



Title	植物形態に潜む構造力学的学理の学際的探究
Author(s)	金浜, 瞳也
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第15844号
Issue Date	2024-03-25
DOI	https://doi.org/10.14943/doctoral.k15844
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/91996
Type	doctoral thesis
File Information	Tohya_Kanahama.pdf



HOKKAIDO UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF ENGINEERING
DIVISION OF MECHANICAL AND SPACE ENGINEERING

学位論文

植物形態に潜む構造力学的学理の 学際的探究

Interdisciplinary Exploration of Structural Mechanics Principle
in Plant Morphology

北海道大学大学院工学院
機械宇宙工学専攻

材料力学研究室
金浜 瞳也

2024 年 3 月

目次

第1章 序論	1
1.1 自然を生き抜く植物の多彩な形態	2
1.1.1 樹木のアプローチ：高さ方向への成長と重量の支持.....	2
1.1.2 竹のアプローチ：中空断面による軽量化と節による補剛効果	3
1.1.3 草のアプローチ：耐陰性の獲得や内部水分の活用	5
1.2 植物の形態に潜む「形の法則」	7
1.2.1 樹木における「高さ一直径の $2/3$ 乗の法則」	7
1.2.2 植物形態に潜む形状則の力学的意義	9
1.2.3 草本植物における「 $2/3$ 乗の法則」の適用性	10
1.3 本研究の目的	12
1.3.1 曲げ剛性：硬く重たい木本植物の最大高さ	12
1.3.2 幾何剛性：水分による膨圧を活用した張力構造	14
1.4 本論文の構成	16
参考文献	18
第2章 Greenhill による重い柱における自重座屈特性の定式化	22
2.1 力学理論に基づく重い柱の自重座屈に対する最大高さ	22
2.1.1 計算モデル	22
2.1.2 支配方程式の導出	23
2.1.3 支配方程式の解法と固有方程式の導出	24
2.1.4 自重座屈モードの導出.....	32
2.2 実際の植物における高さ制限に関する仮説	34
2.2.1 Greenhill の説：自重座屈による高さの制限	34
2.2.2 風荷重による高さの制限	36
2.2.3 その他の仮説：水理学的条件と樹齢条件	37
2.3 Niklas による反証：草本植物への $2/3$ 乗則の適用性	38
2.4 木本植物と草本植物の身体支持機構の違い	39
参考文献	40
第3章 硬く重い木本植物の最大高さ	42
3.1 「植物学上」の木本植物の定義	42
3.1.1 「木本植物」とは何者か	42

3.1.2	「木本」でも「草本」でもある植物：既往の分類方法の課題	44
3.1.3	木本植物の形態を力学的に紐解く意義	44
3.2	テーパー形状による最大高さの向上	46
3.2.1	計算モデル	46
3.2.2	体積補正係数 β_V の導入	47
3.2.3	支配方程式の導出	49
3.2.4	最大高さ方程式の導出	50
3.2.5	最大高さ方程式の数値解法	54
3.2.6	テーパー形状と自重座屈に対する最大高さ式	59
3.2.7	本節のまとめ	64
3.3	樹木における枝葉重量の巧妙な配分戦略	65
3.3.1	計算モデル	65
3.3.2	支配方程式の導出	67
3.3.3	固有方程式の導出	69
3.3.4	セカント法を用いた固有方程式の数値解法	70
3.3.5	重量分布が最大高さに与える影響の解明	73
3.3.6	実際の樹木への適用：枝葉と幹の重量バランスの導入	76
3.3.7	自重座屈モードの導出	79
3.3.8	有限要素法に基づく重量分布をもつ円柱の自重座屈解析	81
3.3.9	本節のまとめ	84
3.4	竹に見られる断面の中空化：軽量化と剛性のトレードオフ	85
3.4.1	計算モデル	85
3.4.2	支配方程式の導出	86
3.4.3	固有方程式の導出	86
3.4.4	中空円筒における自重座屈に対する最大高さ式	87
3.4.5	中実円柱および中空円筒における自重座屈特性の和算法則	88
3.4.6	本研究の理論解を用いた有限要素解の妥当性検証	90
3.4.7	自重座屈に対する安全率の図形的表現：安全率の円弧	92
3.4.8	中空円筒形状を有する植物のスケーリング則としての適用可能性	94
3.4.9	中空断面を有する植物における重量分布の影響	94
3.4.10	本節のまとめ	97
3.5	木本植物は先細りになるべきか、それとも中空になるべきか？	98
3.5.1	計算モデル	98
3.5.2	支配方程式の導出	100
3.5.3	固有方程式の導出	102
3.5.4	固有方程式の数値解法と最大高さ式の導出	103
3.5.5	テーパー形状と中空断面が自重座屈特性に与える影響：固定端半径一定	105
3.5.6	テーパー形状と中空断面が自重座屈特性に与える影響：体積一定	107
3.5.7	特定の自重座屈特性を実現するために要求される力学的性能	108
3.5.8	自重座屈特性に対するテーパー形状と中空断面の得失	110

3.5.9	本節のまとめ	111
3.6	初期たわみと初期傾斜を考慮した樹木の形態形成戦略	113
3.6.1	初期たわみを考慮した自重座屈に対する最大高さ	113
3.6.2	初期傾斜を考慮した自重座屈に対する最大高さの定式化	123
3.6.3	初期不整を考慮した自重座屈における固有方程式の数値解法	126
3.6.4	初期不整が自重座屈特性に与える影響	127
3.6.5	初期不整を考慮した自重座屈問題における固有値 $\xi_{c(sol)}$ の分布	130
3.6.6	初期不整を考慮した樹木における最大高さと実際の樹高との関係	134
3.6.7	本節のまとめ	136
3.7	地盤における固定の不完全性と最大高さ：根と幹のバランス	137
3.7.1	計算モデル	138
3.7.2	剛体モードにおける最大高さ式の導出	139
3.7.3	梁モードにおける自重座屈に対する最大高さ式の導出	140
3.7.4	セカント法を用いた固有方程式の数値解法	143
3.7.5	端部の回転剛性と自重座屈モード	144
3.7.6	端部の回転剛性が自重座屈特性に与える影響	145
3.7.7	端部の回転剛性と自重座屈モードの関係	147
3.7.8	自重座屈に対するスケーリング則と樹木における回転剛性 R_M の推定	148
3.7.9	本節のまとめ	151
3.8	本章のまとめ	152

参考文献	154
------	-----

第4章 水分による膨圧を活用した張力構造のモデル化 159

4.1	「植物学上」の草本植物の定義	161
4.1.1	「草本植物」とは何者か	161
4.1.2	草本植物の形態を力学的に紐解く意義	162
4.2	草本植物の膨圧による張力を活用した身体支持機構	164
4.2.1	内部水分の流出に伴うたわみの発生	164
4.2.2	中空円筒モデルにおける膨圧と軸方向張力の関係	166
4.3	膨圧による軸方向張力に起因した「幾何剛性」の発現	168
4.3.1	幾何剛性の存在と従前の植物学的研究における問題点	168
4.4	軸方向張力がたわみ抑制効果に与える影響	173
4.4.1	計算モデル	173
4.4.2	支配方程式の導出	173
4.4.3	曲げ剛性と幾何剛性の双方を含むたわみ曲線の導出	174
4.4.4	張力によるたわみ抑制効果の評価	175
4.4.5	数値解法によるたわみ抑制率 D_R とパラメータ R_s の関係の導出	177
4.4.6	剛性パラメータ R_s と膨圧 p の関係	178
4.4.7	剛性パラメータ R_s がたわみ抑制効果に与える影響	179

4.4.8	剛性パラメータ R_s とたわみ抑制率 D_R の関係	180
4.4.9	回帰分析に基づく $R_s - D_R$ 関係の導出	181
4.4.10	本節のまとめ	182
4.5	内部水分による張力がもたらす最大高さの向上効果	184
4.5.1	計算モデル	185
4.5.2	支配方程式の導出	185
4.5.3	固有方程式の導出	187
4.5.4	固有方程式の数値解法	189
4.5.5	張力パラメータ R_F と最大高さの関係	190
4.5.6	本節のまとめ	191
4.6	本章のまとめ	192
参考文献		193
第 5 章 木本植物および草本植物におけるスケーリング則の横断的洞察		196
5.1	本研究により得られたスケーリング則の総括	197
5.2	力学理論に基づく新しい植物の分類法則	198
5.2.1	幾何剛性の影響を考慮した自重座屈問題における固有値の挙動	198
5.2.2	応力状態に基づく新しい植物の分類法則	200
5.3	草本植物の測定データに基づく新しい分類則の検証	203
5.4	植物全体をつらぬくスケーリング則の洞察	205
参考文献		209
第 6 章 結論		210
6.1	本研究の総括	210
6.2	今後の展望	212
6.2.1	力学モデルの共通性を応用する研究体系の確立	212
参考文献		214
記号一覧		215
研究業績目録		217
謝辞		220

第1章 序論

人類は、複雑な事象の本質を捉えるべく、その事象を代表すると考えられる要素を抽出し、これを用いて検討が容易な概念に落とし込む「モデル化」を駆使することにより、数多くの興味深い知見を獲得してきた。その中でも、特に材料力学および構造力学は、主として人工物を対象とした力学モデルの活用により、現代では広く普及している自動車から、橋やダムなどの社会基盤構造物に至るまで、我々の生活を支える土台を築き上げてきた学問である。さらに近年では、人工物を対象として発展してきた力学理論を、適者生存の厳しい自然環境を生き抜いてきた植物へと応用し、その形態に秘められた智慧をモノづくりへと応用する「植物形態模倣工学」が注目されるまでに至っている。

しかしながら、植物に対する力学理論の応用は、単にモノづくりに活きる工学的知見をもたらすだけのものではない。理論の対象が人工物から植物へと移ることは、より複雑な系の力学的合理性を解明するために、力学理論そのものを発展させることへと繋がる。さらに、特定の種に対する狭く深い実験的アプローチがメインである従前の植物学的研究に対して、植物に広く通ずる形状的特徴を抽出した力学モデルに基づく理論的なアプローチは、「全ての植物に等しく作用する重力への合理的な抵抗機構」をはじめとして、植物が繁栄の過程で姿かたちを変えながらも大切にしてきた「叡知の真髄」に触れることを可能にする。

本研究は、植物形態に潜む構造力学的学理を広く探究し、その知見を整理・洞察することで、植物形態を支配する自然法則を解明することを目指すものである。植物学分野で蓄積されてきた知見を活用し、植物を力学モデルへと落とし込み、その形態に秘められた合理性を紐解くための力学理論を構築することで、力学的・生態学的知見の獲得と力学理論のさらなる発展を実現する。また、この理論を用いて獲得する生態学的知見の妥当性を、植物学分野で蓄積されてきた統計データにより検証する。このような学際的なアプローチは、既存の学問体系の枠組みを超えて植物学・工学分野の融合を図るものであり、新たな研究領域を開拓するための土台を築くことを可能とする。さらには、遥か昔から自然と共生してきた植物を通し、自然と共に生きる次世代的な工学の在り方さえも学ぶことができると考えられる。

本章では、厳しい自然を生き抜く植物の形態が有する智慧と、その驚くべき多様性について、いくつかの例を用いて説明する。そして、この多様性を貫いて成り立つ、植物の形に関する法則である「形状則」の存在について述べるとともに、形状則を中心として植物形態を力学的見地から広く洞察する意義について概説する。

1.1 自然を生き抜く植物の多彩な形態

自然界の植物は、いずれも一生のうちにその場を動くことなく、風や重力をはじめとする様々な外的作用に抵抗しつつ、光合成のために十分な光を獲得しなければならない。植物たちは、このような共通する目的を多彩なアプローチによって達成している。本節では、光資源を獲得するための形態形成アプローチの違いに着目し、植物形態の驚くべき多様性について述べる。

1.1.1 樹木のアプローチ：高さ方向への成長と重量の支持

樹木をはじめとする木本植物は、植物の中でもとりわけ硬く、かつ大きな体を有している。樹木から得られる木材は比強度に優れており、建築材料としても盛んに用いられるなど、工学分野にとって非常に馴染み深い植物である。近年では、木材の生産コストがコンクリートや鋼材と比較して低いことや、環境への適合性が評価され、建設材料としての利用においても木材への注目は高まっている[1]。



図-1.1.1 世界で最も背が高い樹木：ハイペリオン（レッドウッド国立公園）[2]

図-1.1.1 には、現存する植物の中で最も背が高い個体である「ハイペリオン」の写真を示した[2]。これは、アメリカのカリフォルニア州北部に位置するレッドウッド国立公園において発見されたものであり、その樹高はなんと 115.85 m を記録している。なお、ハイペリオンはあくまで個体としての名前であり、これは「セコイア」と呼ばれる種に属する針葉樹の仲間である。

セコイアは種のレベルで樹高が大きく、一般的な高さは 60 ～ 100 m であると言われており、その中で特異的に 110 m を記録する個体がしばしば現れることが報告されている。セコイアの若木は他の樹種に比べ驚異的な成長速度を示し、高さ方向に年間 1 m のペースで成長する[3]。この性質により、セコイアの周囲に生息する個体は、光を獲得するための熾烈な競争にさらされる。この競争に打ち勝つために、周辺にて生命活動を営むセ

コイア以外の針葉樹でも、樹高がおよそ 100 m にまで達するものがいくつか存在することが観測されている[3]。

また、その体は高さ方向だけでなく、径方向にも極めて大きい。一般的なセコイアにおける胸高直径¹の範囲は、およそ 3.0 m ～ 4.6 m であると言われている（なお、日本における針葉樹の代表例ともいえる「スギ」では、およそ 0.46 m ～ 1.1 m 程度[4]）。これは、光資源を獲得するために高く成長する上で、成長に伴う重量の増加に対応すべく、自身の剛性を向上させるための必要不可欠な作用の結果であると推測される。なお、セコイアに限らず、このような径方向に肥大する成長と、その材質のなす硬さは、木本植物に広くみられる特徴である。

ここではセコイアを例に挙げて述べているが、生育に必要な光合成量が比較的多い「陽樹」と呼ばれる樹木たちは、いずれも多くを光を獲得するために「高く大きく成長すること」が求められる。これを踏まえて樹木の力学的・形状的特徴を観察してみると、成長に伴って増大する体への力学的負荷や、風をはじめとする外的な作用に対して、径方向への成長や材質そのものの硬化による「曲げ剛性の向上」によって対応しようと試みていることがうかがえる。

