HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	第20回数学総合若手研究集会 ： 数学の交叉点
Author(s)	菅原, 朔見; 大野, 優; 齋藤, 琢弥 他
Citation	Hokkaido University technical report series in Mathematics, 186, 1-946
Issue Date	2024-03
DOI	https://doi.org/10.14943/109379
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/91467
Type	departmental bulletin paper
File Information	MCYR20 Technical Reports.pdf



Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

第 20 回数学総合若手研究集会

～数学の交叉点～

The 20th Mathematics Conference for Young Researchers

– MCYR20 –

世話人

菅原 朔見（代表） 大野 優（副代表） 齋藤 琢弥 根岸 崚 牧田 慎平 上野 龍

田邊 真郷 富樫 大智 廣瀬 和也 古郷 優平 長峰 実央 野田 栄太郎

札幌，北海道大学，2024

Series#186. March, 2024

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#167 Kubo, Hideo and Ozawa, Tohru and Takamura, Hiroyuki, Mathematical Analysis for Stability in Nonlinear Dynamics - in honor of Professor Vladimir Georgiev on his 60th birthday -, 79 pages. 2016.

#168 F. Nakamura, Y. Aikawa, K. Asahara, M. Abe, D. Komori, H. Saito, S. Handa, K. Fujisawa, S. Honda, A. Rodrguez Mulet, 第 13 回数学総合若手研究集会, 501 pages. 2017.

#169 N. Tanaka (K. Kiyohara, T. Morimoto, K. Yamaguchi, Eds.), Geometric Theory of Systems of Ordinary Differential Equations I, 177 pages. 2017.

#170 N. Tanaka (K. Kiyohara, T. Morimoto, K. Yamaguchi, Eds.), Geometric Theory of Systems of Ordinary Differential Equations II, 519 pages. 2017.

#171 S. -I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, Y. Tonegawa, and K. Tsutaya, Proceedings of the 42nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations - In memory of Professor Taira Shirota - , 102 pages. 2017.

#172 Shigeru Kuroda, Takao Namiki, Akihiro Yamaguchi, Yutaka Yamaguchi, 複雑系数理の新展開：津田一郎教授退職記念研究集会報告集, 69 pages. 2018.

#173 S. Handa, D. Komori, K. Fujisawa, A. Rodriguez Mulet, M. Aoki, Y. kamijima, I. Fukuda, T. Yabu, 第 14 回数学総合若手研究集会, 580 pages. 2018.

#174 Yoshikazu Giga, Hideo Kubo, Tohru Ozawa, The 11th Mathematical Society of Japan - Seasonal Institute - The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations- , 160 pages. 2018.

#175 S. -I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, Proceedings of 43rd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 99 pages. 2018.

#176 I. Fukuda, M. Aoki, Y. Ueda, Y. Kamijima, T. Yabu, T. Niimura, N. Satoh, H. Toyokawa, K. Matsuzaka, S. Yamagata, K. Yoshida, 第 15 回数学総合若手研究集会, 657 pages. 2019.

#177 S. -I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, T. Ozawa, T. Sakajo, and K. Tsutaya, Proceedings of 44th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 115 pages. 2019.

#178 H. Toyokawa, Y. Otsuto, N. Satoh, K. Matsuzaka, S. Yamagata, K. Yoshida, R. Ashikaga, S. Okida, M. Oyama, K. Kuwata K. Misu, H. Ishii, T. Sukekawa, 第 16 回数学総合若手研究集会, 692 pages. 2020.

#179 S. -I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, T. Ozawa, T. Sakajo, K. Tsutaya, Proceedings of 45th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 106 pages. 2020.

#180 K. Misu, S. Okida, R. Ashikaga, M. Oyama, K. Kuwata, H. Ishii, I. Kudo, T. Sukekawa, M. Seki, A. Hasegawa, K. Hatano, 第 17 回数学総合若手研究集会, 595 pages. 2021.

#181 S.-I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, Y. Liu, T. Ozawa, T. Sakajo, and K. Tsutaya, Proceedings of 46th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 116 pages. 2021.

#182 Tsubasa Sukekawa(Representative organizer), Hiroshi Ishii, Isamu Kudo, Motoki Seki, Aoi Hasegawa, Kohei Hatano, Keisuke Abiko, Yu Tajima, Katsunori Fujie, Shinpei Makida, 第 18 回数学総合若手研究集会, 862 pages. 2022.

#183 S.-I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, Y. Liu, T. Ozawa, T. Sakajo, and K. Tsutaya, Proceedings of 47th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 120 pages. 2022.

#184 Keisuke Abiko(Representative organizer), Katsunori Fujie, Yuta Takada, Yu Tajima, Sakumi Sugawara, Yu Ohno, Takuya Saito, Taichi Togashi, Kotaro Hata, Kazuya Hirose, 第 19 回数学総合若手研究集会, 820 pages. 2023.

#185 S.-I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, Y. Liu, S. Masaki, T. Ozawa, T. Sakajo, and K. Tsutaya, Proceedings of 48th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 136 pages, 2023.

はじめに

大学院生および若手研究者により組織・運営されている数学総合若手研究集会も 2023 年度で第 20 回を迎えることとなりました。当研究集会は、数学に関わる物理・化学・経済・工学・医学などの様々な分野の若手研究者の講演の場となることで、研究の発展および人的ネットワークの構築を目的として行われてきました。近年、多くの分野で数学的手法が取り入れられているなか、当研究集会のように数学を中心とした分野間交流を行うことは大変意義があるものであると信じております。

2023 年度はオンライン、対面のハイブリッドによる開催でした。幅広い分野の若手研究者の方々 115 名にご講演していただくことができました。また、今年度は 5 年ぶりとなる懇親会を実施しました。懇親会へは総勢 105 名の方に参加いただき、非常に大盛況となりました。参加者の皆様のご協力により研究集会が無事開催できたこと、心より感謝申し上げます。

当研究集会の講演は、口頭発表であるシングルセッション（60 分）とパラレルセッション（30 分)、そしてポスターセッションからなります。シングルセッションはあらゆる分野の参加者を対象とした講演であり、問題の背景・動機などの入門的な内容を含んだ講演となっております。パラレルセッションでは分野ごとに分かれ、より専門的な内容の講演が行われます。ポスターセッションは講演者と聴講者との自由な議論の場となっております。

このテクニカルレポート集は講演者の皆様から事前に提供して頂いた原稿をまとめたものです。テクニカルレポートはシングルセッション，パラレルセッション、そしてポスターセッションの順に並んで掲載されております。サブタイトルに「数学の交叉点」とありますように、数学が様々な分野の“交叉点”となることを目的とし、数学以外の分野の方々にもわかりやすく入門的な事項を含んだものとなっております。参加者の皆様が講演をより深く理解し、またご自身の研究を進展させる一助となればこの上ない喜びです。

開催にあたり

- 講演者の皆様、参加者の皆様
- 北海道大学理学部数学教室の先生方，および事務員の方々
- 過去の数学総合若手研究集会世話人の方々

から多大なるご支援を頂きました。この場を借りて心より感謝申し上げます。

2024 年 3 月
MCYR20 世話人
菅原 朔見（代表）　大野 優　　齋藤 琢弥　根岸 崚　　牧田 慎平　上野 龍
田邊 真郷　　富樫 大智　廣瀬 和也　古郷 優平　長峰 実央　野田 栄太郎

第20回 数学総合若手研究集会

～数学の交叉点～

The 20th Mathematics Conference for Young Researchers

日時： 2024年3月4日（月）– 3月8日（金）

場所： 北海道大学理学部5号館及びオンライン

S：5-2-03（シングルセッション会場）　A：5-2-06（パラレルセッション会場）
B：5-2-05（パラレルセッション会場）　C：5-3-04（パラレルセッション会場）
D：5-3-05（パラレルセッション会場）　E：5-2-01（ポスター会場）

URL: `https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~wakate/mcyr/2024/ja/index.html`

• シングルセッション（会場S）

松下 光虹　(Koji Matsushita)　大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
理想グラフの安定集合環の conic 因子的イデアルと非可換クレパント特異点解消 3

宮澤 仁　(Jin Miyazawa)　東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
A gauge theoretic invariant of embedded surfaces in 4-manifolds and exotic P^2-knots 13

竹内 裕隆　(Yutaka Takeuchi)　慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
Local Central Limit Theorem for Reflecting Diffusions in a Continuum Percolation Cluster 19

中田 彬文　(Akifumi Nakada)　広島大学大学院先進理工系科学研究科先進理工系科学専攻数学プログラム
等質空間上の確率測度に対する Delsarte 理論 27

• パラレルセッション（会場A）

笹川 理湖　(Riko Sasagawa)　新潟大学大学院自然科学研究科数理物質科学専攻数理科学コース
3変数多項式環のレトラクトについて 39

杉谷 礼　(Rei Sugitani)　筑波大学大学院理工情報生命学術院数理物質科学研究群
1の冪根における量子 SL_2 の余イデアル部分代数について 45

軽部 友裕　(Tomohiro Karube)　東京大学大学院数理科学研究科
退化した楕円曲線の安定性条件について 55

荒井 勇人　(Hayato Arai)　東京大学大学院数理科学研究科
Double affine braid group actions on derived categories of Kodaira fibers 61

志賀 明日香　(Asuka Shiga)　東北大学大学院理学研究科数学専攻
楕円曲線の Tate-Shafarevich 群の体拡大における挙動について 71

石塚 伶　(Ryo Ishizuka)　東京工業大学理学院数学系
Perfectoid ideals and its correspondence 79

鈴木 望夢　(Nozomu Suzuki)　東京理科大学大学院理学研究科数学専攻

Constructing PGL(2,7)-extensions with restricted ramifications 85

上野 龍 (Ryu Ueno) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Connection's Completeness on Statistical Manifolds 93

嘉陽 海渡 (Kaito Kayo) 北海道大学大学院情報科学院情報理工学コース
計量の退化を許容する統計多様体 99

小林 彦蔵 (Hikozo Kobayashi) 広島大学大学院先進理工系科学研究科先進理工系科学専攻数学プログラム
左不変統計構造のモジュライ空間と双対平坦性および共役対称性 105

山口 夏穂里 (Kaori Yamaguchi) 広島大学大学院先進理工系科学研究科数学プログラム
On statistics which are almost sufficient from the viewpoint of the Fisher metrics 115

Philip Séverin (Philip Séverin) Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University
On Oda's problem and cyclic special loci 121

和久田 葵 (Aoi Wakuda) 東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
A generalization of the Center Theorem of the Thurston-Wolpert-Goldman Lie algebra 125

名取 雅生 (Masaki Natori) 東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
Quot スキームを用いた Bott 周期性の別証明とバルクエッジ対応 131

成田 知将 (Kazumasa Narita) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
Combinatorics of Symmetric Hypermatrices and Weighted Hypergraphs 141

濱岡 小鈴 (Kosuzu Hamaoka) 東京理科大学大学院理学研究科数学専攻
時間に依存するポテンシャル付きシュレディンガー方程式の解について 149

北村 駿介 (Shunsuke Kitamura) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
初期値の台が非コンパクトな空間重み付き一次元半線形波動方程式の解析 155

荒神 健太 (Kenta Kojin) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Some relations between Schwarz-Pick type inequality and von Neumann's inequality 163

粟津 光 (Hikaru Awazu) 東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
Bounded cohomology and Amenability 171

鵜飼 歩美 (Ayumi Ukai) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
量子多体系におけるスペクトルギャップのある基底状態の近似と area law 177

小西 正秀 (Masahide Konishi) 近畿大学工業高等専門学校
On the center of a wreath product of truncated polynomial rings 185

丹野 俊将 (Toshimasa Tanno) 神戸大学大学院システム情報学研究科システム情報学専攻
決定性公理の下での組み合わせ論 189

林 佑亮 (Yusuke Hayashi) 神戸大学大学院システム情報学研究科システム情報学専攻
選択公理の弱い形について 195

渡邉 南 (Minami Watanabe) 津田塾大学大学院理学研究科数学専攻

Perturbation theory for nonlinear Schrödinger equation with exponential nonlinearity 201

長田 祐輝 (Yuki Osada) 埼玉大学大学院理工学研究科
3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系に対する local mountain pass approach によるピーク解の構成 205

宮下 空 (Sora Miyashita) 大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
Nearly Gorenstein polytopes 215

毛利 健太 (Kenta Mori) 関西学院大学大学院理工学研究科数理科学専攻
Toric rings of perfectly matchable subgraph polytopes 221

• パラレルセッション（会場Ｂ）

中川 由宇斗 (Yuto Nakagawa) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
Left Regular Band を用いた推移確率行列の固有値と重複度の考察 231

藤江 克徳 (Katsunori Fujie) 北海道大学大学院理学院数学専攻
非可換確率論とランダム行列モデル 239

橋本 七海 (Nanami Hashimoto) 慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
Refined filtrated K-theory for graph C^*-algebras over a Four-Point-Space 245

田中 聖人 (Masato Tanaka) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
Solvability and nilpotency for finite quantum groups 255

星野 真生 (Mao Hoshino) 東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
A construction of quantized flag manifolds via deformed QEA 263

池田 康 (Yasushi Ikeda) Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Division of Mathematics, Department of Differential Geometry and Its Applications
Quantum analog of Mishchenko-Fomenko theorem for Ugl_d 271

佐藤 槙哉 (Shinya Satoh) 信州大学大学院総合理工学研究科工学専攻
移流拡散方程式の解の漸近挙動について 281

相原 真生 (Mamoru Aihara) 北海道大学大学院理学院数学専攻
重み付き p-Laplace 方程式に対するゲーム解釈 291

草場 竜之介 (Ryunosuke Kusaba) 早稲田大学 大学院先進理工学研究科 物理学及応用物理学専攻
Asymptotic expansions for the complex Ginzburg–Landau type equation in the super Fujita-critical case 299

瀧澤 駿 (Shun Takizawa) 東京理科大学大学院理学研究科数学専攻
Short time asymptotics of the fundamental solutions for Schrödinger equations with non-smooth potentials 309

佐久間 正樹 (Masaki Sakuma) 東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
分数冪 p-ラプラシアンと一般化された非局所非線形項を含む臨界 Choquard 型方程式の解の無限列の存在 317

ジョ シン (Chen Shu) School of Mathematics and Statistics, University of Glasgow

A Novel Approach to Proving Conserved Quantities in the Particle System of m neighbours and Its Application to Generate New Systems 325
島田 瑠奈 (Runa Shimada) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
S_1 特異点の変形の幾何学 335
中津山 希 (Nozomi Nakatsuyama) 室蘭工業大学大学院工学研究科博士前期課程情報電子工学系専攻
On vertices of frontals in the Euclidean plane 341
濱中 翔太 (Shota Hamanaka) 三菱電機先端技術総合研究所
全スカラー曲率の極限定理 349
青木 侑省 (Yusei Aoki) 名古屋工業大学大学院工学研究科工学専攻情報数理分野
ケーラー磁場における磁性焦値の評価 355
清水 豪 (Takeru Shimizu) 東京理科大学大学院創域理工学研究科数理科学専攻
球面の二重調和部分多様体について 361
多田 和功 (Yasukatsu Tada) 神奈川学園中学・高等学校
Z_2 graded parity 非保存な Poisson 括弧 367
岩本 光平 (Kohei Iwamoto) 立命館大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
2 次元トーラスの測地流と Birkhoff 切断について 377
大家 佳奈子 (Kanako Oie) 奈良女子大学大学院人間文化総合科学研究科数物科学専攻
On finiteness of the geodesics joining a pair of points in curve complexes 381
周 星陽 (Seiyo Shu) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
交差モジュールを用いた境界付き多様体の不変量 389
持田 知朗 (Tomoro Mochida) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
Hopf 群代数を用いた 4 次元多様体の不変量 397
岩倉 康樹 (Koki Iwakura) 九州大学大学院マス・フォア・イノベーション連係学府
Non-singular extensions of circle-valued Morse functions 405
吉岡 玲音 (Leo Yoshioka) 東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
What is a genuine graph-complex to describe the space of long embeddings modulo immersions? .. 415
鈴木 拓己 (Takumi Suzuki) 東京工業大学大学院情報理工学院数理・計算科学系数理・計算科学コース
結び目のパーシステントホモロジー 425

• パラレルセッション（会場 C）

上村 宗一郎 (Soichiro Uemura) 東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
A proof of the Teichmüller TQFT volume conjecture for the 7_3 knot 437
石川 元稀 (Genki Ishikawa) 立命館大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻数理科学コース
Lagrange のコマに付随する楕円ファイバー空間とそのモノドロミーについて 447
北野 草太 (Sota Kitano) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科

Odd colorings of Biplanar graphs 455

小谷 崇文 (Takafumi Kotani) 東京理科大学大学院理学研究科応用数学専攻
グラフの有限集合を生成する禁止条件 465

加藤 響 (Hibiki Kato) 一橋大学商学部経営学科
流体乱流モデルにみられる位相同期現象とカオティックサドル 475

立石 萌 (Hajime Tateishi) 京都大学大学院情報学研究科数理工学コース
ビリヤード写像における不変曲線が存在しないための十分条件 485

小田中 嵐 (Arashi Odanaka) 公立はこだて未来大学大学院システム情報科学研究科
複雑系情報科学領域
環境の感知と運動を同時に制御する化学反応系ロボットの数理モデリング 493

内海 凌 (Ryo Uchiumi) 北海道大学大学院理学院数学専攻
グラフのラベル付き辺に付随した互換の積 503

小脇 修和 (Nobukazu Kowaki) 大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
グラスマン多様体のトーリック退化 513

内村 朝樹 (Tomoki Uchimura) 慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
Introduction of inverse correspondences between inverse semigroups, and a categorical approach to inverse semigroups 519

中井 啓太 (Keita Nakai) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
Discrete universality theorem for Matsumoto zeta-functions and nontrivial zeros of the Riemann zeta-function 529

金堂 優哉 (Yuya Kanado) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
$\sqrt{2}$ の 2 進単純正規性と Riemann ゼータ関数 537

岩田 英人 (Hideto Iwata) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
On some analytic properties of a function associated with the Selberg class satisfying certain special conditions 545

Subwattanachai Kittipong department of mathematics, graduate school of Mathematics, Nagoya University
(Subwattanachai Kittipong)
Generalized Frobenius Number of Three Variables 555

木村 海渡 (Kaito Kimura) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
加群の局所化の漸近挙動について 565

大竹 優也 (Yuya Otake) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
有限生成射影複体のホモトピー圏の安定理論 573

石塚 康介 (Kosuke Ishizuka) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
非アルキメデス的関数解析における自己共役コンパクト作用素のスペクトル分解 581

杉本 奨吾 (Shogo Sugimoto) 早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
Key 多項式と flagged Schur 多項式 589

矢城 信吾 (Shingo Yashiro) 日本経済大学経営学部経営学科
A numerical criterion of ACM bundles on Rational Normal Scrolls 595

比嘉 陸 (Riku Higa) 東京理科大学大学院創域理工学研究科数理科学専攻
奇数次 Galois 拡大体上の既約ルート格子と符号 601

山川 実佑子 (Miyuko Yamakawa) 名古屋大学大学院情報学研究科数理情報学専攻
ある 2 次多項式で与えられる整数がもつ素因子の個数による虚 2 次体の類数の特徴付け 611

椎井 亮太 (Ryota Shii) 九州大学大学院数理学府数理学専攻
On non-trivial Λ-submodules with finite index of the plus/minus Selmer group over anticyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension at inert primes 621

浅山 拓哉 (Takuya Asayama) 東京工業大学理学院数学系数学コース
有限生成体の無限次代数拡大体上の Mordell–Weil 群の構造 629

高津 大樹 (Taiki Takatsu) 東京工業大学理学院数学系
K3 曲面の自己同型群とその実質的コホモロジー次元について 637

中山 勇祐 (Yusuke Nakayama) 早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
Homogeneous Ulrich bundles on homogenous varieties of certain exceptional types 645

藤井 大計 (Taikei Fujii) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
点平等な q 超幾何方程式の解と接続問題 647

信川 喬彦 (Takahiko Nobukawa) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
ある多重 q 超幾何級数の Euler 型 Jackson 積分表示 655

• パラレルセッション（会場 D）

中西 隼斗 (Hayato Nakanishi) 千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻
ヒルツェブルフ曲面の SYZ ミラーとモースホモトピー 665

鈴木 英正 (Hidemasa Suzuki) 千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻数学・情報数理学コース
ユークリッド空間における勾配樹木とその余接束における正則円盤の対応について 675

山口 健太朗 (Kentaro Yamaguchi) 東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻
アフィン部分空間から定まるトーリック多様体のトーラス同変埋め込みについて 685

松下 尚生 (Yoshiki Matsushita) 九州大学大学院数理学府数理学専攻
平面曲線に現れるカスプについて 691

山内 優太 (Yuta Yamauchi) 横浜国立大学大学院理工学府数物・電子情報系理工学専攻
特異点を持つ閉曲線の絶対全曲率 701

橋堀 恭矢 (Kyoya Hashibori) 北海道大学大学院理学院数学専攻
境界付き曲面上の Whitney 計量に関する Gauss-Bonnet 型公式について 709

福間 友子 (Tomoko Fukuma) 横浜国立大学大学院理工学府数物・電子情報系理工学専攻数学教育分野
有限次退化特異点に対する Gauss-Bonnet の定理 717

鈴木 龍正 (Tatsumasa Suzuki) 東京工業大学理学院数学系数学コース
3 次元 Brieskorn ホモロジー球面の d 不変量の公式と計算 727

薮口 怜央 (Reo Yabuguchi) 岡山大学大学院環境生命自然科学研究科数理物理科学専攻
ある楕円曲面に任意の種数 1 の fibered knot について knot 手術を施した多様体が 1-ハンドルを持たないことの証明 737

新井 克典 (Katsunori Arai) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
向き付け不可能空間曲面の彩色について 747

高橋 夏野 (Natsuya Takahashi) 大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
コルクとエキゾチック対のトライセクション 757

安田 順平 (Jumpei Yasuda) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
ニット状曲面の導入と 4 次元球体内の曲面の表示 765

前原 将太 (Shota Maehara) 九州大学大学院マス・フォア・イノベーション連係学府
二次元多重配置の指数の決定について 771

島崎 達史 (Tatsushi Shimazaki) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
Grothendieck 多項式の特殊値と集合値半標準盤の個数について 781

長谷川 蒼 (Aoi Hasegawa) 北海道大学大学院理学院数学専攻
対合的カンドルの付随群とその 2 次カンドルホモロジーの計算への応用 789

柳田 幸輝 (Koki Yanagida) 東京工業大学理学院数学系数学コース
Dijkgraaf-Witten 不変量の K 理論的研究 799

西田 安寿菜 (Azuna Nishida) 千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻
モースホモトピーを用いた重み付き射影空間のホモロジー的ミラー対称性について 805

中谷 友哉 (Tomoya Nakatani) 千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻数学・情報数理学コース
行列因子化の圏とその変形について 815

野田 一成 (Issei Noda) 北海道大学大学院理学院数学専攻
有向閉曲面 Σ_g 上の有向 T^2 バンドルの分類 823

松本 洵 (Jun Matsumoto) 東京工業大学理学院数学系数学コース
3 次元アファイン空間内の全曲率の小さい完備な特異点付き非固有アファイン球面の分類と新しい例 .833

服部 祐樹 (Yuki Hattori) 横浜国立大学大学院理工学府数物・電子情報系理工学専攻
特異点を持つ螺旋曲面に対する Bour の定理 843

杉本 恭司 (Kyoji Sugimoto) 東京理科大学大学院創域理工学研究科数理科学専攻
擬 Riemann 対称 R 空間の対蹠集合について 853

笹原 優大 (Yuta Sasahara) 東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻
擬球面内の非等質な OT-FKM 型等径超曲面 861

大島 駿 (Shun Oshima) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
測度距離空間のオブザーバブル直径と正の測度を持つ点の存在 869

甲斐 涼哉 (Ryoya Kai) 大阪公立大学大学院理学研究科数学専攻
双曲空間の等長変換がなすカンドル 877

黒川 大雅 (Taiga Kurokawa) 京都大学大学院情報学研究科情報学専攻数理工学コース
変分法による楕円制限 3 体問題の遷移軌道の存在証明 883

吉住 崚 (Ryo Yoshizumi) 九州大学大学院マス・フォア・イノベーション連係学府
B-SIDH に対する Castryck-Decru 攻撃の構成と実装 893

• ポスターセッション（会場Ｅ）

新井 利沙　(Risa Arai)　お茶の水女子大学理学部数学科
乗法群が対称群と同型な skew brace の同型類の数について 903

久川 創人　(Soto Hisakawa)　九州大学大学院数理学府数理学専攻
定曲率を持つ多面体 913

上野 祐一　(Yuichi Ueno)　神戸大学大学院理学研究科数学専攻
モノドロミー保存変形の正則性による量子化 923

坂本 光　(Hikari Sakamoto)　神奈川大学大学院工学研究科工学専攻
時系列がランダムウォーク的か量子ウォーク的かを区別する研究にむけて 933

佐藤 純　(Jun Sato)　東京工芸大学工学部工学科情報コース
境界磁場つき開放端 XXZ 鎖の自己相関関数 939

世話人：　菅原 朔見（代表）　大野 優　齋藤 琢弥　根岸 崚　牧田 慎平　上野 龍
田邊 真郷　富樫 大智　廣瀬 和也　古郷 優平　長峰 実央　野田 栄太郎

Schedule

3月4日（月）

9:50-10:00	開会			
10:00-11:00	松下 光虹 (代数)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:15-11:45	笹川 理湖 (代数)	中川 由宇斗 (解析)	上村 宗一郎 (幾何)	中西 隼斗 (幾何)
12:00-12:30	杉谷 礼 (代数)	藤江 克徳 (解析)	石川 元稀 (幾何)	鈴木 英正 (幾何)
12:30-14:15	昼休み			
14:15-14:45	軽部 友裕 (代数)	橋本 七海 (解析)	北野 草太 (数理)	山口 健太朗 (幾何)
15:00-15:30	荒井 勇人 (代数)	田中 聖人 (解析)	小谷 崇文 (数理)	松下 尚生 (幾何)
15:45-16:15	志賀 明日香 (代数)	星野 真生 (代数)	加藤 響 (数理)	山内 優太 (幾何)
16:45-17:15	石塚 伶 (代数)	池田 康 (代数)	立石 萌 (数理)	橋堀 恭矢 (幾何)
17:30-18:00	鈴木 望夢 (代数)		小田中 嵐 (数理)	福間 友子 (幾何)

3月5日（火）

10:00-11:00	宮澤 仁 (幾何)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:15-11:45	上野 龍 (幾何)	佐藤 槙哉 (解析)	内海 凌 (代数)	鈴木 龍正 (幾何)
12:00-12:30	嘉陽 海渡 (幾何)	相原 真生 (解析)	小脇 修和 (代数)	薮口 怜央 (幾何)
12:30-14:15	昼休み			
14:15-14:45	小林 彦蔵 (幾何)	草場 竜之介 (解析)	内村 朝樹 (代数)	新井 克典 (幾何)
15:00-15:30	山口 夏穂里 (幾何)	瀧澤 駿 (解析)	中井 啓太 (代数)	高橋 夏野 (幾何)
15:45-16:15	P. Séverin(幾何)	佐久間 正樹 (解析)	金堂 優哉 (代数)	安田 順平 (幾何)
16:45-17:15	和久田 葵 (幾何)	ジョ シン (数理)	岩田 英人 (代数)	前原 将太 (代数)
17:30-18:00	名取 雅生 (幾何)	L. Hsin-Lun(数理)	S. Kittipong(代数)	島崎 達史 (代数)

3月6日（水）

	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
10:30-11:00	成田 知将 (数理)	島田 瑠奈 (幾何)	木村 海渡 (代数)	長谷川 蒼 (幾何)
11:15-11:45	濱岡 小鈴 (解析)	中津山 希 (幾何)	大竹 優也 (代数)	柳田 幸輝 (幾何)
11:45-13:30	昼休み			
13:30-15:00	ポスターセッション (会場 E)			
15:15-15:45	北村 駿介 (解析)	濱中 翔太 (幾何)	石塚 康介 (代数)	西田 安寿菜 (幾何)
16:00-16:30	荒神 健太 (解析)	青木 侑省 (幾何)	杉本 奨吾 (代数)	中谷 友哉 (幾何)
16:45-17:15	粟津 光 (解析)	清水 豪 (幾何)	矢城 信吾 (代数)	野田 一成 (幾何)

Schedule

3月7日（木）

10:00-11:00	竹内 裕隆 (解析)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:15-11:45	鵜飼 歩美 (代数)	多田 和功 (幾何)	比嘉 陸 (代数)	松本 洵 (幾何)
12:00-12:30	小西 正秀 (代数)	岩本 光平 (幾何)	山川 実佑子 (代数)	服部 祐樹 (幾何)
12:30-14:15	昼休み			
14:15-14:45	丹野 俊将 (数理)	大家 佳奈子 (幾何)	椎井 亮太 (代数)	杉本 恭司 (幾何)
15:00-15:30	林 佑亮 (数理)	周 星陽 (幾何)	浅山 拓哉 (代数)	笹原 優大 (幾何)
15:45-16:15	渡邉 南 (解析)	持田 知朗 (幾何)	高津 大樹 (代数)	大島 駿 (幾何)
16:45-17:15	長田 祐輝 (解析)	岩倉 康樹 (幾何)	中山 勇祐 (代数)	甲斐 涼哉 (幾何)

3月8日（金）

	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
10:00-10:30	宮下 空 (代数)	吉岡 玲音 (幾何)	藤井 大計 (解析)	黒川 大雅 (数理)
10:45-11:15	毛利 健太 (代数)	鈴木 拓己 (幾何)	信川 喬彦 (解析)	吉住 崚 (数理)
11:30-12:30	中田 彬文 (数理)			
12:30-12:40	閉会			

シングルセッション
会場Ｓ

理想グラフの安定集合環の conic 因子的イデアルと非可換クレパント特異点解消

大阪大学　大学院情報科学研究科　情報基礎数学専攻
松下光虹 (Koji MATSUSHITA) *

概要

トーリック環の conic 因子的イデアルはその非可換 (クレパント) 特異点解消の構成などに応用することができ, 様々な分野において非常に重要な役割を担う. 本講演では, 理想グラフから生起するトーリック環である安定集合環に対し, その因子類群の元の中で conic 因子的イデアルの同型類に対応するものの記述法と, ある特定のクラスの安定集合環に対する非可換クレパント特異点解消の構成について紹介する.

本講演は [13] の内容に基づく.

1　導入

R を正規 Cohen-Macaulay 整域，M を 0 でない反射的 R 加群とする．$\mathrm{End}_R(M)$ が有限な大域次元を持つとき，それを**非可換特異点解消 (NCR)** という．さらに，R が Gorenstein 環であるとして，$\mathrm{End}_R(M)$ が NCR で，極大 Cohen-Macaulay(MCM)R 加群であるとき，それを**非可換クレパント特異点解消 (NCCR)** という．NCR は, 例えば [1] など, 代数幾何だけでなく表現論の文脈でもしばしば現れる重要な対象であり, NCCR は Van den Bergh([22]) によって導入された通常のクレパント特異点解消の非可換類似であって, その存在や導来同値かどうかなどについての様々な予想が提起されている. 本講演では, 次に導入するトーリック環の NC(C)R について議論する.

d 次元有理強凸多面錐 $C \subset \mathbb{R}^d$ に対し,

$$\Bbbk[C \cap \mathbb{Z}^d] := \Bbbk[t_1^{a_1} t_2^{a_2} \cdots t_d^{a_d} \mid (a_1, a_2, \ldots, a_d) \in C \cap \mathbb{Z}^d]$$

を C の**トーリック環**という．ただし, $\Bbbk$ は標数 0 の代数閉体とする．これは一般に正規 Cohen-Macaulay 整域である．また, 正整数 k に対し, $R^{\frac{1}{k}} := \Bbbk[C \cap \frac{1}{k}\mathbb{Z}^d]$ を自然に R 加群とみなしたとき, $R^{\frac{1}{k}}$ の直既約分解に現れる加群は conic 因子的イデアルと呼ばれるものであることが知られている ([4, 16]). これは R の極大 Cohen-Macaulay な因子的イデアル (rank 1 の反射的加群) であって, 様々な分野において良い役割を担っていることがわかっており, 上述した NC(C)R の構成に応用させることができる. 実際, k が十分大きいとき, $\mathrm{End}_R(R^{\frac{1}{k}})$ は R の NCR になることがわかっている

* k-matsushita@ist.osaka-u.ac.jp

([8, 17]). さらに, いくつかの conic 因子的イデアルの直和から NCCR を構成することができ, 特に, この手法によって構成される NCCR をトーリック NCCR という.

次のトーリック環はトーリック NCCR を持つということが知られている:

- 因子類群が $\mathbb{Z}$ である Gorenstein なトーリック環 ([22]);
- 因子類群が $\mathbb{Z}^2$ である Gorenstein な日比環 ([14]);
- 3 次元 Gorenstein トーリック環 ([3, 12, 18]);
- quasi-symmetric なトーリック環 ([17])
- 多項式環の Segre 積で Gorenstein であるもの ([11]);
- 完全多部グラフのエッジ環で Gorenstein であるもの ([9]).

これらの事実から, Gorenstein なトーリック環は常にトーリック NCCR を持つことが期待されるが, 因子類群が $\mathbb{Z}^2$ である 4 次元のトーリック環で, トーリック NCCR を持たない例が存在することがわかっている ([17, Example 9.1]). 従って, どのようなときにトーリック環がトーリック NCCR を持つかどうかは自然で重要な問である.

また, この問を解決するために, 与えられたトーリック環の因子類群の中で conic 因子的イデアル (Cohen-Macaulay 因子的イデアル) に対応する格子点を表す領域を決定することが必要になってくる. 例えば, 以下のトーリック環はその領域の記述が与えられている:

- 因子類群が $\mathbb{Z}$, または, $\mathbb{Z}^2$ であるトーリック環 ([20, 21]);
- 日比環 ([11]);
- weakly-symmetric なトーリック環 ([19]);
- 完全多部グラフのエッジ環で因子類群の階数が 4 以下のもの ([9]).

一般に, この領域を決定するのも非常に困難な問題である.

本研究では, 因子類群がねじれ自由である一般のトーリック環において, conic 因子的イデアルを表す領域を記述するためのアイデアを与え, それを利用して理想グラフから生起する安定集合環と呼ばれるトーリック環において, その領域を記述することに成功した. また, その結果を用いて, ある特定の理想グラフのクラスにおいて, その安定集合環のトーリック NCCR を与えることに成功したので, 本講演ではそれらを紹介する.

2 準備

2.1 トーリック環の (conic) 因子的イデアル

以下, 正整数 n に対し, $[n] := \{1, \ldots, n\}$ とする. $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{Z}^d$ で生成される d 次元有理強凸多面錐

$$\tau = \mathrm{Cone}(v_1, \cdots, v_n) = \mathbb{R}_{\geq 0} v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} v_n$$

を考える. ただし, $d \leq n$ で, $v_1, \cdots, v_n$ は τ の極小生成系, 各 v_i について, 任意の $0 < \epsilon < 1$ に対し $\epsilon v_i \notin \mathbb{Z}^d$ であるとする. 各 $i \in [n]$ について, $\sigma_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ を $\sigma_i(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, v_i \rangle$ で定め, $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$

を $\sigma(\mathbf{x}) = (\sigma_1(\mathbf{x}), \cdots, \sigma_n(\mathbf{x}))$ で定める. さらに, τ の双対 $\tau^\vee$ を

$$\tau^\vee = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \sigma_i(\mathbf{x}) \geq 0,\ \forall i \in [n]\}.$$

で定義する.

以下, R は $\tau^\vee$ のトーリック環とする. $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対し,

$$\mathbb{T}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d : \sigma_i(\mathbf{x}) \geq a_i,\ \forall i \in [n]\},$$

$T(\mathbf{a})$ を $\mathbb{T}(\mathbf{a})$ に属する元 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ に対応する単項式 $t_1^{x_1} t_2^{x_2} \cdots t_d^{x_d}$ 全体で生成される R 加群とする. このとき, 次の事実が知られている (cf. [5, Section 4.F]):

- 任意の $i \in [n]$ と $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ に対し, $\sigma_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}$ であるから, $T(\mathbf{a}) = T(\ulcorner \mathbf{a} \urcorner)$ が成立する. ただし, $\ulcorner\ \urcorner$ は天井関数を表し, $\ulcorner \mathbf{a} \urcorner = (\ulcorner a_1 \urcorner, \cdots, \ulcorner a_n \urcorner)$ とする.
- R 加群 $T(\mathbf{a})$ は R の因子的イデアルであり, 逆に R の因子的イデアルはこの形で書ける. このことから, 各 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^n$ は R の因子的イデアル $T(\mathbf{a})$ と同一視できる.
- R の因子的イデアルの同型類は R の因子類群 $\mathrm{Cl}(R)$ の元と一対一対応する. さらに, $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathbb{Z}^n$ に対し, $T(\mathbf{a}) \cong T(\mathbf{a}')$ であることと, ある $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ があって, $a_i = a_i' + \sigma_i(\mathbf{y})$ $(\forall i \in [n])$ が成立することが同値である. 従って, $\mathrm{Cl}(R) \cong \mathbb{Z}^n / \sigma(\mathbb{Z}^d)$ となる.

ある $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ があって, $\mathbf{a} = \ulcorner \sigma(\mathbf{x}) \urcorner$ と書けるとき, $T(\mathbf{a})$ を **conic 因子的イデアル**という. 上述した事実から, conic 因子的イデアルの同型類は $\ulcorner \sigma((-1, 0]^d) \urcorner / \sigma(\mathbb{Z}^d)$ の元と一対一対応する. このようにして, トーリック環の conic 因子的イデアルを決定することができるが, 次の方法でも求めることが出来る.

$\mathrm{Cl}(R) \cong \mathbb{Z}^r$ であると仮定し, 同型射 $\phi : \mathbb{Z}^n / \sigma(\mathbb{Z}^d) \to \mathbb{Z}^r$ を固定する. 各 $i \in [n]$ に対し, $\beta_i := \phi(\mathbf{e}_i)$ とし, これを R のウエイトと呼ぶ. ただし, $\mathbf{e}_i$ は $\mathbb{R}^n$ の i 番目の単位ベクトルとする.

命題 1 (cf. [17, Section 10.6])**.** $\{a_1\beta_1 + \cdots + a_n\beta_n : 0 \leq a_i < 1,\ \forall i \in [n]\} \cap \mathbb{Z}^r$ の元は R の conic 因子的イデアルの同型類と一対一対応する.

2.2 安定集合環

本講演で扱うグラフは全て有限単純グラフとする. グラフ G に対し, $V(G) = [d]$ を G の頂点集合, $E(G)$ を G の辺集合とする. 頂点集合の部分集合 $S \subset V(G)$ について, 任意の S の 2 頂点が辺で結ばれていない (resp. 結ばれている) とき, S を G の**安定集合**または, **独立集合** (resp. **クリーク**) という. 空集合, 1 点集合は安定集合とみなす.

グラフ G に対し, **安定集合環** $\Bbbk[\mathrm{Stab}_G]$ を次のように定義する:

$$\Bbbk[\mathrm{Stab}_G] = \Bbbk\left[\left(\prod_{i \in S} t_i\right) t_0 : S \text{ は } G \text{ の安定集合}\right].$$

例 2. C_4 を長さ 4 のサイクルとする. つまり, $V(C_4) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(C_4) = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}\}$ である. このとき, C_4 の安定集合は $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}$ となるので,

$$\Bbbk[\mathrm{Stab}_{C_4}] = \Bbbk[t_0, t_1t_0, t_2t_0, t_3t_0, t_4t_0, t_1t_3t_0, t_2t_4t_0].$$

安定集合環はグラフが**理想グラフ**であるとき, 非常に良い性質を満たすことが知られている (理想グラフの定義はここでは述べないが, グラフ理論において非常に重要なクラスである. 詳しくは [7, Section 5.5] を参照されたい). 実際, グラフ G を極大クリーク $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n$ を持つ理想グラフであるとき,

- $\Bbbk[\mathrm{Stab}_G]$ は次の多面錐から生起するトーリック環と一致する ([6, Theorem 3.1]):

$$\{\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : \ \sigma_i(\mathbf{x}) := x_i \geq 0, \ i \in [d+1], \\ \sigma_{d+1+j}(\mathbf{x}) := x_{d+1} + \sum_{k \in Q_0} x_k - \sum_{l \in Q_j} x_l \geq 0, \ j \in [n]\}. \tag{1}$$

- $\mathrm{Cl}(\Bbbk[\mathrm{Stab}_G]) \cong \mathbb{Z}^n$ である ([10, Proposition 3.1]).
- $\Bbbk[\mathrm{Stab}_G]$ が Gorenstein であることと G の極大クリークが同じ濃度を持つこと, つまり, $|Q_0| = |Q_1| = \cdots = |Q_n|$ であることが同値 ([15, Theorem 2.1]).

3 主結果

3.1 conic 因子的イデアルの記述

まず, 一般のトーリック環 R の conic 因子的イデアルを決定するためのアイデアを与える. $\beta_1, \ldots, \beta_n$ を 2 章で定義したものとする. また, $\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_{n'}$ を $\beta_1, \ldots, \beta_n$ の中で重複を除いたものとし, $i \in [n']$ に対し, m_i を $\bar{\beta}_i$ の重複度とする. つまり, $m_i = |\{j \in [n] : \beta_j = \bar{\beta}_i\}|$ とする. ここで, $\mathcal{W}(R)$, $\mathcal{W}'(R)$ を次のように定義する:

$$\mathcal{W}(R) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i \in \mathbb{R}^r : 0 \leq a_i < 1 \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n'} \bar{a}_i \bar{\beta}_i \in \mathbb{R}^r : 0 \leq \bar{a}_i < m_i \right\}.$$

$$\mathcal{W}'(R) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i \in \mathbb{R}^r : 0 \leq a_i \leq 1 \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^{n'} \bar{a}_i \bar{\beta}_i \in \mathbb{R}^r : 0 \leq \bar{a}_i \leq m_i \right\}.$$

$\mathcal{W}'(R)$ の方は凸多面体になっている. また, 命題 1 より, $\mathcal{W}(R) \cap \mathbb{Z}^r$ の元は R の conic 因子的イデアルの同型類と一対一対応する. 次の命題はそのファセット (余次元 1 の面) を記述する方法を与える.

命題 3 (cf. [2, Propositon 2.2.2])**.** もし, $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^r \setminus \{0\}$ と $\bar{\beta}_{i_1}, \ldots, \bar{\beta}_{i_{r-1}}$ があって, $\bar{\beta}_{i_1}, \ldots, \bar{\beta}_{i_{r-1}}$ が線形独立であり, 全ての $j \in [r-1]$ に対し, $\langle \mathbf{n}, \bar{\beta}_{i_j} \rangle = 0$ が成り立つなら

$$F = \left\{ \sum_{\langle \mathbf{n}, \beta_i \rangle > 0} \beta_i + \sum_{\langle \mathbf{n}, \beta_i \rangle = 0} a_i \beta_i \in \mathbb{R}^r : a_i \in [0, 1] \right\}$$

は $\mathcal{W}'(R)$ のファセットである. 逆に, $\mathcal{W}'(R)$ の任意のファセットはこのようにして得られる.

この事実と次の補題を組み合わせることで, conic 因子的イデアルに対応する領域を記述することが出来る.

補題 4. $\mathcal{W}(R)\cap\mathbb{Z}^r=\mathrm{int}(\mathcal{W}'(R))\cap\mathbb{Z}^r$ が成立する. ここで, $\mathrm{int}(\mathcal{W}'(R))$ は $\mathcal{W}'(R)$ の内部を表す. 従って, ある $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ と各 $i\in[m]$ に対し, $p_i,q_i\in\mathbb{Z}_{>0}$, 各 $i\in[m]$ と $j\in[r]$ に対し, 整数 c_{ij}(ただし, $c_{i1},\ldots,c_{ir}$ の最大公約数は 1) があって,

$$\mathcal{W}'(R)=\left\{(z_1,\ldots,z_r)\in\mathbb{R}^r:-q_i-1\leq\sum_{j=1}^{r}c_{ij}z_j\leq p_i+1,\ \forall i\in[m]\right\}$$

と書けるなら,

$$\mathcal{W}(R)\cap\mathbb{Z}^r=\left\{(z_1,\ldots,z_r)\in\mathbb{Z}^r:-q_i\leq\sum_{j=1}^{r}c_{ij}z_j\leq p_i,\ \forall i\in[m]\right\}$$

と書ける.

以下, 理想グラフの安定集合環の conic 因子的イデアルの記述を与える. G は $V(G)=[d]$ で, 極大クリーク $Q_0,Q_1,\ldots,Q_n$ を持つ理想グラフとする. $v\in V(G)$ と有限多重集合 $L\subset\{0,1,\ldots,n\}$ に対し, $m_L(v):=|\{l\in L:v\in Q_l\}|$ とおく. さらに, 2 つの有限多重集合 $I,J\subset\{0,1,\ldots,n\}$ に対し,

$$X_{IJ}^{+}=\{v\in V(G):m_{IJ}(v)>0\},\qquad X_{IJ}^{-}=\{v\in V(G):m_{IJ}(v)<0\}$$

とする. ただし, $m_{IJ}(v)=m_I(v)-m_J(v)$ とする.

$\mathcal{C}(G)$ を次で定義する凸多面体とする:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(G)=\Bigg\{&(z_1,\cdots,z_n)\in\mathbb{R}^n:\\&-|J|+\sum_{v\in X_{IJ}^{-}}m_{IJ}(v)+1\leq\sum_{i\in I}z_i-\sum_{j\in J}z_j\leq|I|+\sum_{v\in X_{IJ}^{+}}m_{IJ}(v)-1\\&I,J\subset\{0,1,\ldots,n\}\text{ は有限多重集合で }|I|=|J|,\ I\cap J=\emptyset\text{ を満たす}\Bigg\}.\end{aligned}$$

ただし, $z_0=0$ とおく. この $C(G)$ が $\Bbbk[\mathrm{Stab}_G]$ の conic 因子的イデアルを記述する.

定理 5. $\mathcal{C}(G)\cap\mathbb{Z}^n$ の元と $\Bbbk[\mathrm{Stab}_G]$ の conic 因子的イデアルの同型類は一対一対応する.

注意 6. $C(G)$ には無限個の不等式が現れているが, 実際に $C(G)$ を定めている不等式は有限個のみである. 従って, $C(G)$ はちゃんと凸多面体になっている. 必要になる不等式は命題 3 とウエイトを用いて決定出来る.

(1) と適切な同型射 $\phi:\mathrm{Cl}(\Bbbk[\mathrm{Stab}_G])\to\mathbb{Z}^n$ を考えることで, $\Bbbk[\mathrm{Stab}_G]$ のウエイトが次で与えられる: ウエイト $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_{n+d}$ は

$$\beta_i=\begin{cases}\mathbf{e}_i & \text{if } i\in\{0,1,\ldots,n\},\\ \sum_{j=0}^{n}\mathbf{1}_{Q_j}(i-n)\mathbf{e}_j & \text{if } i\in\{n+1,\ldots,n+d\},\end{cases}\tag{2}$$

となる. ただし, $\mathbf{e}_0=-\mathbf{e}_1-\cdots-\mathbf{e}_n$ とし, $\mathbf{1}_{Q_j}$ を Q_j の定義関数とおく.

例 7. Γ を, $\{1,\dots,7\}$ を頂点集合とし,

$$E(\Gamma)=\{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{2,5\},\{3,4\},\{3,6\},\{4,5\},\{4,6\},\{5,6\},\{5,7\},\{6,7\}\}.$$

を辺集合とするグラフとする (図 1).

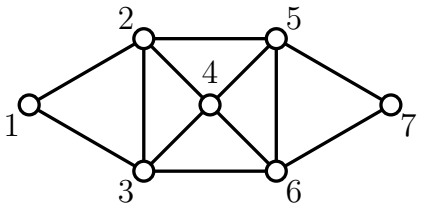


図 1: グラフ Γ

このとき, Γ は 6 つの極大クリーク

$$Q_0=\{1,2,3\},Q_1=\{2,3,4\},Q_2=\{2,4,5\},Q_3=\{3,4,6\},Q_4=\{4,5,6\},Q_5=\{5,6,7\}$$

を持つ理想グラフである. このグラフの安定集合環のウエイトは (2) より,

$$\begin{aligned}\{\bar{\beta}_1,\dots,\bar{\beta}_{n'}\}=\{&(-1,-1,-1,-1,-1),(1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),\\&(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1),(0,0,-1,-1,-1),(0,-1,0,-1,-1),\\&(1,1,1,1,0),(0,1,0,1,1),(0,0,1,1,1)\}\end{aligned}$$

となり, $\mathbf{n}=(2,-1,-1,0,1)$ とすれば命題 3 の条件を満たすので, ここから不等式が誘導される (つまり, $\mathbf{n}$ がファセットの法線ベクトルになるように I,J を決められる). 実際, $I=\{1,1,5\}$, $J=\{0,2,3\}$ とすれば,

$$m_{IJ}(1)=-1,\ m_{IJ}(2)=m_{IJ}(3)=m_{IJ}(4)=m_{IJ}(5)=m_{IJ}(6)=0,\ m_{IJ}(7)=1.$$

であるから, $X_{IJ}^{+}=\{7\}$, $X_{IJ}^{-}=\{1\}$ である. 従って, 次の不等式を得る:

$$-3\le 2z_1+z_5-z_2-z_3\le 3.$$

3.2 安定集合環のあるクラスの NCCR の構成

整数 $n\ge 2$ と正整数 $r_1,\dots,r_n$ に対し, $G_{r_1,\dots,r_n}$ を, $V(G_{r_1,\dots,r_n})=[2d]$ を頂点集合とし, $E(G_{r_1,\dots,r_n})=\bigcup_{i=0}^{n}\{\{v,u\}:v,u\in Q_i\}$ を辺集合とするグラフとする. ただし, $d=\sum_{k=1}^{n}r_k$, $Q_0=\{d+1,\dots,2d\}$ とし, 各 $i\in[n]$ に対して,

$$Q_i^{+}=\left\{\sum_{k=1}^{i-1}r_k+1,\dots,\sum_{k=1}^{i}r_k\right\},\ Q_i^{-}=\left\{d+\sum_{k=1}^{i-1}r_k+1,\dots,d+\sum_{k=1}^{i}r_k\right\},\ Q_i=Q_i^{+}\cup\left(Q_0\setminus Q_i^{-}\right)$$

と定める. $Q_i^{+}=Q_i\setminus Q_0$, $Q_i^{-}=Q_0\setminus Q_i$ となることに注意せよ.

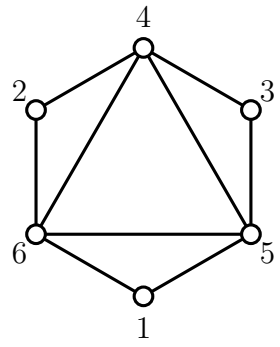


図 2: グラフ $G_{1,1,1}$

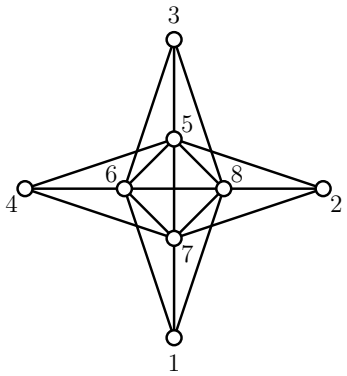


図 3: グラフ $G_{1,1,1,1}$

例 8. $G_{1,1,1}$ と $G_{1,1,1,1}$ はそれぞれ図 2, 図 3 のようになる.

$G_{1,1,1}$ は $\{1,2,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,5\}$, $\{3,6\}$ を極大安定集合として持つので,

$$\Bbbk[\mathrm{Stab}_{G_{1,1,1}}] = \Bbbk[t_0, t_1t_0, t_2t_0, \dots, t_6t_0, t_1t_2t_0, t_1t_3t_0, t_2t_3t_0, t_1t_2t_3t_0, t_1t_4t_0, t_2t_5t_0, t_3t_6t_0].$$

となる.

このグラフ $G_{r_1,\dots,r_n}$ は次の性質を満たす:

命題 9. (i) $G_{r_1,\dots,r_n}$ の極大クリークはちょうど $Q_0, Q_1, \dots, Q_n$ である.

(ii) $S \subset V(G_{r_1,\dots,r_n})$ が $G_{r_1,\dots,r_n}$ の極大安定集合であることと, 各 $i \in [n]$ について, $v_i \in Q_i^+$, $v_i' \in Q_i^-$ があって, $S = \{v_i, v_i'\}$, または, $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ となることが同値.

(iii) $G_{r_1,\dots,r_n}$ は理想グラフ.

(iv) $\Bbbk[\mathrm{Stab}_{G_{r_1,\dots,r_n}}]$ は Gorenstein で, $\mathrm{Cl}(\Bbbk[\mathrm{Stab}_{G_{r_1,\dots,r_n}}]) \cong \mathbb{Z}^n$ である.

(v) $\mathcal{C}(G_{r_1,\dots,r_n}) = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n : -r_i \le z_i \le r_i,\ \forall i \in [n]\}$ である.

以下の定理が上で定義したグラフの安定集合環のトーリック NCCR の構成を与えるものである:

定理 10. $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} = \{(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{Z}^n : 0 \le z_i \le r_i, i \in [n]\} \subset \mathcal{C}(G_{r_1,\dots,r_n}) \cap \mathbb{Z}^n$$

で定める. また $\chi \in \mathbb{Z}^n$ に対し, M_χ を χ に対応する因子的イデアルとし, $M_{\mathcal{L}} := \bigoplus_{\chi \in \mathcal{L}} M_\chi$ とする. このとき, $E = \mathrm{End}_R(M_{\mathcal{L}})$ は $R = \Bbbk[\mathrm{Stab}_{G_{r_1,\dots,r_n}}]$ の NCCR である. 特に, $\Bbbk[\mathrm{Stab}_{G_{r_1,\dots,r_n}}]$ はトーリック NCCR を持つ.

参考文献

[1] M. Auslander, *Representation dimension of Artin algebras*, Lecture Notes, Queen Mary College, London, (1971).

[2] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, G. M. Ziegler, Oriented Matroids. Second edition. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 46. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[3] N. Broomhead, Dimer model and Calabi-Yau algebras, Mem. Amer. Math. Soc., **215** no. 1011, (2012).

[4] W. Bruns and J. Gubeladze, Divisorial linear algebra of normal semigroup rings, *Algebra and Represent. Theory*, **6** (2003), 139-168.

[5] W. Bruns and J. Gubeladze, Polytopes, rings and K-theory, Springer Monographs in Mathematics. Springer, Dordrecht, (2009).

[6] V. Chvátal, On certain polytopes associated with graphs, *J. Combin. Theory, Ser.* (B) **18** (1975), 138–154.

[7] R. Diestel, "Graph theory" Fifth edition, GTM **173**, Springer, Berlin, 2017.

[8] E. Faber, G. Muller and K. E. Smith, Non-commutative resolutions of toric varieties, *Adv. Math.* **351** (2019), 236–274.

[9] A. Higashitani and K. Matsushita, Conic divisorial ideals and non-commutative crepant resolutions of edge rings of complete multipartite graphs, *J. Algebra* **594** (2022), 685–711.

[10] A. Higashitani and K. Matsushita, Three families of toric rings arising from posets or graphs with small class groups, *J. Pure Appl. Algebra*, **226** no. 10, (2022), 107079.

[11] A. Higashitani and Y. Nakajima, Conic divisorial ideals of Hibi rings and their applications to non-commutative crepant resolutions, *Selecta Math.* **25** (2019), 25pp.

[12] A. Ishii and K. Ueda, Dimer models and the special McKay correspondence, *Geom. Topol.* **19** (2015) 3405–3466.

[13] K. Matsushita, Conic divisorial ideals of toric rings and applications to Hibi rings and stable set rings, arXiv:2210.02031.

[14] Y. Nakajima, Non-commutative crepant resolutions of Hibi rings with small class group, *J. Pure Appl. Algebra*, **223** (2019), no. 8, 3461–3484.

[15] H. Ohsugi and T. Hibi, Special simplices and Gorenstein toric rings, *J. Combin. Theory Ser.* A **113** (2006), no. 4, 718-725.

[16] K. E. Smith and M. Van den Bergh, Simplicity of rings of differential operators in prime characteristic, *Proc. London Math. Soc.* (3) **75** (1997), no. 1, 32–62.

[17] Š. Špenko and M. Van den Bergh, Non-commutative resolutions of quotient singularities for reductive groups, *Invent. Math.* **210** (2017), no. 1, 3–67.

[18] Š. Špenko and M. Van den Bergh, Non-commutative crepant resolutions for some toric singularities I, *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2020), no. 21, 8120-8138.

[19] Š. Špenko and M. Van den Bergh, J. P. Bell, On the noncommutative Bondal-Orlov conjecture for some toric varieties. *Math. Z.* **300** (2022), no. 1, 10551068.

[20] R. P. Stanley, Linear diophantine equations and local cohomology, *Invent. Math.* **68** (1982), 175–193.

[21] M. Van den Bergh, Cohen-Macaulayness of semi-invariants for tori, *Trans. Amer. Math. Soc.* **336** (1993), no. 2, 557–580.

[22] M. Van den Bergh, Non-Commutative Crepant Resolutions, *The Legacy of Niels Henrik Abel*, Springer-Verlag, Berlin, (2004), 749–770.

A gauge theoretic invariant of embedded surfaces in 4-manifolds and exotic P^2-knots

東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
宮澤 仁 (Jin MIYAZAWA) *

概要

4 次元多様体の微分トポロジーは他の次元の微分トポロジーと大きく異なる挙動を示すためいまだに未解決な部分が多く, いわば微分トポロジーの最後のフロンティアである. 4 次元多様体に埋め込まれた曲面は微分構造の情報を反映しており, 微分トポロジーの観点から興味深い対象である. 本講演の主定理は S^4 への $\mathbb{R}P^2$ の埋め込みの無限族であって互いに位相的には同値だが滑らかには同値でないものの存在である. 滑らかに同値でないことの証明が既存の方法では難しいが, 講演者によって構成された新たな不変量を用いて示すことができる. 不変量の構成にはゲージ理論を用いる.

1 導入

以下, 単に多様体と言ったら可微分多様体であり, 微分構造を考えないときは位相多様体ということにする.

1.1 4 次元多様体とゲージ理論

4 次元多様体の微分トポロジーは 5 次元以上の多様体とは全く異なった振る舞いを示す. コンパクトな n 次元位相多様体に対して $n \neq 4$ なら入りうる微分構造は高々有限個なことがわかっているが, 4 次元位相多様体で複数の微分構造が見つかっているものはほとんど無限個の微分構造が見つかっている. さらに n 次元ユークリッド空間は $n \neq 4$ のときには微分構造は一意だが, R^4 には非加算無限個の微分構造がある. 4 次元多様体論は単に低次元から順に多様体を調べていく過程の途中にある分野ではなく, 微分トポロジーに残されたフロンティアである.

上で述べた, 4 次元多様体の微分構造の特異な性質はどのようにして調べられたのであろうか. 3 次元以下では滑らかな多様体と位相多様体の差はない. 一方, 5 次元以上の微分トポロジーで重要な役割を果たす h-同境定理の証明ではホイットニーの手品と呼ばれる手法が用いられる. ホイットニーの手品の鍵となる部分は, D^2 からの写像を (境界部分を変えず) 少し変形し自己交差を消すことであるが, これができるのは $2+2$ より大きい 5 次元以上の多様体である. したがって 4 次元多様体の微分構造を調べるには他の次元とは異なる手法が必要となる.

* E-mail:miyazawa@ms.u-tokyo.ac.jp

1982 年, Atiyah の学生であった Donaldson はそれまでトポロジストが予期しない方法を 4 次元多様体論に持ち込んだ. 素粒子物理学に端を発するゲージ理論である. Donaldson が [1] で示した定理は次である.

Theorem 1.1 (Donaldson [1])**.** 任意の向き付けられたコンパクト単連結可微分 4 次元多様体 X の交差形式が負定値 *(negative definite)* であるとする. このとき, 交差形式は $\mathbb{Z}$ 係数の範囲で対角化可能である.

この定理の単連結性の仮定は現在では外されている. 4 次元多様体 X の交差形式というのは, 二次のコホモロジーに対して定まる次の二次形式である:

$$H^2(X;\mathbb{Z})/Tor \times H^2(X;\mathbb{Z})/Tor \to \mathbb{Z};\ (\alpha,\beta) \mapsto \langle \alpha \cup \beta, [X] \rangle.$$

X が閉向き付け可能ならポアンカレ双対から交差形式は非退化である. この定理がなぜ驚くべき定理なのかを説明する. まず, 前年の 1981 年に示された Freedman の定理 [4] によって, 任意のユニモジュラー形式に対してそれを交差形式に持つような単連結位相的 4 次元多様体が存在することがわかる. また, 負定値のユニモジュラー形式で $\mathbb{Z}$ 係数の範囲で対角化できないものは無数にあることが知られている. したがって, Donaldson の定理によって無数の位相的 4 次元多様体に対して微分構造が入らないことが示されたのである.

この Donaldson の対角化定理は, 反自己双対方程式 (ASD 方程式) と呼ばれる非線形偏微分方程式の解のモジュライ空間を観察することによって示された. ASD 方程式は Yang–Mills 方程式というゲージ理論 (素粒子物理学) に出てくる方程式の解の特別な場合である. このようにして, 素粒子物理学の偏微分方程式の 4 次元トポロジーへの応用が始まった. 第一段落で述べた 4 次元多様体の奇妙な性質はこのゲージ理論を用いて調べられたものである.

1.2 Seiberg–Witten 理論と反線形な対称性

トポロジーへの応用に用いられる方程式で代表的なものに, 上で述べた ASD 方程式の他に, 1994 年に Witten [14] によって導入された Seiberg–Witten 方程式がある. この方程式は ASD 方程式よりも解析的に扱いが容易なうえに, ASD 方程式を用いて得られた微分トポロジーへの応用の多くを再現する. それだけでなく, Seiberg–Witten 方程式を用いた証明しか知られていない結果もある. 代表的なものは古田幹雄 [5] による, 10/8-不等式である.

Theorem 1.2 (Furuta [5])**.** X を閉スピン 4 次元多様体で交差形式が不定値 *(indefinite)* であるとする. このとき第二ベッチ数 $b_2(X)$ と符号数 $\sigma(X)$ の間に不等式

$$b_2(X) \geq \frac{5}{4}|\sigma(X)| + 2$$

が成り立つ.

この定理もまた滑らかな 4 次元多様体に制約を与えるもので, 特に単連結位相 4 次元多様体で交差形式が不定値かつ even(つまり, 任意の元 $\alpha \in H^2(X;\mathbb{Z})$ について $\langle \alpha \cup \alpha, [X] \rangle \in 2\mathbb{Z}$) なもので微分構造が入らないものが無数に存在することがわかる.

この定理の証明で重要なのは (spin 構造に対する)Seiberg–Witten 方程式がもつ「反線形な変換」である. Seiberg–Witten 方程式の未知関数は 1-form$a$ とある複素ベクトル束の切断 ϕ である. ϕ はスピノル場と呼ばれる. 反線形な変換というのはこのスピノル場に対して作用する複素反線形な位数 4 の変換である. この変換は, ゲージ理論にでてくる方程式がもつゲージ変換による対称性とは異なる, Seiberg–Witten 方程式特有の対称性である.

4 次元多様体 X に滑らかな $\mathbb{Z}/2$ の作用 (involution) があるときに, involution がしかるべき位相的な条件を満たしていればこの作用の情報と元から Seiberg–Witten 方程式にあった反線形な変換を用いて, Seiberg–Witten 方程式の解のモジュライ空間に「反線形な involution」を定めることができる. この反線形な involution の固定部分を見ることで, 4 次元多様体 X と X 上の involution に関する不変量を得ることができる. この Seiberg–Witten 理論の変種を Real Seiberg–Witten 理論という. これが本講演の主役である.

1.3 Real Seiberg–Witten 理論

前節の終わりに, 4 次元多様体 X と X 上の involution$\iota\colon X \to X$ について ι が良い条件を満たすなら Real Seiberg–Witten 理論が展開できると述べた. X と X 上の involutionι の組 (X, ι) を自然に調べたくなるのはどのようなときであろうか.

ひとつは単連結でない 4 次元多様体の二重被覆空間として X が現れ, ι が被覆変換である場合, Real Seiberg–Witten は X/ι の微分構造の情報を持っている. このような場合の Real Seiberg–Witten は中村信裕によって $\mathrm{Pin}^-(2)$-monopole [12, 13] として, X/ι 上の局所系でねじった Seiberg–Witten 理論として定式化されている. さらに, 局所系のコホモロジーの 10/8-型不等式や連結和で保たれるエキゾチックな 4 次元多様体の検出など $\mathrm{Pin}^-(2)$-monopole をもちいないと得られないトポロジーへの応用が得られている.

involution が固定点を持つ状況が自然に出てくるのは, 4 次元多様体 X' の中の曲面 S について, S に沿った二重分岐被覆 $\Sigma_2(X', S) =: X$ を考えるときである. このとき X と被覆変換 ι に関する Real Seiberg–Witten 理論を考えると X' に埋め込まれた S についての不変量ができる. 講演者と今野北斗氏, 谷口正樹氏との共同研究 [7, 8] はこのような場合の Real Seiberg–Witten 理論を用いて (境界付き)10/8 型不等式や Frøyshov 型不等式と呼ばれる constraint を考察し, ある条件を満たす曲面の種数の下からの評価を得ている. 4 次元多様体の $\mathbb{Z}/2$ 作用そのものに興味がある場合もある. 加藤祐矢は [6] で閉 4 次元多様体の involution で固定点がある場合の 10/8 型不等式を示し, 滑らかには実現できない位相的な群作用を検出している. 時系列でいえばこの加藤の不等式の方が [7] より先で, [7] の不等式は加藤のそれの境界付き版である.

Real Seiberg–Witten の関係した研究でいえば, Li による 3 次元多様体に involution がある場合の monopole floer homology がある [9, 10].

この講演では, 4 次元多様体 X の中の曲面 S に沿った二重分岐被覆 $\Sigma_2(X, S)$ に対し Real Seiberg–Witten 理論を用いた不変量を構成し, X の中のエキゾチックな曲面, すなわちふたつの曲面 $S, S' \subset X$ で位相的にはアイソトピックだが滑らかにはそうではない例を検出する.

2　主定理

4 次元多様体の微分構造は 5 次元以上の多様体のそれと比較して特異である理由のひとつはホイットニーの手品が成立しないことであり, これは 4 次元多様体に埋め込まれた D^2 が問題となっているのであった. このことから 4 次元多様体に埋め込まれた曲面を調べることが 4 次元多様体の微分トポロジーを調べるうえで重要であることが見て取れよう. 特に, 位相的には同値だが滑らかには異なるエキゾチックな曲面埋め込みは興味深い対象である. 本講演の主定理は, Real Seiberg–Witten 理論を使って示された以下の定理である.

Theorem 2.1 ([11])**.** $\mathbb{R}P^2$ の S^4 への埋め込みの無限族で, 互いに位相的には同値だが滑らかには互いに同値でないものが存在する.

S^4 内のエキゾチックな曲面に関する背景を述べる. エキゾチックな曲面埋め込みに関する研究自体は列挙することが困難なほど数多くの研究があるが, 最も基本的な閉 4 次元多様体である S^4 内のエキゾチックな曲面埋め込みの例はあまり多くない. 実際, S^4 内の向き付け可能な曲面によるエキゾチックな曲面埋め込みは発見されていない. さらに向き付け不可能な例についても Finashin–Kreck–Viro [2] や Finashin [3] による例をはじめ片手で数えられるほどしか知られていない. さらに, 向き付け不可能なエキゾチック曲面結び目で今まで知られていた例の種数はいずれも 5 以上であり, 種数が小さい例は知られていなかった.

種数が小さい例を作る際, 既存の方法では困難があった. エキゾチックな曲面埋め込みが実際に滑らかには同値でないことを検出する既存の方法は, 曲面に沿った二重分岐被覆が互いに微分同相でない 4 次元多様体であることを示すというものであった. この方法では, 例えば種数 1 の向き付け可能な曲面すなわち $\mathbb{R}P^2$ のエキゾチックな曲面埋め込みを検出しようとするとエキゾチックな $\mathbb{C}P^2$ を見つけねばならず, このようなものは見つかっていない. 種数が小さい向き付け可能な曲面の埋め込みの二重分岐被覆は二次のコホモロジーの次元が小さく, このような 4 次元多様体でエキゾチックな微分構造を見つけるのは困難であることが知られている.

参考文献

[1] S. K. Donaldson. An application of gauge theory to four-dimensional topology. J. Differential Geom., Vol. 18, No. 2, pp. 279–315, 1983.

[2] S. M. Finashin, M. Kreck, and O. Ya. Viro. Nondiffeomorphic but homeomorphic knottings of surfaces in the 4-sphere. In Topology and geometry—Rohlin Seminar, Vol. 1346 of Lecture Notes in Math., pp. 157–198. Springer, Berlin, 1988.

[3] Sergey Finashin. Exotic embeddings of $\#6\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ in the 4-sphere. In Proceedings of Gökova Geometry-Topology Conference 2008, pp. 151–169. Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2009.

[4] Michael Hartley Freedman. The topology of four-dimensional manifolds. J. Differential Geometry, Vol. 17, No. 3, pp. 357–453, 1982.

[5] Mikio Furuta. Monopole equation and the $\frac{11}{8}$-conjecture. Mathematical Research Letters, Vol. 8, No. 3, pp. 279–291, 2001.

[6] Yuya Kato. Nonsmoothable actions of $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ on spin four-manifolds. Topology Appl., Vol. 307, pp. Paper No. 107868, 13, 2022.

[7] Hokuto Konno, Jin Miyazawa, and Masaki Taniguchi. Involutions, knots, and floer k-theory. arXiv preprint arXiv:2110.09258, 2021.

[8] Hokuto Konno, Jin Miyazawa, and Masaki Taniguchi. Involutions, links, and floer cohomologies. arXiv preprint arXiv:2304.01115, 2023.

[9] Jiakai Li. Monopole floer homology and real structures. arXiv preprint arXiv:2211.10768, 2022.

[10] Jiakai Li. Real monopole floer homology and skein exact triangles. arXiv preprint arXiv:2304.01742, 2023.

[11] Jin Miyazawa. A gauge theoretic invariant of embedded surfaces in 4-manifolds and exotic p^2-knots. arXiv preprint arXiv:2312.02041, 2023.

[12] Nobuhiro Nakamura. $\mathrm{Pin}^-(2)$-monopole equations and intersection forms with local coefficients of four-manifolds. Math. Ann., Vol. 357, No. 3, pp. 915–939, 2013.

[13] Nobuhiro Nakamura. $\mathrm{Pin}^-(2)$-monopole invariants. J. Differential Geom., Vol. 101, No. 3, pp. 507–549, 2015.

[14] Edward Witten. Monopoles and four-manifolds. Mathematical Research Letters, Vol. 1, No. 6, pp. 769–796, 1994.

Local Central Limit Theorem for Reflecting Diffusions in a Continuum Percolation Cluster

慶應義塾大学大学院理工学研究科　基礎理工学専攻
竹内裕隆 (Yutaka TAKEUCHI) *

概 要

ランダム媒質の研究において均一化は重要な問題の一つである. 離散的なモデルの場合には多くの結果が知られている. 連続的なモデルに関しても, random environment 上の拡散過程に関する結果は多く知られているが, 拡散過程が反射壁を持つ場合に関しては結果があまり知られていない. 本講演では連続パーコレーションが幾何的な条件を満たす場合, その上の反射壁を持つ拡散過程に関して局所中心極限定理が成り立つという結果を紹介する.

1　導入

熱拡散や電流の流れは, 媒質内の不純物により複雑な挙動をする. ランダム媒質の研究では不純物が乱雑に混ざっていると解釈し, これらの現象を調べる.

ランダム媒質に関する主要な問題の一つに均一化がある. これは端的に言えばある粗視的・巨視的にはランダム性が失われ, 熱拡散や電流の流れ等の挙動が単純に見える事を指す. 確率論的には, 均一化とは媒質上の確率論的対象（例えば確率過程）に関するスケール極限が, 媒質を決めるランダム性とは無関係な極限に収束するという事である.

ランダム媒質に関する均一化はまず Kipnis-Varadhan([17]) によりボンドパーコレーション上のランダムウォークに対する annealed invariance principle が 1980 年に示された. だが, それより強い quenched invariance principle については長らく技術的な理由により解決されていなかった. しかし, 2000 年代に Barlow([4]) が熱核（推移密度）の漸近挙動に対する評価を与えた事により, ボンドパーコレーション上のランダムウォークに対する quenched invariance principle が証明された ([9],[18]). それを皮切りに, より一般的なモデルであるランダムコンダクタンスモデル上のランダムウォークに関する quenched invariance principle の証明がなされた ([5],[1],[2]). 特に, Deushcel-Nguyen-Slowik([12]) が定常エルゴード的な場合に媒質にある種の可積分性と幾何的な条件を課すだけでその上のランダムウォークが quenched invariance principle を満たす事を示している. その後, Bella-Schäffner([7]) が可積分条件を緩める事に成功している. 最近では離散的な場合に関しては長距離相関を持つモデルや媒質にダイナミクスを入れたモデルに関しての研究が行われている. また, 離散モデルの場合はより強く, スケーリングした熱核が時空間局所一様にガウス核に収束するという局所中心極限定理が示されている. ([6], [3], [8])

一方で, 連続的なモデルに関しては, 拡散過程に関する quenched invariance principle がいくつか知られている ([13],[20],[11]). 特に, Chiarini と Deuschel は random environment 上の拡散過程に関して, 媒質が定常エルゴード的だが退化している場合に quenched invariance principle だけで

*E-mail:yutaka.takeuchi@keio.jp

なく局所中心極限定理が成り立つことまで証明している ([10]). しかし, ある境界で拡散過程が反射する場合を考えると, 問題が難しくなり, それ程多くの結果は知られていない. 連続パーコレーション上の反射壁 Brown 運動に対する annealed invariance principle が知られているだけである ([21],[24]).

本稿では, 連続パーコレーションの無限クラスター上の反射壁を持つ拡散過程に関する局所中心極限定理について紹介する.

2 準備

2.1 連続パーコレーション

$\mathbb{R}^d$ 上の配置空間 Ω を以下のように定める：

$$\Omega = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R}^d, \text{ 全てのコンパクト集合 } K \subset \mathbb{R}^d \text{ に対して } \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i}(K) < \infty \right\}.$$

Ω は適切な位相（漠位相）を入れる事ができ, その Borel 集合族は $\{\omega \in \Omega \mid \omega(A) = n\}$, $(A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), n \in \mathbb{N})$ という形の部分集合から生成される事が知られている. また, ω は Dirac 測度の可算和であり, $\omega = \sum_i \delta_{x_i}$ と $\mathbb{R}^d$ の部分集合 $\{x_i\}_i$ を, x_i が全て異なっている場合に同一視する事とする[1].

連続パーコレーション $L(\omega)$ $(\omega \in \Omega$, ω は多重点を持たない) は

$$L(\omega) = \bigcup_{x \in \omega} B_{\mathrm{Euc}}(x, \rho)$$

と定義される. （ω を先程の同一視で $\mathbb{R}^d$ の部分集合と見ている事に注意. ）ここで, $B_{\mathrm{Euc}}(x, r)$ は中心が x で半径が r の $\mathbb{R}^d$ の通常の Euclid 開球であり, ρ は固定された正定数である. $L(\omega)$ が非有界連結成分をただ一つ持つ時, それを $W(\omega)$ と記し, これを無限クラスターと呼ぶ. 便宜上非有界連結成分が存在しなかったり, 二つ以上存在する場合, $W(\omega) = \emptyset$ と定める.

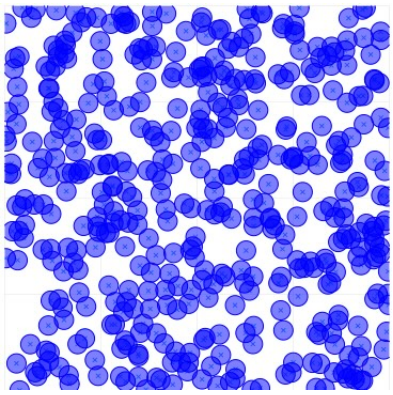


図 1: 連続パーコレーション

[1] この同一視によって, 多重点を持たない Ω の元をピックアップする事は, （可算個の）粒子の配置を考える事と同義になるので Ω を配置空間と呼ぶ.

パーコレーションは浸透現象を数理モデル化した物[2]であり, 中心点の配置 ω をある確率測度に基づいてランダムに配置していった時に $L(\omega)$ の幾何的な様子を調べる事に興味がある. 例えば, 無限クラスター $W(\omega)$ が存在するかどうかは基本的な問題である. 連続パーコレーションに関する基本的な事は [19] を参照されたい.

定義より, $W(\omega)$ はある ω の部分集合 $I(\omega)$ を用いて $\bigcup_{x\in I(\omega)} B_{\mathrm{Euc}}(x,\rho)$ と書くことができる. 新しい半径 $\rho' \geq \rho$ を取ってきて modified cluster $W'(\omega)$ を

$$W'(\omega) \equiv W_{\rho'}(\omega) = \bigcup_{x\in I(\omega)} B_{\mathrm{Euc}}(x,\rho').$$

で定義する. 本稿ではこの modified cluster 上の拡散過程を考える事とする. modified cluster は半径を少し膨らませている事によって開球同士の重なり具合が良くなっている事に注意されたい. 元のクラスターでは二つの開球が「ギリギリ」接しているような状況があるかもしれない. そのような場所を拡散過程は通りにくいが, 一度入ったら戻りにくい trap の部分になっており, 均一化を阻害している可能性がある. 元のクラスターではなく modified cluster を考える事の利点としては, このような状況を回避できる点がある.

技術的な理由により除外集合 Δ を

$$\Delta = \left\{ \omega\in\Omega \;\middle|\; \begin{array}{l} \omega = \sum_i \delta_{x_i},\ \ |x-y| = 2\rho\ \ (\exists x,y\in\omega) \\ \quad \text{または } x_i = x_j\ (\exists i\neq j) \end{array} \right\}.$$

で定め, 考える集合を $\widehat{\Omega} = \{\omega\in\Omega\setminus\Delta \mid 0\in W'(\omega)\}$ に制限する.

$\mathbb{P}$ を Ω 上の確率測度とし, その $\widehat{\Omega}$ への制限 $\widehat{\mathbb{P}}$ を $\mathbb{P}(\widehat{\Omega})>0$ の場合 $\widehat{\mathbb{P}}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot\cap\widehat{\Omega})/\mathbb{P}(\widehat{\Omega})$ で定める. また, $\widehat{\mathbb{P}}$ に関する期待値を $\widehat{\mathbb{E}}$ と記す.

また, 配置空間上の平行移動 τ_z を

$$\tau_z\omega(A) = \omega(A+z) = \sum_{x\in\omega}\delta_x(A+z) = \sum_{x\in\omega}\delta_{x-z}(A),$$

で定める.

2.2 双線形形式

$a\colon \Omega\to\mathbb{R}^{d\times d}$ を正定値行列に値を取る確率変数とし, $u,v\in L^2(W'(\omega))$ に対して $\mathcal{E}^\omega(u,v)$ を

$$\mathcal{E}^\omega(u,v) = \int_{W(\omega)} \langle a(\tau_x\omega)\nabla u(x), \nabla v(x)\rangle dx$$

で定める. ($\langle\cdot,\cdot\rangle$ はユークリッド内積.)

$C_c^\infty\left(\overline{W'(\omega)}\right)\cap L^2(W'(\omega))$ を $(\cdot,\cdot)+\mathcal{E}^\omega(\cdot,\cdot)$ という内積で完備化したものを $\mathcal{F}^\omega$ とする. ここで, $(\cdot,\cdot)$ は L^2 内積であり, $\mathbb{R}^d$ 上の領域 U に対して関数空間 $C_c^\infty(\overline{U})$ とは

$$C_c^\infty(\overline{U}) = \{u\in C(U) \mid \text{ある } U \text{ の開近傍 } V \text{ と } v\in C_c^\infty(V) \text{ が存在して } u = v \text{ in } U.\}$$

で定まる集合である. この時, $(\mathcal{E}^\omega,\mathcal{F}^\omega)$ は Dirichlet 形式になり, 正則であれば対応するマルコフ過程を持つ事が知られている. Dirichlet 形式の一般論については [14] を参照されたい.

[2]例えば, 雨粒が落ちて地面に染み込むという現象が該当する. この場合 ω とは無数の雨粒が落ちる位置であり, $L(\omega)$ とは雨粒が落ちてできる無数の円形のシミによる模様である.

2.3 幾何的概念

均一化を考える上で, 幾何的な条件が重要な役割を果たす. この小節では W を Lipschitz 領域とする.

2 点 $x, y \in W$ に対して, “intrinsic distance” を x と y を結ぶ W 内の連続曲線の長さの下限として定める. さらに, d_W による開球を $B_W(x,R) = \{y \in W \mid d_W(x,r) < R\}$ $(x \in W,\ R > 0)$ と書く. 均一化の問題を解く為には局所的な議論をしていけば十分なのだが, intrinsic ball $B_W(x,R)$ は一般的には良い性質を持っていない. その為, 均一化を考える上で良い ball という概念を導入する必要がある.

Definition 2.1. W を Lipschitz 領域とする.

(1) $x \in W$, $R > 0$, $C_V \geq 1$, $C_{\mathrm{iso}} > 0$ とする. intrinsic ball $B_W(x,R)$ が (C_V, C_{iso})-*regular* であるとは次の 2 条件を満たす事を言う

(a) (Volume regularity). $|\cdot|$ で d 次元 Lebesgue 測度を表す事とする. この時,

$$C_V^{-1} R^d \leq |B_W(x,R)| \leq C_V R^d \tag{2.1}$$

が成り立つ.

(b) (相対等周不等式). $\mathcal{H}_{d-1}$ を $(d-1)$ 次元 Hausdorff 測度とする時,

$$\mathcal{H}_{d-1}(B_W(x,R) \cap \partial O) \geq C_{\mathrm{iso}} R^{-1} |O| \tag{2.2}$$

が Lipschitz 境界を持ち, $|O| \leq \frac{1}{2}|B_W(x,R)|$ を満たす全ての開集合 $O \subset B_W(x,R)$ に対して成り立つ.

(2) $\theta \in (0,1)$, $C_V \geq 1$, $C_{\mathrm{iso}} > 0$ とする. W が (C_V, C_{iso}, θ)-*very regular* であるとは, ある $\hat{R}_\theta > 0$ が存在して, 全ての $R \geq \hat{R}_\theta$ に対して $x \in B_W(0,R)$ かつ $r \geq R^{\frac{\theta}{d}}$ であるなら開球 $B_W(x,r)$ は (C_V, C_{iso})-regular となる事を言う.

図 2, 3 では regular ball の条件を満たさないような例を挙げている. それぞれの図の青い領域が一つの intrinsic ball $B_W(x,R)$ を表している. regular ball の条件 (a) は intrinsic ball の volume growth が通常の Euclid 開球と同じである事を言っている. 直感的には, これは均一化が成り立つのであれば空間の広がり具合が Euclid 空間と同じである筈という事から課されている. 条件 (b) は直感的には「長い」通路が存在しないという事を示している. 幅が一定だが長さがいくらでも長

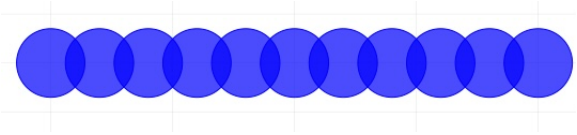


図 2: 条件 (a) を満たさない例

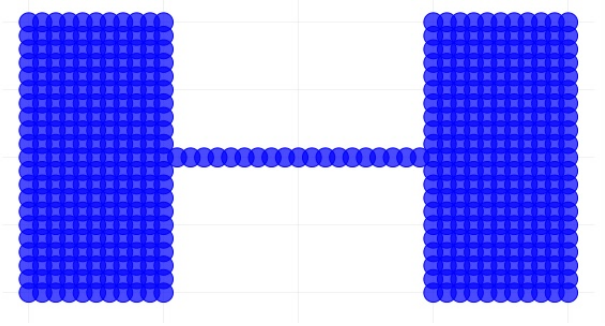


図 3: 条件 (b) を満たさない例

くできる場合, この通路によって長時間挙動がブラウン運動からどんどん離れていってしまう. 条件 (b) はこのような事が起きないという事を言っている.

$G_W(x)$ を x に最も近い $\overline{W}$ 内の点全体の集合とする. また, $G_W(x)$ の点で, 辞書式順序で最小の点を $g_W(x)$ と書く事とする.

最後に maximal "hole" size という量を導入する. 通常の Euclid 距離は $d_{\mathrm{Euc}}(x,y)$ で表す事にする. 各 $R>0$ に対して maximal hole size $h_W(R)$ を以下で定義する.

$$h_W(R) = \sup\{d_{\mathrm{Euc}}(x,W) \mid x \in B_{\mathrm{Euc}}(0,R)\}.$$

3 主定理

この説では modified cluster 上の拡散過程に関する主結果を述べる. まずその為に必要な仮定を紹介する.

Assumption 1. 確率測度 $\mathbb{P}$ は以下の条件を満たす.

(1) $\mathbb{P}$ は平行移動 $\{\tau_x\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ に関して定常エルゴード的. すなわち,

$$\begin{cases} \mathbb{P}\circ\tau_x^{-1} = \mathbb{P} \\ \tau_x^{-1}(A) = A \Rightarrow \mathbb{P}(A) \in \{0,1\} \end{cases}$$

が全ての $x\in\mathbb{R}^d$ に関して成立する.

(2) $\mathbb{P}(\widehat{\Omega}) > 0$ かつ $\mathbb{P}(\Delta) = 0$.

Assumption 2. ある定数 $\lambda, \Lambda > 0$ が存在して, $\widehat{\mathbb{P}}$-almost all ω に対して

$$\lambda|\xi|^2 \le \langle a(\omega)\xi,\xi\rangle \le \Lambda|\xi|^2, \ \ \forall \xi\in\mathbb{R}^d.$$

Assumptions 1 と 2 によって $(\mathcal{E}^\omega, \mathcal{F}^\omega)$ が正則 Dirichlet 形式になる事が知られている ([15], [16]). 従って Dirichlet 形式の一般論により対応する拡散過程 $\{X_t^\omega\}_t$ が構成できる. この拡散過程は境界を反射壁として持つので, 本講演ではこれを reflecting diffusion と呼ぶ.

Assumption 3. $\widehat{\mathbb{P}}$-almost all ω に対して reflecting diffusion $\{X_t^\omega\}_t$ は Lebesgue 測度に対して絶対連続な推移密度 $p_t^\omega(\cdot,\cdot)$ を持つ.

Assumption 4. (1) (θ-very regularity (cf. [12, Assumption 1.3])) $\widehat{\mathbb{P}}$-a.s. ω に対して, ある (ω のみに依存する) 定数 $C_V^\omega \ge 1$, $C_{\mathrm{iso}}^\omega > 0$, $\theta^\omega \in (0,1)$ が存在して, $W'(\omega)$ は $(C_V^\omega, C_{\mathrm{iso}}^\omega, \theta^\omega)$-very regular. また, very regular の定義に現れる定数 $\hat{R}_\theta$ を, ω 依存性がわかるように $\hat{R}_\theta^\omega$ と書く事とする

(2) (Isoperimetric condition) $\widehat{\mathbb{P}}$-a.s. ω に対して, ある定数 $c_H^\omega > 0$ が存在して

$$C_{\mathrm{IS}}^\omega := \inf\left\{ \frac{\mathcal{H}_{d-1}(W'(\omega)\cap\partial O)}{|W'(\omega)\cap O|^{\frac{d-1}{d}}} \middle| \begin{array}{l} O\subset W'(\omega) \text{ は有界開集合で} \\ \text{Lipschitz 境界を持ち, かつ} \\ \mathcal{H}_{d-1}(W'(\omega)\cap\partial O) < c_H^\omega \end{array} \right\} > 0. \tag{3.1}$$

直感的には (1) は modified cluster が巨視的なスケールでは十分良い性質を持っている事を仮定している．一方 (2) は trap になるような狭い部分が存在しない事を仮定している．この 2 条件によって, Sobolev 型不等式や Poincaré 不等式が導けるので, 解析的な手法を使うことが可能になる．

筆者は前研究において Assmptions 1–4 の下で ω を固定する毎に確率 1 で reflecting diffusion のスケール極限がブラウン運動に収束する事を示した．

Theorem 3.1 (Quenched invariance principle, [23])**.** $d \geq 2$ とし, Assumptions 1-4 を仮定する．P_0^ω を $\{X_t^\omega\}_t$ が 0 から出発する時の法則とする．この時 $\widehat{\mathbb{P}}$-a.s.ω に対して, scaled process $\{\varepsilon X^\omega_{\varepsilon^{-2}t}\}_t$ は $\varepsilon \to 0$ とした時 P_0^ω の下で共分散行列 Σ の Brown 運動に弱収束する. さらに共分散行列 Σ は non-random な正定値行列である．

本稿の主定理はこれをより精密化した結果である．その為にはもう一つ仮定が必要になる．

Assumption 5. $\widehat{\mathbb{P}}$-a.s. ω に対して, 次が成り立つ.

(1) ある定数 $\gamma \equiv \gamma(\omega) \in (0,1)$ が存在して

$$\lim_{R\to\infty} \frac{h_{W'(\omega)}(R)}{R^\gamma} = 0. \tag{3.2}$$

(2) ある定数 $\Upsilon \equiv \Upsilon(\omega) \in (0,1)$ と $C_W^\omega > 0$ が存在して

$$d_{W'(\omega)(x,y)} \leq C_W d_{\mathrm{Euc}}(x,y) \vee R^\Upsilon \tag{3.3}$$

が全ての $x, y \in B^\omega(0,R)$ と $R \geq \hat{R}_\theta^\omega$ に対して成り立つ．ここで, $\hat{R}_\theta^\omega$ は Assumption 4 において現れる定数である．

Assumption 5 は最近接点 $g_{W'(\omega)}(x)$ と x のズレを制御するために用いられる．

筆者は以上の仮定の下で主結果である局所中心極限定理を証明する事に成功した．$k_t^\Sigma(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ で共分散行列 Σ のガウス核を表す．すなわち,

$$k_t^\Sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^d \det \Sigma}} \exp\left(-\frac{\langle x, \Sigma^{-1}x\rangle}{2t}\right).$$

Theorem 3.2 (局所中心極限定理, [22])**.** $d \geq 2$ とし, Assumptions 1–5 を仮定する．$R > 0$ とし, $I \subset (0,\infty)$ は有界開区間とする．この時 $\widehat{\mathbb{P}}$-almost all $\omega \in \widehat{\Omega}$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{|x|<R} \sup_{t\in I} \left|\varepsilon^{-d} p^\omega_{t/\varepsilon^2}(0, g_{W'(\omega)}(x/\varepsilon)) - k_t^\Sigma(x)\right| = 0.$$

Assumption1–3 は, クラスターに定常エルゴード性を課している Assumption 1(1) を除けば問題を考える為に必要な技術的な仮定である．筆者は Assumption 4, 5 が局所中心極限定理において本質的な条件である事を明らかにした．

4 証明の概略

この節では主結果の証明の概略を簡潔に述べる．各 $\omega \in \widehat{\Omega}$ 毎に示せば十分なため, 以後 ω を固定して議論する[3]．まず, 前節でも述べたように Assumption 4 から Sobolev 型不等式や Poincaré 不

[3]実際, [22] では一般の Lipschitz 領域 W に対して今の仮定に対応する条件を課して non-random な設定の下で議論を進めている．

等式を導く事ができる．また, volume regularity (2.1) から，（十分大きな半径を取れば）半径が事なる 2 つの同心円の Lebesgue 測度の比は定数で抑えられる事に注意されたい．これらによって Moser's iteration を行うことで放物型 Harnack 不等式を証明する事ができる．放物型 Harnack 不等式からは, 熱核の Hölder 連続性

$$\sup_{x,y\in B_{W'(\omega)}(x_0,r)} |p^\omega_t(0,x) - p^\omega_t(0,y)| \le c\left(\frac{r}{\sqrt{t}}\right)^\alpha t^{-\frac{d}{2}}$$

を導く事ができる．さらに, Assumption 5 によって最近接点 $g_W(x)$ をコントロールできるので

$$\lim_{r_0\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{\substack{x,y\in B_{\mathrm{Euc}}(0,R)\\ |x-y|<r_0}}\sup_{t\in I}\varepsilon^{-d}|p^\omega_{t/\varepsilon^2}(0,g_{W'(\omega)}(x/\varepsilon)) - p^\omega_{t/\varepsilon^2}(0,g_{W'(\omega)}(y/\varepsilon))| = 0 \tag{4.1}$$

という局所一様な熱核評価を得る事ができる．今, quenched invariance principle (Theorem 3.1) によって各点ではガウス核に収束する事が言えており, 式 (4.1) と組み合わせる事により主結果である Theorem 3.2 を示す事ができる．

参考文献

[1] S. Andres, M. T. Barlow, J.-D. Deuschel, and B. M. Hambly. Invariance principle for the random conductance model. *Probab. Theory Related Fields*, 156(3-4):535–580, 2013.

[2] S. Andres, J.-D. Deuschel, and M. Slowik. Invariance principle for the random conductance model in a degenerate ergodic environment. *Ann. Probab.*, 43(4):1866–1891, 2015.

[3] S. Andres and P. A. Taylor. Local limit theorems for the random conductance model and applications to the Ginzburg-Landau $\nabla\varphi$ interface model. *J. Stat. Phys.*, 182(2):Paper No. 35, 35, 2021.

[4] M. T. Barlow. Random walks on supercritical percolation clusters. *Ann. Probab.*, 32(4):3024–3084, 2004.

[5] M. T. Barlow and J.-D. Deuschel. Invariance principle for the random conductance model with unbounded conductances. *Ann. Probab.*, 38(1):234–276, 2010.

[6] M. T. Barlow and B. M. Hambly. Parabolic Harnack inequality and local limit theorem for percolation clusters. *Electron. J. Probab.*, 14:no. 1, 1–27, 2009.

[7] P. Bella and M. Schäffner. Quenched invariance principle for random walks among random degenerate conductances. *Ann. Probab.*, 48(1):296–316, 2020.

[8] P. Bella and M. Schäffner. Non-uniformly parabolic equations and applications to the random conductance model. *Probab. Theory Related Fields*, 182(1-2):353–397, 2022.

[9] N. Berger and M. Biskup. Quenched invariance principle for simple random walk on percolation clusters. *Probab. Theory Related Fields*, 137(1-2):83–120, 2007.

[10] A. Chiarini and J.-D. Deuschel. Local central limit theorem for diffusions in a degenerate and unbounded random medium. *Electron. J. Probab.*, 20:no. 112, 30, 2015.

[11] A. Chiarini and J.-D. Deuschel. Invariance principle for symmetric diffusions in a degenerate and unbounded stationary and ergodic random medium. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 52(4):1535–1563, 2016.

[12] J.-D. Deuschel, T. A. Nguyen, and M. Slowik. Quenched invariance principles for the random conductance model on a random graph with degenerate ergodic weights. *Probab. Theory Related Fields*, 170(1-2):363–386, 2018.

[13] A. Fannjiang and T. Komorowski. A martingale approach to homogenization of unbounded random flows. *Ann. Probab.*, 25(4):1872–1894, 1997.

[14] M. Fukushima, Y. Oshima, and M. Takeda. *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, volume 19 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, extended edition, 2011.

[15] M. Fukushima and M. Tomisaki. Reflecting diffusions on Lipschitz domains with cusps—analytic construction and Skorohod representation. volume 4, pages 377–408. 1995. Potential theory and degenerate partial differential operators (Parma).

[16] M. Fukushima and M. Tomisaki. Construction and decomposition of reflecting diffusions on Lipschitz domains with Hölder cusps. *Probab. Theory Related Fields*, 106(4):521–557, 1996.

[17] C. Kipnis and S. R. S. Varadhan. Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions. *Comm. Math. Phys.*, 104(1):1–19, 1986.

[18] P. Mathieu and A. Piatnitski. Quenched invariance principles for random walks on percolation clusters. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 463(2085):2287–2307, 2007.

[19] R. Meester and R. Roy. *Continuum percolation*, volume 119 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[20] H. Osada. Homogenization of diffusion processes with random stationary coefficients. In *Probability theory and mathematical statistics (Tbilisi, 1982)*, volume 1021 of *Lecture Notes in Math.*, pages 507–517. Springer, Berlin, 1983.

[21] H. Osada and T. Saitoh. An invariance principle for non-symmetric Markov processes and reflecting diffusions in random domains. *Probab. Theory Related Fields*, 101(1):45–63, 1995.

[22] Y. Takeuchi. Local central limit theorem for reflecting diffusions in a continuum percolation cluster. arXiv:2310.05482.

[23] Y. Takeuchi. Quenched invariance principle for a reflecting diffusion in a continuum percolation cluster. *J. Math. Soc. Japan, to appear*, arXiv:2204.01288.

[24] H. Tanemura. Homogenization of a reflecting barrier Brownian motion in a continuum percolation cluster in $\mathbf{R}^d$. *Kodai Math. J.*, 17(2):228–245, 1994.

等質空間上の確率測度に対する Delsarte 理論

広島大学　大学院先進理工系科学研究科　先進理工系科学専攻　数学プログラム
中田彬文 (Akifumi NAKADA)*

概要

Delsarte 理論は符号理論とデザイン理論を，Fourier 解析を通して双対概念として結びつけるものである．従来の有限部分集合に対する Delsarte 理論は，Delsarte's bound と呼ばれる，符号やデザインの研究における基礎的な道具を提供し，接吻数問題や球充填問題の部分的解決にも貢献している．本稿では，確率測度に対する Delsarte 理論の定式化を行う．本稿は奥田隆幸氏（広島大学）との共同研究に基づく．

1　導入

昨今，コンパクト Gelfand 対からくる等質空間上の有限部分集合に対する Delsarte 理論が盛んに研究されている．Delsarte 理論は，組合せ最適化の一部である符号理論とデザイン理論を，Fourier 解析を通して双対概念として結びつけるものである．符号理論は，信頼性の高い情報通信を効率的に行うことを目標に，空間上の点配置であって，2 点間の離れ具合が適切なもの（コード）を探す理論である．特に，濃度が大きいほど良い点配置であるとしている．応用例としては QR コードの誤り訂正がある．一方で，デザイン理論は，誤差の小さい標本調査を効率的に行うことを目標に，空間上の点配置であって，ある種の関数に対して，配置した点上の平均と空間全体での平均が一致するもの（デザイン）を探す理論である．特に，濃度が小さいほど良い点配置であるとしている．応用例としては実験計画法がある．符号理論やデザイン理論では，最良のコード・デザインを見つけることが非常に重要な目標であるが，あるコードやデザインの “最” 良性を示すことがしばしば難しい問題となる．そこで Delsarte 理論が役に立つ．Delsarte 理論はコードやデザインの濃度に Delsarte's bound と呼ばれる制限をかける．この制限がコードやデザインの最良性の指標になるのである．

Delsarte 理論の始まりは 1973 年の Philippe Delsarte による学位論文 [6] である．この論文では，アソシエーションスキームと呼ばれる対象の上で，有限部分集合に対する符号理論とデザイン理論が同時に展開され，これら 2 つの理論が Fourier 解析を通して双対概念として結びつけられた．その後，Delsarte 理論は 1977 年に n 次元球面上でも同様に展開され [7]，1980 年代にランク 1 コンパクト対称空間上に一般化された [4]．さらに，2000 年代に入ってから，ランク 2 以上のコンパクト対称空間である複素・実 Grassmann 多様体とユニタリ群上でも調べられた [1,2,13,14]．(2009 年までの進展は [3] に詳しい.）特に，ユニタリ群上のデザイン理論は，量子ゲート（量子コンピュータに用いられる量子回路の部品）の性能評価法の 1 つであるランダマイズド・ベンチマーキングを応用にも

* E-mail: nakada-aki@hiroshima-u.ac.jp

つ [11]．また，Delsarte 理論（や，その発展形）は，組合せ論において非常に重要な問題である接吻数問題（$n-1$ 次元単位球の周りに単位球を重ならないように触れさせる際に，最大でいくつ触れさせられるか調べる問題）や最密球充填問題（n 次元 Euclid 空間に単位球を重ならないように詰める際に，最も密に詰められる配置を調べる問題）の部分的解決に貢献した [5, 9, 10, 12, 15]．

本稿では，有限部分集合の代わりに確率測度に対して Delsarte 理論を展開する．確率測度に一般化するメリットとしては，有限とは限らない “良い” 部分空間を見つけることによって，従来の意味で良いデザインを構成できる可能性があることが挙げられる．例えば，[8] ではユニタリ群において，しかるべき部分空間に着目することで，具体的に良いデザインを構成することに成功している．この部分空間の “良さ” は，部分空間に自然に定まる確率測度のデザイン理論的性質により記述できることが期待されている．このことから，確率測度に対して符号理論・デザイン理論・Delsarte 理論を展開することで，より統一的な議論と，難問である具体的な良いデザインの構成が期待できる．

2　有限部分集合に対する Delsarte 理論

まずは，コンパクト Gelfand 対からくる等質空間上の有限部分集合に対する符号理論・デザイン理論・Delsarte 理論について，よく知られた事実を紹介する．

2.1　符号理論

符号理論は，空間上の点配置であって，2 点間の離れ具合が適切なもの（コード）を探す理論であった．これを数学的に記述する．G をコンパクト Hausdorff 位相群とし，H をその閉部分群とする．ここで，M をコンパクト G 等質空間 G/H とし，$R\colon M\times M\to\mathcal{I}$ を対角作用 $G\curvearrowright M\times M$ による商とする．また，$i_0\in\mathcal{I}$ を $M\times M$ の対角集合とおく．さらに，$X\subset M$ を空でない有限部分集合とし，$\mathcal{A}\subset\mathcal{I}$ とする．ここで，$R(X\times X)\subset\mathcal{A}$ であるとき，X を $\mathcal{A}$ **コード**と呼ぶ．

例 2.1. G を 2 次元実直交群 $O(2)$ とし，H を $O(1)$ とする．このとき，M は単位円 S^1 となり，R は標準実内積となり，$\mathcal{I}=[-1,1]$ となる．ここで，$\mathcal{A}\coloneqq[-1,1/2]\cup\{1\}$ とおき，X を正 6 角形の頂点集合とおくと，X は濃度最大の $\mathcal{A}$ コードである (cf. 図 1)．

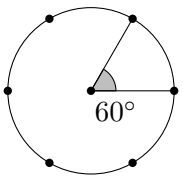


図 1　円周 S^1 と正 6 角形の頂点

2.2　デザイン理論

デザイン理論は，空間上の点配置であって，ある種の関数に対して，配置した点上の平均と空間全体での平均が一致するもの（デザイン）を探す理論であった．これを数学的に記述する．M 上の複素

数値連続関数を $C(M)$ と書き，G 上の確率 Haar 測度の商写像 $G \to M$ による像を μ_M と書く．このとき，μ_M は M 上の G 不変確率 Radon 測度である．また，μ_M による M 上の L^2 空間を $L^2(M)$ と書き，ユニタリ正則表現 $G \curvearrowright L^2(M)$ の既約部分表現全体の成す離散位相空間を $\mathcal{J}$ と書き，M 上の複素数値定数関数全体の成す空間を V_0 と書く．今，$V_0 \in \mathcal{J}$ であり，Peter–Weyl の定理より，各 $V \in \mathcal{J}$ は有限次元であり，$V \subset C(M)$ である．さらに，$X \subset M$ を空でない有限部分集合とし，$\mathcal{T} \subset \mathcal{J}$ とし，$V_0 \in \mathcal{T}$ とする．ここで，任意の $V \in \mathcal{T}$ と $f \in V$ に対して，

$$\int f \, d\mu_M = \frac{1}{\#X} \sum_{p \in X} f(p)$$

が成り立つとき，X を $\mathcal{T}$ **デザイン**と呼ぶ.

例 2.2. $(G, H) \coloneqq (O(2), O(1))$ とする．このとき，μ_M は S^1 上の標準測度となり，$S^1 \subset \mathbb{C}$ とみなすと，$\mathcal{J} = \{ V_n \coloneqq \langle z^n, \overline{z^n} \rangle_{\mathrm{lin}} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \}$ となる．ここで，$\mathcal{T} \coloneqq \{ V_n \mid n = 0, 1, 2 \}$ とおき，X を正 3 角形の頂点集合とおくと，X は濃度最小の $\mathcal{T}$ デザインである (cf. 図 2).

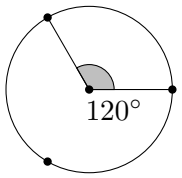


図 2　円周 S^1 と正 3 角形の頂点

2.3　Delsarte 理論

符号理論とデザイン理論を球 Fourier 変換で結びつけ，そこから Delsarte's bound を得る．空でない有限部分集合 $X \subset M$ を固定し，(G, H) は Gelfand 対であるとする．つまり，$G \curvearrowright L^2(M)$ は multiplicity free であるとする．最初に，$\left\{ (a_i)_{i \in \mathcal{I}} \subset \mathbb{C} \,\middle|\, \text{有限個の } i \text{ を除いて } a_i = 0 \right\}$ を $\mathbb{C}_{\mathcal{I}}$ と書き，X の $\mathcal{I}$ **分布** $a^X \in \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$ を次で定める．

$$a_i^X \coloneqq \frac{\#R^{-1}(i) \cap X \times X}{\#X \times X} \quad (i \in \mathcal{I}).$$

このように定義すると，$\mathcal{A} \subset \mathcal{I}$ に対して，次の 2 つが同値となる．

(1) X は $\mathcal{A}$ コードである．

(2) 任意の $i \notin \mathcal{A}$ に対して，$a_i^X = 0$ が成り立つ．

この命題によって，符号理論と $\mathcal{I}$ 分布が結びつけられる．

次に，M 上の測度 μ_X を各点 $p \in X$ に対する Dirac 測度の平均と定める．つまり，

$$\int f \, d\mu_X \coloneqq \frac{1}{\#X} \sum_{p \in X} f(p) \quad (f \in C(M))$$

で定める．ここで，X の $\mathcal{J}$ **分布** $b^X \in C(\mathcal{J})$ を次で定める．

$$V \mapsto b_V^X \coloneqq \left(\inf \left\{ \beta \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left| \int f \, d\mu_X \right| \leq \beta \|f\|_2 \text{ for all } f \in V \right\} \right)^2 \quad (V \in \mathcal{J}).$$

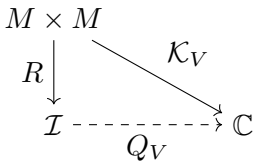
このように定義すると，$V_0 \in \mathcal{T}$ なる $\mathcal{T} \subset \mathcal{J}$ に対して，次の 2 つが同値となる．

(1) X は $\mathcal{T}$ デザインである．

(2) 任意の $V \in \mathcal{T} - \{ V_0 \}$ に対して，$b_V^X = 0$ が成り立つ．

この命題によって，デザイン理論と $\mathcal{J}$ 分布が結びつけられる．

続いて，$\mathcal{I}$ 分布と $\mathcal{J}$ 分布を結びつける球 Fourier 変換を紹介する．各 $V \in \mathcal{J}$ に対して，$\mathcal{K}_V$ を V に関する再生核とする（つまり，$(e_k)_{k=1}^N$ を V の正規直交基底とし，$\mathcal{K}_V \coloneqq \sum_{k=1}^N e_k \otimes \overline{e_k}$ と定める．）と，商の普遍性より，次の図式を可換にする連続写像 $Q_V \colon \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ が一意に存在する．



この Q_V を V の**球関数**と呼ぶ．これを用いて，**球 Fourier 変換** $\mathcal{F} \colon \mathbb{C}^{\mathcal{I}} \to C(\mathcal{J})$ を次で定める．

$$\mathcal{F}(a) \coloneqq \left(\widehat{a} \colon \mathcal{J} \to \mathbb{C}, \quad V \mapsto \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i Q_V(i) \right).$$

このとき，$\mathcal{F}$ は単射線形写像であり，MacWilliams 恒等式 $\widehat{a^X} = b^X$ が成り立つ．以上をまとめると，符号理論とデザイン理論を球 Fourier 変換で結びつけたことになる．

最後に，Delsarte's bound と呼ばれる，X の濃度にかかる制限を紹介する．次の線形計画問題の双対問題の実行可能解を一つ得るたびに，$\mathcal{A}$ コードかつ $\mathcal{T}$ デザインである X に対して，$a_{i_0}^X \in \mathbb{R}$ が取りうる値に制限がかかる．

探索物　$a \in \mathbb{C}^{\mathcal{I}}$,

目的関数 $a \mapsto a_{i_0}$,

制約条件 $a \geq 0, \quad a = 0 \text{ on } \mathcal{A}^c, \quad \widehat{a} \geq 0, \quad \widehat{a} = 0 \text{ on } \mathcal{T} - \{ V_0 \}, \quad \sum_{i \in \mathcal{I}} a_i = 1.$

この制限と $a_{i_0}^X = 1/\#X$ から，X の濃度にも制限がかかる．この制限（のうち最良のもの）を Delsarte's bound と呼ぶ．

3　確率測度に対する Delsarte 理論（主結果）

上で紹介した Delsarte 理論を確率測度に対して拡張する．M 上の確率 Radon 測度全体が成す集合を $\mathcal{P}(M)$ と書く．

3.1　符号理論

測度 μ_X の台 $\operatorname{supp} \mu_X \subset M$ は X に一致することを参考に，確率測度に対してコード性を定義する．$\mu \in \mathcal{P}(M)$ とし，$\mathcal{A} \subset \mathcal{I}$ とする．ここで，$R(\operatorname{supp} \mu \times \operatorname{supp} \mu) \subset \mathcal{A}$ であるとき，μ を $\mathcal{A}$ **コード**と呼ぶ．

3.2 デザイン理論

こちらも自然に拡張する．$\mu \in \mathcal{P}(M)$ とし，$\mathcal{T} \subset \mathcal{J}$ とし，$V_0 \in \mathcal{T}$ とする．ここで，任意の $V \in \mathcal{T}$ と $f \in V$ に対して，$\int f\, d\mu_M = \int f\, d\mu$ が成り立つとき，μ を $\mathcal{T}$ **デザイン**と呼ぶ．

3.3 Delsarte 理論

$\mu \in \mathcal{P}(M)$ を固定する．最初に，μ の $\mathcal{I}$ **分布** $a^\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{I})$ を，測度の積と像を用いて $a^\mu \coloneqq R_*(\mu \otimes \mu)$ と定める．さらに，$a_i^\mu \coloneqq a^\mu(\{\, i \,\})$ と定める．このように定義すると，有限部分集合の場合と同様に，次の命題によって符号理論と $\mathcal{I}$ 分布が結びつけられる．

命題 3.1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{I}$ とする．このとき，次の 2 つが同値となる．
(1) μ は $\mathcal{A}$ コードである．
(2) $\operatorname{supp} a^\mu \subset \mathcal{A}$ である．

次に，μ の $\mathcal{J}$ **分布** $b^\mu \in C(\mathcal{J})$ を次で定める．

$$V \mapsto b_V^\mu \coloneqq \left(\inf \left\{ \beta \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left| \int f\, d\mu \right| \le \beta \|f\|_2 \text{ for all } f \in V \right\} \right)^2 \quad (V \in \mathcal{J}).$$

このように定義すると，有限部分集合の場合と同様に，次の命題によってデザイン理論と $\mathcal{J}$ 分布が結びつけられる．

命題 3.2. $\mathcal{T} \subset \mathcal{J}$ とし，$V_0 \in \mathcal{T}$ とする．このとき，次の 2 つが同値となる．
(1) μ は $\mathcal{T}$ デザインである．
(2) $\operatorname{supp} b^\mu \subset \mathcal{T}^c \cup \{\, V_0 \,\}$ である．

続いて，**球 Fourier 変換** $\mathcal{F}$ を次のように拡張する．

$$\mathcal{F}(a) \coloneqq \left(\widehat{a} \colon \mathcal{J} \to \mathbb{C}, \quad V \mapsto \int Q_V\, da \right).$$

このとき，$\mathcal{F} \colon \mathcal{P}(\mathcal{I}) \to C(\mathcal{J})$ は単射線形写像であり，次の定理が成り立つ．

定理 3.3 (MacWilliams 恒等式)**.** $\widehat{a^\mu} = b^\mu$.

以上をまとめると，確率測度に対しても符号理論とデザイン理論を球 Fourier 変換で結びつけたことになる．

最後に，Delsarte's bound を拡張する．まずは有限部分集合の濃度の代わりを考える．ここでは，$\#X = 1/a_{i_0}^X = \int \chi_{i_0}\, da^{\mu_X}$（$\chi_{i_0}$ は指示関数）を参考にして，実数値連続関数 $\varphi \in C(\mathcal{I})$ を考え，$\int \varphi\, da^\mu \neq 0$ の場合に，$1/\int \varphi\, da^\mu$ を μ の φ **濃度**と呼ぶこととする．このとき，次の命題が成り立つ．

命題 3.4. $X \subset M$ を空でない有限部分集合とし，φ を $\mathcal{I}$ 上の実数値連続関数とし，$\varphi(i_0) = 1$ と $\varphi^{-1}(0)^c \cap R(X \times X) = \{\, i_0 \,\}$ を満たすとする．このとき，μ_X の φ 濃度は X の濃度と一致する．

ここで,

$$C_{\mathbb{R}}^{\top}(\mathcal{I}) \coloneqq \left\{ \psi \in C(\mathcal{I}) \;\middle|\; \overline{\psi([p,q])} = \psi([p,q]) = \psi([q,p]) \text{ for all } [p,q] \in \mathcal{I} \right\},$$
$$C_{c,\mathbb{R}}^{\top}(\mathcal{J}) \coloneqq \left\{ \xi \in C(\mathcal{J}) \;\middle|\; \overline{\xi(V)} = \xi(V) = \xi(\overline{V}) \text{ for all } V \in \mathcal{J},\ \operatorname{supp}\xi \text{ はコンパクト} \right\}$$

とおくと，次の定理が成り立つ.

定理 3.5 (Delsarte's bound)**.** $\varphi \in C_{\mathbb{R}}^{\top}(\mathcal{I})$ とする．このとき,

$$c_\varphi \coloneqq \sup\left\{ \xi(V_0) \in \mathbb{R} \;\middle|\; \xi \in C_{c,\mathbb{R}}^{\top}(\mathcal{J}),\ \xi \geq 0 \text{ on } \mathcal{T}^c,\ \varphi - \sum_{V\in\mathcal{J}} \xi(V) Q_V \geq 0 \text{ on } \mathcal{A} \right\},$$
$$d_\varphi \coloneqq \inf\left\{ \xi(V_0) \in \mathbb{R} \;\middle|\; \xi \in C_{c,\mathbb{R}}^{\top}(\mathcal{J}),\ \xi \leq 0 \text{ on } \mathcal{T}^c,\ \varphi - \sum_{V\in\mathcal{J}} \xi(V) Q_V \leq 0 \text{ on } \mathcal{A} \right\}$$

とおくと，$\mathcal{A}$ コードかつ $\mathcal{T}$ デザインな $\mu \in \mathcal{P}(M)$ に対して，$c_\varphi \leq \int \varphi\, da^\mu \leq d_\varphi$ が成り立つ.

このことから，μ の φ 濃度にも制限がかかる．この制限（のうち最良のもの）を Delsarte's bound と呼ぶ.

3.4 有限部分集合に対する符号理論・デザイン理論・Delsarte 理論との対応

ここまで，コンパクト Gelfand 対からくる等質空間上の確率測度に対して，符号理論・デザイン理論・Delsarte 理論を展開した．表 1 は有限部分集合に対するものと確率測度に対するものの用語の対応表である．これらの定義から，M の空でない有限部分集合 X が $\mathcal{A}$ コードであることと，μ_X が $\mathcal{A}$ コードであることは同値となり，X が $\mathcal{T}$ デザインであることと，μ_X が $\mathcal{T}$ デザインであることも同値となる．さらに，$a_i^X = a_i^{\mu_X}$ $(i \in \mathcal{I})$ と $b^X = b^{\mu_X}$ が成り立つ．また，従来の Delsarte's bound は $c_{\chi_{i_0}} \leq a_{i_0}^X \leq d_{\chi_{i_0}}$ と表現できる.

表 1　Delsarte 理論の用語の対応

	有限部分集合	確率測度
対象	M の空でない有限部分集合 X	M 上の確率 Radon 測度 μ
$\mathcal{A}$ コード	$R(X\times X) \subset \mathcal{A}$	$R(\operatorname{supp}\mu \times \operatorname{supp}\mu) \subset \mathcal{A}$
$\mathcal{T}$ デザイン	$\int f\, d\mu_M = \int f\, d\mu_X$	$\int f\, d\mu_M = \int f\, d\mu$
a_i^-	$\#R^{-1}(i) \cap X^2/\#X^2$	$a^\mu(\{\, i \,\})$
$\mathcal{I}$ 分布	$a^X \coloneqq (a_i^X)_{i\in\mathcal{I}} \in \mathbb{C}_{\mathcal{I}}$	$a^\mu \coloneqq R_*(\mu\otimes\mu) \in \mathcal{P}(\mathcal{I})$
b_V^-	$\lVert \mu_X\vert_V \rVert_{\mathrm{op}}^2$	$\lVert \mu\vert_V \rVert_{\mathrm{op}}^2$
$\mathcal{J}$ 分布	$b^X \colon V \mapsto b_V^X$	$b^\mu \colon V \mapsto b_V^\mu$
$\widehat{a}$	$V \mapsto \sum_{i\in\mathcal{I}} a_i Q_V(i)$	$V \mapsto \int Q_V\, da$
球 Fourier 変換 $\mathcal{F}$	$\mathbb{C}_{\mathcal{I}} \to C(\mathcal{J})$	$\mathcal{P}(\mathcal{I}) \to C(\mathcal{J})$

4　2 次元球面上の 1 デザインの例

この節では，$(G,H) \coloneqq (O(3),O(2))$ とする．このとき，M は単位球面 S^2 となり，R は標準実内積となり，$\mathcal{I}=[-1,1]$ となる．また，

$$\mathcal{J}=\left\{\left\{\,\mathbb{R}^3 \text{ 上の斉 } n \text{ 次調和多項式全体}\,\right\}\,\middle|\, n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}\cong\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

となり，Q_n は n 次 Legendre 多項式の定数倍となる．特に，$Q_0(t)=1$, $Q_1(t)=3t$ $(t\in[-1,1])$ となる．ここで，$\varphi(t)\coloneqq t/2+1/2$ $(t\in[-1,1])$ とする．このとき，Delsarte's bound から，$\mathcal{I}$ コードかつ $\{\,0,1\,\}$ デザインな $\mu\in\mathcal{P}(M)$（これを 1 デザインと呼ぶ）の φ 濃度は 2 であることが分かる．以下，S^2 上の具体的な 3 つの測度を観察する．

例 4.1. $X\coloneqq\{\,(1,0,0),(-1,0,0)\,\}\subset M$ とする (cf. 図 3)．このとき，$\mu_X\in\mathcal{P}(M)$ は 1 デザインである．実際，μ_X の φ 濃度は 2 である．

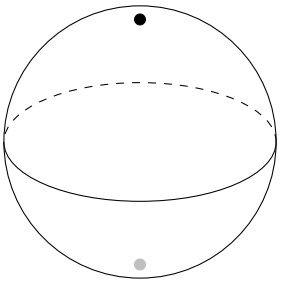


図 3　球面 S^2 と対蹠点

例 4.2. $\mu_0\in\mathcal{P}(M)$ を $\{\,(0,\cos\theta,\sin\theta)\mid\theta\in\mathbb{R}\,\}\subset M$ 上の標準確率測度とする (cf. 図 4)．このとき，μ_0 は 1 デザインである．実際，μ_0 の φ 濃度は 2 である．

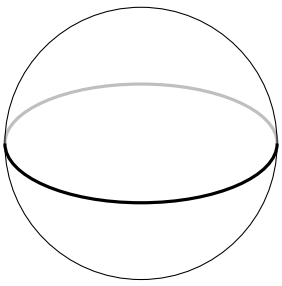


図 4　球面 S^2 と大円

例 4.3. $\mu_{1/2}\in\mathcal{P}(M)$ を $\left\{\,(1/2,\sqrt{3}/2\cos\theta,\sqrt{3}/2\sin\theta)\,\middle|\,\theta\in\mathbb{R}\,\right\}\subset M$ 上の標準確率測度とする (cf. 図 5)．このとき，$\mu_{1/2}$ の φ 濃度は $8/5<2$ である．実際，$\mu_{1/2}$ は 1 デザインではない．

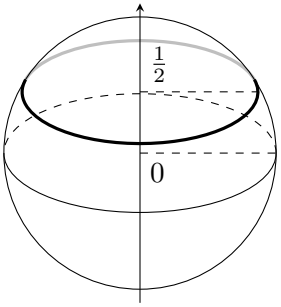


図 5　球面 S^2 と小円

5　まとめ

本研究の主結果は, コンパクト Gelfand 対からくる等質空間上の符号理論・デザイン理論・Delsarte 理論を，有限部分集合に対するものから確率測度に対するものに拡張したことである．

今後の課題を 3 つ挙げる．1 つ目は，φ 濃度の応用上の解釈を与えることである．2 つ目は，コンパクト Gelfand 対からくるという M の仮定を弱めることである．3 つ目は，球 Fourier 変換 $\mathcal{F}\colon \mathcal{P}(\mathcal{I}) \to C(\mathcal{J})$ の像を綺麗に表示することである．

参考文献

[1] C. Bachoc, E. Bannai, and R. Coulangeon. Codes and designs in Grassmannian spaces. Discrete Math., 277(1-3):15–28, 2004.

[2] C. Bachoc, R. Coulangeon, and G. Nebe. Designs in Grassmannian spaces and lattices. J. Algebraic Combin., 16(1):5–19, 2002.

[3] E. Bannai and E. Bannai. A survey on spherical designs and algebraic combinatorics on spheres. European J. Combin., 30(6):1392–1425, 2009.

[4] E. Bannai and S. G. Hoggar. On tight t-designs in compact symmetric spaces of rank one. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 61(3):78–82, 1985.

[5] H. Cohn, A. Kumar, S. D. Miller, D. Radchenko, and M. Viazovska. The sphere packing problem in dimension 24. Ann. of Math. (2), 185(3):1017–1033, 2017.

[6] P. Delsarte. An algebraic approach to the association schemes of coding theory. Philips Res. Rep. Suppl., (10):vi+97, 1973.

[7] P. Delsarte, J. M. Goethals, and J. J. Seidel. Spherical codes and designs. Geometriae Dedicata, 6(3):363–388, 1977.

[8] H. Kurihara and T. Okuda. Great antipodal sets on complex Grassmannian manifolds as designs with the smallest cardinalities. J. Algebra, 559:432–466, 2020.

[9] V. I. Levenshtein. On bounds for packings in n-dimensional euclidean space. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 245:1299–1303, 1979.

[10] O. R. Musin. The kissing number in four dimensions. Ann. of Math. (2), 168(1):1–32, 2008.

[11] Y. Nakata et al. Quantum circuits for exact unitary t-designs and applications to higher-order randomized benchmarking. PRX Quantum, 2(3), 9 2021.

[12] A. M. Odlyzko and N. J. A. Sloane. New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions. J. Combin. Theory Ser. A, 26(2):210–214, 1979.

[13] A. Roy. Bounds for codes and designs in complex subspaces. J. Algebraic Combin., 31(1):1–32, 2010.

[14] A. Roy and A. J. Scott. Unitary designs and codes. Des. Codes Cryptogr., 53(1):13–31, 2009.

[15] M. S. Viazovska. The sphere packing problem in dimension 8. Ann. of Math. (2), 185(3):991–1015, 2017.

パラレルセッション
会場Ａ

3 変数多項式環のレトラクトについて

新潟大学大学院自然科学研究科数理物質科学専攻数理科学コース
笹川 理湖 (Riko SASAGAWA) *

概要

B を体 k 上の n 変数多項式環とする. B の k 部分代数 A がレトラクトであるとは, B から A への全射準同型写像 φ で $\varphi|_A$ が恒等写像になるものが存在するときをいう. 本発表では, $n = 3$ で k の標数が正の場合について, B のレトラクトが多項式環になるための十分条件をいくつか紹介する.

1 導入

k を体とし, k 上の n 変数多項式環を $k^{[n]}$ と表す. 以下, 扱う環はすべて k 代数であり, $\cong$ は特に断らない限り k 代数としての同型を意味するものとする.

定義 1.1. B を k 代数とし, A を B の k 部分代数とする. A が B の**レトラクト**であるとは, A が次の同値な 3 条件のうちの 1 つをみたすときをいう.

(1) k 代数としての自己準同型写像 φ で, $\varphi^2 = \varphi$ かつ $\varphi(B) = A$ となるものが存在する. (この φ を**レトラクション**という.)
(2) B から A への k 代数としての全射準同型写像 φ で, $\varphi|_A$ が恒等写像になるものが存在する.
(3) B のあるイデアル I が存在して, A 加群としての同型 $B \cong A \oplus I$ が成り立つ.

k 代数のレトラクトについて, いくつかの先行研究があるが, D. L. Costa 氏は [2] において, 次の問題を提起した.

問題 1.2. $k^{[n]}$ のレトラクト A は多項式環になるか.

この問題は, 以下の Zariski 消去問題を含んでいる.

問題 1.3. (Zariski 消去問題) A を有限生成な k 整域とする. このとき, $A^{[1]} \cong k^{[n+1]} \Longrightarrow A \cong k^{[n]}$ は成り立つか.

実際, $A^{[1]} \cong k^{[n+1]}$ が成り立つとき, k 代数としての準同型写像 $\varphi : k^{[n+1]} \cong A[x] \to A$ を, $\varphi(x) = 0$, $\varphi(a) = a$ $(a \in A)$ により定めると, φ はレトラクションである. したがって, A は $k^{[n+1]}$ のレトラクトである. ここで, 問題 1.3 が肯定的であれば, $A \cong k^{[n]}$ が成り立つことが分かる.

* E-mail: f22a038f@mail.cc.niigata-u.ac.jp

問題 1.2 について, 次の結果が知られている.

(1) $\mathrm{tr.deg}_k A = 0$ (resp. $\mathrm{tr.deg}_k A = n$) ならば $A = k$ (resp. $A = k^{[n]}$) が成り立つ.
(2) ([2, Theorem 3.5]) $n = 2$ ならば A は多項式環である. 更に, $n \geq 3$ かつ $\mathrm{tr.deg}_k A = 1$ ならば, $A \cong k^{[1]}$ が成り立つ.
(3) ([6, Theorem 2.5], [1, Theorem 5.8]) $n = 3$ かつ $\mathrm{char}\,(k) = 0$ ならば, A は多項式環である. 更に, $\mathrm{char}\,(k) = 0$ かつ $\mathrm{tr.deg}_k A = 2$ ならば, $A \cong k^{[2]}$ が成り立つ.
(4) ([3], [4]) $n \geq 4$ かつ $\mathrm{char}\,(k) > 0$ のときは反例がある.

したがって, 問題 1.2 は $n = 3$ かつ $\mathrm{char}\,(k) > 0$ の場合と, $n \geq 4$ かつ $\mathrm{char}\,(k) = 0$ の場合が残されている. 今回は, $n = 3$ かつ $\mathrm{char}\,(k) > 0$ の場合における部分的な結果を紹介する.

2 準備

主結果を紹介するために必要となる概念と結果を紹介する. 以下, k を体とする. さらに, 整域 B に対して, B の商体を $Q(B)$ と表すこととする.

2.1 レトラクトに関する性質

初めに, k 整域のレトラクトの性質をいくつか紹介する.

補題 2.1. (cf. [2, Section 1]) *B を k 整域とし, A を B のレトラクトとする. このとき, 次が成り立つ.*

(1) *$Q(A) \cap B = A$.*
(2) *B が k 上有限生成であるならば, A も k 上有限生成である.*
(3) *B が UFD ならば, A も UFD である.*

補題 2.2. (cf. [6, Lemma 1.2]) *B を k 整域とし, k' を k の任意の代数拡大体とする. A が B のレトラクトであるならば, $A \otimes_k k'$ は $B \otimes_k k'$ のレトラクトである.*

2.2 lfihd に関する性質

次に, lfihd の定義とその核に関する性質を紹介する. 以下, A を k 整域とする.

定義 2.3. *$D = \{D_i\}_{i \geq 0}$ を A の自己写像の族とする. D は A 上の k* **高階導分 (higher k-derivation)** *であるとは, 次の 2 条件をみたすときをいう.*

(1) *任意の $i \geq 0$ に対して, D_i は k 線形写像である. また, D_0 は A 上の恒等写像である.*
(2) *任意の $n \geq 0$, 任意の $x, y \in A$ に対して, $D_n(xy) = \sum_{i+j=n} D_i(x) D_j(y)$ が成り立つ.*

定義 2.4. *$D = \{D_i\}_{i \geq 0}$ を A 上の k 高階導分とする. D は* **局所有限 (locally finite)** *である (resp.* **階層的 (iterative)** *である) とは, 次の (3) (resp. (4)) の条件をみたすときをいう.*

(3) 任意の $a \in A$ に対して, ある $N > 0$ が存在して, $n \geq N$ となるすべての n に対して, $D_n(a) = 0$ が成り立つ.
(4) 任意の $i, j \geq 0$ に対して, $D_i \circ D_j = \binom{i+j}{i} D_{i+j}$ が成り立つ.

定義 2.5. $D = \{D_i\}_{i \geq 0}$ を A 上の k 高階導分とする. $\bigcap_{i \geq 1} \ker D_i$ を D の**核**といい, A^D と表す. $A^D = A$ が成り立つとき, D は**自明**であるという.

以下, 局所有限階層的高階導分を *lfihd* と省略して書く. lfihd の核に関する性質として, 次の結果が知られている.

補題 2.6. (cf. [5, Section 2]) D を A 上の lfihd とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $Q(A^D) \cap A = A^D$.
(2) A が UFD ならば, A^D も UFD である.

補題 2.7. (cf. [5, Lemma 2.2]) D を A 上の非自明な lfihd とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $A \otimes_{A^D} Q(A^D) \cong Q(A^D)^{[1]}$.
(2) A が k 上有限生成ならば, $\mathrm{tr.deg}_k Q(A^D) = \mathrm{tr.deg}_k Q(A) - 1$ が成り立つ.

最後に, 次の定義を紹介する.

定義 2.8. A 上の lfihd 全体の集合を $\mathrm{LFIHD}_k(A)$ とおく. このとき,

$$\mathrm{ML}(A) = \bigcap_{D \in \mathrm{LFIHD}_k(A)} A^D$$

を A の **ML 不変量 (Makar-Limanov invariant)** という.

3 主定理

k を体とする. 今回, $k^{[3]}$ のレトラクトが多項式環になるための十分条件として, 次の結果を得ることができた. 以下, $B = k^{[3]}$ とおく.

定理 3.1. A を $\mathrm{tr.deg}_k A = 2$ となる B のレトラクトとする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $\mathrm{ML}(A) \neq A$ ならば, $A \cong k^{[2]}$ が成り立つ.
(2) 非自明な B 上の lfihd D が存在して, $A = B^D$ ならば, $A \cong k^{[2]}$ が成り立つ.

定理 3.1 において, k の標数が 0 のときは $A \cong k^{[2]}$ となることは [6, Theorem2.5] や [1, Theorem 5.8] より従う. k の標数が正となる場合が新しい結果である. ここでは, 定理 3.1 の (1) の証明を紹介する. 証明では, 次の結果を用いる.

補題 3.2. (Zariski [9]) A を $\mathrm{tr.deg}_k A \leq 2$ となる $k^{[n]}$ の k 部分代数とする. このとき, $Q(A) \cap k^{[n]}$ は k 上有限生成である.

補題 3.3. (Zaks [8]) R を $k^{[n]}$ の k 部分代数とする．R は次の (1)–(3) をみたすと仮定する．

(1) R は k 上有限生成である．
(2) R は正規である．
(3) $\mathrm{tr.deg}_k R = 1$.

このとき, $R \cong k^{[1]}$ が成り立つ.

補題 3.4. (Russell–Sathaye [7, Theorem 2.4.2]) A を有限生成な k 整域とする．$f \in A$ に対して, $S = k[f] \setminus \{0\}$ とおく．次の (1)–(3) を仮定する．

(1) $S^{-1}A \cong k(f)^{[1]}$.
(2) $k(f) \cap A = k[f]$.
(3) A は k 上 geometrically factorial である．すなわち, 任意の k の代数拡大体 k' に対して, $A \otimes_k k'$ は UFD である．

このとき, $A \cong k[f]^{[1]}$ が成り立つ.

定理 3.1 (1) の証明を紹介する．

定理 3.1 (1) の証明. A は B のレトラクトであり, B は k 上有限生成であるから, 補題 2.1 (2) より, A は k 上有限生成である．さらに, B は UFD であるから, 補題 2.1 (3) より, A は UFD である．仮定より, $\mathrm{ML}(A) \neq A$ であるから, A 上非自明な lfihd D が存在する．ここで, $R = A^D$ とおく．

主張 1. $R \cong k^{[1]}$ が成り立つ.

証明. D は A 上非自明であるから, 補題 2.7 (2) より,

$$\mathrm{tr.deg}_k R = \mathrm{tr.deg}_k A - 1 = 2 - 1 = 1$$

が成り立つ．A は UFD であるから, 補題 2.6 (2) より, R は UFD である．さらに, 補題 2.6 (1) と補題 3.2 より, $R = Q(R) \cap A$ は k 上有限生成である．したがって, R は補題 3.3 の仮定をみたす．以上より, $R \cong k^{[1]}$ が成り立つ. □

主張 2. A は k 上 geometrically factorial である．

証明. k' を k の代数拡大体とする． 補題 2.2 より, $A \otimes_k k'$ は $B \otimes_k k'$ のレトラクトである．$B \otimes_k k' \cong k'^{[3]}$ は UFD であるから, 補題 2.1 (3) より, $A \otimes_k k'$ は UFD である．よって, A は k 上 geometrically factorial である. □

主張 3. $A \cong k^{[2]}$ が成り立つ.

証明. 主張 1 より, ある $f \in A \setminus k$ に対して, $R = k[f]$ となることと, 補題 2.6 (1) より,

$$k(f) \cap A = Q(R) \cap A = R = k[f]$$

が成り立つ．よって, 補題 3.4 の仮定 (2) が成り立つ．$S = k[f] \setminus \{0\}$ とおく．補題 2.7 (1) より,

$$S^{-1}A = A \otimes_R Q(R) \cong Q(R)^{[1]} = k(f)^{[1]}$$

が成り立つ. よって, 補題 3.4 の仮定 (1) が成り立つ. 主張 2 より, 補題 3.4 の仮定 (3) が成り立つ. 以上より, $A \cong k[f]^{[1]} \cong k^{[2]}$ が成り立つ. □

以上により, 定理 3.1 (1) が示された.

□

参考文献

[1] S. Chakraborty, N. Dasgupta, A. K. Dutta and N. Gupta, Some results on retracts of polynomial rings, J. Algebra, **567** (2021), 243–268.

[2] D. L. Costa, Retracts of polynomial rings, J. Algebra, **44** (1977), 492–502.

[3] N. Gupta, On the cancellation problem for the affine space $\mathbb{A}^3$ in characteristic p, Invent. Math., **195** (2014), 279–288.

[4] N. Gupta, On Zariski's cancellation problem in characteristic p, Adv. Math., **264** (2014), 296–307.

[5] H. Kojima, Notes on the kernels of locally finite iterative higher derivations in polynomial rings, Comm. Algebra, **44** (2016), 1924–1930.

[6] T. Nagamine, A note on retracts of polynomial rings in three variables, J. Algebra, **534** (2019), 339–343.

[7] P. Russell and A. Sathaye, On finding and cancelling variables in $k[X, Y, Z]$, J. Algebra, **57** (1979), 151–166.

[8] A. Zaks, Dedekind subrings of $k[x_1, \ldots, x_n]$ are rings of polynomials, Israel J. Math., **9** (1971), 285–289.

[9] O. Zariski, Interprétations algébrico-géométriques du quatorzième problème de Hilbert, Bull. Sci. Math., **78** (1954), 155–168.

1 の冪根における量子 SL_2 の余イデアル部分代数について

筑波大学大学院 理工情報生命学術院 数理物質科学研究群
杉谷礼 (Rei SUGITANI) *†

概要

余イデアル部分代数は量子等質空間の定式化として知られており，ホップ代数の理論における部分群に対応する概念とも考えられている．本講演では「量子線形空間の持ち上げ」と呼ばれるクラスのホップ代数の余イデアル部分代数の分類に関する結果を与える．応用として 1 の冪根における SL_2 型の量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ および量子座標環 $\overline{O_q(SL_2)}$ の余イデアル部分代数のリストを与える．

1 導入

アフィン群スキーム $\mathbf{G}$ は米田の補題によって可換ホップ代数 $H := \mathcal{O}(\mathbf{G})$ に対応する [Wat79]．さらにその閉部分群スキームによる剰余類空間がアフィンであるとき，対応する可換代数は，H の余イデアル部分代数と呼ばれるものとなる．Takeuchi [Tak79] はアフィンであるような $\mathbf{G}$ の剰余類空間を

$$H \text{ が } A\text{-加群として忠実平坦である} \tag{1.1}$$

という性質を満たすような H の余イデアル部分代数 A として特徴づけた．

一方で，量子群の研究の進展とともに量子等質空間，つまり量子群が上手く作用する空間が考えられ始めた．そこで Müller と Schneider は量子等質空間を抽象的に扱う枠組みを考えるために，これまで具体的な形で現れていた量子等質空間たちの忠実平坦性などの性質を調べ，条件 1.1 を満たす余イデアル部分代数を一般のホップ代数 H に対する等質空間とみなすことを提唱した [MS99]．このような経緯から，余イデアル部分代数はホップ代数および量子群の理論において重要な研究対象であると認識されている．実際，余イデアル部分代数に関して様々な研究が行われていることが [OWR15] から見受けられる．

本研究では主に有限次元の可換とは限らないホップ代数を考える．その際に極めて重要なのが Skryabin による次の結果である．

定理 1.1 ([Skr07, Theorem 6.1])．H を有限次元ホップ代数，A を H の余イデアル部分代数とする．このとき H は自由 A-加群である．特に $\dim H$ は $\dim A$ で割り切れる．

* E-mail:rsugitani@math.tsukuba.ac.jp
† 本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2124 の支援を受けたものです．

これより有限次元ホップ代数の任意の余イデアル部分代数は条件 1.1 を満たすことがわかる．また有限群 G 上の等質空間 (つまり推移的な G-集合) は，G のある部分群による剰余類の集合と同型であるから，G の部分群に対応していると考えられる．さらに有限群の群環やその双対の余イデアル部分代数はその群の部分群と対応していることも示される．これらのことから，有限次元ホップ代数の余イデアル部分代数は有限群の部分群のようなものであると考えられている [CW14].

さて，以上に述べたことからホップ代数の余イデアル部分代数の分類は重要な問題とされる．例えば q が 1 の冪根でない量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ の場合，群的元を全て含むような余イデアル部分代数の分類は既に完了している [HS13, Theorem 7.3], [HK12, Theorem 3.8]．また群的元を全て含まない場合もある条件のもとで分類の結果がある [HK13, Theorem 2.15]．さらに Vocke [Voc18] によって，$U_q(\mathfrak{g})$ の群的元全体の集合との共通部分が部分ホップ代数となるような余イデアル部分代数の生成元も考えられており，その応用として $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ と $U_q(\mathfrak{sl}_3)$ の余イデアル部分代数の生成元のリストが与えられている．他にもそれぞれ Chirvasitu-Kasprzak-Szulim [CKS20] と Burciu [Bur15] によって，タフト代数と余中心カッツ代数と呼ばれるクラスの有限次元ホップ代数の場合も分類されている．

本稿では有限次元ホップ代数の余イデアル部分代数の分類に関する結果を紹介する．特に双対ホップ代数および，Andruskiewitsch-Schneider [AS98] によって導入された「量子線形空間の持ち上げ」と呼ばれるクラスのホップ代数の場合を考える．最後に以上の議論の応用として 1 の冪根における量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ およびその座標環 $\overline{O_q(SL_2)}$ の余イデアル部分代数の分類リストを与える．

2　ホップ代数と余イデアル部分代数

定義 2.1 (余代数，ホップ代数，点状ホップ代数)．線形空間 C が線形写像 $\Delta : C \to C \otimes C$, $\varepsilon : C \to \Bbbk$ を持ち，これらが

$$(\mathrm{id}_C \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta$$
$$(\mathrm{id}_C \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id}_C = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_C) \circ \Delta$$

を満たすとき C を余代数という．この Δ, ε はそれぞれ余積，余単位と呼ばれる．また余積 Δ を，$\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ と表す（Sweedler 記法）．

代数 H が余代数であり余積と余単位がともに代数射であるとする．さらに $m : H \otimes H \to H$ を代数 H の積とするとき，$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, H)$ は

$$f * g := m \circ (f \otimes g) \circ \Delta \quad (f, g \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, H))$$

で定まる積に関して代数となる．$\mathrm{id}_H \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, H)$ がこの積に関する逆元 $S \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, H)$ をもつとき，H をホップ代数という．この S は対合射と呼ばれる．

C を余代数とする．C の単純部分余代数がすべて 1 次元のとき，C を点状余代数という．特に C がホップ代数のとき，C を点状ホップ代数という．

定義 2.2 (余イデアル部分代数)．ホップ代数 H の部分代数 A が右余イデアル，すなわち

$$\Delta(A) \subset A \otimes H$$

を満たすとき，A を右余イデアル部分代数という．左余イデアル部分代数も同様に定義される．本稿では余イデアル部分代数といえば右余イデアル部分代数をさすことにする．

定義 2.3 (群的元，歪原始元)．H をホップ代数とする．

$$\mathrm{G}(H) = \{g \in H \mid \Delta(g) = g \otimes g,\ \varepsilon(g) = 1\}.$$

の元を群的元といい，

$$\mathrm{P}_{g,h}(H) = \{p \in H \mid \Delta(p) = p \otimes g + h \otimes p\} \quad (g, h \in \mathrm{G}(H))$$

の元を (g, h)-歪原始元という．

有限次元ホップ代数について次の事実が知られている：

定理 2.4. 有限次元ホップ代数 H の双対空間 H^* は，余積と余単位を次のように定めることによりホップ代数となる：

$$f_{(1)}(a) \otimes f_{(2)}(b) = f(ab),\ \varepsilon(f) = f(1) \quad (f \in H^*,\ a, b \in H).$$

3 双対ホップ代数の余イデアル部分代数

H を有限次元ホップ代数とし，A を H の余イデアル部分代数とする．

定義 3.1. H の右余イデアル部分代数 A に対し

$$A^+ := A \cap \mathrm{Ker}\ (\varepsilon)$$

とおく．H/A^+H は H の商余代数として左 H-加群余代数になっており，その双対空間 $(H/A^+H)^*$ は右 H^*-余加群代数，つまり H^* の右余イデアル部分代数とみなせる．

双対ホップ代数の余イデアル部分代数の分類において次の定理が重要である：

定理 3.2 ([Mas92, Proposition 2.10]，[Skr07, Corollary 6.5])．対応 $A \mapsto (H/A^+H)^*$ は H の余イデアル部分代数と，H^* の余イデアル部分代数の間の全単射を与える．

この A に対応する $(H/A^+H)^*$ の良い表示を得るために記号を導入しよう．L と K を有限次元ホップ代数とし，$\mathcal{C}(K)$ で K の余イデアル部分代数全体の集合を表すことにする．ホップ代数の同型射 $\phi : K \to L^*$ が与えられたとする．以下，$k \in K$ と $\ell \in L$ に対し $(k, \ell) := \phi(k)(\ell)$ とする．このとき定理 3.2 の対応と同型写像 $\phi : K \to L^*$ を組み合わせて得られる写像

$$\mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(K)\,;\, A \mapsto A^{\diamondsuit} := \phi^{-1}\left(\left(L/A^+L\right)^*\right)$$

は全単射となる．このとき K には ϕ を通して，L^* の右 L-加群構造から誘導される右 L-加群の構造が入る．この L-作用を $\leftharpoonup$ で表す．つまり

$$k \leftharpoonup \ell = \left(k_{(1)}, \ell\right) k_{(2)} \quad (k \in K, \ell \in L).$$

以上の記号のもとで次が成り立つ：

補題 3.3. $A \in \mathcal{C}(L)$ に対して

$$A^{\diamondsuit} = \{k \in K \mid k \leftharpoonup a = \varepsilon(a)k \text{ for all } a \in A\}$$

が成り立つ．

証明. $\phi : K \to L^*$ はホップ代数の同型であるから，

$$(k \leftharpoonup \ell, \ell') = \left(k_{(1)}, \ell\right)\left(k_{(2)}\ell'\right) = (k, \ell\ell') \quad (k \in K, \ell, \ell' \in L). \tag{3.1}$$

$k \in A^{\diamondsuit}$，$a \in A$ とする．このとき $A^{\diamondsuit}$ の定義より，任意の $x \in A^+L$ に対して $(k, x) = 0$ である．$a^+ := a - \varepsilon(a)1$ は A^+ に含まれるから，任意の $\ell \in L$ に対して

$$(k \leftharpoonup a, \ell) - (\varepsilon(a)k, \ell) = \left(k \leftharpoonup a^+, \ell\right) \overset{(3.1)}{=} \left(k, a^+\ell\right) = 0$$

を得る．$(-,-)$ の非退化性より，$k \leftharpoonup a = \varepsilon(a)k$．以上より “$\subset$” がわかった．逆を示そう．$k \in K$ を任意の $a \in A$ に対して $k \leftharpoonup a = \varepsilon(a)k$ となるような元とする．$a \in A^+$ と $\ell \in L$ に対して，$\varepsilon(a) = 0$ だから

$$\phi(k)(a\ell) = (k, a\ell) \overset{(3.1)}{=} (k \leftharpoonup a, \ell) = (\varepsilon(a)k, \ell) = 0$$

が成り立つ．従って $k \in \phi^{-1}\left((A^+L)^*\right)$ がわかり証明が完了した． □

この $A^{\diamondsuit}$ の次元に関して次のことが成立する：

命題 3.4. $\dim A^{\diamondsuit} = \dim(H)/\dim(A)$ が成り立つ．

証明. H は左 A-加群かつ右 (H/A^+H)-余加群として $A \otimes (H/A^+H)$ と同型である [Skr07, Theorem 6.1]．従って，

$$\dim(H) = \dim(A) \cdot \dim\left(H/A^+H\right) = \dim(A) \cdot \dim\left(A^{\diamondsuit}\right)$$

となる． □

4 量子線形空間の持ち上げ

ニコルス代数は対称代数の一般化のようなものであり，有限次元点状ホップ代数の分類を背景に盛んに研究されてきた．量子線形空間とは，対角型と呼ばれるクラスのニコルス代数のうち最も基本的なものである．Andruskiewitsch と Schneider [AS98] は有限次元量子線形空間の持ち上げとして得られる有限次元点状ホップ代数の分類を行なった．本節では分類の結果として得られるホップ代数 $U(\mathcal{D})$ の定義を紹介し，小さい量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ がこのクラスに含まれることを説明する．$U(\mathcal{D})$ の余イデアル部分代数については次節で議論する．

θ を正整数とする．データ

$$\mathcal{D} = \left(\Gamma, (g_i)_{1 \le i \le \theta}, (\chi_i)_{1 \le i \le \theta}, (\lambda_{ij})_{1 \le i < j \le \theta}, (\mu_i)_{1 \le i \le \theta}\right) \tag{4.1}$$

は以下のようなものとする：

- Γ は有限アーベル群である．
- $g_i \in \Gamma$，$\chi_i \in \hat{\Gamma} := \mathrm{Hom}\left(\Gamma, \Bbbk^{\times}\right)$ である．但し，

$$\chi_i\left(g_i\right) \neq 1,\ \chi_i\left(g_j\right)\chi_j\left(g_i\right) = 1 \quad (i,j = 1,\cdots,\theta\,;\, i \neq j).$$

  であることを要請する．
- $\lambda_{ij} \in \Bbbk$ である．但し，$g_i g_j = e$ または $\chi_i\chi_j \neq \varepsilon$ のとき $\lambda_{ij} = 0$ であることを要請する．ここに e および ε は，Γ および $\hat{\Gamma}$ の単位元である．
- $\mu_i \in \{0,1\}$ とする．但し，$g_i^{N_i} = e$ または $\chi_i^{N_i} \neq \varepsilon$ のとき，$\mu_i = 0$ であることを要請する．ここに N_i は $\chi_i\left(g_i\right)$ の位数である．

定義 4.1. 式 (4.1) のデータ $\mathcal{D}$ が与えられたとき，ホップ代数 $U(\mathcal{D})$ が次のように定義される：

生成元	$u_g\ (g \in \Gamma),\ x_i\ (i = 1,\cdots,\theta).$
関係式	$u_e = 1, \quad u_g u_h = u_{gh}, \quad u_g x_i = \chi_i(g) x_i u_g, \quad x_i^{N_i} = \mu_i\left(1 - u_{g_i}^{N_i}\right)$
	$x_j x_i = \chi_i\left(g_j\right) x_i x_j + \lambda_{ij}\left(1 - u_{g_i} u_{g_j}\right), \quad (g,h \in \Gamma,\ i,j \in \{1,\cdots,\theta\},\ i < j).$
ホップ代数構造	$u_g \in \mathrm{G}\left(U(\mathcal{D})\right),\ x_i \in \mathrm{P}_{u_{g_i},1}\left(U(\mathcal{D})\right),\ .$

以降 $u_g\ (g \in G)$ を単に g と書くことにする．

例 4.2. $N > 1$ を奇数とし，q を 1 の原始 N 乗根とする．(4.1) のデータ $\mathcal{D}$ を次のように定める：

$$\theta = 2,\ \Gamma = \left\langle g \mid g^N = e \right\rangle,\ g_1 = g_2 = g,\ \chi_1(g) = q^2,\ \chi_2(g) = q^{-2},\ \lambda_{12} = 1,\ \mu_1 = \mu_2 = 0. \quad (4.2)$$

このときホップ代数 $U\left(\mathcal{D}\right)$ は次のようになる：

生成元	$g,\ x_1,\ x_2$
関係式	$g^N = 1,\ gx_1 = q^2 x_1 g,\ gx_2 = q^{-2} x_2 g,\ x_1^N = x_2^N = 0,\ x_2 x_1 = q^2 x_1 x_2 + 1 - g^2.$
ホップ代数構造	$g \in \mathrm{G}\left(U(\mathcal{D})\right),\ x_1, x_2 \in \mathrm{P}_{g,1}\left(U(\mathcal{D})\right),\ \varepsilon(g) = 1,\ \varepsilon\left(x_1\right) = \varepsilon\left(x_2\right) = 0.$

このホップ代数 $U\left(\mathcal{D}\right)$ の生成元を $K = g$，$E = x_1$，$F = \left(q - q^{-1}\right)^{-1} g^{-1} x_2$ ととりなおすと，関係式とホップ代数構造は

$$K^N = 1,\ KE = q^2 EK,\ KF = q^2 FK,\ E^N = F^N = 0,\ EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}},$$
$$\Delta(K) = K \otimes K, \quad \Delta(E) = E \otimes K + 1 \otimes E, \quad \Delta(F) = F \otimes 1 + K^{-1} \otimes F.$$

となる．すなわちデータ (4.2) から得られるホップ代数 $U\left(\mathcal{D}\right)$ は，よく知られた小さい量子群 $u_q\left(\mathfrak{sl}_2\right)$ と同じものである．

5 主結果

5.1 小さい量子群 $u_q\left(\mathfrak{sl}_2\right)$ の余イデアル部分代数

記号は定義 4.1 のとおりとする．ホップ代数 $U\left(\mathcal{D}\right)$ の余イデアル部分代数について議論するために，まずは記号を準備しよう．G を Γ の部分群とし，$G^{\perp} = \{\chi \in \hat{\Gamma} \mid \chi(g) = 1 \text{ for all } g \in G\}$ とす

る．添字集合 $\{1,2,\ldots,\theta\}$ に同値関係 $\sim_G$ を

$$i \sim_G j \Longleftrightarrow g_i \equiv g_j \pmod{G} \text{ かつ } \chi_i \equiv \chi_j \pmod{G}^{\perp}$$

で定め，$[j]$ で j の $\sim_G$ に関する同値類を表す．$[j]=\{i_1,\ldots,i_n\}$ $(i_1<\cdots<i_n)$ とし，

$$\xi_j(c_1,\cdots,c_n,a)=g_j\sum_{s=1}^{n}c_s g_{i_s}^{-1}x_{i_s}+ag_j \quad (c_1,\cdots,c_n,a\in\Bbbk).$$

と定める．このとき $\xi:=\xi_j(c_1,\cdots,c_n,a)$ は

$$\Delta(\xi)=\xi\otimes g_j+\sum_{s=1}^{n}c_s g_j g_{i_s}^{-1}\otimes x_{i_s}\in(\Bbbk\xi+\Bbbk G)\otimes U(\mathcal{D})$$

を満たす．さらに $n\times n$ 行列 C とベクトル $\boldsymbol{a}\in\Bbbk^n$ が与えられたとき，

$$X(j,C,\boldsymbol{a})=\{\xi_j(c_{r1},\ldots,c_{rn},a_r)\mid r=1,\cdots,n\},$$

とおく．但し $c_{r,s}$ は C の (r,s)-成分で，a_r は $\boldsymbol{a}$ の r-成分である．最後にある行列 C と $\boldsymbol{a}\in\Bbbk^n$ の組 $(C,\boldsymbol{a})$ が

(RD1) C は簡約階段形をもつ．
(RD2) $\chi_j\not\equiv\varepsilon\left(\mathrm{mod}G^{\perp}\right)$ のとき $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.
(RD3) C の r-列目が $\boldsymbol{0}$ のとき $a_r=0$.

の 3 条件を満たすとき，$(C,\boldsymbol{a})$ を同値類 $[j]$ の簡約データと呼ぶことにする．以上の準備のもとで次が成り立つ：

定理 5.1. A を $U(\mathcal{D})$ の余イデアル部分代数とする．

$$G=A\cap\Gamma \tag{5.1}$$

とし，$\{j_1,\cdots,j_m\}$ を $\sim_G$ の同値類の完全代表系とする．このとき

$$G\cup X(j_1,C_1,\boldsymbol{a}_1)\cup\cdots\cup X(j_m,C_m,\boldsymbol{a}_m) \tag{5.2}$$

が A を生成するような，$[j_k]$ $(k=1,\ldots,m)$ の簡約データ $(C_k,\boldsymbol{a}_k)$ が存在する．

注意 5.2. 定理 5.1 は $U(\mathcal{D})$ の余イデアル部分代数の完全な分類を与えるものではないことに注意されたい．Γ の部分群 G と簡約データ $(C_k,\boldsymbol{a}_k)$ $(k=1,\ldots,m)$ が与えられたとき (5.2) によって余イデアル部分代数 A が生成されるが，一般に条件 5.1 は成り立つとは限らない．すなわち $U(\mathcal{D})$ の余イデアル部分代数の分類を完了するには，このように得られた余イデアル部分代数 A に対して $A\cap\Gamma=G$ が成り立つか否かを調べなければならぬ．

以下では $U(\mathcal{D})$ を例 4.2 のものとし，これに定理 5.1 を適用する．A を $U(\mathcal{D})$ の余イデアル部分代数とする．$G=A\cap\Gamma$ とおくとき，G は $\{e\}$ か，N でない N のある正の約数 $r\in\mathbb{Z}$ に対して $\langle g^r\rangle$ のいずれかである．

$G = \{e\}$ のとき　このとき $G^{\perp} = \Gamma$ で，$1 \sim_G 2$ である．$[1] = \{1, 2\}$ に対する簡約データ $(C, \boldsymbol{a})$ は $\alpha, \beta \in \Bbbk$ として次のものたちである：

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \end{pmatrix}\right), \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}\right).$$

これらに対応する A は，

$$u_{\alpha\beta} = x_1 + \alpha x_2 + \beta g, \quad w_\beta = x_2 + \beta g, \quad v_\alpha = x_1 + \alpha g$$

とおくとき，それぞれ $\Bbbk$，$\langle u_{\alpha,\beta} \rangle$，$\langle w_\beta \rangle$，$\langle v_\alpha, w_\beta \rangle$ である．

$G = \langle g^r \rangle$ $(r \mid N, r \neq N)$ のとき　N は奇数という仮定より，$1 \nsim_G 2$ となる．従って A は $\langle g^r \rangle$，$\langle g^r, x_1 \rangle$，$\langle g^r, x_2 \rangle$，$\langle g^r, x_1, x_2 \rangle$ のいずれかである．

$U(\mathcal{D})$ の余イデアル部分代数の分類を完了させるために，上記で得られた余イデアル部分代数が条件 5.1 を満たすか否かをを調べよう．

$A = \langle u_{\alpha,\beta} \rangle$ のとき　A は可換であり，e を除く Γ の各元は $u_{\alpha,\beta}$ と可換でないから $A \cap \Gamma = \{e\}$ である．

$A = \langle v_\alpha, w_\beta \rangle$ のとき　直接的な計算により

$$w_\beta v_\alpha - q^2 v_\alpha w_\beta = 1 + \left\{\alpha\beta\left(1 - q^2\right) - 1\right\} g^2$$

を得る．よって

$$\alpha\beta = \left(1 - q^2\right)^{-1} \tag{5.3}$$

を満たすとき，$\left\{v_\alpha^m w_\beta^n \mid m, n = 0, \cdots, N-1\right\}$ が A の基底となり，$A \cap \Gamma = \{e\}$ を満たす．また式 (5.3) が成り立たないとき $g^2 \in A$ となる．つまり $A \cap \Gamma = \{e\}$ となることの必要十分条件は式 (5.3) が成り立つことである．

$A = \langle g^r, x_1, x_2 \rangle$ のとき　$x_1 x_2$ を計算することにより

$$g^2 = q^{-2} x_1 x_2 - x_2 x_1 + 1 \in A$$

を得る．N は奇数であり，r は N の約数だから $g \in A$ である．よって $A \cap \Gamma = \langle g^r \rangle$ となることの必要十分条件は $r = 1$ である．

その他　$A = \langle g^r \rangle$，$\langle g^r, x_1 \rangle$，$\langle g^r, x_2 \rangle$ のとき $A \cap \Gamma = \langle g^r \rangle$ となることは明らかである．

以上により 1 の冪根における $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の余イデアル部分代数の分類が完了した．

定理 5.3. 1 の冪根における量子群 $U(\mathcal{D}) \cong u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の余イデアル部分代数は以下で全てである：

$$U(\mathcal{D}), \quad \langle g^r \rangle, \quad \langle g^r, x_1 \rangle, \quad \langle g^r, x_2 \rangle \ (r \in \mathbb{Z} \text{ は } N \text{ の正の約数}),$$
$$\langle u_{\alpha\beta} \rangle \ (\alpha, \beta \in \Bbbk, (\alpha, \beta) \neq (0, 0)), \quad \langle w_\beta \rangle \ (\beta \in \Bbbk, \beta \neq 0),$$
$$\langle v_\alpha, w_\beta \rangle \ \left(\alpha, \beta \in \Bbbk \text{ s.t. } \alpha\beta = \left(1 - q^2\right)^{-1}\right).$$

注意 5.4. q が 1 の冪根でない $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の場合に関して，Vocke [Voc18] は $A \cap \mathrm{G}(U_q(\mathfrak{sl}_2))$ が部分ホップ代数となるような余イデアル部分代数 $A \subset U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を分類している．我々が分類した，q が 1 の冪根である $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の余イデアル部分代数はすべて [Voc18] の分類リストにも含まれている．

5.2 量子座標環 $\overline{O_q(SL_2)}$ の余イデアル部分代数

まず $\overline{O_q(SL_2)}$ について簡単にまとめておこう．q を 1 の冪根，N を奇数，$r \in \mathbb{Z}$ を N の正の約数とする．$\overline{O_q(SL_2)}$ は次のように定義されるホップ代数である：

生成元	a, b, c, d
関係式	$ba = qab,\ ca = qac,\ db = qbd,\ dc = qcd,\ bc = cb,\ ad = q^{-1}bc + 1,\ da = qbc + 1$ $a^N = d^N = 1,\ b^N = c^N = 0.$
ホップ代数構造	$\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c,\ \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d,\ \Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c,$ $\Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d,\ \varepsilon(a) = \varepsilon(d) = 1,\ \varepsilon(b) = \varepsilon(c) = 0.$

$\overline{O_q(SL_2)}$ の定義において，d は可逆元だから $a = \left(q^{-1}bc + a\right) d^{-1}$ と書ける．よって

$$\overline{O_q(SL_2)} := \left\langle b, c, d \mid d^N = 1,\ b^N = c^N = 0,\ db = qbd,\ dc = qcd,\ bc = cb \right\rangle$$

と表すことができ，このとき

$$\left\{ b^i c^j d^k \mid 0 \leq i, j, k \leq N-1 \right\} \tag{5.4}$$

が $\overline{O_q(SL_2)}$ の基底となる．さらに $\overline{O_q(SL_2)} \cong u_q(\mathfrak{sl}_2)^*$ が成り立つ．また $\overline{O_q(SL_2)}$ の $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ による作用を “$\triangleright$” で表すとき

$$g^r \triangleright b^i c^j d^k = q^{r(-i+j-k)} b^i c^j d^k \tag{5.5}$$

となる．以上の同型 $\overline{O_q(SL_2)} \cong u_q(\mathfrak{sl}_2)^*$ や $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ による作用については [Zac19] が詳しい．

さて，補題 3.3 によって $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の量子座標環 $\overline{O_q(SL_2)}$ の余イデアル部分代数も決定される．

定理 5.5. 量子座標環 $\overline{O_q(SL_2)}$ の余イデアル部分代数は，補題 3.3 の記号と定理 5.3 の余イデアル部分代数を用いて以下で全てである：

$$U(\mathcal{D})^\diamondsuit,\quad \langle g^r \rangle^\diamondsuit,\quad \langle g^r, x_1 \rangle^\diamondsuit,\quad \langle g^r, x_2 \rangle^\diamondsuit,\quad \langle u_{\alpha\beta} \rangle^\diamondsuit,\quad \langle w_\beta \rangle^\diamondsuit,\quad \langle v_\alpha, w_\beta \rangle^\diamondsuit.$$

最後に $\langle g^r \rangle^\diamondsuit$ の生成元を求めてみよう．$\varepsilon(g^r) = 1$ であるから補題 3.3 と式 (5.5) より，$q^{r(-i+j-k)} b^i c^j d^k = b^i c^j d^k$ を満たす $b^i c^j d^k$ で生成される代数が $\langle g^r \rangle^\diamondsuit$ である．従って

$$r(-i+j-k) \equiv 0 \pmod N \iff -i+j-k = \frac{N}{r} l \quad (l \in \mathbb{Z}) \iff k = -i+j-\frac{N}{r} l$$

より $\left\{ b^i c^j d^{-i+j-\frac{N}{r}l} \mid 0 \leq i, j \leq N-1,\ l \in \mathbb{Z} \right\}$ が $\langle g^r \rangle^\diamondsuit$ の基底となる．生成元で書けば $\langle g^r \rangle^\diamondsuit = \left\langle bd^{-1}, cd, d^{\frac{N}{r}} \right\rangle$ である．また $\dim \langle g^r \rangle^\diamondsuit = rN^2$ も容易にわかり，$\dim \langle g^r \rangle = \frac{N}{r}$ であるから $\frac{N}{r} \cdot rN^2 = N^3$ となり，これは命題 3.4 の結果とも合致している．

他の $\overline{O_q(SL_2)}$ の余イデアル部分代数の基底や生成元について，$\langle g^r, x_1 \rangle^\diamondsuit$，$\langle g^r, x_2 \rangle^\diamondsuit$ は $\langle g^r \rangle^\diamondsuit$ と同様な $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ による作用によって決定でき，$\langle g^r, x_1 \rangle^\diamondsuit = \left\langle cd, d^{\frac{N}{r}} \right\rangle$，$\langle g^r, x_2 \rangle^\diamondsuit = \left\langle bd^{-1}, d^{\frac{N}{r}} \right\rangle$ となる．$\langle u_{\alpha\beta} \rangle^\diamondsuit$，$\langle w_\beta \rangle^\diamondsuit$，$\langle v_\alpha, w_\beta \rangle^\diamondsuit$ の場合は，作用が複雑になり同じ方法では難しいと思われるが，基底 (5.4) の代わりに $\overline{O_q(SL2)}$ の PBW 基底 [RS19] を用いると作用が比較的簡単になる．現在はこの基底を用いて，$\langle u_{\alpha\beta} \rangle^\diamondsuit$，$\langle w_\beta \rangle^\diamondsuit$，$\langle v_\alpha, w_\beta \rangle^\diamondsuit$ の基底や生成元について研究中である．

参考文献

[AS98] N. Andruskiewitsch and H. -J. Schneider. Lifting of quantum linear spaces and pointed Hopf algebras of order p^3. J. Algebra, 209(2):658–691, 1998.

[Bur15] S. Burciu. On coideal subalgebras of abelian cocentral extensions and a generalization of Wall's conjecture, J. Algebra Appl. 14 (2015), no. 2.

[CKS20] A. Chirvasitu, P. Kasprzak and P. Szulim. Integrals in Left Coideal Subalgebras and Group-Like Projections, Algebras and Representation Theory (2020) 23:1499–1522.

[CW14] M. Cohen and S. Westreich. Character tables and normal left coideal subalgebras. J. Pure Appl. Algebra, 218(10):1845–1866, 2014.

[HK12] I. Heckenberger and S. Kolb. Homogeneous right coideal subalgebras of quantized enveloping algebras, Bull. London Math. Soc. 44, 837-848, 2012.

[HK13] I. Heckenberger and S. Kolb. Right coideal subalgebras of the Borel part of a quantized enveloping algebra, Int. Math. Res. Not. IMRN, no. 2, pp 419-451, 2011

[HS13] I. Heckenberger and H. -J. Schneider. Right coideal subalgebras of Nichols algebras and the Duflo order on the Weyl groupoid. Israel J. Math.197(2013), no.1, 139–187.

[Mas92] A. Masuoka. Freeness of Hopf algebras over coideal subalgebras, Comm. Algebra 20 (1992), no. 5, 1353–1373.

[MS99] E. -F. Müller and H. -J. Schneider. Quantum homogeneous spaces with faithfully flat module structures, Israel Journal of Mathematics volume 111, pages 157–190 (1999).

[OWR15] I. Heckenberger, S. Kolb and J. V. Stokman. Mini-workshop: Coideal Subalgebras of Quantum Groups. Abstracts from the mini-workshop held February 15–21, 2015. Oberwolfach Rep.12(2015), no.1, 533–569.

[RS19] A. Ryan, M. Shahn. Co-double bosonisation and dual bases of cq[SL2] and cq[SL3]. J. Algebra518(2019), 75–118.

[Skr07] S. Skryabin. Projectivity and freeness over comodule algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 359 (2007), no. 6, 2597–2623.

[Tak79] M. Takeuchi. Relative Hopf modules—equivalences and freeness criteria. J. Algebra 60 (1979), no. 2, 452–471.16A24.

[Voc18] K. Vocke. On right coideal subalgebras of quantum groups. arXiv e-prints, page arXiv:1804.10007, April 2018.

[Wat79] W. C. Waterhouse. Introduction to affine group schemes. Graduate Texts in Mathematics, 66. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979. xi+164 pp. ISBN: 0-387-90421-2.

[Zac19] C. Zachary. Extending actions of Hopf algebras to actions of the Drinfel'd double. Temple University, 2019, Ph.D. thesis. https://math.temple.edu/grad/current/recent/theses/ZacharyCline.pdf

退化した楕円曲線の安定性条件について

東京大学　大学院　数理科学研究科
軽部友裕 (Tomohiro KARUBE) *

概要

楕円曲線の退化は小平によって分類されており，代数幾何の文脈やミラー対称性の文脈においてトイモデルになるような重要な対象である．著者は退化した楕円曲線の導来圏とその不変量である Bridgeland 安定性条件を調べた．安定性条件全体は安定多様体と呼ばれ，複素多様体になる．その安定多様体と導来圏の自己導来同値との関係を示した．

1　導入

Bridgeland 安定性条件（以下，単に安定性条件）は数理物理における安定性の数学的定式化として導入された [Bri07]．この安定性条件は slope 安定性の導来圏への一般化であり，slope 安定性が層のモジュライ空間を定めるように Bridgeland 安定性条件も導来圏の対象のモジュライ空間を定める．そのうえ，安定性条件全体の集合には位相が入り，複素多様体になることが知られている．この安定性条件の空間はミラー対称性や数え上げ幾何の観点から研究されている．

2　退化した楕円曲線

この章では小平曲線といわれる退化した楕円曲線を考える．

定義 2.1. S を曲面，B を準射影的曲線とする．この時，固有射 $\pi : S \to B$ の一般ファイバーが楕円曲線であり，各ファイバーに (-1) 曲線を含まないとき楕円曲面という．

楕円曲面は特異的なファイバーを持つ場合がある．この特異的なファイバーは小平により分類された [Kod63] ため小平曲線と呼ばれる．

定理 2.2. 楕円曲面 $S \to B$ のファイバーは次のように分類される．

- (I_0) 滑らかな楕円曲面
- (I_1) ノードを持つ有理曲線
- (I_N) 環状に交わる N 本の射影直線．（$N \geq 2$）．
- (II) カスプを持つ有理曲線
- (III) 1 点において重複度 2 で交わる 2 本の射影直線．

* E-mail:karube-tomohiro803@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

(IV) 1 点で交わる *3* 本の射影直線.
(I_N^*) アフィンディンキン図形 $\widetilde{D_{N+4}}$ に対応する $N+5$ 本の射影直線.
(II^*) アフィンディンキン図形 $\widetilde{E_8}$ に対応する 8 本の射影直線.
(III^*) アフィンディンキン図形 $\widetilde{E_7}$ に対応する 7 本の射影直線.
(IV^*) アフィンディンキン図形 $\widetilde{E_6}$ に対応する 6 本の射影直線.
$({}_mI_N)$ (I_N) 型の重複ファイバー.（$N \geq 2$）.

本レポートでは，可約な小平曲線のみを扱う.
C を可約な小平曲線とし，既約成分を $C_1, \ldots, C_n$ とする．$G(C)$ を C の Grothendieck 群とする.

命題 2.3 ([MP17, Proposition 4.3.])**.** C の既約成分 C_i の被約化を Θ_i と書く．n を既約成分の個数とする．この時，*Grothendieck* 群 $G(C)$ は階数 $n+1$ の自由アーベル群であり，以下の基底で生成される.

$$[\mathcal{O}_{\Theta_1}], \ldots, [\mathcal{O}_{\Theta_n}], [\mathcal{O}_x].$$

注意 2.4. C は特異的であるため局所自由層の *Grothendieck* 群 $K_0(C)$ とは異なることに注意しておく．しかし，オイラーペアリングをとることで，階級が等しいことがわかる.

$\mathcal{O}_{C_i}$ は有限の局所自由層の分解が取れない．実際，$N \geq 2$ に対して C が (I_N) 型の時であっても

$$\dim \mathrm{Ext}^q_C(\mathcal{O}_{C_i}(k), \mathcal{O}_{C_i}(k)) = \begin{cases} 0 \ (q < 0 \ \textit{or} \ q \ \textit{is odd}) \\ 1 \ (q = 0) \\ 2 \ (q \ \textit{is even}). \end{cases}$$

となる.

3 安定性条件

この章では初めに安定性条件を定義する．次に Bridgeland による安定性条件の変形定理を紹介し，安定性条件の空間が複素多様体になることを見る.
$\mathcal{D}$ を三角圏とし，有限階数の自由アーベル群 Λ と群準同型 $v : K(\mathcal{D}) \to \Lambda$ を固定する.

定義 3.1.

1. *t* 構造の核 $\mathcal{A}$ の安定性関数（*stability function*）Z とは群準同型 $Z : K(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}$ で，任意の $0 \neq E \in \mathcal{A}$ に対して
$$Z(E) \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}_{<0}.$$
2. $E \in \mathcal{A}$ の位相 $\phi(E)$ は次のように定義される.
$$\phi(E) = (1/\pi) \arg Z(E) \in (0, 1].$$
3. 安定性関数 Z に対して $0 \neq E \in \mathcal{A}$ が（半）安定であるとは，任意の部分対象 $F \subset E$ が $\phi(F) \leq (resp. <)\phi(E)$ を満たす.

4. Z が *Harder-Narashimhan* 条件 *(HN* 条件*)* を満たすとは，任意の $E \in \mathcal{A}$ に対して以下のフィルトレーションがとれる．

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_{n-1} \subset E_n$$

ただし，$F_j = E_j/E_{j-1}$ が半安定で

$$\phi(F_1) > \phi(F_2) > \cdots > \phi(F_n).$$

を満たす．

次の台条件は有限性に対応する条件であり，[KS08] や [BMS16] で導入された．以下では有限次元ベクトル空間 $\Lambda \otimes \mathbb{R}$ のノルム $\|-\|$ を固定する．

定義 3.2. 下の条件が成立するとき，$\mathcal{A}$ と安定性関数 Z が台条件を満たすという．

$$\sup\left\{\frac{\|v(E)\|}{|Z(E)|} \mid E \text{ is semistable in } \mathcal{A}\right\} < \infty.$$

t 構造の核 $\mathcal{A}$ と安定性関数 Z の組 $(Z, \mathcal{A})$ が HN 条件と台条件を満たすとき，安定性条件という．この安定性条件全体の集合を $\mathrm{Stab}_\Lambda(\mathcal{D})$ と書く．

定理 3.3 ([Bri07, Theorem1.2.])**.** $\mathrm{Stab}_\Lambda(\mathcal{D})$ には自然に位相が入り，次の忘却写像が連続になる

$$\pi : \mathrm{Stab}_\Lambda(\mathcal{D}) \to \mathrm{Hom}(\Lambda, \mathbb{C}),\ (Z, \mathcal{A}) \mapsto Z.$$

加えて π は局所同相であり，$\mathrm{Stab}_\Lambda(\mathcal{D})$ に複素構造が入る．

安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}_\Lambda(\mathcal{D})$ を安定多様体とよぶ．初めに固定した $v\colon K(\mathcal{D}) \to \Lambda$ があきらかな場合，省略し $\mathrm{Stab}(\mathcal{D})$ と書く．

次はこの空間 $\mathrm{Stab}_\Lambda(\mathcal{D})$ への作用を考察する．$\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$ の普遍被覆 $\widetilde{\mathrm{GL}^+}(2,\mathbb{R})$ を考える．この普遍被覆は次のような記述がある．

$$\widetilde{\mathrm{GL}^+}(2,\mathbb{R}) = \left\{(T, f) \mid T \in \mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R}),\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ T \text{ and } f \text{ induce the same actions on } \mathbb{S}^1\right\}$$

$g = (T, f) \in \widetilde{\mathrm{GL}^+}(2,\mathbb{R})$ と $\sigma = (Z, \mathcal{A})$ に対して，$g\sigma = (T^{-1} \circ Z, \mathcal{A}')$ とする．ただし，$\mathcal{A}'$ は

$$\{E \in \mathcal{D} \mid E \text{ is stable of phase } \phi \in (f(0), f(1)]\}$$

で生成されるアーベル圏である．

次に自己導来同値群からの作用を考える．$\Phi \in \mathrm{Auteq}(\mathcal{D})$ をとる．導来同値 Φ が Λ への作用を誘導すると仮定する．この時，$\sigma = (Z, \mathcal{A})$ に対して $\Phi(\sigma) = (Z \circ \Phi^{-1}, \Phi(\mathcal{A}))$ と定める．

滑らかな曲線は Grothendieck 群が階数 2 である，そのため，安定性条件を考える際 Λ として Grothendieck 群そのものをとれる．この安定多様体を単に $\mathrm{Stab}(C)$ と書く．曲線の安定性条件の空間について次のことが知られている．

定理 3.4 ([Bri07],[Oka04],[Mac07])**.** C を種数 g の滑らかな曲線とする．この時，次が成立．

$$\mathrm{Stab}(C) = \begin{cases} \mathbb{C}^2\ (g = 0) \\ \widetilde{\mathrm{GL}^+}(2,\mathbb{R})\ (g \geq 1). \end{cases}$$

$g \geq 1$ のとき，この定理は安定性条件が本質的に slope 安定性に対応するものしかないことを示している．$g = 0$ の射影直線の時に様子が異なるのは，圏同値 $\mathcal{D}^b(\mathbb{P}^1) \cong \mathcal{D}^b(\mathcal{E}nd(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)))$ により誘導される t 構造の Beilinson 核があるためである．

4 主結果

C を可約の小平曲線とする．C の安定性条件全体を $\mathrm{Stab}(C)$ と書く．

初めに，$\mathrm{Stab}(C)$ においても slope 安定性に対応する安定性条件が存在することを示す．

命題 4.1. $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{H}$ をとる．この時，

$$Z = -\chi + z_1 rk_1 + \cdots + z_n \,\mathrm{rk}_n,\ \mathcal{A} = \mathrm{Coh}(C)$$

は安定性条件を定める．ただし，χ はオイラー数であり，rk_i は既約成分 C_i での階数である．

証明の概略. 組 $(Z, \mathcal{A})$ が HN 条件を満たす安定性関数であることは slope 安定性の証明と同様にできる．楕円曲面への埋め込み $i\colon C \hookrightarrow S$ により，有限次元ベクトル空間 $G(C) \otimes \mathbb{C}$ に二次形式が定まる．実際，$E, F \in G(C)$ に対して，

$$\langle E, F \rangle = -\chi(i_*(E), i_*(F))$$

とすると半負定値二次形式である．台条件については，この二次形式を用いることで [Bri08] などと同様に安定対象の議論に帰着して証明できる． □

上で構成した安定性条件を含む $\mathrm{Stab}(C)$ の連結成分を $\mathrm{Stab}^\dagger(C)$ と書く．

実は楕円曲線とは異なり，slope 安定性には対応しない安定性条件も存在する．

命題 4.2. $r \in (k, k+1), z_2, \ldots z_n \in \mathbb{H}$ をとる．この時，

$$Z = -\chi + r\,\mathrm{rk}_1 + z_2\,\mathrm{rk}_2 + \cdots + z_n\,\mathrm{rk}_n,\ \mathcal{A} = \langle \mathcal{F}_k[1], \mathcal{T}_k \rangle$$

は安定性条件になる．ただし，$\mathcal{F}_k, \mathcal{T}_k$ は以下で定まる．

$$\mathcal{F}_k = \langle \mathcal{O}_{\Theta_1}(l) \mid l \leq k \rangle$$
$$\mathcal{T}_k = {}^\perp\mathcal{F}_k$$

注意 4.3. この安定性条件は *slope* 安定性には対応しない．特に $x \in C_1$ に対して摩天楼層 $\mathcal{O}_x$ は以下の *JH* フィルトレーションを持ち，安定ではない．

$$0 \to \mathcal{O}_{\Theta_1}(k+1) \to \mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_{\Theta_1}(k)[1] \to 0$$

安定性条件の空間を調べる際に導来同値の作用を調べることが不可欠であり，[Kar23] では導来同値を具体的に構成した．これは [ST01] で定義された球面ねじり関手を特異的ファイバーに制限することで得られた．

定理 4.4. C を楕円曲面 $S \to B$ の特異ファイバーで得られる小平曲線とする．自然な閉埋め込み $j\colon C \to S$ をとり，G を C に含まれる射影直線とする．この時，C の導来同値 $\Phi_{\mathcal{O}_G(k)}$ があり，S 上の球面ねじり関手 $T_{\mathcal{O}_G(k)}$ に対して以下の可換性が成り立つ．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^b(S_0) & \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{O}_G(k)}} & \mathcal{D}^b(S_0) \\ \downarrow{\scriptstyle j_*} & & {\scriptstyle j_*}\downarrow \\ \mathcal{D}^b(S) & \xrightarrow{T_{\mathcal{O}_G(k)}} & \mathcal{D}^b(S), \end{array}$$

ここで構成した導来同値 $\Phi_{\mathcal{O}_G(k)}$ はベクトル空間 $G(C)\otimes\mathbb{C}$ において超平面 $\{v \in G(C)\otimes\mathbb{C} \mid \langle v, [\mathcal{O}_G(k)]\rangle = 0\}$ を軸とする鏡映変換になっている．

この導来同値の安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}^\dagger(C)$ への作用を観察することで，次の命題を得る．

命題 4.5. $\mathcal{B}$ を $\Phi_{\mathcal{O}_{\Theta_i}(k)}$ で生成される自己導来同値群の部分群とする．この時，次が成り立つ．

$$\mathrm{Stab}^\dagger(C) = \bigcup_{\Phi\in\mathcal{B}} \Phi(\overline{U(C)}).$$

次のような導来同値を考える．

$$\begin{aligned} &\mathrm{Aut}_{\mathrm{tri}}(C) = \{f \in \mathrm{Aut}(C) \mid f_* \text{ is trivial in } G(C)\}, \\ &\mathrm{Pic}^0_{\mathrm{tri}}(C) = \{\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(C) \mid \mathcal{L}|_{\Theta_i} \cong \mathcal{O}_{\Theta_i} \text{ for all reduced curves } \Theta_i\}. \end{aligned}$$

$\mathrm{Pic}^0_{\mathrm{tri}}(C) \rtimes \mathrm{Aut}_{\mathrm{tri}}(C)$ は $\mathrm{Stab}^\dagger(C)$ において自明に作用する．この観察と上の命題を用いることで，次の主定理を得る．

定理 4.6 ([Kar23])**.** $G(C)\otimes\mathbb{C}$ の開集合 $\mathcal{P}^+_0(C) \subset G(C)^\vee\otimes\mathbb{C}$ があり，忘却写像の制限

$$\pi : \mathrm{Stab}^\dagger(C) \to \mathcal{P}^+_0(C)$$

が被覆写像になる．

加えて， π のデッキ変換群は $\mathrm{Auteq}^*_0(C)/(\mathrm{Pic}^0_{\mathrm{tri}}(C) \rtimes \mathrm{Aut}_{\mathrm{tri}}(C))$ と同型になる．

参考文献

[BMS16] Arend Bayer, Emanuele Macrì, and Paolo Stellari, *The space of stability conditions on abelian threefolds, and on some Calabi-Yau threefolds*, Inventiones mathematicae **206** (2016), no. 3, 869–933.

[Bri07] Tom Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, Annals of Mathematics (2007), 317–345.

[Bri08] ———, *Stability conditions on K3 surfaces*, Duke Mathematical Journal **141** (2008), no. 2, 241–291.

[Kar23] Tomohiro Karube, *Stability conditions on degenerated elliptic curves*, arXiv preprint arXiv:2301.09453 (2023).

[Kod63] Kunihiko Kodaira, *On compact analytic surfaces: II*, Annals of Mathematics (1963), 563–626.

[KS08] Maxim Kontsevich and Yan Soibelman, *Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations*, arXiv preprint arXiv:0811.2435 (2008).

[Mac07] Emanuele Macrì, *Stability conditions on curves*, arXiv preprint arXiv:0705.3794 (2007).

[MP17] Ana Cristina López Martín and Carlos Tejero Prieto, *Derived equivalences and kodaira fibers*, Journal of Geometry and Physics **122** (2017), 69–79.

[Oka04] So Okada, *Stability manifold of p ˆ 1*, arXiv preprint math/0411220 (2004).

[ST01] Paul Seidel and Richard Thomas, *Braid group actions on derived categories of coherent sheaves*, Duke Mathematical Journal **108** (2001), no. 1, 37–108.

Double affine braid group actions on derived categories of Kodaira fibers

東京大学大学院 数理科学研究科
荒井勇人 (Hayato ARAI) *

概要

楕円曲線の退化として得られる特異曲線は小平ファイバーと呼ばれ、ADE 型分類をもつ。ミラー対称性により A 型の小平ファイバーの導来圏には A 型の二重アファインブレイド群が自然に作用する。本講演では、この作用が Seidel–Thomas の spherical twist の変種として解釈でき、それを用いて他の型の小平ファイバーの導来圏にも対応する型の二重アファインブレイド群の作用が構成できることを説明する。

1 導入

本稿で扱う代数多様体は $\mathbb{C}$ 上のものとする。

1.1 楕円曲線と小平ファイバー

平面上の三次式で表される代数曲線のうち、特異点を持たないものを**楕円曲線**という。例えば曲線 $y^2 = x^3 - x + 1$ は楕円曲線である。$y^2 = x^3 + x^2$ は三次式で定まるが、$f = y^2 - x^3 - x^2$ の Jacobi 行列 $(-3x^2 - 2x, 2y)$ は原点で 0 になるので特異点をもち、楕円曲線ではない。

楕円曲線の族として得られる（非特異）曲面を**楕円曲面**という。例えば、t をパラメータとする楕

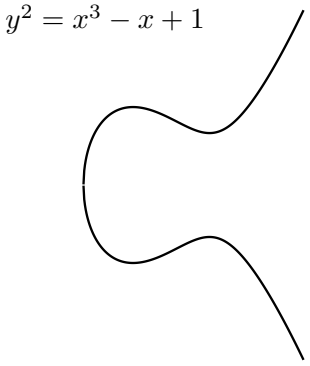


図 1.1　楕円曲線

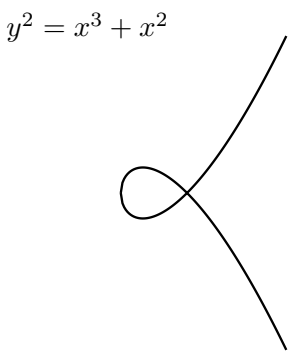


図 1.2　I_1 型小平ファイバー

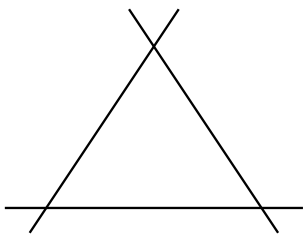


図 1.3　I_3 型小平ファイバー

* E-mail:hayato@ms.u-tokyo.ac.jp

円曲線の族 $y^2 = x^3 + x^2 + t$ は楕円曲面である。これは $t \neq 0$ では楕円曲線だが、$t = 0$ では図 1.3 の特異曲線になる（退化する）。より正確には、楕円曲面とは曲面 S から曲線 C への全射 $\pi\colon S \to C$ であって、有限個の $t \in C$ を除いてファイバー $\pi^{-1}(t)$ が楕円曲線になるようなもののことである。いくつかのファイバーは特異点を持つかもしれないが、小平と Néron は**相対的極小**という良いクラス[*1]の楕円曲面に対しどのような特異ファイバーが現れるかを分類した。それらを**小平ファイバー**といい、既約成分を頂点としその交点を辺としたグラフを考えることで（アファイン）Dynkin 図形が得られ、それをもとに以下のように分類される。

- (I_1) 1 つの二重点を持つ有理曲線、Dynkin 図形 A_1
- (I_n) $N \geq 2$ 本の $\mathbb{P}^1$ を n 角形の形に並べたもの、アファイン Dynkin 図形 $\tilde{A}_{n-1}$
- (II) 1 つの尖点を持つ有理曲線、A_1
- (III) 1 点で重複度 2 で接する 2 本の $\mathbb{P}^1$、$\tilde{A}_1$
- (IV) 1 点で交わる 3 本の $\mathbb{P}^1$、$\tilde{A}_2$
- (I_n^*) 4 本の $\mathbb{P}^1$ と $n+1 \geq 1$ 本の重複度 2 の $\mathbb{P}^1$ を既約成分を持つ曲線、$\tilde{D}_{n+4}$
- (II^*) 9 本の重複度つき $\mathbb{P}^1$ を既約成分にもつ曲線、$\tilde{E}_8$
- (III^*) 8 本の重複度つき $\mathbb{P}^1$ を既約成分にもつ曲線、$\tilde{E}_7$
- (IV^*) 7 本の重複度つき $\mathbb{P}^1$ を既約成分にもつ曲線、$\tilde{E}_6$
- $({}_mI_n)$ 重複度 $m \geq 2$ の I_n 型曲線

本稿では初めに A 型 Dynkin 図形に対応するもの、特に $n \geq 2$ の I_n 型の小平ファイバーの導来圏について先行研究を紹介し、それらが D 型と E 型についてどのように拡張されるかを見ていく。

1.2 代数多様体の導来圏とホモロジー的ミラー対称性

Abel 圏に対し、その（有界）導来圏と呼ばれる三角圏が構成できる。代数多様体 X 上の連接層のなす Abel 圏 $\operatorname{coh} X$ の導来圏を X の**導来圏**といい、$D^b(X)$ とあらわす。$D^b(X)$ の対象は連接層の複体であり、射の空間は Ext 群によって与えられる。代数多様体の導来圏は 1960 年代に Grothendieck と Verdier によって Serre 双対を一般的に記述する目的で導入され、現在では代数幾何学の重要な研究対象の 1 つとなっている。ここではその重要性について、多様体の不変量としての側面と、ホモロジー的ミラー対称性における中心概念としての側面から説明する。

一般に空間 X に対しその不変量を考えることは基本的である。次元やコホモロジー群などが典型であり、代数多様体であればさらに K 群、標準環などが挙げられるが、これらの多くが導来圏 $D^b(X)$ から計算できることが知られている。また $\operatorname{coh} X$ からは X の同型類そのものを復元できるが、$D^b(X)$ については以下の 2 つの定理が示すように X を復元できる場合とできない場合がある。

定理 1.1 ([Muk81])**.** X を Abel 多様体とし $\hat{X}$ をその双対 Abel 多様体とする（これらは一般には同型ではない）。このとき三角圏としての同値 $D^b(X) \cong D^b(\hat{X})$ が存在する。

[*1] ファイバーに (-1)-曲線を含まない楕円曲面を相対的極小という。ファイバーに (-1)-曲線を含むときはそれらの曲線を 1 点に置き換える操作（ブローダウン）を繰り返して相対的極小にすることができる。

定理 1.2 ([BO01])**.** X, Y を非特異射影多様体とし、X の標準束 ω_X またはその双対束 $\omega_X^\vee$ が豊富な直線束だと仮定する。このとき $D^b(X)$ と $D^b(Y)$ が三角圏として同値ならば、$X \cong Y$ である。

このように $D^b(X)$ は X の幾何学について非常に多くの情報を持っている一方で、その全てを統制しているわけではない。その意味で X の代わりに $D^b(X)$ を考えることは双有理幾何学を考えることに似ている。双有理幾何学と導来圏の間には実際に深いつながりがあることがわかっているが、ここでは省略する。

次にミラー対称性とは、ある空間 X の代数幾何学と別の空間 M のシンプレクティック幾何学の間に物理学の超弦理論に由来する不思議な関係があるという現象である。この結び付きは例えば X 内の有理曲線の数え上げ問題を M の周期積分に帰着して解決するなど、それまでの代数幾何学にはない物理学のアイデアに基づく新たな進展をもたらしてきた。その背後にあるとされる最も強力な予想の 1 つが、Kontsevich の提唱した**ホモロジー的ミラー対称性**である。

予想 1.3. Calabi–Yau 多様体 X に対し別の Calabi–Yau 多様体 M が存在して、X の連接層の導来圏 $D^b(X)$ と M の深谷圏の導来圏 $D^b\,\mathrm{Fuk}(M)$ が（強化）三角圏として同値になる。

ここで深谷圏 $\mathrm{Fuk}(M)$ とその導来圏 $D^b\,\mathrm{Fuk}(M)$ はシンプレクティック多様体 M に対し定義されるもので、$D^b\,\mathrm{Fuk}(M)$ の対象と射は大雑把にいうと M の Lagrange 部分多様体とその交差によって与えられる。例えば X が楕円曲線 E の場合、そのミラー M はトーラス T であり、E およびその閉点 $x \in E$ の構造層 $\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_x \in D^b(E)$ がそれぞれ T 上の緯線と経線に対応する [PZ98]。このようにミラー対称性はまったく異なる種類の幾何学が等価であることを主張する非常に深い現象・予想であり、その記述には導来圏が現れる。

例 1.4. 楕円曲線 E とトーラス T のミラー対称性において、$\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_x \in D^b(E)$ は T 上の曲線 $\alpha, \beta \in D^b\,\mathrm{Fuk}(T)$ に対応する（図 1.4）。$\sum_i \dim \mathrm{Ext}_E^i(\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_x) = 1$ と $\#(\alpha \cap \beta) = 1$ が一致していることは射の対応の帰結である。

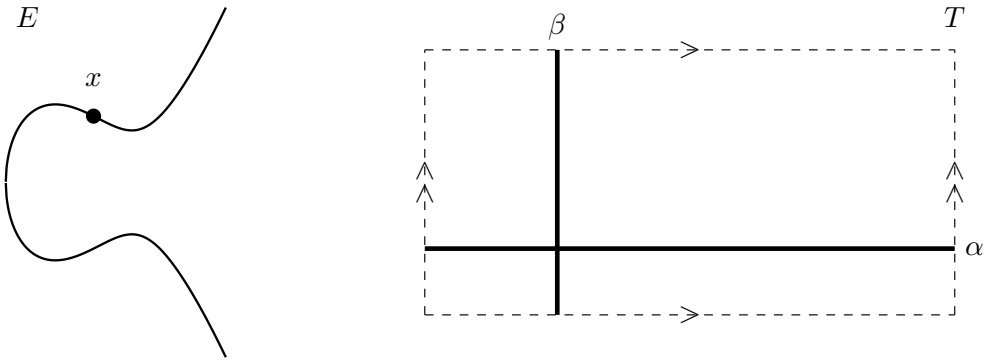


図 1.4　楕円曲線とトーラスのミラー対称性

1.3 Fourier–向井関手と捻り関手

X, Y を非特異射影多様体とし、$p_X \colon X \times Y \to X, p_Y \colon X \times Y \to Y$ を射影とする。このとき、$X \times Y$ の導来圏の対象 $P \in D^b(X \times Y)$ に対し関手

$$\Phi^P \colon D^b(X) \xrightarrow{p_X^*} D^b(X \times Y) \xrightarrow{-\otimes P} D^b(X \times Y) \xrightarrow{p_{Y*}} D^b(Y)$$

を P を積分核とする **Fourier–向井関手（積分関手）**と呼ぶ。ここで $p_X^*, p_{Y*}, - \otimes P$ はそれぞれ逆像、順像、テンソル積（の導来関手）を意味する。この名前は定理 1.1 の証明において Fourier 変換の類似として向井により導入されたことによる。以下の定理より、Fourier–向井関手は導来圏の間の関手、特に同値を調べる上で基本的な道具となる。

定理 1.5 ([Orl97])**.** X, Y を非特異射影多様体とし、$\Phi \colon D^b(X) \to D^b(Y)$ を充満忠実な三角関手とする。このとき Φ はある積分核 P による Fourier–向井関手 Φ^P と同型である。

導来圏 $D^b(X)$ の自己同値群 $\operatorname{Auteq} D^b(X)$ を、三角圏の構造を保つような $D^b(X)$ の自己同値関手の同型類がなす群とする。典型的な自己同値として、X の自己同型 f による逆像 $f^*(-)$、X 上の直線束 L によるテンソル積 $(-) \otimes L$、および三角圏のシフト関手 $(-)[1]$ が常に存在し、これらの生成する $\operatorname{Auteq} D^b(X)$ の部分群

$$A(X) = \operatorname{Aut}(X) \ltimes \operatorname{Pic}(X) \times \mathbb{Z}[1]$$

の元は標準的な自己同値と呼ばれる。以下の結果が基本的である。

定理 1.6 ([BO01])**.** X を非特異射影多様体とし、X の標準束 ω_X またはその双対束 $\omega_X^\vee$ が豊富な直線束だと仮定する。このとき $A(X) = \operatorname{Auteq} D^b(X)$ である。

$A(X)$ 以外の自己同値を具体的に構成する方法として、Seidel と Thomas は [ST01] において捻り関手の概念を導入した。

定理 1.7 ([ST01])**.** X を n 次元の非特異射影多様体とし、$E \in D^b(X)$ を**球面対象**、すなわち

$$E \otimes \omega_X \cong E, \quad \operatorname{Hom}^i(E, E) = \begin{cases} \mathbb{C} & i = 0 \text{ or } n, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を満たすものとする。このとき $P = \operatorname{Cone}(E^\vee \boxtimes E \xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathcal{O}_\Delta) \in D^b(X \times X)$ を積分核とする Fourier–向井関手 Φ^P は圏同値である。これを球面対象 E に付随する**（球面）捻り関手 (spherical twist, twist functor)** といい、T_E と書く。

定義より捻り関手 T_E について以下が得られる。これを T_E の定義だと思ってもよい。

系 1.8. $E \in D^b(X)$ を球面対象とすると、任意の $F \in D^b(X)$ について完全三角形

$$\operatorname{Hom}^*(E, F) \otimes E \xrightarrow{\mathrm{ev}} F \to T_E(F) \xrightarrow{+1} \tag{1.1}$$

が存在する。ここで ev は自然なペアリング写像である。

この定義のモチベーションについて少し説明する。実曲面 Σ 上の閉曲線 γ に対し、その **Dehn 捻り**という Σ の自己同相が以下の図のように「γ に沿って Σ を切断し、180 度捻って再接着する」ものとして定義されていた（図 1.5）。

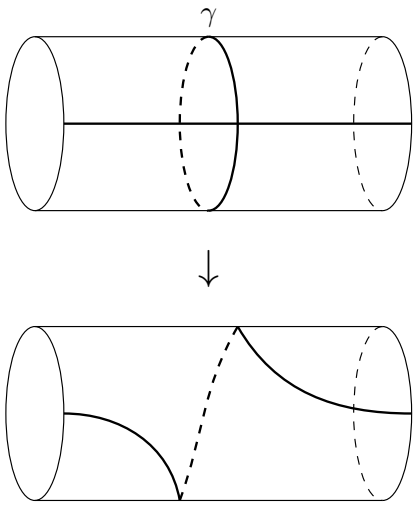


図 1.5　閉曲線 γ に沿った Dehn 捻り

Seidel [Sei99] はこれを一般化して、$2n$ 次元シンプレクティック多様体 M の中の Lagrange 球面 S^n に対して Dehn 捻りを定義した。ミラー対称性 $D^b(X) \cong D^b\,\mathrm{Fuk}(M)$ のもとでは Dehn 捻りに対応する $D^b(X)$ の自己同値が得られるが、これが捻り関手のモデルである。$S^n \subset M$ の $D^b\,\mathrm{Fuk}(M)$ の対象としての（次数付き）自己準同型環は

$$\mathrm{Hom}^*_{D^b\,\mathrm{Fuk}(M)}(S^n, S^n) = HF^*(S^n, S^n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

で、Floer コホモロジー $HF^*(S^n, S^n)$ は球面のコホモロジー $H^*(S^n, \mathbb{R})$ と同型である。よって球面対象の 2 つ目の条件

$$\mathrm{Hom}^i(E, E) = \begin{cases} \mathbb{C} & i = 0, \dim X, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

は E の自己準同型環が Lagrange 球面 S^n のそれと等しいことを意味する。さらに Seidel は [Sei03] において、(1.1) と同様の完全三角形が導来深谷圏での Dehn 捻りにおいても成り立つことを示した。そこでこれらの性質をもとに（M を登場させず）$D^b(X)$ の言葉のみで代数的に定義されたものが捻り関手である。

例 1.9.　(1)　E を楕円曲線とすると、構造層 $\mathcal{O}_E$ は $D^b(E)$ の球面対象である。捻り関手 $T_{\mathcal{O}_E}$ は標準的な自己同値ではない自己同値の例を与える。これは楕円曲線とトーラスのミラー対称性のもとで、$\mathcal{O}_E$ に対応するトーラスの緯線 α に沿った Dehn 捻りに対応する（図 1.4）。

(2)　S を非特異曲面とし、$\mathbb{P}^1 \cong G \subset S$ を (-2)-曲線とする。このとき G 上の次数 $a \in \mathbb{Z}$ の直線束 $\mathcal{O}_G(a)$ を S 上の層とみたものは、（Hirzebruch–Riemann–Roch の定理より）$D^b(S)$ の球面対象である。

1.4 ブレイド群

ブレイド群（組み紐群, braid group）B_n は、n 本の紐の絡まり方（組み紐）を元とし、それらを上下に接着することを演算として定義される群である。ここで連続的に変形できる組み紐は同じ元とみなす。例えば下図の組み紐は B_3 の元の 1 つを表している。n 次対称群 S_n は n 本の線を持つ

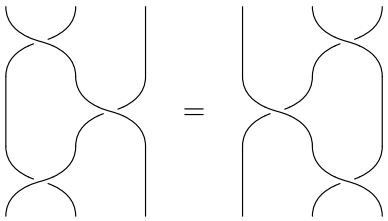


図 1.6　3 本の紐からなる組紐

あみだくじとその接着のなす群と思えるが、ブレイド群はそこに線の絡まり合いを許したようなものと考えられる。対称群が隣り合う線の入れ替えによって生成されるのと同様に、ブレイド群は隣り合う紐の絡まり合いによって生成される。ここでは紐 i と $i+1$ を入れ替える操作を T_i と書くことにする。例えば図 1.6 は B_3 の中で $T_1T_2T_1 = T_2T_1T_2$ が成り立つことを表している。この関係式 $T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1}$ を**ブレイド関係式**という。また $|i-j| \geq 2$ のとき明らかに T_i と T_j は可換である。実はこれらの関係式のみで B_n が表されることが知られている。

定理 1.10 (M.Artin)**.**

$$B_n = \left\langle T_1, T_2, \ldots, T_{n-1} \middle| \begin{matrix} T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-2) \\ T_iT_j = T_jT_i \quad (|i-j| \geq 2) \end{matrix} \right\rangle.$$

互換 $(i, i+1)$ を s_i とするとき n 次対称群が

$$S_n = \left\langle s_1, s_2, \ldots, s_{n-1} \middle| \begin{matrix} s_is_{i+1}s_i = s_{i+1}s_is_{i+1} \quad (1 \leq i \leq n-2) \\ s_is_j = s_js_i \quad (|i-j| \geq 2), \quad s_i^2 = 1 \quad (1 \leq i \leq n-1) \end{matrix} \right\rangle$$

と表示されることを思い出すと、ブレイド群は対称群の関係式のうち $s_i^2 = 1$ を除いたものとみなせる。特に自然な全射準同型 $B_n \to S_n$ が存在する。このブレイド群には様々な一般化が考えられるが、ここでは 2 つの方向性について紹介する。

まず n 本の紐を「平面上の n 点の動き」とみなすと、ブレイド群の位相幾何的な解釈が得られる。平面上の n 点の（順序を無視した）配置のなす空間 $\mathrm{UConf}_n(\mathbb{C})$ を、$\mathbb{C}^n$ から対角集合 $\{(x_i)_i \mid x_i \neq x_j \text{for some} i \neq j\}$ を除いて座標の入れ替えによる対称群作用で割ったものとして定義する。

$$\mathrm{UConf}_n(\mathbb{C}) \coloneqq (\mathbb{C}^n \setminus \{(x_i)_i \mid x_i = x_j \text{ for some } i \neq j\})/S_n.$$

組み紐は空間 $\mathrm{UConf}_n(\mathbb{C})$ 内のループとみなせ、ブレイド群は $\mathrm{UConf}_n(\mathbb{C})$ の基本群として表される。

$$B_n \cong \pi_1(\mathrm{UConf}_n(\mathbb{C})).$$

そこで平面の代わりに別の空間を使うことで、同様の群を定義することができる。例えばトーラス T^2 をとれば**楕円ブレイド群** B_n^{Ell} が得られる。これは隣り合う点を入れ替える操作 $T_1, \ldots, T_{n-1}$ と、点を緯線または経線に沿って一周させる操作 $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ によって生成される（図 1.7）。

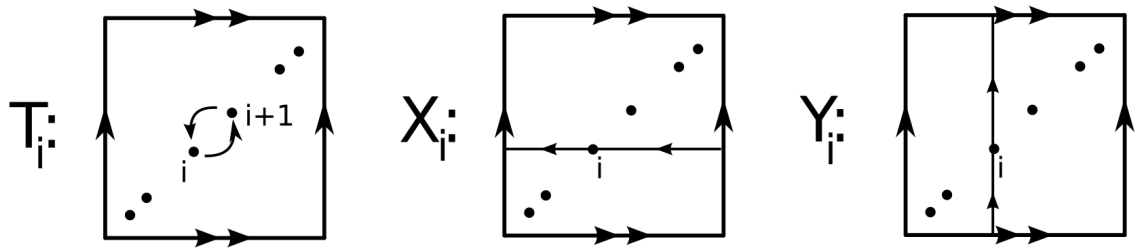


図 1.7　B_n^{Ell} の生成元（[Jor09] より引用）

また対称群 S_n が A_{n-1} 型ルート系の Weyl 群であることを思い出すと、より一般のルート系に対しても定理 1.10 のような形で組み合わせ論的にブレイド群やその変種を定義することができる。

定義 1.11. R を既約有限ルート系とし $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset R$ を基底の 1 つとする。R の Weyl 群 W は α_i に対応する鏡映 s_i たちで生成され、鏡映 s_i は $s_i^2 = 1$ と（適切な）ブレイド関係式を満たす。そこで $T_1, \ldots, T_n$ を生成元とし s_i の関係式のうち $s_i^2 = 1$ を除いたものを関係式として定まる群を R のブレイド群といい、B と書く。B は R の基底の取り方によらない。

ユークリッド空間 V 上の有限ルート系 R があると、そこからアファインルート系 R^a が $\{\alpha + n\delta \in \mathrm{Aff}(V) \mid \alpha \in R, n \in \mathbb{Z}\}$ により定まる。ここで $\mathrm{Aff}(V)$ は V 上のアファイン関数のなすベクトル空間で、δ は定数関数 1 である。R の基底 $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \subset R$ は自然に R^a の基底 $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\} \subset R^a$ を与える。このとき R^a の Weyl 群 W^a は鏡映 $s_0, \ldots, s_n$ で生成され、特に $W = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle \subset W$ である。さらに以下のような表示も知られている。

命題 1.12. R のコルート格子を $Q^\vee \subset V$ とすると、平行移動により $Q^\vee \subset W^a$ とみなせる。そして $W^a \cong W \ltimes Q^\vee$ である。右辺は R の**アファイン Weyl 群**と呼ばれる。

コルート格子 $Q^\vee$ はコウェイト格子 $P^\vee$ の部分格子だから、$W^{ae} = W \ltimes P^\vee$ と定めると W^a を含む群 W^{ae} が得られる。これを R の**拡大アファイン Weyl 群**と呼ぶ。これらの Weyl 群から鏡映の関係式 $s_i^2 = 1$ を忘れることで**アファインブレイド群** B^a と**拡大アファインブレイド群** B^{ae} が定義される。これらの群は $B, Q^\vee \subset B^a$ や $B, P^\vee \subset B^{ae}$ という部分群を持ち、それらによって生成される。

$$B^a = \langle B, Q^\vee \rangle, \quad B^{ae} = \langle B, P^\vee \rangle.$$

B^{ae} にさらにウェイト格子 P を付け加えて生成されるのが、**二重アファインブレイド群** B^d である。

$$B^d = \langle B, P^\vee, P \rangle.$$

以上の厳密な定義には触れないが、右辺の生成元の間の関係式は明示的に与えられることを述べておく。これらのブレイド群は Macdonald 予想に関連して Cherednik が導入した二重アファイン Hecke 環 (double affine Hecke algebra, DAHA) の理論に現れるものである。

補足 1.13. A_n 型既約有限ルート系は単純 Lie 代数 $\mathfrak{sl}_{n+1}$ に対応するが、$\mathfrak{sl}_{n+1}$ の代わりに簡約 Lie 代数 $\mathfrak{gl}_{n+1}$ に対応する二重アファインブレイド群を定義することもできる。この場合ブレイド群 B は A_n 型のまま、P や $P^\vee$ が $\mathfrak{sl}_{n+1}$ のものから $\mathfrak{gl}_{n+1}$ のものに置き換えられる。**$\mathfrak{gl}_{n+1}$ から得られる二重アファインブレイド群 B^d は楕円ブレイド群 B_n^{Ell} と同型になる**ことが知られている。

最後にブレイド群と導来圏の関係について述べる。Seidel と Thomas は良い条件を満たす球面対象の族から導来圏への**忠実なブレイド群作用**が誘導されることを示した [ST01]。

定理 1.14 ([ST01])**.** X を非特異射影多様体とし、$E_1, \dots, E_m \in D^b(X)$ を球面対象であって以下の条件を満たすものとする。

$$\sum_k \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}^k(E_i, E_j) = \begin{cases} 1 & |i-j| = 1, \\ 0 & |i-j| \geq 2. \end{cases}$$

このとき生成元 T_i を捻り関手 T_{E_i} に送るような**単射**群準同型 $B_{m+1} \to \mathrm{Auteq}\, D^b(X)$ が存在する。

2 主結果

筆者は Seidel–Thomas の捻り関手を用いて新たな自己同値 H_E を導入した。

定理 2.1 ([Ara23])**.** $\pi\colon X \to T$ を非特異射影多様体の間の平坦射とし、$i\colon X_0 = \pi^{-1}(0) \to X$ をファイバーとする。また $E \in D^b(X_0)$ を、$i_*E \in D^b(X)$ が球面対象になるような対象とする。このとき以下の図式を可換にするような同値 $H_E\colon D^b(X_0) \to D^b(X_0)$ が E と i から構成できる。

$$\begin{array}{ccc} D^b(X_0) & \xrightarrow{i_*} & D^b(X) \\ {\scriptstyle H_E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_{i_*E}} \\ D^b(X_0) & \xrightarrow{i_*} & D^b(X). \end{array}$$

これを楕円曲面 $\pi\colon S \to C$ に適用する。$i\colon F = \pi^{-1}(0) \hookrightarrow S$ を既約成分が 2 個以上ある特異ファイバーとすると、その既約成分 $G \subset F$ は S の (-2)-曲線となる。よって $G \cong \mathbb{P}^1$ 上の次数 a の直線束 $\mathcal{O}_G$ は $D^b(S)$ の球面対象を与える。上の定理より、$D^b(S)$ の自己同値 $T_{\mathcal{O}_G(a)}$ と整合的な $D^b(F)$ の自己同値 $H_{\mathcal{O}_G(a)}$ が得られる。捻り関手は Dehn 捻りの対応物だったが、F が I_n 型の場合この $H_{\mathcal{O}_G(a)}$ は実曲面の**半捻り**という操作の対応物となる。具体的に説明しよう。$n \geq 2$ とし、F_n を I_n 型の小平ファイバーとする。F_n のミラー多様体は n 点穴あきトーラス T_n である。

定理 2.2 ([LP17])**.** $\mathcal{W}(T_n)$ を T_n の巻深谷圏 (wrapped Fukaya category) とすると、三角圏の同値 $D^b(F_n) \cong D^b(\mathcal{W}(T_n))$ がある。

これにより $E \in D^b(F_n)$ に対応する曲線を γ_E としよう。

例 2.3. $n = 3$ とする。F_3 の既約成分を G_1, G_2, G_3 とし、それらの上にある非特異点を x_1, x_2, x_3 とする。このとき直既約対象 $\mathcal{O}_{F_3}, \mathcal{O}_{G_1}, \mathcal{O}_{G_1}(-1), \mathcal{O}_{x_1}$ などに対応する T_3 上の曲線は図 2.1 のような曲線である。ただし白い丸は T_3 の 3 つの穴を表す。

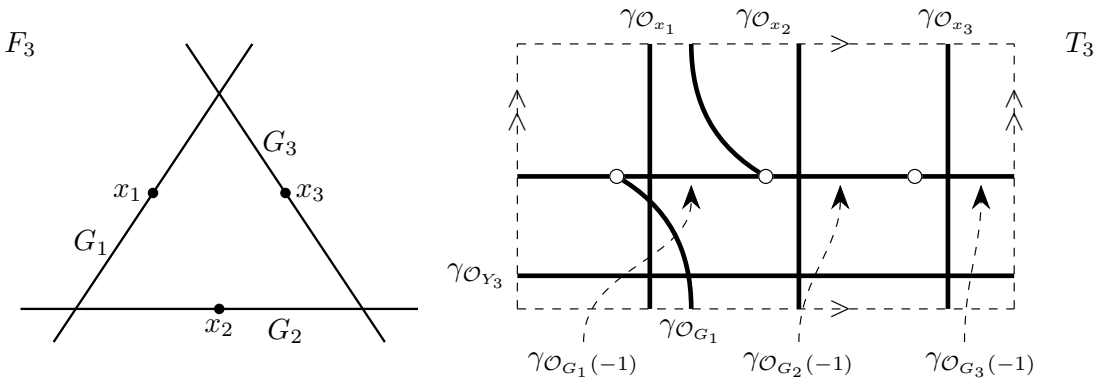


図 2.1　$D^b(F_n)$ の対象と T_3 上の曲線の対応

また T_n の写像類群 $\mathrm{MCG}(T_n)$[*2]は $\mathcal{W}(T_n)$ への自然な作用を通じて $D^b(F_n)$ へ作用する。$\mathrm{MCG}(T_n)$ は緯線や経線に沿った Dehn 捻りと、2 つの穴を結ぶ曲線に沿った半捻りという操作で生成される [LP01]。例えば図 2.1 の $\gamma_{\mathcal{O}_{G_1}(-1)}$ は穴を結ぶ曲線で、半捻りとは図 2.2 の操作である。

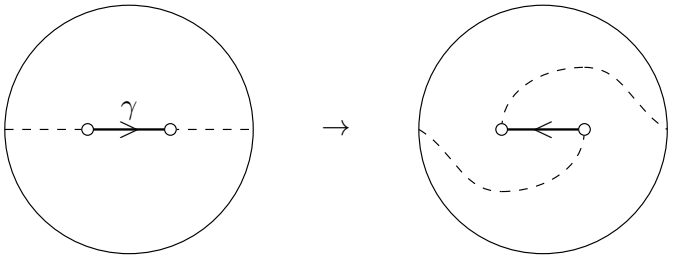


図 2.2　曲線 γ に沿った半捻り

定理 2.4 ([Ara23])**.** I_n 型小平ファイバー F_n について、$H_{\mathcal{O}_G(a)} \in \mathrm{Auteq}\, D^b(F_n)$ は $\gamma_{\mathcal{O}_G(a)}$ に沿った T_n の半捻りが誘導する自己同値である。

この結果を踏まえ、$H_{\mathcal{O}_G(a)}$ を $\mathcal{O}_G(a)$ に沿った**半捻り関手**と呼ぶことにする。他の型の小平ファイバーにも半捻り関手 $H_{\mathcal{O}_G(a)}$ を定義することができるが、**ミラー対称性は I_n 型の場合にしか知られていない**ため同じ手法で $H_{\mathcal{O}_G(a)}$ を調べることはできない。

一方、写像類群 $\mathrm{MCG}(T_n)$ は楕円ブレイド群 $B_n^{Ell} = \pi_1(\mathrm{UConf}_n(T^2))$ と以下のように関係する。T^2 上の n 点集合 $P_n = \{t_1, \ldots, t_n\}$ を固定し、$T_n = T^2 \setminus P_n$ だとする。$\mathrm{Diff}(T^2)$ を T^2 の自己微分同相群、$\mathrm{Diff}(T^2, P_n)$ を P_n を集合として保つような自己微分同相のなす部分群とする。後者は $\mathrm{Diff}(T_n)$ と同一視できること、$\pi_0(\mathrm{Diff}) = \mathrm{MCG}$ であることに注意する。$\varphi \in \mathrm{Diff}(T^2)$ を $\varphi(P_n) \in \mathrm{UConf}_n(T^2)$ へ送る写像はファイバー束 $\mathrm{Diff}(T^2, P_n) \hookrightarrow \mathrm{Diff}(T^2) \twoheadrightarrow \mathrm{UConf}_n(T^2)$ を与え、そのホモトピー長完全列から準同型 $\delta\colon B_n^{Ell} \to \mathrm{MCG}(T_n)$ を得る。

[*2] 正確には深谷圏の $\mathbb{Z}$ 次数構造と整合する次数付き写像類群 $\widetilde{\mathrm{MCG}}(T_n)$ を考える必要がある。

以上より B_n^{Ell} の $D^b(F_n)$ への作用が得られ、B_n^{Ell} の生成元 T_i, X_i, Y_i のうち T_i は半捻り関手 $H_{\mathcal{O}_{G_i}(-1)}$ として作用することが具体的な計算でわかる（図 1.7 や図 2.1 を参照）。また X_i, Y_i の作用も具体的な捻り関手や直線束によるテンソル積関手を用いて表せる。補足 1.13 より B_n^{Ell} は A 型の二重アファインブレイド群と見なすことができるから、同様の群作用が D 型や E 型 Dynkin 図形に対応する小平ファイバーの導来圏にあるかどうかという問題が考えられる。以下が主結果である。

定理 2.5 (A.)**.** F が D 型または E 型の Dynkin 図形に対応する小平ファイバーのとき、その Dynkin 図形に対応するルート系が定める二重アファインブレイド群 $B^d = \langle B, P^\vee, P \rangle$ が $D^b(F)$ に作用する。B の作用は半捻り関手で、$P^\vee$ と P の作用は捻り関手と直線束によるテンソル積で与えられる。

補足 2.6. A 型 Dynkin 図形を持つ小平ファイバーで I_n 型以外のものでも、ほとんど同様に二重アファインブレイド群や $\mathrm{MCG}(T_n)$ の作用を構成できる。

参考文献

[Ara23] Hayato Arai. “Half-spherical twists on derived categories of coherent sheaves”. In: *arXiv e-prints*, arXiv:2302.12501 (Feb. 2023), arXiv:2302.12501. DOI: 10.48550/arXiv.2302.12501. arXiv: 2302.12501 [math.AG].

[BO01] Alexei Bondal and Dmitri Orlov. “Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences”. In: *Compositio Math.* 125.3 (2001), pp. 327–344. ISSN: 0010-437X. DOI: 10.1023/A:1002470302976.

[Jor09] David Jordan. “Quantum D-modules, elliptic braid groups, and double affine Hecke algebras”. In: *Int. Math. Res. Not. IMRN* 11 (2009), pp. 2081–2105. ISSN: 1073-7928,1687-0247. DOI: 10.1093/imrp/rnp012.

[LP01] Catherine Labruère and Luis Paris. “Presentations for the punctured mapping class groups in terms of Artin groups”. In: *Algebr. Geom. Topol.* 1 (2001), pp. 73–114. ISSN: 1472-2747. DOI: 10.2140/agt.2001.1.73.

[LP17] Yankı Lekili and Alexander Polishchuk. “Arithmetic mirror symmetry for genus 1 curves with n marked points”. In: *Selecta Math. (N.S.)* 23.3 (2017), pp. 1851–1907. ISSN: 1022-1824. DOI: 10.1007/s00029-016-0286-2.

[Muk81] Shigeru Mukai. “Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves”. In: *Nagoya Math. J.* 81 (1981), pp. 153–175. ISSN: 0027-7630.

[Orl97] D. O. Orlov. “Equivalences of derived categories and $K3$ surfaces”. In: vol. 84. 5. Algebraic geometry, 7. 1997, pp. 1361–1381. DOI: 10.1007/BF02399195.

[PZ98] Alexander Polishchuk and Eric Zaslow. “Categorical mirror symmetry: the elliptic curve”. In: *Adv. Theor. Math. Phys.* 2.2 (1998), pp. 443–470. ISSN: 1095-0761,1095-0753. DOI: 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a9.

[Sei99] Paul Seidel. “Lagrangian two-spheres can be symplectically knotted”. In: *J. Differential Geom.* 52.1 (1999), pp. 145–171. ISSN: 0022-040X,1945-743X.

[Sei03] Paul Seidel. “A long exact sequence for symplectic Floer cohomology”. In: *Topology* 42.5 (2003), pp. 1003–1063. ISSN: 0040-9383. DOI: 10.1016/S0040-9383(02)00028-9.

[ST01] Paul Seidel and Richard Thomas. “Braid group actions on derived categories of coherent sheaves”. In: *Duke Math. J.* 108.1 (2001), pp. 37–108. ISSN: 0012-7094. DOI: 10.1215/S0012-7094-01-10812-0.

楕円曲線の Tate-Shafarevich 群の体拡大における挙動について

東北大学　大学院　理学研究科　数学専攻
志賀明日香 (Asuka Shiga) *

概要

Igor Shafarevich(1923-2017) は, 代数体 K 上の楕円曲線 E/K に対し, ガロアコホモロジーを用いて次のアーベル群を定義した.

$$Ш(E/K) \stackrel{\text{def}}{=} \ker\left\{H^1(G_K, E) \to \prod_v H^1(G_{K_v}, E)\right\}$$

ただし K_v は K の素点 v における K の完備化であり, G_K, G_{K_v} はそれぞれ K, K_v の絶対ガロア群である. この群は今日では Tate-Shafarevich 群と呼ばれ, E の K 有理点全体のなす群 $E(K)$ の構造を決定する上で重要な役割を果たす. また, E/K の torsor における局所大域原理が成り立つことの障害になっているという点でも, 数論的に重要な群と見做されている.

本稿では, 1 導入 において Tate-Shafarevich 群の基礎的な事項について紹介するとともに, 2 主定理　において, 楕円曲線 E/K を固定し, L/K を動かしたときの $Ш(E/L)$ の挙動について本講演で話す予定の結果を述べる.

1　導入

本稿を通してキーワードになるのは局所と大域である. まずは局所大域原理について解説する.

定義 1.1. K を代数体とし, M_K を K の素点全体の集合とする. K_v を K の $v \in M_K$ における完備化とする. X/K を K 上定義された代数多様体とする.

X/K において局所大域原理が成り立つとは

$$X(K_v) \neq \emptyset, \forall v \in M_K \implies X(K) \neq \emptyset$$

が成り立つときのことをいう.

K は大域的な体と呼ばれる体の 1 つであり, K_v は局所的な体と呼ばれる体の一部である. 局所的な体たちで有理点を持てば, 大域的な体で有理点が存在するという理想的な状況が, 局所大域原理が成り立つと言うことである. 次の例が古典的に知られている.

* otheiio323.com@gmail.com

定理 1.2. (Hasse-Minkovski の定理) K を代数体とし, $a, b \in K^\times$ とする. $aX^2 + bY^2 = Z^2$ において局所大域原理が成り立つ.

上記は種数が 0 の場合であるが, 種数が 1 の場合は反例がある. 局所大域原理にどのような反例があるかという問題は, 古くから考えられてきた. 次の例 1. (3) のように, 最近になって見つかったものもある.

例 1.
(1) $3X^3 + 4Y^3 + 5Z^3 = 0$ はすべての素数 p に対する $\mathbb{Q}_p$ および $\mathbb{R}$ で解を持つが, $\mathbb{Q}$ に解を持たない. (Selmer, 1961)
(2) $2y^2 = x^4 - 17$ はすべての素数 p に対する $\mathbb{Q}_p$ および $\mathbb{R}$ で解を持つが, $\mathbb{Q}$ に解を持たない. (Lind, 1950)
(3) 任意の代数体 K に対して, ある $p, q \in K$ が存在して, $qy^2 = x^4 - p$ はすべての K の素点 v に対して K_v で解を持つが, K に解を持たない (Han Wu 2022)[10].

上記 3 つの反例は, 全て楕円曲線が関係している.

定義 1.3. K 上の楕円曲線 E とは, K 上の種数 1 の非特異射影代数曲線であって, 固定点 $O_E \in E(K)$ を持つもののことである.

例 2. $S : 3X^3 + 4Y^3 + 5Z^3 = 0$ は種数 1 の代数曲線であるが, $S(\mathbb{Q}) = \emptyset$ なので, $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線ではないが, $\mathbb{Q}((\frac{3}{4})^{\frac{1}{3}})$ 上は楕円曲線である.

楕円曲線とガロアコホモロジーに関して, 本稿で必要な事項を述べる.

命題 1.4. K 上の楕円曲線は, $y^2 = x^3 + ax + b$ (ただし, $a, b \in K, 4a^3 + 27b^2 \neq 0$) の $\mathbb{P}^2_K$ における射影閉包, $\{y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\infty \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1, 0)\}$ と K 上で同型である.

定理 1.5. 楕円曲線 E/K を $\{(x, y) \mid y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\infty\}$ とする. $P, Q \in E(K)$ に対して, P と Q を通る直線 L と E との第 3 交点を $R \in E(K)$ とする. $P + Q$ を ∞ と R を通る直線 L' と E との第 3 交点で与えれば, $E(K)$ は固定点 ∞ を単位元としてアーベル群をなす.

定理 1.6. (Mordel-Weil の定理, 証明は [9] を参照) K が代数体のとき, 群 $E(K)$ は有限生成なアーベル群である. よって,

$$E(K) \cong \mathbb{Z}^{\mathrm{rank}(E/K)} \times E(K)_{\mathrm{tor}}$$

($E(K)_{tor}$ は有限アーベル群) とかける. $\mathrm{rank}(E/K)$ を E/K のランクという.

定義 1.7. E_1, E_2 をそれぞれ O_{E_1}, O_{E_2} を単位元とする楕円曲線とする. E_1 から E_2 への isogeny とは, 定数でない射 $\phi : E_1 \to E_2$ であって, $\phi(O_{E_1}) = O_{E_2}$ を満たすもののことをいう.

定義 1.8. G を群とし, M をアーベル群とする. M が G 加群であるとは, G が M に作用し, 作用の分配則が成り立つもののことをいう.

例 3. K を体とし, C/K を K 上の種数 1 の曲線とする. $C(\overline{K})$ は $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ 上の加群である. 実際, $C(\overline{K})$ は固定点を単位元とするアーベル群をなし, $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の $\overline{K}$ への作用を $x \mapsto \sigma x$ で表すことにすると, $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \times C(\overline{K}) \to C(\overline{K})$ を $(\sigma, (x, y)) \mapsto (\sigma x, \sigma y)$ で定めることができる.

定義 1.9. K を体, $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ をその絶対ガロア群, M を G 上の加群とする. 今, M に G は連続に作用しているとする. ただし, M には離散位相, G には Krull 位相を入れている.

$$H^0(G, M) = M^G \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{m \in M \mid \forall \sigma \in G, \sigma m - m = 0\}$$

$$H^1(G, M) \stackrel{\mathrm{def}}{=} Z^1(G, M)/B^1(G, M)$$

ただし,

$$Z^1(G, M) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{f : G \to M : \text{連続写像} \mid f(\sigma\tau) = f(\sigma) + \sigma f(\tau), \forall \sigma, \tau \in G\}$$

$$B^1(G, M) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{f : G \to M : \text{連続写像} \mid \exists m \in M, \forall \sigma \in G, f(\sigma) = \sigma m - m\}$$

とする.

$Z^1(G, M)$ の元を 1-コサイクル, $B^1(G, M)$ の元を 1-コバウンダリという. 1-コサイクル f に対して, コホモロジーにおける剰余類を $[f]$ と書くことにする.

定義 1.10. K を代数体とし, M_K を K の素点全体の集合とする. $v \in M_K$ に対し, K_v を K の v における完備化とする. G_L を K の絶対ガロア群とする.

$$Ш(E/K) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \ker \left\{ H^1(G_K, E(\overline{K})) \to \prod_{v \in M_K} H^1(G_{K_v}, E(\overline{K_v})) \right\}$$

を楕円曲線 E/K の Tate-Shafarevich 群という. また, 正整数 n に対し, $Ш(E/K)[n] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{[C] \in Ш(E/K) \mid n[C] = 0\}$ を Tate-Shafarevich 群 $Ш(E/K)$ の n-part という.

ガロアコホモロジーによる定義を見ているだけではよくわからないが, ガロアコホモロジーを torsor の集合と思うことで Tate-Shafarevich 群は幾何的な解釈を得る.

定義 1.11 (tosor)**.** E/K を楕円曲線とする. E/K の torosor(トーサー, もしくは principle homogeneous space(主等質空間)) とは, 次をみたす組 (C, μ) のことである.

1. C/K は滑らかな曲線である.
2. $\mu : C \times E \to C$ は K 上定義されていて, 次をみたす.

(a) $\overline{K}$ 上の同型 $\iota : C \to E$ が存在して, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} C \times E & \xrightarrow{\mu} & C \\ {\scriptstyle \iota \times id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \iota} \\ E \times E & \xrightarrow[(P,Q) \mapsto P+Q]{} & E \end{array}$$

この図式から, μ は次の 3 つの性質を満たすことに注意する.

（b）任意の C の点 p に対し, $\mu(p,O)=p$ が成り立つ.
（c）任意の C の点 p と任意の E の点 P,Q に対し, $\mu(\mu(p,P),Q)=\mu(p,P+Q)$ が成り立つ.
（d）任意の C の点 p,q に対し, $\mu(p,P)=q$ をみたす E の点 P が一意に存在する.

例 4. E/K 自身は E/K の torsor である. 実際, $\mu(p,P)=p+P$ と定めればよい.

定義 1.12 (Weil-Châtelet 群)**.** E/K を楕円曲線とする.
E/K の torsor $(C/K,\mu),(C'/K,\mu')$ が同値であるとは, 次の図式を可換にする K 上の同型 $\theta : C \to C'$ が存在することをいう.

$$\begin{array}{ccc} C\times E & \xrightarrow{\mu} & C \\ {\scriptstyle \theta\times id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\ C'\times E & \xrightarrow[\mu']{} & C' \end{array}$$

E/K の torsor 全体の集合をこの同値関係で割ったものを E/K の Weil-Châtelet 群といい, $\mathrm{WC}(E/K)$ と表す. また, E/K を含む同値類を自明類という.

命題 1.13. E/K を楕円曲線とする. E/K の torsor $(C/K,\mu)$ が自明類に含まれることは, C が K-有理点をもつことと同値である.

Proof.
torsor C/K が自明類に含まれるとき, ある K 上の同型 $\theta : E \cong C$ が存在する. $\theta(O)\in C(K)$ となり, C は K 有理点を持つ.
逆に, $C(K)\neq\emptyset$ のとき, $(C/K,\mu)$ が自明類に含まれることを示そう. $P\in C(K)$ を 1 つ取って固定する. $\phi : C\to E$ を $p\to\mu(p,P)$ で定めると, ϕ は K 上定義された射である. 定義 1.11 より, 同型写像 $\iota : C\to E$ が存在する. E 上の平行移動 $\tau : E\to E, Q\mapsto Q+\mu(p,P)-\iota(p)$ で定義すると, $\phi=\tau\circ\iota$ であるから, ϕ は同型射である. よって K 上の同型 $\phi\colon C\to E$ が存在し, 次の図式を可換にする.

$$\begin{array}{ccc} C\times E & \xrightarrow{\mu} & C \\ {\scriptstyle \phi\times id}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ E\times E & \xrightarrow[(P,Q)\mapsto P+Q]{} & E \end{array}$$

■

注意 1.14. K の標数が 0 のときは torsor を次のように定義しても問題ない. すなわち,

定義 1.15. E/K の torsor(C,μ) とは, K 上の曲線と K 上の射 $\mu : C\times E\to C$ の組であって, $C(\overline{K})$ に simply transitive な作用を誘導するものである.

ただし, 正標数のときは上記の定義では不十分である. たとえば torsor が twist になるという基本的な性質も成立しない. 実際, 作用が simply transitive であることより, $C(\overline{K})$ からとった点 p に対し, $E\to C, P\mapsto\mu(p,P)$ という射は分離次数は 1 だが次数が 1 とは限らない.

有限体上では, 種数 1 の曲線は自動的に有理点を持つ.

定理 1.16. (F.K.Schmidt 1931, [9] の演習問題 10.6 も参照)
$E/\mathbb{F}_q$ を有限体 $\mathbb{F}_q$ 上定義された楕円曲線とする. このとき, $\mathrm{WC}(E/\mathbb{F}_q) = 0$.

Proof. 種数 1 の曲線 C に対し, $C(\mathbb{F}_q) \neq \emptyset$ を示せばよい. Fr_q を C の q 乗 Frobenius 写像とする. Fr_q のままでは固定点を固定点に移すとは限らず isogeny とは言えないので, 平行移動することで isogeny にしてしまおう.

$P_0 \in C(\overline{\mathbb{F}}_q)$ を任意に固定し, $f \in \mathrm{End}(C)$ を $f(P) = Fr_q(P) - Fr_q(P_0)$ と定める. さらに, $1 - f$ は閉体上の isogeny だから全射であり, ある $P_1 \in C$ が存在して, $(1-f)(P_1) = Fr_q(P_0)$. よって, $Fr_q(P_1) = f(P_1) + Fr_q(P_0) = P_1$ より, $P_1 \in C(\mathbb{F}_q)$. よって C は $\mathbb{F}_q$ 有理点を持つので $\mathrm{WC}(E/\mathbb{F}_q)$ の自明な元である. ■

次の命題によって, $\mathrm{WC}(E/K)$ に群構造が入る.

命題 1.17 ([9] の X, Theorem 3.6)**.** 楕円曲線 E/K に対し, 次は全単射である.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{WC}(E/K) & \longrightarrow & H^1(G_{\overline{K}/K}, E) \\ \cup & & \cup \\ [C/K] & \longmapsto & [\sigma \mapsto \sigma p - p] \end{array}$$

ここで, p は任意に取った $C(\overline{K})$ の点であり, $\sigma p - p$ は $\mu(p, Q) = \sigma p$ となる点 $Q \in E$ を表すものとする. このような Q は定義 1.6 の (d) よりただ 1 つ存在する.

注意 1.18. 命題 1.17 より, $Ш(E/K) \cong \ker(\mathrm{WC}(E/K) \to \prod_v \mathrm{WC}(E/K_v))$ と特徴付けることができる. また, 命題 1.13 より, $Ш(E/K)$ とは局所的に有理点を持つ E の主等質空間の同型類の集合だと理解できる. つまり, $Ш(E/K)$ は局所大域原理が成り立つ主等質空間で代表される元 1 つと, その他の局所大域原理が成り立たない主等質空間で代表される元たちからなる集合である. すなわち,

$$\begin{aligned} Ш(E/K) &= \{\text{local に有理点を持つ } E/K\text{-torsor の同型類の集合 }\} \\ &= \{[E/K]\} \bigcup \left\{ [C/K] \;\middle|\; \begin{array}{l} C\colon\ E/K\text{-torsor s.t. } C(K) = \emptyset, \\ C(K_v) \neq \emptyset, \forall v \in M_K \end{array} \right\} \end{aligned}$$

である.

$\#Ш(E/K)$ が 1 のとき, 全ての主等質空間で局所大域原理が成り立ち, 1 より大きくなればなるほど, 局所大域原理を満たさない主等質空間が増えていくのであるから, $Ш(E/K)$ の大きさはまさに局所大域原理の成り立たなさを定量的に評価していると言える.

注意 1.19. 定理 1.16 と Hensel の補題より, $Ш(E/K)$=ker $\left\{H^1(G_K, E) \to \bigoplus_v H^1(G_{K_v}, E)\right\}$ である.

例 5. $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の同型 $\phi : C \to E$ を適切に定めると, $\mu : C \times E \to C$ を $\phi^{-1}(\phi(p) + P)$ で定めることによって, 次のことが確認できる.
(1) $[3X^3 + 4Y^3 + 5Z^3 = 0] \in Ш(E : X^3 + Y^3 + 60Z^3 = 0/\mathbb{Q})$
(2) $[2y^2 = x^4 - 17] \in Ш(E : y^2 = x^3 + 17x/\mathbb{Q})$

2 主定理

導入において解説した Tate-Shafarevich 群と局所大域原理の関係 (注意 1.18) を踏まえ, 本講演では, 以下の問を考える.

問. 代数体上の楕円曲線 E/K を固定する. L/K を体の拡大としたとき, $Ш(E/L)$ の位数は $Ш(E/K)$ の位数と比べてどう増減するか.

この問は言い換えると, 体拡大による局所大域原理の反例の個数の増減を調べていることになる. 体を拡大すると, 局所大域原理の反例が有理点を持ち, 局所大域原理の反例が減少するように思える一方, 上げた体上で新たな局所大域原理の反例が増える可能性もあり, その挙動は複雑である.

例 6. $[C : 2y^2 = x^4 - 2] \in Ш(E : y^2 = x^3 + 17x/\mathbb{Q})[2] \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり, $C(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ であるから, $[C]$ は $Ш(E : y^2 = x^3 + 17x/\mathbb{Q})$ の非自明な元である. ここで, 体を $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{Q}(\sqrt{-34})$ に拡大すると, $(0, \sqrt{-\frac{17}{2}}) \in C(\mathbb{Q}(\sqrt{-34}))$ であり, 命題 1.13 より $Ш(E/\mathbb{Q}(\sqrt{-34}))$ において $[C] = 0$ となる. しかし, このとき $Ш(E/\mathbb{Q}(\sqrt{-34}))[2] \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ であり, $\mathbb{Q}(\sqrt{-34})$ 上で C は局所大域原理の反例ではなくなったにも関わらず, $\mathbb{Q}(\sqrt{-34})$ 上では局所大域原理の反例となる $E/\mathbb{Q}$ の torsor が少なくとも 3 つ存在することがわかる. 一方で, $Ш(E/\mathbb{Q}(\sqrt{-2}))[2] = 0, Ш(E/\mathbb{Q}\sqrt{-37}))[2] = 0$ のように, Ш の 2-part を自明化する 2 次体も存在する.

固定した E/K に対して, $Ш(E/L)$ の位数を $Ш(E/K)$ の位数より減らそうとするのか, 増やそうとするのかによって, 選択するべき L/K は大きく異なる.

増やす方向性について, Clark は任意の整数 r に対して, p 次拡大 L/K があって, $Ш(E/L)$ は位数 r の元を少なくとも p 個持つということを示した [2]. Matsuno は $K = \mathbb{Q}, p = 2$ の場合に Clark の別証明を与えた [5]. 一方で, $\mathbb{Q}$ 上の $Ш(E_D/\mathbb{Q})$ をいくらでも大きくできることが Rohlich によって知られている [3]. すなわち, 任意の整数 r と任意の $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 $E/\mathbb{Q}$ に対し, ある平方因子を持たない整数 D が存在し, $\#Ш(E_D/\mathbb{Q}) \geq r$ とできる. ただし, E/K: $y^2 = x^3 + Ax + B$ と書いたとき, $E_D/K : Dy^2 = x^3 + Ax + B$ を E/K の D による 2 次の twist という. 筆者は, [4] の結果のもと, それぞれいくらでも大きくできる $\#Ш(E/\mathbb{Q}(\sqrt{D}))$ と $\#Ш(E_D/\mathbb{Q})$ の比がいくらでも大きくできることを明らかにした. すなわち,

定理 2.1. 任意の整数 r と任意の楕円曲線 $E/\mathbb{Q}$ に対して, ある 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ が存在して,

$$\#Ш(E/\mathbb{Q}(\sqrt{D})) \geq r\#Ш(E_D/\mathbb{Q})$$

が成り立つ.

証明においては, 次の完全列が重要な役割を果たす.

定理 2.2 ([6] を参照)**.** E/K を代数体 K 上の楕円曲線とする. $Ш(E/K)$ の有限性を仮定すると, 次の完全列がある.

$$0 \to Ш(E/K) \to H^1(G_K, E) \to \bigoplus_v H^1(G_{K_v}, E) \to \widehat{E(K)}^* \to 0$$

ただし, $\widehat{E(K)}$ は $E(K)$ の副有限完備化であり, $\widehat{E(K)}^*$ は $\widehat{E(K)}$ の Pontryagin 双対である.

また, $X \overset{\text{def}}{=} \mathrm{coker}(H^1(G_K, E)[2] \to \bigoplus_v H^1(G_{K_v}, E)[2]))$ の位数を上から評価することによって, [2] の $K = \mathbb{Q}, p = 2$ の別証明を与えることができる. しかし, 筆者の知る最良の評価は現在のところ $\#X \leq \#\mathrm{Sel}^2(E/K)$(ただし, $\mathrm{Sel}^2(E/K)$ は 2-Selmer 群とする) であり $\#Ш(E/\mathbb{Q}(\sqrt{D}))[2]$ が $\#Ш(E_D/\mathbb{Q})[2]$ と比べてもいくらでも大きくできるのかについては証明に至っておらず今後の課題である.

減らす方向性について, Tate-Shafarevich 群が代数体のイデアル類群の楕円曲線類似であることを考えると, この問は代数体の Hilbert 類体の楕円曲線類似が存在するか否かを問う問題であると言うことができる.

[7] で予想されるランクの有界性を認めれば, ある楕円曲線が存在して, 任意の 2 次体 K に対して $Ш(E/K)[2] \neq 0$ が成り立つことがわかる.

筆者は具体的な楕円曲線について次のことを明らかにした.

命題 2.3. p を奇素数とし, $E : y^2 = x^3 + px$ を楕円曲線とする.

$Ш(E/K)[2] = 0$ もしくは $Ш(E/K)[2] \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となる虚 2 次体 K が無数に存在する.

この命題の証明は, K のイデアル類群の 2-part を自明化することによって体の Selmer 群 $K(S, 2) \overset{\text{def}}{=} \left\{ b \in K^\times/K^{\times 2} \mid v(b) \equiv 0 \mod 2, \forall v \notin S \right\}$ を小さくしつつ, Selmer 群の元に対応する E/K-torsor が有理点を持たないようにするかランクを大きくすることによって行う. ただし, S は $2, p$ の上にある K の素点全体からなる集合である.

しかし, Magma による計算から $p = 257$ の場合については $Ш(E/K)[2] = 0$ とは出来ないのではないかと予想している.

参考文献

[1] J.Bednarski, T.Ciurca, D.Gallo Supervised by L.Mann PROMYS, 2-Torsion in Ideal Class-Groups Europe 2017.

[2] P. L. Clark and S. Sharif, Period, index and potential Ш, 2008, arXiv:0811.3019

[3] J. Hoffstein and W. Luo. Nonvanishing of L-series and the combinatorial sieve. Math. Res. Lett., 4(2–3):435–444, 1997. With an appendix by David E. Rohrlich.

[4] V.A.Kolyvagin, Finiteness of $E(Q)$ and $Ш(E/Q)$ for a class of Weil curves, Math.USSR Izvestiya 32 (1989), 523-541.

[5] K. Matsuno, Elliptic curves with large Tate-Shafarevich groups over a number field, Math. Research Letters 16 (2009), no. 3, 449–461

[6] J. S. Milne,Arithmetic Duality Theorems, Perspectives in Mathematics, Vol. 1, Academic Press, New York, 1986.

[7] J. Park, B. Poonen, J. Voight, and M. Wood, A heuristic for boundedness of ranks of elliptic curves, J. Eur. Math. Soc. 21, (2019) 2859–2903.

[8] D.Qiu, Shafarevich-Tate groups of elliptic curves upon quadratic extension and several applications, 2014, arXiv:1003.4393v2

[9] J .H. Silverman, The arithmetic of elliptic curves, Springer, 2nd edition 2009.

[10] H.Wu, On genus 1 curve violating Hasse principle, 2022, arXiv:2112.02470.

[11] H.Yu, On Tate-Shafarevich groups over Galois extensions, Israel J. Math. 141 (2004), 211–220.

Perfectoid ideals and its correspondence

東京工業大学 理学院 数学系
石塚伶 (Ryo ISHIZUKA)

概要

パーフェクトイド環 R とその tilt $R^\flat$ について、その間のある種の対応はパーフェクトイド理論において中心的な役割を果たす。本講演ではそのような対応の一つとして、剰余環 R/I がパーフェクトイド環になるような R のイデアル I の集合と、$R^\flat$ の $p^\flat$ 進閉な根基イデアル J の集合との間の一対一対応を示したことを報告する。これらの結果はパーフェクトイド環の可換環論的性質に着目した純代数的手法によって証明されており、共同研究者である D.Dine 氏の先行研究の一般化になっている。

1 準備

1.1 Perfectoid ring について

p をある素数とする。本稿では環と言ったら $\mathbb{Z}_{(p)}$ 上の単位的可換環とする。まずは perfectoid の定義を行う。そのために必要な事項をまとめる。

定義 1.1. R を正標数 p の環とする。A が**完全**（*perfect*）であるとは、Frobenius 射 $R \xrightarrow{F} R$ が全単射になることである。

定義 1.2. 正標数の完全環 R に対して *Witt* **環** $W(R)$ が構成される。これは集合としては R の加算直積として定義され、その上にある環構造を入れる。とくに $W(R)$ は p 進完備な標数 0 の環であって、$W(R)/pW(R)$ は自然に R と同型になる。さらに乗法的な射

$$[-]\colon R \to W(R)$$

が定義され、これによって任意の $W(R)$ の元 x はある $\{a_i\}_{i\geq 0} \subseteq R$ が一意的に存在して

$$x = \sum_{i\geq 0} [a_i] p^i \in W(R)$$

と表すことができる。

例 1.3. $R = \mathbb{F}_p$ のとき、$W(R) = \mathbb{Z}_p$ である。より一般に、R が標数 p の完全体であるとき $W(R)$ は p で剰余をとると R と同型になる完全不分岐な標数 0 の離散付値環になる。

定義 1.4 ([BMS18, Lemma 3.2]). A を p 進完備な環とする。A の *tilt* とは

$$A^\flat \coloneqq \lim\{\cdots \xrightarrow{F} A/pA \xrightarrow{F} A/pA\} \tag{1}$$

のことである。とくにこれは完全な正標数の環になる。さらに次の乗法的な射

$$\sharp\colon A^\flat \to A/pA$$
$$a \coloneqq (\overline{a_n})_{n\geq 0} \mapsto a^\sharp \coloneqq \lim_{n\to\infty} a_n^{p^n}$$

が定義される。とくにこれは $a_n = (\overline{a_n})_{n\geq 0}$ の代表元の取り方に依らずに定まる。

補題 1.5 ([BMS18, §3.1]). A を環とする。ある元 $\pi \in A$ が存在して、A は π 進完備かつ π^p が p を割り切るとする。このとき次の対応は環準同型になる。

$$\theta\colon W(A^\flat) \to A$$
$$\sum_{i\geq 0}[a_i]p^i \mapsto \sum_{i\geq 0} a_i^\sharp p^i.$$

もし A/pA 上の Frobenius 射が全射であったとすると θ も全射になる。

さらに、次の対応

$$\lim_{a\mapsto a^p} A \to A^\flat \coloneqq \lim_{F} A/pA$$
$$(a_n)_{n\geq 0} \mapsto (\overline{a_n})_{n\geq 0}$$
$$(\lim_{k\to\infty} a_{k+n}^{p^k})_{n\geq 0} \leftarrow\!\shortmid a \coloneqq (\overline{a_n})_{n\geq 0}$$

は乗法的な全単射になる。この全単射を通じて $\lim_{a\mapsto a^p} A$ に環構造が入る。

以上の定義のもとで、perfectoid ring を定義する。

定義 1.6 ([BMS18, Definition 3.5]). p 進完備環 A が *perfectoid ring* であるとは、ある元 $\pi \in A$ が存在して次を満たすことである。

1. A において π^p は p を割り切る。
2. Frobenius 射 $A/pA \xrightarrow{F} A/pA$ は全射になる。
3. $\theta\colon W(A^\flat) \to A$ の核が単項生成である。

注意 1.7. とくに A の標数が p のときには $\pi = p = 0$ と取ることができるから、A が perfectoid ring であることと A が完全であることは同値である。このことから分かる通り、この perfectoid ring は正標数における完全性の混標数への一般化と見なすことが出来る。

補題 1.8 ([BMS18, Lemma 3.9]). A を環とする。ある元 $\pi \in A$ が存在して、A は π 進完備かつ π^p が p を割り切るとする。さらに p 乗写像 $\varphi\colon A/\pi A \to A/\pi^p A$ が全射であるとする。このとき、ある単元 $u \in A^\times$ と $A^\flat$ の元 $\pi^\flat \in A^\flat$ が存在して、$(\pi^\flat)^\sharp = u\pi \in A$ となる。上記の全単射を考えると、これは π は単元倍を除いて整合的な p 冪乗根の列 $\{\pi^{1/p^n}\}_{n\geq 0} \subseteq A$ を持つことを意味する。

補題 1.9 ([BMS18, Lemma 3.10]). A を環とする。ある元 $\pi \in A$ が存在して、A は π 進完備かつ π^p が p を割り切るとする。さらに p 乗写像 $\varphi\colon A/\pi A \to A/\pi^p A$ が全射であるとする。

1. もし $\ker(\theta)$ が単項生成であれば、$\varphi\colon A/\pi A \to A/\pi^p A$ は同型射であり、さらに $\ker(\theta)$ は非零因子で生成される。

2. 逆に、もし $\varphi\colon A/\pi A \to A/\pi^p A$ が同型射であり、π が A で非零因子であれば、$\ker(\theta)$ は単項生成である（すなわち A は perfectoid ring になる）。

系 1.10. A を perfectoid ring とする。ある $\pi^\flat \in A^\flat$ で $\pi := (\pi^\flat)^\sharp \in A$ について A が π 進完備かつ π^p が p を割り切るとする。このとき次で定まる環準同型

$$\begin{aligned} A^\flat = \lim_F A/pA &\xrightarrow{\cong} \lim_{a\mapsto a^p} A \to A \\ a = (\overline{a_n})_{n\geq 0} &\mapsto (\lim_{k\to\infty} a_{k+n}^{p^k})_{n\geq 0} \mapsto \lim_{k\to\infty} a_k^{p^k} = a^\sharp \end{aligned}$$

は標数 p の環の間の環同型

$$A^\flat/\pi^\flat A^\flat \xrightarrow{\cong} A/\pi A$$

を誘導する。とくに同相写像

$$\mathrm{Spec}(A^\flat/\pi^\flat A^\flat) \xrightarrow{\approx} \mathrm{Spec}(A/\pi A)$$

を誘導する。

この同相を踏まえて、次の問題を考えることが今回の研究の動機である。

問題 1.11. A を perfectoid ring とするとき、上記の同相を延長できるか。すなわち、次のある 2 つの部分集合 U と V

$$\begin{aligned} \mathrm{Spec}(A^\flat/\pi^\flat A^\flat) \subseteq U &\subseteq \mathrm{Spec}(A^\flat), \\ \mathrm{Spec}(A/\pi A) \subseteq V &\subseteq \mathrm{Spec}(A) \end{aligned}$$

について U と V の間に同相写像が存在するか。

1.2 Perfectoid Tate ring について

先行研究について紹介するために perfectoid Tate ring について復習する。

定義 1.12 ([SW20, §2.2]). R を位相環とする。

- R が *Huber ring* であるとは、R の開部分環 R_0 であって、その相対位相が R_0 のあるイデアル I による I 進位相と一致するものが存在することである。この R_0 を R の**定義環**といい、I を**定義イデアル**という。
- R が *complete Huber ring* であるとは、R が完備な位相環であって、Huber ring であるものである。これはある I 進完備な定義環 R_0 が存在することと同値である。
- R の部分集合 S が *bounded* であるとは、任意の 0 の開近傍 U に対して、ある 0 の開近傍 V が存在して $VS \subseteq U$ となることである。
- R の元 x が *power-bounded* であるとは、集合 $\{x^n\}_{n\geq 0} \subseteq R$ が bounded であることである。

定義 1.13 ([SW20, §2.2]). R を Huber ring とする。

- R が *Tate ring* であるとは、R が Huber ring であって、ある可逆な位相的冪零元 π が存在することである。この π を R の *pseudo-uniformizer* という。
- とくにこのとき環として $R \cong R_0[1/\pi]$ となり、$R_0[1/\pi]$ に 0 の基本近傍系として $\{\pi^n R_0\}_{n\geq 0}$ を用いた位相によって位相環としての同型にもなる。
- R° と書いたら R の power-bounded な元全体のなす集合を表すものとする。とくにこれは R の開部分環を与える。
- R が Huber ring であるとき、R が *uniform* であるとは、R° が bounded になることである。これは R° が R の定義環になることと同値である。
- R の部分環 R^+ が**整元環**であるとは、R^+ が R の開部分環であって、R の中で整閉かつ $R^+ \subseteq R^\circ$ となることである。
- 組 (R, R^+) が Huber pair であるとは、R が Huber ring であり、R^+ が R の整元環であることである。

定義 1.14 ([SW20, §6.1]). 位相環 R が *perfectoid Tate ring* であるとは、R が complete Tate ring であり、次を満たすことである。

1. R は uniform である。
2. ある pseudo-uniformizer π であって、$p \in \pi^p R^\circ$ となるものが存在する。
3. p 乗写像 $\varphi\colon R^\circ/\pi R^\circ \to R^\circ/\pi^p R^\circ$ は全単射である。

注意 1.15 ([BMS18, Lemma 3.20 and Lemma 3.21]). R が perfectoid Tate ring であるとき、R の任意の整元環 R^+ は perfectoid ring である。逆に A が perfectoid ring であって、ある非零因子 $\pi \in R$ で π 進完備かつ $\pi^p \in pR$ となっているとき、$A[1/\pi]$ は perfectoid Tate ring になる。

2 主定理

主定理は Dine による次の先行研究（Definition 2.1）の一般化になっている。

定理 2.1 ([Din22, Proposition 4.9 and Theorem 4.16]). $R = R^\circ[1/\pi]$ を perfectoid Tate ring とする。このとき次の一対一対応が存在する

$$\{J \subseteq R \mid J \text{ は } R \text{ 上のある有界な冪乗法的半ノルム } \phi \text{ の核となる}\}$$
$$\updownarrow$$
$$\{I \subseteq R^\flat \mid I \text{ は } R^\flat \text{ 上のある有界な冪乗法的半ノルム } \psi \text{ の核となる}\}.$$

ここで、perfectoid Tate ring R に対して $R^\flat$ は $(R^\circ)^\flat[1/\pi^\flat]$ で定める。

さらに Spec 上へ制限した集合をそれぞれ $\mathrm{Spec}_{\mathrm{Top}}(R)$ と $\mathrm{Spec}_{\mathrm{Top}}(R^\flat)$ とすると、これは次の同相写像を与える。

$$\emptyset \neq \mathrm{Spec}_{\mathrm{Top}}(R) \subseteq \mathrm{Spec}(R)$$
$$\wr$$
$$\emptyset \neq \mathrm{Spec}_{\mathrm{Top}}(R^\flat) \subseteq \mathrm{Spec}(R^\flat).$$

この証明には Berkovich 空間の同相を用いた解析的な手法が用いられている。とくにこの同相を

示すために次の Berkoivch 空間の同相を用いている。

$$\mathcal{M}(R) \approx \mathcal{M}(R^\flat).$$

我々はこれを用いることなく、perfectoid Tate ring から perfectoid ring へと一般化し、さらに純代数的な手法によって証明した。そのために次の観察が必要になる。

命題 2.2 ([Din22, Theorem 4.4]). R を perfectoid Tate ring とする。I を R のイデアルとする。このとき R/I が perfectoid Tate ring になることと、I が R 上の有界な冪乗法的半ノルムの核になることは同値である。

これを元に次の言葉を定義する。

定義 2.3. A を perfectoid ring とする。A のイデアル J が *perfectoid ideal* であるとは、剰余環 A/J が perfectoid ring になることである。

これを踏まえて次の主定理を得る。

定理 2.4 ([DI23, Theorem 3.5]). A を perfectoid ring とする。このとき次の対応を考える。

$$\begin{aligned} &A \supseteq J \mapsto J^\flat \coloneqq \{f = (f^{(n)})_n \mid f^{(n)} \in J \text{ for all } n\} \subseteq A^\flat \text{ and} \\ &A^\flat \supseteq I \mapsto I^\sharp \coloneqq \theta_A(W(I)) \subseteq A. \end{aligned}$$

ここで $W(I)$ は自然な射 $W(A^\flat) \to W(A^\flat/I)$ の核である。このときこれは次の一対一対応を与える。

$$\begin{array}{c} \{J \subseteq A \mid J \text{ は } A/J \text{ が perfectoid ring になるような } A \text{ のイデアル}\} \\ \updownarrow \\ \{I \subseteq A^\flat \mid I \text{ は } A^\flat \text{ において } \pi^\flat \text{ 進閉な根基イデアル}\}. \end{array}$$

この一対一対応はとくに perfectoid Tate ring $A[1/\pi]$ を考えると、Definition 2.1 の一対一対応を包含している。Spec 上へ制限した集合をそれぞれ $\mathrm{Spec}_{\mathrm{perfd}}(R)$ と $\mathrm{Spec}_{\mathrm{perfd}}(R^\flat)$ とすると、これは次の同相写像を与える。

$$\begin{array}{c} \emptyset \neq \mathrm{Spec}_{\mathrm{perfd}}(A) \subseteq \mathrm{Spec}(A) \\ \wr \\ \emptyset \neq \mathrm{Spec}_{\mathrm{perfd}}(A^\flat) \subseteq \mathrm{Spec}(A^\flat). \end{array}$$

この同相写像は $\mathrm{Spec}(A^\flat/\pi^\flat A^\flat) \approx \mathrm{Spec}(A/\pi A)$ と $\mathrm{Spec}_{\mathrm{Top}}(A[1/\pi]) \approx \mathrm{Spec}_{\mathrm{Top}}(A^\flat[1/\pi^\flat])$ の同相を包含している。

この定理は次の応用を与える。

系 2.5 ([Din22, Corollary 4.17] and [DI23, Corollary 5.9]). A を perrectoid ring とする。A が整域であることと $A^\flat$ が整域であることは同値である。

References

[BMS18] Bhargav Bhatt, Matthew Morrow, and Peter Scholze. *Integral p-Adic Hodge Theory*. Publications mathématiques de l'IHÉS, 128.1 (2018), 219–397.

[DI23] Dimitri Dine and Ryo Ishizuka. *Tilting and Untilting for Ideals in Perfectoid Rings*. 2023. arXiv: 2308.09600.

[Din22] Dimitri Dine. *Topological Spectrum and Perfectoid Tate Rings*. Algebra & Number Theory, 16.6 (2022), 1463–1500.

[SW20] Peter Scholze and Jared Weinstein. *Berkeley Lectures on P-Adic Geometry*. Princeton University Press, 2020.

Constructing PGL(2, 7)-extensions with restricted ramifications

東京理科大学　大学院理学研究科　数学専攻
鈴木望夢 (Nozomu SUZUKI)

概要

regular polynomial の特殊化と Newton polygon に関する手法を用いて, $\mathbb{Q}$ 上の PGL(2, 7) 拡大で，ただひとつの 2 次部分体上不分岐であるようなものを構成する．得られる拡大の 2 次体上の Galois 群は位数 168 の単純群 PSL(2, 7) である．

1　導入

有限群 G を与えたとき，G を Galois 群にもつ Galois 拡大，すなわち G 拡大が存在するか，という問題を**逆 Galois 問題**という．この問題は一般には未解決であるが，有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の逆 Galois 問題では，例えば G が対称群や交代群であった場合に対して G 拡大が存在し，また，複素数体 $\mathbb{C}$ 上の一変数有理関数体 $\mathbb{C}(t)$ 上には任意の有限群 G に対して G 拡大が存在することが以前から知られている（[4]）．

一方，有理数体の有限次拡大，すなわち代数体の拡大は，一般に分岐する素点を少なくすることには限界があることが知られている．したがって代数体上の逆 Galois 問題では，分岐する素点を指定した拡大を構成する，分岐制限付きの逆 Galois 問題も重要である．例えば，有理数体上の拡大では，不分岐拡大が存在しないことが知られている．また，不分岐アーベル拡大は類体論によって説明される．

本研究では，正則拡大の特殊化を用いることで，$\mathbb{Q}$ 上のひとつの素数のみが分岐する PGL(2, 7) 拡大や，2 次部分体上が不分岐 PSL(2, 7) 拡大となる $\mathbb{Q}$ 上の PGL(2, 7) 拡大の族を構成した．これらの群は非 Abel 群であり，特に PSL(2, 7) は単純群である．代数体の拡大における素点の分岐を調べる手法は様々にあるが，本研究は Newton polygon を用いた手法のひとつである Ore の定理を用いている．

本レポートでは，証明に用いた Ore の定理に関する先行研究と主定理，及び主定理の証明の概略を述べ，最後に主定理を用いて得られる例を紹介する．

2 剛性の方法と Newton polygon

この節では，本研究の対象である正則 PGL$(2,7)$ の定義多項式について述べ，その後に主定理の証明に用いた事実を紹介する．

定義 2.1. L/K を体の分離拡大とする．K が L 内で代数的に閉じているとき，L/K を**正則拡大**という．

逆 Galois 問題に対する手法のひとつとして，次の Hilbert の既約性定理に基づいた正則拡大を用いる方法がある．

定理 2.2 ([6])**.** k を代数体とし，$K = k(T)$ を k 上の一変数有理関数体，L を k 上正則な K の有限次拡大とする．L/K の定義多項式を $f(T;X) \in K[X]$ とし，その K 上の *Galois* 群を G とする．このとき，$f(t;X) \in k[X]$ の k 上の *Galois* 群が G となる特殊化を与える $t \in k$ が無数に存在する．

本研究は次の多項式を基に行なっている：

$$F(T;X) := X^8 + X^7 + 7X^6 - T(X+1) \in \mathbb{Q}(T)[X]. \tag{1}$$

多項式 (1) の $\mathbb{Q}(T)$ 上の Galois 群は PGL$(2,7)$ である（cf.[4]）．この多項式は以下に述べる Riemann の存在定理と剛性の方法によって得られる．

定理 2.3 (**Riemann の存在定理**)**.** 有限群 G と正整数 r に対し，以下の *3* つの集合の間に一対一対応が存在する：

(i) G と同型な *Galois* 群をもつ $\mathbb{C}(T)$ 上の r 点分岐 *Galois* 拡大の同型類全体*,*
(ii) G と同型な *deck* 群をもつ $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ の r 点分岐 *Galois* 被覆の同型類全体*,*
(iii) G の共役類の組 $\mathcal{C} = (C_1, \ldots, C_r)$ に対し，

$$SNi(\mathcal{C}) := \{(g_1, \ldots, g_r) \mid g_i \in C_i, \langle g_1, \ldots, g_r \rangle = G, g_1 \cdots g_r = 1\}$$

としたとき，$SNi(\mathcal{C})$ が空でないような $\mathcal{C}$ 全体．

剛性の方法を説明するために，共役類の有理性と，共役類の組の剛性を定義する．

定義 2.4. (i) G を有限群とし，C を G の共役類とする．C^k を $C^k = \{g^k \mid g \in C\}$ によって定める．$|G|$ と互いに素な 0 でない任意の整数 k に対し，$C = C^k$ が成り立つとき，C は有理性をもつという．

(ii) G を有限群とし，$\mathcal{C} = (C_1, \ldots, C_r)$ を G の共役類の組とする．G が (空でない) $SNi(\mathcal{C})$ に

$$G \times SNi(\mathcal{C}) \to SNi(\mathcal{C}) : (h, (g_1, \ldots, g_r)) \mapsto (g_1^h, \ldots, g_r^h)$$

によって単純かつ推移的に作用しているとき，$\mathcal{C}$ は剛性をもつという．

定理 2.5 (**剛性の方法**). 有限群 G の共役類の組 $\mathcal{C} = (C_1, \ldots, C_r)$ が剛性をもち，さらに各 C_i が有理性をもつとき，定理 *2.3* によって $\mathcal{C}$ に対応する $\mathbb{C}(T)$ 上の G 拡大，及び $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ 上の G 被覆は $\mathbb{Q}$ 上で定義される．

(1) の多項式 F の分解体は PGL$(2,7)$ の共役類の組 $(2^3 1^2, 61^2, 71)$ に対応し，剛性の方法によって $\mathbb{Q}$ 上で定義されることが確かめられる．ここで，共役類の組を表す数字は，共役類の元を互いに素なサイクルの積で表したときの各サイクルの長さを示したものである．また，この F によって定義される $\mathbb{Q}(T)$ の拡大 $L = \mathbb{Q}(T)[X]/(F(T;X))$ は種数 0 で，特に，$\mathbb{Q}$ 上の有理関数体である．関数体の種数は次の Riemann-Hurwitz の公式によって計算できる．

定理 2.6 (Riemann-Hurwitz の公式). G を S_n の推移的部分群とし，$\mathcal{C} = (C_1, \ldots, C_r)$ を剛性をもつ G の共役類の組とする．各 C_i が有理性をもつとし，$\mathcal{C}$ に対応する $\mathbb{Q}(t)$ の拡大を L，L の種数を g とする．このとき，

$$g = -(n-1) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{r} \mathrm{ind}(C_i)$$

が成り立つ．ただし $\mathrm{ind}(C_i)$ は，C_i が互いに素な k 個のサイクルの積で表されるとき，$\mathrm{ind}(C_i) = n - k$ である．

次に，代数体での素数の分岐を調べる方法を紹介する．主定理の証明に用いた Ore の定理を述べるため，まず Newton 多角形を定義する．

定義 2.7 ([5]). p を素数とし，$f(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ を $\mathbb{Q}_p$ 上の n 次多項式で，$a_0 \neq 0$ をみたすものとする．このとき，f の（p **進**）**Newton 多角形**を次のようにして作られる折れ線として定める：

(i) 平面 $\mathbb{R}^2$ に点 $(i, v_p(a_i))$ $(i = 0, \ldots, n)$ をとる．ここで，v_p は $a = p^k b,\ \gcd(b,p) = 1$ としたとき，$v_p(a) = k$ で定める．

(ii) (i) でとった点をいくつか直線で結んで下に凸な折れ線を作る．ただし，折れ線は $(0, v_p(a_0))$ から $(n, v_p(a_n))$ までつながっているものとし，(i) でとったすべての点は折れ線上にあるか，折れ線より上に位置しているものとする．

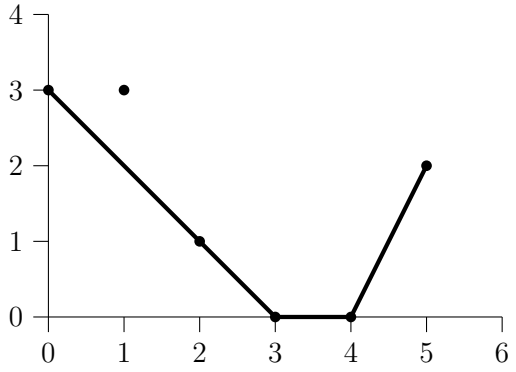


図 1　例 2.8 の f の 2 進 Newton 多角形

例 2.8. $f(X) = 4X^5 + X^4 + X^3 + 2X^2 + 8X + 8$ とし，$p = 2$ とする．このとき 2 進 Newton polygon は図 1 のようになる．

定義 2.9. p を素数，Γ を monic な多項式 $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ の p 進 Newton 多角形とし，Γ の辺のひとつを S とする． S の左端点の座標を (s, a_s) とする．S の横軸への射影の長さを E とし，縦軸への射影の長さを H とする．E と H の最大公約数を d とし，$h = H/d$, $e = E/d$ とおく．0 以上 d 以下の整数 i に対し，点 $(s + ei, v_p(a_s) - hi)$ をとる．このとき

$$b_i = \begin{cases} a_{s+ei}/p^{v_p(a_{s+ei})}, & \text{if } v_p(a_{s+ei}) = v_p(a_s) - hi, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする．これに対し，多項式 f_S を

$$f_S(Y) = \sum_{i=0}^{d} b_{d-i}Y^i$$

で定義する．これを S の **associated polynomial** とよぶ．f_S の判別式が p で割れないとき，f は S-regular であるといい，Γ のすべての辺 S に対して f が S-regular であるとき，f は Γ-regular であるという．

以上の準備の下で，次の Ore の定理が成り立つ．

定理 2.10 ([3]). *monic* な既約多項式 $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ とその根 θ をとり，$K = \mathbb{Q}(\theta)$, その整数環を O_K とする．素数 p をとり，f の p 進 *Newton polygon* を Γ とし，Γ の辺を $S_1, \ldots, S_l$ とする．各 S_i に対し，自然な射 $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ によって f_{S_i} の係数を法 p で還元したものを $\overline{f_{S_i}}$ とし，$\mathbb{F}_p[X]$ 内での $\overline{f_{S_i}}$ の既約分解を

$$\overline{f_{S_i}}(X) = \varphi_{i,1}(X)^{e_{i,1}} \cdots \varphi_{i,k_i}(X)^{e_{i,k_i}}$$

とする．また，各 S_i の X 軸，Y 軸への射影の長さをそれぞれ E_i, H_i, その最大公約数を d_i とし，さらに $e_i = E_i/d_i$ とする．このとき p は K 内で

$$pO_K = \mathfrak{A}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{A}_l^{e_l}$$

と分解され，さらに f が S_i-*regular* であるとき，

$$\mathfrak{A}_i = \mathfrak{p}_{i,1}^{e_{i,1}} \cdots \mathfrak{p}_{i,k_i}^{e_{i,k_i}}$$

と素イデアル分解される．

3 主定理と例

(1) の多項式 F を $t \in \mathbb{Q}$ で特殊化した多項式 $F(t; X)$ で定義される代数体を K_t とし，その $\mathbb{Q}$ 上の Galois 閉包, すなわち $F(t; X)$ の分解体を $\widetilde{K_t}$ とする．ここで, $\mathrm{Gal}(\widetilde{K_t}/\mathbb{Q})$ は $\mathrm{PGL}(2, 7)$ であると仮定する．本研究の主結果は次の定理である．

定理 3.1. n を 6 と互いに素な整数とし，m を $7n$ と互いに素な整数とする．このとき次が成り立つ：

(i) $(7^7n^6 + 108m^7)/p$ が平方数となるような素数 p が存在するとき，$t = 7^7n^6/m^7$ とすれば $K_t/\mathbb{Q}$ は p 外不分岐である．

(ii) $t = 7^7n^3/m^7$ とすれば，$\widetilde{K_t}/\mathbb{Q}$ はただひとつの 2 次部分体上不分岐な PGL(2, 7) 拡大である．

以下に主結果の証明の概略を述べる．

まず，PGL(2, 7) 拡大での素数の分解群と惰性群を考えることで，次の補題を得る．

補題 3.2. p を素数とする．p が $\widetilde{K_t}/\mathbb{Q}$ で不分岐であることと，$K_t/\mathbb{Q}$ で不分岐であることは同値である．また，p が $K_t/\mathbb{Q}$ で *tame* に分岐するとき，p の上の $\mathbb{Q}(\sqrt{D_{K_t}})$ の素イデアルが $\widetilde{K_t}/\mathbb{Q}(\sqrt{D_{K_t}})$ で不分岐である必要十分条件は $v_p(D_{K_t}) = 0$ または 3 であることである．

この補題により，定理 3.1 を示すためには，$K_t/\mathbb{Q}$ での素数の分岐を調べれば十分であることがわかる．

簡単のため，$m = 1$, すなわち t が整数であると仮定する．多項式 (1) の X に関する判別式が $-7^7T^5(T + 108)^3$ であることから，7, 及び t と $t + 108$ の素因数について調べれば良い．7 と t に関しては，Ore の定理を用いることで次の命題が得られる．

命題 3.3. t を 6 と互いに素な整数とする．p を t の 7 でない素因数としたとき，$(6, v_p(t)) = 3 \Leftrightarrow v_p(D_{K_t}) = 3$ であり，$(6, v_p(t)) = 6 \Leftrightarrow v_p(D_{K_t}) = 0$ である．さらに 7^7 が t を割り切るとき，$(6, v_7(t)-1) = 3 \Leftrightarrow v_7(D_{K_t}) = 3$ であり，$(6, v_7(t)-1) = 6 \Leftrightarrow v_7(D_{K_t}) = 0$ である．

$t + 108$ に関しては次の命題が得られる．

命題 3.4. t を 0 でない整数とし，$(t + 108, 42) = 1$ とする．素数 p が $t + 108$ を割り切るとき，$v_p(D_{K_t}) \leq 3$ で，$v_p(D_{K_t}) = 0$ であることの必要十分条件は $v_p(t + 108)$ が偶数であることである．

この命題は Dedekind による多項式の分解と素数の分解に関する定理と Hensel の補題を用いることで証明できる．

命題 3.3, 3.4 により，定理 3.1 の $m = 1$ の場合についての証明が完了した．m が一般の場合については，Ore の定理を $\mathbb{Q}$ 係数の場合に拡張したものを考える必要がある．実際 Ore の定理は多項式が $\mathbb{Q}$ 係数の場合にも成立することが確認でき，命題 3.3, 3.4 は $t \in \mathbb{Q}$ の場合にも同様の結果が証明できる．定理 3.1 を証明するためには，さらに m の素因数についても考える必要がある．再び Ore の定理を用いることで，次の命題を得る．

命題 3.5. n, m, t を定理 *3.1* と同じものとし，p を m の素因数とする．p が $K_t/\mathbb{Q}$ で不分岐であるための必要十分条件は $v_p(m)$ が 7 で割り切れることである．さらに p が $K_t/\mathbb{Q}$ で分岐するとき，$v_p(D_{K_t}) = 6$ である．

最後に，定理 3.1 の適用例を与える．定理の条件を満たす t に対して K_t の判別式を計算し，定理の結果を確認する．

表 1　定理 3.1 (i) の例

n	m	$D_{K_{7^7n^6/m^7}}$
1	-12	13869011721^3
1	-11	184151637^3
1	-5	145053^3
1	-4	1945929^3
1	-3	-11627^3
1	-2	-1809719^3
1	1	-1823651^3
1	2	-1837367^3
1	10	-11080823543^3
1	12	-13870658807^3
5	-9	-112351298723^3
5	3	-112868095571^3
5	6	-112898092463^3
5	8	-113094351791^3
5	12	-116737694639^3
7	-6	-196858777319^3
7	-2	-196888996583^3
7	3	-196889246603^3
7	4	-196890779879^3
7	8	-197115502823^3
11	-13	-114521798207873
11	-4	-114589548911513
11	-2	-114589566467993
11	6	-114589868937113
11	13	-114657335004593
13	-15	-139566319517873
13	-5	-139750763267873
13	-1	-139750847641793
13	3	-139750850004833

表 2　定理 3.1 (ii) の例

n	m	$D_{K_{7^7n^3/m^7}}$
1	-6	$15^3 \cdot 11^3 \cdot 31^3 \cdot 47^3 \cdot 367^3$
1	-5	145053^3
1	-4	1945929^3
1	-3	-11627^3
1	-2	-1809719^3
1	-1	$-15^3 \cdot 37^3 \cdot 4451^3$
1	1	-1823651^3
1	2	-1837367^3
1	3	$-167^3 \cdot 15817^3$
1	4	$-15^3 \cdot 89^3 \cdot 5827^3$
1	5	$-111^3 \cdot 841913^3$
1	6	$-1139^3 \cdot 223429^3$
5	-6	$-15^3 \cdot 31^3 \cdot 2345477^3$
5	-4	$-15^3 \cdot 317^3 \cdot 319159^3$
5	-3	$-15^3 \cdot 397^3 \cdot 258707^3$
5	-2	$-15^3 \cdot 73^3 \cdot 149^3 \cdot 9463^3$
5	-1	$-15^3 \cdot 79^3 \cdot 1303073^3$
5	1	$-15^3 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 139^3 \cdot 5179^3$
5	2	$-15^3 \cdot 29^3 \cdot 41^3 \cdot 131^3 \cdot 661^3$
5	3	$-15^3 \cdot 29^3 \cdot 293^3 \cdot 12143^3$
5	4	$-15^3 \cdot 104712347^3$
5	6	$-15^3 \cdot 1481^3 \cdot 89923^3$
7	-6	$-17^3 \cdot 409^3 \cdot 616729^3$
7	-5	$-17^3 \cdot 16381^3 \cdot 16729^3$
7	-4	$-17^3 \cdot 11^3 \cdot 23^3 \cdot 1109509^3$
7	-3	$-17^3 \cdot 19^3 \cdot 859^3 \cdot 17293^3$
7	-2	$-17^3 \cdot 173^3 \cdot 65309^3$
7	-1	$-17^3 \cdot 13^3 \cdot 21728857^3$
7	1	$-17^3 \cdot 1693^3 \cdot 166849^3$
7	2	$-17^3 \cdot 313^3 \cdot 902521^3$
7	3	$-15^3 \cdot 7^3 \cdot 17^3 \cdot 857^3 \cdot 3881^3$
7	4	$-17^3 \cdot 547^3 \cdot 519643^3$
7	5	$-17^3 \cdot 290912749^3$
7	6	$-17^3 \cdot 467^3 \cdot 669611^3$

参考文献

[1] W. Bosma, J. Cannon, and C. Playoust. The Magma algebra system. I. The user language. *J. Symbolic Comput.*, 24(3-4):235–265, 1997. Computational algebra and number theory (London, 1993).

[2] M. Kida and N. Suzuki. Constructing PGL$(2,7)$-extensions with restricted ramifications. preprint.

[3] P. Llorente, E. Nart, and N. Vila. Decomposition of primes in number fields defined by trinomials. *Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2)*, 3(1):27–41, 1991.

[4] G. Malle and B. H. Matzat. *Inverse Galois theory*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[5] J. Neukirch. *Algebraic number theory*, volume 322 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[6] H. Völklein. *Groups as Galois groups*, volume 53 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[7] 鈴木望夢． PGL$(2,7)$ 多項式の明示的な構成とその特殊化で得られる多項式の数論について． Master's thesis, 東京理科大学， 2023.

Connection's Completeness on Statistical Manifolds

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Hokkaido University
Ryu UENO *

Abstract

On a statistical manifold, we observe the completeness of statistical connections. We observe new results by assuming that either the statistical connection or the Riemannian metric is complete.

1 Introduction

In Riemannian geometry, the completeness of the Levi-Civita connection is usually assumed for most claims. In comparison, for affine connections appearing in other geometries, the consequences of assuming its completeness are not well known. For example, in recent years, the study of statistical manifolds has become popular due to information geometry. Statistical manifolds have appeared in affine differential geometry which have been studied for over 100 years, yet there are not many results led by the completeness of its affine connections.

Definition 1.1. A triplet (M, g, ∇) is called a **statistical manifold** if M is a smooth manifold, g a Riemannian metric, and ∇ a torsion-free affine connection such that ∇g is totally symmetric. The pair (g, ∇) is called the **statistical structure**, and ∇ is called the **statistical connection**.

Example 1.2. Let (M, g) be a Riemannian manifold and ∇^g its Levi-Civita connection. Then, since $\nabla^g g = 0$ holds, (M, g, ∇^g) is a statistical manifold.

Example 1.3. Let $M = (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}) \times \mathbb{R}$, and g the Euclidean metric restricted on M. Let (x^1, x^2) be a coordinate system on M. Define a torsion-free affine connection on M by

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^1} = \tan 3x^1 \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^2} = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \frac{\partial}{\partial x^2} = 0.$$

Then, (M, g, ∇) is a statistical manifold.

For a statistical manifold (M, g, ∇), the **difference tensor** K is a $(1, 2)$-tensor field on M, defined by

$$K = \nabla - \nabla^g. \tag{1}$$

*ueno.ryu.g1@elms.hokudai.ac.jp

The **cubic form** C of (g, ∇) is defined as a $(0,3)$-tensor field on M, by $C = \nabla g$. The tensor fields K and C are related by

$$C(X,Y,Z) = -2g(K_X Y, Z), \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM). \tag{2}$$

Conversely, if we have a totally symmetric $(0,3)$-tensor field on a Riemannian manifold (M, g), we obtain a statistical manifold by (1) and (2). It is clear that $K = 0$ and $C = 0$ are equivalent. In this case, we will say (g, ∇) is **Riemannian**.

Statistical manifolds have appeared in the study of affine differential geometry[4]. Let $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ be an immersed hypersurface, and D the standard flat connection of $\mathbb{R}^{n+1}$. If we choose a transversal vector field ξ of f, we obtain a torsion-free affine connection ∇ and a symmetric $(0,2)$-tensor field h on M by the Gauss formula

$$D_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + g(X,Y)\xi, \quad X, Y \in \Gamma(TM). \tag{3}$$

The definiteness of g does not depend on the choice of ξ. If g is positive definite, we say f is locally strongly convex. We also obtain an $(1,1)$-tensor field S and an 1-form τ on M by the Weingarten formula

$$D_X \xi = -f_* S\xi + \tau(X)\xi, \quad X \in \Gamma(TM). \tag{4}$$

If $\tau = 0$, the transversal vector field ξ is called equiaffine. This is equivalent to the total symmetry of ∇g, since the following Codazzi equation holds for g, ∇, and τ.

$$(\nabla_X g)(Y,Z) + \tau(X)g(Y,Z) = (\nabla_Y g)(X,Z) + \tau(Y)g(X,Z), \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM). \tag{5}$$

An equiaffine hypersurface is an immersed hypersurface equipped with an equiaffine transversal vector field. Therefore, the structure (g, ∇) on M induced by a locally strongly convex equiaffine immersion is a statistical structure on M.

Example 1.4. Let $M = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 | \quad x^1 > 0, x^2 > 0\}$. By distinguishing M as

$$\left\{ \begin{pmatrix} x^1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \middle| \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad x^1 > 0, x^2 > 0 \right\},$$

the manifold M becomes a Lie group with the multiplication of matrices. Define an immersed hypersurface $f : M \to \mathbb{R}^3$ by

$$f(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \frac{1}{x^1 x^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad (x^1, x^2) \in M.$$

Take $\xi = {}^t(0,0,1)$ as a transversal vector field of f. Then, by the Gauss formula (3) we obtain the following torsion-free affine connection ∇ and a symmetric $(0,2)$-tensor field h on M.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^2} = -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^2}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \frac{\partial}{\partial x^2} = -\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^2},$$

$$g = \frac{2}{3}(dx^1)^2 + \frac{1}{3}dx^1 \cdot dx^2 + \frac{2}{3}(dx^2)^2.$$

Since ξ is a constant vector field, ∇g is totally symmetric by the Weingarten formula (4) and the Codazzi equation (5). Therefore, we obtain a statistical manifold (M, g, ∇) by the equiaffine immersion.

The most fundamental immersed hypersurface is the hyperquadric. A hyperquadric in $\mathbb{R}^{n+1}$ of coordinate system $y^1, ..., y^{n+1}$ is the hypersurface defined by the following equation

$$ {}^t yQy + Py + R = 0$$

where $y = {}^t(y^1, ..., y^{n+1})$, Q is a $(n+1) \times (n+1)$ matrix, $P \in \mathbb{R}^{n+1}$, and $R \in \mathbb{R}$.

Theorem 1.5 (Pick, Berward [4]). *Let $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ be a locally strongly convex equiaffine hypersurface. If the statistical structure on M induced by f is Riemannian, then $f(M)$ is contained in a hyperquadric of $\mathbb{R}^{n+1}$.*

From this theorem, in affine differential geometry, it is crucial to know when the induced statistical structure is Riemannian. For example, we have the following propostion.

Proposition 1.6 ([2]). *Let $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ be a locally strongly convex equiaffine hypersurface, where M is compact. If the statistical structure (g, ∇) on M induced by f satisfies $\nabla^g C = 0$, then $C = 0$.*

The term "statistical" was born when statistical structures appeared in 1982 when Shun-ichi Amari and Hiroshi Nagaoka introduced them in the field of information theory, which gave birth to information geometry [1].

Example 1.7 (Normal distribution). Consider the upper half plane, $\mathbb{H}^2 = \{(x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 | \quad x^2 > 0\}$. By distinguishing $\mathbb{H}^2$ as

$$\left\{ \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \quad x^1, x^2 \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad x^2 > 0 \right\},$$

the manifold $\mathbb{H}^2$ becomes a Lie group with the multiplication of matrices. Set a Riemannian metric on $\mathbb{H}^2$ by

$$g = \frac{(dx^1)^2 + 2(dx^2)^2}{(x^2)^2},$$

and a torsion-free affine connection ∇ by

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^1} = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^1}} \frac{\partial}{\partial x^2} = -\frac{2}{x^2} \frac{\partial}{\partial x^1}, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^2}} \frac{\partial}{\partial x^2} = -\frac{3}{x^2} \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

The triplet $(\mathbb{H}^2, g, \nabla)$ is a statistical manifold, and it is called the statistical manifold of normal distributions.

In Example 1.4 and Example 1.7, it is easy to check that g and ∇ are both left-invariant. In such a case, we call the statistical manifold a **statistical Lie group**.

Many aspects of statistical manifolds are still not studied enough, and the completeness of statistical connections is one of them.

Definition 1.8. Let ∇ be an affine connection on a smooth manifold M. A smooth curve $c\colon I \to M$ is called a ∇-**geodesic** if it satisfies the following differential equation:

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = 0 \quad \text{on} \quad I.$$

Here, $\dot{c}$ is the velocity vector of c. If each ∇-geodesic can extend its domain on $\mathbb{R}$ as a ∇-geodesic, ∇ is said to be **complete**.

In Example 1.7, the Levi-Civita connection of g is complete while ∇ is not. In terms of amount, the study on the completeness of statistical connections might be insignificant. In the study of hypersurfaces, "affine completeness" always meant the completeness of the Levi-Civita connection of the affine metric, not the induced statistical connection. In information geometry, to the knowledge of the presenter, there are no studies of the completeness of any affine connections.

In the geometry of statistical manifolds, the only papers that have results on the completeness of statistical connections are those of Mitsunori Noguchi [3] and Barbara Opozda [5]. The first paper was published in 1992. In this paper, M. Noguchi observed the geodesics of an affine connection not necessarily of Levi-Civita, on a Riemannian manifold.

Theorem 1.9 (M. Noguchi [3]). *Let (M, g, ∇) be a statistical manifold. Suppose that ∇^g is complete and that the cubic form C has the shape of*

$$C(X, Y, Z) = d\sigma(X)g(Y, Z) + d\sigma(Y)g(Z, X) + d\sigma(Z)g(X, Y)$$

for some $\sigma \in C^\infty(M)$ and for any $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$. If σ is bounded from above, then ∇ is complete.

There were no study of the completeness of statistical connections for almost 30 years until the second paper [5] was presented in 2021 by B. Opozda. In this paper, there is another theorem that determines the completeness of statistical connections.

Theorem 1.10 (B. Opozda [5]). *Let (M, g, ∇) be a statistical manifold. Suppose that M is diffeomorphic to the Euclidean sphere.*

(*i*) *If the Ricci tensor of ∇ is symmetric, non-degenerate, and if ∇ is projectively flat, then ∇ is complete on M.*

(*ii*) *If $\nabla^g K$ is totally symmetric and if ∇ is projectively flat, then ∇ is complete on M.*

B. Opozda focused on the completeness of the induced statistical connection on a hypersurface. In the study of hypersurfaces, the case of when $\nabla^g C = 0$ is important, and it is completely classified in [2]. B. Opozda observed the completeness of the statistical connection in the case of $\nabla^g C = 0$. As a result, she found the next theorem and concluded that the statistical connection is not complete unless the statistical structure is Riemannian.

Theorem 1.11 (B. Opozda [5]). *Let (M, g, ∇) be a statistical manifold. Suppose that*

$$(\nabla^g_X C)_p(X, X, X) \geq 0$$

for any $(p, X) \in TM$. If ∇ is complete, then (g, ∇) must be Riemannian.

2 Main Results

To begin with, the presenter obtained a corollary of Theorem 1.11.

Corollary 2.1. *Let (G, g, ∇) be a statistical Lie group with a bi-invariant metric. Then, if ∇ is complete, then (g, ∇) must be Riemannian.*

From this corollary, we see that the compactness of the statistical manifold does not imply the completeness of its statistical connection.

Example 2.2. Let (T^n, g_0) be a flat torus. With any left-invariant totally symmetric $(0,3)$-tensor field on T^n that is not 0, we obtain a statistical manifold by (1) and (2). In this case, the statistical connection is not complete since g_0 is bi-invariant.

The main theorem of this presentation consists of a similar inequality to the previous theorem.

Theorem 2.3. *Let (M, g, ∇) be a statistical manifold. Suppose that*

$$(\nabla_X C)_p(X, X, X) \leq 0 \tag{6}$$

for any $(p, X) \in TM$. If ∇ is complete, then (g, ∇) must be Riemannian. Moreover, the same holds if ∇^g is complete.

Here are some applications of this theorem. In Example 1.3, the statistical structure satisfies (6), therefore the statistical connection is not complete. The next theorem is immediate from Theorem 1.5 and Theorem 2.3.

Theorem 2.4. *Let $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ be a locally strongly convex equiaffine hypersurface with the induced statistical structure (g, ∇) that satisfies (6). If ∇ or ∇^g is complete, then the hypersurface is contained in a hyperquadric.*

Remark 2.5. The definition of statistical structure is often extended by considering a pseudo-Riemannian metric in place of the Riemannian metric. However, Theorem 2.3 does not hold when the metric is not Riemannian. For example, the induced structure (g, ∇) on the Cayley surface [4] has a complete connection ∇ and a non-degenerate metric g, while $C = \nabla g \neq 0$ and $\nabla C = 0$ on M.

References

[1] S.I. Amari and H. Nagaoka, *Methods of Information Geometry*, American Mathematical Soc., Providence, RI, 2000.

[2] Z. Hu, H. Li, and L. Vrancken, *Locally strongly convex affine hypersurfaces with parallel cubic form*, J. Differential Geom. **87** (2011), no. 2, 239–307.

[3] M. Noguchi, *Geometry of statistical manifolds*, Differential Geom. Appl. **2** (1992), no. 3, 197–222.

[4] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine Differential Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.

[5] B. Opozda, *Completeness in affine and statistical geometry*, Ann. Global Anal. Geom. **59** (2021), no. 3, 367–383.

計量の退化を許容する統計多様体

北海道大学　大学院情報科学院　情報理工学コース
嘉陽海渡 (Kaito KAYO) *

概 要

統計多様体はコダッチ構造を持つリーマン多様体 (i.e., 計量が非退化) のことであり，さまざまな分野での応用が見られる．しかし，実応用上では Fisher 計量のように退化してしまうケースが存在し，その場合コダッチ構造が現れない．本研究は，退化計量を許容するように統計多様体の概念を一般化するものである．

1　導入

情報幾何とは特別な形をした統計多様体の理論のことであり，機械学習などの分野で応用されている．しかし，実応用上では計量が退化してしまう状況がしばしば現れる．例として，ディープラーニングに用いられるニューラルネットや混合ガウス分布においては計量が退化してしまう場合があることがわかっている．この状況においては統計多様体，または情報幾何の理論は適用できなくなってしまう．しかし，Nakajima-Ohmoto[8] によって，計量が退化する場合における情報幾何の拡張 (**概ヘッセ構造**) が導入された．本稿では，統計多様体の理論を計量が退化する場合に拡張 (**概コダッチ構造**) し，さらに特別な状況では概ヘッセ構造と一致していることを確認する．

2　統計多様体

本章では統計多様体の定義とその性質を解説する．より詳しい解説は [1, 2, 7] を参照せよ．(M, h) を n 次元擬リーマン多様体とし，∇ を M 上のアファイン接続とする．また,$X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ とする．

定義 2.1 [1, 2, 7] ∇ の計量 h に関する双対接続 ∇^* を次で定義する．

$$Xh(Y,Z) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla^*_X Z).$$

h の非退化性より ∇^* は一意に存在し，明らかに $(\nabla^*)^* = \nabla$ が成り立つ．

命題 2.2 (Matsuzoe [7, Proposition2.2]) 次の 4 つの条件の内，2 つを満たせば残りの 2 つも同時に満たされる．

(i) ∇ が torision-free (i.e., $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0$);

(ii) ∇^* が torsion-free (i.e., $\nabla^*_X Y - \nabla^*_Y X - [X, Y] = 0$);

*E-mail:kayo.kaito.b9@elms.hokudai.ac.jp

(iii) $C := \nabla h$ が全対称 (i.e., $C(X,Y,Z) = C(Y,X,Z) = C(X,Z,Y)$);

(iv) $\nabla^h = (\nabla + \nabla^*)/2$ が成り立つ. ただし ∇^h は h に関する Levi-Civita 接続.

定義 2.3 [1, 2, 7] 命題 2.2 の 4 つの条件を全て満たすとき，すなわち，どれか 2 つの条件が成り立っているとき，(h, ∇, ∇^*) を**統計構造**，または**コダッチ構造**と呼び，統計構造を持つ M を**統計多様体**と呼ぶ．特に ∇ と ∇^* がどちらも平坦 (曲率が常に 0) の時には**双対平坦構造**，または**ヘッセ構造**と呼ばれる．

例 2.4 (h, ∇^h, ∇^h) は M 上の統計構造である．実際，Levi-Civita 接続は計量を保つので，

$$Xh(Y,Z) = h(\nabla^h_X Y, Z) + h(Y, \nabla^h_X Z)$$

を満たし，∇^h の双対接続は ∇^h になる．さらに，Levi-Civita 接続は torsion-free であるので，(h, ∇^h, ∇^h) は統計構造になっている．

例 2.5 指数型分布族

$$M = \left\{ p(x|\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{ C(x) + \sum_{i=1}^{n} \theta^i F_i(x) - \psi(x) \right\} \mid \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

を考える．ただし，$x \in \mathbb{R}$ は確率変数，C と各 F_i は $\mathbb{R}$ 上の滑らかな関数，ψ は規格化因子である．M はパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を n 次元の座標系と思うことで n 次元多様体になる．また，$(0,2)$ テンソル h を

$$h\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}, \frac{\partial}{\partial\theta^j}\right) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial\theta^i} \log p(x|\boldsymbol{\theta})\right) \left(\frac{\partial}{\partial\theta^j} \log p(x|\boldsymbol{\theta})\right) p(x|\boldsymbol{\theta}) dx$$

で定めると，h は非退化かつ対称であり M 上の計量になっていることがわかる．この h は Fisher 計量と呼ばれる．アファイン接続 ∇ を，各 i, j で

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\theta^i}} \frac{\partial}{\partial\theta^j} = 0$$

を満たすようにとると，∇ は平坦かつ torsion-free である．さらに，h に関する双対接続 ∇^* も平坦かつ torision-free であることが確かめることができる．したがって，(h, ∇, ∇^*) は M 上の双対平坦構造である．

3 概コダッチ構造

統計構造は計量の非退化性を用いて定義された．もし計量が退化しているとすると，双対接続が定義されないので統計構造を考えることができない．本章では計量の退化を許容するように統計構造の定義を拡張する．

定義 3.1 [6, Definition 3] M を n 次元多様体，E を M 上の $2n$ 階のベクトル束，τ を E 上の擬リーマン計量とし，$I : E \to E$ を束写像とする．3 つ組 (E, τ, I) が次の条件を満たす時，**パラエルミートベクトル束**という．

(i) $I^2 = id$ かつ $I \neq id$;

(ii) (I) の条件より I は固有値 ± 1 を持つ．固有値 $+1$ の固有空間を E^+，固有値 -1 の固有空間を E^- とする．このとき E^+ と E^- はどちらも n 階のベクトル束であり，$E = E^+ \oplus E^-$ が成り立つ；

(iii) $\tau(I(\eta), \zeta) + \tau(\eta, I(\zeta)) = 0$. ただし，$\eta, \zeta \in \Gamma(E)$.

注意 3.2 ω を $\omega(\eta, \zeta) := \tau(\eta, I(\zeta))$ で定めると，これは E 上のシンプレクティック形式になっていることが条件 (iii) からわかる．さらに，$\tau|_{E^+} = 0$ かつ $\tau|_{E^-} = 0$ であることもわかる．

例 3.3 $E^+ := TM$，$E^- := T^*M$，$E := E^+ \oplus E^-$ とする．ただし T^*M は余接ベクトル束である．E 上の計量 τ と束写像 $I : E \to E$ を

$$\tau(\eta^+ \oplus \eta^-, \zeta^+ \oplus \zeta^-) := \zeta^-(\eta^+) + \eta^-(\zeta^+),$$
$$I(\eta^+ \oplus \eta^-) := \eta^+ \oplus -\eta^-$$

で定義する．ただし，$\eta^+, \zeta^+ \in \Gamma(E^+)$，$\eta^-, \zeta^- \in \Gamma(E^-)$. このとき，$(E, \tau, I)$ はパラエルミートベクトル束になっていることが確かめられる．

定義 3.4 ∇ を E^+ 上の接続とする．双対接続 ∇^* を E^- 上の接続として次の方程式を満たすように定義する．

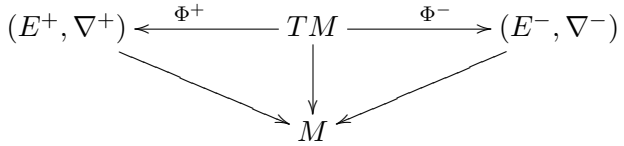
$$X\tau(\eta^+, \eta^-) = \tau(\nabla_X \eta^+, \eta^-) + \tau(\eta^+, \nabla^*_X \eta^-).$$

ただし，$\eta^+ \in \Gamma(E^+)$，$\eta^- \in \Gamma(E^-)$.

注意 3.2 と τ の非退化性より ∇^* は一意に存在し，明らかに $(\nabla^*)^* = \nabla$ が成り立つ．以下ではわかりやすく，∇ を ∇^+，∇^* を ∇^- と表現する．(E, τ, I) をパラエルミートベクトル束とし，束写像 $\Phi : \Gamma(TM) \to \Gamma(E)$ を各点 $p \in M$ で $\mathrm{Im}\Phi_p \subset E_p$ が ω に関して Lagranage 部分空間になっている (i.e., $rank\Phi_p = n$ かつ $\mathrm{Im}\Phi_p$ 上で ω が消えている) ものとしてとる．また，$\pi^+ : E \to E^+$ と $\pi^- : E \to E^-$ をそれぞれ射影とし，$\Phi^+ := \pi^+ \circ \Phi$ と $\Phi^- := \pi^- \circ \Phi$ を定義する．さらに，

$$\xi^+ := \Phi^+(X), \quad \eta^+ := \Phi^+(Y), \quad \zeta^+ := \Phi^+(Z),$$
$$\xi^- := \Phi^-(X), \quad \eta^- := \Phi^-(Y), \quad \zeta^- := \Phi^-(Z).$$

と記号を置く．



定義 3.5 $(0,2)$ テンソル h を次で定義する．

$$h(X, Y) := \tau(\Phi(X), \Phi(Y)) = 2\tau(\xi^+, \eta^-).$$

最後の等式は注意 3.2 と Φ の仮定から成り立つ．

注意 3.6 h が非退化であることの必要十分条件は Φ^+ と Φ^- がどちらも同型であることである．またこのとき，TM 上の接続として $\widetilde{\nabla}^+$ と $\widetilde{\nabla}^-$ を

$$\Phi^+(\widetilde{\nabla}^+_X Y) := \nabla^+_X \eta^+, \qquad \Phi^-(\widetilde{\nabla}^-_X Y) := \nabla^-_X \eta^- \tag{3.1}$$

で定めることができる．∇^+ と ∇^- の双対性より，$\widetilde{\nabla}^+$ と $\widetilde{\nabla}^-$ も h に関して双対性を持つことがわかる．つまり，

$$Xh(Y,Z) = h(\widetilde{\nabla}^+_X Y, Z) + h(Y, \widetilde{\nabla}^-_X Z)$$

が満たされる．

定義 3.7 (cf. [9]) ∇^+ が *relatively torsion-free* とは

$$\nabla^+_X \eta^+ - \nabla^+_Y \xi^+ - \Phi^+([X,Y]) = 0$$

の条件を満たすときのことを言う．同様に ∇^- が relatively torsion-free とは

$$\nabla^-_X \eta^- - \nabla^-_Y \xi^- - \Phi^-([X,Y]) = 0$$

を満たすときを言う．

注意 3.8 h が非退化であるとき，∇^+ (resp. ∇^-) が relatively torsion-free であるとき，(3.1) によって定義される接続 $\widetilde{\nabla}^+$ (resp. $\widetilde{\nabla}^-$) は torsion-free になっていることが確かめられる．

定義 3.9 3 次テンソル C を次で定義する．

$$C(X,Y,Z) := -2\{\tau(\nabla^+_X \eta^+, \zeta^-) - \tau(\zeta^+, \nabla^-_X \eta^-)\}.$$

注意 3.10 h が非退化であるとき，定義 3.9 の 3 次テンソル C について，$C = \widetilde{\nabla}^+ h$ が成り立つ．

定義 3.11 [3, 4] *Kossowski* **擬接続** $\Gamma : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M)$ を次で定義する．

$$\begin{aligned}\Gamma(X,Y,Z) = {} & X\tau(\eta^+, \zeta^-) + Y\tau(\zeta^+, \xi^-) - Z\tau(\xi^+, \eta^-) \\ & - \tau(\xi^+, \Phi^-([Y,Z])) + \tau(\eta^+, \Phi^-([Z,X])) + \tau(\zeta^+, \Phi^-([X,Y])).\end{aligned}$$

注意 3.12 h が非退化であるとき，Kossowski 擬接続 Γ は Levi-Civita 接続 ∇^h を用いて

$$h(\nabla^h_X Y, Z) = \Gamma(X,Y,Z)$$

と表現できる．

計量が退化している場合における命題 2.2 の拡張として次の 4 つの条件を考える．

(i) ∇^+ は relatively torsion-free;

(ii) ∇^- は relatively torsion-free;

(iii) C は全対称 (i.e., $C(X,Y,Z) = C(Y,X,Z) = C(X,Z,Y)$);

(iv) $\Gamma(X,Y,Z) = \tau(\nabla^+_X \eta^+, \zeta^-) + \tau(\zeta^+, \nabla^-_X \eta^-)$.

命題 3.13 上記の 4 つの条件に関して次が成り立つ.

(1) (i) と (ii) が成り立つとき，(iii) と (iv) も同時に成り立つ;

(2) Φ^+ が同型かつ (i) が成り立つとする．このとき (iii) または (iv) が成り立つとき，(ii) も成り立つ;

(3) Φ^- が同型かつ (ii) が成り立つとする．このとき (iii) または (iv) が成り立つとき，(i) も成り立つ;

(4) h が非退化であるとする．このとき，いずれかの 2 つの条件を満たせば残りの 2 つの条件も同時に満たされる.

統計構造は 4 つの条件の内のいずれか 2 つを満たすものとして定義したが，計量が退化している場合には次で統計構造の拡張を定義する.

定義 3.14 ∇^+ と ∇^- がどちらも relatively torsion-free であるとき，組 $(h, (E, \tau, I), \Phi, \nabla^+, \nabla^-)$ を M 上の**概コダッチ構造**と呼ぶ.

注意 3.15 h が非退化であるとき，上記の 4 つの条件は命題 2.2 の 4 つの条件と同じことを表している．したがって，h が非退化な概コダッチ構造 $(h, (E, \tau, I), \Phi, \nabla^+, \nabla^-)$ が与えられたとき，(3.1) によって定義される $\widetilde{\nabla}^+$ と $\widetilde{\nabla}^-$ を考えることで通常の意味の統計構造 $(h, \widetilde{\nabla}^+, \widetilde{\nabla}^-)$ を誘導することができる.

例 3.16 $(h, \widetilde{\nabla}^+, \widetilde{\nabla}^-)$ を M 上の統計構造とし，(E, τ, I) を例 3.3 で構成された M 上のパラエルミートベクトル束とする．束写像 $\Phi = \Phi^+ \oplus \Phi^- : TM \to E$ を

$$\Phi^+(X) := id(X), \qquad \Phi^-(X) := h(X, -)$$

で定め, E^+ と E^- 上の接続 ∇^+ と ∇^- を (3.1) によって定義する．このとき, $(h, (E, \tau, I), \Phi, \nabla^+\nabla^-)$ は概コダッチ構造になっている.

上述によって計量が退化する場合における統計構造を定義した．Nakajima-Ohmoto([8]) の先行研究によって，計量が退化する場合における双対平坦構造が**概ヘッセ構造**として拡張されている．詳細は解説しないが，概ヘッセ構造と概コダッチ構造の定義は少し異なる．しかし次の事実が成り立つ.

定理 3.17 概ヘッセ構造が与えられたとき，∇^+ と ∇^- が共に平坦な概コダッチ構造が自然に誘導することができる．また逆に，∇^+ と ∇^- が共に平坦な概コダッチ構造が与えられたとき，概ヘッセ構造が自然に誘導される.

参考文献

[1] S. Amari, *Information Geometry and Its Application*, Applied Math. Sci., 194, Springer (2016).

[2] S. Amari, H. Nagaoka, *Method of Information Geometry*, A.M.S., Oxford Univ. Press (2000).

[3] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, Intrinsic properties of surface with singularities, International J. Math., Vol.26, No.4, 1540008, (2015).

[4] M. Kossowski, Realizing a singular first fundamental form as a nonimmersed surface in Euclidian 3-space, J. Geom. **81** (2004), 101–113.

[5] K. Kayo, Statistical manifold with degenerate metric, preprint, arXive:2310.18599.

[6] M.-A. Lawn, L. Schäfer, Decompositions of para-complex vector bundles and para-complex affine immersions, Result. Math. **48** (2005), 246–274.

[7] H. Matsuzoe, Statistical manifolds and affine differential geometry, Advanced Studies in Pure Mathematics **57** (2010), 303–321.

[8] N. Nakajima, T. Ohmoto, The dually flat structure for singular models, Information Geometry. J. **4** (2021), 31–64.

[9] K. Saji, M. Umehara, K. Yamada, *Differential Geometry of Curves and Surface with Singularities* (in Japanese), Maruzen Shuppan, Co. Ltd. (2017).

左不変統計構造のモジュライ空間と双対平坦性および共役対称性

広島大学大学院　先進理工系科学研究科　数学プログラム

小林彦蔵 (Hikozo KOBAYASHI) *

概要

情報幾何学の文脈において，Lie 群上の左不変統計構造と呼ばれる概念が古畑–井ノ口–小林 [Inf. Geom. (2021)] によって定義されている．本講演では可換 Lie 群 $\mathbb{R}^n$ および非可換な二系列の Lie 群上の左不変統計構造の中で，“双対平坦” と呼ばれる重要なクラスの分類について紹介する．本講演の内容は，大野優氏（北海道大学），奥田隆幸氏（広島大学），田丸博士氏（大阪公立大学）との共同研究に基づく．

1　導入

微分幾何において，群が作用する多様体上の不変幾何構造（Riemann 計量，擬 Riemann 計量，複素構造，symplectic 構造など）の分類や構成は主な研究テーマの 1 つである．特に Lie 群 G に対して，G 上の左不変幾何構造の研究は近年盛んに行われている ([4], [6], [7], [8], [9]).

多様体上の幾何構造の 1 つに，「統計構造」と呼ばれる概念がある．これは，パラメータ付けられた確率分布族の幾何構造を一般化した概念であり，計量と Affine 接続の組であって，適切な条件を満たすものとして定義される（定義 2.1.1）．特に双対平坦（定義 2.1.2）と呼ばれる統計構造のクラスは情報幾何学において重要であり，主な舞台となる ([1]). また，[3] は，Lie 群上の統計構造であって計量と接続が共に左不変となるものを「左不変統計構造」と呼んだ（定義 3.1.1）．その例として，平均と分散でパラメトライズされる 1 次元正規分布全体の集合に 2 次元可解 Lie 群の構造が入り，情報幾何学において重要な統計構造である，Fisher 計量と甘利–Chentsov の α-接続の組が，この上で左不変統計構造となることが [3] の中で示されている．また [5] の中で，これは多次元正規分布族の場合に拡張された．

我々はこの「左不変統計構造」に着目し，ある Lie 群が与えられたとき，その上の左不変統計構造であって，「双対平坦」なクラスと，後に定義される「共役対称（定義 2.1.3)」と呼ばれるクラスを分類することを考える．

Lie 群 G 上の左不変統計構造が，左不変計量と左不変接続の組によって定義されることに着目すると，上記の問題はまず，左不変計量全体の空間が “簡単” な Lie 群に対して，取り組むことが自然で

* E-mail:m234263@hiroshima-u.ac.jp

あると考えられる．[6] は Lie 群 G 上の左不変計量全体の空間にある同値関係を定め，その商空間を「G 上の左不変計量のモジュライ空間」と呼んだ．また [9] は，このモジュライ空間が 1 点集合となる単連結 Lie 群 G は次の 3 つのうちどれかと同型となることを示している；

$$G = \mathbb{R}^n, \quad G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}\ (n \geq 2), \quad H^3 \times \mathbb{R}^{n-3}\ (n \geq 3).$$

ここで，$G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ は n 次元実双曲空間 $\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ の Lie 群と呼ばれ，$\mathrm{SO}(n,1)$ の単位連結成分 $\mathrm{SO}^0(n,1)$ の岩澤分解における可解部分であり，$\mathbb{R}\mathrm{H}^n$ に単純推移的な作用を持つ．また H^3 は 3 次元ハイゼンベルグ群である．左不変計量のモジュライ空間に関する研究は積極的に行われており，[4]，[7]，[8] などがある．

我々は，Lie 群 G 上の左不変統計構造全体の空間 $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)$（定義 3.1.2）に対しても，[6] と同様な同値関係 $\sim$ を定め，その商空間 $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G) := \mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)/\sim$ を「G 上の左不変統計構造のモジュライ空間」と定義する（定義 3.2.3）．また $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)$ の次の部分集合；

$$\mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G) := \{G \text{ 上の双対平坦な左不変統計構造 }\},$$
$$\mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G) := \{G \text{ 上の共役対称な左不変統計構造 }\},$$

に対して，$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G) := \mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)/\sim$，$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G) := \mathcal{L}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G)/\sim$ と表す．我々は与えられた Lie 群 G に対し，これら 3 つのモジュライ空間の間の関係性および様子に興味がある．我々は左不変計量のモジュライ空間が 1 点集合となる上記 3 つの Lie 群に対し，それぞれにおける双対平坦および共役対称となる左不変統計構造の分類を行い，モジュライ空間 $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)$，$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G)$ を決定した．結果を以下に記す；

表 1　$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G)$ の計算結果

G	$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G)$
$\mathbb{R}^n$	$S^3((\mathbb{R}^n)^*)/\mathrm{O}(n)$
$G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$	$S^3(\mathfrak{g}^*_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n})/\mathrm{SO}(1)\times\mathrm{O}(n-1)$
$H^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$	$S^3((\mathfrak{h} \oplus \mathbb{R}^{n-3})^*)/\mathrm{S}(\mathrm{O}(2)\times\mathrm{O}(1))\times\mathrm{O}(n-3)$

表 2　$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)$ および $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G)$ の計算結果

G	$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G)$	$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)$
$\mathbb{R}^n$	$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(\mathbb{R}^n)$	定理 4.1.1
$G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$	$\mathbb{R}$	$\{\pm 1\}$
$H^3 \times \mathbb{R}^{n-3}$	$(\mathbb{R}^{n-3} \oplus S^3((\mathbb{R}^{n-3})^*))/\mathrm{O}(n-3)$	$\emptyset$

ただし $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$，$\mathfrak{h}$ はぞれぞれ $G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ および H^3 の Lie 環を表す．本講演では特に，$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(\mathbb{R}^n)$ に関する定理 4.1.1 について説明する．

2　統計多様体

2.1　定義と例

本節では統計多様体の定義と例，および双対平坦や共役対称といった統計構造のクラスを紹介する．(M, g) を Riemann 多様体とし，∇^g を g に関する Levi-Civita 接続とする．また M 上の Affien 接続 ∇ に対し，R^∇ によって ∇ の定める M 上の曲率を表す.

定義 2.1.1 ([10])**.** ∇ を M 上のねじれのない Affine 接続とする．∇g が対称となるとき，(M, g, ∇) を**統計多様体**という．またこのとき (g, ∇) を M 上の**統計構造**と呼ぶ.

(g, ∇^g) は Levi-Civita 接続の定義から M 上の自明な統計構造となることに注意する.

定義 2.1.2. (M, g, ∇) を統計多様体とする．$R^\nabla = 0$ が成り立つとき，統計多様体 M は**双対平坦**であるという．またこのとき (g, ∇) を M 上の双対平坦統計構造と呼ぶ.

M 上に Affine 接続 ∇ が与えられると，∇ との組で計量 g を保つような M 上のもう一つの Affine 接続 $\overline{\nabla}$ が次式によって定まる；

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \overline{\nabla}_X Z).$$

ここで X, Y, Z は M 上の任意のベクトル場である．$\overline{\nabla}$ は ∇ の g に関する双対 Affine 接続と呼ばれる．特に与えられた Affine 接続 ∇ が (g, ∇) の組で M 上の統計構造となるとき，$(g, \overline{\nabla})$ も統計構造であり，特に統計多様体 $(M, g, \overline{\nabla})$ は M の双対統計多様体と呼ばれる.

定義 2.1.3 ([10])**.** $R^\nabla = R^{\overline{\nabla}}$ が成り立つとき，統計多様体 (M, g, ∇) は**共役対称**であるという．またこのとき M 上の統計構造 (g, ∇) は共役対称性を持つという.

M 上の任意のベクトル場 X, Y, Z, W に対して曲率の関係式；

$$g(R^\nabla(X, Y)Z, W) + g(R^{\overline{\nabla}}(X, Y)W, Z) = 0,$$

が成り立つことから，特に次が成り立つことがわかる；

$$\{M \text{ 上の双対平坦統計構造 }\} \subset \{M \text{ 上の共役対称性を持つ統計構造 }\}.$$

ここで，情報幾何学において重要な確率分布族に定まる統計構造の例をみる.

例 2.1.4. 平均 μ と分散 σ^2 でパラメータ付けられた 1 次元正規分布全体の集合；

$$\mathcal{N} := \left\{ p(t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2} \right) \right\}_{\theta=(\mu,\sigma)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_{>0}} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

は自然に $\mathbb{R}^2$ の上半平面と同一視でき，多様体構造が入る．g^F，C を $\mathcal{N}$ 上の任意の点 $\theta = (\mu, \sigma)$ お

よび θ における接ベクトル X, Y, Z に対して，

$$g^F(X,Y) := \int_{\mathbb{R}} (X \log p(t,\theta))(Y \log p(t,\theta)) p(t,\theta) dt,$$
$$C(X,Y,Z) := \int_{\mathbb{R}} (X \log p(t,\theta))(Y \log p(t,\theta))(Z \log p(t,\theta)) p(t,\theta) dt,$$

と定めると g^F，C はそれぞれ $\mathcal{N}$ 上の Riemann 計量および 3 次対称テンソルとなる．また C と実数 α に対して次式により $\mathcal{N}$ 上の Affine 接続 $\nabla^{(\alpha)}$ が定義できる；

$$g^F(\nabla^{(\alpha)}_X Y, Z) = g^F(\nabla^{g^F}_X Y, Z) - \frac{\alpha}{2} C(X,Y,Z).$$

情報幾何学において，g^F と $\nabla^{(\alpha)}$ はそれぞれ正規分布の空間に対する Fisher 計量および甘利-Chentsov の α-接続としてよく知られており，$(\mathcal{N}, g^F, \nabla^{(\alpha)})$ は統計多様体となる ([1])．また次が知られている；

(1) 任意の実数 α に対して $(g^F, \nabla^{(\alpha)})$ は共役対称性を持つ，
(2) $(g^F, \nabla^{(\alpha)})$ が $\mathcal{N}$ 上の双対平坦統計構造であることと $\alpha = \pm 1$ であることは同値である．

Fisher 計量および甘利-Chentsov の α-接続は，より一般の確率分布の空間に対しても定義される．詳細は [1] を参照されたい．

2.2 差テンソル

本節では，計量との組で統計構造と等価となる「差テンソル」および「3 次形式」を紹介する．

定義 2.2.1. (M, g, ∇) を統計多様体とする．次で定義される M 上の $(1,2)$-テンソル場 K と $(0,3)$-テンソル場 C をそれぞれ統計構造 (g, ∇) に対する**差テンソル**および 3 **次形式**と呼ぶ；

$$K(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla^g_X Y, \quad C(X,Y,Z) := (\nabla_X g)(Y,Z).$$

ここで X, Y, Z は M 上の任意のベクトル場である．

差テンソルおよび 3 次形式は定義から対称テンソル場である．また次の関係式が成り立つ ([2])；

$$C(X,Y,Z) = -2g(K(X,Y),Z), \quad (\nabla^g_X C)(Y,Z,W) = -2g((\nabla^g_X K)(Y,Z),W).$$

(M, g) を Riemann 多様体，$\mathcal{A}(M) := \{M$ 上の Affine 接続 $\}$ とし以下を定める；

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}(M,g) := \{\nabla \in \mathcal{A}(M) \mid (M,g,\nabla)\text{: 統計多様体 }\},$$
$$\mathcal{K}(M,g) := \{K \in \Gamma(T^{(1,2)}M) \mid K\text{: 対称かつ } g \text{ に関してサイクリック }\},$$
$$S^3(M) := \{C \in \Gamma(T^{(0,3)}M) \mid C\text{: 対称 }\}.$$

ただし，本稿の中で M 上の $(1,2)$-テンソル場 K が

$$g(K(X,Y),Z) = g(K(Y,Z),X) = g(K(Z,X),Y).$$

を満たすとき，g **に関してサイクリック**であると呼ぶことにする．同様に内積付き有限次元実線型空間 (V,g) 上の V 値双線型形式 $K \in \mathrm{Hom}(V \otimes V, V)$ に対しても任意の $X,Y,Z \in V$ に対して上の等式を満たすとき，K は g **に関してサイクリック**であると呼ぶ．Riemann 多様体において，統計構造を定める Affine 接続と差テンソルおよび 3 次形式は次の意味で等価である．

命題 2.2.2. (M,g) を Riemann 多様体とする．次はそれぞれ全単射である；

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}(M,g) \ni \nabla \longmapsto K^{\nabla} \in \mathcal{K}(M,g), \quad \mathcal{K}(M,g) \ni K \longmapsto C^K \in S^3(M).$$

ただし $K^{\nabla}(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla^g_X Y$，$C^K(X,Y,Z) := -2g(K(X,Y),Z)$ とする．

系 2.2.3. Riemann 多様体 (M,g) に対し以下が成立；

$$\mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}(M,g) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathcal{K}(M,g) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} S^3(M).$$

Riemann 多様体 (M,g) において，$C \equiv 0 \in S^3(M)$ に対応する $\mathcal{A}_{\mathrm{Stat}}(M,g)$ の元は g に関する Levi-Civita 接続 ∇^g である．統計多様体 (M,g,∇) において，(g,∇) に対する差テンソル K を用いることで曲率 R^{∇} は次のように書ける ([2])；

$$R(X,Y) = R^{\nabla^g}(X,Y) + (\nabla^g_X K)_Y - (\nabla^g_Y K)_X + [K_X, K_Y].$$

命題 2.2.4. g^E を $\mathbb{R}^n$ 上の Euclid 計量とし $(\mathbb{R}^n, g^E, \nabla)$ を統計多様体とする．このとき $\mathbb{R}^n$ 上の任意のベクトル場 X,Y に対して以下が成り立つ；

$$R^{\nabla}(X,Y) = [K_X, K_Y].$$

ただし K は統計構造 (g^E,∇) に対する $\mathbb{R}^n$ 上の差テンソルである．

3 統計 Lie 群と左不変統計構造のモジュライ空間

本節では G を Lie 群とし，$\mathfrak{g}$ によって G の Lie 環を表す．また，

$$\widetilde{\mathfrak{M}}(G) := \{G \text{ 上の左不変 Riemann 計量 }\} \simeq \{\mathfrak{g} \text{ 上の内積 }\},$$

とおく．

3.1 統計 Lie 群

定義 3.1.1 ([3])**.** (I,∇) を G 上の統計構造とする．I，∇ が共に左不変であるとき (G,I,∇) を**統計 Lie 群**という．またこのとき (I,∇) を G 上の**左不変統計構造**と呼ぶ．

確率分布族に対する統計 Lie 群の例としては [3] および [5] を参照されたい．I を $\mathfrak{g}$ 上の内積，$\mathcal{LA}(G) := \{G \text{ 上の左不変 Affine 接続 }\}$ とし以下を定める；

$$\begin{aligned}
\mathcal{LA}_{\mathrm{Stat}}(G,I) &:= \{\nabla \in \mathcal{LA}(G) \mid (G,I,\nabla)\text{: 統計 Lie 群 }\},\\
\mathcal{K}(\mathfrak{g},I) &:= \{K \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g},\mathfrak{g}) \mid K\text{: 対称かつ } I \text{ に関してサイクリック }\},\\
S^3(\mathfrak{g}^*) &:= \mathfrak{g}^* \odot \mathfrak{g}^* \odot \mathfrak{g}^* = \{C \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \mid C\text{: 対称 }\}.
\end{aligned}$$

ただし $\mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{g}$ の双対空間であり，$\mathfrak{g}$ が n 次元のとき線型空間 $S^3(\mathfrak{g}^*)$ は $\binom{n+2}{3}$ 次元である．このとき系 2.2.3 と同様な次の 1 対 1 対応が存在する；

$$\mathcal{LA}_{\mathrm{Stat}}(G,I) \xleftrightarrow{1:1} \mathcal{K}(\mathfrak{g},I) \xleftrightarrow{1:1} S^3(\mathfrak{g}^*).$$

定義 3.1.2.

$$\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G) := \widetilde{\mathfrak{M}}(G) \times S^3(\mathfrak{g}^*),$$

と定める．$\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)$ は G 上の左不変統計構造全体の集合と見なせる．

以下では，G 上の左不変計量と $S^3(\mathfrak{g}^*)$ の元の組に対しても左不変統計構造と呼ぶことにする．

3.2 モジュライ空間

本節では，[6] が導入した Lie 群上の左不変計量のモジュライ空間および，我々が導入する「Lie 群上の左不変統計構造のモジュライ空間」を紹介する．$\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ は $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ に基底変換によって次のように作用する；

$$F.I := I(F^{-1}\cdot\,, F^{-1}\cdot\,) \quad (F \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g}),\ I \in \widetilde{\mathfrak{M}}(G)).$$

この作用は推移的である．また以下は $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ の部分群である；

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) := \{\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \mid \text{自己同型}\}, \quad \mathbb{R}_{>0} := \{c\cdot \mathrm{id} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \mid c \in \mathbb{R}_{>0}\}.$$

これらの直積を $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ とおくと，$\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ の部分群とみなせる．従って作用を制限することで $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ への作用を持つ．

定義 3.2.1 ([6])**.** $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ への作用による軌道空間を $\mathfrak{PM}(G)$ と書き，これを G 上の左不変計量のモジュライ空間と呼ぶ．

[6] では，

$$\mathbb{R}^\times := \{c\cdot \mathrm{id} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \mid c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\},$$

とし，直積群 $\mathbb{R}^\times\,\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ への作用による軌道空間を G 上の左不変計量のモジュライ空間と呼んでいるが，軌道空間として両者は一致することに注意する ([6])．$\mathfrak{PM}(G)$ が 1 点集合となる単連結 Lie 群は [9] によって分類されている．

定理 3.2.2 ([9], [6])**.** $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$ の $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-作用が推移的となる単連結 Lie 群 G は次のうちのどれかと同型である；

$$\mathbb{R}^n, \quad G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}\ (n\geq 2), \quad H^3\times\mathbb{R}^{n-3}\ (n\geq 3).$$

我々は，G 上の左不変統計構造全体の空間 $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)$ に対しても，$\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(G)$-作用を定め，その軌道空間を「$G$ 上の左不変統計構造のモジュライ空間」と定義する；

定義 3.2.3. $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ の $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G) = \widetilde{\mathfrak{M}}(G) \times S^3(\mathfrak{g}^*)$ への作用を以下で定める；

$$r\varphi.(I, C) := (r\varphi.I, r\varphi.C) \quad (r\varphi \in \mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}),\ (I, C) \in \mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)).$$

ただし $r\varphi.I := r.I(\varphi^{-1}\cdot, \varphi^{-1}\cdot)$，$r\varphi.C := r.C(\varphi^{-1}\cdot, \varphi^{-1}\cdot, \varphi^{-1}\cdot)$ とする．この作用による軌道空間を $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G)$ と表し，これを G 上の**左不変統計構造のモジュライ空間**と呼ぶ.

ここで統計構造の双対平坦性および共役対称性は，$\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-作用によって保たれることに注意する.

注意 3.2.4. $\mathcal{L}\mathrm{Stat}(G)$ は底空間を $\widetilde{\mathfrak{M}}(G)$，ファイバーを $S^3(\mathfrak{g}^*)$ とする自明ベクトル束の構造を持ち，特に $\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-同変ベクトル束となる．特に底空間の軌道空間 $\mathfrak{PM}(G)$ が 1 点集合となるとき，$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G)$ は位相空間として次のように表せる；

$$\mathcal{ML}\mathrm{Stat}(G) = \mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(G)\backslash\, \mathcal{L}\mathrm{Stat}(G) = (\mathbb{R}_{>0}\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \cap \mathrm{O}(\mathfrak{g}))\backslash S^3(\mathfrak{g}^*).$$

ただし，$\mathrm{O}(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ 上のある内積に関する直交群である.

4 主結果

我々は左不変計量のモジュライ空間が 1 点集合となる 3 つの単連結 Lie 群に対し，それぞれにおける双対平坦および共役対称となる左不変統計構造の分類を行い，モジュライ空間 $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{DF}}(G)$, $\mathcal{ML}\mathrm{Stat}^{\mathrm{CS}}(G)$ を決定した．結果は表-1, 2 を参照されたい.

4.1 可換 Lie 群 $\mathbb{R}^n$ 上の左不変双対平坦統計構造の分類

本節では，可換 Lie 群 $\mathbb{R}^n$ 上の双対平坦統計構造の分類に関する次の定理の証明を紹介する.

定理 4.1.1. g^E を可換 Lie 群 $\mathbb{R}^n$ における Euclid 計量とし，(g^E, C) を $\mathbb{R}^n$ 上の左不変統計構造とする．以下は同値である；

(a) 左不変統計構造 (g^E, C) は $\mathbb{R}^n$ 上の双対平坦統計構造を誘導する,
(b) $\mathbb{R}^n$ 上の g^E に関する正規直交基底 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ と n 個の実数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が存在して,

$$C = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e^i \odot e^i \odot e^i),$$

とかける．ただし $\{e^1, \ldots, e^n\} \subset (\mathbb{R}^n)^*$ は $\{e_1, \ldots, e_n\}$ に対する双対基底である.

V を内積 $\langle , \rangle$ 付き n 次元実ベクトル空間とし，$S^3(V^*)$ の各元 C について,

$$\mathfrak{b}_C := \{K_v^C : V \to V \mid v \in V\},$$

と定める．ただし K_v^C は任意の V の元 u, w に対し,

$$-2\langle K_v^C(w), u\rangle = C(v, w, u),$$

が成り立つものとする．ここで $S^3(V^*)$ の各元 C について，

$$V \ni v \mapsto K_v^C \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V),$$

は線型写像となるので $\mathfrak{b}_C$ は $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ の線型部分空間である．また次が成り立つ．

命題 4.1.2. $S^3(V^*)$ の各元 C について，$\mathfrak{b}_C$ の各元は V 上の self-adjoint である．すなわち任意に u, v, w に対して次の等式が成り立つ；

$$\langle K_v^C(w), u\rangle = \langle w, K_v^C(u)\rangle.$$

ここで同時対角化を復習しておく．

補題 4.1.3. 線型部分空間 $\mathfrak{a} \subset \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ が次を満たすとする；

(1) $\mathfrak{a}$ の任意の元 f に対し f は V 上の self-adjoint,
(2) $\mathfrak{a}$ は可換.

このとき V 上の正規直交基底 $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ が存在して，任意の $1 \leq i \leq n$ と $\mathfrak{a}$ の元 f に対して e_i は f の固有ベクトルとなる．

実際に定理を示す．ただし命題 2.2.4 より以下は同値である；

(1) $\mathbb{R}^n$ 上の左不変統計構造 (g^E, C) が双対平坦統計構造を誘導する,
(2) $\mathfrak{b}_C$ は可換.

Proof. [定理 4.1.1] (a) $\Rightarrow$ (b) のみ示す．補題 4.1.3 より $\mathbb{R}^n$ 上の正規直交基底 $\{e_1, \ldots e_n\}$ であって，任意の $1 \leq i \leq n$ と $\mathfrak{b}_C$ の元 f に対して e_i が f の固有ベクトルとなるようなものが取れる．以下 λ_i を $K_{e_i}^C$ の e_i についての固有値とする．また C は $S^3((\mathbb{R}^n)^*)$ の元より，

$$C = \sum_{s,t,u=1}^{n} C_{stu}(e^s \otimes e^t \otimes e^u) \quad (C_{stu} \in \mathbb{R}),$$

と一意的に書ける．ただし，

$$C_{stu} = C_{sut} = C_{tsu} = C_{ust} = C_{tus} = C_{uts} \quad (s, t, u \in \{1, \ldots, n\}), \tag{4.1}$$

となることに注意．各 $i = 1, \ldots, n$ に対し，

$$\mathbf{C}_i := (C_{ijk})_{j,k} \in \mathrm{M}(n, \mathbb{R}),$$

とおくと，$\mathbf{C}_i$ は線型写像 $-2K_{e_i}^C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の基底 $\{e_1, \ldots e_n\}$ に関する表現行列である．いま任意の $1 \leq j \leq n$ に対して $(-2K_{e_i}^C)(e_j) \in \mathbb{R}e_j$ より，$\mathbf{C}_i$ は対角行列である．さらに，

$$C_{iii} = (\mathbf{C}_i\text{の } (i,i) \text{ 成分}) = -2\lambda_i,$$

がわかる．よって以下を示せばよい；

$$\#\{s, t, u\} \neq 1 \implies C_{stu} = 0 \tag{4.2}$$

- (4.2) の証明；$s \neq t = u$ とする．いま C_{stu} は対角行列 $\mathbf{C}_s$ の対角成分である．係数の対称性 (4.1) より，

$$C_{stu} = C_{ust}$$

となる．C_{ust} は対角行列 $\mathbf{C}_u$ の非対角成分であるので特に 0 である．よって $C_{stu} = C_{ust} = 0$ が成り立つ．また $\#\{s,t,u\} = 3$ ならば，C_{stu} はそもそも $\mathbf{C}_s$ の非対角成分なので 0 である．従って (4.2) が成り立つ．

以上より，

$$C = \sum_{i=1}^{n} -2\lambda_i (e^i \odot e^i \odot e^i)$$

と書ける． □

参考文献

[1] S. Amari and H. Nagaoka. Methods of information geometry, volume 191. American Mathematical Soc., 2000.

[2] N. Bokan, K. Nomizu, and U. Simon. Affine hypersurfaces with parallel cubic forms. Tohoku Mathematical Journal, Second Series, 42(1):101–108, 1990.

[3] H. Furuhata, J.-i. Inoguchi, and S. Kobayashi. A characterization of the alpha-connections on the statistical manifold of normal distributions. Inf. Geom., 4(1):177–188, 2021.

[4] T. Hashinaga, H. Tamaru, and K. Terada. Milnor-type theorems for left-invariant riemannian metrics on lie groups. Journal of the Mathematical Society of Japan, 68(2):669–684, 2016.

[5] S. Kobayashi and Y. Ohno. A characterization of the alpha-connections on the statistical manifold of multivariate normal distributions. arXiv preprint arXiv:2302.07471v2, 2023.

[6] H. Kodama, A. Takahara, and H. Tamaru. The space of left-invariant metrics on a lie group up to isometry and scaling. manuscripta mathematica, 135:229–243, 2011.

[7] Y. Kondo. A classification of left-invariant pseudo-riemannian metrics on some nilpotent lie groups. Hiroshima Mathematical Journal, 52(3):333–356, 2022.

[8] A. Kubo, K. Onda, Y. Taketomi, and H. Tamaru. On the moduli spaces of left-invariant pseudo-riemannian metrics on lie groups. Hiroshima Mathematical Journal, 46(3):357–374, 2016.

[9] J. Lauret. Degenerations of lie algebras and geometry of lie groups. Differential Geometry and its Applications, 18(2):177–194, 2003.

[10] S. L. Lauritzen. Statistical manifolds. Differential geometry in statistical inference, 10:163–216, 1987.

On statistics which are almost sufficient from the viewpoint of the Fisher metrics

山口夏穂里 (Kaori YAMAGUCHI)
立命館大学大学院理工学研究科博士課程
前期課程基礎理工学専攻数理科学コース

概要

統計学の基本的な概念である十分統計量は，Ay-Jost-Lê-Schwachhöfer らによって Fisher 計量を用いて情報幾何学の分野で再定義された．本稿では，Ay-Jost-Lê-Schwachhöfer らが再定義した十分統計量を定量的に一般化し，その特徴づけを行う．これは立命館大学，野澤啓氏との共同研究である．

1 導入

1.1 先行研究

統計学者の Fisher は，パラメータづけされた確率分布の族が与えられたとき，その族に対する統計量の中でも，推定を行うための情報を漏らさず含んでいる統計量に着目した [F22]．その後 Neyman がこのような統計量を定式化し十分統計量と名付けた [N35]．その後，Peter らによって測度論の言葉のみで線形十分統計量と再定義され，Decell がその定義を一般化し，概線形十分計量が考えられた [DJ80]．Peter，Decell らは統計量が線形の場合で議論しているが，近年 Jost らは線形非線形に関わらずかつ無限次元の場合にも考えられる統計モデルを情報幾何学の分野で議論している．

2015 年 Jost らは，情報幾何の分野で，統計モデルを多様体の点でパラメータ付けられた確率密度関数の族を，無限次元の場合でも微分幾何的に扱えるように再定義した [AJLS15]．この統計モデルを（統計）多様体とみなすことで，Rao が導入した Fisher 計量という Riemann 計量を統計モデル上で扱える．また，Jost らは統計量によって誘導されたモデルの Fisher 計量が元のモデルの Fisher 計量と完全に一致する統計量として十分統計量を再定義した [AJLS17]．本稿では Jost らが情報幾何学の言葉で再定義した十分統計量の条件を定量的に緩めることによって一般化し，δ 概十分統計量と名付けその特徴づけを行う．

1.2 準備

まず，Jost らが再定義したパラメータ付き測度モデルの定義を紹介する．

定義 1.1 (パラメータ付き測度モデル)**.** パラメータ付き測度モデルとは，次を満たす三つ組 $(M, \Omega, \mathbf{p})$ のことである．

- M：有限次元または無限次元バナッハ多様体,
- Ω：可測空間,
- $\mathbf{p} : M \to \mathcal{M}(\Omega) : C^1$　ただし，$\mathcal{M}(\Omega) := \{\mu : \mu は \Omega 上有限測度\}$.

パラメータ付き測度モデルとは，一言で述べると，バナッハ多様体でパラメトライズされた測度の族である．このパラメータ付き測度モデルの例として，以下のような n 回のコイントスのモデルを考える．

例 1.2. 三つ組 $(M, \Omega, \mathbf{p})$ として，以下を考える．$n \in \mathbb{N}$ に対して,

- $M = (0, 1)$,
- $\Omega = \{0, 1\}^n$,
- $\mathbf{p}(\xi) = \xi^{a(\omega)}(1-\xi)^{n-a(\omega)}\mu_0$，$\omega \in \Omega$　(ただし，μ_0 は数え上げ測度，$a(\omega)$ は ω に現れる 1 の数）.

するとこのとき，この三つ組はパラメータ付き測度モデルである．

この例では，コインの表が出る確率 $\xi \in M$ がパラメータである．
次に，統計量の定義を紹介する．

定義 1.3 (統計量)**.**　可測空間 Ω と Ω' に対して, 可測写像 $a : \Omega \to \Omega'$ を統計量という．

例 1.2. で与えた写像 $a(\omega)$ は統計量になっている．ここで，$\Omega' = \{0, 1, ..., n\}$ とすると（Ω' は可測空間），例 1.2 の a は，Ω から Ω' への写像であるが，この統計量 a は例 1.2 のパラメータ付き測度モデルに対して，$\mathbf{p}(\xi) = a_*\mathbf{p}(\xi)$ とすると，次のような別のパラメータ付き測度モデルを誘導する．

例 1.4. 三つ組 $(M, \Omega, \mathbf{p})$ として，以下を考える．

- $M = (0, 1)$,
- $\Omega' = \{0, 1, ..., n\}$,
- $\mathbf{p}'(\xi) = {}_nC_k\xi^k(1-\xi)^{n-k}\mu_0$ $(\forall k \in \Omega')$　ただし，μ_0 は数え上げ測度.

するとこのとき, この三つ組 $(M, \Omega', \mathbf{p}')$ はパラメータ付き測度モデルであり, 例 1.2 の $(M, \Omega, \mathbf{p})$ から，統計量 a によって誘導されたモデルという．一般に元のモデル $(M, \Omega, \mathbf{p})$ から統計量

$a : \Omega \to \Omega'$ によって誘導されるモデル $(M, \Omega', \mathbf{p}')$ は多様体 M は変わらず，統計量によって可測空間が取り替えられ，測度の族は $\mathbf{p}' = a_* \mathbf{p}$ によって定義される．

次に，Jost らが十分統計量を情報幾何学の分野で再定義するのに用いた Fisher 計量を紹介するが，それには，測度の根，k 次可積分性という概念が必要なので，測度の根を説明した後に k 次可積分性の定義を紹介する．

Ω 上の有限測度の集合 $\mathcal{M}(\Omega)$ を順序関係 $\leq$ を持つ順序集合として考える．ただし，$\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}(\Omega)$ に対して，$\omega_1 \leq \omega_2$ とは ω_1 が ω_2 に dominate されているときをいう．$r > 0$ に対して，$\mathcal{M}(\Omega)$ 上の帰納極限

$$\mathcal{S}^r(\Omega) := \varinjlim L^{1/r}(\Omega, \mu)$$

を考える．ただし，$L^{1/r}(\Omega, \mu)$ とは，固定された $r \in (0, 1]$ に対して，$\int_\Omega |\phi|^{1/r} d\mu < \infty$ を満たす Ω 上可測関数全体のなす空間．ここで $\mu_1 \leq \mu_2$ のとき, 包含写像 $L^{1/r}(\Omega, \mu_1) \to L^{1/r}(\Omega, \mu_2)$ はバナッハ空間の等長写像になっている．したがって，$\mathcal{S}^r(\Omega)$ はバナッハ空間の構造を持つ．$\phi \in L^{1/r}(\Omega, \mu)$ に対して, 写像 $L^{1/r}(\Omega, \mu) \to \mathcal{S}^r(\Omega)$ の像を $\phi\mu^r$ と表し，このようにして μ の r-根 μ^r は定義される．また，$r > 0$ に対して,

$$\mathcal{M}^r(\Omega) := \{\, \phi\mu^r \in \mathcal{S}^r(\Omega) \mid \mu \in \mathcal{M}(\Omega), \phi \geq 0 \,\}$$

とおく．

定義 1.5. $k \in \mathbb{N}$ に対して, パラメータ付き測度モデル $(M, \Omega, \mathbf{p})$ が k 次可積分であるとは，写像

$$\mathbf{p}^{1/k} : M \to \mathcal{M}^{1/k}(\Omega), \qquad \xi \mapsto \mathbf{p}(\xi)^{1/k}$$

が C^1 級であるときにいう.

定義 1.6 (Fisher 計量)**.** $(M, \Omega, \mathbf{p})$ を 2 次可積分パラメータ付き測度モデルとする．また，$\mathbf{p}(\xi)$ が $\mu_0 \in \mathcal{M}(\Omega)$ によって dominate されているとする．すなわち，Ω 上の有限測度 μ_0 と密度関数 p に対して，$\mathbf{p}$ が $\mathbf{p}(\xi) = p(\omega; \xi)\mu_0$ と書けるとする．このとき M 上の Fisher 計量 $\mathfrak{g}$ は M 上の任意の接ベクトル v,w に対して，以下の式で定義される．

$$\mathfrak{g}(v, w) = \int_\Omega (\partial_v \log p(\cdot; \xi))(\partial_w \log p(\cdot; \xi)) d\mathbf{p}(\xi). \tag{1}$$

この計量は Fisher 情報量の変わり具合の平均を取ることで定義されている．Fisher 計量と統計量について，次の単調性定理が成り立つ.

定理 1.7 ([AN00])**.** $(M, \Omega, \mathbf{p})$ を 2 次可積分パラメータ付き測度モデルとする．また，$\mathbf{p}(\xi)$ が測度 μ_0 によって dominate されているとする．このとき，以下の不等式が M の任意の接ベクトル v に対して成り立つ；

$$\mathfrak{g}'(v, v) \leq \mathfrak{g}(v, v). \tag{2}$$

ただし，$\mathfrak{g}'$ は統計量 κ によって誘導されたモデルの Fisher 計量.

この定理をもう少し直観的に説明すると，統計量で誘導されたモデルの Fisher 計量は，元のモデルの Fisher 計量を超えないということである．差 $\mathfrak{g}(v,v)-\mathfrak{g}'(v,v)$ は 2 次情報損失と言われる．次のように Jost らはこの情報損失が 0 であるとき，その統計量を十分統計量と呼んだ．

定義 1.8 (十分統計量)**.** 2 次可積分パラメータ付き測度モデル $(M,\Omega,\mathbf{p})$ 上の統計量 κ が十分であるとは，M 上の任意の接ベクトル v に対して，

$$\mathfrak{g}'(v,v)=\mathfrak{g}(v,v)$$

が成り立つときにいう．

n 回のコイントスを考えたとき，例 1.2. で定義した a は十分統計量である．ノルムを計算するとそれが確かめられる．

今回得た主結果においては Jost らが定義した十分統計量を定量的に一般化した δ 概十分統計量を導入し，その特徴づけを得た．まず，δ 概十分統計量の定義を紹介する．

定義 1.9 (δ 概十分統計量)**.** $0<\delta\leq 1$ に対して， 統計量 κ が δ 概十分であるとは，M 上の任意の接ベクトル v に対して，

$$\delta^2\mathfrak{g}(v,v)\leq\mathfrak{g}'(v,v)\leq\mathfrak{g}(v,v)$$

が成り立つときにいう．

二つ目の不等式は上で紹介した単調性定理によりいつでも成り立っており，これに加えて $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ が双リプシッツ同値になるような統計量を δ 概十分統計量と定義した．実際にこの定義を満たす統計量があることを以下の例で示す．

例 1.10. 以下のパラメータ付き測度モデルを考える．$M=(0,1)$, $\Omega=\{0,1\}^2$，$\mathbf{p}(\xi)=p(\cdot;\xi)\mu_0$, ただし μ_0 は Ω 上数え上げ測度．また, 密度関数 $p(\cdot;\xi)$ は, $p(\cdot;\xi)=\xi^{a(\omega)}(1-\xi)^{2-a(\omega)}\quad(\omega\in\Omega)$, ただし，$a(\omega)$ は $\omega\in\Omega$ の 1 が出た回数と定める．

ここで，$\Omega'=\{0,1\}$ とし，統計量 $\kappa:\Omega\to\Omega'$ を $\kappa(\omega_1,\omega_2)=\omega_1,\quad\forall(\omega_1,\omega_2)\in\Omega$ と定めると，

$$\begin{aligned}\|\partial_\xi\log p(\xi)\|_2^2=&\frac{2}{\xi(1-\xi)},\\ \|\partial_\xi\log\kappa^*p'(\xi)\|_2^2=&\frac{1}{\xi(1-\xi)}.\end{aligned}$$

となり，$\frac{\|\partial_\xi\log\kappa^*p'\|_2^2}{\|\partial_\xi\log p\|_2^2}=\frac{1}{2}$ であるので, κ は $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 概十分統計量であり， $\forall\delta>\frac{1}{\sqrt{2}}$ に対して，δ 概十分統計量ではない．

2　主結果

1 章では δ 概十分統計量を定義し，2 章ではその特徴づけを紹介するが，この特徴付けは Jost らが示した十分統計量の特徴づけとパラレルに作ったので，まずは Jost らが得た十分統計量の特徴

づけを紹介する．

定理 2.1 ([AJLS17])**.** $(M, \Omega, \mathbf{p})$ を Ω 上の有限測度 μ_0 に対して $\mathbf{p}(\xi) = p(\omega;\xi)\mu_0$ の形で書ける 2 次可積分パラメータ付き測度モデルとする．また，密度関数 p は正とする．κ:$\Omega \to \Omega'$ を統計量とし，$p'(\omega;\xi)$ を $\kappa_*\mu_0$ に対する $\kappa_*\mathbf{p}(\xi)$ の密度関数とする．そして，M は連結とする．このとき以下は同値である．

(i) κ が $(M, \Omega, \mathbf{p})$ に対して十分である．
(ii) M の任意の接ベクトル v に対して $\partial_v \log p = \partial_v \log \kappa^* p'$ が成り立つ．
(iii) 写像 $\xi \mapsto \frac{p(\cdot;\xi)}{p'(\kappa(\cdot);\xi)}$ が定値写像．
(iv) $\exists s : \Omega' \times M \to \mathbb{R}$，$\exists t \in L^1(\Omega, \mu_0)$ s.t.

$$p(\omega;\xi) = s(\kappa(\omega);\xi)t(\omega), \qquad \mu_0\text{-}a.e.\ \omega \in \Omega, \forall \xi \in M.$$

前定理に対して，δ 概十分統計量を定理 2.1 とパラレルに特徴付けられ，これが主結果である．

定理 2.2 ([NY23])**.** $(M, \Omega, \mathbf{p})$ を，密度関数 p が正になるような Ω 上の有限測度 μ_0 に対して $\mathbf{p}(\xi) = p(\omega;\xi)\mu_0$ の形で書ける 2 次可積分パラメータ付き測度モデルとする．また，M を Fisher 計量を備える C^2 級有限次元多様体とする． さらに，統計量 $\kappa : \Omega \to \Omega'$ および $0 < \delta \leq 1$ に対して，以下は同値である．

(i) κ が $(M, \Omega, \mathbf{p})$ に対して δ 概十分である．
(ii) M の任意の接ベクトル v に対して，

$$\left\| \partial_v \log \frac{p(\cdot;\xi)}{\kappa^* p'(\cdot;\xi)} \right\| \leq \sqrt{1-\delta^2} \|\partial_v \log p(\cdot;\xi)\| \tag{3}$$

が成り立つ．ただし，$\|\cdot\|$ は L^2 ノルムである．
(iii) 写像 $M \to L^2(\Omega, \mu_0); \xi \mapsto \log \frac{p(\cdot;\xi)}{p'(\kappa(\cdot);\xi)}$ が Fisher 計量と L^2 計量によって定義される距離に対して $\sqrt{1-\delta^2}$ 局所リプシッツである．
(iv) $\exists s : \Omega' \times M \to \mathbb{R}$, $\exists t : \Omega \times M \to \mathbb{R}_{>0}$ s.t. $\log t(\cdot;\xi) \in L^2(\Omega, \mu_0)$ $\forall \xi \in M$,
- $p(\omega;\xi) = s(\kappa(\omega);\xi)t(\omega;\xi)$ μ_0-a.e. $\omega \in \Omega, \forall \xi \in M$,
- the map $M \to L^2(\Omega, \mu_0); \xi \mapsto \log t(\cdot;\xi)$ が Fisher 計量と L^2 計量によって定義される距離に対して $\sqrt{1-\delta^2}$ 局所リプシッツである．

証明は [NY23] を参照されたい．これらの結果を用いて，コイントスのモデルの統計量について調べられる．

参考文献

[F22] Fisher, R.A., On the mathematical foundations of theoretical statistics *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* containing Papers of a Mathematical or Physical Character 222, 309–368. http://doi.org/10.1098/rsta.1922.0009

[N35] Neyman, J., Sur un teorema concernente le considette statistiche sufficienti, *Giorn. Istit. Ital. Att.* **6** 320–334, (1935).

[DJ80] Decell, H.P., Jr., Sufficient, almost sufficient statistics and applications. *Proceedings of the First World Conference on Mathematics at the Service of Man (Barcelona, 1977)*, Vol. I, pp. 541–550, Univ. Politec., Barcelona, 1980.

[AJLS15] Ay, N., Jost, J., Lê, H.V., Schwachhöfer, L., *Parametrized measure models*, Bernoulli **24**(3) 1692–1725, (2015). https://doi.org/10.3150/16-BEJ910

[AJLS17] Ay, N., Jost, J., Lê, H.V., Schwachhöfer, L., *Information Geometry*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 64. Springer, Cham, 2017.

[AN00] Amari, S., Nagaoka, H., *Methods of Information Geometry*, Translated from the 1993 Japanese original by Daishi Harada. Transl. Math. Monogr. 191. American Mathematical Society, Providence, RI; Oxford University Press, Oxford, 2000.

[NY23] Yamaguchi, K, Nozawa, H On statistics which are almost sufficient from the viewpoint of the Fisher metrics, arXiv(2023)

ODA'S PROBLEM FOR G-SPECIAL LOCI

SÉVERIN PHILIP

1. The ℓ-monodromy outer actions and Oda's problem

Let $\mathcal{M}_{g,m}$ be the moduli space of curves over $\mathbf{Q}$ of genus g with m marked points satisfying the hyperbolicity condition $2g-2+m \geq 1$. On one hand we have the étale homotopy exact sequence

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathcal{M}_{g,m\overline{\mathbf{Q}}}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{M}_{g,m}) \xrightarrow{p} G_{\mathbf{Q}}$$

on the other hand Oda showed in [Oda97] that there is an exact sequence of étale fundamental groups induced by the point forgetting map

$$1 \longrightarrow \pi_1(C_{\overline{\mathbf{Q}}}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{M}_{g,m+1}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{M}_{g,m}) \longrightarrow 1$$

where $C/\mathbf{Q}$ is a hyperbolic curve represented on $\mathcal{M}_{g,m}$. From this last exact sequence, by considering conjugation in the middle and by denoting $\pi_1^{\ell}(C_{\overline{\mathbf{Q}}})$ the pro-ℓ completion of $\pi_1(C_{\overline{\mathbf{Q}}})$ we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \pi_1(C_{\overline{\mathbf{Q}}}) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{M}_{g,m+1}) & \longrightarrow & \pi_1(\mathcal{M}_{g,m}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \operatorname{Inn}\pi_1(C_{\overline{\mathbf{Q}}}) & \longrightarrow & \operatorname{Aut}\pi_1(C_{\overline{\mathbf{Q}}}) & \longrightarrow & \operatorname{Out}\pi_1(C_{\overline{\mathbf{Q}}}) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \longrightarrow & \operatorname{Inn}\pi_1^{\ell}(C_{\overline{\mathbf{Q}}}) & \longrightarrow & \operatorname{Aut}\pi_1^{\ell}(C_{\overline{\mathbf{Q}}}) & \longrightarrow & \operatorname{Out}\pi_1^{\ell}(C_{\overline{\mathbf{Q}}}) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

The long vertical arrow obtained from the right hand column gives a universal ℓ-monodromy outer action $\Phi_{g,m}^{\ell}\colon \pi_1(\mathcal{M}_{g,m}) \to \operatorname{Out}\pi_1^{\ell}(C_{\overline{\mathbf{Q}}})$ which is independent of the choice of C. Moreover, applying the same construction starting from the homotopy exact sequence of C

$$1 \longrightarrow \pi_1(C_{\overline{\mathbf{Q}}}) \longrightarrow \pi_1(C) \longrightarrow G_{\mathbf{Q}} \longrightarrow 1$$

we obtain the usual ℓ-monodromy outer action $\varphi_C^{\ell}\colon G_{\mathbf{Q}} \to \operatorname{Out}\pi_1^{\ell}(C_{\overline{\mathbf{Q}}})$ canonically associated with C. Now, considering s_C the section of the canonical projection $p\colon \pi_1(\mathcal{M}_{g,m}) \to G_{\mathbf{Q}}$ induced

S. Philip is a JSPS fellow at RIMS, Kyoto university. This report is based on a joint work with B. Collas. This work is supported by JSPS KAKENHI Grant number 22F22015.

by the rational point representing C on $\mathcal{M}_{g,m}$ we obtain a triangle

$$\begin{array}{ccc} G_{\mathbf{Q}} & \xrightarrow{\varphi_C^\ell} & \operatorname{Out}\pi_1^\ell(C_{\overline{\mathbf{Q}}}) \\ {\scriptstyle s_C}\downarrow & \nearrow_{\Phi_{g,m}^\ell} & \\ \pi_1(\mathcal{M}_{g,m}) & & \end{array}$$

which is commutative. The fact that every such triangle commutes for any choice of curve $C/\mathbf{Q}$ represented on the moduli space is the universality property of $\Phi_{g,m}^\ell$.
By construction the groups $\operatorname{Ker}\varphi_C^\ell$ and $p(\operatorname{Ker}\Phi_{g,m}^\ell)$ are closed subgroups of $G_{\mathbf{Q}}$. The corresponding fixed fields $\mathbf{Q}_{g,m}^\ell := \overline{\mathbf{Q}}^{p(\operatorname{Ker}\Phi_{g,m}^\ell)}$ and $\mathbf{Q}_C^\ell := \overline{\mathbf{Q}}^{\operatorname{Ker}\varphi_C^\ell}$ are called ℓ-monodromy fixed fields. It follows from the universality property of $\Phi_{g,m}^\ell$ represented by the equality $\Phi_{g,m}^\ell \circ s_C = \varphi_C^\ell$ that we have the inclusion $\mathbf{Q}_{g,m}^\ell \subset \mathbf{Q}_C^\ell$.

