HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	媒質境界および共振構造における局在現象による固体音響波の制御
Author(s)	武田, 颯
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第15837号
Issue Date	2024-03-25
DOI	https://doi.org/10.14943/doctoral.k15837
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/91935
Type	doctoral thesis
File Information	Hayato_Takeda.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

博士論文

媒質境界および共振構造における局在現象による固体音響波の制御
Control of elastic waves using localization phenomena on media boundaries and resonant structures

武田 颯

北海道大学大学院工学院
応用物理学専攻 量子物性工学講座
量子機能工学研究室

要旨

固体媒質中には、圧縮応力と剪断応力が作用する。故に歪みや応力を伝播する固体中の音響波には、様々な偏向状態の振動が許されている。このような空気中の音響波や電磁波には無い振動モードの選択性は、固体音響波の重要な特徴である。適切なモードを選択することにより様々な応用に柔軟に対応できる。音響波の制御や利活用は日常生活に関わる幅広い領域において進んでおり、環境音の抑制や建造物の制振、超音波による医療検査や物体の非破壊検査がこれに当たる。また最近では通信技術や通信機器の小型化、高集積化への寄与も認められる。これは電磁波に対して音響波は等周波数における波長が非常に小さく、固体中を伝播する際にジュール熱を伴わないことに起因する。以上のような応用においては、制御の対象となる特定周波数の音響波に対して媒質の応答の最大化が要求される。特に音響波の導波における減衰の低減、音響波の遮蔽における遮蔽可能な周波数幅の拡大は、音響波制御の研究領域に置いて長らく議論されてきた課題である。本論文ではこれらの課題への提案として、媒質境界および共振器構造への音響波の局在現象を利用した二種の研究について述べる。

第一の研究は媒質境界に沿った音響波の局在現象であるトポロジカル境界モードに着目し、六方格子状の力学模型における曲げ波の特異な伝播を実証するものである。トポロジー物理学は、特にグラフェンなどの 2 次元構造をはじめとする低次元材料において急速に発展している凝縮物理学の分野である。近年になってトポロジーの概念は古典物理系にも適用され、フォノニック結晶などの人工構造における波の伝播について研究が進められている。特にトポロジーが異なる媒質を接合した境界面に生じるトポロジカル境界モードは、その頑強性と低エネルギー損失から古典波動場において注目される局在現象である。数多のトポロジカル波動現象のうちバレーホール (Valley Hall, VH) 系はフォノニック結晶との親和性が高く、単位胞の空間反転 (P) 対称性を破ることで実現可能であることが知られている。kHz から GHz まで広く VH フォノニック結晶が検討されているが、高周波かつ微小振動であることが多く、実験による安定的な測定方法の要求が障害となっている。10 Hz 程度の低周波数域については磁気で結合されたスピナーからなるメカニカルな VH 系の研究も報告されているが、スピナーは六方格子点上に回転軸を固定されており、カイラルフォノンなどの高自由度の運動を再現することが困難である。一般に音響波は構造スケールの拡大縮小によって応答周波数の調整が可能であり、低周波数における構造探索もまた高周波数域のための知見を与えうる。よって本研究では、六方格子状に加工されたステンレス薄板、プラスチック製中空棒、真鍮円盤からなる力学模型を構築し、低周波の曲げ振動について VH フォノニック系に類似する境界モードの実証を行った。模型の着想は一次元波動現象の演示に用いられる Shive ウェーブマシンに得ており、提案模型は観測が容易な振幅と隣接格子点間の相互作用の大きさを確保した二次元版のウェーブマシンである。トポロジカル境界モードの低周波伝播は実験的に実証され、その挙動は数値シミュレーションにより分析された。本成果はトポロジカルフォノニクスに基づく高度な波動伝播の知見を与えるに限らず、フォトニクスや凝縮物理学を含む多様な系における波動場の制御に貢献しうる。

第二に共振器構造への音響波の局在現象に着目し、従来構造より広い周波数幅の音響波を遮蔽するテーパー状の矩形断面梁を提案する。梁などの棒状媒質における音響波は、圧縮、面内せん断、屈曲、およびねじれの 4 つの偏向状態を有する。一般にはこれらが同時に伝播することで棒状媒質が振動するため、棒状媒質における音響波の遮蔽にはこれら 4 モードの伝播の同時抑制が求められる。その手段として、制御対象の音響波長より小さな共振器構造の周期的配列からなる音響メタマテリアルがある。音響メタマテリアルは波の遮蔽をはじめ、負の屈折、クローキング、超レンズ効果など特異な音響波現象を示す人工結晶として様々な構造が研究されてきた。棒状媒質については一部のモードを抑制する、もしくは複雑な構造の複合材料によって 4 モード制御を実現するといった提案が主であったが、その後当研究室において矩形断面のアルミニウム梁、アクリル円柱棒において単一材料でかつ 4 モードの同時遮蔽する完全バンドギャップの形成が実証された。しかしその周波数幅は、完全バンドギャップの平均周波数の約一割程度に留まった。また完全バンドギャップはフォノニック結晶からなる棒状媒質でも認められるが、広帯域の遮断特性である一方で、同周波数で比較すれば音響メタマテリアルの小型の制振機構に比較すれば構造寸法は増大してしまう。そこで本研究では音響メタマテリアル梁をテーパー状に変形し、単位構造の共振周波数を一定の割合で変化させる構造を開発した。テーパー化することで各共振器構造が与える遮蔽周波数帯域を微小に変調し、その重ね合わせの結果として遮蔽周波数幅の拡大を図った。共振周波数が近接した複数の共振器からなる音響メタマテリアルはレインボーメタマテリアルとも呼ばれ、本構造は任意のメタマテリアル構造をテーパー状に変形することで実現された新たな形態のレインボーメタマテリアルである。この構造により、非テーパー時に比較して平均で約 3 倍広い帯域において音響波の遮断が実現されることが実験と数値シミュレーションで示された。本成果は加工容易性と広帯域の振動遮蔽を両立する多様な構造物の開発に貢献しうる。

本論文の内容は以下の通りである。まず各研究の関連分野の研究背景、先行研究について紹介する。次に一つ目の研究である「二次元六角格子ウェーブマシン上の曲げ波におけるトポロジカル境界モード」について、数値計算と実験の結果について述べる。続いて二つ目の研究である「kHz 帯で完全バンドギャップを有するテーパー状の音響レインボーメタマテリアル梁」について、構造の詳細と併せて数値計算と実験の結果を示す。最後に、各成果を踏まえた統括を述べる。

目次

第 1 章　序論　7
1.1　はじめに 7
1.2　背景 8
1.3　本研究の目的 15
1.4　本論文の構成 15

第 2 章　二次元六角格子ウェーブマシン上の曲げ波におけるトポロジカル境界モード　17
2.1　二次元六方格子ウェーブマシンの構造 17
2.2　数値シミュレーションによる音響波伝播特性の評価 19
2.3　実験による境界局在モードの可視化 30
2.4　考察：空間反転対称な系が示す K 点周りのバンドギャップについて 32
2.5　考察：バンドトポロジーとバレーエッジモードについて 33
2.6　考察：実験系で観測された境界局在モードについて 34

第 3 章　kHz 帯で完全バンドギャップを有するテーパー状の音響レインボーメタマテリアル梁　39
3.1　テーパー状音響レインボーメタマテリアル梁の構造 39
3.2　数値シミュレーションによる共振器の性能評価 43
3.3　実験による測定とシミュレーションの比較 49
3.4　遮蔽周波数域における減衰性の解析 50
3.5　テーパーの拡大率について 52

第 4 章　結言　55

謝辞　57

参考文献　59

第 1 章

序論

1.1　はじめに

音響波とは物質中を変位や応力が波として伝播する現象を指す用語である。一般に「音」という文字から先ず想起されるものは、我々が聴覚情報として捉える空気中の疎密波であろう。ここに云う物質とは「音」を伝える空気（気体）に限らず、変位や応力の波動を伝えるものであれば水などの液体や金属などの固体もまた含まれる。地震など我々が日頃体感する物体の揺れも、地殻や建造物を伝わる音響波である。音響波の制御や利活用は、日常生活に関わる幅広い領域において進んでおり、身近なところでは環境音の抑制や建造物の制振、免震は住環境の構築に欠かせないものとなっている。具体的な方法としてはそれぞれ隔壁の設置や、共振構造の設計などの方法により振動のエネルギー減衰が実現されている。また、一部の動物は自らが発した音の反響を知覚することで周辺環境を把握するエコーロケーション（echolocation, 反響定位）と呼ばれる習性を示す。人類も同様に物体に対して超音波を当て、その反射波を検出することで物体の内部構造を可視化する検査技術を発展させている。これらのエコーによる方法は反射物までの距離と弾性特性が異なる媒質間の音響波伝播の違いを利用したものであり、医療における腹部や筋組織の検査のほか、建築物などの非破壊検査に用いられている。特に近年の通信技術や通信機器の著しい発展の過程には光波や電子は勿論のこと、音響波もまた深く関わってきた。光波や電子に比較して音響波の伝播速度は 5 桁遅く、同一周波数における波長は音響波が非常に小さくなる。故に電気信号を一度音響波に変換して伝送する過程を回路に組み込むことで、素子をより小型化・高集積化することが可能となる。現にスマートフォンなどの通信機器の内部には周波数フィルタとして音響波（弾性波）フィルタが組み込まれている。これは素子の音響波に対する共振特性を利用し、利用したい周波数域の音響波のみを低損失で伝送することで信号のフィルタリングを実現する製品である。変換する音響波によって SAW フィルタ（Surface AcousticWave, 表面音響波）や BAW フィルタ（Bulk Acoustic Wave, バルク音響波）があり、僅か 1 mm 程度の大きさの素子にも関わらず対応周波数は数百 MHz から数 GHz に及ぶ。また音響波の伝播においては内部電流が関与しないためジュール損失を生じず、音響波素子の消費電力は極めて小さく抑えることが可能となる。今後さらに発展しうる情報通信の世界では通信容量の増大と多重化を伴い、より高周波数の信号を低消費エネルギーで伝達、処理する技術が必要である。音響波の伝播特性や制御技術の理解は、デバイス内で電子や光子を一時的に変換し情報伝送する補助的キャリアを見出す意味でも重要な役割を担う。音響波それ自身は電子・光学デバイスのような高速通信への直接的用途を見込めないが、定期的に情報を記録し転送する低消費電力の IoT センサなどへの応用が期待される。

以上の需要のもとで要請されるのは、制御の対象となる特定周波数の音響波に対して媒質の応答の最大化である。特に音響波の導波における低損失かつ低雑音の伝播、音響波の遮蔽における遮蔽可能な周波数幅の拡大は、音響波制御の研究領域において長らく議論されてきた課題である。本論文ではこれら二点の音響波制御に着目し、媒質境界および共振器構造への音響波の局在現象により解決を図る二種の研究について述べる。以下これら研究背景や目的等を述べ、それぞれの研究結果について各章に記載する。

1.2 背景

固体中の音響波の分類として、まず上に述べた BAW と SAW がある。BAW は波長よりも十分大きな媒質の内部を伝播する音響波であり、SAW は媒質表面に沿って伝播する音響波である。媒質に界面が存在する場合、その界面形状に沿って伝播する音響波はガイド波と呼ばれる [1, 2]。SAW は媒質表面を界面とするガイド波の一種であり、深さが波長程度の表面近傍に 9 割程度のエネルギーが局在する。棒や板のような物体に沿って伝播する音響波もまたガイド波であり、板の場合については板波（plate acoustic wave）とも呼称される。これらは棒の太さや板厚が音響波の波長と同程度の場合、または波長の方が長い場合に顕著である。

本論文では、これら音響波の局在現象を利用した導波と遮蔽について考察する。それぞれ離散的なおもりを搭載した薄板における音響波の導波、および共振構造を有する矩形断面の梁を伝わる音響波の遮蔽を扱う。一つ目の薄板における導波についてはトポロジー物理の概念を導入し、媒質境界に局在して伝播する境界モードの振る舞いに着目する。二つ目の矩形梁については、遮蔽する音響波の周波数帯域を拡大するため、共振器の共振周波数をわずかにずらして配置するテーパー状構造を提案する。以降これらの研究についての基礎的な事項や先行研究について述べる。

1.2.1 周期構造による音響波の制御

本節では、音響波の伝播や周波数特性の制御を目的とした人工結晶であるフォノニック結晶と音響メタマテリアルについて概説する。フォノニック結晶は、音響インピーダンスが異なる複数の媒質を周期的に配置することで構成される。その特徴は音響波の分散関係にあり、周期構造に起因したバンドギャップを伴うバンド構造を有する。このバンドギャップの存在から、任意の周波数帯の音響波を遮蔽する、音響波を所望の形に伝送する導波路の形成など自在な音響波制御に向けた構造の探究が行われてきた [3]。その前身は電磁波、光波の制御を目的としたフォトニック結晶であり、1987 年に Yablonovitch と John がそれぞれ超格子構造における電磁波の振る舞いを示して以降拡大した分野である [4, 5]。音響波に概念が拡張されたのは 1998 年のことであり [6]、空気中の音波から固体を伝播する弾性波に至る様々な音響波に対して構造の検討がなされた [7–14]。

一方で、音響メタマテリアルは局所共振構造を周期的に配した人工構造である。[*1] メタマテリアルという用語もまた元来電磁波の領域で生まれたものであり、1960 年代に Veselago が提唱した負の誘

[*1] なお分類の問題として、フォノニック結晶の周期構造を共振器とした特別な場合を音響メタマテリアルとする場合、もしくは音響波の特異な振る舞いを示す人工結晶を総じて音響メタマテリアルと呼ぶ場合など研究者の立場によって表記に揺れが認められるが、本論文では「局所共振器由来のバンドギャップに注目して音響波制御を図る構造」を音響メタマテリアル、その他の周期構造についてはフォノニック結晶と呼称する。すなわち 2 章で述べるメカニカルグラフェンはフォノニック結晶、3 章のテーパードメタマテリアルについては音響メタマテリアルと分類して扱う。

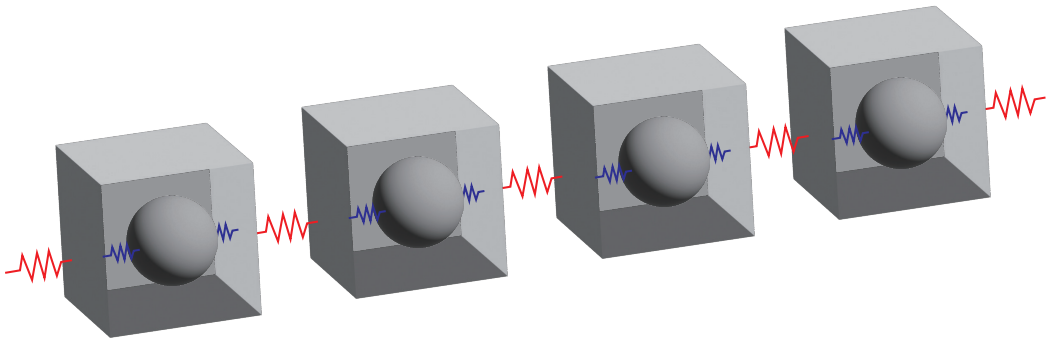


図 1.1 内部に共振構造を有するおもりとバネからなる一次元鎖モデル。

電率と負の透磁率を有する物質上の電磁波についての理論モデルが起こりである [15]。その後 1990 年代から 2000 年代にかけて、金属や絶縁体を周期的に組み合わせた人工的な媒質において見かけ上の誘電率と透磁率が負となることが明らかとなり [16–20]、現在まで電磁メタメテリアルとして多くの構造が報告されている [21–26]。電磁メタマテリアルにおいては、対象の電磁波の波長よりも十分小さな共振構造を単位として、その局所共振により応答が制御される。ここで電磁波を音響波と置き換え、バネとおもりのような共振器を単位構造としたものが音響メタマテリアルである。音響メタマテリアルにおける音響波の分散関係には、フォノニック結晶同様の周期性に由来するバンドギャップが開くのに加えて、共振器の共振周波数近傍にもバンドギャップが生じる。故に単位構造の共振器の応答を制御することが、直接に音響波の遮蔽性能を向上することと繋がる。音響メタマテリアルの第一例は 2000 年に発表され、樹脂材料における特定周波数の音響波の遮蔽が実現された。ここでは樹脂内にシリコンゴムで覆った金属球を配することで、バネ（シリコンゴム）とおもり（金属球）からなる共振器が構成された [27]。その後今日に至るまで多岐にわたる音響メタマテリアルが提案されており、例として音響波の遮蔽 [28–57]、負の屈折 [58–61]、スーパーレンズ [62–64] 、クローキング [65–71]、異常透過 [72–74] がある。このうち音の遮蔽については、図 1.1 に示した内部に共振構造を有する質量体とバネからなる一次元の質量バネモデルによって説明が可能である [75]。単純化のため縦波もしくは横波のいずれか一方向の独立した振動のみを対象とする。図中バネ（赤色）で連結されたおもり（立方体）は中空であり、内部にはさらに別のバネ（青色）とおもり（球）が接続されている。内部に繋がれたバネと球が、音響メタマテリアルにおける周期的な共振構造に相当する。この一次元鎖の音響波のバンド構造には、内部共振器の共振周波数の近傍にバンドギャップが生じる。バンドギャップは上記の共振周波数を下端とし、ギャップ上端はそれぞれの重りの質量比と共振器の共振周波数に依存する。3 章では音響波の遮蔽周波数域を定義する際に、共振構造の共振周波数の位置をもとに遮蔽周波数域の下端および上端を判別している。界面が存在する連続体媒質においては縦波と横波がカップルし上記より複雑な分散関係となるが、共振構造の共振周波数に応じてバンドギャップが開く原理に変わりはない。よって共振周波数をコントロールすれば小型の共振器構造であっても制振が可能であり、このことは応用上で構造体体積による制約を避けることもできる利点である。

1.2.2 トポロジカルフォノニクス

本節では 2 章に関連して、フォノニック結晶におけるトポロジー物理の展開について概説する。トポロジーとは多様体の連続的な変形の下で保存される特性に関する数学の一分野であり、端的には形と分類に関する数学である [76, 77]。多くの場合に例示されるのは球とドーナツ（トーラス）の関係であり、穴を開けるという不連続な移り変りを必要とする同一ではない（非同相の）多様体の例である。幾何に関係するトポロジーの概念は素粒子理論をはじめとする物理学の理論的枠組みの再編成に関与しているが、特に凝縮物質物理学の領域への浸透は重要な転換点となった。1980 年の量子ホール（Quantum Hall, QH）効果の発見を皮切りに [78]、トポロジカル絶縁体などの特異な現象についてトポロジーによる理解と系の分類が進んだ [79–81]。中でも系の端ないしは媒質境界面に局在するトポロジカルエッジモードの存在は、ロバストな信号伝送を求める導波路の設計に多大な影響を与えている。電子系のトポロジーは波数空間、すなわち電子バンドにおける波動関数の位相変化から計算し定義される。ここでの位相変化は波数空間をパラメータ空間として波動関数が獲得する幾何的位相のことを指し、その概念は 1984 年に Berry により纏められた。以上の電子系におけるバンドトポロジーの解析は波動関数の移り変りにのみ結果を左右され、媒質や電子に関する情報は陽に反映されていない。したがって、同様に波動である古典系の光波や音響波についてもトポロジーによるアプローチが可能であることが予想される。 1.2.1 節で述べたように、電子系に限らずフォトニック結晶やフォノニック結晶も周期構造に由来したバンド構造を有することから、電子系同様にトポロジー物理の導入が試みられた。実際にフォトニック結晶中の光波やフォノニック結晶中の音響波について、トポロジカル波動現象が発見されたのは 2000 年代に入ってのことである。古典波動場においてもロバストな波動伝送の需要が高いことから、この十年で様々なトポロジカルフォトニック／フォノニック結晶が提案されている [82, 83]。特に固体音響波については媒質に振動が拘束され、電磁波に比較して外部にエネルギー流出が少ない優位性も備えている。

古典波動場においてトポロジカル波動現象を実現するにあたり、多くの例で系の基本構造として参照されるのはグラフェンに代表される六方格子系である。グラフェンは炭素からなる二次元六方格子であり、波数空間における Dirac コーンの出現、有限媒質の端に現れるエッジモードの存在、バレー偏極などトポロジー物理を含め特異な波動現象を示すグラフェンは長らく二次元系を代表する興味深い研究対象となっている [84–87]。音響波におけるアナロジーとして質点バネ系あるいは強束縛モデルからなる力学系グラフェンの理論モデルが開発され、電子系同様に Dirac コーンを持つフォノニックバンド構造やエッジモードの存在が理論的、実験的に示されている [88–93]。このうち [89] による分散関係を図 1.2 に示す。

古典波動場によるトポロジカル現象のアナロジーは系の対称性を破ることで発現し、保護される対称性に応じて QH 系やバレーホール (Valley Hall, VH) 系などに移り変わる。QH 系であれば時間反転対称性を破ることになるが、電子の場合は主に定磁場によって容易に実装されるのに対し、電気的中性の音響場は少々の工夫が必要である。例としてはピエゾ素子による変調、空気音響における媒質の流動、ジャイロスコープの利用やコリオリ力を用いる方法などが提案されている [94–97]。しかし既存の SAW フィルタのように音響波を受動的に制御する場合において、これらの時間反転対称性への試みは実装状の困難を伴う。一方で時間反転対称性を保護して空間反転対称性を破る場合については構造設計の障壁が非常に低いため、空間反転対称性の破れによって現れる VH 系はフォトニク

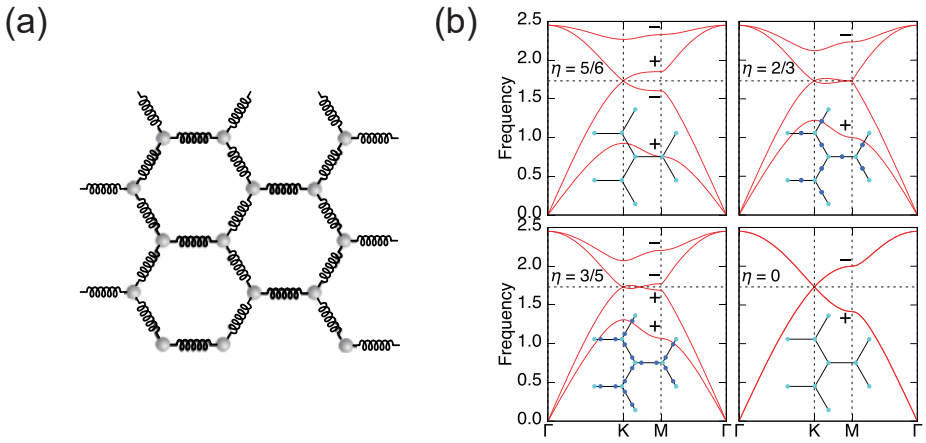


図 1.2　メカニカルグラフェンにおけるフォノン分散関係 [89]。η は平衡時の隣接格子間距離と自然長の比である。K 点周りに線形な分散が生じており、フォノン系における Dirac コーンである。

ス [98–102] とフォノニクス [103–116] 双方において多くの研究が行われている。

VH 系のバンドトポロジーは Berry 曲率の計算と付随するトポロジカル数の Valley Chern 数によって測られるが [77]、その際異なるバンドトポロジーを有する媒質同士を接合するとその界面に局在するエッジモードが立つ。この局在モードはバレーエッジモードやバレー局在モードと呼ばれ、その周波数は界面を構築するバルクにおいてはバンドギャップの内部に相当する。このように「トポロジーが異なる媒質を接合した界面には局在モードが現れ、その周波数はバルクのバンドギャップ内に存在する」という関係を予言するのがバルク・エッジ対応と呼ばれる概念である。音響波におけるバレー局在モードの存在は、六角格子モデルなどで理論的に予測されている [103, 106, 110]。実際の VH 系フォノニック結晶に対する数値シミュレーションは、固体音響波に限ってもバネで接続されたロッド [105, 113]、共振器を備えたプレート [104, 107, 109, 112]、および半導体構造のプレート [108, 111] など多岐にわたる。また最近では、recongfigureble（再構築可能）な VH 系フォノニック結晶も数値シミュレーションにより提案されている [114–116]。

固体音響波を用いた実験的観測としては、六方格子を単位構造とした媒質における板波や SAW の局在モードが報告されている [117, 119, 120]。ただしこれらの研究は kHz から GHz の範囲で行われているため、高周波数かつ小さな変位振幅を安定に測定する環境が必要であり、一般のカメラなどを介した直接の目視による現象の理解は困難である。また図 1.3(A) に引用したように、SAW を対象とする系では基本構造が微細であり、安定的な加工精度が求められる。10 Hz 程度の低周波数域については磁気で結合されたスピナーからなるメカニカルな VH 系の研究 [118] も報告されている。図 1.3 に、実際の系の画像を引用して示す。スピナーは六方格子点上に回転軸を固定されており、カイラルフォノンなどの高自由度の運動を再現することは困難である。

一般に音響波は構造スケールの拡大縮小によって応答周波数の調整が可能であり、低周波数域における現象の理解は高周波数域における音響波の高効率な導波路設計の知見へと繋がる。

以上を受けて本研究では、VH 系フォノニック結晶に基づく六方格子系の力学模型を構築し、目視可能な周波数帯において媒質界面に沿った局在モードの振る舞いについて考察する。その実現には目視可能な周波数で大きな変位振幅を示し、かつ復元力となる隣接格子点間の相互作用が十分に確保で

