3
10	B_6	$B_{0,1}$	$B_{0,2}$	$B_{1,0}$	$B_{0,3}$	$B_{1,1}$	$B_{2,1}$	$B_{1,2}$	$B_{2,2}$	B_7	$B_{2,3}$
11	$B_{0,0}$	$B_{0,1}$	$B_{1,-1}$	$B_{0,2}$	$B_{1,0}$	$B_{2,0}$	$B_{1,1}$	$B_{2,1}$	B_5	$B_{2,2}$	B_7

表 2: The FEC obtained by mutation of Serre type from (10)

参考文献

[AW21] K. Altmann and F. Witt, *The structure of exceptional sequences on toric varieties of Picard rank two*, preprint arXiv:2112.14637 (2021).

[Beĭ78] A. A. Beĭlinson, *Coherent sheaves on* $\mathbf{P}^n$ *and problems in linear algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **12** (1978), no. 3, 68–69 (Russian).

[BGvBKS15] C. Böhning, H.-C. Graf von Bothmer, L. Katzarkov, and P. Sosna, *Determinantal Barlow surfaces and phantom categories*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **17** (2015), no. 7, 1569–1592.

[BK89] A. I. Bondal and M. M. Kapranov, *Representable functors, Serre functors, and reconstructions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **53** (1989), no. 6, 1183–1205, 1337 (Russian); English transl., Math. USSR-Izv. **35** (1990), no. 3, 519–541.

[Bon89] A. I. Bondal, *Representations of associative algebras and coherent sheaves*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **53** (1989), no. 1, 25–44 (Russian); English transl., Math. USSR-Izv. **34** (1990), no. 1, 23–42.

[BO01] A. Bondal and D. Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Compositio Math. **125** (2001), no. 3, 327–344.

[GO13] S. Gorchinskiy and D. Orlov, *Geometric phantom categories*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **117** (2013), 329–349.

[GK04] A. L. Gorodentsev and S. A. Kuleshov, *Helix theory*, Mosc. Math. J. **4** (2004), no. 2, 377–440, 535 (English, with English and Russian summaries).

[Hil04] L. Hille, *Exceptional sequences of line bundles on toric varieties*, Mathematisches Institut, Georg-August-Universität Göttingen: Seminars 2003/2004, Universitätsdrucke Göttingen, Göttingen, 2004, pp. 175–190.

[HI13] A. Hochenegger and N. O. Ilten, *Exceptional sequences on rational $\mathbb{C}^*$-surfaces*, Manuscripta Math. **142** (2013), no. 1-2, 1–34.

[Huy06] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006.

[KO94] S. A. Kuleshov and D. O. Orlov, *Exceptional sheaves on Del Pezzo surfaces*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **58** (1994), no. 3, 53–87 (Russian, with Russian summary); English transl., Russian Acad. Sci. Izv. Math. **44** (1995), no. 3, 479–513.

[Kuz14] A. Kuznetsov, *Semiorthogonal decompositions in algebraic geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians—Seoul 2014. Vol. II, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014, pp. 635–660.

[Lee20] D. W. Lee, *Classification of full exceptional collections on smooth toric Fano varieties with Picard rank two*, preprint arXiv:2005.09783 (2020).

[LYY19] W. Liu, S. Yang, and X. Yu, *Classification of full exceptional collections of line bundles on three blow-ups of* $\mathbb{P}^3$, J. Korean Math. Soc. **56** (2019), no. 2, 387–419.

[Orl92] D. O. Orlov, *Projective bundles, monoidal transformations, and derived categories of coherent sheaves*, Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **56** (1992), no. 4, 852–862 (Russian, with Russian summary); English transl., Russian Acad. Sci. Izv. Math. **41** (1993), no. 1, 133–141.

[Pir20] D. Pirozhkov, *Admissible Subcategories of del Pezzo Surfaces*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2020. Thesis (Ph.D.)–Columbia University.

[Ray20] N. Ray, *Examples of blown up varieties having projective bundle structures*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **130** (2020), no. 1, Paper No. 15, 11.

複素射影空間内の A 型実超曲面上の佐々木磁場の軌道とケーラー磁場

名古屋工業大学大学院　工学研究科　工学専攻　情報工学系プログラム
青木侑省（Yusei Aoki）

概要

著者はリーマン多様体の形状を調べるために、測地線を一般化して一定方向に加速度を持つ磁場による軌道の考察を行なっている。今回は複素射影空間内の A 型実超曲面を対象に選び、その上の接触構造から誘導される佐々木磁場の軌道が複素射影空間でどのように見えるかという観点で研究を進めた。外的形状が複素射影空間上のある種の軌道になっているという特別な状況を考え、その合同類が軌道全体の合同類集合の中でどの部分を占めるかを調べた。

1　導入

これまで、多くの研究者によりリーマン多様体の形状を考察する主な手法として測地線の性質が調べられてきた。そこで、著者は測地線を磁場によって一般化し、さらに広い対象となる曲線族を考えることでより詳しい情報、特に多様体上の幾何構造に関係した曲線族を考えると多様体の形状と幾何構造の性質の両者を含めた情報が得られるのではないかとして考察を進めている。今回は複素射影空間内の実超曲面に対象を絞って考察をした。例えば、ユークリッド空間内の標準球面上の測地線はユークリッド空間では円に見えてこの性質によって標準球面は特徴づけられる ([4])。測地線の外的形状については例えば [2][5] でも行われている。このような考察を広い対象となる曲線族を元に実超曲面に対して行うために代表的な実超曲面である A 型実超曲面に対してその接触構造に関連する曲線族の外的形状を考察した。

2　磁場

定義 2.1. リーマン多様体上の閉 2 形式を磁場という ([*6*] 参照)。

リーマン多様体 M 上の磁場 $\mathbb{B}$ に対して、接束 TM の自己準同型写像 $\Omega_{\mathbb{B}} : TM \to TM$ を

$$\langle v, \Omega(w) \rangle = \mathbb{B}(v, w) \quad ({}^{\forall}v, w \in T_pM, \quad {}^{\forall}p \in M)$$

で定義する。$\mathbb{B}(v, w) = -\mathbb{B}(w, v)$ より、$\Omega_{\mathbb{B}}$ は歪対称である。

定義 2.2. リーマン多様体 M 上の磁場 $\mathbb{B}$ に対して、弧長によって径数付けられた滑らかな曲線 γ が微分方程式

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \Omega_{\mathbb{B}}(\dot{\gamma})$$

を満たすとき γ を M 上の磁場 $\mathbb{B}$ の軌道という。

代表的な例を以下に挙げる。

例 2.1. ケーラー多様体 M 上の磁場 $\mathbb{B}_k$ は M の複素構造を J としたとき

$$\mathbb{B}_k(v,w) = \langle v, kJw \rangle \quad ({}^\forall v, w \in T_pM, \quad {}^\forall p \in M)$$

で与えられケーラー磁場という。また、ケーラー磁場の軌道 γ は

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = kJ\dot\gamma$$

で与えられる。

定義 2.3. 奇数次元の C^∞ 級多様体 M において $(1,1)$-テンソル場 ϕ、ベクトル場 ξ、1-形式 η が

$$\phi^2(v) = -v + \eta(v)\xi \quad \text{かつ} \quad \eta(\xi) = 1$$

を満たすとき、(ϕ, ξ, η) を M 上の概接触構造という。

定義 2.4. 概接触構造 (ϕ, ξ, η) をもつ奇数次元の C^∞ 級多様体 M のリーマン計量 $\langle\ ,\ \rangle$ で

$$\langle \phi v, \phi w \rangle = \langle v, w \rangle - \eta(v)\eta(w)$$

を満たすものを考え、$(\phi, \xi, \eta, \langle\ ,\ \rangle)$ を M 上の概接触計量構造という。

ケーラー多様体の実超曲面 M に対して、N を M 上の単位法ベクトル場として

$$\xi = -JN, \quad \eta(v) = \langle v, \xi \rangle, \quad \phi(v) = Jv - \eta(v)N$$

とすれば、複素構造 J から導入される概接触計量構造 $(\phi, \xi, \eta, \langle\ ,\ \rangle)$ が入る。M 上の 2 形式 $\mathbb{F}_\phi$ を $\mathbb{F}_\phi(v,w) = \langle v, \phi w \rangle$ と定める。

命題 2.1. $\mathbb{F}_\phi$ は閉 2 形式である。

例 2.2. $\kappa \in \mathbb{R}$ として、$\mathbb{F}_\kappa = \kappa\mathbb{F}_\phi$ を佐々木磁場という。また、佐々木磁場の軌道 γ は

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \kappa\phi\dot\gamma$$

で与えられる。

3 実超曲面

リーマン多様体 $\widetilde{M}$ 上のリーマン接続を $\widetilde{\nabla}$、$\widetilde{M}$ の部分多様体 M のリーマン接続を ∇ とする。点 $p \in M \hookleftarrow \widetilde{M}$ において $T_pM \subset T_p\widetilde{M}$ と考えて T_pM の $T_p\widetilde{M}$ における直交補空間を $(T_pM)^\perp$ と表す。

定義 3.1. $(0,2)$-型対称テンソル場 $S : T_pM \times T_pM \to (T_pM)^\perp$ を

$$S(X,Y) := (\widetilde{\nabla}_X Y)^\perp \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

で定義し、第二基本形式と呼ぶ。また、$N \in (TM)^\perp = \bigcup_{p\in M}(T_pM)^\perp$ として、$A_N : T_pM \to T_pM$ を任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\langle A_N X, Y\rangle = \langle S(X,Y), N\rangle$ を各点 p で任意の $X, Y \in T_pM$ に対して満たすように定め形作用素と呼ぶ。

形作用素が対称であるからその固有値は実数である。この固有値を主曲率という。また、対応する固有ベクトルを主曲率ベクトルという。

定義 3.2. ケーラー多様体の実超曲面 $M(\subset \widetilde{M})$ が *Hopf* であるとは、$\xi(= -JN)$ が各点で主曲率ベクトルになっていることである。

例 3.1. $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の半径 r $(0 < r < \pi/\sqrt{c})$ の測地球面 $G(r)$ はホップ超曲面であり

$$A\xi = \sqrt{c}\cot\sqrt{c}r, \quad Av = \frac{\sqrt{c}}{2}\cot\frac{\sqrt{c}}{2}\,r$$

である ([3] 参照)。

例 3.2. $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の全測地的部分多様体 $\mathbb{C}P^\ell(c)$ $(1 \le \ell \le n-2)$ を取り、この部分多様体との距離が r である $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の部分集合を $T_\ell(r)$ と表し、$\mathbb{C}P^\ell$ を芯とする管という。$TM = V_\lambda \oplus V_\mu \oplus \mathbb{R}_\xi$ と分解され

$$A\xi = \sqrt{c}\cot\sqrt{c}r, \quad \lambda_M = \frac{\sqrt{c}}{2}\cot\frac{\sqrt{c}}{2}r, \quad \mu_M = -\frac{\sqrt{c}}{2}\tan\frac{\sqrt{c}}{2}r$$

である ([3] 参照)。

複素射影空間の超曲面の中で、測地球面 $G(r)$ と管 $T_\ell(r)$ を A 型であるという。さらに、$G(r)$ を A_1 型、$T_\ell(r)$ $(1 \le \ell \le n-2)$ を A_2 型と分類する。

定義 3.3. 弧長で径数付けられた滑らかな曲線 γ で $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \kappa\phi\dot\gamma$ を満たすものを $\mathbb{F}_\kappa$-軌道という。この γ に対して、$\rho_\gamma = \langle\dot\gamma, \xi\rangle$ を構造捩率という。

命題 3.1. M の形作用素 A と特性テンソル場 ϕ が $A\phi = \phi A$ を満たせば ρ_γ は γ に沿って定数である。

定義 3.4. A_2 型実超曲面 M に対し、各点 $p \in M$ での接空間を

$$T_pM = V_\lambda(p) \oplus V_\mu(p) \oplus \mathbb{R}\xi$$

と主曲率ベクトル空間へ分解する。ただし、

$$V_\lambda(p) = \{v \in T_pM \mid Av = \lambda v\}$$
$$V_\mu(p) = \{w \in T_pM \mid Aw = \mu w\}$$

とする。$\mathrm{Proj}_\lambda : T_pM \to V_\lambda(p), \mathrm{Proj}_\mu : T_pM \to V_\mu(p)$ はそれぞれ射影とする。つまり、$v \in T_pM$ を $v = v_1 + v_2 + \langle v, \xi\rangle\xi \quad (v_1 \in V_\lambda(p), v_2 \in V_\mu(p))$ と表したとき

$$\mathrm{Proj}_\lambda(v) = v_1, \quad \mathrm{Proj}_\mu(v) = v_2$$

とする。このとき、

$$\|v\|^2 = \|\mathrm{Proj}_\lambda(v)\|^2 + \|\mathrm{Proj}_\mu(v)\|^2 + \langle v, \xi\rangle^2$$

となる。$\mathbb{F}_\kappa$-軌道に対して、$\omega_\gamma = \|\mathrm{Proj}_\lambda(\dot\gamma)\|$ を γ の主捩率という。

命題 3.2. ω_γ は定数である。

4 外的形状が円になる軌道

一般に、リーマン多様体 M 上の弧長で径数付けられた曲線 γ に対して、γ に直交する γ に沿った単位ベクトル場 Y と非負定数 k で

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = kY \\ \nabla_{\dot\gamma}Y = -k\dot\gamma \end{cases} \tag{1}$$

を満たすものが存在するとき、γ を円であるといい k を γ の測地曲率という。特に $k=0$ の場合は測地線である。これは

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma + k^2\dot\gamma = 0 \tag{2}$$

と同値である。実際、$\|\dot\gamma\| = 1$ より $0 = \nabla_{\dot\gamma}(\|\dot\gamma\|^2) = 2\langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \dot\gamma\rangle$ となるので $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma$ と $\dot\gamma$ は直交する。また γ が式 (2) を満たすとき、

$$0 = \nabla_{\dot\gamma}\langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \dot\gamma\rangle = \langle\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \dot\gamma\rangle + \langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle = -k^2 + \langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma, \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\rangle$$

なので、$\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\| = k$ である。$k \neq 0$ の場合は、$Y = \nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma/k$ とすると、式 (2) より、$k\nabla_{\dot\gamma}Y + k^2\dot\gamma = 0$ となる。つまり式 (1) が求まる。$k=0$ の場合は、Y を γ に沿った平行ベクトル場でとれば良い。特に、ケーラー磁場 $\mathbb{B}_k$ の軌道 γ は $\nabla_{\dot\gamma} = kJ\dot\gamma$ を満たすので $\nabla J = 0$ となることから、$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = -k^2\dot\gamma$ となり式 (2) を満たす。よってケーラー磁場の軌道は円になる。

複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 内の A 型実超曲面を M とする。M 上の $\mathbb{F}_\kappa$-軌道 γ を $\mathbb{C}M^n$ の曲線と見たとき、$\mathbb{C}M^n$ 内で円に見える条件を考える。等長埋め込み $\iota : M \to \mathbb{C}M^n(c)$ を取り $\iota\circ\gamma$ を γ の外的形状曲線という。ここでは $\mathbb{F}_\kappa$-軌道の外的形状が円になる条件を考える。

定理 4.1 ([1])**.** 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の A_1 型実超曲面 M 上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_\kappa$ の軌道 γ が円になるための必要十分条件は

(1) $\rho_\gamma = \pm 1$
(2) $\kappa + \lambda_M\rho_\gamma = 0$ かつ $\omega_\gamma = 0$
(3) $\kappa\rho_\gamma = \lambda_M + \rho_\gamma^2(\delta_M - \lambda_M)$

のいずれかが成り立つことである。

定理 4.2 ([1],[7])**.** 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の A_2 型実超曲面 M 上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_\kappa$ の軌道 γ が円になるための必要十分条件は

(1) $\rho_\gamma = \pm 1$
(2) $\kappa + \lambda_M\rho_\gamma = 0$ かつ $\omega_\gamma = 0$

(3) $\kappa + \mu_M \rho_\gamma = 0$ かつ $\omega_\gamma^2 + \rho_\gamma^2 = 1$
(4) $\kappa \rho_\gamma = \lambda_M \omega_\gamma^2 + \mu_M (1 - \omega_\gamma^2 - \rho_\gamma^2) + \delta_M \rho_\gamma^2$