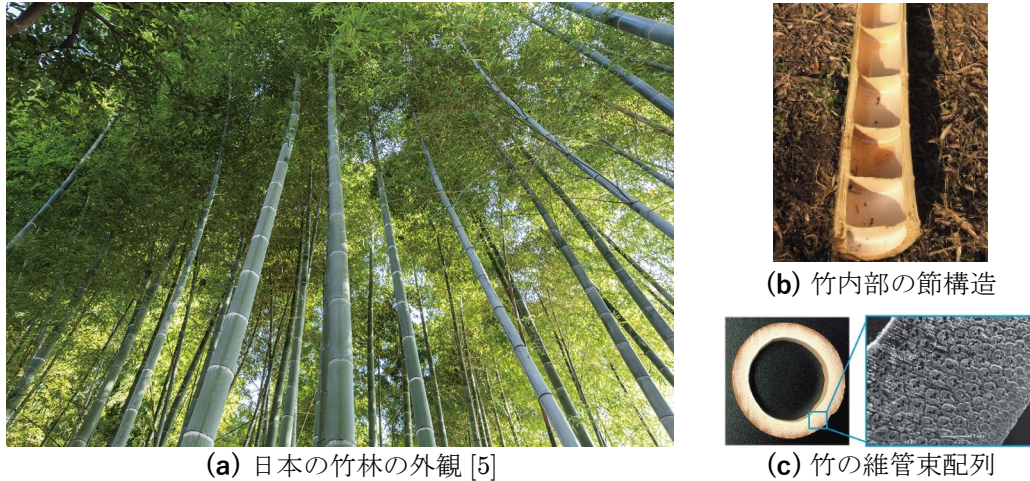
このシンプルな戦略の有効性は、樹木における寿命の長さが裏付けていると考えられる。ほとんどの樹木は、植物の中でも寿命が極めて長い傾向にあり、地上部を長期間に渡って残存させることができる。例えば先に取り挙げたセコイアの場合では、一般的な個体の寿命が 1200 ～ 2000 年以上であると報告されている[3]。セコイアに限らず、ほとんどの樹木は高く重たい体（幹・枝葉）を有していながらも、その場を動くことなく、長年に渡り生命活動を維持し続けることができる植物である。この事実は、恒久的に作用する重力だけでなく、地震や風をはじめとする種々の変動的な外的作用に対する合理的な抵抗機構が、その形態に備わっていることを示唆するものである。

1.1.2 竹のアプローチ：中空断面による軽量化と節による補剛効果

前項で取り挙げた樹木は、「光を得る」という目的を達成するにあたり、まさしく王道とも言える「高く大きく成長する」というアプローチによって生命活動を営んでいる。その上で増大する力学的負荷に耐えるべく、強くしなやかな体を形成している樹木であるが、この「太く硬くなる」とは異なるアプローチにより、樹木と同等の高さまで成長している植物が存在する。

その例として、樹木に比べて細い体を有していながらも、数 10 m の高さまで到達する「竹」の写真を図-1.1.2 に示した。先にも述べたように、樹木の場合であれば、その材質の硬さと、径方向への成長によって太さを増大させていくことで、「高さ」と力学的な安定性を両立させる。これに対して、竹の場合は材質的な硬さを有しているという点で樹木と同様であるが、伸長成長（高さ方向への成長）の終了後に径が明瞭に太くなる「肥大成長」は見られず、そのため年輪も存在しない。すなわち、硬さの観点から見ると、竹は樹木をはじめとする木本植物に匹敵するものの、太くならないという観点では草をはじめ

¹ 人間の一般的な胸の高さの位置（地表からおよそ 1.2 m 程度）において計測した木本植物の直径のこと。



(a) 日本の竹林の外観 [5]

(b) 竹内部の節構造

(c) 竹の維管束配列

図-1.1.2 竹の外観と内部のようす

とする草本植物と同様である．このような植物の存在により，植物を木本と草本に二分する分類手法は，学術的に正確なものでないとされる場合が多い[6]．

図-1.1.2 (b)および(c)には，近畿大学農学部井上昭夫教授が撮影した，竹内部の節構造と竹の維管束配列に関する写真を示す．先に述べたように，竹は径方向への肥大成長は見られないが，その代わりに図-1.1.2 (b)に示すような中空断面と節を組み合わせた構造を採用している．断面が密実ではない中空断面の選択により，体に生じる力学的な負荷そのものを低減させることによって，径方向の成長がなくとも，材質が有する硬さで十分に身体を支えることを可能にしているものと考えられる．しかしながら，中空円筒では曲げに起因して生じる「断面のつぶれ」によって断面二次モーメントが局所的に低下し，最終的に筒が折れ曲がる破壊形態を示す「局部座屈」の発生リスクを増大させてしまう[7]．

このような問題に対応するのが，「断面内に離散的に配置された節」である．節は断面のつぶれによる局部座屈の発生を抑制する効果を有しており，これは節の間隔と筒の厚さ・半径によって支配される[8]．しかしながら，節をただ狭いスパンで多量に挿入すればよいというわけではない．これは，結果として重量の増加を招くこととなり，軽量化のメリットを低下させてしまうためである．

以上のように，節の挿入と重量の低減はトレードオフの関係にある．このような「剛性と軽さの両立」は，ほとんどの植物にとって避けては通れない問題である．そのため，高さを求めて成長する植物の形態には，「最大剛性を最小重量で達成するための巧みな智慧」が秘められていると考えられる．中空円筒構造であり断面内に節を有する竹の場合は，断面のつぶれが懸念される個所に集中的に節を配置し，つぶれの発生リスクが低いところでは節の量を節約することが効果的と言える．これについて，実際の竹の節間隔は，地面から先端（梢端）にかけて「密・疎・密」となる不均一な分布形態を示している．この形態に着目した先行研究[9,10]では，竹の異方性を考慮した節による補剛効果を定式化し，外径や肉厚といった形状に関する測定データと照らし合わせた結果，外力により生じる曲げモーメントに合わせて，実に巧妙に節が配置されていることを立証している．

さらに，図-1.1.2 (c)に示した竹の断面内に離散的に配置された維管束は，柔組織部に比べて極めて高い剛性を有しており，その弾性係数のオーダーは，一般的な鋼やコンクリートに匹敵する[11]．すなわち，竹の維管束は，いわば複合材料における「強化繊維」の

役割を果たすものである。なかでも特筆すべきは、維管束が半径方向に傾斜的に配置されており、内側から外側に向かって増加していくように分布している点である。この傾斜配置の妙については、植物の優れた智恵を紐解く「植物形態模倣工学」の観点から研究されており、実際の竹の維管束分布が純曲げに対して最適化されたものであることが、理論・実測の両面から証明されている[12]。

以上のように、竹は高さ方向に伸長することによる負荷そのものを中空化によって抑え、これに伴う局部座屈のリスクを節の挿入により補うとともに、強化繊維としての維管束を巧みに配置することによって、自身の身体を支持することを可能としている植物である。このように、力学の視点に立つことにより、植物の形態が有する「人智を越えた賢さ」の一端を垣間見ることができる。

1.1.3 草のアプローチ：耐陰性の獲得や内部水分の活用



(a) 森林の底部に繁殖したコケ植物[13]



(b) セイタカアワダチソウ[14]

図-1.1.3 多様な非木本種の形態

自然豊かな森林を形成するのは、樹木や竹のような背の高い植物だけではない。このような植物「以外」の代表例として、図-1.1.3 (a)にはコケの写真を示した。コケは「丈夫な体で高さ方向に伸長する」という樹木（陽樹）や竹に見られるアプローチとは異なる方法により、生命活動を営む植物の一種である。

そのアプローチとは「少ない光量でも生命活動を維持できる体をつくる」というものである[15]。林分内に植生する陽樹は、枝葉がなす樹冠によって、地面へと行き届く光を大きく遮り、森林底部の照度を著しく低下させる。このような環境下でも生命活動を営むことができるよう、より少ない光でも光合成を行えるように体を進化させてきた種の代表例こそが「コケ」である。コケは補強繊維の役割を果たす維管束を持たない「非維管束植物²⁾」の一種であり、樹木や竹のように材質的な硬さも持たないため、木本類のような曲げ剛性の向上は見込めない。すなわち、そもそも光資源の獲得を目指して高さ方向に大きく成長することが、力学的に極めて困難な植物である。

このようなコケが生命活動を営むために獲得したのが、「耐陰性」と呼ばれる、少ない光量で光合成を行うことができる性質である[16]。これはコケと同様に孢子で繁殖するシダ類や、低木などの森林の低い位置で繁栄する植物の多くが備えている性質である。しかし、すべての草本植物（非木本種）が耐陰性を有しているわけではなく、木本種に比べて

²⁾ 維管束を持たない植物のことであり、コケの他には藻類などが含まれる。これらは水分を体の表面から吸収するため、水や養分を地中から輸送する維管束が必要なく、このような形態になったと考えられる。

材質的な硬さを持たないながらも、樹木や竹と同様に高さを求めて伸長しようとするものも多く存在する。

その例として、**図-1.1.3 (b)**に「セイタカアワダチソウ」の写真を示した。この植物は、高さがおよそ 1.0 ～ 2.5 m まで達するものであり、草本植物としては極めて大きく成長する種の一つである。セイタカアワダチソウの形態学的な特徴は、水平方向に長い地下茎を有していることである。そのため、地上に露出した一本が一つの個体というわけではなく、冬が来ると地上茎は枯死するものの、地下茎によって生命活動を維持し続けることが可能である。このメカニズムで越冬するセイタカアワダチソウは、毎年新たに地上茎を形成する「多年草」に分類される草本植物の一種である。そのほか、このような特性を持つ身近な植物には、竹やフキ、レンコンなどが挙げられる。

また、セイタカアワダチソウをはじめとする、花卉をつける顕花性の草本植物が有する力学的な特徴は、茎の表皮剛性に比べ柔組織剛性が小さく（多くの場合で、両者の弾性係数比は $1/10 \sim 1/100$ 程度）、かつ表皮が薄いことである[17]。そのため、実際には内部に柔組織が存在するものの、力学的な負荷の大部分を表皮が受け持つこととなるため、力学モデルとしては中空円筒構造としてみなすことができると考えられる。また、高さを必要とする（耐陰性が弱い）草本植物は、強化繊維の役割を果たす維管束を有している場合が多いが、材質としての硬さは木本植物に比べ著しく低い。さらに、径方向への肥大成長が生じないため、成長過程において断面二次モーメントが明瞭に大きくなることはない。そのため、草本植物の曲げ剛性は木本に比べ著しく小さいものと考えられるが、実際の草本植物はある程度の高さまで体を伸長させ、かつ安定して自身の身体を支えることに成功している。

以上のことは、高さを求めて成長する細く柔らかい草本植物の形態には、木本植物の「曲げ剛性を向上させる」というアプローチとは異なる身体支持の仕組みが秘められていることを示唆するものである。しかしながら、この身体支持メカニズムは完全には明らかにされておらず、現段階では「茎の中空部に貯蔵した内部の水分がもたらす作用により、細胞壁の剛性が高まる」ことで、細く柔らかい材質ながらも巧みに体を支えている、という説が有力とされている[18]。

1.2 植物の形態に潜む「形の法則」

前節で述べたように、自然界の植物が示す形態は実に多種多様である。しかしながら、この植物形態の多様性を貫いて普遍的に成り立つ「形状則」が存在する。本節では、その詳細を説明するとともに、植物の形態を力学的見地から洞察する意義について述べる。

1.2.1 樹木における「高さ－直径の 2/3 乗の法則」



図-1.2.1 樹木形態の多様性（すべて札幌市内で筆者が撮影）

図-1.2.1 には、筆者が撮影した 4 本の樹木の写真を示す。これらは全て、札幌市内で春～夏ごろ（5 ～ 7 月）にかけて撮影されたものである。そして、これらの写真より、枝葉の付き方や幹の形状をはじめとして、その形態からそれぞれの個性が見受けられる。

左の二枚の写真は、北海道大学構内で撮影された樹木の写真である。一番左の個体は、根元から先端部まで主幹が鉛直方向にまっすぐ伸長した状態にある。これに対して、左から二番目に示した個体は、主幹が大きく右方向に屈曲しながら伸長した形状を示している。また、右に示した二枚の写真は札幌市の大通公園で撮影されたものであり、ともに鉛直方向にまっすぐ幹が伸長しているものの、枝葉の付き方が高さ方向に一定か・直線的かという点で異なっている。このように、樹木の個体ごとの形態は、同じ地域・同じ時期でも大きく異なることが分かる。しかしながら、およそ無限通りとも言える形態を示す樹木において、「共通する形の法則（スケーリング則）」が存在することが知られている。

それは「樹木の高さは胸高直径の 2/3 乗に比例する」というものである。この法則は、1881 年の Greenhill による「力学理論に基づく重い柱の自重座屈特性」に関する研究[19]において、自重座屈理論の応用可能性として提唱された仮説に由来する。一般的には、座屈問題といえば Euler の座屈問題[20]を示す場合が多いが、Greenhill の自重座屈問題と Euler の座屈問題は、座屈を引き起こす要因となる作用が異なるものである。

図-1.2.2 に、Euler による一般的な座屈問題と、Greenhill による自重座屈問題の概念図をそれぞれ示した。まず、図-1.2.2 (a)に示した Euler 座屈は、断面に対して一方向に細長い部材の先端に軸方向圧縮力 P を载荷させた場合について、荷重の大きさが特定の値を超えると、部材が突如として大きくたわみだす現象である。この座屈が発生する瞬間の荷重を座屈荷重 P_c と呼び、その大きさは境界条件に強く依存する。なお、樹木をはじめとする植物に見られるような片持ちの構造では、座屈荷重 P_c は次式で与えられる。