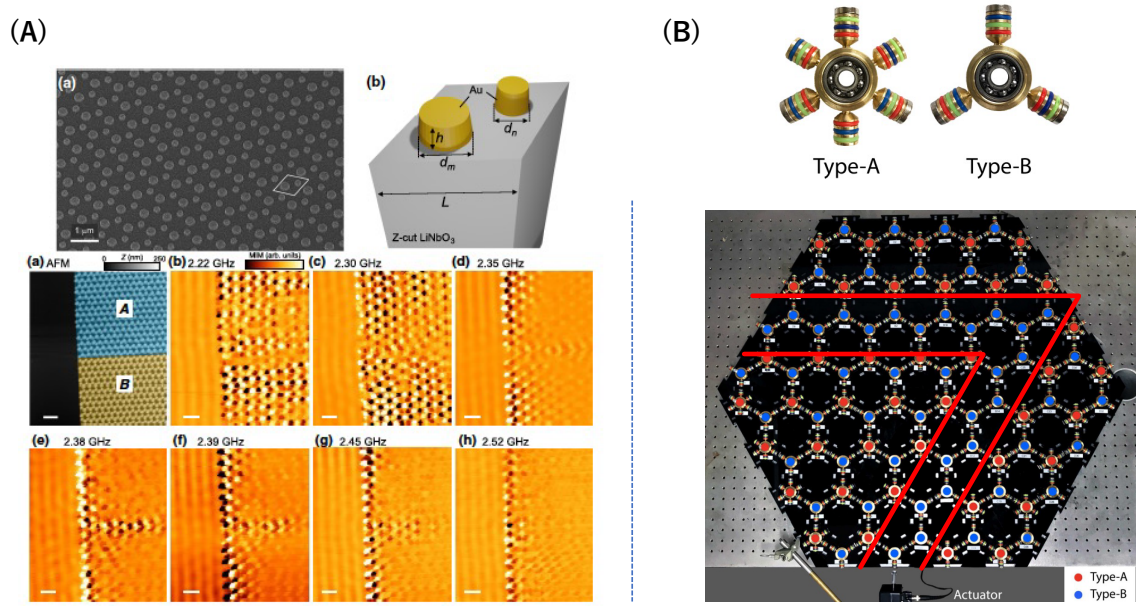


図 1.3 トポロジカルフォノニクスの先行研究のうち、valley 系に関する実験事例。(A)LiNbO3 基板上に大きさが異なる金ピラーを周期的に配置した、SAW に対する valley Hall 系 [117]。ピラーの配置を反転した二種の媒質境界において局在モードが観測された。(B) 磁気で結合されたスピナーからなるメカニカルな VH 系による振動の可視化 [118]。赤線で示されたようにある特定のスピナーを連続的に配置した境界において局在モードが現れる。

きる力学的な模型が必要となる。

1.2.3 Shive ウェーブマシン

力学系に対する以上の要求を満たす機構として、本研究では Shive ウェーブマシンに着想を得た。Shive ウェーブマシンは一次元波動現象のデモンストレーションのため考案された教育用装置であり、その名称は発案者である J. N. Shive に由来する [121]。図 1.4 に示すように Shive ウェーブマシンの基本構造は、複数の棒とその中心を通るワイヤーからなる。棒が傾くことでねじれによる復元力がワイヤーに生じ、棒の回転運動が波として伝播する。棒の回転運動の速度と振幅は目視可能な大きさであり、様々な波動現象の可視化を可能としている。Shive ウェーブマシンは現在も高等学校等の教育現場で波動物理の演示に使用されるほか、Shive 自身も反射、透過、自由端、固定端、インピーダンスマッチング等の波動現象の実演をこの装置により行った。ワイヤーによる復元力を隣接する棒の間の相互作用と見なし、棒の回転について運動方程式を記述すると、その形式は一次元の質点バネモデルと等価になることが知られている [122–124]。故に質点バネモデルにより記述される音響波現象は、Shive ウェーブマシン上で棒の回転運動に置き換えることで原理上再現が可能である。実際に当研究室より、周期的なおもりや板バネを取り付けることでフォノニック結晶や音響メタマテリアルによる波の遮蔽、張力の時間的な変調を加えることで現れる時間境界における波の反射などが一次元 Shive ウェーブマシンにより示されている。本研究では Shive ウェーブマシンの設計方針を二次元に拡張し、六方格子上の音響波を目視可能な模型を構築する。すなわち先端におもりを付した複数の棒を六方格子状に加工された薄板で連結し、薄板の曲げ波を介して隣接格子点が相互作用する質点バネモデルを模した装置とする。詳細な構造については 2 章に記載する。

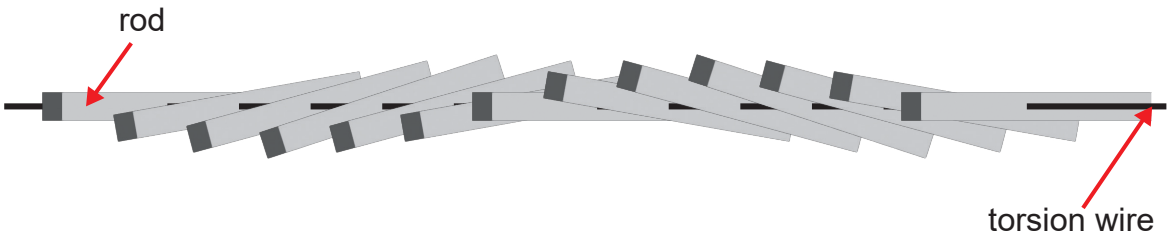


図 1.4　Shive ウェーブマシンの基本構造。棒の中心に通されたワイヤーを通してねじれ運動が伝播する。

1.2.4　棒状構造におけるガイド波

本節では 3 章に関連して、特に棒状構造を伝播するガイド波について概説する。固体媒質には圧縮応力と剪断応力が作用するため、音響波は様々な偏向状態の振動が許されている。一様な等方性材料からなる円形または矩形の断面を有する棒状物体における最低次の音響波は、図 1.5 に示す圧縮波、変位方向が直交する 2 つの曲げ波、捻り波（ねじり波）の 4 モードに分類される。名称から予想されるように、これらのモードはそれぞれ物体の長軸方向の疎密、長軸に垂直な曲げモーメント、長軸を回転軸とする捻りモーメントを運ぶ。曲げ波の直交する二つの振動方向については、梁の場合は任意の側面を基準として平行なモード（面内曲げ）、または垂直なモード（面外曲げ）として区別される。円形断面のように対称性が良い形状では二つの曲げモードが縮退するため同一視される場合もある。また変位分布の対称性による分類も可能であり、表 1.1 のようになる。最低次のみ取り扱う低周波数域においても、変位や応力の方向が異なる複数の音響波のモードが異なる音速で伝播する。よって棒状媒質における音響波の遮蔽を実現するには、以上の 4 モード全てを制御する機構が必要とされる。

表 1.1　変位分布の対称性による梁の音響波モードの分類

モード	幅方向	厚さ方向
圧縮	対称	対称
面内曲げ	反対称	対称
面外曲げ	対称	反対称
捻れ	反対称	反対称

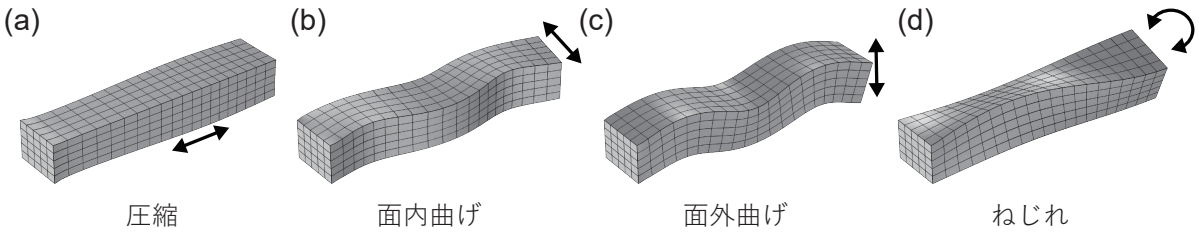


図 1.5　矩形断面の梁におけるガイド波の 4 モード。黒矢印は運動の方向を示す。

棒を伝わる音響波に関する知見は、ガイド波自体への関心とともに材料の物性測定への活用を図るためにも重要であった。1800 年代後半、Pochammer [125] や Chree [126, 127] は円柱棒を伝わる音響モードの解析式（厳密解）を示した。円柱が先行したのは断面形状の対称性により解析的取り扱いが可能であったためであり、矩形断面については数値計算を要することから展開が一歩遅れた背景がある。矩形断面の梁については、1960 年代までに Morse [128, 129]、Kynch [130]、Nigro [131]、Faser [132] などが数値解を示した。異方性媒質を考慮したものとしては 1997 年の西口ら [133] の研究がある。解析的取り扱いが可能となる特別なケースとして 1960 年の Mindlin と Fox [134] による研究では、断面の厚さと幅が特定の比を取るときの分散関係の一部が離散的に求められた。

1.2.5 棒状媒質の音響メタマテリアル

棒状媒質においても、多様な音響メタマテリアルによる音響波の遮蔽が提案されてきた [36–57]。前節 1.2.4 で見たように音響波の遮蔽では、系の対称性の良い場合を除いて 4 つのモードの制御を考えなくてはならない。先行研究のうち殆どは単一モードの制御を考慮しており、その中でも曲げ振動を扱う研究が多く見られる [36–47]。特に Tang と Cheng [45] は金属製の矩形梁に周期的な穴を配することで、単一材料ながらおもりとバネの共振器構造を持たせた。複合材料を許容した構造については [36–41, 43, 44, 46, 47] がある。梁に質量バネ系からなる局所共振器を配した理論モデルも報告された [42]。曲げ波以外のモードを個別制御する例としては、圧縮波 [48, 49] と捻り波 [50–53] がそれぞれ報告されている。応用上の環境によっては単一モードの遮蔽で事足りるケースもあり得るものの、構造物の非対称性などによってはモード変換も起こり得るため完全な遮蔽は困難である。そこで複数モードの同時制御をなす完全バンドギャップの形成が求められるが、その設計には複数モードに応答する共振器構造が必要となる。全モードの同時遮蔽は複合材料による音響メタマテリアル [55–57] や、波長大の構造を伴うフォノニック結晶で検討された [9–13]。完全バンドギャップをなす単一材料の音響メタマテリアルは 2019 年に生まれ、当研究室よりアルミニウム製梁とアクリル製円柱で完全バンドギャップをなす音響メタマテリアルの研究が報告された [135, 136]。単一材料での完全バンドギャップ形成は音響メタマテリアルの領域に新たな設計方針を与えたが、次の課題として完全バンドギャップの広帯域化がある。詳細は 3 章に改めて示すが、上記メタマテリアル梁における完全バンドギャップの幅は、ギャップ内の平均周波数の 12% 程度に留まった。広帯域かつ全モードの遮蔽の実現は、構造物の強力な制振において重要な課題である。

広帯域化を図る方法としては、共振周波数が近接した複数の共振器を並べるグレーデッド型の構造、連続媒質の形状を等倍で拡大縮小するテーパー状の媒質による方法が研究されている。グレーデッド型は、別個の共振周波数をもつ独立した共振器の組み合わせによって構成されている。数値計算では、幾つかの Helmholtz 共振器を直列に連結した構造を接続した導波管内の空気音響が報告された [137]。また 2021 年には、Hu らが梁上の質量バネ共振器の配列について論じている [138]。実験としては、深さが段階的に変わる櫛形構造を配した真鍮梁における空気音響 [139]、長さが異なる複数の管が周期的に接続された導波管内の空気音響 [140]、板上に慣性モーメントが異なる棒を配置した構造 [141, 142]、体積が異なる立方体を板で連結した構造 [143] がある。一方、テーパー状の構造は変形元のメタマテリアル構造が持つ共振の性質を変調する。一例としては、テーパー状の構造によって音響メタマテリアルの見かけの音響特性を変調する研究が報告されている [144]。また上で紹介したグレーデッド型のうち [139, 142] については、その媒質形状に注目すればテーパー状のメタマ

テリアルとも見ることができる。以上のように共振周波数が近接した複数の共振器からなる音響メタマテリアルはレインボーメタマテリアルとも呼ばれる。これらの先行研究は複合材料であったり、複数の構造が接続されるため媒質の体積が大きなものが殆どである。単一の比較的小さな構造による音響メタマテリアルとしては、Zhou らによる迷路状の構造を内部に設けた球体があるが、3D プリンタの利用を前提とした非常に複雑な構造をとる [145]。

音響メタマテリアルの優位性である小さな共振器構造による音の遮蔽と、製作を容易にする単一材料の使用、構造の簡易性は構造物の制振への応用を考慮すると保護したい特徴である。そこで本研究では単一材料からなる音響メタマテリアル梁をテーパー状に変形し、レインボーメタマテリアルとすることで遮蔽周波数幅の拡大を図った。

1.3　本研究の目的

前述の通り、音響波の高効率な伝送、広帯域における音響波の遮蔽は、音響波制御の領域において長らく議論されてきた課題である。本論文ではこれら二点の音響波制御に着目し、媒質境界および共振器構造への音響波の局在現象により解決を図る二種の研究について述べる。第一の研究では、媒質境界に沿った音響波の局在現象であるトポロジカル境界モードに着目し、六方格子状の力学模型における曲げ波の特異な伝播を検証する。第二の研究では、共振器構造への音響波の局在現象に着目し、従来構造より広い周波数幅の音響波を遮蔽するテーパー状の矩形断面梁を提案する。尚、これら研究についてはそれぞれ文献 [146, 147] にて報告しているため、当該文献も参照されたい。

1.4　本論文の構成

2 章にて二次元六角格子ウェーブマシン上の曲げ波におけるトポロジカル境界モードに関する数値計算と実験について述べる。3 章にて kHz 帯で完全バンドギャップを有するテーパー状の音響レインボーメタマテリアル梁の研究について述べる。4 章ではこれら研究結果についてまとめ結論を述べる。

第 2 章

二次元六角格子ウェーブマシン上の曲げ波におけるトポロジカル境界モード

本章では、Shive ウェーブマシンの設計方針を二次元に拡張し、六方格子上の曲げ波におけるトポロジカル境界モードを可視化した研究について論じる。2.1 節では本研究で設計した装置の概要、2.2 節では本ウェーブマシンの分散関係と、音響波の伝播シミュレーションについて述べる。2.3 節では当該装置におけるトポロジカル境界モードの実験による観測について記し、以降の節では各結果について考察する。

2.1　二次元六方格子ウェーブマシンの構造

以下、先行する力学系グラフェン模型 [89–91] に倣い、当該装置をメカニカルグラフェンと呼称する。1.2.2 節で述べたように、固体音響波におけるトポロジカル境界モードを発現するフォノニック結晶として作製が容易であるのは、単位構造の空間反転対称性を崩すことで構成されるバレーホール (VH) 系である。本研究においても同様の方法でトポロジカル境界モードの発現を図るため、格子点の力学特性の分布を容易に変更可能な機構を組み込むこととした。図 2.1 に、本研究で作製したメカニカルグラフェンを示す。

図 2.1(a) が実際の装置の全体像である。装置の大きさは各辺が 1300 mm の正方形であり、同図 (b) から (d) に示すようにメカニカルグラフェンは薄い六方格子状の金属板、金属板の表裏に接続されたロッド、ロッド先端の真鍮の重りの集合からなる。金属薄板（以下、「ベースプレート」）は厚さ 0.3 mm のステンレス製で、六方格子の各辺が長さ 50 mm、幅 5 mm となるようレーザー加工により切削されている。ベースプレートの全ての単点は枠を構成するアルミニウム製支柱にねじ止めされている。全 492 の格子点の位置には穴が空いており、ベースプレートの表裏からポリオキシメチレン（polyoxymethylene, POM）プラスチック製のロッドが 1 本ずつ、計 2 本が板を挟むように取り付けられている。POM ロッド（以下、単に「ロッド」）は、長さ 150 mm、直径 8 mm の円柱状で、各端に深さ 8 mm の M4 ねじ穴をもつ。ベースプレートとの接続には長さ 13 mm の M4 ねじが切られた真鍮棒を使用し、ベースプレートとロッドの間には厚さ 0.5 mm、内径 4.5 mm、外径 10 mm のステンレス製ワッシャーが 2 枚ずつ挟まっている。ロッドの両端には、直径 15 mm、厚さ 5 mm、内径 4.2 mm の真鍮製の重り（以下、「真鍮板」）が任意の枚数取り付けられている。固定には全長 32 mm、ねじ長さ 28 mm、頭部直径は 7 mm の金属製 M4 六角ボルトを使用した。1.2.3 節で述べたように、本

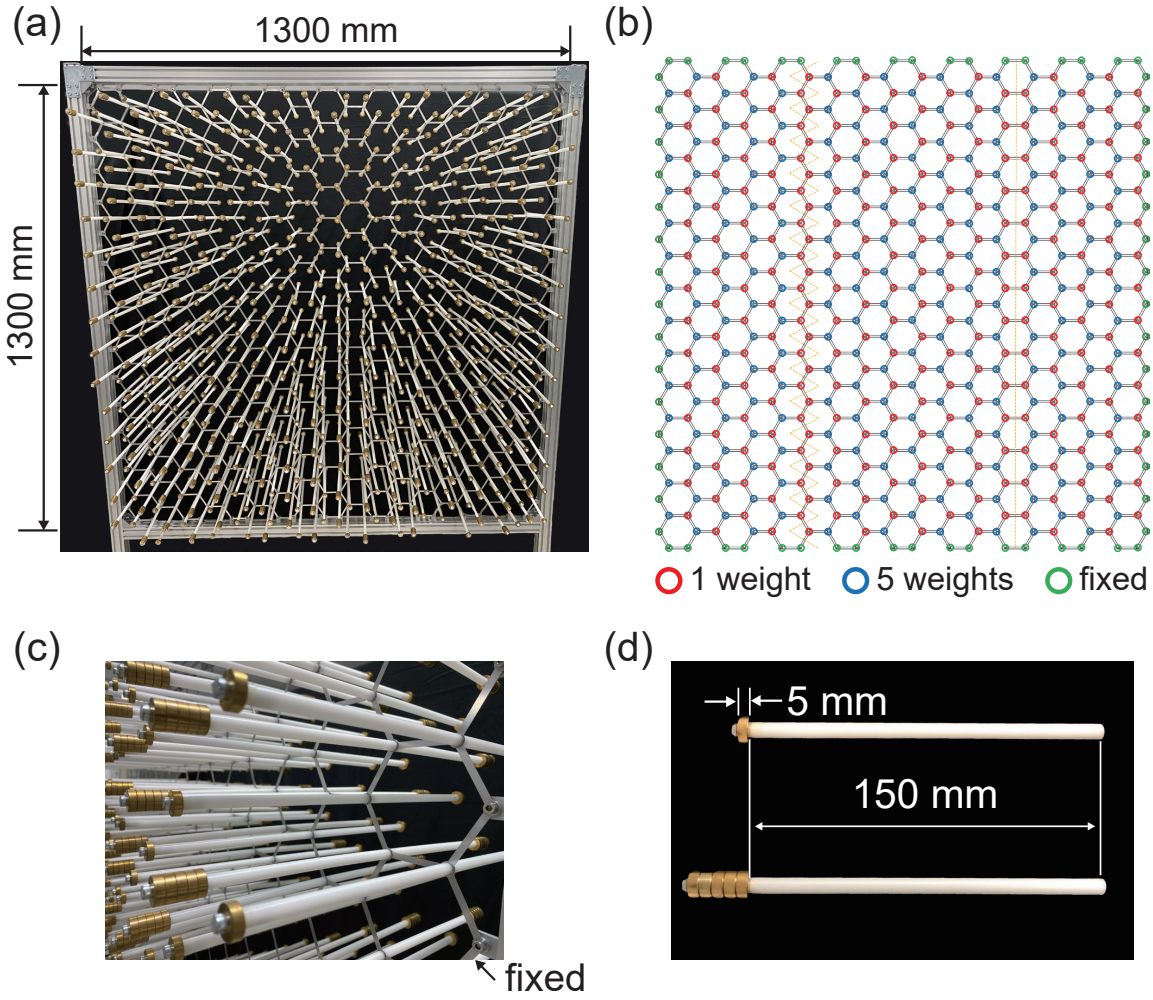


図 2.1　本研究で作製した装置。系の最外辺は支柱に固定されている。(a) メカニカルグラフェン実物の画像。(b) 格子の略図。真鍮板の分布を赤色と青色の円で示す。黄色の点線は媒質境界を表す。(c) 構造の拡大画像。(d) ロッド部分の拡大画像。ロッドと真鍮板の直径ははそれぞれ 8 mm と 15 mm である。

装置は Shive ウェーブマシンと同様にロッドの回転運動の伝播によって系の振動を可視化する。したがって振動の周波数を落とすには運動の主体であるロッド部分の慣性モーメントを増大させればよく、上記のロッドと真鍮板の効果によって最低次の振動モードの固有周波数を約 1 Hz に低減させている。メカニカルグラフェンの全体における真鍮板の分布を図 2.1(b) に示す。空間反転対称性を破りバレー偏極を誘起するため、各ユニットセル内の真鍮板の枚数を調整する。ユニットセル内の格子点は図 2.2(a) に図示されるように、A サイトと B サイトとして区別する。メカニカルグラフェンの左側 1/3（水平に対し 30° をなす方向に沿い 5 ユニットセルを含む幅）および右側 1/3（幅 4.5 ユニットセル）の領域では、A サイトに 5 枚、B サイト 1 枚の真鍮板が固定されている。トポロジーが異なる媒質を形成しするため、構造の中央 1/3（幅 7.5 ユニットセル）では上記の設定を反転し、A サイトに 1 枚、B サイトに 5 枚の真鍮板が分布している。左側 1/3 の位置に形成される垂直境界は、1 枚の真鍮板を持つ「軽いサイト (light site)」が連続した bearded エッジと呼ばれる境界となっている。右側 1/3 の垂直境界も、「軽いサイト (light site)」が対面した zigzag エッジと呼ばれる境界をなす。

以降ユニットセルの区別のため、A サイトと B サイトに真鍮板がそれぞれ t_A mm, t_B mm 接続され

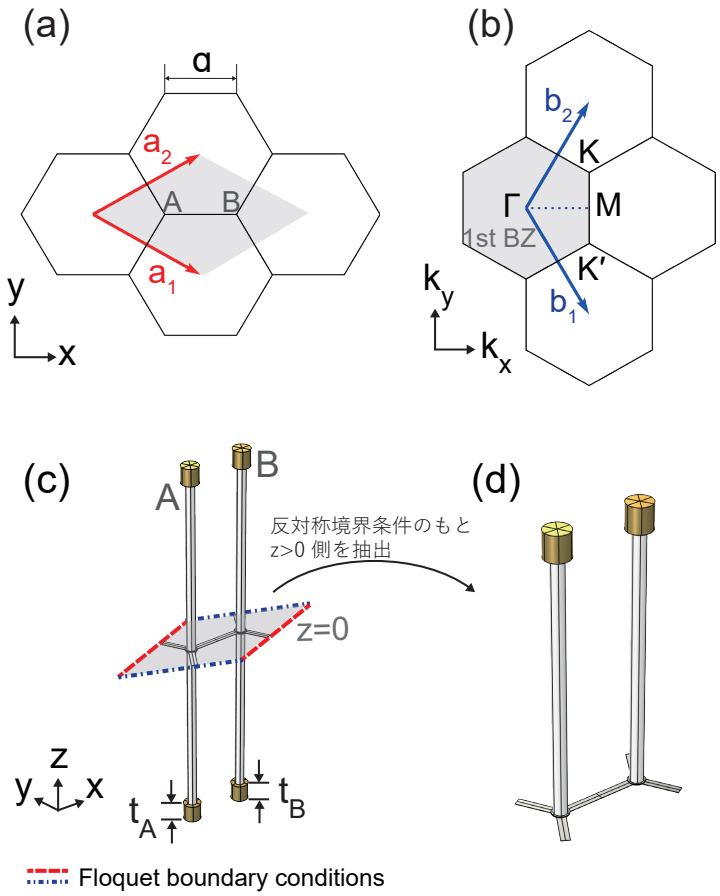


図 2.2　(a) 実空間のユニットセル（灰色網掛け部分）と基本並進ベクトル。格子定数を a として $\mathbf{a_1} = \frac{a}{2}\left(3, -\sqrt{3}\right)$ and $\mathbf{a_2} = \frac{a}{2}\left(3, \sqrt{3}\right)$ である。(b) 波数空間と対称点。逆格子ベクトルは $\mathbf{b_1} = \frac{2\pi}{3a}\left(1, -\sqrt{3}\right)$ and $\mathbf{b_1} = \frac{2\pi}{3a}\left(1, \sqrt{3}\right)$ となる。灰色網掛けの六角形は第一ブリルアンゾーンを表す。高対称点はそれぞれ $\Gamma : (0,0)$, $M : \frac{2\pi}{3a}(1,0)$, $K : \frac{2\pi}{3a}\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, and $K' : \frac{2\pi}{3a}\left(1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ である。(c) 15 : 15 構造のユニットセルと境界条件。 灰色網掛けの菱形はベースプレートの中立面 ($z = 0$ 面) を表す。モデルはこの面で分割され、反対称条件が課される。赤色と青色の点線はそれぞれ Floquet 境界条件で対応する境界の組を表す。(d) 数値シミュレーションで実際に計算されるジオメトリ。ベースプレートの中立面に課した反対称境界条件により $z > 0$ 側の構造のみを含み、モデルサイズを半減している。

たユニットセルを「$t_A : t_B$ 構造」と表記する。

2.2　数値シミュレーションによる音響波伝播特性の評価

メカニカルグラフェンにおける音響波伝播を理解するため、数値シミュレーションによる評価を行った。以下では 2.2.1 で一般の設定について述べたのち、2.2.2 でユニットセルの評価、2.2.3 で実際の系を模した有限媒質における波動伝播の計算について紹介する。

2.2.1　シミュレーションの諸設定

数値シミュレーションは、商用の有限要素法ソフトウェアである COMSOL Multiphysics により実施した。図 2.2(a) と (b) に、ユニットセルの基本格子ベクトルと波数空間の高対称点を示す。当該メカニカルグラフェンの機構から、主たる振動は板の曲げ振動であると考えられる。1.2.4 節の図 1.5 および表 1.1 に示した 4 モードのうち、面外曲げとねじれの振動がこれに該当する。よって本論文ではベースプレートの中立面を基準として、厚さ方向に反対称なモードのみを取り扱う。これを受けて計算コストの削減を図るため、図 2.2(c) に示すようにユニットセルを $z = 0$ 平面（ベースプレートの中立面）で分割し、反対称境界条件を課した $z > 0$ 側の構造のみを計算した。ジオメトリとしては図 2.2(d) の形状をとる。加えて実際の構造を単純化して取り扱い、次のような近似構造を計算する：ベースプレートは密度 8000 kg/m^3、ヤング率 196 GPa、ポアソン比 0.27 のステンレス鋼とする。同一材料からなるワッシャーも円盤としてこれに含まれている。ロッドは長さ 150 mm、直径 8 mm、密度 1411 kg/m^3 で、ネジ穴を含まない単純な円柱とする。真鍮板の直径は 15 mm、厚さは 5 mm、密度 8500 kg/m^3 で、同様にネジ穴を含まない円盤である。各部材を固定する M4 ねじについては除外している。本計算では重力の影響を考慮していない。これは重力の影響が系の弾性パラメータにほぼ変化を生じないためである。以上の設定は、2.2.3 で扱う超格子構造においても同様である。

2.2.2　ユニットセルの分散関係

本節ではユニットセルのフォノン分散関係について記述する。まず、空間反転対称性を保った系について紹介し、その後空間反転対称性を破ったユニットセルの場合について紹介する。図 2.2(c) に図示したように Floquet 周期境界条件を課し、固有モードと分散関係を計算した。メッシュ要素は三角柱、四角柱、および四面体で構成され、ユニットセルが持つ 3 回対称性を維持する形で設定された。図 2.2(c) に示したユニットセルの場合、約 11,000 のメッシュ要素からなり、側面寸法の最大値と最小値はそれぞれ 6.2 mm および 0.26 mm であった。