のいずれかが成り立つことである。

特に、定理 4.1 の (3) 定理 4.2 の (4) を満たすとき γ はその外的形状がケーラー磁場の軌道になる。

5 複素射影空間内の A 型実超曲面上の佐々木磁場の軌道

定義 5.1. リーマン多様体 M 上の 2 つの弧長で径数付けられた曲線 γ_1, γ_2 が強い意味で合同であるとは、M の等長写像 φ で

$$\gamma_2(t) = \varphi \circ \gamma_1(t) \ (\forall t \in \mathbb{R})$$

を満たすものが存在することをいう。また、M の等長写像 φ と定数 t_0 で

$$\gamma_2(t) = \varphi \circ \gamma_1(t + t_0)$$

を満たすものが存在するときこれらの 2 曲線 γ_1、γ_2 は弱い意味で合同であるという。

命題 5.1 ([1])**.** 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ $(c \neq 0)$ 内の A_1 型実超曲面 $M = G(r)$ 上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_{\kappa_1}, \mathbb{F}_{\kappa_2}$ の軌道をそれぞれ γ_1, γ_2 とする。γ_1, γ_2 が合同であるための必要十分条件は、

(i) $|\rho_{\gamma_1}| = |\rho_{\gamma_2}| = 1$
(ii) $|\rho_{\gamma_1}| = |\rho_{\gamma_2}| < 1,\ |\kappa_1| = |\kappa_2|$ かつ $\kappa_1 \rho_{\gamma_1} = \kappa_2 \rho_{\gamma_2}$

のいずれかが成り立つことである。

命題 5.2 ([1])**.** 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ $(c \neq 0)$ 内の A_2 型実超曲面 $M = T_\ell(r)$ 上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_{\kappa_1}, \mathbb{F}_{\kappa_2}$ の軌道をそれぞれ γ_1, γ_2 とする。γ_1, γ_2 が合同であるための必要十分条件は、

(i) $|\rho_{\gamma_1}| = |\rho_{\gamma_2}| = 1$
(ii) $|\rho_{\gamma_1}| = |\rho_{\gamma_2}| < 1,\ |\kappa_1| = |\kappa_2|,\ \kappa_1 \rho_{\gamma_1} = \kappa_2 \rho_{\gamma_2}$ かつ $\omega_{\gamma_1} = \omega_{\gamma_2}$

また、n が奇数で $\ell = (n-1)/2$ かつ $r = \pi/(2\sqrt{c})$ のとき

(iii) $|\rho_{\gamma_1}| = |\rho_{\gamma_2}| < 1,\ |\kappa_1| = |\kappa_2|,\ \kappa_1 \rho_{\gamma_1} = -\kappa_2 \rho_{\gamma_2}$ かつ $\omega_{\gamma_1} = \sqrt{1 - \omega_{\gamma_2}^2 - \rho_{\gamma_2}^2}$

のいずれかが成り立つことである。

ここで非平坦複素射影空間上のケーラー磁場の軌道と A 型実超曲面上の佐々木磁場の軌道との関係を考察する。

定理 5.1 ([1])**.** $M = G(r)$ を $\mathbb{C}P^n(c)$ の半径 r の測地球面とする。任意の 0 でない数 κ を取る。すると、$\mathbb{F}_\kappa$-軌道で、その外的形状がケーラー磁場の軌道である非測地線軌道の同値類の数は次のようになる。

(1) $r < \pi/(2\sqrt{c})$ のとき

(i) $|\kappa| > \sqrt{c}\cot\sqrt{c}r$ のとき同値類は 1 個

(ii) $|\kappa| \leq \sqrt{c}\cot\sqrt{c}r$ のとき同値類は 0 個

(2) $r \geq \pi/(2\sqrt{c})$ のとき同値類は常に 1 個

定理 5.2 ([1]). $M = T_\ell(r)$ を $\mathbb{C}P^n(c)$ の A_2 型実超曲面とする。任意の 0 でない数 κ と定数 ω_γ を $0 \leq \omega \leq 1$ で取る。すると、主捩率 ω_γ の $\mathbb{F}_\kappa$-軌道で、その外的形状がケーラー磁場の軌道である非測地線軌道の同値類の数は次のようになる。

(1) $0 < r < \frac{\pi}{2\sqrt{c}}$ のとき

(i) $|\kappa| < \sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$ のとき

(a) $0 \leq \omega^2 < c^{-1}(\kappa^2 + c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 2 個

(b) $\omega^2 = c^{-1}(\kappa^2 + c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(c) それ以外で同値類は 0 個

(ii) $|\kappa| = \sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$ のとき

(a) $\omega = 0$ または $\omega = 1/\left\{2\cos^2(\sqrt{c}r/2)\right\}$ で同値類は 1 個

(b) $0 < \omega < 1/\left\{2\cos^2(\sqrt{c}r/2)\right\}$ で同値類は 2 個

(c) それ以外で同値類は 0 個

(iii) $\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r) < |\kappa| < \sqrt{c}\cot^2\left(\frac{\sqrt{c}r}{2}\right)\Big/\sqrt{2\cot^2\left(\frac{\sqrt{c}r}{2}\right) - 1}$ のとき

(a) $(a)\,0 \leq \omega^2 < 1 - c^{-1}(|\kappa| - \sqrt{\kappa^2 + c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ または $\omega^2 = c^{-1}(\kappa^2 + c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(b) $1 - c^{-1}(|\kappa| - \sqrt{\kappa^2 + c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2) \leq \omega^2 < c^{-1}(\kappa^2 + c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 2 個

(c) それ以外で同値類は 0 個

(iv) $|\kappa| \geq \sqrt{c}\cot^2\left(\frac{\sqrt{c}r}{2}\right)/\sqrt{2\cot^2\left(\frac{\sqrt{c}r}{2}\right) - 1}$ のとき

(a) $0 \leq \omega^2 \leq 1 - c^{-1}(|\kappa| - \sqrt{\kappa^2 + c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(b) それ以外で同値類は 0 個

(2) $r = \frac{\pi}{2\sqrt{c}}$ のとき

(i) $0 < |\kappa| < \sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2}) + 1}$ のとき

(a) $1 - c^{-1}(|\kappa| - \sqrt{\kappa^2 + c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2) \leq \omega^2 < c^{-1}(\kappa^2 + c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 2 個

(b) $0 \leq \omega^2 < 1 - c^{-1}(|\kappa| - \sqrt{\kappa^2 + c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ または $\omega^2 = c^{-1}(\kappa^2 + c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(c) それ以外で同値類は 0 個

(ii) $|\kappa| \geq \sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2}) + 1}$ のとき

(a) $0 \leq \omega^2 \leq 1 - c^{-1}(|\kappa| - \sqrt{\kappa^2 + c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は 1 個

(b) それ以外で同値類は 0 個

(3) $\frac{\pi}{2\sqrt{c}} < r < \frac{2}{\sqrt{c}}\sin^{-1}(\sqrt{\frac{2}{3}})$ のとき

(i) $0 < |\kappa| \leq -\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$ のとき

(a) $1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2) \leq \omega^2 < c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は2個

(b) $1-c^{-1}(|\kappa|+\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2) \leq \omega^2 < 1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ または $\omega^2 = c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は1個

(c) それ以外で同値類は0個

(ii) $-\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r) < |\kappa| < \sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})+1}$ のとき

(a) $1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2) \leq \omega^2 < c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は2個

(b) $0 \leq \omega^2 < 1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ または $\omega^2 = c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は1個

(c) それ以外で同値類は0個

(iii) $|\kappa| \geq \sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})+1}$ のとき

(a) $0 \leq \omega^2 \leq 1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は1個

(b) それ以外で同値類は0個

(4) $r = \frac{2}{\sqrt{c}}\sin^{-1}(\sqrt{\frac{2}{3}})$ のとき

(i) $0 < |\kappa| < \sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})+1}$ のとき

(a) $1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2) \leq \omega^2 < c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は2個

(b) $1-c^{-1}(|\kappa|+\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2) \leq \omega^2 < 1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ または $\omega^2 = c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は1個

(c) それ以外で同値類は0個

(ii) $|\kappa| = \sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})+1}$ のとき

(a) $0 < \omega^2 \leq c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は1個

(b) それ以外で同値類は0個

(iii) $|\kappa| > \sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})+1}$ のとき

(a) $0 \leq \omega^2 \leq 1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は1個

(b) それ以外で同値類は0個

(5) $r > \frac{2}{\sqrt{c}}\sin^{-1}(\sqrt{\frac{2}{3}})$ のとき

(i) $0 < |\kappa| < \sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})+1}$ のとき

(a) $1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2) \leq \omega^2 < c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は2個

(b) $1-c^{-1}(|\kappa|+\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2) \leq \omega^2 < 1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ または $\omega^2 = c^{-1}(\kappa^2+c)\sin^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は1個

(c) それ以外で同値類は0個

(ii) $\sqrt{c}\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})\Big/\sqrt{2\cot^2(\frac{\sqrt{c}r}{2})+1} \leq |\kappa| < -\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$ のとき

(a) $1-c^{-1}(|\kappa|+\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2) \leq \omega^2 \leq 1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は１個

(b) それ以外で同値類は０個

(iii) $|\kappa| = -\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$ のとき、

(a) $0 < \omega^2 \leq 1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は１個

(b) それ以外で同値類は０個

(iv) $|\kappa| > -\sqrt{c}\cot(\sqrt{c}r)$ のとき

(a) $0 \leq \omega^2 \leq 1-c^{-1}(|\kappa|-\sqrt{\kappa^2+c})^2\cot^2(\sqrt{c}r/2)$ で同値類は１個

(b) それ以外で同値類は０個

参考文献

[1] Y. Aoki and T. Adachi, *trajectories on real hypersurfaces of type* (A) *and those on a complex projective space*, preprint.

[2] S. Maeda and S. Udagawa, *Surfaces with constant Kähler angle all of whose geodesics are circles*, Tokyo J. Math. 13 (1990), 341–351.

[3] R. Niebergall and P. J. Ryan, *Real hypersurfaces in complex space forms, in Tight and taut submanifolds*, MSRI Publ. 32(1997), 233–305.

[4] K. Nomizu and K. Yano, *On circles and spheres in Riemannian geometry*, Math. Ann. 210 (1974), 163–170.

[5] K. Sakamoto, *Planar geodesic immersions*, Tohoku Math. J. 29 (1977), 25–56.

[6] T. Sunada, *Magnetic flows on a Riemann surface*, Proc. KAIST Math. Work-shop 8(1993), 93–108.

[7] X. Liu, T. Bao and T. Adachi, *Extrinsic circular trajectories on real hypersurfaces of type* (A_2) *in a complex projective space*, Differential Geom. Appl. 62 (2022), paper no. 101885, 18 pages.

3 次元多様体の随伴表現のトーションについて

東京工業大学 理学院 数学系 数学コース
脇條奈生子 (Naoko WAKIJO)

概要

コンパクトな 3 次元多様体 M に対し、随伴ライデマイスタートーションというトポロジカルな不変量が定義される。M が境界付きの双曲多様体である場合に、適当な条件のもと、上記のトーションが“vanishing identity”を満たすという予想があり、これは数理物理と関連する様で近日研究が盛んである。本発表では、この予想を M が境界がない場合に考察し、8 の字結び目に沿ったあるデーン手術で得られるクラスに対して計算例を与え、予想の肯定的例を初めて与えた。

1 導入

（捩れ）ライデマイスタートーションとは、大まかには、多様体 M とその基本群の表現 $\varphi : \pi_1(M) \to \mathrm{GL}(n;\mathbb{F})$ から適切な線型写像と完全列を設定した後、その行列式の交代積の形で定められる多様体の表現付き不変量である（ここで、$\mathbb{F}$ は可換体である）。本不変量は K. Reidemeister (1935) によって 3 次元多様体に対して導入され、ホモトピー同値類では区別出来ないレンズ空間の同相類の分類を与えることに寄与した。加えて M が 3 次元の場合には、“アレクサンダー多項式”や“サイバーグ-ウィッテン不変量”など、他の不変量との関連性が知られている [6]。

ライデマイスタートーションは、定義は素朴なものの計算は一般には難しい。これは、3 次の境界準同型の記述がしばしば容易ではないことに起因する。しかし、例えば結び目に沿った $p/1$-と $1/q$-デーン手術については、[4] の結果を用いれば、これを記述することが出来る（定理 3.1）。ここで、p, q は整数である。

ライデマイスタートーションの先行研究では、可換表現や $\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ 標準表現を扱う場合が多かったが、本稿では、$\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ 随伴表現に付随するライデマイスタートーションについて扱う。計算例として、8 の字結び目に沿ったあるデーン手術に対してその値を与える（定理 3.3）。

G を半単純リー群、$\mathfrak{g}$ をそのリー環とする。表現 $\varphi : \pi_1(M) \to G$ と、G の $\mathfrak{g}$ 上への随伴作用によって定義されるライデマイスタートーションを**随伴ライデマイスタートーション**といい、$\tau_{\mathfrak{g}_\varphi}(M)$ と書く。M が境界付き双曲多様体の場合に、このトーションが *vanishing identity* を満たすという予想が知られている [1, 2, 3]。詳細は省略するが、これは概ね「M が適当な条件を満たすとき、$\mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$-character variety のある部分集合 $\chi(M)$ が存在して、$\sum_{\varphi\in\chi(M)} \frac{1}{\tau_{\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})_\varphi}(M)} = 0 \in \mathbb{C}$ となる」という予想である。本稿では、M に境界がない場合に次の予想を立てた。

予想 1.1. M を向き付け可能で連結な閉 3 次元多様体とし、G を半単純リー群、$\mathfrak{g}$ をそのリー環とする。$\pi_1(M)$ の G-表現の既約表現全体を共役類で割った集合を $R_G^{\mathrm{irr}}(M)$ とする（すなわち、

$R_G^{\mathrm{irr}}(M) = \{\varphi : \pi_1(M) \to G \,|\, \varphi$ は既約表現 $\}/\mathrm{conj.}$ とする)。$R_G^{\mathrm{irr}}(M)$ が有限集合であるとき、次が成立する;

$$\sum_{\varphi \in R_G^{\mathrm{irr}}(M)} \frac{1}{\tau_{\mathfrak{g}_\varphi}(M)} \in \mathbb{Z}.$$

さらに、M が双曲構造を持つとき、上記の値は 0 である。

整数 p, q に対し、$S^3_{p/q}(K)$ を S^3 上の結び目 K に沿った p/q-デーン手術で得られる閉 3 次元多様体とする。予想 1.1 の肯定的例として、次の定理が与えられる。

定理 1.2. $G = \mathrm{SL}(2;\mathbb{C}), K = 4_1$ とする。任意の整数 p, q に対し、$M = S^3_{p/1}(K)$ と $M = S^3_{1/q}(K)$ について、予想 *1.1* は正しい。

2 定義

2.1 コチェイン複体に対する sign-refined Reidemeister torsion

以下、ベクトル空間の基底は全て順序付きであるとする。

$$C^* = (0 \to C^0 \xrightarrow{\delta^1} C^1 \xrightarrow{\delta^2} \cdots \xrightarrow{\delta^m} C^m \to 0)$$

を体 $\mathbb{F}$ 上の有限次元ベクトル空間のコチェイン複体とする。さらに、$\mathbf{c}^i$ を C^i の基底とし、$\mathbf{h}^i$ を i 次コホモロジー群 $H^i = H^i(C^*)$ の基底とする。C^* の基底 $\mathbf{c}^* = (\mathbf{c}^0, \ldots, \mathbf{c}^m)$ と H^* の基底 $\mathbf{h}^* = (\mathbf{h}^0, \ldots, \mathbf{h}^m)$ が与えられたとき、*sign-refined Reidemeister torsion* が次のように定義される。

$\widetilde{\mathbf{h}}^i$ を $\mathbf{h}^i$ の C^i への持ち上げとする。$\mathbf{b}^i$ を C^i のベクトルの列で、 $\delta^{i+1}(\mathbf{b}^i)$ が $B^{i+1} = \mathrm{Im}\,\delta^{i+1}$ の基底であるものとする。このとき、ベクトルの列の (順序付き) 和集合の列 $(\delta^i(\mathbf{b}^{i-1})\widetilde{\mathbf{h}}^i\mathbf{b}^i)$ は C^i の基底を与える。基底 $\mathbf{c}^i$ から $(\delta^i(\mathbf{b}^{i-1})\widetilde{\mathbf{h}}^i\mathbf{b}^i)$ への変換行列の行列式を $[\delta^i(\mathbf{b}^{i-1})\widetilde{\mathbf{h}}^i\mathbf{b}^i/\mathbf{c}^i] \in \mathbb{F}^\times = \mathbb{F}\setminus\{0\}$ と書く。$\alpha_i(C^*) = \sum_{i=0}^m \dim C^i$ と $\beta_i(C^*) = \sum_{i=0}^m \dim H^i$ に対し、$|C^*| = \sum_{i=0}^m \alpha_i(C^*)\beta(C^*)$ と定める。すると、次の交代積を定義することができ、これを *sign-refined Reidemeister torsion* と呼ぶ。

$$\mathrm{Tor}(C^*, \mathbf{c}^*, \mathbf{h}^*) = (-1)^{|C^*|} \prod_{i=0}^m [\delta^i(\mathbf{b}^{i-1})\widetilde{\mathbf{h}}^i\mathbf{b}^i/\mathbf{c}^i] \in \mathbb{F}^\times.$$

