| | |
|---|---|
| Title | 特異モデルに対する双対平坦構造とその応用［論文内容及び審査の要旨］ |
| Author(s) | 中島，直道 |
| Degree Grantor | 北海道大学 |
| Degree Name | 博士(情報科学) |
| Dissertation Number | 甲第15534号 |
| Issue Date | 2023-03-23 |
| Doc URL | https://hdl.handle.net/2115/89374 |
| Rights(URL) | https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/ |
| Type | doctoral thesis |
| File Information | Naomichi_Nakajima_abstract.pdf，論文内容の要旨 |

学　位　論　文　内　容　の　要　旨

博士の専攻分野の名称　　博士（情報科学）　　氏名　中島 直道

学　位　論　文　題　名

特異モデルに対する双対平坦構造とその応用
（The dually flat structure for singular models and its applications）

情報幾何学とは 1980 年代に甘利によって創設された学問分野であり, 統計モデルのパラメータ空間をフィッシャー・ラオ計量によるリーマン計量が与えられたリーマン多様体とみなすことで, 統計学や機械学習等における種々の解析の理論的基盤を幾何学的な視点から構築し整備するものである. 特に甘利・長岡により導入されたリーマン多様体上の双対平坦構造は, 情報幾何学における主要な空間概念であり, 統計学や機械学習, 凸最適化理論, 量子情報理論などの様々な分野に対して統一的な幾何学的解釈をもたらすものである. 双対平坦構造を有する多様体は双対平坦多様体と呼ばれ, この多様体の持つ顕著な特徴は, 計量が局所アファイン座標系におけるポテンシャル関数のヘッセ行列として表されることである. 特にフィッシャー・ラオ計量は半正定値であることから, 情報幾何学は凸ポテンシャルのルジャンドル変換に関する理論であるとも言える.

しかしながら, 深層学習等の特異統計モデルに代表されるように, 実応用においてフィッシャー・ラオ計量の退化する状況がしばしば現れ, このような場合には双対平坦構造を定義することはできない. すなわち, ポテンシャル関数は一般に非凸であったり多価であったりし, この場合にはポテンシャル関数のグラフはもはや滑らかな多様体にはならず, 特異点を持つ波面と呼ばれる幾何的対象となる.

そこで, 本論文では接触幾何学およびルジャンドル特異点理論に基づき, リーマン計量の退化を許容するように双対平坦多様体の理論を一般化した理論として概ヘッセ多様体の理論を構築し, その応用可能性を検討する. 理論刷新の核は特異波面, すなわち非凸あるいは多価ポテンシャルに対しても依然として働くルジャンドル双対性である.

我々の提案する概ヘッセ多様体は, 退化し得るリーマン計量と, 一般化された甘利・チェンソフの 3 次テンソルを備える多様体であり, 江口によるコントラスト関数の理論とも整合性を持つものである. また, 概ヘッセ多様体上では測地線やダイバージェンスの概念が一般化され, 情報幾何学における主要な定理である拡張ピタゴラスの定理と射影定理が適切に定式化される. すなわち, 計量の退化を引き起こす特異点が空間にあってもなお, これらの定理は依然として成立することが示され, これにより情報幾何学の応用的観点が我々の特異的設定においても直ちに正当化される. さらに, このような特異点を概ヘッセ多様体上のアファイン微分幾何的不変量により特徴づけ, アファイン座標系における波面の標準形をマルグランジュの割り算定理を用いて導出する. この標準形は特異点周りの情報幾何学的解析を可能とする.

本研究は, 特異点理論に基づく情報幾何学の新しい方向性を探るものである. 本論文では甘利・長岡による双対平坦多様体の理論が, 計量が退化していてもなお概ヘッセ多様体上で極めて自然に一般化されており, これは我々の理論がポテンシャル関数の凸性に依拠しない新しい理論であることを意味するものである.

本論文の構成は以下の通りである. 第 1 章では, 導入として研究の背景と結果の概要について述

べる. 第 2 章では, ヘッセ多様体の理論をまとめる. この章で扱う内容は第 4 章および第 5 章で議論する我々の理論と対になるものである. ここではヘッセ多様体のポテンシャル関数が導入する双対構造やダイバージェンスについて議論する. また, 統計多様体の文脈から導入される双対平坦多様体とヘッセ多様体の同値性が与えられ, 統計多様体の幾何学の観点からの特徴づけを確認する. 第 3 章では, 双対平坦多様体の一般化において重要な役割を果たす接触幾何学についてのまとめを行う. この章で定義される接触多様体やルジャンドル部分多様体, 波面は我々の理論で基礎となる概念であり, 特に波面に付随する連接接束は概ヘッセ多様体の構成において極めて重要な概念である. 第 4 章では, 概ヘッセ多様体を導入し, その上に甘利・チェンソフの 3 次テンソルが一般化されることを示す. さらに, 波面の特異点型を捉える座標によらない判定法を与え, アファイン座標系における波面の標準形の導出を行う. 第 5 章では, 双対平坦多様体のダイバージェンスを概ヘッセ多様体の正準ダイバージェンスに一般化し, 計量が退化していてもなお拡張ピタゴラスの定理と射影定理が概ヘッセ多様体上で適切に定式化されることを示す. また, 我々の導入した概ヘッセ多様体上の正準ダイバージェンスが江口によるコントラスト関数の理論と整合性を持つことを示す. 第 6 章では, 深層学習や統計的推論, 非凸最適化問題の話題を取り上げて我々の理論の応用可能性を検討する. 第 7 章では, 本論文の結論を述べる.