In the particular example of $(g,m) = (0,3)$ we have $\Phi_{g,m}^\ell = \varphi_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}\setminus\{0,1,\infty\}}^\ell$ as $\mathcal{M}_{0,4}$ is isomorphic to $\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}} \setminus \{0,1,\infty\}$ as a scheme and $\mathcal{M}_{0,3}$ to $\operatorname{Spec}\mathbf{Q}$. It should be noted that the standard monodromy outer action $\varphi_{\mathbf{P}^1_{\mathbf{Q}}\setminus\{0,1,\infty\}}\colon G_{\mathbf{Q}} \to \widehat{F}_2$ is injective by Belyi's theorem while its pro-ℓ variant is not.

Understanding how the ℓ-monodromy fixed fields $\mathbf{Q}_{g,m}^\ell$ (g,m) vary according to g and m is the key question of Oda's problem. The result, which has been obtained through the work of many mathematicians, is as follows. The complete proof of independence has been obtained through different techniques such as computations with Lie algebras [Ma96], consideration of divisorial stratifications of the moduli spaces [IN97] and combinatorial anabelian geometry [HM11], we refer to [Tak14] for a survey.

Theorem 1.1 (Hoshi, Ihara, Matsumoto, Mochizuki, Nakamura, Oda, Takao, Ueno)**.** *For all (g,m) of hyperbolic type we have*

$$\mathbf{Q}_{g,m}^\ell = \mathbf{Q}_{0,3}^\ell.$$

For a survey of the different techniques involved in the proof we refer to [Tak14].

2. The introduction of cyclic special loci

To introduce the special loci, which are closed substacks of $\mathcal{M}_{g,[m]}$ we first have to consider the Hurwitz stacks for a finite group G. Consider the moduli space $\mathcal{M}_{g,[m]}[G]$ which for every scheme S classifies the triples

$$(C/S, D, \iota\colon G \hookrightarrow \operatorname{Aut}_S C)$$

with C a proper smooth curve of genus g and D a divisor on C of degree m. By considering the maps given by forgetting the G-action

$$(C/S, D, \iota\colon G \hookrightarrow \operatorname{Aut}_S C) \longrightarrow (C/S, D)$$

functorially in S we get a map of stacks $\mathcal{M}_{g,[m]}[G] \to \mathcal{M}_{g,[m]}$ which we call the forgetful functor. The image of this map is defined to be G-special loci $\mathcal{M}_{g,[m]}(G)$. These spaces have been studied by Collas and Maugeais in [CM15] in the case of cyclic groups G. They prove that the irreducible components of $\mathcal{M}_{g,[m]}(G)$ are geometrically irreducible and classified by a so called abstract

Hurwitz data noted $\underline{kr}$. We denote those components by $\mathcal{M}_{g,[m]}(G)_{\underline{kr}}$.

In [CP23] we show that there is a universal ℓ-monodromy outer action $\Phi^{\ell}_{g,m}(G)_{\underline{kr}}$ as in the classical situation of Oda's problem. We thus define accordingly the ℓ-monodromy fixed fields $\mathbf{Q}^{\ell}_{g,m}(G)_{\underline{kr}}$. We then ask, what we call Oda's problem for cyclic special loci, how do the ℓ-monodromy fixed fields vary according to G, g, m and the data $\underline{kr}$. We provide an answer in the case of cyclic groups of prime order.

Theorem 2.1 ([CP23]). *For $G = \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$, (g, m) of hyperbolic type and associated abstract Hurwitz data $\underline{kr}$ such that $\mathcal{M}_{g,[m]}(G)_{\underline{kr}}$ is non-empty, we have*

$$\mathbf{Q}^{\ell}_{g,m}(G)_{\underline{kr}} = \mathbf{Q}^{\ell}_{0,3}.$$

The proof is done in two parts. First we consider the relations between the special loci and the spaces involved in the classical version of Oda's problem. The functors involved are the forgetful functor giving the inclusion $\mathcal{M}_{g,[m]}(G)_{\underline{kr}} \subset \mathcal{M}_{g,[m]}$ and the quotient functor $\mathcal{M}_{g,[m]}[G]/\operatorname{Aut} G \to \mathcal{M}_{g',[m']}$ for which we have to consider the intermediate space $\mathcal{M}_{g,[m]}[G]/\operatorname{Aut} G$ where the action of $\operatorname{Aut} G$ is made by composition with ι on the right on $\mathcal{M}_{g,[m]}[G]$. Studying both functors and the relations to the ℓ-monodromy outer actions we obtain a diagram of field inclusions

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{Q}^{\ell}_{g,[m]} & \hookrightarrow & \mathbf{Q}^{\ell}_{g,[m]}(G)_{\underline{kr}} & \hookrightarrow & \mathbf{Q}^{\ell}_{g,[m]}[G]_{\underline{kr}} \\
\uparrow & & & \nearrow & \\
\mathbf{Q}^{\ell}_{0,[3]} & \hookrightarrow & \mathbf{Q}^{\ell}_{g',[m']} & &
\end{array}$$

The second part of the proof consist of producing a curve C represented on the moduli stack $\mathcal{M}_{g,[m]}(G)_{\underline{kr}}$ such that $\varphi^{\ell}_{C} = \mathbf{Q}^{\ell}_{0,[3]}$. By the universality this leads to the inclusion $\mathbf{Q}^{\ell}_{g,[m]}[G]_{\underline{kr}} \subset \mathbf{Q}^{\ell}_{0,[3]}$ which closes our diagram. This is done by the method of maximal degeneration, introduced by Ihara and Nakamura in [IN97], adapted to our situation.

References

[CM15] B. Collas and S. Maugeais, "Composantes irréductibles de lieux spéciaux d'espaces de modules de courbes, action galoisienne en genre quelconque," *Ann. Inst. Fourier*, vol. 65, no. 1, pp. 245–276, 2015.

[CP23] B. Collas and S. Philip, "On Oda's problem and special loci" *RIMS preprint*, pp. 37. 2023.

[HM11] Y. Hoshi and S. Mochizuki, "On the combinatorial anabelian geometry of nodally non- degenerate outer representations," *Hiroshima Math. J.* 41 (2011), pp. 275-342.

[IN97] Y. Ihara and H. Nakamura, "On deformation of maximally degenerate stable marked curves and Oda's problem," *J. Reine Angew. Math.*, vol. 487, pp. 125–151, 1997.

[Ma96] M. Matsumoto, "Galois representations on pronite braid groups on curves," *J. reine angew. Math.* 474 (1996), pp. 169-219.

[Oda97] T. Oda, "Etale homotopy type of the moduli spaces of algebraic curves," *Geometric Galois actions*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 242, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 85–95, 1997.

[Tak14] N. Takao, "Some remarks on field towers arising from pro-nilpotent universal monodromy representations," *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, vol. B51, pp. 55–70, 2014.

A generalization of the Center Theorem of the Thurston-Wolpert-Goldman Lie algebra

和久田 葵 (Aoi WAKUDA)

東京大学大学院数理科学研究科 修士 2 年

1. 導入

本稿では, K は $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ を含む可換環とし, S は定曲率 -1 の完備リーマン計量が入る向き付けられた連結な実 2 次元多様体で, パンツと同相でないものとする.

1986 年に Goldman は, 向き付け可能曲面上の有向閉曲線の自由ホモトピー類で生成されるベクトル空間が, あるリー括弧積により, リー代数の構造をもつことを発見した [2]. これを Goldman リー代数といい, $K\hat{\pi}$ と表す. また, 無向閉曲線の自由ホモトピー類で生成されるベクトル空間も, 類似のリー括弧積により, リー代数の構造をもつことを発見した. こちらは段階的に発見され, Thurston の地震変形定理, Wolpert の Hamiltonian ベクトル場による計算, Goldman の代数的処理を経て発見された. この 3 名の頭文字をとって,TWG (Thurston-Wolpert-Goldman) リー代数といい, $K\tilde{\pi}$ と表す. Goldman リー代数の部分リー代数 A_0 :=(有向閉曲線の自由ホモトピー類 α を用いて, $\alpha+\alpha^{-1}$ の形で生成される空間) は $K\tilde{\pi}$ と同型である. Chas-Kabiraj は $K\tilde{\pi}$ の中心が, 定値ループの類, 境界成分を周回する曲線の類だけで生成されることを示した [1]. 先に述べた同型により, Chas-Kabiraj の定理は, A_0 の中心の生成元を特定したとも言える. 特に, A_0 の中心は零化イデアル : $\mathrm{Ann}_{A_0}(A_0)$ と言い換えることができる.

講演者は, A_1 :=(有向閉曲線の自由ホモトピー類 α を用いて, $\alpha-\alpha^{-1}$ の形で生成される空間) を考えることで, Chas-Kabiraj の定理の拡張として $\mathrm{Ann}_{A_i}(A_j)$ $((i,j)=(0,1),(1,0),(1,1))$ を求めた.

2.Goldman リー代数と TWG リー代数

まず, Goldman リー代数の定義を復習をする.

定義. $\hat{\pi}$ を S 上の有向閉曲線の自由ホモトピー類全体の集合とし, $K\hat{\pi}$ を $\hat{\pi}$ で生成される K 上のベクトル空間とする. α, $\beta \in \hat{\pi}$ に対して, $[\alpha,\beta]_G$ を以下のように定義する

$$[\alpha,\beta]_G := \sum_{P\in\alpha\cap\beta} \varepsilon_P(\alpha,\beta)|\alpha_P\beta_P|.$$

ただし, α と β の代表元を一般の位置にとる. これにより, $\alpha\cap\beta$ は有限個の横断的な交点の集合となる.
また, $\varepsilon_P(\alpha,\beta)\in\{\pm1\}$ は P における α と β の局所交点数であり, $|\alpha_P\beta_P|$ は, 積 $\alpha_P\beta_P\in\pi_1(S,P)$ の基点 P を忘れることで得られる自由ホモトピー類である.
これを双線形に $K\hat{\pi}$ 上へ拡張した演算 $[\cdot,\cdot]_G$ を **Goldman 括弧積** という。

定理.(Goldman [2]) $K\hat{\pi}$ は Goldman 括弧積により, リー代数の構造を持つ. これを **Goldman リー代数** という.

次に, $K\hat{\pi}$ の部分空間 A_0 と A_1 を導入する.

定義. ループの向きを反転させる写像 $\hat{\pi}\to\hat{\pi}$; $\alpha\mapsto\alpha^{-1}$ を線形に $K\hat{\pi}$ 上に拡張した同型写像 $\iota: K\hat{\pi}\to K\hat{\pi}$

を用いて, $K\hat{\pi}$ の部分空間 A_0, A_1 を, 以下で定義する.

$$A_0 \coloneqq (\alpha+\iota\alpha\ (\alpha \in \hat{\pi}) \text{ の形の元で生成される空間})$$
$$A_1 \coloneqq (\alpha-\iota\alpha\ (\alpha \in \hat{\pi}) \text{ の形の元で生成される空間})$$

ここで, ι はリー代数準同型 ($i.e.\ \iota[\alpha,\beta]_G = [\iota\alpha,\iota\beta]_G$) のため, A_0 は ι の固有値 1 の固有空間であり, A_1 は ι の固有値 -1 の固有空間である. 特に, A_0 は $K\hat{\pi}$ の部分リー代数となる. 一方で, A_1 は $K\hat{\pi}$ の部分リー代数ではないが, A_0 加群となる.

次に, TWG リー代数の定義を復習をする. そのために, S 上の一般の位置にある 2 つの無向閉曲線 x, y とそれらの横断的な交点 P に対して, $(x *_P y)_0, (x *_P y)_\infty$ を導入する. また, 後述するが, TWG リー代数は A_0 とリー代数同型である.

定義. S 上の一般の位置にある 2 つの無向閉曲線 x, y とそれらの横断的な交点 P に対して, 無向閉曲線 $\boldsymbol{(x *_P y)_0}$ を以下のように定義する.

1. (x,y) の P における向きと S の向きが一致するように x, y に向きを与える
2. P において通常のループ積をとる
3. その曲線の向きを捨てる

この操作によって得られる曲線を $(x *_P y)_0$ と定義する. また, 1. を

1'. (x,y) の P における向きと S の向きが異なるように x, y に向きを与える.

に変えて得られる曲線を $\boldsymbol{(x *_P y)_\infty}$ と定義する.

定義. $\tilde{\pi}$ を S 上の無向閉曲線の自由ホモトピー類全体の集合とし, $K\tilde{\pi}$ を $\tilde{\pi}$ で生成される K 上のベクトル空間とする. $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in \tilde{\pi}$ について, $[\widetilde{x}, \widetilde{y}]_T$ を以下のように定義する.

$$[\widetilde{x}, \widetilde{y}]_T \coloneqq \sum_{p \in x \cap y} \widetilde{(x *_P y)_0} - \widetilde{(x *_P y)_\infty}$$

これを双線形に $K\tilde{\pi}$ 上へ拡張した演算 $[\cdot,\cdot]_T$ を拡張したものを **TWG 括弧積** という.

定理.(Goldman [2]) $K\tilde{\pi}$ は TWG 括弧積により, リー代数の構造を持つ. これを **TWG リー代数** という.

命題. $\Phi : K\tilde{\pi} \to A_0\ ;\ \sum_{i=1}^{n} \widetilde{x_i} \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i + \iota x_i$ はリー代数の同型写像である.

Chas-Kabiraj [1] は双曲幾何を用いることで, 次を示した.

定理.(Chas-Kabiraj [1]) $K\tilde{\pi}$ の中心は定値ループの類, 境界成分を周回する曲線の類だけで生成される.

また, 上の命題から, A_0 の中心の生成元を特定したと言い換えられる.

3.TWG リー代数の中心と双曲幾何

次に, 上の定理 (Chas-Kabiraj [1]) の証明の概略を述べる. 証明においては, 双曲幾何のテクニックを利用しており, 講演者の主定理の証明にもこれを用いている.
まず, S の双曲計量 $X \in \mathcal{T}$ における角度を定義する.

定義. S 上の双曲計量 $X \in \mathcal{T}$ を固定し, 閉曲線 x, y を相異なる X-測地線, P を x, y の横断的な交点とする. このとき, P における x, y の角度 ϕ_P とは, y から, x まで曲面の向きにしたがって測った角度のこと.

証明のカギとなるの以下の 3 つの命題である.

命題 1.(Chas-Kabiraj [1]) S 上の双曲計量 $X \in \mathcal{T}$ を固定し, 閉曲線 x, y, z を相異なる X-測地線とし x は単純であるものとする. このとき, P を x, y の, Q を x, z の横断的な交点としたとき、以下の 2 つが成り立つ.

(1) $(\widetilde{x^m *_P y})_0 = (\widetilde{x^m *_Q z})_\infty$ を満たす自然数 m は高々 1 個である.
(2)「$(\widetilde{x^m *_P y})_0 = (\widetilde{x^m *_Q z})_0$ を満たす自然数 m は高々 1 個である. 」または「$\phi_P < \phi_R$ となる x, y の横断的な交点 R が存在する. 」

命題 1. の証明の概略は, もし $(\widetilde{x^m *_P y})_0$ が $(\widetilde{x^m *_Q z})_\infty$ や $(\widetilde{x^m *_Q z})_0$ と等しいとすると, それらの自由ホモトピー類は対応する測地線を共有する. ここに双曲余弦定理とデーンツイストを用いることで示される.
命題 1. から次の命題 2. が成り立つ.

命題 2.(Chas-Kabiraj [1]) $\widetilde{x}, \widetilde{y}_1, , , \widetilde{y}_k \in \widetilde{\pi}$ はどの 2 つも相異なるものとし, $\widetilde{x}$ が単純閉曲線の代表元をもつものとする.

$$\widetilde{y} = \sum_{j=1}^{k} c_j \widetilde{y}_j$$

とおいたとき (ただし各 c_j は 0 でないとする), 以下の 2 つのうち少なくとも一方が成り立つ.

(1) 各 j に対して, $i\,(\widetilde{x}, \widetilde{y}_j) = 0$ (ただし, $i\,(\widetilde{x}, \widetilde{y}_j)$ は$\widetilde{x}, \widetilde{y}_j$ の幾何的交点数)
(2) $[\widetilde{x^m}, \widetilde{y}]_T \neq 0$ となる自然数 m が存在する

命題 2. の証明の概略は, (1), (2) のどちらも成り立たないと仮定すると, S 上の双曲計量 $X \in \mathcal{T}$ を 1 つ固定し, $\widetilde{x}, \widetilde{y}_1, , , \widetilde{y}_k$ の代表元として測地線をとると, TWG 括弧積の定義から,

$$[\widetilde{x^m}, \widetilde{y}]_T = m \sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{P \in x \cap y_j} (\widetilde{x^m *_P y_j})_0 - (\widetilde{x^m *_P y_j})_\infty$$

となる. したがって, 任意の自然数 m に対して

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{P \in x \cap y_j} (\widetilde{x^m *_P y_j})_0 - (\widetilde{x^m *_P y_j})_\infty = 0$$

が成り立つ. ここで, $\widetilde{x}$と$\widetilde{y}_1, , , \widetilde{y}_k$ たちとの交点のうち, 角度が最大な点が $\widetilde{y}_l$ によって達成されるとし, その交点を R とすると, (2) が成り立たないという条件から, 任意の自然数 m に対して, $[\widetilde{x^m}, \widetilde{y}]_T = 0$ となるため,

$(\widetilde{x^m *_R y_l})_0$ と相殺される項を観察することで, 鳩ノ巣原理から, 以下のどちらか一方が成り立つ.

$$(a)\text{: } (\widetilde{x^m *_R y_l})_0 = (\widetilde{x^m *_P y_j})_0. \ (for\ m = m_1, m_2)$$
$$(b)\text{: } (\widetilde{x^m *_R y_l})_0 = (\widetilde{x^m *_P y_j})_\infty. \ (for\ m = m_1, m_2)$$

しかし, 命題 1.(1) から (b) は不適であり, 命題 1.(2) から (a) についても, R における角度の最大性から不適であり, 矛盾が言えた.
最後に, 命題 2. と以下の命題 3. とを合わせて証明が完了する.

命題 3.(Chas-Kabiraj [1]) パンツと同相でない有向曲面において, その上の閉曲線 y について

$$i\,(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0$$

が任意の単純閉曲線 x に対して成り立つとき, y は定値ループ, 1 点穴を周回する曲線, 境界成分を周回する曲線のどれかにホモトピックである.

これは, 種数が 1 以上, または境界成分と 1 点穴の合計が 4 以上の有向曲面はその上のいくつかの適切な単純閉曲線を引く (差集合を取る) ことで, 各連結成分が, ディスク, アニュラスのいずれかに同相にすることができるためである.

4. 主結果

本講演では次の結果について紹介する.Chas-Kabiraj [1] が求めた A_0 の中心は零化イデアル $\mathrm{Ann}_{A_0}(A_0)$ と言い換えられる. 講演者は, この拡張として $\mathrm{Ann}_{A_i}(A_j)$ $((i,j) = (0,1),(1,0),(1,1))$ を求めた.

定理.(W) $K\hat{\pi} = A_0 \oplus A_1$ に対して、
$\mathrm{Ann}_{A_0}(A_1) = (\alpha + \iota\alpha$ ($\alpha \in \hat{\pi}$ は定値ループ, 境界成分を周回するループ) の形の元で生成される空間)
$\mathrm{Ann}_{A_1}(A_i) = (\alpha - \iota\alpha$ ($\alpha \in \hat{\pi}$ は境界成分を周回するループ) の形の元で生成される空間) $(i = 0, 1)$
である。

証明について, まず, $\mathrm{Ann}_{A_1}(A_1)$ をについて述べる. その後,$\mathrm{Ann}_{A_0}(A_1)$, $\mathrm{Ann}_{A_1}(A_0)$ についても類似の方法で示せることを概略のみ紹介する. そのため最初に, 下付きチルダと拡張された TWG 括弧積の導入をする.

まず, K は $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ を含む可換環なので,

$$A_0 \cong K\hat{\pi}/A_1, A_1 \cong K\hat{\pi}/A_0$$

であり, $K\hat{\pi}$から $K\hat{\pi}/A_1$への自然な射影は,上付きチルダを $K\hat{\pi}$ 上線形に拡張した写像に一致する. このことから, $K\hat{\pi}$から $K\hat{\pi}/A_0$ への自然な射影を, **下付きチルダ** で書くことにする.
また, $A_i \times A_j$ 上に制限された Goidman 括弧積は, $K\hat{\pi}/A_i \times K\hat{\pi}/A_j$ 上へと括弧積を誘導する. これを **拡張された TWG 括弧積** と呼ぶ. これは TWG 括弧積が $A_0 \times A_0$ 上に制限された Goidman 括弧積から誘導された写像とみなせるためである.

この下付きチルダと拡張された TWG 括弧積を用いて, 3 章の命題 2. の類似の命題として命題 2'. が得られる.

命題 2'. $x, y_1, , , y_k \in \hat{\pi}$ はどの 2 つも相異なるものとし, x が単純閉曲線の代表元をもつものとする.

$$\underset{\sim}{y} = \sum_{j=1}^{k} c_j \underset{\sim}{y_j}$$

とおいたとき (ただし各 c_j は 0 でないとする), 以下の 2 つのうち少なくとも一方が成り立つ.

(1) 各 j に対して, $i\,(x, y_j) = 0$
(2) $[\underset{\sim}{x^m}, \underset{\sim}{y}]_T \neq 0$ となる自然数 m が存在する

命題 2'. の証明の概略は, (1), (2) のどちらも成り立たないと仮定すると, S 上の双曲計量 $X \in \mathcal{T}$ を 1 つ固定し, $x, y_1, , , y_k$ の代表元として測地線をとると, 拡張された TWG 括弧積の定義から,

$$[\underset{\sim}{x^m}, \underset{\sim}{y}]_T = m \sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{P \in x \cap y_j} \varepsilon_P(x^m, y_j)\{(\widetilde{x^m *_P y_j})_0 + (\widetilde{x^m *_P y_j})_\infty\}$$

となる. したがって, 任意の自然数 m に対して

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \sum_{P \in x \cap y_j} \varepsilon_P(x^m, y_j)\{(\widetilde{x^m *_P y_j})_0 + (\widetilde{x^m *_P y_j})_\infty\} = 0$$

が成り立つ. ここで, x と $y_1, , , y_k$ たちとの交点のうち, 角度が最大な点が y_l によって達成されるとし, その交点を R とすると, (2) が成り立たないという条件から, 任意の自然数 m に対して, $[\underset{\sim}{x^m}, \underset{\sim}{y}]_T = 0$ となるため, $(\widetilde{x^m *_R y_l})_0$ と相殺される項を観察することで, 鳩ノ巣原理から, 以下のどちらか一方が成り立つ.

$$(a)\text{: } (\widetilde{x^m *_R y_l})_0 = (\widetilde{x^m *_P y_j})_0.\ (for\ m = m_1, m_2)$$
$$(b)\text{: } (\widetilde{x^m *_R y_l})_0 = (\widetilde{x^m *_P y_j})_\infty.\ (for\ m = m_1, m_2)$$

しかし, 先述の命題 1.(1) から (b) は不適であり, 命題 1.(2) から (a) についても, R における角度の最大性から不適であり, 矛盾が言えた.
最後に, 命題 2'. と先述の命題 3. とを合わせて $\mathrm{Ann}_{A_1}(A_1)$ が求まる.

$\mathrm{Ann}_{A_0}(A_1)$, $\mathrm{Ann}_{A_1}(A_0)$ については以下の 2 つの補題を用いる.

補題 1. $\alpha \in \hat{\pi}$ に対して, α が定値ループでないならば, $\alpha \neq \iota\alpha$ である.

これは, $\alpha = \iota\alpha$ 対応する測地線が逆向きとなり, 測地線の一意性に反することことから従う.
また, この補題 1. から以下の補題 2. が従う.

補題 2. $\alpha, \beta \in \hat{\pi}$ に対して,

$$\underset{\sim}{\alpha} = \pm\underset{\sim}{\beta} \in K\hat{\pi}/A_0 \Leftrightarrow \widetilde{\alpha} = \widetilde{\beta} \in K\hat{\pi}/A_1 x$$

この補題 2. から, $\mathrm{Ann}_{A_0}(A_1)$, $\mathrm{Ann}_{A_1}(A_0)$ が求まり, 主定理の証明が完了する.

参考文献

[1] Moira Chas and Arpan Kabiraj, The Lie bracket of undirected closed curves on a surface, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 375, No. 4, pp. 2365–2386, (2021).

[2] William M. Goldman, Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations, Invent. Math. 85, (1986).

Quot スキームを用いた Bott 周期性の別証明とバルクエッジ対応

東京大学　大学院数理科学研究科　数理科学専攻
名取雅生 (Masaki NATORI) *

概要

K 理論の Bott 周期性と整数量子ホール効果のバルクエッジ対応の各々の別証明を与える．Bott 周期性については証明を配置空間と結びつけ, その際に代数幾何における Quot scheme を用いた．バルクエッジ対応については直接的かつより初等的な証明を与えた．

$D^2 \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, $B^2 \coloneqq D^2 \setminus \partial D^2$, $S^1 \coloneqq \partial D^2$ とする．

1　イントロダクション

K 理論の Bott 周期性の証明方法は様々なものが知られている．まず, Bott により 1959 年に Morse 理論を使って初めて示された [Bot59]．その後, Atiyah–Bott により初等的な証明 [AB64] が与えられ, Atiyah により族の指数を使った証明 [Ati68] が与えられた．他にも, Atiyah–Singer の Kuiper の定理を使った証明 [AS69], MacDuff の quasifibration を使った証明 [Mac77], Harris のユニタリ行列のスペクトル分解と group completion theorem を使った簡潔な証明 [Har80] などがある．

Atiyah–Bott による証明 [AB64], Atiyah による証明 [Ati68] と我々の証明の比較を述べる．三者とも, Bott 写像 $\beta_X \colon K(X) \to K(X \times (D^2, S^1))$ の逆を構成するという方針である．Atiyah–Bott による構成では, S^2 上のベクトル束の clutching function を Laurent 多項式で近似した後, 多項式に直し, 一次式に直し, 最後に Bloch 束を取る構成でベクトル束を得ている．対して, 我々の証明では多項式から直接ベクトル束を得ていて, 一次式の場合に制限すると 2 つの構成は一致している．Atiyah による構成では clutching function の Toeplitz operator を取り, その族の指数を取って K 群の元を得ている．Atiyah は Atiyah–Bott の証明と Atiyah の証明の比較を行なっている [Ati68]．そこでは両者の構成の中間となる構成として, 多項式を $\mathbb{C}[z]$-homomorphism とみなし, その cokernel を取る構成を挙げている．我々はその構成を sheaf homomorphism として見直し, さらに多項式からベクトル束を得る操作の前段階として, 多項式からベクトル空間でラベル付けされた配置の族を得る段階 (Section 4) があることを明確にした．K-homology theory とベクトル空間でラベル付けされた配置空間との関係は Segal により明らかにされている [Seg77]．我々はベクトル空間でラベル付けされた配置空間と Bott 周期性の証明を結びつけ, その際に Quot scheme を用いた代数幾何的構成を利用

* E-mail:natori-masaki616@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

した.

整数量子ホール効果は Klitzing–Dorda–Pepper によって 1980 年に初めて実験的に発見された [KDP80]. バルク指数は Thouless–Kohmoto–Nightingale–den-Nijs によって第一 Chern 数 (TKNN 数と呼ばれる) として導入された [TKNdN82]. 整数量子ホール効果のバルクエッジ対応は Hatsugai により 1993 年に Riemann 面を用いて初めて示された [Hat93]. その後, Kellendonk–Richter–Schulz-Baldes によって C^* 環の K 理論を用いて数学的に証明が与えられた [KRSB02]. Graf–Porta はある別のベクトル束, つまり, 特定の方向に減少するハミルトニアンの解を使ったベクトル束を構成し, それを用いてバルクエッジ対応を証明した [GP13]. Hayashi はそのベクトル束を K 理論や指数理論の観点から調べ, 指数のコボルディズム不変性を用いてバルクエッジ対応を証明した [Hay17]. 対して, 我々は, Hayashi と同じ設定のもとでより直接的かつ初等的な方法でバルクエッジ対応を証明した.

2 Bott 周期性の別証明 (主結果 1)

この節では Bott 周期性の主張を述べ, 後の Section 3, 4 を用いて別証明を与える.

Definition 2.1. (X, A) をコンパクトハウスドルフ空間とその閉部分空間の対とする. X 上のベクトル束 E, F, ベクトル束の同型 $\alpha\colon E|_A \to F|_A$ の組 (E, F, α) の同型類全体の集合を $\mathcal{K}(X, A)$ と書く. $\mathcal{K}(X, A)$ 上の同値関係 $\sim$ を以下の関係から生成されるものとする.

(1) $(E, F, \alpha), (E, F, \alpha') \in \mathcal{K}(X, A)$ に対して, $E|_A \to F|_A$ が同型であることを保って α と α' がホモトピックであるとき, $(E, F, \alpha) \sim (E, F, \alpha')$ である.
(2) $(E, F, \alpha) \in \mathcal{K}(X, A)$ と X 上のベクトル束 G に対して $(E, F, \alpha) \sim (E \oplus G, F \oplus G, \alpha \oplus \mathrm{id})$ である.

空間対 (X, A) の K **群** (K-group) を $K(X, A) \coloneqq \mathcal{K}(X, A)/\sim$ と定める. (E, F, α) の $K(X, A)$ における同値類を $[E, F, \alpha]$ と書く. また X の K 群を $K(X) \coloneqq K(X, \emptyset)$ と定める. X 上のベクトル束 E に対して, $[E] \coloneqq [E, 0, \emptyset] \in K(X)$ と書く.

このとき, Bott 周期性の主張は次のように書ける.

Theorem 2.2 ([AB64], [Ati68])**.** *X をコンパクトハウスドルフ空間とする. このとき, Bott 写像*

$$\beta_X\colon K(X) \to K(X \times (D^2, S^1)); [E] \mapsto [E] \boxtimes [\underline{\mathbb{C}}, \underline{\mathbb{C}}, z^{-1}] = [\mathrm{proj}_X^* E, \mathrm{proj}_X^* E, z^{-1}]$$

は同型である. ここで z は S^1 の座標, $[\underline{\mathbb{C}}, \underline{\mathbb{C}}, z^{-1}] \in K(D^2, S^1)$, $\boxtimes$ は外部テンソル積である.

Section 3, 4 を用いて証明に必要な構成を述べる.

Construction 2.3. V を有限次元複素ベクトル空間, l を非負整数とする. 各 $0 \leq j \leq l$ に対して連続写像 $a_j\colon X \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ が与えられたとする. すると, $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 係数の多項式の連続族

$$\left\{ H_x(z) \coloneqq \sum_{j=0}^{l} a_j(x) z^j \right\}_{x \in X}$$

が得られる．任意の $x \in X$, $z \in S^1$ に対して, $H_x(z) \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ と仮定する．また, $\det(H_x)$ の B^2 内の根の重複度の総和は $x \in X$ に依らず定数 r だと仮定する．

$\{H_x(z)\}_{x\in X}$ は仮定より Definition 4.1 で定義される Poly^l_V を用いて連続写像 $H\colon X \to \mathrm{Poly}^{l,r}_{V,S^1}$ を定める．Theorem 4.6 より, 写像 $\mathrm{config}_{B^2}\colon \mathrm{Poly}^{l,r}_{V,S^1} \to \mathrm{Conf}^r_{V,B^2}$ は連続であり, Proposition 3.2 より, Conf^r_{V,B^2} 上のベクトル束 $\mathcal{E}^r_{V,B^2} \to \mathrm{Conf}^r_{V,B^2}$ が存在する．以上の準備により, X 上のベクトル束 $\mathrm{Bun}_X(V,H) \coloneqq \mathrm{config}(H)^*\mathcal{E}^r_{V,B^2} \to X$ が得られる．ここで, $\mathrm{config}(H)$ は $\mathrm{config}(H) \coloneqq \mathrm{config}_{B^2} \circ H\colon X \to \mathrm{Conf}^r_{V,B^2}$ とした．

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Bun}_X(V,H) & & \longrightarrow & & \mathcal{E}^r_{V,B^2} \\ \downarrow & \lrcorner & & & \downarrow \\ X & & \xrightarrow[H]{} \mathrm{Poly}^{l,r}_{V,S^1} & \xrightarrow[\mathrm{config}_{B^2}]{} & \mathrm{Conf}^r_{V,B^2} \end{array}$$

Proof of Theorem 2.2. まず, $\alpha_X\colon K(X \times (D^2,S^1)) \to K(X)$ を定める．$K(X \times (D^2,S^1))$ の元は代表元として, 有限次元複素ベクトル空間 V と連続写像 $H\colon X \times S^1 \to \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$ を用いて $[\underline{V},\underline{V},H] \in K(X \times (D^2,S^1))$ という形で取れる．さらに, H は $x \in X$ に対して, Laurent 多項式 $H_x(z) = \sum_{j=-k}^{l} a_j(x)z^j$ という形をしているとしてよい．ここで, 任意の $x \in X$ に対して, $a_j\colon X \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ は連続写像である．z^k 倍すると, 多項式の族 $(z^kH)_x(z) = \sum_{j=0}^{k+l} a_{j-k}(x)z^j$ となる．Construction 2.3 を適用すると, X 上のベクトル束 $\mathrm{Bun}_X(E,z^kH)$ が得られる．そこで, $\alpha_X([\overline{E},\overline{F},\overline{H}]) = \alpha_X([\mathrm{proj}_X^*E,\mathrm{proj}_X^*E,H]) \coloneqq [E^{\oplus k}] - [\mathrm{Bun}_X(E,z^kH)] \in K(X)$ と定める．これは well-defined である．

$\alpha_X\colon K(X \times (D^2,S^1)) \to K(X)$ が $\beta_X\colon K(X) \to K(X \times (D^2,S^1))$ の逆写像であることを示すためには以下の 3 つの条件を満たしていることを確認すれば十分である [Ati68]．ここでは証明は省略する．

(A1) α_X は X に関して関手的である．
(A2) α_X は $K(X)$-module homomorphism である．
(A3) $\alpha_X([\underline{\mathbb{C}},\underline{\mathbb{C}},z^{-1}]) = [\underline{\mathbb{C}}]$.

□

Section 3 では, 配置空間 Conf^r_{V,B^2} とその上の大域切断束 $\mathcal{E}^r_{V,B^2} \to \mathrm{Conf}^r_{V,B^2}$ を構成し, Quot scheme との関係を調べる．Section 4 では, 配置写像 $\mathrm{config}_{B^2}\colon \mathrm{Poly}^{l,r}_{V,S^1} \to \mathrm{Conf}^r_{V,B^2}$ を定義し, その連続性を調べる．行列係数の多項式から B^2 上の配置を得るこの配置写像が我々の Bott 周期性の証明において鍵となる写像である．

3 配置空間の構成

3.1 配置空間と大域切断束の構成

Definition 3.1. V を有限次元複素ベクトル空間, U を複素平面 $\mathbb{C}$ の開集合, r を非負整数とする．行列 $A \in M_r(\mathbb{C})$ と線型写像 $\iota\colon V \to \mathbb{C}^r$ が次の条件を満たすとき, (A,ι) を U 上の階数 r の V**-配置**

(V-configuration) と呼ぶ.

- A の固有値の集合 $\sigma(A)$ は U に含まれる.
- $\sum_{i=0}^{r-1} A^i \iota \colon V^{\oplus r} \to \mathbb{C}^r$ は全射である.

U 上の階数 r の V-配置全体のなす集合を $\widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U}$ と書く. $\widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U}$ には $M_r(\mathbb{C}) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}^r)$ の部分空間としての位相が定まる. $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ の $M_r(\mathbb{C})$ への共役作用と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C}^r)$ への post-composition による作用により, $\widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U}$ には $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ の左作用が定まる.

Proposition 3.2. 左作用 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C}) \curvearrowright \widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U}$ は *free* かつ *proper* である. 特に, 商写像 $\widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U} \to \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\backslash\widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U}$ は主 $\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})$ 束であり, 商空間 $\mathrm{Conf}^r_{V,U} \coloneqq \mathrm{GL}_r(\mathbb{C})\backslash\widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U}$ は $r \cdot \dim_{\mathbb{C}} V$ 次元複素多様体である. さらに, 同伴束として階数 r のベクトル束 $\mathcal{E}^r_{V,U} \coloneqq \widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U} \times_{\mathrm{GL}_r(\mathbb{C})} \mathbb{C}^r \to \mathrm{Conf}^r_{V,U}$ が得られる.

$\mathrm{Conf}^r_{V,U}$ を U 上の階数 r の **V-配置空間** (V-configuration space), $\mathcal{E}^r_{V,U} \to \mathrm{Conf}^r_{V,U}$ を $\mathrm{Conf}^r_{V,U}$ 上の**大域切断束** (global section bundle) という. $(A, \iota) \in \widetilde{\mathrm{Conf}}^r_{V,U}$ の同値類を $[A, \iota] \in \mathrm{Conf}^r_{V,U}$ と書く.

3.2 Quot scheme との比較

この節では, $\mathrm{Conf}^r_{V,\mathbb{C}}$ と代数幾何学における Quot scheme の比較を行う.

Definition 3.3. $Sch_{\mathbb{C}}$ を $\mathrm{Spec}\mathbb{C}$ 上の locally noetherian schemes のなす圏とする. r を非負整数とする. E を $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ 上の連接層とする. 反変関手 $\mathfrak{Q}uot^r_{E,\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}} \colon Sch^{\mathrm{op}}_{\mathbb{C}} \to Set$ を以下のように定める. $T \to \mathrm{Spec}\mathbb{C}$ に対して, 対 $(\mathcal{F}, q)$ であって以下を満たすものを T **でパラメトライズされた** E **の商の族** (family of quotients of E parametrized by T) と呼ぶ.

(1) $\mathcal{F}$ は $\mathbb{A}^1_T$ 上の coherent sheaf であって, $\mathcal{F}$ のサポートは T 上 proper であり, $\mathcal{F}$ は T 上 flat である.
(2) $q \colon E_T \to \mathcal{F}$ は surjective $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_T}$-linear homomorphism である. ここで, E_T は E の射影 $\mathbb{A}^1_T \to \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ による引き戻しである.
(3) 任意の $t \in T$ に対して, $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}|_{(\mathbb{A}^1_T)_t}$ の Hilbert 多項式は定数 r である.

$\mathfrak{Q}uot^r_{E,\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}(T)$ を T でパラメトライズされた E の商の族の同型類のなす集合と定める.

Fact 3.4 ([Nit05])**.** 関手 $\mathfrak{Q}uot^r_{E,\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}$ は表現可能である.

関手 $\mathfrak{Q}uot^r_{E,\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}$ の表現対象を $\mathrm{Quot}^r_{E,\mathbb{A}^r_{\mathbb{C}}}$ と書く.

Proposition 3.5 ([Ric17])**.** V を有限次元複素ベクトル空間とする. $\mathrm{Quot}^r_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}} \otimes V, \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}$ の *analytification* と $\mathrm{Conf}^r_{V,\mathbb{C}}$ は同相である.

4　配置写像の構成と連続性

4.1　配置写像の定義

V を d 次元複素ベクトル空間, $l, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. また, γ を $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線, D_γ を $\mathbb{C} \setminus \gamma$ の 2 つの連結成分のうち有界な方とする.

Definition 4.1. $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ 係数 l 次多項式全体の集合を Poly_V^l と書く. Poly_V^l には $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)^{\times(l+1)}$ から自然に位相が定まる. l 次の係数が可逆である元のなす Poly_V^l の部分空間を $\mathrm{Poly}_V^{l,inv}$ と書く. また, $f(z) \in \mathrm{Poly}_V^l$ であって, 「$\forall \lambda \in \gamma, f(\lambda) \in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(V)$」を満たすもののうち, $\det f(z)$ の D_γ に含まれる零点の位数の和が r であるもののなす Poly_V^l の部分空間を $\mathrm{Poly}_{V,\gamma}^{l,r}$ と書く.

配置写像 $\mathrm{config}_{\mathbb{C}} \colon \mathrm{Poly}_V^{l,inv} \to \mathrm{Conf}_{V,\mathbb{C}}^{dl}$ を以下で定める. $f(z) \in \mathrm{Poly}_V^{l,inv}$ とする. $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-; V)$ を $\mathbb{C}$ 上の V に値を取る正則関数のなす層とする. $\widetilde{f} \colon \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-; V) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-; V)$ を, $\mathbb{C}$ の開集合 U と切断 $s \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U; V)$ に対して $\widetilde{f}(U)(s)(z) \coloneqq f(z)s(z)$ により定める. すると, $\widetilde{f}$ は単射である. よって, 以下の短完全列が得られる.

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-; V) \xrightarrow{\widetilde{f}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-; V) \longrightarrow \mathrm{Coker}\, \widetilde{f} \longrightarrow 0$$

Lemma 4.2. $\mathrm{Coker}\, \widetilde{f}$ のサポートは有限集合であり, 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して, $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Coker}\, \widetilde{f}_\lambda < \infty$ である. さらに, $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathrm{Coker}\, \widetilde{f}) = dl$ である.

Lemma 4.3. 自然な射影 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-; V) \to \mathrm{Coker}\, \widetilde{f}$ が H^0 に誘導する射 $\pi \colon \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}; V) \to H^0(\mathrm{Coker}\, \widetilde{f})$ は全射である.

Lemma 4.3 より以下の系列は完全であり, Lemma 4.2 より $H^0(\mathrm{Coker}\, \widetilde{f}) \cong \mathbb{C}^{dl}$ である. 同型を 1 つ固定して $\varphi \colon H^0(\mathrm{Coker}\, \widetilde{f}) \to \mathbb{C}^{dl}$ とおく.

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}; V) \xrightarrow{\widetilde{f}(\mathbb{C})} \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}; V) \xrightarrow{\pi} H^0(\mathrm{Coker}\, \widetilde{f}) \longrightarrow 0$$

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}; V)$ 上の掛け算作用素 z について, $\widetilde{f}$ と z は可換なので $z \colon \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}; V) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}; V)$ は $\overline{z} \colon H^0(\mathrm{Coker}\, \widetilde{f}) \to H^0(\mathrm{Coker}\, \widetilde{f})$ を誘導する. $A(f) \coloneqq \varphi \circ \overline{z} \circ \varphi^{-1} \in M_r(\mathbb{C})$ と定める. 定数関数を返す写像 $\mathrm{const.} \colon V \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}; V)$ を用いて, $\iota(f) \coloneqq \varphi \circ \pi \circ \mathrm{const.} \colon V \to \mathbb{C}^{dl}$ と定める.

Definition 4.4. 配置写像 (configuration map) $\mathrm{config}_{\mathbb{C}} \colon \mathrm{Poly}_V^{l,inv} \to \mathrm{Conf}_{V,\mathbb{C}}^{dl}$ を $\mathrm{config}_{\mathbb{C}}(f(z)) \coloneqq [A(f), \iota(f)]$ により定める.

また, 配置写像 $\mathrm{config}_{D_\gamma} \colon \mathrm{Poly}_{V,\gamma}^{l,r} \to \mathrm{Conf}_{V,D_\gamma}^{r}$ を $\mathrm{config}_{\mathbb{C}}$ と同様の方法で定める. ただし, $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-; V)$ の代わりに $\mathcal{O}_{D_\gamma}(-; V) \coloneqq \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(-; V)|_{D_\gamma}$ を用いる.

4.2　配置写像の連続性

配置写像について以下の 2 つの命題が成り立つ.

Theorem 4.5. 配置写像 $\mathrm{config}_{\mathbb{C}}\colon \mathrm{Poly}_V^{l,inv} \to \mathrm{Conf}_{V,\mathbb{C}}^{dl}$ は連続である.

Theorem 4.6. γ を $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線とする. このとき, 配置写像 $\mathrm{config}_{D_\gamma}\colon \mathrm{Poly}_{V,\gamma}^{l,r} \to \mathrm{Conf}_{V,D_\gamma}^{r}$ は連続である.

Theorem 4.5 の証明の方針について述べる. まず, $\mathrm{Poly}_V^{l,inv}$ に対応するスキームを準備する.

Definition 4.7. 可換環 P_d^l を $P_d^l \coloneqq \mathbb{C}[\{X_{ij}^{(k)}\}_{1\le i,j\le d, 0\le k\le l}, T]/(T\cdot\det(X_{ij}^{(l)})-1)$ と定める.

$\mathrm{Spec}P_d^l$ の analytification と $\mathrm{Poly}_{\mathbb{C}^d}^{l,inv}$ は同相である.

l 次の係数が可逆である $M_d(P_d^l)$ 係数 l 次多項式 $F(z)$ を $F(z) \coloneqq (X_{ij}^{(l)})z^l + (X_{ij}^{(l-1)})z^{l-1} + \cdots + (X_{ij}^{(0)})$ と定める. $F(z)$ は層の準同型 $\widetilde{F}\colon \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{P_d^l}} \to \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{P_d^l}}$ を定める. $\widetilde{F}$ は injective なので, cokernel を取って, 短完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{P_d^l}} \xrightarrow{\widetilde{F}} \mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{P_d^l}} \xrightarrow{q} \mathrm{Coker}\,\widetilde{F} \longrightarrow 0$$

が得られる.

Proposition 4.8. $[\mathrm{Coker}\,\widetilde{F}, q] \in \mathfrak{Quot}^{dl}_{\mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}, \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}(\mathrm{Spec}P_d^l)$ である.

Proof of Theorem 4.5. Proposition 4.8 より, scheme の射 $\mathrm{Spec}P_d^l \to \mathrm{Quot}^{dl}_{\mathcal{O}^d_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}, \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}}$ が定まる. analytification を取ることにより連続写像 $\mathrm{Poly}_{\mathbb{C}^d}^{l,inv} \to \mathrm{Conf}_{\mathbb{C}^d,\mathbb{C}}^{dl}$ が定まり, 構成よりこれは $\mathrm{config}_{\mathbb{C}}\colon \mathrm{Poly}_{\mathbb{C}^d}^{l,inv} \to \mathrm{Conf}_{\mathbb{C}^d,\mathbb{C}}^{dl}$ と一致する. □

5 バルクエッジ対応の設定と指数の定義

X を向き付けられた滑らかな n 次元閉多様体, E を X 上の階数 d の複素ベクトル束とする. 各 $x \in X$ に対して有界線形作用素

$$H_x\colon l^2(\mathbb{Z}; E_x) \to l^2(\mathbb{Z}; E_x)$$

が与えられているとする. $H \coloneqq \{H_x\}_{x\in X}$ と書く. H_x は $x \in X$ に依らない $k, l \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ を用いて $H_x = \sum_{j=-k}^{l} a_j(x)S^j$ と表せると仮定する. ここで, $S\colon l^2(\mathbb{Z}; E_x) \to l^2(\mathbb{Z}; E_x)$ は $S((v_i)_i) = (v_{i-1})_i$ を満たすシフト作用素とする. また, $-k \le j \le l$ に対して, a_j は複素ベクトル束 $\mathrm{End}(E) \to X$ の連続切断 $a_j\colon X \to \mathrm{End}(E)$ であるとする. さらに, $\mathbb{C}$ 内の単純閉曲線 γ であって, 任意の $x \in X$ に対して $\sigma(H_x)$ を H_x のスペクトルとしたときに, $\sigma(H_x) \cap \gamma = \emptyset$ を満たすものが与えられていると仮定する.

5.1 バルク指数の定義

Fourier 変換により H_x に対応する $\widehat{H}_x\colon L^2(S^1; E_x) \to L^2(S^1; E_x)$ を考える. S^1 の座標を z とすると, $\widehat{H}_x = \sum_{j=-k}^{l} a_j(x)z^j$ である. 複素ベクトル束 $\mathrm{proj}_X^* E \to X \times S^1$ の部分束 E_{bulk} を次のよう

に定める. 各 $x \in X$, $z \in S^1$ ごとに $(\mathrm{proj}_X^* E)_{x,z} = E_x$ 上の射影

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\lambda \cdot \mathrm{id} - \widehat{H}_x(z))^{-1} d\lambda$$

を考え, その像の定める $\mathrm{proj}_X^* E$ の部分束を E_{bulk} とする. E_{bulk} の $x \in X$, $z \in S^1$ におけるファイバーは γ の内側に含まれる $\widehat{H}_x(z)$ の固有値に対応する広義固有空間の直和と一致する.

Definition 5.1. $\{H_x\}_{x\in X}$ の**バルク指数** (bulk index) $\mathrm{ind}^b(E,H)$ を

$$\mathrm{ind}^b(E,H) \coloneqq -\int_{X\times S^1} ch([E_{\mathrm{bulk}}])$$

と定める.

5.2 エッジ指数の定義

$P_{\geq 0}\colon l^2(\mathbb{Z}; E_x) \to l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}; E_x)$ を射影作用素とする. $P_{\geq 0}$ の随伴作用素 $P_{\geq 0}^*\colon l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}; E_x) \to l^2(\mathbb{Z}; E_x)$ は

$$P_{\geq 0}^*((v_i)_i) \coloneqq (w_i)_i, \quad \text{where} \quad w_i = \begin{cases} 0 & i < 0 \text{ のとき} \\ v_i & i \geq 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

で与えられる. 各 $x \in X$, $\lambda \in \gamma$ に対して,

$$(H_x - \lambda)^{\#} \coloneqq P_{\geq 0}(H_x - \lambda)P_{\geq 0}^*\colon l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}; E_x) \to l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}; E_x)$$

と定める.

Lemma 5.2. $\{(H_x - \lambda)^{\#}\}_{x,\lambda}$ は *Fredholm* 作用素の連続族である.

Proof. $x \in X$, $\lambda \in \gamma$ に対して, $H_x - \lambda$ は可逆なので特に Fredholm である. $(H_x - \lambda) - (P_{\geq 0}(H_x - \lambda)P_{\geq 0}^* \oplus P_{<0}(H_x - \lambda)P_{<0}^*)$ は finite rank operator なので特に $(P_{\geq 0}(H_x - \lambda)P_{\geq 0}^* \oplus P_{<0}(H_x - \lambda)P_{<0}^*)$ は Fredholm であり, $(H_x - \lambda)^{\#} = P_{\geq 0}(H_x - \lambda)P_{\geq 0}^*$ はその直和因子なので Fredholm である. □

Definition 5.3. $\mathrm{ind}H^{\#} \coloneqq \mathrm{ind}(\{(H_x - \lambda)^{\#}\}_{x\in X, \lambda\in\gamma}) \in K(X \times \gamma)$ とする. $\{H_x\}_{x\in X}$ の**エッジ指数** (edge index) $\mathrm{ind}^e(E,H)$ を

$$\mathrm{ind}^e(E,H) \coloneqq \int_{X\times\gamma} ch(\mathrm{ind}H^{\#})$$

と定める.

6 バルクエッジ対応の別証明 (主結果 2)

Theorem 6.1. *Section 5* における設定のもとで,

$$\mathrm{ind}^b(E,H) = -\mathrm{ind}^e(E,H)$$

である.

Proof. $\overline{D_\gamma}$ を $\mathbb{C}\setminus\gamma$ の 2 つの連結成分のうち有界な方と γ の和集合とする.

$$\beta_1 \colon K(X\times S^1)\to K(X\times S^1\times(\overline{D_\gamma},\gamma))$$
$$\beta_2 \colon K(X\times\gamma)\to K(X\times(D^2,S^1)\times\gamma)$$

をそれぞれ Bott 写像 (Section 2) とする. 双正則写像で $(\overline{D_\gamma},\gamma)$ を (D^2,S^1) に置き換えて考えることにより, β_1 が定まる. 各 $x\in X$, $z\in S^1$, $\lambda\in\gamma$ に対して $\widehat{H}_x(z)-\lambda\in \mathrm{GL}_{\mathbb{C}}(E_x)$ である. よって,

$$[\mathrm{proj}_X^*E,\mathrm{proj}_X^*E,\{\widehat{H}_x(z)-\lambda\}_{x,z,\lambda}]\in K(X\times S^1\times(\overline{D_\gamma},\gamma))$$
$$[\mathrm{proj}_X^*E,\mathrm{proj}_X^*E,\{\widehat{H}_x(z)-\lambda\}_{x,z,\lambda}]\in K(X\times(D^2,S^1)\times\gamma)$$

である. それぞれ u, v とおく. [AB64], [Ati68] より, それぞれ

$$\beta_1^{-1}(u)=-[E_{\mathrm{bulk}}]\in K(X\times S^1)$$
$$\beta_2^{-1}(v)=\mathrm{ind}H^{\#}\in K(X\times\gamma)$$

である. よって,

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}^b(E,H)+\mathrm{ind}^e(E,H)&=-\int_{X\times S^1}ch([E_{\mathrm{bulk}}])+\int_{X\times\gamma}ch(\mathrm{ind}H^{\#})\\&=\int_X\left(\int_{S^1}ch(\beta_1^{-1}(u))+\int_\gamma ch(\beta_2^{-1}(v))\right)\\&=\int_X\left(\int_{S^1}\int_{\overline{D_\gamma}}ch(u)+\int_\gamma\int_{D^2}ch(v)\right)\end{aligned}$$

となる. $T\coloneqq S^1\times\overline{D_\gamma}\cup_{S^1\times\gamma}D^2\times\gamma=\partial(D^2\times\overline{D_\gamma})$ とおくと, $K(X\times S^1\times(\overline{D_\gamma},\gamma))\oplus K(X\times(D^2,S^1)\times\gamma)\cong K(X\times(T,S^1\times\gamma))$ である. $(u,v)\in K(X\times S^1\times(\overline{D_\gamma},\gamma))\oplus K(X\times(D^2,S^1)\times\gamma)$ に対応するのは $[\mathrm{proj}_X^*E,\mathrm{proj}_X^*E,\{\widehat{H}_x(z)-\lambda\}_{x,z,\lambda}]\in K(X\times(T,S^1\times\gamma))$ である. したがって,

$$\begin{aligned}\int_X\left(\int_{S^1}\int_{\overline{D_\gamma}}ch(u)+\int_\gamma\int_{D^2}ch(v)\right)&=\int_X\int_T ch([\mathrm{proj}_X^*E,\mathrm{proj}_X^*E,\{\widehat{H}_x(z)-\lambda\}_{x,z,\lambda}])\\&=\int_X\int_T ch([\mathrm{proj}_X^*E]-[\mathrm{proj}_X^*E])=0\end{aligned}$$

より, $\mathrm{ind}^b(E,H)=-\mathrm{ind}^e(E,H)$ が従う. 2 つ目の等号で以下の可換図式を用いた.

$$\begin{array}{ccc}K(X\times(T,S^1\times\gamma))&\xrightarrow{ch}&H^{2*}(X\times(T,S^1\times\gamma);\mathbb{R})\\\downarrow&&\downarrow\\K(X\times T)&\xrightarrow{\quad ch\quad}&H^{2*}(X\times T;\mathbb{R})\end{array}$$

□

参考文献

[AB64] Michael Atiyah and Raoul Bott. On the periodicity theorem for complex vector bundles. *Acta Math.*, 112:229–247, 1964.

[AS69] M. F. Atiyah and I. M. Singer. Index theory for skew-adjoint Fredholm operators. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (37):5–26, 1969.

[Ati68] Michael Atiyah. Bott periodicity and the index of elliptic operators. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 19:113–140, 1968.

[Bot59] Raoul Bott. The stable homotopy of the classical groups. *Ann. of Math. (2)*, 70:313–337, 1959.

[GP13] Gian Michele Graf and Marcello Porta. Bulk-edge correspondence for two-dimensional topological insulators. *Comm. Math. Phys.*, 324(3):851–895, 2013.

[Har80] Bruno Harris. Bott periodicity via simplicial spaces. *J. Algebra*, 62(2):450–454, 1980.

[Hat93] Yasuhiro Hatsugai. Chern number and edge states in the integer quantum hall effect. *Phys. Rev. Lett.*, 71:3697–3700, Nov 1993.

[Hay17] Shin Hayashi. Bulk-edge correspondence and the cobordism invariance of the index. *Rev. Math. Phys.*, 29(10):1750033, 31, 2017.

[KDP80] K. v. Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance. *Phys. Rev. Lett.*, 45:494–497, Aug 1980.

[KRSB02] J. Kellendonk, T. Richter, and H. Schulz-Baldes. Edge current channels and Chern numbers in the integer quantum Hall effect. *Rev. Math. Phys.*, 14(1):87–119, 2002.

[Mac77] Dusa MacDuff. Configuration spaces. In *K-theory and operator algebras (Proc. Conf., Univ. Georgia, Athens, Ga., 1975)*, volume Vol. 575 of *Lecture Notes in Math.*, pages 88–95. Springer, Berlin-New York, 1977.

[Nit05] Nitin Nitsure. Construction of Hilbert and Quot schemes. In *Fundamental algebraic geometry*, volume 123 of *Math. Surveys Monogr.*, pages 105–137. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.

[Ric17] Andrea T. Ricolfi. Motivic classes of noncommutative quot schemes, arXiv preprint arXiv:2303.10617.

[Seg77] Graeme Segal. K-homology theory and algebraic K-theory. In *K-theory and operator algebras (Proc. Conf., Univ. Georgia, Athens, Ga., 1975)*, volume Vol. 575 of *Lecture Notes in Math.*, pages 113–127. Springer, Berlin-New York, 1977.

[TKNdN82] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. den Nijs. Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Phys. Rev. Lett.*, 49:405–408, Aug 1982.

Combinatorics of Symmetric Hypermatrices and Weighted Hypergraphs

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科　多元数理科学専攻
成田　知将 (Kazumasa NARITA) *

概要

各辺に重みが付いた, n 個の頂点からなる一様ハイパーグラフを考える．このとき各頂点 v_j には重み付き次数 d_j が定まり, したがって非負実数の有限列 $(d_1, \ldots, d_n)$ を得る．本小論では, 非負実数の有限列が与えられたとき, その列を重み付き次数の列として実現するような一様ハイパーグラフが存在するための必要十分条件を与える．これは Hakimi [5] による定理の一般化である．本小論は [8] に基づく．

1　導入

1.1　用語

$V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ を有限集合とし, d は 2 以上の自然数とする．V の部分集合たち $e_1, \ldots, e_m$ は $|e_i| = d$ をみたすとする．$E := \{e_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ とする．組 (V, E) を d **一様ハイパーグラフ (**d**-uniform hypergraph)** といい[*1], V の各元を**頂点**, E の各元を**辺**という[*2]．特に, 2 一様ハイパーグラフはグラフに他ならない．d 一様ハイパーグラフが**単純** であるとは, $E = \{e_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ が同じ辺を含まないことをいう．すなわち, 異なる $1 \leq i, j \leq m$ について $e_i \neq e_j$ が成り立つことをいう．単純な 2 一様グラフは, 単純グラフに他ならない．単純でない d 一様ハイパーグラフが与えられたとき, 適当に辺を削除することで単純な d 一様ハイパーグラフが得られる．**以後, 単純な** d **一様ハイパーグラフについてのみ考える**．

(V, E) に対し, 頂点 v_i における**次数** $\overline{d}_i$ を, v_i を含む辺の数として定める．非負整数の列 $\overline{D} := (\overline{d}_1, \ldots, \overline{d}_n)$ を**次数列**という．ここで, $n := |V|$．頂点のナンバリングを適当に付け直すことで, $\overline{D}$ は非増大列, すなわち $\overline{d}_1 \geq \cdots \geq \overline{d}_n$ をみたすと仮定してよい．

一方, (V, E) に対し, 非負値関数 $w : E \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ を考える．この w を **(辺上の) 重み (関数)** といい, (V, E, w) を**重み付きハイパーグラフ**という．重み付きハイパーグラフ (V, E, w) の頂点 v_i における**重みつき次数** d_i を,

$$d_i := \sum_{v_i \in e_j} w(e_j)$$

* E-mail:m19032e@math.nagoya-u.ac.jp

[*1] 本小論では, 訳語が一般的でない恐れがあるとき, 英語を付記する．

[*2] 頂点をノード, 辺をハイパーエッジと呼ぶ人もいる．

によって定める．重み付き次数を考える際には, $w(e_j) = 0$ となる e_j は, 元から存在しないものとみなせる．非負実数の列 $D := (d_1, \ldots, d_n)$ を**重み付き次数列**という．頂点のナンバリングを適当に付け直すことで, $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ が成り立つと仮定してよい．(V, E) に対し, その次数列 $\overline{D}$ は, 任意の $e \in E$ に対して $w(e) = 1$ となるような重み w についての重み付き次数列に他ならない．

1.2 先行研究と主定理

上の小節において, 単純な d 一様ハイパーグラフ (V, E) に対し, 次数列 $\overline{D}$ を定めた．非負整数の有限列が, ある単純な d 一様ハイパーグラフ (V, E) の次数列として実現するとき, **d-graphic** という．非負整数の有限列が d-graphic であるための条件を求めることは自然な問いであり, 長年にわたって研究されてきた．Havel [6] と Hakimi [5] は独立に, 非負整数の有限列が 2-graphic であるための条件を与えた．現在では少なくとも 7 つの, 互いに同値な 2-graphic な有限列の特徴付けが与えられている [7]．一方で, Dewdney [3] は Havel と Hakimi による特徴付けを一般化し, 次を得た:

定理 1.1. ([3]) d を 2 以上の自然数とし, n を $n \geq d$ をみたす自然数とする．$\overline{D} = (\overline{d}_1, \ldots, \overline{d}_n)$ を非負整数の非増大列とする．このとき, $\overline{D}$ が d-graphic であるための必要十分条件は, 次のすべての条件をみたす非負整数の非増大列 $\overline{D}' = (\overline{d}'_2, \ldots, \overline{d}'_n)$ が存在することである:

(1) $\overline{D}'$ は $(d-1)$-graphic.

(2) $\sum_{i=2}^{n} \overline{d}'_i = (d-1)\overline{d}_1$.
(3) $\overline{D}'' := (\overline{d}_2 - \overline{d}'_2, \ldots, \overline{d}_n - \overline{d}'_n, 0)$ は d-graphic.

2-graphic な列の特徴付けが多く存在することは先に述べたとおりであるが, 3 以上の d に対しては, d-graphic な列の特徴付けは現在 Dewdney の定理しか知られていない．また, Dewdney の定理は効率的なアルゴリズムではない．したがって, d-graphic な列の特徴付けは現在まで盛んに研究が続けられている．(例えば, [1], [2], [4] などを参照されたい.)

一方, Hakimi [5] は 2-graphic な列の特徴付けだけでなく, 非負実数の有限列がある重み付き単純グラフの重み付き次数列であるための必要十分条件も与えた．本小論における主定理は, 筆者が [8] において示した次の定理である:

定理 1.2. ([8]) d を 2 以上の自然数とし, n を $n \geq d$ をみたす自然数とする．$D = (d_1, \ldots, d_n)$ を非負実数の非増大列とする．このとき, D を重み付き次数列とするような d 一様重み付きハイパーグラフが存在するための必要十分条件は, D が不等式

$$dd_1 \leq \sum_{i=1}^{n} d_i \tag{1.1}$$

をみたすことである．さらに, D がこの不等式をみたすとき, $w(e) > 0$ をみたす辺 e の数が高々 n 個しかないような, D を重み付き次数列とする d 一様重み付きハイパーグラフが存在する．

上の定理の前半において $d = 2$ を代入したものが, Hakimi により得られていた特徴付けに他ならない．したがって, 上の主定理の前半は Hakimi の定理の一般化である．また, 主定理の後半により,

より強い主張になっている.

注 1.3. ([8]) 非負整数の非増大列 $\overline{D} = (\overline{d}_1, \ldots, \overline{d}_n)$ が d-graphic ならば, $\overline{D}$ は不等式 (1.1) をみたす. 実際, $\overline{D}$ が d-graphic ならば, Dewdney の定理 (定理 1.1) における $\overline{D}'$ が存在し,

$$d\overline{d}_1 = \overline{d}_1 + \sum_{i=2}^{n} \overline{d}'_i \leq \overline{d}_1 + \sum_{i=2}^{n} \overline{d}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{d}_i$$

が成り立つ. ここで, 左の等号において条件 (2) を用い, 中央の不等号において条件 (3) を用いた. 前述したように次数列は, 任意の辺に対して重み 1 を付けた重み付きハイパーグラフの重み付き次数列であるから, d-graphic な $\overline{D}$ が不等式 (1.1) をみたすことは当然成り立つべきことである.

2 主定理の証明

2.1 主定理の証明の準備 1: majorization

ベクトル $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ に対し, 成分のナンバリングを $x = (x_{[1]}, \ldots, x_{[n]})$ と付け替えて $x_{[1]} \geq \cdots \geq x_{[n]}$ が成り立つようにする. 2 つのベクトル $x, y \in \mathbf{R}^n$ が

$$\sum_{i=1}^{k} x_{[i]} \leq \sum_{i=1}^{k} y_{[i]} \quad \text{for all} \quad 1 \leq k \leq n-1$$

および

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i,$$

をみたすとき, x **は** y **によって majorize される** (x is **majorized** by y) といい, $x \preceq y$ と表す. ベクトル $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ が $x \in \mathbf{R}^n$ の成分の並び替えによって得られるとき, $\tilde{x}$ は x の **permutation** であるという. (詳細については, 例えば [11, Section 3.2] を参照されたい.)

ベクトル $w \in \mathbf{R}^n$ が $v_1, \ldots, v_m \in \mathbf{R}^n$ の**凸結合**であるとは, $w = \sum_{j=1}^{m} a_j v_j$ をみたす $\{a_j \mid a_j \geq 0, \sum_{j=1}^{m} a_j = 1\}_{j=1}^{m}$ が存在することをいう. Rado [9] は, $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対し, x が y によって majorize されるための必要十分条件は, x が y の permutations の凸結合であることを示した. 一般に, $y \in \mathbf{R}^n$ は $n!$ 個の permutation を持つ. Zhan [10] はカラテオドリの定理を使うことで, 凸結合に現れる permutation の数は n 個以下に減らせることを示した. すなわち, 次を示した:

定理 2.1. ([9], [10]) 2 つのベクトル $x, y \in \mathbf{R}^n$ に対し, x が y によって majorize されるための必要十分条件は, x が y の高々 n 個の permutations の凸結合として書けることである.

2.2 主定理の証明の準備 2: 対称ハイパー行列

グラフは図示すると見やすいものの, 実際の計算・アルゴリズムにおいては, そのグラフに（何かしらの意味で）対応するグラフを考え, 計算を実行することになる. この小節では, 重み付き d 一様

ハイパーグラフとハイパー行列の対応を与え, 主定理 (定理 1.2) をハイパー行列についての主張に書き換える.

$\mathbf{N}$ を正の整数全体がなす集合とする. 整数 $n \in \mathbf{N}$ に対し, $\langle n \rangle := \{1, 2, \ldots, n\}$ とおく. $d \in \mathbf{N}$ とする. 正の整数 $n_1, \ldots, n_d$ に対し, 関数 $A : \langle n_1 \rangle \times \cdots \times \langle n_d \rangle \to \mathbf{R}$ を **(実)d ハイパー行列** (**a (real) d-hypermatrix**) という. 2 ハイパー行列は通常の行列に他ならない. 値 $A(i_1, \ldots, i_d)$ を**成分**という. 本小論では, $n_1 = \cdots = n_d = n$ の場合のみ考える. 1 つのインデックス i_k を l に固定すると, 集合 $\{A(i_1, \ldots, i_{k-1}, l, i_{k+1}, \ldots, i_d) \mid i_1, \ldots i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots, i_d \in \langle n \rangle\}$ が得られる. この集合を, $i_k = l$ に関する**スライス** (**slice**) という. スライスそのものが $(d-1)$ ハイパー行列とみなせる. 各 $k \in \langle n \rangle$ に対し,

$$I_k := \left\{(k, i_2, \ldots, i_d) \in \langle n \rangle^d \mid i_2 < \cdots < i_d, \quad i_2, \ldots, i_d \in \langle n \rangle \setminus \{k\}\right\}$$

とおく.

d ハイパー行列 A の成分がすべて非負のとき, A は**非負**であるという. $\mathfrak{S}_d$ を d 次対称群とする. d ハイパー行列 A が任意の $(i_1, \ldots, i_d) \in \langle n \rangle^d$ および任意の $\pi \in \mathfrak{S}_d$ に対し,

$$A(i_{\pi(1)}, \ldots, i_{\pi(d)}) = A(i_1, \ldots, i_d)$$

をみたすとき, A は**対称**であるという. d ハイパー行列 A が *strongly hollow* であるとは, 次の条件をみたすことをいう: 成分 $A(i_1, \ldots, i_d)$ が同じインデックスを持つ, すなわち $i_k = i_l$ $(k \neq l)$ となる $k \neq l$ が存在するならば, $A(i_1, \ldots, i_d) = 0$. 特に, strongly hollow な 2 ハイパー行列とは, 対角成分がすべて 0 であるような, 通常の正方行列のことである. なお, この "strongly hollow" という呼び名は, 筆者が [8] において導入したものである. $n \geq d$ とすると, 非負で対称な strongly hollow d ハイパー行列は一般に, $\binom{n}{d} \cdot d!$ 個の正の成分を持つことに注意されたい.

$R = (r_1, \ldots, r_n)$ を $r_1 \geq \cdots \geq r_n \geq 0$ をみたす $\mathbf{R}^n$ の元とする. $i_1 = j$ $(j \in \langle n \rangle)$ に関するスライスのすべての成分の和が r_j に等しいような, 非負で対称な strongly hollow d ハイパー行列全体がなす集合を $\mathcal{N}_0(d; R)$ と書くことにする. いま, 対称なハイパー行列を考えているので, 上の定義における i_1 は任意の i_k に置き換えてよい. 非負で対称な strongly hollow d ハイパー行列 A が $\mathcal{N}_0(d; R)$ に属することの必要十分条件は, 各 $k \in \langle n \rangle$ に対し,

$$(d-1)! \sum_{\mathbf{i} \in I_k} A(\mathbf{i}) = r_k \tag{2.1}$$

が成り立つことである.

集合 $\mathcal{N}_0(d; R)$ は一般に空集合である. 例えば, $n = 1$, $R = (1)$ のとき明らかに $\mathcal{N}_0(d; R)$ は空集合である. また, 例えば $n = 2$, $R = (2, 1)$ の場合も $\mathcal{N}_0(d; R)$ が空集合であることが容易にわかる. よって, $\mathcal{N}_0(d; R)$ が空集合でないための必要十分条件を求めることは自然な問いである. そして, 実はその条件を与える定理は主定理 (定理 1.2) と対応している. 以下, そのことについて説明する.

非負で対称な strongly hollow d ハイパー行列 A に対し, 次のようにして重み付き d 一様ハイパーグラフ (V, E, w) を対応させることができる:

$$V = \{v_1, \ldots, v_n\},$$

$$E = \left\{e_{i_1 \cdots i_d} := \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_d}\} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq n\right\},$$

$$w(e_{i_1\cdots i_d}) = A(i_1, \ldots, i_d).$$

とおく. このとき, 組 (V, E, w) は重み付き d 一様ハイパーグラフになる. 逆に, 与えられた重み付き d 一様ハイパーグラフ (V, E, w) に対し, 必要なら重み 0 の辺を加えることで, 非負で対称な strongly hollow d ハイパー行列 A を対応させることができる. $i_1 = j$ に関するスライスのすべての成分の和が $r_j \geq 0$ に等しいような非負で対称な strongly hollow d ハイパー行列 A を考える. このとき, 上の対応によって対応する重み付き d 一様ハイパーグラフ (V, E, w) は

$$d_j = \frac{r_j}{(d-1)!}$$

をみたす. したがって, 主定理 (定理 1.2) は次のように書き換えられる:

定理 2.2. d, n を $d \geq 2$ and $n \geq d$ をみたす自然数とする. $R = (r_1, \ldots, r_n)$ を $r_1 \geq \cdots \geq r_n \geq 0$ をみたす $\mathbf{R}^n$ の元とする. このとき, 集合 $\mathcal{N}_0(d; R)$ が空でないための必要十分条件は

$$dr_1 \leq \sum_{i=1}^{n} r_i \tag{2.2}$$

が成り立つことである. さらに, この条件が成り立つとき, $\mathcal{N}_0(d; R)$ の元で, 正の成分が高々 $n \cdot d!$ 個であるようなものが存在する.

2.3 主定理の証明

定理 2.2 を示す.

Proof. $A \in \mathcal{N}_0(d; R)$ とする. このとき, 各 $k \in \langle n \rangle$ に対し, (2.1) が成り立つ. $2 \leq i_2 < i_3 < \cdots < i_d \leq n$ を固定する. A の対称性から,

$$\begin{aligned} &(d-1) \cdot A(1, i_2, \ldots, i_d) \\ &= A(i_2, 1, i_3, \ldots, i_d) + A(i_3, 1, i_2, i_4 \ldots, i_d) + \cdots + A(i_d, 1, i_2, \cdots, i_{d-1}) \end{aligned} \tag{2.3}$$

が成り立つ. 順序づけられた各 n 組 $(i_2, 1, i_3, \ldots, i_d), (i_3, 1, i_2, i_4, \ldots, i_d), \ldots, (i_d, 1, i_2, \ldots, i_{d-1})$ は $I_2, \ldots, I_n$ のうちのどれか 1 つに属する. (2.3) の右辺には, $\{A(i_1, \ldots, i_d) \mid (i_1, \ldots, i_d) \in \cup_{j=2}^{n} I_j,\ i_l = 1 \text{ for some } l\}$ しか現れないので,

$$0 \leq r_2 + \cdots + r_n - (d-1)r_1$$

が成り立つ. したがって (2.2) が成り立つ.

逆を示す.

$$S = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{n} r_i.$$

とおく. 明らかに $r_1 \leq S$ が成り立つ. ベクトル

$$R' := \left(\frac{r_1}{S}, \ldots, \frac{r_n}{S} \right).$$

を考える. $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq n$ に対し, $v_{i_1 i_2 \cdots i_d}$ を, $\mathbf{R}^n$ の元で, $i_1, i_2, \ldots, i_d$ 成分はすべて 1 で, その他の成分はすべて 0 であるようなものとする. このとき,

$$R' \preceq v_{12\cdots d} = (1, \ldots 1, 0, \ldots, 0)$$

が成り立つ. ここで, 最右辺における 1 の個数は d 個で, 0 の個数は $n-d$ 個である. ゆえに, Rado の定理 (定理 2.1) によって,

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq n} c_{i_1 i_2 \cdots i_d} v_{i_1 i_2 \cdots i_d} = R' \quad \text{and} \quad \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq n} c_{i_1 i_2 \cdots i_d} = 1$$

をみたす非負定数たち $\{c_{i_1 i_2 \cdots i_d} \geq 0 \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq n\}$ が存在する. このとき, 任意の $k \in \langle n \rangle$ に対し,

$$\sum_{l=1}^{d} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots i_{l-1} \\ < i_l = k < i_{l+1} < \cdots < i_d \leq n}} c_{i_1 i_2 \cdots i_d} = \frac{r_k}{S}.$$

が成り立つ. 集合 $\{c_{i_1 i_2 \cdots i_d} \geq 0 \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leq n\}$ に対し, 非負で対称な strongly hollow d ハイパー行列 $(\tilde{c}_{i_1 i_2 \cdots i_d})$ で,

$$\tilde{c}_{\pi(i_1)\pi(i_2)\cdots\pi(i_d)} = c_{i_1 i_2 \cdots i_d} \quad \text{for any} \quad \pi \in \mathfrak{S}_d.$$

をみたすものが自然に構成できる. 各 $c_{i_1 i_2 \cdots i_d}$ は非負であるから, ハイパー行列 $(\tilde{c}_{i_1 i_2 \cdots i_d})$ も非負である. このとき, 各 $k \in \langle n \rangle$ に対し,

$$\sum_{j_1, \cdots, j_{d-1} \in \langle n \rangle \setminus k} \tilde{c}_{k j_1 \cdots j_{d-1}} = (d-1)! \sum_{l=1}^{d} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots i_{l-1} \\ < i_l = k < i_{l+1} < \cdots < i_d \leq n}} c_{i_1 i_2 \cdots i_d} = \frac{(d-1)! r_k}{S}$$

が成り立つ. ゆえに,

$$\left(\frac{S}{(d-1)!} \tilde{c}_{i_1 i_2 \cdots i_d} \right) \in \mathcal{N}_0(d; R).$$

が示せた. 定理の後半は Zhan の定理 (定理 2.1) と $\left(\frac{S}{(d-1)!} \tilde{c}_{i_1 i_2 \cdots i_d} \right)$ の対称性から従う. □

2.4 $\mathcal{N}_0(d; R)$ の幾何学的性質

上で定義した $\mathcal{N}_0(d; R)$ が空でないとすると, どのような集合だろうか? ここでは紙数の都合上, 証明を省略するが, 筆者は [8] において次を示した:

補題 2.3. ([8]) d, n を $d \geq 2$ および $n \geq d$ をみたす自然数とする. $R = (r_1, \ldots, r_n)$ を $r_1 \geq \cdots \geq r_n \geq 0$ をみたす $\mathbf{R}^n$ の元とする. 集合 $\mathcal{N}_0(d; R)$ が空でないと仮定する. このとき, $n \geq d+2$ ならば, $\mathcal{N}_0(d; R)$ は非負で対称な strongly hollow d ハイパー行列全体がなすベクトル空間における凸多面体となり, $n = d$ または $n = d+1$ ならば, $\mathcal{N}_0(d; R)$ は 1 点集合になる.

上の補題より, $\mathcal{N}_0(d; R)$ が空ではなく, $n \geq d+2$ ならば, $\mathcal{N}_0(d; R)$ は凸多面体となることがわかった. 一般に, 凸集合 C の点 x が**極点** (**extreme point**) であるとは, x を内点とするような, C に含まれる線分が存在しないことをいう. 筆者は [8] において次を示した:

命題 2.4. ([8]) d, n を $d \geq 2$ および $n \geq d$ をみたす自然数とする．$R = (r_1, \ldots, r_n)$ を $r_1 \geq \cdots \geq r_n \geq 0$ をみたす $\mathbf{R}^n$ の元とする．$\mathcal{N}_0(d; R)$ は空でない凸多面体とする．$A \in \mathcal{N}_0(d; R)$ が端点ならば，A の成分のうち正のものは，高々 $n \cdot d!$ 個である．

参考文献

[1] Achuthan, N., Achuthan, N., Simanihuruk, M.: On 3-uniform hypergraphic sequences, J. Combin. Math. Combin. Comput., **14**(1993), 3-13.

[2] Behrens, S., Erbes, C., Ferrara, M., Hartke, S.G., Reiniger, B., Spinoza, H., Tomlinson, C.: New results on degree sequences of uniform hypergraphs, Electron. J. Combin. **20**(2013), #P14.

[3] Dewdney, A.K.: Degree sequences in complexes and hypergraphs, Proc. Amer. Math. Soc., **53**(1975), 535-540.

[4] Frosini, A., Picouleau, C., Rinaldi, S.: New sufficient conditions on the degree sequences of uniform hypergraphs, Theoret. Comput. Sci., **868**(2021), 97-111.

[5] Hakimi, S. L.: On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph I, J. Soc. Indust. Appl. Math., **10**(1962), 496-506.

[6] Havel, V.: Eine Bemerkung über die Existenz der endlichen Graphen (Czech), Časopis Pěst. Mat., **80**(1955), 477-480.

[7] Hoogeveen, H., Sierksma G.: Seven criteria for integer sequences being graphic, J. Graph Theory, **15**(1991), 223-231.

[8] Narita, K.: Convex Hulls of Grassmannians and Combinatorics of Symmetric Hypermatrices, arXiv:2204.06953

[9] Rado, R.: An inequality, J. London Math. Soc., **27**(1952), 1-6.

[10] Zhan, X.: The sharp Rado theorem for majorizations, Amer. Math. Monthly, **110**(2003), no. 2, 152-153.

[11] Zhan, X.: Matrix Theory, Graduate Studies in Mathematics, **147**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013.

時間に依存するポテンシャル付きシュレディンガー方程式の解について

東京理科大学 大学院理学研究科 数学専攻 (修士課程 2 年)
濱岡 小鈴 (Kosuzu HAMAOKA) *

概要

時間に依存するポテンシャルつきシュレディンガー方程式の解の評価は、ポテンシャルの増大度に依存する. 先行研究では, ポテンシャルが 1 次増大度を持つとき Modulation 空間での解のノルム評価が得られており, 証明にはポテンシャルの増大度が重要な役割を果たす. 本講演では、ポテンシャルが劣 2 次増大度を持つときの, 解の Modulation ノルムの評価を紹介する.

1 導入

本研究では以下のポテンシャルをもつシュレディンガー方程式の解について考える：

$$i\partial_t u(t,x) + \frac{1}{2}\Delta u(t,x) = V(t,x)u(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

ただし, $i = \sqrt{-1}$ で, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ は未知関数, ポテンシャル $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は既知関数, $\partial_t u = \frac{\partial}{\partial t}u$, $\partial_{x_j} u = \frac{\partial}{\partial x_j}u$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2$ である. $V(t,x)$ に次の仮定を課す.

仮定 1. $V(t,x)$ は各 $t \in \mathbb{R}$ に対して $V(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x)$ であり, $\epsilon > 0$ が存在して, 任意の多重指数 $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ に対して

$$|\partial_x^\alpha V(t,x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{2-\epsilon-|\alpha|}, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \tag{2}$$

をみたす $C_\alpha > 0$ が存在する.

また, 波束変換,Modulation 空間,Wiener-Amalgum 空間を以下で定義する.

定義 1. (波束変換)
$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ に対し, 窓関数 φ による f の波束変換を, 以下で定める.

$$W_{\varphi(t,\cdot)} f(x,\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(t, y-x)} f(t,y) e^{-iy\cdot\xi} dy \tag{3}$$

* 本講演は東京理科大学の加藤圭一氏と瀧澤駿氏との共同研究に基づく. E-mail:1122520@ed.tus.ac.jp

定義 2. (Modulation 空間)

$1 \leq p, q \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$f \in M^{p,q} :\Leftrightarrow \quad \|f\|_{M^{p,q}_{\varphi}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_{\varphi} f(x,\xi)|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} d\xi \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \tag{4}$$

定義 3. (Wiener-Amalgum 空間)

$1 \leq p, q \leq \infty$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$f \in W^{p,q} :\Leftrightarrow \quad \|f\|_{W^{p,q}_{\varphi}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_{\varphi} f(x,\xi)|^q d\xi \right)^{\frac{p}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{5}$$

また, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, ϕ, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して, 反転公式

$$\frac{1}{\langle \psi, \phi \rangle} V_{\psi}^* V_{\phi} f = f \tag{6}$$

が成り立つ.([5], Corollary 11.2.7)

2 主定理

本研究では, 次の結果が得られた.

定理 1. 実数値関数 $V(t,x)$ は仮定 1 をみたすとする. また, $T > 0$, $C_T > 0$ が存在し, $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$, $\varphi(t,x) = e^{\frac{1}{2} it\Delta} \varphi_0(x)$, $u(t,x)$ は (1) の $C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R}^n))$ での解とする. このとき,

$$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,q}_{\varphi(t,\cdot)}} \leq C_T \|u_0\|_{W^{p,q}_{\varphi_0}} \qquad (u_0(x) = u(0,x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \forall t \in [-T,T]) \tag{7}$$

が成り立つ. ただし, $1 \leq p \leq \infty$ とし, $p \geq \frac{n}{\epsilon}$ のとき $q \geq p$, $p < \frac{n}{\epsilon}$ のとき $p \leq q < \frac{np}{n-p\epsilon}$ とする.

Wiener-Amalgum 空間におけるシュレディンガー方程式の研究は,[3],[4] などがある. (1) の解の Modulation ノルムの評価については,[1] では, $p = q$ で, ポテンシャルが 2 次の増大度を持つときの Modulation ノルムが初期値の Modulation ノルムで上から評価することができている. また, 一般の p, q に対しては, ポテンシャルが 1 次の増大度を持つときの Modulation ノルムが初期値の Modulation ノルムで上から評価することができている. 本研究は, ポテンシャルが劣 2 次の増大度を持つときに, 解の Modulation ノルムが初期値の Wiener-Amalgum ノルムで上から評価できていることが新しい点である.

3 証明の概略

STEP1: **解の波束変換を用いた表現**

$t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ に対し, 特性曲線 $x(s) = x(s;t,x,\xi)$, $\xi = \xi(s;t,x,\xi)$ を

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \xi(s) \\ \dot{\xi}(s) = -\nabla_x V(s, x(s;t,x,\xi)) \end{cases} \tag{8}$$

の解とする.

この特性曲線と波束変換を用いて,

$$|W_{\varphi(t,\cdot)}u(x,\xi)| \le |W_{\varphi_0}u_0(x(0,t,x,\xi),\xi(0;t,x,\xi))| + \int_0^t |Ru(\tau,x(\tau;t,x,\xi),\xi(\tau;t,x,\xi))|d\tau \quad (9)$$

が得られる. ここで,$V_{jk}(t,x,y) = \int_0^1 \partial_{x_j}\partial_{x_k}V(t,x+(1-\theta)(y-x))(1-\theta)d\theta$ に対して,

$$Ru(t,x,\xi) = \sum_{j,k=1}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(t,y-x)}V_{jk}(t,x,y)(y_j-x_j)(y_k-x_k)u(t,y)e^{-iy\cdot\xi}dy \quad (10)$$

とする.

STEP2: **各項の評価**

次に, $C_T^1, C_T^2 > 0$ に対して,

$$\|\|W_{\varphi_0}u_0(x(0,t,x,\xi),\xi(0;t,x,\xi))\|_{L_x^p}\|_{L_\xi^q} \le C_T^1\|\|W_{\varphi_0}u_0(x,\xi)\|_{L_\xi^q}\|_{L_x^p} \quad (11)$$

$$\|\|Ru(\tau,x(\tau;t,x,\xi),\xi(\tau,;t,x,\xi))\|_{L_x^p}\|_{L_\xi^q} \le C_T^2\|\|W_{\varphi(\tau,\cdot)}u(x,\xi)\|_{L_x^p}\|_{L_\xi^q} \quad (12)$$

を示す.

これが示されれば,

$$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,q}_{\varphi(t,\cdot)}} \le C_T^1\|u_0\|_{W^{p,q}_{\varphi_0}} + C_T^2\int_0^t \|u(\tau,\cdot)\|_{M^{p,q}_{\varphi(\tau,\cdot)}}d\tau \quad (13)$$

がわかるので,Gronwall の不等式を用いれば定理が示される.

証明には, 次の補題を用いる.

補題 1. $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$ とし, $1 \le p' \le p$, $1 \le q' \le q$ のとき, $u \in S'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ に対して,

$$\|u(t,\cdot)\|_{M^{p,q}_{\varphi(t,\cdot)}} \le C_t\|u(t,\cdot)\|_{M^{p',q'}_{\varphi(t,\cdot)}} \quad (\forall t \in \mathbb{R}) \quad (14)$$

をみたす $C_t > 0$ が存在する.

補題 2. $T > 0$ が存在し, $\tau, t \in [-T,T]$, $x,\xi \in \mathbb{R}^n$ に対し, 特性曲線 $x(s) = x(s;t,x,\xi)$, $\xi = \xi(s;t,x,\xi)$ を

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \xi(s) \\ \dot{\xi}(s) = -\nabla_x V(s,x(s;t,x,\xi)) \end{cases} \quad (15)$$

の解とする. このとき,

$$\left|\frac{\partial x(\tau,t,x,\xi)}{\partial x}\right| \ge C$$

を満たす定数 $C > 0$ が存在する.

補題 3. $T > 0$ が存在し, $\tau, t \in [-T, T]$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ に対し, 特性曲線 $x(s) = x(\tau; t, x, \xi)$, $\xi = \xi(\tau; t, x, \xi)$ を

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \xi(s) \\ \dot{\xi}(s) = -\nabla_x V(s, x(s; t, x, \xi)) \end{cases} \tag{16}$$

の解とする. このとき, $X = x(\tau; t, x, \xi)$ とおく. x から X への変数変換を行い, $X = \Phi(\tau, t, x, \xi)$ とすると, $x = \Phi^{-1}(\tau, t, X, \xi)$ に対し,

$$\left| \frac{\partial \xi(\tau, t, \Phi^{-1}(\tau, t, X, \xi), \xi)}{\partial \xi} \right| \geq C \tag{17}$$

を満たす定数 $C > 0$ が存在する.

補題 2,3 の証明は [2] を参考にした.

まずは,(11) 式を示す. ここでは, $X = x(0, t, x, \xi)$ とし, x から X への変数変換を行う. すると, 補題 2 を用いることにより,$|\frac{\partial x}{\partial X}|$ が有界なので, 上から評価することができる. その後,Minkowski の不等式を用い, 積分順序を入れ替え, 補題 3 を用いることにより, 以下のように評価することができる.

$$\begin{aligned}
&\| \| W_{\varphi_0} u_0(x(0; t, x, \xi), \xi(0; t, x, \xi)) \|_{L_x^p} \|_{L_\xi^q}. \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_{\varphi_0} u_0(x(0; t, x, \xi), \xi(0; t, x, \xi))|^p dx \right)^{\frac{q}{p}} d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_{\varphi_0} u_0(X, \xi(0; t, \Phi^{-1}(0, t, X, \xi), \xi))|^p \left| \frac{\partial x}{\partial X} \right| dX \right)^{\frac{q}{p}} d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_{\varphi_0} u_0(X, \xi(0; t, \Phi^{-1}(0, t, X, \xi), \xi))|^p dX \right)^{\frac{q}{p}} d\xi \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_{\varphi_0} u_0(X, \xi(0; t, \Phi^{-1}(0, t, X, \xi), \xi))|^q d\xi \right)^{\frac{p}{q}} dX \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_{\varphi_0} u_0(X, \Xi)|^q \left| \frac{\partial \xi}{\partial \Xi} \right| d\Xi \right)^{\frac{p}{q}} dX \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |W_{\varphi_0} u_0(X, \Xi)|^q d\Xi \right)^{\frac{p}{q}} dX \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \| \| W_{\varphi_0} u_0(x, \xi) \|_{L_\xi^q} \|_{L_x^p}
\end{aligned}$$

これで (11) 式を示すことができた.

次に,(12) 式を示す.

最初に, $\varphi(t, y) = y_j y_k \overline{\varphi(t, y)}$, $N \in \mathbb{N}$ とし, $d\bar{\eta} = (2\pi)^{-n} d\eta$, $2N > n$ に対し, 反転公式, 部分積分

を用いて評価すると, 以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\| \| Ru(\tau, x(\tau;t,x,\xi),\xi(\tau;t,x,\xi)) \|_{L_x^p} \|_{L_\xi^q} \\
&= \frac{1}{\|\varphi(\tau,\cdot)\|_{L^2}^2} \sum_{j,k=1}^{\infty} \Bigg\| \Bigg\| \int\int\int |(1-\Delta)^N \varphi_{jk}(\tau, y - x(\tau;t,x,\xi)) \\
&\qquad \times V_{jk}(\tau, x(\tau;t,x,\xi), y) \varphi(\tau, y-z)| \frac{|W_{\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,z,\eta)|}{\langle \eta - \xi(\tau;t,x,\xi)\rangle^{2N}} dz d\bar{\eta} dy \Bigg\|_{L_x^p} \Bigg\|_{L_\xi^q} \\
&= \frac{1}{\|\varphi(\tau,\cdot)\|_{L^2}^2} \sum_{j,k=1}^{\infty} \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\le 2N} \Bigg\| \Bigg\| \int\int\int |\partial_y^{\beta_1} \varphi_{jk}(\tau, y - x(\tau;t,x,\xi)) \\
&\qquad \times \partial_y^{\beta_2} V_{jk}(\tau, x(\tau;t,x,\xi), y) \partial_y^{\beta_3} \varphi(\tau, y-z)| \frac{|W_{\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,z,\eta)|}{\langle \eta - \xi(\tau;t,x,\xi)\rangle^{2N}} dz d\bar{\eta} dy \Bigg\|_{L_x^p} \Bigg\|_{L_\xi^q}
\end{aligned}
$$

ここで, ポテンシャルが劣 2 次の増大度を持つことから,

$$
\begin{aligned}
|V_{jk}(\tau, x(\tau;t,x,\xi), y)| &\lesssim \langle x(\tau;t,x,\xi) + (1-\theta)(y - x(\tau;t,x,\xi))\rangle^{-\epsilon} \\
&\lesssim \langle x(\tau;t,x,\xi)\rangle^{-\epsilon} \langle y - x(\tau;t,x,\xi)\rangle^{\epsilon}
\end{aligned}
$$

と評価できるので, (11) 式と同様に, 変数変換を用いて,Minkowski の不等式を用いて評価すると, 以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\|\varphi(\tau,\cdot)\|_{L^2}^2} \sum_{j,k=1}^{\infty} \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\le 2N} \Bigg\| \Bigg\| \int\int\int |\partial_y^{\beta_1} \varphi_{jk}(\tau, y - x(\tau;t,x,\xi)) \\
&\qquad \times \partial_y^{\beta_2} V_{jk}(\tau, x(\tau;t,x,\xi), y) \partial_y^{\beta_3} \varphi(\tau, y-z)| \frac{|W_{\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,z,\eta)|}{\langle \eta - \xi(\tau;t,x,\xi)\rangle^{2N}} dz d\bar{\eta} dy \Bigg\|_{L_x^p} \Bigg\|_{L_\xi^q} \\
&\lesssim \frac{1}{\|\varphi(\tau,\cdot)\|_{L^2}^2} \sum_{j,k=1}^{\infty} \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\le 2N} \Bigg\| \Bigg\| \int\int\int |\langle y - x(\tau;t,x,\xi)\rangle^{1-\epsilon} \partial_y^{\beta_1} \varphi_{jk}(\tau, y - x(\tau;t,x,\xi)) \\
&\qquad \times \partial_y^{\beta_2} V_{jk}(\tau, x(\tau;t,x,\xi), y) \partial_y^{\beta_3} \varphi(\tau, y-z)| \frac{|W_{\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,z,\eta)|}{\langle \eta - \xi(\tau;t,x,\xi)\rangle^{2N}} \langle x(\tau;t,x,\xi)\rangle^{-\epsilon} dz d\bar{\eta} dy \Bigg\|_{L_x^p} \Bigg\|_{L_\xi^q}
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\phi_1(z,\eta) = \frac{|\partial_y^{\beta_3} \varphi(\tau, z)|}{\langle \eta \rangle}, \phi_2(y) = |\langle y \rangle \partial_y^{\beta_1} \varphi_{jk}(\tau, y)|
$$

とおき,(11) 式のときと同様に,$1 \le r, r' \le \infty$ を $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{p}$ を満たす実数とし, 変数変換, Hölder の

不等式, 補題 1,2,3 を用いると以下のように評価できる.

$$
\begin{aligned}
&\| \| Ru(\tau, x(\tau;t,x,\xi), \xi(\tau;t,x,\xi)) \|_{L_x^p} \|_{L_\xi^q} \\
&\lesssim \sum_{j,k=1}^{\infty} \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\le 2N} \| \| \langle x(\tau;t,x,\xi) \rangle^{-\epsilon} \phi_2 * (\phi_1 * W_{\varphi(\tau,\cdot)} u)(x(\tau;t,x,\xi), \xi(\tau;t;x,\xi)) \|_{L_x^p} \|_{L_\xi^q} \\
&\lesssim \sum_{j,k=1}^{\infty} \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\le 2N} \| \| \langle X \rangle^{-\epsilon} \phi_2 * (\phi_1 * W_{\varphi(\tau,\cdot)} u)(X, \xi(\tau;t;x,\xi) \|_{L_X^p} \|_{L_\xi^q} \\
&\lesssim \sum_{j,k=1}^{\infty} \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\le 2N} \| \langle X \rangle^{-\epsilon} \| \phi_2 * (\phi_1 * W_{\varphi(\tau,\cdot)} u)(X, \Xi) \|_{L_\Xi^q} \|_{L_X^p} \\
&\lesssim \sum_{j,k=1}^{\infty} \sum_{|\beta_1|+|\beta_2|+|\beta_3|\le 2N} \| \langle X \rangle^{-\epsilon} \|_{L_X^r} \| \| \phi_2 * (\phi_1 * W_{\varphi(\tau,\cdot)} u)(X, \Xi) \|_{L_\Xi^q} \|_{L_X^{r'}} \\
&\lesssim \| \| W_{\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,\cdot) \|_{L_X^{r'}} \|_{L_\Xi^q} \\
&\lesssim \| \| W_{\varphi(\tau,\cdot)} u(\tau,\cdot) \|_{L_X^p} \|_{L_\Xi^q}
\end{aligned}
$$

これで (12) 式が証明できた.

参考文献

[1] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito, Estimates on modulation spaces for Schrödinger evolution operators with quadratic and sub-quadratic potentials, J. Funct. Anal., 266, 733–753 (2014).

[2] 谷島 賢二: シュレディンガー方程式 II, 朝倉書店, (2014)

[3] Elena Cordero, Fabio Nicola, and Luigi Rodino Schrödinger Equations in Modulation Spaces, Studies in Phase Space Analysis with Applications to PDEs,Birkhäuser/Springer, 81-90(2013)

[4] K. Kato, M. Kobayashi and S. Ito,Remarks on Wiener amalgam space type estimates for Schrödinger equation. Harmonic analysis and nonlinear partial differential equations, RIMS Kokyuroku Bessatsu ,B33 41-48(2012)

[5] K. GRÖCHENIG, Foundations of time-frequency analysis, Appl. Numer. Harmon. Anal., Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA(2001)

初期値の台が非コンパクトな空間重み付き一次元半線形波動方程式の解析

東北大学大学院理学研究科数学専攻 博士 2 年
北村駿介 (Shunsuke KITAMURA) *

概要

非線形項に空間変数の重みを持つ一次元半線形波動方程式の, 非コンパクトな台を持つ初期値に対する初期値問題の時間局所解について, 時間局所解が存在しない, つまり瞬間爆発する初期値の条件とその条件の最適性について結果が得られた. 減衰重みの場合は Wakasa(2017)[23] において, 十分小さな初期値に対して有界性や可積分性の条件を加えて時間局所解の存在とその最大存在時間の評価が得られている. その一方で, 重みが増大する場合は空間遠方における解の値を制御できなくなる. このような状況では時間局所解の存在すら困難であると予想でき, 実際その予想の補強として, Kurokawa-Takamura(2003)[12] では空間重みの無い 2 次元以上の半線形波動方程式の初期値が動径方向無限遠で発散する場合において, いかなる時間局所解も存在しないことが示されている.

1 導入

偏微分方程式論においては, その研究の方向性として, 具体的な事象をモデル化した方程式に対して詳細に解析する場合と, これらの背景や導出過程に左右されない強固な理論, いわゆる一般論を構築する方針があると考えられる. これらは相互に作用しながら発展を続けており, 今回の講演では一般論の構築を見据えたモデル方程式の条件を変えた場合の解析の結果について述べる. 最初に一般論とはどういう形で記述されどのような意味を持つのかを述べた後, モデル方程式が担う役割について述べ, そして今回の主結果である条件を変えた場合の解析の結果について述べる.

1.1 一次元非線形波動方程式の一般論

一次元の非線形波動方程式の初期値問題

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = H(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}) & \text{in} \quad \mathbf{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \varepsilon f(x), \ u_t(x, 0) = \varepsilon g(x), & x \in \mathbf{R} \end{cases} \tag{1}$$

に対して, 添え字は偏微分を表わすとし, 既知関数 H, f, g と初期値の大きさを表わすパラメータ ε を H, f, g ; 十分滑らか, $\mathrm{supp}\{f, g\}$; コンパクト, $0 < \varepsilon \ll 1$ と仮定する. 初期値問題 (1) の解の最大存

* E-mail:shunsuke.kitamura.s8@dc.tohoku.ac.jp 本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2102 の支援を受けたものである.

在時間を lifespan として, $\widetilde{T}(\varepsilon)$ という記号で下記のように定義する.

$$\widetilde{T}(\varepsilon) := \sup\{t > 0; \text{適当に固定した } (f,g) \text{ に対して } (1) \text{ の古典解 } u(x,t) \text{ が存在する }\}.$$

lifespan について, $\widetilde{T}(\varepsilon) = \infty$ を満たすならば時間大域解を持つと言い, $0 < \widetilde{T}(\varepsilon) < \infty$ を満たす, つまり有限時間で解 u が発散するならば時間局所解を持つと言う. また, 解析を行う上で初期値に対して $(f,g) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$ が成り立たなければ解の一意性が崩れてしまうので, $H(0) = 0$ を要請する. この条件は H をマクローリン展開したときに定数部分が 0 という条件と同値であり, 高次の剰余項を R_{n+1} として展開すると次のようになる.

$$H(u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt}) = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{\alpha!}(u\partial_{\lambda_0} + u_x\partial_{\lambda_1} + u_t\partial_{\lambda_2} + u_{xx}\partial_{\lambda_3} + u_{xt}\partial_{\lambda_4})^{\alpha} H(\hat{\lambda})\Big|_{\hat{\lambda}=0} + R_{n+1}.$$

この展開は初期値問題 (1) の ε が十分小さいことから解 u も小さいので成立する. 上記において $|\alpha| = 1$ の項は線形より, この項を入れると線形部分が波動方程式では無くなる. 従って解 u は小さいので, 非線形項の主な部分は $|\alpha| \geq 2$ の低次の項であると考えることができる. このような考察のもと, Li, Yu and Zhou[21] によって初期値問題 (1) に対して次のような古典解の長時間存在が示されている.

定理 1.1　初期値問題 (1) が自然数 α を用いて $\hat{\lambda} = 0$ の近傍において $H(\hat{\lambda}) = O(|\hat{\lambda}|^{1+\alpha})$ を満たすとき, ある正定数 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(f,g,\alpha)$ が存在して, 任意の $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ を満たす ε に対して下記が成立する.

$$\widetilde{T}(\varepsilon) \geq \begin{cases} C\varepsilon^{-\alpha/2} & \text{in general case,} \\ C\varepsilon^{-\alpha(1+\alpha)/(2+\alpha)} & \text{if } \displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0, \\ C\varepsilon^{-\min\{\beta_0/2,\alpha\}} & \text{if } \partial_u^{\beta} H(\hat{0}) = 0 \text{ for } 1+\alpha \leq \forall\beta \leq \beta_0. \end{cases}$$

ここで, $C > 0$ は ε に因らない定数である.

この定理 1.1 の H に対する原点近傍の条件はまさに考察から得られた非線形項の低次の項について条件付けをしている. また, 定理 1.1 の場合分けは最初の 2 つは強 Huygens の原理により, $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g(y)dy = 0$ の場合は初期値の影響が空間次元が高次元の場合と同じようになることに起因する. 最後の場合分けは非線形項に u の冪が低次で入るときは単純なエネルギー法によって解を構成できず, 別の不等式を使う際に逐次近似の評価が悪くなることに起因する.

また, $f \equiv g \equiv 0$ のとき, 解の一意性より (1) の解は $u \equiv 0$ となり $\widetilde{T}(\varepsilon) = \infty$ を満たす. 従って, 時間局所解を持つ (1) に対して $\lim_{\varepsilon\to 0} \widetilde{T}(\varepsilon) = \infty$ が成り立つことが予想できるため, lifespan の下から ε^{-1} の関数によって評価されるのは自然である. このような, lifespan の ε の関数による下からの評価を一般論という.

1.2　モデル方程式の解析による一般論の最適性と一般論の改良

この一般論に対して, さらに良い ε のオーダーの関数では評価できない, つまり一般論が最適な評価であることを示す為には, 特別な初期値と非線形項を用いて同じ ε のオーダーの関数によって lifespan が上から評価されることを示せば良い. 特に最適性は, 滑らかさを犠牲にして詳細な解析が

可能になる $H=|u|^p$ や $H=|u_t|^p$ $(p>1)$ と定義したモデル方程式によって示される. 定理 1.1 の最初の 2 つの場合は Zhou[24] により非線形項を $H=|u|^{1+\alpha}$ と, 最後の場合に対しては Zhou[25] により非線形項を $H=|u|^{\gamma}|u_t|^{1+\alpha-\gamma}$ $(0\le\gamma\le\alpha)$ と置くことによって最適性が示されている.

さらに, Morisawa, Sasaki and Takamura[22] によるモデル方程式 $H=|u_t|^p+|u|^q(p,q>1)$ の解析および Kido, Sasaki, Takamatsu and Takamura[13] によるモデル方程式 $H=|u_t|^p|u|^q+|u|^r(p,q,r>1)$ によって, 空間一次元の一般論のより細かい場合分けが必要であることが示され, 実際に Takamatsu[15] によって, 一次元非線形波動方程式の一般論の分類が不十分であり, 次の場合分けを追加すべきであることが示された.

$$\widetilde{T}(\varepsilon)\ge C\varepsilon^{-\beta_0(1+\alpha)/(2+\beta_0)} \text{ if } \int_{\mathbf{R}} g(y)dy=0 \text{ and } \partial_u^{\beta}H(\hat{0})=0 \text{ for } 1+\alpha\le\forall\beta\le\beta_0<2\alpha.$$

以上のことから, モデル方程式の解析は一般の場合の解の存在性を議論する上で最適性を保証するものでありながら, モデル方程式の lifespan 評価を行うことによって一般の場合も解析できる場合もあり, さらにモデル方程式の lifespan 評価から非線形項が一般の場合の最適な lifespan 評価を予想することができる. つまり, モデル方程式の解析と一般論の構築は表裏一体の関係にあると言える.

注意点として, 一次元の場合には任意の指数 $p>1$ に対して解が有限時間爆発することが Kato[6] によって示されているが, 空間次元 n が 2 以上の場合は, $(n-1)p^2-(n+1)p-2=0$ の正の根として定義される Strauss 指数 $p_0(n)$ より大きい場合には時間大域解が得られることが John[5]$(n=3)$, Glassey[4]$(n=2)$, Georgiev, Lindblad and Sogge[3]$(n\ge4)$ によって示されている.

1.3 初期値の台が非コンパクトな場合

一般論とその最適性では解の有限伝播性が重要な役割を果たしており, 初期値の台がコンパクトであるという条件を課すことによって空間無限遠方での影響を無視して非線形項の冪の可積分性の影響を詳細に解析することが出来る. 逆に言えば, 初期値の台が非コンパクトである場合には空間無限遠方での解のコントロールが必要になり, 空間次元が 2 以上で時間大域解が得られる非線形項のオーダーであっても初期値の減衰オーダーによっては有限時間で解が爆発する例が存在する.

空間次元 n が 2 以上の場合は詳しく解析がされており, (1) の $H=|u|^p$ の場合について Asakura[2] によって初期値の減衰のオーダーによる解が有限時間爆発する条件及び時間大域解が得られる条件の予想が下記のように示された.

・初期値 (f,g) に対してある $C>0$ が存在して

$$f(x)\equiv0,\quad g(x)\ge\frac{C}{(1+|x|)^{1+\kappa}} \text{ with } 0<\kappa<\frac{2}{p-1}$$

のとき, 時間大域解は得られない.

・$p>p_0(n)$ かつ初期値 (f,g) に対して

$$(1+|x|)^{1+\kappa}\left(\sum_{|\alpha|\le[n/2]+2}|\nabla_x^{\alpha}f(x)|+\sum_{|\beta|\le[n/2]+1}|\nabla_x^{\beta}g(x)|\right) \text{ with } \kappa\ge\frac{2}{p-1}$$

が十分小さいとき, 時間大域解が得られる.

この予想は Agemi and Takamura[1], Kubota[11], Tsutaya([18], [19], [20]), Takamura[16], Kubo[7], Kubo and Kubota([8],[9]) によって肯定的に示された. その後, Takamura, Uesaka and Wakasa[17] によって, 初期値のオーダーとして最適な時間大域解が得られる十分条件を下記のように改良した.

$$(1+|x|)^{1+\kappa}\left(\frac{|f(x)|}{1+|x|}+\sum_{1\le|\alpha|\le[n/2]+2}|\nabla_x^\alpha f(x)|+\sum_{|\beta|\le[n/2]+1}|\nabla_x^\beta g(x)|\right)\ll 1 \text{ with } \kappa\ge\frac{2}{p-1}$$

これは初期状態 f のオーダーが改良されている. また, Kurokawa and Takamura[12] において, 初期値が

$$f(x)\equiv 0,\quad g(x)\ge\frac{\phi(x)}{(1+|x|)^{1+2/p-1}} \text{ where } \lim_{|x|\to\infty}\phi(x)=\infty \ \&\ \phi:\text{radial}$$

のとき, つまり臨界冪より log 増大などにより僅かに減衰が足りない場合において, 時間大域解が得られないことを示している. さらに, $g(x)\ge\phi(x)$ の場合, つまり無限遠方で発散している場合はそもそも時間局所解すら得られないということを系として示している.

以上が空間次元 n が 2 以上の場合であり, $n=1$ の場合はそもそも時間大域解が得られないという観点から解析が少なく, 次のような非線形項に空間変数による減衰を加えた方程式に対して解析が行われている.

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=\dfrac{|u|^p}{\langle x\rangle^{1+a}} & \text{in } \mathbf{R}\times(0,\infty),\\ u(x,0)=\varepsilon f(x),\quad u_t(x,0)=\varepsilon g(x), & x\in\mathbf{R}, \end{cases} \tag{2}$$

ここで, $p>1$ かつ $a\in\mathbf{R}$, $\langle x\rangle:=\sqrt{1+x^2}$ であり, ε は十分小さく $(f,g)\in C^2(\mathbf{R})\times C^1(\mathbf{R})$ と仮定する. 最初にこの方程式を解析したのは Suzuki[14] であり, $a\ge -1$ の場合において (2) の非線形項 $|u|^p$ の代わりに符号変化を許す $|u|^{p-1}u$ としたものを解析し, 空間 1 次元であるにも関わらず奇関数かつある程度減衰する初期値に対して時間大域解の存在をある p の範囲で示した. 後に Kubo & Osaka & Yazici[10] によって, その p の範囲が最適と思われるところまで拡張された. また, Wakasa[23] は (2) で初期値に対して $f\in L^\infty(\mathbf{R})$, $g\in L^1(\mathbf{R})$ を仮定して, (2) の lifespan を $T(\varepsilon)$ とすると,

$$T(\varepsilon)\sim\begin{cases} C\varepsilon^{-(p-1)/(1-a)} & \text{for } -1\le a<0,\\ \phi^{-1}(C\varepsilon^{-(p-1)}) & \text{for } a=0,\\ C\varepsilon^{-(p-1)} & \text{for } a>0 \end{cases}$$

を得た. ここで, ϕ^{-1} は関数 $\phi(s):=s\log(2+s)$ の逆関数である. また, $T(\varepsilon)\sim A(\varepsilon,C)$ なる記号は, C_1 と C_2 という ε に無関係な正定数が存在して, 不等式 $A(\varepsilon,C_1)\le T(\varepsilon)\le A(\varepsilon,C_2)$ を満たすことを表すものとする.

このような非線形項に時空変数 (t,x) が入ったモデル方程式の解析は, 一般論を非線形項が非自励的な場合も含むように拡張する際の足掛かりとなるものであり, 加えて, 初期値の台がコンパクトという条件を外すことによって空間変数による重みの影響を大きくしてより詳細に解析する狙いがある. (2) に対して次の主結果が得られた.

2 主定理

定理 2.1 $\varepsilon = 1$ とし, 任意の $p > 1$ と $a \in \mathbf{R}$ を持つ (2) の初期値に対して, ある $R > 0, T_1 > 0$ と球対称な函数 Φ が存在して, $\forall |x| \geq R$ と $\forall t \in [0, T_1)$ に対して,

$$f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g(y)dy \geq \frac{\Phi}{\langle x - \mathrm{sgn}(1+a)t \rangle^{(-1-a)/(p-1)}}$$

が成り立つと仮定する. ここで, sgn は符号関数とし, 関数 Φ は

$$\Phi := \Phi(|x| - t) \text{ with } \lim_{|r| \to \infty} \Phi(r) = \infty \quad \text{または} \quad \Phi := M \ : \text{ large constant}$$

とする. このとき, $\Phi^{p-1} t^2 \gg 1$ ならば (2) の古典解 u はその (x, t) で存在しない.

定理 2.2 $\varepsilon = 1$ とし, 任意の $p > 1$ と $a \in \mathbf{R}$ を持つ (2) の初期値に対して, ある $T_2 > 0$ と球対称な函数 Φ が存在して, $\forall x \in \mathbf{R}$ と $\forall t \in [0, T_2)$ に対して,

$$\left| f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g(y)dy \right| \leq \frac{\Phi}{\langle x + \mathrm{sgn}(1+a)t \rangle^{(-1-a)/(p-1)}}$$

かつ $\Phi^{p-1} t^2 \ll 1$ が成り立つと仮定する. ここで, sgn は符号関数とし, 関数 Φ は定理 2.1 と同様. このとき, (2) の古典解 u が $\mathbf{R} \times [0, T_2)$ 上存在する.

Φ によって場合分けすることによって次の系が得られる.

系 2.1 $\Phi := \Phi(|x| - t)$ with $\lim_{|r| \to \infty} \Phi(r) = \infty$ の場合, $\forall t > 0$ に対して, ある $x \in \mathbf{R}$ が存在して, $\Phi^{p-1} t^2 \gg 1$ を満たす. 従って, 時間局所解は存在しない.

系 2.2 $\Phi := M$: large constant の場合, $T(M)$ を (2) の lifespan として $T(M) \sim C M^{-(p-1)/2}$.

これらの定理および系に対する観察から, 初期値問題 (2) が時間局所解を持つためには可積分性ではなく単純に冪の大きさを考えれば良く, 非線形項の重みの指数 $1 + a$ に対して初期値の減衰が $(-1-a)/(p-1)$ 必要であることが明らかになった. また, 初期値の大きさが極端に大きい場合の lifespan 評価について明らかになった.

3 証明の概略

定理 2.1 は John[5] の各点における逐次代入法空間変数に応用することによって証明され, 定理 2.2 は John[5] の各点における逐次近似法を重み付き L^∞ 空間で行うことで証明される. お互いの証明における鍵となる不等式の計算はほとんど同じであるため, 定理 2.1 のみ概略を示す.

$x > 0$ と仮定して一般性を失わない. $t > 0$ を任意にとり, 初期値が定理の条件を時刻 t までの時間満たしているとする. 背理法を用いる. (2) の古典解 u がその時刻まで存在していると仮定する. Duhamel の原理により (2) と同値な積分方程式は

$$u(x,t) = u^0(x,t) + L(|u|^p \langle x \rangle^{-1-a})(x,t). \tag{3}$$

と表せる. ここで, 積分方程式の線形な部分は

$$u^0(x,t) := \frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)\} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)dy,$$

Duhamel 項は

$$L(v)(x,t) := \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} v(y,s)dy \quad \text{for} \quad v \in C(\mathbf{R}\times[0,\infty))$$

によって定義される. L の積分領域は点 (x,t), 点 $(x-t,0)$, 点 $(x+t,0)$ を結ぶ三角形領域となる.

条件より,

$$u(x,t) \geq u^0(x,t) \geq \frac{\Phi}{2\langle x-\mathrm{sgn}(1+a)t\rangle^{(-1-a)/(p-1)}}.$$

上記を (3) の Duhamel 項に代入して, 符号関数 $\mathrm{sgn}(1+a)$ に注意しながら被積分関数に対して積分の上端または下端を代入し, 積分を計算すると

$$u(x,t) \geq \frac{\Phi^p t^2}{2^p}\left(\frac{\langle x+\mathrm{sgn}(1+a)t\rangle}{\langle x-\mathrm{sgn}(1+a)t\rangle}\right)^{(-1-a)/(p-1)}.$$

が得られる. 以下, 時空変数に着目すると一回の代入ごとに下からの評価が $\Phi^{p-1}t^2$ の p の整数冪乗乗だけ増大する. よって, $\Phi^{p-1}t^2 \gg 1 \Rightarrow u(x,t)=\infty$ が得られる.

参考文献

[1] R. Agemi, H. Takamura, *The lifespan of classical solutions to nonlinear wave equations in two space dimensions,* Hokkaido Math. J., **21**(1992), 517-542.

[2] F. Asakura, Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with slowly decaying initial data in three space dimensions,Comm. in Partial Differential Equations, **11(13)** (1986), 1459-1487.

[3] V. Georgiev, H. Lindblad, C. Sogge *Weighted Strichartz estimates and global existence for semilinear wave equations*, Amer. J. Math., **119** (1997), 1291-1319.

[4] R. Glassey, *Existence in the large for* $\Box u = f(u)$ *in two space dimensions*, Math. Z, **178**(1981), 233-261.

[5] F.John, *Blow-up of solutions of nonlinear wave equations in three space dimensions*, Manuscripta Math. **28** (1979), 235-268.

[6] T. Kato *Blow up of solutions of some nonlinear hyperbolic equations*, Comm. Pure Appl. Math, **33**(1980), 501-505.

[7] H. Kubo *On the critical decay and power for semilinear wave equations in odd space dimensions*, Discrete Contin. Dynam. Systems, **2**(1996), 173-190.

[8] H. Kubo, K. Kubota *Asymptotic behavior of radially symmetric solutions of* $\Box u = |u|^p$ *for super critical values p in odd space dimensions*, Hokkaido Math. J., **24**(1995), 287-336.

[9] H. Kubo, K. Kubota *Asymptotic behavior of radially symmetric solutions of* $\Box u = |u|^p$ *for super critical values p in even space dimensions,* , Japan J. Math., **24**(1998), 191-256.

[10] H.Kubo, A.Osaka and M.Yazici, *Global existence and blow-up for wave equations with weighted nonlinear terms in one space dimension*, Interdisciplinary Information Sciences, **19** (2013), 143-148.

[11] K. Kubota *Existence of a global solution to a semi-linear wave equation with initial data of non-compact support in low space dimensions*, Hokkaido Math. J., **22**(1993), 123-180 .

[12] Y. Kurokawa, H. Takamura *Blow-up for semilinear wave equations with a data of the critical decay having a small loss*, Rend. Instit. Mat. Trieste, **XXXV** (2003), 165-193.

[13] R. Kido, T. Sasaki, S. Takamatsu, H. Takamura *The generalized combined effect for one dimensional wave equations with semilinear terms including product type*, arXiv:2305.00180

[14] 鈴木彩子, 「空間１次元における非線形波動方程式の解の大域存在と爆発」, 埼玉大学理工学研究科, 太田雅人研究室修士論文, 平成 22 年 2 月

[15] S. Takamatsu *Improvement of the general theory for one dimensional nonlinear wave equations related to the combined effect*, arXiv:2308.02174

[16] H. Takamura *Blow-up for semilinear wave equations with slowly decaying data in high dimensions*, Differential and Integral Equations, **8**(1995), 647-661.

[17] H. Takamura, H. Uesaka, K. Wakasa, *Blow-up theorem for semilinear wave equations with non-zero initial position*, J. Differential Equations, **249** (2010), 914-930

[18] K.Tsutaya *A global existence theorem for semilinear wave equations with data of non compact support in two space dimensions*, Comm. Partial Differential Equations, **17(11&12)** (1992), 1925-1954.

[19] K.Tsutaya *Global existence theorem for semilinear wave equations with non-compact data in two space dimensions,* J. Differential Equations, **104**(1993), 332-360.

[20] K.Tsutaya *Global existence and the lifespan of solutions of semilinear wave equations with data of non compact support in three space dimensions,* Funkcialaj Ekvacioj, **37**(1994), 1-18.

[21] T.-T. Li, X. Yu, and Y.Zhou, *Life-span of classical solutions to one-dimensional nonlinear wave equations*, Chinese Ann. Math. Ser. B **13** (1992) no. 3, 266-279. A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A **13** (1992), no. 4, 516.

[22] K. Morisawa, T. Sasaki and H. Takamura, *The combined effect in one space dimension beyond the general theory for nonlinear wave equations*, Commun. Pure Appl. Anal. **22** (2023), no. 5, 1629–1658.

[23] K.Wakasa, *The lifespan of solutions to wave equations with weighted nonlinear terms in one space dimension*, Hokkaido Math. J., **46** (2017), 257-276.

[24] Y. Zhou, *Life span of classical solutions to* $u_{tt} - u_{xx} = |u|^{1+\alpha}$, Chinese Ann. Math. Ser. B **13** (1992) no. 2, 230-243. A Chinese summary appears in Chinese Ann. Math. Ser. A **13** (1992), no. 2, 280.

[25] Y.Zhou, *Blow up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear wave equations*, Chinese Ann. Math. Ser. B **22** (2001), 275-280.

Some relations between Schwarz-Pick type inequality and von Neumann's inequality

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
荒神健太 (Kenta KOJIN) *

概要

複素関数論と作用素論のそれぞれの文脈で現れる二つの不等式の関係を調べる．単位円盤上の一様ノルムが 1 以下の正則関数全体を Schur クラスという．その自然な一般化の一つとして Schur-Agler クラスというものが知られており, この関数族に対する最良の Schwarz-Pick 型の不等式を示す．さらにその応用として, 2×2 行列に対するダイレーション理論を考察する．

1 導入

本稿では複素関数論と作用素論のそれぞれの文脈で重要な二つの不等式の関係を調べる．領域 $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ 上の Schur クラスは

$$\mathscr{S}(\Omega) = \{f \in \mathcal{O}(\Omega) \mid \sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq 1\}$$

として定義される．ただし, $\mathcal{O}(\Omega)$ は Ω 上の正則関数全体である．まず複素関数論の文脈で知られている, 単位円盤 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ 上の Schwarz-Pick の不等式 [13, page 5] を紹介する．これは Schwarz の補題に現れる不等式の一般化である．

Theorem 1.1 (Schwarz-Pick の不等式)**.** $f \in \mathscr{S}(\mathbb{D})$ が絶対値 1 の定数関数ではない時, 任意の $z, w \in \mathbb{D}$ に対して次の不等式が成り立つ:

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)} f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w} z} \right|.$$

単位円盤 $\mathbb{D}$ 上の擬双曲距離を Theorem 1.1 の不等式の右辺, 即ち

$$d_{\mathbb{D}}(z, w) = \left| \frac{z - w}{1 - \overline{w} z} \right| \quad (z.w \in \mathbb{D})$$

によって定義する．Schur クラスや後に現れる関数族は定数関数 $f(z) = e^{i\theta}$ $(\theta \in \mathbb{R})$ を含むが, これらの関数としての振る舞いは自明であるため, 本稿では簡単のために $|\alpha| = 1$ の時は $d_{\mathbb{D}}(\alpha, \alpha) = 0$ と定義する．すると, 任意の $z, w \in \mathbb{D}$ に対して Theorem 1.1 から容易に $d_{\mathbb{D}}(z, w) =$

* E-mail:m20016y@math.nagoya-u.ac.jp

$\sup_{f\in\mathscr{S}(\mathbb{D})} d_{\mathbb{D}}(f(z),f(w))$ が従う．この表示から，一般の領域 $\Omega\subset\mathbb{C}^d$ 上の Möbius 擬距離

$$d_\Omega(z,w)=\sup_{f\in\mathscr{S}(\Omega)} d_{\mathbb{D}}(f(z),f(w)) \quad (z,w\in\Omega)$$

を考えることは自然である．なお，本質的に同等な Carathéodory 擬距離は $c_\Omega=\tanh^{-1}(d_\Omega)$ で与えられる．任意の $f\in\mathscr{S}(\Omega)$ に対して，Möbius 擬距離の定義から自明に Schwarz-Pick 型の不等式

$$d_{\mathbb{D}}(f(z),f(w))\le d_\Omega(z,w) \quad (z,w\in\Omega) \tag{1.1}$$

を得る．Carathéodory 擬距離は Schwarz-Pick 型の不等式を満たす “最小”の擬距離であり，小林擬距離がある種の双対にあたる [19, Proposition 3.1.7, Remark 3.1.29]．ここで，この不等式に関して本稿で考察する問題点を二つ述べる．まず，単位円盤 $\mathbb{D}$ の場合と異なり一般の領域 Ω に対する Möbius 擬距離 d_Ω の具体的な表示を得ることは困難である．また，Möbius 擬距離の定義から不等式 (1.1) は与えられた $\mathscr{S}(\Omega)$ 部分集合に対しての最良不等式にならない可能性がある．そこで本稿では筆者の論文 [21] に基づき，単位円盤上の Schur クラスの一般化として作用素論において重要な役割を果たす Schur-Agler クラス $SA(B_\delta)\subset\mathscr{S}(B_\delta)$ (2 章で厳密な定義を与える) に対する最良の Schwarz-Pick 型の不等式を考察する．なお，作用素論的アプローチを行う本研究では，関数の正則性以上に von Neumann の不等式と呼ばれる作用素不等式が重要な役割を果たす．実際，Schur-Agler クラスを一般化した正則ではない関数を含む関数族に対しても主結果にあたる不等式が成り立つ．

さて，本稿では Schwarz-Pick の不等式と先ほど述べた von Neumann の不等式の関係について考察するのだが，ここで最も簡単な場合に限定して後者を述べる．

Theorem 1.2 (von Neumann の不等式 [5, Theorem 1.47])**.** $\|T\|<1$ を満たす Hilbert 空間上の有界線形作用素 T を考える．ただし，$\|\cdot\|$ は作用素ノルムである．この時，任意の $f\in\mathscr{S}(\mathbb{D})$ に対して

$$\|f(T)\|\le 1$$

が成り立つ．ここで，$f(T)$ は解析関数カルキュラス [17, 定理 3.2.6] によって定義する．

この不等式が Schur-Agler クラスを導入する動機付けであり，1990 年の Agler の研究 [1] は複素関数論と作用素論に多大な影響を与えた．また，この不等式は作用素のダイレーション理論において重要な役割を果たす．作用素のダイレーションとは，与えらた作用素をより性質の良い作用素の一部として捉えることであり，4 章で説明する．ここでは，Sz.-Nagy による最も基本的なダイレーション定理を紹介する．ユニタリー作用素のスペクトル分解と Taylor 展開を踏まえると，下記の Theorem 1.3 から Theorem 1.2 が導かれる．

Theorem 1.3 (Sz.-Nagy [25])**.** Hilbert 空間 H 上の有界線形作用素 T が $\|T\|\le 1$ を満たす時，H を含む Hilbert 空間 K と，K 上のユニタリー作用素 U が存在して，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$T^n=PU^n|_H$$

が成り立つ．ただし，$P:K\to H$ は直交射影．

本稿では, まず von Neumann の不等式から Schwarz-Pick 型の不等式を導く. 即ち作用素論を複素関数論に応用する. 次にその逆として, 得られた Schwarz-Pick 型の不等式を応用して 2×2 行列に対するダイレーション理論を考察する.

2 Schur-Agler クラス

この章では単位円盤 $\mathbb{D}$ 上の Schur クラスの一般化の一つである Schur-Agler クラスについて述べる. 細かい部分は参考文献を読んで頂くことにして, ここでは定義を与えた上でいくつかのコメントをするにとどめる. 導入で von Neumann の不等式を紹介したが, Schur-Agler クラスとは von Neumann 型の不等式が常に成立する正則関数のクラスである. このクラスは 1990 年に Agler [1] が多重開円盤 $\mathbb{D}^d$ 上で導入した. ここではより一般の設定の Schur-Agler クラスを紹介する.

d 変数の多項式が成分の $s \times r$ 行列 δ を考える. この時,

$$B_\delta = \{z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d \mid \|\delta(z)\| < 1\}$$

と定める. ただし, $\|\delta(z)\|$ は行列 $\delta(z)$ の作用素ノルムである.

Examples 2.1. (1)

$$\delta = \begin{bmatrix} z_1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_d \end{bmatrix}$$

とおくと, これは多重開円盤 $\mathbb{D}^d = \{(z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d \mid |z_i| < 1 \ \ (1 \leq i \leq d)\}$ を与える.

(2)

$$\delta = [z_1, \ldots, z_d]$$

とおくと, これは開単位球 $\mathbb{B}_d = \{(z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d \mid |z_1|^2 + \cdots |z_d|^2 < 1\}$ を与える.

次に, von Neumann の不等式をふまえて B_δ 上の Schur-Agler クラスを定める. Hilbert 空間 H 上の互いに可換な作用素の組 $T = (T_1, \ldots, T_d)$ に対して, $\sigma(T)$ をその Taylor スペクトル [12, 26] とする. Taylor スペクトルの定義をここでは与えないが, $d = 1$ の時は通常の作用素のスペクトルと一致し, H が有限次元の時は可換な行列の組に対する様々なスペクトルと一致する [12]. δ は d 変数の多項式を成分に持つ行列なので, T を δ に自然に代入して作用素ノルム $\|\delta(T)\|$ を考えることができる. Ambrozie と Timotin [6, Lemma 1] は $\|\delta(T)\| < 1$ ならば Taylor スペクトル $\sigma(T)$ が B_δ に含まれることを示した. したがって, 任意の $f \in \mathcal{O}(B_\delta)$ に対して Taylor 関数カルキュラス [12, 26] を用いて作用素ノルム $\|f(T)\|$ を考えることができる. そこで, $\|\delta(T)\| < 1$ を満たす可算無限次元 Hilbert 空間上の任意の可換な作用素の組 $T = (T_1, \ldots, T_d)$ に対して, $\|f(T)\| \leq 1$ となるような $f \in \mathcal{O}(B_\delta)$ 全体の集合として Schur-Agler クラス $SA(B_\delta)$ を定義する. 可算無限次元 Hilbert 空間同士はユニタリー同型なので, [26, Theorem 4.5] から上の定義は可算無限次元 Hilbert 空間の選び方によらない. また, 定義から $SA(B_\delta) \subset \mathscr{S}(B_\delta)$ は自明である. $d = 1$ かつ $\delta = [z]$, 即ち $B_\delta = \mathbb{D}$ の時, Theorem 1.2 から $SA(\mathbb{D}) = \mathscr{S}(\mathbb{D})$ が従う. また, 安藤ダイレーション [7] により $SA(\mathbb{D}^2) = \mathscr{S}(\mathbb{D}^2)$ も従う. しかし, $d \geq 3$ の場合 $SA(\mathbb{D}^d) \subsetneq \mathscr{S}(\mathbb{D}^d)$ である [23]. Schur-Agler クラスに属する関数の著しい性

質は Agler 分解と呼ばれる関係式を満たすことであり, これは関数の挙動が半正定値行列 (厳密には再生核) で記述されることを意味する [6, Theorem 3]. $\delta = [z]$ の時はともかく, 一般の Schur-Agler クラスはかなり特殊な関数族に見えるかもしれない. しかし, 連続関数はコンパクト集合上で有界になるという基本的な事実の類似物として, 開集合上の任意の正則関数 f に対し, Taylor 関数カルキュラス $T \mapsto f(T)$ は局所的に有界になることが知られている (詳細は [4]). よって, 開集合上の任意の正則関数は局所的に Schur-Agler クラスに属する関数のスカラー倍になることがわかる. この事実と Agler 分解の簡単な応用として, 岡の拡張定理や岡-Weil の定理の作用素論的な証明を与えることができる [4]. 最後に, 与えられた関数の挙動を記述するような半正定値行列を見つける Agler 分解に関して, Agler の原論文 [1] では本質的に Hahn-Banach の定理しか使われていない点は注目に値する. 作用素値関数の場合など考察する設定固有の問題はあれど, Hahn-Banach の定理の一般性ゆえに様々な設定において Agler のアプローチは有効である (例えば [3, 6, 9, 10]).

3 主結果 1

この章では [21] で得た Schwarz-Pick 型の不等式を紹介する. その前に, 問題設定に合わせて Schur-Agler クラスを一般化した関数族を定義しよう. 前章で述べた Agler 分解を得るためには, 関数が Schur-Agler クラスに含まれていることが必要十分条件である. よって, **可算無限次元** Hilbert 空間上の作用素の情報が必要になるわけだが, この理由は単純で正則関数のグラフは**無限個**の点で構成されるからである. $\mathbb{C}^d$ 内の開集合が可分であることと正則関数の連続性を考えれば, 非可算無限次元空間ではなく可算無限次元空間を考えれば十分であることに納得がいくだろう. グラフ上の可算個の点がどのように配置されているかが分かれば, 関数の挙動がわかったことになる. さて, 現在考察している問題は Schwarz-Pick 型の不等式, つまり距離に関する不等式である. 即ち, 関数のグラフ上の (任意の) **二点**の関係が知りたいのである. 従って, 関数は無限次元空間上の作用素の情報を持つ必要はなく, $\mathbf{2 \times 2}$ **行列**の情報さえ持っていれば本研究においては十分だと予想できる. さらに, 正則性や連続性さえも不要である. そこで, 次のようにして新たな関数族を定義する.

$E \subset \mathbb{C}^d$ を集合, Δ を E 上の $\mathbb{C}$ 値関数が成分の $s \times r$ 行列とする. この時,

$$B_\Delta = \{z \in E \mid \|\Delta(z)\| < 1\}$$

と定める. $T = (T_1, \ldots, T_d)$ を同時対角化可能な 2×2 行列の組とする. よって, $\sigma(T) = \{z, w\} \subset \mathbb{C}^d$ ならば, ある可逆な 2×2 行列 S が存在して,

$$T = \left(S^{-1} \begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & w_1 \end{bmatrix} S, \ldots, S^{-1} \begin{bmatrix} z_d & 0 \\ 0 & w_d \end{bmatrix} S \right)$$

と書ける. この時 $\sigma(T)$ 上の任意の $\mathbb{C}$ 値関数 f に対して,

$$f(T) = S^{-1} \begin{bmatrix} f(z) & 0 \\ 0 & f(w) \end{bmatrix} S$$

として関数カルキュラスを定義する. これは行列値関数に対する関数カルキュラスに拡張できるため, $\Delta(T)$ が定義可能である (より一般の作用素に対する連続関数カルキュラスや正則関数カルキュラスと異なり, 今は同時対角化可能な行列のみを扱っているので連続性や正則性は不要).

$\sigma(T) \subset B_\Delta$ かつ $\|\Delta(T)\| \leq 1$ を満たす任意の同時対角化可能な 2×2 行列の組 $T = (T_1, \ldots, T_d)$ に対して, $\|f(T)\| \leq 1$ となるような B_Δ 上の $\mathbb{C}$ 値関数全体の集合を $S_{2,gen}(B_\Delta)$ と定める. 特に $E \subset \mathbb{C}^d$ が開集合, Δ の成分が正則関数の時, $S_2(B_\Delta) = S_{2,gen}(B_\Delta) \cap \mathcal{O}(B_\Delta)$ と定義する. この時, $S_2(B_\Delta) \subset \mathscr{S}(B_\Delta)$ であり, δ が多項式成分の行列の時は $SA(B_\delta) \subset S_2(B_\delta) \subset \mathscr{S}(B_\delta)$ が成り立つ [21, Example 3.1].

Definition 3.1. Δ を集合 $E \subset \mathbb{C}^d$ 上の関数が成分の $s \times r$ 行列とした時, B_Δ 上の擬距離 d_Δ を

$$d_\Delta(z,w) := \Big\| (I - \Delta(w)\Delta(w)^*)^{-\frac{1}{2}} (\Delta(z) - \Delta(w)) \\ \times (I - \Delta(w)^*\Delta(z))^{-1} (I - \Delta(w)^*\Delta(w))^{\frac{1}{2}} \Big\|_{B(\mathbb{C}^r, \mathbb{C}^s)}.$$

で定める.

Theorem 3.2 ([21, Corollary 4.2, Proposition 5.1])**.** Δ を集合 $E \subset \mathbb{C}^d$ 上の関数が成分の $s \times r$ 行列, $f \in S_{2,gen}(B_\Delta)$ とした時,

$$d_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) \leq d_\Delta(z,w) \quad (z, w \in B_\Delta)$$

が成り立ち, $E \subset \mathbb{C}^d$ が開集合かつ Δ の成分が E 上の正則関数の時は

$$d_\Delta(z,w) = \sup_{f \in S_2(B_\Delta)} d_{\mathbb{D}}(f(z), f(w))$$

が成り立つ. 更に δ が多項式成分の行列の時は

$$d_\delta(z,w) = \sup_{f \in S_2(B_\delta)} d_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)) = \sup_{f \in SA(B_\delta)} d_{\mathbb{D}}(f(z), f(w)).$$

が成り立つ. よって上の不等式は Schur-Agler クラスに対する最良不等式である.

なお証明の中で明示的には現れないが, Agler 分解 (とその類似物) を実質的に使用する.

4 主結果 2

前章の結果の応用として 2×2 行列に対するダイレーション理論を論じる前に, 考察の動機付けにあたる事実を紹介する. ダイレーション理論は与えられた作用素を良い性質を持つ作用素の一部として捉える理論であり, von Neumann 型の不等式が重要な役割を果たす事を認識して頂ければ十分である. ダイレーション理論の詳細は [22, 24] などを参照して頂きたい. 1 章で Theorem 1.3 から Theorem 1.2 が従うことをコメントしたが, **行列値関数に対して** von Neumann 型の不等式が成り立つならば, 作用素はダイレーション可能である. この事実は Arveson のダイレーション定理 [8] と呼ばれており, ここではこれを説明する. $T = (T_1, \ldots, T_d)$ を Hilbert 空間 H 上の互いに可換な有界線形作用素の組とし, $sp(T)$ を T のジョイントスペクトル [8] とする. 一般に $\sigma(T) \subset sp(T)$ だが, H が有限次元の時は $\sigma(T) = sp(T)$ が成り立つ [8, 12, 11]. 4 章では 2×2 行列に対するダイレーションを考察するので, どのスペクトルを考えるのかはあまり気にしなくて良い.

Definition 4.1. $X \subset \mathbb{C}^d$ をコンパクト集合とする. $sp(T) \subset X$ かつ任意の $k \in \mathbb{N}$ と X 上の有理関数が成分の任意の $k \times k$ 行列 R に対して

$$\|R(T)\| \leq \sup_{z \in X} \|R(z)\|$$

が成り立つ時, X は T の完全スペクトル集合であるという.

Theorem 4.2 (Arveson のダイレーション定理 [8])**.** コンパクト集合 $X \subset \mathbb{C}^d$ と Hilbert 空間 H 上の互いに可換な有界線形作用素の組 $T = (T_1, \ldots, T_d)$ に対し, X が T の完全スペクトル集合になるための必要十分条件は, H を含む Hilbert 空間 K と K 上の互いに可換な正規作用素の組 $N = (N_1, \ldots, N_d)$ で, $sp(N) \subset \partial X$ かつ X 上の任意の有理関数 r に対して

$$r(T) = Pr(T)|_H$$

を満たすものが存在することである. ただし, ∂X は X 上の有理関数全体からなる一様環に対する X の Silov 境界 [15] で, P は K から H への直交射影である.

ダイレーション理論を研究する際, 完全スペクトル集合を複素関数論に適した形に書き変えた概念を考察することはしばしば有効である.

Definition 4.3. $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ を領域とする. $\sigma(T) \subset \Omega$ かつ任意の $k \in \mathbb{N}$ と Ω 上の有界正則関数が成分の任意の $k \times k$ 行列 F に対して

$$\|F(T)\| \leq \sup_{z \in \Omega} \|F(z)\|$$

が成り立つ時, Ω は T の完全スペクトル領域であるという.

有界線形作用素がダイレーション可能か否かを判定するための簡単な条件を与えることは重要である. 次の定理は 2×2 行列に対しては作用素ノルムと固有値間の距離の情報が本質的であることを示唆している. 証明では Agler [2] による作用素論と複素幾何学を繋ぐ研究を用いる. その論文内で Möbius 擬距離は同時対角化可能な 2×2 行列の組に対する 2 つの固有空間のなす角度で測れることが示されている. Agler はそれを用いて Lempert の定理の作用素論的な証明を与えた.

それでは本稿におけるもう一つの主結果を述べる.

Theorem 4.4 ([21, Corollary 5.8])**.** B_Δ が連結になるような, 正則関数が成分の行列値関数 Δ を考える. この時以下の条件は同値である:

(1) 任意の $z, w \in B_\Delta$ に対して, $d_\Delta(z, w) = d_{B_\Delta}(z, w)$ が成り立つ.

(2)B_Δ は $\sigma(T) \subset B_\Delta$ かつ $\|\Delta(T)\| \leq 1$ を満たす任意の同時対角化可能な 2×2 行列の組 $T = (T_1, \ldots, T_d)$ の完全スペクトル領域になる.

(3)$S_2(B_\Delta) = \mathscr{S}(B_\Delta)$.

Remark 4.5. 同時対角化可能な 2×2 行列の組全体の集合は互いに可換な 2×2 行列の組全体の集合の中で稠密である [14].

Example 4.6. 2 章の Examples 2.1 でみた二つの δ に対して, $d_\delta = d_{B_\delta}$ が従う. よって Theorem 4.4 と Remark 4.5 から, それぞれが縮小作用素の互いに可換な 2×2 行列の組に対する Drury のダ

イレーション定理 [14] と, 可換な行縮小作用素に対する Hartz-Richter-Shalit のダイレーション定理 [16, corollary 3.2] が簡単に導かれる. また, 2 章で述べた様に $d \geq 3$ の時は $SA(\mathbb{D}^d) \subsetneq \mathscr{S}(\mathbb{D}^d)$ となるのに対し, 任意の $d \in \mathbb{N}$ に対して $S_2(\mathbb{D}^d) = \mathscr{S}(\mathbb{D}^d)$ が成り立つ.

最後に, 非可換関数論 [5, 18] の文脈における Schur-Agler クラスに対する Schwarz の補題は知られているが [20], 本稿で紹介した手法では Schwarz-Pick 型の不等式の非可換化が実現できないことを注意しておく.

参考文献

[1] J. Agler, On the representation of certain holomorphic functions defined on a polydisk, *Operator Theory: Advances and Applications*, vol.48, 47-66, Birkhäuser, Basel, 1990.

[2] J. Agler, Operator theory and the Carathéodory metric. *Invent. Math.*, 101, 483-500, 1990.

[3] J. Agler and J. E. McCarthy, Global holomorphic functions in several non-commuting variables, *Canadian J. Math.*, 67(2):241-285, 2015

[4] J. Agler and J. E. McCarthy, Operator theory and the Oka extension theorem, *Hiroshima Math. J.*, 45(1):9-34, 2015

[5] J. Agler, J. E. McCarthy, and N. Young, *Operator Analysis Hilbert Space Methods in Complex Analysis*, Cambridge University Press, 2020.

[6] C.-G. Ambrozie and D. Timotin, A von Neumann type inequality for certain domains in $\mathbb{C}^d$, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131:859-869, 2003.

[7] T. Ando, On a Pair of Commutative Contractions, *Acta. Sci. Math.* 24, 88-90, 1963.

[8] W. B. Arveson, Subalgebras of C^*-algebras II, *Acta Math.* 128, 271-308, 1972.

[9] J. A. Ball and V. Bolotnikov, Realization and interpolation for Schur-Agler-class functions on domains with matrix polynomial defining function in $\mathbb{C}^d$, *J. Funct. Anal.* 213, No. 1, 45-87, 2004.

[10] J. A. Ball and M. D. Guerra Huamán, Test Functions, Schur-Agler Classes and Transfer-Function Realizations: The Matrix-Valued Setting, *Complex Anal. Oper. Theory* 7, 529-575, 2013.

[11] D. Cohen, Dilations of matrices, *Thesis (M.Sc.), Ben-Gurion University*, `https://arxiv.org/abs/1503.07334`

[12] R. E. Curto, Applications of several complex variables to multiparameter spectral theory, *Surveys of some recent results in Operator Theory (J. B. Conway and B. B. Morrel, eds)*, Longman Scientific, Harlow, 25-90, 1988.

[13] S. Dineen, The Schwarz Lemma, *Oxford Mathematical Monographs*, Oxford, 1989.

[14] S. W. Drury, Remarks on von Neumann's inequality, *Banach spaces, Harmonic analysis, and Probability theory* (*R. C. Blei and S. J. Sidney, eds*), *Lecture notes in Math.*, vol. 995, Springer Verlag, Berlin, 14-32, 1983.

[15] T. W. Gamelin, *Uniform algebras*, Chelsea, New York, 1984.

[16] M. Hartz, S. Richter and O. M. Shalit, von Neumann' s inequality for row contractive matrix tuples. Math. Z. 301, 3877-3894, 2022.

[17] 日合文雄 · 柳研二郎, ヒルベルト空間と線形作用素 (数理情報科学シリーズ), 牧野書店, 1995.

[18] D. S. Kaliuzhnyi-Verbovetskyi and V. Vinnikov, *Foundations of Noncommutative Function Theory*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 199, American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.

[19] S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 318, 1998.

[20] K. Kojin, A polynomial approximation result for free Herglotz-Agler functions, *Canadian Mathematical Bulletin*, 66(2), 665-678, 2023.

[21] K. Kojin, Some relations between Schwarz-Pick inequality and von Neumann's inequality, preprint, `https://arxiv.org/abs/2306.08694`

[22] O. M. Shalit, Dilation Theory: a guided tour, In *Operator Theory, Functional Analysis and Applications*, 551-623, 2021.

[23] S. Parrott, Unitary dilations for commuting contractions, *Pac. J. Math.* 34, 481-490, 1970.

[24] V. I. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[25] B. Sz.-Nagy, Sur les contractions de l'éspace de Hilbert, *Acta Sci. Math.* 15, 87-92, 1953.

[26] J. Taylor, The analytic-functional calculus for several commuting operators, *Acta. Math.*, 125:1-38, 1970.

Bounded cohomology and Amenability

東京大学大学院　数理科学研究科　数理科学専攻
粟津光 (Hikaru AWAZU) *

概要

群が amenable であるとは、左移動不変な群上の mean を持つことであり、平たくいうと可換群に近い、解析的な扱いがしやすいという性質のことである。Amenability は数学の様々な分野に関連する膨大な特徴づけを持つが、本講演では群の cohomology (の変種) による特徴づけに注目する。この特徴づけは位相空間への群作用、Banach 環などの他の数学的対象の amenability や、relative amenability などへも適切に拡張されてきた。これらを概観し、講演者の研究との関連性を述べる。

1　導入; 離散群の amenability

以下では断りのない限り、線型空間の係数体は $\mathbb{R}$ とし、Banach 空間 V に対して V^* を V 上の $\mathbb{R}$-値有界線型汎函数と書く。

また、$\mathbb{B}(V)$ を V から V への有界線形写像全体のなす Banach 環とする。

amenable(従順) という離散群のクラスは、1920 年代に von Neumann が導入して以来、広範かつ扱いやすいクラスとして研究されてきた。離散群の amenability の特徴づけは無数に存在するが、よく知られているのは次の定義である；

Definition 1.

離散群 G が **amenable**　$\overset{\text{def}}{\iff}$　$\exists m \in (\ell^\infty(G))^*$　s.t.

1. $\forall g \in G;\quad m = g.m$
2. $m(1_G) = 1$
3. $\forall f \geq 0 \in \ell^\infty(G);\quad m(f) \geq 0.$
   ただし、$g \in G$ と $f \in \ell^\infty(G)$ に対して、$g.m(f) := m(g^{-1}.f)$ と定める。

つまり、amenable な群というのは、群の元で左移動不変な、有限加法的正測度を持つことである。

このため、amenable な群では大体、「群の部分集合の良い平均を取って、解析的な議論ができる」と言える。

* E-mail:a-hikaru@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

amenable な群全体のクラスは、有限群、可換群を含む。

さらに部分群を取る操作、quotient を取る操作、群の拡大を取る操作などで amenability は保たれるため、可解群などを含む広範なクラスである。

群が amenable であると様々な数学的側面から解析しやすいため、しばしば構造の強い一意性が現れる。例えば確率測度空間への群作用のある種の一意性を述べる次の定理が知られている。

Theorem. (Weiss, Ornstein, Connes, Schmidt; [1] [2])
離散群 G が有限群でないとき、次が同値；

1. G は amenable
2. 任意の standard な確率測度空間 (X, μ) 上の G 作用 α ;$G \curvearrowright X$ について
   α が測度を保ち、自由で ergodic な作用 なら、
   α と、 $\mathbb{Z}$ の無理数回転作用 $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{T}$ は軌道同値な作用となる。

他にも、作用素環論に関連した良い性質と同値になることが知られている；
一般に離散群 G から reduced C*-環と呼ばれる作用素環 $C_r^*(G)$ を作ることができるが、
このとき、G が amenable $\Longleftrightarrow$ $C_r^*(G)$ が nuclear であることが知られている [3]。
C*-環の nuclear という性質は、C*-環のテンソル積の一意性で定義される性質で、
ここでも群の amenability が構造を一意に決めてしまう。

また amenable な群であれば、$\mathbb{Z}$ 上で展開できる、集合の密度や大きさに関する組み合わせ論的な議論がある程度移植できることが知られている;

Theorem. (Beiglboeck, Bergelson, Fish, Nasso, Lupini ;[4])
G を 離散 amenable 群とする。
$A, B \subset G$ が 0 でない Banach 密度を持つならば、
$AB = \{ab \in G \mid a \in A, b \in B\}$ は piecewise-syndetic となる。

群の部分集合が piecewise-syndetic であることはここでは定義しないが、全ての G の有限集合を弱い意味で含むというような性質であり、$\mathbb{Z}$ 上では、特に「任意の項数の等差数列を含む」という性質を導く。

2 群の Bounded cohomology を用いた amenability の特徴づけ

群の cohomology の定義を少しだけ変形した、bounded cohomology の言葉を使って、
amenable 群が特徴づけられることが知られている。

離散群 G の通常の cohomology を、ここでは homogeneous cochain を用いて定義する。
つまり、 G-加群 M に対して、
$C^n(G; M) := \{\phi : G^{n+1} \to M \mid g.\phi(g_0, \ldots, g_n) = \phi(gg_0, \ldots, gg_n)\ \forall g, g_0, \ldots, g_n \in G\}$ とし、

微分写像 $d^n : C^n(G;M) \to C^{n+1}(G;M)$ を

$$d_n\phi(g_0,\ldots,g_{n+1}) := \sum_{i=0,\ldots,n+1} (-1)^i \phi(g_0,\ldots,\widehat{g_i},\ldots,g_{n+1})$$

で定め、これによって cohomology 群 $H^n(G;M)$ を定義する。

いま、M が Banach 空間の構造を持ち、G の作用が等長であるときを考える。

これを **Banach G-module** と呼ぶ。このとき、$C^n(G;M)$ の元を bounded なものに限定して、cohomology 群を定義することができる；

Definition 2.

$$C_b^n(G;M) := \{\phi \in C^n(G;M) | \sup_{\boldsymbol{g}\in G^{n+1}} ||\phi(\boldsymbol{g})||_M \quad < \infty\}$$

とすると、$d^n(C_b^n(G;M)) \subset C_b^{n+1}(G;M)$ なので、M-係数の **bounded cohomology** を

$$H_b^n(G;M) := \frac{\mathrm{ker}d^n \cap C_b^n(G;M)}{d^{n-1}(C_b^{n-1}(G;M))}$$

で定めることができる。

Banach G-module の例をいくつか示す。

- $\ell^\infty(G)$ は $g.f = f(g^{-1}\cdot)$ という自然な作用で Banach G-module となる。
- $\mathbb{R} \hookrightarrow \ell^\infty(G)$ を $\lambda \mapsto \lambda 1_G$ で定めると、
  関数の定数差分を同一視した空間 $\ell^\infty(G)/\mathbb{R}$ が得られ、これも Banach G-module となる。
- また、V; Banach G-module に対して、V^* もまた上と同様の自然な作用を持ち、Banach G-module となる。

すると、ホモロジー代数的な議論で次が示される。

Theorem 1. ([5])
離散群 G について、次は同値;

1. G は amenable
2. $H_b^1(G;(\ell^\infty(G)/\mathbb{R})^*) = 0$
3. $\forall V$; Banach G-module と $\forall n \geq 1$ について $H_b^n(G;V^*) = 0$
4. $\forall V$; Banach G-module について $H_b^1(G;V^*) = 0$

3 他の数学的対象の amenability と bounded cohomology

群の amenability は強力な道具であることがわかったが、群以外の数学的対象に対しても Definition 1. を模倣する形で amenability が定義され、多くについて bounded cohomology を用いた特徴づけが得られている;

- 群の公理を一部緩和した対象である 半群や 離散 groupoid
- locally compact で Hausdorff な位相群 (以下、lc 群とかく)
- 測度空間への群作用や、これを拡張した measured-groupoid
- 位相空間への群作用や、これを拡張した topological-groupoid
- 作用素環への群作用
- Banach 環 に対しては次で定義される;

  Definition 3. A が **amenable Banach 環** であるとは、次を満たすことをいう;
  $\forall E$; A-A-Banach-bimodule と $\forall D : A \to E^*$; bounded linear map に対し、
  D が derivation、つまり $\forall a, b \in A$; $D(ab) = a.D(b) + D(a).b$ を満たすなら、
  D は inner、つまり $\exists \phi \in E^*$ s.t. $D(a) = a.\phi - \phi.a$ となる。

  定義の見た目は Definition 1. とはかなり異なるが、Hochschild cohomology の bounded 版を考えることで、群と似た形で特徴づけることができる。[6]

- 離散群と部分群の組 $H \leq G$ に対する relative-amenability
  lc 群や Banach 環に対しても、このような relative-amenability は考えられている。
- 有限生成群は、生成系を固定してケイリーグラフを考えることで距離空間とみなすことができるが、一般の距離空間に対しても amenability のある意味での類似物と言える property (A) が定義されている。

これら様々な対象の amenability の間には、密接な関係が存在する。例えば次が成り立つ。

Theorem 2. ([6])
$\mathcal{G}$; lc 群に対して、Haar 測度を μ とかく。
すると、Banach 空間 $L^1(\mathcal{G}, \mu)$ は、 convolution 積によって Banach 環の構造を持つ。
このもとで、以下が同値。

1. $\mathcal{G}$ **が lc 群として amenable**
2. $L^1(\mathcal{G}, \mu)$ が Banach 環として amenable

4 位相空間への群作用への amenability の bounded cohomology による特徴づけ

以下では、 講演者の研究について解説するため、compact 空間への離散群の作用の amenaility と、群の bounded cohomology による特徴づけを示した Brodzki, Niblo, Nowak, Wright の論文 [7] を手短に説明する。

以下、X を compact Hausdorff な位相空間、G を離散群とし、
群作用 $\alpha : G \curvearrowright X$ とは、群準同型 $\alpha; G \to \mathrm{Homeo}(X)$ のこととする。

また、$Prob(G) \subset \ell^1(G)$ を G 上の確率測度全体とし、ℓ^1-norm $||\cdot||_1$ と、自然な G-作用を入れる。
X 上の連続関数環 $C(X)$ には関数の sup を取ることで norm $||\cdot||_\infty$ を入れ、自然な G-作用 $g.f(x) := f(g^{-1}.x)$ を入れる。
すると、次で位相空間への作用の amenability が定義される。

Definition 4.

$\alpha : G \curvearrowright X$ **が amenable** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists (m_i; X \to Prob(G)\,;\text{continuous map})_{i\in I}$

$$s.t. \quad \forall g \in G;\ \lim_{i\in I} \|g.(m_i(x)) - m_i(\alpha_g(x))\|_1 = 0$$

ただし、I は 適当な directed set

要するに、X から $Prob(G)$ への射で、大体 G-equivariant なものが存在するという条件である。
G が amenable 群である場合、任意の G 作用は amenable となる。

次に、位相空間への群作用と整合した Banach G-module はどうあるべきかを考える；

Definition 5.

Banach G-module $\mathcal{E}$ と $\beta;\ C(X) \to \mathbb{B}(\mathcal{E})$　contractive, unital な環準同型 の組　$(\mathcal{E}, \beta)$ が、(α に対する) **Banach G-$C(X)$-module** とは、次を満たすことをいう；

1. (G-作用と $C(X)$-作用は associative)

$$g.(\beta(f)(e)) \ = \ \beta(g.f)(e) \quad \forall f \in C(X), e \in \mathcal{E}, g \in G$$

2. (G-作用と $C(X)$-作用は可換)

$$g.(\beta(f)(e)) \ = \ \beta(f)(g.e) \quad \forall f \in C(X), e \in \mathcal{E}, g \in G$$

以下では β は適宜略記する。
$\mathcal{E}$ が Banach G-$C(X)$-module のとき、$\mathcal{E}^*$ も自然に Banach G-$C(X)$-module の構造を持つ。
すると、特別な Banach G-$C(X)$-module $N_0(G, X)$ が構成でき、次が成立する。

Theorem 3. ([7]) 上の状況で、以下が同値；

1. $\alpha; G \curvearrowright X$ が amenable
2. $H^1_b(G; N_0(G, X)^{**}) = 0$
3. $\mathcal{E}$; Banach G-$C(X)$-module が ℓ^1-geometric という条件を満たせば、
   $H^1_b(G; \mathcal{E}^*) = 0$
4. $\forall \mathcal{E}$; ℓ^1-geometric Banach G-$C(X)$-module と $\forall n \geq 1$ について
   $H^n_b(G; \mathcal{E}^*) = 0$

ℓ^1-geometric という条件の定義は述べないが、次の定理が成立し、これを定義だと思って良い；

Theorem 4. $\mathcal{E}$ が ℓ^1-geometric な Banach G-$C(X)$-module のとき、

$\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall f_1, \dots f_N \in C(X)$, $\forall \phi_1, \dots \phi_N \in \mathcal{E}^*$ に対し、

$$\left\| \sum_{i=1,\dots,N} f_i.\phi_i \right\|_{\mathcal{E}^*} \leq 2 \left\| \sum_{i=1,\dots,N} |f_i| \right\|_\infty (\sup_{i=1,\dots,N} \|\phi_i\|_{\mathcal{E}^*})$$

が成立。実質的に $\mathcal{E}^*$ の性質であることに注意する。

5 講演者の研究

講演者は、$N_0(G, X)$ にも、位相群 $\mathcal{G}$ での $L^1(\mathcal{G}, \mu)$ と同様に、convolution 積が存在し、 Banach 環の構造をなすことを示した。

それゆえ、群作用の場合も群の場合の Theorem 2 と同様に、$\alpha; G \curvearrowright X$ の amenability も、$N_0(G, X)$ の Banach 環としての amenability によって特徴づけられるのではないかと期待される。

講演者は、Dong, Wang による、amenable action の 固定点性質に関する特徴づけ [8] を用いて、この予想を証明することを試みている。

参考文献

[1] D. S. Ornstein, B. Weiss : Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **2**(1), 161-164 (1980)

[2] A. Connes, B. Weiss : Property T and asymptotically invariant sequences, Israel Journal of Mathematics, **37**, 209–210. (1980)

[3] N. P. Brown, N. Ozawa : C*-Algebras and Finite Dimensional Approximations, Amer. Math. (2008)

[4] M. D. Nasso, M.Lupini : Nonstandard Analysis and the sumset phenomenon in arbitrary amenable groups, Illinois Journal of Mathematics, **58**, 11–25 (1992), arXiv:1904.10062v2

[5] R. Frigerio : Bounded Cohomology of Discrete Groups, Amer. Math. (2016), arXiv:1610.08339

[6] V. Runde : Amenable Banach Algebras :A Panorama, Springer Monographs in Mathematics. (2020)

[7] J. Brodzki, G. A. Niblo, P. Nowak, N. Wright : Amenable actions, invariant means and bounded cohomology, J. Top. Anal. **4**(3), 321–334 (2012), arXiv:2211.04223

[8] Z. Dong, Y. Y. Wang : Fixed point characterisation for exact and amenable action, Bull. Aust. Math. Soc. **92**, 228-232 (2015)

量子多体系におけるスペクトルギャップのある基底状態の近似と area law

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
鵜飼歩美 (Ayumi UKAI) *

概要

本研究では多次元格子量子スピン系や多次元格子フェルミオン系を含むような一般的な量子多体系で，スペクトルギャップのある基底状態の近似定理である Hastings factorization lemma を証明し，また area law 成立のための十分条件を与えた．ここでは，本研究の背景およびその予備知識の説明を行った後，本研究の主結果を紹介する．

1 背景

本研究は，作用素環論を用いた量子多体系の研究であり，特にスペクトルギャップのある基底状態の近似 (Hastings factorization lemma) と area law を扱う．この分野では Lieb-Robinson bound の近代的発展をきっかけに，量子スピン系におけるスペクトルギャップのある基底状態の研究で大きな進展があった．Hastings factorization lemma と area law はこの進展の基盤となる．一方で多次元格子量子多体系では，スペクトルギャップのある基底状態と行列積状態との対応の研究および area law の研究が現在進行中である．

Lieb-Robinson bound は 80 年代に Lieb, Robinson [1] によって導入された．それは有限有効距離の相互作用のある物理系で信号伝達速度の上限を表す．2004 年に Hastings [2] が Lieb-Robinson bound を応用して，Lieb-Schultz-Mattis の定理を高次元に拡張した．それをきっかけに Lieb-Robinson bound の見直しが行われ，2006 年に Hastings, Koma [3] と Nachtergaele, Ogata, Sims [4] によって，Lieb-Robinson bound の改良とさらなる応用が行われる．このリバイバルを基に，様々な研究者によって様々な物理系で，Lieb-Robinson bound の応用が行われている．

その応用研究として，スペクトルギャップのある基底状態の研究に大きな進展があった．最初に，2007 年に Hastings [5] によって，(有限体積の) 一次元格子量子スピン系で area law 成立が示された．その鍵となるのが Hastings factorization lemma であり，これはスペクトルギャップのある基底状態の近似定理である．後の 2013 年に松井 [6] は，無限体積の一次元格子量子スピン系において，area law から split property を示した．また 2020 年に緒方 [7] は split property を基に，一次元格子量子スピン系で SPT (symmetry protected topological) 相指標の数学的厳密な定義を与えた．こ

* E-mail:ayumi.ukai.e6@nagoya-u.ac.jp

れによってスペクトルギャップのある基底状態の分類が行われた．以上のように一次元格子量子スピン系の研究では，次のような進展があった:

(♭) Lieb-Robinson bound → Hastings factorization lemma →
area law → split property (→ スペクトルギャップのある基底状態の分類).

量子スピン系だけでなく一次元格子フェルミオン系でも，Lieb-Robinson bound [8] および split property [9] [10] が証明されている．ただし split property は Jordan-Wigner 変換を用いて量子スピン系の場合から導かれている．松井 [10] によって，(♭) のような流れは量子スピン系に限らず，一次元格子フェルミオン系でも成立すると示唆されている．

スペクトルギャップのある基底状態の研究における一つの課題として，行列積状態との関連がある．一次元格子量子スピン系では，スペクトルギャップのある基底状態は行列積状態とうまく対応している．行列積状態はその表示が具体的であるため便利である一方で，スペクトルギャップのある基底状態は具体例を見つけることも，またある状態がスペクトルギャップのある基底状態か否か判別することも難しい．行列積状態がギャップのある基底状態である条件は Fannes，Nachtergaele，Werner [11] が発見された．また逆に，一次元格子量子スピン系ではスペクトルギャップのある基底状態が area law を満たす [5] と知られており，また area law を満たす基底状態は行列積状態で近似可能であることも知られている [12]．一方で多次元格子量子スピン系では，一次元の場合より複雑になっている．行列積状態の多次元拡張として，Pérez-García, Verstraete, Cirac and Wolf [13] によって導入された PEPS（projected entangled pair states) というものがあるが，PEPS とスペクトルギャップのある基底状態との関連性はまだ見つかっていない．

さらに多次元格子量子多体系において，スペクトルギャップのある基底状態が area law を満たすことの数学的厳密な証明は与えられていない．多次元格子 area law の研究での唯一の研究が Anshu，Arad，Gosset による二次元 area law の研究 [14] である．しかし，この研究は frustration-free な物理系に限られており，また三次元以上での成果は今のところない．一方で，PEPS で近似できないが area law を満たすような物理系も発見されており [15]，多次元格子量子多体系での area law の研究は現在進行中である．

2 主結果

2.1 新規性

本研究の主結果は二つある．一つは Hastings factorization lemma の一般化である．この定理は，一次元格子量子スピン系での成立が知られていた．Hastings [5] が有限体積での証明を与え，後に松井 [6] が Hastings の証明が無限体積でも成立することを示唆した．本研究では多次元格子量子スピン系や多次元格子フェルミオン系を含むような，一般的な量子多体系で Hastings factorization lemma が成立することを明らかにした．

もう一つは，一般的な量子多体系において area law 成立のための十分条件を与えた．Hasting [5] によって一次元格子量子スピン系での area law 成立が示されている．本研究ではこの手法の一般化として，一般的な量子多体系における area law 成立のための十分条件を明らかにした．またその系

として，一次元格子フェルミオン系で area law が成立することの数学的に厳密な証明を与えた．

2.2 枠組み

C^*-環論に基づく枠組みでは，量子多体系は次で説明するような三つ組 $(\mathcal{A}, \{\mathcal{A}_X\}_{X\in\mathcal{P}_0(\Gamma)}, \Phi)$ で与えられる．まず (Γ, d) は距離付き離散グラフである．すなわち Γ は可算濃度集合であり，d を Γ 上の距離である．この (Γ, d) は量子多体系を構成する粒子の配列を表す．$\mathcal{A}$ は単位元を持つ C^*-環である．$\mathcal{A}$ の自己共役元は物理量を表す．ここで $\mathcal{P}_0(\Gamma)$ は Γ の有限部分集合全体を表すことにして，各 $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ に対して $\mathcal{A}_X$ は $\mathcal{A}$ の C^*-部分代数である．そして，$X \subseteq Y$ ならば $\mathcal{A}_X \subseteq \mathcal{A}_Y$ が成り立つ．$\mathcal{A}_X$ の自己共役元は $X \subset \Gamma$ 上に局在する物理量を表す．そして有限体積の集合上に局在する物理量全体 $\mathcal{A}_{\mathrm{loc}} := \bigcup_{X\in\mathcal{P}_0(\Gamma)} \mathcal{A}_X$ は，$\mathcal{A}$ の中で稠密であるとする．最後に $\Phi : \mathcal{P}_0(\Gamma) \to \mathcal{A}_{\mathrm{loc}}$ であり，任意の $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ で $\Phi(X) = \Phi(X)^* \in \mathcal{A}_X$ を満たす．この Φ を量子多体系の**相互作用**という．これはハミルトニアンの拡張となっている．実際に十分な仮定のもとでは，相互作用 Φ から時間発展 $\alpha^t = \alpha^t_\Phi$ が定まる．この時間発展は $\mathcal{A}$ 上のある種の連続性のある一径自己同型群として得られる．

例 2.1（多次元格子量子スピン 1/2 系） 離散グラフを ν-次元格子 $\mathbb{Z}^\nu$ によって，またその距離を ℓ^1 距離によって定める．量子スピン 1/2 粒子では，一粒子からなる物理系での物理量は 2×2 行列環 $M_2(\mathbb{C})$ の元として表される．よって任意の $x \in \mathbb{Z}^\nu$ で $\mathcal{A}_{\{x\}} := M_2(\mathbb{C})$ と定まる．そして任意の $X \in \mathcal{P}_0(\mathbb{Z}^\nu)$ で $\mathcal{A}_X := M_2(\mathbb{C})^{\otimes X}$ と定める．このとき，任意の $X, Y \in \mathcal{P}_0(\mathbb{Z}^\nu)$ で $X \subseteq Y$ を満たすとき，

$$A \in \mathcal{A}_X \mapsto A \otimes I \in \mathcal{A}_X \otimes M_2(\mathbb{C})^{\otimes Y\setminus X} = \mathcal{A}_Y$$

として埋め込みが定まる．$\mathcal{A}$ を，この埋め込みの下で $\bigcup_{X\in\mathcal{P}_0(\mathbb{Z}^\nu)} \mathcal{A}_X$ から生成する C^*-環とする．これを形式的に $M_2(\mathbb{C})^{\otimes \mathbb{Z}^\nu}$ と表す．

ここで $\nu = 1$ であり，かつ相互作用が次のように与えられるようなモデルを，量子ハイゼンベルグモデルという:

$$\Phi(X) = \begin{cases} -h\sigma^z_n & X = \{n\} \text{ のとき,} \\ -\dfrac{1}{2}(J_x\sigma^x_n\sigma^x_{n+1} + J_y\sigma^y_n\sigma^y_{n+1} + J_z\sigma^z_n\sigma^z_{n+1}) & X = \{n, n+1\} \text{ のとき,} \\ 0 & \text{その他の場合.} \end{cases}$$

ここで，$\sigma^x_n, \sigma^y_n, \sigma^z_n$ はそれぞれ $\sigma^x_n, \sigma^y_n, \sigma^z_n \in \mathcal{A}_{\{n\}} = M_2(\mathbb{C})$ のパウリ x, y, z 行列であり，また J_x, J_y, J_z は定数である．

次にスペクトルギャップのある基底状態を説明する．基底状態は物理量を表す $\mathcal{A}$ と時間発展 α^t から定まる．$\mathcal{A}$ の (物理) **状態**は十分よい性質を持った $\mathcal{A}$ 上の汎関数として与えられる．次の命題によって，状態からカノニカルな表現 (GNS 表現) を得ることができる．

命題 2.1（[16, Theorem 2.5.3]） ω を $\mathcal{A}$ の状態とする．このとき，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_\omega$ と $\mathcal{H}_\omega$ 上への $\mathcal{A}$ の表現 π_ω とその巡回単位ベクトル $\Omega \in \mathcal{H}_\omega$ が存在して，

$$\omega(A) = \langle \Omega, \pi_\omega(A)\Omega\rangle, \quad A \in \mathcal{A}$$

が成り立つ．この三つ組 $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega)$ を ω の **GNS 表現**という．また ω の GNS 表現はユニタリ同値を除いて一意に存在する．

ω が時間発展に対して不変であるとき，$\mathcal{H}_\omega$ 上の (非有界) 自己共役作用素 H_ω が存在して

$$\pi_\omega(\alpha^t(A)) = e^{itH_\omega}\pi_\omega(A)e^{-itH_\omega}, \quad H_\omega\Omega = 0$$

が成立する．特に H_ω が正であるとき，ω は**基底状態**であるという．このとき Ω は H_ω の最低固有値の固有ベクトルとなっている．さらに基底状態 ω で Ω が H_ω の非退化固有ベクトルであり，かつ $\sigma(H_\omega)$ を H_ω のスペクトラムとしてある $\gamma > 0$ で $\sigma(H_\omega) \subseteq \{0\} \cup [\gamma, \infty)$ が満たされる場合には，ω を**スペクトルギャップのある基底状態**という．このとき γ を ω のスペクトルギャップという．

2.3 Hastings factorization lemma

Hastings factorization lemma は，スペクトルギャップのある基底状態の近似を与える定理である．基底状態の密度作用素 $|\Omega\rangle\langle\Omega|$ が，注目する領域 $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ に対して，その境界に局在する物理量 $O_B(X,\ell)$ と X の内部と外部それぞれへの射影作用素 $O_R(X,\ell), O_L(X,\ell)$ の積によって近似される．また近似の精度は，X の体積ではなくある種の表面積のみに依存する．

ここで相互作用 Φ が**有界**であるとは，

$$\mathrm{j} = \mathrm{j}_\Phi := \sup_{x\in\Gamma} \sum_{x\in X\in\mathcal{P}_0(\Gamma)} \frac{\|\Phi(X)\|}{|X|} < \infty,$$

を満たすことである．また相互作用 Φ が**有限有効距離を持つ**とは，ある定数 $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_\Phi > 0$ が存在して，$\mathrm{diam}(X) := \sup\{d(x_1,x_2)\,;\, x_1, x_2 \in X\} > \mathfrak{r}$ ならば $\Phi(X) = 0$ が成立することである．このとき $\mathfrak{r}$ を Φ の有効距離という．

定理 2.2　量子多体系 $(\mathcal{A}, \{\mathcal{A}_X\}_{X\in\mathcal{P}_0(\Gamma)}, \Phi)$ が以下を満たすと仮定する:

(i)　(Γ, d) が F 関数を持つ.
(ii)　任意の $\mathcal{A}_X$ は行列環と同型である.
(iii)　任意の $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ に対して，$\Phi(X) \in \mathcal{A}_X \cap \mathcal{A}'_{X^c}$ が成り立つ.
(iv)　相互作用 Φ は有界であり，かつ有限有効距離 $\mathfrak{r}$ を持つ.

また任意の $r \geq 0$ と $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ に対して，以下のように定める:

$$\partial X(r) := \{x \in X\,;\, d(x, X^c) \leq r\} \sqcup \{y \in X^c\,;\, d(y, X) \leq r\}.$$

このとき，任意のスペクトルギャップのある基底状態 ω に対して，(X,ℓ) に依存しないような正数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して，次の命題を成り立たせる: 任意の $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ と任意の $\ell > 2\mathfrak{r}$ に対して，二つの射影作用素 $O_R(X,\ell) \in \mathcal{A}_X$, $O_L(X,\ell) \in \mathcal{A}'_X = (\mathcal{A}'_X \cap \mathcal{A})'' \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H}_\omega)$ とノルム 1 以下の物理量 $O_B(X,\ell) \in \mathcal{A}_{\partial X(3\ell+\mathfrak{r})}$ が存在して，

$$\|O_B(X,\ell)O_L(X,\ell)O_R(X,\ell) - |\Omega\rangle\langle\Omega|\| \leq C_1|\partial X(2\ell+\mathfrak{r})|^4 \exp(-C_2\ell)$$

が成り立つ.

さらに，(Γ, d) が次の仮定 (v) を満たすとする:

(v) ある定数 $\nu \in \mathbb{N}$ と $\kappa > 0$ が存在して，任意の $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ で $|\partial X(n + \mathfrak{r})| \leq \kappa |\partial X(\mathfrak{r})| n^\nu$ が成立する．

このとき，(X, ℓ) に依存しないような正数 $C_1', C_2' > 0$ が存在して，$|\partial X(\mathfrak{r})|$ に対して十分大きな任意の正数 $\ell > 0$ で

$$\|O_B(X,\ell)O_L(X,\ell)O_R(X,\ell) - |\Omega\rangle\langle\Omega|\| \leq C_1' |\partial X(\mathfrak{r})| \exp(-C_2'\ell) \tag{1}$$

が成り立つ．

ここで仮定 (i),(v) は距離つき離散グラフ (Γ, d) に対する条件である．多次元格子 $\mathbb{Z}^\nu$ で ℓ^1 距離を定めたものは，仮定 (i),(v) を満たす．また仮定 (ii) は $\mathcal{A}_X$ に対する要件である．量子スピン系と量子フェルミオン系は，仮定 (ii) を満たす．仮定 (iii),(iv) は相互作用に対する条件である．仮定 (i),(iv) の下で時間発展は常に存在する [4]．仮定 (iii) は量子スピン系では常に成立する．一方でフェルミオン系では，相互作用が偶の場合に成立する．以上のように，定理 2.2 の仮定は，有界かつ有限有効距離を持つ相互作用があるような多次元格子量子スピン系や多次元格子フェルミオン系を一般化した条件である．

定理 2.2 の証明の鍵となるのは，Lieb-Robinson bound である．証明の概略を述べる．まず $f_\alpha(t)$ をガウス核とする，すなわち

$$f_\alpha(t) := \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

であり，さらに $\alpha > 0$ は十分小さいものとする．ここで $t = 0$ のとき $e^{itH_\omega} = |\Omega\rangle\langle\Omega|$ である．よって ω は γ のスペクトルギャップがあるとすると，

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itH_\omega} f_\alpha(t)\, dt - |\Omega\rangle\langle\Omega| \right\| \leq e^{-\gamma^2/4\alpha}$$

と近似を得る．ここで ∂X を X の境界として

$$e^{itH_\omega} \cong e^{it(M_B + M_R + M_L)}, \quad M_B \in \mathcal{A}_{\partial X}, \quad M_R \in \mathcal{A}_X, \quad M_L \in \mathcal{A}_X'$$

と近似できる．この近似は次のようにして得る．まず H_ω は局所ハミルトニアン

$$H_\Lambda = H_{\Phi,\Lambda} := \sum_{X \subseteq \Lambda} \Phi(X) \in \mathcal{A}_\Lambda$$

の $\Lambda \to \infty$ における適切な意味での収束先となるため，H_R, H_B, H_L をそれぞれ X の内部，境界部，外部での相互作用を足し合わせたものとして，

$$H_\omega \cong H_R + H_B + H_L, \quad H_R \in \mathcal{A}_X, \quad H_B \in \mathcal{A}_{\partial X}, \quad (H_L \in \mathcal{A}_X')$$

と近似できる．このとき

$$(H_R)_\alpha := \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^t(H_R) f_\alpha(t)\, dt$$

はほぼ X 上に局在している．まず $t=0$ のとき $\alpha^t(H_R)$ は X 上に局在する．また Lieb-Robinson bound によって t が十分に小さいときも，$\alpha^t(H_R)$ はほぼ X 上に局在する．よって，$(H_R)_\alpha$ は $\mathcal{A}_X$ の元で近似できる．同様にして M_B, M_L を得ることができる．しかし H_L は $\mathcal{A}$ の元でないので $\mathcal{A}$ の元によって近似する必要がある．

以上から

$$\begin{aligned}|\Omega\rangle\langle\Omega| &\cong \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(M_B+M_R+M_L)} f_\alpha(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{it(M_B+M_R+M_L)} e^{-itM_R} e^{-itM_L}\right)\, e^{itM_R}\; e^{itM_L} f_\alpha(t)\,dt\end{aligned}$$

という近似を得られる．ここで $e^{itM_R} \in \mathcal{A}_X$ は射影作用素 $O_R \in \mathcal{A}_X$ によって，また $e^{itM_L} \in \mathcal{A}'_X$ は射影作用素 $O_L \in \mathcal{A}'_X$ で近似ができる．さらに $e^{it(M_B+M_R+M_L)} e^{-itM_R} e^{-itM_L}$ は $t=0$ のとき，∂X に局在するため Lieb-Robinson bound から境界部に局在する物理量 O_B で近似することができる．

2.4 Area law の十分条件

ここでは量子多体系 $(\mathcal{A}, \{\mathcal{A}_X\}_{X\in\mathcal{P}_0(\Gamma)}, \Phi)$ は仮定 (ii) および次の仮定 (vi) を満たすと仮定する:

(vi) $\mathcal{A}_{\{x\}}$ が $d_x \times d_x$ 行列環と同型であるとする．このとき $\hat{d} := \sup_{x\in\Gamma} d_x < \infty$ が成り立つ．

仮定 (vi) は，$\mathcal{A}_X$ に対する条件であり，フェルミオン系では常に満たされる．また量子スピン系で各スピンの次元が配置に対して一様に有界な場合に満たされる．

このとき $\mathcal{A}$ 上の状態 ω と着目する領域 $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ に対して，**エンタングルメントエントロピー**が定まる:

$$s(\omega|_{\mathcal{A}_X}) := -\mathrm{Tr}(\rho_X \log \rho_X).$$

ただし，ρ_X は $\omega|_{\mathcal{A}_X}$ の密度行列である．仮定 (ii),(vi) の他に何も制約がない場合でも，次の評価が成立する:

$$s(\omega|_{\mathcal{A}_X}) \le |X| \log(\hat{d}).$$

すなわちエンタングルメントエントロピーの自明な評価は，体積に依存する．しかし量子多体系上の特別な状態 ω では，エンタングルメントエントロピーの上限が高々 X の表面積にしか依存しないことがある．この現象を **area law** という．

定理 2.2 の主張が成り立つような状態 ω では，エンタングルメントエントロピーの上限が得られる．

定理 2.3　仮定 (ii),(v),(vi) を満たすような量子多体系 $(\mathcal{A}, \{\mathcal{A}_X\}_{X\in\mathcal{P}_0(\Gamma)}, \Phi)$ で，さらに ω 定理 2.2 の主張を成り立たせるものとするとき，(Γ, d) と $\hat{d}$ のみに依存した定数 $C_3 > 0$ が存在して，任意の $X \in \mathcal{P}_0(\Gamma)$ で

$$s(\omega|_{\mathcal{A}_X}) \le C_3 |\partial X(\mathfrak{r})| \left(1 + \frac{1}{2C_2'} \log \frac{4{C_1'}^2}{p_X}\right)^\nu$$

が成り立つ．ただし，$C_1', C_2' > 0$ は式 (1) での定数であり，ν は仮定 (v) での定数である．

以上から，area law 成立の十分条件として，次の条件を得た:

- $\log(1/p_X)$ が $|\partial X(\mathfrak{r})|$ で上から評価される．

この十分条件を用いて，以下の設定で area law の成立が確認できた．

系 2.4　一次元格子フェルミオン系上の任意のスペクトルギャップのある基底状態で，area law が成立する．

系 2.5　二次元格子量子スピン系のモデルのひとつである Kitaev のトーリックコードモデルにおいて，スペクトルギャップのある基底状態が発見されている [17]．このスペクトルギャップのある基底状態で，area law が成立する．

参考文献

[1] E. H. Lieb and D. W. Robinson, The finite group velocity of quantum spin systems. *Comm. Math. Phys.*, **28**(1972), 251–257. MR 312860.

[2] M. B. Hastings, Lieb-Schultz-Mattis in higher dimensions. *Physical review B*, **69.10**(2004), 104431.

[3] M. B. Hastings and T. Koma. Spectral gap and exponential decay of correlations. *Communications in mathematical physics*, **265**(2006), 781–804.

[4] B. Nachtergaele, Y. Ogata and R. Sims, Propagation of correlations in quantum lattice systems. *Journal of statistical physics*, **124**(2006), 1-13.

[5] M. B. Hastings, An area law for one-dimensional quantum systems. *J. Stat. Mech. Theory, Exp. 2007*, **P08024**(2007), 14 pp.

[6] T. Matsui, Boundedness of entanglement entropy and split property of quantum spin chains. *Rev. Math. Phys.*, **25**(2013), no.9, 1350017.

[7] Y. Ogata, A $\mathbb{Z}_2$-index of symmetry protected topological phases with time reversal symmetry for quantum spin chains. *Communications in Mathematical Physics*, **374.2**(2020), 705-734.

[8] B. Nachtergaele, R. Sims and A. Young, Lieb-Robinson bounds, the spectral flow, and stability of the spectral gap for lattice fermion systems. *Mathematical Problems in Quantum Physics*, **717**(2018), 93-115.

[9] C. Bourne and H. Schulz-Baldes, On $\mathbb{Z}^2$-indices for ground states of fermionic chains. *Reviews in mathematical physics*, **32.09**(2020), 2050028.

[10] T. Matsui, Split property and fermionic string order. arXiv:2003.13778 (2020).

[11] M. Fannes, B. Nachtergaele and R. F. Werner. Finitely correlated states on quantum spin chains. *Communications in mathematical physics*, **144**(1992), 443-490.

[12] N. Schuch, M. M. Wolf, F. Verstraete and J. I. Cirac, Entropy scaling and simulability by matrix product states. *Physical review letters*, **100.3**(2008), 030504.

[13] D. Pérez-García, F. Verstraete, J. I. Cirac and M. M. Wolf, PEPS as unique ground states

of local Hamiltonians. arXiv:0707.2260 (2007).

[14] A. Anshu, I. Arad and D. Gosset. An area law for 2d frustration-free spin systems. *Proceedings of the 54th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*(2022).

[15] Y. Ge and J. Eisert. Area laws and efficient descriptions of quantum many-body states. *New Journal of Physics*, **18.8**(2016), 083026.

[16] P. Naaijkens, *Quantum Spin Systems on Infinite Lattices: A Concise Introduction.* Lecture Notes in Physics, Springer, 2017.

[17] P. Naaijkens, Localized endomorphisms in Kitaev's toric code on the plane. *Reviews in Mathematical Physics*, **23.04**(2011), 347-373.

On the center of a wreath product of truncated polynomial rings

近畿大学工業高等専門学校　非常勤講師
小西正秀 (Masahide KONISHI) *

概要

環 $(R[x_1,\dots,x_N]/\langle x_1^{r_1},\dots,x_N^{r_N}\rangle)\wr S_n$ の中心を求める。

1　導入

テクニカルレポートに目を通している皆様、こんにちは。最早若手と名乗って良いのかどうかも分かりませんが、諸事情あって一度研究から距離を置き、戻ってきて博士取得を目指す身です。

単なる身の上話なのですが、この研究集会に最後に参加したのが丁度十年前、コロナ禍前の最後の研究発表が六年前と、随分ブランクが空いきました。その間に研究能力は向上したかと言うと凡そアカデミックではない業務をこなす間の現状維持が関の山でした。若き数学者志望の皆さん、数学に打ち込めるというのは人生に於いて非常に貴重な期間ですので、私みたいにならないよう精進して下さい。十年前と比べて社会の数学需要も高まっていますし、博士取得後の割とシームレスに用意されている状況なので、そう述べなくとも目が輝いている人が多いやも知れないなと、世代間ギャップの観測を楽しみにしています。

数学の本題に入りますが、今回の内容は博士論文に向けて導いた結果の概説となっています。ある環の中心を求めるという問題を難しく考えて高等テクニックを用いて示そうと試行錯誤しましたが、最終的に辿り着いたのは何の変哲も無い、定義さえ分かれば学部生でも理解可能な方法でした。但し文章での説明には組み合わせ論的な難しさ、整え切れなかったスパゲティコード状態の諸々を含むので、講演に於いては肝となる特殊なケースの計算を通じてその心を理解して頂くことに務め、このテクニカルレポートもなるべく平易に主要な部分が感じ取れるように書こうとしましたが、準備時間の都合で後半駆け足となってしまいました。

具体的に必要とされる知識としては、対称群 S_n とその巡回積表示、共役類と n の分割の対応が分かっていて、環に於いては群環や可換環 R 上のテンソル積を知っていれば十分です。輪積 (wreath 積) の定義を知り計算するだけならテンソル積を知らなくても手を動かせるので、実際に積を取って考えると何をしているのか把握できます。難解な理論に疲れた時の計算練習にでもお使い下さい。

* E-mail:m-konishi@ktc.ac.jp, masahide.konishi0915@gmail.com

2 概説

R を可換環とし、n を 1 以上の整数とする。以下、主定理の一部、$N = 1$ かつ $r_1 = 2$ である場合を示す為に必要な定義を書き、主定理を得るまでの流れを書く。証明は省略する。

S_n は集合 $\{1, \ldots, n\}$ から $\{1, \ldots, n\}$ への全単射全体の集合として定義する。

$\sigma \in S_n$ と $c_1 \in \{1, \ldots, n\}$ に対し、$c_{k+1} = \sigma(c_k)$ $(k \geq 1)$ とすると、$c_t = c_1$ となる最小の t が取れ、列 $(c_1 \ \ldots \ c_t)$ を得る。これを σ に含まれる t 巡回或いは単に巡回と呼び、t を巡回の長さと呼ぶ。1 から n までの数が全て現れるように巡回を取り尽くして並べたものを σ の巡回積表示と呼ぶ。

巡回積表示は一意ではなく、例えば $\sigma \in S_3$ で $\sigma(1) = 2$、$\sigma(1) = 1$、$\sigma(3) = 3$ となる $\sigma \in S_3$ に対して、$(1\ 2)(3)$、$(2\ 1)(3)$、$(3)(1\ 2)$、$(3)(2\ 1)$ と 4 つの巡回積表示が存在するが、以下ではこの非一意性は特に問題にならない。また、t 巡回 $(c_1 \ \ldots \ c_t)$ 自身を巡回に含まれる数を「1 つ右」に移し、それ以外の数は固定する S_n の元と見做すこともできる。

t 巡回 $(c_1 \ \ldots \ c_t)$ と $\sigma \in S_n$ に関しては次のような性質があり、S_n の共役類の分類に用いられる。$\sigma(c_1 \ \ldots \ c_t)\sigma^{-1} = (\sigma(c_1) \ \ldots \ \sigma(c_t))$。

$\sigma \in S_n$ の $\{1, \ldots, n\}$ への左からの作用は $\sigma \cdot c = \sigma(c)$ で定める。

1 以上の整数を用いた単調非増加な列 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ で和が n であるものを n の分割と呼ぶ。

$\sigma \in S_n$ の巡回積表示を取り、巡回の長さを大きい順に $(t_1, \ldots, t_m)$ と並べると n の分割となり、先程の性質と合わせることで S_n の共役類と n の分割が 1 対 1 対応する。例えば $(1\ 2)(3)$ と共役な S_3 の元は $(1\ 3)(2)$ と $(2\ 3)(1)$ で全てであり、この共役類は 3 の分割 $(2, 1)$ と対応する。

特別に 0 の分割を ϕ で表すことにする。n_1 と n_2 を $n_1 + n_2 = n$ となる非負整数とし、n_1 の分割 λ^1 と n_2 の分割 λ^2 の組 (λ^1, λ^2) を n の 2 重分割と呼ぶ。$n_1 \geq n_2$ である必要は無い。n の 2 重分割は定理の記述の際に用いる。

$A = R[x]/\langle x^2 \rangle$ を 1 変数多項式環であって $x^2 = 0$ という関係式を持つ環とする。

A の S_n による輪積 $A \wr S_n$ とは、集合としては $A^{\otimes n} \otimes RS_n$、即ち A の R 上の n 回テンソル積と群環 RS_n との R 上のテンソル積であり、積については以下を線形に拡張したものとして定義される。

$1 \leq i \leq n$ に対し a_i と b_i を A の元、σ と τ を S_n の元としたとき、
$((a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes \sigma) \times ((b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) \otimes \tau) = ((a_1 b_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes a_n b_{\sigma^{-1}(n)})) \otimes \sigma\tau$。
例えば、$((x \otimes 1 \otimes 1) \otimes (1\ 2\ 3)) \times ((x \otimes 1 \otimes 1) \otimes (1\ 2\ 3)) = (x \otimes x \otimes 1) \otimes (1\ 3\ 2)$ である。定義では σ^{-1} を用いているが、実際に計算する際は $(1\ 2\ 3)(x \otimes 1 \otimes 1)$ を $(1 \otimes x \otimes 1)(1\ 2\ 3)$ として扱い、$(x \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes x \otimes 1)$ と $(1\ 2\ 3)(1\ 2\ 3)$ のテンソル積になると解釈すれば楽である。

$A \wr S_n$ の R 上の階数は $2^n \times n!$ である。

以上で基本的を定義を終え、以下 $A \wr S_n$ の中心を求める為の技巧的な話をする。

S_n の単位元を ε で表し、$\sigma \in S_n$ に対し、混同の恐れが無い場合は $(1 \otimes \cdots \otimes 1) \otimes \sigma \in A \wr S_n$ も

単に σ で表すこととする。$x_1 = (x \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \otimes \varepsilon$、$x_{i+1} = (i\ i+1)x_i(i\ i+1)$ $(1 \leq i < n)$ とする。x_k $(1 \leq k \leq n)$ は要するにテンソル積の k 番目にのみ x があり、S_n 部分は ε である $A \wr S_n$ の元である。

このとき、$x_k^2 = 0$ 及び $\sigma x_k = x_{\sigma(k)}$ が成り立つことを用いて以下の手順で中心の元を求めていく。

$A \wr S_n$ の基底として $B = \left\{ x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n} \sigma \mid 0 \leq d_i \leq 1, \sigma \in S_n \right\}$ を取り、型という概念を導入して B の元を分類する。

型は σ を巡回積表示し、各巡回に対し、巡回の長さをとそれに含まれる数 i による d_i の総和を組にし、それを重複集合としたものである。重複集合とは要素の重複を含めて区別し、順番では区別しない集合であり、重複集合を表す括弧として [ ] を用いることとする。

例えば $x_1(1\ 2)(3)$ は長さが 2 の巡回 $(1\ 2)$ に対し $d_1 + d_2 = 1 + 0 = 1$ であり、長さが 1 の巡回 (3) に対し $d_3 = 0$ なので、型として $[(2,1),(1,0)]$ を得る。$x_1(3)(2\ 1)$ と巡回積の形を変えても、得られる型は $[(1,0),(2,1)]$ と不変である。

B を用いた線形和 $\sum_{b \in B} \alpha_b b$ $(\alpha_b \in R)$ が中心であると仮定して、各 x_i $(1 \leq i \leq n)$ や 2 巡回 $(i_1\ i_2)$ $(1 \leq i_1 < i_2 \leq n)$ との可換性を考えていく。

B の元 b と b' が同じ型を持つとき、係数 α_b と $\alpha_{b'}$ は等しいことがまず示せる。例えば $x_1(1\ 2)(3)$ と $x_2(1\ 2)(3)$ の型はともに $[(2,1),(1,0)]$ であり、線形和を考えた際に巡回 $(1\ 2)$ との可換性を考えると係数は等しいと分かる。他に、$x_1x_2(1\ 2\ 3\ 4)$ と $x_1x_3(1\ 2\ 3\ 4)$ の型はともに $[(4,2)]$ であり、線形和を考えた際に x_2 との可換性を考えると係数は等しいと分かる。

ここで型 $[(\gamma_i, \delta_i)]$ (i は巡回積で表した際の巡回の個数) に対し、全ての i に対し $\gamma_i = \delta_i$ または $\gamma_i = \delta_i + 1$ となっている型を中心的型と呼ぶことにする。

b の型が中心的型ではないとき、$\alpha_b = 0$ となることが示せる。例えば $(1\ 2)$ の型は $[(2,0)]$ であり、x_1 との可換性を考える。左から掛ければ $x_1(1\ 2)$ なので、$(1\ 2)$ の係数が 0 でなければ、右から x_1 を掛けて $x_1(1\ 2)$ となる元が存在することになる。しかし $(1\ 2)$ に右から x_1 を掛けることは左から x_2 を掛けることとなり、関係式から左から x_2 を掛けて $x_1(1\ 2)$ となる B の元は存在しない。故に $(1\ 2)$ の係数は 0 となる。

各中心的型に対し、その型を持つ b の係数を 1、それ以外を 0 とした線形和は中心となる。例えば $[(2,1)]$ は中心的型であり、$x_1(1\ 2) + x_2(1\ 2)$ は x_1 と x_2 及び $(1\ 2)$ 全てと可換である。

以上から、$A \wr S_n$ の中心の基底の 1 つは各中心的型を用いた線形和の集合であり、条件から中心的型の個数は n の 2 重分割の個数と等しいという定理を得る。例えば $n = 2$ の場合中心的型は $[(2,2)]$、$[(2,1)]$、$[(1,1),(1,1)]$、$[(1,1),(1,0)]$、$[(1,0),(1,0)]$ の 5 つであり、それぞれ 2 重分割 $((2),\phi)$、$(\phi,(2))$、$((1,1),\phi)$,$((1),(1))$,$(\phi,(1,1))$ に対応する。

途中の議論は $R[x]/\langle x^2 \rangle$ を $R[x]/\langle x^r \rangle$ $(r \geq 1)$ としても、更に独立な多変数を用いても同様に行えるので、上記定理は以下の主定理へと拡張可能である。

3　主定理

R を単位元を持つ可換環、N を 1 以上の整数、r_i $(1 \leq i \leq N)$ を 1 以上の整数とする。環 $(R[x_1, \ldots, x_N]/\langle x_1^{r_1}, \ldots, x_N^{r_N} \rangle) \wr S_n$ の中心の基底の個数が、n の $\prod_{i=1}^{N} r_i$ 重分割の個数と等しいことを示した。また、[1] の型の概念を拡張し、中心の元は特定の型を持つ元の線形和で表せることを示した。

参考文献

[1] G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials*. Oxford Univ. Press, second edition, 1995.

決定性公理の下での組み合わせ論

神戸大学　大学院　システム情報学専攻
丹野俊将 (Toshimasa TANNO) *

概要

公理的集合論において, (ZF の下で) 決定性公理 (Axiom of determinacy) AD からどのような命題が導かれるかという問題は長くから研究されており, 特に巨大基数の仮定の下で ZF + AD の自然なモデルとなる $L(\mathbb{R})$ に関してはよく調べられている. 今回は無限組み合わせ論的対象に関し, $L(\mathbb{R})$ で AD が成り立つとき $L(\mathbb{R})$ にアロンシャイン直線と呼ばれる非可算直線構造が存在しないことを示した.

1　公理的集合論

はじめに (公理的) 集合論の背景を概覧する. 集合論の研究は, 19 世紀後半のカントールに端を発する. 彼は実数直線 $\mathbb{R}$ についての解析的研究の中で, $\mathbb{R}$ と自然数全体 ω の間に全単射が存在しない, すなわち $\mathbb{R}$ が非可算集合であることを証明した. この論文の最後にカントールは以下の主張が成り立つと予想した. ここでの濃度とは集合論の言葉で定式化される無限集合の大きさである.

Definition 1.1. 連続体仮説 (Continium Hypothesis) CH とは, 「$\mathbb{R}$ の任意の部分集合は可算であるか, $\mathbb{R}$ と等しい濃度を持つ」という主張である.

カントールは連続体仮説を証明できなかったが, これは単に証明が技術的に困難であるというよりももっと本質的な問題があることがその後の研究で明らかになる. ゲーデルとコーエンそれぞれの結果によって, 連続体仮説は集合論の公理系 ZFC から独立であることが示された. ここである命題 ϕ が公理系から**独立**であるというのは, その命題 ϕ もその否定 $\neg\phi$ も公理系から証明できないことを意味する.

Theorem 1.2. ZF が無矛盾ならば, ZFC + CH も ZFC + ¬CH も無矛盾である.

ツェルメロ-フレンケルの公理系と呼ばれる集合論の公理系 ZF, 特に ZF に選択公理 AC (Axiom of choice) を加えた公理系 ZFC は現代数学のほとんどを記述する表現力を持つため, 現代数学の標準的な形式体系と捉えることができる. その一方で (連続体仮説のように素朴な主張であっても) 無限集合の大きさや性質についての言明のうちで ZFC から独立なものは数多く存在する.

公理的集合論では, 種々の命題を満たすようなモデルから別の命題が成り立つようなモデルを構成するなどの手法を用いて, ZF(C) から独立な命題たちが互いにどのような関係にあるかを研究する.

* E-mail:211x503x@stu.kobe-u.ac.jp

2 決定性公理

前章で述べた連続体仮説に関連して, ある程度の複雑さまでで定義可能な $\mathbb{R}$ の部分集合はすべて**正則性**と呼ばれる性質を持ち, 特に連続体仮説の反例になり得ない (すなわち可算と $\mathbb{R}$ の濃度の間の濃度を持ちえない) ことが知られている. 正則性とは ルベーグ可測性に代表されるような「素性の良い」性質の総称である. 特にその中の一つである完全集合の性質を持つことからその集合の濃度が可算であるか $\mathbb{R}$ と等しいかどちらかであることが従う.

Theorem 2.1. $\mathbb{R}$ の $\mathbf{\Sigma}^1_1$-集合はすべて可算であるか, $\mathbb{R}$ と等しい濃度を持つ.

ここで $\mathbb{R}$ の部分集合が $\mathbf{\Sigma}^1_1$-集合であるとは, その集合がある $\mathbb{R}^2$ のボレル集合の射影で与えられることをいい, このような集合は集合論的複雑さの低い階層にある. これは ZFC の定理であるが, $\mathbf{\Sigma}^1_1$-集合よりも複雑さの高い集合に関しての正則性を要請するためには本質的に ZFC に更なる公理を追加する必要があることが知られている.

ではどのような公理があればすべての実数の部分集合の正則性が保証されるか？そのような公理の一つに**決定性公理**がある. この公理について述べるために, 2 人のプレイヤーが行う完全情報無限ゲームについての定義を行う.

ここで, 集合論では実数全体の集合 $\mathbb{R}$ と自然数の無限列 ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ を同一視することに注意する.

Definition 2.2. $A \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ に対して, プレイヤー I と II が行うゲーム G_A を次のように定める. ゲーム G_A のプレイとは自然数列 $x = \langle a_0, b_0, a_1, b_1, \dots \rangle \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ であり, 各自然数 a_n, b_n をそれぞれ n 番目の I,II の手という. プレイ x が A の元であるとき I の勝ち, そうでないとき II の勝ちであるとする.

I の戦略とは, 長さ偶数の自然数列に対して自然数を与える関数であり, II の戦略とは, 長さ奇数の自然数列に対して自然数を与える関数である. σ を I の戦略としたとき, I が σ に従ってプレイするとはプレイ $\langle a_0, b_0, a_1, b_1, \dots \rangle$ が $a_0 = \sigma(\emptyset), a_1 = \sigma(\langle a_0, b_0 \rangle), a_2 = \sigma(\langle a_0, b_0, a_1, b_1 \rangle), \dots$ を満たすことをいう. II の戦略に対しても同様に定義する.

プレイヤーの戦略 σ が必勝戦略であるとは, もう一方のプレイヤーの手に依らず σ に従ったプレイが必ずそのプレイヤーの勝ちとなることをいう.

Definition 2.3. $A \subseteq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ が決定的とは, ゲーム G_A においてどちらかのプレイヤーが必勝法を持つことをいう.

決定性公理 (Axiom of determinacy) AD とは, 「任意の ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$ の部分集合が決定的である」という主張である.

Theorem 2.4 (ZF)**.** G_A が決定的であるならば, A は正則性を持つ. 特に AD が成り立つならば実巣のすべての部分集合が正則性を持つ.

このような文脈から, AD の下で展開される集合論の研究は定義可能な集合に関する研究の一般化と捉えることができる. 注意するべき点として, AD は選択公理 (Axiom of choice) AC と両立しない. これはよく知られたように AC を使うことでルベーグ可測性を持たないような (特に決定的でな

い) 集合を構成できることからわかる.

ZF + AD で展開される集合論は, $\mathbb{R}$ の部分集合以外の集合に関しても ZFC でのそれとは非常に様相が異なる. AD に関する重要な結果として, (ZFC+ 強い仮定の下で) $\mathbb{R}$ から構成されるある種の自然な ZF のモデルで AD が成り立っていることが知られている.

Definition 2.5. 順序数全体を含み, 推移的であるような ZF のモデルを ZF の内部モデルという.

集合 A に対して A を要素に持つような内部モデルで最小のものが存在し, これを $L(A)$ と表す.

Theorem 2.6. 超コンパクト基数が存在すると仮定する. このとき, $L(\mathbb{R})$ で AD が成り立つ.

$L(\mathbb{R})$ のような内部モデルで何が成り立っているかを調べることは元の (ZFC の) モデルで何が成り立っているかを調べる上で重要であり, このような視点からも AD が導く帰結について研究がなされている.

3 直線構造

ここでは今回の講演と関連する無限組み合わせ論的対象として, スリン直線とアロンシャイン直線の定義およびその背景について述べる.

Definition 3.1. X を集合とする. X 上の関係 $R \subseteq X \times X$ が以下を満たすとき, $\langle X, R\rangle$ は半順序集合であるという.

- 任意の $x \in X$ に対して xRx.
- 任意の $x, y \in X$ に対して xRy かつ yRx ならば $x = y$.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して xRy かつ yRz ならば xRz.

半順序集合 $\langle X, R\rangle$ が全順序集合であるとは, 任意の $x, y \in X$ に対して xRy または yRx が成り立つことをいう.

全順序集合 $\langle X, R\rangle$ が

- 稠密であるとは, 任意の xRy に対し $xRzRy$ となる $z \in X$ が存在することをいう.
- 完備であるとは, 任意の空でない有界な部分集合が上限と下限を持つことをいう.
- 可分であるとは, 可算な稠密部分集合を持つことをいう.
- 可算鎖条件を満たすとは, 互いに交わらない開区間の族が高々可算であることをいう.

ここで, 稠密な部分集合は任意の開区間と交わることから, 可分であれば可算鎖条件を満たすことに注意する. 順序集合の言葉を用いることで, 実数直線 $\mathbb{R}$ は次のように特徴づけられる.

Theorem 3.2. $\langle X, R\rangle$ を空でない全順序集合とする. $\langle X, R\rangle$ が最小元も最大元も持たず, 稠密かつ完備かつ可分であるとき, $\mathbb{R}$ と順序集合として同型である.

この特徴づけにおける可分性を可算鎖条件に置き換えることができるか？というのがススリンの立てた問いであった.

Definition 3.3. スースリン直線とは, 最大元も最小元も持たない稠密かつ完備な全順序であって, 可算鎖条件を満たすが可分でないものをいう.

スースリンの仮説 (Suslin Hypothesis) SH とは, スースリン直線が存在しないという主張である.

スースリン直線の定義自体は自然なものであるが, SH は ZFC 上独立な命題である.

Theorem 3.4. ZFC が無矛盾ならば, ZFC + SH も ZFC + ¬SH も無矛盾である.

一方で, ある程度までの複雑さを持つ順序集合はスースリン直線になりえないことが知られている.

Theorem 3.5. $\mathbf{\Delta}^1_1$-集合であるような順序集合はスースリン直線ではない.

スースリン直線と関係が深い重要な非可算な全順序集合として, アロンシャイン直線がある.

Definition 3.6. アロンシャイン直線とは, 非可算全順序集合であって $\omega_1, -\omega_1$ および $\mathbb{R}$ の非可算部分順序のいずれも埋め込めないものをいう. ここで ω_1 は最小の非可算順序数, $-\omega_1$ はその逆順序である.

木についての詳しい定義はここでは省略するが, ZFC の下でスースリン直線・アロンシャイン直線の存在はそれぞれスースリン木・アロンシャイン木と呼ばれる組み合わせ論的対象の存在と同値であり, スースリン木は常にアロンシャイン木である.

アロンシャイン直線はスースリン直線と異なり, ZFC で存在が証明できる.

Theorem 3.7 (ZFC)**.** アロンシャイン直線が存在する.

4 先行研究

2 章で述べたように, AD は定義可能な集合についての性質を一般の集合に要請するような公理であると捉えることができる. このような観点と Theorem 3.5 から, AD の下で SH は成り立つか, すなわちスースリン直線は存在し得るのか？という問いが立つ.

前章で述べたように, スースリン直線の存在は ZFC の下ではスースリン木という対象の存在と同値である. ところがスースリン直線の存在からスースリン木を構成する方法には AC を用いる必要があるため, ZF ではスースリン直線の存在とスースリン木の存在を別個に考える必要がある. ZF + AD の下でスースリン木が存在しないことは比較的容易にわかるが, このような事情により, そこから直ちにスースリン直線が存在しないことが従うわけではない.

また, AD は実数の部分集合に関する主張であるため, SH のような任意の無限集合に関する命題については単に ZF + AD の下で考えるのではなく $\mathbb{R}$ から自然に構成される $L(\mathbb{R})$ のような AD のモデルについて考察するのが妥当である ($L(\mathbb{R})$ に属する全ての集合は実数をパラメータとして定義可能であり, いわば $L(\mathbb{R})$ では全ての集合が実数の影響を受けている).

この問題に対してチャンとジャクソンは次を示した [1].

Theorem 4.1. $L(\mathbb{R})$ で AD が成り立つならば, $L(\mathbb{R})$ で SH が成り立つ.

5 主定理

AD の下でのアロンシャイン直線の存在について, 講演者は次を示した.

Theorem 5.1. $L(\mathbb{R})$ で AD が成り立つならば, $L(\mathbb{R})$ で次が成り立つ. アロンシャイン直線は存在しない. すなわち, 任意の非可算全順序集合に対して, ω_1, $-\omega_1$, $\mathbb{R}$ の非可算部分順序のいずれかが埋め込める.

証明にはウディンによる次の分類定理を用いた.

Theorem 5.2 (ウディン)**.** $L(\mathbb{R})$ で AD が成り立つならば, $L(\mathbb{R})$ で次が成り立つ : 任意の集合 X に対して, X は整列可能もしくは $\mathbb{R}$ から X への単射が存在する.

非可算全順序 $\langle X, R\rangle$ について X が整列可能ならば ω_1 または $-\omega_1$ が, $\mathbb{R}$ から X への単射が存在するならば $\mathbb{R}$ が埋め込めることを, AD の下で $\mathbb{R}$ や ω_1 が持つ組み合わせ論的性質を用いて証明した.

参考文献

[1] W. Chan and S. Jackson, "$L(\mathbb{R})$ with determinacy satisfies the Suslin hypothesis." Advances in Mathematics 346 (2019): 305-328.

[2] W. Chan, "An Introduction to combinatorics of determinacy." Trends in Set Theory, Contemporary Mathematics, 752 (2020): 21-75.

[3] A. E. Caicedo and R. Ketchersid, "A trichotomy theorem in natural models of AD^+." Contemporary Mathematics, 533 (2009): 227-258.

選択公理の弱い形について

神戸大学　大学院システム情報学研究科　システム情報学専攻
林佑亮 (Yusuke HAYASHI) *

概要

ZFC は集合論の標準的な公理系の一つである．その中でも，選択公理とその周辺については現在まで深く研究されている． とくに自然数 n に対して「選択関数の存在を n 元集合の族に制限した場合，その公理は他のどのような公理を導出できるか？」という問いは古くから取り組まれており，これは群論の言葉を用いて特徴づけできることが分かっている． 講演者は，上記研究の発展形として新たな選択公理の弱形を導入する．また，その強さを推し量るための群論的な条件を紹介する．

1　導入

1.1　集合論と ZFC，選択公理

集合論は集合，とくに無限集合の解析を目的に発展した．その結果,「現在まで行われている数学的営みの大部分が集合論の言葉で形式化できる」という経験的事実から，集合論を数学の基礎付けとする立場が生まれた.

したがって前述の立場のもとでは，標準的な集合論の公理系 ZFC を現代数学の公理系とみなすことができる．ZFC は有限の公理と公理図式から成るが，そのなかで集合論内外関わらず，様々な専門書で専ら取り沙汰されているものに**選択公理** (AC) と呼ばれるものがある.

定義. 選択公理 (AC) とは,「空でない集合から成る空でない族 $\mathcal{F}$ に対して，写像 $C : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$ が存在して $C(X) \in X$ がすべての $X \in \mathcal{F}$ について成り立つ」という命題である.

上の C は各 $X \in \mathcal{F}$ から元をひとつ選ぶという意味で**選択関数**と呼ばれる.

1.2　公理と独立性

ところで，何らかの構造ないし体系の公理たちを記述するときは，それらには過剰なもののないように記されることが多い．たとえば，よく知られているように通常群の公理といえば以下のものを指す：

定義. 集合 $G \ni 0$ とその上の演算 $+$ について，群の公理 Grp とは以下の論理式たちのことである.

* E-mail:219x504x@stu.kobe-u.ac.jp

(1) $\forall a, b, c \in G\ [(a+b)+c = a+(b+c)]$
(2) $\forall a \in G, \exists b \in R\ [a+b = b+a = 0]$
(3) $\forall a \in G\ [a+0 = 0+a = a]$

ここで通常，上の公理に加えて $\forall a, b, c, d \in G\ [(a+b)+(c+d) = a+(b+c)+d]$ という論理式を群の公理として明記することはしない．なぜなら簡単にわかるように，この論理式は上の群論の公理から証明可能であるからである．

以上のように，ある体系・構造の公理を述べるときは

公理の中のある命題が他の命題たちから証明されるようなことがない $(*)$

という性質が期待される．

では，(1) と (2) から (3) が証明できることを期待して，(3) の論理式を除いたものを群の公理であると主張することはできるだろうか．

結論から言えばこれはできない．なぜなら，(1)(2) の論理式を満たすが群でないような代表例（モデル）として $\mathbb{N} \cup \{0\}$ があり，したがって (3) がないと群の公理を適切に表しているとはいえないからである．

上の考察は次の意味で示唆に富んでいる．いま，$\forall a \in R, \exists b \in R\ [a+b = b+a = 0]$ が他の公理たちから証明できないことの証拠として $\mathbb{N} \cup \{0\}$ を例に挙げた．このように，ある論理式 φ が論理式の集合 Ψ から証明できないことは，Ψ をすべて満たすが φ を満たさないようなモデルを探すことで，$\Phi + \varphi$ が無矛盾であることを確かめればよい．

いま，論理式 φ について，

1. ZFC と φ を満たすモデル
2. ZFC と $\neg\varphi$ を満たすモデル

の両方を見つけることができたとする．このとき，2. の存在から**数学は（ZFC は）φ を証明できない**し，1. の存在から**数学は（ZFC は）φ を反証することもできない**．言い換えれば，数学は φ の真偽をもはや決定することができない．このようなとき「φ は ZFC から**独立**である」と表現する．

1.3 有限集合の族に対する選択公理

ZFC において選択公理は $(*)$ を満たすことが知られている．つまり，ZFC から選択公理を除いた集合論の公理系である ZF[*1]からは，選択公理を証明することはできない．

実は以下で述べるように，族 $\mathcal{F}$ を有限集合たちからなる場合に弱めたバージョンの選択公理でさえ，ZF から証明することはできない．

定義. n を自然数とする．AC(n) とは，「空でない n 元集合たちからなる族に選択関数が存在する」という命題である．

事実. $n > 1$ を自然数とする．ZFC のモデルを作り替えて，ZF + $\neg$AC(n) のモデルを作ることがで

[*1] ZFC の C は **C**hoice の頭文字である．

きる．すなわち，ZF から $\mathsf{AC}(n)$ を証明することはできない．

このような選択公理の弱形は 1900 年代後半によく研究されてきた．とくに，上記のような有限集合の族に対する選択公理の文脈においては，ZF の下で証明可能な導出関係にはどのようなものがあるか？という問いに強い興味が持たれている．たとえば，ZF の下で以下のような命題が証明できる：

事実. 以下が ZF で成り立つ

- $\mathsf{AC}(2) \leftrightarrow \mathsf{AC}(4)$.
- $(\mathsf{AC}(3) \wedge \mathsf{AC}(7)) \rightarrow \mathsf{AC}(9)$.

また同時に，ZF では証明不可能な導出関係についてもよく研究されてきた．これについてはたとえば，以下のような事実がある：

事実. ZFC のモデルを変形することで，次が作れる．

- $\mathsf{ZF} + \mathsf{AC}(2) + \neg\mathsf{AC}(3)$ を満たすモデル.
- $\mathsf{ZF} + \mathsf{AC}(3) + \neg\mathsf{AC}(2)$ を満たすモデル.

したがって，$\mathsf{AC}(2) \rightarrow \mathsf{AC}(3)$ や $\mathsf{AC}(3) \rightarrow \mathsf{AC}(2)$ は ZF では証明できない．

このことから次のような問いが自然に浮かび上がる

問. $A \subseteq \mathbb{N}$ を有限集合とする．$\bigwedge_{m\in A} \mathsf{AC}(m) \rightarrow \mathsf{AC}(n)$ が ZF で証明可能であるための条件は何か？

この問いは Gauntt[1] によって完全に解決された．Gauntt は，上の特徴付けに有限群論を用いた．

事実. $\mathfrak{S}_n$ を $\{1, 2, \ldots, n\}$ の置換群とする．
$\bigwedge_{m\in A} \mathsf{AC}(m) \rightarrow \mathsf{AC}(n)$ が ZF で証明可能であることと，以下は同値：
$G \leq \mathfrak{S}_n$ が，任意の $k \leq n$ に対してある $\sigma \in G$ が存在して $\sigma(k) \neq k$ をみたすなら，ある $H \leq G$ と $H_1, H_2, \ldots, H_p \lneq H$ が存在して，

$$\sum_{j=1}^{p} [H : H_j] \in A$$

が成り立つ．

1.4 Truss による拡張

Truss[2] は $\mathsf{AC}(n)$ をさらに弱めた公理を導入し，同様な特徴づけを得ている．

公理の弱め方を述べるための準備をしよう．$\mathfrak{S}_n$ を $\{1, 2, \ldots, n\}$ の置換群とする．集合 S に対して $e(S)$ で S の空でない有限部分集合全体を表すことにする．いま，$e_\omega(S) = \bigcup \left\{ e^k(S) \mid k \geq 1 \right\}$ とすると，$\mathfrak{S}_n$ は $e_\omega(\{1, 2, \ldots, n\})$ に自然に作用する．

$e_\omega(\{1, 2, \ldots, n\})$ 上の同値関係 $\sim_n$ を，

$$x \sim_n y \Longleftrightarrow (\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n)\, [\sigma(x) = y]$$

で定義し，$V_n = e_\omega(\{1,2,\ldots,n\})/\sim_n$ とする．$v \in V = \bigcup\{V_n \mid n \geq 1\}$ に対して一意的に $v \in V_{n(v)}$ となる $n(v) \geq 1$ が定まる．またこのとき，$n(v)$ 元集合 S に対して勝手に一つ全単射 $f : \{1,2,\ldots,n(v)\} \to S$ を取ると，これは v に自然に作用し $f(v) \subseteq e_\omega(S)$ を定める．さらに，同値関係の定義からこの $f(v)$ は全単射 f の取り方に依らない．したがってこの $f(v)$ を $v(S)$ と書くことにする．

以上の記法のもと，Truss は $Z \subseteq V$ に対して $\mathsf{AC}(Z)$ と呼ばれる公理を定義した．

定義. $Z \subseteq V$ とする．$\mathsf{AC}(Z)$ とは，「任意の $v \in Z$ に対して，どんな $n(v)$ 元集合から成る空でない族 $\mathcal{F}$ に対しても $\{v(X) \mid X \in \mathcal{F}\}$ に選択関数が存在する.」という命題である．

たとえば，自然数 n に対して

$$v_n = \{s \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \mid |s| = 1\} \in e_2(\{1,2,\ldots,n\})$$

とすれば，すぐにわかるように $\mathsf{AC}(v_n)$ は $\mathsf{AC}(n)$ と同値な命題を表す．また，

$$v = \{s \subseteq \{1,2,\ldots,6\} \mid |s| = 2\} \in e_2(\{1,2,\ldots,6\})$$

とすれば，$\mathsf{AC}(v)$ は「6 元集合から成る空でない族 $\mathcal{F}$ に対して，各 6 元集合の 2 元部分集合を選択する関数が存在する.」という命題を表す.

Truss は，$Z \subseteq V, v \in V$ について $\mathsf{AC}(Z) \to \mathsf{AC}(v)$ が ZF で証明可能であるための必要十分条件を求めた.

事実. $Z \subseteq V, v \in V$ について，ZF で $\mathsf{AC}(Z) \to \mathsf{AC}(v)$ が証明できることと，以下は同値：

$G \leq \mathfrak{S}_{n(v)}$ が，任意の $\xi \in v$ に対してある $\sigma \in G$ が存在して $\sigma(\xi) \neq \xi$ をみたすなら，ある $X \in e_\omega(\{1,2,\ldots,n(v)\})$ と $w \in Z$ が存在して $|X| = n(w)$ であり，どんな $\tilde{\xi} \in w(X)$ についても

$$\{\sigma \in G \mid \sigma(X) = X\} \not\subseteq \left\{\sigma \in G \mid \sigma(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi}\right\}$$

が成り立つ.

2 主定理

講演者は Truss[2] で導入された公理をさらに弱めた $\mathsf{AC}^{weak}(Z)$ を導入した．そのうえで，それらの導出関係を特徴付ける条件を調べた.

定義. $Z \subseteq V$ とする．$\mathsf{AC}^{weak}(Z)$ とは，「任意の自然数 $n \in \{n \mid Z \cap V_n \neq \emptyset\}$ に対して，どんな n 元集合から成る空でない族 $\mathcal{F}$ に対しても $\{\bigcup v(X) \mid v \in Z \cap V_n\}$ に選択関数が存在する.」という命題である.

たとえば,

$$
\begin{aligned}
&n = 6\\
&v_1 = \{A \subseteq \{1,2,\dots,6\} \mid |A| = 2\} \in e_2(\{1,2,\dots,6\})\\
&v_2 = \{A \subseteq \{1,2,\dots,6\} \mid |A| = 3\} \in e_2(\{1,2,\dots,6\})\\
&Z = \{v_1, v_2\}
\end{aligned}
$$

とすると，$\mathsf{AC}^{weak}(Z)$ は「6 元集合から成る空でない族 $\mathcal{F}$ に対して，各 6 元集合の 2 元か 3 元部分集合を選択する関数が存在する.」という主張になる．これについてたとえば，講演者は以下のような具体的な関係を示した.

定理. 以下が ZF で成り立つ

- $\mathsf{AC}(6 \to 1 \vee 2) \leftrightarrow \mathsf{AC}(3)$
- $\mathsf{AC}(6 \to 1 \vee 3) \leftrightarrow \mathsf{AC}(2)$
- $\mathsf{AC}(6 \to 2 \vee 3) \to \mathsf{AC}(5)$

ただしここで，$\mathsf{AC}(6 \to n \vee m)$ とは，「6 元集合から成る空でない族 $\mathcal{F}$ に対して，各 6 元集合の n 元か m 元部分集合を選択する関数が存在する.」という命題である.

さらに，Truss の手法をまねることで一般に $Z \subseteq V, Z' \subseteq V_n$ について，ZF で $\mathsf{AC}^{weak}(Z) \to \mathsf{AC}^{weak}(Z')$ が証明できるための必要十分条件を調べた.

主定理. $Z \subseteq V, Z' \subseteq V_n$ について，ZF で $\mathsf{AC}^{weak}(Z) \to \mathsf{AC}^{weak}(Z')$ が証明できることと，以下は同値：

$G \leq \mathfrak{S}_n$ が，任意の $\xi \in v \in Z'$ に対してある $\sigma \in G$ が存在して $\sigma(\xi) \neq \xi$ をみたすなら，ある $X \in e_\omega(\{1,2,\dots,n\}), k = |X| \in \{k \mid Z \cap V_k \neq \emptyset\}$ が存在して，どんな $w \in Z \cap V_k$ と $\tilde{\xi} \in w(X)$ についても

$$\{\sigma \in G \mid \sigma(X) = X\} \not\subseteq \left\{\sigma \in G \mid \sigma(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi}\right\}$$

が成り立つ.

参考文献

[1] Gauntt, Robert James. The Axiom of Choice for Collections of Finite Sets. Diss. 1969.

[2] Truss, John. "Finite axioms of choice." Annals of Mathematical Logic 6.2 (1973): 147-176.

Perturbation theory for nonlinear Schrödinger equation with exponential nonlinearity

津田塾大学大学院　理学研究科　数学専攻
渡邉 南 (Minami WATANABE) *

概要

本講演では，非線形項が指数関数型の非線形シュレディンガー方程式 (NLS) を扱う．(NLS) は方程式の非線形性より分散性が支配的な場合，散乱解と呼ばれる解が存在する．その解析をする際，一般的には小さな解を考え，それを孤立波成分と分散波成分に分解し時間が経過するほど孤立波成分は固定孤立波に収束し分散成分が線形解に強く収束することを示す必要がある．発表ではその証明のために用いる摂動理論について発表する．

1　導入

本講演では次の非線形シュレディンガー方程式について考察する．

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \Delta \psi + f(\psi) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \tag{NLS}$$

nls

ただし，$i = \sqrt{-1}$ で $\Delta = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ はラプラシアンであり，$f(\psi) = (e^{4\pi|\psi|^2} - 1)\psi$ である．さらに (NLS) の質量 $\mathcal{M}(\psi)$ とエネルギー $\mathcal{E}(\psi)$ を次で導入する．

$$\mathcal{M}(\psi) = \frac{1}{2}\|\psi\|_{L^2}^2, \quad \mathcal{E}(\psi) = \frac{1}{2}\|\nabla\psi\|_{L^2}^2 - \frac{1}{8\pi}\int_{\mathbb{R}^2}(e^{4\pi|\psi|^2} - 1 - 4\pi|\psi|^2)dx.$$

任意の $\psi_0 \in H^1(\mathbb{R}^2)$ に対して，ある時間 $T_{\max}, T_{\min} > 0$ と，$\psi|_{t=0} = \psi_0$ を満たす (NLS) の解 $u \in C((-T_{\min}, T_{\max}), H^1(\mathbb{R}^2))$ が存在して，質量とエネルギーに対して保存則が成り立つ．つまり

$$\mathcal{M}(\psi(t)) = \mathcal{M}(\psi_0), \quad \mathcal{E}(\psi(t)) = \mathcal{E}(\psi_0) \quad \text{for all} \quad t \in (-T_{\min}, T_{\max}).$$

例えば，Cazenave and Weissler [2] を参照．さらに，(NLS) の解 $\psi(t,x)$ は $|x|^2\psi_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ であるとき，次のビリアル恒等式を満たす．

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_{\mathbb{R}^2}|x|^2|\psi(t,x)|^2dx = 8\mathcal{K}(\psi(t)) \quad \text{for all} \quad t \in (-T_{\min}, T_{\max}).$$

ただし

$$\mathcal{K}(\psi) = \|\nabla\psi\|_{L^2}^2 - \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2}(4\pi|\psi|^2e^{4\pi|\psi|^2} - e^{4\pi|\psi|^2} + 1)dx.$$

ここで，解の挙動について説明する．解の分類は，(NLS) の波の分散性と非線形性の競合によって以下のように決定される．

* E-mail:m18mwata@gm.tsuda.ac.jp

(i). 分散性 $>$ 非線形性：波の振幅が時間減衰する

$\Longrightarrow$ 散乱解：ある $\phi \in H^1(\mathbb{R}^2)$ が存在して

$$\lim_{t\to\infty} \|\psi(t) - e^{it\Delta}\psi\|_{H^1} = 0$$

を満たす.

(ii). 分散性 $<$ 非線形性： 解に特異性が生じる

$\Longrightarrow$ 爆発解：解の最大存在時間が有界

(iii). 分散性 $=$ 非線形性：波の振幅が一定の空間形状を保持する

$\Longrightarrow$ 定在波解：$\psi(t) = e^{i\omega t}Q_\omega(x)$ の形をした解

以下で, 特に (NLS) の爆発解をどのように構成するかを簡単に説明する．(NLS) の解 $\psi \in H^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2, |x|^2dx)$ が

$$\mathcal{K}(\psi(t)) < -C_1, \quad t \geq 0$$

を満たすとする．このとき，ビリアル恒等式より，

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2|\psi(t,x)|^2dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2|\psi_0(x)|^2dx + 2t\Im \int_{\mathbb{R}^2} x\cdot\nabla\psi_0(x)\psi_0 xdx - \frac{C_1}{2}t^2$$

上の式から $t > 0$ が十分大きいとき右辺の多項式は負となるが，一方で右辺は正である．従って，解が爆発することがわかる.

(NLS) に対して定在波解 $\psi(t,x) = \mathrm{e}^{i\omega t}u(x)(\omega > 0)$ を考えると、u は次の非線形楕円型方程式を満たす.

$$-\Delta u + \omega u - (e^{4\pi|u|^2} - 1)u = 0, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2)\backslash\{0\} \tag{SP}$$

sp

与えられた $\omega > 0$ に対して，(SP) の作用汎関数 $\mathcal{S}_\omega$ を次で定義する.

$$\mathcal{S}_\omega(u) := \omega\mathcal{M}(u) + \mathcal{E}(u).$$

$\mathcal{S}'_\omega(Q_\omega) = 0$ であることと，$Q_\omega \in H^1(\mathbb{R}^2)$ が (SP) の弱解であることは同値である．また，基底状態とは，(SP) の非自明な解の中で対応する汎関数 $\mathcal{S}_\omega$ を最小にするものである.

ここで，質量臨界とエネルギー臨界について説明する．以下の単純冪の非線形シュレディンガー方程式を考える.

$$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u + |u|^{p-1}u = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$$

この方程式の解を u とし，$u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{2}{p-1}}u(\lambda^2 t, \lambda x)(\lambda > 0)$ とおくと，u_λ も解となる．質量臨界 $p = 1 + \frac{4}{d}$ とは，$\mathcal{M}(u_\lambda) = \mathcal{M}(u)$ を満たし，エネルギー臨界 $p = 1 + \frac{4}{d-2}$ とは，$\mathcal{E}(u_\lambda) = \mathcal{E}(u)$ を満たす指数である．本研究で扱う (NLS)の非線形項は空間変数 $d = 2$ における質量臨界とエネルギー臨界にあたる.

本研究の最終目的は，空間変数 2 次元における質量臨界項とエネルギー臨界項にあたる指数関数項を持つシュレディンガー方程式 (NLS) の解の大域挙動を解析することである．指数関数項を扱った挙動の研究は，たとえば Dinh–Keraani–Majdoub[3] でも，解の挙動について調べており，質量臨界が含まれていない場合については Arora–Dodson–Murphy[1] の手法を用いて解の散乱に関する結果が得られている.

解の大域挙動を調べるためには，解の形状の変化の様子を調べる必要がある．そのため解の分散性の振る舞いを表すビリアル恒等式によって基底状態を特徴付ける必要がある．つまり，基底状態の存在を次の最小化問題を考えることにより示すことが必要である．

$$m_\omega := \inf\{\mathcal{S}_\omega(u)\colon u \in H^1(\mathbb{R}^2)\backslash\{0\},\ \mathcal{K}(u) = 0\}$$

本研究では，指数関数項を持つ楕円型方程式の基底状態について、上の最小化問題の考察を行い，ビリアル恒等式による特徴付けをした．さらに，得られた基底状態について，基底状態より大きいエネルギーに関するポテンシャル井戸を定義し，それが時間に関して不変集合になることを示した．そして，その集合から出発する解が散乱することを示すために，解の摂動理論について証明した．

2　主定理

最初に，基底状態の存在について以下の定理が得られている：

Theorem 2.1. 任意の $\omega > 0$ に対して，m_ω の最小元が存在する．さらに，m_ω の最小元は (SP) の基底状態である．

さらに、得られた基底状態に対してポテンシャル井戸を次のように定義する．

$$\mathcal{A}_{\omega,+} := \{u \in H^1(\mathbb{R}^2)\colon \mathcal{S}_\omega(u) < m_\omega,\ \mathcal{K}(u) > 0\}$$

$\mathcal{A}_{\omega,+}$ は (NLS) の時間に関する不変集合であることが分かった．

ここで主定理を述べるために，以下のようにノルムを定義する：

$$\|u\|_{S(I)} := \sup_{\text{(q,r):admissible}} \|\langle\nabla\rangle u\|_{L_t^q L_x^r(I\times\mathbb{R}^2)}$$
$$\|u\|_{N(I)} := \sup_{\text{(q',r'):dual admissible}} \|\langle\nabla\rangle u\|_{L_t^{q'} L_x^{r'}(I\times\mathbb{R}^2)}$$

以下の結果が得られた．

Theorem 2.2 (Short time perturbation)**.** $I \in \mathbb{R}$ をコンパクトな区間とし，$\tilde{v}$ を次を満たす (NLS) の近似解とする：ある関数 e が存在して，

$$i\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t} + \Delta\tilde{v} + (e^{4\pi|\tilde{v}|^2} - 1)\tilde{v} = e \tag{2.1}$$

さらに，以下の条件を満たす：十分小さな $\varepsilon_0 > 0$ があって

$$\|\tilde{v}\|_{S(I\times\mathbb{R})} \le \varepsilon_0,$$
$$\|\mathrm{e}^{i(t-t_0)\Delta}(v(t_0) - \tilde{v}(t_0))\|_{S(I\times\mathbb{R})} \le \varepsilon,$$
$$\|e\|_{N(I\times\mathbb{R}^2)} \le \varepsilon.$$

ただし，$0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$．また，$0 < \delta_0 < 1$ に対して

$$\|v\|_{L_t^\infty H_x^1(I\times\mathbb{R}^2)},\quad \|\tilde{v}\|_{L_t^\infty H_x^1(I\times\mathbb{R}^2)} \le 1 - \delta_0$$

とする．このとき，$v|_{t=t_0} = v(t_0)$ を初期値とする (NLS)の解 v は以下を満たす：

$$\|v - \tilde{v}\|_{S(I\times\mathbb{R}^2)} \le 3\varepsilon,$$
$$\|v\|_{S(I\times\mathbb{R}^2)} \le 4\varepsilon_0,$$
$$\|(i\partial_t + \Delta)(v - \tilde{v}) + e\|_{N(I\times\mathbb{R}^2)} \le \varepsilon.$$

また，上の定理を用いると，次の結果が得られた：

Theorem 2.3 (Long time perturbation)**.** $I \in \mathbb{R}$ を区間とし，$\tilde{v}$ を次を満たす (NLS)の近似解とする：ある関数 e が存在して，

$$i\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \Delta \tilde{v} + (e^{4\pi|\tilde{v}|^2} - 1)\tilde{v} = e \tag{2.2}$$

さらに，以下の条件を満たす：ある定数 $L > 0$ と，*Theorem 2.2* の $\varepsilon_0 > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}\|_{S(I\times\mathbb{R})} &\le L \\ \|\mathrm{e}^{i(t-t_0)\Delta}(v(t_0) - \tilde{v}(t_0))\|_{S(I\times\mathbb{R})} &\le \varepsilon, \\ \|e\|_{N(I\times\mathbb{R}^2)} &\le \varepsilon. \end{aligned}$$

ただし，$0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$．また，$0 < \delta_0 < 1$ に対して

$$\|v\|_{L_t^\infty H_x^1(I\times\mathbb{R}^2)}, \quad \|\tilde{v}\|_{L_t^\infty H_x^1(I\times\mathbb{R}^2)} \le 1 - \delta_0$$

とする．このとき，$v|_{t=t_0} = v(t_0)$ を初期値とする (NLS)の解 v は以下を満たす：

$$\begin{aligned} \|v - \tilde{v}\|_{S(I\times\mathbb{R}^2)} &\le C(\varepsilon_0)\varepsilon, \\ \|v\|_{S(I\times\mathbb{R}^2)} &\le C(\varepsilon_0), \end{aligned}$$

参考文献

ADM [1] A. K. Arora, B. Dodson and J. Murphy, *Scattering blow the ground state for the 2D radial nonlinear Schrödinger equation.* Proc. Amer. Math. Soc. **148** (2020), 1653–1663.

CW [2] T. Cazenave and F. Weissler, *The Cauchy problem for the critical nonlinear Schödinger equation in Hs.* Nonlinear Anal. **14** (1990), 807–836.

DKM [3] V. D. Dinh, S. Keraani and M. Majdoub, *Long time dynamics for the focusing nonlinear Schrödinger equation with exponential nonlinearities.* Dynamics of PDF, Vol. **17**, No. **4** (2020), 329–360

3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系に対する local mountain pass approach によるピーク解の構成

埼玉大学　大学院理工学研究科
長田祐輝 (Yuki OSADA) *

概要

本講演では, 次の 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系に対して十分小さい ε に対するピーク解の存在性および $\varepsilon \to +0$ におけるピーク解の漸近挙動について考察する:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u_1 + V_1(x)u_1 = \mu_1|u_1|^{p-1}u_1 + \alpha u_2u_3, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = \mu_2|u_2|^{p-1}u_2 + \alpha u_1u_3, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2\Delta u_3 + V_3(x)u_3 = \mu_3|u_3|^{p-1}u_3 + \alpha u_1u_2, & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

ここで, $N \le 5$, $1 < p < 2^* - 1$, $2^* = \infty$ $(N = 1, 2)$, $2^* = 2N/(N-2)$, $\varepsilon, \alpha > 0$. 正確にはポテンシャルから定まる位置決め関数と呼ばれる関数 $c(V_1(x), V_2(x), V_3(x))$ を定義し, 十分小さい ε に対して $c(V_1(x), V_2(x), V_3(x))$ の極小点に集中するピーク解を構成する.

1　導入

Cazenave-Lions [1] は

$$i\partial_t v + \Delta v + |v|^{p-1}v = 0 \tag{1}$$

の定在波解の存在および安定性について研究した. この方程式は様々な物理的, 生物学的文脈で現れ, 例えば, 非線形光学, ボーズ・アインシュタイン凝縮現象, DNA 構造のモデリング等に現れる. ここで定在波解とは, $v(t,x) = e^{i\omega t}u(x)$ という形の (1) の解である. このとき u は

$$-\Delta u + \omega u - |u|^{p-1}u = 0$$

をみたす. 方程式 (1) の線形部分には分散効果があり, 時間発展させると, 解を平らにする効果がある. また非線形部分には集中効果があり, 解を集中させる効果がある. この分散効果と集中効果が相殺したときに現れるのが定在波解である (Le Coz [9] も参照).

本講演では, 次の 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系を考える:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u_1 + V_1(x)u_1 = \mu_1|u_1|^{p-1}u_1 + \alpha u_2u_3, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = \mu_2|u_2|^{p-1}u_2 + \alpha u_1u_3, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2\Delta u_3 + V_3(x)u_3 = \mu_3|u_3|^{p-1}u_3 + \alpha u_1u_2, & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{$\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon$}$$

* E-mail:yukiosada59@gmail.com

ここで, $N \le 5$, $1 < p < 2^* - 1$, $2^* = \infty$ $(N \le 2)$, $2^* = 2N/(N-2)$ $(N \ge 3)$, $\varepsilon > 0$, $\mu_j > 0$ $(j = 1,2,3)$, $\alpha > 0$. また, ポテンシャル V_j $(j = 1,2,3)$ に対して次の基本的な条件を仮定する:

(V1) $\forall j = 1,2,3$, $V_j \in C(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$.
(V2) $\forall j = 1,2,3$, $\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V_j(x) =: m_j > 0$.

$(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ は変分構造をもつ. すなわち, $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ の解は次の汎関数の臨界点と 1 対 1 に対応している:

$$\tilde{I}_\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon^2|\nabla u_j|^2 + V_j(x)u_j^2\,dx - \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\|u_j\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \alpha\int_{\mathbb{R}^N} u_1u_2u_3\,dx,$$
$$\vec{u} = (u_1,u_2,u_3) \in \mathbb{H} = H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N).$$

ここで, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $q \ge 1$ に対して,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}^q = \int_\Omega |u|^q\,dx, \quad \|u\|_{L^q} = \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$$

と定義する.

$(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ は次の時間発展する 3 波相互作用をもつ非線形シュレディンガー方程式系の定在波解に関係している:

$$\begin{cases} i\varepsilon\partial_t v_1 + \varepsilon^2\Delta v_1 - \tilde{V}_1(x)v_1 + \mu_1|v_1|^{p-1}v_1 = -\alpha\bar{v}_2v_3 & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \\ i\varepsilon\partial_t v_2 + \varepsilon^2\Delta v_2 - \tilde{V}_2(x)v_2 + \mu_2|v_2|^{p-1}v_2 = -\alpha\bar{v}_1v_3 & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N, \\ i\varepsilon\partial_t v_3 + \varepsilon^2\Delta v_3 - \tilde{V}_3(x)v_3 + \mu_3|v_3|^{p-1}v_3 = -\alpha v_1v_2 & \text{in } \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2}$$

実際, もし, $(v_1(t,x), v_2(t,x), v_3(t,x)) = (e^{i\omega_1 t/\varepsilon}u_1(x), e^{i\omega_2 t/\varepsilon}u_2(x), e^{i\omega_3 t/\varepsilon}u_3(x))$ (但し, $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$) が (2) の解なら, (u_1,u_2,u_3) は $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ (但し, $V_j(x) = \omega_j + \tilde{V}_j(x)$) をみたす. ここで u_1,u_2,u_3 は実数値関数である. 方程式系 (2) は Colin-Colin-Ohta [5] によって導入された (但し, $\tilde{V}_j(x) \equiv 0$, $\varepsilon = 1$, $\mu_j = 1$). [2, 3] も参照. Colin-Colin-Ohta [4, 5] は定在波解 $(e^{i\omega t}\varphi, 0, 0)$ と $(0, e^{i\omega t}\varphi, 0)$ は任意の $\alpha > 0$ に対して安定であることを示した. ここで $\omega > 0$ であり, φ は

$$-\Delta v + \omega v - |v|^{p-1}v = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N.$$

の一意の正値球対称解である. 一方で, 定在波解 $(0,0,e^{i\omega t}\varphi)$ は $0 < \alpha < \alpha^*$ のとき安定であり, $\alpha > \alpha^*$ のとき不安定である. ここで α^* は適切な正定数である (詳細は [4, 5] を参照せよ).

Pomponio [12] は $\varepsilon = 1$ の場合に $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ のエネルギー最小解の存在性を示した. 特に, Pomponio は α が十分大きいとき, すべての成分が 0 でないエネルギー最小解 (vector least energy solution) の存在性を示した.

本講演では, $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ の特異摂動問題について研究する. これは $\varepsilon \to +0$ において $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ のピーク解を構成する問題である. 特異摂動問題の研究は Floer-Weinstein [7] による単独の非線形シュレディンガー方程式から始まった. [7] の後, 近年, 単独の非線形シュレディンガー方程式

$$-\varepsilon^2\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^N \tag{3}$$

に対するピーク解の構成に関する研究が膨大にある. ここで, 非負値関数 $V(x)$ (ポテンシャル) と $f(u)$ は適切な仮定をみたしている. 特に del Pino-Felmer [6] の研究ではポテンシャル $V(x)$ の極小点に集中する解を構成している. その際, 汎関数を適切に修正し, 修正された汎関数の臨界点を求めることで元の方程式の解で極小点に集中する解を構成している. 本講演では [6] の研究を参考にし, 位置決め関数 $c(\vec{V}(x))$ (あとで定義する) の極小点に集中する解を構成する.

Lin-Wei [10] と Ikoma-Tanaka [8] は次の非線形シュレディンガー方程式系に対して特異摂動問題を研究した:

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u_1 + V_1(x)u_1 = \mu_1 u_1^3 + \beta u_1 u_2^2 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\varepsilon^2\Delta u_2 + V_2(x)u_2 = \mu_2 u_2^3 + \beta u_1^2 u_2 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u_1, u_2 > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{4}$$

ここで, $N \le 3$, $\mu_i > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ であり, 非負値関数 $V_i(x)$ は適切な仮定をみたす. 彼らは $(\mathcal{P}^{\vec{\lambda}})$ のピーク解の挙動には 2 つの可能性があることを示した. 実際, (4) は次のようなピーク解 $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ をもつ: $i = 1, 2$ に対して, ある $\varepsilon_n \to 0$ と $x_{in} \in \mathbb{R}^N$ が存在して $x_{in} \to x_{i0}$ in $\mathbb{R}^N$ かつ $u_{i\varepsilon_n}(\varepsilon_n y + x_{in}) \to \omega_i(y)$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$. ここで x_{i0} は $V_i(x)$ の最小点であり ω_i は $-\Delta u_i + V_i(x_{i0})u_i = \mu_i u_i^3$ in $\mathbb{R}^N$ のエネルギー最小解である. 一方, (4) は次のような解 $(u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon})$ をもつ: ある $\varepsilon_n \to 0$ と $x_n \in \mathbb{R}^N$ が存在して $x_n \to x_0$ in $\mathbb{R}^N$ かつ $u_{i\varepsilon_n}(\varepsilon_n y + x_n) \to \omega_i(y)$ in $H^1(\mathbb{R}^N)$ $(i = 1, 2)$. ここで x_0 は $\rho(V_1(x), V_2(x))$ の極小点であり $\rho(\lambda_1, \lambda_2)$ は次の方程式系の最小エネルギーである:

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + \lambda_1 u_1 = \mu_1 u_1^3 + \beta u_1 u_2^2 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta u_2 + \lambda_1 u_2 = \mu_2 u_2^3 + \beta u_1^2 u_2 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u_1, u_2 > 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{5}$$

さらに, (ω_1, ω_2) は $(\lambda_1, \lambda_2) = (V_1(x_0), V_2(x_0))$ としたときの (5) のエネルギー最小解である.

我々の先行研究 [11] では, $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ の特異摂動問題を考え, $[2, 2^*)$ の場合に $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ のピーク解が存在することを示した. この構成では, 次の極限問題が重要な役割を果たす:

$$\begin{cases} -\Delta v_1 + \lambda_1 v_1 = \mu_1 |v_1|^{p-1} v_1 + \alpha v_2 v_3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v_2 + \lambda_2 v_2 = \mu_2 |v_2|^{p-1} v_2 + \alpha v_1 v_3 & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v_3 + \lambda_3 v_3 = \mu_3 |v_3|^{p-1} v_3 + \alpha v_1 v_2 & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}^{\vec{\lambda}}$}$$

ここで $\lambda_j > 0$ $(j = 1, 2, 3)$. $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ とおく. 次のように $(\mathcal{P}^{\vec{\lambda}})$ に対応する汎関数 $\Phi_{\vec{\lambda}}$ を定義する:

$$\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}) := \frac{1}{2}\|\vec{v}\|_{\vec{\lambda}}^2 - \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{3} \mu_j \|v_j\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \alpha \int_{\mathbb{R}^N} v_1 v_2 v_3 \, dy.$$

ここで

$$\|u\|_{\lambda_j}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + \lambda_j u^2) \, dx, \quad \|\vec{u}\|_{\vec{\lambda}}^2 := \sum_{j=1}^{3} \|u_j\|_{\lambda_j}^2.$$

また $\Phi_{\vec{\lambda}}$ に対する mountain pass value $c(\vec{\lambda})$ を定義する:

$$
\begin{aligned}
&c(\vec{\lambda}) := \inf_{\vec{\gamma}\in\Gamma_{\vec{\lambda}}} \max_{t\in[0,1]} \Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{\gamma}(t)),\\
&\Gamma_{\vec{\lambda}} := \{\vec{\gamma}\in C([0,1];\mathbb{H}) \mid \vec{\gamma}(0)=\vec{0},\ \Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{\gamma}(1))<0\},\\
&\vec{0} := (0,0,0).
\end{aligned}
$$

$\vec{v}\in\mathbb{H}$ が $(\mathcal{P}^{\vec{\lambda}})$ の mountain pass solution であるとは $\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v})=c(\vec{\lambda})$ かつ $(\Phi_{\vec{\lambda}})'(\vec{v})=0$ が成り立つことである. ここで関数 $\vec{\lambda}\mapsto c(\vec{\lambda})$ は $(0,\infty)^3$ 上で連続であることに注意する.

[11] の中で得られたピーク解 $\vec{u}_\varepsilon=(u_{1\varepsilon},u_{2\varepsilon},u_{3\varepsilon})$ は次をみたす: ある $\varepsilon_n\to 0$ と $x_n\in\mathbb{R}^N$ が存在して

$$
x_n\to x_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \quad \vec{u}_{\varepsilon_n}(x_n+\varepsilon_n y)\to \overrightarrow{W}(y) \quad \text{in } \mathbb{H}.
$$

ここで x_0 は $c(\vec{V}(x))$ の最小点であり $\overrightarrow{W}=(W_1,W_2,W_3)$ は $(\mathcal{P}^{\vec{V}(x_0)})$ のエネルギー最小解である. さらに, α が小さいとき $\overrightarrow{W}$ の 2 つの成分が 0 になる. したがって $\overrightarrow{W}$ は単独の方程式の解とみなせる. α が大きいとき, $W_j\neq 0$ $(j=1,2,3)$ となることが分かる. さらに, $u_{j\varepsilon}$ の最大点の詳細な挙動についての結果も得た.

本講演では $c(\vec{V}(x))$ の極小点に集中する $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ のピーク解を構成するために次の条件を仮定する:

(V3) 有界開集合 $\Lambda\subset\mathbb{R}^N$ が存在して $\inf_{x\in\Lambda} c(\vec{V}(x)) < \inf_{x\in\partial\Lambda} c(\vec{V}(x))$.

(V1),(V3) と平行移動により, 一般性を失うことなく次を仮定してよい:

$$
0\in\Lambda, \quad c(\vec{V}(0)) = \inf_{x\in\Lambda} c(\vec{V}(x)). \tag{6}
$$

2 主定理

$\Lambda_0=\{x\in\Lambda \mid c(\vec{V}(x))=c(\vec{V}(0))\}$ とおく. 本講演の主結果を述べる.

主結果 2.1. (V1)–(V3) を仮定する. このとき, ある $\varepsilon_*>0$ が存在して任意の $\varepsilon\in(0,\varepsilon_*]$ に対して $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ は次をみたす非負値非自明解 $\vec{u}_\varepsilon$ をもつ:

(i) $\tilde{I}_\varepsilon(\vec{u}_\varepsilon)=\varepsilon^N\left(c(\vec{V}(0))+o(1)\right)$ as $\varepsilon\to+0$.

(ii) $\Lambda_0\subset D$ をみたす任意の有界開集合 D に対して, ある $c_1,c_2>0$ が存在して

$$
0\le u_{j\varepsilon}(x)\le c_1 e^{-\frac{c_2}{\varepsilon}\operatorname{dist}(x,\overline{D})} \quad (\forall x\in\mathbb{R}^N\setminus\overline{D}, \quad j=1,2,3).
$$

(iii) $\varepsilon_n\to+0$ となる任意の $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ に対して, 部分列をとれば, ある $\{x_n\}_{n=1}^\infty\subset\Lambda$ と $x_0\in\Lambda_0$ と $(\mathcal{P}^{\vec{V}(x_0)})$ の非負値非自明解 $\vec{\omega}$ が存在して,

$$
\begin{aligned}
&x_n\to x_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N,\\
&\vec{u}_{\varepsilon_n}(x_n+\varepsilon_n y)\to\vec{\omega}(y) \quad \text{in } \mathbb{H}.
\end{aligned}
$$

$p \in [2, 2^*)$ のときは, $(\mathcal{P}^{\vec{V}(x_0)})$ の非負の mountain pass solution がエネルギー最小解であることが分かる. ここで,

$$\Phi'_{\vec{\lambda}}(\vec{\omega})[\vec{\omega}] = 0,\ \vec{\omega} \neq \vec{0}, \quad \Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{\omega}) = \inf\{\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{u}) \,|\, \Phi'_{\vec{\lambda}}(\vec{u})[\vec{u}] = 0,\ \vec{u} \neq \vec{0}\}$$

をみたす $\vec{\omega}$ を $\Phi_{\vec{\lambda}}$ の Nehari 多様体上の minimizer という. $p \in [2, 2^*)$ のときは $\vec{\omega}$ が $(\mathcal{P}^{\vec{\lambda}})$ のエネルギー最小解であることと $\Phi_{\vec{\lambda}}$ の Nehari 多様体上の minimizer であることは同値である.

さらに, ある $\alpha_0 > 0$ が存在して, $\alpha > \alpha_0$ ならば, $(\mathcal{P}^{\vec{V}(x_0)})$ のエネルギー最小解 $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ は $\omega_j \neq 0$ $(j = 1, 2, 3)$ をみたす ([12] の Theorem 1.8 を参照せよ). したがって主結果 2.1 の解 $\vec{u}_\varepsilon = (u_{1\varepsilon}, u_{2\varepsilon}, u_{3\varepsilon})$ は十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $u_{j\varepsilon} \neq 0$ $(j = 1, 2, 3)$ をみたす. $p \in (1, 2)$ のとき, 3 波相互作用項の効果が $\mu_j \|u_j\|_{L^{p+1}}^{p+1}$ より強いので, $\{\vec{u} \in \mathbb{H} \,|\, \Phi'_{\vec{V}(x_0)}(\vec{u})[\vec{u}] = 0,\ \vec{u} \neq \vec{0}\}$ の上で $\Phi_{\vec{V}(x_0)}(\vec{u})$ が下に有界とは限らない. したがって $\Phi_{\vec{V}(x_0)}$ の Nehari 多様体上の minimizer を考えることができない. それゆえ $c(\vec{V}(x))$ を mountain pass value で定義し, $\tilde{I}_\varepsilon$ and $\Phi_{\vec{V}(x_0)}$ の moutain pass 構造を用いて主結果 2.1 の解を得ることができる.

3 証明の鍵

$(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ の特異摂動問題の研究では次のリスケールした方程式を考えることが効果的である: $\vec{v}(y) = \vec{u}(\varepsilon y)$ とおく. このとき $(\tilde{\mathcal{P}}_\varepsilon)$ は次のようになる:

$$\begin{cases} -\Delta v_1 + V_1(\varepsilon y) v_1 = \mu_1 |v_1|^{p-1} v_1 + \alpha v_2 v_3, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v_2 + V_2(\varepsilon y) v_2 = \mu_2 |v_2|^{p-1} v_2 + \alpha v_1 v_3, & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v_3 + V_3(\varepsilon y) v_3 = \mu_3 |v_3|^{p-1} v_3 + \alpha v_1 v_2, & \text{in } \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{$\mathcal{P}_\varepsilon$}$$

このとき $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ に対応する汎関数は以下のようになる:

$$I_\varepsilon(\vec{v}) := \frac{1}{2}\|\vec{v}\|_{\vec{V}_\varepsilon}^2 - \frac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{3} \mu_j \|v_j\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \alpha \int_{\mathbb{R}^N} v_1 v_2 v_3 \, dy.$$

ここで $\vec{V}_\varepsilon(y) = \vec{V}(\varepsilon y) = (V_1(\varepsilon y), V_2(\varepsilon y), V_3(\varepsilon y))$. $c(\vec{V}(x))$ の極小点に集中する解を構成するために, del Pino-Felmer [6] に着想を得たカットオフ法を用いる. まず, 非線形項 $\mu_j \|v_j\|_{L^{p+1}}^{p+1}$ と相互作用項 $\int_{\mathbb{R}^N} v_1 v_2 v_3 \, dy$ を修正する. $\mu_j \|v_j\|_{L^{p+1}}^{p+1}$ の修正は [6] と同様である. $\int_{\mathbb{R}^N} v_1 v_2 v_3 \, dy$ の修正は [6] に触発された我々の新しいアイデアである. 正確には次のように修正する: $q := \min\{2, p\}$ とおく. $\nu > 0$ を次をみたすように選ぶ:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\frac{1}{2} m_j - (\mu_j + \alpha)\nu > 0 \quad (j = 1, 2, 3). \tag{7}$$

$f \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ を

$$f(\xi) := \min\{\xi^p, \nu\xi\} \quad (\xi \geq 0)$$

となる奇関数とし, F を $F(\xi) := \int_0^\xi f(\tau) \, d\tau$ となる偶関数とする. $g \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ を

$$g(\xi) := \min\{1, \nu|\xi|^{-\frac{1}{3}}\} \quad (\xi \in \mathbb{R})$$

となる偶関数とし, G を $G(\xi) := \int_0^\xi g(\tau)\,d\tau$ となる奇関数とする.

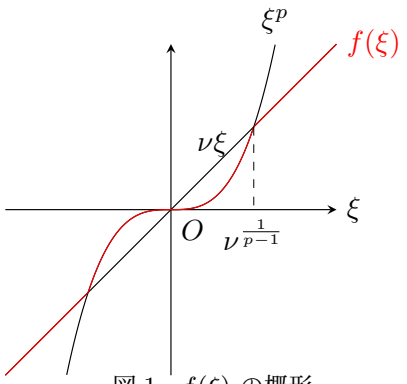


図 1　$f(\xi)$ の概形

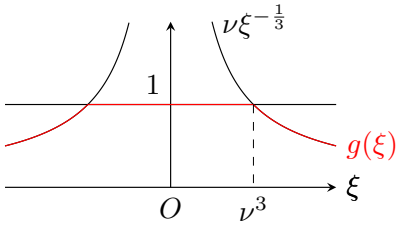


図 2　$g(\xi)$ の概形

$\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ を (V3) をみたす有界開集合とする. $x \mapsto c(\vec{V}(x))$ は連続であるから,

$$\overline{\Lambda} \subset \Lambda', \quad c(\vec{V}(0)) = \inf_{x\in\Lambda} c(\vec{V}(x)) < \inf_{x\in\overline{\Lambda}'\setminus\Lambda} c(\vec{V}(x)). \tag{8}$$

となる有界開集合 $\Lambda' \subset \mathbb{R}^N$ が存在する. $\chi \in C(\mathbb{R}^N;[0,1])$ を次をみたす関数とする:

$$\chi(y) = \begin{cases} 1 & (y \in \Lambda) \\ 0 & (y \notin \Lambda') \end{cases}$$
$$\chi(y) \in (0,1] \quad (y \in \Lambda' \setminus \Lambda).$$

次の修正された汎関数を考える:

$$J_\varepsilon(\vec{v}) = \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2_{\vec{V}_\varepsilon} - \sum_{j=1}^3 \mu_j \int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon y)\frac{1}{p+1}|v_j|^{p+1} + (1-\chi(\varepsilon y))F(v_j)\,dy$$
$$- \alpha \int_{\mathbb{R}^N} \chi(\varepsilon y)v_1v_2v_3 + (1-\chi(\varepsilon y))G(v_1v_2v_3)\,dy.$$

このとき,

$$f(\xi) = |\xi|^{p-1}\xi, \quad F(\xi) = \frac{1}{p+1}|\xi|^{p+1} \quad (\forall |\xi| \le \nu^{\frac{1}{p-1}}),$$
$$g(\xi) = 1, \quad G(\xi) = \xi \quad (\forall |\xi| \le \nu^3)$$

より $\vec{v} \in \mathbb{H}$ が

$$|v_j(y)| \le \nu^{\frac{1}{p-1}} \quad (\forall y \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda_\varepsilon,\ j = 1,2,3), \tag{9}$$
$$|v_1(y)v_2(y)v_3(y)| \le \nu^3 \quad (\forall y \in \mathbb{R}^N \setminus \Lambda_\varepsilon) \tag{10}$$

をみたすならば, $J_\varepsilon(\vec{v}) = I_\varepsilon(\vec{v})$ が成り立つ. ここで $\Lambda_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^N \mid \varepsilon y \in \Lambda\}$. 実は十分小さい ε に対して (9)–(10) をみたす J_ε の臨界点 $\vec{v}_\varepsilon$ が存在するので I_ε の臨界点になる. この臨界点が我々の求めるピーク解である.

4　汎関数 $\Phi_{\vec{\lambda}}$ と J_ε の mountain pass 構造と (PS)–条件

汎関数 $\Phi_{\vec{\lambda}}$ と J_ε は次のような mountain pass 構造をもっている:

補題 4.1. $\Phi_{\vec{\lambda}}$ は次のような mountain pass 構造をもつ:

(MP1) $\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{0}) = 0$.
(MP2) ある $\delta_1, \rho_1 > 0$ が存在して $\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}) \geq \delta_1$ $(\|\vec{v}\|_{\vec{\lambda}} = \rho_1)$ かつ $\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}) \geq 0$ $(\|\vec{v}\|_{\vec{\lambda}} \leq \rho_1)$.
(MP3) ある $\vec{e} \in \mathbb{H}$ が存在して $\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{e}) < 0$.

補題 4.2. ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ に対して, J_ε は次のような mountain pass 構造をもつ:

(MP1)$_\varepsilon$ $J_\varepsilon(\vec{0}) = 0$.
(MP2)$_\varepsilon$ ε によらない $\delta_0, \rho_0 > 0$ が存在して $J_\varepsilon(\vec{v}) \geq \delta_0$ $(\|\vec{v}\|_{\mathbb{H}} = \rho_0)$ かつ $J_\varepsilon(\vec{v}) \geq 0$ $(\|\vec{v}\|_{\mathbb{H}} \leq \rho_0)$.
(MP3)$_\varepsilon$ ε によらない $\vec{e} \in \mathbb{H}$ が存在して $J_\varepsilon(\vec{e}) < 0$.

汎関数 $\Phi_{\vec{\lambda}}$ と J_ε は次の意味で (PS)–条件をみたしている:

命題 4.3. (i)　$\{\vec{v}_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{H}$ を $\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n) \to c(\vec{\lambda})$ かつ $\Phi'_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n) \to 0$ かつ $\|v_{jn-}\|_{L^3} \to 0$ となる列とする. このとき, 部分列をとれば $\vec{v}_0 \in \mathbb{H}$ と $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^N$ が存在して

$$\vec{v}_n(\cdot + z_n) \to \vec{v}_0 \quad \text{in } \mathbb{H}.$$

(ii)　$\{\vec{v}_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{H}$ を $\{J_\varepsilon(\vec{v}_n)\}_{n=1}^\infty$ が有界かつ $J'_\varepsilon(\vec{v}_n) \to 0$ かつ $\|v_{jn-}\|_{L^3} \to 0$ となる列とする. このとき, 部分列をとれば $\vec{v}_0 \in \mathbb{H}$ が存在して

$$\vec{v}_n \to \vec{v}_0 \quad \text{in } \mathbb{H}.$$

5　$1 < p < 2$ での困難点

$q = \min\{2, p\}$ とおく. $\{\vec{v}_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{H}$ を $\{\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n)\}$ が有界かつ $\Phi'_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n) \to 0$ となる近似解の列とする. このとき

$$\begin{aligned}\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n) - \frac{1}{q+1}\Phi'_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n)[\vec{v}_n] = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\|\vec{v}_n\|_{\vec{\lambda}}^2 + \left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{p+1}\right)\sum_{j=1}^3 \mu_j \|v_{jn}\|_{L^{p+1}}^{p+1} \\ + 3\left(\frac{1}{q+1} - \frac{1}{3}\right)\alpha \int_{\mathbb{R}^N} v_{1n} v_{2n} v_{3n}\, dy.\end{aligned} \tag{11}$$

$p \geq 2$ のとき $q = 2$ となるから, (11) は

$$\begin{aligned}O(1) + o(1)\|\vec{v}_n\|_{\mathbb{H}} &= \Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n) - \frac{1}{3}\Phi'_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n)[\vec{v}_n] \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\|\vec{v}_n\|_{\vec{\lambda}}^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{p+1}\right)\sum_{j=1}^3 \mu_j \|v_{jn}\|_{L^{p+1}}^{p+1}\end{aligned}$$

となる. ここで $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}>0$, $\frac{1}{3}-\frac{1}{p+1}\geq 0$. したがって $\{\vec{v}_n\}$ が $\mathbb{H}$ で有界であることが容易にわかる. しかし $1<p<2$ のときは $q=p$ であり (11) は

$$\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n)-\frac{1}{p+1}\Phi'_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n)[\vec{v}_n]\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\|\vec{v}_n\|^2_{\vec{\lambda}}+3\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{3}\right)\alpha\int_{\mathbb{R}^N}v_{1n}v_{2n}v_{3n}\,dy$$

となる. 3 波相互作用の項の符号が負になることもありうるため, $\{\vec{v}_n\}$ の $\mathbb{H}$ での有界性を得ることが困難であった. そこで我々は $\|v_{jn-}\|_{L^3}\to 0$ となる近似解の列を構成し

$$\int_{\mathbb{R}^N}v_{1n}v_{2n}v_{3n}\,dy\geq o(1)\|\vec{v}_n\|^2_{\mathbb{H}}\quad\text{as } n\to\infty.$$

となることを利用して,

$$\begin{aligned}&O(1)+o(1)\|\vec{v}_n\|_{\mathbb{H}}=\Phi_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n)-\frac{1}{p+1}\Phi'_{\vec{\lambda}}(\vec{v}_n)[\vec{v}_n]\\&\geq\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)\|\vec{v}_n\|^2_{\vec{\lambda}}+o(1)\|\vec{v}_n\|^2_{\mathbb{H}}\geq\left\{C\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}\right)+o(1)\right\}\|\vec{v}_n\|^2_{\mathbb{H}}\end{aligned}$$

を示した. ここで $\frac{1}{2}-\frac{1}{p+1}>0$ であり, C は正定数であるから $\{\vec{v}_n\}$ の $\mathbb{H}$ での有界性が得られる.

6 主結果 2.1 の証明の概略

(6) より 0 は Λ 内での $c(\vec{V}(x))$ の最小点であることに注意する. $\Phi_{\vec{V}(0)}$ の moutain pass 構造 (補題 4.1) より次のような近似解の列 $\{\vec{v}_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{H}$ が存在する:

$$\Phi_{\vec{V}(0)}(\vec{v}_n)\to c(\vec{V}(0)),\quad\Phi'_{\vec{V}(0)}(\vec{v}_n)\to 0,\quad\|v_{jn-}\|_{L^3}\to 0.$$

このとき命題 4.3 (i) より, 部分列をとれば, ある $\vec{\omega}_0\in\mathbb{H}$ と $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}^N$ が存在して

$$\vec{v}_n(\cdot+y_n)\to\vec{\omega}_0\quad\text{in }\mathbb{H}.$$

このとき $\vec{\omega}_0$ は $(\mathcal{P}^{\vec{V}(0)})$ の非負の mouontain pass solution になる. J_ε に対する mountain pass value を次のように定義する:

$$\begin{aligned}&c_\varepsilon=\inf_{\vec{\gamma}\in\Gamma_\varepsilon}\max_{t\in[0,1]}J_\varepsilon(\vec{\gamma}(t)),\\&\Gamma_\varepsilon=\{\vec{\gamma}\in C([0,1];\mathbb{H})\mid\vec{\gamma}(0)=\vec{0},\quad\vec{\gamma}(1)=T_0\vec{\omega}_0\}.\end{aligned}$$

ここで $T_0>0$ は $\Phi_{\vec{V}(0)}(T_0\vec{\omega}_0)<0$ となるもの (このとき, 十分小さい $\varepsilon_0>0$ が存在して $J_\varepsilon(T_0\vec{\omega}_0)<0$ $(\forall\varepsilon\in(0,\varepsilon_0])$ とできる). このとき J_ε の mountain pass 構造 (補題 4.2) より任意の $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ に対して, 次のような近似解の列 $\{\vec{v}_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{H}$ が存在する:

$$J_\varepsilon(\vec{v}_n)\to c_\varepsilon,\quad J'_\varepsilon(\vec{v}_n)\to 0,\quad\|v_{jn-}\|_{L^3}\to 0.$$

このとき部分列をとれば, ある $\vec{v}_\varepsilon\in\mathbb{H}$ が存在して

$$\vec{v}_n\to\vec{v}_\varepsilon\quad\text{in }\mathbb{H}.$$

このとき $v_{j\varepsilon} \geq 0$, $J_\varepsilon(\vec{v}_\varepsilon) = c_\varepsilon$, $J'_\varepsilon(\vec{v}_\varepsilon) = 0$ となる. $\vec{u}_\varepsilon(x) = \vec{v}_\varepsilon(x/\varepsilon)$ とおくと, これが求めるピーク解である. それを確かめるには次を示せばよい: $\vec{v}_\varepsilon$ に対して, ある $\varepsilon_n \to 0$ と $z_n \in \mathbb{R}^N$ が存在して

$$\varepsilon_n z_n \to x_0 \quad \text{in } \mathbb{R}^N, \qquad \vec{v}_{\varepsilon_n}(y + z_n) \to \omega(y) \quad \text{in } \mathbb{H}. \tag{12}$$

ここで $x_0 \in \Lambda_0$ であり, $\vec{\omega}$ は $(\mathcal{P}^{\vec{V}(x_0)})$ の非負の mountain pass solution である. このとき

$$\vec{u}_{\varepsilon_n}(\varepsilon_n y + \varepsilon_n z_n) = \vec{v}_{\varepsilon_n}(y + z_n) \to \vec{\omega}(y) \quad \text{in } \mathbb{H}, \qquad \varepsilon_n z_n \in \Lambda \quad (n \text{ が十分大きいとき}).$$

(12) は, 次のように Concentration Compactness と $J_{\varepsilon_n}(\vec{v}_{\varepsilon_n})$ の上下からの評価を用いて示せる.

(12) **の証明の概略** $\{\vec{v}_{\varepsilon_n}\}$ の $\mathbb{H}$ における有界性と Concentration Compactness より, 部分列をとれば, ある $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}^N$ と $\vec{\omega} \in \mathbb{H} \setminus \{\vec{0}\}$ が存在して

$$\omega_j \geq 0, \qquad \vec{v}_{\varepsilon_n}(\cdot + z_n) \rightharpoonup \vec{\omega} \text{ weakly in } \mathbb{H},$$
$$v_{j\varepsilon_n}(\cdot + z_n) \to \omega_j \text{ a.e. in } \mathbb{R}^N, \qquad v_{j\varepsilon_n}(\cdot + z_n) \to \omega_j \text{ in } L^r_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) \text{ for all } 1 \leq r < 2^*.$$

部分列をとれば次のうちの 1 つが成り立つ:

(i) $|\varepsilon_n z_n| \to \infty$.
(ii) ある $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Lambda}'$ が存在して $\varepsilon_n z_n \to x_0$.
(iii) ある $x_0 \in \overline{\Lambda}' \setminus \Lambda_0$ が存在して $\varepsilon_n z_n \to x_0$.
(iv) ある $x_0 \in \Lambda_0$ が存在して $\varepsilon_n z_n \to x_0$.

汎関数 J_ε の修正の効果から (i) と (ii) は排除される. (iii) のとき

$$\begin{aligned} c(\vec{V}(0)) \geq \limsup_{n\to\infty} c_{\varepsilon_n} &= \limsup_{n\to\infty} \left(J_{\varepsilon_n}(\vec{v}_{\varepsilon_n}) - \frac{1}{q+1} J'_{\varepsilon_n}(\vec{v}_{\varepsilon_n})[\vec{v}_{\varepsilon_n}] \right) \\ &\geq \Psi_{\vec{V}(x_0)}(\vec{\omega}) - \frac{1}{q+1} \Psi'_{\vec{V}(x_0)}(\vec{\omega})[\vec{\omega}] \\ &\geq c(\vec{V}(x_0)) > c(\vec{V}(0)). \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \Psi_{\vec{V}(x_0)}(\vec{v}) := \frac{1}{2}\|\vec{v}\|^2_{\vec{V}(x_0)} - \chi(x_0) &\left(\frac{1}{p+1} \sum_{j=1}^3 \mu_j \|v_j\|^{p+1}_{L^{p+1}} + \alpha \int_{\mathbb{R}^N} v_1 v_2 v_3 \, dy \right) \\ - (1 - \chi(x_0)) &\left(\sum_{j=1}^3 \mu_j \int_{\mathbb{R}^N} F(v_j) \, dy + \alpha \int_{\mathbb{R}^N} G(v_1 v_2 v_3) \, dy \right). \end{aligned}$$

これは矛盾. よって (iv) が成り立つ. $x_0 \in \Lambda_0$ より, $\chi(x_0) = 1$, $c(\vec{V}(x_0)) = c(\vec{V}(0))$ および $\Phi'_{\vec{V}(x_0)}(\vec{\omega}) = \Psi'_{\vec{V}(x_0)}(\vec{\omega}) = 0$ を得る. 先ほどの議論と同様にして

$$c_{\varepsilon_n} \to c(\vec{V}(0)) = \Phi_{\vec{V}(x_0)}(\vec{\omega}),$$
$$\|\vec{v}_{\varepsilon_n}(\cdot + z_n)\|^2_{\frac{1}{2}\vec{m}} \to \|\vec{\omega}\|^2_{\frac{1}{2}\vec{m}}$$

を得る. $\vec{v}_{\varepsilon_n}(\cdot + z_n) \rightharpoonup \vec{\omega}$ weakly in $\mathbb{H}$ と合わせて $\vec{v}_{\varepsilon_n}(\cdot + z_n) \to \vec{\omega}$ in $\mathbb{H}$ を得る.

(12) **の証明の概略 (おわり)**

ここで

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\|v_{j\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N\setminus\Lambda_\varepsilon)}=0\quad(j=1,2,3)$$

に注意する. ここで $\Lambda_\varepsilon:=\{y\in\mathbb{R}^N\mid \varepsilon y\in\Lambda\}$. このとき十分小さい ε に対して

$$|v_{j\varepsilon}(y)|\le\min\{\nu^{\frac{1}{p-1}},\nu\}\quad(\forall y\in\mathbb{R}^N\setminus\Lambda_\varepsilon).$$

(9)–(10) より $F(v_{j\varepsilon})=\frac{1}{p+1}|v_{j\varepsilon}|^{p+1}$, $G(v_{1\varepsilon}v_{2\varepsilon}v_{3\varepsilon})=v_{1\varepsilon}v_{2\varepsilon}v_{3\varepsilon}$. ゆえに

$$c_\varepsilon=J_\varepsilon(\vec{v}_\varepsilon)=I_\varepsilon(\vec{v}_\varepsilon),\quad 0=J'_\varepsilon(\vec{v}_\varepsilon)=I'_\varepsilon(\vec{v}_\varepsilon).$$

すなわち, 十分小さい ε に対して $\vec{v}_\varepsilon$ は元の問題 $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ の解になる.

参考文献

[1] T. Cazenave and P.-L. Lions, Orbital stability of standing waves for some nonlinear Schrödinger equations, *Comm. Math. Phys.*, **85** (1982), 549–561.

[2] M. Colin and T. Colin, *On a quasilinear Zakharov system describing laser-plasma interactions*, Differential Integral Equations, **17** (2004), 297–330.

[3] M. Colin and T. Colin, *A numerical model for the Raman amplification for laser-plasma interaction*, J. Comput. Appl. Math., **193** (2006), 535–562.

[4] M. Colin, T. Colin and M. Ohta, *Instability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three-wave interaction*, Funkcial. Ekvac., **52** (2009), 371–380.

[5] M. Colin, T. Colin and M. Ohta, *Stability of solitary waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction*, Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire, **26** (2009), 2211–2226.

[6] M. del Pino and P.-L. Felmer, *Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **4** (1996), 121–137.

[7] A. Floer and A. Weinstein, *Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential*, J. Funct. Anal., **69** (1986), no. 3, 397–408.

[8] N. Ikoma and K. Tanaka, *A local mountain pass type result for a system of nonlinear Schrödinger equations*, Calc. Var. Partial Differential Equations, **40** (2011), no. 3-4, 449–480.

[9] S. Le Coz, Standing waves in nonlinear Schrödinger equations, Analytical and Numerical Aspects of Partial Differential Equations, de Gruyter, Berlin, (2009), 151–192.

[10] T.-C. Lin and J. Wei, *Spikes in two-component systems of nonlinear Schrödinger equations with trapping potentials*, J. Differential Equations, **229** (2006), 538–569.

[11] Yuki Osada, *A singular perturbation problem for a nonlinear Schrödinger system with three wave interaction*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. (2023), accepted.

[12] A. Pomponio, *Ground states for a system of nonlinear Schrödinger equations with three wave interaction*, J. Math. Phys., **51** (2010), 093513, 20 pp.

Nearly Gorenstein polytopes

大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
宮下 空 (Sora MIYASHITA) *

概 要

格子多面体から生じる Ehrhart 環の nearly Gorenstein 性に関する結果について紹介する. 格子多面体の Ehrhart 環が nearly Gorenstein になるための必要条件と十分条件をそれぞれ与える. 特に nearly Gorenstein 多面体が持つ分解について考察する. さらに, 多面体の分解を考察することで得られる nearly Gorenstein$(0,1)$-多面体の構造定理について紹介する.

1 導入

1.1 背景

本稿は Thomas Hall, Max Kölbl, 松下 光虹さんとの共著論文 [HKMM] の内容に基づく.

$\mathbf{k}$ を無限体とし, 非負整数, 整数, 有理数と実数全体の集合をそれぞれ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ で表す.

空間 $\mathbb{R}^d$ の空でない有限集合 X の凸包 $\mathrm{conv}(X)$ を**多面体**という. すべての頂点の各成分が整数である多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ のことを**格子多面体**という. P を $\mathbb{R}^{d+1}$ に $d+1$ 番目の座標を 1 として埋め込み, その錐をとると $C_P \subset \mathbb{R}^{d+1}$ が得られる. P の **Ehrhart 環** $A(P)$ は $\mathbf{k}[C_P \cap \mathbb{Z}^{d+1}]$ のことである. ここで各格子点 $(x_1, \ldots, x_d, k) \in \mathbb{Z}^{d+1}$ は Laurent 単項式 $t_1^{x_1} \cdots t_d^{x_d} s^k$ と同一視する. この古典的構成で多面体と組合せ論が環論的概念の研究と結びつく.

Cohen–Macaulay 環と Gorenstein 環は可換代数における中心的な役割を果たしている. Cohen–Macaulay だが Gorenstein でない環の研究では, Gorenstein という強い性質をどう弱めるべきかということに焦点がおかれ, 数多くの Gorenstein 性を一般化した概念が様々なモチベーションを背景に定義されている. Nearly Gorenstein 環, level 環, そして almost Gorenstein 環と呼ばれるものがその例になっている.

本講演では, [HHS19] で導入された nearly Gorenstein 性に焦点をあてる. R を Cohen–Macaulay $\mathbb{N}$-次数付き $\mathbf{k}$-代数とする. Nearly Gorenstein は, 「R の正準加群のトレース $\mathrm{tr}(\omega_R)$ が non-Gorenstein locus である」という主張 [HHS19, Lemma 2.1] を背景に定義された概念である. この主張から特に, R が Gorenstein であることと, 正準加群のトレースが環全体に一致する (i.e. $\mathrm{tr}(\omega_R) = R$) ことが同値である. R が **nearly Gorenstein** であるとは, このトレースが R の (ただ一つの) 次数付き極大イデアル $\mathbf{m}$ を含む (i.e. $\mathbf{m} \subseteq \mathrm{tr}(\omega_R)$) ことをいう.

日比環 [HHS19, Theorem 5.4] や, エッジ多面体のエッジ環 [HS21], また数値的半群環 [HHS21], そして 2 次元の斉次アファイン半群環 [Miyar] など, 様々な組合せ論的対象に付随する環の nearly Gorenstein 性が研究されている.

原点を含む格子多面体の Ehrhart 環の Gorenstein 性は, ある正整数 k が存在して kP が反射的であることと同値 [BN08] という古典的な結果がある. 本稿では, 一般的な格子多面体から生じる Ehrhart 環の nearly Gorenstein 性について議論する.

*E-mail:u804642k@ecs.osaka-u.ac.jp

1.2 Nearly Gorenstein k-代数

R をただ一つの次数付き極大イデアル $\mathbf{m}$ をもつ $\mathbb{N}$-次数付き $\mathbf{k}$-代数とする．以下, R は常に Cohen–Macaulay で, 正準加群 ω_R を持つとする. $a(R)$ を R の a-不変量とする, i.e.

$$a(R) = -\min\{i \in \mathbb{N} : (\omega_R)_i \neq 0\},$$

ただし $(\omega_R)_i$ は ω_R の i-番目の次数付き成分.

Definition 1.1. 次数付き R-加群 M に対して, $\mathrm{tr}_R(M)$ を $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$ が全てを渡るときのイデアル $\phi(M)$ の和として定義する, i.e.

$$\mathrm{tr}_R(M) = \sum_{\phi \in \mathrm{Hom}_R(M,R)} \phi(M).$$

環について混同の恐れがないときは, これを単に $\mathrm{tr}(M)$ で表す.

Remark 1.2 ([HHS19, Lemma 2.1]). A を正準加群 ω_A をもつ Cohen–Macaulay 可換環とする. A の素イデアル全体の集合を $\mathrm{Spec}(A)$ で表すと, 次が正しい:

$$\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : A_\mathfrak{p} \text{が Gorenstein でない}\} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) : \mathrm{tr}(\omega_A) \subset \mathfrak{p}\}.$$

Definition 1.3 ([HHS19, Definition 2.2]). R が **nearly Gorenstein** とは, $\mathrm{tr}(\omega_R) \supseteq \mathbf{m}$ となることをいう. 特に R が Gorenstein であることと $\mathrm{tr}(\omega_R) = R$ は同値である.

Proposition 1.4 ([HHS19, Lemma 1.1]). R を環として, I を R の非零因子を含むイデアルとする. $Q(R)$ を R の全商環とし, $I^{-1} := \{x \in Q(R) : xI \subseteq R\}$ とする. このとき,

$$\mathrm{tr}(I) = I \cdot I^{-1}.$$

後のため, 別の Gorenstein の一般化である level 環についてもここで定義する.

Definition 1.5 ([Sta07, Chapter III, Proposition 3.2]). R が **level** とは, ω_R の極小生成系の次数が全て等しいことをいう. R が Gorenstein ならば, ω_R はただ 1 つの元で生成されるので level になる.

1.3 格子多面体と Ehrhart 環

以下, $\mathbb{R}^d$ (resp. $\mathbb{Z}^d$) の双対空間を $(\mathbb{R}^d)^* := \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ (resp. $(\mathbb{Z}^d)^* := \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\mathbb{Z}^d, \mathbb{Z})$) で表す. 対 $n \in (\mathbb{R}^d)^*$ と $x \in \mathbb{R}^d$ の内積を $n(x)$ で表し, $P \subset \mathbb{R}^d$ を格子多面体, $\mathcal{F}(P)$ を P の facet 全体の集合, そして $\mathrm{vert}(P)$ を P の頂点全体の集合とする. さらに, P は $\dim P = d$ を満たすとし, 次のファセット表示を持つとする:

$$\text{各 } F \in \mathcal{F}(P) \text{ に対して } P = \left\{x \in \mathbb{R}^d : n_F(x) \geqslant -h_F\right\}, \tag{1}$$

ここでそれぞれの高さ h_F は整数で, 各法線ベクトル $n_F \in (\mathbb{Z}^d)^*$ は**原始的**格子点, i.e. その各座標成分の最大公約数が 1 となる格子点とする.

C_P を P **上の錐**とする, すなわち,

$$C_P = \mathbb{R}_{\geqslant 0}(P \times \{1\}) = \left\{(x, k) \in \mathbb{R}^{d+1} : \text{ 各 } F \in \mathcal{F}(P) \text{ に対して } n_F(x) \geqslant -kh_F\right\}.$$

P の **Ehrhart 環**を次で定める,

$$A(P) = \mathbf{k}[C_P \cap \mathbb{Z}^{d+1}] = \mathbf{k}[\mathbf{t}^x s^k : k \in \mathbb{N}\,,\, x \in kP \cap \mathbb{Z}^d],$$

ここで $\mathbf{t}^x = t_1^{x_1} \cdots t_d^{x_d}$, $x = (x_1, \ldots, x_d) \in kP \cap \mathbb{Z}^d$. P の Ehrhart 環は正規アファイン半群環 (従って Cohen–Macaulay) であることに注意. さらに, $A(P)$ を各 $x \in kP \cap \mathbb{Z}^d$ に対して, 次数を $\deg(\mathbf{t}^x s^k) = k$ で定めて得られる $\mathbb{N}$-次数付き $\mathbf{k}$-代数とする.

Definition 1.6. P が **Gorenstein** (resp. **nearly Gorenstein**) とは, Ehrhart 環 $A(P)$ が Gorenstein (resp. nearly Gorenstein) であることをいう.

別のアファイン半群環も定義する. P の**トーリック環**を次で定義する.

$$\mathbf{k}[P] = \mathbf{k}[\mathbf{t}^x s : x \in P \cap \mathbb{Z}^d].$$

P のトーリック環は標準的 $\mathbb{N}$-次数付き $\mathbf{k}$-代数になる.

$\mathbf{k}[P] = A(P)$ は P が integer decomposition property を持つことと同値であることが知られている. ここで, P が **integer decomposition property** (i.e. P は **IDP**) を持つとは, 全ての正整数 k と全ての $x \in kP \cap \mathbb{Z}^d$ に対して, ある $y_1, \ldots, y_k \in P \cap \mathbb{Z}^d$ が $x = y_1 + \cdots + y_k$ を満たすようにとれることをいう.

格子多面体または錐 σ に対して, その相対内部を $\mathrm{int}(\sigma)$ とかく. このとき,

$$\mathrm{int}(C_P) = \left\{(x,k) \in \mathbb{R}^{d+1} :\ \text{各 } F \in \mathcal{F}(P) \text{ に対して } n_F(x) > -kh_F\right\}$$

であることに注意する. さらに,

$$\mathrm{ant}(C_P) := \left\{(x,k) \in \mathbb{R}^{d+1} :\ \text{各 } F \in \mathcal{F}(P) \text{ に対して } n_F(x) \geqslant -kh_F - 1\right\}$$

とする. $A(P)$ の正準加群と逆正準加群を次のように P の言葉で表すことができる.

Proposition 1.7 ([HMP19, Proposition 4.1, Corollary 4.2])**.** $A(P)$ の正準加群と逆正準加群はそれぞれ次で与えられる:

$$\omega_{A(P)} = \left\langle \mathbf{t}^x s^k : (x,k) \in \mathrm{int}(C_P) \cap \mathbb{Z}^{d+1} \right\rangle,\ \omega_{A(P)}^{-1} = \left\langle \mathbf{t}^x s^k : (x,k) \in \mathrm{ant}(C_P) \cap \mathbb{Z}^{d+1} \right\rangle.$$

加えて, $A(P)$ の a-不変量は P の余次数に等しい, *i.e.*

$$a(A(P)) = -\min\left\{k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1} :\ \mathrm{int}(kP) \cap \mathbb{Z}^d \neq \varnothing\right\}.$$

Definition 1.8. $P \subset \mathbb{R}^d$ を余次数 a の格子多面体とする. P の**床多面体**と**剰余多面体**を次で定義する:

$$\lfloor P \rfloor := \mathrm{conv}(\mathrm{int}(P) \cap \mathbb{Z}^d), \qquad \{P\} := \mathrm{conv}(\mathrm{ant}(C_P)_{1-a} \cap \mathbb{Z}^d).$$

$\lfloor P \rfloor$ は $\mathrm{conv}(\mathrm{int}(C_P)_1 \cap \mathbb{Z}^d)$ に一致することに注意.

これらの多面体が本稿の nearly Gorenstein 多面体の研究の中で中心的な役割を果たす. 格子多面体 P の**余次数** a_P も重要である. これは $a_P := \min\left\{k \in \mathbb{N} :\ \mathrm{int}(kP) \cap \mathbb{Z}^d \neq \varnothing\right\}$ で定義される.

Example 1.9. 次で定義される多面体を考える.

$$P = \mathrm{conv}\{(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(2,3),(1,3),(0,2),(0,1)\}.$$

初めに, $a_P = 1$ であることに注意. 床多面体と剰余多面体は次のようになる:

$$\lfloor P \rfloor = \mathrm{conv}\{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2)\}, \qquad \{P\} = \mathrm{conv}\{(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)\}.$$

A と B を $\mathbb{R}^d$ の部分集合とする. これらの **Minkowski 和**は次で定義される:

$$A + B := \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

2 つの多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ と $Q \subset \mathbb{R}^e$ の**直積**を $P \times Q \subset \mathbb{R}^{d+e}$ で表す.
$P \times Q$ は次のようにして多面体の Minkowski 和と見なせる:

$$P' = \left\{ (p, \underbrace{0, \ldots, 0}_{e}) \in \mathbb{R}^{d+e} : p \in P \right\},\ Q' = \left\{ (\underbrace{0, \ldots, 0}_{d}, q) \in \mathbb{R}^{d+e} : q \in Q \right\} \text{について,}$$

$P \times Q = P' + Q'$ となる. 逆に, 2 つの多面体 $P', Q' \subset \mathbb{R}^d$ が次の条件を満たすとする: 各 $i \in [d] := \{1, \ldots, d\}$ に対して, $\pi_i(P') = \{0\}$ または $\pi_i(Q') = \{0\}$ となる. ここで $\pi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は i-番目の座標成分への射影. このとき $P' + Q'$ を 2 つの多面体の積とみなすことができる.

最後に, 双対多面体と反射的多面体を定義しておく.

Definition 1.10. $P \subset \mathbb{R}^d$ を多面体とする. その**双対多面体**を次で定義する:

$$P^* := \left\{ n \in (\mathbb{R}^d)^* : \text{各 } x \in P \text{ に対し, } n(x) \geqslant -1 \right\}.$$

P が**反射的であるとは**, P と P^* がそれぞれ $\mathbb{Z}^d$ と $(\mathbb{Z}^d)^*$ に対して格子多面体であることをいう.

2 主結果

以下で主結果を述べる. 次の主結果は, 格子多面体が nearly Gorenstein になるための必要条件と十分条件をそれぞれ与える.

Theorem 2.1. $P \subset \mathbb{R}^d$ を余次数 a の格子多面体とする.

1. P が *nearly Gorenstein* ならば, P は *Minkowski* 分解 $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$ を持つ.
2. $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$ ならば, ある K が存在し, 任意の整数 $k \geqslant K$ に対して kP は *nearly Gorenstein*.

さらに, nearly Gorenstein 多面体, そしてその Minkowski 分解に現れる床多面体と剰余多面体のファセット表示に関して, 以下のことが明らかになった:

Theorem 2.2. $P \subset \mathbb{R}^d$ を余次数 a の格子多面体とし, $P = \lfloor aP \rfloor + \{P\}$ とすると,

$$\lfloor aP \rfloor = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \text{各 } F \in \mathcal{F}(P) \text{ に対して } n_F(x) \geqslant 1 - ah_F \right\} \text{ であり,}$$
$$\{P\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \text{各 } F \in \mathcal{F}(P) \text{ に対して } n_F(x) \geqslant (a-1)h_F - 1 \right\}.$$

加えて, もし $\lfloor P \rfloor \neq \varnothing$ ならば $\{P\}$ は反射的である.

Theorem 2.3. $P \subset \mathbb{R}^d$ を *nearly Gorenstein* 多面体とする. このとき次を満たすような反射的多面体 $Q \subset \mathbb{R}^d$ が存在する:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \text{各 } n \in \partial Q^* \cap (\mathbb{Z}^d)^* \text{に対して } n(x) \geqslant -h_n \right\},$$

ここで h_n は整数. さらに $n \in \mathrm{vert}(Q^*)$ によって定まる不等式は無駄がない. また, *nearly Gorenstein* 多面体のファセットの数は, ある d に依存する定数 $C(d)$ 以下になる.

頂点の座標が全て 0 または 1 であるような多面体を $(0,1)$-**多面体**という．Nearly Gorenstein $(0,1)$-多面体についても新しい結果が得られた．この多面体の族は組合せ論的立場から生じ，ポセットの順序多面体や，グラフィックマトロイドの基底多面体などが例になっている．日比環や，完全グラフから生じる安定集合多面体の Ehrhart 環などの具体的な (整分割性を持つ) $(0,1)$-多面体の nearly Gorenstein 性についての先行研究 [HHS19, HS21, Miy22] の結果も包括した，より一般の場合の $(0,1)$-多面体に関する次の結果がわかった:

Theorem 2.4. P を整分割性をもつ $(0,1)$-多面体とする．このとき，P が *nearly Gorenstein* であることと，ある *Gorenstein* $(0,1)$-多面体 $P_1,\dots,P_s$ で各 $1 \leqslant i < j \leqslant s$ について $|a_{P_i} - a_{P_j}| \leqslant 1$ を満たすものが存在し，$P = P_1 \times \cdots \times P_s$ と書けることは同値．

上の定理の系として，nearly Gorenstein と level の関係性について次もわかった．

Corollary 2.5. P を *IDP* を持つ $(0,1)$-多面体とする．$\mathbf{k}[P]$ が *nearly Gorenstein* ならば *level* である．

参考文献

[BN08] Victor Batyrev and Benjamin Nill. Combinatorial aspects of mirror symmetry. *Contemporary Mathematics*, 452:35–66, 2008.

[HKMM] Thomas Hall, Max Kölbl, Koji Matsushita, and Sora Miyashita. Nearly Gorenstein polytopes. *The Electronic J. Combinatorics*, Volume 30, Issue 4 (2023).

[HHS19] Jürgen Herzog, Takayuki Hibi, and Dumitru I Stamate. The trace of the canonical module. *Israel J. Mathematics*, 233:133–165, 2019.

[HHS21] Jürgen Herzog, Takayuki Hibi, and Dumitru I Stamate. Canonical trace ideal and residue for numerical semigroup rings. In *Semigroup Forum*, volume 103, pages 550–566. Springer, 2021.

[HMP19] Jürgen Herzog, Fatemeh Mohammadi, and Janet Page. Measuring the non-Gorenstein locus of Hibi rings and normal affine semigroup rings. *J. Algebra*, 540:78–99, 2019.

[HS21] Takayuki Hibi and Dumitru I Stamate. Nearly Gorenstein rings arising from finite graphs. *The Electronic J. Combinatorics*, pages P3–28, 2021.

[Miy22] Mitsuhiro Miyazaki. Gorenstein on the punctured spectrum and nearly Gorenstein property of the Ehrhart ring of the stable set polytope of an h-perfect graph. *arXiv:2201.02957*, 2022.

[Miyar] Sora Miyashita. Nearly Gorenstein projective monomial curves of small codimension. *J. Comm. Alg.*, to appear.

[Sta07] Richard P Stanley. *Combinatorics and commutative algebra*, volume 41. Springer Science & Business Media, 2007.

Toric rings of perfectly matchable subgraph polytopes

関西学院大学大学院理工学研究科数理科学専攻
毛利健太 (Kenta MORI) *

概要

Perfectly matchable subgraph polytope はグラフのマッチングによって生起される多面体である。この多面体の compressed 性と Gorenstein 性について [7] に基づいて、講演する。特に compressed 性に関しては完全な特徴付けが得られた。

1 トーリック環

任意の頂点が格子点の凸多面体 $\mathcal{P}$ を**格子凸多面体**という。体 K に対して K 上 $n+1$ 変数ローラン多項式環を $K[\mathbf{x}^{\pm 1}, s] = K[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}, s]$ で表す。格子点 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ に対して、$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in K[\mathbf{x}^{\pm 1}, s]$ とする。このとき $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ ならば $\mathcal{P}$ の**トーリック環** $K[\mathcal{P}]$ は単項式 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_1} s, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{a}_m} s \in K[\mathbf{x}^{\pm 1}, s]$ で生成される $K[\mathbf{x}^{\pm 1}, s]$ の K-部分代数である。さらに**トーリックイデアル** $I_\mathcal{P}$ は $K[\mathcal{P}]$ の定義イデアルである。すなわち $i = 1, 2, \ldots, m$ に対して $\pi(y_i) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}_i} s$ をとる環準同型写像 $\pi : K[y_1, \ldots, y_m] \to K[\mathcal{P}]$ の核である。$I_\mathcal{P}$ は斉次二項式で生成されることが知られている。トーリックイデアル $I_\mathcal{P}$ のイニシャルイデアルが任意の逆辞書式順序にて平方自由な単項式で生成されるとき、格子凸多面体 $\mathcal{P}$ は **compressed** であるという [8]。詳しくは [4] が参考になる。

他方、$K[\mathcal{P}]$ が正規半群環であるとき $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ は**正規**であるという。正規性に関して以下が知られている。

- $\mathcal{P}$ が正規であることと任意の $v \in k\mathcal{P} \cap L_\mathcal{P}$ が $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$ の k 個のベクトルで表せることは同値である。ただし $L_\mathcal{P}$ は $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$ で張られる $\mathbb{Z}^n$ の部分格子である;
- トーリックイデアル $I_\mathcal{P}$ のイニシャルイデアルが平方自由な単項式で生成されるような単項式順序が存在するとき、$\mathcal{P}$ は正規である。

任意の $v \in k\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$ が $\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n$ の k 個のベクトルで表せるとき格子凸多面体は integer decomposition property(IDP) を持つという。特に $\mathcal{P}$ が IDP を持つのであれば、$\mathcal{P}$ は正規である。

格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ は $\mathbf{0}$ が内部に存在するただ一つの格子点で、$\mathcal{P}$ の双対多面体

$$\mathcal{P}^* := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{任意の } y \in \mathcal{P} \text{ に対して } x \cdot y \leq 1\}$$

は格子凸多面体となるとき **reflexive** と呼ばれる。ただし $x \cdot y$ は x と y の内積である。次元 n の多

* E-mail:k-mori@kwansei.ac.jp

面体 $\mathcal{P}$ に対して、次元 $n-1$ の面を多面体 $\mathcal{P}$ の**ファセット**と呼ぶ。$\mathcal{P}^*$ の各頂点は $\mathcal{P}$ のファセットに対応している。次元 n の格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ について $\delta\mathcal{P} = \{\delta a : a \in \mathcal{P}\}$ が reflexive polytope と unimodularly equivalent となるとき $\mathcal{P}$ は**指数 δ の Gorenstein** であるという。また格子凸多面体 $\mathcal{P}$ が Gorenstein であることと $\mathcal{P}$ の**エルハート環**

$$K[\mathbf{x}^\alpha s^m : \alpha \in m\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}] \subset K[\mathbf{x}^{\pm 1}, s]$$

が Gorenstein であることが同値となる。さらに、$\mathcal{P}$ が IDP を持つとき、$\mathcal{P}$ のエルハート環と $\mathcal{P}$ のトーリック環が同型となることが知られている。

2 Perfectly matchable subgraph polytope

頂点集合 $V = [n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, 辺集合 E で構成される有限グラフを $G = (V, E)$ で表す。本講演では有限かつ単純なグラフを扱う。$S \subset V$ に対して頂点集合 S, 辺集合 $\{\{i, j\} \in E : i, j \in S\}$ のグラフ $G[S]$ を**誘導部分グラフ**という。グラフにおいて互いに頂点を共有しない k 辺の集合を **k-マッチング**と呼ぶ。有限グラフ G に対して、グラフの全ての頂点を含むマッチングを**完全マッチング**という。グラフの頂点集合の部分集合 S による誘導部分グラフが完全マッチングを持つとき、S は **perfectly matchable subgraph** を誘導するという。特に $\emptyset$ は perfectly matchable subgraph を誘導する。$\mathscr{W}(G)$ を perfectly matchable subgraph を誘導するような V の部分集合からなる集合とする。部分集合 $S \subset V$ に対して、$\rho(S) = \sum_{i \in S} \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ とおく。ただし $\mathbf{e}_i$ は $\mathbb{R}^n$ の i 番目の単位座標ベクトルである。このとき G の **perfectly matchable subgraph polytope** $\mathcal{P}_G$ は $\{\rho(S) \in \mathbb{R}^n : S \in \mathscr{W}(G)\}$ の凸閉包である。この多面体は Balas-Pulleyblank により [2] で定義された。

Example 2.1. G を長さが 4 のサイクルとする。このとき

$$\mathscr{W}(G) = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

である。ここで、2 つの 2-マッチング $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ と $\{\{1, 4\}, \{2, 3\}\}$ は同じ頂点集合の部分集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ によって誘導されることに注意する。G から生起される $\mathcal{P}_G \subset \mathbb{R}^4$ は行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

の列ベクトルの凸閉包である。

この多面体の次元はグラフが二部グラフであるかどうかに依存する。G を頂点集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ の連結グラフとする。このとき

$$\dim \mathcal{P}_G = \begin{cases} n-1 & G \text{は二部グラフ}, \\ n & \text{その他}。 \end{cases}$$

次に、[2, 3] によって与えられた $\mathcal{P}_G$ のファセットを誘導する不等式について記す。まず $x(S)$ を S に対応するベクトルの成分の和とする。次に

$$\mathscr{T} = \{X \subset V : G[X] \text{ の各成分は奇数個の頂点を持つ }\}$$

とする。また、任意の $S \subset V$ に対して S の頂点の少なくとも 1 つに隣接している $V \setminus S$ の部分集合を $\Gamma(S)$ とする。さらに $S \subset V$ に対して $\theta(S)$ を誘導部分グラフ $G[S]$ の連結成分の数とする。

Proposition 2.2 ([3])**.** 有限グラフ $G = (V, E)$ に対して $\mathcal{P}_G$ は $G[S]$ の任意の連結成分が単独の頂点か頂点数が奇数個の非二部グラフとなるようなすべての $S \in \mathscr{T}$ に対して

$$0 \leq x(v) \leq 1 \quad (\text{任意の } v \in V), \tag{1}$$
$$x(S) - x(\Gamma(S)) \leq |S| - \theta(S) \tag{2}$$

を満たすような $x \in \mathbb{R}^V$ の集合である

グラフ $G = (V, E)$ は任意の $v \in V$ に対して $G \setminus \{v\}$ がパーフェクトマッチングを持つとき G は **critical** (もしくは **factor-critical**) と呼ばれる。任意の critical なグラフは単独の頂点か頂点数が奇数個の連結な非二部グラフである。

Proposition 2.3 ([3])**.** G を非二部グラフとする。$S \in \mathscr{T}$ に対して、不等式 (2) が $\mathcal{P}_G$ のファセットを誘導することと S が以下を満たすことが同値。

(i) $G[S]$ のすべての成分は *critical*;
(ii) $G \setminus (S \cup \Gamma(S))$ のすべての成分は非二部グラフ;
(iii) $G[S \cup \Gamma(S)]$ から両端が $\Gamma(S)$ に属している辺をすべて取り除くことで得られるグラフが連結である。

特に、$|S| = 1$ ならば S は条件 (i) と (iii) を満たす。

Proposition 2.4 ([2])**.** $G = (V, E)$ を頂点集合 $V = V_1 \cup V_2$ の二部グラフとする。このとき $\mathcal{P}_G$ は

$$0 \leq x(v) \leq 1 \quad (\text{任意の } v \in V), \tag{3}$$
$$x(S) - x(\Gamma(S)) \leq 0 \quad (\text{任意の} \emptyset \neq S \subset V_1), \tag{4}$$
$$x(V_1) - x(V_2) = 0 \tag{5}$$

を満たすような $x \in \mathbb{R}^V$ の集合である。

グラフ G において取り除かれることで G が非連結となるようなグラフの頂点を**切断点**という。

Proposition 2.5 ([2])**.** $G = (V_1 \cup V_2, E)$ を連結二部グラフとする。このとき以下が成り立つ。

(a) 不等式 $0 \leq x(v)$ が $\mathcal{P}_G$ のファセットを誘導することと v が切断点ではないことが同値;
(b) G は少なくとも 2 本の辺を持つとする。このとき不等式 $x(v) \leq 1$ が $\mathcal{P}_G$ のファセットを誘導することと $\deg(v) \geq 2$ であることが同値;
(c) 任意の $\emptyset \neq S \subsetneq V_1$ に対して不等式 (4) が $\mathcal{P}_G$ のファセットを誘導することと $G[S \cup \Gamma(S)]$ と $G[(V_1 \setminus S) \cup (V_2 \setminus \Gamma(S))]$ が連結であることが同値。

3 他の多面体との関係

台集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ と基底の集合 $\mathcal{B}$ に対するマトロイドを M とする。マトロイド M の base polytope $B(M)$ は $\{\rho(B) : B \in \mathcal{B}\} \subset \mathbb{R}^n$ の凸閉包である。グラフが二部グラフのとき $\mathcal{P}_G$ は transversal matroid の base polytope と unimodularly equivalent であることが [2] にて触れられている。任意のマトロイドに対してマトロイドの base polytope は IDP を持つ [10]。よって以下が従う。

Proposition 3.1. 連結な二部グラフに対して $\mathcal{P}_G$ は *IDP* を持つ。

次に有限グラフより生起される多面体との関連について記す。有限グラフ G の頂点集合の部分集合 S に対して、G の任意の辺が S の部分集合となっていないとき S は **stable** であるという。$S(G) = \{S_1,\ldots,S_t\}$ をグラフ G のすべての stable set からなる集合とする。グラフ G の stable set polytope は $\{\rho(S_1),\ldots,\rho(S_t)\}$ の凸閉包で、$\mathrm{Stab}(G)$ と表記される。

高々一つしかサイクルを持たない連結なグラフを **pseudotree** という。$G=(V,E)$ に対して線グラフ $L(G)$ は頂点集合 E、辺集合 $\{\{e,e'\} : e,e' \in E, e \cap e' \neq \emptyset\}$ によるグラフである。

Proposition 3.2. G を偶サイクルを持たない *pseudotree* とする。このとき $\mathcal{P}_G$ のトーリック環 $K[\mathcal{P}_G]$ と $K[\mathrm{Stab}(L(G))]$ は同型である。

偶サイクルを持たない pseudotree の線グラフは高々一つの奇サイクルと完全グラフのクリーク和である。奇サイクルと完全グラフの stable set polytope はそれぞれ正規であり、クリーク和によって stable set polytope の正規性は保たれる。よって以下が従う。

Proposition 3.3. G を *pseudotree* とする。このとき $\mathcal{P}_G$ は正規である。

4 主定理

切断点のない極大部分グラフを**ブロック**と呼ぶ。compressed である $\mathcal{P}_G$ に関して以下を明らかにした。

Theorem 4.1. 有限連結グラフ G に対して、$\mathcal{P}_G$ が *compressed* であることと G のブロックのうち高々一つが K_4 か $K_{1,1,n}$ でそれ以外は完全二部グラフとなることが同値である。

Example 4.2. 図 1 のグラフによって生起される perfectly matchable subgraph polytope は compressed である。

また、Gorenstein である $\mathcal{P}_G$ に関して以下の 2 つを示した。

Theorem 4.3. 連結二部グラフ $G=(V_1 \cup V_2, E)$ が $\deg(v) \geq 2$ を満たすような切断点ではない頂点 v を持つとする。このとき以下は同値:

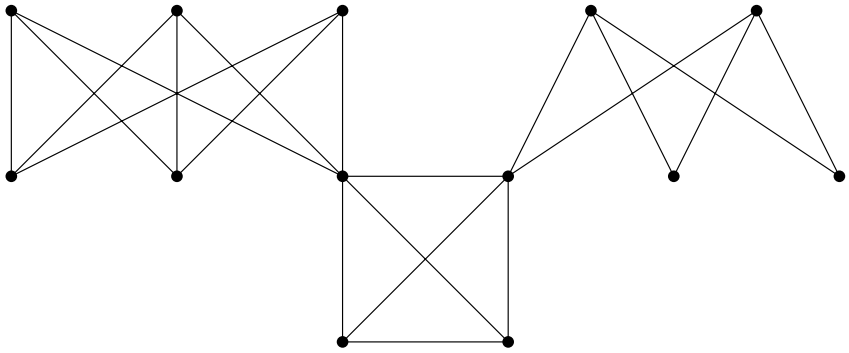


図 1　完全二部グラフ $K_{3,3}$、$K_{2,3}$ と完全グラフ K_4 をブロックに持つグラフ

(i) $K[\mathcal{P}_G]$ は *Gorenstein* である;
(ii) $\mathcal{P}_G$ は *Gorenstein* である;
(iii) $\mathcal{P}_G$ は指数 2 の *Gorenstein* である;
(iv) G は完全マッチングを持ち、$G[S \cup \Gamma(S)]$ と $G[(V_1 \setminus S) \cup (V_2 \setminus \Gamma(S))]$ が連結になるような任意の空でない部分集合 $S \subsetneq V_1$ に対して、$|S| + 1 = |\Gamma(S)|$ が成り立つ。

さらに、G が 2-連結ならば上記の条件は以下とも同値となる。

(v) G の *edge polytope* が *Gorenstein* である。

次数が 2 種類のグラフを **bidegreed graph** という。

Theorem 4.4. 有限グラフ G は *pseudotree* とする。このとき、$K[\mathcal{P}_G]$ が *Gorenstein* であることと G が以下のいずれかを満たすことは同値:

(i) G は K_1, K_2 もしくは *bidegreed tree*;
(ii) G は C_5;
(iii) G は三角形 C を持ち、
$$\begin{cases} \deg(v) \in \{2,3\} & v \in V(C) \text{ のとき} \\ \deg(v) \in \{1,3\} & \text{その他;} \end{cases}$$
(iv) G は偶サイクル C を持ち、以下を満たす $\delta \geq 2$ が存在する。
$$\begin{cases} \deg(v) = \delta & v \in V(C) \text{ のとき} \\ \deg(v) \in \{1, \delta - 1\} & \text{その他。} \end{cases}$$

Example 4.5. 図 2 のグラフによって生起される perfectly matchable subgraph polytope のトーリック環は Gorenstein である。

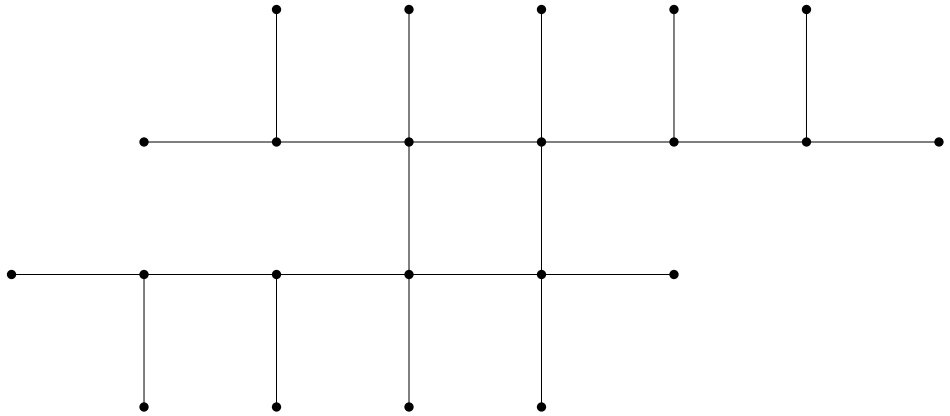


図 2　偶サイクルの頂点の次数が 4 でそれ以外の頂点の次数が 3 もしくは 1 の pseudotree

5　Theorem 4.1 の証明の概要

まず Theorem 4.1 については Sullivant による判定法 [8, Theorem 2.4] を使って求めた。

Proposition 5.1 ([8])**.** $\mathcal{P}$ は冗長でない線形表現 $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} \geq b_i,\ i = 1, \ldots, s\}$ を持つとする。ただし $i = 1, 2, \ldots, s$ に対して、$\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ である。このとき $\mathcal{P}$ が *compressed* であることと各 i に対して $\{\mathbf{x} \in L_{\mathcal{P}} : \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = b_i + m_i\} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ であるような $m_i \in \mathbb{R}$ が高々一つ存在することが同値である。

グラフ G に対して G' を G の誘導部分グラフとする。このとき $\mathcal{P}_{G'}$ は $\mathcal{P}_G$ の面となる。compressed な多面体のすべての面は compressed であることが知られているため以下が従う。

Lemma 5.2. G' を $\mathcal{P}_{G'}$ が *compressed* ではないような連結グラフとする。グラフ G が G' を誘導部分グラフとして持つとき、$\mathcal{P}_G$ は *compressed* ではない。

以下の補題は Proposition 5.1 によって得られた結果の一つである。

Lemma 5.3. G を連結なグラフとする。$\mathcal{P}_G$ が *compressed* であるとき、G は長さが 5 以上の奇サイクルを部分グラフに持たない。

Proof. G は長さが $2n + 1$ の奇サイクルを部分グラフに持つとする。ただし $n \geq 2$ である。このとき $S = V(C_{2n+1})$ に対して $G' = G[S]$ を考える。Lemma 5.2 より、誘導部分グラフ G' から生起される $\mathcal{P}_{G'}$ が compressed ではないことを示せば十分である。仮定より、$G' \setminus (S \cup \Gamma(S))$ は空となる。C_{2n+1} は critical であり C_{2n+1} の頂点集合は G' の頂点集合と一致するため、$G' = G'[S]$ は critical となる。だらに $\Gamma(S) = \emptyset$ であり $G'[S \cup \Gamma(S)] = G'$ は連結である。したがって、 Proposition 2.3 より

$$x(S) \leq |S| - \theta(S) = 2n + 1 - 1 = 2n$$

は $\mathcal{P}_{G'}$ のファセットを誘導する。このとき $x \in \mathcal{P}_{G'} \cap \mathbb{Z}^{2n+1}$ となる $x(S)$ が $n + 1 \geq 3$ 個存在する。

実際、

$$\left\{x(S) : x \in \mathcal{P}_{G'} \cap \mathbb{Z}^{2n+1}\right\} = \{0, 2, \ldots, 2n\}$$

である。Proposition 5.1 より、 $\mathcal{P}_{G'}$ は compressed ではない。 □

さらに以下の結果がグラフ理論では知られている。

Proposition 5.4 ([5, 9])**.** グラフ G に対して以下は同値:

(i) G の線グラフ $L(G)$ は *perfect*;
(ii) G は長さが 5 以上の奇サイクルを部分グラフに持たない;
(iii) G の各ブロックは二部グラフ、K_4、もしくは $K_{1,1,n}$ である。

したがって以下が従う。

Lemma 5.5. G を連結なグラフとする。$\mathcal{P}_G$ が *compressed* であるとき、Stab($L(G)$) は *perfect* である。

ここでは compressed 性において stable set polytope との興味深い関連が見られる。ここから Proposition 5.1 を用いてグラフをさらに絞り込み、Theorem 4.1 を得た。

6 Theorem 4.4 の証明の概要

次に Theorem 4.4 について証明を簡単に紹介する。stable set polytope のエルハート環について以下の結果が得られている。

Proposition 6.1 ([6, Theorem 3.8])**.** グラフ G を *h-perfect graph* とする。このとき Stab(G) の *Ehrhart* 環が *Gorenstein* であることと G のすべての極大なクリークは同じ基数 ω で、G は以下の条件のうち一つを満たす:

(i) $\omega = 1$;
(ii) $\omega = 2$ かつ G は長さが 7 以上の誘導奇サイクルを持たない;
(iii) $\omega \geq 3$ かつ G は長さが 5 以上の誘導奇サイクルを持たない。

これと Lemma 3.2 を併用することで Theorem 4.4 の (i)-(iii) を得られた。残るは偶サイクルを持つ pseudotree の $\mathcal{P}_G$ が Gorenstein となる条件 (iv) を示す必要がある。連結な二部グラフの perfectly matchable subgraph polytope については以下の結果を得た。

Proposition 6.2. グラフ G を頂点集合 $V = \{1, 2, \ldots, n\} = V_1 \cup V_2$ による連結な二部グラフとする。このとき $\mathcal{P}_G$ が指数 δ の *Gorenstein* であることと以下を満たす $\delta \geq 2$ と $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ が存在することが同値*:*

(i) $\alpha(V_1) = \alpha(V_2)$;
(ii) v が切断点ではないとき、$\alpha(v) = 1$;
(iii) $\deg(v) \geq 2$ のとき、$\alpha(v) = \delta - 1$;

(iv) $\emptyset \neq S \subsetneq V_1$ に対して $G[S \cup \Gamma(S)]$ と $G[(V_1 \setminus S) \cup (V_2 \setminus \Gamma(S))]$ が連結のとき、$\alpha(S) - \alpha(\Gamma(S)) = -1$ が成り立つ。

これを pseudotree に適用することで Theorem 4.4 の (iv) を得た。

7 今後の展望

この多面体のトーリック環及びトーリックイデアルについてソフトウェア CoCoA[1] を用いて計算実験を行ったが perfectly matchable subgraph polytope のトーリックイデアルが二次生成にならないグラフは見つけられなかった。

Conjecture 7.1. 任意の有限グラフ G に対して、トーリックイデアル $I_{\mathcal{P}_G}$ は二次生成である。

この予想が正しいのであれば以下の予想にも取り組みたい。

Conjecture 7.2. 任意の有限グラフ G に対して $I_{\mathcal{P}_G}$ のグレブナー基底が二次となるような単項式順序が存在する。

参考文献

[1] J. Abbott, A.M. Bigatti and L. Robbiano, CoCoA: a system for doing Computations in Commutative Algebra. Available at http://cocoa.dima.unige.it

[2] E. Balas and W.R. Pulleyblank, The perfectly matchable subgraph polytopes of a bipartite graph, *Networks* **13** (1983), 495–516.

[3] E. Balas and W.R. Pulleyblank, The perfectly matchable subgraph polytope of an arbitrary graph, *Combinatorica* **9** (1989), 321–337.

[4] J. Herzog, T. Hibi and H. Ohsugi, "Binomial ideals", Graduate Texts in Math. **279**, Springer, Cham, 2018.

[5] F. Maffray, Kernels in perfect line-graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **55**, (1992) 1–8.

[6] M. Miyazaki, On the Gorenstein property of the Ehrhart ring of the stable set polytope of an h-perfect graph, *Int. Electron. J. Algebra* **30**, (2021) 269–284.

[7] K. Mori, Toric rings of perfectly matchable subgraph polytopes, *Graphs Combin.* **39** (2023) 121.

[8] S. Sullivant, Compressed polytopes and statistical disclosure limitation, *Tohoku Math. J.* **58** (2006), 433–445.

[9] L.E. Trotter, Line perfect graphs, *Math. Program.* **12** (1977) 255–259.

[10] N. L. White, The basis monomial ring of a matroid, *Adv. Math.* **24** (1977) 292–297.

パラレルセッション
会場Ｂ

Left Regular Band を用いた推移確率行列の固有値と重複度の考察

東北大学大学院　理学研究科　数学専攻
中川　由宇斗 (Yuto NAKAGAWA) *

概要

$x^2 = x, xyx = xy$ を満たす半群を Left Regular Band という. S 上の分布 $\{w_x\}$ を与え,「確率 w_x で $x \in S$ を左からかける」という操作を行うことで, それに対応したマルコフ連鎖を考えることができる. Kenneth S. Brown (2000) の手法を用い, 具体的なマルコフ連鎖の問題に対して, その推移確率行列の固有値と重複度を求めた.

1　導入

確率論及び代数学並びに解析学の基本的な事項を紹介する.

Definition 1 (条件付き確率)**.** X, Y を確率変数とし, $\mathbb{P}(Y = y) > 0$ であるとする. このとき,

$$\mathbb{P}(X = x | Y = y) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(Y = y)}$$

を X **の** Y **による条件付き確率**という.

Definition 2 (マルコフ連鎖)**.** Ω を有限集合, Ω に値をとる確率変数列を $\{X_n\}_{n\geq 0}$ とする. 式 (1) を満たすとき, 確率変数列 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ が有限**マルコフ連鎖**であるという.

$$\begin{aligned} &\forall t \geq 0\ ,\ x, y, x_0, \ldots, x_{t-1}\ \in \Omega \\ &\mathbb{P}(X_{t+1} = y | X_t = x) = \mathbb{P}(X_{t+1} = y | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}, X_t = x_t) \end{aligned} \tag{1}$$

すなわち, X_{t+1} における状態が直前の状態 X_t にのみ依存し, それ以前の状態 $\{X_0, \ldots, X_{t-1}\}$ に依存しないとき, 確率変数列 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ が有限**マルコフ連鎖**であるという.

$\{X_n\}_{n\geq 0}$ の確率分布を $\{\mu_n = (a_1, \ldots, a_{|\Omega|}) \mid \sum_{k=1}^{|\Omega|} a_k = 1)\}_{n\geq 0}$ とする. $\{X_n\}_{n\geq 0}$ がマルコフ連鎖であるとき, 下のような行列 P が存在して $\mu_{t+1} = \mu_t P$ とかける.

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & \cdots & p_{1,|\Omega|} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{|\Omega|,1} & \cdots & p_{|\Omega|,|\Omega|} \end{pmatrix}\ ,\ (p_{i,j}) = \mathbb{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = i)$$

* E-mail:yuto.nakagawa.r5@dc.tohoku.ac.jp
本研究は JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2114 の支援を受けたものである。

この行列 P を推移確率行列という.

Definition 3 (半群)**.** 集合 S の演算 $(*)$ が結合則 $((x*y)*z = x*(y*z))$ を満たすとき, $(S,*)$ は**半群**であるという. 今後, 演算に関する記述を省略して, 単に集合 S が半群であるという.

Definition 4 (LRB)**.** 半群 S が次の式 (2) を満たすとき, S は **LRB(Left-Regular Band)** であるという.

$$x^2 = x \quad , \quad xyx = xy \quad \forall x, y \in S \tag{2}$$

Definition 5 (S 上の順序)**.** $x, y \in S$ に対して S 上の順序 $\leq$ を次で定義する.

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad xy = y$$

Definition 6 ($y \preceq x$)**.** S 上の二項関係 $\preceq$ を次で定義する.

$$y \preceq x \quad \Leftrightarrow \quad xy = x$$

Definition 7 ($a \sim b$)**.** $\preceq$ を用いて, S 上の同値関係 $\sim$ を次で定める.

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad a \preceq b \text{ かつ } b \preceq a$$

Definition 8 (L, supp)**.** 集合 L を S の $\sim$ による商集合で定義する. また, S から $S/\!\sim$ への自然な全射写像を supp とかく.

$$\begin{array}{rccc} & S & \twoheadrightarrow & S/\!\sim \,=: L \\ \mathrm{supp}: & x & \longmapsto & \mathrm{supp}\, x \end{array}$$

Definition 9 (L 上の順序)**.** L 上の順序 (二項関係) $\leq$ を次で定義する.

$$\mathrm{supp}\, y \leq \mathrm{supp}\, x \quad \Leftrightarrow \quad xy = x$$

Definition 10 (チャンバー)**.** S を LRB とし, $\forall x \in S, cx = c$ を満たす $c \in S$ を**チャンバー**という. チャンバー全体の集合を $C \subset S$ とかく.

Definition 11 ($C_{\geq x}, c_X$)**.**

$$C_{\geq x} = \{c \in C \mid xc = c\} \ , \ c_X := \#\{c \mid \mathrm{supp}\, x = X, xc = c\}$$

Remark 12. S が LRB である. $\Leftrightarrow$ L が束である (任意の 2 元に対して, 上限・下限を持つ).
$C \subset S$ であり, $\forall x \in S, c \in C \to xc \in C$ となる.
$\mathrm{supp}\, x = \mathrm{supp}\, x', \mathrm{supp}\, y = \mathrm{supp}\, y'$ のとき, $\mathrm{supp}\, x \leq \mathrm{supp}\, y \Leftrightarrow \mathrm{supp}\, x' \leq \mathrm{supp}\, y'$ が成り立つ.
$\mathrm{supp}\, x = \mathrm{supp}\, x'$ のとき, $\#C_{\geq x} = \#C_{\geq x'}$ となる.

Definition 13 (指示関数)**.** $q(s)$ を s に関する命題とする. 命題 $q(s)$ によって定まる変数 s の**指示関数**は以下で定義される.

$$1_{q(s)} = \begin{cases} 1 & (\text{命題 } q(s) \text{ が成立する}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Definition 14 (メビウス関数)**.** S を束とする. S 上の**メビウス関数** μ を次の式で定める.

$$\sum_{s\le t\le u}\mu(s,t)=1_{s=u}$$

具体的な値は $\mu(s,s)=1$ から順に帰納的に定まる.

Definition 15 (q 類似)**.** q **類似**とは, $q\to 1$ の極限を考えることで, 元の形と同じようになるものをいう. 即ち, X が変数 q を含む式であり, $\lim_{q\to 1}X=Y$ が成立するとき, X が Y の q **類似**であるという.

Definition 16 (超平面・超平面配置)**.** $\mathbb{R}^n$ に対して, $A_i\sim\mathbb{R}^{n-1}$ を満たす A_i を**超平面**という. 本発表ではより制限して, 以下のような超平面 H $\{H\subset\mathbb{R}^n\mid a_1x_1+\cdots+a_nx_n=b\}$ $(a_i\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}^n)$ を考える. 有限個の超平面の組を**超平面配置**といい, $\mathcal{A}:=\{A_i\}_{i\in I}$ $(|I|<\infty)$ とかく.

2 先行研究

Theorem 17 ([4])**.** S を単位元を持つ有限の Left Regular Band とする. $\{w_x\}$ を S 上の確率分布とする. C 上のマルコフ連鎖を, 確率 w_x で選んだ $x\in S$ を左からかけることによって定義する. このマルコフ連鎖の推移確率行列を P とすると, P は対角化可能である. また, 各 $X\in L$ に対して, 重複度が m_X であるような固有値 λ_X を持つ.

$$\lambda_X=\sum_{\operatorname{supp} y\le X}w_y\qquad m_X=\sum_{Y\ge X}\mu(X,Y)c_Y\quad\Leftrightarrow\quad\sum_{Y\ge X}m_Y=c_X$$

Problem 18. Tsetlin library ([4]) $[n]=\{1,\dots.n\}$ 上の確率分布 $\{v_i\}_{i=1}^n$ が与えられている. 本棚に n 冊の異なる種類の本がある. 「本 i $(1\le i\le n)$ を確率 v_i で取り出し, それを一番左に移動する」という操作を考える. この操作を繰り返して得られる S_n 上のマルコフ連鎖を, **Tsetlin library** という.

Tsetlin library の状態の変化 $(n=9)$

8 を選ぶ	v_8		7	3	5	1	8	9	2	4	6
左端に移動	$\to$	8	7	3	5	1		9	2	4	6
	$\to$		8	7	3	5	1	9	2	4	6

Theorem 19 (Tsetlin library の固有値と重複度 [4])**.** Tsetlin library を表す推移確率行列の固有値 (λ_X) と重複度 (m_X) は以下のようになる.

$$\lambda_X=\sum_{i\in X}v_i\qquad m_X=(n-|X|)!\sum_{Z=0}^{n-|X|}\frac{(-1)^Z}{Z!}=d_{n-|X|}\qquad(X\subset[n])$$

$d_k := \#\{\sigma \in S_k \mid \forall i\ \sigma_i \neq i\}$ であり, $d_k = k! \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}$ となる. すなわち, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in S_k$ に対して, 全ての元を動かすような $\sigma \in S_k$ の数であり, **モンモール数**と呼ばれる.

Proof. Tsetlin library は, 次の Left Regular Band S を用いて表現することができる. $S = F_n := \{x = (x_1, \ldots, x_l) \mid 1 \leq l \leq n\} \cup \{e\}$ $(x_i \in [n], x_i \neq x_j)$ (e : 単位元) . 演算 $*$ を次で定める.

$$(x_1, \ldots, x_l) * (y_1, \ldots, y_m) = (x_1, \ldots, x_l, y_1, \ldots, y_m)\%$$

但し, % は「左に既出ならばその元を削除する」という意味とする.

$$\text{例}\quad (217) * (357416) = (217357416)\% = (2173546)$$

$(F_n, *)$ は LRB を満たす. $C = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$ となる. また, $C \simeq S_n$ (1 対 1 対応する) .

ここで $\{w_x\}_{x \in S} = \begin{cases} v_i & x = (i) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ とする. $c \in C$ に, 確率 w_x で選んだ $x \in S$ を左からかける ことにより, Tsetlin library の状態の変化を表すことが出来る.

$$\text{例}\ (123456) \xrightarrow{3} (312456) : (3) * (123456) = (3123456)\% = (312456)$$

この S, w_x に対して定理 17 を適用することで求められる. □

超平面配置を用いて表現することもできる [3] .

Proof. $V = \mathbb{R}^n, H_{i,j} := \{x_i = x_j\}$ $(i \neq j)$ とする. この超平面配置を「braid arrangement」という.

$\mathcal{A} = \{H_{i,j}\}_{i,j \in [n], i<j}$ とする. 各 $H_{i,j}$ に対して, $\{x_i > x_j\} (i < j)$ の向きを正とする. $\sigma_{i,j} \in \{-1, 0, 1\}$ として, ${H_{i,j}}^{\sigma_{i,j}}$ を以下のように定める.

1. ${H_{i,j}}^{+1} := x_i > x_j$
2. ${H_{i,j}}^{-1} := x_i < x_j$
3. ${H_{i,j}}^{0} := x_i = x_j$

$F^\sigma = \bigcap_{i,j \in [n]} {H_{i,j}}^{\sigma_{i,j}}$ とする. F^σ は, 各超平面 $H_{i,j}$ に対して向きを考えたものである. F^σ 全体の集合を $\mathcal{F}$ とかき, $\mathcal{F}$ の元を「面 (face)」と呼ぶ. 但し, 面が存在しないような符号の組み合わせについては面を定義しないものとする.

面は, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ を等号を含むことを認めて大小関係で並べたものと考えることができる. すなわち, $\mathcal{F} = \{F \mid F = (x_{i_1} > (=)\ x_{i_2} > (=) \cdots > (=)\ x_{i_n})\}$ と考えることができる.

$\sigma(F)$ を面 F の各超平面 $H_{i,j}$ に対する符号の列 $\{\sigma_{i,j}\}_{i,j \in [n]}$ とする. そのような符号列になる面が存在する場合, 面ごとに符号列は一意に定まり, 符号列ごとに面は一意に定まる.

面の積 (*) を各 $H_{i,j}$ に対する符号を用いて以下のように定める.

$$\sigma_{i,j}(F * G) = \begin{cases} \sigma_{i,j}(F) & (\sigma_{i,j}(F) \neq 0) \\ \sigma_{i,j}(G) & (\sigma_{i,j}(F) = 0) \end{cases}$$

そうすると, $(\mathcal{F}, *)$ は LRB となる.

また, チャンバー C は, $\sigma_{i,j}(C) \neq 0$ $(\forall i, j)$ を満たす. チャンバー C 全体の集合を $\mathcal{C}$ と書くと, $\mathcal{C} \sim S_n$ となる.

ここで, $\mathcal{F}$ 上の分布 w_F を以下のように定める.

$$w_F = \begin{cases} v_1 & F_1 = (x_1 > x_2 = \cdots = x_n) \\ v_2 & F_2 = (x_2 > x_1 = \cdots = x_n) \\ & \vdots \\ v_n & F_n = (x_n > x_1 = \cdots = x_{n-1}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

これで, Tsetlin library を表現することができる.

この $\mathcal{F}, w_F$ に対して定理 17 を適用することでも求めることができる. □

Problem 20 (Tsetlin library の q 類似 2 [4])**.** $V = {\mathbb{F}_q}^n \setminus \{\vec{0}\}$ とする. V 上の確率分布 $\{u_v\}_{v \in V}$ が与えられているとする. $A = (a_1, \ldots, a_n)$ $(a_i \in V\ ,\ a_1, \ldots, a_n$ は一次独立) とする. A 全体の集合と $GL_n(\mathbb{F}_q)$ は 1 対 1 対応である.

$A = (a_1, \ldots, a_n)$ に $b \in V$ を左からかけることを, 「$a_i = db + \sum_{j=0}^{i-1} c_j a_j\ ,\ d, c_j \in \mathbb{F}_q$ が成り立つ a_i を削除し, $A' = (b, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in GL_n(\mathbb{F}_q)$ にする」と定義する. $\{u_b\}_{b \in V}$ を V 上の確率分布とする. 確率 u_b でベクトル b を選び, 上の操作を行う. 行列 A に対して, 次のような増加列 A' を対応させる. 但し, $\dim \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_k\} = k$ となるようにする.

$$A = (a_1, \ldots, a_n) \to A' = (\emptyset \subset \mathrm{span}\{a_1\} \subset \mathrm{span}\{a_1, a_2\} \subset \cdots \subset \mathrm{span}\{a_1, \ldots, a_n\} = {\mathbb{F}_q}^n)$$

この操作によって得られる $\{A'\}$:= 増加列全体の集合上のマルコフ連鎖を, **Tsetlin library の q 類似 2** と呼ぶ.

増加列の具体例 $(n = 3, q = 3)$

$$A = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} * A$$

$$A' = \left(\emptyset \subset \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \subset \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \subset {\mathbb{F}_3}^3 \right) = B'$$

$$C' = \left(\emptyset \subset \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \right\} \subset \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \right\} \subset {\mathbb{F}_3}^3 \right)$$

Theorem 21 (Tsetlin library の q 類似 2 の推移確率行列の固有値と重複度 [4])**.** Tsetlin library の q 類似 2 の推移確率行列は, 重複度 m_X であるような固有値 λ_X を持ち, 次のように表される. 但し, $X = \mathrm{span}\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} \cup \emptyset$ $(1 \leq k \leq n)$ である.

$$\lambda_X = \sum_{v \in X} w_v \qquad m_X = \|d_{n-\dim X}\|_q = [n - \dim X]_q! \sum_{j=0}^{n-\dim X} \frac{(-1)^j}{[j]_q!} q^{\binom{j}{2}}$$

$\|d_k\|_q$ は**モンモール数の q 類似**と呼ばれる ([1]).

3 主結果

本発表では, 問題 22 , 24 , 26, 28 に現れるマルコフ連鎖に関する講演者の研究内容を報告する. 先行研究 18 , 20 を元に以下の問題 22 , 24 , 26, 28 を考えた. これらのマルコフ連鎖を表現できる Left Regular Band を構成し, 定理 17 を用いて対応する推移確率行列の固有値と重複度を明らかにした. 定理 23 については, v_i と c_j が一様分布の時に, 別の方法での証明がある [5]

Problem 22. **p 色版 Tsetlin library** 独立な分布 $\{v_i\}_{i=1}^n, \{c_j\}_{j=0}^{p-1}$ が与えられている. n 冊の本と p 色のカバーがある. 「確率 v_i で本 i を取り除き, その本のカバーを, 確率 c_j で色 j のカバーにに付け替え, 一番左に戻す」という操作を行う. この操作によって得られる $G_{n,p}$ 上のマルコフ連鎖を **p 色版 Tsetlin library** と呼ぶ. なお, 色の選び方はそれ以前のカバーの色に依らないものとする.

p 色版 Tsetlin library の状態の変化 $(n = 8, p = 3), (a, 0) = a, (b, 1) = b, (c, 2) = c$.

v_4		7	3	5	1	$\underline{4}$	2	8	6
数字 4 を選ぶ →	$\underline{4}$	7	3	5	1		2	8	6
色 1 に変える →	$\underline{4}$	7	3	5	1		2	8	6
c_1		4	7	3	5	1	2	8	6

Theorem 23 (p 色版 Tsetlin library の固有値とその重複度)**.** p 色版 Tsetlin library を表す推移確率行列の固有値 (λ_X) と重複度 (m_X) は以下のようになる.

$$\lambda_X = \sum_{i \in X} w_i \qquad m_X = (n - |X|)! p^{n-|X|} \sum_{Z=0}^{n-|X|} \frac{(-1)^Z}{Z! p^Z} = D_{n-|X|,p} \qquad (X \subset [n])$$

$D_{k,p} := \#\{\tau \in G_{k,p} \mid \forall i \ \sigma_i \neq i \ \vee \ a_i \neq 0\}$ であり, $D_{k,p} = k! p^k \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j! p^j}$ となる. すなわち, $\tau = ((\sigma_1, a_1), \ldots, (\sigma_k, a_k)) \in G_{k,p}$ において, 任意の i に対して「$\sigma_i \neq i$ または $a_i \neq 0$ を満たす」ような $\tau \in G_{k,p}$ の数を, p **色版モンモール数** と呼び, $D_{k,p}$ と書く.

Problem 24 (**Tsetlin library の q 類似**)**.** $V = {\mathbb{F}_q}^n \setminus \{\vec{0}\}$ とする. V 上の確率分布 $\{w_v\}_{v \in V}$ が与えられているとする. $A = (a_1, \ldots, a_n)$ $(a_i \in V \ , \ a_1, \ldots, a_n$ は一次独立) とする. A 全体の集合 $\mathcal{A}$ と $GL_n(\mathbb{F}_q)$ は 1 対 1 対応である. $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}, b \in V$ に対して, 「$bA = (b, a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}$」と定義する. 但し a_i は, $a_i = db + \sum_{j=0}^{i-1} c_j a_j$, $d, c_j \in \mathbb{F}_q$ を満

たすものとする．確率 u_b でベクトル b を選び，左から b をかけるという操作を行う．この操作によって得られる $GL_n(\mathbb{F}_q)$ 上のマルコフ連鎖を，**Tsetlin library の q 類似**と呼ぶ．

Tsetlin library の q 類似の状態の変化

$$\overset{w}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} \xrightarrow{\text{左に非 0 の ベクトルをもってくる}} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{既出の元の線形和で 表せるのを消す}} \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\because \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + (q-1)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Theorem 25 (**Tsetlin library の q 類似 の推移確率行列の固有値と重複度**)**.** Tsetlin library の q 類似を表す推移確率行列の固有値 (λ_X) と重複度 (m_X) は以下のようになる．但し，$\langle 0\rangle! = 1$ ，　$\langle n\rangle! = q^{\binom{n}{2}}\prod_{k=1}^{n}(q^k-1)$ $(n \geq 1)$ ，$X = \mathrm{span}\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\} \cup \emptyset$ $(1 \leq k \leq n)$ ．

$$\lambda_X = \sum_{v \in X} w_v \qquad m_X = \langle n - \dim X\rangle! \sum_{j=0}^{n-\dim X} \frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}} q^{\dim X(n-\dim X-j)}}{\langle j\rangle!} = F_n(\dim X)$$

$F_n(k) = \langle n-k\rangle! \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j q^{\binom{j}{2}} q^{k(n-k-j)}}{\langle j\rangle!}$ であり，[2] の式 (3.4) を一部変形したものである．

Problem 26 (**超立方体の頂点上のランダムウォーク**)**.** 原点中心長さ 2 の超立方体において，「確率 v_j で j の符号を変化させる」という操作を行う．この操作によって得られる $\{\pm 1\}^n$ 上のマルコフ連鎖を**超立方体の頂点上のランダムウォーク**という．

超立方体の頂点上のランダムウォークの状態の変化 $(n = 7)$

$$\begin{aligned} v_3 \quad & (+1,-1,-1,-1,+1,-1,+1) \\ \to \quad & (+1,-1,+1,-1,+1,-1,+1) \end{aligned}$$

Theorem 27 (**超立方体の頂点上のマルコフ連鎖の lazy 版の固有値と重複度**)**.** 超立方体の頂点上のマルコフ連鎖の lazy 版の固有値とその重複度は以下のようになる．但し，$(X \subset [n])$ とする．

$$\lambda_X = \sum_{i \notin X} v_i \quad m_X = 1$$

Problem 28 (**riffle shuffle**)**.** $1, \ldots, n$ の順列のそれぞれの数字に対し, $(0, 1)$ のいずれかの番号を一様に割り振る. 元の順列の順番からの変更を行わないで, 0 を割り振った数字のみを左に移動するという操作を行う. この操作によって得られる S_n 上のマルコフ連鎖を **riffle shffle** という.

riffle shuffle の状態の変化 $(n = 7)$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 2 & 5 & 3 & 1 & 4 & 6 & 7 & \to & 5 & 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Theorem 29 (**riffle shuffle の固有値と重複度**)**.** 超立方体の頂点上のマルコフ連鎖の lazy 版の固有値とその重複度は以下のようになる. 但し, $(X \subset [n])$ とする. riffle shuffle の推移確率行列の固有値と重複度は以下のように表される. 但し, $(0 \leq k \leq n)$ とする

$$\lambda_k = 2^{n-k} \quad , \quad m_k = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

但し, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ は第一種スターリング数といい, n 個の要素を k 個の巡回列に分割する個数である.

参考文献

[1] Wachs, M. L., On q-derangement numbers, Proc. Amer. Math. Soc., **106**, (1989), no. 1, 273–278.

[2] Chen, W. Y. C., Rota, G., q-analogs of the inclusion-exclusion principle and permutations with restricted position, Discrete Math., **104** (1992), no. 1, 7–22.

[3] Bidigare, P., Hanlon, P., Rockmore, D., A combinatorial description of the spectrum for the Tsetlin library and its generalization to hyperplane arrangements, Duke Math. J., **99** (1999), no. 1, 135–174.

[4] Brown, K. S., Semigroups, rings, and Markov chains, J. Theoret. Probab., **13** (2000), no. 3, 871–938.

[5] Nakano , F., Sadshiro , T., Sakurai , T. Top to random shuffles on colored permutations, preprint, arXiv : 2207.08071, (2022),

非可換確率論とランダム行列モデル

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
藤江克徳 (Katsunori FUJIE) *

概要

確率論を代数的な枠組みで捉えなおしたとき，自然に定まる独立性の概念は 5 種類のみに限られることがよく知られている．ここで気になるのは—独立な GUE の族が満たす漸近的自由独立性のように，それぞれの独立性に対応する自然なランダム行列モデルが存在するのか—という問題である．本講演ではその一つの具体例として，GUE の摂動モデルを考えた場合，とくに単調独立性の概念が現れ，外れ固有値の解析に応用できることを紹介する．そして，それらの独立性が関係し合う，新たな代数的確率空間の枠組みについて解説する．

1　導入

1980 年代に Voiculescu が自由確率論—代数的確率空間上に自由独立性を定めたもの—を創始して以来，当該分野はランダム行列をはじめとする諸分野との関わりを強めながら発展を続けてきている．現代の測度論に依拠した確率論は標本空間 Ω，σ-加法族 $\mathcal{F}$, 確率測度 $\mathbb{P}$ の三つ組を確率空間として定式化し議論を展開していく．一方，代数的確率空間という異なるアプローチをとることで確率論の既知の結果を（やや弱い形にはなるけれど）再構成することができる．

Definition 1.1. いま $\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}$-代数で $1_{\mathcal{A}}$ を単位元に持つものとする．また $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ を線型写像で $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ なるものとする．このとき，$(\mathcal{A}, \varphi)$ の組を代数的確率空間（または非可換確率空間）と呼ぶ.

たとえば $\mathcal{A}$ として $L^{\infty-}(\Omega) := \bigcap_{p\geqslant 1} L^p(\Omega)$，$\varphi$ として期待値 $\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$ $(X \in \mathcal{A})$ を採用することにすれば，これは代数的確率空間の一例となる．すなわち基礎となっている確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を忘れてしまい，確率変数のなす環と期待値のみを用いて議論を展開していこうという発想が代数的確率空間の出発点である．この文脈で確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ による通常の確率論を，対比のため古典確率論と呼ぶことが多い．たとえば $\varphi(1_{\mathcal{A}}) = 1$ という規約は古典確率論における確率測度の条件 $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ と合致している．さらに $\mathcal{A}$ に $*$-構造を仮定して正値性 $\varphi(a^*a) \geqslant 0$ $(a \in \mathcal{A})$ を要求するのも自然であり，追加して $\mathcal{A}$ に C^* 環であるというような位相的な構造を要求する場合も多いが，紙数の都合のためここで詳細に述べることはしない．興味ある読者は分野への入門的なテキストである [13] などを参照することを勧める．

* E-mail: kfujie@eis.hokudai.ac.jp

Example 1.2. 古典確率論の例 $(L^{\infty-}(\Omega), \mathbb{E})$ の他，たとえば次のようなものを非可換確率空間の例として挙げることができる．

1. 自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathrm{M}_N(\mathbb{C})$ を複素数からなる $N \times N$ 行列の全体とし，tr_N を正規化トレース（行列 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^N$ について $\mathrm{tr}_N(A) := \sum_{i=1}^N a_{ii}/N$ として定められる）とすると，$(\mathrm{M}_N(\mathbb{C}), \mathrm{tr}_N)$ は代数的確率空間となる．
2. 自然数 $N \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathrm{M}_N(L^{\infty-}(\Omega))$ を成分として $L^{\infty-}(\Omega)$ にもつ $N \times N$ 行列の全体とし，$\mathbb{E} \circ \mathrm{tr}_N$ を期待値 $\mathbb{E}$ と正規化トレースの合成とすると，$(\mathrm{M}_N(L^{\infty-}(\Omega)), \mathbb{E} \circ \mathrm{tr}_N)$ は代数的確率空間になる．

さて，代数的確率空間 $(\mathcal{A}, \varphi)$ を用いて確率論を展開したいのだが，その際に問題になるのは独立性をどのように定めるのかということである．古典確率論における通常の独立性に対応する概念は以下のようにして定めることができ，古典独立性あるいは tensor 独立性と呼ばれる．簡単のため以下の定義中では $\mathcal{A}$ を可換と仮定する（一般に定義できるが記法の準備がいるため）．

Definition 1.3 (古典独立性)**.** いま $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ を $\mathcal{A}$ の部分集合族とし，$\mathcal{X}_i$ から生成される単位的部分代数を $\mathcal{A}_i := \mathrm{alg}(1_{\mathcal{A}}, \mathcal{X}_i)$ とする．このとき，$(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ が古典独立であるとは，次が成り立つこととして定める．任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$，$i_1, \ldots, i_n \in I$ で $i_j \neq i_{j+1}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$，$a_j \in \mathcal{A}_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ に対して，

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \prod_{i \in I} \varphi\left(\prod_{\substack{j=1,\ldots,n \\ i_j = i}} a_j \right).$$

ここで，代数的確率空間 $(\mathcal{A}, \varphi)$ 上に定まる独立性の概念について，次のような公理を与えることができる．以下では簡単のため大雑把に述べる（詳しくは [2, 12] を参照）．いま $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ を $\mathcal{A}$ の部分代数であり，$\mathcal{A}_1 \bigsqcup \mathcal{A}_2$ を $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ から生成される部分代数とする．独立性とは以下の 2 条件を満たし $\varphi|_{\mathcal{A}_1}$ および $\varphi|_{\mathcal{A}_2}$ から $\varphi|_{\mathcal{A}_1 \bigsqcup \mathcal{A}_2}$ を決定する計算規則のことである．

(可換性) 2 つの部分代数 A_1 と A_2 について $\varphi|_{\mathcal{A}_1 \bigsqcup \mathcal{A}_2} = \varphi|_{\mathcal{A}_2 \bigsqcup \mathcal{A}_1}$.
(結合性) 3 つの部分代数 $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^3$ について，$\varphi|_{(\mathcal{A}_1 \bigsqcup \mathcal{A}_2) \bigsqcup \mathcal{A}_3} = \varphi|_{\mathcal{A}_1 \bigsqcup (\mathcal{A}_2 \bigsqcup \mathcal{A}_3)}$.

興味深いことに，上記の公理を満たす独立性は古典独立性の他には，自由独立性およびブール独立性の 2 つしかないことが知られている．

Definition 1.4 (自由独立性)**.** いま $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ を $\mathcal{A}$ の部分集合族とし，$\mathcal{X}_i$ から生成される単位的部分代数を $\mathcal{A}_i := \mathrm{alg}(1_{\mathcal{A}}, \mathcal{X}_i)$ とする．このとき，$(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ が自由独立であるとは，次が成り立つこととして定める．任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$，$i_1, \ldots, i_n \in I$，$i_j \neq i_{j+1}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$，$a_j \in \mathcal{A}_{i_j}$ かつ $\varphi(a_j) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ に対して，

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = 0.$$

Definition 1.5 (ブール独立性)**.** いま $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ を $\mathcal{A}$ の部分集合族とし，$\mathcal{X}_i$ から生成される部分代数を $\mathcal{A}_i := \mathrm{alg}(\mathcal{X}_i)$ とする．このとき，$(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ がブール独立であるとは，次が成り立つこととして定める．任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$，$i_1, \ldots, i_n \in I$，$i_j \neq i_{j+1}$ $(j = 1, \ldots, n-1)$，$a_j \in \mathcal{A}_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$

に対して，

$$\varphi(a_1 \cdots a_n) = \prod_{j=1}^{n} \varphi(a_j).$$

さらに，可換性の条件を外しても独立性は本質的には 1 つしか増えないことが村木によって示された [12]．新しく増えるその独立性を単調独立性と呼ぶ．その定義を簡単に述べるため，以下では $|I| = 2$ の場合に限って述べる．

Definition 1.6 (単調独立性)**.** いま $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ を $\mathcal{A}$ の部分集合とする．このとき $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ が単調独立であるとは，次が成り立つこととして定める．任意の自然数 $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathrm{alg}(\mathcal{X}_1)$ および $y_0, y_1, \ldots, y_n \in \mathrm{alg}(1_{\mathcal{A}}, \mathcal{X}_i)$ に対して，

$$\varphi(y_0 x_1 y_1 x_2 y_2 \cdots x_n y_n) = \varphi(x_1 x_2 \cdots x_n)\varphi(y_0)\varphi(y_1) \cdots \varphi(y_n).$$

なお，$\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1$ が単調独立のとき，$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ は反単調独立であると呼ぶ．

これまで述べてきた，代数的確率空間上に定まる 3 つないし 5 つの独立性はそれぞれ特徴があり，非可換確率論としてさまざまな性質が調べられている．たとえば独立な 2 つの非可換確率変数 a, b の和 $a + b$ が与える分布（ここでモーメントと同一視していることに注意）として畳み込み演算が定められ，対応するそれぞれの大数の法則や中心極限定理，および正規分布が存在する．

とくに自由独立性は非可換確率論の先駆けとして現れた概念であり，ランダム行列との関係が深いことから最も興味が持たれ，よく研究されている．その関わりを非常に大雑把に述べると，多くの場合で独立なランダム行列のモデルは次数を上げていった際に漸近的に自由独立性を満たすことが知られている（この性質は漸近自由独立性と呼ばれる）．

なお，$(\mathcal{A}, \varphi)$ において定まるある意味自然な独立性の概念は 5 種類に限られることを述べたが，代数について条件を変えると異なる独立性を定められることが知られている．多くの独立性が知られているが，ここでとくに注目したいのは，組み合わせ論的な観点から Biane, Goodman, Nica らによって定義された type B 非可換確率空間である．

Definition 1.7 (Definition in Section 6.1 of [5])**.** Type B 非可換確率空間とは $(\mathcal{A}, \varphi, \mathcal{V}, f)$ の 4 つ組のことである．ここで

1. $(\mathcal{A}, \varphi)$ は代数的確率空間.
2. $\mathcal{V}$ は両側 $\mathcal{A}$-加群であって $f\colon \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$-線型写像.

後に type B 非可換確率空間は無限小非可換確率空間として統一的に扱えることがわかった [8]．自由確率論はランダム行列理論へ漸近的自由独立性の概念を通して，よく応用されていることを述べたが，Type B 非可換確率空間は Shlyakhtenko によって，BBP phase transition と呼ばれるランダム行列の摂動問題へ応用できることが示唆された [1, 14]．なお，BBP phase transition そのものは free subordination function のような自由確率論の技術を用いてかなり一般の場合で解決されている [4]．しかし，それはかなり高度な解析的アプローチであり，素朴なモーメントを用いた方法ではなかった．2018 年に Collins，長谷部，佐久間らは非正規化トレースを合わせて考えると，GUE のような自然なランダム行列と有限次元行列との間に，単調独立性に類似した計算規則が漸近的に成り立つことを指摘した [7]．以下では，それを抽象化し，整理した最新の形で定義を述べる．

Definition 1.8 (Definition 2.1 of [10]). (i) いま $\mathcal{F}$ を $\mathbb{C}$-代数で $\Phi\colon \mathcal{F} \to \mathbb{C}$ を線形写像とする．このとき $(\mathcal{F}, \Phi)$ を非可換測度空間と呼ぶ．

(ii) いま $(\mathcal{A}, \varphi)$ を非可換確率空間，$(\mathcal{F}, \Phi)$ を非可換測度空間とし $\mathcal{F}$ を $\mathcal{A}$-代数であると仮定する．このとき 4 つ組を $(\mathcal{A}, \varphi, \mathcal{F}, \Phi)$ を type B′ 非可換確率空間と呼ぶ．

Definition 1.9 (Definition 2.4 of [10]). いま $(\mathcal{A}, \varphi, \mathcal{F}, \Phi)$ を type B′ 非可換確率空間とし，$\mathcal{A}_1$ を $\mathcal{A}$ の部分代数，$\mathcal{F}_1$ を $\mathcal{F}$ の部分代数とする．このとき $(\mathcal{A}_1, \mathcal{F}_1)$ が巡回的反単調独立であるとは，次が成り立つことをいう．任意の $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{A}_1$, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}_1$. に対して

$$\Phi(a_0 f_1 a_1 f_2 \cdots a_{n-1} f_n a_n) = \varphi(a_0 a_n) \left[\prod_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \varphi(a_i) \right] \Phi(f_1 f_2 \cdots f_n).$$

なお 2022 年に Cébron–Dahlqvist–Gabriel らはこれをさらに推し進め，巡回的反単調独立性から単調独立性が導かれることを指摘し，さらに摂動によって生じる外れ固有値の位置をモーメント法を用いて決定できることを示している [6].

2 主定理

私と長谷部は Biane–Goodman–Nica によって定められていた type B 非可換確率空間の定義を修正することによって，新しく type B′ 非可換確率空間というものを定めた（上記の定義 1.8）．これはランダム行列モデルを構成し，BBP phase transition への応用を考えたとき，積構造も合わせて考えるべきであるという自然な要請から定まるものである．実際，type B′ 非可換確率空間はランダム行列の摂動モデルの自然な抽象化とみなすことができる．さらに私たちは type B′ 非可換確率空間上に，自明な独立性，弱い type B′ 独立性という定義を与え，GUE や有限次元行列のクラスが漸近的にそれらの独立性を満たすことを示した [10, Theorem 2.15, 2.18]．これらは大雑把に述べると，上で述べた自由独立性と巡回的反単調独立性を合わせて考えた際に定まる独立性である．つづいて，弱い type B′ 独立性のもとでは自明な独立性と無限小独立性 [8] が同値となることを示した [10, Theorem 4.1]．この類似として，弱い type B′ 独立性のもとでベクトル状態にあたる適切な線型汎函数を定めると，ブール独立性と条件付き自由独立性 [3] が同値となることを示した [10, Theorem 5.1].