まず図 2.3(a) のように $t_A = t_B$ である構造について、フォノン分散曲線を図 2.3(b) から (e) に示す。グラフェンのように反転対称性が保たれた六方格子であるため、先行研究と同様にして K 点周りには Dirac コーンが形成されることが期待される。しかし実際の分散関係においては、どの場合もバンドギャップを有していることがわかる。バンドギャップ幅を表 2.1 に記載する。[*1]プロット上では $t_A(t_B)$ が増大するにつれて全体の周波数は減少し、バンドギャップは閉じる方向に移行するように見えるが、バンドギャップ幅を比較すると大きな変化は認められない。また、いずれの場合も共通して Γ 点と K 点（K′ 点）において最低次から 2 番目と 3 番目のバンドが縮退している。

これらの特別な場合として、図 2.4(a) のように真鍮板を除外した（$t_A = t_B = 0$）ロッドのみの単純な系を考え、ロッド長による分散関係への影響を測る。実際のメカニカルグラフェンにおけるロッド長を $L_0 = 150$mm とし、これを 1/2、1/4、1/8 にした時の分散関係を求めた。図 2.4(b) から (e) に分散関係、表 2.2 にバンドギャップ幅を示す。真鍮板を伴う場合に比較してバンド構造の変化が著しく、バンドギャップが閉じる様子が確認された。すなわちメカニカルグラフェンのバンド構造の制御においては、真鍮板よりもロッド長の方が影響が大きいことが示された。

[*1] バンドギャップの周波数幅を上端周波数に対する割合に換算したものをバンドギャップ幅と定義する。

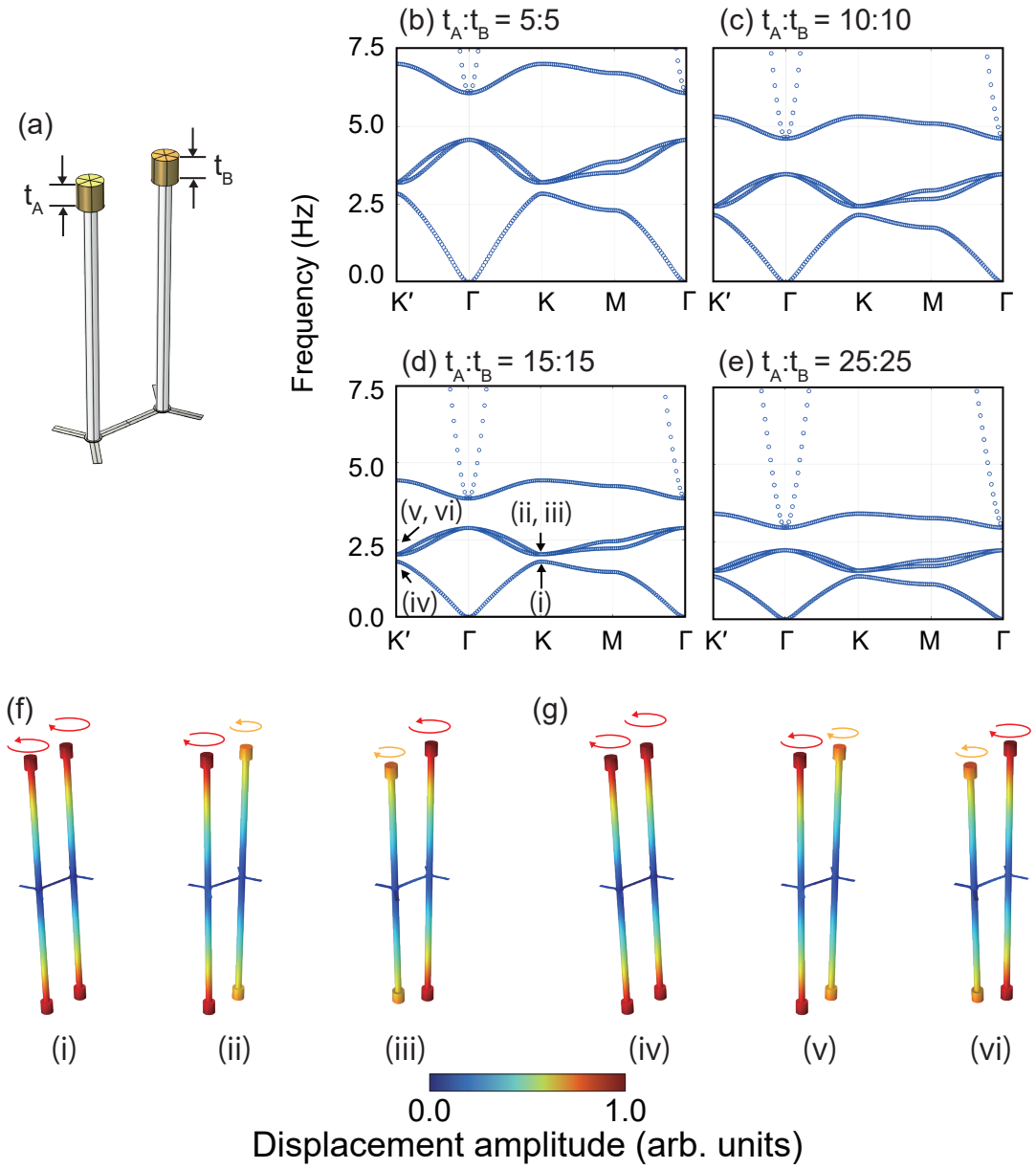


図 2.3　(a) $t_A = t_B$ の場合のユニットセル。反対称境界条件がベースプレート底面に課される。(b – e) 複数の $ta : tb$ の組に対するフォノン分散曲線。 (b) 5 : 5 構造、(c)10 : 10 構造、(d)15 : 15 構造、(e)25 : 25 構造。(f-g) 分散曲線 (c) に対応する固有モード。(f), (g) はそれぞれ K 点と K′ 点の固有モードであり、矢印は運動の方向を表す。カラープロットは規格化された変位振幅 $\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$ を表す。

表 2.1　真鍮板厚の比 $t_a : t_b$ に対するバンドギャップ幅

$t_a : t_b$	bandgap range (Hz)	bandgap width (%)
5 : 5	2.84–3.21	11.3
10 : 10	2.12–2.44	11.5
15 : 15	1.80–2.03	11.6
25 : 25	1.39–1.57	11.7

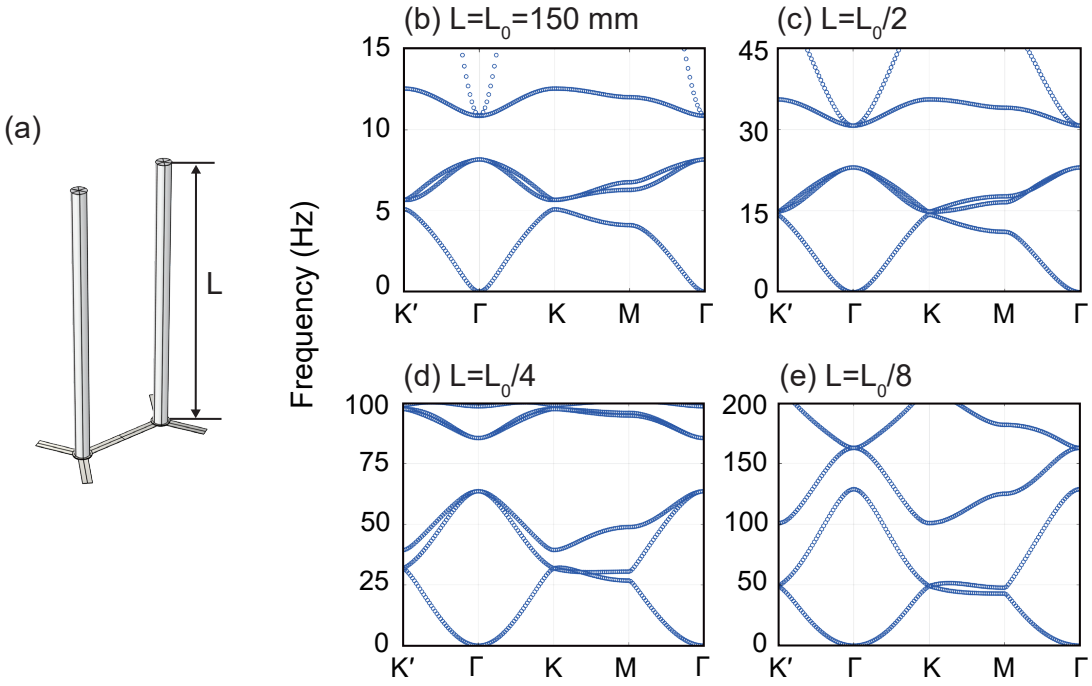


図 2.4　(a) $L = L_0 = 150$mm の真鍮板を除いたユニットセル。ロッド長 L_0mm は実際の装置におけるロッド長である。反対称境界条件がベースプレート底面に課される。(b–e) 各ロッド長に対するフォノン分散曲線。 (b) $L = L_0$、(c)$L = L_0/2$ 構造、(d)$L = L_0/4$、(e)$L = L_0/8$。

表 2.2　ロッド長 L ($L_0 = 150$ mm) に対するバンドギャップ幅

L	bandgap range (Hz)	bandgap width (%)
L_0	5.08–5.67	10.4
$L_0/2$	14.3–14.9	4.1
$L_0/4$	gap closed	N/A
$L_0/8$	gap closed	N/A

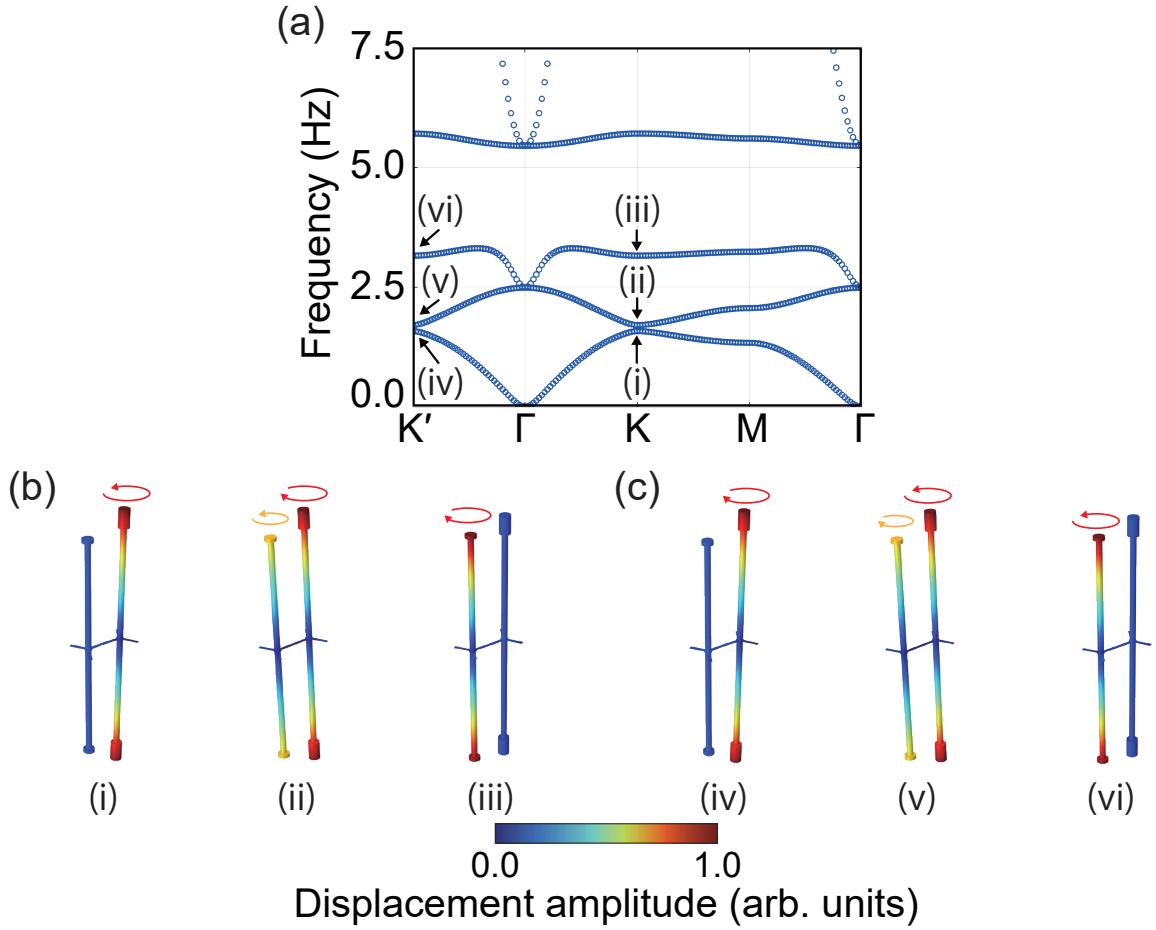


図 2.5　(a) 5 : 25 構造のフォノン分散関係。25 : 5 構造についても同一形状の分散関係が得られた。(b–c) 分散関係 (a) に対応する固有モード。(b), (c) はそれぞれ K 点と K′ 点の固有モードであり、矢印は運動の方向を表す。カラープロットは規格化された変位振幅 $\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$ を表す。

次に、空間反転対称性を破ったユニットセルの結果を示す。実験系を考慮して、5 : 25 構造（図 2.1(b) の中央領域）および 25 : 5 構造（図 2.1(b) の左右領域）について計算を行った。座標系のとり方を変えることでこれら二つのユニットセルは同一視が可能であるため、分散関係の形状自体は変化がないことが予想される。実際、図 2.5(a) に示すように、これらの構造は同じ形状のフォノン分散曲線を有した。$t_A = t_B$ の場合に認められた K 点と K′ 点上の縮退は解け、Γ 点は縮退したままであった。5 : 25 構造ついて、K 点および K′ 上の対応する固有モードをそれぞれ図 2.5(b) と (c) に示す。いずれにおいても副格子 A サイトと B サイトそれぞれが単一方向の回転運動を示すことがわかる。また K′ 点上の固有モードは K 点におけるモードの時間反転に相当する。これらは空間反転対称性の破れによって誘起された K および K′ バレーのカイラルフォノンと見なすことができる。

5 : 25 構造と 25 : 5 構造においても最低次の 2 つのバンド間に生じたバンドギャップは閉じない。では 5 : 25 構造から 25 : 5 構造へ質量比を段階的に変化させるとき、K 点上の固有周波数を追うとどのように遷移するか。図 2.6(a) に結果を示す。最低次を含む 3 つのバンドは、t_B/t_A パラメータ空間内の 3 つの点で交差することがわかる。初期のバンド逆転は、$t_B/t_A = 0.5$ で発生し、ここで A サイトの局在モード（i）が 2 サイトの回転モード（ii）と入れ替わる。2 つ目の転移点は $t_B/t_A = 1.0$ で発生するが、これは 15 : 15 構造に対応する。この点において最低次の 2 バンド間でバンドは交差せ

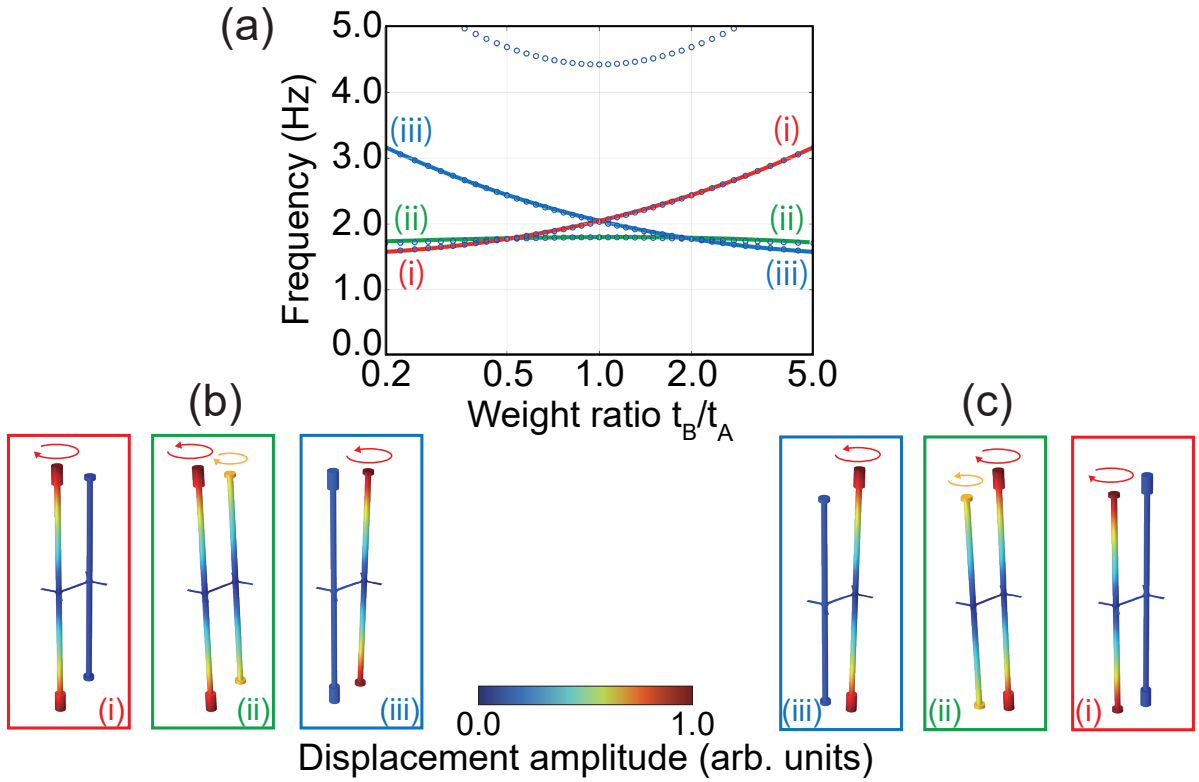


図 2.6　(a) A サイトと B サイトの質量比 t_B/t_A に対する K 点上の固有周波数の変化。(b–c) K 点上の固有モード。(b), (c) はそれぞれ 25 : 5 構造と 5 : 25 構造の K 点における固有モードである。各モードを囲む実線の色は (a) のプロットと対応する。

ず、代わりに A サイトの局在モード（i）が 2 番目と 3 番目のバンドの縮退を介して B サイトの局在モード（iii）と交わる。3 番目の転移は $t_B/t_A = 2.0$ で発生し、ここで B サイトの局在モード（iii）が中間モード（ii）と交代する。以上のバンド反転を通じて、図 2.6(b), (c) に示すように三つのモードがその並びを入れ替えることとなる。

この節の最後に 5 : 25 構造と 25 : 5 構造のバンド構造についてフォノンバンドの Berry 曲率を計算し、そのトポロジカルな特徴を考える。

パラメータ空間上のある複素ベクトル $|u\rangle$ をパラメータ空間の閉じた経路に沿って進展させるとき、一周のパラメータ周回によって蓄積される位相を Berry 位相と呼ぶ。このループ上に N 個の離散的な代表点をとり、$|u_0\rangle$ から出発して $|u_N\rangle = |u_0\rangle$ に至る周回により獲得される位相を計算すれば、

$$\phi = -\operatorname{Im} \ln \langle u_0|u_1\rangle \langle u_1|u_2\rangle \ldots \langle u_{N-1}|u_0\rangle = -\sum_{j=0}^{N-1} \langle u_j|u_{j+1}\rangle ,$$

を得る。連続体極限を考えると、実パラメータ $\lambda = [0, 1]$ が点 $\lambda = 0$ と $\lambda = 1$ が同一となる閉経路上を周回するとき、微小区間 $[\lambda, \lambda + d\lambda]$ について

$$\begin{aligned} \ln \langle u_\lambda|u_{\lambda+d\lambda}\rangle &= \ln \langle u_\lambda| \left(|u_\lambda\rangle + d\lambda \frac{\mathrm{d}\,|u_\lambda\rangle}{\mathrm{d}\lambda} + \ldots\right) \\ &= \ln \left(1 + \langle u_\lambda|\partial_\lambda u_\lambda\rangle \, d\lambda + \ldots\right) \\ &\approx \langle u_\lambda|\partial_\lambda u_\lambda\rangle \, d\lambda \end{aligned}$$

を得る。よって連続パラメータの閉経路 C の周回で獲得する位相は、

$$\phi = -\operatorname{Im} \oint \langle u_\lambda | \partial_\lambda u_\lambda \rangle \, d\lambda = \oint_C A(\lambda) d\lambda,$$

で与えられる。ここで $A(\lambda) = -\operatorname{Im} \langle u_\lambda | \partial_\lambda u_\lambda \rangle$ は Berry 接続と呼ばれる。パラメータが 2 次元に拡張され $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_x, \lambda_y)$ となったとき、ストークスの定理より閉経路 C を境界とする曲面を S として

$$\phi = \oint_C \mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot d\boldsymbol{\lambda} = \iint_S \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\lambda}) \cdot d\mathbf{S}$$

を得る。$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\lambda}) = \nabla_{\boldsymbol{\lambda}} \times \mathbf{A}(\boldsymbol{\lambda})$ はパラメータ空間上の単位面積あたりの Berry 位相に相当し、これを Berry 曲率と呼ぶ。

バンド構造のトポロジカルな側面が Berry 幾何学によって測られるのは、ブリルアンゾーンが波数をパラメータとする閉じた曲面と見なすことができるためである。上に登場したパラメータ λ を波数 k に置き換えると、次のようにしてフォノンバンドの Berry 曲率が求められる。フォノンバンド構造は固有値問題から計算されるが、各 n 番目のバンドが孤立バンドと見なせる場合、n 番目のバンドのベリー位相 ϕ_n は次式で定義される。

$$\phi_n = \oint_C \mathbf{A}_n \cdot d\mathbf{k} = \iint_{\mathrm{BZ}} \boldsymbol{\Omega}_n \cdot d\mathbf{S},$$

ここで $\mathbf{A}_n(\mathbf{k}) = i \langle u_n(\mathbf{k}) | \nabla_{\mathbf{k}} | u_n(\mathbf{k}) \rangle$ は n 番目の固有ベクトル $|u_n(\mathbf{k})\rangle$ に対する Berry 接続であり、$\boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}_n$ は Berry 曲率となる。C はブリルアンゾーンを周回する閉経路である。バンド構造を求める数値シミュレーションにおいて、波数ベクトル $\mathbf{k}$ は逆格子ベクトル $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ に沿った小区間 $(\delta k_i, \delta k_j)$ によって離散化される。固体音響波の場合、n 番目の固有ベクトルを $|u_n(\mathbf{k})\rangle$ は、各メッシュ要素におけるデカルト座標に沿った変位成分全てから構成される。すなわち $|u_n(\mathbf{k})\rangle = (u_{x_1}, u_{y_1}, u_{z_1}, \ldots, u_{x_M}, u_{y_M}, u_{z_M})$ であり、u_{i_j} (with $i \in x, y, z$ and $j \in 1, \ldots, M$) は j 番目のメッシュにおける i 軸方向の変位を表す。ここで M はメッシュの総数である。

Berry 曲率は波数空間を微小領域に分割するとき局所的な値として計算する方法が知られており、

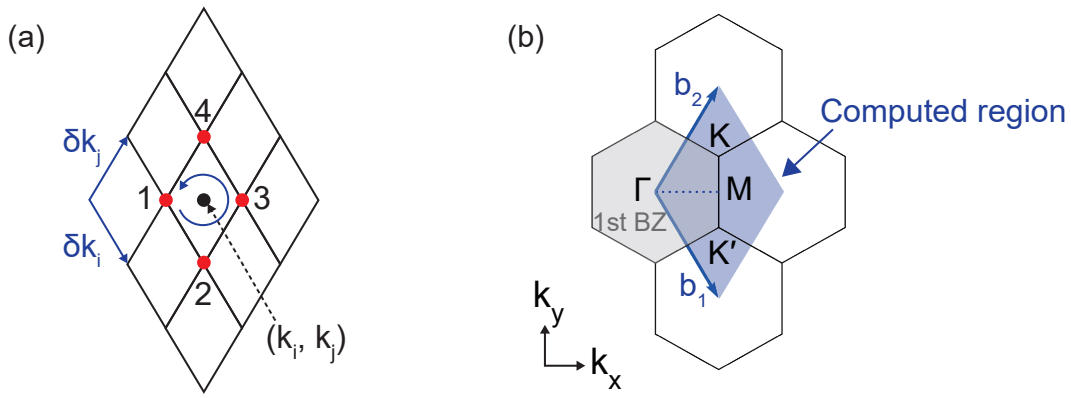


図 2.7　(a) Berry 曲率の計算に用いる離散化された波数空間における閉経路。点 $\mathbf{k}0 = (k_i, k_j)$ を囲む 4 点が本文中の k_1, k_2, k_3, k_4 に対応する。(b–c) 六方格子における逆空間。系の対称性により、固有値計算と Berry 曲率は青色の菱形領域に限定して計算される。

波数 $\mathbf{k}_0 = (k_i, k_j)$ を囲む微小域においては次のようになる [148]。

$$\Omega_n(\mathbf{k}_0) = -i \ln U_{12} U_{23} U_{34} U_{41}$$
$$U_{pq} = \frac{\langle u_n(\mathbf{k}_p) | u_n(\mathbf{k}_q) \rangle}{|\langle u_n(\mathbf{k}_p) | u_n(\mathbf{k}_q) \rangle|},$$

$\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_q (p, q = 1, 2, 3, 4)$ は図 2.7(a) に示すように $\mathbf{k}_0$ を囲む近接した 4 点を表し、それぞれ $\mathbf{k}_1 = (k_i - \frac{\delta k_i}{2}, k_j - \frac{\delta k_j}{2}), \mathbf{k}_2 = (k_i + \frac{\delta k_i}{2}, k_j - \frac{\delta k_j}{2}), \mathbf{k}_3 = (k_i + \frac{\delta k_i}{2}, k_j + \frac{\delta k_j}{2}), \mathbf{k}_4 = (k_i - \frac{\delta k_i}{2}, k_j + \frac{\delta k_j}{2})$ で与えられる。これより、局所的な Berry 曲率は位相変化 U_{pq} の反時計回りのループ積の形をとる。しかし今回の系のようにバンドに縮退が生じる場合は上の手続きをとることができない。代替として、non-Abelian Berryology とも呼称される以下の計算方法をとる。多重状態 $\psi(\mathbf{k}) = (|u_1(\mathbf{k})\rangle, |u_2(\mathbf{k})\rangle, ..., |u_N(\mathbf{k})\rangle)$ についてその積は一般に行列であるため、U_{pq} はスカラー積であったところ行列式に置き換えて

$$U_{pq} = \frac{\det \psi^\dagger(\mathbf{k}_p)\psi(\mathbf{k}_q)}{|\det \psi^\dagger(\mathbf{k}_p)\psi(\mathbf{k}_q)|}.$$