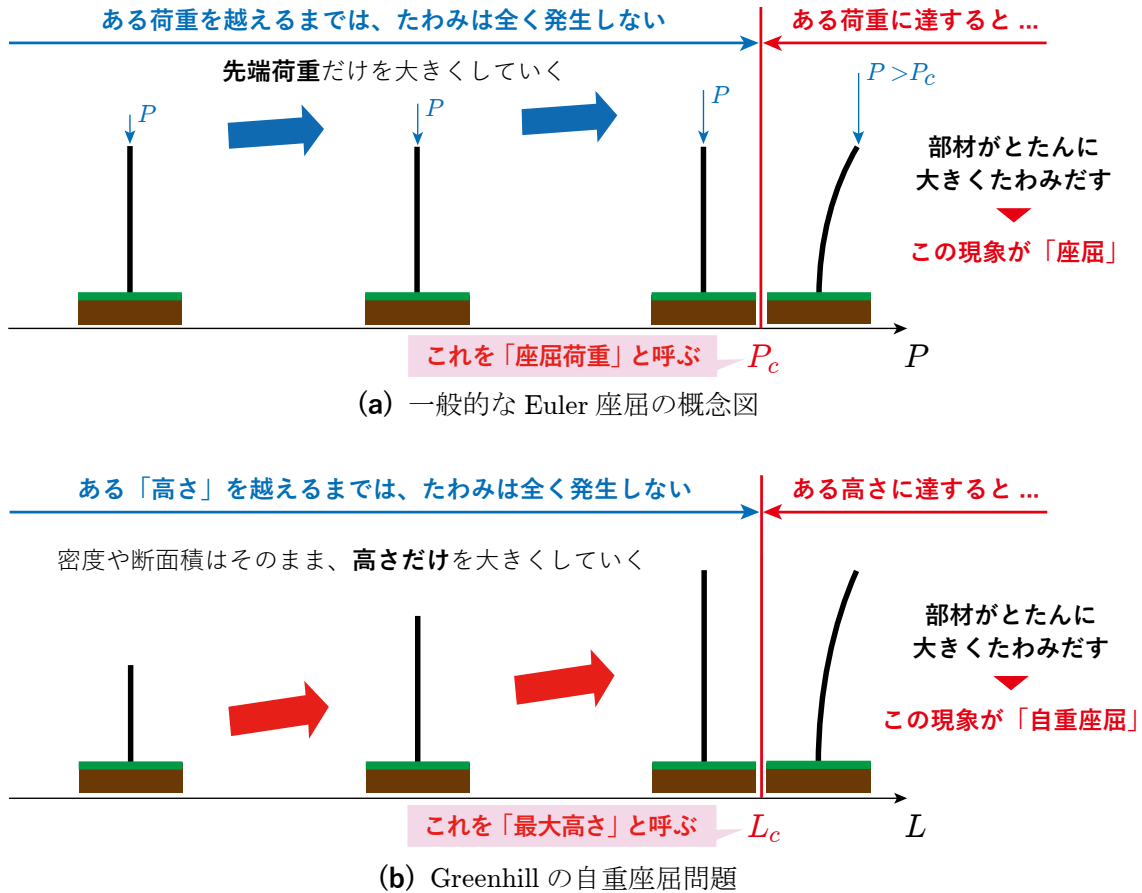


図-1.2.2 一般的な座屈と自重座屈との違い

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \quad (1.2.1)$$

式(1.2.1)³の E は部材の弾性係数、 I は断面二次モーメント、 L は部材の長さである。この座屈荷重 P_c は、部材自身が有する圧縮耐力よりも小さな力である場合がほとんどである。そのため、圧縮力を受ける細長い部材、すなわち柱の設計では、Euler 座屈問題に関する検討が必要不可欠となる。

また、式(1.2.1)を見ると分かるように、一般的な Euler 座屈問題には、柱自体の重さは考慮されていない。これは、Euler 座屈理論に基づく座屈荷重の式は、部材そのものの重さよりも、端部に載荷された集中荷重が著しく大きい状態を想定して定式化されているためである。

これに対して、Greenhill は「自重が無視できない座屈問題」の定式化を行った[8]。Greenhill は、図-1.2.2 (b)に示すように、自重（重力）のみが作用する柱について、その断面や密度といった材料特性を変化させることなく、高さだけをひたすら大きくしていくことを考えた。このとき、ある一定の高さまではほとんど変形が生じないが（実際には、極めて微小な軸方向の縮み変形のみが生じる）、ある高さに達した途端、大きくたわみだすと予想される。これが「自重座屈」と呼ばれる現象であり、このときの高さを「最

³ 本研究では式番号を (i, j, k) と表記する。これは、第 i 章の第 j 節における、 k 番目の式であることを示す。

大高さ」と呼ぶ。Greenhill は、半径 r の高さ方向に一定な円形断面を有する片持ち梁において、自重座屈に対する最大高さ L_c が次式で与えられることを示した。

$$L_c = \left(C \frac{E}{\gamma} \right)^{1/3} r^{2/3} \quad (1.2.2)$$

ここに、 E は弾性係数、 γ は単位体積重量、 r は半径、 C は定数（ $C \approx 1.959$ ）である。この式には、Euler の座屈理論の式とは異なり、先端荷重が含まれておらず、自重の影響として「単位体積重量 γ 」が含まれている。また、式(1.2.2)は、自重座屈に対する最大高さ L_c が半径 r の $2/3$ 乗に比例することを「理論的に」示している。

また、Greenhill の研究は工学分野における自重座屈研究の起点となり。これまで Greenhill の成果をもとに、様々な境界条件における自重座屈問題の定式化[21]や、自重と集中荷重の双方を考慮した座屈問題における級数解の導出[22]など、多様な力学モデルにおける議論が今日まで活発に行われてきた[23-28]。さらに近年では、端部の集中荷重のみを考慮する一般的な Euler 座屈問題に対して、自重を無視できない長尺柱をはじめとする「重い柱」の工学的需要が増加しており、柱の自重を考慮した座屈問題に関する研究が注目を集めている[29,30]。

そして、重い柱の自重座屈特性に関する研究は、前述のような工学的意義に比重を置いた研究だけでなく、「実世界の植物における力学的挙動の評価やバイオマス量の予測」といった自然科学的な観点の上でも発展してきた。Greenhill は、細長い形状で圧縮力を受ける重い柱と共通であり、等価な力学モデルとして帰着可能と考えられる樹木について、自身が導出した式から「樹木の高さは直径の $2/3$ 乗に比例するのではないか」という仮説を唱えた。これを受けて、McMahon は実際の樹木 576 本における形状・機械的性質の測定値を用いて、Greenhill が提唱したスケーリング則の樹木に対する適合性を検証した。すると驚くべきことに、実に多様な形態を有する樹木に、Greenhill の形状則が適合することが立証されたのである[31,32]。これを受けて、Greenhill の研究は、樹木の成長戦略に関する生態学的研究をはじめとして、自然科学分野においても極めて広く応用されてきた[33-37]。

1.2.2 植物形態に潜む形状則の力学的意義

前項では、極めて多様な形態をもつ樹木を貫く「形状則」が存在することを述べた。このような「共通する形の法則」が存在する理由には、一つの共通した「作用」が深く関係していると考えられる。

この作用とは、すなわち「重力」である。地球上のほぼすべての樹木（陽樹）は、光合成のために高く大きく成長するという共通の目的を、重力という共通の作用のもとで達成しようと試みる。これらの共通目的・作用により、その形態を表面的には様々に変えながらも、根底の部分で一つの形状則に従っているのではないかと予想される。重力に起因する自重座屈現象から導かれた Greenhill の法則が樹木に広くあてはまるという事実は、この推測の妥当性を裏付けるものである。

以上のことは、「主として細長い形状で曲げや軸圧縮力などの力学的な作用に抵抗し、梁や柱と等価な力学モデルとして帰着できる植物」に対して、モデル化の概念を応用して数多の知見を獲得してきた工学分野の叡知を応用することにより、植物がその繁栄の過程で姿かたちを変えながらも貫いてきた「植物の根底にある形態形成の法則」を紐解くことができる可能性を示唆するものである。

そして、植物の形態形成に関する法則には、あらゆる構造物や部材に恒久的に作用する「重力」に対する合理的な抵抗の仕組みをはじめとして、植物が進化の過程で蓄積してきた賢い仕組みが秘められていると予想される。そのため、植物形態に潜む構造力学的学理を洞察することにより、前述のような工学的に有用な知見が獲得できると考えられる。これは、単にモノづくりに活用できる知見をもたらすだけに留まらず、Greenhill の研究が起点となって自重座屈研究が発展してきたように、シンプルな幾何学的形状を有する人工物を対象に発展してきた力学理論について、これをより複雑な形状をもつ植物に応用することにより、力学理論そのものにさらなる発展をもたらすことが予想される。

1.2.3 草本植物における「 $2/3$ 乗の法則」の適用性

しかしながら、Greenhill の形状則には一つの大きな問題がある。それは、この法則の適合性が確認されているのは、樹木をはじめとする木本植物のみであり、非木本種の植物をはじめとする「草本植物」には適合しない、というものである。

植物学分野の研究者である Niklas は、1973 年に発表された McMahon の検証結果を踏まえ、これまでの研究において調査対象であった木本植物に加え、一般的には草と呼ばれる「草本植物」も研究対象に加え、木本植物 420 本と草本植物 190 本の直径および高さの実測データを用いて、両者の関係を統計的に解析した[38]。そして、Greenhill の法則はあくまで木本植物にのみ適合するものであり、木本に比べ径が小さく、かつ柔らかな草本植物には全く当てはまらないことを明らかにした。

これにより、以降の植物学的研究では、植物の高さが自重によって支配されるという「自重座屈による高さ制限」に対立する仮説がいくつか提示され、今日まで活発な議論が行われてきた。その代表例としては、水の吸い上げが可能な限界の高さという観点や、伸長成長による水分輸送経路の増加に伴う光合成の速度低下を樹高制限の要因とする「水理学的制限[39]」、樹齢の増加に伴う細胞組織の老化により樹高が制限されるとする「生理学的制限[40]」が挙げられる。これらの研究については、第2章においてその詳細を述べる。

以上のように、植物の高さ制限の要因に関する研究は、実に多様な観点から行われてきた。しかしながら、「Greenhill の式は草本植物に適合しない」という理由をもって、植物の高さが自重座屈問題のような力学現象で規定されるという仮説を棄却することは、全く妥当なものではないと予想される。その根拠は、草本植物と木本植物の体を支持する仕組みが、そもそも大きく異なっていると考えられるためである。

1.1 節においても述べたように、硬く重たい木本植物と軽く柔らかい草本植物の力学特性は、まさしく対照的なものである。このことは、両者の身体を支える仕組みに差異をもたらすことが予想される。しかしながら、Greenhill の式は、あくまで部材の曲げ剛性によって身体を支える構造、すなわち「曲げ剛性が卓越した状態の構造」に対応する最大高

さ式である。そのため、曲げ剛性で体を支持していると考えられる木本植物には有効であるものの、木本植物とは異なるアプローチで体を支えていると予想される草本植物に対して有効でないことは、力学的見地からみると極めて自然な結果であると言える。しかしながら、既往の研究では Greenhill 式と草本植物の高さ－直径関係を比較するなど、木本と草本における身体支持メカニズムの差異は完全に無視されている[38]。

以上のことは、高さ－直径間における $2/3$ 乗の形状則が適合しないために棄却されてきた「自重座屈による植物の高さ制限の仮説」について、その結論を再考する必要性を指摘するものである。そしてこれは、ある一つの要因によって木本・草本を含めた全植物の形状則が支配されているわけではなく、体を支配する仕組みと密接に関わる何らかの規準によって、形状則があるところから切り替わる可能性を示唆するものである。これを力学的観点から明らかにすることは、体を支える仕組みという観点から、定量的かつ明快に植物を「木」あるいは「草」として分類できる全く新たな分類法則の発見をもたらすのではないかと考えられる。

1.3 本研究の目的

本論文は、力学的見地から植物形態に潜む構造力学的学理を広く探究し、その知見を整理・洞察することで、植物形態を支配する自然法則を通して「植物が多様な形態の奥底で守り続けてきた叡智」を明らかにすることを目的としたものである。これにより、重力に対する効率的な抵抗機構をはじめとする工学的知見を獲得するとともに、植物学分野において蓄積されてきた知見と工学的知見を組み合わせることにより、従来の単一的な研究体系では解明できない生態学的知見の獲得を目指す。

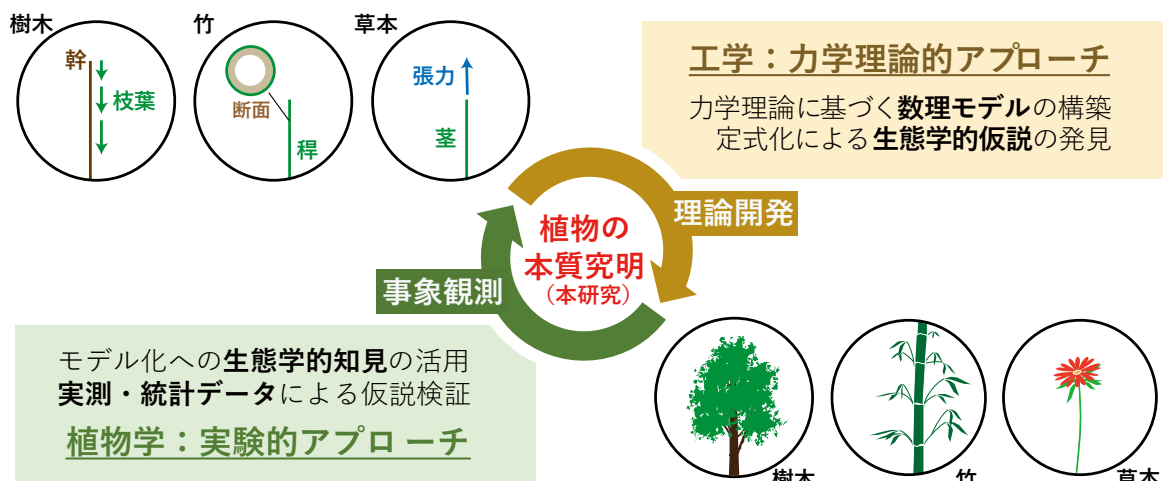


図-1.3.1 本研究の概念図

図-1.3.1 には、本研究の概念図を示す。本研究では、植物学分野における「事象の観察」に基づく知見を用いて、植物の力学挙動を支配していると予想される因子を抽出し、これを反映させた力学モデルを構築する。そして、このモデルに対する力学理論を開発することにより、植物の形態に潜む力学的合理性をはじめとする工学的知見と、形状則をはじめとする生態学的知見を獲得する。さらに、これらの知見の妥当性や有効性を、植物学分野における膨大なデータをもとに検証する。この学際的なアプローチは、従来の独立した研究体系では明らかにできない知見の獲得を可能とし、一見すると全く異なる植物学と工学の分野を結びつける、新たな研究体系の礎を築くことに繋がると考えられる。

1.3.1 曲げ剛性：硬く重たい木本植物の最大高さ

前述した研究目的を達成するために、本研究では植物が全て等しく重力を受けることを踏まえ、重力に対する抵抗メカニズムの観点から、「硬く重たい木本植物」と「細く柔らかい草本植物」の2つに分けて研究を行う。そして、それぞれにおける力学的合理性や形状則を解明し、これ整理・結合することによって、植物形態を支配する自然法則の解明を試みる。