非常に興味深いのは，type B′ 非可換確率空間という枠組みを用いることで自由独立性を除いた独立性に対して，ある意味自然な形で漸近的なランダム行列モデルを構成できた点である．しかも，これまで別個に提案され，研究されていたさまざまな独立性の概念が，それぞれ関係し合う形で現れている．

私たちは一つの応用例として，GUE のようなユニタリ不変性を持つランダム行列の系列について，その主小行列の固有値の解析をこの枠組みを用いることで行えることを示した [10, Theorem 6.1]. なお，この結果は私たちの以前の成果である [9, Theorem 1.3] を拡張したものになっている．

参考文献

[1] J. Baik, G. Ben Arous and S. Péché, Phase transition of the largest eigenvalue for nonnull complex sample covariance matrices, Ann. Probab. 33 (2005), 1643–1697.

[2] A. Ben Ghorbal and M. Schürmann, Non-commutative notions of stochastic independence, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 133 (2002), 531–561.

[3] M. Bożejko, M. Leinert and R. Speicher, Convolution and limit theorems for conditionally free random variables, Pacific J. Math. 175 (1996), no. 2, 357–388.

[4] S. T. Belinschi, H. Bercovici, M. Capitaine, and M. Février, Outliers in the spectrum of large deformed unitarily invariant models. Ann. Probab. 45 (2017), 3571–3625.

[5] P. Biane, F. Goodman, and A. Nica, Non-crossing cumulants of type B, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no. 6, 2263–2303.

[6] G. Cébron, A. Dahlqvist, and F. Gabriel, Freeness of type B and conditional freeness for random matrices. arXiv:2205.01926

[7] B. Collins, T. Hasebe, and N. Sakuma, Free probability for purely discrete eigenvalues of random matrices, J. Math. Soc. Japan 70 (2018), no. 3, 1111–1150.

[8] M. Février and A. Nica, Infinitesimal non-crossing cumulants and free probability of type B, J. Funct. Anal. 258 (2010), no. 9, 2983–3023.

[9] K. Fujie and T. Hasebe, The spectra of principal submatrices in rotationally invariant Hermitian random matrices and the Markov-Krein correspondence, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 19 (2022), no. 1, 109–123.

[10] K. Fujie, T. Hasebe, Type B prime free probability, arXiv: 2310.14582.

[11] N. Muraki, Monotonic convolution and monotonic Lévy-Hinčin formula, preprint, 2000.

[12] N. Muraki, The five independences as natural products, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. 6 (2003), no. 2, 337–371.

[13] A. Nica and R. Speicher, Lectures on the combinatorics of free probability, London Mathematical Society Lecture Note Series, 335. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[14] D. Shlyakhtenko, Free probability of type-B and asymptotics of finite-rank perturbations of random matrices, Indiana Univ. Math. J. 67 (2018), no. 2, 971–991.

Refined Filtrated K-Theory for Graph C^*-Algebras over a Four-Point Space

慶應義塾大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻
橋本 七海 (Nanami HASHIMOTO) *

Abstract

本稿では, ある 4 点空間上の C^*-環に対する完全不変量を得るために Meyer, Nest によって改良された filtrated K-theory をグラフ C^*-環を通して解説する. また, 4 点空間上のグラフ C^*-環の K-理論的特徴づけを与える.

1 導入

作用素環論は, 量子力学を数学的に定式化するという目的で von Neumann らによって研究が始められたもので, 数学の中でも比較的新しい研究分野である. 作用素環論は通常, 関数解析学に属する分野として捉えられているが, その手法や応用については, 代数学・幾何学とも相互的に関わり合いながら発展してきた分野である.

作用素環の一種である **C^*-環**はさまざまな数学的・物理的対象から自然に現れるものである. 異なる対象から異なる手段を用いて現れた C^*-環がどのような場合に同型になるかを問う分類理論は, C^*-環の研究において普遍的なテーマである. **K-理論**はこの分野において強力な道具である.

C^*-環の分類理論における重要な進展として, Kirchberg [Kir94] と Phillips [Phi00] によって示された定理が知られている. これは, いくつかの条件をみたす C^*-環が**単純**であるならば, K-理論を用いて完全に分類されるという驚くべき定理である. 近年, 単純でない C^*-環でイデアルを有限個もつようなものに対してこの結果を拡張するという問題が興味深いテーマとして盛んに研究されている. これらの C^*-環は**有限 T_0-空間上の C^*-環**と呼ばれており, **filtrated K-theory** とよばれる K-理論的不変量が自然な不変量として考えられている.

先行研究で Meyer, Nest [MN12], Bentmann, Köhler [BK11] は, **アコーディオン空間**とよばれる空間の上の C^*-環に対して, filtrated K-theory が所望の完全不変量であることを証明した. その一方で, アコーディオン空間でないある **4 点空間**に対して, filtrated K-theory に別の K-理論的不変量を 1 つ付け加えることで, 所望の完全不変量が得られることを証明した.

本稿では, [MN12] が改良した新しい不変量を用いて, **グラフ C^*-環**の特徴づけに関する結果を得る. グラフ C^*-環は filtrated K-theory を具体的に記述することができるため, 有限 T_0-空間上の C^*-環の分類を行う上で重要な C^*-環のクラスを成している. 本稿では, C^*-環, イデアルの定義や K-理論の基本事項の説明から始め, 最後に [MN12] の 4 点空間の上の C^*-環がグラフ C^*-環となるための必要十分条件を与える.

2 準備

2.1 C^*-環

まずは C^*-環の基礎事項を概説する. 詳細は [Bla06] などを参照してほしい.

*E-mail: nanami_hashimoto@keio.jp

定義 2.1 (C^*-環)**.** 複素数体$\mathbb{C}$上の代数Aであって, 次の条件をみたす共役線形な$A \ni a \mapsto a^* \in A$が備わっているものを**$*$-代数** ($*$**-algebra**) という:

$$(ab)^* = b^*a^*, \qquad a^{**} = a \qquad (a, b \in A).$$

C^*-環 (C^***-algebra**) とは, 完備なノルムを備えた$*$-代数Aであって, 次の条件をみたすものである:

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \qquad \|a^*a\| = \|a\|^2 \qquad (a, b \in A).$$

乗法単位元1をもつC^*-環を**単位的** (**unital**) であるという.

例 2.2. 複素n次行列全体$M_n(\mathbb{C})$は共役転置を$*$-演算として備え, 作用素ノルムとよばれる完備ノルムを備えた単位的C^*-環である. 同様にして, C^*-環Aに対して, A値のn次行列全体$M_n(A)$もまたC^*-環となる.

定義 2.3. AをC^*-環とする.

- $p \in A$が$p^2 = p^* = p$をみたすとき, pを**射影** (**projection**) という.
- $s \in A$に対し, s^*sが射影であるとき, sを**部分等長作用素** (**partial isometry**) という[1].
- Aが単位的で$u \in A$が$u^*u = uu^* = 1$をみたすとき, uを**ユニタリ** (**unitary**) という.

定義 2.4. C^*-環Aの閉部分空間であって, 積と$*$-演算で閉じているものを**C^*-部分環** (C^***-subalgebra**) という. 部分集合$X \subset A$に対して, Xを含む最小のC^*-部分環をX**から生成されるC^*-部分環**といい, $C^*(X)$と表記する.

注意 2.5. C^*-部分環はもちろんC^*-環である. また, $C^*(X)$はXを含むすべてのC^*-部分環の共通部分である.

定義 2.6. C^*-環Aの閉部分空間Iであって, 任意の$a \in A$と$b \in I$に対して$ab, ba \in I$をみたすものを**イデアル** (**ideal**) という. Aが**自明な** (**trivial**) イデアル0とAの2つしかもたないとき, Aを**単純** (**simple**) という.

注意 2.7. 実は, C^*-環のイデアルは$*$-演算で閉じているため, C^*-部分環である. また, 商空間A/Iも$(a + I)^* := a^* + I$という$*$-演算でC^*-環となる.

定義 2.8. C^*-環A, Bに対し, 積と$*$-演算を保つ線形写像$\varphi : A \to B$を**$*$-準同型** ($*$**-homomorphism**) という. 加えて全単射であるとき, φは**$*$-同型** ($*$**-isomorphism**) とよばれる. $*$-同型$\varphi : A \to B$が存在するとき, AとBは**同型** (**isomorphic**) であるといい, $A \simeq B$と表す.

注意 2.9. 実は, $*$-準同型$\varphi : A \to B$は任意の$a \in A$に対して$\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$をみたすので, $*$-同型はノルムを変えない.

Meyer, Nestが構成した不変量を理解するために, 引き戻しとよばれるC^*-環を導入する. そのために, まずはC^*-環の直和を定義する.

定義 2.10. C^*-環A, Bのベクトル空間としての直和に, 成分ごとの積, $*$-演算を入れ, $\|(a, b)\| := \max\{\|a\|, \|b\|\}$でノルムを定めると, C^*-環になる. これをA, Bの**直和** (**direct sum**) といい, $A \oplus B$と表記する.

定義 2.11. C^*-環A, B, Dと$*$-準同型$\varphi : A \to D, \psi : B \to D$に対し, Pを次式で定める:

$$P := \{(a, b) \in A \oplus B \mid \varphi(a) = \psi(b)\}.$$

すると, Pは$A \oplus B$のC^*-部分環となる. Pを**引き戻し** (**pullback**) という.

[1] $s \in A$に対し, s^*sが射影であることとss^*が射影であることは同値である.

2.2 K-理論

一般に C^*-環 A, B が同型であるか否かは定義をじっと見てわかるようなことではない. 本小節で導入する K-理論が強力な道具となる. K-理論とは, 各 C^*-環 A に対して, A の諸性質を反映した 2 つのアーベル群 $K_0(A)$ と $K_1(A)$ を関連付け, それらの構造を調べることで A の構造を調べるというものである. Elliott による AF-環の分類に端を発する C^*-環の分類理論において, 良い性質を満たす C^*-環は K-理論的不変量で分類可能であるというスローガンが歴史的にも重要とされている. K-理論の詳細は [Bla98] などを参照してほしい.

定義 2.12 (K_0-群, K_1-群)**.** 単位的 C^*-環 A に対し[2],

$$V(A) := \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ M_n(A) \text{ の射影 } \} \Big) / \sim_{\text{homotopy}}$$

は「対角成分に並べる」という演算で可換モノイドになる. $K_0(A)$ を $V(A)$ のグロタンディーク群[3]と定める. また,

$$K_1(A) := \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{ M_n(A) \text{ のユニタリ } \} \Big) / \sim_{\text{homotopy}}$$

は「対角成分に並べる」という演算でアーベル群になる.

少し雑に K-群を定義してしまったが, どのように構成されるかは本稿では不要で, 次に紹介する諸性質の方が重要である.

命題 2.13. $*$-準同型 $\varphi : A \to B$ は群準同型 $K_i(\varphi) : K_i(A) \to K_i(B)$ を誘導する $(i = 0, 1)$.

命題 2.14 (6 項完全列)**.** 任意の C^*-環の完全列[4]

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\ \iota\ } A \xrightarrow{\ \pi\ } A/I \longrightarrow 0$$

に対し, **境界写像** (**boundary map**) とよばれる群準同型 $\delta_0 : K_0(A/I) \to K_1(I)$ と $\delta_1 : K_1(A/I) \to K_0(I)$ が存在して, 次の列が完全になる[5]:

$$\begin{array}{ccccc} K_0(I) & \xrightarrow{K_0(\iota)} & K_0(A) & \xrightarrow{K_0(\pi)} & K_0(A/I) \\ {\scriptstyle \delta_1}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \delta_0} \\ K_1(A/I) & \xleftarrow[K_1(\pi)]{} & K_1(A) & \xleftarrow[K_1(\iota)]{} & K_1(I). \end{array}$$

Kirchberg, Phillips は, A, B が安定, 純無限, 可分, 核型, 単純な C^*-環であるとき, A と B の KK-同値は $*$-同型 $A \to B$ を誘導することを証明した ([Kir94], [Phi00]). また, Rosenberg, Schochet の普遍係数定理により, bootstrap class に属する可分 C^*-環 A, B に対し, K-群の同型は KK-同値に持ち上がる ([RS87]). この 2 つの事実を組み合わせると, 次の顕著な結果が得られる. なお, 仮定に未定義語がいくつか登場したが, すべてを説明するのは難しいので, 本稿では説明を省略する.

[2] 単位的でない C^*-環に対しても K-群を定義することができるが, 本稿では説明を省略する.

[3] グロタンディーク群とは, 可換モノイドから普遍的な方法で構成されるアーベル群である. 例えば, $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{N}$ のグロタンディーク群として構成される.

[4] I が C^*-環 A のイデアルで, ι が包含写像, π が商写像であることを意味している.

[5] $\operatorname{Im} \delta_1 = \operatorname{Ker} K_0(\iota)$ を含む 6 個の条件をみたすことを意味している.

定理 2.15. A, B を安定, 純無限, 可分, 核型, 単純な C^*-環で bootstrap class に属しているとする. このとき, 次の同値が成り立つ:

$$A \simeq B \iff K_0(A) \simeq K_0(B),\ K_1(A) \simeq K_1(B).$$

さらに, Kirchberg は, T_0-空間 X 上の C^*-環 A, B が安定, 純無限, 可分, 核型, 緊密であるとき, A と B の $KK(X)$-同値は X-同変な $*$-同型 $A \to B$ を誘導することを証明した ([Kir94]). 次小節で有限 T_0-空間上の C^*-環を導入し, 緊密性や X-同変性を定義しよう.

2.3 有限 T_0-空間上の C^*-環

X を有限 T_0-空間とし, X の開集合全体を $\mathbb{O}(X)$ と表記する. また, C^*-環 A のイデアル全体を $\mathbb{I}(A)$ と表記する.

定義 2.16 (有限 T_0-空間上の C^*-環)**.** X 上の C^*-環とは, 次の条件をみたす $\mathbb{O}(X) \ni U \mapsto A(U) \in \mathbb{I}(A)$ を備えた C^*-環 A を指す[6]:

(i) $A(\emptyset) = 0$, $A(X) = A$;

(ii) 任意の $U, V \in \mathbb{O}(X)$ に対し, $A(U \cap V) = A(U) \cap A(V)$, $A(U \cup V) = A(U) + A(V)$[7].

加えて, $\mathbb{O}(X) \ni U \mapsto A(U) \in \mathbb{I}(A)$ が全単射であるとき, A は**緊密** (**tight**) であるという.

注意 2.17. 単純 C^*-環は 1 点空間上の緊密な C^*-環と思えるため, 緊密性は単純性を一般化した概念である.

注意 2.18. 元々, 位相空間 X 上の C^*-環は, C^*-環 A と連続写像 $\psi : \mathrm{Prim}(A) \to X$ の組 (A, ψ) として定義される ($\mathrm{Prim}(A)$ は A の原始イデアル空間を表す). この定義は, X が有限 T_0-空間の場合, 上の定義と等価になる. 詳しくは [MN09] を参照してほしい.

定義 2.19. A, B を X 上の C^*-環とする. $*$-準同型 $\varphi : A \to B$ が任意の $U \in \mathbb{O}(X)$ に対し, $\varphi(A(U)) \subset B(U)$ をみたすとき, φ は X**-同変** (X**-equivariant**) であるという.

開集合 U にイデアル $A(U)$ を対応させることを考えたが, 次は開集合より広いクラスを成す局所閉集合 Y に対して, C^*-環 $A(Y)$ を定義する. まずは, 局所閉集合の定義を確認する.

定義 2.20. $U \supset V$ をみたす $U, V \in \mathbb{O}(X)$ が存在して, $Y = U \setminus V$ が成り立つとき, Y を X の**局所閉集合** (**locally closed subset**) という. X の局所閉集合全体を $\mathbb{LC}(X)$ と表記する.

開集合や閉集合は局所閉集合である. また, Y を X の局所閉集合とし, Z を Y の局所閉集合とすると, Z は X の局所閉集合である.

定義 2.21. A を X 上の C^*-環とする. X の局所閉集合 Y が $U \supset V$ をみたす $U, V \in \mathbb{O}(X)$ を用いて $Y = U \setminus V$ と表されるとき, C^*-環 $A(Y)$ を次の商で定める:

$$A(Y) := A(U)/A(V).$$

注意 2.22. A が X 上の C^*-環のとき, $\mathbb{O}(X) \ni U \mapsto A(U) \in \mathbb{I}(A)$ は包含を保つので, この定義において, $A(V)$ は $A(U)$ のイデアルであることに注意してほしい. また, $A(Y)$ は U, V の取り方に依存するように見えるが, 実は自然な同型を除いて一意に定まる.

命題 2.23. A を X 上の C^*-環とする. X の局所閉集合 Y と Y の開集合 Z に対し, 次の C^*-環の完全列が存在する:

$$0 \longrightarrow A(Z) \xrightarrow{\iota_Z^Y} A(Y) \xrightarrow{\pi_Y^{Y\setminus Z}} A(Y \setminus Z) \longrightarrow 0.$$

[6] 無限位相空間 X 上の C^*-環も同様にして定義することができるが, 本稿では不要なので, 説明を省略する.

[7] C^*-環 A のイデアル I, J に対し, $I \cap J$ と $I + J := \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ は A のイデアルとなる.

2.4 グラフ C^*-環

本小節では, グラフ C^*-環の定義を手短に説明する. 詳細は [Rae05] などを参照してほしい.

定義 2.24. グラフ (**graph**) とは, 集合 E^0, E^1 と写像 $d, r : E^1 \to E^0$ から成る組 $E = (E^0, E^1, d, r)$ を指す.

E^0, E^1 はそれぞれグラフ E の頂点集合, 辺集合を表し, 辺 $e \in E^1$ は始点 (domain) $d(e)$ から終点 (range) $r(e)$ に向き付けられていると思える.

$$r(e) \xleftarrow{e} d(e)$$

グラフ C^*-環の分野では, 無向グラフは考えず, 有向グラフのみを考える.

以降, $E = (E^0, E^1, d, r)$ を各頂点 $v \in E^0$ に対して $0 < |r^{-1}(v)| < \infty$ をみたすグラフとする[8].

定義 2.25. C^*-環 A の部分等長作用素の族 $S = (S_e)_{e \in E^1}$ と互いに直交する射影の族 $P = (P_v)_{v \in E^0}$[9] の組 (S, P) は, 次の条件をみたすとき, **Cuntz-Krieger E-family** とよばれる:

(i) 各辺 $e \in E^1$ に対し, $P_{d(e)} = S_e^* S_e$;

(ii) 各頂点 $v \in E^0$ に対し, $P_v = \sum_{e \in r^{-1}(v)} S_e S_e^*$.

定義 2.26 (グラフ C^*-環)**.** Cuntz-Krieger E-family から生成される普遍 C^*-環[10]を**グラフ C^*-環** (**graph C^*-algebra**) といい, $C^*(E)$ と表記する.

例 2.27. 次のグラフから作られるグラフ C^*-環は $M_4(\mathbb{C})$ である.

$$\bullet \xleftarrow{} \bullet \xleftarrow{} \bullet \xleftarrow{} \bullet$$

グラフ C^*-環のイデアル構造はグラフの言葉を用いて記述することができる. そのため, 後で観察するように, 有限 T_0-空間上の C^*-環はグラフ C^*-環を用いて比較的容易に具体例を作ることができる. また, グラフ C^*-環の K_0-群と K_1-群は, それぞれグラフの隣接行列から余核と核を用いて計算できる (このことから, グラフ C^*-環の K_1-群は常に自由アーベル群となる). したがって, グラフ C^*-環は次節で説明する filtrated K-theory を具体的に記述することができる. さらに, ある条件を満たすグラフに対して, グラフ C^*-環は Kirchberg-Phillips の定理の仮定をみたす. 以上の事実が, 有限 T_0-空間上の C^*-環の分類理論においてグラフ C^*-環を考える利点である.

3 主結果

3.1 Filtrated K-theory

厳密な定義は難しいので, 大雑把に言うと, 有限 T_0-空間 X 上の C^*-環 A に対し, **filtrated K-theory** $FK(A)$ とは, X の局所閉集合 Y と Y の開集合 Z に対して定まる C^*-環の完全列

$$0 \longrightarrow A(Z) \xrightarrow{\iota_Z^Y} A(Y) \xrightarrow{\pi_Y^{Y \setminus Z}} A(Y \setminus Z) \longrightarrow 0$$

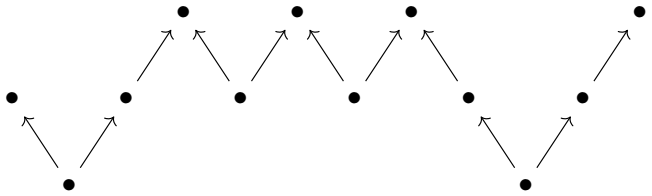
[8] この仮定を課さなくてもグラフ C^*-環は定義できるが, 本稿では説明を省略する.

[9] 「互いに直交する」とは, 異なる 2 頂点 $v, w \in E^0$ に対し, $P_v P_w = 0$ をみたすことをいう.

[10] 普遍 C^*-環とは, 関係式をみたす元から生成される, 普遍性をもった C^*-環のことである. グラフ C^*-環 $C^*(E)$ は Cuntz-Krieger E-family (s, p) から生成され, さらに次の普遍性をみたす: C^*-環 A と A の Cuntz-Krieger E-family (S, P) が任意に与えられると, $*$-準同型 $\pi : C^*(E) \to A$ が (一意に) 存在し, 各頂点 $v \in E^0$ に対して $\pi(p_v) = P_v$, 各辺 $e \in E^1$ に対して $\pi(s_e) = S_e$ をみたす. 普遍 C^*-環は, 普遍性から誘導される同型を除いて一意に定まる.

から誘導される 6 項完全列に現れる K-群や群準同型を集めてできる不変量である．この説明は不十分だが, X がこれから扱うような簡単な空間の場合には十分である (厳密な定義については [MN12] を参照せよ)．Meyer, Nest, Bentmann, Köhler は, filtrated K-theory が X 上の C^*-環に対する完全不変量であることと X が**アコーディオン空間**であることが同値であることを証明した ([MN12], [BK11])．

アコーディオン空間を厳密に定義する代わりに, ハッセ図を使って解説する．はじめに, 連結な有限 T_0-空間の位相はハッセ図を用いて表すことができることを思い出してほしい．アコーディオン空間とは, 無向グラフとして見たときに一直線になるようなハッセ図で表される連結な有限 T_0-空間である．例えば, 次のハッセ図はアコーディオン空間を表している．

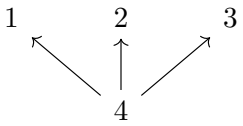


3 点以下の連結な T_0-空間はすべてアコーディオン空間である．4 点集合 $\{1,2,3,4\}$ に定まる連結で T_0 をみたす位相は, 同相を除いて全部で 10 個ある:

$$\begin{aligned}
\mathbb{O}(X_1) &:= \{\emptyset, 4, 34, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_2) &:= \{\emptyset, 2, 4, 34, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_3) &:= \{\emptyset, 4, 24, 34, 124, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_4) &:= \{\emptyset, 3, 4, 24, 34, 134, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_5) &:= \{\emptyset, 4, 14, 24, 34, 124, 134, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_6) &:= \{\emptyset, 2, 3, 4, 23, 24, 34, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_7) &:= \{\emptyset, 4, 34, 134, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_8) &:= \{\emptyset, 3, 4, 34, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_9) &:= \{\emptyset, 4, 24, 34, 234, 1234\},\\
\mathbb{O}(X_{10}) &:= \{\emptyset, 3, 4, 34, 134, 234, 1234\}.
\end{aligned}$$

ここで, $14 := \{1,4\}$ などの表記に注意してほしい．X_1, X_2, X_3, X_4 はアコーディオン空間で, それ以外の 6 個はアコーディオン空間ではない．

以降では, $X := X_5$ に着目する．X は次のハッセ図で定まる．

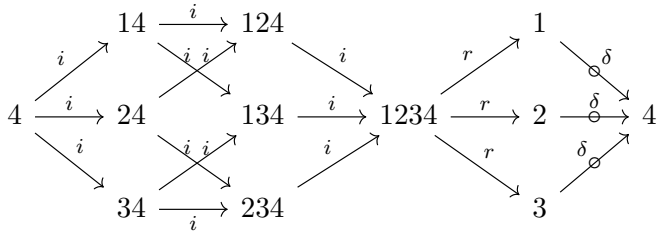


X の部分集合はすべて局所閉である．その内, 次の 11 個が連結[11]である:

$$1, 2, 3, 4, 14, 24, 34, 124, 134, 234, 1234.$$

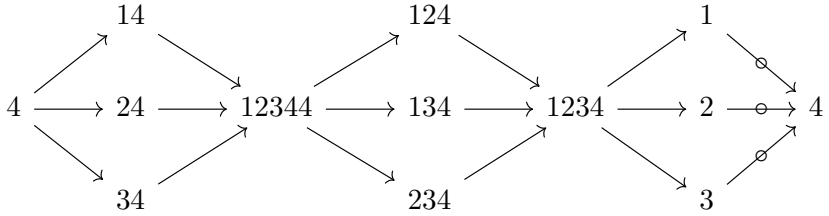
[11]例えば, 12 は非連結である．$A(12) = A(1) \oplus A(2)$ より, $K_j(A(12)) = K_j(A(1)) \oplus K_j(A(2))$ が成り立つので, $K_j(A(12))$ は不変量として情報をもたないと考えられる $(j = 0, 1)$．したがって, 非連結な局所閉集合ははじめから考えない．

X 上の C^*-環 A に対し, filtrated K-theory $FK(A)$ は次の図式で表すことができる.



この図式には 11 個の数字 (4 だけ両端に 2 つある) と 18 本の矢印があるが, もう 1 つ同じ図式が隣に続いていて, 両端の 4 が繋がって輪っかになっているのをイメージしてほしい. ここに現れている 11 個の数字は, 先の 11 個の連結な局所閉集合 Y に対する C^*-環 $A(Y)$ の K_0-群と K_1-群を表しており, 矢印は 6 項完全列に現れる群準同型を表している. つまり, この図式は全部で 22 個の K-群と 36 本の群準同型から成っている. 例えば, $124 \to 1234 \to 3$ に注目してみよう. 124 は $j = 0, 1$ に対する $K_j(A(124))$ を表している. $i : 124 \to 1234$ は包含写像 $\iota^{1234}_{124} : A(124) \to A(1234)$ から誘導される群準同型 $K_j(\iota^{1234}_{124}) : K_j(A(124)) \to K_j(A(1234))$ を表している. $r : 1234 \to 3$ は商写像 $\pi^3_{1234} : A(1234) \to A(3)$ から誘導される群準同型 $K_j(\pi^3_{1234}) : K_j(A(1234)) \to K_j(A(3))$ を表している. また, 丸が付いた矢印は境界写像を表している. 例えば, $\delta : 3 \to 4$ は境界写像 $K_j(A(3)) \to K_{1-j}(A(4))$ を表している. この図式に現れている群準同型は, 他の群準同型の合成で表すことができない. この図式に現れていない群準同型は, この図式に現れている群準同型の合成で表すことができる.

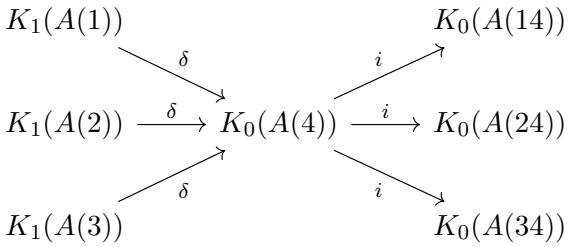
[MN12] は, 上の filtrated K-theory は X 上の C^*-環に対する完全不変量にならないことを示した. さらに, [MN12] は, filtrated K-theory に別の K-理論的不変量を 1 つ付け加えることで, X 上の C^*-環 A に対する完全不変量 $FK'(A)$ を構成した[12]. $FK'(A)$ は次の図式で表すことができる.



[MN12] は, 新しく付け加わった 12344 は, 商写像 π^2_{124}, π^2_{234} の引き戻し $A(12344)$ の K-群になることを示した. ここで, $A(12344)$ は次式で定まる C^*-環である:

$$A(12344) := \{(a, b) \in A(124) \oplus A(234) \mid \pi^2_{124}(a) = \pi^2_{234}(b)\}.$$

主結果を提示するために, filtrated K-theory より小さな不変量を導入しておく. X 上の C^*-環 A に対し, $FK_{\mathcal{R}}(A)$ を次の図式に現れる K-群と群準同型, および $K_1(A(4))$ から成る不変量とする.



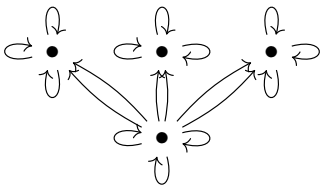
[12]歴史的には, [MN12] で filtrated K-theory はアコーディオン空間より狭いクラスの空間の上の C^*-環に対して完全不変量になることと 4 点空間 X_5 上の C^*-環に対しては完全不変量にならないことが証明された後, [BK11] で filtrated K-theory が X 上の C^*-環に対する完全不変量であることと X がアコーディオン空間であることが同値であることが証明された.

この不変量は, 純無限な Cuntz-Krieger 環を分類するため, Restorff [Res06] によって導入されたものである ([ABK14b, Definition 3.4] も参照せよ). 次小節で示すように, グラフ C^*-環の分類理論において重要な不変量となる.

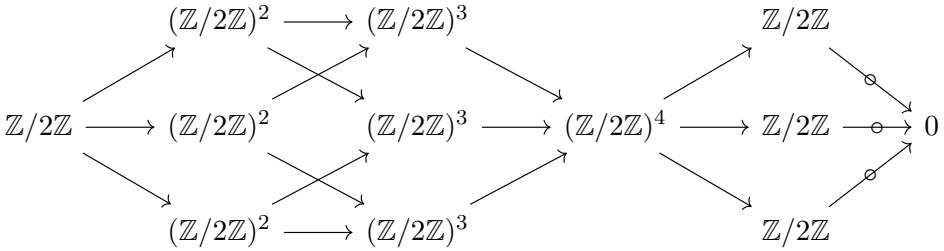
3.2 主結果

X を前小節の 4 点空間 X_5 とする. まず, [MN12] によって改良された filtrated K-theory をグラフ C^*-環を例に観察してみよう.

例 3.1. 次のグラフ E を考える.

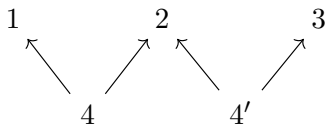


このとき, $C^*(E)$ は X 上の緊密な C^*-環となる. さらに, $FK(C^*(E))$ は次の図式で表される.

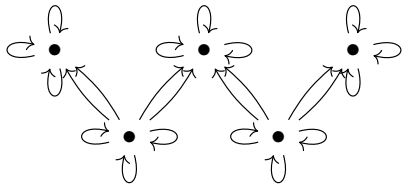


これらのアーベル群は K_0-群として現れたもので, K_1-群はすべて 0 である.

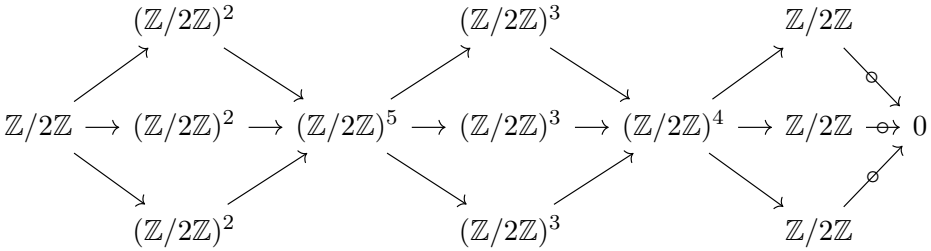
次のハッセ図で定まる 5 点空間 $\widetilde{X} := \{1, 2, 3, 4, 4'\}$ を考える.



また, 次のグラフ $\widetilde{E}$ を考える.



このとき, $C^*(\widetilde{E})$ は $\widetilde{X}$ 上の緊密な C^*-環となる. さらに, $C^*(E)(12344) \simeq C^*(\widetilde{E})$ が成り立つ. $FK'(C^*(E))$ は次の図式で表すことができる (K_1-群はすべて 0 である).



この例で示した結果はもっと抽象的なグラフに対して示すことができる.
最後に, X 上のグラフ C^*-環の特徴づけを示す. 次の補題が重要である.

補題 3.2. X 上の C^*-環 A に対し, 次の 3 つの 6 項完全列が存在する:

$$\begin{array}{ccccccc} & & K_0(A(4)) & \longrightarrow & K_0(A) & \to & K_0(A(1)) \oplus K_0(A(2)) \oplus K_0(A(3)) \\ & & \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A(1)) \oplus K_1(A(2)) \oplus K_1(A(3)) & \leftarrow & K_1(A) & \longleftarrow & K_1(A(4)), & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} K_0(A(4)) & \longrightarrow & K_0(A(14)) \oplus K_0(A(24)) \oplus K_0(A(34)) & \to & K_0(A(12344)) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A(12344)) & \leftarrow & K_1(A(14)) \oplus K_1(A(24)) \oplus K_1(A(34)) & \longleftarrow & K_1(A(4)), & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} K_0(A(12344)) & \to & K_0(A(124)) \oplus K_0(A(134)) \oplus K_0(A(234)) & \longrightarrow & K_0(A) \\ \uparrow & & & & \downarrow \\ K_1(A) & \longleftarrow & K_1(A(124)) \oplus K_1(A(134)) \oplus K_1(A(234)) & \leftarrow & K_1(A(12344)). & \end{array}$$

この補題を示すためには, 新しく 12344 が付け加わったことで現れた群準同型を詳細に調べる必要がある. この補題と [ABK14a, Proposition 7.17] の議論から次の命題が得られる.

命題 3.3. A, B を X 上の C^*-環とする. $x \in \{1, 2, 3\}$ に対し, 次の条件を仮定する:

(i) $K_1(A(x)), K_1(B(x))$ は自由アーベル群である;

(ii) 境界写像 $K_0(A(x)) \to K_1(A(4)), K_0(B(x)) \to K_1(B(4))$ は 0 である.

このとき, 任意の準同型 $\alpha : FK_{\mathcal{R}}(A) \to FK_{\mathcal{R}}(B)$ は準同型 $\widetilde{\alpha} : FK'(A) \to FK'(B)$ に拡張される. さらに, α が同型ならば, $\widetilde{\alpha}$ も同型にできる.

この命題は, グラフ C^*-環と類似の K-理論的性質をもつ C^*-環に対し, [MN12] によって改良された filtrated K-theory FK' は, より小さな不変量である $FK_{\mathcal{R}}$ から復元可能であることを主張している. 次が主定理である.

定理 3.4. 安定, 純無限, 可分, 緊密な X 上の C^*-環 A があるグラフ E のグラフ C^*-環 $C^*(E)$ と X-同変に同型であるための必要十分条件は, A が次の条件をみたすことである:

(i) A は核型, 実次元 0 である;

(ii) 各点 $x \in X$ に対し, $K_1(A(x))$ は自由アーベル群である;

(iii) 各点 $x \in X$ に対し, $A(x)$ は bootstrap class に属する.

必要性はグラフ C^*-環の性質から成り立つ. 十分性がこの定理の本質である. この定理が一般の有限 T_0-空間に対して成り立つかどうかは未解決問題である.

References

[ABK14a] Sara E. Arklint, Rusmus Bentmann, and Takeshi Katsura, *Reduction of filtered K-theory and a characterization of Cuntz-Krieger algebras*, Journal of K-Theory **14** (2014), no. 3, 570–613.

[ABK14b] ———, *The K-theoretical range of Cuntz-Krieger algebras*, Journal of Functional Analysis **266** (2014), no. 8, 5448–5466.

[BK11] Rusmus Bentmann and Manuel Köhler, *Universal coefficient theorems for C^*-algebras over finite topological spaces*, 2011.

[Bla98] Bruce Blackadar, *K-theory for operator algebras*, 2nd ed., Mathematical Sciences Research Institute publications, vol. 5, Cambridge University Press, 1998.

[Bla06] ———, *Operator algebras: theory of C^*-algebras and von Neumann algebras*, vol. 122, Springer Science & Business Media, 2006.

[Kir94] Eberhard Kirchberg, *The classification of purely infinite C^*-algebras using Kasparov's theory*, 1994.

[MN09] Ralf Meyer and Ryszard Nest, *C^*-algebras over topological spaces: the bootstrap class*, Muenster Journal of Mathematics **2** (2009), 215–252.

[MN12] ———, *C^*-algebras over topological spaces: filtrated K-theory*, Canadian Journal of Mathematics **64** (2012), no. 2, 368–408.

[Phi00] N. Christopher Phillips, *A classification theorem for nuclear purely infinite simple C^*-algebras.*, Documenta Mathematica **5** (2000), 49–114.

[Rae05] Iain Raeburn, *Graph algebras*, no. 103, American Mathematical Society, 2005.

[Res06] Gunnar Restorff, *Classification of Cuntz-Krieger algebras up to stable isomorphism*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **2006** (2006), no. 598, 185–210.

[RS87] Jonathan Rosenberg and Claude Schochet, *The Künneth theorem and the universal coefficient theorem for Kasparov's generalized K-functor*, Duke Mathematical Journal **55** (1987), no. 2, 431–474.

Solvability and nilpotency for finite quantum groups

Graduate School of Mathematics, Nagoya University
Masato TANAKA *

Abstract

Examples of nilpotent or solvable finite quantum groups are studied. We classify the solvable series of maximal length which show the nilpotency of Kac–Paljutkin's 8-dimensional finite quantum group. We show that Kac–Paljutkin's 8-dimensional finite quantum group and Sekine quantum groups are nilpotent.

1 Introduction

Finite quantum groups are finite dimensional Hopf algebras which are C^*-algebras at the same time. For example, algebras of continuous functions on finite groups and group algebras of finite groups are finite quantum groups. The former are commutative and the latter are cocommutative. In fact commutative or cocommutative ones always arise from genuine finite groups. In 1966, Kac–Paljutkin found a non-commutative and non-cocommutative example ([KP66]), which is called Kac–Paljutkin's (8-dimensional) finite quantum group today. In 1996, Sekine found a family of non-commutative and non-cocommutative finite quantum groups ([Sek96]), which are called Sekine quantum groups today. Many talented mathematicians have studied them from many points of view. For example, McCarthy and Zhang studied the probability theoretical aspects ([McC17, Zha19]), Tambara–Yamagami studied them from categorical points of view ([TY98]) and Suzuki and Wakui revealed the quasitriangular structures ([Suz98, Wak10]).

In 2009, Etingof–Nikshych–Ostrik formulated the nilpotency and the solvability for fusion categories. If we define the nilpotency and the solvability for finite dimensional Hopf algebras via this language, the nilpotency does not imply the solvability in general ([ENO11]). In 2016, Cohen–Westreich proposed intrinsic definitions of the nilpotency and the solvability via integrals ([CW17]). Their definitions are satisfactory in that the nilpotency implies the solvability and the analogue of Burnside's p^aq^b theorem holds.

In 2023, the author of the present notes and his coauthor showed that Kac–Paljutkin's finite quantum group and each of Sekine quantum groups are nilpotent (and hence solvable) and they also studied the quasitriangular structures of Kac–Paljutkin's finite quantum group by giving direct computations of the universal R-matrices. This research gives examles of Cohen–Westreich's general theory, which do not arise from genuine groups.

Acknowledgements: The author wishes to express his thanks to the organizers of this program. He also wishes to thank his friends G. Glowacki and M. Hattori, who are coauthors of the paper [GHT24]. This work was supported by the "Nagoya University Interdisciplinary Frontier Fellowship" by Nagoya University and JST, the establishment of university fellowships towards the creation of science technology innovation, Grant Number JPMJFS2120.

*masato.tanaka.c7@math.nagoya-u.ac.jp

2 Preliminaries

We review some items needed to state and prove our results. The best general references here are [CW17], [FG06], [Kas95] and [Mur90].

2.1 Finite quantum groups

Definition 2.1. A vector space A over $\mathbb{C}$ is called an *unital algebra* if it has an associative and bilinear multiplication $A \times A \ni (a, b) \mapsto ab \in A$ and an element 1 satisfying $a1 = 1a = a$ for each $a \in A$. A unital algebra is called a $*$-*algebra* if it has a conjugate linear and involutive operation $A \ni a \mapsto a^* \in A$ satisfying $(ab)^* = b^*a^*$ for all $a, b \in A$, which is called a $*$-*operation*.

Example. Let $\mathbb{M}_n$ denote the algebra of $n \times n$-matrices whose entries are complex numbers. With the usual multiplication of matrices, this vector space is a $*$-algebra.

Example. Let G be a finite group. The algebra $C(G)$ of continuous functions on G is a $*$-algebra. Its multiplication is given by $fg(x) = f(x)g(x)$ $(f, g \in C(G), x \in G)$ its unit is the constant function $1\colon G \ni x \mapsto 1 \in \mathbb{C}$ and the $*$-operation is given by $f^*(x) = \overline{f(x)}$ $(f \in C(G), x \in G)$.

Example. Let G be a finite group. The group algebra $\mathbb{C}[G] = \mathrm{span}\{\delta_x \mid x \in G\}$ is a $*$-algebra. Its multiplication is given by $(\sum_{x\in G} a_x\delta_x)(\sum_{y\in G} b_y\delta_y) = \sum_{x,y\in G} a_xb_y\delta_{xy}$ $(a_x, b_y \in \mathbb{C})$ and its $*$-operation is given by $(\sum_{x\in G} a_x\delta_x)^* = \sum_{x\in G} \overline{a_x}\delta_{x^{-1}}$.

Definition 2.2. Let A be a unital algebra. We say A is a *Hopf algebra* if it has the following algebra homomorphisms $\Delta\colon A \to A \otimes A, \epsilon\colon A \to \mathbb{C}$ (i.e. linear maps preserving multiplication) and anti-multiplicative linear map $S\colon A \to A$ (i.e. $S(xy) = S(y)S(x) \mathrm{where} x, y \in A$) satisfying

$$
\begin{aligned}
&(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta;\\
&(\epsilon \otimes \mathrm{id})\Delta = \mathrm{id} = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)\Delta;\\
&m(S \otimes \mathrm{id})\Delta = \epsilon(\bullet)1 = m(\mathrm{id} \otimes S)\Delta
\end{aligned}
$$

where m denotes the map $m(x \otimes y) = xy$ $(x, y \in A)$. If moreover Δ and ϵ preserves $*$-operation, we say A is a *Hopf* $*$-*algebra*. We use Sweedler's sumless notation $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ $(a \in A)$.

Definition 2.3. A *finite quantum group* is a finite dimensional Hopf $*$-algebra which is a C^*-algebra at the same time.

We do not define C^*-algebras in these notes. Instead of defining the objects, we introduce the following well-known proposition.

Proposition 2.4. *Any finite dimensioanl C^*-algebra is of the form $\bigoplus_{k=1}^{N} \mathbb{M}_{n_k}$ for some positive integers N and $n_1, \ldots, n_N$.*

For the definition and the proof of the proposition above, see [Mur90] for example. The following statement is nontrivial. See [VD97] for deatails.

Proposition 2.5. *For any finite quantum group A there exists a linear functional $h\colon A \to \mathbb{C}$ such that $h(a^*a) \geqslant 0$ $(a \in A)$, $h(1) = 1$ and $(\mathrm{id} \otimes h)\Delta(\bullet) = h(\bullet)1$. In addition such a state is unique up to a constant multiple and satisfies also the condition $(h \otimes \mathrm{id})\Delta(\bullet) = h(\bullet)1$.*

The linear functional h in the proposition above is called the *Haar state* of A.

Example. The algebra $C(G)$ of continuous functions on G is a finite quantum group G. Its Hopf algebra structure is given by

$$\begin{aligned}
&\Delta\colon C(G) \to C(G) \otimes C(G) \simeq C(G \times G), f \mapsto \Delta(f)(\colon (x,y) \mapsto f(xy));\\
&\epsilon\colon C(G) \to \mathbb{C}, f \mapsto f(1);\\
&S\colon C(G) \to C(G), f \mapsto f(\bullet^{-1}).
\end{aligned}$$

Conversely any commutative finite quantum group is of this form.

Example. The group algebra $\mathbb{C}[G]$ of a finite group G is a finite quantum group. Its Hopf algebra structure is given by

$$\begin{aligned}
&\Delta(\delta_x) = \delta_x \otimes \delta_x;\\
&\epsilon(\delta_x) = 1;\\
&S(\delta_x) = \delta_{x^{-1}}
\end{aligned}$$

where $x \in G$. In this case $\Delta = \Delta^{\mathrm{op}}$, where Δ^{op} denotes the composition of Δ and the flip $\mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] \ni a \otimes b \mapsto b \otimes a \in \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G]$.

Conversely, any cocommutative finite quantum group is of this form.

We introduce important examples of finite quantum groups. Notice that they are neither commutative nor cocommutative, which means that they do not arise from genuine groups.

Example. ([KP66]) Let $\mathcal{A} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{M}_2$. Its Hopf $*$-algebra structure is given by

$$\begin{aligned}
&\Delta(e_1) = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 + e_3 \otimes e_3 + e_4 \otimes e_4\\
&+\frac{1}{2}a_{1,1} \otimes a_{1,1} + \frac{1}{2}a_{1,2} \otimes a_{1,2} + \frac{1}{2}a_{2,1} \otimes a_{2,1} + \frac{1}{2}a_{2,2} \otimes a_{2,2}\\
&\Delta(e_2) = e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_4 + e_4 \otimes e_3\\
&+\frac{1}{2}a_{1,1} \otimes a_{2,2} + \frac{1}{2}a_{2,2} \otimes a_{1,1} - \frac{\sqrt{-1}}{2}a_{1,2} \otimes a_{2,1} + \frac{\sqrt{-1}}{2}a_{2,1} \otimes a_{1,2}\\
&\Delta(e_3) = e_1 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_4 + e_4 \otimes e_2\\
&+\frac{1}{2}a_{1,1} \otimes a_{2,2} + \frac{1}{2}a_{2,2} \otimes a_{1,1} + \frac{\sqrt{-1}}{2}a_{1,2} \otimes a_{2,1} - \frac{\sqrt{-1}}{2}a_{2,1} \otimes a_{1,2}\\
&\Delta(e_4) = e_1 \otimes e_4 + e_4 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_3 + e_3 \otimes e_2\\
&+\frac{1}{2}a_{1,1} \otimes a_{1,1} + \frac{1}{2}a_{2,2} \otimes a_{2,2} - \frac{1}{2}a_{1,2} \otimes a_{1,2} - \frac{1}{2}a_{2,1} \otimes a_{2,1}\\
&\Delta(a_{1,1}) = e_1 \otimes a_{1,1} + a_{1,1} \otimes e_1 + e_2 \otimes a_{2,2} + a_{2,2} \otimes e_2\\
&+e_3 \otimes a_{2,2} + a_{2,2} \otimes e_3 + e_4 \otimes a_{1,1} + a_{1,1} \otimes e_4\\
&\Delta(a_{1,2}) = e_1 \otimes a_{1,2} + a_{1,2} \otimes e_1 + \sqrt{-1}e_2 \otimes a_{2,1} - \sqrt{-1}a_{2,1} \otimes e_2\\
&-\sqrt{-1}e_3 \otimes a_{2,1} + \sqrt{-1}a_{2,1} \otimes e_3 - e_4 \otimes a_{1,2} - a_{1,2} \otimes e_4\\
&\Delta(a_{2,1}) = e_1 \otimes a_{2,1} + a_{2,1} \otimes e_1 - \sqrt{-1}e_2 \otimes a_{1,2} + \sqrt{-1}a_{1,2} \otimes e_2\\
&+\sqrt{-1}e_3 \otimes a_{1,2} - \sqrt{-1}a_{1,2} \otimes e_3 - e_4 \otimes a_{2,1} - a_{2,1} \otimes e_4\\
&\Delta(a_{2,2}) = e_1 \otimes a_{2,2} + a_{2,2} \otimes e_1 + e_2 \otimes a_{1,1} + a_{1,1} \otimes e_2\\
&+e_3 \otimes a_{1,1} + a_{1,1} \otimes e_3 + e_4 \otimes a_{2,2} + a_{2,2} \otimes e_4\\
&\epsilon(e_1) = 1, \epsilon(e_2) = \epsilon(e_3) = \epsilon(e_4) = 0\\
&S(e_i) = e_i \ (i = 1,2,3,4), S(a_{i,j}) = a_{j,i} \ (i,j = 1,2)
\end{aligned}$$

Here e_i and $a_{i,j}$ denote the following elements:

$$e_1 = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$e_3 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, e_4 = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$a_{i,j} = 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus E_{i,j} \quad (i,j = 1,2)$$

where the $E_{i,j}$'s are matrix units. We call this $\mathcal{A}$ the *Kac–Paljutkin's (8-dimensional) finite quantum group*.

Example. ([Sek96]) Let k be a positive integer. Let $\eta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/k)$. Let

$$\mathcal{A}_k = \bigoplus_{i,j \in \mathbb{Z}_k} \mathbb{C}d_{i,j} \oplus \mathbb{M}_k,$$

where the $d_{i,j}$'s are projections (i.e. $d_{i,j}^* = d_{i,j} = d_{i,j}^2$) such that $d_{i,j}d_{k,l} = \delta_{i,k}\delta_{j,l}d_{i,j}$. Its Hopf $*$-algebra structure is given by

$$\Delta(d_{i,j}) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_k} d_{m,n} \otimes d_{i-m,j-n} + \frac{1}{k} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_k} \eta^{i(m-n)} a_{m,n} \otimes a_{m+j,m+j},$$
$$\Delta(a_{i,j}) = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_k} \eta^{m(i-j)} d_{-m,-n} \otimes a_{i-n,j-n} + \sum_{m,n \in \mathbb{Z}_k} \eta^{m(j-i)} a_{i-n,j-n} \otimes d_{m,n},$$
$$\epsilon(d_{i,j}) = \delta_{i,0}\delta_{j,0}, \quad \epsilon(a_{i,j}) = 0,$$
$$S(d_{i,j}) = d_{-i,-j}, \quad S(a_{i,j}) = a_{j,i}$$

where $i, j \in \mathbb{Z}_k$ and the $a_{i,j}$'s are defined in the same way as the Kac–Paljutkin's finite quantum group. Each algebra $\mathcal{A}_k$ is called a *Sekine qantum group*.

Next we introduce universal R-matrices for Hopf algebras. Simply put, universal R-matrices are solutions of some important equation in Physics, which is called quantum Yang–Baxter equation (QYBE). For details, see [Kas95] and references therein.

Definition 2.6. A Hopf algebra A is called *quasitriangular* if there exists an invertible element $R \in A \otimes A$ such that $R\Delta(\bullet)R^{-1} = \Delta^{\mathrm{op}}(\bullet)$, $(\Delta \otimes \mathrm{id})R = R_{13}R_{23}$ and $(\mathrm{id} \otimes \Delta)R = R_{13}R_{12}$. Here we used the leg-numbering notation: $(a \otimes b)_{13} := a \otimes 1 \otimes b$, $(a \otimes b)_{12} := (a \otimes b \otimes 1)$ and so on. Such an R is called an *universal R-matrix*.

2.2 Nilpotency and solvability for finite quantum groups

In the paper [CW17], Cohen–Westreich introduced intrinsic definitions of solvability and nilpotency for semisimple finite dimendional Hopf algebra. First we define coideals.

Definition 2.7. Let A be a Hopf algebra. An unital subalgebra I is called a *left coideal subalgebra* if $\Delta(I) \subset A \otimes I$. In a similar way, we define *right coideals*. When A is a Hopf $*$-algebra, we say I is a *left (resp. right) coideal $*$-subalgebra* if I is a left (resp. right) coideal subalgebra and $*$-algebra.

Example. Let G be a finite group and H a subgroup. Then the algebra $C(G/H)$ of continuous functions on the homogeneous space G/H is a left coideal $*$-subalgebra.

Example. Let G and H be as above. Then the group algebra $\mathbb{C}[H]$ of H is a left coideal $*$-subalgebra.

Example. (cf. [FG06]) It is not difficult to see that the left coideal $*$-subalgebras of Kac–Paljutkin's finite quantum group $\mathcal{A}$ are the following.

1. $L_1 = \mathcal{A}$
2. $L_2 = \mathrm{span}\{e_1 + e_2, e_3 + e_4, a_{1,1} + a_{2,2}, a_{1,2} - \sqrt{-1}a_{2,1}\}$
3. $L_3 = \mathrm{span}\{e_1 + e_4, e_2 + e_4, a_{1,1} + a_{2,2}, a_{1,2} + \sqrt{-1}a_{2,1}\}$
4. $L_4 = \mathrm{span}\{e_1 + e_4, e_2 + e_3, a_{1,1}, a_{2,2}\}$
5. $L_5 = \mathrm{span}\{e_1 + e_2 + e_3 + e_4, a_{11} + a_{2,2}\}$
6. $L_6 = \mathrm{span}\{e_1 + e_4 + a_{1,1}, e_2 + e_3 + a_{2,2}\}$
7. $L_7 = \mathrm{span}\{e_1 + e_4 + a_{2,2}, e_2 + e_3 + a_{1,1}\}$
8. $L_8 = \mathbb{C}1$

Definition 2.8. An element λ in a Hopf algebra A is called an *integral* if $\lambda a = \epsilon(a)\lambda = a\lambda$ for each $a \in A$.

Example. (cf. [FG06]) Let

1. $p_1 = e_1$,
2. $p_2 = e_1 + e_2$,
3. $p_3 = e_1 + e_3$,
4. $p_4 = e_1 + e_4$,
5. $p_5 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$,
6. $p_6 = e_1 + e_4 + a_{1,1}$,
7. $p_7 = e_1 + e_4 + a_{2,2}$ and
8. $p_8 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + a_{1,1} + a_{2,2}$.

Then p_i is the integral of the left coideal $*$-subalgebra L_i for each i.

Example. ([Zha19]) We give examples of left coideal $*$-subalgebras of a Sekine quantum group $\mathcal{A}_k$ and their integrals. Let $\Gamma_1 = \{(i,i) \mid i \in \mathbb{Z}_k\}$. Let $q_1 = \sum_{(i,j)\in\Gamma_1} d_{i,j}$ and $q_k = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}_k\times\mathbb{Z}_k} d_{i,j}$. Then q_1 is the integral of the left coideal $*$-subalgebra $(\mathrm{id}\otimes h_1)\Delta(\mathcal{A}_1)$ and q_k is the integral of the left coideal $*$-subalgebra $(\mathrm{id}\otimes h_k)\Delta(\mathcal{A}_k)$, where $h_1(\bullet) = \dfrac{h(\bullet q_1)}{h(q_1)}$, $h_k(\bullet) = \dfrac{h(\bullet q_k)}{h(q_k)}$ and h denotes the Haar state of $\mathcal{A}_k$.

Definition 2.9. ([CW17, Definition 3.5]) Let A be a semisimple Hopf algebra. A chain of left coideal subalgebras of A

$$I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_i$$

is called a *solvable series* if the following conditions are satisfied for all $0 \leqslant j \leqslant i-1$:

1. $\lambda_j \in Z(I_{j+1})$, where λ_j denotes the integral of I_j and $Z(I_{j+1})$ denotes the center of I_{j+1}.

2. $(a \underset{\mathrm{ad}}{\bullet} b)\lambda_j = \epsilon(a)b\lambda_j$ for all $a, b \in I_{j+1}$.

If there is a solvable series such that $I_0 = \mathbb{C}1$ and $I_i = A$ then the Hopf algebra is called *solvable*. Here $a \underset{\mathrm{ad}}{\bullet} b := a_{(1)}bS(a_{(2)})$ $(a, b \in A)$.

A left coideal subalgebra I of a Hopf algebra A is called *normal* if $a \underset{\mathrm{ad}}{\bullet} x \in I$ for all $a \in A, x \in I$.

Definition 2.10. ([CW17, Proposition 3.8]) A semisimple Hopf algebra A is called *nilpotent* if it has a chain of normal left coideal subalgebras

$$\mathbb{C} = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_i = A$$

satisfying $I_{j+1}\lambda_j \subset Z(A\lambda_j)$ for all $0 \leqslant j \leqslant i-1$.

Remark 2.11. Cohen–Westreich defined the nilpotency in a different way. By [CW17, Proposition 3.8], the definition above is equivalent to the original definition.

The following theorems are surprising. The latter is an analogue of the well-known theorem by Burnside.

Theorem 2.12. *([CW17, Corollary 3.9]) A semisimple Hopf algebra is solvable if it is nilpotent.*

Theorem 2.13. *([CW17, Theorem 3.11]) Let p and q be prime numbers. Let a and b be non-negative integers. Let A be a quasitriangular semisimple Hopf algebra of dimension $p^a q^b$. Then A is solvable. In addition, if I is a left coideal subalgebra, then A has a solvable series containing the left coideal subalgebra I.*

3 Main Results

We state our main results.

Theorem 3.1. *([GHT24, Theorem 3.2]) Any solvable series for Kac–Paljutkin's finite quantum group of length 4 is one of the following.*

1. $\mathbb{C} \subset L_5 \subset L_2 \subset \mathcal{A}$
2. $\mathbb{C} \subset L_5 \subset L_3 \subset \mathcal{A}$
3. $\mathbb{C} \subset L_5 \subset L_4 \subset \mathcal{A}$
4. $\mathbb{C} \subset L_6 \subset L_4 \subset \mathcal{A}$
5. $\mathbb{C} \subset L_7 \subset L_4 \subset \mathcal{A}$

The theorem above can be shown by direct computations.

Theorem 3.2. *([GHT24, Theorem 3.4 and Theorem 3.5]) Kac–Paljutkin's finite quantum group and Sekine quantum groups are nilpotent.*

The series $\mathbb{C} \subset L_5 \subset L_4 \subset \mathcal{A}$ shows the first part of this theorem. We can prove the nilpotency of Sekine quantum groups by observing the series of unital left coideals subalgebras $\mathbb{C} \subset (\mathrm{id} \otimes h_k)\Delta(\mathcal{A}_k) \subset (\mathrm{id} \otimes h_1)\Delta(\mathcal{A}_k) \subset \mathcal{A}_k$.

Remark 3.3. It is easy to show that Kac–Paljutkin's finite quantum since its dimension is $8 = 2^3$, it is quasitriangular and we have Cohen–Westreich's Burnside theorem. For the quasitriangular structure see [Suz98, Wak10] and see also the proposition below and [GHT24, Appendix A].

Remark 3.4. Note that Theorem 3.2 shows that the converse of Cohen–Westreich's Burnside theorem has a counter-example $\mathcal{A}_{15}$.

Proposition 3.5. *([GHT24, Appendix A] cf. [Suz98, Wak10]) The universal R-matrices of Kac–Paljutkin's finite quantum group $\mathcal{A}$ are of the form*

$$\begin{aligned}R =&A_{11}e_1\otimes e_1 + A_{12}e_1\otimes e_2 + A_{13}e_1\otimes e_3 + A_{14}e_1\otimes e_4\\ &+A_{21}e_2\otimes e_1 + A_{22}e_2\otimes e_2 + A_{23}e_2\otimes e_3 + A_{24}e_2\otimes e_4\\ &+A_{31}e_3\otimes e_1 + A_{32}e_3\otimes e_2 + A_{33}e_3\otimes e_3 + A_{34}e_3\otimes e_4\\ &+A_{41}e_4\otimes e_1 + A_{42}e_4\otimes e_2 + A_{43}e_4\otimes e_3 + A_{44}e_4\otimes e_4\\ &+B_1e_1\otimes a_{11} + B_1e_1\otimes a_{22} + B_2e_2\otimes a_{11} - B_2e_2\otimes a_{22}\\ &+B_3e_3\otimes a_{11} - B_3e_3\otimes a_{22} + B_4e_4\otimes a_{11} + B_4e_4\otimes a_{22}\\ &+C_1a_{11}\otimes e_1 + C_1a_{22}\otimes e_1 + C_2a_{11}\otimes e_2 - C_2a_{22}\otimes e_2\\ &+C_3a_{11}\otimes e_3 - C_3a_{22}\otimes e_3 + C_4a_{11}\otimes e_4 + C_4a_{22}\otimes e_4\\ &+D_{1111}a_{11}\otimes a_{11} + D_{1122}a_{11}\otimes a_{22} + D_{1212}a_{12}\otimes a_{12} + D_{1221}a_{12}\otimes a_{21}\\ &+D_{1221}a_{21}\otimes a_{12} + D_{1212}a_{21}\otimes a_{21} - D_{1122}a_{22}\otimes a_{11} + D_{1111}a_{22}\otimes a_{22},\end{aligned}$$

where

$$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}&A_{14}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}&A_{24}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}&A_{34}\\A_{41}&A_{42}&A_{43}&A_{44}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&-1&1\\1&-1&-1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$$

and other coefficients are given by one of the following four cases:

- $\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\B_3\\B_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D_{1111}\\D_{1122}\\D_{1212}\\D_{1221}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\pm1\\\pm1\\0\\0\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\B_3\\B_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D_{1111}\\D_{1122}\\D_{1212}\\D_{1221}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\pm1\\\mp1\\0\\0\end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\B_3\\B_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D_{1111}\\D_{1122}\\D_{1212}\\D_{1221}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\\lambda\\-\sqrt{-1}\lambda\end{bmatrix}$
  (λ is a square root of $\sqrt{-1}$.)
- $\begin{bmatrix}B_1\\B_2\\B_3\\B_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}D_{1111}\\D_{1122}\\D_{1212}\\D_{1221}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\\lambda\\\sqrt{-1}\lambda\end{bmatrix}$
  (λ is a square root of $\sqrt{-1}$.)

For detailed proofs of our main results and other results including direct computations of the universal R-matrices of Kac–Paljutkin's finite quantum group, see [GHT24].

References

[CW17] M. Cohen, S. Westreich, Solvability for semisimple Hopf algebras via integrals, *Journal of Algebra*, Vol.**472**, 67-94, 2017.

[ENO11] P. Etingof, D. Nikshych, V. Ostrik, Weakly group-theoretical and solvable fusion categories, *Advances in Mathematics* Vol.**226**, Issue 1,176-205, 2011.

[FG06] U. Franz, R. Gohm, Random Walks on Finite Quantum Groups, *Lecture Notes in Mathematics*,1866, 1-32, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[Kas95] C. Kassel. Quantum groups, volume 155 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[KP66] G.I. Kac and V.G. Paljutkin. Finite ring groups, *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 15:224–261, 1966. Translated in Trans. *the Moscow Mathematical Society*, 251-284, 1967.

[McC17] J. P. McCarthy, Random Walks on Finite Quantum Groups: Diaconis-Shahshahani Theory for Quantum Groups, PhD thesis, arXiv:1709.09357

[Mur90] G. J. Murphy, C^*-Algebras and Operator Theory, *Academic Press*, 1990.

[Sek96] Y. Sekine. An example of finite-dimensional Kac algebras of Kac-–Paljutkin type. *Proceedings of the American Mathematical Society* **124**, no.4, 1139-1147,1996.

[Suz98] S. Suzuki, A family of braided cosemisimple Hopf algebras of finite dimension, *Tsukuba Journal of Mathematics*, **22**, 1–29, 1998.

[TY98] S. Yamagami and D. Tambara, Tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups, *Journal of Algebra* **209**(2), 692–707, 1998.

[VD97] A. Van Daele, The Haar measure on finite quantum groups, *Proceedings of the American Mathematical Society*, **125**(12):3489–3500, 1997.

[GHT24] G. Glowacki, M. Hattori and M. Tanaka, Examples of nilpotent finite quantum groups, preprint, arXiv:2402.00706

[Zha19] H. Zhang, Idempotent states on Sekine quantum groups, *Communications in Algebra.*, Vol.**47**(10) 4095-4113, 2019.

[Wak10] M. Wakui, Polynomial invariants for a semisimple and cosemisimple Hopf algebra of finite dimension, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **214**, 701—728, 2010.

A construction of quantized flag manifolds via deformed quantum enveloping algebras

東京大学　大学院数理科学研究科　数理科学専攻
星野 真生 (Mao HOSHINO) *

概要

この講演では，旗多様体の変形量子化を一般化された放物型誘導表現を経由することによって構成する．これは Donin らの群同変な場合の研究の類似であり，また De Commer による複素数パラメーターのものの形式変数類似でもある．

1　変形量子化と Poisson 括弧

本講演で扱うのは次のような概念である：

定義 1.1. 可換 $\mathbb{C}$ 代数 A に対して，その**変形量子化** (deformation quantization) とは位相 $\mathbb{C}[\![h]\!]$ 代数 A_h と位相 $\mathbb{C}[\![h]\!]$ 加群の同型 $A_h \cong A[\![h]\!]$ の組であって，誘導される $\mathbb{C}$ 線型空間の同型 $A_h/hA_h \cong A$ が $\mathbb{C}$ 代数の同型となっているもののことである．

注意. 新たに A_h という位相 $\mathbb{C}[\![h]\!]$ 加群を考えるのではなく，$A[\![h]\!]$ 上に次の条件を満たす位相 $\mathbb{C}[\![h]\!]$ 代数の構造を与える積 $*_h$ を考えても変形量子化の概念と等価である：$\mathbb{C}$ 双線型形式の列 $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ を用いて，任意の $a, b \in A$ について $a *_h b$ が次のように表せる

$$a *_h b = ab + m_1(a,b)h + m_2(a,b)h^2 + \cdots .$$

そこで本講演ではこれら 2 つの定式化を特に区別しない．

さて，可換 $\mathbb{C}$ 代数 A の変形量子化 $(A[\![h]\!], *_h)$ が与えられると，次のようにして A 上の **Poisson 括弧** $\{-,-\}$ が得られる：

$$\{a,b\} = m_1(a,b) - m_1(b,a).$$

すなわち，以下の 3 つの条件を満たす：

(i) $\{a,b\} = -\{a,b\}$ （歪対称性）.
(ii) $\{\{a,b\},c\} + \{\{b,c\},a\} + \{\{c,a\},b\} = 0$ （Jacobi 恒等式）.
(iii) $\{ab,c\} = a\{b,c\} + \{a,c\}b$ （Leibniz 則）.

これに関連して次のような微分幾何学的な構造が定義される．

* E-mail: mhoshino@ms.u-tokyo.ac.jp

定義 1.2. 可微分多様体 M と双ベクトル場 $\pi \in \Gamma(M, \bigwedge^2 TM)$ の組が **Poisson 多様体** (Poisson manifold) であるとは，$\{f, g\}_\pi := \pi(df, dg)$ が $C^\infty(M)$ 上の Poisson 括弧を定めることをいう．

注意. 全ての $C^\infty(M)$ 上の Poisson 括弧は Poisson 多様体の構造から得られる（Leibniz 則による）．またシンプレクティック多様体 (M, ω) が与えられると，ω を $TM \cong T^*M$ によって双ベクトル場とみなすことで Poisson 多様体が定まる．

注意. ここでは可微分多様体に基づいて定式化したが，同様の概念は複素多様体や代数多様体でも考えられる．

可微分多様体 M について $C^\infty(M)$ の変形量子化は $C^\infty(M)$ 上の Poisson 括弧を誘導するのであったから，M 上の Poisson 多様体の構造を定める．この Poisson 多様体を与えられた変形量子化の**半古典極限** (semi-classical limit) と呼ぶことがある．

ここまで述べたことについていくつか具体例を述べる．ただし簡単のため $C^\infty(M)$ そのものではなく，その部分 $\mathbb{C}$ 代数の変形量子化を扱う．

例 (非可換トーラス). $M = \mathbb{T}^2$ とし，$z, w \colon \mathbb{T}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ をそれぞれ第一射影，第二射影とする．すると z, w が生成する部分 $\mathbb{C}$ 代数 A は $\{z^n w^m\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$ を基底にもつ．

そこで $\lambda \in \mathbb{C}$ を固定し，A_h を可逆元 u, v と関係式 $vu = e^{\lambda h} uv$ で生成される完備位相 $\mathbb{C}[\![h]\!]$ 代数とする．すると $u^n v^m \longmapsto z^n w^m$ により A_h は A の変形量子化となり，その半古典極限は

$$\lambda \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$$

で与えられる．ただしここでは局所座標として $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (e^{ix}, e^{iy}) \in \mathbb{T}^2$ を用いている．

例 (equatorial Podleś 球面). $M = S^2$ として，$X, Y, Z \colon S^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ を $X(x, y, z) = x + iy$, $Y(x, y, z) = x - iy$, $Z(x, y, z) = z$ で定める．このときこれらが生成する $C^\infty(S^2)$ の部分 $\mathbb{C}$ 代数を A とすると，$A \cong \mathbb{C}[X, Y, Z]/(XY + Z^2 - 1)$ となる．

そこで A_h を生成元 u, v, w と次の関係式で得られる完備位相 $\mathbb{C}[\![h]\!]$ 代数とする：

$$uw = e^{2h} wu,\ vw = e^{-2h} wv,\ uv = 1 - e^{2h} w^2,\ vu = 1 - e^{-2h} w^2.$$

すると $u^n w^l v^m \longmapsto X^n Z^l Y^m$ により A_h は変形量子化となり，その半古典極限は局所座標 $(x, y, z) = (\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)$ のもとで

$$-2i \tan\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

で与えられる．

次の定理は本講演の内容に直接は関係しないため，事実の紹介のみに留めておく．

定理 1.3 (M. Kontsevich, [Kon03])**.** 可微分多様体 M 上の全ての Poisson 構造は $C^\infty(M)$ の変形量子化から得られる．

2　量子群とその作用

以下，可逆元 q に対して q 整数や q 二項係数を次のように定義する：

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q}{[k]_q[n-k]_q}.$$

$\mathfrak{g}$ を複素半単純 Lie 代数，$\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分代数，$R = R(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ を対応するルート系，さらに正系 R^+ を固定し，単純ルートの集合 Δ をとる．また Killing 形式が $\mathfrak{h}^*$ に誘導する双線型形式を規格化し，短ルートの長さが $\sqrt{2}$ となるようにする．こうして得られる $\mathfrak{h}^*$ 上の双線型形式を $(-,-)$ とする．以下 $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\}$ とし，d_i と a_{ij} を次のように定める（これらは自動的に整数になる）：

$$d_i = \frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2},\ a_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)}.$$

これらの記号のもと，$U_h(\mathfrak{g})$ を生成元 $E_i, F_i, H_i\,(1 \le i \le n)$ と次の関係式により定まる完備位相 $\mathbb{C}[\![h]\!]$ 代数として定める：

$$\begin{aligned}
&[H_i, H_j] = 0,\\
&[H_i, E_j] = a_{ij}E_j,\\
&[H_i, F_j] = -a_{ij}F_j,\\
&[E_i, F_j] = \delta_{ij}\frac{\sinh(d_iH_ih)}{\sinh(d_ih)},\\
&\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{e^{d_ih}} E_i^{1-a_{ij}-k} E_j E_i^k = 0,\\
&\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{e^{d_ih}} F_i^{1-a_{ij}-k} F_j F_i^k = 0.
\end{aligned}$$

このとき自然に $U(\mathfrak{h})[\![h]\!] \subset U_h(\mathfrak{g})$ である．

定義 2.1. 複素半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の h **進 Drinfeld-神保変形** (h-adic Drinfeld-Jimbo deformation) または h **進量子包絡環** (h-adic quantum enveloping algebra) とは，$U_h(\mathfrak{g})$ に次の余積 Δ，対蹟射 S，余単位射 ε を与えて位相 Hopf 代数としたもののことである：

$$\begin{aligned}
&\Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H, && S(H) = -H, && \varepsilon(H) = 0,\\
&\Delta(E_i) = E_i \otimes e^{d_iH_ih} + 1 \otimes E_i, && S(E_i) = -E_ie^{-d_iH_ih}, && \varepsilon(E_i) = 0,\\
&\Delta(F_i) = F_i \otimes 1 + e^{-d_iH_ih} \otimes F_i, && S(F_i) = -e^{d_iH_ih}F_i, && \varepsilon(F_i) = 0.
\end{aligned}$$

さて，位相的 $\mathbb{C}[\![h]\!]$ 代数の同型 $\varphi\colon U_h(\mathfrak{g}) \longrightarrow U(\mathfrak{g})[\![h]\!]$ と $F \in U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})[\![h]\!]$ であって次を満たすものが存在することが知られている：

- $F = 1 + rh + \cdots$．ただし $r \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}$
- $(\varphi \otimes \varphi)\Delta\varphi^{-1} = F\Delta(-)F^{-1}$.

またこのような r は一意であり，**標準 r 行列** (standard r-matrix) と呼ばれる．具体的には次のように書くことができる．

$$r = \sum_{\alpha \in R^+} d_\alpha E_\alpha \wedge F_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} d_\alpha (E_\alpha \otimes F_\alpha - F_\alpha \otimes E_\alpha), \quad \text{where } d_\alpha = \frac{(\alpha, \alpha)}{2}.$$

このことを用いると，$\mathfrak{g}$ に対応する単連結複素半単純 Lie 群 G について $\mathcal{O}(G)$ の変形量子化を構成することができる．まず $U(\mathfrak{g})$ の元を G 上の左不変微分作用素と考えて，$f \in \mathcal{O}(G)$ を $X \longmapsto (Xf)(e)$ により $U(\mathfrak{g})^*$ の元とみなす．するとこれは $\mathcal{O}(G)$ の $U(\mathfrak{g})^*$ への埋め込みを与える．このとき $\Delta^*\colon (U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}))^* \longrightarrow U(\mathfrak{g})^*$ は $\mathcal{O}(G) \times \mathcal{O}(G)$ 上では積に一致している．そこで同様にして $\mathcal{O}(G)[\![h]\!]$ を $(U(\mathfrak{g})[\![h]\!])^*$ に埋め込み，Δ の代わりに $F\Delta(-)F^{-1}$ による引き戻しを考える．するとこれにより $\mathcal{O}(G)$ の変形量子化 $\mathcal{O}_h(G)$ が定まり，その半古典極限は

$$(\pi_G)_x = dr_x(r) - dl_x(r).$$

で与えられる．この Poisson 構造は G の演算と整合的であるため，特に (G, π_G) は **Poisson-Lie 群** (Poisson-Lie group) となる．同様のことは G のコンパクト実形 K に対しても考えることができる．

定義 2.2. A を左 $U(\mathfrak{g})$ 作用付き可換 $\mathbb{C}$ 代数とする．すなわち左 $U(\mathfrak{g})$ 加群構造 $(a, x) \in A \times U(\mathfrak{g}) \longmapsto a \triangleleft x \in A$ であって次を満たすものを備えているとする：

$$\begin{aligned} x \triangleright 1 &= \varepsilon(x)1, \\ x \triangleright ab &= \sum_i (x_{1,i} \triangleright a)(x_{2,i} \triangleright b), \qquad \text{where } \Delta(x) = \sum_i x_{1,i} \otimes x_{2,i}. \end{aligned}$$

このとき A の G_h **同変変形量子化** (G_h-equivariant deformation quantization) とは，A の変形量子化 A_h とその上の連続左 $U_h(\mathfrak{g})$ 作用であって次を満たすもののことである：

(i) A_h 上の左 $U_h(\mathfrak{g})$ 作用は A_h/hA_h に左 $U(\mathfrak{g})$ 作用を誘導する．
(ii) 標準的な同型 $A \cong A_h/hA_h$ は左 $U(\mathfrak{g})$ 作用を保つ．

また右 $U(\mathfrak{g})$ 作用付き可換 $\mathbb{C}$ 代数についても同様にして定義する．

G のコンパクト実形 K が右作用する多様体 M が与えられると，$C^\infty(M)$ は自然に左 $U(\mathfrak{g})$ 作用を持つ．そこでその G_h 同変変形量子化を考えると，既に述べたようにその半古典極限がとれる．これは次の意味でもとの K 作用と整合的である：作用 $M \times K \longrightarrow M$ は Poisson 多様体の射となる．

例. equatorial Podleś 球面は次のようにして左 $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ 作用付き $\mathbb{C}[\![h]\!]$ 代数となる：

$$\begin{aligned} &E \triangleright X = 0, && F \triangleright X = e^{h/2}[2]_{e^h} Z, && H \triangleright X = 2X, \\ &E \triangleright Y = -q^{-h/2}[2]_{e^h} Z, && F \triangleright Y = 0, && H \triangleright Y = -2Y, \\ &E \triangleright Z = e^{-h/2} X, && F \triangleright Z = -e^{-h/2} Y, && H \triangleright Z = 0. \end{aligned}$$

このとき半古典極限として得られる $SU(2)$ 作用付きの Poisson 多様体は，Poisson-Lie 群 $SU(2)$ の商 Poisson 多様体 $SO(2)\backslash SU(2)$ に他ならない．

3　箙多様体の同変変形量子化

S を Δ の有限部分集合とし，P_S を対応する G の放物型部分群，L_S をその Levi 因子とする．また L_S に対応する $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数を $\mathfrak{l}_S$ とする．このとき K 作用付き多様体として箙多様体 G/P_S を考えると，$C^\infty(G/P_S)$ の K 有限部分は自然に右 $U(\mathfrak{g})$ 作用付可換 $\mathbb{C}$ 代数として $\mathcal{O}(G/L_S)$ と同一視される．

このことを踏まえて，$\mathcal{O}(G/L_S)$ の G_h 同変変形量子化としてどのようなものがあるかを考える．ただしここでは簡単のため $S=\emptyset$，つまり P が Borel 部分群で L_S が極大トーラス場合についてのみ考える．このとき G/B は K/T と同一視できることに注意する．

まず $X_{K/T}$ を次のように定義する：

$$X_{K/T}=\{(\varphi_\alpha)_{\alpha\in R^+}\mid \varphi_\alpha\varphi_\beta+1=\varphi_{\alpha+\beta}(\varphi_\alpha+\varphi_\beta)\text{ when }\alpha,\beta,\alpha+\beta\in R^+\}.$$

これはアファイン代数多様体であり，次のように K/T 上の Poisson 構造で K 作用と整合的なものの空間と思える．

命題 3.1 (J. Donin, [Do01])**.** 任意の $\varphi=(\varphi_\alpha)_{\alpha\in R^+}\in X_{K/T}$ について，

$$\pi_\varphi=dr_{kT}(r)+\sum_{\alpha\in R^+}\varphi_\alpha d_\alpha dl_k(E_\alpha\wedge F_\alpha)$$

は K/T 上の Poisson 構造であって K の Poisson-Lie 群構造と整合的なものを与える．また全てのそのような K/T 上の Poisson 構造はこのように表せる．

また同論文 [Do01] の中で，J. Donin は各 $\varphi\in X_{K/T}$ について対応する（一般の）箙多様体の G_h 同変変形量子化が存在することを示し，さらに完全な分類定理も示した．ただしこれは $X_{K/T}$ の記述に基づいて同変変形量子化に関わるコホモロジーの消滅を示したものであり，非構成的である．

主結果はこの同変変形量子化の具体的な構成を与えたことである．方針としては K. De Commer による複素パラメーターの場合の構成 ([DC13]) を修正し，放物型誘導表現の類似を通じて構成を行った．

以下その構成を $U_h(\mathfrak{sl}_3)$ の場合に述べる．まず $\varphi\in X_{SU(3)/T}$ に対して完備位相 $\mathbb{C}[\![h]\!]$ 代数 $U_{h,\varphi}(\mathfrak{sl}_3)$ を次のように定義する：生成元は H_α, H_β, E_α, $E_{\alpha+\beta}$, E_β, $\widetilde{F}_\alpha$, $\widetilde{F}_{\alpha+\beta}$, $\widetilde{F}_\beta$ であり，定義関係式は次のとおり：

$$\begin{aligned}
&[H_\alpha,E_\alpha]=2E_\alpha, && [H_\alpha,E_\beta]=-E_\beta,\\
&[H_\alpha,\widetilde{F}_\alpha]=-2\widetilde{F}_\alpha, && [H_\alpha,\widetilde{F}_\beta]=\widetilde{F}_\beta,\\
&[H_\beta,E_\alpha]=-E_\alpha, && [H_\beta,E_\beta]=2E_\beta,\\
&[H_\beta,\widetilde{F}_\alpha]=\widetilde{F}_\alpha, && [H_\beta,\widetilde{F}_\beta]=-2\widetilde{F}_\beta,\\
&E_\beta E_\alpha-e^h E_\alpha E_\beta=E_{\alpha+\beta}, && \widetilde{F}_\alpha\widetilde{F}_\beta-e^{-h}\widetilde{F}_\beta\widetilde{F}_\alpha=(\varphi_\alpha+\varphi_\beta)h\widetilde{F}_{\alpha+\beta},\\
&E_{\alpha+\beta}E_\alpha-e^{-h}E_\alpha E_{\alpha+\beta}=0, && \widetilde{F}_\alpha\widetilde{F}_{\alpha+\beta}-e^h\widetilde{F}_{\alpha+\beta}\widetilde{F}_\alpha=0,\\
&E_\beta E_{\alpha+\beta}-e^{-h}E_{\alpha+\beta}E_\beta=0, && \widetilde{F}_{\alpha+\beta}\widetilde{F}_\beta-e^h\widetilde{F}_\beta\widetilde{F}_{\alpha+\beta}=0,\\
&[H_\alpha,H_\beta]=[E_\alpha,\widetilde{F}_\beta]=[E_\beta,\widetilde{F}_\alpha]=0, &&
\end{aligned}$$

$$[E_{\alpha+\beta}, \widetilde{F}_\alpha] = (\varphi_\alpha - 1)he^{-H_\alpha h}E_\beta, \qquad [E_\alpha, \widetilde{F}_{\alpha+\beta}] = \frac{\varphi_{\alpha+\beta}+1}{\varphi_\beta+1}\widetilde{F}_\beta e^{H_\alpha h},$$
$$[E_{\alpha+\beta}, \widetilde{F}_\beta] = -(\varphi_\beta + 1)hE_\alpha e^{H_\beta h}, \qquad [E_\beta, \widetilde{F}_{\alpha+\beta}] = -\frac{(\varphi_\beta-1)(\varphi_{\alpha+\beta}+1)}{(\varphi_\alpha+1)(\varphi_\beta+1)}e^{-H_\beta h}\widetilde{F}_\alpha,$$
$$[E_\gamma, \widetilde{F}_\gamma] = \varphi_\gamma h\frac{\sinh(H_\gamma h)}{\sinh(h)} + h\frac{\cosh(H_\gamma h)}{\sinh(h)}, \qquad (\gamma = \alpha,\, \beta,\, \alpha+\beta)$$

また $U_{h,\varphi}(\mathfrak{sl}_3)$ は自然な左 $U_h(\mathfrak{sl}_3)$ 余作用を持ち，特に $U_h(\mathfrak{sl}_3)$ 加群 M と $U_{h,\varphi}(\mathfrak{sl}_3)$ 加群 N のテンソル積 $M \otimes N$ は自然に $U_{h,\varphi}(\mathfrak{sl}_3)$ 加群となる．

さて，$U_h(\mathfrak{b})$ が自然に $U_{h,\varphi}(\mathfrak{sl}_3)$ に含まれていることに注意すると，放物型誘導関手 $\mathrm{Ind}_\varphi \colon U_h(\mathfrak{h})$-**Mod** $\longrightarrow U_{h,\varphi}(\mathfrak{sl}_3)$-**Mod** が定義できる．次の補題が重要である．

補題 3.2. V, V' を $U_h(\mathfrak{h})$ の有限次元可積分表現，W を $U_h(\mathfrak{g})$ の有限次元可積分表現とする．このとき次の自然な同型がある：

$$\mathrm{Hom}_{U_h(\mathfrak{h})}(V', W \otimes V) \cong \mathrm{Hom}_{U_{h,\varphi}(\mathfrak{sl}_3)}(\mathrm{Ind}_\varphi V', W \otimes \mathrm{Ind}_\varphi V).$$

そこで V, W に対して $\mathrm{id}_{W\otimes V} \colon (W \otimes V) \longrightarrow W \otimes V$ に対応する準同型を $U_{W,V} \colon \mathrm{Ind}_\varphi(W \otimes V) \longrightarrow W \otimes \mathrm{Ind}_\varphi V$ とし，さらに $(\mathrm{id}_W \otimes U_{W',V})U_{W,W'\otimes V}$ に対応する $U_h(\mathfrak{h})$ 加群 $W \otimes W' \otimes V$ の自己準同型を $\Psi_{W,W',V}$ とする．このとき（同様の構成が一般の $\mathfrak{g}$ に対しても定義され）次の主張が成り立つ．

定理 3.3. $\Psi \in U_h(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{h})^{\mathfrak{h}}\widehat{\otimes}\mathcal{O}(X_{K/T})[\![h]\!]$ であって，その $W \otimes W' \otimes V$ への作用が $\Psi_{W,W',V}$ となるものが唯一つ存在する．さらにこれは次を満たす．

(i) $(1 \otimes \Psi)(\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\Psi) = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(\Psi)(\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Psi)$.
(ii) $(\varepsilon \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Psi) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Psi) = 1$.
(iii) $\Psi = 1 - h\sum_{\alpha\in R^+}(1+\varphi_\alpha)d_\alpha E_\alpha \otimes F_\alpha \otimes 1 + \cdots$.

注意. ここで Ψ が $\mathcal{O}(X_{K/T})$ 係数の元としてとれることは非自明である．実際 $U_{h,\varphi}(\mathfrak{sl}_3)$ の定義関係式では $\varphi + 1$ が分母に登場するため，a priori には φ の多項式でとれることは分からない．

この Ψ を用いると，$\mathcal{O}(G/H)$ の G_h 同変変形量子化が構成できる．まず標準的な G_h 同変変形量子化 $\mathcal{O}_h(G/H)$ は次のようにスペクトル分解を持つ：

$$\mathcal{O}_h(G/H) \cong \bigoplus_{W\colon \text{irr}} W^{U_h(\mathfrak{h})} \otimes W^*$$

このとき $\mathcal{O}_h(G/H)$ の積は次のように表現のテンソル積と同一視される：

$$(w \otimes f)(w' \otimes f') = (w \otimes w') \otimes (f \otimes f').$$

（ここで右辺は $W \otimes W'$ に対応するため一般に既約でないが，ここでは無視する）．そこで $\varphi \in X_{K/T}$ に対して $\mathcal{O}_h(G/H)$ 上の新たな積 $*_\varphi$ を

$$(w \otimes f) *_\varphi (w' \otimes f') = \Psi(\varphi)^{-1}_{W,W',\mathbf{1}}(w \otimes w') \otimes (f \otimes f')$$

とする．この変形量子化を $\mathcal{O}_{h,\varphi}(G/H)$ とすると，その半古典極限が丁度 φ に対応する Poisson 多様体 K/T になっている．

参考文献

[DC13] K. De Commer, *Representation theory of quantized enveloping algebras with interpolating real structure*, SIGMA **9** (2013), 081 (20 pages).

[DCN15] K. De Commer, S. Neshveyev, *Quantum flag manifolds as quotients of degenerate quantized universal enveloping algebras*, Transform. Groups **20** (3) (2015), 725-742.

[DCNTY19] K. De Commer, S. Neshveyev, L. Tuset, M. Yamashita, *Ribbon braided module categories, quantum symmetric pairs and Knizhnik-Zamolodchikov equations*, Comm. Math. Phys. **367** (2019), no. 3, 717-769.

[DCNTY20] K. De Commer, S. Neshveyev, L. Tuset, M. Yamashita, *Comparison of quantization of symmetric spaces, cyclotomic Knishnik-Zamolodchikov equations oand Letzter-Kolb coideals*, Forum Math. Pi. **11** (2020), 1-79.

[Do01] J. Donin, $U_h(\mathfrak{g})$*-invariant quantization of coadjoint orbits and vector bundles over them*, J. Geom. Phys. **38**(1) (2001). 54-80.

[DGS96] J. Donin, G. D. Gurevich, S. Shnider, *Quantization of function algebras on semi-simple orbits in* $\mathfrak{g}^*$, preprint, arXiv:q-alg/9607008.

[DM05] J. Donin, A. Mudrov, *Dynamical Yang-Baxter equation and quantum vector bundles*, Comm. Math. Phys. **254** (2005), 719-760.

[Kon03] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson Manifolds*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), 157-216.

[KS97] A. Klimyk, K. Schmüdgen, *Quantum groups and their representations*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin (1997).

[KS98] L. I. Korogodski, Y. S. Soibelman, *Algebras of functions on quantum groups: Part I*, Mathematical Surveys and Monographs **56**, American Mathematical Society, Providence, RI (1998).

[KST07] E. Karolinsky, A. Stolin, V. Tarasov, *Irreducible highest weight modules and equivariant quantization*, Adv. Math. **211** (2007), 266-283.

[VY20] C. Voigt, R. Yuncken, *Complex semisimple quantum groups and representation theory*, Lecture Notes in Mathematics **2264**, Springer International Publishing, 376+X pages.

Quantum analog of Mishchenko-Fomenko theorem for Ugl_d

ロモノーソフ・モスクワ国立大学　力学・数学部　数学部門
池田康 (Yasushi IKEDA) *

概要

Mishchenko-Fomenko の定理の量子 analog を証明する．$g = gl(d, \mathbb{C})$ のときに Gurevich-Pyatov-Saponov によって導入された量子微分を用いて量子 argument shift を構成する．ここまでは Sharygin 准教授（モスクワ大学）との共同研究に基づく．量子 argument shift 代数の生成元を 2 階までの量子 argument shift について与える．

1　導入

有限次元複素 Lie 環 g の双対空間 g^* の関数環 $C^\infty(g^*)$ には Lie 括弧を拡張するような Poisson 括弧がただひとつ存在する．

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(g^*) \times C^\infty(g^*) & \xrightarrow{\text{Poisson 括弧}} & C^\infty(g^*) \\ \uparrow & & \uparrow \\ g \times g & \xrightarrow{\text{Lie 括弧}} & g \end{array}$$

これを Lie-Poisson 括弧と呼ぶ．g^* の任意の元 ξ に対して $C^\infty(g^*)$ の部分代数である対称代数 $Sg = \mathbb{C}\big[e_1, \dots, e_d\big]$ 上の線型写像

$$\bar{\partial}_\xi = \xi(e_1)\frac{\partial}{\partial e_1} + \cdots + \xi(e_d)\frac{\partial}{\partial e_d} \tag{1}$$

は g の基底 $(e_1, \dots, e_d)$ によらない．可積分系で Sg の Poisson 可換部分代数を見つけることは重要で，次の定理がある．

Theorem 1 (Mishchenko-Fomenko [1], 1978)**.** $\bar{C}$ を Sg の Poisson center とするとき

$$\bar{C}_\xi = \bar{C}\Big[\,\bar{\partial}_\xi x, \bar{\partial}_\xi^2 x, \cdots : x \in \bar{C}\,\Big]$$

は Poisson 可換である．

Definition 1. $\bar{C}_\xi$ を ξ による argument shift 代数と呼ぶ．

これに変形量子化の視点を導入する．Poisson 多様体に対して，双微分作用素 B_1, B_2, ... を用いて定まる積

$$x \star y = xy + (i\hbar)B_1(x, y) + (i\hbar)^2 B_2(x, y) + \cdots \tag{2}$$

* E-mail:yasushikeda@yahoo.com

が結合的で

$$B_1(x,y) - B_1(y,x) = \left[\frac{x \star y - y \star x}{i\hbar}\right]_{i\hbar=0} = \{x,y\} \tag{3}$$

をみたすとき，変形量子化と呼ぶ．条件 (3) は物理学における正準量子化

$$\lim_{i\hbar\to 0} \frac{xy-yx}{i\hbar} = \{x,y\}$$

に対応している．Kontsevich [2] は任意の Poisson 多様体に対してその変形量子化を構成した．Poisson 多様体が g^* と Lie-Poisson 括弧で与えられるとき，Sg の任意の元 x と y に対して，Kontsevich の変形量子化 (2) は $(i\hbar)$ の有限次である．$i\hbar = 1$ とするとき，対称代数 Sg の変形量子化 (2) と普遍展開代数 Ug は次の可換図式により同型である．

$$\begin{array}{ccc} Sg & \longrightarrow & Ug \\ {\scriptstyle (2)}\uparrow & & \uparrow \\ Sg \times Sg & \longrightarrow & Ug \times Ug \end{array} \quad , \qquad x_1 \cdots x_n \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in g^n.$$

S_n は n 次対称群を表す．普遍展開代数 Ug は付随する次数付き代数 $\operatorname{gr} Ug = Sg$ の変形量子化であると考えることができる．

Problem 1 (Vinberg [3], 1991)**.** argument shift 代数 $\bar{C}_\xi$ を付随する次数付き代数に持つような普遍展開代数 Ug の可換部分代数 C_ξ がただひとつ存在するか？

Definition 2. argument shift 代数 $\bar{C}_\xi$ を付随する次数付き代数に持つような普遍展開代数 Ug の可換部分代数 C_ξ を ξ による量子 argument shift 代数と呼ぶ．

Problem 1 は Feigin-Frenkel center を用いて

- g が単純で ξ が $g^* \simeq g$ の正則元のとき [4, 5]
- g が A, C 型単純のとき [6, 7]

肯定的に解決されている．量子 argument shift 代数 C_ξ の生成元は g が単純で E, F 型以外のとき得られている ([8, 9, 7, 10] とその参考文献を参照)．わたしたちは Gurevich-Pyatov-Saponov [11] による量子微分に注目した．これは $g = gl(d,\mathbb{C})$ のときに定義される偏微分 (1) の量子 analog である．わたしたちは量子微分を用いて定義される量子 argument shift ∂_ξ が Mishchenko-Fomenko 型の定理をみたすことを示した (Theorem 2)．わたしは量子微分の基本公式 (Theorem 3) を用いて量子 argument shift ∂_ξ により生成される量子 argument shift 代数 C_ξ の生成元を 2 階までの量子 argument shift について与えた (Theorem 6).

2 Gurevich-Pyatov-Saponov の量子微分

複素一般線型 Lie 環 $gl(d,\mathbb{C})$ は基底 $\left\{ e^i_j : i,j = 1,\ldots,d \right\}$ と Lie 括弧

$$\left[e^{i_1}_{j_1}, e^{i_2}_{j_2}\right] = e^{i_2}_{j_1}\delta^{i_1}_{j_2} - \delta^{i_2}_{j_1} e^{i_1}_{j_2} \tag{4}$$

により定まる．集合 S に値をとる d 次正方行列全体を $M(d,S)$ で表す．$M(d,\mathbb{C})$ の (j,i) 行列単位を E^i_j で表す．e^i_j を E^i_j に対応させる $gl(d,\mathbb{C})$ から $M(d,\mathbb{C})$ への線型写像は Lie 環の同型写像である．A が $Sgl(d,\mathbb{C})$ と $Ugl(d,\mathbb{C})$ のいずれかを表すとき $M(d,A)$ の元 e を

$$e=\begin{pmatrix} e^1_1 & \cdots & e^1_d \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^d_1 & \cdots & e^d_d \end{pmatrix}=\sum_{i,j=1}^{d} e^i_j\otimes E^j_i, \qquad\qquad M(d,A)=A\otimes M(d,\mathbb{C})$$

により定める．すなわち e^i_j は行列 e の (i,j) 成分である．同じように任意の行列 x の (i,j) 成分を x^i_j で表す．

Remark 1. $\bar\partial^i_j=\dfrac{\partial}{\partial e^j_i}$ を $Sgl(d,\mathbb{C})=\mathbb{C}\big[\,e^i_j : i,j=1,\dots,d\,\big]$ 上の偏微分とするとき $\bar\partial$

$$Sgl(d,\mathbb{C})\to M\big(d,Sgl(d,\mathbb{C})\big)=Sgl(d,\mathbb{C})\otimes M(d,\mathbb{C}),\qquad x\mapsto\bar\partial x=\sum_{i,j=1}^{d}(\bar\partial^i_j x)\otimes E^j_i$$

は以下の性質によってひととおりに特徴付けられる線型写像である．

1. 任意の複素数 ν に対して $\bar\partial\nu=0$.
2. 任意の複素数値 d 次正方行列 ξ に対して $\bar\partial\,\mathrm{tr}(\xi e)=\xi$.
3. (Leibniz の法則) $Sgl(d,\mathbb{C})$ の任意の元 x と y に対して $\bar\partial(xy)=(\bar\partial x)y+x(\bar\partial y)$.

対称代数 $Sgl(d,\mathbb{C})$ を変形量子化である普遍展開代数 $Ugl(d,\mathbb{C})$ に置きかえたとき Remark 1 の 3 条件をみたす線型写像 ∂ は存在しない．なぜなら ∂ をそのような線型写像とするとき交換関係 (4) により

$$0=\partial\Big(e^{i_1}_{j_1}e^{i_2}_{j_2}-e^{i_2}_{j_2}e^{i_1}_{j_1}\Big)=\partial\Big(e^{i_2}_{j_1}\delta^{i_1}_{j_2}-\delta^{i_2}_{j_1}e^{i_1}_{j_2}\Big)=E^{i_2}_{j_1}\delta^{i_1}_{j_2}-\delta^{i_2}_{j_1}E^{i_1}_{j_2}\neq 0.$$

Gurevich-Pyatov-Saponov [11] は Leibniz の法則を修正して線型写像 ∂ が well-defined になるようにした．

Definition 3. $gl(d,\mathbb{C})$ の量子微分 ∂

$$Ugl(d,\mathbb{C})\to M\big(d,Ugl(d,\mathbb{C})\big)=Ugl(d,\mathbb{C})\otimes M(d,\mathbb{C}),\qquad x\mapsto\partial x=\sum_{i,j=1}^{d}(\partial^i_j x)\otimes E^j_i$$

は以下の性質によってひととおりに特徴付けられる線型写像である．

1. 任意の複素数 ν に対して $\partial\nu=0$.
2. 任意の複素数値 d 次正方行列 ξ に対して $\partial\,\mathrm{tr}(\xi e)=\xi$.
3. (量子 Leibniz の法則) $Ugl(d,\mathbb{C})$ の任意の元 x と y に対して

$$\partial(xy)=(\partial x)y+x(\partial y)+(\partial x)(\partial y).$$

3 Mishchenko-Fomenko 定理の量子 analog

この節は [12] に基づく．$\xi^i_j = \xi(e^i_j)$ と考えることにより，$gl(d,\mathbb{C})^*$ を $M(d,\mathbb{C})$ と同一視する．argument shift $\bar\partial_\xi = \mathrm{tr}(\xi\bar\partial)$ の量子 analog として，量子 argument shift $\partial_\xi = \mathrm{tr}(\xi\partial)$ を考えることができる．この節の主定理を述べる．

Theorem 2 ($gl(d,\mathbb{C})$ における Mishchenko-Fomenko 定理の量子 analog)**.** C を $Ugl(d,\mathbb{C})$ の center とするとき

$$C_\xi = C\Big[\,\partial_\xi x, \partial^2_\xi x, \cdots : x \in C\,\Big]$$

は可換である．

証明について述べる．特性多項式が重根を持たない複素数値 d 次正方行列全体は $M(d,\mathbb{C})$ で稠密である．さらに対角化を考えることにより，ξ は対角成分がすべて異なる対角行列 $\mathrm{diag}(z_1,\dots,z_d)$ であるとしてよい．このとき ξ による量子 argument shift 代数はただひとつ存在して

$$\Big\{ e^i_i, \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j} \Big\}^d_{i=1} \tag{5}$$

の centraliser (集合 (5) のすべての元と交換する $Ugl(d,\mathbb{C})$ の元全体) として与えられる [3, 15]．x を C の元とするとき

$$0 = \partial^n_\xi \big[e^i_i, x\big] = \big[e^i_i, \partial^n_\xi x\big], \qquad\qquad i = 1,\dots,d.$$

したがって

$$\big[\sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, \partial^n_\xi x\big] = 0, \qquad\qquad i = 1,\dots,d \tag{6}$$

を示せばよい．

Lemma 1. 部分空間

$$\Big\{ x \in Ugl(d,\mathbb{C}) : \mathrm{tr}\Big(\xi\big[\partial \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, \partial x\big]\Big) = 0 \Big\}, \qquad\qquad i = 1,\dots,d \tag{7}$$

は C を含み ∂_ξ で保たれる．

Proof. 次節の Theorem 4 より部分空間 (7) が C を含むことを示すには

$$\mathrm{tr}\Big(\xi\big[\partial \sum_{j\neq i} \frac{e^j_i e^i_j}{z_i - z_j}, e^n\big]\Big) = 0$$

を示せばよい．これは交換関係

$$\big[(e^n)^{i_1}_{j_1}, e^{i_2}_{j_2}\big] = \big[e^{i_1}_{j_1}, (e^n)^{i_2}_{j_2}\big] = (e^n)^{i_2}_{j_1}\delta^{i_1}_{j_2} - \delta^{i_2}_{j_1}(e^n)^{i_1}_{j_2} \tag{8}$$

により示される．x を部分空間 (7) の元とすると

$$\partial\partial_\xi \sum_{j\neq i} \frac{e_i^j e_j^i}{z_i - z_j} = \big(z_{j_1} z_{j_2} - z_{i_1} z_{i_2}\big)\partial_{i_1}^{j_1}\partial_{i_2}^{j_2}\big(e_i^j e_j^i\big) = 0$$

より

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\xi \operatorname{tr}\Big(\xi\big[\partial \sum_{j\neq i} \frac{e_i^j e_j^i}{z_i - z_j}, \partial x\big]\Big) \\
&= \operatorname{tr}\Big(\xi\big[\partial\partial_\xi \sum_{j\neq i} \frac{e_i^j e_j^i}{z_i - z_j}, \partial x\big]\Big) + \operatorname{tr}\Big(\xi\big[\partial \sum_{j\neq i} \frac{e_i^j e_j^i}{z_i - z_j}, \partial\partial_\xi x\big]\Big) \\
&\quad + \sum_{i_1,i_2,j_1,j_2=1}^{d} \big(z_{j_1} z_{j_2} - z_{i_1} z_{i_2}\big)\big(\partial_{i_1}^{j_1}\partial_{i_2}^{j_2} \sum_{j\neq i} \frac{e_i^j e_j^i}{z_i - z_j}\big)\big(\partial_{j_1}^{i_1}\partial_{j_2}^{i_2} x\big) \\
&= \operatorname{tr}\Big(\xi\big[\partial \sum_{j\neq i} \frac{e_i^j e_j^i}{z_i - z_j}, \partial\partial_\xi x\big]\Big).
\end{aligned}$$

□

(6) を n についての数学的帰納法により示す．$n > 0$ として $\big[\sum_{j\neq i} \frac{e_i^j e_j^i}{z_i - z_j}, \partial_\xi^{n-1} x\big] = 0$ と仮定する．量子 Leibniz の法則より

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\xi \big[\sum_{j\neq i} \frac{e_i^j e_j^i}{z_i - z_j}, \partial_\xi^{n-1} x\big] \\
&= \big[\partial_\xi \sum_{j\neq i} \frac{e_i^j e_j^i}{z_i - z_j}, \partial_\xi^{n-1} x\big] + \big[\sum_{j\neq i} \frac{e_i^j e_j^i}{z_i - z_j}, \partial_\xi^{n} x\big] + \operatorname{tr}\Big(\xi\big[\partial \sum_{j\neq i} \frac{e_i^j e_j^i}{z_i - z_j}, \partial\partial_\xi^{n-1} x\big]\Big).
\end{aligned}$$

$\partial_\xi \sum_{j\neq i} \frac{e_i^j e_j^i}{z_i - z_j} = \sum_{j\neq i} \frac{z_i}{z_i - z_j}$ と Lemma 1 より

$$\big[\partial_\xi \sum_{j\neq i} \frac{e_i^j e_j^i}{z_i - z_j}, \partial_\xi^{n-1} x\big] = \operatorname{tr}\Big(\xi\big[\partial \sum_{j\neq i} \frac{e_i^j e_j^i}{z_i - z_j}, \partial\partial_\xi^{n-1} x\big]\Big) = 0.$$

Corollary 1. C_ξ は ξ による量子 argument shift 代数である．

Proof. $\bar{C}$ と C は $\big(\operatorname{tr} e, \dots, \operatorname{tr} e^d\big)$ により自由に生成される．

$$\bar{C} = \mathbb{C}\Big[\operatorname{tr} e, \dots, \operatorname{tr} e^d\Big] \simeq \mathbb{C}\big[x_1, \dots, x_d\big], \qquad C = \mathbb{C}\Big[\operatorname{tr} e, \dots, \operatorname{tr} e^d\Big] \simeq \mathbb{C}\big[x_1, \dots, x_d\big]. \tag{9}$$

ここで行列 e は，左の式においては $M\big(d, Sgl(d,\mathbb{C})\big)$ の元とみていて，右の式においては $M\big(d, Ugl(d,\mathbb{C})\big)$ の元とみている．量子 Leibniz の法則の付加項 $\big((\partial x)(\partial y)\big)_j^i$ は $\partial_j^i(xy)$ の最高次の項には寄与しない．したがって $\operatorname{gr} C_\xi = \bar{C}_\xi$. □

4　量子微分の基本公式と量子 argument shift 代数の生成元

この節は [13, 14] に基づく．前節の量子 argument shift 代数 C_ξ の生成元を 2 階までの量子 argument shift について与える．わたしは C の元 x の量子 argument shift $\partial_\xi^n x$ を計算するための

量子微分の基本公式を得た.

Definition 4.

$$f_{\pm}^{(n)}(x) = \frac{(x+1)^n \pm (x-1)^n}{2} = \sum_{m=0}^{n} \frac{1 \pm (-1)^{n-m}}{2} \binom{n}{m} x^m \in \mathbb{Z}[x].$$

Theorem 3.

$$\begin{aligned}\partial(e^n)^i_j &= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\begin{pmatrix} f_+^{(n-m-1)}(e)^1_j \\ \vdots \\ f_+^{(n-m-1)}(e)^d_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e^m)^i_1 & \cdots & (e^m)^i_d \end{pmatrix} + f_-^{(n-m-1)}(e)(e^m)^i_j \right) \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \left(\begin{pmatrix} (e^m)^1_j \\ \vdots \\ (e^m)^d_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_+^{(n-m-1)}(e)^i_1 & \cdots & f_+^{(n-m-1)}(e)^i_d \end{pmatrix} + (e^m)^i_j f_-^{(n-m-1)}(e) \right).\end{aligned}$$

Proof.

$$\partial(e^{n+1})^i_j = \sum_{m=0}^{n} \left(\begin{pmatrix} g_m^{(n)}(e)^1_j \\ \vdots \\ g_m^{(n)}(e)^d_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (e^m)^i_1 & \cdots & (e^m)^i_d \end{pmatrix} + h_m^{(n)}(e)(e^m)^i_j \right)$$

を仮定して $g_m^{(n)}(x)$ と $h_m^{(n)}(x)$ の漸化式を解くことにより得られる. □

同型 (9) により有限個の積 $x = \operatorname{tr} e^{n_1} \operatorname{tr} e^{n_2} \cdots$ に対して量子 argument shift $\partial_\xi^n x$ を計算することが本質的である. 次の事実が役に立つ.

Proposition 1.

$$Ugl(d,\mathbb{C}) \to M\big(d, Ugl(d,\mathbb{C})\big), \qquad x \mapsto x + \partial x$$

は代数の準同型写像である.

Proof. 量子 Leibniz の法則より

$$xy + \partial(xy) = xy + (\partial x)y + x(\partial y) + (\partial x)(\partial y) = (x + \partial x)(y + \partial y). \quad \square$$

Theorem 3 と Proposition 1 より次の結果が得られる. $f_-^{(-1)}(x) = \operatorname{tr} e^{-1} = 1$ と約束する.

Theorem 4. 有限個の積 $x = \operatorname{tr} e^{n_1} \operatorname{tr} e^{n_2} \cdots$ に対して

1. $$x + \partial x = \sum_{m_1=-1}^{n_1} \sum_{m_2=-1}^{n_2} \cdots \Big(\prod_k f_-^{(n_k - m_k - 1)}(e) \Big) \Big(\prod_k \operatorname{tr} e^{m_k} \Big),$$
2. $$\begin{aligned}\big(\operatorname{tr}\xi + \partial_\xi\big)^2 x = &\sum_{m_1=-1}^{n_1} \sum_{m_2=-1}^{n_2} \cdots \operatorname{tr}\big(\xi \prod_k f_-^{(n_k-m_k-1)}(e)\big)\big(\operatorname{tr}\xi + \partial_\xi\big) \prod_k \operatorname{tr} e^{m_k} \\ &+ \sum_{m_1=-1}^{n_1} \sum_{m_2=-1}^{n_2} \cdots \sum_{k_1=-1}^{n_1-m_1-1} \sum_{k_2=-1}^{n_2-m_2-1} \cdots \\ &\operatorname{tr}\Big(\xi \Big(\partial \operatorname{tr}\big(\xi \prod_\ell f_-^{(n_\ell - m_\ell - k_\ell - 2)}(e)\big)\Big) \prod_\ell f_-^{(k_\ell)}(e) \Big) \prod_\ell \operatorname{tr} e^{m_\ell}.\end{aligned}$$

Definition 5.

$$C_\xi^{(n)} = C\Big[\,\partial_\xi x, \dots, \partial_\xi^n x : x \in C\,\Big].$$

$C_\xi = \lim_{n\to\infty} C_x^{(n)}$ である．同型 (9) と Theorem 4 より

$$\begin{aligned} C_\xi^{(1)} &= C\Big[\,\mathrm{tr}\big(\xi e^n\big) : n = 1, 2, \dots\,\Big], \\ C_\xi^{(2)} &= C_\xi^{(1)}\left[\,\tau_\xi\begin{pmatrix} 0 & P_n \\ P_m^T & 0 \end{pmatrix} : m, n = 0, 1, 2, \dots\,\right] \end{aligned} \tag{10}$$

が結論される．x^T は x の転置行列である．

Definition 6.

$$\tau_\xi(x) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} \xi & \xi e & \cdots & \xi e^{n-1} \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} \xi \\ \xi e \\ \vdots \\ \xi e^{n-1} \end{pmatrix}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_j^i\, \mathrm{tr}\big(\xi e^{i-1}\xi e^{j-1}\big).$$

Definition 7.

$$x^m \begin{pmatrix} f_+^{(n-1)}(x) \\ \vdots \\ f_+^{(0)}(x) \end{pmatrix} = P_n^{(m)} \begin{pmatrix} x^0 \\ \vdots \\ x^{m+n-1} \end{pmatrix}, \qquad P_n = P_n^{(0)}.$$

Definition 8.

$$\sigma(x) = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 + x_1^2 & \cdots & x_n^1 + x_1^n \\ 0 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 + x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} x_j^i E_{\min\{i,j\}}^{\max\{i,j\}}.$$

交換関係 (8) より $\mathrm{tr}\big(\xi e^m \xi e^n\big) = \mathrm{tr}\big(\xi e^n \xi e^m\big)$ が示される．したがって $\tau_\xi\big(\sigma(x)\big) = \tau_\xi(x)$ である．わたしは (10) において次の行列の等式を得た．

Theorem 5.

$$\begin{aligned} \sigma\begin{pmatrix} 0 & P_{m+2n} \\ P_m^T & 0 \end{pmatrix} &= \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{2n-k}{k} + \binom{2n-k-1}{k-1}\right) P_{m+k}^{(m+k)}, \\ \sigma\begin{pmatrix} 0 & P_{m+2n+1} \\ P_m^T & 0 \end{pmatrix} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{k}\Big(P_{m+k+1}^{(m+k)} + P_{m+k}^{(m+k+1)}\Big). \end{aligned}$$

Theorem 5 は (11)，(12)，(13)，(14) と同値である．

- 二項係数の等式

$$\binom{2n_1+n_2+2n_3+1}{2n_3}+\binom{n_2+2n_3}{2n_3}$$
$$=\sum_{n_4=0}^{n_3}\left(\binom{n_1+n_2+n_3+n_4+1}{2n_4}+\binom{n_1+n_2+n_3+n_4}{2n_4}\right)\binom{n_1+n_3-n_4}{2(n_3-n_4)}, \quad (11)$$

$$\binom{2n_1+n_2+2n_3+2}{2n_3}+\binom{n_2+2n_3}{2n_3}$$
$$=\sum_{n_4=0}^{n_3}\binom{n_1+n_2+n_3+n_4+1}{2n_4}\left(\binom{n_1+n_3-n_4+1}{2(n_3-n_4)}+\binom{n_1+n_3-n_4}{2(n_3-n_4)}\right). \quad (12)$$

- 多項式の等式

$$f_+^{(m+2n)}(x)+f_+^{(m)}(x)x^{2n}=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{2n-k}{k}+\binom{2n-k-1}{k-1}\right)f_+^{(m+k)}(x)x^k, \quad (13)$$

$$f_+^{(m+2n+1)}(x)+f_+^{(m)}(x)x^{2n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n-k}{k}\left(f_+^{(m+k+1)}(x)x^k+f_+^{(m+k)}(x)x^{k+1}\right). \quad (14)$$

(11), (12), (13), (14) は Mathematica により確かめることができる.

```
In[1]:= FullSimplify[Binomial[2n+m+2l+1,2l]+
  Binomial[m+2l,2l]-
  Sum[(Binomial[n+m+l+k+1,2k]+Binomial[n+m+l+k,2k])
  Binomial[n+l-k,2(l-k)],{k,0,l}],
  Element[n|m|l,Integers]&&n>=0&&m>=0&&l>=0]
Out[1]= 0
In[2]:= FullSimplify[Binomial[2n+m+2l+2,2l]+
  Binomial[m+2l,2l]-
  Sum[Binomial[n+m+l+k+1,2k](Binomial[n+l-k+1,2(l-k)]+
  Binomial[n+l-k,2(l-k)]),{k,0,l}],
  Element[n|m|l,Integers]&&n>=0&&m>=0&&l>=0]
Out[2]= 0
In[3]:= Fplus[n_][x_]:=((x+1)^n+(x-1)^n)/2
In[4]:= Simplify[Fplus[m+2n][x]+Fplus[m][x]x^(2n)-
  Sum[(Binomial[2n-k,k]+Binomial[2n-k-1,k-1])
  Fplus[m+k][x]x^k,{k,0,n}],
  Element[m|n,Integers]&&m>=0&&n>=0]
Out[4]= 0
In[5]:= Simplify[Fplus[m+2n+1][x]+Fplus[m][x]x^(2n+1)-
  Sum[Binomial[2n-k,k](Fplus[m+k+1][x]x^k+
  Fplus[m+k][x]x^(k+1)),{k,0,n}],
  Element[m|n,Integers]&&m>=0&&n>=0]
Out[5]= 0
```

(10) と Theorem 5 よりこの節の主定理が得られる.

Theorem 6 ($C_\xi^{(2)}$ の生成元)**.**

$$C_\xi^{(2)}=C_\xi^{(1)}\left[\tau_\xi\left(P_n^{(n)}\right),\tau_\xi\left(P_{n+1}^{(n)}+P_n^{(n+1)}\right):n=1,2,\dots\right].$$

Theorem 6 より下記の元は互いに交換する.

$$
\begin{aligned}
C = C_\xi^{(0)} &: \operatorname{tr} e,\ \operatorname{tr} e^2,\ \operatorname{tr} e^3,\ \dots \\
C_\xi^{(1)} &: \operatorname{tr}\bigl(\xi e\bigr),\ \operatorname{tr}\bigl(\xi e^2\bigr),\ \operatorname{tr}\bigl(\xi e^3\bigr),\ \dots \\
C_\xi^{(2)} &: \operatorname{tr}\bigl(\xi^2 e\bigr),\ 2\operatorname{tr}\bigl(\xi^2 e^2\bigr) + \operatorname{tr}\bigl(\xi e \xi e\bigr),\ \operatorname{tr}\bigl(\xi^2 e^3\bigr) + \operatorname{tr}\bigl(\xi e \xi e^2\bigr),\ \dots
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] Alexander Mishchenko and Anatoly Fomenko: Euler equations on finite-dimensional Lie groups. Mathematics of the USSR-Izvestiya. **12**(2), 371–389 (1978)

[2] Maxim Kontsevich: Deformation quantization of Poisson manifolds. Letters in Mathematical Physics. **66**, 157–216 (2003)

[3] Ernest Vinberg: On certain commutative subalgebras of a universal enveloping algebra. Mathematics of the USSR-Izvestiya. **36**(1), 1–22 (1991)

[4] Leonid Rybnikov: The shift of invariants method and the Gaudin model. Funct. Anal. Appl. **40**(3), 188–199 (2006)

[5] Boris Feigin, Edward Frenkel, and Valerio Toledano Laredo: Gaudin models with irregular singularities. Advances in Mathematics. **223**(3), 873–948 (2010)

[6] Vyacheslav Futorny and Alexander Molev: Quantization of the shift of argument subalgebras in type A. Advances in Mathematics. **285**, 1358–1375 (2015)

[7] Alexander Molev and Oksana Yakimova: Quantisation and nilpotent limits of Mishchenko-Fomenko subalgebras. Representation Theory of the American Mathematical Society. **23**(12), 350–378 (2019)

[8] Alexander Molev: Sugawara operators for classical Lie algebras. volume 229. American Mathematical Soc. (2018)

[9] Alexander Molev: On Segal-Sugawara vectors and Casimir elements for classical Lie algebras. Letters in Mathematical Physics. **111**(1), 8 (2021)

[10] Oksana Yakimova: Symmetrisation and the Feigin-Frenkel centre. Compositio Mathematica. **158**(3), 585–622 (2022)

[11] Dimitri Gurevich, Pavel Pyatov, and Pavel Saponov: Braided Weyl algebras and differential calculus on $U(u(2))$. Journal of Geometry and Physics. **62**(5), 1175–1188 (2012)

[12] Yasushi Ikeda and Gerogy Sharygin: The argument shift method in universal enveloping algebra $U\mathfrak{gl}_d$. Journal of Geometry and Physics. **195**, 105030 (2024)

[13] Yasushi Ikeda: Quasidifferential operator and quantum argument shift method. Theoretical and Mathematical Physics. **212**(1), 918–924 (2022)

[14] Yasushi Ikeda: Second quantum argument shifts in general linear Lie algebras. Theoretical and Mathematical Physics. Manuscript submitted for publication.

[15] Leonid Rybnikov: Centralizers of certain quadratic elements in Poisson-Lie algebras and the method of translation of invariants. Russian Mathematical Surveys. **60**(2), 367–369 (2005)

移流拡散方程式の解の漸近挙動について

佐藤槙哉 (Shinya SATO) *
信州大学 大学院総合理工学研究科 工学専攻
福田一貴 (Ikki FUKUDA)†
信州大学 工学部 工学基礎部門

概要

本講演では, 移流拡散方程式の初期値問題を取り扱う. この問題の解は, 熱方程式と同様のオーダーで減衰し, 漸近形も同様に熱核の定数倍となることが知られている. 一方, その漸近率と解の第二次漸近形に関しては, 非線形項の指数 q に応じて変化する. 特に, 臨界冪 $q = 1 + \frac{2}{n}$ の場合には非線形項の影響が強く現れ, 第二次漸近形および漸近率に対数項が現れる. 本研究では, 解の第三次漸近形を具体的に構成することで, その漸近率を改良した最良な漸近率を導出することに成功したので, その結果について報告する. また, 一般論から得られる結果との比較についても述べる. 本講演の内容は信州大学の福田一貴氏との共同研究に基づく.

1 導入

本研究では, 次の偏微分方程式の初期値問題について考える :

$$\begin{aligned} &\partial_t u - \Delta u = a \cdot \nabla \left(|u|^{q-1} u \right), \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで, $u = u(x,t)$ は実数値の未知関数を表し, $u_0(x)$ は与えられた初期データ, $n \geq 1$, $q > 1$, $a \in \mathbb{R}^n$ とする. また, 偏微分作用素 ∂_t, ∇, Δ は, それぞれ以下で定義されるものとする.

$$\partial_t \coloneqq \frac{\partial}{\partial t}, \quad \nabla \coloneqq \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \quad \Delta \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

この偏微分方程式 (1.1) は移流拡散方程式と呼ばれるものであり, 物理量の移流と拡散のプロセスを記述する方程式として, 自然科学や工学の様々な場面で現れるものである. 方程式中の $-\Delta u$ の項が拡散効果, $a \cdot \nabla(|u|^{q-1}u)$ の項が非線形の移流効果を表し, それらの相互作用によって解の振る舞いが決定されて, 現象が時間発展してゆくというモデルである. 本研究では, この初期値問題 (1.1) の解の長時間漸近挙動について考える. 現象の時間発展を理解するためには, 対応する解が時間の経過に伴ってどう変化していくのかを解析すればよいと考えられる. しかし一般に, 非線形の偏微分方程式については, その解の形を具体的に書き下すことは困難であるため, 直接解の形を見てそのグラフを解析するなどということは期待できない. 一方, たとえ解の具体的な表示を得ることができない場合でも, 時間無限大での解の挙動については情報が得られる場合がある. そこで本研究では, 時間無限大で (1.1) の解を十分良く近似する関数, 即ち解の漸近形を詳しく解析することにより, 解の構造を理論的に理解することを目標とする. 具体的には, 解の漸近形をより高次の項まで構成して, 解の高次漸近展開公式を導出し, 解が漸近形へどのようなオーダーで漸近していくのかについて明らかにする.

* E-mail: 22w2048k@shinshu-u.ac.jp
† E-mail: i_fukuda@shinshu-u.ac.jp

記号. ここで, 以下の本文で使用する記号等を幾つか説明・定義しておく.

- $\alpha \coloneqq (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ で多重指数を表し, $\partial_x^\alpha f \coloneqq \dfrac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ と定める.
- 実数 $1 \leq p \leq \infty$ に対して, $L^p(\mathbb{R}^n)$ は通常の Lebesgue 空間を表すとする.
- 関数 $K(x)$ を用いて, 重み付き Lebesgue 空間 $L^p(\mathbb{R}^n; K(x))$ を次のように定義する.

$$L^p(\mathbb{R}^n; K(x)) \coloneqq \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, K(x)\, dx < \infty \right\}.$$

- 整数 $k \geq 0$ と実数 $1 \leq p \leq \infty$ に対して, Sobolev 空間 $W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ を次で定義する.

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \|f\|_{W^{k,p}} \coloneqq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial_x^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

- $I \subseteq [0, \infty)$ を区間とし, X を Banach 空間とする. このとき, $L^\infty(I; X)$ は X に値を取る I 上の本質的に有界な可測関数全体を表す. 同様に, $C(I; X)$ は X に値を取る I 上の連続関数全体を表す. さらに, $C^1(I; X)$ で X に値を取る I 上で一階連続微分可能な関数全体を表す.
- 関数 $f(x)$ の Fourier 変換と関数 $g(\xi)$ の Fourier 逆変換を次で定義する.

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx, \quad \mathcal{F}^{-1}[g](x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi} g(\xi)\, d\xi.$$

- 関数 $f(x)$ と $g(x)$ の畳み込み $(f * g)(x)$ を次で定義する.

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, dy.$$

  また, 関数 $F(x,t)$ と $g(x)$ の x 変数についての畳み込みを $(F(t) * g)(x)$ と表記する.
- 本稿全体を通して, C は様々な正の定数を表すこととし, 互いに異なるものであっても同じ C で表す. この定数 C は各種パラメータに依存することはあるが, 変数 x と t には依存しない.

2 既知の結果

この節では, 初期値問題 (1.1) の解の長時間漸近挙動に関する, 先行研究における既知の結果について述べよう. はじめに, (1.1) の線形化方程式, 即ち $a = 0$ の場合について考える :

$$\begin{aligned} &\partial_t u - \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

この方程式は熱方程式と呼ばれており, 最も基本的な偏微分方程式の一つとして知られている. この (2.1) は Fourier 変換を用いて具体的に解くことができる. 実際, 方程式と初期値を x 変数に関して Fourier 変換すると, Fourier 変換の微分法則により, 次が得られる.

$$\partial_t \hat{u}(\xi, t) + |\xi|^2 \hat{u}(\xi, t) = 0, \quad \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi).$$

上式を時間に関する常微分方程式として解くと, $\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}_0(\xi) e^{-t|\xi|^2}$ が得られるので, これを Fourier 逆変換すれば解 $u(x,t)$ が求められる. 実際, 熱核と呼ばれる関数 $G(x,t)$ を

$$G(x,t) \coloneqq \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \tag{2.2}$$

と定義すると, $\hat{G}(\xi,t)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-t|\xi|^2}$ となるので, Fourier 変換の合成積法則により, (2.1) の解は

$$u(x,t)=\mathcal{F}^{-1}\left[\hat{u}_0(\xi)e^{-t|\xi|^2}\right](x)=\mathcal{F}^{-1}\left[(2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{G}(\xi,t)\hat{u}_0(\xi)\right](x)=\mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{(G(t)*u_0)}(\xi)\right](x)$$
$$=(G(t)*u_0)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}G(x-y,t)u_0(y)\,dy,\quad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0 \tag{2.3}$$

と表現できる. このように, 線形の微分方程式は非線形の問題と違って解を具体的に求めることができる. しかし, これで完全に解の振る舞いが分かったとはまだ言えない. 実際, (2.3) を見てみると, 解が畳込みの積分の形で表現されているため, 積分が計算できない限り, 具体的な形状は直接には分からない. そこで, (2.3) を用いて, 解 $u(x,t)$ が $t\to\infty$ でどのような振る舞いをするのか, その長時間漸近挙動を解析する. まず, $g(x):=(4\pi)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4}}$ とおくと, (2.2) より, 熱核 $G(x,t)$ に対して,

$$\partial_x^\alpha G(x,t)=t^{-\frac{n}{2}-\frac{|\alpha|}{2}}(\partial_x^\alpha g)\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),\quad x\in\mathbb{R}^n,\ t>0$$

が成り立つ. このことから, $p\in[1,\infty]$ に対して, 熱核 $G(x,t)$ は次の L^p-減衰評価を満たす.

$$\|\partial_x^\alpha G(t)\|_{L^p}\le Ct^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{|\alpha|}{2}},\quad t>0. \tag{2.4}$$

従って, (2.3) と Young の不等式, (2.4) により, (2.1) の解 $u(x,t)$ に対しても, 同様の L^p-減衰評価

$$\|\partial_x^\alpha u(t)\|_{L^p}=\|\partial_x^\alpha G(t)*u_0\|_{L^p}\le C\|u_0\|_{L^1}t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{|\alpha|}{2}},\quad t>0 \tag{2.5}$$

が成立する. このことから, (2.1) の解 $u(x,t)$ は時間経過に伴い $O(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})})$ のオーダーで減衰し, さらに微分する毎に減衰率が $1/2$ だけ改善されることが分かった. それでは, 解 $u(x,t)$ はどのような形状で減衰するのだろうか. その具体的な表示について考察しよう. まず, 平均値の定理により,

$$G(x-y,t)=G(x,t)-\int_0^1 y\cdot\nabla G(x-\theta y,t)\,d\theta \tag{2.6}$$

が成り立つから, (2.3) により, 次が得られる.

$$(G(t)*u_0)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}G(x-y,t)u_0(y)\,dy$$
$$=\left(\int_{\mathbb{R}^n}u_0(y)\,dy\right)G(x,t)-\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^1 y\cdot\nabla G(x-\theta y,t)\,d\theta\right)u_0(y)\,dy.$$

上式を利用すると, $u_0\in L^1(\mathbb{R}^n)$ のとき, $p\in[1,\infty]$ に対して, 次の漸近公式が導ける.

$$\lim_{t\to\infty}t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|G(t)*u_0-MG(t)\|_{L^p}=0. \tag{2.7}$$

ここで, $M:=\int_{\mathbb{R}^n}u_0(x)\,dx$ である. なお, 詳しい証明については儀我–儀我 [4] を参照せよ. この漸近公式 (2.7) により, (2.1) の解 $u(x,t)$ は時間無限大においては熱核の定数倍である $MG(x,t)$ で近似できて, さらにその漸近率は評価 (2.5) での $O(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})})$ よりも改善された $o(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})})$ で与えられることが分かる. なお, この熱方程式 (2.1) に対してはより詳細な解の漸近挙動も解析されており, 解の高次漸近形についても導出されている. 実際, (2.6) に対して, 再び平均値の定理を用いると,

$$G(x-y,t)=G(x,t)-y\cdot\nabla G(x,t)+\int_0^1(1-\theta)y\cdot\left(D^2G(x-\theta y,t)y\right)d\theta$$

となるので, 上の条件に加えて $|x|u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ も仮定することで, $p \in [1,\infty]$ に対して, 漸近公式

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \left\| G(t) * u_0 - MG(t) + m \cdot \nabla G(t) \right\|_{L^p} = 0 \tag{2.8}$$

が導かれる. ここで, $m \coloneqq (m_1, m_2, \cdots, m_n)$, $m_i \coloneqq \int_{\mathbb{R}^n} x_i u_0(x)\, dx$ である. 上式 (2.8) は解の時間無限大での第一次漸近形が $MG(x,t)$ というだけでなく, 第二次漸近形が $-m \cdot \nabla G(x,t)$ で与えられるということを意味する. この漸近展開はさらに拡張できて, Duoandikoetxea–Zuazua [1] により, 一般の高次漸近展開公式も得られており, $G(x,t)$ の高階の導関数が高次漸近形として順次現れる.

次に, 元の非線形問題 (1.1) について, 即ち $a \neq 0$ の場合における既知の結果について解説しよう. この初期値問題 (1.1) は Escobedo–Zuazua [2] および Zuazua [7] によって詳しく研究されており, 解の漸近挙動についても非常に多くの結果が得られている. まず, (1.1) の時間大域解の存在と一意性およびその解の減衰評価については, Escobedo–Zuazua [2] によって既に示されている. 実際, 先程と同様に Fourier 変換を通じて方程式を変換すると, 対応する積分方程式

$$u(x,t) = \left(G(t) * u_0\right)(x) + \int_0^t \left(a \cdot \nabla G(t-\tau) * \left(|u|^{q-1} u \right)(\tau) \right)(x)\, d\tau \tag{2.9}$$

が得られる. この積分方程式を直接解析することにより, 次の結果が示される.

命題 2.1 (Escobedo–Zuazua [2])**.** $q > 1$, $a \in \mathbb{R}^n$ とし, 初期値は次を満たすと仮定する.

$$u_0 \in L^1\left(\mathbb{R}^n\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^n\right).$$

このとき, 初期値問題 (1.1) の唯一つの時間大域解

$$u \in C\left([0,\infty); L^1\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \cap C\left((0,\infty); L^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^n \times [0,\infty)\right)$$

が存在する. また, $p \in (1,\infty)$ に対して, 解 $u(x,t)$ は次の性質を満たす.

$$u \in C\left((0,\infty); W^{2,p}\left(\mathbb{R}^n\right)\right) \cap C^1\left((0,\infty); L^p(\mathbb{R}^n)\right).$$

さらに, $p \in [1,\infty]$ に対して, 解 $u(x,t)$ は次の L^p-減衰評価を満たす.

$$\left\| u(t) \right\|_{L^p} \leq C t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \quad t > 0. \tag{2.10}$$

この評価 (2.10) から, 初期値問題 (1.1) の解 $u(x,t)$ は熱方程式 (2.1) の解と同様のオーダーで減衰するということが分かった. なお, これらの結果は Zuazua のレクチャーノート [6] にも非常に詳しくまとめられている. それでは解の漸近形についてはどうであろうか. これに関しては, Escobedo–Zuazua の同一の論文 [2] によって, 次の漸近公式が導出されている.

命題 2.2 (Escobedo–Zuazua [2])**.** $q > 1 + \frac{1}{n}$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n; 1+|x|) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, $p \in [1,\infty]$ に対して, $t \geq 1$ のとき, 初期値問題 (1.1) の解 $u(x,t)$ は次の漸近公式を満たす.

$$\left\| u(t) - MG(t) \right\|_{L^p} \leq C \begin{cases} t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}, & q > 1 + \dfrac{2}{n}, \\ t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}} \log t, & q = 1 + \dfrac{2}{n}, \\ t^{-\frac{n}{2}\left(q-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}}, & 1 + \dfrac{1}{n} < q < 1 + \dfrac{2}{n}. \end{cases} \tag{2.11}$$

この結果から, 初期値問題 (1.1) に対して, $q > 1 + \frac{1}{n}$ の場合には線形部分が支配的となり, 解 $u(x,t)$ は熱方程式 (2.1) の場合と同様に熱核の定数倍 $MG(x,t)$ に漸近することが分かる ($q = 1 + \frac{1}{n}$ の場合には, (1.1) の持つ自己相似解に漸近する. cf. [2]). しかし解の挙動が全く同じというわけではなく, $MG(x,t)$ への漸近率は, $q = 1 + \frac{2}{n}$ を臨界に三つに分岐する. なお, この指数は, (2.9) の第二項である非線形項を積分したときに出てくる, 次式の最右辺の積分の可積分性に起因して現れる.

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,\tau)|^q \, dx \, d\tau = \int_0^t \|u^q(\cdot,\tau)\|_{L^1} \, d\tau \le C \int_0^t (1+\tau)^{-\frac{n}{2}(q-1)} \, d\tau. \tag{2.12}$$

さらに, 非線形項の影響は解の第二次漸近形にはより顕著に現れる. 実際, Zuazua [7] では非線形項の指数 q の (2.11) における三つの場合分けに応じて, 解の第二次漸近形が本質的に異なることが示されている. 特に, 臨界的な状況である $q = 1 + \frac{2}{n}$ の場合には, 解の第二次漸近形に非線形項の影響が強く現れることが知られている. ここでは, [7] から $q = 1 + \frac{2}{n}$ の場合の結果を抜粋して述べよう.

命題 2.3 (Zuazua [7])**.** $q = 1 + \frac{2}{n}$ とし, 命題 2.2 の条件に加えて, $u_0 \in L^2\left(\mathbb{R}^n; e^{\frac{|x|^2}{4}}\right)$ を仮定する. このとき, $p \in [1,\infty]$ に対して, 初期値問題 (1.1) の解 $u(x,t)$ は次の漸近公式を満たす.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}}}{\log t} \left\| u(t) - MG(t) - \alpha_n |M|^{\frac{2}{n}} M(\log t) a \cdot \nabla G(t) \right\|_{L^p} = 0. \tag{2.13}$$

ここで, $\alpha_n \coloneqq \frac{1}{4\pi}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}$ である.

熱方程式に対する解の第二次漸近公式 (2.8) と上記の漸近公式 (2.13) を比較すると, 熱方程式の場合には解の第二次漸近形は $-m \cdot \nabla G(x,t)$ で与えられたのに対して, (1.1) の解の第二次漸近形は $\alpha_n |M|^{\frac{2}{n}} M(\log t) a \cdot \nabla G(x,t)$ であり, 定数倍の差だけでなく減衰率的にも $\log t$ のズレがあり, 本質的に異なるものであることが分かる. なお, この $\log t$ は (2.12) の積分から導かれるもので, 非線形項の影響から来るものであることに注意する. また, 漸近公式 (2.8) と (2.13) では, その第二次漸近形への漸近率にも違いがあり, (2.8) では $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}})$ なのに対して, (2.13) では $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}} \log t)$ と $o(\log t)$ だけ遅くなっている. 一方, 石毛–川上 [5] では (1.1) の解 $u(x,t)$ に対して, この漸近率を改善して (2.8) と同様のオーダー $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}})$ を実現した, 次の漸近公式が導出されている.

命題 2.4 (石毛–川上 [5])**.** $q > 1 + \frac{1}{n}$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n; 1+|x|) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, $p \in [1,\infty]$ に対して, 初期値問題 (1.1) の解 $u(x,t)$ は次の漸近公式を満たす.

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}} \|u(t) - \tilde{u}(t)\|_{L^p} = 0. \tag{2.14}$$

ここで, 関数 $\tilde{u}(x,t)$ は次で定義される.

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x,t) &:= MG(x,1+t) - c(t) \cdot \nabla G(x,1+t) \\
&\qquad + |M|^{q-1} M \int_0^t \left(a \cdot \nabla G(t-\tau) * G(1+\tau)^q\right)(x) \, d\tau, \\
c_i(t) &:= \int_{\mathbb{R}^n} x_i u(x,t) \, dx - |M|^{q-1} M \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} x_i \left\{a \cdot \nabla \left(G(x,1+\tau)^q\right)\right\} dx \, d\tau, \\
c(t) &:= (c_1(t), c_2(t), \cdots, c_n(t)).
\end{aligned}$$

なお, 実際の論文 [5] では, 移流拡散方程式 (1.1) だけでなく, より一般の放物型偏微分方程式

$$\begin{aligned} &\partial_t u - \Delta u = F(x,t,u,\nabla u), \quad x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.15}$$

の解の長時間漸近挙動が研究されており, 上記の命題 2.4 はその一般論からの帰結である. 詳しい $F(x,t,u,\nabla u)$ の仮定や, より一般の方程式 (2.15) に対する結果については, 元の論文 [5] を参照せよ.

さて, この命題 2.4 によって, 解の $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}})$ までのオーダーでの漸近展開は達成されたが, 公式 (2.13) と (2.14) ではそれぞれ漸近形の表現が異なっていることに注意する. 上記の (2.14) では, $q > 1 + \frac{1}{n}$ を満たす一般の指数 q に対して, 統一して (1.1) の解の漸近挙動を表現できているという利点がある. 一方, [7] で得られている結果とは異なり, 指数 q が臨界冪 $q = 1 + \frac{2}{n}$ の場合の非線形項の漸近形への影響は見えにくくなっている. 反対に, [7] では非線形項に応じて第二次漸近形が詳かく分解して表現されているが, 漸近率は $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}} \log t)$ と遅くなっている. そこで本研究では, Zuazua [7] が導いた解の漸近形と同一の表現を持つ形, 即ちあくまで第一次漸近形は $MG(x,t)$, 第二次漸近形は $\alpha_n |M|^{\frac{2}{n}} M(\log t) a \cdot \nabla G(x,t)$ であると考えたときに, 漸近率 $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}})$ が実現できるかどうか, 即ち (2.13) で与えられた漸近率 $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}} \log t)$ が最良であるかどうかについて考察を行った. 具体的には, (2.15) に対する一般論を経由せずに (1.1) を直接解析して, [7] で得られた解の第二次漸近形の情報を利用することで, 解の第三次漸近形を新規に構成して, 新しい解の漸近公式を導出した. その結果として, 第三次漸近形への漸近率として $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}})$ を実現することに成功し, そこからの系として, 第二次漸近形への最良な漸近率を特定することに成功した.

3 研究の主結果

この節では本研究の主結果を紹介する. 今回我々は, 積分方程式 (2.9) の Duhamel 項の解の第二次漸近形を新規に構成することにより, (1.1) の解の第三次漸近形を導出することに成功した. 主結果を述べるために, 新しい関数 $\Psi(x,t)$ を次で定義する.

$$\Psi(x,t) := t^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \Psi_* \left(\frac{x}{\sqrt{t}} \right),\ \Psi_*(x) := a \cdot \nabla \left(\int_0^1 \left(G(1-s) * F(s) \right)(x)\, ds \right), \tag{3.1}$$

$$F(y,s) := s^{-\frac{n}{2}-1} F_* \left(\frac{y}{\sqrt{s}} \right),\ F_*(y) := \frac{1}{2^{n+2}\pi^{\frac{n}{2}+1}} \left\{ e^{-\frac{|y|^2}{4}\left(1+\frac{2}{n}\right)} - \left(1+\frac{2}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4}} \right\}. \tag{3.2}$$

これに加えて, 定数 $\mathcal{M}$ を次で定義する.

$$\mathcal{M} := \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} \left(|u|^{\frac{2}{n}} u \right)(y,\tau)\, dy\, d\tau + \int_1^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \left(|u|^{\frac{2}{n}} u - |MG|^{\frac{2}{n}} MG \right)(y,\tau)\, dy\, d\tau.$$

上記の記号の下, (1.1) の解に対する新しい漸近公式として, 次が成り立つ.

定理 3.1 (主結果)**.** $q = 1 + \frac{2}{n}$, $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n; 1+|x|) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ と仮定する. このとき, $p \in [1,\infty]$ に対して, 初期値問題 (1.1) の解 $u(x,t)$ は次の漸近公式を満たす.

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \Big\| & u(t) - MG(t) - \alpha_n |M|^{\frac{2}{n}} M(\log t) a \cdot \nabla G(t) \\ & - (\mathcal{M}a - m) \cdot \nabla G(t) - \left(|M|^{\frac{2}{n}} M \right) \Psi(t) \Big\|_{L^p} = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

上記の漸近公式 (3.3) は, (1.1) の解の第三次漸近形が $(\mathcal{M}a-m)\cdot\nabla G(x,t)+\left(|M|^{\frac{2}{n}}M\right)\Psi(x,t)$ で与えられ, さらにその第三次漸近形への漸近率として, 命題 2.4 の (2.14) と同様のオーダー $o(t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}})$ が実現されることを意味する. また, 解の第一次・第二次の漸近形の形状は Zuazua [7] で得られたものと同一の表現であることから, これは命題 2.3 の漸近公式 (2.13) の拡張になっている. さらに, $\Psi(x,t)$ の定義 (3.1) に注意すれば, この定理から直ちに次の結果も得られる.

系 3.2. 定理 3.1 の仮定の下, $t\to\infty$ で次の漸近公式が成り立つ.

$$\left\|u(t)-MG(t)-\alpha_n|M|^{\frac{2}{n}}M(\log t)a\cdot\nabla G(t)\right\|_{L^p}=(C_*+o(1))\,t^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}. \tag{3.4}$$

ここで, $C_*:=\left\|(\mathcal{M}a-m)\cdot\nabla G(1)+|M|^{\frac{2}{n}}M\Psi_*\right\|_{L^p}$ である.

注意 3.3. $C_*\neq 0$ の場合, 上式 (3.4) は解の第二次漸近形への上下からの評価を意味する. 従って, このとき定理 2.3 の (2.13) で得られた漸近率 $o(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}\log t)$ は最良ではなく改良することができて, $O(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}})$ が最良の漸近率となる. 一方, $C_*=0$ の場合, (3.4) は次式の成立を意味する.

$$\lim_{t\to\infty}t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}}\left\|u(t)-MG(t)-\alpha_n|M|^{\frac{2}{n}}M(\log t)a\cdot\nabla G(t)\right\|_{L^p}=0.$$

これは, $C_*=0$ の場合には第二次漸近形への漸近率は, $O(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}})$ もさらに最良ではなくなり, より改善された漸近率 $o(t^{-\frac{n}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}})$ が得られることを意味する. なお, これらに関連する結果は, 類似の構造を持つ一次元の散逸・分散型方程式に対して, [3] でも得られていることに注意する.

4 主結果の証明の概略

この節では, 本研究の主結果である定理 3.1 の証明の概略について述べる. 以下, $q=1+\frac{2}{n}$ とする. まず, (1.1) に対応する積分方程式 (2.9) を考えて, その Duhamel 項を $D(x,t)$ とおく.

$$\begin{aligned}\text{i.e. }\ u(x,t)&=(G(t)*u_0)(x)+\int_0^t\left(a\cdot\nabla G(t-\tau)*\left(|u|^{\frac{2}{n}}u\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau\\&=:(G(t)*u_0)(x)+D(x,t).\end{aligned} \tag{4.1}$$

上式の第一項 $(G(t)*u_0)(x)$ に対する漸近公式は (2.8) によって既に与えられているため, Duhamel 項 $D(x,t)$ の漸近公式を導出すればよい. 実際, $D(x,t)$ の第二次漸近公式として, 次が成り立つ.

定理 4.1. $u_0\in L^1(\mathbb{R}^n;1+|x|)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とすると, $D(x,t)$ に対して, 次の漸近公式が成り立つ.

$$\lim_{t\to\infty}t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}}\left\|D(t)-\alpha_n|M|^{\frac{2}{n}}M(\log t)a\cdot\nabla G(t)-\mathcal{M}a\cdot\nabla G(t)-\left(|M|^{\frac{2}{n}}M\right)\Psi(t)\right\|_{L^p}=0.$$

ここで, この定理を示すために, 次の新しい関数 $v(x,t)$ と $w(x,t)$ を導入する.

$$\begin{aligned}v(x,t)&=\int_1^t\left(a\cdot\nabla G(t-\tau)*\left(|G|^{\frac{2}{n}}G\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau,\\w(x,t)&=\int_0^1\left(a\cdot\nabla G(t-\tau)*\left(|u|^{\frac{2}{n}}u\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau\\&\quad+\int_1^t\left(a\cdot\nabla G(t-\tau)*\left(|u|^{\frac{2}{n}}u-|MG|^{\frac{2}{n}}MG\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau.\end{aligned}$$

いま, 上記の $v(x,t)$ と $w(x,t)$ を用いると, (4.1) の Duhamel 項 $D(x,t)$ は次のように分割できる.

$$\begin{aligned}
D(x,t) &= \int_0^t \left(a\cdot\nabla G(t-\tau) * \left(|u|^{\frac{2}{n}}\,u\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau \\
&= \int_1^t \left(a\cdot\nabla G(t-\tau) * \left(|MG|^{\frac{2}{n}}MG\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau \\
&\quad + \int_0^1 \left(a\cdot\nabla G(t-\tau) * \left(|u|^{\frac{2}{n}}u\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau \\
&\quad + \int_1^t \left(a\cdot\nabla G(t-\tau) * \left(|u|^{\frac{2}{n}}u - |MG|^{\frac{2}{n}}MG\right)(\tau)\right)(x)\,d\tau \\
&= |M|^{\frac{2}{n}}Mv(x,t) + w(x,t).
\end{aligned}$$

このことから, 次の関係式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
&D(x,t) - \alpha_n|M|^{\frac{2}{n}}M(\log t)a\cdot\nabla G(x,t) - \mathcal{M}a\cdot\nabla G(x,t) - \left(|M|^{\frac{2}{n}}M\right)\Psi(x,t) \\
&= |M|^{\frac{2}{n}}M\left\{v(x,t) - \alpha_n(\log t)a\cdot\nabla G(x,t) - \Psi(x,t)\right\} + \left\{w(x,t) - \mathcal{M}a\cdot\nabla G(x,t)\right\}.
\end{aligned}$$

従って, 定理 4.1 を示すには上式の第一項と第二項を評価すればよい. 実際, 次の命題が成り立つ.

命題 4.2. $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n; 1+|x|)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とすると, $v(x,t)$ に対して, 次の漸近公式が成り立つ.

$$\left\|v(t) - \alpha_n(\log t)a\cdot\nabla G(t) - \Psi(t)\right\|_{L^p} \le Ct^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-1}, \quad t>1. \tag{4.2}$$

命題 4.3. $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n; 1+|x|)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ とすると, $w(x,t)$ に対して, 次の漸近公式が成り立つ.

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}}\left\|w(t) - \mathcal{M}a\cdot\nabla G(t)\right\|_{L^p} = 0.$$

上記の命題 4.3 については, 放物型偏微分方程式の解の漸近解析の手法を応用すれば, 比較的簡単に証明できるため, ここでは本研究のメインパートに当たる, 命題 4.2 の証明について述べよう.

命題 4.2 の証明. まず, 熱核 $G(x,t)$ が $\partial_t\left(a\cdot\nabla G(x,t)\right) = \Delta\left(a\cdot\nabla G(x,t)\right)$ を満たすことに着目し, $V(x,t) \coloneqq \alpha_n(\log t)a\cdot\nabla G(x,t)$ を時間変数 t で微分すると, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
\partial_t V(x,t) &= \frac{\alpha_n}{t}\left(a\cdot\nabla G(x,t)\right) + \alpha_n(\log t)\partial_t\left(a\cdot\nabla G(x,t)\right) \\
&= \frac{\alpha_n}{t}\left(a\cdot\nabla G(x,t)\right) + \alpha_n(\log t)\Delta\left(a\cdot\nabla G(x,t)\right).
\end{aligned}$$

従って, $V(x,t)$ は次の初期値問題の解となることが分かる.

$$\begin{aligned}
&\partial_t V - \Delta V = \frac{\alpha_n}{t}\left(a\cdot\nabla G(x,t)\right), \quad x\in\mathbb{R}^n,\ t>1, \\
&V(x,1) = 0, \quad x\in\mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

これは非斉次の熱方程式であるので, 解の表現公式を用いれば, $V(x,t)$ は次の形に書き換えられる.

$$V(x,t) = \alpha_n\int_1^t \tau^{-1}\left(G(t-\tau) * \left(a\cdot\nabla G(\tau)\right)\right)(x)\,d\tau.$$

ここで, $(|G|^{\frac{2}{n}}G-\alpha_n\tau^{-1}G)(y,\tau)=\tau^{-\frac{n}{2}-1}F_*(\frac{y}{\sqrt{\tau}})$ が成り立つことに注意すると, 次が得られる.

$$v(x,t)-V(x,t)=a\cdot\nabla\int_1^t\tau^{-\frac{n}{2}-1}\int_{\mathbb{R}^n}G(x-y,t-\tau)F_*\left(\frac{y}{\sqrt{\tau}}\right)dy\,d\tau=:a\cdot\nabla K(x,t). \quad (4.3)$$

上記の $K(x,t)$ に対して, 熱核の自己相似性に着目して, 変数変換を複数回行えば, 次が得られる.

$$\begin{aligned}
K(x,t)&=\int_1^t\tau^{-\frac{n}{2}-1}\int_{\mathbb{R}^n}G(x-y,t-\tau)F_*\left(\frac{y}{\sqrt{\tau}}\right)dy\,d\tau\\
&=\int_1^t\tau^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}G\left(x-\sqrt{\tau}z,t-\tau\right)F_*\left(z\right)dz\,d\tau\quad\left(z=\frac{y}{\sqrt{\tau}}\right)\\
&=\int_{\frac{1}{t}}^1 s^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}G\left(x-\sqrt{ts}z,t(1-s)\right)F_*\left(z\right)dz\,ds\quad(\tau=ts)\\
&=\int_{\frac{1}{t}}^1 s^{-1}t^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}-\sqrt{s}z,1-s\right)F_*\left(z\right)dz\,ds\\
&=t^{-\frac{n}{2}}\int_{\frac{1}{t}}^1\int_{\mathbb{R}^n}G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}-y,1-s\right)s^{-\frac{n}{2}-1}F_*\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right)dy\,ds\quad\left(z=\frac{y}{\sqrt{s}}\right)\\
&=t^{-\frac{n}{2}}\int_{\frac{1}{t}}^1\int_{\mathbb{R}^n}G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}-y,1-s\right)F(y,s)\,dy\,ds\\
&=t^{-\frac{n}{2}}\int_{\frac{1}{t}}^1\left(G(1-s)*F(s)\right)\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)ds. \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

従って, 関数 $\Psi(x,t)$ の定義 (3.1) に注意すれば, (4.3) と (4.4) より,

$$\begin{aligned}
\|v(t)-V(t)-\Psi(t)\|_{L^p}&=t^{-\frac{n}{2}}\left\|a\cdot\nabla\int_0^{\frac{1}{t}}\left(G(1-s)*F(s)\right)\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right)ds\right\|_{L^p}\\
&=t^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}+\frac{n}{2p}}\left\|a\cdot\nabla\int_0^{\frac{1}{t}}\left(G(1-s)*F(s)\right)(\cdot)\,ds\right\|_{L^p} \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

となるから, 上式最右辺のノルムを評価すればよい. いま, 平均値の定理より,

$$G(x-y,1-s)=G(x,1-s)-\int_0^1 y\cdot\nabla G(x-\theta y,1-s)\,d\theta$$

となることと, $\int_{\mathbb{R}^n}F_*(\frac{y}{\sqrt{t}})\,dy=t^{\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}F_*\left(z\right)dz=0$ に注意すると, (3.2) と Schwarz の不等式より,

$$\begin{aligned}
&\left\|a\cdot\nabla\int_0^{\frac{1}{t}}\left(G(1-s)*F(s)\right)(\cdot)\,ds\right\|_{L^p}\\
&\le\int_0^{\frac{1}{t}}\left\|a\cdot\nabla\int_{\mathbb{R}^n}G(\cdot-y,1-s)s^{-\frac{n}{2}-1}F_*\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right)dy\right\|_{L^p}ds\\
&=\int_0^{\frac{1}{t}}s^{-\frac{n}{2}-1}\left\|a\cdot\nabla\int_{\mathbb{R}^n}\left(G(\cdot,1-s)-\int_0^1 y\cdot\nabla G(\cdot-\theta y,1-s)\,d\theta\right)F_*\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right)dy\right\|_{L^p}ds\\
&=\int_0^{\frac{1}{t}}s^{-\frac{n}{2}-1}\left\|a\cdot\nabla\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^1 y\cdot\nabla G(\cdot-\theta y,1-s)F_*\left(\frac{y}{\sqrt{s}}\right)d\theta\,dy\right\|_{L^p}ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{n}{2}-1} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 a \cdot \left(D^2 G(\cdot - \theta y, 1-s) y \right) F_* \left(\frac{y}{\sqrt{s}} \right) d\theta \, dy \right\|_{L^p} ds \\
&\le \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{n}{2}-1} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^1 |a| \left| D^2 G(\cdot - \theta y, 1-s) \right| |y| \left| F_* \left(\frac{y}{\sqrt{s}} \right) \right| d\theta \, dy \right\|_{L^p} ds \\
&= |a| \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \left\| \int_0^1 \frac{1}{\theta^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| D^2 G \left(\frac{\cdot}{\theta} - y, \frac{1-s}{\theta^2} \right) \right| \frac{|y|}{\sqrt{s}} \left| F_* \left(\frac{y}{\sqrt{s}} \right) \right| dy \, d\theta \right\|_{L^p} ds =: I(t). \quad (4.6)
\end{aligned}
$$

ここで, $\tilde{F}(y,s) := \frac{|y|}{\sqrt{s}} |F_*(\frac{y}{\sqrt{s}})|$ とおけば, 次が成り立つ.

$$
\left\| \left(\left| D^2 G \left(\frac{1-s}{\theta^2} \right) \right| * \tilde{F}(s) \right) \left(\frac{\cdot}{\theta} \right) \right\|_{L^p} = \theta^{\frac{n}{p}-2} \left\| \left(\left| D^2 G \left(\frac{1-s}{\theta^2} \right) \right| * \tilde{F}(s) \right) (\cdot) \right\|_{L^p}.
$$

故に, $\|\tilde{F}(\cdot,s)\|_{L^1} = s^{\frac{n}{2}} \| |\cdot| |F_*(\cdot)| \|_{L^1}$ と Young の不等式, さらに熱核の L^p-減衰評価 (2.4) から,

$$
\left\| D^2 G \left(\frac{1-s}{\theta^2} \right) \right\|_{L^p} \le C(1-s)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-1} \theta^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)+2}
$$

が成り立つことにも注意すると, $I(t)$ に対して次の評価が得られる.

$$
\begin{aligned}
I(t) &\le |a| \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \int_0^1 \theta^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)-2} \left\| \left(\left| D^2 G \left(\frac{1-s}{\theta^2} \right) \right| * \tilde{F}(s) \right) (\cdot) \right\|_{L^p} d\theta \, ds \\
&\le |a| \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \int_0^1 \theta^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)-2} \left\| D^2 G \left(\frac{1-s}{\theta^2} \right) \right\|_{L^p} \left\| \tilde{F}(\cdot,s) \right\|_{L^1} d\theta \, ds \\
&\le C \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{n}{2}-\frac{1}{2}} \int_0^1 \theta^{-n\left(1-\frac{1}{p}\right)-2} (1-s)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-1} \theta^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)+2} s^{\frac{n}{2}} \| |\cdot| |F_*(\cdot)| \|_{L^1} d\theta \, ds \\
&\le C \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{1}{2}} (1-s)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-1} ds \le C \left(1 - \frac{1}{t} \right)^{-\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-1} \int_0^{\frac{1}{t}} s^{-\frac{1}{2}} ds \le C t^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.7)
\end{aligned}
$$

最後に, (4.5), (4.6), (4.7) を組み合わせれば, 所望の評価 (4.2) が成立する. □

参考文献

[1] J. Duoandikoetxea and E. Zuazua, *Moments, masses de Dirac et décomposition de fonctions*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Serie I (1992) 693–698.

[2] M. Escobedo and E. Zuazua: *Large time behavior for convection-diffusion equations in* $\mathbb{R}^n$. J. Funct. Anal. **100** (1991) 119–161.

[3] I. Fukuda and Y. Irino: *Higher-order asymptotic profiles for solutions to the Cauchy problem for a dispersive-dissipative equation with a cubic nonlinearity*, arXiv.2211.04667.

[4] 儀我美一, 儀我美保：非線形偏微分方程式–解の漸近挙動と自己相似解–, 共立出版, 1999.

[5] K. Ishige and T. Kawakami: *Asymptotic expansions of solutions of the Cauchy problem for nonlinear parabolic equations*, J. Anal. Math. **121** (2013) 317–351.

[6] E. Zuazua: *Asymptotic behavior of scalar convection-diffusion equations*, arXiv.2003.11834.

[7] E. Zuazua: *Weakly nonlinear large time behavior for scalar convection-diffusion equations*, Differ. Integral Equ. **6** (1993) 1481–1492.

重み付き p-Laplace 方程式に対するゲーム解釈

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
相原真生 (Mamoru AIHARA) *

概要

偏微分方程式の粘性解について, 2 人零和ゲームで定まる値関数によって特徴付けできることが知られている. 本稿では, 重み付き p-Laplace 方程式に対して, 2 人のプレイヤーによる確率零和ゲームを与え, そのゲームの値関数の極限が方程式の粘性解になることを紹介する. 証明については値関数の境界での連続性と比較定理を用いて行う.

1　導入

本講演では, 次の偏微分方程式の境界値問題を考える.

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\Big(f(x)|Du(x)|^{p-2}Du(x)\Big)=0, & x\in\Omega, \\ u(x)=F(x), & x\in\partial\Omega. \end{cases} \tag{F}$$

ここで $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ は有界領域とし, $f\in C^1(\Omega)$ と $F\in C(\mathbb{R}^n)$ は与えられた実数値関数, $p\in(2,\infty)$ は定数とする. $u:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ を未知関数とし, 変数 $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ についての勾配と Hesse 行列をそれぞれ, $Du=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, $D^2u=\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right\}_{1\le i,j\le n}$ とかく.

本稿の目的は, 方程式 (F) に関して**ゲーム解釈を構築**することである.

1.1　重み付き p-Laplace 方程式

本稿で扱う方程式 (F) は, 重み付き p-Laplace 方程式とよばれ, p-Laplace 方程式の一般化である. 重み付き p-Laplace 方程式は, 重み付き逆平均曲率流方程式の等高面解の近似 [4] に用いられる. また, 非線形ポテンシャル論 [5] で研究されており, 比較定理や変分法的な性質が知られている. 具体的には, 重み付き p-Laplace 方程式は (I) で定まるエネルギー関数 $I:W^{1,p}_{loc}(\Omega)\to\mathbb{R}$ の Euler–Lagrange 方程式になることが知られている.

$$I(u):=\int_\Omega f(x)|Du(x)|^p dx. \tag{I}$$

* E-mail:aihara.mamoru.p7@elms.hokudai.ac.jp

1.2 ゲーム解釈

ゲーム解釈について紹介しよう．ここでいうゲームとは, 2 人のプレイヤーがそれぞれあるコストを最大化, 最小化することを目的に争う零和ゲームである．ゲームによって定まる**値関数**で偏微分方程式の粘性解を特徴付けできることは現在広く知られている．ゲームと粘性解の関係については, はじめに Evans, Souganidis の [2] で 1 階の Hamilton–Jacobi–Isaacs 方程式の粘性解を決定論的ゲームによって定まる値関数で特徴付けできることが証明された．2 階の Hamilton–Jacobi–Isaacs 方程式に対しては, Fleming, Soner の [3] で研究されている．ここでは, 確率過程の含まれるゲームの値関数によって, 粘性解を近似している．Kohn, Serfaty の [8,9] では平均曲率流方程式, 特異性のない一般の 2 階楕円型, 放物型方程式に対して確率を含まない決定論的微分ゲームが導入された．また, ∞-Laplace 方程式や p-Laplace 方程式 [15,16] に対しては, 「tug-of-war」とよばれる確率ゲームも導入されている．

ゲーム解釈を考える利点は, 解の挙動をゲームの戦略を用いて, 全く別の視点から知ることが可能となる点である．具体的に, ゲーム解釈を応用して得られた結果として, p-Laplace 方程式の解の正則性, Harnack 不等式 [12], 放物型 p-Laplace 方程式の解の凸性保存 [11] が挙げられる．

1.3 先行研究とアイデア

先行研究 [14] では, 重みのない p-Laplace 方程式に対してゲームを構築し, 構築したゲームで定まる値関数 u_ϵ が, $\epsilon \to 0$ で p-Laplace 方程式の粘性解に収束することを示している．このゲームではプレイヤー A による操作, プレイヤー B による操作, Random Walk の 3 種類の操作で駒の動きを支配する．証明はまず, ゲームで得た値関数が動的計画原理という等式をみたすことを示す．つぎに, 値関数のある意味での同程度連続性, 一様有界性を示し, Ascoli–Arzela の定理から値関数が連続関数に一様収束することを示す．動的計画原理と一様収束性から, 値関数が粘性解に収束することが導かれる．

以上が先行研究 [14] の結果であるが, 今回, 方程式に重みをつけたことで先行研究のゲームに, 指定された方向へ駒を動かすという操作を追加した．証明は基本的に先行研究と同様の手法で行うが, 大きく異なる点がある．先行研究では値関数が一様収束極限をもつことを示すために値関数の同程度連続性が必要だった．今回操作を追加したことで同程度連続性は同様の手法では得られない．そこで relaxed limit と比較定理を利用する手法 [9] を用いる．この証明では値関数の境界付近でのある意味での連続性が必要になるため, 境界付近で通常の p-Laplace 方程式の値関数と今回の値関数が一致することを示し, p-Laplace 方程式の場合に帰着させてある意味での連続性を導く．

2 主定理

f, Ω に対する仮定を述べる．ただし, $B_r(x)$ は x 中心の半径 r の開球である．

- 仮定 $(f1)$
  f は一様に正値かつ有界な関数である. すなわち次が成り立つ.
$$0 < \inf_{x\in\Omega} f(x) \le \sup_{x\in\Omega} f(x) < \infty.$$
- 仮定 $(f2)$
  ある定数 $d > 0$ が存在して, 集合 $\{y \in \Omega \mid \mathrm{dist}(y, \Omega) \le d\}$ 上で $f \equiv 1$ となる.
- 仮定 $(\Omega 1)$
  ある $\tilde{\delta} > 0$ が存在して, 任意の $0 < \delta \le \tilde{\delta},\ \epsilon > 0,\ y \in \partial\Omega$ に対して, 次をみたす $z \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ が存在する.
$$y \in B_\delta(z) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

次に**ゲームのルール**を述べる. このゲームはプレイヤー A とプレイヤー B の 2 人によって行われる. $\epsilon > 0$ に対して, 次のルールの下, 値関数 u_ϵ を定義する. 以下

$$\alpha := \frac{p-2}{p+n},\ \beta := 1-\alpha,\ \gamma(x) := \frac{f(x)}{\frac{|Df(x)|}{2(p+n)} + f(x)}$$

とし, $f \in C^1(\Omega)$ と $F \in C(\Omega)$ は方程式 (F) で与えられた関数とし, $\Gamma_\epsilon = \{y \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \mid \mathrm{dist}(y, \Omega) \le \epsilon\}$ とする.

(1) 初期位置 $x_0 \in \Omega$ に駒をおく.
(2) 以下の操作を繰り返し $x_0, x_1, x_2, \ldots$ と駒を動かす.
  x_k に駒があるとき, 次のいずれかの操作を行い駒を x_{k+1} に動かす $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.
  - **操作 1.** 確率 $\frac{\gamma(x_k)\alpha}{2}$ でプレイヤー A が $B_\epsilon(x_k)$ の好きな位置に駒を移動する.
  - **操作 2.** 確率 $\frac{\gamma(x_k)\alpha}{2}$ でプレイヤー B が $B_\epsilon(x_k)$ の好きな位置に駒を移動する.
  - **操作 3.** 確率 $\gamma(x_k)\beta$ で $B_\epsilon(x_k)$ 上ランダムな位置に駒を移動する (Random Walk).
  - **操作 4.** 確率 $1 - \gamma(x_k)$ で $x_k + \epsilon^2 \frac{Df(x_k)}{|Df(x_k)|}$ に駒を移動する.
(3) この操作を繰り返し, $x_\tau \in \Gamma_\epsilon$ に到達したときゲームを終了し, 利益 $F(x_\tau)$ を得る.
(4) プレイヤー A とプレイヤー B はそれぞれ利益を最大化, 最小化しようと行動する. このときの利益の期待値を $u_\epsilon(x_0)$ と書き, $u_\epsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ を値関数とよぶ.

注意 2.1. $Df(x) = 0$ の場合, $\gamma(x) = 1$ となるので操作 4 は起こらない.

ここで, プレイヤー A の戦略を関数 S_A として以下で表す.

$$S_A(x_0, \ldots, x_{k-1}) = x_k \in B_\epsilon(x_{k-1}).$$

また, プレイヤー B に対しても同様にして関数 S_B と表す. これらを利用して, プレイヤー B が先に戦略を決定する場合の期待値を

$$u_A^\epsilon(x_0) := \sup_{S_A} \inf_{S_B} \mathbb{E}^{x_0}_{S_A, S_B}[F(x_\tau)]$$

とし, プレイヤー A が先に戦略を決定する場合の期待値を

$$u_B^\epsilon(x_0) := \inf_{S_B} \sup_{S_A} \mathbb{E}^{x_0}_{S_A, S_B}[F(x_\tau)]$$

とする．ここで $\mathbb{E}^{x_0}_{S_A,S_B}[F(x_\tau)]$ は駒の初期位置を x_0 として, 2 人のプレイヤーがそれぞれ戦略 S_A, S_B をとったときの利益の期待値である．u^ϵ_A と u^ϵ_B は結果的には等しくなるが, 便宜上

$$u_\epsilon := u^\epsilon_A$$

としておく．また, 期待値を考えるには確率空間を定義する必要があるが本稿では省略する．詳しくは [14] を参照せよ．

以上を踏まえて, 本稿の主定理を述べる．

定理 2.1 (ゲーム解釈)**.** 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は仮定 $(\Omega 1)$ をみたし, $f \in C^1(\Omega)$ は仮定 $(f1)$, $(f2)$ をみたすとする．また, $F \in C(\mathbb{R}^n)$ は Lipschitz 連続で $2 < p < \infty$ とし, (F) の粘性優解と粘性劣解に対して比較定理が成り立つとする．このとき, 微分ゲームで与えられる値関数 u_ϵ が, $\epsilon \to 0$ で (F) の粘性解に一様収束する．

3 準備

方程式 (F) の解として, 粘性解とよばれる弱解を考える．粘性解は最大値原理に基づき, 退化楕円型偏微分方程式, 放物型偏微分方程式に用いられる．また, 以下の定義では境界条件は古典的な意味でみたすことに注意せよ．粘性解に関しての詳細は [1] を参照せよ．

定義 3.1 (粘性優解 **(resp.** 劣解**)**, [1])**.** $u : \Omega \to (-\infty, \infty)$ が (F) の粘性優解 (resp. 劣解) とは, 次の (1)–(2) が成り立つことである．

(1) u が下半連続, (resp. 上半連続).

(2) $u = F \quad \text{on } \partial\Omega$.

(3) $\phi \in C^2(\Omega)$ として, $u - \phi$ が $x_0 \in \Omega$ で局所最小値 (resp. 局所最大値) 0 をとるとする．このとき,

$$-\mathrm{div}\Big(f(x_0)|D\phi(x_0)|^{p-2}D\phi(x_0)\Big) \geq 0, \ (\text{resp.} \leq 0).$$

が成り立つ．

u が粘性優解かつ粘性劣解のとき, u を**粘性解**という．

つぎに比較定理についても述べておく．比較定理は優解と劣解の境界付近での大小が領域内部まで保存されることを表している．また, 比較定理を用い粘性解の一意性を導くことが可能である．

補題 3.1 (比較定理)**.** 方程式 (F) の粘性優解と粘性劣解に対して比較定理が成り立つとは, u が粘性優解, v が粘性劣解のとき次が成り立つことである．

$$u \geq v \quad \text{on } \partial\Omega \Rightarrow u \geq v \quad \text{in } \Omega.$$

さて, 証明の肝となる等式を紹介しよう．次の等式は**動的計画原理**とよばれ, 駒が 1 回移動すると

きの利益の期待値の関係を表している. ここで $\fint$ は積分平均, w は可測関数である.

$$w(x)=\gamma(x)\frac{\alpha}{2}\Big(\sup_{B_\epsilon(x)}w+\inf_{B_\epsilon(x)}w\Big)+\gamma(x)\beta\fint_{B_\epsilon(0)}w(x+h)dh+U(w)(x) \tag{DPP}$$

ここで, U は

$$U(w)(x):=\begin{cases}(1-\gamma(x))w\Big(x+\epsilon^2\frac{Df(x)}{|Df(x)|}\Big), & Df(x)\neq 0,\\ 0, & Df(x)=0,\end{cases}$$

である.

値関数 u_ϵ の極限として次の **relaxed limit** を紹介する.

$$\overline{u}(x):=\lim_{\nu\to 0}\sup\left\{u_\epsilon(y)\;\middle|\; y\in\overline{\Omega},|y-x|+\epsilon\le\nu\right\},$$
$$\underline{u}(x):=\lim_{\nu\to 0}\inf\left\{u_\epsilon(y)\;\middle|\; y\in\overline{\Omega},|y-x|+\epsilon\le\nu\right\}.$$

定義からわかるように $\overline{u}$, $\underline{u}$ はそれぞれ上半連続関数, 下半連続関数で, $\underline{u}\le\overline{u}$ が成り立つ.

4 証明の概略

まずは動的計画原理を満たす関数を構築する.

補題 4.1. $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を有界領域, $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ を有界な可測関数とする. このとき, 次の (1), (2) をみたす可測関数 v が存在する.

(1) v は Ω 上で動的計画原理 (DPP) をみたす.
(2) $v(x)=F(x),\quad x\in\Gamma_\epsilon$.

証明の概略. 可測関数 w に対して作用素 T を次で定義する.

$$Tw(x):=\begin{cases}\gamma(x)\frac{\alpha}{2}\Big(\sup_{B_\epsilon(x)}w+\inf_{B_\epsilon(x)}w\Big)+\gamma(x)\beta\fint_{B_\epsilon(0)}w(x+h)dh+U(w)(x), & x\in\Omega,\\ F(x), & x\in\Gamma_\epsilon.\end{cases}$$

また,

$$v_0(x):=\begin{cases}\inf_{y\in\Gamma_\epsilon}F(y), & x\in\Omega,\\ F(x), & x\in\Gamma_\epsilon\end{cases}$$

とする. この T を v_0 に対して, 繰り返し作用させることによって (DPP) と境界条件をみたす関数を構築できる. □

次に, 値関数が動的計画原理を満たすことを確認する.

補題 4.2. ゲームで与えたプレイヤー A の値関数 u_A^ϵ , プレイヤー B の値関数 u_B^ϵ , 定理 4.1 で与えた動的計画原理をみたす関数 v に対して, 次が成り立つ.

$$v=u_A^\epsilon=u_B^\epsilon.$$

定理の証明は [13, 定理 3.2] と同様なので省略する.

値関数の境界での挙動を考える.

補題 4.3. Ω が仮定 ($\Omega 1$) をみたし, f が仮定 ($f2$) をみたすとする. また F は任意の $\epsilon > 0$ で Γ_ϵ 上 Lipschitz 連続とする. このとき, 任意の $z \in \partial\Omega$ に対して, 値関数 u_ϵ が次をみたす.

$$u_\epsilon(x) \to F(z)\ (x \to z, \epsilon \to 0), \quad x \in \Omega.$$

証明の概略. まずは, 値関数 u_ϵ を $f \equiv 1$ となる円環領域に制限する. 制限した領域で重みのない p-Laplace 方程式のゲーム [14] を考える. ただし, 内側の境界では境界条件として u_ϵ を制限した関数を採用する. p-Laplace 方程式のゲームから得られる値関数 w_ϵ と元の値関数 u_ϵ が円環領域上で一致することが示せるので, w_ϵ の境界付近の挙動を調べることで結論が得られる. □

relaxed limit $\underline{u}$ が粘性優解になることを示す.

補題 4.4. ゲームによって定まる 値関数 u_ϵ の relaxed limit $\underline{u}$ は, (F) の粘性優解になる.

証明の概略. $x \in \Omega$ を固定して, その近傍で滑らかな関数 ϕ をとる. $x_1^\epsilon \in B_\epsilon(x)$ を次を満たすようとる.

$$\phi(x_1^\epsilon) = \min_{\overline{B}_\epsilon(x)} \phi.$$

Taylor 展開より,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\max_{\overline{B}_\epsilon(x)} \phi + \min_{\overline{B}_\epsilon(x)} \phi\right] - \phi(x) \geq \frac{1}{2} D^2\phi(x)(x_1^\epsilon - x)\cdot(x_1^\epsilon - x) + \mathcal{O}(\epsilon^3),\\
&\fint_{B_\epsilon(0)} \phi(x+h)dh - \phi(x) = \frac{\epsilon^2}{2(n+2)}\Delta\phi(x) + \mathcal{O}(\epsilon^3),\\
&\phi\Big(x + \epsilon^2 \frac{Df(x)}{|Df(x)|}\Big) = \phi(x) + \frac{\epsilon^2}{|Df(x)|} D\phi(x)\cdot Df(x) + \mathcal{O}(\epsilon^3).
\end{aligned}$$

を得る. $\underline{u} - \phi$ が $x_0 \in \Omega$ で局所最小値をもつとする. このとき以下を満たすような点列 $x_\epsilon \in \Omega$ がとれる. (relaxed limit を極限として採用したため, 近似した関数が局所最小値を取る点が x に収束する.)

$$x_\epsilon \to x_0\ (\epsilon \to 0),$$

$$u_\epsilon(x_\epsilon) - \phi(x_\epsilon) \leq u_\epsilon(y) - \phi(y) + \epsilon^3, \quad y \in B_r(x_\epsilon).$$

Taylor 展開から得た 3 式と (DPP) とあわせて結論を得る. □

同様にして $\overline{u}$ が粘性劣解になることも得られる.

定理 2.1 の証明. relaxed limit の定義から $\underline{u} \leq \overline{u}$ となる. また, $\underline{u}$ は (F) の粘性優解, $\overline{u}$ は (F) の粘性劣解になることと,

$$\underline{u} = \overline{u} = F \quad \text{on } \partial\Omega$$

から, 粘性解に対する比較定理がつかえるので,

$$\underline{u} \geq \overline{u} \quad \text{in } \Omega$$

となる. 以上より, Ω 上で $\underline{u} = \overline{u}$ なので u_ϵ は粘性解に一様収束することがわかる. □

参考文献

[1] M. G. Crandall, H. Ishii, P. L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27 , no. 1, 1–67, 1992.

[2] L. C. Evans and P. E. Souganidis, *"Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Isaacs equations."* Indiana Univ. Math. J. 33, no. 5, 773–797, 1984.

[3] W. H. Fleming and H. M. Soner, *"Controlled Markov processes and viscosity solutions. Second edition."* Stochastic Modelling and Applied Probability, 25. Springer, New York, xviii+429 pp, 2006.

[4] Y. Fukui, *"Construction of weak solutions of a weighted inverse mean curvature flow."* Adv. Math. Sci. Appl. 30 , no. 1, 23–37, 2021.

[5] J. Heinonen, T. Kilpeläinen and O. Martio, *"Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations."* Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, vi+363 pp. ISBN: 0-19-853669-0, 1993.

[6] V. Julin and P. Juutinen, *"A new proof for the equivalence of weak and viscosity solutions for the p-Laplace equation."* Comm. Partial Differential Equations 37, no. 5, 934–946, 2012.

[7] P. Juutinen, P. Lindqvist and J. J. Manfredi, *"On the equivalence of viscosity solutions and weak solutions for a quasi-linear equation."* SIAM J. Math. Anal. 33 , no. 3, 699–717, 2001.

[8] R. V. Kohn and S. Serfaty, *"A deterministic-control-based approach to fully nonlinear parabolic and elliptic equations."* Comm. Pure Appl. Math. 63 , no. 10, 1298–1350, 2010.

[9] R. V. Kohn and S. Serfaty, *"A deterministic-control-based approach to motion by curvature."* Comm. Pure Appl. Math. 59 , no. 3, 344–407, 2006.

[10] M. Lewicka and J. J. Manfredi, *"The obstacle problem for the p-laplacian via optimal stopping of tug-of-war games."* Probab. Theory Related Fields 167 , no. 1-2, 349–378, 2017.

[11] Q. Liu, A. Schikorra and X. Zhou, *"A game-theoretic proof of convexity-preserving properties for motion by curvature."* Indiana Univ. Math. J. 65 , no. 1, 171–197, 2016.

[12] H. Luiro, M. Parviainen and E. Saksman, *"Harnack's inequality for p-harmonic functions via stochastic games."* Comm. Partial Differential Equations 38 , no. 11, 1985–2003, 2013.

[13] H. Luiro, M. Parviainen and E. Saksman, *"On the existence and uniqueness of p-harmonious functions."* Differential Integral Equations. 27, no. 3-4, 201–216, 2014.

[14] J. J. Manfredi, M. Parviainen and J. D. Rossi, *"On the definition and properties of p-harmonious functions."*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) 11, no. 2, 215–241, 2012.

[15] Y. Peres, O. Schramm, S. Sheffield and D. B. Wilson, *Tug-of-war and the infinity Laplacian.* J. Amer. Math. Soc. 22 , no. 1, 167–210, 2009.

[16] Y. Peres and S. Sheffield, *"Tug-of-war with noise: a game-theoretic view of the p-Laplacian."* Duke Math. J. 145 , no. 1, 91–120, 2008.

Asymptotic expansions for the complex Ginzburg–Landau type equation in the super Fujita-critical case

早稲田大学 大学院先進理工学研究科 物理学及応用物理学専攻
草場 竜之介 (Ryunosuke KUSABA) *

概 要

本稿では，藤田優臨界の非線形項を持つ複素 Ginzburg–Landau（CGL）型方程式の初期値問題に対する時間大域解の漸近挙動を考察する．CGL 型方程式の線形主要部に付随する半群（CGL 半群）の積分表示と時空両変数に関する Taylor 展開を基礎とした直接計算によって，時間大域解の明示的な高次漸近展開を導出する．さらに，漸近展開に対する剰余項の減衰評価を導出し，その最良性を初期値と非線形項のモーメントによって特徴付ける．尚，本稿は小澤徹教授（早稲田大学）との共同研究 [16] に基づく．

1 導入

本稿では，次の複素 Ginzburg–Landau（CGL）型方程式の初期値問題に対する時間大域解の漸近挙動を考える：

$$\begin{cases} \partial_t u - \nu\Delta u = f(u), & (t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}^n, \\ u(0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{P}$$

但し，$u\colon [0,+\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ は未知函数，$u_0\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ は $t=0$ で与えられた初期値，$\nu \in \mathbb{C}$ は $\mathrm{Re}\,\nu > 0$ なるパラメータである．さらに，$f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は単独冪乗型の非線形項で，ある $p \in (1,+\infty)$，$\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ を用いて，

$$f(u) = \lambda u^p,\ \lambda|u|^{p-1}u,\ \lambda|u|^p$$

のいずれかで表されるものとする．

通常，複素 Ginzburg–Landau（CGL）方程式は $\mu \geq 0$，$\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ とした

$$\partial_t u - \nu\Delta u = \mu u + \lambda|u|^{p-1}u$$

を指し，超伝導やパターン形成など様々な自然現象を記述する [1]．また，CGL 方程式は指数膨張する宇宙（de Sitter 宇宙）などの一様等方的な時空間に於けるスカラー場方程式の非相対論的極限として導出されることも知られている [18]．このように，CGL 方程式は物理学に於いて重要な方程式の一つである．また，CGL 方程式に於いて $\mathrm{Im}\,\nu = \mathrm{Im}\,\lambda = \mu = 0$ かつ未知函数を実数値とすると非線形熱方程式（放物型），いわゆる藤田型方程式になり，$\mathrm{Re}\,\nu = \mathrm{Re}\,\lambda = \mu = 0$ とすると非線形 Schrödinger 方程式（分散型）になる．このことから，CGL 方程式は放物性と分散性の相

*E-mail: ryu2411501@akane.waseda.jp

互作用を記述する中間方程式と見做すことができる．このような物理的・数学的意義から，CGL 方程式は放物型及び分散型の両方の観点から様々な文献で考察されている（cf. 時間局所・大域適切性：[21]，粘性消滅極限：[17]，解の有限時間爆発：[2]）．また，近年では藤田型方程式に対する複素数値解も注目を集めている（cf. [3]）．尚，複素スカラー場及び分散性の影響で，CGL 方程式の解析では非線形熱方程式の解析で基礎となる最大値原理や比較原理が無効となることに注意する必要がある．

本研究では，CGL 方程式に於いて $\mu = 0$ とし，非線形項を一般化した CGL“型” 方程式を考える．特に，CGL 型方程式の初期値問題 (P) に対する時間大域解の長時間挙動に焦点を当てる．藤田型方程式の場合と同様に，CGL 型方程式に対する解の挙動は非線形項の冪の指数 p と空間次元 n のみから定まる指数（藤田指数）$1 + 2/n$ の大小関係によって大きく変化することが知られている．実際，[5] は藤田劣臨界 $p < 1 + 2/n$（正確には $0 < 1 + 2/n - p \ll 1$）の場合に，[6] は藤田臨界 $p = 1 + 2/n$ の場合に，$f(u) = \lambda |u|^{p-1} u$ かつ

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\lambda |\nu|^{n - \frac{n}{2}(p-1)}}{((p+1)|\nu|^2 + (p-1)\nu^2)^{n/2}} \right) < 0$$

とした (P) の小さな初期値に対する時間大域解（小振幅解）が時間に関して $f \equiv 0$ とした (P) の解（自由解）よりも速く減衰することを示した（cf. 藤田型方程式の場合：[4]）．また，[5, 6] は小振幅解の時間無限大の極限に於ける漸近形も導出している．一方，[19] は藤田優臨界 $p > 1 + 2/n$ の場合に，(P) の小振幅解が時間に関して自由解と同じ速さで減衰し，(P) に付随する線形方程式（$f \equiv 0$）の基本解

$$G_{t\nu}(x) \coloneqq (4\pi t\nu)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t\nu} \right), \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

の定数倍に漸近することを示した．しかし，剰余項の減衰評価や高次の漸近形は導出されていない．

藤田型方程式に対する時間大域解の高次漸近展開は [7, 8] で導出されている．これらの論文では，初期値の空間モーメント（空間変数の単項式を重み函数とする重み付き積分）の消滅による熱半群の L^1 減衰を活用している．この性質を踏まえ，初期値と非線形項をある次数までの空間モーメントが全て消滅する部分とそうでない部分に分解し，前者を剰余項，後者を漸近形と見做して評価することで時間大域解の高次漸近展開を導出した．この方法論は，移流拡散方程式や分数冪拡散方程式を始めとする様々な放物型方程式だけでなく，消散型波動方程式にも応用されている（cf. 放物型方程式：[9, 10, 12, 11]，消散型波動方程式：[14, 13]）．しかし，上記の空間モーメントの消滅に基づく分解の影響で，漸近形を時間減衰部分と形状部分に分離できないなど，漸近形が複雑になるという欠点がある．その結果，剰余項の減衰評価の最良性，特に剰余項の下からの評価を導出することが困難であるように思われる．

このような現状を踏まえ，本研究では藤田優臨界 $p > 1 + 2/n$ の場合に，時空両変数に関する Taylor 展開を基礎とした初等的かつ直接的な方法で，(P) に対する時間大域解の明示的な高次漸近展開を剰余項の減衰評価も含めて導出した．また，部分的ではあるが，得られた剰余項の減衰評価が最良であることも示した．

2　CGL 半群の基本事項

本節では，本研究で基礎となる CGL 半群の基本評価と漸近展開について纏める．以下，正整数全体の集合を $\mathbb{Z}_{>0}$ と表し，非負整数全体の集合を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ と表す：$\mathbb{Z}_{\geq 0} \coloneqq \mathbb{Z}_{>0} \cup \{0\}$．各 $\alpha =$

$(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，$x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ に対して，

$$|\alpha|\coloneqq\sum_{j=1}^n\alpha_j,\qquad \alpha!\coloneqq\prod_{j=1}^n\alpha_j!,\qquad x^\alpha\coloneqq\prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_j},\qquad \partial^\alpha=\partial_x^\alpha\coloneqq\prod_{j=1}^n\partial_j^{\alpha_j},\qquad \partial_j\coloneqq\frac{\partial}{\partial x_j}$$

と定義する．また，$\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ が任意の $j\in\{1,\dots,n\}$ に対して $\alpha_j\leq\beta_j$ を満たすとき, $\alpha\leq\beta$ と表す．各 $q\in[1,+\infty]$ に対して Lebesgue 空間 $L^q(\mathbb{R}^n)=L^q(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ のノルムを $\|\cdot\|_q$ と表し，各 $m\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対して重み付き Lebesgue 空間 $L^1_m(\mathbb{R}^n)$ を次で定義する：

$$L^1_m(\mathbb{R}^n)\coloneqq\left\{\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n);\,|\alpha|\leq m\text{ なる任意の }\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}\text{ に対して }x^\alpha\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

但し，$x^\alpha\varphi$ は $\mathbb{R}^n\ni x\mapsto x^\alpha\varphi(x)\in\mathbb{C}$ なる函数を表す.

各 $\varphi\in L^q(\mathbb{R}^n)$，$q\in[1,+\infty]$ に対し，CGL 型方程式に付随する線形方程式の初期値問題

$$\begin{cases}\partial_t u-\nu\Delta u=0, & (t,x)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}^n,\\ u(0)=\varphi, & x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

の時刻 $t\geq 0$ に於ける解を $e^{t\nu\Delta}\varphi$ と表す．このとき，任意の $t\geq 0$ に対して $e^{t\nu\Delta}$ は $L^q(\mathbb{R}^n)$ 上の有界線形作用素であり，族 $\left(e^{t\nu\Delta};t\geq 0\right)$ は半群を成す．この半群を CGL 半群という [20]．特に $t>0$ のとき，$e^{t\nu\Delta}\varphi$ は基本解 $G_{t\nu}$ を用いて，

$$\left(e^{t\nu\Delta}\varphi\right)(x)=(G_{t\nu}*\varphi)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}G_{t\nu}(x-y)\,\varphi(y)\,dy,\qquad x\in\mathbb{R}^n$$

と表される．

任意の $t>0$ に対し，基本解 $G_{t\nu}$ は，

$$G_{t\nu}(x)=t^{-\frac{n}{2}}G_\nu\left(t^{-\frac{1}{2}}x\right),\qquad x\in\mathbb{R}^n$$

なる自己相似性を持つ．そこで，伸長 δ_t を，

$$(\delta_t\varphi)(x)\coloneqq t^{-\frac{n}{2}}\varphi\left(t^{-\frac{1}{2}}x\right),\qquad x\in\mathbb{R}^n$$

と定義する．このとき，$G_{t\nu}$ の自己相似性は，

$$G_{t\nu}=\delta_t G_\nu$$

と表される．さらに，任意の $\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対して，

$$\partial^\alpha G_{t\nu}=\partial^\alpha(\delta_t G_\nu)=t^{-\frac{|\alpha|}{2}}\delta_t(\partial^\alpha G_\nu)$$

となり，

$$\partial^\alpha e^{t\nu\Delta}\varphi=(\partial^\alpha G_{t\nu})*\varphi=t^{-\frac{|\alpha|}{2}}(\delta_t(\partial^\alpha G_\nu))*\varphi$$

が成り立つ．この等式に Young の不等式を適用すると，次の CGL 半群の基本評価を得る．

命題 2.1

$1\leq q\leq p\leq+\infty$，$\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，$\varphi\in L^q(\mathbb{R}^n)$ とする．このとき，任意の $t>0$ に対して，

$$\left\|\partial^\alpha e^{t\nu\Delta}\varphi\right\|_p\leq t^{-\frac{n}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)-\frac{|\alpha|}{2}}\|\partial^\alpha G_\nu\|_r\|\varphi\|_q$$

が成り立つ．但し，$r\in[1,+\infty]$，$1/p+1=1/r+1/q$ である．

任意の $\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ に対し，$\partial^\alpha G_\nu$ は複素係数の多変数 Hermite 多項式

$$\boldsymbol{h}_{\nu,\alpha}(x) \coloneqq \sum_{2\beta \leq \alpha} \frac{(-1)^{|\beta|}\,\alpha!}{\beta!\,(\alpha-2\beta)!} \nu^{-|\alpha-\beta|} x^{\alpha-2\beta}, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

を用いて，

$$\partial^\alpha G_\nu = (-2)^{-|\alpha|}\,\boldsymbol{h}_{\nu,\alpha} G_\nu$$

と表される．よって，

$$\partial^\alpha G_{t\nu} = (-2)^{-|\alpha|}\,t^{-\frac{|\alpha|}{2}}\,\delta_t\left(\boldsymbol{h}_{\nu,\alpha} G_\nu\right)$$

が成り立つ．さらに，Taylor の定理より任意の $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 及び任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\begin{aligned}
\left(\partial^\alpha G_{t\nu}\right)(x-y) &= \sum_{|\beta| \leq m} \frac{1}{\beta!}(-y)^\beta \left(\partial^{\alpha+\beta} G_{t\nu}\right)(x) \\
&\quad + \sum_{|\beta|=m+1} \frac{m+1}{\beta!} \int_0^1 (1-\theta)^m (-y)^\beta \left(\partial^{\alpha+\beta} G_{t\nu}\right)(x-\theta y)\,d\theta \\
&= (-2)^{-|\alpha|}\,t^{-\frac{|\alpha|}{2}} \sum_{k=0}^m 2^{-k} t^{-\frac{k}{2}} \sum_{|\beta|=k} \frac{1}{\beta!} y^\beta \left(\delta_t\left(\boldsymbol{h}_{\nu,\alpha+\beta} G_\nu\right)\right)(x) \\
&\quad + (-1)^{-|\alpha|}\,2^{-(|\alpha|+m+1)} t^{-\frac{|\alpha|+m+1}{2}} \\
&\qquad \times \sum_{|\beta|=m+1} \frac{m+1}{\beta!} \int_0^1 (1-\theta)^m\, y^\beta \left(\delta_t\left(\boldsymbol{h}_{\nu,\alpha+\beta} G_\nu\right)\right)(x-\theta y)\,d\theta
\end{aligned}$$

となる．この等式を CGL 半群の基本解を用いた積分表示に代入して評価すると，CGL 半群の m 次漸近展開を得る．

命題 2.2 ([16])
$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\varphi \in L^1_{m+1}(\mathbb{R}^n)$，$\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ とする．このとき，任意の $t > 0$，$q \in [1, +\infty]$ に対して，

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{|\alpha|+m}{2}} \left\|\partial^\alpha e^{t\nu\Delta}\varphi - \Lambda_{\alpha,m}(t;\varphi)\right\|_q \leq 2^{-(|\alpha|+m+1)} t^{-\frac{1}{2}} \sum_{|\beta|=m+1} \frac{1}{\beta!} \left\|\boldsymbol{h}_{\nu,\alpha+\beta} G_\nu\right\|_q \left\|x^\beta \varphi\right\|_1$$

が成り立つ．但し，

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\alpha,m}(t;\varphi) &\coloneqq (-2)^{-|\alpha|}\,t^{-\frac{|\alpha|}{2}} \sum_{k=0}^m 2^{-k} t^{-\frac{k}{2}} \sum_{|\beta|=k} \mathcal{M}_\beta(\varphi)\,\delta_t\left(\boldsymbol{h}_{\nu,\alpha+\beta} G_\nu\right), \\
\mathcal{M}_\alpha(\varphi) &\coloneqq \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^n} y^\alpha \varphi(y)\,dy
\end{aligned}$$

である．

また，m 次漸近形への収束だけに注目すると，次の命題が成り立つ．

命題 2.3 ([16])
$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\varphi \in L^1_m(\mathbb{R}^n)$，$\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$ とする．このとき，任意の $q \in [1, +\infty]$ に対して，

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{|\alpha|+m}{2}} \left\|\partial^\alpha e^{t\nu\Delta}\varphi - \Lambda_{\alpha,m}(t;\varphi)\right\|_q = 0$$

が成り立つ．

3　主定理

以下，$p > 1 + 2/n$ 及び $u_0 \in \left(L^1 \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$ を仮定する．さらに，

$$u \in X \coloneqq (C \cap L^\infty)\left([0,+\infty); L^1(\mathbb{R}^n)\right) \cap (C \cap L^\infty)\left((0,+\infty); L^\infty(\mathbb{R}^n)\right)$$

を (P) の時間大域解で次の減衰評価を満たすものとする：

$$\sup_{q\in[1,+\infty]} \sup_{t>0} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)} \|u(t)\|_q < +\infty. \tag{3.1}$$

このような時間大域解は，少なくとも $\|u_0\|_1 + \|u_0\|_\infty$ が十分に小さい場合，(P) に付随する積分方程式

$$u(t) = e^{t\nu\Delta}u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\nu\Delta} f(u(s))\, ds \tag{I}$$

に縮小写像の議論を適用することで実際に構成できる（cf. [15, Appendix A]）．しかし，ここでは初期値の小ささではなく，時間大域解の減衰評価を仮定していることに注意する．特に，吸収型の非線形項を持つ藤田型方程式（$\operatorname{Im}\nu = 0$，$\lambda < 0$）の場合，比較原理より大きな初期値に対しても式 (3.1) を満たす実数値時間大域解が構成できる（cf. [8]）．

時間大域解の高次漸近展開を導出する上で，次の重み付き評価は重要かつ基本的である．

命題 3.1 ([16])
$m \in \mathbb{Z}_{>0}$，$p > 1 + 2/n$ とする．さらに，$u_0 \in \left(L^1_m \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$，$u \in X$ を式 (3.1) を満たす (P) の時間大域解とする．このとき，$u \in C\left([0,+\infty); L^1_m(\mathbb{R}^n)\right)$ であり，

$$\sup_{t\geq 0} (1+t)^{-\frac{m}{2}} \sum_{|\alpha|=m} \|x^\alpha u(t)\|_1 < +\infty$$

が成り立つ．

導入で述べたように，複素スカラー場と分散性の影響で，命題 3.1 を証明するために放物型方程式に対する比較原理が適用できない．この問題は，CGL 半群と単項式から成る重み函数の交換関係の具体的表示

$$x^\alpha e^{t\nu\Delta}\varphi - e^{t\nu\Delta}x^\alpha\varphi = R_\alpha(t)\varphi,$$

$$R_\alpha(t)\varphi \coloneqq \sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha\\ \beta\neq 0}} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}(-2t\nu\partial)^\beta e^{t\nu\Delta}x^\gamma\varphi + \sum_{\substack{\beta+\gamma\leq\alpha,\ |\beta+\gamma|\leq|\alpha|-2\\ |\beta|+1\leq\ell\leq\frac{|\alpha|+|\beta|-|\gamma|}{2}}} C^\alpha_{\ell\beta\gamma}(t\nu)^\ell \partial^\beta e^{t\nu\Delta}x^\gamma\varphi$$

とその評価

$$\sum_{|\alpha|=m} \left\|x^\alpha e^{t\nu\Delta}\varphi - e^{t\nu\Delta}x^\alpha\varphi\right\|_1 \leq C\left\{t^{\frac{1}{2}} \left\||x|^{m-1}\varphi\right\|_1 + \left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{m}{2}}\right)\|\varphi\|_1\right\}$$

を基礎とした直接的な計算によって克服される [15, 16].

以上の準備の下，(P) に対する時間大域解の漸近展開は次のように記述される．

定理 3.2 ([16])
$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$p > 1 + (m+2)/n$ とする．さらに，$u_0 \in \left(L^1_m \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$，$u \in X$ を式 (3.1) を満たす (P) の時間大域解とする．このとき，任意の $q \in [1, +\infty]$ に対して，

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}} \left\| u(t) - \mathcal{A}_m(t) \right\|_q = 0$$

が成り立つ．但し，

$$\mathcal{A}_m(t) \coloneqq \Lambda_{0,m}(t; u_0) + \sum_{|\gamma| \leq m/2} \frac{(-\nu)^{|\gamma|}}{\gamma!} \Lambda_{2\gamma, m-2|\gamma|}\left(t; \psi_{|\gamma|}\right),$$
$$\psi_k \coloneqq \int_0^{+\infty} s^k f(u(s))\, ds$$

である．

さらに，$u_0 \in L^1_m(\mathbb{R}^n)$ の代わりに $u_0 \in L^1_{m+1}(\mathbb{R}^n)$ を仮定すると，定理 3.2 で与えられる時間大域解の m 次漸近展開に対する剰余項の減衰評価が得られる．

定理 3.3 ([16])
$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，$p > 1 + (m+2)/n$ とする．さらに，$u_0 \in \left(L^1_{m+1} \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$，$u \in X$ を式 (3.1) を満たす (P) の時間大域解とする．このとき，任意の $q \in [1, +\infty]$ に対してある $C > 0$ が存在し，任意の $t > 0$ に対して，

$$t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}} \left\| u(t) - \mathcal{A}_m(t) \right\|_q \leq \begin{cases} Ct^{-\frac{n}{2}\left(p-1-\frac{m+2}{n}\right)} & \text{if} \quad 1 + \dfrac{m+2}{n} < p < 1 + \dfrac{m+3}{n}, \\ Ct^{-\frac{1}{2}} \log(2+t) & \text{if} \quad p = 1 + \dfrac{m+3}{n}, \\ Ct^{-\frac{1}{2}} & \text{if} \quad p > 1 + \dfrac{m+3}{n} \end{cases}$$

が成り立つ．

定理 3.2 及び定理 3.3 で与えられる時間大域解の m 次漸近形 $\mathcal{A}_m(t)$ は次の階層構造を持つ：任意の $k \in \{0, \ldots, m\}$，$t > 0$ に対して，

$$\mathcal{A}_k(t) - \mathcal{A}_{k-1}(t) = t^{-\frac{k}{2}} \delta_t \left(\mathcal{A}_k(1) - \mathcal{A}_{k-1}(1)\right)$$

が成り立つ．但し，$\mathcal{A}_{-1}(t) \equiv 0$ と定義する．上式に於いて，伸長 δ_t は漸近形の放物型自己相似性を表し，$t^{-k/2}$ は漸近振幅の時間減衰を表す．さらに，$\mathcal{A}_k(1) - \mathcal{A}_{k-1}(1)$ は漸近形の空間分布を表し，

$$\mathcal{A}_k(1) - \mathcal{A}_{k-1}(1) = 2^{-k} \sum_{|\alpha|=k} \left(\mathcal{M}_\alpha(u_0) + \sum_{\substack{\beta+2\gamma=\alpha \\ |\gamma| \leq k/2}} \frac{(-\nu)^{|\gamma|}}{\gamma!} \mathcal{M}_\beta\left(\psi_{|\gamma|}\right) \right) \boldsymbol{h}_{\nu,\alpha} G_\nu$$

と具体的に書き下せる．

この階層構造を活用すると，定理 3.3 で与えられる時間大域解の m 次漸近展開に対する剰余項の減衰評価は少なくとも $p > 1 + (m+3)/n$ の場合に最良であり，その最良性は初期値の空間モーメントと非線形項の時空間モーメントによって特徴付けられることが分かる．

定理 3.4 ([16])
$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p > 1 + (m+3)/n$ とする．さらに，$u_0 \in \left(L^1_{m+1} \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$，$u \in X$ を式 (3.1) を満たす (P) の時間大域解とする．このとき，任意の $q \in [1, +\infty]$ に対して，

$$\lim_{t \to +\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m+1}{2}} \left\| u(t) - \mathcal{A}_m(t) \right\|_q = \left\| \mathcal{A}_{m+1}(1) - \mathcal{A}_m(1) \right\|_q \tag{3.2}$$

が成り立つ．特に，次の三つの主張は同値である：

(1) $\mathcal{A}_{m+1}(1) - \mathcal{A}_m(1) \not\equiv 0$.

(2) $|\alpha| = m+1$ なる $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ で，

$$\mathcal{M}_\alpha(u_0) + \sum_{\substack{\beta+2\gamma=\alpha \\ |\gamma| \leq (m+1)/2}} \frac{(-\nu)^{|\gamma|}}{\gamma!} \mathcal{M}_\beta\left(\psi_{|\gamma|}\right) \neq 0$$

を満たすものが存在する．

(3) 任意の $q \in [1, +\infty]$，$\varepsilon > 0$ に対してある $t_0 > 0$ が存在し，任意の $t > t_0$ に対して，

$$\begin{aligned} 0 < t^{-\frac{1}{2}} (1-\varepsilon) \left\| \mathcal{A}_{m+1}(1) - \mathcal{A}_m(1) \right\|_q \\ \leq t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}} \left\| u(t) - \mathcal{A}_m(t) \right\|_q \\ \leq t^{-\frac{1}{2}} (1+\varepsilon) \left\| \mathcal{A}_{m+1}(1) - \mathcal{A}_m(1) \right\|_q \end{aligned}$$

が成り立つ．

注意 3.5
$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p > 1 + (m+3)/n$, $\varphi \in \left(L^1_{m+1} \cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$ とする．さらに，$|\alpha| = m+1$ なる $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ で，$\mathcal{M}_\alpha(\varphi) \neq 0$ を満たすものが存在すると仮定する．このとき，ある $\varepsilon_\varphi > 0$ が存在し，任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\varphi]$ に対して $u_0 = \varepsilon\varphi$ を初期値とする (P) の時間大域解 $u \in X$ は $\mathcal{A}_{m+1}(1) - \mathcal{A}_m(1) \not\equiv 0$ を満たす．

尚，$1 + (m+2)/n < p \leq 1 + (m+3)/n$ の場合，定理 3.3 で与えられる時間大域解の m 次漸近展開に対する剰余項の減衰評価の最良性は未解決である（cf. [7, Remark 1.7]）．

4 主定理の証明の概略

定理 3.2 及び定理 3.3 の証明は，(P) に付随する積分方程式 (I) の Duhamel 項の時間変数に関する Taylor 展開に基づく：

$$\begin{aligned} e^{(t-s)\nu\Delta} f(u(s)) &= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} (-s\nu\Delta)^k e^{t\nu\Delta} f(u(s)) \\ &\quad + \frac{1}{N!} \int_0^1 (1-\theta)^N (-s\nu\Delta)^{N+1} e^{(t-s\theta)\nu\Delta} f(u(s))\, d\theta \\ &= \sum_{|\gamma| \leq N} \frac{(-\nu)^{|\gamma|}}{\gamma!} s^{|\gamma|} \partial^{2\gamma} e^{t\nu\Delta} f(u(s)) \end{aligned}$$

$$+(N+1)\sum_{|\gamma|=N+1}\frac{(-\nu)^{N+1}}{\gamma!}\int_0^1(1-\theta)^N s^{N+1}\partial^{2\gamma}e^{(t-s\theta)\nu\Delta}f(u(s))\,d\theta.$$

この等式を (I) に代入し，命題 2.1 と式 (3.1) を用いて評価すると次の補題を得る．

補題 4.1
$m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，$p>1+(m+2)/n$ とする．さらに，$u_0\in\left(L^1\cap L^\infty\right)(\mathbb{R}^n)$，$u\in X$ を式 (3.1) を満たす (P) の時間大域解とする．このとき，任意の $q\in[1,+\infty]$ に対して，

$$\lim_{t\to+\infty}t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}}\left\|u(t)-e^{t\nu\Delta}u_0-\sum_{|\gamma|\leq m/2}\frac{(-\nu)^{|\gamma|}}{\gamma!}\partial^{2\gamma}e^{t\nu\Delta}\psi_k\right\|_q=0$$

が成り立つ．

この補題と命題 2.3 を組み合わせると定理 3.2 が示される．定理 3.3 は，時間大域解の m 次漸近展開に対する剰余項を，

$$\begin{aligned}
&u(t)-\mathcal{A}_m(t)\\
&=\left(e^{t\nu\Delta}u_0-\Lambda_{0,m}(t;u_0)\right)+\int_{t/2}^t e^{(t-s)\nu\Delta}f(u(s))\,ds\\
&\quad+\sum_{|\gamma|\leq N}\frac{(-\nu)^{|\gamma|}}{\gamma!}\int_0^{t/2}s^{|\gamma|}\left(\partial^{2\gamma}e^{t\nu\Delta}f(u(s))-\Lambda_{2\gamma,m-2|\gamma|}(t;f(u(s)))\right)ds\\
&\quad+(N+1)\sum_{|\gamma|=N+1}\frac{(-\nu)^{N+1}}{\gamma!}\int_0^{t/2}\int_0^1(1-\theta)^N s^{N+1}\partial^{2\gamma}e^{(t-s\theta)\nu\Delta}f(u(s))\,d\theta ds\\
&\quad-\sum_{|\gamma|\leq N}\frac{(-\nu)^{|\gamma|}}{\gamma!}\sum_{|\beta|\leq m-2|\gamma|}2^{-(|\beta|+2|\gamma|)}t^{-\frac{|\beta|+2|\gamma|}{2}}\left(\int_{t/2}^{+\infty}s^{|\gamma|}\mathcal{M}_\beta(f(u(s)))\,ds\right)\delta_t\left(\boldsymbol{h}_{\nu,2\gamma+\beta}G_\nu\right)
\end{aligned}$$

と分解し，命題 2.1，命題 2.2，命題 3.1，式 (3.1) を用いて各項を評価することで示される．

定理 3.4 の証明では等式

$$\begin{aligned}
u(t)-\mathcal{A}_m(t)&=u(t)-\mathcal{A}_{m+1}(t)+\left(\mathcal{A}_{m+1}(t)-\mathcal{A}_m(t)\right)\\
&=u(t)-\mathcal{A}_{m+1}(t)+t^{-\frac{m+1}{2}}\delta_t\left(\mathcal{A}_{m+1}(1)-\mathcal{A}_m(1)\right)
\end{aligned}$$

に注目する．この等式と定理 3.2 より，

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to+\infty}t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}}\left\|u(t)-\mathcal{A}_m(t)\right\|_q&\leq\limsup_{t\to+\infty}t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}}\left\|u(t)-\mathcal{A}_{m+1}(t)\right\|_q\\
&\quad+\limsup_{t\to+\infty}t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)}\left\|\delta_t\left(\mathcal{A}_{m+1}(1)-\mathcal{A}_m(1)\right)\right\|_q\\
&=\left\|\mathcal{A}_{m+1}(1)-\mathcal{A}_m(1)\right\|_q,\\
\liminf_{t\to+\infty}t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}}\left\|u(t)-\mathcal{A}_m(t)\right\|_q&\geq\liminf_{t\to+\infty}t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)}\left\|\delta_t\left(\mathcal{A}_{m+1}(1)-\mathcal{A}_m(1)\right)\right\|_q\\
&\quad-\limsup_{t\to+\infty}t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}}\left\|u(t)-\mathcal{A}_{m+1}(t)\right\|_q\\
&=\left\|\mathcal{A}_{m+1}(1)-\mathcal{A}_m(1)\right\|_q
\end{aligned}$$

と評価され，

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{q}\right)+\frac{m}{2}+\frac{1}{2}} \left\|u\left(t\right)-\mathcal{A}_m\left(t\right)\right\|_q = \left\|\mathcal{A}_{m+1}\left(1\right)-\mathcal{A}_m\left(1\right)\right\|_q$$

を得る．また，(1) ⇔ (2) は $\mathcal{A}_{m+1}\left(1\right)-\mathcal{A}_m\left(1\right)$ の具体的表示と Hermite 多項式の直交性

$$\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{h}_{\nu,\alpha}\left(x\right)\boldsymbol{h}_{\nu,\beta}\left(x\right)G_\nu\left(x\right)dx = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{\nu}\right)^{|\alpha|}\alpha!, & \alpha=\beta, \\ 0, & \alpha\neq\beta \end{cases}$$

より従い，(1) ⇒ (3) は $\left\|\mathcal{A}_{m+1}\left(1\right)-\mathcal{A}_m\left(1\right)\right\|_q > 0$ と式 (3.2) より従う．(3) ⇒ (1) は明らか．

参考文献

[1] I. S. Aranson, L. Kramer, *The world of the complex Ginzburg–Landau equation*, Rev. Modern Phys., **74** (2002), no.1, 99–143.

[2] T. Cazenave, S. Snoussi, *Finite-time blowup for some nonlinear complex Ginzburg–Landau equations*, Partial differential equations arising from physics and geometry, 172–214, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 450, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2019.

[3] J. Chen, B. Wang, Z. Wang, *Complex valued semi-linear heat equations in super-critical spaces E^s_σ*, Math. Ann., **386** (2023), no.3-4, 1351–1389.

[4] A. Gmira, L. Véron, *Large time behaviour of the solutions of a semilinear parabolic equation in $\mathbb{R}^N$*, J. Differential Equations, **53** (1984), no.2, 258–276.

[5] N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, *Landau–Ginzburg type equations in the subcritical case*, Commun. Contemp. Math., **5** (2003), no.1, 127–145.

[6] N. Hayashi, E. I. Kaikina, P. I. Naumkin, *Global existence and time decay of small solutions to the Landau–Ginzburg type equations*, J. Anal. Math., **90** (2003), 141–173.

[7] K. Ishige, M. Ishiwata, T. Kawakami, *The decay of the solutions for the heat equation with a potential*, Indiana Univ. Math. J., **58** (2009), no.6, 2673–2707.

[8] K. Ishige, T. Kawakami, *Refined asymptotic profiles for a semilinear heat equation*, Math. Ann., **353** (2012), no.1, 161–192.

[9] K. Ishige, T. Kawakami, *Asymptotic expansions of solutions of the Cauchy problem for nonlinear parabolic equations*, J. Anal. Math., **121** (2013), 317–351.

[10] K. Ishige, T. Kawakami, K. Kobayashi, *Asymptotics for a nonlinear integral equation with a generalized heat kernel*, J. Evol. Equ., **14** (2014), no.4-5, 749–777.

[11] K. Ishige, T. Kawakami, H. Michihisa, *Asymptotic expansions of solutions of fractional diffusion equations*, SIAM J. Math. Anal., **49** (2017), no.3, 2167–2190.

[12] T. Kawakami, *Higher order asymptotic expansion for the heat equation with a nonlinear boundary condition*, Funkcial. Ekvac., **57** (2014), no.1, 57–89.

[13] T. Kawakami, H. Takeda, *Higher order asymptotic expansions to the solutions for a nonlinear damped wave equation*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., **23** (2016), no.5, Art. 54, 30 pp.

[14] T. Kawakami, Y. Ueda, *Asymptotic profiles to the solutions for a nonlinear damped wave equation*, Differential Integral Equations, **26** (2013), no.7-8, 781–814.

[15] R. Kusaba, T. Ozawa, *Weighted estimates and large time behavior of small amplitude solutions to the semilinear heat equation*, Differ. Equ. Appl., **15** (2023), no.3, 235–268.

[16] R. Kusaba, T. Ozawa, *Asymptotic behavior of global solutions to the complex Ginzburg–Landau type equation in the super Fujita-critical case*, submitted (arXiv:2401.06363).

[17] S. Machihara, Y. Nakamura, *The inviscid limit for the complex Ginzburg–Landau equation*, J. Math. Anal. Appl., **281** (2003), no. 2, 552–564.

[18] M. Nakamura, *Remarks on the derivation of several second order partial differential equations from a generalization of the Einstein equations*, Osaka J. Math., **57** (2020), no.2, 305–331.

[19] M. Nakamura, Y. Sato, *Existence and non-existence of global solutions for the semilinear complex Ginzburg–Landau type equation in homogeneous and isotropic spacetime*, Kyushu J. Math., **75** (2021), no. 2, 169–209.

[20] D. Shimotsuma, T. Yokota, K. Yoshii, *Cauchy problem for the complex Ginzburg–Landau type equation with L^p-initial data*, Math. Bohem., **139** (2014), no. 2, 353–361.

[21] D. Shimotsuma, T. Yokota, K. Yoshii, *Existence and decay estimates of solutions to complex Ginzburg–Landau type equations*, J. Differential Equations, **260** (2016), no. 3, 3119–3149.

Short time asymptotics of the fundamental solutions for Schrödinger equations with non-smooth potentials

東京理科大学 大学院理学研究科数学専攻 博士後期課程 1 年
瀧澤 駿 (Shun TAKIZAWA) *

概 要

本稿では, 滑らかでないポテンシャル関数を伴う Schrödinger 方程式に対する基本解の短時間挙動を考察する. ポテンシャルが滑らかな場合はよく研究されており, 短時間の場合に, 基本解が作用積分を用いて表されることが知られている. しかし, ポテンシャルが滑らかでない場合は, 振動積分作用素の L^2 有界性定理が適用できず, 従来の方法では解析が困難である. 本研究では, 波束変換とよばれる線型変換を用いることにより, 滑らかでないポテンシャルに対しても上記の性質が得られたので, その結果を紹介する.

1 導入

本稿では, 以下の時間依存ポテンシャルを伴う線形 Schrödinger 方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} i\partial_t u = -\frac{1}{2}\Delta u + V(t,x)u, & (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $i=\sqrt{-1}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\Delta = \sum_{j=1}^n \partial^2/\partial x_j^2$ であり, $u(t,x)$ は複素数値の未知関数, $u_0(x)$ は複素数値の既知関数, $V(t,x)$ は実数値の既知関数で, ポテンシャルとよばれるものである.

初期値 $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ から時刻 t における (1) の解 $u(t) \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$ に写す作用素 $U(t)$ を (1) の解作用素という. もし, (1) に解作用素 $U(t)$ が存在すれば, その積分核 (一般には超関数核)$E(t,\cdot,\cdot)$ を (1) の基本解という. すなわち

$$u(t,x) = (U(t)u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} E(t,x,y)u_0(y)dy$$

である. 以下, $x,y \in \mathbb{R}^n$ に対して $x\cdot y$ を単に xy と書く. ポテンシャル V が次の場合には, (1) の基本解 $E(t,x,y)$ を具体的に書くことができる.

- $V \equiv 0$ の場合,
$$E(t,x,y) = (2\pi i t)^{-n/2} e^{i\frac{(x-y)^2}{2t}}, \quad t \neq 0,$$
- $V(t,x) = Ex$ の場合,
$$E(t,x,y) = (2\pi i t)^{-n/2} \exp\left(i\frac{(x-y)^2}{2t} - \frac{1}{2}itE(x+y) - \frac{1}{24}iE^2t^3 \right), \quad t \neq 0,$$

*E-mail:1123703@ed.tus.ac.jp

- $V(t,x)=\frac{1}{2}x^2$ の場合,

$$E(t,x,y)=\begin{cases}(2\pi i\sin t)^{-n/2}\exp\left(i\frac{\cos t(x^2+y^2)-2xy}{2\sin t}\right), & t\notin\pi\mathbb{Z},\\ e^{-\frac{1}{2}it}\delta(x-(-1)^{t/\pi}y), & t\in\pi\mathbb{Z},\end{cases}\tag{2}$$

ただし, δ は Dirac のデルタ関数である.

$V\equiv 0$ のとき, (1) は自由 Schrödinger 方程式であり, $V=Ex, \frac{1}{2}x^2$ はそれぞれ, シュタルクポテンシャル, 調和振動子とよばれるものである. 一般の場合には, Fujiwara [2, 3] によって, ポテンシャルが二次以下の増大度で, 滑らかなときに, 基本解が短時間で次の形によって表されることが示されている:

$$E(t,x,y)=(2\pi it)^{-n/2}e^{iS(t,x,y)}a(t,x,y),\quad 0<t\ll 1,\tag{3}$$

ここで, 位相関数 S は作用積分とよばれるものであり, (1) に対応する Hamilton 方程式:

$$\begin{cases}\frac{d}{ds}x(s)=\xi(s)\\ \frac{d}{ds}\xi(s)=-\left(\nabla_x V\right)(s,x(s))\\ x(0)=y,\ \ x(t)=x.\end{cases}\tag{4}$$

の解 $x(s;t,x,y),\xi(s;t,x,y)$ を用いて,

$$S(t,x,y)=\int_0^t\frac{1}{2}|\xi(s;t,x,y)|^2-V(s,x(s;t,x,y))ds$$

と表される関数である. また, 振幅関数 a は, 次の短時間における漸近評価をみたす関数である.

$$\|a(t,x,y)-1\|_{L^\infty_{x,y}}\lesssim t.$$

Fujiwara [2, 3] の結果において, ポテンシャルの滑らかさに関する条件は技術的な仮定である. Hamilton 方程式 (4) が解ける程度の C^2 級のポテンシャルに対して, 基本解の明示的表現を与えることが期待されている (例えば Yajima [7] を参照). しかし, Goldberg [4] により, 一般に滑らかでないポテンシャルに対しては, 短時間における分散型評価が成立せず, (3) と全く同様の表現は期待できない. Nicola [6] はポテンシャル $V(t,x)$ が $|\alpha|=2$ に対して $\partial_x^\alpha V(t,\cdot)\in H^{n+1}_{ul}(\mathbb{R}^n)$ の場合に, 次の表現を得ている.

$$E(t,x,y)=(2\pi it)^{-n/2}e^{iS(t,x,y)}+r'(t,x,y),\quad 0<t\ll 1.$$

ここで, 剰余項 r' は次の評価をみたす.

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^n}r'(t,\cdot,y)f(y)dy\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\lesssim t^2\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},\quad f\in L^2(\mathbb{R}^n).$$

注意. (2) が示すように, 空間遠方で二次関数的に増大するポテンシャルの場合には, 短時間の条件が必要である.

注意. $H^{n+1}_{ul}(\mathbb{R}^n)$ は一様局所ソボレフ空間と呼ばれるものであり, Nicola [6] の滑らかさの仮定は大まかにいえば $C^{3+\frac{n}{2}}$ 級である.

2　主結果

Nicola [6] は証明に振動積分作用素の L^2 有界性定理を用いており, Boulkhemair [1] により, 同様の手法ではポテンシャルの滑らかさが $C^{3+\frac{n}{2}}$ 級より弱められないことが分かっている. 本研究では振動積分作用素の代わりに, 波束変換 (定義 2 を参照) を用いることによって, ポテンシャルが C^2 級の場合に対する次の結果を得た.

仮定 1. 任意の $|\alpha| \le 2$ に対して, $\partial_x^\alpha V(t,x) \in C(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$ であり, $|\alpha| = 2$ に対して定数 $C_\alpha > 0$ が存在して,

$$|\partial_x^\alpha V(t,x)| \le C_\alpha, \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$

をみたすとする.

定理 1. ポテンシャル $V(t,x)$ は仮定 1 をみたすとする. このとき, (1) の基本解 $E(t,x,y)$ は次で表される.

$$E(t,x,y) = (2\pi i t)^{-n/2} e^{iS(t,x,y)} a_0(t,x,y) + r(t,x,y), \quad 0 < t \ll 1,$$

ここで, a_0 および r は次の漸近評価をみたす.

$$\|a_0(t,x,y) - 1\|_{L^\infty_{x,y}} \lesssim t, \tag{5}$$

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} r(t,\cdot,y) f(y) dy \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \lesssim t^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^n). \tag{6}$$

注意. 仮定 1 のもとで, 初期値問題 (1) の基本解の一意存在性に関しては, Nicola [6] により保証されている.

3　準備

定義 1. 自由発展作用素を $e^{\frac{1}{2}it\Delta}$ とする. すなわち,

$$\left(e^{\frac{1}{2}it\Delta} f\right)(x) = \mathscr{F}^{-1}_{\xi\to x}\left[e^{-\frac{1}{2}it\xi^2}\widehat{f}(\xi)\right](x) = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi i t)^{-n/2} e^{i\frac{(x-y)^2}{2t}} f(y) dy \tag{7}$$

と定める. また, $L^2(\mathbb{R}^n)$ 不変となるダイレーション作用素を $D_\varepsilon f(x) := \varepsilon^{-n/2} f(\varepsilon^{-1}x), \ \varepsilon > 0$ で定める.

補題 1. $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| \le 2$ とする. このとき, $t, \varepsilon > 0$ によらない定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して次の評価が成立する.

$$\left\| x^\alpha e^{\frac{1}{2}it\Delta} D_\varepsilon f \right\|_{L^1} \le C_1 \left(\varepsilon + \frac{t}{\varepsilon}\right)^{|\alpha|} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{n+1} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\right)^k,$$

$$\left\| x^\alpha e^{\frac{1}{2}it\Delta} D_\varepsilon f \right\|_{L^2} \le C_2 \left(\varepsilon + \frac{t}{\varepsilon}\right)^{|\alpha|}.$$

Proof. $\alpha = 0$ の場合, 定義 1 より,

$$e^{\frac{1}{2}it\Delta} D_\varepsilon f(x) = \left(\frac{\varepsilon}{t}\right)^{n/2} e^{i\frac{x^2}{2t}} \int e^{-\frac{1}{2}i\xi^2} \widehat{f}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\xi + \frac{\varepsilon}{t}x\right) d\xi$$

と表されて, 等式 $e^{-\frac{1}{2}i\xi^2} = \frac{1+i\xi\cdot\nabla_\xi}{1+\xi^2}e^{-\frac{1}{2}i\xi^2}$ を用いて部分積分を $n+1$ 回繰り返すことにより, L^1 ノルムの評価が得られる. L^2 ノルムに関しては, $e^{\frac{1}{2}it\Delta}, D_\varepsilon$ の L^2 不変性から直ちにしたがう. $|\alpha| = 1, 2$ の場合は, 作用素の交換関係:

$$xe^{\frac{1}{2}it\Delta} = e^{\frac{1}{2}it\Delta}\left(x - it\nabla_x\right), \quad \left(x - it\nabla_x\right)D_\varepsilon = \varepsilon D_\varepsilon x - i\frac{t}{\varepsilon}D_\varepsilon\nabla_x$$

を用いることにより, $\alpha = 0$ の場合に帰着される. □

定義 2 (波束変換)**.** $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ とする. このとき, 窓関数 φ による f の波束変換 $W_\varphi f$ を,

$$W_\varphi f(x,\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\varphi(y-x)}e^{-iy\cdot\xi}f(y)dy, \quad (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

によって定める. また, W_φ の形式的共役作用素 W_φ^* を次で定める.

$$W_\varphi^* F(x) := \iint_{\mathbb{R}^{2n}} \varphi(x-y)e^{ix\cdot\xi}F(y,\xi)dy\bar{d}\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ \ \bar{d}\xi = (2\pi)^{-n}d\xi.$$

Fourier 変換における反転公式, Plancherel の定理の対応物として, 次の補題が成り立つ.

補題 2. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}$ とする. このとき以下が成立する.

- $f(x) = \|\varphi\|_{L^2}^{-2} W_\varphi^*[W_\varphi f](x)$, $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
- $\|W_\varphi^* F\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|F\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})}$, $F \in L^2(\mathbb{R}^{2n})$.

次に, 証明で用いる古典軌道に関する性質を述べる. (1) に対応する Hamilton 方程式:

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}x(s) = \xi(s), \\ \frac{d}{ds}\xi(s) = -\left(\nabla_x V\right)(s, x(s)), \end{cases} \tag{8}$$

に対して, $x^{(1)}(s;t,x,y), \xi^{(1)}(s;t,x,y)$ を (8) に境界条件: $x(0) = y, x(t) = x$ を付けたものの解とし, $x^{(2)}(s;t,x,\xi), \xi^{(2)}(s;t,x,\xi)$ を (8) に初期条件: $x(t) = x', \xi(t) = \xi$ を付けたものの解とする. ただし, $0 < t \ll 1$ である. このとき, 次が成り立つ.

補題 3. $0 < t \ll 1$ とする. $\Phi : \mathbb{R}^n \ni \xi \longmapsto x^{(2)}(0;t,x',\xi) = Y \in \mathbb{R}^n$ とおくと, Φ は $\mathbb{R}^n$ 上 C^1 級の大域的微分同相であり, Φ^{-1} のヤコビアンはある $\mathbb{R}^{1+2n}$ 上有界な関数 r_0 を用いて,

$$\det J\Phi^{-1} = t^{-n} + t^{-n+1}r_0(t,x',Y) \tag{9}$$

と表される. また, ある定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して, 次の評価が成り立つ.

$$|x^{(1)}(s) - \xi^{(1)}(s)| \le C_1\left(|x-x'| + |y - x^{(2)}(0)|\right), \tag{10}$$

$$\left|\xi^{(1)}(s) - \xi^{(2)}(s) - \frac{(x-x') - (y-x^{(2)}(0))}{t}\right| \le C_2 t\left(|x-x'| + |y-x^{(2)}(0)|\right). \tag{11}$$

4 証明の概略

4.1 波束変換による方程式の変換

Kato-Kobayashi-Ito [5] の方法によって, もとの方程式を積分方程式に書き換える. $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ を任意に一つ取り固定して, $\varphi_\varepsilon^{(t)}(x) := e^{\frac{1}{2}it\Delta}D_\varepsilon\varphi(x)$ と定める. また, $u(t) \in C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n))$ を初期値問題 (1) の解とする. $\varphi_\varepsilon^{(t)}(x)$ を窓関数として, (1) の方程式を波束変換すると,

- $W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}}[\partial_t u] = \partial_t W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u - W_{\partial_t\varphi_\varepsilon^{(t)}} u$
- $W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}}[\Delta u] = W_{\Delta\varphi_\varepsilon^{(t)}} u + 2i\xi\cdot\nabla_x W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u + |\xi|^2 W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u$
- $W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}}[V(t,\cdot)u] = V(t,x)W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u - \nabla_x V(t,x)\cdot x W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u + i\nabla_x V(t,x)\cdot\nabla_\xi W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u$
$$+\tfrac{1}{2}\sum_{|\alpha|=2}\int \overline{\varphi_\varepsilon^{(t)}(y-x)}\left(\int_0^1 \partial_x^\alpha V(t,x+\theta(y-x))(y-x)^\alpha d\theta\right)u(t,y)e^{-iu\xi}dy$$

を用いることにより,

$$\begin{aligned}
&i\left(\partial_t W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u + \xi\cdot\nabla_x W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u - \nabla_x V(t,x)\cdot\nabla_\xi W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u\right)\\
&= -W_{(i\partial_t+\frac{1}{2}\Delta)\varphi_\varepsilon^{(t)}} u + \left(\frac{1}{2}|\xi|^2 + V(t,x) - \nabla_x V(t,x)\cdot x\right) W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u\\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=2}\int \overline{\varphi_\varepsilon^{(t)}(y-x)}\left(\int_0^1 \partial_x^\alpha V(t,x+\theta(y-x))(y-x)^\alpha d\theta\right)u(t,y)e^{-iu\xi}dy
\end{aligned}$$

となる. $\varphi_\varepsilon^{(t)}$ は自由 Schrödinger 方程式の解であるから, 右辺第一項は 0 である. 特性曲線法により, 次の積分方程式を得る.

$$\begin{aligned}
W_{\varphi_\varepsilon^{(t)}} u(t,x,\xi) &= e^{-i\int_0^t h(s;t,x,\xi)ds} W_{\varphi_\varepsilon^{(0)}} u_0(x^{(2)}(0;t,x,\xi),\xi^{(2)}(0;t,x,\xi))\\
&\quad - i\int_0^t e^{-i\int_\tau^t h(s;t,x,\xi)ds} R[u]\left(\tau, x^{(2)}(\tau;t,x,\xi),\xi^{(2)}(\tau;t,x,\xi)\right)d\tau
\end{aligned}$$

ここで, $h(s;t,x,\xi) = \frac{1}{2}|\xi^{(2)}(s;t,x,\xi)|^2 + V(t,x^{(2)}(s;t,x,\xi)) - \nabla_x V(t,x^{(2)}(s;t,x,\xi))\cdot x^{(2)}(s;t,x,\xi)$,

$$R[u](t,x,\xi;\varepsilon) = \frac{1}{2}\sum_{|\alpha|=2}\int \overline{\varphi_\varepsilon^{(t)}(y-x)}\left(\int_0^1 \partial_x^\alpha V(t,x+\theta(y-x))(y-x)^\alpha d\theta\right)u(t,y)e^{-iu\xi}dy$$

である. 両辺に $W^*_{\varphi_\varepsilon^{(t)}}$ を作用させると, 補題 2 および L^2-保存則 $\|\varphi_\varepsilon^{(t)}\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$ より,

$$\begin{aligned}
u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^n} E_0(t,x,y;\varepsilon)u_0(y)dy\\
&\quad - i\|\varphi\|_{L^2}^{-2} W^*_{\varphi_\varepsilon^{(t)}}\left[\int_0^t e^{-i\int_\tau^t h(s;t,x,\xi)ds} R[u]\left(\tau, x^{(2)}(\tau;t,x,\xi),\xi^{(2)}(\tau;t,x,\xi);\varepsilon\right)d\tau\right], \quad (12)\\
E_0(t,x,y;\varepsilon) &= \|\varphi\|_{L^2}^{-2}(2\pi)^{-n}\iint \varphi_\varepsilon^{(t)}(x-x')\overline{\varphi_\varepsilon^{(0)}(y-x^{(2)}(0;t,x',\xi))}\\
&\quad\times\exp\left(-i\int_0^t h(s;t,x,\xi)ds + ix\xi - iy\xi^{(2)}(0;t,x,\xi)\right)d\xi dx'
\end{aligned}$$

となる.

4.2 主要項に関する漸近評価

$\phi(t,x,y,x',\xi) = -i\int_0^t h(s;t,x,\xi)ds + ix\xi - iy\xi^{(2)}(0;t,x,\xi)$ とおく. 補題 3 の (10), (11) より, 次の評価をもつような, ある連続関数 $r_1(t,x,y,x',\xi)$ が存在して, ϕ は次で表される:

$$\phi(t,x,y,x',\xi) = S(t,x,y) - \frac{1}{2t}\left((x-x') - (y-x^{(2)}(0))\right)^2 + tr_1(t,x,y,x',\xi),$$
$$|r_1(t,x,y,x',\xi)| \lesssim |x-x'|^2 + |y-x^{(2)}(0)|^2.$$

これより, E_0 は次の振幅関数 $\widetilde{a_0}$ を用いて次のように書くことができる.

$$E_0(t,x,y;\varepsilon) = (2\pi it)^{-n/2} e^{iS(t,x,y)}\widetilde{a_0}(t,x,y;\varepsilon),$$
$$\widetilde{a_0}(t,x,y;\varepsilon) = \|\varphi\|_{L^2}^{-2}(2\pi)^{-n}\iint \varphi_\varepsilon^{(t)}(x-x')\overline{\varphi_\varepsilon^{(0)}(y-x^{(2)}(0;t,x',\xi)}$$
$$\times\, e^{\frac{1}{2t}\left((x-x')-(y-x^{(2)}(0))\right)^2} e^{itr_1(t,x,y,x',\xi)}d\xi dx'.$$

補題 3 の (9) および $e^{itr_1} = 1 + \left(e^{itr_1}-1\right)$ より, $\widetilde{a_0}$ は次の三つの項に分けることができる.

$$\widetilde{a_0}(t,x,y;\varepsilon) = \|\varphi\|_{L^2}^{-2}(-2\pi it)^{-n/2}\iint \varphi_\varepsilon^{(t)}(x')\overline{\varphi_\varepsilon^{(0)}(Y)}e^{-i\frac{(x'-Y)^2}{2t}}dYdx'$$
$$+ \|\varphi\|_{L^2}^{-2}(-2\pi it)^{-n/2}\iint r_0(t,x,y,x'+x,\Phi^{-1}(Y+y))\varphi_\varepsilon^{(t)}(x')\overline{\varphi_\varepsilon^{(0)}(Y)}e^{-i\frac{(x'-Y)^2}{2t}}dYdx'$$
$$+ \|\varphi\|_{L^2}^{-2}(-2\pi it)^{-n/2}\iint \varphi_\varepsilon^{(t)}(x')\overline{\varphi_\varepsilon^{(0)}(Y)}e^{-i\frac{(x'-Y)^2}{2t}}\left(e^{itr_1(t,x,y,x'+x,\Phi^{-1}(Y+y)}-1\right)dYdx'$$

右辺第一項は, 自由 Schrödinger 方程式の基本解の公式 (7) と, $\|\varphi_\varepsilon^{(t)}\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}$ から 1 に等しい. 右辺第二項, 第三項に補題 1 を用いると,

$$\|\widetilde{a_0}(t,x,y;\varepsilon) - 1\|_{L^\infty_{x,y}} \lesssim \left(\varepsilon + \frac{t}{\varepsilon}\right)^2 \sum_{k=0}^{n+1}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\right)^k \tag{13}$$

が得られる.

4.3 剰余項に関する漸近評価, 結論

$U(t)$ を (1) の解作用素とする. $\widetilde{r}(t,x,y;\varepsilon) := E(t,x,y) - E_0(t,x,y;\varepsilon)$ とおくと, (12) および補題 2 より,

$$\left\|\int \widetilde{r}(t,x,y;\varepsilon)f(y)dy\right\|_{L^2_x}$$
$$\lesssim \left\|W^*_{\varphi_\varepsilon^{(t)}}\left[\int_0^t e^{-i\int_\tau^t h(s;t,x,\xi)ds}R[U(\tau)f]\left(\tau, x^{(2)}(\tau;t,x,\xi), \xi^{(2)}(\tau;t,x,\xi);\varepsilon\right)d\tau\right]\right\|_{L^2_x}$$
$$\lesssim \int_0^t \left\|R[U(\tau)f]\left(\tau, x^{(2)}(\tau;t,x,\xi), \xi^{(2)}(\tau;t,x,\xi);\varepsilon\right)d\tau\right\|_{L^2_{x,\xi}}$$
$$= \int_0^t \|R[U(\tau)f](\tau,X,\Xi;\varepsilon)\,d\tau\|_{L^2_{X,\Xi}}$$
$$\lesssim \sum_{|\alpha|=2}\int_0^t \|X^\alpha\varphi_\varepsilon^{(\tau)}(X)\|_{L^2_X}\|U(\tau)f\|_{L^2}d\tau.$$

ここで, 補題 1 と L^2-保存則 $\|U(\tau)f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ を用いて, 上の評価を続ければ,

$$\left\| \int \widetilde{r}(t,x,y;\varepsilon) f(y) dy \right\|_{L^2_x} \lesssim t \left(\varepsilon + \frac{t}{\varepsilon} \right)^2 \|f\|_{L^2} \tag{14}$$

を得る. (13), (14) が $\varepsilon > 0$ によらない定数で評価されていることに注意して, $a_0(t,x,y) := \widetilde{a_0}(t,x,y;\sqrt{t})$, $r(t,x,y) := \widetilde{r}(t,x,y;\sqrt{t})$ とすれば, a_0, r はそれぞれ, (5), (6) をみたし, 定理 1 の証明が終了する.

参考文献

[1] Boulkhemair, A., *Estimations L^2 precisées pour des integrales oscillantes.* Comm. Partial Differential Equations, **22** (1997), 165–184.

[2] Fujiwara, D., *A construction of the fundamental solution for the Schrödinger equation.* J. Analyse Math, **35** (1979), 41–96.

[3] Fujiwara, D., *Remarks on convergence of the Feynman path integrals.* Duke Math. J. **47** (1980), 559–600.

[4] Goldberg, M., Visan, M., *Remarks on convergence of the Feynman path integrals.* Duke Math. J. **47** (1980), 559–600.

[5] Kato, K., Kobayashi, M., Ito, S., *Estimates on modulation spaces for Schrödinger evolution operators with quadratic and sub-quadratic potentials.* J. Funct. Anal. **266** (2014), 733–753.

[6] Nicola, F., *On the time slicing approximation of Feynman path integrals for non-smooth potentials.* J. Analyse. Math. **137** (2019), 529–558.

[7] Yajima, K., *Schrödinger equations II (in Japanese)*, (2014).

分数冪 p-ラプラシアンと一般化された非局所非線形項を含む臨界 Choquard 型方程式の解の無限列の存在

東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
佐久間正樹 (Masaki SAKUMA) *

概要

本講演では，分数階 p-ラプラシアン及び一般化された臨界増大度をもつ非局所非線形項を含む Choquard 型方程式の解の無限列の存在証明について解説する．弱 L^r 関数との畳み込みを含む非局所的な量に対して直接適用できるように一般化した凝集コンパクト性補題を用いて $(PS)_c$ 列のコンパクト性を議論し，変分法で有用な Krasnoselskii genus と呼ばれる概念に基づく臨界点定理を用いてエネルギーが 0 へ収束する弱解の列の存在を保証する．

1 導入

本講演では，次の臨界増大度の非線形項をもつ分数階 Choquard 型方程式を扱う：

$$(-\Delta)_p^s u + V(x)|u|^{p-2}u = \frac{1}{p^\uparrow}(K * g(u))g'(u) + \varepsilon_W W(x) f'(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^N. \tag{1}$$

ここで，$s \in (0,1)$, $1 < p < N/s < 2pr$, $r \in (1,\infty)$ であり，

$$(-\Delta)_p^s u(x) \coloneqq \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(x)} \frac{|u(x)-u(y)|^{p-2}(u(x)-u(y))}{|x-y|^{N+ps}} dy$$

は分数冪 p-ラプラシアンと呼ばれる非線形作用素である．関数 $f, g \in C^1(\mathbb{R}^N)$，畳み込み核 K は以下の条件を満たすとする．

(G1) $h(-u) = h(u)$ and $|h'(u)| \le C(|u|^{\hat{p}_g - 1} + |u|^{p_g - 1})$ $(\forall u \in \mathbb{R})$ for some $p_g, \hat{p}_g$ with $p < \hat{p}_g \le p_g < p^\uparrow$, where $h(t) \coloneqq g(t) - |t|^{p^\uparrow}$.

(G2) $0 < \alpha_g h(u) \le u h'(u)$ $(\forall u \neq 0)$ for some $\alpha_g \in (p^\downarrow, p^\uparrow]$.

(F) $f(-u) = f(u)$ and $0 < \alpha_f f(u) \le u f'(u) \le C(|u|^{q_1} + |u|^{q_2})$ $(\forall u \neq 0)$ for some $q_1, q_2 \in (1,p)$ and $\alpha_f > 1$.

(K) $K \in L_+^{r,\infty}(\mathbb{R}^N)$ and $K|_{\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0)} \in L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus B_\varepsilon(0))$ for any $\varepsilon > 0$.

ここで，$p^\downarrow \coloneqq p\left(1 - \dfrac{1}{2r}\right)$ および $p^\uparrow \coloneqq \dfrac{p_s^*}{p} p^\downarrow = \dfrac{pN(2r-1)}{2r(N-ps)}$ はそれぞれ Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式における lower critical および upper critical の場合に対応する臨界指数である．

* E-mail: masakisakuma0110@gmail.com

$p_s^* \coloneqq \dfrac{pN}{N-ps}$ は分数階臨界ソボレフ指数である．$B_R(x)$ は x を中心とする半径 R の開球を表す．
また，分数階斉次ソボレフ空間（斉次 Sobolev-Slobodeckij 空間）

$$D^{s,p}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N) \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy < \infty \right\}$$

の埋め込み $D^{s,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)$ に関連して，以下の 3 つの定数を定める．

$$S_{D^{s,p}} \coloneqq \inf_{u\in D^{s,p}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_{D^{s,p}}^p}{\|u\|_{p_s^*}^p},$$

$$S_K \coloneqq \inf_{u\in D^{s,p}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_{D^{s,p}}^p}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}(K*|u|^{p^\uparrow})|u|^{p^\uparrow}dx\right)^{p/(2\cdot p^\uparrow)}},$$

$$L_K \coloneqq \inf_{u\neq 0} \frac{\|u\|_{p_s^*}^{p_s^*}}{\left(\int_{\mathbb{R}^N}(K*|u|^{p^\uparrow})|u|^{p^\uparrow}dx\right)^{p_s^*/(2\cdot p^\uparrow)}}.$$

なお，$D^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ ($s\in(0,1)$, $p\in[1,\infty)$) は本来はコンパクト台をもつ滑らかな関数全体のなす空間 $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ のノルム

$$\|u\|_{D^{s,p}} \coloneqq \left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy\right)^{1/p}$$

に関する完備化として定義されるが，$ps<N$ のときは上記の $L^{p_s^*}(\mathbb{R}^N)$ の部分空間に同一の式で表されるノルムを入れて得られるバナッハ空間と同一視できるので，そのように考えている．（一方，$ps\geq N$ のときは定数差を無視したヘルダー空間や BMO 空間の部分空間と同一視される [2].）

(G1) は g が upper critical の増大度をもつことを保証し，(G2) は g が lower critical より大きな増大度をもつことを保証する Ambrosetti-Rabinowitz 型条件である．(F) も同様に f に対して上下からの評価を与える．Choquard 方程式の文脈における K の古典的な例はリースポテンシャルの畳み込み核

$$I_\alpha(x) = \frac{\Gamma((n-\alpha)/2)}{2^\alpha \pi^{n/2}\Gamma(\alpha/2)}|x|^{-(N-\alpha)}$$

だが，(K) はそれを原点でのみ特異性をもつ弱 L^r 関数に一般化し，湯川ポテンシャルなどの他の種類の畳み込み核も同時に扱うことを可能にする．

方程式 (1) において，ポテンシャル V，局所非線形項の重み関数 W は次の条件を満たすとする．

(V) $\exists\tau_0>0$ s.t. $\mu_{\mathbb{R}^N}(V^{-1}((-\infty,\tau_0]))<\infty$, $\|V_-\|_{N/(ps)} < S_{D^{s,p}}$ and $V_+\in L^{N/(ps)}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$.
(W) $W\in L^{\frac{p_s^*}{p_s^*-q_1}}(\mathbb{R}^N)\cap L^{\frac{p_s^*}{p_s^*-q_2}}(\mathbb{R}^N)$, $W>0$ a.e.

2 主定理

本講演で紹介する主結果は次の通りである．

定理 1. 仮定 (G1), (G2), (V), (K), (F), (W) の下で，ある $\varepsilon>0$ が存在して，$0<\varepsilon_W<\varepsilon$ のとき，方程式 (1) は対応するエネルギーが 0 に収束するような弱解の無限列をもつ．

方程式 (1) は最初 $p=2$, $s=1$, $N=3$, $K(x)=|x|^{-1}$, $g(u)=|u|^2$, $V\equiv 1$, $W\equiv 0$ の場合に，[6] によりポーラロンを記述する量子力学のモデルとして提唱された．その後，天文学にも同様のモデル [7] が登場し，更に数学的な興味で多様に一般化されている．特に非局所性と上下 2 つの臨界指数をもつ点が特徴的である．$p=2$, $s=1$, $N\geq 1$, $K=I_\alpha$, $g(u)=|u|^q$, $V\equiv 1$, $W\equiv 0$ の場合，$p^{\downarrow}<q<p^{\uparrow}$ のときは峠の補題により基底状態の解（正値球対称な古典解）をもつが，q がちょうど臨界指数に一致するときは Pohozaev の等式から非自明解が存在しない．そこで，臨界のケースについては方程式 (1) が解をもつためのポテンシャル V に関する十分条件を与える研究や，局所非線形項を導入したり g を古典的なものから変更したりした場合の可解性や解の個数についての研究が盛んである．最近では，variable exponent や Kirchhoff 型への拡張 [10, 3, 9] も行われている．こうした先行研究を踏まえ，本研究 [8] では p-分数階への拡張を考え，更に $W\neq 0$, $f\neq 0$ とし，Krasnoselskii genus に基づく偶汎関数に対する臨界点定理を用いることで無限個の解の存在を得た．また，前述したように本研究は条件 (K) によってリース・ポテンシャルに限らない一般の弱 L^r 関数との畳み込みを扱っているという点でも特徴がある．更に，後述するように，証明の過程で K との畳み込みを含む非局所的な量に直接適用できるように従来の凝集コンパクト性補題を改良した結果も本研究の成果である．

3　証明の概略

変分法を用いて議論するため，関数空間とエネルギー汎関数を設定する．分数階 Sobolev 空間の一種である Sobolev-Slobodeckij 空間 $W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ は次のように定義される：

$$W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \coloneqq \left\{ u\in L^p(\mathbb{R}^N) \,\middle|\, [u]_{s,p} \coloneqq \left(\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy \right)^{1/p} <\infty \right\}.$$

$W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ 上の自然なノルムは $\|u\|_{W^{s,p}}=\|u\|_{L^p}+[u]_{s,p}$ である．$[\,\cdot\,]_{s,p}$ は Gagliardo 半ノルムと呼ばれるが，全領域においては L^p が定数関数を含まないため，$[\,\cdot\,]_{s,p}$ 単体でもノルムを定めている．ここでは固定された s を扱うため，$[\,\cdot\,]_{s,p}$ を $\|\cdot\|_{D^{s,p}}$ と同じ表式により定めたが，$s\to+0$, $s\to 1-0$ の極限でそれぞれ $\|u\|_{L^p}$, $\|\nabla u\|_{L^p}$ の定数倍に収束するように

$$[u]_{s,p} \coloneqq \left(s(1-s)\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dxdy \right)^{1/p}$$

により定義される場合もある．$u\in W^{s,p}(\mathbb{R}^N)$ に対し，

$$\|u\|_{s,p,V_+} \coloneqq \left(\|u\|^p_{D^{s,p}} + \int_{\mathbb{R}^N} V_+|u|^p dx \right)^{1/p}$$

とする．このとき，それをノルムとするバナッハ空間

$$E \coloneqq \{u\in W^{s,p}(\mathbb{R}^N) \mid \|u\|_{s,p,V_+}<\infty\}$$

は一様凸空間となる．この E が今回の変分法の議論に用いる関数空間である．方程式 (1) に対応する E 上のエネルギー汎関数 $I : E \to \mathbb{R}$ は

$$I[u] = \frac{1}{p}\|u\|_{D^{s,p}}^{p} + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx \\ - \frac{1}{2\cdot p^{\uparrow}}\int_{\mathbb{R}^N}(K * g(u))g(u)dx - \varepsilon_W \int_{\mathbb{R}^N} W(x)f(u)dx \quad (u \in E)$$

である．I の臨界点を方程式 (1) の弱解または単に解と呼ぶ.

非局所非線形項に対応するエネルギーの制御には Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式の一般化である次の不等式を用いる．$f = |\cdot|^{-(N-\alpha)}$ の場合が Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式である．これは弱 L^r 空間におけるヤングの不等式のアナロジーなどから証明できる.

命題 2. $1/p_1 + 1/p_2 + 1/p_3 = 2$ を満たす指数 $p_1, p_2, p_3 \in (1, \infty)$ に対し，ある定数 $C > 0$ が存在して，任意の $f \in L^{p_1,\infty}(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^{p_2}(\mathbb{R}^N)$, $h \in L^{p_3}(\mathbb{R}^N)$ に対して,

$$\|(f * g)h\|_1 \le \|f\|_{p_1,\infty}\|g\|_{p_2}\|h\|_{p_3}.$$

更に，一般化された畳み込み核 K の挙動を解析するために次の簡単な補題を用意する.

補題 3. (K) を満たす K に対し，$K'(x) \coloneqq |x|K(x)$ とすると，$K' \in L^{r^*,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ である．ここで，$r < N$ のとき $r^* = \dfrac{Nr}{N-r}$，$r \ge N$ のとき $r^* = \infty$.

全領域における臨界方程式の $(PS)_c$ 列のコンパクト性を回復するためには，非有界な平行移動によるコンパクト性の破れとスケーリングによるコンパクト性の破れを共に記述する必要がある．そのために，本研究では，補題 3 を用いて，P. L. Lions [4] によるラドン測度に関する凝集コンパクト性補題を K との畳み込みを含む非局所的な量に直接適用できるように一般化・拡張することを試みた．これを記述するには複素ラドン測度の空間 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ における漠収束 (vague convergence) と呼ばれる概念を用いる.

定義 4. $C_0(\mathbb{R}^N)$ を $f(x) \to 0$ $(|x| \to \infty)$ となる連続関数 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ 全体がなす空間で，一様ノルムを備えたものとする．$\mathbb{R}^N$ 上の複素ラドン測度の列 $\{\mu_n\}$ が複素ラドン測度 μ に漠収束するとは，任意の $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^N} f\, d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^N} f\, d\mu \quad (n \to \infty)$$

が成り立つことを言う.

Riesz-Markov-角谷の表現定理より，$\mathbb{R}^N$ 上の複素ラドン測度全体が全変動ノルムに関してなすバナッハ空間 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ は $C_0(\mathbb{R}^N)$ の連続双対空間と同一視できるが，漠収束を定める位相（漠位相）はまさにこの空間における汎弱位相である．漠収束は「弱収束」と呼ばれることもあるが，有界連続関数を試験関数とする確率論における通常の「測度の弱収束」とは異なるので注意が必要である．漠収束はその意味での「弱収束」よりも弱い．また，$\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ は回帰的ではないため，漠収束と $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ における関数解析的な意味での「弱収束」も一致しない.

本研究において拡張された凝集コンパクト性補題は次の通りである.

定理 5. $\{u_n\}$ を $D^{s,p}$ の有界列で，$u_n \rightharpoonup u$ in $D^{s,p}$ (weakly) and a.e. in $\mathbb{R}^N$ を満たすものとする．ラドン測度の空間における漠収束の意味で，$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dy \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$, $|u_n|^{p_s^*} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$, $(K*|u_n|^{p^\uparrow})|u_n|^{p^\uparrow} \overset{*}{\rightharpoonup} \xi$ が成り立つと仮定する．それぞれの列の「無限遠に逃げる profile の総量」を

$$\begin{aligned}
\mu_\infty &\coloneqq \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\{|x|\geq R\}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u_n(x)-u_n(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dy\right)dx;\\
\nu_\infty &\coloneqq \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\{|x|\geq R\}}|u_n|^{p_s^*}dx;\\
\xi_\infty &\coloneqq \lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\{|x|\geq R\}}(K*|u_n|^{p^\uparrow})|u_n|^{p^\uparrow}dx
\end{aligned}$$

とおく．このとき，高々可算な添字集合 $\mathcal{I}$，点の族 $\{x_i\}_{i\in\mathcal{I}}\subset\mathbb{R}^N$，非負実数の族 $\{\xi_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, $\{\mu_i\}_{i\in\mathcal{I}}$, $\{\nu_i\}_{i\in\mathcal{I}}\subset\mathbb{R}$ が存在して，以下の結論 A, B, C, D が成り立つ．

A. **汎弱極限の分解**

$$\begin{aligned}
\xi &= (K*|u|^{p^\uparrow})|u|^{p^\uparrow}+\sum_{i\in\mathcal{I}}\xi_i\delta_{x_i};\\
\mu &\geq \int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{N+ps}}dy+\sum_{i\in\mathcal{I}}\mu_i\delta_{x_i};\\
\nu &= |u|^{p_s^*}+\sum_{i\in\mathcal{I}}\nu_i\delta_{x_i};\\
&\sum_{i\in\mathcal{I}}\xi_i^{p_s^*/(2\cdot p^\uparrow)}\leq\sum_{i\in\mathcal{I}}\xi_i^{p/(2\cdot p^\uparrow)}<\infty.
\end{aligned}$$

B. **離散成分間の量的関係**

$$\mu_i\geq S_K\xi_i^{p/(2\cdot p^\uparrow)},\quad \nu_i\geq L_K\xi_i^{p_s^*/(2\cdot p^\uparrow)},\quad \mu_i\geq S_{D^{s,p}}\nu_i^{p/p_s^*}. \tag{2}$$

C. **保存則**

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}(K*|u_n|^{p^\uparrow})|u_n|^{p^\uparrow}dx &= \int_{\mathbb{R}^N}d\xi+\xi_\infty;\\
\limsup_{n\to\infty}\|u_n\|_{D^{s,p}}^p &= \int_{\mathbb{R}^N}d\mu+\mu_\infty;\\
\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n|^{p_s^*}dx &= \int_{\mathbb{R}^N}d\nu+\nu_\infty.
\end{aligned}$$

D. **無限遠に逃げる成分間の量的関係**

$$\begin{aligned}
L_K^2\xi_\infty^{p_s^*/p^\uparrow} &\leq \nu_\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}d\nu+\nu_\infty\right);\\
S_K^2\xi_\infty^{p/p^\uparrow} &\leq \mu_\infty\left(\int_{\mathbb{R}^N}d\mu+\mu_\infty\right);\\
S_{D^{s,p}}\nu_\infty^{p/p_s^*} &\leq \mu_\infty.
\end{aligned}$$

更に，量的関係 (2) は ξ_i,μ_i,ν_i をそれぞれ $\xi(\mathbb{R}^N),\mu(\mathbb{R}^N),\nu(\mathbb{R}^N)$ に置き換えても成り立つ．

特に量的関係を用いて特異成分や無限遠に逃げる profile の総量が 0 であることを示すことで，十分小さい $\varepsilon_W > 0$ と $c < 0$ に対して I の $(PS)_c$ 条件の成立が言える．

命題 6. $\varepsilon_W > 0$ が十分小さいとき，I は全ての $c < 0$ に対して $(PS)_c$ 条件を満たす．すなわち，$I[u_n] \to c$, $I'[u_n] \to 0$ in E' を満たす任意の $\{u_n\} \subset E$（$(PS)_c$ 列）が収束部分列をもつ．

Proof. 証明の概略のみ述べる．

$\{u_n\}$ を $(PS)_c$ 列とする．$\{u_n\}$ は E で有界なので，必要なら部分列に移って弱収束するとして良い．更にソボレフの埋め込み定理や $C_0(\mathbb{R}^N)$ に対する Banach–Alaoglu の定理などから先の補題の仮定を満たす部分列が存在する．表記の簡略化のため，以下，その部分列を同じ記号 $\{u_n\}$ で表す．

特異成分の非存在

カットオフ関数 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ s.t. $\chi_{B_1(0)} \le \varphi \le \chi_{B_2(0)}$ をとる．先の補題における各 $i \in \mathcal{I}$ に対し，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \lim_{n \to \infty} I'[u_n] \left(\varphi \left(\frac{\cdot - x_i}{\varepsilon} \right) u_n \right) = 0$$

より，$0 \ge \mu_i - \xi_i$ が得られる．これを量的関係 (2) と連立すると，各 i に対して $\xi_i = 0$ または $\xi_i \ge S_K^{\frac{N(r+1)}{N+prs}}$ のどちらか一方が成り立つことが導かれる．後者の可能性は適当な β に対する $I[u_n] - \beta I'[u_n]u_n$ の下からの評価を解析することで ε_W が十分小さければ排除できる．同様にして $\mu_i = 0$ も言え，量的関係 (2) から $\nu_i = 0$ も分かる．

無限遠に逃げる成分の非存在

$$\lim_{R \to \infty} \lim_{n \to \infty} I'[u_n](\eta_R u_n) = 0 \quad (\eta_R(x) \coloneqq 1 - \varphi(x/R))$$

$$\therefore \mu_\infty + V_\infty = \lim_{R \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (K * g(u_n)) g'(u_n) u_n \eta_R dx. \tag{3}$$

ここで,

$$V_\infty \coloneqq \lim_{R \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} V |u_n|^p \eta_R dx.$$

V_∞ の下からの評価や様々な不等式を経由すると,

$$\lim_{R \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (K * g(u_n)) g'(u_n) u_n \eta_R dx$$
$$\le C \left(\frac{V_\infty}{\tau_0} \right)^{\frac{\alpha' \hat{p}_g}{p}} (\nu_\infty)^{\frac{(1-\alpha')\hat{p}_g}{p_s^*}} + C' (\nu_\infty)^{1/\ell_r}$$

が得られる．ここで,

$$\frac{1}{\hat{p}_g \ell_r} = \frac{\alpha'}{p} + \frac{1 - \alpha'}{p_s^*}, \text{ i.e., } \alpha' \coloneqq \frac{p(p_s^* - \hat{p}_g \ell_r)}{\hat{p}_g \ell_r (p_s^* - p)}.$$

積に関するヤングの不等式から,

$$\mu_\infty \le \mu_\infty + (1 - C'' \varepsilon^{\frac{p}{\alpha' \hat{p}_g}}) V_\infty \le C_\varepsilon (\nu_\infty)^{\frac{(1-\alpha')\hat{p}_g}{p_s^*} \cdot \frac{p}{p - \alpha' \hat{p}_g}} + C' \nu_\infty^{1/\ell_r}.$$

形式的に $\hat{p}_g$ を変数と見做すと，指数

$$\Xi(\hat{p}_g) \coloneqq \frac{(1-\alpha')\hat{p}_g}{p_s^*} \cdot \frac{p}{p - \alpha' \hat{p}_g} = \frac{\hat{p}_g \ell_r - p}{\hat{p}_g \ell_r - p\ell_r + p_s^*(\ell_r - 1)}$$

は $\hat{p}_g$ に関して単調増加で，$\Xi(p) = p/p_s^*$ であることに注意すると，$\Xi(\hat{p}_g) > p/p_s^*$ ($\because \hat{p}_g > p$)．これと量的関係 $\mu_\infty > S_{D^{s,p}} \nu_\infty^{p/p_s^*}$ より，所与の指数と K, V, W, f, g のみに依存して ε_W に依存しない定数 $\Lambda_0 > 0$ が存在して $\mu_\infty = 0$ または $\mu_\infty > \Lambda_0$ が結論される．再び適当な β に対する $I[u_n] - \beta I'[u_n]u_n$ の下からの評価から $\mu_\infty \leq O(\varepsilon_W^{\frac{p}{p-\min\{q_1,q_2\}}})$ (as $\varepsilon_W \to 0$) が言えるので，ε_W が十分小さければ $\mu_\infty > \Lambda_0$ となることはあり得ない．よって，$\mu_\infty = 0$ となり，無限遠に逃げる成分間の量的関係と (3) から他の無限遠に逃げる成分も 0 であることが分かる．

強収束の導出

特異成分と無限遠に逃げる成分の非存在が言えたので，$\|u_n\|_{D^{s,p}} \to \|u\|_{D^{s,p}}$ となる．$V_\infty = 0$ や無限測度空間における Vitali の収束定理などから $\|u_n\|_E = \|u\|_E$ が得られる．E の一様凸性から，これと弱収束を合わせると，$u_n \to u$ in E. □

強収束の導出には様々な方法が考えられ，例えば $I'[u_n]u_n \to 0$ と $I'[u]u = 0$ の比較に基づく方法もある．$(PS)_c$ 条件から臨界点の列の存在を示すには，[1] 以降よく知られている次の symmetric mountain pass theorem を用いる．

定理 7 (Ambrosetti–Rabinowitz, 1973)**.** X を無限次元バナッハ空間，$\mathcal{A} \coloneqq \{A \subset X \mid A : \text{closed}, -A = A\}$ とし，$\gamma(A)$ で $A \in \mathcal{A}$ の Krasnoselskii genus を表す．すなわち，

$$\gamma(A) \coloneqq \inf\{m \in \mathbb{N} \mid \exists h \in C(A; \mathbb{R}^m \setminus \{0\}); h(-\cdot) = -h\}.$$

$\Sigma_n \coloneqq \{A \in \mathcal{A} \mid \gamma(A) \geq n\}$ とおく．

$J \in C^1(X; \mathbb{R})$ は下に有界な偶汎関数で $J(0) = 0$ と任意の $c < 0$ に対する $(PS)_c$ 条件を満たすとする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\sup_{A_n} J < 0$ なる $A_n \in \Sigma_n$ が存在すると仮定すると，各 $c_n \coloneqq \inf_{A \in \Sigma_n} \sup_A J$ は J の臨界値である．

ただし，方程式 (1) に対応するエネルギー汎関数 I そのものはこの仮定を満たさないため，I の適切なカットオフ J を考え，それに対して上記の臨界点定理を用いる．具体的には，適当なカットオフの仕方を見定めるために，I の下からの評価

$$I[u] \geq C_1\|u\|_E^p - C_2(\|u\|_E^{2\hat{p}_g} + \|u\|_E^{2p^\uparrow}) - \varepsilon_W \cdot C_3(\|u\|_E^{q_1} + \|u\|_E^{q_2})$$

に注目する．$\ell_\varepsilon(t) \coloneqq C_1 t^p - C_2(t^{2\hat{p}_g} + t^{2p^\uparrow}) - \varepsilon_W \cdot C_3(t^{q_1} + t^{q_2})$ に対し，$\exists \varepsilon_0' > 0$ s.t. $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0')$; $0 < {}^\exists t_{\varepsilon,0} < {}^\exists t_{\varepsilon,1}$ s.t. $\ell_\varepsilon(t) < 0$ for $t \in (0, t_{\varepsilon,0})$; $\ell_\varepsilon(t) > 0$ for $t \in (t_{\varepsilon,0}, t_{\varepsilon,1})$; $\ell_\varepsilon(t) < 0$ for $t \in (t_{\varepsilon,1}, \infty)$ が成立する．カットオフ関数 $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ s.t. $\chi_{[0,t^p_{\varepsilon_W,0}]} \leq \psi \leq \chi_{[0,t^p_{\varepsilon_W,1}]}$ をとり，

$$\begin{aligned} J[u] &\coloneqq I_+[u] - \psi(\|u\|_E^p) I_-[u] \\ &= \frac{1}{p}\|u\|_{D^{s,p}}^p + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} V(x)|u|^p dx \\ &\quad - \frac{1}{2p^\uparrow}\psi(\|u\|_E^p)\int_{\mathbb{R}^N} (K * g(u))g(u)dx \\ &\quad - \varepsilon_W \psi(\|u\|_E^p)\int_{\mathbb{R}^N} W(x)f(u)dx \end{aligned}$$

とすると，J は下に有界となり，$J[u] < 0 \Rightarrow I[u] = J[u]$ となる．よって，$c < 0$ に対する I の $(PS)_c$ 条件から J の $(PS)_c$ 条件が従う．

この J と各自然数 n に対し，J の上からの評価と Krasnoselskii genus の単調性から $J^{-1}((-\infty, \delta_n]) \in \Sigma_n$ を示せる．ここから，

$$c_n \coloneqq \inf_{A \in \Sigma_n} \sup_A J \leq \delta_n < 0.$$

こうして J が symmmetric mountain pass lemma の仮定を満たすことが分かるので適用する．

参考文献

[1] Ambrosetti, A., Rabinowitz, P. H.: Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Funct. Anal. **14**, 349–381 (1973)

[2] Brasco, L., Gómez-Castro, D., Vázquez, J. L.: Characterisation of homogeneous fractional Sobolev spaces. Calc. Var. Partial Differ. Equ. **60**, 60 (2021)

[3] Lin, X., Zheng, S., Feng, Z.: Multiple solutions of p-fractional Schrödinger-Choquard-Kirchhoff equations with Hardy-Littlewood-Sobolev critical exponents. Adv. Nonlinear Stud. **23**, 20220059 (2023)

[4] Lions, P. L.: The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The limit case, Part 1. Rev. Mat. Iberoam. **1**(1), 145–201 (1985)

[5] Moroz, V., Schaftingen, J.: A guide to the Choquard equation. J. Fixed Point Theory Appl. **19**, 773–813 (2017)

[6] Pekar, S.: Untersuchung über die elektronentheorie der kristalle. Akademie Verlag, Berlin (1954)

[7] Penrose, R.: On gravity's role in quantum state reduction. Gen Relativ Gravit. **28**(5), 581–600 (1996)

[8] Sakuma, M.: Infinitely many solutions for p-fractional Choquard type equations involving general nonlocal nonlinearities with critical growth via the concentration compactness method. to appear in J. Differ. Equ. arXiv: 2305.01705 (2024)

[9] Tao, L., He, R., Liang, S., Niu, R.: Existence and multiplicity of solutions for critical Choquard-Kirchhoff type equations with variable growth. AIMS Math. **8**(2), 3026–3048 (2023).

[10] Wang, L., Han, T.: Infinitely Many Solutions for Schrödinger-Choquard-Kirchhoff Equations Involving the Fractional p-Laplacian. Acta Math. Sin. Engl. Ser. **37**(2), 315–332 (2021)

A Novel Approach to Proving Conserved Quantities in the Particle System of m neighbours and Its Application to Generate New Systems

School of Mathematics & Statistics, University of Glasgow
Chen Shu * （ジョ　シン）

Abstract

This paper presents an approach to analytically and numerically examine the second conserved quantity in particle systems with m-neighbours, where the preservation of the first conserved quantity is ensured by the evolution equation. Leveraging this method, we introduce three new particle systems with 5-neighbours, akin to the one proposed by Endo and Takahashi. Additionally, we briefly discuss the symmetry of these systems, exploring its potential role in generating new systems.

1 Introduction

Endo and Takahashi introduced a novel particle system[1] with five neighbours, characterized by two conserved quantities in [2]. This particle system, as defined in this paper, was explored to determine the system's momentum. Endo and Takahashi rigorously proved the second conserved quantity through detailed analysis of the specific particle system.

In this work, we present an alternative and more generalized method for proving conserved quantities within similar particle systems. Our novel approach is capable of generating proofs for conserved quantities in various particle systems numerically, offering a versatile tool for computationally exploring systems with desired conserved quantities.

The evolution equation governing this system under periodic boundary conditions[2] is given by

$$u_j^{n+1} = u_j^n + q\left(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\right) - q\left(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n\right), \tag{1}$$

where q is the flux [3] and all $u_j^n \in \{0, 1\}$. Equation (1) ensures the preservation of the first conserved quantity, which is the total number of 1s in the system at time n (labeled $(\#1)^n$), as demonstrated by the following calculation:

*E-mail:c.shu.1@research.gla.ac.uk

[1]Here, the term "particle system" refers to a system that both dependent variables u_j^n and independent variables (n, j) are discretized, where u_j^n takes binary values (0 or 1).

[2]If a system with periodic boundary conditions has a period of L, then we have $u_{L+1}^n = u_1^n$, $u_{L+2}^n = u_2^n$, and so on. Similarly, in the opposite direction, the following relationships hold: $u_{L-1}^n = u_{-1}^n$, $u_{L-2}^n = u_{-2}^n$, and so forth. All figures in this paper will only depict cells with indices 1 to L rather than the entire infinitely repeating system.

[3]In equation (1), $+q\left(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\right)$ represents the flux into the cell with index j during the time n to $n+1$. Similarly, $-q\left(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n\right)$ denotes the flux going out of the cell.

$$
\begin{aligned}
(\#1)^{n+1} = \sum_{j=1}^{L} u_j^{n+1} &= \sum_{j=1}^{L} \left[u_j^n + q\left(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\right) - q\left(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n\right) \right] \\
&= \left(\sum_{j=1}^{L} u_j^n \right) \\
&\quad + q\left(u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, u_2^n\right) - q\left(u_0^n, u_1^n, u_2^n, u_3^n\right) \\
&\quad + q\left(u_0^n, u_1^n, u_2^n, u_3^n\right) - q\left(u_1^n, u_2^n, u_3^n, u_4^n\right) \\
&\quad \cdots \\
&\quad + q\left(u_{L-2}^n, u_{L-1}^n, u_L^n, u_{L+1}^n\right) - q\left(u_{L-1}^n, u_L^n, u_{L+1}^n, u_{L+2}^n\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{L} u_j^n \right) + q\left(u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, u_2^n\right) - q\left(u_{L-1}^n, u_L^n, u_{L+1}^n, u_{L+2}^n\right) \\
&= \sum_{j=1}^{L} u_j^n = (\#1)^n,
\end{aligned}
$$

where L represents the size or period of the system. The periodic boundary condition, denoted as $u_{-1}^n = u_{L-1}^n, u_0^n = u_L^n, \cdots$, ensures the validity of the last row in the above computation.

In their paper [2], Endo and Takahashi introduced a rule table for the flux variable q, as shown in Table 1.

(a,b,c,d)	1111	1110	1101	1100	1011	1010	1001	1000
$q(a,b,c,d)$	1	1	1	1	0	0	0	0
(a,b,c,d)	0111	0110	0101	0100	0011	0010	0001	0000
$q(a,b,c,d)$	0	1	0	0	0	0	0	0

Table 1: Rule set for flux q in [2]

If we initialize the system with a random condition of density 0.5 as in [2], signifying that half of the system is set to 0 and the other half to 1, the resulting time evolution is depicted in Figure 1.

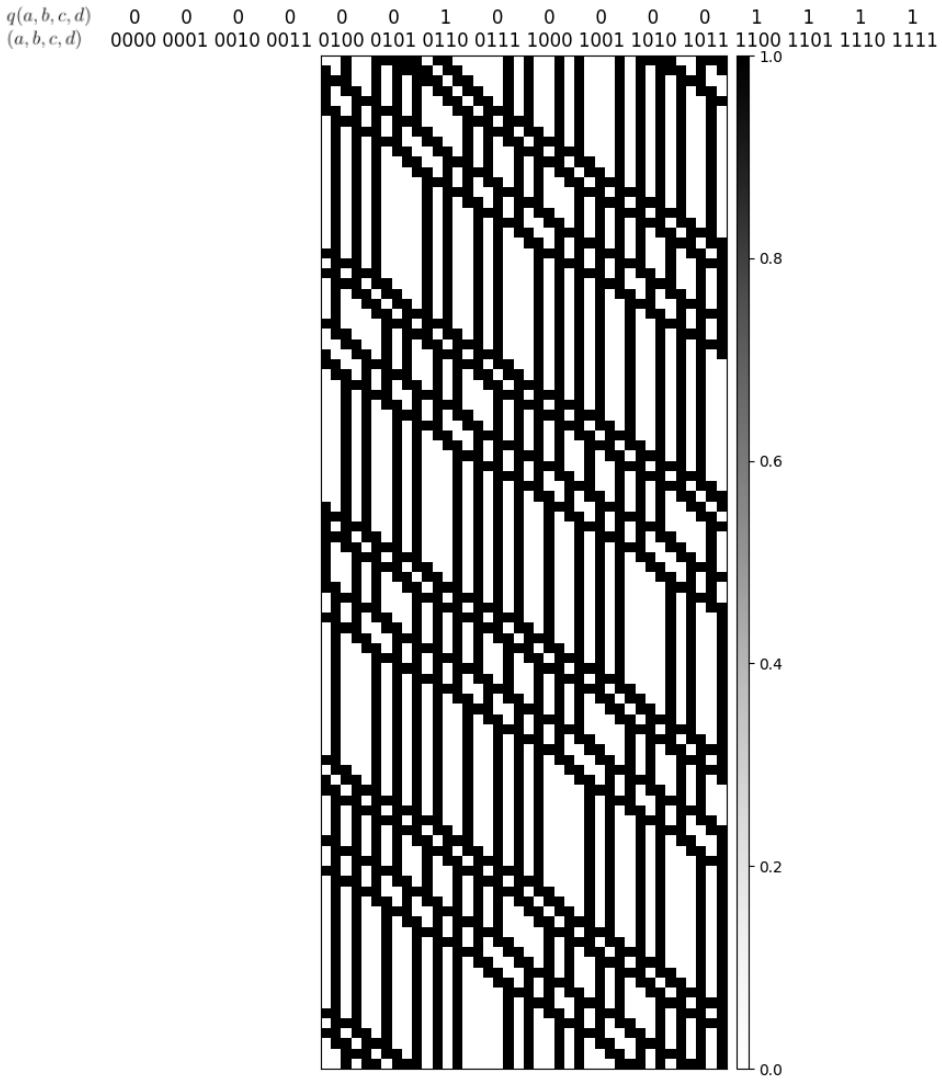


Figure 1: The Time evolution of the particle system described in [2] with period $L = 40$

In the subsequent section, we will provide a comprehensive proof that the system, governed by the evolution equation (1) and the specific flux q proposed by Endo et al., possesses a second conserved quantity.

2 Proof of the second conserved quantity #011

In the study by Endo and Takahashi [2], the preservation of the pattern 011 is demonstrated through an analysis of pattern reproduction within a specific particle system. We, alternatively, establish the conservation of the quantity #011 through arithmetic calculations. Importantly, this method can be generally applied to systems with different rule tables for flux q.

To accomplish our goal, we begin by defining a mathematical expression for the total number of the pattern 011 in a system at time n, denoted as $(\#011)^n$. We propose the expression:

$$(\#011)^n = \sum_{j=1}^{L} (1 - u_j^n) u_{j+1}^n u_{j+2}^n, \tag{2}$$

for a system with a period of L. The term $(1-u_j^n)u_{j+1}^n u_{j+2}^n$ evaluates to 1 when $(u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n) = (0, 1, 1)$, indicating the presence of the pattern 011. Otherwise, it evaluates to 0. By applying this test to each position j from 1 to L and summing the results, we obtain the total count of #011 at time n.

$$(1 - u_j^{n+1}) u_{j+1}^{n+1} u_{j+2}^{n+1} \;=\; \begin{cases} 1 \text{ , only if } & u_j^n \;\; u_{j+1}^n u_{j+2}^n \\ & \text{} \\ 0 \text{ , if } & u_j^n \;\; u_{j+1}^n u_{j+2}^n \\ & \text{} \\ \text{and the other combinations} & \end{cases}$$

Figure 2: $(1 - u_j^n)u_{j+1}^n u_{j+2}^n$ will give 1 if $(u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n) = (0, 1, 1)$. Otherwise it will give 0.

We will establish the conservation of #011 by demonstrating that $(\#011)^n = (\#011)^{n+1}$, representing the count of the pattern 011 at time n. To begin, we substitute the time evolution equation into $(\#011)^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
(\#011)^{n+1} &= \sum_{j=1}^{L} (1 - u_j^{n+1}) u_{j+1}^{n+1} u_{j+2}^{n+1} \\
&= \sum_{j=1}^{L} \left[1 - u_j^n - q\left(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\right) + q\left(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n\right)\right] \\
&\qquad \cdot \left[u_{j+1}^n + q\left(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n\right) - q\left(u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n, u_{j+3}^n\right)\right] \\
&\qquad \cdot \left[u_{j+2}^n + q\left(u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n, u_{j+3}^n\right) - q\left(u_{j+1}^n, u_{j+2}^n, u_{j+3}^n, u_{j+4}^n\right)\right] \\
&= \sum_{j=1}^{L} \left[1 - u_j^n - q\left(u_{j-2}^n, \cdot\right) + q\left(u_{j-1}^n, \cdot\right)\right] \left[u_{j+1}^n + q\left(u_{j-1}^n, \cdot\right) - q\left(u_j^n, \cdot\right)\right], \qquad (3)
\end{aligned}$$

where $q\left(u_{j-2}^n, \cdot\right)$ is the abbreviation of $q\left(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\right)$.

The expansion of (3) can be intricate, but we can simplify it by categorizing the terms based on the following propositions. By applying these propositions, we can eliminate other terms, leaving only $\sum_{j=1}^{L}(1 - u_j^n)u_{j+1}^n u_{j+2}^n = (\#011)^n$.

Proposition 1 *For any given $q(u_j^n, \cdot) \in \{0, 1\}$, $q^2(u_j^n, \cdot) = q(u_j^n, \cdot)$.*

Proof: Trivial. □

Proposition 2 *The following three identities holds:*

1. $\sum_{j=1}^{L} q(u_{j-1}^n,\cdot)q(u_j^n,\cdot)q(u_{j+1}^n,\cdot) = \sum_{j=1}^{L} q(u_{j-2}^n,\cdot)q(u_{j-1}^n,\cdot)q(u_j^n,\cdot)$,
2. $\sum_{j=1}^{L} q(u_{j-2}^n,\cdot)q(u_j^n,\cdot)q(u_{j+1}^n,\cdot) = \sum_{j=1}^{L} q(u_{j-2}^n,\cdot)q(u_{j-1}^n,\cdot)q(u_{j+1}^n,\cdot)$,
3. $\sum_{j=1}^{L} q^2\left(u_j^n,\cdot\right) q\left(u_{j-2}^n,\cdot\right) = \sum_{j=1}^{L} q\left(u_{j-1}^n,\cdot\right) q\left(u_{j+1}^n\right)$.

Proof: We will now prove the first identity

We can express the LHS in terms of the RHS as follows:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{L} q\left(u_{j-1}^n,\cdot\right) q\left(u_j^n,\cdot\right) q\left(u_{j+1}^n,\cdot\right) &= -q\left(u_{-1}^n,\cdot\right) q\left(u_0^n,\cdot\right) q\left(u_1^n,\cdot\right) + \sum_{j=1}^{L} q\left(u_{j-2}^n,\cdot\right) q\left(u_{j-1}^n,\cdot\right) q\left(u_j^n,\cdot\right) \\ &\quad + q\left(u_{L-1}^n,\cdot\right) q\left(u_L^n,\cdot\right) q\left(u_{L+1}^n,\cdot\right) \\ &= \sum_{j=1}^{L} q\left(u_{j-2}^n,\cdot\right) q\left(u_{j-1}^n,\cdot\right) q\left(u_j^n,\cdot\right),\end{aligned}$$

where the periodic boundary condition ensures $q\left(u_{-1}^n,\cdot\right) = q\left(u_{L-1}^n,\cdot\right), q\left(u_0^n,\cdot\right) = q\left(u_L^n,\cdot\right)$ and $q\left(u_1^n,\cdot\right) = q\left(u_{L+1}^n,\cdot\right)$.

The second and third identities can be proven in a similar manner. □

Proposition 3 *In this system, the following identity holds:* $q(u_{j-1}^n,\cdot)[1-q(u_j^n,\cdot)-u_j^n+u_{j+1}^n] = 0$.

Proof: We begin by assuming $q(u_{j-1}^n,\cdot) = 1$, as it is trivially true when $q(u_{j-1}^n,\cdot) = 0$. To satisfy $q(u_{j-1}^n,\cdot) = 1$, the values of $(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n)$ must be one of the following: $(1,1,1,1)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,0,1)$, $(1,1,0,0)$, or $(0,1,1,0)$. We will discuss each case separately:

- Case 1: For $(1,1,1,1)$, we have $[1-q(u_j^n,\cdot)-u_j^n+u_{j+1}^n] = [1-q(1,1,1,u_{j+3}^n)-1+1]$. Since $q(1,1,1,u_{j+3}^n) = 0$ according to the flux $q(a,b,c,d)$ table, we have proved that $q(u_{j-1}^n,\cdot)[1-q(u_j^n,\cdot)-u_j^n+u_{j+1}^n] = 0$.
- Case 2: Since $(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n) = (1,1,1,0)$, we will have $[1-q(u_j^n,\cdot)-u_j^n+u_{j+1}^n] = [1-q(1,1,0,u_{j+3}^n)-1+1]$. The following proof is similar to Case 1.
- Case 3: For $(1,1,0,1)$, we have $[1-q(u_j^n,\cdot)-u_j^n+u_{j+1}^n] = [1-q(1,0,0,u_{j+3}^n)-1+0] = -q(1,0,0,u_{j+3}^n)$. From the table, we know $q(1,0,0,u_{j+3}^n) = 0$. Thus, we have completed the proof under this condition.
- Case 4: For $(1,1,0,0)$, the proof is the same as Case 3.
- Case 5: For $(0,1,1,0)$, the proof is similar to Case 2.

□

Proposition 4 *In this system, the following identity holds:* $q(u_{j-1}^n,\cdot)(u_j^n-1) = 0$.

Proof: We consider only the case where $q(u^n_{j-1}, \cdot) = 1$, as the statement is trivially true otherwise.

From the table of q, when $q(u^n_{j-1}, u^n_j, u^n_{j+1}, u^n_{j+2}) = 1$, several possibilities exist: $(1,1,1,1)$, $(1,1,1,0)$, $(1,1,0,1)$, $(1,1,0,0)$, or $(0,1,1,0)$. In each of these cases, $u^n_j = 1$. Consequently, $u^n_j - 1 = 0$. □

Proposition 5 *In this specific particle system, the expression for the flux q can be written as $q(a,b,c,d) = ab + (1-a)bc(1-d)$ when $a,b,c,d \in \{0,1\}$.*

Proof: The term ab encompasses all possible scenarios of $q(1,1,x,x)$, while $(1-a)bc(1-d)$ specifically accounts for the situation represented by $q(0,1,1,0)$. □

Proposition 6 *In this system, the following identity holds: $\sum_j q(u^n_{j-1}, \cdot)[q(u^n_{j+1}, \cdot)(q(u^n_{j+2}, \cdot) - 1) - u^n_{j+2}(q(u^n_{j-2}, \cdot) - 1)] = \sum_j u^n_{j-1}u^n_j u^n_{j+1}u^n_{j+2}(u^n_{j+3} - u^n_{j-2}) = 0$* [4].

Proof: We begin by applying Proposition 5 to $LHS = \sum_j q(u^n_{j-1}, \cdot)[q(u^n_{j+1}, \cdot)(q(u^n_{j+2}, \cdot)-1) - u^n_{j+2}(q(u^n_{j-2}, \cdot) - 1)] - \sum_j u^n_{j-1}u^n_j u^n_{j+1}u^n_{j+2}(u^n_{j+3} - u^n_{j-2})$. This allows us to express it without q, resulting in the expanded form:

$$
\begin{aligned}
LHS = \quad & (u^n_{j-1}u^n_j + (1-u^n_{j-1})u^n_j u^n_{j+1}(1-u^n_{j+2}))\cdot \\
& \big[(u^n_{j+1}u^n_{j+2} + (1-u^n_{j+1})u^n_{j+2}u^n_{j+3}(1-u^n_{j+4}))(u^n_{j+2}u^n_{j+3} + \\
& (1-u^n_{j+2})u^n_{j+3}u^n_{j+4}(1-u^n_{j+5}) - 1) - u^n_{j+2}(u^n_{j-2}u^n_{j-1} + (1-u^n_{j-2})u^n_{j-1}u^n_j(1-u^n_{j+1}) - 1)\big] .
\end{aligned}
$$

Upon expansion, most terms cancel each other, leaving only $u^n_{j-1}u^n_j u^n_{j+1}u^n_{j+2}u^n_{j+3}$ $-u^n_{j-2}u^n_{j-1}u^n_j u^n_{j+1}u^n_{j+2}$. Due to the boundary condition, $\sum_j u^n_{j-1}u^n_j u^n_{j+1}u^n_{j+2}u^n_{j+3}$ $-u^n_{j-2}u^n_{j-1}u^n_j u^n_{j+1}u^n_{j+2} = 0$ by Proposition 2. □

Proposition 7 *In this system, the following identity holds: $\sum_j u^n_{j+1}[q(u^n_{j-2}, \cdot)(q(u^n_{j+1}, \cdot) - u^n_{j+2}) + q(u^n_{j+1}, \cdot)(u^n_j - q(u^n_{j-1}, \cdot) - 1 + q(u^n_j, \cdot))] = 0$.*

Proof: Similar to Proposition 6. □

This method can be extended to prove other conserved quantities in similar systems. To do this, one needs to identify a similar expression for the desired conserved quantity (e.g., $\sum_{j=1}^L u^n_j u^n_{j+1}u^n_{j+2}$ for #111, $\sum_{j=1}^L (1-u^n_j)u^n_{j+1}u^n_{j+2}(1-u^n_{j+3})$ for #1001, etc.). Then, by either discovering identities or directly substituting the polynomial expression of flux q into the calculation of $(\#011)^{n+1}$, one can establish the conserved quantity in the system.

3 New systems with second conserved quantity #011

In this section, our objective is to generate additional systems that exhibit similar conserved quantities. To achieve this, we establish specific conditions for the systems under consideration.

1. The values of u^n_j in the system must satisfy $u^n_j \in \{0,1\}$.

2. The system should possess the first conserved quantity, denoted as #1.

[4] Meanwhile, $q(u^n_{j-1}, \cdot)[q(u^n_{j+1}, \cdot)(q(u^n_{j+2}, \cdot) - 1) - u^n_{j+2}(q(u^n_{j-2}, \cdot) - 1)] = 0$, the case where the LHS lacks summation, is not guaranteed.

3. The system should also exhibit the second conserved quantity, represented by #011.

The satisfaction of the second condition has been demonstrated in Section 1, due to the evolution equation. However, determining how to fulfil the first condition remains an open question. In our computational approach, we exclude systems that numerically violate the first requirement.

To meet the third condition, we apply the methodology outlined in Section 2 to numerically generate additional systems featuring the conserved quantity #011. Following the approach introduced by Endo and Takahashi (2022) [2], we initiate the process with a non-trivial initial condition, ensuring that #011 is non-zero. Subsequently, we calculate the occurrence of the pattern 011 at each time step. Our focus lies in identifying systems where #011 remains invariant throughout the evolution. Due to numerical limitations, we cannot conduct infinite evolutions and checks for #011. Therefore, for each system, we perform checks over 100 time evolutions.

Our computational analysis reveals the existence of 22 systems, out of a total of 2^{16} possibilities, that exhibit the conserved quantity #011. This section will present four non-trivial cases, with the complete list provided in our future paper.

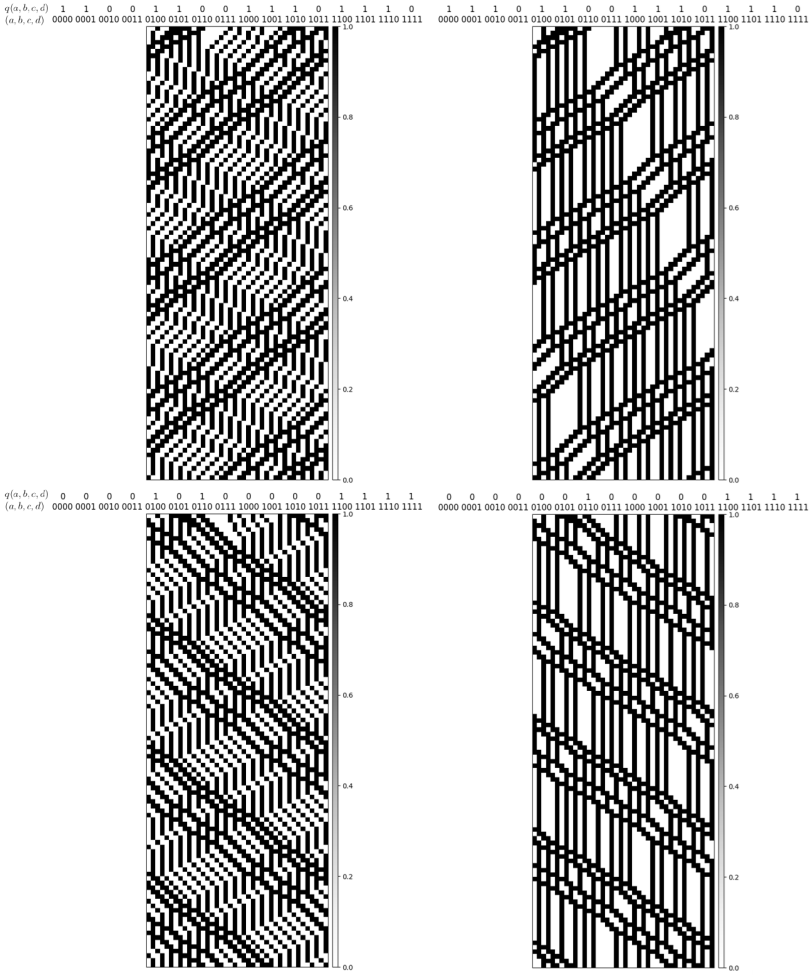
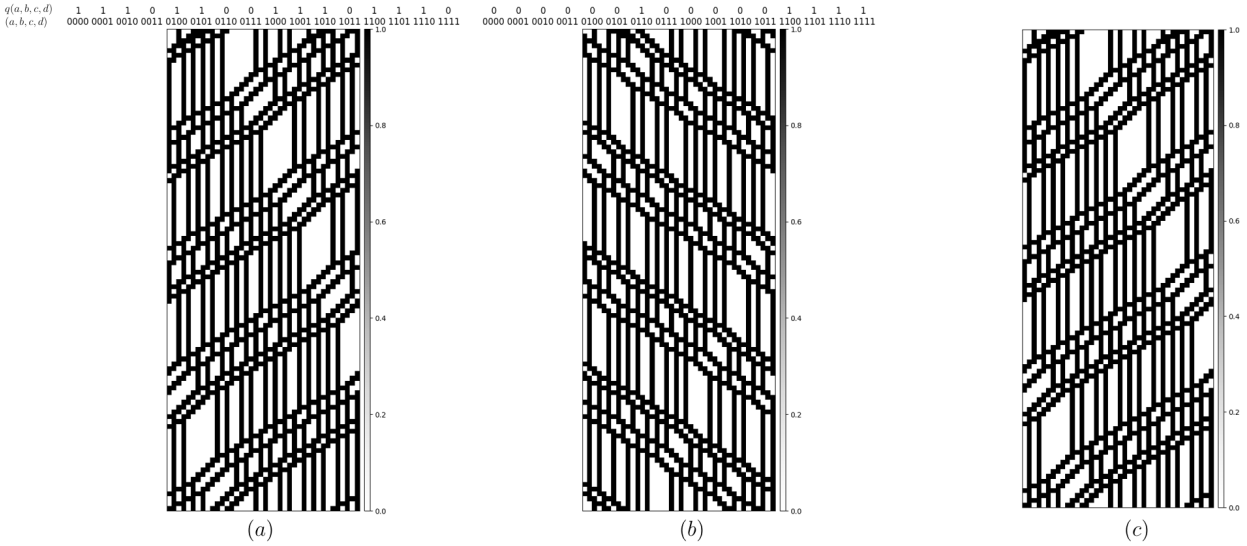


Figure 3: Four non-trivial systems exhibiting conserved quantity #011

It is evident that the system at the top and the one at the bottom share notable similarities.

4 Symmetry of the system with 5-neighbours

We observed that the particle systems discussed in Section 3 possess corresponding symmetric versions.



(a) (b) (c)

Figure 4: Comparison of particle systems in section 3: reversing the initial condition and mirroring the time evolution of (b) recreates (a) as (c).

By reversing the initial condition and evolving the system, we obtain a mirrored version of another 5-neighbours system.

This symmetry can be explained as follows: if we define the evolution equation of a system as $u_j^{n+1} = u_j^n + q\left(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\right) - q\left(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n\right)$, then the corresponding symmetric system will have the evolution equation as

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \left[1 - q\left(u_{j+1}^n, u_j^n, u_{j-1}^n, u_{j-2}^n\right)\right] - \left[1 - q\left(u_{j+2}^n, u_{j+1}^n, u_j^n, u_{j-1}^n\right)\right] \\ &= u_j^n + \tilde{q}\left(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\right) - \tilde{q}\left(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, u_{j+2}^n\right), \end{aligned} \tag{4}$$

where $\tilde{q}\left(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n\right) = 1 - q\left(u_{j+1}^n, u_j^n, u_{j-1}^n, u_{j-2}^n\right)$. Hence, the symmetric system shares the same structure of the evolution equation as the original one.

We can represent the flux q in matrix form to facilitate the calculation of the rule for a symmetric system. If we define the matrix Q as

$$Q = \begin{pmatrix} q(1,1,1,1) & q(1,1,1,0) & q(1,1,0,1) & q(1,1,0,0) \\ q(0,1,1,1) & q(0,1,1,0) & q(0,1,0,1) & q(0,1,0,0) \\ q(1,0,1,1) & q(1,0,1,0) & q(1,0,0,1) & q(1,0,0,0) \\ q(0,0,1,1) & q(0,0,1,0) & q(0,0,0,1) & q(0,0,0,0) \end{pmatrix},$$

then the flux $\tilde{q}$ for the symmetric system will be the transpose of Q subtracted by 1:

$$\tilde{Q} = 1 - Q^t = \begin{pmatrix} 1-q(1,1,1,1) & 1-q(0,1,1,1) & 1-q(1,0,1,1) & 1-q(0,0,1,1) \\ 1-q(1,1,1,0) & 1-q(0,1,1,0) & 1-q(1,0,1,0) & 1-q(0,0,1,0) \\ 1-q(1,1,0,1) & 1-q(0,1,0,1) & 1-q(1,0,0,1) & 1-q(0,0,0,1) \\ 1-q(1,1,0,0) & 1-q(0,1,0,0) & 1-q(1,0,0,0) & 1-q(0,0,0,0) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \tilde{q}(1,1,1,1) & \tilde{q}(1,1,1,0) & \tilde{q}(1,1,0,1) & \tilde{q}(1,1,0,0) \\ \tilde{q}(0,1,1,1) & \tilde{q}(0,1,1,0) & \tilde{q}(0,1,0,1) & \tilde{q}(0,1,0,0) \\ \tilde{q}(1,0,1,1) & \tilde{q}(1,0,1,0) & \tilde{q}(1,0,0,1) & \tilde{q}(1,0,0,0) \\ \tilde{q}(0,0,1,1) & \tilde{q}(0,0,1,0) & \tilde{q}(0,0,0,1) & \tilde{q}(0,0,0,0) \end{pmatrix}.$$

In other words, we have the new symmetric rule table for the flux $\tilde{q}$.

We will illustrate the process of constructing symmetric systems using a previous particle system as an example. If we consider system (a) in Figure 4, the matrix Q takes the form

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hence Q^t and $\tilde{Q}$ are

$$Q^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\tilde{Q} = 1 - Q^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

We can represent the rule for the new system in table format:

(a,b,c,d)	1111	1110	1101	1100	1011	1010	1001	1000
$\tilde{q}(a,b,c,d)$	1	1	1	1	0	0	0	0
(a,b,c,d)	0111	0110	0101	0100	0011	0010	0001	0000
$\tilde{q}(a,b,c,d)$	0	1	0	0	0	0	0	0

Table 2: Rule set for $\tilde{q}$ in the symmetric system

Table 2 exactly represents the rule of system (b) in Figure 4, which is the symmetric version of system (a).

It is crucial to emphasize that this symmetry phenomenon is not limited to the four systems in Figure 3 but extends to the other 22 newly discovered systems. This is because the new evolution equation (4) is guaranteed for any system that shares the same evolution equation.

5 Conclusion

In conclusion, this paper successfully employs a general method to establish the existence of a second conserved quantity in a particle system with 5 neighbours, as proposed by Endo et al. [2]. Furthermore, we leverage this method to numerically generate additional 5-neighbours systems exhibiting the same second conserved quantity. The final section of our work delves into a discussion on the symmetry exhibited by systems governed by this specific evolution equation.

Moving forward, the methods outlined in Sections 3 and 4 can be applied to systematically generate particle systems with m-neighbours while ensuring desired conserved quantities. This involves combining the evolution equation as described:

$$u_j^{n+1} = u_j^n + q\underbrace{\left(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, \cdots, u_{j+m-4}^n, u_{j+m-3}^n\right)}_{m-1 \text{ terms}} - q\underbrace{\left(u_{j-1}^n, u_j^n, \cdots, u_{j+m-3}^n, u_{j+m-2}^n\right)}_{m-1 \text{ terms}}$$

Additionally, it is of significant interest to explore the relationship between the number of neighbours and the number of conserved quantities by generating more $m-$neighbours systems. Notably, we observe that a 5-neighbours system can possess 2 conserved quantities, while the ultradiscrete KdV system, characterized as an ∞-neighbours system, exhibits an infinite number of conserved quantities. This observation prompts further investigation into the intriguing correlation between the system's neighbour count and the extent of conserved quantities.

Finally, the meaning of the newly discovered identities presented in Endo et al.'s system, as listed in the propositions, remains unexplored. Investigating how these propositions connect with Endo et al.'s pattern analysis represents an intriguing avenue for further exploration.

References

[1] Nobe, A., Satsuma, J. & Tokihiro, T. Stable difference equations associated with elementary cellular automata. Japan J. Indust. Appl. Math. 18, 293–305 (2001). https://doi.org/10.1007/BF03168576

[2] Endo, K., & Takahashi, D. (2022). Three-dimensional fundamental diagram of particle system of 5 neighbours with two conserved densities. JSIAM Letters, 14, 80-83.

[3] Nishinari, Katsuhiro, and Daisuke Takahashi. "Multi-Value Cellular Automaton Models and Metastable States in a Congested Phase", Journal of Physics. A, Mathematical and General, vol. 33/no. 43, (2000), pp. 7709-7720.

S_1 特異点の変形の幾何学

神戸大学大学院理学研究科数学専攻
島田 瑠奈 (Runa Shimada)*

概要

2 次元多様体から 3 次元多様体への滑らかな写像にあらわれる特異点は, Mond の分類によってあらわれやすい順に S_0 特異点 (ホイットニーの傘), S_1 特異点であることが知られている. 本講演では, 定義域に 1 パラメータを追加した S_1 特異点の変形に対して像域の等長写像のみを用いた表示式を与え, その微分幾何的な性質や変形にあらわれる S_0 特異点について述べる.

1 導入

近年特異点をもつ曲線や曲面の微分幾何的研究が盛んに行われている. 正則な曲面の代表的な微分幾何的不変量にガウス曲率と平均曲率があり, 曲面の微分幾何的性質はこれらの曲率の性質をもとに多く研究されてきた. 曲面が特異点をもつ場合, これらの不変量は通常発散し, 定義できない. したがって, 特異点を持つ曲面の微分幾何的性質を述べるための言語がない状態になる. これの対処法の一つに像域の等長写像のみを用いた表示式 ($SO(3)$-normal form) を使う方法がある. 代表的な特異点に対してはこの表示式が与えられており, 様々な微分幾何的性質が研究されている. ただし, これらの表示式は固定された特異点に対するものである. 特異点はあらわれやすい順に分類がなされており, 一番あらわれやすい特異点の次にあらわれやすい特異点は特異点の出現や消滅に対応するような, 写像の 1 パラメーター変形にあらわれるものである. したがって, このような特異点を調べる際は変形まで含めて考えるのが自然である. 本講演では特異点の変形に対して, 変形まで含めた $S_1^{\pm}$ 特異点の像域の等長写像のみを用いた表示式を与える. これを用いて, $S_1^{\pm}$ 特異点の変形の微分幾何的性質を調べる.

本講演では写像の局所的な振る舞いのみに注目するため, 写像はすべて写像芽として述べる. 詳しい定義は [4, 3 章] [6, 8 章] 等を参照.

定義 1.1. 2 つの写像芽 $f, g : (\boldsymbol{R}^m, 0) \to (\boldsymbol{R}^n, 0)$ が $\mathcal{A}$ **同値**または**右左同値**であるとは, 定義域の座標変換 φ と像域の座標変換 ψ が存在して $g = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が成り立つときをいう.

この同値関係は写像芽の定義域と像域の座標変換, つまり微分同相写像で移り合うものはすべて等しいとみなすものであり, 写像の幾何的な性質を扱う立場から自然なものである. この同値関係で考えると, 微分の階数が最大となっている点の写像芽はすべて同値になる. したがって, 注目するのは次で定義する特異点である.

* E-mail:231s010s@stu.kobe-u.ac.jp

定義 1.2. 写像 $f : M \to N$ に対して $p \in M$ が f の**特異点**であるとは, $\mathrm{rank}\, df_0 < \min\{m, n\}$ となるときをいう. ただし $\dim M = m$, $\dim N = n$ とする. さらに $S(f)$ で f の特異点集合を表す.

曲面にあらわれる特異点で一番よくあらわれるのはホイットニーの傘と呼ばれる特異点である.

定義 1.3. $f(u, v) = (u, uv, v^2)$ で定義される写像の原点における写像芽に右左同値な写像芽またはその原点を S_0 **特異点**または**交叉帽子**または**ホイットニーの傘**という.

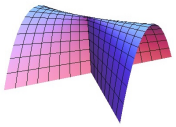


図 1　ホイットニーの傘

曲面にあらわれる特異点でホイットニーの傘の次によくあらわれるのは $S_1^{\pm}$ 特異点と呼ばれるものである ([5]).

定義 1.4. $f(u, v) = (u, v^2, v(u^2 \pm v^2))$ で定義される写像の原点における写像芽に右左同値な写像芽またはその原点を $S_1^{\pm}$ **特異点**という.

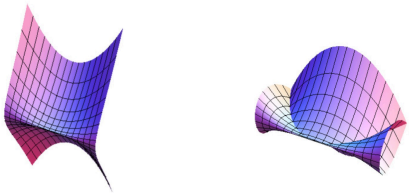


図 2　左:S_1^+ 特異点, 右:S_1^- 特異点

2　$S_1^{\pm}$ 特異点の変形

定義 2.1. 写像芽 $f : (\boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}, 0) \to (\boldsymbol{R}^3, 0)$ が滑らかかつ $f(u, v, 0)$ が $(u, v) = (0, 0)$ において $S_1^{\pm}$ 特異点であるとき, f を $S_1^{\pm}$ **特異点の変形**であるという.

この定義において, 定義域に追加した $\boldsymbol{R}$ が写像の変形を表すパラメーターであり**変形パラメーター**という. 写像芽の変形に対しては変形パラメータ-を保つ右左同値を考えるのが適切である.

定義 2.2. 2 つの写像芽 $f, g : (\boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}, 0) \to (\boldsymbol{R}^3, 0)$ が $S_1^{\pm}$ 特異点の変形であるとする. このとき f と g が**変形として同値**であるとは, $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(u, v, s) = g(u, v, s)$ となる微分同相写像芽 $\varphi : (\boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}, 0) \to (\boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}, 0)$ と $\psi : (\boldsymbol{R}^3, 0) \to (\boldsymbol{R}^3, 0)$ が存在することをいう. ただし, $\varphi(u, v, s) = (\varphi_1(u, v, s), \varphi_2(u, v, s), \varphi_3(s))$ の形である.

ここで定義域の第 3 成分が変形パラメーターであり, φ_3 が s にしか依存しないように定義されているのは, 変形パラメーター自体の変化は許すが, 変形パラメーターに他のパラメーターが影響を与

えないようにするためである. ゆえにこの定義は変形パラメーターを保つような右左同値である.

例 2.3. $S_1^{\pm}$ 特異点の変形として次の f_d を考える.

$$f_d : (\boldsymbol{R}^2 \times \boldsymbol{R}, 0) \ni (u, v, s) \mapsto (u, v^2, v(u^2 \pm v^2) + sv) \in (\boldsymbol{R}^3, 0)$$

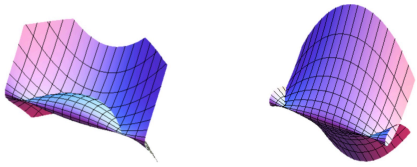


図 3　左:$s = -\frac{1}{2}$のときの S_1^+ 特異点の変形, 右:$s = -\frac{1}{2}$のときの S_1^- 特異点の変形

3　変形にあらわれるホイットニーの傘

本講演では特異点の微分幾何的な性質を扱うが, 特異点においては通常単位法線ベクトルが定義されず, このためにガウス曲率, 平均曲率等の曲面の性質を表している量が意味を失う. そのような場合の有効な方法の 1 つが normal form(正確には $SO(3)$-normal form) と呼ばれるものである.

定理 3.1. [1] 写像芽 $f : (\boldsymbol{R}^2, 0) \to (\boldsymbol{R}^3, 0)$ がホイットニーの傘であるとする. このとき $T \circ f \circ \varphi(u, v) = (u, uv + O(3), \frac{1}{2}(a_{20}u^2 + 2a_{11}uv + a_{02}v^2) + O(3))$ となる $T \in SO(3)$ と微分同相写像芽 $\varphi : (\boldsymbol{R}^2, 0) \to (\boldsymbol{R}^2, 0)$ が存在する. ただし, $a_{20}, a_{11}, a_{02} \in \boldsymbol{R}$ である.

この定理にあらわれる式

$$(u, v) \mapsto (u, uv + O(3), \frac{1}{2}(a_{20}u^2 + 2a_{11}uv + a_{02}v^2) + O(3))$$

を**ホイットニーの傘の** $(SO(3)-)$**normal form** という. この式にあらわれる係数 a_{20}, a_{11}, a_{02} はホイットニーの傘の微分幾何的不変量であり, 意味を失っているガウス曲率, 平均曲率等の代わりにこれらの不変量を用いてホイットニーの傘の微分幾何的な研究が行われいている. 本講演で扱う $S_1^{\pm}$ 特異点の変形にはホイットニーの傘があらわれるため, その不変量を使った研究を述べる.

定理 3.2. [3] 写像芽 $f : (\boldsymbol{R}^2; (u, v), p) \to (\boldsymbol{R}^3, 0)$ がホイットニーの傘であるとする. $\mathrm{Ker}df_0 = \langle \partial v \rangle$ である (u, v) に対して, $|f_u, f_{uv}, f_{vv}| > 0$ ならばその不変量は以下のように書ける.

$$a_{02} = \frac{|f_u||f_u \times f_{vv}|^3}{|f_u, f_{uv}, f_{vv}|^2}(p)$$

$$a_{20} = \frac{|f_u \times f_{vv}|}{4|f_u|^3|f_u, f_{uv}, f_{vv}|^2}(|f_u, f_{uu}, f_{vv}|^2 + 4|f_u, f_{uv}, f_{vv}||f_u, f_{uv}, f_{uu}|)(p)$$

$$a_{11} = \frac{1}{2|f_u||f_u, f_{uv}, f_{vv}|^2}\left(2|f_u, f_{uv}, f_{vv}| \begin{vmatrix} f_u \cdot f_u & f_u \cdot f_{uv} \\ f_{vv} \cdot f_u & f_{vv} \cdot f_{uv} \end{vmatrix} - |f_u \times f_{vv}|^2|f_u, f_{uu}, f_{vv}|\right)(p)$$

注意 3.3. $S_1^{\pm}$ 特異点では $|f_u, f_{uv}, f_{vv}| = 0$ となる.

定義 3.4. 写像芽 $f:(\boldsymbol{R}^2,(u_0,v_0))\to\boldsymbol{R}^3$ は $\operatorname{rank}df_{(u_0,v_0)}=1$ とする．f の (u_0,v_0) における **focal set** とは, 距離 2 乗関数 $D^x(u,v)=\frac{1}{2}|x-f|^2$ に対して,

$$\{x\in\boldsymbol{R}^3|D^x_u(u_0,v_0)=D^x_v(u_0,v_0)=0, D^x_{uu}(u_0,v_0)D^x_{vv}(u_0,v_0)-D^x_{uv}(u_0,v_0)^2=0\}\subset \mathrm{Im}(df_{(u_0,v_0)})^{\perp}$$

のことである.

ホイットニーの傘に対して focal set は円錐曲線となる ([2]) ため, focal set は **focal conic** とよばれる.

命題 3.5. [2] 写像芽 $f:(\boldsymbol{R}^2;(u,v),p)\to(\boldsymbol{R}^3,0)$ がホイットニーの傘であるとする．これに対し f の focal conic は, 以下のようになる.
(1)$a_{02}a_{20}<0\Leftrightarrow$ 楕円
(2)$a_{02}a_{20}>0\Leftrightarrow$ 双曲線
(3)$a_{20}=0\Leftrightarrow$ 放物線

4　主結果

定理 4.1. 写像芽 $f:(\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R},0)\to(\boldsymbol{R}^3,0)$ が $S_1^{\pm}$ 特異点の変形ならば, 向きを保つ微分同相写像芽 $\varphi:(\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R},0)\to(\boldsymbol{R}^2\times\boldsymbol{R},0)$ で定義 2.2 の形をしたものと, $T\in SO(3)$ と関数 $f_{21},f_{31}\in C^\infty(1,1), f_{24},f_{33},f_{34}\in C^\infty(2,1), f_{32}\in C^\infty(3,1)$ が存在して,

$$\begin{aligned}{f_n}^s &:= T\circ f\circ\varphi(u,v,s)\\ &= (u, u^2f_{21}(u)+v^2+usf_{24}(u,s),\\ &\qquad u^2f_{31}(u)+v^2f_{32}(u,v,s)+vf_{33}(u,s)+usf_{34}(u,s))\end{aligned}$$

が成り立つ.
ただし, $(f_{32})_v(0,0,0)\neq 0$, $(f_{33})_{uu}(0,0)\neq 0$, $f_{32}(0,0,0)=f_{33}(0,0)=(f_{33})_u(0,0)=0$ である.

この ${f_n}^s$ を $S_1^{\pm}$ **特異点の変形の** $(SO(3)-)$**normal form** という．この写像 ${f_n}^s$ の特異点集合 $S({f_n}^s)$ は,

$$S({f_n}^s)=\{(u,v)\,|\,v=0, f_{33}(u,s)=0\}$$

である．この定理において与えられた f と ${f_n}^s$ は変形として同値であり, さらに像域の微分同相写像は, $SO(3)$ の元であるため f と ${f_n}^s$ は同じ微分幾何的な性質をもつ.

例 4.2. $f(u,v,s)=(u,u^2+v^2-us,u^2-uv^2+v^3+vs+u^2v+us)$ とする.

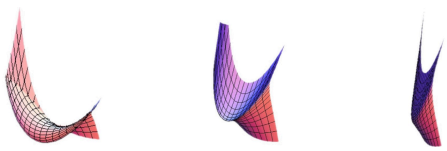


図 4　左:$s=-1$, 中:$s=0$, 右:$s=1$

以下では $f = {f_n}^s$ とおく．また, f にあらわれる関数は次のようにおくことができる:

$$f_{32}(u,v,s) = uf_{321}(u,v,s) + vf_{322}(u,v,s) + sf_{323}(u,v,s)$$
$$f_{33}(u,s) = f_{330}(s) + uf_{331}(s) + u^2 f_{332}(s) + u^3 f_{333}(s) + \cdots .$$

さらに, $f_{332}(0) > 0$ を仮定し, $f_{332}(0) = f_{3320}^2$ とおく．$f_{332}(0) < 0$ の場合は $f_{332}(0) = -f_{3320}^2$ とおくことで同様に計算できる．さらに, $S(f) \neq \emptyset$ であることと $s \leq 0$ は同値であるため $s = -\tilde{s}^2$ とおく．

定理 4.3. $(u,v) \in S(f)$ ならば

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{f_{3320}}\tilde{s} + \frac{1}{2f_{3320}^2}\Big(f_{331}(0) - \frac{f_{333}(0)}{f_{3320}^2}\Big)\tilde{s}^2 \\ &\quad - \frac{1}{4f_{3320}^3}\Big(f_{331}(0) - \frac{f_{333}(0)}{f_{3320}}\Big)\Big(f_{331}(0) + \frac{f_{333}(0)}{f_{3320}} + \frac{f_{332}(0)}{2f_{3320}}(f_{331}(0) - \frac{f_{333}(0)}{f_{3320}^2})\Big)\tilde{s}^3 + O(4) \\ v &= 0 \end{aligned}$$

のように展開できる．また $u \neq 0$ のとき $(u,0)$ で f はホイットニーの傘である．

$(u,0) \in S(f)$ とすると定理 4.3 のように u は $\tilde{s}$ に依存する．さらに $u \neq 0$ のとき f は $(u,0)$ でホイットニーの傘なので, この点でホイットニーの傘の normal form にあらわれる不変量 a_{20}, a_{20}, a_{11} が定義される．これらは $\tilde{s}$ に依存するため, それを $a_{20}(\tilde{s}), a_{11}(\tilde{s}), a_{02}(\tilde{s})$ と書くと以下を得る．

定理 4.4. 関数 $a_{20}(\tilde{s}), a_{20}(\tilde{s}), a_{11}(\tilde{s})$ は,

$$a_{02}(\tilde{s}) = \frac{1}{\tilde{s}^2}\Big(\frac{1}{2f_{3320}^2} + O(1)\Big)$$
$$a_{20}(\tilde{s}) = \frac{1}{\tilde{s}^2}\Big(\frac{f_{31}^2}{2f_{3320}^2} - \frac{f_{31}(c_1 + 2f_{3320}c_2)}{64}\tilde{s} + O(2)\Big)$$
$$a_{20}(\tilde{s}) = \frac{1}{\tilde{s}^2}\Big(\frac{4}{f_{3320}}(f_{21}f_{321} - 3f_{31_u})\tilde{s} + O(2)\Big)$$

と展開できる．ただし $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$ である．

系 4.5. $\tilde{s} \to 0$ とすると以下が成り立つ．

$a_{02}(\tilde{s}) \to \infty$

$$a_{20}(\tilde{s}) \to \begin{cases} +\infty & \Leftrightarrow f_{31} \neq 0 \\ \text{有界} & \Leftrightarrow f_{31} = 0 \end{cases}$$

$$a_{11}(\tilde{s}) \to \begin{cases} \pm\infty & \Leftrightarrow f_{21}f_{321} - 3(f_{31})_u \neq 0 \\ \text{有界} & \Leftrightarrow f_{21}f_{321} - 3(f_{31})_u = 0 \end{cases}$$

この系より $f_{31}(0) \neq 0$ のとき, $a_{02}a_{20} \to +\infty$ $(\tilde{s} \to 0)$ であるから命題 3.5 より次の系を得る．

系 4.6. $f_{31}(0) \neq 0$ である ${S_1}^{\pm}$ 特異点の変形の微小な変形において focal conic は全て双曲線である．

例 4.7. $f(u,v,s) = (u, v^2, -u^2 + v^3 + vs + u^2 v)$ とすると f の focal conic は, $\tilde{s} \neq 0$ で双曲線, $\tilde{s} = 0$ で交わる 2 直線である．

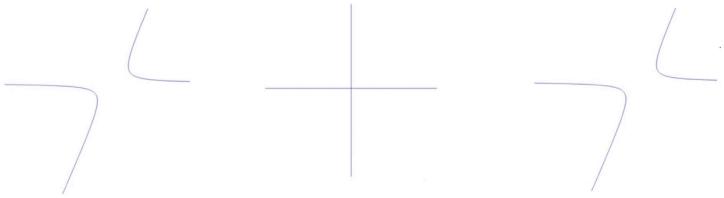


図 5　左:$\tilde{s}$=-1, 中:$\tilde{s}$=0, 右:$\tilde{s}$=1

$S_1^{\pm}$ 特異点の変形の normal form に対して変形パラメーターを含む最低次の係数 $f_{24}(0,0)$, $f_{34}(0,0)$ の幾何学的意味は次のようになる. $S_1^{\pm}$ 特異点の変形に対して特異点集合の軌跡 $S({f_n}^{-\tilde{s}^2})$ は原点を通る空間曲線となる. このとき,

注意 4.8. 特異点集合 $S({f_n}^{-\tilde{s}^2})$ の定理 4.3 で与えられたパラメーター表示

$$\gamma := \{{f_n}^{-\tilde{s}^2}(u,v) | (u,v) \in S({f_n}^{-\tilde{s}^2})\}$$

に対して, γ の原点での曲率の 1 階微分を $\dfrac{d\kappa}{d\tilde{s}} = \kappa'$, 捩率を τ とすると $f_{21}^2(0) + f_{31}^2(0) \neq 0$ のとき,

$$f_{24}(0,0) = \frac{2\tau f_{31}(0) + \dfrac{\kappa' f_{3320} f_{21}(0)}{\sqrt{f_{21}^2(0) + f_{31}^2(0)}} + 6f'_{21}(0)}{6f_{3320}^2}$$

$$f_{34}(0,0) = \frac{-2\tau f_{21}(0) + \dfrac{\kappa' f_{3320} f_{31}(0)}{\sqrt{f_{21}^2(0) + f_{31}^2(0)}} + 6f'_{31}(0)}{6f_{3320}^2}$$

が成り立つ.

参考文献

[1] J. W. Bruce, and J. M. West, *Function on a cross cap*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **123** (1998), 19-39.

[2] T. Fukui and M. Hasegawa, *Fronts of Whitney umbrella -a differential geometric approach via blowing up*, J. Singul. **4** (2012), 35-67.

[3] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic invariants of cross caps*, Sel. Math. New Ser. **20** (2014), 769-785.

[4] 泉屋周一, 石川剛郎, 応用特異点論, 共立出版株式会社, (1998)

[5] D. Mond *On the classification of germs of maps from* $\boldsymbol{R}^2$ *to* $\boldsymbol{R}^3$, Proc. London Math. Soc. **50,** (1985), 333-369.

[6] 梅原雅顕, 佐治健太郎, 山田光太郎, 特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学, 丸善出版株式会社, (2017).

On vertices of frontals in the Euclidean plane

室蘭工業大学　大学院工学研究科博士前期課程情報電子工学系専攻
中津山 希 (Nozomi NAKATSUYAMA) *

概要

正則平面曲線の 4 頂点定理は良く知られているが, 特異点を持つ場合, 曲率が発散するため, 曲率を用いて頂点を定義できない. 特異点を持つ平面曲線として, ユークリッド平面上のルジャンドル曲線とフロンタルを考える. はじめにフロントとフロンタルの縮閉線を用いて頂点を定義し, 次に縮閉線が定義されない場合を含む一般的な状況でフロンタルの頂点を定義する. 閉フロンタルに対して, 特異点の情報やルジャンドル曲率の情報により 4 頂点定理が成り立つ条件を与える.

1　導入

全体を通してすべての写像と多様体は滑らか (C^∞ 級) であるとする. I を区間もしくは $\mathbb{R}$ とし, $\mathbb{R}^2$ をユークリッド平面, ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を内積とし, $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$ をノルムとする.

1.1　正則平面曲線

$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ を正則平面曲線, つまり任意の点 $t \in I$ に対して $\dot{\gamma}(t) = (d\gamma/dt)(t) \neq 0$ とする. J を反時計回りに $\pi/2$ 回転させたもの, $\boldsymbol{t}(t) = \dot{\gamma}(t)/|\dot{\gamma}(t)|$ を単位接ベクトル, $\boldsymbol{n}(t) = J(\boldsymbol{t}(t))$ を単位法ベクトルとしたとき, γ の**曲率** $\kappa : I \to \mathbb{R}$ は

$$\kappa(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{t}}(t) \cdot \boldsymbol{n}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} = \frac{\det\left(\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)\right)}{|\dot{\gamma}(t)|^3}$$

で与えられる. $\kappa(t_0) = 0$ となる点 t_0 を正則平面曲線 γ の**変曲点**, $\dot{\kappa}(t_0) = 0$ となる点 t_0 を**正則平面曲線 γ の頂点**という.

定理 1.1 (正則曲線の 4 頂点定理, [1, 2, 9])**.** $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ が単純閉正則曲線であるとき, 曲線 γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

特に [9] に詳しく頂点や 4 頂点定理についての解説が日本語で書かれている.

曲線 $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ を変曲点を持たない曲線としたとき, **縮閉線** $Ev(\gamma) : I \to \mathbb{R}^2$ を

$$Ev(\gamma) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\boldsymbol{n}(t)$$

* E-mail:23043042@muroran-it.ac.jp

とする．このとき縮閉線 $Ev(\gamma) : I \to \mathbb{R}^2$ の特異点は曲線 γ の頂点となる．

点 $t_0 \in I$ が γ の**特異点**とは $\dot{\gamma}(t) = 0$ となる点である．このとき一般的に曲率は発散するため, 曲率を用いて頂点を定義することができない．また, 単純閉曲線なフロント (フロンタル) に対して 2 つ頂点を持つ例がある．よって, 今回は 4 つ頂点を持つための条件を考えたい．

1.2 ルジャンドル曲線

S^1 を単位円, $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を滑らかな写像としたとき, 任意の点 $t \in I$ で $\dot{\gamma}(t) \cdot \nu(t) = 0$ となる (γ, ν) を**ルジャンドル曲線**という．さらに, (γ, ν) がはめ込みであるとき (γ, ν) を**ルジャンドルはめ込み**という．このとき $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ がルジャンドル曲線となるような $\nu : I \to S^1$ が存在するとき, $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ を**フロンタル**といい, $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ がルジャンドルはめ込みとなるような $\nu : I \to S^1$ が存在するとき, $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ を**フロント**という．

$(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線, $\mu : I \to S^1$ を $\mu(t) = J(\nu(t))$ としたとき, $\{\nu(t), \mu(t)\}$ を $\mathbb{R}^2$ 上の $\gamma(t)$ の動標構という．このときフロンタル γ の動標構に対して,

$$\begin{pmatrix} \dot{\nu}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) \\ -\ell(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}, \ \dot{\gamma}(t) = \beta(t)\mu(t)$$

が成り立ち, $\ell(t) = \dot{\nu}(t) \cdot \mu(t)$, $\beta(t) = \dot{\gamma}(t) \cdot \mu(t)$ となる．ここで得られた $(\ell, \beta) : I \to \mathbb{R}^2$ はルジャンドル曲線 (γ, ν) の **(ルジャンドル) 曲率**という．このとき $\ell(t_0) = 0$ となる点 $t_0 \in I$ はフロンタル γ の変曲点, $\beta(t_0) = 0$ となる点 $t_0 \in I$ はフロンタル γ の特異点である．また, $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ がルジャンドルはめ込みであるとき, 任意の点において $(\ell, \beta) \neq (0, 0)$ となる．

定理 1.2 (ルジャンドル曲線の存在性, [3])**.** 任意に与えられた $(\ell, \beta) : I \to \mathbb{R}^2$ に対して, 曲率が (ℓ, β) であるようなルジャンドル曲線 $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ が存在する．

定義 1.3 (ルジャンドル曲線の合同, [3])**.** $(\gamma, \nu), (\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線としたとき, $\mathbb{R}^2$ 上の回転行列 $A \in SO(s)$ と平行移動 $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^2$ を用いて, 任意の点 $t \in I$ において,

$$\widetilde{\gamma}(t) = A(\gamma(t)) + \boldsymbol{a}, \ \widetilde{\nu}(t) = A(\nu(t))$$

と表すことができるとき, $(\gamma, \nu), (\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu})$ は**ルジャンドル曲線として合同**である．

定理 1.4 (ルジャンドル曲線の一意性, [3])**.** $(\gamma, \nu), (\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu}) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線, それぞれの曲率をそれぞれ $(\ell, \beta), (\widetilde{\ell}, \widetilde{\beta})$ とする．2 つのルジャンドル曲線 (γ, ν) と $(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\nu})$ が合同となる必要十分条件は, (ℓ, β) と $(\widetilde{\ell}, \widetilde{\beta})$ が一致するときである．

$(\gamma, \nu) : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線としたとき, $(\gamma(a), \nu(a)) = (\gamma(b), \nu(b))$ かつ $(\dot{\gamma}(a), \dot{\nu}(a)) = (\dot{\gamma}(b), \dot{\nu}(b))$ であるとき, (γ, ν) を (C^1-) 閉ルジャンドル曲線という [6]. さらに, 自己交差を持たない γ を**単純閉フロンタル**という．

$(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線, I を閉区間とする．このとき点 $t \in I$ における γ の接線 L_t を $L_t = \{\lambda\mu(t) + \gamma(t) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ とする．このとき接線 L_t は $\mathbb{R}^2$ を 2 つの半平面 H_+, H_- に分割するものとし, $H_+ \cup H_- = \mathbb{R}^2$, $H_+ \cap H_- = L_t$ とする．このとき, $\gamma(I) \subset H_+$ (あるいは

$\gamma(I) \subset H_-$) となるとき, (γ, ν) を凸ルジャンドル曲線, γ を凸フロンタルという. γ を正則曲線としたとき, γ がフロンタルとして凸曲線である場合, γ は正則曲線として凸曲線となる [7].

定理 1.5 ([6])**.** $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線, 曲率を (ℓ, β) とし, γ は単純閉フロンタルとする. ℓ と β の 0 となる点が孤立点であるとき, 以下の 4 つのいずれかが満たされるとき, フロンタル γ は凸である.

(i) 任意の点 $t \in I$ に対して, $\ell(t) \geq 0$ かつ $\beta(t) \geq 0$.

(ii) 任意の点 $t \in I$ に対して, $\ell(t) \geq 0$ かつ $\beta(t) \leq 0$.

(iii) 任意の点 $t \in I$ に対して, $\ell(t) \leq 0$ かつ $\beta(t) \leq 0$.

(iv) 任意の点 $t \in I$ に対して, $\ell(t) \leq 0$ かつ $\beta(t) \geq 0$.

1.3 フロントの縮閉線

フロント γ の頂点を定義するために, 縮閉線を定義する [4]. $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドルはめ込み, 曲率を (ℓ, β) とし, 任意の点 $t \in I$ において $\ell(t) \neq 0$ とする.

定義 1.6 (フロントの縮閉線, [4])**.** フロント γ の**縮閉線** $\mathcal{E}v(\gamma) : I \to \mathbb{R}^2$ を

$$\mathcal{E}v(\gamma)(t) = \gamma(t) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)}\nu(t)$$

とする.

命題 1.7 ([4])**.** 縮閉線 $\mathcal{E}v(\gamma) : I \to \mathbb{R}^2$ もフロントである. 正確には, $(\mathcal{E}v(\gamma), J(\nu)) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ はルジャンドルはめ込みであり, 曲率は

$$\left(\ell(t), \frac{d}{dt}\frac{\beta(t)}{\ell(t)}\right)$$

となる.

定義 1.8 (フロントの頂点, [4])**.** 縮閉線 $\mathcal{E}v(\gamma) : I \to \mathbb{R}^2$ に対して,

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}v(\gamma)(t_0) = 0$$

となる点 $t_0 \in I$ を**フロント γ の頂点**とする. このとき $(d/dt)\mathcal{E}v(\gamma)(t_0) = (d/dt)(\beta/\ell)(t_0) = 0$ となる.

命題 1.9 ([4])**.** $(\gamma, \nu) : [a, b] \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を変曲点を持たないルジャンドルはめ込みとしたとき, 以下の 2 つが成り立つ.

(1) γ が 3/2-カスプより退化した特異点を少なくとも 2 つ持つとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

(2) γ が特異点を少なくとも 4 つ持つとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

2　主結果

2.1　フロンタルの縮閉線と頂点

フロンタル γ の頂点を定義するために, 縮閉線を定義する [5]. $(\gamma,\nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドル曲線とし, 曲率を (ℓ,β) とする.

定義 2.1 (フロンタルの縮閉線, [5])**.** $\beta = \alpha\ell$ となるような滑らかな関数 $\alpha: I \to \mathbb{R}$ が存在するとき, フロンタル γ の**縮閉線** $\mathcal{E}v(\gamma): I \to \mathbb{R}^2$ を

$$\mathcal{E}v(\gamma)(t) = \gamma(t) - \alpha(t)\nu(t)$$

とする.

命題 2.2 ([5])**.** 縮閉線 $\mathcal{E}v(\gamma): I \to \mathbb{R}^2$ もフロンタルである. 正確には $(\mathcal{E}v(\gamma), J(\nu)): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ はルジャンドル曲線であり, 曲率は $(\ell, \dot{\alpha})$ となる.

定義 2.3 (フロンタルの頂点, [5])**.** フロンタル γ の縮閉線 $\mathcal{E}v(\gamma): I \to \mathbb{R}^2$ が存在しかつ $\dot{\mathcal{E}}v(\gamma)(t_0) = 0$ となる点 $t_0 \in I$ を**フロンタル γ の頂点**とする. このとき $\dot{\alpha}(t_0) = 0$ となる場合, $\dot{\mathcal{E}}v(\gamma)(t_0) = 0$ である.

$n, k \in \mathbb{N}$, $m = n + k$ を自然数, $f: (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}$ を $f(0) \neq 0$ となる滑らかな関数芽とする. $(\gamma,\nu): (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を

$$\begin{aligned}
\gamma(t) &= (\pm t^n, t^m f(t)),\\
\nu(t) &= \frac{1}{\sqrt{(mt^k f(t) + t^{k+1}\dot{f}(t))^2 + n^2}}(-mt^k f(t) - t^{k+1}\dot{f}(t), \pm n)
\end{aligned}$$

としたとき, (γ,ν) はルジャンドル曲線であり, この γ を (n,m) 型という. $n > 1$ であるとき, 原点は γ の特異点となる. (γ,ν) の曲率 (ℓ,β) は,

$$\begin{aligned}
\ell(t) &= \pm\frac{nt^{k-1}(mkf(t) + (m+k+1)t\dot{f}(t) + t^2\ddot{f}(t))}{(mt^k f(t) + t^{k+1}\dot{f}(t))^2 + n^2},\\
\beta(t) &= -t^{n-1}\sqrt{(mt^k f(t) + t^{k+1}\dot{f}(t))^2 + n^2}
\end{aligned}$$

となる. $(\gamma,\nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ が点 $t_0 \in I$ で (n,m) 型であるとき, $(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu}): (\mathbb{R}, 0) \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ と点 t_0 付近で $\mathcal{R}$ 同値であり, ルジャンドル曲線 $(\widetilde{\gamma},\widetilde{\nu})$ は

$$\begin{aligned}
\widetilde{\gamma}(t) &= (\pm t^n, t^m f(t)),\\
\widetilde{\nu}(t) &= \frac{1}{\sqrt{(mt^k f(t) + t^{k+1}\dot{f}(t))^2 + n^2}}(-mt^k f(t) - t^{k+1}\dot{f}(t), \pm n)
\end{aligned}$$

となり, 曲率 $(\widetilde{\ell},\widetilde{\beta})$ は

$$\widetilde{\ell}(t)=\pm\frac{nt^{k-1}(mkf(t)+(m+k+1)t\dot{f}(t)+t^2\ddot{f}(t))}{(mt^kf(t)+t^{k+1}\dot{f}(t))^2+n^2},$$
$$\widetilde{\beta}(t)=-t^{n-1}\sqrt{(mt^kf(t)+t^{k+1}\dot{f}(t))^2+n^2}$$

となる. $n\geq k$ のとき, $\widetilde{\beta}=\widetilde{\alpha}\widetilde{\ell}$ となる以下のような滑らかな関数 $\widetilde{\alpha}:(\mathbb{R},0)\to\mathbb{R}$ が存在する.

$$\widetilde{\alpha}(t)=\mp\frac{t^{n-k}((mt^kf(t)+t^{k+1}\dot{f}(t))^2+n^2)^{\frac{3}{2}}}{n(mkf(t)+(m+k+1)t\dot{f}(t)+t^2\ddot{f}(t))}.$$

命題 2.4 ([8])**.** $(\gamma,\nu):I\to\mathbb{R}^2\times S^1$ をルジャンドル曲線, ルジャンドル曲率を (ℓ,β) とし, $\beta=\alpha\ell$ とする.

(1) $n=k$ のとき, γ に $\dot{f}(0)=0$ となる $(n,m)=(n,2n)$ 型の点が 4 つあるとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

(2) $n=k+1$ のとき, γ に $(n,m)=(n,2n-1)$ 型の点が 4 つあるとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

(3) $n\geq k+2$ のとき, γ に (n,m) 型の点が 2 つあるとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

定理 2.5 ([8])**.** $(\gamma,\nu):I=[a,b]\to\mathbb{R}^2\times S^1$ を閉ルジャンドル曲線, ルジャンドル曲率を (ℓ,β), $\beta=\alpha\ell$ とし, ℓ と β の 0 となる点が孤立点であるとする. γ が単純凸フロンタルであるとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

2.2 一般的な状況でのフロンタルの頂点

$(\gamma,\nu):I\to\mathbb{R}^2\times S^1$ をルジャンドル曲線, ルジャンドル曲率を (ℓ,β) とする. このとき任意の点 $t\in I$ において, $k_1(t)\ell(t)+k_2(t)\beta(t)=0$ となるような滑らかな写像 $(k_1,k_2):I\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ が存在すると仮定する.

定義 2.6 ([8])**.** $\dot{k}_1(t_0)k_2(t_0)-k_1(t_0)\dot{k}_2(t_0)=0$ となる点 $t_0\in I$ を**フロンタル γ の頂点**とする.

$t_0\in I$ をフロンタル γ の頂点とする. $\beta(t)\neq0$ となる場合, $k_1(t)=1,k_2(t)=-\ell(t)/\beta(t)$ より, 点 $t_0\in I$ は正則曲線としての頂点となる. 同様に $\ell(t)\neq0$ となる場合, $k_1(t)=-\beta(t)/\ell(t)$, $k_2(t)=1$ より, 点 $t_0\in I$ はフロントとしての頂点となる. $\beta(t)=\alpha(t)\ell(t)$ となる場合, $k_1(t)=-\alpha(t)$, $k_2(t)=1$ より, 点 $t_0\in I$ は縮閉線が定義できる場合のフロンタルの頂点となる.

命題 2.7 ([8])**.** $\ell=\alpha\beta$ となるような滑らかな関数 $\alpha:I\to\mathbb{R}$ が存在するとき, 以下の 2 つのことが成り立つ.

(1) $n+1=k$ のとき, γ に $(n,m)=(n,2n+1)$ 型の点が 4 つあるとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

(2) $n+2\leq k$ のとき, γ に (n,m) 型の点が 2 つあるとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

定理 2.8 ([8])**.** $(\gamma,\nu):I\to\mathbb{R}^2\times S^1$ をルジャンドル曲線, ルジャンドル曲率を (ℓ,β) とする. 任意の点 $t\in I$ において, $k_1(t)\ell(t)+k_2(t)\beta(t)=0$ となるような滑らかな写像 $(k_1,k_2):I\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ が

存在すると仮定したとき,

$$\text{(i) } n=k,\ \dot{f}(0)=0,\quad \text{(ii) } n\geq k+2,\quad \text{(iii) } n+2\leq k,$$

となるような (n,m) 型の点が 4 つ存在するとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

定理 2.9 ([8])**.** $(\gamma,\nu):I\to\mathbb{R}^2\times S^1$ を閉ルジャンドルはめ込み, ルジャンドル曲率を (ℓ,β) とする. γ が特異点と変曲点をそれぞれ少なくとも 2 つ持つような単純凸フロントであるとき, γ は少なくとも 4 つ頂点を持つ.

例 2.10. $(\gamma,\nu):[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2\times S^1$ を

$$\gamma(t)=\left(\frac{1}{5}\cos^5 t,\frac{1}{5}\sin^5 t\right),\ \nu(t)=\frac{1}{\sqrt{\cos^6 t+\sin^6 t}}\left(-\sin^3 t,-\cos^3 t\right)$$

としたとき, (γ,ν) はルジャンドル曲線となり, 曲率 (ℓ,β) は,

$$\ell(t)=-\frac{3\cos^2 t\sin^2 t}{\cos^6 t+\sin^6 t},\ \beta(t)=-\cos t\sin t\sqrt{\cos^6 t+\sin^6 t}$$

となる. $k_1(t)=-(\cos^6 t+\sin^6 t)^{\frac{3}{2}}$, $k_2(t)=3\cos t\sin t$ とすると, (k_1,k_2) は任意の点 $t\in I$ で $k_1(t)\ell(t)+k_2(t)\beta(t)=0$ となる滑らかな写像となる. このとき,

$$\dot{k}_1(t)=9\cos 2t\cos t\sin t\sqrt{\cos^6 t+\sin^6 t},\ \dot{k}_2(t)=3\cos 2t$$

となることから,

$$\dot{k}_1(t)k_2(t)-k_1(t)\dot{k}_2(t)=3\cos 2t\sqrt{\cos^6 t+\sin^6 t}(9\cos^2 t\sin^2 t+\cos^6 t+\sin^6 t)$$

が得られる. したがって定義 2.6 より, $\cos 2t=0$ となる $t=\pi/4,3\pi/4,5\pi/4,7\pi/4$ の 4 点では $\dot{k}_1(t)k_2(t)-k_1(t)\dot{k}_2(t)=0$ となることから, フロンタル γ の頂点となる.

例 2.11. $(\gamma,\nu):[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2\times S^1$ を

$$\gamma(t)=\left(\cos t,\frac{1}{3}\sin^3 t\right),\ \nu(t)=-\frac{1}{\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t+1}}(\cos t\sin t,1)$$

としたとき, (γ,ν) はルジャンドル曲線となり, 曲率 (ℓ,β) は,

$$\ell(t)=-\frac{\cos 2t}{\cos^2 t\sin^2 t+1},\ \beta(t)=-\sin t\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t+1}$$

となる. このとき (γ,ν) は $(\ell,\beta)\neq(0,0)$ であることからルジャンドルはめ込みであり, ℓ と β の符号が t の値によって変わるため, γ は凸ではなく, $t=0,\pi$ の 2 点は γ の特異点であり, $t=\pi/4,3\pi/4,5\pi/4,7\pi/4$ の 4 点は γ の変曲点である. $k_1(t)=-\sin t(\cos^2 t\sin^2 t+1)^{\frac{3}{2}}$, $k_2(t)=\cos 2t$ とすると, (k_1,k_2) は任意の点 $t\in I$ で $k_1(t)\ell(t)+k_2(t)\beta(t)=0$ となる滑らかな写像となる. このとき,

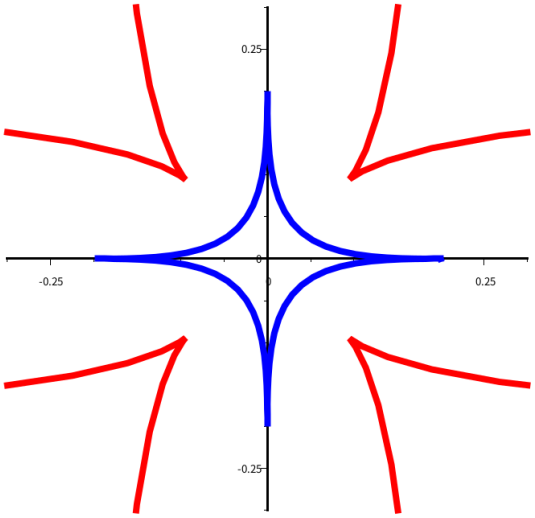
$$\dot{k}_1(t)=-\cos t(\cos^2 t\sin^2 t+1+3\sin^2 t\cos 2t)\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t+1},\ \dot{k}_2(t)=-2\sin 2t$$

となることから,

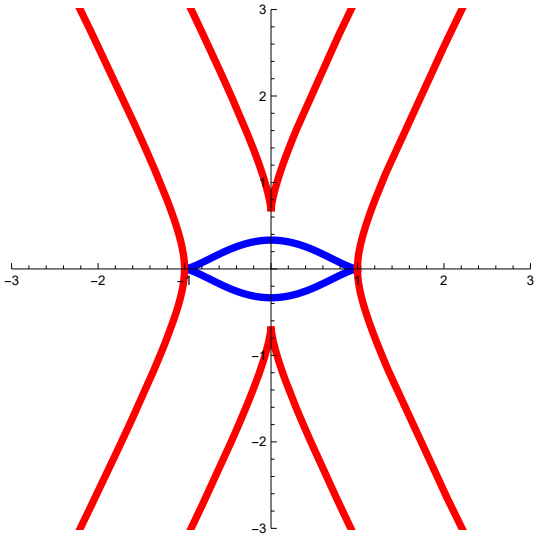
$$\dot{k}_1(t)k_2(t) - k_1(t)\dot{k}_2(t) = -\cos t\sqrt{\cos^2 t \sin^2 t + 1}(\cos 2t(\cos^2 t \sin^2 t + 1 + 3\sin^2 t \cos 2t) + 4\sin^2 t(\cos^2 t \sin^2 t + 1))$$

が得られる. したがって定義 2.6 より, $\cos t = 0$ となる $t = \pi/2, 3\pi/2$ の 2 点でのみ $\dot{k}_1(t)k_2(t) - k_1(t)\dot{k}_2(t) = 0$ となることから, フロンタル γ の頂点となり, 頂点を 4 つ持たない. このとき γ は凸ではないことからも 4 つ頂点を持たないことがいえる.

以下の左図は例 2.10, 右図は例 2.11 であり, 青線が γ, 赤線が $\mathcal{E}v(\gamma)$ である.



$\gamma(t) = (\frac{1}{5}\cos^5 t, \frac{1}{5}\sin^5 t)$



$\gamma(t) = (\cos t, \frac{1}{3}\sin^3 t)$

参考文献

[1] A. Kneser, Bemerkungen über die Anzahl der Extrema der Krümmung auf geschlossenen Kurven und über verwandte Fragen in einer nichteuklidischen Geometrie. Festschrift zum 70. Geburtstag von H. Weber, (1912), 170–180.

[2] S. Mukhopadhyaya, New methods in the geometry of a plane arc I. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **1** (1909), 31–37.

[3] T. Fukunaga and M. Takahashi, Existence and uniqueness for Legendre curves. J. Geom. **104** (2013), 297–307 https://doi.org/10.1007/s00022-013-0162-6.

[4] T. Fukunaga and M. Takahashi, Evolutes of fronts in the Euclidean plane. J. Singul. **10** (2014), 92–107 http://doi.org/10.5427/jsing.2014.10f.

[5] T. Fukunaga and M. Takahashi, Evolutes and involutes of frontals in the Euclidean plane. Demonstr. Math. **48** (2015), 147–166 https://doi.org/10.1515/dema-2015-0015.

[6] T. Fukunaga and M. Takahashi, On convexity of simple closed frontals. Kodai Math. J. **39** (2016), 389–398 https://doi.org/10.2996/kmj/1467830145.

[7] A. Gray, E. Abbena and S. Salamon, Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica. Third edition. Studies in Advanced Mathematics. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, (2006).

[8] N. Nakatsuyama and M. Takahashi, On vertices of frontals in the Euculidean plane, Preprint (2024).

[9] M. Umehara, The four-vertex theorems. (Japanese) Sūgaku **50** (1998), no.4, 420–427.

全スカラー曲率の極限定理

三菱電機 先端技術総合研究所
濱中翔太 (Shota HAMANAKA) *

2024 年 3 月 4 日〜8 日

概 要

本講演では，n 次元閉（つまり，コンパクト境界無し）多様体上のリーマン計量テンソルがあるリーマン計量に $W^{1,p}$ $(p > n)$ 級で収束するときの全スカラー曲率の振る舞いに関するある結果についてお話しする．

1 導入

リーマン幾何学の最初で学ぶように，主なリーマン計量の曲率はその情報量が多いほうから，断面曲率，リッチ曲率，スカラー曲率というものがある．また，これらの曲率は計量の 2 階微分までに依存することがその定義から直ちにわかる．これらは単なる関数やテンソル場であるだけでなく，何らかの空間の曲がり具合を反映しているものであると考えられる．従って，その幾何学的な構造を汲み取ることによって，種々の曲率の下（や上）からのバウンドを，計量の 2 階微分よりも弱い正則性の構造のみで特徴づけられることが知られている．例えば，Toponogov の三角形比較定理を経由することによって，もはや多様体ではない（測地的）距離空間に対して断面曲率の下からのバウンドの概念を拡張することができることが知られている．また，最適輸送理論を用いて，測度距離空間に対してはリッチ曲率の下からのバウンドの概念を拡張できることも知られている．これらのことから自然に湧く疑問として,「スカラー曲率に対しての “弱い意味での下からのバウンド” はどのように定義するべきか？」というものがある．この辺りの話題については，例えば Gromov の “Four Lectures [2]” を参照して頂ければと思う．リーマン計量が C^2 級よりも弱い位相に関して動く時の，スカラー曲率の下からのバウンドの振る舞いについて，Gromov は次の興味深い定理を示している．

定理 ([1, p.1118])**.** M を（コンパクトとは限らない）境界のない滑らかな多様体，$\kappa : M \to \mathbb{R}$ をその上のある連続関数とする．M 上の C^2 級のリーマン計量の列 (g_i) で，ある M 上の C^2 級リーマン計量 g に M 上 C^0-収束するものを考える．また，各計量 g_i のスカラー曲率 $R(g_i)$ について，M 上 $R(g_i) \geq \kappa$ が成り立つと仮定する．このとき，極限の計量 g についても M 上 $R(g) \geq \kappa$ が成り立つ．

雑な言い方をすると，スカラー曲率の下からのバウンドは計量の（C^2 収束であれば当たり前だが，実はそこまでは必要なくて）C^0 収束で保たれる，ということをこの定理は主張している．対して本講演では，この定理の全スカラー曲率版がどうなるかについて考える．

*E-mail:hamanaka1311558@gmail.com

2　主定理

本講演の内容は全て講演者自身によるプレプリント [4] の内容に基づく．本講演では特に，次の定理が成り立つことを紹介する．

主定理 1 ([4, Main Theorem 1])**.** M^n を n 次元閉多様体 $(n \geq 3)$，g_0 を M 上の C^2 リーマン計量とする．ここで閉多様体とは，境界なしコンパクト多様体のことである．また，$p > n$ とする．M 上の C^2 級計量の列 (g_i) が以下を満たすとする：

(1) $g_i \xrightarrow{W^{1,p}} g_0$ $(i \to \infty)$,

(2) 全ての i に対して $R(g_i) \geq 0$,

(3) ある $\kappa \in \mathbb{R}$ が存在して，全ての i に対して，$\int_M R(g_i)\, d\mathrm{vol}_{g_i} \geq \kappa$.

ここで，$R(g_i)$ はリーマン計量 g_i のスカラー曲率を表す．この時，$\int_M R(g_0)\, d\mathrm{vol}_{g_0} \geq \kappa$ が成り立つ．また $n = 3$ の時，仮定 (2) は必要ない．

ユークリッド空間上のソボレフノルムと同様にして，閉リーマン多様体上のソボレフノルムが定義される．荒く言うと，$W^{1,p}$ の意味で収束するとは，弱い意味での 1 階導関数までが全て L^p の意味で収束することをいう．

注意. 上定理において閉多様体 M は固定しているから，$n = 2$ の時はガウス–ボンネの定理より全スカラー曲率は計量に依らない．従ってここでは，$n \geq 3$ の場合のみを考えている．

モレーの埋め込み定理から，$W^{1,p} \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}$ であるから，p を $p > n$ の範囲で色々動かすことによって，主定理 1 は仮定 (1) を

$$(1)' \quad g_i \xrightarrow{C^{0,\alpha}} g_0 \quad (0 < \alpha \leq 1)$$

に変えても成り立つことが分かる．一方で，次のような閉リーマン多様体上の計量列の例を作ることが出来る．この例は，(“$R(g_i) \geq 0$” という仮定を忘れると,）上定理 1 の収束性 $W^{1,p}$ を C^0（つまり，“$\alpha = 0$”）に弱めることは一般に出来ないことを示唆していることに注意する．

例. (M^n, g_0) を任意の n 次元 $(n \geq 3)$ 閉リーマン多様体とする．これに対して，$\left(M^n,\ g_i := u_i^{\frac{4}{n-2}} \cdot g_0\right)$ $(i = 2, 3, \cdots)$ を考える．ここで，$u_i : M \to \mathbb{R}$ は以下で定義される M 上の正の滑らかな関数である．

$$u_i = \phi\left(i^{-1} \sin(ih^2)\right) + 1.$$

ここでさらに $\phi : M \to [0, 1]$ は，ある点 $p \in M$ の十分小さい近傍内にのみサポートを持つような M 上の適当なカットオフ関数で，$h := d_{g_0}(\cdot, p) : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ は g_0 に関する p からの距離関数である．この時，ある定数 $C \in \mathbb{R}$ と十分大きい i_0 が存在して，全ての $i \geq i_0$ に対して，

$$\int_M R(g_i)\, d\mathrm{vol}_{g_i} \geq C > \int_M R(g_0)\, d\mathrm{vol}_{g_0}$$

が成り立つ．しかしこの例では g_i のスカラー曲率 $R(g_i)$ の符号が変わることに注意する．つまり，各 i に対してある点 $x_i, y_i \in M$ が存在して，$R(g_i)(x_i) < 0 < R(g_i)(y_i)$ が成り立つ．(一方，主定理 1 では “$R(g_i) \geq 0$” を仮定していた.）

$W^{1,p}$ の p を n に比べて（主定理 1 のそれに比べて）更に大きく取ると，上定理の “重み付き版” である次も示すことができる．

主定理 2 ([4, Main Theorem 2])**.** M^n を n 次元閉多様体 $(n \geq 2)$，g_0 を M 上の C^2 リーマン計量とする．また，$p > n^2/2$ とする．M 上の C^2 級計量の列 (g_i) とある M 上の測度 m が存在して，$e^{-f}\mathrm{dvol}_g := dm =: e^{-f_i}\mathrm{dvol}_{g_i}$ の形 (f, f_i は M 上のある関数) で表されているとする．さらに次を仮定する：

(1) $g_i \xrightarrow{W^{1,p}} g_0$ $(i \to \infty)$,

(2) ある正定数 $\Lambda > 0$ が存在して，f, f_i $(i \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ は M 上 Λ-リプシッツ,

(3) $f_i \xrightarrow{C^0} f$; M 上一様 $(i \to \infty)$,

(4) 全ての i について，M 上で $R(g_i) \geq 0$,

(5) 全ての i について，$\int_M R(g_i)\, dm \geq \kappa$ $(\kappa \in \mathbb{R})$.

この時,

$$\int_M R(g)\, dm \geq \kappa.$$

主定理 1 の仮定に対し，主定理 2 において p をより大きく取ることの必要性は，通常の全スカラー曲率が微分同相不変であることに対して重み付きの全スカラー曲率はそうではないことに起因する．

この定理 2 の系として，“超関数の意味でのスカラー曲率の下からのバウンド ([6, Definition 2.1])” に関する次の極限定理を得ることが出来る．

系. $p > n^2/2$ とする．M を n 次元閉多様体 $(n \geq 2)$, g を M 上の C^2 級リーマン計量とする．κ を M 上の正値連続関数とする．また，(g_i) を $g_i \in W^{1,p}$ で $W^{1,p}$ の意味で g に M 上収束する計量の列とする．さらに，$R(g_i) \geq \kappa$ が超関数の意味 ([6, Definition 2.1]) で成り立つと仮定する．このとき，$R(g) \geq \kappa$ が超関数の意味で成り立つ．

注意. 計量 g が C^2 級の時，超関数の意味で $R(g) \geq \kappa$ が成り立つことと通常の意味で $R(g) \geq \kappa$ が成り立つことは同値である．従って，この系の結論部分は,「$R(g) \geq \kappa$ が通常の意味で成り立つ」ということを主張している．

ここで，“超関数の意味でのスカラー曲率の下からのバウンド ” の定義を与えておく．

定義 1 (Distributional scalar curvature ([6, Definition 2.1], [5, Section 2]))**.** M を滑らかな多様体でその上の滑らかなリーマン計量 h を一つ固定しておく．M 上のリーマン計量 $g \in L^\infty_{loc}(M) \cap W^{1,2}_{loc}(M)$ で局所有界な逆 $g^{-1} \in L^\infty_{loc}(M)$[1] を持つものに対して，そのスカラー曲率超関数 R_g を次で定義する：任意のコンパクト台を持つ滑らかな関数 $u : M \to \mathbb{R}$ に対し，

$$\langle R_g, u\rangle := \int_M \left(-V \cdot \overline{\nabla} \left(u \frac{d\mathrm{vol}_g}{d\mathrm{vol}_h} \right) + Fu \frac{d\mathrm{vol}_g}{d\mathrm{vol}_h} \right) d\mathrm{vol}_h,$$

ここで，$V = (V^k) \in \Gamma(M)$ を $V^k := \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\Gamma^k_{ij} - g^{ik}\Gamma^j_{ji}$, F は,

$$F := R_h - \sum_{i,j,k=1}^n \overline{\nabla}_k g^{ij}\Gamma^k_{ij} + \overline{\nabla}_k g^{ik}\Gamma^j_{ji} + \sum_{i,j,k,l=1}^n g^{ij}\left(\Gamma^k_{kl}\Gamma^l_{ij} - \Gamma^k_{jl}\Gamma^l_{ik}\right)$$

[1] このような計量に対して通常の意味でスカラー曲率を定義することはできない.

で与えられる関数，また，$\Gamma_{ij}^k := \sum_{l=1}^n \frac{1}{2} g^{kl} \left(\overline{\nabla}_i g_{jl} + \overline{\nabla}_j g_{il} - \overline{\nabla}_l g_{ij} \right)$ である．また，$\overline{\nabla}$ はリーマン計量 h の Levi-Civita 接続である．

κ を M 上の連続関数とする．超関数の意味で $R_g \geq \kappa$ であるとは，任意の非負値の滑らかなテスト関数 $u \in C_+^\infty(M) \cap C_0^\infty(M)$ に対して，

$$\langle R_g, u \rangle - \int_M \kappa u \, d\mathrm{vol}_g \geq 0$$

が成り立つことをいう．

上の系から，ある n 次元閉多様体 M 上の $W^{1,p}$ $(p > n^2/2)$ 計量 g に対して次のようにスカラー曲率の下からのバウンドを新たに定義することが出来る（つまり，g が C^2 級の時この定義は，通常の意味でのスカラー曲率の下からのバウンドと一致する．）：

定義 2. κ を M 上の正値連続関数とする．ある $W^{1,p}$ ($g \in W^{1,p}$ と同じ p) 計量の列 (g_i) であって

- $W^{1,q}$ $(q > n^2/2)$-位相で g_i が g に収束，
- 超関数の意味で $R(g_i) \geq \kappa$

を満たすものが存在するとき，$R(g) \geq \kappa$ が成り立つという．

Gromov の C^0-極限定理 [1] から，この定義 2 と同様に，通常の意味でスカラー曲率の下からのバウンドを満たす計量列の C^0-極限として実現されるものとして，C^0 級計量のスカラー曲率の下からのバウンドを定義することが出来た．この Gromov の定義と上の定義 2 の異なる点は，上の定義 2 では近似列の各計量が特異点を許容し得る点である ([5, Lemma A.1] を参照のこと)．例えば，$\kappa > 0$ に対して，トーラス上に Gromov の意味で $R(g) \geq \kappa$ を満たすような C^0 級計量 g は存在しない ([3, 7, 8]) が，上の定義 2 の意味で存在する可能性はある．

参考文献

[1] M. Gromov, Dirac and Plateau billiards in domains with corners, Cent. Eur. J. Math. **12** (2014), 1109–1156.