とされる。non-Abelian とはこの非可換な手続きを指す。

メカニカルグラフェン構造の C_{3v} 対称性を考慮すると、波数ベクトルの走査範囲は図 2.7(b) に示すように 2 つの逆格子ベクトル $\mathbf{b}_1$ と $\mathbf{b}_2$ が張る平行四辺形の内部に限定して良い。Γ 点での 2 番目と 3 番目のバンドの縮退を考慮して、これらの 2 つのバンドは doublet として扱われる。図 2.8 は第一ブリルアンゾーン周りの 5 : 25 構造および 25 : 5 構造の Berry 曲率を示す。K および K′ バレーに局在化した有限のピークが、互いに絶対値が等しい逆の符号の値を取る。互いに反転した構造であることから、5 : 25 構造および 25 : 5 構造の Berry 曲率分布は互いに反転した関係となる。この結果はそれらが異なるバンドトポロジーを持ち、5 : 25 構造から 25 : 5 構造に質量比が変化する過程で転移することを示唆している。

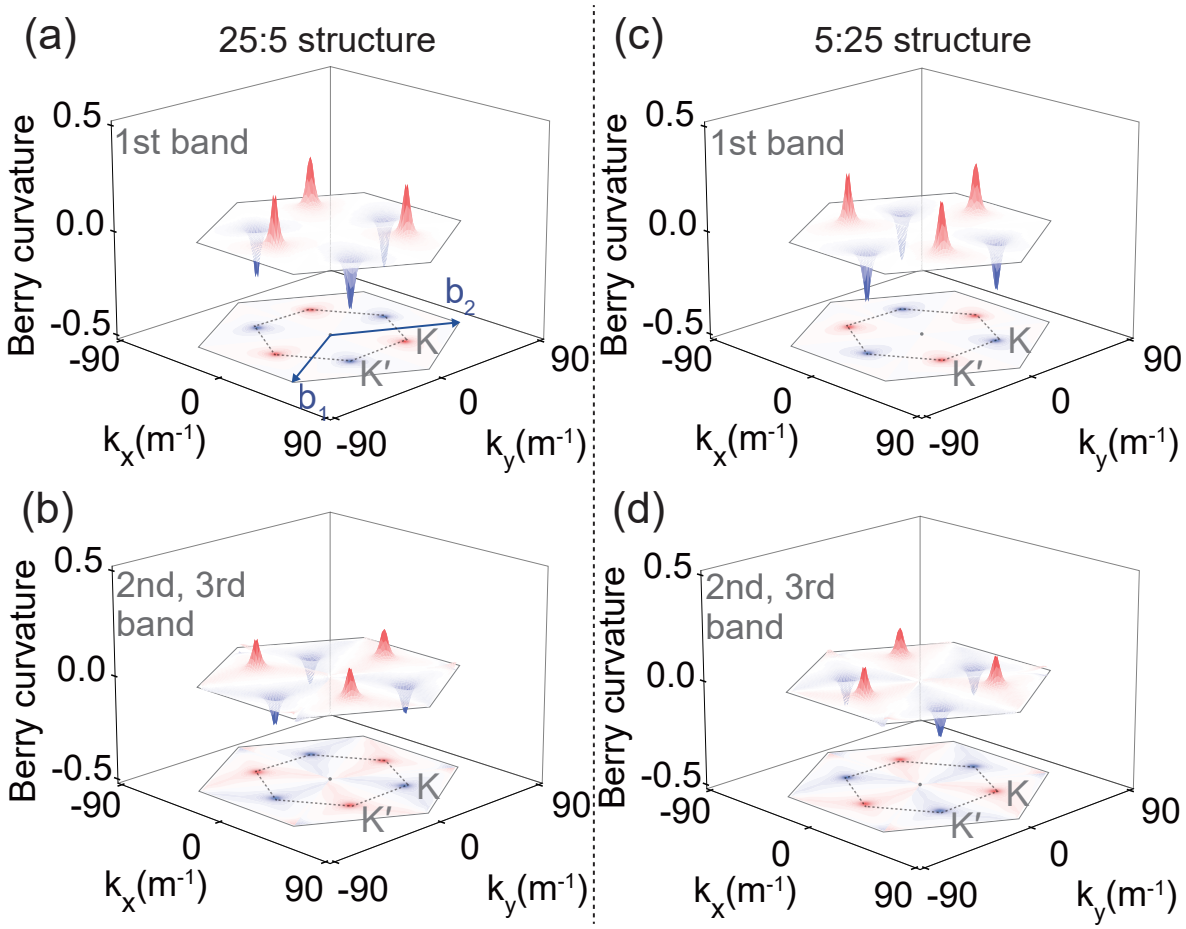


図 2.8　(a), (b) 25 : 5 構造と (c), (d)5 : 25 構造における Berry 曲率。底面の等高線カラーマップ内の六角形点線は第一ブリルアンゾーンを表す。

2.2.3　半無限のメカニカルグラフェンリボン

次に、実験構造の左側 1/3 に存在する媒質境界についての数値シミュレーションを示す。ここでは図 2.9(a) に示される 5 : 25 および 25 : 5 構造からなる媒質境界を有した超格子に対するフォノン分散を計算し、この半無限のリボンにおけるトポロジカル境界モードの存在を検証した。媒質は端点が固定された zigzag 境界であるリボンであり、5 : 25 および 25 : 5 構造の各 10 ユニットセルからなる。中央の媒質境界は bearded 境界となっており、A サイト同士が連続している。この構造を有限要素法による固有値計算のユニットセルとして利用し、k_x 方向に沿った分散関係を計算した。モデルは約 12,000 のメッシュ要素からなるが、単一のユニットセル計算に対して粗いメッシュを実装することで計算効率を最適化したため、メッシュ要素の総数はユニットセルの場合から想定されるものより削減されている。図 2.9(b) に分散関係を示す。各固有モードの局在の程度を測るため、振動エネルギーの分布を計算した。局在度は指定された領域内に閉じ込められたエネルギーと媒質全体の総エネルギーとの比として定義される。ここでのエネルギーとは、領域内のメッシュ要素上の運動エネルギーと弾性ポテンシャルエネルギーの合計である。実際には図 2.9(c), (d) で指定される系の端点の固定された zigzag エッジと、媒質境界の二箇所について局在の程度を調べた。緑の点は、系の上端と下端の 2 つの zigzag エッジに 75% 以上のエネルギーが局在する端モードである。青い点は、bearded 状の媒質境界に沿って 75% 以上のエネルギーを運ぶ境界モードである。残り灰色の点はバルクモードを示す。最も低い周波数の境界モードは、第一バンドと第二バンドの間のバンドギャップ内に存在しており、その固有モードは図 2.9(e) に示される。さらに、bearded 境界に局在する別のモードが約 4 Hz で確認された。

ここで新たに現れた境界モードについて、質量比 t_B/t_A に対する周波数の変化を計算した。波数を $k_x = 0$ に代表し、この上に現れる各モードの固有周波数をプロットすると図 2.10(a) となる。図 2.9(b) で新たに現れた約 4 Hz 付近のモードは図 2.10(a) の赤丸で示された点に対応し、固有モードは図 2.10(b)、(c) のようになる。この局在モードは t_A が軽くなるにつれて現れるもので、その際 bearded 境界には軽い A サイトが向き合っている。また図 2.9(e) に示した境界モードに比較してエネルギーの局在長が異なっており、周辺のユニットセルの運動を殆ど伴わず境界で向き合うサイトの振動が顕著である。以上のことから新たに観測された境界局在モードは、構造の空間的な非対称性を担うパラメータである質量比に応じて現れる局在モードであると考えられる。

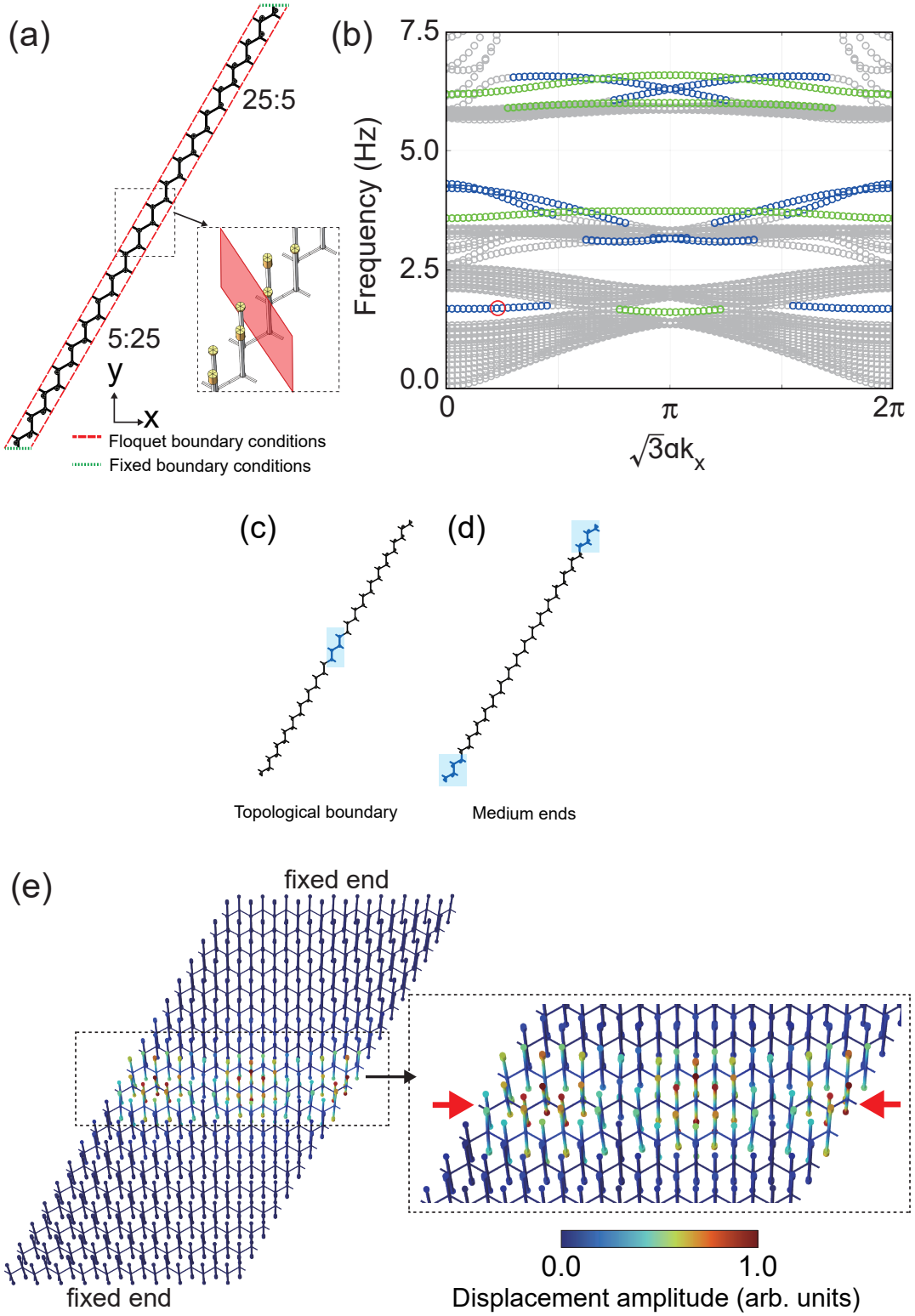


図 2.9　(a) 5：25 および 25：5 構造からなる半無限媒質のユニットセル。境界条件は対応する色の点線により示される。拡大図は媒質境界を中心としたもので、赤の平行四辺形を隔壁として bearded 境界を形成する。(b) k_x 方向に沿った分散関係。青と緑の点はそれぞれ次の図 (c) と (d) で示す媒質境界か固定された zigzag エッジに局在したモードである。(c, d) 固有モードの局在率を測る際のエネルギーの積算区間。計算領域は青色の網掛け部分。(c) は媒質境界、(d) は系の端である。(e) 周波数が最も低い境界モード。分散関係 (b) の赤丸で示された点に対応し、$\sqrt{3}ak_x = \pi/4$, 1.70 Hz である。媒質境界は拡大図の赤矢印が指す領域である。

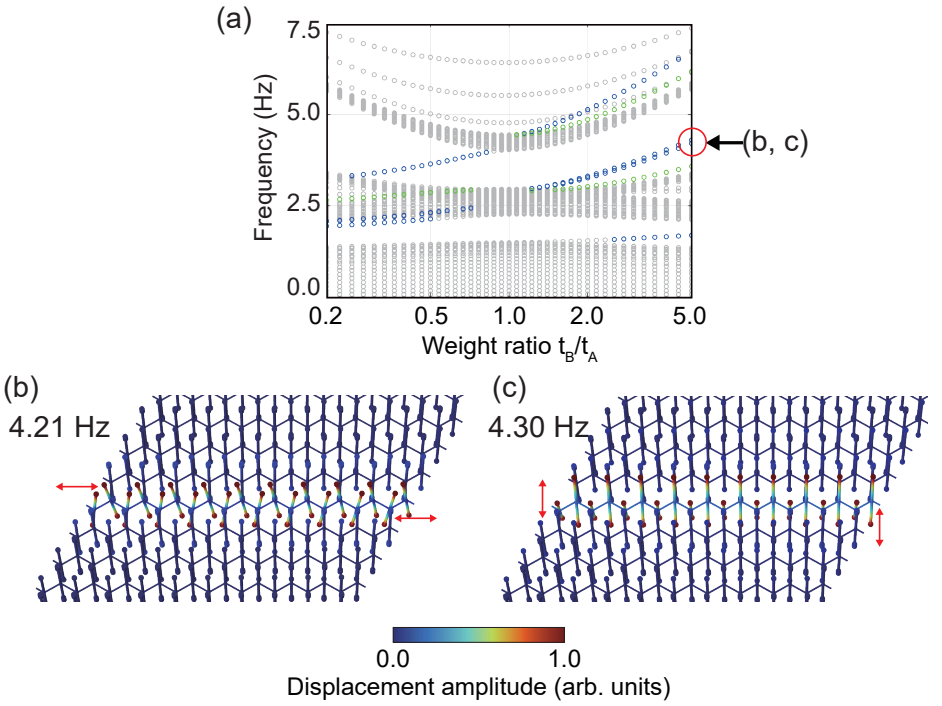


図 2.10　(a) bearded 型の媒質境界を設けた時の質量比 t_B/t_A に対する $k_x = 0$ 上の固有周波数の変化。青と緑の点はそれぞれ媒質境界か固定された zigzag エッジに局在するモードである。(b, c) 5 : 25 および 25 : 5 構造からなる半無限媒質に現れた $k_x = 0$ 上の境界局在モード。対応する固有周波数は (a) に赤丸で示された (b) 4.21 Hz と (c) 4.30 Hz である。運動の方向は矢印で示されている。

2.3　実験による境界局在モードの可視化

以上を受けて、実際の系による境界局在モードの可視化について述べる。メカニカルグラフェンの左側 1/3 境界における導波特性を周波数領域シミュレーションで検証した後、関連する境界モードの実験を紹介する。実験系を図 2.11(a) に示す。媒質境界の最も低い位置のロッドに電磁振動子（The Modal Shop K2007E01）を接続し、ファンクションジェネレータから出力される単一周波数の信号を機械振動に変換することで系を励振する。各セルの動きはモーションキャプチャシステム（OptiTrack Motive および専用カメラ PrimeX 13W4 台）によってモニタリングされ、赤外線光の反射によってロッド先端に取り付けられたマーカーの変位を追跡し、これを各セルの振動変位として記録する。実験測定に先立って、有限要素法シミュレーションにおいて実験と同様のジオメトリを組み、周波数領域の計算を行った。その結果、図 2.11(b), (c) に示すようにバルクモードと境界モードがそれぞれ 3.00 Hz と 4.13 Hz に現れることを確認した。変位場を図 2.11(d) および (e) に示す。前節の半無限媒質の計算とは異なり、図 2.8(e) に示した 2 つの最低周波数バンド間の固有振動は確認できず、付随して現れた 4 Hz 付近の境界モードのみが観測された。図 2.8(f) と (g) に示される実験結果は、それぞれ 4.20 Hz と 4.66 Hz のバルクおよび境界モードに対応しており、これらのシミュレーションと概ね一致している。

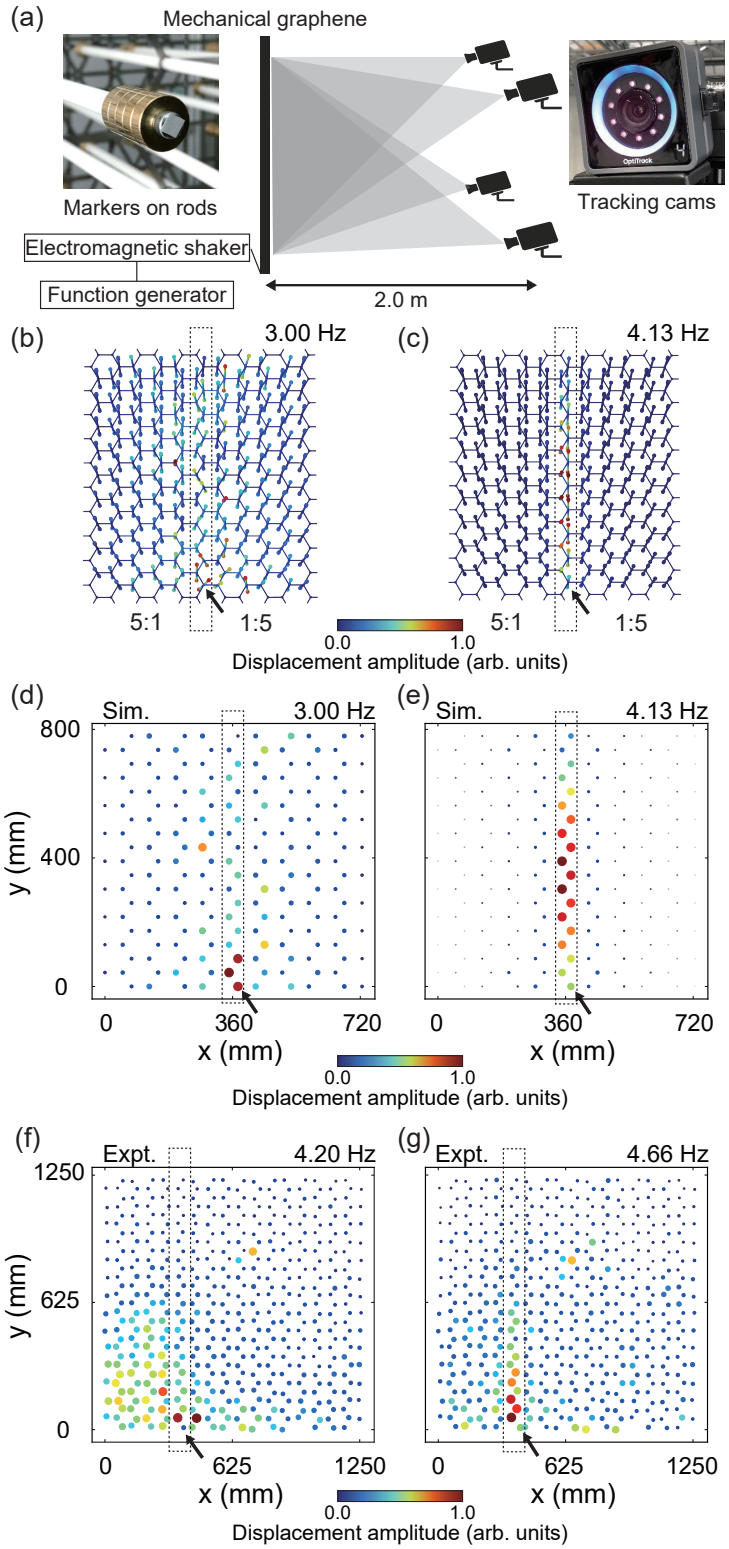


図 2.11　(a) 実験系の略図。(b-c) 数値シミュレーションによる (b) 3.00 Hz のバルクモードと (c) 4.13 Hz の境界局在モード。媒質境界は点線で囲まれた領域で、矢印で示された境界最下端のロッドが励振されている。(d-g) シミュレーションおよび実験による変位振幅の分布。シミュレーションでは (d) 3.00 Hz のバルクモードと (e) 4.13 Hz の境界モード、実験では (f) 4.20 Hz のバルクモードと (g) 4.66 Hz の境界モードを得た。媒質境界は点線で囲まれた領域で、矢印で示された境界最下端のロッドが励振されている。ポイントサイズは規格化された変位振幅に対応する。Sim.:simulation. Expt.: experiment.

2.4　考察：空間反転対称な系が示す K 点周りのバンドギャップについて

本節では 2.2.2 節前半で述べた、A サイトと B サイトの質量が等しい ($t_A = t_B$) 空間反転対称性を保った系において、K 点にバンドギャップが存在したことについて述べる。グラフェンやその派生したフォノニクスの領域において、空間反転対称性を保った場合には K 点に Dirac コーンを有する分散関係を得る。今回作製したメカニカルグラフェンでは、A サイトと B サイトの質量が等しい $t_A = t_B$ の場合がこの状況に相当するはずであるが、図 2.3 に示すように K 点周りにはバンドギャップを有した。図 2.4 の結果で明らかとなった通り、このバンドギャップはロッドの慣性モーメントに関連する効果から生じていると考えられる。より具体的には、梁を離散的な剛体とバネの一次元鎖として見なす Timoshenko 梁モデルと同様の効果である [149]。ここで図 2.12 に当該論文のモデルを引用し、その作用を概観する。このモデルは梁の屈曲波を取り扱うため考案されたものであり、離散的な剛体が垂直剪断と回転のそれぞれに対応するバネによって接続されている周期構造を考える。格子定数を a、各剛体の垂直 (y) 変位を u_n、回転角を θ_n とおくと、n 番目のユニットセルの左端と右端は各々 $u_n - a\theta_n/2$ または $u_n + a\theta_n/2$ だけ変位する。n 番目のユニットセルについて剛体の質量を m、慣性モーメントを I としたとき、並進と回転それぞれの運動方程式は次のように記述できる。

$$
\begin{aligned}
m\ddot{u_n} &= \alpha(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + \alpha\frac{a}{2}(\theta_{n-1} - \theta_{n+1}), \\
I\ddot{\theta_n} &= \alpha\frac{a}{2}(u_{n+1} - u_{n-1}) + \beta(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n) - \alpha(\frac{a}{2})^2(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} + 2\theta_n)
\end{aligned}
$$

周期境界条件のもとで、固有周波数 ω に関する固有値方程式は次の形式となる。

$$
\begin{pmatrix}
\omega^2 m + 2\alpha\cos ka - 1 & i\alpha a \sin ka \\
-i\alpha a \sin ka & \omega^2 I + 2\beta\cos ka - 1 - \frac{\alpha a^2}{2}\cos ka + 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} u_n \\ \theta_n \end{pmatrix} = 0
$$

系の分散関係を求めると、回転運動を考慮するため導入された慣性モーメントとバネ定数に起因するバンドギャップが生成されることが知られている。故にメカニカルグラフェンにおいて慣性モーメン

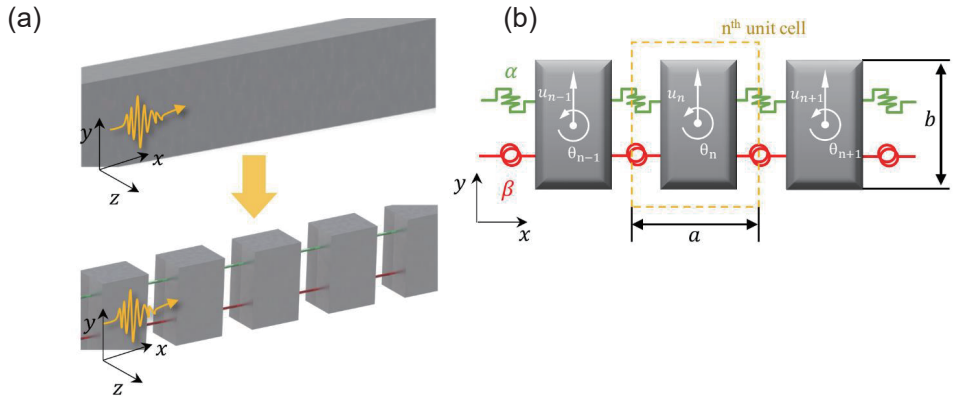


図 2.12　(a) 連続体である梁を離散化した質点系の概要。梁の厚さ方向 (y 方向) に屈曲する曲げ振動が伝播する状況を考える。(b) モデルを構成する剛体と二種のバネ。バネは y 方向の振動に対応するもの α と、ねじれ運動に対応するもの β からなる。図は [149] より引用。

トが大きなロッドを格子点に接続した場合、この原理に基づいてバンドギャップが開き、空間反転対称な系であっても Dirac コーンが現れないものと考えられる。さらに図 2.4 の結果にて、L = L0/8 では第三バンドが第二バンドから分離し、より高い周波数範囲にシフトすることがわかる。したがって、今回の系で一貫して認められた Γ 点での第三バンドが第二バンドの縮退は、メカニカルグラフェンが低周波振動用に設計されたことに起因する偶然縮退であると考えられる。

また Γ 点付近の最低次バンドの分散について、ロッド長 L が短くなるにつれて線形から放物線状に変化している。その過程を、図 2.13 に示すロッドを除くベースプレートのみの場合の分散関係を起点に考える。図 2.13(b) は板の曲げ振動のみを反映する分散曲線であり、連続な弾性体としての振舞いを反映する。そのため Γ 点付近の最低次バンドは、連続体の薄板が示すように放物線状の分散となっている。ベースプレートにロッドを付加しロッド長を増加する場合、系は離散的に配置された格子点上の回転運動を発現し、その運動は薄板を介して伝播する。すなわちベースプレートは六方格子状に並ぶロッド間を接続するバネとなり、系全体を連続な媒質から質点バネモデル様の離散的な媒質と見なすことができる。質点バネモデルの場合の Γ 点付近の最低次バンド分散は、平面波解に起因した線形分散になることが期待される [150]。よって図 2.4 に認められた線形–放物線状のバンド分散の変化は、以上のように系の連続な薄板としての側面と離散格子系としての側面との間の遷移を反映していると考えられる。図 2.4(c)–(e) のロッド長が短い場合に比較して同図 (b) の結果は Γ 点付近で線形な分散を示すが、質点バネモデルに全く同一の正弦波的立ち上がりとも合致しない曲率を保持している。これは有限要素法を用いたことでユニットセルを連続体として扱っていることに起因するものである。