上のトーション $\mathrm{Tor}(C^*, \mathbf{c}^*, \mathbf{h}^*)$ は、$\widetilde{\mathbf{h}}^i$ と $\mathbf{b}^i$ の選び方に依らず、C^*, $\mathbf{c}^*$ と $\mathbf{h}^*$ のみに依って決まることが知られている。簡単のため、 C^* が**非輪状**、すなわち、$H^*(C^*) = 0$ であるとき、$\mathrm{Tor}(C^*, \mathbf{c}^*, \mathbf{h}^*)$ を $\mathrm{Tor}(C^*, \mathbf{c}^*)$ と表記する。

2.2 3 次元閉多様体の随伴ライデマイスタートーション

M を向き付け可能で連結な閉 3 次元多様体とし、G を半単純リー群、$\mathfrak{g}$ をそのリー代数とする。$\varphi : \pi_1(M) \to G$ を表現、つまり群準同型写像とする。$\mathfrak{g}$ が半単純であることから、キリング形式 B は非退化である（ここで、B は $x, y \in \mathfrak{g}$ に対して $B(x, y) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}(x), \mathrm{ad}(y))$ で定められる双線形形式である)。したがって、B に関する $\mathfrak{g}$ の直交基底 $B = (e_1, e_2, \ldots, e_d)$ を取ることが出来る。

まず、M の有限胞体分割を与え、M の普遍被覆空間 $\widetilde{M}$ を考える。$\widetilde{M}$ に M の胞体分割から誘導される胞体構造を与えると、CW 複体のチェイン複体 $(C_*(\widetilde{M};\mathbb{Z}),\partial_*)$ を考えることができる。ここで、$\widetilde{M}$ の被覆変換を $\pi_1(M)$ から $\widetilde{M}$ への左作用とみなすと、この作用は $\mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ から $C_*(\widetilde{M};\mathbb{Z})$ への左作用に自然に拡張される。この作用により、$C_*(\widetilde{M};\mathbb{Z})$ を左 $\mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ 加群とみなし、これを $C_*^{\varphi}(\widetilde{M};\mathbb{Z})$ と書く。さらに、随伴作用 $\mathrm{ad}_{\varphi}:\pi_1(M)\to\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の自然な拡張によって $\mathfrak{g}$ を左 $\mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ 加群とみなし、これを $\mathfrak{g}_{\varphi}$ と書く。次のコチェイン複体が定義される;

$$(C_{\varphi}^*(\widetilde{M};\mathfrak{g}),\delta^*):=(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi_1[M]]}(C_*^{\varphi}(\widetilde{M};\mathbb{Z}),\mathfrak{g}_{\varphi}),\delta^*).$$

ここで、δ^i は $\delta^i(f)=f\circ\partial_i$ によって定められる準同型である。

次に、$\mathbf{c}_i=(c_{i,1},c_{i,2},\dots,c_{i,\dim_{\mathbb{Z}}C_i(M;\mathbb{Z})})$ を M の i-胞体全体から定められる $C_i(M;\mathbb{Z})$ の基底とする。M の各 i-胞体に対して $\widetilde{M}$ への持ち上げを固定すると、$\mathbb{Z}[\pi_1(M)]$ 上の自由加群 $C_i^{\varphi}(\widetilde{M};\mathbb{Z})$ の基底 $\widetilde{\mathbf{c}}_i=(\widetilde{c}_{i,1},\widetilde{c}_{i,2},\dots,\widetilde{c}_{i,\dim_{\mathbb{Z}}C_i(M;\mathbb{Z})})$ が与えられる。任意の $i\in\{1,2,3\}$ と $j,\ell\in\{1,2,\dots,\dim_{\mathbb{Z}}C_i(M;\mathbb{Z})\}$、$k\in\{1,2,\dots,k\}$ に対し、$c_{i,j}^k(\widetilde{c}_{i,\ell})=\delta_{j,\ell}e_k$ となるような $\mathbb{Z}[\pi_1(M)]$-準同型を $c_{i,j}^k\in C_{\varphi}^i(\widetilde{M};\mathfrak{g})$ と書く。ここで、$\delta_{j,\ell}$ はクロネッカーのデルタである。このとき、列

$$\mathbf{c}^i=(c_{i,1}^1,c_{i,1}^2,\dots,c_{i,1}^k,c_{i,2}^1,c_{i,2}^2,\dots,c_{i,2}^k,\dots,c_{i,\dim_{\mathbb{Z}}C_i(M;\mathbb{Z})}^1,c_{i,\dim_{\mathbb{Z}}C_i(M;\mathbb{Z})}^2,\dots,c_{i,\dim_{\mathbb{Z}}C_i(M;\mathbb{Z})}^k)$$

は $C_{\varphi}^i(\widetilde{M};\mathfrak{g})$ の基底を与える。

さらに、CW 複体 M の実数係数のコチェイン複体 $C^*(M;\mathbb{R})$ を考える。上記の $\mathbf{c}_i$ に対応して、$C^i(M;\mathbb{R})$ の基底 $\mathbf{c}_{\mathbb{R}}^i=(c_1^i,\dots,c_{\dim_{\mathbb{Z}}C_i(M;\mathbb{Z})}^i)$ を取ることが出来る。ここで、$c_j^i:C_i(M;\mathbb{Z})\to\mathbb{R}$ は、$c_j^i(c_{i,k})=\delta_{j,k}$ で定義される準同型である。ポアンカレ双対性により、$H^*(M;\mathbb{R})=\bigoplus_{i\geq 0}H^i(M;\mathbb{R})$ の *homology orientation* を標準的に固定することが可能である。この向きに一致するように、$H^*(M;\mathbb{R})$ の基底 $\mathbf{h}_{\mathbb{R}}^*=(\mathbf{h}_{\mathbb{R}}^0,\mathbf{h}_{\mathbb{R}}^1,\mathbf{h}_{\mathbb{R}}^2,\mathbf{h}_{\mathbb{R}}^3)$ を取る。$C^*(M;\mathbb{R})$ の $\mathbf{c}_{\mathbb{R}}^*$ と $\mathbf{h}_{\mathbb{R}}^*$ に付随する sign-refined Reidemeister torsion は、$\mathbb{R}^{\times}$ の元である。したがって、符号を取ることができ、これを

$$\tau_0:=\mathrm{sgn}(\mathrm{Tor}(C^*(M;\mathbb{R}),\mathbf{c}_{\mathbb{R}}^*,\mathbf{h}_{\mathbb{R}}^*))\in\{\pm 1\}$$

とおく。

以上を用いて、φ に付随する M の**随伴ライデマイスタートーション** $\tau_{\mathfrak{g}_{\varphi}}(M)$ が次のように定義される。$C_{\varphi}^*(\widetilde{M};\mathfrak{g})$ が非輪状であるとき、

$$\tau_{\mathfrak{g}_{\varphi}}(M):=\tau_0\cdot\mathrm{Tor}(C_{\varphi}^*(\widetilde{M};\mathfrak{g}),\mathbf{c}^*)\in\mathbb{F}^{\times}$$

とし、$C_{\varphi}^*(\widetilde{M};\mathfrak{g})$ が非輪状でないとき、$\tau_{\mathfrak{g}_{\varphi}}(M):=0$ とする。

$\tau_{\mathfrak{g}_{\varphi}}(M)$ は、$\mathfrak{g}$ の直交基底 B、M の有限胞体分割、$\widetilde{\mathbf{c}}_i,\mathbf{h}_{\mathbb{R}}^i$ の選び方に依らず、M と φ の共役類にのみ依存することが知られている。

3 定理 1.2 の証明

本章では、定理 1.2 の多様体、すなわち、8 の字結び目に沿ったデーン手術で得られる多様体 $M=S_{p/1}^3(4_1)$ と $M=S_{1/q}^3(4_1)$ について考える。また、$G=\mathrm{SL}(2;\mathbb{C}),\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$ とする。

3.1 準備

[4] より、次のような基本群の表示を与えることが出来る;

$$\pi_1(S^3_{p/1}(4_1)) = \langle x_1, x_2, \mathfrak{m} \mid \mathfrak{m}x_1x_2\mathfrak{m}^{-1}x_1^{-1}, \mathfrak{m}x_2x_1x_2\mathfrak{m}^{-1}x_2^{-1}, [x_1,x_2]\mathfrak{m}^p\rangle$$

$$\pi_1(S^3_{1/q}(4_1)) = \langle x_1, x_2, \mathfrak{m}, \mathfrak{m}' \mid \mathfrak{m}x_1x_2\mathfrak{m}^{-1}x_1^{-1}, \mathfrak{m}x_2x_1x_2\mathfrak{m}^{-1}x_2^{-1}, \mathfrak{m}[x_1,x_2]^q, \mathfrak{m}'[x_1,x_2]^{-1}\rangle$$

ここで、$[x,y] := xyx^{-1}y^{-1}$ である。この基本群の表示の語の個数を g とおく。また、生成子を左から順に $x_1,\ldots,x_g$ とし、関係子を同様に $r_1,\ldots,r_g$ とする。上の基本群の表示に対応して、自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi_1[M]]}(C_0^{\varphi}(\widetilde{M};\mathbb{Z}),\mathfrak{g}_{\varphi}) \cong \mathfrak{g},$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi_1[M]]}(C_1^{\varphi}(\widetilde{M};\mathbb{Z}),\mathfrak{g}_{\varphi}) \cong \mathfrak{g}^g,$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi_1[M]]}(C_2^{\varphi}(\widetilde{M};\mathbb{Z}),\mathfrak{g}_{\varphi}) \cong \mathfrak{g}^g,$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[\pi_1[M]]}(C_3^{\varphi}(\widetilde{M};\mathbb{Z}),\mathfrak{g}_{\varphi}) \cong \mathfrak{g}$$

を与えることが出来る。この同型による同一視により、

$$(C^*_{\varphi}(\widetilde{M};\mathfrak{g}),\delta^*) = (0 \to \mathfrak{g} \xrightarrow{\delta^1} \mathfrak{g}^g \xrightarrow{\delta^2} \mathfrak{g}^g \xrightarrow{\delta^3} \mathfrak{g} \to 0)$$

を考える。[4, §3.1] から、δ^* は次のように基本群の語で記述される。

定理 3.1 ([4, Corollary 3.2])**.** $M = S^3_{p/1}(4_1)$ のとき、

$$W = \rho_1 \cdot x_1\rho_2x_1^{-1} \cdot (x_1x_2x_1^{-1})\rho_1^{-1}(x_1x_2x_1^{-1})^{-1} \cdot ([x_1,x_2])\rho_2^{-1}([x_1,x_2])^{-1} \cdot \rho_3 \cdot \mathfrak{m}\rho_3^{-1}\mathfrak{m}^{-1}$$

とし、$M = S^3_{1/q}(4_1)$ のとき、

$$W = \rho_1 \cdot x_1\rho_2x_1^{-1} \cdot (x_1x_2x_1^{-1})\rho_1^{-1}(x_1x_2x_1^{-1})^{-1} \cdot ([x_1,x_2])\rho_2^{-1}([x_1,x_2])^{-1} \cdot \rho_4^{-1} \cdot \mathfrak{m}'\rho_3\mathfrak{m}'^{-1} \cdot \rho_4 \cdot \rho_3^{-1}$$

とする。このとき、次が成立する*;*

$$\delta^1 = \left(1 - x_j\right)_{j=1,\ldots,g},\ \ \delta^2 = \left(\frac{\partial r_j}{\partial x_i}\right)_{i,j=1,\ldots,g},\ \ \delta^3 = \left(\frac{\partial W}{\partial \rho_i}\right)_{i=1,\ldots,g}.$$

ここで、$\frac{\partial *}{\partial *}$ は **Fox 微分**である（定義は *[6, §16.2]* など参照)。

さらに、$\pi_1(M)$ から $G = \mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ への既約表現の共役類全体の集合 $R_G(M)^{\mathrm{irr}}$ について、次の命題 3.2 が成り立つ。

$$D := \{a \in \mathbb{C} \mid |a| < 1\} \cup \{a \in \mathbb{C} \mid |a| = 1, \mathrm{Im}(a) > 0\}$$

とする。上記で $\mathrm{Im}(a)$ は a の虚部を表す。

命題 3.2. 任意の $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{Z}$ に対し、$r = p/1$ または $r = 1/q$ とすると、次の写像は全単射である;

$$\Phi_r : R_G^{\mathrm{irr}}(S_r^3(4_1)) \to A_r, \quad [\varphi] \mapsto (D \text{ の元であるような} \varphi(\mathfrak{m}) \text{ の固有値}).$$

ここで、

$$A_r := \{a \in D \mid Q_r(a) = 0\},$$

$$Q_r(a) := \begin{cases} 1 - a^{p-4} + a^{p-2} + 2a^p + a^{p+2} - a^{p+4} + a^{2p} & (r = p/1 \text{ のとき}) \\ 1 - a^{2q} - a^{4q-1} - 2a^{4q} - a^{4q+1} - a^{6q} + a^{8q} & (r = 1/q \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。$p = 0$ のときは、$A_{0/1} := \{\pm\sqrt{-1}, \pm\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\}$ に対し、全単射

$$\Phi_{0/1} : R_G^{\mathrm{irr}}(S_{0/1}^3(4_1)) \to A_{0/1}$$

を定めることが出来る。

Proof. $p \neq 0, r = p/1$ とする。$\varphi : \pi_1(S_r^3(4_1)) \to \mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ を既約表現とする。$\varphi(\mathfrak{m})$ の固有値の一つが A_r の元となることを示す。φ の共役類で、ある $a \in D$ に対して $\varphi'(\mathfrak{m}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$、または、ある $a' \in \mathbb{C}^\times$ に対して $\varphi'(\mathfrak{m}) = \begin{pmatrix} 1 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるような代表元 φ' が存在する。$\varphi'(x_1) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ として $\varphi'(r_i)$ を計算すると、各 $\varphi'(r_i)$ が単位行列であることから、$\varphi'(\mathfrak{m})$ は前者の形を取り、$y \neq 0$ で、x, z, w は a と y により一意に決定され、a が $Q_r(a) = 0$ を満たすことがわかる。

さらに、この議論を逆に辿れば、逆写像 Φ_r^{-1} を構成することが出来る。$p = 0$ と $r = 1/q$ のときも、同様の方針で計算することにより示される。 □

命題 3.2 の写像 Φ_r を用い、随伴ライデマイスタートーションが次で与えられる。

定理 3.3. 既約表現 $\varphi : \pi_1(M) \to \mathrm{SL}(2;\mathbb{C})$ に付随する随伴ライデマイスタートーションは、$\Phi_r([\varphi]) = a$ とすると、

- $M = S_{p/1}^3(4_1), p \neq 0$ のとき、

$$\tau_{\mathfrak{g}_\varphi}(S_{p/1}^3(4_1)) = -\frac{4 - p + (-2 + p)a^2 + 2pa^4 + (2 + p)a^6 - (4 + p)a^8 + 2pa^{4+p}}{2(a^2 - 1)^3(1 + a^2)},$$

- $M = S_{1/q}^3(4_1)$ のとき、

$$\tau_{\mathfrak{g}_\varphi}(S_{1/q}^3(4_1)) = -\frac{a^{6q}(-1 + 4q + (1 - 2q)a^{2q} + 2(1 + a)a^{4q} + (1 + 2q)a^{6q} - (1 + 4q)a^{8q})}{2(a^{4q} - 1)^3(1 - 2a^{2q} - a^{4q} - 2a^{6q} + a^{8q})}$$

である。

Proof. 命題 3.2 の逆写像 Φ_r^{-1} と定理 3.1 を用いれば、$\mathfrak{g} \cong \mathbb{C}^3$ の同一視の下、

$$(C_\varphi^*(\widetilde{M};\mathfrak{g}), \delta^*) = (0 \to \mathbb{C}^3 \xrightarrow{\delta^1} \mathbb{C}^{3g} \xrightarrow{\delta^2} \mathbb{C}^{3g} \xrightarrow{\delta^3} \mathbb{C}^3 \to 0)$$

の各 δ^i の $\mathbb{C}$ 係数表現行列が a を用いて記述できる。[6, §2.1] の τ-chain の手法により、Mathematica を用いて計算すると、定理の値が導出される。 □

注意 3.4.