[2] M. Gromov, Four lectures on scalar curvature, arXiv:1908.10612 (2019).

[3] M. Gromov and H. Blaine Lawson Jr., Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group. I, Ann. of Math. **111** (1980), 209–230.

[4] S. Hamanaka, Limit theorems for the total scalar curvature (old version: C^0, C^1-limit theorems for total scalar curvatures), Preprint at `https://arxiv.org/abs/2208.01865` (2022).

[5] W. Jiang, W. Sheng and H. Zhang, Weak scalar curvature lower bounds along Ricci flow, Science China Mathematics (2023), 1–20.

[6] D. A. Lee and P. G. LeFloch, The positive mass theorem for manifolds with distributional curvature, Comm. Math. Phys. **339** (2015), 99-120.

[7] R. Schoen and S.-T. Yau, Existence of incompressible minimal surfaces and the topology of three dimensional manifolds with non-negative scalar curvature, Ann. of Math. **110** (1979), 127–142.

[8] R. Schoen and S.-T. Yau, On the structure of manifolds with positive scalar curvature, Manuscripta Math. **28** (1979), 159–183.

ケーラー磁場における磁性焦値の評価

名古屋工業大学 大学院工学研究科 工学専攻 情報数理分野
青木侑省（Yusei Aoki）

概要

ケーラー多様体上のケーラー形式を定数倍したものをケーラー磁場と呼び、弧長で係数付けられた曲線が $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \kappa J\dot\gamma$ を満たすときこの磁場のもとでの軌道といわれる。ここでは、軌道を変分することによって得られる磁性ヤコビ場を対象に研究を行った。今回は軌道の始点をある超曲面に沿って変動させる場合を考える。この場合における磁性焦値を複素空間形のものと比較することで評価を得た。

1　導入

これまで、リーマン多様体の形状を考察する主な手法として測地線の性質が多くの研究者により調べられてきた。そこで、著者は測地線を磁場によって一般化し、さらに広い対象となる曲線族を考えることでより詳しい情報、特に多様体上の幾何構造に関係した曲線族を考えると多様体の形状と幾何構造の性質の両者を含めた情報が得られるのではないかとして考察を進めている。今回は、よく知られているベルジエの比較定理 ([2]) に対応した軌道の始点をある超曲面に沿って動かす場合の特殊な磁性ヤコビ場を考え、その大きさを下から評価した。この磁性ヤコビ場は、始点での変分方向を軌道の速度ベクトルを複素構造で回した方向に限定するものである。このような方向は軌道が磁場によって曲がる方向であるため重要な方向であると考える。

2　磁場

リーマン多様体上の閉 2 形式 $\mathbb{B}$ を磁場という。このような閉 2 形式は 3 次元ユークリッド空間の静磁場の一般化である。接束の自己準同型写像 $\Omega_{\mathbb{B}}$ を任意の接ベクトル v, w に対して $\langle v, \Omega(w)\rangle = \mathbb{B}(v, w)$ で定義する。特に、ケーラー多様体上の磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ が複素構造 J を使って $\mathbb{B}_\kappa(v, w) = \langle v, \kappa Jw\rangle$ で与えられる。リーマン多様体 M 上の磁場 $\mathbb{B}$ に対して、弧長によって径数付けられた滑らかな曲線 γ が微分方程式 $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \Omega_{\mathbb{B}}(\dot\gamma)$ を満たすとき γ を M 上の磁場 $\mathbb{B}$ の軌道といい、ケーラー磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ の軌道 γ は $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \kappa J\dot\gamma$ で与えられる。

3　磁性ヤコビ場

ケーラー多様体 M 上の $\mathbb{B}_\kappa$-軌道 γ に沿ったベクトル場 Y が

$$\begin{cases} \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y - \kappa J\nabla_{\dot\gamma}Y + R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma = 0, \\ \langle \nabla_{\dot\gamma}Y, \dot\gamma\rangle = 0. \end{cases} \tag{J}$$

を満たすとき Y を磁性ヤコビ場と呼ぶ。ここで ∇, R は M のリーマン接続と曲率テンソルを表す。滑らかな写像 $\alpha : (-\epsilon,\epsilon)\times\mathbb{R}\to M$ に対して、各 s で $\alpha(s,\cdot)$ が M 上の $\mathbb{B}_\kappa$-軌道であるとき、写像 $\alpha(s,t)$ を軌道の変分であるという。任意の磁性ヤコビ場は軌道の変分から得られる。実際、軌道の変分 $\alpha(s,t)$ は任意の s において $\mathbb{B}_\kappa$-軌道になるので

$$\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \kappa J\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

となる。両辺を s で偏微分すると、

$$\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \kappa J\Big(\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\frac{\partial\alpha}{\partial s}\Big)$$

となる。一方で、曲率テンソルの定義から

$$\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}\frac{\partial\alpha}{\partial s} + R(\frac{\partial\alpha}{\partial t},\frac{\partial\alpha}{\partial s})\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

となり、(J) の 1 番目の式が得られる。(J) の 2 番目の式は単位スピードの軌道を取ることを意味する。ベクトル場 X を関数 f_X, g_X と $\dot\gamma, J\dot\gamma$ に直交するベクトル場 $X^\perp$ を用いて、$X = f_X\dot\gamma + g_X J\dot\gamma + X^\perp$ と表す。共変微分 $\nabla_{\dot\gamma}X^\perp, \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}X^\perp$ が共に $\dot\gamma, J\dot\gamma$ に直交することから、式 (J) は

$$\begin{cases} f_Y' = \kappa g_Y, \\ (g_Y'' + \kappa^2 g_Y)J\dot\gamma + \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp - \kappa J\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp + R(Y^\sharp,\dot\gamma)\dot\gamma = 0, \end{cases} \tag{J'}$$

となる。ここで、γ に沿ったベクトル場 $Y^\sharp$ を $Y^\sharp = g_Y J\dot\gamma + Y^\perp$ と定める。通常のヤコビ場の場合と違い、磁性ヤコビ場の場合は $\dot\gamma$ 方向の成分 f_Y が関係するので少し複雑になっている。軌道 γ に沿った磁性ヤコビ場全体の集合を $\mathcal{J}_\gamma$ で表す。大きくわけてヤコビ場には、軌道の始点を固定して変分させるタイプと始点を変分させるタイプがある。今回は後者の始点を変分させるタイプでさらに始点での変分方向を $J\dot\gamma$ 方向に固定したものを考える。筆者は、この方向が軌道が磁場によって曲げられた方向であるので重要な方向であると考え、今回この場合の状況を調べた。

与えられた λ に対して、$Y(0) = J\dot\gamma(0), (\nabla_{\dot\gamma}Y)(0) = \lambda J\dot\gamma(0)$ を満たす $Y\in\mathcal{J}_\gamma$ を λ-特性磁性ヤコビ場という。γ に沿った λ-特性磁性ヤコビ場 Y に対して、$Y^\sharp(t_0) = 0$ となる t_0 を γ に沿った $p = \gamma(0)$ の λ-磁性焦値という。最小のこのような値を第 1λ-特性磁性焦値といい、$\mathrm{cf}_{\gamma,\lambda}(p)$ で表す。γ に沿った λ-特性磁性焦値が存在しないとき $\mathrm{cf}_{\gamma,\lambda} = \infty$ とする。

複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$、複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$、複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ を合わせた複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 上での λ-特性磁性ヤコビ場を見る。ここで、c は正則断面曲率である。複素空間形上のベクトル場 X, Y, Z に対して、曲率テンソル $R(X,Y)Z$ は

$$R(X,Y)Z = \frac{c}{4}\big\{\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y - \langle Y,JZ\rangle JX + \langle X,JZ\rangle JY + 2\langle X,JY\rangle JZ\big\}$$

と表される。これを $\mathbb{B}_\kappa$-軌道に沿った磁性ヤコビ場 $Y^\sharp$ に用いると $R(Y^\sharp,\dot\gamma)\dot\gamma = c(g_Y J\dot\gamma + (1/4)Y^\perp)$ が得られる。よって、(J′) は次のようになる。

$$\begin{cases} f_Y' = \kappa g_Y, \\ g_Y'' + (\kappa^2 + c)g_Y = 0, \\ \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp - \kappa J\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp + (c/4)Y^\perp = 0. \end{cases}$$

このことと、$Y^\perp$ 方向の初期条件が 0 であることから、複素空間形上の λ-特性磁性ヤコビ場の $Y^\perp$ 方向は常に 0 である。複素空間形上の $\mathbb{B}_\kappa$-軌道は互いに合同、すなわち 2 つの $\mathbb{B}_\kappa$-軌道 γ_1, γ_2 に対して、$\gamma_2(t) = \varphi\circ\gamma_1(t)$ が全ての t について成り立つ等長写像 φ が存在する、ので、λ-特性磁性焦値は軌道の始点によらない。そこでこの値を $\mathrm{cf}_\lambda(\kappa;c)$ と表す。

例 3.1. 複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ 上の $\mathbb{B}_\kappa$-軌道 γ をとる。γ に沿った λ-特性磁性ヤコビ場 Y を、$Y = f_Y\dot\gamma + g_Y J\dot\gamma$ とすると、

$$f_Y(t) = \sin\kappa t + \frac{\lambda}{\kappa}(1-\cos\kappa t), \quad g_Y(t) = \cos\kappa t + \frac{\lambda}{\kappa}\sin\kappa t.$$

となる。また λ-特性磁性焦値は以下で与えられる。

$$cf_\lambda(\kappa;c) = \begin{cases} (1/\kappa)\tan^{-1}(\kappa/|\lambda|), & \kappa\lambda < 0 \text{ のとき}, \\ \pi/(2|\kappa|), & \lambda = 0 \text{ のとき}, \\ \pi - (1/\kappa)\tan^{-1}(\kappa/|\lambda|), & \kappa\lambda > 0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

例 3.2. 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ 上の $\mathbb{B}_\kappa$-軌道をとる。γ に沿った λ-特性磁性ヤコビ場 Y を、$Y = f_Y\dot\gamma + g_Y J\dot\gamma$ とすると、

$$f_Y(t) = \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+c}}\sin\sqrt{\kappa^2+c}\,t + \frac{\lambda\kappa}{\kappa^2+c}\big(1-\cos\sqrt{\kappa^2+c}\,t\big),$$
$$g_Y(t) = \cos\sqrt{\kappa^2+c}\,t + \frac{\lambda}{\sqrt{\kappa^2+c}}\sin\sqrt{\kappa^2+c}\,t.$$

となる。また λ-特性磁性焦値は以下で与えられる。

$$cf_\lambda(\kappa;c) = \begin{cases} \big(1/\sqrt{\kappa^2+c}\big)\tan^{-1}\big(\sqrt{\kappa^2+c}/|\lambda|\big), & \lambda < 0 \text{ のとき}, \\ \pi/\big(2\sqrt{\kappa^2+c}\big), & \lambda = 0 \text{ のとき}, \\ \pi - \big(1/\sqrt{\kappa^2+c}\big)\tan^{-1}\big(\sqrt{\kappa^2+c}/\lambda\big), & \lambda > 0 \text{ のとき}. \end{cases}$$

例 3.3. 複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ 上の $\mathbb{B}_\kappa$-軌道をとる。γ に沿った λ-特性磁性ヤコビ場 Y を、$Y = f_Y\dot\gamma + g_Y J\dot\gamma$ とすると、

$|\kappa| < \sqrt{|c|}$ のとき、関数 f_Y, g_Y は

$$f_Y(t) = \frac{\kappa}{\sqrt{|c|-\kappa^2}}\sinh\sqrt{|c|-\kappa^2}\,t + \frac{\lambda\kappa}{\sqrt{|c|-\kappa^2}}\big(\cosh\sqrt{|c|-\kappa^2}\,t - 1\big),$$
$$g_Y(t) = \cosh\sqrt{|c|-\kappa^2}\,t + \frac{\lambda}{\sqrt{|c|-\kappa^2}}\sinh\sqrt{|c|-\kappa^2}\,t.$$

となる。また λ-特性磁性焦値は以下で与えられる。

$$
\begin{aligned}
&cf_\lambda(\kappa;c)\\
&=\begin{cases}
\dfrac{1}{\sqrt{|c|-\kappa^2}}\tanh^{-1}\dfrac{\sqrt{|c|-\kappa^2}}{|\lambda|}=\dfrac{1}{2\sqrt{|c|-\kappa^2}}\log\dfrac{|\lambda|+\sqrt{|c|-\kappa^2}}{|\lambda|-\sqrt{|c|-\kappa^2}}, & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lambda<-\sqrt{|c|-\kappa^2}\ \text{のとき}, & \\
\infty, & \lambda\geq-\sqrt{|c|-\kappa^2}\ \text{のとき},
\end{cases}
\end{aligned}
$$

$\kappa=\pm\sqrt{|c|}$ のとき、関数 f_Y, g_Y は

$$
f_Y(t)=\kappa t\Big(1+\frac{1}{2}\lambda t\Big),\qquad g_Y(t)=1+\lambda t.
$$

となる。また λ-特性磁性焦値は以下で与えられる。

$$
cf_\lambda(\kappa;c)=\begin{cases}
1/|\lambda|, & \lambda<0\ \text{のとき},\\
\infty, & \lambda\geq0\ \text{のとき}.
\end{cases}
$$

$|\kappa|>\sqrt{|c|}$ のとき、関数 f_Y, g_Y は

$$
\begin{aligned}
f_Y(t)&=\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+c}}\sin\sqrt{\kappa^2+c}\,t+\frac{\lambda\kappa}{\kappa^2+c}\big(1-\cos\sqrt{\kappa^2+c}\,t\big),\\
g_Y(t)&=\cos\sqrt{\kappa^2+c}\,t+\frac{\lambda}{\sqrt{\kappa^2+c}}\sin\sqrt{\kappa^2+c}\,t.
\end{aligned}
$$

となる。また λ-特性磁性焦値は以下で与えられる。

$$
cf_\lambda(\kappa;c)=\begin{cases}
\big(1/\sqrt{\kappa^2+c}\big)\tan^{-1}\big(\sqrt{\kappa^2+c}/|\lambda|\big), & \lambda<0\ \text{のとき},\\
\pi/\big(2\sqrt{\kappa^2+c}\big), & \lambda=0\ \text{のとき},\\
\pi-\big(1/\sqrt{\kappa^2+c}\big)\tan^{-1}\big(\sqrt{\kappa^2+c}/\lambda\big), & \lambda>0\ \text{のとき}.
\end{cases}
$$

断面曲率が上に有界な特性磁性ヤコビ場の大きさを下から評価する。上記の例から、0でない κ と非正定数 λ に対して、複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 上の軌道に沿った第1磁性焦値 $\mathrm{cf}_\lambda(\kappa;c)$ は次のように与えられる。

$$
cf_\lambda(\kappa;c)=\begin{cases}
\dfrac{1}{\sqrt{\kappa^2+c}}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{\kappa^2+c}}{|\lambda|}, & \kappa^2+c>0\ \text{かつ}\\
& \lambda<0\ \text{のとき},\\
\dfrac{\pi}{2\sqrt{\kappa^2+c}}, & \kappa^2+c\ \text{かつ}\\
& \lambda=0\ \text{のとき},\\
\dfrac{1}{|\lambda|}, & \kappa^2+c=0\ \text{かつ}\\
& \lambda<0\ \text{のとき},\\
\dfrac{1}{2\sqrt{|c|-\kappa^2}}\log\dfrac{|\lambda|+\sqrt{|c|-\kappa^2}}{|\lambda|-\sqrt{|c|-\kappa^2}} & \kappa^2+c<0\ \text{かつ}\\
& \lambda<-\sqrt{|c|-\kappa^2}\ \text{のとき},\\
\infty, & \kappa^2+c\leq0\ \text{かつ}\\
& -\sqrt{|c|-\kappa^2}\leq\lambda<0\ \text{のとき}.
\end{cases}
$$

評価のために区間 $[0, \mathrm{cf}_\lambda(\kappa, c)]$ で 2 つの関数 $\mathfrak{n}_{\kappa,\lambda}(\cdot; c)$、$\mathfrak{r}_{\kappa,\lambda}(\cdot; c)$ を次で定義する。

$$\mathfrak{n}_{\kappa,\lambda}(t;c) = \begin{cases} \left(\cos\sqrt{\kappa^2+c}\,t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{\kappa^2+c}}\sin\sqrt{\kappa^2+c}\,t\right)^2, & \kappa^2+c>0 \text{ のとき,} \\ (1+\lambda t)^2, & \kappa^2+c=0 \text{ のとき,} \\ \left(\cosh\sqrt{|c|-\kappa^2}\,t + \dfrac{\lambda}{\sqrt{|c|-\kappa^2}}\sinh\sqrt{|c|-\kappa^2}\,t\right)^2, & \kappa^2+c<0 \text{ のとき,} \end{cases}$$

$$\mathfrak{r}_{\kappa,\lambda}(t;c) = \mathfrak{n}'_{\kappa,\lambda}(t;c)/\mathfrak{n}_{\kappa,\lambda}(t;c).$$

関数 $\mathfrak{n}_{\kappa,\lambda}(\cdot; c)$ は、複素空間形上の λ-特性磁性ヤコビ場の速度ベクトルに直交する成分の大きさであり、$\mathfrak{r}_{\kappa,\lambda}(\cdot; c)$ は、$\mathfrak{n}_{\kappa,\lambda}(\cdot; c)$ の対数微分である。これらを用いて、以下のように λ-特性ヤコビ場、λ-特性磁性焦値を下から評価することができる。ここで、γ に沿った基底となるヤコビ場が必要なため補助的なヤコビ場を導入する。γ に沿ったヤコビ場 Y で $Y(0)$ が $J\dot\gamma(0)$ に平行、$\langle(\nabla_{\dot\gamma}Y)(0), J\dot\gamma(0)\rangle = \lambda\langle Y(0), J\dot\gamma(0)\rangle$ を満たすものの集合を $\mathcal{K}_{\gamma,\lambda}$ と表す。$\mathcal{K}_{\gamma,\lambda}$ は λ-特性磁性ヤコビ場全体の集合と $\{Y \in \mathcal{J}_\gamma \mid Y(0)=0, (\nabla_{\dot\gamma}Y)(0) \perp J\dot\gamma(0)\}$ を合わせた集合である。

定理 3.1 ([1])**.** λ を非正定数、γ を $\mathrm{Ric} M < c$ *(c:* 定数*)* を満たすケーラー多様体 M のケーラー磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ の軌道とする。$Y(0) \neq 0$ となる任意の磁性ヤコビ場 $Y \in \mathcal{K}_{\gamma,\lambda}$ をとる。そのとき、区間 $[0, \mathrm{cf}_\kappa(\lambda; c)]$ で以下が成り立つ。

(1) 関数 $t \mapsto \|Y^\sharp(t)\|^2/\mathfrak{n}_{\kappa,\lambda}(t;c)$ は単調増加
(2) $\|Y^\sharp(t)\|^2 \geq g_Y(0)^2\,\mathfrak{n}_{\kappa,\lambda}(t;c)$,
(3) $\langle(\nabla_{\dot\gamma}Y^\sharp)(t), Y^\sharp(t)\rangle \geq \|Y^\sharp(t)\|^2 \times r_{\kappa,\lambda}(t;c)$.

系 3.1. 複素空間形上の軌道に沿った第 1 λ-磁性焦値 $\mathrm{cf}_\lambda(\kappa; c)$ とケーラー多様体上の軌道 γ に沿った第 1 λ-磁性焦値 $\mathrm{cf}_{\gamma,\lambda}(\gamma(0))$ に対して、$\mathrm{cf}_{\gamma,\lambda}(\gamma(0)) \geq \mathrm{cf}_\lambda(\kappa; c)$ が成り立つ。

この結果は、より弱い条件の補助的なヤコビ場を用いて得られるため、逆からの評価は同じ手法では得られない。

最後に証明のアイデアを与える。γ に沿ったベクトル場 X に対して次のような指数

$$\mathcal{I}^T_{\kappa,\lambda}(X) = \int_0^T \left\{(g'_X)^2 - \kappa^2 g_X^2 + \left\langle \nabla_{\dot\gamma}X^\perp - \kappa JX^\perp, \nabla_{\dot\gamma}X^\perp\right\rangle - \langle R(X,\dot\gamma)\dot\gamma, X\rangle\right\} dt + \lambda g_X(0)^2$$

を考える。磁性ヤコビ場の場合は $\mathcal{I}^T_{\kappa,\lambda}(Y^\sharp) = \langle(\nabla_{\dot\gamma}Y^\sharp)(T), Y^\sharp(T)\rangle$ となる。一般のケーラー多様体上の磁性ヤコビ場を平行移動を用いて複素空間形に移し、指数を使って評価を行う。

参考文献

[1] Y. Aoki and T. Adachi, *Characteristic magnetic focal values on Kähler manifolds*, Journal of Geometry **Vol.114, issue 3** (2023), article 31.

[2] Cheeger, J., Evin, D.G.: Comparison theorems in Riemannian geometry, North-Holland Mathematical Library, Vol. 9, North-Holland Publishing Co. (1975)

球面の二重調和部分多様体について

東京理科大学大学院　創域理工学研究科　数理科学専攻
清水豪 (Takeru SHIMIZU) *

概要

部分多様体論における極小部分多様体の一つの一般化として, 1980 年代から二重調和部分多様体の研究が広がった. その最初の例の一つとして, G. Y. Jiang によって構成された単位球面 $S^n(1)$ 内の Clifford torus が知られている. 本稿では, 先行研究によって構成された Clifford torus に派生した単位球面 $S^n(1)$ 内の二重調和部分多様体の具体例と, それらの幾何学的性質に関して得られた研究結果を紹介する.

1　導入

二つの Riemann 多様体の間の写像の重要な研究対象の一つとして, 調和写像という概念がある. 1983 年, J. Eells-L. Lemaire [2] はこの調和写像の一般化として, 二重調和写像の概念を導入した. その後, 1986 年に G. Y. Jiang [1] によって二重調和写像に関する第一変分, 第二変分公式が研究されたことで, 二重調和写像の具体的な例の構成や分類などの研究が広く行われるようになった. しかしながら二重調和写像はその定義から, 具体例を構成することが容易ではなく, 先行研究で構成された例のほとんどの場合は等長はめ込み, かつ後に紹介する「平行な平均曲率ベクトル場をもつ」という性質を仮定した上で構成されている. まず本節では, 二重調和部分多様体の定義とその具体例の構成に重要な諸定理を紹介する. 本稿では, C^∞ 級多様体 M に対して $\mathfrak{X}(M)$ を M 上の C^∞ 級ベクトル場全体, $S^k(r)$ を Euclid 空間 $\mathbb{R}^{k+1}$ 内の原点を中心とした半径 r の超球面とする.

以下本節では, 次の設定を用いる.

- $(M,g),(N,h)$ を Riemann 多様体, $m=\dim M,\ n=\dim N,\ m\leq n$ とする.
- $f:M\to N$ を等長埋め込みとする.
- $\mathfrak{N}(M)$ を M に沿う N 内の C^∞ 級法ベクトル場全体とする.

定義 1. $\{e_k\}_{k=1}^m$ を M の局所正規直交標構場, $B(f)$ を f の第二基本形式, ∇ を (M,g) の Levi-Civita 接続, $\overline{\nabla}$ を f による M 上の誘導接続, R^N を N の Levi-Civita 接続に関する曲率テンソル場

* E-mail:6122525@ed.tus.ac.jp

とする.

$$\tau(f) \coloneqq \sum_{k=1}^{m} B(f)(e_k, e_k),$$
$$\tau_2(f) \coloneqq -\sum_{k=1}^{m} \left(\overline{\nabla}_{e_k} \overline{\nabla}_{e_k} \tau(f) - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_k} e_k} \tau(f) \right) + \sum_{k=1}^{m} R^N(df(e_k), \tau(f)) df(e_k) \tag{1}$$

によって定義される M に沿う N 上のベクトル場 $\tau(f), \tau_2(f)$ をそれぞれ, テンション場, 二重テンション場という. また, $\tau(f), \tau_2(f)$ がそれぞれ恒等的に 0 になるとき, M を N の極小部分多様体（または調和部分多様体）, 二重調和部分多様体という.

注意 2. 式 (1) から明らかに, M が極小部分多様体ならば, 二重調和部分多様体である. しかし, この逆は一般には成り立たないことが知られている. そのような, 極小でない二重調和部分多様体のことを proper な二重調和部分多様体という.

定義 3. $\overline{\nabla}^{\perp}$ を M の法接続, H を M の平均曲率ベクトル場, すなわち,

$$H \coloneqq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} B(f)(e_k, e_k) = \frac{1}{m} \tau(f)$$

とする. 任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して,

$$\overline{\nabla}^{\perp}_X H = 0$$

を満たすとき, M は平行な平均曲率ベクトル場をもつという.

定理 4. [6, Theorem 3.2.] M が平行な平均曲率ベクトル場をもつとき, M が N の二重調和部分多様体となるための必要十分条件は,

$$\sum_{k=1}^{m} R^N(\tau(f), df(e_k)) df(e_k) = \sum_{i,j=1}^{m} h(\tau(f), B(f)(e_i, e_j)) B(f)(e_i, e_j)$$

を満たすことである.

系 5. 定理 4 の仮定のもとでさらに $N = S^n(1)$ のとき, M が N の二重調和部分多様体となるための必要十分条件は,

$$m\tau(f) = \sum_{i,j=1}^{m} h(\tau(f), B(f)(e_i, e_j)) B(f)(e_i, e_j)$$

を満たすことである.

定義 6. ∇, A をそれぞれ (M, g) の Levi-Civita 接続, 形作用素とする. 任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して,

$$(\nabla A_\xi)(X, Y) \coloneqq \nabla_X A_\xi(Y) - A_\xi(\nabla_X Y) - A_{\overline{\nabla}^{\perp}_X \xi}(Y)$$

によって, $\xi \in \mathfrak{N}(M)$ 方向の形作用素 A_ξ の共変微分を定義する. $\nabla A_\xi = 0$ のとき, 形作用素 A_ξ は平行であるという.

2　球面の二重調和部分多様体の例

本節では, 過去の研究で構成された, 球面内の平行な平均曲率ベクトル場をもつ二重調和部分多様体の例を紹介する.

例 1. [1, Example 4.1.]

$$S^{n_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times S^{n_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\quad (n_1+n_2=n-1\ , n_1\neq n_2)$$

は, $S^n(1)$ の proper な二重調和部分多様体である. これは Clifford torus と呼ばれる.

球面内の平行な平均曲率ベクトル場をもつ proper な二重調和部分多様体で, 特に余次元が 1 のものはこの Clifford torus と, n_1 または n_2 のどちらか一方が 0 の場合に得られる半径 $1/\sqrt{2}$ の超球面 $S^{n-1}\left(1/\sqrt{2}\right)$ の 2 通りの例しか見つかっていない. ここからは先行研究によって見つけられた余次元が 2 以上のものを紹介する.

定理 7. [3, Theorem 18.]

$$\mathfrak{T}\coloneqq S^{n_1}(c_1)\times\cdots\times S^{n_r}(c_r)\subset S^{n+r-1}(1)\quad (2\geq r,\sum_{k=1}^{r}n_k=n,\sum_{k=1}^{r}{c_k}^2=1)$$

とする.

1. $\mathfrak{T}$ が $S^{n+r-1}(1)$ の極小部分多様体となるための必要十分条件は, 全ての $1\leq k\leq r$ に対して,
$$\frac{{c_k}^2}{n_k}=\frac{1}{m} \tag{2}$$
を満たすことである.
2. $\mathfrak{T}$ が $S^{n+r-1}(1)$ の proper な二重調和部分多様体となるための必要十分条件は, ある $1\leq p\leq r-1$ が存在して, 以下の 2 条件を満たすことである.
$$\frac{{c_1}^2}{n_1}=\cdots=\frac{{c_p}^2}{n_p}=\frac{1}{2(n_1+\cdots+n_p)}\neq\frac{1}{m}\ , \tag{3}$$
$$\frac{{c_{p+1}}^2}{n_{p+1}}=\cdots=\frac{{c_r}^2}{n_r}=\frac{1}{2(n_{p+1}+\cdots+n_r)}\neq\frac{1}{m}. \tag{4}$$

注意 8. [3, Remark 19.] 式 (2), (3), (4) から, $\mathfrak{T}$ が $S^{n+r-1}(1)$ の proper な二重調和部分多様体であるとき, $S^{n_1}(c_1)\times\cdots\times S^{n_p}(c_p)$ は $S^{(n_1+\cdots+n_p+p-1)}\left(1/\sqrt{2}\right)$ の極小部分多様体, $S^{n_{p+1}}(c_{p+1})\times\cdots\times S^{n_r}(c_r)$ は $S^{(n_{p+1}+\cdots+n_r+r-p-1)}\left(1/\sqrt{2}\right)$ の極小部分多様体であることがわかる. すなわち,

$$\mathfrak{T}\subset S^{(n_1+\cdots+n_p+p-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times S^{(n_{p+1}+\cdots+n_r+r-p-1)}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\subset S^{n+r-1}(1)$$

となる.

例 2. [7] $n \geq 4$ とし, 対称対 $(SU(n), SO(n))$ を考える. $\mathfrak{su}(n) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{p}$ を $\mathfrak{su}(n)$ の $(SU(n), SO(n))$ に付随した標準分解とする. また, $\mathfrak{su}(n)$ 上には, Killing 形式から自然に定まる内積とノルム $||\cdot||$ が定義されているとする. 任意の $i = 1, \ldots, n-1$ に対して,

$$\tilde{H}_i \coloneqq \frac{1}{n}\left\{(n-i)\sum_{k=1}^{i} E_k^k - i\sum_{k=i+1}^{n} E_k^k\right\}, \quad H_i \coloneqq \frac{\tilde{H}_i}{||\tilde{H}_i||}$$

とおく. ただし, E_k^k は第 (k,k) 成分が 1, それ以外が 0 であるような $n \times n$ 行列である. $1 \leq i, j \leq n-1$ かつ, $i \neq j$, $(n-j)$ とするとき, $\mathfrak{p}$ における線形イソトロピー表現の二つの軌道 $\mathrm{Ad}(SO(n))\left(H_i/\sqrt{2}\right)$ と $\mathrm{Ad}(SO(n))\left(H_j/\sqrt{2}\right)$ の直積空間,

$$\left(\mathrm{Ad}(SO(n))\frac{H_i}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\mathrm{Ad}(SO(n))\frac{H_j}{\sqrt{2}}\right) \subset S^{n(n+1)-3}(1)$$

は proper な二重調和部分多様体である.

これらの例は全て, 半径 $1/\sqrt{2}$ の超球面の極小部分多様体二つの直積の形で表されていることがわかる.

3 主結果と今後の展望について

本研究の目標は, 球面 $S^n(1)$ 内の平行な平均曲率ベクトル場をもつ proper な二重調和部分多様体の分類を与えることである. A. Balmus, S. Montaldo, C. Oniciuc によって, 球面 $S^n(1)$ 内の平行な平均曲率ベクトル場をもつ proper な二重調和部分多様体の部分的な分類が次のように与えられている.

定理 9. [4, 5] M を $S^n(1)$ の連結かつ平行な平均曲率ベクトル場を持つ proper な二重調和部分多様体とし, H をその平均曲率ベクトル場とする. $m = \dim M \geq 2$, $n - m \geq 2$ とする. このとき, $|H| \in (0, \frac{m-2}{m}] \cup \{1\}$ である. 特に, $m = 2$ のときは, $|H| = 1$, $m \in \{3, 4\}$ のときは, $|H| \in \{\frac{m-2}{m}, 1\}$ である. 加えて, 次が成り立つ.

(Case 1) $m \geq 2, |H| = 1$ の場合: M は $S^{n-1}\left(1/\sqrt{2}\right) \subset S^n(1)$ の極小部分多様体である.

(Case 2) $m \geq 3, |H| = \frac{m-2}{m}$ の場合: $S^{n-2}\left(1/\sqrt{2}\right)$ のある $m-1$ 次元極小部分多様体 $\widetilde{M}$ が存在して, M は $\widetilde{M} \times S^1\left(1/\sqrt{2}\right)$ の開集合である.

(Case 3) $m \geq 5, |H| \in \left(0, \frac{m-2}{m}\right)$ かつ, $\nabla A_H = 0$ の場合: $|H| = |m_1 - m_2|/m$ で, M の各点 x に対して, x の近傍 U と $S^{n_i}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の m_i 次元極小部分多様体 M_i , $(i = 1, 2)$ が存在して,

$$U = M_1 \times M_2 \subset S^{n_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^{n_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset S^n(1)$$

が成り立つ. ここで, $m_i \geq 2$, $m_1 \neq m_2$, $m_1 + m_2 = m$, $n_1 + n_2 = n - 1$ である.

この定理 9 において, $|H|$ が $1, (m-2)/m$ または (Case 3) の場合以外については言及されていないことに注意しておく. 特に筆者が調べた範囲では, 定理 9 の場合以外の例が現状見つかっていないようである. そのため, この定理でカバーされていない球面 $S^n(1)$ 内の平行な平均曲率ベクトル場を

もつ proper な二重調和部分多様体の具体例を構成することを考えたい. そこで, 定理 9 の (Case 3) における, $\nabla A_H = 0$ という条件に着目し, 次の主結果を得た.

定理 10. $M \subset S^n(1)$ を平行な平均曲率ベクトル場をもつ極小でない m 次元部分多様体 $(n-m \geq 2)$ とし, 各点 $p \in M$ に対し, p の近傍 $U \subset M$ と, $S^{n_i}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の m_i 次元極小部分多様体 M_i $(i = 1, 2)$ が存在して,

$$U = M_1 \times M_2 \subset S^{n_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^{n_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset S^n(1)$$

を満たすと仮定する. ただし, $m_1 + m_2 = m$, $n_1 + n_2 = n - 1$ である. このとき部分多様体 M は,

$$\nabla A_H = 0$$

を満たす. ここで H は M の平均曲率ベクトル場である.

定理 10 から定理 9 は次のように書き換えられる.

系 11. M を $S^n(1)$ の連結かつ平行な平均曲率ベクトル場を持つ proper な二重調和部分多様体とし, H をその平均曲率ベクトル場とする. $m = \dim M \geq 2$, $n - m \geq 2$ とする. このとき, $|H| \in (0, \frac{m-2}{m}] \cup \{1\}$ である. 特に, $m = 2$ のときは, $|H| = 1$, $m \in \{3, 4\}$ のときは, $|H| \in \{\frac{m-2}{m}, 1\}$ である. 加えて, 次が成り立つ.

(Case 1) $m \geq 2, |H| = 1$ の場合: M は $S^{n-1}\left(1/\sqrt{2}\right) \subset S^n(1)$ の極小部分多様体である.

(Case 2) $m \geq 3, |H| = \frac{m-2}{m}$ の場合: $S^{n-2}\left(1/\sqrt{2}\right)$ のある $m-1$ 次元極小部分多様体 $\widetilde{M}$ が存在して, M は $\widetilde{M} \times S^1\left(1/\sqrt{2}\right)$ の開集合である.

(Case 3) $m \geq 5, |H| = |m_1 - m_2|/m$ $(m_i \geq 2$, $m_1 \neq m_2$, $m_1 + m_2 = m)$ の場合: M の各点 x に対して, x の近傍 U と $S^{n_i}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の m_i 次元極小部分多様体 M_i $(i = 1, 2)$ が存在して,

$$U = M_1 \times M_2 \subset S^{n_1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times S^{n_2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \subset S^n(1)$$

が成り立つ. ここで, $n_1 + n_2 = n - 1$ である.

定理 10 より, 定理 9（または系 11）の全ての場合について $\nabla A_H = 0$ が成り立つ. これより, 球面 $S^n(1)$ 内の平行な平均曲率ベクトル場をもつ proper な二重調和部分多様体の未知な例を構成する際に $\nabla A_H \neq 0$ という条件は一つの指標になることがわかる.

最後に $\nabla A_H = 0$ の条件の言い換えについても言及しておく.

命題 12. [4, Proposition3.19.] 球面 $S^n(1)$ 内の平行な平均曲率ベクトル場 H をもつ proper な二重調和部分多様体 M について, 次の三つの条件は同値である.

(1) $R^M A_H = 0$ である.

(2) M は各点において, H 方向に最大で 2 つの異なる主曲率を持つ.

(3) M は $\nabla A_H = 0$ を満たす.

ただし, $R^M A_H(X, Y, Z) \coloneqq R^M(X, Y)A_H(Z)$, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ である.

参考文献

[1] G. Y. Jiang, 2-harmonic maps and their first and second variational formula, Chinese Ann. Math., 7A (1986) 388–402.

[2] J. Eells, L. Lemaire, Selected Topics in Harmonic maps, CBMS, Regional Conference Series in Math., vol. 50, Amer. Math. Soc., 1983.

[3] A. Balmus, S. Montaldo, C. Oniciuc, Classification results and new examples of proper biharmonic submanifolds in spheres, Note Mat., 1 (2008), 49–61.

[4] A. Balmus, C. Oniciuc, Biharmonic submanifolds with parallel mean curvature vector field in spheres, J. Math Anal. Appl., 386 (2012) 619–630.

[5] A. Balmus, S. Montaldo, C. Oniciuc, New results toward the classification of biharmonic submanifolds in $\mathbb{S}^n$, arXiv:1111.6063v2 (2012).

[6] S. Ohno, T. Sakai, H. Urakawa, Biharmonic homogeneous hypersurfaces in compact symmetric spaces, Diff. Geom. App., 43 (2015) 155–179.

[7] S. Ohno, Biharmonic orbits of isotoropy representations of symmetric spaces, Kodai Math J., 42 (2019), 48–63.

$\mathbb{Z}_2$-graded parity 非保存な Poisson 括弧

神奈川学園中学・高等学校
多田和功 (Yasukatsu TADA) *

概要

Grassmann 代数や Clifford 代数における代数的自己同型写像には $\mathbb{Z}_2$-graded parity 非保存な写像が存在する. $\mathbb{Z}_2$-graded parity 非保存な写像に対しては, 従来の $\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧は保存されない.Grassmann 代数（あるいは）Clifford 代数の二つの代数的自己同型写像の間に,parity map なる写像を定義し, その特別な場合を利用して parity 項と呼ぶ odd 元を定義する.parity 項が $\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧を決定付けることと $\mathbb{Z}_2$-graded parity 非保存な代数的自己同型写像による $\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧の相互関係を述べる.

1 導入

Heisenberg 方程式の解として調和振動子の代数を考えるとき,Weyl 代数と Clifford 代数が得られる. Weyl 代数と可換代数,Clifford 代数と Grassmann 代数との対応で, 量子 - 古典対応が見られる. 代数上に Moyal $*$-積を定義し, 代数との組を考えるストラテジーが変形量子化の手法であった ([3], [4], [15], [16], [20], [21]). 変形表示の問題については [17],[18],[19],[22],[23] 等にある. 計算の背後には Hochshild のコホモロジーの議論が登場した ([9]). 代数を出発点として“座標変換”なるものを考えるとき,“座標変換”＝“代数的自己同型写像”という見方を採用することができる.

ところで, 超対称性を記述する 数学として supermanifold の理論が登場し, 広く発展してきており, 様々な場所で基本的言語として使用されている ([1], [2], [5], [7], [8], [11], [24]) . supermanifold はその座標変換がボゾンとフェルミオンを保つような（$\mathbb{Z}_2$-graded parity 保存な）写像として定義される. そこでの Poisson 括弧 はやはり, ボゾンとフェルミオンを保つように考えられている. したがって, 従来の定義による Poisson 括弧は parity 保存する写像に関しては, その形は保たれるので parity 非保存な写像については特に考察の対象にする必要がなかったわけである ([6]). しかし,Leites[12],[13] で既に述べられているように (最近では [14]), supermanifold の座標変換として parity を保存するという仮定は, 数学的には人工的な仮定である.Grassmann 代数や Clifford 代数には parity 非保存な写像が存在するので, その点も含めて考察をしていくことはできないだろうか（計算式は明示されていないが [21] に括弧式が保存されないことへの言及がある）. そこで, 本論文では,Grassmann 代数上での Poisson 括弧 についての考察を変形量子化の手法を用いながら行うことにする.superalgebra 上の Poisson 括弧についてはこれまでも様々調べられており, 例えば,N.Cantarini,V.Kac[10] が 述べている generalized Poisson 括弧のようなものもあるが, そこで考えている写像も parity 保存なも

* E-mail:tada@kanagawa-kgs.ac.jp

のである. Grassmann 代数は superalgebra の特別な場合であるので, ここでは Grassmann 代数に話を限る. 考える写像としては parity 保存に限らずに代数的自己同型写像にまで広げて考えることにし,$\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧が parity 非保存な写像に対してどのような変化を受けるのかを考察する.parity 構造を定めると,Poisson 構造はそれに対応して定まることを述べる. 座標変換を代数的自己同型写像であるべしといったときから,parity 構造を持つ代数に対して,parity の変化を統制しているものは一体何であるのかといった疑問が浮かんでくる. その問に答えるために,parity map なる写像を定義する.Clifford 代数の代数的自己同型写像からの Poisson 括弧のずれは parity map から定まる parity 項 によって定まることを述べる.

2　代数的自己同型写像, 代数的自己同型写像のなす群

本稿において,Grassmann 代数の生成元の個数は 2n 個とする（Weyl 代数の定義のアナロジーで考える）. 形式的パラメーター ν を添加した ν 付き Grassmann 代数上に Moyal$*$-積を定義を行う. 組 $\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), *\right)$ は Clifford 代数 $Cl_{n,n}(\mathbb{R})$ に同型となる. ここで,Moyal$*$-積を定義を行うときに, 生成元を微分する消滅作用素を利用するので生成元の取り方に依存することを注意しておく.$\mathbb{Z}_2$-graded parity 非保存な代数的自己同型写像を考えるときに, 項の次数について, 偶元 (even な項) は偶元で保たれるが, 奇元（odd な項）は偶元が mixed される. 奇元の表示は絶対的なものではなく,$\mathbb{Z}_2$-graded parity 非保存な代数的自己同型写像に依存する (代数表示の問題を持つ). 以下, 記号法などを述べた上で得られた群論的な定理, 命題を列挙する.

定義 2.1. 代数 $(A, \cdot)$ が parity 構造を持つとは, ある P,Q⊂A が存在して, 次の関係式を満たすときをいう.

$$\begin{aligned} &A = P \oplus Q \\ &P \cdot P \subset P \\ &P \cdot Q \subset Q \\ &Q \cdot P \subset Q \\ &Q \cdot Q \subset P \end{aligned}$$

次に, 代数（A, ·）が parity 構造を持つときに, parity が同じであることを以下のように定義する.

定義 2.2. 代数(A, ·)が parity 構造を持つとき, 代数(A, ·)の代数的自己同型写像の元 $\varphi_1, \varphi_2 \in Aut($ $A, \cdot)$ に対して, parity 同値であるとは $\varphi_1(P) = \varphi_2(P), \varphi_1(Q) = \varphi_2(Q)$ が成り立つときをいう.

定義 2.3. $\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right)$ が 2^{2n} 次元実 Grassman 代数であるとは, 次の性質を持つ $\mathbb{R}$ 係数 2^{2n} 次元線形空間のことである.

- $\wedge$ は結合的な積
- 生成元 $\langle e_i\rangle = \{e_1, e_2, \cdots, e_{2n}\}$ が存在し, 次の基本関係式を満たす.

$$e_i \wedge e_j + e_j \wedge e_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, \cdots, 2n)$$

生成元の変更を行うことがあるので,$\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right)$ という記法で, 生成元 $\langle e_i\rangle$ を用いていることを明示的にしている. 特に混乱を生じない場合には $\left(\bigwedge^{2n}, \wedge\right)$ のように表す.

定義 2.4. Grassmann 代数 $\left(\bigwedge^{2n}, \wedge\right)$ の even part $\left(\bigwedge_0^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right)$,odd part $\left(\bigwedge_1^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right)$ を次のように定義する.

$$\left(\bigwedge_0^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right) = \left\{ a_{ev} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_{2k}=1}^{2n} a^{i_1 i_2 \cdots i_{2k}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_{2k}}, a^{i_1 i_2 \cdots i_{2k}} \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left(\bigwedge_1^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right) = \left\{ a_{od} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1 i_2 \cdots i_{2k+1}=1}^{2n} a^{i_1 i_2 \cdots i_{2k+1}} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_{2k+1}}, a^{i_1 i_2 \cdots i_{2k+1}} \in \mathbb{R} \right\}$$

命題 2.1. Grassmann 代数は parity 構造を持つ（$\mathbb{Z}_2$-graded 代数である）.

定義 2.5. $Ev_{\langle e_i\rangle} : \left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right) \to \left(\bigwedge_0^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right)$ を even part への射影とする.

定義 2.6. $Od_{\langle e_i\rangle} : \left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right) \to \left(\bigwedge_1^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right)$ を odd part への射影とする.

定義 2.7. $B_{\langle e_i\rangle} : \left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right) \to \left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right)$ を次で定義する (先頭項を一番後ろへ移動する写像).

$$B_{\langle e_i\rangle}(e_p \wedge e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \wedge e_p$$

定義 2.8. $\iota_{\langle e_i\rangle} : \left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right) \to \left(\bigwedge_1^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right)$ なる odd part の符号を取り替える写像を

$$\iota_{\langle e_i\rangle}(a) = Ev_{\langle e_i\rangle}(a) - Od_{\langle e_i\rangle}(a)$$

で定義する.

定義 2.9. 左消滅作用素 $\overrightarrow{\partial}_{e_i} : \left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right) \to \left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right)$ を次で定義する.

- $\mathbb{R}$-linear
- $\overrightarrow{\partial_{e_i}}(e_j) = \delta_{ij}$
- $\overrightarrow{\partial_{e_i}}(a \wedge b) = \overrightarrow{\partial_{e_i}}(a) \wedge b + \iota(\langle e_i\rangle)(a) \wedge \overrightarrow{\partial_{e_i}}(b)$

右消滅作用素 $\overleftarrow{\partial_{e_i}} : \left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right) \to \left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right)$ の定義も同様に行う（飛び越しの際, 生成元の選び方に依存していることに注意する).

定義 2.10. $\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle)[\![\nu]\!], \wedge\right)$ が ν 付き Grassmann 代数であるとは,$\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right)$ の $\mathbb{R}[[\nu]]$ による中心拡大 ν として得られる結合的代数のことである.

定義 2.11. Grassmann 代数 $\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right)$ の元に対して, $\langle e_i\rangle$ に関する degree が k 次であるとは, 異なる k 個の生成元の積

$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$$

の線形和で書かれているときをいう. また ν は 2 次の元として定義し, この定義を $\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle)[\![\nu]\!], \wedge\right)$ の場合にも適用する.

一般に $\varphi\left(\bigwedge_0^{2n}\right) = \bigwedge_0^{2n}$ であるが $\varphi\left(\bigwedge_1^{2n}\right) \neq \bigwedge_1^{2n}$ である.Grassmann 代数の項の次数は,odd part の取り方に依存する. ゆえに parity という概念は絶対的な概念ではない（表示の問題を持つことになる）.

定義 2.12. ν 付き Grassmann 代数 $\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle)[\![\nu]\!],\wedge\right)$ 上の Moyal $*$-積を次の式で定義する.

$$* = \exp\frac{\nu}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\overleftarrow{\partial_{e_i}}\wedge\overrightarrow{\partial_{e_{i+n}}}+\overleftarrow{\partial_{e_{i+n}}}\wedge\overrightarrow{\partial_{e_i}}\right)$$

$\exp\frac{\nu}{2}\sum_{i,j=1}^{2n}\overleftarrow{\partial_{e_i}}\delta_{ij+n}\overrightarrow{\partial_{e_j}}, e^{\frac{\nu}{2}\overleftarrow{\partial}\,\overrightarrow{\partial}}$ などと略記する.

上で定義した Moyal $*$-積を用いると, 次の関係式が得られる.

定義 2.13. 次の関係式が成り立つ.(Clifford 代数の基本関係式)

$$e_i * e_j + e_j * e_i = \nu\delta_{ij+n} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,2n : mod\, 2n)$$

命題 2.2. $*$-積は associativity を持つ.

命題 2.3. $\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle)[\![\nu]\!],*\right) \cong Cl_{n,n}(\mathbb{R})$ が成り立つ.

$\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle)[\![\nu]\!],*\right)$ 上に逆 Moyal 積 $*^{-1}$ を次のように定義することができる.

$$*^{-1} = \exp\left(-\frac{\nu}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\overleftarrow{\partial_{e_i}} * \overrightarrow{\partial_{e_{i+n}}}+\overleftarrow{\partial_{e_{i+n}}} * \overrightarrow{\partial_{e_i}}\right)\right)$$

このとき, 次の命題が成り立つ.

命題 2.4. $\left(\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle)[\![\nu]\!],*\right),*^{-1}\right) \cong \left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle)[\![\nu]\!],\wedge\right)$ が成り立つ.

群	特徴
$Aut\left(\bigwedge^{2n},\wedge\right)$	Grassmann 代数の代数的自己同型写像の全体
$Aut_0\left(\bigwedge^{2n},\wedge\right)$	$\left\{\varphi(e_i)=\sum_{j=1}^{2n}a_i^j e_j, a_i^j\in\mathbb{R}\right\}$
$Aut_E\left(\bigwedge^{2n},\wedge\right)$	$\left\{\varphi(e_i)=e_i+\sum_{p=2}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_p\le 2n}a_i^{j_1j_2\cdots j_p}e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge\cdots\wedge e_{j_p}, a_i^{j_1j_2\cdots j_p}\in\mathbb{R}\right\}$
$Aut_{E,\ell}\left(\bigwedge^{2n},\wedge\right)$	$\left\{\varphi(e_i)=e_i+\sum_{p\ge\ell}\sum_{1\le j_1<j_2<\cdots<j_p\le 2n}a_i^{j_1j_2\cdots j_p}e_{j_1}\wedge e_{j_2}\wedge\cdots\wedge e_{j_p}, a_i^{j_1j_2\cdots j_p}\in\mathbb{R}\right\}$

注 2.1. ν 付き Grassmann 代数の代数的自己同型写像全体を考える場合には,$Aut\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle),\wedge\right)$ を $Aut\left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle)[\![\nu]\!],\wedge\right)$ と表記し,$\mathbb{R}$ 係数を $\mathbb{R}[\![\nu]\!]$ 係数にして考えればよい. 以下 $(\langle e_i\rangle)$ の表記を $\langle e_i\rangle$ と書いたり省略することもある.

命題 2.5.

$$Aut\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right) = Aut_0\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)\rtimes Aut_E\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)$$

命題 2.6.

$$Aut\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)\triangleright Aut_{E,\ell}\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)$$

命題 2.7. $Aut_0\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right) \cong \left\{X \in M(2n,\mathbb{R}) \,|^t X \begin{pmatrix} O & E_n \\ E_n & O \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} O & E_n \\ E_n & O \end{pmatrix}\right\}$

上の命題の右辺は Lie 群 $GL(2n,R)$ の閉部分群であるから次がいえる.

命題 2.8. $Aut_0\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)$ は Lie 群である.

命題 2.9. $Aut_{E,l}\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)/Aut_{E,k}\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)(k<l)$ は有限次元 Lie 群である.

定理 2.1. $Aut\left(\bigwedge^{2n}[\![\nu]\!],*\right)$ は有限次元 Lie 群の射影極限である.

3 Parity 非保存な代数的自己同型写像の例

この節では parity 非保存な写像の例を挙げる. 代数的自己同型性は基本関係式を満たすことを確認すればよい. 以下の議論で $\eta \in \left(\bigwedge_1^{2n}\langle e_i\rangle, \wedge\right)$ とする.

例 3.1. 次で定義される Grassmann 代数の代数的自己同型写像
$\varphi : \left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right) \to \left(\bigwedge^{2n}(\langle e_i\rangle), \wedge\right)$ は $\mathbb{Z}_2$-graded parity 非保存である.

$$\begin{aligned}\varphi(e_i) &= e_i + e_i \wedge \eta \\ &= \exp\left(-\frac{\eta}{2}\right) \wedge e_i \wedge \exp\left(\frac{\eta}{2}\right)\end{aligned}$$

命題 3.1. $\psi(e_i) = \exp\left(-\frac{\eta}{2}\right) * e_i * \exp\left(\frac{\eta}{2}\right)$ で定義される写像が Clifford 代数の代数的自己同型写像であるための必要十分条件は $\eta * \eta = 0$ が成り立つことである.（基本関係式を書き, 最低次数に注目せよ. この条件を満たす η は豊富にある. 具体例はここから作れる. 条件 $\eta * \eta = 0$ は $\{\eta, \eta\} = 0$ でもよい）.

従来の $\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧は parity 保存な代数的自己同型写像に関して不変であるが,parity 非保存な写像に関しては, 従来の $\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧は保存されない. 次の例がある.

例 3.2. $\varphi(e_i) = e_i + e_i \wedge \eta$ に対して（$\eta \in \left(\bigwedge_1^{2n}\langle e_i\rangle [\![\nu]\!], \wedge\right)$ とおく.）

$$\sum_{ij=1}^{2n} \overleftarrow{\partial_{\varphi_i}} \delta_{ij+n} \overrightarrow{\partial_{\varphi_j}} = \sum_{ij=1}^{2n} \overleftarrow{\partial_{e_i}} \left(\delta_{ij+n} - (1+\eta)\{e_{ij}, \eta\} - \sum_{k=1}^{2n} \{e_{k+n}, \eta\}\{e_{ijk}, \eta\}\right) \overrightarrow{\partial_{e_j}}$$

が成り立つ. ゆえに一般に $\sum_{ij=1}^{2n} \overleftarrow{\partial_{\varphi_i}} \delta_{ij+n} \overrightarrow{\partial_{\varphi_j}} \neq \sum_{ij=1}^{2n} \overleftarrow{\partial_{e_i}} \delta_{ij+n} \overrightarrow{\partial_{e_j}}$ である.

以上のことは $\mathbb{Z}_2$-graded な Poisson 括弧式は代数表示の問題を抱えていることを示している.

4　代数的自己同型写像の合成と parity map，parity 項の定義

前節の内容を受けて, 異なる $\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧式をとった時に, お互いにどのような関係式で結ばれるのかといった問題を考える.parity 非保存な部分に本質的に関わるのは $Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[\![\nu]\!],\wedge\right)$ の元である．そこで $Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[\![\nu]\!],\wedge\right)$ の元の Grassmann 代数への射影（後で定義する）による生成元の像, および $Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[\![\nu]\!],\wedge\right)$ の二つの元の合成の生成元の像に関して考察を行う（Cliffrod 代数の場合についても考察する）. 異なる代数的自己同型写像に対して parity map（二つの代数的自己同型写像の持つ odd 性の“ずれ”を表す写像）を定義するとともに parity 項の定義を与えることにする．まずは, 代数的自己同型写像の生成元の像について, いくつかの準備をする.

定義 4.1. $Aut_{E.Cl}\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ を $Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[[\nu]],*\right)$ の Clifford 代数の代数的自己同型写像の Grassmann 代数への射影（$\nu\to 0$）から得られる Grassmann 代数の代数的自己同型写像全体とおく.

$Aut_{E.Cl}\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ は $Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ の部分群である（一致はしない）.

ν 付き Grassmann 代数の代数的自己同型写像の元を

$$\varphi(e_i)=e_i+e_A^i+e_B^i\quad\left(e_A^i:even\,,\,e_B^i:odd\right)\quad\varphi\in Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[\![\nu]\!],\wedge\right)$$

と表す（一般には e_B^i の項が e_i を含まない場合もある）． e_A^i, e_B^i の $\mathbb{R}[\![\nu]\!]$ 係数は略記している.Grassmann 代数の基本関係式から,

$$\left(e_i+e_A^i+e_B^i\right)\wedge\left(e_j+e_A^j+e_B^j\right)+\left(e_j+e_A^j+e_B^j\right)\wedge\left(e_i+e_A^i+e_B^i\right)=0$$

が成り立つ. 展開して整理すると

$$\begin{cases}e_i\wedge e_A^j+e_j\wedge e_A^i+e_A^i\wedge e_B^j+e_B^i\wedge e_A^j=0 & odd\ part\\ e_A^i\wedge e_A^j+e_A^j\wedge e_A^i=0 & even\ part\end{cases}$$

となる. 特に $i=j$ のときを考え, 次数に気を付ければ

$$e_A^i\wedge e_i=0\,,\ \ e_A^i\wedge e_B^i=0$$

が得られる.$\nu\to 0$（Grassmann 射影を考える）とし第 1 式に注目すれば

$$e_A^i=e_i\wedge\eta\,,\ \ \exists\eta\in\left(\bigwedge_1^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$$

を得る（[24] 参照）Clifford 代数の代数的自己同型写像についても, 同様に計算をしてみると, 次の定理を得る.

定理 4.1. 線形項の係数が単位行列で書かれる,Clifford 代数の代数的自己同型写像の Grassmann 代数への射影から得られる Grassmann 代数の代数的自己同型写像は次の形で書ける.

$$\varphi_\psi(e_i)=e_i+e_i\wedge\eta+e_i\wedge\omega^i$$

$$\omega^i \wedge \omega^i = 0, \quad \omega^i \wedge \omega^{i+n} = 0, \quad \omega^i + \omega^{i+n} = 0, \quad \omega^i \overleftarrow{\partial}\, \overrightarrow{\partial} \omega^j = 0, \quad \eta \wedge \omega^i = 0$$

ただし, $\psi \in Aut_E\left(\bigwedge^{2n} \langle e_i \rangle [\![\nu]\!], *\right), \varphi_\psi \in Aut_E\left(\bigwedge^{2n} \langle e_i \rangle, \wedge\right), \eta \in \left(\bigwedge_1^{2n} \langle e_i \rangle, \wedge\right), \omega^i \in \left(\bigwedge_0^{2n} \langle e_i \rangle, \wedge\right)$ とおいた.

証明は $(\overleftarrow{\partial}\, \overrightarrow{\partial})^p$ の計算で項の次数が full でない項が必ず表れ係数が 0 になることを利用する. この結果から $\varphi_\psi(e_i) = e^{-\frac{1}{2}B_{<e_i>}(\eta+\omega^i)} \wedge e_i \wedge e^{\frac{1}{2}(\eta+\omega^i)}$ と随伴積分解可能である.

ここから先は, 代数的自己同型写像の合成について話を進める. Grassmann 代数に関しての次の計算公式は有用である (後述する parity map における exp の部分の“重み”がかかる理由が分かる).

$$\left(e_i + e_i \wedge \omega_A + e_i \wedge \omega_B^i\right) \wedge \left(e_j + e_j \wedge \omega_A + e_j \wedge \omega_B^j\right) = e_i \wedge e_j \wedge \left(1 + \omega_B^i\right) \wedge \left(1 + \omega_B^j\right)$$

$$\prod_{p\,=\,i,j,k\,:\wedge} (e_p + e_p \wedge \omega_A + e_p \wedge \omega_B^p) = e_i \wedge e_j \wedge e_k \wedge \left(1 + \omega_B^i\right) \wedge \left(1 + \omega_B^j\right) \wedge \left(1 + \omega_B^k + \omega_A\right)$$

等が成り立つ.

Grassmann 代数の代数的自己同型写像 $\varphi(e_i) = e_i + e_A^i + e_B^i \quad \left(e_A^i : even\,,\, e_B^i : odd\right)$ のうち,e_B^i の項が e_i を含む形に限定して考える（Clifford 代数の代数的自己同型写像の Grassmann 射影はこの形に含まれている）. 限定された Grassmann 代数の代数的自己同型写像の合成に関しては

$$\varphi_1(e_i) = e_i + e_i \wedge \omega_A + e_i \wedge \omega_B^i$$
$$\varphi_2(e_i) = e_i + e_i \wedge \omega_C + e_i \wedge \omega_D^i$$

に対して, 計算公式を利用すれば

$$\varphi_2 \circ \varphi_1(e_i) = e_i \wedge \{\left(1 + \omega_B^i\right)^a \wedge \left(1 + \omega_B^i\right) \wedge \omega_A + \left(1 + \omega_D^i\right)^b \wedge \omega_B^i \wedge \left(1 + \omega_C + \omega_D^i\right)\}$$

となる. ここで φ_1, φ_2 として,$\psi_1\,,\, \psi_2 \in Aut_E\left(\bigwedge^{2n} \langle e_i \rangle [[\nu]], *\right)$ に対する Grassmann 代数への射影 $\varphi_{\psi_1}, \varphi_{\psi_2} \in Aut_E\left(\bigwedge^{2n} \langle e_i \rangle, \wedge\right)$ を考え,$\omega_A \wedge \omega_B^i = 0\,,\, \omega_C \wedge \omega_D^i = 0, e_i \wedge \omega_A^i + e_j \wedge \omega_B^j = 0\,,\, e_i \wedge \omega_C^i + e_j \wedge \omega_D^j = 0$ に気を付けながら展開すれば

$$\varphi_{\psi_2} \circ \varphi_{\psi_1}(e_i) = e_i \wedge \left(\frac{1}{2}(1 + \omega_A + \omega_B^i) \circ_\wedge (1 + \omega_C + \omega_D^i) + \sum_{a \in A} \omega_D^a \wedge \omega_A + \sum_{b \in B} \omega_D^b \wedge \omega_B\right)$$

が成り立つ (ただし,$\circ_\wedge$は対称積である).

講演者は Grassmann 代数の代数的自己同型写像および Clifford 代数の代数的自己同型写像に対して,$\mathbb{Z}_2$-graded parity の“odd 方向のずれ”を特徴づける写像 (parity map と呼ぶことにする) と parity 項（この項は奇元である）の定義を行った.

定義 4.2. （parity map, parity 項の定義）$\psi_1, \psi_2 \in Aut_E\left(\bigwedge^{2n} \langle e_i \rangle [[\nu]], *\right)$ に対して,
$\Pi : Aut_E\left(\bigwedge^{2n} \langle e_i \rangle [[\nu]], *\right) \times Aut_E\left(\bigwedge^{2n} \langle e_i \rangle [[\nu]], *\right) \longrightarrow Aut_E\left(\bigwedge^{2n} \langle e_i \rangle, \wedge\right)$ を次のように定める.

$$\Pi \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_1 \end{pmatrix}(\cdot) \coloneqq \left(exp \frac{1}{2}\left(\overleftarrow{\partial} - \overrightarrow{\partial}\right) \varphi_{\psi_2} \circ \varphi_{\psi_1}(\cdot)\right) \frac{1}{2}\left(\overleftarrow{\partial} + \overrightarrow{\partial}\right) (\varphi_{\psi_2} \circ \varphi_{\psi_1}(\cdot))$$

これを parity map と呼ぶことにする. 特に,$Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[[\nu]],*\right)$ の 2 つの元のうち, 少なくとも一方に恒等写像が含まれる場合に,

$$\Pi(\psi_1)(e_i) \doteq \Pi\begin{pmatrix}\psi_1\\ id\end{pmatrix}(e_i) = -\Pi\begin{pmatrix}id\\ \psi_1\end{pmatrix}(e_i)$$

と定める. これを $Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[[\nu]],*\right)$ の元 ψ_1 に対しての parity 項と呼ぶ.

上の parity map の定義は,$Aut_{E.Cl}\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[[\nu]],*\right)$ に対して行ったが,$Aut_E\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle[[\nu]],\wedge\right)$ においても線形項の部分の行列式を考慮することで定義可能である. ここでは割愛する）.

そこで odd deformation によって, 従来の Poisson 括弧がどのような変更を受けるのかを考察した（Hochschild cohomology の計算が必要になる.[9] を参照した）.

定義 4.3. $X:\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)\times\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)\to\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ を $\mathbb{R}-bilinear\ map$ とする（以下,$A=\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ と略記することもある）.

$\widetilde{\delta}_\eta : Map(A,A)$ を次の式で定義する（ただし,$\eta\in\left(\bigwedge_1^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ とする）.

$$\widetilde{\delta}_\eta X(f,g) = -X(\eta\wedge Od(f),g)+\eta\wedge Od(X(f,g))-X(f,\eta\wedge Od(g)) \quad f,g\in A$$

以下では X として,Poisson 括弧式 $\{\ ,\ \} = \sum_{ij=1}^{2n}\overleftarrow{\partial_{e_i}}\delta_{ij+n}\overrightarrow{\partial_{e_j}}$ と wedge 積 $\wedge(f,g)=f\wedge g$ を用いることになる (特に $\widetilde{\delta}_\eta^2\{\ ,\ \}=0\Longleftrightarrow\{\eta,\eta\}=0$ が成り立つ. この部分の計算の詳細や成り立つ性質を示す必要があるが, ここでは割愛する).

定義 4.4. $\delta_\eta\in Map(A,A)$ を次で定義する.

$$\delta_\eta = \exp\widetilde{\delta}_\eta - 1$$

δ_η は次の性質を持つ.

命題 4.1. $X=\wedge,\{\ ,\ \}$ とする. このとき, 次が成り立つ.

1. $\delta_\eta\wedge=0$
2. $\delta_\xi\delta_\eta X=\delta_\eta\delta_\xi X$
3. $(1+\delta_{\xi+\eta})X=(1+\delta_\xi)(1+\delta_\eta)X$
4. $\delta_\varsigma\delta_\xi\delta_\eta X=0$

定理 4.2. 次の同値が成り立つ.

$$\delta_\eta\neq\delta_\xi\Longleftrightarrow\eta\neq\xi$$

定義 4.5. Grassmann 代数上の Poisson 括弧の odd deformation : $\{\ ,\}:_\eta\ :\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)\times\left(\bigwedge^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)\to\left(\bigwedge_0^{2n}\langle e_i\rangle,\wedge\right)$ は次で与えられる.

$$:\{f,g\}:_\eta=(1+\delta_\eta)\{f,g\}$$

また, 次も成立する.

命題 4.2. 次の等式が成り立つ.

$$:\{f,g\}:_{\eta+\xi}=(1+\delta_\eta)(1+\delta_\xi)\{f,g\}$$

次の定理から, 異なる odd 元に対して異なる Poisson 括弧が定まる.

定理 4.3. odd 元が異なることと,$\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧の odd deformation が異なることとは同値である（parity 項を決めること Poisson 構造を決めることとは同じことである）.

$$:\{f,g\}:_\eta\neq:\{f,g\}:_\xi\Longleftrightarrow\eta\neq\xi$$

系 4.1. $\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧が保存される Grassmann 代数の代数的自己同型写像は parity 保存な写像に限る.

5 主定理

主定理を述べるために, 言葉をいくつか用意する.（代数表示の変更を行っていることを強調するため）

定義 5.1. $*$ 積と $\wedge$ 積の代数的自己同型写像 φ による表示を以下で定義する.

$$:*:_\varphi=\varphi(\cdot)*\varphi(\cdot)$$
$$:\wedge:_\varphi=\varphi(\cdot)\wedge\varphi(\cdot)$$

代数の基本関係式は表示よらず（偶元で表示されているため）一定の形を保つことは明らかである.

定義 5.2. Grassmann 代数上の Poisson 括弧式を以下で定義する.

$$:\{,\}:_\varphi=\lim_{\nu\to0}\frac{:*:_\varphi-:\wedge:_\varphi}{\nu}\tag{1}$$

（ただし, 上の式での極限は記号的に書いているだけで形式的なものであり,ν 冪の一次の項を抜き出す意味である.）このとき, 次が成り立つ.

定理 5.1.（主定理）任意の Clifford 代数の代数的自己同型写像 ψ に対して,

$$:\{\,,\}:_\psi=exp\left(\delta_{\Pi(\varphi_{\psi_E})}\right)\{\,,\}$$

により,$\mathbb{Z}_2$-graded Poisson 括弧の代数的自己同型写像による表示が与えられる.

参考文献

[1] F.A.Berezin.*Introduction to superanalysis.* Math Phys and Applied Math.Vol.9,D.Reidel Publ Comp.Dordrecht-Boston-Lancaster-Tokyo(1987)

[2] F.A.Berezin and M.S.Marinov.*Particle spin dynamics as Grassmann variant classical mechanics.*Ann.Phys.104(1977),pp336-362

[3] F.Bayen,M.Flato,C.Fronsdal,A.Lichnerowicz and D.Sternheimer.*Deformation theory and quantization I*Ann.Phys.111(1978),pp61-110

[4] F.Bayen,M.Flato,C.Fronsdal,A.Lichnerowicz and D.Sternheimer.*Deformation theory and quantization II* Ann.Phys.111(1978),pp111-151

[5] F.Cantrijin and Ibort. *Introduction to Poisson supermanifolds.* Diff.Geom.and its Appli.1(1991),pp133-152

[6] R.Casalbuoni.*On the quantization of systems with anticommuting variables.* Il Nuovo Cimento Vol33 A N.1(1976),pp.115-125

[7] B.S.DeWitt *Supermanifolds.* Cambridge Univ.Press London(1984)

[8] A.Inoue and Y.Maeda.*Foundations of Calculus on super Euclidean space $R^{m|n}$ based on a Fréchet-Grassmann algebra.*Kodai.Math.J.14(1991),pp.72-112

[9] S.MacLane.*Homology.* Berlin Springer(1963)

[10] N.Cantarini and V.G.Kac.*Classification of linearly compact simple Jordan and generalized Poisson superalgebras* arXiv:math.QA/0608390v1 15 Aug 2006

[11] D.A.Leites.*Introduction to the Theory of Supermanifolds.* Russian Math.surveys 35:1(1980),pp1-64

[12] D.A.Leites.*Selected problems of supermanifold theory.* Duke Math.J.Vol.54(1987),pp-649-656

[13] D.A.Leites. *The Schrodinger equation,Supplement3,Quantization and supermanifolds.* Kluwer Dordrecht(1991)

[14] D.A.Leites.*Odd Parameters in geometry-* arXiv:2210.17096

[15] H.Omori,Y.Maeda and A.Yoshioka.*Weyl manifolds and deformation quantization.* Adv.in Math.85(1991),pp224-255

[16] H.Omori,Y.Maeda and A.Yoshioka.*A construction of a deformation quantization of a Poisson algebras.* Proceedings of Workshop on Gem.and its Appli. in Honor of Morio Obata,World Scientific(1993),pp.201-218

[17] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Deformation of expressions for elements of algebras (I), -(Jacobi' s theta functions and $*$ -exponential functions)-* arXiv:1104.2109

[18] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Deformation of expressions for elements of algebras (II), -(Weyl algebra of 2m-generators)-* - arXiv:1105.1218

[19] H.Omori, Y.Maeda, N.Miyazaki and A.Yoshioka : *Deformation of expressions for elements of algebras (III), -Generic product formula for $*$-exponentials of quadratic forms-* arXiv:1107.2474

[20] 大森 英樹, 一般力学系と場の幾何学, 裳華房（1991）

[21] 大森 英樹, 数学の中の物理学, 東京大学出版会（2004）

[22] 大森 英樹, 演算子的に見た微分・積分の代数 *I*　表示変形論, 導入編,　現代数学社（2018）

[23] 大森 英樹, 演算子的に見た微分・積分の代数 *II*　表示変形論, 応用編,　現代数学社（2019）

[24] K.Yagi. *Super differential calculus.* Osaka J.Math.25(1988),pp243-257

2次元トーラスの測地流と Birkhoff 切断について

立命館大学　大学院理工学研究科　基礎理工学専攻
岩本 光平 (Kohei IWAMOTO)

概 要

Birkhoff は [1] において, 運動方程式の解の位相的な性質を研究する上で Birkhoff 切断を定義した. Birkhoff 切断は 3 次元多様体の力学系を調べる上で有用な道具の一つであり, たとえば [2, 3] らによる双曲曲面の測地流に関する研究がある. Birkhoff 切断が存在すると, そこから第一回帰写像を定義できる. 本稿では 2 次元トーラスの測地流に対して, Birkhoff 切断から誘導される第一回帰写像に関して [4] で得られた主結果を紹介する.

1　導入

まずはじめに [5] を参照して測地流の定義を述べる. 微分幾何, 特に Riemann 幾何の基本的な概念として測地線がある. 測地線とは与えられた 2 点を結ぶ" 最短曲線", もしくはそれをつないで延長していったものである. Riemann 多様体の接束もしくは単位接束上には" 測地流" とよばれる流れが存在する. 測地流は初期点とその方向ベクトルから定まる測地線に対して, 速度ベクトルを対応させることで得られる.

定義 1.1. M を完備 Riemann 多様体とし, g を M 上の Riemann 計量, $\gamma_{(x,v)}(t)$ を以下の条件を満たすような一意的な測地線とする.

$$\begin{cases} \gamma_{(x,v)}(0) = x \\ \dot{\gamma}_{(x,v)}(0) = v \end{cases}$$

$t \in \mathbb{R}$ に対して $\phi_t : TM \to TM$ を次のように定義する.

$$\phi_t(x, v) := (\gamma_{(x,v)}(t), \dot{\gamma}_{(x,v)}(t))$$

このとき ϕ_t を M の単位接束 T_1M への制限を測地流とよぶ.

測地流の研究としては双曲曲面の測地流に関する研究が盛んであるが, 本稿では 2 次元トーラスの測地流に限定して話を進めていき, Birkhoff 切断に注目した研究について述べる. Birkhoff は [1] において, 運動方程式の解の位相的な性質を研究をする上で Birkhoff 切断を定義した.

定義 1.2 (Birkhoff [1], Fried [2])**.** ϕ_t を 3 次元多様体上の流れとする. 次の 3 つの条件を満たす曲面 Σ を Birkhoff 切断とよぶ.

1. 曲面の内部 $\mathrm{Int}(\Sigma)$ は流れに横断的に交わる.
2. 曲面の境界 $\partial\Sigma$ は有限個の閉軌道の和集合である.
3. ある正の数 t_0 が存在して, 任意の点 $x \in M$ に対して, $\phi_t \in \Sigma$ となる $t \in [0, t_0]$ が存在する.

次に 2 次元トーラスの測地流に対して, Birkhoff 切断の構成について考察する. まず, 2 次元トーラス上に図 1 のように単純閉測地線 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ をとる.

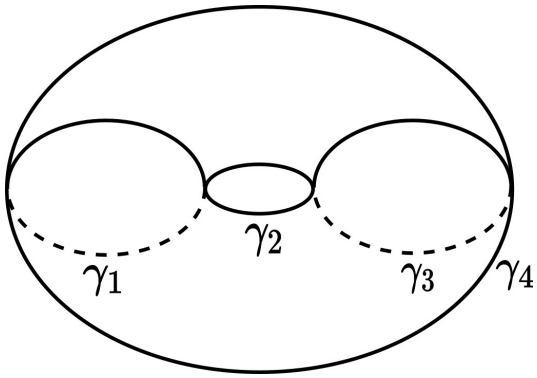


図 1:

そして, これらの測地線 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ によって, T^2 を次の図 2 のように 4 つの領域 P_1, P_2, P_3, P_4 に分割する. その中の P_1, P_2 上に図 2 のように凸で滑らかな単純閉曲線の族 C_1, C_2 を考える. ただし 1 個だけ特異点 O_1, O_2 を持つものとする.

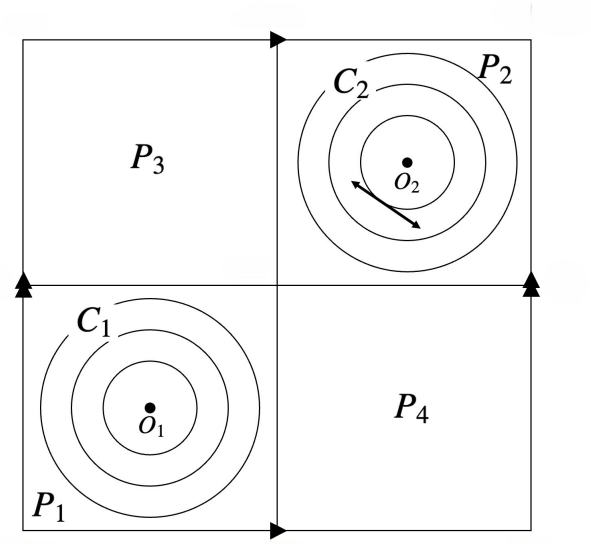


図 2:

このとき, 曲面 $\Sigma \subset T_1T^2$ を次のように定義する. C_1, C_2 の各閉曲線に接する長さ 1 の接ベクトル全体の集合を考える. この集合の T_1T^2 における閉包を Σ と定義する. ただし, 向きを考えた接ベクトルとする. このとき Σ は次のような性質を持っている.

1. Σ は滑らかな向き付け可能な曲面で, $\partial\Sigma$ は 8 個の ϕ_t の閉軌道の和集合で構成されている.
2. Σ の内部 $\mathrm{Int}(\Sigma)$ は ϕ_t と横断的に交わる.
3. Σ の Euler 数は -8 である. すなわち Σ は 2 次元トーラス T^2 から 8 個の開円板を取り除いた曲面と微分同相である.

Birkhoff 切断が存在すると, そこから第一回帰写像が定義できる.

定義 1.3. Σ を Birkhoff 切断とする. 流れを ϕ_t とする. 任意の点 $p \in \mathrm{Int}(\Sigma)$ に対して第一回帰写像 $F : \mathrm{Int}(\Sigma) \to \mathrm{Int}(\Sigma)$ を以下のように定義する.

$$F(p) = p'$$

ただし, p' は p において横断的に交わった ϕ_t が, 次に $\mathrm{Int}(\Sigma)$ と横断的に交わる点とする.

2 主定理

ここで [4] で得られた主結果について述べる.

測地線の傾きを θ とし, 第一回帰写像を $F : \mathrm{Int}(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Int}(\Sigma)$ とする. 傾き θ の測地線の接ベクトルからなる集合とバーコフ切断の共通部分を Λ_θ とおき, Λ_θ 全体の集合を Λ とする. このとき, Λ_θ は円周 S^1 であり, 測地線の傾き θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ に対して, F の Λ_θ への制限は回転である.

定理 2.1. 測地線の傾き θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ に対して, F の Λ_θ への制限 $F|_{\Lambda_\theta}$ は以下となる.

(i) $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ または $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$ のとき,

$$F|_{\Lambda_\theta} = \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{(\sin\theta + \cos\theta)^2}}$$

(ii) $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ または $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ のとき,

$$F|_{\Lambda_\theta} = \sqrt{\frac{\cos^2\theta}{(\sin\theta - \cos\theta)^2}}$$

さらに第一回帰写像 F と位相共役な写像を求めた.

定理 2.2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

とし A が導く同相写像を $f_A : T^2 \to T^2$ とすると, ある同相写像 H が存在して, 次が成り立つ.

$$H \circ F = f_A \circ H$$

参考文献

[1] G. D. Birkhoff, Dynamical Systems with two degrees of freedom, *Trans. Amer. Math. Soc.* **18**, 199–300 (1917)

[2] D. Fried, Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps, *Topology.* **22**, 299–303 (1983)

[3] E. Ghys, Sur l'invariance topologique de la classe de Godbillon-Vey, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble).* **37**, 59–76 (1987)

[4] K. Iwamoto, 3 次元多様体の測地流とバーコフ切断, 立命館大学 修士論文, (2023)

[5] G. P. Paternain, *Geodesic Flows*, Birkhäuser, (1999)

On finiteness of the geodesics joining a pair of points in curve complexes

奈良女子大学　大学院人間文化総合科学研究科　数物科学専攻
大家佳奈子 (Kanako OIE) *

概 要

S を種数 g, 境界成分 c 個, p 個の puncture をもつ向き付け可能曲面とする. 本稿では以下の結果について紹介する.
1. "$g = 1, c + p \geq 3$" または "$g \geq 2, c + p \geq 1$" のとき S の curve complex 上の 2 点 a_0, a_2 で次のようなものが存在する:$d_S(a_0, a_2) = 2$, a_0 と a_2 を結ぶ curve complex 内の geodesic の個数は丁度 2 個である.
2. "$g = 2, c + p \geq 1$" または "$g \geq 3$" のとき S の curve complex 上の 2 点 a_0, a_2 で次のようなものが存在する:$d_S(a_0, a_2) = 2$, a_0 と a_2 を結ぶ curve complex 内の geodesic の個数は丁度 3 個である.

1　導入

Curve complex は Riemann 面 の Teichmüller 空間 を研究していた Harvey によって最初に導入され [3], 今も多くの研究者によって研究されている. 特に Masur-Minsky は, curve complex 内の geodesic がもつ特定の幾何的性質を用いて定義された, curve complex の δ-hyperbolicity について示した [7]. この結果は, ending lamination conjecture の解決 [8, 2] など, 重要な帰結をもたらした.

2012 年に Birman-Menasco は, curve complex 内における行き止まり（dead ends）を持つ geodesic の存在を示した [1]. 彼らの論文では, そのような例は「明らかに見逃されていたもの」であると述べている. そのため, curve complex の geodesic がもつ定性的な性質の調査は意味深いものと思われる.

これに関して, Ido-Jang-Kobayashi は curve complex 内の 2 点でそれらを結ぶ geodesic が 1 つしかないものが存在することを示している [5, 6]. 一方容易にわかるように curve complex 内の 2 点でそれらを結ぶ geodesic が無限個存在するようなものがある. したがって, 以下の問題を考えることは妥当である.

Question. Curve complex 内の 2 点でそれらを結ぶ全ての geodesic の個数は 1 よりも大きな有限の数となるようなものは存在するか?

本稿では, 上記の問いに対する肯定的な回答を記述する. 実際, 主結果は以下の通りである.
S は種数 g, 境界成分 c 個, p 個の puncture をもつ向き付け可能曲面とする (図 1).

Theorem 1. "$g = 1, c + p \geq 3$" または "$g \geq 2, c + p \geq 1$" のとき S の curve complex 上の 2 点 a_0, a_2 で次のようなものが存在する:$d_S(a_0, a_2) = 2$, a_0 と a_2 を結ぶ curve complex 内の geodesic の個数は丁度 2 個である.

*E-mail:wak_oie@cc.nara-wu.ac.jp

Theorem 2. “$g = 2, c + p \geq 1$” または “$g \geq 3$” のとき S の curve complex 上の 2 点 a_0, a_2 で次のようなものが存在する:$d_S(a_0, a_2) = 2$, a_0 と a_2 を結ぶ curve complex 内の geodesic の個数は丁度 3 個である.

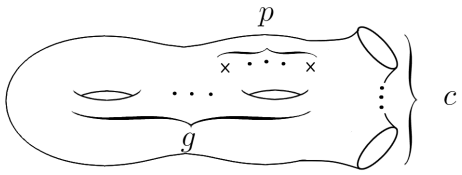


図 1: Surface S

以下ではこの結果に関する基本的な用語の定義, 証明に用いた概念および証明の概略を紹介する.

2 準備

2.1 Curve complex

この節では, S の curve complex について紹介する.

Definition 1. S が *sporadic* であるとは, “$g = 0$, $c + p \leq 4$ ” 又は “$g = 1$, $c + p \leq 1$ ” が成り立つときにいう. また S が sporadic でないとき, S は *non-sporadic* であるという.

Definition 2. S 内の simple closed curve α について “α は高々1 点の puncture を含む S 内の disk を bound する” 又は
“α は ∂S のある component に parallel である” とき α は *inessential* であるという.
また α が inessential でないとき α は *essential* であると言う.

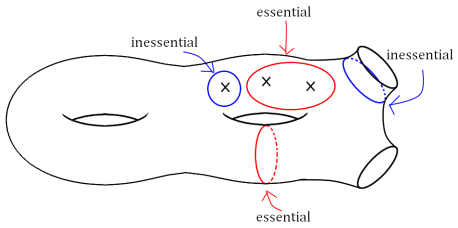


図 2: Essential curve の例

Definition 3. S が essential simple closed curve を含まないとき, S は *simple* であるという. また S が simple でないとき, S は *non-simple* であるという.

図 3 ではすべての sporadic surfaces が描かれている. 定義から S が simple であるならば sporadic であることは容易にわかる. また, 図 3 から S が sporadic かつ non-simple である場合, “$g = 1$, $c + p \leq 1$” または “$g = 0$, $c + p = 4$” となることもわかる.

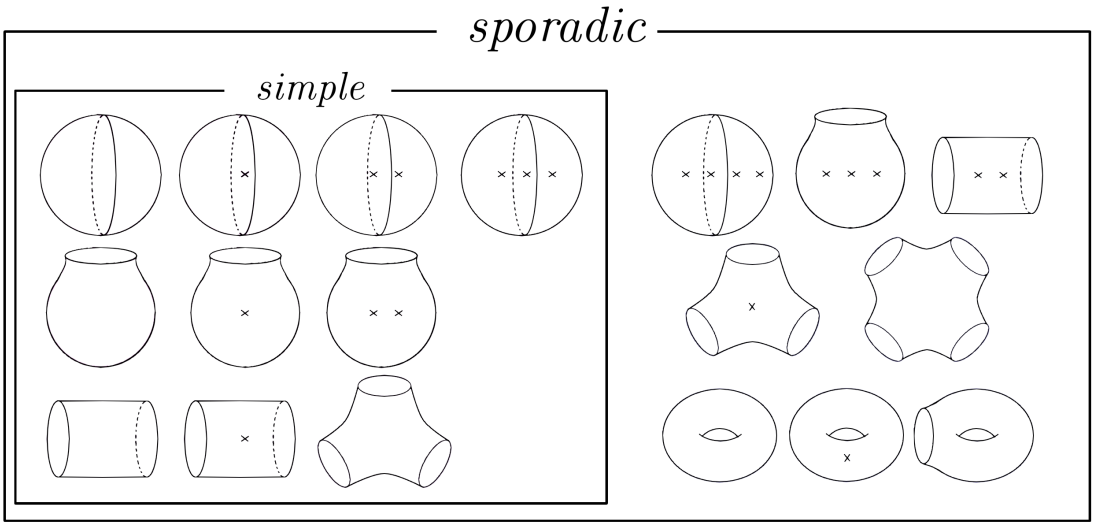


図 3: Sporadic surface

Definition 4. S は non-sporadic とする．以下で定義される simplicial complex を S の *curve complex* といい, $\mathcal{C}(S)$ で表す.

$\mathcal{C}^{(0)}(S)$: S 上の essential simple closed curves の isotopy 類の集合,

$\mathcal{C}^{(0)}(S)$ の $n+1$ 個の 0-simplex が S 上の disjoint curves で実現されるとき，それらは n-simplex を張る。

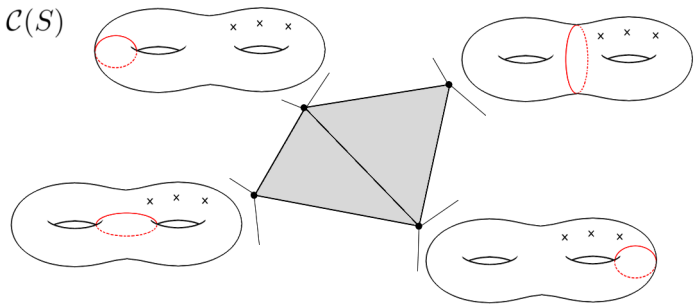


図 4: $g = 2$, $c = 0$, $p = 3$ のときの S の curve complex $\mathcal{C}(S)$.

Remark. $\mathcal{C}(S)$ は 局所的に無限な simplicial complex である.

尚, S が sporadic かつ non-simple のときも curve complex は定義できるが本稿では省略する.

Definition 5. $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ の 2 点 a, b に対して a と b を結ぶ simplicial path を $[a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b]$ と表すことにする. $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ に単体的距離を導入することにより $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ は距離空間になる. 以下この距離を d_S と書くことにする.

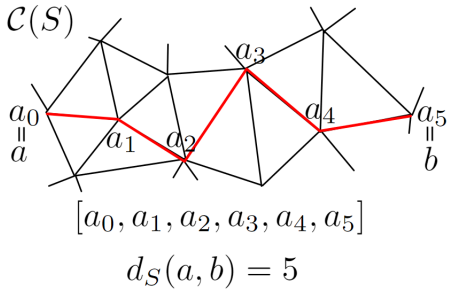


図 5: a と b を結ぶ path

Definition 6. $\mathcal{C}(S)$ 内の path $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ が $d_S(a_0, a_n)$ を実現している時, $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ は $\mathcal{C}(S)$ 内の *geodesic* であるという.

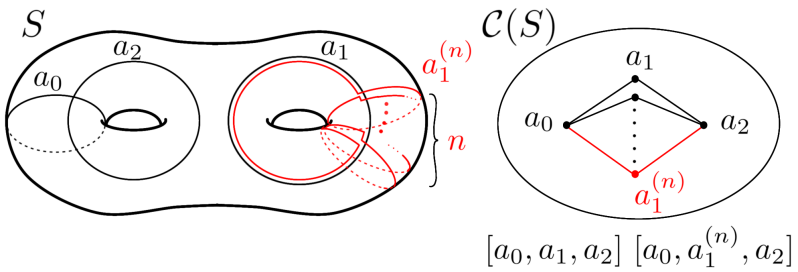


図 6: a_0 と a_2 を結ぶ geodesic

2.2 Subsurface projection

この節では, 主結果の証明に用いられる subsurface projection について紹介する.

Definition 7. S の subsurface X が S の *essential subsurface* であるとは, ∂X の各 component が S で essential であるときにいう.

X を S の essential subsurface とする. 以下では $\ell \in \mathcal{C}^{(0)}(S)$ に対して ℓ と ∂X の交点の数は ℓ の S における isotopy 類の中で最小であるとする.

Definition 8. $\ell \cap X \neq \emptyset$ であるとき ℓ は X を *cut* する という. また $\ell \cap X = \emptyset$ であるとき ℓ は X を *miss* する という.

X を S の essential な subsurface で non-simple なものとする. また $\ell \in \mathcal{C}^{(0)}(S)$ は X を cut するとする. このとき $\mathcal{C}^{(0)}(S)$ から $\mathcal{C}^{(0)}(X)$ の power set への写像 π_X を *subsurface projection* とよび, 次のように定義する.

$\ell \cap X$ の component を α_i $(i = 1, \ldots, n)$ とする. いま $\partial X \cup \alpha_i$ の X における regular neighborhood の boundary component のうち "∂X に含まれないもので X で essential であるもの" を元とする集合を $\pi_0(\alpha_i)$ とかくことにする. このとき:

$$\pi_X(\ell) := \bigcup_{i=1}^{n} \pi_0(\alpha_i).$$

Example. $g = 2$, $c = 0$, $p = 2$ とする．また X は S の essential subsurface であり，ℓ は $\mathcal{C}^0(S)$ の元であるとする (図 7(a))．いま $\ell \cap X = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ である．(図 7(b).) このとき，$\pi_0(\alpha_1)$(resp. $\pi_0(\alpha_2)$) は 2 つの元 m_1 と m_2(resp. n_1 と n_2) から成る．(図 7(c).) この m_1, m_2, n_1, n_2 は互いに異なる $\mathcal{C}^0(X)$ の元となる．したがって $\pi_X(\ell) = \pi_0(\alpha_1) \cup \pi_0(\alpha_2) = \{m_1, m_2, n_1, n_2\}$ となる．(図 8)

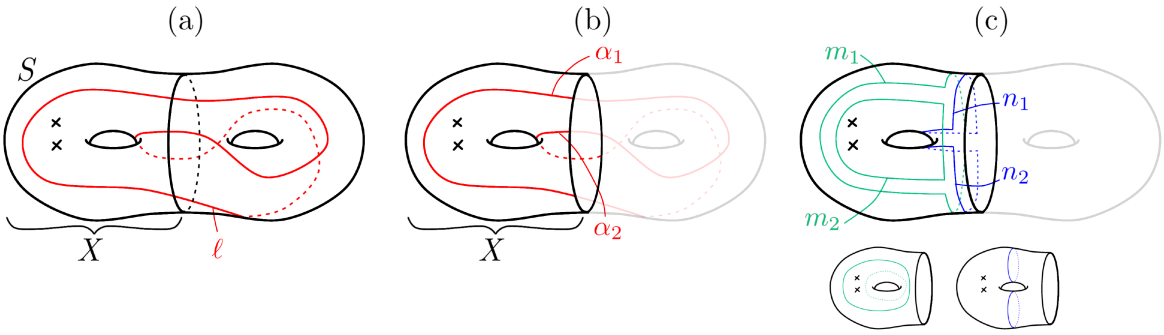


図 7: π_X の具体例

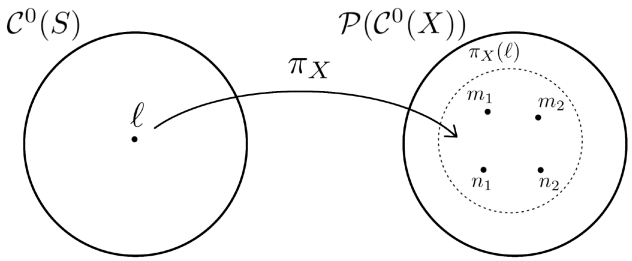


図 8: π_X による ℓ の像

Subsurface projection に関して知られている事実を 2 つ紹介する．

Lemma 1 (Lemma 2.1 [4])**.** X は S の non-simple で essential な subsurface とする．$[\ell_0, \ell_1, \ldots, \ell_n]$ を $\mathcal{C}(S)$ の path ですべての ℓ_i が X を cut しているものとする．この時，
$\mathrm{diam}_X(\pi_X(\ell_0), \pi_X(\ell_n)) \leq 2n$(図 9.)

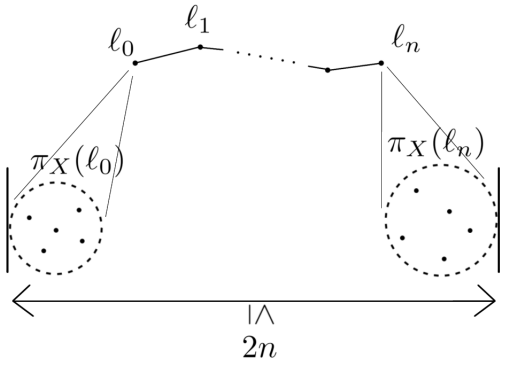


図 9: Lemma 1 の例

Lemma 2 (Lemma 2.3 [6]). $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^{(0)}(S)$ とし, α と β は X を cut するものとする. この時, $\forall k \in \mathbb{N}, \exists h : S \to S$ s. t. $h|_{S \setminus X} = id_{S \setminus X}, \mathrm{diam}_X(\pi_X(\alpha), \pi_X(h(\beta)) > k$.

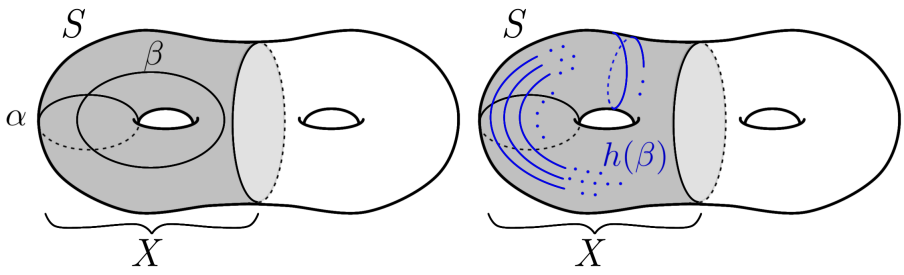


図 10: Lemma 2 の例

3 証明の概略

この章では, Theorem 1 の証明の概略を紹介する. 尚, Theorem 2 の証明も同様の議論により与えられるが本稿では省略する.

Theorem 1 の証明の概略. いま S には互いに disjoint な essential simple closed curves $a_1^{(1)}, a_1^{(2)}$ で, $a_1^{(1)} \cup a_1^{(2)}$ は S を P と X に分けるようなものが存在する. ここで $P \cong$ (annulus with a puncture) または (pants with no puncture).

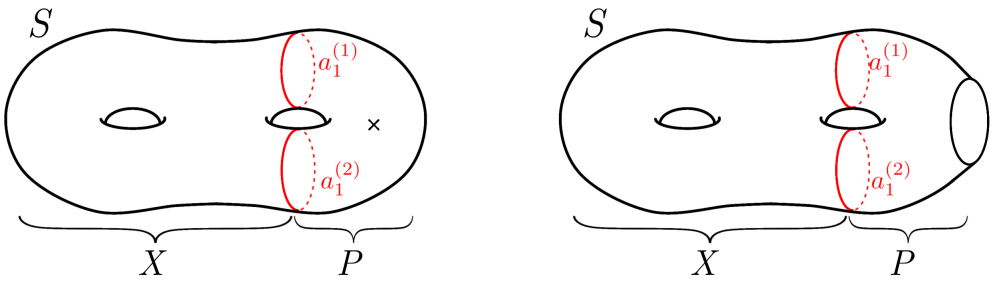


図 11: S を P と X に分ける $a_1^{(1)}$, $a_1^{(2)}$ の例

Theorem 1. の仮定より, X は non-simple である. 従って, X 内には essential simple closed curves が存在する. その中から 2 つを選び, それらを a_0, a_2' とする. Lemma 2. により, $\exists h : S \to S$ s.t. $h|_P = id_P, \mathrm{diam}_X(\pi_X(a_0), \pi_X(h(a_2')) > 4$.

ここで $a_2 = h(a_2')$ とすればよい.

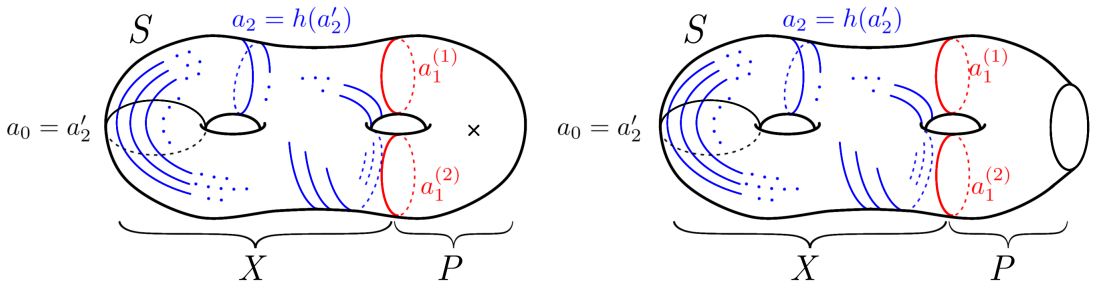


図 12: $h(a_2')$ の例

このとき a_0, a_2 は Theorem 1. の結論をみたすことを示す.

Claim 1. $[a_0, a_1^{(i)}, a_2](i = 1, 2)$ は $\mathcal{C}(S)$ 内の geodesic である.

Claim 2. a_0 と a_2 を結ぶ geodesic は $\{[a_0, a_1^{(i)}, a_2]\}_{i=1,2}$ のいずれかである.

Proof. a_0 と a_2 を結ぶ geodesic でこれ以外のものが存在したとする, 即ち「$a_1 \neq a_1^{(1)}, a_1^{(2)}$ s.t. $[a_0, a_1, a_2]$ が $\mathcal{C}(S)$ 内の geodesic 」とする. このとき, P は simple であり, S 内の essential simple closed curves で P に含まれるものは $a_1^{(1)}$ か $a_1^{(2)}$ に isotopic になるので, a_1 は X を cut する. したがって Lemma 1. より,

$$\mathrm{diam}_X(\pi_X(a_0), \pi_X(a_2)) \leq 4$$

一方,

$$\mathrm{diam}_X(\pi_X(a_0), \pi_X(a_2)) > 4,$$

矛盾. □

Theorem 1. の証明終わり. □

参考文献

[1] J. Birman and W. Menasco, The curve complex has dead ends, Geom. Dedicata 177(2015), 71–74.

[2] J. Brock, R.Canary and Y. Minsky, “The classification of Kleinian surface groups II: the ending lamination conjecture,” Ann. of Math. 176(2012), 1–149.

[3] W. J. Harvey, Boundary structure of the modular group, Riemann Sur-faces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (I. Kra, B. Maskit, eds.), Ann. of Math. Stud. 97, Princeton (1981), 245–251.

[4] A. Ido, Y. Jang and T. Kobayashi, Heegaard splittings of distance exactly n, Algebr. Geom. Topol., 14(2014), 1395–1411.

[5] A. Ido, Y. Jang, and T. Kobayashi, On keen Heegaard splittings, Adv. Stud. Pure Math., 78(2018), 293–311.

[6] A. Ido, Y. Jang, and T. Kobayashi, On keen bridge splittings of links, preprint.

[7] H. Masur, and Y. Minsky, Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity, Invent. Math., 138(1999), 103–149.

[8] Y.N. Minsky, The classification of Kleinian surface groups I: models and bounds, Ann. of Math. 171(2010), 1–107.

交差モジュールを用いた境界付き多様体の不変量

東北大学　大学院理学研究科　数学専攻
周 星陽 (Seiyo SHU) *

概要

Crossed module と呼ばれる 2 つの異なる群 H, G を用いて定義されるものを用いて閉 3 次元多様体の位相不変量を与えられることが知られている。この構成方法は、与えられた多様体に対して、その単体分割を考え、その 1-単体と 2-単体それぞれに Crossed module 内の異なる 2 つの群を色付けし、その数を数えることで構成する。今回は、この位相不変量が閉 3 次元多様体だけではなく、コンパクトな境界付き 3 次元多様体の位相不変量になっていることを証明した。そして、それを用いて、いくつかの基本的なコンパクトな境界付き 3 次元多様体についてと 4_1 結び目、トーラス $(5, 2)$ 型結び目、そして、5_2 結び目についての結び目の補空間に対して、適用した結果を紹介する。

1　導入

まず最初に、今回不変量を構成するときに使う Crossed module の概念を説明する。その前に、まず左作用の定義をする。左作用は次のようなものである。

定義 1. (左作用)

G と H を群とする。このとき、G の H への左作用 (left action) とは、写像 $\triangleright\colon G \times H \to H$ で、以下を満たすものである。

1. 任意の G の元 g と H の単位元 1_H に対して、$1_H \triangleright g = g$ を満たす。
2. 任意の G の元 g_1,g_2 と H の任意の元 h に対して、

$$(g_2 \triangleright (g_1 \triangleright h)) = (g_2 \cdot g_1) \triangleright h$$

を満たす。
3. 任意の G の元 g と H の任意の元 h_1, h_2 に対して、

$$g \triangleright (h_1 \cdot h_2) = (g \triangleright h_1) \cdot (g \triangleright h_2)$$

を満たす。

Crossed module は、2 つの群 H, G とその間の準同型写像 $\partial : H \to G$ と G の H への左作用と G の G への左作用により構成されるものである。定義は次のとおりである。

* E-mail:seiyo.shu.r7@dc.tohoku.ac.jp

定義 2. (Crossed module)

G と H を群とし、∂ を準同型写像 $\partial : H \to G$ とする。このとき 2 つの左作用をどちらも $\triangleright$ と書くとき、$(H \xrightarrow{\partial} G, \triangleright)$ が Crossed module であるとは、以下の性質を満たすときを言う。

1. $\forall g_1, g_2 \in G$ に対して、
$$g_1 \triangleright g_2 = g_1 g_2 g_1^{-1}$$
を満たす。
2. $\forall g \in G, \forall h \in H$ に対して、
$$\partial(g \triangleright h) = g\partial(h)g^{-1}$$
3. 写像 $f_g : H \to H$ を $h \in H$ に対して、$f_g(h) \coloneqq g \triangleright h$ と定めたとき、$\forall g \in G$ に対して、写像 f_g は群同型写像である。

実際の Crossed module の例を一つ上げておく。

例 3. H を有限群とし、$G = \mathrm{Aut}(H) \coloneqq \{f : H \to H | f$ は群同型写像 $\}$ とする。このとき左作用と $\partial : H \to G$ は次のように定める。まず、$\forall g_1, g_2 \in G$ に対して、$g_1 \triangleright g_2 \coloneqq g_1 g_2 g_1^{-1}$ とする。そして、$\forall g \in G, \forall h \in H$ に対して、$g \triangleright h \coloneqq g(h)$ と定め、写像 ∂ を $\forall h, h' \in H$ に対して、$\partial(h')(h) \coloneqq h'hh'^{-1}$ と定めればよい。このように定めたとき、定義 2 の性質 (1) と (3) を満たすことは、明らかである。性質 (2) を満たすことは以下の計算よりわかる。$g, x \in G, h \in H$ として、

$$\partial(g \triangleright h)(x) = g(h)xg(h)^{-1} \tag{1}$$

そして、もう一方のほうは、

$$\begin{aligned} g\partial(h)g^{-1}(x) &= g\left(hg^{-1}(x)h^{-1}\right) \\ &= g(h)xg(h)^{-1} \end{aligned} \tag{2}$$

となることから、性質 (2) も満たされることがわかった。

次に単体分割の定義と、Pachner move を説明する。Pachner move とは、Pachner により導入されたもので、同相な多様体の 2 つの異なる単体分割について、有限回の Pachner move を施すことで、一致させることができる。

定義 4. (単体分割)

X を位相空間とする。このとき、X の単体分割とは、単体複体 K と同相写像 $h : |K| \to X$ との組 (K, h) のことを言う。

本当は、同相写像もセットで定義するが今回では、同相写像については、明らかな場合が多いため、省略して書くことにする。

定義 5. (Pachner move)

3 次元の Pachner move は、次の図 1,2 の変換についてで、それぞれ (1-4)move と (2-3)move と呼ばれている。

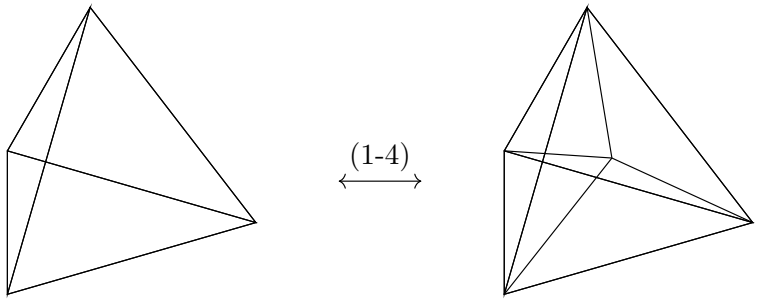


図 1　(1-4)move

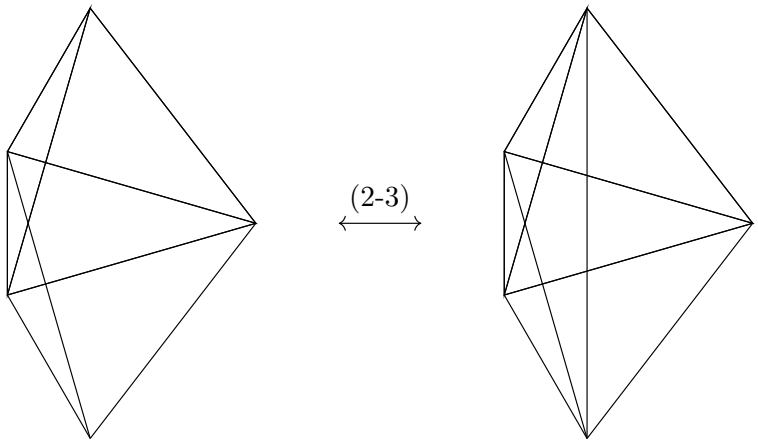


図 2　(2-3)move

2　主定理

今回は、Crossed module を使った位相不変量が、コンパクトな境界付き多様体についても、成り立つことを新たに発見した。閉 3 次元多様体についての証明であれば、[4] などがある。

定理 6. (主定理) M をコンパクトな境界付き 3 次元多様体、そして、K を $M \cong |K|$ となるような単体的複体とする。$(H \xrightarrow{\partial} G, \triangleright)$ を Crossed module で、ただし、H と G はどちらも有限群とする。このとき、K の 0-単体に任意に、全順序を定めると、式 (6) は M について、不変量になる。

$$\begin{aligned} Z(M) =& |G|^{-|K_0|+|K_1|-|K_2|} |H|^{|K_0|-|K_1|+|K_2|-|K_3|} \\ & \times \left(\prod_{(jk)\in K_1} \frac{1}{|G|} \sum_{g_{jk}\in G} \right) \left(\prod_{(jkl)\in K_2} \frac{1}{|H|} \sum_{h_{jkl}\in H} \right) \\ & \times \left(\prod_{(jkl)\in K_2} \delta_G(g_{jkl}) \right) \left(\prod_{(jklm)\in K_3} \delta_H(h_{jklm}) \right) \end{aligned} \tag{3}$$

だたし、K_i は i-単体すべてを集めた集合を表し、そして 2-単体 $(jk) \in K_2$ と 3-単体 $(jkl) \in K_3$

について、0-単体の順序について $j < k < l$ となっているものとする。そして、この式の中にある g_{jkl}, h_{jklm} はそれぞれ次を表す。

$$g_{jkl} \coloneqq \partial(h_{jkl}) g_{kl} g_{jk} g_{jl}^{-1} \tag{4}$$

$$h_{jklm} \coloneqq h_{jlm}(g_{lm} \triangleright h_{jkl}) h_{klm}^{-1} h_{jkm}^{-1} \tag{5}$$

そして、δ_X は次のような関数である。ここで、X は有限群で e_X を X の単位元としている。

$$\delta_X(x) = \begin{cases} |X| & \text{if } x = e_X, \\ 0 & \text{others.} \end{cases} \tag{6}$$

まずこの定理について、g_{jkl}, h_{jklm} についての幾何学的な意味を説明した後に、証明の概要を説明する。まず g_{jkl} については、図 3 の 2-単体のようになる。わかりやすために、頂点をそれぞれ 1,2,3 とラベルした。2-単体について、0-単体から誘導される向きについて、1-単体が巡回になっていない。

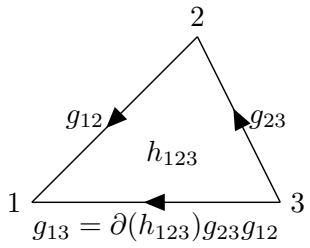


図 3　g_{123} の意味

そのため、他と違う 1-単体についてのラベルが他の 2 つの 1-単体と 2-単体のラベルから誘導される。

3-単体についてのカラーは次のような意味がある。図 4 について、g_{14} を g_{12}, g_{23}, g_{34} を用いて表すことを考える。このとき、図を見てわかるように作り方には 2 通りの方法がある。まず、一つ目は

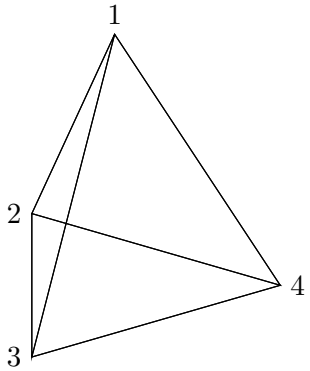
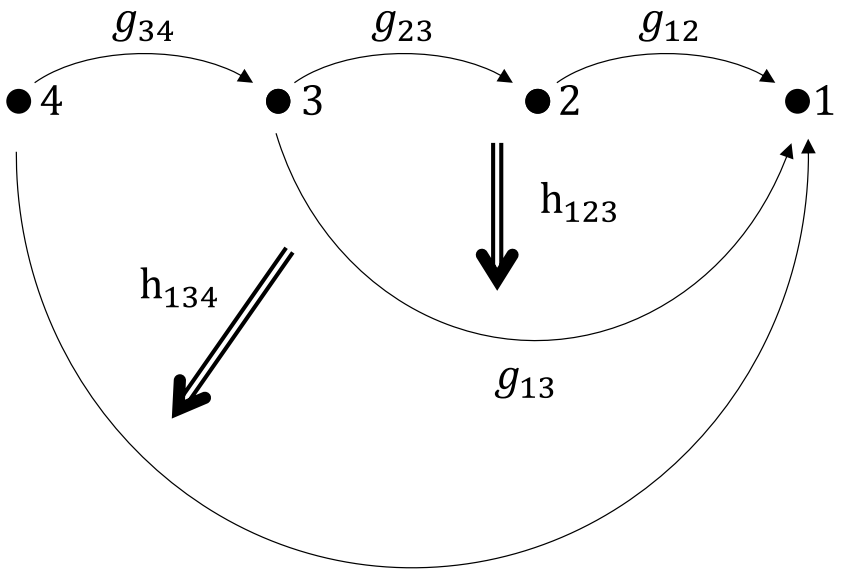


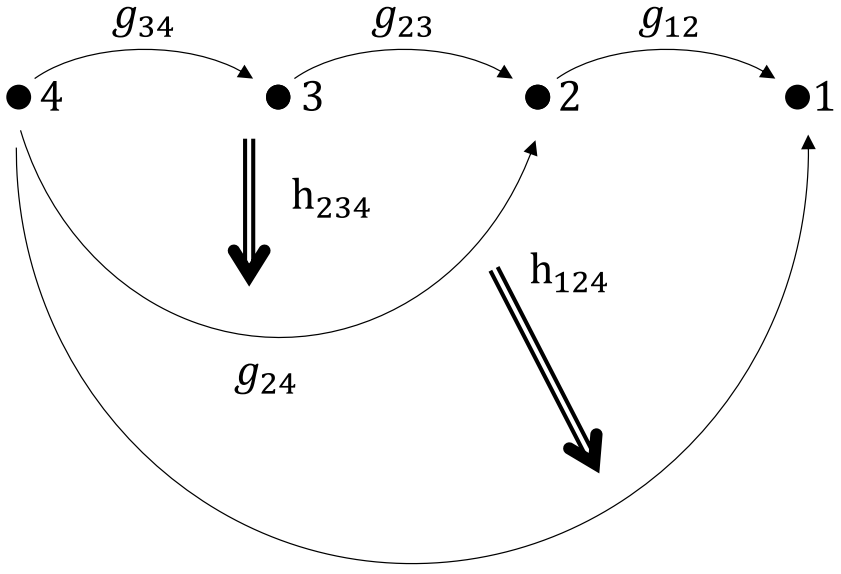
図 4　h_{1234} の意味

2-単体 |123| についてまず最初に考え、g_{13} を出し、その後、2-単体 |134| について考え、g_{14} を出す方法である。 2 つ目の方法は、2-単体 |234| についてまず考え、それにより、g_{24} を出し、その後、2-単体 |124| について考え、g_{14} を出す方法である。一つ目の方法は図 5 のようになる。そして二つ目



$$g_{14} = \partial(h_{134})\partial(g_{34} \triangleright h_{123})g_{34}g_{23}g_{12}$$

図 5　2-単体 |123|,|134| を用いる方法



$$g_{14} = \partial(h_{124})\partial(h_{234})g_{34}g_{23}g_{12}$$

図 6　2-単体 |234|,|124| を用いる方法

の方法は図 6 のようになる。これらを見るとどちらも g_{14} であるためこの二つは等しくならないといけない。このとき、この 2 つが等しいことと以下が同値である。

$$\partial\left(h_{134}(g_{34} \triangleright h_{123})\right) = \partial(h_{124}h_{234}) \tag{7}$$

式 (5) が単位元と等しいとき、この式 (7) が成り立つため、3-単体に対して、すべての 2-単体のカラーがうまく定義されるために要求される性質である。

証明の概要. まず、この定理の証明は、0-単体の全順序関係の取り方によらないことと、コンパクトな境界付き多様体の単体分割によらないことを示せばよい。0-単体の全順序関係の取り方によらないことは、任意の 2 つの 0-単体について、順序をひっくり返しても、式 (3) が一致することを示せばよい。多様体の単体分割によらないことは、閉 3 次元多様体の場合と同様に図 1,2 について、式 (3) が不変であること、そして、閉 3 次元多様体のときと違うのは次の図 7,8 でも、式 (3) が不変であることを示したことにある。この図 7,8 により、内部の分割だけではなく、境界の分割にも依存しないことが示せる。ただし、図 7,8 の変換はどちらも、底面が多様体の境界の場合にのみ行える移動である。

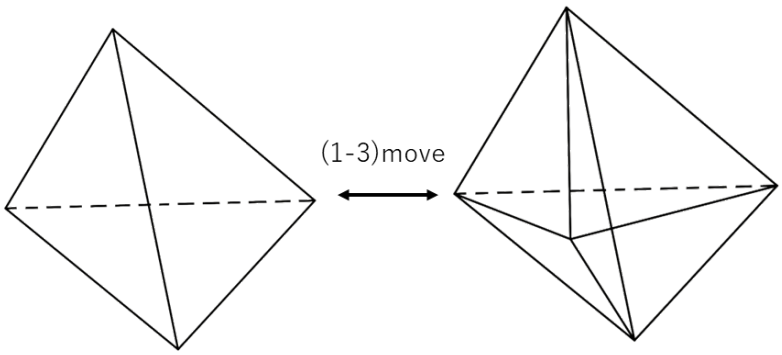


図 7　(1-3)move

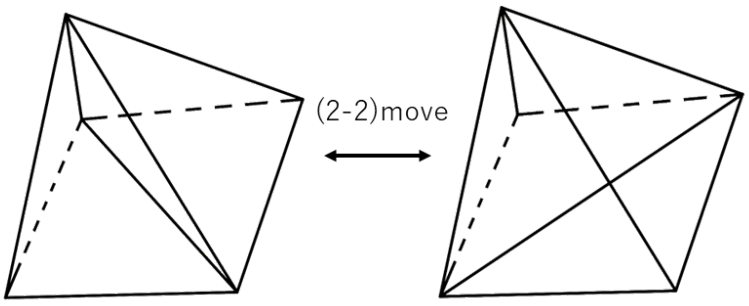


図 8　(2-2)move

必ず、境界の変換を施したい部分が図のように cone になっているとは、限らないが、cone になっていない場合でも、Pachner move を施すことで、cone にすることができることを示せる。そのため、上の 2 つの動きを境界付近で考えることで、どんな境界の分割についても、一致させることができる。証明の残りの部分は、計算により、これを示すことなので、詳細は書かないことにする。

□

式 (3) が境界付き 3 次元多様体について、位相不変量になっていることを示せたため、この結果を用いて、いくつかの具体例を、計算した。そのためその結果を、下に挙げておく。

3　計算結果

計算の際には、一般的な Crossed module の形で行った。下に表 3 に計算結果の一覧を載せておく。

表 1　計算結果の一覧

対象	計算結果
D^3	$\frac{1}{\lvert G\rvert}\lvert H\rvert$
$D^2 \times S^1$	1
$S^2 \times [0,1]$	$\frac{1}{\lvert G\rvert^2}\sum_{h,h' \in H} \delta_G(\partial(hh'^{-1}))$
$S^3 - 4_1$	$\frac{1}{\lvert G\rvert}\frac{1}{\lvert H\rvert}\sum_{h,h' \in H} \delta_G(XY^{-1}X^{-1}YX^{-1}Y^{-1}XYX^{-1}Y\partial(A^{-1}))$
$S^3 - T(5,2)$	$\frac{1}{\lvert G\rvert^2}\frac{1}{\lvert H\rvert}\sum_{X,Y \in G, A \in H} \delta_G(YX^4YX^{-1}\partial(A^{-1}))$
$S^3 - 5_2$	$\frac{1}{\lvert G\rvert}\frac{1}{\lvert H\rvert}\sum_{h,h' \in H} \delta_G(XY^{-1}X^{-1}YXY^{-1}X^{-1}YX^{-1}Y^{-1}XYX^{-1}Y^{-1}\partial(A^{-1}))$

ただし、$D^3, D^2 \times S^1, S^2 \times [0,1]$ のイメージは、図 9 である。$4_1, T(5,2), 5_2$ はそれぞれ結び目の名前で、図 10 の結び目をそれぞれ表している。

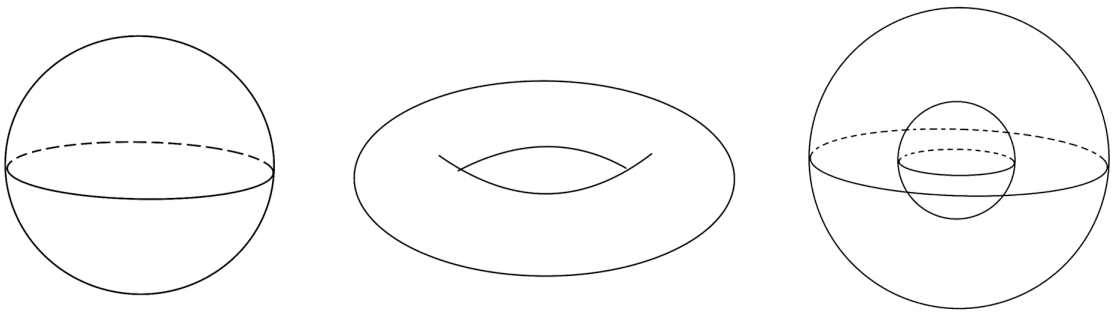
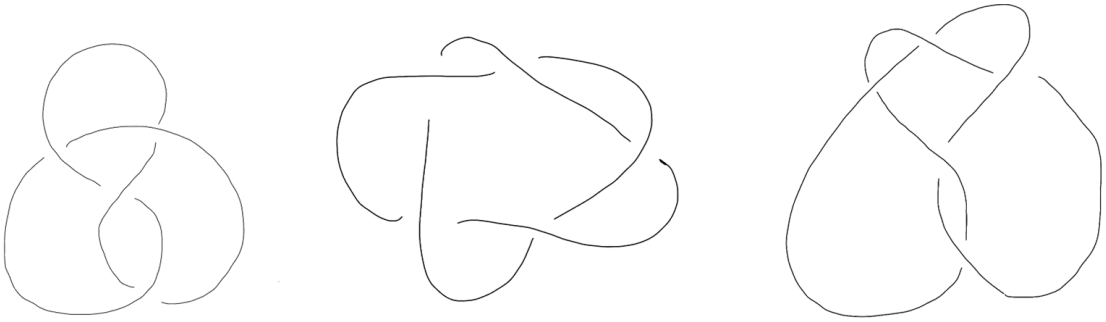


図 9　図のイメージ



4_1結び目　　$T(5,2)$結び目　　5_2結び目

図 10　結び目の名前

参考文献

[1] J.W. Barrett and B.W. Westbury, *Invariants of piecewise-linear 3-manifolds*, Trans. A.M.S. **348** (1996), 3997-4022.

[2] Tijana Radenkovic' and Marko Vojinovic', *Topological invariant of 4-manifolds based on a 3-group*, Journal of High Energy Physics **105 (2022)** (2022), DOI https://doi.org/10.1007/JHEP07(2022)105.

[3] J.H.C.Whitehead, *Combinatorial homotopy.2*, In:Bull.Amer.Math.Soc **55** (1949), 453-496.

[4] F.Girelli, H.Pfeiffer, and E.M.Popescu, *Topological Higher Gauge Theory-from BF to BF CG theory*, J. Math. Phys **49** (2008).

[5] J. R. Munkres, *Elementary Differential Topology*, Annals of Mathematics Studies 54, Princeton University Press, 1967.

[6] M.Wakui, 再考*"On Dijkgraaf-Witten invariants of 3-manifolds"* (20011).

[7] V.G. Turaev and O.Y. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*, Topology **31** (1992), 865-902.

[8] U. Pachner, *Bistellare Aquivalenz kombinatorischer Mannigfaltingkeiten*, (German) Arch. Math. **(Basel) 30** (1978), 89-98.

[9] ———, *P.L. homeomorphic manifolds are equivalent by elementary shellings*, Europ. J. Comb. **12** (1991), 129-145.

[10] Behrang Noohi, "*Notes on 2-groupoids, 2-groups and crossed modules*", In: Homology, Homotopy **Appl. 9.1** (2007), 75-106.

[11] T. Porter, "*Topological quantum field theories from homotopy n-types*", J. London Math. Soc. (2) 58 **No.3** (1998), 723-732.

[12] J.W. Alexander, "*The combinatorial theory of complexes*", Ann. of. Math **31** (1930), 292-320.

[13] Edwin E. Moise, "*Geometric Topology in Dimensions 2 and 3*", GTM, vol. 47, Springer New York, 1977.

Hopf 群代数を用いた 4 次元多様体の不変量

東北大学大学院理学研究科数学専攻
持田知朗 (Tomoro MOCHIDA) *

概要

本稿では，Hopf 群代数を用いて構成した 4 次元多様体とその基本群の表現の組に対する不変量について紹介する．Hopf 群代数とは Hopf 代数の一般化であり，群による次数付けの情報を備えたものである．基本群の表現を通じて 4 次元多様体と群を関連付け，この情報を Hopf 群代数の次数付けと適切に対応させることで構成を実現している．さらに適当な有限性の条件を満たすとき，ここから 4 次元多様体の不変量を定義した．

1 導入

低次元トポロジーにおいて不変量は主要な研究対象であり，これまでにも結び目，3 次元多様体，4 次元多様体を主な対象として様々な不変量が扱われてきた．これらの構成は基本，幾何的対象の組み合わせ的な表示（三角形分割や Kirby 図式）とその上の基本変形（Pachner 移動や Kirby 移動）に代数的な対象（Hopf 代数やある種の圏）を適切に対応させるという手順を取る．この対応付けが基本変形で不変であることをもって不変性が示されるのである．このようにして不変量が構成されると，そこに潜む幾何学的な情報や既存の不変量との関係，位相的場の理論への拡張など様々なことが調べられていく．

本稿では代数的対象に Hopf 代数の一般化である Hopf 群代数を用いて 4 次元多様体とその表現の組に対しての不変量の構成を行う．

2 Hopf 群代数

ここでは Hopf 群代数の定義と不変量の構成に必要となる性質について簡単にまとめる．Hopf 群代数は Hopf 代数の一般化であり Turaev [Tur00] のより提案された．この双対には Hopf 群余代数という対象が当てはまり，この代数的性質については Virelizier [Vir02; Vir05] が詳しく調べている．そして Hopf 群代数の性質の多くはこれらの性質の双対を考えることで得ることができる．より詳細な議論は例えば Hopf 代数については [Rad12] を，Hopf 群（余）代数については [Vir02; Vir05; ZW22] を参照されたい．

以降本稿では G を群とし，$1 = 1_G \in G$ をその単位元とする．またベクトル空間は全て複素数体 $\mathbb{C}$ 上であるものとし，線形写像や双対空間，テンソル積等も全て $\mathbb{C}$ 上のものと仮定する．そして二

* E-mail: tomorou.mochida.r5@dc.tohoku.ac.jp

つのベクトル空間 U, V に対して $\tau_{U,V}\colon U \otimes V \to V \otimes U; u \otimes v \mapsto v \otimes u$ を成分を入れ替える写像とする．

定義 2.1. Hopf G 代数 (Hopf G-algebra) $\mathcal{A} = (\{A_\alpha\}_{\alpha\in G}, m, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ とは，G で添字付けられたベクトル空間の族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in G}$ と，五つの線形写像（の族）

- 積の族 $m = \{m_{\alpha,\beta}\colon A_\alpha \otimes A_\beta \to A_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in G}$,
- 単位射 $\eta\colon \mathbb{C} \to A_1$,
- 余積の族 $\Delta = \{\Delta_\alpha\colon A_\alpha \to A_\alpha \otimes A_\alpha\}_{\alpha\in G}$,
- 余単位射の族 $\varepsilon = \{\varepsilon_\alpha\colon A_\alpha \to \mathbb{C}\}_{\alpha\in G}$,
- 対合射の族 $S = \{S_\alpha\colon A_\alpha \to A_{\alpha^{-1}}\}_{\alpha\in G}$

の組であり，次の条件を満たすもののことをいう：$\alpha, \beta, \gamma \in G$ を任意の元とする．

(HA1) $m_{\alpha\beta,\gamma}(m_{\alpha,\beta} \otimes \mathrm{id}_{A_\gamma}) = m_{\alpha,\beta\gamma}(\mathrm{id}_{A_\alpha} \otimes m_{\beta,\gamma})$,
(HA2) $m_{1,\alpha}(\eta \otimes \mathrm{id}_{A_\alpha}) = \mathrm{id}_{A_\alpha} = m_{\alpha,1}(\mathrm{id}_{A_\alpha} \otimes \eta)$,
(HA3) $(\Delta_\alpha \otimes \mathrm{id}_{A_\alpha})\Delta_\alpha = (\mathrm{id}_{A_\alpha} \otimes \Delta_\alpha)\Delta_\alpha$,
(HA4) $(\varepsilon_\alpha \otimes \mathrm{id}_{A_\alpha})\Delta_\alpha = \mathrm{id}_{A_\alpha} = (\mathrm{id}_{A_\alpha} \otimes \varepsilon_\alpha)\Delta_\alpha$,
(HA5) $\Delta_{\alpha\beta} m_{\alpha,\beta} = (m_{\alpha,\beta} \otimes m_{\alpha,\beta})(\mathrm{id}_{A_\alpha} \otimes \tau_{A_\alpha,A_\beta} \otimes \mathrm{id}_{A_\beta})(\Delta_\alpha \otimes \Delta_\beta)$,
(HA6) $\varepsilon_{\alpha\beta} m_{\alpha,\beta} = \varepsilon_\alpha \otimes \varepsilon_\beta$,
(HA7) $\Delta_1 \eta = \eta \otimes \eta$,
(HA8) $\varepsilon_1 \eta = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$,
(HA9) $m_{\alpha^{-1},\alpha}(S_\alpha \otimes \mathrm{id}_{A_\alpha})\Delta_\alpha = \eta\varepsilon_\alpha = m_{\alpha,\alpha^{-1}}(\mathrm{id}_{A_\alpha} \otimes S_\alpha)\Delta_\alpha$.

また全ての $\alpha \in G$ に対して A_α が有限次元のとき $\mathcal{A}$ は**有限型** (finite type) であるという．

注意 2.2. このとき $A_1 = (A_1, m_1, \eta, \Delta_{1,1}, \varepsilon_1, S_1)$ は通常の Hopf 代数となる．また各 $\alpha \in G$ に対して $(A_\alpha, \Delta_\alpha, \varepsilon_\alpha)$ は $\mathbb{C}$ 余代数となっている．群 G が自明な群 $G = \{1\}$ のときこの定義は Hopf 代数の定義と一致する．この意味で Hopf 群代数は Hopf 代数の一般化といえる．

記号. これ以降では適宜次の記法を用いる：

$$m_{\alpha,\beta}(x \otimes y) = xy, \quad \eta(1) = 1_{A_1}, \quad \Delta_\alpha(x) = x^{(1)} \otimes x^{(2)},$$
$$\Delta_\alpha^{(n-1)}(x) = x^{(1)} \otimes \cdots \otimes x^{(n)} \quad (\alpha, \beta \in G, x \in A_\alpha, y \in A_\beta).$$

次の性質は有限次元 Hopf 代数の理論において重要な役割を果たす積分と呼ばれる概念の拡張である．

定義 2.3. $\mathcal{A}$ を有限型 Hopf G 代数とする．A_α たちの元の族 $\Lambda = (\Lambda_\alpha)_{\alpha\in G} \in \prod_{\alpha\in G} A_\alpha$ が $\mathcal{A}$ の**左** (left) (resp. **右** (right)) **G 積分** (G-integral) であるとは，任意の $\alpha, \beta \in G$, $x \in A_\alpha$ に対して

$$x\Lambda_\beta = \varepsilon_\alpha(x)\Lambda_{\alpha\beta} \quad (\text{resp. } \Lambda_\beta x = \varepsilon_\alpha(x)\Lambda_{\beta\alpha})$$

が成り立つときをいう．Λ が左かつ右積分であるとき**両側 G 積分** (two-sided G-integral) という．

またある $\alpha \in G$ に対して $\Lambda_\alpha \neq 0$ となるとき Λ は**非零** (non-zero) であるという．

次は Hopf 代数における準三角性を拡張する概念である.

定義 2.4. 交差 Hopf G 代数 (crossed Hopf G-algebra) $(\mathcal{A},\varphi)$ とは，Hopf G 代数 $\mathcal{A}$ と**交差** (crossing) と呼ばれる線形写像の族 $\varphi=\{\varphi^\alpha_\beta\colon A_\alpha\to A_{\beta\alpha\beta^{-1}}\}_{\alpha,\beta\in G}$ の組であり，次の条件を満たすもののことをいう：$\alpha,\beta,\beta',\gamma\in G$ を任意の元とする.

(CHA1) $\varphi^\alpha_\beta\colon A_\alpha\to A_{\beta\alpha\beta^{-1}}$ は $\mathbb{C}$ 余代数としての同型射である,
(CHA2) $m_{\beta\alpha\beta^{-1},\beta\gamma\beta^{-1}}(\varphi^\alpha_\beta\otimes\varphi^\gamma_\beta)=\varphi^{\alpha\gamma}_\beta m_{\alpha,\gamma}\colon A_\alpha\otimes A_\gamma\to A_{\beta\alpha\gamma\beta^{-1}}$,
(CHA3) $\varphi^1_\beta(1_{A_1})=1_{A_1}$,
(CHA4) $\varphi^\alpha_{\beta\beta'}=\varphi^{\beta'\alpha\beta'^{-1}}_\beta\varphi^\alpha_{\beta'}\colon A_\alpha\to A_{\beta\beta'\alpha\beta'^{-1}\beta^{-1}}$.

定義 2.5. 準三角 Hopf G 代数 (quasitriangular Hopf G-algebra) $(\mathcal{A},\varphi,R)$ とは，交差 Hopf G 代数 $(\mathcal{A},\varphi)$ と**普遍 R 行列** (universal R-matrix) と呼ばれる可逆元 $R\in A_1\otimes A_1$ の組であり，次の条件を満たすもののことをいう：$\alpha,\beta\in G$, $x\in A_\alpha$ を任意の元とする.

(QHA1) $(\Delta_1\otimes\mathrm{id}_{A_1})(R)=R_{13}R_{23}$,
(QHA2) $(\mathrm{id}_{A_1}\otimes\Delta_1)(R)=R_{13}R_{12}$,
(QHA3) $R\Delta_\alpha(x)=\Delta^{\mathrm{cop}}_\alpha(x)R$,
(QHA4) $(\varphi^1_\beta\otimes\varphi^1_\beta)(R)=(R)$.

但し，$R_{12}\coloneqq R\otimes 1_{A_1}$, $R_{23}\coloneqq 1_{A_1}\otimes R$, $R_{13}\coloneqq(\mathrm{id}_{A_1}\otimes\tau_{A_1,A_1})(R_{12})\in A_1^{\otimes 3}$, $\Delta^{\mathrm{cop}}_\alpha\coloneqq\tau_{A_\alpha,A_\alpha}\Delta$ である.

最後に次の仮定を満たす Hopf 群代数が必要になる.

定義 2.6. Hopf G 代数 $\mathcal{A}$ に対してその対合射 $S=\{S_\alpha\}_{\alpha\in G}$ が任意の $\alpha\in G$ に対して $S_{-\alpha}S_\alpha=\mathrm{id}_{A_\alpha}$ を満たすとき $\mathcal{A}$ は **対合的** (involutory) であるという.[*1]

3 色付き Kirby 図式

本稿で扱う多様体は特に断らない限り滑らかで向き付けられた連結な閉多様体であるとする.

3.1 Kirby 図式

4 次元多様体の Kirby 図式 (Kirby diagram) とは，多様体のハンドル分解における 1 ハンドルと 2 ハンドルの接着の情報を表す S^3 内のフレーミング付き絡み目図式のことであった．この図式は 1 ハンドルの接着を表すフレーミング 0 の互いに交わらない自明結び目達（2 ハンドルと区別するためこれらにはドットを付けておく）と，2 ハンドルの接着を表すフレーミング付き結び目達からなり，ここから 4 次元多様体（の微分同相類）が特定できる．ここではこの図式を平面に射影したものを考え，フレーミングはブラックボードフレーミングで与えられているとする．例を図 1, 2 に載せた．不

[*1] この仮定は代数の半単純性に対応する.

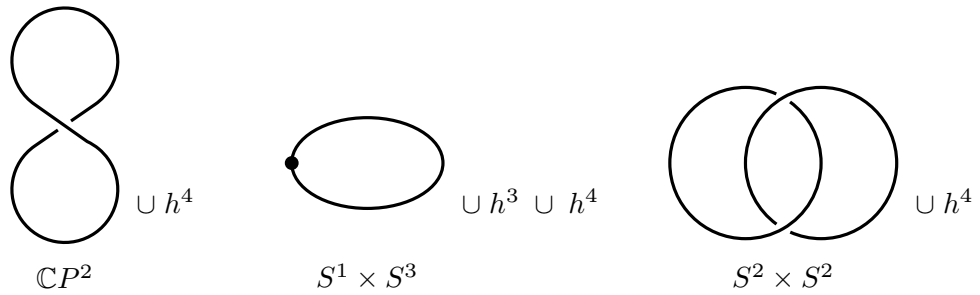


図 1: Kirby 図式の例．3 ハンドルと 4 ハンドルはその個数のみを記載している．

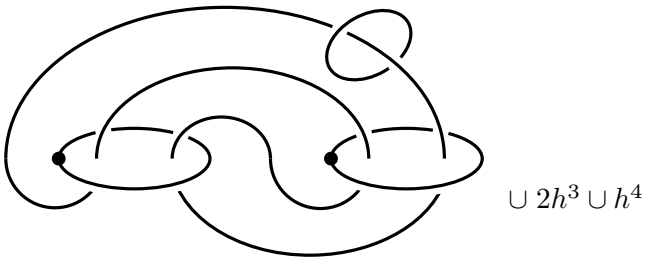


図 2: $S^1 \times S^1 \times S^2$ の Kirby 図式．基本群の表示は左側のドット付き成分に対応する文字を s_1，右側に対応する文字を s_2 とすると $\langle s_1, s_2 \mid s_1 s_2 s_1^{-1} s_2^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ となることが確かめられる．

変量の構成を理解する上ではこれらの図のような絡み目図式をイメージしてもらえれば十分なので，ここでは詳細な議論には立ち入らない．詳しくは例えば [GS99; Akb16] 等を参照されたい．

さて 4 次元多様体 M の Kirby 図式 $L = L_1 \sqcup L_2$ が与えられると，そこから次のようにして M の基本群 $\pi_1(M)$ の生成元と関係式による表示を得ることができる：その方法はまず，L_1 の各成分 ξ_i に生成元 s_i を対応させる．そして L_2 の各成分 η_j に対して任意の地点から任意の向きにこれを辿っていき，L_1 の成分を通過するごとにそれに対応する生成元を，上から下に通過するときはそのまま，下から上に通過するときはインバースをつけて記録する．最後にこれらを辿った向きに掛け合わせたものが関係式 r_j となる．(η_j がどの L_1 の成分も通過しないときは便宜上 $r_j = 1$（自明な関係式）と解釈する．) このとき基本群 $\pi_1(M)$ の表示が

$$\pi_1(M) = \langle s_1, \ldots, s_m \mid r_1, \ldots, r_n \rangle$$

として得られる（m, n はそれぞれ L_1, L_2 の成分の個数）．図 2 が一例である．

3.2 色付き Kirby 図式

不変量の定義では Kirby 図式に基本群の表現を用いて，図式の 1 ハンドルを表す成分（ドット付き成分）に G の元でラベル付けを行う．

定義 3.1. G を群とする．多様体 M の基本群 $\pi_1(M)$ の G への**表現** (representation) とは群準同型写像 $\rho\colon \pi_1(M) \to G$ のことをいう．

M の基本群の二つの表現 $\rho, \rho' \colon \pi_1(M) \to G$ が**同型** (isomorphic) であるとは，これらが G のある元による共役の差を除いて等しいときをいう．すなわち，ある $\beta \in G$ が存在して任意の $s \in \pi_1(M)$ に対して $\rho'(s) = \beta\rho(s)\beta^{-1}$ が成り立つときをいう．また二つの異なる多様体 M, M' の基本群の表現 $\rho \colon \pi_1(M) \to G$, $\rho' \colon \pi_1(M') \to G$ が**同値** (equivalent) であるとは，ある向きを保つ微分同相写像 $h \colon M \to M'$ が存在して ρ と $\rho' h_*$ が同型になるときをいう．ここに $h_* \colon \pi_1(M) \to \pi_1(M')$ は h によって誘導される同型写像である．

M を 4 次元多様体とし，$L = L_1 \sqcup L_2$ を M の Kirby 図式とする．M の基本群の G への表現 $\rho \colon \pi_1(M) \to G$ を一つ取る．上述の要領で基本群を $\pi_1(M) = \langle s_1, \dots, s_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle$ と表示し，L_1 の各成分 ξ_i を $\alpha_i \coloneqq \rho(s_i)$ でラベル付けする．この α_i を $\xi_i \in L_1$ の**色** (color)，このラベル付けを ***G* 彩色** (G-coloring)，そして G 彩色を備えた Kirby 図式を ***G* 色付き Kirby 図式** (G-colored Kirby diagram) と呼ぶ．

ある多様体の二つのハンドル分解は接着写像のアイソトピーと消去対の生成・除去で移り合った．4 次元多様体ではこれらはアイソトピーと Kirby 移動 (Kirby moves) と呼ばれる五つの移動で達成される [GS99, Section 5.1]．これに関連して，二つの同値な表現から得られる G 色付き Kirby 図式は次の操作で移り合う：

- 図式の射影の仕方に関するアイソトピー．[*2]
- （平面的）Kirby 移動（図 3）．
- L_1 の全ての成分の色を一斉に G のある元の共役だけ変更する．

4 不変量

4.1 不変量の構成

本章にて主結果である 4 次元多様体とその基本群の表現の組に対する不変量の構成を行う．構成は Hennings 型と呼ばれるプロセスの 4 次元版 [Hen96; BM03] を用いる．

$(\mathcal{A}, \varphi, R)$ を有限型対合的準三角 Hopf G 代数とし，$\Lambda = (\Lambda_\alpha)_{\alpha \in G}$ を $\mathcal{A}$ の（両側）G 積分，λ を A_1^* の（両側）積分[*3]で（正規化をして）$\lambda(\Lambda_1) = 1$, $\varepsilon_1(\Lambda_1) = 1$ を満たすものとする．そして M を 4 次元多様体，$L = L_1 \sqcup L_2$ をその Kirby 図式とする．基本群の表現 $\rho \colon \pi_1(M) \to G$ を固定して，3.2 節の要領で L に G 彩色を与える．さらに L_2 の各成分に任意に向きをつけておく．

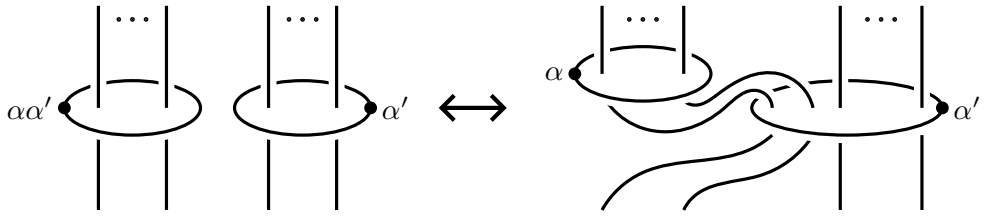
次のルールに基づいて L_2 の各成分に $\mathcal{A}$ の元を割り当てていく：

まず L_2 の成分 η 上の特異点でない点 q に対して σ_q をこの付近で η が下向きのとき 0 と，上向きのとき 1 と定める．

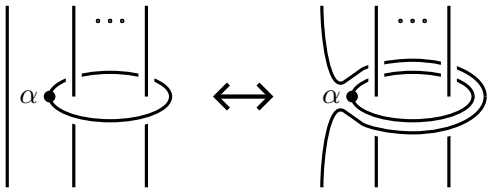
- L_1 の各成分 ξ に対しては，その色を α として，ξ が囲う円板と L_2 の成分との交点を左から

[*2] この移動も局所的な図形の変形で実現される．

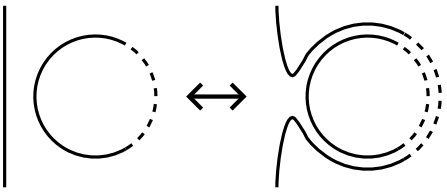
[*3] 線形写像 $\lambda \colon A_1 \to \mathbb{C}$ で任意の $x \in A_1$ に対して $(\mathrm{id}_A \otimes \lambda)\Delta(x) = \lambda(x)1_A$ を満たすもの．



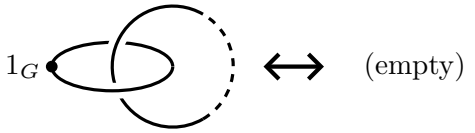
III-1: 1-1 ハンドルスライド



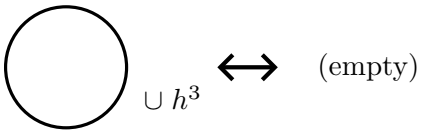
III-2: 1-2 ハンドルスライド



III-3: 2-2 ハンドルスライド



III-4: 1-2 消去対



III-5: 2-3 消去対

図 3: 平面的 Kirby 移動．移動 III-3 ではスライドされる側の成分の点線部分は自分自身や他の成分と自由に絡んでいてよく，またスライドはブラックボードフレーミングに沿って行われる．一方，移動 III-4 ではドット無し成分はドット付き成分を丁度一回通過しており，点線部分では自由に自己交叉を持ってよいがその他の成分とは絡んではいけない．

$q_1, \ldots, q_k$ とする．そしてこれらに左から順に

$$\begin{aligned}&(S_\alpha^{\sigma_{q_1}} \otimes \cdots \otimes S_\alpha^{\sigma_{q_k}})(\Delta_\alpha^{(k-1)}(\Lambda_\alpha))\\ &\quad = S_\alpha^{\sigma_{q_1}}(\Lambda_\alpha^{(1)}) \otimes \cdots \otimes S_\alpha^{\sigma_{q_k}}(\Lambda_\alpha^{(k)}) \in A_{\alpha^{(-1)^{\sigma_{q_1}}}} \otimes \cdots \otimes A_{\alpha^{(-1)^{\sigma_{q_k}}}}\end{aligned}$$

を対応させる（図 4）．ξ を L_2 のどの成分も通過しないときはこの成分の寄与は $\varepsilon_\alpha(\Lambda_\alpha)$ と解釈する．

- L_2 の成分同士の交叉（自己交叉も含む）に対しては，交点付近の上側の成分上の点を q_1，下側の成分上の点を q_2 として交叉の正負を確かめる．そして正の交叉には普遍 R 行列 $R = a_i \otimes b_i \in A_1 \otimes A_1$ を，負の交叉にはその逆元 $R^{-1} = (S_1 \otimes \mathrm{id}_{A_1})(R) \in A_1 \otimes A_1$ を対応させる（図 5）．但し，テンソルの第一成分を q_1 に，第二成分を q_2 に割り当てる．

今，L_2 の各成分には上のルールから得られる $\mathcal{A}$ の元が割り当てられている（この他の場所には便宜上 1 が割り当てられていると解釈する）．各成分に対してこれらの元をその成分の向きに沿って掛け合わせると，基本群の関係式の考察から得られる元は A_1 に属する．従って得られた値に A_1^* の



図 4: L_1 と L_2 の間での寄与

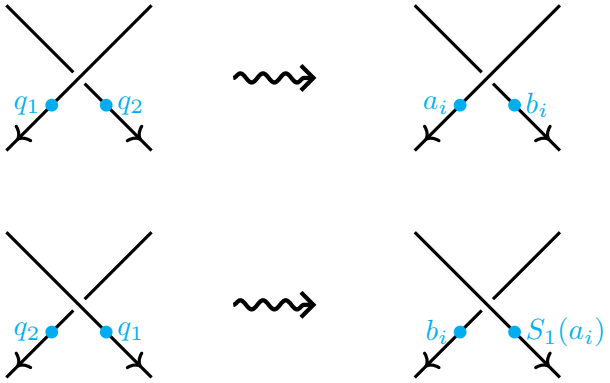


図 5: 正の交叉での寄与（上）と負の交叉での寄与（下）

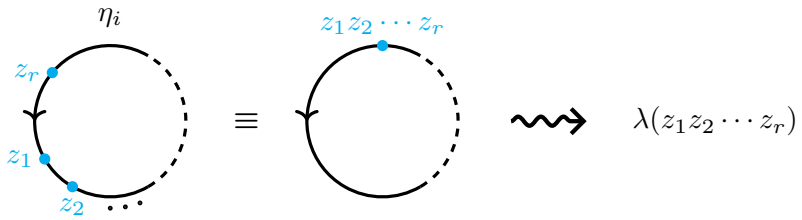


図 6: 各成分の評価

積分 λ を適用できる（図 6）.[*4]全ての L_2 の成分に対してこれを行いそれらを掛けたものを $\langle L, \rho \rangle_{\mathcal{A}}$ とかく（ブラケットと呼ぶ）. 最後にこの値を $1/\dim(A_1)^{|L_2|-|L_1|}$ で正規化したものを $I_{\mathcal{A}}(M, \rho, L)$ と定める（$|L_i|$ は i ハンドルの個数）：

$$I_{\mathcal{A}}(M, \rho, L) \coloneqq \frac{1}{\dim(A_1)^{|L_2|-|L_1|}} \langle L, \rho \rangle_{\mathcal{A}}.$$

このとき次が成り立つ：

定理 4.1. 上の設定において $I_{\mathcal{A}}(M, \rho, L)$ は 4 次元多様体とその基本群の表現の組に対する不変量となる.

証明の概略. 示すべきことは次である：

[*4] この値が掛け合わせる際の始点の取り方に依らないことは $\mathcal{A}$ の対合性から導かれる.

- L_2 の成分の向きの取り方に依らないこと．
- 3.2 節で挙げた図式の変形で不変なこと．

一つ目は，L_2 の一つの成分の向きを変えることは元々の向きでその成分に割り当てられた元に対合射を作用させ，積を取る順番を逆にすることに相当する，これに注意すれば対合性から得られる $\lambda S = \lambda$ という関係式を用いることで一つ目が従う．

二つ目は図式の局所的な変形の前後において不変量への寄与が同じことを示す．その際に Hopf G 代数の性質を様々用いる． □

不変性が証明されたことにより以下では $I_{\mathcal{A}}(M, \rho, L)$ を単に $I_{\mathcal{A}}(M, \rho)$ と記す．

4.2 誘導される 4 次元多様体の不変量

構成から分かるように不変量の定義には与えられた 4 次元多様体 M の他に付加構造として基本群の G への表現を必要とする．ここから表現に依らない多様体 M のみに関する不変量を考察することは自然な発想といえる．一つのアプローチとしてここでは G が有限群のとき，考えられる全ての表現に渡って不変量を足し合わせることで 4 次元多様体の不変量を定義する：

$$I_{\mathcal{A}}(M) \coloneqq \sum_{\rho} I_{\mathcal{A}}(M, \rho),$$

ここに和は M の基本群の G への表現の同型類全てに渡って取る．

参考文献

[Akb16] S. Akbulut. *4-manifolds*. Vol. 25. Oxford University Press, 2016.

[BM03] I. Bobtcheva and M. G. Messia. “HKR-type invariants of 4–thickenings of 2–dimensional CW complexes”. In: *Algebr. Geom. Topol.* 3.1 (2003), pp. 33–87.

[GS99] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz. *4-Manifolds and Kirby Calculus*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1999.

[Hen96] M. Hennings. “Invariants of links and 3-manifolds obtained from Hopf algebras”. In: *J. Lond. Math. Soc.* 54.3 (1996), pp. 594–624.

[Rad12] D. E. Radford. *Hopf Algebras*. Vol. 49. Series on knots and everything. World Scientific, 2012.

[Tur00] V. Turaev. Homotopy field theory in dimension 3 and crossed group-categories. arXiv preprint. 2000. arXiv: `math/0005291 [math.GT]`.

[Vir02] A. Virelizier. “Hopf group-coalgebras”. In: *J. Pure Appl. Algebra* 171.1 (2002), pp. 75–122.

[Vir05] A. Virelizier. “Involutory Hopf group-coalgebras and flat bundles over 3-manifolds”. In: *Fundam. Math.* 188 (2005), pp. 241–270.

[ZW22] S. Zhang and S. Wang. “A new approach to braided T-categories and generalized quantum Yang–Baxter equations”. In: *Mathematics* 10.6 (2022), p. 968.

Non-singular extensions of circle-valued Morse functions

九州大学大学院マス・フォア・イノベーション連係学府
岩倉康樹 (Koki IWAKURA) *

Abstract

与えられた写像から新しい特異点を作らずに拡張できる条件は何か？

写像の特異点に関する問題は微分トポロジーの問題であるが, 非特異に拡張できる条件は組み合わせ的な対象によって言い表せることが Curley によって知られていた.

今回の研究では, circle-valued Morse function に着目し, 非特異に拡張できる条件を Reeb graph などの組み合わせ的な対象を用いて表した.

1 導入

1.1 問題

初めに最も基本となる問題について述べる. 今回考える問題は, 以下の問題の特別な場合である. 以下, 多様体や写像は滑らかなもののみ考える.

Question 1.1. 閉多様体 M^m, 多様体 L^n, 写像 $f\colon M^m \to L^n$ で条件 Γ を満たすものが与えられているとする. このとき, 多様体 N^{m+1} で $\partial N = M$ を満たすもの, 写像 $F\colon N^{m+1} \to L^n$ で条件 Γ' を満たし, 以下の図式を可換にするものが存在する条件は何か?

$$\begin{array}{ccc} M^m & \xrightarrow{f} & L^n \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \nearrow_{F} & \\ N^{m+1} & & \end{array}$$

ただし, i は自然な包含写像とする.

Question 1.2. 閉多様体 M^m, 多様体 L^n, 写像 $f\colon M^m \to L^n$ で条件 Γ_1 を満たすもの, $g\colon M^m \times [0,1) \to L^n$ で条件 Γ_2 を満たし $g|_{M\times\{0\}} = f$ であるものが与えられているとする. このとき, 多様体 N^{m+1} で $\partial N = M$ を満たすもの, 写像 $F\colon N^{m+1} \to L^n$ で条件 Γ' を満たし, 以下の図式を可換にするものが存在する条件は何か?

$$\begin{array}{ccc} M^m \times [0,1) & \xrightarrow{g} & L^n \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \nearrow_{G} & \\ N^{m+1} & & \end{array}$$

* iwakura.kouki.285@s.kyushu-u.ac.jp

ただし, i は自然な包含写像とする.

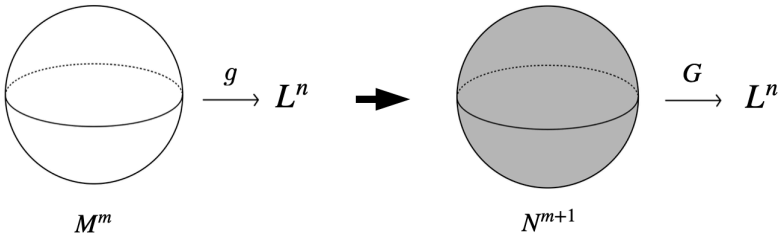


Figure1: Question 1.1のイメージ図

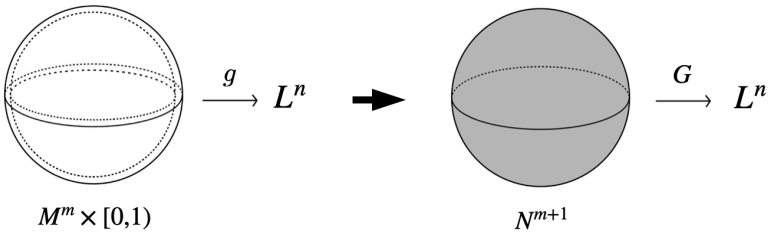


Figure2: Question 1.2のイメージ図

今回の研究 [6] は, Question 1.2において, $m = 2$, $n = 1$ で, M^2 は向き付け可能な閉曲面, $L^1 = S^1$, Γ_1 は “Morse 特異点のみもち, 臨界値は全て異なる”, Γ_2, Γ' は “特異点を持たない” という場合についての研究である.

1.2 先行研究と今回の研究について

$m \leq n$ のときの Question 1.1についての研究は [10] などがある.

以下, $m \geq n = 1$, $L^1 = \mathbb{R}$ の先行研究を紹介する. Question 1.1, Question 1.2での, Γ, Γ_1 は “Morse 特異点のみ持ち, 臨界値は全て異なる”, Γ', Γ_1 は “沈めこみ” であるとする.

Question 1.1, は Arnold により, [1] にて 1981-8 として紹介されている. $m = 2$ で M^2 が向き付け可能である場合については Iwamoto[7] により, Curley による定理 [4] を用いて研究が行われている.

Question 1.2に対する答えとしての先行研究を紹介する.

$m = 1$ としての研究は, Blank-Laudenbuch[3] により行われている.

次に, $m = 2$ とする. M^2 が向き付け可能である場合は Curley による研究 [4] がある. M^2 が向き付け不可能な場合には Laroche による研究 [8] がある. $m = 2$ の研究において, Reeb graph という写像 f から得られるグラフを用いることで, 拡張の存在の条件は組み合わせ的な対象を考えることに帰着されることは特筆すべき点である.

m が一般の場合, $M^m = S^m$ の場合については, Barannikov[2] や Seigneur[12] により研究がされている. 前者は組み合わせ的, 後者は代数的な見方で拡張が可能になるための必要条件について考え

ている.

2 用語

2.1 circle-valued Morse function

まずは circle-valued Morse function を定義する. circle-valued Morse function に関する事実は, [5] を参考にした.

以下, 写像の値域として現れる S^1 は向き付けられていると仮定する.

Definition 2.1 (circle-valued Morse function)**.** M^2 は閉曲面とする. このとき, $f\colon M^2 \to S^1$ が ***circle-valued Morse function*** であるとは, f の臨界点が全て非退化で, 臨界値が全て異なることとする.

Remark 2.2. 今回は *circle-valued Morse function* として, 沈め込みも許すことにする.

2.2 Reeb graph と label

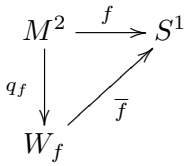
次に circle-valued Morse function の Reeb graph を定義する.

Definition 2.3 (Reeb graph)**.** M^2 は向き付け可能な閉曲面, $f\colon M^2 \to S^1$ は *circle-valued Morse function* とする. このとき, $x, y \in M$ に対して, $\sim$ を次にように定義する:

$$x \sim y \iff f(x) = f(y) \text{ かつ } x, y \text{ は } f^{-1}(f(x)) \text{ の同じ連結成分に含まれる.}$$

これは同値関係であり, $W_f := M/\sim$ を f の ***Reeb graph*** という. W_f にて, f の臨界点が含まれる逆像の連結成分に対応する部分を頂点とする.

また, 下の可換図式を満たす連続写像 $\overline{f}\colon W_f \to S^1$ は一意的に定まる. 但し, $q_f\colon M \to W_f$ は商写像とする.



頂点周りでの様子は Morse の補題 [9] から Figure 3のいずれかである.

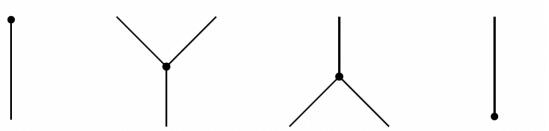


Figure3: Reeb graph の頂点周りの様子

Remark 2.4. *circle-valued Morse function* の *Reeb graph* は上で定義した頂点, 辺でグラフになるとは限らない. 例えば, $f\colon T^2 \to S^1$ を *Figure 4*とすると, *Reeb graph* は S^1 である.

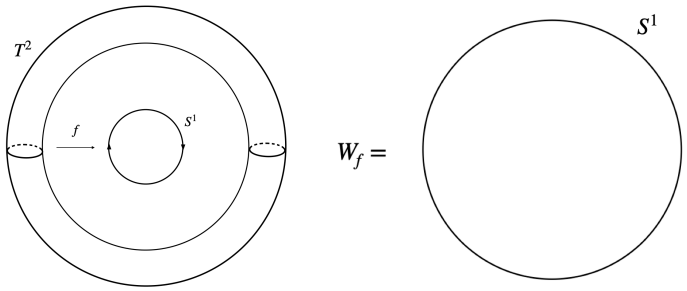


Figure4: Reeb graph が S^1 である例

さらに, Reeb graph の頂点に g によって厚みに関する情報を付与する.

$p \in M$ を f の臨界点, $w \in T_p(M \times [0,1))$ を outward normal vector とする. このとき, $dg_p(n) \in T_{g(p)}S^1$ は S^1 の向きについて, 正, 負のいずれかである. 正であるとき W_f の対応する頂点に “+”, 負であるとき “−”を付与する.

Definition 2.5 (labeled Reeb graph)**.** 上の方法で各頂点に符号を付与した *Reeb graph* を ***labeled Reeb graph*** と呼び, $W_f^{\pm}$ で表す.

Figure 5は labeled Reeb graph の例である.

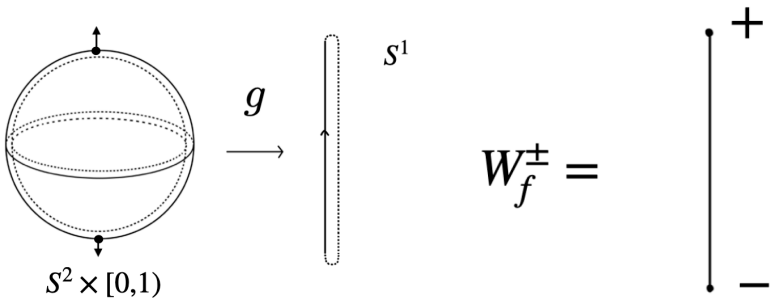


Figure5: labeled Reeb graph の具体例

2.3 non-singular extension

non-singular extension を定義する. これは, Question 1.2において, Γ' が “特異点を持たない”となるように拡張するというものである.

Definition 2.6 (non-singular extension)**.** M^2 は向き付け可能な閉曲面, $g\colon M^2 \times [0,1) \to S^1$ は $g|_{M\times\{0\}}$ が *circle-valued Morse function* であるような沈め込みとする. このとき, 向き付け可能, コンパクトな 3 次元多様体 N^3 で境界が M に一致するようなもの, 沈め込み $G\colon N \to S^1$ で以下の

図式を可換にするものが存在するとき, G を g の ***non-singular extension*** という.

$$\begin{array}{ccc} M^2 \times [0,1) & \xrightarrow{g} & S^1 \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \nearrow_{G} & \\ N^3 & & \end{array}$$

上の図式は, Question 1.2の図式と同じものである. Figure 6の状況がこの図式の拡張のイメージ図である.

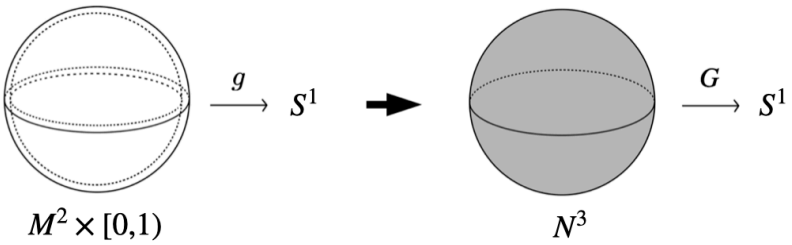


Figure6: non-singular extension のイメージ図

2.4 collapse

次に, "collapse"を導入する. これは, 拡張で臨界点まわりがどのように振る舞うのかということを組み合わせ的な言葉で表したものである.

Definition 2.7 (collapse)**.** M^2 は向き付け可能な閉曲面, $g\colon M^2 \times [0,1) \to S^1$ は $f = g|_{M\times\{0\}}$ が *circle-valued Morse function* であるような沈め込みとする. また, V は有限グラフといくつかの S^1 の非交和, $h : V \to S^1$ はグラフの辺, S^1 への制限がはめ込みであるような連続写像とする. ここで, 全射である連続写像 $C : W_f^{\pm} \to V$ が以下の条件を満たすとする*:*

1. C により, $W_f^{\pm}$ の頂点は V の頂点に一対一に対応する,
2. 下の図式は可換である,
3. C は頂点周りで *Figure 7*のいずれかである.

$$\begin{array}{ccc} W_f^{\pm} & \xrightarrow{\overline{f}} & S^1 \\ {\scriptstyle C}\downarrow & \nearrow_{h} & \\ V & & \end{array}$$

このとき, C を ***collapse*** という.

さらに, collapse には "**allowable**"という性質を定義できる. 正確な定義は省略し, [6] に譲るが, 簡潔にいうと, V のそれぞれの連結成分で, V での Figure 7における G^+, G^- に対応する頂点が一対一に対応するということである.

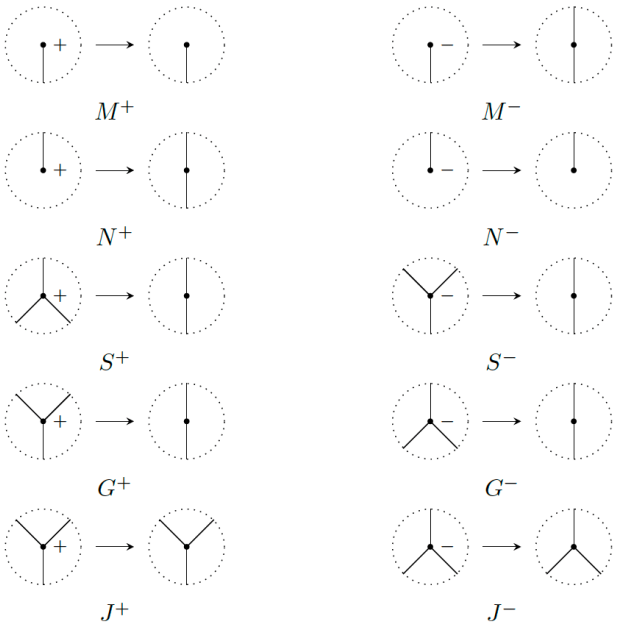


Figure7: collapse の頂点周りでの様子

3 主定理と例

3.1 主定理

以下の定理は, Question 1.2にて, $m = 2$, $n = 1$, M^2 は向き付け可能な閉曲面, $L^1 = S^1$, Γ_1 は “Morse 特異点のみもち, 臨界値は全て異なる”, Γ_2, Γ' は “特異点を持たない” という場合についての組み合わせ的な条件を与えている.

Theorem 3.1. *M^2 は向き付け可能な閉曲面, $g : M \times [0, 1) \to S^1$ は沈め込みで, 境界への制限 f が circle-valued Morse function であるものとする. このとき, 向き付け可能, コンパクトな 3 次元多様体 N, g の non-singular extension $G : N \to S^1$ で $(\star)$ を満たすものが存在するための必要十分条件は,*

- *V: 有限グラフといくつかの S^1 の非交和,*
- *$h : V \to S^1$: 有限グラフの辺, S^1 上ではめ込みであるような連続写像,*
- *$C : W_f^{\pm} \to V$: allowable collapse,*

が存在することである.

但し, $(\star)$ は以下の条件である:

$$\text{各 } r \in S^1 \text{に対して, } G^{-1}(r) \text{ は境界を持つ.}$$

定理の証明の流れを簡単に紹介しておく.

g の non-singular extension が与えられた状況からは, f の臨界点周りの g の形を観察することで, 条件を満たす Reeb graph や collapse を具体的に得る.

逆に, collapse C や h が与えられているとする. このとき, collapse により, g が拡張されるときの臨界点周りの様子がわかっている. また, 拡張した後の写像の値は h に従うとする. 従って, 実際に Figure 8を collapse の局所表示 Figure 7に従って組み合わせ, 値が h に従うように N を構成することで, G を構成する.

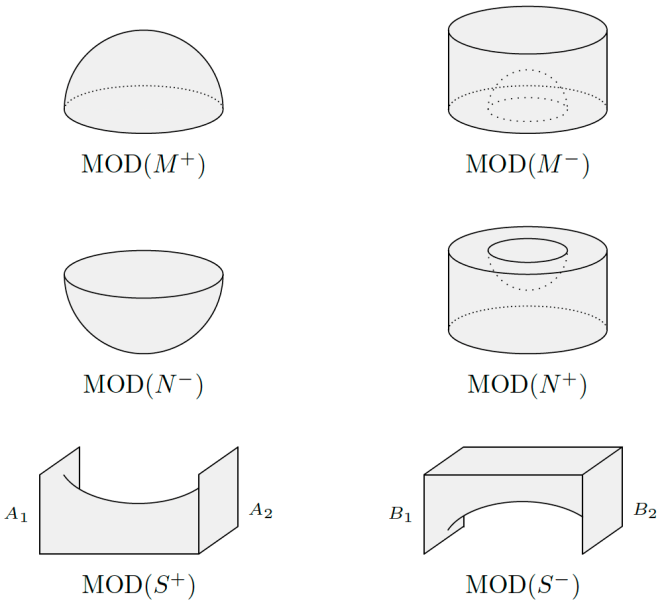


Figure8: 構成に使われるパーツ

3.2 構成の例

Theorem 3.1における N, G の構成を, Figure 9のように C, V, h を具体的に与え, 説明する.

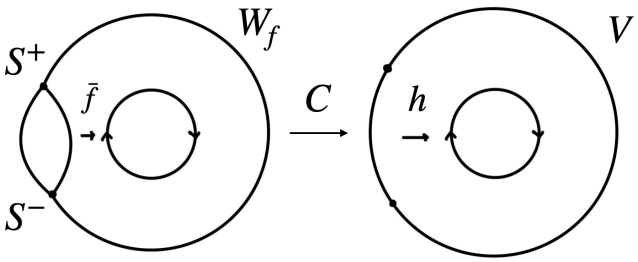


Figure9: C, V, h の具体例

$\overline{f}$, h の逆像が一点である S^1 の点に対し, D^2 を対応させる. S^1 の向きと逆に進んでいき, それに従って D^2 を引き延ばしていく. S^+ に対応する部分で, Figure 10のように MOD(S^+) を貼り合わせる.

同様に S^- に対応する部分で, MOD(S^-) を貼り合わせる. そして, さらに引き延ばして, Fig-

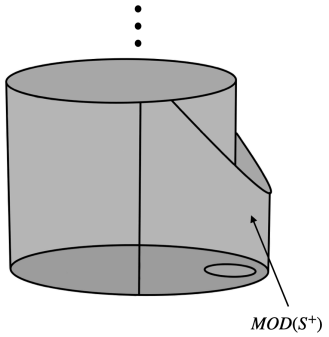


Figure10: MOD(S^+) の貼り合わせ

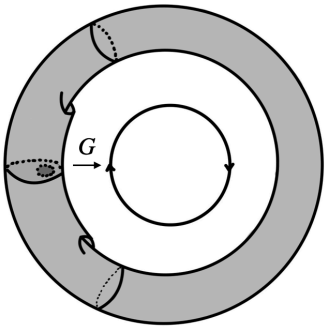


Figure11: 構成された写像

ure 9に従って初めの曲面と貼り合わせる. 以上の操作で出来上がったものが, Figure 11である.

4 まとめ

先行研究や今回の主定理について述べた場合は $n = 1$ のときであり, 拡張した後の写像は臨界点を持たなかった. 他の次元ではどうなのか, 特異点を作るように拡張する場合にはどういった条件を考えれば良いのか, 拡張の仕方は何種類あるのかなど考えられる問題は沢山あるが, 現在研究中である.

今回の研究は circlle-valued Morse function に関して行った. circle-valued Morse function は結び目や絡み目の不変量である Morse-Novikov number を定義するのに用いられる. そのため, Morse-Novikov number[11] への応用が何かできるのではないか, Morse-Novikov number を模した不変量をより得点論的な観点から定めることができるのではないかという期待を持っている.

References

[1] V. I. Arnold, *Arnold's problems*, translated and revised edition of the 2000 Russian original. With a preface by V. Philippov, A. Yakivchik, and M. Peters, Springer-Verlag, Berlin; PHASIS, Moscow (2004).

[2] S. A. Barannikov, *The framed Morse complex and its invariants*, Adv. Soviet Math. **21** (1994), 93–115.

[3] S. Blank and F. Laudenbach, *Extension à une varieté de dimension 2d'un germe de fonction donné le long du bord*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **270** (1970), 1663–1665.

[4] C. Curley, *Non-singular extensions of Morse functions*, Topology (1) **16** (1977), 89–97.

[5] I. Gelbukh, *Reeb graphs of circle-valued functions: A survey and basic facts*, Topol. Methods Nonlinear Anal. (1) **61** (2023), 59–81.

[6] K. Iwakura, *Non-singular extensions of circle-valued Morse functions*, Preprint (2023), arXiv:2311.07309.

[7] K. Iwamoto, *Non-singular extensions of Morse functions on disconnected surfaces*, Kyushu J. Math. **75** (2021), 23–40.

[8] C. Laroche, *Extending a Morse function to a non-orientable 3-manifold*, Preprint (2017), arXiv:1709.03328v1.

[9] J. Milnor, *Morse theory*, Ann. of Math. Stud. 51, Princeton Univ. Press (1963).

[10] V. Poenaru, *Extension des immersions en codimension 1(d'aprés S. Blank)*, exposé n° 342, 473–505 in: Séminaire N. Bourbaki, 10, 1966–1968, Soc. Math. de France, 1995; (online) Eudml.

[11] A. Pazhitnov, L. Rudolph, L. K. Weber, *The Morse-Novikov number for knots and links*, (Russian)Algebra i Analiz **13** (2001), no. 3, 105–118; translation in St. Petersburg Math. J. **13** (2002), no. 3, 417–426.

[12] V. Seigneur, *Extensions de fonctions d'un voisinage de la sphère à la boule*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris (7) 356 (2018), 712–716.

What is a genuine graph-complex to describe the space of long embeddings modulo immersions?

東京大学大学院数理科学研究科　数理科学専攻
吉岡玲音 (Leo YOSHIOKA) *

概要

球体 D^j から球体 D^n への滑らかな埋め込みで、境界近くで標準的な埋め込み全体の空間を、埋め込みの空間と呼ぶ．講演者はこの空間のホモトピー型が余次元 $n-j$ に応じてどのように異なるかに興味がある．埋め込みの空間のホモトピー群を記述する組み合わせ的な複体として、2010 年ごろからグラフ複体と呼ばれる組み合わせ的な複体が導入された．これらのグラフ複体には、大きく 2 種類ある．1 つはオペラッドなどのホモトピー論を起源とするグラフ複体である．もう一つは、配置空間積分と呼ばれる、幾何学的なコチェインの構成を背景とするグラフ複体である．2 つのグラフ複体には、適用範囲や得られる情報に本質的な差異がある．この講演では 2 種類のグラフ複体を、スペクトル系列の E_1 項で結びつける方法を紹介する．

目次

1　埋め込みの空間 $\mathsf{Emb}_\partial(D^j, D^n)$　2

2　主結果　4

3　ホモロジー代数からの準備　4
- 3.1　dga (余) 代数　4
- 3.2　dga (余) 代数の bar-cobar 複体　5
- 3.3　捩れテンソル積と標準分解　6

4　dg Hopf オペラッド　6
- 4.1　オペラッド　6
- 4.2　小球体オペラッド $\mathcal{D}^n(\bullet)$　7
- 4.3　グラフオペラッド $\mathrm{Graph}_n(\bullet)$　7

5　グラフ複体: オペラッドによる記述　9
- 5.1　グラフ複体 HGC と PGC　9
- 5.2　新しいグラフ複体 DGC　9

* E-mail:yoshioka@ms.u-tokyo.ac.jp

Introduction

球体 D^j から球体 D^n への滑らかな埋め込みで、境界近くで標準的な埋め込み全体の空間を、埋め込みの空間と呼び $\mathrm{Emb}_\partial(D^j, D^n)$ と書く[*1]. (n, j) が一般の場合の埋め込みの空間は、1950 年代後半の微分トポロジーの創始期[*2]から研究されている基本的で重要な対象である. 講演者はこの空間のホモトピー型が次元 n, j や余次元 $n-j$ に応じてどのように異なるかに興味がある.

埋め込みの空間のホモトピー群を記述する強力な手法として、2010 年ごろからグラフ複体と呼ばれる組み合わせ的な複体が導入された. これらのグラフ複体は、大きく分けて次の 2 種類がある.

(A) オペラッドなどのホモトピー論を起源とするグラフ複体 [AT1, AT2, FTW]
(B) 配置空間積分と呼ばれる、幾何学的なコチェインの構成を背景とするグラフ複体 [Bot, CR, Sak, SW, Wat, Yos1]

2 つのグラフ複体には、適用範囲や得られる情報に本質的な差異がある. (A) のホモトピー論的手法は余次元 $n-j$ が 3 以上のとき強力な手法だが、幾何学的な情報を得づらいという側面を持つ. (B) の手法は余次元が 2 以上で適用可能な幾何学的な手法だが、あまり整備がなされていない. その 1 つの原因は、(B) の複体が (A) の複体に比べ組み合わせ的に複雑であることであった.

講演者の論文 [Yos2] では (A) のグラフ複体の top ホモロジーから (B) のグラフ複体の top ホモロジーへの写像を構成した. さらにこの写像の ker は、STU 関係式と呼ばれる (B) のホモロジーの基本的な関係式では消えないことを示した. この結果はホモトピー論由来の (A) のグラフ複体と同等なグラフ複体を用いて配置空間積分 ((B) の手法) ができる可能性を示唆していた.

この講演では (A) のグラフ複体 HGC と擬同型なグラフ複体 DGC を導入し、このグラフ複体を用いた配置空間積分を導入する. DGC や HGC は組み合わせ的に定義される複体だが、オペラッドや dga 代数の言葉を用いて自然な記述が可能であり、この記述が擬同型の証明にも用いられる.

このアブストラクトの目標は、オペラッドや dga 代数の復習をしたのち、グラフ複体 DGC をそれらの言葉で記述することである. DGC を用いた配置空間積分については講演中に紹介する.

謝辞

本講演やアブストラクトの内容は、講演者が 2023 年秋に Kansas State University に滞在した際の研究に基づく. 受け入れ教員の Victor Turchin 氏には Turchin 氏の論文の内容や、本研究に必要な知識を丁寧に説明して頂いた. 感謝申し上げる.

1 埋め込みの空間 $\mathrm{Emb}_\partial(D^j, D^n)$

球体 D^j から球体 D^n への滑らかな埋め込みで、境界近くで標準的な埋め込み全体の空間を、埋め込みの空間と呼び $\mathrm{Emb}_\partial(D^j, D^n)$ と書く. $\mathrm{Emb}_\partial(D^j, D^n)$ には C^∞ 位相という標準的な位相が

[*1] $(n, j) = (3, 1)$ のときは通常の long knot の空間である.
[*2] Haefliger が代表的である.

入る．埋め込みならはめ込みであるから、はめ込みの空間への標準的な写像 $\iota : \mathrm{Emb}_\partial(D^j, D^n) \to \mathrm{Imm}_\partial(D^j, D^n)$ がある．$\mathrm{Imm}_\partial(D^j, D^n)$ はよく調べられている対象[*3]なので、この 2 つの空間のホモトピー論的な差

$$\overline{\mathrm{Emb}}_\partial(D^j, D^n) = \mathrm{hofib}(\iota : \mathrm{Emb}_\partial(D^j, D^n) \to \mathrm{Imm}_\partial(D^j, D^n))$$

の方を調べることがある．

Arone, Turchin [AT1, AT2] と Fresse, Turchin, Willwacher [FTW] は 2010 年代に、Goodwillie, Klein, Weiss の埋め込みの微積分 [GKW, GW, Wei] というホモトピー論の手法を発展させ次の驚くべき結果を示した．

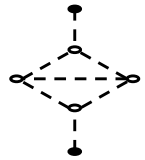
定理 1.1. $n-j \geq 3$ のとき、次数シフトを除き $\pi_*(\overline{\mathrm{Emb}}_\partial(D^j, D^n)) \otimes \mathbb{Q}$ は n, j の偶奇のみによる．[*4]

この性質の背後にあるのは hairy グラフ複体と呼ばれる組み合わせ的な複体である．

定理 1.2. [FTW] $n-j \geq 3$ のとき, 次の同型写像がある．(次数の対応は n と j に応じて異なる.)

$$\pi_*(\overline{\mathrm{Emb}}_\partial(D^j, D^n)) \otimes \mathbb{Q} \cong H_*(\mathrm{HGC}_{n,j}).$$

右辺の複体 $\mathrm{HGC}_{n,j}$ は n, j の偶奇のみに依存し、そのホモロジーは組み合わせ的に計算できる．

例 1.3. n, j がどちらも奇数のとき、グラフ  は $H_*(\mathrm{HGC}_{n,j})$ の非自明な元を与える．ここから n と j が奇数で、$n-j \geq 3$ のとき、$\pi_{3(n-j-2)+(j-1)}(\overline{\mathrm{Emb}}_\partial(D^j, D^n)) \otimes \mathbb{Q} \neq 0$ が従う．

Arone と Turchin[AT2] は別のグラフ複体 $\mathrm{PGC}_{n,j}$ を導入し、射影 $\mathrm{PGC}_{n,j} \to \mathrm{HGC}_{n,j}$ が擬同型であること示した．講演者はこのグラフ複体 $\mathrm{PGC}_{n,j}$ を用いて、定理 1.2 の対応が $n-j=2$ の場合に延長されるかを調べている:

問題 1.4. $n-j \geq 2$ を満たす n, j に対し、対応

$$\pi_*(\overline{\mathrm{Emb}}_\partial(D^j, D^n)) \otimes \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} H_*(\mathrm{PGC}_{n,j}, \mathbb{R})$$

を配置空間積分と呼ばれる幾何学的な手法により構成せよ．

配置空間積分は元々は Kontsevich 不変量と呼ばれる強力な結び目不変量を与える枠組みの一つである．配置空間積分による結び目不変量の構成は、Witten[Wit] による場の量子論的な定式化を起源とし、 Bar-Natan[Bar], Bott, Taubes[BT] らにより 1990 年代後半に数学的な定式化がされた．後に Bott[Bot], Cattaneo, Cotta-Ramusino, Longoni[CCL], Cattaneo, Rossi[CR], Watanebe[Wat], Sakai[Sak, SW] らによって、n, j やホモトピー群の次数が一般化された．この配置空間積分では

[*3] $\mathrm{Imm}_\partial(D^j, D^n)$ は Stiefel 多様体の多重ループ空間とホモトピー同値である．

[*4] $n-j \geq 3$ のとき、$\overline{\mathrm{Emb}}_\partial(D^j, D^n)$ は群的なホモトピー結合的 H 空間という構造を持つ．このことから $n-j \geq 3$ のとき $\overline{\mathrm{Emb}}_\partial(D^j, D^n)$ の任意の連結成分はホモトピー同値である．定理 1.1 は π_0 の情報も拾えることに注意．

$\mathrm{PGC}_{n,j}$ と類似のグラフ複体が用いられ、問題 1.4 と同様の写像が形式的に構成できる．しかし写像の well-definedness も含め未だ十分な整備がなされていない．

問題 1.4 を $\mathrm{PGC}_{n,j}$ の「双対」を与えるグラフ複体 $\widetilde{\mathrm{PGC}}_{n,j}$ で定式化すると次のようになる．

問題 1.5. $n-j\geq 2$ を満たす n,j に対し、コチェイン写像

$$I:\widetilde{\mathrm{PGC}}_{n,j}\to\Omega^*_{dR}(\overline{\mathrm{Emb}}_\partial(D^j,D^n))$$

を配置空間積分により構成せよ．I がコホモロジーに誘導する写像は同型写像か．

2 主結果

問題 1.5 において、I の候補を構成することは可能だが、コチェイン写像であることは期待できなさそうである．そこで $\widetilde{\mathrm{PGC}}_{n,j}$ 本体ではなく、擬同型な別のグラフ複体 $\widetilde{\mathrm{DGC}}_{n,j}$ を用いる．

以下に主結果を述べる．dga 代数や標準分解 $A\otimes_\tau BA$ については 3 節で復習する．グラフ複体 $\widetilde{\mathrm{DGC}}$ や $\widetilde{\mathrm{PGC}}$ の構成は 5 節で与える．グラフ複体の定義に必要なオペラッドは 4 節で復習する．

定理 2.1 (Y.)**.** A は dga 代数 $\Omega_{dR}(V_{n,j})$ のある特定の部分 dga 代数とする．グラフ複体 $\widetilde{\mathrm{DGC}}$ は $\widetilde{\mathrm{PGC}}$ に A の標準分解 $A\otimes_\tau BA\simeq\mathbb{Q}$ を「テンソル積」した複体とする．このとき次が成立する．

(1) 射影 $\widetilde{\mathrm{DGC}}_{n,j}\to\widetilde{\mathrm{PGC}}_{n,j}$ は擬同型である．
(2) 配置空間積分 $I:\widetilde{\mathrm{DGC}}_{n,j}\to\Omega^*_{dR}(\overline{\mathrm{Emb}}_\partial(D^j,D^n))$ を構成でき I は hidden face と呼ばれる寄与を除いてコチェイン写像である．

このアブストラクトではグラフ複体 $\widetilde{\mathrm{DGC}}_{n,j}$ を構成し、(1) を示す．講演では (2) の写像の構成する．

3 ホモロジー代数からの準備

3.1 dga (余) 代数

定義 3.1 (dga 代数)**.** dga 代数 (dga = differential graded associative[*5]) とは、体 $\mathbb{K}$ 上の次数つきベクトル空間 $A=\bigoplus_n A_n$ であって

- 次数 1 の微分 $d:A_n\to A_{n+1}$
- 単位元 $u:\mathbb{K}\to A_0$
- 次数 0 の結合的 (かつ単位的な) 積 $\mu:A_m\otimes A_n\to A_{m+n}$

を持ち Leibniz 則 $d(a_1a_2)=d(a_1)a_2+(-1)^{|a_1|}a_1d(a_2)$ を満たすものである．さらに $\varepsilon:A_0\to\mathbb{K}$ で積と両立するものを持つとき、この dga 代数は augmented であるという．

定義 3.2 (dga 余代数)**.** dga 余代数とは、体 $\mathbb{K}$ 上の次数付きベクトル空間 $C=\bigoplus_n C_n$ であって、

[*5] dga = differential graded algebra が一般的な用法かもしれない．

- 次数 1 の微分 $d : C_n \to C_{n+1}$
- 余単位元 $v : C_0 \to \mathbb{K}$
- 次数 0 の結合的 (かつ余単位的な) 余積 $\Delta : C_{m+n} \to C_m \otimes C_n$

を持ち Leibniz 則を満たすものである. さらに $\eta : \mathbb{K} \to C_0$ で余積と両立するものを持つとき、この dga 余代数は coaugumented であるという.

3.2 dga (余) 代数の bar-cobar 複体

ここでは体 $\mathbb{K}$ 上の dga 代数と dga 余代数の間の随伴関手

$$\Omega : \{\text{conilpotent dga 余代数 }\} \leftrightarrows \{\text{augmented dga 代数 }\} : B$$

を導入する [*6]. B は bar 構成、Ω は cobar 構成とそれぞれ呼ばれる. この bar 構成を用いて 3.3 節では $\mathbb{K}$ の分解 $A \otimes_\tau BA \simeq \mathbb{K}$ を与える. 3.2 節の内容は [LV] を参考にしている.

記号 3.3. A を augmented dga 代数とする. $\overline{A} = \ker(\varepsilon_A : A \to \mathbb{K})$ とし、 $\overline{A}$ の次数を $+1$ シフトを $s\overline{A} = \overline{A}[1]$ と書く.

定義 3.4 (bar 構成 B)**.** augmented dga 代数 A の bar 構成 BA は、次のように定義される conilpotent dga 余代数である. BA は次数付き余代数としては $s\overline{A}$ の自由余代数:

$$T^c(s\overline{A}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (s\overline{A})^{\otimes n}.$$

である. $T^c(s\overline{A})$ の元を $[sa_1|sa_2|\dots|sa_n]$ という記号で書くと BA の余積 Δ は次のように書ける.

$$\Delta[sa_1|sa_2|\dots|sa_n] = \sum_{i=0}^{n} [sa_1|sa_2|\dots|sa_i] \otimes [sa_{i+1}|sa_{i+2}|\dots|sa_n].$$

BA の微分は $d_{BA} = d_1 + d_2$ と分解され、 第一微分 d_1、第二微分 d_2 はそれぞれ次で定義される.

$$d_1[sa_1|sa_2|\dots|sa_n] = \sum_{i=1}^{n} \pm[sa_1|sa_2|\dots|sa_{i-1}|s(d_A a_i)|sa_{i+1}|\dots|sa_n]$$

$$d_2[sa_1|sa_2|\dots|sa_n] = \sum_{i=1}^{n-1} \pm[sa_1|sa_2|\dots|sa_{i-1}|s(a_i a_{i+1})|sa_{i+1}|\dots|sa_n].$$

bar 構成と双対的に、coaugmented dga 余代数 C に対し, cobar 構成 ΩC を定義できる. ΩC は augmented dga 代数である.

定理 3.5. $\mathrm{Hom}_{\text{dga alg}}(\Omega C, A)$ と $\mathrm{Hom}_{\text{dga coalg}}(C, BA)$ の間に自然な全単射がある. さらにこれらの空間と捩れ準同型[*7]と呼ばれる写像の空間 $\mathrm{Tw}(C, A)$ に全単射がある.

[*6] 余代数に coaugmented より強い conilpotent の条件をつけているのは、自由余代数の普遍性を用いるためである.
[*7] Maurer-Cartan 方程式という関係式を満たす線型写像を捩れ準同型という.

例 3.6. 次で定義される次数 $+1$ の線形写像 $\tau_A : BA \to A$ を捩れ準同型である.

$$\tau_A[sa_1|sa_2|\dots|sa_n] = \begin{cases} 0 & (n \neq 1) \\ a_1 & (n = 1). \end{cases}$$

3.3 捩れテンソル積と標準分解

定義 3.7. A を augmented dga 代数、C を coaugmented dga 余代数とする. $\tau : C \longrightarrow A$ は次数 $+1$ の線形写像とする. このとき捩れテンソル積 $A \otimes_\tau C$ は次数付きベクトル空間としては $A \otimes C$ であり微分が次で与えられるものである.

$$d_\tau = d_A \otimes Id_C + Id_A \otimes d_C + (\mu_A \otimes Id_C) \circ (Id_A \otimes \tau \otimes Id_C) \circ (Id_A \otimes \Delta_C)$$

τ が捩れ準同型であるとき、$A \otimes_\tau C$ はコチェイ複体となることが知られている.

定理 3.8. 捩れ準同型 $\tau : C \to A$ に対し、誘導写像 $C \to BA$ が擬同型であることと $A \otimes_\tau C$ が acyclic であることは同値である. 特に $A \otimes_\tau BA$ は acyclic であり、これを $\mathbb{K}$ の標準分解と呼ぶ.

4 dg Hopf オペラッド

5 節でグラフ複体をオペラッドにより記述するため、この節でオペラッドの復習をする.

4.1 オペラッド

定義 4.1. $\mathcal{C}$ を対称モノイダル圏とする (e.g. 可換 dga 余代数の圏、位相空間の圏). $\mathcal{C}$ 上のオペラッドとは、$\mathcal{C}$ の対象の系列 $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}(n)\}_{n=0,1,2,\dots}$ であって

- 各 $n \geq 1$ に対し、対称群 Σ_n の $\mathcal{O}(n)$ への右作用
- 各 n, m と $1 \leq i \leq n$ を満たす i に対し、対称群の作用と両立する i 番目の合成 (図 1 を参照)

$$\circ_i : \mathcal{O}(n) \otimes \mathcal{O}(m) \longrightarrow \mathcal{O}(n + m - 1)$$

- 合成の単位元 $1 \in \mathcal{O}(1)$

を持ち、垂直合成と水平合成に関する適切な公理を満たすものである. 可換 dga 余代数の圏のオペラッドを dg Hopf オペラッドと呼ぶ.

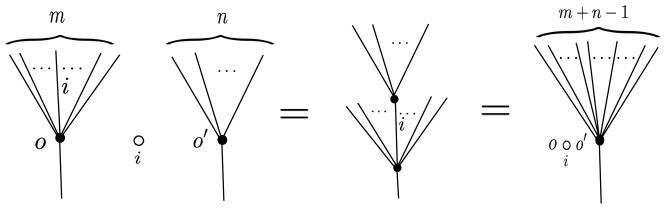


図 1　オペラッドの合成の例

4.2 小球体オペラッド $\mathcal{D}^n(\bullet)$

n 次元小球体オペラッド $\mathcal{D}^n(\bullet)$ $(n \geq 1)$ は位相空間の圏のオペラッドの例であり、埋め込みの空間や、より広くループ空間を調べる上で重要な道具である.

定義 4.2. $D = D^n$ $(n \geq 1)$ は原点中心、半径 1 の n 次元閉球とする. D_i は D のコピーとする. 集合 $\mathcal{D}^n(k)$ $(k \geq 1)$ は写像 $f : D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_k \hookrightarrow D$ で次を満たすもの全体の集合である (図 2 を参照).

- D_i への制限 $f|_{D_i}$ は恒等写像 $id : D_i \to D$ と平行移動、拡大縮小の合成である.
- 像 $f(\mathrm{Int}(D_i))$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ は互いに交わらず、D の内部に含まれる.

$\mathcal{D}^n(k)$ は集合 $\mathrm{Int}(D)^k \times (0, 1]^k$ の部分集合と同一視でき、誘導位相を入れることができる.

定義 4.3. $\mathcal{D}^n(\bullet)$ のオペラッド構造を次のように定める.

- 対称群 Σ_k は $\mathcal{D}^n(k)$ に、球体の順番の入れ替えとして作用する.
- i 番目の合成 $\mathcal{D}^n(k) \otimes \mathcal{D}^n(l) \xrightarrow{\circ_i} \mathcal{D}^n(k + l - 1)$ は、第二項の外側の球体を第一項の i 番目の球体に挿入することで定義される (図 2 を参照).
- 単位元 $1 \in \mathcal{D}^n(1)$ は恒等写像 $id : D = D_1 \to D$ である.

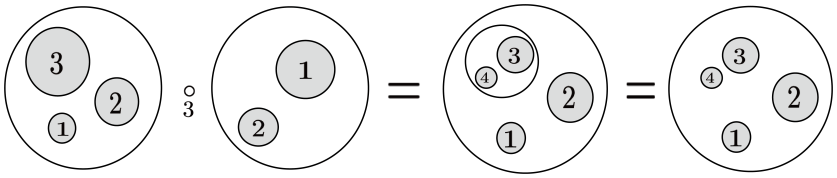


図 2　小球体オペラッドの合成の例

$\mathcal{D}_n(\bullet)$ のオペラッド構造と Künneth 写像により $H_*(\mathcal{D}_n(\bullet))$ にオペラッドの構造が入る. $H_*(\mathcal{D}_n(k))$ には torsion がないため、自然に余積が定まる. 微分を自明な微分とすることで $H_*(\mathcal{D}_n(\bullet))$ は dg Hopf オペラッドの構造を持つ[*8].

4.3 グラフオペラッド $\mathsf{Graph}_n(\bullet)$

グラフ複体を記述するための dg Hopf オペラッド $\mathrm{Graph}_n(\bullet)$ を定義する. $\mathrm{Graph}_n(\bullet)$ は小球体オペラッドのホモロジーの分解を与える. つまり擬同型 $H_*(\mathcal{D}^n(\bullet), \mathbb{Q}) \to \mathrm{Graph}_n(\bullet)$ がある.

定義 4.4 (グラフ)**.** ここではグラフは、2 種類の頂点 (白と黒) 及び 1 種類の辺 (点線) を持つとする. 白頂点は少なくとも 3 本の辺を持ち、黒頂点は任意の数の辺を持つ. 各グラフ Γ の黒頂点の集合 $B(\Gamma)$、白頂点の集合 $W(\Gamma)$、辺の集合 $E(\Gamma)$ はそれぞれ番号付けされている. 各辺は向き付けられている. 定義 4.8 の図を参照.

[*8] Lie 括弧の次数が $(n-1)$ の Poisson オペラッド $Pois_{n-1}$ と ($\mathbb{Z}$ 上) 同型になることが知られている [Sin].

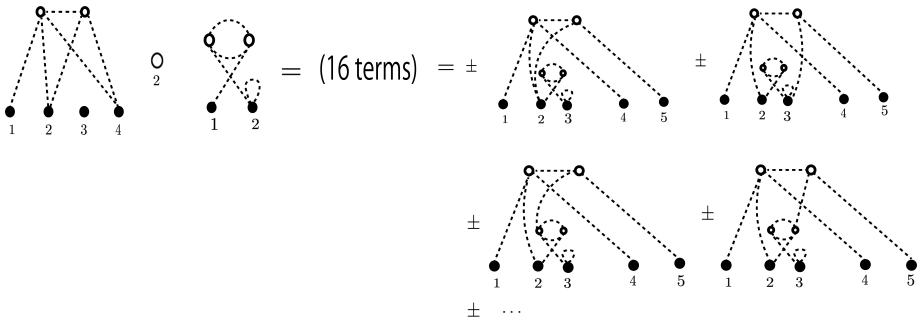
定義 4.5 (グラフの次数)**.** 黒頂点は次数 0 をもち、白頂点は次数 $(-n)$ を持つ. (点線の) 辺は次数 $(n-1)$ を持つ. グラフの次数は頂点と辺の次数の和で定義する.

定義 4.6 (グラフの向き)**.** グラフ Γ に対し $W(\Gamma)$ の番号付け、$E(\Gamma)$ の番号付け、各辺の向きの情報を Γ のラベルという. このラベルを用いてグラフの向きが定まる.

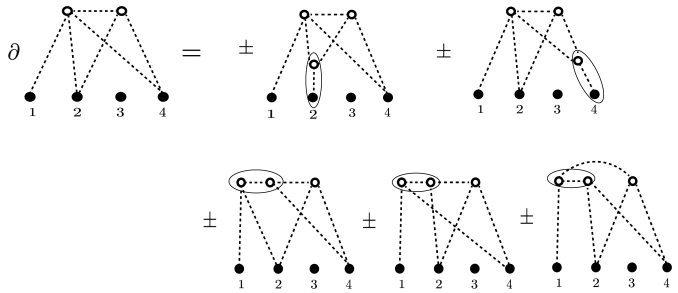
定義 4.7. $\mathrm{Graph}_n(k)$ は、黒頂点を k 個を持つグラフが生成する $\mathbb{Q}$ 上次数付きベクトル空間であって、同じ向きのグラフを同一視し、違う向きのグラフを逆符号とする関係式を入れたものである. [*9]

定義 4.8 (グラフオペラッド)**.** $\mathrm{Graph}_n(\bullet)$ には次のように dg Hopf オペラッドの構造が入る.

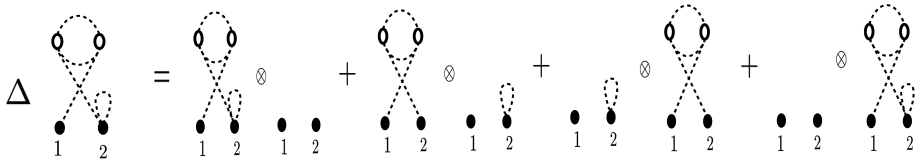
- 対称群 Σ_k は、黒頂点の番号付けの置換として $\mathrm{Graph}_n(k)$ に右から作用する.
- i 番目の合成 $\mathrm{Graph}_n(k) \otimes \mathrm{Graph}_n(l) \xrightarrow{\circ_i} \mathrm{Graph}_n(k+l-1)$ は 2 番目のグラフを、1 番目のグラフの i 番目の黒頂点に挿入することで定まる.



- 微分 $\partial : \mathrm{Graph}_n(k) \to \mathrm{Graph}_n(k)$ は頂点の拡大という操作で定める.



- 余積 $\Delta : \mathrm{Graph}_n(k) \to \mathrm{Graph}_n(k) \otimes \mathrm{Graph}_n(k)$ は余重合[*10]という操作で定める.



定理 4.9. オペラッドの射 $\mathrm{Pois}_{n-1}(\bullet) \to \mathrm{Graph}_n(\bullet)$ が定まり、$\mathbb{Q}$ 上で擬同型である.

[*9] 黒頂点の番号づけが異なるグラフは区別する.

[*10] このアブストでのみ用いる cosuperimposition の訳語.

5　グラフ複体: オペラッドによる記述

4.3 節と双対的に、可換 dga 代数の圏のグラフコオペラッド $\widetilde{\mathrm{Graph}}_n(\bullet)$ を構成できる. 微分はコードと小ループ[*11]以外の辺の縮約の和で定まる. この節では、グラフ複体を $\widetilde{\mathrm{Graph}}_n(\bullet)$ で記述する.

5.1　グラフ複体 HGC と PGC

定義 5.1. hairy グラフは 定義 4.4 のグラフであって、各黒頂点が丁度一本の辺 (hair と呼ばれる) を持つものである. hairy グラフで生成される $\widetilde{\mathrm{Graph}}_n(k)$ の部分空間を $M\widetilde{\mathrm{Graph}}_n(k)$ と書く.

定義 5.2. hairy グラフ複体 $\widetilde{\mathrm{HGC}}$ を

$$\widetilde{\mathrm{HGC}} = \bigoplus_{k\geq 1} \left((\mathrm{sign}_k)^{\otimes j} \otimes M\widetilde{\mathrm{Graph}}_n(k) \right) / \Sigma_k.$$

で定義する. 微分は、hair とコード以外の辺の縮約の和で定義される. ここで sign_k は対称群 Σ_k の符号表現である. sign_k の元は次数 $(-k)$ を持つとする.

記号 5.3. $s_i : \widetilde{\mathrm{Graph}}_n(k) \to \widetilde{\mathrm{Graph}}_n(k-1)$ $(1 \leq i \leq k)$ は i 番目の黒頂点を忘却する写像とする. $\widetilde{\mathrm{Graph}}_n(k)$ の正規化を $N\widetilde{\mathrm{Graph}}_n(k) = \bigcap_{i=1}^{k} ker(s_i)$ で定義する.

定義 5.4. plain グラフ複体 $\widetilde{\mathrm{PGC}}$ を

$$\widetilde{\mathrm{PGC}} = \bigoplus_{k\geq 1} \left(((\mathrm{sign}_k)^{\otimes j} \otimes \widetilde{\mathrm{Graph}}_j(k) \otimes N\widetilde{\mathrm{Graph}}_n(k) \right) / \Sigma_k$$

で定義する. $\widetilde{\mathrm{Graph}}_j(k)$ 由来の辺を実線で書き、$\widetilde{\mathrm{Graph}}_n(k)$ 由来の点線の辺と区別する. 微分はコードと小ループ以外の辺の縮約で定義する. 黒い頂点を両端点に持つ実線の辺は縮約する.

次の結果は、オペラッド理論を用いて示された幾分驚くべき結果である.

定理 5.5. [AT2] 自然な射影 $\widetilde{\mathrm{PGC}} \to \widetilde{\mathrm{HGC}}$ は擬同型である.

5.2　新しいグラフ複体 DGC

定義 5.6. dga 代数 A は、次数 $(n-1)$ の元 e_{n-1}(ただし n が偶数のときに限る) と次数 $(n-j)$ の元 e_{n-j}(ただし $n-j$ が偶数のときに限る) が生成する可換な dga 代数を含むとする[*12]. 標準分解 $A \otimes_\tau BA \simeq \mathbb{Q}$ を Z と書く. decorated グラフ複体 $\widetilde{\mathrm{DGC}}$ を

$$\widetilde{\mathrm{DGC}} = \bigoplus_{k\geq 1} \left((\mathrm{sign}_k)^{\otimes m} \otimes \widetilde{\mathrm{Graph}}_j(k) \otimes \widetilde{\mathrm{Graph}}_k(k) \otimes Z^{\otimes k} \right) / \Sigma_k$$

[*11] 同じ黒頂点を端点に持つ辺を小ループと呼ぶ. 両端点がどちらも黒頂点である (点線の) 辺をコードと呼ぶ.

[*12] A として念頭にあるのは Stiefel 多様体の有理モデルである: $H^*(A) \cong H^*(VO_{n,j}, \mathbb{Q})$. n が偶数のとき (resp. $n-j$ が偶数のとき), $H^*(VO_{n,j}, \mathbb{Q})$ は次数 $n-1$ の非自明元 e_{n-1} (resp. 次数 $n-j$ の非自明元 e_{n-j}) を持つ.

で定義する．微分 δ は 2 つの可換な微分 δ_1, δ_2 の和に分解される．第 2 微分 δ_2 は複体 $Z = A \otimes_\tau BA$ の部分の微分に一致する．第 1 微分 δ_1 は小ループ以外の辺の縮約である．コードも縮約する．

定理 5.7 (Y.)**.** 自然な射影 $\pi : \widetilde{\mathrm{DGC}} \to \widetilde{\mathrm{PGC}}$ は擬同型である．

Proof. グラフ複体 $\widetilde{\mathrm{DGC}}$ は、2 重複体 $(\widetilde{\mathrm{DGC}}^{\bullet,*}, \delta_1, \delta_2)$ の全複体とみなせる．ここで次数 $\bullet$ はグラフの頂点数の (-1) 倍で定義される．$\widetilde{\mathrm{PGC}}$ も第 2 微分が自明な 2 重複体とみなせる．2 重複体 $\widetilde{\mathrm{DGC}}^{\bullet,*}$ から誘導されるスペクトル系列を E とすると、$Z = A \otimes_\tau BA$ の acyclicity(定理 3.8) から $E_1^{p,q} = \widetilde{\mathrm{PGC}}^{p,q}$ が成立する．右辺は $\widetilde{\mathrm{PGC}}$ の E_1 項なので定理 5.7 の証明が終わる． □

参考文献

[AT1] G. Arone, V. Turchin. *On the rational homology of high-dimensional analogues of spaces of long knots.* Geom. Topol. 18 (2014), no. 3, 1261–1322.

[AT2] G. Arone, V. Turchin. *Graph-complexes computing the rational homotopy of high dimensional analogues of spaces of long knots.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 65 (2015), no. 1, 1–62.

[Bar] D. Bar-Natan. *On the Vassiliev knot invariants.* Topology 34 (1995), no. 2, 423–472.

[Bot] R. Bott. *Configuration spaces and imbedding invariants.* Turkish J. Math. 20 (1996), no. 1, 1–17.

[BT] R. Bott, C. Taubes. *On the self-linking of knots.* Topology and physics. J. Math. Phys. 35 (1994), no. 10, 5247–5287.

[CCL] A. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, R. Longoni. *Configuration spaces and Vassiliev classes in any dimension.* Algebr. Geom. Topol. 2 (2002), 949–1000.

[CR] A. S. Cattaneo, C. A. Rossi. *Wilson surfaces and higher dimensional knot invariants.* Comm. Math. Phys. 256 (2005), no. 3, 513–537.

[FTW] B. Fresse, V. Turchin, T. Willwacher. *The rational homotopy of mapping space of E_n operads.* arXiv.1703.06123.

[GW] T. Goodwillie, M. Weiss. *Embeddings from the point of view of immersion theory. II.* Geom. Topol. 3 (1999), 103–118.

[GKW] T. Goodwillie, J. Klein, M. Weiss. *Spaces of smooth embeddings, disjunction and surgery.* Surveys on surgery theory, Vol. 2, 221–284, Ann. of Math. Stud., 149, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (2001).

[LV] J. L. Loday, B. Vallete. *Algebraic operads.* Grundlehren Math. Wiss. [Fundamental Principles of Mathematical Sciences] 346, Springer, Heidelberg (2012), xxiv+634.

[Sak] K. Sakai. *Configuration space integrals for embedding spaces and the Haefliger invariant.* J. Knot Theory Ramifications 19 (2010), no. 12, 1597–1644.

[Sin] D. P. Sinha. *The homology of the little discs operad.* Séminaire et Congrès de Société Mathématique de France 26 (2011), 255-281.

[SW] K. Sakai, T. Watanabe. *$1-$loop graphs and configuration space integral for embedding spaces.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 152 (2012), no. 3, 497–533.

[Wat] T. Watanabe. *Configuration space integral for long n-knots and the Alexander polynomial.* Algebr. Geom. Topol. 7 (2007), 47–92.

[Wei] M. Weiss. *Embeddings from the point of view of immersion theory I.* Geom. Topol. 3 (1999), 67–101.

[Wit] E. Witten. *Quantum field theory and the Jones polynomial.* Comm. Math. Phys. 121(1989), no.3, 351-399.

[Yos1] L. Yoshioka. *Cocycles of the space of long embeddings and BCR graphs with more than one loop.* arXiv.2212.01573.

[Yos2] L. Yoshioka. *Two graph homologies and the space of long embeddings.* arXiv.2310.10896.

結び目のパーシステントホモロジー

東京工業大学大学院 情報理工学院 数理・計算科学系 数理・計算科学コース
鈴木 拓己 (Takumi SUZUKI) *

概要

本研究では，結び目の離散近似である折れ線結び目の頂点データからパーシステンス図を計算し，その性質について，結び目の幾何学的な複雑さを測る量である結び目のエネルギーの観点から考察した．特に，エネルギーを最小化する結び目である正円に対して，正円上の点群データの 1 次パーシステンス図を決定した．また，より複雑ないくつかの結び目について，折れ線結び目のエネルギーおよびその 1 次パーシステンス図の数値計算結果に対して考察を与えた．

1 導入

結び目とは，円周 S^1 から 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ への埋め込みおよびその像のことである．本研究の動機は，位相的データ解析の主要なツールの一つであるパーシステントホモロジー (Persistent Homology: PH) [6, 15] によって結び目の特徴的な幾何構造を抽出することである．具体的には，PH の典型的な応用先である点群データ (Point Cloud Data: PCD) の幾何構造の解析から着想を得て，結び目の離散近似である折れ線結び目の頂点データから PH を計算し，その記述子であるパーシステンス図 (Persistence Diagram: PD) の性質について，結び目の幾何学的な複雑さを測る量である結び目のエネルギー [7, 8, 14] の観点から考察した．結び目のエネルギーは，結び目を一様に荷電させたときの静電エネルギーのようなもので，対称性を反映するように各結び目型の標準形を定めるために導入された．例えば，図 1 の 2 つの trefoil では，左の trefoil の方が右の trefoil よりも，その形状が “標準的” であるように思える．

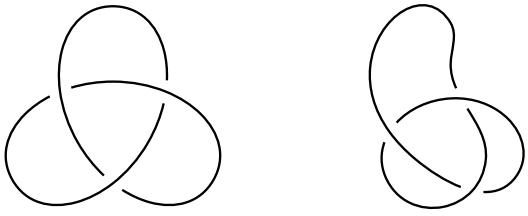


図 1: 形状の異なる 2 つの trefoil

結び目の標準形は，結び目全体からなる空間 $\mathcal{K}$ 上のエネルギー汎関数 $E\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ の最小元 (また

* E-mail:suzuki.t.dk@m.titech.ac.jp

は極小元) によって定める．本研究では，O'Hara [14] によって定義され，Freedman-He-Wang [7] によって解析的性質が調べられたエネルギー汎関数である Möbius エネルギーについて，Möbius エネルギーを最小化する結び目である正円 S^1 上に分布した PCD の 1 次 PD を決定した (定理 1)．また，他の結び目の解析の例として，福原 [8] によって定義された折れ線結び目のエネルギーを用いた数値計算によって，いくつかの結び目のエネルギー極小元を求め，その頂点データから 1 次 PD を計算し，エネルギー極小元の幾何構造に対する考察を与えた．

本稿の構成は以下の通りである．2 節では PH と結び目のエネルギーの定義と性質を簡潔に述べる．3 節では主結果と考察を述べる．3 節は 2 つのパートから構成される．1 つ目は数学解析のパートであり，正円 S^1 上の PCD から構成される有限型 Čech フィルトレーションの 1 次 PD を決定する．2 つ目は数値計算のパートであり，trefoil のエネルギー最小化とその頂点データから計算される 1 次 PD について，結果と考察を述べる．4 節では本稿のまとめと今後の展望を述べる．

2 準備

本研究の主要なツールである PH と結び目のエネルギーの定義と性質を簡潔に述べる．

2.1 パーシステントホモロジー

本稿では，次数付き $\mathbb{Z}_2[x]$-加群としての PH の定式化を経由した PD の定義を紹介する．これは，早期に [15] において確立された PH の代数構造である．詳細は例えば文献 [15–17] 等を参照されたい．PH は単体複体および位相空間のフィルトレーションに対して定義されるが，本稿では PCD の幾何構造の解析を扱うため，相異なる N 個の点の集合 $P_N = \{p_i \in \mathbb{R}^n \mid i = 1, \ldots, N,\ N \geq 1\}$ から構成される単体複体として代表的な Čech 複体 $\check{C}(P_N; r)$ の半径パラメータ $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ でパラメトライズされたフィルトレーション $\mathcal{F}_r^{\check{C}}(P_N) \coloneqq (\check{C}(P_N; r))_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ に定義を限定する．3.2 節の数値計算では Alpha 複体のフィルトレーションを用いるが，以下の定義はすべて Alpha 複体についても全く同様である．Čech 複体および Alpha 複体の詳細については，例えば文献 [16, 17] 等を参照されたい．

非負整数 $k \in \mathbb{N}_0$ に対して，k 次 $\mathbb{Z}_2$-係数ホモロジー群[*1]と Čech 複体の間の包含写像が誘導するホモロジー群の間の $\mathbb{Z}_2$-線型写像の族の組 $((H_k(\check{C}(P_N; r)))_{r \in \mathbb{R}_{\geq 0}}, (\iota_{s,r_*})_{r \leq s})$ を $\mathcal{F}_r^{\check{C}}(P_N)$ の k 次**パーシステントホモロジー** (PH) といい，$H_k(\mathcal{F}_r^{\check{C}}(P_N))$ と書く．すなわち，$H_k(\mathcal{F}_r^{\check{C}}(P_N))$ は任意の $r \leq s \leq t$ について次の図式が可換となる無限列である:

$$H_k(\check{C}(P_N; r)) \xrightarrow{\iota_{s,r_*}} H_k(\check{C}(P_N; s)) \xrightarrow{\iota_{t,s_*}} H_k(\check{C}(P_N; t)).$$
$$\iota_{t,r_*}$$

点の集合 P_N は有限集合なので，$\mathcal{F}_r^{\check{C}}(P_N)$ において $\check{C}(P_N; r)$ の変化が起こるのは有限回である．すなわち，任意の $r_t \leq u < v < r_{t+1}$ に対して $\check{C}(P_N; u) = \check{C}(P_N; v)$ となるような非負整数 $t \in \mathbb{N}_0$ か

[*1] 係数は任意の体でよいが，本稿では簡便のため係数体は $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に固定する．

ら定まる有限個の半径パラメータの増大列 $r_0 < \cdots < r_T$ が存在する．これらの半径パラメータの添字からなる有限集合を $\mathbb{T} = \{0, \ldots, T\}$ とすると，集合 $\mathbb{T}$ は Čech 複体の変化を表す離散時刻と解釈することができる．時刻 $t = T+1, T+2, \ldots,$ に対しては $\check{C}(P_N; r_t) = \check{C}(P_N; r_T)$ とすることで離散時刻 $t \in \mathbb{N}_0$ でパラメトライズされた Čech 複体のフィルトレーション $\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N) \coloneqq (\check{C}(P_N; r_t))_{t \in \mathbb{N}_0}$ が定まり，これを**有限型 Čech フィルトレーション**と呼ぶ．また，集合 $\mathbb{T}$ の最大元 T を $\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N)$ の**飽和時刻**と呼ぶ．有限型 Čech フィルトレーションの k 次 PH $H_k(\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N))$ は 1 変数多項式環 $\mathbb{Z}_2[x]$ の通常の次数構造のもとで次数付き $\mathbb{Z}_2[x]$-加群となることが知られており [15, Theorem 3.1] ，各時刻 $t \in \mathbb{N}_0$ での Čech 複体の k 次 $\mathbb{Z}_2$-係数ホモロジー群の直和と同型になる:

$$H_k(\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N)) \cong \bigoplus_{t \in \mathbb{N}_0} H_k(\check{C}(P_N; r_t)).$$

このとき，不定元 x の $H_k(\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N))$ への作用は包含写像が誘導する $\mathbb{Z}_2$-線型写像

$$\iota_{t,s_*} \colon H_k(\check{C}(P_N; r_s)) \ni [z] \mapsto x^{t-s} \cdot [z] \in H_k(\check{C}(P_N; r_t)), \quad s \leq t$$

で与えられる．点の集合 P_N は有限集合なので，$H_k(\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N))$ は単項イデアル整域 $\mathbb{Z}_2[x]$ 上の有限生成次数付き $\mathbb{Z}_2[x]$-加群となり，$H_k(\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N))$ は次数を保つ一意的な同型対応

$$H_k(\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N)) \cong \bigoplus_{i=1}^{p} \left((x^{b_i}) \Big/ (x^{d_i}) \right) \oplus \bigoplus_{i=p+1}^{p+q} (x^{b_i})$$

をもつ．前半の直和成分は $H_k(\check{C}(P_N; r_{b_i}))$ で生成して $H_k(\check{C}(P_N; r_{d_i}))$ で消滅するホモロジー生成元を表し，後半の直和成分は $H_k(\check{C}(P_N; r_{b_i}))$ で生成して消滅しないホモロジー生成元[*2]を表している．これにより，$H_k(\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N))$ の情報は有限個のデータ $\{b_i\}_{i=1}^{p+q}, \{d_i\}_{i=1}^{p}$ を指定することで記述することができる．これらのデータから定まる多重集合

$$D_k(\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N)) \coloneqq \{(b_i, d_i) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid i = 1, \ldots, p\} \cup \{(b_i, \infty) \in \mathbb{N}_0 \times \bar{\mathbb{N}}_0 \mid i = p+1, \ldots, p+q\}$$

を $\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N)$ の k 次**パーシステンス図** (PD) という．ただし, $\bar{\mathbb{N}}_0 = \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ である．$D_k(\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N))$ の元は $\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N)$ における各 k 次ホモロジー類の生成時刻と消滅時刻の対であり，これを**生成消滅対**という．

2.2 結び目のエネルギー

結び目のエネルギーは，結び目を一様に荷電させたときの静電エネルギーから着想を得て，福原 [8] によって最初の例が提案された．各辺の長さが 1 である頂点数 N の PL 閉曲線の集合 $\mathbb{L}^N$ を N 個の有向辺 $\{e_i = (x_i, y_i, z_i) \in \mathbb{R}^3\}_{i=1}^N$ および頂点 $\{v_i = \sum_{j=1}^{i} e_j \in \mathbb{R}^3\}_{i=1}^N$ を用いて

$$\mathbb{L}^N \coloneqq \left\{ (e_1, \ldots, e_N) \in \mathbb{R}^{3N} \;\middle|\; \|e_1\| = \cdots = \|e_N\| = 1,\ \sum_{i=1}^{N} e_i = 0 \right\}$$

[*2] 有限単体複体では生成した後に消滅しないホモロジー生成元は必ず 0 次なので，本稿で考察する 1 次 PH にはこのようなホモロジー生成元は現れない.

と定義する．ただし，記号 $\|\cdot\|$ は標準的ユークリッドノルムを表す．PL 閉曲線の集合 $\mathbb{L}^N$ から，相異なる添字の頂点において自己交叉をもつ PL 閉曲線の集合 $D \coloneqq \{(e_1,\dots,e_N) \in \mathbb{R}^{3N} \mid v_i = v_j \text{ for some } 1 \le i,j \le N,\ i \ne j\}$ を除いた集合を $\tilde{\mathbb{L}}^N \coloneqq \mathbb{L}^N \setminus D$ と書く．$\mathbb{R}^{3N} \setminus D$ 上の d 次**エネルギー関数**を

$$E_{N,d}\colon \mathbb{R}^{3N} \setminus D \ni (e_1,\dots,e_N) \mapsto \frac{1}{d} \sum_{1 \le i < j \le N} \frac{1}{\|v_i - v_j\|^d} \in \mathbb{R}$$

と定め，エネルギー関数 $E_{N,d}$ の $\tilde{\mathbb{L}}^N$ への制限を $e_{N,d}$ と書く．ここで，$d \in \mathbb{N}$ は頂点間の反発力を制御するパラメータである．集合 $\tilde{\mathbb{L}}^N$ は有限次元なので，勾配ベクトル場 $\operatorname{grad} e_{N,d}$ が簡単に計算でき，エネルギー最小化問題を勾配法によって数値的に解くことができる．

O'Hara [14] は発散積分の正則化手法を用いて，弧長パラメトライズされた C^2-級の結び目 $\gamma\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ のエネルギー汎関数を定式化した．Freedman-He-Wang [7] は O'Hara が定義したエネルギー汎関数が Möbius 変換によって不変 (Möbius 不変) であることを示し，さらに，エネルギーの Möbius 不変性および Möbius 変換の円円対応より，Möbius エネルギー E と任意の閉曲線 $\gamma\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$ に対して $E(\gamma) \ge 4$ が成り立ち，等号成立条件は γ が正円 S^1 であることを示した．

上記の結果から unknot の標準形は正円 S^1 であることがわかる．しかしながら，一般に結び目全体のなす空間は無限次元であるため，解析的な難しさから，他の結び目型については Möbius エネルギー最小元の具体的な形状は理論的には求められていないのが現状である．

3　主結果と考察

まず，正円 S^1 上の PCD から構成される有限型 Čech フィルトレーションの 1 次 PD に関する数学解析の結果を述べる．次に，trefoil のエネルギー最小化とその頂点データから計算される 1 次 PD の数値計算結果と考察を述べる．

3.1　正円 S^1 上の PCD から構成される有限型 Čech フィルトレーションの 1 次 PD

Möbius エネルギー最小元である正円 S^1 上の PCD から構成される有限型 Čech フィルトレーションの 1 次 PD を決定した．類似の問題設定として，例えば [4, Lemma 4.2] では S^1 上の一様分布から生成された PCD の 1 次パーシステンスバーコード[*3]について，S^1 上の距離 (すなわち，2 点間の弧長の短い方) でパラメトライズされた Vietoris-Rips フィルトレーションを用いて論じている．本研究では，PCD からフィルトレーションを構成する際に Čech フィルトレーションを用いた場合の 1 次 PD を決定した．

定理 1 (主結果)**.** 中心を O とする正円 S^1 上の相異なる N 個の点の集合 $P_N = \{p_i \in S^1 \mid i = 1,\dots,N,\ N \ge 3\}$ から構成される有限型 Čech フィルトレーション $\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N)$ の 1 次 PD $D_1(\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N))$ について次が成り立つ．ただし，$\#$ は集合の元の個数を表す．

(1) $O \notin \operatorname{Int}(\operatorname{Conv}(P_N)) \Longrightarrow \#D_1(\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N)) = 0$,

[*3] PH における各ホモロジー類の生成消滅対 (b,d) から定まる区間 $[b,d)$ の集まりであり，PD と等価な情報をもつ．

(2) $O \in \mathrm{Int}(\mathrm{Conv}(P_N)) \Longrightarrow \#D_1(\mathcal{F}_t^{\check{C}}(P_N)) = 1$.

定理 1 の証明の概略. PD の定義より，Čech フィルトレーション $\mathcal{F}_r^{\check{C}}(P_N)$ の自明でない 1 次ホモロジー類の生成消滅および一意性を示せばよい．ここで，点の集合 P_N から定まる半径パラメータ $r_{P_N} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ および 1 次サイクル $z_{P_N} \in Z_1(\check{C}(P_N; r \geq r_{P_N}))$ を次式で定義する:

$$r_{P_N} \coloneqq \frac{1}{2} \max_{1 \leq i \leq N} \|p_i - p_{i+1}\|, \quad z_{P_N} \coloneqq \sum_{i=1}^{N} \{p_i, p_{i+1}\}.$$

ただし，$p_{N+1} \coloneqq p_1$ とする．すなわち，z_{P_N} は点の集合 P_N の隣接頂点間を結んだ 1 次サイクルであり，r_{P_N} はフィルトレーション $\mathcal{F}_r^{\check{C}}(P_N)$ における 1 次サイクル z_{P_N} の生成半径である．PD はフィルトレーションにおけるホモロジー類の生成消滅の情報を記述していたので，定理 1 は次の定理 2 の系として従う．

定理 2. 1 次ホモロジー群 $H_1(\check{C}(P_N; r))$ について次が成り立つ．ただし，$[z_{P_N}]$ はサイクル $z_{P_N} \in Z_1(\check{C}(P_N; r \geq r_{P_N}))$ が定める 1 次ホモロジー類を表し，S^1 の半径は 1 とする[*4].

(1) $O \notin \mathrm{Int}(\mathrm{Conv}(P_N)) \Longrightarrow H_1(\check{C}(P_N; r)) = 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}_{\geq 0},$

(2) $O \in \mathrm{Int}(\mathrm{Conv}(P_N)) \Longrightarrow H_1(\check{C}(P_N; r)) = \begin{cases} \{0, [z_{P_N}] \neq 0\}, & r_{P_N} \leq r < 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$

$N = 3$ の場合は $\dim \check{C}(P_N; r) \leq 2$ なので，対応する幾何学的単体複体のフィルトレーションを $\mathbb{R}^2$ において考えればよい．一般の $N \geq 3$ の場合は，次の補題 3 から示される．

補題 3. 任意に固定した半径パラメータ $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ と任意の 1 次サイクル $z \in Z_1(\check{C}(P_N; r))$ に対して，$z \sim 0$ または $z \sim z_{P_N}$ が成り立つ．ただし，記号 $\sim$ は 2 つのサイクルがホモロガス，すなわち同じホモロジー類を定めることを表す．

補題 3 は，任意の 1 次サイクル $z \in Z_1(\check{C}(P_N; r))$ は定理 2 (1) の $N = 3$ の場合を繰り返し適用すると $z \sim \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \{p_i, p_{i+1}\}$, $\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{Z}_2$ と書け，さらに $\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \{p_i, p_{i+1}\}$ がサイクルであるための必要十分条件が

$$\partial_1 \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \{p_i, p_{i+1}\} \right) = 0 \iff \alpha_1 = \cdots = \alpha_N \in \{0, 1\}$$

となることから示される．ただし，∂_1 は 1 次の境界作用素である．

補題 3 より，任意の半径パラメータ $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ において自明でない 1 次ホモロジー類となりうるのは $[z_{P_N}]$ のみであることがわかる．一般の $N \geq 3$ の場合の定理 2 を示すには，半径パラメータ $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ の値が (i) $0 \leq r < r_{P_N}$, (ii) $r_{P_N} \leq r < 1$, (iii) $1 \leq r$, のそれぞれの場合において，$[z_{P_N}] = 0$ か否かを確かめればよい．(i) $0 \leq r < r_{P_N}$ の場合は $z_{P_N} \notin Z_1(\check{C}(P_N; r))$ であるため $H_1(\check{C}(P_N; r)) = 0$ である．(iii) $1 \leq r$ の場合はすべての閉球 $B_{\mathbb{R}^2}(p_i; r)$ が S^1 の中心 O で交わる

[*4] PD の元の個数は点の集合 P_N に対するスケール変換で不変であるので，定理 1 の補題という意味で S^1 の半径が 1 であるという仮定は一般性を失わない.

ので，$\bigcup_{i=1}^{N} B_{\mathbb{R}^2}(p_i;r)$ は可縮ゆえ，脈対定理[*5]およびホモロジー群のホモトピー不変性による同型

$$H_1(\check{C}(P_N;r)) \cong H_1(|\check{C}(P_N;r)|) \cong H_1\left(\bigcup_{i=1}^{N} B_{\mathbb{R}^2}(p_i;r)\right) \cong H_1(O)$$

より，$\dim H_1(\check{C}(P_N;r)) = \dim H_1(O) = 0$ から $H_1(\check{C}(P_N;r)) = 0$ となる．(ii) $r_{P_N} \leq r < 1$ の場合を考える．(1) $O \notin \mathrm{Int}(\mathrm{Conv}(P_N))$ の場合は補題 2 (1) の $N = 3$ の場合を繰り返し適用して $z_{P_N} \sim 0$ となり，$H_1(\check{C}(P_N;r)) = 0$ となる．(2) $O \in \mathrm{Int}(\mathrm{Conv}(P_N))$ の場合は隣接する 2 点 $p_i, p_{i+1} \in P_N$ を結んだ線分 $e_i = \{(1-t)p_i + tp_{i+1} \mid 0 \leq t \leq 1\}$ の和集合 $\bigcup_{i=1}^{N} e_i$ は閉球の和集合 $\bigcup_{i=1}^{N} B_{\mathbb{R}^2}(p_i;r)$ の変位レトラクトゆえ，ホモトピー同値 $\bigcup_{i=1}^{N} B_{\mathbb{R}^2}(p_i;r) \simeq \bigcup_{i=1}^{N} e_i$ と同相 $\bigcup_{i=1}^{N} e_i \cong S^1$ から，脈対定理およびホモロジー群のホモトピー不変性による同型

$$H_1(\check{C}(P_N;r)) \cong H_1(|\check{C}(P_N;r)|) \cong H_1\left(\bigcup_{i=1}^{N} B_{\mathbb{R}^2}(p_i;r)\right) \cong H_1\left(\bigcup_{i=1}^{N} e_i\right) \cong H_1(S^1)$$

が成り立ち，$\dim H_1(\check{C}(P_N;r)) = \dim H_1(S^1) = 1$ から $[z_{P_N}] \neq 0$ となる．したがって，定理 2 が成り立つ．定理 2 より，定理 1 が直ちに従う． □

3.2 trefoil のエネルギー最小化とその頂点データから計算される 1 次 PD

ここでは，自明でない結び目型のうち最も単純な結び目である trefoil に対するエネルギー最小化および 1 次 PD の数値計算結果と考察を紹介する．以下，trefoil の頂点データから計算した PD を単に trefoil の PD という．

2.2 節で述べた折れ線結び目のエネルギーの極小元を最急降下法によって求めるプログラムを C 言語によって実装した．最急降下法で使用したハイパーパラメータは表 1 の通りである．

変数名	内容
`degree`	エネルギーの次数
`initial_step_size`	勾配降下のステップサイズの初期値
`decay`	ステップサイズの減衰率
`decay_on`	ステップサイズを減衰するかのフラグ

表 1: エネルギー最小化におけるハイパーパラメータ

PD 計算にはオープンソースのデータ解析ソフトウェア HomCloud [1] の Python API を使用し，折れ線結び目の頂点データからフィルトレーションを構成する際は頂点集合の Alpha フィルトレーションを用いた．HomCloud の詳細については例えば文献 [13] 等を参照されたい．

エネルギー減少列における初期値と収束値の trefoil とその 1 次 PD を図 2 に示す．ハイパーパラメータの値は各図に記載した通りであり，3 次元プロットにおける各軸のアスペクト比は等しく設定

[*5] Čech 複体は脈体と呼ばれる単体複体のクラスに属しており，その幾何学的実現 $|\check{C}(P_N;r)|$ と閉球の和集合 $\bigcup_{i=1}^{N} B_{\mathbb{R}^2}(p_i;r)$ がホモトピー同値となることが知られている．

している．初期値の trefoil は各辺の長さを 1 とし，頂点数を 34 とした．また，最急降下法の各イテレーションにおけるエネルギーの値と勾配ベクトルの大きさは図 3 のグラフの通りであり，エネルギーの値が極小値に収束していることが見てとれる．

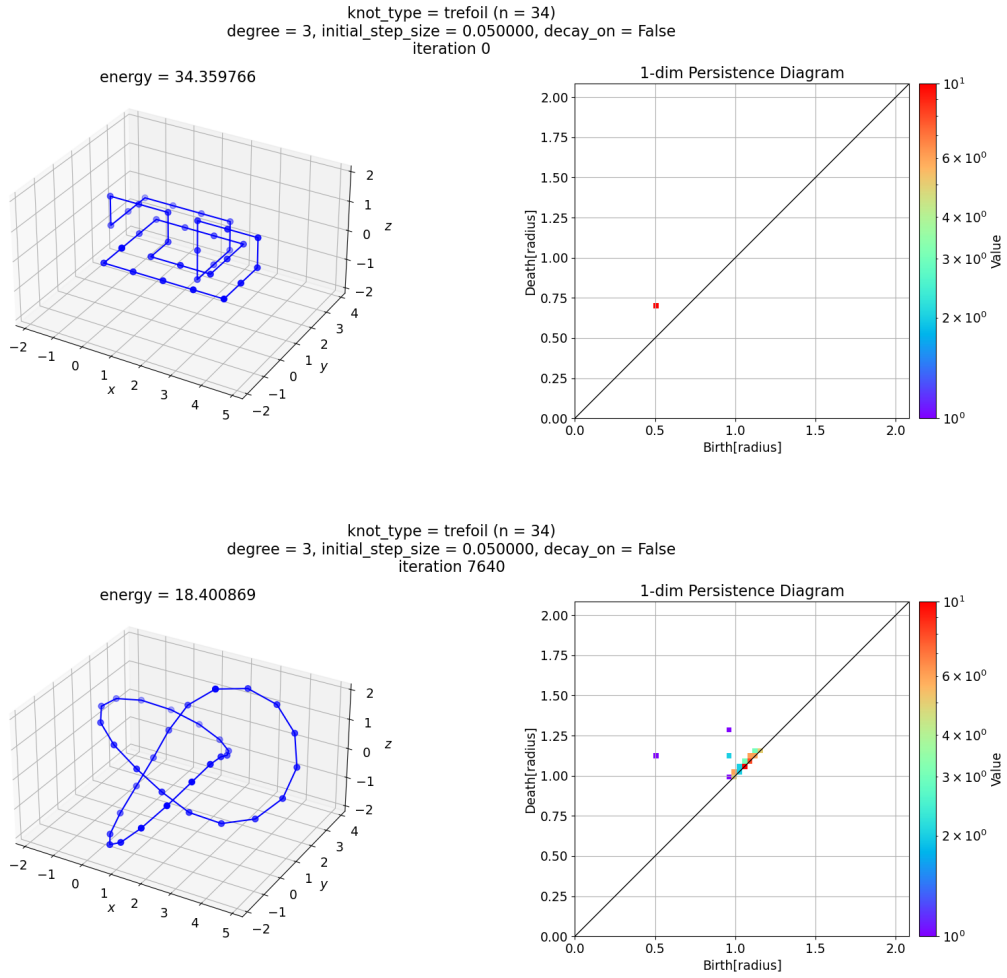


図 2: エネルギー最小化における初期値 (上段) と収束値 (下段) の trefoil (左図) とその 1 次 PD (右図)．PD の各軸の値は Alpha フィルトレーションの半径パラメータを表す．

図 2 のエネルギー極小元の PD について考察を与える．図 2 下段の PD において，特徴的な幾何構造を表している点は 4 点あることが見てとれる．このうち $(0.5, 1.1)$ 付近の点は生成半径が 0.5 であることと trefoil の各辺の長さが 1 であることから，$\mathbb{R}^3$ における閉曲線としての trefoil そのものとして得られるサイクルが定めるホモロジー生成元であると予想でき，実際に HomCloud に実装されている `optimal_1_cycle` メソッドによって逆解析を行うと図 4a のサイクルが得られる．ここで，逆解析とは PD の点に対応するホモロジー生成元を構成しているデータ点を元の点の集合の中から特定することであり，詳細は例えば文献 [11,12] 等を参照されたい．他の 3 点については図 4b–4d の stable volume shortest cycle が得られる．trefoil のエネルギー極小元の PD のこれら 4 点の消滅半径を見ると，図 4a–4c のサイクルの消滅半径は 1.13 程度でほとんど等しいことから，図 5 の

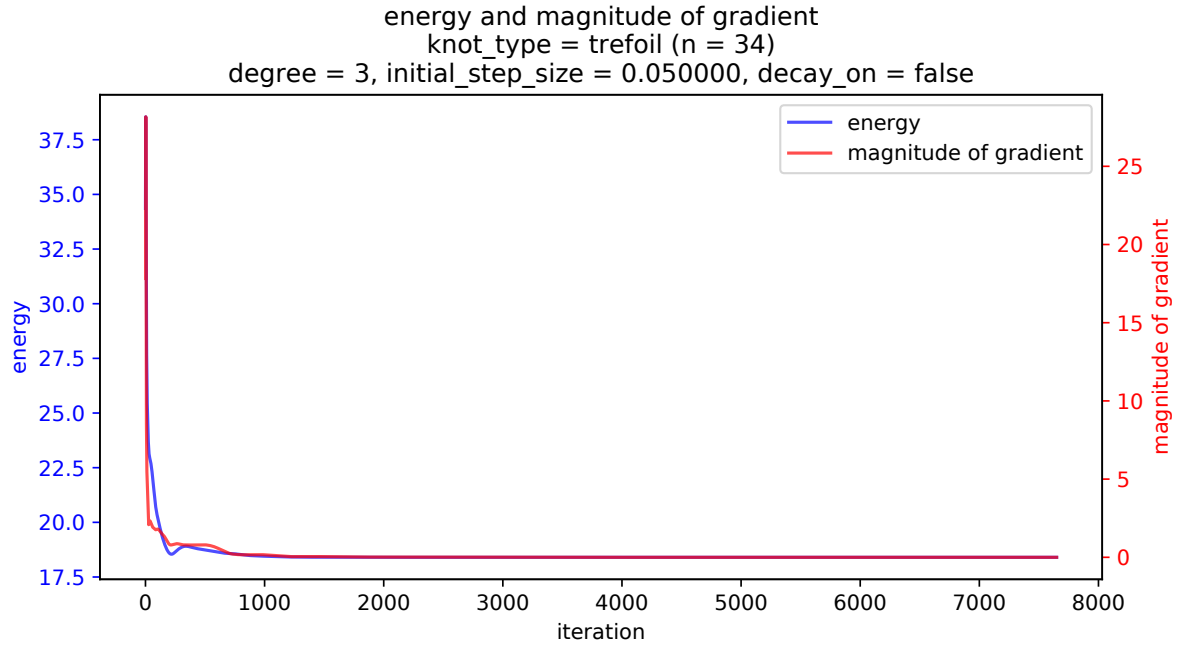
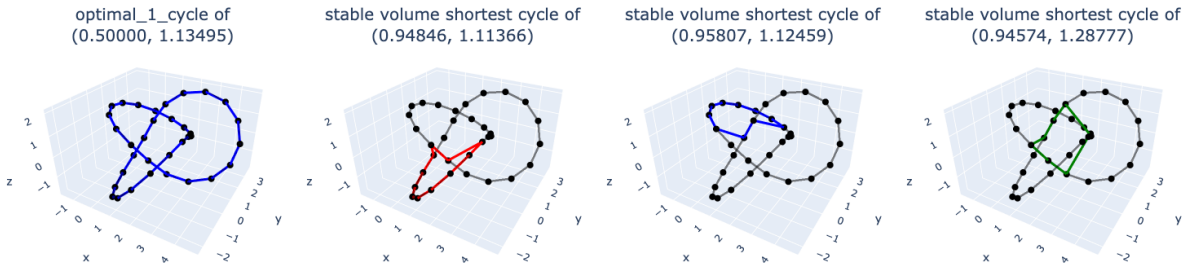


図 3: 最急降下法の各イテレーションにおけるエネルギーの値と勾配ベクトルの大きさ

trefoil のエネルギー極小元の射影図の交点で分かれる 4 つのサイクル (赤と緑の点線) のうち赤の点線で示した 3 つのサイクルに対応しており，図 4d のサイクルは図 5 の trefoil のエネルギー極小元の射影図の交点で分かれる 4 つのサイクル (赤と緑の点線) のうち緑の点線で示したサイクルに対応していると考えられる．この結果から，図 2 下段の trefoil のエネルギー極小元の PD で特徴的な点は，trefoil のエネルギー極小元の形状の対称性をエンコードしていると考えられ，trefoil のトポロジーの情報に加えて，通常のホモロジーでは抽出できない結び目の $\mathbb{R}^3$ における幾何構造を記述していることがわかる．



(a) (b) (c) (d)

図 4: trefoil のエネルギー極小元の 1 次 PD において特徴的なリング構造を表す点に対応する optimal_1_cycle および stable volume shortest cycles

当日の講演では時間が許せば，本稿で扱わなかった数値計算結果についても述べる予定である．

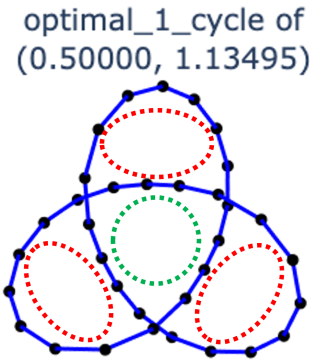


図 5: trefoil のエネルギー極小元の射影図の交点で分かれる 4 つのサイクル

4　まとめと今後の展望

本稿では，正円 S^1 上の PCD から構成される有限型 Čech フィルトレーションの 1 次 PD を決定した．また，trefoil のエネルギー最小化とその 1 次 PD について考察を与えた．

今後の展望として，折れ線結び目に限らない一般の結び目の PH の定式化がまず挙げられる．本研究では結び目の離散近似である折れ線結び目を経由することで PH の典型的な解析手法を用いたが，1 節で述べた動機に即した自然な対象は結び目の管状近傍の半径から定まるフィルトレーションの PH だろう．特異 PH [9] は本稿で扱った頂点数 N の折れ線結び目の PH の $N \to \infty$ の極限との関係という観点からも興味深い．この際，エネルギーを用いない他のアプローチとして，トーラス結び目等のパラメトリックな結び目上に等間隔に N 個の頂点を配置し，その $N \to \infty$ での PD の漸近挙動を見るというものも考えられる．

また，結び目のパーシステントホモロジーの先行研究として，Celoria-Mahler [5] は結び目の全長を固定してランダムに生成した折れ線結び目について，その PH から得られる特徴量と，結び目の埋め込みの形から定まる様々な幾何学的量との間の相関を結び目型ごとに統計解析し，結び目の全長の関数として増加する相関の存在を示している．本研究で扱った結び目のエネルギーと結び目の PD はどちらも結び目の幾何学的な複雑さを定量化しており，また結び目の対称性を反映した量であることから，直観的ではあるが何らかの関係があると予想される．Celoria-Mahler らの統計的なアプローチに倣えば，例えば 3.2 節のように結び目のエネルギー減少列に対応する PD の列を考え，PD のベクトル化手法を用いてこれらの列の間の関係を統計的に解析するといったアプローチが考えられる．

本稿で述べた結果の直接的な応用として，定理 1 に関してはランダムに生成された PCD からの空間の再構築 [4, 10]，trefoil の 1 次 PD に関しては PD のノイズとデータ点の集合の局所的な形状との間の対応づけ [2, 3] 等も考えられる．

参考文献

[1] HomCloud. `https://homcloud.dev/`, 2024-01-17 参照.

[2] Henry Adams and Michael Moy. Topology applied to machine learning: From global to local. *Frontiers in Artificial Intelligence*, Vol. 4, , 2021.

[3] Peter Bubenik, Michael Hull, Dhruv Patel, and Benjamin Whittle. Persistent homology detects curvature. *Inverse Problems*, Vol. 36, No. 2, pp. 025008, 23, 2020.

[4] Peter Bubenik and Peter T. Kim. A statistical approach to persistent homology. *Homology Homotopy Appl.*, Vol. 9, No. 2, pp. 337–362, 2007.

[5] Daniele Celoria and Barbara I. Mahler. A statistical approach to knot confinement via persistent homology. *Proc. A.*, Vol. 478, No. 2261, pp. Paper No. 20210709, 13, 2022.

[6] Herbert Edelsbrunner, David Letscher, and Afra Zomorodian. Topological persistence and simplification. Vol. 28, pp. 511–533. 2002. Discrete and computational geometry and graph drawing (Columbia, SC, 2001).

[7] Michael H. Freedman, Zheng-Xu He, and Zhenghan Wang. Möbius energy of knots and unknots. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 139, No. 1, pp. 1–50, 1994.

[8] Shinji Fukuhara. Energy of a knot. In *A fête of topology*, pp. 443–451. Academic Press, Boston, MA, 1988.

[9] Boris Goldfarb. Singular persistent homology with geometrically parallelizable computation. *Topology Proc.*, Vol. 55, pp. 273–294, 2020.

[10] Partha Niyogi, Stephen Smale, and Shmuel Weinberger. Finding the homology of submanifolds with high confidence from random samples. *Discrete Comput. Geom.*, Vol. 39, No. 1-3, pp. 419–441, 2008.

[11] Ippei Obayashi. Volume-optimal cycle: tightest representative cycle of a generator in persistent homology. *SIAM J. Appl. Algebra Geom.*, Vol. 2, No. 4, pp. 508–534, 2018.

[12] Ippei Obayashi. Stable volumes for persistent homology. *J. Appl. Comput. Topol.*, Vol. 7, No. 4, pp. 671–706, 2023.

[13] Ippei Obayashi, Takenobu Nakamura, and Yasuaki Hiraoka. Persistent homology analysis for materials research and persistent homology software: HomCloud. *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 91, No. 9, p. 091013, 2022.

[14] Jun O'Hara. Energy of a knot. *Topology*, Vol. 30, No. 2, pp. 241–247, 1991.

[15] Afra Zomorodian and Gunnar Carlsson. Computing persistent homology. *Discrete Comput. Geom.*, Vol. 33, No. 2, pp. 249–274, 2005.

[16] 池祐一, E.G. エスカラ, 大林一平, 鍛冶静雄. 位相的データ解析から構造発見へ：パーシステントホモロジーを中心に. AI/データサイエンスライブラリ “基礎から応用へ” 4. サイエンス社, 2023.

[17] 平岡裕章 (三村晶泰・竹内康博・森田善久 編). タンパク質構造とトポロジー –パーシステントホモロジー群入門–, シリーズ・現象を解明する数学. 共立出版, 2013.

パラレルセッション
会場Ｃ

A proof of the Teichmüller TQFT volume conjecture for the 7_3 knot

東京大学　大学院数理科学研究科　数理科学専攻
上村 宗一郎 (Soichiro UEMURA) *

概要

Andersen, Kashaev によって構築された一般化された位相的場の理論において，3 次元多様体の量子不変量が与えられる．閉 3 次元多様体内の双曲結び目の補空間に対して，この不変量に関する体積予想に類似の予想が提唱されている．著者は先行研究では調べられていない結び目 7_3 に対して，体積予想に類似の定理を証明した．

1　導入

位相的場の理論 (Topological Quantum Field Theory, TQFT) とは, Atiyah, Segal, Witten の公理を満たす理論のことで, 境界つき多様体のなす圏から環上の加群のなす圏への関手のことである. TQFT の例として, Jones-Witten 理論が知られている [1]. これは底空間をコンパクトな 3 次元多様体とする主 $SU(2)$ 束に対して, Chern-Simons 汎関数を用いて表される経路積分, もしくは分配関数が底空間の位相不変量を与えるという理論である．このような経路積分によって表されるような位相不変量を量子不変量と呼ぶ.

さらに, Jones-Witten 理論で得られる量子不変量と関連して, 体積予想が知られている [2, 3]. これは S^3 内の双曲結び目の色付き Jones 多項式の漸近展開に, 結び目補空間の双曲体積が現れるという予想であり, いくつかの双曲結び目に対して, その成立が証明されているが, 完全には解決されていない．この予想はトポロジーと双曲幾何の密接な関係性を示している.

一方, $SU(2)$ 等とは異なり, 構造群がコンパクトでないような Chern-Simons 理論については, 解析が難しく, 十分な理解が得られていない. Andersen, Kashaev は量子 Teichmüller 理論を用いることで, 構造群が $SL(2,\mathbb{C})$ で与えられる Chern-Simons 理論に対応することが期待される拡張された TQFT を構成した [4]. 四面体の貼り合わせの組み合わせ構造と, 四面体の正の面角の構造が与えられた向き付けられた境界つき擬 3 次元多様体 (oriented triangulated shaped pseudo 3-manifolds) を射とし, 対象を 2 次元の三角形分割された曲面とするような圏から, 対象を有限集合, 射を緩増加超関数とするような圏への関手の族を定める．ただし, 圏全体ではなく, 射の合成が定義できる categroid 上に制限した関手である．特に頂点に全順序を入れた四面体に対しては, Faddeev の量子二重対数関数 Φ_{b} や Dirac のデルタ超関数を用いて緩増加超関数が定められる．Andersen,Kashaev の TQFT

* E-mail:soichiro.uemura@ipmu.jp

から得られる分配関数 $Z_\hbar$ に対しても, その論文内で体積予想に類似の一連の予想が提唱されている.

この予想に関して, $(S^3, 4_1), (S^3, 5_2)$ に対しては, 四面体分割の任意性を除いて証明されている. さらに S^3 内の twist knot に対しては, 後述する Andersen-Kashaev の TQFT の定義で用いられるパラメータについて $\mathsf{b} > 0$ の条件下で, 四面体分割の任意性を除き, 定式化し直した形で証明されている [5].

2 Andersen-Kashaev の Teichmüller TQFT について

本節は, Andersen, Kashaev の Teichmüller TQFT [4] の結果をまとめたものである.

2.1 oriented triangulated pseudo 3-manifolds

$\mathbb{R}^3$ 内の有限個の標準 3 単体のコピーの非交和を考える. それぞれの単体は全順序の頂点を持つとする. 頂点の順序は, 辺の向きを誘導する. この非交和のいくつかの余次元 1 の面の組みを頂点の順序を保ち, 向きを逆にするアフィン同相写像によって貼り合わせ, 同一視する. この同一視による商空間 X は向き付けられた辺を持つ CW 複体であり, oriented triangulated pseudo 3-manifold と呼ぶ. $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ に対して, $\Delta_i(X)$ によって, X の i 次元の胞体を表す. 任意の $i > j$ に対して,

$$\Delta_i^j(X) = \{(a, b) \mid a \in \Delta_i(X), b \in \Delta_j(a)\}$$

と定める. また自然な写像を

$$\phi_{i,j} : \Delta_i^j(X) \to \Delta_i(X), \quad \phi^{i,j} : \Delta_i^j(X) \to \Delta_j(X)$$

と定める. また, 標準的な境界写像

$$\partial_i : \Delta_j(X) \to \Delta_{j-1}(X), \quad 0 \leq i \leq j$$

を, 順序付けられた頂点 $v_0, v_1, \ldots, v_j$ を持つ $\mathbb{R}^3$ 内の j 次元の単体 $S = [v_0, v_1, \ldots, v_j]$ に対して,

$$\partial_i S = [v_0, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_j], \quad i \in \{0, \ldots, j\}$$

となるように定める.

2.2 Shaped 3-manifolds

X を oriented triangulated pseudo 3-manifold とする.

定義 1 X 上の shape structure とは, 各四面体の各辺に対する面角と呼ばれる正の実数への割り当て

$$\alpha_X : \Delta_3^1(X) \to \mathbb{R}_+$$

であって, 各四面体の各頂点から出る 3 つの辺における面角の和が π となるようなもののことである.

shape structure を持つ oriented triangulated pseudo 3-manifold は, shaped pseudo 3-manifold と呼ばれる. X 上の shape structure の集合を $S(X)$ とする.

定義 1 より, 任意の四面体に対して, 反対側の辺同士の面角は等しくなる. 従って, 各四面体には, 反対側の辺の 3 組に対して, 和が π となる 3 つの面角が付随する.

定義 2　X 上の各 shape structure に対して, weight 関数

$$w_X : \Delta_1(X) \to \mathbb{R}_+$$

を X の各辺 e に対して, その周りの面角の和を対応させることで定義する. すなわち, 任意の $e \in \Delta_1(X)$ に対して,

$$w_X(e) = \sum_{a \in (\phi^{3,1})^{-1}(e)} \alpha_X(a)$$

と定める.

定義 3　shaped pseudo 3-manifold X の辺 e は, X の内部にあり, かつ $w_X(e) = 2\pi$ であるとき, balanced と呼ぶ. balanced でない辺は, unbalanced と呼ぶ. ある shaped pseudo 3-manifold X の全ての辺が balanced であるとき, X は, fully balanced であると言う.

2.3　四面体の反対側の辺の組の集合に対する $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 作用について

X を oriented triangulated pseudo 3-manifold とする. X 上の向きが, 各四面体の各頂点から伸びる 3 つの辺に巡回的な順序を与える. さらに, この巡回順序は, 四面体の反対側の辺の組からなる集合に対しても, 巡回順序を誘導する. 全ての四面体の反対側の辺の組からなる集合を $\Delta_3^{1/p}(X)$ とする. $\Delta_3^{1/p}(X)$ は $\Delta_3^1(X)$ に対して, 全ての四面体の反対側の辺の組によって生成された同値関係による商集合であり, 対応する商写像を

$$p : \Delta_3^1(X) \to \Delta_3^{1/p}(X)$$

とする. 歪対称な関数

$$\epsilon_{a,b} \in \{0, \pm 1\}, \quad \epsilon_{a,b} = -\epsilon_{b,a}, \quad a, b \in \Delta_3^{1/p}(X)$$

を a, b が存在する四面体が異なるとき $\epsilon_{a,b} = 0$ とし, a, b が存在する四面体が一致し, 巡回順序の下で a が b より先行するときに $\epsilon_{a,b} = 1$ とする.

2.4　leveled shaped 3-manifolds

定義 4　leveled shaped 3-manifold とは, shaped pseudo 3-manifold X と level と呼ばれる実数 $l_X \in \mathbb{R}$ からなる組 (X, l_X) のことである. $LS(X)$ で, X 上の全ての leveled shaped structure の集合を表すことにする.

定義 5　2 つの leveled shaped pseudo 3-manifold(X, l_X) と (Y, l_Y) は X と Y の胞体構造のある同型写像

$$h : X \to Y$$

と, ある関数

$$g : \Delta_1(X) \to \mathbb{R}$$

で以下の条件を満たすものが存在するとき, ゲージ同値であるという.

$$\Delta_1(\partial_1(X)) \subset g^{-1}(0)$$

$$\alpha_Y(h(a)) = \alpha_X(a) + \pi \sum_{b \in \Delta_3^1(X)} \epsilon_{p(a),p(b)} g(\phi^{3,1}(b)), \quad \forall a \in \Delta_3^1(X)$$

$$l_Y = l_X + \sum_{e \in \Delta_1(X)} g(e) \sum_{a \in (\phi^{3,1})^{-1}(e)} \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha_X(a)}{\pi} \right)$$

辺上の weight は, X と Y がゲージ同値であるとき

$$w_X = w_Y \circ h$$

が成り立つことが示されるため, ゲージ不変であるという.

定義 6　pseudo 3-manifold X 上の 2 つの leveld shape structure(α_X, l_X) と (α'_X, l'_X) は, 定義 5 において, $h : X \to X$ を恒等写像として, ゲージ同値であるとき, based ゲージ同値という.

leveled shaped pseudo 3-manifolds 上の (based) ゲージ同値関係は, level を忘れた写像のもとで, shaped pseudo 3-manifolds 上の (based) ゲージ同値関係を誘導する. X 上の based leveled shape structure のゲージ同値類の集合を $LS_r(X)$, X 上の based shape stucture のゲージ同値類の集合を $S_r(X)$ とする.

2.5　3-2 Pachner move

X を shaped pseudo 3-manifold とする. e を 3 つの異なる四面体 t_1, t_2, t_3 によって共有される X の balanced な辺とする. S を四面体 t_1, t_2, t_3 からなる X の shaped pseudo 3-submanifold とする. S には, 2 つの四面体 t_4, t_5 からなる別の三角形分割 S_e が存在し, ∂S と ∂S_e の三角形分割が一致するようにすることができる. これは辺 e を取り除くことで得られ $\Delta_1(S_e) = \Delta_1(S) \backslash e$ となる (図 1). さらに S_e 上には S 上の shape structure が誘導する weight と同じ weight を誘導する唯一の shape structure が存在する. t_i の面角を $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ とすると ($i = 1, 2, 3$ に対し, α_i を e における面角とする), 以下の関係式が成立する.

$$\alpha_4 = \beta_2 + \gamma_1, \quad \alpha_5 = \beta_1 + \gamma_2$$

$$\beta_4 = \beta_1 + \gamma_3, \quad \beta_5 = \beta_3 + \gamma_1$$

$$\gamma_4 = \beta_3 + \gamma_2, \quad \gamma_5 = \beta_2 + \gamma_3$$

定義 7　ある shaped pseudo 3-manifold Y は, S を S_e に置き換えることで X から得られるとき, X から, e に沿って shaped 3-2 Pachner move によって得られると言う.

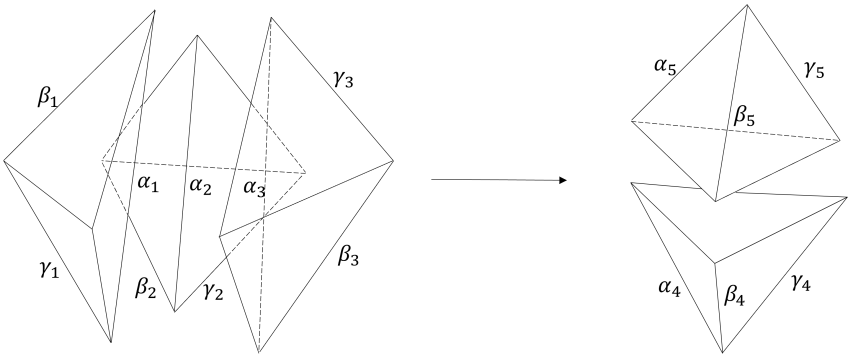


図 1　3-2 Pachner move

leveled shaped pseudo 3-manifold (Y, l_Y) は, leveled shaped pseudo 3-manifold (X, l_X) から以下の条件を満たすように得られるとき, leveled shaped 3-2 Pachner move によって得られるという. その条件は, $Y = X_e$ となる $e \in \Delta_1(X)$ があり,

$$l_Y = l_X + \frac{1}{12} \sum_{a \in (\phi^{3,1})^{-1}(e)} \sum_{b \in \Delta_3^1(X)} \epsilon_{p(a),p(b)} \alpha_X(b)$$

となることである.

この作用は, level に依存する不変量が, leveled shaped 3-2 Pachner move に対して不変であるように定められている.

定義 8　ある (leveled) shaped pseudo 3-manifold X は, 以下の条件を満たすとき, (leveled) shaped pseudo 3-manifold Y の Pachner refinement と呼ぶ. その条件とは, (leveled) shaped pseudo 3-manifold の有限列

$$X = X_1, X_2, \ldots, X_n = Y$$

で, 任意の $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対し, X_{i+1} が X_i から (leveled) shaped 3-2 Pachner move によって得られるようなものが存在することである. 2 つの (leveled) shaped pseudo 3-manifold X, Y は, X と Y の Pachner refinement X', Y' で X', Y' がゲージ同値であるようなものが存在するとき, 同値であると言う.

定義 9　oriented triangulated pseudo 3-manifold は,

$$S_r(X) \neq \emptyset$$

かつ

$$H_2(X - \Delta_0(X), \mathbb{Z}) = 0$$

を満たすとき, admissible であるという.

定義 10　2 つの admissible (leveled) shaped pseudo 3-manifold X と Y は X と Y の Pachner refinement である (leveled) shaped pseudo 3-manifold X',Y' のゲージ同値 $h' : X' \to Y'$ で、以下の条件を満たすようなものが存在するとき、admissibly equivalent という.

$$\Delta_1(X') = \Delta_1(X) \cup D_X, \quad \Delta_1(Y') = \Delta_1(Y) \cup D_Y$$

かつ

$$h'(S_r(X') \cap \tilde{\Omega}_{X',r}(D_X)^{-1}(2\pi)) \cap \tilde{\Omega}_{Y',r}(D_Y)^{-1}(2\pi) \neq \emptyset.$$

2.6 categroid

定義 11 categroid $\mathcal{C}$ は対象の族 $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ と $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ の任意の 2 つの対象 A, B の組に対する射の集合 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$ で次の 2 つの性質を満たすものから構成される.

1. 任意の 3 つの対象 A, B, $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ に対して合成可能な射と呼ばれる部分集合

$$K^{\mathcal{C}}_{A,B,C} \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,C)$$

と射の合成が結合的になるような合成写像

$$\circ : K^{\mathcal{C}}_{A,B,C} \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

が存在する.

2. 任意の対象 $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ に対して, 任意の射 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$ と合成可能な恒等射 $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A)$ が存在し,

$$\mathrm{id}_A \circ f = f \quad \text{かつ} \quad g \circ \mathrm{id}_A = g$$

を満たす.

2.7 admissible leveled shaped pseudo 3-manifold の categroid について

leveled shaped pseudo 3-manifold の同値類は, コボルディズムのなす圏 $\mathcal{B}$ の射をなし, 対象が三角形分割された曲面で, 射の合成は辺の向きを保ち, 面の向きを逆にする CW-同相写像によって境界の対応する部分を貼り合わせることで, 面角の明らかな合成と level の和を伴うものである. 境界の分割の仕方によって, 同一の leveled shaped pseudo 3-manifold であっても, $\mathcal{B}$ の異なる射と解釈され得るが, 以下に述べるような標準的な境界の分割の仕方がある.

順序付けられた頂点 v_0, v_1, v_2, v_3 を持つ $\mathbb{R}^3$ 内の四面体 $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ に対して, その符号を

$$\mathrm{sign}(T) = \mathrm{sign}(\det(v_1 - v_0, v_2 - v_0, v_3 - v_0))$$

とし, 面の符号を

$$\mathrm{sign}(\partial_i T) = (-1)^i \mathrm{sign}(T), \quad i \in 0, \ldots, 3$$

と定める.

pseudo 3-manifold X に対して, X を構成する四面体の面の符号は, X の境界の面上に次の符号関数を誘導する.

$$\mathrm{sign}_X : \Delta_2(\partial X) \to \{\pm 1\}$$

この符号関数は, X の境界を等しい個数の三角形からなる 2 つの成分に分解する. 以下では, leveld shaped pseudo 3-manifold X（の同値類) は, 対象 $\partial_- X$, $\partial_+ X$ 間の $\mathcal{B}$ 射だとみなす. つまり,

$$X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(\partial_- X, \partial_+ X).$$

Andersen,Kashaev の TQFT は, 圏 $\mathcal{B}$ 全体全体では定義されず, admissible な射の admissibe な同値類のなす sub-categroid 上で定義される.

定義 12　admissible な leveld shaped pseudo 3-manifold たちのなす categroid $\mathcal{B}_a$ は, leveled shaped pseudo 3-manifold のなす圏の sub-categroid であって, 射が admissible な leveled shaped pseudo 3-manifold の admissible な同値類からなるものである. この sub-categroid における合成写像は圏 $\mathcal{B}$ から誘導され, 合成可能な射は

$$K_{A,B,C}^{\mathcal{B}_a} = \{(X_1, X_2) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}_a}(A, B) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}_a}(B, C) \mid H_2(X_1 \circ X_2 - \Delta_0(X_1 \circ X_2), \mathbb{Z}) = 0\}$$

である.

2.8　TQFT 関手

Andersen, Kashaev の TQFT は, admissible leveled shaped pseudo 3-manifold からなるコボルディズムのなす categroid $\mathcal{B}_a$ から, 後述する緩増加超関数のなす categroid $\mathcal{D}$ への関手の族 $\{F_\hbar\}_{\hbar \in \mathbb{R}}$ を構成したものである.
(複素) 緩増加超関数のなす空間 $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ は, (複素) Schwartz 空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 上の連続線型汎関数のなす空間であった.

定義 13　categroid $\mathcal{D}$ は, 対象として有限集合をもち, 2 つの有限集合 n, m に対して, n から m への射の集合は,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(n, m) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n \sqcup m})$$

である.

$\mathcal{L}(S(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m))$ で, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ から, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$ への連続な線型写像のなす空間を表す.
任意の $\phi \in L(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathbb{S}'(\mathbb{R}^m)), f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ に対して,

$$\phi(f)(g) = \tilde{\phi}(f \otimes g)$$

で定義される同型写像

$$\tilde{\cdot} : \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n \sqcup m}) \tag{1}$$

が存在する.
任意の $A \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m))$ に対して, 次のように定義される唯一の随伴 $A^* \in \mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^m), \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n))$ が存在する.
任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m), g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に対して,

$$A^*(f)(g) = \overline{A(\overline{g})(\overline{f})}$$

定義 14　関手 $F : \mathcal{B}_a \to D$ は,

$$F(X^*) = F(X)^*$$

となるとき $*-$ 関手と呼ばれる. ここで X^* は X に X と反対の向きを入れたもの,$F(X)^*$ は $F(X)$ の双対写像である.

Andersen-Kashaev の TQFT における関手を構成するのに重要な役割を果たすのが, Faddeev の量子二重対数関数 [6] である.

定義 15　Faddeev の量子二重対数関数は, $|\Im z| < \frac{1}{2}|\mathsf{b}+\mathsf{b}^{-1}|$ で定義される 2 つの複素変数 z, b を引数とする関数

$$\Phi_{\mathsf{b}}(z) \coloneqq \exp\left(\int_C \frac{e^{-2izw}dw}{4\sinh w\mathsf{b}\sinh(\frac{w}{\mathsf{b}})w}\right)$$

である. ここで, C は, 実軸に沿って進み, 原点の近傍で上半平面へ逸れ、関数方程式

$$\Phi_{\mathsf{b}}(z-i\mathsf{b}^{\pm 1}/2) = (1+e^{2\pi\mathsf{b}^{\pm 1}z})\Phi_{\mathsf{b}}(z+i\mathsf{b}^{\pm 1}/2)$$

によって, $z \in \mathbb{C}$ 上の有理関数へ拡張する。

$\Phi_{\mathsf{b}}(z)$ は,

$$\hbar \coloneqq (\mathsf{b}+\mathsf{b}^{-1})^{-2}$$

によって定義される $\hbar$ を通じてのみ, b に依存する.

定理 16（Andersen, Kashaev）　任意の $\hbar \in \mathbb{R}_+$ に対して, 以下の条件を満たす唯一の $*-$ 関手が存在する.

任意の $A \in \mathrm{Ob}\mathcal{B}_a$ に対して, $F_\hbar(A) = \Delta_2(A)$ であり, 任意の admissibly leveled shaped pseudo 3-manifold (X, l_X) に対して, $\mathcal{D}$ における対応する射は,

$$F_\hbar(X, l_X) = Z_\hbar(X)e^{i\pi\frac{l_X}{4\hbar}} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\Delta_2(\partial X)})$$

となる. ここで, $Z_\hbar(X)$ は, $\mathrm{sign}(T) = 1$ となる四面体 T に対して,

$$Z_\hbar(T)(x) = \delta(x_0+x_2-x_1)\frac{\exp\left(2\pi i(x_3-x_2)(x_0+\frac{\alpha_3}{2i\sqrt{\hbar}})+\pi i\frac{\varphi_T}{4\hbar}\right)}{\Phi_{\mathsf{b}}\left(x_3-x_2+\frac{1-\alpha_1}{2i\sqrt{\hbar}}\right)}$$

となるように定められる. ここで, $\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数であり,

$$\varphi_T \coloneqq \alpha_1\alpha_3 + \frac{\alpha_1-\alpha_3}{3} - \frac{2\hbar+1}{6}, \quad \alpha_i \coloneqq \frac{1}{\pi}\alpha_T(\partial_0\partial_i T), \quad i \in \{1,2,3\},$$
$$x_i \coloneqq x(\partial_i(T)), \quad x : \Delta_2(\partial T) \to \mathbb{R}.$$

$Z_\hbar(X)$ や $Z_\hbar(T)$ を分配関数と呼ぶ. admissible pseudo 3-manifold X に対して, Andersen-Kashaev の TQFT 関手は, 次の well-defined な関数を与える.

$$F_\hbar : LS_r(X) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\partial X}).$$

$\partial X = \emptyset$ のとき, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{\partial X}) = \mathbb{C}$ であり, この場合は $LS_r(X)$ 上の複素数値関数を得る. 特に, 任意の fully balanced admissible leveled shaped 3-manifold 上の関手 $F_\hbar$ の値は, 複素数であり, これは, 2 つの fully balanced admissible leveled shaped 3-manifold が admissibly equivalent ならば, $F_\hbar$ は, これらに同一の複素数を割り当てるという意味の下で, 位相不変量である. 以下の節では, b を

$$\hbar \coloneqq \left(\mathsf{b}+\mathsf{b}^{-1}\right)^{-2} \in \mathbb{R}_+$$

となるようにとる.

2.9 one vertex H-triangulation

(M,K) を向き付けられた閉 3 次元多様体 M と M に含まれる結び目 K の組とする. (M,K) の one vertex H-triangulation とは, 頂点の数が 1 で, 結び目 K を表す 1 つの 辺を伴う四面体分割のことである.

2.10 記法

oriented triangulated pseudo 3-manifold X を, それを構成する頂点が $0,1,2,3$ で順序付けられた $T_1,\cdots,T_N$ の N 個の四面体と辺の向きを保つ面間の貼り合わせによる同値関係 $\sim$ を用いて $X=(T_1,\ldots,T_N,\sim)$ と表すことにする. X 上の shape structure $S(X)$ に対応する集合 $\mathscr{S}_X$ を

$$\mathscr{S}_X := \left\{ \alpha_X = (2\pi a_1, 2\pi b_1, 2\pi c_1, \ldots, 2\pi a_N, 2\pi b_N, 2\pi c_N) \in (0,\pi)^{3N} \mid \forall k \in \{1,\ldots,N\}, a_k+b_k+c_k = \frac{1}{2} \right\}$$

と表し, $\mathscr{S}_X$ も shape structure と呼ぶ.

ここで $2\pi a_k$(各々 $2\pi b_k, 2\pi c_k$) は, 四面体 T_k の辺 $\overrightarrow{01}$ (各々 $\overrightarrow{02}, \overrightarrow{03}$) とその反対側の辺上の面角の値を表す.

a_k, b_k, c_k が $[0, \frac{1}{2}]$ に値を持つような $\mathscr{S}_X$ の閉包を $\overline{\mathscr{S}_X}$ と表し, weight 関数についても、拡張して考える.

X 上の fully balanced な shape structure を angle structure と呼び $\mathscr{A}_X := \{\alpha_X \in \mathscr{S}_X \mid \forall e \in \Delta_1(X), w_X(e) = 2\pi\}$ で定め, X 上の拡張された angle structure を $\overline{\mathscr{A}_X} := \{\alpha_X \in \overline{\mathscr{S}_X} \mid \forall e \in \Delta_1(X), w_X(e) = 2\pi\}$ で定める.

shaped pseudo 3-manifold を根底となる oriented triangulated pseudo 3-manifold X と shape structure $\alpha_X \in \mathscr{S}_X$ の組 (X,α_X) として表すこともある. (X,α_X) 上の weight 関数を w_{X,α_X} と表す.

3 主定理

著者は, S^3 内の結び目 7_3 に対して, 条件 $\mathsf{b}>0$ の下で, 以下の定式化し直した定理を証明した [7].

定理 17（主定理） S^3 に含まれる双曲結び目 7_3 に対して, $\mathbb{R}_{>0}\times\mathbb{C}$ 上の以下の性質を満たす関数 $J_{S^3,7_3}(\hbar,x)$ が存在する.

(1) S^3 内の結び目 7_3 の補空間のある理想四面体分割 X と X 上の任意の angle structure $\alpha_X \in \mathscr{A}_X$ に対して, ゲージ不変な面角 に関する実線形結合 $\lambda(\alpha_X)$, $\mu(\alpha_X)$ と, (ゲージ不変とは限らない) 面角に関する実 2 次多項式 $\phi(\alpha_X)$ で, 次式が成立するようなものが存在する.

$$Z_\hbar(X,\alpha_X) = e^{i\frac{\phi(\alpha_X)}{\hbar}} \int_{\mathbb{R}+\frac{i\mu(\alpha_X)}{\sqrt{\hbar}}} J_{S^3,7_3}(\hbar,x) e^{-\frac{x\lambda(\alpha_X)}{\sqrt{\hbar}}} dx$$

(2) $(S^3,7_3)$ のある one vertex H-triangulation Y に対して, 結び目 7_3 を表す辺 $\vec{K}$ を含む四面体を Z とする. 全ての $\mathsf{b}>0$, $w_{Y,\tau}$ が辺 $\vec{K}$ 上で 0 で, その他の辺上で 2π となるような全ての

$\tau \in \overline{\mathscr{S}_Z} \times \mathscr{S}_{Y\setminus Z}$ に対して, 面角に関する実 2 次多項式 $\varphi(\tau)$ で, 次式が成立するようなものが存在する.

$$\lim_{\alpha_Y \to \tau, \alpha_Y \in \mathscr{S}_Y} \Phi_{\mathsf{b}}\left(\frac{\pi - w_{Y,\alpha_Y}(\vec{K})}{2\pi i\sqrt{\hbar}}\right) Z_\hbar(Y,\alpha_Y) = e^{i\frac{\varphi(\tau)}{\hbar} - i\frac{\pi}{12}} J_{S^3,7_3}(\hbar,0)$$

(3) S^3 内の結び目 7_3 の補空間の双曲体積は, 以下の極限によって得られる.

$$\lim_{\hbar \to 0^+} 2\pi\hbar \log |J_{S^3,7_3}(\hbar,0)| = -\mathrm{Vol}(S^3\setminus 7_3)$$

4 主定理の証明の概略

証明の方針は, [5] と同様の方針で行い以下に述べる. まず, S^3 内に埋め込まれた結び目 7_3 に対して, 結び目を 1 つの四面体の 1 辺とする S^3 の one vertex H-triangulation を求め, 次にその結び目を 1 点に潰すことで補空間 $S^3\setminus 7_3$ の理想四面体分割を求める. このようにして得られた四面体分割に対して, 分配関数の計算を行う. この計算結果により, 定理 17(1), (2) の成立が示される. さらに, 上述で求めた補空間の理想四面体分割に, 完備双曲計量に対応するような面角の構造を与えることができる幾何性を証明する. 一方, 関数 $J_{S^3,7_3}$ は, 積分経路が angle structure の元でパラメータ付けられた積分で表されるが, 特に, angle structure の元として, この完備双曲計量に対応する面角を選び, $J_{S^3,7_3}$ を古典二重対数関数を用いた積分と比較して評価することで, 定理 17(3) が証明される. さらに, [7] の付録では, 鞍点法を用いた近似計算によっても, 定理 17(3) の成立を確かめた.

参考文献

[1] Witten, E.: Quantum field theory and the Jones polynomial. Comm. Math. Phys. **121**(3), 351–399 (1989)

[2] Kashaev, R. M.: The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm. Lett. Math. Phys. **39**(3), 269–275 (1997)

[3] Murakami, H., Murakami, J.: The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot. Acta Math. **186**(1), 85-104 (2001)

[4] Andersen, J.E., Kashaev, R.: A TQFT from quantum Teichmüller theory. Comm. Math. Phys. **330**(3), 887–934 (2014)

[5] Ben, A.F., Guéritaud, F., Piguet-Nakazawa, E.: Geometric triangulations and the Teichmüller TQFT volume conjecture for twist knots. arXiv: 1903.09480 (2019)

[6] Faddeev, L. D.: Discrete Heisenberg-Weyl group and modular group. Lett. Math. Phys. **34**(3), 249-254 (1995)

[7] Uemura, S. : A proof of the Teichmüller TQFT volume conjecture for 7_3 knot. arXiv: 2307.12848 (2023)

Lagrange のコマに付随する楕円ファイバー空間とそのモノドロミーについて

立命館大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻数理科学コース

石川元稀 (Genki ISHIKAWA) *

概要

Lagrange のコマは固定点の周りで回転する剛体の力学系で，特に固定点と重心を通る軸に関して回転対称性を持つものを言う．この力学系は可積分系の典型例であり，第一積分（保存量）を並べて得られるモーメント写像は楕円曲線を一般ファイバーとするファイバー空間を誘導する．この講演ではこの楕円ファイバー空間の特異跡を分析した結果について述べる．さらにこの楕円ファイバー空間のモノドロミーに関する結果についても述べる．

1　導入

本稿は，Lagrange のコマの複素代数幾何学的側面についての研究 [Ish] の紹介である．

一定重力の下で固定点の周りで回転する剛体の力学系は解析力学や幾何学的力学系理論の典型例の 1 つである．この力学系が可積分系になるのは，Euler のコマ，Lagrange のコマ，Kowalevski のコマ，Goryachev-Chaplygin のコマの 4 つの場合に限ることが S. L. Ziglin[Zig82, Zig83] によって示されている．

可積分系は複素代数幾何学の観点からも研究が行われている．上で述べた 4 つの可積分なコマのうち Euler のコマについて，積分曲線の族やスペクトル曲線の族が定めるファイバー空間（これらは楕円ファイバー空間になる）の複素代数幾何学が多羅間大輔，成木勇夫，J.-P. Françoise らによって研究されている [NT12, TF14, FT15]．これらの一連の研究では，Euler のコマに付随する楕円ファイバー空間の特異点や退化の解析が，作用変数や Birkhoff 標準形（Morse 函数における標準形のシンプレクティック版にあたるもの）の計算へ応用できることが述べられている．

固定点と剛体の重心を通る軸に関して回転対称性を持つものは上で述べた可積分なコマの一種であり，これを Lagrange のコマと呼ぶ．Lagrange のコマの場合，第一積分（保存量）を並べて得られるベクトル値写像（モーメント写像）の複素化を考えることで楕円ファイバー空間が構成できる．本研究では，この楕円ファイバー空間の特異点や退化を複素代数幾何学の観点から考察した．主結果として，この楕円ファイバー空間の特異跡の詳細を明らかにし，それによりモノドロミー表現の特徴付けを得た．

* E-mail:ra0070fs@ed.ritsumei.ac.jp

2 Lagrange のコマ

この節では，まず固定点周りでの剛体の回転運動の数学的定式化を与える．そして，Lagrange のコマが自由度 2 の完全積分可能な Hamilton 系であることを見る．詳細は例えば [Aud99] 等を参照されたい．

固定点周りでの剛体の回転運動は 3 次元回転群とその Lie 環の半直積群 $SO(3) \ltimes \mathfrak{so}(3)$ の Lie 環の双対空間 $\left(\mathfrak{so}(3) \ltimes \mathbb{R}^3\right)^*$ 上の Lie-Poisson 構造に関する Hamilton 系として以下のようにして与えられる．ただし，この双対空間 $\left(\mathfrak{so}(3) \ltimes \mathbb{R}^3\right)^*$ は自然な同一視によって $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ と見做せるため，この先の議論は $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 上で考えることとする．

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 上の Lie-Poisson 構造は，$F, G \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right)$ に対して

$$\{F, G\}(\Gamma, M) = -\langle \Gamma, (\nabla_M F) \times (\nabla_\Gamma G) \rangle - \langle \Gamma, (\nabla_\Gamma F) \times (\nabla_M G) \rangle - \langle M, (\nabla_M F) \times (\nabla_M G) \rangle,$$

で定義される．ここで，$(\Gamma, M) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$，であり $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^3$ 上の標準内積を表す．さらに $(\nabla_\Gamma F, \nabla_M F)$ は $F \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right)$ の $(\Gamma, M) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ での勾配を表し，

$$(\mathsf{d}F)_{(\Gamma,M)}(\xi, \eta) = \langle \nabla_\Gamma F(\Gamma, M), \xi \rangle + \langle \nabla_M F(\Gamma, M), \eta \rangle, \ (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \cong T_{(\Gamma,M)}\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right),$$

で定まる．

Hamilton 函数として剛体の全エネルギーを表す $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 上の函数

$$H(\Gamma, M) = \frac{1}{2}\langle M, \Omega \rangle + \langle \Gamma, \chi \rangle, \ \Omega = \mathcal{J}^{-1} M,$$

を考える．ここで，$J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, J_3)$ は慣性行列であり，$\chi \in \mathbb{R}^3$ は剛体の重心を表すベクトルである．

Poisson 多様体 $\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \{\cdot, \cdot\}\right)$ 上の Hamilton 函数 H に関する Hamilton 方程式

$$\begin{cases} \dot{\Gamma} = \Gamma \times \Omega, \\ \dot{M} = M \times \Omega + \Gamma \times \chi, \end{cases} \tag{2.1}$$

は Euler-Poisson 方程式と呼ばれており，固定点周りでの剛体の回転運動を記述している．この Hamilton 系は次のようにして自由度 2 の Hamilton 系と考えることができる．

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 上の 2 つの函数

$$C_1(\Gamma, M) = \langle \Gamma, \Gamma \rangle, \ C_2(\Gamma, M) = \langle \Gamma, M \rangle,$$

は Casimir 函数，すなわち任意の函数 $f \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\right)$ に対して，$\{C_1, f\} = 0, \{C_2, f\} = 0$ を満たす $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ 上の函数である．言い換えると C_1, C_2 は $\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \{\cdot, \cdot\}\right)$ 上の任意の Hamilton 系に関する第一積分（保存量）である．

一般に Poisson 多様体はシンプレクティック多様体の非交和として書けることが知られており，特に今の場合には Casimir 函数 C_1, C_2 で定まる集合

$$\mathcal{O}_a \coloneqq \left\{ (\Gamma, M) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \langle \Gamma, \Gamma \rangle = 1, \langle \Gamma, M \rangle = a \right\}, \ a \in \mathbb{R},$$

は Poisson 多様体 $\left(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \{\cdot,\cdot\}\right)$ のシンプレクティック葉の中で次元が最も高いもの（$\dim \mathcal{O}_a = 4$）を与えている．したがって Euler-Poisson 方程式 (2.1) を $\mathcal{O}_a$ 上に制限することにより，固定点周りでの剛体の回転運動を自由度 2 の Hamilton 系と考えることができる．

Lagrange のコマはこの Hamilton 系の特別な場合で，慣性行列 $\mathcal{J}$ と質量重心 $\chi \in \mathbb{R}^3$ が条件

$$J_1 = J_2,\, \chi_1 = \chi_2 = 0,$$

を満たすものを言う．簡単な計算によって Lagrange のコマは 2 つの函数的に独立かつ Poisson 括弧に対して可換な第一積分

$$H(\Gamma, M) = \frac{1}{2}\langle M, \Omega\rangle + \langle \Gamma, \chi\rangle,\, L(\Gamma, M) = -M_3,$$

を持つことが確認できる．したがって Lagrange のコマは完全積分可能系である．

最後に後のために，これまでに述べた 4 つの第一積分 C_1, C_2, H, L を [GZ98] での記述にしたがって以下の通りに書き直す．

$$\begin{aligned}
H_1 &\coloneqq C_1 = \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2,\\
H_2 &\coloneqq C_2/J_1 = \Gamma_1\Omega_1 + \Gamma_2\Omega_2 + (m+1)\,\Gamma_3\Omega_3,\\
H_3 &\coloneqq H/J_1 = \frac{1}{2}\left(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + (m+1)\,\Omega_3^2\right) - \Gamma_3,\\
H_4 &\coloneqq -L/J_3 = \Omega_3.
\end{aligned}$$

ただし，適切な変数変換によって $\chi_3/J_1 = -1$ とし，さらに $m \coloneqq (J_3 - J_2)/J_1$ と置いている．

3　楕円ファイバー空間

この節では，Weierstraß標準形で与えられる楕円ファイバー空間の一般的な事柄ついて述べる．詳しいことや関連する内容については [Mir83]，[Kas77]，[Nak88]，[Nak02] などを参照されたい．

S を（コンパクト）複素多様体とし，$\mathcal{L}$ を S 上の正則直線束とする．a, b をそれぞれ $\mathcal{L}^{\otimes 4}$, $\mathcal{L}^{\otimes 6}$ の正則切断であって，$\Delta \coloneqq a^3 - 27b^2$ が S 上で恒等的に 0 ではないものとする．

S の構造層 $\mathcal{O}_S$ を S 上の自明な直線束と同一視し，ベクトル束 $\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_S$ を考える．さらにこのベクトル束の射影化，すなわち $\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_S$ における零切断の像の補集合を自然な $\mathbb{C}^*$-作用で割ることで得られる S 上の $\mathbb{CP}^2$-束を $P\left(\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_S\right)$ で表す．

$P\left(\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_S\right)$ の斉次ファイバー座標 $(X : Y : Z)$ をとり，方程式

$$Y^2Z = 4X^3 - aXZ^2 - bZ^3,$$

で定まる $P\left(\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_S\right)$ 内の超曲面 $\mathcal{W}$ を考える．標準射影 $\pi\colon P\left(\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_S\right) \to S$ を超曲面 $\mathcal{W}$ 上に制限することにより，楕円ファイバー空間 $\pi_{\mathcal{W}}\colon \mathcal{W} \to S$ が得られる．これを楕円ファイバー空間の Weierstraß標準形と呼ぶ．この楕円ファイバー空間について，次が成り立つ．

Proposition 3.1. ([Mir83, Proposition 2.1]) A, B, D をそれぞれ $a = 0$, $b = 0$, $\Delta = 0$ が定める S 上の因子とする．さらに $P\left(\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_S\right)$ の点を $((X : Y : Z)\,; p)$ で表す．ただし，$p \in S$ である．このとき，次が成り立つ．

1. $\mathcal{W}$ は $Z=0$ においてなめらかであり，$(X:Y:Z)=(0:1:0)$ で与えられる集合は楕円ファイバー空間 $\pi_{\mathcal{W}}$ の正則切断を定める．
2. $\mathcal{W}$ が $((X:Y:Z);p)$ で特異点を持つならば，$Y=0$ かつ $Z\neq 0$ である．
3. $\mathcal{W}$ が $((0:0:Z);p)$ で特異点を持つことと，$p\in\mathrm{supp}(A)\cap\mathrm{supp}(B)$，かつ B は p で特異点を持つことは同値である．
4. $\mathcal{W}$ が $((X:0:Z);p)$（ただし，$X\neq 0$）で特異点を持つことと，$p\notin\mathrm{supp}(A)\cup\mathrm{supp}(B)$，かつ D は p で特異点を持つことは同値である．このとき，$(X:0:Z)=(-3b:0:2a)$ である．

4　Lagrange のコマに付随する楕円ファイバー空間

4.1　モーメント写像の複素化とアファイン曲線族

Lagrange のコマについて，モーメント写像 $\mathcal{EM}\coloneqq(H_3,H_4):\mathcal{O}_a\to\mathbb{R}^2$ から誘導される楕円ファイバー空間を複素代数幾何学の観点から考察するため，以降は上で述べた全ての設定を複素化して考える．つまり，モーメント写像は

$$\mathcal{O}_a^{\mathbb{C}}\coloneqq\left\{(\Gamma,M)\in\mathbb{C}^3\times\mathbb{C}^3\;\middle|\;H_1(\Gamma,M)=1,H_2(\Gamma,M)=a\right\},\tag{4.1}$$

上で定義されたベクトル値函数 $\mathcal{EM}\colon\mathcal{O}_a^{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}^2$ とする．さらに，H_4 に関する Hamilton 流が定める変換群（$\cong S^1$）の複素化を $\mathbb{C}^*\cong\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ とする．このとき $\mathbb{C}^*$ はモーメント写像 $\mathcal{EM}\colon\mathcal{O}_a^{\mathbb{C}}\to\mathbb{C}^2$ の一般ファイバー

$$\mathcal{EM}^{-1}(h_3,h_4)=\left\{(\Gamma,M)\in\mathcal{O}_a^{\mathbb{C}}\;\middle|\;H_3(\Gamma,M)=h_3,H_4(\Gamma,M)=h_4\right\},$$

に自由に作用し，その商多様体 $\mathcal{EM}^{-1}(h_3,h_4)/\mathbb{C}^*$ は Weierstraß標準形

$$y^2=4x^3-g_2x-g_3,\tag{4.2}$$

で定まる楕円曲線のアファイン部分と同型になる．ただし g_2, g_3 は

$$a_1=2(1+m)h_4,\ a_2=2h_3+(1+m)mh_4^2,\ \alpha=-2a,$$

で与えられる変数 a_1, a_2, α を用いて

$$g_2=1+\frac{a_2^2}{12}-\frac{\alpha}{4}a_1,\ g_3=\frac{a_2^3}{216}+\frac{a_1^2}{16}-\frac{\alpha}{48}a_1a_2-\frac{1}{6}a_2+\frac{\alpha^2}{16},\tag{4.3}$$

で定義される．

Weierstraß標準形 (4.2) が定める 3 次曲線を $(a_1,a_2)\in\mathbb{C}^2$ でパラメータ付けされた曲線 $C_{(a_1,a_2)}$ と考える．次で述べるように曲線の族 $\left\{C_{(a_1,a_2)}\right\}_{(a_1,a_2)\in\mathbb{C}^2}$ から複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$ 上の（特異な）楕円ファイバー空間 W を構成できる．

4.2　楕円ファイバー空間 W の構成とその特異跡（主結果 1）

$C_{(a_1,a_2)}$ を (4.2) 式，(4.3) 式で定義され，$(a_1,a_2)\in\mathbb{C}^2$ でパラメータ付けされたアファイン曲線とする．3 次曲線の族 $\left\{C_{(a_1,a_2)}\right\}_{(a_1,a_2)\in\mathbb{C}^2}$ が誘導する $\mathbb{CP}^2$ 上の楕円ファイバー空間は次のように構成される．

まずアファイン座標 $(a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ を $\mathbb{CP}^2$ の非斉次座標と考える．すなわち $(A_0 : A_1 : A_2) \in \mathbb{CP}^2$ としたとき，$a_1 = A_1/A_0$, $a_2 = A_2/A_0$ とする．このとき，(4.3) 式で定義される g_2, g_3 はそれぞれ正則切断

$$g_2^* \in H^0\left(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}\left(\mathcal{L}^{\otimes 4}\right)\right), g_3^* \in H^0\left(\mathbb{CP}^2, \mathcal{O}\left(\mathcal{L}^{\otimes 6}\right)\right),$$

を誘導する．ここで，$\mathcal{L} \coloneqq \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}(1)$ である．$\mathbb{CP}^2$ 上の $\mathbb{CP}^2$-束 $P\left(\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}\right) \to \mathbb{CP}^2$ の斉次ファイバー座標 $(X : Y : Z)$ をとり，方程式

$$Y^2 Z = 4X^3 - g_2^* X Z^2 - g_3^* Z^3,$$

が定める $P\left(\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}\right)$ 内の超曲面を W とする．標準射影 $\pi\colon P\left(\mathcal{L}^{\otimes 2} \oplus \mathcal{L}^{\otimes 3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^2}\right) \to \mathbb{CP}^2$ を W 上に制限することにより，楕円ファイバー空間 $\pi_W\colon W \to \mathbb{CP}^2$ を得る．

Proposition 3.1 より，楕円ファイバー空間 $\pi_W\colon W \to \mathbb{CP}^2$ の特異跡は

$$\left(g_2^*\right)^3 - 27\left(g_3^*\right)^2 = 0,$$

で定義される $\mathbb{CP}^2$ 上の因子 D で与えられる．この特異跡 D の詳細を次の定理によって明らかにした．

Theorem 4.1. ([Ish]) 特異跡 D は重複度が 7 の $A_0 = 0$ で定義される直線と 4 つの尖点と 2 つの通常二重点を特異点として持つ特異 5 次曲線からなる．さらにこの 5 次曲線は直線 $A_0 = 0$ と $(0 : 1 : 0)$, $(0 : 0 : 1)$ の 2 点で接する．

詳しい証明は [Ish] を参照していただきたい．

Notation 4.2. 上の定理で述べた D の成分である直線 $A_0 = 0$ と特異 5 次曲線をそれぞれ L, Q で表す．

5　楕円ファイバー空間 π_W のモノドロミー（主結果 2）

前節で構成した楕円ファイバー空間 $\pi_W\colon W \to \mathbb{CP}^2$ のモノドロミーについて述べる．

特異跡 D の成分である特異 5 次曲線 Q のアファイン部分を Q_{aff} で表す．このとき $\mathbb{CP}^2 \setminus \mathrm{supp}\,(D)$ は $\mathbb{C}^2 \setminus Q_{\mathrm{aff}}$ と自然に同一視されるため，基本群の同型

$$\pi_1\left(\mathbb{CP}^2 \setminus \mathrm{supp}\,(D), *\right) \cong \pi_1\left(\mathbb{C}^2 \setminus Q_{\mathrm{aff}}, *\right),$$

が得られる．

次に $\pi_1\left(\mathbb{C}^2 \setminus Q_{\mathrm{aff}}, *\right)$ の生成元について，Q_{aff} の特異点の周りでの関係を見る．Q_{aff} の滑らかな点全体の集合を $\mathrm{Reg}\,(Q_{\mathrm{aff}})$ で表す．$\mathrm{Reg}\,(Q_{\mathrm{aff}})$ の連結成分のうち閉包に同じ通常二重点を持つ二つの連結成分について，各々の成分に対応する $\pi_1\left(\mathbb{C}^2 \setminus Q_{\mathrm{aff}}, *\right)$ の生成元を図 1 のように a_1, b_1 とする．同様に閉包に同じ尖点を持つ二つの連結成分について，各々の成分に対応する $\pi_1\left(\mathbb{C}^2 \setminus Q_{\mathrm{aff}}, *\right)$ の生成元を図 2 のように a_2, b_2 とする．

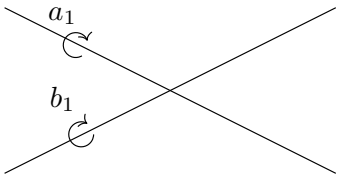


図 1　通常二重点

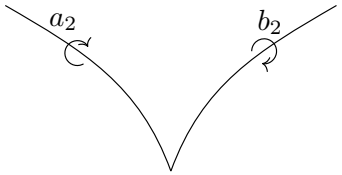


図 2　尖点

このとき Zariski–van Kampen の定理より [Zar29, Kam33]，a_1 と b_1，a_2 と b_2 はそれぞれ関係式

$$a_1 b_1 = b_1 a_1, \tag{5.1}$$
$$a_2 b_2 a_2 = b_2 a_2 b_2, \tag{5.2}$$

を満たす．

楕円曲面に現れる全ての特異ファイバーについて，それぞれの型に対応するモノドロミー行列が小平邦彦 [Kod63] によって決定されている．これまで議論してきた楕円ファイバー空間 π_W の場合，$\mathrm{Reg}\,(Q_{\mathrm{aff}})$ の点上の特異ファイバーは I_1 型であることが確かめられる．したがって対応するモノドロミー行列は $SL\,(2,\mathbb{Z})$ の共役の違いを除き $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で与えられることが分かる．これらの結果をもとに，楕円ファイバー空間 $\pi_W \colon W \to \mathbb{CP}^2$ のモノドロミーが以下のように特徴付けられること示した．

Theorem 5.1. ([Ish]) $p \in \mathbb{C}^2 \setminus Q_{\mathrm{aff}}$ を基本群 $\pi_1\left(\mathbb{C}^2 \setminus Q_{\mathrm{aff}}, p\right)$ の基点とする．このとき $H_1\left(\pi_W^{-1}(p), \mathbb{Z}\right)$ の適当な基底に対して，楕円ファイバー空間 $\pi_W \colon W \to \mathbb{CP}^2$ のモノドロミー表現は次のように特徴付けられる．

- $\mathrm{Reg}\,(Q_{\mathrm{aff}})$ の各連結成分に対応するモノドロミー行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

  のいずれかである．
- 二つの連結成分が閉包で同じ通常二重点を持つ時，対応するモノドロミー行列は等しくなる．
- 二つの連結成分が閉包で同じ尖点を持つ時，対応するモノドロミー行列は互いに異なる．

6　おわりに

本稿では頁数の関係上，楕円ファイバー空間 π_W の特異ファイバーの分類に関する結果を扱わなかった．最後にこのことについて簡単に紹介する．詳細は [Ish] を参照していただきたい．

よく知られている結果として，楕円曲面に現れる特異ファイバーは小平邦彦 [Kod63] によって完全に分類されている．しかし，本研究で議論した楕円ファイバー空間 π_W は全空間が 3 次元の楕円ファイバー空間であり，小平の分類とは状況が異なる．

3 次元楕円ファイバー空間の場合，「特異跡の特異点が通常二重点に限る」という仮定のもとで R. Miranda [Mir83] が特異ファイバーの完全な分類を与えている．この場合，特異跡のなめらかな点上

の特異ファイバーは小平の分類に属する．一方，特異点（通常二重点）上の特異ファイバーには小平の分類に属さないものが現れるが，いずれも小平型の特異ファイバーの適当な成分を潰したものとして与えられることが述べられている．

楕円ファイバー空間 π_W は Theorem 4.1 より Miranda の仮定を満たしていないが，全空間と底空間を適切に変形することで楕円ファイバー空間 π_W と双有理同値な Miranda の 3 次元楕円ファイバー空間を構成できる．したがって特異ファイバーが分類できる．Lagrange のコマの場合は特異ファイバーに小平型ではないものが現れる．これは Euler のコマに関する結果と大きく異なる点の 1 つである．

謝辞

本研究にあたり，多くの議論や貴重なご助言を頂いた多羅間大輔先生（立命館大学）に感謝申し上げます．本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2101 の支援を受けたものです．

参考文献

[Aud99] M. Audin, *Spinning Tops – A Course on Integrable Systems –*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics* **51**, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[FT15] J.-P. Françoise and D. Tarama, Analytic extension of the Birkhoff normal forms for the free rigid body dynamics on $SO(3)$, *Nonlinearity* **28** no. 5 (2015), 1193–1216.

[GZ98] L. Gavrilov and A. Zhivkov, The complex geometry of the Lagrange top, *Enseign. Math. (2)* **44** no. 1-2 (1998), 133–170.

[Ish] G. Ishikawa, An elliptic fibration arising from the Lagrange top and its monodromy, in preparation.

[Kam33] E. R. V. Kampen, On the Fundamental Group of an Algebraic Curve, *Amer. J. Math.* **55** no. 1-4 (1933), 255–260.

[Kas77] A. Kas, Weierstrass normal forms and invariants of elliptic surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* **225** (1977), 259–266.

[Kod63] K. Kodaira, On compact analytic surfaces. I, II, III, *Ann. of Math. (2)* **71(1), 77(3), 78(1)** (1960, 1963), 111–52, 563–626, 1–40.

[Mir83] R. Miranda, Smooth models for elliptic threefolds, in *The birational geometry of degenerations (Cambridge, Mass., 1981)* (R. Friedman and D. R. Morrison, eds.), *Progr. Math.* **29**, Birkhäuser, Boston, Mass., 1983, pp. 85–133.

[Nak88] N. Nakayama, On Weierstrass models, in *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. II*, Kinokuniya, Tokyo, 1988, pp. 405–431.

[Nak02] N. Nakayama, Global structure of an elliptic fibration, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **38** no. 3 (2002), 451–649.

[NT12] I. Naruki and D. Tarama, Some elliptic fibrations arising from free rigid body

dynamics, *Hokkaido Math. J.* **41** no. 3 (2012), 365–407.

[TF14] D. Tarama and J.-P. Françoise, Analytic extension of Birkhoff normal forms for Hamiltonian systems of one degree of freedom—simple pendulum and free rigid body dynamics, in *Exponential analysis of differential equations and related topics*, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B52*, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2014, pp. 219–236.

[Zar29] O. Zariski, On the Problem of Existence of Algebraic Functions of Two Variables Possessing a Given Branch Curve, *Amer. J. Math.* **51** no. 2 (1929), 305–328.

[Zig82] S. L. Ziglin, Branching of solutions and nonexistence of first integrals in hamiltonian mechanics. I, *Funct. Anal. Appl.* **16** no. 3 (1982), 30–41.

[Zig83] S. L. Ziglin, Branching of solutions and nonexistence of first integrals in hamiltonian mechanics. II, *Funct. Anal. Appl.* **17** no. 1 (1983), 8–23.

Odd colorings of Biplanar graphs

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科
北野草太 (Sota KITANO) *

概要

Graph G の odd coloring とは proper coloring φ で,「任意の non-isolated vertex $v \in V(G)$ に対してある color c が存在して, $|\varphi^{-1}(c) \cap N(v)|$ が奇数となる」という条件を満たすものである. Graph G の odd coloring に必要な最小の色数を G の odd chromatic number と呼び, $\chi_o(G)$ と書く. 本稿では biplanar graph の odd chromatic number について, biplanar graph G が $\delta(G) \geq 3$, $\mathrm{gir}(G) \geq 6$ を満たすならば $\chi_o(G) \leq 12$ という定理を証明する.

1 グラフ理論について

初めに, グラフ理論の基礎的な用語について定義する.

有限集合 V と V の異なる 2 元からなる部分集合の族 E の対 $G = (V, E)$ を simple graph と呼ぶ. simple でない graph も存在するが, 本稿では simple graph しか扱わないので単に graph と書いたときは simple graph を指すものとする. Graph $G = (V, E)$ の集合 V を vertex set, 集合 E を edge set と呼びそれぞれ $V(G)$, $E(G)$ と書く. $V(G)$ の元を vertex, $E(G)$ の元を edge と呼ぶ. さらに $\{u, v\} \in E(G)$ を単に uv あるいは vu と書く. Vertex set の大きさ $|V(G)|$ を graph G の order と呼び, edge set の大きさ $|E(G)|$ を graph G の size と呼ぶ. G の edge $e = uv \in E(G)$ について, vertex u と v は隣接するという. ある vertex v に隣接する vertex の集合を v の neighbor と呼び $N(v)$ と書く. vertex v に隣接する vertex の数 $|N(v)|$ を v の degree と呼び $d(v)$ と書く. (一般的には $\deg v$ や $\deg_G(v)$ などと書かれることも多い.) $d(v) = 0$ を満たす頂点を isolated vertex と呼ぶ. Graph G の持つ maximum degree を $\Delta(G)$ と書き, minimal degree を $\delta(G)$ と書く. さらに G の average degree を $\tilde{d}(G)$ $\left(= \frac{\sum_{v \in V} d(v)}{|V(G)|}\right)$ と書く. Degree が a となる vertex を a-vertex と呼ぶ.

Graph G と graph H が $V(H) \subset V(G)$ かつ $E(H) \subset E(G)$ を満たすとき, H を G の subgraph と呼ぶ. graph G の subgraph H が任意の $u, v \in V(H)$ に対して, $uv \in E(G)$ ならば $uv \in E(H)$ を満たすとき, H を G の induced subgraph と呼ぶ. H が G の subgraph であることを $H \subset G$ と表記し, vertex set $V' \subset V(G)$ による induced subgraph を $G[V']$ と表記する. graph G が graph H を induced subgraph に含まないとき, G は H-free であるという. 任意の頂点間に path が存在する

* E-mail:sota.kitano.c3@math.nagoya-u.ac.jp

graph を connected graph と呼ぶ. graph G の極大な connected subgraph を G の component と呼ぶ.

有限個の vertex の列 $W = (v_1, \cdots, v_n)$ で任意の $1 \leq i \leq n-1$ に対して $v_iv_{i+1} \in E(G)$ のとき, W を walk と呼ぶ.（walk の定義に無限列を含める場合もある.）全ての vertex が互いに異なる walk を path（道）と呼ぶ. また, $v_1 = v_n$ かつそれ以外の vertex が互いに異なる walk を cycle と呼ぶ. walk $W = (v_1, \cdots, v_n)$ に対して walk の length を $n-1$ と定める.

Order が 1 以上の graph から vertex $v_1, \cdots, v_n$ と $v_i (1 \leq i \leq n)$ に接続する edge を全て取り除いた subgraph を $G - \{v_1, \cdots, v_n\}$ で表す. 同様に size が 1 以上の graph から edge $e_1, \ldots, e_n$ を取り除いた graph を $G - \{e_1, \cdots, e_n\}$ で表す. $n = 1$ のときは単に $G - v$, $G - e$ と表記する. Connected graph G において, 任意の $v_1, \cdots, v_{k-1}$ に対して $G - \{v_1, \cdots, v_{k-1}\}\, (k \geq 2)$ が connected のとき, G は k-connected（k-連結）であるという.

ある edge $e = uv$ に対して, 新たな vertex u を追加して edge e を path (u, w, v) に置き換える操作 edge e の subdivide（細分）と呼ぶ.

任意の異なる vertex の間に edge が存在する graph を complete graph と呼び, order n の complete graph を K_n と書く. 特に K_1 を trivial graph と呼ぶ.

異なる edge 同士が交わらないように平面上に vertex と edge を配置できる graph を planar graph と呼ぶ. G の異なる edge 同士が交わらないような配置を G の埋め込みと呼ぶ. planar graph G と G の埋め込み $\tilde{G}$ は同一視できるので, $\tilde{G}$ を plane graph と呼ぶ. 埋め込み $\tilde{G}$ は平面をいくつかの領域に分割する. これらの領域を face と呼ぶ. それぞれの face を形成している walk を boundary と呼ぶ. face f の boundary の length を face の degree と呼び $d(f)$ と書く.

Graph G の vertex set $V(G)$ から $\mathbb{N}$ への map $\varphi : V(G) \to \mathbb{N}$ で, 任意の $uv \in E(G)$ に対して $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ を満たすものを, G の proper (vertex) coloring と呼び, $\varphi(V(G))$ の元を color と呼ぶ. つまり, graph の各頂点に対して, 隣接する頂点が異なる color になるような彩色のことである. $|\varphi(V(G))| = k$ となるとき, φ を proper k-coloring と呼ぶ. graph G が proper k-coloring を持つとき, G は k-colorable であるという. G が proper k-coloring を持つような k の中で最も小さい整数を chromatic number と呼び, $\chi(G)$ と書く.

2 導入

2.1 Odd coloring の定義

この章では Petruševski と Škrekovski によって導入された odd coloring の定義と planar graph の odd coloring を紹介する [4]. Proper coloring に対して parity condition を追加した vertex coloring を odd coloring と呼ぶ.

定義 2.1. (Odd coloring) Graph G の proper coloring φ が odd coloring であるとは, 「任意の non-isolated vertex $v \in V(G)$ に対してある color c が存在して, $|\varphi^{-1}(c) \cap N(v)|$ が奇数となる」という parity condition を満たすことを言う. Graph G の odd coloring に必要な最小の色数を odd chromatic number と呼び, $\chi_o(G)$ と書く.

定義より $\chi(G) \leq \chi_o(G)$（$\chi(G)$ は G の chromatic number）が常に成り立つ.

Odd coloring の例を見る前にいくつか記号を導入する. 写像 $\varphi : V(G) \to \{1, \cdots, k\}$ が G の coloring のとき, $v \in V(G)$ に対して, $L^*_\varphi(v) = \left\{c \in \{1, \cdots, k\} : |\varphi^{-1}(c) \cap N(v)| \equiv 1 (\mathrm{mod}.2)\right\}$ と定義する. すなわち, $L^*_\varphi(v)$ は v の近傍で奇数回登場する color の集合である. また, $L^*_\varphi(v) \neq \emptyset$ のとき, 任意に $c \in L^*_\varphi(v)$ を選び, $\varphi^*(v)$ と書く. $L^*_\varphi(v) = \emptyset$ のときは $\varphi^*(v) = 0$ と定める.

例 2.2. (Odd coloring の例) 図 1 の graph G は, $\chi_o(G) = 4$ であり, φ_1 は odd coloring だが, φ_2 は v_3 が parity condition を満たさないので odd coloring ではない.

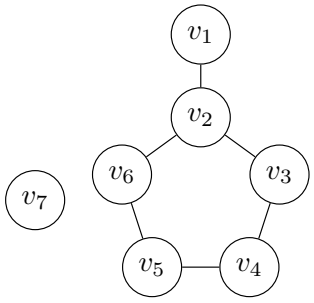


図 1　Graph G

v	$\varphi_1(v)$	$L^*_{\varphi_1}(v)$	$\varphi^*_1(v)$	$\varphi_2(v)$	$L^*_{\varphi_2}(v)$	$\varphi^*_2(v)$
v_1	1	$\{2\}$	2	1	$\{2\}$	2
v_2	2	$\{1\}$	1	2	$\{1\}$	1
v_3	1	$\{2,3\}$	3	1	$\{\}$	0
v_4	3	$\{1,4\}$	1	2	$\{1,3\}$	1
v_5	4	$\{1,3\}$	1	3	$\{1,2\}$	2
v_6	1	$\{2,4\}$	4	1	$\{2,3\}$	2
v_7	1	$\{\}$	0	1	$\{\}$	0

図 2　Graph G の proper colorings φ_1, φ_2

2.2 Planar graph の odd coloring

Odd coloring は特に planar graph について研究されている．この節では planar graph の odd coloring について紹介する．Petruševski と Škrekovski は odd coloring を導入した論文内で以下の予想を立てた [4].

予想 2.3. 任意の planar graph G に対して, $\chi_o(G) \leq 5$.

現在のステートメントは以下の通りで, この予想の完全な解決には至っていない.

定理 2.4. ([3]) 任意の planar graph G に対して, $\chi_o(G) \leq 8$.

以下のは girth（graph に含まれる最小の cycle の長さ）に制限を付け, 予想 2.3を部分的に解決したものである.

定理 2.5. ([1]) 任意の planar graph G に対して, $\mathrm{gir}(G) \geq 5$ ならば $\chi_o(G) \leq 6$.

この定理の証明に用いられた補題は本稿の主定理の証明でも重要な役割を果たした．これについては後述する.

3 主定理

Biplanar graph は適切な辺の分割によって二つの planar graph によって表せる graph であり, planar graph と関係の深い graph である.

定義 3.1. (Biplanar graph) Graph G が二つの planar graph の辺和で表せるとき, G を biplanar graph と呼ぶ. すなわち, $E(G) = E_1 \cup E_2$ を満たす集合 E_1, E_2 が存在し, $(V(G), E_1)$, $(V(G), E_2)$ が共に planar graph となることを言う.

例 3.2. (Biplanar graph の例) 図 3の $K_{3,3}$ は planar graph ではないが, biplanar graph である．実際, $K_{1,3} + 2K_1$ と $K_{2,3} + K_1$ に分割することで二つの planar graph の辺和として表せる.

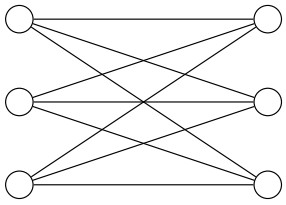


図 3　$K_{3,3}$

Planar graph に対する予想 2.3を biplanar graph に拡張して考察してみる.

問題 3.3. ある正の数 k が存在して, 任意の biplanar graph G に対して $\chi_o(G) \leq k$ となるか.

実はこの問いの答えは偽である. なぜなら complete graph K_n の各辺を丁度一回 subdivide した graph K_n^* の odd chromatic number は n だが, この graph は任意の n について biplanar graph となるからである.

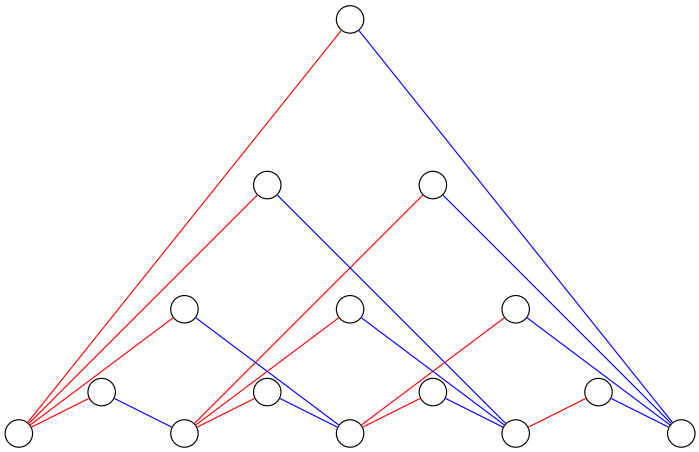


図 4　K_5^* が biplanar graph であることを示す図

例えば K_5^* は図 4に示すように赤の辺と青の辺に分割することでそれぞれ planar graph となる. また, 一般の K_n^* についても同様の分割によって biplanar graph であることを示すことができる.

以上から biplanar graph 全体の族について odd chromatic number の上限は存在しない. 一方でこの族の chromatic number の上限は 12 以下であることが分かっている. そこで以下の問題を考える.

問題 3.4. Biplanar graph 全体の族にどのような条件を課せば odd chromatic number の上限が 12 以下になるか.

この疑問に対して本稿では以下を主定理として示す. この定理は筆者のオリジナルの結果である.

定理 4.8. 任意の biplanar graph G について, $\delta(G) \geq 3$, $\mathrm{gir}(G) \geq 6$ ならば $\chi_o(G) \leq 12$.

この定理によって少なくとも $\delta(G) \geq 3$, $\mathrm{gir}(G) \geq 6$ という条件を課せば $\chi_o(G) \leq 12$ であることは示されたが, これ以上に条件を緩めることができるかについては分かっていない.

4 主定理の証明

主定理の証明には二つの補題と放電法を用いる. 準備として odd c^+-critical graph を定義する.

定義 4.1. (Odd c^+-critical graph) Graph G が $\chi_o(G) \geq c$ かつ任意の proper subgraph H に対して $\chi_o(H) < c$ を満たすとき, G を odd c^+-critical graph と呼び, odd c^+-critical graph の全体を $\mathcal{S}_c$ と書く.

そもそも一般に graph G と subgraph H に対して $\chi_o(H) \leq \chi_o(G)$ が成り立つとは限らないが, 定理を証明する際には odd c^+-critical graph という極小性を持った graph を考えることは有用である.

例 4.2. (Odd c^+-critical graph の例) 図 5の C_5 は odd 5^+-critical graph である. 実際, $\chi_o(C_5) = 5$ であるが, 任意の proper subgraph H について $\chi_o(H) < 5$ となる.

一つ目の補題は odd c^+-critical の基本的な構造について述べたものである.

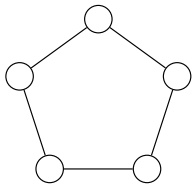


図 5　C_5

補題 4.3. $c \geq 4$, $G \in \mathcal{S}_c$ とする. 以下が成り立つ.
(1) 任意の $v \in V(G)$ に対して, $d(v) \equiv 0(\mathrm{mod}.2)$ または $d(v) > \lfloor \frac{c}{2} \rfloor$.
(2) 任意の $e = xy \in E(G)$ に対して, $d(x) \equiv d(y)(\mathrm{mod}.2)$ ならば $\max\{d(x), d(y)\} > \frac{c-1}{2}$ または $d(x) = d(y) = \frac{c-1}{2}$.

二つ目の補題を紹介する前にいくつかの記号を定義する.

次数が d となる頂点を d-vertex と呼ぶ. また, ある頂点 v が d-vertex と隣接するとき, この頂点を (u に対する)d-neighbor と呼ぶ. $N(v)$ に含まれる d-vertex 全体の集合を $N_d(v)$ と書く. 頂点 v が奇次数または 2-neighbor を持つとき, v を easy vertex と呼ぶ. また, 頂点 v に隣接する easy vertex の集合を $N_{ez}(v)$ と書く.

補題 4.4は定理 2.5を証明する際に利用された. 主定理の証明ではこの補題を一般化したものを利用する.

補題 4.4. ([1]) $c \geq 5$ とする. $G \in \mathcal{S}_c$ とすると, 任意の easy vertex v に対して, $2d(v) \geq |N_2(v)| + |N_{ez}(v)| + c - 1$.

補題 4.4を一般化するため, まずは easy vertex の定義を一般化する.

定義 4.5. (n-easy vertex) 頂点 v が奇次数であるか, または 2-neighbor, $\cdots$, $2n$-neighbor のいずれかを持つとき, v を n-easy vertex と呼ぶ. また, 頂点 v に隣接する n-easy vertex の集合を $N_{nez}(v)$ と書く.

補題 4.4を一般化した以下の補題を用意する. 主定理の証明では $n = 2$ の場合を利用する.

補題 4.6. $n \in \mathbb{N}$, $c \geq 4n + 1$ とする. $G \in \mathcal{S}_c$ とすると, 任意の n-easy vertex v に対して, $2d(v) \geq (\sum_{k=1}^{n} |N_{2k}(v)|) + |N_{nez}(v)| + c - 1$.

主定理の証明には放電法を用いた．これは planar graph に関する Euler's formula から定まる普遍量に注目し, 各頂点, 面, コンポーネントに電荷を定義し, その移動によって矛盾を引き起こす手法である．

定理 4.7. (Euler's formula) Plane graph G について, 以下が成り立つ．ただし, $F(G)$ は G の面の集合, $C(G)$ はコンポーネントの集合である．

$$|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| - |C(G)| = 1$$

Plane graph G に対して, $X(G) = V(G) \cup F(G) \cup C(G)$ とする．写像 $\mu_G : X(G) \to \mathbb{Z}$ を以下で定める．

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 2d(x) - 6 & (x \in V(G)) \\ d(x) - 6 & (x \in F(G)) \\ 6 & (x \in C(G)). \end{cases}$$

この写像によって与えられる値を各頂点, 面, コンポーネントの持つ初期電荷とみなす．このとき,

$$\begin{aligned} &= \sum_{f \in F(G)} (d(f) - 6) + \sum_{v \in V(G)} (2d(v) - 6) + \sum_{c \in C(G)} 6 \\ &= 2|E(G)| - 6|F(G)| + 4|E(G)| - 6|V(G)| + 6|C(G)| \\ &= -6(|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| - |C(G)|) \\ &= -6. \end{aligned}$$

つまり, 電荷の和 $S = \sum_{x \in X(G)} \mu_G(x)$ は定数である．
定理 4.8の証明では, 与えられた初期電荷に対して放電アルゴリズムを定めて電荷を移動させ, 最終的に各頂点, 面, コンポーネントの持つ電荷が全て 0 以上であることを示し矛盾を導く．

定理 4.8. 任意の biplanar graph G について, $\delta(G) \geq 3$, $\mathrm{gir}(G) \geq 6$ ならば $\chi_o(G) \leq 12$.

証明. Biplanar graph $G \in \mathcal{S}_{13}$ が $\delta(G) \geq 3$, $\mathrm{gir}(G) \geq 6$ を満たすとする．
G は二つの planar graph の辺和として表せるので, 定この二つの planar graph G_1, G_2 の埋め込みを固定し, それぞれについて μ_{G_1}, μ_{G_2} を定義する．$S = \sum_{x \in X(G_1)} \mu_{G_1}(x) + \sum_{x \in X(G_2)} \mu_{G_2}(x)$ と定めると, $S = -12$ である．

以下の放電アルゴリズムに従って電荷の移動を行う．
・$d(v) = 4$ のとき, $N_G(v)$ のそれぞれ頂点から v に電荷を 1 移動させる．

放電後に $x \in X(G_i)$ が持つ電荷を $\mu^\star_{G_i}(x)$ で表す．以下の二点を証明する．
(a) 任意の $x \in F(G_i) \cup C(G_i)$ に対して $\mu^\star_{G_i}(x) \geq 0$.
(b) 任意の $v \in V(G)$ に対し $\mu^\star(v) := \mu^\star_{G_1}(v) + \mu^\star_{G_2}(v) \geq 0$.

(a-1)$f \in F(G_i)$ とする. $\mathrm{gir}(G) \geq 6$ より $\mu^\star_{G_i}(f) = \mu_{G_i}(f) \geq 6 - 6 = 0$.

(a-2)$c \in C(G_i)$ とする. $\mu^\star_{G_i}(c) = \mu_{G_i}(c) = 6$ より明らか.

(b)$v \in V(G)$ とする.
任意の頂点 v に対して $\mu(v) := \mu_{G_1}(v) + \mu_{G_2}(v) = 2d(v) - 12$ が常に成り立つことに注意する. $d(v) < 12$ かつ $N_4(v) \neq \emptyset$ となる場合のみを考えればよい.
(1)$d(v) = 4, 6$ のとき, $N_4(v) \neq \emptyset$ と仮定する. $v \in V_{2ez}$ なので補題 4.6より, $0 \geq 2d(v) - 12 \geq |N_4(v)|$ なのでこれは $N_4(v) \neq \emptyset$ と矛盾. よって, $d(v) = 4, 6$ ならば $N_4(v) = \emptyset$.
(2)$7 \leq d(v) \leq 11$ のとき, 補題 4.6より $|N_4(v)| \leq 2d(v) - 12 = \mu(v)$. よって, $\mu^\star(v) = \mu(v) - |N_4(v)| \geq 0$.

以上より任意の $x \in X(G_i)$ に対して $\mu_{G_i}(x) \geq 0$ となるが, $S = -12$ よりこれは矛盾. よって G の極小性から定理 4.8が得られる. □

5 主定理の一般化

定理 4.8を thickness に関して一般化する.

定義 5.1. (thickness) Graph G に対して, 以下を満たす最小の t を G の thickness と呼び, $\theta(G)$ と書く.
(1) 互いに素な集合 $E_1, \cdots, E_t$ が存在して $E(G) = E_1 \cup \cdots \cup E_t$.
(2) 任意の $1 \leq i \leq t$ に対して $(V(G), E_i)$ が planar graph.

定義より $\theta(G) \leq 2$ の graph は biplanar graph である. このように thickness は planar graph や biplanar graph の概念を一般化したものなので, 定理 4.8を thickness について一般化するのは自然な発想である.

定理 5.2. 任意の graph G に対して, $\delta(G) \geq 2\theta(G) - 1$, $\mathrm{gir}(G) \geq 6$ ならば $\chi_o(G) \leq 6\theta(G)$.

参考文献

[1] Cho, E.-K., Choi, I., Kwon, H., & Park, B. (2023). Odd coloring of sparse graphs and planar graphs. *Discrete Mathematics, 346*(5), 113305. https://doi.org/10.1016/j.disc.2022.113305

[2] Kainen, P.C. (1974). Some recent results in topological graph theory. In R.A. Bari & F. Harary (Eds.), *Graphs and Combinatorics* (Lecture Notes in Mathematics, vol. 406). Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/BFb0066436

[3] Petr, J., & Portier, J. (2022). The odd chromatic number of a planar graph is at most 8. arXiv:2201.12381.

[4] Petruševski, M., & Škrekovski, R. (2022). Colorings with neighborhood parity condition. *Discrete Applied Mathematics, 321*, 385-391. https://doi.org/10.1016/j.dam.2022.07.018

グラフの有限集合を生成する禁止条件

東京理科大学　大学院理学研究科　応用数学専攻
小谷崇文 (Takafumi KOTANI) *

概要

グラフの族 $\mathcal{H}$ に対して，グラフ G が $\mathcal{H}$ のどのグラフも誘導部分グラフとして含まないとき，グラフ G は $\mathcal{H}$-free であるといい，この $\mathcal{H}$ を G の禁止部分グラフという．本研究は，最小次数が 4 以上の $\mathcal{H}$-free グラフ全体が有限集合を成すような族 $\mathcal{H}$ を調べた．本講演では，研究背景とともに，その結果を紹介する．

1　導入

1.1　グラフ

$E \subseteq \begin{pmatrix} V \\ 2 \end{pmatrix}$ のとき，V と E の組 (V, E) を，V を**頂点集合**，E を**辺集合**とする**無向単純グラフ**といい，V の要素を**点**または**頂点**，E の要素を**辺**と呼ぶ．また，$|V|$ も $|E|$ も有限のとき，(V, E) は**有限グラフ**という．本講演では，有限無向単純グラフのみを扱うので，有限無向単純グラフのことを単に**グラフ**と呼ぶことにする．(図 1 のように，頂点と辺で構成される図形がグラフである．)

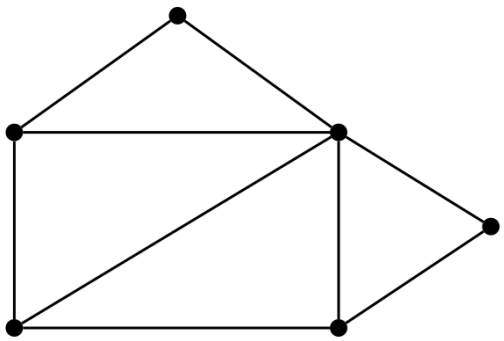


図 1　グラフの例

グラフ G の頂点集合は $V(G)$，辺集合は $E(G)$ で表される．また，$|V(G)|$ はグラフ G の**位数**と呼ぶ．

* E-mail:kotani.graph0518@gmail.com

1.2　近傍，次数

辺の端点は，その辺に**接続する**といい，辺は端点に**接続する**という．共通の辺に接続する 2 つの頂点は**隣接する**といい，共通の頂点に接続する 2 本の辺は**隣接する**という．隣接する 2 つの頂点に対して，片方はもう一方の**近傍**であるという．グラフ G における頂点 v の近傍の集合を $N_G(v)$ と書く．グラフ G の頂点 v に対して，v の近傍の個数を，G における v の**次数**といい，$d_G(v)$ と書く（つまり，$d_G(v) = |N_G(v)|$）．次数が 0 の頂点を**孤立点**という．$\delta(G) := \min\{d_G(x) \mid x \in V(G)\}$ は G の**最小次数**，$\Delta(G) := \max\{d_G(x) \mid x \in V(G)\}$ は G の**最大次数**と呼ばれる．

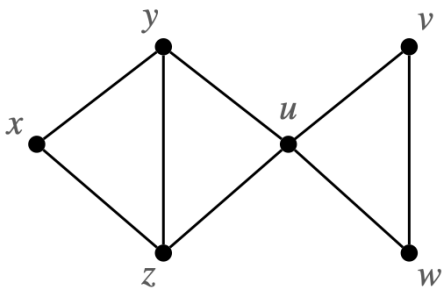


図 2　グラフ G

図 2 のグラフ G の場合，$d_G(x) = 2, d_G(u) = 4, \delta(G) = 2, \Delta(G) = 4$ である．

1.3　特別なグラフ

頂点を一列に並べたとき，連続する頂点が隣接し，連続しない頂点が隣接しないようにできるグラフを**道**といい，n 頂点の道を P_n で表す．位数が 3 以上で，頂点を円周上に並べたとき，連続する頂点が隣接し，連続しない頂点が隣接しないようにできるグラフを**閉路**といい，n 頂点の閉路を C_n で表す．どの 2 頂点も隣接するグラフを**完全グラフ**といい，n 頂点の完全グラフを K_n で表す．どの辺も 2 つの異なる集合の間に存在するように，V を 2 個の集合に分割できるグラフを**二部グラフ**という．また，異なる分割集合に属するどの 2 頂点も隣接しているとき，**完全二部グラフ**といい，m 頂点と n 頂点に分割される完全二部グラフを $K_{m,n}$ で表す．



図 3　道 P_4

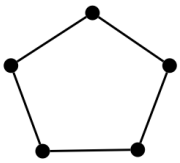


図 4　閉路 C_5

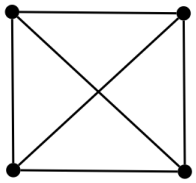


図 5　完全グラフ K_4

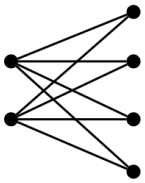


図 6　完全二部グラフ $K_{2,4}$

1.4　道，距離，直径

P を道とする．$V(P) = \{x_0, x_1, ..., x_l\}$，$E(P) = \{x_0x_1, x_1x_2, ..., x_{l-1}x_l\}$ のとき，$P = x_0x_1x_2, ..., x_l$ と表す．x_0, x_l を P の**端点**といい，x_0 と x_l は P によって**結ばれている**という．整数 l は道 P の**長さ**という．x と y を端点とするような道を ***x*-*y* 道**という．図 7 のグラフ G の場合，図 8 の P は，G の y-v 道である．また，P は長さ 4 の道である．

G の 2 頂点 x, y に対して，G の最短の x-y 道の長さを，G における x と y の**距離**といい，$\mathrm{dist}_G(x, y)$ と書く．G に x-y 道が存在しないとき，$\mathrm{dist}_G(x, y) := \infty$ とする．任意の G の 2 頂点間の距離の最大値を G の**直径**といい，$\mathrm{diam}(G)$ と書く．図 7 のグラフ G の場合，$\mathrm{dist}_G(x, v) = 2, \mathrm{diam}(G) = 2$ である．

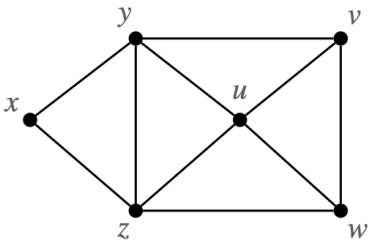


図 7　グラフ G

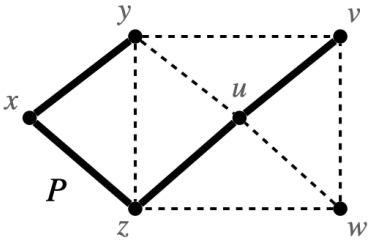


図 8　グラフ G の道 P

1.5　部分グラフ，誘導部分グラフ

$G = (V, E), G' = (V', E')$ をグラフとする．$V' \subseteq V$ かつ $E' \subseteq E$ であるとき，G' は G の**部分グラフ**といい，$G' \subseteq G$ で表すことにする．$G' \subseteq G$ かつ G' が任意の $x, y \in V'$ に対して $xy \in E$ となる辺をすべて含むとき，G' は G の**誘導部分グラフ**といい，$G' \prec G$ で表すことにする．

グラフ G の誘導部分グラフは，頂点部分集合 $U \subseteq V$ だけで一意的に決まる．U で誘導される部分グラフを $G[U]$ で表すことにする．

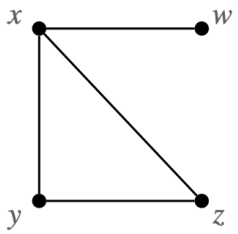


図 9　グラフ G

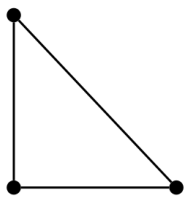


図 10　G の誘導部分グラフの例

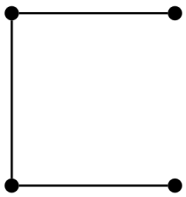


図 11　G の誘導部分グラフではない例

連結グラフの 2 つの族 $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ について，各 $H_2 \in \mathcal{H}_2$ に対して，$H_1 \prec H_2$ となる $H_1 \in \mathcal{H}_1$ が存在するとき，$\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ と書く．

1.6　連結，k-連結

$G = (V, E)$ を空でないグラフとする．G の任意の 2 頂点間に道が存在するとき，G は**連結グラフ**といい，そうでないときには，G は**非連結グラフ**という．また，G の極大な連結部分グラフを，G

の**連結成分**という．ただし，連結成分は常に空でないものとする．図 12 が連結グラフの例，図 13 が非連結グラフの例である．

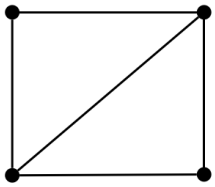


図 12　連結グラフの例

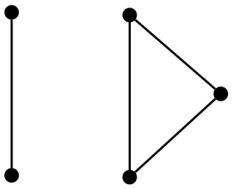


図 13　非連結グラフの例

$|V(G)| > k, |X| < k$ である集合 $X \subseteq V$ に対して，$G - X(:= G[V \backslash X])$ が連結であるとき，G は ***k*-連結**であるという．つまり，k-連結グラフとは，どの k 未満個の頂点を取り除いても連結なグラフのことである．k-連結グラフは最小次数が k 以上になることに注意する（理由は省略する）．図 14 のグラフは，どの 1 点を取り除いても連結であるので，2-連結グラフであるが，図 15 のグラフは，頂点 u を取り除くと連結ではなくなるので，2-連結グラフではない．

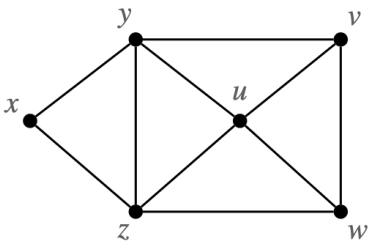


図 14　2-連結グラフの例

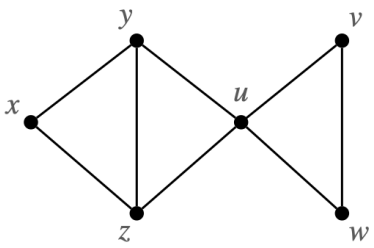


図 15　2-連結グラフではない例

2　禁止部分グラフとその研究

2 つのグラフ G, H に対して，$H \not\prec G$ とき，G は ***H*-free** であるといい，H は G の**禁止部分グラフ**という．グラフ G とグラフの族 $\mathcal{H}$ に対して，G が任意の $H \in \mathcal{H}$ に対しても H-free であるとき，G は **$\mathcal{H}$-free** であるという．

与えられた連結グラフの族 $\mathcal{H}$ について，$\mathcal{H}$-free グラフの性質を調べる研究は，**禁止部分グラフの研究**と呼ばれる．禁止部分グラフの研究は，グラフ理論の様々なテーマで進められている．この章では，ハミルトン閉路や完全マッチングにおける禁止部分グラフの研究を紹介する．（ハミルトン閉路や完全マッチング以外にも様々なテーマで禁止部分グラフの研究が行われている．）

2.1　ハミルトン閉路

グラフの全ての頂点を含む閉路は，**ハミルトン閉路**と呼ばれ，ハミルトン閉路を含むグラフは**ハミルトングラフ**と呼ばれる．ハミルトン閉路の例は図 16,17 のとおりである．

ハミルトン閉路に関して長年多くの研究が行われている．十分条件について次の古典的な結果が知られている．

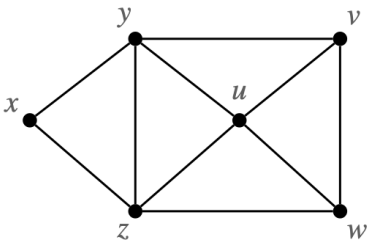


図 16　グラフ G

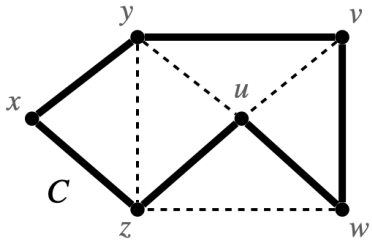


図 17　グラフ G のハミルトン閉路 C

Theorem 2.1 (G. A. Dirac. [2])**.** 頂点数 $n \geq 3$ で，最小次数が $\dfrac{n}{2}$ 以上である任意のグラフはハミルトン閉路を持つ.

この定理は最小次数条件について最良であり，各奇数 $n \geq 3$ について，位数 n, 最小次数が $\dfrac{n-1}{2}$, かつ，ハミルトン閉路を持たないグラフが存在するが，Matthews と Sumner は次を示した.

Theorem 2.2 (M. M. Matthews and D. P. Sumner. [13])**.** 頂点数 $n \geq 3$ で，最小次数が $\dfrac{1}{3}(n-2)$ 以上である任意の 2-連結 $K_{1,3}$-*free* グラフはハミルトン閉路を持つ.

このように，ハミルトン閉路に関して，禁止部分グラフの研究を行うことで，より多くの知見を得ることができる.

Bedrossian によって，次が示された.

Theorem 2.3 (P. Bedrossian. [1])**.** 2 の連結グラフ H_1, H_2 とする．任意の 2-連結 $\{H_1, H_2\}$-*free* グラフはハミルトン閉路を持つための必要十分条件は，次のいずれかを満たすことである.

(i) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, Net\}$
(ii) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, W\}$
(iii) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, P_6\}$

この定理により，2-連結グラフにハミルトン閉路を保証する禁止部分グラフのペアが決定された．ところが，Faudree らにより，次のことが示された.

Theorem 2.4 (R.J. Faudree, R.J. Gould, Z. Ryjàček and I. Schiermeyer. [8])**.** 2-連結 $\{K_{1,3}, Z_3\}$-*free* グラフは，有限個の例外を除き，ハミルトン閉路を持つ.

「2-連結 $\{K_{1,3}, Z_3\}$-free グラフはハミルトン閉路を持つ.」という命題は，反例があるため成立しないが，反例が有限個しかないので，$\{K_{1,3}, Z_3\}$ はハミルトン閉路のための禁止条件と見なして良いと言える.

Faudree と Gould により，次の特徴づけを得た.

Theorem 2.5 (R.J. Faudree and R.J. Gould. [9])**.** 2 の連結グラフ H_1, H_2 とする．任意の 2-連結 $\{H_1, H_2\}$-*free* グラフはハミルトン閉路を持つための必要十分条件は，有限個の例外を除き，次のいずれかを満たすことである.

(*i*) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, Net\}$
(*ii*) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, W\}$
(*iii*) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, P_6\}$
(*iii*) $\{H_1, H_2\} \leq \{K_{1,3}, Z_3\}$

このように，有限個の例外を認めることにより，ハミルトン閉路に関して，より多くの知見を得ることができる．したがって，禁止部分グラフの研究においては，有限個の例外を認めることがある．

2.2 完全マッチング

グラフ中の辺の集合で、互いに端点を共有しないもののことを**マッチング**と呼ぶ．また，グラフ上の全ての頂点が、マッチング中のいずれかの辺の端点になっているとき、そのマッチングを**完全マッチング**と呼ぶ．完全マッチングの例は図 18,19 のとおりである．

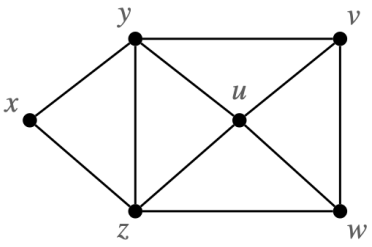


図 18　グラフ G

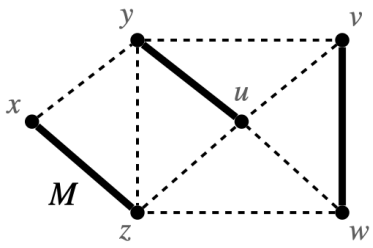


図 19　グラフ G の完全マッチング M

グラフに完全マッチングが存在するための必要十分条件が知られているが，ここでは割愛することにする．一般に偶位数の連結グラフで完全マッチングを持たないグラフは無数に存在する．しかし，Sumner によって，次のことが示された．

Theorem 2.6 (D. P. Sumner. [17])**.** 偶位数の連結 $K_{1,3}$-*free* グラフは完全マッチングを持つ．

このように，完全マッチングの研究においても，禁止部分グラフの研究により，より多くの知見が得られる．

Saito らは次のことを示した．

Theorem 2.7 (M. D. Plummer and A. Saito. [16])**.** 位数 3 以上の連結グラフ H に対して，偶位数の連結 H-*free* グラフが完全マッチングを持つならば，$H = K_{1,3}$ または $H = K_{1,2}$ である．

これらの 2 つの結果により，1 個のグラフを禁止することで完全マッチングの存在を保証する禁止部分グラフが決定された．

Fujita ら [11] によって，2 個のグラフを禁止することで完全マッチングの存在を保証する禁止部分グラフの組が決定された．

その後，Ota と Sueiro[15] により，完全マッチングの存在を保証する禁止部分グラフの組が完全決定された．

3　有限集合を生成する禁止部分グラフ条件

3.1　定義

整数 $k \geq 1$ とグラフの族 $\mathcal{H}$ に対して, $\mathcal{G}_k$ (resp. $\mathcal{G}^{(k)}$) は k-連結グラフ (resp. 最小次数 k 以上のグラフ) 全体の集合を表し, $\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$ (resp. $\mathcal{G}^{(k)}(\mathcal{H})$) は $\mathcal{G}_k$(resp.$\mathcal{G}^{(k)}$)) に属する $\mathcal{H}$-free グラフ全体の集合を表す. さらに, 整数 $k, l \geq 1$ とグラフの族 $\mathcal{H}$ に対して, $\mathcal{G}_k^{(l)}$ は 最小次数 l 以上の k-連結グラフ全体の集合を表し, $\mathcal{G}_k^{(l)}(\mathcal{H})$ は $\mathcal{G}_k^{(l)}$ に属する $\mathcal{H}$-free グラフ全体の集合を表す.

$$\mathcal{G}_k(\mathcal{H}) := \{G \mid G \text{ は } k\text{-連結 } \mathcal{H}\text{-free グラフ }\}$$
$$\mathcal{G}^{(k)}(\mathcal{H}) := \{G \mid G \text{ は最小次数 } k \text{ 以上の } \mathcal{H}\text{-free グラフ }\}$$
$$\mathcal{G}_k^{(l)}(\mathcal{H}) := \{G \mid G \text{ は最小次数 } l \text{ 以上の } k\text{-連結 } \mathcal{H}\text{-free グラフ }\}$$

n を $n > 2$ の整数, $P = x_1x_2...x_n$ を位数 n の道, $y_1, y_2, ..., y_m, z_1, z_2, ..., z_m$ を $x_1, ..., x_n$ とは異なる $2m$ 個の頂点とする. Y_n^m, Y_n^{m*} を次のように定めるグラフとする:

$V(Y_n^m) = V(P) \cup \{y_1, y_2, ..., y_m\}$, $V(Y_n^{m*}) = V(P) \cup \{y_1, y_2, ..., y_m, z_1, z_2, ..., z_m\}$,
$E(Y_n^m) = E(P) \cup \{x_1y_1, x_1y_2, ..., x_1y_m\}$, and
$E(Y_n^{m*}) = E(P) \cup \{x_1y_1, x_1y_2, ..., x_1y_m, x_nz_1, x_nz_2, ..., x_ny_m\}$.

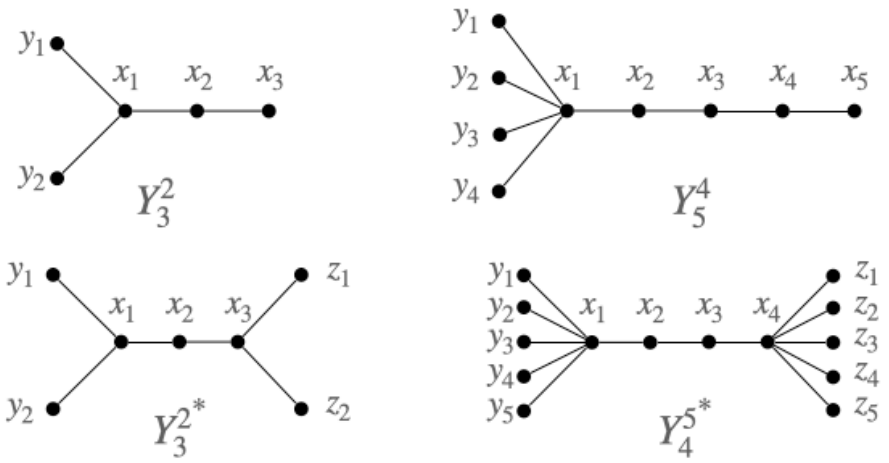


図 20　グラフ Y_3^2, Y_5^4, Y_3^{2*} and Y_4^{5*}

Y' は図 21 のグラフを表すものとする.

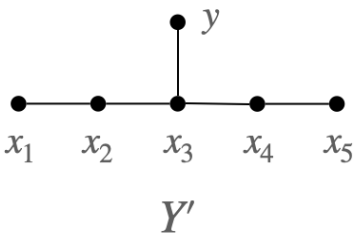


図 21　グラフ Y'

3.2 研究目的・背景

本研究の目的は

$$|\mathcal{H}| = 3 \text{ かつ } \mathcal{G}^{(4)}(\mathcal{H}) \text{ が有限} \tag{1.1}$$

の条件を満たす連結グラフの族 $\mathcal{H}$ の特徴づけである．$\mathcal{H}$ に位数 2 の完全グラフが属するとき，明らかに $\mathcal{G}^{(4)}(\mathcal{H})$ が有限である．したがって，$\mathcal{H}$ に属するグラフが位数 3 以上であると仮定してよい．

ハミルトン閉路の例でも見たように，禁止部分グラフの研究では，有限個の例外を認めることで，より多くの知見が得られる．つまり，禁止部分グラフの研究では，次のような命題を調べる．

- 任意の k-連結 $\mathcal{H}$-free グラフは，有限個の例外を除いて，性質 P を満たす．

しかし，このような研究の方法には 1 つ落とし穴がある．$\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$ が有限になったと仮定すると，任意の性質 P に対して，$\mathcal{G}_k(\mathcal{H})$ の要素全てを例外に設定することで，上記の命題は常に真となる．P に依存せず命題が真となるので，$\mathcal{H}$ は禁止部分グラフとして特定の性質 P に何ら知見を与えない．このような $\mathcal{H}$ は禁止部分グラフの研究の雑音となってしまうため，前もってそのような $\mathcal{H}$ を特定しておく必要がある．

このような背景の下，有限集合を生成する禁止部分グラフ条件の研究が始まった．この研究は，

$$\mathcal{G}_k(\mathcal{H}) \text{ が有限} \tag{1.2}$$

の条件を満たす連結グラフの族 $\mathcal{H}$ の特徴づけを行う．この研究は [10] から始まり，$1 \leq k \leq 6$ かつ $|\mathcal{H}| \leq 2$ の場合と，$(k, |\mathcal{H}|) = (2, 3)$ の場合に対する (1.2) を満たす族 $\mathcal{H}$ の特徴づけがなされた．

$(k, |\mathcal{H}|) = (3, 3)$ の場合に対する (1.2) を満たす族 $\mathcal{H}$ の必要条件が [3] で示され, 十分条件についてもさまざま研究されている ([3, 4, 7]) が，現在も特徴付けには至っていない．

禁止部分グラフの研究では，次のような命題もよく扱う．

- 任意の最小次数が k 以上の $\mathcal{H}$-free グラフは，有限個の例外を除いて，性質 P を満たす．

よって，3-連結グラフを最小次数 3 以上のグラフに置き換えたものを考えることは自然である．したがって，

$$\mathcal{G}^{(l)}(\mathcal{H}) \text{ が有限} \tag{1.3}$$

の条件を満たす連結グラフの族 $\mathcal{H}$ の特徴づけの研究が始まった．

$(k, |\mathcal{H}|) = (3, 3)$ の場合に対する (1.2) を満たす族 $\mathcal{H}$ の特徴づけには程遠いという状況だが，連結条件を最小次数条件に緩和したことで，問題の見通しが改善され，[5] で，$\{K_3, K_{2,2}\} \subseteq \mathcal{H}$ の場合を除いて，$(l, |\mathcal{H}|) = (3, 3)$ の場合に対する (1.3) を満たす族 $\mathcal{H}$ の特徴づけが得られるまでに至った．

最近，$(k, |\mathcal{H}|) = (4, 3)$ の場合に対する (1.2) を満たす族 $\mathcal{H}$ の必要条件が [14] で示された．$(k, |\mathcal{H}|) = (3, 3)$ の場合と同様に，この研究も特徴づけには至っていない．

本研究では，これまでと同様に，連結度条件を最小次数条件に置き換えることを考えたい．よって，本研究では，$(l, |\mathcal{H}|) = (4, 3)$ の場合に対する (1.3) を満たす族 $\mathcal{H}$ の特徴づけを目的とする．つまり，

$$|\mathcal{H}| = 3 \text{ かつ } \mathcal{G}^{(4)}(\mathcal{H}) \text{ が有限}$$

の条件を満たす連結グラフの族 $\mathcal{H}$ の特徴づけを目的とする．

3.3 主結果

主結果を述べる前に，(3.2) のための基本的な必要条件を紹介しておく．

Lemma 3.1 (Fujisawa, Plummer and Saito. [7])**.** 位数が 3 以上のグラフの族 $\mathcal{H}$ に対して，$\mathcal{G}_4(\mathcal{H})$ が有限のとき，ある整数 l, m, n $(l \geq 3, n \geq m \geq 1, m \leq 4)$ に対して，$\{K_l, K_{m,n}\} \subseteq \mathcal{H}$.

$\mathcal{G}^{(4)}(\mathcal{H}) \supseteq \mathcal{G}_4(\mathcal{H})$ であるから，Lemma 3.1 により，整数 l, m, n $(l \geq 3, n \geq m \geq 1, m \leq 4)$ と連結グラフ T に対する $\mathcal{G}^{(4)}(K_l, K_{m,n}, T)$ の有限性を確認すれば十分である．

[12] で，$\mathcal{G}^{(4)}(K_l, K_{1,n}, T)$ の有限性について，$l = 4, 3 \leq n \leq 4$ の場合を除いて，特徴づけが得られた．したがって，本研究では，$\mathcal{G}^{(4)}(K_l, K_{2,n}, T), \mathcal{G}^{(4)}(K_l, K_{3,n}, T), \mathcal{G}^{(4)}(K_l, K_{4,n}, T)$ の有限性を調べる．また，$\{K_3, K_{2,2}\} \subseteq \mathcal{H}, \{K_3, K_{2,3}\} \subseteq \mathcal{H}$ の場合は，難しくなると予想されるので，ひとまずこれらの場合は除外して考えることにする．

本研究で得られた結果は次のとおりである．

Theorem 3.2. *l, n を $l \geq 3, n \geq 2$, $(l, n) \neq (3, 2), (3, 3)$ となる整数とし，T を位数 3 以上の連結グラフとする．$\mathcal{G}^{(4)}(\{K_l, K_{2,n}, T\})$ が有限のとき，次のいずれかが成立する:*

(i) $4 \leq l \leq 5$, $n \geq 2$ *and* $T \prec P_6$;
(ii) $l = 3$, $n = 4$, *and* $T \prec Y_4^{3*}$, $T \prec Y_3^{3*}$, $T \prec Y_2^{2*}$, $T \prec Y'$;
(iii) $l = 3$, $n \geq 5$, *and* $T \prec Y_3^{2*}$ *or* $T \prec Y_2^{2*}$.

Theorem 3.3. *l, m, n を $l \geq 3, 3 \leq m \leq 4, m \leq n$ となる整数とし，T を位数 3 以上の連結グラフとする．$\mathcal{G}^{(4)}(\{K_l, K_{m,n}, T\})$ が有限のとき，$l = 3$ かつ $T \prec Y_t^{2*} (2 \leq t \leq 4)$.*

これらの命題は，有限であるための必要条件を示している．特徴づけを得るためには，これらの条件が十分条件になっているのか調べればよい．つまり，次を調べればよい．

(A) $\mathcal{G}^{(4)}(\{K_l, K_{2,n}, P_6\})$ $(4 \leq l \leq 5, n \geq 2)$ は有限か．
(B) $\mathcal{G}^{(4)}(\{K_3, K_{2,4}, Y_t^{3*}\})$ $(3 \leq t \leq 4)$ は有限か．
(C) $\mathcal{G}^{(4)}(\{K_3, K_{2,4}, Y_2^{2*}\})$ は有限か．
(D) $\mathcal{G}^{(4)}(\{K_3, K_{2,4}, Y'\})$ は有限か．
(E) $\mathcal{G}^{(4)}(\{K_3, K_{2,n}, Y_t^{2*}\})$ $(n \geq 5, 2 \leq t \leq 3)$ は有限か．
(F) $\mathcal{G}^{(4)}(\{K_3, K_{m,n}, Y_t^{2*}\})$ $(3 \leq m \leq 4, m \leq n, 2 \leq t \leq 4)$ は有限か．

本研究では，(C)(E) について結論が得られた．

Theorem 3.4. $\mathcal{G}^{(4)}(\{K_3, K_{2,4}, Y_2^{2*}\})$ は有限である．

Theorem 3.5. $n \geq 5, 2 \leq t \leq 3$ とする．このとき，$\mathcal{G}^{(4)}(\{K_3, K_{2,n}, Y_t^{2*}\})$ は有限である．

(A)(B)(D)(F) については，今後の研究で議論する．

参考文献

[1] P. Bedrossian, Forbidden subgraphs and minimum degree conditions for hamiltonicity, *Ph.D. Thesis, University of Memphis*. (1991).

[2] G. A. Dirac, Some theorems on abstract graphs, *Proc. London Math. Soc. (3)*. **2** (1952) 69–81.

[3] Y. Egawa, J. Fujisawa, M. Furuya, M.D. Plummer and A. Saito, Forbidden triples generating a finite set of 3-connected graphs, *Electron. J. Combin.* **22** (2015) #P3.13.

[4] Y. Egawa and M. Furuya, Forbidden triples containing a complete graph and a complete bipartite graph of small order, *Graphs Combin.* **30** (2014) 1149-1162.

[5] Y. Egawa and M. Furuya, Forbidden triples generating a finite set of graphs with minimum degree three, *Discrete Applied Mathematics*. **320** (2022) 282-295.

[6] Y. Egawa and M. Furuya, Forbidden subgraphs generating a finite set of graphs with minimum degree three and large girth, preprint.

[7] Y. Egawa and Z. Zhao, Forbidden triples involving the complete bipartite graph with partite sets having cardinalities two and three, *Ars Combin.* **154** (2021), 159–195.