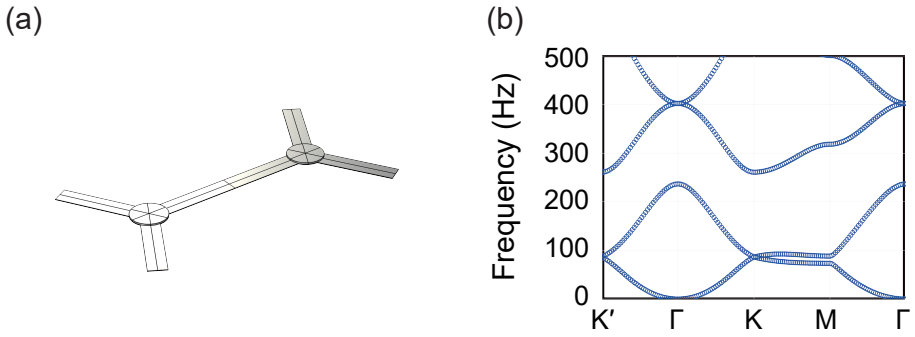


図 2.13　(a) ロッドを除くベースプレートのみを含むユニットセル。周期境界条件および反対称境界条件は他のモデルと同様に課す。(b) ベースプレート単独の場合のフォノン分散曲線。

2.5　考察：バンドトポロジーとバレーエッジモードについて

本節では 5 : 25 構造と 25 : 5 構造におけるバンドトポロジーと、VH 系としてのバレーエッジモードの存在について述べる。図 2.8 で見たように、5 : 25 構造および 25 : 5 構造の Berry 曲率分布は互いに反転した関係となり、5 : 25 構造から 25 : 5 構造に質量比が変化する過程で転移することが示唆された。このことについて、図 2.6 の質量比変化によるバンド反転の結果と併せて考える。一般に VH 系でバレーエッジモードを生成するためには次の手続きを取る。(1) 空間反転対称性を有するハニカム格子で、K 点および K' 点に Dirac コーンを形成する。(2) ユニットセル内の A サイトおよび B サイトの非対称性を導入すると、これにより K 点および K' 点周りにバンドギャップが生じ、逆符

号の Berry 曲率の偏極が生じる。(3) 互いに反転対称な関係にある 2 つユニットセルを接続し、トポロジカルな境界を作成すると、この境界に沿って局在するバレーエッジモードがバンドギャップ内に現れる。今回の系においては (1) の Dirac コーンが存在しないが、事実 Berry 曲率の反転が認められる。これは反転対称な $t_A = t_B$ の時点でのバンドクロージングに代替して、図 2.6 のように 3 つのモードの入れ替わりが以上の手続きを履行するためと考えられる。故に最低次モードの上に開くバンドギャップ内にはバレーエッジモードを生成することができ、図 2.9 の半無限媒質でこれが示された。以上のことは、VH 系フォノニック結晶の設計における関門の一つであった、空間反転対称な系での Dirac コーンの形成という条件を緩和し、より柔軟な構造設計を可能とする知見となる。

2.6　考察：実験系で観測された境界局在モードについて

最後に、実験系と付随するシミュレーションにおいて観測された、バレーエッジモードとは異なる境界局在モードの起源について述べる。まず、上で触れた最低次のバンドギャップ内に生成するバレーエッジモードは、近傍周波数で共振するバルクモードと混合するため、周波数領域計算や実験においては観測されなかった。一方でバルクモードから独立している、付随して現れた 4 Hz 付近の境界モードについては観測された。またこのモードは構造の空間的な非対称性を担うパラメータである質量比に応じて現れることが示されている。ここではその起源を質量バネモデルによって考察する。

簡単のため、まず図 2.14(a) に示すように、合計 N 個（偶数）の質点からなるを持つ 1 次元質点バネモデルの固有ベクトルを考える。質点は M_1 と M_2 の間で交互に配置され、中央の境界では M_1 質点が 2 つ連続している。すなわち

$$M_i = \begin{cases} M_1 & (n = 2m \text{ for } n \le N/2) \text{ or } (n = 2m+1 \text{ for } n > N/2) \\ M_2 & (n = 2m+1 \text{ for } n \le N/2) \text{ or } (n = 2m \text{ for } n > N/2). \end{cases}$$

固定端条件 $u_0 = u_{N+1} = 0$ のもとで i 番目の質点の運動方程式は

$$M_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} = K(u_{i-1} - u_i) + K(u_{i+1} - u_i).$$

質量比 $r = M_2/M_1$ を導入し、$K = 1$ かつ $\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} = 1$ とおけば、$M_1 = \frac{1+r}{r}$、$M_2 = 1 + r$ となる。一次元鎖の固有周波数を ω とすると固有値方程式は次の形をとる。

$$\begin{pmatrix} 2K/M_2 & -K/M_2 & & & & & & & \\ -K/M_1 & 2K/M_1 & -K/M_1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & -K/M_1 & 2K/M_1 & -K/M_1 & & & & \\ & & & -K/M_1 & 2K/M_1 & -K/M_1 & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & -K/M_1 & 2K/M_1 & -K/M_1 & \\ & & & & & & -K/M_2 & 2K/M_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N/2} \\ u_{N/2+1} \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \omega^2 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N/2} \\ u_{N/2+1} \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}.$$

この方程式を数値的に解くと、2 つの質量 M_2/M_1 の比率を変化させたときの固有周波数プロファイルが得られる（図 2.14(b)）。青い線は境界モードを示しており、振動のエネルギーが中央境界の周りの質点に局在している。いくつかのポイントの固有ベクトルを図 2.14(c) に示した。この結果から $r > 1$ の場合、すなわち中央境界が「light-light」の質点対である場合に境界モードが第 2 バンドの上に現れることがわかる。

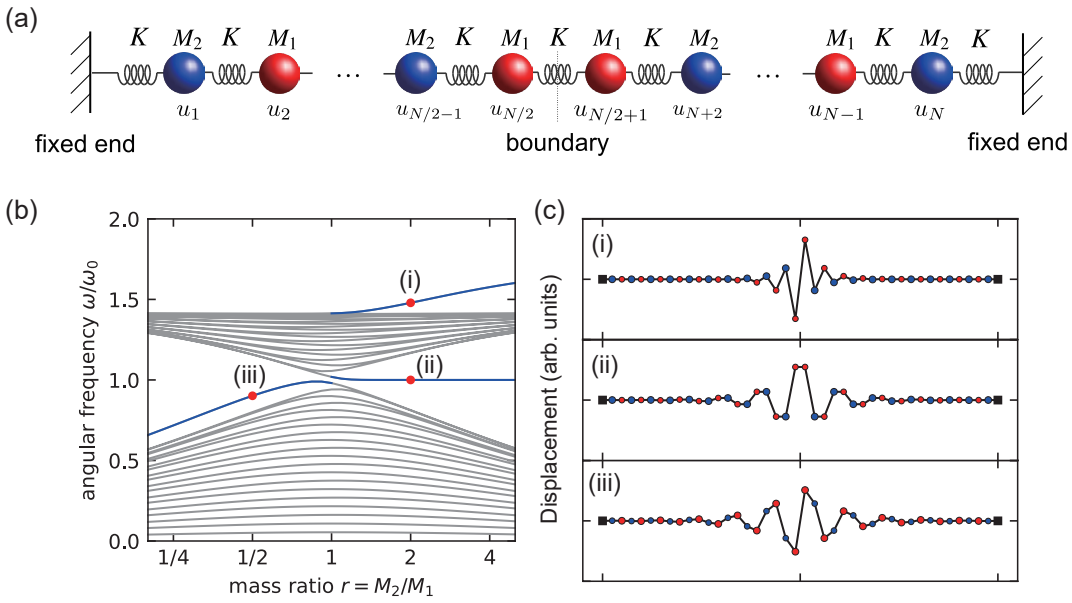


図 2.14　(a) 一次元質点バネ系。(b) 質量比 M_2/M_1 に対する固有周波数の変化。 質点数は $N = 40$ である。青色の線が境界局在モードである。縦軸は $\omega_0 = \sqrt{K\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}\right)}$ で規格化されている。(c) 上記 (b) に示したモード形状 (i)–(iii) 。

質量バネ系におけるトポロジカルモードの議論は、同一質点をバネ定数が異なる二種のバネで接続した系で論じられるのが通例となっており、境界局在モードの存在が示される。具体的には、バネ定数が大きな固い (hard) バネが連続する hard-hard の境界において境界局在モードが立つことが知られている。質量交互系の質点バネ系もまた、座標変換によって質量とバネの役割を入れ替えた等価な系と見直すことができる。N 個の質点がバネで接続された一次元鎖を考える。i 番目の質点の質量を m_i、質点 $i-1$ と質点 i を結ぶバネのバネ定数を k_i とする。系の全運動エネルギー T とポテンシャルエネルギー U は、変位を u_i、運動量を $p_i = m_i\dot{u}_i$ として

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m_i},$$
$$U = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{2}(u_i - u_{i-1})^2$$

で与えられる。ここで相対変位 $r_i = u_i - u_{i-1}$ とその共役運動量 $s_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i}$ を導入すると、

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{r}_1{}^2 + \frac{m_2}{2}(\dot{r}_1+\dot{r}_2)^2 + \ldots + \frac{m_N}{2}(\dot{r}_1+\ldots+\dot{r}_N)^2,$$
$$s_i - s_{i+1} = m_i(\dot{r}_1+\ldots+\dot{r}_i)^2 = p_i$$

の関係から

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i}(s_i - s_{i+1})^2,$$
$$U = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{2} r_i^2$$

となる。改めて一般化座標を $Q_i = -s_i$、運動量を $P_i = r_i$ にとり、$\frac{1}{M_i} = k_i$、$\frac{1}{m_i} = K_i$ と置くならば、系のハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= T + U \\ &= \sum_{i=1}^{N} \frac{P_i^2}{2M_i} + \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i}{2}(Q_{i+1} - Q_i)^2 \end{aligned}$$

となる。したがって質量はバネに、バネは質点に置き替わった一次元鎖として見なすことができる。これは質点とバネの双対性と呼ばれる。先に計算したバネ定数が一定の質量交互系の場合、質量が大きな質点はバネ定数が小さなバネに、全てのバネは同一の質量の質点へと置き替わる。light-light の質点対であれば、この位置にはバネ定数が大きな (hard) バネが連続する hard-hard 対の境界となる。これは同一質点をバネ定数が異なる二種のバネで接続した系を双対性を用いずに論じた場合に期待される振る舞いに同一である。

図 2.15(a) に示す二次元六方格子の場合も同様に考える。媒質境界方向の基本ベクトルを **a** とし、位置 $m\mathbf{a}$ によって規定される列に属するユニットセル群について、この一次元鎖の n 番目の質点の変位を $u_{n,m}$ としする。合計で $N = 42$ の質点がこの列に属するとする。固定境界条件 $u_{0,m} = u_{N+1,m} = 0$ の下で、質点の運動方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
M_1\ddot{u}_{1,m} &= K(0 - u_{1,m}) + K(u_{2,m} - u_{1,m}) + K(u_{2,m-1} - u_{1,m}) \\
M_2\ddot{u}_{2,m} &= K(u_{1,m} - u_{2,m}) + K(u_{3,m} - u_{2,m}) + K(u_{1,m+1} - u_{2,m}) \\
&\vdots \\
M_2\ddot{u}_{N/2-1,m} &= K(u_{N/2-2,m} - u_{N/2-1,m}) + K(u_{N/2,m} - u_{N/2-1,m}) + K(u_{N/2-2,m+1} - u_{N/2-1,m}) \\
M_1\ddot{u}_{N/2,m} &= K(u_{N/2-1,m} - u_{N/2,m}) + K(u_{N/2+1,m} - u_{N/2,m}) + K(u_{N/2+1,m-1} - u_{N/2,m}) \\
M_1\ddot{u}_{N/2+1,m} &= K(u_{N/2,m} - u_{N/2+1,m}) + K(u_{N/2+2,m} - u_{N/2+1,m}) + K(u_{N/2,m+1} - u_{N/2+1,m}) \\
M_2\ddot{u}_{N/2+2,m} &= K(u_{N/2+1,m} - u_{N/2+2,m}) + K(u_{N/2+3,m} - u_{N/2+2,m}) + K(u_{N/2+3,m-1} - u_{N/2+2,m}) \\
&\vdots \\
M_2\ddot{u}_{N-1,m} &= K(u_{N-2,m} - u_{N-1,m}) + K(u_{N,m} - u_{N-1,m}) + K(u_{N,m-1} - u_{N-1,m}) \\
M_1\ddot{u}_{N,m} &= K(u_{N-1,m} - u_{N,m}) + K(0 - u_{N,m}) + K(u_{N-1,m+1} - u_{N,m}).
\end{aligned}$$

固有周波数 ω に関する固有値方程式は

$$
\begin{pmatrix}
\frac{3K}{M_1} & -\frac{K(1+e^{-ika})}{M_1} & & & & & & & & \\
-\frac{K(1+e^{ika})}{M_2} & \frac{3K}{M_2} & -\frac{K}{M_2} & & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\
 & & \ddots & \frac{3K}{M_1} & -\frac{K(1+e^{ika})}{M_1} & & & & & \\
 & & & -\frac{K(1+e^{-ika})}{M_1} & \frac{3K}{M_1} & -\frac{K}{M_1} & & & & \\
 & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & & & -\frac{K}{M_2} & \frac{3K}{M_2} & -\frac{K(1+e^{ika})}{M_2} & & \\
 & & & & & & -\frac{K(1+e^{-ika})}{M_1} & \frac{3K}{M_1} &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N/2} \\ u_{N/2+1} \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N
\end{pmatrix}
= \omega^2
\begin{pmatrix}
u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N/2} \\ u_{N/2+1} \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N
\end{pmatrix}.
$$

この方程式を数値的に解き、質量比 M_2/M_1 を変化させたときの分散関係と固有周波数の変化を図 2.15(b) と (c) に示す。青い線は媒質境界に局在する境界モードを示し、緑の線は固定端周りのエッジモードを示す。いくつかの代表的な点の固有ベクトルを図 2.15(d) に示す。これらの結果から六方格子の質点バネモデルでは、「light-light」の質点対で構成された境界の場合に限り、境界モードは第 2 バンドよりも上に現れることがわかる。図 2.10 の結果を振り返ると、実験とシミュレーションで確認された境界モードは light-light 境界の場合に出現するものである。以って今回観測された境界局在モードもまたバレーモードとは原理が異なるものの、系のトポロジー由来であると考えられる。また図 2.9(e) に示した境界局在モードに比較して図 2.10 では局在長が短かったのは、この振動が図 2.15(d) に見るように light-light 境界の質点対にエネルギーを局在させるためである。なお実験で観察される境界モードの減衰は、シミュレーションに含まれていない系の摩擦によるものと考えられる。

加えて実験とシミュレーションで確認された境界モードの間に周波数差が生じた原因として、一つには系にかかる prestress による板波の周波数シフトが考えられる。外的な張力を受ける薄板では、与えられた張力が弾性係数を変調することで板波の分散特性が変化することが知られている [151]。具体的には板を伝播する Lamb 波のうち反対称モードの速度分散が顕著に変調を受け、同一周波数における位相速度は張力の増大に伴って増加する。他方、外的な張力のもとにある有限長一次元梁の曲げ振動を考えた場合でも、その固有モードの周波数は張力に応じて増大することが知られている [152]。このような弾性体に対する張力の影響は一般の明示的な呼称を持たないようであるが、文献 [152] では stiffening effect と記載されている。今回のメカニカルグラフェンは四辺を支柱に固定したこと、および自重による prestress が生じており、これを反映していない有限要素法の結果に対して実験結果は高周波数側にシフトしたものと推測される。

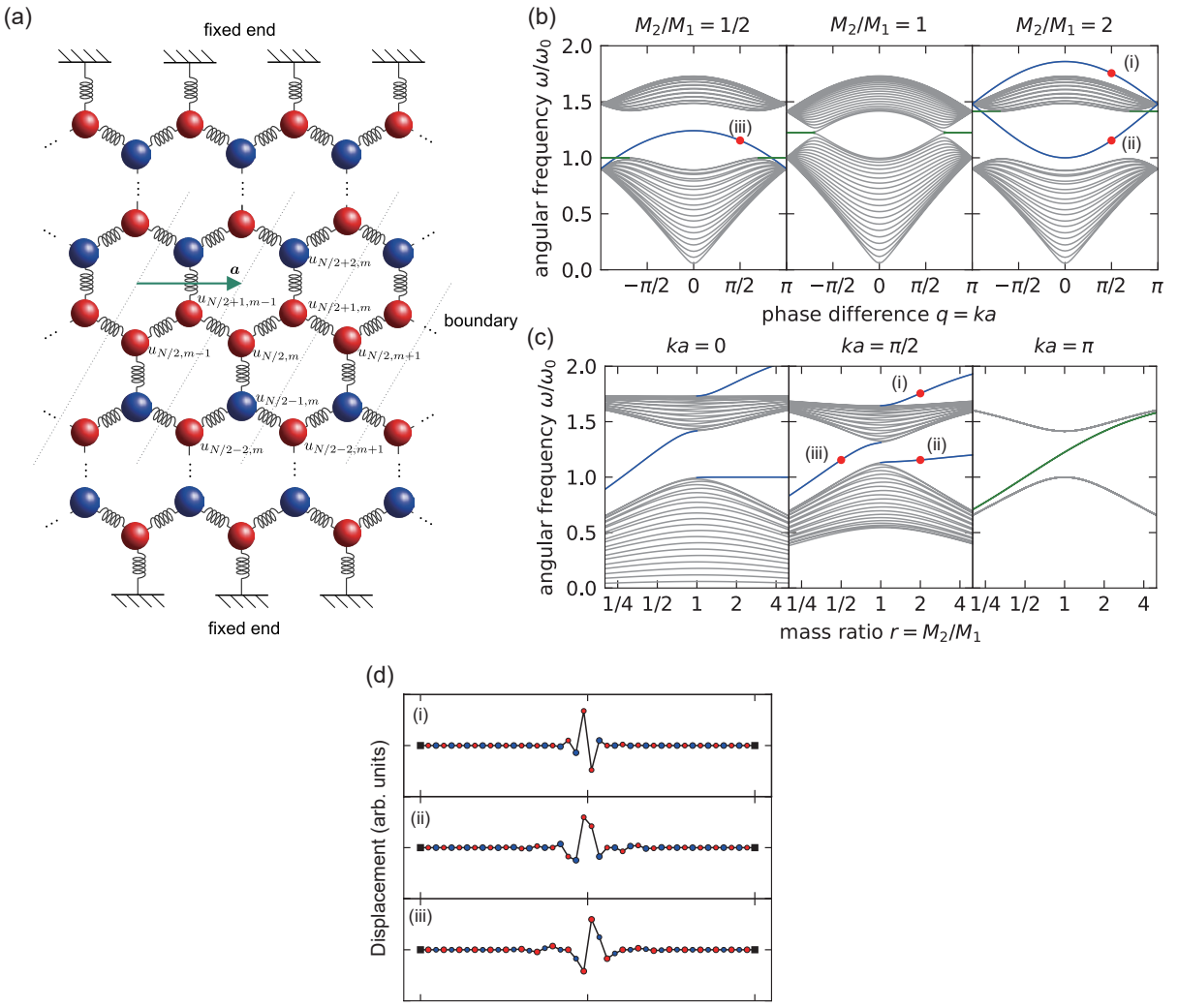


図 2.15　(a) 六方格子質点バネモデル。媒質境界は bearded 境界である。(b) 各質量比 M_2/M_1 における分散関係。(c) 質量比 M_2/M_1 に対する各波数における固有周波数の変化。 同一鎖上の質点数は $N = 42$. 青色と緑色は媒質境界と固定端に局在するモードである。縦軸は $\omega_0 = \sqrt{K\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)}$ で規格化されている。(d) (b) および (c) に示したモード形状 (i)–(iii)。

第 3 章

kHz 帯で完全バンドギャップを有するテーパー状の音響レインボーメタマテリアル梁

本章では共振器構造への音響波の局在現象に着目し、従来構造より広い周波数幅の音響波を遮蔽するためのテーパー状の音響メタマテリアルについて紹介する。3.1 節では本研究で設計したテーパー状メタマテリアル梁の構造、3.2 節では分散関係と共振器構造の応答について述べる。続く 3.3 節で当該構造による音響波減衰を測定した実験について記し、以降の節では各結果について考察する。

3.1　テーパー状音響レインボーメタマテリアル梁の構造

1.2.5 節で述べたように、棒状媒質における単一材料での完全バンドギャップ形成は音響メタマテリアルの領域に新たな設計方針を与えたが、次の課題は遮蔽可能な周波数を広帯域に広げることである。共振周波数が近接した複数の共振器を並べるグレーデッド型の構造は上手く機能すれば広域化が叶うが、多様な配置の下での共振器同士のカップルを十分に検討する必要がある。よって本研究では、先に完全バンドギャップを形成した音響メタマテリアルの超格子構造を任意の拡大率でテーパー状にし、真っ新な媒質に共振周波数が近接する共振器を一から配置するのではなく、元の共振器の応答を微細にずらすことで遮蔽帯域を広げることを図った。基本の構造として、ここでは本研究室で設計された [135] のメタマテリアル梁を採用した。以下ではまず非テーパー状の基礎構造である [135] のメタマテリアル梁の特徴について概観し、その後テーパード構造の設計について述べる。

3.1.1　非テーパー状のメタマテリアル梁

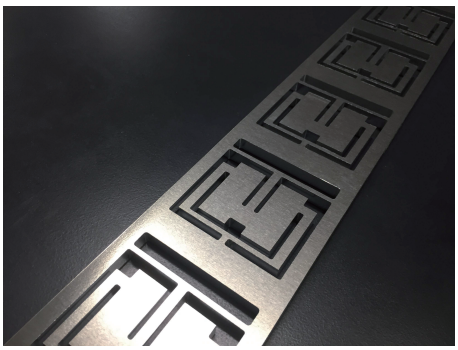
本節に掲載する結果は [135] によるものの引用である。図 3.1 に非テーパー状のメタマテリアル梁の構造を示す。周期構造の構成要素は T 字型・U 字型のリブと H 字型のピースであり、各モードに応じて共振器のバネの役割を担う領域とおもりの役割を担う領域が変化する。これにより当該メタマテリアル梁は、単一材料ながら梁を伝わる 4 つのモードを一斉に遮蔽する。全 4 モードに対するバネとおもりの対応は、振動の運動エネルギーと弾性エネルギーの分布から理解できる（図 3.2）。すなわち弾性エネルギーが集中する部分はバネの役割を果たし、運動エネルギーが集中した部分はおもりとして働く。どのモードにおいても主として内部の H 字型のピースはおもりであり、周辺のリブ部分

をバネとして振動する。

単一のセルに対して周期境界条件を課し、分散関係を求めると図 3.3 となる。凡そ 1 kHz の近傍に完全バンドギャップを有しており、その範囲は 0.97 kHz から 1.09 kHz であった。また 10 個のセルを接続した実際の梁においては、図 3.4 のような出力/入力比を得た。

広帯域かつ全モードの遮蔽の実現は、構造物の強力な制振において重要な課題である。しかしながら、メタマテリアル梁における完全バンドギャップの幅は、ギャップ内の平均周波数の 12% 程度に留まった。局所共振構造の遮蔽周波数を広げる構造最適化による解決を図るも、図 3.2 に見るように 4 つのモードでバネとおもりの役割が入れ替わるため、調整対象たり得るパラメータが膨大である。

そこで本研究は 1.2.5 節に記載のテーパー構造、レインボーメタマテリアルの構築によって最適化すべきパラメータを絞り、細部の寸法を陽に変更しない簡易な構造調整によって音響メタマテリアルの広帯域化を図る。



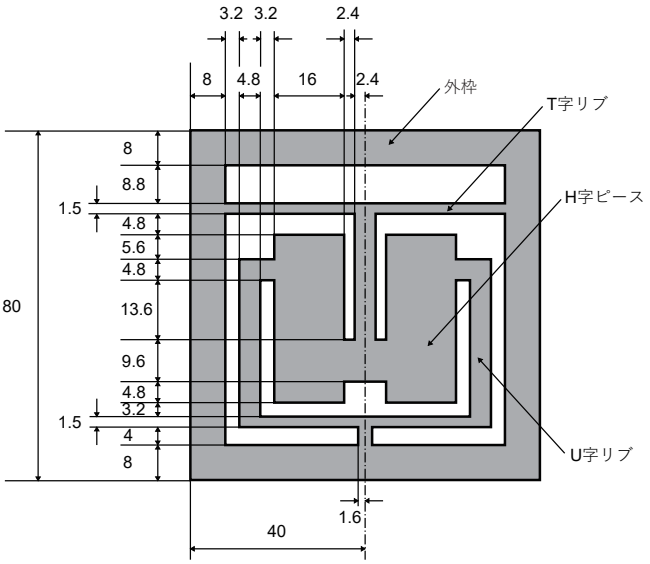


図 3.1　メタマテリアル梁の写真および単位構造の細部寸法。板厚は 8.0 mm。

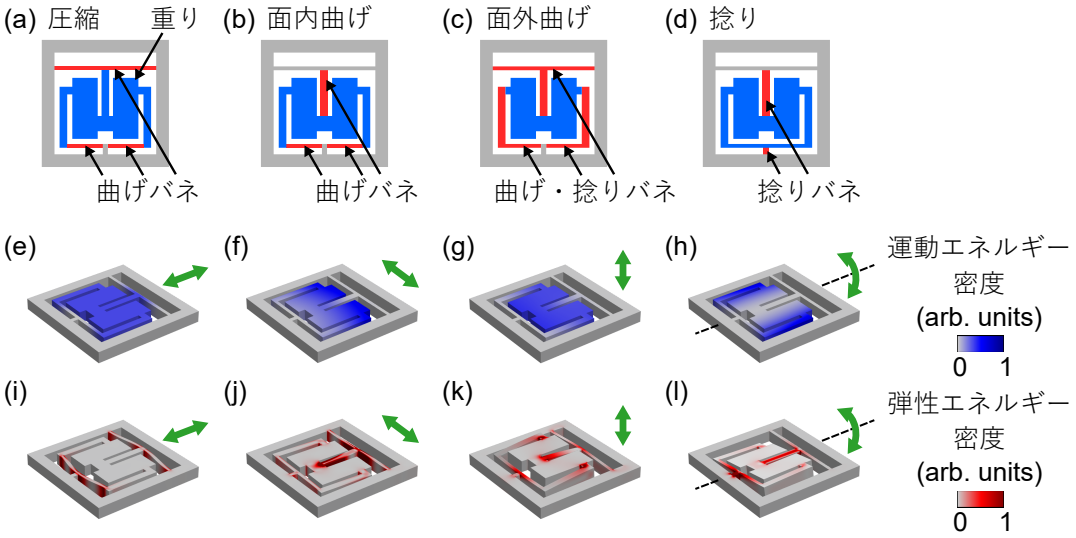


図 3.2　各共振モードにおける各部の役割と変形・エネルギー分布の様子。(a)-(d) 圧縮モード、面内曲げモード、面外曲げモード、捻りモードそれぞれにおける構造各部の役割。青色部分が重り、赤色部分がバネとなる。(e)-(h) 運動エネルギー密度および (i)-(l) 弾性エネルギー密度のプロット。緑色の矢印は各モードにおける重りの主たる変位の方向を示す。