- $M = S^3_{p/1}(4_1)$ のとき、[5] によって、$\tau_{\mathfrak{g}_\varphi}(M)$ は ± 1 倍の差を除いて計算されていた。上定理の利点は、後に $\frac{1}{\tau_{\mathfrak{g}_\varphi}(M)}$ を足し上げる際、符号の補正を行える点にある。
- 上記のトーションの値は a と a^{-1} で一致することが計算により確かめられる。
- $p = 0$ のときは、$a = \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}, \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}), -\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ に対し、随伴ライデマイスタートーションはそれぞれ $\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, 5, 5$ である。

3.2 証明の概略

$M = S^3_{p/1}(4_1)$ の場合に、定理 1.2 の証明を行う。$M = S^3_{p/1}(4_1)$ に双曲構造が入るための必要十分条件は $|p| \geq 5$ であることが知られている。以下、予想 1.1 の随伴ライデマイスタートーションの逆数の和を $\sum_\varphi \frac{1}{\tau_\varphi}$ と略記する。

まず、$p \geq 5$ の場合に $\sum_\varphi \frac{1}{\tau_\varphi} = 0$ となることを示す。定理 3.3 の前者の随伴ライデマイスタートーションの値を a に関する有理多項式とみなし、これを $T(a)$ とおく。さらに、

$$f(a) := 4Q(a) = 4(1 - a^{p-4} + a^{p-2} + 2a^p + a^{p+2} - a^{p+4} + a^{2p}),$$

$$g(a) := \frac{f'(a)}{T(a)} = -8(a^2-1)^3(a^2+1)a^{p-5},$$

$$F(a) := \frac{g(a)}{f(a)}$$

とすると、$p \geq 5$ より、f, g は $\mathbb{Z}$ 係数多項式で、$f(0) \neq 0$ である。従って、$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上の複素関数の留数定理より、

$$0 = \sum_{a \text{ は } F \text{ の極}} \mathrm{Res}[F, a] = \sum_{f(a)=0,\, a \neq 0, \pm 1} \frac{g(a)}{f'(a)} = 2 \sum_{a \in A_{p/1}} \frac{1}{T(a)} = 2 \sum_\varphi \frac{1}{\tau_\varphi}$$

となる。ここで、$\mathrm{Res}[F, a]$ は F の極 a における留数である。これより、$p \geq 5$ の場合に定理 1.2 が従う。$p \leq -5$ の場合も同様に示される。

$|p| \leq 4$ の場合は、命題 3.2 と定理 3.3 から Mathematica を用いて直接計算することにより、次を得る;

$$p = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \text{ のとき、} \sum_\varphi \frac{1}{\tau_\varphi} = 2,$$

$$p = \pm 4 \text{ のとき、} \sum_\varphi \frac{1}{\tau_\varphi} = 8.$$

以上より、任意の整数 p に対し、定理 1.2 が示された。

$M = S^3_{1/q}(4_1)$ の場合も同様の方針で証明することが出来る。 □

参考文献

[1] Benini, F., Gang, D., Pando Zayas, L.A.: Rotating black hole entropy from M5-branes. J. High Energy Phys. (3), 057, 39 (2020)

[2] Gang, D., Kim, N., Pando Zayas, L.A.: Precision microstate counting for the entropy of wrapped M5-branes. J. High Energy Phys. (3), 164, 42, (2020)

[3] Gang, D., Kim, S., Yoon, S.: Adjoint Reidemeister torsions from wrapped M5-branes. Adv. Theor. Math. Phys. **25**(7), 1819–1845 (2021)

[4] Nosaka, T.: Cellular chain complexes of universal covers of some 3-manifolds. J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **29**(1), 89–113 (2022)

[5] Ohtsuki, T.: On the asymptotic expansion of the quantum SU(2) invariant at $q = \exp(4\pi\sqrt{-1}/N)$ for closed hyperbolic 3-manifolds obtained by integral surgery along the figure-eight knot. Algebr. Geom. Topol. **18**(7), 4187–4274 (2018).

[6] Turaev, V.: Introduction to combinatorial torsions. Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, Basel (2001)

群の帰納極限における左順序の孤立性について

東京工業大学 理学院 数学系 数学コース
地引知栄 (Chihaya Jibiki)

概要

本研究は、群上の左順序に関するものである。群上に孤立順序が存在しなければ、順序のなす位相空間がカントール集合と同相となることが、2004 年に Linnell によって示されている。そこで、どのような群が孤立順序を持つのかが疑問として浮かぶが、有限生成でない群の場合について考察する。特に、群が帰納極限としてあらわされる場合を取り上げる。

1 導入

群上の左順序とは、群 G 上の全順序 $<$ で左からの群演算に対してその順序が不変であるようなもの、すなわち $\forall g', g_1, g_2 \in G,\ g_1 <_G g_2 \Rightarrow g'g_1 <_G g'g_2$ を満たすもののことである．左順序の研究は 1 次元力学系との繋がりは指摘されていたが、それ以外に他分野との関連が知られておらず 21 世紀に入るまで研究は進んでいなかった。しかし近年に次のような応用先があることがわかり、活発に研究されている。

(1) 組み紐群上に Dehornoy 順序という左順序が構成された [1]。この Dehornoy 順序から得られる、 Dubrovina-Dubrovin 順序は孤立順序と呼ばれる特徴的な左順序だった。
(2) Heegaard Floer homology が単純な構造を持つのかを、基本群が左順序を持つのかで簡単に判定することができるのではないかという予想 (L-space 予想) が提唱された [2]。
(3) 群環の zero-divisors 問題の解として左順序性が期待されている [3]。

ここで述べる結果は、(1) に関連する群上の孤立順序についてのものである。特に、既知の孤立順序を群の帰納極限上に拡張したとき、孤立順序にならないことを示した。

なお、この分野の全体像はサーベイがいくつか書かれている [3, 4]。

2 準備

2.1 左順序の基本的な性質

左順序の定義は既に述べた。なお、ここでは左順序としては狭義全順序 $<$ を用いる．また，左順序を持つ群はねじれのない群であることに注意する。

左順序をとらえる上で、基本的となる半群を述べる。

■**定義** (positive cone)　左順序 $<_G$ に対して $P_G \coloneqq \{g \in G | 1 <_G g\}$ を $<_G$ の **positive cone** という.

■**命題** 1　群 G の positive cone P_G に対して、次の (1)(2) が成り立つ。

(1) $P_G \cdot P_G \subset P_G$
(2) $G = P_G \sqcup P_G^{-1} \sqcup \{1\}$

■**命題** 2　群 G が与えられているとする。このとき、命題 1 の (1)(2) を満たす部分集合 $P_G \subset G$ が存在するとき、$\forall g, h \in G$ で、

$$g <_G h \Leftrightarrow g^{-1}h \in P_G$$

は左順序を定め、P_G がその positive cone となる。

命題 1 と命題 2 より、群 G に対して左順序を定めることと、命題 1(1)(2) を満たす半群 P_G、すなわち positive cone を定めることは同値であることがわかる。よって今後は、左順序を定義する代わりに positive cone を定義しても良い。

■**定義** (convex subgroup)　群 G とその左順序 $<_G$ に対して、部分群 $C \subset G$ が **convex subgroup** であるとは、

$$\forall g \in G, \forall c_1, c_2 \in C, c_1 <_G g <_G c_2 \Rightarrow g \in C$$

となること。

本稿では、部分集合 $A \subset G$ を含む (で生成される)convex suubgroup を $\langle\langle A \rangle\rangle_P \subset G$ と表すこととする。

それでは左順序の例として、冒頭に挙げた Dehornoy 順序を見る。

2.2　組み紐群による例

組み紐群とは，有限表示

$$B_n \coloneqq \left\langle \sigma_1, ..., \sigma_{n-1} \middle| \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & (|i-j| \geq 2) \\ \sigma_i\sigma_j\sigma_i = \sigma_j\sigma_i\sigma_j & (|i-j| = 1) \end{array} \right\rangle$$

によって定義される群のことである。

組み紐群の元は $\sigma_1, ..., \sigma_{n-1}$ とその逆元を組み合わせた語であるが、これらの語に対して $\sigma_1, ..., \sigma_{i-1}$ とその逆元を含まず、σ_i を含み σ_i^{-1} を含まない表現を持つ語を **i-positive** という。1-positive から、$(n-1)$-positive までの語を集めた集合を P_D とする。

■**定理** [1]　P_D は、B_n の positive cone である。

P_D から命題 2 で定まる B_n 上の左順序を Dehornoy 順序と呼ぶ。

組み紐群の元に対し，$\alpha_i \coloneqq (\sigma_i \cdots \sigma_{n-1})^{(-1)^{i-1}}$ とする。Dehornoy 順序より次が得られる.

■定理 [5]　半群 $P_{DD} \coloneqq \langle \alpha_1, ..., \alpha_{n-1} \rangle^+$ は、B_n の positive cone である。さらに、P_{DD} は孤立順序である。

孤立順序は後で定義する。P_{DD} から定まる B_n 上の左順序が、Dubrovina-Dubrovin 順序である。i-positive な元の集合を P_i と書けば、$P_{DD} = P_1 \cup P_2^{-1} \cup \cdots \cup P_{n-1}^{(-1)^n}$ と表される。

2.3　孤立順序とは

命題 2 により、左順序に対し positive cone が一対一に対応するのであった。ここで群 G の冪集合を 2^G とする。2^G には離散位相による積位相が入る。ここで、G の任意の positive cone P は $P \subset G$ より、$P \in 2^G$ である。よって、G の全ての positive cone を集めた集合を $LO(G)$ とすれば、$LO(G) \subset 2^G$ であり $LO(G)$ は部分空間となる。これを、左順序のなす位相空間という。この位相は，次の $g \neq 1$ に対して定義される 2 種類の準開基を用いて表すこともできる。

$$U_g \coloneqq \{P \in LO(G) | g \in P\}$$
$$U_g^c \coloneqq \{P \in LO(G) | g \notin P\}$$

なお、U_g と U_g^c は互いに補集合の関係になっているので U_g と U_g^c は閉集合である。よって、この空間は完全不連結である。

そしてチコノフの定理より、2^G はコンパクトである。さらに、以下が示される。

■定理 [6]　$LO(G)$ は、コンパクト完全不連結空間である。さらに、G が可算集合のとき、$LO(G)$ は距離化可能である。

すなわち G が可算群であるとき、$LO(G)$ が孤立点を持たなければ $LO(G)$ はカントール集合と同相となる。そこで特に $LO(G)$ が孤立点を持つとき、その孤立点のことを G の**孤立順序**と呼ぶ。

この定理より $LO(G)$ が孤立順序を持つのか否かが重要な研究テーマとなる．2022 年現在、様々な群上に孤立順序が存在するのか否かが具体的に調べ上げられている。以下にその一例を挙げる (細かな条件は省かれている)。

孤立順序を持つ

- 組み紐群
- $\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$
- $G *_{\mathbb{Z}} H$ (CF(G)、CF(H)、INV(H) 条件が必要。)
- $G *_A H$ (stepping 条件が必要。)
- $F_n \times \mathbb{Z}$

孤立順序を持たない

- virtually 可解群
- $F_n *_{\mathbb{Z}} H$
- $G * H$

- $\mathbb{Z}^n$
- B_∞, F_∞

そして本研究は、上記において未だ研究が不十分であると考えられる可算生成群に関して調べたものとなる。

3 研究内容

3.1 先行研究

注目すべきは、次の 2 つの先行研究である。

■定理 A [7] $l, m_2, n_2, m_3, n_3, ..., m_l, n_l \geq 2$ として、次の群を考える。

$$G := \langle x_1, ..., x_l | x_1^{m_2} = x_2^{n_2}, ..., x_{l-1}^{m_l} = x_l^{n_l} \rangle$$

このとき、positive cone が次の l 個の元で生成される。

$$\begin{aligned}
&x_1, \\
&x_1^{-m_2+1} x_2, \\
&... \\
&x_1^{m_2+1} x_2^{-m_3+1} \cdots x_{i-1}^{-m_i+1} x_i \\
&... \\
&x_1^{m_2+1} x_2^{-m_3+1} \cdots x_{l-1}^{-m_l+1} x_l
\end{aligned}$$

特に、その左順序は孤立順序である。

■定理 B [8] 群 G, H は有限生成であり、$z_G \in Z(G), z_h \in H$ をそれぞれ非自明な元とする。そして G, H はそれぞれ孤立順序を持ち、その positive cone がそれぞれ $\mathcal{G} := \{g_1, ..., g_m\}, \mathcal{H} := \{h_1, ..., h_n\}$ で生成されるとする。さらに、$\mathcal{G}, \mathcal{H}$ は CF(G),CF(H),INV(H) という条件を満たすとする。このとき $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ から誘導される孤立順序が、$G *_{\mathbb{Z}} H$ 上に構成される。

定理 A においては、l の無限大への極限を考えることで群の帰納極限上に拡張された左順序を得ることができる。定理 B においては、構成した群 $G *_{\mathbb{Z}} H$ を再び定理 B の H として群 $G *_{\mathbb{Z}} (G *_{\mathbb{Z}} H)$ が構成され、これを繰り返すことでこちらも、群の帰納極限上に拡張された左順序を得ることができる。よって、いずれの定理も自然に群の融合積による帰納極限へと拡張できる。具体的には、次のような群 $\tilde{G}$ である。

群の族 $\{G_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ とその部分群の族 $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ を考え、全ての m に単射群準同型 $\varphi_m : A_m \hookrightarrow G_{m+1}$ が与えられているとする。このとき次のような群の融合積 $G^{(m)}, m = 1, 2, ...$ が帰納的に定義される。

$$\begin{aligned}
G^{(1)} &= G_1 \\
G^{(m+1)} &= G^{(m)} *_{\varphi_m} G_{m+1}
\end{aligned}$$

このとき、$\tilde{G} := \varinjlim G^{(m)}$ と定義する。

3.2 主結果

■定理 $\tilde{G}$ がアーベル群でないとする。そして、任意の positive cone $\tilde{P} \in LO(\tilde{G})$ は正の最小元を持たない一方、positive cone $P^{(m)} := \tilde{P} \cap G^{(m)} \in LO(G^{(m)})$ は正の最小元を持つとする。さらに $P^{(m)}$ の正の最小元を $\tilde{p}_m$ とし、これらが次を満たすとする。

(1) $\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \geq m$ such that $A_n \subset \langle\langle \tilde{p}_m \rangle\rangle_{P^{(n)}}$
(2) $\forall m \in \mathbb{N}, G_m \subset \langle\langle A_m \rangle\rangle_{P^{(m)}}$
(3) $\forall m \in \mathbb{N}, G_m \subset \langle\langle \varphi_m(A_m) \rangle\rangle_{P^{(m)}}$

このとき、$\tilde{P}$ は孤立順序ではない。

定理 A と定理 B はそれぞれ $\tilde{G}$ 上に左順序を構成する。

■系 上記定理 A と定理 B から自然に拡張される可算生成群 $\tilde{G}$ 上の左順序は、いずれも孤立順序にならない。

この結果は、構成した可算生成群 $\tilde{G}$ 上に孤立順序が存在しないことを保証するものではない。しかし既知の有限生成群上の孤立順序を可算生成群へと拡張しても、既に孤立性は失われてしまっていることを示している。

参考文献

[1] Patrick Dehornoy. Braid groups and left distributive operations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 345, No. 1, pp. 115–150, 1994.

[2] Steven Boyer, Cameron McA. Gordon, and Liam Watson. On L-spaces and left-orderable fundamental groups. *Math. Ann.*, Vol. 356, No. 4, pp. 1213–1245, 2013.

[3] Adam Clay and Dale Rolfsen. *Ordered groups and topology*, Vol. 176 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2016.

[4] 伊藤哲也. 群の不変順序と位相幾何学. 数学, Vol. 67, No. 2, pp. 133–153, 2015.

[5] T. V. Dubrovina and N. I. Dubrovin. On braid groups. *Mat. Sb.*, Vol. 192, No. 5, pp. 53–64, 2001.

[6] Adam S. Sikora. Topology on the spaces of orderings of groups. *Bull. London Math. Soc.*, Vol. 36, No. 4, pp. 519–526, 2004.

[7] Patrick Dehornoy. Monoids of O-type, subword reversing, and ordered groups. *J. Group Theory*, Vol. 17, No. 3, pp. 465–524, 2014.