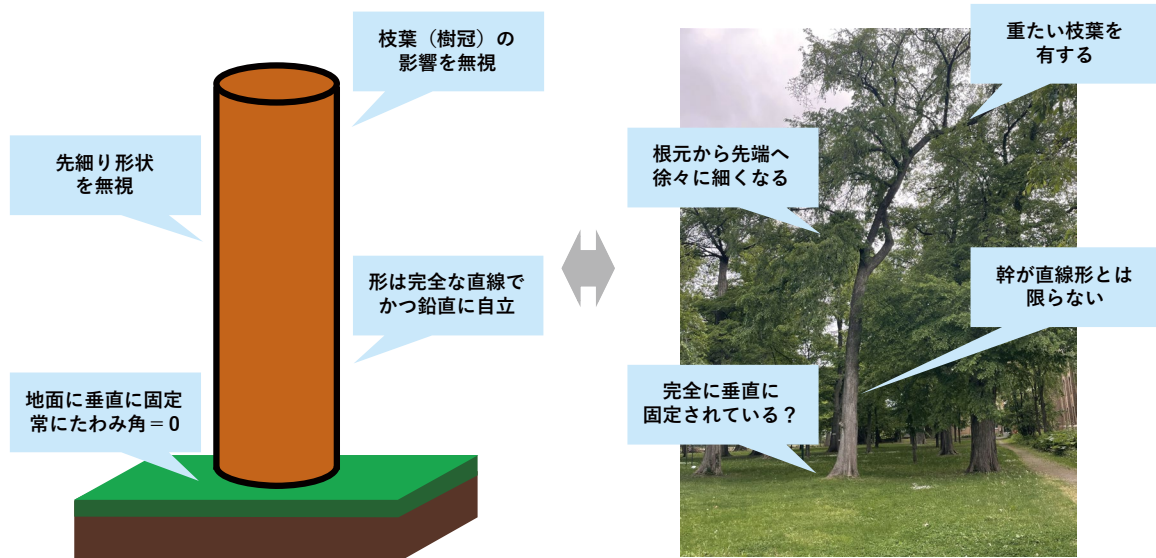


図-1.3.2 Greenhill の計算モデルと現実の樹木の比較

まず、1.1 節でも述べたように、木本植物はその硬い材質と長期的な肥大成長により、高い曲げ剛性を実現することが可能である。そのため、木本植物は主として曲げ剛性により身体を支持していると考えられるが、肥大成長および木化による剛性の増強は、自重座屈特性を悪化させる「重量の増加」を招いてしまう作用である。これに対して、木本植物はその長い歳月において様々な外的作用を受けつつも、その多くが安定して高く大きく成長することを実現している。このことは、曲げ剛性の向上と重量の増加のトレードオフ関係を踏まえ、木本植物が自身の形態を巧妙に決定していることを示唆するものである。

しかしながら、この形態の合理性を解明する上で、自重座屈研究の先駆者である Greenhill が開発した計算モデルは、全く十分なものとは言えない。それは、図-1.3.2 に示すように、Greenhill のモデルは、樹木の形態を限りなく単純化し、自重座屈特性に大きな影響を与えうる形態的特性をほとんど無視しているためである。

例えば、ほぼ全ての樹木において、根元から先端にかけて徐々に径が細くなっていく「テーパ形状（先細り）」と呼ばれる形状的な特徴が見られる。これは、負荷の小さな先端側で断面を小さくすることで軽量化を図り、負荷の大きな地面の近傍で曲げ剛性を確保するものである。これは、必要なところに必要なだけ材料を配置する、竹の節構造と同様に優れた形態の一つであることが予想される。

さらに、樹木の枝葉は竹や草本類に比べて極めて重いため、その重量および配分の形態は、自重座屈特性に大きな影響を与えることが予想される。しかし、樹高成長によって光を十分に獲得できる高さの実現が優先されるであろうことから、光を取り入れる部位としての役割を有する枝葉の配分形態は、高さ方向への成長を阻害しないように巧妙に決定されているものと考えられる。また、竹に見られるような「断面の中中空化」は、使用材量が一定であれば、中実な断面を採用するよりも大きな曲げ剛性を実現することが可能である。そのため、このアプローチもまた、最大高さの向上に有効であると予想される。

また、Greenhill の式から予測される最大高さは実際の樹木の高さとは異なり、実際の樹木が示す高さの 4 倍程度の推定値を示すことが報告されている[41]。これは、しばしば自重座屈の発生に対する「安全率」として設けられたものと捉えられてきたが、中にはこ

れを理由として、自重座屈による樹高制約の仮説を棄却するものも存在する[37]。しかしながら、この判断もまた力学的には妥当でないと考えられ、それは Greenhill の式が種々の点で理想化されているためである。

例えば、Greenhill の計算モデルは、自重座屈特性を悪化させる影響をもつ初期たわみ・初期傾斜などの「初期不整」や、地盤－根系の相互作用に起因する固定力の不完全性が考慮されていない。これらの要素は、安全率の問題と深く関わっていると予想される。

以上を踏まえ、本研究では「自重座屈特性を向上させると考えられる、テーパー形状をはじめとする形態的特徴」と、「自重座屈特性の低下を招く恐れがある、枝葉重量や形の歪みである初期不整、端部における固定力の不完全性」を踏まえた自重座屈理論を開発し、自重座屈問題に対する安定性を示す最大高さを定式化により求め、得られた知見を植物学分野における観察の結果を併せて洞察することで、その形態に秘められた力学的合理性の解明を試みる。さらに、その結果から得られる最大高さ式より、これらのモデルにおいても高さ－直径間の $2/3$ 乗則が普遍的に成り立つか否かを明らかにすることで、 $2/3$ 乗則が多様な形態を有する樹木を貫いて成立する理由を理論的に解明する。

1.3.2 幾何剛性：水分による膨圧を活用した張力構造

前項で詳細を述べた木本植物とは対照的に、草本植物は材質そのものが有する弾性係数は極めて小さく、径も細いものが主であり、かつほぼ全てが薄肉の中空円筒構造を有している。これらの特徴は、その曲げ剛性が木本植物に比べて極めて小さいことを十分に裏付けるものである。

このような草本植物が自身の身体を支持できる理由には、内部水分がもたらす「膨圧」が大きく関係していると推測される[42-46]。木本・草本植物を問わず、植物では細胞内部からの水分の流出量を流入量が上回るとき、細胞内外の圧力を平衡させるために膨圧が生じる。しかし、例えば茎や枝の切断や乾燥に伴う蒸散によって水分の流出が始まると、膨圧による緊張力が失われ、草本の場合は大きなたわみが生じる。これは、単に植物そのものが有する曲げ剛性が乾燥に伴う断面収縮により低下しているだけでなく、膨圧による張力がもたらしていた「幾何剛性」の消失が起因していると考えられる。

幾何剛性とはすなわち、面内方向の荷重が面外方向の剛性に与える影響である[47-51]。これは身近な現象からも観察され、例えば楽器において、弦や皮をより強く張ることにより、発される音程（ピッチ）が高くなる現象などが挙げられる[49-51]。そして植物では、膨圧によって発生する軸方向の張力が幾何剛性を発現させ、細く柔らかいといった特徴を有しながらも、自身の茎や葉を支えることを可能にしていると考えられる。

しかし、Greenhill が導出したスケーリング則は、このような幾何剛性の影響を考慮したものではなく、材料そのものが剛であるという仮定に基づいて導出されたものである。さらに、それを用いたスケーリング則に関する森林科学・植物学的な研究では、前述の幾何剛性が無視されている問題についてまったく触れておらず、Greenhill が導出したスケーリング則をそのまま適用し、力学的制約が妥当でないものとして結論付けている[52-54]。

以上を踏まえ、従前の植物学におけるコミュニティで混同されている「曲げ剛性」と「幾何剛性」の影響について、本研究では力学理論に基づき両者の違いを明確化する。曲げ剛性のみが考慮された力学理論を一般化し、内部水分に起因する幾何剛性の影響を取

り入れた力学理論を開発することで、水分による膨圧を巧みに活用した張力構造の力学的合理性に関する知見や、力学的アプローチによる植物の膨圧および弾性係数の測定手法の開発をはじめとする、植物形態学の分野にも応用可能な知見を獲得する。さらに、両者の剛性が自重座屈特性に与える効果を力学理論の立場から明らかにすることで、植物に広く適用可能な最大高さ式の導出を試みる。

1.4 本論文の構成

本論文は、以下の6章によって構成される。

第1章「序論」では、本研究の背景および目的を示す。厳しい自然を生き抜く植物の形態は驚くほどに賢く、そして驚くほどに多様であるが、種を貫いて成り立つ形状則が存在する。このような形状則をはじめとして、植物の形態を力学的見地から広く洞察する意義について概説する。

第2章「Greenhill による重い柱における自重座屈特性の定式化」では、本研究の着想の原点である、樹木の高さが直径の $2/3$ 乗に比例することを理論的に示した Greenhill の研究を中心に、植物の形状則に関する広範な先行研究について説明する。また、Greenhill が導出した自重座屈に対する最大高さ式は、その導出過程で導入された解析仮定により、木本植物の形態に潜む多様な力学的合理性を説明することはできない。その理由について、Greenhill の式における詳細な導出過程を示すことにより、この問題を定量的に説明する。さらに、Greenhill の式の適用限界、すなわち「草本植物には $2/3$ 乗則が適合しない」という問題について説明するとともに、既往の植物学的研究において混同されている「材質そのものや形状がなす固有の硬さ」と「内部水分による疑似的な硬さ」を整理することの必要性和、木本植物と草本植物の特性から推測される身体支持機構の違いに着目する意義について述べる。

第3章「重く硬い木本植物の最大高さ」では、植物学における木本植物の定義を踏まえ、その形態に秘められていると推測される「重量と剛性の巧妙な配分」に着目し、木本植物の形態に潜む力学的合理性を解明する。Greenhill の単純化された計算モデルにおいては無視されている、先端に向かって径を細くしていくテーパー形状や、重たい枝葉の重量分布、竹に見られる断面の中空化を取り入れた力学モデルを構築し、これに対応する自重座屈理論を新たに開発する。そして、それぞれから得られる生態学的知見を組み合わせることで、「植物はテーパー形状と中空断面のどちらを採用すべきか」という植物における大きな命題について、最大高さと生存戦略の観点から考察を行う。また、Greenhill の式から得られる理論上の最大高さは、実際の高さの4倍であることが知られている。これについて、初期たわみや初期傾斜をはじめとする初期不整や、地盤-根系の相互作用に起因する固定力の不完全性を考慮した最大高さの定式化を行い、実際の樹木の高さが実に巧妙に決定されていることを示す。

第4章「水分による膨圧を活用した張力構造のモデル化」では、草本植物の形態からその重要性が示唆される「内部水分がもたらす幾何剛性」に着目する。草本植物では、水分の有無によって力学的挙動が大きく異なることが知られている。これは、内部の水分がもたらす膨圧に起因して軸方向張力が生じ、曲げ剛性とは本質的に異なる「幾何剛性」によって身体を支えていることを裏付けるとともに、木本・草本を問わず植物に広く適用可能な力学理論の開発には、曲げ剛性に加えて内部水分がもたらす幾何剛性の考慮が重要であることを示唆するものである。本章では、曲げ剛性のみを考慮した力学理論を幾何剛性も含めて拡張し、第3章の理論をより一般化させることで、植物の水分に起因する幾何剛性がたわみの抑制や最大高さに与える影響を解明する。

第5章「木本・草本植物におけるスケーリング則の横断的洞察」では、ここまでに得られた形状則の総括を行う。木本植物において $2/3$ 乗則が普遍的に成立するものであることを示すとともに、草本植物が自重座屈の発生そのものを巧みに回避している可能性について指摘する。そして、この仮説を植物学分野における測定データを用いて検証し、草本植物が自重座屈の発生を回避できる形態を選択していることを説明する。また、この「自重座屈の回避」という力学的観点が、木本植物と草本植物を明瞭に分ける新たな分類の基準として応用できることを示す。

第6章「結論」では、本論文の総括を行うとともに、今後の展望および課題について述べる。

参考文献

- [1] Giovannna, C., ed., *Wood in Civil Engineering*, IntechOpen, London (2017).
- [2] Weeden, M., “The 9 oldest, tallest, and biggest trees in the world”, OneTreePlanted, 2023-08-31, <https://onetreeplanted.org/blogs/stories/oldest-tallest-biggest-trees> (参照 2023-11-14).
- [3] Christopher, J. E., “Sequoia sempervirens”, The Gymnosperm Database, 2023-11-05, <https://www.conifers.org/index.php> (参照 2023-11-14).
- [4] 竹内郁雄, スギ高齢人工林における胸高直径成長と林分材積成長, 日本森林学会誌, **85**, 394-401 (2005).
- [5] “竹林の商用利用可フリー写真素材 6560”, フリー写真素材 フォトック, https://www.photock.jp/detail/other_plant/6560/ (参照 2023-12-13).
- [6] 黒田宏之, 草にはなく木にあるもの ―樹幹とバイオサイエンスの戦略―, 木材研究・資料 (京都大学木材研究所), **23**, 1-13 (1987).
- [7] Brazier, L. G., On the flexure of thin cylindrical shells and other “thin” sections, *Proc. R. Soc.*, **116**, 104-114 (1927).
- [8] Calladine, C. R., *Theory of Shell Structures*, Cambridge University Press, Cambridge (2010).
- [9] Shima, H., Sato, M. & Inoue, A., Self-adaptive formulation of uneven node spacings in wild bamboo, *Phys. Rev. E*, **93**, 022406_1-9 (2016).
- [10] 佐藤太裕, 谷垣俊行, 佐藤諭佳, 島 弘幸, 井上昭夫, 竹の節・組織構造が織り成す円筒体としての合理的な構造特性の理論的解明, 土木学会論文集 A2(応用力学), **72**, I_25-34 (2016).
- [11] Youssefian, S. & Rahbar, N., Molecular origin of strength and stiffness in bamboo fibrils, *Sci. Rep.*, **5**, 11116_1-13 (2015).
- [12] Sato, M., Inoue, A. & Shima, H., Bamboo-inspired optimal design for functionally graded hollow cylinders, *PLoS ONE*, **12**, e0175029_1-14 (2017).
- [13] “白駒の原生林の無料写真素材 - ID.23552”, 無料の写真素材・AI 画像素材「ぱくたそ」, <https://www.pakutaso.com/20180235058post-15353.html> (参照 2023-12-12)

- [14] “セイタカアワダチソウのフリー写真”, 2000 ピクセル以上のフリー写真素材集,
<https://sozai-free.com/sozai/00593.html> (参照 2023-12/13).
- [15] 石原勝敏, 末光隆志編集, 生物の辞典, 朝倉書店 (2010).
- [16] Jaime, F. M.-G. & Manuel, R.-F., Molecular mechanisms of shade tolerance in plants, *New Phytol.*, **239**, 1190-1202 (2023).
- [17] Karam, G. N. & Gibson, L. J., Biomimicking of animal quills and plant stems: natural cylindrical shells with foam cores, *Mater. Sci. Eng. C*, **2**, 113-132 (1994).
- [18] Wei, C. & Lintilhac, P. M., Loss of stability: A new look at the physics of cell wall behavior during plant cell growth, *Plant, Physiol.*, **145**, 763-772 (2007).
- [19] Greenhill, A.-G., Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical pole or mast can be made, and the greatest height to which a tree of given proportions can grow, *Proc. Camb. Philol. Soc.* **4**, 62-73 (1881).
- [20] Timoshenko, S. P. & Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York (1961).
- [21] Wei, D. J., Yan, S. X., Zhang, Z. P. & Li, X.-F., Critical load for buckling of non-prismatic columns under self-weight and tip force, *Mech. Res. Commun.*, **37**, 554-558 (2010).
- [22] Grishcoff, N., in: *Theory of Elastic Stability*, S. P. Timoshenko, J. M. Gere, eds., McGraw-Hill, New York (1961).
- [23] Liu, J., Mei, Y. & Dong, X., Post-buckling behavior of a double-hinged rod under self-weight, *Acta. Mechanica. Solida. Sinica.*, **26**, 197-204 (2013).
- [24] Zorica, D., Challamel, N., Janev, M. & Atanacković, T. M., Buckling and postbuckling of a heavy compressed nanorod on elastic foundation, *J. Nanomech. Micromech.*, **7**, 04017004_1-6 (2017).
- [25] Wang, C. Y. & Drachman, B., Stability of a heavy column with an end load, *J. Appl. Mech.*, **48**, 668-669 (1981).
- [26] Chai, Y. H. & Wang, C. M., An application of differential transformation to stability analysis of heavy columns, *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, **6**, 317-332 (2006).
- [27] Duan, W. H. & Wang, C. M., Exact solution for buckling of columns including self-weight, *J. Eng. Mech.*, **134**, 116-119 (2008).
- [28] Virgin, L. N. & Plaut, R. H., Postbuckling and vibration of linearly elastic and softening columns under self-weight, *Int. J. Solids Struct.*, **41**, 4989-5001 (2004).
- [29] Lee, J. K. & Lee, B. K., Buckling lengths of heavy column with various end conditions, *Eng. Solid Mech.*, **8**, 163-168 (2020).