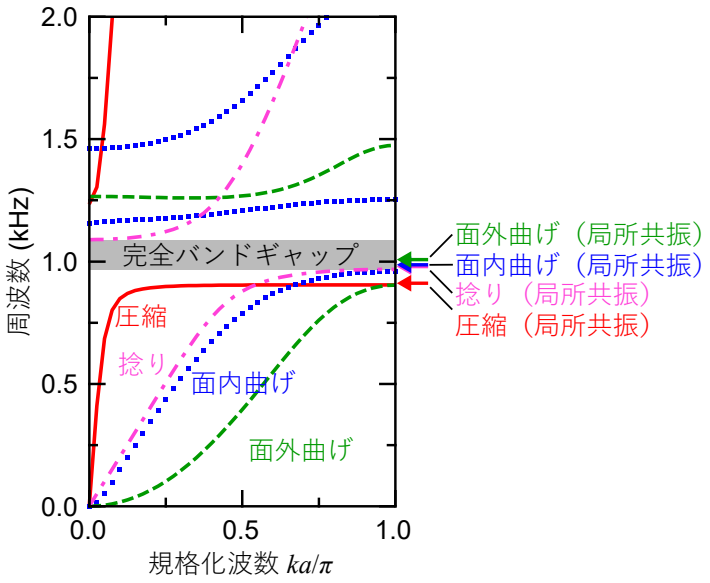


図 3.3　メタマテリアル梁のフォノン分散関係。実線（赤色）が圧縮モード、点線（青色）が面内曲げモード、破線（緑色）が面外曲げモード、一点鎖線（桃色）が捻りモードを示す。灰色の領域が完全バンドギャップである。横軸の k, a はそれぞれ波数、格子定数であり $a = 80.0$ mm である。グラフ右側の矢印は各伝播モードと対応する局所共振モードの周波数を示す。

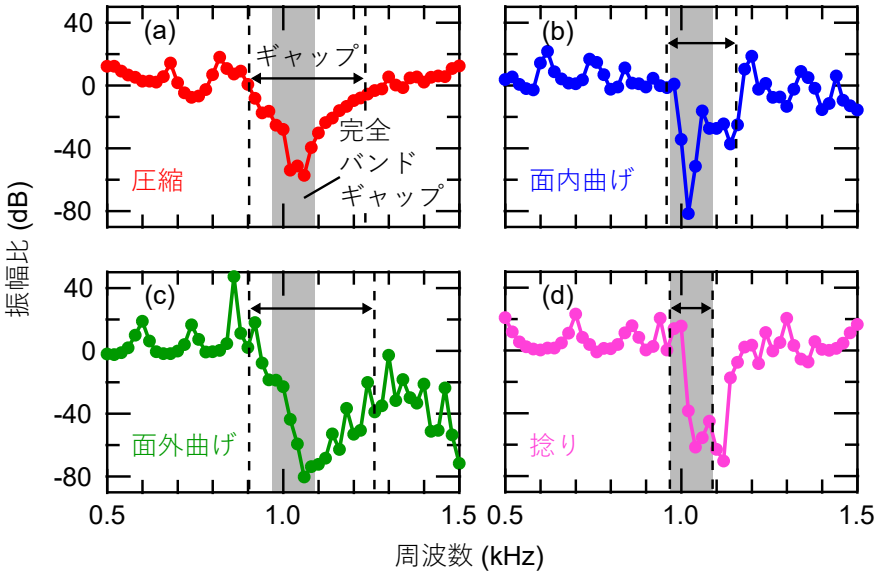


図 3.4　各モードの音響波の入力と出力の振幅比。圧縮（C）、面内曲げ（SH）、面外曲げ（SV）、およびねじれ（T）波をそれぞれ示す。縦方向の黒い破線はシミュレーションで求めたバンドギャップ端を、黒い矢印はシミュレーションで求めたギャップ幅を、灰色の網掛け部分はシミュレーションで求めた完全バンドギャップの領域を示す。

3.1.2　テーパー状のメタマテリアル梁

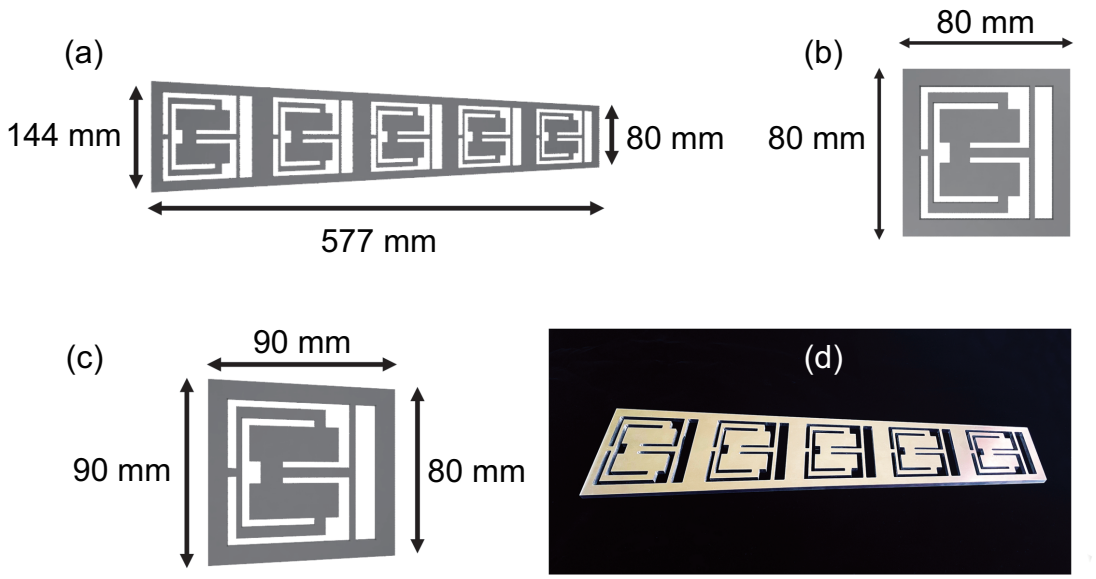


図 3.5　テーパー状メタマテリアル梁の構造。 (a) 概略図。(b) 変形前の基準ユニットセル。(c) 基準ユニットセルから一段階の変形を伴ったテーパー状のユニットセル。(d) 実際に作製されたアルミニウム製メタマテリアル梁の画像。共振器構造は中心軸に対して対称。

作製したテーパー状メタマテリアル梁を図 3.5 に示す。均一な厚さ 8mm を持つアルミニウム（dural A2017）梁からなり、幅が 80mm から 144mm まで一定の割合で変化している。その内部にマシニングセンタで加工された 5 つの共振器構造が配されている。配置された空隙はいずれも梁の上部と下部の表面に垂直である。材料の選択は、その剛性と価格により応用に向けて理に適った材料であることから採用された。この複合ユニットセルで構成された構造について、設計の有効性を評価する。図 3.5(a) に梁の概略を示す。変形元の構造は図 3.5(b) に示されたユニットセル 5 つが並んだ一様な幅の梁であるが、この梁の最右端を拡大元となる基準のユニットセルとし、図 3.5(c) のように梁全体を面内一様に歪ませる。元のメタマテリアル構造は厚さを含め最適化されているのに加え、製造の簡便さを考慮して厚さ方向は拡大縮小を行わずに保つ。その拡大率は、単一ユニットセルの右端から左端に向かって寸法を 13% 増加するように設定されている。これは角度換算で 6.39° のテーパー角に相当する。以上のようにして作製されたメタマテリアル梁の画像を、図 3.5(d) に示す。

3.2　数値シミュレーションによる共振器の性能評価

テーパー状メタマテリアル梁の共振器性能を検証するため、数値シミュレーションによる評価を行った。以下では 3.2.1 で一般の設定について述べたのち、3.2.2 で共振器の性能について述べる。

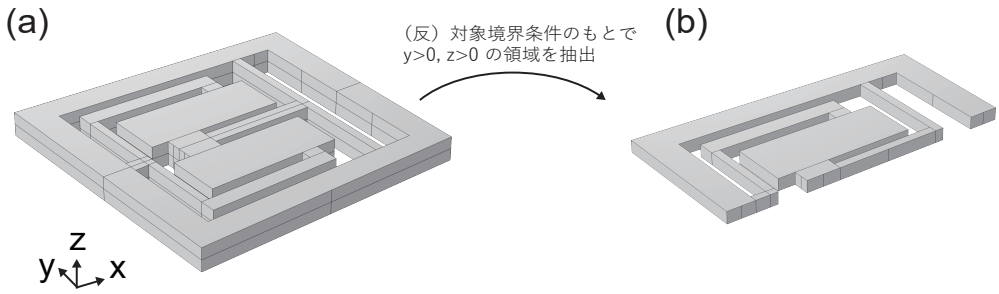


図 3.6　テーパー状の単一セルのジオメトリ。(a) 単一セルの全体。(b) 実際に計算されたジオメトリ。幅方向と厚さ方向にそれぞれ半分割し（反）対称境界条件を課すため、(a) の構造を $y = 0$ および $z = 0$ 平面において切除した体積 1/4 の部分のみを実装した。

3.2.1　シミュレーションの諸設定

前章と同様、有限要素法シミュレーションは COMSOL Multiphysics により行った。3.2.2 節で述べる複合ユニットセルの固有モードおよび分散関係は、圧縮、面内曲げ、面外曲げ、およびねじれの 4 モードそれぞれに対し独立に計算される。表 1.1 に示された矩形断面の梁における固有モードの対称性を利用して、図 3.6 のように断面と垂直に 4 等分した体積 1/4 の領域のみをモデルとして実装した。同表をもとにして切断面に対称または反対称条件を課すことでモード分離を実現する。メッシュ要素の辺の最大値と最小値はそれぞれ 1.2 mm および 0.012 mm である。アルミニウムの密度、および縦音速と横音速は、それぞれ 2790 kg/m^3、6320 m/s とし、内部摩擦は考慮していない。

3.2.2　共振器の応答と分散関係

まず、単一のユニットセルについて局所共振器としての応答を調べた。テーパー状メタマテリアル梁には五つの独立した共振構造が内包されているが、その中で最も体積が大きいものの共振モードを計算したところ、圧縮モード、面外曲げモード、面内曲げモード、およびねじれモードに対応する固有周波数はそれぞれ 0.53 kHz、0.52 kHz、0.54 kHz、および 0.57 kHz であった。図 3.7 に固有モードを示す。実際の梁構造に含まれる残りの 4 つの小さなセルの固有周波数は、構造のスケール係数 $f = 9/8$ の整数乗 (1-4) で最大セルの固有周波数を除算することで概算が可能である。

非テーパー状の媒質の場合、単位構造の両端は一致するため Floquet 境界条件を課した上で固有モードおよび分散関係を導出することができる。しかし今回のテーパー材料については底面を除くどの側面をとっても始端と終端は形状が一致せず、周期境界とならない。そこで構造を持たず同一割合でテーパー状に変形された単純な板を図 3.8(a) のように接続し、系の側面形状を一致させることで分散関係の計算を可能とした。図 3.8 に一連の分散関係と表面加速度分布を示す。加速度分布については平板の接続による周期性の付加を行わず、テーパー状メタマテリアル梁を孤立系として応答を調べた。梁の面積が大きな端面から単一周波数で励振したときの加速度分布を周波数領域計算で求めた。分散関係プロットを見ると、0.5〜0.85 kHz の範囲に低い群速度の分枝やバンドギャップを含む領域が存在する。低い群速度の分枝の出現は、一般に複数のユニットセルの結合を一単位構造とみなすと

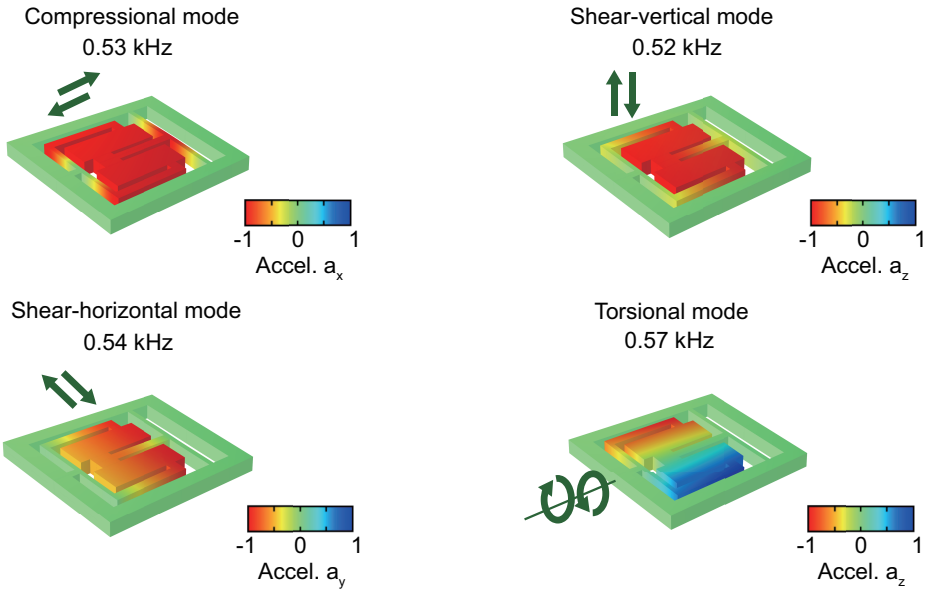


図 3.7　単一のユニットセルにおける各振動モード。カラープロットは各振動の変位方向への加速度を表す。台形形状の平行な二側面は固定境界となっている。

きに発生するバンド折り返しによるものと考えられる。単一ユニットセルのシミュレーションから導出された共振周波数を分散関係に重ねると、その周辺には大きな群速度を伴う分枝が現れていない。1.2.1 節で述べたように、音響メタマテリアルが示すバンドギャップの起源は二種類に分けられる。一つにはフォノニック結晶同様の構造周期に依るバンドギャップである。これは系を粗視化した連続体として扱う場合において、媒質界面での Bragg 反射に由来するバンドギャップとして説明される [3]。そのバンドギャップはブリルアンゾーン端に生じ、分枝の折り返しに伴って生じるものである。音響メタマテリアルのもう一種のバンドギャップは、個別の単位構造の局所共振に起因するもので、本テーマにおいてはこちらが主たる制御対象である。共振器構造における音響波エネルギーの局在によって生じるバンドギャップであり、分散曲線においては共振器の共振周波数をギャップ下端とし、ギャップ上端の分枝の始まりは共振器の共振周波数にしたがって変化する。これを受けて、複数の単位構造を内包するテーパー状メタマテリアルでは、単一セルの共振周波数のうち最も低いものを遮蔽周波数帯の下端に、最も高いものより上方にある最初の分枝を遮蔽周波数帯の上端として定めた。単位構造の大きさを基準に換言すれば、遮蔽周波数帯の下端は最大サイズのユニットセルの共振周波数、遮蔽周波数帯の上端は最小サイズのユニットセルの共振周波数を用いて定義する。以上のようにして定められた遮蔽周波数帯域を図 3.8 の分散関係上では点線で表示する。個別 4 モードの範囲が重なった灰色網掛けの領域では、テーパー状の梁によって音響伝播が妨げられていることが示唆される。また平板の接続によって構造周期性を与えたことによるフォノニック構造由来のバンドギャップは、例えば図 3.8 (e) のねじれ波の最低次分枝のように、$k = 0$ から出発した分枝がブリルアンゾーン端で折り返しを受ける際に生じたギャップと対応すると考えられる。

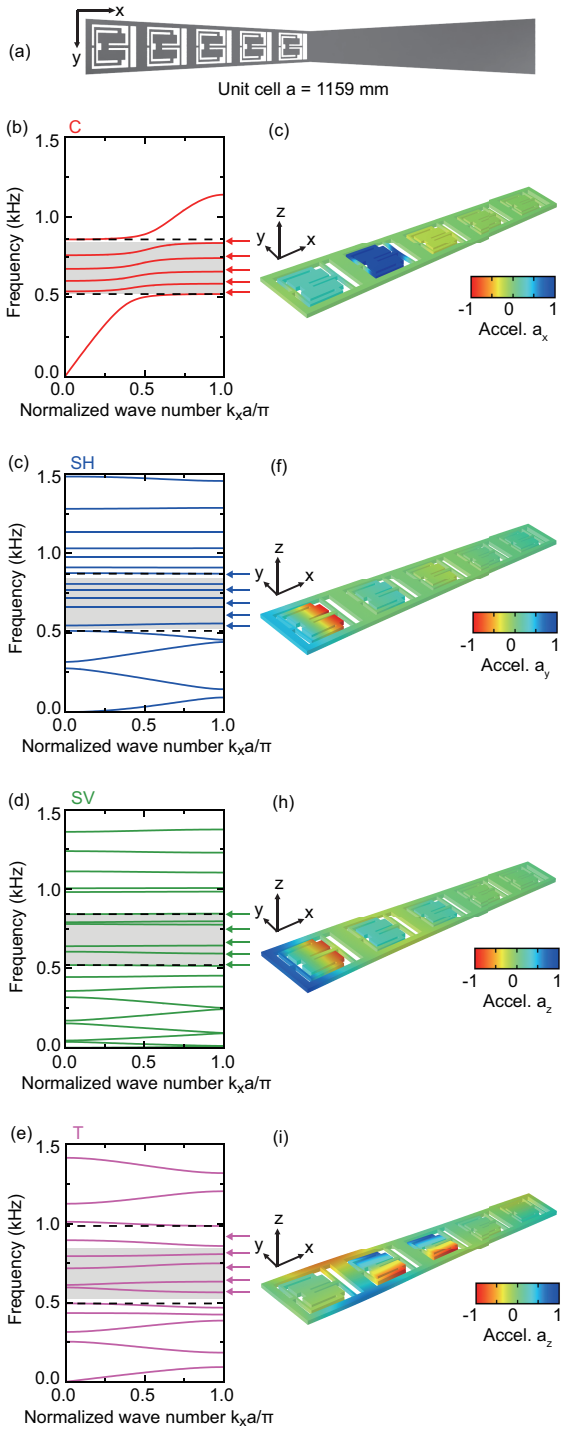


図 3.8　(a) 分散関係を計算する際に用いた単位構造。テーパー化された 5 ユニットセルのメタマテリアル梁と、同じ外部寸法で未加工のテーパー梁が向かい合わせに配置されている。(b)–(e) メタマテリアル梁内を伝わる軸方向の圧縮波（C）、面内曲げ波（SH）、面外曲げ波（SV）、およびねじれ波（T）の音響分散関係。各モードにおけるバンドギャップと局所共鳴からなる遮蔽領域は破線で境界が示され、全てのモードの遮蔽領域が重なる周波数域を灰色網掛けで表示している。k_x および a は、軸方向の波数ベクトルと単位セルの全長を表す。各モードについて分散関係の右側に表示された矢印は、単一の孤立したユニットセルの固有周波数を示す。 (f)–(i) 各モードに対する 0.6 kHz における表面加速度の分布。こちらは系の周期性を与えておらず、テーパー状メタマテリアル梁の孤立系における単一周波数励振に対する応答である。

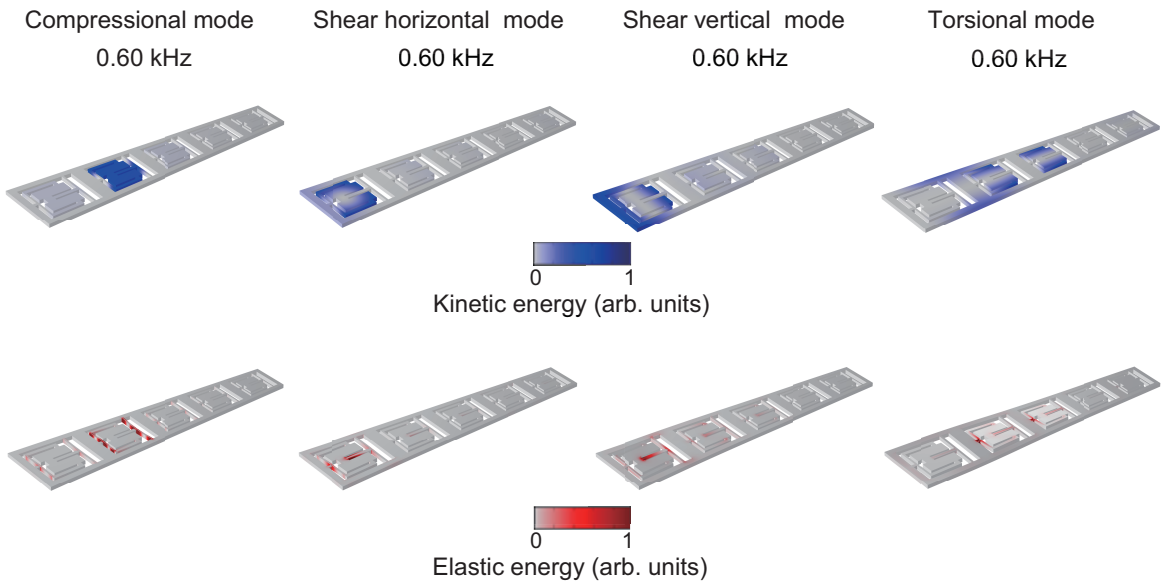


図 3.9　5 つの共振構造からなるテーパー状メタマテリアルの 0.60kHz における運動エネルギー密度と弾性エネルギー密度。

また図 3.9 に、各モードにおける運動エネルギー密度およびポテンシャルエネルギー密度のプロットを示す。赤い領域は弾性ポテンシャルが高く、ばねのように機能する。青と灰色の領域は運動エネルギーが高く、それぞれ質量と剛体のフレームとして機能する。これにより 4 モードそれぞれにおいて複数のユニットセル同士が相互作用して音響波を遮蔽している様子がわかる。

比較のため、より単純な場合であるユニットセル数 2 の系において分散関係取得を試みる。5 セルのテーパー状メタマテリアル梁と同条件のもと、N=2 セルの場合についても計算した結果を図 3.10 に示す。超格子の周期性の導入によりバンドの折り返しが起きているが、4 つのモードすべてにおいて追加の分枝は N − 1=1 本だけ現れた。従って N=5 の実験系場合、局所共振による N=5 箇所の新しいバンドギャップと N-1=4 の新しい低群速度の分枝が現れることが期待される。圧縮波の場合において、この特徴は明確に表れている。

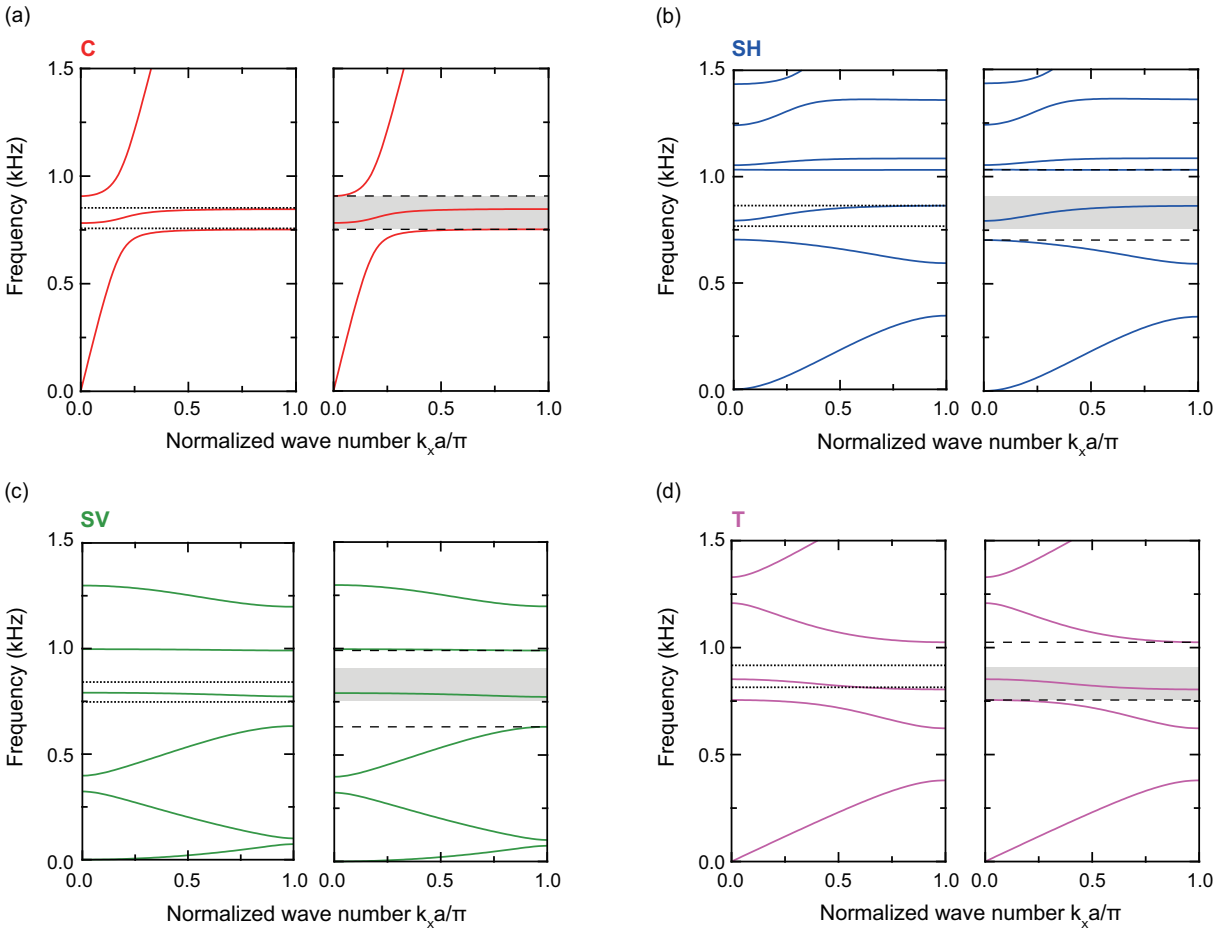


図 3.10　(a–d)：軸方向の伝播に対する圧縮波（C）、面内曲げ波（SH）、面外曲げ波（SV）、およびねじれ波（T）の音響分散関係。ユニットセルとなるのは、共振構造 2 セルからなるメタマテリアル梁に対して、同じ外部寸法で未加工のテーパー状の単純板を向かい合わせに配置した構造である。左右のプロットは同一構造の分散関係であるが、表示するものが異なる。左側のプロット：個別の単位セルの共振周波数を点線で示した。右側のプロット：各モードについてバンドギャップと局所共鳴によって定義された領域を破線で示し、全モードでこの遮蔽周波数域が重なる領域を灰色で示した。k_x および a は、軸方向の波数ベクトルと合成されたユニットセルの全長を表す。この場合、a = 191 mm である。バンドギャップと局所共鳴の重複周波数領域は 0.75 kHz から 0.91 kHz までであった。