[8] Tetsuya Ito. Construction of isolated left orderings via partially central cyclic amalgamation. *Tohoku Math. J. (2)*, Vol. 68, No. 1, pp. 49–71, 2016.

Weight Rank Clique Filtration を用いたパーシステント・ホモロジーによる実在分子の反応経路地図の可視化

北海道大学 大学院総合化学院 総合化学専攻
村山武来 (Burai MURAYAMA)

概要

近年、化学の世界ではこれまでの実験による反応の探索ではなく、コンピューターを用いた計算による反応の探索が推し進められている。その探索のための基盤となるツールがポテンシャルエネルギー曲面（PES）である。PES は $3N-6$ 次元（N：原子数）の関数値であり、化学反応は PES 上の動態として考えることができる。PES からの情報抽出の方法として、GRRM プログラムが前田らによって開発された。このプログラムは PES 上の 2 つの平衡状態 (EQ) と 1 つの遷移状態 (TS) からなる素反応経路を固有反応経路（IRC）で接続したネットワークである反応経路地図 (RRM) を指定された系について自動的に探索する。しかしながら、得られる RRM は非常に巨大であり、横断的に比較することが難しい。そこで本研究では、RRM を表す重み付きグラフのトポロジー的な記述子を、パーシステントホモロジー（PH）に基づき抽出する手法を提案する。本研究の結果、提案手法を用いて得られた記述子は、物質の化学反応特性や物理化学的特性を正確に反映していることが示唆された。本稿は小林正人准教授、中村壮伸博士、寺本央准教授、青木雅允氏、石橋卓氏、齋藤琢弥氏との共同研究に基づく。

1 背景

反応経路は、理論研究において化学反応を表現するための基礎となるものである。反応経路はポテンシャルエネルギー曲面 (PES) 上で定義され、これは N 原子系の場合、$(3N-6)$ 変数上のスカラー関数である [1, 2]。PES の一次鞍点と局所極小点はそれぞれ遷移状態 (TS) 構造と平衡構造 (EQ) を表している。TS を経由して 2 つの EQ 形状を結ぶ最急降下曲線は固有反応座標 (IRC) [3] と呼ばれ、素反応経路を表している。反応経路は原子の位置から $(3N-6)$ 変数が決定されるため、化学反応による EQ から EQ への配置変化を表現しやすく、化学反応機構全般の理解に役立つと考えられている。

反応経路地図（RRM）は、N 原子化学系の化学反応を特徴付ける素反応経路の集合体である [4, 5]。RRM は、EQ や TS のエネルギーに対応した重みを持つ重み付きグラフで表現される。RRM を表す重み付きグラフは、反応速度や寿命など、化学反応の物理的特性を表現することができる。PES は次元が高いため可視化が困難だが、RRM は平面上に可視化することができる。したがって、RRM は PES の情報を縮小したものであり、可視化できない対象を可視化できるものに変換したものである。そのため、RRM は N 原子系の化学反応の標準的な表現方法として広く使われている [6, 7]。

近年、グローバル反応ルートマッピング（GRRM）戦略により、複雑な分子系の RRM を自動的かつ広範囲に構築することが可能になった [8]。GRRM プログラムは 2 つの方法論–anharmonic

downward distortion following (ADDF) 法 [9, 10] と artificial force-induced reaction (AFIR) 法 [11, 12, 13] から構成されている。ADDF 法は、ポテンシャル極小からの異性化反応や解離反応に伴い、一次元ポテンシャルエネルギー曲線が極小付近の調和ポテンシャルに対して下方に歪むことを利用したものである。AFIR 法は、2 つの原子または原子団の間に人工的な力を加え、強制的に反応を誘導する、より直感的な方法である。ADDF 法や AFIR 法を適用することで、GRRM プログラムは自動的に EQ と TS の構造を順次特定することができる。このような特徴から、GRRM プログラムはナノクラスター触媒 [14] や有機合成設計 [15]、表面化学 [16] など、様々な分野で利用されている。しかしながら、GRRM 戦略の活用は、RRM の表現と特徴抽出の点で問題がある。一般に，グラフの可視化のレイアウトは任意である [17, 18]。これに対し、GRRM 戦略では、複数の素反応経路を含む大きなグラフが生成される。このような大きなグラフでは、同じグラフが異なる方法で恣意性をもって可視化され、グラフの本質的な特徴を捉えることが難しくなる。特に経路数が多いグラフでは、2 つの異なる可視化が同じグラフを表しているかどうかを判断することは困難である。RRM は既に PES を十分に縮小した表現であるが、複雑なシステムでは前述の問題を克服し、RRM から豊富な情報を抽出するために、さらなる縮小が必要である。

この問題を解決するために、いくつかの方法が提案されている。Disconnectivty graph（DG）[19, 20] と Persistent Homology（PH）[21, 22] は汎用性のある手法で有力な候補である。

DG は、PES 上の安定状態の階層を木構造で表示する、現在最も普及している可視化手法であり、現実的な分子系やトイモデルを問わず多くのシミュレーションデータに適用されている [1]。しかし、本来の定義では、DG は必ずしも直結していない 2 つの安定状態間の最低エネルギー遷移障壁しか表すことしかできない。そのため、RRM によく見られる循環的な経路を表現することができず、関連する拡張がその後開発されたものの、DG は RRM によく見られる循環的な経路を表現することができない [23]。

また、最近 Mirth らによって PES のトポロジー的特徴を抽出するために PH が利用された [22]。PH は周期的な経路を表現することが可能であるが、Mirth らの論文の定式化では、PES の全定常点を解析的に位置づける必要がある。したがって、彼らの研究は反応経路と PH の関係を理解するための出発点として捉えることができるが、彼らの方法を GRRM で得られた RRM にそのまま適用することはできない。

そこで、私たちは GRRM によって得られた実在物質の RRM に PH を適用する方法を提案する [24]。この手法を金属ナノクラスターや有機分子系の RRM に適用し、本手法の RRM の特徴を抽出する能力を明らかにした。

2 手法

2.1 AFIR/ADDF 法

本研究では、RRM を、与えられた原子構造の EQ 構造と、EQ の対を IRC に沿って結ぶ TS 構造（すなわち、一次鞍点）の集まりと、それに対応するエネルギーとで定義する。したがって、RRM は無向グラフ $G = (V, E)$ で表され、頂点（$w_V(v_i)$、i 番目の EQ のエネルギーに対応）と辺（$w_E(e_i)$、i 番目の TS のエネルギーに対応）にエネルギーの重みが設定されている。実際には、ある系の RRM

は GRRM プログラムで実装されている ADDF 法または AFIR 法を用いて構築することができる [25, 26]。

ADDF 法 [10] は、EQ 構造で近似した調和ポテンシャルと実際のポテンシャルエネルギーとの差として評価される PES の非調和下降歪み（ADD）に従う方法である。ADD を探索する効率的な方法は、力定数の 1/2 乗でスケールされた法線座標で描かれた EQ 中心の超球を導入し、その上で調和近似レベルのエネルギーが一定であるようにすることである。スケーリングされた超球面上の各最小値は ADD に対応するので、超球の半径を大きくすれば ADD に沿って反応経路をたどることができる。ADDF 法は概念的にはよく定義されているが，各 EQ でスケーリングされた超球面を構築するためにヘシアン計算が必要であり，実用的な応用は限定的である．また，非調和歪み定常経路の分岐があるため，ADD 経路の追跡で必ずしもすべての反応経路を探索できるわけでもない [27]。

これに対し、RRM を構成する手順として、より直感的で実用的なのが AFIR 法 [13] である。この方法では、対象系のフラグメント間に人工的な力を導入し、エネルギー障壁のない反応を誘発させる。人工的な力によって増大したポテンシャルエネルギーを最小化することで得られる反応経路を AFIR 経路と呼ぶ。その後、人工力項を除去し、最大エネルギー点を近似的な TS 構造として採用し、実際の TS 構造を最適化する。AFIR 法では、モデル衝突エネルギーに相当するパラメータ γ を用いて、加える力をスケーリングする。大雑把に言うと、γ 以下の反応障壁を持つ TS は AFIR 法で同定することができる。

2.2 Adjusted Weight Rank Clique Filtration

この節では、重み付き無向単純グラフのフィルター付きクリーク複体に対する PH について簡単に述べる。

まず単純グラフについて次のように書く [28, 29]。グラフ $G = (V, E)$ は有限、無向、単純なものを考える。RRM では、V と E がそれぞれ EQ と TS の集合に相当する。辺は $\overline{uv}$ と表す。頂点集合 V は有限であるとする (従って、辺集合 E も有限である)。G' が G の部分グラフであることを $G' \subset G$ と書く。

次に、クリークとクリーク複体を導入する。グラフ $G = (V, E)$ における *p-clique* とは、整数 $p \geq 2$ に対して、S が p 個の頂点を含み、任意の $u, v \in S$ が G の辺によって接続されているような V の部分集合のことである。1-*clique* とは、$v \in V$ を含む集合 $\{v\}$ のことである。G のすべてのクリークの集まりを G の *clique complex* といい、$X(G)$ と表記する。

RRM 上の構造エネルギーをグラフやクリーク複体で表現するために、グラフ上の実数値関数 $w_V : V \to \mathbf{R}$ と $w_E : E \to \mathbf{R}$ の対で重みを導入する。文脈から w が w_V を指すのか w_E を指すのかが明らかな場合は、両方の重み関数を w と表記する。ここでは、以下の条件を満たす重み関数 $w : G \to \mathbf{R}$ のみを考える。

$$w_V(u), w_V(v) \leq w_E(\overline{uv}) \text{ for } \overline{uv} \in E.$$

続いて、クリーク複体に対する重み付け $w^G : X(G) \to \mathbf{R}$ を次のように定義する。p-clique

$\sigma = \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}\}$, $(i_1 < \cdots < i_p)$, に対して

$$w^G(\sigma;\varepsilon) = \begin{cases} w_V(v_{i_1}) & (p=1) \\ w_E(\overline{v_{i_1}v_{i_2}}) & (p=2) \\ \max\{w^G(\tau;\varepsilon) \mid \tau\sigma\} + \varepsilon & (p \geq 3), \end{cases}$$

また同様に、

$$w^G(\sigma;\varepsilon) = \begin{cases} w_V(v_{i_1}) & (p=1) \\ \max\{w_E(\overline{v_{i_j}v_{i_k}}) \mid 1 \leq j < k \leq p\} + (p-2)\varepsilon & (p \geq 2), \end{cases}$$

ここで、ε は負の数でない実数のパラメータである。したがって、$w^G(\sigma;\varepsilon)$ を単に $w^G(\sigma)$ と表す。構成上、重み付け w^G は次の条件を満たす。

$$w^G(\tau) \leq w^G(\sigma) \text{ for cliques } \tau \subset \sigma.$$

このように定めると、クリーク複体に対する増大列を構成することができる。

まず、

$$X(G)(a) := \{\sigma \in X(G) \text{ c c } \mid w^G(\sigma) \leq a\}$$

を実数 $a \in \mathbf{R}$ に対して定義する。式 (1) の条件により、これは G のクリークの部分集合のうち重みが a 以下である部分集合である。構成から、$a < a'$ のとき、$X(G)(a) \subset X(G)(a')$ となる。したがって、w^G の値の増加列 $a_0 < a_1 < \cdots < a_l$ に対応する増加列がある。

$$X(G)(a_0) \subset X(G)(a_1) \subset \cdots \subset X(G)(a_l).$$

この増大列を、$\varepsilon \geq 0$ の重み付きグラフ (G, w) のクリーク複合体 $X(G)$ において、(ε-)*adjusted weight rank clique filtration* と呼ぶ。また、$\varepsilon = 0$ の場合、Petri らが提案した weight rank clique filtration と一致する [21]。

2.3 Persistet Homology

クリーク錯体は単体複体の構造を持っている。単体複体上のフィルトレーションが与えられれば、一般に PH を定義することができる。ここでは結果を参照するのに必要な情報のみまとめる。理論の詳細については [30] を参照せよ。

本研究結果を出力するのにあたって我々は Persistence Diagram（PD）或いは Persistence Barcode（PB）を用いる。PD とは、PH の各生成元について生成時刻 a_1 から消滅時刻 a_2 までを点 (a_1, a_2) として表したものであり、クリーク X に対して i 次元の PH を $\mathcal{D}_i(X)$ と表す。一方で PB は、PH の各生成元について生成時刻 a_1 から消滅時刻 a_2 までを区間 (a_1, a_2) として表し、同様に $\mathcal{B}_i(X)$ と表す。それぞれ図 1 のように表現される。

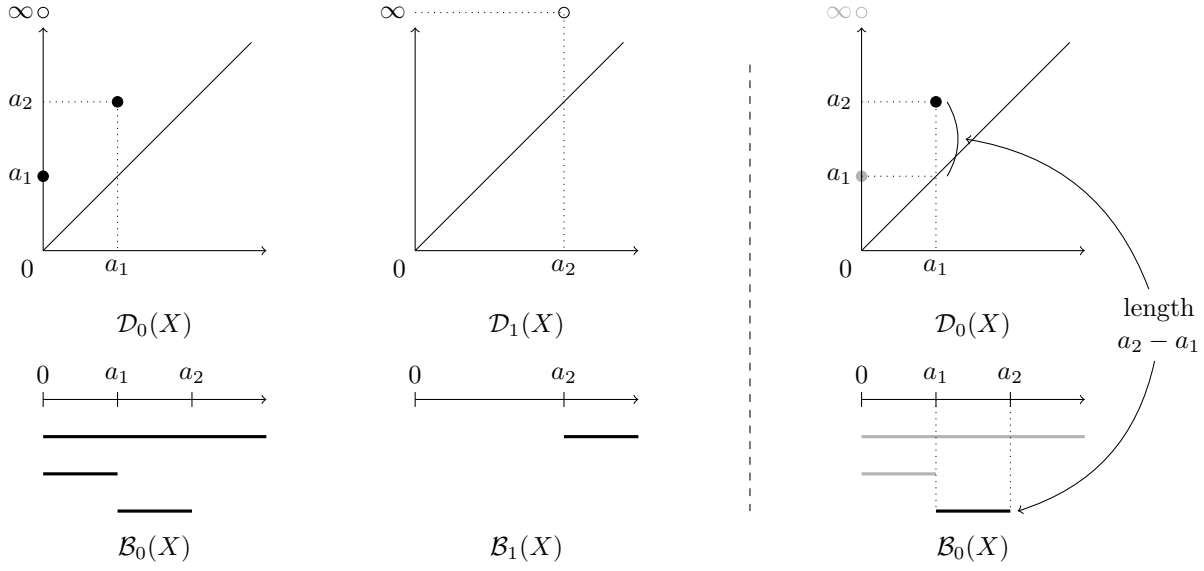


図 1: 0, 1 次の PD と PB

本稿中では 0、1 次の PH までしか取り扱わないため、PD をまとめて表現するために図 2 のように、$\mathcal{D}_1(X)$ を対角線を軸にして反転させ、まとめて表示する。

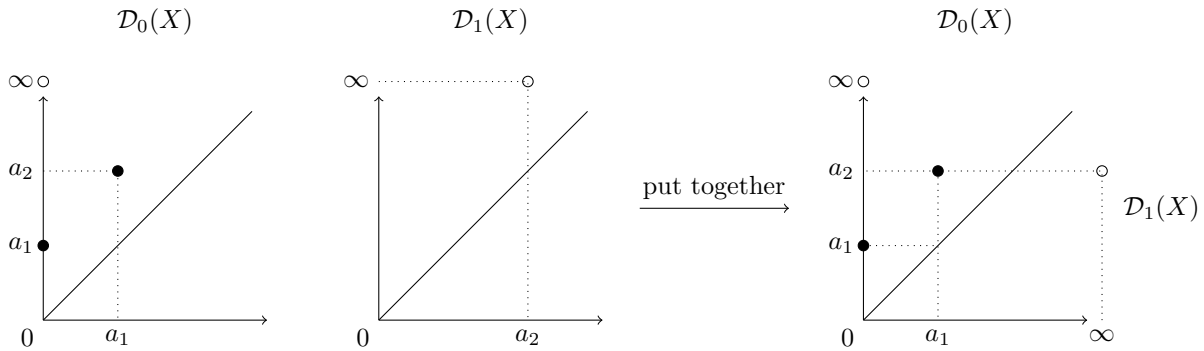
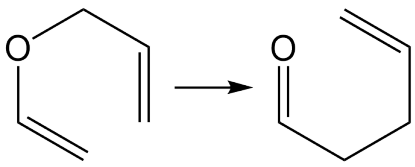


