



|                     |                                                                                                                                                         |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Title               | Topology of Complements of Real Space Line Arrangements and Linearly Embedded Graphs [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review] |
| Author(s)           | 小山, 元希                                                                                                                                                  |
| Degree Grantor      | 北海道大学                                                                                                                                                   |
| Degree Name         | 博士(理学)                                                                                                                                                  |
| Dissertation Number | 甲第15596号                                                                                                                                                |
| Issue Date          | 2023-09-25                                                                                                                                              |
| Doc URL             | <a href="https://hdl.handle.net/2115/90728">https://hdl.handle.net/2115/90728</a>                                                                       |
| Rights(URL)         | <a href="https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/">https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/</a>                                                 |
| Type                | doctoral thesis                                                                                                                                         |
| File Information    | Motoki_Oyama_abstract.pdf, 論文内容の要旨                                                                                                                      |



# 学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士 (理 学) 氏 名 小山 元希

## 学 位 論 文 題 名

Topology of Complements of Real Space Line Arrangements and Linearly Embedded Graphs  
(実直線配置及びグラフ線形埋め込みの補空間に関するトポロジー)

本学位論文は主に、 $\mathbb{R}^n$ における1次元アフィン部分空間の有限集合族である実直線配置及び、有限単純連結な半直線付きグラフの線形埋め込みに対する位相幾何学的な研究に関するものである。

これまで複素超平面配置及び、実部分空間配置についての位相幾何学的な研究が多くなされており、それに関連して極小性に関する研究もなされている。有限 $m$ 次元 CW 複体 $X$ が極小 CW 複体であるとは、 $k = 0, \dots, m$ に対して、 $(X$ の $k$ 次元セルの個数 $) = b_k(X)$ が成り立つことである。なお、 $b_k(X)$ は $X$ の $k$ 次 Betti 数のことである。また、位相空間が極小であるとは、ホモトピー同値となる極小 CW 複体が存在することである。複素超平面配置の和集合の補空間が極小であることは、Dimca, Papadima 及び, Randell によって独立して示されている。また、一般に実部分空間配置は極小となるとは限らないことが知られている。しかし, Adiprasito により実部分空間配置の一種であり、複素超平面配置の一般化とみなすことが出来る essential な $c$ -配置について、 $c \geq 1$ の場合において極小であることが示されている。なお、essential な $c$ -配置とは、余次元 $c$ のアフィン部分空間の有限集合族で、その交差半順序集合の任意の元の余次元が $c$ の倍数であり、さらに交差半順序集合に0次元アフィン空間となる元が存在するような実部分空間配置のことをいう。

本学位論文では、 $\mathbb{R}^n$ における有限単純な半直線付きグラフの線形埋め込みを対象とし、どの線分及び、半直線とも垂直にならず、任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して、 $\mathbb{R}^n$ を定義域とする関数 $h(x) := x \cdot v$ の $c$ におけるレベル集合にグラフの頂点が高々一つ含まれるような単位ベクトル $v \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ が generic に取れることを用い、高さ関数 $h(x) := x \cdot v$ 及び、集合 $M_{<c} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) < c\}$ を定義し、頂点の上方に隣接する線分または半直線が伸びている場合に関して、頂点通過前後の集合 $M_{<c}$ の位相の変化を考察することにより、実直線配置の補空間の微分同相型が、直線の本数及び、重点個数のみによって組合せ的に決定することを示した。なおその系として実直線配置の極小性についても示された。また、実直線配置の拡張として、有限単純連結な半直線付きグラフの線形埋め込みの補空間における微分同相型についても考察を行った。有限単純連結な半直線付きグラフの線形埋め込みの具体例として、実直線配置や有限本の線分と2本の半直線によって表される擬直線及び、これらの有限集合族が挙げられる。また、有限単純連結グラフから一つ頂点を除外し、除外した頂点と隣接する全ての辺を半直線にすることによって有限単純連結な半直線付きグラフを構成することが出来る。本学位論文では、linear isotopic 及び、complete ascending direction についての定義を行い、半直線を1つ以上持つ有限単純な半直線付きグラフについて二つの線形埋め込み写像が linear isotopic ならば、補空間は微分同相となることを示し、さらに、 $n \geq 3$ のとき、任意の有限単純連結な半直線付きグラフに関して、complete ascending direction となる単位ベクトルが存在するような線形埋め込みが存在すること及び、 $n \geq 4$ のとき、有限単純な半直線付きグラフの任意の二つ線形埋め込み写像が linear isotopic となることを示すことにより、 $n \geq 4$ のときの有限単純連結な半直線付きグラフの線形埋め込みの補空間の微分同相型が、埋め込み方に依らず、 $n \geq 4$ とグラフの組合せ的な情報のみによって決定されることについて示した。また、 $n = 3$ の場合に関しては、ハンドル体内部と微分同相となるための十分条件を与えた。なお、任意の実直線配置はここで与えた十分条件を満たすような有限単純連結な半直線付きグラフ及び、その線形埋め込みで像と実直線配置の和集合が一致するものが存在する。

任意の有限連結グラフに対しての補空間の基本群が自由群となるような $S^3$ 及び、 $\mathbb{R}^3$ への埋め込みの存在性については、 $S^3$ の場合は、Endo, Otsuki 及び、Kobayashi によって、任意の切断辺及び、

次数1の頂点を持たない有限単純連結グラフに対して、補空間の基本群が自由群となるような $S^3$ への埋め込みが存在することが示されている。また、 $\mathbb{R}^3$ の場合には、そのような研究はなされていないが、Huh, Lee によって complete ascending direction に類似した概念である, descending direction というものが定義され、彼らは、有限連結グラフの線形埋め込みが descending direction を持つとき、補空間の基本群が自由群となることを示した。

本学位論文では、これまでの考察を応用することにより、任意の有限連結グラフの補空間がハンドル体内部と微分同相となるような $S^3$ への埋め込みが存在するということを示し、その系として任意の有限連結グラフに対して、補空間の基本群が自由群となるような $S^3$ への埋め込みが存在するという結果を得た。また、 $\mathbb{R}^3$ の場合も同様にこれまでの考察を応用することにより、任意の有限単純連結グラフに対し、descending direction を持つような $\mathbb{R}^3$ への線形埋め込みが存在すること示した。そしてその系として、任意の有限(単純)連結グラフに対して、補空間の基本群が自由群となるような $\mathbb{R}^3$ への(線形)埋め込みが存在するという結果を得た。