3.3　実験による測定とシミュレーションの比較

製造されたテーパー状メタマテリアル梁を使用して、4 つの音響偏光に対する遮音性能を測定した。図 3.11 に実験系を示す。メタマテリアル梁はワイヤーによって鉛直に吊るされ、面積が大きな

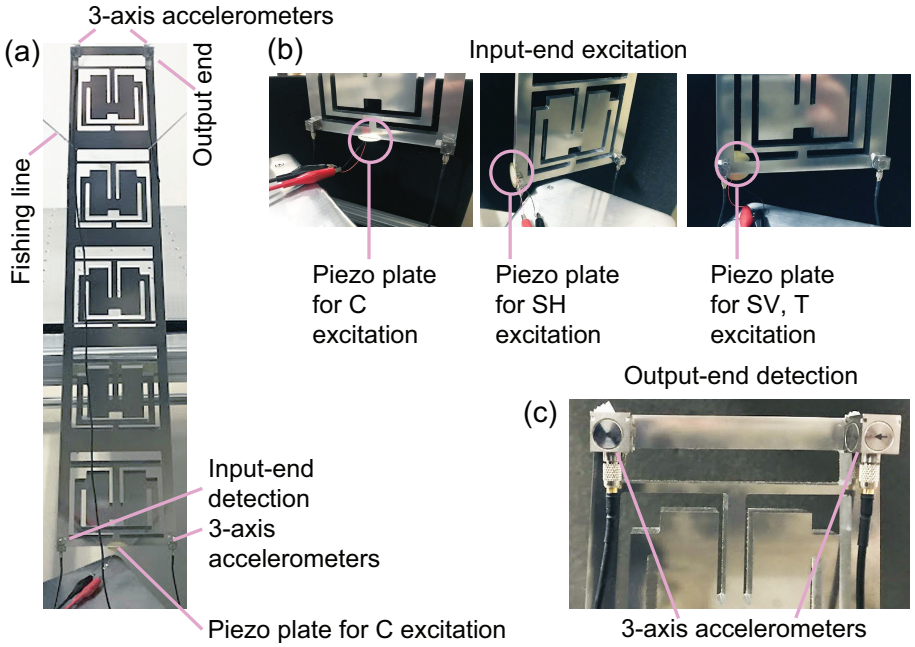


図 3.11　実験のセットアップ。梁 (a) は糸によって宙吊りにされ、(b),(c) 固有モードの対称性を利用して 4 モードの独立な加速度測定を行う。

断面の側に取り付けた圧電振動板（村田製作所 7BB-41-2L0）によって正弦波駆動される。振動は 3 軸加速度計（富士セラミックス SA12ZSCA）を使用し、音響波の減衰を各モードごとに取得するため、両端 2 箇所に取り付けられた加速度計でロックイン検出する。

図 3.12(a) から (d) に、全 4 モードに対する実験の出力/入力振幅比を対数スケールで示す。遮蔽周波数領域の外部では、干渉により複数の音響反射が発生し、局所的な極大値と極小値が生じる。灰色で表示した 4 モードに共通する遮蔽周波数帯では、全般的により大きな減衰が観察される。dB スケールの振幅比の平均値は、周波数 f_i の N 個の値に対する信号振幅を電圧ベースで A_i とすると、$20\log_{10}(1/N)\Sigma_{i=1}^{N}(10^{A_i}/20)$ で与えられる。よって 4 モードに共通する遮蔽周波数帯における出力/入力比は、平均値で 1.5 dB（C）、−1.6 dB（SH）、−16.0 dB（SV）、および 13.8 dB（T）であった。この領域より下の周波数での平均値はそれぞれ 8.9 dB（C）、6.7 dB（SH）、5.3 dB（SV）、および 4.6 dB（T）である。全体として高い減衰を示しているが、ねじれ波に関しては群速度が小さな分枝であっても局所的に鋭敏な応答を示した可能性がある。遮蔽周波数幅はこの領域の平均周波数（0.68 kHz）の 47% に相当し、これは非テーパー時における完全バンドギャップ幅である約 12% を大きく上回る結果である。

図 3.12 には同時に数値シミュレーションにおける周波数応答を示している。この場合、遮蔽周波数帯における平均 dB は 1.6 dB (C)、−6.5 dB (SH)、−4.8 dB (SV)、−1.3 dB (T) をとり、領域以下での平均値は、5.6 dB (C)、16.0 dB (SH)、1.9 dB (SV)、7.5 dB (T) である。よってシミュレーションによっても期待される遮蔽周波数域で強い波の遮蔽が起こっていることが確認できた。また全ての

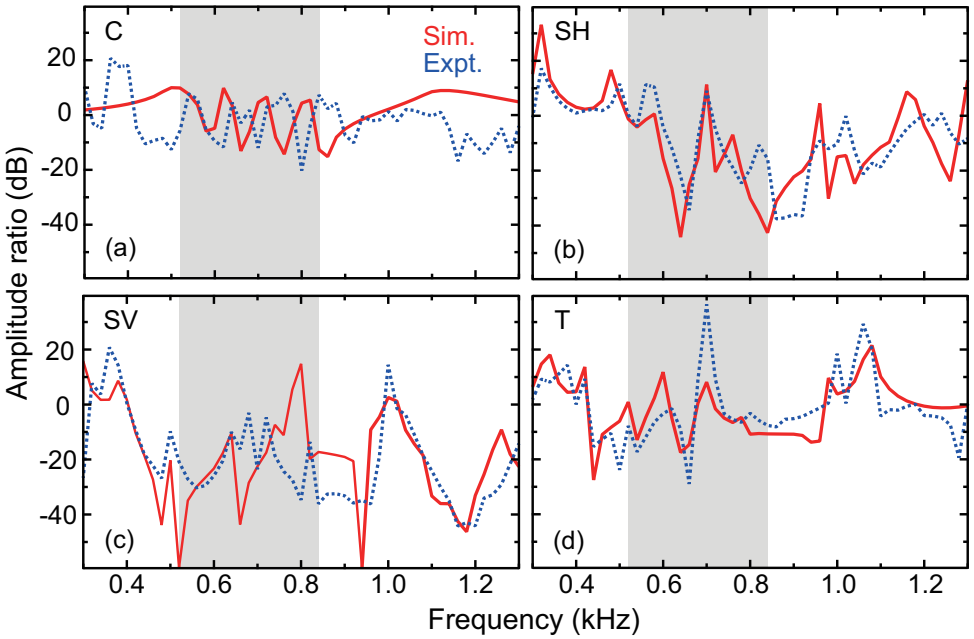


図 3.12　(a) – (d) 各モードにおける音響波の入力と出力の振幅比。圧縮（C）、面内曲げ（SH）、面外曲げ（SV）、およびねじれ（T）波をそれぞれ示す。灰色の領域は、分散関係 図 3.8 のシミュレーションから期待される全モード共通の遮蔽周波数帯を表す。Sim.: シミュレーション（赤色の実線）; Expt.: 実験（青色の点線）。

モードで実験とシミュレーションは合理的な一致を示した。スペクトルの一般的な形状はこれら 2 つのケースで類似しているが、一部に現れる局所的なピークは明らかに異なる点である。これらの違いは、製造時の不完全さ、空気中の音響波のカップリング、装置取り付けによる小さな摂動、または測定時に異なるモード間の残留クロストークが発生することに起因すると考えられる。なお遮蔽領域外のには振幅比が 1 を超えるピークが現れるが、これは梁に沿った複数の音響反射に強く影響を受けたためと考えられ、これらの領域での実験とシミュレーションの対応は合理性を失わない。

3.4　遮蔽周波数域における減衰性の解析

実験とシミュレーションにおける音響波振幅の周波数プロファイルが得られ、期待される遮蔽周波数内外での出力/入力比の平均値比較からテーパー状メタマテリアルは広帯域の音響波に対する高い減衰性を示すものと考えられる。図 3.9 に示すように提案のテーパー状メタマテリアルは、単一の共振器だけではなく複数の共振器が作用する形で遮蔽周波数帯で強い応答を示す。隣接する共振器との相互作用を介して全振動モードに対する機構はまさに設計方針であったレインボーメタマテリアルの動作そのものである。

ただしバンドギャップ内周波数であっても、梁の入出力面である両端面における振幅が最大・最小になるとは限らない。梁の全体として振動の減衰を知ることは、殊メタマテリアル梁のように複数モードが混交する媒質では困難である。しかし応用上の要請では、梁の両端面の間で振動が落ち込んでいれば、振動遮蔽を担う構造体としての役割を果たすことができる。ここでは梁の両端面における 4 モードそれぞれの振幅比を考え、バンドギャップ内の周波数において振動の振幅絶対値が $\exp(-\kappa x)$

の空間的減衰を伴うとみなす。各周波数毎の減衰定数 κ を

$$\kappa \equiv \frac{1}{L} \ln\left(\frac{A_{\text{out}}}{A_{\text{in}}}\right)$$

と定義し、実験およびシミュレーションの出力/入力プロファイルを再考する。ただし L はテーパー状梁の側面に沿った直線長さである。実験とシミュレーションの結果について減衰定数を求めると、図 3.13 のようになる。各モードともに実験とシミュレーションの周波数プロファイルはよく一致しており、分散関係の計算から期待される遮蔽周波数域において減衰定数の増加が認められる。このことからも提案のテーパー状構造が高帯域での波の遮蔽を示すことが示される。

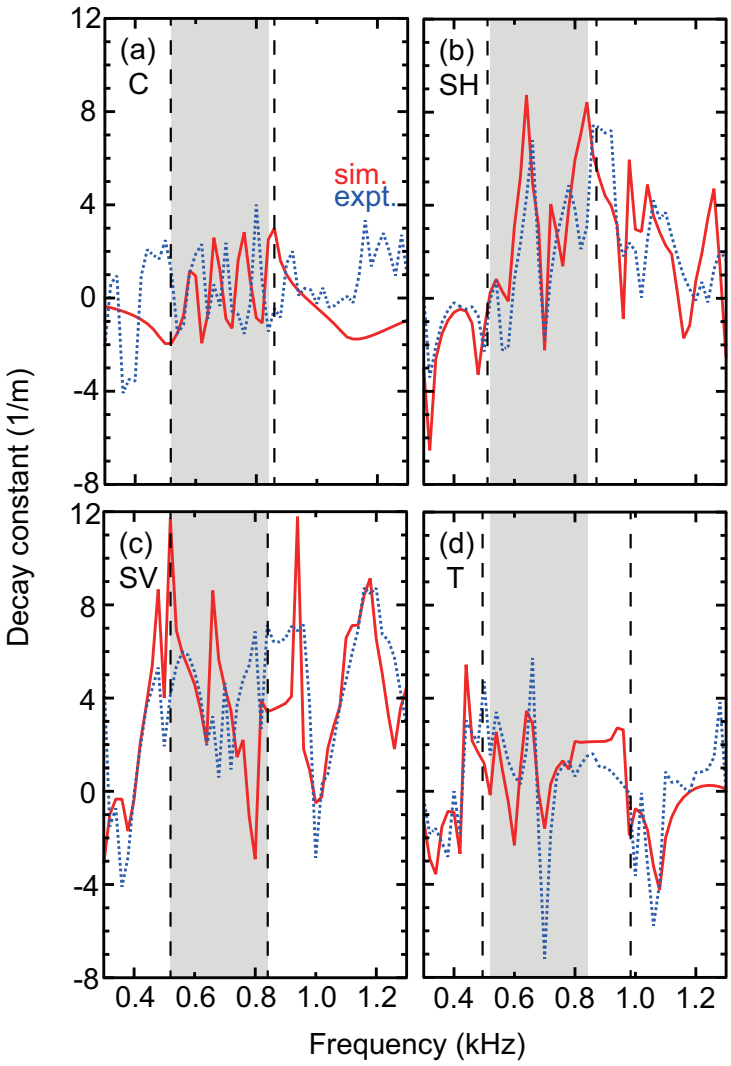


図 3.13　5 セルからなるテーパー状メタマテリアル梁における実験およびシミュレーションから得た減衰定数スペクトル。それぞれ、(a) 圧縮（C）、(b) 面内曲げ（SH）、(c) 面外曲げ（SV）、および (d) ねじれ（T）について示す。各モードにおける遮蔽周波数帯は波線で境界を表し、全モードに共通する領域を灰色で示す。sim：シミュレーション、expt：実験。

3.5　テーパーの拡大率について

スケールファクターの効果を調査するために、今回使用されている $f = 9/8$ の基本値から-10%、-5%、+5%、+10% に変更した 4 つの追加のジオメトリを考える。図 3.14 に構造を示す。また同時に、構造を構成する局所共振器の個数と音の遮蔽性能についても検証する。

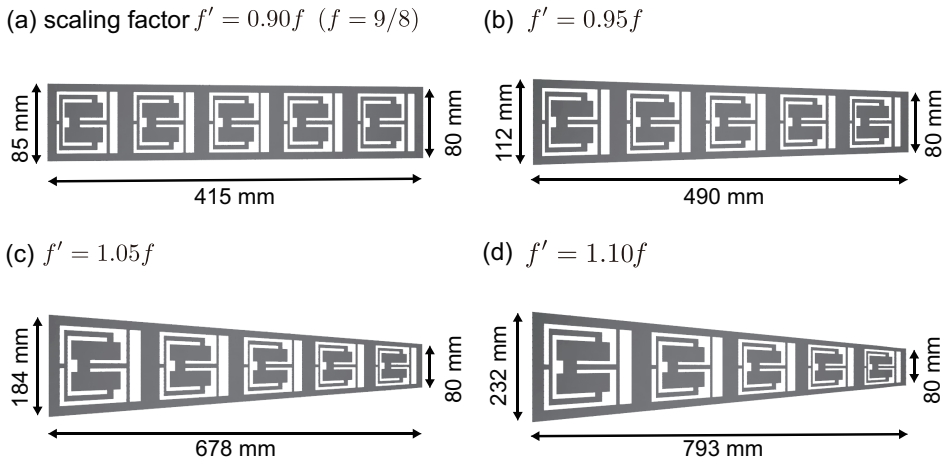


図 3.14　テーパー構造のスケールファクターを一定の割合変化させた 4 構造。

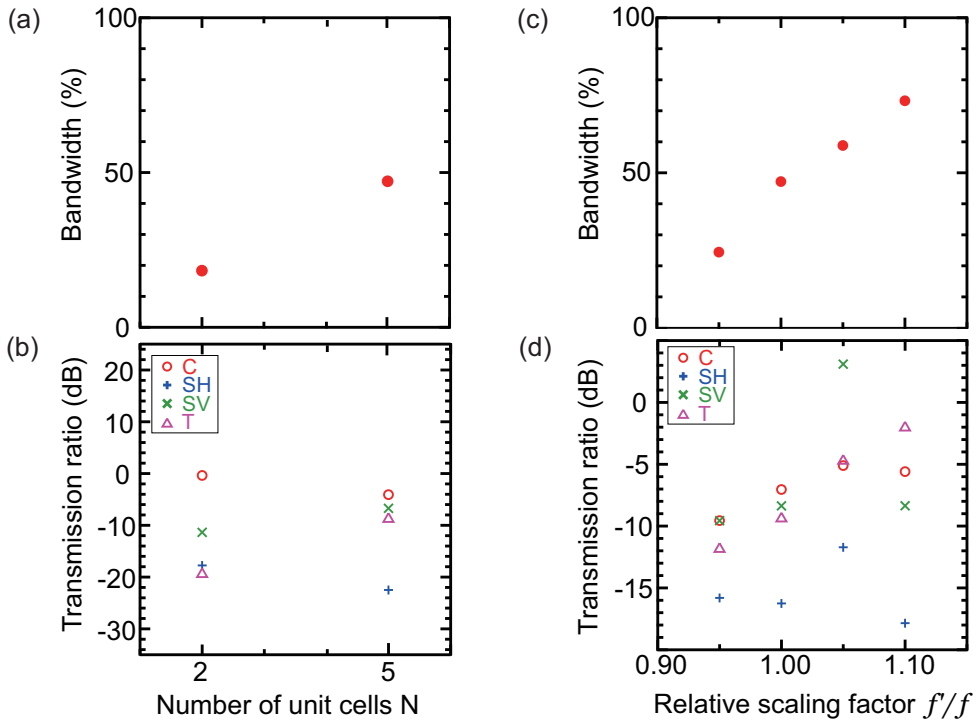


図 3.15　(a) $N = 2, 5$ の場合における全モードに共通した遮蔽周波数域のバンド幅と (b) 遮蔽周波数帯域内における出力/入力比の平均値。(c), (d): (a) の遮蔽周波数域のバンド幅と (b) の出力/入力比の平均値について、スケールファクターの変化率 f'　$/f$ に対するプロット。

各音響モードに対応するこれら 4 つの新たなスケールファクターについて、相対帯域幅の比較を図 3.15（c）に、平均出力/入力音響振幅比の比較を図 3.15（d）に示す。全体的な傾向として、f'/f が増加すると相対帯域幅が増加するが、その代償として各モードの平均的な減衰率が減少する。共振器個数 N に対する図 3.15(a),(b) のプロットでは、セル数の増大に伴い遮蔽可能な周波数帯域が拡大し、各モードの減衰率も低下する。一方でスケールファクターの帯域幅と減衰率はトレードオフであり、かつ構造が鋭利かつ大きなものとなるため、テーパー構造の設計においては応用上の許容されるフットプリントと性能を天秤にかける必要がある。

第 4 章

結言

本論文では固体音響波の局在現象に注目し、媒質境界および共振器構造への音響波の局在を利用した高効率な導波と広帯域の遮蔽の二種の研究を扱った。

第一の研究では、媒質境界に沿った音響波の局在現象であるトポロジカル境界モードに着目し、六方格子状の力学模型における曲げ波の特異な伝播を検証した。薄い六角形の金属板、ロッド、および真鍮の重りからなる二次元ウェーブマシンを構築し、周波数 ~1 Hz の目視可能な曲げ振動を介してフォノニックバレーホール系の局在モードを観測した。Berry 曲率を計算することによってバンド構造のトポロジカルな側面を特定し、空間反転対称な場合でディラックコーンが存在しないにもかかわらずトポロジー相転移が実現されることを示した。このメカニズムによりトポロジカルな境界モードが現れることが、実験とシミュレーションの両方で確認された。このアプローチは、フォノニックバレーホール結晶の単純な幾何学的最適化を可能にし、将来の新しいトポロジカルフォノニクスに基づく人工構造の開発のための柔軟な枠組みを提供する。

第二の研究では、共振器構造への音響波の局在現象に着目し、従来構造より広い周波数幅の音響波を遮蔽するテーパー状の矩形断面梁を提案した。実験とシミュレーションにより、アルミニウム単一材料からなるテーパー状レインボーメタマテリアル梁を実証した。このメタマテリアル梁は、基準となる圧縮、面内曲げ、面外曲げ、ねじれの全 4 モードに対応する共振子を配した長方形の断面を持ち、マルチモードの音響減衰を実現するものである。外形をテーパー状に変形することで各単位構造の共振周波数をシフトし、近接する共振構造の配列を実現した。これにより約 0.7 kHz の近傍で 50% の帯域幅を実現し、当該周波数領域では 4 モードの音響振動を同時かつ広帯域で減衰することが明らかとなった。この研究は既存構造をテーパー状にすることで広帯域化を図るレインボーメタマテリアルの設計可能性を示し、より高度な音響抑制機構の開発に貢献しうる。

以上に共通して、本論文では固体音響波の局在現象を利用した高度な制御に向けた構造の提案がなされた。冒頭で述べたように、固体音響波の振る舞いの理解は人類が知覚する振動の単純な抑止だけではなく、情報通信技術など幅広く活用の道が拓かれている。最近では、パッシブな系のみならずアクティブな制御を行う音響メタマテリアルなど新領域の開拓が進んでいる。本研究もまた、今後の多様な固体音響波制御技術の発展に貢献することを願う。

謝辞

本論文を作成するにあたって日々支えていただいた多くの方々に対し、ここに深謝の意を表します。

まず第一に、研究室の所属時から長きにわたりお世話になったスタッフの先生方に心より御礼申し上げます。Oliver B. Wright 先生には配属後から指導教官として非常に熱心にご指導いただきました。専門に限らず一般教養に対する造詣も深く、日常の会話だけでも新たな知見を得ることが多々ありました。時に海外の研究者との議論にお誘いいただくこともあり、学部生の頃から頻繁に国際交流の機会を頂戴しました。教授の松田 理先生は、高校時代にも一度理科研究の一環でお話を伺ったことがあり、それ以来のご縁となります。研究室配属後も何かと悩みの種となった課題を頻繁にご相談させていただきました。平易ながらも本質を損なわず思考過程を共有くださり、霧が晴れる場面が幾度となくありました。Wright 先生退官後の指導教官となってからも様々お声がけいただき、非常に安心して生活を送ることができました。助教の友田 基信先生には、日頃あらゆるサポートをお願いしておりました。居室での日々の情報交換によって解決の糸口が見つかったことも多々あり、最近ではトポロジカルフォノニクス研究会など新規の知見を得る機会に多数お誘いいただきました。本当にお世話になりました。加えて研究員 Paul Otsuka 氏にも、特に数値計算や解析の部分においてお世話になりました。こちらの不慣れな英語にも関わらずコミュニケーションを続け、親身にお力添えいただいたことに感謝致します。

応用物理学専攻の教員の皆様には、講義やゼミ等の多くの場でご指導ご鞭撻を賜りました。また本研究遂行にあたり、北海道大学 DX 博士人材フェローシップに多大なるご支援をいただきました。お世話になりました皆様に厚く御礼申し上げます。

その他学内外多くの関係先の方々、研究室生活を共にしたメンバー諸氏や友人たち、そして何よりも家族のサポートが非常に大きく働きました。数多の困難を経験しながらも、最終的に本論文を形にできました。誠にありがとうございました。

参考文献

[1] B. A. Auld. *Acoustic Fields and Waves in Solids*. John Wiley & Sons, 1973.

[2] B. A. Auld. *Acoustic Fields and Waves in Solids*. John Wiley & Sons, 2 edition, 1990.

[3] V. Laude. *Phononic Crystals*. De Gruyter, 2nd edition, 2020.

[4] E. Yablonovitch. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Physical Review Letters*, Vol. 58, pp. 2059–2062, 1987.

[5] S. John. Strong localization of photons in certain disordered dielectric superlattices. *Physical Review Letters*, Vol. 58, pp. 2486–2489, 1987.

[6] M. S. Kushwaha, . P. Halevi, . L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani. Acoustic band structure of periodic elastic composites, 1993.

[7] X. Zhang and Z. Liu. Negative refraction of acoustic waves in two-dimensional phononic crystals. *Applied Physics Letters*, Vol. 85, pp. 341–343, 2004.

[8] Q. Ni and J. Cheng. Anisotropy of effective velocity for elastic wave propagation in two-dimensional phononic crystals at low frequencies. *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics*, Vol. 72, pp. 1–7, 2005.

[9] F.-C. Hsu, C.-I. Lee, J.-C. Hsu, T.-C. Huang, C.-H. Wang, and P. Chang. Acoustic band gaps in phononic crystal strip waveguides. *Applied Physics Letters*, Vol. 96, , 2010.

[10] Y. Pennec, B. D. Rouhani, C. Li, J. M. Escalante, A. Martinez, S. Benchabane, V. Laude, and N. Papanikolaou. Band gaps and cavity modes in dual phononic and photonic strip waveguides. *AIP Advances*, Vol. 1, , 2011.

[11] F.-C. Hsu, J.-C. Hsu, T.-C. Huang, C.-H. Wang, and P. Chang. Reducing support loss in micromechanical ring resonators using phononic band-gap structures. *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 44, p. 375101, 2011.

[12] D. Feng, D. Xu, G. Wu, B. Xiong, and Y. Wang. Extending of band gaps in silicon based one-dimensional phononic crystal strips. *Applied Physics Letters*, Vol. 103, , 2013.

[13] B. Xiong, Y. Wang, D. Xu, D. Feng, G. Wu, D. Xu, G. Wu, B. Xiong, Y. Wang, D. Xu, D. Feng, and G. Wu. Phononic crystal strip based anchors for reducing anchor loss of micromechanical resonators. *Journal of Applied Physics*, Vol. 115, p. 024503, 2014.

[14] S. Nemat-Nasser. Anti-plane shear waves in periodic elastic composites: band structure and anomalous wave refraction. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, Vol. 471, p. 20150152, 2015.

[15] V. G. Veselago. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of ε and μ. *Soviet Physics Uspekhi*, Vol. 10, pp. 509–514, 1968.

[16] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart. Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 47, pp. 2075–2084, 1999.

[17] D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity. *Physical Review Letters*, Vol. 84, pp. 4184–4187, 2000.

[18] J. B. Pendry. Negative refraction makes a perfect lens. *Physical Review Letters*, Vol. 85, pp. 3966–3969, 2000.

[19] R. A. Shelby, D. R. Smith, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz. Microwave transmission through a two-dimensional, isotropic, left-handed metamaterial. *Applied Physics Letters*, Vol. 78, pp. 489–491, 2001.

[20] R. A. Shelby, D. R. Smith, and S. Schultz. Experimental verification of a negative index of refraction. *Science*, Vol. 292, pp. 77–79, 2001.

[21] J. W. Lee, M. A. Seo, J. Y. Sohn, Y. H. Ahn, D. S. Kim, S. C. Jeoung, C. Lienau, and Q.-H. Park. Invisible plasmonic meta-materials through impedance matching to vacuum. *Optics Express*, Vol. 13, p. 10681, 2005.

[22] I. I. Smolyaninov, Y.-J. Hung, and C. C. Davis. Imaging and focusing properties of plasmonic metamaterial devices. *Physical Review B*, Vol. 76, p. 205424, 2007.

[23] J. Zhang, K. F. MacDonald, and N. I. Zheludev. Optical gecko toe: Optically controlled attractive near-field forces between plasmonic metamaterials and dielectric or metal surfaces. *Physical Review B*, Vol. 85, p. 205123, 2012.