-
- [30] Lee, B. K., Lee, J. K., Buckling of tapered heavy columns with constant volume, *Mathematics*, **9**, 657-670 (2021).
- [31] McMahon, T. A., Size and shape in biology-elastic, *Science*, **179**, 1201-1204 (1973).
- [32] McMahon, T. A. & Kronauer, R. E., Tree structures: deducing the principle of mechanical design, *J. Theor. Biol.*, **59**, 443-466 (1976).
- [33] Jaouen, G., Alm  ras, T., Coutand, C. & Fournier, M., How to determine sapling buckling risk with only a few measurements, *Am. J. Bot.*, **94**, 1583-1593 (2007).
- [34] Jackson, T. D., Shenkin, A. F., Majalap, N., Jami, J. B., Sailim, A. B., Reynolds, G., Coomes, D. A., Chandler, C. J., Boyd, D. S., Burt, A., Wilkes, P., Disney, M. & Malhi, Y., The mechanical stability of the world’s tallest broadleaf trees, *Biotropica*, **53**, 110-220 (2021).
- [35] Sterken, P., The quest for a unified theory on biomechanical palm risk assessment through theoretical analysis and observation, *Sci. Rep.*, **11**, 22134_1-18 (2021).
- [36] Niklas, K. J., *Plant Allometry: The Scaling of Form and Process*, The Univ. of Chicago Press, Chicago (1994).
- [37] Niklas, K. J., Spatz, H-C., Growth and hydraulic (not mechanical) constraints govern the scaling of tree height and mass, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **101**, 15661-15663 (2004).
- [38] Niklas, K. J. The scaling of plant height: A comparison among major plant clades and anatomical grades, *Ann. Bot.*, **72**, 165-172 (1993).
- [39] Ryan, M. G. & Yoder, B. J., Hydraulic limits to tree height and tree growth, *BioScience*, **47**, 235-242 (1997).
- [40] Greenwood, M. S., Juvenility and maturation in conifers: current concepts, *Tree Physiol.*, **15**, 433-438 (1995).
- [41] Niklas, K. J., The allometry of safety factors for plant height, *Amer. J. Bot.*, **81**, 345-351 (1994).
- [42] Li, W., Keynia, S., Belteton, S. A., Afshar-H. F., Szymanski, B. D., Turner, J. A., Protocol for mapping the variability in cell wall mechanical bending behavior in living leaf pavement cells, *Plant Physiol.*, **188**, 1435-1449 (2022).
- [43] Zonia, L. & Munnik, T., Life under pressure: hydrostatic pressure in cell growth and function, *Trends Plant Sci.*, **12**, 90-97 (2007).
- [44] Wei, C., Lintilhac, P. M. & Tanguay, J. J., An insight into elasticity and load-bearing ability. Measurement and theory, *Plant Physiol.*, **126**, 1129-1138 (2001).

- [45] Tsugawa, S., Yamasaki, Y., Horiguchi, S., Zhang, T., Muto, T., Nakaso, Y., Ito, K., Takebayashi, R., Okano, K., Akita, E., Yasukuni, R., Demura, T., Mimura, T., Kawaguchi, K. & Hosokawa, Y., Elastic shell theory for plant cell wall stiffness reveals contributions of cell wall elasticity and turgor pressure in AFM measurement, *Sci. Rep.*, **12**, 13044_1-13044_11 (2022).
- [46] Cosgrove, D. J., Wall extensibility: its nature, measurement and relationship to plant cell growth, *New Phytol.*, **124**, 1–23 (1993).
- [47] Licup, A. J., Munster, S., Sharma, A., Sheinman, M., Jawerth, L. M., Febry, B., Weitz, D. A. & MacKintosh, F. C., Stress controls the mechanics of collagen networks, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **112**, 9573-9578 (2015).
- [48] Chen, B. & Jiang, H., Instability results from purely rotational stiffness for general tensegrity structure with rigid bodies, *Mech. Mach. Theory*, **167**, 104485_1-104485_24 (2022).
- [49] Saitoh, M. & Okada, A., The role of string in hybrid string structure, *Eng. Struct.*, **21**, 756-769 (1999).
- [50] Hmdzic, I. & Reed, K. B., Musical kinetic shape: A variable tension string instrument, *Appl. Acoust.*, **85**, 143-139 (2014).
- [51] Olverm A. V., Wilson, D & Crofton, P. S. J., Investigation of service failures of steel music wire, *Eng. Fail. Anal.*, **14**, 1224-1232 (2007).
- [52] Du, N., Fan, F., Chen, S. & Liu, Y., A hydraulic–photosynthetic model based on extended HLH and its application to Coast redwood (*Sequoia sempervirens*), *J. Theor. Biol.*, **253**, 393-400 (2008).
- [53] Ryan, M. G., Phillips, N. & Bond, B. J., The hydraulic limitation hypothesis revisited, *Plant Cell Environ.*, **29**, 367-381 (2006).
- [54] Niklas, K. J., Maximum plant height and the biophysical factors that limit it, *Tree Physiol.*, **27**, 433-440 (2006).

第2章 Greenhill による

重い柱における自重座屈特性の定式化

本章では, Greenhill [1] が導出した, 高さ方向に断面が一定の重い柱における自重座屈に対する最大高さ式 (式(1.2.1)) について, 詳細な導出過程を説明するとともに, モデルの問題点について指摘する. また, Greenhill の研究と同一の計算モデルを用いて, 別の方法により同様の解を導いた Wang and Drachman [2] や Karman and Biot [3] の研究についても, その詳細を示す. さらに, この式を起点として出発した「植物における高さ一直径の関係を支配するスケーリング則」に関わる広範な先行研究について, Greenhill が導出したスケーリング則の有効性を裏付けた McMahon [4,5] による樹木の測定データを用いた研究をはじめとして, いくつかの研究を簡単に概説する. 最後に, Niklas [6] が実際の植物に対する測定結果を用いて示した, 草本植物も含めた高さ一直径関係に関する統計的アプローチに基づく研究について, その詳細を述べるとともに, 重く硬い木本植物と軽く柔らかい草本植物の身体支持メカニズムの違いを考慮する重要性を指摘する.

2.1 力学理論に基づく重い柱の自重座屈に対する最大高さ

本節では, Greenhill が導出した, 自重が無視できないほど大きい「重い柱」の最大高さ式について, Greenhill の座屈問題の別解も併せて, その詳細を述べる.

2.1.1 計算モデル

Greenhill は, 図-2.1.1 に示すような地面側を固定端とする円柱形の片持ち梁について, 自重座屈 (集中荷重の影響は無視) に対する最大高さの定式化を行った. 座標系は常に中立軸に沿うものとし, 自由端側で $x = 0$, 固定端側で $x = L$ とする. また, 自重座屈が発生する最大高さを L_c , 半径を r , 弾性係数 (ヤング率) を E , 単位体積重量を γ と表記する.

まず, Greenhill の定式化では, 以下に示す解析仮定が導入されている.

- ① 部材の断面および弾性係数は, 高さ方向に一定とする (曲げ剛性 EI は定数とする). また, 部材の単位体積重量 γ についても, 高さ方向に一定であるものとする.
- ② 系の変形は長さに対して極めて小さく, 微小変形の仮定が成り立つものとする.
- ③ 部材の一端は自由とし, 他端は完全に固定されたものとする.
- ④ 初期状態において, 部材は完全に鉛直方向に伸長し, その形状に歪みはない.

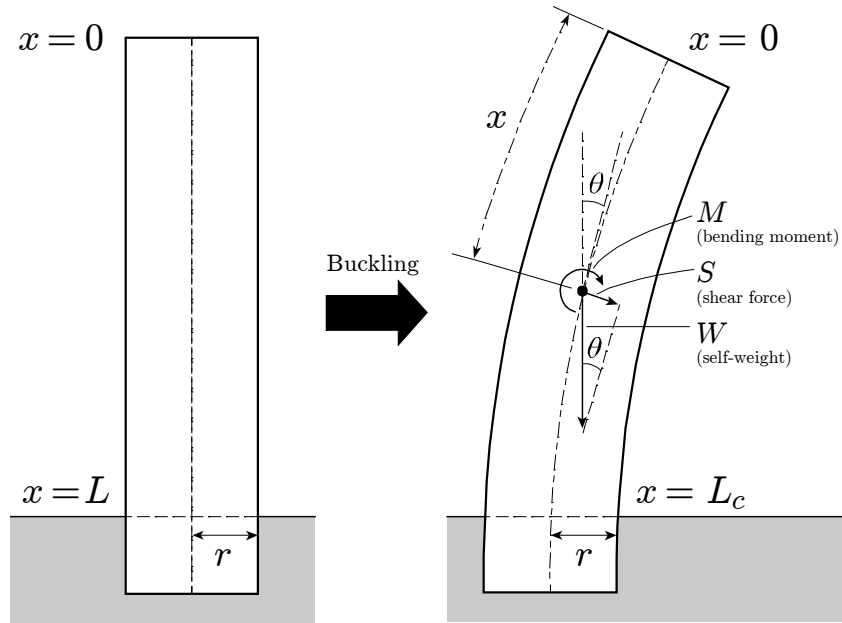


図-2.1.1 計算モデル

これらの解析仮定を前提として、重い柱の自重座屈に対する最大高さ式を導出する。

2.1.2 支配方程式の導出

まず、図-2.1.1 に示した片持ち梁において、自重によって座屈が生じた状態を考える。このとき、変形前の中立軸と変形後の中立軸がなす角、すなわちたわみ角を $\theta(x)$ とし、任意点 x における力の釣り合いを考えると、次式が得られる。

$$S(x) = W(x) \sin \theta(x) \quad (2.1.1)$$

ここに、 $S(x)$ はせん断力、 $W(x)$ は任意点 x の断面に作用する体積力である。これは、位置 x における断面の上に存在する体積 $V(x)$ と単位体積重量 γ の積によって与えられる。よって、単位体積重量 γ と断面積 A を用いると、式(2.1.1)は次のように書くことができる。

$$S(x) = \gamma A x \sin \theta(x) \quad (2.1.2)$$

次に、任意点における曲げモーメント $M(x)$ は、次式で与えられる[7]。

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.1.3)$$

ここに、 w はたわみ、 I は中立軸に関する断面二次モーメントを表す。ここで、解析仮定①②より、曲げ剛性 EI が高さ方向に一定で (x の関数ではなく)、微小変形が成り立つとし、たわみ角 θ の符号が x の値によらず負となることに留意すると、式(2.1.2)のせん断力 $S(x)$ および式(2.1.3)の曲げモーメント $M(x)$ は、次のように書くことができる。

$$S(x) \approx \gamma Ax \theta \quad (2.1.4)$$

$$M(x) \approx -EI \frac{d\theta}{dx} \quad (2.1.5)$$

ここで、梁における曲げモーメントとせん断力の関係 ($S = dM/dx$) を用いて[7], 次を示す二階の微分方程式が得られる.

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{\gamma A}{EI} x \theta = 0 \quad (2.1.6)$$

2.1.3 支配方程式の解法と固有方程式の導出

Greenhill [1], Wang and Drachman [2]および Karman and Viot [3] は, 式(2.1.6)に示した支配方程式について, それぞれ別の解法によって同様の最大高さ式を導いている. ここで, それぞれの詳細な導出過程と, それぞれの導出方法の得失について述べる.

(1) Greenhill の方法 : Bessel の微分方程式への帰着

Greenhill は, 式(2.1.6)に示した支配方程式について, 適切な変数変換を施すことにより, 支配方程式を Bessel の微分方程式に帰着させ, その一般解を厳密な形で求めた.

まず, 次を示す各変数の変換式およびパラメータを導入する.

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{x}} \theta \quad (2.1.7)$$

$$\psi = x^{3/2} \quad (2.1.8)$$

$$\chi = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\gamma A}{EI}} \quad (2.1.9)$$

これを用いて, 式(2.1.6)に示した支配方程式に変形を施すと, 次の形に変換できる.

$$\psi^2 \frac{d^2\varphi}{d^2\psi} + \psi \frac{d\varphi}{d\psi} + \left(\chi^2 \psi^2 - \left(\frac{1}{3} \right)^2 \right) \varphi = 0 \quad (2.1.10)$$

式(2.1.10)は, 次数を $1/3$ とする Bessel の微分方程式である. よって, その一般解は二つの Bessel 関数を用いて, 次のように得られる.

$$\theta(x) = J_{1/3} \left(\frac{2}{3} (\omega x)^{3/2} \right) \sqrt{x} c_1 + J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} (\omega x)^{3/2} \right) \sqrt{x} c_2 \quad (2.1.11)$$

ここに, c_1 および c_2 は任意定数であり, $J_{1/3}(x)$ および $J_{-1/3}(x)$ は次数 $1/3$ の第一種 Bessel 関数を示す. この関数は, 次式に示す無限級数の形で定義される.

$$J_{\pm 1/3}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma\left((m+1) \pm \frac{1}{3}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m \pm 1/3} \quad (2.1.12)$$

ここに, $\Gamma(x)$ は Gamma 関数である. すなわち, 式(2.1.11)に示した $J_{1/3}(x)$ および式 $J_{-1/3}(x)$ の第三項目までを例示すると, 次のようになる.

$$J_{1/3}(x) = \frac{(\omega x)^{1/3}}{2^{1/3} \times \Gamma(4/3)} - \frac{(\omega x)^{7/3}}{2^{7/3} \times \Gamma(7/3)} + \frac{(\omega x)^{13/3}}{2 \times 2^{13/3} \times \Gamma(10/3)} \cdots \quad (2.1.13)$$

$$J_{-1/3}(x) = \frac{(\omega x)^{-1/3}}{2^{-1/3} \Gamma(2/3)} - \frac{(\omega x)^{5/3}}{2^{5/3} \Gamma(5/3)} + \frac{(\omega x)^{11/3}}{2 \times 2^{11/3} \Gamma(8/3)} \cdots \quad (2.1.14)$$

また, パラメータ ω は次式で与えられる.

$$\omega = \left(\frac{\gamma A}{EI}\right)^{1/3} \quad (2.1.15)$$

次に, 以下に示す片持ち梁の境界条件を用いて, 未知定数 c_1, c_2 の値を定める.