[8] R.J. Faudree, R.J. Gould, Z. Ryjàček and I. Schiermeyer, Forbidden subgraphs and pancyclicity, *Congr. Numer.* **109** (1995) 13-32.

[9] R.J. Faudree and R.J. Gould, Characterizing forbidden pairs for Hamiltonian properties, *Discrete Math.* **173** (1997) 45-60.

[10] J. Fujisawa, M.D. Plummer and A. Saito, Forbidden subgraphs generating a finite set, *Discrete Math.* **313** (2013) 1835–1842.

[11] S. Fujita, K. Kawarabayashi, C. L. Lucchesi, K. Ota, M. D. Plummer and A. Saito, A pair of forbidden subgraphs and perfect matchings, *J. Combin. Theory Ser. B.* **96** (2006), no. 3, 315–324.

[12] T. Kotani, Stars in forbidden triples generating a finite set of graphs with minimum degree four, submitted.

[13] M. M. Matthews and D. P. Sumner, Hamiltonian results in $K_{1,3}$-free graphs, *J. Graph Theory.* **8** (1984) 139–146.

[14] A. Mori, Properties of finite forbidden triples in 4-connected graphs, *Master's Thesis, Tokyo University of Science*, (2021).

[15] K. Ota and G. Sueiro, Forbidden induced subgraphs for perfect matchings, *Graphs Combin.* **29** (2013), no. 2, 289–299.

[16] M. D. Plummer and A. Saito, Forbidden subgraphs and bounds on the size of a maximum matching, *J. Graph Theory.* **50** (2005), no. 1, 1–12.

[17] D. P. Sumner, 1-factors and antifactor sets, *J. London Math. Soc. (2)*. **13** (1976), no. 2, 351–359.

流体乱流モデルにみられる位相同期現象とカオティックサドル *

一橋大学　商学部　経営学科
加藤響 (Hibiki KATO) †

概要

カオス位相同期現象とは, 相互作用する非線形力学系のカオス振動子同士の位相が同期する現象である．また，流体乱流モデルを含むいくつかの非線形力学系において比較的穏やかな状態と乱れた状態が間欠的に現れる現象が観測される．本稿では前者の状態を位相同期状態とし，不安定不変集合であるカオティックサドルによって特徴付ける．本研究は，位相同期という概念に着目することによって流体を含めた複雑現象の状態分類が可能になることを示唆している．

1　導入

1.1　はじめに

カオスにおいて位相同期現象は，相互作用するカオス振動子同士の位相が同調する現象として広く知られている．また，非線形現象において，カオス性が比較的弱い状態 (ラミナー) と強い状態 (バースト) が交互に現れるような間欠性ダイナミクスがしばしば観測される．
結合系のように位相同期に関する間欠性を分析する際は，後述する on-off 間欠性や blowout 分岐が着目される．その反面，流体などでも間欠性は見られるが，我々の知る限りでは先に述べたような分析は行われていない．本稿では，まず乱流の間欠性においても位相同期による分析が可能であり，さらに位相同期状態集合の骨格として不安定不変集合であるカオティックサドルが存在していることを示す．本研究では，そのような間欠性が見られるモデルとして，乱流シェルモデル [8] と，結合レスラー系 [6] を扱う．

1.2　乱流シェルモデル

流体乱流シェルモデルは Navier-Stokes 方程式をフーリエスペクトル法で記述したものに似せたトイモデルとして導入された．それはエネルギーカスケードや間欠性等の種々の力学的性質が似ていることが知られている．ここでは特に以下の複素変数連立常微分方程式の形で得られる

* 本研究は小林幹准教授 (立正大学) ならびに齊木吉隆教授 (一橋大学) との共同研究である．
† E-mail:1121062b@g.hit-u.ac.jp

Gledzer-Ohikitani-Yamada (GOY) 乱流シェルモデル [8] を考える．

$$\left(\frac{d}{dt}+\nu k_j^2\right)u_j = i[A_j u_{j+1}u_{j+2} + B_j u_{j-1}u_{j+1} + C_j u_{j-1}u_{j-2}]^* + f\delta_{j,1}\ (u_j \in \mathbf{C},\ j=1,\cdots,N).$$

ここで，$A_N = A_{N-1} = B_N = B_1 = C_1 = C_2 = 0$ であり，それ以外については $A_j = k_j, B_j = -\beta k_j, C_j = (\beta-1)k_{j-2}$ である．u_1 に加える外力は $f = 5(1+i)10^{-3}$ であり，$k_j = 10^{-4}\times 2^j$ とする．本研究では，$N = 14$，$\nu = 1.8\times 10^{-4}$ として β を変化させ，ラミナー，バーストの間欠性が見られる，$\beta = 0.416$ 付近について解析を行った [図 1].

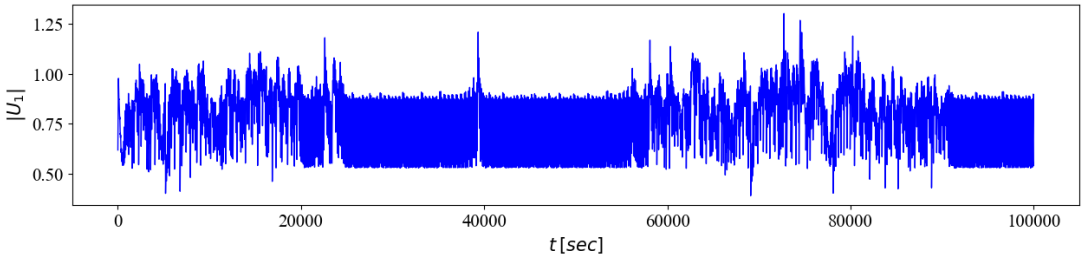


図 1　**乱流シェルモデルの $\beta = 0.4162$ における $|u_1|$ の時間発展．**比較的平穏なふるまいをする時間帯と比較的激しいふるまいをする時間帯が時間間欠的に交互にあらわれる．相空間全体で間欠カオス的振る舞いをするが，一般的には位相同期に注目して分析されることはない．

1.3　結合レスラー系

乱流シェルモデルより単純で位相同期が直接的に表現される系である結合レスラー系について同様の解析を行った．結合レスラー系は 6 次元常微分方程式系で，2 つの 3 次元のレスラー系を結合させたものであり以下の式で表される [6].

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\omega_1 y_1 - z_1 + \epsilon(x_2 - x_1) \\ \dot{y}_1 &= \omega_1 x_1 - a y_1 \\ \dot{z}_1 &= f + z_1(x_1 - c) \\ \dot{x}_2 &= -\omega_2 y_2 - z_2 + \epsilon(x_1 - x_2) \\ \dot{y}_2 &= \omega_2 x_2 - a y_2 \\ \dot{z}_2 &= f + z_2(x_2 - c). \end{cases}$$

ここでパラメータ $a = 0.165, f = 0.2, c = 10, \omega_{1,2} = \omega_0 \pm \delta(\omega_0 = 0.97, \delta = 0.02)$ を固定し，ϵ を変化させる．つまり，非対称的な 2 つの結合カオス系について，結合強度を変化させながら解析する．$\epsilon \sim 0.0416$ 付近で，間欠的な振る舞いが起こることが簡単な数値計算からもわかる [図 2]．さらに，Pazo，Zaks，Kurths ら [5] により，2 つの系の位相差は $\epsilon \gtrsim 0.0416$ では有界で狭い範囲に収まるが，$\epsilon \leq 0.0416$ で位相ジャンプが発生し，非有界になることが報告されている [図 3].

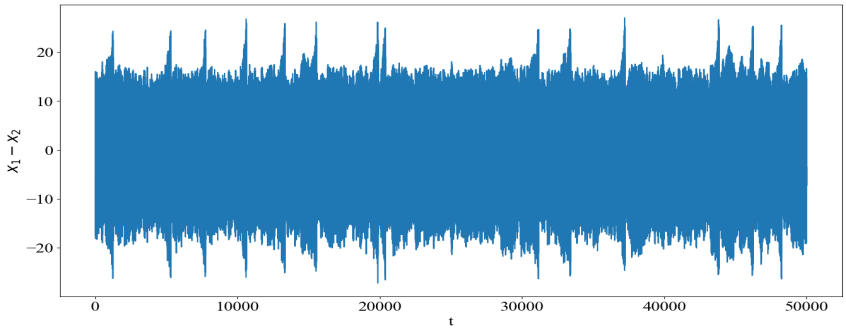


図 2　**結合レスラー系の $\epsilon = 0.039$ における $x_1 - x_2$ の時間発展.** 比較的平穏なふるまいをする時間帯と比較的激しいふるまいをする時間帯が時間間欠的に交互にあらわれる.

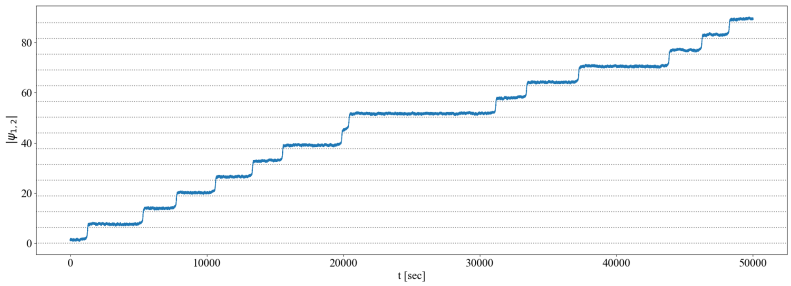


図 3　**結合レスラー系の $\epsilon = 0.039$ における位相差の時間発展**. 水平方向の罫線は 2π の整数倍を示す.　$\epsilon \sim 0.0416$ において位相同期が破れ，以降 ϵ の値を小さくして行けば行くほど，この図のような位相ジャンプが頻繁に現れるようになる．これは blowout 分岐を経て on-off 間欠性が現れたと解釈できる.

2　準備

2.1　位相同期

結合された振動子 i と j を記述する力学系においてある時刻 t における位相 ϕ_i，ϕ_j を適当に定義する．乱流シェルモデルについては，各変数を振動子としてそれぞれの偏角で位相を定義し，結合レスラー系の 2 つの振動子に対しては xy 平面上の回転角で定義すればよい．ここで注意したいのは，両者とも値域が $[0, 2\pi)$ や $(-\pi, \pi]$ になることである．この時，位相が時間に対して不連続になり位相差を解析する上で不都合である．そのため，適宜連続となるようにアンラップする (位相のリフトを行う).

振動子 i と振動子 j の位相差 $\psi_{i,j}$ は,

$$\psi_{i,j}(t) = |\phi_i(t) - \phi_j(t)|$$

により定義し，定数 d に対して,

$$^{\exists}k \in \mathbb{Z},\ \text{s.t.}\ |\psi_{i,j}(t) - d + 2\pi k| < \epsilon \tag{1}$$

が一定時間連続して成り立つ時，位相が同期していると定義する．ここで，ϵ は十分小さい正数だが，計算時はロバストネスを考慮し，ある程度大きい値を採用する．
以下，解軌道に対して位相同期部分を抽出する際は，過渡期を除き，より不変集合に近い集合を得るために，取り出した各軌道に関して前半と後半を一定時間分除く操作を行う (以下トリミングと呼ぶ)．例えば，乱流シェルモデルに対しては約 10 周期に相当する 1000 秒以上が位相同期する軌道を取り出し，最初と最後の 500 秒を除く操作を行なった [図 4]．以下では，トリミング後の集合を位相同期不変集合と呼ぶ．

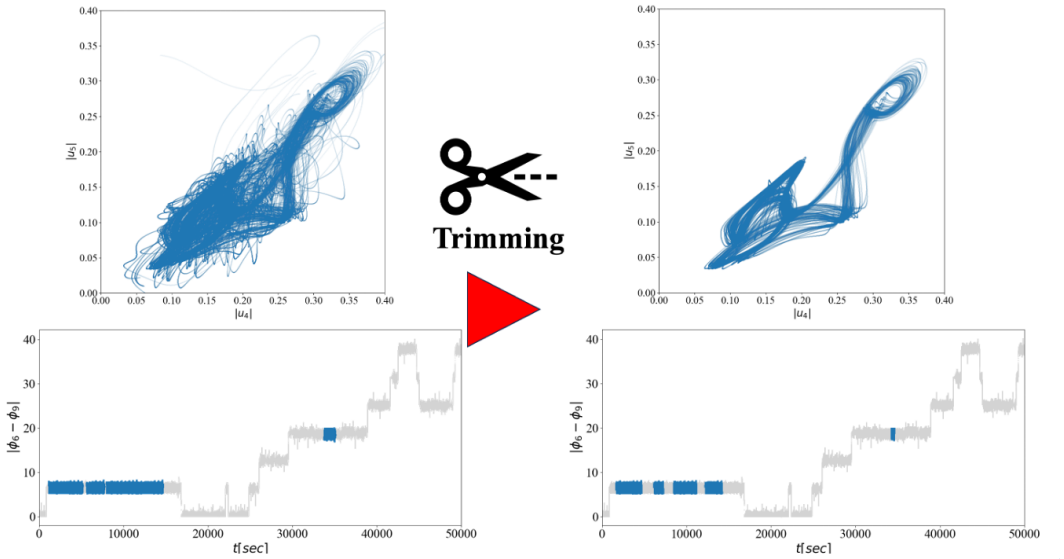


図 4　**位相同期不変集合を取り出すためのトリミング**．上は乱流シェルモデルの $|u_4|, |u_5|$ の軌道，下は u_6 と u_9 の位相差の時間発展．式 1 が 1000 秒以上連続して成立する軌道 (左) を取り出し，より不変集合に近い集合を得るため，取り出した各位相同期部分の前後 500 秒を除いた (右)．このような操作をここではトリミングと呼ぶ．

2.2　Blowout 分岐

カオス完全同期状態では系が不変部分空間に閉じ込められていると見做すことができ，位相同期状態の破れはその閉じ込めの不安定化と見做せる．この時に起こる分岐を blowout 分岐 [4] と呼び，blowout 分岐を経た時，オンオフ間欠性と呼ばれるカオス現象がしばし見られる．一般的に blowout 分岐は対称的な振動子について議論されるが，本稿ではそれを非対称な振動子に拡張して考える．閉じ込め構造の不安定化は，不安定周期軌道の横断方向の不安定性により解釈することが一般的である．しかしながら，本稿で扱うのは非対称的な系であるため，横断方向を求めるのは難しい．本稿では一般化して，あるパラメータを動かした時に，カオスアトラクターとカオティックサドルが一致する時，そこにおいて blowout 分岐が発生すると定義する．

2.3 カオスアトラクターとカオティックサドル

カオス的不変集合として，カオスアトラクターとカオティックサドルが挙げられる．どちらも可算無限個の不安定周期軌道が埋め込まれている不変集合である．カオスアトラクターは任意の近傍を吸引し，カオティックサドルは吸引しない近傍をもつ点で異なる [1]．時間正方向の数値計算によってカオティックサドルを観測することができないため，カオスアトラクターに比べてその存在が意識されることが少ないが，ダイナミクスにおいてしばしば重要な役割を果たすことが知られている．

2.4 Stagger-and-Step method

上述のように力学系のカオティックサドルは容易に見つけ出すことが困難である．いくつかの検出手法が提案されているが，本研究では Stagger-and-Step method [7] を用いる．この手法によりラミナーとバーストがスイッチする系において，特にラミナーが継続する時間が短い場合でもかオティックサドルを得られる．

まず，ラミナー領域を掩う，カオスアトラクター全体より小さい領域 D を用意する．そして，ラミナー軌道上の初期値から時間発展していき，ある程度 (t_{check} 秒)D 内に居続ければ合格として最初の短時間 ($t_{progress}$ 秒) を軌道として採用し，採用した最後の値を新たな初期値とする．もし t_{check} 秒未満で軌道が D の外に出た場合，初期値に微小摂動を加えて時間発展する試行を合格するまで繰り返す．以上の軌道を $t_{progress}$ ずつ伸ばす操作を繰り返すことにより長時間のラミナー軌道を得る[*1]．

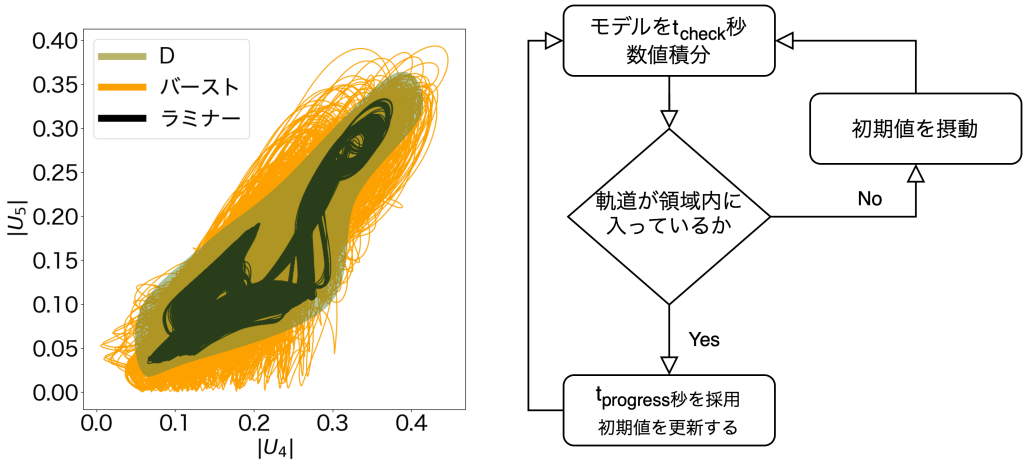


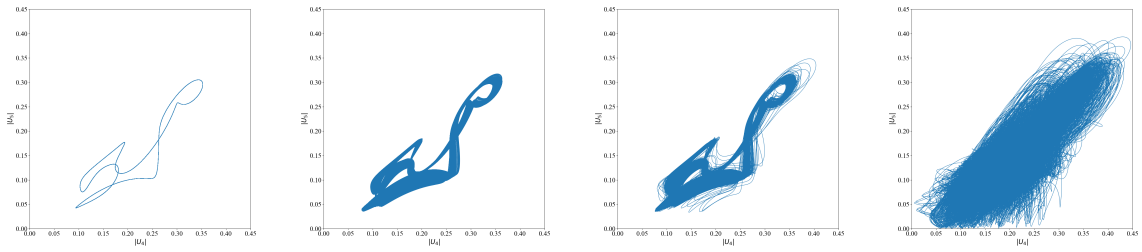
図 5　**Stagger-and-Step method の手続き．**まず左図のように，ある程度ロバストにラミナーを掩う領域 D を設定する．ある程度 (t_{check} 秒)D 内に居続ければ合格として最初の短時間 ($t_{progress}$ 秒) を軌道として採用し，最後の値を新たな初期値とする．もし t_{check} 秒未満で軌道が D の外に出た場合，初期値に微小摂動を加えて時間発展する試行を合格するまで繰り返す．このような軌道を $t_{progress}$ ずつ伸ばす操作を繰り返す．

[*1] カオティックサドルは不変集合であるから Stagger-and-Step method で得た軌道はあくまでカオティックサドルの近傍の軌道である．

3　主結果

3.1　乱流シェルモデル

まず $\beta = 0.416$ 近辺のパラメータについて，β の値を動かして軌道をプロットすると，β を大きくするに従い，周期軌道，カオスアトラクター，より大きなカオスアトラクターに遷移していることがわかる [図 6]．位相については，各変数の偏角をとり，アンラップしたものを変数の添字が　mod 3 で一致するもの同士で位相差を調べた．図 6(a), (b) において，位相が常に同期しており，バーストが発生する (c), (d) についても，ラミナーにおいては位相が同期していることが判明した [図 7]．
そこで，(c), (d) の軌道について，トリミングにより位相同期不変集合を求めたところ，(b) で見えていた小さいカオスアトラクターとよく似た集合を得た．実際，(d) において Stagger-and-Step method により得られるカオティックサドルと位相同期不変集合を比較したところ [図 8]，両者は非常に良く似ていた．より定量的に比較するため，相空間を微小なセルに分割し，N 次元格子で集合を粗視化して格子の数で比較したが，両者はほとんど同じ集合であった．
まとめると，ラミナーにおいて位相が同期しており，位相同期不変集合とカオティックサドルが一致していることが判明した．



(a)　(b)　(c)　(d)

図 6　β **を変化させた際の** 10^6 **時間軌道の比較．**左から $\beta = 0.415, 0.41616, 0.41617, 0.417$ の軌道．β が大きくなるにつれ，周期軌道 (a) からカオスアトラクター (b)，そしてより大きなカオスアトラクター (c), (d) に遷移している様子がわかる．(c) ではラミナー状態が長時間現れているが，(d) ではバースト状態が支配的である．

3.2　結合レスラー系

$\epsilon = 0.0416$ 付近のパラメータにおける x_1, x_2 の軌道をプロットしたところ図 9 を得た．非対称な振動子であるため，位相同期の際の軌道は対称時のような対角線ではないが，カオスアトラクター (a) が存在している．その後位相同期の破れに伴い，より大きなアトラクター (b), (c) が出現していることがわかる．(b), (c) の位相同期部分をトリミングしたものを見ると，大きなアトラクター集合 (L とする) の部分集合として位相同期不変集合 S が存在していることがわかる．一方で，L と S をそれぞれカオスアトラクターとラミナー集合として考えて，Stagger-and-Step method により，カオティックサドルを取り出すと，図 [10] の集合が得られる．位相同期不変集合とカオティックサド

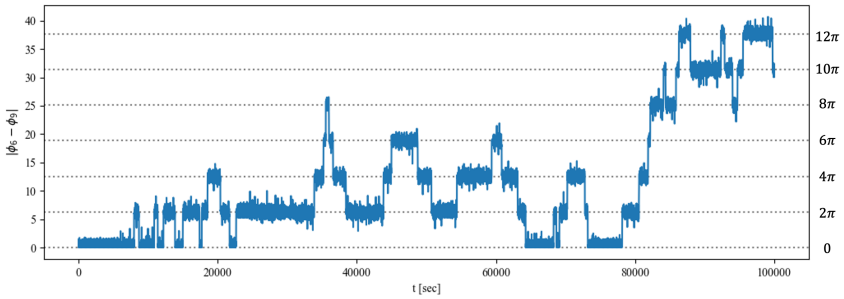
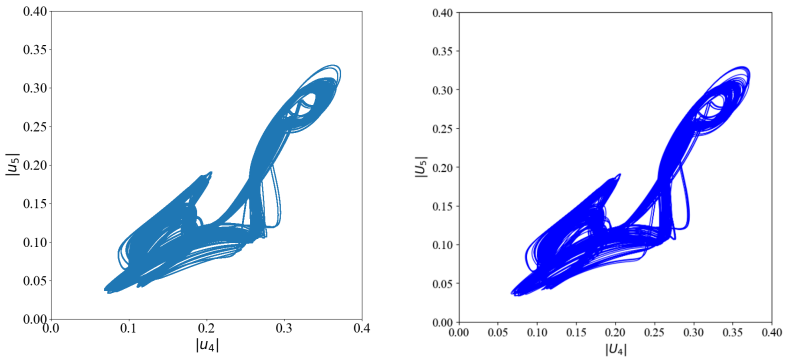


図 7　$\beta = 0.417$ **における** u_6 **と** u_9 **の位相差** $\psi_{6,9}$ **の時間発展．**$\beta \sim 0.41616$ より β を大きくしていけば行くほど，乱流シェルモデルにおいても結合レスラーで見られたような位相ジャンプが見られる．位相同期部分と非同期部分はラミナー状態，バースト状態に対応している．



(a)　(b)

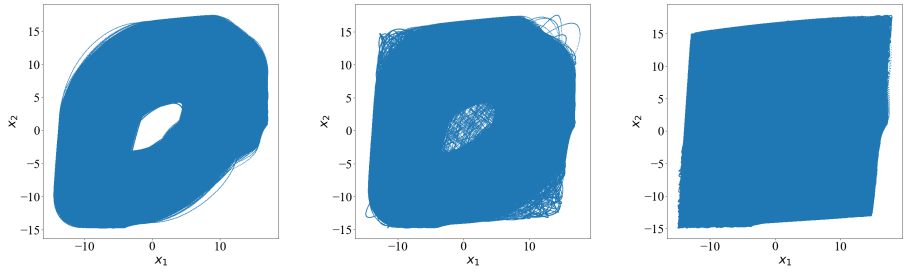
図 8　$\beta = 0.417$ **において乱流シェルモデルでの位相同期不変集合と Stagger-and-Stepmethod で求めたカオティックサドル．**トリミングして得た位相同期部分 (左) と Stagger-and-Step method で求めたカオティックサドル (右) の両者ともラミナーを捉えており，同一視できる．

ルを乱流シェルモデル同様に粗視化して比較したところ，ほとんど同じ集合であると判明した．したがって，結合レスラー系において，位相同期不変集合とカオティックサドルが一致すると言える．

カオティックサドルが精度良く求められたため，その応用として，カオティックサドル近傍に継続的に滞在する時間を考察した．これまでに，Grebogi, Ott, Yorke [2, 3] は，2 次元写像おいて，リドルドベイスンの存在によりフラクタル状のカオティックサドル近傍で超持続的なトランジェントが観測されることを報告している．そこでレスラー系について，blowout 分岐の臨界パラメータ ϵ_* の近くの各 ϵ においてカオティックサドルの近傍に滞在する平均ラミナー継続時間 τ を求め，回帰をした所，以下のような冪分布

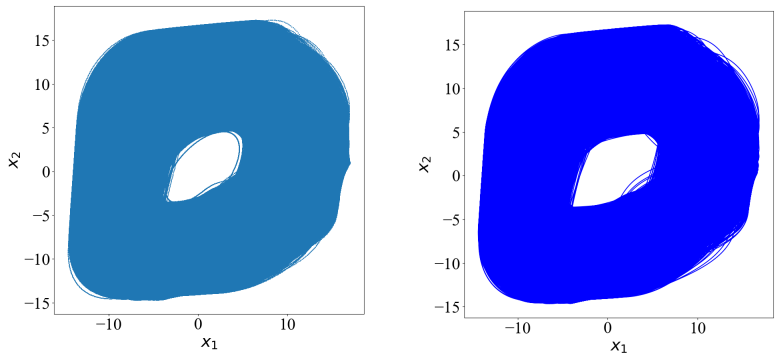
$$\log_{10}\tau = -10.85921542\log_{10}(\epsilon - \epsilon_*) + -23.018256$$

に従っていることが判明した [図 11]．ここで，$\epsilon_* = 0.0424212$ である．



(a) (b) (c)

図 9　**結合強度 ϵ を変化させた際の 10^6 時間軌道の比較．**左から $\epsilon = 0.042, 0.04, 0.039$．(a) ではラミナー集合が安定だが，(b) ではより大きなカオスアトラクターが現れており，(c) では大きなカオスアトラクターが支配的である．



(a) (b)

図 10　$\epsilon = 0.039$ **において結合レスラー系の位相同期不変集合と Stagger-and-Step method で求めたカオティックサドル．**トリミングした位相同期集合 (左) と，相空間の領域に着目して Stagger-and-Step method で求めたカオティックサドル集合 (右) はほぼ一致している．

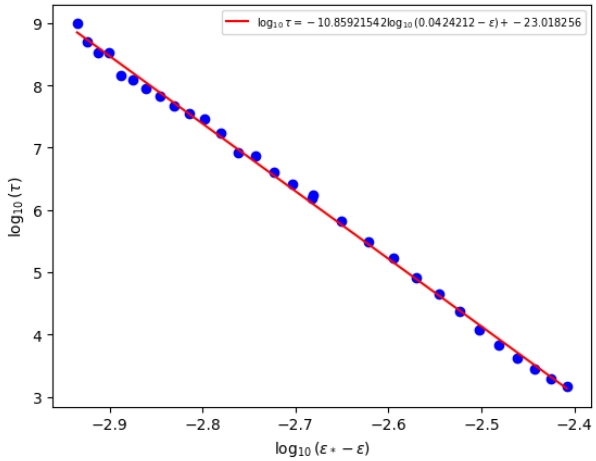
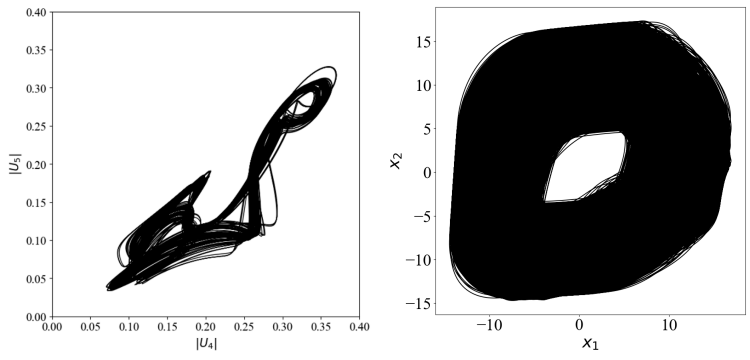


図 11　**平均ラミナー継続時間のパラメタ依存性．**結合レスラー系の結合強度 ϵ について，blowout 分岐が発生する臨界パラメータ ϵ_* からの距離 $\epsilon_* - \epsilon$ と平均ラミナー継続時間が両対数目盛において直線的，すなわち冪分布に従っている．

3.3　位相同期を用いた Stagger-and-Step method によるカオティックサドルの同定

従来の Stagger-and-Step method ではカオティックサドルの概形が既知であることが前提であった．それは概形を十分覆うようにロバストに領域を設定する必要があるためであり，領域の取り方によっては高次元の力学系においては計算負荷が増大する可能性がある．そこで，相空間上の領域ではなく，位相同期を条件とした Stagger-and-Step method を提案する．具体的には，t_{check} 秒位相同期が続けば合格とし $t_{progress}$ 秒の軌道を採用する方式であり，今回解析した系では，カオティックサドルにおいて位相同期が発生していたため，位相同期が十分カオティックサドルの条件として機能する [図 12]．領域を指定した際に比べ，カオティックサドルの形が未知でもよく，閾値の設定も位相ジャンプを検出できる程度にロバストにとれば十分なため容易である．一部の変数間の位相差を見れば十分であるから高次元力学系についても比較的低い計算負荷でカオティックサドルが同定できる．



(a)　(b)

図 12　**位相同期を用いた Stagger-and-Step method により得られたカオティックサドル．**それぞれ $\beta = 0.417, \epsilon = 0.039$ におけるカオティックサドルを同定しており，通常の Stagger-and-Step で得られる集合 (図 8, 10 それぞれの (b)) とほとんど一致する．

4 結論

本研究では間欠カオスを示す系において，ラミナーで位相同期現象が見られることを確かめ，位相同期状態をカオティックサドルで特徴付けた．まず，発達した流体についてのモデルである乱流シェルモデルについてそれを確認し，より単純なモデルである，結合レスラー系において同様の結果を確かめ，さらに分岐点からの平均ラミナー継続時間分布が冪分布になる等の詳細な事実を確かめた．同様の分析は一般的な力学系に対して適用可能であると考えられる．今後の課題としては，乱流シェルモデルについても平均ラミナー継続時間分布等の性質を確認することがまず挙げられる．さらに，非対称な振動子に対しても通用するような blowout 分岐の定量的な特徴付けの解明を試みたい．

謝辞

本研究の一部は，JSPS KAKENHI 19KK0067 ならびに 23H04465 に基づく．

参考文献

[1] K. Alligood, T. Sauer, and J. Yorke. 津田 一郎 (監訳). カオス 第 2 巻 力学系入門. 丸善出版, 2012.

[2] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke. Fractal basin boundaries, long-lived chaotic transients, and unstable-unstable pair bifurcation. *Phys. Rev. Lett.*, 50(13):935, 1983.

[3] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke. Super persistent chaotic transients. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 5(3):341–372, 1985.

[4] E. Ott and J. C. Sommerer. Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency. *Phys. Lett. A*, 188:39, 1994.

[5] D. Pazó, M. A. Zaks, and J. Kurths. Role of unstable periodic orbits in phase and lag synchronization between coupled chaotic oscillators. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 13(1):309–318, 2003.

[6] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. 徳田 功 (訳). 同期理論の基礎と応用-数理科学、化学、生命科学から工学まで. 丸善出版, 2009.

[7] D. Sweet, H. E. Nusse, and J. A. Yorke. Stagger-and-step method: Detecting and computing chaotic saddles in higher dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 86:2261–2264, 2001.

[8] M. Yamada and K. Ohkitani. Lyapunov spectrum of a chaotic model of three-dimensional turbulence. *Journal of the Physical Society of Japan*, 56(12):4210–4213, 1987.

ビリヤード写像における不変曲線が存在しないための十分条件

京都大学　大学院情報学研究科　情報学専攻数理工学コース 修士課程 1 年
立石萌 (Hajime TATEISHI)

概要

ビリヤード系では, 二次元領域内で直進し境界に達すると入射角と反射角が等しくなるように向きを変えるような質点 (ボール) の運動について取り扱う. この系において, ボールが境界と衝突する点とその向きを, その次に衝突する点とその向きに写すような写像を考えると, これは面積保存写像となる. 本稿では, Aubry-Mather 理論の結果をビリヤード系に適用することで, ビリヤード系の不変曲線が存在しないための十分条件を与える.

1　導入

本節では, ビリヤード系およびより一般的な面積保存ツイスト写像について紹介する.

1.1　ビリヤード系

まず, ビリヤード系について紹介する.

固定された二次元領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ とその中を動く質点を考える. 質点は領域 D 内では摩擦力がゼロのまま一定の速度で直進し, 境界では弾性衝突するとする. このとき, 質点は入射角と反射角が等しくなるように進行方向を変えて, また直進を始める. このようなルールで動く質点の軌道について考えることにする.

ビリヤードの軌道を考える際は, 境界における衝突位置と衝突直後の進行方向がわかれば十分である. このことから, ビリヤード系を扱う際には境界をなす曲線の弧長パラメータと反射角を座標にとることが多い. 曲線 $\gamma = \partial D$ の弧長パラメータを s とし, 衝突点における γ の接線と衝突直後の進行方向のなす角を α として, $w = -\cos\alpha$ とする. ($\alpha \in (0, \pi)$ であるから, α と w は一対一対応する.)

さて, 先ほどのビリヤードの運動によって, 衝突前のパラメータを衝突後のパラメータに写す写像 $T : (s, w) \mapsto (s', w')$ が定まる. この写像 T をビリヤード写像といい, ビリヤード写像によって定まる力学系をビリヤード系という. 特に γ が周長 L の閉曲線のとき, T は $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times [-1, 1]$ 上の写像になる. ($w = 1$ および $w = -1$ については, T が w について連続になるように拡張する.)

特に命題 1 の証明から, 次のことがわかる:

実数 s, s' に対して関数 $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $h(s, s') = -|\gamma(s) - \gamma(s')|$ とおく. ある $w, w' \in (-1, 1)$ が

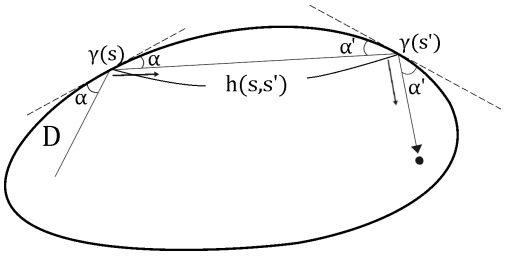


図 1　ビリヤード系

存在してビリヤード写像により $T(s,w)=(s',w')$ という関係が成り立てば,

$$\frac{\partial h}{\partial s}=\cos\alpha=-w,\quad \frac{\partial h}{\partial s'}=-\cos\alpha'=w'$$

である.

1.2　面積保存ツイスト写像

ここで, 面積保存ツイスト写像について述べておく. 本節および次節の詳細については [3] §7 を参照してほしい.

$\mathbb{S}\times[a,b]$ 上の写像 $\phi(x,y)=(X,Y)$ が, $dx\wedge dy=dX\wedge dY$ を満たすとき, ϕ は面積保存写像であるという. さらに, $\dfrac{\partial X}{\partial y}>0$ であるとき, ϕ はツイスト条件を満たすという.

面積保存ツイスト写像 $\phi(x,y)=(X,Y)$ について, x,X を独立変数と見たときに. 関数 $h(x,X)$ で

$$\frac{\partial h}{\partial x}=-y,\quad \frac{\partial h}{\partial X}=Y$$

を満たすもの h を ϕ の母関数という.

さて, 有限の長さの点列 $(x_j,\cdots,x_k)$ について, 作用 H を ϕ の母関数 h を用いて

$$H(x_j,\cdots,x_k)=\sum_{i=j}^{k-1}h(x_i,x_{i+1})$$

と定める. もしもこの点列が H の"停留点", つまりすべての $i\in\{j+1,\cdots,k-1\}$ について

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}=D_2h(x_{i-1},x_i)+D_1h(x_i,x_{i+1})=0 \tag{1}$$

を満たすものであれば, $y_i=-D_1h(x_i,x_{i+1})$ とおくと $y_{i+1}=-D_1h(x_{i+1},x_{i+2})=D_2h(x_i,x_{i+1})$ より $\phi(x_i,y_i)=(x_{i+1},y_{i+1})$ となる. すなわち, H の"停留点"を求めることができればそこを通る ϕ の軌道を復元することができる.

特に, $(x_j,\cdots,x_k)$ が H を両端点を固定した下での"最小点"であるとき, つまり任意の $x_i^*\in\mathbb{S}$ について

$$H(x_j,x_{j+1},\cdots,x_{k-1},x_k)\le H(x_j,x_{j+1}^*,\cdots,x_{k-1}^*,x_k) \tag{2}$$

が成り立つとき, 点列は自然に"停留点"になるので, やはりその点列を通る ϕ の軌道を復元できる.

以上の話は, 可算無限の長さの点列 $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ について拡張することができる. ただし, 無限列についての H の"停留点"は $\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ から有限の長さの部分列 $(x_j,\cdots,x_k)$ を任意に選んできたときに式 (1) が成り立つものとし, H の"最小点"は有限の長さの部分列 $(x_j,\cdots,x_k)$ を任意に選んできたときに式 (2) が成り立つものとする.

さて, ビリヤード系に話を戻そう. 実は, 先ほど定義したビリヤード写像 T は面積保存ツイスト写像であることが知られている.

命題 1. ビリヤード写像 $T:(s,w)\mapsto(s',w')$ は面積保存写像である. つまり, $dw'\wedge ds'=dw\wedge ds$ が成り立つ.

Proof. ビリヤード写像 T によって $T(s,w)=(s',w')$ と反射し, $w=-\cos\alpha, w=-\cos\alpha'$ であるとする. $h(s,s')=-|\gamma(s)-\gamma(s')|$ とおくと, $h(s,s')^2=(\gamma(s)-\gamma(s'))^2$ なので, s で偏微分すれば

$$2h(s,s')\frac{\partial h}{\partial s}=2(\gamma(s)-\gamma(s'))\cdot\gamma'(s)$$

ここで, s は弧長パラメータなので, $\gamma'(s)$ は $\gamma(s)$ における単位接ベクトルであるから,

$$(\gamma(s)-\gamma(s'))\cdot\gamma'(s)=-|\gamma(s)-\gamma(s')|\cos\alpha=h(s,s')\cos\alpha$$

である. よって, $\dfrac{\partial h}{\partial s}=\cos\alpha=-w$ が成り立つ.

また, s' で偏微分したときも同様にすれば $\dfrac{\partial h}{\partial s'}=-\cos\alpha'=w'$ が求まる.

以上から, $h(s,s')$ について全微分をとると,

$$dh=\frac{\partial h}{\partial s}ds+\frac{\partial h}{\partial s'}ds'=-wds+w'ds'$$

であり, $0=d^2h=-dw\wedge ds+dw'\wedge ds'$ である. □

命題 2. 領域 D が狭義凸であって境界 γ がなめらかな閉曲線であるとする. このとき, ビリヤード写像 $T:(s,w)\mapsto(s',w')$ はツイスト条件 $\dfrac{\mathrm{d}s'}{\mathrm{d}w}>0$ を満たす.

Proof. $\gamma(s)$ を原点とし, $\gamma'(s)$ が x 軸になるように直交座標系を取る. $\gamma(s')=(x(s'),y(s'))$ とすると, $x(s')=-h(s,s')\cos\alpha=h(s,s')w$ である. 両辺を w で偏微分すれば,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s'}\frac{\partial s'}{\partial w}=\frac{\partial h}{\partial s'}\frac{\partial s'}{\partial w}w+h(s,s')=-\frac{\partial h}{\partial s'}\frac{\partial s'}{\partial w}\cos\alpha+h(s,s').$$

ここで, $\dfrac{\partial h}{\partial s'}=-\cos\alpha'$ であり, また $\gamma'(s')$ が x 軸方向となす角は $\alpha+\alpha'$ と書けることから,

$$\frac{\partial s'}{\partial w}\cos(\alpha+\alpha')=\frac{\partial s'}{\partial w}\cos\alpha\cos\alpha'+h(s,s').$$

$\alpha,\alpha' in(0,\pi)$ より $\cos(\alpha+\alpha')-\cos\alpha\cos\alpha'=-\sin\alpha\sin\alpha'<0$ であるから, $h(s,s')=-|\gamma(s')|<0$ より,

$$\frac{\partial s'}{\partial w}=-\frac{h(s,s')}{\sin\alpha\sin\alpha'}>0.$$

□

命題 1 の証明から, ビリヤード写像 T の母関数は証明中の $h(s,s')$, つまり質点が次に反射するまでに移動する距離の -1 倍であることがわかる.

1.3 不変曲線

写像 $\phi : \mathbb{S}\times[-1,1] \to \mathbb{S}\times[-1,1]$ に対して, 曲線 C が $\mathbb{S}\times\{0\}$ とホモトピックであって $\phi(C)=C$ となるとき, C を ϕ の不変曲線と呼ぶ. すなわち, 不変曲線とは ϕ で不変な集合であってアニュラス $\mathbb{S}\times[-1,1]$ を右から左へちょうど一周するような曲線である.

面積保存ツイスト写像に関して, 不変曲線の存在性を考える.

準備として, まず写像 $f : \mathbb{S}\to\mathbb{S}$ を考える. f の持ち上げ $\tilde{f} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に関して

$$\alpha(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{f}^n(x)}{n}$$

は実は必ず存在し, しかも x によらないことが知られている. この $\alpha=\alpha(f)$ を f の回転数という.

次に, $\mathbb{S}\times[-1,1]$ 上の面積保存ツイスト写像 $\phi(x,y)=(X(x,y),Y(x,y))$ を考える. y を適当に固定すると $X(x,y)$ は $\mathbb{S}$ 上の写像になる. 特に写像 $X(x,-1)$ の回転数を α_0, $X(x,1)$ の回転数を α_1 とする.

ϕ の母関数を h とし, h により定まる作用を H とする. 任意 $\alpha\in[\alpha_0,\alpha_1]$ について, M_α を

$$M_\alpha = \{(\xi,\eta)\in\mathbb{S}\times[-1,1] | \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} : \text{H に関しての”最小点”},\ \xi=x_0,\quad \eta=-D_1h(x_0,x_1)\}$$

とする. 前節よりこの M_α が ϕ で不変であることは明らかである. さらにこの集合はリプシッツグラフであることが知られている.

逆に不変曲線 C が存在するときは, 次のことが成り立つ.

定理 1 (Mather)**.** C を $\mathbb{S}\times[-1,1]$ 上を一周する ϕ で不変な曲線とし, C 上への制限 $\phi|_C$ の回転数が α であるとする. このとき, $C\subset M_\alpha$ である. 特に α が無理数なら $C=M_\alpha$ となる.

Mather の定理の対偶から, もし H の”最小点”がなければ不変曲線が存在しないということがわかる.

ちなみに, ビリヤード写像の不変曲線は焦線というものに対応している. 焦線は領域 D の内側にある閉曲線で, ビリヤードの質点の軌道が常に接し続けるようなものである. たとえば D が円のときは焦線は同心円になり, 楕円のときは焦線は同じ焦点をもつ楕円になることが知られている.

焦線について, 次の Birkhoff の予想が知られている.

予想 1. (Birkhoff) 凸で境界がなめらかな領域について, 境界の近傍が焦線による葉層構造を持っているとする. このとき, ビリヤード台は楕円である.

Birkhoff の予想に関する重要な結果は以下のようなものがある.

- Lazutkin (1973) [4] ビリヤード系を考える領域の境界が十分なめらかでかつその曲率が 0 にならない場合, 不変曲線は存在する.
- Mather (1982) [5] ビリヤード系を考える領域の境界上に曲率が 0 になる点が存在すれば, 不変曲線は存在しない.

- Hubacher (1987) [7]　ビリヤード系を考える領域の境界上に曲率が不連続になる点が存在すれば, 相空間の境界 $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z}) \times \{-1\}$ の近傍に不変曲線は存在しない.
- Bialy (1993) [6]　ビリヤード写像の相空間全体が不変曲線による葉層構造を持つとき, ビリヤード系を考える領域は円である.

2　主定理

本節では, 主結果を紹介する.

2.1　設定

まず, ビリヤード系を考える領域を設定する.

関数 $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を次の条件を満たす C^2 級関数と仮定する.

$$f(x) > 0, \quad f(x+c) = f(x), \quad L = \int_0^c \sqrt{1 + f'(\tilde{x})^2}\mathrm{d}\tilde{x}.$$

ビリヤードを考える領域 D を $D = \{(x, y) | -f(x) \leq y \leq f(x)\}$ と定め, 図 2 のようにボールが上側の境界と下側の境界を交互に反射するようなケースを考える.

2.2　主定理

主定理は, この設定の下でビリヤード写像の不変曲線が存在しないための十分条件を与えるものである.

(s, w) を弧長パラメータ $s = \displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + f'(\tilde{x})^2}\mathrm{d}\tilde{x}$ と $w = \cos\alpha$ の組としておく. ただし, $\alpha \in (0, \pi)$ はボールの反射角である. $x(\hat{s}) = x(s) + c$ となる s と $\hat{s}$ を同一視することで, s を $\mathbb{S} = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ の元と見なせば, ビリヤード写像 T は $\mathbb{S} \times (-1, 1)$ 上の写像 $(s, w) \mapsto (s', w')$ と考えることができる.

定理 2. 次の不等式を満たす $x_2 \in [0, c)$ が存在するとき, ビリヤード写像は相空間 $\mathbb{S} \times (-1, 1)$ 上に不変曲線を持たない.

$$f''(x_2)f(x_2) + f'(x_2)^2 + 1 \leq 0 \tag{3}$$

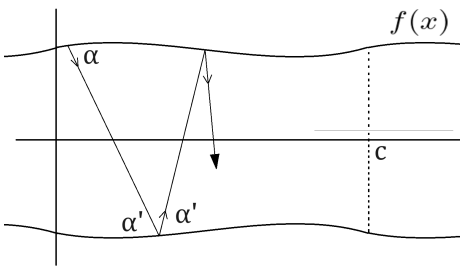


図 2　関数 $f(x)$ により定まるビリヤード系

注意 1. 不等式 (3) は

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f^2(x_2) \leq -2$$

と書き換えることもできる.

証明の概略

$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ をビリヤード軌道の切片の長さとして定める.

$$h(s, s') = \sqrt{(x(s) - x(s'))^2 + (f(x(s)) + f(x(s')))^2}.$$

このとき, 以下の二つが容易に確認できる.

補題 1. ビリヤード写像 $T : (s, w) \mapsto (s', w')$ は面積形式 $\omega = \mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}w$ を保存する. つまり,

$$\mathrm{d}s \wedge \mathrm{d}w = \mathrm{d}s' \wedge \mathrm{d}w'$$

が成り立つ.

補題 2. ビリヤード写像 $T : (s, w) \mapsto (s', w')$ はツイスト条件

$$\frac{\partial s'}{\partial w} > 0$$

を満たす.

特に, h はビリヤード写像 T の母関数になっている.

したがって, この h によって作用 H を 1.2 節のように定めたとき, H の”最小点”が存在しなければ Mather の定理の対偶から不変曲線の非存在性が示せる.

任意に無限列 $\{s_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ を取ってきたとき, ある部分列 (s_1, s_2, s_3) は H について”最小点”でないことを示す. そのためには, 両端固定の下で $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s_2^2} H(s_1, s_2, s_3) = D_2^2 h(s_1, s_2) + D_1^2 h(s_2, s_3) < 0$ がわかればよい.

実際に計算すると,

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s_2^2} H(s_1, s_2, s_3) = \dot{x}_2^2 \frac{f''(x_2)\{f(x_1) + f(x_2)\}}{h(s_1, s_2)} + \dot{x}_2^2 \frac{f''(x_2)\{f(x_2) + f(x_3)\}}{h(s_2, s_3)} + \sin^2 \alpha_2 \left(\frac{1}{h(s_1, s_2)} + \frac{1}{h(s_2, s_3)} \right)$$

(ドットは s での微分, プライムは x での微分を表す.)

ここで, $(x_2, f(x_2))$ における単位接ベクトルを $(\cos \beta_2, \sin \beta_2)$ と表すことにすれば, いまビリヤードの質点は $y = 0$ を横切るように動いているので,

$$\frac{f(x_2)}{\sin(\alpha_2 + \beta_2)} < h(s_1, s_2), \quad \frac{f(x_2)}{\sin(\alpha_2 - \beta_2)} < h(s_2, s_3)$$

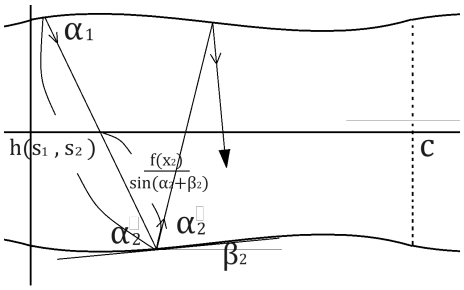


図 3　$h(s_1, s_2)$ の不等式評価

したがって,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s_2^2}H(s_1,s_2,s_3) &< \dot{x_2}^2 f''(x_2)\sin(\alpha_2+\beta_2) + \frac{\sin^2\alpha_2\sin(\alpha_2+\beta_2)}{f(x_2)} \\ &\quad + \dot{x_2}^2 f''(x_2)\sin(\alpha_2-\beta_2) + \frac{\sin^2\alpha_2\sin(\alpha_2-\beta_2)}{f(x_2)} \\ &= 2\dot{x_2}^2 f''(x_2)\sin\alpha_2\cos\beta_2 + \frac{2\sin^3\alpha_2\cos\beta_2}{f(x_2)} \\ &= \frac{2\dot{x_2}^2\sin\alpha_2}{f(x_2)}\left(f''(x_2)f(x_2) + \frac{\sin^2\alpha_2}{\dot{x}_2^2}\right)\end{aligned}$$

仮定から $\dot{x}_2 = 1/\sqrt{1+f'(x_2)^2} > 0,\ \sin\alpha_2 > 0$ および $f(x) > 0$ であったので,

$$f''(x_2)f(x_2) + (1+f'(x_2)^2)\sin^2\alpha_2 \le 0$$

のとき $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s_2^2}H(s_1,s_2,s_3) < 0$ となる.

$1+f'(x_2)^2 > 0$ かつ $0 < \sin^2\alpha_2 \le 1$ より, もし $f''(x_2)f(x_2) + f'(x_2)^2 + 1 \le 0$ を満たす x_2 が存在すれば, $f''(x_2)f(x_2) + (1+f'(x_2)^2)\sin^2\alpha_2 \le 0$ となる.

ゆえに, 不等式 (3) が成り立てば不変曲線は存在しないことがわかる. □

2.3　適用例: $f(x) = A\sin x + d$ の場合

$d > A \ge 0$ として, $f(x) = A\sin x + d$ により定まるビリヤード系を考える.

$A = 0$ のときは $f(x) = d$ であり, 任意の $w \in (-1,1)$ に対し $C_w = \{(s,w)|s \in \mathbb{S}\}$ は相空間上の不変曲線となるため, 相空間全体が不変曲線による葉層構造を持つ.

では, $A > 0$ のときはどうだろうか. $f(x) = A\sin x + d$ に対し, $f'(x) = A\cos x, f''(x) = -A\sin x$ なので,

$$f''(x)f(x) + f'(x)^2 + 1 = 1 + A^2\cos 2x - dA\sin x = (1+A^2) - 2A^2\sin^2 x - dA\sin x \qquad (4)$$

となる.

ここで, 任意の $u \in [-1,1]$ で $-2A^2u^2 - dAu + (1+A^2) \ge 0$ が成り立つための必要十分条件は $d \in \left[\dfrac{A^2-1}{A}, \dfrac{1-A^2}{A}\right]$ であるから, $-2A^2u^2 - dAu + (1+A^2) < 0$ となる $u \in [-1,1]$ が存在するのは $d > \dfrac{1-A^2}{A}$ または $d < \dfrac{A^2-1}{A}$ が成り立つときである.

仮定より $d > A > 0$ なので, 主定理から不変曲線が存在しないための十分条件は $d > \dfrac{1-A^2}{A}$, つまり $A > \dfrac{-d+\sqrt{d^2+4}}{2}$ である.

特に, $A > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であれば d にかかわらず不変曲線は存在しないことがわかる.

$f(x) = A\sin\omega x + d$ の場合も同様にして $d > \dfrac{1-\omega^2A^2}{\omega^2 A}$, つまり $A > \dfrac{-\omega d+\sqrt{\omega^2d^2+4}}{2\omega}$ のとき不変曲線が存在せず, 特に $A > \dfrac{1}{\sqrt{2}\omega}$ のとき d にかかわらず不変曲線が存在しないことがわかる.

参考文献

[1] S. Tabachnikov. Geometry and billiards. American Mathematical Society, Providence, RI; Mathematics Advanced Study Semesters, University Park, PA, 2005.

[2] 柴山允瑠. ハミルトン力学系可積分系と KAM 理論を中心に. サイエンス社, 2016.

[3] V. Bangert. Mather sets for twist maps and geodesics on tori. Dynamics reported, 1 (1988), 1 – 56.

[4] V. F. Lazutkin. Existence of caustics for the billiard problem in a convex domain. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 37 (1973), 186 – 216.

[5] J. N. Mather. Glancing billiards. Ergodic Theory Dynam. Systems, 2 (1982), 397 – 403.

[6] M. Bialy. Convex billiards and a theorem by E. Hopf. Math. Z., 214 (1993), 147 – 154.

[7] A. Hubacher. Instability of the boundary in the billiard ball problem. Comm. Math. Phys., 108 (1987), 483 – 488.

環境の感知と運動を同時に制御する化学反応系ロボットの数理モデリング

公立はこだて未来大学　大学院システム情報科学研究科　複雑系情報科学領域
○小田中 嵐 (Arashi ODANAKA) *,
田中 吉太郎 (Yoshitaro TANAKA)†, 櫻沢 繁 (Shigeru SAKURAZAWA)‡

概要

近年，Belousov-Zhabotinsky 反応（BZ 反応）という化学反応を用いて生物の柔軟性を再現するようなロボットが開発されている [1]．この化学反応系を用いたロボットは，平坦な床で一方向に運動し，狭空間で進行方向を反転させる振る舞いが観測されている．本研究では，この化学反応系ロボットの運動を表す数理モデルを，ミミズの蠕動運動を表すマルチブロックモデルと BZ 反応の数理モデルを組み合わせることによって構築した．

1　導入

一般に，ロボットはセンサなどで周りの環境を感知し，得られた情報を元にコンピュータによって計算が行われ，その計算結果に応じて行動を制御する．つまり，ロボットの行動は周囲の環境の感知から生まれていると言える．一方で，生物に関してはこの逆のプロセスを考えることができる．例えば，目隠しをした人に棒を渡す状況を考える．棒を掴んだ際に棒の硬さや重さ，温度などの情報が得られると考えられるが，このままで得られる情報は限られている．このとき，棒を振ることによって新たに棒の長さや強度などの情報が得られると考えられ，これは行為から知覚が生まれていると言える．このように，知覚と行為には双方向の関係がある．

近年，Belousov-Zhabotinsky 反応（以下，BZ 反応とする）という化学反応を用いて，このような生物の柔軟性の再現を試みたロボットが開発されている [1, 2, 3, 4]．吉田らは，BZ 反応の酸化還元反応に応じて体積を膨潤・収縮させ，平坦な床上を一方向に運動できるゲル状のロボットを開発した [2]．さらに，櫻沢は，ゲル外部の溶液の影響を受けて BZ 反応の反応速度や周期が変化すること，反応生成物が外部の溶液に影響を与えることに注目し，ロボットが環境との相互作用によって自身の運動を調節できることを発見した [2]．具体的には，ゲルが運動によって狭空間に侵入すると，進行方向を逆転させることを明らかにした（図 1）．

これは，BZ 反応がロボット内部の触媒の密度と外部の溶液の濃度の変化に対応し，反応のパターンを変えたというものである．すなわち，このロボットにおいて BZ 反応は運動の動力源であり，環

* E-mail:g2122017@fun.ac.jp
† 公立はこだて未来大学システム情報科学部, E-mail: y-tanaka@fun.ac.jp）
‡ 公立はこだて未来大学システム情報科学部, E-mail: sakura@fun.ac.jp

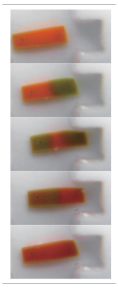


図 1: 狭空間での進行方向の逆転 [1]

境を感知するセンサの役割も，それに応じて運動を変える判断を行う役割も果たしている．また，BZ ゲルは体を伸縮させるように進むが，これはミミズのような手足を持たない生物に見られる蠕動運動と酷似している．

櫻沢らによって観測された，環境の感知と運動の制御を同時に行うような振る舞いは，ある特定の狭空間における一方向の蠕動運動でのみ確認されたことである．そのため，BZ 反応の条件や周りの環境の変化させた場合についての振る舞いの予測ができていない．そこで本研究では，化学反応系ロボットがどのようなシステムによって運動を制御しているかを明らかにすることを目的とする．本研究では，ロボット内部で発生する BZ 反応の数理モデルと，蠕動運動の数理モデルを組み合わせることで，BZ 反応によって運動を制御するようなモデルを提案する．

2 先行研究

2.1 BZ 反応を記述するモデル

BZ 反応は代表的な反応拡散系であり，次のように記述できる．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_u \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + R_u(u,v) \qquad (0 \le x \le L,\ t > 0) & (1) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_v \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + R_v(u,v) \qquad (0 \le x \le L,\ t > 0) & (2) \end{cases}$$

$u = u(x,t)$ は反応の活性因子（$HBrO_2$）の濃度，$v = v(x,t)$ は反応の抑制因子（Br^-）の濃度，D_u および D_v はそれぞれの物質の拡散係数，R_u および R_v は反応項を表す．反応項は BZ 反応の化学組成によって異なるが，今回は RZ モデルを採用した．RZ モデルは次の 2 変数系で表される [7].

$$\begin{cases} R_u(u,v) = \dfrac{1}{\varepsilon}\left(u(1-u) - 2q\alpha \dfrac{v}{1-v}\dfrac{u-\mu}{u+\mu}\right) & (3) \\ R_v(u,v) = u - \alpha \dfrac{v}{1-v} & (4) \end{cases}$$

ここで，q は反応物の濃度に依存したパラメータ，ε，μ，α は反応物の濃度と反応速度に依存したパラメータである．

2.2 マルチブロックモデル

ロボットは内部で発生する酸化還元に対応して膨潤・収縮を繰り返し，体積の変化によって方向性のある運動を実現している．このような運動はミミズやヒルのような手足を持たない生物に見られる蠕動運動に非常に酷似している．本研究では，BZ ゲルの運動を蠕動運動として捉え，ミミズの蠕動運動を表すマルチブロックモデル [6] によって表す．本章ではマルチブロックモデルの概要について述べる．

まず，生物の体を複数のブロックとばねと蝶番によって表す（図 2）．ばねの自然長は蝶番の開き角度によって変化すると仮定する．このとき，体内に伝播する蠕動波をばねの張力として考え，接地面と体の間にはたらく摩擦を粘性摩擦によって近似することで，蠕動運動は 1 次元のばねの単振動の方程式として与えられる．

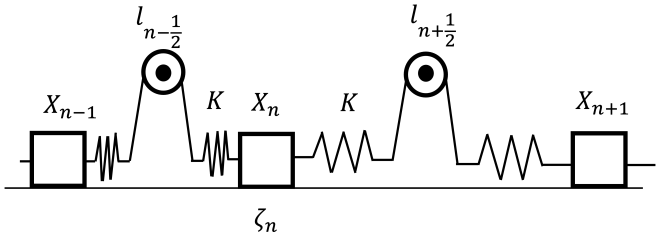


図 2: マルチブロックモデル

このようなマルチブロックモデルの運動方程式は次のように与えられる．

$$\zeta_i(t)\dot{X}_i = \begin{cases} K\left[(X_{i+1} - X_i - l_{i+\frac{1}{2}}) - (X_i - X_{i-1} - l_{i-\frac{1}{2}})\right] & (1 < i < M) \\ K\left[(X_{i+1} - X_i - l_{i+\frac{1}{2}})\right] & (i = 1) \\ K\left[-(X_i - X_{i-1} - l_{i-\frac{1}{2}})\right] & (i = M) \end{cases} \tag{5}$$

$$l_{n+\frac{1}{2}} = l_0 + a\sin\left(\omega t - \frac{2i\pi}{N}\right) \tag{6}$$

ここで，$X_i = X_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$ は時刻 t における各ブロックの中心の位置，ζ_i は各ブロックの粘性摩擦係数，K はばね定数，l_0 はばねの平均の長さである．ばねは蝶番によって繋がれており，蝶番の開き角度が ωt で変化する場合を考える．このとき，ばねの自然長は正弦波状に振る舞い，$l_0 + a\sin\omega t$ によって与えられる．a は振幅の大きさ，ω は角速度を表す．$l_{i+\frac{1}{2}}$ は i 番目と $i+1$ 番目のブロックの間のばねの自然長，N は周期を表す．また，$l_{i+\frac{1}{2}} > 0$ より $|l_0| > a$ を満たすように a を設定する．

3　提案モデル

3.1　1 次元空間で BZ 反応の濃度に対応して蠕動運動を行うモデル

化学反応系ロボットの数理モデルは，マルチブロックモデルに BZ 反応の濃度を組み合わせて考える．

まず，ロボットの運動を蠕動運動と考えることにより，ミミズの蠕動運動を表すマルチブロックモデルによって表現する．長さ L の短冊状のロボットを M 分割し，M 個のブロックのマルチブロックモデルとして式 (5) によって表す．ただし，元のマルチブロックモデルでは，ばねの自然長はすべての位置で周期的に変化している．一方で，ロボットの伸び縮みは内部の BZ 反応の酸化還元に対応している．よって，$l_{i+\frac{1}{2}}$ の変化は BZ 反応の濃度を対応していると仮定する．

次に，ロボット内部の BZ 反応について考える．式 (1)，(2) を差分近似することによって，i 番目のブロックに対応する濃度 u_i，v_i を求める．$u(x,t) = u(i\Delta,t) = u_i(t)$，$v(x,t) = v(i\Delta,t) = v_i(t)$ $(i = 0,1,\ldots,M)$ とおいて，次のように表す．

$$u_{i,t} = D_u \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} + R_u(u_i, v_i) \tag{7}$$

$$v_{i,t} = D_v \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta x^2} + R_v(u_i, v_i) \tag{8}$$

ここで，$\Delta x = L/M$ であり，下付きの添字 t は時間微分を表す．

初期条件，境界条件については次のように考える．

$$\begin{cases} u_M(0) = U_0 & (9) \\ u_{-1}(t) = u_1(t),\ u_{M+1}(t) = u_{M-1}(t) & (10) \\ v_{-1}(t) = v_1(t),\ v_{M+1}(t) = v_{M-1}(t) & (11) \end{cases}$$

初期値は反応領域の右端のみに u の濃度を与える．境界条件は Neumann 境界条件とした．ただし，u_{-1}，u_{M+1}，v_{-1}，v_{M+1} は Neumann 境界条件で計算を行うための仮想的な点である．

離散化された濃度の値を用いて，マルチブロックモデルに濃度を対応させる．はじめに，ばねの自然長の変化について考える．ロボットは酸化すると膨張し体積が大きくなり，還元すると収縮して体積が小さくなる．この濃度変化による体積変化を，マルチブロックモデルではばねの伸び縮みとして考える．つまり，ばねの自然長は BZ 反応の活性因子の濃度に比例して変化するものとして与える．

$$l_{i+\frac{1}{2}} = l_0 + au_i \tag{12}$$

ただし，$l_{n+\frac{1}{2}} > 0$ より $|l_0| > a$ を満たすように a を設定する．

次に，摩擦について考える．ロボットは酸化して体積が大きくなるとアーチ状に膨張し，地面との接地面積が小さくなると仮定する．つまり，各ブロックにかかる摩擦は酸化しているほど小さく，還元しているほど大きくなるように与える．

$$\zeta_i(t) = \frac{b}{1 + c(\frac{u_{i-1}+u_i}{2})} \tag{13}$$

b，c はそれぞれ $b > 0$，$c > 0$ を満たすパラメータである．濃度は各ブロックの端点に与えているため，1 つのブロックに対して両側の端点の濃度を平均することで，1 つのブロックにおける濃度を与えている．

3.2 1 次元空間で狭空間で進行方向を反転させるモデル

次に，ロボットが狭空間で進行方向を反転させる現象について考える．ロボットの反転には，反応基質のうち還元剤であるマロン酸の濃度が関係している．ロボットは周辺の溶液と相互作用しながら進行する．このとき，還元剤であるマロン酸は，ロボット内部の酸化している場所で吸収されている．ただし，溶液の拡散の効果によってマロン酸の濃度は一様に保たれようとする．しかし，狭空間では壁の影響で拡散が滞り，吸収されたマロン酸の濃度を補うことができなくなる．そのため，マロン酸の濃度が高い方向から新たに反応波が発生し，その波が支配的になる．このようなメカニズムで，ロボットは BZ 反応の反応パターンを変化させ，進行方向を逆転させている．

したがって，ロボットの運動領域におけるマロン酸の濃度場を導入する．マロン酸の拡散と吸収の効果を反応拡散方程式によって記述する．

$$\frac{\partial m}{\partial t} = D_m \frac{\partial^2 m}{\partial x^2} - c_1 m - c_2 m \chi_\Omega(x) \tag{14}$$

$$\chi_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & (u(x,t) \leq \mathrm{C_{th}},\ x \in \Omega(t),\ t > 0) \quad (15) \\ 0 & (\text{otherwise}) \quad (16) \end{cases}$$

$x \in [-L_m, L_m]$ はシャーレ上の領域，$m = m(x,t)$ はマロン酸の濃度，D_m はマロン酸の拡散係数，c_1 はマロン酸の自然分解率，c_2 はマロン酸の吸収率である．また，$\mathrm{C_{th}}$ は酸化の閾値を表し，$u(x,t)$ がこの値を超えている場所は酸化していると見なす．$\Omega(t)$ はシャーレ上でロボットの存在する領域である．$\chi_\Omega(x)$ はシャーレ上の領域内でロボットの酸化している場所，つまりマロン酸が吸収される場所では 1，それ以外の場所では 0 を取るような特性関数である．

初期条件と境界条件は次のように与える．

$$\begin{cases} m(x,0) = m_0 & (17) \\ m(-L,t) = m_0 & (18) \\ \dfrac{\partial}{\partial x} m(L,t) = 0 & (19) \end{cases}$$

初期条件は初期濃度 m_0 で空間一様に与える．境界条件は左右で分けて考える．左側は開けた空間であり，吸収の効果でマロン酸が減少しても拡散の効果によって一定量供給され続けているという状況を想定し，Dirichlet 境界条件で与える．右側は壁になっており，マロン酸が流れ込んで来ないことから Neumann 境界条件を与える．

このようにして求めた m をロボット内部の BZ 反応に対応させる．RZ モデルの中でマロン酸の濃度に対応するパラメータは α に相当する．

$$\alpha(x,t) = \frac{k_4 K_8 m(x,t)}{k_1^2 A^2 h_0^2} \tag{20}$$

よって，求めた m は式 (4) の α に含まれる m に代入する．

3.3　2 次元空間で BZ 反応の濃度に対応して蠕動運動を行うモデル

これまで 1 次元空間で考えてきた運動を 2 次元空間に拡張する．

まず，マルチブロックモデルを 2 次元空間に拡張する．(i,j) 番目のブロックの座標を $\boldsymbol{p}_{i,j} = (X_{i,j}, Y_{i,j})^T$, $(i = 1, \dots M_x)$, $(j = 1, \dots M_y)$ とする．2 つのブロックは結合しており，その距離をこのとき，(i,j) 番目のブロックを中心に上下，左右，斜めに隣接するブロックとの距離を

$$\boldsymbol{d}_{i+\frac{m}{2},j+\frac{n}{2}} = \Big((X_{i+\frac{m}{2},j+\frac{n}{2}} - X_{i,j}), (Y_{i+\frac{n}{2},j+\frac{n}{2}} - Y_{i,j})\Big)^T \tag{21}$$

と定義する．ただし，$m, n \in \{-1, 0, 1\}$ である．

また，X 方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)^T$ とする．$\boldsymbol{d}_{i+\frac{m}{2},j+\frac{n}{2}}$ が X 方向となす角を $\theta_{i+\frac{m}{2},j+\frac{n}{2}}$ とすると，ベクトルの内積と外積の関係から，

$$\cos\theta_{i+\frac{m}{2},j+\frac{n}{2}} = \frac{\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{d}_{i+\frac{m}{2},j+\frac{n}{2}}}{\|\boldsymbol{e}_1\|\|\boldsymbol{d}_{i+\frac{m}{2},j+\frac{n}{2}}\|} \tag{22}$$

$$\sin\theta_{i+\frac{m}{2},j+\frac{n}{2}} = \frac{(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{d}_{i+\frac{m}{2},j+\frac{n}{2}})_3}{\|\boldsymbol{e}_1\|\|\boldsymbol{d}_{i+\frac{m}{2},j+\frac{n}{2}}\|} \tag{23}$$

である．ここで，$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_3$ は外積の第 3 成分とし，

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \tag{24}$$

と表す．このようにして求めた $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を用いて力を 2 方向に分解する．

同様に BZ 反応も 2 次元に拡張して考える．$(x,y) \in [0, L_x] \times [0, L_y]$ とする．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = D_u \Delta u + R_u(u,v) & (25) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = D_v \Delta u + R_v(u,v) & (26) \end{cases}$$

1 次元と同様に式 (25), (26) を差分近似する．$u(x,y,t) = u(i\Delta x, j\Delta y, t) = u_{i,j}(t)$, $v(x,y,t) = v(i\Delta x, j\Delta y, t) = v_{i,j}(t)$ $(i = 0, 1, \dots M_x), (j = 0, 1, \dots M_y)$ とする．

$$u_{i,j,t} = D_u\Big(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2}\Big) + R_u(u,v) \tag{27}$$

$$v_{i,j,t} = D_v\Big(\frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{\Delta y^2}\Big) + R_v(u,v) \tag{28}$$

境界条件は Neumann 境界条件で与える．

以上より，2 次元のマルチブロックモデルに濃度を組み込んだモデルを構築した．

$$
\begin{cases}
\zeta_{i,j}\dot{\boldsymbol{p}}_{i,j} = K\Big[\displaystyle\sum_{m,n\in\{-1,0,1\}} \boldsymbol{p}_{i+m,j+n} - 8\boldsymbol{p}_{i,j} - \sum_{m,n\in\{-1,0,1\}} \boldsymbol{l}_{i+\frac{m}{2},j+\frac{n}{2}}\Big] & (29)\\
\boldsymbol{l}_{i+\frac{m}{2},j+\frac{n}{2}} = H_{m,n}(l_0 + U_{m,n}) \begin{pmatrix}\cos\theta_{i+\frac{m}{2},j+\frac{n}{2}}\\ \sin\theta_{i+\frac{m}{2},j+\frac{n}{2}}\end{pmatrix} & (30)\\
H_{m,n} = \begin{cases}1 & (m=0 \text{ or } n=0)\\ \sqrt{2} & (\text{otherwise})\end{cases} & (31)\\
U_{m,n} = \begin{cases} a\dfrac{u_{i,j+\frac{n+1}{2}} + u_{i+1,j+\frac{n+1}{2}}}{2} & (m=0)\\ a\dfrac{u_{i+\frac{m+1}{2},j} + u_{i+\frac{m+1}{2},j+1}}{2} & (n=0)\\ a u_{i+\frac{m+1}{2},j+\frac{n+1}{2}} & (\text{otherwise})\end{cases} & (32)\\
\zeta_{i,j} = \dfrac{b}{1 + c(\frac{u_{i,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i+1,j+1}}{4})} & (33)
\end{cases}
$$

式 (29) は 2 次元に拡張したマルチブロックモデルを表す．1 つのブロックにつき，上下，左右，斜めの 8 つのブロックとの結合を考える．

式 (30)〜式 (32) はばねの自然長と濃度の対応を表す．上下，左右に結合したブロックの場合，ばねがまたがるブロックの辺の端点の濃度を平均して与える．斜めに結合したブロックの場合，結合の方向に対応した端点の濃度を与える．また，ブロックが斜めに結合している場合はばねの長さを $\sqrt{2}$ 倍して与える．このようにして求めたばねの自然長の長さを $\cos\theta$，$\sin\theta$ を用いて X 方向と Y 方向にそれぞれ分解する．

式 (33) は摩擦と濃度の対応を表す．1 つのブロックに対して 4 つの頂点に濃度が与えられている．そのため，4 つの頂点に与えられた濃度の平均を求めることで，1 つのブロックにおける濃度を与える．1 次元の場合と同様に，酸化している場所で摩擦が小さくなるように設定する．

3.4 2 次元空間で狭空間で進行方向を反転させるモデル

1 次元空間と同様に 2 次元空間のマロン酸の濃度場を導入する．

$$\frac{\partial m}{\partial t} = D_m \Delta m - c_1 m - c_2 m \chi_\Omega(x,y) \tag{34}$$

$$\chi_\Omega(x,y) = \begin{cases}1 & (u(x,y,t) \le \mathrm{C_{th}},\ x,y \in \Omega(t),\ t>0) \quad (35)\\ 0 & (\text{otherwise}) \quad (36)\end{cases}$$

$(x,y) \in [0, L_{m_x}] \times [0, L_{m_y}]$ はシャーレ上の領域，$m = m(x,y,t)$ はマロン酸の濃度である．

初期条件と境界条件は次のように与える．

$$
\begin{cases}
m(x,y,0) = m_0 & (37)\\
\dfrac{\partial}{\partial x} m(0,y,t) = \dfrac{\partial}{\partial x} m(L_x,y,t) = 0 & (38)\\
m(x,0,t) = m_0 & (39)\\
\dfrac{\partial}{\partial y} m(x,L_y,t) = 0 & (40)
\end{cases}
$$

初期条件は初期濃度 m_0 で空間一様に与える．境界条件はコの字型の壁を Neumann 境界条件で与え，開けた空間を Dirichlet 境界条件で与える．このようにして求めた m を RZ モデルのパラメータ α に代入する．

4　シミュレーション結果

4.1　1 次元空間で狭空間で進行方向を反転させるモデル

1 次元でマロン酸の濃度場を導入し反転を考慮したモデルのシミュレーション結果を図 3 に示す．グラフは左からロボットの運動とマロン酸の濃度，ロボット内の BZ 反応，右端のブロックの座標変化を表す．1 つ目のグラフの下側の長方形がロボットを表す．ロボット内の色の変化は u の濃度の大きさを表し，小さい方から赤 $\rightarrow$ 緑 $\rightarrow$ 青で表す．上側の緑線は，マロン酸の濃度 m を表す．初期値は一様に与えるが，ロボットの酸化している場所で吸収される．2 つ目のグラフは，赤線が u の濃度，青線が v の濃度を表す．

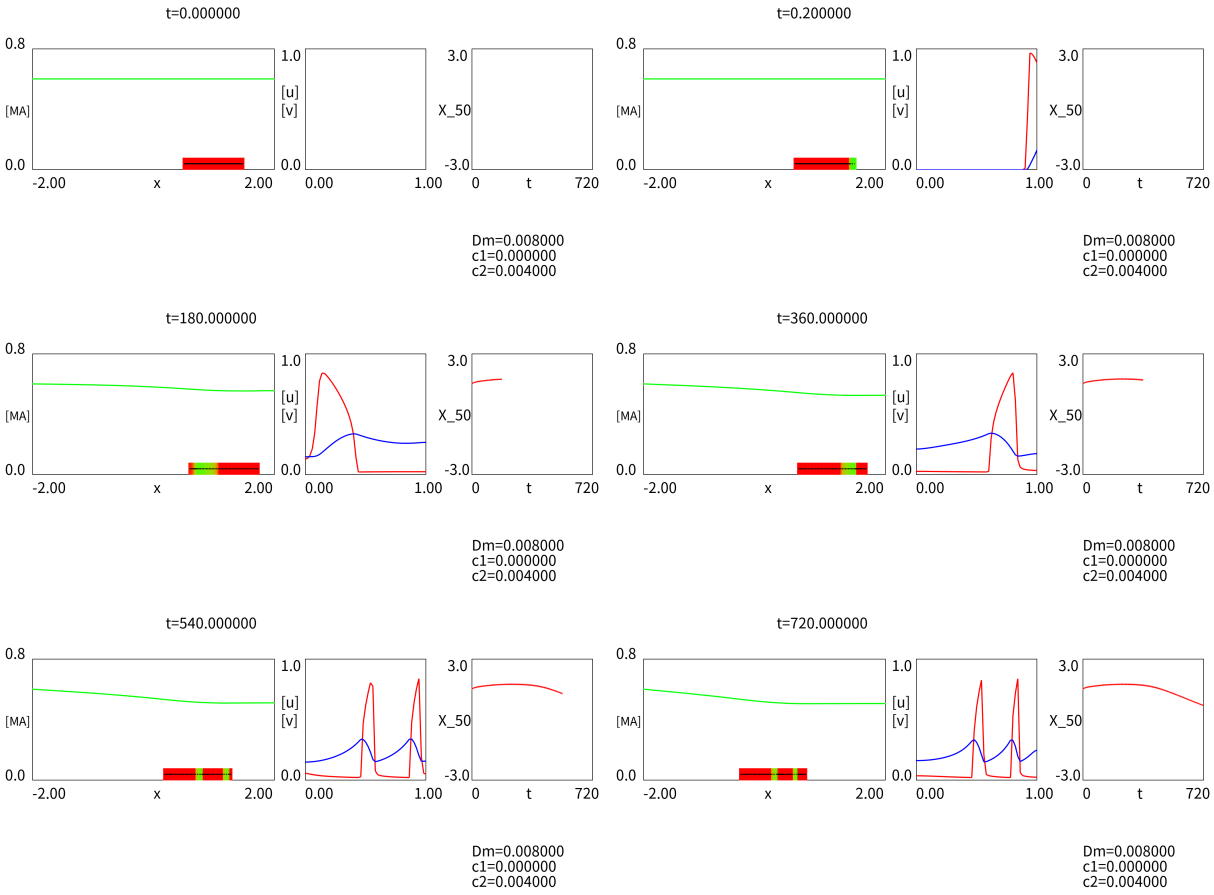


図 3: 左:ロボットの運動とマロン酸の濃度場，中央:ロボット内の BZ 反応，右:右端のブロックの座標変化．パラメータは $M = 50, K = 20, l_0 = 1/M, a = 3l_0/4, D_u = 8.0 \times 10^{-8}, D_v = 8.0 \times 10^{-8}, q = 0.5, \alpha = 0.6, \varepsilon = 0.01, \mu = 0.02, a' = 1, b = 1.1, D_m = 8.0 \times 10^{-3}, c_1 = 0, c_2 = 4.0 \times 10^{-3}, m_0 = 0.6$

初期値を右端のみに与えると，右から左に向かって反応波が伝播する．このとき，ロボットは反応波とは対称的に左から右に向かって進行していく．その間，ロボットの運動に合わせてマロン酸が吸収されていく．右側の壁に差し掛かると，ロボットの右側と左側で濃度差が生まれ，新たに左側から右側に向かって伝播する反応波が発生する．最終的に，新たに発生した右向きの反応波が左向きの波を打ち消し，ロボットは左側に進行することが確認できる．

4.2　2 次元空間で狭空間で進行方向を反転させるモデル

2 次元でマロン酸の濃度場を導入し反転を考慮したモデルのシミュレーション結果を図 4 に示す．グラフは左からロボットの運動，ロボット内の BZ 反応，マロン酸の濃度を表す．ロボット内の色とマロン酸の濃度場の色はマロン酸の濃度の大きさを示しており，大きい方から赤 $\rightarrow$ 緑 $\rightarrow$ 青で表す．

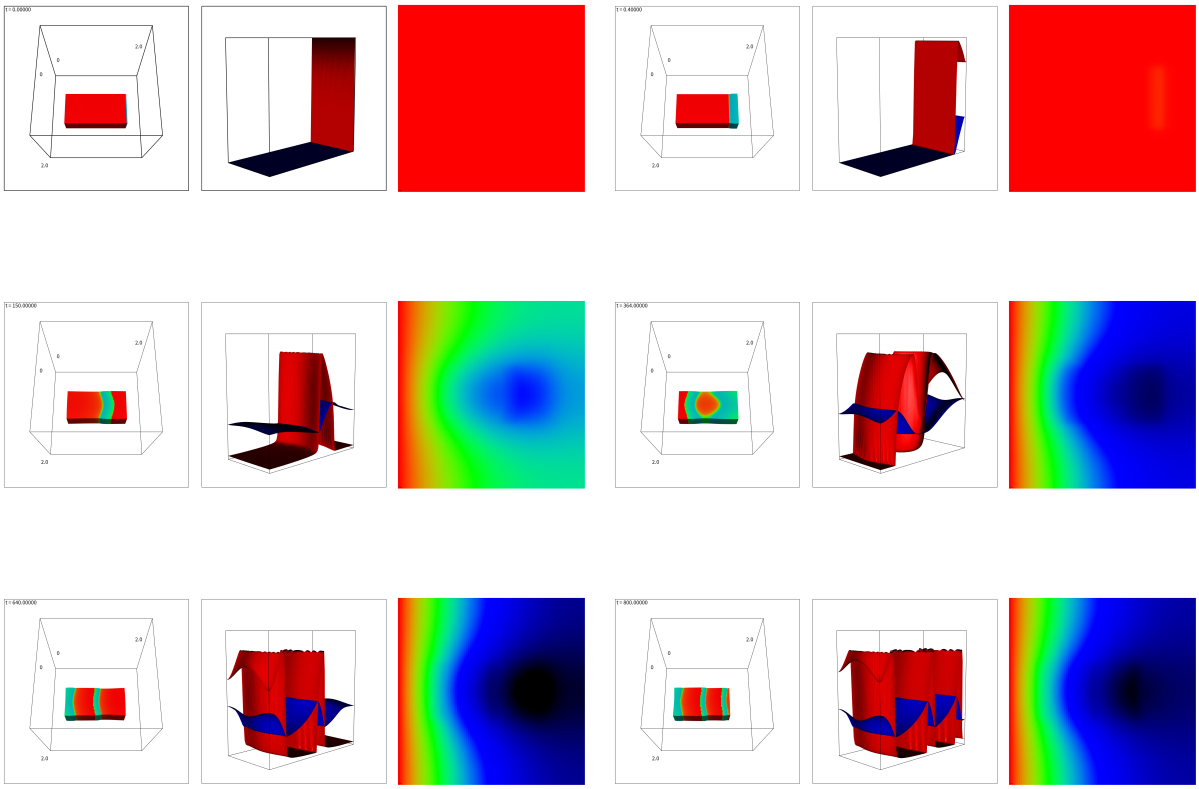


図 4: 左:ロボットの運動とマロン酸の濃度場，中央:ロボット内の BZ 反応，右:マロン酸の濃度場パラメータは $M_x = 50,\ M_y = 100,\ K = 2.0,\ l_0 = 1.0/M,\ a = 0.75l_0,\ D_u = 8.0 \times 10^{-8},\ D_v = 8.0 \times 10^{-8},\ q = 0.5,\ \alpha = 0.5,\ \varepsilon = 0.01,\ \mu = 0.02,\ b = 1.1,\ c = 4.0,\ D_m = 8.0 \times 10^{-3},\ c_1 = 0,\ c_2 = 4.0 \times 10^{-3}$

初期値を右側縦 1 列に与えると，右から左に向かって反応波が伝播する．このとき，ロボットは反応波とは対称的に左から右に向かって進行することが確認できる．また，ロボットは形状を保ったまま運動していることが確認できる．その間，ロボットの運動に合わせてマロン酸が吸収されていく．

右側の壁に差し掛かると，ロボットの右側と左側で濃度差が生まれ，新たに左側から右側に向かって伝播する反応波が発生する．最終的に，新たに発生した右向きの反応波が左向きの波を打ち消し，ロボットは左側に進行することが確認できる．

5　まとめと今後の展望

本研究では，BZ 反応の濃度変化に対応して蠕動運動を起こし，狭空間で反転する化学反応系ロボットの数理モデルを構築した．まず，マルチブロックモデルの自然長と摩擦の項に BZ 反応の濃度を対応させることで，ロボットの方向性のある運動を再現した．さらに，ロボットの運動領域にマロン酸の濃度場を導入することで，マロン酸の吸収によって濃度勾配に応じて反応パターンを変化させ，進行方向を反転させる様子を再現した．また，1 次元空間で考えたモデルを 2 次元空間に拡張し，運動の様子を再現した．

今後は，次の 3 点について検討をしている．1 点目は，より適したパラメータの調査である．BZ 反応の計算において分割数を多くとると周期が変わってしまうため，分割数が多いときに対応した反応周期のパラメータを見つける必要がある．また，うまく反転が発生するようなパラメータの範囲を調査する必要がある．2 点目は，ロボットの大きさの変化を導入することである．ロボット内部の BZ 反応は固定領域上で計算しているが，実際はロボットの収縮・膨張によって領域が変化している．大きさが変化するような領域上での BZ 反応を考えることで，より実験の条件を忠実に再現できると考えられる．3 点目は，別領域でのシミュレーションである．実験の再現のため，コの字型の領域を考えたが，ロボットの運動領域を円や星形などの複雑な形に変化させた場合の計算を行いたい．

■謝辞　本研究は，科研費 (課題番号:21H03512) の助成を受けたものである．

参考文献

[1] 櫻沢繁，BZ ゲルを用いた化学知能ロボットのデザイン，平成 24〜26 年度科学研究費補助金研究成果報告書，2015.

[2] 吉田亮，化学振動反応を利用した自励振動ゲルの設計，Electrochemistry，Vol.71, No.5, pp.337-341，2003.

[3] 前田真吾，原雄介，吉田亮，橋本周司，化学ロボットの実現を目指した自励振動ゲルアクチュエーターの創製，高分子論文集，Vol.65，No.10，pp.634-640，2008.

[4] 吉田彩乃，櫻沢繁，計算としての化学反応によるゲルのロコモーション，Journal of Computer Chemistry, Japan，Vol.16，No.1，pp.17-21，2017.

[5] 三池秀敏，森義仁，山口智彦，非平衡系の科学 Ⅲ 反応・拡散系のダイナミクス，講談社，1997.

[6] Y. Tanaka, K. Ito, T. Nakagaki, and R. Kobayashi, Mechanics of peristaltic locomotion and role of anchoring, Journal of The Rolyal Society Interface, Vol.9, No.67, pp.222-233, 2011.

[7] A. B. Rovinskii and A. M. Zhabotinskii, Mechanism and mathematical model of the oscillating bromate-ferroin-bromomalonic acid reaction, The Journal of Physical Chemistry, Vol.88, No.25, pp.6081-6084, 1984.

グラフのラベル付き辺に付随した互換の積

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
内海　凌 (Ryo UCHIUMI) *

概要

グラフのラベル付き辺に付随した互換の積は頂点集合の置換を与える．Dénes (1959) は，任意のラベル付けによる置換が巡回置換であることと，グラフが木であることが同値であることを示した．本講演では，Dénes の主張における符号付きグラフによるアナロジーと，巡回置換を与えるラベル付けをもつグラフのグラフ埋め込みによる特徴づけを与える．内容の一部は，辻栄氏[*1]との共同研究による．

1　辺順序と互換の積

1.1　グラフの定義と用語

n を正の整数とし，$[n] \coloneqq \{1, \dots, n\}$ とおく．本論文における **(有限単純) グラフ ((finite simple) graph)** $\mathcal{G}$ とは，頂点の集合 $V_{\mathcal{G}}$ と辺の集合 $E_{\mathcal{G}}$ の組で，

- $V_{\mathcal{G}} = [n]$;
- $E_{\mathcal{G}}$ は $V_{\mathcal{G}}$ の位数 2 の部分集合からなる集合

となるものをいい，$\mathcal{G} = (V_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}})$ と書く．以下，$m \coloneqq \#E_{\mathcal{G}}$ とする．辺 $e = \{u, v\}$ に対して，頂点 u, v を e の**端点 (endpoint)** という．頂点 v を端点にもつ辺の集合を $I_{\mathcal{G}}(v)$ で表す．2 つの頂点の間に複数の辺 (**多重辺 (multiple edge)**)，2 つの端点が一致している辺 (**ループ (loop)**) を許容した**多重グラフ (multigraph)** を考えることもある．以下特に断らない限り，グラフ $\mathcal{G}$ は多重グラフではないとする．

$\mathcal{G}, \mathcal{H}$ をグラフとする．$\mathcal{H}$ が $\mathcal{G}$ の**部分グラフ (subgraph)** であるとは．$V_{\mathcal{H}} \subseteq V_{\mathcal{G}}$, $E_{\mathcal{H}} \subseteq E_{\mathcal{G}}$ を満たすときにいう．特に $V_{\mathcal{H}} = V_{\mathcal{G}}$ であるとき，$\mathcal{G}$ の部分グラフ $\mathcal{H}$ は**全域 (spanning)** であるという．グラフ $\mathcal{G}$ から部分グラフ $\mathcal{H}$ の辺をすべて除いたグラフを $\mathcal{G} \setminus \mathcal{H}$ と書く．つまり，$\mathcal{G} \setminus \mathcal{H} = (V_{\mathcal{G}}, E_{\mathcal{G}} \setminus E_{\mathcal{H}})$ である．

グラフ $\mathcal{G}$ の **walk** とは，辺の列 $W = (e_1, \dots, e_q)$ のことで，頂点の列 $(v_0, \dots, v_q)$ で $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ となるものをいう．v_0, v_q を walk W の**端点 (endpoint)** という．walk W が **trail** であるとは，W の辺がすべて異なるときにいう．walk W が **path** であるとは，W の頂点がすべて異なるときにいう．walk W が **closed** であるとは，端点が一致しているときにいい，グラフ $\mathcal{G}$ の **cycle** とは，

* E-mail: ryo.uchiumi@math.sci.hokudai.ac.jp / ryo.uchiumi.math@gmail.com
*1 北海道教育大学旭川校准教授

closed walk のうち，頂点 $v_0 = v_q, v_1, \ldots, v_{q-1}$ が相異なるときにいう．

グラフ $\mathcal{G}$ の 2 つの頂点 u, v が**連結 (connected)** であるとは，u, v を端点とする $\mathcal{G}$ の path が存在するときにいう．グラフが**連結 (connected)** であるとは，任意の 2 頂点が連結であるときにいう．グラフ $\mathcal{G}$ の**連結成分 (connected component)** とは，$\mathcal{G}$ の極大連結部分グラフのことをいう．

木 (tree) とは，cycle をもたない連結グラフのことをいう．グラフ $\mathcal{G}$ が木であるためには，次の条件のうち少なくとも 2 つを満たすことが必要十分である:

(1) $\mathcal{G}$ が連結;
(2) $\mathcal{G}$ が cycle をもたない;
(3) $\mathcal{G}$ がちょうど $n-1$ 本の辺をもつ．つまり，$\#E_{\mathcal{G}} = \#V_{\mathcal{G}} - 1$.

グラフが**森 (forest)** であるとは，すべての連結成分が木であるときにいう．グラフ $\mathcal{G}$ は連結であるとき，$\mathcal{G}$ の全域部分グラフとして木をもつ．これを**全域木 (spanning tree)** という．

1.2 互換の積

$\mathcal{G}$ をグラフとする．各辺 $e = \{u, v\}$ に対して，端点を入れ換える互換 $\tau_e \coloneqq (u, v) \in \mathfrak{S}_n$ を対応づける．ただし，$\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群である．

グラフ $\mathcal{G}$ の**辺順序 (edge ordering)** とは，辺の集合 $E_{\mathcal{G}}$ の全順序 $\leq_\omega$ のことをいい，$\omega = (e_1, \ldots, e_m)$ のように表す．ただし，$i \leq j$ のとき $e_i \leq_\omega e_j$ であるものとする．辺順序 $\omega = (e_1, \ldots, e_m)$ に対して，互換の積 π_ω を

$$\pi_\omega \coloneqq \tau_{e_m} \cdots \tau_{e_1}$$

で与える (積の順序が作用の順であることに注意)．以下，辺 e_i に対応する互換を τ_i と表すことがある．

辺順序 ω による互換の積 π_ω のサイクル分解は，直接的な計算をすることなく，グラフ $\mathcal{G}$ のいくつかの trail を観察するだけで求めることができる．辺順序 $\omega = (e_1, \ldots, e_m)$ および各頂点 v に対して，$E_{\mathcal{G}}$ の部分集合 $T_\omega(v)$ を

$$T_\omega(v) \coloneqq \{\, e_i \in E_{\mathcal{G}} \mid \tau_i \tau_{i-1} \cdots \tau_1(v) \neq \tau_{i-1} \cdots \tau_1(v) \,\}$$

で定める．ただし，$i = 1$ のとき，$\tau_{i-1} \cdots \tau_1(v) = v$ とする．$T_\omega(v) = \{v_{j_1}, \ldots, v_{j_s}\}$ $(j_1 < \cdots < j_s)$ と表せるとき，辺の列 $\gamma_\omega(v)$ を

$$\gamma_\omega(v) \coloneqq (e_{j_1}, \ldots, e_{j_s}) \tag{1.1}$$

で定義する．$\gamma_\omega(v)$ は v, $\pi_\omega(v)$ を端点とする trail である．$v_0 \coloneqq v$, $e_{j_k} = \{v_{k-1}, v_k\}$ $(k \in \{1, \ldots, s\})$ とするとき，$\gamma_\omega(v)$ は次のようにして，ω による辺のラベル付けをしたグラフ $\mathcal{G}$ の観察だけで求めることができる:

(1) 最初の辺 e_{j_1} は，$I_{\mathcal{G}}(v_0)$ の中で最小のラベルをもつ辺とする．
(2) 各 $k \geq 2$ に対して，辺 e_{j_k} は $I_{\mathcal{G}}(v_{k-1})$ の中で $e_{j_{k-1}}$ の次に大きいラベルをもつ辺とする．
(3) (2) を辺 e_{j_k} が $I_{\mathcal{G}}(v_k)$ の中で最大のラベルをもつ辺となるまで繰り返す．

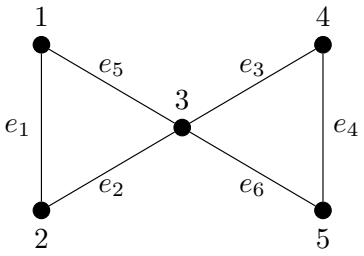


図 1　butterfly graph.

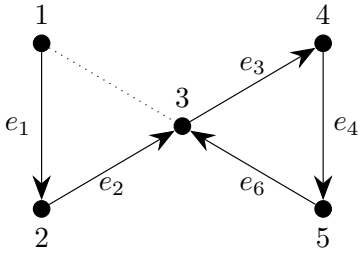


図 2　trail $\gamma_\omega(1)$.

例 1.1. $\mathcal{G}$ を図 1 で与えるグラフ (butterfly graph) とし，$\omega = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$ をその辺順序とする．このとき，互換の積 π_ω は

$$\pi_\omega = \tau_6\tau_5\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1 = (3\ 5)(1\ 3)(4\ 5)(3\ 4)(2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3\ 2\ 5\ 4)$$

となる．また，各 trail $\gamma_\omega(v)$ は次のように求めることができる (図 2 を参照):

$$\begin{aligned}
&\gamma_\omega(1) = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_6) && (1 \text{ から } 3 \text{ への trail}),\\
&\gamma_\omega(2) = (e_1, e_5, e_6) && (2 \text{ から } 5 \text{ への trail}),\\
&\gamma_\omega(3) = (e_2) && (3 \text{ から } 2 \text{ への trail}),\\
&\gamma_\omega(4) = (e_3, e_5) && (4 \text{ から } 1 \text{ への trail}),\\
&\gamma_\omega(5) = (e_4) && (5 \text{ から } 4 \text{ への trail}).
\end{aligned}$$

1.3　full cyclic permutation ordering と Dénes の定理

定義 1.2. グラフ $\mathcal{G}$ の辺順序 ω が **full cyclic permutation ordering** であるとは，互換の積 π_ω が長さ n の巡回置換であるときにいう．

例 1.1 で与えた butterfly graph の辺順序は full cyclic permutation ordering である．本講演では，full cyclic permutation ordering をもつグラフに注目する．その上で，次の Dénes による定理は重要である:

定理 1.3 ([Dén59, §2, Theorem 1]. [Mos89, §2, Lemma], [Paw22, §2, Lemma 2.1] も参照)**.** グラフ $\mathcal{G}$ に対して，次は同値である:

(i) $\mathcal{G}$ の任意の辺順序が full cyclic permutation ordering である;
(ii) $\mathcal{G}$ が木である．

この定理は，長さ n の巡回置換における，$n-1$ 個の互換の積による分解の総数を計算する過程で得られたものである．近年においては，彩色対称多項式 (chromatic symmetric function) の研究において注目されている．特に Pawlowski [Paw22] では，グラフと対称群で生成される群代数を関連付ける過程で，Dénes の定理が重要な役割を果たしている．

本講演では，Dénes の定理を次の 2 つの観点から類推する:

(a) full cyclic permutation ordering をもつグラフとはどのようなグラフか．

(b) グラフ $\mathcal{G}$ を符号付きグラフ，対称群 $\mathfrak{S}_n$ を超八面体群 $\mathfrak{H}_n$ にそれぞれ変えた場合，Dénes の定理と同様の主張は成り立つのか．

本講演における主結果は，定理 2.3 と定理 3.4 であり，その内容は Tsujie–U [TU23] および Uchiumi [Uch23] による．

2 full cyclic permutation ordering とグラフ埋め込み

この章では，full cyclic permutation ordering をもつグラフを，グラフ埋め込みの観点で特徴づける．グラフ埋め込みについては，[MT01] が詳しい．

2.1 グラフ埋め込み

以下，グラフ $\mathcal{G}$ は連結であるとする．実際，連結でないグラフが full cyclic permutation ordering をもつことはない．

(連結な) グラフ $\mathcal{G}$ に対して，$\beta(\mathcal{G}) \coloneqq \#E_{\mathcal{G}} - V_{\mathcal{G}} + 1 = m - n + 1$ を **Betti 数**という．full cyclic permutation ordering ω をもつグラフ $\mathcal{G}$ は，長さ n の巡回置換 π_ω が m 個互換の積および $n-1$ 個の互換の積による表示をそれぞれもっているため，その Betti 数 $\beta(\mathcal{G})$ は必ず偶数になる．

グラフ $\mathcal{G}$ を位相空間とみなす．Betti 数 $\beta(\mathcal{G})$ は $\mathcal{G}$ の位相空間としての 1 次 Betti 数に等しい．Σ を向き付け可能閉曲面とし，g_Σ をその種数 (genus) とする．$\iota : \mathcal{G} \to \Sigma$ を埋め込み (単射な連続写像) とする．その像 $\iota(\mathcal{G})$ の補空間の各連結成分は**面 (face)** と呼ばれ，その個数を f_ι で表す．埋め込み $\iota : \mathcal{G} \to \Sigma$ が **2-胞体埋め込み (2-cell embedding)** であるとは，すべての面が開円盤に同相であるときにいう．

任意の 2-胞体埋め込み $\iota : \mathcal{G} \to \Sigma$ に対して，

$$\#V_{\mathcal{G}} - \#E_{\mathcal{G}} + f_\iota = 2 - 2g_\Sigma$$

となることがよく知られている．この等式を変形することで

$$2g_\Sigma + f_\iota = \beta(\mathcal{G}) + 1 \tag{2.1}$$

が得られる．つまり，閉曲面の種数を増やせば，その面の個数は減ることがわかる．$\mathcal{G}$ の**最大種数 (maximum genus)** を，2-胞体埋め込み $\iota : \mathcal{G} \to \Sigma$ が存在するような閉曲面 Σ の種数 g_Σ の最大値として定義し，$\gamma_{\max}(\mathcal{G})$ で表す．このとき，等式 (2.1) によって，

$$\gamma_{\max}(\mathcal{G}) \leq \left\lfloor \frac{\beta(\mathcal{G})}{2} \right\rfloor \tag{2.2}$$

であることがわかる．ただし，$\lfloor\ \rfloor$ は床函数である．特に，不等式 (2.2) の等号が成立するとき，$\mathcal{G}$ は **upper embeddable** であるという．定義から，次の同値性がわかる:

(ii) $\mathcal{G}$ が 2-胞体埋め込みで，面の数がちょうど 1 であるものが存在する;
(iii) $\mathcal{G}$ の Betti 数が偶数で，$\mathcal{G}$ が upper embeddable.

Jungerman [Jun78] および Xuong [Xuo79b] はそれぞれ独立に，グラフが upper embeddable であるための必要十分条件を次のように与えている:

定理 2.1 ([Jun78, Theorem 2], [Xuo79b, Theorem A])**.** グラフ $\mathcal{G}$ が連結であるとき，次は同値である:

(iii) $\mathcal{G}$ の Betti 数が偶数で，$\mathcal{G}$ が upper embeddable;
(iv) $\mathcal{G}$ のある全域木 $\mathcal{T}$ が存在し，$\mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$ のすべての連結成分が偶数個の辺をもつ.

また，Xuong による次の事実も重要である:

補題 2.2 ([Xuo79a, Lemma 3])**.** グラフ $\mathcal{G}$ が upper embeddable で，Betti 数 $\beta(\mathcal{G})$ が偶数であるとする．$\mathcal{G}$ が木でなければ，ある 2 辺 e', e'' が存在し，$\mathcal{G} \setminus \{e', e''\}$ は upper embeddable となる.

(a) について，辻栄氏との共同研究において次を得た:

定理 2.3 ([TU23, Theorem 1.4])**.** グラフ $\mathcal{G}$ に対して，次は同値である:

(i) $\mathcal{G}$ が full cyclic permutation ordering をもつ;
(ii) $\mathcal{G}$ の 2-胞体埋め込みで，面の数がちょうど 1 であるものが存在する;
(iii) $\mathcal{G}$ の Betti 数が偶数で，$\mathcal{G}$ が upper embeddable;
(iv) $\mathcal{G}$ のある全域木 $\mathcal{T}$ が存在し，$\mathcal{G} \setminus \mathcal{T}$ のすべての連結成分が偶数個の辺をもつ.

ただし，(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv) は上で述べた通り，既に知られている結果である.

定理 2.3 のうち，(iii) $\Rightarrow$ (i) は，補題 2.2 を用いた Betti 数 $\beta(\mathcal{G})$ の帰納法で示すことができる.

2.2 rotation system

定理 2.3 の残りの証明として，[TU23] では (i) $\Rightarrow$ (ii) を示している．以下では，その概略を述べる.

集合 $X = \{x_1, \ldots, x_t\}$ 上の **cyclic order** とは，X の全順序全体における同値関係

$$(x_1, x_2, \ldots, x_t) \sim (x_2, \ldots, x_t, x_1)$$

の同値類のことをいい，$[x_1, \ldots, x_t]$ などと表す．グラフ $\mathcal{G}$ の **rotation system** とは，各頂点 v における $I_{\mathcal{G}}(v)$ 上の cyclic order ρ_v の集まり $\rho \coloneqq (\rho_v)_{v \in V_{\mathcal{G}}}$ のことをいう．グラフ $\mathcal{G}$ に対して，集合 $D_{\mathcal{G}}$ を

$$D_{\mathcal{G}} \coloneqq \{\, (e, v) \in D_{\mathcal{G}} \mid e \in I_{\mathcal{G}}(v) \,\}$$

で定め，$D_{\mathcal{G}}$ の各元を **dart** と呼ぶ．辺 $e = \{u, v\}$ に対して，dart (e, v) は e の v から u への向きを与えている.

グラフ $\mathcal{G}$ の rotation system $\rho = (\rho_v)_{v \in V_{\mathcal{G}}}$ をとり，$\rho_v = [e_1, \ldots, e_t]$ であるとする．このとき，写像 $\sigma : D_{\mathcal{G}} \to D_{\mathcal{G}}$ を

$$\sigma(e_i, v) \coloneqq (e_{i+1}, v)$$

で定義する．また，辺 $e = \{u, v\}$ に対して $\alpha(e, v) \coloneqq (e, u)$ と定め，写像 $\phi : D_{\mathcal{G}} \to D_{\mathcal{G}}$ を

$$\phi \coloneqq \sigma \circ \alpha \tag{2.3}$$

で定義する[*2]．図 3 では，$e = \{u, v\}$ を辺にもつ dart $d = (e, v)$ の ϕ の作用における推移の様子を表している．

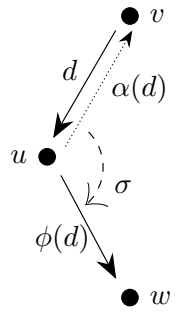


図 3　ϕ による dart d の推移.

グラフ $\mathcal{G}$ の 2-胞体埋め込みが与えられたとき，各 $I_{\mathcal{G}}(v)$ 上に時計回りの順序を定めることで，$\mathcal{G}$ の rotation system が得られる．一方，rotation system から得られる写像 ϕ の各軌道 W は，W の各 dart を辺とした多角形を形成する．これらの多角形をグラフの辺に対応する dart で接着することで，向き付け可能閉曲面への 2-胞体埋め込みを得たことになる (図 4 を参照)．実際，rotation system と 2-胞体埋め込みの間には (閉曲面の向きを保った同相を除いて) 一対一対応が存在する (詳細は [MT01, §3.2] などを参照)．また，$D_{\mathcal{G}}/\langle\phi\rangle$ を写像 ϕ による $D_{\mathcal{G}}$ の軌道全体の集合とするとき，$f_\iota = \#(D_{\mathcal{G}}/\langle\phi\rangle)$ がわかる．

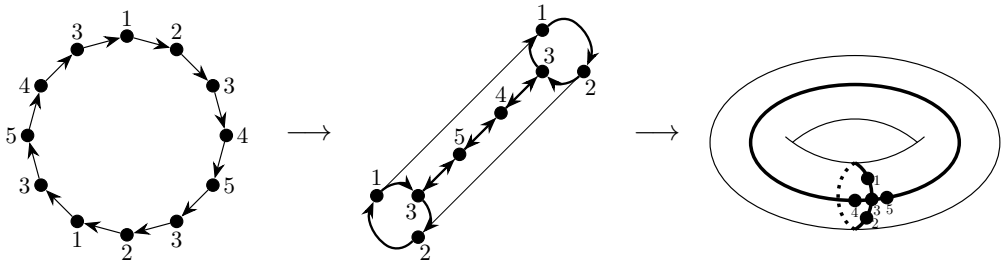


図 4　図 1 のグラフ $\mathcal{G}$ の辺順序 ω から 2-胞体埋め込みを得る過程．十二角形が円筒を経て Torus になっている.

グラフ $\mathcal{G}$ の辺順序 ω に対して，各 $I_{\mathcal{G}}(v)$ 上に ω から誘導される cyclic order $\rho_{\omega,v}$ を定めることで，rotation system $\rho_\omega = (\rho_{\omega,v})_{v \in V_{\mathcal{G}}}$ が得られる．ϕ_ω を (2.3) で定義される写像とする．各 $v \in V_{\mathcal{G}}$ に対して，f_v を ω に関する $I_{\mathcal{G}}(v)$ の最小元とするとき，dart (f_v, v) を含む軌道 $W_\omega(v)$ は，(1.1) で定義した trail $\gamma_\omega(v)$, $\gamma_\omega(\pi_\omega(v))$, …, $\gamma_\omega(\pi_\omega^{q-1}(v))$ を順に繋げて得られる closed walk に対応する．ただし，q は $\pi_\omega^q(v) = v$ を満たす最小の正整数とする．これは，次の全単射を引き起こす:

[*2] 流儀によっては，写像の三つ組 (σ, α, ϕ) あるいは組 (σ, α) のことを rotation system と呼ぶこともある.

補題 2.4 ([TU23, Lemma 3.2])**.** 写像

$$\Psi : V_{\mathcal{G}}/\langle \pi_\omega \rangle \ni [v] \longmapsto W_\omega(v) \in D_{\mathcal{G}}/\langle \phi_\omega \rangle$$

は全単射である.

特に，ω が $\mathcal{G}$ の full cyclic permutation であるとき，rotation system ρ_ω から得られる 2-胞体埋め込み ι について

$$f_\iota = \#(D_{\mathcal{G}}/\langle \phi_\omega \rangle) = \#(V_{\mathcal{G}}/\langle \pi_\omega \rangle) = 1$$

であることがわかる．これで，定理 2.3 の (i) $\Rightarrow$ (ii) が示されたことになる.

3　超八面体群と符号付きグラフ

この章では，グラフの辺と対称群の互換の対応を，符号付きグラフと超八面体群の互換の対応に拡張する．超八面体群の定義は [BB10] による．他にも，[Car72], [Hum90], [Rei93] が詳しい.

3.1　超八面体群

$I_n \coloneqq \{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$ とする．n 次**超八面体群 (hyperoctahedral group)** $\mathfrak{H}_n$ とは，I_n の対称群 $\mathfrak{S}_{I_n}$ の部分群

$$\mathfrak{H}_n \coloneqq \{\, \eta \in \mathfrak{S}_{I_n} \mid -\eta(i) = \eta(-i) \text{ for all } i \in I_n \,\}$$

のことである．この群は，B_n 型の Weyl 群 (つまり，Coxeter 群) であり，Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ に対して，超立方体 $[-1,1]^n$ の対称性の群として作用する群である．また，半直積 $\mathfrak{S}_2^n \rtimes \mathfrak{S}_n$，リース積 (wreath product) $\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_n$ に同型である．超八面体群の元 η は対称群と同様の表示

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \eta(1) & \eta(2) & \cdots & \eta(n) \end{pmatrix}$$

で表すことができる．任意の $i \in [n]$ に対して $\eta(i) > 0$ であるとき，η は対称群の置換とみなすことができる．この意味で，n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ は n 次超八面体群 $\mathfrak{H}_n$ の部分群とみなせる.

超八面体群は次の 3 種類の互換をもつ:

- (**positive transposition**) $(i\ j) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & j & \cdots & i & \cdots & n \end{pmatrix}$;
- (**negative transposition**) $(i\ {-j}) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & j & \cdots & n \\ 1 & \cdots & -j & \cdots & -i & \cdots & n \end{pmatrix}$;
- (**inversion transposition**) $(i\ {-i}) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i & \cdots & n \\ 1 & \cdots & -i & \cdots & n \end{pmatrix}$.

超八面体群はこれらの互換で生成される群である[*3].

[*3] 実際には，$(i\ {-j}) = (i\ {-i})(j\ {-j})(i\ j)$ であるため，超八面体群は positive transposition，inversion transposition だけで生成できる．$\mathfrak{H}_n$ の極小な生成系は，$n-1$ 個の positive transposition と 1 個の inversion transposition で構成でき，鏡映群としての simple reflection となる．また，positive transposition で生成される部分群，inversion transposition で生成される部分群 (正規部分群になる) はそれぞれ $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{S}_2^n$ に同型であることにも注意したい.

超八面体群における長さ l の**巡回置換** σ は，

$$\sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{l-1} & i_l \\ \epsilon_1 i_2 & \epsilon_2 i_3 & \cdots & \epsilon_{l-1} i_l & \epsilon_l i_1 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

と表せる．ただし，$i_1, \ldots, i_l \in [n]$ とし，$\epsilon_1, \ldots, \epsilon_l$ は符号 $+, -$ を表している．以下，$\{+, -\}$ は自然な構成によって位数 2 の群として扱う．$\varepsilon_j \coloneqq \epsilon_1 \cdots \epsilon_j$ $(j \in \{1, \ldots, l\})$ とおくとき，σ を

$$\sigma = \left(i_1\ \varepsilon_1 i_2\ \cdots\ \varepsilon_{l-1} i_l\right)_{\varepsilon_l} \tag{3.2}$$

と表すこともある (サイクル表示)．ただし，$\sigma(\varepsilon_{l-1} i_l) = \varepsilon_l i_1$ である．$\varepsilon_l = +$ であるとき，σ を**偶巡回置換 (even cyclic permutation)** といい，$\varepsilon_l = -$ であるときは**奇巡回置換 (odd cyclic permutation)** という．対称群 $\mathfrak{S}_n$ の長さ l の巡回置換は，超八面体群 $\mathfrak{H}_n$ においては長さ l の偶巡回置換である．また，偶巡回置換に inversion transposition を左から一つ掛けたものは奇巡回置換となる．

注意 3.1. 巡回置換における偶奇の違いは顕著である．実際，長さ l の偶巡回置換の位数は l であるが，長さ l の奇巡回置換の位数は $2l$ である．とりわけ，長さ n の偶巡回置換は，I_n を位数 n の 2 つの軌道 X_1, X_2 に分解し，$j \in X_1$ ならば $-j \in X_2$ という関係にあることがわかる．一方，長さ n の奇巡回置換による軌道は I_n に一致し，対称群 $\mathfrak{S}_{I_n}$ の “巡回置換” となっていることがわかる．例えば，$\sigma_1 \coloneqq (1\ 2\ 3\ 4)_+$，$\sigma_2 \coloneqq (1\ 2\ 3\ 4)_-$ とするとき，I_4 の各元はそれぞれ次のように推移する:

$$1 \overset{\sigma_1}{\longmapsto} 2 \overset{\sigma_1}{\longmapsto} 3 \overset{\sigma_1}{\longmapsto} 4 \overset{\sigma_1}{\longmapsto} 1, \quad -1 \overset{\sigma_1}{\longmapsto} -2 \overset{\sigma_1}{\longmapsto} -3 \overset{\sigma_1}{\longmapsto} -4 \overset{\sigma_1}{\longmapsto} -1,$$
$$1 \overset{\sigma_2}{\longmapsto} 2 \overset{\sigma_2}{\longmapsto} 3 \overset{\sigma_2}{\longmapsto} 4 \overset{\sigma_2}{\longmapsto} -1 \overset{\sigma_2}{\longmapsto} -2 \overset{\sigma_2}{\longmapsto} -3 \overset{\sigma_2}{\longmapsto} -4 \overset{\sigma_2}{\longmapsto} 1.$$

3.2 符号付きグラフと互換の積

本講演における**符号付きグラフ (signed graph)** $\mathcal{G}$ とは，頂点の集合 $V_\mathcal{G}$，符号付き辺の集合 $E^+_\mathcal{G}$, $E^-_\mathcal{G}$，ループの集合 $L_\mathcal{G}$ の四つ組で，

- $V_\mathcal{G} = [n]$;
- $E^+_\mathcal{G}$, $E^-_\mathcal{G}$ は $V_\mathcal{G}$ の位数 2 の部分集合からなる集合;
- $L_\mathcal{G}$ は $V_\mathcal{G}$ の部分集合

となるものをいい，$\mathcal{G} = (V_\mathcal{G}, E^+_\mathcal{G}, E^-_\mathcal{G}, L_\mathcal{G})$ と書く．符号付き辺とループをまとめて**辺**といい，その集合を $E_\mathcal{G}$ で表す．2 頂点の間に符号の異なる 2 つの符号付き辺が存在することがある．つまりこのとき，$E^+_\mathcal{G}$ と $E^-_\mathcal{G}$ は集合として交わっている．ただし，2 頂点の間に存在する辺は高々 2 つである．

符号付きグラフ $\mathcal{G} = (V_\mathcal{G}, E^+_\mathcal{G}, E^-_\mathcal{G}, L_\mathcal{G})$ に対して，$\mathcal{G}$ の符号とループを除いたグラフを $\bar{\mathcal{G}} = (V_{\bar{\mathcal{G}}}, E_{\bar{\mathcal{G}}})$ で表す．つまり，$V_{\bar{\mathcal{G}}} = V_\mathcal{G}$, $E_{\bar{\mathcal{G}}} = E^+_\mathcal{G} \sqcup E^-_\mathcal{G}$ であり，$\bar{\mathcal{G}}$ はループのない多重グラフとなる．$\mathcal{G}$ の符号付き辺 e に対応する $\bar{\mathcal{G}}$ の辺を $\bar{e}$ で表す．

符号付きグラフ $\mathcal{G}$ が**符号付き木 (signed tree)** であるとは，$\mathcal{G}$ がループをもたず，$\bar{\mathcal{G}}$ が多重辺のない木であるときにいう．

符号付きグラフ $\mathcal{G}$ の各辺 e に対して，超八面体群の互換 τ_e を

$$\tau_e = \begin{cases} (i\ j) & e = \{i, j\} \in E_{\mathcal{G}}^{+}; \\ (i\ {-j}) & e = \{i, j\} \in E_{\mathcal{G}}^{-}; \\ (i\ {-i}) & e = i \in L_{\mathcal{G}}. \end{cases}$$

で対応づける．辺順序 $\omega = (e_1, \ldots, e_m)$ に対して，互換の積 π_ω を

$$\pi_\omega \coloneqq \tau_{e_m} \cdots \tau_{e_1}$$

で与える．符号のない場合と同様に，π_ω のサイクル分解は，ω による辺のラベル付けをしたグラフ $\mathcal{G}$ の観察だけで求めることができる．

3.3 符号付きグラフの full cyclic permutation ordering

定義 3.2. 符号付きグラフ $\mathcal{G}$ の辺順序 ω が **even (odd) full cyclic permutation ordering** であるとは，互換の積 π_ω が長さ n の偶 (奇) 巡回置換であるときにいう．

符号付きグラフ $\mathcal{G}$ の辺順序 $\omega = (e_1, \ldots, e_m)$ に対して，ω から誘導される $\bar{\mathcal{G}}$ の辺順序を $\varphi(\omega)$ で表す．すなわち，$E_{\mathcal{G}}^{+} \sqcup E_{\mathcal{G}}^{-} = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_t}\}$ $(i_1 < \cdots < i_t)$ であるとき，$\varphi(\omega) = (\bar{e}_{i_1}, \ldots, \bar{e}_{i_t})$ である．また，$\bar{\mathcal{G}}$ の辺順序 $\bar{\omega}$ に対して，$\mathcal{G}$ の辺順序の集合 $\varphi^{-1}(\bar{\omega})$ を

$$\varphi^{-1}(\bar{\omega}) \coloneqq \{\, \omega \mid \varphi(\omega) = \bar{\omega} \,\}$$

で定める．符号付きグラフ $\mathcal{G}$ の辺順序 ω に対して

$$J_\omega \coloneqq \left\{\, j \in [n] \;\middle|\; \pi_\omega^{-1}(j) < 0 \,\right\}$$

とおくとき，互換の積 π_ω の特別な表示として

$$\pi_\omega = \prod_{j \in J_\omega} (j\ {-j}) \cdot \pi_{\varphi(\omega)}$$

が得られ，さらに $\#J_\omega = \#L_{\mathcal{G}}$ であることがわかる．この表示をもとに，符号付きグラフが full cyclic permutation ordering をもつための条件を次のように得た:

定理 3.3 ([Uch23, Theorem 1.8])**.** 符号付きグラフ $\mathcal{G}$ について，次は同値である:

(i) $\mathcal{G}$ が even (odd) full cyclic permutation ordering をもつ;
(ii) $\mathcal{G}$ のループが偶数 (奇数) 個で，$\bar{\mathcal{G}}$ が full cyclic permutation ordering をもつ．

よって (b) について，Dénes の定理と定理 3.3 から次を得た:

定理 3.4 ([Uch23, Theorem 1.9])**.** 符号付きグラフ $\mathcal{G}$ に対して，次は同値である:

(i) $\mathcal{G}$ の任意の辺順序が even (odd) full cyclic permutation ordering である;
(ii) $\mathcal{G}$ が偶数 (奇数) 個のループをもつ符号付き木である．

また [Uch23, §3.2] では，定理 3.4 を用いて，長さ n の奇巡回置換における，n 個の互換の積による分解の総数を組合せ的に計算している．

参考文献

[BB10] A. V. Borovik and A. Borovik, *Mirrors and Reflections*, Springer New York, New York, NY, 2010.

[Car72] R. W. Carter, *Conjugacy classes in the weyl group*, Compositio Mathematica **25** (1972), 1–59.

[Dén59] J. Dénes, *The representation of a Permutation as the product of a minimal number of transpositions, and its connection with the theory of graphs*, Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences **4** (1959), 63–70.

[Hum90] J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, 1 ed., Cambridge University Press, June 1990.

[Jun78] M. Jungerman, *A characterization of upper-embeddable graphs*, Transactions of the American Mathematical Society **241** (1978), no. 0, 401–406.

[Mos89] P. Moszkowski, *A Solution to a Problem of Dénes: a Bijection Between Trees and Factorizations of Cyclic Permutations*, European Journal of Combinatorics **10** (1989), no. 1, 13–16.

[MT01] B. Mohar and C. Thomassen, *Graphs on surfaces*, Johns Hopkins studies in the mathematical sciences, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2001.

[Paw22] B. Pawlowski, *Chromatic symmetric functions via the group algebra of S_n*, Algebraic Combinatorics **5** (2022), no. 1, 1–20.

[Rei93] V. Reiner, *Signed Permutation Statistics and Cycle Type*, European Journal of Combinatorics **14** (1993), no. 6, 569–579.

[TU23] S. Tsujie and R. Uchiumi, *Upper Embeddability of Graphs and Products of Transpositions Associated with Edges*, December 2023, arXiv:2211.05422 [math].

[Uch23] R. Uchiumi, *Signed graphs and signed cycles of hyperoctahedral groups*, Electronic Journal of Graph Theory and Applications (EJGTA) **11** (2023), no. 2, 419–429.

[Xuo79a] N. H. Xuong, *How to determine the maximum genus of a graph*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **26** (1979), no. 2, 217–225.

[Xuo79b] ———, *Upper-embeddable graphs and related topics*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **26** (1979), no. 2, 226–232.

グラスマン多様体のSAGBI基底を用いたトーリック退化

小脇修和
大阪大学大学院情報科学研究科

1 序

グラスマン多様体、旗多様体、Schubert 多様体などを対象とするトーリック退化は以前から表現論やグレブナー基底などを使って研究されている数学の重要な研究分野の一つである。その中でも matching field を用いた研究は近年盛んに行われている。特に block diagonal matching field は [6] で初めて定義され、多くの研究がなされている。定理 1 で $\ell = 2$ の block diagonal matching field については完全な解決が得られている。

定理 1 ([2, Theorem 1.3])**.** *Block diagonal matching field* $\mathcal{B}_{(a_1,\cdots,a_s),2}$ は $\mathrm{Gr}(k,n)$ のトーリック退化を生じる。

本講演では、グラスマン多様体の $\ell \geq 3$ の block diagonal matching field について完全な解決を与える。

2 SAGBI 基底とトーリック退化

n 変数多項式環 $\mathbb{K}[\mathbf{x}] = \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ の単項式は $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} = {x_1}^{a_1}{x_2}^{a_2}\cdots{x_n}^{a_n}$ で表され、格子点 $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ と同一視される。

2.1 単項式順序

$\mathbb{N}^n$ での全順序が **単項式順序** であるとは、0 ベクトルがただ一つの最小元で、$\mathbf{a} < \mathbf{b}$ なら、任意の $\mathbf{a,b,c} \in \mathbb{N}^n$ で $\mathbf{a+c} < \mathbf{b+c}$ となるときにいう。単項式順序が多項式環の単項式の集合における全順序を導く。

2.2 イニシャルイデアル

多項式 f の単項式順序 $<$ に関する **イニシャル単項式** とは、f の項の中で、$<$ に関して最大となるもののことをいう。与えられた単項式順序で、それぞれの 0 でない多項式 $f \in \mathbb{K}[\mathbf{x}]$ はただ一つのイニシャル単項式 $\mathrm{in}_<(f)$ を持つ。I が $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ のイデアルなら、**イニシャルイデアル**とは、単項式イデアル

$$\mathrm{in}_<(I) = \langle \mathrm{in}_<(f) : f \in I \rangle$$

のことである。

また、イニシャルは重みによる定義もでき、重み $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ を固定する。任意の多項式 $f = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n} c_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{a}}$(ただし、$c_{\mathbf{a}} \in \mathbb{K}$ は有限個を除いて 0) で、イニシャル $\mathrm{in}_\omega(f)$ を内積 $\omega \cdot \mathbf{a}$ が最大となるような全ての項 $c_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ の和と定義する。これは重みが最大となるものをイニシャルとするもので、イニシャルが単項式になるとは限らない。イデアル I のイニシャルイデアルは、

$$\mathrm{in}_\omega(I) = \langle \mathrm{in}_\omega(f) : f \in I \rangle$$

で定義される。

2.3 グレブナー基底

多項式環 $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ のイデアル I を考える。有限部分集合 $\mathcal{G} \subset I$ が I の $<$ での**グレブナー基底**であるとは、$\mathrm{in}_<(I)$ が $\{\mathrm{in}_<(g) : g \in \mathcal{G}\}$ で生成されるということである。

2.4 トーリック退化

素イデアルかつ二項式で生成されるイデアルを、トーリックイデアルという。このとき、以下の定理が知られている。

定理 2 ([3, Theorem 1.1.17])**.** V をアフィン多様体とする。このとき、V がアフィントーリック多様体であることと、V がトーリックイデアルで定義されるアフィン多様体であることは同値である。

重み ω, イデアル I を考え、イニシャルイデアル $\mathrm{in}_\omega(I)$ がトーリックイデアルなら、これを I の**トーリック退化**と呼ぶ。

2.5 SAGBI 基底

多項式環の多項式の集合 $\{f_1, \cdots, f_r\}$ が与えられた単項式順序で **SAGBI 基底** であるとは、部分代数 $\mathbb{K}[f_1, \cdots, f_r]$ のイニシャルが常にある f_i のイニシャル単項式で生成される部分代数の元になることをいう。SAGBI とは Subalgebra Analogue of Gröbner Bases for Ideals の略である。$\mathcal{F}$ を $\mathbb{K}[\mathbf{t}]$ の多項式の集合とし、R=$\mathbb{K}[\mathcal{F}]$ とする。$\mathbb{K}[\mathbf{t}]$ の単項式順序を $<$ とする。$\mathrm{in}_<(f_i) = \mathbf{t}^{\mathbf{a_i}}$ とする。別の多項式環 $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ を考え、環準同型 $\mathbb{K}[\mathbf{x}] \to R : x_i \mapsto f_i$ のカーネルを I とする。同様に、$\mathbb{K}[\mathbf{x}] \to \mathrm{in}_<(R) : x_i \mapsto \mathrm{in}_<(f_i)$ のカーネルを $I_\mathcal{A}$ とすると、$I_\mathcal{A}$ はトーリックイデアルとなる。ω を $<$ を表現する重みとし、$\mathcal{A}^T\omega$ を $\mathbb{K}[\mathbf{x}]$ の重みとする。ただし、$\mathcal{A}$ は、$\mathrm{in}_<(f_i)$ に対応する $a_i \in \mathbb{N}^n$ を列ベクトルとする整数行列である。このとき、以下が成り立つ。

定理 3 ([7, Theorem11.4])**.** 集合 $\mathcal{F}$ が SAGBI 基底であることと $\mathrm{in}_{\mathcal{A}^T\omega}(I) = I_\mathcal{A}$ となる

ことは同値である。

3 プリュッカー代数

$[n] := \{1, ..., n\}$ とし、$[n]$ の中から k 個取り出した部分集合の族を $\mathbf{I}_{k,n}$ とする。

3.1 プリュッカーイデアル

プリュッカーイデアル $\mathcal{I}_{k,n}$ は環準同型

ψ: $\mathbb{K}[P_I] \to \mathbb{K}[x_{ij}]$

$P_I \mapsto \det(X_I)$

のカーネルとして定義される。ただし、$\mathbb{K}[P_I | I \in \mathbf{I}_{k,n}]$ は $\binom{n}{k}$ 変数、$\mathbb{K}[x_{i,j} | 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n]$ は nk 変数 の多項式環であり、X_I は (i,j) 成分が $x_{i,j}$ となる $k \times n$ 行列から、I に含まれる番号の列のみを取り出したものである。

プリュッカー代数 $A_{k,n}$ は有限生成代数 $\psi(\mathbb{K}[P_I])$ として定義される。

プリュッカー座標は、小行列式 $\det(X_I)(I \in \mathbf{I}_{k,n})$ の集合であり、ψ を通して、P_I と同一視される。

3.2 グラスマン多様体

n 次元空間の k 次元部分空間全てで構成される多様体を **グラスマン多様体**$\mathrm{Gr}(k,n)$ という。プリュッカー代数はグラスマン多様体の斉次座標環として知られている [5, Proposition 14.2]。

3.3 Matching field

$k \times n$ **matching field** は写像 Λ:$\mathbf{I}_{k,n} \to S_k$ のことである (S_k は対称群)。このような matching field を $\mathrm{Gr}(k,n)$ の matching field と呼ぶことにする。

Matching field の例として、 $\Lambda(I) = \mathrm{id}(\forall I \in \mathbf{I}_{k,n})$ がある。この matching field を **diagonal matching field** という。

行列が matching field を誘導するとは、行列の (i,j) 成分を、$x_{i,j}$ に対応する重みとみなすと、$\det(X_I)$ から選ばれるイニシャルが、その matching field によって選ばれる項 $x_{\Lambda(I)(1)i_1} x_{\Lambda(I)(2)i_2} \cdots x_{\Lambda(I)(k)i_k}$ と、いずれの I に対しても同じになっているということである。Matching field が **coherent** であるとは、それぞれの $I \in \mathbf{I}_{k,n}$ で、

$$\mathrm{in}_M(P_I) := \mathrm{in}_M(\psi(P_I)) = x_{\Lambda(I)(1)i_1} x_{\Lambda(I)(2)i_2} \cdots x_{\Lambda(I)(k)i_k}$$

となるような $k \times n$ 行列 M が存在するときをいう。Coherent matching field を誘導する行列の 1 行目はすべて 0 としてよい。

例 1. Coherent matching field の例として、diagonal matching field があり、$k \times n$ 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & M^{k-2} & 2 \times M^{k-2} & \cdots & (n-2) \times M^{k-2} & (n-1) \times M^{k-2} \end{pmatrix}$$

が diagonal matching field を誘導する ($M \geq n$)。

例えば、$\mathrm{Gr}(3,6)$ の diagonal matching field は、$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \end{pmatrix}$ で誘導される。どの 3 列を取り出しても対角成分の和が最大となっていることがわかるだろう。

3.4 Block diagonal matching field

$\mathcal{B}_{(a_1,\cdots,a_s),\ell}$($\ell, k, n$ は $1 < \ell \leq k < n$ を満たす自然数であり、$a_1, \cdots, a_s$は正の整数で $\sum_{i=1}^{s} a_i = n$ を満たす。) を $\mathrm{Gr}(k,n)$ の ℓ 行目以外は単調増加で、行ごとの差は十分大で、ℓ 行目は s 個のブロックに分かれていて、ブロックサイズが $a_1, \cdots, a_s$ になっている行列から誘導される matching field と定義する。ブロックとは、行列の ℓ 行目が $\cdots b_{a_{i-1}} > c_1 < c_2 < \cdots < c_{a_i} > d_1 \cdots$ となっているとき、$c_1, \cdots, c_{a_i}$ のように単調増加になっている列を集めたものをいう。このような ℓ 行目のみブロックでの単調増加、残りが単純な単調増加な matching field $\mathcal{B}_{(a_1,\cdots,a_s),\ell}$ を **(s-)block diagonal matching field** という。ブロックサイズは一つのブロックに入っている列の個数を言い、この例では a_i である。具体的な行列の形は以下のとおりである。

定義 1. 一般に、$\mathrm{Gr}(k,n)$ の $\mathcal{B}_{(a_1,\cdots,a_s),\ell}$ を誘導する行列は、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (n-a_1) \times L^{\ell-2} & (n-a_1+1) \times L^{\ell-2} & (n-a_1+2) \times L^{\ell-2} & \cdots & (a_n-2) \times L^{\ell-2} & (a_n-1) \times L^{\ell-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & L^{k-2} & 2 \times L^{k-2} & \cdots & (n-2) \times L^{k-2} & (n-1) \times L^{k-2} \end{pmatrix}$$

上の行列の L は下の行の差が上の行の差より十分大きくなるように n 以上の数から適当にとる。この定義の block diagonal matching field の $\ell = 2$ のものは、先行研究 [1][6] での定義の block diagonal matchingfield と一致する。

例 2. $\mathrm{Gr}(3,6)$ で考えよう。$\mathcal{B}_{(2,4),2}$ は、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 10 & 20 & 30 & 40 & 50 \end{pmatrix}$$

という行列から誘導される matching field であり、これは、

$\mathcal{B}_{(2,4),2}(I) = \begin{cases} (12) & (I \cap \{1,2\} = 1) \\ \mathrm{id} & (\text{それ以外}) \end{cases}$ である。

3.5 Matching field イデアル

Matching field を Λ とすると、**matching field イデアル** $\mathcal{I}_\Lambda \subset \mathbb{K}[x_{ij}]$ は、写像

$\phi_\Lambda : \mathbb{K}[P_I] \to \mathbb{K}[x_{ij}]$

$P_I \mapsto x_{\Lambda(I)(1)i_1} x_{\Lambda(I)(2)i_2} \cdots x_{\Lambda(I)(k)i_k}$

（ただし、$I = \{i_1, \cdots, i_k\}$ とする。）

のカーネルだ。このイデアルはトーリックイデアルとなっている。

4 主定理

次の二つの定理は本講演の主結果である。

定理 4. $\ell \geq 4$,$a_s \geq 2$ とする。$\mathrm{Gr}(k,n)$ で、*block diagonal matching field* $\mathcal{B}_{(a_1,\cdots,a_s),\ell}$ を考える。プリュッカー座標が *SAGBI* 基底になる必要十分条件は、$a_1 \leq 4$ かつ、$a_i \geq 4 (2 \leq i \leq s-1) \Rightarrow k+1 \geq \sum_{t=i}^{s} a_t$ である。

定理 5. $\mathrm{Gr}(k,n)$ で、*block diagonal matching field* $\mathcal{B}_{(a_1,\cdots,a_s),3}$ を考えると、プリュッカー座標は常に *SAGBI* 基底になる。

例 3. 4×8 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 \\ 200 & 300 & 400 & 500 & 600 & 700 & 0 & 100 \end{pmatrix}$ が誘導する block diagonal matching field $\mathcal{B}_{(6,2),4}$ を考える。これは $a_1 \geq 5$ なので定理 4 よりプリュッカー座標は SAGBI 基底にならない。

例 4. 4×8 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 \\ 500 & 600 & 700 & 300 & 400 & 0 & 100 & 200 \end{pmatrix}$$

が誘導する block diagonal matching field $\mathcal{B}_{(3,2,3),4}$ でプリュッカー座標は SAGBI 基底になる。事実 $\forall i$ で $a_i \leq 3$ なので定理 4 よりプリュッカー座標が SAGBI 基底になる。

参考文献

[1] Oliver Clarke and Fatemeh Mohammadi, Toric degenerations of Grassmannians and Schubert varieties from matching field tableaux. J. Algebra 559 (2020), 646–678.

[2] Oliver Clarke, Fatemeh Mohammadi and Francesca Zaffalon, Toric degenerations of partial flag varieties and combinatorial mutations of matching field polytopes. arXiv:2206.13975

[3] David A.Cox, John B.Little and Henry K Schenck, Toric varieties. Graduate Studies in Mathematics, 124. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[4] Akihiro Higashitani and Hidefumi Ohsugi, Quadratic Gröbner bases of block diagonal matching field ideals and toric degenerations of Grassmannians. J. Pure Appl. Algebra 226 (2022), no. 2, Paper No. 106821, 14 pp.

[5] Ezra Miller and Bernd Sturmfels, Combinatorial commutative algebra. Graduate Texts in Mathematics, 227. Springer-Verlag, New York, 2005.

[6] Fatemeh Mohammadi and Kristin Shaw, Toric degenerations of Grassmannians from matching fields. Algebr. Comb. 2 (2019), no. 6, 1109–1124.

[7] Bernd Sturmfels, Gröbner bases and convex polytopes. University Lecture Series, 8. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

Introduction of inverse correspondences between inverse semigroups, and a categorical approach to inverse semigroups

慶應義塾大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻
内村 朝樹 (Tomoki UCHIMURA)

概要

半群の一種である逆半群は, C^* 環論との深い関係が知られている. 本稿では, 逆半群の間に inverse correspondence と呼ぶ概念を導入する. これは C^* 環論においてよく知られる C^*-correspondence の逆半群論における類似である. 本稿の主題は, 逆半群と inverse correspondence がある種の圏を成すことを示し, この圏における同型を特徴付けることである.

1 導入

本稿は, 半群論の一分野である逆半群論における結果を述べたものであり, 発表者の論文 [Uch23] に基づく. 逆半群論は C^* 環論と密接な関わりがある [Pat99, Exe08].

C^* 環とは, 積と対合を備えた複素線型空間に, 代数的な構造と相性の良い完備ノルムを入れたものである. C^* 環論では非可換・無限次元の C^* 環が頻繁に登場するが, 一般に取り扱いが難しい. そこで, 比較的取り扱いの容易な数学的対象から C^* 環を構成し, C^* 環の性質を構成材料の性質を通して理解することがよくなされている. C^* 環の構成材料には, 群や亜群, そして本稿の主題である逆半群などがある.

近年こうした C^* 環の構成方法の理論において, ある種の圏 (双圏) を用いた圏論的なアプローチが行われている [BMZ13, AM16]. 例えば, 亜群からの C^* 環の構成法は, 亜群のなす双圏 $\mathfrak{Gr}$ から C^* 環のなす双圏 $\mathfrak{Corr}$ へのある種の関手 (双関手) を成していることが明らかになった [Alb15]. 逆半群からの C^* 環の構成法にも同様の性質を期待したくなるが, $\mathfrak{Corr}$ や $\mathfrak{Gr}$ に相当する双圏は逆半群論において導入されていない. そこで本稿では, C^* 環のなす双圏 $\mathfrak{Corr}$ を手本として, 逆半群の双圏 $\mathfrak{IC}$ を導入する. また, 双圏 $\mathfrak{IC}$ における同値が, 逆半群論において重要な概念である強森田同値と等価な概念であることを紹介する. 今回導入する双圏 $\mathfrak{IC}$ は, 逆半群から C^* 環への構成法を C^* 環のなす双圏 $\mathfrak{Corr}$ への双関手と見なす際の始域になると期待される.

2 逆半群論の準備

結合的な二項演算を持つ集合を**半群** (semigroup) という. 半群 S が**正則** (regular) であるとは, 任意の元 $s \in S$ に対し, ある元 $t \in S$ が存在し, $sts = s$ と $tst = t$ を満たすことである. このとき t は

s の**一般化逆元** (generalized inverse) であるという．**逆半群** (inverse semigroup) とは, 正則半群であって, 各元に対し一般化逆元がただ 1 つ存在するものをいう．逆半群 S の元 s に対し, ただ 1 つ存在する一般化逆元を s^* と書く．逆半群 S の任意の元 s,t に対し, $s^{**}=s$ や $(st)^*=t^*s^*$ が成り立つ．

例 2.1. 群は逆半群である．群における一般化逆元は, 逆元のことに他ならない．

例 2.2. 位相空間 X に対し, その開集合全体の集合 $\mathcal{O}(X)$ は共通部分をとる操作を演算として逆半群を成す．逆半群 $\mathcal{O}(X)$ の元 U に対し, その一般化逆元は U である．

例 2.3. 位相空間 X,Y,Z を考える．開集合 $U\subset X$, $V\subset Y$ の間の同相写像を X から Y への部分同相写像という．開集合 $U\subset X$, $V,V'\subset Y$, $W\subset Z$ と部分同相写像 $u\colon U\to V$, $v\colon V'\to W$ に対してこれらの合成 vu を, 開集合 $u^{-1}(V\cap V')\subset X$ の元 x に対して $(vu)(x)=v(u(x))$ で定義された部分同相写像とする．位相空間 X,Y の間の部分同相写像全体を $I(X,Y)$ と書く．集合 $I(X):=I(X,X)$ は部分同相写像の合成を演算として逆半群を成す．逆半群 $I(X)$ の元 $u\colon U\to U'$ に対し, 一般化逆元は $u^{-1}\colon U'\to U$ である．

半群 S の元 s が**冪等元** (idempotent) であるとは, $ss=s$ を満たすことをいう．半群 S の冪等元全体を $E(S)$ と書く．正則半群について, 次が成り立つ (証明は [Pat99, Proposition 2.1.1], あるいは [Law98, Theorem 3] を見よ).

命題 2.4. 正則半群 S に対し, S が逆半群であることと, 部分集合 $E(S)$ の元同士が可換であることは同値である．

半群 S とその部分集合 I を考える．任意の元 $s\in S$ と $t\in I$ に対し, $st\in I$ かつ $ts\in I$ が成り立つとき, I は**両側イデアル** (two-sided ideal) であるという．半群の両側イデアルは半群であり, 逆半群の両側イデアルは逆半群である．逆半群 S に対して $E(S)$ の元同士が可換であることの証明を精査すると, 次の命題が成り立つことも分かる．

命題 2.5. 半群 S とその両側イデアル I を考える．両側イデアル I が逆半群なら、任意の $e\in E(S)$ と $f\in E(I)$ に対し, $ef=fe$ が成り立つ．

この命題は定理 4.11 の証明において重要な役割を果たす．

3 C^* 環のなす双圏

圏 (category) とは対象と射の集まりによって構成され, 2 つの射 $f\colon x\to y$, $g\colon y\to z$ に対してはその合成と呼ばれる射 $gf\colon x\to z$ が, 各対象 x に対しては単位射 $1_x\colon x\to x$ が定められている．これらは次の 2 つ (結合律と単位律) を満たすことが要請される．

(i) 任意の射 $f:x\to y$, $g:y\to z$, $h:z\to w$ に対して $h(gf)=(hg)f$ が成り立つ．
(ii) 任意の射 $f:x\to y$ に対して $1_yf=f=f1_x$ が成り立つ．

ある圏において, 2 つの対象 x,y が**同型** (isomorphic) であるとは, 射 $f\colon x\to y$, $g\colon y\to x$ が存在し,

$gf = 1_x$, $fg = 1_y$ が成り立つことである.

圏の例を 2 つ挙げる. C^* 環 A, B に対して, 積と対合を保つ線型写像 $\sigma\colon A \to B$ を $*$ **準同型** ($*$-homomorphism) という. C^* 環と $*$ 準同型は, 合成を写像の合成, 単位射を恒等写像と定めることで圏 $\mathbf{C}^*_{\mathbf{alg}}$ をなす. 2 つの C^* 環が同型であるとは, この圏 $\mathbf{C}^*_{\mathbf{alg}}$ において同型であることをいう.

半群 S, T に対して, 積を保つ写像を**半群準同型** (semigroup homomorphism) という. 2 つの半群 S, T が逆半群であれば, 一般化逆元は自動的に保たれる. 逆半群と半群準同型は, 合成を写像の合成, 単位射を恒等写像と定めることにより圏 **IS** をなす. 2 つの逆半群が同型であるとは, この圏 **IS** において同型であることをいう.

これに対し, Bénabou によって導入された**双圏** (bicategory) では, 対象, 射, 合成, 単位射に加えて, 2 射と呼ばれる "射の間の射" を考える. 結合律と単位律は要請しないが, 射 $h(gf)$ と $(hg)f$, $1_y f$ と f, f と $f1_x$ は自然な 2 射を通して "同型" であることを要請する. ある双圏において, 2 つの対象 x, y が**同値** (equivalent) であるとは, 射 $f\colon x \to y$, $g\colon y \to x$ が存在し, gf と 1_x, fg と 1_y がそれぞれ何らかの 2 射を通して "同型" であることをいう. 詳細は [Bén67, Lei98] を参照せよ.

第 1 節でも述べたように, C^* 環の構成法の理論において, C^* 環を対象とする双圏 $\mathfrak{Corr}$ が現れる. 以下では双圏 $\mathfrak{Corr}$ の射を導入するために, Hilbert 加群と C^*-correspondence について概説する. 詳細は [Lan95] を参照せよ.

C^* 環 A を考える. 複素線型空間 $\mathcal{E}$ 上の A 作用とは, 双線型写像 $\mathcal{E} \times A \to \mathcal{E}; (\xi, a) \mapsto \xi a$ であって, 任意の $a, a' \in A$ と $\xi \in \mathcal{E}$ に対し, $(\xi a)a' = \xi(aa')$ を満たすものをいう. *Hilbert* A **加群** (Hilbert A-module) $\mathcal{E}$ とは, 複素線型空間であって, その上の A 作用と写像 $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_{\mathcal{E}}\colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to A$ を備えており, Hilbert 空間と類似した公理を満たすものをいう. 写像 $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_{\mathcal{E}}$ は "C^* 環値内積" である. C^* 環 A が複素数体 $\mathbb{C}$ であるとき, Hilbert A 加群は Hilbert 空間に他ならない. 第 4 節で導入される逆 S 集合は, 逆半群 S の作用と "逆半群値内積" を備えた集合として定義される. これは, 逆半群論における Hilbert A 加群の類似である.

Hilbert A 加群 $\mathcal{E}$ に対し, $\mathcal{E}$ 上の線型写像 f が**随伴可能**であるとは, ある $\mathcal{E}$ 上の線型写像 g が存在して, 任意の $\xi, \eta \in \mathcal{E}$ が $\langle g(\eta) \,|\, \xi \rangle_{\mathcal{E}} = \langle \eta \,|\, f(\xi) \rangle_{\mathcal{E}}$ を満たすことをいう. 随伴可能な $\mathcal{E}$ 上の線型写像全体を $L(\mathcal{E})$ と書く. このとき $L(\mathcal{E})$ は適切な構造を与えることで C^* 環になる. C^* 環 A, B に対し, Hilbert B 加群 $\mathcal{E}$ と, A から $L(\mathcal{E})$ への $*$ 準同型 $\sigma_{\mathcal{E}}$ の組 $(\mathcal{E}, \sigma_{\mathcal{E}})$ を, A から B への C^**-correspondence* といい, $\mathcal{E}\colon A \to B$ と書く.

C^*-correspondence の例を挙げる. C^* 環 B に対し, 線型空間 B 上の B 作用を右からの掛け算で, 内積を任意の $b, b' \in B$ に対し $\langle b \,|\, b' \rangle_B := b^* b'$ と定義すれば, B は Hilbert B 加群になる. 任意の元 $b \in B$ に対し, b を左から掛ける操作は, Hilbert B 加群 B 上の随伴可能な線型写像である. この見方を通して, Hilbert B 加群 B 上の随伴可能な線型写像全体の成す C^* 環 $L(B)$ は, B を部分 C^* 環として含む. これにより, A から B への $*$ 準同型 $\sigma\colon A \to B$ は, Hilbert B 加群 B と $*$ 準同型 $\sigma\colon A \to B \subset L(B)$ の組による C^*-correspondence を誘導する. この意味において, C^*-correspondence は $*$ 準同型の一般化であると解釈できる. 特に, A 上の恒等写像 $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ が誘導する C^*-correspondence を A 上の identity correspondence という.

第 4 節において, 逆 S 集合 $\mathcal{U}$ 上の写像にも "逆半群値内積" を用いて随伴可能と呼ばれる性質を定義し, 随伴可能な写像全体 $L(\mathcal{U})$ が逆半群を成すことを見る. 第 5 節において導入される inverse

correspondence は, 逆半群 S, T に対して, 逆 T 集合 $\mathcal{U}$ と半群準同型 $\theta_{\mathcal{U}}\colon S \to L(\mathcal{U})$ の組 $(\mathcal{U}, \theta_{\mathcal{U}})$ として定義される. これは, 逆半群論における C^*-correspondence の類似である.

4 つの C^* 環 A_1, A_2, A_3, A_4 と, 添字 $i = 1, 2, 3$ に対して C^*-correspondence $\mathcal{E}_i\colon A_i \to A_{i+1}$ を考える. 2 つの C^*-correspondence $\mathcal{E}_1$ と $\mathcal{E}_2$ に対し, テンソル積 (tensor product) と呼ばれる C^*-correspondence $\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2\colon A_1 \to A_3$ が定義できる. C^* 環と C^*-correspondence は, 合成をテンソル積, 単位射を identity correspondence とすると, 双圏の要請の多くを満たすが, 以下で述べるように双圏にはならない. 2 つの C^*-correspondence $(\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2) \otimes \mathcal{E}_3$ と $\mathcal{E}_1 \otimes (\mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{E}_3)$ は, 構造を保つ "自然な" 全単射 $(\xi_1 \otimes \xi_2) \otimes \xi_3 \mapsto \xi_1 \otimes (\xi_2 \otimes \xi_3)$ を通して同型である. これは双圏における結合律に相当する性質である. また, 2 つの C^*-correspondence $\mathcal{E}_1 \otimes A_2$ と $\mathcal{E}_1$ の間には, 構造を保つ "自然な" 全単射 $\xi_1 \otimes a_2 \mapsto \xi_1 a_2$ が存在することも分かる. これは双圏における単位律の一方に相当する性質である. しかし, 単位律のもう一方に相当する同型が一般には成り立たない. すなわち, 2 つの C^*-correspondence $A_1 \otimes \mathcal{E}_1$ と $\mathcal{E}_1$ の間の構造を保つ "自然な" 線型写像 $a_1 \otimes \xi_1 \mapsto a_1\xi_1$ は一般に同型にはならない. これが同型になるのは, $\mathcal{E}_1 = \{\sigma_{\mathcal{E}_1}(a_1)(\xi_1) \mid a_1 \in A_1, \xi_1 \in \mathcal{E}_1\}$ を満たす場合のみである. この性質を満たす C^*-correspondence を**非退化**という. そこで, C^* 環と非退化 C^*-correspondence を考えると, 合成をテンソル積, 単位射を identity correspondence として双圏を成す [BMZ13]. この双圏を $\mathfrak{Corr}$ と書く. 第 5 節において, 逆半群の間の inverse correspondence にもテンソル積や非退化と呼ばれる性質を導入し, 逆半群と非退化 inverse correspondence が双圏を成すことを見る. この双圏を $\mathfrak{IC}$ と書く.

Rieffel は C^* 環の間に強森田同値 (strong Morita equivalent) と呼ばれる同値関係を導入した [Rie74]. 2 つの C^* 環が双圏 $\mathfrak{Corr}$ において同値であることは, それらが強森田同値であることと等価である [EKQR06]. Steinberg は逆半群の間に強森田同値 (strong Morita equivalent) と呼ばれる同値関係を導入し, 逆半群からの C^* 環の構成が強森田同値を保つことを示した [Ste11]. Steinberg はこの事実を亜群の理論を経由して示している. 本稿の第 5 節にて, 2 つの逆半群が双圏 $\mathfrak{IC}$ において同値であることと, それらが強森田同値であることは等価であることを紹介する. この事実を踏まえると, 後に双圏 $\mathfrak{IC}$ から双圏 $\mathfrak{Corr}$ への双関手が構成されれば, Steinberg が示した事実に対し, 双関手が双圏の同値を保つことを用いて亜群論を経由しない直接的な証明が与えられることが期待できる.

4 逆 S 集合の導入と随伴可能写像全体のなす逆半群 $L(\mathcal{U})$

逆半群 S を考える. 本節では逆 S 集合とその間の随伴可能写像を定義する. また, 逆 S 集合上の随伴可能写像全体が逆半群を成すことを示す.

定義 4.1. 集合 $\mathcal{U}$ 上の S **作用**とは, 写像 $\mathcal{U} \times S \to \mathcal{U}; (u, s) \mapsto us$ であって, 任意の $s, s' \in S$ と $u \in \mathcal{U}$ に対し, $u(ss') = (us)s'$ を満たすものをいう. S 作用を備えた集合 $\mathcal{U}$ を S **集合**という.

定義 4.2 ([Uch23])**.** **正則** S **集合** $\mathcal{U}$ とは, S 集合であって, 写像 $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to S$ を備えており, 任意の $u, u' \in \mathcal{U}$ と $s \in S$ に対し,

(R-i) $\langle u \mid u's \rangle_{\mathcal{U}} = \langle u \mid u' \rangle_{\mathcal{U}} s$,
(R-ii) $\langle u \mid u' \rangle_{\mathcal{U}}^* = \langle u' \mid u \rangle_{\mathcal{U}}$,

(R-iii) $u\langle u \,|\, u\rangle_{\mathcal{U}} = u$,

を満たすものをいう. **逆 S 集合**とは, 正則集合 $\mathcal{U}$ であって, 次を満たすものをいう.

(R-iv) $u, u' \in \mathcal{U}$ が $u\langle u' \,|\, u\rangle_{\mathcal{U}} = u$ かつ $u'\langle u \,|\, u'\rangle_{\mathcal{U}} = u'$ を満たすならば $u = u'$ が成り立つ.

正則 S 集合や逆 S 集合の命名は以下の例を念頭に置いたものである.

例 4.3. 逆半群 S に対し, 集合 S 上の S 作用を右からの掛け算で, 写像 $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_S \colon S \times S \to S$ を任意の $s, s' \in S$ に対し $\langle s \,|\, s' \rangle_S := s^* s'$ で定義する. 条件 (R-i) と (R-ii) は簡単に確認できる. ここで, S が正則半群であることから (R-iii) が成り立ち, 逆半群であることから (R-iv) が成り立つ. よって S はこれらの構造で逆 S 集合である.

例 4.4. 位相空間 X, Y に対し, 例 2.3 で定義した逆半群 $I(X)$ と集合 $I(X,Y)$ を考える. 集合 $I(X,Y)$ 上の $I(X)$ 作用を右からの合成で, 写像 $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle_{I(X,Y)} \colon I(X,Y) \times I(X,Y) \to I(X)$ を任意の $u, u' \in I(X,Y)$ に対し $\langle u \,|\, u' \rangle_{I(X,Y)} := u^{-1}u'$ で定義すると, 逆 $I(X)$ 集合になる.

2 つの逆 S 集合 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ と写像 $\varphi \colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ を考える.

定義 4.5. 写像 φ が **S 写像**であるとは, 任意の $u \in \mathcal{U}$ と $s \in S$ に対して $\varphi(us) = \varphi(u)s$ が成り立つことをいう.

定義 4.6. 写像 φ が**随伴可能**であるとは, 写像 $\psi \colon \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ が存在して, 任意の $u \in \mathcal{U}$ と $v \in \mathcal{V}$ に対し,

$$\langle \psi(v) \,|\, u \rangle_{\mathcal{U}} = \langle v \,|\, \varphi(u) \rangle_{\mathcal{V}}$$

が成り立つことをいう. この ψ を φ に対する**随伴**という. 随伴は存在すれば一意であるため, φ に対して唯一存在する随伴を $\varphi^\dagger$ と書く.

定義 4.7. 逆 S 集合 $\mathcal{U}$ から $\mathcal{V}$ への随伴可能写像全体を $L(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ と書く. 集合 $L(\mathcal{U},\mathcal{U})$ を $L(\mathcal{U})$ と略す.

随伴可能写像は自動的に S 写像である. 随伴可能写像 $\varphi \colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ に対し, $\varphi^{\dagger\dagger} = \varphi$ が成り立つ. 任意の逆 S 集合 $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ と随伴可能写像 $\varphi \colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, $\psi \colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ に対し, これらの合成写像 $\psi\varphi \colon \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ は随伴可能であり, $(\psi\varphi)^\dagger = \varphi^\dagger \psi^\dagger$ が成り立つ. 特に集合 $L(\mathcal{U})$ は合成を演算として半群をなす. 元 $\varphi \in L(\mathcal{U})$ が $\varphi = \varphi^\dagger$ を満たすとき, φ は**自己随伴**であるという.

定義 4.8. 任意の $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$ に対し, 写像 $\omega_{v,u} \colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ を任意の $u' \in \mathcal{U}$ に対し

$$\omega_{v,u}(u') := v\langle u \,|\, u' \rangle_{\mathcal{U}}$$

で定める.

定義 4.9. 逆 S 集合 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ に対し, $K(\mathcal{U}, \mathcal{V}) := \{\omega_{v,u} \mid u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}\}$ と定義する. 集合 $K(\mathcal{U},\mathcal{U})$ を $K(\mathcal{U})$ と略す.

任意の $u \in \mathcal{U}$ と $v \in \mathcal{V}$ に対し, $\omega_{v,u}$ は随伴可能であり, $\omega_{v,u}^\dagger = \omega_{u,v}$ が成り立つ. よって, $K(\mathcal{U}, \mathcal{V})$

は $L(\mathcal{U},\mathcal{V})$ の部分集合である. また, 任意の S 集合 $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ と $u\in\mathcal{U}$, $v\in\mathcal{V}$, $w\in\mathcal{W}$, $\varphi\in L(\mathcal{U},\mathcal{V})$, $\psi\in L(\mathcal{V},\mathcal{W})$ に対し, $\omega_{w,v}\varphi=\omega_{w,\varphi^\dagger(v)}$, $\psi\omega_{v,u}=\omega_{\psi(v),u}$ が成り立つ. 特に, $K(\mathcal{U})$ は $L(\mathcal{U})$ の両側イデアルであり, 従って半群である. 次の命題は, 定理 4.11 や定理 5.6 の証明で重要な役割を果たす.

命題 4.10 ([Uch23])**.** 正則 S 集合 $\mathcal{U}$ において, 次の条件は同値である.

(i) 任意の $u,u'\in\mathcal{U}$ に対し, $u\langle u'\,|\,u\rangle_{\mathcal{U}}=u$ かつ $u'\langle u\,|\,u'\rangle_{\mathcal{U}}=u'$ ならば $u=u'$ が成り立つ (すなわち, $\mathcal{U}$ は逆 S 集合である).
(ii) 任意の $u,u'\in\mathcal{U}$ に対し, $\langle u\,|\,u\rangle_{\mathcal{U}}=\langle u'\,|\,u'\rangle_{\mathcal{U}}=\langle u\,|\,u'\rangle_{\mathcal{U}}$ ならば $u=u'$ が成り立つ.
(iii) 任意の $u,u'\in\mathcal{U}$ に対し, $u\langle u\,|\,u'\rangle_{\mathcal{U}}=u'\langle u'\,|\,u\rangle_{\mathcal{U}}\langle u\,|\,u'\rangle_{\mathcal{U}}$ が成り立つ.
(iv) 任意の $u,u'\in\mathcal{U}$ に対し, 写像 $\omega_{u,u}$ と $\omega_{u',u'}$ は交換する.

命題 4.10 において, 特に $\mathcal{U}$ を例 4.3 で挙げた正則 S 集合 S とすれば, 命題 2.4 を得る.

定理 4.11 ([Uch23])**.** 逆 S 集合 $\mathcal{U}$ に対し, $K(\mathcal{U})$, $L(\mathcal{U})$ は逆半群である.

証明の概略. 逆 S 集合において, 命題 4.10(ii) が成り立つことに注意すると, $E(K(\mathcal{U}))=\{\omega_{u,u}\mid u\in\mathcal{U}\}$ が得られる. また, 命題 4.10(iv) より $E(K(\mathcal{U}))$ は可換である. 従って命題 2.4 より $K(\mathcal{U})$ は逆半群である.

次に半群 $L(\mathcal{U})$ の正則性を示す. 元 $\varphi\in L(\mathcal{U})$ と $u\in\mathcal{U}$ を任意に固定せよ. 半群 $L(\mathcal{U})$ の両側イデアル $K(\mathcal{U})$ が逆半群であることが得られたので, 命題 2.5 より, $L(\mathcal{U})$ の冪等元と $\omega_{u,u}$ は交換する. この事実と $\varphi^\dagger\varphi\omega_{u,u}$ や $\omega_{u,u}\varphi^\dagger\varphi$ が $L(\mathcal{U})$ の冪等元であることを用いて, $\varphi^\dagger\varphi$ と $\omega_{u,u}$ が交換することが分かる. 定義 4.2(R-iii) や, φ が自動的に S 写像になることを用いて

$$\begin{aligned}\varphi(u)&=\varphi(u)\langle\varphi(u)\,|\,\varphi(u)\rangle_{\mathcal{U}}=\varphi\big(u\langle\varphi(u)\,|\,\varphi(u)\rangle_{\mathcal{U}}\big)=\varphi\left(u\big\langle u\,\big|\,\varphi^\dagger\varphi(u)\big\rangle_{\mathcal{U}}\right)\\&=\varphi\big(\omega_{u,u}\,\varphi^\dagger\varphi(u)\big)=\varphi\big(\varphi^\dagger\varphi\,\omega_{u,u}(u)\big)=\varphi\varphi^\dagger\varphi(u\langle u\,|\,u\rangle_{\mathcal{U}})=\varphi\varphi^\dagger\varphi(u)\end{aligned}$$

を得る. これより $\varphi=\varphi\varphi^\dagger\varphi$ を得る. 両辺の随伴をとって $\varphi^\dagger=\varphi^\dagger\varphi\varphi^\dagger$ を得る. 以上より $L(\mathcal{U})$ が正則であることが分かる. 正則半群 $L(\mathcal{U})$ における一般化逆元の一意性は次のように示す. 命題 2.5 より $L(\mathcal{U})$ と $K(\mathcal{U})$ の冪等元が交換する. これを用いて, $L(\mathcal{U})$ の冪等元は自己随伴であることが分かる. 任意に固定した元 $\varphi\in L(\mathcal{U})$ に対し, ψ_1,ψ_2 をその一般化逆元とする. ここで $\varphi\psi_1$, $\varphi\psi_2$, $\psi_1\varphi$, $\psi_2\varphi$ が冪等元であり, 従って自己随伴であることに注意すると, $\psi_1=\psi_2\varphi\psi_1=\psi_2$ を得る. □

次の定理も示すことができる.

定理 4.12 ([Uch23])**.** 逆 S 集合 $\mathcal{U},\mathcal{V}$ に対し, 集合 $L(\mathcal{U},\mathcal{V})$ は, その上の $L(\mathcal{U})$ 作用を右からの合成によって, 写像 $\langle\varphi\,|\,\psi\rangle_{L(\mathcal{U},\mathcal{V})}\colon L(\mathcal{U},\mathcal{V})\times L(\mathcal{U},\mathcal{V})\to L(\mathcal{U})$ を $\langle\varphi\,|\,\psi\rangle_{L(\mathcal{U},\mathcal{V})}:=\varphi^\dagger\psi$ で定義すると, 逆 $L(\mathcal{U})$ 集合である. 集合 $K(\mathcal{U},\mathcal{V})$ は同様の構造で逆 $K(\mathcal{U})$ 集合である.

以上で, inverse correspondence を導入するための準備が整った.

5 Inverse corrsepondence の導入と逆半群のなす双圏 $\mathfrak{Ic}$

C^* 環の間の C^*-correspondence を参考に, 逆半群の間の inverse correspondence を導入する. 逆半群 S, T を考える.

定義 5.1 ([Uch23])**.** 逆 T 集合 $\mathcal{U}$ と半群準同型 $\theta_{\mathcal{U}}\colon S \to L(\mathcal{U})$ の組を S から T への *inverse correspondence* といい, $\mathcal{U}\colon S \to T$ と書く. 特に inverse correspondence $\mathcal{U}\colon S \to T$ が $\mathcal{U} = \{\theta_{\mathcal{U}}(s)(u) \mid s \in S, u \in \mathcal{U}\}$ を満たすとき, $\mathcal{U}$ は**非退化**であるという.

定義 5.2. 逆半群 S から T への inverse correspondence $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ と, 写像 $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ を考える. 写像 φ が**同型射**であるとは, 全単射 S 写像であって, 任意の $s \in S$, $u, u' \in \mathcal{U}$ に対し, $\langle \varphi(u) \,|\, \varphi(u') \rangle_{\mathcal{V}} = \langle u \,|\, u' \rangle_{\mathcal{U}}$ と $\varphi(\theta_{\mathcal{U}}(s)(u)) = \theta_{\mathcal{V}}(s)(\varphi(u))$ が成り立つことをいう. 逆半群 S から T への inverse correspondence $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ の間に同型射が存在するとき, $\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ は**同型**であるという.

例 5.3. 逆半群 S, T と半群準同型 $\tau\colon S \to T$ を考える. 逆 T 集合 T が例 4.3 のようにして得られる. ここで, 逆 T 集合 T の部分集合 $\mathcal{U}_\tau := \{\tau(s)t \mid s \in S, t \in T\}$ も同様の構造で逆 T 集合になる. 写像 $\theta_{\mathcal{U}_\tau}\colon S \to L(\mathcal{U}_\tau)$ を任意の $s \in S$, $u \in \mathcal{U}_\tau$ に対して $\theta_{\mathcal{U}_\tau}(s)(u) := \tau(s)u$ と定めると, $\theta_{\mathcal{U}_\tau}$ は半群準同型である. よって半群準同型 $\theta\colon S \to T$ は, 逆 T 集合 $\mathcal{U}_\tau$ と半群準同型 $\theta_{\mathcal{U}_\tau}$ の組からなる S から T への inverse correspondence $\mathcal{U}_\tau$ を誘導する. この inverse correspondence が非退化であることは簡単に確かめられる. 特に上の例において, S 上の恒等写像 $\mathrm{id}_S\colon S \to S$ が誘導する inverse correspondence $\mathcal{U}_{\mathrm{id}_S}$ を S に対する *identity correspondence* と呼ぶ. これは後に逆半群のなす双圏において単位射として扱われる.

例 5.4. 位相空間 X, Y に対して, 例 4.4 で考えた逆 $I(X)$ 集合 $I(X, Y)$ を考える. 逆半群 $I(Y)$ の元 v を左から合成する操作 $\theta_{I(X,Y)}(v)$ は $I(X, Y)$ 上の随伴写像になる. 写像 $\theta_{I(X,Y)}\colon I(Y) \to L(I(X, Y)); v \mapsto \theta_{I(X,Y)}(v)$ は半群準同型になる. よって $I(X, Y)$ は $I(Y)$ から $I(X)$ への inverse correspondence である.

例 5.5. 逆 S 集合 $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ に対して, 定理 4.12 で考えた逆 $L(\mathcal{U})$ 集合 $L(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ を考える. 逆半群 $L(\mathcal{V})$ の元 ψ を左から合成する操作 $\theta_{L(\mathcal{U},\mathcal{V})}(\psi)$ は $L(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ 上の随伴写像になる. 写像 $\theta_{L(\mathcal{U},\mathcal{V})}\colon L(\mathcal{V}) \to L(\mathcal{U}, \mathcal{V}); \psi \mapsto \theta_{L(\mathcal{U},\mathcal{V})}(\psi)$ は半群準同型になる. よって $L(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ は $L(\mathcal{V})$ から $L(\mathcal{U})$ への inverse correspondence である.

逆半群 S_1, S_2, S_3 と inverse correspondence $\mathcal{U}\colon S_1 \to S_2$, $\mathcal{V}\colon S_2 \to S_3$ を考える. これらから新たな inverse correspondence $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}\colon S_1 \to S_3$ が次のように構成される. 直積集合 $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ を, 任意の $u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$, $s_2 \in S_2$ に対して $(us_2, v) \sim \big(u, \theta_{\mathcal{V}}(s_2)(v)\big)$ が成り立つ最小の同値関係 $\sim$ で割った商集合を $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ とする. 元 $(u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ の同値類を $u \otimes v$ と書く. 任意の $u, u' \in \mathcal{U}$, $v, v' \in \mathcal{V}$, $s_3 \in S_3$ に対し, 集合 $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ への S_3 作用を

$$(u \otimes v)s_3 := u \otimes (vs_3)$$

で, 写像 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}\colon (\mathcal{U}\otimes\mathcal{V})\times(\mathcal{U}\otimes\mathcal{V})\to S_3$ を

$$\langle u'\otimes v'\,|\,u\otimes v\rangle_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}} := \langle v'\,|\,\theta_{\mathcal{V}}(\langle u'\,|\,u\rangle_{\mathcal{U}})(v)\rangle_{\mathcal{V}}$$

で定義する.

定理 5.6 ([Uch23])**.** 以上の構造により, $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ は逆 S_3 集合になる.

証明の概略. 上の S_3 作用と写像 $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}$ は well-defined であり, これらの構造で $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ が正則 S_3 集合になることは簡単に確かめられる. 逆 S_3 集合になることには命題 4.10 を用いる. □

任意の $s_1\in S_1$ に対して, $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ 上の写像 $\theta_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}(s_1)$ を, 任意の $u\in\mathcal{U}$, $v\in\mathcal{V}$ に対して

$$\theta_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}(s_1)(u\otimes v) := \theta_{\mathcal{U}}(s_1)(u)\otimes v$$

で定義すると, 随伴可能である. 写像 $\theta_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}\colon S_1\to L(\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}); s_1\mapsto\theta_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}(s_1)$ は半群準同型になる.

定義 5.7 ([Uch23])**.** 2 つの inverse correspondence $\mathcal{U}\colon S_1\to S_2$, $\mathcal{V}\colon S_2\to S_3$ に対し, 逆 S_3 集合 $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ と半群準同型 $\theta_{\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}}\colon S_1\to L(\mathcal{U}\otimes\mathcal{V})$ からなる inverse correspondence $\mathcal{U}\otimes\mathcal{V}$ を, $\mathcal{U}$ と $\mathcal{V}$ の**テンソル積**と呼ぶ.

2 つの非退化 inverse correspondence のテンソル積が非退化であることは簡単に確認できる.

定理 5.8 ([Uch23])**.** 逆半群と非退化 inverse correspondence は, 合成をテンソル積, 単位射を identity correspondence として双圏を成す. この双圏を $\mathfrak{Ic}$ と書く.

証明の概略. ここでは結合律や単位律に相当する同型射が存在することのみを確認する. 逆半群 S_1, S_2, S_3, S_4 と, 添字 $i=1,2,3$ に対して非退化 inverse correspondence $\mathcal{U}_i\colon S_i\to S_{i+1}$ を考える. 写像 $\alpha\colon(\mathcal{U}_1\otimes\mathcal{U}_2)\otimes\mathcal{U}_3\to\mathcal{U}_1\otimes(\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{U}_3)$ を

$$\alpha((u_1\otimes u_2)\otimes u_3) := u_1\otimes(u_2\otimes u_3)$$

で, 写像 $\lambda\colon\mathcal{U}_1\otimes S_2\to\mathcal{U}_1$ を

$$\lambda(u_1\otimes s_2) := u_1 s_2$$

で定義すると, これらは inverse correspondence の間の同型射である. また, $\rho\colon S_1\otimes\mathcal{U}_1\to\mathcal{U}_1$ を

$$\rho(s_1\otimes u_1) := \theta_{\mathcal{U}_1}(s_1)(u_1)$$

で定義すると, $\mathcal{U}_1$ が非退化であることより ρ は inverse correspondence の間の同型射である. □

例 5.9. 逆半群 S_1, S_2, S_3 と, 添字 $i=1,2$ に対して半群準同型 $\tau_i\colon S_i\to S_{i+1}$ を考える. 例 5.3 で述べた構成法より, 半群準同型 τ_1, τ_2 に対して非退化 inverse correspondence $\mathcal{U}_{\tau_1}$, $\mathcal{U}_{\tau_2}$ が得られる. これらのテンソル積 $\mathcal{U}_{\tau_1}\otimes\mathcal{U}_{\tau_2}$ は, 2 つの半群準同型の合成 $\tau_2\tau_1$ から得られる非退化 inverse correspondence $\mathcal{U}_{\tau_2\tau_1}$ と, 同型射 $\mathcal{U}_{\tau_1}\otimes\mathcal{U}_{\tau_2}\to\mathcal{U}_{\tau_2\tau_1}; u_1\otimes u_2\mapsto\tau_2(u_1)u_2$ を通して同型である. 半群準同型 τ から非退化 inverse correspondence $\mathcal{U}_\tau$ への対応付けは, 第 3 節で定義した圏 **IS** から双圏 $\mathfrak{Ic}$ へのある種の関手 (双関手) を成す.

次の定理は, 双圏 $\mathfrak{IC}$ における同値を特徴付けるものである.

定理 5.10 ([Uch23])**.** 2 つの逆半群が双圏 $\mathfrak{IC}$ において同値になることの必要十分条件は, それらが強森田同値になることである.

証明は, 双圏 $\mathfrak{Corr}$ における同値が, C^* 環に対する強森田同値と等価であることを示した [EKQR06, Lemma 2.4] と類似した方法によって行われる. この定理により, 後に双圏 $\mathfrak{IC}$ から双圏 $\mathfrak{Corr}$ への双関手が構成されれば, 「逆半群からの C^* 環の構成が強森田同値を保つ」という事実を, 双関手が双圏の同値を保つことを用いて証明できる.

参考文献

[Alb15] S. Albandik, *A colimit construction for groupoids*, Ph.D. Thesis, Georg-August-Universität Göttingen, 2015.

[AM16] S. Albandik and R. Meyer, *Colimits in the correspondence bicategory*, Münster J. Math. **9** (2016), no. 1, 51–76. MR3549542

[Bén67] J. Bénabou, *Introduction to bicategories* (1967), 1–77. MR0220789

[BMZ13] A. Buss, R. Meyer, and C. Zhu, *A higher category approach to twisted actions on C*-algebras*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society **56** (2013), no. 2, 387–426.

[EKQR06] S. Echterhoff, S. Kaliszewski, J. Quigg, and I. Raeburn, *A categorical approach to imprimitivity theorems for C*-dynamical systems*, Mem. Amer. Math. Soc. **180** (2006), no. 850, viii+169. MR2203930

[Exe08] R. Exel, *Inverse semigroups and combinatorial C*-algebras*, Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.) **39** (2008), no. 2, 191–313. MR2419901

[Lan95] E. C. Lance, *Hilbert C*-modules a toolkit for operator algebraists*, London Mathematical Society lecture note series ; 210, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[Law98] M. V. Lawson, *Inverse semigroups*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1998. The theory of partial symmetries. MR1694900

[Lei98] T. Leinster, *Basic bicategories*, arXiv:math (1998), available at `arXiv:math/9810017`.

[Pat99] A. L. T. Paterson, *Groupoids, inverse semigroups, and their operator algebras*, Progress in Mathematics, vol. 170, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1999. MR1724106

[Rie74] M. A. Rieffel, *Induced representations of C*-algebras*, Advances in Math. **13** (1974), 176–257. MR353003

[Ste11] B. Steinberg, *Strong Morita equivalence of inverse semigroups*, Houston J. Math. **37** (2011), no. 3, 895–927. MR2844456

[Uch23] T. Uchimura, *A bicategory of inverse semigroups*, 2023. in preparation.

Discrete universality theorem for Matsumoto zeta-functions and nontrivial zeros of the Riemann zeta-function

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
中井啓太 (Keita NAKAI) *

概 要

ある帯領域に含まれる補集合が連結なコンパクト集合上非零な正則関数をゼータ (L) 関数の虚軸方向の平行移動で近似できるとき, ゼータ (L) 関数の普遍性定理が成り立つという. Garunkštis–Laurinčikas–Macaitienė は, Riemann ゼータ関数の非自明零点の虚部による Riemann ゼータ関数の離散普遍性定理を証明した. この Riemann ゼータ関数の非自明零点の虚部による離散普遍性定理は, 様々なゼータ関数や L 関数に一般化されている. 本稿では, Matsumoto ゼータ関数に対するこの離散普遍性定理の拡張を与える.

1 導入

関数 $f(x)$ と非負実数値関数 $g(x)$ に対し, ある絶対定数 $C > 0$ が存在し, ある範囲において, $|f(x)| \leq Cg(x)$ が成り立つとき, $f(x) \ll g(x)$ と書く. また, $f(x) = o(g(x))$ であるとは, $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$ が成り立つこととする. さらに, 非負実数値関数 $f(x)$, $g(x)$ に対し, $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$ が成り立つとき, $f(x) \sim g(x)$ と書く.

複素数を s とし, その実部を $\Re(s) = \sigma$, 虚部を $\Im(s) = t$ とする. Riemann ゼータ関数とは, $\sigma > 1$ において絶対収束する級数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ により定義される関数である. さらに, $\sigma > 1$ において, $\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ という無限積表示を持つ. ただし, p は全ての素数をわたる. Riemann ゼータ関数は, 全平面の有理型関数に解析接続され, 特に関数等式

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \Gamma(1-s) \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s)$$

が成り立つ. 無限積表示から, Riemann ゼータ関数は $\sigma > 1$ において零点をもたず, 関数等式から, $\sigma < 0$ における零点は $s = -2n$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ のみであることが分かる. この零点を自明零点といい, 自明零点以外の $0 \leq \sigma \leq 1$ に存在する零点を非自明零点という. 有名な Riemann 予想とは, 非自明零点は全て実部 $1/2$ 上にのみ存在するという予想であり, この予想は素数定理や隣り合う素数の間隔など素数とも関係している. したがって, Riemann ゼータ関数の零点を調べるのは素数分布の観点からも重要である. Riemann ゼータ関数の非自明零点の虚部を γ, γ' とし, また, 虚部が正なものを $0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \dots$ とする. このとき, Montgomery [11] は, 相関予想と呼ばれる次の零点の個数に関する漸近を予想した. $\alpha_1 < \alpha_2$ に対し, $T \to \infty$ において

$$\sum_{\substack{0<\gamma,\gamma'\leq T \\ 2\pi\alpha_1/\log T \leq \gamma-\gamma' \leq 2\pi\alpha_2/\log T}} 1 \sim \left(\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(1 - \left(\frac{\sin \pi u}{\pi u} \right)^2 \right) du + \delta(\alpha_1, \alpha_2) \right) \frac{T}{2\pi} \log T.$$

*E-mail:m21029d@math.nagoya-u.ac.jp

ただし, $0 \in [\alpha_1, \alpha_2]$ のとき, $\delta(\alpha_1, \alpha_2) = 1$ であり, それ以外のとき $\delta(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ である.

以下, Riemann ゼータ関数の零点のみならず, その値の挙動自体を考える. 1975 年に Voronin は, Riemann ゼータ関数に対し次の普遍性定理と呼ばれる定理を証明した.

Theorem 1.1 ([13])**.** K を帯領域 $1/2 < \sigma < 1$ に含まれる補集合が連結なコンパクト集合とする. f を K 上非零な連続関数かつ K の内部で正則とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

ただし, meas を 1 次元 Lebesgue 測度とする.

端的に書くと, 臨界帯に含まれる補集合が連結なコンパクト集合上で定義される非零な正則関数は, Riemann ゼータ関数の $+i\tau(\tau \in \mathbb{R}_{\geq 0})$ の平行移動で一様に近似できるという定理である. この普遍性定理において, $f(s) = 0$ とすると, Riemann ゼータ関数は任意の精度でいくらでも 0 に近づきうることが分かる. このような事実が Riemann 予想の困難さの理由の 1 つであると考えることが出来る. ただし, 定理の主張からは恒等的に 0 である関数を取ることは出来ないが, 例えば $0 < |a| < \varepsilon/2$ となるような定数 a に対し, $f(s) = a$ とし, Theorem 1.1 の ε を $\varepsilon/2$ に置き換え適用することにより, 恒等的に 0 である関数を近似する普遍性定理を考えることが出来る.

もし, この平行移動させる τ がある離散集合上の点を動き, このような近似定理が成り立つとき, その近似定理を離散普遍性定理という. 普遍性定理は, 離散普遍性定理以外にも様々な一般化や拡張がされている. 例えば, サーベイ論文 [9] を参照されたい.

ここで Montgomery の相関予想より弱い予想

$$\sum_{\substack{0<\gamma,\gamma'\leq T\\ |\gamma-\gamma'|<c/\log T}} 1 \ll T\log T, \quad T\to\infty \tag{1.1}$$

を考える. ただし, $c > 0$ とする. この弱い予想の下, Garunkštis–Laurinčikas–Macaitienė [3] は次の離散普遍性定理を証明した.

Theorem 1.2. K を帯領域 $1/2 < \sigma < 1$ に含まれる補集合が連結なコンパクト集合, f を K 上非零な連続かつ K の内部で正則とし, (1.1) を仮定する. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ と $h > 0$ に対し,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N}\#\left\{1 \leq k \leq N : \sup_{s\in K}|\zeta(s+ih\gamma_k) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

が成り立つ. ただし, $\#A$ は, 集合 $A \subset \mathbb{N}$ の個数とする.

この離散普遍性定理は, [5], [7], [6], [2], [1], [4] において, Hurwitz ゼータ関数や Selberg クラスの L 関数などの様々なゼータ関数や L 関数に拡張されている. 本稿では, この離散普遍性定理を Matsumoto ゼータ関数と呼ばれるある無限積により定義されるゼータ関数に拡張できることを紹介する.

2 主定理

Matsumoto ゼータ関数とは, 松本 [8] により導入された

$$\varphi(s) = \prod_{n=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{g(n)}(1 - a_n^{(j)}p_n^{-f(j,n)s})^{-1}$$

により定義される関数である. ただし, $g(n) \in \mathbb{N}$, $f(j,n) \in \mathbb{N}$, $a_n^{(j)} \in \mathbb{C}$, p_n は n 番目の素数とする. 例えば, Riemann ゼータ関数や Dirichlet の L 関数は, 明らかに Matsumoto ゼータ関数に包含され, さらに代数体の Dedekind ゼータ関数やある cusp form に付随する保型 L 関数も Matsumoto ゼータ関数に包含される (例えば, [8, 5 節] 参照). ここで, ある非負定数 α, β と正定数 c_1 に対し,

$$g(n) \le c_1 p_n^{\alpha}, \ |a_n^{(j)}| \le p_n^{\beta} \tag{2.1}$$

が成り立つことを仮定する. この仮定の下, Matsumoto ゼータ関数は, $\sigma > \alpha + \beta + 1$ において絶対収束する級数

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^s}$$

の表示をもつ. さらに, n の全ての素因子が十分大ならば, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $b_n \ll n^{\alpha+\beta+\varepsilon}$ が成り立つ. 本稿における Matsumoto ゼータ関数は以下の仮定を満たすとする.

(i) 仮定 (2.1) を満たす.

(ii) ある $\alpha + \beta + 1/2 \le \rho < \alpha + \beta + 1$ を満たす ρ が存在し, $\varphi(s)$ は $\sigma \ge \rho$ の有理型関数に解析接続され, 全ての極はあるコンパクト集合に含まれ, $\sigma = \rho$ 上に極は存在しない.

(iii) ある正定数 c_2 が存在し, $\varphi(\sigma + it) \ll |t|^{c_2}$, $|t| \to \infty$ が $\sigma > \rho$ に対し成り立つ.

(iv) $\rho \le \sigma < \min\{\Re(s) : s \text{ は} \varphi \text{ の極}\}$ なる σ に対し,

$$\int_{-T}^{T} |\varphi(\sigma + it)|^2 \, dt \ll T$$

が成り立つ.

(v) ある正定数 κ が存在し,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p_n \le x} \left| \sum_{\substack{j=1 \\ f(j,n)=1}}^{g(n)} a_n^{(j)} \right|^2 p_n^{-2(\alpha+\beta)} = \kappa,$$

が成り立つ. ここで, $\pi(x)$ は x 以下の素数の個数である.

例えば, Riemann ゼータ関数, Dirichlet の L 関数, $SL(2,\mathbb{Z})$ の cusp form に付随する保型 L 関数などは上記の仮定を満たす. このような Matsumoto ゼータ関数に対し成り立つ次の離散普遍性定理が本稿の主結果である.

Theorem 2.1. K を帯領域 $\rho < \sigma < \alpha + \beta + 1$ に含まれる補集合が連結なコンパクト集合, f を K 上非零な連続かつ K の内部で正則とし, (1.1) を仮定する. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ と $h > 0$ に対し,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ N \le k \le 2N : \sup_{s\in K} |\varphi(s + ih\gamma_k) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0 \tag{2.2}$$

が成り立つ.

Remark 2.2. Sourmelidis–Srichan–Steuding [12] は, unconditional に Riemann ゼータ関数に対し, 同様の離散普遍性定理に対し証明している. 彼らの結果は, Riemann ゼータ関数の非自明零点の虚部のみならず, より広く Selberg クラスの L 関数の α 点の虚部について得られている. しかしながら, 彼らの結果では, Selberg クラスの L 関数の α 点の虚部の部分列を取る必要がある.

3　仮定 (1.1) について

この節では, 仮定 (1.1) を用いることについて解説する.

以下, Theorem 2.1 の仮定を満たすコンパクト集合 K を 1 つ固定する. まず, 全ての極が半平面 $\sigma_0 < \sigma$ に含まれるような $\rho < \sigma_0 < \min_{s\in K} \Re(s)$ を固定する. さらに, R を $\sigma_0 < \sigma < \alpha+\beta+1$ に含まれ, $K \subset R$ を満たす開長方形領域とする.

次に, C^∞ 級実関数 ψ を $[0,\infty)$ で定義され, 任意の $x \in [0,\infty)$ に対し, $0 \le \psi(x) \le 1$ かつ任意の $x \in [0,1]$ に対し $\psi(x) = 1$ であり,

$$\mathrm{supp}(\psi) = \overline{\{x \in [0,\infty) : \psi(x) \neq 0\}}$$

がコンパクトとなるとする. このとき, $X \ge 2$ に対し,

$$\varphi_X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n \psi(n/X)}{n^s}$$

を定める. これは無限和の表示であるが, $\mathrm{supp}(\psi)$ がコンパクトなので, 実際には有限和である. このとき, 次の補題が成り立つ.

Lemma 3.1. 任意のコンパクト集合 $C \subset R$ に対し,

$$\lim_{X\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{k=N}^{2N} \sup_{s\in C} |\varphi(s+ih\gamma_k) - \varphi_X(s+ih\gamma_k)| = 0.$$

この補題の証明に入る前に離散平均における Gallagher の補題を準備する.

Lemma 3.2 (Gallagher)**.** T_0 と $T \ge \delta > 0$ を実数とし, $\mathcal{T}$ を $[T_0+\delta/2, T_0+T-\delta/2]$ に含まれる有限集合とし,

$$N_\delta(x) = \sum_{\substack{t\in\mathcal{T} \\ |t-x|<\delta}} 1$$

を定義する. S を $[T_0, T+T_0]$ 上の複素数値連続関数で $(T_0, T+T_0)$ で微分可能とする. このとき,

$$\begin{aligned}\sum_{t\in\mathcal{T}} N_\delta^{-1}(t)|S(t)|^2 \le& \frac{1}{\delta}\int_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2\,dx \\ &+ \left(\int_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2\,dx \int_{T_0}^{T_0+T} |S'(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

が成り立つ.

証明は, 例えば [10] を参照してほしい. この補題を用いて Lemma 3.1 の証明の概略を述べていく.

Sketch of proof of Lemma 3.1. まず, φ の極を $z_1, \dots, z_M$ と置き, その留数をそれぞれ $r_1, \dots, r_M$ とする. $\Re(z) > \sigma_0$ なる複素数 z に対し, 正の実数 $\delta(z)$ を $\Re(z) - \delta(z) = \sigma_0$ となるように定義する. このとき, 逆 Mellin 変換と留数定理と仮定 (iii) から

$$\varphi(z) - \varphi_X(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\delta(z)-i\infty}^{-\delta(z)+i\infty} \varphi(z+w)\hat{\psi}(w)X^w\,dw - \sum_{j=1}^{M} r_j \hat{\psi}(z_j - z)X^{z_j - z}.$$

が成り立つ. また, N を十分大とすると, $N \le k \le 2N$ なる k に対し, $\varphi(s+ih\gamma_k) - \varphi_X(s+ih\gamma_k)$ は $\overline{R}$ 上正則である. したがって, Cauchy の積分公式から, $N \le k \le 2N$ に対し

$$\varphi(s+ih\gamma_k) - \varphi_X(s+ih\gamma_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{R}} \frac{\varphi(z+ih\gamma_k) - \varphi_X(z+ih\gamma_k)}{z-s}\,dz$$

が成り立つ. この 2 つの式を用いることにより, 不等式

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=N}^{2N} \sup_{s\in C} |\varphi(s+ih\gamma_k) - \varphi_X(s+ih\gamma_k)| \\
&\le \frac{|\partial\mathcal{R}|}{4\pi^2 \mathrm{dist}(C,\partial\mathcal{R})} \sup_{z\in\partial\mathcal{R}} X^{-\delta(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=N}^{2N} |\varphi(\Re(z)-\delta(z)+i\tau+ih\gamma_k)||\hat{\psi}(-\delta+i\tau)|\,d\tau \\
&\quad + \frac{|\partial\mathcal{R}|}{2\pi \mathrm{dist}(C,\partial\mathcal{R})} \sup_{z\in\partial\mathcal{R}} \sum_{k=N}^{2N}\sum_{j=1}^{M} |r_j||\hat{\psi}(z_j - z - ih\gamma_k)| X^{\Re(z_j-z)},
\end{aligned}$$

を得る. ただし, $\mathrm{dist}(C,\partial\mathcal{R})$ は C と ∂R の最短距離の長さとし, $|\partial R|$ は ∂R の長さとする.

まず, 第 1 項目から考えていく. 零点の虚部に関して, ある正定数 C_1, C_2 が存在し,

$$C_2\frac{k}{\log k} \le \gamma_k \le C_1\frac{k}{\log k} \tag{3.1}$$

が成り立つことに注意する. Lemma 3.2 において, $\delta = h/\log(2C_1N/\log 2N)$, $T_0 = h\gamma_N - \delta$, $T = h\gamma_{2N} - h\gamma_N + 2\delta$, $\mathcal{T} = \{h\gamma_N, \dots, h\gamma_{2N}\}$ と置く. このとき, 仮定 (1.1) より,

$$\sum_{k=N}^{2N} N_\delta(h\gamma_k) = \sum_{\substack{k=N}}^{2N}\sum_{\substack{l=N \\ |\gamma_k-\gamma_l|<\delta/h}}^{2N} 1 \ll \sum_{\substack{0<\gamma,\gamma'\le C_1 2N/\log 2N \\ |\gamma-\gamma'|<1/\log(2C_1N/\log 2N)}} 1 \ll N \tag{3.2}$$

が成り立つ. したがって, $\Re(z) - \delta(z) = \sigma_0$ と Cauchy–Schwarz の不等式と Lemma 3.2 より,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=N}^{2N} |\varphi(\Re(z)-\delta(z)+i\tau+ih\gamma_k)| \\
&\le \left(\sum_{k=N}^{2N} N_\delta(h\gamma_k) \sum_{k=N}^{2N} N_\delta^{-1}(h\gamma_k)|\varphi(\sigma_0+i\tau+ih\gamma_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\ll \sqrt{N}\left(\log N \int_{h\gamma_N}^{h\gamma_{2N}+1} |\varphi(\sigma_0+i\tau+it)|^2\,dt \right. \\
&\qquad \left. + \left(\int_{h\gamma_N}^{h\gamma_{2N}+1} |\varphi(\sigma_0+i\tau+it)|^2\,dt \int_{h\gamma_N}^{h\gamma_{2N}+1} |\varphi'(\sigma_0+i\tau+it)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

が成り立つ. σ_0 の取り方と仮定 (iv) より, $\tau \in \mathbb{R}$ に対し,

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} |\varphi(\sigma_0+i\tau+it)|^2\,dt &\ll T(1+|\tau|), \\
\int_{-T}^{T} |\varphi'(\sigma_0+i\tau+it)|^2\,dt &\ll T(1+|\tau|)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 以上より,

$$\frac{1}{N+1}\sum_{k=N}^{2N}|\varphi(\Re(z)-\delta(z)+i\tau+ih\gamma_k)|\ll 1+|\tau|$$

が成り立つので, 第 1 項目に関する評価式が得られる. 次に, 第 2 項目について考える. これは (3.1) の下からの評価より,

$$\sum_{k=N}^{2N}\sum_{j=1}^{M}|r_j||\hat{\psi}(z_j-z-ih\gamma_k)|X^{\Re(z_j-z)}\ll X^{\frac{1}{2}}(\log N)$$

である. $\delta(z)\geq\sigma_1-\sigma_0>0$ と第 1 項目と第 2 項目に関する評価式より,

$$\begin{aligned}&\lim_{X\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=N}^{2N}\sup_{s\in C}|\varphi(s+ih\gamma_k)-\varphi_X(s+ih\gamma_k)|\\&\ll\lim_{X\to\infty}\limsup_{N\to\infty}(X^{-(\sigma_1-\sigma_0)}+X^{\frac{1}{2}}(\log N)N^{-1})=0\end{aligned}$$

が成り立つので, 結論を得る. □

上記の議論の (3.2) の評価を用いる点において, 仮定 (1.1) が必要になる. 現状では unconditional には (3.2) の良い評価は得られていない. しかしながら, (3.2) の評価が良くなるような良い性質を満たす部分列を取ることにより, unconditional に証明することは可能である. 実際, 次の定理が成り立つ.

Theorem 3.3 ([12, Corollary 1])**.** $\mathcal{L}$ を定数でない Selberg クラスの L 関数とし, $b>0$ を実数, α を複素数とする. このとき, ある $\mathcal{L}(s)$ の α 点の部分列 $(\rho_{\alpha,n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ が存在し, $\Im(\rho_{\alpha,n_k})=\gamma_{\alpha,n_k}=bk+o(1)$ が成り立つ. さらに, 任意の $a\notin b^{-1}\mathbb{Q}$ と任意の正整数 m に対し, $(a\gamma_{\alpha,n_{km}})$ は 1 を法として一様分布である.

Selberg クラスの詳細な定義は本稿では省略するが, 大雑把に書くと Riemann 予想を満たすであろうと期待される公理的に定められた Dirichlet 級数の集合である. 後半部分も非常に重要な性質であり, 普遍性定理を証明するためには, この性質を用いる必要があるのだが, 本稿では前半部分のみに着目する. この定理から, 十分大きな自然数 k_1 に対し, $k\geq k_1$ であれば,

$$|\gamma_{\alpha,n_k}-2\pi k|<\frac{\pi}{2}\tag{3.3}$$

が成り立つ. したがって, Lemma 3.2 において, $\delta=h\pi$, $T_0=h\gamma_{\alpha,n_N}-h\pi/2$, $T=h\gamma_{\alpha,n_{2N}}-h\gamma_{\alpha,n_N}+h\pi$, $\mathcal{T}=\{h\gamma_{\alpha,n_N},\dots,h\gamma_{\alpha,n_{2N}}\}$ と置くと,

$$\sum_{k=N}^{2N}N_\delta(h\gamma_{\alpha,n_k})=\sum_{\substack{k=N\\|\gamma_{\alpha,n_k}-\gamma_{\alpha,n_l}|<\pi}}^{2N}\sum_{l=N}^{2N}1$$

が成り立つ. ここで, $N\geq k_1$ を満たすとき, $N\leq k,l\leq 2N$ に対し

$$|\gamma_{\alpha,n_k}-\gamma_{\alpha,n_l}|\geq 2\pi|k-l|-\pi$$

が (3.3) より成り立つ. ゆえに, $|\gamma_{\alpha,n_k} - \gamma_{\alpha,n_l}| < \pi$ を満たす $N \le k, l \le 2N$ は, $k = l$ にならざるを得ない. 以上より,

$$\sum_{k=N}^{2N} N_\delta(h\gamma_{\alpha,n_k}) = N$$

が成り立つ. 以上より, 良い性質を満たす部分列に対して, (3.2) の良い評価を unconditional に得ることが出来る. これが, [12] に基づく手法である.

なお, 主定理である Theorem 2.1 は, 下極限をとる前の (2.2) の左辺を確率測度とみなし, その確率測度の極限測度を Lemma 3.1 等を用いて計算し, その極限測度の台を仮定 (v) を用いて計算することにより得られる. さらに, 適宜 α 点の部分列に関する議論に置き換えることにより, unconditional に Theorem 2.1 を α 点の部分列に対して証明することが可能である.

参考文献

[1] A. Balčiūnas, V. Franckevič, V. Garbaliauskienė, R. Macaitienė and A. Rimkevičienė, Universality of zeta-functions of cusp forms and non-trivial zeros of the Riemann zeta-function, Math. Model. Anal. **26**(1), 82–93, 2021.

[2] A. Balčiūnas, V. Garbaliauskienė, J. Karaliūnaitė, R. Macaitienė, J. Petuškinaitė and A. Rimkevičienė, Joint discrete approximation of a pair of analytic functions by periodic zeta-functions, Math. Model. Anal. **25**, no.1, 71–87, 2020.

[3] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, and R. Macaitienė, Zeros of the Riemann zeta-function and its universality, Acta Arith., **181**, no. 2, 127–142, 2017.

[4] R. Kačinskaitė, On discrete universality in the Selberg–Steuding class, Sib. Math. J. **63**(2), 277–285, 2022.

[5] A. Laurinčikas, Non-trivial zeros of the Riemann zeta-function and joint universality theorems, J. Math. Anal. Appl., **475**(1), 385–402, 2019.

[6] A. Laurinčkas, Zeros of the Riemann zeta-function in the discrete universality of the Hurwitz zeta-function, Stud. Sci. Math. Hung., **57**, no. 2, 147–164, 2020.

[7] A. Laurinčikas and J. Petuškinaitė. Universality of Dirichlet L-functions and non-trivial zeros of the Riemann zeta-function. Sb. Math., **210**(12), 1753–1773, 2019.

[8] K. Matsumoto, Value-distribution of zeta-functions, in: Lecture Notes in Math. 1434, Springer, 1990, 178–187.

[9] K. Matsumoto, A survey on the theory of universality for zeta and L-functions, Number theory, 95–144, Ser. Number Theory Appl, 11, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2015.

[10] H. L. Montgomery, Topics in Multiplicative Number Theory, Lecture Notes in Math. 227, Springer, Berlin, 1971.

[11] H. L. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, in: Analytic Number Theory (St. Louis, MO, 1972), H. G. Diamond (ed.), Proc. Sympos. Pure Math. **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973, 181–193.

[12] A. Sourmelidis, T. Srichan and J. Steuding, On the vertical distribution of values of L-functions in the Selberg class, Int. J. Number Theory, **18**, No. 02, 277–302, 2022.

[13] S. M. Voronin, Theorem on the universality of the Riemann zeta-function, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **39** (1975) 475–486 (in Russian); Math. USSR Izv. **9** (1975), 443–453.

$\sqrt{2}$ の 2 進単純正規性と Riemann ゼータ関数

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
金堂優哉 (Yuya KANADO) *

概要

ある実数が b 進で単純正規であるとは, その実数を b 進展開した際の各桁において, 0 から $b-1$ までの b 個の自然数が平均してそれぞれ $1/b$ の確率で出現するときに言う. 今回, $\sqrt{2}$ の 2 進展開に現れる 1 の個数と, Riemann ゼータ関数のある等差数列上の平均値に関する関係式を得た. これにより,

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{0<|n|\le 2^l}\zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right)\frac{(-1)^n}{n}=0$$

が成り立つことと $\sqrt{2}$ が 2 進で単純正規であることは同値となる. この研究は, 筑波大学の齋藤耕太氏との共同研究である.

1 記号

- $\mathbb{Z}$: 整数全体
- $\mathbb{Z}_{\ge x}$: 実数 x 以上の整数全体
- $\mathbb{N}:=\mathbb{Z}_{\ge 1}$
- $\lfloor x\rfloor$: 実数 x 以下の最大の整数
- $\Re(s)$: 複素数 s の実部
- $\zeta(s)$: Riemann ゼータ関数
- $\log_x y:=\log y/\log x$

2 導入

任意の $x\in\mathbb{R}$, $a\in\{0,1,\cdots b-1\}$ と実数 $l>0$ に対して,

$$A_b(l;a,x)=\#\{d\in\mathbb{Z}\colon 0\le d\le l,\ \lfloor b^d x\rfloor\in a+b\mathbb{Z}\}.$$

と定める. x を $x=\sum_{d=-m}^{\infty}c_d b^{-d}$ と b 進展開すると, $A_b(l;a,x)$ は $c_d=a$ となる $d\in[0,l]$ の個数を表す. x が 2 進で単純正規であるとは, すべての $a\in\{0,1,\cdots b-1\}$ に対して

$$\lim_{l\to\infty}A(l;a,x)/l=1/2$$

* E-mail: m21017a@math.nagoya-u.ac.jp

が成り立つときにいう.

1909 年, Borel はほとんどすべての実数が任意の b 進で単純正規であることを示した. 具体的な例を挙げると, 各桁に自然数を小さい順に並べた Champernowne 定数:

$$0.123456789101112131415\ldots$$

や, 素数を小さい順に並べた Copeland–Erdös 定数:

$$0.23571113171923293137\ldots$$

が 10 進で単純正規であることが知られている. このように, 人工的な数に関する単純正規性においては, 次の命題によって構成することができる. 証明は, [1, Section 4.2] を参照. ちなみに, この文献ではより深い主張となっている. ここで, 自然数 c と $b \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ に対して, $(c)_b$ で c の b 進表記を表すとする. 例えば, $19 = (19)_{10} = (10011)_2$ である.

命題 2.1. $b \geq 2$ を整数とする. 単調増加数列 $(c_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{N}$ は, 任意の $\theta > 1$ と十分大なる自然数 N に対して $c_N < N^\theta$ を満たすとする. このとき, 実数

$$0.(c_1)_b(c_2)_b(c_3)_b(c_4)_b\ldots$$

は b 進単純正規である.

この命題において, 例えば $c_j = j$, $b = 10$ とすれば, Champernowne 定数が 10 進で単純正規であることが分かる. また $c_j = j$, $b = 2$ とすれば

$$0.11011100101110111100 0\ldots$$

が 2 進で単純正規とも分かる. このように, 単純正規な実数はいくらでも構成できるのである. ならば考えることはもうない, ということは全くなく, 実は, **人工的でない**実数の単純正規性についてはひとつも分かっていない. 数学的に重要な無理数である π, e や $\log 2$, さらに代数的に手の届きそうな $\sqrt{2}$ に至るまで知られていない. そのような中, 今回, $\sqrt{2}$ が 2 進で単純正規であることと,

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sum_{0<|n|\leq 2^l} \zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right) \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

が成り立つことが同値であることを示した.

3 主定理

記法 3.1. f, g, h を実数値関数, 特に h は非負であるとする. $x \to \infty$ で $f(x) = g(x) + o(h(x))$ であるとは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して x が十分大きければ $|f(x) - g(x)| \leq h(x)\epsilon$ が成り立つときにいう. ある定数 $C > 0$ が存在して, 十分大なる x に対して $|f(x) - g(x)| \leq Ch(x)$ を満たすとき, $f(x) = g(x) + O(h(x))$ とかく. また, $f(x) = O(h(x))$ を $f(x) \ll h(x)$ と表す. さらに, $h(x) \ll f(x) \ll h(x)$ が成り立つとき, $f(x) \asymp h(x)$ とかく.

複素数 s と複素数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ に対して, 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ を Dirichlet 級数, 係数の列 (a_n) を Dirichlet 係数と呼ぶ. 任意の Dirichlet 級数は, ある $\sigma \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ が存在し, $\Re(s) > \sigma$ で (絶対) 収束, かつ $\Re(s) < \sigma$ で (絶対) 収束しないことが知られている. このときの軸 $\Re(s) = \sigma$ を (絶対) 収束軸, 領域 $\Re(s) > \sigma$ を (絶対) 収束領域という. 二つの Dirichlet 級数 $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}, \beta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n)n^{-s}$ の積もまた Dirichlet 級数となる. このときの $\alpha(s)\beta(s)$ の Dirichlet 係数は

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

であり, $f * g$ は f と g の Dirichlet 積と呼ばれる. 主定理を得るうえで重要なのは, 次の Perron の公式に Dirichlet 積を持ち込むことである. 証明は [4, Theorem 5.2, Corollary 5.3] を参照.

補題 3.2 (Perron's formula)**.** *Dirichlet* 級数 $\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ の絶対収束軸を σ_a とおく. このとき, $c > \max(0, \sigma_a)$, $x > 0$, $T > 0$ に関して一様に

$$\sum_{n\leq x}{}' a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \alpha(s)\frac{x^s}{s}ds + R$$

が成り立つ. ここで, R は

$$R \ll \sum_{\substack{x/2<n<2x \\ n\neq x}} |a_n| \min\left(\frac{x}{T|x-n|}, 1\right) + \frac{(4x)^c}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n^c},$$

を満たすものである. また $\sum'_{n\leq x}$ は, x が整数のときのみ $n = x$ の項を $1/2$ 倍して足すことを表す.

Perron の公式は, 左辺が数論的な形で右辺が解析的な形をしており, 数列の部分和の漸近を求める際などに使われる. x を 2 以上の自然数とし, この補題に上の Dirichlet 級数 $\alpha(s)\beta(s)$ を適用すると,

$$\sum_{n\leq x}(f * g)(n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \alpha(s)\beta(s)\frac{x^s}{s}ds + (\text{errors}) \tag{3.1}$$

となる. 但し, R や, $\sum'_{n\leq x}$ を $\sum_{n\leq x}$ に変換するときに現れる $\frac{1}{2}(f * g)(x)$ は (errors) とした. (3.1) の左辺は

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x}(f * g)(n) &= \sum_{n\leq x}\sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{1\leq d\leq x} f(d) \sum_{1\leq m\leq x/d} g(m)\end{aligned}$$

と変形できる. 特に $f(n)$ を, n が 2 の偶数べきでかけるとき 1, それ以外で 0 をとるとすると, $x = 2^{2l+1}$ として

$$\begin{aligned}&= \sum_{1\leq 2^{2d}\leq 2^{2l+1}} \sum_{1\leq m\leq 2^{2l+1-2d}} g(m) \\ &= \sum_{0\leq d\leq l} \sum_{1\leq m\leq 2^{2l+1-2d}} g(m)\end{aligned}$$

$$= \sum_{0\le d\le l} \sum_{1\le m\le 2^{2d+1}} g(m)$$

となる. 従って, $\sum_{1\le m\le 2^{2d+1}} g(m)$ が d に関して 0 か 1 のみとるように g を調整できれば, 右辺の式全体は $\sum_{1\le m\le 2^{2d+1}} g(m)$ が 1 をとる d の個数を表すことになる. そこで, $g(m)$ を, m が平方数のときに $(-1)^{\sqrt{m}-1}$, それ以外で 0 をとるように定めると,

$$= \sum_{0\le d\le l} \sum_{1\le n^2\le 2^{2d+1}} (-1)^{n-1}$$
$$= \sum_{0\le d\le l} \sum_{1\le n\le 2^d\sqrt{2}} (-1)^{n-1}$$

と変形できる. すると, この右辺の式全体は $\sum_{1\le n\le 2^d\sqrt{2}}(-1)^{n-1} = 1$ となる $d \in [0, l]$ の個数を表している. これにより, (3.1) の左辺は

$$= \sum_{\substack{0\le d\le l \\ \lfloor 2^d\sqrt{2}\rfloor \in 1+2\mathbb{Z}}} 1 = A_2(l; 1, \sqrt{2})$$

となり, $A_2(l; 1, \sqrt{2})$ を解析的に評価することができる. まとめれば,

$$A_2(l; 1, \sqrt{2}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} \alpha(s)\beta(s)\frac{2^{(2l+1)s}}{s}ds + (\text{errors}).$$

さらに, f, g の定義により, Dirichlet 級数 α, β はそれぞれ

$$\alpha(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2ns}} = \frac{1}{1-2^{-2s}},$$
$$\beta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{2s}} = (1-2^{1-2s})\zeta(2s)$$

であるから, さらに

$$A_2(l; 1, \sqrt{2}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{1-2^{1-2s}}{1-2^{-2s}}\zeta(2s)\frac{2^{(2l+1)s}}{s}ds + (\text{errors})$$
$$=: \frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\Phi_l(s)ds + (\text{errors}).$$

これは, $\sqrt{2}$ の 2 進展開に現れる 1 の個数が Riemann ゼータ関数の重み付き積分に漸近することを示している. 次に, この右辺が Riemann ゼータ関数のある等差数列上の平均値に漸近することについて記述する. $\sigma = -1/4$ とおく. 右辺の積分路を

$$c + iT \to \sigma + iT \to \sigma - iT \to c - iT$$

に変換する. 領域 $(\sigma, c) \times i\mathbb{R}$ 内で, $\Phi_l(s)$ は

$$s = s_n := \frac{n\pi i}{\log 2} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

に極を持ち, それ以外の特異点を持たない. またその留数は

$$\operatorname*{Res}_{s_n=0}\Phi_l(s)=\operatorname*{Res}_{s_n=0}\left(\frac{1-2^{1-2s}}{1-2^{-2s}}\zeta(2s)\frac{2^{(2l+1)s}}{s}\right)=\frac{l}{2}+O(1),$$
$$\operatorname*{Res}_{s_n\neq 0}\Phi_l(s)=\zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right)\frac{(-1)^{n-1}}{2n\pi i}$$

であるから, 留数定理より

$$A_2(l;1,\sqrt{2})=\frac{l}{2}-\frac{1}{2\pi i}\sum_{0<|n|\leq\frac{\log 2}{\pi}T}\zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right)\frac{(-1)^n}{n}$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{c+iT}^{\sigma+iT}+\int_{\sigma+iT}^{\sigma-iT}+\int_{\sigma-iT}^{c-iT}\right)\Phi_l(s)ds+(\text{errors})$$

と変形できる. 右辺の積分について,

$$\left(\int_{c+iT}^{\sigma+iT}+\int_{\sigma-iT}^{c-iT}\right)\Phi_l(s)ds \tag{3.2}$$

においては, 次の Riemann ゼータ関数の評価を使うことで, 主要項に影響を与えないことが示せる. 証明は [3, Theorem 1.9] を参照.

補題 3.3. $t\geq t_0>0$ と $\sigma\in\mathbb{R}$ に関して一様に

$$\zeta(\sigma+it)\ll\begin{cases}1 & (\sigma\geq 2),\\ \log t & (1\leq\sigma\leq 2),\\ t^{\frac{1}{2}(1-\sigma)}\log t & (0\leq\sigma\leq 1),\\ t^{\frac{1}{2}-\sigma}\log t & (\sigma\leq 0).\end{cases}$$

また, 積分

$$\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\Phi_l(s)ds$$

については, Riemann ゼータ関数の関数等式

$$\zeta(s)=2^{s-1}\pi^s\frac{\sec(\pi s/2)}{\Gamma(s)}\zeta(1-s)$$

を $\Phi_l(s)$ に適用して ζ の実部を 1 より大きくしたのち, 本質的には, 次の stationary phase method などの回転を捉える手法を用いる. 補題 3.4 の証明は [8, Lemma 4.6] 参照.

補題 3.4 (the stationary phase method)**.** 閉区間 $[a,b]$ で定義された実関数 $F(x)$ は 3 回微分可能であるとし, $c\in[a,b]$ を $F'(c)=0$ となる点とする. また, ある $\lambda_2,\lambda_3>0$ と $A>0$ が存在して, 任意の $x\in[a,b]$ に対して

$$0<\lambda_2\leq -F''(x)<A\lambda_2 \tag{3.3}$$
$$|F'''(x)|<A\lambda_3. \tag{3.4}$$

を満たすとする. このとき,

$$\int_a^b e^{iF(x)}dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}\frac{e^{-\pi i/4+iF(c)}}{|F''(c)|^{1/2}} + O(\lambda_2^{-\frac{4}{5}}\lambda_3^{\frac{1}{5}}) + O\left(\min\left(|F'(a)|^{-1}, \lambda_2^{-\frac{1}{2}}\right)\right) + O\left(\min\left(|F'(b)|^{-1}, \lambda_2^{-\frac{1}{2}}\right)\right)$$

が成り立つ.

この補題を適用すると,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-iT}^{\sigma+iT}\Phi_l(s)ds = \frac{l}{2} + A_2(l;1,\sqrt{2}) - A_2(2l;1,\sqrt{2}) + (\text{errors})$$

を得ることができる. 以上をまとめ,

$$A_2(2l;1,\sqrt{2}) = l - \frac{1}{2\pi i}\sum_{0<|n|\le\frac{\log 2}{\pi}T}\zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right)\frac{(-1)^n}{n} + (\text{errors}). \tag{3.5}$$

但し, 精密な議論を行うと, Perron の公式での誤差項 R と (3.2) を評価するうえで, T は $T \asymp x\log x \asymp l2^{2l}$ を満たす必要が出てくる. そこで, l' を十分大なる実数とし, $2l \le l' - \log_2 l' < 2l+2$ を満たす $l \in \mathbb{N}$ をとる. $T = \frac{\pi}{\log 2}2^{l'}$ とすれば, $T \asymp l2^l$ を満たしている. また $l' = 2l + O(\log l)$ だから, (3.5) と合わせて

$$\begin{aligned} A_2(l';1,\sqrt{2}) &= A_2(2l;1,\sqrt{2}) + O(\log l) \\ &= \frac{l'}{2} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{0<|n|\le 2^{l'}}\zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right)\frac{(-1)^n}{n} + (\text{errors}). \end{aligned}$$

以上により, 次の主定理が得られる.

定理 3.5. 実数 $l > 0$ に対して

$$A_2(l;1,\sqrt{2}) = \frac{l}{2} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{0<|n|\le 2^l}\zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right)\frac{(-1)^n}{n} + o(l) \quad (l\to\infty).$$

特に, $\sqrt{2}$ が 2 進で単純正規であることと

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\sum_{0<|n|\le 2^l}\zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right)\frac{(-1)^n}{n} = 0 \tag{3.6}$$

が成り立つことは同値である.

この定理により, Riemann ゼータ関数の等差数列上の平均値が調べられれば, $\sqrt{2}$ の 2 進展開に出現する 1 の割合が分かることになる. Riemann ゼータ関数の等差数列上の平均値の漸近に関する研究は, Steuding と Wegert の論文 [7, Theorem 1.1] から始まった. 彼らは, $\sum_{0\le n<M}\zeta(s_0+idn)$ の漸近を, $0 < \Re(s_0) < 1, d = 2\pi/\log k$ $(k \in \mathbb{Z}_{\ge 2})$ という条件下で求めた. また, Özbek と Steuding は, [5, 6] にて次のようなより一般の d で漸近式を得ている:

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sum_{0\le n<M}\zeta(s_0+idn) = \begin{cases}(1-k^{-s_0})^{-1} & (d = \frac{2\pi r}{\log k},\ r\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{Z}_{\ge 2}),\\ 1 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{3.7}$$

$\Re(s_0) = 0$ の評価についていえば, 本論文で

$$\sum_{0<|n|\leq 2^l} \zeta\left(\frac{2n\pi i}{\log 2}\right)\frac{1}{n} \ll 1$$

であることが分かった. この形は (3.6) に似ているように思えるが, (3.6) は依然として示せていない. とはいえ, 上述した通り, Borel は 1909 年にほとんどすべての実数は単純正規であることを証明しており, $\sqrt{2}$ も単純正規であろうと考えられる. 従って, (3.6) も真と予想するのが最もらしい.

参考文献

[1] Yann Bugeaud, Distribution modulo one and diophantine approximation, Cambridge University Press 2012.

[2] É. M. Borel, Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo vol.27, 1909, 247–271.

[3] A. Ivić, The Riemann zeta-function. Theory and applications, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2003. xxii+517 pp.

[4] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, Multiplicative Number Theory I. Classical Theory, Cambridge University Press 2007.

[5] S. S. Özbek and J. Steuding, The values of the Riemann zeta-function on arithmetic progressions, Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory, Vilnius Univ. Leidykla, Vilnius, 2017, 149–164.

[6] S. S. Özbek and J. Steuding, The values of the Riemann zeta-function on generalized arithmetic progressions, Arch. Math. (Basel) vol.112 (1), 2019, 53–59.

[7] J. Steuding and E. Wegert, The Riemann zeta function on arithmetic progressions, Exp. Math. vol.21 (3), 2012, 235–240.

[8] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-function, Oxford Science Publication 1986.

On some analytic properties of a function associated with the Selberg class satisfying certain special conditions

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
岩田　英人 (Hideto IWATA) *

Abstract

In 2001, M.Rekoś described the analytic behavior of a function connected with the Euler totient function for the upper half-plane $\mathbb{H}$. In this paper, for Im $z > 0$ we describe the analytic behavior of the generalized function $f(z, F)$, where the function F belongs to a subclass of the Selberg class which has a polynomial Euler product expressions and satisfies some special conditions.

1 Introduction

1.1 Previous research for the Euler totient function

For $n \in \mathbb{N}$, let $\varphi(n)$ be the number of positive integers not exceeding n which are relatively prime to n. The function $\varphi(n)$ is called the *Euler totient function* and appears in various fields e.g. elementary number theory, group theory. In analytic number theory, studying the arithmetic mean of $\varphi(n)$ is a classical problem. Let

$$E(x) = \sum_{n \leq x} \varphi(n) - \frac{3}{\pi^2} x^2 \tag{1.1.1}$$

be the associated error term. The error term (1.1.1) has been studied for a long time. P. G. Dirichlet proved the estimate

$$E(x) \ll x^{1+\epsilon} \tag{1.1.2}$$

for every positive ϵ. Here, we use the notation $f(x) \ll g(x)$, if there is a constant $C > 0$ such that $|f(x)| \leq Cg(x)$ for all x in the appropriate range. The estimate (1.1.2) was improved by A. Walfisz to

$$E(x) \ll x(\log x)^{\frac{2}{3}}(\log\log x)^{\frac{4}{3}} \tag{1.1.3}$$

(see [15]). The estimate (1.1.3) is the best known result. H.L.Montgomary proved the best Ω-result for (1.1.1)

$$E(x) = \Omega_{\pm}(x\sqrt{\log\log x}) \tag{1.1.4}$$

(see [10]). Here, we use the notation $f(x) = \Omega_{+}(g(x))$ and $f(x) = \Omega_{-}(g(x))$ i.e. the inequalities $f(x) > Cg(x)$ and $f(x) < -Cg(x)$ hold respectively for some arbitrarily large values of x and a suitable positive constant C. Also, we use the notation $f(x) = \Omega_{\pm}(g(x))$ i.e.both $f(x) = \Omega_{+}(g(x))$ and $f(x) = \Omega_{-}(g(x))$ hold.J.Kaczorowski and K.Wiertelak also studied (1.1.1) by

*E-mail:d18001q@math.nagoya-u.ac.jp

splitting into two summands. J.Kaczorowski and K.Wiertelak considered there the following Volterra integral equation of second type for (1.1.1) (see [6]) :

$$F(x) - \int_0^\infty K(x,t)F(t)dt = E(x) \quad (x \geq 1), \tag{1.1.5}$$

where $F(x)$ is the unknown function and the kernel $K(x,t)$ is defined as follows:

$$K(x,t) = \begin{cases} 1/t & (0 < t \leq x), \\ 0 & (1 \leq x < t). \end{cases} \tag{1.1.6}$$

The equation (1.1.5) can be solved explicitly. Let us put

$$f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \left\{ \frac{x}{n} \right\} \tag{1.1.7}$$

for every $x \geq 0$, where $\mu(n)$ denotes the *Möbius function* i.e.

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & (n = 1), \\ (-1)^r & (n = p_1 p_2 \cdots p_r, p_i \, (1 \leq i \leq r) : \text{prime}), \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

and $\{x\} = x - [x]$ is the fractional part of a real number x.

Theorem 1.1.1 (Theorem 1.1 in [6]). *The general solution of* (1.1.6) *is*

$$F(x) = (f(x) + A)x, \tag{1.1.8}$$

where A is an arbitrary constant.

In [6], $F(x) = xf(x)$ is claimed to be the unique solution of the integral equation (1.1.5), but this uniqueness does not hold even assuming the initial value condition at $x = 0$. Probably, the term Ax is missing to give the general solution (see [2]). For $x \geq 0$ let us write

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \left\{ \frac{x}{n} \right\}^2. \tag{1.1.9}$$

Theorem 1.1.2 (Theorem 1.2 in [6]). *For $x \geq 1$ we have*

$$E(x) = xf(x) + \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}.$$

According to Theorem1.1.2, for $x \geq 1$ we can split $E(x)$ as follows :

$$E(x) = E^{\mathrm{AR}}(x) + E^{\mathrm{AN}}(x), \tag{1.1.10}$$

where

$$E^{\mathrm{AR}}(x) = xf(x), \quad \text{and} \quad E^{\mathrm{AN}}(x) = \frac{1}{2}g(x) + \frac{1}{2}$$

with $f(x)$ and $g(x)$ given by (1.1.7) and (1.1.9) respectively. We call $E^{\mathrm{AR}}(x)$ and $E^{\mathrm{AN}}(x)$ the *arithmetic* and the *analytic part* of $E(x)$ respectively. J.Kaczorowski and K.Wiertelak proved the Ω-estimates for $E^{\mathrm{AR}}(x)$ and $E^{\mathrm{AN}}(x)$ (see [6]).

1.2 The associated he Euler totient function

J.Kaczorowski defined the associated Euler totient function for a class of generalized L-functions including the Riemann zeta function, Dirichlet L-functions and obtained an asymptotic formula (see [8]) : By a polynomial Euler product expressions we mean a function $F(s)$ of a complex variable $s = \sigma + it$ which for $\sigma > 1$ is defined by a Euler product expressions of the form

$$F(s) = \prod_p F_p(s) = \prod_p \prod_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{\alpha_j(p)}{p^s}\right)^{-1}, \tag{1.2.1}$$

where p runs over primes and $|\alpha_j(p)| \leq 1$ for all p and $1 \leq j \leq d$. We take the smallest $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ such that there is at least one prime number p_0 satisfying

$$\prod_{j=1}^{d} \alpha_j(p_0) \neq 0,$$

where d is called the *Euler degree* of F. Note that the L-functions from number theory including the Riemann zeta function $\zeta(s)$ and the Dirichlet L-functions $L(s, \chi)$ and Dedekind zeta and Hecke L-functions of algebraic number fields, also the (normalized) L-functions of holomorphic modular forms and, conjecturally, many other L-functions are polynomial Euler products expressions. For F in (1.2.1) we define *the associated Euler totient function* as follows :

$$\varphi(n, F) = n \prod_{p|n} F_p(1)^{-1} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{1.2.2}$$

Let

$$\gamma(p) = p\left(1 - \frac{1}{F_p(1)}\right), \tag{1.2.3}$$

$$C(F) = \frac{1}{2} \prod_p \left(1 - \frac{\gamma(p)}{p^2}\right), \tag{1.2.4}$$

and

$$\alpha(n) = \mu(n) \prod_{p|n} \gamma(p). \tag{1.2.5}$$

By (1.2.1) and (1.2.2), we see that $\varphi(n)$ corresponds to the case where F is $\zeta(s)$.

Theorem 1.2.1 (Theorem 1.1 in [8])**.** *For a polynomial Euler product F of degree d and $x \geq 1$ we have*

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n, F) = C(F)x^2 + O(x(\log 2x)^d). \tag{1.2.6}$$

Remark 1.2.1. Let us observe that $\alpha(n) \ll n^\epsilon$ for every positive ϵ. Hence the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n^s} \tag{1.2.7}$$

absolutely converges for $\sigma > 1$ (see p33 in [8]). Also, $\alpha(n)$ is multiplicative by (1.2.5). Therefore,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n^2} = 2C(F). \tag{1.2.8}$$

We now provide the *Selberg class* $\mathcal{S}$ defined as follows (see [11]) : $f \in \mathcal{S}$ if

(i) (*ordinary Dirichlet series*) $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) n^{-s}$, converges absolutely for $\sigma > 1$;

(ii) (*analytic continuation*) there exists $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ such that $(s-1)^m f(s)$ is entire of finite order;

(iii) (*functional equation*) $f(s)$ satisfies a functional equation of the form $\Phi(s) = \omega\overline{\Phi(1-\overline{s})}$, where

$$\Phi(s) = Q^s \prod_{j=1}^{r} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) f(s) = \gamma(s) f(s), \tag{1.2.9}$$

say, with $r \geq 0, Q > 0, \lambda_j > 0$, Re $\mu_j \geq 0$ and $|\omega| = 1$;

(iv) (*Ramanujan conjecture*) $a_f(n) \ll n^{\epsilon}$ holds for any $\epsilon > 0$;

(v) (*Euler product*) $f(s) = \prod_p \exp\left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{b_f(p^\ell)}{p^{\ell s}}\right)$ for $\sigma > 1$, where $b_f(n) = 0$ unless $n = p^m$ with $m \geq 1$, and $b_f(n) \ll n^{\vartheta}$ for some $\vartheta < \frac{1}{2}$.

The empty products are hereafter to be equal to 1.

1.3 M.Rekoś's results

M.Rekoś described the analytic property of some function connected with the Euler totient function (see [12]) : We describe basic analytic properties of the function $f(z)$ defined for Im $z > 0$ as follows :

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{\rho \\ 0<\mathrm{Im}\,\rho<T_n}} \frac{e^{\rho z}\zeta(\rho - 1)}{\zeta'(\rho)}, \tag{1.3.1}$$

where $\{T_n\}$ denotes a real sequence yielding appropriate groupings of the zeros, and the summation is over non-trivial zeros of $\zeta(s)$ with positive imaginary part. For simplicity we assume here that all the zeros of $\zeta(s)$ are simple. M.Rekoś showed the holomorphy of $f(z)$ for Im $z > 0$, meromorphic continuation to the whole z-plane with its principal part, and a functional relation containing its reflection property. The functional equation for $f(z)$ connects the values of the function f at the points z and $\bar{z}$. Define a smooth curve $\tau : [0,1] \ni t \mapsto \tau(t) \in \mathbb{C}$ such that $\tau(0) = -1/4$, $\tau(1) = 5/2$ and $0 < \mathrm{Im}\,\tau(t) < 1$ for $t \in (0,1)$, and define it by $\ell(-1/4, 5/2)$. The analytic property of $f(z)$ is described by the following theorems :

Theorem 1.3.1 (Theorem 1.in [12])**.** *The function $f(z)$ is holomorphic on $\mathbb{H}$ and for $z \in \mathbb{H}$ we have*

$$2\pi i f(z) = f_1(z) + f_2(z) - e^{5z/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^{5/2}(z - \log n)}, \tag{1.3.2}$$

where the functions

$$f_1(z) = \int_{-1/4+i\infty}^{-1/4} \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} e^{sz} ds, \tag{1.3.3}$$

$$f_2(z) = \int_{\ell(-1/4,5/2)} \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} e^{sz} ds \tag{1.3.4}$$

are holomorphic on $\mathbb{H}$ and on the whole z-plane respectively, and the last term is a meromorphic function on the whole z-plane, whose poles are at $z = \log n$ of the second order with the residues $-\varphi(n)/2\pi i$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Here $\varphi(n)$ denotes Euler's totient function.

Theorem 1.3.2 (Theorem 2.in [12]). *The function $f(z)$ can be continued analytically to a meromorphic function on the whole z-plane, which satisfies the functional equation*

$$f(z)+\overline{f(\bar{z})}=B(z) \tag{1.3.5}$$

and

$$B(z)=-\frac{6}{\pi^2}e^{2z}+\frac{1}{2\pi^2}\sum_{k,n=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{n^2k}\left[\frac{1}{(nke^z-1)^2}+\frac{2}{nke^z-1}+\frac{1}{(nke^z+1)^2}-\frac{2}{nke^z+1}\right], \tag{1.3.6}$$

where $B(z)$ is a meromorphic function on the whole z-plane with the poles of the second order at $z=-\log nk$, $n,k=1,2,\dots$ and $\mu(k)$ is the Möbius function.

2 The extension of $f(z)$ to the subclass of $\mathcal{S}$

2.1 The extension of $f(z)$ to the subclass of $\mathcal{S}$

If a functions $F\in\mathcal{S}$ has a polynomial Euler product expressions (1.2.1), the subclass of $\mathcal{S}$ of the functions with polynomial Euler product expressions is denoted by $\mathcal{S}^{\rm poly}$. Establishing the results which extend Theorem1.3.1 and 1.3.2 to the function $F\in\mathcal{S}^{\rm poly}$ are the main aim of the present paper. Let $\{\rho\}$ denote the non-trivial zeros of F with positive imaginary parts, and assume that each ρ is simple. Moreover, let $\{T_n\}$ denote a real sequence yielding appropriate groupings of the zeros, where its precise definition is to be given by (2.2.1) below. For $\mathrm{Im}\ z>0$ and $F\in\mathcal{S}^{\rm poly}$, we consider the function defined by

$$f(z,F)=\lim_{n\to\infty}\sum_{\substack{\rho\\0<\mathrm{Im}\,\rho<T_n}}\frac{e^{\rho z}\zeta(\rho-1)}{F'(\rho)}. \tag{2.1.1}$$

If there are trivial zeros of $F(s)$ on the imaginary axis in $\mathbb{H}$, they are to be incorporated in the summation. The reason why $\zeta(s)$ appears in the numerator on the right hand side is that the Barnes type integral (5.1.3) below for the Whittaker function can then be applied under the hypothesis $(r,\lambda_j)=(1,1)$ for all j in (1.2.9) (see Lemma 5.1.1).

Fact 2.1.1. *The limit in* (2.1.1) *exists for all $z\in\mathbb{H}$.*

2.2 Proof of Fact 2.1.1

We prove Fact 2.1.1, for which the following Lemma is used.

Lemma 2.2.1 (Lemma 4.in [14]). *Let $F\in\mathcal{S}$ and let T be sufficiently large, and fix $H=D\log\log T$ with a large constant $D>0$. We take any subinterval $[n,n+1]$ with n chosen such that $n\in\mathbb{Z}_{>0}\cap[T-H,T+H]$. Then, there are the lines $t=t_0$ such that*

$$|F(\sigma+it_0)|^{-1}=O(\exp(C(\log T)^2)), \tag{2.2.1}$$

uniformly in $\sigma\geq-2$, where C is a positive constant.

Let T be sufficiently large. We fix $H=D\log\log T$, where D is a large positive constant. We take any subinterval $[n,n+1]$, where n is a positive integer in $[T-H,T+H]$. Then, by Lemma 2.2.1 there are the lines $t=T_n$ such that

$$|F(\sigma+iT_n)|^{-1}=O(\exp(C_1(\log T)^2)) \tag{2.2.2}$$

uniformly for $\sigma \geq -2$, where C_1 is a positive constant. Since T_n is contained in the interval $[T-H, T+H]$, we can see that $T_n \sim T$ as n tends to infinity. Let $\alpha = \frac{1}{2}\min\{\mathrm{Im}\,\rho > 0\}$ and $\mathscr{L}$ denote the contour consisting of the line segments

$$[b, b+iT_n],\ [b+iT_n, a+iT_n],\ [a+iT_n, a],\ \left[a, \frac{a+b}{2}+i\alpha\right],\ \left[\frac{a+b}{2}+i\alpha, b\right],$$

where $\max\left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\max\{\mathrm{Re}\,\rho < 0\}\right\} < a < 0, b > 5/2$.We assume that the real part of $s = a+it$ $(t \in \mathbb{R})$ does not coincide the poles of $\Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)$, where $\Gamma(s)$ is the Γ-function. We consider the following contour integral round $\mathscr{L}$:

$$\int_{\mathscr{L}} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{sz} ds. \tag{2.2.3}$$

Since we assume the order of ρ is simple, we have by residue theorem

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{L}} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{sz} ds &= \int_{a+iT_n}^{a} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds + \int_{L} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds \\ &+ \int_{b}^{b+iT_n} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds + \int_{b+iT_n}^{a+iT_n} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds \\ &= 2\pi i \sum_{\substack{\rho \\ 0<\mathrm{Im}\,\rho<T_n}} \frac{e^{\rho z}\zeta(\rho-1)}{F'(\rho)}, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

where the path L above consists of joining the two line segments $\left[a, \frac{a+b}{2}+i\alpha\right]$ and $\left[\frac{a+b}{2}+i\alpha, b\right]$. We now estimate the integral along the line segment $[b+iT_n, a+iT_n]$. For $a \leq \sigma \leq b$, we have by (2.2.2),

$$|F(\sigma+iT_n)|^{-1} = O(\exp(C(\log T)^2)),$$

which, with the vertical estimate for $\zeta(s-1)$, shows with $z = x+iy$ that

$$\left|\int_{a+iT_n}^{b+iT_n} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds\right| \ll (b-a)T_n^c \exp\{C(\log T)^2 - yT_n + |x|(|a|+|b|)\} \tag{2.2.5}$$

for $T, T_n \geq 1$ with a constant $c = c(a,b) > 0$, where the last bound tends to zero as $n \to \infty$. By Theorem 3.1.1 below, the convergence of the other integrals in (2.2.4) are ensured (see (3.1.5)-(3.1.7)). The limit in (2.1.1) therefore exists. □

3 Main Results

3.1 Main Results

Letting $n \to \infty$, we have

$$\int_{a+i\infty}^{a} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds + \int_{L} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds + \int_{b}^{b+i\infty} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{zs} ds = 2\pi i f(z, F), \tag{3.1.1}$$

with $f(z,F)$ in (2.1.1). To evaluate the integral along the vertical line with $s = b+it$ $(t \geq 0)$, we prepare the Dirichlet series expansion of $\zeta(s-1)/F(s)$ for $\sigma > 2$.

Definition 3.1.1 (p.34 in [8])**.** For $\sigma > 1$ and $F \in \mathcal{S}^{\mathrm{poly}}$, we define the Dirichlet coefficients μ_F as follows :

$$\frac{1}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_F(n)}{n^s} = \prod_{p} \prod_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{\alpha_j(p)}{p^s}\right). \tag{3.1.2}$$

Remark 3.1.1 (p.34 in [8]). By (3.1.2), $|\mu_F(n)| \le \tau_d(n)$, where $\tau_d(n)$ is the divisor function of order d, so that $\zeta^d(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_d(n)/n^s$ for $\sigma > 1$. In particular $\tau_1(n) = 1$ for all n.

Using (3.1.2) in $\sigma > 2$, we obtain

$$\frac{\zeta(s-1)}{F(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}, \tag{3.1.3}$$

where

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu_F(d) \frac{n}{d}. \tag{3.1.4}$$

Theorem 3.1.1 (Theorem4.1 in [3]). *Let* $\max\left\{-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\max\{Re\,\rho < 0\}\right\} < a < 0, b > 5/2$. *Then, the function* (2.1.1) *is holomorphic on* $\mathbb{H}$, *and for* $z \in \mathbb{H}$ *the formula*

$$2\pi i f(z,F) = f_1(z,F) + f_2(z,F) - e^{bz} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^b (z - \log n)}, \tag{3.1.5}$$

is valid, where the functions

$$f_1(z,F) = \int_{a+i\infty}^{a} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{sz} ds, \tag{3.1.6}$$

$$f_2(z,F) = \int_{L} \frac{\zeta(s-1)}{F(s)} e^{sz} ds \tag{3.1.7}$$

are holomorphic on $\mathbb{H}$ *and on the whole* z*-plane, and the last term on the right is a meromorphic function on the whole* z*-plane with the poles at* $z = \log n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

We need not use the condition of a which does not coincide the poles of $\Gamma(s+\mu)\Gamma(s-\mu)$ in proving of Theorem 3.1.1.

Theorem 3.1.2 (Theorem4.2 in [3]). *For any* $F \in \mathcal{S}^{poly}$ *with* $(r, \lambda_j) = (1, 1)$ *for all* j *in* (1.2.9) *and* $0 \le \mu < 1$, *the function* (2.1.1) *has a meromorphic continuation to* $y > -\pi$.

The L-functions associated with holomorphic cusp forms and Dedekind zeta functions of the imaginary quadratic fields are the examples of F considered in Theorem 3.1.2. Letting

$$\mathbb{H}^- = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z < 0\}, \tag{3.1.8}$$

we next study the function, for $z \in \mathbb{H}^-$,

$$f^-(z,F) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\substack{\rho \\ -T_n < \mathrm{Im}\,\rho < 0}} \frac{e^{\rho z}\zeta(\rho - 1)}{F'(\rho)}. \tag{3.1.9}$$

If there are trivial zeros of $F(s)$ on the imaginary axis in $\mathbb{H}^-$, they are incorporated in the summation. The existence of the limit on the right hand side of (3.1.9) is proved similarly to Fact 2.1.1.

Corollary 3.1.3 (Corollary4.3 in [3]). *For any* $F \in \mathcal{S}^{poly}$ *satisfying the same conditions as in Theorem 3.1.2, the function* (3.1.9) *has a meromorphic continuation to* $y < \pi$.

Theorem 3.1.4 (Theorem4.4 in [3]). *For any $F \in \mathcal{S}^{poly}$ satisfying the same conditions as in Theorem 3.1.2, the function* (2.1.1) *can be continued analytically to the whole z- plane. In addition to the condition as in Theorem 3.1.2, we assume that the Dirichlet series coefficients $a_F(n)$ of $F \in \mathcal{S}^{poly}$ is real-valued for all n. Then, the function* (2.1.1) *satisfies the functional equation*

$$f(z,F) + \overline{f(\overline{z},F)} = B(z,F), \tag{3.1.10}$$

where

$$B(z,F) = \frac{1}{2\pi i}(f_1(z,F) + f_1^-(z,F)) - \frac{e^{2z}}{F(2)} \tag{3.1.11}$$

for all $z \in \mathbb{C}$. Also, the function $f_1^-(z,F)$ is holomorphic on $\mathbb{H}^-$.

4 Motivation

Now, we mention the motivation for the main theorems in section 3. The author considered the Volterra integral equation for a remainder term in an asymptotic formula of an arithmetic function which satisfies the special conditions and the associated Euler totient function similar to [6].The remainder term can be split into the arithmetic part which is a solution of the Volterra integral equation and the analytic part which is not the solution of it. It seems that J.Kaczorowski and K.Wiertelak used the functional equation (1.3.5) in Theorem1.3.2 in the proof of the Ω-estimate for $E^{\mathrm{AN}}(x)$ in (1.1.10). It is not mentioned in [6] how use the functional equation (1.3.5) and it follows by repeating all steps in the proof of Theorem 1.1 in [7]. The author considers how to prove the Ω-estimate on an analytic part for a remainder term in the asymptotic formula of the associated Euler totient function using the functional equation (3.1.10) similar to [6] which will be necessary mainly. The author could prove the functional equation (3.1.10) which will be necessary, but it does not hold for all function $F \in \mathcal{S}^{\mathrm{poly}}$. Therefore, the author presents the results as Theorem 3.1.1, 3.1.2, 3.1.4 and Corollary 3.1.3 for the function F which satisfies the conditions already explained. More details are written in [4].

5 Some auxiliary results on the Whittaker function

5.1 The definition for the Whittaker function and the integral expression

We introduce the Whittaker function $W_{\kappa,\mu}(z)$ (via the confluent hypergeometric function $\Psi(\alpha,\gamma;z)$ below), which is necessary to prove our main theorems, and then prepare some auxiliary results, i.e.its integral expression and asymptotic expansions.

Definition 5.1.1 (The confluent hypergeometric function of the second kind ([1])). Let $\Psi(\alpha,\gamma;z)$ be the *confluent hypergeometric function of the second kind* defined by

$$\Psi(\alpha,\gamma;z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)(e^{2\pi i\alpha}-1)} \int_{\infty}^{(0+)} e^{-zw} w^{\alpha-1}(1+w)^{\gamma-\alpha-1} dw \tag{5.1.1}$$

for any $(\alpha,\gamma) \in \mathbb{C}^2$ and for $|\arg z| < \pi$. Here the path of integration is a contour in the w-plane which consists of the upper real axis from $e^{0\pi i}\infty$ to $e^{0\pi i}\delta$ with a small $\delta > 0$, the circle with the center $w = 0$ and the radius δ through which $\arg w$ varies from 0 to 2π, and the lower real axis from $e^{2\pi i}\delta$ to $e^{2\pi i}\infty$.

Definition 5.1.2 (The Whittaker function ([9])). The *Whittaker function* $W_{\kappa,\mu}(z)$, which has large applicability, e.g. in number theory and physics, is defined by

$$W_{\kappa,\mu}(z) = z^{\mu+1/2} e^{-z/2} \Psi\left(\frac{1}{2} - \kappa + \mu, 2\mu + 1; z\right) \quad (|\arg z| < \pi), \tag{5.1.2}$$

where (to avoid many-valuedness) the domain of z is to be restricted in the z-plane cut along the negative real axis with $|\arg z| < \pi$.

Lemma 5.1.1 (Barnes type integral for the Whittaker function ([13], [16]))**.** *The Barnes integral for $W_{\kappa,\mu}(z)$ asserts*

$$W_{\kappa,\mu}(z) = \frac{e^{-z/2}z^{\kappa}}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(-s-\kappa-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-\kappa+\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\kappa-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\kappa+\mu+\frac{1}{2}\right)} z^s ds, \tag{5.1.3}$$

for $|\arg z| < \frac{3}{2}\pi$, and $\kappa \pm \mu + \frac{1}{2} \neq 0, 1, 2, \ldots$; the contour has loops if necessary so that the poles of $\Gamma(s)$ from those of $\Gamma\left(-s-\kappa-\mu+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-s-\kappa+\mu+\frac{1}{2}\right)$ are on opposite sides of it.

In (5.1.3), it holds for all finite values of c provided that the contour of integration can always be deformed so as to separate the poles $\Gamma(s)$ and those of the other Γ-factors. By Stirling's formula for $\Gamma(s)$ (cf. [5]), the integral in (5.1.3) represents a function of z which is holomorphic at all points in the domain $|\arg z| \leq \frac{3}{2}\pi - \alpha$ with any small $\alpha > 0$. The asymptotic expansions for $\Psi(\alpha;\gamma;z)$ as $z \to 0$ readily asserts the following proposition.

5.2 The asymptotic expansion

Proposition 5.2.1 (The asymptotic expansions for $\Psi(a;b;z)$ as $z \to 0$ ([13]))**.** *We have the asymptotic expansions, as $z \to 0$ through $|\arg z| < \pi$,*

$$\Psi(a;b;z) = \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}z^{1-b} + O(|z|^{\mathrm{Re}b-2}) \quad (\mathrm{Re}\, b \geq 2, b \neq 2), \tag{5.2.1}$$

$$= \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}z^{1-b} + O(|\log z|) \quad (b = 2), \tag{5.2.2}$$

$$= \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}z^{1-b} + O(1) \quad (1 < \mathrm{Re}\, b < 2), \tag{5.2.3}$$

$$= \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)} + \frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}z^{1-b} + O(|z|) \quad (\mathrm{Re}\, b = 1, b \neq 1), \tag{5.2.4}$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(a)}\left\{\log z + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(a) + 2C_0\right\} + O(|z\log z|) \quad (b = 1), \tag{5.2.5}$$

where C_0 is Euler's constant.

By the definition (5.1.2) and Proposition 5.2.1, we have the following asymptotic expansions as $z \to 0$ for $W_{\kappa,\mu}(z)$.

Proposition 5.2.2 (The asymptotic expansions in $z \to 0$ for $W_{\kappa,\mu}(z)$)**.**

$$W_{\kappa,\mu}(z) = \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\kappa\right)}z^{1/2-\mu} + O(z^{3/2-\mathrm{Re}\mu}) \quad \left(\mathrm{Re}\,\mu \geq \frac{1}{2}, \mu \neq \frac{1}{2}\right), \tag{5.2.6}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\kappa)} + O(|z\log z|) \quad \left(\mu = \frac{1}{2}\right), \tag{5.2.7}$$

$$= \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\mu-\kappa\right)}z^{1/2-\mu} + O(|z|^{\mathrm{Re}\mu+1/2}) \quad \left(0 < \mathrm{Re}\,\mu < \frac{1}{2}\right), \tag{5.2.8}$$

$$= \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\mu-\kappa\right)}z^{\mu+1/2} + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}-\kappa\right)}z^{-\mu+1/2} + O(|z|^{\mathrm{Re}\mu+3/2}) \quad (\mathrm{Re}\,\mu = 0, \mu \neq 0), \tag{5.2.9}$$

$$= -\frac{z^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\kappa\right)}\left(\log z + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}-\kappa\right) + 2C_0\right) + O(|z|^{3/2}|\log z|) \quad (\mu = 0). \tag{5.2.10}$$

References

[1] A. Erdélyi (ed.), W. Magnas, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, Higher Transcendental Functions, Vol. I, McGraw-Hill, New York, 1953.

[2] H. Iwata, On the solution of the Volterra integral equation of second type for the error term in an asymptotic formula for arithmetic functions, Adv. Stud. Euro-Tbil. Math. J **15** (2022), 83-92.

[3] H. Iwata, On some analytic properties of a function associated with the Selberg class satisfying certain special conditions, arXiv : math. NT / 2301.03823.

[4] H. Iwata, An analytic approach to the remainder terms in the asymptotic formulas - the Volterra integral equation, the Whittaker function -, arXiv : math. NT / 2302.06779.

[5] A. Ivić, The Riemann-Zeta function, Dover Publ. Inc., Mineloa, New York, 1985.

[6] J. Kaczorowski, K. Wiertelak, Oscillations of the remainder term related to the Euler totient function, J. Number Theory **130** (2010), 2683-2700.

[7] J. Kaczorowski, K. Wiertelak, Smoothing arithmetic error terms:the case of the Euler φ function, Math. Nachr. **283**, No 11, (2010), 1637-1645.

[8] J. Kaczorowski, On a generalization of the Euler totient function, Monatsh. Math, **170** (2013), 27-48.

[9] N. N. Lebedev, Special Functions & Their Applications Dover Publ. Inc., Mineola, New York 1972.

[10] H. L. Montgomery, Fluctuations in the mean of Euler's phi function, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **97** (1-3) (1987), 239-245.

[11] A. Perelli, A survey of the Selberg class of L-functions, Part I, Milan J. math. **73** (2005), 19-52.

[12] M. Rekoś, On some complex explicit formulae connected with the Euler's φ function. I, Funct. Approx. Comment. Math. **29** (2001), 113-124.

[13] L. J. Slater, Confluent Hypergeometric Functions, Cambridge University Press,1960.

[14] K. Srinivas, Distinct zeros of functions in the Selberg class, Acta Arith., **103.3** (2002), 201-207.

[15] A. Walfisz, Weylsche Exponentialsummen in der neueren Zahlentheorie, VEB Deutcher Verlag der Wiss., Berlin, 1963.

[16] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, 4th ed., Cambridge Univ. Press, 1927.

Generalized Frobenius Number of Three Variables

Department of Mathematics, Graduate School of Mathematics, Nagoya University
Kittipong SUBWATTANACHAI *

Abstract

Have you ever thought about the largest number of Chicken McNuggets that can't be bought with available pack sizes? This simple question takes us into the study of Frobenius numbers: Let $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ be a k-tuple of positive integers and $s \geq 0$. The generalized Frobenius number $g(A; s)$ is the largest integer that has at most s representations in terms of $a_1, a_2, \ldots, a_k$ with non-negative integer coefficients. In this talk, we present a formula for the generalized Frobenius number in the case $k = 3$ under certain conditions.

1 Introduction

The purpose of this note is to provide an overview of the results obtained by the author in [14] and [15] on generalized Frobenius numbers in three variables. For integers $n \geq 1$, $k \geq 2$, let $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ be a k-tuple of positive integers and let $d(n; A) = d(n; a_1, a_2, \ldots, a_k)$ be the number of representations to $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = n$. Its generating series is given by

$$\sum_{n\geq 0} d(n; a_1, \ldots, a_k)x^n = \frac{1}{(1-x^{a_1})(1-x^{a_2})\cdots(1-x^{a_k})}.$$

Sylvester [16] and Cayley [6] show that $d\,(n; a_1, a_2, \ldots, a_k)$ can be expressed as the sum of a polynomial in n of degree $k-1$ and a periodic function of period $a_1a_2\cdots a_k$. Using Bernoulli numbers, Beck, Gessel, and Komatsu [1] derive the explicit formula for the polynomial section. Tripathi [19] provides a formula for $d(n; a_1, a_2)$. Komatsu [8] shows that the periodic function part is defined in terms of trigonometric functions for three variables in the pairwise coprime case.

There is the well-known linear Diophantine problem, posed by Sylvester [18], known as the *Frobenius problem*[1]: Given positive integers $a_1, a_2, \ldots, a_k$ such that $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$, find the largest integer that *cannot* be expressed as a non-negative integer linear combination of these numbers. *The largest integer* is called the *Frobenius number* of the tuple $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, and is denoted by $g(A) = g(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. The Frobenius number of $A = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ exists if and only if $a_1, a_2, \ldots, a_k$ are relatively prime i.e. $\gcd(a_1, a_2, \ldots, a_k) = 1$ see for example [13]. With the above notation, the Frobenius number is given by

$$g(A) = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid d(n; A) = 0\}.$$

For instance, at McDonald's one can only order packs of 6, 9, or 20 Chicken McNuggets. The following list shows the numbers of nuggets that cannot be purchased by ordering any amounts

*E-mail:d21002j@d21002j@math.nagoya-u.ac.jp, subwattanachai.k@gmail.com

[1]It is also known as the coin problem, postage stamp problem, or Chicken McNugget problem, involves determining the largest value that cannot be formed using only coins of specified denominations.

of these packs (integers that cannot be expressed by 6, 9, and 20): 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 22, 23, 25, 28, 31, 34, 37, and 43. Therefore, $g(6, 9, 20) = 43$.

Note that if all non-negative integers can be expressed as a non-negative integer linear combination of A, then $g(A) = -1$. For example, $g(1, 2) = -1$.

For two variables $A = \{a, b\} \subset \mathbb{Z}_{>0}$, it is shown by Sylvester [17] that

$$g(a, b) = ab - a - b. \tag{1}$$

For example, consider $A = (a, b) = (3, 5)$. Then the Frobenius number of A is given by $g(3, 5) = 15 - 3 - 5 = 7$, which means that all integers $n > 7$ can be expressed as a non-negative integer linear combination of 3 and 5.

Tripathi [20] has provided explicit but complicate formulas for calculating the Frobenius number in three variables. However, it is important to note that closed-form solutions for the general case become increasingly challenging when the number of variables exceeds three ($k > 3$). Nevertheless, various formulas have been proposed for Frobenius numbers in specific scenarios or special cases. For example, explicit formulas in some particular cases of sequences, including arithmetic, geometric-like, Fibonacci, Mersenne, and triangular (see [12] and references therein) are known.

In this note, we will focus on a generalization of the Frobenius number. For a given non-negative integer s, let

$$g(A; s) = g(a_1, a_2, \ldots, a_k; s) = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid d(n; A) \leq s\}$$

be the largest integer such that the number of expressions that can be represented by $a_1, a_2, \ldots, a_k$ is at most s. Notice that $g(a_1, a_2, \ldots, a_k) = g(a_1, a_2, \ldots, a_k; 0)$. That means all integers bigger than $g(A; s)$ have at least $s + 1$ representations. The $g(A; s)$ is called *the generalized Frobenius number*. Furthermore, $g(A; s)$ is well-defined (i.e. bounded above) (see [7]).

As a generalization of (1), for $A = (a, b)$ and $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, (see [3]), an exact formula for $g(A, s) = g(a, b; s)$ is given by

$$g(a, b; s) = (s + 1)ab - a - b. \tag{2}$$

In general, we have $d\big(g(A; s); A\big) \leq s$, but in the case $|A| = 2$ one can show that actually $d\big(g(A; s); A\big) = s$. Similar to the $s = 0$ case, exact formulas for the generalized Frobenius number in the cases $k \geq 3$ are still unknown. For $k = 3$ exact formulas are just known for special cases. For example, there are explicit results in the case of triangular numbers [10], repunits [9] and Fibonacci numbers [11]. Recently, Binner [5] provide bounds for the number of solutions $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = n$ and use these bounds to solve $g(a_1, a_2, a_3; s)$ when s is large. In 2022, Woods [21] provide formulas and asymptotics for the generalized Frobenius problem using the restricted partition function.

One of main results is the following explicit formula for a special case of the generalized Frobenius number in three variables [14].

Theorem 1 ([14])**.** *Let a_1, a_2 and a_3 be positive integers with $\gcd(a_1, a_2, a_3) = 1$ and let $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. If $d_1 = gcd(a_2, a_3)$ and suppose that $a_1 \equiv 0 \pmod{\frac{a_2}{d_1}}$ or $a_1 \equiv 0 \pmod{\frac{a_3}{d_1}}$, then*

$$g\left(a_1, a_2, a_3; \sum_{j=0}^{s} \left\lceil \frac{ja_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil \right) = (s + 1)\frac{a_2a_3}{d_1} + a_1d_1 - a_1 - a_2 - a_3.$$

Remark 2. In Theorem 1, the order of the integers in the tuple (a_1, a_2, a_3) does not matter due to the symmetry of g. So, if $d_2 = \gcd(a_1, a_3)$ and $a_2 \equiv 0 \pmod{\frac{a_1}{d_2}}$ or $a_2 \equiv 0 \pmod{\frac{a_3}{d_2}}$, then

$$g\left(a_1, a_2, a_3; \sum_{j=0}^{s} \left\lceil \frac{ja_1a_3}{a_2d_2^2} \right\rceil \right) = (s+1)\frac{a_1a_3}{d_2} + a_2d_2 - a_1 - a_2 - a_3.$$

Similarly, if $d_3 = \gcd(a_1, a_2)$ and $a_3 \equiv 0 \pmod{\frac{a_1}{d_3}}$ or $a_3 \equiv 0 \pmod{\frac{a_2}{d_3}}$, then

$$g\left(a_1, a_2, a_3; \sum_{j=0}^{s} \left\lceil \frac{ja_1a_2}{a_3d_1^2} \right\rceil \right) = (s+1)\frac{a_1a_2}{d_3} + a_3d_3 - a_1 - a_2 - a_3.$$

Remark 3. Notice that

$$\mathbf{U}_{(a_1,a_2,a_3)} := \bigcup_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{j=0}^{s} \left\lceil \frac{j \prod_{\substack{1 \le \ell \le 3 \\ \ell \ne i}} a_\ell}{a_i d_i^2} \right\rceil \mid s \ge 0 \right\} \subseteq \{d(n; a_1, a_2, a_3) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$$

and in general the left set is a proper subset of the right. For example, $d(120; 10, 15, 21) = 6$ but

$$6 \notin \mathbf{U}_{(10,15,21)} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 14, 17, 20, 22, 24, \ldots\} \subsetneq \{d(n; 10, 15, 21) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

However, they are equal in some cases. For example, if a_1, a_2 and a_3 are of the form in [2], then we obtain that

$$\mathbf{U}_{(a_1,a_2,a_3)} = \{t_k \mid k \in \mathbb{Z}_{\ge 0}\} = \{d(n; a_1, a_2, a_3) \mid n \in \mathbb{Z}_{>0}\},$$

where t_k is the kth triangular number which is given by $t_k = \binom{k+1}{2}$.

We will give the proof of Theorem 1 in Section 3.

The other main result is to show the explicit formula for three consecutive triangular numbers which is $g(t_n, t_{n+1}, t_{n+2}; s)$ for all $s \ge 0$ and for all sufficiently large n (depends on s).

Theorem 4 ([15])**.** *The $g(t_n, t_{n+1}, t_{n+2}; s)$ are given for all $s \ge 0$ as follows:*

(i) For even $n > 6\lfloor\sqrt{s+1}\rfloor - 6$, we have

$$g(t_n, t_{n+1}, t_{n+2}; s) = \frac{(n+1)(n+2)}{4}(q_s n + 6c_s) - 1.$$

(ii) For odd $n > 6\left\lfloor \frac{\sqrt{4s+5}-1}{2} \right\rfloor - 3$, we have

$$g(t_n, t_{n+1}, t_{n+2}; s) = \frac{(n+1)(n+2)}{4}(q_s n + 6c_s - 3\delta_s) - 1.$$

Here the q_s, c_s and δ_s are given by

$$q_s = 2\lfloor\sqrt{s}\rfloor + 2 + \delta_s, \quad c_s = s - \lfloor\sqrt{s}\rfloor^2 - \delta_s\lfloor\sqrt{s}\rfloor, \qquad \delta_s = \begin{cases} 1 & \text{if } s \ge \lfloor\sqrt{s}\rfloor^2 + \lfloor\sqrt{s}\rfloor, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

We define $\mathbb{B} = \{n \in \mathbb{Z}_{\ge 1} \mid n = k^2 \text{ or } n = k(k+1), \exists k \ge 1\} = \{1, 2, 4, 6, 9, 12, 16, \ldots\}$. Then, we obtain the following corollary whose main idea is to derive a formula for $g(t_n, t_{n+1}, t_{n+2}; s+1)$ based on $g(t_n, t_{n+1}, t_{n+2}; s)$ when $s \ge 0$.

Corollary 5. *Let $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Then the following statements hold:*

(i) If $s+1 \notin \mathbb{B}$, we have

$$g(t_n, t_{n+1}, t_{n+2}; s+1) - g(t_n, t_{n+1}, t_{n+2}; s) = \frac{6(n+1)(n+2)}{4}.$$

(ii) If n is even and $s+1 \in \mathbb{B}$, that is $s+1 = k^2$ or $s+1 = k(k+1)$ $(\exists k \geq 1)$, then

$$g(t_n, t_{n+1}, t_{n+2}; s+1) - g(t_n, t_{n+1}, t_{n+2}; s) = \frac{(n-6k+6)(n+1)(n+2)}{4}.$$

(iii) If n is odd and $s+1 \in \mathbb{B}$, then

$$g(t_n, t_{n+1}, t_{n+2}; s+1) - g(t_n, t_{n+1}, t_{n+2}; s) = \begin{cases} \frac{(n-6k+9)(n+1)(n+2)}{4} & \text{if } s+1 = k^2, \\ \frac{(n-6k+3)(n+1)(n+2)}{4} & \text{if } s+1 = k(k+1). \end{cases}$$

2 Preliminary Lemmas

Before proving Theorem 1, we introduce some Lemmas. Beck and Kifer [2] show the following result on $g(a_1, a_2, \ldots, a_k; s)$ in terms of $\ell = \gcd(a_2, a_3, \ldots, a_k)$.

Lemma 6 ([2, Lemma 4])**.** *For $k \geq 2$, let $A = (a_1, \ldots, a_k)$ be a k-tuple of positive integers with $\gcd(A) = 1$. If $\ell = \gcd(a_2, a_3, \ldots, a_k)$, let $a_j = \ell a_j'$ for $2 \leq j \leq k$. Then for $s \geq 0$*

$$g(a_1, a_2, \ldots, a_k; s) = \ell\, g\big(a_1, a_2', a_3', \ldots, a_k'; s\big) + a_1(\ell - 1).$$

The next lemma give an upper bound for the number of representations to $a_1x_1 + \cdots + a_kx_k = g(a_1, \ldots, a_k; s) - jc$, for all integers j such that $0 \leq jc \leq g(a_1, \ldots, a_k; s)$ when $c \equiv 0 \pmod{a_r}$ for some $r \in \{1, \ldots, k\}$.

Lemma 7. *For $k \geq 2$, let $A = (a_1, \ldots, a_k)$ be a k-tuple of positive integers with $\gcd(A) = 1$ and let $s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. If c is a positive integer such that $c \equiv 0 \pmod{a_r}$ for some $r = 1, \ldots, k$, then, for all integers $0 \leq jc \leq g(A; s)$,*

$$d\big(g(A; s) - jc; A\big) \leq s.$$

Proof. Suppose that $c \in \mathbb{Z}_{>0}$ such that $c \equiv 0 \pmod{a_r}$ for some $r = 1, \ldots, k$. Assume that there exists $0 \leq j \leq \frac{g(A;s)}{c}$ such that

$$d\big(g(A; s) - jc; A\big) \geq s + 1.$$

So, there are *at least* $s+1$ non-negative integer solutions $(x_1, \ldots, x_k)$ such that

$$g(A; s) - jc = \sum_{\ell=1}^{k} x_\ell a_\ell.$$

Since $c \equiv 0 \pmod{a_r}$, then $c = a_r q$ for some $q \in \mathbb{Z}_0$. So, we obtain that

$$g(A; s) = x_1a_1 + \ldots + x_{r-1}a_{r-1} + (x_r + jq)a_r + x_{r+1}a_{r+1} + \ldots + x_ka_k,$$

this means that $g(A; s)$ has *at least* $s+1$ non-negative representations in terms of $a_1, \ldots, a_k$. We get a contradiction since $g(A; s)$ must have at most s representations. □

To accomplish the proof of Theorem 1, we need the following lemma. If $k = 2$, says $A = \{a, b\}$, then, for a non-negative number $j \leq g(a, b; s)/c$, $d\big(g(a, b; s) + jc; a, b\big) = i$ is equivalent to $g(a, b; i - 1) < g(a, b; s) + jc \leq g(a, b; i)$.

Lemma 8. *Let $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ with $\gcd(a, b) = 1$, and let $i, s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Suppose that c is a positive integer such that $c \equiv 0 \pmod{a}$ or $c \equiv 0 \pmod{b}$ and $j \in \mathbb{Z}$. Then*

$$d\big(g(a, b; s) + jc; a, b\big) = i,$$

if and only if,

$$g(a, b; i - 1) < g(a, b; s) + jc \leq g(a, b; i).$$

Here we set $g(a, b; -1)$ to be -2.

Proof. Without loss of generality, we assume that $c \equiv 0 \pmod{a}$. For convenient, throughout the proof, for $s \geq 0$, we denote $g(s) := g(a, b; s)$, which is $g(s) = (s + 1)ab - a - b$.

($\Rightarrow$) Suppose that $d(g(s) + jc; a, b) = i$. By the definition of $g(i) = g(a, b; i)$, it follows immediately that $g(s) + jc \leq g(a, b; i)$. Clearly, if $i = 0$, then $-2 < g(s) + jc \leq g(0)$, we are done. So, assume that $i \geq 1$. Obviously, $g(s) + jc \neq g(i - 1)$, otherwise $d(g(s) + jc; a, b) = i - 1$, a contradiction. It remains to show that

$$g(i - 1) < g(s) + jc.$$

We will prove this statement by assuming that $g(s) + jc < g(i - 1)$. So if we set $\Delta = g(i - 1) - (g(s) + jc)$, then $\Delta > 0$, moreover Δ is a positive integer that is a multiple of a by using the hypothesis $c \equiv 0 \pmod{a}$. Thus

$$g(i - 1) = g(s) + jc + \Delta,$$

this implies that $g(i - 1) = g(a, b; i - 1)$ has at least i representations in terms of a and b, a contradiction with the definition of $g(a, b; i - 1)$.

($\Leftarrow$) Suppose that $g(i - 1) < g(s) + jc \leq g(i)$ for some $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Clearly, since $g(i - 1) < g(s) + jc$, we have

$$d(g(s) + jc; a, b) \geq i.$$

Our goal is to show that $d(g(s) + jc; a, b) = i$. If $g(s) + jc = g(i)$, then we are done. So we assume that $g(s) + jc < g(i)$ and also assume that $d(g(s) + jc; a, b) > i$. With the same setting, let $\Delta = g(i) - (g(s) + jc)$. Then $\Delta > 0$. In addition, Δ is a multiple of a. So we obtain that

$$g(i) = g(s) + jc + \Delta,$$

i.e., $g(i)$ has *at least* $i + 1$ representations in terms of a and b, a contradiction. Therefore, $d(g(s) + jc; a, b) = i$. Similarly to that, we can prove the case where $c \equiv 0 \pmod{b}$. □

Lemma 9. *Let $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ with $a < b$, $\gcd(a, b) = 1$, and let $s, K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. If m is an integer such that $m > g(a, b; s) + Ka$, then, for all $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, we have*

$$d\big(m - ja; a, b\big) \geq d\big(g(a, b; s) + (K - j)a; a, b\big).$$

Proof. We will prove by induction on j. If $j = 0$, we can assume that there exists a non-negative integer ℓ such that $d\big(g(a, b; s) + Ka; a, b\big) = \ell$. By Lemma 8, we have

$$g(a, b; \ell - 1) < g(a, b; s) + Ka \leq g(a, b; \ell).$$

Hence $m > g(a,b;\ell-1)$, which means

$$d(m;a,b) \geq \ell = d\big(g(a,b;s)+Ka;a,b\big).$$

The base step is proved.

Let j be a non-negative integer and assume that

$$d\big(m-ja;a,b\big) \geq d\big(g(a,b;s)+(K-j)a;a,b\big).$$

We want to show that

$$d\big(m-(j+1)a;a,b\big) \geq d\big(g(a,b;s)+(K-(j+1))a;a,b\big).$$

Assume that $d\big(m-(j+1)a;a,b\big) < d\big(g(a,b;s)+(K-(j+1))a;a,b\big)$. Suppose that there exists $\ell \geq 0$ such that $d\big(m-(j+1)a;a,b\big) = \ell$. So

$$\ell < d\big(g(a,b;s)+(K-(j+1))a;a,b\big).$$

Observe that $d\big(g(a,b;s)+(K-(j+1))a;a,b\big) \leq d\big(g(a,b;s)+(K-j)a;a,b\big)$ by Lemma 8. One can see that since $d\big(m-(j+1)a;a,b\big) = \ell$, then

$$d\big(m-ja;a,b\big) = \begin{cases} \ell+1 & \text{if } b \mid (m-ja), \\ \ell & \text{otherwise.} \end{cases}$$

If $d\big(m-ja;a,b\big) = \ell$, then we get a contradiction that

$$\ell = d\big(m-ja;a,b\big) \geq d\big(g(a,b;s)+(K-j)a;a,b\big) \geq d\big(g(a,b;s)+(K-(j+1))a;a,b\big) > \ell.$$

If $d\big(m-ja;a,b\big) = \ell+1$, then

$$\ell < d\big(g(a,b;s)+(K-(j+1))a;a,b\big) \leq d\big(g(a,b;s)+(K-j)a;a,b\big) \leq d\big(m-ja;a,b\big) = \ell+1.$$

It follows that

$$d\big(g(a,b;s)+(K-(j+1))a;a,b\big) = d\big(g(a,b;s)+(K-j)a;a,b\big) = d\big(m-ja;a,b\big) = \ell+1.$$

Since $d\big(g(a,b;s)+(K-(j+1))a;a,b\big) = \ell+1$, by Lemma 8, $g(a,b;s)+(K-(j+1))a > g(a,b;\ell)$. This means $m-(j+1)a > g(a,b;s)+(K-(j+1))a > g(a,b;\ell)$, thus

$$d\big(m-(j+1)a;a,b\big) \geq \ell+1,$$

which contradicts with $d(m-(j+1)a;a,b) = \ell$. Therefore,

$$d\big(m-(j+1)a;a,b\big) \geq d\big(g(a,b;s)+(K-(j+1))a;a,b\big),$$

as required. □

3 Proof of Theorem 1

By applying Lemma 6, Lemma 7 and Lemma 8, we can prove Theorem 1 as follows.

Proof of Theorem 1. Suppose that $d_1 = \gcd(a_2, a_3)$ and $a_1 \equiv 0 \pmod{\frac{a_2}{d_1}}$. By applying Lemma 6, we obtain that

$$g\left(a_1, a_2, a_3; \sum_{j=0}^{s} \left\lceil \frac{ja_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil \right) = d_1 g\left(a_1, \frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; \sum_{j=0}^{s} \left\lceil \frac{ja_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil \right) + a_1(d_1 - 1). \tag{3}$$

We will show that

$$g\left(a_1, \frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; \sum_{j=0}^{s} \left\lceil \frac{ja_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil \right) = g\left(\frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; s\right).$$

Then one can see that, for $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$,

$$d\left(m; a_1, \frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}\right) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{m}{a_1} \rfloor} d\left(m - ja_1; \frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}\right). \tag{4}$$

Put $m = g\left(\frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; s\right)$, then we obtain that

$$d\left(g\left(\frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; s\right); a_1, \frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}\right) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{g\left(\frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; s\right)}{a_1} \right\rfloor} d\left(g\left(\frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; s\right) - ja_1; \frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}\right). \tag{5}$$

By Lemma 7, we have that each value of $d\left(g\left(\frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; s\right) - ja_1; \frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}\right)$ have to be equal to any of $0, 1, \ldots, s$. To calculate the right-hand side of (5), we count the number of $0 \leq j \leq g\left(\frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; s\right)/a_1$ such that

$$d\left(g\left(\frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; s\right) - ja_1; \frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}\right) = i, \tag{6}$$

for all $i = 1, 2, \ldots, s$. For convenient, let $g_s := g\left(\frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; s\right)$. For given i the j such that (6) holds are, by Lemma 8, those with $g_{i-1} < g_s - ja_1 \leq g_i$. By (2), this is equivalent to

$$\frac{ia_2a_3}{d_1^2} - \frac{a_2}{d_1} - \frac{a_3}{d_1} < (s+1)\frac{a_2a_3}{d_1^2} - \frac{a_2}{d_1} - \frac{a_3}{d_1} - ja_1 \leq (i+1)\frac{a_2a_3}{d_1^2} - \frac{a_2}{d_1} - \frac{a_3}{d_1}.$$

So,

$$(s+1-i)\frac{a_2a_3}{a_1d_1^2} > j \geq (s-i)\frac{a_2a_3}{a_1d_1^2}.$$

Thus, by Lemma 8, there are

$$\left\lceil (s+1-i)\frac{a_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil - \left\lceil (s-i)\frac{a_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil$$

of j in $[0, g_s/a_1)$ such that $d\big(g_s - ja_1; \frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}\big) = i$ for $i = 1, 2, \ldots, s$. So, by (5), we have

$$\begin{aligned}
&d\left(g\Big(\frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; s\Big); a_1, \frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}\right)\\
&= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{g_s}{a_1} \rfloor} d\left(g\left(\frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; s\right) - ja_1; \frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}\right)\\
&= s\left\lceil \frac{a_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil + (s-1)\left(\left\lceil \frac{2a_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil - \left\lceil \frac{a_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil \right) + (s-2)\left(\left\lceil \frac{3a_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil - \left\lceil \frac{2a_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil \right) +\\
&\quad \cdots + \left(\left\lceil \frac{sa_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil - \left\lceil \frac{(s-1)a_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil \right)\\
&= \sum_{j=0}^{s} \left\lceil \frac{ja_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil .
\end{aligned}$$

Therefore, by the choice of $m = g\Big(\frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; s\Big)$ and (4) combined with Lemma 9, this value m is the largest that the right-hand side of (4) is (less than or) equal to $\sum_{j=0}^{s} \left\lceil \frac{ja_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil$. Then

$$g\Big(\frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; s\Big) = g\left(a_1, \frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; \sum_{j=0}^{s} \left\lceil \frac{ja_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil \right).$$

Hence, by (3) and (2),

$$\begin{aligned}
g\left(a_1, a_2, a_3; \sum_{j=0}^{s} \left\lceil \frac{ja_2a_3}{a_1d_1^2} \right\rceil \right) &= d_1 g\Big(\frac{a_2}{d_1}, \frac{a_3}{d_1}; s\Big) + a_1(d_1 - 1)\\
&= d_1\Big((s+1)\frac{a_2a_3}{d_1^2} - \frac{a_2}{d_1} - \frac{a_3}{d_1}\Big) + a_1d_1 - a_1\\
&= (s+1)\frac{a_2a_3}{d_1} + a_1d_1 - a_1 - a_2 - a_3.
\end{aligned}$$

□

Compared to the results in [9, 11] our main theorem seems more useful when s is large, since their results have an upper bound on s. The result in [4] holds for s is extremely large. For example, by [4, Section 3.2], $g(16, 23, 37; s)$ can be found for $s \geq 157291918$. Therefore, our result behaves nicely for s not too large. In [21] the value for s is not explicitly given.

4 Proof of Theorem 4

In this section, we give a sketch of the proof of Theorem 4. For this, we define x_s^{even}, y_s^{even}, x_s^{odd}, and y_s^{odd} as follows.

Definition 10. Let s be a non-negative integer and let k be the non-negative integer such that

$$s = k(k+1) + i,$$

for some $i \in \{0, 1, \ldots, 2k+1\}$. Then we define integers x_s^{even}, y_s^{even}, x_s^{odd}, and y_s^{odd} as follows:

$$\left(x_s^{even}, y_s^{even}\right) = \begin{cases} \left(i, 2(k-i)\right) & \text{if } 0 \le i \le k, \\ \left(i-k-1, 4k-2i+3\right) & \text{if } k+1 \le i \le 2k+1, \end{cases}$$

$$\left(x_s^{odd}, y_s^{odd}\right) = \begin{cases} \left(2i, k-i\right) & \text{if } 0 \le i \le k, \\ \left(2(i-k)-1, 2k-i+1\right) & \text{if } k+1 \le i \le 2k+1, \end{cases}$$

Sketch of proof of Theorem 4. By using Lemma 6 we obtain that for $s \ge 0$

$$g\Big(t_n, t_{n+1}, t_{n+2}; s\Big) = d_1 g\Big(t_n, \frac{t_{n+1}}{d_1}, \frac{t_{n+2}}{d_1}; s\Big) + t_n(d_1 - 1),$$

where $d_1 = \gcd(t_{n+1}, t_{n+2})$. One can show that, for all even $n > 6\lfloor\sqrt{s+1}\rfloor - 6$ and for all odd $n > 6\left\lfloor\frac{\sqrt{4s+5}-1}{2}\right\rfloor - 3$,

$$\begin{aligned} g\Big(t_n, \frac{t_{n+1}}{d_1}, \frac{t_{n+2}}{d_1}; s\Big) &= g\Big(\frac{t_{n+1}}{d_1}, \frac{t_{n+2}}{d_1}; x_s\Big) + y_s t_n \\ &= (x_s+1)\frac{t_{n+2}t_{n+1}}{d_1^2} - \frac{t_{n+2}}{d_1} - \frac{t_{n+1}}{d_1} + y_s t_n, \end{aligned}$$

where $(x_s, y_s) = (x_s^{even}, y_s^{even})$ if n is even and $(x_s, y_s) = (x_s^{odd}, y_s^{odd})$ if n is odd. Using this, one can then show by direct calculation that the statement in Theorem 4 follows. □

References

[1] Beck, M., Gessel, I.M., Komatsu, T.: The polynomial part of a restricted partition function related to the Frobenius problem, Electron. J. Combin. **8**(No.1), Note 7, 1–5 (2001)

[2] Beck, M., Kifer, C.: An extreme family of generalized Frobenius numbers, Integers **11**, A24, 639—645 (2011)

[3] Beck, M., Robins, S.: A formula related to the Frobenius problem in two dimensions. Number theory (New York Seminar 2003), Springer, NewYork, 17–23 (2004)

[4] Binner, D.S.: The number of solutions to $ax + by + cz = n$ and its relation to quadratic residues, J. Integer Seq. **23**, Article 20.6.5. (2020)

[5] Binner, D.S.: Some Bounds for Number of Solutions to $ax + by + cz = n$ and their Applications, preprint arXiv:2106.13796, (2021)

[6] Cayley, A.: On a problem of double partitions, Philos. Mag. **XX**, 337—341 (1860)

[7] Fukshansky, L., Schurmann, A.: Bounds on generalized Frobenius numbers, Eur. J. Comb., **32**, 361—368 (2011)

[8] Komatsu, T.: On the number of solutions of the Diophantine equation of Frobenius–General case, Math. Commun. **8**, 195—206 (2003)

[9] Komatsu, T.: The Frobenius number associated with the number of representations for sequences of repunits, C. R. Acad. Sci. Paris **361**, 73–89 (2023)

[10] Komatsu, T.: The Frobenius number for sequences of triangular numbers associated with number of solutions, Ann. Comb. **26**, no. 3, 757–779 (2022)

[11] Komatsu, T., Ying, H.: The Frobenius number associated with the number of representations for Fibonacci triplets. Math. Biosci. Eng. **20**, 3455–3481 (2023)

[12] Robles-Pérez, A.M., Rosales, J.C.: The Frobenius number for sequences of triangular and tetrahedral numbers, J. Number Theory **186**, 473–492 (2018)

[13] Rosales, J.C., García-Sánchez, P.A.: Numerical semigroups, Developments in Mathematics, Vol., 20. Springer, New York (2009)

[14] Subwattanachai, K.: Generalized Frobenius Number of Three Variables, preprint arXiv:2309.09149 (2023)

[15] Subwattanachai, K.: Formulas for the Generalized Frobenius Number of Triangular Numbers, in preparation.

[16] Sylvester, J.J.: On the partition of numbers, Quart. J. Pure Appl. Math. **1**, 141–152 (1857)

[17] Sylvester, J.J.: On subinvariants, i.e. semi-invariants to binary quantics of an unlimited order, Amer. J. Math. **5**, 119–136 (1882)

[18] Sylvester, J.J.: Mathematical questions with their solutions, Educational Times *41*, 21 (1884)

[19] Tripathi, A.: The number of solutions to $ax + by = n$, Fibonacci Quart. **38**, 290–293 (2000)

[20] Tripathi, A.: Formulae for the Frobenius number in three variables, J. Number Theory **170**, 368–389 (2017)

[21] Woods, K.: The generalized Frobenius problem via restricted partition functions. preprint arXiv:2011.00600 (2022)

加群の局所化の漸近挙動について

名古屋大学大学院多元数理科学研究科
木村海渡 (Kaito KIMURA) *

概要

R を可換ネーター環、I を R のイデアル、M を有限生成 R 加群とする。整数 n を無限大に飛ばしたときの剰余加群 M/I^nM の漸近挙動は可換環論における古典的な研究対象の一つである。特に M/I^nM から定まる集合や不変量などの漸近的な振る舞いは盛んに研究されてきた。本講演では全ての素イデアルでの局所化に関する漸近挙動を考察し、深度、入射次元、Bass 数といった可換環論における主要な不変量についての漸近安定性を与える。

1 導入

本稿を通して R は可換ネーター環、I は R のイデアル、M は有限生成 R 加群とする。自然数等で添字付けられた特定の条件や性質を満たすような可換環上の加群、及びその集合や不変量の族についての極限の挙動を考察する問題を漸近問題と呼ぶ。漸近問題における最も古典的な対象の一つはイデアルの冪による剰余加群の漸近的な振る舞い、すなわち $n \to \infty$ における剰余加群 M/I^nM の挙動である。本稿では加群に関するいくつかの不変量に対してこの問題を考察していく。

まずはこの方向の漸近問題に関する歴史や背景について述べる。以下で登場するいくつかの集合や不変量について本節では詳細を省くが、本稿における新規の結果に関係する用語は次節以降で定義から説明をする。本研究の原点は 1979 年の Brodmann [1] による素因子集合の漸近安定性の研究である。素因子集合とは各加群ごとに定まる環のスペクトラムの部分集合（すなわち素イデアルの集まり）であり、Brodmann は M/I^nM から定まるこの素因子集合を考えると、十分大きい整数 n に対しては全ての集合が等しくなっていることを証明した。このように剰余加群 M/I^nM の挙動は十分大きい整数 n において一定あるいは規則的なものであると期待されており、その振る舞いは次数付き加群や重複度の理論などと深く関係している。Brodmann [2] は同じく 1979 年に grade および深度と呼ばれる、イデアルと加群に関する 2 つの不変量についても漸近安定性を証明した。これらの量は Ext 加群（または Bass 数）の消滅や Koszul 複体、正則列と呼ばれる環の元の列など複数の観点から特徴付けることができる極めて重要な量であり、イデアルの高度や環の次元といった次元論的な不変量との間に非自明な不等式が存在する。特に可換環論において最も重要な環および加群のクラスの一つである Cohen–Macaulay 性はこの深度と次元の間の不等式が等式となることで定義される。従って環や加群の深度を正確に与えることにより得られる恩恵は大きい。

Brodmann は [1] の結果を用いて、正則列による特徴付けから grade や深度の漸近安定性を示し

* E-mail:m21018b@math.nagoya-u.ac.jp

た。一方で Kodiyalam [9] は Ext 加群の消滅による深度の特徴付けに注目してより一般的な主張を与え、その系として Brodmann の結果の別証明を与えた。現在ではその主張は Theodorescu [13] によって一般化され、次のような形で知られている：任意の有限生成 R 加群 N と整数 i に対して、全ての $n > 0$ で Ext 加群 $\operatorname{Ext}^i_R(N, M/I^nM)$ が有限長を持つならば、それらの長さは十分大きい n について多項式成長する。この文脈では零多項式との一致によって、Ext 加群の消滅が特徴付けられるのである。特に上述の Kodiyalam の結果は漸近問題の言葉で「Bass 数の漸近挙動は多項式で表現可能である」と記述できる。Bass 数も環や加群の不変量の一つであり、上で見てきたように Bass 数の値でも深度を測ることができる。他方で、Bass 数の消滅で特徴付けられるもう一つの主要な不変量として入射次元という量が存在する。Kodiyalam のアプローチによる恩恵の一つはこの入射次元の漸近安定性が系として得られることである。先に Cohen–Macaulay と呼ばれる環のクラスが登場したが、それと並んで重要視される環のクラスに Gorenstein があり、これは環自身の入射次元の有限性で定義される。

これらの結果はある意味で局所的な部分に注目した漸近問題と捉えることもできる。2006 年に Rotthaus と Şega [10] は環のスペクトラムにおけるザリスキー開軌跡に注目することで言うなれば大域的な観点から漸近問題を研究し、限定的な状況において深度に関する一様な漸近安定性を証明した。本稿の主題は可換環論において一般的あるいは十分に弱いとされている仮定のもとで、剰余加群 M/I^nM の大域的な漸近挙動を考察することである。より詳細に述べると、加群の局所化の漸近挙動が局所化する素イデアルに依存せず、ある程度統一的な振る舞いを見せることがわかる。本講演の内容は [7, 8] に基づいており、後述する新規性のある結果は漸近問題に新しい視点を与えるものであると共に、いくつかの結果は上述の [2, 9, 10] の結果を一般化する。

2 主結果

前節で記述したが、本稿の主題である漸近問題とは剰余加群 M/I^nM に関する不変量が整数 n が十分大きいときにどのように振る舞うかを考察する問題である。そこでまずは、本稿で観察する加群の不変量とそれに付随して定まる局所環のクラスについて定義を与える。以降、混乱が生じる恐れが無ければ添え字は省略する。

Definition 2.1. R は極大イデアル $\mathfrak{m}$ と剰余体 k を持つ局所環とする。（以降は単に $(R, \mathfrak{m}, k)$ と書いてそのような局所環 R を表すこととする。）

- i 次の Ext 加群 $\operatorname{Ext}^i_R(k, M)$ の k ベクトル空間としての次元を M の i 次の Bass 数と呼ぶ。特に R の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して、$R_\mathfrak{p}$ 加群 $M_\mathfrak{p}$ の i 次の Bass 数を $\mu^i_R(\mathfrak{p}, M)$ と書く。
- R 加群 M の深度 $\operatorname{depth}_R M$ を次で定義する。

$$\operatorname{depth}_R M = \begin{cases} \inf\{n \geqslant 0 \mid \mu^n_R(\mathfrak{p}, M) \neq 0\} & (M \neq 0), \\ \infty & (M = 0). \end{cases}$$

- R 加群 M の次元 $\dim_R M$ を次で定義する。

$$\dim_R M = \begin{cases} \sup\{n \geqslant 0 \mid \exists \mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \cdots \subset \mathfrak{p}_n \text{ s.t. } M_{\mathfrak{p}_i} \neq 0 \ (\forall i)\} & (M \neq 0), \\ -\infty & (M = 0). \end{cases}$$

- 非零加群 M に対しては不等式 $\operatorname{depth} M \leqslant \dim M$ が常に成立している。逆の不等式 $\operatorname{depth} M \geqslant \dim M$ が成立するとき M は Cohen–Macaulay であるという。特に R 加群として R が Cohen–Macaulay であるとき、R を Cohen–Macaulay 環という。
- $\operatorname{cmd}_R M := \dim M - \operatorname{depth} M$ を R 加群 M の Cohen–Macaulay 欠度（以下では単に cmd）と呼ぶ。
- $\operatorname{id}_R M := \sup\{n \geqslant 0 \mid \mu^n_R(\mathfrak{p}, M) \neq 0\}$ を R 加群 M の入射次元という。
（本来入射次元は入射分解の長さとしてより一般の環上の加群に対して定義され、局所環上の有限生成加群に対してはその値がここでの定義と等しくなる。これは非自明な命題として知られているが、本稿では簡単のために Bass 数の非消滅の上限を定義として採用している。）
- R 加群として R が有限の入射次元をもつ（すなわち $\operatorname{id} R < \infty$ となる）とき、R を Gorenstein 環という。Gorenstein 環は Cohen–Macaulay 環となることが知られている。

前節に登場した深度、入射次元、Bass 数に関する先行研究は次の結果である。

Theorem 2.2. $(R, \mathfrak{m}, k)$ を局所環とし、整数 i を固定する。

(1) (Brodmann [2]) ある自然数 k が存在して、等式 $\operatorname{depth}(M/I^nM) = \operatorname{depth}(M/I^kM)$ が任意の $n \geqslant k$ に対して成立する。
(2) (Kodiyalam [9]) ある自然数 k が存在して、等式 $\operatorname{id}(M/I^nM) = \operatorname{id}(M/I^kM)$ が任意の $n \geqslant k$ に対して成立する。
(3) (Kodiyalam [9]) ある自然数 k と有理係数多項式 f が存在して、任意の $n \geqslant k$ に対して $\mu^i(\mathfrak{m}, M/I^nM) = f(n)$ となる。

前節の通りこれらの結果はある意味で局所的な漸近問題と解釈することができて、対して本稿では大域的な漸近挙動を研究する。すなわち定理 2.2 に対応する次の問いを考察していく。

Question 2.3. 整数 i を固定する。

(1) 等式 $\operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M/I^nM)_\mathfrak{p} = \operatorname{depth}_{R_\mathfrak{p}}(M/I^kM)_\mathfrak{p}$ が、任意の $n \geqslant k$ と任意の R の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して成立するような自然数 k は存在するか？
(2) 等式 $\operatorname{id}_{R_\mathfrak{p}}(M/I^nM)_\mathfrak{p} = \operatorname{id}_{R_\mathfrak{p}}(M/I^kM)_\mathfrak{p}$ が、任意の $n \geqslant k$ と任意の R の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して成立するような自然数 k は存在するか？
(3) 次の条件を満たすような自然数 k は存在するか？
「任意の R の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して（$\mathfrak{p}$ に依存した）ある有理係数多項式 f が存在して、任意の $n \geqslant k$ に対して $\mu^i(\mathfrak{p}, M/I^nM) = f(n)$ となる。」

定理 2.2 における自然数 k は暗示的に極大イデアル $\mathfrak{m}$ に依存している。この問題 2.3 における非自明な点は、素イデアル $\mathfrak{p}$ に依存しないような自然数 k が存在するかという点である。一般に素イデアルは（非可算）無限個存在するので、それらを統一的に制御するような議論が問題 2.3 の解決には求められる。Rotthaus と Şega [10] は環のスペクトラムにおけるザリスキー開軌跡の議論を用いることで問題 2.3(1) を部分的に解決した。

Theorem 2.4. (Rotthaus–Şega [10]) R が優秀環（定義 2.5 を参照）、M が Cohen–Macaulay 加群で $\mathrm{Hom}_R(R/I, M) = 0$ であるとする。このとき問題 2.3(1) は肯定的である。

本稿の前半では Rotthaus と Şega のザリスキー開軌跡の議論を参考にして、より一般的な状況で問題 2.3 の (1) と (2) を肯定的に解決することを目指す。そのためにザリスキー位相に関するいくつかの記号や概念を定義する。

Definition 2.5. (1) R の素イデアル全体のなす集合を $\mathrm{Spec}(R)$ と書く。R の各イデアル J に対して $\mathrm{Spec}(R)$ の部分集合 $\mathrm{V}(J) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid J \subseteq \mathfrak{p}\}$ を考えると、$V(J)$ の形をした部分集合全体を閉集合系とする位相が $\mathrm{Spec}(R)$ に入る。この位相をザリスキー位相と呼ぶ。

(2) 局所環上の加群の性質 $\mathbb{P}$ が与えられたとき $\{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid R_\mathfrak{p}$ 加群 $M_\mathfrak{p}$ は性質 $\mathbb{P}$ を満たす $\}$ という $\mathrm{Spec}(R)$ の部分集合が、各 R 加群 M に対して考えられる。これは R 加群 M の $\mathbb{P}$ 軌跡と呼ばれる。本稿で扱う軌跡を以下に列挙しておく。

- $\mathsf{Zero}_R(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid M_\mathfrak{p} = 0\}$.
- $\mathsf{CM}_R(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \dim(M_\mathfrak{p}) \leqslant \mathrm{depth}(M_\mathfrak{p})\}$. 特に $\mathsf{CM}(R) := \mathsf{CM}_R(R)$.
- $\mathsf{C}_n^R(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathrm{cmd}(M_\mathfrak{p}) \leqslant n\}$.
- $\mathsf{FID}_R(M) := \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid \mathrm{id}_{R_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} < \infty\}$. 特に $\mathsf{Gor}(R) := \mathsf{FID}_R(R)$.

以上の軌跡の全てについて、それがザリスキー位相においていつ開集合となるかというのは可換環論における古典的な研究対象の一つである。また $\mathrm{Supp}_R(M) := \mathrm{Spec}(R) \setminus \mathsf{Zero}_R(M)$ は M の台と呼ばれ、これは M が有限生成であるときは必ず閉集合となることが知られている。

(3) 局所環とは限らない R に対しても、$\mathsf{CM}(R) = \mathrm{Spec}(R)$ のとき R を Cohen–Macaulay といい、$\mathsf{Gor}(R) = \mathrm{Spec}(R)$ のとき R を Gorenstein という。R が局所環のときは、これらの概念は定義 2.1 のものと一致する。また全ての有限生成 R 加群 M に対して $\mathsf{FID}_R(M) = \mathrm{Spec}(R)$ となるとき R を正則といい、正則 $\Rightarrow$ Gorenstein $\Rightarrow$ Cohen–Macaulay という環のクラスの階層が存在する。定義が複雑なためにここで詳細を書くことは避けるが、定理 2.4 で登場した優秀環は正則環の言葉を用いて定義される。優秀環の定義における「正則」という言葉を「Gorenstein」および「Cohen–Macaulay」で置き換えたものをそれぞれ許容環、CM 優秀環と呼ぶ。（これらはそれぞれ [11] と [3] で導入された。）これらについても同様に、優秀 $\Rightarrow$ 許容 $\Rightarrow$ CM 優秀という階層が存在する。

軌跡が開集合となれば軌跡内の各点について特定の開近傍を考えることができて、局所的な議論を大域的な議論に拡張することができる。従ってザリスキー開軌跡の手法は、問題 2.3 のような大域的な漸近問題を考察する上で非常に役に立つ。特に著者は問題 2.3 に登場する深度や入射次元を研究するために、それぞれ Cohen–Macaulay 軌跡 $\mathsf{CM}_R(M/I^nM)$ や cmd 軌跡 $\mathsf{C}_R^m(M/I^nM)$、および有限入射次元軌跡 $\mathsf{FID}_R(M/I^nM)$ に注目した。優秀環 R 上の任意の有限生成加群 M について、Grothendieck [5] により $\mathsf{CM}_R(M)$ および全ての n に対する $\mathsf{C}_R^n(M)$ が、Takahashi [12] により $\mathsf{FID}_R(M)$ が開集合となることがそれぞれ証明されている。しかしながら、これらの軌跡を定義する概念は、正則性よりもどちらかと言えば Cohen–Macaulay 性や Gorenstein 性といった環の性質と対応している。実際に著者は [6] で、優秀環よりも一般的な許容環や CM 優秀環上の加群についてそれらの軌跡が開集合となることを与えた。定理 2.4 の証明には上述の Grothendieck [5] の手法が用

いられているが、今回 [6] の手法を用いることで環の仮定を弱めることができたというのが、本稿の第一の主結果である。さらに細かい証明のアイデアを工夫することで、定理 2.4 における加群やイデアルの仮定も取り除くことに成功した。

Theorem 2.6. CM 優秀環 R に対して、問題 2.3(1) は肯定的である。

加えてその手法の一部が入射次元に関する漸近問題にも応用できることに気付き、有限入射次元軌跡の観察から問題 2.3(2) に関する次の定理を与えた。問題 2.3(2) を考察したのは著者が初めてなので、この主結果に関しては完全に新規の結果である。

Theorem 2.7. 許容環 R に対して、問題 2.3(2) は肯定的である。

定理 2.6 と 2.7 によって、問題 2.3 はかなり一般的な状況で解決されたといえる。というのも応用上考えられる殆どの可換環は許容環や CM 優秀環となる。例えば体や整数環上の多項式環や形式的冪級数環は共に許容環（従って CM 優秀環）であり、それらの局所化や剰余環もまた許容環となる。許容環でない環を構成するのは難しく、非常に複雑な議論が必要となる。また抽象的な観点からも、許容環や CM 優秀環というのは可換環論において標準的な仮定と言える。実際、許容環や CM 優秀環はそれぞれ Gorenstein 環や Cohen–Macaulay 環の準同型像という極めて標準的な環のクラスを含み、これらの仮定は可換環論の研究の至る所に登場する。

その他に重要な環のクラスとしては、本稿でも何度も登場するように局所環が挙げられる。この局所環という概念と許容環や CM 優秀環といった概念は互いに独立しており、一方を満たすがもう一方を満たさないような環の例は豊富に存在する。そこで本稿の後半では局所環に対して問題 2.3 を考察していく。前節で述べたが、加群の深度は複数の視点から特徴付けを与えることができるのであった。とりわけ前半部分で登場した定理 2.2(1)、2.4、2.6 の証明では共に正則列による深度の特徴付けが用いられている。対して以降では Ext 加群（Bass 数）の振る舞いに注目して局所環上の大域的な漸近問題の解決を目指す。

最も重要なことは、局所環に対しては完備化という操作が存在することである。具体的には局所環 $(R, \mathfrak{m}, k)$ に対してイデアル剰余 $R/\mathfrak{m}^n$ が成す自然な逆系の逆極限を取ると、新たなネーター局所環 $\hat{R}$ が構築されてこれを局所環 R の完備化と呼ぶ。有限生成 R 加群 M に対しても同様に有限生成 $\hat{R}$ 加群 $\hat{M}$ が作られて、これを M の完備化と呼ぶ。こうして作られた環や加群の完備化はその名の通り線形位相としては常に完備であって環論的にも良い性質を持っている。例えばネーター局所環の完備化は必ず優秀環であり正則局所環の準同型像にもなることがよく知られている。一方で R, M の完備化 $\hat{R}, \hat{M}$ は元々の環や加群の持つ情報や性質の多くを引き継ぐ。実際に完備化の前後で Bass 数、深度、次元、cmd、入射次元の値は全て等しく、従って Cohen–Macaulay 性や Gorenstein 性も完備化とそれ以前で同値となる。このことから、しばしば局所環上の問題は完備化に対するそれに帰着できて、初めから優秀環などの良い性質が満たされていると仮定できるようになる。本稿の後半部分でもその手法を利用する。特に局所環上の有限生成加群に関する Bass 数については Foxby と Thorup による公式 [4, Theorem] が存在している。それを今回利用する形に書き直したものが次の補題である。

Lemma 2.8. R を局所環、$\hat{R}, \hat{M}$ を R, M の完備化、$\mathfrak{q}$ を $\hat{R}$ の素イデアル、$\mathfrak{p} := \mathfrak{q} \cap R$ を $\mathfrak{q}$ の R へ

の引き戻しとする。このとき任意の整数 n, m に対して次の等式が成立する：

$$\mu^m_{\hat{R}}(\mathfrak{q}, \hat{M}/I^n M) = \sum_{p+q=m} \mu^p_{\hat{R}/\mathfrak{p}\hat{R}}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}\hat{R}, \hat{R}/\mathfrak{p}\hat{R}) \cdot \mu^q_R(\mathfrak{p}, M/I^n M).$$

この補題により R 加群 $M/I^n M$ の Bass 数の漸近挙動は、$\hat{R}$ 加群 $\hat{M}/I^n\hat{M}$ のそれを調べることで観察することができる。するとここまで見てきたように $\hat{R}$ は優秀環であることから様々な軌跡が開集合となることがわかり、大域的な議論を展開できるようになる。ここからスペクトル系列や次数付き加群の理論を用いて複数の素イデアルに関する Bass 数同士を比較し、最後に環 R のネーター性を活かすことで次の定理が得られる。これは後半部分で最も強い結果であるが、煩雑化を避けるためにその証明の説明は前行程度に止めておく。

Theorem 2.9. R を局所環とし、整数 i を固定する。このとき、ある自然数 k と有限個の有理係数多項式 $f_1, \ldots, f_l$ が存在して次の条件を満たす：「任意の R の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対してある番号 $1 \leqslant m \leqslant l$ が存在して、任意の $n \geqslant k$ に対して $\mu^i(\mathfrak{p}, M/I^n M) = f_m(n)$ となる。」

この系として後半部分の主題であった局所環上の漸近問題は解決される。

Corollary 2.10. 局所環 R に対して、問題 2.3 の (1), (2), (3) は全て肯定的である。

以上により、局所環上の大域的な漸近問題は完全な形で解決された。特筆すべき点として、一般に 2 次元以上の局所環 R には素イデアルが非可算無限個存在する。一方で定理 2.9 によると、全ての素イデアルに関する Bass 数の漸近挙動は高々有限個の有理係数多項式で表現可能であり、これは驚異的な事実に思える。今回提起した問題 2.3 はまだ一般の状況では未解決であるため、それらが肯定的であるか、もしそうならば前行の事実も成立するのかという点は今後の課題である。以上が本稿における結果の全てである。（証明の詳細、具体的な計算例、応用については本稿では省略したので、詳しくは [7, 8] をご参照下さい。）

参考文献

[1] M. Brodmann, Asymptotic stability of Ass($M/I^n M$), *Proc. Amer. Math. Soc.* **74** (1979), no. 1, 16–18.

[2] M. Brodmann, The asymptotic nature of the analytic spread, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **86** (1979), no. 1, 35–39.

[3] K. Česnavičius, Macaulayfication of Noetherian schemes, *Duke Math. J.* **170** (2021), no. 7, 1419–1455.

[4] H.-B. Foxby; A. Thorup, Minimal injective resolutions under flat base change, *Proc. Amer. Math. Soc.* **67** (1977), no. 1, 27–31.

[5] A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. II, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **24**, (1965).

[6] K. Kimura, Openness of various loci over Noetherian rings, *J. Algebra* **633** (2023), 403–424.

[7] K. Kimura, Asymptotic stability of depths of localizations of modules, *J. Math. Soc. Japan* (to appear).

[8] K. Kimura, Asymptotic behavior of homological invariants of localizations of modules, preprint (2023), `arXiv:2310.11697v2`.

[9] V. Kodiyalam, Homological invariants of powers of an ideal, *Proc. Amer. Math. Soc.* **118** (1993), no. 3, 757–764.

[10] C. Rotthaus; L. M. Şega, Open loci of graded modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), no. 11, 4959-4980.

[11] R. Y. Sharp, Acceptable rings and homomorphic images of Gorenstein rings, *J. Algebra* **44** (1977), no. 1, 246–261.

[12] R. Takahashi, Openness of FID–loci, *Glasg. Math. J.* **48** (2006), no. 3, 431–435.

[13] E. Theodorescu, Derived functors and Hilbert polynomials, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **132** (2002), no. 1, 75–88.

有限生成射影複体のホモトピー圏の安定理論

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科
大竹 優也 (Yuya OTAKE) *

概要

ネーター環上の有限生成加群の圏の安定理論（安定加群論）は、今日まで環の表現論において重要な役割を果たしてきた。近年、有限生成射影加群からなる複体のなすホモトピー圏のある種の安定圏に対し、類似の理論（安定複体論）が成立することが見出された。この講演では、加群に対して定義される Gorenstein 射影性等のホモロジカルな概念の複体への拡張を与え、安定複体論からどのように安定加群論が回復されるかをみる。

1 導入

以下、R を両側ネーター環とし、有限生成右 R 加群の圏を $\operatorname{mod} R$ で表す。前世紀半ば、環論にホモロジー代数の理論が導入され革命を齎して以来、加群圏の構造解析が環論の主要な研究手法の一つとなっている。環の表現論において Ext や Tor などの導来関手たちの振る舞いが枢要だが、これらを調べる上では加群の射影因子の差は無視することができる。この視点に立ち、1969 年、Auslander–Bridger [ABr] は、圏 $\operatorname{mod} R$ の射影安定化 $\underline{\operatorname{mod}}\, R$ の理論（安定加群論）を構築した。安定圏上では、加群のシジジー（syzygy）をとる操作がシジジー関手 $\Omega : \underline{\operatorname{mod}}\, R \to \underline{\operatorname{mod}}\, R$ として、転置（transpose）をとる操作が転置関手 $\operatorname{Tr} : \underline{\operatorname{mod}}\, R \xrightarrow{\sim} \underline{\operatorname{mod}}\, R^{\mathrm{op}}$ として実現され、これらの関手たちの解析は有限次元多元環の表現論 [ARS, ASS] や可換 Cohen–Macaulay 表現論 [LW, Y1] において主要な地位を占めてきた。次節で、安定加群論において導入された加群の射影性（resp. 射影次元）の Gorenstein 類似である Gorenstein 射影性（resp. Gorenstein 次元）に焦点を絞りその概要を述べる。

ごく近年、上述した安定加群論の複体への拡張として安定複体論 [Y2] が構築された。有限生成射影右 R 加群のなす $\operatorname{mod} R$ の部分圏を $\operatorname{proj} R$ で表すことにする。吉野 [Y2] は、$\operatorname{proj} R$ 上の複体のホモトピー圏 $\mathcal{K}(\operatorname{proj} R)$ の、R の加法閉包 $\operatorname{Add} R$ による安定化 $\underline{\mathcal{K}(\operatorname{proj} R)}$ に対し、Auslander–Bridger の安定加群論に対応する理論（安定複体論）が存在することを見出した。ホモトピー圏 $\mathcal{K}(\operatorname{proj} R)$ は三角圏の構造を有する。故に安定複体論におけるシジジーは $\operatorname{Add} R$ による右近似の写像錐（mapping cone）を用いて定義され、転置は R 双対が引き起こす自己同値が定める。$\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ の対象に対しても、加群の場合 [Aus] と同様に Auslander 型長完全列が存在するため、これを基に Gorenstein 射影性や Gorenstein 次元を定義することができる [O]。このレポートの主目的は、安定複体論 [Y2] の基本事項と Gorenstein 次元有限複体に対する近似定理 [O] を紹介することである。

* E-mail:m21012v@math.nagoya-u.ac.jp

2 加群の Gorenstein 次元

有限生成右 R 加群 M に対し、$M^* = \mathrm{Hom}_R(M, R)$ と定める。これは M の R 双対と呼ばれ、有限生成右 R^{op} 加群となる。有限生成射影表示 $P_1 \xrightarrow{\partial} P_0 \to M \to 0$ をとったとき、∂ の R 双対の余核を $\mathrm{Tr}\, M$ と書き、故に完全列 $P_0^* \to P_1^* \to \mathrm{Tr}\, M \to 0$ が存在する。加群 $\mathrm{Tr}\, M$ は加群 M の**転置**と呼ばれ、（有限）射影表示の取り方に依らず射影因子の差を除き一意的に定まる。

自然な準同型 $\varphi_M : M \to M^{**}$ が $x \in M$ と $f \in M^*$ に対し $\varphi_M(x)(f) = f(x)$ により定まるが、次の Auslander 完全列（あるいは Auslander–Bridger 完全列）が基本的である。

定理 2.1 ([**Aus, ABr**])**.** 自然な準同型 $\varphi_M : M \to M^{**}$ に対し、完全列

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{R^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Tr}\, M, R) \to M \xrightarrow{\varphi_M} M^{**} \to \mathrm{Ext}^2_{R^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Tr}\, M, R) \to 0$$

が存在する。

有限生成右 R 加群 M に対し、自然な写像 $\varphi_M : M \to M^{**}$ が単射であるとき M は**捩れなし**（torsionless）であるといい、φ_M が全単射であるとき M は**反射的**（reflexive）であるという。Auslander 完全列（2.1）により、M が捩れなし（resp. 反射的）であることと $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{Tr}\, M, R) = 0$（resp. $\mathrm{Ext}^{1,2}(\mathrm{Tr}\, M, R) = 0$）であることは同値である。この定義を自然に拡張することにより、Auslander–Bridger [ABr] は加群の高次捩れ自由性を導入した[*1]。

定義 2.2 ([**ABr**])**.** 有限生成右 R 加群 M と非負整数 $n \geq 0$ に対し、M が **n-捩れ自由**（n-torsionfree）であるとは、$\mathrm{Ext}^i_{R^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Tr}\, M, R) = 0$ が任意の $1 \leq i \leq n$ に対して成り立つことをさす。

高次捩れ自由加群は次のような特徴付けを持つ「良い」加群である；有限生成右 R 加群 M が n-捩れ自由加群であるための必要十分条件は、各 P_i が有限生成射影加群でるような完全列 $0 \to M \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0$ が存在して、その R 双対 $P_0^* \to P_1^* \to \cdots \to P_{n-1}^* \to M^* \to 0$ もまた完全列となることである。このように n-捩れ自由加群が持つ R 双対に関する高い対称性を両側に無限遠まで延ばすことにより Gorenstein 射影性が定義される。

定義 2.3 ([**ABr**])**.** 有限生成右 R 加群 M が **G 次元 0** をもつ（あるいは **Gorenstein 射影的**、あるいは**全反射的**である）とは、$\mathrm{Ext}^i_R(M, R) = 0$ と $\mathrm{Ext}^i_{R^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Tr}\, M, R) = 0$ が任意の $i > 0$ で成り立つことをさす。

Gorenstein 射影加群 M は**完全分解**（complete resolution）をもつ。すなわち有限生成射影加群からなる左右に無限に延びる完全列 $\cdots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} \to P_{-2} \to \cdots$ が存在して、準同型 $P_1 \to P_0$ の余核が M となり、また R 双対複体 $\cdots \to P_{-2}^* \to P_{-1}^* \to P_0^* \to P_1^* \to P_2^* \to \cdots$ もまた完全列となる。この事実からも Gorenstein 射影加群が R 双対に関して究極的に高い対称性を有することが見て取れる。

[*1] 通常、可換環 R 上の有限生成加群 M について、自然な写像 $M \to M \otimes_R Q(R)$ が単射であるとき、M は**捩れ自由**（torsionfree）であるという。ここで、$Q(R)$ は R の全商環である。この定義のもと、R が整域であるときには、M が捩れ自由であることと捩れなしであることは同値となる。

Gorenstein 射影性を用いた可換環の Gorenstein 性の特徴付けについて述べる。可換環のホモロジー代数の基本定理である Serre の定理は「Krull 次元 d の可換ネーター局所環 R が正則（=非特異）であるための必要十分条件は、任意の $M \in \operatorname{mod} R$ に対しその d 次シジジー $\Omega^d M$ が射影的であることである」と述べることができる。後者の条件は、加群 M の射影次元が d 以下、すなわち完全列

$$0 \to P_d \to P_{d-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$$

であって、各 P_i が有限生成射影加群であるものが存在することの言い換えである。ところで、可換ネーター環に対する次のヒエラルキーは広く知られている。

$$\text{正則} \Longrightarrow \text{完全交差} \Longrightarrow \text{Gorenstein} \Longrightarrow \text{Cohen–Macaulay} \Longrightarrow \text{Buchsbaum} \Longrightarrow \cdots$$

Gorenstein 環は、非特異とは限らないものの極めて高い対称性を有する優れた可換環のクラスである。Auslander–Bridger [ABr] は、上述した加群の Gorenstein 射影性を用いることにより、Serre による正則局所環の特徴付けの Gorenstein 類似が与えられることを見出した。

定理 2.4 ([**ABr**])**.** Krull 次元 d の可換ネーター局所環 R に対し、次は同値。

- 環 R は Gorenstein。
- 任意の $M \in \operatorname{mod} R$ に対し、M の Gorenstein 次元は d 以下、すなわち $\Omega^d M$ が Gorenstein 射影的。

彼らの研究に動機づけられ、可換環上の加群に対し完全交差次元や CM 次元といった新たなホモロジカル次元が導入され、可換環論に新たな地平線を齎している。他方、従来のホモロジー代数の Gorenstein 類似を追求する Gorenstein ホモロジー代数もまた彼らの仕事を端緒として生まれ、環の表現論の潮流を成している。さて、Gorenstein 次元の有限性は射影次元の場合と同様に、Gorenstein 射影加群による有限右分解の存在により特徴づけられる。ここで Gorenstein 次元が有限な加群の構造を考えたとき、Auslander–Buchweitz 理論の帰結として実は次の近似定理が成り立つことが知られている。

定理 2.5 ([**ABu**])**.** 有限生成右 R 加群に対し次は同値。

- 加群 M の Gorenstein 次元は有限。
- 有限生成右 R 加群の短完全列 $0 \to Y_M \to X_M \to M \to 0$ が存在して、Y_M の射影次元は有限で、X_M は Gorenstein 射影的である。

このように Gorenstein 次元有限な加群の理解は Gorenstein 射影加群と射影次元有限加群の理解に（ある意味で）帰着されるのであって、定理 2.4 と併せると、可換 Gorenstein 環上のいかなる有限生成加群も、Gorenstein 射影加群と射影次元有限加群の貼り合わせで得られることになる。

3　安定複体論と主結果

引き続き R を両側ネーター環とする。有限生成射影加群からなる複体の圏のホモトピー圏 $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$（すなわち、$\mathsf{proj}\, R$ 上の複体圏のヌル複体たちによるイデアル商）に対し吉野 [Y2] により

構築された安定複体論と [O] の主結果の一つを紹介する。

定義 3.1 ([**Y2**])**.** ホモトピー圏 $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ の充満部分圏 $\mathrm{Add}\,R$ を、$R=(\cdots\to 0\to R\to 0\to\cdots)$ を含み、同型、シフト、直和因子、直和[*2]で閉じた充満部分圏の中で最小のものとする。

定義 3.2 ([**Y2**])**.** ホモトピー圏 $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ の充満部分圏 $\mathrm{Add}\,R$ によるイデアル商を $\underline{\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)}$ と書く。

部分圏 $\mathrm{Add}\,R$ は $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ の関手的有限部分圏であることが分かるので、次のようにシジジーとコシジジーを定義することが可能となる。詳細は述べられないが、これらが随伴対をなすことが後に述べる定理 3.9 や定理 3.11 の証明において本質的な役割を果たす。

定義-定理 3.3 ([**Y2**])**.** 対象 $X\in\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ に対し、その右 $\mathrm{Add}\,R$ 近似 $p:P\to X$ (resp. 左 $\mathrm{Add}\,R$ 近似 $q:X\to Q$) をとり、その余写像錐 (resp. 写像錐) を ΩX (resp. $\Omega^- X$) と書く。よって $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ 内に特三角 $\Omega X\to P\to X\to\Omega X[1]$ (resp. $X\to Q\to\Omega^- X\to X[1]$) が存在する。この対応によりシジジー関手 $\Omega:\underline{\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)}\to\underline{\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)}$ (resp. コシジジー関手 $\Omega^-:\underline{\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)}\to\underline{\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)}$) が定まる。このとき関手の対 (Ω^-,Ω) は随伴対をなす、すなわち関手的同型

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)}}(\Omega^- X,Y)\cong\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)}}(X,\Omega Y)$$

が $X,Y\in\underline{\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)}$ に対し成立する。

ホモトピー圏 $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ 内の任意の特三角 $X\to Y\to Z\to X[1]$ に対し、コホモロジーの長完全列

$$\cdots\to H^{i-1}(Z)\to H^i(X)\to H^i(Y)\to H^i(Z)\to H^{i+1}(X)\to\cdots$$

が延びる。他方、上のシジジーの定義を顧みると、複体 $X\in\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ の右 $\mathrm{Add}\,R$ 近似 $P\to X$ に対しコホモロジーの間の準同型 $H^i(P)\to H^i(X)$ は任意の整数 i で全射であることが分かる (逆も成立する)。すなわちシジジーの特三角 $\Omega X\to P\to X\to\Omega X[1]$ に対し、コホモロジーの長完全列は短完全列 $0\to H^i(\Omega X)\to H^i(P)\to H^i(X)\to 0$ に分解する。安定複体論において短完全列の役割を果たすのは、$\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ 内の特三角であって、コホモロジーの長完全列が上のように短完全列に分かれるものたちである。

定義 3.4 ([**O**])**.** ホモトピー圏 $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ 内の特三角 $X\to Y\to Z\to X[1]$ が**幽霊特三角** (ghost triangle) であるとは、コホモロジーの長完全列が任意の整数 i に対し短完全列 $0\to H^i(X)\to H^i(Y)\to H^i(Z)\to 0$ に分解することをいう。

特三角 $X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z\to X[1]$ が幽霊特三角であるための必要十分条件は、任意の i に対し $H^i(g):H^i(Y)\to H^i(Z)$ が全射である (g がコホモロジー的全射) ことであり、これは任意の i に対し $H^i(f):H^i(X)\to H^i(Y)$ が単射である (f がコホモロジー的単射) こととといっても同じである。

[*2] $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ の対象の無限族の直和は、必ずしも $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ 内で存在するとは限らない。よってここでは、$\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ の充満部分圏 $\mathcal{X}$ が、任意の $\mathcal{X}$ の対象の族 $\{X_i\}_{i\in I}$ に対して、その直和 $\coprod_{i\in I}X_i$ が $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\,R)$ 内で存在すれば $\coprod_{i\in I}X_i\in\mathcal{X}$ を満たすとき、$\mathcal{X}$ は直和で閉じるといっている。

例 3.5 ([**Y2**])**.** 有限生成 R 加群 M とその有限生成射影分解 $\cdots \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \to 0$ をとる。複体 $X = (\cdots \to 0 \to P_1 \to P_0 \to 0 \to \cdots) \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ のシジジーとコシジジーを計算してみる。複体 $P = (\cdots \to 0 \to P_2 \xrightarrow{0} P_0 \to 0 \to \cdots) \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ と複体射

$$\begin{array}{ccccccccccc} P & = & (& \cdots \to & 0 & \to & P_2 & \xrightarrow{0} & P_0 & \to 0 \to & \cdots \quad) \\ \downarrow{\scriptstyle p} & & & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_2} & & \| & \downarrow & \\ X & = & (& \cdots \to & 0 & \to & P_1 & \xrightarrow{d_1} & P_0 & \to 0 \to & \cdots \quad) \end{array}$$

を考えると、$P \in \mathrm{Add}\, R$ であって、$p : P \to X$ はコホモロジー的全射である。よって p は X の右 $\mathrm{Add}\, R$ 近似であって、X のシジジーが

$$\begin{aligned} \Omega X &= (\cdots \to 0 \to P_2 \xrightarrow{\binom{0}{d_2}} P_0 \oplus P_1 \xrightarrow{(1,0)} P_0 \to 0 \to \cdots) \\ &\cong (\cdots \to 0 \to P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \to 0 \to \cdots) \text{ in } \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R) \end{aligned}$$

と計算できる。他方 $\mathrm{Tr}\, M$ の有限生成射影分解を $\cdots \to Q_2 \to Q_1 \to P_0^* \to P_1^* \to \mathrm{Tr}\, M \to 0$ ととれば、X のコシジジーも同様に計算でき、$\Omega^- X = (\cdots \to 0 \to P_0 \to Q_1^* \to 0 \to \cdots)$ となる。

加群の R 双対に関する Auslander 完全列（定理 2.1）の複体版を考える。複体 $X \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ と整数 i に対し、自然な準同型 $\gamma_X^i : H^i(X) \to H^{-i}(X^*)^*$ が $\overline{f} \in H^{-i}(X^*)$ と $\overline{x} \in H^i(X)$ に対し $\gamma_X^i(\overline{x})(\overline{f}) = f(x)$ とすることにより定まる。複体に対する Auslander 型の完全列は、加群のときのように 4 項では終わらず、次のように無限に続いていく。

定理 3.6 ([**Y2, O**])**.** 複体 $X \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ と整数 i、そして自然な準同型 $\gamma_X^i : H^i(X) \to H^{-i}(X^*)^*$ に対し、次の長完全列が存在する。

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Tr}\, C^i(X), R) \to H^i(X) \xrightarrow{\gamma_X^i} H^{-i}(X^*)^* \to \mathrm{Ext}^2(\mathrm{Tr}\, C^i(X), R) \\ \to \mathrm{Ext}^1(\mathrm{Tr}\, C^{i+1}(X), R) \to \mathrm{Ext}^1(H^{-i}(X^*), R) \to \cdots \end{aligned}$$

複体 $X \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ の捩れなし性（resp. 反射性）を、自然な準同型 $\gamma_X^i : H^i(X) \to H^{-i}(X^*)^*$ が任意の i で単射（resp. 全単射）であることに定義することは自然に思える。さらにこれらの概念は、上の完全列により以下のように自然に高次化される。

定義 3.7. [**O**]] X を $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ の対象とし、n を非負整数とする。

- 複体 X が **n-捩れ自由**であるとは、$\mathrm{Ext}^i_{R^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Tr}\, C^j(X), R) = 0$ が任意の $1 \le i \le n$ と任意の整数 j に対し成り立つことをさす。
- 複体 X が **Gorenstein 射影的**であるとは、$\mathrm{Ext}^i_R(C^j(X), R) = 0$ と $\mathrm{Ext}^i_{R^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Tr}\, C^j(X), R) = 0$ が任意の $i > 0$ と任意の整数 j に対し成り立つことをさす。

例 3.8. 有限生成右 R 加群 M に対し、例 3.5 の複体 $X = (\cdots \to 0 \to P_1 \to P_0 \to 0 \to \cdots) \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ を考える。このとき、X が n-捩れ自由（resp. Gorenstein 射影的）であることと、M が n-捩れ自由（resp. Gorenstein 射影的）であることは同値である。したがって、複体の n-捩れ自由性や Gorenstein 射影性は、加群に対するそれらの自然な類似である。

幽霊特三角を用いて、n-捩れ自由性や Gorenstein 射影性が次のように特徴づけられる。加群の場合の特徴づけと比較されたい。

定理 3.9 ([**O**])**.** 複体 $X \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ と非負整数 n に対し、次が成立する。

(1) 複体 X が n-捩れ自由であるための必要十分条件は、n 個の $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ 内の幽霊特三角 $X_i \to P_{i-1} \to X_{i-1} \to X_i[1]$（$1 \leq i \leq n$）が存在して、任意の $1 \leq i \leq n$ で $P_{i-1} \in \operatorname{Add} R$ かつ R 双対 $X_{i-1}^* \to P_{i-1}^* \to X_i^* \to X_{i-1}^*[1]$ も幽霊特三角で、さらに $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ の対象として $X \cong X_n$ である。

(2) 複体 X が Gorenstein 射影的であるための必要十分条件は、任意の整数 i に対し $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ 内の幽霊特三角 $X_i \to P_{i-1} \to X_{i-1} \to X_i[1]$ が存在して、任意の i で $P_{i-1} \in \operatorname{Add} R$ かつ R 双対 $X_{i-1}^* \to P_{i-1}^* \to X_i^* \to X_{i-1}^*[1]$ も幽霊特三角で、さらに $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ の対象として $X \cong X_0$ である。

我々の文脈における複体の射影次元や Gorenstein 次元も幽霊特三角による右近似の長さの下限により与えられる。

定義 3.10 ([**O**])**.** 複体 $X \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ の**射影次元**（resp. **Gorenstein 次元**）を、n 個の幽霊特三角 $X_i \to A_{i-1} \to X_{i-1} \to X_i[1]$（$1 \leq i \leq n$）が存在し、各 $A_0, \cdots, A_{n-1}, X_n$ が $\operatorname{Add} R$ の対象（resp. Gorenstein 射影的）で、$\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ の対象として $X \cong X_0$ となるような、非負整数 n たちの下限で定義する。

Gorenstein 次元有限な複体の構造について、Auslander–Buchweitz 近似定理の複体版が以下のように述べられる。

定理 3.11 ([**O**])**.** 複体 $X \in \mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ に対し、以下は同値となる。

- 複体 X の Gorenstein 次元は有限。
- $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ 内の幽霊特三角 $Y \to G \to X \to Y[1]$ が存在して、Y の射影次元は有限で、G は Gorenstein 射影的である。

加群に対する Auslander–Buchweitz 近似定理は、上の定理からしたがう。実際、有限生成加群 M が有限な Gorenstein 次元を持つと仮定して、例 3.5 の複体 $X = (\cdots \to 0 \to P_1 \to P_0 \to 0 \to \cdots)$ を考える。このとき例 3.8 により X は $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ の対象として有限な Gorenstein 次元を持ち、上の定理により $\mathcal{K}(\mathsf{proj}\, R)$ 内の幽霊三角 $Y \to G \to X \to Y[1]$ であって Y の射影次元が有限かつ G が Gorenstein 射影的であるものが存在する。0 次コホモロジーをとって短完全列 $0 \to H^0(Y) \to H^0(G) \to H^0(X) \to 0$ を得る。加群 $H^0(Y)$ は射影次元有限で $H^0(G)$ は Gorenstein 射影的なので、この短完全列は加群 $M \cong H^0(X)$ の Auslander–Buchweitz 近似を与えている。

参考文献

[Aus] M. Auslander, Coherent functors, *Proc. Conf. Categorical Algebra (La Jolla, Calif.,*

1965), 189–231, *Springer, New York*, 1966.

[ABr] M. Auslander; M. Bridger, Stable module theory, Memoirs of the American Mathematical Society **94**, *American Mathematical Society, Providence, R.I.*, 1969.

[ABu] M. Auslander; R.-O. Buchweitz, The homological theory of maximal Cohen–Macaulay approximations, Colloque en l'honneur de Pierre Samuel (Orsay, 1987), *Mém. Soc. Math. France (N.S.)* **38** (1989), 5–37.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S.O. Smalø, Representation theory of Artin algebras, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **36**, *Cambridge University Press, Cambridge*, 1995.

[ASS] I. Assem; D. Simson; A. Skowroński, Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory, London Mathematical Society Student Texts, **65**, *Cambridge University Press, Cambridge*, 2006.

[LW] G. J. Leuschke; R. Wiegand, Cohen–Macaulay Representations, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 181, *American Mathematical Society, Providence, RI*, 2012.

[O] Y. Otake, On Auslander–Bridger–Yoshino theory for complexes of finitely generated projective modules, preprint (2023), `arXiv:2311.12173`.

[Y1] Y. Yoshino, Cohen–Macaulay modules over Cohen–Macaulay rings, revised edition, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **146**, *Cambridge University Press, Cambridge*, 1990.

[Y2] Y. Yoshino, Homotopy categories of unbounded complexes of projective modules, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **105** (2022), no. 1, 100–153.

非アルキメデス的関数解析における自己共役コンパクト作用素のスペクトル分解

東北大学大学院 理学研究科 数学専攻
石塚康介 (Kosuke Ishizuka) *

概要

古典的な関数解析において, ヒルベルト空間上の自己共役コンパクト作用素のスペクトル分解定理は有名な定理である. この定理の非アルキメデス的関数解析における類似を考えた際に問題になることは, 「直交作用素」が存在するかということである. 一般にそのような作用素は存在しないが, Narici と Beckenstein によって剰余体が実体である場合は「内積」が良い性質をもつことが分かり, 「直交作用素」の存在が示された. 本稿では, 剰余体が実体である場合の自己共役コンパクト作用素について得られた結果を紹介する.

1 導入

非アルキメデス的関数解析とは, 係数体が (完備) 非アルキメデス的付値体であるような関数解析のことをいう. ここで, 非アルキメデス的付値体とは強三角不等式と呼ばれる次の不等式

$$|x+y| \leq \max(|x|, |y|)$$

を満たす体のことであった. 特に三角不等式を満たすため, 古典的な場合 (係数体が実数体, 複素数体である関数解析) と同様に, 開写像原理, 一様有界性原理などは非アルキメデス的関数解析においても成り立つ. しかし, いつでも古典的な結果が成立するわけではなく, 例えばハーン-バナッハの定理は成り立たないことが知られている. このような事情から, 非アルキメデス的関数解析の研究では, 古典的な概念と類似した概念を, まず定義し, そして古典的な場合との違いを調べるということが一つのテーマとなる.

本稿では古典的なヒルベルト空間上の自己共役コンパクト作用素のスペクトル分解定理に注目する. 非アルキメデス的関数解析においてこの定理の類似を考える際に, 大きく分けて 2 つの問題が生じる. まず, コンパクト作用素を非アルキメデス的関数解析においてどのように定義するかという問題である. 非アルキメデス的付値体は一般に局所コンパクトでないため古典的なコンパクト作用素の定義は機能しないことがわかる. そこで, Gruson と van der Put によって導入されたコンパクトイドを用いてコンパクト作用素の類似であるコンパクトイド作用素が定義される. コンパクトイド作用素についてはセクション 3 で詳しく述べる. もう 1 つ問題になることは, 非アルキメデス的関数解析においてヒルベルト空間とは何であるかということである. 実は非アルキメデス的関数解析におい

* E-mail:kosuke.ishizuka.r7@dc.tohoku.ac.jp

て, 「良い直交性」を持つ無限次元空間は存在しないことが知られている. よって, 古典的なヒルベルト空間に完全に対応する概念は存在しないのだが, ヒルベルト空間の類似物としてセクション 4 で数列空間 c_0 を導入する. c_0 においては, 自己共役であるという概念を考えることができ, 更に, Narici と Beckenstein によって, 剰余体が実体である場合には古典的なヒルベルト空間に類似した性質を持つことが知られている. 最後にセクション 5, 6 にて本研究で得られた結果を紹介する.

2 準備

本セクションでは本稿で用いる記号を整備する.

K は非自明な付値 $|\cdot| : K \to [0, \infty)$ による, 完備非アルキメデス的付値体とする. $B_K := \{x \in K : |x| \leq 1\}$ によって K の整数環, k によって K の剰余体を表す. バナッハ空間は常に K 上のバナッハ空間を考えることにする. ここでバナッハ空間のノルム $\|\cdot\|$ は強三角不等式

$$\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$$

を満たすとする.

$(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ をバナッハ空間とするとき, $\mathcal{L}(E, F)$ によって, E から F への有界作用素全体の集合を表す. また, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ に対して, $\|T\| := \sup_{x \neq 0} \|T(x)\|/\|x\|$ によって $\mathcal{L}(E, F)$ 上のノルムを定める. $E = F$ であるときは, $\mathcal{L}(E, E)$ を $\mathcal{L}(E)$ で表し, $I \in \mathcal{L}(E)$ を E 上の恒等作用素とする.

$T \in \mathcal{L}(E)$ に対して, T のスペクトル集合を $\sigma(T) := \{\lambda \in K : \lambda I - T$ が可逆でない $\}$ と定め, $\sigma_p(T) := \{\lambda \in K : \mathrm{Ker}(\lambda I - T) \neq 0\}$ を T の固有値の集合とする. これらは全て K 上で考えていることに注意せよ. 実際 K が代数閉体であってもスペクトル集合が空である場合がある.

3 コンパクトイド作用素

本セクションでは (プレ) コンパクト性の類似物であるコンパクトイドを導入し, コンパクトイド作用素を定義する. そして, 既に知られている性質について述べる.

定義 3.1. バナッハ空間 $(E, \|\cdot\|)$ の部分集合 A がコンパクトイドであるとは, 任意の $r > 0$ に対して, 有限個の元 $a_1, \cdots, a_n \in E$ が存在して,

$$A \subseteq B_E(0, r) + B_K a_1 \cdots + B_K a_n$$

が成り立つときにいう. ここで, $B_E(0, r) := \{x \in E : \|x\| \leq r\}$ である.

注意 3.2. K が局所コンパクトであるときは, コンパクトイドはプレコンパクトと同値である.

コンパクトイドが定義されたことにより, コンパクト作用素の類似物であるコンパクトイド作用素が定義される.

定義 3.3. $(E, \|\cdot\|), (F, \|\cdot\|)$ をバナッハ空間として, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ がコンパクトイド作用素であるとは, $T(B_E(0, 1))$ がコンパクトイドであるときにいう.

古典的な場合, ヒルベルト空間上のコンパクト作用素は, 像が有限次元であるような作用素で近似されるのであった. 非アルキメデス的関数解析においては, この結果がいつでも成り立つ.

定理 3.4 ([7, Theorem 4.39])**.** $T \in \mathcal{L}(E,F)$ がコンパクトイド作用素であることと, 像が有限次元である作用素の列 $T_1, T_2, \cdots \in \mathcal{L}(E,F)$ で $\lim_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$ を満たす列が存在することは同値である.

一般に K が代数閉体であっても, スペクトル集合が空である場合があるが, コンパクトイド作用素に対しては古典的な結果と同様に次の 2 つの定理が成り立つ.

定理 3.5 ([6, Theorem 6.14])**.** K を代数閉体, $T \in \mathcal{L}(E)$ をコンパクトイド作用素とする. このとき,

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$$

が成り立つ.

定理 3.6 ([6, Corollary 3.3, Theorem 5.6])**.** $T \in \mathcal{L}(E)$ をコンパクトイド作用素作用素とする. このとき次が成り立つ.
(1) $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \in \sigma(T)$ をそれぞれ相異なる元とすると, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ である.
(2) $\lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0$ とすると $\lambda \in \sigma_p(T)$ である.
(3) $\lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0$ とすると $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$ は有限次元である.

4 ヒルベルト空間と内積

本セクションでは数列空間 c_0 を導入し, c_0 上の内積についての性質を紹介する.

古典的なヒルベルト空間の非アルキメデス的関数解析における類似物を考えたいのだが, 古典的な場合と同様に「良い直交性」を持つ無限次元空間は存在しないことが知られている ([5, Theorem 2.4.5]). そこで代替物として数列空間 c_0 を導入する. c_0 の定義は次の通りである:

$$c_0 := \{x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\},$$
$$\|x\| := \max_n |x_n|,\ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0.$$

上に定めたノルム $\|\cdot\|$ によって c_0 をバナッハ空間とみなす. 次の定理は数列空間が基本的な空間であることを示すものである.

定理 4.1 ([5, Corollary 2.3.9])**.** 有限次元でない可算型であるバナッハ空間 $(E, \|\cdot\|)$ は, $(c_0, \|\cdot\|)$ とバナッハ空間として同型である (等長的であるとは限らない). ここで, $(E, \|\cdot\|)$ が可算型であるとは, 抽象的なベクトル空間としての次元が高々可算である稠密部分空間が存在するときにいう.

c_0 上には自然な内積を考えることができる. すなわち, $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ に対して, $\langle x, y\rangle := \sum_n x_n y_n$ と定めるのである. ヒルベルト空間は内積を通して双対空間と同一視されたが, c_0 はそうでないことに注意せよ.

内積を用いることで c_0 上に共役作用素を定義することができる.

定義 4.2. $T \in \mathcal{L}(c_0)$ が共役作用素を持つとは, $S \in \mathcal{L}(c_0)$ が存在して, 任意の $x, y \in c_0$ に対して $\langle T(x), y\rangle = \langle x, S(y)\rangle$ が成り立つときにいう. このような S は T に対して一意に定まるので T^* と書いて, T の共役作用素という. また T が共役作用素を持ち, $T = T^*$ であるとき, T は自己共役作用素であるという.

古典的なヒルベルト空間においては, 「直交」という概念が重要な役割を果たしたため, c_0 上の内積についても「直交」に注目してみる. そこで, c_0 の部分集合 X に対して, $X^\perp := \{x \in c_0 :$ 任意の $y \in X$ に対して $\langle x, y\rangle = 0\}$ と定めることにする. また, $x, y \in c_0$ に対して $\langle x, y\rangle = 0$ であるとき $x \perp y$ と書き, x と y は直交しているという. ここで問題になることが, 閉部分空間 $M \subseteq c_0$ に対して $M \cap M^\perp = 0$, $M + M^\perp = c_0$ という性質が成り立つとは限らないことである. そこで, Narici と Beckenstein は剰余体 k に実体であるという仮定を課すことで, 内積がより良い性質をもつことを発見した. 実体の定義は以下の通りである.

定義 4.3. 体 F が実体であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と, 任意の $a_1, a_2, \cdots, a_n \in F$ に対して, $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 0$ ならば, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ が成り立つときにいう.

本稿ではこれ以降, K の剰余体 k は**実体**であると仮定する.

定理 4.4 ([4, Theorem 3.1, Theorem 6.1])**.** k が実体であるとき,
(1) 任意の $x \in c_0$ に対して, $\|x\| = |\langle x, x\rangle|^{1/2}$,
(2) $x, y \in c_0$ が直交するならば, $\|x + y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$,
が成り立つ.

定理 4.4 により, 閉部分空間 $M \subseteq c_0$ に対して $M \cap M^\perp = 0$ が成立する. しかし, どのような K であっても, $M + M^\perp \neq c_0$ を満たす $M \subseteq c_0$ の存在が知られている. そこで, $M + M^\perp = c_0$ となる条件を考える.

定義 4.5 ([1, Definition 6])**.** $P \in \mathcal{L}(c_0)$ が直交作用素であるとは, P が自己共役作用素であって, $P^2 = P$ が成り立つときにいう.

定理 4.6 ([1, Corollary 3])**.** 閉部分空間 M に対して, $M + M^\perp = c_0$ であることと, 直交作用素 $P \in \mathcal{L}(c_0)$ で $\mathrm{Im}P = M$ を満たすものが存在することは同値である. またこのような P は存在するならば一意である.

M が有限次元である場合は, $M + M^\perp = c_0$ であることが知られている. もっと詳しいことについては [4] を参照せよ.

定理 4.7 ([4, Corollary 8.2])**.** 閉部分空間 $M \subseteq c_0$ が有限次元である場合は, $M + M^\perp = c_0$ である.

最後に本研究で必要な定理を述べて, このセクションを終える.

定理 4.8. $T \in \mathcal{L}(c_0)$ を自己共役作用素とする. このとき, $\|T^2\| = \|T\|^2$ である. よって, $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \|T\|$ を満たす.

5　主結果

本セクションでは, 主結果を述べる. K の剰余体 k は実体であるという仮定をもう一度注意しておく. まず, 目標となることは自己共役コンパクトイド作用素のスペクトル分解定理である. この定理について述べる前に, 実体 F に対して条件 $(\mathrm{H})_F$ を次のように定める.

$(\mathrm{H})_F$: 任意の $n \in \mathbb{N}$, 対称行列 $A \in \mathcal{M}_n(F)$ に対して A は F 上で対角化可能である.

ここで, $\mathcal{M}_n(F)$ は F 上の n 次行列全体の集合である.

定理 5.1. K が $(\mathrm{H})_K$ を満たすことと, 任意の自己共役コンパクトイド作用素 $T \in \mathcal{L}(c_0)$ が

$$\|T\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$$

を満たすことは同値である.

この定理により, 次のスペクトル分解定理の類似を得る.

定理 5.2. K が $(\mathrm{H})_K$ を満たし, $T \in \mathcal{L}(c_0)$ を自己共役コンパクトイド作用素とする. このとき, 互いに直交するベクトルの列 $x_1, x_2, \cdots \in c_0$ と $(\lambda_n) \in c_0$ が存在して, 任意の $x \in c_0$ に対して

$$T(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n P_n(x)$$

が成り立つ. ここで, P_n は x_n が生成する 1 次元部分空間の上への直交作用素である.

注意 5.3. この定理は, [2, Theorem 4.3] を直したものである. [2, Theorem 4.3] の証明は Fifth step が間違っている. またこの定理が成り立つには条件 $(\mathrm{H})_K$ が必要であることは明らかであるが, 参考文献では K に対角化に関する条件を仮定していないこともおかしいのである. 加えて [3, Theorem 10] も [2, Theorem 4.3] と同様の証明であるため間違っているが, 本研究の手法により正しい証明を与えることができる.

次に条件 $(\mathrm{H})_F$ について調べる. F を実体として, $U \in \mathcal{M}_n(F)$ が ${}^tUU = I$ を満たすとき, U を直交行列と呼ぶことにする. まず次の命題が成り立つ.

命題 5.4. 実体 F が条件 $(\mathrm{H})_F$ を満たすことは, 任意の $n \in \mathbb{N}$, 対称行列 $A \in \mathcal{M}_n(F)$ に対して, A が F 上の直交行列で対角化可能であることと同値である.

この命題や, 様々な定理を用いることで次の定理を得る.

定理 5.5. 体 K が条件 $(\mathrm{H})_K$ を満たすことは, 剰余体 k が条件 $(\mathrm{H})_k$ を満たすことと同値である.

6　定理 5.1, 5.2 の証明の概略

本セクションでは定理 5.1, 5.2 の証明の概略について述べる. 基本になることは古典的な作用素解析のようなものである. $T \in \mathcal{L}(c_0)$ を自己共役コンパクトイド作用素として T の行列表示を

$(a_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ とする．すなわち, 任意の $j\in\mathbb{N}$ に対して, $T(e_j)=\sum_i a_{i,j}e_i$ を満たすとする．ここで, $e_j\in c_0$ は j 成分が 1 でそれ以外の成分が 0 であるベクトルである．任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して $T_n\in\mathcal{L}(c_0)$ を次のように定める．

$$T_n(e_j):=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}e_i & ;(1\le j\le n)\\ 0 & ;(n+1\le j)\end{cases}.$$

このとき T_n は n 次対称行列から定まる作用素である．

さて, $r\in|K|$, $r\neq 0$ を

$$B_K(0,r)\subseteq\{\lambda\in K : I-\lambda T \text{ は可逆である }\}$$

を満たす任意の元とする．このとき, [6, Proposition 6.12] より $M_r:=\sup_{|\lambda|\le r}\|(I-\lambda T)^{-1}\|<\infty$ である．[6] では便宜上 K が代数閉体であることを課しているがこの命題にはその仮定が必要ない．$\lambda\in B_K(0,r)$ に対して 簡単な計算により

$$\begin{aligned}&I-\lambda T_n=(I-\lambda T)(I+(I-\lambda T)^{-1}\lambda(T-T_n)),\\&\|(I-\lambda T)^{-1}\lambda(T-T_n))\|\le rM_r\|T-T_n\|\end{aligned}$$

が成り立つ．ここで　T が自己共役コンパクトイド作用素であることから, $\lim_{n\to\infty}\|T-T_n\|=0$ であるので, 十分大きい $n\in\mathbb{N}$ に対しては,

$$B_K(0,r)\subseteq\{\lambda\in K : I-\lambda T_n\text{は可逆である }\}$$

が成り立つ．よって $(\mathrm{H})_K$ より, このような $n\in\mathbb{N}$ に対して, $(I-\lambda T_n)^{-1}$ は $B_K(0,r)$ 上解析的である．更に,

$$\|(I-\lambda T)^{-1}-(I-\lambda T_n)^{-1}\|\le r(M_r)^2\|T-T_n\|$$

が成り立つので, $(I-\lambda T)^{-1}$ も $B_K(0,r)$ 上解析的である．r が任意であったことから, K の付値が稠密である場合は,

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}=\sup\{|\lambda| : \lambda\in\sigma(T)\}$$

を得る．そして, 定理 4.8 より定理 5.1 が導かれる．また, K の付値が離散的である場合は, $\pi\in B_K$ を極大イデアルを生成する元としたとき,

$$\|T\|\le|\pi|^{-1}\sup\{|\lambda| : \lambda\in\sigma(T)\}$$

を得る．これらの事実を用いて定理 5.2 を示すことができる．その結果として K の付値が離散的である場合も, 定理 5.1 が示される．では定理 5.2 の証明の概略を述べる．まず, 定理 3.6 により 0 でないスペクトル集合の元は全て固有値であることに注意せよ．また定理 3.6 により, $N\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$ が存在して

$$|\sigma_p(T)\setminus\{0\}|=\{r_n\}_{1\le n\le N},\quad r_1>r_2>\cdots$$

と表せる. ここで, $N=\infty$ の場合は $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ である. $N=\infty$ として示す. 任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して, $\{\lambda_{n1},\cdots,\lambda_{nm_n}\} = \{\lambda\in\sigma_p(T) : |\lambda| = r_n\}$, $N_n = \sum_{1\le l\le n}\sum_{1\le k\le m_l}\mathrm{Ker}(\lambda_{lk}I - T)$ とする. このとき, 定理 3.6, 4.7 より, N_n の上への直交作用素 P_n が存在する. $Q_n = I - P_n$ とすると, T が自己共役作用素であることから, $\sigma_p(TQ_n) = \sigma_P(T)\setminus(\bigcup_{1\le l\le n}\bigcup_{1\le k\le m_l}\{\lambda_{lk}\})$ である. よって, $\lim_{n\to\infty}\|TQ_n\| = 0$ であり定理 5.2 が示された.

参考文献

[1] J. Aguayo and M. Nova, Non-Archimedean Hilbert like spaces, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 14, 787—797 (2007).

[2] J. Aguayo and M. Nova, Compact and Self-adjoint operators on Free Banach Spaces of countable type, Advances in non-Archimedean analysis, 1–17, Contemp. Math., 665, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2016).

[3] J. Aguayo, M. Nova, K. Shamseddine, Characterization of compact and self-adjoint operators on free Banach spaces of countable type over the complex Levi-Civita field, J. Math. Phys. 54 (2) (2013).

[4] L. Narici, E. Beckenstein, A non-Archimedean Inner Product, Contemporary Mathematics, vol. 384 (2005), 187–202.

[5] C. Perez-Garcia, W. H. Schikhof, *Locally convex spaces over non-archimedean valued fields*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 119. Cambridge University Press, Cambridge (2010).

[6] W.H. Schikhof, On p-adic compact operators, Report 8911, pp. 1—28, Department of Mathematics, Catholic University, Nijmegen, The Netherlands (1989).

[7] A. C. M. van Rooij, *Non-Archimedean functional analysis*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., vol. 51, Marcel Dekker, Inc., New York (1978).

Key 多項式と flagged Schur 多項式

杉本 奨吾 (Sugimoto Shogo)

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻

Abstract

Key 多項式は Demazure によって導入された A 型 Demazure 加群の指標を表す特殊多項式である．Assaf は key 多項式の組合せ論的表示のひとつである semi standard key tableaux 表示を与えた．我々は Assaf とは別の方法での証明を与える．また Key 多項式は flagged Schur 多項式の一般化になっており Liner–Shimozono は Key 多項式が flagged Schur 多項式となる必要十分条件を与えた．我々は彼らとは別の Key 多項式が flagged Schur 多項式となる必要十分条件を与える．本内容は松村朝雄氏との共同研究に基づく．

1 導入

Key 多項式は Demazure [2] によって導入された A 型 Demazure module の指標を表す表現論的な関数である．この多項式は composition（0 以上の整数列）を添字に持ちある作用素を用いて定義される．Kohnert [3] は Key 多項式を Kohnert diagram とよばれる図形を用いた組合せ論的表示を与えた．彼の表示から発展して Assaf [1] はこの多項式の別の組合せ論的表示（tableaux 公式）を与えた．

Schubert 多項式は Lascoux–Schützenberger [4] によって導入された旗多様体の cohomology 環の Schubert 基底を表す特殊多項式である．この多項式は対称群を添字にもつ多項式であり特殊な permutation においては flagged Schur 多項式となる．つまり flagged Schut 多項式は幾何的な関数である．

さらに Reiner–Shimozono [5] は幾何的な関数である flagged Schur 多項式の族が表現論的関数である key 多項式の族に含まれることと, key 多項式が flagged Schur 多項式となるときの必要十分条件を与えた．

本稿では Assaf の与えた Key 多項式の tableaux 公式の別証明と Reiner–Shimozono の与えた key 多項式が flagged Schur 多項式となるときの必要十分条件の別条件を与える．

2 Key 多項式

2.1 Demazure 作用素

Key 多項式は次の作用素（Demazure 作用素）を用いて定義される．

定義 2.1. 作用素 $\pi_i : \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n] \to \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ （$i = 1, \cdots, i-1$）を

$$\pi_i(f) = \frac{x_i f - x_{i+1} s_i(f)}{x_i - x_{i+1}}$$

で定義する．ここで $s_i(f)$ は多項式 $f \in \mathbb{Z}[x_1, \cdots, x_n]$ の x_i と x_{i+1} を入れ替えて得られる多項式である．この作用素 π_i を *Demazure* 作用素という．

命題 2.2. *Demadure* 作用素には次の性質がある．

(1) $\pi_i^2 = \pi_i \quad (i = 1, \cdots, i-1)$

(2) $\pi_1 \pi_j = \pi_j \pi_i \quad (|i-j| \geq 2)$

(3) $\pi_i \pi_{i+1} \pi_i = \pi_{i+1} \pi_i \pi_{i+1} \quad (i = 1, \cdots, i-2)$

Demazure 作用素は整数を添え字にもつ作用素であるがこれを対称群の元を添字にもつように拡張する.

定義 2.3. S_n を n 次対称群とする. $w \in S_n$ の最短表示を $w = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ とする. ここで $i_1, \cdots, i_\ell \in \{1, \cdots, n-1\}$ であり s_i は $i, i+1$ の互換を表す. このとき π_w を

$$\pi_w = \pi_{i_1} \cdots \pi_{i_\ell}$$

で定義する.

命題 2.2 から π_w は最短表示のとりかたによらないことがわかる.

2.2 Key 多項式の定義

定義 2.4. 0 以上の有限整数列を *composition* という.
さらに *composition* であり単調減少の数列を *partition* といい 単調増加である数列を *flag* という.
Composition $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対して $\lambda(\alpha)$ を $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を入れ替えて得られる *partition* とする.
$w(\alpha) \in S_n$ を $\alpha w(\alpha) = \lambda(\alpha)$ となる *permutation* であり *length* が最短であるものとする.
ここで $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}, w = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ w_1 & \cdots & w_n \end{pmatrix} \in S_n$ に対して αw を $\alpha w = (\alpha_{w_1}, \cdots, \alpha_{w_n})$ で定義する.

定義 2.5. *[2]* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ を *composition* とする. *Key* 多項式 κ_α を次で定義する.

$$\kappa_\alpha = \pi_{w(\alpha)}(x^{\lambda(\alpha)})$$

例 1. $\alpha = (0, 1, 2, 1)$ とする. このとき $\lambda(\alpha) = (2, 1, 1, 0), w(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ である（$w(\alpha) \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ であることに注意）. $w(\alpha)$ を最短表示すると $w = s_2 s_1 s_2 s_3$ である. よって

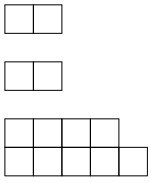
$$\begin{aligned}
\kappa_\alpha &= \pi_{w(\alpha)}(x^{\lambda(\alpha)}) = \pi_2\pi_1\pi_2\pi_3(x_1^2x_2^1x_3^1x_4^0) \\
&= \pi_2\pi_1\pi_2 \frac{x_1^2x_2^1x_3^2x_4^0 - x_1^2x_2^1x_3^0x_4^2}{x_3 - x_4} = \pi_2\pi_1\pi_2(x_1^2x_2^1x_3^1x_4^0 + x_1^2x_2^1x_3^0x_4^1) \\
&= \pi_2\pi_1 \frac{(x_1^2x_2^2x_3^1x_4^0 + x_1^2x_2^2x_3^0x_4^1) - (x_1^2x_2^1x_3^2x_4^0 + x_1^2x_2^0x_3^2x_4^1)}{x_2 - x_3} = \pi_2\pi_1(x_1^2x_2^1x_3^1x_4^0 + x_1^2x_2^1x_3^0x_4^1 + x_1^2x_2^0x_3^1x_4^1) \\
&= \pi_2 \frac{(x_1^3x_2^1x_3^1x_4^0 + x_1^3x_2^1x_3^0x_4^1 + x_1^3x_2^0x_3^1x_4^1) - (x_1^1x_2^3x_3^1x_4^0 + x_1^1x_2^3x_3^0x_4^1 + x_1^0x_2^3x_3^1x_4^1)}{x_1 - x_2} \\
&= \pi_2(x_1^2x_2^1x_3^1x_4^0 + x_1^1x_2^2x_3^1x_4^0 + x_1^2x_2^1x_3^0x_4^1 + x_1^1x_2^2x_3^0x_4^1 + x_1^2x_2^0x_3^1x_4^1 + x_1^1x_2^1x_3^1x_4^1 + x_1^0x_2^2x_3^1x_4^1) \\
&= x_1^2x_2^1x_3^1x_4^0 + x_1^1x_2^2x_3^1x_4^0 + x_1^1x_2^1x_3^2x_4^0 + x_1^2x_2^1x_3^0x_4^1 + x_1^2x_2^0x_3^1x_4^0 + x_1^1x_2^2x_3^0x_4^1 \\
&\quad + x_1^1x_2^1x_3^1x_4^1 + x_1^1x_2^0x_3^2x_4^1 + x_1^1x_2^1x_3^0x_4^1 + x_1^0x_2^2x_3^1x_4^1 + x_1^0x_2^1x_3^2x_4^1
\end{aligned}$$

3 Key 多項式の tableaux 公式

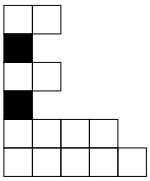
3.1 Semi standard key tableaux

定義 3.1. $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell)$ を *compositiion* とする. $\mathbb{D}(\alpha)$ を各 i 行に α_i 個の箱を左詰めでならべた図形とする. ここで $i = 1, \cdots, \ell$ である.

例 2. $\alpha = (2, 0, 2, 0, 4, 5)$ のとき
$\mathbb{D}(\alpha)$ は



であるが 2 行目, 4 行目が 0 であることをあらわすために



と表すこともある.

定義 3.2. *[1]* $\mathbb{D}(\alpha)$ の各箱に次の条件で整数を入れた盤を *semi standard key tableau* という.

(1) 各行は左から右に単調減少

(2) 各行の最大の整数はその行番号を超えない

(3) 各列に同じ整数はあらわれない

(4) 整数 j の下に同じ列で i があり $j < i$ のとき j のすぐ右に必ず整数 i より大きい整数が入る

定義 3.3. *Composition* α に対して多項式 K_α を

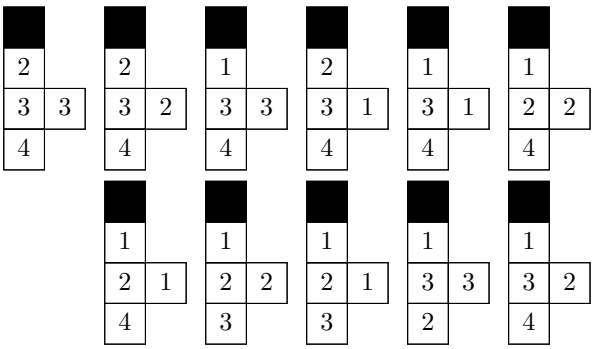
$$K_\alpha = \sum_{T \in SSKT(\alpha)} x^T$$

で定義する. ここで $x^T = x_1^{wt(T)_1} x_2^{wt(T)_2} \cdots$ である. ただし $wt(T)_i$ は T のなかで i のあらわれる回数である.

定理 3.4. *[1]* α を *composition* とする. このとき次の等式が成立する.

$$\kappa_\alpha = K_\alpha$$

例 3. $\alpha = (0, 1, 2, 1)$ のとき $SSKT(\alpha)$ は次の *tableaux* で構成される.



よって

$$\begin{aligned} K_\alpha \quad = \quad & x_1^0 x_2^1 x_3^2 x_4^1 + x_1^0 x_2^2 x_3^1 x_4^1 + x_1^1 x_2^0 x_3^2 x_4^1 + x_1^1 x_2^1 x_3^1 x_4^1 + x_1^2 x_2^0 x_3^1 x_4^1 + x_1^1 x_2^2 x_3^0 x_4^1 \\ & + x_1^2 x_2^1 x_3^0 x_4^1 + x_1^1 x_2^2 x_3^1 x_4^0 + x_1^2 x_2^1 x_3^1 x_4^0 + x_1^1 x_2^1 x_3^2 x_4^0 + x_1^1 x_2^1 x_3^1 x_4^1 \end{aligned}$$

であり, 例 *1* とあわせて $\kappa_\alpha = K_\alpha$ となることがわかる.