図 2: 本稿中での PD の表示

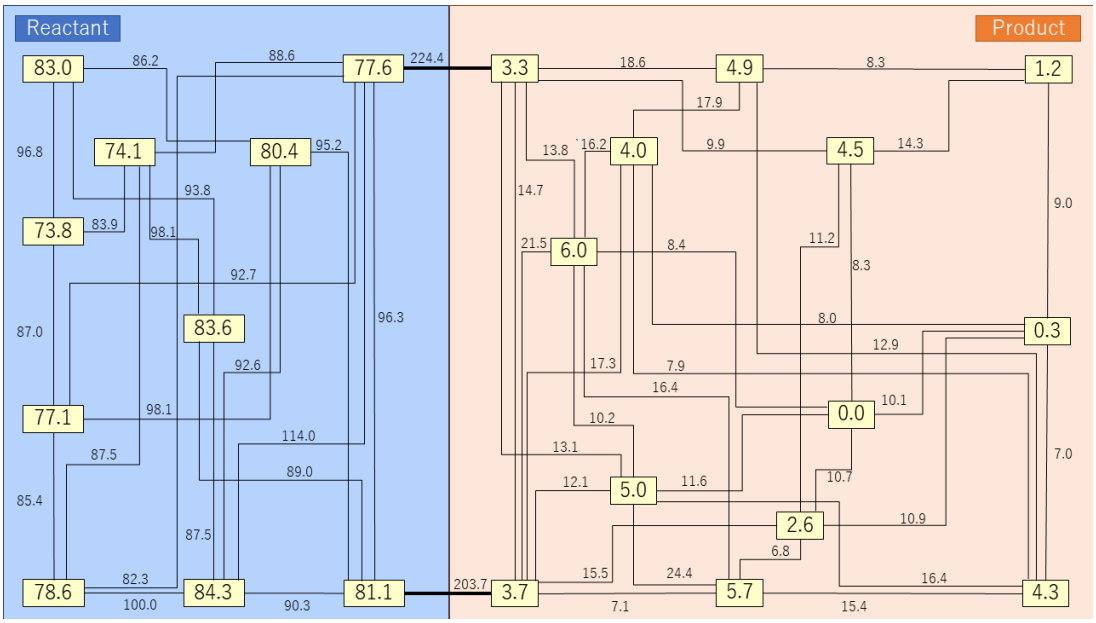
3 計算結果の紹介

貨幣金属ナノクラスター 5/7 原子 1/2 元系及びアリルビニルエーテルの RRM に対してパーシステントホモロジーを計算した。主な結果は次の 2 つである。

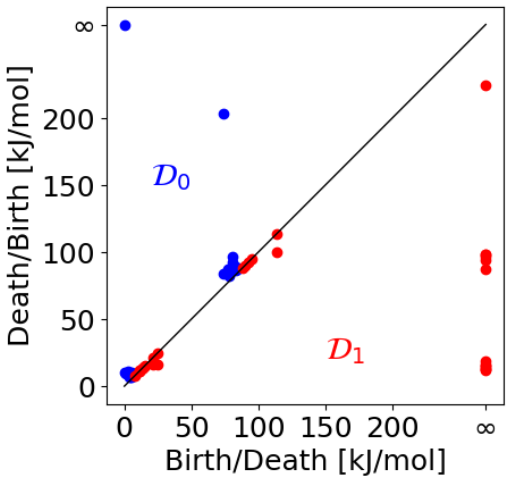
まずアリルビニルエーテル C_5H_8O のクライゼン転移反応：



に対して適用した。図 3(a) は [3,3]-シグマトロピック転位とコンフォメーション変化のみが含まれた部分的な RRM である。図 3(b) は、この部分 RRM のパーシステンスバーコードである。図中、エネルギーの高い左半分が反応物であるアリルビニルエーテル構造、エネルギーの低い右半分が生成物である γ, δ-不飽和カルボニル構造に対応している。$\mathcal{D}_0$ では、これらのプロットは対角線の周りに現れている。$(b, d) = (80, 200)$ 付近のプロットは、Claisen 転位の最低エネルギー TS に対応する。また、$(b, d) = (200, \infty)$ のプロットは、反応領域と生成領域が 2 つの経路によってつながっていることを示している。このように、本手法を適用したパーシステントバーコードはクライゼン転位の反応経路の特徴をよく反映している。



(a)



(b)

図 3: (a) アリルビニルエーテル C_5H_8O の部分 RRM と (b) その PD

次に合金ナノクラスターに対する適用を見てみる。X_3Y_2 (X, Y = Cu, Ag, or Au) の RRM について、異なる元素に対応するパーシスタンスバーコードを比較したのが図 4 である。同じ元素の組み合わせ（つまり、X_3Y_2 と X_2Y_3）では、持続性バーコードは似たような傾向を示す傾向がある。特に、Au と Cu の組み合わせでは、PH の発生源は 50 kcal/mol までの広いエネルギー範囲で現れるが、他の組み合わせでは、ほとんどが 30 kcal/mol までのエネルギー範囲で現れる。Ag と Cu の組合せでは、他の組合せに比べて生成元の数が比較的少なくなっている。逆に、Au と Ag の組み合わせでは、特に 1 次元の消滅が無限大の生成元の数が他のものよりも多くなっている。このことは、前述の解析が 2 つの金属元素の親和性や金属合金の性質を抽出するために利用できることを示唆している。

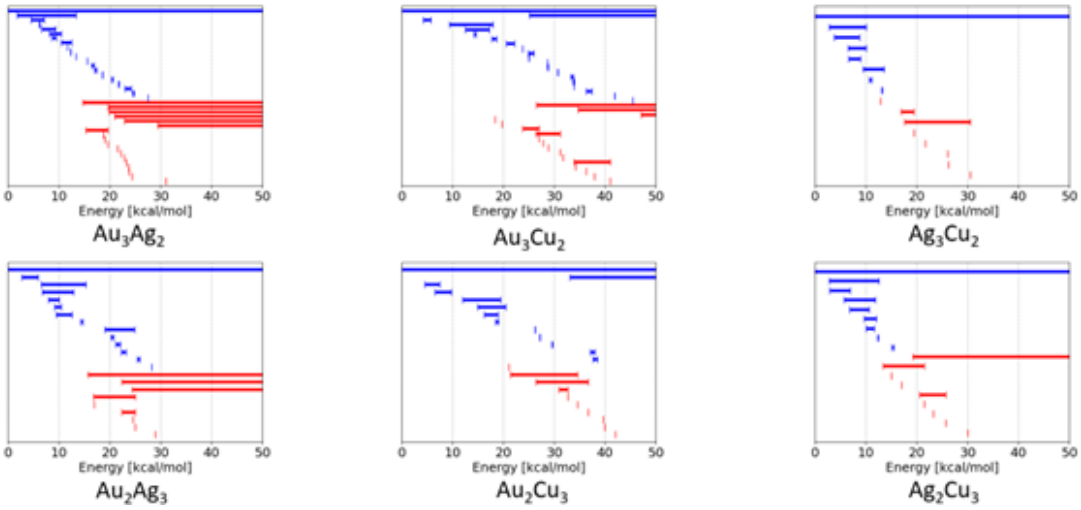


図 4: X_3Y_2 (X, Y = Cu, Ag, or Au) についての PB

以上のように本手法は RRM の特徴を抽出し、金属の親和性など化学的性質を捉えられることを示唆する結果を得た。当日は他の計算結果についても紹介する。

参考文献

[1] David Wales. *Energy Landscapes: Applications to Clusters, Biomolecules and Glasses.* Cambridge University Press, 2003.

[2] Paul G. Mezey. *Potential energy hypersurfaces.* Elsevier, Amsterdam, 1987.

[3] Kenichi Fukui. Formulation of the reaction coordinate. *The Journal of Physical Chemistry*, Vol. 74, No. 23, pp. 4161–4163, 11 1970.

[4] Hiroko Satoh, Tomohiro Oda, Kumiyo Nakakoji, Takeaki Uno, Satoru Iwata, and Koichi Ohno. RMapDB: chemical reaction route map data for quantum mechanical-based data chemistry, 2020.

[5] GRRM-GDSP (Institute for Quantum Chemical Exploration).

[6] Hiroko Satoh, Tomohiro Oda, Kumiyo Nakakoji, Takeaki Uno, Satoru Iwata, and Koichi

Ohno. "Maizo"-chemistry Project: toward Molecular- and Reaction Discovery from Quantum Mechanical Global Reaction Route Mappings. *Journal of Computer Chemistry, Japan*, Vol. 14, No. 3, pp. 77–79, 2015.

[7] Hiroko Satoh, Tomohiro Oda, Kumiyo Nakakoji, Takeaki Uno, Hiroaki Tanaka, Satoru Iwata, and Koichi Ohno. Potential Energy Surface-Based Automatic Deduction of Conformational Transition Networks and Its Application on Quantum Mechanical Landscapes of ¡scp¿d¡/scp¿ -Glucose Conformers. *Journal of Chemical Theory and Computation*, Vol. 12, No. 11, pp. 5293–5308, 11 2016.

[8] Satoshi Maeda, Koichi Ohno, and Keiji Morokuma. Systematic exploration of the mechanism of chemical reactions: the global reaction route mapping (GRRM) strategy using the ADDF and AFIR methods. *Physical Chemistry Chemical Physics*, Vol. 15, No. 11, p. 3683, 2013.

[9] Koichi Ohno and Satoshi Maeda. A scaled hypersphere search method for the topography of reaction pathways on the potential energy surface. *Chemical Physics Letters*, Vol. 384, No. 4-6, pp. 277–282, 1 2004.

[10] Satoshi Maeda, Tetsuya Taketsugu, Keiji Morokuma, and Koichi Ohno. Anharmonic downward distortion following for automated exploration of quantum chemical potential energy surfaces. *Bulletin of the Chemical Society of Japan*, Vol. 87, No. 12, 2014.

[11] Satoshi Maeda and Keiji Morokuma. A systematic method for locating transition structures of A+B → X type reactions. *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 132, No. 24, p. 241102, 6 2010.

[12] Satoshi Maeda, Tetsuya Taketsugu, and Keiji Morokuma. Exploring transition state structures for intramolecular pathways by the artificial force induced reaction method. *Journal of Computational Chemistry*, Vol. 35, No. 2, pp. 166–173, 1 2014.

[13] Satoshi Maeda, Yu Harabuchi, Makito Takagi, Tetsuya Taketsugu, and Keiji Morokuma. Artificial Force Induced Reaction (AFIR) Method for Exploring Quantum Chemical Potential Energy Surfaces. *Chemical Record*, Vol. 16, No. 5, 2016.

[14] Takeshi Iwasa, Takaaki Sato, Makito Takagi, Min Gao, Andrey Lyalin, Masato Kobayashi, Ken-ichi Shimizu, Satoshi Maeda, and Tetsuya Taketsugu. Combined Automated Reaction Pathway Searches and Sparse Modeling Analysis for Catalytic Properties of Lowest Energy Twins of Cu$_{13}$. *The Journal of Physical Chemistry A*, Vol. 123, No. 1, pp. 210–217, 1 2019.

[15] Hiroki Hayashi, Hitomi Katsuyama, Hideaki Takano, Yu Harabuchi, Satoshi Maeda, and Tsuyoshi Mita. In silico reaction screening with difluorocarbene for N-difluoroalkylative dearomatization of pyridines. *Nature Synthesis*, Vol. 1, pp. 804–814, 8 2022.

[16] Kanami Sugiyama, Yosuke Sumiya, Makito Takagi, Kenichiro Saita, and Satoshi Maeda. Understanding CO oxidation on the Pt(111) surface based on a reaction route network. *Physical Chemistry Chemical Physics*, Vol. 21, No. 26, pp. 14366–14375, 2019.

[17] Giuseppe Di Battista, Peter Eades, Roberto Tamassia, and Ioannis G Tollis. Algorithms for drawing graphs: an annotated bibliography. *Computational Geometry*, Vol. 4, No. 5, pp. 235–282, 10 1994.

[18] I. Herman, G. Melancon, and M.S. Marshall. Graph visualization and navigation in information visualization: A survey. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, Vol. 6, No. 1, pp. 24–43, 2000.

[19] Oren M. Becker and Martin Karplus. The topology of multidimensional potential energy surfaces: Theory and application to peptide structure and kinetics. *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 106, No. 4, pp. 1495–1517, 1 1997.

[20] David J. Wales. The energy landscape as a unifying theme in molecular science. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 363, No. 1827, pp. 357–377, 2 2005.

[21] Giovanni Petri, Martina Scolamiero, Irene Donato, and Francesco Vaccarino. Topological Strata of Weighted Complex Networks. *PLoS ONE*, Vol. 8, No. 6, p. e66506, 6 2013.

[22] Joshua Mirth, Yanqin Zhai, Johnathan Bush, Enrique G. Alvarado, Howie Jordan, Mark Heim, Bala Krishnamoorthy, Markus Pflaum, Aurora Clark, Y Z, and Henry Adams. Representations of energy landscapes by sublevelset persistent homology: An example with n-alkanes. *The Journal of Chemical Physics*, Vol. 154, No. 11, p. 114114, 3 2021.

[23] T. Okushima, T. Niiyama, K. S. Ikeda, and Y. Shimizu. Connectivity graph: Multiple connectivity on potential energy surface does affect the dynamics. *Physical Review E*, Vol. 76, No. 3, p. 036109, 9 2007.

[24] Burai Murayama, Masato Kobayashi, Masamitsu Aoki, Suguru Ishibashi, Takuya Saito, Takenobu Nakamura, Hiroshi Teramoto, and Tetsuya Taketsugu. Characterizing Reaction Route Map of Realistic Molecular Reactions based on Weight Rank Clique Filtration of Persistent Homology. *arXiv e-prints*, p. arXiv:2211.15067, November 2022.

[25] Satoshi Maeda, Yu Harabuchi, Makito Takagi, Kenichiro Saita, Kimichi Suzuki, Tomoya Ichino, Yosuke Sumiya, Kanami Sugiyama, and Yuriko Ono. Implementation and performance of the artificial force induced reaction method in the GRRM17 program. *Journal of Computational Chemistry*, Vol. 39, No. 4, pp. 233–251, 2 2018.

[26] Satoshi Maeda and Yu Harabuchi. Exploring paths of chemical transformations in molecular and periodic systems: An approach utilizing force. *WIREs Computational Molecular Science*, Vol. 11, No. 6, 11 2021.

[27] Shuichi Ebisawa, Takuro Tsutsumi, and Tetsuya Taketsugu. Geometric analysis of anharmonic downward distortion following paths. *Journal of Computational Chemistry*, Vol. 42, No. 1, pp. 27–39, 1 2021.

[28] Reinhard Diestel. *Graph Theory*, Vol. 173. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2017.

[29] Dmitry Kozlov. *Combinatorial Algebraic Topology*, Vol. 21. Springer Berlin Heidelberg,

Berlin, Heidelberg, 2008.

[30] Hiraoka Yasuaki. *Plotein Structure and Topology:Introduction to Persistent Homology*. Kyoritsu Shuppan, 2013.