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dx} = 0 & (\text{at } x = 0) \\ \theta = 0 & (\text{at } x = L_c) \end{cases} \quad (2.1.16)$$

いま, 式(2.1.13)および式(2.1.14)を踏まえ, 自由端側 ($x = 0$) の境界条件を適用すると, 任意定数 $c_1 = 0$ が得られる. また, 固定端側 ($x = L_c$) の境界条件より, 有意な L_c を求めるために $c_2 \neq 0$ とおくと, 次式が得られる.

$$J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}(\omega L_c)^{3/2}\right) = 0 \quad (2.1.17)$$

すなわち, 式(2.1.17)が固有値 L_c に関する固有方程式である. ここで, 式(2.1.17)を満足する最大高さ L_c を求めると, 次のようになる.

$$L_c = \left(\frac{9}{4\omega^3} (j_{-1/3,n})^2\right)^{1/3} \quad (2.1.18)$$

ここに、 $j_{-1/3,n}$ は第一種 Bessel 関数 $J_{-1/3}(x)$ の n 番目の零点を示しており、その最小値は $n=1$ とすれば得られる ($j_{-1/3,1} \approx 1.866$)⁴。また、式(2.1.15)を式(2.1.18)に代入し、円形断面における断面積 A および断面二次モーメントを考慮すると、Greenhill による円柱モデルの自重座屈に対する厳密な最大高さ式は、次のように得られる。

$$L_c = \left(C \frac{E}{\gamma} r^2 \right)^{1/3} \quad (2.1.19)$$

ここに、 C は定数であり、次式で与えられる。

$$C = \frac{9}{16} (j_{-1/3,1})^2 \approx 1.959 \quad (2.1.20)$$

式(2.1.19)に示した Greenhill の最大高さ式は、自重座屈に対する最大高さ L_c は、半径 r の $2/3$ 乗に比例することを示している。

(2) Wang and Drachman の方法：Airy 関数を用いた固有方程式

Wang and Drachman は、Greenhill とは異なり、支配方程式を Airy の微分方程式の形に変換し、その一般解を2つの Airy 関数の線形結合として求めた。本節では、その詳細な導出過程について示す。

まず、式(2.1.6)の支配方程式について、次式を用いて変数変換を行う。

$$\xi = \omega x \quad (2.1.21)$$

式(2.1.21)の x に関する一階および二階微分は、

$$\frac{d\xi}{dx} = \omega \quad (2.1.22)$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\xi}{dx} \right) = 0 \quad (2.1.23)$$

である。なお、式(2.1.21)と(2.1.22)の ω は、式(2.1.15)のものと同一である ($\omega^3 = \gamma A/EI$)。ここで、式(2.1.6)におけるたわみ角 θ の一階および二階微分の項は、次のようになる。

⁴ 本章における「 n 」は、特殊関数の次数や零点の番号、級数解の次数を表す変数であり、添え字の意味を一般化して説明するために導入された記号である。

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi} \omega \quad (2.1.24)$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\theta}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \right) = \frac{d^2\theta}{d\xi^2} \left(\frac{d\xi}{dx} \right)^2 + \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{d^2\theta}{d\xi^2} \omega^2 \quad (2.1.25)$$

これらを用いて、式(2.1.6)は次のように変換できる。

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \xi\theta = 0 \quad (2.1.26)$$

式(2.1.26)は、Airy の微分方程式と呼ばれるものである。なお、Airy の微分方程式は Bessel の微分方程式に変換することが可能であり、適切な変換によって式(2.1.10)の微分方程式に一致することが確認できる。Airy 関数を用いた一般解は、次式で与えられる。

$$\theta(\xi) = \text{Ai}((-1)^{1/3}\xi)c_1 + \text{Bi}((-1)^{1/3}\xi)c_2 \quad (2.1.27)$$

ここに、 $\text{Ai}(\xi)$ 、 $\text{Bi}(\xi)$ はそれぞれ第一種・第二種の Airy 関数であり、 c_1 および c_2 はそれぞれ任意定数である。なお、 $(-1)^{1/3}$ には3通りの値が存在するものの、たわみ角 θ が実数領域でのみ定義される物理量であることと、第一種・第二種 Airy 関数の引数部分が複素数である場合、その関数値も複素数となることを踏まえれば、この値は一意的に $(-1)^{1/3} = -1$ と定まる。

なお、式(2.1.16)に示した変数 x に関する境界条件について、これを変数 ξ の場合に置き換えると、以下のように書くことができる。

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{d\xi} = 0 & (\text{at } \xi = 0) \\ \theta = 0 & (\text{at } \xi = \omega L_c = \xi_c) \end{cases} \quad (2.1.28)$$

ここで、自由端側の境界条件を式(2.1.27)に適用すると、二つの未知定数 c_1 および c_2 を関係付ける以下の式が得られる。

$$c_1 = \sqrt{3}c_2 \quad (2.1.29)$$

これを式(2.1.27)に代入すると、次式が得られる。

$$\theta(\xi) = \left(\sqrt{3}\text{Ai}(-\xi) + \text{Bi}(-\xi) \right) c_2 \quad (2.1.30)$$

次に、固定端側の境界条件を式(2.1.30)に適用する。ここで、式(2.1.30)において $\xi = \omega L_c = \xi_c$ を適用し、端部でのたわみ角 $\theta(\xi_c) = 0$ となることを考える。ここで、 $c_2 = 0$ は直

立状態の場合，すなわち変形が全く生じていない場合のたわみ角を表す．そのため， $c_2 \neq 0$ とすれば，次に示す固有値 ξ_c に関する固有方程式が得られる．

$$\sqrt{3}\text{Ai}(-\xi_c) + \text{Bi}(-\xi_c) = 0 \quad (2.1.31)$$

なお，式(2.1.31)は，合流型超幾何関数 ${}_0F_1[a, z]$ を用いて，次のように書くこともできる．

$${}_0F_1 \left[\frac{2}{3}, -\frac{\xi_c^3}{9} \right] = 0 \quad (2.1.32)$$

いま，式(2.1.31)，(2.1.32)に示した固有方程式における固有値 ξ_c について，最大高さを与える解が正の最小の実数解であることを踏まえ，それを $\xi_{c(\text{sol})}$ と表記すれば， ξ_c の定義($\xi_c = \omega L_c$)より，最大高さは次式で与えられる．

$$L_c = \xi_{c(\text{sol})} \left(\frac{EI}{\gamma A} \right)^{1/3} \quad (2.1.33)$$

なお，式(2.1.31)，(2.1.32)の固有方程式における変数は ξ_c のみであるから，この固有方程式を満足する正の最小の実数解 $\xi_{c(\text{sol})}$ は，ある特定の値に一意的に定まる．

ここで，Wang and Drachman は，式(2.1.31)の固有方程式を Bessel 関数によって変えることで，Greenhill の式と同様の最大高さ式を導出している．いま，式(2.1.31)の固有方程式において， $\xi_c > 0$ である前提条件を踏まえれば，両者の Airy 関数の引数は必ず負の値を取る．ここで，第一種・第二種の Airy 関数は， $\xi > 0$ の場合について，次式を用いて Bessel 関数により変換できる．

$$\left. \begin{aligned} \text{Ai}(-\xi) &= \frac{\sqrt{\xi}}{3} \left(J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) + J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) \right) \\ \text{Bi}(-\xi) &= \sqrt{\frac{\xi}{3}} \left(J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) - J_{1/3} \left(\frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.1.34)$$

これを式(2.1.31)に代入すると，次の結果が得られる．

$$\left(2J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} \xi^{3/2} \right) \right) c_2 = 0 \quad (2.1.35)$$

ここで，式(2.1.21)に示した変数変換パラメータ ξ の定義を踏まえ，さらに新たに未知定数 $c_3 = 2c_2$ と置きなおせば， $c_2 \neq 0$ より，式(2.1.17)に示した Greenhill の固有方程式と全く同じ式が得られることが確認できる．

(3) Karman and Biot の方法：級数解を用いた近似解法

Karman and Biot [3] は, Wang and Drachman [2] と同様の変数変換を行い, 支配方程式として式(2.1.26)と全く同じものを導いている. しかしながら, 彼らは Airy 関数を用いた厳密な一般解ではなく, 級数解法を用いて一般解を級数の形で求めた. すなわち, 解の厳密性では Greenhill および Wang and Drachman に劣るものの, 支配方程式の厳密解を得ることが困難なモデルに対しても応用できる最大高さの導出方法を確立した.

まず, 式(2.1.26)の一般解を, 次のべき級数の形を用いて仮定する.

$$\theta(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n \quad (2.1.36)$$

ここに, c_n は未知係数である. ここで, 式(2.1.36)の ξ に関する一階微分および二階微分を求めると, 次式が得られる.

$$\frac{d\theta}{d\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n \xi^{n-1} \quad (2.1.37)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n \xi^{n-2} \quad (2.1.38)$$

これを式(2.1.26)に代入すると, 次のようになる.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n \xi^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} n c_n \xi^{n+1} = 0 \quad (2.1.39)$$

ここで, 各項における ξ の次数を揃えるために, 左辺第一項目に $n = m + 2$, 二項目に $n = m - 1$ を適用して, 式(2.27)を次のように整理する.

$$2c_2 + \sum_{m=1}^{\infty} [(m+2)(m+1)c_{m+2} + c_{m+1}] \xi^m = 0 \quad (2.1.40)$$

ここで, 任意の ξ において式(2.1.40)が成立するための条件を考えると, 各係数 c_n に関する以下の条件式が得られる.

$$c_2 = 0 \quad (2.1.41)$$

$$c_{m+2} = -\frac{c_{m+1}}{(m+2)(m+1)} \quad (2.1.42)$$

すなわち, 式(2.1.41), (2.1.42)を用いて, いくつかの級数係数に成り立つ関係を調べることにより, 各係数 c_n を決定すればよい. たとえば, $m = 1, 2, \dots, 8$ について求めてみると,

次のような結果が得られる.

$$\begin{aligned}
 m=1 \text{ のとき} \quad c_3 &= -\frac{c_0}{2 \cdot 3} \\
 m=2 \text{ のとき} \quad c_4 &= -\frac{c_1}{3 \cdot 4} \\
 m=3 \text{ のとき} \quad c_5 &= -\frac{c_2}{4 \cdot 5} = 0 \\
 m=4 \text{ のとき} \quad c_6 &= -\frac{c_3}{5 \cdot 6} = \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} \\
 m=5 \text{ のとき} \quad c_7 &= -\frac{c_4}{6 \cdot 7} = \frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \\
 m=6 \text{ のとき} \quad c_8 &= -\frac{c_5}{7 \cdot 8} = \frac{c_2}{4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8} = 0 \\
 m=7 \text{ のとき} \quad c_9 &= -\frac{c_6}{8 \cdot 9} = -\frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} \\
 m=8 \text{ のとき} \quad c_{10} &= -\frac{c_7}{9 \cdot 10} = -\frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

ここで改めて, 式(2.1.26)の一般解は,

$$\theta(\xi) = \theta_1(\xi)C_1 + \theta_2(\xi)C_2 \quad (2.1.43)$$

の形で与えられると考えられる. なお, C_1 および C_2 は任意定数である⁵. いま, 式(2.1.43)の $\theta_1(\xi)$ および $\theta_2(\xi)$ は, 上に示した係数 c_n と式(2.1.36)を用いて, 次のように得ることが出来る.

$$\theta_1 = \xi \left(c_1 - \frac{c_1}{3 \cdot 4} \xi^3 + \frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \xi^6 - \frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} \xi^9 + \dots \right) \quad (2.1.44)$$

$$\theta_2 = c_0 - \frac{c_0}{2 \cdot 3} \xi^3 + \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} \xi^6 - \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9} \xi^9 + \dots \quad (2.1.45)$$

これらを式(2.1.43)に代入すると, 求めるべき一般解が得られる.

次に, Wang and Drachman と同様に, 式(2.1.28)の境界条件を適用する. まず, 自由端側の境界条件を適用すると, $c_1 = 0$ が得られる.

⁵ 本項では, 漸化式の未知係数を c_n と置いているため, 式(2.1.43)における定数は C_n を用いて表している.

$$\theta(\xi) = c_0 \left(1 - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^6}{180} - \frac{\xi^9}{12960} + \dots \right) \quad (2.1.46)$$

また，固定端側の境界条件より，有意な最大高さを与える固有値 ξ_c を求めるために， $c_0 \neq 0$ とすれば，最終的なたわみ角の式（式(2.1.26)の一般解）は次のようになる．

$$\left(1 - \frac{\xi_c^3}{6} + \frac{\xi_c^6}{180} - \frac{\xi_c^9}{12960} + \dots \right) = 0 \quad (2.1.47)$$

すなわち，式(2.1.47)の代数方程式を満足する正の最小の実数解 $\xi_{c(\text{sol})}$ を求めることにより，最大高さの式を得ることができる．なお，Greenhill および Wang and Drachman による厳密な固有方程式から得られる固有値 $\xi_{c(\text{sol})}$ は，式(2.1.17)より，次式を用いて与えられる．

$$\xi_{c(\text{sol})} = \left(\frac{9}{4} j_{-1/3,1}^2 \right)^{1/3} \approx 1.986 \quad (2.1.48)$$

表-2.1.1 には，式(2.1.47)を満足する $\xi_{c(\text{sol})}$ と代数方程式の項数 N について，Mathematica 12.1 の NSolve 関数を用いて数値的に求めた結果を示す．

表-2.1.1 展開項数と数値解の関係，および厳密解（式(2.1.48)）に対する相対誤差

	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$	$N = 6$	$N = 7$
数値解	1.817	2.024	1.984	1.986	1.986	1.986
相対誤差[%]	8.51	1.91	0.10	0.00	0.00	0.00

表より，項数 $N = 2$ の場合は，厳密解に対して 8.51%の相対誤差を有するが，項数が増加するにしたがって相対誤差は低下し， $N = 5$ で相対誤差が 0.01%未満となっており，厳密解と級数解法による支配方程式の数値解が有効数字 4 ケタの精度で一致することが分かる．なお，Adam [8] は，式(2.1.47)の代数方程式について，「 n 項目と $n + 1$ 項目を比較し， $n + 1$ 項目の絶対値が n 項目の絶対値の 1/4 以下となるケース」を探索し，これを満足する項より高次の項については，その影響を無視することとしている．

この条件を適用すると，式(2.1.47)の無限級数は，第三項目まで考慮すれば良いこととなる．そのとき，**表-2.1.1** に示した $N = 3$ の結果から，Adam の規準による Karman and Biot の最大高さ式は次のように得られる．

$$L_c = \left(2 \frac{E}{\gamma} r^2 \right)^{1/3} \quad (2.1.49)$$

すなわち，Karman and Biot の方法により得られる式(2.1.49)の最大高さは，式(2.1.19)に

示した Greenhill の最大高さ式および式(2.1.33)に示した Wang and Drachman の式 (式(2.1.48)の解を適用したもの) とほとんど同じ結果となる. なお, 先に述べたように, 高次項を無視する操作を無くし, 式(2.1.47)の代数方程式において考慮する項数を増やすと, Greenhill が求めた厳密解へと収束する.