3.2 定理 3.4 の証明

Assaf は定理 3.4 を Kohnert[3] が示した key 多項式のもう一つの組合せ論的表示を用いて証明した．我々は定理 3.4 の直接的な証明を与える．

命題 3.5. $\alpha = (\alpha_1, \cdots .\alpha_n)$ を *composition* とする．

(1) α が *partiton* のとき $\kappa_\alpha = K_\alpha$ である．

(2) $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ とするとき $\kappa_\alpha = \pi_i \kappa_{\alpha s_i}$, $K_\alpha = \pi_i K_{\alpha s_i}$ が成立する．

この命題から $\{i|\alpha_i < \alpha_{i+1}\}$ （ascent という）の個数の帰納法で定理 3.4 は証明できる．

4 Flagged Schur 多項式

定義 4.1. $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell)$ を *partition*, $f = (f_1, \cdots, f_\ell)$ を *flag* とする．$\mathbb{D}(\lambda)$ の各箱に次の条件で整数を入れた盤を *flagged semi standard tableau* という．

(1) 各行左から右に $=$ 付きで単調増加

(2) 各列上から下に真に単調増加

(3) 各行の最大の整数は f_i 以下

(λ, f) に対する *flaged semi standard tableaux* 全体を $T(\lambda, f)$ と表す．

例 4. $\lambda = (3,2), f = (1,4)$ のとき $T(\lambda, f)$ は次の 6 つの *tableaux* で構成される．

1	1	1	,	1	1	1	,	1	1	1	,	1	1	1	,	1	1	1	,	1	1	1
2	2			2	3			2	4			3	3			3	4			4	4		

例 5. $\lambda = (2,1,1), f = (3,3,4)$ のとき $T(\lambda, f)$ は次の 11 個の *tableaux* で構成される．

1	1	,	1	2	,	1	3	,	1	1	,	1	2	,	1	3	,	1	1	,	1	2	,	1	3	,	2	2	,	2	3
2			2			2			2			2			2			3			3			3			3			3		
3			3			3			4			4			4			4			4			4			4			4		

定義 4.2. $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ を *partiiton*, $f = (f_1, \cdots, f_n)$ を *flag* とする．*Flagged Schur* 多項式 $s_{\lambda,f}$ を

$$s_{\lambda,f} := \sum_{T \in T(\lambda,f)} x^T$$

で定義する．

例 6. 上の例 *4* から $\lambda = (3,2), f = (1,4)$ のとき

$$s_{\lambda,f} = x_1^3x_2^2 + x_1^3x_2x_3 + x_1^3x_2x_4 + x_1^3x_3^2 + x_1^3x_3x_4 + x_1^3x_4^2$$

である．

例 7. 上の例 *5* から $\lambda = (2,1,1), f = (3,3,4)$ のとき

$$\begin{aligned} s_{\lambda,f} \quad = \quad & x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 + x_1^2x_2x_4 + x_1x_2^2x_4 \\ & + x_1x_2x_3x_4 + x_1^2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3^2x_4 + x_2^2x_3x_4 + x_2x_3^2x_4 \end{aligned}$$

である．

4.1 Key 多項式と flagged Schur 多項式

Flagged Schur 多項式は Lascoux– Schützenberger[4] によって導入された Schur 多項式を一般化した多項式であり特殊な場合の Schubert 多項式となっている. Flagged Schur 多項式 $s_{\lambda,f}$ は適当な composition α をとることで $s_{\lambda,f} = \kappa_\alpha$ となる. とくに $\lambda(\alpha) = \lambda$ である. つまり Key 多項式は flagged Schur 多項式の一般化となっている. Reiner–Shimozono [5] は Key 多項式が flagged Schur 多項式となるための必要十分条件を与えた.

定義 4.3. $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell)$ を *composition* とする. $key(\alpha)$ を i （$i = 1, \cdots, \ell$）が 1 列目から α_i 列目までちょうど 1 回現れる *semi standard tableau* とする.

例 8. $\alpha = (0, 2, 5, 3, 4)$ のとき $key(\alpha) =$ $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2&2&3&3&3\\\hline 3&3&4&5\\\cline{1-4} 4&4&5\\\cline{1-3} 5&5\\\cline{1-2}\end{array}$ である.

定義 4.4. T を $T(\lambda, f)$ の *tableau* とする. T のどの整数もその整数より大きい値におきかえたとき $T(\lambda, f)$ の元とならないとき T は *flag* f で *entrywise maximum* という.

例 9. $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline 3&3&3\\\cline{1-3} 5&5\\\cline{1-2}\end{array}$ はどのような *flag* f でも *entrywise maximum* とはならない. 左上の 1 を 2 に置き換えても *flagged semi standard tableau* となるためである. また $\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&2\\\hline 3&3&3\\\cline{1-3} 5&5\\\cline{1-2}\end{array}$ は *flag* $f = (2, 3, 5)$ で *entrywise maximum* であるが *flag* $f = (2, 3, 4)$ では *entrywise maximum* でない.

定理 4.5. *[5]* α を *composition* とする. $key(\alpha)$ がある *flag* f で *entrywise maximum* であることと $\kappa_\alpha = s_{\lambda(\alpha),f}$ であることは同値である.

例 10. $\alpha = (0, 1, 2, 1)$ のとき $key(0, 1, 2, 1) =$ $\begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\cline{1-2} 3\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}$ でありこれは $f = (3, 3, 4)$ で *entry wise maximum* となる. 例 *1, 7* から $\kappa_\alpha = s_{\lambda(\alpha),f}$ となることがわかる.

定義 4.6. α を *composition* とする. $\phi(\alpha)_i$ を $key(\alpha)$ の i 行目の最も右の箱にある整数とし $\phi(\alpha) = (\phi(\alpha)_1, \cdots, \phi(\alpha)_r)$ とおく.

$u(\alpha)$ を $u(\alpha) = u^{(1)} \cdots u^{(r)}$, $u^{(i)} = s_{g_i - 1} \cdots s_{i+1} s_i$ とおく. ただし $g(\alpha)_i$ を $\alpha u^{(1)} \cdots u^{(i-1)}$ の i 以降の *part* で最も大きい整数でもっとも左の位置とする. $g(\alpha) = (g(\alpha)_1, \cdots, g(\alpha)_r)$ とおく.

定理 4.7. α を *composition* とする. $g(\alpha) = \phi(\alpha)$ であることと $\kappa_\alpha = s_{\lambda(\alpha),\phi(\alpha)}$ であることは同値.

References

[1] Sami Assaf. Nonsymmetric Macdonald polynomials and a refinement of Kostka-Foulkes polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 370, No. 12, pp. 8777–8796, 2018.

[2] Michel Demazure. Désingularisation des variétés de Schubert généralisées. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, Vol. 7, pp. 53–88, 1974.

[3] Axel Kohnert. Weintrauben, Polynome, Tableaux. *Bayreuth. Math. Schr.*, No. 38, pp. 1–97, 1991. Dissertation, Universität Bayreuth, Bayreuth, 1990.

[4] Alain Lascoux and Marcel-Paul Schützenberger. Géométric algébrique-polynômes de schubert,. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, Vol. 294, , 1982.

[5] Victor Reiner and Mark Shimozono. Key polynomials and a flagged Littlewood-Richardson rule. *J. Combin. Theory Ser. A*, Vol. 70, No. 1, pp. 107–143, 1995.

A numerical criterion of ACM bundles on Rational Normal Scrolls

日本経済大学 経営学部 経営学科
矢城 信吾 (Shingo YASHIRO)

概要

古来より射影直線上のベクトル束の射影化として構成される Rational Normal Scroll と呼ばれる多様体がある．この Rational Normal Scroll については様々な視点からの考察がなされている．本稿においては，Rational Normal Scroll 上の line bundle が ACM であることの数値的判定条件について述べる．

1 Introduction

本稿では，k は標数任意の代数的閉体とし，$S = k[z_0, \ldots, z_N]$ を通常の次数付け $\deg z_i = 1$ の多項式環とする．また S は射影空間 $\mathbb{P}^N_k$ の斉次座標環である．X を n 次元射影多様体とし，X の因子 D に付随する射影空間への埋め込み $\varphi_D : X \to \mathbb{P}^N$ について考える．$\mathbb{P}^N$ の構造層 $\mathcal{O}$ とその埋め込みに対するイデアル層 $\mathcal{I}_X$ において，X が ACM（Arithmetically Cohen Macaulay）であるとは

$$H^1(\mathbb{P}^N, \mathcal{I}_X(m)) = 0 \ (m \in \mathbb{Z}), \text{ and } H^i(\mathbb{P}^N, \mathcal{O}_X(m)) = 0 \ (1 < i < n, \ m \in \mathbb{Z})$$

となることが必要十分条件である．このコホモロジーの vanishing を考察することで，数値的な条件を得るのが，主結果の一部である．

以下，Rational Normal Scroll $\pi : X = \mathbb{P}(\mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_r)) \to \mathbb{P}^1 \ (0 < a_1 \leq \cdots \leq a_r)$ を考える．これを射影空間 $\mathbb{P}^N$ に埋め込み，その X 上の因子を $Y = aH + bF \ (a, b \in \mathbb{Z})$ とする．$d = a_1 + \cdots + a_r$ とおくと，次の主張が得られる．

定理 1.1 ([1],cf.[2])**.** *Y が ACM であるための必要十分条件は，$a \geq 2$ かつ $-d + 1 \leq b \leq 1$ である．*

また一般の場合に戻って，$X \subset \mathbb{P}^N$ を射影多様体とする．X が m-regular であるとは

$$H^i(\mathbb{P}^N, \mathcal{I}_X(m - i)) = 0 \ (i \geq 1)$$

が成り立つことをいう．また射影多様体 X が m-regular であることを，$\operatorname{reg} X := \operatorname{reg} \mathcal{I}_X$ であらわす．

先述の結果と同様に，$\pi : X = \mathbb{P}(\mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_r)) \to \mathbb{P}^1 \ (0 < a_1 \leq \cdots \leq a_r)$ を考える．これを射影空間 $\mathbb{P}^N$ に埋め込み，その X 上の因子を $Y = aH + bF \ (a, b \in \mathbb{Z})$ とする．$d = a_1 + \cdots + a_r$ とおき，コホモロジーの vanishing を考察することで，次の結果を得る．

定理 1.2 ([1],cf.[2]). $\operatorname{reg} X = \begin{cases} a & (a \geq 2 \ \textit{and} \ b = -d+1), \\ a+1 & (a \geq 2 \ \textit{and} \ -d+2 \leq b \leq 1). \end{cases}$

特にこの regularity を考えることは，極小自由分解を構成する上での 1 つの重要な不変量である．実際に [3] の考察より，次のことがいえる．

定理 1.3 ([3]). *m-regular* な射影多様体 $X \subset \mathbb{P}^N$ の極小自由分解 $F_\bullet \to S_X \to 0$. を考える．$F_p = \bigoplus_i S(-a_{p,i})$ $(i \geq 0)$ とし，$a_p = \max_i\{a_{p,i}\}$ としたとき，$a_p \leq p+m$ が成り立つ．

また射影多様体 X の埋め込みに対する極小自由分解において，N_p 条件なるものが考察される ([4][5])．極小自由分解を $F_\bullet \to S_X \to 0$ で $F_i = \bigoplus_j S(-a_{i,j})$ を考えたとき，X が N_p 条件を満たすとは，次の条件を満たすことである：

$$E_0 = S \ \text{and} \ a_{i,j} = i+1 \ (j \in \mathbb{Z}, \ 1 \leq i \leq p).$$

この条件は埋め込み $\varphi_D : X \to \mathbb{P}^N$ を考えたとき，$\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ とすると

1. N_0 条件を満たすとは，$m \geq 0$ において
$$\operatorname{Sym}^m H(X, \mathcal{L}) \to H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes m})$$
が全射となることと同値である．
2. N_1 条件を満たすとは，N_0 条件を満たし，かつ I_X が 2 次斉次式で生成されることと同値である．
3. N_2 条件を満たすとは，N_1 条件を満たし，かつ I_X の 2 次斉次式の生成元 Q_r において
$$\sum_i L_i Q_i = 0 \ (L_i \in S \ \text{linear})$$
なる関係式が成り立つことと同値である．

この N_p 条件を満たすか否かで極小自由分解の形が決定できる．例えば m-regular で N_p 条件を満たすような射影多様体の極小自由分解は

$$0 \to \bigoplus S(-p-1) \to \bigoplus S(-p) \to \cdots \to \bigoplus S(-m-1) \to \bigoplus S(-m) \to S \to S_X \to 0.$$

の形でかける．これは Linear resolution と呼ばれる形である．これらは後述の正規有理曲線 (Rational Normal Curve) やより一般的な Rational Normal Scroll の極小自由分解の形である ([6][7])．この条件などを Rational Normal Scroll 上の因子や部分多様体について考察していくのが本研究のテーマとなる．

2 Rational Normal Scroll

以下，Rational Normal Scroll の構成および極小自由分解を考える．記法や添え字などは，前節と異なることを注意しておく．Rational Normal Scroll とは，$\mathbb{P}^1$ 上の階数 n のベクトル束 $\mathcal{E}$ の射影化 $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \to \mathbb{P}^1$ をある射影空間 $\mathbb{P}^N$ に埋め込んだものである．具体的には

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n) \ (0 < a_1 \leq \cdots \leq a_n)$$

に対して，$N=\sum_{i=1}^{n}a_i+n-1$ とおいて埋め込むものである．$X=\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の定義イデアル I_X を考える．$D=\sum_{i=1}^{n}a_i+n$ として $2\times D$ 行列

$$M_{D,1}=\left(\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} x_{1,0} & \cdots & x_{1,a_1-1} & x_{2,0} & \cdots & x_{2,a_2-1} & \cdots & x_{n,0} & \cdots & x_{n,a_n-1} \\ x_{1,1} & \cdots & x_{1,a_1} & x_{2,1} & \cdots & x_{2,a_2} & \cdots & x_{n,1} & \cdots & x_{n,a_n} \end{array}\right)$$

の 2×2 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M_{D,1})$ に等しい．$S=k[x_{1,0},\ldots,x_{n,a_n}]$ における定義イデアル I_X の極小自由分解は

$$0\longrightarrow S(-N)^{\oplus(N-1)}\longrightarrow\cdots\longrightarrow S(-i-1)^{\oplus i\binom{N}{i+1}}\longrightarrow\cdots$$

$$\longrightarrow S(-2)^{\oplus\binom{N}{2}}\longrightarrow S\longrightarrow S_X\longrightarrow 0.$$

である．これは Eagon-Northcott 複体の一例となる．

注意 2.1. 階数 1 のベクトル束 $\mathcal{O}(a_1)(a_1>0)$ のとき，$X=\mathbb{P}(\mathcal{O}(a_1))\cong\mathbb{P}^1$ であり，埋め込みは $X\subset\mathbb{P}^{a_1}$ となるから，正規有理曲線を意味する．

注意 2.2. 階数 2 のベクトル束 $\mathcal{E}=\mathcal{O}(a_1)\oplus\mathcal{O}(a_2)(0<a_1\leq a_2)$ のとき，$\pi:X=\mathbb{P}(\mathcal{E})\to\mathbb{P}^1$ に対して，$\mathcal{E}'=\mathcal{E}\otimes\mathcal{O}(-a_2)$ とすると，$X\cong\mathbb{P}(\mathcal{E}')$ となる．これから *Hirzebruch* 曲面[*1]に同型であることがいえる．

注意 2.3. $[t_0,t_1]$ を底空間 $\mathbb{P}^1$ の斉次座標系とし，$[z_1,\ldots,z_n]$ を X 上におけるファイバー $\mathbb{P}^{n-1}$ の斉次座標系とすると，埋め込み先の $\mathbb{P}^N$ 上での $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の斉次座標 $x_{i,j}$ は

$$x_{i,j}|_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}=t_0^{a_i-j}t_1^{j}z_i$$

と表すことができる．

ここで，$\operatorname{Pic}X$ について言及しておく．$i:X\to\mathbb{P}^N$ を埋め込みとし，$\pi:X\to\mathbb{P}^1$ を $\mathbb{P}^{n-1}$ 束とする．$H=[i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)]$ とし，$F=[\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1(1)}]$ とする．このとき

$$\operatorname{Pic}X\cong\mathbb{Z}H\oplus\mathbb{Z}F$$

となる．ここで intersection pairing として

$$H^n=\deg\mathcal{E},H^{n-1}.F=1,F^2=0$$

がいえる．[*2]Rational Normal Scroll $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ と $\mathbb{P}^1$ のコホモロジー群 H^0 については次の関係がいえる：

[*1] [8] で構成される正規化されたベクトル束から構成される Hirzebruch 曲面

[*2] X 上の minimal section として，$H_0=H-a_nF$ が取れる．これは $H-rF$ が effective となるような最大の $r\in\mathbb{N}$ とみることができる．

命題 2.4. $\mathbb{P}^1$ 上の階数 n のベクトル束

$$\mathcal{E} = \mathcal{O}(a_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(a_n) \ (0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_n)$$

の射影化 $X = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ について，$a \geq 0, b \geq -1$ とすると

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(aH + bF)) \cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathrm{Sym}^a \mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b))$$

が成り立つ.

命題 2.5. $D, N, \mathcal{E}, X$ を上述の通りとする．$a \geq 0, b \geq -1$ のとき

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(aH + bF)) = (D - n) \begin{pmatrix} a+n-1 \\ n \end{pmatrix} + (b+1) \begin{pmatrix} a+n-1 \\ n-1 \end{pmatrix}$$

となる.[*3]

補足

有理曲線の中で基本的である正規有理曲線は，[7]，[8]，[9]，[10] などで解説されている．以下，$\mathbb{P}^1$ の斉次座標系を $[t_0, t_1]$ とする．すなわち，$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(1)) = \langle t_0, t_1 \rangle$ とする．射影直線 $\mathbb{P}^1$ も次数 n の因子 D による大域切断

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(D)) = \langle t_0^n, t_0^{n-1}t_1, \ldots, t_0 t_1^{n-1}, t_1^n \rangle$$

を考える．この基底により構成される射 $\varphi : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ の閉埋め込みであり，その像 $C = \varphi_D(\mathbb{P}^1)$ は n 次の有理曲線となる．これを正規有理曲線という．この曲線の定義イデアル I_C は $\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}$ 個の 2 次斉次多項式で生成される．この正規有理曲線 C の定義イデアル I_C は $2 \times n$ 行列

$$M_{n,1} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

の 2×2 小行列式全体で生成されるイデアル $I_2(M_{n,1})$ に等しい．この極小自由分解は Rational Normal Scroll の特別な場合である.

先述の N_p 条件について考えると，Rational Normal Scroll や 正規有理曲線は Minimal Degree と呼ばれる射影多様体のクラスとなる．これは $\deg X = \operatorname{codim} X + 1$ となるような多様体であり，それらは

1. 射影空間
2. 2 次超曲面
3. Veronese Surface
4. Rational Normal Scroll
5. 上記 2.〜 4. までの射影多様体の Cone Type

[*3] この式より，X の次数と次元によって h^0 が決まることがわかる.

となり，それは $\operatorname{reg} X = 2$ となる．この Linear resolution とならないような例としては，$\deg X = \operatorname{codim} X + 2$ となるような射影多様体（Almost Minimal Degree）のクラスが分類されている ([11],[12])．

3　証明の概略と今後の考察について

以下，証明の概略である．まず X 上の因子 Y が effective であるための条件を考察すると

補題 3.1. $Y = aH + bF$ が *effective* であるための必要十分条件は $a = 0, b > a_r$ または $a = 1, b \geq 1$ または $a \geq 2, b \geq -aa_r$ である．

Proof. Bertini の定理による． Q.E.D

また ample 条件を述べると次のようになる．

補題 3.2. $Y = aH + bF$ が *ample* であるための必要十分条件は $a > 0, b > -(a_1 + \cdots + a_r)a$ となる．

Proof. 中井の Ample 判定法による． Q.E.D

これらを利用して，コホモロジーの vanishing を考察することで結果を得る．

また今後の考察の方針について少し述べる．今回，[1] で得られた結果の一部を紹介したが，[2] でも考察がされている．こちらは Cone Type との関連性が考察がされており, 大変参考となった．さらに，Arithmetically Buchsbaum Divisor に関する考察は [13] によって述べられている．これは Rational Normal Scroll より一般的な Minimal Degree な射影多様体上の因子について考察されている．その中でも ACM divisor と regularity の関係性を表した評価式は参考になっている．

定理 3.3 ([13])**.** *Y を ACM 多様体とし, 標数 0 かまたは $c \geq 5$ と仮定する．$d > (c+1)^2$ のとき, 次の 3 条件は互いに同値である．*

1. $\operatorname{reg} X = \lceil (d-1)/c \rceil + 1$
2. $m(X) = \lceil d/c \rceil$
3. *X はある $Minimal\ Degree\ variety$ 上の因子である．*

このような形式で整理できればと考えている．ACM vector bundle については [1] を参照していただければと思う．

謝辞

本稿をまとめるにあたり, 第 20 回数学総合若手研究集会の世話人の方々へは多大なご配慮をいただきました．この場を借り, 厚く御礼申し上げますとともに, 研究を遂行していきたいと思います.

参考文献

[1] S. Yashiro. A numerical criterion of acm bundles on rational normal scrolls. *Preprint*.

[2] Euisung Park. On syzygies of divisors on rational normal scrolls. *Mathematische Nachrichten*, 287(11-12):1383–1393, 2014.

[3] David Eisenbud, Mark Green, Klaus Hulek, and Sorin Popescu. Restricting linear syzygies: algebra and geometry. *Compositio Mathematica*, 141(6):1460–1478, 2005.

[4] R.K. Lazarsfeld. *Positivity in Algebraic Geometry I: Classical Setting: Line Bundles and Linear Series*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer, 2004.

[5] R.K. Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry II*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete : a series of modern surveys in mathematics. Folge 3. Springer Berlin Heidelberg, 2004.

[6] D. Eisenbud. *Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.

[7] D. Eisenbud. *The Geometry of Syzygies: A Second Course in Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2006.

[8] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[9] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. Wiley Classics Library. Wiley, 1978.

[10] J. Harris. *Algebraic Geometry: A First Course*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1992.

[11] Le Tuan Hoa, Jürgen Stückrad, and Wolfgang Vogel. Towards a structure theory for projective varieties of degree = codimension + 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 71(2):203–231, 1991. Special Issue In Honor of H. Matsumura.

[12] Le Tuan Hoa. On minimal free resolutions of projective varieties of degree = codimension + 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 87(3):241–250, 1993.

[13] Uwe Nagel. Arithmetically buchsbaum divisors on varieties of minimal degree. *Transactions of the American Mathematical Society*, 351(11):4381–4409, 1999.

奇数次 Galois 拡大体上の既約ルート格子と符号

東京理科大学大学院　創域理工学研究科　数理科学専攻
比嘉 陸 (Riku HIGA) *

概要

n を奇数、$F/\mathbb{Q}$ を n 次 Galois 拡大とすると、F は self-dual basis をもつ。 F に埋め込めるランク n の既約ルート格子について考えると、$n+1$ が平方数でないとき、格子の体積 (判別式) からルート格子 A_n は F に埋め込めないことがわかる。本講演では F の self-dual basis を用いて、任意の奇数 n に対して、ルート格子 D_n が、$n+1$ が平方数のときに、ルート格子 A_n が、それぞれ構成できることを示す。また、構成したルート格子と符号との対応について議論する。

1　導入

符号理論は、情報の伝達や保存に関する理論で、通信、データ圧縮、誤り訂正、暗号化などの分野で応用されており、数学や情報工学の融合という点でも注目される分野である。一方で、保型形式は、複素解析や数論、表現論など多くの分野で重要な役割を果たしており、最近では量子数理や暗号理論などの分野でも活用されている。その中で 1 変数の保型形式 (楕円モジュラー形式) は数学において極めて重要な研究対象である。符号からモジュラー形式を構成する方法としては、符号から格子を構成し、その格子のテータ関数を利用する方法がある。偶ユニモジュラー格子というとても性質の良い格子はその格子のテータ関数がモジュラー形式となる。2 元符号の場合は重偶自己双対符号という誤り検出・訂正能力の高い符号から格子を構成すると偶ユニモジュラー格子を構成できる。

自己双対符号とユニモジュラー格子の対応は 2 元符号だけでなく、様々な有限環上の符号において研究されており、その際重要になるのが、符号に対応する格子（特に既約ルート格子）がどのような体に埋め込めるのかということである。

代数体においては Ebeling [3] により奇素数 p について A_{p-1} 型ルート格子を $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ に、Bayer-Flückiger [1] により D_4、E_6、E_8 がそれぞれ $\mathbb{Q}(\zeta_8)$、$\mathbb{Q}(\zeta_9)$、$\mathbb{Q}(\zeta_{20})$ に、de Araujo、Jorge [2] により、自然数 $n \geq 3$ に対して D_n が $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ (p は素数で、$p \equiv 1 \mod n$) に埋め込めることが知られている。

本稿では、奇数次の Galois 拡大体に埋め込める既約ルート格子を決定する。また、そのルート格子と符号との対応により、自己双対符号からユニモジュラー格子を構成する方法を考察する。

* E-mail:6123702@ed.tus.ac.jp

2　主定理

主定理 2.1. n を奇数、$F/\mathbb{Q}$ を n 次 Galois 拡大とする。

(1) $n \geq 5$ に対して、D_n 型の格子 $\Lambda \subset F$ が存在する。
(2) $n+1 \in \mathbb{Q}^{\times 2}$ のとき、A_n 型の格子 $\Lambda \subset F$ が存在する。

主定理 2.2. 主定理 2.1 の格子 Λ と長さ m の Λ^*/Λ-符号 C に対して

$$C = C^{\perp} \Longleftrightarrow \Gamma_C = \Gamma_{C^{\perp}}$$

となる格子 $\Gamma_C \subset F^{\oplus m}$ が存在する。

3　格子と符号

この章では格子と符号の基本事項を述べる。詳細は [3]、[6] を参照。

定義 3.1. Λ をランク n の自由 $\mathbb{Z}$-加群とし、双線型形式 $\langle\ ,\ \rangle : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{R}$ を考える。

1. $\Lambda = (\Lambda, \langle\ ,\ \rangle)$ が**格子**であるとは $\langle\ ,\ \rangle$ が正定値対称双線型形式であることすなわち、$x \in \Lambda \backslash \{0\}$ に対して $\langle x, x\rangle > 0$ であり、かつ $x, y \in \Lambda$ に対して $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ を満たすときを言う。
2. 格子 Λ が**整**であるとは $x, y \in \Lambda$ に対して $\langle x, y\rangle \in \mathbb{Z}$ を満たすことである。
3. 整格子 Λ が**偶**であるとは $x \in \Lambda$ に対して $\langle x, x\rangle \in 2\mathbb{Z}$ を満たすことである。
4. 格子 Λ が A_n 型であるとは Λ が次を満たす基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ を持つときを言う。

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 2 & |j-i| = 0, \text{ i.e., } j = i, \\ -1 & |j-i| = 1, \\ 0 & |j-i| \geq 2. \end{cases}$$

5. 格子 Λ が D_n 型 $(n \geq 4)$ であるとは Λ が次を満たす基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ を持つときを言う。

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 2 & |j-i| = 0, \text{ i.e., } j = i, \\ -1 & (|j-i| = 1 \text{ かつ } \{i,j\} \neq \{n-1, n\}) \text{ または } \{i,j\} = \{n-2, n\}, \\ 0 & (|j-i| \geq 2 \text{ かつ } \{i,j\} \neq \{n-2, n\}) \text{ または } \{i,j\} = \{n-1, n\}. \end{cases}$$

6. 格子 Λ が E_n 型 $(n = 6, 7, 8)$ であるとは Λ が次を満たす基底 $(e_1, \ldots, e_n)$ を持つときを言う。

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 2 & |j-i| = 0, \text{ i.e., } j = i, \\ -1 & (|j-i| = 1 \text{ かつ } \{i,j\} \neq \{n-1, n\}) \text{ または } \{i,j\} = \{n-3, n\}, \\ 0 & (|j-i| \geq 2 \text{ かつ } \{i,j\} \neq \{n-3, n\}) \text{ または } \{i,j\} = \{n-1, n\}. \end{cases}$$

7. ランク n の格子 Λ に対して、**双対格子** Λ^* を次で定義する。

$$\Lambda^* := \left\{ x \in \mathbb{R}^{\oplus n} \mid \forall y \in \Lambda, \langle x, y\rangle \in \mathbb{Z} \right\}$$

($\mathbb{R}^{\oplus n} \simeq \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ であり $\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathbb{R}^{\oplus n} \times \mathbb{R}^{\oplus n}$ に拡張して考える。)

格子 Λ が整であることと $\Lambda \subset \Lambda^*$ は同値である。本稿では代数体上の整格子について考える。

定義 3.2. F を代数体とする

1. F が**総実**であるとは任意の準同型写像 $F \to \mathbb{C}$ が $\mathbb{R}$ 上に値をとることである。
2. F が **CM** (complex multiplication) であるとは、F が $[F : F^+] = 2$ となる総実な部分体 F^+ をもち、準同型写像 $F \to \mathbb{R}$ を持たないときを言う。

F が CM 体であるとき、$\mathrm{Gal}(F/F^+)$ は複素共役で生成される。

補題 3.3. F は総実または CM 体であるとする。このとき、

$$\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}_F : F \times F \to \mathbb{Q}; (x, y) \mapsto \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(x\bar{y})$$

は正定値対称双線型形式である。

特にすべての F 上の部分 $\mathbb{Z}$-加群 Λ に対して, $(\Lambda, \mathrm{Tr}\,|_{\Lambda\times\Lambda})$ は格子である。

定義 3.4. $\mathbb{Q}$-ベクトル空間 F の基底 $(e_1, \ \ldots, \ e_n)$ が self-dual であるとは

$$\mathrm{Tr}(e_i, e_j) = \delta_{i,j} \quad (\text{クロネッカーのデルタ})$$

を満たすことである。

定理 3.5. 奇数次 Galois 拡大体 $F/\mathbb{Q}$ は self-dual $\mathbb{Q}$-基底を持つ。

Proof. 証明は [4, Theorem 2.1] を参照。 □

定義 3.6. 自然数 $l \geq 2$、$m \geq 1$ をとる。

1. 長さ m の $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ 上の**符号** C (または、長さ m の $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$-符号 C) とは $(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{\oplus m}$ 上の $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$-加群のことである。
2. C の元を**符号語**と言う。
3. 符号語 x の成分が i であるものの数を $n_i(x)$ で表す。
4. 符号語 x の Euclidean 重み $\mathrm{wt}_{\mathrm{E}}(x)$ を

$$\mathrm{wt}_{\mathrm{E}}(x) := (1^2)n_1(x) + \cdots + (l^2)n_l(x).$$

   で定義する。
5. $x = (x_1, \cdots, x_m), \ y = (y_1, \cdots, y_m) \in (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{\oplus m}$ に対して内積を

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \ .$$

   で定義する。
6. 長さ m の $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$-符号 C の**双対符号**を次で定義する。

$$C^{\perp} := \{x \in (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{\oplus m} \mid \forall y \in C, \ x \cdot y = 0\}.$$

7. $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$-符号 C が**自己双対**であるとは $C = C^{\perp}$ を満たすことである。

4　奇数次 Galois 拡大体上の既約ルート格子

この章では主定理 2.1 を証明する。

4.1　D_n 型格子

n は 5 以上の奇数とし、$F/\mathbb{Q}$ を n 次 Galois 拡大、$(\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n)$ を F 上の self-dual $\mathbb{Q}$-基底とする。

$$\begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & -1 & -1 \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

とすると、

$$(\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(e_i \cdot e_j)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & & \\ & -1 & \ddots & -1 & & \\ & & \ddots & 2 & -1 & -1 \\ & & & -1 & 2 & \\ & & & -1 & & 2 \end{pmatrix}$$

より、$(e_1,\ \ldots,\ e_n)$ を基底とする格子は F 上の D_n 型格子である。

4.2　$A_n(n+1 \in \mathbb{Q}^{\times 2})$ 型格子

$a > 0$ を偶数、$n+1 = a^2$（i.e. n は奇数）、$F/\mathbb{Q}$ を n 次 Galois 拡大、$(\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n)$ を F 上の self-dual $\mathbb{Q}$-基底とする。

$$\begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & & & \frac{1}{a-1} \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & -1 & & \vdots \\ & & 1 & -1 & \frac{1}{a-1} \\ & & & -1 & \frac{a-2}{a-1} \end{pmatrix}$$

とすると、

$$(\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(e_i \cdot e_j)) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & \ddots & & & \\ & -1 & \ddots & -1 & & \\ & & \ddots & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となるので、$(e_1,\ \ldots,\ e_n)$ を基底とする格子は F 上の A_n 型格子である。

4.3 E_7 型、A_n 型 $(n+1 \notin \mathbb{Q}^{\times 2})$ 格子

$n > 0$ を奇数、$F/\mathbb{Q}$ を n 次 Galois 拡大、$(\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n)$ を F 上の self-dual $\mathbb{Q}$-基底とする。
$\Lambda \subset F$ を $\mathbb{Q}$-基底 $(e_1,\ \ldots,\ e_n)$ を持つ格子とすると、

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_j$$

を満たす行列 $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ が存在し、 $\det A \in \mathbb{Q}$ となる。
つまり

$$\#(\Lambda^*/\Lambda) = \det(\mathrm{Tr}(e_i \cdot e_j))_{1\leq i,j\leq n} = \det(A\ (\mathrm{Tr}(\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j))_{1\leq i,j\leq n}\ {}^{\mathrm{t}}A) = (\det A)^2 \in \mathbb{Q}^{\times 2}$$

を満たす。
ここで、A_n, D_n, E_n 型の格子 Λ は

$$\Lambda^*/\Lambda \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z} & \Lambda \text{ が } A_n \text{ 型のとき,} \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\oplus 2} & \Lambda \text{ が } D_n \text{ 型かつ } n \text{ が偶数,} \\ \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} & \Lambda \text{ が } D_n \text{ 型かつ } n \text{ が奇数,} \\ \mathbb{Z}/(9-n)\mathbb{Z} & \Lambda \text{ が } E_n \text{ 型.} \end{cases}$$

を満たす。(cf.[3]) よって、F 上に E_n 型、A_n 型 $(n+1 \notin \mathbb{Q}^{\times 2})$ の格子は存在しない。

5 D_n 型、A_n 型格子と符号

この章では主定理 2.2 を証明する。

5.1 D_n 型格子と $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-符号

n は 5 以上の奇数とし、$F/\mathbb{Q}$ を n 次 Galois 拡大、$(\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n)$ を F 上の self-dual $\mathbb{Q}$-基底とする。

$$e_i = \begin{cases} \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} & (1 \leq i \leq n-1) \\ \varepsilon_n + \varepsilon_1 & (i = n), \end{cases}$$

とし、

$$\begin{aligned} e_i^* &= \frac{1}{2}\varepsilon_i + (\frac{1}{2}\varepsilon_{i+1} - \frac{1}{2}\varepsilon_{i+2} + \cdots + \frac{1}{2}\varepsilon_{i-2} - \frac{1}{2}\varepsilon_{i-1}) \\ &= \frac{1}{4}\left(\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l(n-2l)e_{i+l}\right). \end{aligned}$$

とすると、

$$\mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}(e_i^* \cdot e_j) = \delta_{ij}$$

となる。

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

とすると、

$$\Lambda^* = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^* \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & & -1 & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & 1 & \vdots \\ 1 & -1 & & -1 & \\ -1 & 1 & & 1 & \\ \vdots & -1 & & -1 & \\ 1 & \vdots & & 0 & 0 \\ -1 & 1 & & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & -1 & -1 \\ & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

より、Λ は D_n 型格子であり、

$$\Lambda^*/\Lambda \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

を満たす。

写像

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & \Lambda^* & \longrightarrow & \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \\ & \cup & & \cup \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^* & \longmapsto & \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \bmod 4 \end{array}$$

と、

$$\begin{array}{rccc} \rho^{\oplus m}\colon & (\Lambda^*)^{\oplus m} & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^{\oplus m} \\ & \cup & & \cup \\ & \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j^* \right)_{1 \le i \le m} & \longmapsto & \left(\rho \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) \right)_{1 \le i \le m} \end{array}$$

を考える。

長さ m の $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-符号 C に対して、

$$\Gamma_C = (\rho^{\oplus m})^{-1}(C)$$

とすると、Γ_C は $(\Lambda^*)^{\oplus m}$ 上の $\mathbb{Z}$-加群であり、$x = (x_i),\ y = (y_i) \in F^{\oplus m}$ に対して、

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Tr}(x_i y_i)$$

を考えると、Γ_C は格子となる。

$x_i = \sum_{l=1}^{n} x_{il} e_l^*,\ y_i = \sum_{l=1}^{n} y_{il} e_l^* \in \Lambda^*$ とすると、

$$\sum_{l=1}^{n} y_{il} e_l^* = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{4} \left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (n-2j) y_{i(l-j)} \right) e_l$$

より、

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(x_i y_i) &= \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{4} x_{il} \left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (n-2j) y_{i(l-j)} \right) \\
&= \frac{1}{4} n \left(\sum_{l=1}^{n} x_{il} \right) \left(\sum_{l=1}^{n} y_{il} \right) - \frac{1}{4} n \left(\sum_{l=1}^{n} x_{il} \right) \left(\sum_{l=1}^{n} y_{il} \right) + \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{4} x_{il} \left(\sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (n-2j) y_{i(l-j)} \right) \\
&= \frac{1}{4} n \left(\sum_{l=1}^{n} x_{il} \right) \left(\sum_{l=1}^{n} y_{il} \right) + \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{4} x_{il} \left(\sum_{j=0}^{n-1} -n y_{i(l-j)} + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (n-2j) y_{i(l-j)} \right) \\
&= \frac{1}{4} n \left(\sum_{l=1}^{n} x_{il} \right) \left(\sum_{l=1}^{n} y_{il} \right) + \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{4} x_{il} \left(\sum_{j=0}^{(n-1)/2} (-4j) y_{i(l-2j)} - \sum_{j=1}^{(n-1)/2} (2(n+1)-4j) y_{i(l-2j+1)} \right)
\end{aligned}$$

となる。

$$\sum_{j=0}^{(n-1)/2} (-4j) y_{i(l-2j)} - \sum_{j=1}^{(n-1)/2} (2(n+1)-4j) y_{i(l-2j+1)} \in 4\mathbb{Z}$$

であることから、

$x,\ y \in (\Lambda^*)^{\oplus m}$ に対して、

$$\langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{n} x_{il} \right) \left(\sum_{l=1}^{n} y_{il} \right) \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \rho^{\oplus m}(x) \cdot \rho^{\oplus m}(y) = 0$$

が成り立つ。よって、

$$\Gamma_C^* = \Gamma_{C^\perp}$$

となる。

また、

$$\mathrm{Tr}(x_i x_i) = \frac{1}{4} n \left(\sum_{l=1}^{n} x_{il} \right) \left(\sum_{l=1}^{n} x_{il} \right) + \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{4} x_{il} \left(\sum_{j=0}^{(n-1)/2} (-4j) x_{i(l-2j)} - \sum_{j=1}^{(n-1)/2} (2(n+1)-4j) x_{i(l-2j+1)} \right)$$

であり、

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{4}x_{il}\left(\sum_{j=0}^{(n-1)/2}(-4j)x_{i(l-2j)}-\sum_{j=1}^{(n-1)/2}(2(n+1)-4j)x_{i(l-2j+1)}\right)\\
=&\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{4}(-4\cdot 0)x_{il}x_{il}\\
&+\sum_{\substack{1\le s<l\le n\\ l-s\in 2\mathbb{Z}}}\frac{1}{4}\left(-4\frac{l-s}{2}-\left(2(n+1)-4\frac{n+1-(l-s)}{2}\right)\right)x_{il}x_{is}\\
&+\sum_{\substack{1\le s<l\le n\\ l-s\notin 2\mathbb{Z}}}\frac{1}{4}\left(-4\frac{n-(l-s)}{2}-\left(2(n+1)-4\frac{(l-s)+1}{2}\right)\right)x_{il}x_{is}\\
=&\sum_{\substack{l>s\\ l-s\in 2\mathbb{Z}}}(s-l)x_{il}x_{is}\in 2\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

となることから、$x\in(\Lambda^*)^{\oplus m}$ に対して、

$$\langle x,x\rangle\in 2\mathbb{Z}\Longleftrightarrow\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{l=1}^{n}x_{il}\right)\left(\sum_{l=1}^{n}x_{il}\right)\in 2\mathbb{Z}\Longleftrightarrow \mathrm{wt}_{\mathrm{E}}(\rho^{\oplus m}(x))\in 8\mathbb{Z}$$

となる。

以上より次が成り立つ。

定理 5.1. 長さ m の $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-符号 C に対して、以下が成り立つ。

1. $$C\subset C^{\perp}\Longleftrightarrow\Gamma_C\subset\Gamma_{C^{\perp}}$$
2. $$C=C^{\perp}\Longleftrightarrow\Gamma_C=\Gamma_{C^{\perp}}$$
3. $$「\forall x\in C,\ \mathrm{wt}_{\mathrm{E}}(x)\in 8\mathbb{Z}」\Longleftrightarrow\Gamma_C\text{は偶格子}$$

5.2 A_n 型格子と $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$-符号

$a>0$ を偶数、$n+1=a^2$ (i.e. n は奇数)、$F/\mathbb{Q}$ を n 次 Galois 拡大、$(\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n)$ を F 上の self-dual $\mathbb{Q}$-基底とする。

D_n 型の時と同様に、

$$e_i=\begin{cases}\frac{1}{a-1}\left(-(a-1)\varepsilon_i-2\varepsilon_n+\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l\right) & (1\le i\le n-1)\\ \frac{1}{a-1}\left((a-1)\varepsilon_i-2\varepsilon_n+\sum_{l=1}^{n}\varepsilon_l\right) & (i=n)\end{cases}$$

$$e_i^* = \begin{cases} \frac{1}{a(a-1)} \left(-a(a-1)\varepsilon_i - 2\varepsilon_n + \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l \right) & (1 \leq i \leq n-1) \\ \frac{1}{a(a-1)} \left(a(a-1)\varepsilon_i - 2\varepsilon_n + \sum_{l=1}^{n} \varepsilon_l \right) & (i = n) \end{cases}$$

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\Lambda^* = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^* \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{array}{rccc} \rho\colon & \Lambda^* & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z} \\ & \cup & & \cup \\ & \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^* & \longmapsto & \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \mod n+1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \rho^{\oplus m}\colon & (\Lambda^*)^{\oplus m} & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z})^{\oplus m} \\ & \cup & & \cup \\ & \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j^* \right)_{1 \leq i \leq m} & \longmapsto & \left(\rho \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right) \right)_{1 \leq i \leq m} \end{array}$$

$x = (x_i),\ y = (y_i) \in F^{\oplus m}$ に対して、

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Tr}(x_i y_i)$$

とすると、

定理 5.2. 長さ m の $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$-符号 C と、格子 $\Gamma_C = (\rho^{\oplus m})^{-1}(C)$ に対して次が成り立つ。

1. $$C \subset C^{\perp} \Longleftrightarrow \Gamma_C \subset \Gamma_{C^{\perp}}$$

2. $$C = C^{\perp} \Longleftrightarrow \Gamma_C = \Gamma_{C^{\perp}}$$

3. $$「\forall x \in C,\ \mathrm{wt_E}(x) \in 2(n+1)\mathbb{Z}」 \Longleftrightarrow \Gamma_C \text{は偶格子}$$

参考文献

[1] Eva Bayer-Flückiger, *Lattices and number fields*, Algebraic geometry: Hirzebruch 70 (Warsaw, 1998), Contemp. Math., vol. 241, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 69–84, DOI 10.1090/conm/241/03628. MR1718137

[2] Robson R. de Araujo and Grasiele C. Jorge, *Constructions of full diversity D_n-lattices for all n*, Rocky Mountain J. Math. **50** (2020), no. 4, 1137–1150, DOI 10.1216/rmj.2020.50.1137. MR4154799

[3] Wolfgang Ebeling, *Lattices and codes*, 3rd ed., Advanced Lectures in Mathematics, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2013. A course partially based on lectures by Friedrich Hirzebruch. MR2977354

[4] Bayer-Flückiger, *Self-dual normal bases*, Indagationes Mathematicae (Proceedings) **92** (1989), no. 4, 379-383, DOI https://doi.org/10.1016/1385-7258(89)90002-4.

[5] Vladimir L. Popov and Yuri G. Zarhin, *Root lattices in number fields*, Bull. Math. Sci. **11** (2021), no. 3, Paper No. 2050021, 22, DOI 10.1142/S1664360720500216. MR4354460

[6] Masaaki Harada, *Self-dual Z4-codes and Hadamard matrices*, Discrete Mathematics **245** (2002), no. 1, 273-278, DOI https://doi.org/10.1016/S0012-365X(01)00310-7.

[7] E. M. Rains and N. J. A. Sloane, *Self-Dual Codes* (2002), available at `math/0208001`.

[8] Riku Higa, [*Construction of A_3-root lattices from codes*] *Fugo kara kosei sareru koshi de A_3-root koshi wo kosei suru hoho ni tsuite*, Tokyo University of Science, master thesis (japanese).

[9] Riku Higa and Yoshinosuke Hirakawa, *Galois trace forms of type A_n, D_n, E_n for odd n* (2023), available at `2307.06612`.

[10] Pierre Samuel, *Algebraic theory of numbers*, Houghton Mifflin Co., Boston, Mass., 1970. Translated from the French by Allan J. Silberger. MR0265266

[11] Jean-Pierre Serre, *Local fields*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 67, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979. Translated from the French by Marvin Jay Greenberg. MR554237

ある2次多項式で与えられる整数がもつ素因子の個数による虚2次体の類数の特徴付け

名古屋大学　大学院　数理情報学専攻
山川実佑子 (Miyuko YAMAKAWA) *

Abstract

虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の類数が 1 であるための条件は, オイラーの素数生成多項式：$f(X) = X^2 + X + q$ $(m = 1 - 4q)$ を用いて言い表すことができることはよく知られている. また, 類数が 2 であるための条件も, 別の素数生成多項式を用いることにより, 定式化できることが知られている. 本講演では, オイラーの素数生成多項式 $f(X)$ に $n = 0, 1, ..., q-2$ を代入したときの各 $f(n)$ の重複を許した素因子の個数に着目し, その最大値 R_q と類数との関係を明らかにする. 主結果は一般リーマン予想の仮定の下で以下のとおりである. 平方因子をもたない負の整数 m に対して,

$$h_K = 3 \iff m = 1 - 4q \text{ は有理素数かつ } R_q = 3$$

1　序論

平方因子をもたない負の有理整数 $m = 1 - 4q$ $(q \geq 1)$ に対して,[1]

(1) 虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の類数は 1 である.

(2) オイラーの素数生成多項式：$f(X) = X^2 + X + q$ $(m = 1 - 4q)$ に連続する $q - 1$ 個の有理整数 $n = 0, 1, \ldots, q-2$ を代入したとき, $f(n)$ は有理素数である.

は同値である. (1)⇒(2) は 1912 年に**フロベニウス (Ferdinand Georg Frobenius)[4]** により証明され, その 1 年後, **ラビノヴィッチ (Von Herrn Georg Rabinowitch)[6]** が (1)⇔(2) を証明した. 一方, 1952 年に, **ベイカー (Aalan Baker)[2], ヘーグナー (Kurt Heegner)[5], スターク (Harold Mead Stark)[9, 10]** により, 平方因子をもたない負の有理整数 m に対して, 虚 2 次体の $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の類数が 1 であるのは,

$$m = -1,\ -2,\ -3,\ -7,\ -11,\ -19,\ -43,\ -67,\ -163$$

の 9 個に限ることが証明された. これらのうち, 上記の条件 $m = 1 - 4q$ $(q \geq 1)$ をみたすのは, $m = -3,\ -7,\ -11,\ -19,\ -43,\ -67,\ -163$ の 7 個である. 残りの $m = -1,\ -2$ は, $m \equiv 2,\ 3 \pmod 4$ をみたす. 1986 年に, **佐々木 (Ryuji Sasaki)[7]** は, $m \equiv 2,\ 3 \pmod 4$ のとき，オイラーの素数生成多項式の代わりに新たに $f(X) = X^2 + q$ $(m = -q)$ を用いることにより，(1)⇔(2) を証明した. さらに, **佐々木**は, 上記で定めた $f(X)$ に $n = 0, 1, \ldots, q-2$ を代入したときの $f(n)$ の重複を許した素因子の個数に着目し, その最大値 R_q（ただし, $R_1 = 1$ と定義する）と $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の類数と

*yamami1129@icloud.com

[1] $q = 1$ すなわち $m = -3$ のとき, 条件 (2) の n が存在しないので条件 (2) は成立している.

の関係を考察し, 以下の同値性を証明した:

平方因子をもたない負の有理整数 m に対して,

$$f(X)=\begin{cases} X^2+X+q & (m\equiv 1 \pmod 4,\ m=1-4q) \\ X^2+q & (m\equiv 2,\ 3 \pmod 4,\ m=-q) \end{cases}$$

とすれば, 虚 2 次体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の類数 h_K に対して, 以下はそれぞれ同値である.

(I) $h_K=1 \iff R_q=1$

(II) $h_K=2 \iff R_q=2$

虚 2 次体の類数が 3 以上の奇数であるためには種の理論より, $m=1-4q$ は有理素数でなければならない. 本論文の主定理は以下の通りである.

主定理. 一般リーマン予想[2]を仮定して, 平方因子をもたない負の整数 m に対して,

$$h_K=3 \iff m=1-4q \text{ は有理素数かつ } R_q=3$$

が成り立つ[3].

1.1 群論からの準備

補題 1.1. G を可換群とし, $a_i\in G\ (1\le i\le n)$ とする. 任意の $k\ (1\le k\le n)$ に対して, $a_{n_1}\cdots a_{n_k}\neq e$ ならば, G の部分群 $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ の位数は n よりも大きい. ただし, $1\le n_1<\cdots<n_k\le n$ であり, また, e は G の単位元である.

Proof. n 個の元：$a_1,\ a_1a_2,\dots,a_1a_2\cdots a_n$ は仮定よりすべて異なる. よって, 部分群の位数は単位元を入れて $n+1$ 以上である. □

2 2 次体

2.1 2 次体のノルムとトレース

定義 2.1. m を平方数でない有理整数とする. 有理数体 $\mathbb{Q}$ と $\sqrt{m}$ を含む最小の体を $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ で表す. 体 $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ を 2 次体と呼ぶ. 特に, $m>0$ のとき, 実 2 次体, $m<0$ のとき, 虚 2 次体と呼ぶ.

定義 2.2. 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の元 $\alpha=a+b\sqrt{m}\ (a,\ b\in\mathbb{Q})$ に対して, $\alpha'=a-b\sqrt{m}$ とおき, α' を α の**共役**と呼ぶ.

定義 2.3. 2 次体 $\mathbb{Q}\left(\sqrt{m}\right)$ の元 $\alpha=a+b\sqrt{m}\ (a,\ b\in\mathbb{Q})$ に対して, α のノルム $\mathrm{N}(\alpha)$ とトレース $\mathrm{T}(\alpha)$ を, $\mathrm{N}(\alpha)=\alpha\alpha'=a^2-mb^2,\ \ \mathrm{T}(\alpha)=\alpha+\alpha'=2a$ により定義する. 定義より, $\mathrm{N}(\alpha),\ \mathrm{T}(\alpha)\in\mathbb{Q}$ である.

[2]一般リーマン予想（GRH）と拡張リーマン予想（ERH）を区別して用いることもあるが, 本論文ではどちらも一般リーマン予想と述べる.

[3]$\Leftarrow$ の証明で一般 Riemann 予想の成立を仮定している.

2.2 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の整数

定義 2.4. 2 次体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ に対して, $O_K := \{\alpha \in K \mid \mathrm{T}(\alpha) \in \mathbb{Z} \text{ かつ } \mathrm{N}(\alpha) \in \mathbb{Z}\}$ を K の**整数環**と呼び, O_K の元を K の**整数**と呼ぶ.

定義 2.5. m を平方因子を含まない有理整数とする. このとき, 2 次体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の**判別式** d_K を,

$$d_K = \begin{cases} m & (m \equiv 1 \pmod 4) \\ 4m & (m \equiv 2,\ 3 \pmod 4) \end{cases}$$

により定義する. 定義より, $d_K \equiv 0,\ 1 \pmod 4$ である.

命題 2.1. m を平方因子をもたない有理整数とするとき, 2 次体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の整数 $\omega \in O_K$ を次で定義する.

$$\omega = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{m}}{2} & (m \equiv 1 \pmod 4) \\ \sqrt{m} & (m \equiv 2,\ 3 \pmod 4) \end{cases}$$

このとき, $O_K = \mathbb{Z}[\omega] = \{a+b\omega \mid a,\ b \in \mathbb{Z}\}$ である.

3 素イデアル分解の一意性

定義 3.1 (素イデアル)**.** 可換環 R のイデアル $\mathfrak{p} \neq R$ が以下をみたすとき, $\mathfrak{p}$ を R の素イデアルという.

$$\alpha\beta \in \mathfrak{p}\ (\alpha,\ \beta \in R) \Rightarrow\ \alpha \in \mathfrak{p} \text{ または } \beta \in \mathfrak{p}$$

命題 3.1 (素イデアル分解の一意性)**.** (0) と (1) 以外の O_K の任意のイデアルは素イデアルの積に一意的に分解できる.

3.1 イデアルのノルム

代数体の特筆すべき性質として, 剰余環の有限性を挙げることができる.

命題 3.2. O_K のイデアル $\mathfrak{a} \neq (0)$ に対して, 剰余環 $O_K/\mathfrak{a}$ は有限環である.

定義 3.2. O_K の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して, ある有理整数 $n \geq 0$ が存在して, $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = (n)$ となる. この有理整数 n を $\mathfrak{a}$ の**ノルム**と呼び, $\mathrm{N}(\mathfrak{a})$ で表す.

命題 3.3. O_K の (0) でない任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対し, $|O_K/\mathfrak{a}| = \mathrm{N}(\mathfrak{a})$ が成り立つ. 特に, 任意の $\mu \in O_K \backslash \{0\}$ に対して, $N((\mu)) = |\mathrm{N}(\mu)|$ である.

3.2 原始的イデアルとその性質

イデアルの定義より, 整数環 O_K の任意のイデアルは加法群として O_K の部分加群である. O_K の元 $\alpha,\ \beta$ に対して, 加法群 O_K において $\alpha,\ \beta$ で生成される部分加群を, $[\alpha,\beta] = \{\alpha x + \beta y \mid x,\ y \in \mathbb{Z}\}$ で表す. 更に, 任意の $c \in \mathbb{Z}$ に対して, $[c\alpha, c\beta] = c[\alpha,\beta]$ と表す.

定義 3.3. O_K のイデアル $\mathfrak{a} \neq (0)$ において, $\mathfrak{a}$ のすべての元を割り切る有理整数が ± 1 に限るとき, $\mathfrak{a}$ を**原始的イデアル**と呼ぶ

補題 3.1. O_K の任意のイデアル $\mathfrak{a} \neq (0)$ に対し, $\mathfrak{a} \cap \mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$ となる $a \in \mathbb{N}$ が存在する.

命題 3.4. O_K の任意の原始的イデアル $\mathfrak{a} \neq (0)$ に対して, $\mathfrak{a} \cap \mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$ $(a \in \mathbb{N})$ とすると,

$$\mathfrak{a} = [a, b+\omega], \quad a \mid \mathrm{N}(b+\omega)$$

となる有理整数 b が存在する. ここで, a は $\mathfrak{a}$ に対して一意的に定まり, b は a を法として一意的に定まる. 逆に, $a \mid \mathrm{N}(b+\omega)$ をみたす任意の有理整数 $a,\ b$ に対して, $[a, b+\omega]$ は O_K の原始的イデアルである.

定義 3.4. O_K のイデアル $\mathfrak{a}$ を, 原始的イデアル $\mathfrak{a}_1$ と自然数 c を用いて, $\mathfrak{a} = c\mathfrak{a}_1 = c[a, b+\omega]$ $(a \mid \mathrm{N}(b+\omega))$ と表したとき, $\{ac,\ c(b+\omega)\}$ を $\mathfrak{a}$ の**標準基底**と呼ぶ.

命題 3.5. O_K のイデアル $\mathfrak{a} \neq (0)$ を標準基底で $\mathfrak{a} = c[a, b+\omega]$ と表したとき, $\mathrm{N}(\mathfrak{a}) = |a|c^2$ である.

定義 3.5. 平方因子をもたない負の有理整数 m に対して,

$$f(X) = \begin{cases} X^2 + X + q & (m \equiv 1 \pmod 4,\ m = 1 - 4q) \\ X^2 + q & (m \equiv 2,\ 3 \pmod 4,\ m = -q) \end{cases}$$

と定める.

平方因子をもたない負の有理整数 m が与えられたとき, 特に断りがなければ, 本論文では $f(X)$ および q はそれぞれ上で定義された多項式および自然数を意味するものとする.

補題 3.2. 平方因子をもたない負の有理整数 m に対して, $0 < a \mid f(n)$ のとき, $\mathfrak{a} = [a, n+\omega]$ とすれば, $\mathfrak{a}$ は a を割る O_K の原始的イデアルであり, もし単項ならば,

$$\mathrm{N}(\mathfrak{a}) = a \geq q$$

である.

補題 3.3. 平方因子をもたない負の有理整数 m に対して, $ab \mid f(n)$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ ならば, 以下が成り立つ.

$$[a, n+\omega][b, n+\omega] = [ab, n+\omega]$$

補題 3.4. 平方因子をもたない負の有理整数 m に対して, $0 < a \mid f(n)$ のとき, $a = f(b), \quad n \equiv b \pmod a$ をみたす b が存在するとき, かつそのときに限り, $[a, n+\omega] = (b+\omega)$ と表すことができる.

補題 3.5. 平方因子をもたない負の有理整数 m に対して,

$$|k| \leq \begin{cases} 2q-2 & (m \equiv 1 \pmod 4,\ m = 1 - 4q) \\ 2q-3 & (m \equiv 2,\ 3 \pmod 4,\ m = -q) \end{cases}$$

のとき, $f(n) \equiv 0 \pmod k$ をみたす n は存在すれば, $0 \leq n \leq q-2$ の範囲からとることができる.

4 イデアル類群

4.1 指標

定義 4.1. 判別式 $d = d_K$ と有理素数 p に対して, χ_d を

$$\chi_d(p) = \begin{cases} \left(\frac{d}{p}\right) & (p \nmid 2d \text{ のとき}) \\ \left(\frac{2}{|d|}\right) & (p = 2 \text{ かつ } 2 \nmid d \text{ のとき}) \\ 0 & (p \mid d \text{ のとき}) \end{cases}$$

により定義し, これを乗法的に拡張する. χ_d を K に附随する指標という.

命題 4.1. 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の判別式を d とすれば, 有理素数 p で生成される O_K のイデアル (p) の素イデアル分解は次で与えられる.

(1) $\chi_d(p) = 1$ のとき, $(p) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ と分解する. ここで, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ は素イデアルであり, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$ をみたす. このとき, p は K で**「完全分解する」**という.

(2) $\chi_d(p) = -1$ のとき, (p) は素イデアルである. このとき, p は K で**「惰性する」**という.

(3) $\chi_d(p) = 0$ のとき, $(p) = \mathfrak{p}^2$ と分解する. ここで, $\mathfrak{p}$ は素イデアルであり, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ をみたす. このとき, p は K で**「完全分岐する」**という.

4.2 イデアル類群

定義 4.2. O_K のイデアル $\mathfrak{a} \neq (0)$ および $\alpha \in K^\times$ に対して, $\alpha\mathfrak{a} := \{\alpha\gamma \mid \gamma \in \mathfrak{a}\}$ を K の分数イデアルと呼び, K の分数イデアル全体を $\mathcal{I}_K$ で表す. $\mathcal{I}_K$ は乗法群であり, 分数イデアル群という. 特に, 分数イデアル $(\alpha) := \alpha O_K$ を単項分数イデアルと呼び, 単項分数イデアル全体を $\mathcal{P}_K$ で表す. $\mathcal{P}_K$ は $\mathcal{I}_K$ の部分群である.

定義 4.3 (ミンコフスキー定数)**.** 2 次体 K の判別式を d として,

$$M_K = \begin{cases} \frac{\sqrt{d}}{2} & (d > 0 \text{ のとき}) \\ \sqrt{\frac{|d|}{3}} & (d < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する.

今後, この論文を通して, 分数イデアル $\mathfrak{i}$ の $\mathcal{I}_K/\mathcal{P}_K$ における類を $[\mathfrak{i}]$ で表す.

命題 4.2. 剰余群 $\mathcal{I}_K/\mathcal{P}_K$ の各類の中に, ノルムが M_K 以下の原始的な整イデアルが存在する.

定義 4.4. 剰余群 $\mathcal{I}_K/\mathcal{P}_K$ を K のイデアル類群と呼び, $\mathcal{C}_K$ で表す. また, その位数 $|\mathcal{C}_K|$ を K の**類数**と呼び, h_K で表す.

定義 4.5. 有理素数の有限集合 S_K を,

$$S_K := \{p \mid p \text{ は, } p \leq M_K \text{かつ} \chi_d(p) \neq -1 \text{ をみたす正の有理素数 }\}$$

で定義する.

命題 4.3. イデアル類群 $\mathcal{C}_K$ は, S_K に属する有理素数を割る素イデアルの類により生成される. 特に, $S_K = \emptyset$ ならば, $h_K = 1$ である.

4.3 その他の重要な補題

補題 4.1. 平方因子をもたない負の有理整数 m に対して, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ が惰性しないとき, $\mathfrak{p} = [p, n + \omega]$ となる有理素数 p と有理整数 n が存在し, 次が成り立つ.

$$\mathfrak{p} \text{ は完全分岐する} \iff f'(n) \equiv 0 \pmod{p}$$

補題 4.2. 平方因子をもたない負の有理整数 m に対して, $S_K \neq \emptyset$ ならば, 任意の $p \in S_K$ に対して, $f(n) \equiv 0 \pmod{p}$ をみたす有理整数 $0 \leq n \leq q-2$ が存在する. 特に, p が完全分解すれば, $f(n) \equiv 0 \pmod{p^2}$ をみたす有理整数 $0 \leq n \leq q-2$ が存在する. さらに, $|S_K| \geq 2$ のとき, $p_1, p_2 \in S_K$ $(p_1 \neq p_2)$ に対して, $f(n) \equiv 0 \pmod{p_1 p_2}$ をみたす有理整数 $0 \leq n \leq q-2$ が存在する.

5　類数 1 の虚 2 次体の特徴付け

類数が 1 の虚 2 次体は, 以下の定理により完全に決定されている.

定理 5.1 (**ベイカー・ヘーグナー・スタークの定理**)**.** 平方因子をもたない負の有理整数 m に対して, 虚 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の類数が 1 であるのは, $m=-1,\ -2,\ -3,\ -7,\ -11,\ -19,\ -43,\ -67,\ -163$ の 9 個に限る.

定義 5.1. 自然数 $q\geq 2$ に対して, $f(n)=\sum_{i=1}^{r}p_i^{e_i}$ $(0\leq n\leq q-2)$ を素因数分解とするとき,

$$R_1=1,\quad R_q=\max_{0\leq n\leq q-2}\left\{\sum_{i=1}^{r}e_i\right\}$$

と定める.

命題 5.1. m が平方因子をもたないとき, $h_K\geq R_q$ が成立する.

Proof. $R_1=1$ であるから, $q\geq 2$ の場合を示せばよい. このとき, $0\leq n\leq q-2$ に対して, $f(n)$ の重複を許した素因子の個数を R としたとき, $R\geq 2$ ならば, $h_K\geq R$ を示せばよい. $f(n)=p_1\cdots p_R$ とすれば, $R-1$ 個の原始的素イデアル $[p_i,n+\omega]$ $(1\leq i\leq R-1)$ から任意に r $(\leq R-1)$ 個を選んだとき, その積は単項でない. 実際, $f(n)=kl$ と任意の非自明な分解を考えれば, $[kl,n+\omega]=[k,n+\omega][l,n+\omega]$ は単項であるから, $[k,n+\omega]$ と $[l,n+\omega]$ は共に単項であるか, または共に単項でない. 共に単項とすれば, ノルムはそれぞれ q 以上であるから, $q^2\leq f(n)<f(q-1)\leq q^2$ となり, 矛盾する. よって, 補題 1.1 の条件が成立し, イデアル類 $[[p_i,n+\omega]]$ $(1\leq i\leq R)$ が生成する部分群の位数は R 以上である. すなわち, $h_K\geq R$ が成立する. □

5.1　$m\equiv 1\pmod 4$ の場合

定理 5.2 (**フロベニウス・ラビノヴィッチ**)**.** 自然数 $q\geq 1$ に対し, $f(X)=X^2+X+q$ および $m=1-4q$ とするとき, 次の 2 つの条件は同値である.

(1) m は平方因子をもたず, 虚 2 次体 $K=\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の類数は 1 である.

(2) 連続する $q-1$ 個の有理整数 $n=0,1,\ldots,q-2$ に対して, $f(n)$ は有理素数である.

Proof. $q=1$ のとき, (1) および (2) はともに成立しているから, $q\geq 2$ の場合を示せばよい. 命題 5.1 より, (1) $\Rightarrow$ (2) は明らかである. (2) $\Rightarrow$ (1) の証明: $q=2$ のとき, $f(X)=X^2+X+2$ で, $n=0$ より, $f(0)=2$ は有理素数である. また, $m=1-8=-7$ で, 定理 5.1 より, 類数は 1 であるから, (1) が成り立つ. 以下, $q>2$ とする. (2) の仮定の下で, m が平方因子をもつとする. $-m=l^2m_1$ $(l>1,\ m_1\geq 1)$ おくと, m は奇数なので l^2 も奇数となり, l が 3 以上の奇数であることが分かり, さらに, $m\equiv 1\pmod 4$ であるから, $m_1\equiv 3\pmod 4$ でなければならない. よって, m_1 も 3 以上の奇数である. ここで, $n=\frac{lm_1-1}{2}$ とすると, $0\leq n\leq q-2$ である. 実際, $4q-1=-m=l^2m_1$ であるから,

$$n\leq q-2\iff \frac{lm_1-1}{2}\leq\frac{l^2m_1+1}{4}-2\iff 0\leq m_1(l-1)^2-m_1-5$$

であり, $m_1,\ l\geq 3$ より, 上記の不等式は成立する. このとき,

$$f(n)=n^2+n+q=\left(\frac{lm_1-1}{2}\right)^2+\frac{lm_1-1}{2}+\frac{1+l^2m_1}{4}=\frac{l^2m_1(m_1+1)}{4}$$

となり, これは合成数である[4] ($\because l$ は奇数). よって, m は平方因子をもたない. 続いて, (2) を仮定したとき, 虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の類数が 1 であることを示す. 任意の $p \in S_K$ に対して, 補題 4.2 より, $f(n) \equiv 0 \pmod{p}$ となる $0 \leq n \leq q-2$ が存在する. ここで, $R_q = 1$ より, $f(n) = p$ である. よって, イデアル類群の生成元 $[p, n+\omega]$ は補題 3.4 より, 単項イデアルである. 従って, $h_K = 1$ である.

□

5.2 $m \equiv 2, 3 \pmod 4$ の場合

定理 5.3 (佐々木). 自然数 $q \neq 3$ に対して, $f(X) = X^2 + q$ および $m = -q$ とするとき, 次の 2 つの条件は同値である.

(1) $m \equiv 2,\ 3 \pmod 4$ であり, m は平方因子をもたず, 虚 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の類数は 1 である.

(2) $R_q = 1$ である.

6 類数 2 の虚 2 次体の特徴付け

6.1 $m \equiv 1 \pmod 4$ の場合

定理 6.1 (佐々木). 自然数 q に対して, $f(X) = X^2 + X + q$ および $m = 1 - 4q$ とするとき, 次の 2 つの条件は同値である.

(1) m は平方因子をもたず, 虚 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の類数は 2 である.

(2) $R_q = 2$ である.

注意 6.1. m が平方因子をもたない負の有理整数のとき, 虚 2 次体 $K = Q(\sqrt{m})$ に対して, $h_K = 2$ となる m は 18 個存在する. その m を法 4 で分類すると,

(1) $m \equiv 1 \pmod 4$ は, $-15,\ -35,\ -51,\ -91,\ -115,\ -123,\ -187,\ -235,\ -267,\ -403,\ -427$

(2) $m \equiv 2 \pmod 4$ は, $-6,\ -10,\ -22,\ -58$

(3) $m \equiv 3 \pmod 4$ は, $-5,\ -13,\ -37$

であり, これらすべての K に対して, $|S_K| = 1$ であることを確かめることができる. 逆に $|S_K| = 1$ のとき, その 1 つの元を p とし, もし p が K で完全分岐すれば, $h_K = 2$ である. これら 18 個の中でこの条件をみたす K は 13 個あり, 残りの 5 個の m と対応する p の組は,

$$(-15, 2),\ (-35, 3),\ (-91, 5),\ (-187, 7),\ (-403, 11)$$

である. この 5 個の K に対して, $h_K = 2$ となる理由の 1 つが $R_q = 2$ であるということができる.

定理 6.1 の証明. $h_K = 1 \iff R_q = 1$ および命題 5.1 より, (1) $\Rightarrow$ (2) は明らかである. (2) $\Rightarrow$ (1) の証明: m が平方因子をもたないことは, 定理 5.2 の証明がそのまま適用できる. 続いて, 類数が 2 であることを示す.

(i) イデアル類群 $\mathcal{C}_K$ が巡回群であること: そのためには, $|S_K| \geq 2$ の場合に示せば十分である. $S_K \ni p_i\ (i = 1, 2,\ p_1 \neq p_2)$ に対して, 補題 4.2 より, $f(n) \equiv 0 \pmod{p_1 p_2}$ をみたす有理整数 $0 \leq n \leq q-2$ が存在する. 仮定:$R_q = 2$ より, $p_1 p_2 = f(n)$ である. よって, 原始イデアル $[p_1 p_2, n+\omega] = (n+\omega)$ は単項であるから, $\mathcal{C}_K$ は 1 つのイデアル類で生成される. すなわち, $\mathcal{C}_K$ は巡回群である.

[4] 実際には, 3 個以上の素因子をもつ. 従って, この証明は, 定理 6.1 の証明でも適用できる.

(ii) $\mathfrak{p}^2$ $(\mathfrak{p} \mid p \in S_K)$ が単項であること: p が K で完全分岐すれば, $\mathfrak{p}^2 = (p)$ である. 一方, p が K で完全分岐しなければ, p は K で完全分解するから, 補題 4.2 より, $f(n) \equiv 0 \pmod{p^2}$ をみたす有理整数 $0 \leq n \leq q-2$ が存在する. 再び仮定:$R_q = 2$ より, $p^2 = f(n)$ である. よって, $\mathfrak{p} = [p, n+\omega]$ とすれば, $\mathfrak{p}^2 = [p^2, n+\omega] = (n+\omega)$ は単項である.

従って, $h_K = 2$ であるから, 定理 6.1 の (1) と (2) は同値である. □

6.2 $m \equiv 2,\ 3 \pmod 4$ の場合

定理 6.2 (**佐々木**)**.** 自然数 q $(\neq 3)$ に対して, $f(X) = X^2 + q$ および $m = -q$ とするとき, 次の 2 つの条件は同値である

(1) $m \equiv 2,\ 3 \pmod 4$ であり, m は平方因子をもたず, 虚 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の類数は 2 である.

(2) $R_q = 2$ である.

7 類数 3 の虚 2 次体の特徴付け

本論文では, 一般リーマン予想の仮定の下で類数 3 の虚 2 次体を特徴付けることに成功した.

定理 7.1 (**山川**)**.** 一般リーマン予想を仮定して, 平方因子をもたない負の整数 m に対して, 次の 2 つの条件は同値である

(1) 虚 2 次体 $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ の類数は 3 である.

(2) $m = 1 - 4q$ は有理素数かつ $R_q = 3$ である.

Proof. $h_K = 1 \iff R_q = 1$, $h_K = 2 \iff R_q = 2$ および命題 5.1 より, (1) $\Rightarrow$ (2) は明らかである. (2) $\Rightarrow$(1) の証明:**西来路 (Fumio Sairaiji) と清水 (Kenichi Shimizu)[8]** は, 一般リーマン予想を仮定した**バッハ (Eric Bach)[3]** の結果:

$$\min S_K \leq 6 \log^2 |d_K|$$

を用いて,

$$R_q \geq \frac{\log\log 163}{\log 163} \frac{\log |d_K|}{\log\log |d_K|}$$

を示した. よって, $R_q = 3$ のとき, $q \leq 4.169\cdots \times 10^{13}$ でなければならない. したがって, この範囲で $4q-1$ が有理素数のとき, $R_q = 3$ ならば $h_K = 3$ であることを確かめればよい. 実際, PariGP による計算では成立している. □

8 一般リーマン予想下での検証

前節の考察では, $q \leq 4.169\cdots \times 10^{13}$ の範囲の q を検証する必要があるが, q の範囲を狭めることができる. 具体的には, もし, $\min S_K = p$ ならば, p 未満の有理素数 p' に対して, $\chi_{d_K}(p') = -1$ であるから, $q \leq 4.169\cdots \times 10^{13}$ の範囲の q で $2 \leq \min S_K \leq 19$ をみたす場合を予め検証しておき, その後は, 公差 $\prod_{2 \leq p \leq 19} p$ の等差数列上の q のみを検証する. ただし, 初項の選び方は, $\varphi(2) \prod_{3 \leq p \leq 19} \frac{\varphi(p)}{2}$ 通りあるので, この数だけの等差数列を扱うことになる. この方法により, 検証すべき q を約 1000 分の 1 にすることができる.

補題 8.1 (一般リーマン予想下). $m = 1 - 4q$ が有理素数のとき，$h_K \geq 4$ ならば[5]，$R_q \geq 4$ である．

Proof. $d_K = m$ が有理素数であるから，完全分岐する有理素数は m のみである．しかし，$|m| = 4q - 1 > M_K$ より，$|m| \notin S_K$ であるから，S_K に属する有理素数はすべて K で完全分解する．よって，$p \in S_K$ に対して，

$$p \in S_K \iff \chi_{d_K}(p) = 1 \iff \begin{cases} \left(\frac{2}{d_K}\right) = 1 \iff d_K \equiv 1 \bmod 2^3 & (p = 2) \\ \left(\frac{d_K}{p}\right) = 1 & (p \neq 2) \end{cases}$$

であるから，

$$f(n) \equiv 0 \bmod p^3 \iff \begin{cases} 4f(n) \equiv 0 \bmod 2^5 \iff (2n+1)^2 \equiv d_K \bmod 2^5 & (p = 2) \\ 4f(n) \equiv 0 \bmod p^3 \iff (2n+1)^2 \equiv d_K \bmod p^3 & (p \neq 2) \end{cases}$$

をみたす整数 n が存在する．以下，$\min S_K = p$ とすれば，$h_K \geq 4$ であるから，$q \geq 12$ であることに注意して，p^3 と $q < 2q - 2$ の大小比較により 3 通りの場合分けをして

(i) $p^3 < q$ のとき，$0 \leq n \leq q - 2$ とすることができ，$f(n) \geq f(0) = q > p^3$ であるから，$f(n)$ は重複を許して 4 個以上の素因子をもつ．すなわち，$R_q \geq 4$ である．

(ii) $q \leq p^3 \leq 2(q-1)$ のとき，補題 3.5 より，$0 \leq n \leq q - 2$ とすることができる．ここで，もし，$f(n) \neq p^3$ ならば，$f(n)$ は重複を許して 4 個以上の素因子をもつ．すなわち，$R_q \geq 4$ である．また，もし，$f(n) = p^3$ ならば，重複を許して 4 個以上の素因子をもつ $f(n')$ $(0 \leq n' \leq q - 2)$ を探す必要がある．

(iii) $2(q-1) < p^3$ のとき，重複を許して 4 個以上の素因子をもつ $f(n')$ $(0 \leq n' \leq q - 2)$ を探す必要がある．

である．以上より，

(1) $2 \leq p \leq 19$ のとき, $1 - 4q$ が素数で $h_K \geq 4$ ならば, $R_q \geq 4$ であることを, $q \leq p^3$ の範囲の q に対して検証する．

(2) $p \geq 23$ のとき，

$$\chi_{d_K}(2) = \chi_{d_K}(3) = \chi_{d_K}(5) = \chi_{d_K}(7) = \chi_{d_K}(11) = \chi_{d_K}(13) = \chi_{d_K}(17) = \chi_{d_K}(19) = -1$$

であるから，q は法 $\displaystyle\prod_{2 \leq p \leq 19} p = 9699690$ で $\varphi(2) \displaystyle\prod_{3 \leq p \leq 19} \frac{\varphi(p)}{2} = 12960$ 通り定まる．ここで，一般 Riemann 予想を仮定すれば，

$$R_q \geq \frac{\log\log 163}{\log 163} \frac{\log |d_K|}{\log\log |d_K|}$$

であるから，$R_q = 3$ ならば，$q \leq 4.16952\cdots \times 10^{13}$ でなければならない．よって，この範囲の q に対して，$m = 1 - 4q$ が素数で $h_K \geq 4$ ならば，$R_q \geq 4$ であることを確かめればよい．さらに上の考察により，対象の q を $\dfrac{12960}{9699690} = 1.33612\cdots \times 10^{-3}$ 倍に減らすことができる．この検証の中で見つかった (i) をみたさない素数 p は以下の $23 \leq p \leq 43$ である．

□

[5] $m = 1 - 4q$ が有理素数ならば，h_K は奇数であるから，必然的に $h_K \geq 5$ である．

Table 1: $d_K = 1 - 4q$ が素数で $h_K \geq 4$ をみたす q

$p = \min S_K$	(iii) $2(q-1) < p^3$	(ii) $q \leq p^3 \leq 2(q-1)$	(i) $p^3 < q$
$p = 2$	—	—	$12 \sim$
$p = 3$	—	—	$33 \sim$
$p = 5$	—	—	$143 \sim$
$p = 7$	131	197, 281	$371 \sim$
$p = 11$	431	671, 797, 977, 1061, 1091	$1637 \sim$
$p = 13$	521, 767, 1007	1151, 1361, 1691, 1931, 2141	$2351 \sim$
$p = 17$	437, 587, 1511, 1607	2657, 3587	$5177 \sim$
$p = 19$	1277, 1481	3671, 4241, 6551	$6971 \sim$
$p = 23$	2201, 2267, 3317, 5501	9131	$14741 \sim$
$p = 29$	2747, 3527, 3917	22271	$27737 \sim$
$p = 31$	8081, 8621	—	$40121 \sim$
$p = 37$	9281, 22697	—	$93881 \sim$
$p = 41$	—	63377	$247757 \sim$
$p = 43$	—	55661	$619517 \sim$
$p \geq 47$	—	—	$\forall q$

重複を許して 4 個以上の素因子をもつ $f(n)$ $(0 \leq n \leq q-2)$ を探す必要のある q を赤字で記した.

References

[1] 青木昇, 素数と 2 次体の整数論, 共立出版 *(2012).*

[2] A. Baker, Linear forms in the logarithms of algebraic numbers, *Mathematika 13 (1966), 204–216.*

[3] E. Bach, Explicit bounds for primality testing and related problems, *Math. Computation, vol. 55, number 191 (1990), 355–380.*

[4] F. G. Frobenius, Über quadratische Formen die viele Primzahlen darstellen, *Sitz. Akad. Wissen., Berlin (1912), 966–980.*

[5] K. Heegner, Diophantische analysis und modulfunktionen, *Mathematische Zeitschrift, 56 (1952), 227–253.*

[6] V. H. G. Rabinowitsch, Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlfaktoren in quadratischen Zahlkörpern, *J. Reine Angew. Math., vol. 142 (1913), 153–164.*

[7] R. Sakaki, On a Lower Bound for the Class Number of an Imaginary Quadratic Field, *Proc. Japan Acad., vol. 62, Ser. A (1986), 37–39.*

[8] F. Sairaiji and K. Shimizu, On a Lower Bound for the Class Number of an Imaginary Quadratic Field, *Proc. Japan Acad., vol. 78, Ser. A (2002), 105–108.*

[9] H. M. Stark, A complete determination of the complex quadratic fields of class number one. *Mich. Math. J., vol. 14 (1967), 1–27.*

[10] ———, On the “Gap” in a Theorem of Heegner, *J. Number Theory 1 (1969), 16–27.*

On non-trivial Λ-submodules with finite index of the plus/minus Selmer group over anticyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extension at inert primes

九州大学 大学院数理学府 数理学専攻
椎井 亮太 (Ryota SHII) *

概要

K を虚 2 次体とし, 素数 p が惰性的であるとする. E を K 上定義された楕円曲線とし, E は p で良超特異還元をもつと仮定する. 今回, E に関して緩い仮定のもとで K の反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大上の E の plus/minus Selmer 群が非自明な指数有限の Λ-部分加群を持たないことを示した. これは R. Greenberg や B. D. Kim の結果の反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大に対する類似の結果である. A. Agboola–B. Howard や A. Burungale–K. Büyükboduk–A. Lei の結果を適用することで, 主定理の仮定を満たす例を構成することもできた.

1 導入

F を代数体, E を F 上定義された楕円曲線とする. 簡単のため, 固定する素数 p は奇素数であるとする. このとき, E の $\mathbb{Z}_p$-拡大体 F_∞/F 上の p^∞-Selmer 群の Pontryagin 双対は楕円曲線の岩澤理論において重要な数論的対象である. 代数体 F 上の p^∞-Selmer 群とは次の完全列をみたすもののことである:

$$0 \longrightarrow E(F) \otimes \mathbb{Q}_p \,/\, \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathrm{Sel}_p(E/F) \longrightarrow Ш(E/F)[p^\infty] \longrightarrow 0,$$

ここで, $Ш(E/F)$ は E の F 上の Tate-Shafarevich 群である. F の $\mathbb{Z}_p$-拡大 F_∞ に対して $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty) := \varinjlim_n \mathrm{Sel}_p(E/F_n)$ と定める. $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ には $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ が自然に作用するので, 完備群環 $\Lambda = \mathbb{Z}_p[\![\mathrm{Gal}(F_\infty/F)]\!] = \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\![\mathrm{Gal}(F_n/F)]\!]$ 上の加群になる.

このようにして定義される p^∞-Selmer 群に指数有限の Λ-部分加群が存在するかという岩澤理論における基本的な問題がある. この問題の数論的な応用の 1 つに Birch and Swinnerton-Dyer 予想 (BSD 予想) の p-部分への応用がある. 今回,

- 素数 p が惰性する虚 2 次体 K とその反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大,
- K 上定義された楕円曲線 E が p で良超特異還元をもつ

という状況でこの問題に対する結果が得られた. 本稿では, 最初にいくつかの用語を定義し, 先行研究

* E-mail:shi.ryota.749@s.kyushu-u.ac.jp

である R. Greenberg の結果を紹介する. 次章で, 今回得られた主定理 (定理 2.2.1) の状況と主張の詳細を説明する.

1.1 p^∞-Selmer 群と楕円曲線の岩澤理論

F を代数体, E を F 上定義された楕円曲線とする. このとき, F の **$\mathbb{Z}_p$-拡大**とは, F の (無限次)Galois 拡大体 F_∞ でその Galois 群 $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ が位相群として $\mathbb{Z}_p$ と同型であるもののことである. $\mathbb{Z}_p$ の任意の閉部分群は $p^n\mathbb{Z}_p$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ という形で表されることから, これに対応する F_∞/F の中間体を F_n とおく. $\mathbb{Z}_p$-拡大 F_∞/F に対して $\Lambda = \mathbb{Z}_p[\![\mathrm{Gal}(F_\infty/F)]\!] = \varprojlim_n \mathbb{Z}_p[\mathrm{Gal}(F_n/F)]$ と定める. $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ の位相的生成元 γ を 1 つ固定すると, $\gamma \longmapsto 1+T$ により (非標準的な) 同型 $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p[\![T]\!]$ を得る.

E を F 上の楕円曲線, $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ を F の絶対 Galois 群とする. このとき, G_F-加群としての完全列

$$0 \longrightarrow E(F) \otimes \mathbb{Q}_p / \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathrm{Sel}_p(E/F) \longrightarrow Ш(E/F)[p^\infty] \longrightarrow 0$$

がある. ここで, $Ш(E/F)$ は E の F 上の Tate-Shafarevich 群である. この $\mathrm{Sel}_p(E/F)$ を E の F 上の **p^∞-Selmer 群**という. $\mathbb{Z}_p$-拡大 F_∞/F に対して, F_∞ 上の p^∞-Selmer 群を $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty) := \varinjlim_n \mathrm{Sel}_p(E/F_n)$ と定義する. $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ には $\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$ が作用するので, 自然に Λ-加群とみなせる. $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ の Pontryagin 双対 $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)^\vee := \mathrm{Hom}(\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)$ はコンパクトな有限生成 Λ-加群になることが知られている. したがって, 有限生成 Λ-加群の構造定理より Λ-加群としての完全列

$$0 \longrightarrow (\text{有限群}) \longrightarrow \mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)^\vee \longrightarrow \Lambda^r \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{s} \Lambda/(f_i) \right) \longrightarrow (\text{有限群}) \longrightarrow 0 \qquad (1.1)$$

がある. ここで, f_i は Λ の既約元である. この完全列 (1.1) を用いて次の用語を定義する.

Definition 1.1.1. (1) 完全列 (1.1) に現れる r を $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ の **Λ-corank** といい, $\mathrm{corank}_\Lambda \mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ と表す.

(2) $\mathrm{corank}_\Lambda \mathrm{Sel}_p(E/F_\infty) = 0$ のとき $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ は **Λ-cotorsion** であるという.

(3) $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ が Λ-cotorsion であるとき, Λ のイデアル $(\prod_{i=1}^s f_i)$ を $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ の**特性イデアル**といい, $\mathrm{char}_\Lambda \mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)^\vee$ と表す.

E が p の上にある F の任意の素点で良通常還元を持ち, F_∞/F を円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大とするとき, $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ が Λ-cotorsion であることが Mazur によって予想されている. この予想に関して, 一般には現在でも未解決問題であるが, 例えば $F = \mathbb{Q}$ のときは加藤による結果 [8] がある.

簡単のため, この節の最後までは $F = \mathbb{Q}$ と仮定する. したがって, $\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q}$ は円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大である. このとき, A. Wiles らの結果により, $L(E/\mathbb{Q}, s)$ は $\mathbb{C}$ 上正則に解析接続される. p で良通常還元となる $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E と $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_\infty/\mathbb{Q})$ の有限位数の指標 χ に対して $L(E/\mathbb{Q}, \chi, 1)$ の代数的部分を p-進補完するような p-進 L-関数 $\mathcal{L}_p(E/\mathbb{Q}_\infty)$ が存在し, さらにこれは Λ の元になる. **岩澤主予想**とは

$\mathrm{Sel}_p(E/\mathbb{Q}_\infty)$ の特性イデアルが p-進 L-関数で生成される Λ のイデアルと等しい, つまり

$$\mathrm{char}_\Lambda \mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)^\vee = \mathcal{L}_p(E/\mathbb{Q}_\infty)\Lambda$$

が成り立つだろうという予想である. この予想は, E が虚数乗法をもつ場合は D. Rohrlich と K. Rubin, E が虚数乗法を持たない場合は加藤と C. Skinner–E. Urban により多くの E と p に対して証明されている. 詳細は C. Skinner による lecture note [14] などを参照してほしい.

1.2 指数有限 Λ-部分加群

岩澤理論において, p^∞-Selmer 群が指数有限の Λ-部分加群を持たないかどうかという基本的な問題がある. 先行研究の 1 つに次の R. Greenberg の結果がある.

Theorem 1.2.1 ([5])**.** E が p の上にある F の任意の素点で良通常還元をもつと仮定する. F_∞/F を円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大とする. このとき, $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ が Λ-cotorsion であれば, $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ は非自明な指数有限 Λ-部分加群を持たない.

この定理の応用の 1 つに次がある.

Corollary 1.2.2 ([6, Theorem 4.1])**.** 定理 1.2.1 と同じ状況を考える. $\mathrm{Sel}_p(E/F)$ が有限群であると仮定すると, 次が成り立つ.

(1) $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ は Λ-cotorsion である.
(2) $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ の特性イデアルの生成元を $f_E \in \Lambda$ とすると,

$$f_E(0) \sim \left(\prod_{\mathfrak{p}|p} \#\widetilde{E}(\mathbb{F}_\mathfrak{p})\right) \frac{\#\mathrm{Sel}_p(E/F)}{(\#E(F))^2} \prod_v c_v \tag{1.2}$$

が成り立つ. ただし, $\mathbb{F}_\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{p}$ における剰余体, c_v は F の素点 v における E の局所玉河数, $a, b \in \mathbb{Q}_p$ に対して $a \sim b$ は $ab^{-1} \in \mathbb{Z}_p^\times$ のことである.

(1) は Mazur のコントロール定理からの帰結である. 式 (1.2) は次のようにして BSD 予想の p-部分への応用とみなすことができる. 前節で述べた岩澤主予想が成り立つ状況であれば $f_E(0)$ は p-進 L-関数 $\mathcal{L}_p(E/F_\infty)$ の定数項と p-進単数を除いて一致する. 一方, p-進 L-関数の定義より $\mathcal{L}_p(E/F_\infty)$ の定数項は Hasse-Weil L-値 $L(E/F, 1)$ の代数的部分である. 以上のことから, この系は岩澤主予想のもとで (1.2) の右辺と $L(E/F, 1)$ の代数的部分の p-進付値が等しいことを導く. これは BSD 予想の先頭項予想の p-部分を比較していることを意味する.

この問題に対する類似の結果を紹介する. まず, 一般化の方向として higher weight の方向と良超特異還元の方向の 2 つが考えられる. Higher weight に関しては Longo–Vigni [12] がある. 良超特異還元をもつ楕円曲線に対する結果としては, B. D. Kim [9] や北島–大槻 [10] が挙げられる. これらの結果は円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大やそれに近いもの (局所体の円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大を含むもの) に対しての結果であることに注意する. 今回,

- 素数 p が惰性する虚 2 次体 K とその反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大,

- K 上定義された楕円曲線 E が p で良超特異還元をもつ

という, 今までに示されていなかった状況での類似の結果が得られた.

2 主定理

この章では, 今回得られた主定理の仮定についての詳細を述べた後に主定理の主張を述べる.

2.1 主定理の仮定

まず, 代数体 F 上の楕円曲線 E が p の上の素点で良超特異還元を持つという仮定について説明する. E が p の上の素点で良超特異還元を持つ場合, これまでに述べてきた p^∞-Selmer 群は Λ-corank を持つことが知られており, 通常還元を持つ場合と同様な議論は期待できない. 小林 [11] により定義された plus/minus Selmer 群 $\mathrm{Sel}_p^{\pm}(E/F_\infty)$ と呼ばれる $\mathrm{Sel}_p(E/F_\infty)$ の部分群に着目することで, 通常還元のときと同様な議論を行うことができる. 例えば, $F=\mathbb{Q}$, F_∞/F が円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大のときは $\mathrm{Sel}_p^{\pm}(E/F_\infty)$ は Λ-cotorsion になることが [11] で示されており, この場合の岩澤主予想もこれを用いて定式化されている.

次に, 反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大について説明する. K を虚 2 次体とする. K の**反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大** K_∞ とは, $K_\infty/\mathbb{Q}$ が Galois 拡大であり, かつその Galois 群が副二面体群 $\mathbb{Z}_p\rtimes(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ と同型となる唯一の $\mathbb{Z}_p$-拡大のことである. また, これは導手が p^n となる K の環類体のすべての n に対する合成体に含まれる唯一の $\mathbb{Z}_p$-拡大と特徴づけられる. この $\mathbb{Z}_p$-拡大は多くの数論的な応用を持っており, 例えば, Heegner 点の理論や Gross–Zagier と Kolyvagin の定理などに本質的にあらわれる. 以下, p が K の類数 h_K を割り切らないと仮定する. これにより, p の上にある K の任意の素点が総分岐となる.

反円分岩澤理論において, p の $K/\mathbb{Q}$ での振る舞い, つまり p が $K/\mathbb{Q}$ で分解するか惰性的であるかによって様相は大きく異なる. p が $K/\mathbb{Q}$ で分解する場合, つまり $p=\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ と表されるとき, $\mathfrak{p}$ による K の完備化 $K_\mathfrak{p}$ は $\mathbb{Q}_p$ と同一視できる. これにより, K の反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大体 K_∞ の $\mathfrak{p}$ の上にある素点 w での完備化 $K_{\infty,w}$ は $K_\mathfrak{p}$ の高さ 1 の Lubin–Tate 拡大となる. この状況での反円分岩澤理論はよく知られており, 例えば p が通常素点の場合は [2], p が超特異還元の場合は [7] などの先行研究がある. 一方, p が $K/\mathbb{Q}$ で惰性的な場合, K の素点 p での完備化 K_p は $\mathbb{Q}_p$ の不分岐 2 次拡大である. これにより, K_∞ の p の上の素点 w での完備化 $K_{\infty,w}$ は K_p の高さ 2 の Lubin–Tate 拡大体の部分体となる. この場合は技術的に難しい点があり, 楕円曲線の反円分岩澤理論を研究する上で p が分解するという条件は外せない条件であった.

K. Rubin は [13] の論文において, p が惰性的となる虚 2 次体 $K/\mathbb{Q}$ に虚数乗法をもつ楕円曲線に対する反円分岩澤理論について考察と予想 (Rubin 予想) を述べた. 近年, この Rubin 予想が A. Burungale–小林–太田 [4] により解決されたことにより, p が惰性的である状況でも高さ 1 のときと同様な議論を行うことができるようになった. 特に, plus/minus Selmer 群を定義する際に重要な「局所点からなる系」を構成することができる. この Rubin 予想自体は虚数乗法は関係なく, 局所理論 (形式群の理論) であることに注意する.

2.2 主定理

この節では今回得られた結果について述べる. 前節で設けた仮定を整理すると

- 素数 p が惰性する虚 2 次体 K とその反円分 $\mathbb{Z}_p$-拡大,
- K 上定義された楕円曲線 E が p で良超特異還元をもつ

であったが, もう少し一般化した形で結果が得られる. $\mathcal{O}_p$ を K の p での完備化 K_p の整数環とする.

Theorem 2.2.1. $p > 5$ とする. F を K の有限次拡大体とし, F_∞ を F と K_∞ の合成体とする. K の素点 p は F/K で完全分解し, $p \nmid h_K[F:K]$ と仮定する. E を F 上定義された楕円曲線とし, p の上にある F の任意の素点 $\mathfrak{p}$ で良超特異還元を持つと仮定する. $\widehat{E}$ を $\mathfrak{p}$ おける E の形式群とする. 任意の $\mathfrak{p} \mid p$ に対して, $\widehat{E}$ は高さ 2, パラメータ $-p$ である Lubin–Tate 形式群と $\mathcal{O}_p$ 上同型であると仮定する. このとき, $\mathrm{Sel}_p^{\pm}(E/F_\infty)$ が Λ-cotorsion であるならば, $\mathrm{Sel}_p^{\pm}(E/F_\infty)$ は指数有限の Λ-部分加群を持たない.

Remark 2.2.2. (1) p が F/K で完全分解するという仮定より, p の上にある F の任意の素点 $\mathfrak{p}$ に対して $F_\mathfrak{p} = K_p$ である. $p \nmid h_K$ という仮定より, p は K_∞/K で総分岐であり, さらに $p \nmid [F:K]$ の仮定より $\mathfrak{p}$ は F_∞/F でも総分岐となる. 前節の最後にも述べた通り, $\widehat{E}$ の仮定が Rubin 予想を用いるための仮定である.

(2) 主定理 2.2.1 の $\widehat{E}$ の仮定をみたす楕円曲線 E は実際に存在する. 例えば, $p > 5$ であることから $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E が p で良超特異還元を持てば自動的に仮定をみたす. (定義体は適宜 base change する.) 楕円曲線 E が K の整数環 $\mathcal{O}_K$ に虚数乗法をもつ場合も定理の仮定をみたす.

A. Agboola–B. Howard [1] や A. Burungale–K. Büyükboduk–A. Lei [3] による $\mathrm{Sel}_p^{\pm}(E/F_\infty)$ の Λ-cotorsion 性の結果を適用することで, 次のような例が得られる.

Corollary 2.2.3 (CM case)**.** E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線で, p で良超特異還元を持つと仮定し, $F = K$ とする. E は K の整数環に虚数乗法を持つと仮定する. ε を $L(E/\mathbb{Q}, s)$ の関数等式の符号とする. このとき, $\mathrm{Sel}_p^{-\varepsilon}(E/F_\infty)$ は非自明な指数有限 Λ-部分加群を持たない.

Corollary 2.2.4 (non-CM case)**.** E を $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線で, p で良超特異還元を持つと仮定し, $F = K$ とする. E のコンダクターを $N = N^+N^-$ とする. ただし, N^+ は $K/\mathbb{Q}$ で分解する素数でのみ割れる自然数, N^- は $K/\mathbb{Q}$ で惰性する素数でのみ割れる自然数である. 虚 2 次体 K は $(D_K, pN) = 1$, かつ N^- は奇数個の素数の積からなる平方因子を持たない自然数と仮定する. さらに, 次を仮定する:

- mod p Galois 表現 $G_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_p}(E[p])$ が $\begin{cases} \text{全射} & (p = 5), \\ \text{既約} & (p > 5). \end{cases}$
- $\ell^2 \equiv 1 \bmod p$ をみたす任意の素数 $\ell \mid N^-$ に対して, 惰性群 $I_\ell \subset G_{\mathbb{Q}_\ell}$ が $E[p]$ に非自明に作用

する.

このとき, $\mathrm{Sel}_p^{\pm}(E/F_\infty)$ は非自明な指数有限 Λ-部分加群を持たない.

R. Greenberg の結果と同様に, plus/minus Selmer group の特性イデアルと楕円曲線の BSD 不変量との間の関係についての結果も得られた.

Corollary 2.2.5. 定理 2.2.1 の仮定のもとで, さらに, $\mathrm{Sel}_p(E/F)$ は有限群であると仮定する. このとき, $\mathrm{Sel}_p^{\pm}(E/F_\infty)$ は Λ-cotorsion であり, $(f^{\pm}) \subset \Lambda$ を $\mathrm{Sel}_p^{\pm}(E/F_\infty)$ の特性イデアルとすると, 次が成り立つ.

$$|f^{\pm}(0)| \sim \#\,\mathrm{Sel}_p(E/F) \cdot \prod_v c_v,$$

ただし, c_v は E の v における局所玉河数である.

謝辞. 本稿および集会における講演の機会を与えてくださったオーガナーザーの皆さまに感謝申し上げます. また, 書きかけの原稿に丁寧な指摘をしてくださった足立 大雅くんに感謝申し上げます. 本研究は JST SPRING JPMJSP2136 の支援を受けたものである.

参考文献

[1] Adebisi Agboola and Benjamin Howard. Anticyclotomic Iwasawa theory of CM elliptic curves. II. *Math. Res. Lett.*, 12(5-6):611–621, 2005.

[2] M. Bertolini and H. Darmon. Iwasawa's main conjecture for elliptic curves over anticyclotomic $\mathbb{Z}_p$-extensions. *Ann. of Math. (2)*, 162(1):1–64, 2005.

[3] Ashay Burungale, Kâzım Büyükboduk, and Antonio Lei. Anticyclotomic iwasawa theory of abelian varieties of GL_2-type at non-ordinary primes. *Advances in Mathematics (to appear)*.

[4] Ashay Burungale, Shinichi Kobayashi, and Kazuto Ota. Rubin's conjecture on local units in the anticyclotomic tower at inert primes. *Ann. of Math. (2)*, 194(3):943–966, 2021.

[5] Ralph Greenberg. The structure of Selmer groups. volume 94, pages 11125–11128. 1997. Elliptic curves and modular forms (Washington, DC, 1996).

[6] Ralph Greenberg. *Iwasawa theory for elliptic curves*, pages 51–144. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1999.

[7] Adrian Iovita and Robert Pollack. Iwasawa theory of elliptic curves at supersingular primes over $\mathbb{Z}_p$-extensions of number fields. *J. Reine Angew. Math.*, 598:71–103, 2006.

[8] Kazuya Kato. p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms. In Berthelot Pierre, Fontaine Jean-Marc, Illusie Luc, Kato Kazuya, and Rapoport Michael, editors, *Cohomologie p-adiques et applications arithmétiques (III)*, number 295 in Astérisque. Société mathématique de France, 2004.

[9] Byoung Du Kim. The plus/minus Selmer groups for supersingular primes. *J. Aust. Math. Soc.*, 95(2):189–200, 2013.

[10] Takahiro Kitajima and Rei Otsuki. On the plus and the minus Selmer groups for elliptic curves at supersingular primes. *Tokyo J. Math.*, 41(1):273–303, 2018.

[11] Shin-ichi Kobayashi. Iwasawa theory for elliptic curves at supersingular primes. *Invent. Math.*, 152(1):1–36, 2003.

[12] Matteo Longo and Stefano Vigni. On Bloch-Kato Selmer groups and Iwasawa theory of p-adic Galois representations. *New York J. Math.*, 27:437–467, 2021.

[13] Karl Rubin. Local units, elliptic units, Heegner points and elliptic curves. *Invent. Math.*, 88(2):405–422, 1987.

[14] Christopher Skinner. Lectures on the Iwasawa theory of elliptic curves. `https://swc-math.github.io/aws/2018/2018SkinnerNotes.pdf`.

有限生成体の無限次代数拡大体上の Mordell–Weil 群の構造

東京工業大学 理学院 数学系 数学コース
浅山拓哉 (Takuya ASAYAMA) *

概要

K を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の有限生成体とする．K の絶対 Galois 群 G_K の元の e 個組 $\sigma \in G_K^e$ に対し $\overline{K}(\sigma)$ を K の代数閉包 $\overline{K}$ における σ の固定体, $\overline{K}[\sigma]$ を $\overline{K}(\sigma)/K$ の最大 Galois 部分拡大とする．本稿では $\overline{K}[\sigma]$ 上の準アーベル多様体 A の Mordell–Weil 群 $A(\overline{K}[\sigma])$ の構造について得られた結果を述べる．また, $\overline{K}(\sigma)$ および $\overline{K}[\sigma]$ の Kummer 忠実性に関する大溪の結果の拡張についても紹介する．

1 導入

体 K 上のアーベル多様体 A に対し, その K 有理点全体がなすアーベル群 $A(K)$ を **Mordell–Weil 群**とよぶ．群 $A(K)$ の構造を決定することは数論における重要な問題であり, 多くの先行研究がある．群 $A(K)$ の構造について, 次の定理は基本的である．

定理 1.1 (Mordell–Weil の定理)**.** K を素体上の有限生成体とする．K 上のアーベル多様体 A に対し, その Mordell–Weil 群 $A(K)$ は有限生成である．とくに, $A(K)$ の階数は有限であり, $A(K)$ の捩れ点全体がなす群 $A(K)_{\mathrm{tor}}$ は有限である．

では, K が素体上無限生成であるとき, 群 $A(K)$ の構造はどうなるだろうか．まず, 無限生成体のもっとも極端な例である代数閉体については次の結果がある．ただし, 体 K が有限体の代数拡大のとき $A(K)$ は捩れ群になり階数は零となるから定理ではその場合を除いている．

定理 1.2 (Serre, Frey–Jarden [2, Theorem 10.1])**.** K を有限体の代数閉包ではない代数閉体とする．K 上の次元正の任意のアーベル多様体 A に対し, Mordell–Weil 群 $A(K)$ の階数は K の濃度に等しい．

次に, 代数閉体よりも少し小さな無限生成体を考えよう．そのために, いくつかの記号と概念を導入する．

K を素体上の有限生成体とし, その代数閉包 $\overline{K}$ を固定しておく．K の絶対 Galois 群を G_K とかき, G_K の各元を $\overline{K}$ の自己同型に一意に延長する．e を正の整数とする．G_K の元の e 個組

* E-mail: asayama.t.aa@m.titech.ac.jp

$\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_e) \in G_K^e$ に対し, 体 $\overline{K}(\sigma)$ を $\overline{K}$ における σ の固定体とする. すなわち

$$\overline{K}(\sigma) = \{x \in \overline{K} \mid \text{任意の } 1 \leq i \leq e \text{ について } \sigma_i x = x\}.$$

さらに体 $\overline{K}[\sigma]$ を体拡大 $\overline{K}(\sigma)/K$ の最大 Galois 部分拡大とする.

G_K は Krull 位相によりコンパクト位相群となり, その上に確率測度 μ で次を満たすものが一意に定まる (cf. [3, Proposition 18.2.1]).

(1) (両側不変性) G_K の任意の可測集合 B および任意の $\sigma \in G_K$ に対し, $\mu(\sigma B) = \mu(B\sigma) = \mu(B)$.
(2) (正則性) G_K の任意の可測集合 B および任意の $\varepsilon > 0$ に対し, G_K の開集合 U および閉集合 C であって, $C \subseteq B \subseteq U$ かつ $\mu(U \setminus C) < \varepsilon$ を満たすものが存在する.

この μ を G_K の (正規化された)**Haar 測度**とよぶ. G_K^e にも同様に位相および Haar 測度 (これも μ とかく) を入れる. 「**ほとんどすべての** $\sigma \in G_K^e$」と書いたら, 「G_K^e のある測度零集合を除いたすべての $\sigma \in G_K^e$」を意味する.

本稿では, 体 K が有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の有限生成体であるときに, $\overline{K}(\sigma)$ や $\overline{K}[\sigma]$ 上の準アーベル多様体 (アーベル多様体の代数的トーラスによる拡大) の Mordell–Weil 群について, 構造をより詳細に調べる. 結果を述べる前に, Kummer 忠実の概念を定義しておこう.

完全体 K が **Kummer 忠実**であるとは, K が条件「K の任意の有限次拡大 L および L 上の任意の準アーベル多様体 A に対し, $A(L)_{\mathrm{div}} = 0$ が成り立つ」を満たすことをいう. ここで, アーベル群 X に対し, $X_{\mathrm{div}} = \bigcap_{n \geq 1} nX$ (n は正の整数全体を亘る) と定義する. 望月 [12, Definition 1.5] により導入された Kummer 忠実体は遠アーベル幾何学に由来をもつ体である. 遠アーベル幾何学は, 代数多様体やそれに関連する幾何学的対象をその代数的基本群から再構成する方法を記述することを目的とする数論幾何学の一分野である. 遠アーベル幾何学における代数多様体の基礎体としては素体上の有限生成体が想定されてきたが, 実際には遥かに多くの体が遠アーベル幾何学の基礎体に適していることが近年の研究によりわかってきた. ここで「どのような体が遠アーベル幾何学の基礎体に適しているか」という自然な問いが生じる. Kummer 忠実体は遠アーベル幾何学の基礎体として適切であろうと考えられており, どのような体が Kummer 忠実であるか調べることは遠アーベル幾何学の観点からも有意義である.

本稿における主定理を述べる.

定理 1.3. K を $\mathbb{Q}$ 上の有限生成体, e を正の整数とする.

(1) $e \geq 2$ とする. ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, 次が成り立つ: $\overline{K}[\sigma]$ の任意の有限次拡大 L および L 上の任意の準アーベル多様体 A に対し, 群 $A(L)/A(L)_{\mathrm{tor}}$ は階数可算の自由 $\mathbb{Z}$ 加群である.
(2) $e \geq 2$ とする. ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, 体 $\overline{K}(\sigma)$ は Kummer 忠実である.
(3) ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, 体 $\overline{K}[\sigma]$ は Kummer 忠実である.

注意 1.4. K を $\mathbb{Q}$ 上の有限生成体, e を正の整数とする. $\overline{K}(\sigma)$ と $\overline{K}[\sigma]$ は次の意味で異なる体である: ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, $\overline{K}(\sigma)/\overline{K}[\sigma]$ は無限次拡大である. さらに, ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, $\overline{K}(\sigma)/K$ は Galois 拡大ではない. 実はより強く, 次が成り立つことが知られて

いる [1, Theorems 7.9 and 7.10]: ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, $\overline{K}(\sigma)$ を有限次拡大または Galois 拡大にもつ $\overline{K}(\sigma)$ の真の部分体は存在しない.

2 先行研究

$\overline{K}(\sigma)$ や $\overline{K}[\sigma]$ 上の準アーベル多様体の Mordell–Weil 群について知られている事実を要約する. ここで, アーベル群 X と正の整数 n に対し X の n 捩れ部分群を $X[n]$, 素数 l に対し X の l 冪捩れ部分群を $X[l^\infty] = \bigcup_{n\geq 1} X[l^n]$ とかく.

定理 2.1. K を素体上の有限生成体, e を正の整数とする.

(1) (Geyer–Jarden [5, Theorem 2.4] (resp. Frey–Jarden [2, Theorem 9.1])) K は無限体であるとする. ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ および $\overline{K}[\sigma]$(resp. $\overline{K}(\sigma)$) 上の次元正の任意のアーベル多様体 A に対し, 群 $A(\overline{K}[\sigma])$(resp. $A(\overline{K}(\sigma))$) の階数は可算である.

(2) (Jarden [9, Theorems 8.1 and 8.2]) 正の整数 n に対し, ζ_n を $\overline{K}$ における 1 の原始 n 乗根とする.

  (2-i) ほとんどすべての $\sigma \in G_K$ および任意の正の整数 d に対し, $[\overline{K}(\sigma)(\zeta_l) : \overline{K}(\sigma)] = d$ となる素数 d が無限個存在する. とくに, ほとんどすべての $\sigma \in G_K$ および任意の $\overline{K}(\sigma)$ の有限次拡大 M に対し, M は 1 の冪根を無限個含む一方, $\zeta_l \notin M$ となる素数 l が存在する.

  (2-ii) $e \geq 2$ とする. ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ および任意の正の整数 d に対し, $[\overline{K}(\sigma)(\zeta_n) : \overline{K}(\sigma)] \leq d$ となる K の標数で割れない正の整数 n は有限個である. とくに, ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ および任意の $\overline{K}(\sigma)$ の有限次拡大 M に対し, M に含まれる 1 の冪根は有限個である.

(3) K に関する次の主張を考える.

  (a) ほとんどすべての $\sigma \in G_K$ および $\overline{K}(\sigma)$ 上の次元正の任意のアーベル多様体 A に対し, $A(\overline{K}(\sigma))$ の捩れ部分群 $A(\overline{K}(\sigma))_{\mathrm{tor}}$ は無限群である. さらに, $A(\overline{K}(\sigma))[l] \neq 0$ となる素数 l が無限個存在する.

  (b) $e \geq 2$ とする. ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ および $\overline{K}(\sigma)$ 上の任意のアーベル多様体 A に対し, $A(\overline{K}(\sigma))$ の捩れ部分群 $A(\overline{K}(\sigma))_{\mathrm{tor}}$ は有限群である.

  (c) ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$, $\overline{K}(\sigma)$ 上の任意のアーベル多様体 A, および任意の素数 l に対し, $A(\overline{K}(\sigma))$ の l 冪捩れ部分群 $A(\overline{K}(\sigma))[l^\infty]$ は有限群である.

  次のとき, 主張が成り立つ.

  (3-i) (Geyer–Jarden [4, Theorem 1.1]) 各主張における「(次元正の) 任意のアーベル多様体」を「任意の楕円曲線[*1]」に置き換える. このとき, 任意の K に対して主張 (a)–(c) が成り立つ.

  (3-ii) (Jacobson–Jarden [6, Proposition 4.2]) K が有限体ならば主張 (a)–(c) が成り立つ.

  (3-iii) (Jacobson–Jarden [8, Main Theorem (b), (a)] ((b) および (c)), Zywina [17, Theo-

[*1] **楕円曲線**とは 1 次元のアーベル多様体のことをいう.

rem 1.1] (K が代数体の場合の (a)), Jarden–Petersen [10, Theorem C] (一般の場合の (a))) K の標数が 0 ならば主張 (a)–(c) が成り立つ.

(3-iv) (Jacobson–Jarden [8, Main Theorem (a)]) 任意の K に対して主張 (c) が成り立つ.

(4) (Jarden–Petersen [11, Theorem 1.3 (ii)]) K は標数 0 とし $e \geq 2$ とする. ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$, $\overline{K}(\sigma)$ の任意の有限次拡大 M, および M 上の任意のアーベル多様体 A に対し, $A(M)_{\mathrm{div}} = 0$ が成り立つ.

Geyer–Jarden [4] はこの定理の (3) の主張 (a)–(c) が任意の素体上の有限生成体 K に対して成り立つと予想した. Jacobson–Jarden の論文 [6] には K が正標数のときの主張 (a) の証明があるが, 誤りを含む [7]. 定理で述べられていない場合 (K が正標数の無限体のときの (a) および (b)) については未解決である.

$\overline{K}[\sigma]$ の Kummer 忠実性については次の結果が知られている.

定理 2.2 (大溪 [14, Corollary 1], 訂正論文 [15, Corollary 1] も参照)**.** K を代数体, $e \geq 2$ とする. ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, 体 $\overline{K}[\sigma]$ は Kummer 忠実である.

本稿の主定理 (定理 1.3) はこの大溪の結果の拡張を含む.

3 Mordell–Weil 群の torsion-free part の自由性

この節では, 定理 1.3 (1) の証明を行う. 鍵となるのは次に紹介する Moon の結果である. Moon はこの結果を K が代数体で A がアーベル多様体のときにのみ示しているが, まったく同じ証明からより一般の状況で成り立つ.

命題 3.1 (Moon [13, Proposition 7])**.** K を濃度可算の体, A を K 上の準アーベル多様体とする. L を K の Galois 拡大で, 群 $A(L)_{\mathrm{tor}}$ が有限であるものとする. このとき, 群 $A(L)/A(L)_{\mathrm{tor}}$ は階数高々可算の自由 $\mathbb{Z}$ 加群である.

定理 1.3 (1) の証明. まず, 群 $A(L)/A(L)_{\mathrm{tor}}$ が自由 $\mathbb{Z}$ 加群であることを示す. $\sigma \in G_K^e$ を次の条件を満たすようにとる: $\overline{K}(\sigma)$ の任意の有限次拡大 M に対し, M に含まれる 1 の冪根は有限個であって, M 上の任意のアーベル多様体 B に対し, 群 $B(M)_{\mathrm{tor}}$ は有限である. 定理 2.1 (2-ii) および (3-iii) より, ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ はこの条件を満たすことがわかる. L を $\overline{K}[\sigma]$ の有限次拡大とし, $M = L \cdot \overline{K}(\sigma)$ とおく. A を L 上の準アーベル多様体とすると, A はアーベル多様体 B のトーラス T による拡大である. σ に関する仮定から, $T(M)_{\mathrm{tor}}$ および $B(M)_{\mathrm{tor}}$ は有限であるから, $A(M)_{\mathrm{tor}}$ および $A(L)_{\mathrm{tor}}$ は有限である. さらに, L に含まれる K の有限次拡大 K' を, L/K' が Galois かつ A が K' 上で定義されているようにとることができる. 命題 3.1を L/K' および A に適用すると, 群 $A(L)/A(L)_{\mathrm{tor}}$ が階数高々可算の自由 $\mathbb{Z}$ 加群であることがわかる.

あとは $A(L)/A(L)_{\mathrm{tor}}$ の階数が実際に可算であることをいえばよい. 簡単な議論により A が次元正のアーベル多様体の場合にのみ示せばよいことがわかる. 定理 2.1 (1) によりほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, $L = \overline{K}[\sigma]$ のときには主張が成り立つ. 一般の場合には, Weil 制限 [11, Lemma 6.1] から従う. □

この結果から $\overline{K}[\sigma]$ の有限次拡大上の Mordell–Weil 群に関する次の構造定理を得る.

系 3.2. K を $\mathbb{Q}$ の有限生成体, $e \geq 2$ とする. ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, 次が成り立つ: $\overline{K}[\sigma]$ の任意の有限次拡大 L および L 上の任意の準アーベル多様体 A に対し, 群 $A(L)$ は有限の捩れ群と階数可算の自由 $\mathbb{Z}$ 加群との直和である.

証明. $\sigma \in G_K^e$ を定理 2.1 (2-ii), (3) の (b) および定理 1.3 (1) の各主張を満たすものとする. この σ に対して系の主張が成り立つことを示せば十分である. L を $\overline{K}[\sigma]$ の有限次拡大, A を L 上の準アーベル多様体とすると, 群 $A(L)/A(L)_{\mathrm{tor}}$ は階数可算の自由 $\mathbb{Z}$ 加群であるから, とくに射影的である. よって完全列 $0 \to A(L)_{\mathrm{tor}} \to A(L) \to A(L)/A(L)_{\mathrm{tor}} \to 0$ は分裂し, $A(L) = A(L)_{\mathrm{tor}} \oplus A(L)/A(L)_{\mathrm{tor}}$ を得る. 系の主張はこの分解と σ に関する仮定から従う. □

4 $\overline{K}(\sigma)$ および $\overline{K}[\sigma]$ の Kummer 忠実性

この節では, 定理 1.3 (2) および (3) の証明の概略を述べる. Kummer 忠実性を示すために用いる命題を紹介する.

命題 4.1 (小関–田口 [16, Proposition 2.3])**.** 完全体 F が Kummer 忠実であることは, F の任意の有限次拡大 E に対し $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(E)_{\mathrm{div}} = 0$ が成り立ち, F 上の任意のアーベル多様体 A に対し $A(F)_{\mathrm{div}} = 0$ が成り立つことと同値である.

命題 4.2 (小関–田口 [16, Proposition 2.4 (2)])**.** A を Kummer 忠実体 F 上の準アーベル多様体, E を F の Galois 拡大とする. このとき, 次の 3 条件は互いに同値である:

(a) $A(E)_{\mathrm{div}} = 0$.
(b) $(A(E)_{\mathrm{tor}})_{\mathrm{div}} = 0$.
(c) 任意の素数 l に対し $A(E)[l^\infty]$ は有限である.

定理 1.3 (2) の証明 (概略). 定理 2.1 (4) よりほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ および $\overline{K}(\sigma)$ 上の任意のアーベル多様体 A に対し $A(\overline{K}(\sigma))_{\mathrm{div}} = 0$ であるから, 命題 4.1より ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ および $\overline{K}(\sigma)$ 上の任意の有限次拡大 M に対し $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(M)_{\mathrm{div}} = 0$ であることを示せばよい.

S をこの条件が成り立たない $\sigma \in G_K^e$ の集合, すなわち $\overline{K}(\sigma)$ 上のある有限次拡大 M に対し $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(M)_{\mathrm{div}} \neq 0$ となる $\sigma \in G_K^e$ の集合とする. 各 $a \in \overline{K}^\times \setminus \{1\}$ について, $\overline{K}(\sigma)$ 上のある有限次拡大 M に対し $a \in \mathbb{G}_{\mathrm{m}}(M)_{\mathrm{div}}$ となる $\sigma \in G_K^e$ の集合とすると $S = \bigcup_{a \in \overline{K}^\times \setminus \{1\}} S_a$ が成り立つ. $\overline{K}^\times \setminus \{1\}$ は可算集合であるから, 各 $a \in \overline{K}^\times \setminus \{1\}$ に対し $\mu(S_a) = 0$ をいえば $\mu(S) = 0$ となり定理が導かれる.

a は 1 の冪根であるとする. このとき各 $\sigma \in S_a$ に対し, $\overline{K}(\sigma)$ は 1 の冪根を無限個もつことになるが, 定理 2.1 (2-ii) よりそのような $\sigma \in G_K^e$ の集合の測度は 0 であるので $\mu(S_a) = 0$ が従う.

a は 1 の冪根でないとする. 素数 l に対し, a のある l 乗根が $\overline{K}(\sigma)$ に含まれる $\sigma \in G_K^e$ の集合を $T_a^{(l)}$ とかくこととする. このとき (a に依存する) 素数 l_0 で, 任意の素数 $l \geq l_0$ に対し $\mu(T_a^{(l)}) \leq 1/l^{e-1}$ が成り立つものが存在することがわかる. $e \geq 2$ より素数 $l \geq l_0$ からなる無

限集合 Λ_a で, $\sum_{l\in\Lambda_a} 1/l^{e-1} < +\infty$ となるものが存在する. Borel–Cantelli の第一補題 (cf. [3, Lemma 18.3.5 (a)]) より, ほとんどすべての $\sigma \in G_K^e$ に対し, $\sigma \in T_a^{(l)}$ となる $l \in \Lambda_a$ は有限個である. そのような σ に対し $\sigma \notin S_a$ であることが証明できるので, この場合も $\mu(S_a) = 0$ である. □

定理 1.3 (3) の証明 (概略). $e \geq 2$ のときは定理 1.3 (2)(あるいは定理 1.3 (1) と定理 2.1 (4)) から従うので, $e = 1$ とする. 命題 4.1よりほとんどすべての $\sigma \in G_K$ に対し次の 2 条件が成り立つことを示せばよい:

(a) $\overline{K}[\sigma]$ の任意の有限次拡大 L に対し $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(L)_{\mathrm{div}} = 0$.
(b) $\overline{K}[\sigma]$ 上の任意のアーベル多様体 A に対し $A(\overline{K}[\sigma])_{\mathrm{div}} = 0$.

(a) については L が K のある有限次拡大の Galois 拡大であることと K の有限次拡大は Kummer 忠実であることから, 命題 4.2より条件 $\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(L)_{\mathrm{div}} = 0$ が $(\mathbb{G}_{\mathrm{m}}(L)_{\mathrm{tor}})_{\mathrm{div}} = 0$ と同値になり, 定理 2.1 (2-i) に帰着される. 同様に, (b) については再び命題 4.2より条件 $A(\overline{K}[\sigma])_{\mathrm{div}} = 0$ が各素数 l に対し $A(\overline{K}[\sigma])[l^\infty]$ が有限であることと同値になり, 定理 2.1 (3-iii) に帰着される. □

注意 4.3. 主定理 (定理 1.3) の (1) および (2) について, $e = 1$ のの場合には準アーベル多様体の Mordell–Weil 群に関するある種の有限性の性質が失われるため (定理 2.1), 本稿で紹介した証明は機能しなくなっている. 定理が $e = 1$ のときにも成り立つかどうかは未解決である.

参考文献

[1] L. Bary-Soroker, *On pseudo algebraically closed extensions of fields*, J. Algebra **322** (2009), 2082–2105.

[2] G. Frey and M. Jarden, *Approximation theory and the rank of abelian varieties over large algebraic fields*, Proc. Lond. Math. Soc. **28** (1974) 112–128.

[3] M. D. Fried and M. Jarden, *Field arithmetic*, third ed., Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge., A Series of Modern Surveys in Mathematics **11**, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[4] W.-D. Geyer and M. Jarden, *Torsion points of elliptic curves over large algebraic extensions of finitely generated fields*, Isr. J. Math. **31** (1978) 257–297.

[5] W.-D. Geyer and M. Jarden, *The rank of abelian varieties over large algebraic fields*, Arch. Math. **86** (2006), 211–216.

[6] M. Jacobson and M. Jarden, *On torsion of abelian varieties over large algebraic extensions of finitely generated fields*, Mathematika **31** (1984), 110–116.

[7] M. Jacobson and M. Jarden, *On torsion of abelian varieties over large algebraic extensions of finitely generated fields*: *Erratum*, Mathematika **32** (1985), 316.

[8] M. Jacobson and M. Jarden, *Finiteness theorems for torsion of abelian varieties over large algebraic fields*, Acta Arith. **98** (2001), 15–31.

[9] M. Jarden, *Roots of unity over large algebraic fields*, Math. Ann. **213** (1975), 109–127.

[10] M. Jarden and S. Petersen, *Torsion of abelian varieties over large algebraic extensions of* $\mathbb{Q}$, Nagoya Math. J. **234** (2019), 46–86.

[11] M. Jarden and S. Petersen, *The section conjecture over large algebraic extensions of finitely generated fields*, Math. Nachr. **295** (2022), 890–911.

[12] S. Mochizuki, *Topics in absolute anabelian geomerty III*: *global reconstruction algorithms*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **22** (2015), 939–1156.

[13] H. Moon, *On the Mordell-Weil groups of Jacobians of hyperelliptic curves over certain elementary abelian* 2*-extensions*, Kyungpook Math. J. **49** (2009), 419–424.

[14] S. Ohtani, *Kummer-faithful fields which are not sub-p-adic*, Res. Number Theory **8** (2022), Paper No. 15, 7 pp.

[15] S. Ohtani, *Corrigendum to*: *Kummer-faithful fields which are not sub-p-adic*, Res. Number Theory **9** (2023), Paper No. 36, 7 pp.

[16] Y. Ozeki and Y. Taguchi, *A note on highly Kummer-faithful fields*, Kodai Math. J. **45** (2022), 49–64.

[17] D. Zywina, *Abelian varieties over large algebraic fields with infinite torsion*, Isr. J. Math. **211** (2016), 493–508.

K3 曲面の自己同型群とその実質的コホモロジー次元について

東京工業大学　理学院数学系
髙津　大樹 (Taiki TAKATSU) *

1　はじめに

本講演では、$\mathbb{C}$ 上の代数的 K3 曲面のみを扱う．特に、$K3$ 曲面の自己同型群の分類や不変量の計算問題について話したい．

K3 曲面の自己同型群の分類問題については 2 つのアプローチが知られている．1 つはある種の有限性条件を課した上での分類である．例えば、向井氏 [7] により、K3 曲面の有限シンプレクティック部分群は 23 次のマシュー群の部分群として実現することが知られている．もう 1 つのアプローチは、Borcherds の格子理論の応用による、自己同型群の生成系の決定である．K3 曲面の自己同型群は非可換無限群になることがあり、種数 2 のリーマン面に付随する Jacobian Kummer surface の場合などがそうである．Jacobian Kummer surface の自己同型群の生成系の決定問題は Klein によって提起され、金銅氏 [6] により、Borcherds の格子理論を用いて解決されるまで、100 年以上を要した難題であった．この手法により、これまでいくつかの K3 曲面の自己同型群の生成系が決定されている．一方で、この手法は全ての K3 曲面に適用できるわけではないため、一般の K3 曲面の自己同型群の分類論を構築するためには、新しい手法の開発が望まれる．一般の自己同型群を捉える新たな試みとして、2018 年の代数学シンポジウムにおいて向井茂氏 [8] により、以下の予想が提唱された．

Conjecture 1 ([8])**.** X を楕円的 K3 曲面、Enriques 曲面、または Coble 曲面とし、$\mathrm{Aut}(X)$ を X の自己同型群とする．このとき、$\mathrm{Aut}(X)$ の実質的コホモロジー次元 $\mathrm{vcd}(\mathrm{Aut}(X))$ は、X の楕円曲面構造から誘導される Mordell-Weil 群の階数の最大に一致するだろう．

今回、講演者は K3 曲面の自己同型群の自然な双曲空間への作用を通して、$\mathrm{vcd}(\mathrm{Aut}(X))$ が X のアンプル錐のある種の無限遠境界から決定されることを示した．また、アンプル錐の無限遠境界がある種の sphere packing になっている場合に、具体的に自己同型群の vcd を決定することができた．講演ではこれらの結果について紹介したい．

* E-mail:takatsu.t.aa@m.titech.ac.jp

2 導入

主結果を述べるにあたって、(1) 双曲幾何、(2) 群のコホモロジー、(3) K3 曲面、それぞれの事項について順番に用語等を準備する.

2.1 双曲空間について

K3 曲面 X に対して、自然な双曲空間 $\mathbb{H}^n_X$ が構成できる．これを後に説明するため、まずは双曲幾何の基本事項について述べる.

Definition 2.1. n を非負整数とする．$(n+1)$ 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ とベクトル $x = (x_0, \ldots, x_{n-1}, x_n)$, $y = (y_0, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ に対して、内積 $x \circ y$ を以下で定める:

$$x \circ y = x_0 y_0 - (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n).$$

n 次元双曲空間の hyperboloid model H^n を $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x \circ x = -1, x_1 > 0\}$ で定める．H^n 上の点 x,y の間の双曲距離 d_H は以下で定める:

$$\cosh d_H(x, y) = -x \circ y.$$

Remark 2.2. 通常は $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の内積を $x \circ y = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ と定め、hyperboloid model を定義するのが一般的である．ここでは、後の代数幾何への応用のため符号を逆にしている.

$(n+1)$ 次正方行列 A が上の内積を保つ、すなわち任意のベクトル x,y に対して $x \circ y = Ax \circ Ay$ を満たすとする．さらに A が hyperboloid model H^n を H^n 自身に写す場合、双曲距離 d_H の定義より、A は H^n 上の等長写像を誘導する. 以下のように、逆が成り立つ.

Theorem 2.3 ([9, Theorem 3.2.3])**.** n 次元双曲空間の hyperboloid model H^n に対して、

$$O^+(1, n) = \{A \in GL(n+1, \mathbb{R}) : A \text{は内積} \circ \text{を保つ、さらに} AH^n = H^n \text{を満たす}\}$$

とする．$O^+(1, n)$ の $\mathbb{R}^{n+1}$ への作用の H^n への制限を通して、$O^+(1, n)$ は H^n の等長変換群と同一視される.

2.2 群のコホモロジー次元について

群に対してある種の大きさを考えたものが (実質的) コホモロジー次元である．ここでは、定義と簡単な具体例を見る.

Definition 2.4. R を単位的環、M を左 R 加群とする. 以下のような M に関する長さ n の射影分解が存在するとき、$\mathrm{projdim}_R M \leq n$ とする:

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0.$$

このような n が存在しないとき、$\mathrm{projdim}_R M = \infty$ とする．$\mathrm{projdim}_R M$ を M の射影次元という.

Definition 2.5. 群 Γ に対して、$\mathbb{Z}$ 上の群環 $\mathbb{Z}\Gamma$ を考える．このとき、任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して、$\gamma \cdot 1 := 1$ という自明な作用を考えることで、$\mathbb{Z}$ は自明な左 $\mathbb{Z}\Gamma$ 加群になる．このとき、$\mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}\Gamma$ に関する射影次元 $\mathrm{projdim}_{\mathbb{Z}\Gamma}\mathbb{Z}$ を群 Γ のコホモロジー次元といいい、$\mathrm{cd}\Gamma$ と書く．

Example 2.6. 以下を例としてあげる．

1. 階数 n の自由アーベル群 $\mathbb{Z}^n$ のコホモロジー次元は n.
2. 階数 m の自由群 F_m のコホモロジー次元は 1.

このように、群に対してある種の大きさを定めることができた．一方で、群 Γ が有限位数の元（捩れ元）を含む場合はコホモロジー次元 $\mathrm{cd}\Gamma = \infty$ となってしまうため、次の定義に移行する．

Definition 2.7. 群 Γ が捩れ元を持たない有限指数部分群 Γ' を持つとする．このとき、Γ' のコホモロジー次元 $\mathrm{cd}\Gamma'$ を Γ の実質的コホモロジー次元といい、$\mathrm{vcd}\Gamma$ で表す．

この定義が well-defined であることは、以下の Serre の定理により保証される．

Theorem 2.8 ([3, Chapter VIII, Theorem 3.1])**.** 群 Γ が捩れ元を持たないとする．Γ の任意の有限指数部分群 Γ' に対して、$\mathrm{cd}\Gamma = \mathrm{cd}\Gamma'$ が成り立つ．

2.3 K3 曲面について

Definition 2.9. コンパクトな複素曲面 X について、その標準束が自明かつ不正則数が 0 のとき、K3 曲面であるという．

以下では特に断らない限り、X を $\mathbb{C}$ 上の代数的 K3 曲面とする．

Example 2.10. K3 曲面の例として、以下をあげておく．

1. 射影空間 $\mathbb{P}^3$ 内の非特異 4 次曲面.
2. 射影平面 $\mathbb{P}^2$ 内の非特異 6 次曲線 C で分岐する 2 重被覆.

K3 曲面の自己同型群は、アンプル錐への作用を見ると理解しやすい．アンプル錐を定義するため、いくつか必要な用語を定める．

Definition 2.11. ω_X を K3 曲面 X の至る所で 0 にならない正則 2 形式とする．このとき、X のネロン・セベリ格子 $NS(X)$ を以下で定める:

$$NS(X) := \{x \in H^2(X,\mathbb{Z}) \ : \ \langle x, \omega_X \rangle = 0\}.$$

ここで、$\langle\ ,\ \rangle$ は $H^2(X,\mathbb{Z})$ のカップ積であり、これを $NS(X)$ へ制限することで符号 $(1, \rho(X)-1)$ の格子になる．$\rho(X)$ は X のピカール数である．また、$NS(X)$ の直交群を $O(NS(X))$ で表す．

Definition 2.12. K3 曲面 X に対し、

$$\Delta(X) := \{\delta \in S_X : \langle \delta, \delta \rangle = -2\}, \ \ \Delta^+(X) := \{\delta \in \Delta(X) : \delta \text{ は有効因子.}\}$$

と定める．また、錐 $P(X)$ を

$$P(X) = \{x \in H^{1,1}(X, \mathbb{R}) : \langle x, x\rangle > 0\}$$

で定めると、2 つの連結成分を持っている．ケーラー類のクラスを含む方を $P^+(X)$ と表し、positive cone という．

Definition 2.13. また X のアンプル錐 $A(X)$ を以下で定める:

$$A(X) = \{x \in (NS(X) \otimes \mathbb{R}) \cap P^+(X) : \text{任意の } \delta \in \Delta(X)^+ \text{ に対して、} \langle x, \delta\rangle > 0\}.$$

Definition 2.14. K3 曲面 X から $\mathbb{P}^1$ への固有全射正則写像 $f : X \to \mathbb{P}^1$ でそのファイバーが連結であり、有限個のファイバーを除いて楕円曲線であるとき、$f : X \to \mathbb{P}^1$ は楕円的 K3 曲面という．また、$j : J \to \mathbb{P}^1$ を f の jacobian fibration とし、j のセクションの生成する群を f に付随する Mordell-Weil 群という．

次に、ネロン・セベリ格子 $NS(X)$ から双曲空間が構成できることを説明する．

まず、$NS(X)$ は符号 $(1, \rho(X)-1)$ の格子であった．ここで、$n = \rho(X)-1$ とし、2 次形式 $f_{n+1}(x)$ を $f_{n+1}(x) = x_0^2 - (x_1^2 + \cdots x_n^2)$ で定める．さらに 2 次形式 f を $f(x) = \langle x, x\rangle$ $(x \in NS(X) \otimes \mathbb{R})$ とすると、シルベスターの慣性法則より、ある $M \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{R})$ が存在して、$f_{n+1}(Mx) = f(x)$ となる．Definition 2.1より、集合 $\{x \in NS(X) \otimes \mathbb{R} : \langle x, x\rangle = 1\}$ のケーラー類を含む方の連結成分を n 次元双曲空間の hyperboloid model と同一視できる．

Definition 2.15. 上のように構成された双曲空間を $\mathbb{H}^n_X$ と表わし、K3 曲面 X に付随する双曲空間と呼ぶ．$\mathbb{H}^n_X$ の点 x, y の間の双曲距離 $d(x, y)$ は以下で与えられる:

$$\cosh d(x, y) = -\langle x, x\rangle$$

.

Remark 2.16. ここで、K3 曲面 X の自己同型は $NS(X)$ に作用し、カップ積を保つので、双曲空間 $\mathbb{H}^n_X$ に等長写像として作用している．

双曲幾何学、より一般に幾何学的群論などの分野では、群の作用する空間に対して性質の良い無限遠コンパクト化を考えたい、というものがある．例えば、Bestvina, Mess [2] は捩れ元を持たない双曲群 G に対して以下を示した:

$$\mathrm{cd}G = \dim \partial G + 1,$$

ここで $\dim \partial G$ は G のグロモフ境界の位相次元である．

[5] で深谷氏、尾國氏により相対双曲群に対するブローアップ境界というものが構成されており、最近、深谷氏 [4] により相対双曲群に対する Bestvina-Mess 型の公式が示された．本研究の主結果は、この深谷氏の結果を自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ に適用することで得られる．一般の相対双曲群に対するブローアップ境界は、粗コンパクト化といった幾何学的群論の言葉を用いて記述されているが、我々の場合には、双曲空間 $\mathbb{H}^n_X$ とアンプル錐を用いて単純な記述が可能である．以下では、K3 曲面 X のアンプル錐 $A(X)$ に付随するブローアップ境界 ∂A^{bl}_X を定義するため、いくつか用語を準備する．

Definition 2.17. X の positive cone $P^+(X)$ の閉包を $\overline{P^+}(X)$ で表す．ここで、

$$\mathbb{P}(\overline{P^+}(X)) = (\overline{P^+}(X)\backslash\{0\})/\mathbb{R}_{>0}.$$

とすると、自然な包含写像 $i : \mathbb{H}^n_X \to \mathbb{P}(\overline{P^+}(X))$ が考えられる．i は $\mathbb{H}^n_X$ から $i(\mathbb{H}^n_X)$ への同相写像を与えている．このとき $i(\mathbb{H}^n_X)$ の $\mathbb{P}(\overline{P^+}(X))$ における閉包を $\overline{\mathbb{H}}^n_X$、境界を $\partial\mathbb{H}^n_X$ で表す.

Definition 2.18. X のアンプル錐 $A(X)$ に対して、集合 A_X を

$$A_X = A(X) \cap \mathbb{H}^n_X$$

と定める．A_X の $\overline{\mathbb{H}}^n_X$ における閉包を $\overline{A_X}$ で表す．また、集合 $\partial A_X := \overline{A_X}\backslash A_X$ をアンプル錐 $A(X)$ に付随する無限遠境界と呼ぶ.

Definition 2.19. 自然な包含写像 $i : \mathbb{H}^n_X \to \mathbb{P}(\overline{P^+}(X))$ に対して、$\mathcal{E}_X$ を

$$\mathcal{E}_X := i(NS(X)) \cap \partial A_X$$

で定める.

$\partial\mathbb{H}^n_X = \{x \in \overline{P^+}(X)\backslash\{0\} : \langle x, x\rangle = 0\}/\mathbb{R}_{>0}$ より、$\mathcal{E}$ の点は $NS(X) \cap \overline{A(X)}$ の原始的な点で自己交点数が 0 であるもの、つまり X 上の楕円曲面構造と一対一対応していることがわかる．以下では、$\mathcal{E}_X$ の各点で ∂A_X をブローアップすることで ∂A^{bl}_X を構成する.

Definition 2.20. $(n-1)$ 次元球面を S^{n-1} で表す．$\mathbb{R}^n$ の開集合 U と点 $p \in U$ に対して、

$$\mathrm{Bl}_p(U) = \{(x, t) \in U \times S^{n-1} : |x - p|t = (x - p)\}$$

と定める．ここで、$|\cdot|$ はユークリッドノルムとする．また、写像 $\pi_p : \mathrm{Bl}_p(U) \to U$ を $\pi_p(x, t) = x$ で定める．写像 π_p を開集合 U の点 p でのブローアップと呼ぶ.

Definition 2.21. $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_m\}$ を U の有限部分集合とする．各 $p \in \mathcal{P}$ に対して、p の開近傍 U_p を $U_p \cap \mathcal{P} = \{p\}$ を満たすようにとる．各 i に対して U_{p_i} の点 p_i でのブローアップ $\pi_{p_i} : \mathrm{Bl}_{p_i}(U_{p_i}) \to U_{p_i}$ をとる．ここで、$\mathrm{Bl}_{p_i}(U_{p_i})\backslash\pi^{-1}_{p_i}(p_i)$ と $U_{p_i}\backslash\{p_i\}$ を π_{p_i} により同一視することで、$U\backslash\mathcal{P}, \mathrm{Bl}_{p_1}(U_{p_1}), \ldots, \mathrm{Bl}_{p_m}(U_{p_m})$ を張り合わせた空間を $\mathrm{Bl}_p(U)$ で表す.

写像 $\pi_{\mathcal{P}} : \mathrm{Bl}_{\mathcal{P}}(U) \to U$ を以下で定める:

$$\pi_{\mathcal{P}}(x) = \begin{cases} x & (x \in U\backslash\mathcal{P}) \\ \pi_p(x) & (x \in \mathrm{Bl}_p(U_p), p \in \mathcal{P}) \end{cases}$$

写像 $\pi_{\mathcal{P}}$ を開集合 U の $\mathcal{P}$ でのブローアップという.

Definition 2.22. $\overline{\mathbb{H}}^n_X$ は単位閉球 B^n と同相なので、自然な包含 $B^n \subset \mathbb{R}^n$ を考えることで、$\overline{\mathbb{H}}^n_X$、$\mathcal{E}_X$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とみなす．$\mathcal{E}_X$ の有限部分集合 $\mathcal{P}$ に対し、$\mathbb{R}^n$ の $\mathcal{P}$ でのブローアップ $\pi_{\mathcal{P}} : \mathrm{Bl}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ を考え、包含関係に関する射影極限 $\varprojlim \pi_{\mathcal{P}}$ を $\pi_{\mathcal{E}_X} : \mathrm{Bl}_{\mathcal{E}_X}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ と表す．$\pi^{-1}_{\mathcal{E}_X}(\partial A_X\backslash\mathcal{E}_X)$ の $\mathrm{Bl}_{\mathcal{E}_X}(\mathbb{R}^n)$ での閉包を ∂A^{bl}_X と表し、アンプル錐 $A(X)$ に付随するブローアップ境界と呼ぶ.

3 主結果

Definition 3.1. $\mathrm{Aut}(X)$ の $\overline{\mathbb{H}}^n_X$ への作用に関して、ある点 $p \in \overline{\mathbb{H}}^n_X$ の軌道 $\mathrm{Aut}(X)\cdot p$ が有限集合になるとき、$\mathrm{Aut}(X)$ を初等的という.

講演者は、K3 曲面のシンプレクティック自己同型群 $\mathrm{Aut}_s(X)$ が幾何学的有限性を持つこと、特に相対双曲性を示すことで深谷氏の Bestvina-Mess 型の公式 [4] を適用し、以下を示した.

Theorem 3.2 ([10, Theorem 1])**.** $\mathrm{Aut}(X)$ が非初等的であるならば、以下が成り立つ.

$$\mathrm{vcd}(\mathrm{Aut}(X)) = \dim \partial A^{bl}_X + 1.$$

ここで、$\dim \partial A^{bl}_X$ は ∂A_X の位相次元を表す.

Remark 3.3. $\mathrm{Aut}_s(X)$ の幾何学的有限性については、菊田康平氏が同様の主張をほぼ同時期に得ていたことが、最近判明した. 詳細は [10] で述べている.

さて次は、Theorem 3.2の応用として実質的コホモロジー次元が計算できる具体例を紹介したい. 一般にはアンプル錐の無限遠境界 ∂A_X は非常に複雑な形になっているが、sphere packing の場合には比較的扱いやすい.

Definition 3.4. $\Delta^+(X)$ の元 δ に対して、

$$H_\delta = \{x \in \mathbb{H}^n_X : d(x,a) = d(x, s_\delta a)\},$$
$$H^+_\delta = \{x \in \mathbb{H}^n_X : d(x,a) < d(x, s_\delta a)\},$$

とする. また H_δ の $\overline{\mathbb{H}}^n_X$ での閉包を $\overline{H}_\delta$, $S_\delta := \overline{H}_\delta \cap \partial\mathbb{H}^n_X$ と定める. アンプル推 $A(X)$ は $A(X) = \cap_{\delta\in\Delta^+(X)} H^+_\delta$ と表せた. $\Delta^+(X)$ の元で $A(X)$ の面を定めるもの全体の集合を Δ_X とする.

このとき ∂A_X が sphere packing であるとは、任意の相異なる $\delta_1, \delta_2 \in \Delta_X$ に対して、$S_{\delta_1} \cap S_{\delta_2}$ が空もしくは一点であることである. また、∂A_X が連結な sphere packing であるとは、∂A_X が sphere packing であり、任意の相異なる $\delta, \delta' \in \Delta_X$ に対して、$\delta_1, \ldots, \delta_m \in \Delta_X$ が存在して、$\delta = \delta_1, \delta_m = \delta'$ かつ $S_{\delta_i} \cap S_{\delta_{i+1}} (i = 1, \ldots, m-1)$ が一点集合になることである.

Theorem 3.5 ([10, Theorem 3])**.** X を楕円的 K3 曲面とする. ∂A_X が連結な sphere packing であり、X の任意の $\mathcal{E}_X$ の点が sphere packing のある接点に対応するとき、以下が成り立つ.

$$\mathrm{vcd}(\mathrm{Aut}(X)) = \max\{\mathrm{rk}\,\mathrm{MW}(f)\} = \rho(X) - 3.$$

Theorem 3.5の仮定を満たすような具体例として Baragar の結果 [1] がある.

Example 3.6. Baragar はアンプル推の無限遠境界が Apollonian circle packing になる K3 曲面 Y_2 を構成した.

Y_2 のネロン・セベリ格子は以下の Gram 行列で与えられる:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Theorem 3.5より、$\operatorname{vcd}\operatorname{Aut}(Y_2) = 1$ を得る.

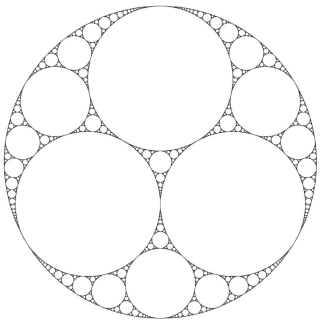


図 1　The Apollonian circle packing

Example 3.7. また、Apollonian circle packing の高次元化として自然に Apollonian sphere packing が考えられるが、Baragar は Apollonian sphere packing をアンプル推に持つような K3 曲面 Y_3 とそのネロン・セベリ格子を計算している. $NS(Y_3)$ は以下の Gram 行列で与えられる:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Theorem 3.5より、$\operatorname{vcd}\operatorname{Aut}(Y_3) = 2$ を得る.

参考文献

[1] A. Baragar, The apollonian circle packing and ample cones for K3 surfaces, preprint.

[2] M. Bestvina, G. Mess, The boundary of negatively curved groups, Journal of the american mathematical society. Vol **4** (1991), 469-481.

[3] K. S. Brown, Cohomology of Groups, (1982), Springer New York, NY.

[4] T. Fukaya, Blown-up corona of relatively hyperbolic groups, preprint.

[5] T. Fukaya and S. Oguni, Coronae of relatively hyperbolic groups and coarse cohomologies, Journal of Topology and Analysis **8**(2016) 431-474.

[6] S.Kondo, The automorphism group of a generic Jacobian Kummer surface, J. Algebraic Geometry, **7** (1998), 589-609.

[7] S. Mukai, Finite groups of automorphisms of K3 surfaces and the Mathieu group, Invent. Math., **94**(1988), 183-221.

[8] S. Mukai, K3, Enriques, Coble 曲面-無限自己同型群を中心として, 第 63 回代数学シンポジウム報告集 (2018), 111-118.
[9] J. G. Ratcliffe, Foundations of Hyperbolic manifolds (3rd edition), (2019), Springer Science & Business Media.
[10] T. Takatsu, Blown-up boundaries associated with ample cones of K3 surfaces, preprint.

Homogeneous Ulrich bundles on homogenous varieties of certain exceptional types

早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学・応用数理専攻
中山 勇祐 (Yusuke Nakayama)

Abstract

Eisenbud–Schreyer–Weyman によって提起された “各射影多様体はある偏曲に関して Ulrich 束を持つか?” という問題がある. 本講演では, Picard 数が 2 以上の E_6, F_4, G_2 型の等質多様体は最小な偏曲に関して initialized 既約な等質 Ulrich 束を持たないという結果を紹介する. また, これを証明するための等質多様体上の initialized 既約な等質ベクトル束が任意の偏曲に関して Ulrich 束であるための判定法を紹介する.

1 等質多様体上の既約な等質 Ulrich 束の先行研究

$X \subset \mathbb{P}^n$ を d 次元の $\mathbb{C}$ 上の射影多様体とする. X 上のベクトル束 E が *Ulrich* であるとは $H^i(X, E(-t))$ が任意の i と $1 \leq t \leq d$ において 0 になるときをいう. Eisenbud–Schreyer–Weyman [4] は射影多様体はある偏極に関して Ulrich 束を持つかどうかという問いを提起した. この問題に対して, さまざまな射影多様体の場合について調べられている.

Picard 数が 1 の等質多様体 G/P の場合を考える, ここで G は複素数体上の半単純線形代数群であって, P は極大放物型部分群である. G が A 型のとき (つまり, グラスマン多様体のとき) は Costa–Miró-Roig [3] によって, B, C, D 型のときは Fonarev [5] によって調べられている. 特に, Fonarev は既約な等質ベクトル束が Ulrich 束になるための判定法を与え, それを用いて調べている. G が例外型のときは Lee–Park [6] によって Fonarev の判定法を用いて調べている. 特に, 彼らは Cayley plane E_6/P_1 と E_7-adjoint 多様体 E_7/P_1 以外の Picard 数が 1 の例外型の等質多様体は既約な等質 Ulrich 束を持たないことを示した.

Picard 数が 1 より大きい等質多様体 G/P を考える. G が A 型のときは Coskun–Costa–Huizenga–Miró-Roig–Woolf [2] によって研究されている. 特に, 彼らは Picard 数が 3 以上であるときは最小偏極に関する既約な等質 Ulrich 束は存在しないことが示した. また, Picard 数が 2 のときも彼らは部分的に解決をして, この場合に関するある予想を提起した. その予想は Coskun–Jaskowiak [1] によって解決されている. しかしながら, G が他の型での研究はこれまでのところなされていなかった.

2 判定法と主結果

G を複素数体上の半単純線形代数群 P_I を $I = \{\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_r}\} \subset \Delta$ によって定まる放物型部分群とする, ここで α_{i_j} は単純ルートであって Δ は単純ルートの集合である. 等質多様体 G/P_I は r 個の射影 $\pi_j : G/P_I \to G/P_{\alpha_{i_j}}$ を持つ. 任意の正整数 b_j について, $\mathcal{O}(1) := \mathcal{O}_{G/P_I}(1) := \otimes_{j=1}^r L_j^{\otimes b_j}$ と定める, ここで $L_j := \pi_j^* \mathcal{O}_{G/P_{\alpha_{i_j}}}(1)$. 等質多様体 G/P_I 上のベクトル束 E が等質ベクトル束であるとは $E \cong G \times_\rho V$ となるような P_I の表現 $\rho : P_I \to GL(V)$ が存在する時をいう. もしこの表現が既約であれば E を既約な等質ベクトル束と呼ぶ. 最高ウェイト λ を持つ P_I の既約表現から生じる既約な等質ベクトル束を E_λ と書く.

Φ_I^+ を以下で定義する:

$$\Phi_I^+ := \{\alpha \in \Phi^+ \mid (\varpi_{i_j}, \alpha) \neq 0 \text{ for some } \alpha_{i_j} \in I\},$$

ここで Φ^+ は正ルートの集合であって $(,)$ は Killing 形式を表す．E_λ を G/P_I 上の最高ウェイト $\lambda = \sum_{i=1} a_i \varpi_i$ を持つ既約な等質ベクトル束とする．φ^+_λ を以下で定義する:

$$\varphi^I_\lambda : \Phi^+_I \to \mathbb{Q}, \quad \alpha \mapsto \frac{1}{(\alpha, \sum_{j=1}^r b_j \varpi_{i_j})}(\lambda + \rho, \alpha),$$

ここで ρ はすべての正ルートの和を 2 で割ったウェイトである．次の補題が既約な等質ベクトル束が $\mathcal{O}(1) := \otimes_{j=1}^r L_j^{\otimes b_j}$ に関する Ulrich 束になるための判定法である．

補題 2.1 ([7] Lemma 2.2)**.** 記号は上記のものとする．このとき次は同値である．
(1) E_λ は $\mathcal{O}(1)$ に関する Ulrich 束である．
(2) φ^I_λ は単射であって $\mathrm{Im}(\varphi^I_\lambda) = \{1, \cdots, \dim(G/P_I)\} \subset \mathbb{Z}$ をみたす．

これは $|I| = 1$ かつ $b_{i_j} = 1$ としたときに Fonarev の判定法と一致する．次が主結果である．

定理 2.2 ([7] Theorem 2.1)**.** I を $|I| \geq 2$ をみたす Δ の部分集合とし, G を E_6 型か F_4 型か G_2 型のうちのひとつとする．このとき, 等質多様体 G/P_I は $\mathcal{O}(1) = \otimes_{j=1}^r L_j$ に関する既約な等質 *Ulrich* 束を持たない．

References

[1] I. Coskun and L. Jaskowiak, Ulrich partion for two-step flag varieties, Involve **10**(3) (2017): 531-539.

[2] I. Coskun, L. Costa, J. Huizenga, R. M. Miró-Roig and M. Woolf, Ulrich Schur bundles on flag varieties, J. Algebra **474** (2017), 49-96.

[3] L. Costa and R. M. Miró-Roig, GL(V)-invariant Ulrich bundles on Grassmannians, Math. Ann. **361** 2015.1-2, pp. 443-457.

[4] D. Eisenbud, F.-O. Schreyer and J. Weyman, Resultants and Chow forms via exterior syzygies, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 3, 537-579.

[5] A. Fonarev, Irreducible Ulrich bundles on isotropic Grassmannians, *Moscow Mathematical Journal*, **16** (2016),no. 4, 711 − 726.

[6] K.-S. Lee and K.-D. Park, Equivariant Ulrich bundles on exceptional homogeneous varieties, *Advances in Geometry*, **21** (2021) no.2, 187 − 205.

[7] Y. Nakayama Homogenous Ulrich bundles on homogeneous varieties of certain exceptional types, arXiv:2311.00361.

点平等な q 超幾何方程式の解と接続問題

神戸大学 大学院理学研究科 数学専攻
藤井 大計 (Taikei Fujii) *

概要

3 次の変異版 q 超幾何方程式は量子可積分系を背景に持つ 2 階の q 差分方程式であり, Hatano-Matsunawa-Sato-Takemura によって導入された. この方程式を点平等な視点から考察することにより Euler 型積分解と超幾何型級数解を構成した. また, 解の間の線形関係についても述べる. 本講演の内容は神戸大学の信川喬彦氏との共同研究に基づく.

1 導入

Gauss の超幾何級数は次で定義される級数である.

$$ {}_2F_1\left(\begin{array}{c}\alpha,\beta\\ \gamma\end{array};x\right)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot 1}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 1\cdot 2}x^2+\cdots. \tag{1.1}$$

この級数は, 数学, 物理学, 工学など様々な場面に登場する重要な特殊関数である. この級数は Gauss の超幾何方程式と呼ばれる次の微分方程式を満たす.

$$ \left[x(1-x)\frac{d^2}{dx^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{d}{dx}-\alpha\beta\right]f(x)=0, \tag{1.2}$$

この微分方程式は $\mathbb{P}^1$ 上に 3 点の特異点を持つ 2 階の Fuchs 型方程式の標準的な表示であり, 特異点の情報を並べた Riemann 図式と呼ばれる次のような図によって特徴づけられる:

$$ \left\{\begin{array}{ccc} x=0 & x=1 & x=\infty\\ 0 & 0 & \alpha\\ 1-\gamma & \gamma-\alpha-\beta & \beta\end{array}\right\}. \tag{1.3}$$

Gauss の超幾何方程式は, 次のような Euler 型積分解を持つ.

$$ I_{p,q}=\int_p^q t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt,\quad p,q\in\{0,1,\frac{1}{x},\infty\}. \tag{1.4}$$

適切に分枝を決めれば, この積分の間には次のような線形関係がある:

$$ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -e^{2\pi i(\alpha-\gamma)} & 1\\ 0 & 0 & 1 & e^{2\pi i\alpha} & 0 & e^{2\pi i\beta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{0,1}\\ I_{1,\frac{1}{x}}\\ I_{0,\frac{1}{x}}\\ I_{\infty,0}\\ I_{1,\infty}\\ I_{\frac{1}{x},\infty}\end{pmatrix}=0. \tag{1.5}$$

* tfujii@math.kobe-u.ac.jp

解の間の線形関係を求めることは基本的で重要な問題であり接続問題と呼ぶ. また, このような線形関係のことを接続関係式という.

次の Riemann 図式を持つ 2 階の Fuchs 型微分方程式を Riemann-Papperitz の方程式という:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z=t_1 & z=t_2 & z=t_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{array} \right\}. \tag{1.6}$$

ただし, $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\beta_1+\beta_2+\beta_3=1$ である. Gauss の超幾何微分方程式と Riemann-Papperitz の方程式は一次分数変換とゲージ変換によって移り合う. そのため, Riemann-Papperitz の方程式の級数解, 積分解や接続問題は, (1.2), (1.4), (1.5) を適当に変数変換したもので得ることができる. 例えば,

$$\left(\frac{z-t_1}{z-t_3}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{z-t_2}{z-t_3}\right)^{\alpha_2} {}_2F_1\left(\begin{array}{c} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\beta_3 \\ \alpha_1-\beta_1+1 \end{array} ; \frac{z-t_1}{z-t_3}\frac{t_2-t_3}{t_2-t_1}\right) \tag{1.7}$$

は Riemann-Papperitz の微分方程式の解となる. Riemann-Papperitz の微分方程式は, Gauss の超幾何微分方程式と等価ではあるが特異点を平等に扱っており, Gauss の超幾何微分方程式の '点平等版' と考えられる.

Heine の q 超幾何方程式と呼ばれる Gauss の超幾何方程式の 'q 差分版' が知られている:

$$[x(1-aT_x)(1-bT_x)-(1-T_x)(1-cq^{-1}T_x)]f(x)=0. \tag{1.8}$$

ただし, $T_xh(x)=h(qx)$ である. この方程式にも, 級数解, 積分解や接続問題が明示的に知られている. 例えば,

$${}_2\varphi_1\left(\begin{array}{c} a,b \\ c \end{array} ; x\right) = 1+\frac{(1-a)(1-b)}{(1-c)(1-q)}x+\frac{(1-a)(1-aq)(1-b)(1-bq)}{(1-c)(1-cq)(1-q)(1-q^2)}x^2+\cdots.$$

といった解を持つ. この級数を Heine の q 超幾何級数と呼ぶ. 適当なパラメータのもと, $q\to 1$ という極限で (1.1) に退化する. このようなとき, Heine の q 超幾何級数は Gauss の超幾何級数の q 類似 (1 パラメータ拡張) であるという.

本稿では, 3 次の変異版 q 超幾何方程式と呼ばれる次の方程式を考える:

$$\mathcal{H}_3 f(x)=0, \tag{1.9}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3 = {} & \prod_{i=1}^{3}(x-q^{h_i+1/2}t_i)\cdot T_x^{-1} + q^{2\alpha+1}\prod_{i=1}^{3}(x-q^{l_i-1/2}t_i)\cdot T_x \\ & + q^{\alpha}\Bigg[-(q+1)x^3 + q^{1/2}\sum_{i=1}^{3}(q^{h_i}+q^{l_i})t_ix^2 \\ & - q^{(h_1+h_2+h_3+l_1+l_2+l_3+1)/2}t_1t_2t_3\sum_{i=1}^{3}((q^{-h_i}+q^{-l_i})/t_i)x \\ & + q^{(h_1+h_2+h_3+l_1+l_2+l_3)/2}(q+1)t_1t_2t_3\Bigg]. \end{aligned} \tag{1.10}$$

この方程式は, Hatano-Matsunawa-Sato-Takemura [5] によって導入され, Riemann-Papperitz の微分方程式に退化することが示されている. q 差分方程式の理論において, q シフト作用素 T_x の固

定点 $x=0,\infty$ は特別である．そのため, 1 次分数変換を行うことは非常に困難である．このことが理由で, 方程式 (1.9) の解を q 超幾何方程式からの変数変換によって得ることは難しい．しかし, Riemann-Papperitz の微分方程式の q 類似であるという視点は重要で, その考えを基にして解を構成し接続関係式を与える．

最後に, よく使う記号をまとめておく．

q 上昇階乗ベキ：

$$(a)_\infty=\prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i),\ (a)_n=\frac{(a)_\infty}{(aq^n)_\infty},\ (a_1,\dots,a_M)_n=(a_1)_n\cdots(a_M)_n.$$

テータ関数：

$$\theta(z)=(q,z,q/z)_\infty,\quad \theta(z_1,\dots,z_M)=\theta(z_1)\cdots\theta(z_M).$$

Jackson 積分：

$$\begin{aligned}\int_0^{\sigma} f(t)d_qt&=(1-q)\sigma\sum_{i=0}^{\infty}f(\sigma q^i)q^i,\\ \int_0^{\sigma\infty} f(t)d_qt&=(1-q)\sigma\sum_{i=-\infty}^{\infty}f(\sigma q^i)q^i,\\ \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} f(t)d_qt&=\int_0^{\sigma_2}f(t)d_qt-\int_0^{\sigma_1}f(t)d_qt.\end{aligned}$$

q シフト作用素：$T_xf(x)=f(qx)$.

2 H_3 の Euler 型積分解

ここでは 3 次の変異版 q 超幾何方程式の積分解を導出する．Riemann-Papperitz の微分方程式は次の積分解を持つ．

$$(z-t_1)^{\alpha_1}(z-t_2)^{\alpha_2}(z-t_3)^{\alpha_3}\int_C(t-t_1)^{\alpha_2+\alpha_3+\beta_1-1}(t-t_2)^{\alpha_1+\alpha_3+\beta_2-1}(t-t_3)^{\alpha_1+\alpha_2+\beta_3-1}(t-z)^{-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}dt. \tag{2.1}$$

積分 (2.1) の q 類似を考えれば良いので, 次の Jackson 積分を考える．

$$\int_C\frac{(q^{-\nu_0}xt)_\infty}{(xt)_\infty}\frac{(q^{-\nu_1}t_1t)_\infty}{(t_1t)_\infty}\frac{(q^{-\nu_2}t_2t)_\infty}{(t_2t)_\infty}\frac{(q^{-\nu_3}t_3t)_\infty}{(t_3t)_\infty}d_qt \tag{2.2}$$

ただし, $\nu_0=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3,\nu_1=\alpha_2+\alpha_3+\beta_1-1,\nu_2=\alpha_1+\alpha_3+\beta_2-1,\nu_3=\alpha_1+\alpha_2+\beta_3-1$ とする．ここで均衡条件 $\nu_0+\nu_1+\nu_2+\nu_3=-2$ が入っていることに注意する．適当にパラメータを書き換えると,

$$\int_C\frac{(Axt)_\infty}{(Bxt)_\infty}\prod_{i=1}^{3}\frac{(a_it)_\infty}{(b_it)_\infty}d_qt. \tag{2.3}$$

という積分を考えれば良い．均衡条件は $Aa_1a_2a_3=q^2Bb_1b_2b_3$ となる．

Lemma 2.1. $T_x\tau = q^l\tau$, $l \in \mathbb{Z}$ と仮定すると, 積分

$$\varphi(x,\tau) = \int_0^{\tau\infty} \psi(x,t)\frac{d_qt}{t}, \quad \psi(x,t) = t^\alpha \frac{(Axt, a_1t, a_2t, \dots, a_Mt)_\infty}{(Bxt, b_1t, b_2t, \dots, b_Mt)_\infty} \tag{2.4}$$

は次の方程式を満たす.

$$\sum_{k=0}^{M}\big[(-1)^k x^{M-k}(e_k(a)T_x^{-1} - q^\alpha e_k(b))(B - AT_x)\cdots(B - Aq^{M-k-1}T_x) \times (1 - q^{-(k-1)}T_x)\cdots(1 - T_x)\big]\varphi = 0.$$

今の状況では, Lemma 2.1 において, $M = 3, Aa_1a_2a_3 = q^2Bb_1b_2b_3$ の場合である. このとき,

$$(B - Aq^{-1}T_x)(1 - q^{-2}T_x)H_3\varphi(x,\sigma) = 0, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} H_3 &= x^3(B - AqT_x)(B - AT_x)T_x^{-1} - x^2(B - AT_x)(e_1(a)T_x^{-1} - qe_1(b)) \\ &\quad + x(e_2(a)T_x^{-1} - qe_2(b))(1 - T_x) - \frac{a_1a_2a_3}{B}(1 - q^{-1}T_x)(1 - T_x)T_x^{-1}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

この作用素 H_3 は適当なゲージ変換とパラメータの置き換えにより $\mathcal{H}_3$ になる. (2.5) より, $H_3\varphi(x,\sigma) = C_1x^\lambda + C_2x^2$ となる. 特別な積分路の時には, C_1, C_2 は計算できる.

Lemma 2.2. $\tau \in \{q/a_1, q/a_2, q/a_3, q/(Ax)\}$ であり, $B/A \notin q^{\mathbb{Z}}$ とする. このとき, 積分 *(2.4)* は次を満たす.

$$H_3\varphi(x,\tau) = q(1-q)(A-B)x^2. \tag{2.7}$$

Lemma 2.2 より, 積分の差をとれば, 方程式 $H_3y = 0$ の解を得る.

Theorem 2.3. $\sigma_1, \sigma_2 \in \{q/a_1, q/a_2, q/a_3, q/(Ax)\}$ のとき,

$$\varphi_3(x,\sigma_1,\sigma_2) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{(Axt)_\infty}{(Bxt)_\infty}\prod_{i=1}^{3}\frac{(a_it)_\infty}{(b_it)_\infty}d_qt \tag{2.8}$$

は方程式 $H_3y = 0$ を満たす. ただし, $Aa_1a_2a_3 = q^2Bb_1b_2b_3$ であり $B/A \notin q^{\mathbb{Z}}$ とする.

Remark 2.4. 3 次の変異版 q 超幾何方程式の積分解は [2] において, q-middle convolution [8] を使った別の手法からも導出されている.

3 H_3 の超幾何型級数解

次の級数は very-well-poised q 超幾何級数と呼ばれる.

$${}_{r+1}W_r(a_1; a_4, a_5, \dots, a_{r+1}; z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1 - a_1q^{2n}}{1 - a_1}\frac{(a_1, a_4, a_5, \dots, a_{r+1})_n}{(q, qa_1/a_4, qa_1/a_5, \dots, qa_1/a_{r+1})_n}z^n. \tag{3.1}$$

次の Balliy の公式と呼ばれる変換公式が知られている [4].

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(qt/a, qt/b, ct, dt)_\infty}{(et, ft, gt, ht)_\infty}d_qt = b(1-q)&\frac{(q, bq/a, a/b, cd/eh, cd/fh, cd/gh, bc, bd)_\infty}{(ae, af, ag, be, bf, bg, bh, bcd/h)_\infty} \\ &\times {}_8W_7(bcd/hq; be, bf, bg, c/h, d/h; ah) \quad . \end{aligned} \tag{3.2}$$

ただし, $d = abefgh$ である. この Balliy の公式と Theorem 2.3 から次が示せる.

Theorem 3.1. $Aa_1a_2a_3 = q^2Bb_1b_2b_3$ であり, $B/A \notin q^{\mathbb{Z}}$ のとき, 次の関数

$$\frac{(Axq/a_2)_\infty}{(Bxq/a_2)_\infty} {}_8W_7\left(\frac{a_3A}{a_2B}; \frac{qb_1}{a_2}, \frac{qb_2}{a_2}, \frac{qb_3}{a_2}, \frac{a_3}{Bx}, \frac{A}{B}; \frac{qBx}{a_1}\right), \tag{3.3}$$

$$\frac{(a_3Ax/(b_1b_3), a_3Ax/(b_2b_3), qAx/a_2)_\infty}{(qBx/a_1, qBx/a_2, qa_3Ax/(a_2a_3))_\infty} {}_8W_7\left(\frac{a_3Ax}{a_2b_3}; \frac{qBx}{a_2}, \frac{qb_1}{a_2}, \frac{qb_2}{a_2}, \frac{a_3}{b_3}, \frac{Ax}{b_3}; \frac{qb_3}{a_1}\right), \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{x}\frac{(qa_1/(Ax), Ax/a_1, a_2a_3/(b_3Bx), qa_2/(Ax), qa_3/(Ax))_\infty}{(qBx/a_1, qb_1/(Ax), qb_2/(Ax), qb_3/(Ax), qa_2a_3/(b_3Ax))_\infty}$$
$$\times {}_8W_7\left(\frac{a_2a_3}{b_3Ax}; \frac{qb_1}{Ax}, \frac{qB}{A}, \frac{qb_2}{Ax}, \frac{a_2}{b_3}, \frac{a_3}{b_3}; \frac{qb_3}{a_1}\right), \tag{3.5}$$

$$\frac{1}{x}\frac{(qa_1/(Ax), qa_2/(Ax), qa_3/(Ax), Ax/a_1, a_2a_3/(b_1Bx), a_2a_3/(b_2Bx), a_2a_3/(b_3Bx))_\infty}{(qb_1/(Ax), qb_2/(Ax), qb_3/(Ax), qa_2a_3/(ABx^2))_\infty}$$
$$\times {}_8W_7\left(\frac{a_2a_3}{ABx^2}; \frac{qb_1}{Ax}, \frac{qb_2}{Ax}, \frac{qb_3}{Ax}, \frac{a_2}{Bx}, \frac{a_3}{Bx}; \frac{qBx}{a_1}\right), \tag{3.6}$$

$$\frac{(qAx/a_1, a_1/(Ax), a_2a_3/(b_3Bx))_\infty}{(qb_1/(Ax), qb_2/(Ax), qBx/a_1)_\infty} {}_8W_7\left(\frac{a_2a_3}{a_1b_3}; \frac{qBx}{a_1}, \frac{qb_1}{a_1}, \frac{qb_2}{a_1}, \frac{a_2}{b_3}, \frac{a_3}{b_3}; \frac{qb_3}{Ax}\right), \tag{3.7}$$

$$\frac{(qAx/a_1, a_1/(Ax), a_2a_3/(b_1Bx), a_2a_3/(b_2Bx))_\infty}{(qb_1/(Ax), qb_2/(Ax), qb_3/(Ax), qBx/a_1, qa_2a_3/(a_1Bx))_\infty}$$
$$\times {}_8W_7\left(\frac{a_2a_3}{a_1Bx}; \frac{qb_1}{a_1}, \frac{qb_2}{a_1}, \frac{qb_3}{a_1}, \frac{a_2}{Bx}, \frac{a_3}{Bx}; \frac{qB}{A}\right), \tag{3.8}$$

は方程式 $H_3y = 0$ を満たす.

これらの級数解は (1.7) の自然な q 類似となっている. 例えば, $A = q^\nu, B = 1, a_i = t_iq^{h_i+1/2}, b_i = t_iq^{l_i-1/2+\nu}, \nu = (h_1+h_2+h_3-l_1-l_2-l_3+1)/2$ とおけば, $q \to 1$ の極限において方程式 $H_3y = 0$ は Riemann-Papperitz の微分方程式に退化し, 級数解 (3.3) は次のような超幾何級数に退化する.

$$\frac{(Axq/a_2)_\infty}{(Bxq/a_2)_\infty} {}_8W_7\left(\frac{a_3A}{a_2B}; \frac{qb_1}{a_2}, \frac{qb_2}{a_2}, \frac{qb_3}{a_2}, \frac{a_3}{Bx}, \frac{A}{B}; \frac{qBx}{a_1}\right)$$
$$= \frac{(q^{1/2+\nu-h_2}x/t_2)_\infty}{(q^{1/2-h_2}x/t_2)_\infty} {}_8W_7\left(\frac{q^{\nu-h_2+h_3}t_3}{t_2}; \frac{q^{\nu-h_2+l_1}t_1}{t_2}, q^{\nu-h_2+l_2}, \frac{q^{\nu-h_2+l_3}t_3}{t_2}, \frac{q^{1/2+h_3}t_3}{x}, q^\nu; \frac{q^{1/2-h_1}x}{t_1}\right)$$
$$\to (1-\frac{x}{t_2})^\nu {}_2F_1\left(\begin{matrix} h_2-l_2-\nu, \nu \\ l_3-h_3-1 \end{matrix}; \frac{x-t_3}{x-t_2}\frac{t_1-t_2}{t_1-t_3}\right).$$

Remark 3.2. very-well-poised q 超幾何級数 ${}_8W_7$ のみたす q 差分方程式については, [1] でも述べられている. その方程式と 3 次の変異版 q 超幾何方程式は同値であると思われる.

4 Euler 型積分解の間の線形関係

Theorem 2.3 において 6 個の積分解を作った. これらの間の線形関係を求める. Jackson 積分の定義から

$$\varphi_3(x, \sigma_1, \sigma_2) + \varphi_3(x, \sigma_2, \sigma_3) + \varphi_3(x, \sigma_3, \sigma_1) = 0 \tag{4.1}$$

が示せる. Mimachi の接続公式 [6] と Lemma 2.2 から次の線形関係式を証明することができる.

Theorem 4.1. $Aa_1a_2a_3 = q^2Bb_1b_2b_3$ であり $B/A \notin q^{\mathbb{Z}}$ とする. このとき,

$$C_1\varphi_3(x, q/a_1, q/a_2) + C_2\varphi_3(x, q/a_1, q/a_3) + C_3\varphi_3(x, q/a_1, q/(Ax)) = 0. \tag{4.2}$$

ただし,

$$C_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \frac{\theta\left(\frac{a_2}{q^2b_1}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_1}{a_3}, \frac{qb_2}{a_2}, \frac{qb_3}{a_2}, \frac{a_1}{Ax}, \frac{qBx}{a_2}\right)}{\theta\left(\frac{a_1}{q^2b_1}, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_2}{a_1}, \frac{a_2}{Ax}, \frac{qb_2}{a_1}, \frac{qb_3}{a_1}, \frac{qBx}{a_1}\right)}, \tag{4.3}$$

$$C_2 = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2 \frac{\theta\left(\frac{a_3}{q^2b_1}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_1}{a_3}, \frac{qb_2}{a_3}, \frac{qb_3}{a_3}, \frac{a_1}{Ax}, \frac{qBx}{a_3}\right)}{\theta\left(\frac{a_1}{q^2b_1}, \frac{a_3}{a_1}, \frac{a_3}{a_1}, \frac{a_3}{Ax}, \frac{qb_2}{a_1}, \frac{qb_3}{a_1}, \frac{qBx}{a_1}\right)}, \tag{4.4}$$

$$C_3 = \left(\frac{Ax}{a_1}\right)^2 \frac{\theta\left(\frac{Ax}{q^2b_1}, \frac{a_1}{a_2}, \frac{a_1}{a_3}, \frac{qb_2}{Ax}, \frac{qb_3}{Ax}, \frac{a_1}{Ax}, \frac{qB}{A}\right)}{\theta\left(\frac{a_1}{q^2b_1}, \frac{Ax}{a_1}, \frac{Ax}{a_1}, \frac{Ax}{a_3}, \frac{qb_2}{a_1}, \frac{qb_3}{a_1}, \frac{qBx}{a_1}\right)}. \tag{4.5}$$

Theorem 4.1 の C_i は擬定数と呼ばれ, $T_xC_i = C_i$ を満たす. (4.1) と Theorem 4.1 を合わせて (Theorem 4.1 の証明の中で得られるテータ関数の関係式も使う) 次を得る.

Theorem 4.2. $Aa_1a_2a_3 = q^2Bb_1b_2b_3$ であり $B/A \notin q^{\mathbb{Z}}$ とする. このとき, 積分解

$$\begin{aligned} v = {}^t(&\varphi_3(x, q/a_1, q/a_2), \varphi_3(x, q/a_1, q/a_3), \varphi_3(x, q/a_2, q/a_3), \\ &\varphi_3(x, q/a_1, q/(Ax)), \varphi_3(x, q/a_2, q/(Ax)), \varphi_3(x, q/a_3, q/(Ax))) \end{aligned} \tag{4.6}$$

は次の階数 4 の方程式系を満たす.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ C_1 & C_2 & 0 & -C_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0. \tag{4.7}$$

さらに, 任意の 4×4 小行列の階数は 4 である.

Remark 4.3. 2 次の変異版 q 超幾何方程式 [5] においても, 同様の手法によって, 積分解, 級数解, 接続関係式を得ることができる.

参考文献

[1] Aomoto, K., & Ito, M. (2008). Structure of Jackson Integrals of BC_n Type. Tokyo Journal of Mathematics, 31(2), 449-477.

[2] Arai, Y., & Takemura, K. (2023). On q-middle convolution and q-hypergeometric equations. SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 19, 037.

[3] Fujii, T., & Nobukawa, T. (2022). Hypergeometric solutions for variants of the q-hypergeometric equation. arXiv preprint arXiv:2207.12777.

[4] Gasper, G., & Rahman, M. (2011). Basic hypergeometric series (Vol. 96). Cambridge university press.

[5] Hatano, N., Matsunawa, R., Sato, T., & Takemura, K. (2022). Variants of q-hypergeometric equation. Funkcialaj Ekvacioj, 65(2), 159-190.

[6] Mimachi, K. (1989). Connection problem in holonomic q-difference system associated with a Jackson integral of Jordan-Pochhammer type. Nagoya Mathematical Journal, 116, 149-161.

[7] Sasaki, S., Takagi, S., & Takemura, K. (2023). g-Heun equation and initial-value space of g-Painlevé equation. Recent Trends in Formal and Analytic Solutions of Diff. Equations, 782, 119.
[8] Sakai, H., & Yamaguchi, M. (2017). Spectral types of linear q-difference equations and q-analog of middle convolution. International Mathematics Research Notices, 2017(7), 1975-2013.
[9] Takemura, K., Degenerations of Ruijsenaars-van Diejen operator and q-Painlevé equations, J. Integrable Syst. **2**, no. 1, xyx008, 27pp (2017).
[10] Takemura, K., On q-deformations of the Heun Equation, SIGMA **14**, 061, 16 pages (2018).

ある多重q超幾何級数のEuler型Jackson積分表示

神戸大学　大学院理学研究科　数学専攻
信川喬彦 (Takahiko NOBUKAWA) *

概 要

Kajihara の very-well-poised q 超幾何級数 $W^{M,N}$ とは, Heine の q 超幾何級数のある拡張であり, 多くの和公式や変換公式が知られている. 本講演では, 級数 $W^{M,2}$ の Jackson 積分表示を導出する. また, その応用として $W^{M,2}$ が満たす q 差分方程式系や $W^{M,2}$ の線形関係式についても述べる.

1　導入：超幾何函数とは？

Gauss の超幾何函数とは, 次の級数で定義される函数である：

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right) &= 1+\frac{\alpha\cdot\beta}{\gamma\cdot 1}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 1\cdot 2}x^2+\cdots\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)}x^n\quad(|x|<1).
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

ここで, $(\alpha,n)=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$ である. この函数は “特殊函数の親玉” であり, 数学, 物理学, 工学などさまざまな場面に登場する, とても重要なものである. Gauss の超幾何函数 ${}_2F_1$ は次の微分方程式 (Gauss の超幾何微分方程式) を満たす：

$$
x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0.
\tag{1.2}
$$

また, Gauss の超幾何函数 ${}_2F_1$ は次の積分表示をもつ：

$$
{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt.
\tag{1.3}
$$

この表示を ${}_2F_1$ の Euler 型積分表示という. 級数表示 (1.1), 微分方程式 (1.2), 積分表示 (1.3) は超幾何函数 ${}_2F_1$ の基本的な性質であり, 超幾何函数の “3 つの顔” などとも呼ばれる [12]. Gauss の超幾何微分方程式 (1.2) は Riemann 球面 $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上 3 点 $x=0$, 1, ∞ を特異点にもち, それぞれの近傍で ${}_2F_1$ を用いた基本解 (方程式の解全体がなす空間の基底, 今の場合は 2 つの一次独立な解のこと) を構成できる：

$$
\boldsymbol{y}_0=(y_0^{(1)},y_0^{(2)})^{\mathrm{T}}=\left({}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha,\beta\\ \gamma\end{matrix};x\right),x^{1-\gamma}{}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1\\ 2-\gamma\end{matrix};x\right)\right)^{\mathrm{T}},
$$

*E-mail:tnobukw@math.kobe-u.ac.jp

$$\boldsymbol{y}_1 = (y_1^{(1)}, y_1^{(2)})^{\mathrm{T}} = \left({}_2F_1\left(\begin{array}{c} \alpha, \beta \\ \alpha+\beta-\gamma+1 \end{array} ; 1-x \right), (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} {}_2F_1\left(\begin{array}{c} \gamma-\alpha, \gamma-\beta \\ \gamma-\alpha-\beta+1 \end{array} ; 1-x \right) \right)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{y}_\infty = (y_\infty^{(1)}, y_\infty^{(2)})^{\mathrm{T}} = \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\alpha} {}_2F_1\left(\begin{array}{c} \alpha, \alpha-\gamma+1 \\ \alpha-\beta+1 \end{array} ; \frac{1}{x} \right), \left(\frac{1}{x}\right)^{\beta} {}_2F_1\left(\begin{array}{c} \beta, \beta-\gamma+1 \\ \beta-\alpha+1 \end{array} ; \frac{1}{x} \right) \right)^{\mathrm{T}}.$$

ただし, $\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ は $\boldsymbol{v}$ の転置を表す. これらはすべて解空間の基底なので, 適当な定数値 2×2 行列を用いて

$$\boldsymbol{y}_0 = A_{0,1}\boldsymbol{y}_1, \ \boldsymbol{y}_0 = A_{0,\infty}\boldsymbol{y}_\infty,$$

となる. このような, 解の間の線形関係を求める問題を接続問題という. 今の場合, $A_{0,1}$, $A_{0,\infty}$ は積分を用いることで具体的に計算できる. まず, 積分

$$\int_C t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt, \tag{1.4}$$

は, 積分路をうまく取ると Gauss の超幾何微分方程式 (1.2) の解となる. 例えば,

$$I_{\tau_1,\tau_2} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt \ \ (\tau_1, \tau_2 \in \{0, 1, 1/x, \infty\}),$$

は (1.2) の解となる. Cauchy の積分定理を用いれば, これらの 6 つの積分解の間の線形関係を導くことができる:

$$I_{0,1} + I_{1,1/x} + I_{1/x,0} = 0, \tag{1.5}$$
$$I_{0,1} + I_{1,\infty} + I_{\infty,0} = 0, \tag{1.6}$$
$$\exp(\alpha-\gamma)I_{1,\infty} + I_{\infty,1/x} + I_{1/x,1} = 0, \tag{1.7}$$
$$\exp(\alpha)I_{\infty,0} + I_{0,1/x} + \exp(\beta)I_{1/x,\infty} = 0. \tag{1.8}$$

なお, 被積分函数が多価函数のため, 一部には位相因子 exp がかかる. また, 各積分の $x = 0$, 1, ∞ における漸近挙動を見ることで, 積分 I_{τ_1,τ_2} を級数解 $y_p^{(i)}$ $(p = 0, 1, \infty,\ i = 1, 2)$ により書き表すことができる. 例えば,

$$I_{0,1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)} y_0^{(1)}, \quad I_{0,1/x} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} y_\infty^{(1)},$$

などとなる. このような積分 I_{τ_1,τ_2} の級数展開と, 線形関係 (1.5), (1.6), (1.7), (1.8) を用いれば, 接続行列 $A_{0,1}$, $A_{0,\infty}$ が求まる. 具体的には

$$A_{0,\infty} = \begin{pmatrix} e^{-i\pi\alpha}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} & e^{-i\pi\beta}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} \\ e^{i\pi(\gamma-\alpha-1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta-\gamma+1)} & e^{i\pi(\gamma-\beta+1)}\dfrac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha-\gamma+1)} \end{pmatrix}$$

などとなる ($A_{0,1}$ も Γ 函数を用いて明示的にかける). 接続行列が具体的に書き表せるというのは超幾何函数の魅力の 1 つである. 以上のように, 超幾何方程式/函数の理論において, 積分解/積分表示はその大域的な性質を与える非常に大事なものである. Gauss の超幾何函数については青本-喜多 [10], 原岡 [12], 吉田 [13] など日本語の本も数多くあるので, より詳しく知りたい方はそちらを参照されたい.

以降, $q \in \mathbb{C}$ を, $0 < |q| < 1$ ととり固定する. Gauss の超幾何函数 ${}_2F_1$ の q 類似 (すなわち, $q \to 1$ の極限で ${}_2F_1$ となるもの) として, Heine の q 超幾何函数が古くから知られている：

$$
\begin{aligned}
{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x\right) &= 1 + \frac{(1-a)\cdot(1-b)}{(1-c)\cdot(1-q)}x + \frac{(1-a)(1-aq)\cdot(1-b)(1-bq)}{(1-c)(1-cq)\cdot(1-q)(1-q^2)}x^2 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n (b;q)_n}{(c;q)_n (q;q)_n} x^n \quad (|x| < 1). \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

ここで, $(a;q)_n = \dfrac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty}$, $(a;q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i)$ である. $a = q^\alpha$, $b = q^\beta$, $c = q^\gamma$ とおき, 極限 $q \to 1$ をとれば, ${}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x\right) \to {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} ; x\right)$ となる. Heine の q 超幾何級数 (1.9) とその種々の拡張に関する多くの和公式や変換公式は, Gasper-Rahman [2] にまとめられているので, そちらも参照されたい. また, Gauss の超幾何函数同様, Heine の q 超幾何函数にも “3 つの顔” がある. Heine の q 超幾何函数 ${}_2\varphi_1$ は次の q 差分方程式を満たす：

$$
[(1-T_x)(1-cq^{-1}T_x) - x(1-aT_x)(1-bT_x)]y = 0. \qquad (1.10)
$$

ただし, T_x は x に関する q シフト作用素である：$T_x f(x) = f(qx)$. また, Heine の q 超幾何函数 ${}_2\varphi_1$ は次の Euler 型 Jackson 積分表示をもつ：

$$
{}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x\right) = \frac{(a;q)_\infty (c/a;q)_\infty}{(1-q)(q;q)_\infty (c;q)_\infty} \int_0^1 t^{\alpha-1} \frac{(qt;q)_\infty}{(ct/a;q)_\infty} \frac{(bxt;q)_\infty}{(xt;q)_\infty} d_q t. \qquad (1.11)
$$

ただし, $q^\alpha = a$ であり, また函数 $f(t)$ の Jackson 積分は以下の和で定義される：

$$
\int_0^\tau f(t) d_q t = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(\tau q^n)\tau q^n.
$$

Heine の q 差分方程式 (1.10), 積分表示 (1.11) はそれぞれ (1.2), (1.3) の q 類似である.

超幾何函数と q 超幾何函数は多くのことがパラレルに考察することができる. 例えば,

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_0^q(x) &= \left({}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x\right), \frac{\theta(x)}{\theta(qx/c)} {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} aq/c, bq/c \\ q^2/c \end{matrix} ; x\right)\right)^{\mathrm{T}}, \\
\boldsymbol{y}_\infty^q(x) &= \left(\frac{\theta(ax)}{\theta(x)} {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} a, aq/c \\ aq/b \end{matrix} ; \frac{cq}{abt}\right), \frac{\theta(bx)}{\theta(x)} {}_2\varphi_1\left(\begin{matrix} bq/c, b \\ bq/a \end{matrix} ; \frac{cq}{abt}\right)\right)^{\mathrm{T}},
\end{aligned}
$$

とおくと, これらはそれぞれ $x = 0$, $x = \infty$ における Heine の q 超幾何方程式 (1.10) の基本解であり, その接続行列は以下のようにかける：

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{y}_0^q = A_{0,\infty}^q \boldsymbol{y}_\infty^q, \\
&A_{0,\infty}^q = \begin{pmatrix} \dfrac{(b, c/a; q)_\infty}{(c, b/a; q)_\infty} & \dfrac{(a, c/b; q)_\infty}{(c, a/b; q)_\infty} \\ \dfrac{(qb/c, q/a; q)_\infty}{(q^2/c, b/a; q)_\infty} \dfrac{\theta(aqx/c)\theta(x)}{\theta(qx/c)\theta(ax)} & \dfrac{(qa/c, q/b; q)_\infty}{(q^2/c, a/b; q)_\infty} \dfrac{\theta(bqx/c)\theta(x)}{\theta(qx/c)\theta(bx)} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ただし, $(a, b; q)_\infty = (a;q)_\infty (b;q)_\infty$ などと略記し, また $\theta(x) = (x, q/x, q; q)_\infty$ は Jacobi のテータ函数である. 「一価函数として解析接続できる」, 「接続係数にテータ函数が現れる」,「その応用

として Yang-Baxter 方程式 (可積分系で重要な役割を担う) の楕円函数解が構成できる」など, q 差分固有の面白い性質も数多くある.

本稿では, 次のような Jackson 積分を考える :

$$\int_{q/a_i}^{q/a_j} \prod_{k=1}^{M+3} \frac{(a_k t;q)_\infty}{(b_k t;q)_\infty} d_q t. \tag{1.12}$$

ただし, $\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t) d_q t = \int_0^{\tau_2} f(t) d_q t - \int_0^{\tau_1} f(t) d_q t$ であり, さらに a_k, b_k に次のような条件を課す :

$$a_1 \cdots a_{M+3} = q^2 b_1 \cdots b_{M+3}. \tag{1.13}$$

この積分は次のような積分の q 類似である :

$$\int_C \prod_{k=1}^{M+3} (t-x_k)^{\nu_k} d_q t, \quad \nu_1 + \cdots + \nu_{M+3} = -2. \tag{1.14}$$

条件 (1.13) は $\nu_1 + \cdots + \nu_{M+3} = -2$ に対応する. $M = 1$ のとき, 積分 (1.14) は Möbius 変換を施すことで Gauss の超幾何積分 (1.4) に変換できる. Gauss の超幾何方程式に Möbius 変換を施して得られるものは Riemann-Papperitz の微分方程式と呼ばれる. 当然, Riemann-Papperitz の微分方程式は Gauss の超幾何方程式と等価だが, 方程式の対称性などがより見やすいなどいくつかの利点もある (例えば, Whittaker-Watson [9] などを参照). 一方, q 差分方程式の理論において $x = 0, \infty$ は q シフト作用素の固定点という特別な点である. したがって, 一般に q 差分方程式には Möbius 変換を作用させることができず, 特に Riemann-Papperitz の微分方程式の q 類似は構成できなかった. 最近, 神戸大学の藤井大計氏との共同研究 [1] において, Hatano-Matsunawa-Sato-Takemura [3] により導入された q 超幾何方程式の変異版という q 差分方程式が, q-Riemann-Papperitz 方程式であることを見出し, その積分解と級数解を構成した. この積分解は $M = 1$ の場合の Jackson 積分 (1.12) であり, また級数解は very-well-poised q 超幾何級数 ${}_8W_7$ というものを用いて構成した. このことについては, 論文 [1] のほか, 本研究集会の藤井大計氏の講演やそのテクニカルレポートも参照されたい. 級数解の構成においては, 以下の Bailey の公式と呼ばれる公式が有用であった : $cd = abefgh$ のとき,

$$\begin{aligned}&\int_a^b \frac{(qt/a, qt/b, ct, dt; q)_\infty}{(et, ft, gt, ht; q)_\infty} d_q t \\ =&b(1-q) \frac{(q, bq/a, a/b, cd/(eh), cd/(fh), cd/(gh), bc, bd; q)_\infty}{(ae, af, ag, be, bf, bg, bh, bcd/h; q)_\infty} \times {}_8W_7\left(\frac{bcd}{hq}; be, bf, bg, \frac{c}{h}, \frac{d}{h}; ah\right).\end{aligned} \tag{1.15}$$

函数 ${}_8W_7$ の説明はここではしないが, 直交多項式の理論や可積分系, 数理物理学などに登場する大変面白い函数である. 詳細については, Gasper-Rahman [2] とその中の参考文献を見よ. 論文 [1] では $M = 1$ の場合の積分 (1.12) が満たす q 差分方程式やその級数解を与えた. この自然な拡張として, 次のような問題が考えられる :

> 一般の M に対して, **"3 つの顔"**, すなわち
> **(1)** q **超幾何積分 (1.12) が満たす** q **差分方程式**
> **(2)** q **超幾何積分 (1.12) の級数表示**
> はどうなっているか ?

2　主結果：Kajihara の q 超幾何級数 $W^{M,2}$ の Jackson 積分表示

本稿では主に問題 (2), すなわち Bailey の変換公式 (1.15) の拡張について述べる. 主結果は以下にあげる定理 2.1 である. これは積分 (1.12) と Kajihara の q 超幾何級数 [5] の間の変換公式を与える. また, 定理 2.2, 2.3 も関連する新規の結果であり, それぞれ積分 (1.12) が満たす q 差分方程式系, Kajihara の q 超幾何級数の間の線形関係 (すなわち, 接続公式) を与える.

Bailey の変換公式 (1.15) は very-well-poised terminate q 超幾何級数 ${}_{10}W_9$ の変換公式 (正しくは, こちらを Bailey の変換公式と呼ぶ) の極限をうまくとることで得られる. 証明の流れは Gasper-Rahmann [2] を参照. この ${}_{10}W_9$ の変換公式の多重級数への拡張として, Kajihara の変換公式 [5] というものが知られている. まず, Kajihara の q 超幾何級数を導入する. 以降, $(a;q)_n = (a)_n$ などと略記する.

定義 2.1 ([5])**.** q 超幾何級数 $W^{n,m}$ を以下のように定義する：

$$
\begin{aligned}
&W^{n,m}\left(\begin{array}{c}\{a_i\}_{1\le i\le n}\\ \{x_i\}_{1\le i\le n}\end{array}\,\middle|\, s;\{u_k\}_{1\le k\le m};\{v_k\}_{1\le k\le m};z\right)\\
&=\sum_{l\in(\mathbb{Z}_{\ge 0})^n} z^{|l|}\frac{\Delta(xq^l)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i\le n}\frac{1-q^{|l|+l_i}sx_i/x_n}{1-sx_i/x_n}\\
&\qquad\times\prod_{1\le j\le n}\left(\frac{(sx_j/x_n)_{|l|}}{((sq/a_j)x_j/x_n)_{|l|}}\prod_{1\le i\le n}\frac{(a_jx_i/x_j)_{l_i}}{(qx_i/x_j)_{l_i}}\right)\\
&\qquad\times\prod_{1\le k\le m}\left(\frac{(v_k)_{|l|}}{(sq/u_k)_{|l|}}\prod_{1\le i\le n}\frac{(u_kx_i/x_n)_{l_i}}{((sq/v_k)x_i/x_n)_{l_i}}\right).
\end{aligned}
$$

ただし, $|l|=l_1+l_2+\cdots+l_n$, $xq^l=\{x_iq^{l_i}\}_{1\le i\le n}$ であり, $\Delta(x)$ は Vandermonde 行列式である：

$$\Delta(x)=\prod_{1\le i<j\le n}(x_i-x_j).$$

級数 $W^{n,m}$ を Kajihara の very-well-poised q 超幾何級数, あるいは単に Kajihara の q 超幾何級数という.

このような多重超幾何級数は Lie 群 SU の表現論の研究において Holman-Biedenharn-Louck [4] により導入され, q 類似やその拡張, さらには楕円類似が Milne [7], Kajihara [5], Kajihara-Noumi [6] などにより研究されてきた. これらの多重超幾何級数は和公式や変換公式をもち, 可積分系や数理物理学にも応用される, 重要な特殊函数である. Kajihara の q 超幾何級数の性質やその周辺については, 梶原康史氏の講究録 [11] も参照されたい.

Kajihara の q 超幾何級数は, 以下の変換公式をもつ：

命題 2.1 (Kajihara の変換公式 [5])**.** 任意の $N\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$ に対し,

$$
\begin{aligned}
&W^{n,m+2}\left(\begin{array}{c}\{b_i\}_{1\le i\le n}\\ \{x_i\}_{1\le i\le n}\end{array}\,\middle|\, a;\{c_ky_k/y_m\}_{1\le k\le m},d,e;\{fy_m/y_k\}_{1\le k\le m},\mu fq^N,q^{-N};q\right)\\
&=\frac{(\mu df/a,\mu ef/a)_N}{(aq/d,aq/e)_N}\prod_{1\le k\le m}\frac{((\mu c_kf/a)y_k/y_m,fy_m/y_k)_N}{(\mu qy_k/y_m,(aq/c_k)y_m/y_k)_N}\prod_{1\le i\le n}\frac{(aqx_i/x_n,(\mu b_if/a)x_n/x_i)_N}{((aq/b_i)x_i/x_n,(\mu f/a)x_n/x_i)_N}
\end{aligned}
$$

$$\times W^{m,n+2}\left(\begin{array}{c}\{aq/(c_kf)\}_{1\le k\le m}\\ \{y_k\}_{1\le k\le m}\end{array}\ \middle|\ \mu;\left\{\frac{aq}{b_if}\frac{x_i}{x_n}\right\}_{1\le i\le n},\frac{aq}{df},\frac{aq}{ef};\left\{\frac{\mu f}{a}\frac{x_n}{x_i}\right\}_{1\le i\le n},\mu fq^N,q^{-N};q\right),\tag{2.1}$$

が成り立つ. ただし, $\mu=a^{m+2}q^{m+1}/(b_1b_2\cdots b_nc_1c_2\cdots c_mdef^{m+1})$ である.

変換公式 (2.1) において, $m=1$, $c_1=cq^N$ とおき極限 $N\to\infty$ をとることで, 以下の公式を得る.

定理 2.1. 級数 $W^{n,2}$ は以下の積分表示をもつ:

$$\begin{aligned}
&W^{n,2}\left(\begin{array}{c}\{b_i\}_{1\le i\le n}\\ \{x_i\}_{1\le i\le n}\end{array}\ \middle|\ a;f,f\mu;d,e;c/a\right)\\
&=\frac{(aq/(df),aq/(\mu df),aq/(ef),aq/(\mu ef),f,\mu f)_\infty}{(1-q)(q,c/a,aq/d,aq/e,q\mu,1/\mu)_\infty}\prod_{1\le i\le n}\frac{(aqx_i/x_n,(aq/b_if)x_i/x_n,(aq/\mu b_if)x_i/x_n)_\infty}{((aq/b_i)x_i/x_n,(aq/f)x_i/x_n,(aq/\mu f)x_i/x_n)_\infty}\\
&\times\int_{1/\mu}^{1}\frac{(qt,\mu cft/a,q\mu t)_\infty}{(aqt/(df),aqt/(ef),\mu ft)_\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{((aq/f)x_it/x_n)_\infty}{((aq/b_if)x_it/x_n)_\infty}d_qt.
\end{aligned}$$

ただし, $\mu=a^3q^2/(b_1b_2\cdots b_ncdef^2)$ である. 特に, 積分 (1.12) と級数 $W^{M,2}$ の間に以下の変換公式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&\int_{q/a_{M+2}}^{q/a_{M+3}}\prod_{i=1}^{M+3}\frac{(a_it)_\infty}{(b_it)_\infty}d_qt\\
&=\frac{(q,a_{M+1}/b_{M+3},b_{M+1}b_{M+3}q^2/(a_{M+2}a_{M+3}),b_{M+2}b_{M+3}q^2/(a_{M+2}a_{M+3}),a_{M+2}q/a_{M+3},a_{M+3}/a_{M+2})_\infty}{(b_{M+1}q/a_{M+2},b_{M+2}q/a_{M+2},b_{M+3}q/a_{M+2}b_{M+1},q/a_{M+3},b_{M+2}q/a_{M+3},b_{M+3}q/a_{M+3})_\infty}\\
&\times\frac{q(1-q)}{a_{M+3}}\prod_{i=1}^{M}\frac{(b_ib_{M+3}q^2/(a_{M+2}a_{M+3}),a_iq/a_{M+2},a_iq/a_{M+3})_\infty}{(a_ib_{M+3}q^2/(a_{M+2}a_{M+3}),b_iq/a_{M+2},b_iq/a_{M+3})_\infty}\\
&\times W^{M,2}\left(\begin{array}{c}\{a_i/b_i\}_{1\le i\le M}\\ \{a_i\}_{1\le i\le M}\end{array}\ \middle|\ \frac{a_Mb_{M+3}q}{a_{M+2}a_{M+3}};\frac{b_{M+3}q}{a_{M+2}},\frac{b_{M+3}q}{a_{M+3}};\frac{a_M}{b_{M+1}},\frac{a_M}{b_{M+2}};\frac{a_{M+1}}{b_{M+3}}\right).
\end{aligned}\tag{2.2}$$

これが, 1 章の問題 (2) の答えである. また, 問題 (1) については, $M=1$ の場合の方程式 [1] と同様の議論により, 積分 (1.12) が満たす $(M+1)$ 階の q 差分方程式系を導出することができる. 時間の都合上, 講演では触れることが難しいが, このテクニカルレポートで紹介しておく.

定理 2.2. 積分 (1.12) は次の $(M+1)$ 階の q 差分方程式系を満たす:

$$\begin{aligned}
&E_My=0,\\
&[(a_1-a_kq)T_{a_k}T_{a_l}^{-1}-(a_l-a_kq)T_{a_k}T_{a_1}^{-1}+(a_l-a_1)]y=0,\\
&[(b_1-a_1)T_{a_1}T_{a_k}^{-1}-(q^{-1}a_k-a_1)T_{a_1}T_{b_1}+(q^{-1}a_k-b_1)]y=0,\\
&[(b_1-q^{-1}b_l)T_{b_k}T_{b_l}^{-1}-(b_k-q^{-1}b_l)T_{b_1}T_{b_l}^{-1}+(b_k-b_1)]y=0,\\
&[(a_1-b_1)T_{b_k}T_{b_1}^{-1}-(b_kq-b_1)(T_{a_1}T_{b_1})^{-1}+(b_kq-a_1)]y=0,\\
&[(b_1-a_k)T_{a_k}T_{b_l}-(b_l-a_k)T_{a_k}T_{b_1}+(b_l-b_1)]y=0,\\
&[(b_l-a_1)T_{a_k}^{-1}T_{b_l}^{-1}-(b_l-a_k)T_{a_1}^{-1}T_{b_l}^{-1}+(a_1-a_k)]y=0,\\
&\left(q\prod_{k=1}^{M+3}T_{a_k}T_{b_k}-1\right)y=0.
\end{aligned}$$

ここで, $1 \le k, l \le M+3$ であり, E_M は次で定義される $(M+1)$ 階の q 差分作用素である (ただし, $T = T_{a_1} T_{b_1}$, $\hat{a} = (a_2, \ldots, a_{M+3})$, $\hat{b} = (b_2, \ldots, b_{M+3})$)：

$$\begin{aligned} E_M &= b_1^{M+2} T^{-1} \prod_{n=0}^{M} (1 - (a_1 q^n / b_1) T) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{M+1} (-1)^k b_1^{M+2-k} [e_k(\hat{a}) T^{-1} - q e_k(\hat{b})] \prod_{n=0}^{M-k} (1 - (a_1 q^n / b_1) T) \prod_{n=0}^{k-2} (1 - q^{-n} T) \\ &\quad + (-1)^{M+2} a_2 \cdots a_{M+3} T^{-1} \prod_{n=0}^{M} (1 - q^{-n} T). \end{aligned}$$

方程式 $E_M y = 0$ は論文 [1] と同様の議論により, そのほかの方程式は積分 (1.12) の被積分函数が満たす q 差分方程式を考えることにより導出できる. また, 積分表示 (2.2) やそれに付随する q 差分方程式系の応用として, $W^{M,2}$ の線形関係を得ることができる. 積分表示 (2.2) の右辺を $W \left(\begin{array}{c} \{a_i\}_{1 \le i \le M+3} \\ \{b_i\}_{1 \le i \le M+3} \end{array} \right)$ とおくと, 次を得る：

定理 2.3. (i) $\sigma_a \in \mathfrak{S}_{M+1}$, $\sigma_b \in \mathfrak{S}_{M+3}$ に対し, 次が成り立つ：

$$W \left(\begin{array}{c} \{a_{\sigma_a(i)}\}_{1 \le i \le M+1}, a_{M+2}, a_{M+3} \\ \{b_{\sigma_b(i)}\}_{1 \le i \le M+3} \end{array} \right) = W \left(\begin{array}{c} \{a_i\}_{1 \le i \le M+3} \\ \{b_i\}_{1 \le i \le M+3} \end{array} \right).$$

(ii) 次の 3 項間関係式が成り立つ：

$$\begin{aligned} &W \left(\begin{array}{c} \{a_i\}_{1 \le i \le M}, a_{M+1}, a_{M+2}, a_{M+3} \\ \{b_i\}_{1 \le i \le M+3} \end{array} \right) + W \left(\begin{array}{c} \{a_i\}_{1 \le i \le M}, a_{M+2}, a_{M+3}, a_{M+1} \\ \{b_i\}_{1 \le i \le M+3} \end{array} \right) \\ &\quad + W \left(\begin{array}{c} \{a_i\}_{1 \le i \le M}, a_{M+3}, a_{M+1}, a_{M+2} \\ \{b_i\}_{1 \le i \le M+3} \end{array} \right) = 0. \end{aligned}$$

(iii) 次の $(M+2)$ 項間の関係式が成り立つ：

$$\sum_{i=1}^{M+2} C_k W \left(\begin{array}{c} a_1, \ldots, a_{k-1}, a_{M+2}, a_{k+1}, \ldots, a_{M+1}, a_k, a_{M+3} \\ \{b_i\}_{1 \le i \le M+3} \end{array} \right) = 0.$$

ただし,

$$C_k = \left(\frac{a_k}{a_{M+3}} \right)^2 \prod_{i=1}^{M+3} \frac{\theta(a_k / b_i)}{\theta(a_{M+3} / b_i)} \prod_{\substack{1 \le i \le M+3 \\ i \ne M+3}} \theta(a_{M+3} / a_i) \prod_{\substack{1 \le i \le M+3 \\ i \ne k}} \theta(a_k / a_i)^{-1}.$$

関係式 (i) は被積分函数の対称性から, (ii) は Jackson 積分の定義から簡単にわかる. 関係式 (iii) は, Jordan-Pochhammer 型 Jackson 積分の接続公式 [8] と, 積分 (1.12) が満たす q 差分方程式 $E_M y = 0$ を用いることで得られる.

以上の結果は現在論文準備中である.

謝辞

本研究集会での講演の機会を与えてくださった第 20 回数学総合若手研究集会の世話人の皆様に深く感謝いたします. 本研究は JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2148, JSPS 科研費 JP22H01116 の支援を受けたものです.

参考文献

[1] T. Fujii, T. Nobukawa, Hypergeoemtric solutions for variants of q-hypergeometric equation, arXiv:2207.12777.

[2] G. Gasper, M. Rahman, Basic Hypergeometric Series, 2nd ed., Cambridge University Press (2004).

[3] N. Hatano, R. Matsunawa, T. Sato, K. Takemura, Variants of q-hypergeometric equation, Funk. Ekvac. **65**, 187-211 (2022).

[4] W. J. Holman, L. C. Biedenharn, J. D. Louck, On hypergeometric series well-poised in $SU(n)$, SIAM J. Math Anal. **7**, 529-541 (1976).

[5] Y. Kajihara, Euler transformation formula for multiple basic hypergeometric series of type A and some applications, Adv. Math. **187**, no. 1, 53-97 (2004).

[6] Y. Kajihara, M. Noumi, Multiple elliptic hypergeometric series : An approach from the Cauchy determinant. Indag. Math. **14**, 395-421 (2003).

[7] S. C. Milne, A q-analogue of hypergeometric series well-poised in $SU(n)$ and invariant G-functions, Adv. in Math. **58**, 1-60 (1985).

[8] K. Mimachi, Connection problem in holonomic q-difference system associated with a Jackson integral of Jordan-Pochhammer type, Nagoya Math. J. **116**, 149-161 (1989).

[9] E. Whittaker, G. N. Watson, A Course of Modern Analysis (5th ed.), Cambridge University Press (2021).

[10] 青本和彦, 喜多通武, 超幾何関数論, 丸善出版 (1994).

[11] 梶原康史, 多次元底付き超幾何変換公式 -Cauchy の再生核がらのアプローチ-, 数理解析研究所講究録 1382 巻, 124-142 (2004).

[12] 原岡喜重, すうがくの風景 超幾何関数, 朝倉書店 (2002).

[13] 吉田正章, 私説超幾何関数 —対称領域による点配置空間の一意化—, 共立出版 (1997).

パラレルセッション
会場Ｄ

ヒルツェブルフ曲面の SYZ ミラーとモースホモトピー

千葉大学大学院融合理工学府　数学情報科学専攻
中西隼斗 (Hayato NAKANISHI) *

概要

ヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_k$ を複素多様体として考えた場合のホモロジー的ミラー対称性を SYZ 構成とモースホモトピーを用いて考える。$k = 1$ の場合にはホモロジー的ミラー対称性が成り立つことが知られている (二木-梶浦,2020)。本講演では、この結果を拡張し正整数 k に対してヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_k$ のホモロジー的ミラー対称性が成り立つことを示す。

1　導入

ミラー対称性とは、シンプレクティック多様体 X と複素多様体 $\check{X}$ との間のある種の対称性のことであり、その定式化の一つとして Kontsevich によるホモロジー的ミラー対称性予想がある [8]。このホモロジー的ミラー対称性予想とは、シンプレクティック多様体 X におけるラグランジュ部分多様体からなる深谷圏 $Fuk(X)$ と呼ばれる A_∞ 圏と、複素多様体 $\check{X}$ 上の連接層の導来圏 $D^b(Coh(\check{X}))$ が等価になるという予想である。より正確に言えば、深谷圏から誘導される三角圏と連接層の導来圏が三角圏として同値になるという予想である。一般に、A_∞ 圏から三角圏を構成する方法が知られており [1, 8]、A_∞ 擬同型な 2 つの A_∞ 圏から誘導される三角圏は互いに三角圏として同型となることが知られている。そのため、連接層の導来圏が A_∞ 圏から構成される場合は、元となる A_∞ 圏と深谷圏が A_∞ 擬同型となることを示すことができれば誘導される三角圏の間の同型が得られ、ホモロジー的ミラー対称性予想が肯定的に解決する。

一方で、ミラー対称性があるようなシンプレクティック多様体と複素多様体の組 (ミラー対) を構成する方法として Strominger-Yau-Zaslow らにより提案された構成 (SYZ 構成) がある [13]。これは、与えられたカラビ・ヤウ多様体 M をトーラス束として表すことでミラー多様体 $\check{M}$ が双対トーラス束として構成されるというものである (図 1)。この構成のもとで、Kontsevich-Soibelman らは底

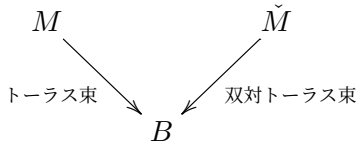


図 1　SYZ 構成

* E-mail:hayato_nakanishi@chiba-u.jp

空間がコンパクト多様体であって特異ファイバーがない場合にモースホモトピーを用いてホモロジー的ミラー対称性の議論をおこなった [9]。これは深谷-Oh らによる余接束における深谷圏と底空間におけるモースホモトピーの圏が同値になるという結果 [3] に基づいており、ファイバー毎に $\mathbb{Z}^n$ 作用を考えることでトーラス束の場合に拡張されたモースホモトピーの圏を用いて議論がなされている。

本稿では、ヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_k$ を複素多様体とし、SYZ 構成によりそのミラー多様体を考え、モースホモトピーの圏を用いてホモロジー的ミラー対称性を考察する。$k=1$ の場合は二木-梶浦らによる結果 [6] があり、連接層の導来圏を生成するような正則直線束からなる DG 圏と、対応するラグランジュ切断からなるモースホモトピーの圏が擬同型になることが知られている。この結果を拡張し、正整数 k の場合でも成り立つことを示す。また、$k=1$ の場合はモースホモトピーの圏は極小な DG 圏となるが、$k \geq 2$ の場合は極小性が成り立たないことが明らかになった。これについても説明する。

2 準備

2.1 ヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_k$ と SYZ 構成

ヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_k$ は次で定義されるケーラー多様体である。

$$\mathbb{F}_k := \left\{ ([s_0 : s_1], [t_0 : t_1 : t_2]) \;\middle|\; (s_0)^k t_0 = (s_1)^k t_1 \right\} \subset \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^2.$$

開被覆を

$$U_1 = \{t_1 \neq 0,\ s_0 \neq 0\}, \quad U_2 = \{t_0 \neq 0,\ s_1 \neq 0\}, \quad U_3 = \{t_2 \neq 0,\ s_0 \neq 0\}, \quad U_4 = \{t_2 \neq 0,\ s_1 \neq 0\}$$

とし、以下では U_2 上の局所複素座標 $(u, v) := \left(\frac{s_0}{s_1}, \frac{t_2}{t_0}\right)$ を固定する。各成分への射影を $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{F}_k \to \mathbb{C}P^1$, $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{F}_k \to \mathbb{C}P^2$ とする。このとき、$\mathbb{F}_k$ 上のケーラー形式を $\mathbb{C}P^n$ のフビニ・スタディ形式 $\omega_{\mathbb{C}P^n}$ を用いて

$$\check{\omega} := C_1 \omega_{\mathbb{C}P^1} + C_2 \omega_{\mathbb{C}P^2},$$

と定める。ここで、C_1, C_2 は正の実数である。このとき、実トーラス T^2 が

$$(e^{\sqrt{-1}\theta_1}, e^{\sqrt{-1}\theta_2}) \cdot ([s_0 : s_1], [t_0 : t_1 : t_2]) := \left([e^{\sqrt{-1}\theta_1} s_0 : s_1], [t_0 : e^{\sqrt{-1}k\theta_1} t_1 : e^{\sqrt{-1}\theta_2} t_2] \right),$$

により作用し、これに対応してモーメント写像が

$$\mu\left([s_0 : s_1], [t_0 : t_1 : t_2]\right) = \left(\frac{2C_1|s_1|^2}{|s_0|^2 + |s_1|^2} + k\frac{2C_2|t_1|^2}{|t_0|^2 + |t_1|^2 + |t_2|^2}, \frac{2C_2|t_2|^2}{|t_0|^2 + |t_1|^2 + |t_2|^2} \right),$$

で与えられる。このモーメント写像 $\mu : \mathbb{F}_k \to \mathbb{R}^2$ の像 $P := \mu(\mathbb{F}_k)$ は

$$P = \left\{ (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq x^1 \leq 2(C_1 + kC_2) - kx^2,\ 0 \leq x^2 \leq 2C_2 \right\},$$

となり、これをモーメント多面体と呼ぶ (図 2)。以下では $C_1 = C_2 = 1$ とする。ここで、

$$\check{M} := U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap U_4, \quad B := \mathrm{Int}(P),$$

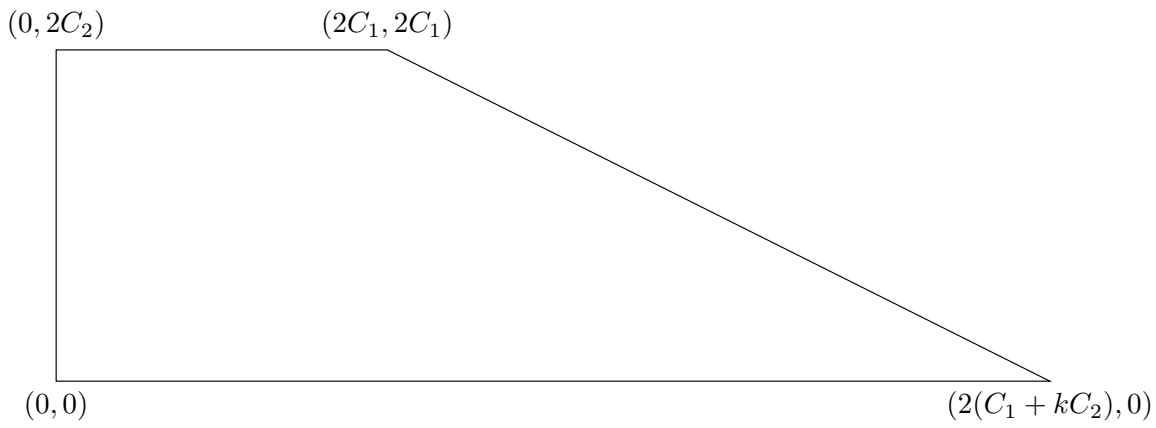


図 2　$\mathbb{F}_k$ のモーメント多面体.

とすると、モーメント写像の $\check{M}$ への制限はトーラス束となる。このとき、$\check{M}$ には $(u, v) = (e^{x_1+\sqrt{-1}y_1}, e^{x_2+\sqrt{-1}y_2})$ によりアフィン構造が入る。このアフィン座標において $\mathbb{F}_k$ から誘導される $\check{M}$ 上のケーラー形式は

$$\check{\omega} = 4\frac{k^2(1+t)s^k dx_1 \wedge dy_1 - ks^k t dx_1 \wedge dy_2 - ks^k t dx_2 \wedge dy_1 + (1+s^k)t dx_2 \wedge dy_2}{(1+s^k+t)^2} + 4\frac{s dx_1 \wedge dy_1}{(1+s)^2},$$

と表される。これにより B 上の計量 $\{g^{ij}\}$ が

$$\begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4s}{(1+s)^2} + \frac{4k^2(1+t)s^k}{(1+s^k+t)^2} & \frac{-4ks^k t}{(1+s^k+t)^2} \\ \frac{-4ks^k t}{(1+s^k+t)^2} & \frac{4(1+s^k)t}{(1+s^k+t)^2} \end{pmatrix},$$

により与えられる。ここで、$s := |u|^2 = e^{2x_1}$, $t := |v|^2 = e^{2x_2}$ であり、$\check{M} \cong T^*B/2\pi\mathbb{Z}^2$ とみなすことができる。このとき、関数 $\psi := \log(1 + e^{2kx_1} + e^{2x_2}) + \log(1 + e^{2x_1})$ を考えると $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} = g^{ij}$ となるので、双対座標が次のようにして定まる。

$$(x^1, x^2) := \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\right) = \left(\frac{2e^{2x_1}}{1+e^{2x_1}} + k\frac{2e^{2kx_1}}{1+e^{2kx_1}+e^{2x_2}}, \frac{2e^{2x_2}}{1+e^{2kx_1}+e^{2x_2}}\right).$$

また、ファイバー座標 y_j に対しても B 上の計量 $\{g^{ij}\}$ に関する双対座標が $y^i = \sum_{i=1}^2 g^{ji} y_j$ で与えられる。これにより $M := TB/2\pi\mathbb{Z}^2$ と置くことでトーラス束 $\mu|_{\check{M}} : \check{M} \to B$ の双対トーラス束 $\pi : M \to B$ が得られる。

2.2　正則直線束のなす DG 圏

一般に、ヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_k$ 上の正則直線束は以下の因子の線型結合により構成できる [4]。

$$D_{12} = \{t_2 = 0\},\ D_{24}\{(s_0 = t_1 = 0\},\ D_{13} = \{s_1 = t_0 = 0\},\ D_{34} = \{t_0 = t_1 = 0\}.$$

因子 D に対応する正則直線束を $\mathcal{O}(D)$ と書くことにする。このとき、$\mathbb{C}P^n$ 上の正則直線束 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}P^n}(1)$ の pr_j による引き戻しは次のように同一視される。

$$\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^1}(1) = \mathcal{O}(D_{24}), \quad \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{C}P^2}(1) = \mathcal{O}(D_{12}).$$

これらを用いることでヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_k$ 上の正則直線束を生成できる。そこで

$$\mathcal{O}(a,b) := \mathcal{O}(aD_{24} + bD_{12}).$$

とする。この $\mathcal{O}(a,b)$ には自然な接続が

$$D_{(a,b)} := d - a\frac{s(dx_1 + \sqrt{-1}dy_1)}{1+s} - b\frac{ks(dx_1 + \sqrt{-1}dy_1) + t(dx_2 + \sqrt{-1}dy_2)}{1+s^k+t}.$$

で与えられる。

次に $\mathbb{F}_k$ 上の正則直線束からなる DG 圏 $DG(\mathbb{F}_k)$ を考える。対象は上記の正則直線束と接続形式の組 $(\mathcal{O}(a,b), D_{(a,b)})$ とする。射の空間を次で定める。

$$DG(\mathbb{F}_k)^*((\mathcal{O}(a_1,b_1), D_{(a_1,b_1)}), (\mathcal{O}(a_2,b_2), D_{(a_2,b_2)})) := \Gamma(\mathcal{O}(a_1,b_1), \mathcal{O}(a_2,b_2)) \otimes_{C^\infty(\mathbb{F}_k)} \Omega^{0,*}(\mathbb{F}_k)$$

ここで、$\Gamma(\mathcal{O}(a_1,b_1), \mathcal{O}(a_2,b_2))$ は $\mathcal{O}(a_1,b_1)$ から $\mathcal{O}(a_2,b_2))$ への滑らかなベクトル束写像の空間であり、$\Omega^{0,*}(\mathbb{F}_k)$ は反正則微分形式の空間である。射の合成はベクトル束写像の合成とウェッジ積により定まる。また、DG 構造が次のようにして入る。接続を $D_{(a,b)} = D^{(1,0)}_{(a,b)} + D^{(0,1)}_{(a,b)}$ と正則部分と反正則部分に分解し、$\psi \in DG(\mathbb{F}_k)^r((\mathcal{O}(a_1,b_1), D_{(a_1,b_1)}), (\mathcal{O}(a_2,b_2), D_{(a_2,b_2)}))$ に対して線形写像を

$$d(\psi) := 2D^{(0,2)}_{(a_2,b_2)}\psi - (-1)^r 2\psi D^{(0,2)}_{(a_1,b_1)},$$

と定める。対象が正則直線束であることから、この線形写像 d は $d^2 = 0$ を満たし、射の合成と両立する。特に、構成より

$$DG(\mathbb{F}_k)\left(\mathcal{O}(a_1,b_1), \mathcal{O}(a_2,b_2)\right) \simeq DG(\mathbb{F}_k)\left(\mathcal{O}, \mathcal{O}(a_2-a_1, b_2-b_1)\right).$$

となり、ゼロ次のコホモロジーは正則な大域切断の空間となる。すなわち

$$\begin{aligned} H^0(DG(\mathbb{F}_k)(\mathcal{O}(a_1,b_1), \mathcal{O}(a_2,b_2))) &\simeq H^0(DG(\mathbb{F}_k)(\mathcal{O}(0,0,0), \mathcal{O}(a_2-a_1, b_2-b_1)) \\ &\simeq \Gamma(\mathbb{F}_k, \mathcal{O}(a_2-a_1, b_2-b_1)), \end{aligned}$$

となり、局所座標 (u,v) を用いると $\Gamma(\mathbb{F}_k, \mathcal{O}(a,b))$ の生成元は

$$\psi_{(i_1,i_2)} := u^{i_1}v^{i_2} \quad (0 \le i_2 \le b,\ 0 \le i_1 \le a + k(b-i_2)),$$

と表される [4]。

次に $\check{M}$ 上の正則直線束からなる DG 圏 $\mathcal{V}$ を定める。対象を $\check{M}$ 上の正則直線束 V であって次のような $U(1)$ 接続 D を持つものとする。

$$D := d - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{i=1}^{2} y^i(x)dy_i,$$

射の空間や射の合成、DG 構造は $DG(\mathbb{F}_k)$ と同様にして定義される。

最後に $DG(\mathbb{F}_k)$ から $\mathcal{V}$ への忠実関手 $\mathcal{I} : DG(\mathbb{F}_k) \to \mathcal{V}$ を考える。$\mathcal{O}(a,b)$ のファイバーを同型 $\Psi_{(a,b)} := (1+s)^{\frac{a}{2}}(1+s^k+t)^{\frac{b}{2}}$ で捻ることで $A_{(a,b)}$ から dx_j の項を消去することができる。このようにして同型で捻った正則直線束を $\widetilde{\mathcal{O}}(a,b)$ と書くことにする。この $\widetilde{\mathcal{O}}(a,b)$ を $\check{M}$ に制限することで忠実関手 $\mathcal{I} : DG(\mathbb{F}_k) \to \mathcal{V}$ が定まる。$DG(\mathbb{F}_k)$ の $\mathcal{I}$ による像を $\mathcal{V}' := \mathcal{I}(DG(\mathbb{F}_k))$ と書くことにする。

2.3 ラグランジュ切断と SYZ 変換

$\pi : M \to B$ の切断を $s : B \to M$ を考え、そのリフト $\underline{s} : B \to TB$ のグラフを考える。ここで、$TB \cong T^*B$ であることから $\underline{s}$ のグラフがラグランジュ部分多様体であるかどうかを T^*B において確認することができる。すなわち、切断を $\underline{s} : B \to T^*B$ とみなし、ラグランジュ部分多様体かどうかを確認する。T^*B の切断は 1-形式 $\sum y_j dx^j$ であり、そのグラフがラグランジュ部分多様体となることとある局所的な関数 f が存在して $df = \sum y_j dx^j$ となることが同値である。このような関数 f をラグランジュ切断のポテンシャルと呼ぶことにする。ここで、$y_j = \sum g_{ji} y^i,\ dx_i = \sum g_{ji} dx^i,\ y^i = s^i$ であるから

$$df = \sum_{j=1}^{2} y_j dx^j = \sum_{i=1}^{2} y^i dx_i = \sum_{i=1}^{2} s^i dx_i$$

となる。

次に、$\check{M}$ 上の正則直線束と $\pi : M \to B$ のラグランジュ切断の間の対応 (SYZ 変換) を復習する。$\pi : M \to B$ の切断 $s : B \to M$ に対して、$\check{M}$ 上の直線束 V であって次の形の接続 D を持つものを考える。

$$D := d - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{i=1}^{2} s^i(x) dy_i,$$

このとき、この接続 D が正則直線束構造を定めることは曲率形式の $(0,2)$-部分が消えることと同値であり、これは行列 $(\frac{\partial s^i}{\partial x_j})$ が対称行列になることと同値となる。このとき $d(\sum s^i dx_i) = 0$ となるので、Poincaré の補題より、ある局所的な関数 f が存在して $df = \sum s^i dx_i$ となる。以上をまとめると、切断 $s : B \to TB$ のグラフがラグランジュ部分多様体になることと、$\check{M}$ 上の直線束における接続 $D = d - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{i=1}^{2} s^i(x) dy_i$ が正則直線束構造を定めることが同値となる。すなわち、$\check{M}$ 上の正則直線束であって上記の形の接続を持つものが与えられたとき、dy 項の係数としてラグランジュ切断が得られ、この対応を SYZ 変換と呼ぶ [10, 2]。

2.4 モースホモトピーの圏

次に、モースホモトピーの圏 $Mo(P)$ を復習する [5, 6, 11, 12]。対象は 2.2 節にて構成した $\check{M}$ 上の正則直線束 $\widetilde{\mathcal{O}}(a,b)$ に対応するラグランジュ切断 $L(a,b)$ であってモーメント多面体 P を含む開集合上に滑らかに拡張できるものとする。2 つのラグランジュ切断 L, L' のポテンシャルをそれぞれ $f_L, f_{L'}$ とし、その差 $f_L - f_{L'}$ が Bott-Morse 関数になるとする。このとき、clean に交わる[*1]2 つのラグランジュ切断の順序付けられた組 (L, L') を考える。射の空間 $Mo(P)(L, L')$ を条件 (M1),(M2) を満たすような $\pi(L \cap L') \subset P$ の連結成分で張られる $\mathbb{Z}$-次数付きベクトル空間として定義する。

(M1) 連結成分 $V \subseteq \pi(L \cap L')$ に対して、一般の点 $v \in V$ での勾配ベクトル場 $-\mathrm{grad}(f_L - f_{L'})$ の安定多様体 $S_v \subseteq \tilde{B}$ の次元が定数となる。このとき V の次数を $|V| := \dim(S_v)$ で定める。

[*1] 2 つの対象 L, L' が clean に交わるとは、$x \in L \cap L'$ に対して $T_x L \cap T_x L' = T_x(L \cap L')$ となることである。

(M2)　連結成分 $V \subset \pi(L \cap L')$ に対して、一般の点 $v \in V$ であって $S_v \cap P \subset S_v$ の内点になるようなものが存在する。

次に、射の空間における A_∞ 構造について考える。一般に、高次の積が定義できるが、本稿では微分構造 $\mathfrak{m}_1$ と射の合成 $\mathfrak{m}_2$ についてのみ扱う。まずは微分構造 $\mathfrak{m}_1$ について考える。2 つのラグランジュ切断 L, L' に対して、$V, V' \subset \pi(L \cap L')$ をそれらの交叉をモーメント多面体に射影したものの連結成分とし、これらの次数は $|V'| = |V| + 1$ を満たすとする。このとき、$\gamma : \mathbb{R} \to P$ を $v \in V$ を始点とし $v' \in V'$ を終点とするような勾配ベクトル場 $-\mathrm{grad}(f_L - f_{L'})$ の積分曲線を考える。このような積分曲線の重み付き数え上げ[*2]により $\mathfrak{m}_1 : Mo(P)(L, L') \to Mo(P)(L, L')$ を定義する。

$$\mathfrak{m}_1; V \longmapsto \sum_{\substack{V' \in Mo(P)(L,L') \\ |V'|=|V|+1}} \sum_{[\gamma]} e^{-A(\gamma)} V',$$

ここで、$A(\gamma)$ は $\pi^{-1}(\gamma(\mathbb{R}))$ における L と L' に囲まれる円盤のシンプレクティック面積である。次に射の合成 $\mathfrak{m}_2$ について考える。3 つのラグランジュ切断 L_1, L_2, L_3 に対して、$V_{12}, V_{23}, V_{13} \subset P$ をそれぞれ交叉 $L_1 \cap L_2, L_2 \cap L_3, L_1 \cap L_3$ をモーメント多面体に射影したものの連結成分とし、これらの次数は $|V_{13}| = |V_{12}| + |V_{23}|$ を満たすとする。このとき、Γ を $v_{12} \in V_{12}$ と $v_{23} \in V_{23}$ を始点とし $v_{13} \in V_{13}$ を終点とするような勾配木を考える (図 3)。$\mathfrak{m}_1$ と同様に、このような勾配木の重み付

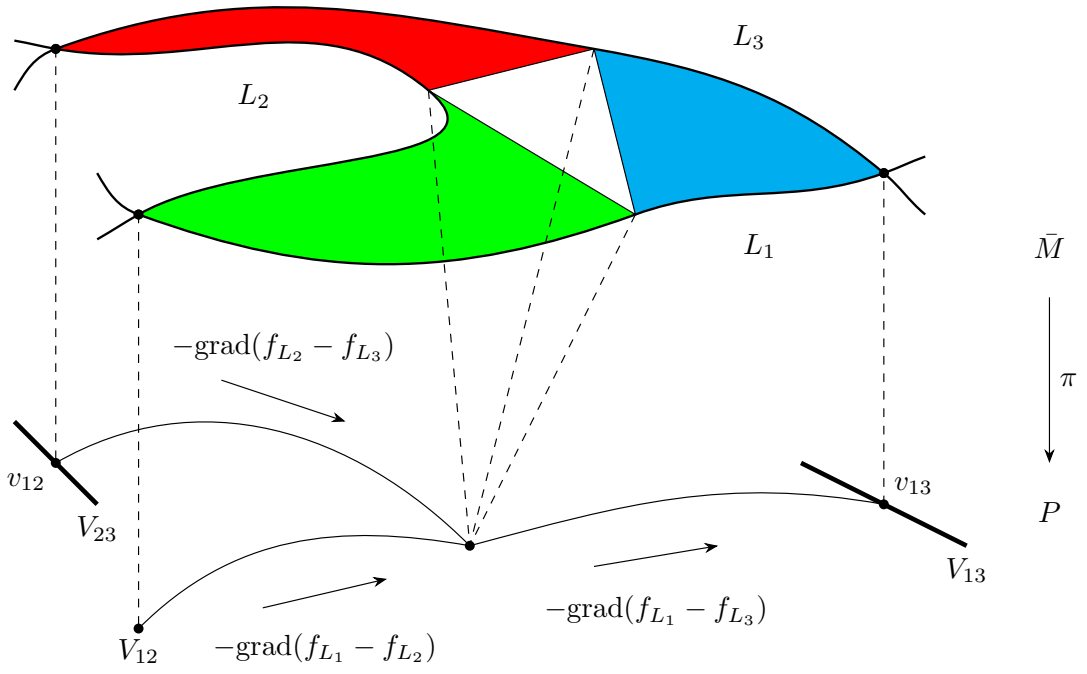


図 3　ラグランジュ切断と勾配木のイメージ図

[*2] より具体的には、始点と終点をそれぞれ V, V' 内全体で考える。ポテンシャルの差が Bott-Morse 関数であり V と V' の次数が $|V'| = |V| + 1$ であることから、そのような積分曲線のモジュライ空間が 0 次元となり。特に、有限集合になるので数え上げることができる。

き数え上げにより $\mathfrak{m}_2 : Mo(P)(L_1, L_2) \otimes Mo(P)(L_2, L_3) \to Mo(P)(L_1, L_3)$ を定義する。

$$\mathfrak{m}_2; (V_{12}, V_{23}) \longmapsto \sum_{\substack{V_{13} \in Mo(P)(L_1, L_3) \\ |V_{13}| = |V_{12}| + |V_{23}|}} \sum_{[\gamma]} e^{-A(\Gamma)} V_{13}.$$

このとき、重み $A(\Gamma)$ は図 3 における色のついた部分のシンプレクティック面積となる。

3 主結果

3.1 主定理とその系

ヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_k$ 上の連接層の導来圏に対して、強例外的生成系と呼ばれる圏の生成系を具体的に構成する方法が知られている [7]。これを 2.2 節で考えた正則直線束 $\mathcal{O}(a, b)$ を用いて表すと次のとおりである。

$$\mathcal{E}_c := (\mathcal{O}(0,0), \mathcal{O}(1,0), \mathcal{O}(c,1), \mathcal{O}(c+1,1)).$$

ここで、c は非負整数である。対象が $\mathcal{E}_c$ からなる $DG(\mathbb{F}_k)$ の充満部分圏を $DG_{\mathcal{E}_c}(\mathbb{F}_k)$ とし、忠実関手 $\mathcal{I} : DG(\mathbb{F}_k) \to \mathcal{V}$ による像を $\mathcal{V}'_{\mathcal{E}_c}$ と書くことにする。このとき、次の定理が主定理である。

定理 3.1. $\mathbb{F}_k$ をヒルツェブルフ曲面、P をモーメント多面体、$\mathcal{E}_c$ を連接層の導来圏 $D^b(Coh(\mathbb{F}_k))$ の強例外的生成系とする。このとき擬同型

$$Mo_{\mathcal{E}_c}(P) \simeq \mathcal{V}'_{\mathcal{E}_c} \simeq DG_{\mathcal{E}_c}(\mathbb{F}_k),$$

が存在する。

一般に、DG 圏から三角圏を自然に構成することができ、2 つの DG 圏が擬同型な場合はそれらから誘導される三角圏は三角同値となることが知られている [1]。そのため、主定理より次の系が従う。

系 3.2. ヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_k$ に対して三角圏としての同値

$$Tr(Mo_{\mathcal{E}_c}(P)) \simeq D^b(Coh(\mathbb{F}_k)),$$

が存在する。ここで $Tr(Mo_{\mathcal{E}_c}(P))$ は DG 圏 $Mo_{\mathcal{E}_c}(P)$ から誘導される三角圏である。

コンパクト多様体 B 上のモースホモトピーの圏 $Mo(B)$ を境界付き多様体 P 上に拡張したものが $Mo(P)$ であり、T^*B におけるラグランジュ切断からなる深谷圏 $Fuk(T^*B)$ と $Mo(B)$ が A_∞ 同値となる [3] ことから、この系はある種のホモロジー的ミラー対称性と考えることができる。

$k = 1$ の場合、主定理とその系が成り立つことが二木-梶浦らにより示されている [6]。この主定理とその系が $k \geq 2$ の場合でも成り立つことが本研究により明らかになった [12]。

注意 3.3. この主定理はヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_k$ に限らずトーリックファノ曲面に対しても成り立つ。$\mathbb{C}P^2$, $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, $\mathbb{F}_1$ については二木-梶浦らの結果 [5, 6] であり、残りの $\mathbb{C}P^2$ の 2 点ブローアップと 3 点ブローアップについては講演者のプレプリント [11] を参照いただきたい。

3.2 主定理の証明の概略

主定理の証明の概略を説明する。2.2 節より、$DG(\mathbb{F}_k)(\mathcal{O}(0,0),\mathcal{O}(a,b))$ のゼロ次のコホモロジーの生成元は局所座標の単項式 $u^{i_1}v^{i_2}$ により表されるのであった。これを用いると $\mathcal{V}'(\widetilde{\mathcal{O}}(0,0),\widetilde{\mathcal{O}}(a,b))$ のゼロ次のコホモロジーは局所座標の単項式の関数倍 $\Psi^{-1}_{(a,b)}u^{i_1}v^{i_2}$ となる。絶対値の最大値が 1 になるように正規化したもの $\mathbf{e}_{(a,b);(i_1,i_2)}$ を次のように分解する。

$$\mathbf{e}_{(a,b);(i_1,i_2)}(x) = e^{-f_{(a,b);(i_1,i_2)}(x)}e^{\sqrt{-1}(i_1y_1+i_2y_2)}.$$

このとき

$$\{x \in P \mid f_{(a,b);(i_1,i_2)}(x) = 0\} = V_{(a,b);(i_1,i_2)},$$

となることが直接計算によりわかる[*3]。一方で、$Mo_{\mathcal{E}_c}(P)$ は極小な DG 圏となるので、$Mo_{\mathcal{E}_c}(P)$ の射の空間はそのコホモロジーと一致する。これにより対応 $\iota; V_{(a,b);(i_1,i_2)} \mapsto \mathbf{e}_{(a,b);(i_1,i_2)}$ が擬同型

$$\iota : Mo_{\mathcal{E}_c}(P)(L(0,0),L(a,b)) \to \mathcal{V}'_{\mathcal{E}_c}(\widetilde{\mathcal{O}}(0,0),\widetilde{\mathcal{O}}(a,b))$$

を与える。これが射の合成と両立することを示すことで、擬同型関手 $\iota : Mo_{\mathcal{E}_c}(P) \to \mathcal{V}'_{\mathcal{E}_c}$ が得られる。また、忠実関手 $\mathcal{I} : DG_{\mathcal{E}_c}(\mathbb{F}_k) \to \mathcal{V}'_{\mathcal{E}_c}$ は擬同型関手であることから主定理が従う。

3.3 $Mo(P)$ の極小性

次に、$Mo(P)$ の極小性について考える。$k = 1$ の場合、ラグランジュ切断の交叉は連結となることから射の空間は微分が自明な鎖複体となる。これにより $\mathbb{F}_1$ に対しては $Mo(P)$ は極小な DG 圏となることがわかっている。しかし、$k \geq 2$ の場合はラグランジュ切断の交叉が必ずしも連結にならないことが本研究により明らかになった。これにより、$k \geq 2$ の場合には $\mathbb{F}_k$ に対する $Mo(P)$ は極小な DG 圏にならない。その例を $k = 2$ の場合で明示的に構成する。

射の空間 $Mo(P)(L(0,0),L(-7,3))$ について考える。ラグランジュ切断 $L(0,0)$ と $L(-7,3)$ の交叉は、トーラス束の切断のリフトであることを考慮すると次のように表される。

$$i_1 = -7\frac{s}{1+s} + 6\frac{s^2}{1+s^2+t}, \quad i_2 = 3\frac{t}{1+s^2+t}. \tag{1}$$

ここで $(i_1,i_2) \in \mathbb{Z}^2$ であり $s = e^{2x_1},\ t = e^{2x_2}$ である。(i_1,i_2) に対して方程式 (1) を満たすような s,t を求める。ここでは $Mo(P)(L(0,0),L(-7,3))$ が非自明な微分を持つことを確かめるために、$(i_1,i_2) = (0,0)$ の場合のみを考える。まずは第 2 式から考える。$s = 0$ であれば $t = 0$、$s \neq 0$ であれば $\frac{t}{s} = 0$ が第 2 式を満たす。このもとで第 1 式を考えると、$(s,t) = (0,0)$ または $(3 \pm \sqrt{2},0)$ となる。ここで、モーメント多面体の座標は

$$(x^1,x^2) = \left(\frac{2s}{1+s} + 2\frac{2s^2}{1+s^2+t}, \frac{2t}{1+s^2+t}\right),$$

[*3] トーラス束の切断 s のリフトをとると $y^j = s^j + 2\pi i_j$ と表される。このとき、$L(0,0)$ のリフトとして $(i_1,i_2) \in \mathbb{Z}^2$ を取り、$L(a,b)$ のリフトとして $(0,0)$ を取る。このとき、$L(0,0)$ と $L(a,b)$ の交叉をモーメント多面体に射影したものを $V_{(a,b);(i_1,i_2)}$ としている。

であったから、ラグランジュ切断 $L(0,0)$ と $L(-7,3)$ の交叉をモーメント多面体に射影したもの $V_{(-7,3);(0,0)}$ は次のようになる。

$$V_{(-7,3);(0,0)} = \{(0,0)\} \cup \left\{ \left(\frac{100-10\sqrt{2}}{21}, 0 \right) \right\} \cup \left\{ \left(\frac{100+10\sqrt{2}}{21}, 0 \right) \right\}.$$

これは明らかに連結でないことがわかる。この交叉に対応する勾配ベクトル場は

$$2\pi \left(-7\frac{s}{1+s} + 6\frac{s^2}{1+s^2+t} \right) \frac{\partial}{\partial x^1} + 2\pi \left(3\frac{t}{1+s^2+t} \right) \frac{\partial}{\partial x^2},$$

で与えられる (図 4)。

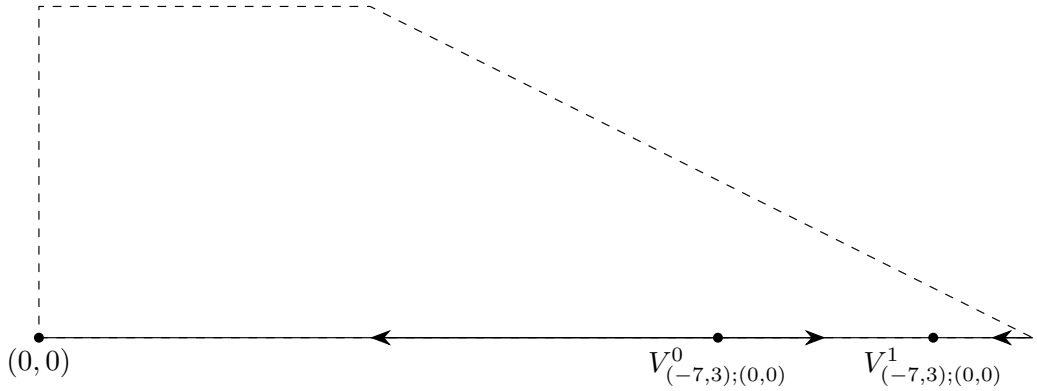


図 4　$V_{(-7,3);(0,0)}$ とモーメント多面体の底辺における $f_{(-7,3);(0,0)} - f_{(0,0);(0,0)})$ の勾配ベクトル場の様子.

これらの連結成分のうち、 $(0,0)$ は条件 (M2) を満たさないため射の空間の生成元にならず、$V^0_{(-7,3);(0,0)} := \left\{ \left(\frac{100-10\sqrt{2}}{21}, 0 \right) \right\}$ は次数 0 の生成元となり、$V^1_{(-7,3);(0,0)} := \left\{ \left(\frac{100+10\sqrt{2}}{21}, 0 \right) \right\}$ は次数 1 の生成元となる。さらに $V^0_{(-7,3);(0,0)}$ を始点とし $V^1_{(-7,3);(0,0)}$ を終点とするような勾配ベクトル場 $-\mathrm{grad}(f_{(0,0);(0,0)} - f_{(-7,3);(0,0)})$ の積分曲線が存在することより、$V^0_{(-7,3);(0,0)}$ に対して非自明な微分が次で与えられる。

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}_1(V^0_{(-7,3);(0,0)}) &= e^{-A} V^1_{(-7,3);(0,0)}, \\
A &= \int_{x^1=\frac{100-10\sqrt{2}}{21}}^{x^1=\frac{100+10\sqrt{2}}{21}} d(f_{(-7,3);(0,0)} - f_{(0,0);(0,0)})|_{t=0} \\
&= \int_{x_1=\frac{1}{2}\log(3-\sqrt{2})}^{x_1=\frac{1}{2}\log(3+\sqrt{2})} df_{(-7,3);(0,0)}|_{t=0} \\
&= \left[-7\pi \log(1+s) + 3\pi \log(1+s^2) \right]_{s=3-\sqrt{2}}^{s=3+\sqrt{2}} \\
&= 3\pi \log \left(\frac{12+6\sqrt{2}}{12-6\sqrt{2}} \right) - 7\pi \log \left(\frac{4+\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} \right).
\end{aligned}$$

ここで A は π^{-1}(勾配ベクトル場の積分曲線) における $L(0,0)$ と $L(-7,3)$ によって囲まれる円盤のシンプレクティック面積である。これにより、射の空間には非自明な微分が存在するがわかり、ヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_k$ に対して $Mo(P)$ が極小でないことが従う。

参考文献

[1] A.I. Bondal and M.M. Kapranov. *Enhanced triangulated categories.* Math. USSR-Sb., 1991, 70:93-107.

[2] K. Chan. *Holomorphic line bundles on projective toric manifolds from Lagrangian sections of their mirrors by SYZ transformations.* International Mathematics Research Notices. 2009.24 (2009), 4686-4708.

[3] K. Fukaya and Y.-G. Oh. *Zero-loop open strings in the cotangent bundle and morse homotopy.* Asian J. Math., 1:96–180, 1997.

[4] W. Fulton. *Introduction to toric varieties.* Number 131. Princeton University Press, 1993.

[5] M. Futaki and H. Kajiura, *Homological mirror symmetry of $\mathbb{C}P^n$ and their products via Morse homotopy.* Journal of Mathematical Physics, 62:3, 032307, 2021.

[6] M. Futaki and H. Kajiura, *Homological mirror symmetry of $\mathbb{F}_1$ via Morse homotopy.* preprint arXiv:2012.06801, 2020.

[7] L. Hille and M. Perling. *Exceptional sequences of invertible sheaves on rational surfaces.* Compositio Mathematica, 147(4):1230–1280, 2011.

[8] M. Kontsevich. *Homological algebra of mirror symmetry.* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994), 120–139, Birkhäuser, Basel, 1995.

[9] M. Kontsevich and Y. Soibelman. *Homological mirror symmetry and torus fibrations.* Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), pages 203–263. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2001.

[10] N.C. Leung, S.-T. Yau, and E. Zaslow. *From special Lagrangian to hermitian-Yang-Mills via Fourier-Mukai transform.* Adv. Theor. Math. Phys. **4** (2000), no. 6, 1319–1341.

[11] H. Nakanishi. *Homological mirror symmetry of toric Fano surfaces via Morse homotopy.* preprint arXiv:2303.07851, 2023.

[12] H. Nakanishi. *SYZ mirror of Hirzebruch surface $\mathbb{F}_k$ and Morse homotopy.* preprint arXiv:2312.01329, 2023.

[13] A. Strominger, S.-T. Yau, and E. Zaslow. *Mirror symmetry is T-duality.* Nucl. Phys. B, 479:243–259, 1996.

ユークリッド空間における勾配樹木と その余接束における正則円盤の対応について

千葉大学　大学院融合理工学府
数学情報科学専攻 数学・情報数理学コース
鈴木英正 (Hidemasa SUZUKI) *

概要

リーマン多様体 M 上の十分一般的な C^∞ 関数 $f_1, ..., f_k$ によって得られる勾配樹木のなすモジュライ空間と，余接束 T^*M 内のラグランジュ部分多様体 $graph(\epsilon df_1), ..., graph(\epsilon df_k)$ を境界にもつ概正則円盤のなすモジュライ空間は，$\epsilon > 0$ が十分小さいときに微分同相になることが知られている．本稿では Schwarz-Christoffel 写像によって構成された $T^*\mathbb{R}$ や $T^*\mathbb{R}^2$ 内の正則円盤を級数表示し，これらが各点で勾配樹木に収束する現象をもって正則円盤と勾配樹木の間の関係を定式化する．

1　導入

リーマン多様体 M 上の十分一般的な C^∞ 関数 $f_1, f_2, ..., f_k$ から得られる勾配樹木のなすモジュライ空間の元と，余接束 T^*M 内のラグランジュ部分多様体 $graph(\epsilon df_1), graph(\epsilon df_2), ..., graph(\epsilon df_k)$ たちを境界に持つ概正則円盤のなすモジュライ空間の元は，$\epsilon > 0$ を十分小さくとれば 1 対 1 に対応することが知られている [5]．本稿では $M = \mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ の場合で，M 上の勾配樹木と T^*M 内の概正則円盤を具体的に与えた上で $\epsilon \downarrow 0$ とすれば一致することを示す．$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ 上の勾配樹木といくつかの $T^*\mathbb{R}, T^*\mathbb{R}^2$ 内の概正則円盤の具体的な構成方法は [9] や [10] で提示した．例えば $M = \mathbb{R}$ で $k = 3$ の場合を考えてみる．$f_1 = 0$，f_2, f_3 を 2 次関数とすると，$graph(\epsilon df_i)$ たちは $\mathbb{R}^2$ 内の直線となる．また，$f_{i+1} - f_i$ が Morse 関数であるとき，$f_{i+1} - f_i$ の臨界点 p_i が唯一に定まる．$\mu(p_i)$ を p_i における $f_{i+1} - f_i$ の Morse 指数とすると，$\sum_{i=1}^{3} \mu(p_i) = 2$ のとき f_1, f_2, f_3 に付随する勾配樹木が一意に得られ，$graph(\epsilon df_1), graph(\epsilon df_2), graph(\epsilon df_3)$ に囲まれる概正則円盤の 1 つが円盤から 3 直線に囲まれる三角形への双正則写像である Schwarz-Christoffel 写像によって得られる（[9], [10] を参照）．ここで ϵ を 0 に近づけると，三角形の高さが徐々に低くなり，次第に線分に潰され，勾配樹木による樹木の像と一致することがわかる（図 1）．本稿では，この様子を単位円盤から三角形への Schwarz-Christoffel 写像の代わりに $0, 1, \infty$ を三角形の 3 頂点に写す上半平面から三角形への Schwarz-Christoffel 写像を用い，$0, 1, \infty$ の近傍でそれぞれ $\epsilon \downarrow 0$ の考察をすることによって定式化する．まず，概正則写像を構成するのに必要な上半平面から三角形への Schwarz-Christoffel 写像

* E-mail:ahma1477@chiba-u.jp

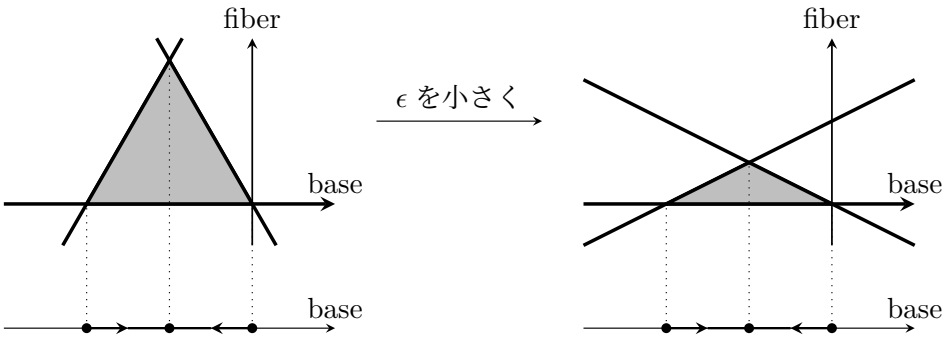


図 1　$\epsilon \downarrow 0$ のイメージ（上が概正則円盤，下が勾配樹木）

を特異点である $0, 1, \infty$ の付近で級数表示させる．その後，論文 [4] にならって特異点の近傍で変数変換を行い，$\epsilon \to 0$ とすると勾配樹木に一致することを確かめる．さらに，$M = \mathbb{R}^2$ においても同様に示すことのできる場合があることも紹介する．

2　準備

2.1　勾配樹木と正則円盤

勾配樹木とは樹木と呼ばれる単体複体からリーマン多様体へのある写像のことである．本稿ではその樹木として図 2 の形のみを考える．図 2 中の v_i は外点，v は内点，e_i は v_i と v を結んだ線分とする．

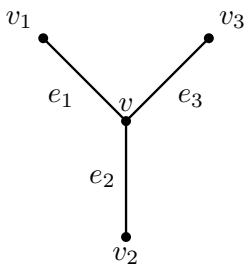


図 2　本稿で扱う樹木

この場合における勾配樹木は以下のように具体的に定められる．

定義 2.1. M をリーマン多様体，g を多様体 M がもつリーマン計量，T を図 2 で定められた樹木，f_1, f_2, f_3 を任意の i に対して $f_{i+1} - f_i (f_4 = f_1)$ がモース関数となるような M 上の実数値関数とする．連続写像 $I : T \longrightarrow M$ が以下を満たすとする．

- $I(v_i)$ は $f_{i+1} - f_i$ のある臨界点 p_i に一致する
- $e_i - \{v_i\}$ を $(-\infty, 0]$ と同一視し，$grad_g f$ を M 上の実数値関数 f に関する勾配ベクトル場とすると
$$\frac{dI|_{e_i}}{dt} = -grad_g(f_{i+1} - f_i)$$
- $I|_{e_1}(0) = I|_{e_2}(0) = I|_{e_3}(0) (=: I(v))$

このとき，I またはその像を M 上の f_1, f_2, f_3 に付随する**勾配樹木**という（[5] を参照）.

概正則円盤を定義する前にシンプレクティック多様体とそのラグランジュ部分多様体について定義する.

定義 2.2. X を $2n$ 次元実多様体とする．X が $\omega^{\wedge n} \neq 0$ となる X 上の閉 2 次形式 ω をもつとき，X を**シンプレクティック多様体**という．L を X の n 次元部分多様体とし，$\omega|_L = 0$ を満たすとき，L を X の**ラグランジュ部分多様体**という.

シンプレクティック多様体は 2 次形式 ω と両立する概複素構造をもつ.

定義 2.3. $J : X \longrightarrow \hom(TX, TX) : p \longmapsto J_p \in \hom(T_pX, T_pX)$ が X の**概複素構造**であるとは，X の任意の点 p に対して $J_p^2 = -\mathrm{id}_{T_pX}$ が成り立つものをいう.

以上を踏まえ，本稿で扱う 3 個のラグランジュ部分多様体に囲まれるシンプレクティック多様体上の概正則円盤を定義する.

定義 2.4. D を $\mathbb{C}$ における原点中心の半径 1 の開円盤，z_1, z_2, z_3 を ∂D 上の反時計回りに順序づけされた 3 点とする．$\partial_i D$ を z_{i-1} と z_i を端点にもち，2 点以外の点 z_j を含まない円弧とする．また，X をシンプレクティック多様体，L_1, L_2, L_3 を X のラグランジュ部分多様体とする．そして，$X, \mathbb{C}$ がもつ概複素構造をそれぞれ J, j とする．このとき，$w : D \longrightarrow X$ が

$$dw \circ j = J \circ dw,\ w(\partial_i D) \subset L_i,\ w(z_i) \in L_i \cap L_{i+1}\ (i = 1, 2, 3, L_4 = L_1)$$

を満たすとき，それを L_1, L_2, L_3 に囲まれる**概正則円盤**という（[5] を参照）.

特に $X = T^*\mathbb{R}^n$ のとき，概正則円盤が満たす微分方程式はコーシー・リーマン方程式と一致する．本稿ではこの場合，つまり T^*M の $M = \mathbb{R}^n$ の場合について議論するため，以下 $T^*\mathbb{R}^n$ 内の概正則円盤のことを正則円盤と呼ぶ.

2.2 Schwarz-Christoffel 写像

[9][10] では $T^*\mathbb{R}$ や $T^*\mathbb{R}^2$ 内の正則円盤を Schwarz-Christoffel 写像を用いて具体的に構成した．Schwarz-Christoffel 写像とは，以下に述べるように上半平面やそれと等角同値な単位円盤から複素平面内の多角形への双正則写像（等角写像）のことである.

定理 2.5 ([2])**.** P を $w_1, \cdots, w_n$ を反時計回りの順序で頂点に持ち，点 w_i における内角が $\alpha_i \pi$ である多角形の内部とする．f を $f(\infty) = w_n$ を満たす上半平面から P への等角写像とする．このとき，$A, C \in \mathbb{C}$ と上半平面の境界上の点 $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1} \in \mathbb{R}$ が存在して

$$f(z) = A + C \int^z \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - z_k)^{\alpha_k - 1}\, d\zeta$$

と表され，$f(z_k) = w_k (k = 1, 2, \ldots, n-1)$ が成り立つ.

定理中に登場した $f(z)$ が Schwarz-Christoffel 写像である（以下 SC 写像と呼ぶことにする）．ち

なみに，単位円盤の内部は上半平面と等角同値であるから，変数変換を施すことで単位円盤から多角形への双正則写像を考えることもできる．本稿では $n=3$ の場合について考察する．以下，主結果の証明に使うため，定理 2.5 の SC 写像の z_1, z_2 と無限遠点 ∞ の周りにおける級数表示について述べる．また，複素平面上の相異なる 3 点は一次分数変換によって $0, 1, \infty$ に写すことができるので，$z_1 = 0, z_2 = 1$ の場合で考えればよい．SC 写像 $f(z)$ は以下の微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left(\sum_{k=1}^{2} \frac{1-\alpha_k}{z-z_k} \right) \frac{df}{dz} = 0$$

を満たすことがわかる（[2] や [8]，[12] などにおける定理 2.5 の証明を参照）．これにより，この微分方程式の解を各特異点 $z = z_1, z_2, \infty$ 付近で級数表示すればよい．

補題 2.6. 3 点 x_1, x_2, x_3 を頂点とする三角形に対して，頂点を番号通りに辿ると三角形の境界を反時計回りに一周できると仮定する．また，三角形の頂点 x_1, x_2 における外角をそれぞれ $\pi\alpha_1, \pi\alpha_2$ とする．このとき，上半平面から 3 点 x_1, x_2, x_3 を結んでできる三角形への SC 写像 f で

$$f(0) = x_1, f(1) = x_2, f(\infty) = x_3$$

を満たすものは以下のように記述される．

$$f(z) = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{F(1-\alpha_1, \alpha_2, 2-\alpha_1; 1)} z^{1-\alpha_1} F(1-\alpha_1, \alpha_2, 2-\alpha_1; z) \quad (|z| < 1)$$
$$f(z) = x_2 + \frac{x_1 - x_2}{F(\alpha_1, 1-\alpha_2, 2-\alpha_2; 1)} (1-z)^{1-\alpha_2} F(\alpha_1, 1-\alpha_2, 2-\alpha_2; 1-z) \quad (|1-z| < 1)$$
$$f(z) = x_3 + \frac{x_2 - x_3}{F(\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2-1, \alpha_1+\alpha_2; 1)} z^{1-\alpha_1-\alpha_2} F(\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2-1, \alpha_1+\alpha_2; z^{-1}) \quad (\left|z^{-1}\right| < 1)$$

Proof. 今考えている微分方程式はガウスの超幾何微分方程式

$$z(1-z)\frac{d^2 f}{dz^2} + \{\gamma - (\alpha+\beta+1)\} \frac{df}{dx} - \alpha\beta f = 0$$

において $\alpha = 0, \beta = \alpha_1 + \alpha_2 - 1, \gamma = \alpha_1$ としたものである．まず，超幾何微分方程式の確定特異点 $z = 0, 1, \infty$ の近傍における解の級数表示は以下の通りである（[6]，[7] 参照）．

$$f(z) = A_1 F(\alpha, \beta, \gamma; z) + B_1 z^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; z) \quad (|z| < 1)$$
$$f(z) = A_2 F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1; 1-z)$$
$$\quad + B_2 (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1; 1-z) \quad (|1-z| < 1)$$
$$f(z) = A_3 z^{-\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1; z^{-1}) + B_3 z^{-\beta} F(\beta-\gamma+1, \beta, \beta-\alpha+1; \zeta^{-1}) \quad (\left|z^{-1}\right| < 1)$$

ここで，$\alpha = 0, \beta = \alpha_1 + \alpha_2 - 1, \gamma = \alpha_1$ とすれば，

$$f(z) = A_1 + B_1 z^{1-\alpha_1} F(1-\alpha_1, \alpha_2, 2-\alpha_1; z) \quad (|z| < 1)$$
$$f(z) = A_2 + B_2 (1-z)^{1-\alpha_2} F(\alpha_1, 1-\alpha_2, 2-\alpha_2; 1-z) \quad (|1-z| < 1)$$
$$f(z) = A_3 + B_3 z^{1-\alpha_1-\alpha_2} F(\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2-1, \alpha_1+\alpha_2; z^{-1}) \quad (\left|z^{-1}\right| < 1)$$

となる．最後に，$f(0) = x_1, f(1) = x_2, f(\infty) = x_3$ により A_j, B_j が求まる． □

3　主定理とその証明

本節では $M=\mathbb{R},\mathbb{R}^2$ における結果を述べる．初めに $M=\mathbb{R}$ における結果から述べる．

定理 3.1. $f_1=0, f_2=a_2x^2, f_3=a_3x^2+b_3x$ とし，各 $k=1,2,3$ に対して $f_{k+1}-f_k$ が Morse 関数で，p_k を $f_{k+1}-f_k$ の唯一の臨界点，$\mu(p_k)$ を p_k における $f_{k+1}-f_k$ の Morse 指数とするとき，$\sum_{i=1}^{3}\mu(p_i)=4$ が成り立つとする．I_j を p_j から出る $f_{j+1}-f_j$ による勾配曲線とし，I_1,I_2,I_3 によって f_1,f_2,f_3 から得られる勾配樹木を構成されるとする．また，w_ϵ を上半平面から 3 つのラグランジュ部分多様体 $graph(\epsilon df_j)$ に囲まれる三角形への SC 写像で，x_j を $graph(\epsilon df_j)$ と $graph(\epsilon df_{j+1})$ の交点として

$$w_\epsilon(0)=x_1, w_\epsilon(1)=x_2, w_\epsilon(\infty)=x_3$$

を満たすものとする．このとき，次が成り立つ．ただし，$\tau\in(-\infty,0), \sigma\in[0,1]$ とする．

$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} w_\epsilon\left(\exp\left[\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau+i\sigma\right)\right]\right)=I_1(\tau)$$
$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} w_\epsilon\left(1-\exp\left[\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau-i\sigma\right)\right]\right)=I_2(\tau)$$
$$\lim_{\epsilon\downarrow 0} w_\epsilon\left(\exp\left[-\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau+i\sigma\right)\right]\right)=I_3(\tau)$$

定理 3.1 の証明に入る前に，勾配樹木と z と τ,σ の間の変換について言及する．まず，定理 3.1 に登場する勾配曲線 I_j は次のように書ける．

補題 3.2. 関数 $f_{j+1}-f_j=ax^2+bx+c$ の非退化な臨界点 p_j を通る勾配曲線 $I_j(t)$ は以下の通りである．

$$I_j(t)=\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}\ (a>0)\\ \chi_i(0)e^{-2at}-\dfrac{b}{2a}\ (a<0)\end{cases}$$

証明は [9][10] に記載されている．また，定理 3.1 における f_1,f_2,f_3 が定理 3.1 中の仮定を満たすとき，勾配樹木が一意に得られることも [9][10] で示されている．次に変数変換について説明する．定理 3.1 における $\epsilon\downarrow 0$ としたときの結果はそれぞれ上から $|z|<1, |1-z|<1, |z^{-1}|<1$ における解析の結果であることに留意すべきである．例えば，一つ目の結果で使用した変換は，原点を中心とした半円 $\{|z|<1;\mathrm{Im}z\geq 0\}$ から幅 1 の帯への変換を意味する（図 3）．この変換は実際に [4] において使われていたものである．以上を踏まえて定理 3.1 を証明する．

Proof.（定理 3.1 の証明）
初めに $a_2<0, a_3>0, b_3>0$ の場合において成り立つことを示す．3 点 x_1,x_2,x_3 を頂点に持つ三角形の x_1,x_2 における外角をそれぞれ $\pi\alpha_1,\pi\alpha_2$ とすると

$$\pi\alpha_1=\pi+\arctan 2a_2\epsilon, \pi\alpha_2=\arctan 2a_3\epsilon-\arctan 2a_2\epsilon$$

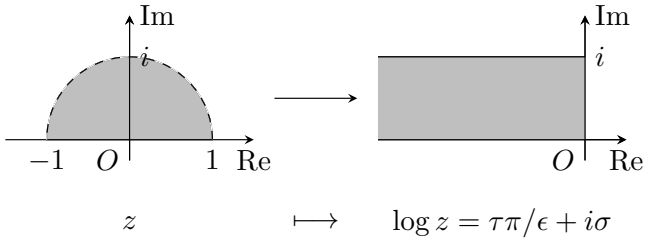


図 3　$|z| < 1$ における変換

となる．これから補題 2.6 を用いて 3 点 $z = 0, 1, \infty$ の近傍における w_ϵ の級数展開をし，z を τ, σ で変換し，ϵ に関して極限をとる．まず，$|z| < 1$ において w_ϵ は以下のように記述される．

$$\left\{-\frac{b_3}{2(a_3-a_2)} - \frac{a_2 b_3 \epsilon}{a_3-a_2} i\right\} \frac{1}{F(1-\alpha_1, \alpha_2, 2-\alpha_1; 1)} z^{1-\alpha_1} F(1-\alpha_1, \alpha_2, 2-\alpha_1; z)$$

ここで $z = \exp\left[\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau + i\sigma\right)\right]$ として $\epsilon \downarrow 0$ を考えると，

$$\begin{aligned} F(1-\alpha_1, \alpha_2, 2-\alpha_1; 1) &= \frac{\Gamma(2-\alpha_1)\Gamma(1-\alpha_2)}{\Gamma(2-\alpha_1-\alpha_2)} \\ &= \frac{\Gamma(1-(\arctan 2a_2\epsilon)/\pi)\Gamma(1-(\arctan 2a_3\epsilon - \arctan 2a_2\epsilon)/\pi)}{\Gamma(1-(\arctan 2a_3\epsilon)/\pi)} \longrightarrow 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\exp\left[\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau + i\sigma\right)\right]\right)^{(-\arctan 2a_3\epsilon)/\pi} = \left(\exp\left[\frac{\pi}{\epsilon}\tau\right] + \exp[\pi i t]\right)^{(-\arctan 2a_3\epsilon)/\pi} \\ &= \exp\left[-\frac{\arctan 2a_2\epsilon}{\epsilon}\tau\right] \exp[-i\sigma \arctan 2a_2\epsilon] \longrightarrow \exp[-2a_2\tau] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &F\left(1-\alpha_1, \alpha_2, 2-\alpha_1; \exp\left[\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau + i\sigma\right)\right]\right) \\ &= F\left(-\frac{\arctan 2a_2\epsilon}{\pi}, \frac{\arctan 2a_3\epsilon - \arctan 2a_2\epsilon}{\pi}, 1 - \frac{\arctan 2a_2\epsilon}{\pi}; \exp\left[\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau + i\sigma\right)\right]\right) \longrightarrow 1 \end{aligned}$$

となるので，

$$w_\epsilon\left(\exp\left[\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau + i\sigma\right)\right]\right) \longrightarrow -\frac{b_3}{2(a_3-a_2)} e^{-2a_2\tau} = I_1(\tau)$$

が成り立つ．$|1-z| < 1$ において w_ϵ は以下のように記述される．

$$\begin{aligned} -\frac{b_3}{2(a_3-a_2)} - \frac{a_2 b_3 \epsilon}{a_3-a_2} i - \left\{-\frac{b_3}{2(a_3-a_2)} - \frac{a_2 b_3 \epsilon}{a_3-a_2} i\right\} &\frac{1}{F(\alpha_1, 1-\alpha_2, 2-\alpha_2; 1)} \\ &\cdot (1-z)^{1-\alpha_2} F(\alpha_1, 1-\alpha_2, 2-\alpha_2; 1-z) \end{aligned}$$

ここで，$1 - z = \exp\left[\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau - i\sigma\right)\right]$ として $\epsilon \downarrow 0$ を考えると，

$$\begin{aligned} F(\alpha_1, 1-\alpha_2, 2-\alpha_2; 1) &= \frac{\Gamma(2-\alpha_2)\Gamma(1-\alpha_1)}{\Gamma(2-\alpha_1-\alpha_2)} \\ &= \frac{\Gamma(2-(\arctan 2a_3\epsilon - \arctan 2a_2\epsilon)/\pi)\Gamma((-\arctan 2a_2\epsilon)/\pi)}{\Gamma(1-(\arctan 2a_3\epsilon)/\pi)} \longrightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$\left(\exp\left[\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau - i\sigma\right)\right]\right)^{1-(\arctan 2a_3\epsilon - \arctan 2a_2\epsilon)/\pi}$$
$$= \exp\left[\frac{\pi}{\epsilon}\tau\right]\exp\left[-\frac{\arctan 2a_3\epsilon - \arctan 2a_2\epsilon}{\epsilon}\tau\right]\exp\left[-\pi i\left(1 - \frac{\arctan 2a_3\epsilon - \arctan 2a_2\epsilon}{\pi}\right)t\right] \longrightarrow 0$$

$$F\left(\alpha_1, 1-\alpha_2, 2-\alpha_2; \exp\left[\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau - i\sigma\right)\right]\right)$$
$$= F\left(-\frac{-\arctan 2a_2\epsilon}{\pi}, \frac{\arctan 2a_3\epsilon - \arctan 2a_2\epsilon}{\pi}, 1 - \frac{\arctan 2a_2\epsilon}{\pi}; \exp\left[\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau - i\sigma\right)\right]\right) \longrightarrow 1$$

となるので,

$$w_\epsilon\left(1 - \exp\left[\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau - i\sigma\right)\right]\right) \longrightarrow -\frac{b_3}{2(a_3 - a_2)} = I_2(\tau)$$

が成り立つ．$|z|^{-1} < 1$ において w_ϵ は以下のように記述される．

$$-\frac{b_3}{2a_3} + \left\{-\frac{b_3}{2(a_3-a_2)} - \frac{a_2 b_3 \epsilon}{a_3 - a_2}i + \frac{b_3}{2a_3}\right\}\frac{1}{F(\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2-1, \alpha_1+\alpha_2; 1)}$$
$$\cdot z^{1-\alpha_1-\alpha_2}F(\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2-1, \alpha_1+\alpha_2; z^{-1})$$

ここで，$z = \exp\left[-\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau + i\sigma\right)\right]$ として $\epsilon \downarrow 0$ を考えると

$$F(\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2-1, \alpha_1+\alpha_2; 1) = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\Gamma(1-\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)}$$
$$= \frac{\Gamma(1+(\arctan 2a_3\epsilon)/\pi)\Gamma(1-(\arctan 2a_3\epsilon - \arctan 2a_2\epsilon)/\pi)}{\Gamma(1+(\arctan 2a_2\epsilon)/\pi)} \longrightarrow 1$$

$$\left(\exp\left[-\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau + i\sigma\right)\right]\right)^{-(\arctan 2a_3\epsilon)/\pi}\exp\left[\frac{\arctan 2a_3\epsilon}{\epsilon}\tau\right]\exp[it\arctan 2a_3\epsilon] \longrightarrow e^{2a_3\tau}$$

$$F\left(\alpha_2, \alpha_1+\alpha_2-1, \alpha_1+\alpha_2; \exp\left[\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau + i\sigma\right)\right]\right)$$
$$= F\left(\frac{\arctan 2a_3\epsilon - \arctan 2a_2\epsilon}{\pi}, \frac{\arctan 2a_3\epsilon}{\pi}, 1 + \frac{\arctan 2a_3\epsilon}{\pi}; \exp\left[\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau + i\sigma\right)\right]\right) \longrightarrow 1$$

となるので,

$$w_\epsilon\left(\exp\left[-\pi\left(\frac{1}{\epsilon}\tau + i\sigma\right)\right]\right) \longrightarrow -\frac{b_3}{2a_3} + \left\{-\frac{b_3}{2(a_3-a_2)} + \frac{b_3}{2a_3}\right\}e^{2a_3\tau} = I_3(\tau)$$

が成り立つ．以上の議論から，$a_2 < 0, a_3 > 0, b_3 > 0$ において定理 3.1 が成り立つことがわかる．同様にすると，$a_2 < 0, a_3 > 0, b_3 < 0$ としても成り立つことがわかり，さらには $0 < a_2 < a_3, a_2 < a_3 < 0$ の場合でも成り立つこともわかる． □

定理 3.1 により，$M = \mathbb{R}^2$ において次がわかる．

定理 3.3. $f_1 = 0, f_2 = a_2x^2 + b_2y^2, f_3 = a_3x^2 + b_3y^2 + c_3x + d_3y$ として，各 $k = 1, 2, 3$ に対して $f_{k+1} - f_k$ が Morse 関数であり，$p_k, \mu(p_k)$ を定理 3.1 と同様に定義するとき，$\sum_{i=1}^{3} \mu(p_i) = 4$ が成り立つとする．I_j を p_j から出る $f_{j+1} - f_j$ による勾配曲線とし，I_1, I_2, I_3 によって f_1, f_2, f_3 から得られる勾配樹木を構成されるとする．また，w_ϵ を上半平面から 3 つのラグランジュ部分多様体 $graph(\epsilon df_j)$ に囲まれる三角形への SC 写像で，x_j を $graph(\epsilon df_j)$ と $graph(\epsilon df_{j+1})$ の交点として

$$w_\epsilon(0) = x_1, w_\epsilon(1) = x_2, w_\epsilon(\infty) = x_3$$

を満たすものとする．このとき，次が成り立つ．ただし，$\tau \in (-\infty, 0), \sigma \in [0, 1]$ とする．

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} w_\epsilon \left(\exp \left[\pi \left(\frac{1}{\epsilon}\tau + i\sigma \right) \right] \right) = I_1(\tau)$$
$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} w_\epsilon \left(1 - \exp \left[\pi \left(\frac{1}{\epsilon}\tau - i\sigma \right) \right] \right) = I_2(\tau)$$
$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} w_\epsilon \left(\exp \left[-\pi \left(\frac{1}{\epsilon}\tau + i\sigma \right) \right] \right) = I_3(\tau)$$

Proof. [9][10] において，仮定を満たす f_k たちから得られる $\mathbb{R}^2$ 上の勾配樹木と f_k たちから得られる $graph(\epsilon df_k)$ に囲まれる $T^*\mathbb{R}^2$ 内の正則円盤は具体的に構成されている．まず，Morse 関数 $f_{j+1} - f_j = ax^2 + by^2 + cx + dy$ の臨界点 p_j から出る勾配曲線 $I_j(t)$ は次の式で記述できる．

$$I_j(t) = \begin{pmatrix} C_1 \exp[-2at] \\ C_2 \exp[-2bt] \end{pmatrix} + p_j \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

特に，$a, b > 0$ の場合は $C_1, C_2 = 0$ となり，$a > 0 > b$ または $a < 0 < b$ の場合は $C_1C_2 = 0$ が成り立ち，$a, b < 0$ の場合は $I(0) = p_j$ となるように適当に C_1, C_2 をとることができる（[9][10] 参照）．また，正則円盤は以下の方法で得られる．$T^*\mathbb{R}^2$ 上の点を (x, y, ξ_x, ξ_y) と書き，(x, y) を $\mathbb{R}^2$ 上の点，(ξ_x, ξ_y) を (x, y) 上のファイバー成分とする．今，射影 $\pi_1, \pi_2 : T^*\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\pi_1 : (x, y, \xi_x, \xi_y) \mapsto (x, \xi_x),\ \pi_2 : \pi_1 : (x, y, \xi_x, \xi_y) \mapsto (y, \xi_y)$$

で定義する．このとき，次が成り立つ．

$$\pi_1(graph(\epsilon df_1)) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}, \pi_1(graph(\epsilon df_2)) = \{(x, 2a_2x) : x \in \mathbb{R}\}$$
$$\pi_1(graph(\epsilon df_3)) = \{(x, 2a_3x + c_3) : x \in \mathbb{R}\}, \pi_2(graph(\epsilon df_1)) = \{(y, 0) : y \in \mathbb{R}\},$$
$$\pi_2(graph(\epsilon df_2)) = \{(y, 2b_2y) : y \in \mathbb{R}\}, \pi_2(graph(\epsilon df_3)) = \{(y, 2b_3y + d_3) : y \in \mathbb{R}\}$$

このことから $\pi_1(T^*\mathbb{R}^2)$ 内に 3 直線 $\pi_1(graph(\epsilon df_1)), \pi_1(graph(\epsilon df_2)), \pi_1(graph(\epsilon df_3))$ に囲まれる三角形，$\pi_2(T^*\mathbb{R}^2)$ 内に 3 直線 $\pi_2(graph(\epsilon df_1)), \pi_2(graph(\epsilon df_2)), \pi_2(graph(\epsilon df_3))$ に囲まれる三角形ができる．以上から

$$(x, \xi_x) \leftrightarrow x + \sqrt{-1}\xi_x,\ (y, \xi_y) \leftrightarrow y + \sqrt{-1}\xi_y$$

で $\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}$ と同一視し，

$$(x, y, \xi_x, \xi_y) \leftrightarrow (x + \sqrt{-1}\xi_x, y + \sqrt{-1}\xi_y)$$

で $T^*\mathbb{R}^2$ を $\mathbb{C}^2$ と同一視することにより，上半平面から前者の三角形への SC 写像を u_ϵ，後者の三角形への SC 写像を v_ϵ とすると，$w_\epsilon(z) = (u_\epsilon(z), v_\epsilon(z))$ はコーシー・リーマン方程式と境界条件を満

たす．定理 3.3 中の w_ϵ はこのことを指す．また，射影 $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$\phi_1 : (x, y) \mapsto x,\ \phi_2 : (x, y) \mapsto y$$

で定義する．このとき，u_ϵ, v_ϵ に対して定理 3.1 を適用すると，u_ϵ は $\phi_1(I_1), \phi_1(I_2), \phi_1(I_3)$ へ，v_ϵ は $\phi_2(I_1), \phi_2(I_2), \phi_2(I_3)$ へ近づくことがわかる．これにより命題が示された． □

参考文献

[1] DA SILVA, A. Cannas. Lectures on symplectic geometry. Berlin: Springer, 2008.

[2] TOBIN A. Driscoll, LLOYD N. Trefethen. Schwarz-Christoffel Mapping. Cambridge University Press, 2002.

[3] FUKAYA, Kenji. Morse homotopy, A^∞-category and Floer homologies, in Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology, ed. by H. J. Kim,Seoul National University, Korea, 1993.

[4] FUKAYA, Kenji. Multivalued Morse theory, Asymptotic Analysis, and Mirror symmetry. 2002.

[5] FUKAYA, Kenji; OH, Yong-Geun. Zero-loop open strings in the cotangent bundle and homotopy. Asian Journal of Mathematics, 1997, 1.1: 96-180.

[6] 原岡喜重，複素領域における線形微分方程式，数学書房，2015.

[7] 原岡喜重，超幾何関数，朝倉書店，2002.

[8] NEHARI, Zeev. Conformal mapping. Courier Corporation, 2012.

[9] 鈴木英正，ユークリッド空間の余接束における概正則円盤の具体的記述，千葉大学大学院融合理工学府令和 4 年度修士論文，2023.

[10] 鈴木英正，ユークリッド空間の余接束における概正則円盤の求田的記述について，第 19 回数学総合若手研究集会：数学の交叉点, p.661-669, 2023.

[11] 佐藤全，平面上の勾配樹木の分類について， 千葉大学大学院融合理工学府令和 2 年度修士論文, 2021.

[12] ELIAS M. Stein; RAMI Shakarchi. Complex Analysis, Princeton Lectures in Analysis II. Princeton University Press, 2003.

アフィン部分空間から定まるトーリック多様体のトーラス同変埋め込みについて

東京都立大学 大学院理学研究科 数理科学専攻
山口健太朗 (Kentaro YAMAGUCHI) *

概要

コンパクトな $2n$ 次元シンプレクティックトーリック多様体は，n 次元トーラスの Hamilton 作用による運動量写像の像として定まる Delzant 多面体とよばれる凸多面体によって完全に分類されることがわかっている．また，シンプレクティックトーリック多様体のトーリック因子の補空間は複素 n 次元トーラスと同一視できることがわかっている．ここでは，この複素 n 次元トーラスの複素部分トーラスをコンパクト化して得られる部分多様体の，運動量写像による像に関する研究を紹介する．

1 導入

滑らかな多様体 M 上の 2 次微分形式 ω が非退化な閉形式になっているとき，組 (M,ω) をシンプレクティック多様体とよび，ω をシンプレクティック形式とよぶ．シンプレクティック多様体を調べるために使われる道具の 1 つとして，シンプレクティック多様体への Lie 群の Hamilton 作用による運動量写像がある．本節では，Hamilton 作用をする Lie 群をトーラスに限った状況での運動量写像とその基本的な性質について述べる．その後，シンプレクティックトーリック多様体へのトーラスの Hamilton 作用による運動量写像について説明する．

1.1 トーラスの Hamilton 作用と運動量写像

(M,ω) をシンプレクティック多様体とする．トーラス T の (M,ω) への右からの作用を

$$\begin{aligned} M \times T &\to M \\ (x,t) &\mapsto x \cdot t \end{aligned}$$

と書くことにする．このとき，T の元 t に対して写像 $R_t : M \to M$ を $R_t(x) = x \cdot t$ と定める．また，T の Lie 環を $\mathfrak{t}$ と書く．

定義 1.1. トーラス T がシンプレクティック多様体 (M,ω) へ右から作用しているとする．すべての $t \in T$ に対して $R_t^*\omega = \omega$ が成り立つとき，T の作用は ω を保つという．

* E-mail:yamaguchi-kentaro@ed.tmu.ac.jp

定義 1.2. トーラス T のシンプレクティック多様体 (M,ω) への右からの作用が ω を保つとする．以下の条件を満たす写像 $\mu : M \to \mathfrak{t}^*$ が存在するとき，T の作用を Hamilton 作用という．

- 任意の $x \in M$，$t \in T$ に対して $\mu(x \cdot t) = \mu(x)$，
- 任意の $X \in \mathfrak{t}$ に対して $\iota(X^\sharp)\omega = -d\langle \mu, X\rangle$．ここで，$X^\sharp$ は基本ベクトル場のこと．

また，このときの写像 μ のことを T の Hamilton 作用による運動量写像とよぶ．

トーラスの Hamilton 作用による運動量写像の一般論から，運動量写像の像はトーラスの Hamilton 作用の固定点の像の凸包に一致することがわかる．

トーラス T がシンプレクティック多様体 (M,ω) へ Hamilton 作用しているとする．T' を T の部分トーラスとし，$\mathfrak{t}'$ を T' の Lie 環とする．包含写像 $i : T' \to T$ は群準同型写像であることに注意すると，次の事実がわかる．

命題 1.3. トーラス T のシンプレクティック多様体 (M,ω) への Hamilton 作用による運動量写像を $\mu : M \to \mathfrak{t}^*$ とする．このとき，トーラス T' の (M,ω) への右からの作用を

$$\begin{aligned} M \times T' &\to M \\ (x, t') &\mapsto x \cdot i(t') \end{aligned}$$

と定めると，T' の (M,ω) への作用は ω を保ち，写像 $i^* \circ \mu : M \to (\mathfrak{t}')^*$ は T' の (M,ω) への作用による運動量写像となる．すなわち，上で定めた T' の (M,ω) への作用は Hamilton 作用である．

トーラスの Hamilton 作用を含めた Lie 群の Hamilton 作用についての詳細はたとえば [Can01] や [赤 23] を参照のこと．

1.2 シンプレクティックトーリック多様体

n 次元トーラス T が効果的に作用している $2n$ 次元シンプレクティック多様体のことをトーリック多様体とよぶ．コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体へのトーラスの Hamilton 作用に付随する運動量写像の像は Delzant 多面体とよばれる凸多面体になる．ここで，Delzant 多面体とは次で定義されるもののことである．

定義 1.4. 次の 3 つの条件を満たす $\mathbb{R}^n \cong \mathfrak{t}^*$ の凸多面体 Δ を Delzant 多面体という．

- 単純であること．つまり，Δ の各頂点から n 本の辺が出ていること，
- 有理的であること．つまり，頂点 σ から出ている n 本の辺の方向ベクトル $v_1, \ldots, v_n$ が $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{Z}^n$ を満たすこと，
- 滑らかであること．つまり，上の条件にある $v_1, \ldots, v_n$ が $\mathbb{Z}^n$ の基底になっていること．

たとえば，複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ に Fubini–Study 計量を入れた場合の n 次元トーラスの Hamilton 作用に付随する運動量写像の像は標準 n 単体になる．

次の定理はコンパクトなシンプレクティックトーリック多様体を調べる上での出発点である．

定理 1.5 ([Del88])**.** コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体は Delzant 多面体で完全に

分類される．

シンプレクティック商を使うことで，Delzant 多面体の情報からシンプレクティックトーリック多様体を構成することができる．この構成は Delzant 構成とよばれる．

Guillemin [Gui94a] によりシンプレクティックトーリック多様体には対応する Delzant 多面体の情報から定まる Kähler 構造が存在することがわかっている．さらに，この Kähler 構造を用いると $2n$ 次元シンプレクティックトーリック多様体のトーリック因子の補空間は複素 n 次元トーラスと同一視することができる．ここでは，複素 n 次元トーラスから $2n$ 次元シンプレクティックトーリック多様体を構成することをコンパクト化とよぶことにする．

シンプレクティックトーリック多様体へのトーラスの Hamilton 作用と Delzant 構成についての詳細はたとえば [Gui94b] を参照のこと．

2　トーラス同変埋め込みの運動量写像

本節では，[Yam] で考察したコンパクトなシンプレクティックトーリック多様体 X の中の複素部分多様体 $\overline{C(V)}$ について説明する．

2.1　複素部分多様体 $\overline{C(V)}$ の構成

n 次元トーラスの Lie 環 $\mathrm{Lie}(T^n) = \mathfrak{t}^n \cong \mathbb{R}^n$ の k 次元アフィン部分空間 $V = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{p_1, \ldots, p_k\} + a$ とする．ここで，$p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{Z}^n$ は V の線形部分の原始的な基底，$a \in \mathbb{R}^n$ とする．

線形部分の原始的な基底 $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{Z}^n$ に対して，V の直交補空間の直交基底 $q_{k+1}, \ldots, q_n \in \mathbb{Z}^n$ をとる．トーリック多様体 X のトーリック因子 D の補空間 $X \setminus D \cong (\mathbb{C}^*)^n$ の中の複素 k 次元部分トーラス $C(V) \cong (\mathbb{C}^*)^k$ を次で定める．

$$C(V) = \left\{ (e^{w_1}, \ldots, e^{w_n}) \in (\mathbb{C}^*)^n \;\middle|\; {}^t[q_{k+1} \cdots q_n] \left(\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} - a \right) = 0 \right\}.$$

この部分トーラス $C(V)$ の (Zariski) 閉包をとることで，トーリック多様体 X にコンパクト化したものを $\overline{C(V)}$ と定める．

部分トーラス $C(V)$ の (Zariski) 閉包 $\overline{C(V)}$ が X の複素 k 次元部分多様体になるかどうかはアフィン部分空間 V によって決まる．

2.2　複素部分多様体 $\overline{C(V)}$ へのトーラス作用による運動量写像

ここからは，2.1 節で構成した複素部分トーラス $C(V)$ のコンパクト化 $\overline{C(V)}$ がトーリック多様体 X の複素 k 次元部分多様体になっていることを仮定する．

トーリック多様体 X に自然に備わっている n 次元トーラス T^n の Hamilton 作用による運動量写像を $\mu : X \to (\mathfrak{t}^n)^*$ とする．アフィン部分空間 V の情報から，k 次元トーラス T^k と n 次元トーラ

ス T^n との間に単射群準同型 $i_V : T^k \to T^n$ を

$$i_V(t_1, \ldots, t_k) = \left(\prod_{i=1}^{k} t_i^{\langle p_i, e_1 \rangle}, \ldots, \prod_{i=1}^{k} t_i^{\langle p_i, e_n \rangle} \right)$$

と定めることができる．

単射群準同型 $i_V : T^k \to T^n$ を用いると，命題 1.3 より X への T^k の Hamilton 作用が定まり，その Hamilton 作用による運動量写像は $i_V^* \circ \mu : X \to (\mathfrak{t}^k)^*$ であることがわかる．

また，X への T^n 作用と単射群準同型 $i_V : T^k \to T^n$ により $\overline{C(V)}$ には T^k の Hamilton 作用が定まり，その Hamilton 作用による運動量写像 $\overline{\mu} : \overline{C(V)} \to (\mathfrak{t}^k)^*$ は $\overline{\mu} = i_V^* \circ \mu \circ i$ である．ここで，$i : \overline{C(V)} \to X$ は部分多様体からの自然な埋め込みのことである．

以上の構成より以下の図式を得る．

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\mu} & (\mathfrak{t}^n)^* \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle i_V^*} \\ \overline{C(V)} & \xrightarrow{\overline{\mu}} & (\mathfrak{t}^k)^*. \end{array}$$

このとき，X への T^k 作用の固定点と $\overline{C(V)}$ への T^k 作用の固定点を比べることで次の主結果を得た．

定理 2.1 ([Yam])**.** $\mathfrak{t}^n \cong \mathbb{R}^n$ のアフィン部分空間 V から定まる $\overline{C(V)}$ がトーリック多様体 X の複素部分多様体になることを仮定する．このとき，

$$\overline{\mu}(\overline{C(V)}) = (i_V^* \circ \mu)(X)$$

が成り立つ．

3 $\mathbb{C}P^2$ の中のトーラス同変埋め込みの例

2 次元の複素射影空間 $\mathbb{C}P^2$ に対応する Delzant 多面体（標準 2 単体，つまり直角二等辺三角形）の中での部分多様体 $\overline{C(V)}$ の運動量写像 $\mu : \mathbb{C}P^2 \to (\mathfrak{t}^2)^*$ による像の様子を図示する．

図 1 は V が $\mathbb{R}^2$ の中の傾き 1 の部分空間のときの様子であり，図 2 は V が $\mathbb{R}^2$ の中の傾き 1 の部分空間を $a = (0, \log 2)$ に並行移動させたもののときの様子である．

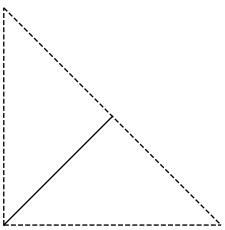


図 1　傾き 1 のとき

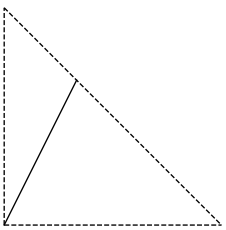


図 2　傾き 1，$a = (0, \log 2)$ のとき

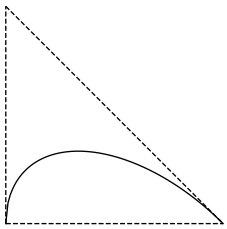


図 3　傾き 1/2 のとき

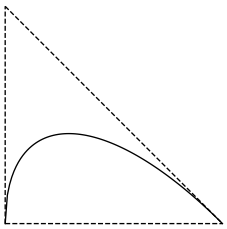


図 4　傾き 1/2，$a = (-\log 2, 0)$ のとき

図 3 は V が $\mathbb{R}^2$ の中の傾き 1/2 の部分空間のときの様子であり，図 4 は V が $\mathbb{R}^2$ の中の傾き 1/2 の部分空間を $a = (-\log 2, 0)$ に並行移動させたもののときの様子である．

ここで紹介していない例については，[Yam] を参照のこと．

参考文献

[Can01] Ana Cannas da Silva. *Lectures on symplectic geometry*, volume 1764. Berlin: Springer, 2001.

[Del88] Thomas Delzant. Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment. *Bull. Soc. Math. France*, 116(3):315–339, 1988.

[Gui94a] Victor Guillemin. Kaehler structures on toric varieties. *J. Differential Geom.*, 40(2):285–309, 1994.

[Gui94b] Victor Guillemin. *Moment maps and combinatorial invariants of Hamiltonian T^n-spaces*, volume 122 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994.

[Yam] Kentaro Yamaguchi. Torus-equivalently embedded toric manifolds associated to affine subspaces. preprint.

[赤 23] 赤穂まなぶ. シンプレクティック多様体の基礎, 2023.

平面曲線に現れるカスプについて

九州大学大学院数理学府数理学専攻
松下尚生 (Yoshiki MATSUSHITA) *

概要

滑らかな平面曲線に現れる特異点とは速度ベクトルが零ベクトルになる点をいう. 特異点は平行曲線や縮閉線といった古くから知られている曲線に自然と現れるだけでなく, しばしば尖った形として視覚的に認識できる. それゆえ, 微分幾何学における特異点は我々にとって非常に馴染み深い存在であると言える. しかしながら, その馴染み深さに反して数学的な立場としては非常に扱いが難しい. その理由として, 正則点で定義される曲率が発散してしまう可能性がある点, 正則曲線上において自然に定義される単位法ベクトル場を特異点まで拡張しようとすると不連続になる可能性があり, フルネの公式が一般に成立しなくなる点などがあげられる. また, 局所的な振る舞いにおいても特異点の扱いは一筋縄にはいかない. 例えば, 多様体の一般論でもよく知られているように, 正則点における振る舞いは本質的に 2 種類しかないが, 特異点の場合では, 非常に簡単な関数の場合であったとしても, その振る舞いが非可算濃度となる例が知られている. このように, 特異点は幾何的な考察や局所的な振る舞いの分類等といった様々な立場において困難さを持っている.

本講演では, 特異点の中でも最も基本的な特異点であるカスプに関する分類問題について, 新たに導入した幾何学的不変量を用いた分類及び, 波面と呼ばれる特異点を許容する重要なクラスの曲線に対して定義される縮閉線を用いた特徴づけ, といった立場で得られた成果を紹介したい. 本内容は [8] に基づく.

1 導入

1.1 特異点の判定条件

以下, $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級曲線であるとする.

定義 1.1 $t_0 \in I$ が γ の特異点であるとは, $\gamma'(t_0) = \mathbf{0}$ であるときをいう. $\gamma'(t_0) \neq \mathbf{0}$ であるとき, t_0 は γ の正則点であるという.

例 1.2 $Cusp_{(2,3)}(t) = (t^2, t^3)$, $Cusp_{(3,4)}(t) = (t^3, t^4)$, $Cusp_{(4,5)}(t) = (t^4, t^5)$ は全て $t = 0$ で特異点をもつ. 各々の特異点を標準的な $(2, 3)$ カスプ, 標準的な $(3, 4)$ カスプ, 標準的な $(4, 5)$ カスプという.

定義から明らかなように, 特異点を持つ曲線の例は非常に多く存在し, 特異点のタイプも様々であ

* E-mail:matsushita.yoshiki.297@s.kyushu-u.ac.jp

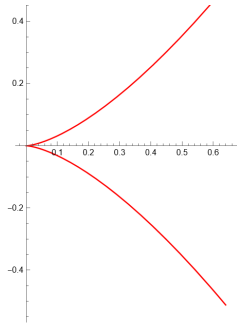


図 1　標準的な $(2,3)$ カスプ

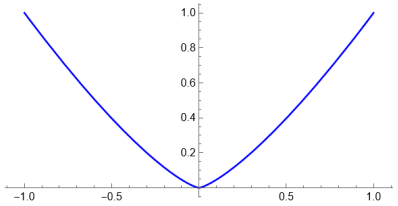


図 2　標準的な $(3,4)$ カスプ

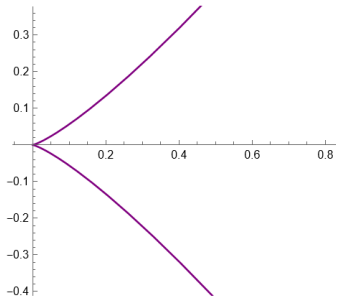


図 3　標準的な $(4,5)$ カスプ

る. そこである種の同値関係を用いて, 特異点の種類を分類を考えることにする.

定義 1.3　$0 \in I \subset \mathbb{R}$, $\gamma_1, \gamma_2 : I \to \mathbb{R}^2$; C^∞ 級写像であり, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = \mathbf{0}$ とする. γ_1 と γ_2 が $t = 0$ で C^r 級同値であるとは, $0 \in \mathbb{R}$ の近傍で定義された C^r 級助変数変換 ψ と $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ の近傍で定義された C^r 級微分同相写像 Ψ が存在して, $\Psi \circ \gamma_1 \circ \psi^{-1} = \gamma_2$ が成立するときをいう. ここで, $r \in \mathbb{N}_{\geq 0} \cup \{\infty, \omega\}$. 特に, $r = \infty$ のとき, 上の関係を $\mathcal{A}$-同値という.

定義 1.3 を用いて今回考えたい特異点の分類を次のように定義しよう.

定義 1.4　$\gamma : 0 \in I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級曲線とする. このとき γ が $t = 0$ で (C^r 級の意味で)(n, m) カスプであるとは, γ が $Cusp_{(n,m)} = (t^n, t^m)$ と $t = 0$ で C^r 級同値であるときをいう. ただし, n と m は互いに素な自然数とする.

このような立場の分類は非常に自然であるが, 特異点の型を上記の定義から直接判断することは現実的ではない. 実際, 毎回与えられた曲線に対して条件を満たす座標変換の存在や非存在を証明することは一般に難しい問題であることは明らかであろう. 従って, 特異点の分類の研究において, より簡単な判定条件を与えることは非常に重要である. また, 同値関係で分類したとしても特異点の種類は非常に多くあることから, なぜその特異点に注目するのか, といった事を考える必要もある. 例えば, 平面曲線に関しては以下のような分類が知られている ([1]).

事実 1.5　単純な複素 C^ω 級同値である写像芽 $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, \mathbf{0})$ は以下のいずれかで表される.

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad A_{2k} \quad : t \to (t^2, t^{2k+1}),\\
&(2)\quad E_{6k} \quad : t \to (t^3, t^{3k+1} + t^{3k+p+2}); 0 \leq p \leq k-2, \quad t \to (t^3, t^{3k+1}),\\
&(3)\ E_{6k+2} : t \to (t^3, t^{3k+2} + t^{3k+p+4}); 0 \leq p \leq k-2, \quad t \to (t^3, t^{3k+2}),\\
&(4)\quad W_{12} \quad : t \to (t^4, t^5 + t^7), \quad t \to (t^4, t^5),\\
&\qquad W_{18} \quad : t \to (t^4, t^7 + t^9), \quad t \to (t^4, t^7 + t^{13}), \quad t \to (t^4, t^7),\\
&(5) W^{\#}_{1,2q-1} : t \to (t^4, t^6 + t^{2q+5}); q \geq 1.
\end{aligned}
$$

さらに, 上記の分類に関連するカスプの判定条件がいくつか与えられている (([11, Theorem 1.3.2],

[10, Theorem 1.23], [5, Theorem A.1], [11, Theorem 1.3.4] and [7, Example A.1])).

事実 1.6 $\gamma : 0 \in I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級曲線とする.

(1) γ が $Cusp_{(2,3)}(t) = (t^2, t^3)$ と $t = 0$ で $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は $\gamma'(0) = \mathbf{0}$, $\det(\gamma''(0), \gamma'''(0)) \neq 0$ となることである.

(2) γ が $Cusp_{(2,5)}(t) = (t^2, t^5)$ と $t = 0$ で $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は $\gamma'(0) = \mathbf{0}$, $\det(\gamma''(0), \gamma'''(0)) = 0$,

$$3\det(\gamma''(0), \gamma^{(5)}(0))\gamma''(0) - 10\det(\gamma''(0), \gamma^{(4)}(0))\gamma'''(0) \neq \mathbf{0}$$

となることである.

(3) γ が $Cusp_{(2,7)}(t) = (t^2, t^7)$ と $t = 0$ で $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件はある実数 $k, l \in \mathbb{R}$ が存在して, $\gamma'(0) = \mathbf{0}$, $\gamma''(0) \neq \mathbf{0}$, $\gamma'''(0) = k\gamma''(0)$, $\gamma^{(5)}(0) - \dfrac{10}{3}k\gamma^{(4)}(0) = \ell\gamma''(0)$,

$$\det\left(\gamma''(0), \gamma^{(7)}(0) - 7k\gamma^{(6)}(0) - \left(7\ell - \frac{70}{3}k^3\right)\gamma^{(4)}(0)\right) \neq 0$$

となることである.

(4) γ が $Cusp_{(3,4)}(t) = (t^3, t^4)$ と $t = 0$ で $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \mathbf{0}$, $\det(\gamma'''(0), \gamma^{(4)}(0)) \neq 0$ となることである.

(5) γ が $Cusp_{(3,5)}(t) = (t^3, t^5)$ と $t = 0$ で $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \mathbf{0}$, $\det(\gamma'''(0), \gamma^{(4)}(0)) = 0$, $\det(\gamma'''(0), \gamma^{(5)}(0)) \neq 0$ となることである.

特に $(2,3)$ カスプと $(3,4)$ カスプの判定条件に注目しよう. これらの判定条件をみると $\mathcal{A}$-同値の立場での $(n, n+1)$ カスプの判定条件は次のように与えられることが容易に期待される.

予想 1.7 $\gamma : 0 \in I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級曲線とする. このとき, γ が $Cusp_{(n,n+1)}$ と $t = 0$ で $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は

$$\gamma'(0) = \gamma''(0) = \cdots = \gamma^{(n-1)}(0) = \mathbf{0}, \quad \det(\gamma^{(n)}(0), \gamma^{(n+1)}(0)) \neq 0$$

となることであろう. ただし, n は 2 以上の整数とする.

残念ながら, これは $n = 4$ の場合で成立しない. 実際, 以下の 3 つの平面曲線, $Cusp_{(4,5;-7)}(t) = (t^4, t^5 - t^7)$, $Cusp_{(4,5;+7)}(t) = (t^4, t^5 + t^7)$, $Cusp_{(4,5)}(t) = (t^4, t^5)$ は全て予想 1.7 の条件を満たすが, これらは $t = 0$ で $\mathcal{A}$-同値にならない. また, 先行研究で得られているカスプの判定条件は全て高次の項の影響を受けずに与えられていることに注意せよ. $(4,5)$ カスプの場合はこの反例からも分かるように, 5 次よりも高い次数の情報を考慮しなければならず, 先行研究の状況とは異なることが分かる. それゆえか, $(4,5)$ カスプに関する判定条件は長い間与えられていなかった. 2 節では $(4,5)$ カスプの分類に関する結果を紹介する.

1.2 波面とその縮閉線

変曲点をもたない正則曲線に対しては, 縮閉線という自然に特異点が現れる曲線が定義できることが古くから知られている. このことを簡単に復習しよう. 詳細は [3, 11, 14] などを参照して頂きたい. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を正則曲線, $\gamma(t)$ の曲率を $\kappa(t) = \dfrac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3}$, $n(t)$ を $\gamma(t)$ における進行方向に対して左向きの単位法線ベクトルとする.

定義 1.8 $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を変曲点を持たない正則曲線, すなわち, $\kappa(t) \neq 0$ とする. このとき, 以下で定義される曲線

$$Ev(\gamma)(t) = \gamma(t) + \frac{1}{\kappa(t)} n(t)$$

を γ の縮閉線という.

縮閉線は曲率円の中心の軌跡であるが, 例えば包絡線, 光学系や一般相対性理論にも関係がある重要な概念である ([2, 6, 9]). 定義からも分かるように, γ が特異点を持つと曲率が発散してしまう可能性があることから, 上記のような方法で縮閉線は定義できない. しかしながら, [3] において波面と呼ばれる特異点を許容するクラスの曲線については縮閉線が定義され, より扱いやすい表現公式が与えられている. 以下では簡単のため, 縮閉線の表現公式に関する結果についてのみ簡単に紹介する. 詳細は [3] を参照せよ.

定義 1.9 $\gamma : 0 \in I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級曲線とする. このとき γ が波面 (フロント) であるとは, ある C^∞ 級写像 $\nu : I \to S^1$ が存在して, $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ がルジャンドルはめ込みであるとき, すなわち, $(\gamma'(t), \nu(t)) \neq \mathbf{0}$, $\gamma'(t) \cdot \nu(t) = 0$ をみたすときをいう. ここで $\cdot$ は $\mathbb{R}^2$ の標準的な内積である.

すなわち波面とは, 単位法ベクトルが特異点を込めて滑らかに取れるような曲線をいう. このような単位法ベクトルと正則曲線において定義される単位法ベクトルは一般に異なることに注意せよ. 波面に関する詳細は [11, 12] などを参照. 波面に現れる特異点の典型的な例としては, $(n, n+1)$ カスプがあげられる. 特に $(2, 3)$ カスプは波面に最も現れる特異点であり, サイクロイドやアステロイドなどに現れる.

次に, 波面におけるフルネの公式について紹介する. 詳細は [3, 4] をみよ. $(\gamma, \nu) : I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ をルジャンドルはめ込みとする. $\mu(t) = J(\nu(t))$, $\ell(t) = \nu'(t) \cdot \mu(t)$ とおく. ここで, J は反時計回りに $\pi/2$ 回転させる行列とする. このとき $\{\nu(t), \mu(t)\}$ を波面 γ に沿う moving frame という. また, 波面 γ のフルネの公式は以下のようにして与えられる.

$$\begin{pmatrix} \nu'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \ell(t) \\ -\ell(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}.$$

さらに, $\beta(t) = c'(t) \cdot \mu(t)$ とし, (ℓ, β) をルジャンドルはめ込みの曲率という. ここで, t_0 が γ の変曲点であることは $\ell(t_0) = 0$ に対応することに注意せよ. 以上の準備のもと, 波面の縮閉線の表現公式を紹介する.

事実 1.10 ([3, Theorem 3.3, Theorem 4.1]) $(\gamma,\nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を変曲点を持たない $(\ell(t) \neq 0)$ ルジャンドルはめ込みとする.

(1) 波面の縮閉線 $Ev(\gamma)$ が定義され, 次のように表せる.

$$Ev(\gamma)(t) = \gamma(t) - \frac{\beta(t)}{\ell(t)}\nu(t).$$

さらに $(Ev(\gamma), \mu)$ はルジャンドルはめ込みであり, 曲率は次のとおり.

$$\left(\ell(t), \frac{d}{dt}\left(\frac{\beta(t)}{\ell(t)}\right)\right).$$

(2) 波面の縮閉線の縮閉線 $Ev(Ev(\gamma))$ は次のように表せる.

$$Ev(Ev(\gamma))(t) = Ev(\gamma)(t) - \frac{\beta'(t)\ell(t) - \beta(t)\ell'(t)}{\ell^3(t)}\mu(t).$$

さらに $(Ev(Ev(\gamma)), -\nu)$ はルジャンドルはめ込みであり, 曲率は次のとおり.

$$\left(\ell(t), \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\beta(t)}{\ell(t)}\right)\right)\right).$$

同様の議論により, 波面に対して n 回縮閉線を考えることで得られる曲線の表示も与えられる. そこで少し記号の準備を行う. $(\gamma,\nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を変曲点を持たないルジャンドルはめ込みとし, $Ev^0(t) = \gamma(t)$, $Ev^1(t) = Ev(\gamma)(t)$ とおく. このとき以下を帰納的に定める.

$$Ev^n(t) = Ev(Ev^{n-1}(\gamma))(t), \quad \beta_0(t) = \beta(t), \quad \beta_n(t) = \frac{d}{dt}\Big(\frac{\beta_{n-1}(t)}{\ell(t)}\Big).$$

事実 1.11 ([3, Theorem 5.1]) $(\gamma,\nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を変曲点を持たないルジャンドルはめ込みとする. このとき $Ev^n(\gamma)(t)$ は次のように表せる.

$$Ev^n(\gamma)(t) = Ev^{n-1}(\gamma)(t) - \frac{\beta_{n-1}(t)}{\ell(t)}J^{n-1}(\nu(t)).$$

ここで J^n は J を n 回掛けた操作である. さらに $(Ev^n(\gamma), J^n(\nu))$ はルジャンドルはめ込みであり, 曲率は $(\ell(t), \beta_n(t))$.

ここまでで波面の縮閉線の表示をルジャンドルはめ込みの曲率の情報を使って紹介したが, 波面の縮閉線は次のような興味深い性質をもつ.

事実 1.12 ([3, Proposition 5.2]) $(\gamma,\nu): I \to \mathbb{R}^2 \times S^1$ を変曲点を持たないルジャンドルはめ込み, (ℓ, β) をその曲率, t_0 を γ の特異点であるとする. このとき以下が同値である.

(1) t_0 は $Ev^i(\gamma)$ の特異点である $(i = 1, \cdots, n)$.
(2) $\dfrac{d^i\beta}{dt^i}(t_0) = 0$ $(i = 1, \cdots, n)$.
(3) $\dfrac{d^{i+1}\gamma}{dt^{i+1}}(t_0) = 0$ $(i = 1, \cdots, n)$.

この結果と $(2,3)$ カスプの判定条件, $(3,4)$ カスプの判定条件を用いれば, 例えば次のようなことが簡単にわかる.

系 1.13 $\gamma : 0 \in I \to \mathbb{R}^2$ を変曲点を持たない波面とする.

(1) γ が $Cusp_{(2,3)}$ と $t=0$ で $\mathcal{A}$-同値であることと $t=0$ が $Ev(\gamma)$ の正則点になることは同値である (図 4 参照).

(2) γ が $Cusp_{(3,4)}$ と $t=0$ で $\mathcal{A}$-同値であることと $t=0$ が $Ev(\gamma)$ の特異点であり, $Ev^2(\gamma)$ の正則点であることは同値である (図 5 参照).

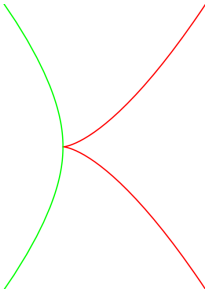


図 4　赤線は $(2,3)$ カスプ, 緑線は $Ev(\gamma)(t)$.

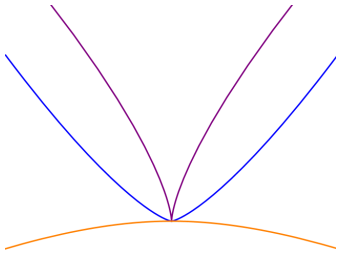


図 5　青線は $(3,4)$ カスプ, 紫線は $Ev(\gamma)(t)$, 橙線は $Ev(Ev(\gamma))(t)$.

つまり, $(2,3)$ カスプや $(3,4)$ カスプに $\mathcal{A}$-同値な特異点は波面の縮閉線を数回考えることで, 特異性が解消される特異点として特徴づけられる. では, このような性質はより一般の $(n, n+1)$ カスプに対して同様に成り立つであろうか？ 2 節ではその一般化や波面の縮閉線と特異点の分類に関する応用を紹介する.

2　主定理

2.1　$(4,5)$ カスプの分類定理

定義 2.1　([8]) $\gamma : 0 \in I \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級曲線とする. $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \gamma'''(0) = \mathbf{0}$, $\gamma^{(4)}(0) \neq \mathbf{0}$ の条件の下, κ_q を以下で定義し, $(4,5;\pm 7)$ カスプ的曲率という.

$$\kappa_q = \frac{-77B^2 + 105AD + 60AC}{\|\gamma^{(4)}(0)\|^5},$$

ただし, $A = \det(\gamma^{(5)}(0), \gamma^{(4)}(0))$, $B = \det(\gamma^{(6)}(0), \gamma^{(4)}(0))$, $C = \det(\gamma^{(7)}(0), \gamma^{(4)}(0))$, $D = \det(\gamma^{(6)}(0), \gamma^{(5)}(0))$.

κ_q は助変数変換及び $\mathbb{R}^2$ の合同変換で不変である．さらにこの量は助変数変換及び座標変換によって符号か変わらないという非常に良い性質を持っていることを注意したい．この性質を用いることで $(4,5)$ カスプに関する判定条件を以下のように与えた．

定理 2.2 ([8]) $\gamma : 0 \in I \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級曲線とする．

(1) γ が $Cusp_{(4,5)} = (t^4, t^5)$ と $t = 0$ で $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \gamma'''(0) = \mathbf{0}$, $\det(\gamma^{(5)}(0), \gamma^{(4)}(0)) \neq 0$, $\kappa_q = 0$ となることである．

(2) γ が $Cusp_{(4,5;+7)} = (t^4, t^5 + t^7)$ と $t = 0$ で $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \gamma'''(0) = \mathbf{0}$, $\det(\gamma^{(5)}(0), \gamma^{(4)}(0)) \neq 0$, $\kappa_q > 0$ となることである．

(3) γ が $Cusp_{(4,5;-7)} = (t^4, t^5 - t^7)$ と $t = 0$ で $\mathcal{A}$-同値であるための必要十分条件は $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \gamma'''(0) = \mathbf{0}$, $\det(\gamma^{(5)}(0), \gamma^{(4)}(0)) \neq 0$, $\kappa_q < 0$ となることである．

この結果から, $(4,5)$ カスプは $(2,3)$ カスプや $(3,4)$ カスプの状況と異なり, あまり平面曲線に現れない特異点であることが簡単に分かる．例えば, $\gamma'(0) = \gamma''(0) = \gamma'''(0) = \mathbf{0}$ の条件下では, $Cusp_{(4,5)} = (t^4, t^5)$ といった単純な特異点ではなく, $Cusp_{(4,5;+7)} = (t^4, t^5 + t^7)$ や $Cusp_{(4,5;-7)} = (t^4, t^5 - t^7)$ といった型の特異点が頻繁に現れることが分かる．

2.2 $(n, n+1)$ カスプと縮閉線

予想 1.7 で考えた条件は $\mathcal{A}$-同値の意味での $(n, n+1)$ カスプの判定条件に一般的にはならないことをみたが, 果たしてこの条件でどの程度の分類が行えるのであろうか？以下の定理はその解答になっている．

定理 2.3 ([8]) $\gamma : 0 \in I \to \mathbb{R}^2$ を C^∞ 級曲線とする．このとき γ が $Cusp_{(n,n+1)}$ と $t = 0$ で C^1 級同値であるための必要十分条件は

$$\gamma'(0) = \gamma''(0) = \cdots = \gamma^{(n-1)}(0) = 0, \quad \det(\gamma^{(n)}(0), \gamma^{(n+1)}(0)) \neq 0$$

となることである．ただし, n は 2 以上の整数とする．

この結果からも分かるように, 予想 1.7 で考えた条件では C^1 級同値という $\mathcal{A}$-同値の分類よりも粗い分類しか行えないことから, あまり良い条件ではないように思われるかもしれない．しかしながら, この条件は C^∞ 級の意味で座標不変であることが確認でき, 次のような応用がある．

定理 2.4 ([8]) $\gamma : 0 \in I \to \mathbb{R}^2$ を変曲点を持たない波面とする．γ が $Cusp_{(n,n+1)}$ と $t = 0$ で $\mathcal{A}$-同値ならば $t = 0$ は $Ev(\gamma), \cdots Ev^{n-2}(\gamma)$ の特異点であり, $Ev^{(n-1)}(\gamma)$ の正則点である (図 6 〜 8 参照).

$(n, n+1)$ カスプは $(n-1)$ 回縮閉線をとる操作により, 特異性が解消される特異点として特徴づけられることがわかる．さらに, 事実 1.12 と座標不変性を用いることで以下のことが証明できる．

系 2.5 ([8]) $\gamma : 0 \in I \to \mathbb{R}^2$ を変曲点を持たない波面, $t = 0$ を γ の特異点とする．もし, $t = 0$ が $Ev(\gamma), \cdots, Ev^{(n-1)}(\gamma)$ の特異点ならば γ は $Cusp_{(n,n+1)}$ と $t = 0$ で $\mathcal{A}$-同値でない．

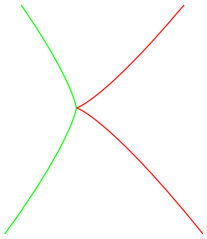


図 6　赤線が $Cusp_{(4,5)}$, 緑線が $Ev(\gamma)$

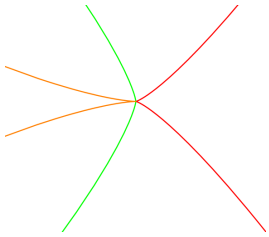


図 7　橙線が $Ev^2(\gamma)$

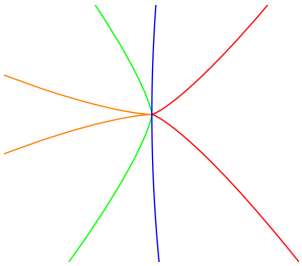


図 8　青線が $Ev^3(\gamma)$

与えられた特異点が $(n, n+1)$ カスプと $\mathcal{A}$-同値であるか否かを判断する事はいずれにせよ一般に簡単ではないが, この結果から変曲点を持たない波面に対してであれば, 縮閉線の情報を用いることで否定的な判断が可能であることが分かる.

参考文献

[1] J. W. Bruce and T. J. Gaffney, *Simple singularities of mappings* $\mathbb{C}, 0 \to \mathbb{C}^2, 0.$, J. London Math. Soc. (2), **26** (1982), 465–474. MR 0684560

[2] J. Ehlers and E. T. Newman, *The theory of caustics and wave front singularities with physical applications*, J. Math. Physics. **41** (2000), 3344-3378. MR1768638

[3] T. Fukunaga and M. Takahashi, *Evolutes of fronts in the Euclidian plane*, Journal of Singularities, **10** (2014), 92-107. MR 3300288

[4] T. Fukunaga and M. Takahashi, *Existence and uniqueness for Legendre curves*, J. Geom. **104** (2013), no2, 297– 307. MR MR3089782

[5] Y. Hattori, A. Honda, and T. Morimoto, *Bour's theorem for helicoidal surfaces with singularities*, preprint (arXiv:2310.16418)

[6] W. Hasse, M. Kriele and V. Perlick, *Caustics of wavefronts in general relativity*, Class. Quantum Grav. **13** (1996), 1161-1182. MR1390106

[7] L.F. Martins, K. Saji, S.P. dos Santos and K. Teramoto, *Boundedness of geometric invariants near a singularity which is a suspension of a singular curve*, preprint (arXiv:2206.11487).

[8] Y. Matsushita, *Classifications of cusps appearing on plane curves*, submitted.

[9] D. Pei and C. Zhang, *Evolute of* (n, m) *cusp curves and application in optical system*, Optik, **162** (2018), 42-53.

[10] I. R. Porteous, *Geometric differentiation. For the intelligence of curves and surfaces*. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. MR1871900

[11] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Differential geometry of curves and surfaces with singularities*, Series in Algebraic and Differential Geometry, vol. 1, World Scientific Pub-

lishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2022, Translated from the 2017 Japanese original by Wayne Rossman. MR 4357539

[12] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), no.2, 491-529. MR 2480610

[13] M. Takahashi and K. Teramoto, *Surfaces of revolution of frontals in the Euclidean space*, Bull Braz Math Soc, New Series 51 (2020), 887–914. MR4167695

[14] M. Umehara and K. Yamada, *Differential geometry of curves and surfaces*, Translated from the second (2015) Japanese edition by Wayne Rossman World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2017. MR3676571

特異点を持つ閉曲線の絶対全曲率

横浜国立大学大学院理工学府　数物・電子情報系理工学専攻
山内優太 (Yuta YAMAUCHI) *

概 要

本講演では n 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ 内の 1 次元波面に対する Fenchel の定理の拡張について紹介する．我々は $\boldsymbol{R}^n$ 内の余向き付け不可能な 1 次元フロンタルの絶対全曲率が π 以上であり，等号が成立するのはフロンタルが平面曲線であり L-convex かつ回転数が $\pm\frac{1}{2}$ である時に限ることを証明した．さらに波面の絶対全曲率が π，特異点を全てカスプとしてその数を N とした時，N は 3 以上の奇数となり $N=3$ であることと波面が単純閉曲線であることは同値となる．本講演の内容は田中千紗氏 (NTT データフロンティア) と本田淳史氏 (横浜国立大学) との共同研究 [11] に基づく．

1　導入

n を 2 以上の整数とする．周期 $\ell\,(>0)$ の正則閉曲線 $\gamma : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ に対して，

$$T(\gamma) = \int_0^\ell |\kappa|\, ds \qquad (ds = |\gamma'(t)|\, dt)$$

を**絶対全曲率**，あるいは単に**全曲率**という．ここで，κ は γ の曲率関数であり，$\gamma'(t) = d\gamma(t)/dt$ とする．Fenchel の定理 ([9, 3]) より，全曲率 $T(\gamma)$ は 2π 以上であり，$T(\gamma) = 2\pi$ が成り立つための必要十分条件は γ が平面曲線かつ卵形線である．これまで Fenchel の定理の様々な一般化が得られてきた: 結び目 [8, 12], 非正曲率リーマン多様体 [17, 4], 球面 [15, 16], 開曲線 [7], ミンコフスキー空間 [2], CAT(κ) 空間 [14].

一方，特異点を持つ閉曲線には全曲率を定義する事ができるものが存在する．したがって，このような曲線の全曲率に対しても Fenchel 型定理が成り立つのではないかと考えた．本講演ではそのような曲線としてフロンタル及び波面を取り挙げ，それらの全曲率に対する Fenchel 型定理を紹介する．

2　準備

ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$ に対して $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ で通常の内積を表す．ベクトルの大きさ (ノルム) は $\boldsymbol{a} := (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ に対して

$$|\boldsymbol{a}| := \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + \cdots + (a_n)^2}$$

で定義される．

*E-mail: yamauchi-yuta-hj@ynu.jp

開区間 I 上で定義された C^∞ 級写像 $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^n$ に対し，$\gamma'(c) = \boldsymbol{0}$ となるような点 $t = c$ を**特異点**といい，$\gamma'(c) \neq \boldsymbol{0}$ となるような点 $t = c$ を**正則点**という．ここで，プライムは t による微分を表す ($' = d/dt$)．I の部分集合 $\mathrm{Reg}(\gamma)$ を γ の正則点集合とする．また，S^{n-1} を単位球面

$$S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_n)^2 = 1\}$$

とする．

定義 2.1. 開区間 I に対し，正則点集合が稠密である C^∞ 級写像 $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^n$ が**フロンタル**であるとは，C^∞ 級写像 $\boldsymbol{e} : I \to S^{n-1}$ が存在し $\gamma'(t)$ と $\boldsymbol{e}(t)$ が線形従属であることをいう．特にこの $\boldsymbol{e}$ を γ の**単位接ベクトル場**という．

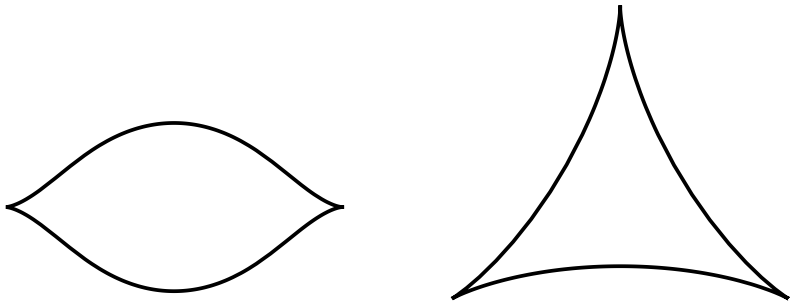
フロンタル $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^n$ が $\gamma'(t) = \boldsymbol{0}$, つまり t が特異点である時，$\boldsymbol{e}'(t) \neq \boldsymbol{0}$ が成り立つならば，γ を**波面**と呼ぶ．

定義 2.2. ある正の実数 ℓ が存在して，C^∞ 級写像 $\gamma : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^n$ が $t \in \boldsymbol{R}$ に対して $\gamma(t) = \gamma(t + \ell)$ を満たす時，γ は**閉フロンタル**であるという．この時，最小の ℓ を**周期**と呼ぶ．また，周期 ℓ の閉フロンタル γ に沿う単位接ベクトル場 $\boldsymbol{e} : \boldsymbol{R} \to S^{n-1}$ が

(i) $\boldsymbol{e}(t + \ell) = \boldsymbol{e}(t)$ を満たす時，γ を**余向き付け可能な閉フロンタル**と呼ぶ．

(ii) $\boldsymbol{e}(t + \ell) = -\boldsymbol{e}(t)$ を満たすとき，γ を**余向き付け不可能な閉フロンタル**という．

任意の $a \in \boldsymbol{R}$ に対し，γ の $[a, a + \ell]$ への制限で閉フロンタルを表すこととする．



余向き付け可能な波面　　余向き付け不可能な波面

閉区間 I で定義されたフロンタル $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^n$ に対し，曲率 κ は $\mathrm{Reg}(\gamma)$ 上で，弧長パラメータ s を用いて

$$\kappa = \left| \frac{d^2}{ds^2} \gamma \right|$$

と定める．この時 $\boldsymbol{e}$ を γ に沿う単位接ベクトル場とすると，κ は

$$\kappa(t) = \frac{|\boldsymbol{e}'(t)|}{|\gamma'(t)|} \quad (t \in \mathrm{Reg}(\gamma))$$

と表される．

一般に，曲率関数 κ は特異点にて発散する．しかし，次の命題が成り立つので全曲率を定めることができる．

命題 2.3. 閉区間 I で定義されたフロンタル $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^n$ に対し，s を γ の $\mathrm{Reg}(\gamma)$ 上の弧長パラメータとする．この時，$\kappa\, ds$ は特異点を越えて I 上で連続な 1 次微分形式に拡張される．

証明. $\kappa = |\boldsymbol{e}'|/|\gamma'|$, $ds = |\gamma'|dt$ より,

$$\kappa\, ds = \frac{|\boldsymbol{e}'|}{|\gamma'|}|\gamma'|dt = \left|\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}\right| dt$$

と表される. $\boldsymbol{e}$ は C^∞ 級写像なので, 右辺の式は連続な微分形式となる. □

定義 2.4. 有界閉区間 $I = [a, b]$ で定義されたフロンタル $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^n$ に対して

$$T(\gamma) = \int_a^b \kappa\, ds$$

と定める. $T(\gamma)$ を γ の**全曲率**という.

全曲率に対し, 直ちに以下の系が導かれる.

系 2.5. 有界閉区間 $I = [a, b]$ で定義されたフロンタル $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^n$ に対して, その単位接ベクトル場 $\boldsymbol{e}$ の移動距離

$$\mathcal{L} = \int_a^b \left|\frac{d}{dt}\boldsymbol{e}\right| dt$$

は, 全曲率と一致する.

$\boldsymbol{R}^2$ 内の余向き付け不可能な閉フロンタル $\gamma(t)$ に対し, その単位接ベクトル場 $\boldsymbol{e}(t) : [0, \ell] \to S^1$ は

$$\boldsymbol{e}(t) = \begin{pmatrix} \cos\theta(t) \\ \sin\theta(t) \end{pmatrix}$$

と表すことが出来る. γ は余向き付け不可能なので $\boldsymbol{e}(\ell) = -\boldsymbol{e}(0)$ が成り立つ. したがって, ある整数 $m \in \mathbb{Z}$ が存在して

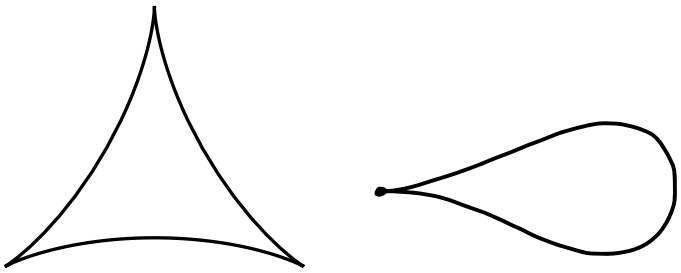
$$\theta(\ell) - \theta(0) = (2m+1)\pi = 2\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$$

となる.

定義 2.6. $m + \dfrac{1}{2}$ を余向き付け不可能な閉フロンタル γ の**回転数**と呼ぶ.

次に定義する L-convex とは, 凸性のフロンタルへの拡張である.

定義 2.7. $\boldsymbol{R}^2$ 内のフロンタル γ が L-convex であるとは, $\mu = \det(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}')$ が常に $\mu \geq 0$ または常に $\mu \leq 0$ を満たすことをいう.



L-convex である　　L-convex ではない

$(\mu(t), \langle\gamma'(t), \boldsymbol{e}(t)\rangle)$ の組み合わせは**ルジャンドル曲率**として Fukunaga-Takahashi [10] で導入された. 曲率関数 κ は $\kappa = \mu/|\gamma'|$ と表されるため, 正則点においては, L-convex であることと κ が符号を変えないことは同値である.

3　主結果 1

単位球面 S^{n-1} と $\boldsymbol{R}^n$ 内の $(n-1)$ 次元部分空間の共通部分を**大超球面**と呼ぶ.

補題 3.1 ([13]). 単位球面 S^{n-1} 内の C^1 級の閉曲線 Γ の長さを L とする．任意の大超球面 g と Γ が共有点を持つならば,

$$L > 2\pi \text{ または } (L = 2\pi \text{ かつ } \Gamma \text{ が二つの大円の半円弧で構成される})$$

が成り立つ.

命題 3.2 ([11]). $\gamma : [0, \ell] \to \boldsymbol{R}^n$ を余向き付け不可能な閉フロンタルとする．γ に沿う単位接ベクトル場を $\boldsymbol{e} : [0, \ell] \to S^{n-1}$ とし，$\boldsymbol{e}$ が S^{n-1} 上に描く曲線を Γ とする．この時，S^{n-1} 上の任意の大超球面 g と Γ は交点を持つ.

証明. 大超球面 g に対し，ある $\xi \in S^{n-1}$ が存在し,

$$g = \{x \in S^{n-1} \mid \langle x, \xi \rangle = 0\}$$

と表される．したがって，g と Γ が交点を持つことと，ある $t_0 \in [0, \ell]$ が存在して

$$\langle \boldsymbol{e}(t_0), \xi \rangle = 0$$

となることは同値である．ここで，$f : [0, \ell] \to \boldsymbol{R}$ を

$$f(t) = \langle \boldsymbol{e}(t), \xi \rangle$$

と定める．f は連続な関数になる．γ は余向き付け不可能な閉フロンタルであるため,

$$\boldsymbol{e}(0) = -\boldsymbol{e}(\ell)$$

となる．よって

$$f(0) = -f(\ell)$$

が成り立つ．もし $f(0) = 0$ ならば $\boldsymbol{e}(0) \in g$ が成り立つので．g と Γ は交点を持つ．$f(0) \neq 0$ ならば $f(0)$ と $f(\ell)$ は異符号なので，中間値の定理よりある点 $t_0 \in [0, \ell]$ が存在して $f(t_0) = 0$ を満たす．したがって，$\boldsymbol{e}(t_0) \in g$ が成り立つので．g と Γ は交点を持つ. □

我々は $\boldsymbol{R}^n$ 内の閉フロンタルの全曲率に関して，次の定理 3.3 を示した.

定理 3.3 ([11]). $\gamma : [0, \ell] \to \boldsymbol{R}^n$ を余向き付け不可能な閉フロンタルとする．この時,

$$T(\gamma) \geq \pi$$

が成り立つ．等号が成り立つのは

(1) 閉フロンタルが 2 次元部分空間に含まれる

(2) *L-convex* である

(3) 回転数が $\pm\dfrac{1}{2}$

が成り立つ時に限る.

証明. γ 及び単位接ベクトル場 $\boldsymbol{e}$ の定義域を $[0,\ell]$ から $[0,2\ell]$ へと拡張したものをそれぞれ $\tilde{\gamma}$，$\tilde{\boldsymbol{e}}$ とすると，$\tilde{\boldsymbol{e}}$ の描く曲線 $\tilde{\Gamma}$ は S^{n-1} 上の閉曲線となる．命題 3.2 より，$\tilde{\gamma}$ の $\tilde{\boldsymbol{e}}$ の描く曲線 $\tilde{\Gamma}$ は S^{n-1} 上の任意の大超球面と交点を持つ．よって補題 3.1 より，

$$T(\tilde{\gamma}) \geq 2\pi$$

が成り立ち，

$$T(\tilde{\gamma}) = 2T(\gamma)$$

が成り立つので，

$$T(\gamma) \geq \pi$$

が導かれる．等号成立条件は $\tilde{\Gamma}$ が大円である，つまり Γ が大円の半分部分である．よって γ は 2 次元部分空間内に含まれ，かつ回転数が $\pm\dfrac{1}{2}$ となる．

最後に等号が成り立つとき γ が L-convex であることを示す．$\mu(t) = \kappa(t)|\gamma'(t)|$ より，全曲率は μ を使って以下のように表すことが出来る．

$$T(\gamma) = \int_0^\ell |\mu(t)|dt$$

一方，回転数が $\pm\dfrac{1}{2}$ であるので $|\theta(\ell) - \theta(0)| = \pi$ である．したがって，次の式が成り立つ．

$$\left|\int_0^\ell \mu(t)dt\right| = \left|\int_0^\ell \theta'(t)dt\right| = |[\theta(t)]_0^\ell| = \pi$$

いま全曲率が π であるので，

$$\int_0^\ell |\mu(t)|dt = \left|\int_0^\ell \mu(t)dt\right|$$

となる．よって $t \in [0,\ell]$ に対して常に $\mu(t) \geq 0$ または $\mu(t) \leq 0$ となる．したがって γ は L-convex である．

□

4　主結果 2

定義 4.1. 平面曲線 $\gamma(t)(a < t < b)$ において $t = c$ が特異点であるとする．もしも，曲線の適当な (向きを保つ) 助変数の取り替え $t = t(s)(c = t(0))$ と $\gamma(c)$ の近傍から原点 $(0,0)$ の近傍への $\boldsymbol{R}^2$ の (局所) 微分同相写像 Φ が存在して

$$\Phi \circ \gamma(t(s)) = (s^2, s^3)$$

と表すことができるとき，平面曲線 $\gamma(t)$ は $t = c$ に**カスプ**をもつ，あるいは，$t = c$ は $\gamma(t)$ の**カスプ**であるという．

次の補題 4.2，補題 4.6 及び補題 4.7 は定理 4.8 の証明で用いるものである．

補題 4.2 ([1, Proposition 3.21])**.** $a, b \in \boldsymbol{R}, a < b$ とする．波面 $\gamma : [a,b] \to \boldsymbol{R}^2$ は

- $\gamma(a) = \gamma(b)$ であり

- (a,b) の点は全て正則点

を満たすとする．このとき，$T(\gamma) > \pi$ が成り立つ.

定義 4.3. 正則点集合 $\mathrm{Reg}(\gamma)$ 上で定義される写像 $\hat{\boldsymbol{e}} : \mathrm{Reg}(\gamma) \to S^1$

$$\hat{\boldsymbol{e}}(t) := \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \qquad (t \in \mathrm{Reg}(\gamma))$$

を γ の**向き付き単位接ベクトル場**と呼ぶ.

定義 4.4. 有界閉区間 $[a,b]$ で定義されたフロンタル $\gamma : [a,b] \to \boldsymbol{R}^2$ は内部に有限個の特異点をもつとする．γ の向き付き単位接ベクトル場 $\hat{\boldsymbol{e}}$ に対し，もし $t = a$ が γ の特異点ならば,

$$\hat{\boldsymbol{e}}(a) := \lim_{t \to a+0} \hat{\boldsymbol{e}}(t)$$

と定め，もし $t = b$ が γ の特異点ならば,

$$\hat{\boldsymbol{e}}(b) := \lim_{t \to b-0} \hat{\boldsymbol{e}}(t)$$

と定める.

定義 4.5. 有界閉区間 $[a,b]$ で定義されたフロンタル $\gamma : [a,b] \to \boldsymbol{R}^2$ は内部に有限個の特異点をもつとする．さらに, $\gamma(a) = \gamma(b)$ であるとする．このとき,

$$\theta = \arccos(-\langle \hat{\boldsymbol{e}}(a), \hat{\boldsymbol{e}}(b) \rangle)$$

により定まる $\theta \in [0,\pi]$ を γ **の端点におけるなす角**という.

補題 4.6 ([11])**.** $a, b \in \boldsymbol{R}$, $a < b$ とする．波面 $\gamma : [a,b] \to \boldsymbol{R}^2$ は

- $\gamma(a) = \gamma(b)$ であり,
- $c \in (a,b)$ においてカスプをもち,
- $(a,c) \cup (c,b)$ の点は全て正則点

を満たすとする．$\theta \in [0,\pi]$ を γ の端点におけるなす角とする．このとき, $T(\gamma) > \theta$ が成り立つ.

補題 4.7 ([11])**.** $a, b \in \boldsymbol{R}$, $a < b$ とする．波面 $\gamma : [a,b] \to \boldsymbol{R}^2$ は

- $\gamma(a) = \gamma(b)$ であり,
- $c_1, c_2 \in (a,b)$ $(c_1 < c_2)$ においてカスプをもち,
- $(a,c_1) \cup (c_1,c_2) \cup (c_2,b)$ の点は全て正則点

を満たすとする．$\theta \in [0,\pi]$ を γ の端点におけるなす角とする．このとき, $T(\gamma) \geq \pi - \theta$ が成り立つ.

我々は最小全曲率を持つ閉波面の単純性について次の定理 4.8 を示した.

定理 4.8 ([11])**.** $\boldsymbol{R}^2$ の余向き付け不可能な閉波面 $\gamma(t)$ は最小全曲率 $T(\gamma) = \pi$ を持つとする．さらに γ の特異点は全てカスプとし，その個数を N_γ とする．このとき，次が成り立つ.

(1) N_γ は 3 以上の奇数である．

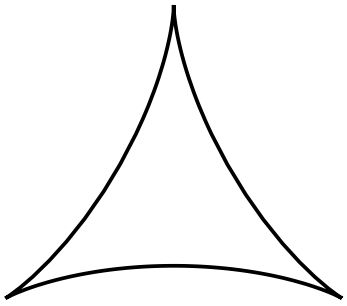
(2) $N_\gamma = 3$ であることと，$\gamma(t)$ が単純閉曲線であることは同値である．

(1) は補題 4.2 を用いて示すことができる．なぜなら，もし $N_\gamma = 1$ ならば補題 4.2 より $T(\gamma) > \pi$ となり，最小全曲率 $T(\gamma) = \pi$ を持つという仮定に反するからである．

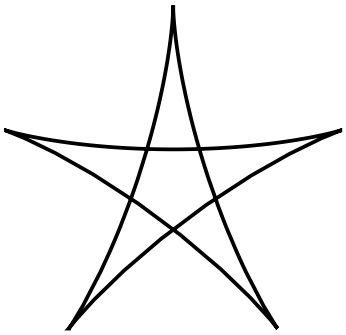
(2) は $(N_\gamma = 3) \Rightarrow (\gamma$ が単純$)$ であること，$(N_\gamma = 3) \Leftarrow (\gamma$ が単純$)$ であることをそれぞれ個別に示した．

$(\Rightarrow)$ の場合は，$N_\gamma = 3$ であるとした上で $\gamma(a) = \gamma(b)$ となるような異なる a, b が存在すると仮定する．この時に補題 4.2，補題 4.6 及び補題 4.7 を用いて $T(\gamma) > \pi$ となることを示す事ができ，矛盾を導くことができる．

$(\Leftarrow)$ の場合は，ある区間に特異点が一定数以上あると仮定する．この時 γ が単純閉曲線であると，特異点の位置に関して矛盾を導くことができる．これにより特異点の数を限定することができ，最終的に 3 個しか存在しないことを示すことができる．



3 個のカスプをもつ閉波面



5 個のカスプをもつ閉波面

5　今後の方針

本研究では，余向き付け不可能な閉波面に対して Fenchel 型定理を示した．とくに，全曲率の最小性，特異点の個数の評価と単純性との関係を明らかにした (定理 3.3, 4.8)．これまでの波面としての閉曲線の先行研究では余向き付け可能な場合のものが多かったが，本研究を通じて余向き付け不可能な閉波面の重要性が明らかになった．Fenchel の定理の一般化として Chern-Lashof の定理が知られている [5, 6]．したがって，フロンタルや波面に対する Chern-Lashof 型定理というものが考えられる．この場合でも余向き付け不可能ならば，全曲率が非自明な下限を持つのではないかと予想する．しかし，最初から一般次元のフロンタルや波面に対してそれを求めるのは困難であると思われるので，$\boldsymbol{R}^3$ 内の余向き付け不可能な 2 次元波面に対してから始めるのが現在の直近の目標である．また，もし全曲率が非自明な下限を持つならば，最小全曲率を持つことの必要十分条件に定義域となる多様体の位相的な性質が関連するのではないかと考えている．並行して最小全曲率を持つ閉曲面の具体的な例も探してみたい．

参考文献

[1] H. Alencar, W. Santos and G. Silva Neto, *Differential geometry of plane curves*, Student Mathematical Library 96. Providence, RI: American Mathematical Society. xv, 416 p. (2022).

[2] A.A. Borisenko and K. Tenenblat, *On the total curvature of curves in a Minkowski space*, Isr. J. Math. **191** (2012), 755–769.

[3] M. Borsuk, *Sur la courbure totale des courbes fermées*, Ann. Soc. Pol. Math. **20** (1948), 251–265.

[4] F. Brickell and C.C. Hsiung, *The total absolute curvature of closed curves in Riemannian manifolds*, J. Differ. Geom. **9** (1974), 177–193.

[5] S. S. Chern and R. K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds I*, Amer. I. Math. **79**(1957), 306-318.

[6] S. S. Chern and R. K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds II*, Michigan Math.J. **5**(1958), 5-12.

[7] K. Enomoto, J. Itoh and R. Sinclair, *The total absolute curvature of open curves in* E^3, Ill. J. Math. **52** (2008), 47–76.

[8] I. Fáry, *Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un nœud*, Bull. Soc. Math. Fr. **77** (1949), 128–138.

[9] W. Fenchel, *Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven*, Math. Ann. **101** (1929), 238–252.

[10] T. Fukunaga and M. Takahashi, *Existence and uniqueness for Legendre curves*, J. Geom. **104**(2013), 297-307.

[11] A. Honda, C. Tanaka and Y. Yamauchi, *The total absolute curvature of closed curves with singularities*, in preparation.

[12] J. Milnor, *On the total curvature of knots*, Ann. Math. (2) **52** (1950), 248–257.

[13] H. Rutishauser and H. Samelson, *Sur le rayon d'une sphère dont la surface contient une courbe fermée*, C. R. Acad. Sci., Paris **227** (1948), 755–757.

[14] A. Sama-Ae and A. Phon-on, *Total curvature and some characterizations of closed curves in* CAT(k) *spaces*, Geom. Dedicata **199** (2019), 281–290.

[15] E. Teufel, *On the total absolute curvature of closed curves in spheres*, Manuscr. Math. **57** (1986), 101–108.

[16] E. Teufel, *The isoperimetric inequality and the total absolute curvature of closed curves in spheres*, Manuscr. Math. **75** (1992), 43–48.

[17] Y. Tsukamoto, *On the total absolute curvature of closed curves in manifolds of negative curvature*, Math. Ann. **210** (1974), 313–319.

境界付き曲面上の Whitney 計量に関する Gauss-Bonnet 型公式について

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
橋堀恭矢 (Kyoya HASHIBORI) *

概要

Hasegawa-Honda-Naokawa-Saji-Umehara-Yamada は，交叉帽子の内的不変量に注目し，内在的交叉帽子と呼ばれる半正定値計量の特異点を定義した（2015）．Whitney 計量とは，内在的交叉帽子を許容する半正定値計量のことである．さらに，Hasegawa らは，閉曲面上の Whitney 計量に関する Gauss-Bonnet 型公式を導出した．本講演では，内在的交叉帽子を通過する正則曲線の測地的曲率測度の有界性，内在的交叉帽子における接ベクトルの角度について解説し，Hasegawa らによる Gauss-Bonnet 型公式を境界付き曲面の場合に一般化した結果を紹介する．

1　導入

Hasegawa-Honda-Naokawa-Saji-Umehara-Yamada は，滑らかな写像の特異点である交叉帽子特異点の一般化として, 内在的交叉帽子を定義した（[2, Definition 4.1]）．滑らかな写像芽 $f:\left(\mathbb{R}^2,0\right)\to\left(\mathbb{R}^3,0\right)$ が**交叉帽子**であるとは，f が次の式で与えられる滑らかな写像芽 $f_{CC}:\left(\mathbb{R}^2,0\right)\to\left(\mathbb{R}^3,0\right)$ に $\mathcal{A}$ 同値であることである．

$$f_{CC}\left(u,v\right):=\left(u,uv,v^2\right). \tag{1.1}$$

ここで，2 つの滑らかな写像芽 $f_i:\left(\mathbb{R}^2,0\right)\to\left(\mathbb{R}^3,0\right),\ i=1,2$ が $\mathcal{A}$ **同値**であるとは，2 つの微分同相写像芽 $\varphi:\left(\mathbb{R}^2,0\right)\to\left(\mathbb{R}^2,0\right)$, $\Phi:\left(\mathbb{R}^3,0\right)\to\left(\mathbb{R}^3,0\right)$ が存在して，$f_2=\Phi\circ f_1\circ\varphi^{-1}$ が成り立つことである．つまり，f の領域と余域のそれぞれに適当な座標変換を施して f_{CC} に一致させることができるとき，f を交叉帽子と呼ぶのである．

さて，古典的な Gauss-Bonnet の定理は，コンパクトで向きづけられた境界付き 2 次元 Riemann 多様体 (M,g) に対して，次の公式で述べられる定理のことである．

$$\int_M KdA+\int_{\partial M}\kappa_g d\tau=2\pi\chi\left(M\right). \tag{1.2}$$

ここで，K は Riemann 計量 g の Gauss 曲率，dA（$\chi\left(M\right)$）は M の面積形式（Euler 標数），κ_g は境界 ∂M の測地的曲率，$d\tau$ は g に関する弧長測度を表している．Kuiper は $\mathbb{R}^3$ の中の交叉帽子特異点を許容する閉曲面（境界のないコンパクトな曲面）に対する Gauss-Bonnet 型公式を導出し，交叉帽子特異点は式 (1.2) の $\partial M=\varnothing$ の場合に影響を与えないことを示した（[4, (7a)]）．その後，Kuiper

* E-mail:hashibori.kyoya.a7@elms.hokudai.ac.jp

による公式の一般化として，Hasegawa らは 2 次元閉多様体上の内在的交叉帽子を許容する半正定値計量（Whitney 計量と呼ばれる）に関する Gauss-Bonnet 型公式を導出した（[2, Theorem 5.1]）．本稿では，内在的交叉帽子を通過する滑らかな正則曲線の測地的曲率測度の有界性に関する結果を示し（定理 2.3），Hasegawa らによる公式を境界付き 2 次元多様体の場合に一般化した結果を示す（定理 3.1）．

本稿は次のように構成されている．§2 では，内在的交叉帽子の理論を簡単に説明し，内在的交叉帽子を通過する滑らかな正則曲線の測地的曲率測度の有界性に関する結果を示す．§3 では，内在的交叉帽子を始点とする初期ベクトルの存在性について言及し，境界付き 2 次元多様体上の Whitney 計量に関する Gauss-Bonnet 型公式を示す．

2　内在的交叉帽子における測地的曲率測度の有界性

M を（境界を持ちうる）滑らかな 2 次元多様体，ds^2 を M 上の半正定値計量とする．点 $p \in M$ が ds^2 の**特異点**であるとは，$(0,2)$ テンソル $\left(ds^2\right)_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ が退化することである．一方，ds^2 の特異点でない点を ds^2 の**正則点**と呼ぶ．

定義 2.1 ([2, Definition 4.1]) ds^2 の特異点 p が**内在的交叉帽子**であるとは，次の条件を満たすような p を中心とする座標系 (u,v) をとれることである．

(1) 原点で
$$F = G = G_u = G_v = 0, \quad E_v = 2F_u$$
が成り立つ．ここで，$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ と表している．

(2) 滑らかな関数 $EG - F^2\ (\geq 0)$ のヘシアンが原点で消えないことである．

ds^2 が内在的交叉帽子だけを許容するとき，ds^2 は **Whitney 計量**と呼ばれる．

定義より，内在的交叉帽子 p は $EG - F^2$ の極小値であることがわかるから，p は ds^2 の孤立特異点である．また，p は階数 1 の特異点，つまり，p における**退化空間** $\{v \in T_pM \mid \langle v, w\rangle = 0,\ \forall w \in T_pM\}$ は T_pM の 1 次元部分ベクトル空間であることが確かめられる．ここで，任意の $p \in M$ と $v, w \in T_pM$ に対して，$\langle v, w\rangle := \left(ds^2\right)_p(v,w)$ とおいた（[2, Proposition 4.3]）．さらに，滑らかな写像 $f : M \to \mathbb{R}^3$ の交叉帽子特異点は f の第一基本形式の内在的交叉帽子であることが確かめられる．つまり，内在的交叉帽子は交叉帽子特異点の一般化の概念である（[2, Corollary 4.5]）．

事実 2.2 ([2, Definition 4.9, Theorem 4.11]) 次の 3 つの式を満たすような内在的交叉帽子を中心とする座標系 (u,v) と 3 つの定数 $\alpha_{02}\ (>0)$, α_{11}, α_{20} が存在する．

$$\begin{aligned}
E(u,v) &= 1 + (\alpha_{20})^2 u^2 + 2\alpha_{11}\alpha_{20}uv + \left(1 + (\alpha_{11})^2\right) v^2 + O(u,v)^3, \\
F(u,v) &= \alpha_{11}\alpha_{20}u^2 + \left(1 + (\alpha_{11})^2 + \alpha_{02}\alpha_{20}\right) uv + \alpha_{02}\alpha_{11}v^2 + O(u,v)^3, \\
G(u,v) &= \left(1 + (\alpha_{11})^2\right) u^2 + 2\alpha_{02}\alpha_{11}uv + (\alpha_{02})^2 v^2 + O(u,v)^3.
\end{aligned}$$

ここで，$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ と表していて，$O(u,v)^3$ は (u,v) に関する階数 3 以上の項を表している．（このような座標系を **2 階の West 型座標系**と呼ぶ.）

West によって導かれた交叉帽子の標準形の領域の座標系は 2 階の West 型座標系になっていることが確かめられる（[2, Proposition 4.10], [7, Proposition 3.1.1], [1, Proposition 2.1]）．また，定数 α_{02}, $|\alpha_{11}|$, α_{20} は 2 階の West 型座標系の選び方に依存しない定数であることが確かめられ，α_{11} は M の向きに同調する 2 階の West 型座標系の選び方に依存しないことが確かめられる（[2, Proposition 4.6, Theorem 4.17]）.

次の結果は，本稿における主結果の 1 つである.

定理 2.3 ([3]) M を（境界を持ちうる）滑らかな 2 次元多様体，$\gamma : [0,\varepsilon) \to M$ を M 上の半正定値計量 ds^2 の内在的交叉帽子を始点とする滑らかな正則曲線とする．ここで，$\varepsilon > 0$ は $\gamma((0,\varepsilon))$ が ds^2 の正則点だけからなるような十分に小さい数である．このとき，測地的曲率測度 $\kappa_g d\tau$ は $[0,\varepsilon)$ 上の連続な 1 次微分形式である．ここで，$d\tau$ は弧長測度，つまり，$d\tau := |\dot{\gamma}(t)|\,dt$ $\left(\dot{\gamma}(t) := d\gamma/dt(t),\ |\dot{\gamma}(t)| := \sqrt{\langle\dot{\gamma}(t),\dot{\gamma}(t)\rangle}\right)$ を表している.

証明. 内在的交叉帽子 $p = \gamma(0)$ を中心とする 2 階の West 型座標系 (u,v) をとり，$\gamma(t) = (u(t), v(t))$ と書いて，$\gamma(t)$, $t \in (0,\varepsilon)$ の測地的曲率 κ_g を $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ の係数 E, F, G を用いて表すことから始める．γ に沿う接ベクトル場 $\dot{\gamma}$, $\{\dot{\gamma}(t)/|\dot{\gamma}(t)|, n(t)\}$ が $T_{\gamma(t)}M$ の正の正規直交基底となるような γ に沿う単位法線ベクトル場 n, γ に沿う共変微分 $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ は，それぞれ次のように表される.