確率過程と微分型非線形シュレディンガー方程式

佐藤 純 (Jun Sato)
東京工芸大学 工学部工学科 情報コース

概 要

非対称単純排他過程 (Asymmetric Simple Exclusion Process: ASEP) は，排除体積効果を持つ粒子が左右に非対称なレートでホッピングする古典確率過程模型である．この排除体積効果をボソン系の相互作用で擬似的に表せることが知られている [1]．本レポートでは，その詳細な計算を紹介する．このボソン場の運動方程式は，微分型非線形シュレディンガー方程式 (Derivative Non-Linear Schrödinger equation: DNLS) という可積分な非線形偏微分方程式で記述される．逆散乱法を用いてこの初期値問題の解を構成し，元々の確率過程のダイナミクスとの対応を議論することを試みる．

1 ASEP

まず，確率過程模型である ASEP を解説する．セル数が L の 1 次元格子を考え，各セルは粒子が「いる」か「いない」かの 2 状態をとり，各粒子は左右に確率的にホッピングする．左右へのホッピングレートを q, p とする．ただし，ホッピングの行き先のセルに既に粒子がいる場合には，ホッピングは起こらないとする（排除体積効果）．

1.1 状態ベクトル

セル i の粒子数を表す変数 n_i を導入する．今の場合，$n_i = 0, 1$ の 2 通りの値をとる．すなわち，粒子が「いる」,「いない」状態をそれぞれ $n_i = 1, 0$ で表すことにする．系全体の状態をまとめて $n := (n_1, n_2, \cdots, n_L)$ と書くことにする．この状態に確定した状態ベクトルを

$$|n\rangle = |n_1, n_2, \cdots, n_L\rangle$$

と書く．これが確率的状態ベクトル空間の基底をなす．すなわち，時刻 t において系が状態 n をとる確率を $\psi(n,t)$ と書けば，系の確率的状態ベクトルは

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \psi(n,t)|n\rangle \tag{1.1}$$

と書ける．

1.2 マスター方程式

系の時間発展はマスター方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi(n,t) = \sum_{\substack{n' \\ n' \neq n}} \psi(n',t)\mathfrak{W}(n' \to n) - \sum_{\substack{n' \\ n' \neq n}} \psi(n,t)\mathfrak{W}(n \to n')$$

に従う．ただし，n は粒子の配置パターンを表し，$\psi(n,t)$ は時刻 t において配置 n を取る確率を表す．$\mathfrak{W}(n \to n')$ は配置 n から n' への遷移レートを表す．確率遷移行列 $\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{ASEP}}$ を使ってベクトル形式で書くと，

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = -\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{ASEP}}|\psi(t)\rangle} \tag{1.2}$$

となる．

1.3 確率遷移行列

セル i にいる粒子を「消す」演算子を $\hat{s}_i^+$, セル i に粒子を「付ける」演算子を $\hat{s}_i^-$, セル i の粒子数を「数える」演算子を $\hat{n}_i$ とする．基底ベクトル $|n_1, n_2, \cdots, n_L\rangle$ への作用は,

$$\begin{aligned}
&\hat{s}_i^+|\cdots,0,\cdots\rangle = 0, \quad \hat{s}_i^+|\cdots,1,\cdots\rangle = |\cdots,0,\cdots\rangle, \\
&\hat{s}_i^-|\cdots,0,\cdots\rangle = |\cdots,1,\cdots\rangle, \quad \hat{s}_i^-|\cdots,1,\cdots\rangle = 0, \\
&\hat{n}_i|\cdots,0,\cdots\rangle = 0, \quad \hat{n}_i|\cdots,1,\cdots\rangle = |\cdots,1,\cdots\rangle
\end{aligned}$$

で与えられ，基底を

$$|n_i=0\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad |n_i=1\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

ととって行列表示すれば，

$$\hat{s}_i^+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \hat{s}_i^-=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \hat{n}_i=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

となる．これを使って確率遷移行列 $\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{ASEP}}$ は，

$$\begin{aligned}-\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{ASEP}}=\sum_{j=1}^{L-1}&\left[p\left\{\hat{s}_j^+\hat{s}_{j+1}^- - \hat{n}_j(1-\hat{n}_{j+1})\right\}+q\left\{\hat{s}_j^-\hat{s}_{j+1}^+-(1-\hat{n}_j)\hat{n}_{j+1}\right\}\right]\\&+\alpha\left\{\hat{s}_1^- -(1-\hat{n}_1)\right\}+\gamma(\hat{s}_1^+-\hat{n}_1)+\beta(\hat{s}_L^+-\hat{n}_L)+\delta\left\{\hat{s}_L^- -(1-\hat{n}_L)\right\}\end{aligned}\tag{1.3}$$

と書ける．ただし，左端での流入レート，右端での流出レート，左端での流出レート，右端での流入レートをそれぞれ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ とした．ここで極限 $L\to\infty$ を考え，簡単のため境界の影響を無視すると

$$\boxed{-\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{ASEP}}=\sum_j\left[p\hat{s}_j^+\hat{s}_{j+1}^- + q\hat{s}_j^-\hat{s}_{j+1}^+-(p+q)\hat{n}_j(1-\hat{n}_{j+1})\right]}\tag{1.4}$$

と書ける．

1.4 状態ベクトルの規格化

$\psi(n,t)$ は確率を表すので，任意の時刻 t で

$$\sum_n\psi(n,t)=1$$

を満たす必要がある．したがって，状態ベクトルの規格化条件は

$$\langle s|\psi(t)\rangle=1$$

と書ける．ここで，射影状態 $\langle s|$ を

$$\langle s|:=\langle 0|\exp\left(\sum_{j=1}^L\hat{s}_j^+\right)=\sum_n\langle n|$$

で定めた．これは，任意の粒子配置が等確率で実現している状態を表している．ここで，確率遷移行列の性質 $\langle s|\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{ASEP}}=0$ より

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle s|\psi(t)\rangle=\langle s|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle\right)=-\langle s|\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{ASEP}}|\psi(t)\rangle=0$$

が成り立つので，ある時刻 t で規格化されていれば，任意の時刻での規格化が保証される．

1.5 物理量の期待値

ある物理量 A が粒子配置 n でとる値を $A(n)$ と書き，状態ベクトル $|n\rangle$ に

$$\hat{A}|n\rangle=A(n)|n\rangle$$

と対角に作用する対角行列を $\hat{A}$ と書くことにする．

確率的状態 $|\psi(t)\rangle=\sum_n\psi(n,t)|n\rangle$ における物理量 A の期待値は

$$\langle A\rangle=\sum_n\psi(n,t)A(n)$$

と書けるので，これは射影状態 $\langle s|$ を使って

$$\langle A\rangle=\langle s|\hat{A}|\psi(t)\rangle$$

と書ける．

1.6 粒子密度の時間発展

位置 k の粒子密度（粒子の存在確率）の時間発展を考える．位置 k の粒子数 n_k の期待値

$$\langle n_k \rangle = \sum_n \psi(n,t) n_k$$

が粒子の存在確率を表すが，これの時間発展は，

$$\partial_t \langle n_k \rangle = \sum_n \big\{ \partial_t \psi(n,t) \big\} n_k$$

に従う．ここで，$\partial_t \psi(n,t)$ の情報はマスター方程式から得られるはずである．展開式 (1.1) をマスター方程式 (1.2) に代入して，

$$\sum_n \big\{ \partial_t \psi(n,t) \big\} |n\rangle = -\sum_n \psi(n,t) \hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{ASEP}} |n\rangle$$

となるが，これに左から $\langle n|$ を作用させて，

$$\partial_t \psi(n,t) = \sum_{n'} \psi(n',t) \langle n| - \hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{ASEP}} |n'\rangle \tag{1.5}$$

を得る．したがって粒子密度の時間発展は

$$\partial_t \langle n_k \rangle = \sum_{n,n'} n_k \psi(n',t) \langle n| - \hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{ASEP}} |n'\rangle = \sum_n \psi(n,t) \sum_{n'} n'_k \langle n'| - \hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{ASEP}} |n\rangle$$

と書けるので，

$$A_k(n) := \sum_{n'} n'_k \langle n'| - \hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{ASEP}} |n\rangle \tag{1.6}$$

を定義すれば

$$\partial_t \langle n_k \rangle = \langle A_k \rangle$$

と書ける．$A_k(n)$ の定義式 (1.6) に $\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{ASEP}}$ の表式 (1.3) を代入すると，境界の影響がない $(2 \le k \le L-1)$ とき

$$\begin{aligned}
A_k(n) = \sum_{j=1}^{L-1} \Big[& p\big\{ n_j(1-n_{j+1})(n_k - \delta_{k,j} + \delta_{k,j+1}) - n_j(1-n_{j+1}) n_k \big\} \\
& + q\big\{ (1-n_j) n_{j+1} (n_k + \delta_{k,j} - \delta_{k,j+1}) - (1-n_j) n_{j+1} n_k \big\} \Big] \\
= {} & p\big\{ n_{k-1}(1-n_k) - n_k(1-n_{k+1}) \big\} + q\big\{ (1-n_k) n_{k+1} - (1-n_{k-1}) n_k \big\} \\
= {} & p n_{k-1} + q n_{k+1} - (p+q) n_k + (p-q) n_k (n_{k+1} - n_{k-1})
\end{aligned}$$

より，

$$\boxed{\partial_t \langle n_k \rangle = p \langle n_{k-1} \rangle + q \langle n_{k+1} \rangle - (p+q) \langle n_k \rangle + (p-q) \langle n_k (n_{k+1} - n_{k-1}) \rangle} \tag{1.7}$$

を得る．右辺最初の 3 項は左右への非対称ホッピングを表し，第 4 項は排除体積効果による非線形相互作用を表す．

2 非排他的ボソン系

非排他的に 1 次元格子をホップするボソン系を考える．ASEP における排他的効果をボソンの非線形相互作用項によって表し，同じ運動方程式 (1.7) を与えることを考える．

2.1 生成消滅演算子

生成消滅演算子 $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ を交換関係

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$$

で定める．よく知られているように，真空状態 $|0\rangle$ が関係式

$$\hat{a}|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1$$

により定まり，n 粒子状態は真空に生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を n 回かけることによって

$$|n\rangle := \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\hat{a}^\dagger\right)^n |0\rangle, \quad \langle n|m\rangle = \delta_{n,m}$$

と構成される．n 粒子状態 $|n\rangle$ への生成消滅演算子の作用は

$$\begin{aligned}
\hat{a}^\dagger|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\hat{a}^\dagger\right)^{n+1} |0\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \\
\hat{a}|n\rangle &= \frac{n}{\sqrt{n!}} \left(\hat{a}^\dagger\right)^{n-1} |0\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle
\end{aligned}$$

となる．

2.2 正規直交基底

サイト数 L の 1 次元格子を考える．サイト j における生成消滅演算子を $\hat{a}_j$, $\hat{a}_j^\dagger$ とする．サイト j の粒子数が n_j である状態を

$$|n_1, \cdots, n_L\rangle := \frac{1}{\sqrt{n_1! \cdots n_L!}} \left(\hat{a}_1^\dagger\right)^{n_1} \cdots \left(\hat{a}_L^\dagger\right)^{n_L} |0\rangle$$

で定めれば，規格化条件

$$\langle n_1, \cdots, n_L | n_1', \cdots, n_L'\rangle = \delta_{n_1,n_1'} \cdots \delta_{n_L,n_L'}$$

を満たす．排他的な ASEP の場合は $n_j = 0, 1$ の 2 通りのみであったが，今の場合は非負の全整数 $n_j = 0, 1, 2, \cdots$ をとりうることに注意.

2.3 射影状態

ASEP の場合と同様に射影状態 $\langle s|$ を

$$\langle s| := \langle 0| \exp\left(\sum_{j=1}^{L} \hat{a}_j\right)$$

で定める．ASEP の場合と違って，高次の項が消えないことに注意して展開すると

$$\begin{aligned}
\langle s| &= \cdots + \left(\frac{1}{N!}\langle 0| \left(\hat{a}_1\right)^{n_1} \cdots \left(\hat{a}_L\right)^{n_L}\right) \times \frac{N!}{n_1! \cdots n_L!} + \cdots \qquad (N = n_1 + n_2 + \cdots + n_L) \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_L=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n_1! \cdots n_L!}} \langle n_1, \cdots, n_L|
\end{aligned}$$

となる．ここで，ASEP の場合と同様に，全系の粒子配置を表す変数を $n := (n_1, \cdots, n_L)$ と略記して

$$\langle s| = \sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle n|$$

と書くことにする．ただし，

$$\sqrt{n!} := \sqrt{n_1! \cdots n_L!} \qquad \Big(n = (n_1, \cdots, n_L)\Big)$$

と略記した.

2.4 確率状態ベクトル

時刻 t において粒子配置 $n=(n_1,\cdots,n_L)$ をとる確率が $\psi(n,t)$ となるような確率的状態ベクトルを

$$|\psi(t)\rangle=\sum_n \psi(n,t)\left(\hat{a}_1^\dagger\right)^{n_1}\cdots\left(\hat{a}_L^\dagger\right)^{n_L}|0\rangle=\sum_n \sqrt{n!}\,\psi(n,t)|n\rangle \tag{2.1}$$

で定めれば，規格化条件は射影状態 $\langle s|=\sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle n|$ を使って

$$\langle s|\psi(t)\rangle=\sum_n \psi(n,t)=1$$

と書ける．

2.5 物理量の期待値

ある物理量 A が粒子配置 n でとる値を $A(n)$ と書き，状態ベクトル $|n\rangle$ に

$$\hat{A}|n\rangle=A(n)|n\rangle$$

と対角に作用する対角行列を $\hat{A}$ と書くことにする．

確率的状態 $|\psi(t)\rangle=\sum_n \sqrt{n!}\,\psi(n,t)|n\rangle$ における物理量 A の期待値は

$$\langle A\rangle=\sum_n \psi(n,t)A(n)$$

と書けるので，これは射影状態 $\langle s|=\sum_n \frac{1}{\sqrt{n!}}\langle n|$ を使って

$$\langle A\rangle=\langle s|\hat{A}|\psi(t)\rangle$$

と書ける．

2.6 マスター方程式

非排他的ボソン系のハミルトニアン $\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{boson}}$ を

$$\boxed{-\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{boson}}:=\sum_j\left[p\hat{a}_{j-1}\hat{a}_j^\dagger+q\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_{j+1}-(p+q)\hat{n}_j+(p-q)(\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_{j+1}\hat{n}_j-\hat{n}_j\hat{n}_{j+1})\right]} \tag{2.2}$$

で定める．式 (1.4) および (1.7) との類似性に注意．系の確率的状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ がマスター方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle=-\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{boson}}|\psi(t)\rangle \tag{2.3}$$

に従って時間発展するとすると，粒子数の期待値の時間発展が ASEP の場合 (式 (1.7)) と同じになることを，次節で示す．

2.7 粒子数の時間発展

位置 k の粒子数 n_k の期待値

$$\langle n_k\rangle=\sum_n \psi(n,t)n_k$$

の時間発展は,

$$\partial_t\langle n_k\rangle=\sum_n\left\{\partial_t\psi(n,t)\right\}n_k$$

に従う．ここで，$\partial_t\psi(n,t)$ の情報はマスター方程式 (2.3) から得られる．展開式 (2.1) をマスター方程式 (2.3) に代入して，

$$\sum_n \sqrt{n!}\,\{\partial_t\psi(n,t)\}|n\rangle = -\sum_n \sqrt{n!}\,\psi(n,t)\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{boson}}|n\rangle$$

となるが，これに左から $\langle n|$ を作用させて，

$$\sqrt{n!}\,\partial_t\psi(n,t) = \sum_{n'} \sqrt{n'!}\,\psi(n',t)\langle n|-\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{boson}}|n'\rangle$$

を得る．したがって粒子密度の時間発展は

$$\begin{aligned}\partial_t\langle n_k\rangle &= \sum_{n,n'} \frac{\sqrt{n'!}}{\sqrt{n!}} n_k\psi(n',t)\langle n|-\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{boson}}|n'\rangle \\ &= \sum_n \psi(n,t)\sum_{n'} \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n'!}} n'_k\langle n'|-\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{boson}}|n\rangle\end{aligned}$$

と書けるので，

$$A_k(n) := \sum_{n'} \frac{\sqrt{n!}}{\sqrt{n'!}} n'_k\langle n'|-\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{boson}}|n\rangle \tag{2.4}$$

を定義すれば

$$\partial_t\langle n_k\rangle = \langle A_k\rangle$$

と書ける．$A_k(n)$ の定義式 (2.4) に $\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{boson}}$ の表式 (2.2) を代入すると，

$$\begin{aligned}A_k(n) = \sum_j \Bigg[&\sqrt{\frac{n_{j-1}}{n_j+1}}p\sqrt{n_{j-1}}\sqrt{n_j+1}(n_k+\delta_{k,j}-\delta_{k,j-1}) \\ &+\sqrt{\frac{n_{j+1}}{n_j+1}}q\sqrt{n_{j+1}}\sqrt{n_j+1}(n_k+\delta_{k,j}-\delta_{k,j+1}) \\ &-(p+q)n_jn_k \\ &+(p-q)\left(\sqrt{\frac{n_{j+1}}{n_j+1}}\sqrt{n_j+1}\sqrt{n_{j+1}}n_j(n_k+\delta_{k,j}-\delta_{k,j+1})-n_jn_{j+1}n_k\right)\Bigg] \\ = \sum_j \Big[&pn_{j-1}(\delta_{k,j}-\delta_{k,j-1})+qn_{j+1}(\delta_{k,j}-\delta_{k,j+1})+(p-q)\left(n_{j+1}n_j(\delta_{k,j}-\delta_{k,j+1})\right)\Big] \\ = p(&n_{k-1}-n_k)+q(n_{k+1}-n_k)+(p-q)(n_kn_{k+1}-n_{k-1}n_k)\end{aligned} \tag{2.5}$$

より，

$$\boxed{\partial_t\langle n_k\rangle = p\langle n_{k-1}\rangle + q\langle n_{k+1}\rangle - (p+q)\langle n_k\rangle + (p-q)\langle n_k(n_{k+1}-n_{k-1})\rangle}$$

となり，ASEP の場合の式 (1.7) と完全に一致する．

3　まとめ

本レポートではまず，古典確率過程である ASEP とそのダイナミクスの定式化を紹介した．その後，1 点関数が同じダイナミクスに従うボソン系の構成法 [1] を紹介した．これを連続化して場の理論に移行すると，微分型非線形 Schrödinger 方程式が現れる．有限粒子数の効果と非平衡ダイナミクスの数値的な解析は，文献 [2] によってなされている．逆散乱法によるソリトン解の構成と確率過程におけるその対応物の研究は，重要な問題として残されている．

参考文献

[1] T. Sasamoto and M. Wadati, J. Phys. Soc. Jpn **67** 3 784 (1998)

[2] Y. Ishiguro, J. Sato, K. Nishinari, J. Phys. Soc. Jpn **90** 114008 (2021).