[24] J.-Y. Ou, E. Plum, J. Zhang, and N. I. Zheludev. An electromechanically reconfigurable plasmonic metamaterial operating in the near-infrared. *Nature Nanotechnology*, Vol. 8, pp. 252–255, 2013.

[25] N. Meinzer, W. L. Barnes, and I. R. Hooper. Plasmonic meta-atoms and metasurfaces. *Nature Photonics*, Vol. 8, pp. 889–898, 2014.

[26] C. Chen, A. Ishikawa, Y. Tang, M. Shiao, D. P. Tsai, and T. Tanaka. Uniaxial ‐ isotropic metamaterials by three ‐ dimensional split ‐ ring resonators. *Advanced Optical Materials*, Vol. 3, pp. 44–48, 2015.

[27] Z. Liu, X. Zhang, Y. Mao, Y. Y. Zhu, Z. Yang, C. T. Chan, and P. Sheng. Locally resonant sonic materials. *Science*, Vol. 289, pp. 1734–1736, 2000.

[28] N. Fang, D. Xi, J. Xu, M. Ambati, W. Srituravanich, C. Sun, and X. Zhang. Ultrasonic metamaterials with negative modulus. *Nature Materials*, Vol. 5, pp. 452–456, 2006.

[29] S. Yao, X. Zhou, and G. Hu. Experimental study on negative effective mass in a 1d mass-spring system. *New Journal of Physics*, Vol. 10, No. 4, pp. 043020–1–11, 2008.

[30] Y. Cheng, J. Y. Xu, and X. J. Liu. One-dimensional structured ultrasonic metamaterials with simultaneously negative dynamic density and modulus. *Physical Review B*, Vol. 77, p. 045134, 2008.

[31] Y. Xiao, J. Wen, and X. Wen. Flexural wave band gaps in locally resonant thin plates with periodically attached spring – mass resonators. *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 45, p. 195401, 2012.

[32] S. Zhang, J. H. Wu, and Z. Hu. Low-frequency locally resonant band-gaps in phononic crystal plates with periodic spiral resonators. *Journal of Applied Physics*, Vol. 113, , 2013.

[33] M. Rupin, F. Lemoult, G. Lerosey, and P. Roux. Experimental demonstration of ordered and disordered multiresonant metamaterials for lamb waves. *Physical Review Letters*, Vol. 112, p. 234301, 2014.

[34] P. H. Otsuka, S. Mezil, O. Matsuda, M. Tomoda, A. A. Maznev, T. Gan, N. Fang, N. Boechler, V. E. Gusev, and O. B. Wright. Time-domain imaging of gigahertz surface waves on an acoustic metamaterial. *New Journal of Physics*, Vol. 20, p. 013026, 2018.

[35] R. Ghaffarivardavagh, J. Nikolajczyk, S. Anderson, and X. Zhang. Ultra-open acoustic metamaterial silencer based on fano-like interference. *Physical Review B*, Vol. 99, p. 024302, 2019.

[36] D. Yu, Y. Liu, G. Wang, H. Zhao, and J. Qiu. Flexural vibration band gaps in timoshenko beams with locally resonant structures. *Journal of Applied Physics*, Vol. 100, , 2006.

[37] Y. Xiao, J. Wen, G. Wang, and X. Wen. Theoretical and experimental study of locally resonant and bragg band gaps in flexural beams carrying periodic arrays of beam-like resonators. *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 135, , 2013.

[38] Y. Xiao, J. Wen, D. Yu, and X. Wen. Flexural wave propagation in beams with periodically attached vibration absorbers: Band-gap behavior and band formation mechanisms. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 332, pp. 867–893, 2013.

[39] M. Nouh, O. Aldraihem, and A. Baz. Vibration characteristics of metamaterial beams with periodic local resonances. *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 136, , 2014.

[40] R. Zhu, X. Liu, G. Hu, C. Sun, and G. Huang. A chiral elastic metamaterial beam for broadband vibration suppression. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 333, pp. 2759–2773, 2014.

[41] H. Zhang, Y. Xiao, J. Wen, D. Yu, and X. Wen. Flexural wave band gaps in metamaterial beams with membrane-type resonators: theory and experiment. *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 48, p. 435305, 2015.

[42] T. Wang, M.-P. Sheng, and Q.-H. Qin. Multi-flexural band gaps in an euler – bernoulli beam with lateral local resonators. *Physics Letters A*, Vol. 380, pp. 525–529, 2016.

[43] J.-S. Chen, Y.-J. Huang, and I.-T. Chien. Flexural wave propagation in metamaterial beams containing membrane-mass structures. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 131-132, pp. 500–506, 2017.

[44] H. Chen, X. Li, Y. Chen, and G. Huang. Wave propagation and absorption of sandwich beams containing interior dissipative multi-resonators. *Ultrasonics*, Vol. 76, pp. 99–108, 2017.

[45] L. Tang and L. Cheng. Ultrawide band gaps in beams with double-leaf acoustic black hole indentations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 142, pp. 2802–2807, 2017.

[46] X. Li, Y. Chen, G. Hu, and G. Huang. A self-adaptive metamaterial beam with digitally controlled resonators for subwavelength broadband flexural wave attenuation. *Smart Materials and Structures*, Vol. 27, p. 045015, 2018.

[47] N. Gao, Z. Wei, R. Zhang, and H. Hou. Low-frequency elastic wave attenuation in a composite acoustic black hole beam. *Applied Acoustics*, Vol. 154, pp. 68–76, 2019.

[48] Y. Xiao, J. Wen, and X. Wen. Longitudinal wave band gaps in metamaterial-based elastic rods

containing multi-degree-of-freedom resonators. *New Journal of Physics*, Vol. 14, p. 033042, 2012.

[49] E. Nobrega, F. Gautier, A. Pelat, and J. D. Santos. Vibration band gaps for elastic metamaterial rods using wave finite element method. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 79, pp. 192–202, 2016.

[50] D. Yu, Y. Liu, G. Wang, L. Cai, and J. Qiu. Low frequency torsional vibration gaps in the shaft with locally resonant structures. *Physics Letters A*, Vol. 348, pp. 410–415, 2006.

[51] L. Li, T. Chen, J. Wu, X. Wang, and Z. Wang. Hybrid method for analyzing the torsional vibration of one-dimensional phononic-band-gap shafts. *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 51, p. 052001, 2012.

[52] L. Li and A. Cai. Low-frequency band gap mechanism of torsional vibration of lightweight elastic metamaterial shafts. *The European Physical Journal Applied Physics*, Vol. 75, p. 10501, 2016.

[53] K. Wang, J. Zhou, D. Xu, and H. Ouyang. Tunable low-frequency torsional-wave band gaps in a meta-shaft. *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 52, p. 055104, 2019.

[54] L. Airoldi and M. Ruzzene. Design of tunable acoustic metamaterials through periodic arrays of resonant shunted piezos. *New Journal of Physics*, Vol. 13, p. 113010, 2011.

[55] G. Ma, C. Fu, G. Wang, P. d. Hougne, J. Christensen, Y. Lai, and P. Sheng. Polarization bandgaps and fluid-like elasticity in fully solid elastic metamaterials. *Nature Communications*, Vol. 7, p. 13536, 2016.

[56] L. Lixia and C. Anjiang. Control of the low-frequency vibrations of elastic metamaterial shafts with discretized arc-rubber layers. *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 55, p. 067301, 2016.

[57] L. Li, R. Lv, A. Cai, M. Xie, Y. Chen, and G. Huang. Low-frequency vibration suppression of a multi-layered elastic metamaterial shaft with discretized scatters. *Journal of Physics D: Applied Physics*, Vol. 52, p. 055105, 2019.

[58] R. Zhu, X. N. Liu, G. K. Hu, C. T. Sun, and G. L. Huang. Negative refraction of elastic waves at the deep-subwavelength scale in a single-phase metamaterial. *Nature Communications*, Vol. 5, p. 5510, 2014.

[59] V. M. García-Chocano, J. Christensen, and J. Sánchez-Dehesa. Negative refraction and energy funneling by hyperbolic materials: An experimental demonstration in acoustics. *Physical Review Letters*, Vol. 112, p. 144301, 2014.

[60] V. E. Gusev and O. B. Wright. Double-negative flexural acoustic metamaterial. *New Journal of Physics*, Vol. 16, p. 123053, 2014.

[61] W. Wang, B. Bonello, B. Djafari-Rouhani, Y. Pennec, and J. Zhao. Double-negative pillared elastic metamaterial. *Physical Review Applied*, Vol. 10, p. 064011, 2018.

[62] S. Zhang, L. Yin, and N. Fang. Focusing ultrasound with an acoustic metamaterial network. *Physical Review Letters*, Vol. 102, p. 194301, 2009.

[63] L. Zigoneanu, B.-I. Popa, and S. A. Cummer. Design and measurements of a broadband two-dimensional acoustic lens. *Physical Review B*, Vol. 84, p. 024305, 2011.

[64] F. Lemoult, N. Kaina, M. Fink, and G. Lerosey. Soda cans metamaterial: A subwavelength-scaled phononic crystal. *Crystals*, Vol. 6, p. 82, 2016.

[65] J. B. Pendry and J. Li. An acoustic metafluid: realizing a broadband acoustic cloak. *New Journal*

of Physics, Vol. 10, p. 115032, 2008.

[66] A. N. Norris. Acoustic metafluids. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 125, pp. 839–849, 2009.

[67] N. Stenger, M. Wilhelm, and M. Wegener. Experiments on elastic cloaking in thin plates. *Physical Review Letters*, Vol. 108, p. 014301, 2012.

[68] T. Bückmann, M. Thiel, M. Kadic, R. Schittny, and M. Wegener. An elasto-mechanical unfeelability cloak made of pentamode metamaterials. *Nature Communications*, Vol. 5, p. 4130, 2014.

[69] A. Diatta and S. Guenneau. Controlling solid elastic waves with spherical cloaks. *Applied Physics Letters*, Vol. 105, , 2014.

[70] Y. Chen, X. Liu, and G. Hu. Latticed pentamode acoustic cloak. *Scientific Reports*, Vol. 5, p. 15745, 2015.

[71] P. Zhang and W. J. Parnell. Hyperelastic antiplane ground cloaking. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 143, pp. 2878–2885, 2018.

[72] J. J. Park, K. J. B. Lee, O. B. Wright, M. K. Jung, and S. H. Lee. Giant acoustic concentration by extraordinary transmission in zero-mass metamaterials. *Physical Review Letters*, Vol. 110, p. 244302, 2013.

[73] S. Mezil, K. Chonan, P. H. Otsuka, M. Tomoda, O. Matsuda, S. H. Lee, and O. B. Wright. Extraordinary transmission of gigahertz surface acoustic waves. *Scientific Reports*, Vol. 6, p. 33380, 2016.

[74] E. Bok, J. J. Park, H. Choi, C. K. Han, O. B. Wright, and S. H. Lee. Metasurface for water-to-air sound transmission. *Physical Review Letters*, Vol. 120, p. 044302, 2018.

[75] S. H. Lee and O. B. Wright. Origin of negative density and modulus in acoustic metamaterials. *Physical Review B*, Vol. 93, p. 024302, 2016.

[76] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. CRC Press, 2 edition, 2018.

[77] D. Vanderbilt. *Berry Phases in Electronic Structure Theory*. Cambridge University Press, 1 edition, 2018.

[78] K. v. Klitzing. The quantized hall effect. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 58, pp. 519–531, 1986.

[79] D. J. Thouless, M. Kohmoto, M. P. Nightingale, and M. d. Nijs. Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential. *Physical Review Letters*, Vol. 49, pp. 405–408, 1982.

[80] M. Z. Hasan and C. L. Kane. Colloquium : Topological insulators. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 82, pp. 3045–3067, 2010.

[81] X. L. Qi and S. C. Zhang. Topological insulators and superconductors. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 83, , 2011.

[82] T. Ozawa, H. M. Price, A. Amo, N. Goldman, M. Hafezi, L. Lu, M. C. Rechtsman, D. Schuster, J. Simon, O. Zilberberg, and I. Carusotto. Topological photonics. *Reviews of Modern Physics*, Vol. 91, p. 15006, 2019.

[83] G. Ma, M. Xiao, and C. T. Chan. Topological phases in acoustic and mechanical systems. *Nature Reviews Physics*, Vol. 1, pp. 281–294, 2019.

[84] C. L. Kane and E. J. Mele. Quantum spin hall effect in graphene. *Physical Review Letters*, Vol. 95, pp. 1–4, 2005.

[85] D. Xiao, W. Yao, and Q. Niu. Valley-contrasting physics in graphene: Magnetic moment and topological transport. *Physical Review Letters*, Vol. 99, pp. 1–4, 2007.

[86] Y. Hatsugai. Bulk-edge correspondence in graphene with/without magnetic field: Chiral symmetry, dirac fermions and edge states. *Solid State Communications*, Vol. 149, pp. 1061–1067, 2009.

[87] P. Delplace, D. Ullmo, and G. Montambaux. Zak phase and the existence of edge states in graphene. *Physical Review B - Condensed Matter and Materials Physics*, Vol. 84, pp. 1–13, 2011.

[88] W. Zhong and X. Zhang. Acoustic analog of monolayer graphene and edge states. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, Vol. 375, pp. 3533–3536, 2011.

[89] T. Kariyado and Y. Hatsugai. Manipulation of dirac cones in mechanical graphene. *Scientific Reports*, Vol. 5, pp. 1–8, 2015.

[90] Y.-T. Wang and S. Zhang. Elastic spin-hall effect in mechanical graphene. *New Journal of Physics*, Vol. 18, p. 113014, 2016.

[91] J. E. Socolar, T. C. Lubensky, and C. L. Kane. Mechanical graphene. *New Journal of Physics*, Vol. 19, , 2017.

[92] D. Torrent and J. Sánchez-Dehesa. Acoustic analogue of graphene: Observation of dirac cones in acoustic surface waves. *Physical Review Letters*, Vol. 108, pp. 1–5, 2012.

[93] S. Y. Yu, X. C. Sun, X. Ni, Q. Wang, X. J. Yan, C. He, X. P. Liu, L. Feng, M. H. Lu, and Y. F. Chen. Surface phononic graphene. *Nature Materials*, Vol. 15, pp. 1243–1247, 2016.

[94] E. Prodan and C. Prodan. Topological phonon modes and their role in dynamic instability of microtubules. *Physical Review Letters*, Vol. 103, pp. 1–4, 2009.

[95] A. Darabi, X. Ni, M. Leamy, and A. Alù. Reconfigurable floquet elastodynamic topological insulator based on synthetic angular momentum bias. *Science Advances*, Vol. 6, , 2020.

[96] Y. Ding, Y. Peng, Y. Zhu, X. Fan, J. Yang, B. Liang, X. Zhu, X. Wan, and J. Cheng. Experimental demonstration of acoustic chern insulators. *Physical Review Letters*, Vol. 122, p. 14302, 2019.

[97] Y. T. Wang, P. G. Luan, and S. Zhang. Coriolis force induced topological order for classical mechanical vibrations. *New Journal of Physics*, Vol. 17, , 2015.

[98] Y. Plotnik, M. C. Rechtsman, D. Song, M. Heinrich, J. M. Zeuner, S. Nolte, Y. Lumer, N. Malkova, J. Xu, A. Szameit, Z. Chen, and M. Segev. Observation of unconventional edge states in ‘photonic graphene’. *Nature Materials*, Vol. 13, pp. 57–62, 2014.

[99] X. D. Chen, F. L. Zhao, M. Chen, and J. W. Dong. Valley-contrasting physics in all-dielectric photonic crystals: Orbital angular momentum and topological propagation. *Physical Review B*, Vol. 96, pp. 1–5, 2017.

[100] X.-T. He, E.-T. Liang, J.-J. Yuan, H.-Y. Qiu, X.-D. Chen, F.-L. Zhao, and J.-W. Dong. A silicon-on-insulator slab for topological valley transport. *Nature Communications*, Vol. 10, p. 872, 2019.

[101] T. Yamaguchi, Y. Ota, R. Katsumi, K. Watanabe, S. Ishida, A. Osada, Y. Arakawa, and S. Iwamoto. Gaas valley photonic crystal waveguide with light-emitting inas quantum dots. *Applied Physics Express*, Vol. 12, p. 062005, 2019.

[102] H. T. Phan, F. Liu, and K. Wakabayashi. Valley-dependent corner states in honeycomb photonic crystals without inversion symmetry. *Optics Express*, Vol. 29, p. 18277, 2021.

[103] L. Zhang and Q. Niu. Chiral phonons at high-symmetry points in monolayer hexagonal lattices.

Physical Review Letters, Vol. 115, p. 115502, 2015.

[104] R. K. Pal and M. Ruzzene. Edge waves in plates with resonators: An elastic analogue of the quantum valley hall effect. *New Journal of Physics*, Vol. 19, pp. 1–18, 2017.

[105] S. y. Huo, J. j. Chen, H. b. Huang, and G. l. Huang. Simultaneous multi-band valley-protected topological edge states of shear vertical wave in two-dimensional phononic crystals with veins. *Scientific Reports*, Vol. 7, p. 10335, 2017.

[106] J. W. Jiang, B. S. Wang, and H. S. Park. Topologically protected interface phonons in two-dimensional nanomaterials: hexagonal boron nitride and silicon carbide. *Nanoscale*, Vol. 10, pp. 13913–13923, 2018.

[107] Z. Wang, S.-Y. Yu, F.-K. Liu, Y. Tian, S. K. Gupta, M.-H. Lu, and Y.-F. Chen. Slow and robust plate acoustic waveguiding with valley-dependent pseudospins. *Applied Physics Express*, Vol. 11, p. 107301, 2018.

[108] J. Wang and J. Mei. Topological valley-chiral edge states of lamb waves in elastic thin plates. *Applied Physics Express*, Vol. 11, p. 057302, 2018.

[109] Y. Jin, D. Torrent, and B. Djafari-Rouhani. Robustness of conventional and topologically protected edge states in phononic crystal plates. *Physical Review B*, Vol. 98, p. 054307, 2018.

[110] Y. Jin, R. Wang, and H. Xu. Recipe for dirac phonon states with a quantized valley berry phase in two-dimensional hexagonal lattices. *Nano Letters*, Vol. 18, pp. 7755–7760, 2018.

[111] I. Kim, Y. Arakawa, and S. Iwamoto. Design of gaas-based valley phononic crystals with multiple complete phononic bandgaps at ultra-high frequency. *Applied Physics Express*, Vol. 12, p. 047001, 2019.

[112] L. Yang, K. Yu, B. Bonello, B. Djafari-Rouhani, W. Wang, and Y. Wu. Abnormal topological refraction into free medium at subwavelength scale in valley phononic crystal plates. *Physical Review B*, Vol. 103, p. 184303, 2021.

[113] H. Liu. Multiband pure topological states in elastic structures. *Frontiers in Physics*, Vol. 10, pp. 1–13, 2022.

[114] Y. Chen, D. Liu, Y. Wu, P. Yu, and Y. Liu. Valley hall elastic topological insulator with large chern numbers. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 239, p. 107884, 2023.

[115] J. Zhou, J. Zhang, J. Chang, Z.-Y. Li, and D. Yan. Active control topological valley modes in metamaterial plates. *Crystals*, Vol. 13, p. 933, 2023.

[116] M. S. Ali, M. Kataoka, M. Misawa, and K. Tsuruta. Reconfigurable waveguide based on valley topological phononic crystals with local symmetry inversion via continuous translation. *Japanese Journal of Applied Physics*, Vol. 62, p. SJ1002, 2023.

[117] Y. Nii and Y. Onose. Imaging an acoustic topological edge mode on a patterned substrate with microwave impedance microscopy. *Physical Review Applied*, Vol. 19, p. 014001, 2023.

[118] K. Qian, D. J. Apigo, C. Prodan, Y. Barlas, and E. Prodan. Topology of the valley-chern effect. *Physical Review B*, Vol. 98, p. 155138, 2018.

[119] J. Vila, R. K. Pal, and M. Ruzzene. Observation of topological valley modes in an elastic hexagonal lattice. *Physical Review B*, Vol. 96, p. 134307, 2017.

[120] M. Yan, J. Lu, F. Li, W. Deng, X. Huang, J. Ma, and Z. Liu. On-chip valley topological materials

for elastic wave manipulation. *Nature Materials*, Vol. 17, pp. 993–998, 2018.

[121] J. N. Shive. *Similarities in Wave Behavior*. The Williams & Wilkins Co., 1961.

[122] K. D. Skeldon, J. E. Milne, A. I. Grant, and D. A. Palmer. Making waves: A classroom torsional wave machine (part Ⅰ). *THE PHYSICS TEACHER*, Vol. 36, pp. 392–398, 1998.

[123] K. D. Skeldon, J. E. Milne, A. I. Grant, and D. A. Palmer. Making waves: A classroom torsional wave machine (part Ⅱ). *THE PHYSICS TEACHER*, Vol. 36, pp. 466–472, 1998.

[124] R. d. l. Madrid, A. Gonzalez, and G. M. Irwin. Gravitational dispersion in a torsional wave machine. *American Journal of Physics*, Vol. 82, pp. 1134–1141, 2014.

[125] L. Pochhammer. On the propagation velocities of small oscillations in an unlimited isotropic circular cylinder. *J. Reine Angewandte Math*, Vol. 81, pp. 324–336, 1876.

[126] C. Chree. Longitudinal vibrations of a circular bar. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, Vol. 21, pp. 287–298, 1886.

[127] C. Chree. The equations of an isotropic elastic cylinder in polar and cylindrical coordinates, their solutions and applications. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 14, pp. 250–309, 1889.

[128] R. W. Morse. Dispersion of compressional waves in isotropic rods of rectangular cross section. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 20, pp. 833–838, 1948.

[129] R. W. Morse. The velocity of compressional waves in rods of rectangular cross section. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 22, pp. 219–223, 1950.

[130] G. J. Kynch. The fundamental modes of vibration of uniform beams for medium wavelengths. *British Journal of Applied Physics*, Vol. 8, pp. 64–73, 1957.

[131] N. J. Nigro. Steady-state wave propagation in infinite bars of noncircular cross section. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 40, pp. 1501–1508, 1966.

[132] W. B. Fraser. Stress wave propagation in rectangular bars. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 5, pp. 379–397, 1969.

[133] N. Nishiguchi, Y. Ando, and M. N. Wybourne. Acoustic phonon modes of rectangular quantum wires. *Journal of Physics: Condensed Matter*, Vol. 9, pp. 5751–5764, 1997.

[134] R. D. Mindlin and E. A. Fox. Vibrations and waves in elastic bars of rectangular cross section. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 27, pp. 152–158, 1960.

[135] K. Fujita, M. Tomoda, O. B. Wright, and O. Matsuda. Perfect acoustic bandgap metabeam based on a quadruple-mode resonator array. *Applied Physics Letters*, Vol. 115, , 2019.

[136] A. Ogasawara, K. Fujita, M. Tomoda, O. Matsuda, and O. B. Wright. Wave-canceling acoustic metarod architected with single material building blocks. *Applied Physics Letters*, Vol. 116, , 2020.

[137] R. A. Jahdali and Y. Wu. Coupled resonators for sound trapping and absorption. *Scientific Reports*, Vol. 8, , 2018.

[138] G. Hu, A. C. M. Austin, V. Sorokin, and L. Tang. Metamaterial beam with graded local resonators for broadband vibration suppression. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 146, , 2021.

[139] J. Zhu, Y. Chen, X. Zhu, F. J. Garcia-Vidal, X. Yin, W. Zhang, and X. Zhang. Acoustic rainbow trapping. *Scientific Reports*, Vol. 3, , 2013.

[140] X. Ni, Y. Wu, Z. G. Chen, L. Y. Zheng, Y. L. Xu, P. Nayar, X. P. Liu, M. H. Lu, and Y. F. Chen.

Acoustic rainbow trapping by coiling up space. *Scientific Reports*, Vol. 4, p. 7038, 2014.

[141] P. Celli, B. Yousefzadeh, C. Daraio, and S. Gonella. Bandgap widening by disorder in rainbow metamaterials. *Applied Physics Letters*, Vol. 114, , 2019.

[142] J. M. D. Ponti, A. Colombi, E. Riva, R. Ardito, F. Braghin, A. Corigliano, and R. V. Craster. Experimental investigation of amplification, via a mechanical delay-line, in a rainbow-based metamaterial for energy harvesting. *Applied Physics Letters*, Vol. 117, , 2020.

[143] H. Meng, D. Chronopoulos, N. Bailey, and L. Wang. Investigation of 2d rainbow metamaterials for broadband vibration attenuation. *Materials*, Vol. 13, pp. 1–9, 2020.

[144] Y. Xie, A. Konneker, B. I. Popa, and S. A. Cummer. Tapered labyrinthine acoustic metamaterials for broadband impedance matching. *Applied Physics Letters*, Vol. 103, , 2013.

[145] C. Zhou, B. Yuan, Y. Cheng, and X. Liu. Precise rainbow trapping for low-frequency acoustic waves with micro mie resonance-based structures. *Applied Physics Letters*, Vol. 108, , 2016.

[146] H. Takeda, E. Murakami, M. Tomoda, O. Matsuda, K. Fujita, and O. B. Wright. Tapered rainbow metabeam for wideband multimode acoustic blocking based on quadruple-mode resonators. *Applied Physics Letters*, Vol. 121, , 2022.

[147] H. Takeda, R. Minami, O. Matsuda, O. B. Wright, and M. Tomoda. Phononic band calculations and experimental imaging of topological boundary modes in a hexagonal flexural wave machine. *Applied Physics Express*, Vol. 17, p. 017004, 1.

[148] T. Fukui, Y. Hatsugai, and H. Suzuki. Chern numbers in discretized brillouin zone: Efficient method of computing (spin) hall conductances. *Journal of the Physical Society of Japan*, Vol. 74, pp. 1674–1677, 2005.

[149] J. H. Oh, Y. E. Kwon, H. J. Lee, and Y. Y. Kim. Elastic metamaterials for independent realization of negativity in density and stiffness. *Scientific Reports*, Vol. 6, p. 23630, 2016.

[150] J. W. Jiang, B. S. Wang, J. S. Wang, and H. S. Park. A review on the flexural mode of graphene: Lattice dynamics, thermal conduction, thermal expansion, elasticity and nanomechanical resonance. *Journal of Physics Condensed Matter*, Vol. 27, , 2015.

[151] C. Desmet, U. Kawald, A. Mourad, W. Lauriks, and J. Thoen. The behavior of lamb waves in stressed polymer foils. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 100, pp. 1509–1513, 1996.

[152] K. F. Graff. *Wave motion in elastic solids*. Dover Publications New York, New York, 1975.