ここまでのすべての解法を比較すると, 厳密解が容易に求まる場合, あるいは得られる厳密解の取り扱いが容易な場合には, Greenhill および Wang and Drachman の解法を用いればよいことがわかる. 厳密解は容易に求まらないものの, 十分な収束性が確保できる項数の級数解が得られる場合には, 得られる解の収束判定を行うことを前提とし, Karman and Biot の級数解法を用いることが有効であると考えられる.

2.1.4 自重座屈モードの導出

ここでは, Greenhill および Wang and Drachman の解法に基づく, 自重座屈発生時の座屈モードを求める方法について説明する.

まず, 式(2.1.30)のたわみ角の式について, $\xi = 0$ を代入すると, 次式が得られる.

$$\theta(0) = \frac{2}{3^{1/6} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} c_2 \quad (2.1.50)$$

これを用いて, 式(2.1.30)から未知定数 c_2 を消去すると, 次式が得られる.

$$\theta(\xi) = \theta(0) {}_0F_1 \left[\frac{2}{3}, -\frac{\xi^3}{9} \right] \quad (2.1.51)$$

このたわみ角 θ の式について, ξ に関する一階微分を求めることにより, たわみ w の式を次のように求める.

$$w(\xi) = c_3 + \frac{\xi}{\omega} {}_pF_q \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{\xi^3}{9} \right] \quad (2.1.52)$$

ここに, ${}_pF_q[a; b_1, b_2; z]$ は超幾何関数であり, c_3 は任意定数である. いま, たわみに関する境界条件は次式で与えられる.

$$\begin{cases} at & x = 0 \ (\xi = 0), & w = w(0) \\ at & x = L \ (\xi = \omega L = \xi_c), & w = 0 \end{cases} \quad (2.1.53)$$

ここで, 式(2.1.52)に自由端側の境界条件を適用すると, $c_3 = w(0)$ が得られる. さらに, 固定端側の境界条件を適用することにより, 最終的なたわみの式が次のように得られる.

$$w(\xi) = w(0) \left(1 - \frac{\xi}{\xi_c} \frac{{}_pF_q \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{\xi^3}{9} \right]}{{}_pF_q \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{\xi_c^3}{9} \right]} \right) \quad (2.1.54)$$

なお, この問題においては $\xi_c \approx 1.986$ である. 式(2.1.54)を $w(0)$ で除すことにより, 自重座屈発生時の座屈モードが得られる.

2.2 実際の植物における高さ制限に関する仮説

Greenhill は、式(2.1.19)に示した最大高さ式について、これが実際の樹木に当てはまるのではないかと主張した。本節では、Greenhill が導出した直径－高さ関係における $2/3$ 乗の法則に基づき、McMahon [4,5] が行った実際の樹木におけるスケーリング関係の検証に関する研究をはじめとして、その詳細を説明する。また、これらの内容を踏まえて、力学的観点から植物形態を洞察する意義について述べる。

2.2.1 Greenhill の説：自重座屈による高さの制限

第1章でも述べたように、地上で生命活動を行うあらゆる植物は、すべて等しく重力の影響を受ける。この重力に起因する「自重座屈」によって植物の高さが制限されているという仮説について、関連するいくつかの研究を取り挙げ、その詳細を述べる。

(1) McMahon による $2/3$ 乗則の検証

McMahon [4] は、アメリカ森林協会に登録されている、アメリカにおけるほぼすべての樹種を含む 576 本の樹木の測定データ（直径・高さ）を用いて、Greenhill の理論に関する検証を行った。

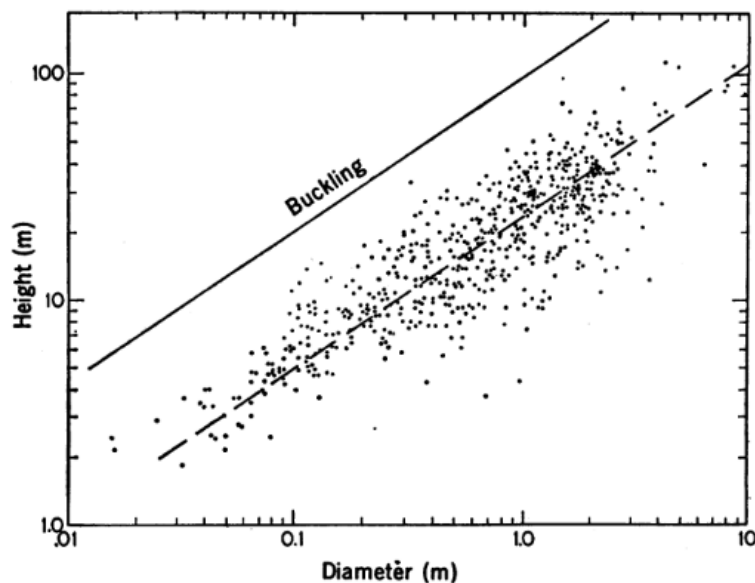


図-2.1.2 アメリカ森林協会の測定データに基づく樹木の直径－高さ関係 [4]

図-2.1.2 は、McMahon が論文内で示した、樹木の高さ－直径関係を示す両対数グラフである。図中の点群は、実際の樹木における測定データ（576 本）を示している。破線は点群の傾向から目測で引いたものであり、これは最小二乗法などの回帰分析に基づくものではない。また、点群の上に位置する実線は、Greenhill の式(2.1.19)から得られた、樹木の自重座屈に対する最大高さの計算結果を示す。この計算に用いられた弾性係数 E および単位体積重量 γ は、緑林においてその比 E/γ がほぼ一定であるという統計的な結果 [5]

に基づき、これが一定な値であるものとして仮定されている⁶。

この図の考察に基づく McMahon の主張は、要約すると次の2点である。

- ① 両対数グラフにおいて、目測で引いた直線の傾きは、ほぼ $2/3$ である。すなわち、実際の樹木の高さは、直径の $2/3$ 乗に比例しており、これは自重座屈に対する最大高さ式において見られた高さー直径間に成り立つべき乗則と全く同じである。
- ② 図中に示された全ての点、すなわち実際の樹木の高さおよび直径は、実線で示されている Greenhill の式から得られる樹木の自重座屈に対する理論的な最大高さに対して、これを下回る結果となっており、安全側に位置している。

以上の2つの主張をもって、McMahon は「Greenhill が提唱した $2/3$ 乗の法則は、実際の樹木に適合しており、樹木の高さは自重座屈に支配される」と結論づけた。この検証を踏まえて、Greenhill の研究は重い柱における自重座屈研究の礎となっただけでなく、森林学・生態学的な分野におけるスケーリング則（形状則）に関する研究においても、実に幅広く応用されるに至った[9-13]。

(2) Niklas による実際の植物の高さと Greenhill 式に基づく最大高さの比較

前節に示したように、McMahon の検証により、樹木における高さー直径間のスケーリング指数について、その妥当性が実証された。これを踏まえて、Niklas は「実際の樹木の樹高」と「理論上の最大高さ」の関係について、さらなる調査を実施した[14]。

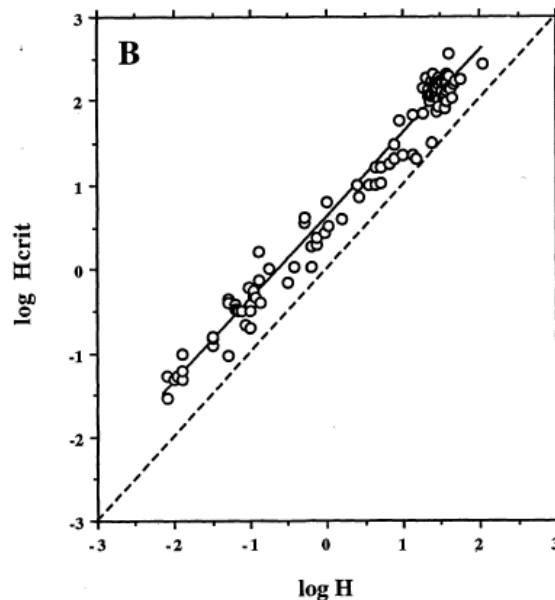


図-2.1.3 計 111 種の植物における理論的な最大高さと実際の高さの関係

図-2.1.3 は、Niklas が草本種・木本種の双方を含む計 111 種の植物について、力学理論的に到達可能な最大高さと実際の高さの関係を調査し、これをプロットしたものである。

⁶ $E = 1.03$ [MN], $\gamma = 6.1$ [kN/m³]. どちらも重力加速度 $g = 9.81$ [m/s²]とした場合。

図は縦軸に最大高さ H_{crit} 、横軸に実際の植物の高さ H を取って示している。なお、全 111 点のうち、草本種は 44 種、木本種は 67 種であり、それぞれが以下に示す式によって独自に最大高さが決定されている。

$$\text{草本種} : H_{crit} = K(f(\theta)) \left[\frac{EI}{P} \right]^{1/2} \quad (2.2.1)$$

$$\text{木本種} : H_{crit} = \left(C \frac{E}{\gamma} \right)^{1/3} r^{2/3} \quad (2.2.2)$$

ここに、 $K(f(\theta))$ はたわみ角に対する第一種の完全楕円積分、 P は座屈荷重である。すなわち、図中に示す結果は、木本種の最大高さは Greenhill の自重座屈の式から、草本種の最大高さは大変形を考慮した Euler 座屈の式から算定されたものである。

図-2.1.3 の点線は、 $H_{crit} = H$ となる場合を示しており、この点線よりも左側にある点は、自重座屈または Euler 座屈に対して安全である、ということを意味するものである。そして、図に示した実線は、離散的に得られた各データにおいて回帰分析を実施することにより得られる回帰曲線である。この線が点線に対してほぼ平行であるということは、木本植物か草本植物かによらず、理論上の最大高さと実際の高さの比はほぼ一定である、ということを示している。

なお、実際の高さと自重による制約のもと定まる最大高さに対する実際の高さの関係については、実際の高さ H に対する力学的な最大高さ H_{crit} の比を表す安全率 S_F を用いて記述されることが多く、これは $S_F < 1$ であれば自重座屈が発生する、というものである。Niklas の論文によれば、回帰分析により、安全率はおおよそ $S_F = H_{crit}/H \approx 4$ として求められている。Niklas は、この安全率について、植物が自重以外に抵抗しなければならない作用、すなわち風などの荷重に対する抵抗性能を確保するためのものであると推測している。

2.2.2 風荷重による高さの制限

さらに、Niklas and Spatz [15]は、樹体に作用する風荷重の影響を考慮した力学理論を構築し、風荷重による倒伏に対して到達可能な最大高さを導いた。樹木が風荷重によって倒伏しないためには、「樹木に作用する風圧が引き起こすモーメント」が「地盤と幹の接合部における抵抗モーメント」を越えてはいけないという条件のもと、生理学的な観察の下で得られたいくつかの物理量を結びつける経験式の導入により、樹木構造において成り立つ次のアロメトリ則⁷を求めた。

$$m_T = \beta m_R \quad (2.2.3)$$

ここに、 m_T は幹の質量、 m_R は根の質量、 β は比例定数である。この式は、「幹の質量は根の質量に比例する」というバイオマス量に関する法則を示しており、これは実際の植物

⁷ 生物において成り立つ、個体のサイズと形態・機能的な特性（質量や力学特性）の普遍的な関係のこと。

における測定データに基づく統計的研究によっても導かれているものである[16]. すなわち、植物のバイオマス量の配分形態は、式(2.2.3)が示す風荷重に対する抵抗性から得られる機械的なアロメトリ一則を満足していることとなる. よって、この説もまた有力な樹高制限の仮説であるが、式(2.2.3)は生理的挙動の観察に基づく経験式や仮定の導入によって導出されているものであることに留意すべきである.

2.2.3 その他の仮説：水理学的条件と樹齢条件

前述のような機械的な条件のほか、生命活動を営む上で重要な生理的機能の観点が存在する. その代表例は、水分輸送の問題である[17].

植物にとって大きな身体を獲得することは、光資源を求めて発生する植物間の競争に打ち勝つために重要である. しかしながら、大きな身体を有するということは、曲げ剛性が向上する反面、負荷である重量が増加することを意味しており、この問題の重要性については、第1章で述べた通りである. ここで、大きな身体の獲得によって生じるであろう問題は、力学的なものだけではないことが容易に想像できる.

その一つが、水分輸送上の問題である. 大きな身体の獲得は、水を吸い上げる根から、光合成を行う葉までの輸送経路が長くなることを意味する. 水分輸送の現象は、導管における水の通りやすさと、輸送の原動力となる土壌と葉の水ポテンシャルの差により、その挙動が規定されることが知られている[18]. 体が大きくなることは、導管における水の輸送効率の低下を招いてしまうこととなり、これに対応して内部の湿潤状態を保つために、葉の気孔が閉鎖される時間が長くなってしまう. すると、光合成のために二酸化炭素を取り込むことが出来なくなる. このサイクルによってその光合成速度が低下し、その高さが制限されると考えるのが、水分輸送問題による樹高制限説である. しかしながら、この問題は極めて複雑なものであり、未だ水分輸送機能－生理学的機能の関係性を明確に解明したものはなく、樹木における水分輸送問題に関する研究については、活発な議論が行われ続けている[19].

もう一つの代表的な仮説は、樹齢によって高さが制限されるというものである[20]. この説は極めてシンプルであり、樹木の生理的な老化に伴って樹高成長が制限されるという仮説である. その検証は、「接ぎ木」と呼ばれる、ある樹木の幹における形成層と、別の樹木から伐採した幹の形成層を接続することで行われている. 既に成長をほぼ停止した全く異なる老木の幹をいくつか伐採し、それをまだ若い樹木を土台として接ぎ木を行うことで、樹齢による成長への影響や生理学的な作用の変化を観察するものである. これは様々な観点から検証が行われてきたが、接ぎ木によって老木の生理学的な特性の差異が失われることが多く報告されており[21,22]、樹齢による制限の有力性は失われつつあるのが現状である.