体の拡大による高次元周期再帰方程式の生成

株式会社ブレインパッド
弓林　司 (Tsukasa YUMIBAYASHI)

概要

n 周期再帰方程式とは任意の初期点が n 周期点であるような漸化式である．本発表では任意の n 周期的再帰方程式を基に “体の拡大” を用いて高次元 n 周期再帰方程式を (無限個) 生成する方法について紹介する．

1　導入

n 周期再帰方程式 (Periodic Recurrence Equation; PRE)[1, 2] は任意の初期点が n 周期点であるような漸化式である[*1]：

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{K}^d \to \mathbb{K}^d \text{ is PRE of period } n \quad \Leftrightarrow \ {}^{\forall}\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^d,\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{F}^{(n)}(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

1 次元 2 周期再帰方程式の例

$$x^{(n+1)} = \frac{a}{x^{(n)}}, \quad a \neq 0, \quad x^{(n)}, x^{(n+1)}, a \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

$$x^{(0)} \to x^{(1)} = \frac{a}{x^{(0)}} \to x^{(2)} = \frac{a}{\frac{a}{x^{(0)}}} = x^{(0)} \tag{3}$$

2 次元 5 周期再帰方程式の例

$$x^{(n+1)} = \frac{1 + x^{(n)}}{y^{(n)}}, \quad y^{(n+1)} = x^{(n)}, \quad x^{(n)}, y^{(n)}, x,^{(n+1)} y^{(n+1)} \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) &\to \left(x^{(1)}, y^{(1)}\right) = \left(\frac{1 + x^{(0)}}{y^{(0)}}, x^{(0)}\right) \to \left(x^{(2)}, y^{(2)}\right) = \left(\frac{1 + x^{(0)} + y^{(0)}}{x^{(0)} y^{(0)}}, \frac{1 + x^{(0)}}{y^{(0)}}\right) \to \\
&\to \left(x^{(3)}, y^{(3)}\right) = \left(\frac{1 + y^{(0)}}{x^{(0)}}, \frac{1 + x^{(0)} + y^{(0)}}{x^{(0)} y^{(0)}}\right) \to \left(x^{(4)}, y^{(4)}\right) = \left(y^{(0)}, \frac{1 + y^{(0)}}{x^{(0)}}\right) \to \\
&\to \left(x^{(5)}, y^{(5)}\right) = \left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

[*1] 本発表では簡単の為, PRE として有理写像力学系の形のものを考えているが, 本発表の議論は一般の漸化式, 即ち, 一般の差分方程式の形の PRE について成り立つ.

PRE は任意の初期点に対し, その軌道が解っている系であり, 可積分系分野において重要な研究対象として期待されていた. しかし, PRE の例は比較的最近まで [1, 2, 3, 4] などで与えられた低い次元のものしか知られておらず, PRE についての研究はあまり盛り上がっていなかった.

そんな中 [5] において不変周期点代数多様体（Invariant Variety of Periodic Points; IVPP）[6][7][8] を持つ写像力学系を用いて多くの高次元高周期 PRE が発見された. IVPP とは, 不変量を持つ写像力学系に対し, その周期点集合が不変量一定面に一致する様なもので,PRE は写像力学系を IVPP 上に制限することによって得ることができる:

IVPP を持つ写像力学系の例

写像 (2 次元 Möbius 写像)

$$x^{(n+1)} = x^{(n)}\frac{1-y^{(n)}}{1-x^{(n)}}, y^{(n+1)} = y^{(n)}\frac{1-x^{(n)}}{1-y^{(n)}}, \quad x^{(n)}, y^{(n)}, x,^{(n+1)} y^{(n+1)} \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z} \tag{6}$$

不変量

$$x^{(n+1)}y^{(n+1)} = x^{(n)}y^{(n)} = \cdots = x^{(0)}y^{(0)} =: r\left(x^{(0)}, y^{(0)} =\right) \tag{7}$$

3 周期 IVPP

$$\begin{aligned} 3\text{ 周期点集合} &= \left\{\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) \in \mathbb{C} \,\middle|\, \left(x^{(3)}\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right), y^{(3)}\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)\right) = \left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)\right\} \\ &= \left\{\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) \in \mathbb{C} \,\middle|\, r\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) + 3 = 0\right\} \end{aligned} \tag{8}$$

3 周期再帰方程式

$$x^{(n+1)} = \frac{3+x^{(n)}}{1-x^{(n)}}, \quad x^{(n)}, x^{(n+1)} \in \mathbb{C}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{9}$$

$$x^{(0)} \to x^{(1)} = \frac{3+x^{(0)}}{1-x^{(0)}} \to x^{(2)} = \frac{-3+x^{(0)}}{1-x^{(0)}} \to x^{(3)} = x^{(0)} \tag{10}$$

本発表では高次元 PRE を生成するためのアルゴリズムを紹介したい. その為に関連する先行研究 [9] について簡単に紹介する. 上記例にあるように PRE の周期性は “シンボリックな計算” によって得られることが解る. 即ち, 上記では変数として $\mathbb{C}$ を採用したが, 四則演算[*2] さえ出来れば, その周期性が担保されることが解る. この性質に注目し, [9] では PRE の複素変数 ($x \in \mathbb{C}$) を 2 倍個の実変数を用いて陽に複素化 ($x + iy, x, y \in \mathbb{R}$) し, 改めて複素変数 ($x, y \in \mathbb{C}$) と見なすことで 2 倍次元の PRE を生成する方法が提案された:

[*2] 但し, 冪零元などがあるとその限りではないので, 一般に “体であれば” と言うべきだろう.

1 次元 2 周期再帰方程式の 2 倍次元化の例

$$
\begin{aligned}
x^{(n+1)} = \frac{1}{x^{(n)}} \quad &\Rightarrow \quad x^{(n+1)} + \sqrt{-1}y^{(n+1)} = \frac{1}{x^{(n)} + \sqrt{-1}y^{(n)}} \\
&\Rightarrow \quad x^{(n+1)} = \frac{x^{(n)}}{\left(x^{(n)}\right)^2 + \left(y^{(n)}\right)^2}, \quad y^{(n+1)} = \frac{-y^{(n)}}{\left(x^{(n)}\right)^2 + \left(y^{(n)}\right)^2}
\end{aligned} \tag{11}
$$

本発表では [9] の結果を任意の “体の拡大” の場合に拡張し (任意個の) 径数を持つ (任意次元の) 高次元 PRE の生成について紹介する.

2 主張

[9] で本質的だったのは PRE が “シンボリックな周期性” を持つことと, 変数が棲む “体を拡大” [*3] してもシンボリックな周期性が保たれることであった. 従って元々の PRE の変数の棲む体 $\mathbb{K}$ を拡大する事で拡大次数倍次元の高次元 PRE が得られることが予想される. ここではそのアイディアの概略について述べる:

$\boldsymbol{F}$ を d 次元写像[*4]

$$
\boldsymbol{F} : (x_1, \ldots, x_d) \mapsto (X_1, \ldots, X_d), \quad x_i, X_i \in \mathbb{K}, \quad i = 1, \ldots, d
$$

とする. このとき “拡大写像” $\boldsymbol{A}[2]$ [*5]

$$
A[2]_i : x_i \mapsto x_i + \sqrt{\alpha} x_{d+i}, \quad i = 1, \ldots, d \tag{12}
$$

を定義する. この写像を用いることで $\boldsymbol{F}$ の “拡大写像” $\boldsymbol{F}[1] : \mathbb{K}^{2d} \to \mathbb{K}^{2d}$ は

$$
F[2] : (x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}, \ldots, x_{2d}) \mapsto (X_1, \ldots, X_d, X_{d+1}, \ldots, X_{2d}) \tag{13}
$$

で与えられる. 但し

$$
X_i + \sqrt{\alpha} X_{d+i} = [F(A[2]_1(x_1), \ldots, A[2]_d(x_d))]_i, \quad i = 1, \ldots, d \tag{14}
$$

である. 主張は $\boldsymbol{F}$ が PRE であるとき, 拡大写像 $\boldsymbol{F}[2]$ が PRE となることであるが自明であるので証明は省略する.

3 例

3.1 2 周期 PRE

2 周期 PRE $X = \frac{1}{x}$ を例に幾つかの高次元化を紹介する:

---

*3 [9] では実質 $\mathbb{R}$ 上の写像を $\mathbb{C}$ 上の写像へ “拡大” し高次元化したことになっている.

*4 以降は簡単の為 $\boldsymbol{x}^{(n)} = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}^{(n+1)} = \boldsymbol{X}$ と書くことにする.

*5 ここでは簡単の為,2 次拡大を例に説明する.

- 2 次拡大 ($\mathbb{K} \Rightarrow \mathbb{K}(\sqrt{\alpha})$):

$$X + \sqrt{\alpha}Y = \frac{1}{x + \sqrt{\alpha}y} \tag{15}$$

より

$$X = \frac{x}{x^2 - \alpha y^2},\ Y = \frac{-y}{x^2 - \alpha y^2} \tag{16}$$

- 3 次拡大 ($\mathbb{K} \Rightarrow \mathbb{K}(\sqrt[3]{\alpha})$):

$$X +^3 \sqrt{\alpha}Y +^3 \sqrt{\alpha^2}Z = \frac{1}{x +^3 \sqrt{\alpha}y +^3 \sqrt{\alpha^2}z} \tag{17}$$

より

$$X = \frac{x^2 - \alpha yz}{R},\ Y = \frac{\alpha z^2 - xy}{R},\ Z = \frac{y^2 - xz}{R} \tag{18}$$

ここで

$$R = x^3 + \alpha y^3 + \alpha^2 z^3 - 3\alpha xyz \tag{19}$$

- 4 次拡大 ($\mathbb{K} \Rightarrow \mathbb{K}(\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta})$):

$$X + \sqrt{\alpha}Y + \sqrt{\beta}Z + \sqrt{\alpha\beta}W = \frac{1}{x + \sqrt{\alpha}y + \sqrt{\beta}z + \sqrt{\alpha\beta}w} \tag{20}$$

より

$$X = \frac{Ax - 2\alpha\beta Bw}{R},\ Y = -\frac{Ay - 2\beta Bz}{R},\ Z = -\frac{Az - 2\alpha By}{R},\ W = \frac{Aw - 2Bx}{R} \tag{21}$$

ここで

$$A = x^2 - \alpha y^2 - \beta z^2 + \alpha\beta w^2,\ B = xw - yz,\ R = A^2 - 4\alpha\beta B^2 \tag{22}$$

3.2 5 周期 PRE

5 周期 PRE $X = \frac{1+x}{y}, Y = x$ を例に高次元化を紹介する:

- 3 次拡大 ($\mathbb{K} \Rightarrow \mathbb{K}(\sqrt[3]{\alpha})$):

$$\begin{aligned}
X &= \frac{y^2(1+x) + \alpha(-uv - zyv - wyu - xuv + zu^2) + \alpha^2 wv^2}{R} \\
Z &= -\frac{y(-u + yz - xu) + \alpha(v^2 - wyv + xv^2 - zuv + wu^2)}{R} \\
W &= \frac{xu^2 - zyu - xyv + wy^2 + u^2 - yv + \alpha(zv^2 - wuv)}{R} \\
Y &= x,\ U = z,\ V = w,
\end{aligned} \tag{23}$$

ここで

$$R = y^3 + \alpha u^3 + \alpha^2 v^3 - 3\beta yuv$$

4 まとめ

本発表では “体の拡大” による高次元 PRE の生成について紹介した. 本発表の結果を[*6] 用いれば “体の拡大” によって径数[*7] を持つ高次元 PRE を生成することができる.

また, 紙面の関係で紹介できなかったが,IVPP を持つ写像力学系について同様の操作を行うことで, 径数を持つ高次元写像力学系, 及び, 高次元 IVPP を生成することができるが, また別な機会に紹介したい.

参考文献

[1] R. L. Graham, D. E. Knuth and O. Patashnik, *Concrete Mathematics* (Addison-Wesley), 1994.

[2] R. Hirota and H. Yahagi, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **71**, 2867, 2002.

[3] 広田良吾, 高橋大輔, *“差分と超離散”*, 共立出版, 2003.

[4] A. Cima, A. Gasull, and V. Manõsa, *J. Difference Equations and Appl.*, **12**, 697 UTF2013716, 2006.

[5] S. Saito and N. Saitoh, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40**, 12775-12787, 2007.

[6] S. Saito and N. Saitoh, *J. Phys. Soc. Jpn.*, **76** No.2 p.024006, 2007.

[7] S. Saito and N. Saitoh *J. Math. Phys*, **51** 063501, 2010.

[8] S. Saito and N. Saitoh, *“Invariant varieties of periodic points”* in Mathematical Physics Research Developments, 2008 Nova Science Publishers, Inc., Capt.3 pp 85-139, 2008.

[9] T. Yumibayashi, *J. Difference Equations and Appl.*, , 2017.

[*6] 必要に応じ繰り返し.

[*7] 例で与えた $\sqrt{\alpha}$ などで与えられる α など.

索 引

Dáithí Ó hAodha, 155
Habibi Sadaf, 221
Wentao Teng, 211
■ア行
青木 侑省, 763
赤澤 涼, 729
赤松 朋哉, 639
新井 克典, 683
新井 由美, 129
有本 諒也, 205
安藤 遼哉, 519
石塚 健二郎, 165
石塚 康介, 543
石塚 伶, 525
伊城 慎之介, 327
磯島 司, 671
入野 耀太, 307
上野 祐一, 55
内村 朝樹, 195
及川 瑞稀, 501
大楠 涼馬, 745
大島 駿, 631
大野 走馬, 707
大本 豊数, 467
岡本 幸大, 651
長田 祐輝, 111
■カ行
甲斐 大貴, 345
梶原 唯加, 13
加藤 寛樹, 477
鹿俣 尚志, 717
何 力, 537
北村 駿介, 279
草場 竜之介, 71
黒川 大雅, 261
児玉 悠弥, 619
後藤 慶太, 549
■サ行
佐藤 光汰朗, 317
佐藤 純, 795
島田 了輔, 107
地引 知栄, 779
菅原 朔見, 559
杉本 奨吾, 397
杉本 貴海, 437
鈴木 英正, 661
■タ行
高田 佑太, 387
高野 暁弘, 609
只野 誉, 625
田中 聖人, 185
田中 優帆, 375
田邊 真郷, 569
臺信 直人, 23
辻 寛, 645
堤 夏輝, 239
坪内 俊太郎, 175
鶴田 侑己, 507
戸澗 勇一郎, 331
■ナ行
中川 雄太, 339
仲里 渓, 531
中島 慶人, 287
中山 勇祐, 407
西中 祐介, 457
根上 春, 93
野ヶ山 徹, 81
野萩 遼太郎, 255
信川 喬彦, 45
野本 統一, 597
■ハ行
橋堀 恭矢, 589
蓮井 太朗, 139
長谷川 耀, 583
幡 航太朗, 149
波多野 修也, 89
服部 真宗, 447
浜野 大, 3
原 渚彩, 739
東根 一樹, 417
深沢 尚希, 577
高溝 史周, 427
古田 悠馬, 233
星野 真生, 497
■マ行
牧田 慎平, 351
松家 拓稔, 603
松田 凌, 269
松本 孝文, 493

丸山 修平, 33
三栖 邦康, 357
水野 大樹, 63
宮川 寛基, 297
村上 慎太郎, 411
村松 亮, 121
村山 武来, 785
■ヤ行
柳田 幸輝, 699
簗島 瞬, 247
山口 徹, 485
山口 永悟, 513
弓林 司, 801
吉田 智輝, 753
米村 拳太郎, 693
■ラ行
■ワ行
若尾 亮太, 97
若槇 洋平, 677
脇條 奈生子, 771
和知 秀忠, 365