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{u}(t)\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_{\gamma(t)} + \dot{v}(t)\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{\gamma(t)}, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} n(t) = {} & \frac{-(\dot{u}(t)F + \dot{v}(t)G)}{\sqrt{EG-F^2}\sqrt{\dot{u}(t)^2E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2G}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_{\gamma(t)} \\ & + \frac{\dot{u}(t)E + \dot{v}(t)F}{\sqrt{EG-F^2}\sqrt{\dot{u}(t)^2E + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)F + \dot{v}(t)^2G}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{\gamma(t)}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma} = {} & \left\{\ddot{u}(t) + \frac{\dot{u}(t)^2(GE_u - 2FF_u + FE_v)}{2(EG-F^2)} + \frac{\dot{u}(t)\dot{v}(t)(GE_v - FG_u)}{EG-F^2}\right. \\ & \left. + \frac{\dot{v}(t)^2(2GF_v - GG_u - FG_v)}{2(EG-F^2)}\right\}\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_{\gamma(t)} \\ & + \left\{\ddot{v}(t) + \frac{\dot{u}(t)^2(2EF_u - EE_v - FE_u)}{2(EG-F^2)} + \frac{\dot{u}(t)\dot{v}(t)(EG_u - FE_v)}{EG-F^2}\right. \\ & \left. + \frac{\dot{v}(t)^2(EG_v - 2FF_v + FG_u)}{2(EG-F^2)}\right\}\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{\gamma(t)}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで，$E := E(\gamma(t))$ などとおいた．また，∇ は ds^2 の正則点集合上の Levi-Civita 接続を表している．なお，式 (2.3) を得るために，次で与えられる Christoffel の記号 Γ_{ij}^k, $i,j,k = 1,2$ を使って

いることに注意する．

$$\Gamma_{11}^{1}=\frac{GE_u-2FF_u+FE_v}{2\left(EG-F^2\right)},\quad \Gamma_{11}^{2}=\frac{2EF_u-EE_v-FE_u}{2\left(EG-F^2\right)},$$
$$\Gamma_{12}^{1}=\Gamma_{21}^{1}=\frac{GE_v-FG_u}{2\left(EG-F^2\right)},\quad \Gamma_{12}^{2}=\Gamma_{21}^{2}=\frac{EG_u-FE_v}{2\left(EG-F^2\right)},$$
$$\Gamma_{22}^{1}=\frac{2GF_v-GG_u-FG_v}{2\left(EG-F^2\right)},\quad \Gamma_{22}^{2}=\frac{EG_v-2FF_v+FG_u}{2\left(EG-F^2\right)}.$$

式 (2.1)-(2.3) を用いて，$\gamma(t)$，$t\in(0,\varepsilon)$ の測地的曲率 κ_g は次の式で与えられる．

$$\begin{aligned}\kappa_g(t) &:= \frac{\left\langle \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma, n(t)\right\rangle}{\left|\dot\gamma(t)\right|^2}\\ &= \frac{\left(\dot u(t)\ddot v(t)-\dot v(t)\ddot u(t)\right)\sqrt{EG-F^2}}{\left(\dot u(t)^2E+2\dot u(t)\dot v(t)F+\dot v(t)^2G\right)^{3/2}}\\ &\quad+\frac{\dot u(t)^3\left(2EF_u-EE_v-FE_u\right)}{2\sqrt{EG-F^2}\left(\dot u(t)^2E+2\dot u(t)\dot v(t)F+\dot v(t)^2G\right)^{3/2}}\\ &\quad-\frac{\dot v(t)^3\left(2GF_v-GG_u-FG_v\right)}{2\sqrt{EG-F^2}\left(\dot u(t)^2E+2\dot u(t)\dot v(t)F+\dot v(t)^2G\right)^{3/2}}\\ &\quad+\frac{\dot u(t)^2\dot v(t)\left(2EG_u-3FE_v-GE_u+2FF_u\right)}{2\sqrt{EG-F^2}\left(\dot u(t)^2E+2\dot u(t)\dot v(t)F+\dot v(t)^2G\right)^{3/2}}\\ &\quad-\frac{\dot u(t)\dot v(t)^2\left(2GE_v-3FG_u-EG_v+2FF_v\right)}{2\sqrt{EG-F^2}\left(\dot u(t)^2E+2\dot u(t)\dot v(t)F+\dot v(t)^2G\right)^{3/2}}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

また，$d\tau=\sqrt{\dot u(t)^2E+2\dot u(t)\dot v(t)F+\dot v(t)^2G}dt$ と表されるから，$\gamma(t)$，$t\in(0,\varepsilon)$ の測地的曲率測度 $\kappa_g d\tau$ は次の式で与えられる．

$$\begin{aligned}\kappa_g(t)\,d\tau = \Bigg\{ &\frac{\left(\dot u(t)\ddot v(t)-\dot v(t)\ddot u(t)\right)\sqrt{EG-F^2}}{\dot u(t)^2E+2\dot u(t)\dot v(t)F+\dot v(t)^2G}\\ &+\frac{\dot u(t)^3\left(2EF_u-EE_v-FE_u\right)}{2\sqrt{EG-F^2}\left(\dot u(t)^2E+2\dot u(t)\dot v(t)F+\dot v(t)^2G\right)}\\ &-\frac{\dot v(t)^3\left(2GF_v-GG_u-FG_v\right)}{2\sqrt{EG-F^2}\left(\dot u(t)^2E+2\dot u(t)\dot v(t)F+\dot v(t)^2G\right)}\\ &+\frac{\dot u(t)^2\dot v(t)\left(2EG_u-3FE_v-GE_u+2FF_u\right)}{2\sqrt{EG-F^2}\left(\dot u(t)^2E+2\dot u(t)\dot v(t)F+\dot v(t)^2G\right)}\\ &-\frac{\dot u(t)\dot v(t)^2\left(2GE_v-3FG_u-EG_v+2FF_v\right)}{2\sqrt{EG-F^2}\left(\dot u(t)^2E+2\dot u(t)\dot v(t)F+\dot v(t)^2G\right)}\Bigg\}dt.\end{aligned}\tag{2.5}$$

さて，式 (2.4) と (2.5) を使って，p における測地的曲率測度 $\kappa_g d\tau$ の有界性を調べよう．

まず，γ が p における退化空間，つまり，v 軸に横断的である場合を考える．このとき，γ を次のようにパラメータ表示することができる．

$$\gamma(t) = (t, v(t)), \quad v(0) = 0. \tag{2.6}$$

式 (2.6) に関して E, F, G とそれらの偏微分を計算し，これらの結果を (2.4) に代入すると，$t > 0$ について次の式を得る．

$$\kappa_g(t) = \frac{(\alpha_{11} + \alpha_{02}\dot{v}(0))(\alpha_{20} + \dot{v}(0)(2\alpha_{11} + \alpha_{02}\dot{v}(0))) + 2\dot{v}(0)}{\sqrt{(\alpha_{11} + \alpha_{02}\dot{v}(0))^2 + 1}} + O(t).$$

したがって，κ_g は $[0, \varepsilon)$ 上の連続な関数であり，特に，$d\tau = (1 + O(t))\, dt$ が得られるから，$\kappa_g d\tau$ は $[0, \varepsilon)$ 上の連続な 1 次微分形式である．

次に，γ が p における退化空間に接している場合を考える．このとき，γ を次のようにパラメータ表示することができる．

$$\gamma(t) = (u(t), t), \quad u(0) = \dot{u}(0) = 0. \tag{2.7}$$

式 (2.7) に関して E, F, G とそれらの偏微分を計算し，これらの結果を (2.4) に代入すると，$t > 0$ について次の式を得る．

$$\begin{aligned}\kappa_g(t) = {} & \frac{3\alpha_{11}\ddot{u}(0)^2 - \alpha_{02}u^{(3)}(0)}{2t\left((\alpha_{02})^2 + \ddot{u}(0)^2\right)^{3/2}} - \frac{\alpha_{02}u^{(4)}(0)}{3\sqrt{(\alpha_{02})^2 + \ddot{u}(0)^2}} \\ & + \frac{\ddot{u}(0)\left(\begin{array}{l} 9(\alpha_{02})^2 u^{(3)}(0)^2 + \alpha_{02}\alpha_{11}u^{(3)}(0)\left(43(\alpha_{02})^2 - 11\ddot{u}(0)^2\right) \\ \quad -6(\alpha_{02})^4 \\ \quad +3\left(\begin{array}{l} +\left(-27(\alpha_{11})^2 + 4\alpha_{02}\alpha_{20} - 3\right)(\alpha_{02})^2\ddot{u}(0)^2 \\ \quad +(4\alpha_{02}\alpha_{20} + 3)\ddot{u}(0)^4 \end{array}\right) \end{array}\right)}{12\alpha_{02}\left((\alpha_{02})^2 + \ddot{u}(0)^2\right)^{5/2}} + O(t). \end{aligned} \tag{2.8}$$

また，$d\tau = \left(t\sqrt{(\alpha_{02})^2 + \ddot{u}(0)^2} + O(t)^2\right) dt$ が得られるから，測地的曲率測度 $\kappa_g d\tau$ は $t > 0$ について次の式で与えられる．

$$\kappa_g(t)\, d\tau = \left(\frac{3\alpha_{11}\ddot{u}(0)^2 - \alpha_{02}u^{(3)}(0)}{2\left((\alpha_{02})^2 + \ddot{u}(0)^2\right)} + O(t)\right) dt.$$

いま，(u, v) は 2 階の West 型座標系であるから，$\alpha_{02} > 0$ であることに注意する（事実 2.2）．したがって，$\kappa_g d\tau$ は $[0, \varepsilon)$ 上の連続な 1 次微分形式である． □

式 (2.8) を観察してみると，次の主張が得られる．

系 2.4 内在的交叉帽子 $p \in M$ を始点とする滑らかな正則曲線 $\gamma : [0, \varepsilon) \to M$ が p における退化空間に接しているならば，γ の測地的曲率が p において有界であることと，p を中心とする 2 階の West 型座標系 (u, v) に関して γ が次の式でパラメータ付けされることは同値である．

$$\gamma(t) = (u(t), t), \quad u(0) = \dot{u}(0) = 0, \quad 3\alpha_{11}\ddot{u}(0)^2 - \alpha_{02}u^{(3)}(0) = 0. \tag{2.9}$$

注意 2.5 式 (2.6) において $\gamma(t) = (t, 0)$ とおいた場合に，内在的交叉帽子を中心とする極座標に関する測地的曲率測度の公式が [2, Theorem 5.1] の証明の中で導かれている．

例 2.6 $f_{CC}:\left(\mathbb{R}^2,0\right)\to\left(\mathbb{R}^3,0\right)$ を式 (1.1) で定義される交叉帽子とすると，f_{CC} の領域の座標系は 2 階の West 型座標系であり，原点における退化空間は v 軸である．いま，次の f_{CC} の領域内の 4 つの曲線 $\gamma_i,\ i=1,2,3,4$ を考える．

$$\gamma_1(t):=(t,t),\quad \gamma_2(t):=\left(\frac{t^2}{2},t\right),\quad \gamma_3(t):=\left(\frac{t^3}{6},t\right),\quad \gamma_4(t):=\left(\frac{t^4}{24},t\right).$$

曲線 γ_1 は v 軸に横断的であり，$\gamma_i,\ i=2,3,4$ は v 軸に接している．これらの曲線の像 $\widehat{\gamma}_i:=f_{CC}\circ\gamma_i$ はそれぞれ次のように表される（図.2.1）．

$$\widehat{\gamma}_1(t)=\left(t,t^2,t^2\right),\ \widehat{\gamma}_2(t)=\left(\frac{t^2}{2},\frac{t^3}{2},t^2\right),\ \widehat{\gamma}_3(t)=\left(\frac{t^3}{6},\frac{t^4}{6},t^2\right),\ \widehat{\gamma}_4(t)=\left(\frac{t^4}{24},\frac{t^5}{24},t^2\right).$$

曲線 $\widehat{\gamma}_i$ の測地的曲率 κ_g^i はそれぞれ次のように計算される．

$$\begin{aligned}
\kappa_g^1(t)&=\frac{6}{\sqrt{4t^2+5}\left(8t^2+1\right)^{3/2}}\to\frac{6}{\sqrt{5}}\quad(t\to0),\\
\kappa_g^2(t)&=\frac{-\mathrm{sgn}(t)\,84}{\left(9t^2+20\right)^{3/2}\sqrt{17t^2+16}}\to\mp\frac{21}{40\sqrt{5}}\quad(t\to\pm0),\\
\kappa_g^3(t)&=\frac{72\left(t^4-96t^2-36\right)}{t\sqrt{t^4+144t^2+144}\left(16t^4+9t^2+144\right)^{3/2}}\to-\infty\quad(t\to0),\\
\kappa_g^4(t)&=\frac{\mathrm{sgn}(t)\,96\left(5t^6-8640t^2-4608\right)}{\sqrt{t^6+2304t^2+2304}\left(25t^6+16t^4+2304\right)^{3/2}}\to\mp\frac{1}{12}\quad(t\to\pm0).
\end{aligned}$$

ここで，$\kappa_g^3(t)$ は $t\to0$ とすると $-\infty$ に発散していることに注意する．実際，γ_3 は条件 (2.9) を満たしていない．また，$\widehat{\gamma}_i$ の測地的曲率測度 $\kappa_g^i d\tau_i$ はそれぞれ次のように計算される．

$$\begin{aligned}
\kappa_g^1(t)\,d\tau_1&=\frac{6dt}{\sqrt{4t^2+5}\left(8t^2+1\right)}\to\frac{6dt}{\sqrt{5}}\quad(t\to0),\\
\kappa_g^2(t)\,d\tau_2&=\frac{-\mathrm{sgn}(t)\,42tdt}{\left(9t^2+20\right)\sqrt{17t^2+16}}\to0dt\quad(t\to0),\\
\kappa_g^3(t)\,d\tau_3&=\frac{12\left(t^4-96t^2-36\right)dt}{\sqrt{t^4+144t^2+144}\left(16t^4+9t^2+144\right)}\to-\frac{dt}{4}\quad(t\to0),\\
\kappa_g^4(t)\,d\tau_4&=\frac{\mathrm{sgn}(t)\,4t\left(5t^6-8640t^2-4608\right)dt}{\sqrt{t^6+2304t^2+2304}\left(25t^6+16t^4+2304\right)}\to0dt\quad(t\to0).
\end{aligned}$$

故に，1 次微分形式 $\kappa_g^i d\tau_i$ は原点において連続である．

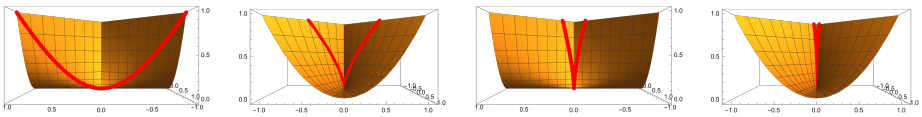


図.2.1　左から右に，赤線はそれぞれ $\widehat{\gamma}_i,\ i=1,2,3,4$ を表している．

3　境界付き曲面上の Whitney 計量に関する Gauss-Bonnet 型公式

M を（境界を持ちうる）滑らかな 2 次元多様体，$\gamma : [0, \varepsilon) \to M$ を M 上の半正定値計量 ds^2 の内在的交叉帽子 $p \in M$ を始点とする滑らかな正則曲線とする．p を中心とする 2 階の West 型座標系 (u, v) をとる．γ が p における退化空間，つまり，v 軸に横断的であるならば，γ を式 (2.6) のようにパラメータ表示することができ，このとき $t > 0$ について $\dot{\gamma}(t) / |\dot{\gamma}(t)| = (1, \dot{v}(0)) + O(t)$ を得る．したがって，γ の p における初期ベクトルは存在する．一方，γ が p における退化空間に接しているならば，γ を式 (2.7) のようにパラメータ表示することができ，このとき $t > 0$ について $\dot{\gamma}(t) / |\dot{\gamma}(t)| = (0, 1/(\alpha_{02} t)) + O(t)$ を得る．故に，極限 $\lim_{t \to +0} \dot{\gamma}(t) / |\dot{\gamma}(t)|$ は発散する．

上の考察により，次の境界付き 2 次元多様体上の Whitney 計量に関する Gauss-Bonnet 型公式が得られ，本稿におけるもう 1 つの主結果である．これは，[2, Theorem 5.1] の境界付き 2 次元多様体の場合への一般化である．

定理 3.1 ([3]) M をコンパクトで向きづけられた滑らかな境界付き 2 次元多様体，ds^2 を M 上の Whitney 計量とする．いま，境界 ∂M は ∂M 上の各特異点における退化空間に横断的であると仮定する．このとき，

$$\int_M K dA + \int_{\partial M} \kappa_g d\tau = 2\pi \chi(M)$$

が成り立つ．

証明. ds^2 の特異点 $p \in M$ が内部 $M \backslash \partial M$ にある場合の公式は，[2, Theorem 5.1] と全く同じ方法で証明できる．以下，p は境界 ∂M の上にあると仮定する．p の正に向きづけられた 2 階の West 型座標近傍 $(U; u, v)$ をとる．$D(r)$ を U に含まれる中心 p, 半径 $r > 0$ の閉円板，$\{P_1, P_2\}$ を境界 $\partial D(r)$ と ∂M の交わりとする．p が頂点になるように，そして p を始点とする辺たちが p における退化空間に横断的になるように $D(r)$ を三角形分割する．すると，次の式が得られる．

$$\int_{D(r)} K dA + \int_{\partial D(r)} \kappa_g d\tau = 2\pi - \sum_{i=1,2} (\pi - \angle P_i). \tag{3.1}$$

ここで，式 (3.1) の左辺の第 1 項（第 2 項）は [2, Corollary 4.18]（定理 2.3）により well-defined である．こうして主張が証明された．　□

参考文献

[1] Fukui. T, Hasegawa. M, *Fronts of Whitney umbrella—a differential geometric approach via blowing up*. J. Singul. **4** (2012), 35–67.

[2] Hasegawa. M, Honda. A, Naokawa. K, Saji. K, Umehara. M, Yamada. K, *Intrinsic properties of surfaces with singularities*. Internat. J. Math. **26** (2015), no. 4, 1540008, 34 pp.

[3] Hashibori. K, *Behavior of curves through intrinsic cross caps*, preprint.

[4] Kuiper. N. H, *Stable surfaces in euclidean three space*. Math. Scand. **36** (1975), 83–96.

[5] Saji. K, Umehara. M, Yamada. K, *Behavior of corank-one singular points on wave fronts*. Kyushu J. Math. **62** (2008), no. 1, 259–280.

[6] Umehara. M, Yamada. K, *Differential geometry of curves and surfaces*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2017. xii + 312 pp.

[7] West. J. M, *The differential geometry of the cross-cap*, Ph. D. thesis, Liverpool Univ. (1995).

有限次退化特異点に対する Gauss-Bonnet の定理

横浜国立大学　大学院理工学府　数物・電子情報系理工学専攻　数学教育分野
福間友子 (Tomoko FUKUMA) *

概要

非退化特異点を持つフロンタルに対して, Gauss-Bonnet 型定理が成り立つことが知られているが, 退化特異点の場合は明らかになっていない. 本講演では, 非退化特異点を一般化する特異点のクラスとして有限次退化特異点を導入し, Gauss-Bonnet 型定理が成り立つことを紹介する. 特に偶数次退化特異点の場合, フロンタルが余向き付け可能であることと, 2 次元多様体が向き付け可能であることが同値であるとわかった. このことから, 奇数次と偶数次で結果に違いがあることを紹介する. 本稿の内容は, 本田淳史氏 (横浜国立大学) との共同研究に基づく.

1　導入

閉波面は特異点としてカスプ辺とツバメの尾のみを許容するものとしたときに対するガウス・ボンネの定理は, ランジュバン・レビット・ローゼンバーグ [2] より 1995 年に指摘され, コソフスキー [1] より 2002 年に示された. そして 2008, 2009 年に佐治, 梅原, 山田 [4] が閉波面の特異点を, フロンタルの非退化特異点へ一般化し, ガウス・ボンネの定理を示した.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{M^2} KdA + \frac{1}{\pi}\int_{\Sigma(f)} \kappa_s ds = \chi(M^2), \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{M^2} Kd\hat{A} = \chi(M^+) - \chi(M^-) + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{sgn}(P_i). \tag{1.2}$$

この非退化特異点に対するガウス・ボンネの定理は, 退化特異点に対しても成り立つのかという疑問が生まれた. 本講演では退化特異点の特別なクラスである有限次退化特異点を導入し, ガウス・ボンネの定理が成り立つことを紹介する.

2　有限次退化特異点

まずはフロンタルと面積要素の定義を与える. ここでは M^2 を向き付けられた 2 次元多様体とする.

定義 2.1 (フロンタル)**.** 2 次元多様体 M^2 に対して, C^∞ 級写像 $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ が **フロンタル** であるとは, M^2 上の任意の点 p に対して, p の近傍 U から単位球面 $S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 = 1\}$

* fukuma-tomoko-zv@ynu.jp

への C^∞ 級写像 $\nu : U \to S^2$ が存在し, U 上の任意の点 q と接空間 T_qU の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して,

$$df(\boldsymbol{v}) \cdot \nu(q) = 0$$

をみたすときをいう. また ν を f の U 上における **ガウス写像** とよぶ.

定義 2.2. 定義 2.1 において, $\mathbb{R}^3$ を $T_{f(p)}\mathbb{R}^3$ と同一視したときに定まる ν を f に関する **単位法線ベクトル場** とよぶ. また単位法線ベクトル場をなめらかに M^2 全体で定義されるように拡張できるとき, f は **余向き付け可能** であるという.

定義 2.3 (面積要素)**.** フロンタル $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ が与えられたとき, M^2 の座標近傍 $(U; u, v)$ に対して,

$$\lambda := \det(f_u,\ f_v,\ \nu)$$

によって定義される実関数を U 上の **符号付き面積密度関数** とよぶ. また (u, v) が M^2 の向きに同調した座標であるとき, 2 次微分形式

$$d\hat{A} := \lambda\ du \wedge dv, \quad dA := |\lambda|\ du \wedge dv$$

をそれぞれ **符号付き面積要素**, **(符号なし) 面積要素** とよぶ.

この面積要素に対して

$$M^+ := \{p \in M^2\ ;\ dA_p = d\hat{A}_p\},\ M^- := \{p \in M^2\ ;\ dA_p = -d\hat{A}_p\}$$

と定め, ∂M^+ を M^+ の境界, ∂M^- を M^- の境界とする. このとき f の特異点集合 $\Sigma(f)$ は,

$$\Sigma(f) := M^+ \cap M^- = \partial M^+ = \partial M^-$$

と表される.

定義 2.4 (オイラー形式)**.** $Kd\hat{A}$ の拡張として, M^2 上で定義された滑らかな 2 次微分形式を $\hat{\Omega}$ と書き, これを f の **(符号付き) オイラー形式** という. また $M^2 \setminus \Sigma(f)$ 上で定義された 2 次微分形式 $\Omega := KdA$ を f の **符号なしオイラー形式** とよぶ.

退化特異点の特別なクラスである有限次退化特異点の定義を次のように与える.

定義 2.5 (有限次退化特異点)**.** n を正の整数とする. フロンタル $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$, f の単位法線ベクトル場 ν, f の特異点 p に対して, p の座標近傍 $(U; u, v)$ 上で定義された符号付き面積密度関数を $\lambda = \det(f_u,\ f_v,\ \nu)$ とする. このとき, p が n **次退化特異点**であるとは以下の条件をみたすときをいう.

(1) $\operatorname{rank}(df_p) = 1$
(2) U 上で定義された C^∞ 級関数 $\hat{\lambda}$ と, U 上で定義された零でない C^∞ 級関数 α が存在し, 次をみたす.

$$\begin{cases} \lambda = \alpha\hat{\lambda}^n, \\ d\hat{\lambda}(p) \neq 0. \end{cases}$$

この n を**退化次数**とよぶ. 特に n が奇数のときは $\alpha = 1$ であると定める. フロンタルの特異点 p が**有限次退化特異点**であるとは, ある正の整数 n が存在し, p が n 次退化特異点であるときをいう. また n が偶数のときは定義域 U において $\lambda \geq 0$ または $\lambda \leq 0$ であることに注意する.

注意. 一般に $n = 1$ であるとき p を**非退化特異点**とよび, それ以外の特異点を**退化特異点**とよぶ.

フロンタル f の特異点が全て有限次退化特異点であるとすると, 特異点集合 $\Sigma(f)$ は M^2 上の埋め込まれた曲線の和集合になる. なぜなら特異点において $\lambda = 0$ となることから, $\Sigma(f)$ は $\hat{\lambda} = 0$ で表される. また有限次退化特異点 p では $d\hat{\lambda}$ は零にならない. 従って陰関数定理より, 特異点集合は p の近くで正則曲線となる.

定義 2.6 (特異方向)**.** これらの各曲線は **特異曲線** とよばれる. またその接ベクトルを **特異ベクトル** といい, そのベクトルが定める 1 次元ベクトル空間を **特異方向** という.

定義 2.7 (退化方向)**.** 有限次退化特異点 p に対して, 1 次元ベクトル空間

$$N_p = \{\boldsymbol{v} \in T_pM^2 \mid df_p(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}\}$$

を **退化方向** といい, そのベクトルを **退化ベクトル** という.

定義 2.8 (第一種特異点, 第二種特異点)**.** フロンタル f の有限次退化特異点 p に対して, 退化方向と特異方向が異なるとき, p は **第一種特異点** であるという. また退化方向と特異方向が一致するとき, p は **第二種特異点** であるという.

定義 2.9. 第二種特異点が **許容的** であるとは, 定義域においてそれ自身が第二種特異点の集積点になっていないときをいう.

第一種有限次退化特異点は, [3] で導入された m-type edge であることがわかる.

3 特異曲率

第一種特異点からなる特異曲線の特異曲率を次のように定める.

定義 3.1 (特異曲率)**.** $\gamma(t)$ を第一種特異点からなる特異曲線, $\eta(t)$ を γ に沿った退化ベクトル場とする. また $\hat{\gamma} := f \circ \gamma$, $\hat{\nu} := \nu \circ \gamma$ とおく. このとき,

$$\kappa_s(t) := \varepsilon_\gamma(t)\frac{\det(\hat{\gamma}'(t),\ \hat{\gamma}''(t),\ \hat{\nu}(t))}{|\hat{\gamma}'(t)|^3}$$
$$\varepsilon_\gamma(t) = \mathrm{sgn}(\det(\gamma'(t),\ \eta(t))\hat{\lambda}_\eta)$$

で定まる値を, 第一種特異点からなる $\hat{\gamma}(t)$ 上の **特異曲率** とよぶ.

命題 3.2. 退化次数が奇数であるとする. 第一種特異点の特異曲率 κ_s は,

(1) 特異曲線のパラメータの取り方
(2) 曲面の向き

(3) 単位法線ベクトル場の選び方
(4) 退化ベクトル場の取り方

によらない.

一方で退化次数が偶数の場合, 第一種特異点の特異曲率は, (1) 特異曲線のパラメータと (4) 退化ベクトル場の取り方によらないが, (2) 曲面の向きと (3) 単位法線ベクトル場の向きに依存する.

証明. 奇数次の証明は非退化の場合と同様に示すことができる ([5], 命題 5.4.1).

u 軸が特異曲線である座標系 (u,v) を $(u,-v)$ に取り替える, もしくは単位法線ベクトル場 ν を $-\nu$ に取り替えると, 面積密度関数 λ は $-\lambda$ へ変化する. しかし偶数次退化ならば $\hat{\lambda}^n > 0$ となる為, 定義 2.5 より λ の変化に対する $\hat{\lambda}$ の変化がわからない. 従って偶数次ならば (1) と (4) については依存しないが, (2) と (3) には依存する. □

ε を正の実数, $\gamma(t)$ を第一種特異点のみからなる特異曲線, U を uv 平面上の領域とする. また $|w| < \varepsilon$ に対して, $\gamma_w : [a,b] \to U$ を各 w によって決まる正則曲線の族とし, $\gamma_0(t) = \gamma(t)$ をみたすとする. さらに対応

$$[a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to U; (t,w) \mapsto \gamma_w(t)$$

は $\mathbb{R}^2$ のある領域から U への向きを保つ微分同相写像の制限になっているとする. すると γ_w は $w = 0$ のとき以外では, 特異点集合と交わらない. 一方で $\hat{\gamma}_w := f \circ \gamma_w$ とし, $\hat{\nu}$ を $\hat{\gamma}_w$ に沿った単位法線ベクトル場とする. さらに $\hat{\boldsymbol{e}}(t) := \hat{\gamma}'(t)/|\hat{\gamma}'(t)|$, $\hat{\boldsymbol{n}}(t) := \hat{\nu}(t) \times \hat{\boldsymbol{e}}(t)$ と定める. また $\boldsymbol{n}_L^w : [a,b] \to U$ を次の条件をみたすように定める.

(1) U 内で $\{\gamma_w'(t), \boldsymbol{n}_L^w(t)\}$ が正の向きにある.
(2) $\hat{\boldsymbol{e}}_w(t) := \hat{\gamma}_w'(t)/|\hat{\gamma}_w'(t)|$, $\hat{\boldsymbol{n}}_L^w(t) := df(\boldsymbol{n}_L^w(t))$, $\hat{\nu}^w(t) := \nu(\gamma_w(t))$ とするとき, $\{\hat{\boldsymbol{e}}_w(t),\ \hat{\boldsymbol{n}}_L^w(t),\ \hat{\nu}^w(t)\}$ が正規直交基底となる.

このとき以下の命題が成り立つ.

命題 3.3. $w > 0$ のときは γ_w 上で $\hat{\lambda} > 0$ であるとし, $w < 0$ のときは γ_w 上で $\hat{\lambda} < 0$ とする. このとき

$$\kappa_g^w(t) := \frac{\hat{\gamma}_w''(t) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_L^w(t)}{\hat{\gamma}_w'(t) \cdot \hat{\gamma}_w'(t)}$$

と定めると, 退化次数が奇数のとき

$$\lim_{w \to +0} \kappa_g^w(t) = \kappa_s(t), \quad \lim_{w \to -0} \kappa_g^w(t) = -\kappa_s(t)$$

が成り立ち, 退化次数が偶数のとき

$$\begin{cases} \lim_{w \to 0} \kappa_g^w(t) = \kappa_s(t) & (\alpha > 0), \\ \lim_{w \to 0} \kappa_g^w(t) = -\kappa_s(t) & (\alpha < 0) \end{cases}$$

が成り立つ. この $\kappa_g^w(t)$ を $\gamma_w(t)$ の**測地的曲率**とよぶ.

命題 3.4. 許容的な第二種特異点の近傍上で

$$ds := |\hat{\gamma}'(t)|dt$$

とすると, $\kappa_s ds$ は特異曲線上の滑らかな 1 次微分形式を与える. また曲線 $\gamma : [a, b] \to M^2$ を特異曲線とし, 以下の条件をみたすとする.

(1) $\gamma(a)$ は許容的な第二種特異点である
(2) $\gamma((a, b])$ は第一種特異点で構成される

このとき積分

$$\Theta_\gamma := \int_a^b \kappa_s ds$$

は well-defined である.

4 局所版ガウス・ボンネの定理

M^2 はコンパクトで境界をもたない向きづけられた 2 次元多様体とする. またフロンタル $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ の特異点は全て有限次退化特異点であり, 第一種または許容的な第二種特異点であるとする. さらに f が偶数次退化特異点をもつならば, $M^2 = M^+$ と仮定して良い (定理 5.1).

定義 4.1. $\mathbb{R}^2$ 上の一般の位置にある相異なる点 A, B, C をとる. 線分 AB, BC, CA によって囲まれる有界閉領域を **線形三角形** または **線形三角形領域** といい, $\triangle ABC$ と書く.

定義 4.2. 2 次元多様体 M^2 上の閉領域 T が **三角形** であるとは, $\varphi(T)$ が $\mathbb{R}^2$ の線形三角形となるような, 局所座標系 $\varphi : U \to \mathbb{R}^2$ が存在するときにいう.

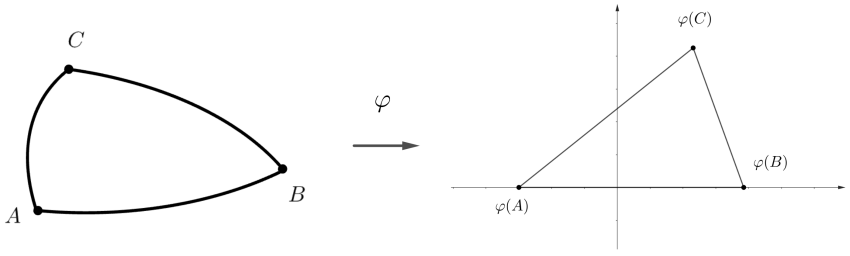


図 1　2 次元多様体上の三角形

D を M^2 上の領域, $\bar{D}$ を D のコンパクトな閉包とする. 境界 $\partial D (\neq \varnothing)$ が互いに共通部分をもたない有限個の単純正則曲線の和集合であるとする.

定義 4.3. M^2 上にある有限個の三角形の族 $\{T_i\}_{i=1,\ldots,N}$ が $\bar{D}$ の **三角形分割** であるとは, 以下をみたすときをいう.

(1) $\bar{D} = T_1 \cup \cdots \cup T_N$ かつ, ∂D が空でない限り ∂D は三角形の辺と頂点だけで成り立つ.
(2) 任意の異なる三角形 T_i, T_j に対して, $T_i \cap T_j$ は空集合でない限り, T_i と T_j の共通の 1 辺であるか共通の 1 つの頂点となる.

f が奇数次退化特異点のみもつならば M^+ または M^- に対して, 偶数次のみならば M^2 に対して, 三角形分割を施す. このとき以下の 5 つの条件をみたす三角形分割が存在する.

(1) 特異点は三角形の辺上にしか存在しない. 特に各三角形の内点は正則点のみからなる. また三角形のある辺において, その端点がどちらも特異点であるか, 辺の内点に 1 点でも特異点を含むとき, その辺上の全ての点は特異点からなる.
(2) 第二種特異点は三角形の頂点になっている.
(3) 準正則三角形または特異三角形の特異点である頂点において, 特異辺でない辺の接ベクトルは全て退化方向と一致しない.
(4) 各三角形は高々 1 つの特異辺しかもたない.
(5) 全ての辺は高々 1 つの第二種特異点しかもたない.

この三角形分割では次の 4 種類の三角形が現れる.

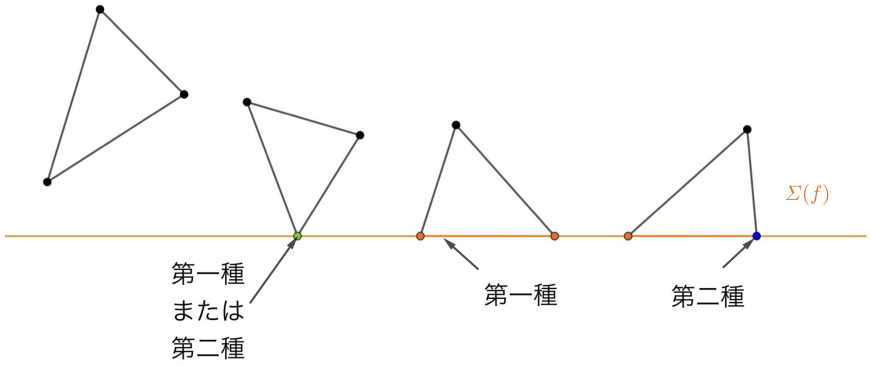


図 2　三角形分割に現れる 4 つの三角形

三角形 $\triangle ABC$ に対して, 頂点 A は第一種特異点であるとする. また辺 CA と AB の 2 つは正則曲線 $\gamma_3(t)$, $\gamma_1(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ で表され, $A = \gamma_3(1) = \gamma_1(0)$ をみたすとする. $\boldsymbol{c} := -\gamma_3'(1)$, $\boldsymbol{b} := \gamma_1'(0)$ とおくと, どちらのベクトルも A において $\mathbf{0}$ にならない. このことから頂点 A における内角 $\angle A$ を

$$\angle A := \arccos\left(\frac{df(\boldsymbol{c}) \cdot df(\boldsymbol{b})}{|df(\boldsymbol{c})||df(\boldsymbol{b})|}\right)$$

と定める. するとこの角度は連続性をもち, 以下の補題が成り立つ.

補題 4.4. uv 平面の領域 U 上の点 P を f の第一種特異点とし, 曲線 γ_1, γ_2 は P を通るとする. また P における γ_1, γ_2 の接ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ とし, これらは一次独立であり, どちらも退化方向を向いていないとする. このとき $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が退化方向を挟んで反対側にあるならば $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の角度は π であり, 同じ側ならば角度は 0 である.

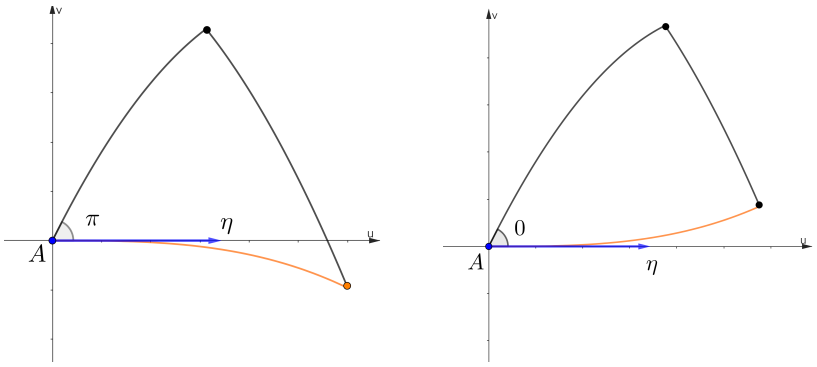
また許容的な第二種特異点に対して, 次のような局所座標系が取れる.

補題 4.5. P を許容的な第二種特異点とし, γ を P を通る特異曲線とする. また M^2 の向きに同調した局所座標系 $(U;u,v)$ で, P は uv 平面の原点と一致し, $\partial_u := \partial/\partial u$ が γ に沿った退化ベクトル場となるようなものを考える. さらに $\gamma(0)=(0,0)$, $\gamma'(0)=(1,0)$ であるとする. このとき γ は uv 平面上で次をみたす.

(1) 接ベクトル $\gamma'(t)$ は十分小さな t に対して, $t=0$ のときを除いて水平にならない.
(2) $\gamma(t)$ は十分小さな t に対して u 軸と交わらない.

三角形 $\triangle ABC$ の頂点 A が第二種特異点であるとする. 補題 4.5 の局所座標系を使って, 頂点 A の内角を次のように定義する.

$$\angle A := \begin{cases} \pi & (u \text{ 軸の正の部分が } A \text{ の近傍において三角形の内部に含まれるとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{4.1}$$



$\angle A=\pi$ の場合. $\angle A=0$ の場合.

図 3　II 型の特異三角形の第二種特異点における内角

この角度の定義は局所座標の取り方に依存するが, 補題 4.5 をみたすような座標系の取り方には依存しない.

$\gamma(t)$ $(0\le t\le 1)$ は $\triangle ABC$ の辺 AB を表すものとする. 辺 AB が特異辺でないとき, M^2 上の γ に沿った余法線ベクトル場に関する測地的曲率 $\kappa_g(t)$ を用いて**全測地的曲率**を

$$\Theta_{AB} := \int_0^1 \kappa_g(t)ds \qquad (ds := |\hat{\gamma}'(t)|dt)$$

と定義する. 一方で AB が特異辺であるときは測地的曲率が定義されないが, 特異曲率 $\kappa_s(t)$ を定義することができる. **全測地的曲率**を

$$\Theta_{AB} := \int_0^1 \kappa_s(t)ds \qquad (ds := |\hat{\gamma}'(t)|dt)$$

と定義する.

命題 4.6 (フロンタルに対する局所版ガウス・ボンネの定理)**.** 三角形 $\triangle ABC$ を M^+ の三角形分割

に現れる三角形とする．また $\triangle ABC$ の特異点は第一種のみであるとする．このとき

$$\angle A + \angle B + \angle C - \pi = \Theta_{AB} + \Theta_{BC} + \Theta_{CA} + \int_{\triangle ABC} \Omega \tag{4.2}$$

が成り立つ．さらに補題 4.5 の座標系を用いると，$\triangle ABC$ が第二種特異点をもつ場合も，(4.2) が成り立つ．

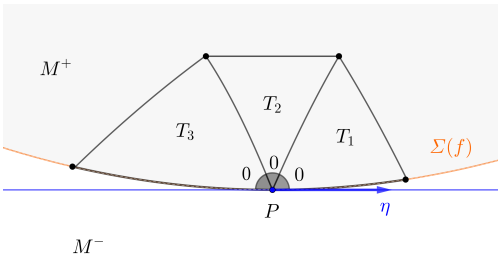
5　主結果

主結果は以下の定理 2 つである．

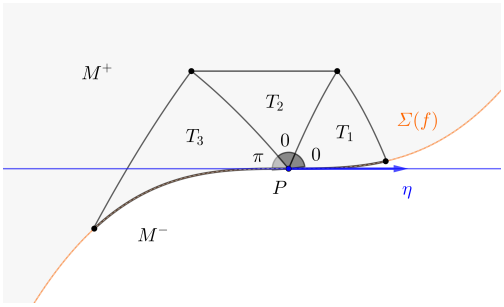
定理 5.1. フロンタル f の特異点は全て偶数次退化特異点であるとする．このとき 2 次元多様体 M^2 が向き付け可能であることと，f が余向き付け可能であることが同値である．

定理 5.1 は偶数次退化の定義 2.5 より，M^2 の各局所座標系 $(U; u, v)$ に対して，$\lambda \geq 0$ が成り立つと仮定してよいことから示せた．

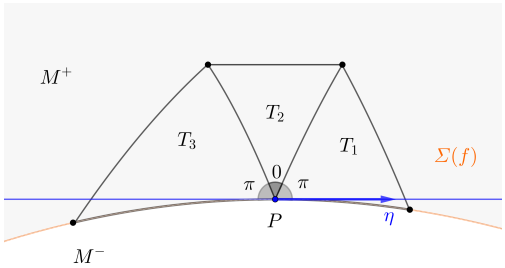
第二種奇数次退化特異点 P における M^+ の内角とは，M^+ を三角形分割したときにできる，P を頂点にもつ n 個の三角形 T_1，$T_2, \ldots, T_n$ に対して，P における n 個の内角の和をいう．(4.1) より M^+ の内角は 0，π，2π のいずれかである．



M^+ の内角が 0 の場合．



M^+ の内角が π の場合．



M^+ の内角が 2π の場合．

図 4　許容的な第二種特異点 P における M^+ の内角

このとき有限次退化特異点に対するガウス・ボンネの定理は次のようになるとわかった．

定理 5.2. M^2 をコンパクトで境界をもたない向き付け可能な 2 次元多様体とする．また $f : M^2 \to \mathbb{R}^3$ をフロンタルとし，f の特異点は全て有限次退化特異点であり，第一種特異点または許容的な第二種特異点であるとする．さらに ν を大域的に定義された f の単位法線ベクトル場とし，$\chi(M^2)$ を M^2 のオイラー標数とする．一方で $d\hat{A}$ を ν に関する符号付き面積要素，dA を符号なし面積要素とし，ガウス曲率 K に対して $\hat{\Omega} = K d\hat{A}$, $\Omega = K dA$ と定める．このとき f の特異点が全て奇数次退化ならば，次の 2 つの等式が成り立つ．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{M^2}\Omega + \frac{1}{\pi}\int_{\Sigma(f)}\kappa_s ds = \chi(M^2),$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{M^2}\hat{\Omega} = \chi(M^+) - \chi(M^-) + \sum_{i=1}^{n}\mathrm{sgn}(P_i).$$

また偶数次退化ならば，次の 1 つの等式が成り立つ．

$$\frac{1}{2\pi}\int_{M^2}\Omega = \chi(M^2).$$

ただし

$$\int_{M^2}\Omega := \int_{M^+}\hat{\Omega} - \int_{M^-}\hat{\Omega},$$
$$\mathrm{sgn}(P) := \begin{cases} 1 & (P \text{ における } M^+ \text{ の内角が } 2\pi \text{ のとき}) \\ 0 & (P \text{ における } M^+ \text{ の内角が } \pi \text{ のとき}) \\ -1 & (P \text{ における } M^+ \text{ の内角が } 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定める．

f の特異点が全て偶数次退化であるとき，以下の補題が成り立つ．

補題 5.3. M^2 上の三角形 $\triangle ABC$ に対して，辺 AB は特異辺でない，または偶数次退化特異点からなる辺とする．このとき

$$\Theta_{AB} = -\Theta_{BA} \tag{5.1}$$

が成り立つ．

補題 5.4. $P \in M^2$ が正則点または偶数次退化特異点であるとき，P における内角の総和は 2π である．

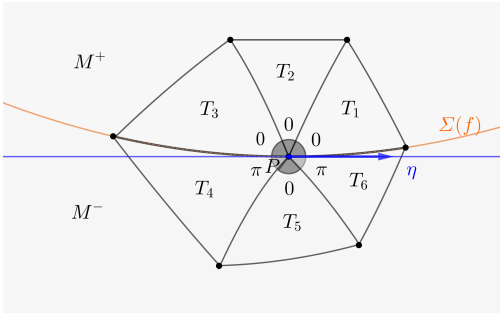


図 5　偶数次退化特異点 P における内角の総和

補題 5.3 は命題 3.3 の偶数次退化の場合を利用して示すことができる．また補題 5.4 は $M^2 = M^+$ であることと, 角度の定義からわかる．これらの補題を用いると定理 5.2 を証明できる．

証明. 定理 5.2 の奇数次退化に対する証明は, 非退化の場合 ([5], 定理 6.7.5) と同様の議論より示せる．

f の特異点は偶数次退化のみであると仮定する．$\{V_1, \ldots, V_N\}$ を三角形分割に現れる三角形の頂点の集合とし, m_j 個の三角形 $T_{j,1}, \ldots, T_{j,m_j}$ は j 番目の頂点 V_j を共有しているとする．補題 5.3 より各辺において全測地的曲率は打ち消し合う．また補題 5.4 より, V_i が特異点である場合とそうでない場合の両方で, V_i における内角の総和は 2π となる．三角形分割に現れる三角形 $\triangle ABC$ に対して (4.2) が成り立つ．ここで三角形分割に現れる全ての三角形の頂点の数を $\mathcal{V}$, 辺の数を $\mathcal{E}$, 面の数を $\mathcal{F}$ とおく．M^2 は境界をもたないことから $2\mathcal{E} = 3\mathcal{F}$ が成り立つ．このことから各三角形に対して (4.2) を両辺足し合わせることで,

$$\begin{aligned}\int_{M^2} \Omega &= 2\pi\mathcal{V} - \pi\mathcal{F} \\ &= 2\pi\mathcal{V} - 3\pi\mathcal{F} + 2\pi\mathcal{F} \\ &= 2\pi\mathcal{V} - 2\pi\mathcal{E} + 2\pi\mathcal{F} \\ &= 2\pi\chi(M^2)\end{aligned}$$

が成り立つ． □

参考文献

[1] M. Kossowski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorems for C^∞-singular surfaces with limiting tangent bundle*, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), 19–29.

[2] R. Langevin, G. Levitt, and H. Rosenberg, *Classes d'homotopie de surfaces avec rebroussements et queues d'aronde dans R^3*, Canad. J. Math. **47** (1995), 544–572.

[3] Luciana F. Martins, Kentaro Saji, Samuel P. dos Santos, and Keisuke Teramoto, *Boundedness of geometric invariants near a singularity which is a suspension of a singular curve*, arXiv:2206.11487, to appear in Revista de la Unión Matemática Argentina.

[4] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. **169** (2009), 491–529.

[5] M. Umehara, K. Saji, and K. Yamada, *Differential geometry of curves and surfaces with singularities*. Translated from the Japanese by Wayne Rossman. Series in Algebraic and Differential Geometry 1. Singapore: World Scientific. xvi, 370 p. (2022).

3 次元 Brieskorn ホモロジー球面の d 不変量の公式と計算

東京工業大学 理学院 数学系 数学コース
鈴木龍正 (Tatsumasa SUZUKI) *

概要

2003 年に Ozsváth 氏と Szabó 氏は, d 不変量と呼ばれる, 3 次元有理ホモロジー球面とその spin^c 構造に有理数を割り当てる, 有理ホモロジー spin^c 同境不変量を導入した. 本講演では, 最も基本的かつ重要な 3 次元ホモロジー球面の一つである 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面の d 不変量を求める既存の公式の精密化を行う. 更に, この精密化により新たに計算可能になった可算無限個の 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面の d 不変量の具体例について紹介する. 本講演は丹下基生氏 (筑波大学) との共同研究の内容を含む.

1 導入

本稿では, 多様体は全て滑らか, コンパクト, 連結かつ向き付けられているとする. 本節ではいくつかの記号と定義を紹介する. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{\geq m}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ をそれぞれ正の整数全体, 整数全体, m 以上の整数全体, 有理数全体, 実数全体, 複素数全体とする. また, $B^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | \sum_{k=1}^{n} x_k^2 < 1\}$ を n 次元開球体, $S^n := \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1\}$ を n 次元球面とする $(n \in \mathbb{N})$[*1].

定義 1.1 Y を n 次元閉多様体とする. 任意の整数 k に対して $H_k(Y;\mathbb{Z}) \cong H_k(S^n;\mathbb{Z})$ が成立するとき, Y を **n 次元ホモロジー球面 ($\mathbb{Z}HS^n$)** と呼ぶ.

定義 1.2 W を n 次元多様体とする. 任意の整数 k に対して $H_k(W;\mathbb{Z}) \cong H_k(B^n;\mathbb{Z})$ が成立するとき, W を **n 次元ホモロジー球体 ($\mathbb{Z}HB^n$)** と呼ぶ.

n 次元有理ホモロジー球面 ($\mathbb{Q}HS^n$), n 次元有理ホモロジー球体 ($\mathbb{Q}HB^n$) も $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Q}$ に置き換えることで全く同様に定義される.

1.1 d 不変量

2003 年に, Ozsváth 氏と Szabó 氏は, $\mathbb{Q}HS^3$ Y と Y の spin^c 構造 $\mathfrak{s}(Y)$ の組に有理数を与える, d 不変量 $d(Y, \mathfrak{s}(Y))$ を導入した. $d(Y, \mathfrak{s}(Y))$ は $+$ 版の Heegaard Floer ホモロジー $HF^+(Y, \mathfrak{s}(Y))$ 内の ∞ 版の Heegaard Floer ホモロジー $HF^\infty(Y, \mathfrak{s}(Y))$ の像内の任意の非捩れ元の最小次数として定義される [OS, Definition 4.1][*2]. d 不変量は Frøyshov 氏により [F, Section 3] で定義さ

* E-mail:suzuki.t.do@m.titech.ac.jp

*1 本稿の内容とは直接関係ないが, 0 次元球面は $S^0 := \{-1, 1\}$ である.

*2 Heegaard Floer 理論についての背景や詳細については [UM1], [UM2] または [OS] の参考文献を参照.

れた Seiberg-Witten 理論[*3]の不変量と等価である．d 不変量は有理ホモロジー spin^c 同境不変量である．[OS, Proposition 4.2] により, 任意の $\mathbb{Q}HS^3$ Y と Y の spin^c 構造 $\mathfrak{s}(Y)$ の組に対して, $d(-Y,\mathfrak{s}(Y)) = -d(Y,\mathfrak{s}(Y))$ が成り立つ．ここで, $-Y$ は Y の向きを逆にした多様体を表す．Y が $\mathbb{Z}HS^3$ であるときは, Y の spin^c 構造 $\mathfrak{s}(Y)$ は丁度 1 個であることから, $d(Y,\mathfrak{s}(Y))$ を $d(Y)$ と略記する．このとき, $d(Y) \in 2\mathbb{Z}$ であり, d 不変量はホモロジー同境不変量である．

3 次元多様体論において, 以下の素朴な未解決問題が存在する:

問題 1.3（Kirby の list の Problem 4.2 (の更新版)） どのような $\mathbb{Z}HS^3$ が $\mathbb{Z}HB^4$ の境界に微分同相になるか.

注意 1.4 任意の $\mathbb{Z}HS^3$ は, ある $\mathbb{Z}HB^4$ の境界にホモトピー同値である.

一般に, $d(Y,\mathfrak{s}(Y)) \neq 0$ であるとき, Y は任意の $\mathbb{Q}HB^4$ の境界に微分同相にならない．特に, Y が $\mathbb{Z}HS^3$ かつ $d(Y) \neq 0$ であるとき, Y は任意の $\mathbb{Z}HB^4$ の境界に微分同相にならない.

1.2 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面 $\Sigma(p,q,r)$

(p,q,r) を $0 < p < q < r$ かつ $\gcd(p,q) = \gcd(q,r) = \gcd(r,p) = 1$ を満たす整数の組とする．S^5_ε を十分小さい半径 ε をもつ 5 次元球面とする．3 次元閉多様体

$$\Sigma(p,q,r) := \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \cap S^5_\varepsilon | x^p + y^q + z^r = 0\}$$

を 3 次元 **Brieskorn ホモロジー球面**と呼ぶ.

3 次元閉多様体 $\Sigma(p,q,r)$ は 3 次元ホモロジー球面であることから,

$$e_0pqr + p'qr + pq'r + pqr' = -1,\ 0 < p' < p,\ 0 < q' < q,\ 0 < r' < r$$

を満たす唯一の整数の組 (e_0,p',q',r') が存在する．p,q,r をそれぞれ p_1,p_2,p_3 と適宜表記する.

$$-\frac{p_i}{p_i'} = t_{i1} - \cfrac{1}{t_{i2} - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{t_{im_i}}}},\ t_{im_i} \neq -1\ (i = 1,2,3)$$

のように一意的に連分数展開されるので, $\Sigma(p,q,r)$ の手術図式 (surgery diagram) は図 1 に示される頂点に数字が付いたグラフで表現される．ここで, 3 次元閉多様体の微分構造を変えない手術図式上の変形方法[*4]である slam-dunk は図 2 の操作に相当する.

$\Sigma(1,q,r) = S^3 = \partial B^4$ より, $d(\Sigma(1,q,r)) = d(S^3) = 0$ である．以下, $p > 1$ とする.

$\Sigma(2,3,5)$ は Poincaré ホモロジー球面であり, 3 次元球面 S^3 に同相[*5] ではない 3 次元ホモロジー球面の最初の例としてよく知られている.

[*3] Heegaard Floer 理論と Seiberg-Witten 理論においては, 今回の不変量の場合以外にも多くの等価な概念が双方の理論で発見されている.

[*4] 3 次元閉多様体上の手術図式上の変形方法についての詳細は, [M], [GS], [A] を参照.

[*5] 任意の 3 次元多様体 M, N において, M と N が同相であることと, M と N が微分同相であることは同値である．つまり, 全ての 3 次元多様体において, エキゾチック微分構造は存在しない.

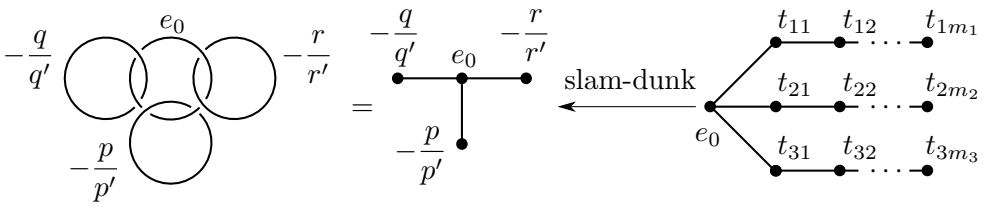


図 1　$\Sigma(p,q,r)$ の手術図式.

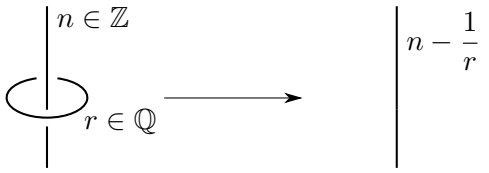


図 2　slam-dunk.

3 次元 Brieskorn ホモロジー球面 $\Sigma(p,q,r)$ は 3 次元ホモロジー球面の最も基本的かつ重要なクラスの一つであるが, 未解決問題 1.3 は $\Sigma(p,q,r)$ のみに限定しても未解決である. 特に, $\Sigma(p,q,r)$ に対する d 不変量を統一的かつ具体的に計算する方策が明確ではない.

[OS, Subsection 8.1] により,

$$d(\Sigma(2,3,6n-1)) = 2,\ d(\Sigma(2,3,6n+1)) = 0\ (n \in \mathbb{N})$$

であるから, 3 次元 Brieskorn ホモロジー球面 $\Sigma(2,3,5)$ を含む $\Sigma(2,3,6n-1)$ $(n \in \mathbb{N})$ は任意の 4 次元ホモロジー球体の境界に微分同相ではないことが分かる[*6].

2　$pq+pr-qr=1$ を満たす $\Sigma(p,q,r)$ の d 不変量

2.1　$pq+pr-qr=1$ を満たす $\Sigma(p,q,r)$ の d 不変量についての先行研究

この節では, $pq+pr-qr=1$ を満たすとする[*7]. この場合の 3 次元閉多様体 $\Sigma(p,q,r)$ の手術図式は図 1 の一番右の方法で表現すると, 図 3 に示されるグラフになる.

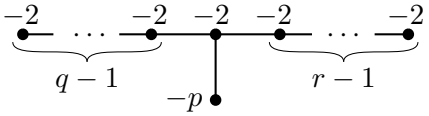


図 3　$pq+pr-qr=1$ を満たす $\Sigma(p,q,r)$ の手術図式.

これらのグラフは, 単純線形グラフに 1 個の頂点と 1 個の辺を枝分かれになるように繋ぐことで構成されることから, 概単純線形グラフ (almost simple linear graph) と呼ばれる. Poincaré ホモロジー球面 $\Sigma(2,3,5)$ の手術図式は E_8 graph になる.

Karakurt 氏と Şavk 氏は, $pq+pr-qr=1$ を満たす $\Sigma(p,q,r)$ の d 不変量について調べた:

[*6] 他にもいくつかの可算無限個の $d(\Sigma(p,q,r))$ の具体的な計算方法が知られている.

[*7] この節の内容の証明等の詳細について興味のある方は, [S] を参照して頂けたらと思います.

命題 2.1（Karakurt-Şavk [KŞ, Proposition 4.5]） p が偶数かつ $pq+pr-qr=1$ であるとき,

$$d(\Sigma(p,q,r)) = \frac{q+r}{4} = \frac{r^2-1}{4(r-p)} = \frac{q^2-1}{4(q-p)} (>0).$$

p を奇数とし, $n := (p-1)/2$ とする. $\mathfrak{L} := \{\pm 1, \pm 3, \ldots, \pm p\} \times \{0, 1, \ldots, n\}$,
$R := \{(x,y) \in \mathfrak{L} | F(x,y) \geq F(1,1)\}$ とする.

定理 2.2（Karakurt-Şavk [KŞ, Theorem 1.1]） p が奇数かつ $pq+pr-qr=1$ であるとき,

$$d(\Sigma(p,q,r)) = \max_{(a,m)\in R} F(a,m) (\geq F(1,1) = p-1 > 0).$$

注意 2.3 命題 2.1 と定理 2.2 より, 任意の $pq+pr-qr=1$ を満たす $\Sigma(p,q,r)$ は, 任意の 4 次元ホモロジー球体の境界に微分同相ではないことが分かる.

2.2 $pq+pr-qr=1$ を満たす $\Sigma(p,q,r)$ の d 不変量についての主結果

p が奇数の場合により具体的に計算する. n を $q-p$ で割ったときの商と剰余をそれぞれ, t, α とする: $n = (q-p)t + \alpha$, $0 \leq \alpha < q-p$.

$$f(x,y) := -(q+r)x^2 + 4qxy - 4(q-p)y^2 - 4y, \ F(x,y) := \frac{f(x,y)+q+r}{4},$$

$$\mathfrak{M}' := \{(a,m) \in \mathbb{Z}^2 | a \in 2\mathbb{N}+1, a < m \leq n\}, \ \mathfrak{M} := \{(1, t+1)\} \sqcup \mathfrak{M}',$$

$S := \{(x,y) \in \mathfrak{M} | F(x,y) \geq F(1,1)\}$ とする.

定理 2.4（S. [S, Theorem 1.2]） p が奇数かつ $pq+pr-qr=1$ であるとき,

$$d(\Sigma(p,q,r)) = \max_{(a,m)\in S} F(a,m) \geq F(1,t+1) = (t+1)(n+\alpha).$$

注意 2.5 t が奇数のとき, $t+1$ は偶数であり, t が偶数のとき, $n+\alpha = t(q-p)+2\alpha$ は偶数であるから, 任意の整数 t に対して, $F(1,t+1) = (t+1)(n+\alpha)$ は偶数である.

注意 2.6 任意の $(a,m) \in \mathfrak{M}'$ に対して, $F(a,m) \leq (t+1)(n+\alpha)$ であるとき, 定理 2.4 より $d(\Sigma(p,q,r)) = (t+1)(n+\alpha)$ である.

例 2.7 [KŞ, Theorem 1.3] にある全ての具体例は, 定理 2.4 の不等式の等号が成立する十分条件になる. 具体的には, p が奇数かつ $pq+pr-qr=1$ であるとき,

$$q \in \{p+1, (5p+1)/4, (5p+3)/4, (3p-1)/2, (3p+1)/2, 2p-1\}$$

の場合は $d(\Sigma(p,q,r)) = (t+1)(n+\alpha)$ が成り立つ.

$\mathfrak{L}$ の点全体と $\mathfrak{M}$ の点の候補全体を図示した様子は図 4 になる.

命題 2.2 を定理 2.4 に精密化することで, 以下の計算結果を新たに得ることができた.

系 2.8（S. [S, Corollary 5.1]） $q-p=2$ であるとき, $d(\Sigma(p,q,r)) = (t+1)(n+\alpha)$.

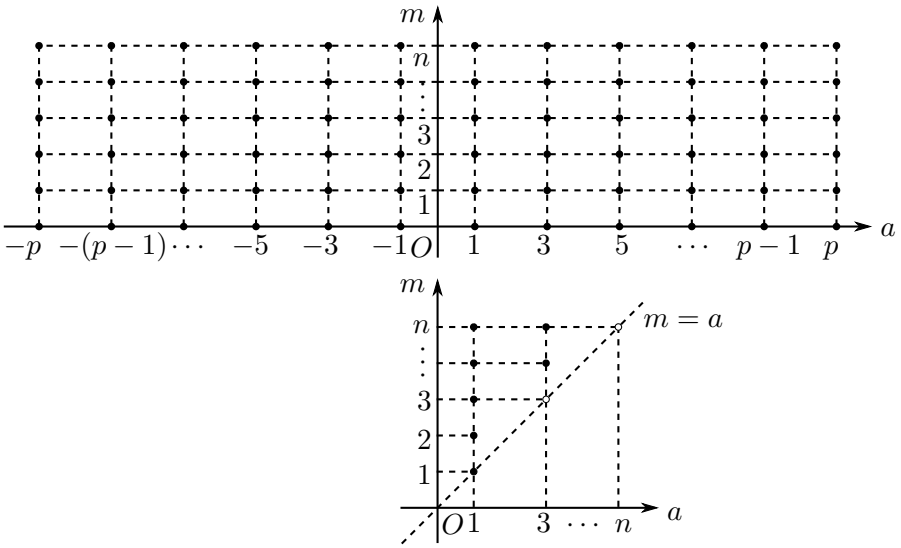


図 4　$\mathfrak{L}$ の点全体 (上) と $\mathfrak{M}$ の点の候補全体 (下).

系 2.9（S. [S, Corollary 5.2]）　$p \leq 23$ かつ $q - p \geq n$ であるとき, $d(\Sigma(p,q,r)) = p - 1$.

$$D(p,q,r) := \begin{cases} (t+1)(n+\alpha) & (p \in 2\mathbb{N}+1), \\ d(\Sigma(p,q,r)) & (p \in 2\mathbb{N}) \end{cases}$$

とする.

命題 2.10（S. [S, Proposition 4.1]）　(p_i, q_i, r_i) を $1 < p_i < q_i < r_i$ かつ $p_iq_i + p_ir_i - q_ir_i = 1$ を満たす整数の組とする $(i = 1, 2)$. $p_1 = p_2 = p$ かつ $q_1 \geq q_2$ であるとき,

$$2\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \leq D(p_1,q_1,r_1) \leq D(p_2,q_2,r_2) \leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor.$$

特に,

$$d(\Sigma(p, 2p-1, 2p+1) = 2\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor,\ d(\Sigma(p, p+1, p^2+p-1) = \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor^2 + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor.$$

また, 以下の命題を得た:

命題 2.11（S. [S, Proposition 4.2]）　p が奇数であるとき, $D(p,q,r) = p - 1 \iff q - p \geq n$.

注意 2.12　$A_0 := \{(p_1,p_2,p_3) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 2} | p_1 < p_2 < p_3, \gcd(p_i,p_j) = 1 (i \neq j), p_1p_2 + p_1p_3 - p_2p_3 = 1\}$, $A_1 := \{(p,q,r) \in A_0 | p \in \{(3p-1)/2, (3p+1)/2, 2p-1\}$ または $p \leq 23$ かつ $q - p \geq n\}$ とし, $A_2 := \{(p,q,r) \in A_0 | q - p < n\}$ とする. 任意の $(p_i,q_i,r_i) \in A_i$ $(i = 1, 2)$ に対して,

$$d(\Sigma(p_1,q_1,r_1)) = p - 1 < D(p_2,q_2,r_2) \leq d(\Sigma(p_2,q_2,r_2)).$$

これにより, $\Sigma(p_1,q_1,r_1)$ と $\Sigma(p_2,q_2,r_2)$ はホモロジー同境ではないことが分かる.

次の例は [KŞ] で紹介されている具体例の中で, 唯一明示的に計算されていない例である.

例 2.13（S. [S, Example 5.4]） F_k を第 k 次 Fibonacci 数とする. $(p,q,r)=(F_{2n+1},F_{2n+2},F_{2n+3})$ とすると

$$\begin{aligned} pq+pr-qr &= F_{2n+1}F_{2n+2}+F_{2n+1}F_{2n+3}-F_{2n+2}F_{2n+3} \\ &= F_{2n+1}F_{2n+3}+(F_{2n+1}-F_{2n+3})F_{2n+2} \\ &= F_{2n+1}F_{2n+3}-F_{2n+2}^2=(-1)^{2n+2}=1. \end{aligned}$$

$F_k\in\mathbb{Z}$ であるための必要十分条件は $k\in 3\mathbb{Z}$ である. $2n+1\in 3\mathbb{Z}$ であるとき, 命題 2.4 より

$$d(\Sigma(F_{2n+1},F_{2n+2},F_{2n+3}))=\frac{F_{2n+2}+F_{2n+3}}{4}=\frac{F_{2n+4}}{4}.$$

$2n+1\notin 3\mathbb{Z}$ であるとき, $(F_{2n+1}-1)/2$ を F_{2n} で割ったときの商は 0 であり, 剰余は $(F_{2n+1}-1)/2$ であるから, $D(F_{2n+1},F_{2n+2},F_{2n+3})=F_{2n+1}-1$.

3 一般の $\Sigma(p,q,r)$ の d 不変量

本節は丹下基生氏 (筑波大学数理物質系) との共同研究の内容である.

3.1 レンズ空間間の d 不変量の相互法則の一般化

sawtooth function $((\cdot)):\mathbb{R}\to(-1/2,1/2)$ を

$$((x)):=\begin{cases}\{x\}-1/2 & (x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}),\\ 0 & (x\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

で定義する. ここで, $\{x\}:=x-\lfloor x\rfloor$ である. $Z:=\{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}|\gcd(a,b)=1\}$ とする. Dedekind 和 $s:Z-\{(1,0)\}\to\mathbb{R}$ を

$$s(a,b):=\sum_{n=1}^{|b|}\left(\left(\frac{n}{b}\right)\right)\left(\left(\frac{an}{b}\right)\right)$$

で定義する. 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して, $((-x))=-((x))$ であることから $s(-a,b)=-s(a,b)$ $((a,b)\in Z-\{(1,0)\})$ である. Dedekind 和間の相互法則:

$$s(a,b)+s(b,a)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{a}{b}+\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}\right)$$

が任意の $(a,b)\in Z_0:=\{(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}|\gcd(x,y)=1\}$ に対して成り立つ.

$L(a,b)$ を (a,b) 型のレンズ空間とする ($(a,b)\in Z_0$). 任意の整数 k に対して, $L(a,b+ak)=L(a,b)$ である. $\mathrm{Spin}^c(L(a,b))\cong\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ であることから, 任意の $L(a,b)$ の spin^c 構造はある整数に対応する. 任意の整数 n に対して,

$$d(L(a,b),n+a)=d(L(a,b),n)$$

であることに注意する. 以下, $d(L(a,b),n)$ を $d(a,b;n)$ と略記する.

整数 k を整数 l で割ったときの剰余を $[k]_l$ と表記する. レンズ空間間の d 不変量の相互法則は Ozsváth 氏と Szabó 氏により示されている.

命題 3.1（Ozsváth-Szabó [OS, Proposition 4.8]） $(a,b)\in Z_0$, $a>b$, $0\le n<a+b$ であるとき,

$$d(a,b;n)=-d(b,a;n)-\frac{ab-(2n+1-a-b)^2}{4ab}.$$

本稿でのレンズ空間 $L(a,b)$ の向きは [OS] の向きとは異なることに注意する.

任意の整数 n に対して, $\varepsilon(a,b;n):=\#\{(k,l)\in\mathbb{N}^2|ak+bl\le n\}$ とする. 任意の $n<a+b$ に対して, $\varepsilon(a,b;n)=0$ である. 命題 3.1 を次のように拡張した:

定理 3.2 $(a,b)\in Z_0$, $n\ge 0$ であるとき,

$$d(a,b;n)=-d(b,a;n)-\frac{ab-(2n+1-a-b)^2}{4ab}-2\varepsilon(a,b;n).$$

[証明の概略] 命題 3.1 における相互法則の a と b の対称性から, $a>b$ の場合に成り立てば $b>a$ の場合も同時に成り立つ. a^-, b^- をそれぞれ

$$a^-a\equiv 1 \pmod b,\ 1\le a^-\le b-1,\ b^-b\equiv 1 \pmod a,\ 1\le b^-\le a-1$$

を満たす唯一の整数とする.

$$E(a,b;n):=-\frac{1}{2}\left(d(a,b;n)+d(b,a;n)+\frac{ab-(2n+1-a-b)^2}{4ab}\right)\ (n\ge 0)$$

とすると, $E(a,b;0)=0$, $\varepsilon(a,b;0)=0$,

$$\begin{aligned}E(a,b;n)-E(a,b;n-1)&=\frac{n}{ab}-1+\frac{[-b^-n]_a}{a}+\frac{[-a^-n]_b}{b}\\&=\#\{(k,l)\in\mathbb{N}^2|ak+bl=n\}=\varepsilon(a,b;n)-\varepsilon(a,b;n-1)\ (n\ge 0)\end{aligned}$$

であるから, $E(a,b;n)=\varepsilon(a,b;n)$ $(n\ge 0)$ である. □

注意 3.3 命題 3.2 より, 任意の $(a,b)\in Z_0$ と任意の整数 $n\in\mathbb{Z}$ に対して,

$$\begin{aligned}&d(a,b;n)=d(a,b;[n]_{ab})\\&=-d(b,a;[n]_{ab})-\frac{ab-(2[n]_{ab}+1-a-b)^2}{4ab}-2\varepsilon(a,b;[n]_{ab}).\end{aligned}$$

3.2 τ, κ, λ の定義と計算

正の整数 s に対して, δ-function $\delta_s:\mathbb{Z}\to\{0,1\}$ を

$$\delta_s(n):=\begin{cases}1 & (n\equiv 0 \pmod s),\\ 0 & (n\not\equiv 0 \pmod s)\end{cases}$$

で定義する.

$A:=\{(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{Z}^3_{\ge 0}|p_1<p_2<p_3,\gcd(p_i,p_j)=1(i\ne j)\}$ とする. $\Delta:A\times\mathbb{Z}_{\ge 0}\to\mathbb{Z}$ を

$$\begin{aligned}\Delta(p,q,r;n)&:=1-e_0n-\left\lceil\frac{p'n}{p}\right\rceil-\left\lceil\frac{q'n}{q}\right\rceil-\left\lceil\frac{r'n}{r}\right\rceil\\&=-\frac{1}{2}+\frac{n}{pqr}-\sum_{i=1}^{3}\left(\left(\left(-\frac{p_i'n}{p_i}\right)\right)-\frac{1}{2}\delta_{p_i}(n)\right),\end{aligned}$$

$\tau : A \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}$ を

$$\tau(p,q,r;n) := \begin{cases} 0 & (n=0), \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \Delta(p,q,r;i) & (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

で定義する.

丹下氏によるレンズ空間の d 不変量の公式 [T, Theorem 4] と [T, Lemma 1] により,

$$d(a,b;n) = 3s(b,a) + \frac{a-1-2[n]_a}{2a} - 2\sum_{k=0}^{[n]_a} \left(\left(-\frac{b^- k}{a} \right) \right) \ ((a,b) \in Z_0,\ n \in \mathbb{Z})$$

になることを用いることで, τ は以下のように計算できる:

補題 3.4 任意の非負の整数 n に対して,

$$\begin{aligned} \tau(p,q,r;n+1) = \frac{n^2}{2pqr} - \frac{pqr-pq-qr-rp-1}{2pqr}n + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right) \\ + \frac{1}{2}(d(p,-qr;n) + d(q,-rp;n) + d(r,-pq;n)) \\ + \frac{3}{2}(s(qr,p) + s(rp,q) + s(pq,r)). \end{aligned}$$

$\lambda(p,q,r)$ を $\Sigma(p,q,r)$ の Casson 不変量とし,

$$\kappa(p,q,r) := \#\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{N}^3 \middle| \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} < 1 \right\}$$

とする.

$\kappa(p,q,r)$ は Rosen 氏の主結果 [R, Theorem 1.1]:

$$\begin{aligned} &\#\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \middle| x,y,z \geq 0, 0 < \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} < 1 \right\} \\ &= \frac{pqr}{6} + \frac{pq+qr+rp}{4} + \frac{p+q+r}{4} + \frac{(pq)^2+(qr)^2+(rp)^2+1}{12pqr} - 2 \\ &\quad -s(qr,p) - s(pr,q) - s(pq,r) \end{aligned}$$

から, 次のように計算できる:

補題 3.5

$$\begin{aligned} \kappa(p,q,r) = \frac{pqr}{6} - \frac{pq+qr+rp}{4} + \frac{p+q+r}{4} + \frac{(pq)^2+(qr)^2+(rp)^2+1}{12pqr} - \frac{1}{2} \\ -(s(qr,p) + s(pr,q) + s(pq,r)). \end{aligned}$$

$\Sigma(p,q,r)$ の Casson 不変量 $\lambda(p,q,r)$ も Fintushel 氏と Stern 氏の結果: [FS, Theorem 2.10] と [FS, p. 116–117] から

$$\lambda(p,q,r) = \frac{1}{8}\sigma(B(p,q,r)) = -\frac{(p-1)(q-1)(r-1)}{8} + \frac{1}{2}\kappa(p,q,r)$$

であるから, 補題 3.5 と組み合わせることで, 次のように計算できる:

補題 3.6

$$\lambda(p,q,r) = -\frac{pqr}{24} + \frac{(pq)^2+(qr)^2+(rp)^2+1}{24pqr} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2}(s(qr,p)+s(pr,q)+s(pq,r)).$$

3.3 一般の $\Sigma(p,q,r)$ の d 不変量についての主結果

$\mathcal{T}(p,q,r;n) := 2(\tau(p,q,r;n+1)+\lambda(p,q,r)+\kappa(p,q,r))$ とする. 以下の一般の $\Sigma(p,q,r)$ に対する d 不変量の関係式が Can 氏と Karakurt 氏により構成されている:

命題 3.7（Can-Karakurt [CK]）

$$d(\Sigma(p,q,r)) = -\min_{n\geq -1} \mathcal{T}(p,q,r;n).$$

$$N_0(p,q,r) := pqr - pq - qr - rp,$$

$$R(p,q,r) := \left\{ n\in\mathbb{Z} \middle| \max\left\{ \frac{N_0(p,q,r)}{2} - pq, -1 \right\} \leq n \leq \frac{N_0(p,q,r)-1}{2} \right\}$$

とする. 命題 3.7 の最小値の候補を pq 以下の場合にまで制限した:

定理 3.8

$$d(\Sigma(p,q,r)) = -\min_{n\in R(p,q,r)} \mathcal{T}(p,q,r;n).$$

[証明の概略] 任意の $n\geq -1$ に対して,

$$\begin{aligned}&\mathcal{T}(p,q,r;n)\\ &= \frac{1}{pqr}\left(n - \frac{N_0(p,q,r)-1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + d(p,-qr;n) + d(q,-pr;n) + d(r,-pq;n)\end{aligned}$$

が成り立つ. 任意の $n\in\mathbb{Z}$ に対して, $D(p,q,r;n) := d(p,-qr;n)+d(q,-rp;n)+d(pq,r;n)$,

$$F(p,q,r;n) := -\frac{pq-p-q-1}{pq}\left(n - \frac{N_0(p,q,r)+r-pq-2}{4}\right)$$

とすると, [T, Lemma 1]: $d(r,-pq;n) = d(r,r-pq;n) = -d(r,pq;n+pq)$ と定理 3.2 より任意の $n\geq -1$ に対して,

$$\mathcal{T}(p,q,r;n) = D(p,q,r;n) + F(p,q,r;n) + 2\varepsilon(r,pq;n+pq).$$

[CK, Theorem 1.3] により, $\Delta(p,q,r;n)\geq 0$ $(n > N_0(p,q,r))$,
$\Delta(p,q,r;n) = -\Delta(p,q,r;N_0(p,q,r)-n)$ $(0\leq n\leq N_0(p,q,r))$ であるから,

$$\min_{n\geq 0}\tau(p,q,r;n) = \min_{0\leq n\leq N_0(p,q,r)+1}\tau(p,q,r;n)$$

かつ $\tau(p,q,r;N_0(p,q,r)+1-n) = \tau(p,q,r;n)$ $(0\leq n\leq \lfloor (N_0(p,q,r)+1)/2\rfloor)$ であるから,

$$d(\Sigma(p,q,r)) = -\min_{-1\leq n\leq \lfloor (N_0(p,q,r)-1)/2\rfloor} \mathcal{T}(p,q,r;n).$$

$\sigma(p,q) := (pq-p-q-1)/2$ とすると, 任意の $n \geq pq-1$ に対して, $D(p,q,r;n) = D(p,q,r;n-pq)$, $F(p,q,r;n) - F(p,q,r;n-pq) = -2\sigma(p,q)$, $\varepsilon(r,pq;n+pq) - \varepsilon(r,pq;n) = \lfloor n/r \rfloor$ であるから,

$$\mathcal{T}(p,q,r;n) - \mathcal{T}(p,q,r;n-pq) = -2\left(\sigma(p,q) - \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor\right).$$

$pq-1 \leq n \leq \lfloor (N_0(p,q,r)-1)/2 \rfloor$ であるとき,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{r} \right\rfloor &\leq \left\lfloor \frac{N_0(p,q,r)-1}{2r} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{pqr-pq-qr-rp-1}{2r} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{(pq-p-q-1)r + r - pq - 1}{2r} \right\rfloor = \sigma(p,q) + \left\lfloor \frac{r-pq-1}{2r} \right\rfloor \leq \sigma(p,q). \end{aligned}$$

であるから, $\mathcal{T}(p,q,r;n) \leq \mathcal{T}(p,q,r;n-pq)$ $(pq-1 \leq n \leq \lfloor (N_0(p,q,r)-1)/2 \rfloor)$.

よって, 定理 3.8 の主張が成立する. □

謝辞

本研究は, JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2106 (鈴木) の支援と科研費 (課題番号:21K03216)(丹下) の助成を受けたものです. 特に, このプログラムの一環として東京大学大学院数理科学研究科の逆井卓也氏の研究室で本稿の内容を発表した際に, $\alpha > 0$ だけでなく $\alpha = 0$ のときも $F(1,t+1) = (t+1)(n+\alpha)$ が成立することをご教示してくださった黒田直樹氏に感謝致します. 改めて, 共同研究者の丹下基生氏, 私が所属している遠藤久顕氏の研究室の皆様, 逆井卓也氏の研究室の皆様にこの場を借りて感謝申し上げます.

参考文献

[A] S. Akbulut, *4-manifolds*, Oxf. Grad. Texts Math., 25 Oxford University Press, Oxford, 2016. xii+262 pp.
[CK] M. B. Can and C. Karakurt, *Calculating Heegaard-Floer homology by counting lattice points in tetrahedra*, Acta Math. Hungar. **144** (2014), no. 1, 43–75.
[F] K. A. Frøyshov, *The Seiberg-Witten equations and four-manifolds with boundary*, Math. Res. Lett. **3** (1996), no.3, 373390.
[FS] R. Fintushel and R. J. Stern, *Instanton homology of Seifert fibred homology three spheres*, Proc. London Math. Soc. (3), **61** (1990), 109–137.
[GS] R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics, Volume **20**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
[KŞ] C. Karakurt and O. Şavk, *Ozsváth-Szabó d-invariants of almost simple linear graphs*, J. Knot Theory Ramifications **29** (2020), no. 5, 2050029, 17 pp.
[M] 茂手木公彦, デーン手術, ひろがるトポロジー, 共立出版 (2022).
[OS] P. Ozsváth and Z. Szabó, *Absolutely graded Floer homologies and intersection forms for four-manifolds with boundary*, Adv. Math. **173** (2003), no. 2, 179–261.
[R] K. H. Rosen, *Dedekind-Rademacher sums and lattice points in triangles and tetrahedra*, Acta Arith. **39** (1981), no. 1, 59-75.
[S] T. Suzuki, *The d-invariant of any Brieskorn homology sphere with an equation*, arXiv:2310.14279.
[T] M. Tange, *Ozsváth Szabó's correction term and lens surgery*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), no. 1, 119–134.
[UM1] 上正明, 松本幸夫, 4 次元多様体 I, 朝倉数学体系, 朝倉書店 (2022).
[UM2] 上正明, 松本幸夫, 4 次元多様体 II, 朝倉数学体系, 朝倉書店 (2022).

ある楕円曲面に任意の種数 1 の fibered knot について knot 手術を施した多様体が 1-ハンドルを持たないことの証明

岡山大学大学院　環境生命自然科学研究科　数理物理科学専攻
藪口　怜央 (Reo YABUGUCHI) *

概要

1-ハンドルのないハンドル分解を持つ 4 次元閉多様体は単連結であることは広く知られている。一方で、R.Kirby 氏の未解決問題集に「任意の単連結 4 次元閉多様体は 1-ハンドルを持つか」という問題があり、様々な多様体についてこの問題が取り組まれている。本論文では、$E(n)_K$ が許容する Lefschetz fibration の構造から得られるカービー図式に対してカービー計算を行うという手法で「種数 1 の fibered knot K に対して $E(1)_K$ という多様体が 1-ハンドルを持たない」ことを示した。

1　導入

1.1　カービー計算

任意のコンパクト C^∞4 次元多様体は、4 次元球体 D^4 に微分同相な k-ハンドルと呼ばれる多様体によって分解されることが知られている $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$。各 k によって接着の仕方が異なり、$k = 0, 1, 2, 3, 4$-ハンドルを 0 から順番に接着写像といわれる微分同相写像で貼り付けている。また、コンパクトで連結な多様体は 0-ハンドルの個数が 1 つであることが分かっており、0-ハンドルに、$1, 2$-ハンドルを順に接着したものを Y_2 としておく。与えられたコンパクト C^∞4 次元多様体 Y が閉多様体であったとき、Y_2 によって Y の微分同相類が完全に決定されるなどの事実がある。そのような事実から、特別な多様体を扱わない限りハンドル分解における重要な情報は、$1, 2$-ハンドルがその多くを占めていることが分かっている。

ハンドル分解を表した図式をカービー図式といい、1-ハンドルを 3 次元球体対（または、点付き円)、2-ハンドルを枠付き絡み目（または、2 重螺旋絡み目）で表す。また、微分同相類を保ってその図式を変形する操作をカービー計算という。

本論文では、$\mathbb{R}^3$ 内に埋め込まれた結び目や絡み目の $\mathbb{R}^2$ への射影上の 1 点 p における交差 $\sigma(p)$ の正負を図 1 のように定める。また、任意の $n \in \mathbb{Z}$ について n 回ツイストを図 4 のように箱の中に n と書き略記することがある。本論文では、以下の図でツイストの記法を定めておく。

定理 1.1. [GS](ハンドルスライド)

* E-mail:reo0713@s.okayama-u.ac.jp

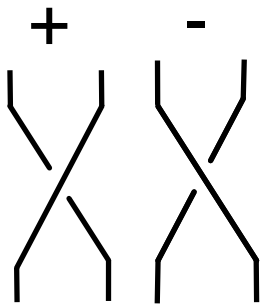


図 1: 交差の正負

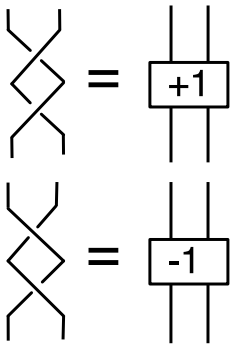


図 2: ツイストの記法 1

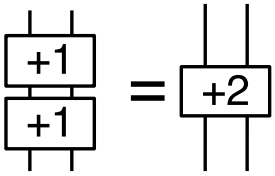


図 3: ツイストの記法 2

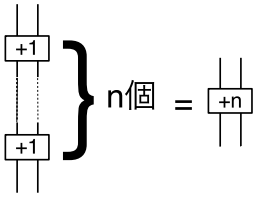


図 4: ツイストの記法 3

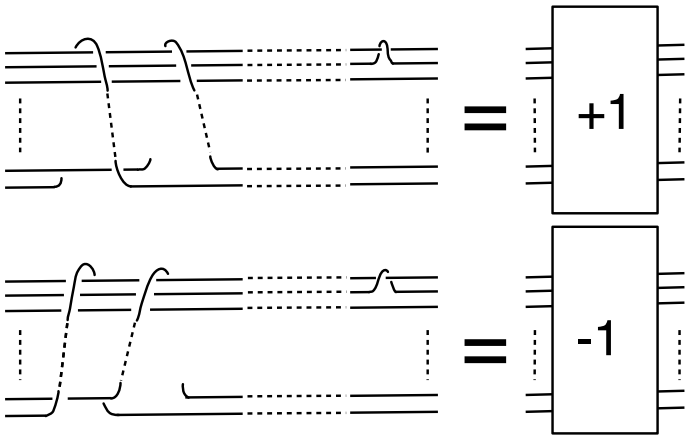


図 5: ツイストの記法 4

整数 m_i に対し、$K_i^{m_i}$ を枠 m_i の 2-ハンドルとする $(i = 1, 2)$。即ち、$\mathbb{R}^3$ 内に埋め込まれた枠付き結び目である。図 6 のように $K_1^{m_1}$ を変形する操作を $K_1^{m_1}$ の $K_2^{m_2}$ へのハンドルスライドという。ハンドルスライドは、ハンドルスライド前後の図式が表す多様体の微分同相類を保つ。$K_1^{m_1}$ のハンドルスライドを行った後の枠を m_1' とし、スライドしたものを $K_1^{m_1'}$ とかく。枠 m_1' は linking number を $lk(K_1, K_2) := \sum_{p \in K_1 \cap K_2} \frac{\sigma(p)}{2}$ で定めるとき、$m_1' := m_1 + m_2 + 2lk(K_1, K_2)$ と計算する。

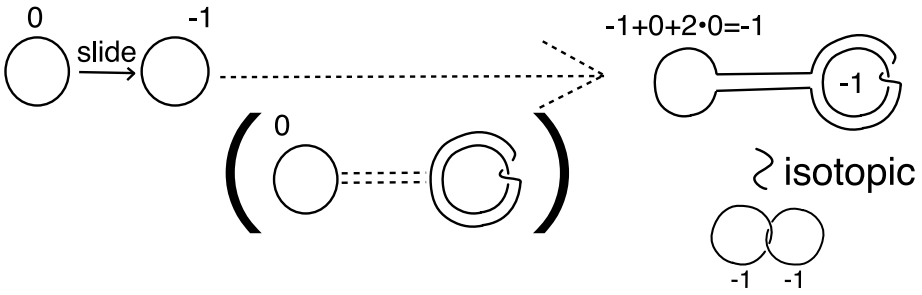


図 6: 2-ハンドル K_1^0 を K_2^{-1} へスライドする操作の例

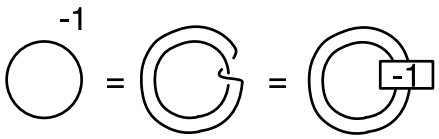


図 7: 枠付き結び目の異なる記法の例

注 1.2. [GS](2 重螺旋絡み目記法) カービー図式では 2-ハンドルを枠付き結び目で記述すると述べたが、図 7 のように枠を記さずに 2 つの結び目が枠の数に依存する回数絡んだ絡み目として記す方法もある。一般的には、図式の簡略化のため枠付き結び目で 2-ハンドルを表す。ハンドルスライドの図式の変形中に、絡んでいる方の結び目にスライドする方の結び目から橋を渡すような（band sum という）操作を行うためこの記法もしばしば現れる。

定理 1.3. [GS](ハンドルキャンセル)

4 次元多様体のカービー図式が、2-ハンドルと 1-ハンドルが図 8 ように 1 回だけ交わっている部分を持つとき、任意の枠に対してカービー図式から該当の 1-,2-ハンドルだけを消去できる。
この操作をハンドルキャンセルといい、ハンドルキャンセル前後の図式が表す多様体の微分同相類を保つ。



図 8: ハンドルキャンセル可能な状況の例

定理 1.4. [GS]

カービー図式において、図式同士が結び目及び絡み目の連続変形で移り合うとき isotopic であるといい、isotopic な 2 つのカービー図式はの同じ微分同相類を持つ。また、図 9 のような変形も連続変形として許し、図式は isotopic である。

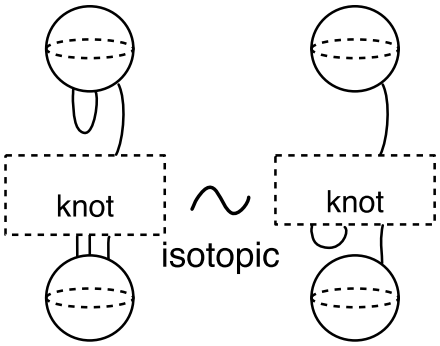


図 9: 1-ハンドルを通る 2-ハンドルの isotopic な図式の例

1.2 Lefschetz fibration

以下で Lefshetz fibration の定義とモノドロミー因数分解及びカービー図式の関係について紹介する。

定義 1.5. [GS](Lefshetz fibration)
M^4 をコンパクト向き付け可能 $C^\infty 4$ 次元多様体、B^2 をコンパクト向き付け可能 $C^\infty 2$ 次元多様体、$f\colon M^4 \to B^2$ を全射 C^∞ 写像とするとき、f が B^2 上の種数 g の Lefschetz fibration であるとは次の条件を満たすことである。

1. $\partial M^4 = f^{-1}(\partial B^2)$
2. $b_1, b_2, \ldots, b_n (\in Int(B^2))$ を f の臨界値 (ただし、n は有限) とし、f の臨界点 $p_i (\in f^{-1}(b_i))$ が条件 (a),(b) を満たして一意存在する $(i = 1, 2, \ldots, n)$。
   (a) $f|_{f^{-1}(B^2 - \{b_1, b_2, \ldots, b_n\})}$ が種数 g の閉曲面 Σ_g に微分同相なものをファイバーにもつファイバー束である。
   (b) $w = f(z_1, z_2) = z_1 z_2$ を満たす p_i と b_i の周りの向きを保つ複素局所座標が存在する。
3. M^4 に埋め込まれた自己交差数 (-1) の球面をどの $f^{-1}(b_i)$ も含まない。

$b_0 \in Int(B^2) - \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ に対して $f^{-1}(b_0)$ を正則ファイバー、$f^{-1}(b_i)$ を特異ファイバーという。
この特異ファイバーは、閉曲面 Σ_g に微分同相な正則ファイバー上の単純閉曲線が 1 点に潰すことで得られ、この潰れる単純閉曲線のことを消滅サイクルという。

1.3 写像類群

定義 1.6. 集合 $\mathrm{Diff}_+(\Sigma_g) = \{\varphi\colon \Sigma_g \to \Sigma_g \mid \varphi$ は向きを保つ微分同相写像 $\}$ は、写像の合成を積として群となる。φ_0 と φ_1 が isotopic であるとは、連続写像 $\Phi\colon \Sigma_g \times [0,1] \to \Sigma_g$ が存在して $\varphi_t := \Phi(\cdot, t)\colon \Sigma_g \to \Sigma_g$ が $\mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)$ の元となる時である。また、記号で $\varphi_0 \sim \varphi_1$ と書く。この時、$\sim$ は同値関係である。

定義 1.7. 種数 g の閉曲面 Σ_g の写像類群 Γ_g とは $\Gamma_g = \mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)/\sim$ である。
$[f], [g] \in \Gamma_g$ に対して、$[f] \cdot [g] = [f \circ g]$ を積として Γ_g は群となる。

定義 1.8. 図 10 の写像の isotopy 類は種数 g の閉曲面 Σ_g の写像類群 Γ_g の元であり、τ_c と書き Σ_g 上の単純閉曲線 c に沿ったデーンツイストという。

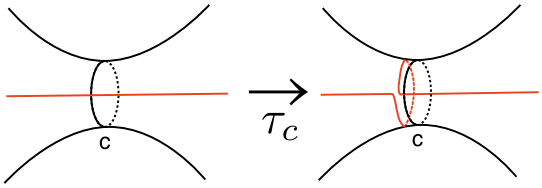


図 10: 単純閉曲線 c についてのデーンツイスト

定義 1.9. 全射 C^∞ 写像 $f\colon M^4 \to S^2$ を m 個の特異ファイバーを持つ S^2 上の種数 g の Lefschetz fibration とする。この Lefschetz fibration に対して定まる $id \in \Gamma_g$ の因数分解 $\tau_{c_1}\tau_{c_2}\ldots\tau_{c_m} = id$ をモノドロミー因数分解という。

事実 1.10. モノドロミー因数分解は Σ_2 上の単純閉曲線に沿ったデーンツイストの積で与えられる。モノドロミー因数分解に現れる単純閉曲線が Lefschetz fibration の特異ファイバーを特徴づけており、Lefschetz fibration の全空間のカービー図式を書くことができる。特に、デーンツイストの積の個数が特異ファイバーの本数に一致している。

2　証明のあらすじ

2.1　種数 1 の fibered knot について knot 手術を施した楕円曲面が 1-ハンドルを持たないことの証明

2.1.1　K_0 が三葉結び目の場合

$E(1)_{K_0}$ の Kirby 図式は以下の Kirby 図式を含んでおり、ハンドルスライドを用いて 1-ハンドルを消去する。ここで、赤、黄緑、水色、青の 2-ハンドルをそれぞれ K_A, K_B, K_C, K_D と名付けておく。

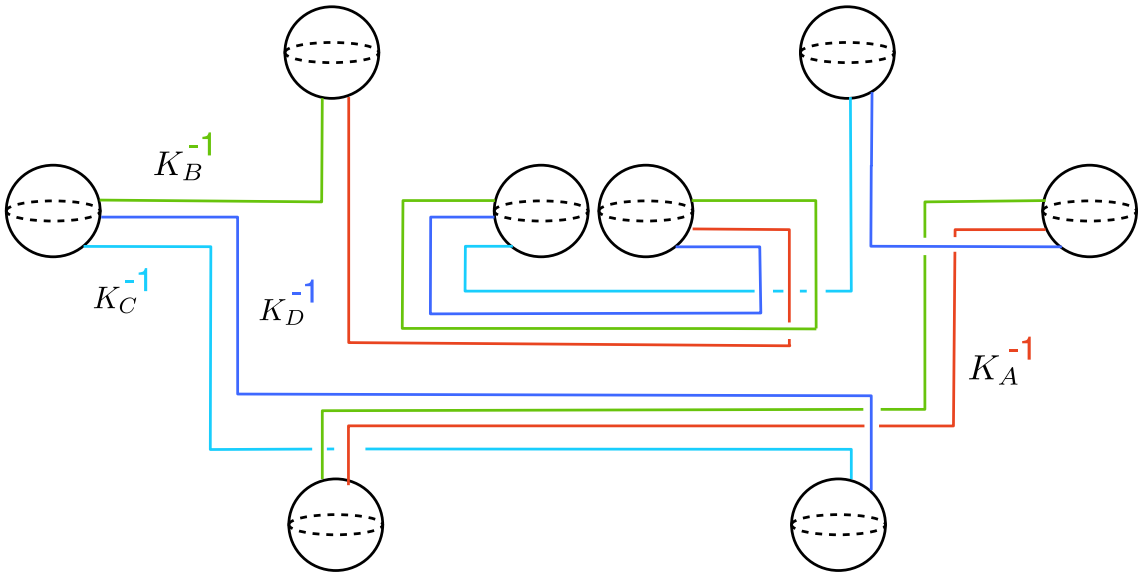


図 11: K_0 が三葉結び目の場合の $E(1)_{K_0}$ の Kirby 図式が含む図式

2.1.2　K_1 が 8 の字結び目の場合

$E(1)_{K_1}$ の Kirby 図式は以下の Kirby 図式を含んでおり、ハンドルスライドを用いて 1-ハンドルを消去する。ここで、赤、黄緑、水色、青の 2-ハンドルをそれぞれ K'_A, K'_B, K'_C, K'_D と名付けておく。

ハンドルスライドとハンドルキャンセルの定理より、1-ハンドルのない $E(1)_{K_0}, E(1)_{K_1}$ のカービー図式が得られる。

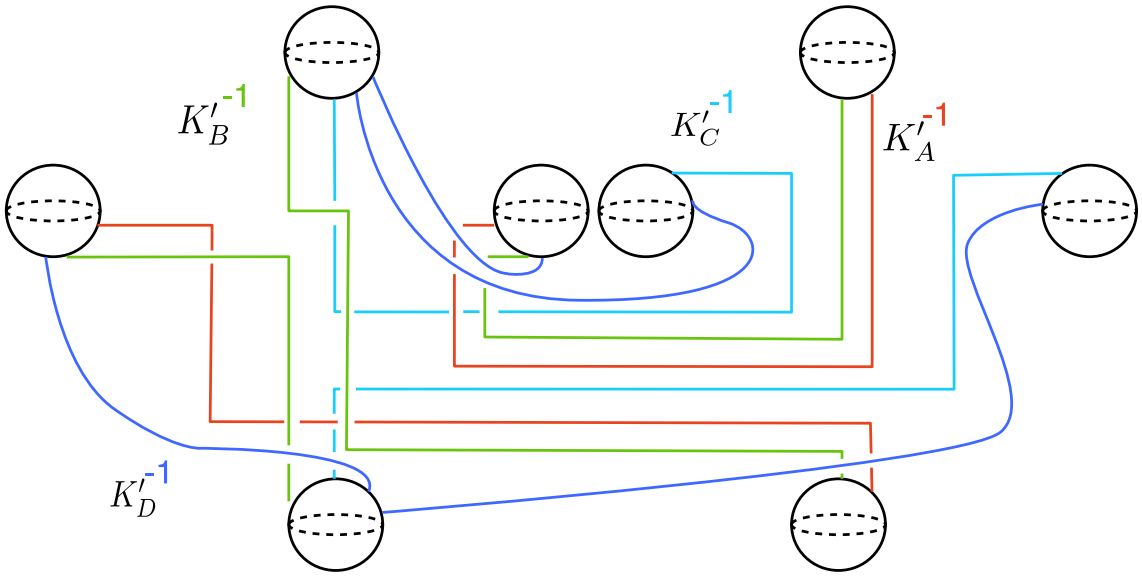


図 12: K_0 が三葉結び目の場合の $E(1)_{K_0}$ の Kirby 図式が含む図式

3 主定理

以下、K_0 を三葉結び目、K_1 を 8 の字結び目とし、$E(1)$ を $\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}$ に微分同相な楕円曲面とする。このとき、$E(1)$ を結び目 K に沿って knot 手術した多様体を $E(1)_K$ と書く。

定理 3.1. (2024,Y)
$E(1)_{K_0}, E(1)_{K_1}$ は Lefschetz fibration の構造を許容し、1-ハンドルを持たないハンドル分解を許容する。

注 3.2. 本研究の主結果の一部に関しては、S.Akublut 氏が $E(1)_{K_0}$ と $E(1)_{2,3}$ が同一視されるという方法で 1-ハンドルを持たないことを既に証明している [A12]。

参考文献

[A12] S.Akublut, The Dolgachev Surface, arXiv:0805.1524.

[BZ67] G.Burde, H.Zieschang, González-Acũna, Neuwirthsche knoten und Flächenabbildungen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 31 (1967), 239-246.

[FS98] R.Fintushel, R.Stern, Knots, links, and 4-manifolds, Invent. Math. 134 (1998), 363-400

[FS04] R.Fintushel, R.Stern, Families of simply connected 4-manifolds with the same Seiberg-Witten invariants, Topology 43 (2004), no.6, 1449-1467.

[GS] R.E.Gompf, A.I.Stipsitz, 4-Manifolds and Kirby Calculus, Graduate Studies in Mathematics, 20. American Mathematical Society (1999)

[G70] F.González-Acũna, Dehn's constraction on knots, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 15 (1970), 58-77.

[M96] Y.Matsumoto, Lefschetz Fibrations of Genus Two - A Topological Approach, Topology and Teichmüller spaces (Katinkulta, 1995), World Sci. Publishing, River Edge, NJ,(1996)

[Y08] K.-H.Yun, Twisted Fiber Sums of Fintushel-Stern's Knot Surgery 4-Manifolds, Transactions of the American Mathematical Society, Vol.360, no.11 (2008), 5853-5868

向き付け不可能空間曲面の彩色について

大阪大学　大学院理学研究科　数学専攻
新井克典 (Katsunori ARAI) *

概要

空間曲面は 3 次元空間に埋め込まれたコンパクト曲面である. 境界付き空間曲面は空間 3 価グラフとそのダイアグラムを用いて表示できる. カンドルは結び目理論におけるライデマイスター変形に対応する代数系である. 本講演ではカンドルの一般化であるラックを用いて, 向き付け不可能曲面を表す空間 3 価グラフのダイアグラムの彩色を定義し, 彩色数と呼ばれる不変量を構成する.

1　結び目

埋め込み $\underbrace{S^1 \sqcup S^1 \sqcup \cdots \sqcup S^1}_{\mu\text{個}} \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ の像を μ 成分の**絡み目**といい, 特に 1 成分の絡み目を**結び目**という.

2 つの絡み目 L, L' が**同値**であるとは, 向きを保つ自己同相写像 $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ で $h(L) = L'$ を満たすものが存在することをいい, $L \cong L'$ と書く.

（必要であれば自己同相写像 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ で動かすことによって, 射影 $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ による絡み目 L の像 $\pi(L)$ における全ての多重点が高々有限個の横断的 2 重点であるとする. このとき, $\pi(L)$ の各 2 重点に上下の情報を与えたものを L の**ダイアグラム**という.

絡み目のダイアグラム D において, 各連結成分を**弧**という. 絡み目ダイアグラム D の弧全体の集合を $\mathcal{A}(D)$ で表すこととする.

絡み目ダイアグラム D において, D の全ての弧を交差でさらに区切ったとき, 各連結成分を D の**準弧**という. 絡み目ダイアグラム D の準弧全体の集合を $\mathcal{SA}(D)$ と書く.

定理 1.1. ([10])**.** L_1 と L_2 を絡み目とし, D_1 と D_2 をそれぞれ L_1 と L_2 のダイアグラムとする. L_1 と L_2 が同値であることと D_1 と D_2 がライデマイスター変形 (図 1) と $\mathbb{R}^2$ 上のアイソトピー変形を有限回施して移り合うことは同値である.

絡み目 L の**向き**とは, 各成分の 1 次元多様体としての向きをいう. 向きが指定されている絡み目を**有向絡み目**という. L が有向絡み目のとき, L のダイアグラム D にも向きが与えられる. 有向絡み目に対しても, ライデマイスターの定理が成り立つ.

定理 1.2. ([9])**.** L_1 と L_2 を有向絡み目とし, D_1 と D_2 をそれぞれ L_1 と L_2 のダイアグラムとす

* E-mail:u068111h@ecs.osaka-u.ac.jp

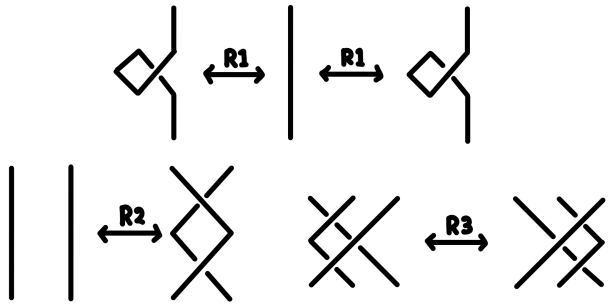


図 1: ライデマイスター変形

る. L_1 と L_2 が同値であることと D_1 と D_2 が有向ライデマイスター変形 (図 2) と $\mathbb{R}^2$ 上のアイソトピー変形を有限回施して移り合うことは同値である.

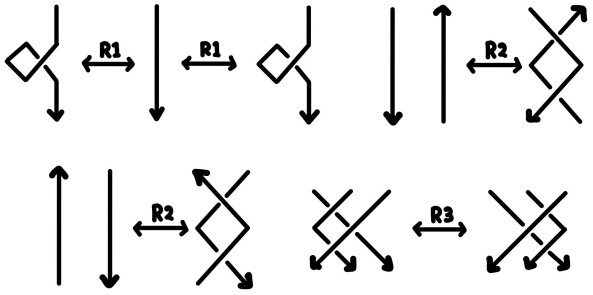


図 2: 有向ライデマイスター変形

2 カンドルとラック

定義 2.1. ([2, 4, 8])**.** 空でない集合 X とその上の二項演算 $* : X \times X \to X$; $(x, y) \mapsto x * y$ の組 $X = (X, *)$ が**ラック**であるとは, $*$ が次の条件を満たすことをいう.

- 任意の $y \in X$ に対して, 写像 $S_y : X \to X$; $x \mapsto x * y$ は全単射である.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ を満たす.

特に, ラック X が次の条件を満たすとき $X = (X, *)$ を**カンドル**という.

- 任意の $x \in X$ に対して, $x * x = x$ を満たす.

ラックの公理は R2, R3 変形に対応し, カンドルの公理は R1, R2, R3 変形に対応する.

$X = (X, *)$ をラックとする. 任意の $x, y \in X$ と任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して, $S_y^n(x)$ を $x *^n y$ と表す.

例 2.2.
- $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $C_n = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, x * y = x + 1)$ を巡回ラックという.
- $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $C_n = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, x * y = 2y - x)$ を二面体カンドルという.

定義 2.3. ([4,8]). X をラックとし, D を有向絡み目ダイアグラムとする. 写像 $C : \mathcal{A}(D) \to X$ が D の X **彩色**であるとは, D の各交差で図 3 の条件を満たすことである. X 彩色全体の集合を $\mathrm{Col}_X(D)$ と書く.

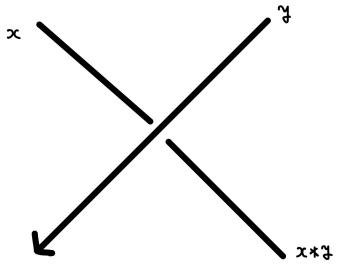


図 3: 彩色条件 $(x, y \in X)$

命題 2.4. ([4,8]). X をカンドルとし, D_1, D_2 を同値な有向絡み目を表すダイアグラムとする. このとき, $\mathrm{Col}_X^{\mathrm{qdle}}(D_1)$ と $\mathrm{Col}_X^{\mathrm{qdle}}(D_2)$ の間に全単射が存在する. 特に $\mathrm{Col}_X^{\mathrm{qdle}}(D_1)$ の濃度 $\left|\mathrm{Col}_X^{\mathrm{qdle}}(D_1)\right|$ は有向絡み目の不変量である. この不変量を**カンドル彩色数**という.

定義 2.5. ([5,6]). $X = (X, *)$ をラックとする. 写像 $\rho : X \to X$ が**良い対合写像 (good involution)** とは次の条件を満たすことをいう.

1. ρ は対合的, すなわち, $\rho \circ \rho = \mathrm{id}_X$ を満たす.
2. 任意の $x, y \in X$ に対して, $\rho(x * y) = \rho(x) * y$.
3. 任意の $x, y \in X$ に対して, $x * \rho(y) = x *^{-1} y$.

ラック $X = (X, *)$ と良い対合写像 ρ の組 (X, ρ) を**対称ラック**という. 特に X がカンドルのとき, 組 (X, ρ) を**対称カンドル**という.

例 2.6. G を群とする. $\mathrm{Conj}(G) = (G, x * y = y^{-1}xy)$ はカンドルである. このカンドルを**共役カンドル**という. 写像 $\rho : \mathrm{Conj}(G) \ni g \mapsto g^{-1} \in \mathrm{Conj}(G)$ は良い対合写像である.

(X, ρ) を対称カンドル, D を絡み目ダイアグラムとする. 各準弧 a に向きを与え, その向きを $\frac{\pi}{2}$ 回転させた向きを a の**法線方向**と呼ぶ. D の各準弧に対して, X の元と法線方向を対応させる写像 C が**対称カンドル彩色条件**を満たすとは, 図 4 の条件を満たすことをいう.

絡み目ダイアグラム D の各準弧に対して, 対称カンドル (X, ρ) の元と法線方向が与えられている

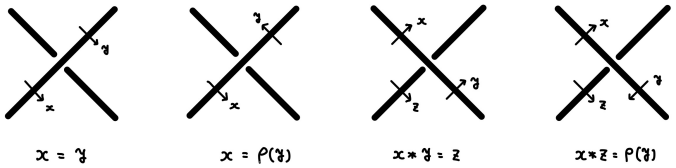


図 4: 対称カンドル彩色条件 $(x, y, z \in X)$

とする. 準弧 a に対する**基本反転変形**とは, a に与えられた X の元 x を $\rho(x)$ に取り換え, さらに a の法線方向を逆向きにする変形 (図 5) をいう.

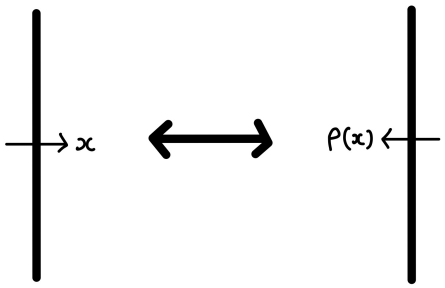


図 5: 基本反転変形 $(x \in X)$

定義 2.7. ([5])**.** (X, ρ) を対称カンドル, D を絡み目ダイアグラムとする. D の各準弧に対して X の元と法線方向を対応させる写像 C で対称カンドル彩色条件を満たすもの全体の集合を, 有限回の基本反転変形で移り合うという同値関係で割った商集合の元を, D の (X, ρ) **彩色 (**(X, ρ)**-coloring)** という.

命題 2.8. ([5])**.** (X, ρ) を対称カンドルとする. D_1 と D_2 を同値な絡み目を表す絡み目ダイアグラムとする. このとき, D_1 の (X, ρ) 彩色全体の集合と D_2 の (X, ρ) 彩色全体の集合の集合の間に全単射が存在する.

3 空間曲面

空間曲面 [7] とは, $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれたコンパクト曲面である. 本講演では次の条件を仮定する.

- 各連結成分は空でない境界を持つ.
- 2 次元閉円板成分を持たない.

空間曲面 F と F' が**同値**であるとは, F を向きを込めて F' に移す $\mathbb{R}^3$ 上の全同位が存在することをいい, このとき $F \cong F'$ と書く.

空間 3 価グラフとは, $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた有限 3 価グラフのことである.

Y 向き付けられた空間 3 価グラフとは, 全ての頂点の入次数, 出次数がともに 1 以上であるような有向空間 3 価グラフのことである. ここで入次数とはその頂点を終点としてもつ辺の本数をいい, 出次数とはその頂点を始点としてもつ辺の本数をいう. 全ての空間 3 価グラフはいくつかの Y 向き付けをもつ.

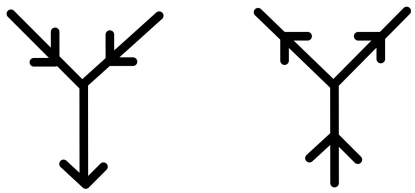


図 6: 空間 3 価グラフの Y 向き付け

G を $\mathbb{R}^3$ 内の空間 3 価グラフとする. 必要であれば自己同相写像 $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ で動かすことで, 射影 $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ による G の像 $\pi(G)$ が $\pi(G)$ の多重点が高々有限個の横断的 2 重点であるとする. このとき, $\pi(G)$ に対して, 各交差の上下の情報を付加したものを G の**ダイアグラム**という.

ダイアグラムの各連結成分をさらに頂点で区切ったものを**弧 (arc)** という. 空間 3 価グラフのダイアグラム D の弧全体の集合を $\mathcal{A}(D)$ と書く.

符号付きバーを持つ空間 3 価グラフのダイアグラムとは, ダイアグラムの弧上に, 符号 ± 1 の情報を持つバー（図 7）を付加したものをいう.

任意の空間曲面は図 8 の方法で, 符号付きバーを持つ空間グラフのダイアグラムから得られるある空間曲面と同値である. このとき, 空間曲面 F の**ダイアグラム**を符号付きバーを持つ空間 3 価グラフのダイアグラム D で定める.

定理 3.1. ([7])**.** F_1 と F_2 を空間曲面とし, D_1 と D_2 をそれぞれ F_1 と F_2 のダイアグラムとする. このとき, F_1 と F_2 が同値であることと D_1 と D_2 が空間曲面ダイアグラムのライデマイスター変形 (図 9) と $\mathbb{R}^2$ 上のアイソトピー変形を有限回施して移り合うことは同値である.

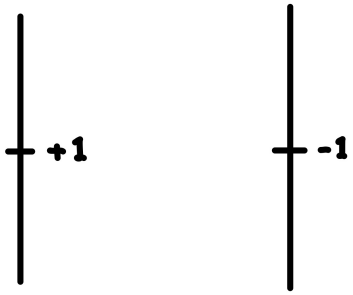


図 7: 符号付きバー

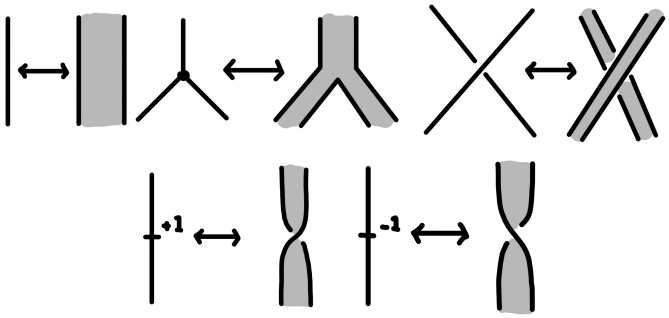


図 8: 空間 3 価グラフのダイアグラムから空間曲面を得る方法

4　亜群ラック

圏 $\mathcal{C}$ とは,

- 対象の集まり $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
- 各 $\lambda, \mu \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, λ から μ への射全体の集合 $\mathrm{Hom}(\lambda, \mu)$.
- 各 $\lambda, \mu, \nu \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, 次で定義される写像 $\mathrm{Hom}(\lambda, \mu) \times \mathrm{Hom}(\mu, \nu) \ni (f, g) \mapsto fg \in \mathrm{Hom}(\lambda, \nu)$ で次の条件を満たすもの
  - 任意の $f \in \mathrm{Hom}(\lambda, \mu),\ g \in \mathrm{Hom}(\mu, \nu),\ h \in \mathrm{Hom}(\nu, \xi)$ に対して, $f(gh) = (fg)h$ を満たす.
  - 任意の $\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, ある射 id_λ が存在して, 任意の $f \in \mathrm{Hom}(\lambda, \mu)$ に対して $\mathrm{id}_\lambda f = f$ を満たし, また任意の $g \in \mathrm{Hom}(\mu, \lambda)$ に対して $g\mathrm{id}_\lambda = g$ を満たす.

からなる 3 つ組のことである. 圏 $\mathcal{C}$ の射全体の集合を $\mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ と表す. $f \in \mathrm{Hom}(\lambda, \mu)$ に対して,

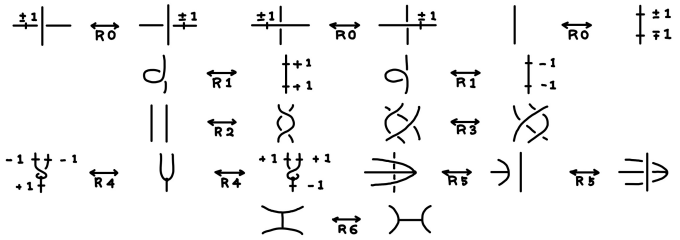


図 9: 空間曲面のダイアグラムのライデマイスター変形

$\lambda, \mu \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ をそれぞれ f の**定義域**, **値域**といい, $\mathrm{dom}(f)$, $\mathrm{cod}(f)$ とも表す. また $f : \lambda \to \mu$ で $f \in \mathrm{Hom}(\lambda, \mu)$ を表す. 写像 $\mathrm{Hom}(\lambda, \mu) \times \mathrm{Hom}(\mu, \nu) \ni (f, g) \mapsto fg \in \mathrm{Hom}(\lambda, \nu)$ を**合成**と呼び, 任意の $\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ に対して, 射 id_λ を $\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ 上の**恒等射** と呼ぶ.

圏 $\mathcal{C}$ の射 $f \in \mathrm{Hom}(\lambda, \mu)$ が**同型射**であるとは, ある射 $g \in \mathrm{Hom}(\mu, \lambda)$ が存在して $fg = \mathrm{id}_\lambda$ かつ $gf = \mathrm{id}_\mu$ を満たすことをいう. このとき, 射 g を f の**逆射**という.

全ての射が同型射であるような圏を**亜群**と呼ぶ.

定義 4.1. ([1])**.** $\mathcal{C}$ を亜群とし, $X = \mathrm{Hom}(\mathcal{C})$ とする. X と X 上の 2 項演算 $* : X \times X \to X$ の組 $X = (X, *)$ が**亜群ラック**であるとは, $*$ が次の条件を満たすことをいう.

1. 任意の $x \in X$ と任意の $f : \lambda \to \mu,\ g : \mu \to \nu$ に対して, $x * (fg) = (x * f) * g,\ x * \mathrm{id}_\lambda = x$ を満たす.
2. 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ を満たす.
3. 任意の $x \in X$ と任意の $f : \lambda \to \mu,\ g : \mu \to \nu$ に対して, $\mathrm{cod}(f * x) = \mathrm{dom}(g * x),\ (fg) * x = (f * x)(g * x)$ を満たす.

亜群ラックの公理 1 および 3 は R2 および R5 変形に対応し, 2 は R3 変形に対応している. また亜群の射の結合法則は R6 変形に対応している.

亜群ラックの例を挙げる.

例 4.2. ([3])**.** $\{G_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を群の族とし, 各群 G_λ の単位元を e_λ とする. 群の非交和 $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ と 2 項演算 $* : X \times X \to X$ の組 $X = (X, *)$ が**多重群ラック （MGR）**であるとは, $*$ が次の条件を満たすことをいう.

2. 任意の $x \in X$ と任意の $a, b \in G_\lambda$ に対して, $x * e_\lambda = x,\ x * (ab) = (x * a) * b.$
3. 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z).$
4. 任意の $x \in X$ と任意の $a, b \in G_\lambda$ に対して, ある $\mu \in \Lambda$ が存在して, $(a * x), (b * x) \in G_\mu$ かつ $(ab) * x = (a * x)(b * x).$

例 4.3. (cf. [11]**).** $R = (R, *)$ をラックとする．このとき, 直積 $R \times R$ 上に次で定まる二項演算 $\triangleright : R \times R \to R \times R$ を考える．

$$(x, y) \triangleright (z, w) = ((x * z) *^{-1} w, (y * z) *^{-1} w).$$

このとき, $(R \times R, \triangleright)$ はラックである．さらに, 部分的に定義される積を次で定める．

$$(x, y)(y, z) = (x, z).$$

この積をもつラック $(R \times R, \triangleright)$ は亜群ラックである．この亜群ラックを, 本講演では**ヒープラック**と呼ぶ．

注意 4.4. ヒープラックは MGR ではないことに注意しておく．

定義 4.5. X を亜群ラックとし, D を Y 向き付けられた有向空間曲面図式とする．写像 $C : \mathcal{A}(D) \to X$ が X **彩色**であるとは, 各交差と各 3 価頂点で図 10 の条件を満たすことをいう．X 彩色全体の集合を $\mathrm{Col}_X(D)$ と書く．

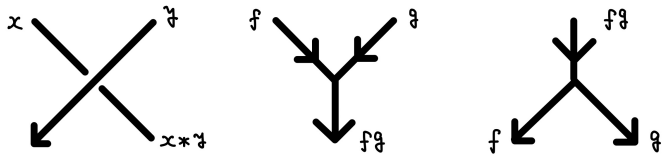


図 10: 亜群ラック彩色条件 $(x, y, f, g \in X,\ \mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g))$

定理 4.6. ([1]**).** X を亜群ラックとし, D_1 と D_2 を同値な有向空間曲面の Y 向き付けされたダイアグラムとする．このとき, $\mathrm{Col}_X(D_1)$ と $\mathrm{Col}_X(D_2)$ の間に全単射が存在する．特に $\mathrm{Col}_X(D_1)$ の濃度 $|\mathrm{Col}_X(D_1)|$ は有向空間曲面の不変量である．

5 主結果

X を亜群ラックとする．このとき, $\rho : X \to X;\ x \mapsto x^{-1}$ は良い対合写像である．
次の条件を満たす全単射 $\tau : X \to X$ を考える．

1. $\tau \circ \rho = \rho \circ \tau$.
2. 任意の $x, y \in X$ に対して, $\tau(x) * y = \tau(x * y), \quad \tau^{-1}(x) * y = \tau^{-1}(x * y)$.
3. 任意の $x \in X$ に対して, $\tau^2(x) = x * x$, $\tau^{-2}(x) = x *^{-1} x$.

4. 任意の $f : \lambda \to \mu$ と任意の $g : \mu \to \nu$ に対して,

$$\tau^{-1}(\tau(g)(\tau(f) * \tau(g))) = fg = \tau((\tau^{-1}(g) *^{-1} \tau^{-1}(f))\tau^{-1}(f)).$$

以下, 特に断らない限り, τ は上記の条件を満たすとする.
図 10 の条件に加えて, 符号付きバー周りにおいて次の彩色条件（図 11）を考える.

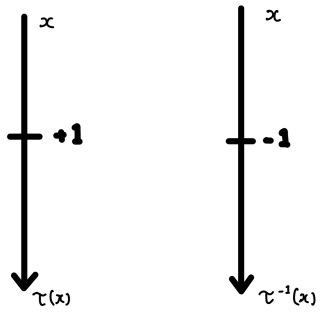


図 11: 符号付きバー周りでの彩色条件

空間曲面のダイアグラムの (X, τ) 彩色全体の集合を $\mathrm{Col}_{(X,\tau)}(D)$ と表す.
本研究の主結果は次の定理である.

定理 5.1. X と τ は D_1 と D_2 を同値な（向き付け可能とは限らない）空間曲面の Y 向き付けされたダイアグラムとする. このとき, $\mathrm{Col}_{(X,\tau)}(D_1)$ と $\mathrm{Col}_{(X,\tau)}(D_2)$ の間に全単射が存在する. 特に $\mathrm{Col}_{(X,\tau)}(D_1)$ の濃度 $\left|\mathrm{Col}_{(X,\tau)}(D_1)\right|$ は（向き付け可能とは限らない）空間曲面の不変量である.

X や τ の例として次が挙げられる.

例 5.2. Q を圭, すなわち, $*^2 = \mathrm{id}_Q$ を満たすカンドルとする. このとき, 例 4.3 で定まる演算により, $R := Q \times Q$ は亜群ラックである. また, $\rho : R \to R$; $(x, y) \mapsto (y, x)$ は良い対合写像であり, $\tau : R \to R$; $(x, y) \mapsto (y, x * y)$ は上記の条件を満たす.

参考文献

[1] Katsunori Arai, *A groupoid rack and spatial surfaces*, 2023.
[2] Roger Fenn and Colin Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), no. 4, 343–406. MR1194995
[3] Atsushi Ishii, Shosaku Matsuzaki, and Tomo Murao, *A multiple group rack and oriented spatial surfaces*, J. Knot Theory Ramifications **29** (2020), no. 7, 2050046, 20. MR4142996
[4] David Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra **23** (1982), no. 1, 37–65. MR638121
[5] Seiichi Kamada, *Quandles with good involutions, their homologies and knot invariants*, Intelligence of low dimensional topology 2006, 2007, pp. 101–108. MR2371714
[6] Seiichi Kamada and Kanako Oshiro, *Homology groups of symmetric quandles and cocycle invariants of links and surface-links*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 10, 5501–5527. MR2657689
[7] Shosaku Matsuzaki, *A diagrammatic presentation and its characterization of non-split compact surfaces in the 3-sphere*, J. Knot Theory Ramifications **30** (2021), no. 9, Paper No. 2150071, 32. MR4358334

[8] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, Mat. Sb. (N.S.) **119(161)** (1982), no. 1, 78–88, 160. MR672410

[9] Michael Polyak, *Minimal generating sets of Reidemeister moves*, Quantum Topol. **1** (2010), no. 4, 399–411. MR2733246

[10] Kurt Reidemeister, *Elementare Begründung der Knotentheorie*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **5** (1927), no. 1, 24–32. MR3069462

[11] Masahico Saito and Emanuele Zappala, *Fundamental heaps for surface ribbons and cocycle invariants*, arXiv preprint arXiv:2109.07569 (2021).

コルクとエキゾチック対のトライセクション

大阪大学 大学院情報科学研究科 情報基礎数学専攻
高橋夏野 (Natsuya TAKAHASHI) *

概要

コルクとは所定の条件を満たす可縮な 4 次元多様体であり, コルクに沿った切り貼り操作によって 4 次元多様体のエキゾチック対を構成することができる. 本稿では, あるコルクに対して, 最小種数の相対トライセクションを 2 通りの方法で与える. また応用として, コルクによって得られる境界付き 4 次元多様体のあるエキゾチック対に対して, 最小種数の相対トライセクションを構成する.

1 エキゾチック微分構造とコルク

本稿で考える多様体は全て連結, コンパクト, 有向で滑らかなものとする. また境界付き 4 次元多様体といえば, その境界は空でない連結なものとする.

2 つの滑らかな多様体が**エキゾチック**であるとは, それらが同相であるが微分同相でないことをいう. 多様体のトポロジーにおいて, 4 次元はエキゾチック微分構造に関する現象が特に顕著である. 例えば $n \neq 4$ のとき, 任意の閉 n 次元位相多様体は高々有限通りの微分構造しか許容しないことが知られている. 一方で $n = 4$ のときは, 無限通りの微分構造を許容するものが存在する. 4 次元多様体のエキゾチック微分構造の構成に関する研究において, コルクと呼ばれる概念が導入された. 本章では, コルクとエキゾチック対の関連について紹介する.

定義 1.1. C を可縮な 4 次元多様体で, 境界をもつものとする. $\tau : \partial X \to \partial X$ を境界上の滑らかな対合写像とする. τ が C 上の自己同相写像に拡張可能であり, C 上の自己微分同相に拡張できないとき, 組 (C, τ) を (または単に C を) **コルク**と呼ぶ.

コルクを用いることによって, 4 次元多様体のエキゾチック対を構成することができる. X を滑らかな 4 次元多様体とし, (C, τ) をコルクとする. また C は, X に滑らかに埋め込まれているとする. 4 次元多様体 X' を, $X - \operatorname{Int} C$ と C を τ によって貼合せて得られるものとして定める. 即ち, $X' := (X - \operatorname{Int} C) \cup_\tau C$ とおく. このとき X' は, X から (C, τ) に沿った**コルクツイスト**で得られたという. このように構成された X' は X と同相となる. しかし微分同相であるとは限らないので, (X, X') はエキゾチック対となる可能性がある.

逆に, 4 次元多様体の任意のエキゾチック対はコルクツイストを介して移り合うことが知られている. 即ち, 以下の主張が成り立つ.

* E-mail:nt-takahashi@ist.osaka-u.ac.jp

定理 1.2 (Curtis–Freedman–Hsiang–Stong [3], Matveyev [6])**.** 単連結な閉 4 次元多様体の任意のエキゾチック対 (X, Y) に対して, X に埋め込まれたあるコルク (C, τ) が存在し, コルクツイスト X' は Y と微分同相である.

この定理は, 4 次元多様体のエキゾチック微分構造の研究において, コルクの重要性を示すものとして注目されている. 以下では, コルクと, コルクツイストによって得られるエキゾチック対の例を紹介する.

例 1.3 (Akbulut [1])**.** 境界付き 4 次元多様体 W_1 を図 1 の Kirby 図式によって与えられるものとする. 対合写像 $f_1 : \partial W_1 \to \partial W_1$ は, 図 1 における「 $\bullet$ 」と「 0 」を入れ替える操作によって得られるものとする. このとき, 組 (W_1, f_1) はコルクである.

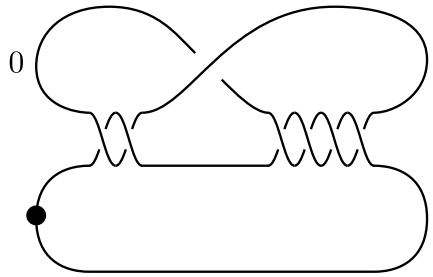


図 1　Akbulut コルク W_1 の Kirby 図式.

上記の組 (W_1, f_1) は **Akbulut コルク**と呼ばれるものであり, 最初に構成されたコルクの例として知られている. 例えば, Akbulut コルクを用いることによって, $K3$ 曲面をブローアップして得られる閉 4 次元多様体 $K3\#\overline{\mathbb{C}P^2}$ のエキゾチック対が構成できる ([1]). 以下の主張は, Akbulut コルクから得られる境界付き 4 次元多様体のエキゾチック対の代表的な例を与える.

例 1.4 (Akbulut [1])**.** 境界付き 4 次元多様体 P, Q をそれぞれ図 2, 3 の Kirby 図式で与えられるものとする. このとき, (P, Q) は Akbulut コルクに沿ったツイストで得られるエキゾチック対である.

本稿では, このエキゾチック対 (P, Q) に焦点を当てる.

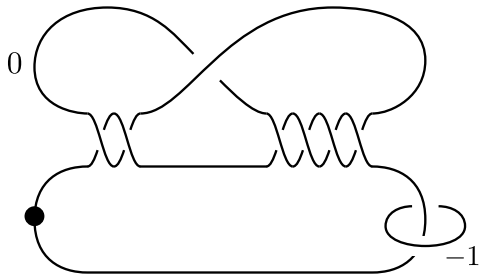


図 2　P の Kirby 図式.

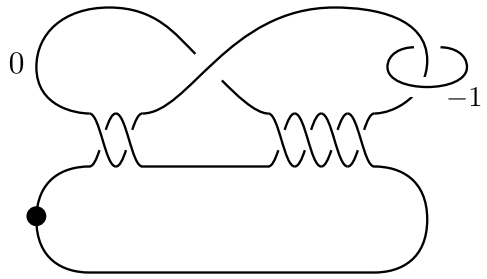


図 3　Q の Kirby 図式.

2　4 次元多様体のトライセクション

トライセクションとは, 滑らかな 4 次元多様体を所定の方法で 3 つの 4 次元 1 ハンドル体に分割するという概念である. これは 3 次元多様体に対する Heegaard 分解の 4 次元におけるアナロジーとして解釈される. 通常, 単にトライセクションといえば, 閉 4 次元多様体に対する 3 分割を意味することが多い. 本稿では, 境界付き 4 次元多様体に対して定義される**相対トライセクション**に着目する.

3 次元多様体の位相構造は Heegaard 図式という曲面上の 2 つの曲線族によって表示されるのであった. これと同様のことが 4 次元多様体のトライセクションによって実現できる. 滑らかな 4 次元多様体の微分構造は, トライセクション図式と呼ばれる曲面上の 3 種類の曲線族によって表すことができる. 本章では, 境界付き 4 次元多様体の相対トライセクションに対応する, 相対トライセクション図式について詳しく解説する. (相対) トライセクション自体の定義については, 例えば [4], [2] を参照のこと.

定義 2.1. Σ, Σ' を連結でコンパクトな向き付けられた曲面とする. 整数 $i \in \{1, \dots, n\}$ に対して, α^i, β^i をそれぞれ Σ, Σ' 上の互いに交わらない単純閉曲線の族とする. 曲面と n 個の曲線族の組 $(\Sigma; \alpha^1, \dots, \alpha^n)$, $(\Sigma'; \beta^1, \dots, \beta^n)$ に対し, これらが **ds 同値**であるとは, $(\Sigma; \alpha^1, \dots, \alpha^n)$ が Σ からの微分同相写像と有限回のスライドによって $(\Sigma'; \beta^1, \dots, \beta^n)$ に移ることをいう. 但し, ここでのスライドは α^i 内の曲線同士でのみ行うものとし, $i \neq j$ なる i, j に対しては α^i 内の曲線を α^j 内の曲線へスライドすることは許さない.

定義 2.2. 整数 g, k, p, b を $g, k, p \geq 0$, $b \geq 1$, $2p + b - 1 \leq k \leq g + p + b - 1$ を満たすものとする. 曲面 Σ を $\Sigma_{g,b}$ と微分同相なものとし, α, β, γ を Σ 上の $g - p$ 個の互いに交わらない単純閉曲線の族とする. 曲面とその上の 3 つの曲線族の組 $\mathcal{D} = (\Sigma; \alpha, \beta, \gamma)$ が $(g, k; p, b)$ **相対トライセクション図式**であるとは, $(\Sigma; \alpha, \beta)$, $(\Sigma; \beta, \gamma)$, $(\Sigma; \gamma, \alpha)$ が 図 4 の標準的な図式 $(\Sigma_{g,b}; \delta, \epsilon)$ と ds 同値であることをいう. 但し, 図 4 において赤色の曲線族が δ で, 青色の曲線族が ϵ である.

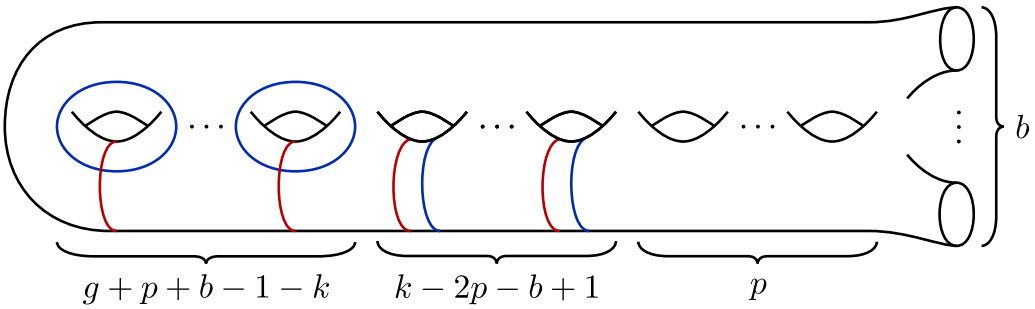


図 4　標準的な $(g, k; p, b)$ 型の図式 $(\Sigma_{g,b}; \delta, \epsilon)$.

図 5, 6 は相対トライセクション図式の例である. 定義 2.2 からわかるように, 相対トライセクション図式とは, 所定の条件を満たす曲面とその上の 3 つの曲線族の組のことであった. この分野における慣習では, 図 5, 6 のように, (相対) トライセクション図式は曲面上の 3 色の曲線で表し, 同色の曲

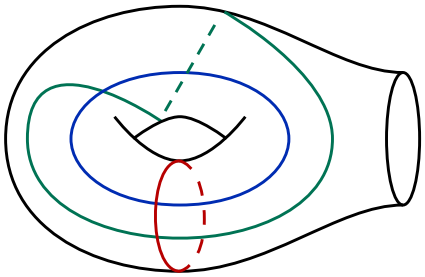


図 5　$(1,0;0,1)$ 相対トライセクション図式.

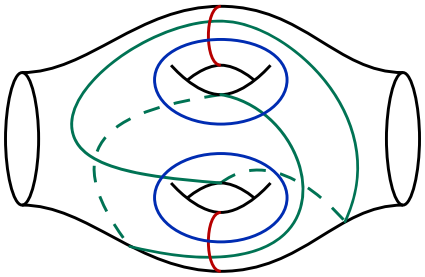


図 6　$(2,0;0,2)$ 相対トライセクション図式.

線は同一の族に属することを意味する. 特に, α に属する曲線は赤色, β に属する曲線は青色, γ に属する曲線は緑色で表す.

次の定理は, 相対トライセクションと相対トライセクション図式の間の対応を与える.

定理 2.3 (Castro–Gay–Pinzón-Caiced [2])**.** 次の 2 つが成り立つ.

(i) 任意の $(g,k;p,b)$ 相対トライセクション図式 $(\Sigma;\alpha,\beta,\gamma)$ に対して, 次の条件を満たすある境界付き 4 次元多様体 X と, X のある $(g,k;p,b)$ 相対トライセクション $X=X_1\cup X_2\cup X_3$ が (微分同相を法として) 一意に存在する.
- 3 分割の共通部分 $X_1\cap X_2\cap X_3$ は曲面 Σ と微分同相である.
- $X_1\cap X_2\cap X_3$ と Σ を同一視したとき, α, β, γ はそれぞれ $X_3\cap X_1$, $X_1\cap X_2$, $X_2\cap X_3$ 内の $g-p$ 個のメリディアン円盤の境界である.

(ii) 相対トライセクションが与えられた任意の境界付き 4 次元多様体 $(X,\mathcal{T})$ に対し, ある相対トライセクション図式 $\mathcal{D}$ が (ds 同値を法として) 一意に存在し, $(X,\mathcal{T})$ は (i) によって $\mathcal{D}$ から誘導される.

定理 2.3 は以下の 1 : 1 対応が存在することを意味する.

$$\frac{\{\text{ 相対トライセクション }\}}{\text{微分同相}} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \frac{\{\text{ 相対トライセクション図式 }\}}{\text{ds 同値}}.$$

X を 4 次元多様体とし, $\mathcal{D}$ を相対トライセクション図式とする. X が, 定理 2.3 によって $\mathcal{D}$ に対応する相対トライセクションが与えられた 4 次元多様体と微分同相であるとき, 単に $\mathcal{D}$ は X の相対トライセクション図式であるともいう. 図 5 は穴あき複素射影平面 $\mathbb{C}P^2-\operatorname{Int}D^4$ の $(1,0;0,1)$ 相対トライセクション図式である. 図 6 は $S^2\times D^2$ の $(2,0;0,2)$ 相対トライセクション図式である.

3　主結果

本章では, コルクおよびコルクから得られるエキゾチック対の相対トライセクションの構成を紹介する. 詳しい議論については, [8], [9] を参照のこと. 第 1 章で見たように, コルクは 4 次元多様体のエキゾチック対の構成に役立つのであった. 本稿における 1 つ目の主結果は, Akbulut コルク W_1 の相対トライセクションに関するものである.

定理 3.1 ([9])**.** Akbulut コルク W_1 は図 7, 8 の相対トライセクション図式 $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ に対応する 2

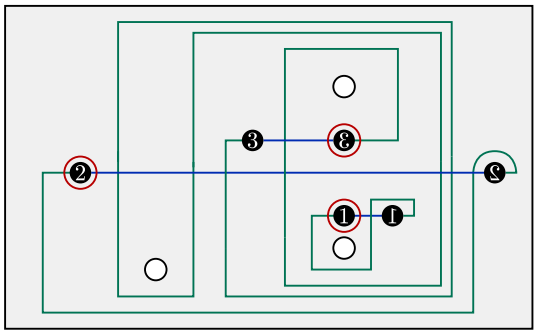


図 7　Akbulut コルク W_1 の $(3,3;0,4)$-相対トライセクション図式 $\mathcal{D}_1$.

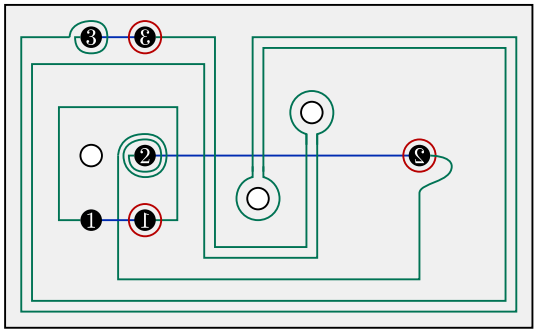


図 8　Akbulut コルク W_1 の $(3,3;0,4)$-相対トライセクション図式 $\mathcal{D}_2$.

つの $(3,3;0,4)$ 相対トライセクションを許容する.

筆者は [8] において, Akbulut コルクが許容するトライセクションの種数の最小値が 3 であることを示した. 定理 3.1 で与えた $(3,3;0,4)$ 相対トライセクション図式は, 最小種数を実現するものである. トライセクションの種数の下からの評価についての議論も, [8] を参照のこと.

定理 3.1 で与えた Akbulut コルクに対する 2 通りの相対トライセクションを応用し, あるエキゾチック対に対して同一の係数を持つ相対トライセクションを構成した.

定理 3.2 ([9])**.** 図 2, 3 の Kirby 図式で与えられる境界付き 4 次元多様体のエキゾチック対 (P,Q) は, 共に $(4,3;0,4)$ 相対トライセクションを許容する. 特に, P, Q はそれぞれ図 9, 10 で表示される $(4,3;0,4)$ 相対トライセクション図式 $\mathcal{D}_P$, $\mathcal{D}_Q$ を持つ.

図 9, 10 の $(4,3;0,4)$ 相対トライセクション図式は, Akbulut コルクの相対トライセクション図式を元にして構成した. 相対トライセクション図式 $\mathcal{D}_P$, $\mathcal{D}_Q$ 内の灰色の部分を消すと, それぞれ $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ に一致することが確認できる.

最後に, トライセクションに関するある予想と, 今回の主結果の関連について述べる. 4 次元多様体 X の**トライセクション種数**とは, X が許容する全てのトライセクションの中で, 3 分割の共通部分となる曲面の種数の最小値のことをいう. これは滑らかな 4 次元多様体の微分同相不変量として定義される. しかし Lambert-Cole–Meier [5] は, トライセクション種数は同相に関する不変量でしかないという予想を立てた. 即ち,「4 次元多様体の任意のエキゾチック対は同一のトライセクション種数を持つ」という主張である. 定理 3.2 を発展させた結果として, エキゾチック対 (P,Q) は共にトライセ

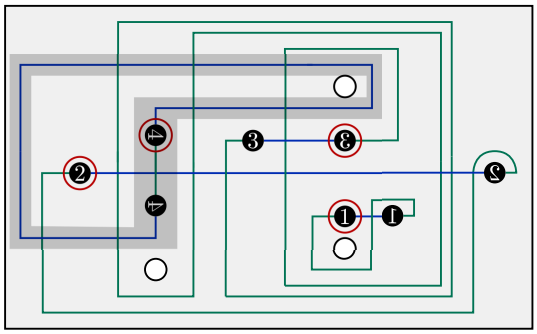


図 9　P の $(4,3;0,4)$-相対トライセクション図式 $\mathcal{D}_P$.

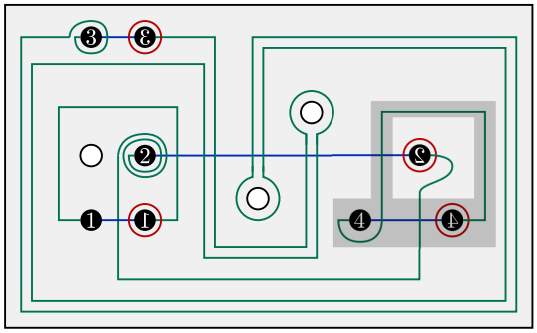


図 10　Q の $(4,3;0,4)$-相対トライセクション図式 $\mathcal{D}_Q$.

クション種数が 4 であることが示せた ([9]). この 4 という値は、トライセクション種数が一致する既知のエキゾチック対の中で, 最小である.

参考文献

[1] Selman Akbulut, *A fake compact contractible 4-manifold*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 2, 335–356.

[2] Nickolas A. Castro, David T. Gay, and Juanita Pinzón-Caicedo, *Diagrams for relative trisections*, Pacific J. Math. **294** (2018), no. 2, 275–305.

[3] Cynthia L. Curtis, Michael H. Freedman, Wu-Chung Hsiang, and Richard Stong, *A decomposition theorem for h-cobordant smooth simply-connected compact 4-manifolds*, Invent. Math. **123** (1996), no. 2, 343–348.

[4] David Gay and Robion Kirby, *Trisecting 4-manifolds*, Geom. Topol. **20** (2016), no. 6, 3097–3132.

[5] Peter Lambert-Cole and Jeffrey Meier, *Bridge trisections in rational surfaces*, J. Topol. Anal. **14** (2022), no. 3, 655–708.

[6] Rostislav Matveev, *A decomposition of smooth simply-connected h-cobordant 4-manifolds*, J. Differential Geom. **44** (1996), no. 3, 571–582.

[7] Natsuya Takahashi, *Minimal genus relative trisections of corks*, arXiv preprint

arXiv:2208.08144 (2022).

[8] Natsuya Takahashi, *Exotic 4-manifolds with small trisection genus*, arXiv preprint arXiv:2308.00482 (2023).

ニット状曲面の導入と 4 次元球体内の曲面の表示

大阪大学　大学院理学研究科　数学専攻
安田順平 (Jumpei YASUDA) *

概要

ブレイド（組み紐）のいくつかの交点をスプライスと呼ばれる操作で解消することで得られる 3 次元球体内の曲線をニットという。本講演ではニット状曲面と呼ばれる 4 次元球体に埋め込まれた境界付き曲面を導入する。一般に、3 次元球体へ適切に埋め込まれた境界付き曲線はニットと同値（全同位）になるとは限らない。本講演では、4 次元球体へ適切に埋め込まれた境界付き曲面はニット状曲面と同値であることを紹介する。本研究は中村伊南沙氏（佐賀大学）との共同研究である。

1　導入

結び目 (**knot**) とは 3 次元球面 S^3 に埋め込まれた閉曲線である。結び目の非交和を**絡み目** (**link**) という。2 つの絡み目は全同位によって移り合うとき同値であるという[*1]。与えられた 2 つの絡み目 (結び目) が同値であるかどうかを判定する問題 (同値性問題) は結び目理論において基本的な問題であり盛んに研究が行われている。

次数 n の**ブレイド** (**braid**, **組み紐**) とは円筒 $D^2 \times I$ に埋め込まれた n 本の曲線であり、各曲線は円板 $D^2 \times \{t\}$ $(t \in I)$ と丁度一点で横断的に交わるものである (図 1-左)。ブレイドの境界を図 1-右のようにして閉じる操作を**閉包** (**closure**) といい、ブレイドから結び目を構成することができる。任意の絡み目はあるブレイドの閉包と同値であることが知られている [1]。

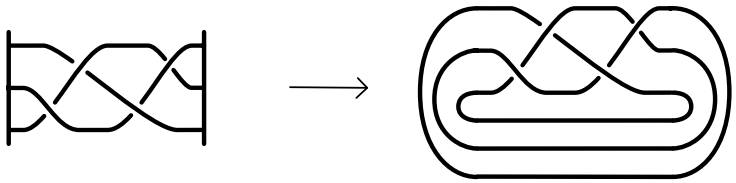


図 1　ブレイドの閉包

Artin[2] により、は次数 n のブレイドは図 2 にある基本的なパーツ σ_i, σ_i^{-1} $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ の組み合わせによって得られることが知られている。また 2 つの次数 n のブレイドの端点を繋ぎ合

* E-mail:u444951d@ecs.osaka-u.ac.jp

[*1] 位相空間 X に対して、X から X 自身へのホモトピー $\{\Phi_t : X \to X\}_{t\in[0,1]}$ が**同位** (**isotopy**) であるとは、各 Φ_t が同相写像であることをいう。2 つの絡み目が**全同位**であるとは、全空間 (S^3) のイソトピーによって移り合うことをいう。

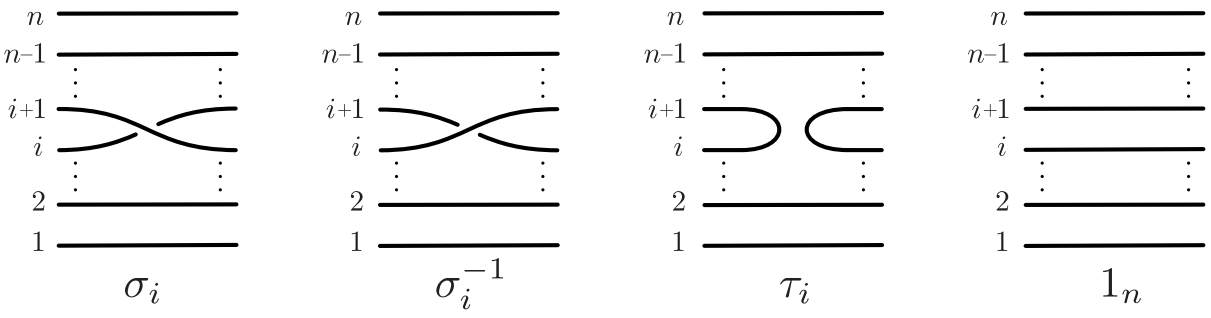


図 2　ブレイドの生成元とニットの生成元

わせることで新たなブレイドが得られるが、次数 n のブレイド (の同値類) 全体からなる集合はこの操作により群の構造を持つ。このとき $\sigma_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ は生成元であり、自明なブレイド 1_n は単位元である。

ブレイド β のある交点 (σ_i または σ_i^{-1}) を図 2 にある τ_i または 1_n に置き換える操作を**スプライス** (**splice**) という。**ニット** (**knit**) とはブレイドのいくつかの交点をスプライスして得られる円筒 $D^2 \times I$ 内の曲線である。定義よりニットは σ_i, σ_i^{-1}, τ_i の組み合わせによって得られる。スプライスは多項式に値を持つ結び目の不変量を構成する際に利用される手法であり、村上 [4] はブレイド群を用いてそれらの不変量を理解する過程でニットは導入した。

曲面結び目 (**surface-knot**) とは S^4 に滑らかに埋め込まれた閉曲面である。複数個の曲面結び目の非交和を**曲面絡み目** (**surface-link**) という。2 つの曲面絡み目が全同位であるとき同値であるという。曲面結び目理論においても同様に同値性問題が考えられるが、4 次元トポロジー特有の困難さも伴い容易ではない。そこで問題への糸口としてブレイドによるアプローチが考えられる。Rudolph は曲面結び目理論におけるブレイドの高次元化として**ブレイド状曲面** (**braided surface**) を導入した。特に $D^2 \times B^2$ へ適切[*2]に埋め込まれた境界付き曲面 F がブレイド状曲面と全同位であることと F がリボン曲面[*3]であることは同値であることが知られている [5]。

本稿では曲面結び目理論におけるニットの高次元化として**ニット状曲面** (**knitted surface**) を導入する。ブレイド状曲面はリボン曲面を表示していたが、ニット状曲面については次が成り立つ。

定理 1.1. $D^2 \times B^2$ へ適切に埋め込まれた任意の境界付き曲面 F はあるニット状曲面と全同位である。

ブレイド状曲面の境界成分が自明であるとき、**2 次元ブレイド** (**2-dimensional braid**) という。2 次元ブレイドは閉包を定義することができ、これにより 2 次元ブレイドから向き付け可能な曲面結び目を構成することができる。特に任意の向き付け可能な曲面絡み目はある 2 次元ブレイドの閉包と全同位であることが知られている ([6, 3])。境界成分が自明なニット状曲面を **2 次元ニット** (**2-dimensional knit**) と呼ぶ。2 次元ブレイドのときと同様にして閉包を定義することができ、これにより 2 次元ニットから曲面絡み目を構成することができる。このとき次が成り立つ。

[*2] 埋め込み写像 $f : X \to Y$ が**適切** (**proper**) であるとは、$f(X) \cap \partial Y = f(\partial X)$ をみたすことをいう。

[*3] 4 次元球体へ適切に埋め込まれた曲面が**リボン** (**ribbon**) であるとは、極大点を持たないようなモース関数が取れることをいう。

定理 1.2. 任意の曲面絡み目はある 2 次元ニットの閉包と全同位である。

2　ニット

$p : D^2 \times I \to I$ を第二成分に関する射影とし、D^2 の内点からなる n 点部分集合 Q_n を 1 つ固定する。本講演では、円筒 $D^2 \times I$ へ適切に埋め込まれた滑らかな 1 次元多様体を**タングル** (**tangle**) と呼ぶ。射影 $\pi_\beta := p|_\beta : \beta \to I$ の臨界点全体からなる集合を $\mathrm{Crit}(\beta)$ と記す。

定義 2.1. $D^2 \times I$ に埋め込まれたアーク l が次を満たすとき、l は β の**ペアリング** (**pairing**) であるという：

1. $\partial l = l \cap \beta = \partial l \cap \mathrm{Crit}(\beta)$ は π_β のモース臨界点である。
2. l の全ての点は射影 $\pi_l := p|_l : l \to I$ に関して正則点である。
3. 各 $a \in \partial l$ は次を満たす局所座標近傍 $(U; x, y, z)$ を持つ：
   - $(x, y, z) \in U$ に対して、$\pi_\beta(x, y, z) = z$ が成り立つ。
   - $\beta \cap U = \{(0, y, y^2) \mid y \in \mathbb{R}\}$ かつ $l \cap U = \{(0, 0, z) \mid z \leq 0\}$ である。

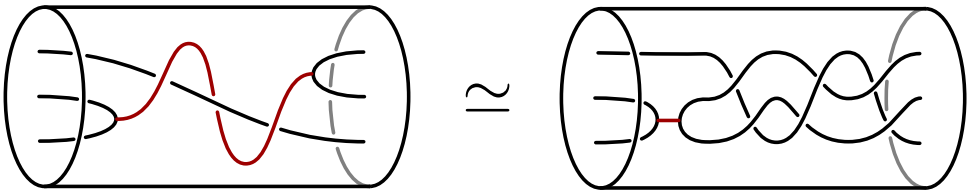


図 3　ペアリング (赤色) の例

定義 2.2. タングル β の互いに交わらないペアリングの集合を $\ell = \{l_1, \ldots, l_q\}$ とする。組 (β, ℓ) が**ニット** (**knit**) であるとは、次を満たすことをいう。

1. π_β はモース関数である。
2. $\partial\beta = Q_n \times \partial I$ である。
3. $|\ell| := l_1 \cup \cdots \cup l_q$ は $\mathrm{Crit}(\beta)$ を含む。

またこのとき ℓ を β の**ニット構造** (**knit structure**) という。

特に $(\beta, \emptyset)$ がニットであるとき、即ち π_β が臨界点を持たないとき、β はブレイドである。

β のニット構造 $\ell = \{l_1, \ldots, l_q\}$ と自己同相写像 $\Phi : D^2 \times I \to D^2 \times I$ に対して、$\Phi(\ell) := \{\Phi(l_1), \ldots, \Phi(l_q)\}$ かつ $\Phi(\beta, \ell) := (\Phi(\beta), \Phi(\ell))$ と記す。

定義 2.3. 2 つのニット (β_0, ℓ_0) と (β_1, ℓ_1) が**同値** (**equivalent**) であるとは、次を満たす $D^2 \times I$ のイソトピー $\{\Phi_t\}_{t \in [0,1]}$ が存在することをいう：

1. $\Phi_0 = \mathrm{id}$ かつ $\Phi_1(\beta_0, \ell_0) = (\beta_1, \ell_1)$ である。

2. 任意の $t \in [0,1]$ について $\Phi_t(\beta_0, \ell_0)$ はニットである。

3 ニット状曲面

2 次元円板を D^2, B^2 で表し、$p : D^2 \times B^2 \to B^2$ を第二成分の射影、そして B^2 の基点 y_0 を ∂B^2 上で 1 つ固定する。

$D^2 \times B^2$ へ適切に埋め込まれた曲面 S に対して $\pi_S := p|_S : S \to B^2$ を p の S への制限写像、$a \in S$ を π_S の臨界点とする。a の近傍における π_S の局所座標表示として $\pi_S(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ が取れるとき、臨界点 a を（**単純**）**分岐点** (**simple branch point**) と呼ぶ。同値な言い換えとして、複素平面による局所座標表示として $\pi_S(z) = z^2 \in \mathbb{C}$ が取れるときをいう。特に、像 $\pi_S(a)$ は B^2 の内点である。π_S の臨界点 $a \in S$ が**折り目特異点** (**fold point**) であるとは、$\pi_S(x,y) = (x^2, y)$ となる局所座標表示が取れることをいう[*4]。π_S の折り目特異点全体からなる集合を $\mathrm{Fold}(S)$ で記す。

定義 3.1. $D^2 \times B^2$ に埋め込まれた曲面 L が次を満たすとき、L は S の**ペアリング** (**pairing**) であるという：

1. $L \cap S = \partial L \cap \mathrm{Fold}(S)$ は空でない部分集合である。
2. $\partial L \subset \mathrm{Fold}(S) \cup (D^2 \times \partial B^2)$ かつ $\partial L \cap (D^2 \times \partial B^2)$ はループ成分を含まない。
3. L の任意の点は π_L に関して正則点である。
4. 各 $a \in L \cap S$ は以下を満たす局所座標近傍 U を持つ[*5]：
   - $(x,y,z,w) \in U$ に対して、$\pi_S(x,y,z,w) = (z,w)$ である（局所座標表示）。
   - $S \cap U = \{(0, y, y^2, w) \mid y, w \in \mathbb{R}\}$ かつ $L \cap U = \{(0,0,z,w) \mid z \leq 0, w \in \mathbb{R}\}$ である。

定義 3.2. $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_q\}$ を互いに交わらない S のペアリングの集合とする。$(S, \mathcal{L})$ が次数 n の**ニット状曲面** (**knitted surface**, **BMW surface**) であるとは、次を満たすことをいう：

1. π_S の臨界点は分岐点と折り目特異点のみからなる。
2. $\partial S \subset D^2 \times \partial B^2$ かつ $S \cap (D^2 \times \{y_0\}) = Q_n \times \{y_0\}$ である。
3. $|\mathcal{L}| := L_1 \cup \cdots \cup L_q$ は $\mathrm{Fold}(S)$ を含む。

またこのとき、$\mathcal{L}$ を S の**ニット構造**（**knit structure**）と呼ぶ。

特に $(S, \emptyset)$ がニット状曲面であるとき、つまり S が折り目特異点を持たないとき、S を**ブレイド状曲面** (**braided surface**) という。

S のニット構造 $\mathcal{L} = \{L_1, \ldots, L_q\}$ と同相写像 $\Phi : D^2 \times B^2 \to D^2 \times B^2$ に対して、$\Phi(\mathcal{L}) := \{\Phi(L_1), \ldots, \Phi(L_q)\}$、$\Phi(S, \mathcal{L}) := (\Phi(S), \Phi(\mathcal{L}))$ と記す。

定義 3.3. 2 つのニット状曲面 $(S_0, \mathcal{L}_0)$ と $(S_1, \mathcal{L}_2)$ が**同値** (**equivalent**) であるとは、次を満たす $D^2 \times B^2$ のイソトピー $\{\Phi_t\}_{t \in [0,1]}$ が存在することをいう：

[*4] $a \in \partial S$ であるとき、折り目特異点の局所座標表示は上半平面 $\mathbb{R}^2_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$ 上で考えるものとする。

[*5] $a \in \partial S$ であるとき、それぞれ $w \geq 0$ とする。

- $\Phi_0 = \mathrm{id}$ かつ $\Phi_1(S_0, \mathcal{L}_0) = (S_1, \mathcal{L}_1)$ を満たす。
- 任意の $t \in [0,1]$ に対して $\Phi_t(S_0, \mathcal{L}_0)$ はニット状曲面である。

4　ニット状曲面の閉包

定義 4.1. ニット状曲面 $(S, \mathcal{L})$ の境界が自明であるとき、即ち $\partial S = Q_n \times \partial B^2$ であるとき、$(S, \mathcal{L})$ を 2 **次元ニット** (**2-dimensional knit**) という。特に $\mathcal{L} = \emptyset$ のとき、S を 2 **次元ブレイド** (**2-dimensional braid**) という。

$(S, \mathcal{L})$ を 2 次元ニット、B_0^2 を B^2 のコピーとする。また $d := Q_n \times B_0^2$ を $D^2 \times B_0^2$ に埋め込まれた n 枚の円板族とする。$\partial(D^2 \times B^2)$ と $\partial(D^2 \times B_0^2)$ には自然な同一視があるため、この同一視によって $D^2 \times B^2$ と $D^2 \times B_0^2$ を貼り合わせることで S^4 を得る。このとき $S \cap d = \partial S = \partial d$ であるため、S^4 内の曲面絡み目 $\hat{S} = S \cup d$ を得る、これを 2 次元ニット S の**閉包** (**closure**) という。このとき、定理 1.2 が成り立つ。

参考文献

[1] James Waddell Alexander. A lemma on systems of knotted curves. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 9(3):93–95, 1923.

[2] Emil Artin. Theorie der Zöpfe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 4(1):47–72, 1925.

[3] Seiichi Kamada. Alexander's and Markov's theorems in dimension four. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 31(1):64–67, 1994.

[4] Jun Murakami. The Kauffman polynomial of links and representation theory. *Osaka J. Math.*, 24(4):745–758, 1987.

[5] Lee Rudolph. Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids. *Comment. Math. Helv.*, 58(1):1–37, 1983.

[6] O. Ja. Viro. Local knotting of sub-manifolds. *Mat. Sb. (N.S.)*, 90(132):173–183, 325, 1973.

二次元多重配置の指数の決定について

九州大学大学院 マス・フォア・イノベーション連係学府
前原将太 (Shota MAEHARA) *

概要

二次元多重配置に付随する対数的ベクトル場のなす加群は常に，斉次な基底をもつ階数 2 の自由加群であり，さらにその次数の組は基底の選び方に依らず，「指数」と呼ばれている．

本講演では，現在解決していない中で最も単純と考えられる「B_2 型の配置」というものに絞り，指数の決定に関して [9] において M. Wakefield, S. Yuzvinsky の両氏によって考察された行列が役に立つことを紹介する．さらに，この研究から発展したものとして北海道大学の沼田泰英教授との共同研究である [5] がある．最後にこの論文の主定理についても紹介する．

1 導入

本章では，超平面配置に関する重要な定義をいくつか述べるとともに，本研究の動機付けを与えることにする．

$\mathbb{K}$ を一般の体，l を正の整数とする．l 次元ベクトル空間 $V = \mathbb{K}^l$ 中の余次元 1 のアフィン空間を**超平面**と言い，この超平面の有限個の集合を l **次元超平面配置**と呼ぶ．l 次元超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ に対して，$S = Sym(V^*) = \mathbb{K}[x_1, x_2, \cdots, x_l]$ 中の一次多項式 α_i と体 $\mathbb{K}$ の元 c_i を $H_i = \{x \in V \mid \alpha_i(x) - c_i = 0\}$ が成り立つように選び，**定義多項式** $Q = Q(\mathcal{A})$ を $Q(\mathcal{A}) = \prod_{i=1}^{n=|\mathcal{A}|}(\alpha_i - c_i)$ で定義する．

全ての超平面が原点を通る配置を特に**中心的な配置**と呼び，さらに全ての超平面の交わりが原点であるとき，この配置は**本質的**であると呼ぶ．中心的な l 次元超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ に対して，対数的ベクトル場のなす加群 $D(\mathcal{A})$ を $\mathbb{K}$ 線形な S 導分作用素全体のなす加群 $\mathrm{Der}(S)$ の部分加群として，以下のように定義する．

定義 1.1. $\mathrm{Der}(S) = \{\sum_{i=1}^{l} f_i\partial_{x_i} \mid f_i \in S\}$ を S **上の微分作用素からなる** S **加群**とする．自然に次数を考えることで，$\mathrm{Der}(S)$ は次数付き S 加群となっている．すなわち，$\theta = \sum_{i=1}^{l} f_i\partial_{x_i} \in \mathrm{Der}(S)$ と表された微分作用素 θ について，全ての i に対して $f_i \in S$ が次数 d の斉次多項式のとき θ は次数 d の斉次元であると定義する．

例 1.2. $\mathrm{Der}(S) = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3]$ について (つまり $l = 3$ のとき)，$\theta = x_1\partial_{x_1} + x_2\partial_{x_2} + x_3\partial_{x_3}$ は次数 1 の斉次元である．

定義 1.3 (対数的ベクトル場のなす加群)**.** 中心的な l 次元超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ に対

* E-mail:maehara.shota.027@s.kyushu-u.ac.jp

して，$D(\mathcal{A}) = \{\theta \in \mathrm{Der}(S) \mid \forall i, \theta(\alpha_i) \in \alpha_i S\}$ で**対数的ベクトル場のなす加群**を定義する．これは $\mathrm{Der}(S)$ の次数付き部分加群である．

以降，この記事を通して超平面配置は常に中心的かつ本質的であるとする．対数的ベクトル場のなす加群がもつ性質をいくつか述べる．

定理 1.4. l 次元超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して，$D(\mathcal{A})$ は S 加群として階数 l である．すなわち，S 加群 M を $S \setminus \{0\}$ で局所化したものを $M_{(0)}$ と書くとして，$D(\mathcal{A})_{(0)} \cong S_{(0)}^{\oplus l}$ が成り立つ．特に，$D(\mathcal{A})$ が自由 S 加群ならば $D(\mathcal{A}) \cong S^{\oplus l}$ である．

対数的ベクトル場のなす加群は S 上自由加群とは限らない．そこで，$D(\mathcal{A})$ が自由加群であるとき超平面配置 $\mathcal{A}$ は**自由**，または**自由配置**であると呼ぶことにする．実は，$D(\mathcal{A})$ が自由 S 加群であるとき，その基底は斉次に取ることができ，次のように指数という概念が well-defined に定義される．

定義 1.5. l 次元超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ が自由であるとき，$D(\mathcal{A})$ の基底は斉次にとることができ，その次数の組合せは斉次基底の取り方に依らない ([6])．この l 個の非負整数の組を**指数** (*exponents*) と定義し，$\exp(\mathcal{A})$ と書く．

自由性を判定する上で非常に重要なものとして，以下に述べる齋藤の判定法がある．

定義 1.6 (齋藤行列)**.** l 次元超平面配置 $\mathcal{A}$，l 個の微分作用素の集合 $\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l\} \subset \mathrm{Der}(S)$ に対して，$M = M(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l) = (\theta_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq l}$ で定義された行列 M を**齋藤行列**と呼ぶ．

定理 1.7 (齋藤の判定法 [7])**.** l 次元超平面配置 $\mathcal{A}$ と l 個の斉次な微分作用素の集合 $\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l\} \subset D(\mathcal{A})$ に対して, 以下は同値.

(1) $\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l\}$ は $D(\mathcal{A})$ の S 上の基底をなす．特に，$\mathcal{A}$ は自由配置である．
(2) $\{\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_l\}$ は S 上一次独立であり，$\sum_{i=1}^{l} \deg(\theta_i) = |\mathcal{A}|$ が成り立つ．
(3) $c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ が存在し，$\det(M) = c \cdot Q(\mathcal{A})$ となる．

加群 $D(\mathcal{A})$ が代数的に定義された事と対照的に，配置中の超平面の交わり方の情報から特性多項式と呼ばれる対象が定義される．

定義 1.8. l 次元超平面配置 $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$ に対して，$L(\mathcal{A}) = \{\bigcap H_i \mid H_i \in \mathcal{B}, \mathcal{B} \subset \mathcal{A}\}$ を $\mathcal{A}$ の**交差束**と呼ぶ. ただし，$\mathcal{B} = \emptyset$ のとき，$\bigcap_{H_i \in \mathcal{B}} H_i = V = \mathbb{K}^l$ と定義する．すると，交差束に通常の包含関係の逆の大小関係を入れることで $L(\mathcal{A})$ は V を最小限とする半順序集合とみなせる．すなわち，$X \subset Y \in L(\mathcal{A})$ に対して $X \geq Y$ と定める．

定義 1.9. $V = \mathbb{K}^l$ 中の超平面配置 $\mathcal{A}$ に対して，次のように関数 $\mu : L(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$ を定める．

$$\mu(X) = \begin{cases} 1 & (X = V) \\ -\sum_{X > Y \geq V} \mu(Y) & (X > V) \end{cases}.$$

帰納的に定義されるこの関数を $\mathcal{A}$ に関する**メビウス関数**と呼ぶ．さらにメビウス関数を用いて，$\chi(\mathcal{A}, t) = \sum_{X \in L(\mathcal{A})} \mu(X) t^{\dim(X)}$ で定義される多項式を**特性多項式**と呼ぶ.

注意 1.10. 超平面配置 $\mathcal{A}$ について，$\chi(\mathcal{A},1)=\sum_{X\in L(\mathcal{A})}\mu(X)=\mu(\{0\})+\sum_{X\in L(\mathcal{A})\setminus\{0\}}\mu(X)=0$ より，$\chi(\mathcal{A},t)$ は $(t-1)$ で割り切れる．

超平面配置の自由性と配置の交わり方の情報を繋ぐものとして，次の定理がある．

定理 1.11 (寺尾の分解定理 [8])**.** l 次元超平面配置 $\mathcal{A}$ が指数 $\exp(\mathcal{A})=(e_1,e_2,\cdots,e_l)$ をもつ自由配置であるとき，$\chi(\mathcal{A},t)=\prod_{i=1}^{l}(t-e_i)$ が成り立つ．

しかし，この逆は成り立たない．すなわち，特性多項式が一次式に因数分解できるが，自由でない配置は存在する ([4])．これに関連して，以下の重要な未解決予想がある．

予想 1.12 (寺尾予想)**.** 超平面配置 $\mathcal{A}$ の自由性は組合せ論的な情報 $L(\mathcal{A})$ のみから定まる．つまり，自由な配置 $\mathcal{B}$ に対して，半順序集合として $L(\mathcal{A})\cong L(\mathcal{B})$ ならば $\mathcal{A}$ は自由配置である．

上記の予想を解決するために様々なアプローチがされており，その内の一つに，超平面配置の拡張とみなせる多重配置と呼ばれる対象の研究があげられる．

定義 1.13 (多重配置)**.** l 次元超平面配置 $\mathcal{A}=\{H_1,H_2,\cdots,H_n\}$ に対して，関数 $m:\mathcal{A}\to\mathbb{Z}_{>0}$ を $\mathcal{A}$ 上の**重複度**と呼び，超平面配置と重複度との組 $(\mathcal{A},m)$ を l 次元の**多重配置**と呼ぶ．なお，重複度 m に対して，$m(H_i)=m_i\in\mathbb{Z}_{>0}$ のとき $m=(m_1,m_2,\cdots,m_n)\in\mathbb{Z}_{>0}^{\oplus n}$ と表記し，さらに**重複度の和**を $|m|=\sum_{i=1}^{n}m_i$ で，**定義多項式** $Q=Q(\mathcal{A},m)$ を $Q(\mathcal{A},m)=\prod_{i=1}^{n=|\mathcal{A}|}{\alpha_i}^{m_i}$ で定義する．

以降は多重配置と区別して，これまで超平面配置と呼んでいたものを**単配置**と呼ぶことにする．すなわち，超平面の有限集合を単配置，単配置と重複度との組を多重配置と呼ぶ．単配置のときと同様にして，多重配置に対しても以下のような概念が定義できる．

定義 1.14. l 次元多重配置 $(\mathcal{A},m)$ に対して，対数的ベクトル場のなす加群を $D(\mathcal{A},m)=\{\theta\in\mathrm{Der}(S)\mid\forall i,\theta(\alpha_i)\in\alpha_i^{m_i}S\}$ で定義する．$D(\mathcal{A},m)$ は次数付き S 加群であり，S 加群として階数 l である．

定義 1.15. l 次元多重配置 $(\mathcal{A},m)$ に対して，$D(\mathcal{A},m)$ が自由 S 加群であるとき，多重配置 $(\mathcal{A},m)$ は自由であると呼ぶ．

定義 1.16. l 次元多重配置 $(\mathcal{A},m)$ が自由であるとき，$D(\mathcal{A},m)$ の基底は斉次にとることができ，その次数の組合せは斉次基底の取り方に依らない．この l 個の非負整数の組を指数 $\exp(\mathcal{A},m)$ と定義する．

以下は齋藤の判定法の多重配置版である．

定理 1.17 (齋藤の判定法 [11])**.** l 次元多重配置 $(\mathcal{A},m)$ と l 個の斉次な微分作用素の集合 $\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l\}\subset D(\mathcal{A},m)$ に対して, 以下は同値.

(1) $\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l\}$ は $D(\mathcal{A},m)$ の S 上の基底をなす．特に，$(\mathcal{A},m)$ は自由である．
(2) $\{\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l\}$ は S 上一次独立であり，$\sum_{i=1}^{l}\deg(\theta_i)=|m|$ が成り立つ．
(3) $c\in\mathbb{K}\setminus\{0\}$ が存在し，$\det(M)=c\cdot Q(\mathcal{A},m)$ となる．

多重配置に関するこれらの定義について，$m^{(1)} = (1, 1, \cdots, 1)$ とすると多重配置 $(\mathcal{A}, m^{(1)})$ に対しては単配置と同様となり，このようにして多重配置は単配置の拡張であるとみなせる．

単配置 (超平面配置) の自由性は例えば以下のように多重配置の指数と関係していることが分かっており，この意味で多重配置の指数を研究することは重要な意味がある．

定理 1.18 (Ziegler 制限 [11])**.** l 次元単配置 $\mathcal{A}$ について，$\mathcal{A}$ は自由で $\exp(\mathcal{A}) = (1, d_2, \cdots, d_l)$ とする．このとき，$H \in \mathcal{A}$ に対して，$l-1$ 次元単配置 $\mathcal{A}^H = \{H \cap K \mid K \in \mathcal{A} \setminus \{H\}\}$ と重複度 $m^H(X) = |\{K \in \mathcal{A} \setminus \{H\} \mid H \cap K = X\}|$ との組で定義される $l-1$ 次元多重配置 $(\mathcal{A}^H, m^H)$ を考えると，$(\mathcal{A}^H, m^H)$ は $\exp(\mathcal{A}, m) = (d_2, \cdots, d_l)$ を満たす自由多重配置となる．

定理 1.19 (吉永の判定法 [10])**.** 3 次元単配置 $\mathcal{A}$ について, 特性多項式を $\chi(\mathcal{A}, t) = (t-1)(t^2 - b_1 t + b_2)$ とおく．$H \in \mathcal{A}$ に対して，$\exp(\mathcal{A}^H, m^H) = (d_2, d_3)$ とした時，$\mathcal{A}$ が自由であることと $b_2 = d_2 d_3$ が成り立つことが同値である．

実は，二次元多重配置は常に自由であることが知られており，さらに齋藤の判定法 (定理 1.17) から，二次元多重配置の指数を決定することは指数の差を決定することと同値だと分かる．そこで，次の定義を設ける．

定義 1.20. 二次元多重配置 $(\mathcal{A}, m)$ について，$\exp(\mathcal{A}, m) = (e_1, e_2)$ のとき，**指数の差**を $|\exp(\mathcal{A}, m)| = |\exp| = |e_1 - e_2|$ で定義する．

重複度に関して，以下のように *balanced, not balanced* という重要な分類がある．

定義 1.21. 重複度 $m = (m_1, m_2, \cdots, m_n)$ について, 任意の i に対して $m_i \leq |m| - m_i - 1$ が成り立つとき，m は ***balanced*** であるという．反対に，*balanced* でない重複度のことを ***not balanced*** であるという．

not balanced な重複度をもつ二次元多重配置に関しては，以下のように指数が決定されている．

定理 1.22 ([9])**.** *not balanced* な重複度 m に対して, $m_k = \max\{m_i \mid m_i \in m = (m_1, m_2, \cdots, m_n)\}$ とする．このとき，二次元多重配置 $(\mathcal{A}, m)$ の指数は $\exp(\mathcal{A}, m) = (|m| - m_k, m_k)$ となる．

一方 *balanced* な多重配置の指数の決定については，大変役に立つ定理として以下がある．

定理 1.23 ([2])**.** $\mathcal{A}$ を標数ゼロの体上の 2 次元ベクトル空間中の超平面配置，m を $\mathcal{A}$ 上の *balanced* な重複度とする．このとき，多重配置 $(\mathcal{A}, m)$ の指数の差は $|\mathcal{A}| - 2$ 以下となる．

系 1.24. $\mathcal{A}$ を $|\mathcal{A}| = 3$ を満たす超平面配置とする．このとき，多重配置 $(\mathcal{A}, m)$ について $|\exp(\mathcal{A}, m)| \leq |\mathcal{A}| - 2 = 1$ なので，定理 1.17より

$$|\exp(\mathcal{A}, m)| = \begin{cases} 0 & (|m| \in 2\mathbb{Z}) \\ 1 & (|m| \in 2\mathbb{Z} + 1). \end{cases}$$

指数が自明でない多重配置として，もととなる単配置が 4 本の直線からなる二次元多重配置がある．本研究では特に，B_2 型のコクセター配置と呼ばれる配置に絞って指数の決定について考察する．

B_2 型のコクセター配置を定義する前に，二次元多重配置の場合についていくつか確認をしてお

く．$\mathbb{K}$ を標数ゼロの体とする (以降，本研究では標数ゼロの体上についてのみ考える)．このとき，$S = \mathbb{K}[x, y]$ を変数 x, y 上の二変数多項式環，$\mathrm{Der}(S) = \{f\partial_x + g\partial_y \mid f, g \in S\}$ を S 上の微分作用素からなる S 加群とする．自然に次数を考えることで，$\mathrm{Der}(S)$ は次数付き S 加群とみなせたのであった．それでは，この章の終わりとして B_2 型のコクセター配置の定義を行う．

定義 1.25. $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = y$, $\alpha_3 = x - y$, $\alpha_4 = x + y$ に対して, $\mathcal{A} = \{\mathrm{Ker}(\alpha_i) \subset \mathbb{K}^2 \mid i = 1, 2, 3, 4\}$ で定義される二次元配置 $\mathcal{A}$ を B_2 **型のコクセター配置**と呼ぶ．言い換えると，定義多項式 $Q(\mathcal{A}) = xy(x - y)(x + y)$ で表される単配置のことである．**以降，本記事では $\mathcal{A}$ という記号で常に B_2 型のコクセター配置を表す**ことに注意する．

2 主定理

この章では，指数の差に関する以下の主定理の証明を与える．

定理 2.1 (主定理)**.** B_2 型のコクセター配置 $\mathcal{A}$ 上の *balanced* な重複度 $m = (m_1, m_2, m_3, m_3)$ について, $(m_1, m_2 \in 2\mathbb{Z}+1$ かつ $|m| \in 4\mathbb{Z}+2)$ または $(m_1, m_2 \in 2\mathbb{Z}$ かつ $|m| \in 4\mathbb{Z})$ または $(m_1, m_2 \in 2\mathbb{Z}$ かつ $|m| \in 4\mathbb{Z} + 2)$ ならば，$|\exp(\mathcal{A}, m)| = 0$ である．

以降，[9] で導入された行列を用いて主定理の証明を行う．便宜上，[9] で定義された行列を Wakefield-Yuzvinsky 行列 M_{WY} と呼ぶことにするが，今回は B_2 型のコクセター配置 $\mathcal{A}$ に限ってこの行列を定義する．

条件を満たす多重配置 $(\mathcal{A}, m)$ について，$|\exp(\mathcal{A}, m)| = 2$ となる必要条件を考えたい．

$e := \frac{1}{2}|m| - 1$，$\exists\theta = x^{m_1}f(x, y)\partial x - y^{m_2}g(x, y)\partial y \in D(\mathcal{A}, m)_e$ と仮定する．このとき，

$\exists h(x, y) \in \mathbb{K}[x, y]$ s.t. $\theta(x - y) = h(x, y)(x - y)^{m_3}$

$\Leftrightarrow x^{m_1}(\Sigma f_j x^{e-m_1-j}y^j) + y^{m_2}(\Sigma g_k x^{e-m_2-k}y^k) = (x - y)^{m_3}(\Sigma h_i x^{e-m_3-i}y^i)$ $(f_j, g_k, h_i \in \mathbb{C})$.

$y = 1$ を代入し，さらに等式の両辺を x で $m_3 - 1$ 回偏微分することで次の関係式を得る．

$0 \leqq \forall k \leqq m_3 - 1$，$\sum_{j=0}^{e-m_1} f_j \frac{(e-j)!}{(e-j-k)!} + \sum_{j=0}^{e-m_2} g_j \frac{(e-m_2-j)!}{(e-m_2-j-k)!} = 0$.

同様に θ を $x + y$ に作用させた場合も考えることで，f_j, g_j に関する連立方程式から次のように $2m_3$ 次正方行列 $M_{WY}(m)$ を定義する．

定義 2.2. $\mathcal{A}$ 上の重複度 m に対して,

$$M_{WY}(m) = M_{WY} := \left(\begin{array}{c|c} V_f & V_g \\ \hline W_f & W_g \end{array}\right)$$

で定義される行列を **Wakefield-Yuzvinsky 行列**と呼ぶ．ここで，V_f, V_g, W_f, W_g はそれぞれ

- $V_f(k, j) = \frac{(e-j)!}{(e-j-k)!}, V_g(k, j) = \frac{(e-m_2-j)!}{(e-m_2-j-k)!}$,
- $W_f(k, j) = \frac{(e-j)!}{(e-j-k)!}(-1)^{e-j-k}, W_g(k, j) = \frac{(e-m_2-j)!}{(e-m_2-j-k)!}(-1)^{e-m_2-j-k+1}$

を成分とする $V_f, W_f : m_3 \times (e - m_1 + 1)$ 行列, $V_g, W_g : m_3 \times (e - m_2 + 1)$ 行列であり，これは $(e - m_1 + 1) + (e - m_2 + 1) = 2e + 2 - m_1 - m_2 = 2m_3$ を満たす．

つまり，WY 行列の左半分 (f-part) に関して，V_f, W_f は対応する各要素の絶対値が等しく，$W_f(1,1) = (-1)^e \cdot V_f(1,1)$ が成り立つ (g-part についても同様の関係式が分かる). 定義より，この行列は $(|\exp| = 2) \Rightarrow (\det M_{WY} = 0)$ を満たすので，$\det M_{WY} \neq 0$ を示すことで主定理が証明できた事になる.

例 2.3 ($m = (3,5,5,5)$ について)**.**

$$M_{WY}(3,5,5,5) = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 56 & 42 & 30 & 20 & 12 & 6 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 336 & 210 & 120 & 60 & 24 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1680 & 840 & 360 & 120 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -8 & 7 & -6 & 5 & -4 & 3 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 56 & -42 & 30 & -20 & 12 & -6 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ -336 & 210 & -120 & 60 & -24 & 6 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 1680 & -840 & 360 & -120 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

主定理の証明には以下の一般のロンスキー行列に関する補題を用いる.

定義 2.4. 区間 I 上 $n-1$ 回まで微分可能な n 個の実関数 $f_1, f_2, \ldots, f_n$ について，ロンスキー行列式 $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ は

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{n-1}(x) & f_2^{n-1}(x) & \cdots & f_n^{n-1}(x) \end{vmatrix}$$

で定義される I 上の関数である.

補題 2.5 ([9])**.** λ_i が全て異なる非負整数であるパワー関数 $\{x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, ..., x^{\lambda_k}\}$ について，そのロンスキー行列式は次数 $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j - \sum_{r=1}^{k-1} r$, 係数 $(-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \prod_{1 \leq i \leq j \leq k} (\lambda_i - \lambda_j)$ の x の単項式になる.

主定理の証明. 以下の (a),(b),(c) の 3 パターンに分けて $\det M_{WY} \neq 0$ を示す.

(a) $\underline{m_1, m_2 \in 2\mathbb{Z}+1 \text{ かつ } |m| \in 4\mathbb{Z}+2 \text{ のとき}}$

$e := \frac{|m|}{2} - 1 \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow e - m_1 + 1, e - m_2 + 1 \in 2\mathbb{Z}$ であるので，行基本変形により

$$M_{WY} = \left(\begin{array}{c|c} V_f & V_g \\ \hline W_f & W_g \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \cdots & * & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \cdots & * \\ * & \mathbf{0} & \cdots & * & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \cdots & * & \mathbf{0} \end{array}\right).$$

上半分の $m_3 \times 2m_3$ 行列 (V-part), 下半分の $m_3 \times 2m_3$ 行列 (W-part) はそれぞれ,
ゼロベクトルでない列ベクトルがちょうど m_3 個存在し，その m_3 個のベクトルを取り出すと,
上半分；$\{x^{e-1}, x^{e-3}, ..., x^{m_1}, x^{e-m_2-1}, x^{e-m_2-3}, ..., x^2, 1\}$,
下半分；$\{x^e, x^{e-2}, ..., x^{m_1+1}, x^{e-m_2}, x^{e-m_2-2}, ..., x^3, x\}$
からなるロンスキー行列に $x = 1$ を代入したものとなる. よって補題 2.5から, 上半分・下半分の行列はそれぞれ rank が m_3 の行列であり，またそれぞれの行列から取り出した行ベクトルは明らかに一次独立であるので，$\det M_{WY} \neq 0$，すなわち $|\exp| = 0$ を得る.

以下の (b),(c) についても同様に示すことが出来る.

(b) $m_1, m_2 \in 2\mathbb{Z}$ かつ $|m| \in 4\mathbb{Z}$ のとき

$e := \frac{|m|}{2} - 1 \in 2\mathbb{Z}+1 \Rightarrow e-m_1+1, e-m_2+1 \in 2\mathbb{Z}$ であるので，行基本変形により

$$M_{WY} = \left(\begin{array}{c|c} V_f & V_g \\ \hline W_f & W_g \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} * & \mathbf{0} & \cdots & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \cdots & * \\ \hline \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \cdots & * & * & \mathbf{0} & \cdots & * & \mathbf{0} \end{array}\right).$$

上半分の $m_3 \times 2m_3$ 行列 (V-part), 下半分の $m_3 \times 2m_3$ 行列 (W-part) はそれぞれ，ゼロベクトルでない列ベクトルがちょうど m_3 個存在し，その m_3 個のベクトルを取り出すと，

上半分；$\{x^e, x^{e-2}, ..., x^{m_1+1}, x^{e-m_2-1}, x^{e-m_2-3}, ..., x^2, 1\}$,

下半分；$\{x^{e-1}, x^{e-3}, ..., x^{m_1}, x^{e-m_2}, x^{e-m_2-2}, ..., x^3, x\}$

からなるロンスキー行列に $x=1$ を代入したものとなる. よって (a) の場合と同様の議論を行って，$\det M_{WY} \neq 0$，すなわち $|\exp| = 0$ を得る.

(c) $m_1, m_2 \in 2\mathbb{Z}$ かつ $|m| \in 4\mathbb{Z}+2$ のとき

$e := \frac{|m|}{2} - 1 \in 2\mathbb{Z} \Rightarrow e-m_1+1, e-m_2+1 \in 2\mathbb{Z}+1$ であるので，行基本変形により

$$M_{WY} = \left(\begin{array}{c|c} V_f & V_g \\ \hline W_f & W_g \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & * & \cdots & * \\ \hline * & \mathbf{0} & * & \cdots & * & \mathbf{0} & * & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{array}\right).$$

上半分の $m_3 \times 2m_3$ 行列 (V-part), 下半分の $m_3 \times 2m_3$ 行列 (W-part) はそれぞれ,

ゼロベクトルでない列ベクトルがちょうど m_3 個存在し，その m_3 個のベクトルを取り出すと，

上半分；$\{x^{e-1}, x^{e-3}, ..., x^{m_1+1}, x^{e-m_2}, x^{e-m_2-2}, ..., x^2, 1\}$,

下半分；$\{x^e, x^{e-2}, ..., x^{m_1}, x^{e-m_2-1}, x^{e-m_2-3}, ..., x^3, x\}$

からなるロンスキー行列に $x=1$ を代入したものとなる. よって (a) の場合と同様の議論を行って，$\det M_{WY} \neq 0$，すなわち $|\exp| = 0$ を得る.

以上で主定理の証明が終わった. □

上記の証明中の基本変形を，前述した例 2.3について追ってみる. なお，もちろんこれは証明の (a) の場合に該当する.

例 2.6 ($m = (3,5,5,5)$ について)**.**

$$M_{WY}(3,5,5,5) = \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 56 & 42 & 30 & 20 & 12 & 6 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 336 & 210 & 120 & 60 & 24 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1680 & 840 & 360 & 120 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -8 & 7 & -6 & 5 & -4 & 3 & -3 & 2 & -1 & 0 \\ 56 & -42 & 30 & -20 & 12 & -6 & 6 & -2 & 0 & 0 \\ -336 & 210 & -120 & 60 & -24 & 6 & -6 & 0 & 0 & 0 \\ 1680 & -840 & 360 & -120 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 56 & 42 & 30 & 20 & 12 & 6 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 336 & 210 & 120 & 60 & 24 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1680 & 840 & 360 & 120 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ -16 & 0 & -12 & 0 & -8 & 0 & -6 & 0 & -2 & 0 \\ 112 & 0 & 60 & 0 & 24 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ -672 & 0 & -240 & 0 & -48 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 3360 & 0 & 720 & 0 & 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 56 & 42 & 30 & 20 & 12 & 6 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 336 & 210 & 120 & 60 & 24 & 6 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1680 & 840 & 360 & 120 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 56 & 0 & 30 & 0 & 12 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 336 & 0 & 120 & 0 & 24 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1680 & 0 & 360 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 5 & 0 & 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 42 & 0 & 20 & 0 & 6 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 210 & 0 & 60 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 840 & 0 & 120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 6 & 0 & 4 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 56 & 0 & 30 & 0 & 12 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 336 & 0 & 120 & 0 & 24 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1680 & 0 & 360 & 0 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

注意 2.7. $m_1, m_2 \in 2\mathbb{Z}+1$ かつ $|m| \in 4\mathbb{Z}$ のときはこの議論は行えない. 次章で述べるように, このとき指数の差は 2 となっている ([5]).

3　$D(\mathcal{A}, m)$ の基底について，[5] の紹介

この章では，前章で述べた主定理に関する研究から発展した [5] 中の主結果を紹介する．まず，主定理の要となる作用素 $\theta_m \in \mathrm{Der}(S)$ を定義する．

定義 3.1. m_1,$m_2 \in 2\mathbb{Z}+1$, $|m| \in 4\mathbb{Z}$ をみたす重複度 $m=(m_1,m_2,m_3,m_3)$ を考え，$d := \frac{|m|}{2}-1$ と定める．このとき，f_m, g_m, θ_m を次で定義する．

$$f_m = x^{m_1} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{d-m_1}{2}} (-1)^i \frac{(m_1+m_2-d)(m_1+m_2-d+2)\cdots(m_2-2-2i)}{(d-m_1-2i)!!(d-2i)!!(2i)!!} x^{d-m_1-2i}y^{2i},$$

$$g_m = y^{m_2} \cdot \sum_{i=0}^{\frac{d-m_2}{2}} (-1)^{i+m_3} \frac{(m_1+m_2-d)(m_1+m_2-d+2)\cdots(m_1-2-2i)}{(d-m_2-2i)!!(d-2i)!!(2i)!!} x^{2i}y^{d-m_2-2i},$$

$$\theta_m = f_m\partial_x - g_m\partial_y.$$

ただし，$\frac{d-m_1}{2}<0$, $\frac{d-m_2}{2}<0$ のとき, それぞれ $f_m=0$, $g_m=0$ と定義する．

注意 3.2. 上記の定義中の重複度 m について，今，$|m| \in 4\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z}$ なので, $\frac{d-m_i}{2} = \frac{1}{2}((\frac{|m|}{2}-1)-m_i) \geq 0 \iff 2m_i \leq |m|-1$ が成り立つ．よって，*balanced* の定義 1.21より, m が *balanced* ならば $\frac{d-m_i}{2} \geq 0$ である．

次が [5] における主定理である．

定理 3.3 ([5]–Theorem 3.3)**.** 重複度 $m=(m_1,m_2,m_3,m_3)$ が m_1,$m_2 \in 2\mathbb{Z}+1$, $|m| \in 4\mathbb{Z}$ を満たすとする．もし任意の i に対して $2m_i \leq |m|+2$ が成り立つならば, $\theta_m \in D(\mathcal{A},m)$, かつ $\exp(\mathcal{A},m) = (\frac{|m|}{2}-1, \frac{|m|}{2}+1)$ である．さらに m が *balanced* のとき, $m''=(m_1+2, m_2+2, m_3, m_3)$ を考えることで $D(\mathcal{A},m)$ は $\theta_m, \theta_{m''}$ を基底に持つ.

さらに，指数に関する次の系がある．もちろん，この系の (2) は本記事の主定理にあたり，証明は定理 3.3と [3] の理論を使う．

系 3.4. *balanced* な重複度 $m=(m_1,m_2,m_3,m_4)$ が $|m_2-m_1| \geq m_4-m_3 \geq 0$ かつ $|m| \in 2\mathbb{Z}$ を満たすとする．このとき,

(1) $m_4=m_3$, $m_1,m_2 \in 2\mathbb{Z}+1$, $|m| \in 4\mathbb{Z}$ $\quad\Longrightarrow\quad \exp(\mathcal{A},m)=(d-1,d+1)$
(2) $m_4=m_3$, かつ *(1)* を満たさない $\quad\Longrightarrow\quad \exp(\mathcal{A},m)=(d,d)$
(3) $m_4=m_3+1$ $\quad\Longrightarrow\quad \exp(\mathcal{A},m)=(d,d)$
(4) $m_4=m_3+2$, $m_1,m_2 \in 2\mathbb{Z}+1$ $\quad\Longrightarrow\quad \exp(\mathcal{A},m)=(d,d)$.

注意 3.5. これは，m_3 が十分大きいときに [1] で証明されていた．また，[5] ではこのいくつかの場合について $D(\mathcal{A},m)$ の基底が明示的に書けている．

参考文献

[1] Takuro Abe, *The stability of the family of B_2-type arrangements*, Comm. Algebra **37** (2009), no. 4, 1193–1215. MR 2510979

[2] ———, *Chambers of 2-affine arrangements and freeness of 3-arrangements*, J. Algebraic Combin. **38** (2013), no. 1, 65–78. MR 3070120

[3] Takuro Abe and Yasuhide Numata, *Exponents of 2-multiarrangements and multiplicity lattices*, J. Algebraic Combin. **35** (2012), no. 1, 1–17. MR 2873095

[4] Torsten Hoge and Gerhard Röhrle, *Some remarks on free arrangements*, Tohoku Math. J. (2) **73** (2021), no. 2, 277–288. MR 4278747

[5] Shota Maehara and Yasuhide Numata, *Explicit description of a basis for derivations of a Coxeter multiarrangement of type B_2*, 2023, arXiv:2312.06356.

[6] Peter Orlik and Hiroaki Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 300, Springer-Verlag, Berlin, 1992. MR 1217488

[7] Kyoji Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **27** (1980), no. 2, 265–291. MR 586450

[8] Hiroaki Terao, *Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shepherd-Todd-Brieskorn formula*, Invent. Math. **63** (1981), no. 1, 159–179. MR 608532

[9] Max Wakefield and Sergey Yuzvinsky, *Derivations of an effective divisor on the complex projective line*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 9, 4389–4403. MR 2309190

[10] Masahiko Yoshinaga, *On the freeness of 3-arrangements*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), no. 1, 126–134. MR 2105827

[11] Günter M. Ziegler, *Multiarrangements of hyperplanes and their freeness*, Singularities (Iowa City, IA, 1986), Contemp. Math., vol. 90, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 345–359. MR 1000610

Grothendieck 多項式の特殊値と集合値半標準盤の個数について

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻

島崎達史 (Tatsushi SHIMAZAKI) *

概要

集合値半標準盤は，半標準盤の 1 つの一般化であり Grothendieck 多項式を組み合せ論的に表示するため Buch によって導入された．本講演では，Grothendieck 多項式のある特殊値を導出し，その応用として集合値半標準盤の個数が奇数であることを示す．また，集合値半標準盤の個数の明示公式を与える．さらに，歪 Grothendieck 多項式に対しても同様の特殊値と，歪集合値半標準盤の個数の奇数性が得られたので，時間が許す範囲でそれも合わせて述べる．本講演の内容は，神戸大学大学院理学研究科の信川喬彦氏と藤井大計氏との共同研究に基づくものである．

1 導入

ここでは，まず本研究の背景と動機を述べる．次に，本講演で扱う対象の定義を書く．

1.1 背景と動機

Grothendieck 多項式は，旗多様体の K 理論の研究における Schubert 多項式の 1 つの一般化であり Lascoux と Schützenberger により導入された [8, 9]．その中で，stable Grothendieck 多項式は Grassmann 多様体の K 理論において Schubert 類を表現するものであり Schur 多項式の一般化に相当する．ここでは stable Grothendieck 多項式について考え，以後単に Grothendieck 多項式と述べる．集合値半標準盤は，半標準盤の 1 つの一般化であり Grothendieck 多項式を組み合せ論的に表示するため Buch によって導入された [1]．半標準盤とは，整数の分割 λ を図形で表現したもの (Young 図形) へ正の整数を割り当てて得られる図のことである．半標準盤により，Schur 多項式を組み合せ論に表示でき，またそれを定義とすることもできる．Schur 多項式は，表現論において n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ または一般線型群 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の指標になっている．また，Schur 多項式は整数係数対称多項式環 $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ $(x_i \in \mathbb{C})$ の 1 組の基底を成す．前述した通り，集合値半標準盤により Grothendieck 多項式が組み合せ論に定義でき，Schur 多項式に類似した結果が多く知られている (小節 1.3, 1.4参照)．本講演では，Schur 多項式と Grothendieck 多項式の組み合せ論的定義を採用し議論を進める．

* E-mail:tsimazak@math.kobe-u.ac.jp

これまで，与えられた整数の分割 λ と変数の個数 n のみから集合値半標準盤の個数を計算する明示的な公式は知られていなかった．他方，半標準盤の場合には以下のような簡明な公式が広く知られている．整数の分割 λ に対する n 変数の半標準盤全体の集合を $\mathrm{SST}(\lambda, n)$ と書く．このとき，

$$|\mathrm{SST}(\lambda, n)| = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} \tag{1.1}$$

$$= \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{n + j - i}{h_{i,j}}. \tag{1.2}$$

ここで，$h_{i,j}$ は hook length と呼ばれ，整数の分割 λ から簡単に計算できる組み合せ論的な値である．本研究の動機は，集合値半標準盤の個数に対しても (1.2) に類似した明示公式を与えることであった．しかし，いくつかの簡単な整数の分割と小さな変数の個数に対し集合値半標準盤の個数が大きな素数となることからそのような公式は望めないことが分かった．他方，実験により集合値半標準盤の個数は常に奇数個であることを予想し証明を与えた (系 2.1)．このことは，一般に半標準盤の場合には起こらないことである．また，(1.1) に類似した集合値半標準盤の個数の明示公式を得た (系 2.2)．これらの実験と小節 2.1に述べる主結果の証明には，Weyl の恒等式 (1.6) を用いた．

1.2 分割と Young 図形

l を正の整数とする．整数 l の分割とは，広義単調減少の非負整数列 λ_i が以下を満たすものであり，$\lambda \vdash l$ と表記する．

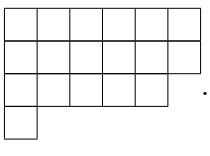
$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r), \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = l.$$

整数の分割 $\lambda \vdash l$ に対し，$(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ と $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0)$ を同じものと見なす．整数の分割 λ の長さを，$\lambda_r > 0$ かつ $\lambda_{r+1} = 0$ となる最小の r の値と定め，$r = \ell(\lambda)$ と書く．

整数の分割 $\lambda \vdash l$ に対して集合

$$\{(i, j) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2 \mid 1 \le i \le \ell(\lambda),\ 1 \le j \le \lambda_i\}$$

を Young 図形という．行列の場合と同様に，第一成分 i を行，第二成分 j を列と呼ぶ．整数の分割と Young 図との間には一対一の対応があるため，以下これらを同一視する．整数の分割 $\lambda \vdash l$ を Young 図形の形 (かたち) という．ここでは，Young 図形を λ_i $(1 \le i \le \ell(\lambda))$ 個の正方形を横一列にそれぞれ並べ，それらを左上に寄せて得られる図にて表す．例えば，整数の分割 $\lambda = (6, 6, 5, 1) \vdash 18$ に対する Young 図形は以下である:

$\lambda =$ .

Young 図形の正方形をここでは箱と呼び，$(i, j) \in (\mathbb{Z}_{>0})^2$ を i 行 j 列の箱と述べる．また，Young 図形 λ の箱の総数を $|\lambda|$ と書く．

1.3 半標準盤と Schur 多項式

集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ を $[n]$ と記す．形が λ である半標準盤とは，Young 図形の各箱 (i,j) に $[n]$ の元を，以下の条件を満たし割り当てて得られる図のことである．

- 箱 $(i,j+1)$ の中の数は，箱 (i,j) の中の数よりも等号付きで増加する．
- 箱 $(i+1,j)$ の中の数は，箱 (i,j) の中の数よりも真に増加する．

形が λ であり，変数の個数が n である半標準盤全体の集合を $\mathrm{SST}(\lambda,n)$ と書き，半標準盤のことをここではタブローと呼ぶ．例えば，Young 図形 $\lambda=(6,6,5,1)$ に対するタブロー $T\in\mathrm{SST}(\lambda,6)$ として以下がある:

$$T=\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&1&2&2&3\\\hline 2&2&3&4&4&5\\\hline 3&4&4&5&5\\\cline{1-5}4\\\cline{1-1}\end{array}.$$

タブロー $T\in\mathrm{SST}(\lambda,n)$ に現れる数 i $(i=1,2,\ldots,n)$ の個数を $\omega_i(T)$ とし，

$$\omega(T):=(\omega_1(T),\omega_2(T),\ldots,\omega_n(T))\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^n \tag{1.3}$$

と定め，$\omega(T)$ を T のウェイトとよぶ．変数 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\mathbb{C}^n$ に対して，単項式 $x^{\omega(T)}$ を次で定める．

$$x^{\omega(T)}:=x_1^{\omega_1(T)}x_2^{\omega_2(T)}\cdots x_n^{\omega_n(T)}. \tag{1.4}$$

上のタブロー $T\in\mathrm{SST}(\lambda,6)$ に対し，ウェイト $\omega(T)$ と単項式 $x^{\omega(T)}$ は各々以下のようになる:

$$\omega(T)=(3,4,3,5,3,0),\quad x^{\omega(T)}=x_1^3x_2^4x_3^3x_4^5x_5^3x_6^0=x_1^3x_2^4x_3^3x_4^5x_5^3.$$

Schur 多項式は，以下で定義される多項式である:

$$s_\lambda=s_\lambda(x):=\sum_{T\in\mathrm{SST}(\lambda)}x^{\omega(T)}.$$

例 1.1. $\lambda=(2,1)$ に対するタブロー $T\in\mathrm{SST}(\lambda,3)$ は次の 8 個で尽くされる:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}.$$

これらより，

$$s_\lambda=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+2x_1x_2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2.$$

Schur 多項式 s_λ ついて，例えば次のようなことが知られている．詳細は Macdonald [11] や Sagan [14] などの文献を参照のこと．

- 対称多項式である．
- 対称多項式環 $\mathbb{Z}[x_1,x_2,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の 1 組の $\mathbb{Z}$ 基底である．

- Weyl の恒等式:

$$s_\lambda = \frac{\left| x_i^{\lambda_j+n-j} \right|_{1\le i,j\le n}}{\prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)}.$$

- Jacobi-Trudi の恒等式:

$$s_\lambda = \left| h_{\lambda_i+j-i} \right|_{1\le i,j\le n} \quad (h_{\lambda_i+j-i}\text{は } n \text{ 次完全斉次式}).$$

- Littlewood-Richardson 規則:

$$s_\lambda s_\mu = \sum_\nu c_{\lambda\mu}^\nu s_\nu \quad (\lambda \vdash l,\ \mu \vdash m).$$

ここで，$c_{\lambda\mu}^\nu \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ である．

1.4 集合値半標準盤と Grothendieck 多項式

形が λ である集合値半標準盤とは，Young 図形の各箱 (i,j) に $[n]$ の空でない部分集合 $T_{i,j}$ を以下の条件を満たし割り当てて得られる図のことである．

- $\max T_{i,j} \le \min T_{i,j+1}$.
- $\max T_{i,j} < \min T_{i+1,j}$.

形が λ であり，変数の個数が n である集合値半標準盤全体の集合を $\mathrm{SVT}(\lambda, n)$ と書き，集合値半標準盤のことをここではセットタブローと呼ぶ．次の図は，$\lambda = (6,6,5,1)$ に対するセットタブロー $T \in \mathrm{SVT}(\lambda, 6)$ の 1 つである:

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 1,2,3 & 3 & 3,5 \\ \hline 2 & 2,3 & 3 & 4 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 4,5 & 5 & 5,6 & 6 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-5} 4,5,6 & \multicolumn{5}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

$\boxed{2,3}$ は，2 と 3 を箱へ割り当てていることを意味し，以後 $\boxed{23}$ と全ての箱も同様に略記する．セットタブロー T に対して，ウェイト $\omega(T)$ と単項式 $x^{\omega(T)}$ を (1.3) と (1.4) にて定める．上のセットタブロー T に対しては，

$$\omega(T) = (4,3,6,4,5,4), \quad x^{\omega(T)} = x_1^4 x_2^3 x_3^6 x_4^4 x_5^5 x_6^4$$

となる．

Grothendieck 多項式は，以下で定義される多項式である:

$$G_\lambda = G_\lambda(x \mid \beta) := \sum_{T\in \mathrm{SVT}(\lambda)} \beta^{|T|-|\lambda|} x^{\omega(T)}. \tag{1.5}$$

ここで，β はパラメータであり，$|T|$ はセットタブローに割り当てられている正の整数の個数である．定義より，パラメータ $\beta = 0$ とすると Grothendieck 多項式 G_λ は Schur 多項式に s_λ に一致する．

例 1.2. Young 図形 $\lambda = (2,1)$ に対するセットタブロー $T \in \mathrm{SVT}(\lambda, 3)$ の個数は，例 1.1の 8 つのタブローの他に次の 19 個があり，合計 27 個ある:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 12 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 13 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 23 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 12 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 13 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 23 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 23 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 23 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 23 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 23 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 3 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array},$$

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 12 \\ \hline 23 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 13 \\ \hline 23 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 23 \\ \hline 23 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 12 & 23 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 123 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 123 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array},\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 123 \\ \hline 23 \\ \cline{1-1}\end{array}.$$

これらより，

$$\begin{aligned} G_\lambda =& s_\lambda + \beta(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 3x_1^2x_2x_3 + 3x_1x_2^2x_3 + 3x_1x_2x_3^2) \\ &+ \beta^2(2x_1^2x_2^2x_3 + 2x_1^2x_2x_3^2 + 2x_1x_2^2x_3^2) + \beta^3(x_1^2x_2^2x_3^2). \end{aligned}$$

上で述べたように，上式で $\beta = 0$ とすると Grothendieck 多項式は Schur 多項式と一致する．

Grothendieck 多項式について，Schur 多項式に類似した以下の結果が知られている．

- 対称多項式である．
- 対称多項式環 $\mathbb{Z}[\beta][x_1, x_2, \ldots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の 1 組の $\mathbb{Z}[\beta]$ 基底である．
- Weyl の恒等式 (Ikeda-Naruse 2013 [5]):

$$G_\lambda = \frac{\left| x_i^{\lambda_j+n-j}(1+\beta x_i)^{j-1} \right|_{1\le i,j\le n}}{\prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)}. \tag{1.6}$$

- Jacobi-Trudi の恒等式 (Kirillov 2016 [7]):

$$G_\lambda = \left| \sum_{m=0}^{\infty} \binom{i-1}{m} \beta^m h_{\lambda_i+j-i+m} \right|_{1\le i,j\le n}.$$

- Littlewood-Richardson 規則 (Buch 2002 [1]):

$$G_\lambda G_\mu = \sum_\nu c_{\lambda\mu}^\nu G_\nu \quad (\lambda \vdash l,\ \mu \vdash m).$$

ここで，$c_{\lambda\mu}^\nu \in \mathbb{Z}_{\ge 0}[\beta]$ である．

2 主定理

ここでは，本研究で得られた結果を紹介する．以下の新規の結果は，神戸大学大学院理学研究科の信川喬彦氏と藤井大計氏との共同研究に基づくものである [2]．また，北海道大学の Travis Scrimshaw 氏からのコメントは本研究の進展に大きく寄与した [15].

2.1 Grothendieck 多項式 G_λ の特殊値とセットタブローの個数の奇数性および明示公式

以下の Grothendieck 多項式の特殊値を得た.

定理 2.1. 任意の Young 図形 λ に対し，次が成り立つ.

$$G_\lambda(\beta,\beta,\dots,\beta \mid -\beta^{-1}) = \beta^{|\lambda|}.$$

上記の結果には，例えば以下の 3 通りの証明法がある (Travis Scrimshaw 氏からの示唆によるもの).

i. Weyl の恒等式 (1.6) を用いる (特殊函数論).
ii. sign reversing involution を用いる (組合せ論).
iii. 5 頂点模型を用いる (可積分系).

上の 3 つについて，各々簡単に説明する．i は，Weyl の恒等式 (1.6) に対し，パラメータ β を $-\beta^{-1}$ と置き，変数 x_i $(1 \le i \le n)$ を 1 つずつ順に β と特殊化していくことにより結果を得る.

ii は，$\mathrm{SVT}(\lambda,n)$ から特別なセットタブロー T_0 を取り除いた集合 $\mathrm{SVT}'(\lambda,n) = \mathrm{SVT}(\lambda,n)\backslash\{T_0\}$ に対して対合 g を組み合せ論的に構成し，その応用として

$$\sum_{T\in \mathrm{SVT}'(\lambda,n)} (-\beta^{-1})^{|T|-|\theta|}\beta^{|T|} = 0$$

を示す手法である．ここで用いる対合 g は

$$(-1)^{|g(T)|} = -(-1)^{|T|}$$

を満たすので sign reversing involution と呼ばれる.

iii は，茂木-堺 [12] による可解格子模型の逆散乱解法から Grothendieck 多項式が導出される事実に基づく．また，これと同値のこととして励起 Young 図形を用いた組み合せ論的解釈が池田-成瀬 [4] により与えられており，得られた Grothendieck 多項式に対して i と同様のパラメータの置き換えと，変数の特殊化を行うことにより結果が示される．励起 Young 図形のことについては，成瀬弘氏の講演スライド [13] も参照されたい.

ii と iii はそれぞれ，歪 Grothendieck 多項式 $G_{\lambda/\mu}$ と $G_{\lambda//\mu}$ へ一般化できる．簡単に述べると，$G_{\lambda/\mu}$ は組み合せ論的に拡張したものである．他方，$G_{\lambda//\mu}$ は Hall 内積の直交性を用いて拡張したものである．各々の詳細な定義については，Buch [1] を参照のこと．定理 2.1より，以下を得る.

系 2.1. 任意の Young 図形 λ に対する n 変数のセットタブローの個数は，奇数である.

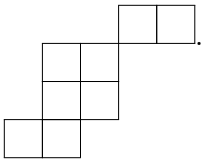
また，Weyl の恒等式 (1.6) から，以下のセットタブローの個数の明示公式が得られる.

定理 2.2. 任意の Young 図形 λ に対して，以下が成り立つ.

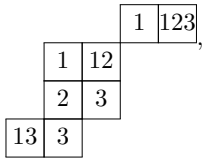
$$|\mathrm{SVT}(\lambda,n)| = \sum_{k_1=0}^{0}\sum_{k_2=0}^{1}\cdots\sum_{k_n=0}^{n-1}\binom{0}{k_1}\binom{1}{k_2}\cdots\binom{n-1}{k_n}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\lambda_i-\lambda_j+k_i-k_j+j-i}{j-i}.$$

2.2 歪 Grothendieck 多項式 $G_{\lambda/\mu}$ の特殊値と歪セットタブローの個数の奇数性

ここでは，組み合せ論的に定義される歪 Grothendieck 多項式 $G_{\lambda/\mu}$ に対して定理 2.1と系 2.1と同様の結果を紹介する．まず，2 つの Young 図形 λ, μ $(\lambda \supset \mu)$ に対し，差集合 $\lambda - \mu$ を歪 Young 図形いい，以後 λ/μ と書く．例えば，歪 Young 図形 $\lambda/\mu = (5,3,3,2)/(3,1,1)$ は以下のようになる:

$\lambda/\mu =$ .

歪 Young 図形 λ/μ に対して，セットタブローの定義を適用し集合値歪半標準盤 (以下，歪セットタブローと呼ぶ) を定め，単項式 $x^{\omega(T)}$ も同様に定義する．例えば，以下の歪セットタブロー $T \in \mathrm{SVT}(\lambda/\mu, 3)$ に対し，ウェイト $\omega(T)$ を考えると単項式 $x^{\omega(T)}$ は次である:

$T =$ , $\quad x^{\omega(T)} = x_1^5 x_2^3 x_3^4$.

歪 Grothendieck 多項式 $G_{\lambda/\mu}$ は，以下で定義される多項式である:

$$G_{\lambda/\mu} = G_{\lambda/\mu}(x \mid \beta) := \sum_{T \in \mathrm{SVT}(\lambda/\mu, n)} \beta^{|T|-|\lambda/\mu|} x^{\omega(T)}.$$

ここで，$|\lambda/\mu|$ は歪 Young 図形 λ/μ の箱の個数であり，$|T|$ は歪セットタブロー T に割り当てられている正の整数の個数である．

小節 2.1にある sign reversing involution を歪セットタブローへ拡張することにより，以下のことを明らかにした．

定理 2.3. 任意の歪 Young 図形 λ/μ に対し，次が成り立つ．

$$G_{\lambda/\mu}(\beta, \beta, \ldots, \beta \mid -\beta^{-1}) = \beta^{|\lambda/\mu|}.$$

系 2.2. 任意の歪 Young 図形 λ/μ に対する n 変数の歪セットタブローの個数は，奇数である．

謝辞

第 20 回数学総合若手研究集会での講演の機会を与えていただき，世話人の皆様に心より感謝申し上げます．本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2148 の支援を受けたものです．

参考文献

[1] A. S. Buch, *A Littlewood-Richardson rule for the K-theory of Grassmannians*, Acta. Math., **189**(1): 37-78, 2002.

[2] T. Fujii, T. Nobukawa and T. Shimazaki, *The number of the set-valued tableaux is odd*, arXiv: 2305.06740, preprint, 2023.

[3] B. H. Hwang, J. Jang, J. S. Kim, M. Song and U. Song, *Refined canonical stable Grothendieck polynomials and their duals*, arXiv preprint arXiv:2104.04251, 2021.

[4] T. Ikeda and H. Naruse, *Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus*, Trans. Amer. Math. Soc. vol.**361**, 5193–5221, 2009.

[5] T. Ikeda and H. Naruse, *K-theoretic analogues of factorial Schur P-and Q-functions*, In: Adv. Math., **243**: 22-66, 2013.

[6] T. Ikeda and T. Shimazaki, *A proof of K-theoretic Littlewood–Richardson rules by Bender-Knuth-type involutions*, Math. Res. Lett., **21**(2): 333-339, 2014.

[7] A. N. Kirillov, *On some quadratic algebras I 1/2: combinatorics of Dunkl and Gaudin elements, Schubert, Grothendieck, Fuss-Catalan, universal Tutte and reduced polynomials*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **12**: 002, 2016.

[8] A. Lascoux, *Anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux*, The Grothendieck Festschrift, Vol. **III**, Progr. Math., Birkhäuser, Boston, 1-34, 1990.

[9] A. Lascoux and M. P. Schützenberger, *Structure de Hopf de l'anneau de cohomologie et de l'anneau de Grothendieck d'une variété de drapeaux*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math, **295**(11): 629-633, 1982.

[10] C. Lenart, *Combinatorial aspects of the K-theory of Grassmannians*, Ann. Comb. **4**: 67-82, 2000.

[11] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd. ed., Oxford, 1995.

[12] K. Motegi and K. Sakai, *Vertex models, TASEP and Grothendieck polynomials*, J. Phys. A **46**(35): Paper No. 355201, 2013.

[13] H. Naruse, *Excited Young diagram and Yang-Baxter relations*, Lecture in The Mathematical Society of Japan, in Japanese, 2011.

[14] B. E. Sagan, *The symmetric group: representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*, Vol. **203**. Springer Science & Business Media, 2001.

[15] T. Scrimshaw, *private communications* with the authors.

対合的カンドルの付随群とその 2 次カンドルホモロジーの計算への応用

北海道大学大学院理学院数学専攻
長谷川　蒼 (Aoi HASEGAWA) *

概要

カンドルとは結び目理論のライデマイスター移動を背景に導入された代数系である．カンドルは結び目理論のみならず, Yang-Baxter の方程式集合論的解, 対称空間等の研究で応用がなされている．任意のカンドル Q に対してその付随群 As(Q) が群の表示を用いて定義される．付随群の構造を調べることはカンドルの構造を調べるのに有効であるが, 付随群は群の表示を用いて定義されているため, 付随群の構造を調べることは一般には難しい．また, カンドルホモロジーは状態和における結び目不変量を定義するために導入された概念である．Eisermann[4] によって 2 次カンドルホモロジーを計算するための定理が得られたが, それを使って 2 次カンドルホモロジーを計算する場合, 連結なカンドルの場合であっても、付随群の安定化部分群と交換子部分群を調べる必要があるため、2 次カンドルホモロジーの具体的な計算を完遂することは一般には難しい．本稿では, 対合的なカンドル Q に対して As(Q) の剰余群である As$_f(Q)$ を導入し, そこで得られた結果を用いて, 特定の Coxeter カンドルに対する 2 次カンドルホモロジー計算について紹介する．

1　カンドル

1.1　カンドルとその附随群

空でない集合 Q とその二項演算 $\triangleleft$: $Q \times Q \to Q$ が以下の条件を満たすとき, $(Q, \triangleleft)$ (単に Q) はカンドルという：

1. $x \triangleleft x = x$ $(x \in Q)$,
2. 任意の $y \in Q$ に対して, 写像 $\bullet \triangleleft y : Q \to Q, x \mapsto x \triangleleft y$ が全単射,
3. $(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$ $(x, y, z \in Q)$.

また, 全ての $x, y \in Q$ に対して $x \triangleleft^2 y = x$ が成り立つとき, カンドル Q は対合的 (involutive) であるという．$\triangleleft$ をカンドル演算として持つカンドル Q の部分集合 A が $\triangleleft$ のもとでカンドルとなるとき, A を Q の部分カンドルという．

Example 1.1（**自明カンドル**）　任意の空でない集合 Q は $x \triangleleft y = x$ $(x, y \in Q)$ という演算のもとで対合的カンドルとなる．これを自明カンドルという．

* E-mail:hasegawa@math.sci.hokudai.ac.jp

Example 1.2（**二面体カンドル**）　$R_n = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とする．以下の演算のもとで R_n は対合的カンドルとなる．これを二面体カンドルという．

$$x \triangleleft y \coloneqq 2y - x \ (x, y \in R_n).$$

Example 1.3（**Alexander カンドル**）　$\mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$ を Laurent 多項式環[*1]とする．$\mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$ 加群 M は以下の演算のもとでカンドルとなる．これを Alexander カンドルという：

$$x \triangleleft y \coloneqq y + T(x - y) \ (x, y \in Q).$$

全ての $x \in M$ に対して $T^2(x) = x$ が成り立つならば，M は対合的カンドルである．

Example 1.4（**共役カンドル**）　任意の群 G は，$x \triangleleft y \coloneqq y^{-1}xy$ $(x,\ y \in Q)$ という演算のもとでカンドルとなる．これを共役カンドルといい，$\mathrm{Conj}(G)$ とかく．

Example 1.5（**Dehn カンドル**）　G を群，S を G の生成系とする．$D(S) \coloneqq \cup_{g \in G} g^{-1}Sg$ は $\mathrm{Conj}(G)$ の部分カンドルである．これを S の Dehn カンドルといい，$D(S)$ とかく．全ての $s \in S$ に対して $s^2 = 1$ が成り立つならば，$D(S)$ は対合的カンドルである．

Example 1.6（**Coxeter カンドル**）　(W, S) を Coxeter 系 (Coxeter 系の定義は後で行う) とする．S の Dehn カンドルを (W, S) に関する Coxeter カンドルといい，Q_W とかく．全ての $s \in S$ に対して $s^2 = 1$ が成り立つため，Coxeter カンドルは対合的カンドルである．

任意のカンドル Q に対して，Q の付随群 $\mathrm{As}(Q)$ が以下のような表示で定義される：

$$\mathrm{As}(Q) \coloneqq \langle e_x \ (x \in Q) \mid {e_y}^{-1} e_x e_y = e_{x \triangleleft y} \ (x, y \in Q) \rangle.$$

任意のカンドル Q に対して，$x \cdot e_y \coloneqq x \triangleleft y$ $(x, y \in Q)$ となるような $\mathrm{As}(Q)$ の Q への右作用が定義できる．$\mathrm{As}(Q)$ の Q への右作用による軌道全体の集合を $O(Q)$ とかく．$\mathrm{As}(Q)$ が Q に推移的に作用するとき，Q は連結であるという．付随群のアーベル化の構造については，以下の補題が成立する．

Lemma 1.7（[6], Lemma 2.7）　$Q = \sqcup_{j \in O(Q)} Q_j$ をカンドル Q の $\mathrm{As}(Q)$ 作用による軌道分解とする．各 $Q_i \in O(Q)$ に対して，well-defined な準同型写像 $\eta_i \colon \mathrm{As}(Q) \to \mathbb{Z}$ を以下のように定義する：
$\eta_i \colon \mathrm{As}(Q) \to \mathbb{Z}$

$$\eta_i(e_x) = \begin{cases} 1 & (\text{if } x \in Q_i) \\ 0 & (\text{if } x \notin Q_i). \end{cases}$$

このとき，$\oplus_{j \in O(Q)} \eta_j \colon \mathrm{As}(Q) \to \mathbb{Z}^{\oplus O(Q)}$ は同型 $\mathrm{As}(Q)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{\oplus O(Q)}$ を誘導する．ただし，$\mathbb{Z}^{\oplus O(Q)}$ は $\mathbb{Z}$ の $O(Q)$ の濃度分の直積とする．

$ab_{\mathrm{As}(Q)} \colon \mathrm{As}(Q) \to \mathrm{As}(Q)_{ab}$ が全射になることと合わせると，$\mathrm{As}(Q)$ は無限群となる．

Remark 1.8　Q をカンドル，R を $O(Q)$ の完全代表系とする．Lemma 1.7 より，以下の等式が成立する：

$$\mathrm{As}(Q)_{ab} = \bigoplus_{x \in R} \langle [e_x] \rangle, \quad \langle [e_x] \rangle \cong \mathbb{Z} \ (x \in R).$$

[*1] $T + T^{-1}$ のような負のべきを含む項が存在する多項式環である．

Remark 1.9　$Q \mapsto \mathrm{As}(Q)$ によって定義されるカンドルの圏から群の圏への関手は, $G \mapsto \mathrm{Conj}(G)$ によって定義される群の圏からカンドルの圏への関手の左随伴となっている. すなわち, 以下のような自然な全単射が存在する:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{groups}}(\mathrm{As}(Q), G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{quandles}}(Q, \mathrm{Conj}(G)).$$

これにより, 付随群はカンドルを理解するのに重要な役割を果たすが, 付随群は群の表示を用いて定義されているため, その構造を調べるのは一般には難しい.

そこで, 付随群より構造が単純になり得るような群を考える. Q を対合的カンドルとする. $\mathrm{As}_f(Q)$ を以下のような表示で定義する：

$$\mathrm{As}_f(Q) = \langle \overline{e}_x \ (x \in Q) \mid \overline{e}_y{}^{-1}\overline{e}_x\overline{e}_y = \overline{e}_{x \triangleleft y},\ \overline{e}_z^2 = 1 \ (x, y, z \in Q) \rangle.$$

また, $\pi : \mathrm{As}(Q) \to \mathrm{As}_f(Q)$ を e_x を $\overline{e}_x$ に写す準同型写像, $Z_Q \coloneqq \mathrm{Ker}\pi$ とする.

Remark 1.10　実は Z_Q は $\mathrm{As}(Q)$ の中心に含まれ, $\{e_x^2 \mid x \in Q\}$ で生成される $\mathrm{As}(Q)$ の部分群であることがわかる. $\mathrm{As}_f(Q)$ は $\mathrm{As}(Q)/Z_Q$ と同型となる. これにより, $\mathrm{As}_f(Q)$ は $\mathrm{As}(Q)$ の剰余群と思っても良い. さらに, Z_Q は $\{e_x^2 \mid x \in Q\}$ を基底とする自由アーベル群であることが証明できる.

$\mathrm{As}(Q)$ は常に無限群となるのに対し, $\mathrm{As}_f(Q)$ は有限群になることがある.

Proposition 1.11　Q が有限カンドルであるならば, $\mathrm{As}_f(Q)$ は有限群である.

G が特別な表示を持つとき, 以下の定理が成立する.

Theorem 1.12（H.）　$G = \langle S \mid R \rangle$ を群, $D(S)$ を S の Dehn カンドルとする. 全ての $s \in S$ に対して $s^2 \in R$ であり, R 内の他の関係は $w^{-1}swt^{-1}$ の形をしているとする. このとき, 全射 $\mathrm{As}(D(S)) \to G$ は well-defined な同型 $\mathrm{As}_f(D(S)) \to G$, $\overline{e}_x \mapsto x$ を誘導する.

Remark 1.8 と同様の主張が $\mathrm{As}_f(Q)_{ab}$ の場合でも成立する.

Lemma 1.13　対合的カンドル Q に対して, 以下の等式が成立する:

$$\mathrm{As}_f(Q)_{ab} = \bigoplus_{x \in R} \langle [\overline{e}_x] \rangle,\ \langle [\overline{e}_x] \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Theorem 1.14 は, 新たな 2 次カンドルホモロジーの計算公式を与えることに対して重要な役割を果たす.

Theorem 1.14（H.）　π の $\mathrm{As}(Q)$ の交換子部分群への制限

$$\pi\,|_{[\mathrm{As}(Q), \mathrm{As}(Q)]} \colon [\mathrm{As}(Q), \mathrm{As}(Q)] \to [\mathrm{As}_f(Q), \mathrm{As}_f(Q)]$$

は同型写像である.

この同型写像によって以下の結果が得られる.

Theorem 1.15（H.）　任意の対合的カンドル Q に対して, 以下の可換図式はプルバックになる:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{As}(Q) & \xrightarrow{ab_{\mathrm{As}(Q)}} & \mathrm{As}(Q)_{ab} \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_{ab}} \\ \mathrm{As}_f(Q) & \xrightarrow{ab_{\mathrm{As}_f(Q)}} & \mathrm{As}_f(Q)_{ab}. \end{array}$$

さらに, 上の可換図式から誘導されて得られる Eilenberg-MacLane 空間[*2] からなる可換図式はホモトピープルバック[*3]になる:

$$\begin{array}{ccc} K(\mathrm{As}(Q),1) & \longrightarrow & K(\mathrm{As}(Q)_{ab},1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(\mathrm{As}_f(Q),1) & \longrightarrow & K(\mathrm{As}_f(Q)_{ab},1). \end{array}$$

Remark 1.16　I を単位閉区間, $C(K(\mathrm{As}_f(Q)_{ab},1))$ を I から $K(\mathrm{As}_f(Q)_{ab},1)$ への連続写像写像全体の集合, $Bab_{\mathrm{As}_f(Q)}$, $B\pi_{ab}$ をそれぞれ $ab_{\mathrm{As}_f(Q)}$, π_{ab} から誘導された連続写像とする. 上記のプルバックによって $\mathrm{As}(Q)$ は $\{(\alpha,\beta)\in \mathrm{As}_f(Q)\times \mathrm{As}(Q)_{ab} \mid ab_{\mathrm{As}_f(Q)}(\alpha)=\pi_{ab}(\beta)\}$ と群同型となり, ホモトピープルバックによって $K(\mathrm{As}(Q),1$ は $\{(x,\gamma,y)\in K(\mathrm{As}(Q),1)\times C(K(\mathrm{As}_f(Q)_{ab},1))\times K(\mathrm{As}(Q)_{ab},1)\mid \gamma(0)=Bab_{\mathrm{As}_f(Q)}(x),\gamma(1)=B\pi_{ab}(y)\}$ とホモトピー同値となる.

1.2　カンドルホモロジー

Q をカンドルとする. $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, $C_n^R(Q)$ を Q^n を基底とする自由アーベル群とする. $n=0$ のときは, $C_0^R(Q)$ を $Q^0:=\{(\ )\}$ を基底とする自由アーベル群とする. $n<0$ のときは, $C_n^R(Q)$ を自明な群とする. $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して, $C_n^R(Q)$ の部分群 $C_n^D(Q)$ を以下のように定義する:

$$C_n^D(Q):=\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\langle (x_1,x_2,\ldots,x_n)\in Q^n \mid x_{i-1}=x_i \text{ for some } i\in\{2,3,\ldots,n\}\rangle.$$

$C_n(Q):=C_n^R(Q)/C_n^D(Q)$ とする. また, $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対してバウンダリ写像 $\partial_n^R\colon C_n^R(Q)\to C_{n-1}^R(Q)$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned}\partial_n^R(x_1,x_2,\ldots,x_n):=\sum_{1\leq i\leq n}(-1)^i((&x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)\\ &-(x_1\triangleleft x_i,x_2\triangleleft x_i,\ldots,x_{i-1}\triangleleft x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)).\end{aligned}$$

$n\leq 0$ のときは, $\partial_n^R\colon C_n^R(Q)\to C_{n-1}^R(Q)$ を零写像と定義する. $\partial(C_n^D(Q))\subset C_{n-1}^D(Q)$ であることから, バウンダリ写像 $\partial_n\colon C_n(Q)\to C_{n-1}(Q)$ が誘導され, $(C_n(Q),\partial_n)$ はチェイン複体となる. このとき, $H_n(Q):=H_n((C_n(Q),\partial_n))$ と定義し, Q の n 次カンドルホモロジーという.

0 次と 1 次のカンドルホモロジーについてはよく知られている.

[*2] 群 G に対して, $(G,1)$ 型の Eilenberg-MacLane 空間 $K(G,1)$ とは, その基本群が G と同型で, $n(\geq 2)$ 次ホモトピー群が自明になるような位相空間である.

[*3] ホモトピープルバックとは対象が位相空間で射が連続写像のホモトピー類となる圏におけるプルバックである. プルバックの定義に現れる射の等号の代わりにホモトピックを表す記号を使ったものだと思えばよい.

Proposition 1.17　Q をカンドルとする．このとき，

$$H_0(Q) \cong \mathbb{Z},\ H_1(Q) \cong \mathbb{Z}^{\oplus O(Q)},$$

ただし，$\mathbb{Z}^{\oplus O(Q)}$ は $\mathbb{Z}$ の $O(Q)$ の濃度分の直積とする．

2 次のカンドルホモロジーについては，以下の事実が知られている．

Theorem 1.18（Eisermann [4], Theorem 9.9）　Q を連結なカンドル，$x_0 \in Q$ とする．このとき，以下の同型が成立する：

$$H_2(Q) \cong (\mathrm{Stab}_{\mathrm{As}(Q)}(x_0) \cap [\mathrm{As}(Q), \mathrm{As}(Q)])_{ab},$$

ただし，$\mathrm{Stab}_{\mathrm{As}(Q)}(x_0)$ は $\mathrm{As}(Q)$ の Q への右作用に関する安定化部分群，$[\mathrm{As}(Q), \mathrm{As}(Q)]$ は $\mathrm{As}(Q)$ の交換子部分群である．

以下の例は 2 次カンドルホモロジーに関する既知の結果である．

Example 1.19（Alexander カンドル，[6], Proposition 5.29）　M を $\mathbb{Z}[T^{\pm 1}]$ 加群とし，Alexander カンドルとみなす．M が連結であるとき，

$$H_2(M) \cong (M \otimes_{\mathbb{Z}} M)/(x \otimes y - Ty \otimes x)_{x,y \in M}.$$

Example 1.20（互換全体の集合に関する Dehn カンドル，[4], Example 1.15）　$\mathfrak{S}_n$ $(n \geq 3)$ を n 次対称群，$T_n \subset \mathfrak{S}_n$ を互換全体の集合とする．このとき，

$$H_2(D(T_n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & (n \geq 4) \\ 0 & (n = 3). \end{cases}$$

Example 1.21（二面体カンドル R_n，[4], Example 1.14）　$n(\geq 3)$ 奇数とする．このとき，$H_2(R_n) = 0$.

Remark 1.22　2 次のカンドルホモロジーを計算するための公式は与えられているが，$\mathrm{Stab}_{\mathrm{As}(Q)}(x_0)$ と $[\mathrm{As}(Q), \mathrm{As}(Q)]$ を決定することは一般には難しいため，2 次のカンドルホモロジーを具体的に求めることは容易ではない．また，連結でないカンドルについてもその 2 次のカンドルホモロジーを求めるための公式は存在するが，形がより複雑になる．詳細は [6] を参照．

対合的カンドル Q に対して，well-defined な Q への $\mathrm{As}_f(Q)$ の右作用が $y \cdot \bar{e}_x \coloneqq y * x$ $(x, y \in Q)$ と定義できる．Theorem 1.18 の $\mathrm{As}(Q)$ を $\mathrm{As}_f(Q)$ に変えたものが成立する．

Theorem 1.23（H.）　Q を連結なカンドル，$x_0 \in Q$ とする．このとき，以下の同型が成立する：

$$H_2(Q) \cong (\mathrm{Stab}_{\mathrm{As}_f(Q)}(x_0) \cap [\mathrm{As}_f(Q), \mathrm{As}_f(Q)])_{ab},$$

ただし，$\mathrm{Stab}_{\mathrm{As}(Q)}(x_0)$ は $\mathrm{As}_f(Q)$ の Q への右作用に関する安定化部分群である．

2　2 次カンドルホモロジー

2.1　Coxeter 群

(S, m) を有限集合 S と写像 $m : S \times S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ の組で, 以下の条件を満たすとする :

1. 任意の $s \in S$ に対して $m(s, s) = 1$,
2. 任意の異なる 2 つの元 $s, t \in S$ に対して $2 \leq m(s, t) = m(t, s) \leq \infty$.

このとき, 群の表示を用いて定義された群

$$W \coloneqq \langle s\ (s \in S) \mid (st)^{m(s,t)} = 1\ (s, t \in S, m(s, t) < m(s, t) < \infty) \rangle \tag{2.1}$$

を Coxeter 群といい, (W, S) を Coxeter 系という. (W, S) の Coxeter グラフ (単に W の Coxeter グラフ) とは, 頂点集合が S で, 辺集合が $m(s, t) \geq 3$ であるような非順序対 $\{s, t\} \subset S$ であり, $m(s, t) \geq 4$ である辺には $m(s, t)$ がラベル付けされているような, 部分的にラベル付けされている無向グラフである. さらに, Coxeter グラフが連結であるとき Coxeter 群が既約であるといい, Coxeter 群が既約でないときは加約であるという.

(2.1) 内の関係式は以下の 2 つの関係式と同値である:

$$(st)_{m(s,t)} = (ts)_{m(s,t)}\ (s, t \in S, s \neq t, m(s, t) < \infty),\ s^2 = 1\ (s \in S), \tag{2.2}$$

ただし $(st)_{m(s,t)}$ は以下のように定義される:

$$(st)_{m(s,t)} \coloneqq \underbrace{ststs \cdots}_{m(s,t)}.$$

例えば, $(st)_2 = st, (st)_3 = sts, (st)_4 = stst$ である. (2.2) 内の関係式 $(st)_{m(s,t)} = (ts)_{m(s,t)}$ $(m(s, t) < \infty)$ は以下のように共役を用いて書き換えることできる:

$$(st)^{-1}_{m(s,t)-1} t (st)_{m(s,t)-1} = \begin{cases} s & \text{if } m(s, t) \text{ odd}, \\ t & \text{if } m(s, t) \text{ even}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Remark 2.1　Coxeter 群は有限鏡映群 (鏡映で生成されている有限群) を一般化した概念である. 有限 Coxeter 群であることと有限鏡映群であることは同値であることが知られている. また, 任意のルート系に対して, 有限鏡映群 $W(\Phi)$ と単純ルート系 $\Delta \subset \Phi$ が存在して, $\{s_\alpha \mid s_\alpha は \alpha \in \Delta の鏡映\}$ が $W(\Phi)$ の生成系となるようにできる. 任意の有限鏡映群 W に対して $W = W(\Phi)$ となるようなルート系 Φ と単純ルート系 $\Delta \subset \Phi$ が存在する. ルート系と単純ルート系の定義や詳細については [5] を参照.

既約な有限 Coxeter 群は 10 種類[*4]に分類されることが知られている. X 型である既約な有限 Coxeter 群を $W(X)$ とかく.

[*4] A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, H_3, H_4, $I_2(n)$ 型の 10 種類の型がある.

Remark 2.2　W が加約な有限 Coxeter 群は既約な有限 Coxeter 群の直積で表せることが知られている. W が $W(X_1), W(X_2), \ldots, W(X_n)$ の直積であるとき, W は $X_1 \sqcup X_2 \sqcup \cdots \sqcup X_n$[*5]型であるといい, $W(X_1 \sqcup X_2 \sqcup \cdots \sqcup X_n)$ とかく.

(W, S) を W が有限群である Coxeter 系, Φ を W のルート系とする. $\Gamma \subset \Phi$ に対して, W_Γ を $\{s_\gamma \in W \mid \gamma \in \Gamma\}$ で生成された W の部分群とする. また, $s \in S$ に対し, α_s を, s が α_s の鏡映になるような Φ に属するルートとし, $\Gamma(s)$ を $\langle \gamma, \alpha_s \rangle = 0$ となるようなルート γ 全体の集合とする. さらに, W の奇 Coxeter グラフとは, 頂点集合が S, 辺集合が $\{\{s,t\} \mid s,t \in S$ は $s \neq t$ かつ $m(s,t)$ が奇数である.$\}$ ようなグラフとする.

以下の 2 つの定理は, Coxeter カンドルの 2 次カンドルホモロジーを計算する際に有用な定理である.

Theorem 2.3（Brink [2], p.466, Theorem）　(W, S) を W が有限群であるような Coxeter 系, α_s を $s \in S$ が α_s の鏡映であるようなルート, $Z_W(s)$ を s の中心化部分群とする. このとき,

$$Z_W(s) = W_{\Gamma(s) \cup \{\pm\alpha_s\}}$$

であり, $W_{\Gamma(s)\cup\{\pm\alpha_s\}}$ は $\Gamma(s) \cup \{\pm\alpha_s\}$ をルート系として持つ Coxeter 群である.

Remark 2.4　$W_{\Gamma(s)}$ を X 型の Coxeter 群とすると, $W_{\Gamma(s)\cup\{\pm\alpha_s\}}$ は $X \sqcup A_1$ 型の Coxeter 群となる.

Theorem 2.5（Brenti-Reiner-Roichman [3], Proposition 2.1.1）　$(W, S = \{s_0, s_1, \ldots, s_n\})$ を Coxeter 系, $R = \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, $\epsilon \colon W \to \{\pm 1\}$ を全ての $s \in S$ に対して $\epsilon(s) = -1$ と定義することで一意に定まる準同型写像とし, $f \colon R \to W$ を $f(r_i) = s_0 s_i$　$(i \in \{1, 2, \ldots, n\})$ で定まる写像とする. このとき, f は以下のような同型写像を誘導する:

$$\mathrm{Ker}\epsilon \cong \langle R \mid r_i^{m(s_0,s_i)} = (r_i^{-1} r_j)^{m(s_i,s_j)} = 1 (1 \leq i < j \leq n) \rangle.$$

Remark 2.6　W の奇 Coxeter グラフが連結ならば, $\mathrm{Ker}\epsilon$ は W の交換子部分群となる.

(2.3) と Theorem 1.12 から, 以下の命題が成立する.

Proposition 2.7　(W, S) を Coxeter 系, $\phi \colon \mathrm{As}(Q_W) \to W$ を $\phi(e_s) = s (s \in S)$ となるような準同型写像とする. このとき, ϕ は well-defined な同型写像 $\overline{\phi} \colon \mathrm{As}_f(Q_W) \to W$, $\overline{e}_x \mapsto x$ を誘導する.

同型写像 $\overline{\phi}$ の定義域を $\mathrm{As}_f(Q_W)$ の交換子部分群に制限することで, 次の定理が得られる.

Theorem 2.8　WCoxeter 群, $\overline{\phi}$ を Proposition 2.7 で現れた同型写像とする. このとき, $\overline{\phi}$ の定義域を $\mathrm{As}_f(Q_W)$ の交換子部分群に制限した写像は以下のような同型写像である:

$$[\mathrm{As}_f(Q_W), \mathrm{As}_f(Q_W)] \cong [W, W].$$

命題 2.7と $\mathrm{As}_f(Q_W)$ の Q_W への作用の定義と Coxeter カンドルの演算の定義から, $\mathrm{Stab}_{\mathrm{As}_f(Q)}(x_0)$ は x_0 の中心化部分群と同型になる. Theorem 2.8 と合わせると, 次の定理が得られる:

[*5] この記号の使い方は一般的ではないので注意する.

Theorem 2.9（H.）　W をその奇 Coxeter グラフが木になるような Coxeter 群, Q_W をその Coxeter カンドル, $x_0 \in Q_W$ とする．このとき, 以下の同型が成立する

$$H_2(Q_W) \cong (\mathrm{Z}_W(x_0) \cap [W,W])_{ab},$$

ただし, $\mathrm{Z}_W(x_0)$ は x_0 の中心化部分群である．

(W,S) をその奇 Coxeter グラフが木になるような Coxeter 系, $s_0 \in S$ とする．Theorem 2.3 により $Z_W(s_0) = W_{\Gamma(s_0)\cup\{\pm\alpha_{s_0}\}}$ が成立し $W_{\Gamma(s_0)\cup\{\pm\alpha_{s_0}\}}$ は Coxeter 群となる．さらに, Theorem 2.5 と Remark 2.6 により, 以下の等式が成立する:

$$\mathrm{Z}_W(s_0) \cap [W,W] = \mathrm{Ker}\epsilon\,|_{W_{\Gamma(s_0)\cup\{\pm\alpha_{s_0}\}}}.$$

したがって Theorem 2.5 から $(\mathrm{Z}_W(s_0) \cap [W,W])_{ab}$ の表示が得られ, 2 次カンドルホモロジーが計算できる．

2.2　Coxeter カンドルの 2 次カンドルホモロジー

Theorem 2.10（H.）　$W(X)$ を X 型の既約な有限 Coxeter 群とする．このとき, $H_2(Q_{W(X)})$ の計算結果は表 2.1 の通りとなる．

Type	$A_n(n \geq 1)$	$D_n(n \geq 4)$	E_6	E_7	E_8	$I_2(n)(n \geq 3)$	H_4	H_3
$H_2(Q)$	0 $(n \leq 2)$ $\mathbb{Z}_2$ $(n \geq 3)$	$\mathbb{Z}_2^3$ $(n=4)$ $\mathbb{Z}_2^2$ $(n \geq 5)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0 (n is odd)	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$

表 2.1　Q が Coxeter カンドル $Q_{W(X)}$ であるときの $H_2(Q)$ の計算結果

Remark 2.11　$A_n(n \geq 2)$ と $I_2(n)(n \geq 3$ は奇数$)$ の場合はそれぞれ Example 1.20 と Example 1.21 の結果である．

W を Coxeter 群とする．$H_2(Q_{W(X)})$ の計算方法の手順は以下のようになる．

1. W のルート系と単純ルート系 Δ を選び, $\alpha \in \Delta$ を 1 つ取って固定する．
2. $\Gamma(s_\alpha)$ を決定する．ただし, s_α は α の鏡映とする．
3. $W_{\Gamma(s_\alpha)\cup\{\pm\alpha\}}$ を決定する．
4. $\left(\mathrm{Ker}\epsilon\,|_{W_{\Gamma(s_\alpha)\cup\{\pm\alpha\}}}\right)_{ab}$ の表示を求める．

Example 2.12（D_n 型）　$n \geq 4$ とする．$W(D_n)$ のルート系 $\Phi(D_n)$ および単純ルート系 $\Delta(D_n)$ はそれぞれ以下のようになる:

$$\Phi(D_n) = \{\pm(e_i - e_j), \pm(e_i + e_j) \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq i < j \leq n\},$$
$$\Delta(D_n) = \{e_i - e_{i+1}, e_{n-1} + e_n \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq i \leq n-1\}.$$

ただし, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底である．s を $e_{n-1} + e_n$ の鏡映としたとき,

$$\Gamma(s) = \{\pm(e_i - e_j), \pm(e_i + e_j) \mid 1 \leq i < j \leq n-2\} \cup \{\pm(e_{n-1} - e_n)\}.$$

が成立する. このとき, s の中心化部分群 $Z_{W(D_n)}(s)$ は以下のようになる:

$$Z_{W(D_n)}(s) = \begin{cases} W(A_1 \sqcup A_1 \sqcup A_1 \sqcup A_1) & (n=4) \\ W(A_3 \sqcup A_1 \sqcup A_1) & (n=5) \\ W(D_{n-2} \sqcup A_1 \sqcup A_1) & (n \geq 6). \end{cases}$$

また, $Z_{W(D_n)}(s)$ の単純ルート系 $\Delta(Z_{W(D_n)}(s))$ は以下のようになる:

$$\Delta(Z_{W(D_n)}(s)) = \begin{cases} \{e_1 - e_2, e_1 + e_2, e_3 - e_4, e_3 + e_4\} & (n=4) \\ \{e_2 + e_3, e_1 - e_2, e_2 - e_3, e_4 - e_5, e_4 + e_5\} & (n=5) \\ \{e_i - e_{i+1}, e_{n-3} + e_{n-2}, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n \in \mathbb{R}^n \mid 1 \leq i \leq n-3\} & (n \geq 6). \end{cases}$$

$s_0 = s_{e_{n-1}+e_n}$, $s_1 = s_{e_{n-1}-e_n}$ とする.

$n = 4$ と仮定する. $s_2 = s_{e_1-e_2}$, $s_3 = s_{e_1+e_2}$ とおき, Theorem 2.5 を使うことで以下の同型が成立する:

$$\mathrm{Ker}\epsilon \mid_{W(A_1 \sqcup A_1 \sqcup A_1 \sqcup A_1)} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3.$$

したがってそのアーベル化は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$ と同型である.

$n = 5$ と仮定する. $s_2 = s_{e_2+e_3}$, $s_3 = s_{e_1-e_2}$, $s_4 = s_{e_2-e_3}$ とおくと, $\mathrm{Ker}\epsilon \mid_{W(A_3 \sqcup A_1 \sqcup A_1)}$ は $\{r_i \mid i = 1,2,3,4\}$ で生成され, 以下のような関係式を持つ:

$$\begin{aligned} & r_i^2 = 1 \ (i = 1,2,3,4) \\ & (r_1^{-1} r_j)^2 = (r_2^{-1} r_4)^2 = 1 \ (j = 2,3,4) \\ & (r_2^{-1} r_3)^3 = (r_3^{-1} r_4)^3 = 1. \end{aligned}$$

$(r_2^{-1} r_3)^3 = (r_3^{-1} r_4)^3 = 1$ は $[r_2]$[*6] $= [r_3] = [r_4] \in (\mathrm{Ker}\epsilon \mid_{W(A_3 \sqcup A_1 \sqcup A_1)})_{ab}$ となる. したがって,

$$(\mathrm{Ker}\epsilon \mid_{W(A_3 \sqcup A_1 \sqcup A_1)})_{ab} = \langle r_1, r_2 \mid r_1^2 = r_2^2 = 1, r_1 r_2 = r_2 r_1 \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

が成立し, Theorem 2.9 より, $H_2(Q_{W(D_5)}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ が成立する.

$n \geq 6$ と仮定する. $s_i = s_{e_{i-1}-e_i}$ $(i = 2,3,\ldots,n-2)$ and $s_{n-1} = s_{e_{n-3}+e_{n-2}}$ とおくと, $\mathrm{Ker}\epsilon \mid_{W(D_{n-2} \sqcup A_1)}$ は $\{r_i \mid i = 1,2,\ldots,n-1\}$ で生成され, 以下のような関係式を持つ:

$$\begin{aligned} & r_i^2 = 1 \ (i = 1,2,\ldots,n-1) \\ & (r_1^{-1} r_j)^2 = (r_2^{-1} r_4)^2 = 1 \ (j = 2,3,\ldots,n-1) \\ & (r_k^{-1} r_{k+1})^3 = (r_{n-3}^{-1} r_{n-1})^3 = 1 \ (k = 2,3,\ldots,n-3) \\ & (r_{n-1}^{-1} r_l)^2 = 1 \ (l = 2,3,\ldots,n-4,n-2) \\ & (r_p^{-1} r_q)^2 = 1 \ (p,q = 2,\ldots,n-2 \text{ and } |p-q| \geq 2). \end{aligned}$$

$(r_k^{-1} r_{k+1})^3 = (r_{n-3}^{-1} r_{n-1})^3 = 1 (k = 2,3,\ldots,n-3)$ は $[r_i] = [r_{i+1}] \in (\mathrm{Ker}\epsilon \mid_{W(D_{n-2} \sqcup A_1)})_{ab}$ $(i = 2,3,\ldots,n-2)$ となる. したがって,

$$(\mathrm{Ker}\epsilon \mid_{W(D_{n-2} \sqcup A_1)})_{ab} = \langle r_1, r_2 \mid r_1^2 = r_2^2 = 1, r_1 r_2 = r_2 r_1 \rangle \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$$

が成立し, Theorem 2.9 より, $H_2(Q_{W(D_n)}) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ が成立する.

[*6] 群 G の元 g に対し, $[g] \coloneqq g[G,G] \in G_{ab}$ と定義する.

参考文献

[1] Nicolas Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6*, Elements of Mathematics (Berlin), Springer-Verlag, Berlin, 2002. Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley. MR1890629 ↑

[2] Brigitte Brink, *On centralizers of reflections in Coxeter groups*, Bull. London Math. Soc. **28** (1996), no. 5, 465–470, DOI 10.1112/blms/28.5.465. MR1396145 ↑7

[3] Francesco Brenti, Victor Reiner, and Yuval Roichman, *Alternating subgroups of Coxeter groups*, J. Combin. Theory Ser. A **115** (2008), no. 5, 845–877, DOI 10.1016/j.jcta.2007.10.004. MR2417024 ↑7

[4] Michael Eisermann, *Quandle coverings and their Galois correspondence*, Fund. Math. **225** (2014), no. 1, 103–168, DOI 10.4064/fm225-1-7. MR3205568 ↑1, 5

[5] James E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 29, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. MR1066460 (92h:20002) ↑6

[6] Takefumi Nosaka, *Quandles and topological pairs*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, Singapore, 2017. Symmetry, knots, and cohomology. MR3729413 ↑2, 5

Dijkgraaf-Witten 不変量の K 理論的研究

東京工業大学理学院数学系数学コース
柳田幸輝 (Koki YANAGIDA) *

概要

DW 不変量は有向閉三次元多様体の位相的不変量であり、その値を常ホモロジーにもつ。本研究では、DW 不変量の構成を模倣することで、K-ホモロジーに値を持つ位相的不変量を新たに定義した。これを KDW 不変量と呼ぶ。この講演では、Brieskorn homology sphere の $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ 値 KDW 不変量の計算結果について紹介する。これは基本群が非可換群な多様体に対する DW 不変量の初めての計算例でもある。

1 導入

Dijkgraaf-Witten 不変量（以降、DW 不変量）とは、TQFT を背景にして、Dijkgraaf と Witten によって定義された量である [DW90]。DW 不変量 $\mathrm{DW}_G(M)$ は有限群 G と三次元多様体 M を与えるたびに定まり、特に G を固定したときに M の位相的不変量として振舞う。DW 不変量の定義は、大まかな解釈として、基本類 $[M] \in H_3(M;\mathbb{Z})$ を用いて $\mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ を重みづけし足し合わせた量と言える。さて、Dijkgraaf と Witten は、DW 不変量を三角形分割を用いて表現し、TQFT-like な toy モデルを構成している。このことから、DW 不変量の計算例は TQFT を理解する一助となる。しかしながら、先行研究においては G や $\pi_1(M)$ が非アーベル群である計算例は多くない。

本研究では、この DW 不変量を模倣した不変量、KDW 不変量を提案する。KDW 不変量の定義では、K-ホモロジーにおける “基本類” $[M]_K \in K_1(M)$ を用いる [Rud98]。さて、本研究の主目的は KDW 不変量の計算例を与えることである。一般に、K-ホモロジーの加群としての構造に加えて誘導される準同型を詳細に記述することは困難である。よって、KDW 不変量の直接計算も困難である。そこで、[Kna78] の研究結果を用いることで、より扱いやすい複素表現環 $R(G)$ の元として KDW 不変量を置き換えた。これを α-KDW 不変量と本論文では呼んでいる。さて本研究で得られた計算結果は以下の三つである。いずれも一般ホモロジーに値を持つ DW 不変量において初めての計算例である。

1. レンズ空間 $L^1(k;\ell)$ の $\mathbb{Z}/k$ 値 α-KDW 不変量
2. レンズ空間 $L^1(k;\ell)$ の $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ 値 α-KDW 不変量
3. ブリ―スコーンホモロジー球面 $\Sigma(k_1,k_2,k_3)$ の $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ 値 α-KDW 不変量

最後の計算結果においては、有限群 $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ と基本群 $\pi_1(\Sigma(k_1,k_2,k_3))$ のいずれもが非アー

* E-mail:yanagida.k.ab@m.titech.ac.jp

ベル群であることに注意してほしい。

2 準備

この節では、主定理を述べるための準備を行う。本節を通して d を奇数とし、G は有限群を、M は閉 d 次元多様体を意味する。

2.1 K-理論と KDW 不変量

まず初めに K-コホモロジー $K^*(M)$ と K-ホモロジー $K_*(M)$ について復習しよう [HR00, BHS07]。M の複素ベクトル束全体の集合は、ホイットニー和 $\oplus$ によって可換なモノイドを成す。このモノイドから得られるグロダンディーク群を $K^0(M)$ と表し、$K^{-n}(M) \coloneqq K^0(\Sigma^n M)$ で定める。ここで ΣM は約懸垂 $(M \times [0,1])/(M \times \{0\} \sqcup M \times \{1\} \sqcup \{x_0\} \times [0,1])$ を意味する。この $K^*(M)$ は K-コホモロジーと呼ばれている。さて K-ホモロジーの定義は、複数存在する (例えば、[BHS07] を見よ)。いずれも複雑であるため、このレポートでは詳細な定義には立ち入らず性質のみ述べよう。K-ホモロジーにおいては、M が spin^c 構造 $\mathfrak{s}$ を持つ場合、同型 $K^*(M) \cong K_{d-*}(M)$ が $\mathfrak{s}$ によって誘導される。加えて、Bott 周期性 $K_*(M) \cong K_{*-2}(M)$ が成り立つ。さて、K-ホモロジーにおいては、常ホモロジーと同様の手段で基本類 $[M]_K \in K_1(M)$ を構成できる [Rud98]。すなわち、任意の点 $x \in M$ において $K_1(M) \to K_1(M, M \setminus \{x\}) \cong \mathbb{Z}$ の像が生成元をなす $K_1(M)$ の類を基本類と呼ぶ。また、基本類が定義できるような多様体のことを K-向き付け可能である、と言う。常ホモロジーでは正負を除いて基本類が一意に定まったが、一方で K-ホモロジーの基本類は無限個存在する場合もあることに注意する。というのも、$K_1(M)$ の基本類のなす集合 $\mathrm{KOri}(M)$ と $H_1(M;\mathbb{Z})$ には一対一対応が存在するからだ。

KDW 不変量は基本類を用いて次で定める。

Definition 1. M を K-向き付け可能な d 次元閉多様体で $H_1(M)$ が有限であるものとする。KDW 不変量とは、以下で定まる形式和である。

$$\mathrm{KDW}_G(M) \coloneqq \sum_{[M]_K \in \mathrm{KOri}(M)} \sum_{f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)} 1_{\mathbb{Z}}(Bf \circ \iota_{\pi_1(M)})_*[M]_K \in \mathbb{Z}[K_1(BG)].$$

ここで各記号は次を意味している。BG と $B\pi_1(M)$ はそれぞれ G と $\pi_1(M)$ の定める分類空間である。$\iota_{\pi_1(M)} : M \to B\pi_1(M)$ は分類写像を意味し、$Bf : B\pi_1(M) \to BG$ は $f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(M), G)$ が誘導する連続写像である。

2.2 Knapp の ψ_G と α-KDW 不変量

次に [Kna78] から単射準同型 ψ_G を導入し、α-KDW 不変量を定義しよう。$\psi_G : K_1(BG) \otimes \mathbb{Z}[1/2] \to R(G) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}$ は、以下で説明する準同型 $\alpha^{\mathrm{rp}}_{\mathbb{Z}}$ が μ_s を経由する事実によって構成される。すなわち、$\alpha^{\mathrm{rp}}_{\mathbb{Z}} = \psi_G \circ \mu_s$。

Knapp が構成した写像

$$\alpha^{\mathrm{rp}}_{\mathbb{Z}} : \Omega_*(BG; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to R(G) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}$$

は、Atiyah-Singer の G-signature [AS68] の模倣である。ここで、$\Omega_*(BG;\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ は $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 係数 G-有向ボルディズム群を意味し、$\mathbb{Z}_{(2)}$ は $\mathbb{Z}$ の素イデアル (2) での局所化を意味している。写像 μ_s の定義には、任意の奇数次元多様体 M に対して定まる $[M]_s \in K_1(M)\otimes\mathbb{Z}[1/2]$ を用いる。この $[M]_s$ は、M が K-向き付け可能である場合、ある基本類 $[M]_K \in K_1(M)$ が存在して、$[M]_s = [M]_K \in K_1(M)\otimes\mathbb{Z}[1/2]$ が成り立つ。Knapp はこの $[M]_s$ をもちいて、準同型 $\mu_s : \Omega_*(BG;\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to K_1(BG)\otimes\mathbb{Z}[1/2]$ を、

$$\mu_s((M, f : M \to BG)) \coloneqq f_*[M]_s$$

で定めた。α-KDW 不変量は次のように定める。

Definition 2. M を K-向き付け可能な奇数次元多様体とし、基本類 $[M]_K$ は $[M]_K = [M]_s \in K_1(M)\otimes\mathbb{Z}[1/2]$ を満たすものを取る。α-KDW 不変量とは、次で定まる形式和である。

$$\alpha\text{-KDW}_G(M) = \sum_{\mathrm{Hom}(\pi_1(M),G)} 1_{\mathbb{Z}}\ \psi_G \circ (Bf \circ \iota_{\pi_1(M)})[M]_K \in \mathbb{Z}[R(G)\otimes\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}].$$

ψ_G の性質から、α-KDW 不変量から KDW 不変量の 2-捩れ部分以外をすべて復元できることに注意しよう。

この小節の最後に ψ_G の性質とそれから導かれる補題について言及する。$f : H \to G$ を単射な群準同型としよう。このとき、f に考察を与えることで H の表現全体から G の表現全体への写像が構成できる。更に、これは表現環上で加法的準同型 $R(H) \to R(G)$ を誘導する。これを $f_! : R(H) \to R(G)$ と書く。Knapp によって次が成り立つことが示されている。

$$f_! \circ \psi_H = \psi_G \circ Bf_*$$

この性質を応用することで次が得られる。

Lemma 1. [Y.] M を K-向き付け可能な奇数次元多様体とし、$G \cong \pi_1(M)$ とする。この時、

$$\alpha\text{-KDW}_G(M) = \sum_{f\in\mathrm{Hom}(\pi_1(M),G)} 1_{\mathbb{Z}}(f_!\alpha_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{rp}}(M)).$$

特別な場合として、H が G の部分群であって f が包含写像ならば、$f_!$ を Ind_H^G と書こう。

2.3 例：レンズ空間 $L^1(k;\ell)$ の $\mathbb{Z}/k$ 値 α-KDW 不変量

この節の最後に、主定理を述べるための記号の導入もかねて、レンズ空間 $L^1(k;\ell)$ の $\mathbb{Z}/k$ 値 α-KDW 不変量を求める。$k \in \mathbb{N}$ とし、ℓ を k と互いに素な整数とする。

表現 $\rho : \mathbb{Z}/k \to \mathbb{C}^\times$ を $\rho(m) = e^{2\pi m\sqrt{-1}/k}$ と定めよう。このとき、$R(\mathbb{Z}/k)$ は $\{\rho^0, \rho^1, \ldots, \rho^{k-1}\}$ で張られる $\mathbb{Z}$ 自由加群である。いま $R(\mathbb{Z}/k)$ を次の対応で $\mathbb{Z}^k$ に同一視する：

$$\sum_{i=0}^{k-1} a_i\rho^i \quad\longleftrightarrow\quad (a_0,\ldots,a_{k-1})^{\mathrm{T}}.$$

$\alpha_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{rp}}(L^1(k;\ell))$ に対応するベクトルを $\boldsymbol{\xi}(k;\ell)$ と定め、置換行列 $P_k^{(m)}$ を

$$(P_k^{(h)} \text{ の } (i,j) \text{ 成分}) = \begin{cases} 1, & \text{if } j \equiv hi \mod k, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とおく。このとき、Lemma 1 によって、

$$\alpha\text{-KDW}_G(M) = 1_{\mathbb{Z}}\boldsymbol{o} + \sum_{h=1}^{k-1} 1_{\mathbb{Z}}(P_k^{(h)}\boldsymbol{\xi}(k;\ell))$$

となる。ここで $\boldsymbol{o} \in \mathbb{Z}^k$ はゼロベクトルである。

よって $\boldsymbol{\xi}(k;\ell)$ の値を求めればよいこととなる。[Kna78] によって任意の k と ℓ における $\alpha_{\mathbb{Z}}^{\mathrm{rp}}(L^1(k;\ell))$ の指標が計算されている。このことから、$\boldsymbol{\xi}(k;\ell)$ は計算が可能である。実際、[Yan23] において $k \in \{3,5,7,11,13\}$ における $\boldsymbol{\xi}(k;\ell)$ を具体的に示している。

3 主定理

主結果を述べよう。p を奇素数とする。$G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_p)$ は位数 p の有限体がなす射影特殊線型群とする。k, k_1, k_2, k_3 は $p^3 - p$ を割り切る互いに異なる奇素数とする。更に、ℓ は k と互いに素とし、ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 は

$$k_1k_2\ell_3 + k_1\ell_2k_3 + \ell_1k_2k_3 \in \{\pm 1\}$$

を満たすようにとる。$|G| = (p^3-p)/2$ であるため、G は位数 k_i の巡回群を持つ。この巡回群を H_{k_i} と表そう。以降では、$\mathrm{Ind}_{H_k}^G : R(H_{k_i}) \to R(G)$ を加法的準同型 $\mathrm{Ind}_{H_{k_i}}^G : \mathbb{Z}[R(H_{k_i})] \to \mathbb{Z}[R(G)]$ と自然にみなす。

Theorem 1. [Y.] $\alpha\text{-KDW}_G(L^1(k;\ell))$ は、$\mathrm{Ind}_{H_k}^G \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}}$ における次の元の像と一致する。

$$(1-m_k)\boldsymbol{o} + m_k\ \alpha\text{-KDW}_G(L^1(k;\ell)) \in \mathbb{Z}[R(H_k) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}].$$

ここで

$$m_k = \begin{cases} p^2+p, & \textit{if } k|p-1, \\ p^2-p, & \textit{if } k|p+1, \\ p+1, & \textit{if } k = p. \end{cases}$$

Theorem 2. [Y.] $p \notin \{k_1,k_2,k_3\}$ とする。$\alpha\text{-KDW}_G(\Sigma(k_1,k_2,k_3))$ は、

$$\bigoplus_{i=1}^{3} \mathrm{Ind}_{H_{k_i}}^G \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}[\bigoplus_{i=1}^{3} R(H_{k_i}) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}] \to \mathbb{Z}[R(G) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}]$$

における次の元の像と一致する。

$$\boldsymbol{o} + 4|G| \sum_{m_1=1}^{(k_1-1)/2} \sum_{m_2=1}^{(k_2-1)/2} \sum_{m_3=1}^{(k_3-1)/2} 1_{\mathbb{Z}}(P_{k_1}^{(m_1)}\boldsymbol{\xi}(k_1;\ell_1), P_{k_2}^{(m_2)}\boldsymbol{\xi}(k_2;\ell_2), P_{k_3}^{(m_3)}\boldsymbol{\xi}(k_3;\ell_3)).$$

さて、$p \in \{k_1,k_2,k_3\}$ の場合、$\Sigma(k_1,k_2,k_3) = \Sigma(k_2,k_3,k_1) = \Sigma(k_3,k_1,k_2)$ によって、$k_1 = p$ の場合のみを考えればよい。

Theorem 3. [Y.] $k_1 = p$ とし、$\Delta \in \mathbb{Z}/p$ は $\mathbb{Z}/p$ において二乗数ではない数とする。α-$\mathrm{KDW}_G(\Sigma(k_1,k_2,k_3))$ は、

$$\bigoplus_{i=1}^{3} \mathrm{Ind}_{H_{k_i}}^{G} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}[\bigoplus_{i=1}^{3} R(H_{k_i}) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}] \to \mathbb{Z}[R(G) \otimes \mathbb{Z}_{(2)}/\mathbb{Z}]$$

における次の元の像と一致する。

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{o} + 2|G| \sum_{m_2=1}^{(k_2-1)/2} \sum_{m_3=1}^{(k_3-1)/2} 1_{\mathbb{Z}}(P_p^{(1)}\boldsymbol{\xi}(p;\ell_1), P_{k_2}^{(m_2)}\boldsymbol{\xi}(k_2;\ell_2), P_{k_3}^{(m_3)}\boldsymbol{\xi}(k_2;\ell_2)) \\ &+ 2|G| \sum_{m_2=1}^{(k_2-1)/2} \sum_{m_3=1}^{(k_3-1)/2} 1_{\mathbb{Z}}(P_p^{(\Delta)}\boldsymbol{\xi}(p;\ell_1), P_{k_2}^{(m_2)}\boldsymbol{\xi}(k_2;\ell_2), P_{k_3}^{(m_3)}\boldsymbol{\xi}(k_3;\ell_3)). \end{aligned}$$

参考文献

[AS68] M. F. Atiyah and I. M. Singer, *The index of elliptic operators. III*, Ann. of Math. (2) **87** (1968), 546–604.

[BHS07] P. Baum, N. Higson, and T. Schick, *On the equivalence of geometric and analytic K-homology*, Pure Appl. Math. Q.**3** (2007), no. 1, Special Issue: In honor of Robert D. MacPherson. Part 3, 1–24.

[DW90] R. Dijkgraaf and E. Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, Comm. Math. Phys. **129** (1990), no. 2, 393–429.

[HR00] N. Higson and J. Roe, *Analytic K-homology*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000, Oxford Science Publications.

[Kna78] K. Knapp, *On the K-homology of classifying spaces*, Math. Ann. **233** (1978), no. 2, 103–124.

[Rud98] Y. B. Rudyak, *On Thom spectra, orientability, and cobordism*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998, With a foreword by Haynes Miller.

[Yan23] K. Yanagida, *The Dijikgraaf-Witten invariant in topological K-theory*, preprint (2023).

モースホモトピーを用いた重み付き射影空間のホモロジー的ミラー対称性について

千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻
西田安寿菜 (Azuna NISHIDA) *

1 導入 (背景)

ホモロジー的ミラー対称性予想は，物理学に由来を持つミラー対称性の圏論的な定式化として Kontsevich により提唱された．これは，ミラー対を成すカラビヤウ多様体の組 $(M, \check{M})$ に対し，一方のカラビ・ヤウ多様体をシンプレクティック多様体とみて，そのラグランジュ部分多様体の成す深谷圏の導来圏と他方のカラビ・ヤウ多様体を複素多様体とみなした時のその連接層の導来圏との間に三角圏同値が存在することを主張する予想である：

$$Tr(Fuk(M)) \simeq D^b(coh(\check{M})).$$

ここに，$Tr()$ とは A_∞ 圏である深谷圏を三角圏である連接層の導来圏と比較するために，A_∞ 圏から三角圏を構成する操作を表す [2, 1].

程なくして，Strominger-Yau-Zaslow（以降 SYZ と略す）らにより，ミラー対称性をトーラスファイバー束を用いた双対性でもって解釈するという幾何学的描像が提案された（SYZ 予想）[3]．SYZ 予想は，カラビ・ヤウ多様体のミラー対が，同一底空間上の 2 つの特殊ラグランジュトーラスファイバー束の全空間として得られ（SYZ 構成），また（特異ファイバーでないところでは）それらのファイバーが互いに双対トーラスになっているという主張を含んでいる．Kontsevich-Soibelman らは [4] において，ホモロジー的ミラー対称性を SYZ らの幾何学的描像を用いて肯定的に議論している．そこでは，特にシンプレクティック幾何側において，トーラスファイバー束のラグランジュ切断からなる圏と従来の深谷圏との間に，トーラスファイバー束の底空間上のモースホモトピーの圏 $Mo(B)$ を導入し[*1]，それを介して圏の同値性の議論がなされている．梶浦・二木らはその方向性で，さらにミラー対の複素多様体がトーリックファノ多様体である場合を扱える様に，拡張されたモースホモトピーの圏 $Mo(P)$ を導入した [5]．ここに，P はトーリックファノ多様体の運動量凸多面体を表す．[5] では，トーリックファノ多様体 X の連接層の導来圏の，既知である強例外的生成系 $\mathcal{E}$ を用いて，複素側ではそれらからなる DG 圏（これは連接層の導来圏の DG 増強にあたる）を，シンプレクティック側では対応するラグランジュ切断からなる $Mo_{\mathcal{E}}(P)$ の充満部分圏をそれぞれ構成し

* E-mail:anishida@g.math.s.chiba-u.ac.jp

[*1] 深谷-Oh によりモースホモトピーの圏 $Mo(M)$ はその余接束の深谷圏 $Fuk(T^*M)$ と同値になることが示されており（ただしこの場合の Y はコンパクトな多様体），[4] では余接束をトーラスファイバー束に置き換えたものを考えている．

て，これらの A_∞ 圏同値を示すという定式化が提案されている．この A_∞ 同値が示されれば，ホモロジー的ミラー対称性の三角圏同値が従う．これまでにこの定式化において，複素多様体が射影空間，また，それらの直積，ヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_1$ の場合は梶浦・二木 [5, 6] により，それら以外のトーリックファノ曲面（射影平面の2点，3点ブローアップ），また $k>1$ のヒルツェブルフ曲面 $\mathbb{F}_k$ の場合は中西 [7, 8] により示されている．講演者は，この定式化におけるホモロジー的ミラー対称性の[*2]，複素多様体が特異点を持つ場合の初めての成立例として，トーリックオービフォールドである重み付き射影空間の場合を紹介したいと思う．

2 準備

オービフォールドとは大雑把には，局所的にユークリッド空間を有限群で割ったような空間といえる．以下では，後のためにオービフォールドに関して簡単に触れるが，正確な定義や詳細は，[12, 13] やその参考文献などを参照されたい．パラコンパクトハウスドルフ空間 X の開集合 U に対し，U の（複素）オービフォールドチャートとは次の三つ組 $(\tilde{U},\Gamma,\varphi)$ から構成される：$\mathbb{C}^n$ の連結開集合 $\tilde{U}$，$\tilde{U}$ に効果的に[*3]作用している有限群 Γ，U の上への Γ 不変な連続写像 $\varphi:\tilde{U}_i\to U$ であって，同相 $U\simeq\tilde{U}/\Gamma$ を誘導するもの．オービフォールドアトラスは，X の開被覆を与えるようなオービフォールドチャートの族であって，然るべき貼り合わせ条件を満たすもののことである．X とオービフォールドアトラスの組によってオービフォールドが定まる．

さて，重み付き射影空間に話を移す．$q_0,\dots,q_n$ は正の整数であって，$\gcd(q_0,\dots,q_n)=1$ を満たすとする．$Q=(q_0,\dots,q_n)$ とおく．重み付き射影空間とは，一般に，$\mathbb{C}^{n+1}\backslash\{0\}$ をこれへの次で定まる $\mathbb{C}^*:=\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 作用：

$$\lambda\cdot(z_0,\dots,z_n)=(\lambda^{q_0}z_0,\dots,\lambda^{q_n}z_n),\quad \lambda\in\mathbb{C}^*$$

で割った空間のことをいう．これを $\mathbf{P}(Q)$ と書く．この作用における同値類を $[z_0:\cdots:z_n]$ と書く．開集合 $U_i=\{[z_0:\cdots:z_n]\in\mathbb{P}(Q)\mid z_i\neq 0\}$ のオービフォールドチャートは次のように与えられる．$\tilde{U}_i=\{(w_{i0},\dots,\overset{i}{1},\dots,w_{in})\in\mathbb{C}^{n+1}\}\simeq\mathbb{C}^n$ とおく．これには $\mathbb{C}^*$ の部分群として $\mu_{q_i}:=\{\ 1\text{の}q_i\text{乗根}\ \}\simeq\mathbb{Z}_{q_i}$ が作用していて，$\varphi_i:\tilde{U}\to U_i,(w_{i0},\dots,\overset{i}{1},\dots,w_{in})\mapsto[w_{i0}:\cdots:1:\cdots:w_{in}]$ は同相 $U_i\simeq\tilde{U}_i/\mu_{q_i}$ を誘導する．他のオービフォールドチャートについて詳細は省くが，次の同相 $U_{i_1}\cap\cdots\cap U_{i_k}\simeq(\mathbb{C}^*)^k\times\mathbb{C}^{n-k}/\mathbb{Z}_{\gcd(q_{i_1},\dots,q_{i_k})}$ に対応するものが取れる．オービフォールドとしての重み付き射影空間と（underlying space としての）$\mathbf{P}(Q)$ を区別するため，オービフォールドの方を $\mathbb{P}(Q)=(\mathbf{P}(Q),\mathcal{U})$ と書くことにする．

注意 2.1. 重み付き射影空間はトーリックオービフォールドでもある．階数 n の格子 N を $b_0=\frac{1}{q_0}(-\sum_{i=1}^n e_i),b_1=\frac{1}{q_1}e_1,\dots,b_n=\frac{1}{q_n}e_n$ で生成されるものとする．ここに $e_1,\dots,e_n$ は $\mathbb{Z}^n$ の標準

[*2] ホモロジー的ミラー対称性予想にはミラー対の構成法及びそれに適切な三角圏を用いることで，いくつか定式化に種類があることに注意．特にトーリック多様体と対応する Laurant 多項式のミラーに対する定式化が最もよく研究されており具体的成立例が報告されている．この場合の定式化で複素多様体が重み付き射影平面の場合は Aroux-Katzarkov-Orlov により示されている．

[*3] 「効果的である」という条件を課さないでより一般にオービフォールドを定義する場合もある．区別のために，今の場合の方を「効果的」もしくは「簡約された (reduced)」オービフォールドと呼んだりもする．

基底を表す．$M=\mathrm{Hom}(N,\mathbb{Z})$ を N の双対格子とし，$<\ ,\ >$ でペアリングを表す．

いま，$\Sigma\subset\mathbb{N}_{\mathbb{R}}:=N\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}=\mathbb{R}^n$ を $\{b_0,\dots,b_n\}$ の真部分集合から生成される有理強凸多面錐から成る単体的扇とすると，$X_\Sigma=\mathbf{P}(Q)$ となる．また，$\sigma_i=\mathrm{Cone}(b_0,\dots,\hat{b_i},\dots,b_n)$ とし，$N'_{\sigma_i}=\bigoplus_{k\neq i}\mathbb{Z}b_k\subset N$ とすると N'_{σ_i} は N の有限指数を持つ部分格子である．実際，$N/N_{\sigma_i}\simeq\mathbb{Z}_{q_i}$ である．N'_{σ_i} の双対を $M'_{\sigma_i}(\supset M)$ と書く．このとき，$U'_{\sigma_i}:=\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_i\cap M'_{\sigma_i}])\simeq\mathbb{C}^n(\simeq\tilde{U}_i)$，$U_{\sigma_i}=\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma_i\cap M])\simeq U'_{\sigma_i}/(N/N'_{\sigma_i})$ となり，先に見たオービフォールドチャートと一致する．

3　SYZ ミラー構成・SYZ 変換

[11] のアファイン多様体上の（双対）トーラスファイバー束の構成及び SYZ 変換を，トーリックオービフォールドである重み付き射影空間に対して適用することを考える．特に，非特異トーリック多様体の場合の議論のアナロジーを行う．特に，[10, 5, 6] の議論を参考とした．

3.1　SYZ ミラー構成

$\mathbf{P}(Q)$ のトーリック因子の補集合を $\check{Y}=\mathbf{P}(Q)\setminus\bigcup_{i=0}^n D_i\simeq(\mathbb{C}^*)^n$ とおく．ここで，D_i とは $\mathbf{P}(Q)$ の一次元錐 $\mathbb{R}_{\geq 0}b_i$ に対応するトーリック因子である．$\check{Y}=\bigcap_{i=0}^n U_i$ とも表すことができる．いま，オービフォールドとして $\check{Y}$ の各点の固定群は自明なため，非特異である場合のトーラスファイバー束の構成のアナロジーを以下のように考える．ただし，$\check{Y}\subset U_i$ を一つ固定し，（オービフォールドの入射で）埋め込んだ先 $\tilde{U}_i(=U'_{\sigma_i})\simeq\mathbb{C}^n$ の局所座標を用いる．このとき，$\check{Y}\simeq(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}\times\sqrt{-1}((N'_\sigma)_{\mathbb{R}}/N)$ の自明なトーラスファイバー束の構造が次で定義される：

$$\check{p}:\check{Y}\longrightarrow(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}$$
$$(e^{\check{x}_{i0}+\sqrt{-1}\check{y}_{i0}},\dots,\hat{e}^{\check{x}_{ii}+\sqrt{-1}\check{y}_{ii}},\dots,e^{\check{x}_{in}+\sqrt{-1}\check{y}_{in}})\longmapsto(\check{x}_{i0},\dots,\widehat{\check{x}_{ii}},\dots,\check{x}_{in}).$$

ここに，$(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}=N'_\sigma\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}(=N_{\mathbb{R}})=\mathbb{R}^n$ はアファイン多様体であり，$T(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}/N=N'_{\sigma_i}\times\sqrt{-1}((N'_\sigma)_{\mathbb{R}}/N)$ となることに注意する．これの双対トーラスファイバー束は，次で与えられる：

$$p:T^*(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}/M=N'_{\sigma_i}\times\sqrt{-1}((M'_\sigma)_{\mathbb{R}}/M)\longrightarrow(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}.$$

$Y:=T^*(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}/M$ は，そのファイバーの座標系を $(y^{i0},\dots,\widehat{y^{ii}},\dots,y^{in})$ として，標準的なシンプレクティック形式 $\sum_{k\neq i}d\check{x}_{ik}\wedge dy^{ik}$ を持つ．

さて，$\mathbb{P}(Q)$ に（オービフォールド）ケーラー構造，局所的に $\omega_{\tilde{U}_i}=-2\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\log(1+\sum_{j\neq i}(w_{ij}\overline{w_{ij}})^{\frac{q_0\cdots q_n}{q_j}})$ で定まるものをとる．これを $\check{Y}\subset\tilde{U}_i$ に制限したものは，次のように書ける：

$$\omega_{\check{Y}}=\sum_{k,l}\frac{\partial^2\check{\phi}_i}{\partial\check{x}_{ik}\partial\check{x}_{il}}d\check{x}_{ik}\wedge d\check{y}_{il},\quad\check{\phi}_i:=\log(1+\sum_{j\neq i}e^{2\frac{q_0\cdots q_n}{q_j}\check{x}_{ij}}).$$

運動量写像 $\mu:\mathbb{P}(Q)\to\mathbb{R}^n$ は，

$$(w_{i0},\dots,\widehat{w_{ii}},\dots,w_{in})\mapsto\left(\frac{2q_0\cdots q_n|w_{i0}|^{2\frac{q_0\cdots q_n}{q_0}}}{q_0(1+\sum_{j\neq i}|w_{ij}|^{2\frac{q_0\cdots q_n}{q_j}})},\dots,\frac{2q_0\cdots q_n|w_{in}|^{2\frac{q_0\cdots q_n}{q_n}}}{q_n(1+\sum_{j\neq i}|w_{ij}|^{2\frac{q_0\cdots q_n}{q_j}})}\right)$$

で定まり, その像は凸多面体 $P = \{(x^{i0}, \dots, \widehat{x^{ii}}, \dots, x^{in}) \mid x^{ik} \geq 0,\ k \neq i,\ \sum_{k\neq i} q_k x^{ik} \leq 2q_0 \cdots q_n\} \subset (M'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$ である．このとき，運動量写像の $\check{Y}$ への制限 $\check{\pi} := \mu|_{\check{Y}} : \check{Y} \to B := \mathrm{Int}P$ もまた，アファイン多様体 B 上のトーラスファイバー束と思えることに注意する．実際，微分同相 $\Phi : (N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\simeq} B$, $(x^{i0}, \dots, \widehat{x^{ii}}, \dots, x^{in}) = (\frac{\partial \check{\phi}_i}{\partial \check{x}_{i0}}, \dots, \widehat{\frac{\partial \check{\phi}_i}{\partial \check{x}_{ii}}}, \dots, \frac{\partial \check{\phi}_i}{\partial \check{x}_{in}})$ があり[*4]，次の様に表せる：

$$\check{\pi} : \check{Y} \simeq T^*B/N \to B, \quad \pi : Y \simeq TB/M \to B.$$

以降，基本的には $\check{Y}$（複素側）と Y（シンプレクティック側）を B 上のトーラスファイバー束として扱う．

3.2 SYZ 変換

本節では，$\mathbb{P}(Q)$ 上の（オービフォールド）正則直線束[*5]$\mathcal{O}(a)$, $a \in \mathbb{Z}$ とその接続を前節で構成したトーラスファイバー束 $\check{Y}$ に制限し，これに対してその双対トーラスファイバー束 Y のラグランジュ切断を対応させることを考える．

直線束 $\mathcal{O}(a)$ の接続形式を, $\tilde{U}_i$ 上次で定まるものをとる：$A_a^{(i)} = -a\frac{\sum_{k\neq i} 1/q_k \cdot |w_{ik}|^{2\frac{q_0\cdots q_n}{q_k}} \cdot w_{ik}^{-1} dw_{ik}}{1+\sum_{k\neq i} |w_{ik}|^{2\frac{q_0\cdots q_n}{q_k}}}$.
いま，$\mathcal{O}(a)$ を $\tilde{U}_i \backslash \bigcup_{k\neq i} \tilde{D}_k, \tilde{D}_k = \{w_{ik} = 0\}$ に制限し，また $\Psi_a := (1 + \sum_{k\neq i} e^{2\frac{q_0\cdots q_n}{q_k}\check{x}_{ik}})^{\frac{a}{2q_0\cdots q_n}}$ で捻ることで，次の表示を得る：

$$\Psi_a^{-1}(d + A_a)\Psi_a = d - \sqrt{-1}\sum_{k\neq i} \frac{a}{2q_0 \cdots q_n} x^{ik} d\check{y}_{ik}. \tag{3.1}$$

これをトーラスファイバー束 $\check{Y} \simeq (\tilde{U}_i \backslash \bigcup_{k\neq i} \tilde{D}_k)/\mu_{q_i} \simeq B \times \sqrt{-1}(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}/N$ 上に制限すると，ファイバー $(\check{y}_{i0}, \dots, \widehat{\check{y}_{ii}}, \dots, \check{y}_{in})$ の周期が変わることに注意する．

[6, 5] では，非特異であるトーリックファノ多様体の場合であるが，Leung-Yau-Zaslow での SYZ 変換に基づき，トーラスファイバー束 Y のラグランジュ切断から定まる $\check{Y}$ 上の自明束の接続（従って曲率の (0,2) パートが消える）$d - \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_{k\neq i} s^{ik}(x) d\check{y}_{ik}$ と上の様に適切にひねって得られた接続の表示を比較することによってラグランジュ切断を対応づけている．ここでも同様に，ラグランジュ切断をそのリフトが次で表されるものとして対応を与える：

$$s_a^{ik}(x^{i0}, \dots, \widehat{x^{ii}}, \dots, x^{in}) = \frac{2\pi a}{2q_0 \cdots q_n} x^{ik} + 2\pi \cdot const, \quad k = 0, \dots, \hat{i}, \dots, n. \tag{3.2}$$

ただし，定数項に関しては，凸多面体の境界上への延長に関する以下でみる条件を満たすものをとる:

条件 3.1. $b_0, \dots, b_n \in N$ を注 2.1 で定めたベクトルとする．（特に，これらは，$\mathbb{R}_{\geq 0} b_i$ が扇 $\Sigma \subset (N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}$ の 1 次元錐となっており，凸多面体 $P \subset (M'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}$ の余次元 1 の各面の垂直ベクトル（ただし凸多面体の内側向き）を与えることに注意する．また $N'_{\sigma_i} = \bigoplus_{k\neq i} \mathbb{Z} b_k$ であったことも思い出しておく.）このとき, ラグランジュ切断のリフト $s_a : B \simeq (N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}} \to T^*(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}} = N'_{\sigma_i} \times \sqrt{-1}((M'_{\sigma})_{\mathbb{R}})$ が次の条件を満たすことを考える：$(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}$ の任意の点 v に対し，$\check{x}_l(t) = v + tb_l, l = 0, \dots, n$

[*4] このとき，$\check{\pi} = \Phi \circ \check{p}$ が成り立っている．
[*5] オービフォールドベクトル束とはだいたい，各 $\tilde{U}$ 上の同変ベクトル束を貼り合わせたようなものである．

とおくと，

$$\lim_{t\to-\infty} < \frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq i} s_a^{ik}(\check{x}_l(t))b_k^*, b_l >\in \mathbb{Z}, \quad l=0,\dots,n$$

が成り立つ．ここに，$b_k^* \in M'_{\sigma_i}(\supset M)$，$k\neq i$ は N'_{σ_i} の基底 b_k，$k\neq i$ の双対基底を表す．

注意 3.2. この条件は Chan[10] の滑らかな射影的トーリック多様体に対する「growth condition」（の一部）を，トーリックオービフォールドである重み付き射影空間の場合に書き直したものに相当する．（ただし記法は少し異なる．）

この条件を満たす（3.2）の形のリフトは，$\sum_{k=0}^n q_k b_k = 0$ が成り立つことに注意すると次の様に表されるものであることがわかる：

$$s_a^{ik}(x^{i0},\dots,\widehat{x^{ii}},\dots,x^{in}) = \frac{2\pi a}{2q_0\cdots q_n}x^{ik} - 2\pi\cdot a_k, \quad k=0,\dots,\hat{i},\dots,n, \tag{3.3}$$

ただし $a_k\in\mathbb{Z}, k\neq i$ であり，更にある整数 a_i が存在して $\sum_{k=0}^n q_k a_k = a$ を満たす．

注意 3.3. 上で得られるリフトは well-defined にラグランジュ切断 $s_a : B \to T^*(N'_{\sigma_i})_{\mathbb{R}}/M = N'_{\sigma_i}\times\sqrt{-1}((M'_\sigma)_{\mathbb{R}}/M)$ を定めることがわかる．つまり，同様に (3.3) の形で与えられるリフトを s'_a とすると，$\frac{1}{2\pi}(s_a - s'_a)\in M \simeq \{(m_0,\dots,m_n)\in\mathbb{Z}^{n+1} \mid \sum_{k=0}^n q_k m_k = 0\}$ となることがわかる．

注意 3.4. $df_a^{(i)} = \sum_{j\neq i} s_a^{ij} d\check{x}_{ik}$ を満たす関数として，次の様なものが取れる：

$$\begin{aligned} f_a^{(i)} &= 2\pi\frac{a}{2q_0\cdots q_n}\log(1+\sum_{k\neq i} e^{2\frac{q_0\cdots q_n}{q_k}}\check{x}_{ik}) - 2\pi\sum_{k\neq i}a_k\check{x}_{ik} + const. \\ &= -2\pi\log(2q_0\cdots q_n - \sum_{k\neq i} q_k x^{ik})^{\frac{q_i a_i}{2q_0\cdots q_n}}\prod_{k\neq i}(q_k x^{ik})^{\frac{q_k a_k}{2q_0\cdots q_n}} + 2\pi\log(2q_0\cdots q_n)^{\frac{a}{2q_0\cdots q_n}} + const.. \end{aligned} \tag{3.4}$$

4 圏の構成

重み付き射影空間 $\mathbb{P}(Q)$ のホモロジー的ミラー対称性に関する主定理を述べるために，本節ではどのような圏を考えるかについて述べる．特に，前章の SYZ 変換によって複素側の圏とシンプレクティック側の圏の対象が対応づいていることに注意されたい．

4.1 複素側の DG 圏：$\mathcal{V}$ と $DG(\mathbb{P}(Q))$

$\check{Y}\simeq(\tilde{U}_i\backslash\bigcup_{k\neq i}\tilde{D}_k)/\mu_{q_i}$ に付随する DG 圏 $\mathcal{V}$ を次の様に定める：

- 対象のクラスは，（オービフォールド）直線束 $\mathcal{O}(a)$ を $\tilde{U}_i\backslash\bigcup_{k\neq i}\tilde{D}_k\subset\tilde{U}_i$ に制限したもの（記号の乱用でこれも $\mathcal{O}(a)$ と書く）とその接続 $D_a = d - \sqrt{-1}\sum_{k\neq i}\frac{a}{2q_0\cdots q_n}x^{ik}d\check{y}_{ik}$ の組 $s_a = (\mathcal{O}(a), D_a)$ たちから成る集合．
- 射の空間 $\mathcal{V}(s_a,s_b)$ は次で定まる $\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間である：

$$\mathcal{V}(s_a,s_b) = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}}\Gamma(\mathcal{O}(a),\mathcal{O}(b))\otimes\Omega^{0,r}(\tilde{U}_i\backslash\bigcup_{k\neq i}\tilde{D}_k).$$

ここで，$\Gamma(\mathcal{O}(a),\mathcal{O}(b))$ は直線束 $\mathcal{O}(a)$ から $\mathcal{O}(b)$ への滑らかな準同型のなす集合を表す．射の合成 Y を $m(\psi_{ab},\psi_{bc}) := \psi_{ab}\wedge\psi_{bc}$ により定める．また，$\mathcal{V}(s_a,s_b)=\bigoplus_{r\in\mathbb{Z}}\mathcal{V}^r(s_a,s_b)$ に対して

$$d_{ab}(\psi) := 2(D_b^{(0,1)}\psi - (-1)^{r_{ab}}\psi D_a^{(0,1)})$$

により（複体としての）微分 d_{ab} を定める．（このときこれらはライプニッツ則を満たし整合的であることがわかる．（従って DG 圏を成す．））

また更に，$DG(\mathbb{P}(Q))$ を $\mathbb{P}(Q)$ の直線束とその接続の組たちから成る $\mathcal{V}$ とほぼ同様に構成される DG 圏とする．（ここで，$\mathcal{O}(a)$ に対してその接続を，$A_a^{(i)}$ を §3.2 で定めた接続形式として，$\{A_a^{(i)}\}$ から定まるものとしてとることにする．）

注意 4.1. 直線束を $\mathbb{P}(Q)$ から $\tilde{U}_i\setminus\bigcup_{k\neq i}\tilde{D}_k$ へ制限して捻ることにより，忠実埋め込み

$$\mathcal{I} : DG(\mathbb{P}(Q)) \hookrightarrow \mathcal{V}$$

が得られ，また，これは DG 関手となることがわかる．ただし，$\psi\in\mathcal{V}(s_a,s_b)$ は $\bigcup_{k\neq i}\tilde{D}_k$，$(\tilde{D}_k=\{w_{ik}=0\})$ 上滑らかに延長できるとは限らないため $\mathcal{I}$ は充満関手でないことに注意する．

連接層の導来圏との関連について述べておく．重み付き射影空間の連接層の導来圏 $D^b(coh(\mathbb{P}(Q)))$ は，その強例外的生成系が $(\mathcal{O}(q),\dots,\mathcal{O}(q+\sum_{i=0}^n q_i-1))$（$k$ は任意の整数）で与えられることが知られている [9]．即ち，$q\in\mathbb{Z}$ を一つ固定し $\mathcal{E} := (\mathcal{O}(q),\dots,\mathcal{O}(q+\sum_{i=0}^n q_i-1))$ とおくと，

$$D^b(coh(\mathbb{P}(Q))) \simeq Tr(DG_{\mathcal{E}}(\mathbb{P}(Q)))$$

が成り立つ．ここに，$DG_{\mathcal{E}}(\mathbb{P}(Q))$ は $\mathcal{E}$ の直線束からなる $DG(\mathbb{P}(Q))$ の充満部分圏である．また特に，$\mathcal{E}$ が強例外的対象系であることから次が従う：

$$H^p(DG_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}(a),\mathcal{O}(b)) \simeq \begin{cases} S_{b-a} & (p=0,\ a\le b),\\ 0 & (p=0,\ a>b),\\ 0 & \text{その他.}\end{cases} \tag{4.1}$$

ここで，S_d は不定元 z_i の次数が q_i で与えられた多項式環 $S=\mathbb{C}[z_0,\dots,z_n]$ の d 次の斉次多項式全体の集合を表す．コホモロジー $H^0(DG(\mathbb{P}(Q))(\mathcal{O}(a),\mathcal{O}(b)))$, $a<b$ の元は，$I=(k_0,\dots,k_n)\in(\mathbb{Z}_{\ge0})^n$, $\sum_{i=0}^n q_ik_i=b-a$ として, $\tilde{\psi}_{ab;I}=(w_{i0})^{k_0}\cdots(w_{i,i-1})^{k_{i-1}}(w_{i,i+1})^{k_{i+1}}\cdots(w_{in})^{k_n}$ と局所表示される．これを $\mathcal{I}:\tilde{\psi}\mapsto\psi := \Psi_b^{-1}\circ\tilde{\psi}\circ\Psi_a$ でうつすことで, $H^0(\mathcal{I}(DG(\mathbb{P}(Q)))(\mathcal{O}(a),\mathcal{O}(b)))$, $a<b$ のコホモロジーは，以下のような表示となることがわかる．(ただし，以下は双対座標による表示である．また，$I\check{y} := \sum_{j\neq i}k_j\check{y}_{ij}$ と略記する．)

$$\psi_{ab;I} = \left(\frac{2q_0\cdots q_n-\sum_{k\neq i}q_kx^{ik}}{2q_0\cdots q_n}\right)^{\frac{q_ik_i}{2q_0\cdots q_n}}\left(\frac{q_0x^{i0}}{2q_0\cdots q_n}\right)^{\frac{q_0k_0}{2q_0\cdots q_n}}\cdots\left(\frac{q_nx^{in}}{2q_0\cdots q_n}\right)^{\frac{q_nk_n}{2q_0\cdots q_n}} e^{\sqrt{-1}I\check{y}} \tag{4.2}$$

また，各 k_j が非負であるため，$\psi_{ab;I}$ は P 上の滑らかな関数として拡張できることに注意する．

4.2 シンプレクティック側の圏：モースホモトピーの圏 $Mo(P)$

重み付き射影空間の運動量凸多面体 P 上のモースホモトピーの圏 $Mo(P)$ は次のような圏である（一般の場合の正確な定義は [6, 5]，またそれらの参考文献を参照されたい.）：

- 対象のクラスは，$\mathcal{O}(a)$, $a \in \mathbb{Z}$ に対し，(3.3) によって与えられるラグランジュ切断 $s_a = df_a : B \to M$ たちの成す集合.（以降，ラグランジュ切断 s_a とそのグラフ $L_a := \{(x, s_a(x)) \in M\}$ を同一視する.）

  注意 4.2. (i) 今の場合，ラグランジュ切断は特にアファインであり，互いに clean に交わっていることに注意する．つまり，$P = \overline{B}$ を包むある開集合 $\tilde{B}$ が存在して，B 上の L, L' が $\tilde{B}$ 上で clean に交わる様に $\tilde{B}$ 上の切断のグラフとして滑らかに延長可能なものとなっている.
  (ii) また，ラグランジュ切断 $s_a = df_a$ の f_a は $\tilde{B}$ 上のモース関数となっている.

- 射の空間 $Mo(P)(L_a, L_b)$ は，$\pi(L_a \cap L_b) \subset P$ の「良い」連結成分 V で生成される $\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間である（実際には後に見る補題 4.4 の形で得られる.）：

  $$Mo(P)(L_a, L_b) = \bigoplus_{V \subset \pi(L_a \cap L_b)} \mathbb{R}V.$$

  ここで一般に，ラグランジュ切断の順序付き組 (L, L') に対し，連結成分 $V \in \pi(L \cap L')$ にはその次数が，勾配ベクトル場 $-\mathrm{grad}(f - f')$ に対応する安定多様体 S_v $(v \in V)$ の次元として，つまり，$|V| := \dim S_v$ として定められる．これにより $Mo(P)$ を $\mathbb{Z}$ 次数付きベクトル空間とみなす．ただし今の場合は，生成系となる各連結成分の次数は全て 0 となることに注意する.
- A_∞ 積構造 $\{m_l\}_{l \geq 1}$
  - m_1 =微分：各 $a, b \in \mathbb{Z}$ に対して，上で述べたような次数の事情から $m_1 = 0$ である.
  - m_2 =合成：$m_2 : Mo(P)(L_a, L_b) \otimes Mo(P)(L_b, L_c) \to Mo(P)(L_a, L_c)$ は次の様に定義される（実際の計算結果は後で述べる）：

    $$m_2(V_{ab}, V_{bc}) = \sum_{|V_{ac}| = |V_{ab}| + |V_{bc}|} \sum_{[\gamma] \in \mathcal{HGT}(V_{ab}, V_{bc}; V_{ac})} e^{-A(\gamma)} V_{ac}.$$

    ここで，勾配樹木 γ は連続写像 $T \to P$ であり，三価木グラフ T の葉（頂点）がそれぞれ $v_{ab} \in V_{ab} \subset \pi(L_a \cap L_b)$, $v_{bc} \in V_{bc} \subset \pi(L_b \cap L_c)$ に，根（頂点）が $v_{ab} \in V_{ac} \subset \pi(L_a \cap L_c)$ にうつり，各辺がそれぞれ勾配ベクトル場 $-\mathrm{grad}(f_a - f_b), -\mathrm{grad}(f_b - f_c), -\mathrm{grad}(f_a - f_c)$ の積分曲線（ただしそれぞれ v_{ab}, v_{bc}, v_{ac} を端点にもつ）にうつるようなものである．$A(\gamma)$ は $\gamma(T) \subset P$ をリフトした所でのシンプレクティック面積を表す.
  - m_3, m_4, $\cdots$: $m_l (l \geq 2)$ は次数 $(2 - l)$ の多重線型写像であり，次数勘定から自明なことがわかる.

なお，以下では後のホモロジー的ミラー対称性の議論を見据えて，連接層の導来圏の強例外的生成系に対応するラグランジュ切断の列 $\mathcal{E}$ に対し，$\mathcal{E}$ から成る充満部分圏 $Mo_{\mathcal{E}}(P) \subset Mo(P)$ を考える.

さて，$Mo_{\mathcal{E}}(P)(L_a, L_b)$ のためにラグランジュ切断の交点を求めよう．より正確には，リフトに関する方程式 $s_{b;I_b}(x) - s_{a;I_a}(x) = 0, \quad x \in P$ の解を求める．ここで，$I_a = (a_0, \ldots, a_n)$ は

$\sum_{k=0} q_k a_k = a$ を満たす整数（負でも良い）の組で，$s_{a;I_a}(x)$ は式（3.3）で与えられるリフトを表す．いまラグランジュ切断がアファインなため，これは簡単に計算できる．特に $a = b$ の場合は，運動量凸多面体 P そのものである．$a \neq b$ の場合は，$v^j := {}^t(0, \cdots, \frac{2q_0 \dots q_n}{q_j}, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n, j \neq i$ とおくと $P = \left\{ \sum_{j\neq i} t_j v^j \mid t_j \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_{j\neq i} t_j \leq 1 \right\}$ であることに注意して，次により与えられる．

補題 4.3. $a \neq b$ とする．$\pi(L_a \cap L_b)$ の各連結成分は次の様な点から成る：

$$v_{ab;I} = \frac{1}{|b-a|} \sum_{j\neq i} (q_j k_j) v^j.$$

ここで，$I = (k_0, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}_{\geq 0}$ は $\sum_{j=0}^n q_j k_j = |b-a|$ を満たす非負整数の組である． 特に，$a, b \in \{q, \dots, q + \sum_{j=0}^n q_j - 1\}$，$a \neq b$ に対し，連結成分 $V_{ab;I} = \{v_{ab;I}\}$ は境界 ∂P に属する．

いま，順序付きの組 (L_a, L_b) とその連結成分 $V_{ab;I}$ に対して，

$$\sum_{j\neq i} (s^{ij}_{a;I_a} - s^{ij}_{b;I_b}) d\check{x}_{ik} = df_{ab;I_{ab}}, \quad f_{ab;I_{ab}}(v_{ab;I_{ab}}) = 0 \tag{4.3}$$

により一意的に定まる P 上の関数 $f_{ab;I_{ab}}$ を対応づける[*6]．このとき，$-\mathrm{grad}(f_{ab;I_{ab}})$ は

$$2\pi \left(\frac{b-a}{2q_0 \cdots q_n} x^{i0} - k_0 \right) \frac{\partial}{\partial x^{i0}} + \cdots + 2\pi \left(\frac{b-a}{2q_0 \cdots q_n} x^{in} - k_n \right) \frac{\partial}{\partial x^{in}} \tag{4.4}$$

となる．これから $-\mathrm{grad}(f_{ab;I_{ab}})$ の安定多様体 $S_{v_{ab;I_{ab}}}$ を構成し，$Mo_{\mathcal{E}}(L_a, L_b)$ の生成系が求まる．

補題 4.4. 次が成り立つ：

$$Mo^p_{\mathcal{E}}(P)(L_a, L_b) = \begin{cases} \mathbb{R}P & (a = b,\ p = 0) \\ \bigoplus_{\substack{I \in \mathbb{Z}^{n+1}_{\geq 0} \\ \sum_{j=0}^n q_j k_j = b-a}} \mathbb{R} V_{ab;I} & (\ a < b,\ p = 0) \\ 0 & \text{その他} \end{cases} . \tag{4.5}$$

次に積構造についてみる．$a < b < c$ とする．このとき，$-\mathrm{grad}(f_{ab;I_{ab}}), -\mathrm{grad}(f_{bc;I_{bc}}), -\mathrm{grad}(f_{ac;I_{ac}})$ に対応する勾配曲線はそれぞれ，$v_{ab;I_{ab}}$ を出発点として直線的に進むもの，$v_{bc;I_{bc}}$ を出発点として直線的に進むもの $v_{ac;I_{ac}}$，$I_{ac} := I_{ab} + I_{bc}$ にとどまり続けるもの，となることがわかる．（なお $v_{ac;I_{ac}}$ は線分 $v_{ab;I_{ab}} v_{bc;I_{bc}}$ を $c-b : b-a$ に内分する点である．）また，シンプレクティック面積は $A(\gamma) = f_{ab;I_{ab}}(v_{ac;I_{ab}+I_{bc}}) + f_{bc;I_{bc}}(v_{ac;I_{ab}+I_{bc}})$ となり，従って，次で積が定まる．

$$m_2(V_{ab;I_{ab}}, V_{bc;I_{bc}}) = e^{-\frac{1}{2\pi}(f_{ab;I_{ab}}(v_{ac;I_{ac}}) + f_{bc;I_{bc}}(v_{ac;I_{ac}}))} V_{ac;I_{ac}}. \tag{4.6}$$

また，a, b, c の関して他の大小関係の場合を見ることで，P が恒等射を与えることがわかる．

5 主定理

重み付き射影空間 $\mathbb{P}(q_), \dots, q_n) (= \mathbb{P}(Q))$，ただし $\gcd(q_0, \dots, q_n) = 1$，に対し，任意の整数 q を一つ取り連接層の導来圏 $D^b(coh(\mathbb{P}(Q)))$ の強例外的生成系 $\mathcal{E} := (\mathcal{O}(q), \dots, \mathcal{O}(q + \sum_{k=0}^n q_k - 1))$

[*6] これがモース関数となっていることに注意する．

を一つ固定する [9].（このとき，$D^b(coh(\mathbb{P}(Q))) \simeq Tr(DG_{\mathcal{E}}(\mathbb{P}(q)))$ となる.）前章までの準備のもと，主定理は以下の様に述べられる.

定理 5.1. 次の A_∞ 擬同型が存在する：

$$Mo_{\mathcal{E}}(P) \simeq \mathcal{I}(DG_{\mathcal{E}}(\mathbb{P}(Q))).$$

いま，Bondal-Kapranov[2], Kontsevich[1] らによる，捻り複体による A_∞ 圏から三角圏への構成（$Tr(\ )$ と書いているもの）により，A_∞ 擬同型な圏から同値な三角圏が構成される．従って，また，DG 同型 $\mathcal{I}(DG_{\mathcal{E}}(\mathbb{P}(Q))) \simeq DG_{\mathcal{E}}(\mathbb{P}(Q)$ を A_∞ 同型とみなすことにより，次が帰結される.

系 5.2. 次の三角圏同値が存在する：

$$Tr(Mo_{\mathcal{E}}(P)) \simeq D^b(coh(\mathbb{P}(Q))).$$

以下では定理 5.1 の証明の概略を述べる．定理の A_∞ 擬同型を構成するためには大まかに，1. それぞれ射のコホモロジーを計算して複体レベルでの擬同型を構成し，2．構成した擬同型がそれぞれの積構造に関して整合的であることを見れば良い．ここで，前章で見たように $Mo_{\mathcal{E}}(P)$ は結局高次の積が自明（つまり DG 圏となっている）なため，ここでいう積は射の合成に他ならない.

補題 5.3. $a, b \in \{q, \dots, q + \sum_{j=0}^{n} q_j - 1\}$ とする．この時，鎖複体の擬同型が存在する：

$$\iota : Mo_{\mathcal{E}}(P)(L_a, L_b) \to \mathcal{I}(DG_{\mathcal{E}}(\mathbb{P}(Q)))(\mathcal{O}(a), \mathcal{O}(b))$$

Proof. 証明の概略を述べる．$a < b$ の場合のみ述べる．連結成分 $V_{ab;I_{ab}}$ に対し式（4.3）で一意的に定まる関数 $f_{ab;I_{ab}}$ が

$$2\pi \log(2q_0 \cdots q_n - \sum_{k \neq i} q_k x^{ik})^{\frac{q_i a_i}{2q_0 \cdots q_n}} \prod_{k \neq i} (q_k x^{ik})^{\frac{q_k a_k}{2q_0 \cdots q_n}} + \alpha$$

という形で[*7]表されることを思い出す（式（3.4) より．ただし符号に注意せよ.）．一方，コホモロジー $H^0(\mathcal{I}(DG(\mathbb{P}(Q)))(\mathcal{O}(a), \mathcal{O}(b)))$ の代表元が式（4.2）の形で与えられていることを思い出すと，定数を $c_{ab;I_{ab}}$ を適当に取ることで次が成り立つことがわかる.

$$e^{\frac{1}{2\pi} f_{ab;I_{ab}} + \sqrt{-1} I_{ab} \check{y}} = c_{ab;I_{ab}} \psi_{ab;I_{ab}}.$$

そこで，$\mathbf{e}_{ab;I_{ab}} := c_{ab;I_{ab}} \psi_{ab;I_{ab}}$ とおき，

$$\iota : V_{ab;I_{ab}} \mapsto \mathbf{e}_{ab;I_{ab}} = e^{\frac{1}{2\pi} f_{ab;I_{ab}} + \sqrt{-1} I_{ab} \check{y}}. \tag{5.1}$$

で対応を定めるとこれが鎖写像となりコホモロジーの同型を誘導することがわかる． □

補題 5.4. $a \leq b \leq c$ とする．$V_{ab;I_{ab}}$，$V_{bc;I_{bc}} \in Mo_{\mathcal{E}}(P)$ に対し，次が成り立つ.

$$\iota(m_2(V_{ab;I_{ab}}, V_{bc;I_{bc}})) = \mathbf{e}_{ab;I_{ab}} \cdot \mathbf{e}_{bc;I_{bc}}. \tag{5.2}$$

[*7] 定数項は，実際は $f(v_{ab;I_{ab}}) = 0$ で定まっている.

Proof. (4.6) と (5.1) より

$$\iota(m_2(V_{ab;I_{ab}}, V_{bc;I_{bc}})) = e^{\frac{1}{2\pi}\left(f_{ab;I_{ab}}(v_{ac;I_{ac}})+f_{bc;I_{bc}}(v_{ac;I_{ac}})+f_{ac;I_{ac}}\right)+\sqrt{-1}(I_{ac})\check{y}},$$

$$\mathbf{e}_{ab;I_{ab}} \cdot \mathbf{e}_{bc;I_{bc}} = e^{-\frac{1}{2\pi}\left(f_{ab;I_{ab}}+f_{bc;I_{bc}}\right)+\sqrt{-1}I_{ac}\check{y}}$$

となっている．ここで，$I_{ac} := I_{ab} + I_{bc}$ である．いま，$df_{ac;I_{ac}} = d(f_{ab;I_{ab}} + f_{bc;I_{bc}})$ であるので，$f_{ac;I_{ac}}$ と $f_{ac;I_{ac}}$ は定数差があるが，いま $f_{ac;I_{ac}}(v_{ac;I_{ac}}) = 0$ と定めているため補題の等号が従う．他の場合は明らかである． □

References

[1] M. Kontsevich, Homological algebra of mirror symmetry. In Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994), pp.120–139, Birkhäuser, Basel, 1995.

[2] A.I. Bondal and M.M. Kapranov, Enhanced triangulated categories, Math. USSR-Sb., Vol. 70, pp.93-107, 1991.

[3] A. Strominger, S.T. Yau and E. Zaslow, Mirror symmetry is T-duality, Nucl. Phys. B, Vol. 479, pp. 243–259, 1996.

[4] M. Kontsevich and Y. Soibelman, Homological mirror symmetry and torus fibrations, In Symplectic geometry and mirror symmetry (Seoul, 2000), pp. 203–263, World Scientific, 2001.

[5] M. Futaki and H. Kajiura, Homological mirror symmetry of $\mathbb{C}P^n$ and their products via Morse homotopy, J. Math. Phys., Vol. 62, No. 3, 2021.

[6] M. Futaki and H. Kajiura, Homological mirror symmetry of $\mathbb{F}_1$ via Morse homotopy, Adv. Theor. Math. Phys., Vol. 26, No.8, 2022.

[7] H. Nakanishi, Homological mirror symmetry of toric Fano surfaces via Morse homotopy, arXiv:2303.07851.

[8] H. Nakanishi, SYZ mirror of Hirzebruch surface $\mathbb{F}_k$ and Morse homotopy, arXiv:2312.01329.

[9] D. Auroux, L. Katzarkov and D. Orlov, Mirror symmetry for weighted projective planes and their noncommutative deformations, Ann. Math., Vol. 167, pp.867–943, 2008.

[10] K. Chan, Holomorphic Line Bundles on Projective Toric Manifolds from Lagrangian Sections of their Mirrors by SYZ Transformations, Int. Math. Res. Not., Vol.24, pp. 4686-4708, 2009.

[11] N.C. Leung, S.T. Yau, and E. Zaslow, From special lagrangian to Hermitian-Yang-Mills via Fourier-Mukai transform, Adv. Theor. Math. Phys., Vol.4, pp. 1319-1341, 2000.

[12] C. Boyer and K. Galicki, Sasakian geometry. 2007.

[13] W. Chen and Y. Ruan, Orbifold gromov-witten theory. arXiv preprintmath/0103156, 2001.

[14] W. Fulton, Introduction to toric varieties. No. 131. Princeton university press, 1993.

[15] D. Cox, J. Little and H. Schenck. Toric varieties. Vol. 124. American Mathematical Soc., 2011.

行列因子化の圏とその変形について

千葉大学　大学院融合理工学府　数学情報科学専攻
中谷友哉 (Tomoya NAKATANI)

概要

多項式環 $S := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ の非零元 f に対する行列因子化は超曲面 $S/(f)$ 上の Cohen-Macaulay 加群を研究するために Eisenbud[1] と Knörrer[2] により導入された概念である. その中でも, 可逆多項式といわれるクラスの多項式に対する行列因子化の圏は Kajiura-Saito-Takahashi[3],[4] によってホモロジー的ミラー対称性の枠組みで定式化された. 一方で Kontsevich は, ホモロジー的ミラー対称性において複素幾何側に定まる圏の変形が複素構造の変形に対応して得られる, と予想している. 本講演では複素幾何の圏として ADE 型可逆多項式といわれる多項式の行列因子化の圏を考え, その変形の定式化を目指す中で得られた結果を紹介する.

1　導入

1.1　可逆多項式

可逆多項式は組み合わせ論的に良い性質を持つ重み付き斉次多項式であることに加え, 特異点論においても重要なクラスの特異点を定める.

定義 1.1. $f(x_1, \ldots, x_n) \in S$ に対して, 正整数の組 $(w_1, \ldots, w_n; h)$ であり任意の $\lambda \in \mathbb{C}^*$ に対して

$$f(\lambda^{w_1} x_1, \ldots, \lambda^{w_n} x_n) = \lambda^h f(x_1, \ldots, x_n)$$

となるものが存在するとき f を重み付き斉次多項式といい, 組 $(w_1, \ldots, w_n; h)$ を f のウェイト系という.

定義 1.2. 以下の条件を満たす重み付き斉次多項式 $f \in S$ を**可逆多項式**という.

(1) f は $a_i \in \mathbb{C}^*$ および非負整数 $\mathbb{E}_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n$ を用いて

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{\mathbb{E}_{ij}}$$

とあらわされる.

(2) n 次正方行列 $\mathbb{E} := (\mathbb{E}_{ij})$ は $\mathbb{Q}$ 上可逆な行列である.

(3) f の Jacobi 環

$$\mathrm{Jac}(f) := S \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

は $\mathbb{C}$ 上有限次元である.

条件 (3) は正則関数 $f:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ が原点に孤立特異点を持つことと同値である. また, Jacobi 環の次元を μ_f であらわし f の Milnor 数という.

可逆多項式 $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_i\prod_{j=1}^n x_j^{\mathbb{E}_{ij}}$ に対して, 以下の方程式

$$\mathbb{E}\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}=\det(\mathbb{E})\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\ ,\ h:=\det(\mathbb{E})$$

の解 $W_f:=(w_1,\dots,w_n;h)$ は f のウェイト系になる. このとき, W_f を f の標準ウェイト系といい, W_f は定数 $\gcd_f:=\gcd(w_1,\dots,w_n,h)$ 倍を除いて一意に定まる. $\gcd_f=1$ のとき標準ウェイト系は簡約であるという. W_f は定義 1.2 (2) から決まる組み合わせ的な数である. また, f の Gorenstein パラメーター ε_f を以下で定義する.

$$\varepsilon_f:=\frac{1}{\gcd_f}\Big[\Big(\sum_{i=1}^n w_i\Big)-h\Big]$$

命題 1.3. 3 変数可逆多項式 $f\in\mathbb{C}[x_1,x_2,x_3]$ で $\varepsilon_f>0$ となるものは以下で分類される.

特異点型	$f(x_1,x_2,x_3)$	$(w_1,w_2,w_3;h)$
$A_\mu(\mu\geq 1)$	$x_1^{\mu+1}+x_2^2+x_3^2$	$(2,\mu+1,\mu+1;2(\mu+1))$
$D_\mu(\mu\geq 4)$	$x_1^2x_2+x_2^{\mu-1}+x_3^2$	$(\mu-2,2,\mu-1;2(\mu-1))$
E_6	$x_1^3+x_2^4+x_3^2$	$(4,3,6;12)$
E_7	$x_1^3+x_1x_2^3+x_3^2$	$(6,4,9;18)$
E_8	$x_1^3+x_2^5+x_3^2$	$(10,6,15;30)$

表 1　ADE 型可逆多項式

上の表の可逆多項式を総称して ADE 型可逆多項式といい, これらの多項式は特異点論においても ADE 型 (Klein) 特異点を定めることが知られている. Klein 特異点は正多面体群に由来する特異点でありその研究の歴史は長い. Klein 特異点に関しては [5] に詳しい解説がかかれている.

1.2　(次数付き) 行列因子化の圏

ここでは $f\in S$ を可逆多項式と仮定し, その標準ウェイト系を $(w_1,\dots,w_n;h)$ とする. 標準ウェイト系によって多項式環 S には自然に次数付き代数の構造が定まる.

定義 1.4. $f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_i\prod_{j=1}^n x_j^{\mathbb{E}_{ij}}$ を可逆多項式とする. 各変数 x_i と f に文字 $\vec{x_i},\vec{f}$ を対応させ, それらで生成される自由アーベル群 $\oplus_{i=1}^n\mathbb{Z}\vec{x_i}\oplus\mathbb{Z}\vec{f}$ を考える. 階数 1 のアーベル群

$$L_f:=\Big(\bigoplus_{i=1}^n\mathbb{Z}\vec{x_i}\oplus\mathbb{Z}\vec{f}\Big)/\Big(\vec{f}-\sum_{j=1}^n\mathbb{E}_{ij}\vec{x_j}\ ;\ i=1,\dots,n\Big)$$

を f の極大次数という.

S は f の極大次数 L_f によって次数付き代数とみなせる.

$$S = \bigoplus_{\vec{l} \in L_f} S_{\vec{l}}$$

つまり, 任意の $\vec{l}, \vec{l'} \in L_f$ に対して $S_{\vec{l}} \cdot S_{\vec{l'}} \subset S_{\vec{l}+\vec{l'}}$ が成り立つ. 各変数 x_i の次数 $\deg(x_i)$ を次数写像 $L_f \to \mathbb{Z}$, $\vec{x_i} \mapsto w_i/\gcd_f$, $\vec{f} \mapsto h/\gcd_f$ によって定める. $\deg(x_i)$ は f の標準ウェイト系 $(w_1, \ldots, w_n; h)$ の次数としてみることができる.

M を L_f 次数付き S 加群とすると, M の $\vec{l} \in L_f$ による次数シフト $M(\vec{l})$ が

$$M(\vec{l}) := \bigoplus_{\vec{l'} \in L_f} M(\vec{l})_{\vec{l'}} \ , \ M(\vec{l})_{\vec{l'}} := M_{\vec{l}+\vec{l'}}$$

で定まる. 次数シフトによって, 任意の $\vec{l} \in L_f$ に対して L_f 次数付き S 加群の圏 gr^{L_f}-S に自己同型関手 $(\vec{l})$ が定まる.

定義 1.5 (Eisenbud [1])**.** F_0, F_1 を L_f 次数付き自由 S 加群とし, $f_0 : F_0 \to F_1, f_1 : F_1 \to F_0(\vec{f})$ を $f_1 \cdot f_0 = f \cdot \mathrm{id}_{F_0}$, $f_0(\vec{f}) \cdot f_1 = f \cdot \mathrm{id}_{F_1}$ を満たす S 準同型写像とする. このとき, 組 (F_0, F_1, p_0, p_1) を f の L_f 次数付き行列因子化といい

$$\overline{F} := \left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1 \right)$$

であらわす. L_f 次数付き行列因子化 $\overline{F}$ のサイズを F_0 の自由 S 加群の階数として定める.

定義 1.6. $\overline{F} = \left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1 \right)$, $\overline{F'} = \left(F'_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F'_1 \right)$ を f の L_f 次数付き行列因子化とする.

(1) L_f 次数付き行列因子化の射とは, S 加群準同型 $\phi_0 : F_0 \to F'_0$, $\phi_1 : F_1 \to F'_1$ で $\phi_1 \cdot p_0 = p'_0 \cdot \phi_0$, $\phi_0(\vec{f}) \cdot p_1 = p'_1 \cdot \phi_1$ を満たすものの組 $\phi := (\phi_0, \phi_1)$ である.

(2) L_f 次数付き行列因子化の射 $\phi, \psi : \overline{F} \to \overline{F'}$ がホモトピックであるとは, S 加群準同型の組 $h_0 : F_0 \to F'_1(-\vec{f})$, $h_1 : F_1 \to F'_0$ で

$$\phi_0 - \psi_0 = h_1 \cdot f_0 + f'_1(\vec{f}) \cdot h_0 \ , \ \phi_1 - \psi_1 = f'_0 \cdot h_1 + h_0(\vec{f}) \cdot f_1$$

を満たすものが存在することをいい $\phi \sim \psi$ とかく.

定義 1.7. f の L_f **次数付き行列因子化の圏** $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ を以下で定義する. 対象を f の L_f 次数付き行列因子化全体とし, 任意の対象 $\overline{F}, \overline{F'} \in \mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ に対して射の空間 $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)(\overline{F}, \overline{F'})$ は定義 1.6 (1) を満たす射の空間を定義 1.6 (2) によるホモトピーで割った商空間とする.

命題 1.8 (Happel [6])**.** f の L_f 次数付き行列因子化の圏 $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ は三角圏である.

$\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ のシフト関手 T が, 対象 $\overline{F} = \left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1 \right)$ に対して以下で定まる.

$$T\overline{F} := \left(F_1 \underset{-f_0(\vec{f})}{\overset{-f_1}{\rightleftarrows}} F_0(\vec{f}) \right)$$

また, 射 $\phi=(\phi_0,\phi_1)$ に対して $T(\phi):=(\phi_1,\phi_0(\vec{f}))$ とする.

任意の $\vec{l}\in L_f$ に対して, gr^{L_f}-S の自己同型関手 $(\vec{l})$ から $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ の自己同型関手が以下のように自然に定まる. 対象 $\overline{F}=\left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1\right)$ に対して,

$$\overline{F}(\vec{l}):=\left(F_0(\vec{l}) \underset{f_1(\vec{l})}{\overset{f_0(\vec{l})}{\rightleftarrows}} F_1(\vec{l})\right)$$

とする. また, 射 $\phi=(\phi_0,\phi_1)$ に対して, $\phi(\vec{l}):=(\phi_0(\vec{l}),\phi_1(\vec{l}))$ とする. シフト関手 T と関手 $(\vec{l})$ について $T^2=(\vec{f})$ が成り立つことに注意する.

定義 1.9. 対象 $\overline{F}=\left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1\right)$, $\overline{F'}=\left(F_0' \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1'\right)$ とその間の射 $\phi=(\phi_0,\phi_1)\in \mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)(\overline{F},\overline{F'})$ に対して, 対象 $C(\phi)\in\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ を

$$C(\phi):=\left(F_1\oplus F_0' \underset{c_1}{\overset{c_0}{\rightleftarrows}} F_0(\vec{f})\oplus F_1'\right)$$

で定義する. ただし,

$$c_0:=\begin{pmatrix}-f_1 & 0\\ \phi_1 & f_0'\end{pmatrix}, c_1:=\begin{pmatrix}-f_0(\vec{f}) & 0\\ \phi_0(\vec{f}) & f_1'\end{pmatrix}$$

とする.

命題 1.10. $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ において, 対象 $\overline{F},\overline{F'}$ とその間の射 $\phi\in\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)(\overline{F},\overline{F'})$ に対して

$$\overline{F}\xrightarrow{\phi}\overline{F'}\longrightarrow C(\phi)\longrightarrow T\overline{F}$$

は完全三角系列である.

証明. 完全三角系列の公理を直接確認すればよいが煩雑になるため省略する. □

可逆多項式 f が与えられたとき, f の L_f 次数付き行列因子化を構成する具体的な方法を紹介する.

定義 1.11. 各 i , $1\leq i\leq s$ に対して $p_i\in S_{\vec{p_i}}$ とし, $p_1,\ldots,p_s$ は S の正則列を定めるとする. また, $f\in(p_1,\ldots,p_s)$ と仮定する. このとき, $h_i\in S_{\vec{f}-\vec{p_i}}$ が存在して $f=p_1h_1+\cdots+p_sh_s$ とかける. そこで, $P:=\oplus_{i=1}^s S(-\vec{p_i})$ とすると, L_f 次数付き S 加群 $M:=S/(p_1,\ldots,p_s)$ の Koszul 複体

$$0\longrightarrow\wedge^sP\longrightarrow\wedge^{s-1}P\longrightarrow\cdots\longrightarrow\wedge^1P\longrightarrow\wedge^0P=S\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

は, 以下の f の L_f 次数付き行列因子化 $\overline{F}=\left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1\right)$ を与える.

$$F_0:=\bigoplus_k(\wedge^{2k}P)(k\vec{f})\ ,\ F_1:=\bigoplus_k(\wedge^{2k-1}P)(k\vec{f})$$

である. また, $(h_1,\ldots,h_s)$ によって $h^2=0$ を満たす $h:\wedge^iP\to\wedge^{i+1}P$ が定まり, Koszul 複体 $(\wedge^{\cdot}P,d)$ が $d\cdot h+h\cdot d=f\cdot\mathrm{id}_{\wedge^{\cdot}P}$ を満たすことから f_0,f_1 を得る. M の Koszul 複体から構成される f の L_f 次数付き行列因子化を M の stabilization といい M^{stab} であらわす.

例 1.12. $s=2$ のとする. $f=p_1h_1+p_2h_2$ となる S の正則列 $\{p_1,p_2\}$ に対して, L_f 次数付き S 加群 $M=S/(p_1,p_2)$ に対する Koszul 複体

$$0\longrightarrow S(-\vec{p_1}-\vec{p_2})\longrightarrow S(-\vec{p_1})\oplus S(-\vec{p_2})\longrightarrow S\longrightarrow M\longrightarrow 0$$

を以下で定める.

$$d:S(-\vec{p_1}-\vec{p_2})\to S(-\vec{p_1})\oplus S(-\vec{p_2})\ ,\ x\mapsto(p_2x,p_1x)$$

$$d:S(-\vec{p_1})\oplus S(-\vec{p_2})\to S\ ,\ (x_1,x_2)\mapsto p1x_1-p_2x_2$$

これに対応する $h:\wedge^iP\to\wedge^{i+1}P$ は

$$h:S\to S(\vec{f}-\vec{p_1})\oplus S(\vec{f}-\vec{p_2})\ ,\ y\mapsto(h_1y,-h_2y)$$

$$h:S(-\vec{p_1})\oplus S(-\vec{p_2})\to S(\vec{f}-\vec{p_1}-\vec{p_2})\ ,\ (y_1,y_2)\mapsto h_2y_1+h_1y_2$$

である. このとき, M^{stab} は以下のようにかける.

$$M^{stab}=\left(S\oplus S(\vec{f}-\vec{p_1}-\vec{p_2})\underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}}S(\vec{f}-\vec{p_1})\oplus S(\vec{f}-\vec{p_2})\right)$$

ここで,

$$f_0=\begin{pmatrix}h_1 & p_2\\ -h_2 & p_1\end{pmatrix}\ ,\ f_1=\begin{pmatrix}p_1 & -p_2\\ h_2 & h_1\end{pmatrix}$$

である. 一般の s についても同様に M の stabilization が構成でき、そのサイズは 2^{s-1} となる.

特に $\mathbb{C}=S/(x_1,\dots,x_n)$ の stabilization は $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ の対象の中でも重要である. その説明のために必要な三角圏に関するいくつかの定義を述べる.

定義 1.13. $\mathcal{T}$ を T をシフト関手とする三角圏とし, 任意の対象 $X,Y\in\mathcal{T}$ に対して射の空間 $\mathcal{T}(X,Y)$ は $\mathbb{C}$ ベクトル空間であり, $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{T}(X,T^kY)<\infty$ が成り立つとする.

(1) 対象 $E\in\mathcal{T}$ が例外的対象であるとは $\mathcal{T}(E,E)=\mathbb{C}$ かつ $\mathcal{T}(E,T^kE)=0$, $k\neq0$ が成り立つことをいう.
(2) $E_1,\dots,E_n\in\mathcal{T}$ を例外的対象とする. $\mathcal{E}=(E_1,\dots,E_n)$ が例外的対象系であるとは, $i>j$ ならば任意の $k\neq0$ に対して $\mathcal{T}(E_i,T^kE_j)=0$ が成り立つことをいう.
(3) 例外的対象系 $\mathcal{E}=(E_1,\dots,E_n)$ が強例外的対象系であるとは, 任意の i,j と $k\neq0$ に対して $\mathcal{T}(E_i,T^kE_j)=0$ が成り立つことをいう.
(4) 例外的対象系 $\mathcal{E}$ が $\mathcal{T}$ の例外的生成系であるとは, $\mathcal{E}$ を含む $\mathcal{T}$ の最小の充満三角部分圏 $\langle\mathcal{E}\rangle$ が $\mathcal{T}$ と三角圏同値となることをいう.

命題 1.14 (Dyckerhoff [7])**.** f を可逆多項式とする. $\mathcal{E}$ を $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ の例外的対象系とし, $\mathcal{E}$ を含む最小の充満三角部分圏を $\langle\mathcal{E}\rangle$ とする. このとき,

(1) $\langle\mathcal{E}\rangle$ は $\mathbb{C}^{stab}$ を含む.
(2) $\langle\mathcal{E}\rangle$ は次数シフトで閉じる.

が成り立つならば, $\mathcal{E}$ は $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ の例外的生成系になる.

1.3 特異点の普遍開折

この節における命題は事実として扱うことにする. より詳しい解説は [8] にかかれている. ここでは f を命題 1.3 の ADE 型可逆多項式とする. 正則関数 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ は原点に孤立特異点を持つが普遍開折はその特異点の変形を与える. $(t_1, \ldots, t_{\mu_f})$ を座標系とする μ_f 次元複素多様体 $B = \mathbb{C}^{\mu_f}$ と $(\mathbf{x}; \mathbf{t}) = (x_1, x_2, x_3; t_1, \ldots, t_{\mu_f})$ を座標系とする $3 + \mu_f$ 次元複素多様体 $\mathcal{X} = \mathbb{C}^3 \times B$ を考える. $p : \mathcal{X} \to B$ を B への射影

$$p : \mathcal{X} = \mathbb{C}^3 \times B \to B \ , \ (x_1, x_2, x_3; t_1, \ldots, t_{\mu_f}) \mapsto (t_1, \ldots, t_{\mu_f})$$

とする.

定義 1.15. $\{u_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^{\mu_f}$ を f の Jacobi 環 $\mathrm{Jac}(f)$ の単項式基底とし, $u_1(\mathbf{x}) := 1$ とする. $F(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ を

$$F(\mathbf{x}; \mathbf{t}) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{\mu_f} t_i u_i(\mathbf{x})$$

で定める. また, $\mathcal{C}$ を射影 $p : \mathcal{X} \to B$ に関して相対的な F の臨界点集合とする. つまり,

$$\mathcal{O}_{\mathcal{C}} := \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \Big/ \left(\frac{\partial F(\mathbf{x}; \mathbf{t})}{\partial x_1}, \frac{\partial F(\mathbf{x}; \mathbf{t})}{\partial x_2}, \frac{\partial F(\mathbf{x}; \mathbf{t})}{\partial x_3} \right)$$

を構造層とする $\mathcal{X}$ の解析的部分集合を $\mathcal{C}$ とする.

命題 1.16. 定義 1.15 で定めた $F(\mathbf{x}; \mathbf{t})$ は以下の性質を満たす.

(1) F は f の開折である. つまり, $F(\mathbf{x}; \mathbf{0}) = f(\mathbf{x})$ が成り立つ.
(2) T_B を B の接束とする. 小平-Spencer 写像といわれる $\mathcal{O}_B$ 準同型写像

$$T_B \to p_* \mathcal{O}_{\mathcal{C}} \ , \ \delta \mapsto \left[\hat{\delta} F \right]$$

は同型である. ここで, $\hat{\delta}$ は $\delta \in T_B$ の p に関する持ち上げとする.

定義 1.17. ADE 型可逆多項式 f に対して組 $(F; p : \mathcal{X} \to B)$ を f の**普遍開折**という.

命題 1.18. B の一般の点 $\mathbf{t}$ に対して以下が成り立つ.

(1) $\mathcal{C} \cap p^{-1}(\mathbf{t})$ は互いに相異なる μ_f 個の点 $\{\mathbf{p_1}, \ldots, \mathbf{p_{\mu_f}}\}$ である.
(2) 各点 $\mathbf{p_i}$ における正則関数 F の臨界値 $F(\mathbf{p_i}; \mathbf{t})$ は互いに相異なる.
(3) 各点 $\mathbf{p_i}$ について, 組 $(F^{-1}(F(\mathbf{p_i}; \mathbf{t})), \mathbf{p_i})$ は A_1 型特異点を定める.

例 1.19. A_μ 型特異点の普遍開折を与える正則関数 F は以下で与えられる.

$$F(\mathbf{x}; \mathbf{t}) := x_1^{\mu+1} + x_2^2 + x_3^2 + \sum_{i=1}^{\mu} t_i x_1^{\mu-i}$$

2 主結果

L_f 次数付き行列因子化の圏 $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ の変形を前節で定義した f の普遍開折 $(F; p : \mathcal{X} \to B)$ を用いて定式化したい. つまり, $\mathrm{HMF}_S^{L_f}(f)$ を変形した圏は命題 1.18 の圏化となるように定式化する. そのために, f の普遍開折を与える正則関数 F の行列因子化の圏を考えるが, F は一般に定数項や線形項を含むため非自明な行列因子化が存在しない. そこで, 筆者は F に仮想定数 q を加え, F を重み付き斉次多項式とみなすことで次数付き行列因子化の圏を構成した.

定義 2.1. f を ADE 型可逆多項式とし, F を定義 1.15 で定義される正則関数とする. F を $\mathbf{x}$ を変数とする多項式とみて, 重み付き斉次多項式 F_q を

$$F_q(\mathbf{x}, q) := f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{\mu_f} t_i u_i(\mathbf{x}) \cdot q^{h-\deg(u_i)}$$

で定義する. ただし, q は f の標準ウェイト系 $(w_1, \ldots, w_n; h)$ において次数 1 の変数とする. つまり, F_q は $(w_1, \ldots, w_n, 1; h)$ をウェイト系とする重み付き斉次多項式である.

F_q とそのウェイト系 $(w_1, \ldots, w_n, 1; h)$ に関して L_{F_q} 次数付き行列因子化の圏 $\mathrm{HMF}_{S[q]}^{L_{F_q}}(F_q)$ を考えることができる. A_μ 型多項式について, 例 1.19 より F_q は以下のようにかける.

$$F_q(x_1, x_2, x_3, q) = x_1^{\mu+1} + x_2^2 + x_3^2 + \sum_{i=1}^{\mu} t_i x_1^{\mu-i} \cdot q^{2i+2}$$

Knörrer's Periodicity[2] より $F_q(x, q) = x^{\mu+1} + \sum_{i=1}^{\mu} t_i x^{\mu-i} \cdot q^{i+1}$ の行列因子化の圏をみれば十分である. 以下, 一般の点として $(t_1, \ldots, t_\mu) = (1, \ldots, 1)$ とした場合について議論する.

補題 2.2. $F_q(x, q) = x^{\mu+1} + \sum_{i=1}^{\mu} x^{\mu-i} \cdot q^{i+1}$ に対して, $L_{F_q} \simeq \mathbb{Z}\vec{x}$ が成り立つ.

以下 $\mu = 2$ とする. 可逆多項式の行列因子化の圏は命題 1.14 より, $\mathbb{C}^{stab}$ とその次数シフトと T シフトとそれらの直和たちで生成される. いま, $F_q = x^3 + xq^2 + q^3$ は可逆多項式ではないが $\mathrm{HMF}_{S[q]}^{L_{F_q}}(F_q)$ の構造をみるために, 筆者は $\mathbb{C}^{stab}$ とその次数シフトと T シフトたちの直和からなる $\mathrm{HMF}_{S[q]}^{L_{F_q}}(F_q)$ の充満部分加法圏の構造を明らかにした.

$\mathrm{HMF}_{S[q]}^{L_{F_q}}(F_q)$ における $\mathbb{C}^{stab}$ は以下のようにかける.

$$\mathbb{C}^{stab} = \left(S \oplus S(\vec{x}) \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} S(2\vec{x}) \oplus S(2\vec{x}) \right)$$

$$f_0 = \begin{pmatrix} x^2 & q \\ -q(x+q) & x \end{pmatrix} \ , \ f_1 = \begin{pmatrix} x & -q \\ q(x+q) & x^2 \end{pmatrix}$$

命題 2.3. 上の $\mathbb{C}^{stab}$ に関して次が成り立つ.

(1) $\mathrm{HMF}_{S[q]}^{L_{F_q}}(F_q)(\mathbb{C}^{stab}, \mathbb{C}^{stab}) = \mathbb{C}\mathrm{id}$
(2) $\mathrm{HMF}_{S[q]}^{L_{F_q}}(F_q)(\mathbb{C}^{stab}, \mathbb{C}^{stab}(k\vec{x})) = 0 \ , \ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$

(3) $\mathrm{HMF}^{L_{F_q}}_{S[q]}(F_q)(\mathbb{C}^{stab}, T\mathbb{C}^{stab}(k\vec{x})) = 0\ ,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$

(4) $\mathrm{HMF}^{L_{F_q}}_{S[q]}(F_q)(\mathbb{C}^{stab}, T\mathbb{C}^{stab}(-\vec{x})) = \mathbb{C}a \oplus \mathbb{C}a'$

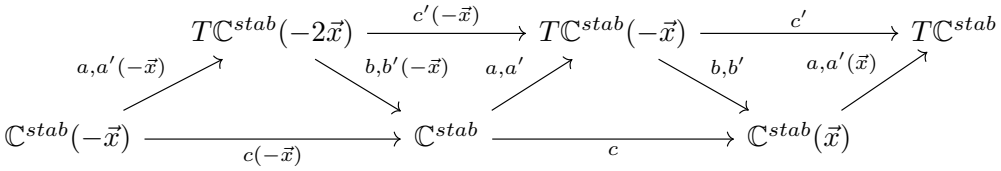
(5) $\mathrm{HMF}^{L_{F_q}}_{S[q]}(F_q)(T\mathbb{C}^{stab}(-\vec{x}), \mathbb{C}^{stab}(\vec{x})) = \mathbb{C}b \oplus \mathbb{C}b'$

(6) $\mathrm{HMF}^{L_{F_q}}_{S[q]}(F_q)(\mathbb{C}^{stab}, \mathbb{C}^{stab}(\vec{x})) = \mathbb{C}c$

ただし, a, a', b, b', c は関係式 $ba' = b'a = c, ba = b'a' = 0$ を満たす.

注意 2.4. 命題 2.3 (1), (3) より $\mathbb{C}^{stab}$ は $\mathrm{HMF}^{L_{F_q}}_{S[q]}(F_q)$ の例外的対象であることが分かる.

上の命題より $\mathbb{C}^{stab}(k\vec{x}), T\mathbb{C}^{stab}(k\vec{x}), k \in \mathbb{Z}$ からなる充満部分加法圏の構造は以下のようにかける.



参考文献

[1] David Eisenbud. Homological algebra on a complete intersection, with an application to group representations. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 260, No. 1, pp. 35–64, 1980.

[2] Horst Knörrer. Cohen-macaulay modules on hypersurface singularities I. *Invent. Math.*, Vol. 88, pp. 153–164, 1987.

[3] Hiroshige Kajiura, Kyoji Saito, and Atsushi Takahashi. Matrix factorizations and representations of quivers II: type ADE case. *Advances in mathematics*, Vol. 211, No. 1, pp. 327–362, 2007.

[4] Hiroshige Kajiura, Kyoji Saito, and Atsushi Takahashi. Triangulated categories of matrix factorizations for regular systems of weights with ε=- 1. *Advances in Mathematics*, Vol. 220, No. 5, pp. 1602–1654, 2009.

[5] 松澤淳一. 特異点とルート系. 朝倉書店, 2002.

[6] Dieter Happel. *Triangulated categories in the representation of finite dimensional algebras*, Vol. 119. Cambridge University Press, 1988.

[7] Tobias Dyckerhoff. Compact generators in categories of matrix factorizations. 2011.

[8] 高橋篤史. 原始形式・ミラー対称性入門. 岩波書店, 2021.

有向閉曲面 Σ_g 上の有向 T^2 バンドルの分類

北海道大学大学院理学院数学専攻
野田一成 (Issei NODA)

2024.3

概要

ファイバーバンドルの同型類について, 基本となるのは S^1 バンドルであり, 有向 S^1 バンドルの同型類はオイラー類と一対一に対応する. 今回は有向 T^2 バンドル, 特に底空間を有向閉曲面 Σ_g 上のバンドルを考える. 本講演では, 主定理である「任意の Σ_g 上の有向 T^2 バンドルは g 個の T^2 上の有向 T^2 バンドルのファイバー連結和と同型である. 」に触れる前に, 先行研究である Sakamoto-Fukuhara(1983) に触れつつ, 主定理の証明の鍵である道具「チャート」について書かれている S.Kamada(2007) を紹介する. その後, チャートを用いた主定理の証明のスケッチを少し説明する. 本研究は北海道大学の粕谷直彦氏との共同研究である.

1 序文

底空間とファイバーに出てくる T^2 を区別するためこの講演では底空間をすべて Σ_g の形で表し, バンドルについては明示がない限り有向であるとする. Σ_g 上の T^2 バンドルの同型類はモノドロミー ρ とオイラー類 e によって決定される. $g=0$ のとき, つまり S^2 上の T^2 バンドルに対して, モノドロミー $\rho:\pi_1(S^2)\to \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ を考えると $\pi_1(S^2)$=0 よりモノドロミーが自明なものしか存在しない. したがって, S^2 上の T^2 バンドルの同型類はオイラー類 $e\in H^2(S^2)\simeq\mathbb{Z}$ によって決まる. $g=1$ のとき, つまり Σ_1 上の T^2 バンドルの同型類については, [S-F] にて解決済みである. (詳細は Theorem5を参照) さらに, 一般の種数 g について私たちは次のことを証明した.

Theorem 1 (主定理)**.** 任意の Σ_g 上の有向 T^2 バンドルは g 個の T^2 上の有向 T^2 バンドルのファイバー連結和と同型である.

一般に, g 個の Σ_1 上の T^2 バンドルをファイバー連結和することで Σ_g 上の T^2 バンドルを得ることができる. しかし, この逆, つまり任意の Σ_g 上の T^2 バンドルが g 個の Σ_1 上の T^2 バンドルに分解できるかどうかは非自明であり, この非自明さというのはモノドロミーが E_2 であるような Σ_g 上の分離曲線をとることができるかにあった. 一般にファイバー連結和という操作はwell-definedではない. 貼り合わせの際に写像類群 $\pi_0(\mathrm{Diff}_+(T^2))\simeq \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ の元の分だけずれることに起因している. だが貼り合わせの元として $E_2\in\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ を取ることが出来るのならばファイバー連結和という操作はwell-definedになる. そして上のモノドロミーに関して次を証明した.

Theorem 2. $g\geq 1$ とする. 任意の表現 $\rho:\pi_1(\Sigma_g)\to\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ に対し,

$$\pi_1(\Sigma_g)=\langle \alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_g,\beta_g \mid [\alpha_1,\beta_1]\cdots[\alpha_g,\beta_g]=1\rangle$$

となる生成系 $\{\alpha_i,\beta_i\}_{1\leq i\leq g}$ が存在して, すべての i について $\rho(\alpha_i)=\pm E_2$ が成立する.

この Theorem2の証明には「チャート」と呼ばれる道具が重要な役割を担っている. 証明では, 本来はモノド

ロミー $\rho : \pi_1(\Sigma_g) \to \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ について議論するべきだが, 自然な射影 $\pi : \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$ との合成によって得られる準同型 $\pi \circ \rho : \pi_1(\Sigma_g) \to \mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$ に着目する. $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z}) = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle$ であるから, $\pi \circ \rho$ にチャートを用いてこの定理が導かれる. そして Theorem 2 によって Theorem 1が成り立つことが分かる.

2 有向 T^2 バンドル

2.1 T^2 バンドルのモノドロミー及びオイラー類

$\xi : M^4 \to B$ を連結底空間 B 上の T^2 バンドルとする. B 上の基点 b_0 をとり, $F_0 := \xi^{-1}(b_0)$ とする. また同じ向きを保つ微分同相写像 $\Phi : T^2 \to F_0$ によって F_0 と T^2 を同一視する.

ここで $l : [0,1] \to B$ を $l(0) = l(1) = b_0$ を満たす loop とする. $\xi : M^4 \to B$ の引き戻し $l^*\xi$ は $[0,1]$ 上の自明束であるので, 写像 $\phi : [0,1] \times T^2 \to M^4$ で次を満たすものがある.

(1) $\xi(\phi(t,p)) = l(t)$
(2) $\phi_t(p) := \phi(t,p)$ によって定義される写像 $\phi_t : T^2 \to F_t (= \xi^{-1}(l(t)))$ は向きを保つ微分同相写像である.
(3) $\phi_0 = \Phi : T^2 \to F_0$

$F_0 = F_1$ より, 微分同相写像 $\Phi^{-1} \circ \phi_1 : T^2 \to T^2$ が得られる. $\Phi^{-1} \circ \phi_1$ のアイソトピー類 $[\Phi^{-1} \circ \phi_1] (\in \mathcal{M}_1)$ は l のホモトピー類 $\{l\}$ と Φ によって決定される. この類 $[\Phi^{-1} \circ \phi_1]$ を $\{l\}$ と Φ に関連するモノドロミーという. 今, 局所自明化 $\Phi : T^2 \to F_0$ を固定する. $\{l\}$ を $[\Phi^{-1} \circ \phi_1]$ に送ることによって写像 $\rho : \pi_1(B, b_0) \to \mathcal{M}_1 = \pi_0(\mathrm{Diff}_+ T^2) \simeq \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ が得られる. 加えて, $\mathcal{M}_1$ の群構造 $*$ を $* : (a,b) \to b \circ a$ とする. このとき, ρ は準同型となる.

また e とは, cross section の存在のための障害であり

$$e \in H^2(\Sigma_g; \widetilde{\pi}_1(T^2))$$

である. ここで $\widetilde{\pi}_1(T^2))$ は T^2 上の局所系であり, cross section の存在のための障害であることからオイラー類と識別しても誤解はない.

2.2 T^2 上の T^2 バンドルの分類

この章は [S-F] を参考にしている.

一般に Σ_1 上の T^2 バンドルはモノドロミー $A, B \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ とオイラー類 $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$ を用いて考察することができる. $A, B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, $m, n \in \mathbb{Z}$ をとる. ただし A, B は準同型写像 $\rho : \pi_1(\Sigma_1) \to \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ から決まるものなので $AB = BA$ をみたす. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して, Σ_1 の点を $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ とおく. Σ_1 上の T^2 束を $M(A,B;0,0) \to \Sigma_1$ とおき, $M(A,B;0,0)$ を次のように構成する.

$F = T^2$, $S = \Sigma_1$ とし, $M(A,B;0,0) = F \times \mathbb{R}^2 / \sim$
ただし, $\sim$ は

$$\left(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} \right) \sim \left(\left[A \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \right], \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right),$$

$$\left(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} \right) \sim \left(\left[B \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \right], \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

である．$M_0 = M(A, B; 0, 0)$ とおき，

$$\left(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \text{を} \left[\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] \text{もしくは} \begin{bmatrix} s, x \\ t, y \end{bmatrix}$$

によって表す．

また D を S での中心 $\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$, 半径 ε の十分小さい円板とする．

$$M(A, B; m, n) = (M_0 - \pi^{-1}(\mathrm{Int}D)) \cup_h (F \times D)$$

ただし $F \times \partial D$ は $\pi^{-1}(\partial D)$ と同相写像 $h : \pi^{-1}(\partial D) \to F \times \partial D$:

$$h\left(\left[\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}, \varepsilon(\theta)\right]\right) = \left(\left[\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} + (\theta/2\pi)\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}\right], [\varepsilon(\theta)]\right)$$

によって貼り合わせをする．ここで $\varepsilon(\theta) = \begin{pmatrix} 1/2 + \varepsilon\cos\theta \\ 1/2 + \varepsilon\sin\theta \end{pmatrix}$ である．$\pi : M(A, B; m, n) \to S$ を

$$\pi \begin{bmatrix} s, x \\ t, y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{if} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \notin D,$$
$$\pi\left(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{if} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in D$$

と定義する．これは Σ_1 上の T^2 バンドルである．

Proposition 3 (典型的な T^2 上の T^2 バンドルの同型)**.** $AB = BA, A'B' = B'A'$ を満たす $A, B, A', B' \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ とする．$\alpha, \beta, \sigma, \tau$ と $\alpha', \beta', \sigma', \tau'$ がそれぞれ $\pi_1(M^4), \pi_1(M'^4)$ の標準的な生成元とする．ただし $M^4 = M(A, B; m, n), M'^4 = M'(A', B'; m', n')$ とする．

(1) $A' = A^p B^r, B' = A^q B^s$となるような $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$があり $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ とする．このときバンドル同型 $f : M' \to M$ が存在し次を満たす．
$f_*(\sigma') = \sigma, f_*(\tau') = \tau, \bar{f}_*(\bar{\alpha}') = \bar{\alpha}^p\bar{\beta}^r, \bar{f}_*(\bar{\beta}') = \bar{\alpha}^q\bar{\beta}^s$. ただし $\bar{f}_* : \pi_1(\Sigma_1) \to \pi_1(\Sigma_1)$ は底空間の間にある写像から誘導される底空間の基本群の間の準同型写像であり，$\bar{\alpha} = \pi_*(\alpha)$ なども同様である．

(2) $A' = P^{-1}AP, B' = P^{-1}BP, \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix}$であるような$P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ があるとする．このときバンドル同型 $f : M' \to M$ が存在し次を満たす．
$f_*(\alpha') = \alpha, f_*(\beta') = \beta, f_*(\sigma') = \sigma^p\tau^r, f_*(\tau') = \sigma^q\tau^s$

(3) $A' = A, B' = B$で, $\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = (A - E_2)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} + (B - E_2)\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$を満たす$p, q, k, l \in Z$ があるとする．このときバンドル同型 $f : M' \to M$ が存在し次を満たす．
$f_*(\alpha') = \sigma^{k'}\tau^{l'}\alpha, f_*(\beta') = \sigma^{p'}\tau^{q'}\beta, f_*(\sigma') = \sigma, f_*(\tau') = \tau$. ただし $\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k' \\ l' \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ である．

また Σ_1 上の T^2 バンドルでは $AB = BA$ をみたすモノドロミー $A, B \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ は次のように表すことができる．

Proposition 4. 任意の可換な行列 $A, B \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ に対し，$C \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ および互いに素な $p, q \in \mathbb{Z}$ が存在して，$A = \pm C^p, B = \pm C^q$ が成立する．

この補題の元々の証明は初等整数論に基づいているが 3 章にてチャートによる別証明を与えておく．さらに, この命題から Σ_1 上の T^2 バンドルの同型類について次の形になる．

Theorem 5. (Sakamoto-Fukuhara 1983). 任意の T^2 上の有向 T^2 バンドル $\xi : M^4 \to T^2$ に対し, $B \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}), (m,n) \in \mathbb{Z}^2$ が存在して, ξ は $M(E_2, B; m, n)$ または $M(-E_2, B; m, n)$ とバンドル同型である．さらに, $M(\varepsilon E_2, B; m, n)$ と $M(\delta E_2, C; k, l)$ がバンドル同型であるための必要十分条件は以下の 2 条件のいずれかが成立することである．ただし, $\varepsilon, \delta = \pm 1$ であるとし, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ とおいた．

1. $\varepsilon = \delta = 1$ のとき, $P^{-1}BP = C^{\pm 1}$ かつ
$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \begin{pmatrix} b_1 - 1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 - 1 \end{pmatrix}$$
となる $P \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ が存在する．
2. $\varepsilon = 1, \delta = -1$ のとき, Bの位数は $2, 4$ または 6 であり, $P^{-1}BP = \pm C^{\pm 1}$ かつ
$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \begin{pmatrix} b_1 - 1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 - 1 \end{pmatrix}$$
となる $P \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ が存在する．
3. $\varepsilon = -1, \delta = 1$ のとき, Cの位数は $2, 4$ または 6 であり, $P^{-1}CP = \pm B^{\pm 1}$ かつ
$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \begin{pmatrix} c_1 - 1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 - 1 \end{pmatrix}$$
となる $P \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ が存在する．
4. $\varepsilon = \delta = -1$ のとき, $P^{-1}BP = \pm C^{\pm 1}$ かつ
$$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \in \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} b_1 - 1 \\ b_2 \end{pmatrix} + \mathbb{Z} \begin{pmatrix} b_3 \\ b_4 - 1 \end{pmatrix}$$
となる $P \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ が存在する．

$\xi : M^4 \to \Sigma_g$ を Σ_g 上の T^2 バンドルとする．このときモノドロミーとオイラー類によって ξ を次のように観察できる．

Σ_g は 0-cell e^0, 1-cell $e_1^1, e_2^1, \cdots, e_{2g}^1$, 2-cell e^2 に胞体分割できることを踏まえて, ξ を e^0 に制限すると自明な T^2 バンドルが得られる．e^0 の近傍に対しても可縮なので, 自明な T^2 バンドルであり, これを e_1^1 上に自明化を延長する．このとき 1-cell のリターンマップの元として $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ の元が定まる．e_{2i-1}^1 の属するホモトピー類の代表元を α_i, e_{2i}^1 の属するホモトピー類の代表元を β_i とする．$\rho(\alpha_1) = A_1, \rho(\beta_1), \cdots, \rho(\alpha_g) = A_g, \rho(\beta_g) = B_g$ とおくと, $\{\alpha_i, \beta_i\}_{1 \le i \le g}$ が $\pi_1(\Sigma_g)$ の生成元であるから, $A_1, B_1, \cdots, A_g, B_g \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ は $[A_1, B_1] \cdots [A_g, B_g] = E_2$ を満たす．

最後に, 2-cell の境界の S^1 上における貼り合わせから $\pi_1(\mathrm{Diff}_+(T^2)) \simeq \mathbb{Z}^2$ の元が定まる．これはオイラー類と呼ばれる．このように構成した Σ_g 上の T^2 バンドルを $M(A_1, B_1, \cdots, A_g, B_g; m, n)$ と表すこととする．

また T^2 上の T^2 バンドルでの典型的なバンドル同型と同様に Σ_g 上の T^2 バンドルにおいても, モノドロミー ρ については $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ の共役による作用と $\mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)$ の $\pi_1(\Sigma_g)$ に対する作用を, オイラー類 e についても $\mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ の作用を考慮することで典型的なバンドル同型が分かる．実際, 以下が成立する．

Proposition 6. $\xi : M^4 \to \Sigma_g$, $\xi' ; M'^4 \to \Sigma_g$ をともに Σ_g 上の T^2 バンドルとし, それぞれのモノドロミーおよびオイラー類を ρ, ρ', e, e' とおく．このとき, 以下の 2 条件は同値である．以下のいずれかが満たされれば,

(1) ξ, ξ' はバンドル同型である.
(2) $f \in \mathrm{Diff}_+(\Sigma_g), P \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ が存在して, $\rho \circ f_* = P\rho' P^{-1}$ かつ $e = f^* e'$ となる.

$g = 1$ とすれば Proposition3 になる.

2.3 ファイバー連結和

2 つの Σ_1 上の T^2 バンドルからファイバー連結和という操作によって Σ_2 上の T^2 バンドルを構成する. Σ_{g-1} 上の T^2 バンドルと Σ_1 上の T^2 バンドルから Σ_g 上の T^2 バンドルを構成するのも同様にできる. 以下 2 つの Σ_1 上の T^2 バンドル $\xi\colon M^4 \to \Sigma_1, \xi'\colon M'^4 \to \Sigma_1$ から Σ_2 上の T^2 バンドルを構成する.

2-diskD, D' をそれぞれの局所自明化 $\phi_U, \phi'_{U'}$ に対して $D \subset U, D' \subset U'$ となるようにとる. さらに $f\colon \partial D \to \partial D'$; 向きを逆にする微分同相写像, $\Psi\colon T^2 \to T^2$; 向きを保つ微分同相写像とする. このとき, $\Phi\colon \xi^{-1}(\partial D) \xrightarrow{\phi_U} \partial D \times T^2 \xrightarrow{f\times\Psi} \partial D' \times T^2 \xrightarrow{\phi'^{-1}_{U'}} \xi'^{-1}(\partial D')$ によってfiberwiseに貼り合わせをすることにより, Σ_2 上の T^2 バンドルを構成できる.

Remark 7. T^2 バンドル同士のファイバー連結和はそのままでは well-defined ではない. なぜなら, $\pi_0(\mathrm{Diff}_+ T^2) = \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$, $\pi_1(\mathrm{Diff}_+ T^2) = \mathbb{Z}^2$ の元を一つずつ選ぶ必要があり, それによって, モノドロミーとオイラー類がそれぞれ影響を受けるからである.

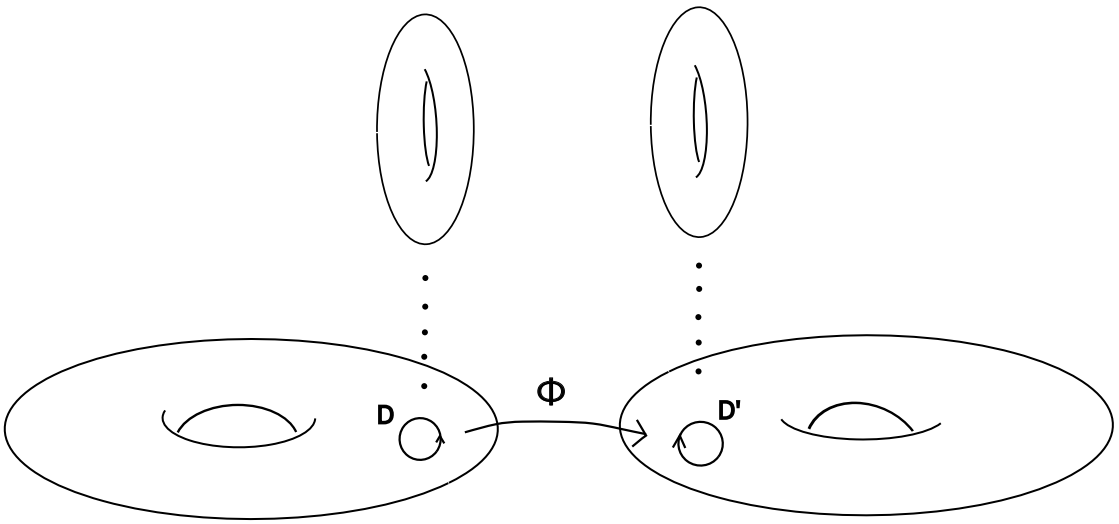


図1: ファイバー連結和

実際, $M(A, B; m, n), M'(A', B'; m', n')$ に対して $\Psi : T^2 \to T^2$ に関するファイバー連結和 $M\sharp_\Psi M'$ は $M\sharp_\Psi M'(A, B, PA'P^{-1}, PB'P^{-1}; \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + P^{-1}\begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix})$ と $M\sharp_\Psi M'(P^{-1}AP, P^{-1}BP, A', B'; P\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m' \\ n' \end{pmatrix})$ の 2 つの表し方がある. ここで $P \in \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ は $[\Psi] \in \mathcal{M}_1 = \pi_0(\mathrm{Diff}_+(T^2)) \simeq \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ に対応する元である.
しかし, この 2 つはバンドル同型でない.

3　G-モノドロミー表現のチャートによる記述

Definition 8 (G-モノドロミー)**.** 群 G に対して準同型

$$\rho : \pi_1(\Sigma_g) \to G$$

を G-モノドロミー表現という.

グラフの辺にラベルを与えるための集合 $\mathcal{X}$ を用意する. Γ を Σ_g に埋め込まれた有限グラフとする. Γ の各辺は向き付けられており, かつ $\mathcal{X}$ の元がラベルとして与えられているとする.

Definition 9 (交叉語)**.** Γ の辺と横断的に交わる道 $\eta : [0,1] \to \Sigma_g$ をとる. η が始点を出発して終点に至るまでに, Γ と有限個の点 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ でこの順番に交わるとする. b_i において, Γ の辺のラベルを x_i とする. b_i において, Γ の辺が η の進行方向に対して左から右へ通過するとき $\varepsilon_i = +1$, 右から左へ通過するとき $\varepsilon_i = -1$ と定める. このとき, $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}$ の元を文字とする語 $w_\Gamma(\eta) := x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ を Γ に対する η の交叉語という.

図 2 では Σ_g に埋め込まれたpath l に対して Γ の辺 b, b, a が横断的に交差している. l の進行方向に対し最初に交差する辺 b は左から右に, 次の辺 b も左から右, 最後の辺 a は右から左に交差している. よって, Γ に関する l の交叉語 $w_\Gamma(l) = b^2 a^{-1}$ となる.

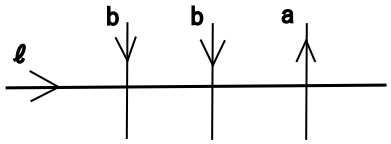


図2: l に対する交叉語

$\langle \mathcal{X}; \mathcal{R} \rangle$ を有限表示可能な群 G の有限表示とする. ただし $\mathcal{X}$: 有限集合, $\mathcal{R} : \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}$ の元を文字とする語の集合とする.

Definition 10 (チャート)**.** Γ が次の条件を満たすとき, Γ を Σ_g 上のチャートという.

- v が Γ の頂点であるとき, $w_\Gamma(m_v)$ は $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ の元の巡回置換である.

ここで m_v は, 頂点 v を囲む小さい単純閉曲線かつ, 向きが Σ_g の向きに対して適合するようなloopである. またチャートには G の生成元にあたる hoop が入ることを許す.

図 3 は $G = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle$ での T^2 上のチャートの例になる. ここで $v \in \{\Gamma \text{ の頂点}\}$ に対して, v を囲む小さな単純閉曲線の交叉語を見ると b^{-3} となっておりこれは $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ の元の巡回置換になっている. Σ_g 上のloopに対して Γ に関する loop の交叉語を与えることでチャート Γ に対し G-モノドロミーを考えることができる. これを ρ_Γ と表す. l, l' を同じホモトピー類に属する T^2 上のloopとする. このときある頂点に対して l, l' が外に回っているか内に回っているかだけ違いがあるとする. 頂点の回りのグラフは $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ の元の巡回置換であるから $\rho_\Gamma([l])$ と $\rho_\Gamma([l'])$ は G において一致する. 従って, ρ_Γ はwell-definedである. 先のチャートの例で図 4 にて図示したloop α, β に対して ρ_Γ を考える. 図 4 においてloop α に対して $w_\Gamma(\alpha)$ は b であ

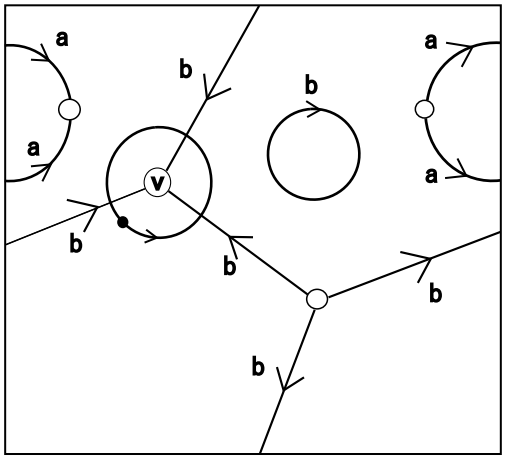


図3: Γ と $w_\Gamma(\partial v)$ の例

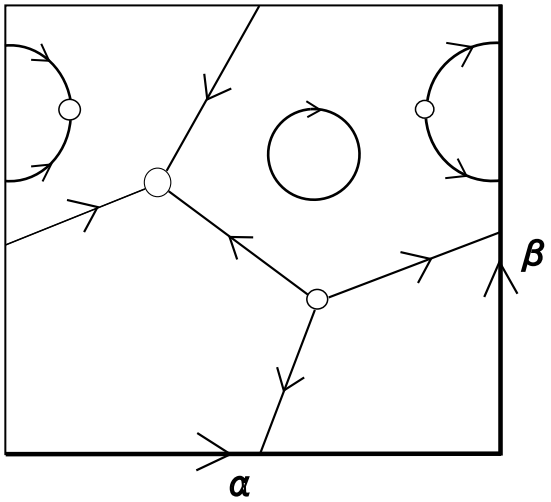


図4: ρ_Γ の計算例

るので, $\rho_\Gamma(\alpha) = b$ となる. loop β に対しては $w_\Gamma(\beta)$ は ba^2 であるので, $\rho_\Gamma(\alpha) = ba^2 = b$ となる. 図 5 のチャートにおいて, $\rho_\Gamma(\alpha) = e$ であり, $\rho_\Gamma(\beta) = b^{-1}a$ である. 図 6 のチャートにおいて, $\rho_\Gamma(\alpha) = e$ であり, $\rho_\Gamma(\beta) = a^{-1}b^{-1}a$ である. (ただし e は G の単位元である.)

Theorem 11 (S.Kamada)**.** 任意の G-モノドロミー表現 ρ に対して, $\rho_\Gamma = \rho$ を満たすy_0 を基点とするチャートΓ が存在する.

この定理によりモノドロミーを見るにはそれに付随するチャートを調べればよいことになる. またチャートを定義し終えたところで, 前の Proposition4 をチャートを用いて証明する.

チャートによる Proposition4 の証明. $\pi_1(T^2) = \mathbb{Z}^2$ の生成元 α, β をとり, 固定する. 写像 $\rho : \pi_1(T^2) \to \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z})$ を $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して $\rho(\alpha^m\beta^n) = A^mB^n$ と定めれば, これは準同型である. さらに, 自然な写像 $\pi : \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}) \to \mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$ との合成をとれば, 準同型 $\pi \circ \rho : \pi_1(T^2) \to \mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z})$ が得られる. Theorem11 に

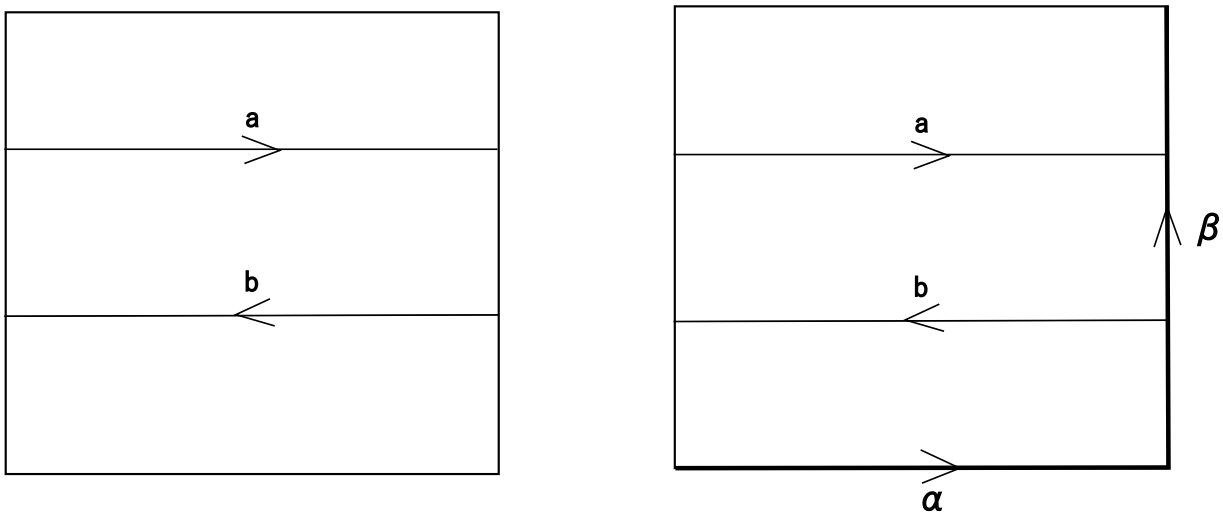


図5: $G = F_2 = \langle a, b \rangle$ のときの T^2 上のチャート

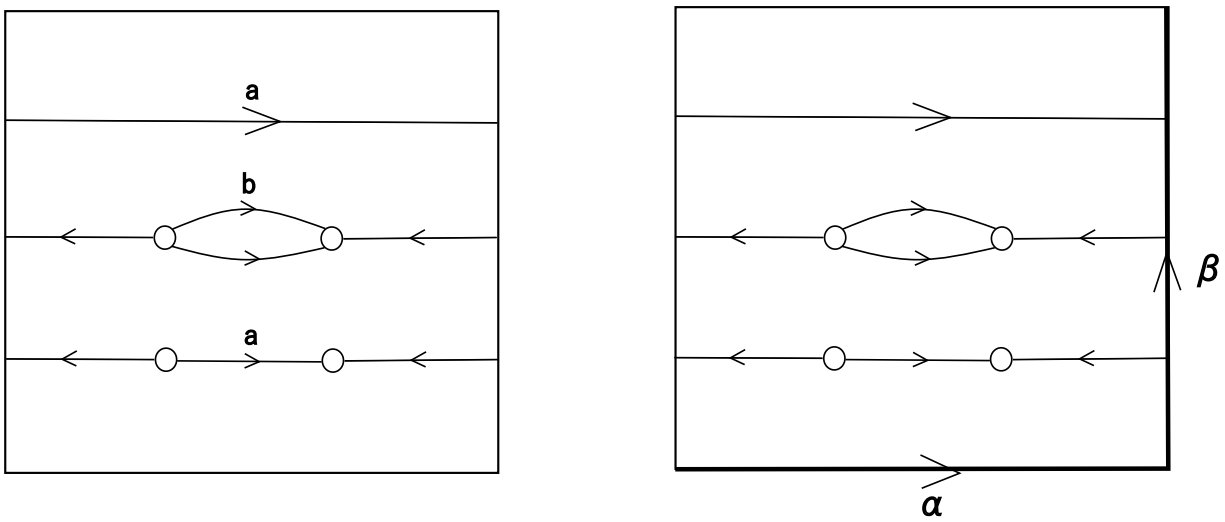


図6: $G = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle$ のときの T^2 上のチャート

よって, この $\pi \circ \rho$ と群の表示 $\mathrm{PSL}(2;\mathbb{Z}) = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle = \mathbb{Z}^2 * \mathbb{Z}^3$ に対応して得られる T^2 上のチャートを Γ とおく.

(1) Γ に 2 価頂点とhoopsが存在しないとき, $\pi \circ \rho$ は $\mathbb{Z}^3$ への準同型とみなせるので, $\mathbb{Z}^3$ の生成元 $b := \pi(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$ を用いて,

$$\pi \circ \rho(\alpha) = \pi(A) = b^i, \pi \circ \rho(\beta) = \pi(B) = b^j \quad (i, j \in \{0, 1, 2\})$$

と表せる. よって, $A = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^i$, $B = \pm \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^j$ となる.

(2) Γ に 2 価頂点またはhoopsが存在するとき, 任意のhoopは T^2 上の単純閉曲線である. 一方, 2 価頂点の

連結成分も T^2 上の単純閉曲線である．このような単純閉曲線を 1 つ取り c とおけば, c の平行な単純閉曲線 c' で $c' \cap \Gamma = \emptyset$ となるものがとれる．すると, $\pi \circ \rho(c')$ は自明になるから, c' に沿ったモノドロミーは $\rho(c') = \pm E_2$ である．一方, c' は T^2 上の単純閉曲線なので, 互いに素な $p, q \in \mathbb{Z}$ が存在して, $c' = \alpha^q \beta^{-p}$ となる．よって

$$\rho(c') = A^q B^{-p} = \pm E_2$$

が従う．p, q は互いに素なので, Euclidの互除法により, $ps + qr = 1$ を満たす $r, s \in \mathbb{Z}$ が存在する．そこで, $C = A^s B^r$ とおくと,

$$C^p = A^{ps} B^{pr} = A^{1-qr} B^{pr} = A(A^q B^{-p})^{-r} = (\pm E_2)^r A = \pm A$$

$$C^q = A^{qs} B^{qr} = A^{qs} B^{1-ps} = B(A^q B^{-p})^s = (\pm E_2)^s B = \pm B$$

となるから, $A = \pm C^p, B = \pm C^q$ と表せる．

□

4　主定理の証明について

主定理の証明はモノドロミーが E_2 であるような Σ_g 上の分離曲線 γ が任意の種数 g に対して存在することを示せばよい．また, 下の命題も主定理を示すのに欠かせない命題になっている．

Proposition 12. $ABA^{-1}B^{-1} = -E_2$ をみたす $A, B \in SL(2;\mathbb{Z})$ は存在しない．

参考文献

[S-F] K.Sakamoto and S.Fukuhara, Classification of T^2-bundles over T^2, Tokyo J. Math. Vol.6, No.2, 1983.

[Ka] S.Kamada, Graphic descriptions of monodromy representations, Topology and its Applications 154(2007) 1430-1446.

3 次元アファイン空間内の全曲率の小さい 完備な特異点付き非固有アファイン球面の分類と新しい例

東京工業大学　理学院　数学系 数学コース
松本 洵 (Jun MATSUMOTO) *

概要

非固有アファイン球面 (IA-sphere) は局所的に楕円型 Monge–Ampère 方程式の解となる関数のグラフとして表される (ユニモデュラー) アファイン空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の特異点を持たない曲面でありユークリッド空間内の極小曲面の Weierstrass の表現公式に類似した複素表現公式をもつ．IA-sphere はある種の完備性を考えると，自明なものに限られることが知られている．Martínez は特異点を許した IA-sphere である非固有アファイン波面 (IA-front) を IA-sphere の Weierstrass 型表現公式を特異点を許す形に拡張して定義し，さらに，完備な IA-front に対して，ユークリッド空間内の完備極小曲面に類似した性質を示しいくつかの例を与えた．ここでは次の 2 つについて説明する: (1) 完備で埋め込まれたエンドの漸近挙動とそのようなエンドをもつの新しい曲面の例．(2) 全曲率 -8π 以上の完備 IA-front の分類と全曲率 -10π かつ種数 1 である新しい曲面の例．

1　極小曲面

ここでは 2 次元多様体 M に対して，C^∞ 級写像 $f\colon M \to \boldsymbol{R}^3$ のことを**曲面**とよぶ．また，$p \in M$ において f がはめ込みにならない，つまり，p における f の微分写像 $(df)_p\colon T_pM \to T_{f(p)}\boldsymbol{R}^3$ が単射にならないとき，$p \in M$ を曲面の**特異点**とよぶ (曲面についての基礎事項は例えば梅原–山田 [13]，特異点をもつ曲面については佐治–梅原–山田 [10])．3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3 = (\boldsymbol{R}^3, dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ 内のはめ込みに対しては**平均曲率**が定義され，平均曲率が恒等的に 0 になる曲面は**極小曲面**とよばれる．極小曲面は閉じた針金で作った枠に張られる石鹸膜の数学的モデルで，表面張力によってその石鹸膜は面積極小になることが知られている (極小曲面については例えば Osserman [8], 川上–藤森 [12], 宮岡 [11])．極小曲面は次の Weierstrass の表現公式をもつ:

事実 1.1 (Weierstrass の表現公式)**.** Σ を Riemann 面とし，Σ 上の有理型関数 $\mathcal{G}$ と正則 1 次微分形式 ω が次の条件を満たしているとする (組 $(\mathcal{G}, \omega)$ を **Weierstrass データ**とよぶ):

- (正則条件) $(1 + |\mathcal{G}|^2)^2|\omega|^2$ が正値 2 次形式.
- (**周期条件**) Σ 上の任意のループ γ に対して,

$$\mathrm{Re}\int_\gamma (1 - \mathcal{G}^2, (1 + \mathcal{G}^2),\ 2g)\omega = 0 \tag{1.1}$$

が成り立つ.

このとき，任意の固定された点，$z_0 \in \Sigma$ に対して,

$$f(z) \coloneqq \mathrm{Re}\int_{z_0}^{z} (1 - \mathcal{G}^2, (1 + \mathcal{G}^2),\ 2g)\omega \quad : \Sigma \longrightarrow \boldsymbol{R}^3 \tag{1.2}$$

は共形極小曲面を与える．特に，f の第一基本形式，第二基本形式はそれぞれ,

$$ds^2 \coloneqq (1 + |\mathcal{G}|^2)^2|\omega|^2, \quad h \coloneqq -Q - \overline{Q} \quad (Q \coloneqq \omega dg) \tag{1.3}$$

で与えられる．逆に任意の向き付け可能な共形極小曲面は上の形で表現される.

この表現公式によって，複素解析を用いて極小曲面の様々な幾何学的性質や例が見出された.

* E-mail:matsumoto.j.ad@m.titech.ac.jp

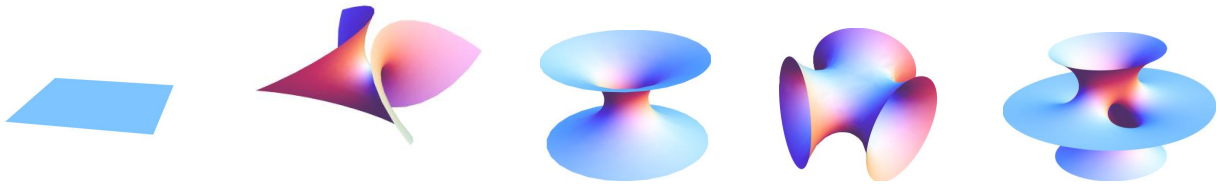
例 1.2.
- (平面) $\Sigma = \boldsymbol{C}, (\mathcal{G}, \omega) = (0, dz)$.
- (Enneper 曲面) $\Sigma = \boldsymbol{C}, (\mathcal{G}, \omega) = (z, dz)$.
- (カテノイド (懸垂面)) $\Sigma = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$, $(\mathcal{G}, \omega) = \left(z, dz/z^2\right)$.
- (Jorge–Meeks 曲面) $\Sigma = \widehat{\boldsymbol{C}} \setminus \{z \in \boldsymbol{C}; z^3 = 1\}$ $(\widehat{\boldsymbol{C}} \coloneqq \boldsymbol{C} \cup \{\infty\})$,

$$(g, \omega) = \left(z^2,\ \frac{dz}{(z^3-1)^2}\right).$$

- (Costa 曲面) $\Sigma = \boldsymbol{C}/(\boldsymbol{Z} \oplus i\boldsymbol{Z}) \setminus \{[0], [1/2], [i/2]\}$ とする．ここで，$z \in \boldsymbol{C}$ に対して $[z]$ は z の属する同値類である．このとき，Weierstrass のペー関数

$$\wp(z) \coloneqq \frac{1}{z^2} + \sum_{p \in \boldsymbol{Z} \oplus \tau \boldsymbol{Z}} \left(\frac{1}{(z-p)^2} - \frac{1}{p^2} \right) \quad (\operatorname{Im} \tau > 0) \tag{1.4}$$

(ここでは $\tau = i$) を用いて表される Weierstarass データ $(\mathcal{G}, \omega) = (c/\wp',\ \wp dz)$ $(c > 0)$ によって与えられる極小曲面は種数 1 の埋め込まれた曲面である．



平面　Enneper 曲面　カテノイド　Jorge–Meeks 曲面　Costa 曲面

図 1　極小曲面の例

2　非固有アファイン波面 (IA-front)

2.1　非固有アファイン球面 (IA-sphere)

以下では，$\boldsymbol{R}^3$ を 3 次元ユニモデュラーアファイン空間 $\boldsymbol{R}^3 = (\boldsymbol{R}^3, \det)$ とする．まず，非固有アファイン球面というアファイン微分幾何の対象である曲面の定義を紹介する (アファイン微分幾何については例えば野水–佐々木 [14], Li–Simon–Zhao [5])．M を連結かつ向き付け可能な 2 次元多様体とし，$\psi\colon M \to \boldsymbol{R}^3$ をはめ込み，ξ を ψ に沿ったベクトル場で $d\psi(TM)$ に横断的 (i.e., $T_{\psi(p)}\boldsymbol{R}^3 = d\psi(T_pM) \oplus \boldsymbol{R}\xi_p$ $(p \in M)$) であるとする．このとき，次を満たす捩れのない接続 ∇，対称双線形形式 h，$(1,1)$-テンソル S，微分 1 形式 τ が一意的に存在する:

$$D_X d\psi(Y) = d\psi(\nabla_X Y) + h(X,Y)\xi, \tag{2.1}$$

$$D_X \xi = -d\psi(S(X)) + \tau(X)\xi \qquad (X, Y \in \mathfrak{X}(M)), \tag{2.2}$$

ただし，D は $\boldsymbol{R}^3$ の標準接続で，$\mathfrak{X}(M)$ は M 上のなめらかなベクトル場全体の集合である．さらに，ψ が**局所強凸** (つまり，h が定値) であるとすると，次を満たす ξ が一意的に取れる:

$$D_X \xi = -d\psi(S(X)), \tag{2.3}$$

$$\det(d\psi(X),\ d\psi(Y),\ \xi) = |h(X,X)h(Y,Y) - h(X,Y)^2|^{1/2} \ (X, Y \in \mathfrak{X}(M)). \tag{2.4}$$

この ξ を**アファイン法線ベクトル**，また，h を ξ に関する**アファイン計量**とよぶ．このとき，$S \equiv 0$ (i.e., ξ が定ベクトル) であるとき，ψ を**非固有アファイン球面 (IA-sphere)** とよぶ．局所強凸 (i.e., アファイン計量 h が定値) でアファイン法線ベクトル $\xi = (0,0,1)$ をもつ IA-sphere は局所的に楕円型 Monge-Ampère 方程式

$$\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 = 1$$

を満たすなめらかな関数 φ のグラフとして表されることが知られている．

例 2.1 (楕円放物面)**.**

$$\psi(x,y) \coloneqq \left(x,\ y,\ \frac{1}{2}\,(x^2+y^2)\right) : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^3$$

とすると, これはアファイン法線ベクトル $\xi = (0,0,1)$ をもつ IA-sphere である.

2.2 非固有アファイン波面 (IA-front)

Ferrer, Martínez, Milán は IA-sphere に対して, Weierstrass 表現公式 (事実 1.1) に対応する次の表現公式を与えた.

事実 2.2. (Ferrer–Martínez–Milán [2, Theorem 4], [3, Lemma 1], Martínez [7, Theorem 2]) Σ を Riemann 面とし, $(F,G)\colon \Sigma \to \boldsymbol{C}^2$ を $|dF| \neq |dG|$ を満たす正則曲線 (つまり, F と G は Σ 上の正則関数で $(dF,dG) \neq (0,0)$) でさらに次の**周期条件**を満たす: Σ 内の任意の閉曲線 γ に対して

$$\text{(周期条件)} \qquad \operatorname{Re}\int_\gamma F\,dG = 0.$$

このとき, $$\psi \coloneqq \left(\overline{F}+G,\ \frac{1}{2}(|G|^2-|F|^2) + \operatorname{Re}\left(FG - 2\int F\,dG\right)\right) : \Sigma \to \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^3 \tag{2.5}$$

はアファイン法線ベクトル $\xi = (0,0,1)$ をもつ (局所強凸な) IA-sphere となる. 逆に, アファイン法線ベクトル $\xi = (0,0,1)$ をもつすべての (局所強凸な) IA-sphere はこの方法で得られる.

組 (F,G) を ψ の **Weierstrass データ**とよぶ. Weierstrass データを用いて表される計量

$$ds^2 \coloneqq \langle d\mathcal{X},\ d\mathcal{X}\rangle = |dF|^2 + |dG|^2 + dF\,dG + \overline{dF\,dG} \tag{2.6}$$

(ただし, $\langle\ ,\ \rangle$ は $\boldsymbol{R}^2$ の標準内積で, $\mathcal{X} \coloneqq \overline{F}+G$ である) は非退化計量となることがわかり, これを**平坦基本形式**とよぶ. また, (F,G) を用いて, アファイン計量 h は $h = |dG|^2 - |dF|^2$ と表される.

注意 2.3. 事実 2.2 において $|dF| = |dG|$ となるような点において ψ ははめ込みにならない. この点は h と ds^2 が退化する点である.

上の表現公式 (2.5) によって局所的には IA-sphere を構成することができる. しかし, 次の Bernstein 型定理によって, 曲面のある種の大域的な性質を調べようとするとそれは自明なものになってしまうことがわかる.

事実 2.4. (IA-sphere に関する Bernstein 型定理, Calabi [1, Corollary of Theorem 1]) 3 次元ユニモデュラーアファイン空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の, アファイン完備 (i.e., $h = |dG|^2 - |dF|^2$ が定値かつ完備) な IA-sphere は楕円放物面に等積アファイン同値である.

そこで Martínez は事実 2.2 の表現公式 (2.5) を拡張して IA-sphere に特異点を許した次の概念を定義した:

定義 2.5. (Martínez [7, Definition 1]) Σ を Riemann 面, $(F,G)\colon \Sigma \to \boldsymbol{C}^2$ を次の**周期条件**を満たす正則曲線とする: Σ 内の任意の閉曲線 γ に対して

$$\text{(周期条件)} \qquad \operatorname{Re}\int_\gamma F\,dG = 0. \tag{2.7}$$

このとき, $$\psi \coloneqq \left(\overline{F}+G,\ \frac{1}{2}(|G|^2-|F|^2) + \operatorname{Re}\left(FG - 2\int F\,dG\right)\right) : \Sigma \to \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^3 \tag{2.8}$$

を**非固有アファイン写像 (IA-map)** とよぶ.

IA-map は “波面” (cf., 佐治–梅原–山田 [10, 第 2 章, 第 5 章]) とよばれる特異点を許したクラスの曲面になることがわかる. このことを強調して IA-map のことを**非固有アファイン波面 (IA-front)** と呼ぶ. また, IA-front の特異点は $|dF| = |dG|$ となる点に対応し, その点で h と ds^2 は退化する.

注意 2.6.

- Weierstrass データ (F,G) から構成される IA-front と

$$(\alpha F + \beta G + \lambda,\ \bar\beta F + \bar\alpha G + \mu) \quad (|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1, \lambda, \mu \in \boldsymbol{C})$$

から構成される IA-front はアファイン法線ベクトル $\xi = (0,0,1)$ を固定する $\boldsymbol{R}^3$ の等積アファイン変換で移り合う. ここで, $\boldsymbol{R}^3$ の**等積アファイン変換**とは線形変換 $\boldsymbol{R}^3 \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ $(\det A = 1, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^3)$ のことである. 特に $(F,G) \mapsto (F+\lambda, G+\mu)$ は $\boldsymbol{R}^3$ の平行移動に対応する.

- (F, G) から構成される IA-front と (G, F) から構成される IA-front は $\boldsymbol{R}^3$ の向きを保つ合同変換 (特に, 等積アファイン変換) で移り合う.

2.3 完備非固有アファイン波面

以下, $\psi\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ を (2.8) で定まる IA-front とし, (F, G) を Weierstrass データとする. 特異点をもつ曲面である IA-front に完備性 (特異点をもつ曲面の完備性については 例えば [10, 定義 7.3.1]) を定義する. IA-front ψ が**完備**であるとは, あるコンパクトな台をもつ対称双線形形式 T が存在して,

$$\widetilde{ds}^2 \coloneqq T + ds^2 \tag{2.9}$$

が完備リーマン計量となることである. ここで ds^2 は平坦基本形式 (2.6) である.

事実 2.7. (Martínez [7, Proposition 1]) 完備 IA-front ψ に対して次が成立する:

- Σ はコンパクト Riemann 面 $\overline{\Sigma}$ から有限個の点 $\{p_1, \ldots, p_n\}$ $(n \geq 1)$ を除いたものと双正則同値になる.
- (F, G) は $\overline{\Sigma}$ 上に有理型に拡張される. 特に, F と G は各 p_j で高々極を持つ.
- F と G の少なくとも一方は各 p_j で極を持つ.

除かれた n 個の点 p_j, またその近傍の ψ による像を IA-front の**エンド**と呼ぶ. 以下, $\Sigma = \overline{\Sigma}_g \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ とする (g は $\overline{\Sigma}$ の種数). また,

$$\rho \coloneqq \frac{dF}{dG} \tag{2.10}$$

とおくと, 事実 2.7 から ρ は Σ 上の有理型関数となり, これを **Lagrangian Gauss 写像**と呼ぶ. ここで,

$$\mathcal{X} \coloneqq \overline{F} + G, \quad \mathcal{N} \coloneqq \overline{F} - G$$

を用いて,

$$\mathcal{L}_\psi \coloneqq \mathcal{X} + i\mathcal{N}\colon \Sigma \to \boldsymbol{C}^2$$

とおくとき, $\mathcal{L}_\psi$ は Σ 上の特殊 Lagrangian はめ込みとなることが知られている (詳しくは Martínez [7, Theorem 1]). この $\mathcal{L}_\psi$ による $\boldsymbol{C}^2 = \boldsymbol{R}^4$ の標準的なユークリッド計量から誘導計量 $d\tau^2 \coloneqq \langle d\mathcal{X},\, d\mathcal{X}\rangle + \langle d\mathcal{N},\, d\mathcal{N}\rangle$ は Weierstrass データを用いて

$$d\tau^2 = 2(|dF|^2 + |dG|^2) \tag{2.11}$$

と表すことができる. この $d\tau^2$ は h が退化しない点 (つまり ds^2 が退化しない点) において, h と共形的である.

事実 2.8. (Martínez [7, Proposition 2, Theorem 4]) $\psi\colon \Sigma = \overline{\Sigma}_g \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \to \boldsymbol{R}^3$ を完備 IA-front, (F, G) をその Weierstrass データとする.

- 誘導計量 $d\tau^2$ は Σ 上の完備リーマン計量となる. また, この計量に関する Gauss 曲率を K_τ, 面積要素を dA_τ とすると, ψ の**全曲率**は次を満たす:

  $$\int_\Sigma K_\tau dA_\tau = -2\pi \deg \rho \in -2\pi \boldsymbol{Z}_{\geq 0}. \tag{2.12}$$

  ただし, $\deg \rho$ は ρ をコンパクト Riemann 面 $\overline{\Sigma}_g$ と $\widehat{\boldsymbol{C}} \coloneqq \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ の間の正則写像とみなしたときの写像度である.
- ひとつのエンド p_j が埋め込みであるための必要かつ十分な条件は F と G が各エンド p_j で高々 1 位の極を持つことである.
- (Osserman 型の不等式) 全曲率 (2.12) は次の不等式を満たす:

  $$-\frac{1}{2\pi}\int_\Sigma K_\tau dA_\tau \geq -\chi(\overline{\Sigma}_g) + 2n. \tag{2.13}$$

  ただし, $\chi(\overline{\Sigma}_g)$ は $\overline{\Sigma}_g$ の Euler 数である. さらに, (2.13) は次のように書き換えられる:

  $$\deg \rho \geq 2(g - 1 + n) \tag{2.14}$$

不等式の等号はすべてのエンドが埋め込みであるときに成り立つ.

2.4 埋め込まれたエンドのみをもつ完備 IA-front の例

ここで, Martínez が構成した例を紹介する (Martínez [7, Section 4]). 以下では $\widehat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ とする.

例 2.9 (楕円放物面). $\Sigma = \widehat{\boldsymbol{C}} \setminus \{0\}$ とし, F, G を次で定める:

$$F = \frac{1}{z}, \quad G = \frac{b}{z} \quad (|b| \neq 1). \tag{2.15}$$

ただし, z は $\boldsymbol{C}$ の標準座標である. このとき, F と G は 1 つの埋め込まれたエンドをもつ完備 IA-front の Weierstrass データとなり, 表現公式 (2.8) によって表される曲面は**楕円放物面**である (図 2: (a)).

例 2.10 (Rotational IA-front). $\Sigma = \widehat{\boldsymbol{C}} \setminus \{0, \infty\} = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ とし, F, G を次で定める:

$$F = \frac{1}{z}, \quad G = az \quad (a \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}). \tag{2.16}$$

このとき, F と G は 2 つの埋め込まれたエンドをもつ完備 IA-front の Weierstrass データとなり, 表現公式 (2.8) によって表される曲面を **rotational IA-front** とよぶ (図 2: (b), (c)).

例 2.11 (Non-rotational IA-front). $\Sigma = \widehat{\boldsymbol{C}} \setminus \{0, \infty\} = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ とし, F, G を次で定める:

$$F = \frac{1}{z}, \quad G = az + \frac{b}{z} \quad (a \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\},\ b \neq 0, |b| \neq 1). \tag{2.17}$$

このとき, F と G は 2 つの埋め込まれたエンドをもつ完備 IA-front の Weierstrass データとなり, 表現公式 (2.8) によって表される曲面を **non-rotational IA-front** とよぶ (図 2: (d)).

例 2.12. $\Sigma = \boldsymbol{C}/(\boldsymbol{Z} \oplus i\boldsymbol{Z}) \setminus \{[0], [1/2], [i/2]\}$ とし, F, G をペー関数 (1.4) を用いて次で定める.

$$F = \frac{r\wp'}{\wp + a}, \quad G = \frac{\wp'}{\wp - a} \quad \left(r \in \boldsymbol{R} \setminus \{0, 1\},\ a \coloneqq \wp\left(\frac{1}{2}\right)\right), \tag{2.18}$$

このとき, F と G は 3 つの埋め込まれたエンドをもつ種数 1 で全曲率 -12π である完備 IA-front を与える (図 2: (e)).



(a) (b) : $a > 0$ (c) : $a < 0$ (d) : $a < 0$ (e) : 種数 1 の例

図 2 完備で埋め込まれたエンドを持つ IA-front

3 (主定理 1) 完備で埋め込まれたエンドの漸近挙動と新しい曲面の例

3.1 完備で埋め込まれたエンドの漸近挙動

3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の完備極小曲面の埋め込まれたエンドは, 平面またはカテノイド (cf., 例 1.2) に漸近することが知られている (Schoen [9]). ここでは IA-front の完備で埋め込まれたエンドに対して “漸近性” を定義して, そのようなエンドの分類を行う.

以下, 完備なエンド p (つまり, p に向かう任意の発散路の (2.9) で定まる $\widetilde{ds}^2$ に関する長さが ∞ に発散する) を中心とする十分小さな局所座標系を取ることで, Weierstrass データ (F, G) をもつ $z(p) = 0$ で完備な

IA-front $\psi\colon \{0<|z|<\varepsilon\}\to \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^3$ ($\varepsilon>0$ は十分小さく取る) を考える．ただし, この章では, $\boldsymbol{R}^3$ をユニモデュラーアファイン空間ではなく, ユークリッド空間であると考える．このとき, ψ が $z=0$ で別の曲面に**漸近する**とは,

$$|\psi(z)-\widetilde{\psi}(z)|=o(1)\quad (z\to 0) \tag{3.1}$$

を満たす $z=0$ で完備な別の IA-front (の一部) $\widetilde{\psi}\colon \{0<|z|<\varepsilon\}\to \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{R}$ が存在することとする．ここで, $|\cdot|$ は $\boldsymbol{R}^3$ のユークリッドノルムである．この定義のもとで次が成立する:

定理 3.1. $\psi\colon \{0<|z|<\varepsilon\}\to \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^3$ を $z=0$ で完備な IA-front とし, (F,G) を Weierstrass データとする．このとき, エンド $z=0$ が埋め込まれたエンドである (つまり, F と G は p で高々 1 の極をもつ) ための必要かつ十分な条件は ψ が楕円放物面, rotational IA-front, non-rotational IA-front のいずれかに漸近することである．

3.2 埋め込まれたエンドをもつ完備 IA-front の新しい例

ここでは, Jorge–Meeks のトリノイド (cf., 例 1.2) に対応するような完備で埋め込まれたエンドをもつ IA-front の新しい例を紹介する．$n\in \boldsymbol{Z}_{\geq 2}$ とし, $\zeta:=\exp(2\pi i/n), \eta:=\exp(\pi i/n), \Sigma:=\widehat{\boldsymbol{C}}\setminus\{1,\zeta,\dots,\zeta^{n-1},\eta,\eta\zeta,\dots,\eta\zeta^{n-1}\}$ ($\widehat{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$) とおいて，$F,G$ を次で定める:

$$F:=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\alpha_j}{z-\zeta^j},\qquad G:=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\beta_j}{z-\eta\zeta^j}\ (\alpha_j,\beta_j\in\boldsymbol{C}\setminus\{0\}). \tag{3.2}$$

このとき, 複素パラメータ α_j,β_j の選び方によって次の例を得る:

例 3.2. α_j,β_j を

$$\alpha_j\eta^{n-1}\zeta^{n-j},\quad \beta_k\zeta^{n-k}\in\boldsymbol{R}\qquad (j,k=0,...,n-1),$$

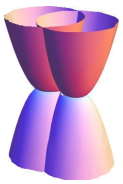
となるように選ぶと, F と G は周期条件 (2.7) を満たし，事実 2.8 から，曲面は $2n$ 個の埋め込まれたエンドをもつ完備 IA-front の Weierstrass データとなる (図 3: (a) $n=2,\alpha_1=\alpha_2=i,\beta_1=\beta_2=1$, (b) $n=3,\alpha_1=\alpha_2=\beta_2=\beta_3=1/5,\alpha_3=\beta_1=-1$).

また, $n=2$ の場合について次の例が構成できる．

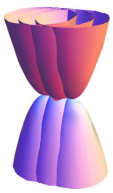
例 3.3. (3.2) において, $\alpha_j=\beta_j=1$ とする, つまり

$$F=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1},\quad G=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}$$

とする．この場合も, F と G は周期条件 (2.7) を満たし, 事実 2.8 から，曲面は $2n$ 個の埋め込まれたエンドをもつ完備 IA-front の Weierstrass データとなる (図 3: (c)).



(a) 例 3.2, $n=2$



(b) 例 3.2, $n=3$



(c) 例 3.3

図 3　$2n$ 個の埋め込まれたエンドをもつ IA-front の新しい例

4　(主定理 2) 全曲率 -8π 以上の完備非固有アファイン波面の分類

ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ 内の有限全曲率完備極小曲面の全曲率は $-4m\pi$ である． $m = 0, 1, 2$ の場合は $m = 0, 1$ の場合について Osserman [8], $m = 2$ の場合について López [6] によって分類がなされている．一方, 事実 2.8 によれば, 完備 IA-front の全曲率は $-2m\pi$ である．ここでは, m が $0 \leq m \leq 4$ である場合の完備 IA-front の分類を行う．以下, $\psi\colon \Sigma = \overline{\Sigma}_g \setminus \{p_1, \ldots, p_n\} \to \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{R}$ を完備 IA-front とし (g はコンパクト Riemann 面 $\overline{\Sigma}_g$ の種数), (F, G) を Weierstrass データ, $\rho = dF/dG$ を Lagrangian Gauss 写像 (2.10) とする．まず, Martínez によって次が示されている:

事実 4.1. (Martínez [7, Theorems 5, 6, 7])

- Lagrangian Gauss 写像 ρ が定値写像であるような完備 IA-front は楕円放物面に限る．
- 完備 IA-front ψ がちょうど 1 つの埋め込まれたエンドを持つための必要かつ十分な条件は ψ が楕円放物面となることである．
- 完備 IA-front ψ がちょうど 2 つの埋め込まれたエンドを持つための必要かつ十分な条件は ψ が rotational IA-front または non-rotational IA-front となることである．

注意 4.2. エンドの個数が 0 個，つまり， $n = 0$ となることはありえない．実際，もし $n = 0$ とすると，F, G はコンパクト Riemann 面 $\overline{\Sigma}_g$ 上正則となり，Liouville の定理から定数となる．これは (F, G) が正則曲線であることに反する．

4.1　全曲率が 0 である場合

まず, 事実 4.1 の 1 つ目から次のことが直ちにわかる:

定理 4.3. 全曲率が 0 である完備 IA-front は楕円放物面である．

4.2　全曲率が -2π である場合

Osserman 型の不等式 (2.14) を見ると, (g, n) は

$$g + n \leq \frac{3}{2}$$

つまり $(g, n) = (0, 1)$ であるため, $\Sigma = \boldsymbol{C}$ として一般性を失わない．また, $\widehat{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C} \cup \{\infty\}$ 上の有理型関数は有理関数で, 特に, ∞ にのみ極をもつ有理関数は多項式関数である．$\deg \rho = 1$ であることを使って次を得る:

定理 4.4. 全曲率が -2π であるような完備 IA-front は以下の Weierstrass データから構成される曲面である:

$$F = az^2, \quad G = z \qquad (a > 0) \tag{4.1}$$



図 4　全曲率 -2π である完備 IA-front

4.3　全曲率が -4π である場合

Osserman 型の不等式 (2.14) から, (g, n) は

$$g + n \leq 2$$

つまり, $(g, n) = (0, 2), (1, 1), (0, 1)$ であることがわかる．はじめの 2 つは Osserman 型不等式の等号条件からすべてのエンドが埋め込まれたエンドである．事実 4.1 の 2 つめから, $(g, n) = (1, 1)$ は起こり得ない．よって以下を得る:

定理 4.5. 全曲率が -4π であるような完備 IA-front は全て種数 0 で rotational IA-front, Non-rotational

IA-front, または以下の $\Sigma = \boldsymbol{C}$ 上の Weierstrass データから構成される曲面である:

$$F = az^3 + bz, \quad G = z \qquad (a > 0, b \in \boldsymbol{C}), \tag{4.2}$$

$$F = az^3 + bz^2 + cz, \quad G = z^2 \qquad (a > 0, c \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}), \tag{4.3}$$



(4.2) (4.3)

図 5　全曲率 -4π で $(g, n) = (0, 1)$.

4.4　全曲率が -6π である場合

Osserman 型の不等式 (2.14) によって, (g, n) は

$$g + n \leq \frac{5}{2},$$

つまり, $(g, n) = (1, 1), (0, 2), (0, 1)$ とわかる. この場合では, 組 (g, n) は全曲率 -4π のときと同様であるが, いずれも Osserman 型不等式の等号を満たさないことに注意が必要である. $(g, n) = (1, 1)$ のとき, 楕円関数の性質 (楕円関数については例えば Hurwitz–Courant [4]) を用いることで対応する曲面は存在しないことがわかる. $(g, n) = (0, 1)$ のときは, 全曲率 -2π のときと同様, $\Sigma = \boldsymbol{C}$ としてよく, Weierstrass データは多項式関数である. $(g, n) = (0, 2)$ のとき, F と G の少なくとも一方は多項式関数ではない有理関数であることに注意する. 一般性を失わずに $\Sigma = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ としてよい.

定理 4.6. 全曲率が -6π である完備 IA-front は全て種数 0 で, $\Sigma = \boldsymbol{C}$ 上の Weierstrass データから構成される 1 つのエンドをもつ 4 種類の曲面, または $\Sigma = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ 上の Weierstrass データから構成される 5 種類の計 9 種類である. から構成される 2 つのエンドをもつ曲面である.



図 6　全曲率 -6π で $(g, n) = (0, 1)$.



図 7　全曲率 -6π で $(g, n) = (0, 2)$.

4.5　全曲率が -8π である場合

Osserman 型の不等式 (2.14) から, (g, n) は以下をみたすことがわかる:

$$g + n \leq 3$$

つまり, $(g, n) = (0, 3), (2, 1), (1, 2), (1, 1), (0, 2), (0, 1)$ である. 最初の 3 つの場合は等号条件を満たす. 事実 4.1 により, $(g, n) = (2, 1), (1, 2)$ は不可能である. また, $(g, n) = (0, 1), (0, 2)$ は全曲率 -4π や -6π のときと全く同じ手法を用いる. $(g, n) = (0, 3)$ のときはすべてのエンドが埋め込みであるから, 事実 2.12 のエンドが埋め込みである条件も用いることで, 種数が 0 で全曲率が -8π の場合について, 以下の結果を得る:

定理 4.7. 全曲率が -8π である種数 0 の IA-front $\psi\colon \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ は $\Sigma = \boldsymbol{C}$ 上の Weierstrass データから構成される6 種類と $\Sigma = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ 上の Weierstrass データから構成される16 種類の曲面と 3 つの埋め込まれたエンドをもつ以下の Weierstrass データから構成される3 種類の計 25 種類の曲面である:

- $\Sigma = \boldsymbol{C} \setminus \{0, 1\}$ (3 つの埋め込まれたエンドをもつとき):

$$F = az + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z}, \quad G = \frac{\alpha}{z-1} \quad (a > 0, c, \alpha \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}, |b| \neq \alpha) \tag{4.4}$$

$$F = az + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z}, \quad G = \alpha\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z-1}\right) \ (a > 0, \mathrm{Im}(b+c) = 0, \alpha \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}, |b|, |c| \neq |\alpha|) \tag{4.5}$$

$$F = az + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z}, \ G = \alpha\left(\frac{pq-1}{z-1} - \frac{pq}{z}\right) \tag{4.6}$$

$(a > 0, \alpha \in \widehat{\boldsymbol{C}} \setminus \{0\}, p, q \notin \{0, 1\}, pq \neq 0, 1, p+q = 2pq, \mathrm{Im}(1-2pq) = 0, \mathrm{Im}(2(b-c)pq + 2c - a) = 0,$
$|c| \neq |\alpha||pq|, |b| \neq |\alpha||pq-1|)$

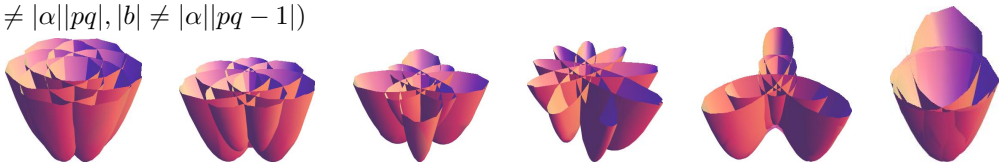


図 8　全曲率 -8π で $(g, n) = (0, 1)$

残るは $(g, n) = (1, 1)$, つまり, 種数 1 でエンドの個数が 1 つの場合である. 定義域の Riemann 面を適当な変換により $\Sigma = \boldsymbol{C}/(\boldsymbol{Z} \oplus \tau\boldsymbol{Z}) \setminus \{[0]\}$ (1 次元複素トーラス $-\{1$ 点 $\}$) としてよい. ただし, τ は $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ を満たす複素数である. また, ρ, F, G は Σ 上の有理型関数だから, $\boldsymbol{C}$ 上の楕円関数と同一視できる. $\deg \rho = 4$ であることと楕円関数の性質を使って以下を得る:

命題 4.8. 全曲率 -8π である種数 1 の完備 IA-front $\psi\colon \boldsymbol{C}/[1, \tau] \setminus \{[0]\} \to \boldsymbol{R}^3$ は周期条件

$$c\,(2g_2\eta_2 - 3g_3\tau) \in i\boldsymbol{R}, \quad c\,(2g_2\eta_1 - 3g_3) \in i\boldsymbol{R} \tag{4.7}$$

を満たす Weierstrass データ

$$F = a\wp' + b\wp, \quad G = c\wp \quad (a > 0, c \neq 0), \tag{4.8}$$

から構成される. ただし, $g_3 = 4\wp(1/2)\wp((1+\tau)/2)\wp(\tau/2)$, η_1 は Weierstrass のゼータ関数

$$\zeta(z) \coloneqq -\int \wp(z)dz, \quad \lim_{z\to 0}\left(\zeta(z) - \frac{1}{z}\right) = 0$$

に対して, $\eta_1 = 2\zeta(1/2), \eta_2 = 2\zeta(\tau/2)$ である.

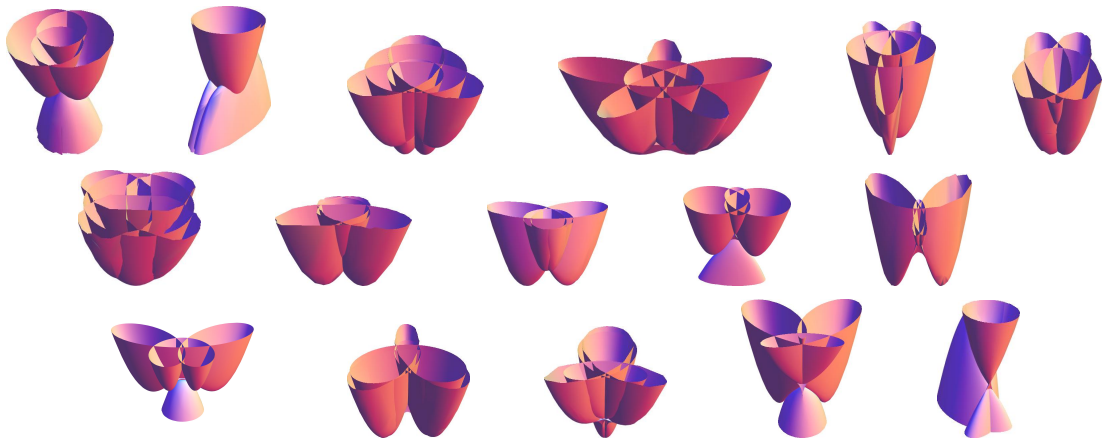
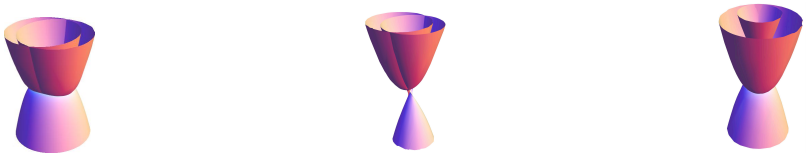


図 9　全曲率 -8π で $(g, n) = (0, 2)$



(4.4) (4.5) (4.6)

図 10　全曲率 -8π で $(g,n)=(0,3)$

例 4.9. (種数 1 で全曲率 -10π である新しい例) $\Sigma=\boldsymbol{C}/(\boldsymbol{Z}\oplus i\boldsymbol{Z})\setminus\{[0]\}=$ (正方形トーラス $\setminus$ {1 点 }) とし,

$$F=\wp''+\frac{5g_2}{7\pi}\wp,\quad G=\wp'\quad (g_2=4\wp(1/2)^2\in\boldsymbol{R}) \tag{4.9}$$

とすると，F,G は種数 1 で全曲率 -10π である完備 IA-front を与える.



図 11　種数 1, 全曲率 -10π である新しい例

参考文献

[1] E. Calabi. Improper affine hyperspheres of convex type and a generalization of a theorem by K. Jörgens. *Michigan Math. J.*, Vol. 5, pp. 105–126, 1958.

[2] L. Ferrer, A. Martínez, and F. Milán. Symmetry and uniqueness of parabolic affine spheres. *Math. Ann.*, Vol. 305, No. 2, pp. 311–327, 1996.

[3] L. Ferrer, A. Martínez, and F. Milán. An extension of a theorem by K. Jörgens and a maximum principle at infinity for parabolic affine spheres. *Math. Z.*, Vol. 230, No. 3, pp. 471–486, 1999.

[4] Adolf Hurwitz and Richard Courant. 楕円関数論 (訳: 足立恒雄，小松啓一). シュプリンガー数学クラシックス ; 第 2 巻. 丸善出版, 2012.

[5] A. M. Li, U. Simon, and G. S. Zhao. *Global affine differential geometry of hypersurfaces*, Vol. 11 of *De Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1993.

[6] F. J. López. The classification of complete minimal surfaces with total curvature greater than -12π. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 334, No. 1, pp. 49–74, 1992.

[7] A. Martínez. Improper affine maps. *Math. Z.*, Vol. 249, No. 4, pp. 755–766, 2005.

[8] R. Osserman. *A survey of minimal surfaces*. Van Nostrand Reinhold Co., New York-London-Melbourne, 1969.

[9] R. M. Schoen. Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces. *J. Differential Geom.*, Vol. 18, No. 4, pp. 791–809 (1984), 1983.

[10] 佐治健太郎, 梅原雅顕, 山田光太郎. 特異点をもつ曲線と曲面の微分幾何学. 丸善出版, 2017.

[11] 宮岡礼子. 極小曲面. 共立出版, 2022.

[12] 川上裕, 藤森祥一. 極小曲面論入門–その幾何学的性質を探る–. サイエンス社, 2019.

[13] 梅原雅顕, 山田光太郎. 曲線と曲面: 微分幾何学的アプローチ (改訂版). 裳華房, 2015.

[14] 野水克已, 佐々木武. アファイン微分幾何学–アファインはめ込みの幾何–. 裳華房, 1994.

特異点を持つ螺旋曲面に対する Bour の定理

横浜国立大学大学院 理工学府 数物・電子情報系理工学専攻
服部　祐樹 *(Yuki HATTORI)

概要

本稿の内容は，本田淳史氏 (横浜国立大学) と森本達也氏 (株式会社フレーベル館) との共同研究 [8] に基づく。 等長変換群の 1-パラメータ部分群の作用で不変な曲面を螺旋曲面という。Bour の定理は，与えられた螺旋曲面 S に対し，S と等長的な螺旋曲面の 2-パラメータ族が存在することを主張する。これまで Bour の定理は，外の空間が様々な 3 次元リーマン多様体の場合に拡張されてきた。本稿では，Bour の定理の内在的な一般化として，特異点をもつ螺旋曲面に対する Bour 型定理の紹介を行う。またその応用として得られる特異点における幾何学的不変量の外在性の証明の概説を行う。

1　イントロダクション

3 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ の螺旋運動で不変な曲面を螺旋曲面という。ここで，螺旋運動とは $\boldsymbol{R}^3$ の等長変換群の非自明な 1-パラメータ部分群の作用とする。螺旋曲面は回転と平行移動により

$$f(u,v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u) + hv)$$

と表される。ここで，$(x(u), z(u))$ は $\boldsymbol{R}^2$ の平面曲線であり，h はピッチと呼ばれる定数である。1862 年に E. Bour は螺旋曲面に対する以下の定理を証明した。

事実 1.1 (Bour の定理 [1])**.** $\boldsymbol{R}^3$ の与えられた正則な螺旋曲面に対して，その螺旋曲面に等長的な螺旋曲面の 2-パラメータ族が存在する。

Bour の定理の概略を紹介する。$f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ を螺旋曲面とすると，s 座標曲線の族が測地的であり t 座標曲線の像の族が螺旋運動の軌跡となるような直交座標系 (s,t) が存在する。この (s,t) を自然なパラメータと呼ぶ。この自然なパラメータ (s,t) に対して第一基本形式 g は C^∞ 級正値関数 $U(s)$ を用いて

$$g = ds^2 + U(s)^2 dt^2 \tag{B$_0$}$$

と表すことができる。逆に与えられた Σ 上の自然なパラメータ (s,t) と C^∞ 級正値関数 $U(s)$ に対して，第一基本形式が (B$_0$) と一致するような螺旋曲面を明示的に記述できる。その螺旋曲面は 2-パラメータ族で与えられる。

* E-mail:hattori-yuki-by@ynu.jp

do Carmo-Dajczer [4] は，Bour の定理の応用として平均曲率一定な螺旋曲面の積分表現を得た。Bour の定理は外の空間の一般化がされてきた。具体的には，

- 3 次元ローレンツミンコフスキー空間 $\boldsymbol{R}^3_1$ (Sasahara [26], Ji-Kim [14], Honda [9])
- $\boldsymbol{S}^2 \times \boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{H}^2 \times \boldsymbol{R}$，ハイゼンベルグ群 Nil_3 (Sa Earp-Toubiana [23]，Sa Earp [22])
- Bianchi-Cartan-Vranceanu (BCV) space (Caddeo-Onnis-Piu [3])
- キリングベクトル場を持つ 3 次元リーマン多様体 (Domingos-Onnis-Piu [5])

の螺旋曲面に対して，Bour の定理が証明されている。本研究では Bour の定理の内在的な一般化，具体的には特異点を持つ螺旋曲面に対する Bour の定理の一般化を行った。

2 定義

ここでは主定理を述べるために必要な定義を行っていく。まず初めに特異点を持つ曲面であるフロンタルと波面の定義を行う。以下，$\boldsymbol{S}^2$ を $\boldsymbol{R}^3$ の単位球面，つまり $\boldsymbol{S}^2 := \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3; ||\boldsymbol{x}|| = 1\}$ とし，Σ を向きづけられた 2 次元 C^∞ 級多様体とする。

定義 2.1 (フロンタル，波面)**.** C^∞ 級写像 $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が**フロンタル**であるとは，任意の $p \in \Sigma$ に対して，p の開近傍 D，C^∞ 級写像 $\nu : D \to \boldsymbol{S}^2$ で，$\boldsymbol{v} \in T_q\Sigma$ と $q \in D$ に対して $df_q(\boldsymbol{v}) \cdot \nu(q) = 0$ を満たすものが存在するときをいう。さらに，$L := (f, \nu) : D \to \boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{S}^2$ がはめ込みになるとき，フロンタル $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ を**波面**という。

次に今回の定理で重要になる第一基本形式と等長的の定義を行う。

定義 2.2 (第一基本形式，等長的)**.** フロンタル $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ に対して，誘導計量 $g = df \cdot df$ を**第一基本形式**という。$\bar{\Sigma}$ を向きづけられた 2 次元 C^∞ 級多様体とし，$f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$，$\bar{f} : \bar{\Sigma} \to \boldsymbol{R}^3$ をフロンタル，g を f の第一基本形式，$\bar{g}$ を $\bar{f}$ の第一基本形式とする。このとき，f と $\bar{f}$ が**等長的**であるとは，$g = \phi^* \bar{g}$ を満たす微分同相写像 $\phi : \Sigma \to \bar{\Sigma}$ が存在するときをいう。

n を正の整数とする。カスプ辺の一般化である n 型辺を定義する。

定義 2.3 (n 型辺 [19])**.** C^∞ 級写像 $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が $p \in \Sigma$ で n **型辺** (n-type edge) であるとは，写像芽 $f : (\Sigma, p) \to (\boldsymbol{R}^3, f(p))$ が原点での写像芽

$$\boldsymbol{R}^2 \ni (u, v) \longmapsto (u^n, u^{n+1}a(u, v), v) \in \boldsymbol{R}^3$$

と $\mathcal{A}$-同値となるような C^∞ 級関数 $a(u, v)$ が存在するときをいう。

ここで，$\mathcal{A}$-同値とは以下のように定義される写像芽における同値関係である。N を正の整数とし，Σ_1, Σ_2 を C^∞ 級多様体，$i = 1, 2$ に対し $f_i : \Sigma_i \to \boldsymbol{R}^N$ を C^∞ 級写像とする。$p_i \in \Sigma_i$ $(i = 1, 2)$ に対して，$q_i = f_i(p_i)$ とするとき，写像芽 $f_i : (\Sigma_i, p_i) \to (\boldsymbol{R}^N, q_i)$ $(i = 1, 2)$ が $\mathcal{A}$-**同値**であるとは，微分同相写像芽 $\varphi : (\Sigma_1, p_1) \to (\Sigma_2, p_2)$, $\Phi : (\boldsymbol{R}^N, q_1) \to (\boldsymbol{R}^N, q_2)$ が存在して

$f_2 = \Phi \circ f_1 \circ \varphi^{-1}$ となるときをいう。

n 型辺の定義において，$n = 2$ の場合は**一般化されたカスプ辺**と呼ばれる [10]。次に，極限法曲率の定義を行う。

定義 2.4 ([25, 18])**.** $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ をフロンタルとし，$p \in \Sigma$ を階数 1 の特異点，つまり $\mathrm{rank}(df)_p = 1$ とする。このとき，

$$\kappa_\nu(p) := \frac{f_{vv}(p) \cdot \nu(p)}{\|f_v(p)\|^2}.$$

は $f_u(p) = \boldsymbol{0}$ を満たす局所座標系 (u, v) の取り方によらない。$\kappa_\nu(p)$ を f の p における**極限法曲率**という。さらに，階数 1 の特異点 p が**ジェネリック**であるとは，$\kappa_\nu(p) \neq 0$ であるときをいう。

定義 2.5 ([8])**.** $\boldsymbol{R}^3$ のフロンタルが **ジェネリック螺旋** n **型辺**であるとは，螺旋運動で不変であり，フロンタルの特異点集合が空でなく，任意の特異点がジェネリック n 型辺であるときをいう。

3 主定理

ここで主定理を紹介していく。まず初めに Bour 型等長変形定理を紹介する。

定理 3.1 (ジェネリック螺旋 n 型辺に対する Bour 型等長変形定理 [8])**.** $\boldsymbol{R}^3$ の与えられたジェネリック螺旋 n 型辺 $\Psi : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ に対して，Ψ に等長的なジェネリック螺旋 n 型辺の 2 パラメータ族 $\{\Psi_{h,m}\}_{h,m}$ が存在する。逆に，Ψ に等長的なジェネリック螺旋 n 型辺は $\{\Psi_{h,m}\}_{h,m}$ で与えられる。

上記の等長変形定理は次の表現公式を用いて示される。

定理 3.2 (ジェネリック螺旋 n 型辺に対する Bour 型表現公式 [8])**.** k を正の整数で，$n = k + 1$ とする。J を原点を含む開区間，$U(s)$ を J 上の C^∞ 級正値関数で $U^{(i)}(0) = 0$ $(1 \leq i \leq k)$ を満たすものとする。$V(s)$ を J 上の C^∞ 級関数で $U'(s) = s^k V(s)$ を満たすものとする。さらに，m, h を実数 $(m > 0)$ で，

$$\rho_{h,m}(s) := \sqrt{m^2 U(s)^2 - h^2 - m^4 U(s)^2 V(s)^2}$$

で表される $\rho_{h,m}(s)$ が J 上で C^∞ 級関数であり，$\rho_{h,m}(0) \neq 0$ を満たすとする。さらに，$x(s)$, $z(s) : J \to \boldsymbol{R}$, $\theta(s,t) : J \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ をそれぞれ $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2 \in \{+1, -1\}$ を用いて

$$\begin{aligned}
x(s) &= \epsilon_0 \sqrt{m^2 U(s)^2 - h^2}, \\
z(s) &= \epsilon_2 m \int_0^s \frac{\zeta^k U(\zeta) \rho_{h,m}(\zeta)}{m^2 U(\zeta)^2 - h^2} d\zeta, \\
\theta(s,t) &= \frac{1}{m} \left(\epsilon_1 t - \epsilon_2 h \int_0^s \frac{\zeta^k \rho_{h,m}(\zeta)}{U(\zeta)(m^2 U(\zeta)^2 - h^2)} d\zeta \right)
\end{aligned}$$

とする。このとき，

$$\Psi(s,t) := (x(s)\cos\theta(s,t),\, x(s)\sin\theta(s,t),\, z(s)+h\theta(s,t))$$

で表される $\Psi : J \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$ は，第一基本形式が

$$g = s^{2k}ds^2 + U(s)^2dt^2 \tag{B_k}$$

であるようなジェネリック螺旋 n 型辺である。

逆に，特異点の近傍で，第一基本形式が (B_k) で与えられる任意のジェネリック螺旋 n 型辺は $\boldsymbol{R}^3$ の合同変換を除いて上記の Ψ で与えられる。

ここで主定理の証明の前に証明に必要な標準パラメータを導入するため，重複度の定義と特異点をもつ曲線の標準パラメータを紹介する。

定義 3.3 (重複度)**.** I を開区間, n, N を正の整数，u_0 を開区間 I 上の点とする，このとき，C^∞ 級写像 $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^N$ が u_0 で**重複度** n であるとは,

$$\gamma'(u_0) = \cdots = \gamma^{(n-1)}(u_0) = \boldsymbol{0}, \qquad \gamma^{(n)}(u_0) \neq \boldsymbol{0}$$

を満たすときをいう。この u_0 を**重複度** n の特異点と呼ぶ。

事実 3.4 ([27, 6, 17])**.** C^∞ 級写像 $\gamma : I \to \boldsymbol{R}^N$ が u_0 で重複度 n とする。この時,

$$\left\| \frac{d\gamma}{ds} \right\| = |s|^{n-1}$$

を満たす座標変換 $s = s(u)$ が存在する。この s を**標準パラメータ**と呼ぶ。

表現公式 (定理 3.2) の証明の概略を述べる。$f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ をジェネリック螺旋 n 型辺，$p \in \Sigma$ を f の特異点とする。このとき，原点を含む区間 J と J 上の C^∞ 級正値関数 $U(s)$，p を中心とする座標近傍 $(D; s, t)$ が存在して，$\varphi : D \to J \times \boldsymbol{R}$ は微分同相写像であり，$U^{(i)}(0) = 0$ $(1 \leq i \leq k)$ かつ

$$g = s^{2k}ds^2 + U(s)^2dt^2 \tag{B_k}$$

が成り立つ。このような近傍系 $(D; s, t)$ の存在を示すために，特異点を持つ曲線の標準パラメータを用いる。ジェネリック螺旋 n 型辺を

$$f(u,v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u) + h\, v)$$

と表すとき，特異点は $p = (u_0, v_0)$ と表される。このとき，(u, t) が直交座標となるような座標変換 $(u, v) \mapsto (u, t(u, v))$ が存在する。各 t に対し，$\alpha_t(u) := f(u, t)$ と定める。このとき，$\alpha_t(u)$ は u_0 で重複度 n となるので，標準パラメータへの座標変換 $s = s(u)$ が存在する。このとき，$f = f(s, t)$ は

$$E = f_s \cdot f_s = s^{2k}, \quad F = f_s \cdot f_t = 0, \quad G = f_t \cdot f_t = U(s)^2$$

をみたす。このことから f の第一基本形式は (B_k) で表されることが示された。逆は Bour の定理の証明 [1] と同様に示される。

4　主定理の応用

ここでは主定理を用いて得られた応用を 2 つ紹介する。

4.1　(n,r)-カスプ辺を持つ螺旋曲面の等長変形

1 つ目は (n,r)-カスプ辺を持つ螺旋曲面についての応用例を紹介する。結果の紹介の前に，結果を述べるために必要な定義や事実, 補題を紹介する。以下, $(n,r)=(2,3),(2,5),(2,7),(3,4),(3,5)$ とする。

定義 4.1 ((n,r)-カスプ辺)**.** $f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ を C^∞ 級写像とする。このとき，特異点 $p\in\Sigma$ が (n,r)-**カスプ辺**であるとは，写像芽 $f:(\Sigma,p)\to(\boldsymbol{R}^3,f(p))$ が写像芽 $F_{n,r}:(\boldsymbol{R}^2,0)\to(\boldsymbol{R}^3,0)$ と $\mathcal{A}$-同値であるときをいう。ここで，$F_{n,r}:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}^3$ は $F_{n,r}(u,v):=(u^n,u^r,v)$ $(u,v\in\boldsymbol{R})$ で定まる C^∞ 級写像とする。$F_{n,r}$ を標準 (n,r)-カスプ辺という。$(2,3)$-カスプ辺のことを単に**カスプ辺**と呼ぶ。

次に (n,r)-カスプの定義を紹介する。

定義 4.2 ((n,r)-カスプ)**.** 開区間 I 上で定義される C^∞ 級写像 $\gamma:I\to\boldsymbol{R}^2$ に対し，特異点 $u_0\in I$ が (n,r)-**カスプ**であるとは，写像芽 $\gamma:(I,u_0)\to(\boldsymbol{R}^2,\gamma(u_0))$ が写像芽 $\Gamma_{n,r}:(\boldsymbol{R},0)\to(\boldsymbol{R}^2,0)$ と $\mathcal{A}$-同値であるときをいう。ここで，$\Gamma_{n,r}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$ は $\Gamma_{n,r}(u):=(u^n,u^r)$ $(u\in\boldsymbol{R})$ で定まる C^∞ 級写像である。$\Gamma_{n,r}$ を標準 (n,r)-カスプという。$(2,3)$-カスプのことを単に**カスプ**と呼ぶ。

ここで (n,r)-カスプの判定法を紹介する。

事実 4.3 ($(2,3),(2,5),(3,4),(3,5)$-カスプの判定法, cf. [2], [21])**.** I を開区間，$\gamma:I\to\boldsymbol{R}^2$ を C^∞ 級写像，$\gamma'(u_0)=\boldsymbol{0}$ とする。このとき,

(1) γ が u_0 でカスプをもつための必要十分条件は，$\det(\gamma'',\gamma''')(u_0)\neq 0$ で与えられる。
(2) γ が u_0 で $(2,5)$-カスプをもつための必要十分条件は，次式が成り立つような実数 $c_1\in\boldsymbol{R}$ が存在することで与えられる。

$$\gamma'''(u_0)=c_1\,\gamma''(u_0),\quad \det(\gamma'',3\gamma^{(5)}-10c_1\gamma^{(4)})(u_0)\neq 0.$$

(3) γ が u_0 で $(3,4)$-カスプをもつための必要十分条件は，$\gamma''(u_0)=\boldsymbol{0}$ かつ $\det(\gamma''',\gamma^{(4)})(u_0)\neq 0$ で与えられる。
(4) γ が u_0 で $(3,5)$-カスプをもつための必要十分条件は，$\gamma''(u_0)=\boldsymbol{0}$ かつ

$$\det(\gamma''',\gamma^{(4)})(u_0)=0,\quad \det(\gamma''',\gamma^{(5)})(u_0)\neq 0$$

で与えられる。

$(2,7)$-カスプの判定法は以下で与えられる。

定理 4.4 ($(2,7)$-カスプの判定法 [28, 8])**.** I を開区間，$\gamma : I \to \boldsymbol{R}^2$ を C^∞ 級写像，$\gamma'(u_0) = \boldsymbol{0}$ とする。このとき，γ が u_0 で $(2,7)$-カスプをもつための必要十分条件は，u_0 において次式が成り立つような実数 $c_1, c_2 \in \boldsymbol{R}$ が存在することで与えられる。

$$\gamma''' = c_1\gamma'', \quad \gamma^{(5)} - \frac{10}{3}c_1\gamma^{(4)} = c_2\gamma'',$$
$$\det\left(\gamma'', \gamma^{(7)} - 7c_1\gamma^{(6)} - \left(7c_2 - \frac{70}{3}c_1^3\right)\gamma^{(4)}\right) \neq 0.$$

上記の判定法を用いることで以下の命題を得られる。

命題 4.5 ([8])**.** $\Psi : J \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$ を定理 3.2 で与えられるジェネリック螺旋 n 型辺とする。このとき，特異点 $p = (0,t) \in J \times \boldsymbol{R}$ が

(1) カスプ辺であるための必要十分条件は，$n = 2$ かつ $U'''(0) \neq 0$ で与えられる。
(2) $(2,5)$-カスプ辺であるための必要十分条件は，$n = 2$ かつ $U'''(0) = 0$，$U^{(5)}(0) \neq 0$ で与えられる。
(3) $(2,7)$-カスプ辺であるための必要十分条件は，$n = 2$ かつ $U'''(0) = 0$，$U^{(5)}(0) = 0$，$U^{(7)}(0) \neq 0$ で与えられる。
(4) $(3,4)$-カスプ辺であるための必要十分条件は，$n = 3$ かつ $U^{(4)}(0) \neq 0$ で与えられる。
(5) $(3,5)$-カスプ辺であるための必要十分条件は，$n = 3$ かつ $U^{(4)}(0) = 0$，$U^{(5)}(0) \neq 0$ で与えられる。

命題 4.5 より，(n,r)-カスプ辺であるための必要十分条件に h, m が含まれず $U(s)$ のみで表されるため，等長変形で $\mathcal{A}$-同値類が保たれる。このことから，以下の系が得られる。

系 4.6 ([8])**.** $(n,r) = (2,3), (2,5), (2,7), (3,4), (3,5)$ とする。$\boldsymbol{R}^3$ の与えられたジェネリック螺旋 (n,r)-カスプ辺は，ジェネリック螺旋 (n,r)-カスプ辺からなる非自明な等長変形をもつ。この等長変形はジェネリック螺旋 (n,r)-カスプ辺 s の 2-パラメータ族で与えられる。

4.2 特異点における幾何学的不変量の外在性

主定理の 2 つ目の応用を紹介する。まずはじめに不変量の定義を行う。

定義 4.7 (不変量)**.** $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ をフロンタル，p を Σ 上の点とする。

- f, p から定まる実数 $J(f,p)$ が**不変量**であるとは，$\boldsymbol{R}^3$ の等長変換 T と微分同相写像 $\phi : \Sigma \to \Sigma$ で $\phi(p) = p$ を満たすものに対して，$|J(f,p)| = |J(T \circ f \circ \phi^{-1}, p)|$ が成り立つときをいう。
- 不変量 $J(f,p)$ が**内在的**であるとは，任意の f に等長的なフロンタル $\bar{f} : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ に対し

て，$|J(f,p)| = |J(\bar{f},p)|$ が成り立つときをいう。

- 不変量 $J(f,p)$ が**外在的**であるとは，$J(f,p)$ が内在的でない，つまり，$|J(f,p)| \neq |J(\bar{f},p)|$ を満たすような f に等長的なフロンタル $\bar{f} : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が存在するときをいう。

例 4.8. ガウス曲率 K は第一基本形式のみで表されるため内在的不変量である。一方，平均曲率 H は外在的不変量である。

以下の事実が知られている。

事実 4.9 ([20, 11, 10])**.** 実解析的かつジェネリックな一般化されたカスプ辺に対して，極限法曲率 κ_ν は外在的不変量である。

主定理を用いることで，実解析的かつジェネリックな一般化されたカスプ辺をジェネリック螺旋 n 型辺に変えても同様のことが成り立つことが分かった。

系 4.10 ([8])**.** ジェネリック螺旋 n 型辺に対して，極限法曲率 κ_ν は外在的である。

系 4.10 は，次の命題を用いて示される。

命題 4.11. $\Psi : J \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^3$ を定理 3.2 で与えられるジェネリック螺旋 n 型辺とする。このとき，特異点 $p = (0,t) \in J \times \boldsymbol{R}$ における極限法曲率 κ_ν は次で与えられる。

$$\kappa_\nu(p) = \frac{\rho_{h,m}(0)}{m^2 U(0)^2}.$$

主定理から，$\Psi(s,t)$ の第一基本形式は (B_k) で表される。一方，κ_ν は m, h に依存するため，κ_ν は外在的であることがわかる。

[19] において，κ_ν 以外の n 型辺に対する様々な不変量が導入された。主定理を用いてそれらの不変量の外在性を紹介する。

定義 4.12. $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ をフロンタルとし，f の特異点集合 $S(f)$ が Σ 内の正則曲線とする。また，$p \in S(f)$ を階数 1 の特異点とする。このとき，p の近傍 $\tilde{D}$ で定義されるベクトル場 η で，$\eta \neq \boldsymbol{0}$ かつ任意の $q \in S(f) \cap \tilde{D}$ に対して $df_q(\eta_q) = \boldsymbol{0}$ を満たすものを**退化ベクトル場**という。

[19] で次の n 型辺の判定法が示された。

事実 4.13 ([19])**.** $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ をフロンタルとし，f の特異点集合 $S(f)$ が Σ 内の正則曲線とする。また，$p \in S(f)$ を階数 1 の特異点とする。ξ を $\xi_p \in T_p S(f)$ で $\xi \notin \ker(df_p)$ を満たすベクトル場とする。このとき，f が p 上で n 型辺をもつことと，

$$\text{各 } i = 2, \ldots, n-1, \text{ 各 } q \in S(f) \text{ に対して } \eta^i f(q) = \boldsymbol{0} \text{ が成り立つ} \tag{4.1}$$

$$\xi f(p) \quad \text{と} \quad \eta^n f(p) \quad \text{が線形独立} \tag{4.2}$$

を満たす退化ベクトル場 η が存在することは同値である。

定義 4.14 ([19])**.** $f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ をフロンタル，$p\in\Sigma$ を n 型辺とする。ξ,η を (4.1)，(4.2) を満たすベクトル場とする。このとき，

$$\kappa_t(p):=\frac{\det(\xi f,\eta^n f,\xi\eta^n f)}{\|\xi f\times\eta^n f\|^2}(p)-\frac{(\xi f\cdot\eta^n f)\det(\xi f,\eta^n f,\xi^2 f)}{\|\xi f\|^2\|\xi f\times\eta^n f\|^2}(p)$$

は (4.1), (4.2) を満たすベクトル場 ξ,η の取り方によらない。$\kappa_t(p)$ を**カスプ的捩率**と呼ぶ。また，$i=1,\dots,n$ に対して，$\omega_{n,n+i}$ を

$$\omega_{n,n+i}(p)=\frac{\|\xi f\|^{(n+i)/n}\det(\xi f,\eta^n f,\eta^{n+i}f)}{\|\xi f\times\eta^n f\|^{(2n+i)/n}}(p)$$

で定める。$\omega_{n,n+1}(p)$ は (4.1), (4.2) を満たすベクトル場 ξ,η の取り方によらない。また，$i=2,\dots,n-1$ に対し，$\omega_{n,n+1}|_{S(f)}=\cdots=\omega_{n,n+i-1}|_{S(f)}=0$ のとき，$\omega_{n,n+i}(p)$ は (4.1), (4.2) を満たすベクトル場 ξ,η の取り方によらない。$\omega_{n,n+i}(p)$ を $(n,n+i)$**-カスプ的曲率**，$i=n$ のとき，$\omega_{n,2n}(p)$ を $\beta_{n,2n}(p)$ で表し，$(n,2n)$**-バイアス**と呼ぶ。

主結果を用いることで次の命題が得られる。

命題 4.15 ([8])**.** $\Psi:J\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^3$ を定理 3.2 で与えられるジェネリック螺旋 n 型辺とする。このとき，特異点 $p=(0,t)\in J\times\boldsymbol{R}$ におけるカスプ的捩率 $\kappa_t(p)$，$(n,n+i)$-カスプ的曲率 $\omega_{n,n+i}(p)$，$(n,2n)$-バイアス $\beta_{n,2n}(p)$ は次で与えられる。

$$\begin{aligned}\kappa_t(p)&=\frac{h}{m^2U(0)^2},\\ \omega_{n,n+i}(p)&=\epsilon_1\epsilon_2\frac{m^2U(0)U^{(n+i)}(0)}{((n-1)!)^{(n+i)/n}\rho_{h,m}(0)},\\ \beta_{n,2n}(p)&=\frac{\epsilon_1\epsilon_2}{\rho_{h,m}(0)}\left(\frac{m^2U(0)U^{(2n)}(0)}{((n-1)!)^2}-\binom{2n-1}{n}\frac{h^2}{m^2U(0)^2}\right).\end{aligned}$$

命題 4.15 から，各不変量は m,h に依存しており，第一基本形式が一致しても異なる値をとるため，外在的不変量であることがわかる。したがって，次が成り立つ。

系 4.16 ([8])**.** ジェネリック螺旋 n 型辺に対して，極限法曲率 κ_ν，カスプ的捩率 κ_t，$(n,n+i)$-カスプ的曲率 $\omega_{n,n+i}$ $(1\le i\le n-1)$，$(n,2n)$-バイアス $\beta_{n,2n}$ は全て外在的不変量である。

5 おわりに

本研究では，特異点をもつ螺旋曲面の等長変形を調べた．これまでの先行研究では Bour の定理の外在的な一般化，つまり Bour の定理が様々な 3 次元リーマン多様体内の螺旋曲面に拡張されてきたが，Bour の定理の内在的な一般化は得られていなかった．我々は Bour の定理が特異点を持つ螺旋曲面 (ジェネリック螺旋 n 型辺) に対しても成り立つことを示した (定理 3.1，定理 3.2)．さらにその応用として，[19] で導入された n 型辺の様々な不変量（カスプ的捩率，カスプ的曲率，バイアス）が外在的であることを明らかにした．今後は様々な 3 次元リーマン多様体内の螺旋曲面に対して，Bour の定理が成り立つかどうかを調べていきたい．

参考文献

[1] E. Bour, *Memoire sur le deformation de surfaces*, Journal de l'Ecole Polytechnique, XXXIX Cahier, 1862, 1–148

[2] J.W. Bruce and T.J. Gaffney, *Simple singularities of mappings* $\mathbb{C}, 0 \to \mathbb{C}^2, 0$, J. Lond. Math. Soc., II. Ser. **26** (1982), 465–474.

[3] R. Caddeo, I.I. Onnis and P. Piu, *Bour's theorem and helicoidal surfaces with constant mean curvature in the Bianchi-Cartan-Vranceanu spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. **201** (2022), 913–932.

[4] M.P. do Carmo and M. Dajczer, *Helicoidal surfaces with constant mean curvature*, Tohoku Math. J. (2) **34** (1982), 425–435.

[5] I. Domingos, I.I. Onnis and P. Piu, *The Bour's Theorem for invariant surfaces in three-manifolds*, preprint (arXiv:2306.03837).

[6] T. Fukui, *Local differential geometry of singular curves with finite multiplicities*, Saitama Math. J. **31** (2017), 79–88.

[7] M. Hasegawa, A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Intrinsic properties of surfaces with singularities*, Internat. J. Math. **26** (2015), no. 4, 1540008, 34 pp.

[8] Y. Hattori, A. Honda and T. Morimoto, *Bour's theorem for helicoidal surfaces with singularities*, preprint (arXiv：2310.16418).

[9] A. Honda, *On associate families of spacelike Delaunay surfaces*, Real and complex singularities, 103–120, Contemp. Math., 675, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016.

[10] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Duality on generalized cuspidal edges preserving singular set images and first fundamental forms*, J. Singul. **22** (2020), 59–91.

[11] A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of wave fronts at non-degenerate singular points*, Hiroshima Math. J. **50** (2020), 269–312.

[12] A. Honda and K. Saji, *Geometric invariants of* 5/2*-cuspidal edges*, Kodai Math. J. **42** (2019), 496–525.

[13] T. Ikawa, *Bour's theorem in Minkowski geometry*, Tokyo J. Math. **24** (2001), 377–394.

[14] F. Ji and Y.H. Kim, *Mean curvatures and Gauss maps of a pair of isometric helicoidal and rotation surfaces in Minkowski 3-space*, J. Math. Anal. Appl. **368** (2010), 623–635.

[15] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic* 3*-space*, Pacific J. Math. **221** (2005), 303–351.

[16] L. F. Martins and K. Saji, *Geometric invariants of cuspidal edges*, Canad. J. Math. **68** (2016), no. 2, 445–462.

[17] L. F. Martins and K. Saji, *Geometry of cuspidal edges with boundary*, Topol. Appl. **234** (2018) 209–219.

[18] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifold, Springer Proc. in Math. & Stat. **154**, 2016, Springer, 247–282.

[19] L.F. Martins, K. Saji, S.P. dos Santos and K. Teramoto, *Boundedness of geometric invariants near a singularity which is a suspension of a singular curve*, preprint (arXiv:2206.11487).

[20] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edges*, Tohoku Math. J. (2) **68** (2016), 73–90.

[21] I.R. Porteous, *Geometric differentiation for the intelligence of curves and surfaces*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[22] R. Sa Earp, *Parabolic and hyperbolic screw motion surfaces in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, J. Aust. Math. Soc. **85** (2008), 113–143.

[23] R. Sa Earp and E. Toubiana, *Screw motion surfaces in* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ *and* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, Ill. J. Math. **49** (2005), 1323–1362.

[24] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of corank one singular points on wave fronts*, Kyushu J. Math. **62** (2008), 259–280.

[25] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), 491–529.

[26] N. Sasahara, *Spacelike helicoidal surfaces with constant mean curvature in Minkowski 3-space*, Tokyo J. Math. **23** (2000), 477–502.

[27] *S. Shiba and M. Umehara*, The behavior of curvature functions at cusps and inflection points, Differential Geom. Appl. **30** (2012), 285–299.

[28] N. Takagi, *Criterion for 7/2-cusp singularity* (in Japanese), Bachelor thesis, Yokohama National University, 2021.

[29] M. Takahashi and K. Teramoto, *Surfaces of revolution of frontals in the Euclidean space*, Bull Braz Math Soc, New Series **51** (2020), 887–914.

[30] M. Umehara, K. Saji and K. Yamada, Differential geometry of curves and surfaces with singularities. Translated from the Japanese by Wayne Rossman. Series in Algebraic and Differential Geometry 1. Singapore: World Scientific. xvi, 370 p. (2022).

擬 Riemann 対称 R 空間の対蹤集合について

東京理科大学大学院　創域理工学研究科　数理科学専攻
杉本恭司 (Kyoji SUGIMOTO) *

概要

対称空間の部分集合が対蹤集合であるとは, その部分集合の任意の二点が互いの点対称に関して対蹤的であることをいう. Riemann 対称空間において, 対蹤集合は位相的な性質を反映することが知られている. 本講演では, 非 Riemann 対称空間の中でも双曲随伴軌道として実現される対称空間, 及びより広いクラスの対称空間である擬 Riemann 対称 R 空間の対蹤集合について得られた結果を紹介する.

1　はじめに

M を対称空間とし, $p \in M$ に対して, s_p で $p \in M$ における点対称を表す. 部分集合 $S \subset M$ が**対蹤集合**であるとは, 任意の $p, q \in S$ に対して, $s_p(q) = q$ が成り立つことをいう. 対蹤集合の概念は [1] において導入され, Riemann 対称空間論において, 多くの興味深い研究がなされてきた (例えば, [1, 8, 9, 10] 等). 一方で, 非 Riemann 対称空間においては, 対蹤集合の研究はほとんどなされてこなかったように思える. 本稿では, 非 Riemann 対称空間の中でも, 双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, 及び非退化 Jordan 三項系に付随した擬 Riemann 対称 R 空間の対蹤集合について得られた結果を紹介する.

ここで, para-Hermite 対称空間は [2] によって導入された概念であり, それは, 不変 para 複素構造と不変 para-Hermite 計量を兼ね備えた対称空間である. Para-Hermite 対称空間は Riemann でない対称空間であり, 特に, para-Hermite 計量はニュートラル計量である. また, 擬 Riemann 対称 R 空間は [3] により導入された概念で, それは, 対称 R 空間とよばれるあるコンパクト Riemann 対称空間の擬 Riemann の場合への一般化である. 擬 Riemann 対称 R 空間は直交 Jordan 三項系とよばれるある種の不変内積を兼ね備えた Jordan 三項系で, ある特別な条件を満たすものと一対一に対応している. 非退化 Jordan 三項系は直交 Jordan 三項系であることに注意しておく. なお, 本稿では, 擬 Riemann 対称 R 空間の中でも, 非退化 Jordan 三項系に付随したもののみを考える.

本節の終わりに, 本稿で良く用いる記号について述べておく.

(1) G を Lie 群とし, $\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ とする. このとき, ϕ の単位元における微分をまた ϕ で表す.
(2) $\mathfrak{g}$ を Lie 代数, $\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の部分 Lie 代数, $\mathfrak{m}$ を部分空間とする. $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m}$ であるとき, $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}|_{\mathfrak{m}}$ を $\mathrm{ad}_{\mathfrak{m}}\,\mathfrak{h}$ と表す.

* E-mail:a30825@rs.tus.ac.jp

(3) Lie 群 G に対して, G_0 で G の単位連結成分を表す.
(4) 集合 M と写像 $f : M \to M$ に対して, $M^f := \{x \in M \mid f(x) = x\}$ とする.

2 定義等

本節では para-Hermite 対称空間, 及び非退化 Jordan 三項系に付随した擬 Riemann 対称 R 空間の基本的なことについて復習する.

2.1 Para-Hermite 対称空間

はじめに, 対称空間の定義を述べる.

定義 2.1 (cf. [4])**.** (1) G を連結リー群, L を G の閉部分群, $\sigma(\neq \mathrm{id}_G)$ を G の対合的自己同型とする. $(G/L, \sigma)$ が**対称空間**であるとは,

$$(G^\sigma)_0 \subset L \subset G^\sigma$$

を満たすことをいう.
(2) $(G/L, \sigma)$ を対称空間とする. 原点 $o := eL \in G/L$ に対して, $s_o : G/L \to G/L$ を $s_o(xL) := \sigma(x)L$ により定義し, $p := xL \in G/L$ に対して,

$$s_p := \tau_x \circ s_o \circ \tau_{x^{-1}}$$

とする. 但し, $x \in G$ に対して, τ_x は $\tau_x(yL) := xyL$ により定義される G/L の微分同型である. s_p は well-defined であることに注意しておく. s_p を p における**点対称**という.
(3) $(G/L, \sigma)$ を対称空間とする. G が半単純であるとき, G/L は**半単純**であるという.
(4) $(G/L, \sigma)$ を対称空間とする. G が G/L に概効果的 (resp. 効果的) に作用しているとき, G/L は**概効果的** (resp. **効果的**) であるという.

定義 2.2 (cf. [2])**.** (1) M を $2n$ 次元多様体とする. M 上の $(1,1)$ 型テンソル場 I が以下を満たすとき, I を M 上の **para 複素構造**という:
(i) $I^2 = \mathrm{id}_{\mathfrak{X}(M)}$.
(ii) 任意の $p \in M$ に対して, $\dim T_p^+ M = \dim T_p^- M$. 但し, $T_p^\pm M$ は I_p の ± 1 固有空間を表す.
(iii) 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, $[IX, IY] - I[IX, Y] - I[X, IY] + [X, Y] = 0$.
このとき, (M, I) を **para 複素多様体**という.
(2) (M, I) を para 複素多様体とする. M 上の擬 Riemann 計量 g が

$$g(IX, Y) + g(X, IY) = 0 \quad (X, Y \in \mathfrak{X}(M))$$

を満たすとき, g を M 上の **para-Hermite 計量**という.
(3) 対称空間 $(G/L, \sigma)$ が G 不変 para 複素構造 I と I に関する G 不変 para-Hermite 計量 g を兼ね備えているとき, **para-Hermite 対称空間**という.

(4) (M, I), (M', I') を para 複素多様体とし, $\Phi : M \to M'$ を可微分写像とする. 任意の $p \in M$ に対して,

$$(d\Phi)_p \circ I_p = I_{\Phi(p)} \circ (d\Phi)_p \quad (\text{resp. } (d\Phi)_p \circ I_p = -I_{\Phi(p)} \circ (d\Phi)_p)$$

が成り立つとき, Φ は **para 正則** (resp. **反 para 正則**) であるという.

注意 2.1. (1) 定義より, para-Hermite 計量はニュートラル計量であり, para-Hermite 対称空間は Riemann でない擬 Riemann 対称空間である.

(2) para-Hermite 対称空間 $(G/L, \sigma, I, g)$ は para-Kähler 等質空間である. 即ち, $\omega(X, Y) := g(X, IY)$ $(X, Y \in \mathfrak{X}(G/L))$ とすると, ω は G/L 上のシンプレクティック形式である. (cf. [2]).

次の補題は半単純 para-Hermite 対称空間論において基本的である.

補題 2.1 (cf. [2])**.** $(G/L, \sigma, I, g)$ を概効果的半単純 para-Hermite 対称空間, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数, $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ を σ に関する $\mathfrak{g}$ の (± 1) 固有空間分解とする.

(1) このとき, 以下を満たす $Z \in \mathfrak{l}$ が唯一つ存在する.

$$\text{(i) } \mathfrak{l} = \mathfrak{c}_{\mathfrak{g}}(Z) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [Z, X] = 0\}, \quad \text{(ii) } I_o = \mathrm{ad}_{\mathfrak{u}} Z.$$

但し, o は G/L の原点を表す.

(2) (1) の Z に対して, 以下が成り立つ:

(iii) $C_G(Z)_0 \subset L \subset C_G(Z)$. 但し, $C_G(Z) := \{x \in G \mid \mathrm{Ad}\, x(Z) = Z\}$.

(iv) $\sigma = \exp \sqrt{-1}\pi \,\mathrm{ad}\, Z \in \mathrm{Inv}(\mathfrak{g})$.

(v) $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{u} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_1$. 但し, $\lambda = 0, \pm 1$ に対して, $\mathfrak{g}_\lambda$ は $\mathrm{ad}\, Z$ の λ 固有空間を表す.

(vi) $\tilde{L}$ を $C_G(Z)$ の開部分群とすると, $(G/\tilde{L}, \sigma, \tilde{I}, \tilde{g})$ は概効果的半単純 para-Hermite 対称空間になる. 但し, $B_{\mathfrak{g}}$ を $\mathfrak{g}$ の Killing 形式としたとき, $\tilde{I}$ (resp. $\tilde{g}$) は $\mathrm{ad}\, Z|_{\mathfrak{u}}$ (resp. $B_{\mathfrak{g}}|_{\mathfrak{u}\times\mathfrak{u}}$) の $G/\tilde{L}$ 上への G 不変拡張である. このとき Z は $G/\tilde{L}$ に対して, (1) の条件を満たす.

注意 2.2. (1) 補題 2.1 の Z は $\mathfrak{g}$ の半単純元であり, $\mathrm{ad}\, Z$ の $\mathfrak{g}$ 上の固有値は $0, \pm 1$ である. この Z を G/L の**特性元**という. このとき, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ は Z を特性元とする半単純第一種階別 Lie 代数になる. 従って $\mathfrak{g}$ の Cartan 対合 θ で $\theta(Z) = -Z$ なるものが存在する. 補題 2.1 より, $\theta \circ \sigma = \sigma \circ \theta$ となる.

(2) $L = C_G(Z)$ となるとき, G/L は**双曲軌道型**であるという. このとき, G/L は Z を通る G の随伴軌道 $\mathrm{Ad}\, G(Z)$ として実現される.

2.2 擬 Riemann 対称 R 空間

V を $\mathbb{R}$ 上有限次元ベクトル空間とする. V 上の V 値三重線形写像 $\{\ \} : V \times V \times V \to V$ が定義され,

(1) $\{x, y, z\} = \{z, y, x\}$,

(2) $[L(x,y),L(u,v)] = L(L(x,y)u,v) - L(u,L(y,x)v)$

$(x,y,z,u,v \in V)$ を満たすとき, $(V,\{\ \})$ を **Jordan 三項系**という. 但し, $L(x,y) : V \to V$, $L(x,y)(z) := \{x,y,z\}$ で, $[L(x,y),L(u,v)] := L(x,y)\circ L(u,v) - L(u,v)\circ L(x,y)$ である. 以下では Jordan 三項系を JTS と略記することにする. JTS $(V,\{\ \})$ に対して,

$$\beta : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \beta(x,y) := \mathrm{Tr}(L(x,y))$$

により定義される双一次形式 β を**トレース形式**という. トレース形式が非退化 (resp. 正定値) であるとき, JTS は**非退化** (resp. **コンパクト**) であるという. トレース形式は非退化であれば対称であることがわかる.

$(V,\{\ \})$ を非退化 JTS とし, $L := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{L(x,y) \mid x,y \in V\}$ とする.

$$\mathfrak{g} := V \oplus L \oplus V$$

とし, $\mathfrak{g}$ 上の括弧積を

$$[(x,f,y),(u,g,v)] := (f(u) - g(x), [f,g] - (1/2)L(x,v) + (1/2)L(u,y), {}^t g(y) - {}^t f(v))$$

$((x,f,y),(u,g,v) \in \mathfrak{g})$ により定義すると, $(\mathfrak{g},[\ ])$ は実半単純 Lie 代数になる. 但し, $f \in L$ に対して ${}^t f$ はトレース形式に関する随伴写像を表す. $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型 ρ を

$$\rho(x,f,y) := (y, -{}^t f, x)$$

により定義し, $\mathfrak{h} := \mathfrak{g}^\rho$, $\mathfrak{m} := \mathfrak{g}^{-\rho}$ とする. ここで, V は非退化なので $\mathrm{id}_V \in \mathfrak{m}$ であり, $\nu := (0, -\mathrm{id}_V, 0) \in \mathfrak{m}$ である. H を $\exp \mathrm{ad}_{\mathfrak{m}}\mathfrak{h}$ により生成される $GL(\mathfrak{m})$ の連結部分 Lie 群とする. このとき, H 軌道 $H(\nu) \subset \mathfrak{m}$ を非退化 JTS$(V,\{\ \})$ に付随した**擬 Riemann 対称 R 空間**という. 等質空間として $H(\nu) = H/C_H(\nu)$ であり, 右辺は対称空間である. $(V,\{\ \})$ がコンパクトのとき, $H(\nu)$ はコンパクトであり, このとき, $H(\nu)$ を**対称 R 空間**という.

3 Para 実形

定義 3.1 (cf. [7])**.** Para-Hermite 対称空間の対合的反 para 正則等長変換の固定点集合の連結成分を **para 実形**という.

注意 3.1. G/L を para-Hermite 対称空間, R を G/L の para 実形とする. このとき, 原点 o を含む G/L の para 実形 R_o と, G/L の para 正則等長変換 Φ が存在して, $\Phi(R) = R_o$ となる.

擬 Riemann 対称 R 空間と para 実形の関係について, 次が成り立つ.

命題 3.1 (cf. [5])**.** 非退化 JTS に付随した擬 Riemann 対称 R 空間は, ある双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間の原点を含む para 実形として実現でき, その逆も成り立つ.

$(G/L,\sigma,I,g)$ を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数, $Z \in \mathfrak{g}$ を G/L の特性元とする. $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ を σ に関する $\mathfrak{g}$ の (± 1) 固有空間分解とする. R を G/L の para 実形で原点 o を含むものとする. R は G/L の閉連結完備全測地的 Lagrange 部分多様体で, その誘導計

量は非退化であることがわかる. このとき G/L の対合的反 para 正則等長変換 Ξ で $\Xi(o)=o$ かつ, R が $(G/L)^{\Xi}$ の o を含む連結成分と一致するものが唯一つ存在する. このとき, 次をみたす G の対合的自己同型 ξ が一意に存在する:

$$\xi\circ\sigma=\sigma\circ\xi,\quad \xi(L)=L,\quad \Xi\circ\pi=\pi\circ\xi.$$

但し, $\pi: G\to G/L$ は自然な射影を表す. $H:=(G^{\xi})_0$ とおくと, R は対称空間 $(H/(H\cap L),\sigma|_H)$ と一致することがわかる. ここで, $H\cap L=C_H(Z)$ であり, R は $\mathrm{Ad}\,H(Z)$ と同一視できる. Ξ は反 para 正則で, $(d\Xi)_o=\xi|_{\mathfrak{u}}$, G/L は効果的半単純なので,

$$\xi(Z)=-Z$$

が成り立つ (cf. 補題 2.1). この $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型 ξ を $\mathrm{I}(R)$ で表す.

補題 3.1 (cf. [6])**.** (1) R がコンパクトになる必要十分条件は, $\mathrm{I}(R)$ が $\mathfrak{g}$ の Cartan 対合になることである.

(2) R_1, R_2 を G/L の o を含むコンパクト para 実形とすると, G/L のある para 正則等長変換 Φ が存在して, $\Phi(R_1)=R_2$.

Q を G/L のコンパクト para 実形で o を含むもの, Θ を Q を定義する G/L の対合的反 para 正則等長変換, $\theta:=\mathrm{I}(Q)$ とする. θ は σ と可換なので, s_o と Θ は可換である. また, s_o は対合的 para 正則等長変換なので, $\Theta^d:=\Theta\circ s_o$ は G/L の対合的反 para 正則等長変換で, $\Theta^d(o)=o$ となる. そこで, Q^* を $(G/L)^{\Theta^d}$ の o を含む連結成分とする (i.e., Q^* は Θ^d により定義される o を含む para 実形である).

補題 3.2 (cf. [6])**.** (1) Q はあるコンパクト型 Hermite 対称空間の実形として実現できる. 即ち, Q は対称 R 空間である.

(2) Q^* は Q の非コンパクト双対とみなせる.

これより, 対称 R 空間の非コンパクト双対も擬 Riemann 対称 R 空間であることがわかる.

注意 3.2. G/L は Q の余接束と微分同型である (cf. [2]).

4 主結果

4.1 双曲軌道型半単純 para-Hermite 対称空間の対蹠集合

まず, 双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間の対蹠集合についての結果を述べる.

定理 4.1 (cf. [6])**.** G/L を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, $S\subset G/L$ を対蹠集合とする. また, G/L の para-Hermite 計量 g は G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Killing 形式 $B_{\mathfrak{g}}$ から誘導されているとする. 即ち, $g_o=\lambda B_{\mathfrak{g}}$ $(\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\})$. このとき, あるコンパクト para 実形 $R\subset G/L$ が存在して, $S\subset R$.

コンパクト para 実形はコンパクト連結 Riemann 対称空間なので, 次が成り立つ.

系 4.1 (cf. [6])**.** G/L を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, R を G/L のコンパクト para 実形とする. このとき,

$$\#_2 G/L = \#_2 R < \infty.$$

但し, $M := G/L$ or R に対して, $\#_2 M$ は M の対蹠集合たちの濃度の上限を表し, これを M の **2-number** という.

定義 4.1. G/L を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, $S \subset G/L$ を対蹠集合とする. $\#S = \#_2 G/L$ となるとき, S を**大対蹠集合**という.

定理 4.2 (cf. [6])**.** G/L を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数, $Z \in G/L$ を G/L の特性元とする. また, G/L を Z を通る $\mathrm{Ad}\, G$ 軌道 $M := \mathrm{Ad}\, G(Z)$ と同一視する.

(1) S を M の大対蹠集合とする. このとき, $\mathfrak{g}$ のある Cartan 対合 θ と $\mathfrak{g}^{-\theta}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ が存在して, $S = M \cap \mathfrak{a}$ となる. 従って S は (G, A) の Weyl 群の軌道である. 但し, $A := \exp \mathfrak{a}$.
(2) M の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.
(3) S_1 と S_2 を M の二つの大対蹠集合とすると, ある para 正則等長変換 $\Phi : M \to M$ が存在して, $\Phi(S_1) = S_2$.

4.2 擬 Riemann 対称 R 空間の対蹠集合

まず, 双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間 G/L の para 実形 R について, 次が成り立つ. ここで, $\#_2 R \leq \#_2 G/L$ なので, R に対しても定義 4.1 と同様にして大対蹠集合の概念を定義できる.

定理 4.3 (cf. [6])**.** G/L を双曲軌道型効果的半単純 para-Hermite 対称空間, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数, $Z \in G/L$ を G/L の特性元とする. また, R を G/L の原点を含む para 実形とし, $\xi := \mathrm{I}(R)$ とする. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ を ξ に関する $\mathfrak{g}$ の (± 1) 固有空間分解とする. G/L を Z を通る $\mathrm{Ad}\, G$ 軌道 $\mathrm{Ad}\, G(Z)$ と同一視し, R を Z を通る $\mathrm{Ad}\, H$ 軌道 $\mathrm{Ad}\, H(Z)$ と同一視する. 但し, H はその Lie 代数が $\mathfrak{h}$ であるような G の連結部分 Lie 群である.

(1) S を R の大対蹠集合とする. このとき, $\mathfrak{g}$ のある Cartan 対合 θ で $\xi \circ \theta = \theta \circ \xi$ なるものと, $\mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{m}$ 内の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ が存在して, $S = R \cap \mathfrak{a}$ となる. 従って S は (H^a, A) の Weyl 群の軌道である. 但し, H^a はその Lie 代数が $(\mathfrak{g}^\theta \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{g}^{-\theta} \cap \mathfrak{m})$ であるような G の連結部分 Lie 群で, $A := \exp \mathfrak{a}$.
(2) R の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.
(3) S_1 と S_2 を R の二つの大対蹠集合とすると, ある等長変換 $\Phi : R \to R$ が存在して, $\Phi(S_1) = S_2$.

命題 3.1 と定理 4.3 より, 次が成り立つ.

系 4.2 (cf. [6])**.** N を非退化 JTS に付随した擬 Riemann 対称 R 空間とする.

(1) $\#_2 N < \infty$.
(2) N の対蹠集合はある大対蹠集合に含まれる.
(3) S_1 と S_2 を N の二つの大対蹠集合とすると, ある等長変換 $\Phi : N \to N$ が存在して, $\Phi(S_1) = S_2$.

また非退化 JTS に付随した擬 Riemann 対称 R 空間の 2-number について次が成り立つ. ここで, 一般に M を対称空間としたとき, 任意の $p \in M$ に対して $\{p\}$ は M の対蹠集合になることに注意しておく.

命題 4.1 (cf. [6])**.** N を非退化 JTS に付随した擬 Riemann 対称 R 空間とする. $\#_2 N \geq 2$ となるための必要十分条件は N がある対称 R 空間の非コンパクト双対と同型でないことである.

参考文献

[1] B.-Y. Chen and T. Nagano, A Riemannian geometric invariant and its applications to a problem of Borel and Serre, Trans. Amer. Math. **308** (1988), 273–297.
[2] S. Kaneyuki and M. Kozai, Paracomplex structures and affine symmetric spaces, Tokyo J. Math. **8** (1985), 81–98.
[3] H. Naitoh, Pseudo-Riemannian symmetric R-spaces, Osaka J. Math. **21** (1984), 733–764.
[4] K. Nomizu, Invariant affine connections on homogeneous spaces, Amer. J. Math. **76** (1954), 33–65.
[5] K. Sugimoto, Para-real forms of para-Hermitian symmetric spaces and real forms of pseudo-Hermitian symmetric spaces, Hiroshima Math. J. **53** (2023), 143–170.
[6] K. Sugimoto, Antipodal sets of pseudo-Riemannian symmetric R-spaces, to appear in Differential Geom. Appl.
[7] K. Sugimoto and T. Shimokawa, Classification of para-real forms of absolutely simple para-Hermitian symmetric spaces, Osaka J. Math. **59** (2022), 559–590.
[8] M. Takeuchi, Two-number of symmetric R-spaces, Nagoya Math. J. **115** (1989), 43–46.
[9] M. S. Tanaka and H. Tasaki, The intersection of two real forms in Hermitian symmetric spaces of compact type, J. Math. Soc. Japan **64** (2012), 1297–1332.
[10] M. S. Tanaka and H. Tasaki, Antipodal sets of symmetric R-spaces, Osaka J. Math. **50** (2013), 161–169.

擬球面内の非等質な OT-FKM 型等径超曲面

東京都立大学大学院 理学研究科 数理科学専攻
笹原 優大 (Yuta SASAHARA) *

概要

OT-FKM 型等径超曲面は，Clifford 系から構成される擬球面内の主曲率が一定な超曲面である．また，擬球面内の連結な部分多様体 L が等質であるとは，擬球面の等長変換群の Lie 部分群が L に推移的に作用することである．本講演では，(連結な)OT-FKM 型等径超曲面とその焦多様体の各連結成分が，それらの Clifford 系の符号 (m, r) について m が 4 の倍数かつ r が 2 の倍数のときに，非等質になることを示す．

1 導入

本節では，主定理に至るまでの歴史的経緯と，その動機について説明する．

1.1 歴史的経緯

1910 年代から，物理の幾何光学を動機として，等径超曲面の研究が始まる．Euclid 空間，球面，双曲空間のことをまとめて Riemann 空間形というが，1938 年に，Élie Cartan により，Riemann 空間形内の等径超曲面は，主曲率一定超曲面と言い換えられることを示した．Cartan はその後，主曲率に関する Cartan の公式を導き，相異なる主曲率が 3 つの場合に球面内の等径超曲面の分類をするなど，この分野について精力的に研究した．

等質超曲面は定義から直ちに等径超曲面であるとわかるが，その逆が成り立つかは長らく疑問であった．Cartan の時代に，非等質な等径超曲面は見つかっていなかったが，1976 年に，尾関，竹内が，[9] 及び [10] で球面内の相異なる主曲率が 4 つの場合の等径超曲面で，非等質な例を与えた．

1980 年代になると，Hans-Friedrich Münzner により，[6]，[7] で研究が大きく進展することになる．特に，球面内の等径超曲面の相異なる主曲率の個数が，1, 2, 3, 4, 6 のいずれかになるということを示したことは大きな進展であった．1981 年に，Ferus，Karcher，Münzner は，[2] で尾関，竹内が与えた非等質な例の構成法を一般化する．現在では，この構成により得られる等径超曲面を，OT-FKM 型等径超曲面と呼んでいる．

その後，Riemann 空間形内の等径超曲面の分類問題が進んだ．ここまでの話は，宮岡礼子先生の [13] に詳しく，[14] も参考になる．2020 年には，分類問題において最後まで残っていた場合を，[1] で Quo-Shin Chi が解決し，約 100 年程の歳月をかけて分類問題が完了するに至った．

* E-mail:sasahara-yuta@ed.tmu.ac.jp, ysasahara0804+res@gmail.com

1.2 動機

1981 年に，野水克己先生は，[8] で Lorentz 空間形内の空間的超曲面に対し等径であるという概念を導入した．1984 年に，Hahn は，[3] で野水の定義を拡張して，擬 Riemann 空間形内の非退化超曲面に対し，等径であることを定義した．また，[3] の後半で，擬球面内の OT-FKM 型等径超曲面を構成した．Riemann の場合には，球面内の OT-FKM 型等径超曲面の等質なものと，非等質なものとが完全に決定されている．一方，Hahn の定義した OT-FKM 型等径超曲面の例は，等質であるか非等質であるかが議論されていない．さらに，Hahn は [4] で擬球面内の等質超曲面を調べているが，未だ擬 Riemann 空間形の等径超曲面に対して非等質性が議論されていない状況がある．

筆者は，擬球面内の OT-FKM 型等径超曲面が非等質になるための十分条件を導き，さらに，OT-FKM 型等径超曲面を構成する上で必要となる (拡張された)Clifford 系の存在を，具体的に構成することにより保証した[*1]．

2 OT-FKM 型等径超曲面の説明

本節では，主定理を述べるのに必要な OT-FKM 型等径超曲面とその周辺の用語を定義する．詳しくは，[3] の 3 節を見ていただくことにする．また，省略した基本的事項は，[12] に掲載されている．

2.1 擬 Riemann 空間形

A, B を行列とするとき，A の転置を ${}^tA$ と表し，A と B との直和を $A \oplus B$ で表す．n を自然数とするとき，n 次単位行列を E_n と表す．p, q を非負整数とするとき，

$$J_{p,q} := \begin{cases} -E_p, & (q = 0), \\ E_q, & (p = 0), \\ (-E_p) \oplus E_q, & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定める．

自然数 n を固定する．$x, y \in \mathbb{R}^n$ と $s \in \{0, 1, \ldots, n\}$ とに対し，$\langle x, y \rangle_s := {}^t x J_{s,n-s} y$ と定める．$\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ は非退化計量となる．$\mathbb{R}^n_s := (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_s)$ を，指数 s の n 次元**擬 Euclid 空間**という．特に，$\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ を Euclid 計量といい，$\mathbb{R}^n := \mathbb{R}^n_0$ を n 次元 Euclid 空間という．

$$\begin{aligned} S^n_s &:= \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_s \mid \langle x, x \rangle_s = 1\}, && (s \in \{0, 1, \ldots, n-1\}), \\ S^n_n &:= \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_n \mid \langle x, x \rangle_n = 1, x^{n+1} > 0\}, \\ H^n_s &:= \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_{s+1} \mid \langle x, x \rangle_{s+1} = -1\}, && (s \in \{1, 2, \ldots, n\}), \\ H^n_0 &:= \{x \in \mathbb{R}^{n+1}_1 \mid \langle x, x \rangle_1 = -1, x^1 > 0\} \end{aligned}$$

[*1] 本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2156 の支援を受けたものである．

と定める．$s \in \{0, 1, \ldots, n\}$ とするとき，S^n_s, H^n_s を，それぞれ指数 s の n 次元**擬球面**，**擬双曲空間**という．特に，$S^n := S^n_0, H^n := H^n_0$ をそれぞれ n 次元球面，双曲空間という．

$S^n_s, \mathbb{R}^n_s, H^n_s$ は連結であり，それぞれ $\kappa = 1, 0, -1$ の定曲率を持つ．$\kappa \in \{-1, 0, 1\}$ に対し，

$$N^n_s(\kappa) := \begin{cases} S^n_s, & (\kappa = 1), \\ \mathbb{R}^n_s, & (\kappa = 0), \\ H^n_s, & (\kappa = -1) \end{cases}$$

と定める．$N^n_s(\kappa)$ を**擬 Riemann 空間形**という．特に，$N^n_0(\kappa)$ を Riemann 空間形という．S^n_s, H^n_s には誘導計量が入るので，$N^n_s(\kappa)$ には自然な計量がある．

2.2 等径超曲面

n 次元部分多様体 $M \subset N^{n+1}_s(\kappa)$ の誘導計量が非退化であるとき，M を $N^{n+1}_s(\kappa)$ の非退化超曲面という．$\iota\colon M \hookrightarrow N^{n+1}_s(\kappa)$ を包含写像とし，M を連結な非退化超曲面とする．簡単のため，現れる計量は全て $\langle \cdot, \cdot \rangle$ と表すことにする．ベクトル束 E の切断全体の集合を $\Gamma(E)$ と表す．$M, N^{n+1}_s(\kappa)$ の接束を，それぞれ $TM, TN^{n+1}_s(\kappa)$ と表す．M には単位法ベクトル場 $\xi \in \Gamma(\iota^* TN^{n+1}_s(\kappa))$ が存在すると仮定する[*2]．$\nu := \langle \xi, \xi \rangle$ と定め，$\delta := \kappa \cdot \nu$ と定める．δ を M の**型**という．

$N^{n+1}_s(\kappa)$ には標準的な Levi-Civita 接続 $\nabla^{N^{n+1}_s(\kappa)}$ があり，引き戻し接続 $\nabla^{\iota^* TN^{n+1}_s(\kappa)}$ がある．$X \in \Gamma(TM)$ に対し，$A(X) := -\nabla^{\iota^* TN^{n+1}_s(\kappa)}_X \xi \in \Gamma(\iota^* TN^{n+1}_s(\kappa))$ と定める．このとき，$A \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ が成り立つ．A を M の**型作用素**という．$I \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ を恒等変換とする．$\det(xI - A) = 0$ の根を M の**主曲率**という．M の任意の主曲率が M 上定数函数となるとき，M は**等径** (isoparametric) であるという．

$\mathrm{grad}^N, \Delta^N$ を，それぞれ $N^{n+1}_s(\kappa)$ の勾配，ラプラシアンとする．函数 $f\colon N^{n+1}_s(\kappa) \to \mathbb{R}$ が**等径**であるとは，ある $\Phi, \Psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在して，$\langle \mathrm{grad}^N(f), \mathrm{grad}^N(f) \rangle = \Phi \circ f$ かつ $\Delta^N(f) = \Psi \circ f$ となることである．$\mathrm{W}_{\mathrm{RN}}(f) := \{c \in f(N^{n+1}_s(\kappa)) \mid \Phi(c) \neq 0\}$ と定める．このとき，$c \in \mathrm{W}_{\mathrm{RN}}(f)$ における f の等位集合 $f^{-1}(c) \subset N^{n+1}_s(\kappa)$ の各連結成分は等径超曲面となる．

2.3 Clifford 系と OT-FKM 型等径超曲面

l を自然数とし，$s \in \{0, 1, \ldots, 2l\}$ とする．

$$\mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{2l}_s) := \{F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{2l}_s) \mid \forall u, v \in \mathbb{R}^{2l}_s, \langle F(u), v \rangle = \langle u, F(v) \rangle\}$$

と定める．一般に，$F \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{2l}_s)$ の表現行列は実対称行列ではない．

m を 2 以上の整数とし，$r \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ とする．族 $\{P_i\}_{i=1}^m$ が $\mathbb{R}^{2l}_s$ 上の符号 (m, r) の (拡張された)**Clifford 系**であるとは，以下の条件を共に満たすことである．

(1) $\forall i \in \{1, \ldots, m\}, P_i \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{2l}_s)$.

(2) $\forall i, j \in \{1, \ldots, m\}, P_i P_j + P_j P_i = 2\eta_{ij} I$. 但し，$(\eta_{ij}) := J_{r, m-r}$ とする．

[*2] これから考える M は向きつけ可能な場合であり，そうではない場合には M の二重被覆を取り考えることで，等径を定義することはできる．

上記の Clifford 系は [3] で定義されたものであり，$r=0, s=0$ のとき，[2] で定義されている Clifford 系に一致する．

記号の濫用にはなるが，$P, Q \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{2l}_s)$ に対し，$\langle P, Q\rangle := \mathrm{trace}(PQ)/(2l)$ と定める．$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は，いわゆるトレースフォームで，非退化対称双線型形式となる．$\Sigma := \mathrm{span}\{P_i \mid i \in \{1,\dots,m\}\} \subset \mathrm{Sym}(\mathrm{R}^{2l}_s)$ と定める．このとき，$(\Sigma, \langle\cdot,\cdot\rangle) \subset (\mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{2l}_s), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は非退化部分空間となる．また，$\{P_i\}$ は Σ の擬正規直交基底となる．逆に，Σ の擬正規直交基底 $\{Q_i\}_{i=1}^m$ は，$\mathbb{R}^{2l}_s$ 上の符号 (m,r) の Clifford 系となる．

指数 s に関して，$r>0$ ならば $s=l$ となり，$r \leqq m-2$ ならば s は偶数となる．

函数 $H\colon \mathbb{R}^{2l}_s \to \mathbb{R}$ を，

$$H(x) := \sum_{j=1}^{m} \eta_{jj}\langle P_j x, x\rangle^2$$

と定める．H は $\{P_i\}$ の取り方に依らず，Σ のみに依る．4 次斉次函数 $F\colon \mathbb{R}^{2l}_s \to \mathbb{R}$ を，$F(x) := \langle x,x\rangle^2 - 2H(x)$ と定める．$f := F|_{S^{2l-1}_s}$ と定める．このとき，f は等径となる．$c \in \mathrm{W}_{\mathrm{RN}}(f)$ に対し，$M_c := f^{-1}(c) \subset S^{2l-1}_s$ と定める．M_c の連結成分を，**OT-FKM 型等径超曲面**という．

$\pm 1 \notin \mathrm{W}_{\mathrm{RN}}(f)$ となる．M_c の型は，$c \in (-1,1)$ ならば $\delta = 1\cdot 1 = \nu$ となり，$c \in (-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ ならば $\delta = 1\cdot -1 = \nu$ となる．$x \in M_c$ における単位法ベクトルは，

$$\xi_x = \frac{1}{\sqrt{\delta(1-c^2)}}\left\{(1-c)x - 2\sum_j \eta_{jj}\langle P_j x, x\rangle P_j x\right\}$$

となる．

2.4 焦多様体

$$M_\pm := \{x \in S^{2l-1}_s \mid \mathrm{grad}^N(f) = 0, f(x) = \pm 1\} \subset S^{2l-1}_s$$

と定める．今回は，M_+ のみに注目する[*3]．

$$M_+ = \{x \in S^{2l-1}_s \mid \forall j \in \{1,\dots,m\}, \langle P_j x, x\rangle = 0\}$$

が成り立つ．正則値定理より，$M_+ \neq \emptyset$ ならば，$M_+ \subset S^{2l-1}_s$ は余次元 m の非退化部分多様体となる．M_+ を $\{M_c\}_c$ の**焦多様体**という．

M_+ と M_c とには関係がある．$x \in M_+$ とするとき，$T^\perp_x M_+ = \{P_x \mid P \in \Sigma\}$ が成り立つ．従って，$T^\perp M_+$ は自明である．そこで，

$$\perp M_+(\delta) := \{(x,v) \mid x \in M_+, v \in T^\perp_x M_+, \langle v,v\rangle = \delta\}$$

と定める．$c \in (-1,1)\cup(1,\infty)$ ならば，$\perp M_+(\delta)$ と M_c とは微分同相となることを示すことができる．擬球面，擬双曲空間が非連結になる場合を考えて，$c \in (-1,1)$ の場合 $r \neq m-1$ を，$c \in (1,\infty)$ の場合 $r \neq 1$ を，仮定することで，$\perp M_+(\delta)$ の連結成分と M_c の連結成分とが，1 対 1 に対応するようになる．

[*3] M_- は主定理では言及することができていない．

3 主定理

主定理は，等質であるかの命題であるから，その定義を述べることにする：連結[*4]な部分多様体 $L \subset S_s^{2l-1}$ が等質であるとは，S_s^{2l-1} の等長変換群 $O(s, 2l-s)$ のある Lie 部分群 K が存在して，K が L に推移的に作用することである．

主定理を述べる．$\{P_i\}_{i=1}^m$ を $\mathbb{R}_s^{2l}$ 上の符号 (m, r) の Clifford 系で，以下を満たすとする：

(a) $m \equiv 0 \pmod 4$.
(b) $r \equiv 0 \pmod 2$.
(c) $l > m$.

$\Sigma := \mathrm{span}\{P_i \mid i \in \{1, \ldots, m\}\}$ により生じる $\{M_c\}$ とその焦多様体 M_+ を考える．M_c の連結成分が，OT-FKM 型等径超曲面であった．ここでは，$c \in \mathrm{W_{RN}}(f) \cap (-1, \infty)$ を仮定する[*5]．M_+ の連結成分を議論し，M_+ と M_c との関係を使うと，次の補題が得られる．

補題 3.1 ([11])**.** M_+ と M_c との連結成分の個数は一致し，それらは高々 2 つである．

[2] の議論を拡張することにより，次の定理を得ることができた．

定理 3.2 ([11])**.** M_+ の各連結成分は非等質となる．

また，[2] には載っていないが，M_+ と M_c との関係を使うことで，次の定理を得，今まで知られていなかった擬球面内の非等質な等径超曲面が得られることを明らかにした．

定理 3.3 ([11])**.** M_c の各連結成分は非等質となる．

定理 3.3 は，定理 3.2 に加えて，次の命題を証明することで得られる：M_c の連結成分が等質ならば，対応する M_+ の連結成分が等質となる．

主定理の証明などは，[11] を見ていただくことにする．

4 Clifford 系の存在

主定理は，Clifford 系の存在について言及していない．また，[3] でも言及されていない．一方，次の命題が成り立つ．

命題 4.1 ([11])**.** 任意の組 (m, r) に対して，ある自然数 l が存在して，$\mathbb{R}_l^{2l}$ 上の符号 (m, r) の Clifford 系が存在する．

命題 4.1 の証明の方針は，帰納的に構成するというものであり，そのアイデアは [5] にある線型同型を使うものである．

[*4] 非連結な部分多様体が非等質となったとして，各連結成分も非等質であるかがわからず，それでは意味がない．

[*5] $\mathrm{W_{RN}}(f) \cap (-\infty, -1) \neq \emptyset$ であるかもしれないが，その集合の元 c に対する M_c の連結成分が非等質であるかどうかは調べられていない．

まずは，次を満たす直交行列の族 $\{A_i\}_{i=1}^m$ を帰納的に作る：$A_iA_j + A_jA_i = 2\eta_{ij}E_l$. 但し，$(\eta_{ij}) = J_{r,m-r}$ とする．$(m,r) = (1,0),(1,1),(2,0),\ (2,1),(2,2)$ に対しては，簡単に作ることができる．それらを使い，行列の Kronecker 積を取るなどして，$(m,0),(m,1),\ldots,(m,m)$ に対する族から，$(m+2,0),(m+2,1),\ldots,(m+2,m+2)$ に対する族を作ることができる．このとき，族 $\{P_i\}_{i=1}^m$ を次のように構成すればよい：

$$P_i := \begin{cases} \begin{bmatrix} & A_i \\ A_i & \end{bmatrix}, & (i \in \{1,2,\ldots,r\}), \\ \begin{bmatrix} A_i & \\ & A_i \end{bmatrix}, & (i \in \{r+1,r+2,\ldots,m\}). \end{cases}$$

すると，$\{P_i\}_{i=1}^m$ は $\mathbb{R}_l^{2l}$ 上の符号 (m,r) の Clifford 系となる．

命題 4.1 では，$\mathbb{R}_l^{2l}$ 上の Clifford 系を構成している．$r > 0$ ならば $s = l$ となることを思い出すと，多くの場合に存在することを主張しているという意味で，命題 4.1 には意味があると言える．$s \neq l$ の場合に $\mathbb{R}_s^{2l}$ 上の符号 $(m,0)$ の Clifford 系を構成することができるかという問題には，未だ答えられていない．

Clifford 系のサイズ l は，命題 4.1 の構成方法から容易に大きくすることができるので，主定理の条件 (c) を満たすのは容易である．

参考文献

[1] Q.-S. Chi. Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, IV. *J. Differential Geom.*, 115(2):225–301, 2020.

[2] D. Ferus, H. Karcher, and H. F. Münzner. Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen. *Math. Z.*, 177(4):479–502, 1981.

[3] J. Hahn. Isoparametric hypersurfaces in the pseudo-Riemannian space forms. *Math. Z.*, 187(2):195–208, 1984.

[4] J. Hahn. Isotropy representations of semisimple symmetric spaces and homogeneous hypersurfaces. *J. Math. Soc. Japan*, 40(2):271–288, 1988.

[5] H. B. Lawson, Jr. and M.-L. Michelsohn. *Spin geometry*, volume 38 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.

[6] H. F. Münzner. Isoparametrische Hyperflächen in Sphären. *Math. Ann.*, 251(1):57–71, 1980.

[7] H. F. Münzner. Isoparametrische Hyperflächen in Sphären. II. Über die Zerlegung der Sphäre in Ballbündel. *Math. Ann.*, 256(2):215–232, 1981.

[8] K. Nomizu. On isoparametric hypersurfaces in the Lorentzian space forms. *Japan. J. Math. (N.S.)*, 7(1):217–226, 1981.

[9] H. Ozeki and M. Takeuchi. On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres. I. *Tohoku Math. J. (2)*, 27(4):515–559, 1975.

[10] H. Ozeki and M. Takeuchi. On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres. II. *Tohoku Math. J. (2)*, 28(1):7–55, 1976.

[11] Y. Sasahara. Inhomogeneity of isoparametric hypersurfaces of OT-FKM-type in the pseudo-sphere. arXiv, https://arxiv.org/abs/2308.13025, 2023.

[12] 笹原優大. 擬 Riemann 空間形内の等径超曲面と Cartan の公式. 修士論文 (東京都立大学), https://tokyo-metro-u.repo.nii.ac.jp/record/9248/files/T02722-001.pdf, 2021.

[13] 宮岡礼子. 等径超曲面今昔-Élie Cartan と 21 世紀-. **数理解析研究所講究録**, 1206:32–44, 2001.

[14] 宮岡礼子. 等径超曲面再訪. **数学**, 53(1):18–33, 2001.

測度距離空間のオブザーバブル直径と正の測度を持つ点の存在

東北大学　大学院理学研究科　数学専攻
大島 駿 (Shun OSHIMA) *

概要

測度距離空間とは Borel 測度を持つ距離空間であり, リーマン多様体の列の極限を考える際に定義された概念である. 現在, 測度距離空間の定義はいくつか存在するが, その中の一つに Gromov によって考えられた確率測度を持つ測度距離空間がある. その測度距離空間の理論の中では部分直径やオブザーバブル直径という不変量がよく用いられるが, 例えばオブザーバブル直径が 0 に収束することは空間列が一点空間に集中と呼ばれる収束をすることを意味しており, この収束は高次元球面の測度集中現象などの研究に由来している. 今回はこれらの不変量が 0 になるための必要十分条件について新たに得られた結果を発表する.

1　導入

測度距離空間 (X, d_X, μ_X) とは距離空間 (X, d_X) と X 上の Borel 測度 μ_X からなる三つ組であり, リーマン計量から定まる距離 (リーマン距離) と体積測度を持つリーマン多様体の一般化として定義された. この概念はリーマン多様体の列の収束を考える際にその極限がリーマン多様体になるとは限らないということから定式化された. この測度距離空間はリーマン多様体の持つ性質を良く引き継いでおり, 例えば, 測度距離空間上の Sobolev 空間の理論や, リッチ曲率が下に有界であるという条件を測度距離空間上に定式化した曲率次元条件に関する理論など, リーマン幾何学の一つの研究対象として近年よく研究がなされている ([1], [4], [7]).

現在, 測度距離空間の定義はいくつか存在するが, その中の一つに Gromov [2] によって考えられた μ_X が確率測度であるような測度距離空間 (mm-空間と呼ばれる) がある. mm-空間の理論では, $\square$ 収束や集中という空間列の収束を主に扱っており, 特に集中は「測度の集中現象」に由来する収束で, 現在知られている測度距離空間の収束の中で最も弱い収束であることが知られている. ここで, 測度の集中現象とは高次元空間において見られる測度が大きく偏る現象のことであり, Lévy [5] や Milman [6] によって発見, 定式化された. この現象は関数を用いた表現で「任意の 1-Lipschitz 関数が測度的に定数関数, つまり 1 点空間上の 1-Lipschitz 関数に近い」という事も出来る. これを高次元空間が 1 点空間に近いと解釈し直すことで考えられた収束が集中である. Gromov の理論の中で, 測度の集中現象が見られる空間は Lévy 族と呼ばれ, オブザーバブル直径を用いて定義される.

* E-mail : shun.oshima.s3@dc.tohoku.ac.jp

2　測度距離空間のオブザーバブル直径

この節では, 測度距離空間 (特に mm-空間) やオブザーバブル直径に関連する基本的な定義や性質を述べる. 以降, $\mathcal{P}(X)$ を位相空間 X 上の Borel 確率測度全体とする.

定義 2.1 (Prokhorov 距離)**.** (X, d_X) を距離空間とする. このとき, $d_P : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to [0, \infty)$ を

$$d_P(\mu, \nu) := \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid \text{任意の Borel 集合 } A \subset X \text{ に対し, } \mu(N_\varepsilon(A)) \geq \nu(A) - \varepsilon \text{ が成立する } \}$$

と定める. (ただし, $N_\varepsilon(A) := \{x \in X \mid d_X(x, a) < \varepsilon \text{ となるような } a \in A \text{ が存在する } \}$ とする.) この d_P を $\mathcal{P}(X)$ 上の **Prokhorov 距離**という.

定義 2.2 (mm-空間)**.** (X, d_X, μ_X) が **mm-空間**であるとは, (X, d_X) が完備かつ可分な距離空間で, $\mu_X \in \mathcal{P}(X)$ を満たすことをいう.

以降は, mm-空間 (X, d_X, μ_X) を単に X と表記する.

定義 2.3. mm-空間の点 $x \in X$ が $\mu_X(\{x\}) > 0$ を満たすとき, x を**アトム**という.

定義 2.4 (Lipschitz 順序)**.** mm-空間 X が mm-空間 Y を**支配する** ($Y \prec X$ または $X \succ Y$) とは, ある 1-Lipschitz 写像 $f : \operatorname{supp}\mu_X \to \operatorname{supp}\mu_Y$ が $f_*\mu_X = \mu_Y$ を満たすことをいい, この二項関係 $\prec$ を **Lipschitz 順序**という.

定義 2.5 (mm-同型)**.** 2 つの mm-空間 X, Y が **mm-同型**であるとは, ある等長写像 $f : \operatorname{supp}\mu_X \to \operatorname{supp}\mu_Y$ が存在して, $f_*\mu_X = \mu_Y$ を満たすことをいう. また, mm-空間の同型類全体を $\mathcal{X}$ と書く.

定義 2.6. (部分直径, オブザーバブル直径)
X を mm-空間とし, $\alpha \in (0, 1)$ とする. このとき,

$$\operatorname{diam}(X; \alpha) = \operatorname{diam}(\mu_X; \alpha) := \inf\{\operatorname{diam} A \mid A \text{ は } \mu_X(A) \geq \alpha \text{ を満たす Borel 集合 } \}$$

と定め, X の **α-部分直径**という. そして,

$$\operatorname{ObsDiam}(X; \alpha) := \sup\{\operatorname{diam}(f_*\mu_X; \alpha) \mid f \in \mathcal{L}ip_1(X)\}$$

$$\operatorname{ObsDiam}(X) := \inf_{\kappa > 0} \max\{\kappa, \operatorname{ObsDiam}(X; 1 - \kappa)\}$$

と定め, これを X の **α-オブザーバブル直径**, **オブザーバブル直径**という. ただし, $\mathcal{L}ip_1(X)$ は X 上の 1-Lipschitz 関数全体の集合である.

命題 2.7 ([8], 命題 2.18)**.** mm-空間 X, Y と $\alpha \in (0, 1)$ に対し, 以下が成立する.

(1) $X \prec Y$ ならば $\operatorname{diam}(X; \alpha) \leq \operatorname{diam}(Y; \alpha)$
(2) $\operatorname{ObsDiam}(X; \alpha) \leq \operatorname{diam}(X; \alpha)$
(3) $X \prec Y$ ならば $\operatorname{ObsDiam}(X; \alpha) \leq \operatorname{ObsDiam}(Y; \alpha)$

定義 2.8. (Lévy 族)
mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が **Lévy 族**であるとは, 任意の $\alpha \in (0,1)$ に対し,

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{ObsDiam}(X_n;\alpha) = 0$$

が成立すること, あるいは同値なことだが

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{ObsDiam}(X_n) = 0$$

が成立することをいう.

例 2.9. $S^n(r_n)$ を正規化された体積測度を持つ半径 r_n の n 次元球面とするとき,

$$\{S^n(r_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ が Lévy 族である } \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{\sqrt{n}} = 0$$

が成立する. 特に, n 次元単位球面の列は Lévy 族である.

ここで $I := [0,1)$ とし, I は Lebesgue 測度 $\mathcal{L}^1$ によって確率測度空間となる.

定義 2.10 (パラメータ)**.** X を mm-空間とする. Borel 写像 $\varphi : I \to X$ が $\varphi_*\mathcal{L}^1 = \mu_X$ を満たすとき, φ は X **のパラメータ**であるという.

命題 2.11 ([8], 補題 4.2)**.** 任意の mm-空間 X に対し, X のパラメータが存在する.

定義 2.12 (ボックス距離)**.** mm-空間 X, Y に対し,

(1) $\mathcal{L}^1(\tilde{I}) \geq 1-\varepsilon$
(2) 任意の $s,t \in \tilde{I}$ に対し, $|d_X(\varphi(s),\varphi(t)) - d_Y(\psi(s),\psi(t))| \leq \varepsilon$

を満たす Borel 集合 $\tilde{I} \subset I$, X のパラメータ φ, Y のパラメータ ψ が存在するような $\varepsilon > 0$ の下限を $\square(X,Y)$ と書き, これを X **と** Y **のボックス距離**という. そして $\square$ を単にボックス距離という.

定義 2.13 (Ky Fan 距離)**.** I 上の Borel 可測関数 $f, g : I \to \mathbb{R}$ に対し, d_{KF} を

$$d_{\mathrm{KF}}(f,g) := \inf\left\{\varepsilon > 0 \mid \mathcal{L}^1(\{x \in I \mid |f(x)-g(x)| > \varepsilon\}) \leq \varepsilon\right\}$$

と定めるとき, この d_{KF} を **Ky Fan 距離**という.

mm-空間 X と X のパラメータ φ に対して, $\varphi^*\mathcal{L}ip_1(X) := \{f \circ \varphi \mid f \in \mathcal{L}ip_1(X)\}$ と定める.

定義 2.14 (オブザーバブル距離)**.** mm-空間 X, Y に対し, X **と** Y **のオブザーバブル距離** $d_{\mathrm{conc}}(X,Y)$ を

$$d_{\mathrm{conc}}(X,Y) := \inf_{\varphi,\psi} d_H^{\mathrm{KF}}\left(\varphi^*\mathcal{L}ip_1(X), \psi^*\mathcal{L}ip_1(Y)\right)$$

と定める. ただし, d_H^{KF} は d_{KF} に関する Hausdorff 距離であり, φ, ψ はそれぞれ X, Y のパラメータ全体を動くものとする. このとき d_{conc} を単にオブザーバブル距離という.

命題 2.15 ([8], 定理 4.10, 定理 4.14, 定理 5.16)**.** $\square$, d_{conc} はどちらも $\mathcal{X}$ 上の距離であり, 特に, $(\mathcal{X}, \square)$ は完備距離空間である.

定義 2.16 (□ 収束, 集中)**.** mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がある mm-空間 Y に $\mathcal{X}$ 上の距離 □ (resp. d_{conc}) について収束するとき, X_n が Y に □ **収束する** (resp. **集中する**) といい, $X_n \xrightarrow{\square} Y$ (resp. $X_n \xrightarrow{\mathrm{conc}} Y$) と書く.

命題 2.17 ([8], 命題 5.5)**.** 任意の mm-空間 X, Y に対し $d_{\mathrm{conc}}(X,Y) \leq \square(X,Y)$ が成立する. 特に mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が mm-空間 Y に □ 収束しているとき, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は Y に集中している.

定義 2.18 (ε-mm-同型写像)**.** X, Y を mm-空間とする. $\varepsilon \geq 0$ に対し, Borel 写像 $f : X \to Y$ が ε-mm-同型写像であるとは, ある Borel 集合 $X_0 \subset X$ が存在して以下を満たすことをいう.

(1) $\mu_X(X_0) \geq 1 - \varepsilon$
(2) 任意の $x, y \in X_0$ に対し, $|d_X(x,y) - d_Y(f(x), f(y))| \leq \varepsilon$
(3) $d_P(f_*\mu_X, \mu_Y) \leq \varepsilon$

命題 2.19 ([8], 補題 4.22)**.** mm-空間 X, Y と $\varepsilon \geq 0$ に対し, 以下が成立する.

(1) ε-mm-同型写像 $f : X \to Y$ が存在するなら, $\square(X,Y) \leq 3\varepsilon$
(2) $\square(X,Y) < \varepsilon$ なら, 3ε-mm-同型写像 $f : X \to Y$ が存在する.

命題 2.20. ([8], 命題 5.7, 系 5.8)
X を mm-空間とし, $*$ を 1 点からなる mm-空間, つまり $* := (\{*\}, d_*, \delta_*)$ とするとき

$$d_{\mathrm{conc}}(X, *) \leq \mathrm{ObsDiam}(X) \leq 2\, d_{\mathrm{conc}}(X, *)$$

が成立する. 特に, mm-空間の列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が Lévy 族であることと $X_n \xrightarrow{\mathrm{conc}} *$ が同値である.

命題 2.21 ([8], 4.4 節)**.** X を mm-空間とする. このとき, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し, ある $\mu_N \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ が存在して,

$$X_1 \prec X_2 \prec \cdots \prec X_N \prec \cdots \prec X \quad \text{かつ} \quad X_N \xrightarrow{\square} X \quad (N \to \infty)$$

を満たす. ただし, $X_N := (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty, \mu_N)$ である.

3 多変数オブザーバブル直径

次に, 今回の研究で新たに定義した “α を多変数化したオブザーバブル直径” について定義や性質を述べる. また, この節では $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ とし, $n = \infty$ の時は, $\{1, \ldots, n\} = \mathbb{N}$ であると約束する.

定義 3.1. mm-空間 X と, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (0,1)^n$ に対し, X の $\boldsymbol{\alpha}$**-部分直径** $\mathrm{diam}(X; \boldsymbol{\alpha}), \underline{\mathrm{diam}}(X; \boldsymbol{\alpha})$

と **$\boldsymbol{\alpha}$-オブザーバブル直径** $\underline{\mathrm{ObsDiam}}(X;\boldsymbol{\alpha})$ を以下のように定義する.

$$
\begin{aligned}
D_X(\boldsymbol{\alpha}) &:= \left\{ \{A_i\}_{i=1}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \{A_i\}_{i=1}^n \text{ は } X \text{ の disjoint な Borel 集合族} \\ \mu_X(A_i) \geq \alpha_i \qquad (\forall i \in \{1,\dots,n\}) \end{array} \right\} \\
\mathrm{diam}(X;\boldsymbol{\alpha}) &:= \begin{cases} \inf \left\{ \sup\limits_{1\leq i\leq n} \mathrm{diam}\, A_i \;\middle|\; \{A_i\}_{i=1}^n \in D_X(\boldsymbol{\alpha}) \right\} & (D_X(\boldsymbol{\alpha}) \neq \emptyset) \\ \infty & (D_X(\boldsymbol{\alpha}) = \emptyset) \end{cases} \\
\underline{\mathrm{diam}}(X;\boldsymbol{\alpha}) &:= \inf_{Y \succ X} \mathrm{diam}(Y;\boldsymbol{\alpha}) \\
\underline{\mathrm{ObsDiam}}(X;\boldsymbol{\alpha}) &:= \sup_{f \in \mathcal{L}ip_1(X)} \underline{\mathrm{diam}}((\mathbb{R}, f_*\mu_X);\boldsymbol{\alpha})
\end{aligned}
$$

命題 3.2. mm-空間 X, Y と $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in (0,\infty)^n$ に対し, 以下が成立する.

(1) $X \prec Y$ ならば $\underline{\mathrm{diam}}(X;\boldsymbol{\alpha}) \leq \underline{\mathrm{diam}}(Y;\boldsymbol{\alpha})$
(2) $\underline{\mathrm{ObsDiam}}(X;\boldsymbol{\alpha}) \leq \underline{\mathrm{diam}}(X;\boldsymbol{\alpha})$
(3) $X \prec Y$ ならば $\underline{\mathrm{ObsDiam}}(X;\boldsymbol{\alpha}) \leq \underline{\mathrm{ObsDiam}}(Y;\boldsymbol{\alpha})$

注意 3.3. $\underline{\mathrm{diam}}(X;\boldsymbol{\alpha})$ や $\underline{\mathrm{ObsDiam}}(X;\boldsymbol{\alpha})$ は多変数化に際して性質の良い不変量となる様に定義したものである. 実際, 上で定義した $\mathrm{diam}(X;\boldsymbol{\alpha})$ は $n = 1$ の場合, $\mathrm{diam}(X;\boldsymbol{\alpha}) = \underline{\mathrm{diam}}(X;\boldsymbol{\alpha})$ となるが, $n \geq 2$ の時に命題 3.2 のような性質が成立しない場合がある. さらに, $n \geq 2$ のときの $\mathrm{ObsDiam}(X;\boldsymbol{\alpha})$ を $n = 1$ の場合と同じように

$$
\mathrm{ObsDiam}(X;\boldsymbol{\alpha}) := \sup_{f \in \mathcal{L}ip_1(X)} \mathrm{diam}((\mathbb{R}, f_*\mu_X);\boldsymbol{\alpha})
$$

と定めると, f を定数関数とすることで $\mathrm{ObsDiam}(X;\boldsymbol{\alpha}) = \infty$ が常に成立してしまい, 考える意味のある量とはならない.

命題 3.4. mm-空間 X と $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in (0,1)^n$ に対し, 以下は同値.

(1) $\mathrm{diam}(X;\boldsymbol{\alpha}) = 0$
(2) 互いに異なる点 $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$ が存在して, 任意の $i \in \{1,\dots,n\}$ に対し, $\mu_X(\{x_i\}) \geq \alpha_i$ となる.

4 主定理

講演者は α-部分直径や α-オブザーバブル直径が 0 であることの必要十分条件が mm-空間にアトムが存在することと同値であるという次の定理を新たに得た.

定理 4.1. mm-空間 X と $\alpha \in (0,1)$ に対し, 以下は同値.

(1) ある点 $x \in X$ が存在して, $\mu_X(\{x\}) \geq \alpha$ となる.
(2) $\mathrm{diam}(X;\alpha) = 0$
(3) $\mathrm{ObsDiam}(X;\alpha) = 0$

この定理の (1) と (2) の同値性は既に知られていた [3] が, (3) との同値性 (特に (3) ⇒ (2)) に関しては新規の結果である.

さらに, この定理を次のように多変数の $\boldsymbol{\alpha}$-部分直径や $\boldsymbol{\alpha}$-オブザーバブル直径の場合にも拡張した.

定理 4.2. mm-空間 X と $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (0,1)^n$ に対し, 以下は同値.

(1) X を支配する mm-空間 Y と, 互いに異なる点 $\{y_i\}_{i=1}^n \subset Y$ が存在して, 任意の $i \in \{1, \dots, n\}$ に対し, $\mu_Y(\{y_i\}) \geq \alpha_i$ となる.
(2) ある $x_1, \dots, x_n \in X$ が存在して, 任意の $I \subset \{1, \dots, n\}$ に対し, $\mu_X(\{x_i \mid i \in I\}) \geq \sum_{i \in I} \alpha_i$ となる.
(3) $\underline{\mathrm{diam}}(X; \boldsymbol{\alpha}) = 0$
(4) $\underline{\mathrm{ObsDiam}}(X; \boldsymbol{\alpha}) = 0$

5 主定理の証明の概略

定理 4.1 は定理 4.2 から直ちに従うので, 定理 4.2 についての証明の概略を述べる.

まず, (1) ⇒ (3) や, (3) ⇒ (4) は命題 3.2 や命題 3.4 から簡単に示せ, (3) ⇒ (2) は命題 3.4 の証明と近い議論で同様に証明できる.

(2) ⇒ (1) については, (2) を仮定すると,

$$\nu_X := \mu_X - \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$$

が有限測度となる. そして, $i = 0, 1, \dots, n$ に対し,

$$X_i := \begin{cases} X & (i = 0) \\ \{x_i\} & (i \geq 1) \end{cases}$$
$$Y := \bigcup_{i=0}^n (X_i \times \{i\}) \subset X \times \mathbb{Z}$$
$$\mu_Y := \nu_X \otimes \delta_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{(x_i, i)}$$

と定めると, (Y, d_Y, μ_Y) は mm-空間であり, (ただし, d_Y は $X \times \mathbb{Z}$ 上の直積距離から誘導される距離である.) (1) の条件を満たす.

(4) ⇒ (2) は, まず $X = (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty, \mu)$ の場合において証明する. そのためには, 以下の補題が重要である.

補題 5.1. $N \in \mathbb{N}$ とし, μ を $\mathbb{R}^N$ 上の Borel 確率測度とする. このとき, ある 1-Lipschitz 関数 $f : (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ が存在して以下を満たす.

- $f_*\mu(\{b\}) > 0$ を満たす任意の $b \in \mathbb{R}$ に対し, ある一意的な $x \in f^{-1}(\{b\})$ が存在して, $\mu(\{x\}) = f_*\mu(\{b\})$ となる.

この補題 5.1 から, $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ に対し, ある $f : (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ が取れる. (4) を仮定すると, $\underline{\mathrm{diam}}((\mathbb{R}, f_*\mu); \boldsymbol{\alpha}) = 0$ がわかるから, (3) $\Rightarrow$ (2) と合わせて, ある $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ が存在して, 任意の $I \subset \{1, \dots, n\}$ に対し, $f_*\mu(\{b_i \mid i \in I\}) \geq \sum_{i \in I} \alpha_i$ となる. そして, f の性質から, 各 $b_i \in \mathbb{R}$ に対し, $x_i \in f^{-1}(\{b_i\})$ が取れて, この $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^N$ が (2) の条件を満たす. 次に, 一般の X の場合に証明する. 命題 2.21 より, 任意の $N \in \mathbb{N}$ に対し, ある $\mu_N \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ が存在して,

$$X_1 \prec X_2 \prec \cdots \prec X_N \prec \cdots \prec X \quad \text{かつ} \quad X_N \xrightarrow{\square} X \quad (N \to \infty)$$

を満たす. ここで, $X_N = (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty, \mu_N)$ であるから, $X = \mathbb{R}^N$ の場合の (4) $\Rightarrow$ (2) と

$$\underline{\mathrm{ObsDiam}}(X_N; \boldsymbol{\alpha}) \leq \underline{\mathrm{ObsDiam}}(X; \boldsymbol{\alpha}) = 0$$

より, ある $x_{1,N}, \dots, x_{n,N} \in X_N$ が取れ, さらに, $X_N \xrightarrow{\square} X$ と命題 2.19 より, ある $\varepsilon_N \searrow 0$ と ε_N-mm-同型写像 $f_N : X_N \to X$ が取れる. このとき, 各 $i = 1, \dots, n$ に対し, $\{f_N(x_{i,N})\}_{N \in \mathbb{N}} \subset X$ の (収束部分列の) $N \to \infty$ における極限 $x_i \in X$ を考えると (2) を満たすことが示せる.

参考文献

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré, *Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below*, Inventiones mathematicae, 195(2), 289-391, 2014.

[2] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Reprint of the 2001 English edition, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007.

[3] D. Kazukawa, H. Nakajima, and T. Shioya, *Principal bundle structure of the space of metric measure spaces*, preprint arXiv:2304.06880, 2023.

[4] D. Kazukawa, R. Ozawa, and N. Suzuki, *Stabilities of rough curvature dimension condition*, Journal of the Mathematical Society of Japan, 72(2), 541-567, 2020.

[5] P. Lévy, *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. Avec un complément sur les fonctionnelles analytiques par F. Pellegrino*, Gauthier-Villars, Paris, 1951 (French). 2d ed.

[6] V. D. Milman, *The heritage of P. Lévy in geometrical functional analysis*, Astérisque 157–158, 1988, 273–301. Colloque Paul Lévy sur les Processus Stochastiques (Palaiseau, 1987).

[7] S. Oshima, *Stability of curvature-dimension condition for negative dimensions under concentration topology*, The Journal of Geometric Analysis, 33(12), 377, 2023.

[8] T. Shioya, *Metric measure geometry. Gromov's theory of convergence and concentration of metrics and measures*, IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics, vol.25, EMS Publishing House, Zürich, 2016.

双曲空間の等長変換がなすカンドル *

大阪公立大学 大学院理学研究科 数学専攻
甲斐涼哉 (Ryoya Kai) †

概要

カンドルは群の共役演算を抽象化した代数系で，その演算規則は結び目の図式の変形や対称空間の点対称が満たす性質に対応する．3 次元双曲幾何学は結び目と深い関係があり，そのモデル空間 $\mathbb{H}^3$ は対称空間である．$\mathbb{H}^3$ の向きを保つ等長変換は，$\mathbb{H}^3$ とその理想境界 $\partial\mathbb{H}^3$ への作用の固定点によって分類される．双曲空間の等長変換の分類に対応してカンドルが得られ，本稿ではこのようなカンドルの構造について得られた結果を紹介する．

1 導入

円周の 3 次元球面への滑らかな埋め込みを結び目という．結び目の分類には様々な不変量が用いられる．補空間が有限体積完備双曲構造を持つ結び目を双曲結び目と呼ぶ．3 次元以上では有限体積完備双曲構造は位相不変量となることが知られている (Mostow 剛性定理)．したがって，有限体積双曲構造から計算される幾何学的な量 (体積や最短測地線の長さなど) は結び目の位相不変量となる．結び目の補空間の双曲構造の研究では，結び目の補空間の基本群から等長変換群 $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$ への準同型 (ホロノミー表現) が重要な役割を果たす．

カンドルは Joyce と Matveev によって独立に導入された代数系である．カンドルの演算規則は結び目の Reidemeister 移動と対応する．また，結び目の補空間の基本群である結び目群と同様に，結び目カンドルが定義され結び目の不変量となる．結び目カンドルから別のカンドル X への準同型は X-彩色と呼ばれ，結び目群からの準同型のある種の精密化となっている．

カンドルと双曲幾何学に関する先行研究として [2] や [3] がある．そこでは，結び目カンドルと双曲体積 (もしくは複素体積) との関係性について研究されている．特に [3] では，放物型等長変換全体がなすカンドル $\mathcal{P}$ へのカンドル準同型を用いることで，結び目の補空間の複素体積が計算できることが示されている．本稿では，双曲空間の放物型変換に限らない一般の等長変換がなすカンドルの構造を紹介する．

* 本研究は JST 科学技術イノベーション創出に向けた大学フェローシップ創設事業 JPMJFS2138 の支援を受けたものです．

† E-mail:sw23889b@st.omu.ac.jp

2 準備

2.1 カンドル

はじめにカンドルを紹介する．詳細は [4] などを参照.

定義 2.1. 空でない集合 X 上の二項演算 $\triangleleft : X \times X \to X$ が次を満たすとき，$(X, \triangleleft)$ をカンドルという;

1. 任意の $x \in X$ に対して，$x \triangleleft x = x$,
2. 任意の $y \in X$ に対して，$S_y(x) = x \triangleleft y$ で定義される写像 $S_y : X \to X$ は全単射,
3. 任意の $x, y, z \in X$ に対して，$(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$.

全単射 $S_y : X \to X$ を y における点対称という.

カンドルの間の写像が演算を保つときカンドル準同型という．特に，全単射なカンドル準同型をカンドル同型という．点対称はカンドル同型である.

例 2.2. 群 G に演算を $g \triangleleft h := h^{-1}gh$ で定義すると，$(G, \triangleleft)$ はカンドルとなる．これを G の共役カンドルといい $\mathrm{Conj}(G)$ とかく.

例 2.3. 群 G とその部分群 H と G の自己同型 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ で H への制限が恒等写像であるものの組 (G, H, σ) をカンドルの三つ組みと呼ぶ．G の H による右剰余類の集合 $H\backslash G$ 上の演算を，$Hg \triangleleft Hh := H\rho(gh^{-1})h$ で定義すると，$(H\backslash G, \triangleleft)$ はカンドルとなる．このカンドルを $Q(G, H, \sigma)$ とかく.

例 2.4 ([1, 3.3 節])**.** $\mathfrak{g}$ を Lie 群 G の Lie 環とする．このとき，各元 $g \in G$ が定める内部自己同型 $\iota_g : G \to G$ の単位元における微分によって，随伴表現 $\mathrm{Ad} : G \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ が得られる．また，$\exp : \mathfrak{g} \to G$ を指数写像とする．このとき，$\mathfrak{g}$ 上の演算を $X \triangleleft Y := \mathrm{Ad}(\exp(-Y))X$ で定義すると $(\mathfrak{g}, \triangleleft)$ はカンドルとなる.

定義 2.5. カンドル X 上のカンドル同型全体がなす群を自己同型群といい $\mathrm{Aut}(X)$ とかく．カンドル X の点対称が生成する群をカンドル X の内部自己同型群といい，$\mathrm{Inn}(X)$ とかく.

自己同型群が推移的に作用するとき，等質カンドルという．また，内部自己同型群が推移的に作用するとき，連結カンドルという.

2.2 3 次元双曲幾何学

ここでは，3 次元双曲空間を紹介する．詳細は [5] などを参照．四元数体の部分集合 $\mathbb{H}^3 = \{z + tj \mid z \in \mathbb{C}, t > 0\}$ に計量

$$ds^2 = \frac{|dz|^2 + dt^2}{t^2}$$

を与える．このとき，$(\mathbb{H}^3, ds)$ を 3 次元双曲空間 (の上半空間モデル) という．また，行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に対して，向きを保つ等長変換

$$f_A : \mathbb{H}^3 \to \mathbb{H}^3,\ q \mapsto (aq+b)(cq+d)^{-1}$$

が定義できる．よって，全射準同型 $\pi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ が得られる．特に，$\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ は $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\{\pm I_2\}$ と同型であることがわかる．対応する行列によって，向きを保つ等長変換 $f_A \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \setminus \{\mathrm{id}\}$ $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ は次のように分類できる：

- f_A：楕円型 $\iff$ $\mathrm{tr}A \in (-2,2)$,
- f_A：放物型 $\iff$ $\mathrm{tr}A = \pm 2$,
- f_A：斜航型 $\iff$ $\mathrm{tr}A \in \mathbb{C} \setminus [-2,2]$.

これらの分類を，双曲空間 $\mathbb{H}^3$ およびその理想境界 $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{C}P^1$ への作用を用いて，以下のように言い換えられる：

- f：楕円型 $\iff$ f はある測地線 $l \subset \mathbb{H}^3$ 上の点を固定する,
- f：放物型 $\iff$ f は $\mathbb{H}^3$ に固定点を持たず，$\partial\mathbb{H}^3$ のただ 1 点を固定する,
- f：斜航型 $\iff$ f は $\mathbb{H}^3$ に固定点を持たず，$\partial\mathbb{H}^3$ の 2 点を固定する.

3 主結果

主結果として，3 次元双曲空間の向きを保つ等長変換群 $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ の共役カンドルの部分カンドルの構造を明らかにした．以下，簡単のために $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ で具体的に主結果を述べる．

$t \in \mathbb{C}$ に対して次のような集合を考える:

$$\widetilde{X}_t = \{A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \setminus \{\pm I_2\} \mid \mathrm{tr}(A) = t\} \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}).$$

各 $\widetilde{X}_t$ は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の共役カンドルの部分カンドルとしてカンドルの構造を持つ.

注意 3.1. $\pi : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}) \cong \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ を自然な射影とする．$z \sim -z$ によって定まる $\mathbb{C}$ 上の同値関係の商集合を $\mathcal{T}$ と書く．$t \in \mathbb{C}$ に対して，$[t] = \{\pm t\} \in \mathcal{T}$ である．$\tau \in \mathcal{T}$ に対して,

$$X_\tau = \pi\left(\bigcup_{t\in\tau} \widetilde{X}_t\right)$$

は $\mathrm{Conj}(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}))$ の部分カンドルである．X_τ に対しても，$\widetilde{X}_t$ と概ね同様な結果が得られる．

3.1 等質表示

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の部分群として次のようなものを考える；

$$P=\left\{\begin{pmatrix}\varepsilon & \mu\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\middle|\varepsilon\in\{\pm1\},\mu\in\mathbb{C}\right\},$$
$$S=\left\{\begin{pmatrix}\mu & 0\\ 0 & \mu^{-1}\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})\middle|\mu\in\mathbb{C}^*\right\}.$$

また，各 $t\in\mathbb{C}$ に対して，基点 $A_t\in X_t$ を次のようにとる；

$$A_t=\begin{cases}\begin{pmatrix}e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{i^\theta}\end{pmatrix} & (t=2\cos\theta\in(-2,2),\ \theta\in(0,\pi))\\ \begin{pmatrix}\varepsilon & 1\\ 0 & \varepsilon\end{pmatrix} & (t=2\varepsilon\in\{\pm2\},\ \varepsilon\in\{\pm1\})\\ \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^{-1}\end{pmatrix} & (t=\lambda+\lambda^{-1}\in\mathbb{C}\setminus[-2,2],\ |\lambda|>1)\end{cases}$$

また，群 G の元 $g\in G$ が定める内部自己同型を σ_g とかく．以上の記号のもとで，$\widetilde{X}_t$ の等質表示は次のように与えられる．

主定理 1. 各 $t\in\mathbb{C}$ に対して，$\widetilde{X}_t$ は連結カンドルで，次の等質表示を持つ：

$$\widetilde{X}_t\cong\begin{cases}Q(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),P,\sigma_{A_t}) & (t=\pm2),\\ Q(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C}),S,\sigma_{A_t}) & (t\neq\pm2).\end{cases}$$

注意 3.2.

- $\tau\neq[0]$ のとき，X_τ も同様な等質表示を持つ．$\tau=[0]$ のとき，$X_{[0]}\cong(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}),\pi(S'),\sigma_{f_{A_0}})$ なる等質表示を持つ．ここで，

$$S'=S\cup\left\{\begin{pmatrix}0 & \mu\\ -\mu^{-1} & 0\end{pmatrix}\middle|\mu\in\mathbb{C}^*\right\}.$$

- 補空間 $S^3\setminus K$ が有限体積完備双曲構造を持つ結び目 $K\subset S^3$ を双曲結び目という．双曲結び目の結び目カンドル (より広く，カスプを一つ持つ有限体積完備双曲多様体の基本群から定まるカンドル) は $\mathcal{P}=X_{[2]}\cong\widetilde{X}_2$ の離散部分カンドルとして実現できることも示せる．

3.2 随伴軌道としての表示

$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の Lie 環は

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})=\{a\in\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})\mid\mathrm{tr}\,(a)=0\}$$

で与えられる．$\mathfrak{gl}(2,\mathbb{C})$ は複素 2 次正方行列全体の集合である．一般に，Killing 形式は Lie 環の構造から定まる自然な対称双線形写像であるが，$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の Killing 形式 $B:\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\times\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\to\mathbb{C}$ は $B(a,b)=4\mathrm{tr}\,(ab)$ で与えられる．特に，$B(a,a)=4\mathrm{tr}\,(a^2)=-8\det(a)$ となる．各 $s\in\mathbb{C}$ に対して，

$$\mathfrak{x}_s=\left\{a\in\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\setminus\{0\}\mid B(a,a)=\frac{s}{8}\right\}$$

とおく．随伴表現による Lie 群の Lie 環への作用は Killing 形式を保つので，$\mathfrak{x}_s$ は $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ の部分カンドルである．$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の随伴表現による作用で等質表示を与えることによって，次の同型がわかる．

主定理 2. $t = e^{\sqrt{s}} + e^{-\sqrt{s}}$ のとき，$\mathfrak{x}_s$ と $\widetilde{X}_t$ はカンドルとして同型である．

参考文献

[1] M. Eisermann. Quandle coverings and their Galois correspondence. *Fundamenta Mathematicae*, Vol. 225, No. 1, pp. 103–167, 2014.

[2] A. Inoue. Quandle and hyperbolic volume. *Topology and its Applications*, Vol. 157, No. 7, pp. 1237–1245, 2010.

[3] A. Inoue and Y. Kabaya. Quandle homology and complex volume. *Geometriae Dedicata*, Vol. 171, pp. 265–292, 2014.

[4] D. Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 23, No. 1, pp. 37–65, 1982.

[5] 谷口雅彦, 松崎克彦. 双曲的多様体とクライン群. 日本評論社, 1993.

変分法による楕円制限 3 体問題の遷移軌道の存在証明

京都大学大学院 情報学研究科 情報学専攻
黒川大雅 (Taiga KUROKAWA) *

概要

近年, 宇宙探査機の軌道設計において, 制限 3 体問題を用いた軌道設計が盛んに研究されている. 制限 3 体問題において, 低エネルギー軌道を考える際, まず問題になるのは, 遷移軌道の存在である. 数値計算や摂動論的な存在証明も行われているが, これらの結果では具体的なエネルギーについてその存在を保証することはできず, 変分法による存在証明はこれを可能にする点で重要である. 2 天体が円運動を行う場合については Moeckel(2005) と講演者の修士論文による結果があるが, より一般に楕円運動を行う場合については Lagrange 系が非自励的になる困難さのために行われていなかった. 講演者は, 非自励な Lagrange 系の端点エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造を新たに見出すことで, 一般の楕円運動の場合についても存在証明を行うことに成功した. 本講演では, この結果を変分構造に重点をおいて紹介する.

1 導入

1.1 本研究と宇宙探査機の軌道設計との関係

本研究は, 例えば, 宇宙探査機を地球周辺から月周辺に送るミッションを実現するような軌道設計と深く関わっている.

宇宙探査機の軌道設計の理論分野において, 従来は, Hohman 軌道やフライバイ (参考文献 [1].) など, 天体と探査機の 2 体問題を用いた軌道設計を扱うことが一般的であった. 先のミッションを考える場合でも, 探査機の運動を, 地球周辺では (月の影響を無視した) 地球と探査機の 2 体問題, 月周辺では (地球の影響を無視した) 月と探査機の 2 体問題の軌道としてモデル化し, それぞれの軌道をつなぎ合わせる形で軌道設計が行われてきた. もちろん, 地球と月と探査機の 3 体問題によるモデルの方が, より正確に実際の探査機の運動を表現できるのだが, 3 体問題の解析困難さ (Poincaré[2] による非可積分性の結果が有名である. 参考文献 [3].) のために扱われてこなかった.

近年は, 軌道設計の理論分野においても, 3 体問題を用いた軌道設計が盛んに研究されている (参考文献 [4].). ここで, 3 体問題と言っても, 探査機は天体に比べて質量が非常に小さいため, 探査機による天体の運動への影響は無視でき, 1.2 節で説明する**制限 3 体問題**が用いられる.

軌道設計においては, ミッションをできる限り短いスパンで, かつ低コストで達成できるような軌道を設計することが求められるが, 先のミッションを, 低コストで実現することを考える際, まず問題

* E-mail : taiga.k@amp.i.kyoto-u.ac.jp
本研究は、JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2110 の支援を受けたものです。

になるのは, 1.3 節で説明する**遷移軌道**の存在である.

本研究は, この遷移軌道の存在証明を, 数学的に厳密に, 特に変分法を用いて行うものである.

1.2 平面円制限 3 体問題 (PCR3BP)・平面楕円制限 3 体問題 (PER3BP)

制限 3 体問題とは, 2 つの天体からの万有引力の影響を受ける一方, これらの天体への影響は無視できるほどに小さな物体の運動を記述する数理モデルであり, 2 つの天体は 2 体問題の有界な解, すなわち円運動または楕円運動を行うものとされる. また, 2 つの天体と同一な平面は不変平面であるため, この平面上に運動を制限した問題を考えることができる. この問題を平面制限 3 体問題という. このうち, 2 つの天体が円運動をするものは平面円制限 3 体問題 (PCR3BP), 楕円運動をするものは平面楕円制限 3 体問題 (PER3BP) と呼ばれる. PCR3BP と PER3BP は, それぞれ適切な座標変換 (時間変数も取り替える) によって, 次のような Lagrange 系として書き表される (参考文献 [1].).

PCR3BP・PER3BP

$L_\mu^C : (\mathbb{R}^2 \setminus \{{}^t(-\mu, 0) \cup {}^t(1-\mu, 0)\}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: PCR3BP の Lagrangian

$$L_\mu^C(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) := \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2 + {}^t\boldsymbol{z}J\boldsymbol{v} + V_\mu(\boldsymbol{z})$$

$L_\mu^E : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{{}^t(-\mu, 0) \cup {}^t(1-\mu, 0)\}) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$: PER3BP の Lagrangian

$$L_\mu^E(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) := \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2 + {}^t\boldsymbol{z}J\boldsymbol{v} + f(t)V_\mu(\boldsymbol{z})$$

ただし, 以下の通りとした.

$0 < \mu \leq \frac{1}{2}$ (2 つの天体の相対質量), $0 \leq e < 1$ (2 つの天体の楕円運動の離心率), $J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$f(t) := \frac{1}{1 + e\cos t}, \quad V_\mu(\boldsymbol{z}) := \frac{1}{2}|\boldsymbol{z}|^2 + \frac{1-\mu}{|\boldsymbol{z} + {}^t(\mu, 0)|} + \frac{\mu}{|\boldsymbol{z} - {}^t(1-\mu, 0)|} > 0$$

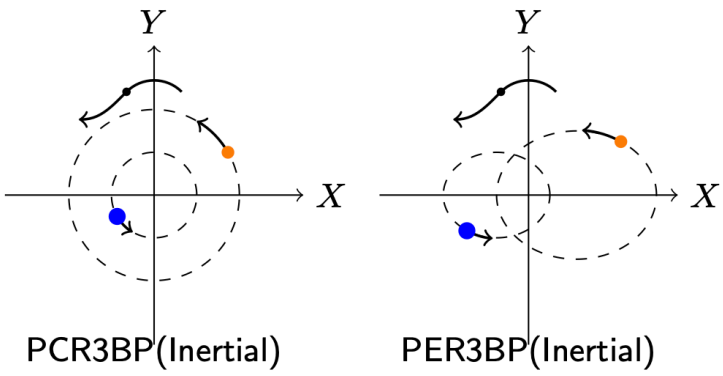


図 1: PCR3BP と PER3BP のイメージ図 (慣性座標系)

ここで注意したいのは, PCR3BP は L_μ^C が時間に依存しない自励系であるのに対し, PER3BP は L_μ^E が時間に依存する非自励系であるということである. 従って, それぞれのエネルギー関数を次の

ように定義すると, E_μ^C は PCR3BP の保存量だが, E_μ^E は PER3BP の保存量ではない.

$$E_\mu^C(\boldsymbol{z},\boldsymbol{v}) := \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2 - V_\mu(\boldsymbol{z}),\ E_\mu^E(t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{v}) := \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2 - f(t)V_\mu(\boldsymbol{z})$$

1.3 PCR3BP・PER3BP の遷移軌道

まず, PCR3BP の遷移軌道について説明する. あるエネルギー値 $h \in \mathbb{R}$ が与えられると, 配位空間の各点はそのエネルギー値を実現する初期値を取れるものと取れないものに分けられる. すなわち, 前者の領域は $\{\boldsymbol{z} \mid h + V_\mu(\boldsymbol{z}) \geq 0\}$ であり, このような領域はエネルギー値 h の **Hill 領域**と呼ばれる. 次の図 2 では, $\mu = 0.012$(地球・月系の相対質量) のときの適当なエネルギー値に対する Hill 領域を, 白の範囲で表した. また, 右の図は左の図の長方形領域を拡大したものである.

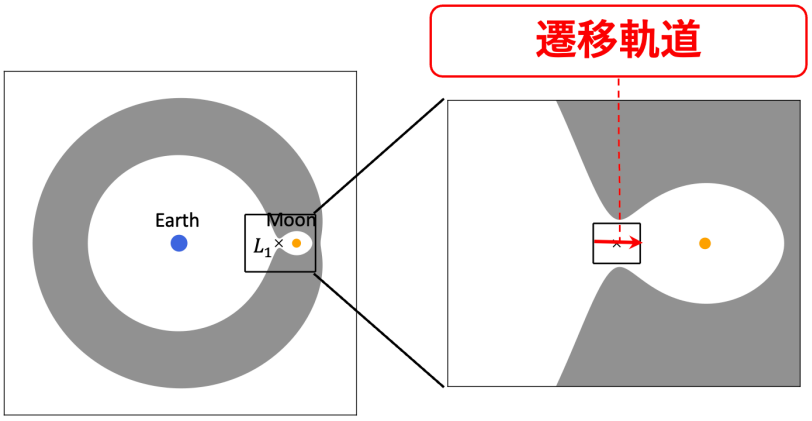


図 2: Hill 領域と遷移軌道

図 2 に表すように, この Hill 領域には窪みがあるが, ここにはサドル・センター型平衡点 L_1 が存在し, 一般に L_1 のエネルギー値よりもわずかに大きなエネルギーに関する Hill 領域は, 同様の窪みを持つ. **本研究で PCR3BP の遷移軌道とは, そのようなエネルギー値を実現する解で, L_1 の左側の領域を出発し, L_1 の右側の領域に到達するものと定義する**. 従って, PCR3BP の遷移軌道は, 2.2 節で述べるエネルギー固定条件付き 2 点境界値問題として構成することができる.

次に, PER3BP の遷移軌道について説明する. この場合, エネルギー h の Hill 領域は $\{\boldsymbol{z} \mid h + f(t)V_\mu(\boldsymbol{z}) \geq 0\}$ であり, 時間に依存して変化する. 一方, PCR3BP と PER3BP の Euler-Lagrange 方程式を比較すれば明らかなように, PCR3BP の平衡点であることと PER3BP の平衡点であることは同値であり, PER3BP も L_1 を平衡点に持つ. L_1 のエネルギー値も時間に依存して変化するが, L_1 の最大エネルギー値よりもわずかに大きなエネルギーに関する Hill 領域は, 任意の時刻で, 図 2 と同様の窪みを持つ. **本研究で PER3BP の遷移軌道とは, ある時刻でそのようなエネルギー値を実現する解で, L_1 の左側の領域を出発し, L_1 の右側の領域に到達するものと定義する**. 従って, PER3BP の遷移軌道は, 2.3 節で述べる終端エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題として構成することができる.

また, 注意しておきたいのは, 2 つの天体と同一な平面上に運動を制限する前の (空間) 制限 3 体問題についても, 円・楕円それぞれ遷移軌道を考えられるが, 平面制限 3 体問題の遷移軌道は, (空間) 制

限 3 体問題の遷移軌道でもあるため, 遷移軌道の存在に関しては, 平面制限 3 体問題で示せば十分であるということである.

1.4 遷移軌道の存在に関する先行研究と本研究の立ち位置

PCR3BP・PER3BP のどちらについても, 数値計算によって遷移軌道の存在を示唆する結果は数多く知られているが, 数学的に厳密な結果は数えるほどしかない. また, 数学的に厳密な結果には, 摂動論による結果と, 変分法による結果とがあるが, 前者は具体的なエネルギーについてその存在を保証することはできず, 後者はこれを可能にする点で重要である.

PCR3BP については, 摂動論による結果として Moser(1958,[5]) の結果が, 変分法による結果として Moeckel(2005,[6]) の結果と, 筆者の修士論文の結果がある.

一方, PER3BP については, 摂動論による結果として Fitzgerald&Ross(2022,[7]) の結果があるが, 変分法による結果は本研究が初めてである.

ここで, PER3BP の遷移軌道の変分法による存在証明が, なぜこれまで困難だったのかといえば, 1.3 節で定義した遷移軌道を与えるような変分構造が知られていなかったからである. Moeckel(2005) の用いた Maupertuis 汎関数による変分構造は自励系でしか機能しないため, PER3BP に拡張することができない. 一方, 筆者の修士論文で用いた Lagrange 汎関数による変分構造は, 自励系ではエネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造として機能するが, 2.3 節で述べるように, 実は非自励系では終端エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造として機能することがわかり解決に至った.

2 2 点境界値問題の変分構造

この章では, 次で定める一般的な Lagrange 系を考える. (仮定 (i)∼(iii) は, 後で定義する汎関数の最小化曲線について, 第一変分をとる際の微分と積分の交換が可能であることを保証し, Euler-Lagrange 方程式を導くための仮定である. 参考文献 [8].)

Lagrangian

$$L \ : \ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad L = L(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v})$$

(i) C^2

(ii) $\exists c_1, c_2, c_3 > 0$
s.t. $|L| \leq c_1 + c_2|\boldsymbol{z}|^2 + c_3|\boldsymbol{v}|^2$

(iii) $\exists c_4, c_5, c_6 > 0$
s.t. $\sum_{i=1}^d |L_{z_i}| + \sum_{i=1}^d |L_{v_i}| \leq c_4 + c_5|\boldsymbol{z}|^2 + c_6|\boldsymbol{v}|^2$

エネルギー関数を次のように定義しておく.

$$E(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) \coloneqq L_{\boldsymbol{v}}(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{v} - L(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{v})$$

以下の 3 つの異なる制約条件各々について, その制約条件付き 2 点境界値問題の変分構造を順に述べる.

- 所要時間固定条件
- エネルギー固定条件
- 終端エネルギー固定条件

また, 最小化問題を考える際の曲線集合と汎関数を, 次のように定義しておく.

曲線集合と汎関数

$[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\boldsymbol{z}_S, \boldsymbol{z}_G \in \mathbb{R}^d$, $h \in \mathbb{R}$ に対し, 次のように定義する.

$$\mathcal{C}^{[a,b]} := \{c^{[a,b]} \in H^1((a,b),\mathbb{R}^d) \mid c^{[a,b]}(a) = \boldsymbol{z}_S,\ c^{[a,b]}(b) = \boldsymbol{z}_G\},$$

$$\mathcal{A}^{[a,b]} :\ \mathcal{C}^{[a,b]} \to \mathbb{R},\ \mathcal{A}^{[a,b]}(c^{[a,b]}) := \int_{[a,b]} L(t, c^{[a,b]}(t), \dot{c}^{[a,b]}(t))\ \mathrm{d}t,$$

$$\mathcal{A}^{a,h} :\ \textstyle\bigsqcup_{b\in(a,+\infty)} \mathcal{C}^{[a,b]} \to \mathbb{R},\ \mathcal{A}^{a,h}(c^{[a,b]}) := \int_{[a,b]} L(c^{[a,b]}(t), \dot{c}^{[a,b]}(t)) + h\ \mathrm{d}t.$$

2.1 時間区間固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造

時間区間固定条件付き 2 点境界値問題

与えられた時間区間 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ と 2 点 $\boldsymbol{z}_S, \boldsymbol{z}_G \in \mathbb{R}^d$ に対して,
Euler-Lagrange 方程式の解 $c^{[a,b]} \in C^2([a,b],\mathbb{R}^d)$ で, 次の条件を満たすものは存在するか?

$$c^{[a,b]}(a) = \boldsymbol{z}_S,\ c^{[a,b]}(b) = \boldsymbol{z}_G.$$

この時間区間固定条件付き 2 点境界値問題は, 自励か非自励かにかかわらず意味を持ち, その変分構造はよく知られているように, 以下の通りである.

命題 1. (時間区間固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造)
$c_*^{[a,b]} \in \mathcal{C}^{[a,b]} \cap C^2([a,b],\mathbb{R}^d)$ について, 次が成り立つ.

$$\mathcal{A}^{[a,b]}(c_*^{[a,b]}) = \inf\{\mathcal{A}^{[a,b]}(c^{[a,b]}) \mid c^{[a,b]} \in \mathcal{C}^{[a,b]}\}$$

$$\Rightarrow \quad c_*^{[a,b]} :\ \text{時間区間固定条件付き 2 点境界値問題の解 } (T, \boldsymbol{z}_S, \boldsymbol{z}_G). \ \square$$

2.2 エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造

エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題

与えられたエネルギー値 $h \in \mathbb{R}$ と 2 点 $\boldsymbol{z}_S, \boldsymbol{z}_G \in \mathbb{R}^d$ に対して,
時間区間 $[a,b]$ と Euler-Lagrange 方程式の解 $c^{[a,b]} \in C^2([a,b],\mathbb{R}^d)$ で, 次の条件を満たすものは存在するか?

$$c^{[a,b]}(a) = \boldsymbol{z}_S,\ c^{[a,b]}(b) = \boldsymbol{z}_G,$$
$$\forall t \in [a,b],\ E(c^{[a,b]}(t), \dot{c}^{[a,b]}(t)) = h.$$

このエネルギー固定条件付き 2 点境界値問題は, 任意の時刻でエネルギー値 h を実現する必要があるため, 自励系の場合にのみ意味を持ち, 以下の変分構造が知られている.

命題 2. エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造 $b_* > 0$ と $c_*^{[a,b_*]} \in \mathcal{C}^{[a,b_*]} \cap C^2([a,b_*],\mathbb{R}^d)$ について, 次が成り立つ.

$$\mathcal{A}^{a,h}(c_*^{[a,b_*]}) = \inf\{\mathcal{A}^{a,h}(c^{[a,b]}) \mid c^{[a,b]} \in \sqcup_{b\in(a,+\infty)}\, \mathcal{C}^{[a,b]}\}$$
$$\Rightarrow \quad c_*^{[a,b_*]}\text{: エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の解 } (h, \boldsymbol{z}_S \text{ and } \boldsymbol{z}_G). \square$$

今, Lagrange 系は自励系のみ考えているため, $[a,b]$ 区間を $[0,b-a]$ に置き換えたものは同値であり, $a=0$ として一般性を失わないことに注意したい.

2.3 終端エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造

終端エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題

与えられたエネルギー値 $h \in \mathbb{R}$ と 2 点 $\boldsymbol{z}_S, \boldsymbol{z}_G \in \mathbb{R}^d$ に対して,
時間区間 $[a,b]$ と Euler-Lagrange 方程式の解 $c^{[a,b]} \in C^2([a,b],\mathbb{R}^d)$ で, 次の条件を満たすものは存在するか?

$$c^{[a,b]}(a) = \boldsymbol{z}_S,\ c^{[a,b]}(b) = \boldsymbol{z}_G,$$
$$E(c^{[a,b]}(b), \dot{c}^{[a,b]}(b)) = h.$$

この終端エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題は, 非自励系の場合にも意味を持ち, 以下の変分構造を発見した.

命題 3. 終端エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の変分構造 $b_* > 0$ と $c_*^{[a,b_*]} \in \mathcal{C}^{[a,b_*]} \cap C^2([a,b_*],\mathbb{R}^d)$ について, 次が成り立つ.

$$\mathcal{A}^{a,h}(c_*^{[a,b_*]}) = \inf\{\mathcal{A}^{a,h}(c^{[a,b]}) \mid c^{[a,b]} \in \sqcup_{b\in(a,+\infty)}\, \mathcal{C}^{[a,b]}\}$$
$$\Rightarrow \quad c_*^{[a,b_*]}\text{: 終端エネルギー固定条件付き 2 点境界値問題の解 } (h, \boldsymbol{z}_S \text{ and } \boldsymbol{z}_G). \square$$

今, 終端時刻 b についても最小化する最小化曲線が終端エネルギー固定条件を満たすことを述べたが,

実は, 始端時刻 a についても同様のことが成り立つ, すなわち始端エネルギー固定条件を満たすということが従うことを注意しておく.

3　主結果

最後に, PCR3BP の遷移軌道に関する修士論文の結果と, PER3BP の遷移軌道に関する主結果を紹介する.

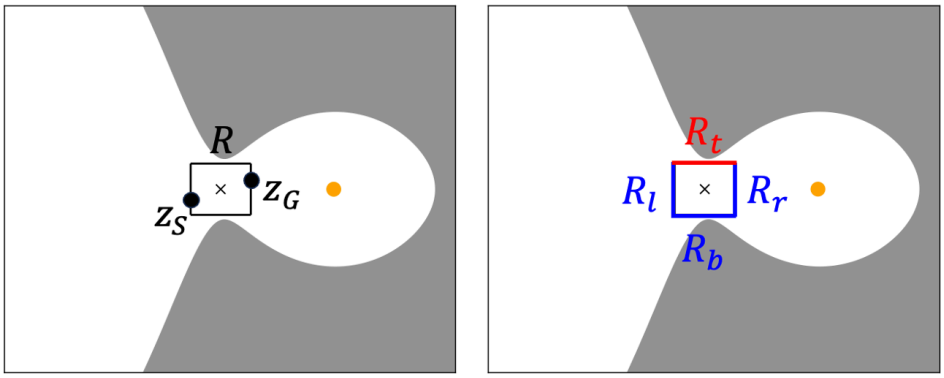


図 3: 2 点境界値と曲線の動く範囲とその境界のイメージ

曲線集合と汎関数

$T > 0$, $R \subset \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{z}_S, \boldsymbol{z}_G \in R$, $h \in \mathbb{R}$ に対し, 次のように定義する.

$$\mathcal{C}^T_{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(R) \coloneqq \{c^T \in H^1((0,T),\mathbb{R}^2) \mid c^T(0) = \boldsymbol{z}_S,\ c^T(T) = \boldsymbol{z}_G\},$$
$$\mathcal{A}_\mu^{C(E),h} : \sqcup_{T>0} \mathcal{C}^T_{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G} \to \mathbb{R},\ \mathcal{A}_\mu^{C(E),h}(c^T) \coloneqq \int_{[0,T]} L_\mu^{C(E)}(c^T(t), \dot{c}^T(t)) + h \ \mathrm{d}t.$$

3.1　PCR3BP の遷移軌道が存在するための十分条件 (筆者の修士論文の結果)

定理. $h > E_\mu^C(L_1) = -V_\mu(L_1)$ について, Lagrange 点 $L_1 (= ({}^t(x_e, 0), \boldsymbol{0}))$ を中心とする長方形領域 $R = [x_e - c, x_e + c] \times [-k, k] \subset \mathbb{R}^2$ で, 次の Cond.1(L-PCR3BP) を満たすものが存在するとする.

Cond.1(L-PCR3BP)

$$\forall \boldsymbol{z} \in R,\ h + V_\mu(\boldsymbol{z}) > \frac{1}{2}|\boldsymbol{z} - {}^t(x_e, 0)|^2.$$

このとき, 任意の $\boldsymbol{z}_S \in R_l$ と $\boldsymbol{z}_G \in R_r$ について, $\mathcal{A}_\mu^{C,h}(c_*^{T_*}) = \inf\{\mathcal{A}_\mu^{C,h}(c^T) \mid c^T \in \sqcup_{T>0} \mathcal{C}^T_{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(R)\}$ が成り立つような, $T_* > 0$ と $c_*^{T_*} \in \mathcal{C}^{T_*}_{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(R)$, すなわち time-free な最小化曲線が存在する. さらに, R について, 次の Cond.2・3(L-PCR3BP) が成り立つとする.

Cond.2(L-PCR3BP)

$$\forall \boldsymbol{z} \in R_l \cup R_r,\ 8(h + V_\mu(\boldsymbol{z})) < (\partial_x V_\mu(\boldsymbol{z}))^2,$$

Cond.3(L-PCR3BP)

$$\forall \boldsymbol{z} \in R_b,\ 8(h + V_\mu(\boldsymbol{z})) > (\partial_y V_\mu(\boldsymbol{z}))^2.$$

最後に, T_* と, ある $\boldsymbol{z}_S \in R_l$ と $\boldsymbol{z}_G \in R_r$ について, 次の Cond.4(L-PCR3BP) が成り立つなら, $c_*^{T_*}$ は, R 内で $\boldsymbol{z}_S$ から $\boldsymbol{z}_G$ へ至るような, エネルギーが h の PCR3BP の解, すなわち遷移軌道である.

Cond.4(L-PCR3BP)

$$\inf_{c^{T_*} \in \mathcal{C}^{T_*}_{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(R)} \mathcal{A}^{C,h}_{\mu}(c^{T_*}) < \inf_{\tilde{c}^{T_*} \in \mathcal{T}^{T_*}_{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(R)} \mathcal{A}^{C,h}_{\mu}(\tilde{c}^{T_*}).$$

ただし, $\mathcal{T}^{T}_{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(R)$ は, 次のように定義した.

$$\mathcal{T}^{T}_{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(R) \coloneqq \{\tilde{c}^T \in \mathcal{C}^{T}_{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(R) \mid \exists t \in (0,T) \text{ s.t. } \tilde{c}^T(t) \in R_t\}.$$

□

この定理において, R を Cond.1 を満たすコンパクト凸集合としてとることは, time-free な最小化曲線が存在するために本質的な仮定である. そのため, この最小化曲線について第一変分をとって Euler-Lagrange 方程式の弱解であることを導くには, この最小化曲線が端点以外で R の境界に達さないことを示す必要がある. Cond.2 は, $R_l \cup R_r$ に達さないこと, Cond.3 は, R_b に達さないこと, Cond.4 は, R_t に達さないことを保証する条件に対応している.

次の PER3BP に関する主結果との比較のために, もう少し詳しく言えば, Cond.2 は, エネルギーが h の PCR3BP の解が, $R_l \cup R_r$ に接するなら, R の外から来て外に向かうという条件 (外部接触条件) であり, Cond.3 は, エネルギーが h の PCR3BP の解が, R_b に左から右に接するなら, R の外から来て外に向かうという条件 (方向付き外部接触条件) である.

Cond.2 や Cond.3 から, time-free な最小化曲線が対応する境界に達さないことが従うことを示すには, 非自明な議論が必要であり, 補題 1(Cond.1 を満たす任意のコンパクト凸集合内で, 任意の 2 点境界条件について, time-free な最小化曲線が存在すること) と, 補題 2(Cond.1 を満たす領域内の任意の点の十分小さなの開球近傍について, 十分小さな開球内の 2 点境界条件については, time-free な最小化曲線がエネルギー h の古典解であること) を示し用いることで証明できる.

3.2 PER3BP の遷移軌道が存在するための十分条件 (主結果)

主結果. $h > \max_{t\in(0,2\pi]} E^E_{\mu}(t, L_1) = -\frac{1}{1+e}V_{\mu}(L_1)$ について, Lagrange 点 $L_1(= ({}^t(x_e, 0), \boldsymbol{0}))$ を中心とする長方形領域 $R = [x_e - c, x_e + c] \times [-k, k] \subset \mathbb{R}^2$ で, 次の Cond.1(L-PER3BP) を満たすものが存在するとする.

Cond.1(L-PER3BP)

$$\forall \boldsymbol{z} \in R,\ h + \frac{1}{1+e}V_{\mu}(\boldsymbol{z}) > \frac{1}{2}|\boldsymbol{z} - {}^t(x_e, 0)|^2.$$

このとき, 任意の $\boldsymbol{z}_S \in R_l$ と $\boldsymbol{z}_G \in R_r$ について, $\mathcal{A}^{E,h}_{\mu}(c^{T_*}_*) = \inf\{\mathcal{A}^{E,h}_{\mu}(c^T) \mid c^T \in \sqcup_{T>0} \mathcal{C}^{T}_{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(R)\}$ が成り立つような, $T_* > 0$ と $c^{T_*}_* \in \mathcal{C}^{T_*}_{\boldsymbol{z}_S \to \boldsymbol{z}_G}(R)$, すなわち time-free な最小化曲線が存在する. さらに, この T_* と, R について, 次の Cond.2・3(L-PER3BP) が成り立つとする.

Cond.2(L-PER3BP)

$$\forall t \in (0, 2\pi],\ \forall \boldsymbol{z} \in R_l \cup R_r,$$
$$8\left(h + \lceil\frac{T_*}{2\pi}\rceil\Delta E + \frac{1}{1+e\cos t}V_\mu(\boldsymbol{z})\right) < \left(\frac{1}{1+e\cos t}\right)^2 \left(\partial_x V_\mu(\boldsymbol{z})\right)^2,$$

Cond.3(L-PER3BP)

$$\forall t \in (0, 2\pi],\ \forall \boldsymbol{z} \in R_b,$$
$$8\left(h - \lceil\frac{T_*}{2\pi}\rceil\Delta E + \frac{1}{1+e\cos t}V_\mu(\boldsymbol{z})\right) > \left(\frac{1}{1+e\cos t}\right)^2 \left(\partial_y V_\mu(\boldsymbol{z})\right)^2.$$

ただし, ΔE は, 次のように定義した.

$$\Delta E \coloneqq (\frac{1}{1-e} - \frac{1}{1+e}) \max_{\boldsymbol{z}\in R} V_\mu(\boldsymbol{z}).$$

最後に, T_* と, ある $\boldsymbol{z}_S \in R_l$ と $\boldsymbol{z}_G \in R_r$ について, 次の Cond.4(L-PER3BP) が成り立つなら, $c_*^{T_*}$ は, R 内で $\boldsymbol{z}_S$ から $\boldsymbol{z}_G$ へ至るような, 終端エネルギーが h の PER3BP の解, すなわち遷移軌道である.

Cond.4(L-PER3BP)

$$\inf_{c^{T_*}\in\mathcal{C}^{T_*}_{\boldsymbol{z}_S\to\boldsymbol{z}_G}(R)} \mathcal{A}^{E,h}_\mu(c^{T_*}) < \inf_{\tilde{c}^{T_*}\in\mathcal{T}^{T_*}_{\boldsymbol{z}_S\to\boldsymbol{z}_G}(R)} \mathcal{A}^{E,h}_\mu(\tilde{c}^{T_*}).$$

ただし, $\mathcal{T}^T_{\boldsymbol{z}_S\to\boldsymbol{z}_G}(R)$ は, 次のように定義した.

$$\mathcal{T}^T_{\boldsymbol{z}_S\to\boldsymbol{z}_G}(R) \coloneqq \{\tilde{c}^T \in \mathcal{C}^T_{\boldsymbol{z}_S\to\boldsymbol{z}_G}(R) \mid \exists t \in (0,T) \text{ s.t. } \tilde{c}^T(t) \in R_t\}.$$

□

この主結果においても, 先の定理と同様に R を Cond.1 を満たすコンパクト凸集合としてとることは, time-free な最小化曲線が存在するために本質的な仮定であり, Cond.2∼4 は, この最小化曲線が対応する境界に達さないことを保証する条件である.

先の PCR3BP の場合と異なり, PER3BP は非自励系であり, エネルギー固定条件ではなく, 終端エネルギー固定条件を考えているため, この場合の Cond.2 と Cond.3 は, 終端エネルギーが h の PER3BP の解に対する外部接触条件を課す必要がある. そこで, 終端エネルギーが h の PER3BP の解の取りうるエネルギー範囲を評価し, その範囲内の任意のエネルギー値で接する場合に対する外部接触条件を満たすという条件を課したのが, 主結果の Cond.2 と Cond.3 である.

また, この場合にも, Cond.2 や Cond.3 から, time-free な最小化曲線が対応する境界に達さないことが従うことを示すには, 非自明な議論が必要であり, 補題 3(Cond.1 を満たす任意のコンパクト凸集合内で, 任意の 2 点境界条件について, time-free な最小化曲線が存在すること) と, 補題 4(Cond.1 を満たす領域内の任意の点の十分小さなの開球近傍について, 十分小さな開球内の 2 点境界条件については, time-free な最小化曲線が終端エネルギー h の古典解であること) を示し用いることで証明できる. ただし, 補題 4 の条件を満たすような 2 点境界条件についての time-free な最小化曲線 (補題 3 で存在が保障される) の所要時間が, 今の time-free な最小化曲線の所要時間より十分小さくできることに注意する必要がある.

4　等質量系 ($\mu = \frac{1}{2}$) への適用例 (数値計算結果)

PCR3BP

$$L_1 = (0, 0),\ E^C_{\frac{1}{2}}(L_1) = -2.$$

次のエネルギーについて,

$$h = -1.85 > -2,$$

L_1 中心の長方形領域 $R = [-c, c] \times [-k, k] \subset \mathbb{R}^2$ を次のようにとって,

$$c = 0.072,\ k = 0.134,$$

Cond.1∼3 を満たし, R の左下に $\boldsymbol{z_S}$, 右下に $\boldsymbol{z_G}$ をとって, Cond.4 を満たすことが数値的に確かめられた.

PER3BP

$$e = 2.0 \times 10^{-4},\ L_1 = (0, 0),\ \max_{t \in [0, 2\pi)} E^E_{\frac{1}{2}}(L_1) \approx -1.9998.$$

次のエネルギーについて,

$$h = -1.85 > -1.9998,$$

L_1 中心の長方形領域 $R = [-c, c] \times [-k, k] \subset \mathbb{R}^2$ を次のようにとって,

$$c = 0.072,\ k = 0.134,$$

Cond.1∼3 を満たし, R の左下に $\boldsymbol{z_S}$, 右下に $\boldsymbol{z_G}$ をとって, Cond.4 を満たすことが数値的に確かめられた.

※ R を選ぶ際, Cond.2・3 については予め, $\lceil \frac{T_*}{2\pi} \rceil = 1$ としておいて, T_* が実際にこの条件を満たすことを確かめた.

参考文献

[1] 木下宙，天体と軌道の力学，東京大学出版会，1998 年.

[2] H. Poincaré, Sur le probléme des trois corps et les équations de la dynamique, Acta Mathematica, 13:1-270, 1890; English translation: The Three-Body Problem and the Equations of Dynamics, Translated by D. Popp, Springer Cham, Switzerland, 2017.

[3] 柴山允瑠，重点解説 ハミルトン力学系 可積分系と KAM 理論を中心に (SGC ライブラリ 130)，サイエンス社，2016 年.

[4] W. Koon, M. Lo, J. Marsden and S. Ross, Dynamical Systems, the Three Body Problem and Space Mission Design, Online Copy (update April 25, 2011), "https://www.cds.caltech.edu/~marsden/books/Mission_Design.html".

[5] J. Moser, On the generalization of a theorem of Liapunov, Communications on Pure and Applied Mathematics, 11:257-271, 1958.

[6] R. Moeckel, A variational proof of existence of transit orbits in the restricted three-body problem, Dynamical Systems, 20(1):45-58, 2005.

[7] J. Fitzgerald and S. Ross, Geometry of transit orbits in the periodically-perturbed restricted three-body problem, Advances in Space Research, 70(1):144-156, 2022.

[8] J. Jost (小谷元子 訳), ポストモダン解析学 原著第 3 版, 丸善出版, 2012 年.

B-SIDH に対する Castryck-Decru 攻撃の構成と実装

九州大学 マス・フォア・イノベーション連係学府
吉住崚 (Ryo YOSHIZUMI) *

概要

楕円曲線の同種写像を用いた鍵共有プロトコルとして SIDH とその variant である B-SIDH がある．2022 年に SIDH への多項式時間攻撃が与えられ, それは理論上 B-SIDH にも適用できる．しかし, 攻撃に用いるアーベル曲面間の素数次数が SIDH と比べ大きく, 単一の写像の実装はなされていたが, それらの合成の効率的な実装は与えられていなかった．本研究では, B-SIDH への攻撃のアルゴリズムを構成し, そのアルゴリズムに基づく B-SIDH に対する攻撃を計算機代数システム Magma 上で実装した．本研究は小貫啓史氏 (東京大学), 大橋亮氏 (東京大学), 工藤桃成氏 (福岡工業大学), 縫田光司氏 (九州大学/産業技術総合研究所) との共同研究に基づく．

1 導入: 同種写像暗号

この節では同種写像暗号に関して述べる．同種写像暗号とは楕円曲線とその間の同種写像を用いて構成される暗号のことである．具体例として, 鍵共有を目的としたプロトコルである SIDH[FJP14] とその variant である B-SIDH[Cos20] がある． しかし, 2022 年に Castryck, Decru [CD23] と Maino, Martindale [MMP+23] らがこれらに対する多項式時間攻撃を与えた．この節ではその中でも B-SIDH の説明とそれに対する攻撃について解説する．

1.1 鍵共有プロトコル B-SIDH

この小節では鍵共有プロトコル B-SIDH について説明する．

最初に B-SIDH の構成に必要な楕円曲線に関する事実を述べる．参考文献として [Sil86] を挙げる．$E/\mathbb{F}_{p^n}$ を有限体 $\mathbb{F}_{p^n}$ 上の楕円曲線とする．p^n 乗フロベニウス写像 $\mathrm{Frob}_{p^n} : E \to E$ のトレース $t_n \in \mathbb{Z}$ が p の倍数のとき, E を超特異楕円曲線という．超特異楕円曲線の同値な定義として, 任意の整数 $r \geq 1$ に対し $E[p^r] = 0$ が成り立つことが挙げられる．よって, 超特異性は代数閉体上の性質である．ここで, 楕円曲線の $\mathbb{F}_{p^n}$-有理点のなす群の位数 $\#E(\mathbb{F}_{p^n})$ は $\#E(\mathbb{F}_{p^n}) = p^n + 1 - t_n$ を満たす．今 $|t_n| \leq 2\sqrt{p^n}$ が成り立つことから, $n = 1$ のとき, E が超特異であることは $\#E(\mathbb{F}_p) = p + 1$ に同値になる．また $n = 2$ のときは超特異であることは t_2 が $\pm 2p, \pm p, 0$ のいずれかであることに同値となる．いま超特異楕円曲線 $E/\mathbb{F}_p$ に対し, $\#E(\mathbb{F}_p) \mid \#E(\mathbb{F}_{p^2})$ であるから, $t_2 = 2p$ で

* E-mail:yoshizumi.ryo.483@s.kyushu-u.ac.jp

$\#E(\mathbb{F}_{p^2}) = (p+1)^2$ となる. $E/\mathbb{F}_{p^2}$ の (自明でない)2 次ツイストを $E^t/\mathbb{F}_{p^2}$ と表す. E^t は E と $\mathbb{F}_{p^2}$ 上同型ではないが $\mathbb{F}_{p^4}$ 上同型である. また $\#E^t(\mathbb{F}_{p^2}) = (p-1)^2$ である.

はじめに, 鍵共有について説明する. 十分大きな素数 $p(\approx 2^{256})$ を固定する. 今, Alice と Bob の 2 人が秘密の鍵を共有したいと考えている. より具体的にはある元 $j \in \mathbb{F}_{p^2}$ を 2 人だけが知っている状況にしたい. しかし, 2 人は事前に何の情報も共有していなく, また 2 人の会話は全ての人に公開されているとする. 2 人以外のある人 (攻撃者と呼ぶ) が公開されている情報から j を求めること (攻撃という) に十分時間が必要ならば, この鍵共有は安全であると言う. より正確には多項式時間で計算可能な攻撃が見つかっていなければその時点で安全であるとみなされる. B-SIDH はそのような具体的な方法の一つとして提案された. しかし, 後述するように多項式時間で計算可能な攻撃が現在見つかっている.

B-SIDH のプロトコルを説明する. $N_A > N_B$ を互いに素で $N_A|(p+1), N_B|(p-1)$ または $N_A|(p-1), N_B|(p+1)$ を満たす smooth な整数とする. ここで, 整数が smooth であるとは任意の素因数が十分小さいという意味である. 話を簡単にするため, 以下では

$$N_A|(p+1),\ N_B|(p-1)$$

と仮定して議論を進める. $E_0/\mathbb{F}_p$ を超特異楕円曲線とする. いま $\#E_0(\mathbb{F}_{p^2}) = (p+1)^2$ と $E_0[N_A] \cong (\mathbb{Z}/N_A\mathbb{Z})^2$ から, $E_0[N_A] \subseteq E_0(\mathbb{F}_{p^2})$ が従う. $E_0[N_A]$ の基底 $\{P_A, Q_A\}$ を一組とる. また $E_0^t/\mathbb{F}_{p^2}$ を E_0 の $\mathbb{F}_{p^2}$ 上の非自明な 2 次ツイストとすれば, $\#E_0^t(\mathbb{F}_{p^2}) = (p-1)^2$ より $E_0^t[N_B] \subseteq E_0^t(\mathbb{F}_{p^2})$ となる. 同様に $E_0^t[N_B]$ の基底 $\{P_B, Q_B\}$ を一組とる. また, $\mathbb{F}_{p^4}$ 上同型写像 $\sigma : E_0 \to E_0^t$ を一つとる. 今, 上記で選んだ情報

$$p, N_A, N_B, E_0, P_A, Q_A, E_0^t, P_B, Q_B, \sigma$$

を公開する. したがって, これらの情報は Alice, Bob, 攻撃者含めた全員が知っている. 以上の準備のもと, B-SIDH のアルゴリズムは以下の通りである.

(A1) Alice は $R_A = P_A + n_A Q_A \in E_0[N_A]$ を秘密に選び, $\langle R_A \rangle$ を核とする同種写像 $\phi_A : E_0 \to E_A$ を構成する.

(A2) Alice は $\phi_A(\sigma^{-1}(P_B)), \phi_A(\sigma^{-1}(Q_B)) \in E_A$ を計算し, $E_A, \phi_A(\sigma^{-1}(P_B)), \phi_A(\sigma^{-1}(Q_B))$ を公開する.

(B1) Bob は $R_B = P_B + n_B Q_B \in E_0^t[N_B]$ を秘密に選び, $\langle R_B \rangle$ を核とする同種写像 $\phi_B : E_0^t \to E_B$ を構成する.

(B2) Bob は $\phi_B(\sigma(P_A)), \phi_B(\sigma(Q_A)) \in E_B$ を計算し, $E_B, \phi_B(\sigma(P_A)), \phi_B(\sigma(Q_A))$ を公開する.

(A3) Alice は E_B を $\langle \phi_B(\sigma(P_A)) + n_A \phi_B(\sigma(Q_A)) \rangle$ を核とする同種写像 $E_B \to E_{BA}$ を構成し, E_{BA} を共有鍵とする.

(B3) Bob は E_A を $\langle \phi_A(\sigma^{-1}(P_B)) + n_B \phi_A(\sigma^{-1}(Q_B)) \rangle$ を核とする同種写像 $E_A \to E_{AB}$ を構成し, E_{AB} を共有鍵とする.

このとき, E_{AB} と E_{BA} は $\mathbb{F}_{p^4}$ 上同型で, 特に同じ j 不変量を持つ. 以上から, Alice と Bob は同じ情報を共有することができた.

$$\begin{array}{ccc} E_0 \overset{\sigma}{\cong} E_0^t & \xrightarrow{\phi_B} & E_B \\ {\scriptstyle \phi_A}\downarrow & & \downarrow \\ E_A & \longrightarrow & E_{AB} \cong E_{BA} \end{array}$$

ここで σ や $E_A \to E_{AB}, E_B \to E_{BA}$ は $\mathbb{F}_{p^4}$ 上で定義される同種写像だが, Kummer line 上では $\mathbb{F}_{p^2}$ 上定義出来る [Cos20, §3]. これにより扱う点や同種写像の計算は $\mathbb{F}_{p^2}$ 上で行うことが出来る.

1.2 Castryck-Decru 攻撃

前小節では SIDH の variant である B-SIDH に関して説明した. しかし, 2022 年に Castryck, Decru [CD23] と Maino, Martindale [MMP+23] らが SIDH に対する多項式時間攻撃を与え, この攻撃方法は B-SIDH に対しても適用可能である. この小節ではその攻撃方法について説明する.

次の定理がその攻撃の基礎となる. 定理内の用語の定義は 2.1節を参照.

定理 1.1. ([Kan97]) g 次元の主偏極付きアーベル多様体 A, B, C, D が下の可換図式を満たすものとする:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_2} & C \\ {\scriptstyle f_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_1} \\ B & \xrightarrow[g_2]{} & D \end{array}.$$

ここで互いに素な自然数 d_1, d_2 により, f_1, g_1 は $(d_1)^g$-同種写像, f_2, g_2 は $(d_2)^g$-同種写像であるとする. このとき, 行列 $\begin{pmatrix} \hat{f}_1 & \hat{f}_2 \\ -g_2 & g_1 \end{pmatrix}$ で定まる $(d_1+d_2)^{2g}$-同種写像 $F : B \times C \to A \times D$ の核は次式で与えられる：

$$\operatorname{Ker} F = \{(f_1(P), f_2(P)) \in B \times C \mid P \in A[d_1+d_2]\}.$$

この定理を用いた攻撃 (Castryck-Decru 攻撃) を紹介する. 記号は前節と同じものとする. 簡単のため $N_A > N_B$ とし, $a := N_A - N_B > 0$ とおく. 標数 $p \equiv 3 \pmod 4$ とし, $E_0/\mathbb{F}_p$ を $y^2 = x^3 + x$ で定義される超特異楕円曲線とする. このとき, 詳細は省略するが a 次同種写像 $\alpha : E_0 \to E'$ で, $\alpha(P_A)$ と $\alpha(Q_A)$ が計算できるものが取れる. このとき, ϕ_B と α の push-forward からなる可換図式

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{\phi_B} & E_B \\ {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} \\ E' & \xrightarrow[\phi'_B]{} & E'_B \end{array}$$

に対し上記の定理を適用する. すなわち, (N_A, N_A)-同種写像 $F : E' \times E_B \to E_0 \times E'_B$ を行列 $\begin{pmatrix} \hat{\alpha} & \hat{\phi_B} \\ -\phi'_B & \alpha' \end{pmatrix}$ で定まるものとすれば,

$$\operatorname{Ker} F = \{(\alpha(P), \phi_B(P)) \in E' \times E_B \mid P \in E_0[N_A]\}$$

となる. よって, 具体的に分かっている 2 点

$$(\alpha(P_A), \phi_B(P_A)), (\alpha(Q_A), \phi_B(Q_A))$$

は $\mathrm{Ker}\, F$ を生成するため, F は計算可能である. いま $\mathrm{Ker}\, \phi_B = \hat{\phi_B}(E_B[N_B])$ に注意する. $E_B[N_B]$ の基底 $\{S_1, S_2\}$ を一組取り, $F((0, S_i)) = (\hat{\phi_B}(S_i), \alpha'(S_i))$ を計算することで, $\mathrm{Ker}\, \phi_B$ の生成系を得ることが出来る. 以上が Castryck-Decru 攻撃である.

2 アーベル多様体の計算

前節で攻撃者はアーベル曲面間の (N_A, N_A)-同種写像 F を計算する必要がある. 一般に同種写像を計算する場合, 素数次数の同種写像の合成に分解して計算する方法が最も効率的である. ここで, その素数次数が 2 の場合はいくつかの特別な方法が知られており, SIDH に対する攻撃ではこの場合で十分である. しかし, B-SIDH に対する攻撃を行う場合はそうとは限らない. しかし, 一般の素数次数の同種写像の計算もこの節で紹介する theta 関数を用いることで計算可能である. 紙面の都合上, 本節ではその計算方法のための導入部分のみ紹介する.

2.1 アーベル多様体の射影空間への埋め込み

計算機で計算を行うためには, アーベル多様体に座標を与えることが必要である. そのためにこの小節では, アーベル多様体を射影空間に埋め込むことについて考える.

以下, k は代数閉体とし, その上の代数多様体を考えるとする. 代数多様体に関する参考文献として [Har77] を挙げる.

アーベル多様体とは完備な代数多様体とその上の群構造の組のことである. このとき, 群演算が可換な非特異射影代数多様体になることが知られている. また次元を g で表すとする. アーベル多様体に関する参考文献として [Mum70] を挙げる.

アーベル多様体 A 上の主偏極とは, 次数が 1 の ample line bundle$\mathscr{L}$ の代数的同値類のことである. またこのとき, 組 $(A, \mathscr{L})$ を主偏極付きアーベル多様体 (以下 PPAV) という. 特にこのとき同種写像 $\varphi_{\mathscr{L}} : A \to \hat{A}$ を $\varphi(x) = T_x^* \mathscr{L} \otimes \mathscr{L}^{-1}$ と定義すれば, $\varphi_{\mathscr{L}}$ は同型となる.

Lefschetz の定理から, $n \geq 3$ のとき $\mathscr{L}^n$ は very ample である. また大域切断のなす k-ベクトル空間 $\Gamma(A, \mathscr{L}^n)$ は n^g 次元であるため, 基底を一組とれば, $n^g - 1$ 次元射影空間への閉埋め込み $\iota : A \to \mathbb{P}^{n^g - 1}$ を得る.

今, $\mathrm{PPAV}(A, \mathscr{L})$ に対し, $\Gamma(A, \mathscr{L}^n)$ の基底でその埋め込み ι が次のような条件を満たすものを構成したい.

(i) $x, y \in A$ に対し, その射影座標 $\iota(x), \iota(y) \in \mathbb{P}^{n^g - 1}$ が与えられたとき, 和 $x + y \in A$ の射影座標 $\iota(x + y) \in \mathbb{P}^{n^g - 1}$ が計算できる.

(ii) 被約な有限部分群 $K \subseteq A$ が与えられたとき, 同種写像 $A \to A/K$ が計算できる.

ただし, 「与えられる」,「計算できる」という言葉の詳細はここでは避ける. 今, theta 関数は上記の要求に対し, 完全ではないが部分的に応える. 以下, 簡単のため $\mathbb{C}$ 上の解析的 theta 関数について述

べるが, それらの結果は正標数の場合も適用可能である．また, 正標数における theta 関数の理論は [Mum66] による代数的 theta 関数を挙げる．

2.2 theta 関数

以下, 複素アーベル多様体と theta 関数に関して紹介する．複素アーベル多様体の参考文献として [BL04] を挙げる．

以下, 自然数 $g \geq 1$ を固定する．Siegel 上半平面を

$$\mathbb{H}_g := \{\Omega \in M(g, \mathbb{C}) \mid \Omega = {}^t\Omega,\ \mathrm{Im}(\Omega) > 0\}$$

と定義する．このとき, 各 $\Omega \in \mathbb{H}_g$ に対し, 格子 $\Omega\mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g \subseteq \mathbb{C}^g$ による商 $A := \mathbb{C}^g/(\Omega\mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g)$ は $\mathbb{C}$ 上 g 次元アーベル多様体になる．また, Ω の逆行列の虚部 $\mathrm{Im}(\Omega^{-1})$ は $\mathbb{C}^g$ 上の Hermite 形式を与え, Appell-Humbert の定理からこれは A 上の主偏極に対応する．すわわち, $\Omega \in \mathbb{H}_g$ は PPAV を与える．

次に $\mathbb{C}^g$ 上の theta 関数を定義する．theta 関数とは,

$$\theta(z, \Omega) := \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp(\pi i\, {}^t n \Omega n + 2\pi i\, {}^t n z)$$

のことである．さらに, 指標付き theta 関数を $a, b \in \mathbb{Q}^g$ に対し,

$$\theta\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right](z, \Omega) := \theta(z + \Omega a + b, \Omega) \cdot \exp(\pi i\, {}^t a \Omega a + 2\pi i\, {}^t a(z + b))$$

と定義する．今, 自然数 n に対し, level$n$ の theta 関数とは n^g 個の関数

$$\{\theta\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ \frac{b}{n} \end{smallmatrix}\right](z, \frac{\Omega}{n})\}_{b \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^g}$$

のことである．これを単に $\theta_b(z)$ と書くとする．

以下, n を偶数とする．このとき nH に対応する symmetric line bundle$\mathscr{L}$ が一意的に存在する．上記の level n の theta 関数は n^g 次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $\Gamma(A, \mathscr{L})$ の基底を与える．

特に $n = 4$ のとき, $z \mapsto (\theta_i(z))_i$ で定まる $A = \mathbb{C}^g/(\Omega\mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}^g) \to \mathbb{P}^{(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g}$ は $(4^g - 1)$ 次元射影空間へのアーベル多様体の閉埋め込みを与える．特にこれによる射影座標を theta 座標という．以下, この $\{\theta_b(z)\}_b$ が上記の (i),(ii) の条件を部分的に満たすことを見る．

そのためにいくつか準備をする．$z \in A$ の theta 座標が与えたれたとき, 各 $i \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g$ に対する第 i 座標は (射影座標なので,) 単独では扱えない．そのため, theta 座標を affine 座標を持ち上げることで第 i 座標を単独で扱うことが出来る．すなわち, 閉埋め込み $A \to \mathbb{P}^{(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g}$ を自然な全射 $\mathbb{A}^{(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^{(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g}$ によって以下のように持ち上げる．

$$\begin{array}{ccc} \tilde{A} & \longrightarrow & \mathbb{A}^{(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g} \setminus \{0\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & \mathbb{P}^{(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g} \end{array}$$

そのために, いくつか準備をする．アーベル群 H を $H = \widehat{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}^g \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g$ とする．各 $\zeta = (\chi, i) \in H$ に対し u_ζ を, $P = (P_j)_{j \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g} \in \mathbb{A}^{4^g}$ を

$$u_\zeta(P) = u_{\chi,i}(P) := \sum_{t\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g} \chi(t)P_{i+t} \in \mathbb{C}$$

に送る写像として定義する. 逆に $\{u_\zeta(P)\}_{\zeta\in H}$ が与えられれば,

$$P_i = \frac{1}{2^g} \sum_{\chi\in\widehat{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g}} u_{\chi,i}(P)$$

を計算することにより, $P = (P_i)_{i\in(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g}$ を復元できる.

また H の順序付けられた元 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4, \varepsilon$ が Riemann position にあるとは, $\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\zeta_4 = 2\varepsilon$ が成り立つこととする. このとき, $\zeta_i' := \varepsilon - \zeta_i$ とする $(1 \le i \le 4)$. 今, 加法を計算するために重要な次の定理がある.

定理 2.1. ([LR12, Theorem 3.2]) 2 元 $x, y \in \mathbb{C}^g$ に対し, $(\theta_i(x))_i, (\theta_i(y))_i, (\theta_i(x-y))_i \in \mathbb{P}^{(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g}$ が与えられているとする. ここで, それぞれ任意に代表元をとり, それらを $\tilde{x}, \tilde{y}, \widetilde{x-y} \in \mathbb{A}^{(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g} \setminus \{0\}$ と書くとする. このとき, $x+y$ の affine theta 座標 $\widetilde{x+y} \in \mathbb{A}^{(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g} \setminus \{0\}$ で, 次を満たすものが存在する: アーベル群 H 上の任意の Riemann position $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4; \varepsilon = (\phi, m))$ に対し,

$$\begin{aligned} &u_{\zeta_1}(\widetilde{x+y})u_{\zeta_2}(\widetilde{x-y})u_{\zeta_3}(\tilde{0})u_{\zeta_4}(\tilde{0}) \\ =&\frac{1}{4^g} \sum_{\eta=(\omega,h)\in H} \{(\phi+\omega)(2h)(u_{-\zeta_1'+\eta}(\tilde{y})u_{\zeta_2'+\eta}(\tilde{y})u_{\zeta_3'+\eta}(\tilde{x})u_{\zeta_4'+\eta}(\tilde{x}))\} \end{aligned}$$

が成り立つ.

この定理を用いることにより, $x, y \in A$ に対し, $x, y, x-y$ の theta 座標が与えられたとき, $x+y$ の theta 座標が計算できる.

また, この加法を用いることにより, 核の theta 座標が与えられたとき, 同種写像の計算も可能である ([CR15]). 紙面の都合上, その詳細や具体的な計算に関しては省略し, 結果のみ述べる.

定理 2.2. ([CR15, Theorem1.1]) $\ell(\neq 2)$ を標数と異なる素数とし, $K \subseteq A[\ell]$ を Weil paring e_ℓ に関する極大等方部分群とする. このとき, $x \in A$ の theta 座標に対し, その $A \to A/K$ による像の theta 座標が $\tilde{O}(\ell^{\frac{rg}{2}})$ 回の演算で計算可能である. ここで, $\ell \equiv 1 \pmod 4$ のとき $r = 2$, $\ell \equiv 3 \pmod 4$ のとき $r = 4$ である.

3 主結果: B-SIDH に対する攻撃の実装

以上の議論を用いることにより, B-SIDH に対する攻撃を実装することが出来る. 定理 2.2の r の定義から, F の次数 N_A の各素因数の 4 による剰余が計算時間に大きく影響する.

実験は表 1の 4 つの p に対して行なった. これらは論文 [CD23, MMP+23] 以前に B-SIDH に対する最良の攻撃の 1 つであった Meet-in-the-Middle 攻撃 [FJP14, §5.1] に対して, それぞれ, 5 ビット, 10 ビット, 20 ビット, 25 ビットの安全性を持つものである. なお, これらは [Cos20, §5.2] の方法で生成した.

各ビット安全性の B-SIDH に対する攻撃に要した時間を表にした (表 1). ここで, $N_A > N_B$ であり, (N_A, N_A)-同種写像を計算することにより, N_B-同種写像の核の生成元を求めている.

表 1　B-SIDH に対する攻撃の所要時間. p は標数, N_A は与えられる点の位数, N_B は復元する同種写像の次数.

安全性	p	bit	N_A	N_B	時間 [秒]
5bit	104959	16	$3^2 \cdot 7^3 \cdot 17$	2560	436
10bit	202546499	27	$7^2 \cdot 11^2 \cdot 19 \cdot 29 \cdot 31$	4309500	6590
20bit	6257503668239	49	$13 \cdot 17^3 \cdot 19^2 \cdot 41 \cdot 43^2$	1154520972000	38873
25bit	6510321409315018751	62	$5^5 \cdot 7^3 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 53 \cdot 59 \cdot 71 \cdot 79$	4274669342951424	263533

参考文献

[BL04] Christina Birkenhake and Herbert Lange. *Complex abelian varieties*, volume 302 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.

[CD23] Wouter Castryck and Thomas Decru. An efficient key recovery attack on sidh. In *Advances in Cryptology –EUROCRYPT 2023*, pages 423–447, 2023.

[Cos20] Craig Costello. B-SIDH: Supersingular isogeny Diffie-Hellman using twisted torsion. In *Advances in Cryptology – ASIACRYPT 2020, LNSC 12492*, pages 440–463, Cham, 2020.

[CR15] Romian Cosset and Damian Robert. Computing (ℓ, ℓ)-isogenies in polynomial time on jacobians of genus 2 curves. *Mathematics of Computation*, 84(294):1953–1975, 2015.

[FJP14] Luca De Feo, David Jao, and Jérôme Plût. Towards quantum-resistant cryptosystems from supersingular elliptic curve isogenies. *Journal of Mathematical Cryptology*, 8(3):209–247, 2014.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*, volume 52 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 1977.

[Kan97] Ernst Kani. The number of curves of genus two with elliptic differentials. *Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 1997, no. 485*, 148:93–122, 1997.

[LR12] David Lubicz and Damien Robert. Computing isogenies between abelian varieties. *Compositio Mathematica*, 148(5):1483–1515, 2012.

[MMP+23] Luciano Maino, Chloe Martindale, Lorenz Panny, Giacomo Pope, and Benjamin Wesolowski. A direct key recovery attack on sidh. In *Advances in Cryptology – EUROCRYPT 2023*, pages 448–471. Springer Nature Switzerland, 2023.

[Mum66] D. Mumford. On the equations defining abelian varieties. i. *Inventiones mathematicae*, 1(4):287–354, 1966.

[Mum70] David Mumford. Abelian varieties tata institute of fundamental research. 1970.

[Sil86] Joseph H. Silverman. *The arithmetic of elliptic curves*, volume 106 of *Graduate*

Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1986.

ポスターセッション
会場E

乗法群が対称群と同型な skew brace の同型類の数について

お茶の水女子大学　理学部　数学科
新井利沙 (Risa ARAI)

概要

Skew brace とは, 集合 B に $(B,\cdot),(B,\circ)$ が群となる 2 つの二項演算 $\cdot,\circ$ が定義され, brace relation を満たす $(B,\cdot,\circ)$ のことをいう. 同じ位数を持つ有限群 G,N に対して $(B,\circ)\cong G,(B,\cdot)\cong N$ となる skew brace $(B,\cdot,\circ)$ の同型類の数 $b(G,N)$ を考察する. 本稿では, $G=S_n$ として, $b(G,N)$ の計算結果を紹介する.

1　背景

理論物理学に現れた Yang Baxter 方程式の研究において集合論的解がある ([9]). Yang Baxter 方程式の**集合論的解**とは, X が集合で, 写像

$$r : X\times X \longrightarrow X\times X; (x,y)\mapsto (\sigma_x(y),\tau_y(x))$$

が全単射で,

$$(r\times \mathrm{id})(\mathrm{id}\times r)(r\times \mathrm{id}) = (\mathrm{id}\times r)(r\times \mathrm{id})(\mathrm{id}\times r)$$

を満たす組 (X,r) のことである. 各 $x\in X$ に対して, σ_x,τ_x が全単射のとき, 解 (X,r) は**非退化**であるといい, $r^2=\mathrm{id}_{X\times X}$ となるとき解 (X,r) は **involutive** であるという. Involutive な非退化集合論的解を研究するため, Rump [13] は brace という代数的構造を定義した. ここで, Cedó, Jespers, Okniński [8] により定義された left brace の定義を確認する.

定義 1.1. 次のすべてを満たす 2 つの二項演算 $\cdot,\circ$ が定義された集合 $B=(B,\cdot,\circ)$ を **left brace** という.

(a) $(B,\cdot)$ はアーベル群である.
(b) $(B,\circ)$ は群である.
(c) (brace relation) 任意の $a,b,c\in B$ に対して,

$$a\circ(b\cdot c) = (a\circ b)\cdot a^{-1}\cdot(a\circ c)$$

が成り立つ. ここで, a^{-1} はアーベル群 $(B,\cdot)$ における a の逆元である.

この left brace と Rump の brace は同値であることが知られている. 一方, involutive でない非退

化集合論的解も網羅するために Guarnieri, Vendramin [10] が left brace を skew left brace に一般化した.

Skew left brace とは, 定義 1.1(a) がアーベル群に限らず群となり, また (b), (c) も満たす, $(B, \cdot, \circ)$ のことである. 以下, 簡単のため left を省略して, skew brace と呼ぶことにする. Skew brace の分類は, Yang Baxter 方程式の解を構築するために必要な手順の一つであることが知られている.

本稿を通じて, G, N を同じ位数を持つ群とする. $(B, \circ) \cong G, (B, \cdot) \cong N$ となる skew brace の同型類の数を $b(G, N)$ と書くことにする. 様々な G, N について, $b(G, N)$ を計算した先行研究があるので, 紹介する. G, N の位数が squarefree のとき, $b(G, N)$ は [2] により, 計算されている. また, $N = C_2 \times C_2 \times C_4 \times C_4$ のとき $b(G, N)$ の値は [3] によって, そして, $N = C_4 \times C_4 \times C_4$ のとき $b(G, N)$ の値は [4] により計算されている. ただし, C_i は位数 i の巡回群を表す. このように 2 つの群 G, N に対して, $b(G, N)$ の研究が行われている. 本稿では, $b(S_n, N)$ を考える.

2 Skew brace の基本事項

Skew brace は [10] により定義された. 再び skew brace の定義を確認し, 基本事項を紹介する.

定義 2.1. 次のすべてを満たす 2 つの二項演算 $\cdot, \circ$ が定義された集合 $B = (B, \cdot, \circ)$ を **skew brace** という.

(a) $(B, \cdot)$ は群である.
(b) $(B, \circ)$ は群である.
(c) (brace relation) 任意の $a, b, c \in B$ に対して,

$$a \circ (b \cdot c) = (a \circ b) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ c)$$

が成り立つ. ここで, a^{-1} は群 $(B, \cdot)$ における a の逆元である.

また, 群 $(B, \cdot)$ を skew brace B の**加法群**, 群 $(B, \circ)$ を skew brace B の**乗法群**という.

例 2.2. $N = (N, \cdot)$ を群とする. このとき, 二項演算 $\circ$ を, 任意の $g, h \in N$ に対して,

$$g \circ h = g \cdot h$$

と定義すると, $(N, \cdot, \circ)$ は skew brace となる. 実際, $(N, \cdot)$ は群であるから, $(N, \circ)$ も群となる. また任意の $g, h, k \in N$ に対して,

$$g \circ (h \cdot k) = g \cdot (h \cdot k) = g \cdot h \cdot k$$
$$(g \circ h) \cdot g^{-1} \cdot (g \circ k) = (g \cdot h) \cdot g^{-1} \cdot (g \cdot k) = g \cdot h \cdot k$$

より, brace relation が成り立つ.

例 2.3. $N = (N, \cdot)$ を群とする. このとき, 二項演算 $\circ$ を, 任意の $g, h \in N$ に対して,

$$g \circ h = h \cdot g$$

と定義すると, $(N, \cdot, \circ)$ は skew brace となる. 実際, $(N, \cdot)$, $(N, \circ)$ が群になることは明らかであるから, brace relation が成り立つことを確認する. 任意の $g, h, k \in N$ に対して,

$$g \circ (h \cdot k) = (h \cdot k) \cdot g = h \cdot k \cdot g$$
$$(g \circ h) \cdot g^{-1} \cdot (g \circ k) = (h \cdot g) \cdot g^{-1} \cdot (k \cdot g) = h \cdot k \cdot g$$

より, brace relation が成り立つ.

Skew brace に関する基本事項をいくつか確認する.

補題 2.4. $B = (B, \cdot, \circ)$ を skew brace とする. 任意の $a, b \in B$ に対して,

$$(a \circ b)^{-1} = a^{-1} \cdot (a \circ b^{-1}) \cdot a^{-1}$$

が成り立つ.

Proof. $(B, \cdot, \circ)$ は brace relation を満たすから, 任意の $a, b, c \in B$ に対して,

$$a \circ (c \cdot b) = (a \circ c) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ b)$$

が成り立つ. $d = c \cdot b$ とおくと,

$$\begin{aligned} a \circ d &= (a \circ (d \cdot b^{-1})) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ b) \\ &= (a \circ d) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ b^{-1}) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ b). \end{aligned}$$

左から, $a \circ d$ の加法逆元, 右から $a \circ b$ の加法逆元をかけると,

$$(a \circ b)^{-1} = a^{-1} \cdot (a \circ b^{-1}) \cdot a^{-1}$$

となり示された. □

命題 2.5. $B = (B, \cdot, \circ)$ を skew brace とする. このとき, 次が成り立つ.

(a) 加法群の単位元と乗法群の単位元は一致する.
(b) 任意の $a \in B$ に対して, 写像

$$\gamma_a : B \longrightarrow B; b \mapsto a^{-1} \cdot (a \circ b)$$

は群 $(B, \cdot)$ の自己同型である.
(c) 写像

$$\gamma : (B, \circ) \longrightarrow \mathrm{Aut}(B); a \mapsto \gamma_a$$

は群準同型である. ただし, γ_a は (b) の写像とする.

Proof. (a) 乗法群の単位元を $\tilde{1}$, 加法群の単位元を 1 と書くことにする. $(B, \cdot, \circ)$ は skew brace なので, brace relation が成り立って

$$\begin{aligned} 1 \circ \tilde{1} &= 1 \circ (\tilde{1} \cdot 1) \\ &= (1 \circ \tilde{1}) \cdot 1^{-1} \cdot (1 \circ 1) \\ &= (1 \circ \tilde{1})(1 \circ 1) \\ &= 1 \circ 1 \end{aligned}$$

両辺左から, 1 の乗法逆元をかけると, $1 = \tilde{1}$ となり, 乗法群と加法群の単位元は一致する.
(b) 任意の $a, b, c \in B$ に対して,

$$\begin{aligned}\gamma_a(b \cdot c) &= a^{-1} \cdot (a \circ (b \cdot c)) \\ &= a^{-1} \cdot (a \circ b) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ c) \\ &= \gamma_a(b) \cdot \gamma_a(c)\end{aligned}$$

より, γ_a は準同型である. また, $\gamma_a(b) = \gamma_a(c)$ ならば, $a^{-1} \cdot (a \circ b) = a^{-1} \cdot (a \circ c)$ であるから, $b = c$ となり γ_a は単射である. 任意の $c \in B$ に対して, $b = (\bar{a})^{-1} \cdot (\bar{a} \circ c)$ とおけば,

$$\begin{aligned}\gamma_a(b) &= a^{-1} \cdot (a \circ ((\bar{a})^{-1} \cdot (\bar{a} \circ c))) \\ &= a^{-1} \cdot ((a \circ (\bar{a})^{-1}) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ \bar{a} \circ c)) \\ &= a^{-1} \cdot (a \circ (\bar{a})^{-1}) \cdot a^{-1} \cdot c \\ &= (a \circ \bar{a})^{-1} \cdot c \qquad \text{(補題 2.4 より)} \\ &= c\end{aligned}$$

となり, γ_a は全射である. ただし, $\bar{a}$ は a の乗法逆元を表すものとする. よって, 示された.
(c) 任意の $a, b, c \in B$ に対して,

$$\gamma(a \circ b)(c) = \gamma_{a \circ b}(c) = (a \circ b)^{-1} \cdot ((a \circ b) \circ c) = (a \circ b)^{-1} \cdot (a \circ b \circ c)$$

であり,

$$\begin{aligned}(\gamma(a)\gamma(b))(c) &= \gamma_a(b^{-1} \cdot (b \circ c)) \\ &= a^{-1} \cdot (a \circ (b^{-1} \cdot (b \circ c))) \\ &= a^{-1} \cdot ((a \circ b^{-1}) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ b \circ c)) \\ &= a^{-1} \cdot (a \circ b^{-1}) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ b \circ c) \\ &= (a \circ b)^{-1} \cdot (a \circ b \circ c) \qquad \text{(補題 2.4 より)}\end{aligned}$$

となり, $\gamma(a \circ b) = \gamma(a)\gamma(b)$ が示せた. □

次に, skew brace の同型を定義する.

定義 2.6. $B_1 = (B_1, \cdot_1, \circ_1)$, $B_2 = (B_2, \cdot_2, \circ_2)$ を skew brace とする. このとき, 写像 $\psi : B_1 \longrightarrow B_2$ が, 任意の $a, b \in B_1$ に対して,

$$\begin{aligned}\psi(a \cdot_1 b) &= \psi(a) \cdot_2 \psi(b) \\ \psi(a \circ_1 b) &= \psi(a) \circ_2 \psi(b)\end{aligned}$$

を満たすとき, 写像 ψ を**準同型**, この写像が全単射でもあるとき, 写像 ψ は**同型**という. B_1 から B_2 への同型写像が存在するとき, B_1, B_2 は**同型である**といい, $B_1 \cong B_2$ とかく.

3 Holomorph の正則部分群

以下, $\mathrm{Perm}(N)$ を N の対称群, $\mathrm{Inn}(N)$ を N の内部自己同型群, $Z(N)$ を N の中心とする. また, 任意の $g \in N$ に対して, $C(g)$ は, $C(g) : N \longrightarrow N; n \mapsto gng^{-1}$ を表すとする.

$$\rho : N \longrightarrow \mathrm{Perm}(N); g \mapsto (x \mapsto xg^{-1}),$$
$$\lambda : N \longrightarrow \mathrm{Perm}(N); g \mapsto (x \mapsto gx)$$

とする. また, N の **holomorph** を,

$$\mathrm{Hol}(N) = \rho(N) \rtimes \mathrm{Aut}(N)$$

と定義する. 本節では, holomorph の正則部分群と skew brace の関係および holomorph の正則部分群の作り方について考える. 定理 3.5, 命題 3.7 で述べるが, 群 N の holomorph $\mathrm{Hol}(N)$ の G と同型な正則部分群を計算し, $\mathrm{Aut}(N)$ によるそれらの共役類を調べることにより, $b(G, N)$ が求められる.

3.1 Holomorph の正則部分群と skew brace の関係

まず, 群作用が正則であることの定義を確認する.

定義 3.1. H を群, $X \neq \emptyset$ を集合とする. $H \times X \longrightarrow X; (\sigma, x) \mapsto \sigma \cdot x$ を左群作用とする. この作用が,

- (推移的) 任意の $x, y \in X$ に対して $\sigma \in H$ が存在して $y = \sigma \cdot x$
- (自由) 任意の $x \in X, \sigma_1, \sigma_2 \in H$ に対して $\sigma_1 \cdot x = \sigma_2 \cdot x$ ならば $\sigma_1 = \sigma_2$

をともに満たすとき, この作用は**正則**であるという.

注意 3.2. H の集合 X への左群作用が推移的であることと, $x_0 \in X$ を固定し, 任意の $y \in X$ に対して, $\sigma \in H$ が存在して $\sigma \cdot x_0 = y$ が成り立つことは同値である. また H の集合 X への左群作用が自由であることと, 任意の $x \in X, \sigma \in H$ に対して, $\sigma \cdot x = x$ ならば $\sigma = 1$ であることは同値である.

命題 3.3. H を $\mathrm{Perm}(N)$ の部分群とすると, $H \times N \longrightarrow N; (\sigma, g) \mapsto \sigma(g)$ は左群作用である. このとき, 次の (a), (b) は同値である.

(a) この作用が正則である.
(b) 写像 $\xi_H : H \longrightarrow N; \sigma \mapsto \sigma(1)$ が全単射である.

これらが成り立つとき, H を**正則部分群**という.

Proof (a)$\Longrightarrow$(b). $\xi_H(\sigma) = \xi_H(\sigma')$ ならば $\sigma(1) = \sigma'(1)$ である. 作用は自由であるから, $\sigma = \sigma'$ となる. よって, 写像 ξ_H は単射である. 考えている作用は推移的なので, 任意の $g \in N$ に対して, $(\sigma, 1) \mapsto \sigma(1) = g$ となる $\sigma \in H$ が存在する. よって, 写像 ξ_H は全射である. □

Proof (b)$\Longrightarrow$(a). ξ_H は全射であるから, 任意の $g \in N$ に対して, $\sigma(1) = \xi_H(\sigma) = g$ となる $\sigma \in H$ が存在する. よって作用が推移的であることが示せた. また, 任意の $g \in N, \sigma \in H$ に対して,

$\sigma(g) = g$ と仮定する. ξ_H は全単射だから, $\sigma' \in H$ が存在して, $g = \xi_H(\sigma') = \sigma'(1)$ である. よって, 仮定から, $\sigma(\sigma'(1)) = \sigma'(1)$ が成り立つ. $\sigma(\sigma'(1)) = (\sigma\sigma')(1)$ であるから, $\sigma(g) = g$ ならば, $\xi_H(\sigma\sigma') = \xi_H(\sigma')$ であることがわかる. 写像 ξ_H は単射であるから, $\sigma\sigma' = \sigma'$ となり, $\sigma = 1$ とわかる. よってこの群作用は自由である. □

例 3.4. $\rho(N)$, $\lambda(N)$ は $\mathrm{Perm}(N)$ の正則部分群である. これは, 写像

$$\xi_{\rho(N)} : \rho(N) \longrightarrow N; \rho(g) \mapsto \rho(g)(1) = g^{-1},$$
$$\xi_{\lambda(N)} : \lambda(N) \longrightarrow N; \lambda(g) \mapsto \lambda(g)(1) = g$$

は全単射であることからしたがう.

$\mathrm{Hol}(N)$ の正則部分群と, skew brace は密接に関わっている. [10, Theorem 4.2] より次のことがわかる.

定理 3.5. 群 $N = (N, \cdot)$ の holomorph $\mathrm{Hol}(N)$ の正則部分群と, $(N, \cdot, \circ)$ が skew brace となる二項演算 $\circ$ は一対一対応する. $\mathrm{Hol}(N)$ の正則部分群 R を, $\{\gamma_g\}_{g\in N} \subseteq \mathrm{Aut}(N)$ を用いて $R = \{\rho(g)\gamma_g \mid g \in N\}$ と表したとき, R は N 上の二項演算

$$g \circ h = g \cdot \gamma_g(h)$$

と対応し, R は, 対応する二項演算 $\circ$ のなす群 $(N, \circ)$ と同型である.

例 3.6. 正則部分群 $\rho(N)$ に対応する二項演算は例 2.2 の演算である.
実際, $\rho(N) = \{\rho(g)\mathrm{id} \mid g \in N\}$ であるから, 任意の $g, h \in N$ に対して,

$$g \circ h = g \cdot \mathrm{id}(h) = g \cdot h$$

である.
正則部分群 $\lambda(N)$ に対応する二項演算は例 2.3 の演算である.
実際, $\lambda(N) = \{\lambda(g)\mathrm{id} \mid g \in N\} = \{\rho(g)C(g^{-1}) \mid g \in N\}$ であるから, 任意の $g, h \in N$ に対して,

$$g \circ h = g \cdot C(g^{-1})(h) = g \cdot g^{-1} \cdot h \cdot g = h \cdot g$$

である.

次に, この $\mathrm{Hol}(N)$ の正則部分群を用いて, skew brace の同型を表す ([10, Proposition 4.3]).

命題 3.7. $\mathrm{Hol}(N)$ の正則部分群 R_1, R_2 に対して, 対応する二項演算を $\circ_1, \circ_2$ とする. このとき,

$$(N, \cdot, \circ_1) \cong (N, \cdot, \circ_2) \Longleftrightarrow \exists \psi \in \mathrm{Aut}(N) \text{ s.t. } \psi R_1 \psi^{-1} = R_2.$$

定理 3.5, 命題 3.7 より, $b(G, N)$ を調べるために, $\mathrm{Hol}(N)$ の G と同型な正則部分群の数を調べ, それらの $\mathrm{Aut}(N)$ による共役類を考えればよい. 次の第 3.2 節では $\mathrm{Hol}(N)$ の正則部分群の作り方を紹介する.

3.2 $\mathrm{Hol}(N)$ の正則部分群の作り方

以下, G, N は有限群とする. 本節では, 交差準同型と fixed point free pair により $\mathrm{Hol}(N)$ の正則部分群を作る方法を紹介する. まず, 交差準同型を用いて $\mathrm{Hol}(N)$ の正則部分群を作る. はじめに交差準同型の定義を確認する.

定義 3.8. 準同型 $\mathfrak{f} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ が与えられたとき, $\mathfrak{g} : G \longrightarrow N$ が任意の $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ に対して,

$$\mathfrak{g}(\sigma_1\sigma_2) = \mathfrak{g}(\sigma_1) \cdot \mathfrak{f}(\sigma_1)(\mathfrak{g}(\sigma_2))$$

を満たすとき, 写像 $\mathfrak{g}$ を $\mathfrak{f}$ **に関する交差準同型**という.

準同型 $\mathfrak{f} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ に関する交差準同型 $\mathfrak{g} : G \longrightarrow N$ について, $\mathfrak{g}(1) = 1$ である. 実際,

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(1) &= \mathfrak{g}(1) \cdot \mathfrak{f}(1)(\mathfrak{g}(1)) \\ &= \mathfrak{g}(1) \cdot \mathrm{id}(\mathfrak{g}(1)) \\ &= \mathfrak{g}(1) \cdot \mathfrak{g}(1)\end{aligned}$$

よって, $\mathfrak{g}(1) = 1$ である. このことから, 交差準同型は準同型であるとは限らないが, 準同型と同じように単位元を保つことがわかる.

準同型 $\mathfrak{f} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$ と, この $\mathfrak{f}$ に関する全単射交差準同型 $\mathfrak{g} : G \longrightarrow N$ が与えられたとき,

$$R_{(\mathfrak{f},\mathfrak{g})}(G) = \{\rho(\mathfrak{g}(\sigma))\mathfrak{f}(\sigma) \mid \sigma \in G\} \tag{1}$$

は $\mathrm{Hol}(N)$ の G と同型な正則部分群である. また, $\mathrm{Hol}(N)$ の G と同型なすべての正則部分群はこのように作ることができる ([12, Proposition 2.1]).

また, fixed point free pair で正則部分群を作ることができる. まずは fixed point free pair の定義を確認する ([6]).

定義 3.9. $f, g : G \longrightarrow N$ を準同型とする. $f(\sigma) = g(\sigma)$ が成り立つならば, $\sigma = 1$ であるとき, (f, g) を **fixed point free pair** という. (以下, fixed point free pair を fpf pair とかくことにする.)

$f, g : G \longrightarrow N$ を準同型とする. (f, g) が fpf pair であるとき,

$$R_{(f,g)}(G) = \{\rho(g(\sigma))\lambda(f(\sigma)) \mid \sigma \in G\} \tag{2}$$

は $\mathrm{Hol}(N)$ の G と同型な正則部分群である ([6]). また,

$$\begin{aligned}R_{(f,g)}(G) &= \{\rho(g(\sigma))\lambda(f(\sigma)) \mid \sigma \in G\} \\ &= \{\rho(g(\sigma)f(\sigma)^{-1})\rho(f(\sigma))\lambda(f(\sigma)) \mid \sigma \in G\} \\ &= \{\rho(g(\sigma)f(\sigma)^{-1})C(f(\sigma)) \mid \sigma \in G\}\end{aligned}$$

とかける. ここで,

$$\begin{aligned}&\mathfrak{f} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(N); \sigma \mapsto C(f(\sigma)) \\ &\mathfrak{g} : G \longrightarrow N; \sigma \mapsto g(\sigma)f(\sigma)^{-1}\end{aligned}$$

とおくと, $\mathfrak{f}$ は明らかに準同型であり, $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{f}$ に関する全単射な交差準同型である ([12]). 実際, $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{f}$ に関する交差準同型であることについて, 任意の $\sigma, \sigma' \in G$ に対して,

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}(\sigma\sigma') &= g(\sigma\sigma') \cdot f(\sigma\sigma')^{-1} \\ &= g(\sigma) \cdot g(\sigma') \cdot f(\sigma')^{-1} \cdot f(\sigma)^{-1} \\ &= g(\sigma) \cdot f(\sigma)^{-1} \cdot f(\sigma) \cdot g(\sigma') \cdot f(\sigma')^{-1} \cdot f(\sigma)^{-1} \\ &= \mathfrak{g}(\sigma) \cdot C(f(\sigma))(\mathfrak{g}(\sigma'))\end{aligned}$$

となり, したがう. $\mathfrak{g}$ が全単射であることについて, $\mathfrak{g}(\sigma) = \mathfrak{g}(\sigma')$ であるとすると, $g(\sigma) \cdot f(\sigma)^{-1} = g(\sigma') \cdot f(\sigma')^{-1}$ であり, $g(\sigma'^{-1}\sigma) = f(\sigma'^{-1}\sigma)$ と変形できる. (f, g) は fpf pair であるから, $\sigma'^{-1}\sigma = 1$ となり, $\sigma = \sigma'$ がいえた. よって, $\mathfrak{g}$ は単射である. G, N は有限群で, 同じ位数を持つので, 全射もしたがう. よって, $\mathfrak{g}$ は全単射で $\mathfrak{f}$ に関する交差準同型である. $R_{(f,g)}(G) = R_{(\mathfrak{f},\mathfrak{g})}(G)$ となるから, 式 (2) の作り方が式 (1) の作り方の一例となることがわかる.

さらに, $Z(N) = \{1\}$ のとき, 式 (1) において $\mathfrak{f}$ の像が $\mathrm{Inn}(N)$ に含まれているならば, 対応する正則部分群は式 (2) の作り方でも作ることができる. 実際, $\mathfrak{f}$ は準同型 $f : G \longrightarrow N$ を用いて,

$$\mathfrak{f} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(N); \sigma \mapsto C(f(\sigma))$$

とかけ,

$$\begin{aligned}R_{(\mathfrak{f},\mathfrak{g})}(G) &= \{\rho(\mathfrak{g}(\sigma))\mathfrak{f}(\sigma) \mid \sigma \in G\} \\ &= \{\rho(\mathfrak{g}(\sigma))C(f(\sigma)) \mid \sigma \in G\} \\ &= \{\rho(\mathfrak{g}(\sigma) \cdot f(\sigma))\rho(f(\sigma)^{-1})\rho(f(\sigma))\lambda(f(\sigma)) \mid \sigma \in G\} \\ &= \{\rho(\mathfrak{g}(\sigma) \cdot f(\sigma))\lambda(f(\sigma)) \mid \sigma \in G\}\end{aligned}$$

とかける. ここで,

$$g : G \longrightarrow N; \sigma \mapsto \mathfrak{g}(\sigma) \cdot f(\sigma)$$

とおくと, $g : G \longrightarrow N$ も準同型で, (f, g) は fpf pair である ([12]). 実際,

$$\begin{aligned}g(\sigma\sigma') &= \mathfrak{g}(\sigma\sigma') \cdot f(\sigma\sigma') \\ &= \mathfrak{g}(\sigma) \cdot C(f(\sigma))(\mathfrak{g}(\sigma')) \cdot f(\sigma) \cdot f(\sigma') \\ &= \mathfrak{g}(\sigma) \cdot f(\sigma) \cdot \mathfrak{g}(\sigma') \cdot f(\sigma)^{-1} \cdot f(\sigma) \cdot f(\sigma') \\ &= \mathfrak{g}(\sigma) \cdot f(\sigma) \cdot \mathfrak{g}(\sigma') \cdot f(\sigma') \\ &= g(\sigma) \cdot g(\sigma')\end{aligned}$$

より, g は準同型である. また, $\sigma \in G$ に対して, $g(\sigma) = f(\sigma)$ ならば, $\mathfrak{g}(\sigma) \cdot f(\sigma) = f(\sigma)$ となり, $\mathfrak{g}(\sigma) = 1$ である. ここで, $\mathfrak{g}(1) = 1$ であり, $\mathfrak{g}$ は単射であるから, $\sigma = 1$ である. よって, (f, g) は fpf pair である. したがって, $R_{(\mathfrak{f},\mathfrak{g})}(G) = R_{(f,g)}(G)$ となるから $R_{(\mathfrak{f},\mathfrak{g})}(G)$ は式 (2) の作り方でも作ることができることがわかる. 特に, $Z(N) = \{1\}$ かつ $\mathrm{Aut}(N) = \mathrm{Inn}(N)$ のとき, $\mathrm{Hol}(N)$ の G と同型な正則部分群は式 (2) の作り方でも作ることができることがわかった ([6], [7]). しかし, N の中心が自明でないとき $\mathrm{Hol}(N)$ のすべての G と同型な正則部分群は式 (2) の作り方で作ることができるとは限らない.

また異なる fpf pair から作られる $\mathrm{Hol}(N)$ の正則部分群が一致する可能性がある. 式 (2) の作り方により作られた, 一致する $\mathrm{Hol}(N)$ の正則部分群について, 次が成り立つ.

命題 3.10. $f, f', g, g' : G \longrightarrow N$ は準同型で, $(f, g), (f', g')$ は fpf pair とする. $Z(N) = \{1\}$ のとき, $\mathrm{Hol}(N)$ の正則部分群 $R_{(f,g)}(G), R_{(f',g')}(G)$ に対して,

$$R_{(f,g)}(G) = R_{(f',g')}(G) \Longleftrightarrow \exists \pi \in \mathrm{Aut}(G) \text{ s.t. } (f, g) = (f' \circ \pi, g' \circ \pi).$$

このように対応する正則部分群が一致する fpf pair は同一視することができる.

4 主定理

$G = S_n$, N を G と同じ位数を持つ群とする. このとき,

$$(B, \circ) \cong G, \ \ (B, \cdot) \cong N$$

となる skew brace $(B, \cdot, \circ)$ の同型類の数 $b(G, N)$ について筆者は考察した. 定理 3.5 より, $\mathrm{Hol}(N)$ の G と同型な正則部分群が存在しない N について, $b(G, N)$ は 0 である. [11] より, $\mathrm{Hol}(N)$ の G と同型な正則部分群が存在するような N は,

$$\begin{aligned}
n = 1, 2 \text{ のとき } & N \cong S_n \\
n = 3 \text{ のとき } & N \cong S_3, \ C_6 \\
n = 4 \text{ のとき } & N \cong S_4, \ A_4 \times C_2, \ S_3 \times C_2 \times C_2, \ C_6 \times C_2 \times C_2 \\
n \geq 5, n \neq 6 \text{ のとき } & N \cong S_n, \ A_n \times C_2 \\
n = 6 \text{ のとき } & N \cong S_6, \ A_6 \times C_2, \ M_{10}
\end{aligned}$$

ただし, C_i は位数 i の巡回群, M_{10} は 10 次のマシュー群を表すとする. 次のことを明らかにした.

定理 4.1.

(1) $n = 1, 2$ のとき

$$b(S_n, S_n) = 1.$$

(2) $n = 3$ のとき

$$b(S_3, S_3) = 2, \ \ b(S_3, C_6) = 1.$$

(3) $n = 4$ のとき

$$b(S_4, S_4) = 4, \ \ b(S_4, A_4 \times C_2) = 4, \ \ b(S_4, S_3 \times C_2 \times C_2) = 4, \ \ b(S_4, C_6 \times C_2 \times C_2) = 3.$$

(4) $n \geq 5, n \neq 6$ のとき

$$b(S_n, S_n) = 2\left(1 + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor\right), \quad b(S_n, A_n \times C_2) = 2\left(1 + \left\lfloor \frac{n-2}{4} \right\rfloor\right).$$

(5) $n = 6$ のとき

$$b(S_6, S_6) = 4, \quad b(S_6, A_6 \times C_2) = 2, \quad b(S_6, M_{10}) = 2.$$

注意 4.2. (2) は [1] の結果である. (3) から (5) について, $b(S_n, S_n)$ $(n \geq 4)$, $b(S_n, A_n \times C_2)$ $(n \geq 5)$ の場合を除き, 数式処理システム Magma [5] を用いて計算した. Magma を用いていない場合について, 第 3 節の内容や [7] を元に, $n \geq 3$ のとき, $Z(S_n) = \{1\}$ であること, そして, $n \neq 6$ のとき, $\mathrm{Aut}(S_n) = \mathrm{Inn}(S_n)$ であることを用いて考察した.

5 今後について

今後, 数式処理システム Magma を用いて計算した部分について, 新たに Hol(N) の正則部分群の構成方法を考えることによりすべての場合について $b(S_n, N)$ を理論値として求めたい.

本稿の執筆および研究を進めるにあたり, Cindy Tsang 助教にご指導を賜りました. 感謝申し上げます.

参考文献

[1] Acri, E.; Bonatto, M. Skew braces of size pq. Comm. Algebra 48 (2020), no. 5, 1872–1881. MR4085764

[2] Alabdali, Ali A.; Byott, Nigel P. Skew braces of squarefree order. J. Algebra Appl. 20 (2021), no. 7, Paper No. 2150128, 21 pp. MR4269712

[3] Ballester-Bolinches, A.; Esteban-Romero, R.; Pérez-Calabuig, V. Enumeration of left braces with additive group $C_2 \times C_2 \times C_4 \times C_4$. Ric. Math., in press.

[4] Ballester-Bolinches, A.; Esteban-Romero, R.; Pérez-Calabuig, V. Enumeration of left braces with additive group $C_4 \times C_4 \times C_4$. Math. Comp. 93 (2024), no. 346, 911–919. MR4678589

[5] Bosma, Wieb; Cannon, John; Playoust, Catherine. The Magma algebra system. I. The user language. Computational algebra and number theory (London, 1993). J. Symbolic Comput. 24 (1997), no. 3-4, 235–265. MR1484478

[6] Byott, Nigel P.; Childs, Lindsay N. Fixed-point free pairs of homomorphisms and nonabelian Hopf-Galois structures. New York J. Math. 18 (2012), 707–731. MR2991421

[7] Carnahan, Scott; Childs, Lindsay. Counting Hopf Galois structures on non-abelian Galois field extensions. J. Algebra 218 (1999), no. 1, 81–92. MR1704676

[8] Cedó, Ferran; Jespers, Eric; Okniński, Jan. Braces and the Yang-Baxter equation. Comm. Math. Phys. 327 (2014), no. 1, 101–116. MR3177933

[9] Drinfeld, V. G. On some unsolved problems in quantum group theory. Quantum groups (Leningrad, 1990), 1–8, Lecture Notes in Math., 1510, Springer, Berlin, 1992. MR1183474

[10] Guarnieri, L.; Vendramin, L. Skew braces and the Yang-Baxter equation. Math. Comp. 86 (2017), no. 307, 2519–2534. MR3647970

[11] Tsang, Cindy. Hopf-Galois structures on a Galois S_n-extension. J. Algebra 531 (2019), 349–360. MR3953015

[12] Tsang, Cindy. Non-existence of Hopf-Galois structures and bijective crossed homomorphisms. J. Pure Appl. Algebra 223 (2019), no. 7, 2804–2821. MR3912948

[13] Rump, Wolfgang. Braces, radical rings, and the quantum Yang-Baxter equation. J. Algebra 307 (2007), no. 1, 153–170. MR2278047

定曲率を持つ多面体

九州大学　大学院数理学府　数理学専攻
久川創人 (Soto HISAKAWA) *

概要

$\mathbb{R}^3$ にはめ込まれた閉曲面について, ガウス曲率が一定値であるものは向き付け可能で種数が 0 であるものしか存在しない. 一方同じ二次元閉多様体である多面体には, ガウス曲率に相当する概念として各頂点での不足角が存在し, 向き付け可能であるものに対しては任意の種数で不足角が一定値である多面体が存在することが河井 (2022) らによって証明された. 本講演では向き付け不可能な任意の種数の多面体について, 具体的に構成することで不足角が一定値であるものが存在することを示す.

1　導入

閉曲面のガウス曲率における離散的なアナロジーとして, 多面体の不足角を考える. 不足角は多面体 P の各頂点 $v \in V$ において定義される実数である. 頂点 v に集まっている角度の和を σ_v とすると, 頂点 v の不足角 δ_v は 2π からの σ_v の不足, つまり以下によって定義される.

$$\delta_v := 2\pi - \sigma_v \tag{1}$$

また, 大域的な性質として, 多面体 P のオイラー標数 $\chi(P)$ についてデカルトの不足角定理

$$\sum_{v \in V} \delta_v := 2\pi\chi(P) \tag{2}$$

が成立する [1].

一方, 多面体と同じ二次元閉多様体である $\mathbb{R}^3$ にはめ込まれた閉曲面 S についてみる. ガウス曲率 K は各点において, 法曲率の最小値と最大値の積として定義される実数である. そして, 多面体の不足角におけるデカルトの不足角定理と同様に大域的な性質として, 閉曲面 S のオイラー標数 $\chi(S)$ についてガウス・ボンネの定理

$$\iint K d\mu = 2\pi\chi(S) \tag{3}$$

が成立する. (μ は面積要素)

任意の二次元閉多様体は球 S^2, トーラス T^2, 射影平面 RP^2 を用いて位相的に以下のようにに分類できる [2].

$$\begin{cases} S^2 \# T_1^2 \# \cdots \# T_g^2 & (g \geq 0) \\ RP_1^2 \# RP_2^2 \# \cdots \# RP_g^2 & (g \geq 1) \end{cases} \tag{4}$$

* E-mail:hisakawa.souto@gmail.com

g を二次元閉多様体の種数とする．ここで, 2 つの二次元閉多様体 M, N の連結和に対し,

$$\chi(M\#N) = \begin{cases} \chi(M) + \chi(N) - 2 & (M \neq N) \\ \chi(M) - 2 & (M = N) \end{cases} \tag{5}$$

$$M\#N \text{ が向き付け可能} \Leftrightarrow M \text{ と } N \text{ が共に向き付け可能} \tag{6}$$

である．そのため,

$$\chi(M) = \begin{cases} 2 - 2g & (\text{向き付け可能}) \ (g \geq 0) \\ 2 - g & (\text{向き付け不可能}) \ (g \geq 1) \end{cases} \tag{7}$$

となる．この分類に対し, ガウス曲率が一定値である $\mathbb{R}^3$ にはめ込まれた閉曲面においては向き付け可能で種数が 0 であるものしか存在しない．なぜなら, 閉曲面上の最も原点から遠い点ではガウス曲率が正になるが, オイラー標数が 1 以下の場合には必ずガウス曲率が負になる点が存在するためである．

ところで, 多面体における各頂点の不足角が一定値である多面体を閉曲面のアナロジーとして, 定曲率多面体と呼ぶ．すると, 正多面体や半正多面体等によって, 向きづけ可能で種数が 0 である定曲率多面体が存在するだけでなく, Henry Segerman の Hinged Flat Torus[3] や, Octamioctahedron[4] 等 (図 1) によって, 向き付け可能で種数が 1 である定曲率多面体が知られており, 閉曲面におけるガウス曲率とは結果が異なる．さらに, 向き付け可能な多面体に対しては, 河井によって 2 以上の任意の種数に対して, 定曲率多面体が構成された (図 2)[5]．これにより, 向き付け可能な任意の種数に対して, 定曲率多面体の存在が示された．一方, 向き付け不可能である多面体については, $1, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 20, 30, 58$ 等の断片的な種数に対して, 定曲率多面体が知られている (図 3).

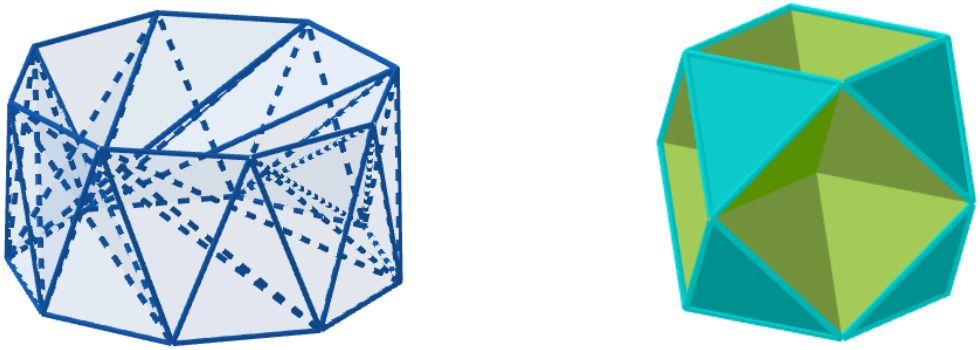


図 1　向き付け可能で種数が 1 である定曲率多面体の例 [6],[4]

そこで, 本講演では向き付け不可能な多面体に対して, 任意の種数で多面体を構成することにより, その存在性を示す．さらに未解決の問題である, 向き付け可否の両方において各種数に対する定曲率多面体の最小頂点数について, 現状を紹介する.

作成した多面体は私の geogebra のページ https://www.geogebra.org/u/hisakawa にて公開している．また, 本研究に際し指導教員の鍛冶静雄教授には研究の進め方や論文執筆等, 多大なご指導, ご助言を賜りました．深く感謝いたします．研究室や事務の方をはじめとする, お世話になりました大学関係者の方にもこの場をお借りして深くお礼申し上げます.

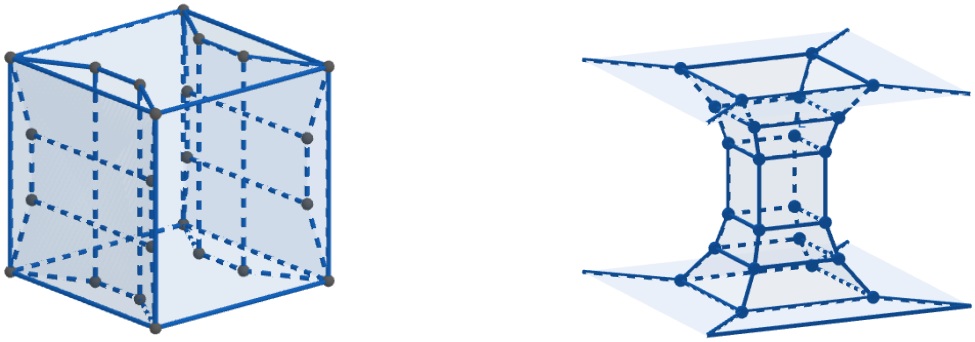


図 2　向き付け可能で種数が 2 である定曲率多面体 (左), 右の穴を開けることで, 定曲率を保ったまま 2 以上の任意の種数の多面体を構成できる [5]

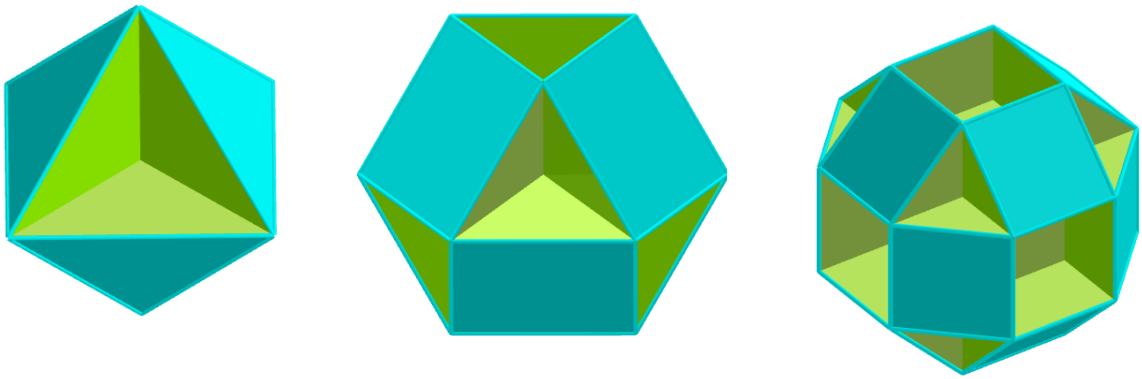


図 3　向き付け不可能である定曲率多面体の例. 左から順に, Tetrahemihexahedron(射影平面), Cubohemioctahedron, Rhombihexahedron. 青の面を 3 つだけ通る帯はメビウスの帯となる [4]

主結果

向き付け不可能な任意の種数について, 定曲率多面体を構成した. そのため以下の定理が成立する.

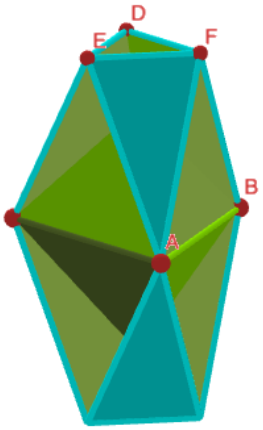
定理：
向き付けの可否によらず任意の種数について, 定曲率多面体が存在する.

2　向き付け不可能である定曲率多面体

存在するか不明であったものは, 種数が 2, 4 以上の一般の偶数, 3 以上の任意の奇数であるものであったため, それらに対し定曲率多面体を構成した.

2.1　種数が偶数である定曲率多面体

まず, 種数が 2 で不足角が一定値である多面体として, 図 4 を構成した. この多面体は 2 つの射影平面 RP_1^2, RP_2^2 の連結和 $RP_1^2 \# PR_2^2$ を取ることで, 向き付け不可能性と種数 2 を実現し, さらに 2 つのパラメータ r, h を調整することで各点での不足角を 0 にしている.



$$A = (-1, 0, 0)\,,\ B = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$$C = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), D = (r, 0, h)$$

$$E = \left(-\frac{1}{2}r, \frac{\sqrt{3}}{2}r, h\right)$$

$$F = \left(-\frac{1}{2}r, -\frac{\sqrt{3}}{2}r, h\right)$$

$$r = \frac{1}{2},\ h = \frac{1}{2}\sqrt{3(1+\sqrt{3})}$$

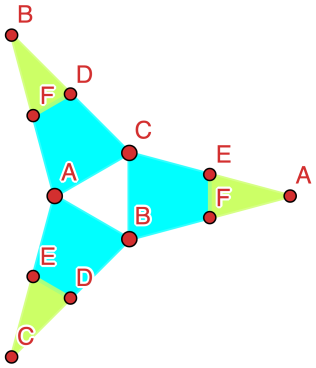


図 4　向き付け不可能で種数が 2 である定曲率多面体 (不足角 0)

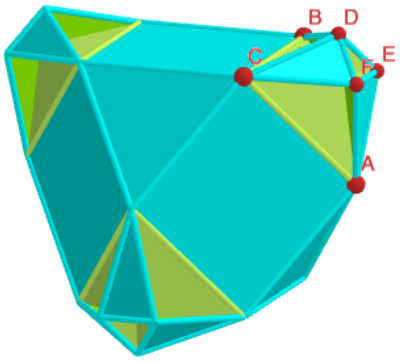
次に, 立方八面体 S^2 に 4 つの射影平面 $RP_1^2, RP_2^2, RP_3^2, RP_4^2$ の連結和 $S^2 \# RP_1^2 \# RP_2^2 \# RP_3^2 \# RP_4^2$ をとることで, 図 5 の向き付け不可能, 種数が 4 である定曲率多面体を構成した. 一般に多面体 P に対して 1 つの穴を開けることは, 穴の部分に相当する多面体を S'^2 とすると, $(P \# S') \# (P \# S')$ となる. そのため, $\chi((P \# S') \# (P \# S')) = \chi(P) - 2$ より, 多面体 P に穴を開けると, 種数 P と向きづけ可能性が一致し, オイラー標数が -2 となる多面体を構成することができる. また, 図 5 の各頂点の不足角は $-\frac{\pi}{6}$ であるため, 図 7 の多面体に正十二各柱状の穴を開けることで, 向きづけ不可能で 4 以上の任意の偶数の種数の定曲率多面体を構成した.

2.2　種数が 3 以上の奇数である定曲率多面体

種数が 3 の多面体を構成するにあたって, S^2 と同相な台形状の多面体と 3 つの射影平面の連結和を取ることで, 図 6 を作成した. この多面体は, 各頂点の不足角が $-\frac{\pi}{9}$ であるため, 正十八角柱状の穴を平行な 2 面に対して開けることで, 任意の 3 以上の奇数の種数に対する定曲率多面体を構成した.

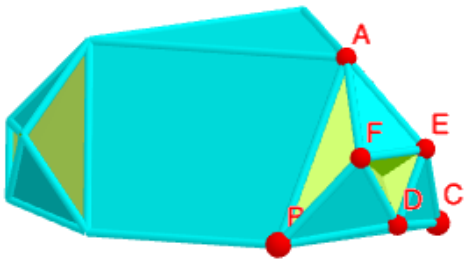
3　最小頂点数での定曲率多面体の実現

向き付けの可否と各種数における定曲率多面体について, 最小の頂点数が何であるかはまだ未解決な問題である. この問題に対して, 現状判明している定曲率多面体の頂点数の最小値を提示する.



$$A = \left(\sqrt{3}, 0, 0\right),\ B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right),$$
$$C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$
$$D = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}r + \sqrt{\frac{2}{3}}h + \frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, \sqrt{\frac{2}{3}}r + \frac{1}{\sqrt{3}}h + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$
$$E = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}r + \sqrt{\frac{2}{3}}h + \frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}r, -\frac{1}{\sqrt{6}}r + \frac{1}{\sqrt{3}}h + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$
$$F = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}r + \sqrt{\frac{2}{3}}h + \frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}r, -\frac{1}{\sqrt{6}}r + \frac{1}{\sqrt{3}}h + \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$
$$r = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$$
$$h = \sqrt{\frac{1}{2}(5 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6})}$$

図 5　向き付け不可能で種数が 4 である定曲率多面体 (不足角 $-\frac{\pi}{6}$)



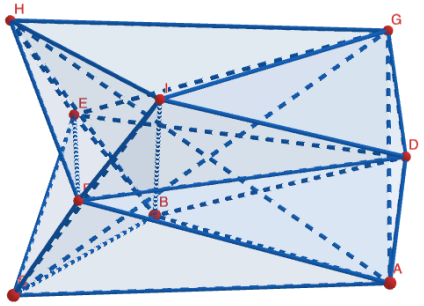
$$A = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} - h'^2}, 0, h'\right),\ B = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),\ C = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$
$$D = \left(\frac{3}{2} + (r - \frac{1}{2})\sqrt{1 - \frac{4}{9}h'^2} + \frac{2}{3}hh', 0, (r - \frac{1}{2})(-\frac{2}{3}h') + h\sqrt{1 - \frac{4}{9}h'^2}\right)$$
$$E = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(r+1)\sqrt{1 - \frac{4}{9}h'^2} + \frac{2}{3}hh', \frac{\sqrt{3}}{2}r, -\frac{1}{2}(r+1)(-\frac{2}{3}h') + h\sqrt{1 - \frac{4}{9}h'^2}\right)$$
$$F = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}(r+1)\sqrt{1 - \frac{4}{9}h'^2} + \frac{2}{3}hh', -\frac{\sqrt{3}}{2}r, -\frac{1}{2}(r+1)(-\frac{2}{3}h') + h\sqrt{1 - \frac{4}{9}h'^2}\right)$$
$$r = \frac{2\sin(\frac{\pi}{9})}{1 + 2\sin(\frac{\pi}{9})}$$
$$h' = \sqrt{2(-2\sin(\frac{\pi}{18})^2 + \sin(\frac{\pi}{18}) + 1)}$$
$$h = \frac{\sqrt{2(-2\sin(\frac{\pi}{9})^2 + \sin(\frac{\pi}{9}) + 1)}}{2\sin(\frac{\pi}{9}) + 1}$$

図 6　向き付け不可能で種数が 3 である定曲率多面体 (不足角 $-\frac{\pi}{9}$)

3.1　向け付け可能な定曲率多面体に対する頂点数

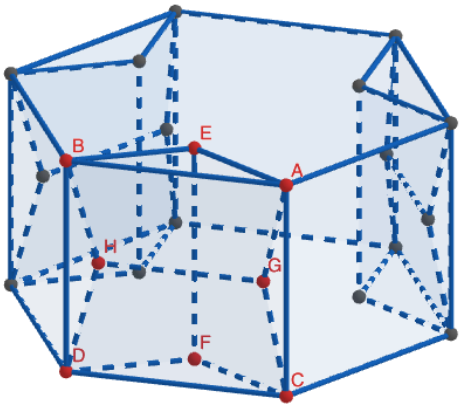
種数 0 に対する定曲率多面体の最小頂点数は正四面体の 4 である. 種数 1 に対して, 頂点数 9 の図 7 を構成した. これは, 坪井の構成した多面体 [6] を変形したものである. 種数 2 に対して, 頂点数 24 である河井の結果 2 に対し, 変形を行うことで頂点数 16 の定曲率多面体を構成した. これは各頂点の不足角が $-\frac{\pi}{8}$ であるため, 種数を増やすために 2 つの平行な面を選んで穴を開けるという方法をとると, 定曲率を維持するために穴の形状正十六角柱状の穴を開ける必要がある. しかし, 側面が正方形である正 $2g$ 角柱に図 8 の様に穴を開けることで, 頂点数を $8g$ とした. さらに, 種数 $g \geq 5$ に対しては, 正 g 角柱に図 9 の様に穴を開けることで, 頂点数を $6g$ とした. また, 種数 4, 5, 6 に限っては, 図 10 の多面体によって, 頂点数が $7g - 7$ となる.

自己交差を認めると, 種数 3, 4, 5, 9 に対して既存の定曲率多面体で頂点数がそれぞれ 24, 12, 20, 20 であるものが知られている [4]. また, 種数 1 に対して頂点数 6 である図 11 を



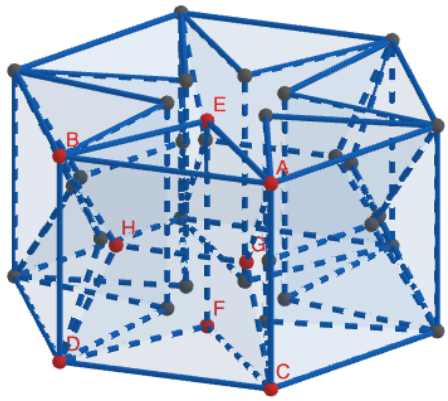
$$A=(1,0,0)\,,\ B=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),\ C=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$$
$$D=\left(\cos(\frac{\pi}{8}),\sin(\frac{\pi}{8}),\frac{1}{2}\right),\ E=\left(\cos(\frac{19\pi}{24}),\sin(\frac{19\pi}{24}),\frac{1}{2}\right)$$
$$F=\left(\cos(\frac{35\pi}{24}),\sin(\frac{35\pi}{24}),\frac{1}{2}\right),\ G=\left(\cos(\frac{11\pi}{12}),\sin(\frac{11\pi}{12}),1\right)$$
$$H=\left(\cos(\frac{19\pi}{12}),\sin(\frac{19\pi}{12}),1\right),\ I=\left(\cos(\frac{27\pi}{12}),\sin(\frac{11\pi}{27}),1\right)$$

図 7　向き付け可能で種数が 1 である頂点数 9 の定曲率多面体 (不足角 0)



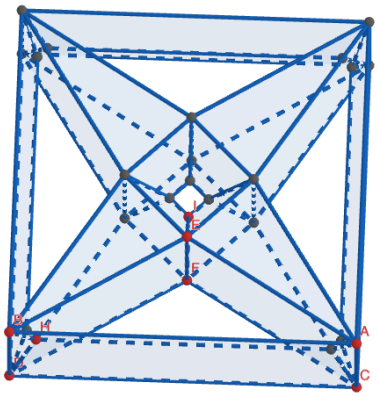
$$A=(1,-\tan(a),2)\,,\ B=(-1,-\tan(a),2)$$
$$C=(1,-\tan(a),0)\,,\ D=(-1,-\tan(a),0)$$
$$E=\left(0,-\tan(a)+\tan(\frac{a}{2}),2\right)$$
$$F=\left(0,-\tan(a)+\tan(\frac{a}{2}),0\right)$$
$$G=\left(1-\frac{1}{2}\sin(\frac{a}{2}),-\tan(a)+\frac{1}{2}\sin(\frac{a}{2})\tan(\frac{a}{2}),1\right)$$
$$H=\left(-1+\frac{1}{2}\sin(\frac{a}{2}),-\tan(a)+\frac{1}{2}\sin(\frac{a}{2})\tan(\frac{a}{2}),1\right)$$
$$a=\frac{g-1}{2g}\pi$$

図 8　向き付け可能で頂点数が $8g$ の定曲率多面体 ($g\geq 2$, 不足角 $-a$)



$$A=\left(1,-\cot(\frac{\pi}{g}),2\right),\ B=\left(-1,-\cot(\frac{\pi}{g}),2\right)$$
$$C=\left(1,-\cot(\frac{\pi}{g}),0\right),\ D=\left(-1,-\cot(\frac{\pi}{g}),0\right)$$
$$E=\left(0,-\cot(\frac{\pi}{g})+\tan(\frac{a}{2}),2\right)$$
$$F=\left(0,-\cot(\frac{\pi}{g})+\tan(\frac{a}{2}),0\right)$$
$$G=\left(1-\frac{1}{2}\sin(\frac{a}{2}),-\cot(\frac{\pi}{g})+\frac{1}{2}\sin(\frac{a}{2})\tan(\frac{a}{2}),1\right)$$
$$H=\left(-1+\frac{1}{2}\sin(\frac{a}{2}),-\cot(\frac{\pi}{g})+\frac{1}{2}\sin(\frac{a}{2})\tan(\frac{a}{2}),1\right)$$
$$a=\frac{2-2g}{3g}\pi$$

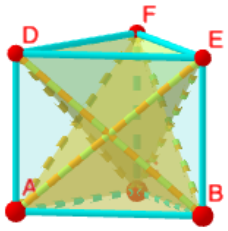
図 9　向き付け可能で頂点数が $6g$ の定曲率多面体 ($g\geq 5$, 不足角 $-a$)



$$A = \left(1, -\cot(b), \frac{2}{3}\right),\ B = \left(-1, -\cot(b), \frac{2}{3}\right)$$
$$C = (1, -\cot(b), 0),\ D = (-1, -\cot(b), 0),$$
$$E = \left(0, -\cot(b) + \cot(b + \frac{\pi}{14}), \frac{2}{3}\right)$$
$$F = \left(0, -\cot(b) + \cot(b + \frac{\pi}{14}), 0\right)$$
$$G = \left(x, -\cot(b) + (1-x)\cot(b + \frac{\pi}{14}), \frac{1}{3}\right)$$
$$H = \left(-x, -\cot(b) + (1-x)\cot(b + \frac{\pi}{14}), \frac{1}{3}\right)$$
$$I = \left(0, \cot(b + \frac{\pi}{14}) + \frac{\sqrt{2}h\sin(\frac{\pi}{7})}{-\cos(2b) + \sin(\frac{3\pi}{14})} - \cot(b), \frac{1}{3}\right)$$
$$b = \frac{\pi}{g-1},\ x = 1 - \frac{1}{3(\sec(\frac{3\pi}{14}) + \csc(b + \frac{\pi}{14})\tan(\frac{3\pi}{14}))}$$

図 10　向き付け可能で頂点数が $7g-7$ である定曲率多面体 ($g = 4, 5, 6$, 不足角 $-\frac{4\pi}{7}$)

構成した.



$$A = (1, 0, 0),\ B = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$
$$C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),\ D = \left(1, 0, \sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}}\right)$$
$$E = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}}\right),\ F = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}}}\right)$$

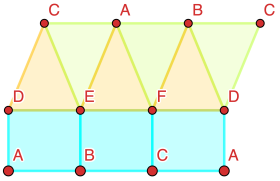


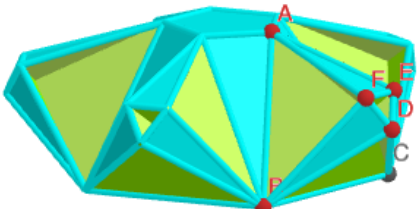
図 11　向き付け可能で種数が 1 である頂点数 6 の定曲率多面体 (不足角 0)

3.2　向け付け不可能な定曲率多面体に対する頂点数

まず, 偶数の種数に対して紹介する. 種数 4, 8, 10, 14, 20, 30, 58 に対して, それぞれ頂点数 12, 24, 30, 30, 60, 60, 60 である向きづけ不可能な定曲率多面体が存在することが知られている. 種数が 4 で各頂点での不足角が $-\frac{\pi}{3}$ である Cubohemioctahedron(図 3) を用いて, 平行な 2 面に正 6 角柱状の穴を開けることで, 種数 $g \geq 4$ の定曲率多面体の頂点数を $6g-12$ とできる. また, 種数が 8 で各頂点での不足角が $-\frac{\pi}{2}$ である Rhombihexahedron(図 3) を用いて, 平行な 2 面に正 6 角柱状の穴を開けることで, 種数 $g \geq 8$ の定曲率多面体の頂点数を $4g-8$ とできる.

次に, 奇数の種数に対して紹介する. 種数 1 に対して, 頂点数 6 である Tetrahemihexahedron(図 3) が存在する. 種数 3, 5, 7, 9, 11 に対し, 頂点数が $5g$ である定曲率多面体 (図 12) を構成した. ただ, 対称性の強い射影平面を用いて構成するためには, 連結和を取る S^2 と同相な多面体においても制約が必要となり, その制約を満たすものが存在するのは種数 11 までである. そのため, 現状 $g \geq 13$ に対しては, 種数 7 の多面体に, 正七角柱状の穴を平行な 2 面に対して開けることにより, 頂点数が $7g-14$ となる. しかし, 射影平面の対称性を崩すことで, $g \geq 13$ に対しても最小の頂点数を $5g$ 以下

にできるのではないかと予想している.



$$A = \left(-\sqrt{\frac{9}{4}-h^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan(\frac{5}{4}a), 0, h\right)$$

$$B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan(\frac{5}{4}a), -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),\ C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\tan(\frac{5}{4}a), \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$$

$$D = \left((r-\frac{1}{2})\sqrt{1-\frac{4}{9}h^2}-\frac{2}{3}h+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan(\frac{5}{4}a), 0, (-r+\frac{1}{2})(\frac{2}{3}h)+\sqrt{1-\frac{4}{9}h^2}\right)$$

$$E = \left((-\frac{r}{2}-\frac{1}{2})\sqrt{1-\frac{4}{9}h^2}-\frac{2}{3}h+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan(\frac{5}{4}a), \frac{\sqrt{3}}{2}r, (\frac{r}{2}+\frac{1}{2})(\frac{2}{3}h)+\sqrt{1-\frac{4}{9}h^2}\right)$$

$$F = \left((-\frac{r}{2}-\frac{1}{2})\sqrt{1-\frac{4}{9}h^2}-\frac{2}{3}h+\frac{\sqrt{3}}{2}\tan(\frac{5}{4}a), -\frac{\sqrt{3}}{2}r, (\frac{r}{2}+\frac{1}{2})(\frac{2}{3}h)+\sqrt{1-\frac{4}{9}h^2}\right)$$

$$a = \frac{2g-4}{5g}\pi,\ r = \frac{1}{2}(1-\sqrt{\frac{11+14\cos(\frac{a}{2})}{1+\cos(\frac{a}{2})}}\tan(\frac{a}{4}))$$

$$h = \frac{\sqrt{-3+6\cos(\frac{a}{2})+6\cos(a)-6\cos(\frac{3a}{2})+6\cos(\frac{5a}{2})}}{2\cos(\frac{5}{4}a)}$$

図 12　向き付け不可能で頂点数が $5g$ の定曲率多面体 ($3 \leq g \leq 11$ 不足角 $-a$)

また, 種数 3 に対しては射影平面とトーラスの連結和を取ることにより, 図 13 のような頂点数 12 の多面体のうち, 定曲率を持つものが存在していると予想している.

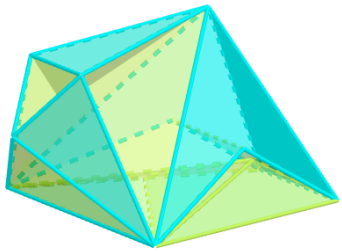


図 13　向き付け不可能で種数が 3 である頂点数 12 の多面体

3.3 頂点数のまとめ

今まで得られている定曲率多面体の最小頂点数は, 以下と表 1 の通りである.

	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	⋯	-2k+1	-2k
可 (自己交差無し)	4		9		16		24		21	⋯		$\begin{cases} 7k & (k=4,5) \\ 6k+6 & (\text{others}) \end{cases}$
可	4		6		16		24		12	⋯		$\begin{cases} 20 & (k=4,8) \\ 7k & (k=5) \\ 6k+6 & (\text{others}) \end{cases}$
不可		6	9	15	12	25	24	35	24	⋯	$\begin{cases} 10k+5 & (k<6) \\ 14k-7 & (k\geq 6) \end{cases}$	$\begin{cases} 30 & (k=4,6) \\ 60 & (k=5,9,14,28) \\ 4k-4 & (\text{others}) \end{cases}$

表 1　向き付けの可否と各オイラー標数に対して, 現状発見されている定曲率多面体の最小頂点数

$$
\text{向き付け可能}\begin{cases}
\text{自己交差を認めない}\begin{cases} 4 & (\text{if } g=0) \\ 9 & (\text{if } g=1) \\ 8g & (\text{if } g=2,\ 3) \\ 7g-7 & (\text{if } g=4,\ 5,\ 6) \\ 6g & (\text{if } g\geq 7) \end{cases} \\
\text{自己交差を認める}\begin{cases} 4 & (\text{if } g=0) \\ 6 & (\text{if } g=1) \\ 8g & (\text{if } g=2,\ 3) \\ 12 & (\text{if } g=4) \\ 20 & (\text{if } g=5,\ 9) \\ 7g-7 & (\text{if } g=6) \\ 6g & (\text{others}) \end{cases}
\end{cases}
$$

$$
\text{向き付け不可能}\begin{cases}
\text{g が奇数}\begin{cases} 6 & (\text{if } g=1) \\ 5g & (\text{if } g=3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11) \\ 7g-14 & (\text{if } g\geq 13) \end{cases} \\
\text{g が偶数}\begin{cases} 9 & (\text{if } g=2) \\ 6g-12 & (\text{if } g=4,\ 6) \\ 30 & (\text{if } g=10,\ 14) \\ 60 & (\text{if } g=12,\ 20,\ 30,\ 58) \\ 4g-8 & (\text{others}) \end{cases}
\end{cases}
$$

参考文献

[1] Peter Hilton and Jean Pedersen. Descartes, Euler, Poincare, Polya and polyhedra. *Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, No. 8, pp. 1–17, 1982.

[2] Yujie Zhang. CLASSIFICATION OF SURFACES. http://math.uchicago.edu/~may/REU2016/REUPapers/Zhang,Y.pdf. (Accessed on 01/10/2024).

[3] Henry Segerman. Hinged flat torus. https://www.shapeways.com/product/3ZHSG8VZ9/hinged-flat-torus. (Accessed on 01/10/2024).

[4] Uniform polyhedron - Wolfram mathworld. http://mathworld.wolfram.com/UniformPolyhedron. (Accessed on 01/10/2024).

[5] 河井亮. 負の定曲率をもつ多面体について, 2023.

[6] 坪井俊. 平坦トーラスの折り紙埋め込み. 武蔵野大学数理工学センター紀要= The bulletin of Musashino University Musashino Center of Mathematical Engineering, Vol. 5, pp. 44–57, 2020.

モノドロミー保存変形の正則性による量子化

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
皇學館大学 教育学部 教育学科
上野祐一 (Yuichi UENO) *

概要

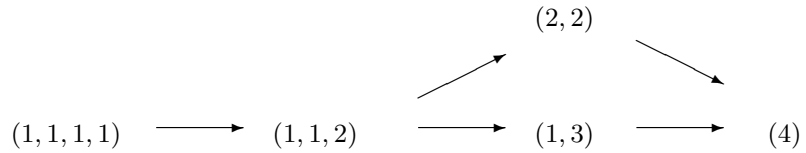
古典 Painlevé 方程式について, Takano やその共同研究者たちにより正則性による特徴付けが知られている. すなわち, 正準変換で移り合ういくつかの chart において, その各々で多項式 Hamiltonian により表される Hamiltonian 系として Painlevé 方程式 を一意に特徴付けることができる. Garnier 系は Painlevé 方程式の多変数的拡張であり, 古典 2 変数 Garnier 系において同様の特徴付けが Sasano によりなされている. 本稿ではその量子類似について報告する. また最後に, 現在検討中の問題である量子系における τ 関数の構成についての現状報告を行う.

1 Introduction

Painlevé 方程式 P_{J} $(\mathrm{J}=\mathrm{I},\cdots,\mathrm{VI})$ はある 2 階の線形常微分方程式

$$L_J : \frac{d^2y}{dx^2} = R_{\mathrm{J}}(x,\lambda,t)y$$

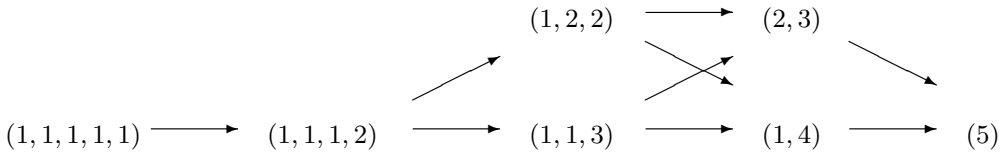
のモノドロミー保存変形やストークス係数を不変にする変形理論から導かれることが知られている [29]. このことは, P_{VI} については Fuchs により, 他の P_{J} $(\mathrm{J}=\mathrm{I},\cdots,\mathrm{V})$ については Garnier によって最初に示された. これらの Painlevé 方程式は L_J の特異点の個数「4」の分割に対応させて考えることができる.



一方, N 変数 Garnier 系とは $N+3$ 個の確定特異点を持つ Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ 上の 2 階 Fuchs 型線型常微分方程式のモノドロミー保存変形から得られる N 個の時間変数を持つ Hamilton 系である [1]. $N=1$ の場合は, Painlevé VI 型方程式と一致する.

また, H.Kimura により 2 変数の退化 Garnier 系が構築された. この 2 変数 Garnier 系には Painlevé 方程式の場合と同様に,「5」の分割に対応する次の退化系列がある [2, 3, 4].

* E-mail:y-ueno@kogakkan-u.ac.jp



古典 Painlevé 方程式の特徴付けには Takano やその共同研究者たちの仕事が知られている [6, 7, 18, 21]．これらの変換の下で， 古典 Painlevé 方程式は正則なハミルトニアン系に変換される [13]．さらには，古典 Painlevé 方程式がこれらの有理変換の下で，正則性によりただ一つに特徴付けられることを示した．これを**高野理論**と呼ぶ．

筆者は量子 Painlevé 方程式に対してもこれを適用し，高野理論の量子類似を構築した [26]．昨年の発表 [28] において，量子 Painlevé 系において得られた結果を Garnier 系にも拡張し，$N = 2$ の場合の Garnier 系 (G (1,1,1,1,1,1),G(1,1,1,1,2),G(1,1,3),G(1,2,2),G(1,4)) の各場合について特徴付ける量子正準変換とその結果として得られる量子 Garnier 系の多項式ハミルトニアンを与え，2 変数量子 Garnier 系の構築を行った．

その後，残りの Garnier 系 (G(2, 3),G(5)) の各場合についても量子正準変換とその結果として得られる量子 Garnier 系の多項式ハミルトニアンが見つかっており，本稿ではそちらの報告を行う．なお，$N = 2$ の場合の退化の場合も含めたすべての結果については論文 [27] を参照していただきたい．

2　2 変数量子 Garnier 系

以下では，$N = 2$ の場合の Garnier 系について，その量子版を考える．

2 変数量子 Garnier 系を適切に定義するために，次のような Hamilton 系を考える．

$$\begin{aligned} dq_1 &= [H_1, p_1]dt + [H_2, p_1]ds, \qquad dp_1 = -[H_1, q_1]dt - [H_2, q_1]ds \\ dq_2 &= [H_1, p_2]dt + [H_2, p_2]ds, \qquad dp_2 = -[H_1, q_2]dt - [H_2, q_2]ds \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，q_1, q_2, p_1, p_2 は $[q_i, p_j] = \delta_{i,j}h \quad (h \in \mathbb{C})$ を満たす正準変数であり，t, s は 2 つの時間発展の独立変数とする．

また，H_1, H_2 は§ 3. で定める量子正準変換により正則となるように決めた q_1, q_2, p_1, p_2 の非可換多項式 Hamiltonian とする．

3　量子正準変換と決定された Hamiltonian

§ 1. で述べたように古典 Painlevé 系における特徴付けは Takano と彼の共同研究者たちの仕事によるものである．Painlevé 系の多変数化である Garnier 系については，2 変数と 3 変数の場合の正準変換については Sasano や Suzuki の仕事により分かっている [15, 16, 19, 20]．

本稿では 2 変数量子 Garnier 系について，正則性に基づいたアプローチを試みる．そのために，Sasano や Suzuki の導入した有理正準変換を自然に量子化したものを考え，これらの変換に対して正則に変換されるような Hamiltonian を探す．もちろん，正準変換の量子化にも曖昧さの問題は生

じるが，変数の単純な順序交換を考えるだけであればその効果はパラメータの読み替えに吸収することができるため，順序をどのように指定しても実質的に等価であり，一般性を失わない．そのため，ここでは変数 q_i が変数 p_j よりも，また変数 x_i が変数 y_j よりも左にくるように非可換変数の順序を指定する．

出発点とする量子正準変換とその逆変換は次のものである．なお，各変換式であるが G(1,1,1,1,1,1),G(1,1,1,1,2),G(1,1,3),G(1,2,2),G(1,4) については Sasano によるもの，また残りの G(2, 3),G(5) については Suzuki のものを参考にした．これらの変換式は，古典の場合の Sasano や Suzuki による変換式と同一のように見えるが，ここでは変数 q_i, p_j と x_j, y_j は交換関係 $[q_i, p_j] = \delta_{i,j}h, [x_i, y_j] = \delta_{i,j}h$ $(h \in \mathbb{C})$ を保つ量子正準変数，α_i はパラメータとする．

1. The case of G(2,3)

$$
\begin{aligned}
r_1: \quad & q_1 = \frac{1}{x_1}, \quad p_1 = -x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - \alpha_1 x_1, \quad q_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad p_2 = x_1 y_2, \\
& x_1 = \frac{1}{q_1}, \quad y_1 = -q_1^2 p_1 - q_1 q_2 p_2 - \alpha_1 q_1, \quad x_2 = \frac{q_2}{q_1}, \quad y_2 = q_1 p_2, \\
r_2: \quad & q_1 = \frac{x_1}{x_2}, \quad p_1 = x_2 y_1, \quad q_2 = \frac{1}{x_2}, \quad p_2 = -x_2^2 y_2 - x_1 x_2 y_1 - \alpha_1 x_2, \\
& x_1 = \frac{q_1}{q_2}, \quad y_1 = q_2 p_1, \quad x_2 = \frac{1}{q_2}, \quad y_2 = -q_2^2 p_2 - q_1 q_2 p_1 - \alpha_1 q_2, \\
r_3: \quad & q_1 = x_1, \quad p_1 = -\eta t_1 \frac{1}{x_2} + y_1, \quad q_2 = x_2, \quad p_2 = \eta t_1 (\frac{1}{x_2})^2 - \eta t_1 t_2 (\frac{1}{x_2})^2 + \alpha_2 \frac{1}{x_2} + y_2, \\
& x_1 = q_1, \quad y_1 = \eta t_1 \frac{1}{q_2} + p_1, \quad x_2 = q_2, \quad y_2 = -\eta t_1 q_1 (\frac{1}{q_2})^2 + \eta t_1 t_2 (\frac{1}{q_2})^2 - \alpha_2 \frac{1}{q_2} + p_2, \\
r_4: \quad & q_1 = \frac{1}{x_1}, \quad p_1 = -x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) x_1 - \eta t_1 \frac{x_1}{x_2}, \\
& q_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad p_2 = -\eta t_1 (\frac{x_1}{x_2})^2 + \eta t_1 x_1 (\frac{1}{x_2})^2 + x_1 y_2 + \alpha_2 \frac{x_1}{x_2}, \\
& x_1 = \frac{1}{q_1}, \quad y_1 = -q_1^2 p_1 - q_1 q_2 p_2 - \eta t_1 t_2 \frac{q_1}{q_2} - \alpha_1 q_1, \\
& x_2 = q_2, \quad y_2 = \eta t_1 t_2 q_1 (\frac{1}{q_2})^2 - \eta t_1 (\frac{q_1}{q_2})^2 + q_1 p_2 - \alpha_2 \frac{q_1}{q_2}, \\
r_5: \quad & q_1 = \frac{1}{x_1}, \quad p_1 = -x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - (1 + \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) x_1 + \frac{1}{2x_1}, \\
& q_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad p_2 = x_1 y_2 - \frac{1}{2}, \\
& x_1 = \frac{1}{q_1}, \quad y_1 = \frac{1}{2} q_1^3 - q_1^2 p_1 - q_1 q_2 p_2 - \frac{1}{2} q_1 q_2 - (1 + \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) q_1, \\
& x_2 = \frac{q_1}{q_2}, \quad y_2 = q_1 p_2 - \frac{1}{2}, \\
r_6: \quad & q_1 = \frac{x_1}{x_2}, \quad p_1 = \frac{x_1}{2x_2} + x_2 y_1, \\
& q_2 = \frac{1}{x_2}, \quad p_2 = -x_1 x_2^2 y_2 - x_1 x_2 y_1 - (1 + \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) x_2 - \frac{1}{2}, \\
& x_1 = \frac{q_1}{q_2}, \quad y_1 = -\frac{1}{2} q_1 q_2 + q_2 p_1, \\
& x_2 = \frac{1}{q_2}, \quad y_2 = \frac{1}{2} q_1^2 q_2 - q_1 q_2 p_1 - q_2^2 p_2 - \frac{1}{2} q_2^2 - (1 + \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) q_2. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

2. The case of G(5)

$$
\begin{aligned}
r_1: \quad & q_1 = \frac{1}{x_1}, \quad p_1 = -x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - \alpha_1 x_1, \quad q_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad p_2 = x_1 y_2, \\
& x_1 = \frac{1}{q_1}, \quad y_1 = -q_1^2 p_1 - q_1 q_2 p_2 - \alpha_1 q_1, \quad x_2 = \frac{q_2}{q_1}, \quad y_2 = q_1 p_2, \\
r_2: \quad & q_1 = \frac{x_1}{x_2}, \quad p_1 = x_2 y_1, \quad q_2 = \frac{1}{x_2}, \quad p_2 = -x_1 x_2 y_1 - x_2^2 y_2 - \alpha_1 x_2, \\
& x_1 = \frac{q_1}{q_2}, \quad y_1 = q_2 p_1, \quad x_2 = \frac{1}{q_2}, \quad y_2 = -q_1 q_2 p_1 - q_2^2 p_2 - \alpha_1 q_2, \\
r_3: \quad & q_1 = \frac{1}{x_1}, \quad p_1 = -2(\frac{x_2}{x_1})^2 - x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - (\alpha_1 - 2\alpha_2) x_1 + 2\frac{1}{x_1} - 2t_2, \\
& q_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad p_2 = 2(\frac{x_2}{x_1})^3 - 4(\frac{1}{x_1})^2 x_2 + x_1 y_2 - 2t_1, \\
& x_1 = \frac{1}{q_1}, \quad y_1 = 2q_1 q_2^4 - 6q_1^2 q_2^2 + 2q_1^3 - q_1^2 p_1 - 2q_1 q_2 p_2 - 2t_2 q_1^2 - 2t q_1 q_2 - (\alpha_1 - 2\alpha_3) q_1, \\
& x_2 = \frac{q_2}{q_1}, \quad y_2 = -2q_1 q_2^3 + 4q_1^2 q_2 + q_1 p_2 + 2t_1 q_1, \\
r_4: \quad & q_1 = \frac{x_1}{x_2}, \quad p_1 = 2\frac{x_1}{x_2} - 2(\frac{1}{x_2})^2 + x_2 y_1 - 2t_2, \\
& q_2 = \frac{1}{x_2}, \quad p_2 = -4x_1(\frac{1}{x_2})^2 - x_1 x_2 y_1 + 2(\frac{1}{x_2})^3 - x_2^2 y_2 - (\alpha_1 - 2\alpha_2) x_2 - 2t_1, \\
& x_1 = \frac{q_1}{q_2}, \quad y_1 = 2q_2^3 - 2q_1 q_2 + q_2 p_1 + 2t_2 q_2, \\
& x_2 = \frac{1}{q_2}, \quad y_2 = 2q_2^5 - 6q_1 q_2^3 + 2q_1^2 q_2 - q_1 q_2 p_1 - q_2^2 p_2 - 2t_2 q_1 q_2 - 2t_1 q_2^2 - (\alpha_1 - 2\alpha_2) q_2.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

このとき，次が成り立つ.

Theorem 3.1　正準変換 (2), (3) の下で，正則性を持つ多項式 Hamiltonian は一意に決まり，それは次の Hamiltonian である.

1. The case of G(2,3)

The Hamiltonian H_1 for t_1-flow.

$$
\begin{aligned}
H_1 = \frac{1}{(1+3h+2\alpha_1+2\alpha_3)t_1} \{ & q_2^2 p_2^2 + \frac{1}{2} q_1 q_2 p_1 + \frac{1}{2} q_2^2 p_2 - \eta t_1 2 q_1 p_2 \\
& + (1 + h + 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) q_2 p_2 + \frac{1}{2}\alpha_1 q_2 - \eta t_1 (p_1 - t_2 p_2) \}.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

The Hamiltonian H_2 for t_2-flow.

$$
\begin{aligned}
H_2 = \frac{1}{(1+3h+2\alpha_1+2\alpha_3)} \{ & -\frac{1}{2} q_1^2 p_1 - \frac{1}{2} q_1 q_2 p_2 + 2 q_2 p_1 p_2 + q_1 p_1^2 + \frac{1}{2} t_2 q_1 p_1 + \frac{1}{2} q_2 p_1 - t_2 p_1^2 \\
& - \frac{1}{2}\alpha_1 q_1 + (1 + h + 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) p_1 + \eta t_1 p_2 \}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

2. The case of G(5)

The Hamiltonian H_1 for t_1-flow.

$$H_1 = \frac{1}{(3h+2\alpha_1-2\alpha_2)}\{2q_1q_2p_1+q_2p_1^2+2q_2^2p_2-2q_1p_2+2t_2q_2p_1+2p_1p_2 \\ +2\alpha_1q_2+2t_1p_1+2t_2p_2\}. \tag{6}$$

The Hamiltonian H_2 for t_2-flow.

$$H_2 = \frac{1}{(3h+2\alpha_1-2\alpha_2)}\{q_2^2p_1^2+2q_1^2p_1+2q_1q_2p_2-q_1p_1^2+2q_2p_1p_2+2t_1q_2p_1+2t_2q_2p_2 \\ -t_2p_1^2+p_2^2+2\alpha_1q_1-2t_2^2p_1+2t_1p_2\}. \tag{7}$$

Proof. Hamiltonian を一意に決定するための方法は数式処理ソフト Mathematica による具体的な計算によるものである．

その際，非可換変数 q_1,q_2,p_1,p_2 と x_1,x_2,y_1,y_2 に関して，$q=q_i, p=p_j$ の逆数について

$$pq^{-1}-q^{-1}p=hq^{-2}, p^{-1}q-qp^{-1}=hp^{-2}$$

のような公式を用いて計算を行っている．

このようにして得られた各 Hamiltonian (4)〜(7) を持つ Hamilton 系を **2 変数量子 Garnier 系**と呼ぶ．また各場合において，次が成り立つ．

Theorem 3.2　得られた Hamiltonian H_1, H_2 の t-flow と s-flow は可換（Frobenius 完全積分可能）である．

古典的に可換（ポアソン可換）な式から量子的に可換な式を得ることは一般には非自明である．今回は「正則性」という条件を課すことによってうまくいった．この結果は，正則性が「よい量子化」であることの一つの根拠となっている．

4　τ 関数の量子化

Okamoto は，ハミルトニアンを対数関数微分として与える量として次のように τ 関数を定義した．

$$H=\frac{d}{dt}\log\tau=\frac{\tau'}{\tau}$$

この τ 関数が Painlevé 方程式にとって非常に重要な関数であり，双線形方程式を満たすことや正則性を持つことなど良い性質が知られている．
同様に，量子系においても，良い性質を持つ τ 関数が導入できると期待される．量子系における良い性質を持つ τ 関数の導入を目指し，次のようなものを考える．

Definition 4.1 (Kuroki) τ 関数の量子類似を次のように定義する.

$$\begin{cases} s_i(a_i) = -a_i, \quad s_i(a_{\pm 1}) = a_{i\pm 1} + a_i \\ s_i(f_{\pm 1}) = f_{i\pm 1} \pm \dfrac{a_i}{f_i} \\ s_i(\tau_j) = \tau_j \quad (i \neq j), \quad s_j(\tau_j) = f_j \dfrac{\tau_{j-1}\tau_{j+1}}{\tau_j} \quad (i = j) \\ \pi(a_j) = a_{j+1}, \quad \pi(f_i) = f_{i+1}, \quad \pi(\tau_j) = \tau_{j+1} \\ \tau_i a_j = (a_j - \delta_{ij}h)\tau_i \end{cases}$$

Remark 4.2 (Kuroki) ただし，次のことに注意しておく.

- q, p（もしくは f_i）と α_i, τ_j は可換
- α_i は互いに可換
- τ_j は互いに可換
- q, p は非可換（$[q, p] = h$）
- α_i と τ_j は非可換（$\tau_i a_j = (a_j - \delta_{ij}h)\tau_i$）

このとき，例として τ 関数への Weyl 群作用を次のように計算する.

$$\begin{aligned} s_2 s_1 s_0(\tau_0) &= s_2 s_1 (f_0 \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_0}) \\ &= s_2((f_0 - \frac{\alpha_1}{f_1}) f_1 \frac{\tau_0 \tau_2}{\tau_1} \frac{\tau_2}{\tau_0}) \\ &= s_2((f_0 f_1 - \alpha_1)\frac{\tau_2^2}{\tau_1}) \\ &= \{(f_0 f_2 + \alpha_2)(f_1 f_2 - \alpha_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) f_2^2\} \frac{\tau_0^2 \tau_1}{\tau_2^2} \end{aligned}$$

以上のように計算を行うことにより一般に,

$$w(\tau_i) = (f \text{ の多項式}) \tau_0^a \tau_1^b \tau_2^c$$

のように書ける.
ここで,

$$\begin{cases} f_0 = q - p + t \\ f_1 = -q \\ f_2 = p \end{cases}$$

として，変数 q, p で表すと次のことが予想される.

Conjecture 4.3 (Yamada) τ 関数への次のような Weyl 群の作用が定義される.

$$w(\tau_i) = \phi_{m,n}(q, p) \prod_{k=0}^{2} \tau_k^{\nu_k}$$

ただし，$\phi_{m,n}(q, p)$ は，(q, p) の非可換多項式である.

このとき，$\phi_{m,n}(q,p)$ は次の量子高野 chart でも，また多項式になる．

$$
\begin{aligned}
&q = ay_1 - x_1y_1^2 \quad , \qquad p = \tfrac{1}{y_1}, && \tau_1 = y\tau_1 \\
&q = \tfrac{1}{x_2} \quad , && p = -bx_2 - x_2^2y, && \tau_2 = x\tau_2 \\
&q = \tfrac{1}{x_0} \quad , && p = -\tfrac{1}{x_0} + t - cx_0 - x_0^2y_0, && \tau_0 = x\tau_0
\end{aligned}
$$

さらに，この正則性により $\phi_{m,n}(q,p)$ は規格化を除いて一意に決まる．

上記の事柄について，各 Painlevé II 方程式から Painlevé VI 方程式についての計算を行なっている（上は Painlevé IV 方程式の例である）．目標は以下である．

- 一般の場合についての証明
- 古典の場合で成り立っている Jacobi-Trudi 型明示公式の量子類似の構築

5 Conclusions

本稿では，正則性による 2 変数量子 Garnier 系の構築とその特徴付けについての報告を行った．得られた結果の拡張の方向としては次のようなものが考えられる．

- KZ 方程式との比較
  共形場理論の観点からは，KZ 方程式が量子 Garnier 系であると考えられている [8, 9]．それと今回の結果との比較することは興味深い．
- Sasano により構築された Sasano 系の量子化
  Sasano 系は Takano 理論を拡張し，正則性を持つ Hamiltonian 系として作られた方程式である [14, 17]．特に，D_{n} 型の対称性を持つ方程式のシリーズは，Painlevé V, VI 型方程式の拡張となっている．
- 2 変数量子 Garnier 系を多変数の場合についての一般化
  古典の場合，n 変数 Garnier 系についての初期値空間の理論については Kimura によって構成されている．これをもとにして，一般の n 変数量子 Garnier 系の構築と正準変換の理論の量子版の構築を目指す．

参考文献

[1] R. Garnier, Sur des équations différentielles du troisiéme ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes, Ann. Ecole Norm. Sup., **29** (1912), 1-126.

[2] H. Kimura, The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure, Ann. Mat. Pura Appl., **155**(1989), 25-57.

[3] H. Kimura, *On the initial value spaces of degenerate Garnier system*, RIMS Kokyuroku, (2000), 18-27.

[4] H. Kimura and K. Okamoto, On the polynomial Hamiltonian structure of the Garnier systems, J. Math. Pures Appl. **63** (1984), 129-146.

[5] G. Kuroki, Regularity of quantum τ-functions generated by quantum birational Weyl group actions, arXiv:1206.3419.

[6] T. Matano, A. Matumiya, K. Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems II, J. Math. Soc. Japan, **51** (1999), 766-843.

[7] A. Matumiya, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems III, Kumamoto J. Math., **10** (1997), 45-73.

[8] H. Nagoya, Quantum Painlevé systems of type $A_l^{(1)}$, Int. J. Math., **15**(10) (2004), 1007-1031.

[9] H. Nagoya, *Quantum Painlevé systems*, abstract for the meeting of the Mathematical Society of Japan (Saitama Univ., 2007), in Japanese.

[10] H. Nagoya, On quantum Painlevé systems, RIMS Kokyuroku Bessatsu., **B30** (2012), 209-221.

[11] H. Nagoya, Integral formulas for quantum Isomonodromic systems, KYOTO UNIV, PUBLICATIONS RESEARCH INST MATHEMATICAL SCIENCES., **49** (4) (2013), 651-678.

[12] D. P. Novikov and B. I. Suleimanov, "Quantization" of an isomonodromic Hamiltonian Garnier system with two degrees of freedom, Theoretical and Mathematical Physics., **187**(2016), 479-496.

[13] M. Noumi, K. Takano and Y. Yamada, Bäcklund transformations and the manifolds of Painlevé systems, Funkcial. Ekvac., **45** (2002), 237-258.

[14] Y. Sasano, Higher order Painlevé equations of type $D_l^{(1)}$, RIMS Kokyuroku., **1473** (2006), 143-163.

[15] Y. Sasano, Studies on the Garnier system in two variables, arXiv:0704.2869.

[16] Y. Sasano, Studies on the Garnier system in two variables II, arXiv:0706.0799.

[17] Y. Sasano and Y. Yamada, Symmetry and holomorphy of Painlevé type systems, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B2** (2007), 215-225.

[18] T. Shioda and K. Takano, On some Hamiltonian structures of Painlevé systems I, Funkcial. Ekvac., **40** (1997), 271-291.

[19] M. Suzuki, *On the initial value spaces of degenerate Garnier system in two variables*, RIMS Kokyuroku, (2001), 41-52.

[20] M. Suzuki, Space of initial conditions of Garnier system and its degenerate systems in two variables, J. Math. Soc. Japan., **58** (2006), 1079-1117.

[21] K. Takano, Defining manifolds for Painlevé equations, in *Toward the exact WKB analysis of differential equations, linear and nonlinear* (Eds. C. J. Howls, T. Kawai and Y. Takei), 261-269, Kyoto Univ. Press, Kyoto, 2000.

[22] T. Tsuda, Birational symmetries, Hirota bilinear forms and special solutions of the Garnier

systems in 2-variables, J. Math .Sci. Univ. Tokyo., **10** (2003), 355-371.

[23] T. Tsuda, Rational solutions of the Garnier system in terms of schur polynomials, IMRN., **43** (2003), 2341-2358.

[24] T. Tsuda, Universal characters and integrable systems, PhD thesis. The University of Tokyo, (2003).

[25] T. Tsuda, Toda equation and special polynomials associated with the Garnier system, Advances in Mathematics., **206** (2006), 657-683.

[26] Y. Ueno, Polynomial Hamiltonians for Quantum Painlevé Equations, Int. J. Math., **20** (2009), 1335-1445.

[27] Y. Ueno, Polynomial Hamiltonians for Polynomial Hamiltonians for quantum Garnier systems in two variables, arXiv:2306.00993.

[28] 上野祐一, 2 変数量子 Garnier 系の多項式ハミルトニアン, Hokkaido University technical report series in Mathematics, 184, i, 1-ix, 808, 第 19 回数学総合若手研究集会：数学の交叉点, 55-62.

[29] 岡本和夫, パンルヴェ方程式, 岩波書店, 2009.

時系列がランダムウォーク的か量子ウォーク的かを区別する研究にむけて

神奈川大学大学院　工学研究科　工学専攻
坂本光 (Hikari SAKAMOTO) *

概要

時系列解析における時系列モデルは, ノイズをガウス分布に従うホワイトノイズとして採用するのが典型的である. これはランダムウォークに従う古典的なノイズの影響を受けるといえるが, 量子的なノイズ, すなわち「量子ウォーク」に従うノイズに影響を受ける場合を考えたい. 本研究は量子的なノイズを持つ時系列にどのような特徴があるか, 時系列がランダムウォーク的であるか量子ウォーク的であるかを区別する手法について述べる.

1　導入

1.1　AR モデル

時系列モデルの内の 1 つであり, 自己回帰モデルと呼ばれ, 現在の値を過去のデータを用いて回帰するモデルである. 本研究では AR モデルの中でも 1 時点前までのデータを用いて回帰する 1 次トレンドモデルを用いる.

$$x_{t+1} = x_t + w$$

ここでノイズ w は以下のパラメータで定義される確率変数である.

- ランダムウォークの場合：$w \sim N(\mu, \sigma^2)$
- 量子ウォークの場合：$w \sim QN(r, m, |a|, C)$

$N(\mu, \sigma^2)$ は平均 μ, 分散 σ^2 の正規分布を表し, $QN(r, m, |a|, C)$ は後述する量子ウォークの弱収束分布である. また, 量子ウォークのパラメータについては下記にて詳しく説明する.

1.2　量子ウォーク

一次元格子上 $\mathbb{Z}$ 上の離散時間量子ウォークを定義する. 時刻 t, 頂点 x での確率振幅 $\Psi_t(x) \in \mathbb{C}^2$ について時間発展を次のように定義する.

$$\Psi_{t+1}(x) = P\Psi_t(x+1) + Q\Psi_t(x-1).$$

* E-mail:r202370136ay@jindai.jp

ただし，P, Q は以下で与えられる 2×2 行列であり，特に $P+Q$ はユニタリ行列 U になるとする．

$$U=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix}.$$

U がユニタリ行列であることから，$|a|^2+|c|^2=|b|^2+|d|^2=1$ が成立する．特にユニタリ行列 U が

$$U=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

である場合をアダマールウォークという．
また，初期状態は $|\alpha^2|+|\beta^2|=1$ を満たす $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ に対し，以下である．

$$\Psi_0(x)=\begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}^T, & x=0, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, & x\neq 0. \end{cases}$$

ここで，T は転置を表す．時刻 t で量子ウォーカーが場所 x に存在する確率を $\|\Psi_t(x)\|^2$ で定義する．

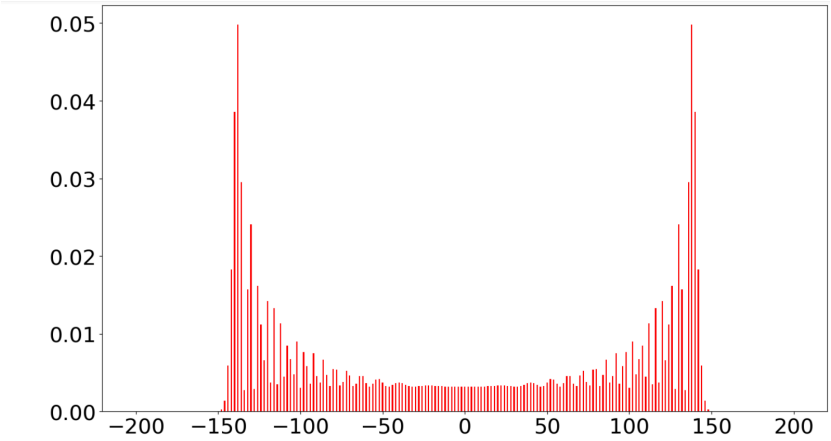


図 1　原点出発で $t=200$ の時のアダマールウォークの分布の形[*2]

時刻 t で量子ウォーカーが存在する場所を表す確率変数を X_t とすると，$Z:=\lim_{t\to\infty} X_t/t$ の確率密度関数は以下となることが今野 [1,2] より知られている．

$$f(x)=(1-C(a,b,\alpha,\beta)x)\,f_K(x).$$

ただし，$C=C(a,b,\alpha,\beta)$，$f_K(x)$ は以下の通りである．

$$C(a,b,\alpha,\beta)=|\alpha|^2-|\beta|^2+\frac{a\alpha\bar{b}\bar{\beta}+\bar{a}\bar{\alpha}b\beta}{|a|^2},$$

$$f_K(x)=\frac{\sqrt{1-|a|^2}}{\pi(1-x^2)\sqrt{|a|^2-x^2}}I_{(-|a|,\ |a|)}(x).$$

[*2] 縦軸は確率，横軸は場所である．

この確率密度関数 $f(x)$ のことを「今野分布」という．定義関数 $I_{(-|a|,\ |a|)}(x)$ は x が $-a$ から a であるときに 1 となり, その他の場合は 0 となる定義関数である．　今野分布の平均, 分散は以下の通りである．

$$E[Z] = C(1 - \sqrt{1 - |a^2|}),$$
$$V[Z] = (1 - \sqrt{1 - |a^2|}) - C^2(1 - \sqrt{1 - |a^2|})^2.$$

正規分布であれば任意の平均, 分散を与えるように密度関数を与えることが出来るが, 今野分布はユニタリ性などの制約から $0 < |a| < 1$, $-\frac{1}{|a|} < C < \frac{1}{|a|}$ であるため, 必ずしもそうではないため, モデルの拡張を行う．

1.3　拡張した量子ウォーク

典型的な一次元格子 $\mathbb{Z}$ 上の離散時間量子ウォークの，歩幅を非負実数 r，出発点を実数 m とした量子ウォークとしたモデルを考える．確率振幅 $\Psi_t(x)$ に対して，時間発展を以下で定める．

$$\Psi_{t+1}(x) = P\Psi_t(x + r) + Q\Psi_t(x - r).$$

また，初期状態は以下である．

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}^T, & x = m, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, & x \neq m. \end{cases}$$

この拡張したモデルにおいて，時刻 t で量子ウォーカーが存在する場所を表す確率変数をあらためて X_t とすると，$\tilde{Z} := \lim_{t\to\infty} X_t/t$ の確率密度関数は以下となる．

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{r} f\left(\frac{x - m}{r}\right).$$

これを「拡張した今野分布」ということにする．このとき $\tilde{Z}$ の平均 μ と分散 σ^2 は以下となる．

$$E[\tilde{Z}] = \mu = -rC\left(1 - \sqrt{1 - |a|^2}\right) + m,$$
$$V[\tilde{Z}] = \sigma^2 = r^2(1 - \sqrt{1 - |a|^2})\left\{1 - C^2(1 - |a|^2)\right\}.$$

したがって，μ と σ^2 を任意の定数としたとき，それに応じて r, m が定められる．このことから，$\tilde{f}(x)$ は，$\mu, \sigma^2, |a|, C = C(a, b, \alpha, \beta)$ をパラメータとした関数として記述される．

以上の結果から量子ウォークのノイズ w のパラメータは $(r, m, |a|, C)$ の 4 つになり, 得られた N 個のサンプル $(\hat{x_1}, \hat{x_2}, ..., \hat{x_N})$ に対し, モーメント母数推定法から適切なパラメータを求めたい.
ただし, 本研究ではアダマールウォークについて考えるため, $|a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ となる．

1.4 モーメント母数推定法

得られた N 個のサンプル $(\hat{x_1}, \hat{x_2}, ..., \hat{x_N})$ について, 標本平均を $\bar{x}$ とすると,

$$\bar{x} := \sum_{i=1}^{N} \frac{\hat{x}_i}{N}$$

で表すことができる. 例えば, モーメント母数推定法では $E[\tilde{Z}] = \bar{x}$ を満たすようなパラメータ m, r, C を定める.

K 次の標本モーメント $\hat{m}_K$ を以下のように定義する.

$$\hat{m}_K := \sum_{i=1}^{N} \frac{(\hat{x}_i)^K}{N}$$

推定するパラメータが 3 つであることから $K = 1, 2, 3$ について $E[\tilde{Z}^K] = \hat{m}_K$ を満たすパラメータを推定する. $\tilde{Z}$ の K 次モーメントを $E[\tilde{Z}^K]$ とすると,

$$E[\tilde{Z}^K] = \int_{-\infty}^{\infty} x^K \tilde{f}(x) dx$$

と書き表すことができ, 拡張した今野分布の確率密度関数 $\tilde{f}(x)$ を通常の今野分布の確率密度関数 $f(x)$ に変形すると,

$$\begin{aligned}
E[\tilde{Z}^K] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^K \tilde{f}(x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x^K f\left(\frac{x-m}{r}\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (ry+m)^K \frac{1}{r} f(y) r dy \\
&= \sum_{j=0}^{K} \binom{K}{j} m^{k-j} r^j \int_{-\infty}^{\infty} y^j f(y) dy \\
&= \sum_{j=0}^{K} \binom{K}{j} m^{k-j} r^j E[Z^K]
\end{aligned}$$

と書き換えることができ, 確率変数 Z の j 次モーメントで書き表すことができるようになる.

1.5 今野分布の j 次モーメント

以下, サンプルを適当に平行移動することにより平均 $\bar{x} = \hat{m}_1 = 0$ である場合を考える. 今野分布の j 次モーメントは

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} y^j f(y) dy \\
&= \begin{cases} 1 - \sqrt{1-|a|^2} \sum_{u=0}^{m-1} \binom{2u}{u} \left(\frac{|a|^2}{4}\right)^u & (j = 2m) \\ 0 & (j = 2m+1) \end{cases}
\end{aligned}$$

で求めることができると知られているため, これを用いて $E[\tilde{Z}^K]$ を求めると,

$$E[\tilde{Z}^1] = m - A_1 Cr \tag{1}$$
$$E[\tilde{Z}^2] = m^2 - 2A_1 Cmr + A_1 r^2 \tag{2}$$
$$E[\tilde{Z}^3] = m^3 - 3A_1 Cm^2 r + 3A_1 mr^2 - A_2 Cr^3 \tag{3}$$

となる. (1),(2) 式から C, r を求めると

$$C = \frac{m}{A_1 r} \quad , \quad r = \sqrt{\frac{m^2 + \hat{m}_2}{A_1}}$$

となる. ただし, A_1, A_2 はそれぞれ

$$A_1 = 1 - \sqrt{1 - |a^2|} \quad , \quad A_2 = 1 - \sqrt{1 - |a^2|}\left(1 + \frac{|a|^2}{2}\right)$$

である.
また, (3) 式をカルダノの公式を用いて m について解くと, 非負実数解の 1 つは

$$m = -\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}$$

となる. ただし,

$$A = \frac{3\sqrt{3}q + \sqrt{27q^2 + 4p^3}}{6\sqrt{3}} \quad , \quad B = \frac{3\sqrt{3}q - \sqrt{27q^2 + 4p^3}}{6\sqrt{3}} \quad ,$$
$$p = \frac{3A_1^2 \hat{m}_2 - A_2 \hat{m}_2}{A_1^2 - A_2} \quad , \quad q = \frac{-A_1^2 \hat{m}_3}{A_1^2 - A_2}$$

である.

2 主結果

拡張した今野分布に従うノイズ w について, サンプル $(\hat{x_1}, \hat{x_2}, ..., \hat{x_N})$ の下でモーメント母数推定法より推定されるパラメータを用いる場合, 以下が成り立つ.

$$w \sim QN\left(\sqrt{\frac{(-\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})^2 + \hat{m}_2}{A_1}} \quad , \quad -\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} \quad , \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \frac{-\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B}}{A_1 r}\right)$$

本研究では種々の時系列データに対し, これが一次トレンドモデルに従うと仮定した上でノイズ w が正規分布 (ランダムウォーク), アダマールウォークの場合の拡張した今野分布 (量子ウォーク) に従うそれぞれの場合を比較した.

参考文献

[1] Konno, N. (2002). Quantum random walks in one dimension, *Quantum Inf. Process.,* **1**, 345-354

[2] Konno, K. (2005). A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk, *J. Math. Soc. Jpn.,* **57**, 1179-1195

境界磁場つき開放端XXZ鎖の自己相関関数

佐藤 純 (Jun Sato)
東京工芸大学 工学部工学科 情報コース

概 要

本研究では，可積分な 1 次元量子系である XXZ ハイゼンベルク模型を考える．周期境界条件の場合には，ベーテ仮説の手法を用いた厳密な取り扱いが可能であり，バルクの性質はよく調べられてる．本研究では，両端に境界磁場を印加した，開放端の XXZ 模型を考える．現在重要な研究課題となっている非平衡統計物理学の基礎付けの観点から，端のある系の非平衡ダイナミクスを追跡することは，大きな意義を持つ．開放端の場合，固有状態の構成は境界ヤンバクスター方程式を用いて可能であるが，周期境界の場合と比べてその手続きは遥かに複雑になる．基底状態は境界 1-string という状態で記述されることが分かっているが，string 解は特異的であり，数値的評価は一般に難しい．本研究では，境界 1-string 解を精密に求める方法を確立した．また，ダイナミクスの計算には基底状態だけでなく，励起状態の情報も必要になる．我々は 2-string 解が低励起状態を与えることを見出し，1-string の場合に開発した手法を用いて具体的に数値解を求めた．これらの励起状態の解を用いて，端における自己相関関数を形状因子展開により近似的に求めた．

1 はじめに

平衡統計物理学は平衡状態にある系を解析の対象とし，確立した理論体系を為している．それに対し，興味ある現象のほとんどは非平衡であるにも関わらず，非平衡統計物理学は磐石な体系からは程遠いのが現状である．平衡状態近傍の線形な領域では，揺動散逸定理および線形応答理論によってしっかりとした理論が確立しているが，非線形領域では理論的枠組みの構成は全く成功しておらず，そもそも存在しない可能性も議論されている．また，平衡状態から遠い非線形領域では，境界の影響が消えずに系全体に及ぶことが知られている．したがって，端のある系でその非平衡ダイナミクスを調べることは，非常に大きな意味を持つ．ところが，量子多体問題のダイナミクスを精度良く計算することは困難を極める．

このような観点から，本研究では，厳密な取り扱いが可能な量子可積分系である境界磁場つき開放端 XXZ 鎖に着目し，その非平衡ダイナミクスを解明することを目的とする．

2 境界磁場つき開放端 XXZ 鎖

2.1 XXZ 模型

複素 2 次元ベクトル空間 $V = \mathbb{C}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$ 上の Hermite 線形作用素であるスピン $S^\alpha : V \to V$ $(\alpha = x, y, z)$ を

$$S^x := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^y := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S^z := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

で定める．行列 X, Y に対する交換子積を $[X, Y] := XY - YX$ で定める．これらの 2×2 行列は角運動量の交換関係

$$[S^x, S^y] = iS^z, \quad [S^y, S^z] = iS^x, \quad [S^z, S^x] = iS^y \tag{2.2}$$

を満たす．V はひとつのスピン空間を表す．これが，1 列に L 個並んだ空間，すなわち V を L 個テンソル積した空間 $V^{\otimes L} := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{L \text{ 個}}$ を考える．この上の作用素として，$S_n^\alpha : V^{\otimes L} \to V^{\otimes L}$ $(\alpha = x, y, z)$ を

$$S_n^\alpha := \underbrace{\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}}_{n-1 \text{ 個}} \otimes S^\alpha \otimes \underbrace{\mathrm{id} \otimes \cdots \otimes \mathrm{id}}_{L-n \text{ 個}} \tag{2.3}$$

で定める．ただし，id は 2×2 の単位行列 $\mathrm{id} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である．すなわち，S_n^α は，n 番目のスピン空間に S^α として作用し，その他の空間には恒等演算子として作用する．

1 次元スピン 1/2 ハイゼンベルク XXZ 模型は，1 次元格子に並んだ L 個のスピン $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \cdots, \mathbf{S}_L$ が最近接で交換相互作用する模型であり，以下のハミルトニアンで与えられる

$$\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}} = \sum_{n=1}^{L-1} (S_n^x S_{n+1}^x + S_n^y S_{n+1}^y + \Delta S_n^z S_{n+1}^z). \tag{2.4}$$

隣同士のスピンの交換相互作用は $\mathbf{S}_n \cdots \mathbf{S}_{n+1}$ と内積の形で書けるが，これを z 成分だけ異方性パラメータ Δ で歪めたような模型になっている．今回さらに z 方向に境界磁場を加えた以下の模型を考える

$$\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}} = \sum_{n=1}^{L-1} (S_n^x S_{n+1}^x + S_n^y S_{n+1}^y + \Delta S_n^z S_{n+1}^z) + h_1 S_1^z + h_L S_L^z \tag{2.5}$$

2.2 周期境界のベーテ仮説

ハミルトニアン $\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}$ は $V^{\otimes L}$ 上の作用素であり，$2^L \times 2^L$ という巨大行列であるが，ベーテ仮説と呼ばれる方法により系統的に厳密に対角化される [1, 2, 3]．以下，周期境界の場合に，簡単に流れを記述する．まず，$V_j \otimes V_k$(j 番目と k 番目のスピン) 上の作用素である R 行列を

$$R_{jk}(\lambda_j, \lambda_k) := \begin{pmatrix} a(\lambda_j, \lambda_k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(\lambda_j, \lambda_k) & c(\lambda_j, \lambda_k) & 0 \\ 0 & c(\lambda_j, \lambda_k) & b(\lambda_j, \lambda_k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(\lambda_j, \lambda_k) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

で定める．ただし，

$$\begin{aligned} a(\lambda_j, \lambda_k) &:= \sinh(\lambda_j - \lambda_k + \eta), \\ b(\lambda_j, \lambda_k) &:= \sinh(\lambda_j - \lambda_k), \\ c(\lambda_j, \lambda_k) &:= \sinh \eta \end{aligned} \tag{2.7}$$

であり，η は

$$\cosh \eta = \Delta \tag{2.8}$$

で決まる異方性パラメータである．これは，$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ 上の作用素として，関係式

$$R_{12}(\lambda_1, \lambda_2) R_{13}(\lambda_1, \lambda_3) R_{23}(\lambda_2, \lambda_3) = R_{23}(\lambda_2, \lambda_3) R_{13}(\lambda_1, \lambda_3) R_{12}(\lambda_1, \lambda_2) \tag{2.9}$$

を満たす．これを Yang-Baxter 関係式と言う [4, 5, 6]．そして，モノドロミー行列 $\tau_{0,12\cdots L}(\lambda|\xi_1, \cdots, \xi_L)$ を以下で定義する．

$$\tau_{0,12\cdots L}(\lambda|\xi_1, \cdots, \xi_L) = R_{0L}(\lambda, \xi_L) \cdots R_{02}(\lambda, \xi_2) R_{01}(\lambda, \xi_1) \tag{2.10}$$

となる．$\tau_{0,12\cdots L}$ の下の添え字 $0, 12\cdots L$ は，$\tau_{0,12\cdots L}$ が空間 $V_0 \otimes V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_L$ に作用する演算子であることを表している．次に，転送行列 T を，モノドロミー行列において空間 V_0 でトレースを取ったもので定義する：

$$T_{12\cdots L}(\lambda|\xi_1, \cdots, \xi_L) := \mathrm{tr}_0\, \tau_{0,12\cdots L}(\lambda|\xi_1, \cdots, \xi_L) \tag{2.11}$$

$T_{12\cdots L}$ の下の添え字 $12\cdots L$ は，$T_{12\cdots L}$ が空間 $V_1\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_L$ に作用する演算子であることを表している．ここで，空間 V_0 を補助空間，空間 $V_1\otimes V_2\otimes\cdots\otimes V_L$ を量子空間という．後者は量子ハミルトニアンが作用する空間であることが名前の由来である．すると，Yang-Baxter 関係式の帰結として，関係式

$$R_{00'}(\lambda,\mu)\tau_0(\lambda)\tau_{0'}(\mu)=\tau_{0'}(\mu)\tau_0(\lambda)R_{00'}(\lambda,\mu) \tag{2.12}$$

が得られ，異なるパラメータを持つ転送行列が交換すること

$$\begin{aligned}T_0(\lambda)T_{0'}(\mu)&=\mathrm{tr}_{00'}\left[\tau_0(\lambda)\tau_{0'}(\mu)\right]\\&=\mathrm{tr}_{00'}\left[R_{00'}(\lambda,\mu)^{-1}\tau_{0'}(\mu)\tau_0(\lambda)R_{00'}(\lambda,\mu)\right]\\&=\mathrm{tr}_{00'}\left[\tau_{0'}(\mu)\tau_0(\lambda)R_{00'}(\lambda,\mu)R_{00'}(\lambda,\mu)^{-1}\right]\\&=\mathrm{tr}_{00'}\left[\tau_{0'}(\mu)\tau_0(\lambda)\right]\\&=T_{0'}(\mu)T_0(\lambda)\end{aligned} \tag{2.13}$$

が分かる．すなわち，我々は任意パラメータ λ を含んだ可換な行列 $T_0(\lambda)$ を得たことになる．これを λ で展開することにより，互いに可換な演算子の列を無限個得ることができる．実はその最初の 2 つが，運動量とハミルトニアンであり，我々はハミルトニアンと互いに可換な演算子，すなわち保存量を無限に得たことになる．ハミルトニアンは転送行列を使って

$$\mathcal{H}_{\mathrm{XXZ}}=\frac{\varphi(\eta)}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\log T(\lambda)\Big|_{\lambda=\eta/2} \tag{2.14}$$

と書かれる．

さて，モノドロミー行列 $\tau_{0,12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L)$ を補助空間 V_0 で 2×2 の行列で表示して，その 4 つの行列要素を A,B,C,D と書こう：

$$\tau_{0,12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L)=\begin{pmatrix}A_{12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L) & B_{12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L)\\ C_{12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L) & D_{12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L)\end{pmatrix}_0. \tag{2.15}$$

以下，量子空間の添え字はしばしば省略して $A(\lambda)=A_{12\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L)$ 等と書く．すると，転送行列 $T_0(\lambda)=A(\lambda)+D(\lambda)$ の固有ベクトルが，$\prod_{\ell=1}^N B(z_\ell)\,|0\rangle$ によって構成されることが示される．より正確に言うと，N 個のパラメータ $z_1,\cdots,z_N$ がベーテ方程式

$$\prod_{n=1}^{L}\frac{\sinh(z_j-\xi_n+\eta)}{\sinh(z_j-\xi_n)}=\prod_{\ell\neq j}^{N}\frac{\sinh(z_j-z_\ell+\eta)}{\sinh(z_j-z_\ell-\eta)}\quad\text{for}\quad j=1,2,\cdots,N \tag{2.16}$$

を満たすとき，N 粒子状態 $\prod_\ell^N B(z_\ell)\,|0\rangle$ および $\langle0|\prod_{\ell=1}^N C(z_\ell)$ は転送行列 $T(\lambda)$ の固有ベクトルとなり，固有方程式は

$$\begin{aligned}T(\lambda)\left(\prod_{\ell=1}^{N}B(z_\ell)\right)|0\rangle&=t(\lambda)\left(\prod_{\ell=1}^{N}B(z_\ell)\right)|0\rangle\,,\\ \langle0|\left(\prod_{\ell=1}^{N}C(z_\ell)\right)T(\lambda)&=t(\lambda)\,\langle0|\left(\prod_{\ell=1}^{N}C(z_\ell)\right)\end{aligned} \tag{2.17}$$

で与えられる．ただし，固有値を

$$t(\lambda):=a(\lambda)\left(\prod_{\ell=1}^{N}f(z_\ell,\lambda)\right)+d(\lambda)\left(\prod_{\ell=1}^{N}f(\lambda,z_\ell)\right), \tag{2.18}$$

$$a(\lambda)=a_{1\cdots L}(\lambda|\xi_1,\cdots,\xi_L)=\prod_{n=1}^{L}a(\lambda,\xi_n), \tag{2.19}$$

$$d(\lambda) = d_{1\cdots L}(\lambda|\xi_1, \cdots, \xi_L) = \prod_{n=1}^{L} b(\lambda, \xi_n) \tag{2.20}$$

と書いた．このようにして転送行列が，すなわちハミルトニアンが対角化された．

2.3 解放端 XXZ 模型のベーテ仮説

開放端の場合には，境界 Yang-Baxter 関係式により対角化される．これは非常に煩雑な手続きを必要とするので，ここではベーテ方程式

$$\left(\frac{\sin(\lambda_j + i\zeta/2)}{\sin(\lambda_j - i\zeta/2)}\right)^{2L} = \frac{\sin(\lambda_j + i\zeta/2 + i\xi_1)}{\sin(\lambda_j - i\zeta/2 - i\xi_1)} \frac{\sin(\lambda_j + i\zeta/2 + i\xi_L)}{\sin(\lambda_j - i\zeta/2 - i\xi_L)} \prod_{k\neq j}^{N} \frac{\sin(\lambda_j + \lambda_k + i\zeta)\sin(\lambda_j - \lambda_k + i\zeta)}{\sin(\lambda_j + \lambda_k - i\zeta)\sin(\lambda_j - \lambda_k - i\zeta)} \tag{2.21}$$

を紹介するにとどめる．詳しくは [7, 8] を参照されたい．対数を取ると，

$$\begin{aligned}\frac{\pi I_j}{L} &= \theta(\lambda_j, \zeta/2) - \frac{1}{2L}\left\{\theta(\lambda_j, \zeta/2 + \xi_1) + \theta(\lambda_j, \zeta/2 + \xi_L)\right\} + \frac{1}{2L}\theta(2\lambda_j, \zeta) \\ &\quad - \frac{1}{4L}\sum_{k=1}^{N}\left\{\theta(\lambda_j - \lambda_k, \zeta) + \theta(\lambda_j - \lambda_k^*, \zeta) + \theta(\lambda_j + \lambda_k, \zeta) + \theta(\lambda_j + \lambda_k^*, \zeta)\right\}\end{aligned} \tag{2.22}$$

を得る．I_j はベーテ量子数である．ただし，

$$\theta(\lambda, \zeta) := 2\arctan(\coth\zeta\tan\lambda) + 2\pi\left[\frac{\lambda}{\pi} + \frac{1}{2}\right] \tag{2.23}$$

であり，$[\cdot]$ はガウス記号を表す．また，ξ は磁場を表し，$h_{1,L} = -\sinh\zeta\coth\xi_{1,L}$ である．

この模型の基底状態は，境界 1-string

$$\lambda_N = -i(\zeta/2 + \xi_L + \delta) \tag{2.24}$$

で与えられる [9, 10]．δ は string からのずれを表し，今回これを数値的に求めることに成功した．また，励起状態は，2-string

$$\begin{aligned}\lambda_{N-1} &= x + i(\zeta/2 + \delta) \\ \lambda_N &= x - i(\zeta/2 + \delta)\end{aligned} \tag{2.25}$$

で与えられる．今回見つかったこのタイプの励起状態を使って，形状因子展開

$$\begin{aligned}\langle\lambda|\,\sigma_1^z(0)\sigma_1^z(t)\,|\lambda\rangle &= \sum_{\mu}\langle\lambda|\,\sigma_1^z(0)\,|\mu\rangle\,\langle\mu|\,\sigma_1^z(t)\,|\lambda\rangle \\ &= \sum_{\mu} e^{i(E_\mu - E_\lambda)t}\,|\langle\lambda|\,\sigma_1^z\,|\mu\rangle|^2\end{aligned} \tag{2.26}$$

を用いて，自己相関関数 $\langle\lambda|\,\sigma_1^z(0)\sigma_1^z(t)\,|\lambda\rangle$ を計算した [10]．ただし，形状因子の計算には，行列式公式 [8] を用いた． 下図を見て分かるように，今回我々が得た 2-string によって，Sum rule の約 80%を得ることができた．

3 まとめ

本レポートではまず，周期境界の XXZ 模型のベーテ仮説による厳密解を紹介した．続けて，境界 Yang-Baxter 関係式を用いた開放端 XXZ 模型のベーテ仮説を紹介した．ページ数の関係上，詳細は割愛し，ベーテ仮説方程式だけを論じた．この場合には，境界 string 解が主要な励起状態を与える．string からのずれも含めてベーテ方程

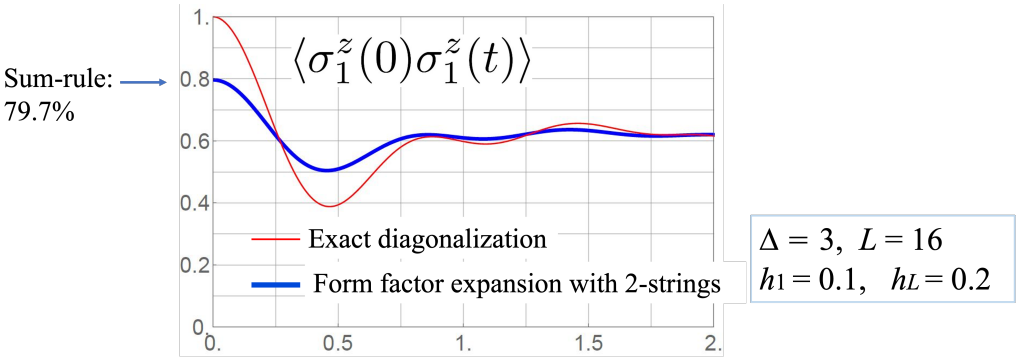


図 1: 自己相関関数

式の根を求めることは strig の特異性により困難であるが，今回数値的に得る方法を確立した．また，これを用いて形状因子展開によって自己相関関数を計算し，80%の寄与を計算できた．

低励起であるにも関わらず解が見つかっていない状態がまだまだたくさんあり，それらを同定して Sum rule を 100% に近づけることは，今後の重要な課題である [11].

謝辞

本稿の内容は，東京大学物性研究所の石黒裕樹氏との共同研究に基づいている．

参考文献

[1] H.A. Bethe, Z. Phys. **71** (1931) 205.

[2] M. Takahashi, "*Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models*", Cambridge University Press, 1999.

[3] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov and A.G. Izergin, "*Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*", Cambridge University Press, 1993.

[4] C.N. Yang, Phys. Rev. **168** (1968) 1920.

[5] R.J. Baxter, Phys. Rev. Lett. **26** (1971) 832.

[6] R.J. Baxter, "*Exactly solved models in statistical mechanics*" (Academic Press, London, 1982)

[7] E.K. Sklyanin J. Phys. A: Math. Gen. **21** (1988) 2375.

[8] N. Kitanine, K.K. Kozlowski, J.M. Maillet, G. Niccoli, N.A. Slavnov and V. Terras J. Stat. Mech. P10009 (2007).

[9] A. Kapustin and S. Skorik, J. Phys. A: Math. Gen. **29**, 1629 (1996).

[10] S. Grijalva, J. De Nardis and V. Terras, SciPost Phys. **7**, 023 (2019).

[11] J. Sato and Y. Ishiguro, in preparation.

索 引

■ア行
相原 真生, 291
青木 侑省, 355
浅山 拓哉, 629
新井 克典, 747
荒井 勇人, 61
新井 利沙, 903
粟津 光, 171
池田 康, 271
石川 元稀, 447
石塚 康介, 581
石塚 伶, 79
岩倉 康樹, 405
岩田 英人, 545
岩本 光平, 377
上野 祐一, 923
上野 龍, 93
上村 宗一郎, 437
鵜飼 歩美, 177
内海 凌, 503
内村 朝樹, 519
大家 佳奈子, 381
大島 駿, 869
大竹 優也, 573
長田 祐輝, 205
小田中 嵐, 493
■カ行
甲斐 涼哉, 877
加藤 響, 475
金堂 優哉, 537
嘉陽 海渡, 99
軽部 友裕, 55
北野 草太, 455
北村 駿介, 155
木村 海渡, 565
草場 竜之介, 299
黒川 大雅, 883
荒神 健太, 163
小谷 崇文, 465
小西 正秀, 185
小林 彦蔵, 105
小脇 修和, 513
■サ行
坂本 光, 933
佐久間 正樹, 317
笹川 理湖, 39
笹原 優大, 861
佐藤 槙哉, 281
佐藤 純, 939
Subwattanachai Kittipong, 555
椎井 亮太, 621
志賀 明日香, 71
島崎 達史, 781
島田 瑠奈, 335
清水 豪, 361
周 星陽, 389
ジョ シン, 325
杉谷 礼, 45
杉本 恭司, 853
杉本 奨吾, 589
鈴木 拓己, 425
鈴木 龍正, 727
鈴木 望夢, 85
鈴木 英正, 675
■タ行
高津 大樹, 637
高橋 夏野, 757
瀧澤 駿, 309
竹内 裕隆, 19
多田 和功, 367
立石 萌, 485
田中 聖人, 255
丹野 俊将, 189
■ナ行
中井 啓太, 529
中川 由宇斗, 231
中谷 友哉, 815
中田 彬文, 27
中津山 希, 341
中西 隼斗, 665
中山 勇祐, 645
名取 雅生, 131
成田 知将, 141
西田 安寿菜, 805
野田 一成, 823
信川 喬彦, 655
■ハ行
橋堀 恭矢, 709
橋本 七海, 245

長谷川 蒼, 789
服部 祐樹, 843
濱岡 小鈴, 149
濱中 翔太, 349
林 佑亮, 195
比嘉 陸, 601
久川 創人, 913
Philip Séverin, 121
福間 友子, 717
藤井 大計, 647
藤江 克徳, 239
星野 真生, 263
■マ行
前原 将太, 771
松下 光虹, 3
松下 尚生, 691
松本 洵, 833
宮澤 仁, 13
宮下 空, 215
毛利 健太, 221
持田 知朗, 397
■ヤ行
矢城 信吾, 595
安田 順平, 765
柳田 幸輝, 799
薮口 怜央, 737
山内 優太, 701
山川 実佑子, 611
山口 夏穂里, 115
山口 健太朗, 685
吉岡 玲音, 415
吉住 崚, 893
■ラ行
■ワ行
和久田 葵, 125
渡邉 南, 201