2.3 Niklas による反証：草本植物への 2/3 乗則の適用性

前節では、樹木の最大高さを支配する要因について触れた様々な研究を取り上げ、その概要について述べた。ここでは、植物の最大高さに関する自重座屈による制限説が棄却される大きな原因となった、Niklas による 2/3 乗則のさらなる検証に関する研究について、その詳細を述べる。

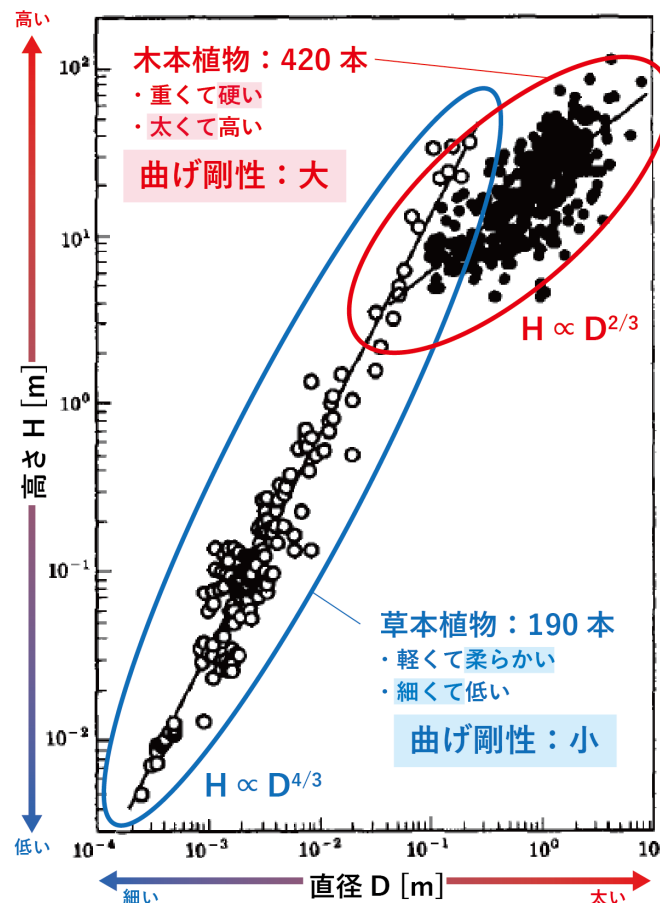


図-2.3.1 木本植物 420 本・草本植物 190 本における高さ一直径の関係

図-2.3.1 には、Niklas による「草本植物（非木本種）」を含めた、植物の高さ一直径関係の測定データを示す[23]。図中の縦軸および横軸は、高さと直径の対数を取って示したものである。図中の○印が草本植物、●印が木本植物の結果を示す。

この図は、木本植物が草本植物という違いにより、それぞれの対数線形の関係が明瞭に異なっていることを示すものである。図中の直線は回帰分析によって得られたものであり、高さ H と直径 D の間の比例関係は、木本植物では $H \propto D^{0.54}$ 、草本植物 $H \propto D^{1.29}$ であることが示されている。Niklas はこのスケーリング則の差異と、2.2.1 節に示した Greenhill 式と実測値の差異に関する「安全率」という解釈に無理があるものとして、植物の高さが自重座屈問題によって支配されていないであろうと結論づけている。この研究が発表されて以降、植物の高さ制限に関して他の仮説が様々に提唱され、今日に至るまで議論が続けられている。

2.4 木本植物と草本植物の身体支持機構の違い

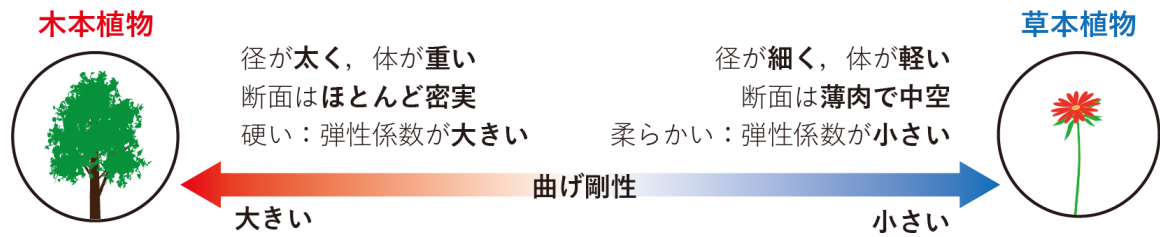


図-2.4.1 木本植物と草本植物における力学的特性の差異

前節では、Niklas が問題として指摘した「Greenhill の式は草本類には適用できない」というものについて、その内容を概説した。しかしながら、力学的見地からみると、この図にはいまだ触れられていない、極めて重要な事実が潜んでいると考えられる。

まず、図-2.3.1 は明瞭に、木本植物は太いこと、草本植物は細いことを表している。これと両者の材質的な特徴、すなわち「木本は硬く、草本は柔らかい」という事実より、図-2.4.1 に示すように曲げ剛性の点で両者は根本的に異なる。このことと、Greenhill 則の草本類に対する不適合性は、「両者の身体を支持する機構が異なっており、これに起因して形状則が変化している」という可能性を想起させるものである。

これを踏まえ、本研究では何か一つのルールによって植物の形態が支配されているわけではなく、力学的観点に基づく複数のルールが存在し、これが体を支える仕組みによって切り替わる、という動的な仮説を提唱する。なぜなら Greenhill の式は、十分な曲げ剛性を有する構造を前提として定式化されたものであり、これが草本植物に適用できないことは、力学的な観点から見ると全く不自然ではないためである。

しかしながら、これまでの研究ではこの点が完全に無視され、本来は草本植物・木本植物の「それぞれ」に対する力学理論の整備と、その適切な応用が必要であるのにもかかわらず、既往の植物学的研究では木本植物に基づく Greenhill の式を適用するのみであり、両者の身体的な特性の違いに全く目を向けていなかった。また、Greenhill の式は自重座屈特性に大きな影響を与えると考える種々の因子が無視されているのにも関わらず、自重座屈による高さ制限説の式として未だ用いられている現状がある。

これらのことは、身体支持機構の違いを考慮した植物形態の力学的な洞察は、これまで力学的知見の不足によって棄却されてきた自重座屈による高さ制限の仮説について、再考の必要性を指摘するものであるとともに、植物学的研究における Greenhill 式の乱用から推測される「植物学分野における”曲げ剛性”という言葉の意味の混同」という問題を解決するための機会になると考えられる。さらに、力学に基づく重い柱の自重座屈特性における理論研究の深化は、植物学的分野においてこれまで適切に評価されていない統計データの価値を爆発的に高めるとともに、単一的な研究体系では到達できない生態的知見の獲得に繋がるものと予想される。これに加えて、「重く硬い・細く柔らかい部材（構造）」に応用可能な、植物形態に秘められた智慧を力学の言葉で取り込むことを可能にする。

以上を踏まえて、まず次章では硬く重たい木本植物に着目し、その形態に秘められた極めて巧妙な力学的合理性を明らかにするとともに、Greenhill の法則と種々の因子の関係を解明する。

参考文献

- [1] Greenhill, A.-G., Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical pole or mast can be made, and the greatest height to which a tree of given proportions can grow. *Proc. Camb. Philol. Soc.* **4**, 62-73 (1881).
- [2] Wang, C. Y. & Drachman, B. Stability of a heavy column with an end load *J. Appl. Mech.*, **48**, 668-669 (1981).
- [3] von Karman, T & Biot, M. A., *Mathematical Methods in Engineering*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1940.
- [4] McMahon, T. A., Size and shape in biology-elastic. *Science*, **179**, 1201-1204 (1973).
- [5] McMahon, T. A. & Kronauer, R. E., Tree structures: deducing the principle of mechanical design. *J. Theor. Biol.*, **59**, 443-466 (1976).
- [6] Niklas, K. J., Plant height and the properties of some herbaceous stems, *Ann. Bot.*, **75**, 133-142 (1995).
- [7] Timoshenko, S. P., Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, (1961).
- [8] Adam, J. A., *Mathematics in Nature*, Princeton Univ. Press, Princeton (2003).
- [9] Jaouen, G., Alméras, T., Coutand, C., Fournier, M., How to determine sapling buckling risk with only a few measurements, *Am. J. Bot.*, **94**, 1583-1593 (2007).
- [10] Jackson, T. D. et. al., The mechanical stability of the world's tallest broadleaf trees, *Biotropica*, **53**, 110-220 (2021).
- [11] Sterken, P., The quest for a unified theory on biomechanical palm risk assessment through theoretical analysis and observation, *Sci. Rep.*, **11**, 22134_1-18 (2021).
- [12] Niklas, K. J., *Plant Allometry: The Scaling of Form and Process*, The Univ. of Chicago Press, Chicago (1994).
- [13] Niklas, K. J., Spatz, H.-C., Growth and hydraulic (not mechanical) constraints govern the scaling of tree height and mass, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **101**, 15661-15663 (2004).

- [14] Niklas, K. J., Interspecific allometries of critical buckling height and actual plant height, *Amer. J. Bot.*, **81**, 1275-1279 (1994).
- [15] Niklas, K. J. & Spatz, H. C., Allometric theory and the mechanical stability of large trees: Proof and conjecture, *Am. J. Bot.*, **93** 824-828 (2006).
- [16] Niklas, K. J., Plant allometry: is there a grand unifying theory? *Biol. Rev.*, **79**, 871-889 (2004).
- [17] Ryan, M. G. & Yoder, B. J., Hydraulic limits to tree height and tree growth, *BioScience.*, **47**, 235-242 (1997).
- [18] 鍋嶋絵里, 石井弘明, 「樹高成長の制限とそのメカニズム」, *J. Jpn. For. Soc.*, **90**, 420-430 (2008).
- [19] Frederick, C. M., Michael, J. C. & Guillermo, G., Water transport in trees: current perspectives, new insights and some controversies, *Environ. Exp. Bot.*, **45**, 239-262 (2001).
- [20] Greenwood, M. S., Juvenility and maturation in conifers: current concepts, *Tree Physiol.*, **15**, 433-438 (1995).
- [21] Matsuzaki, J., Norisada, M., Kodaira, J., Suzuki, M. & Tange, T., Shoots grafted into the upper crowns of tall Japanese cedar (*Cryptomeria japonica* D. Don) show foliar gas exchange characteristics similar to those of intact shoots, *Trees-Struct. Funct.*, **19**, 198-203 (2005).
- [22] Mencuccini, M., Martínez-Vilalta J., Vanderklein, D., Hamid, H. A., Korakaki, E., Lee, S. & Michiels, B., Size-mediated ageing reduces vigour in trees, *Ecol. Lett.*, **8**, 1183-1190 (2005).
- [23] Niklas, K. J. The scaling of plant height: A comparison among major plant clades and anatomical grades, *Ann. Bot.*, **72**, 165-172 (1993).

第3章 硬く重い木本植物の最大高さ

本章では、極めて単純化された計算モデルを取り扱っている Greenhill の研究 [1] を起点に、重く硬い体を有する「木本植物」について、先端に向かって細くなっていくテーパー形状、竹に見られるような断面の中空化に着目し、木本植物が有する力学的合理性の解明を目指す。また、自重座屈特性を向上させる「テーパー形状」と「断面の中空化」という2つのアプローチについて、ほぼすべての木本植物がテーパー形状のみを有している理由を力学的見地から洞察する。

さらに、Greenhill の式から推測される最大高さに対して実際の樹木が設けている「4倍の安全率」について [2]、自重座屈特性の悪化を招くと予想される形状の歪みや不安定性を考慮した最大高さ式の導出により、この安全率が有する意味の解明を試みる。

また、Greenhill が導き MaMchon [3,4] が検証した「 $2/3$ 乗の法則」について、木本植物の形態が有する合理性を解明する過程で得られる、自重座屈に対する最大高さ式において、この法則が成り立つか否かを明らかにする。そして、得られた様々な知見を横断的に洞察することにより、多様な樹木形態に潜む智慧と形態形成の支配法則を解明する。

3.1 「植物学上」の木本植物の定義

ここでは、植物学上の木本植物について、その一般的な定義を説明するとともに、その特性から推測される力学的特性に着目し、力学的観点から木本植物の形態に着目する意義を述べる。

3.1.1 「木本植物」とは何者か

木本植物の定義は諸説あるが、一般的には「茎および根において肥大成長により多量の木部を形成し、その細胞壁は多く木化して強固になっている植物。地上部は多年性で、高木と低木に分かれる」と定義されている [5]。すなわち、植物を木本類として定義するためには、「肥大成長」「木化」「多年生」という3つのキーワードが重要となる。

「肥大成長」とは、茎や根がその軸の直径方向に増大する成長のことであり、一般に一次肥大成長・二次肥大成長に大別される。木本植物と草本植物の分類を議論する上では、主として「二次肥大成長」のことを指す。このうち、一次肥大成長とは、維管束⁸をもつすべての植物において、先端部における軸方向への成長（伸縮成長）と同時に生じるものである。これに対して、二次肥大成長とは、伸縮成長が止まった後に、維管束形

⁸ 「根から水を運ぶための導管」と「葉でできた養分を運ぶ師管」を束ねた器官のこと。

成層において新たに木部が形成されることにより、径が太くなる成長を指している（図-3.1.1 参照）。なお、木本植物の場合には、二次師部～表皮の区間を「樹皮」と呼ぶ。

すなわち、木本と草本の分類を議論する上での「肥大成長」とは、主として二次肥大成長を指すものである。なお、野生の樹木は、光資源を獲得する上で問題ない高さまで一次肥大成長により到達すると、二次肥大成長によって径を太くして剛性を高め、力学的な安定性を高める方向に戦略をシフトさせていくことが知られている[6]。

幹横断面の模式図：双子葉植物の例

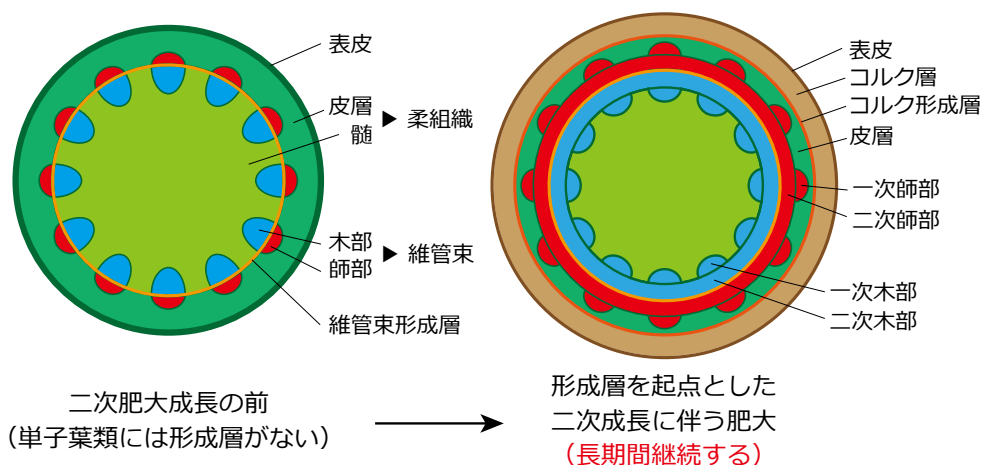


図-3.1.1 幹の横断面の模式図 ([7]を参考に作成)

次に「木化」とは、その細胞壁において数種類の成分を表層に順次堆積していくことで、その壁を強固にすることである。代表的な例は、リグニンとよばれる物質の堆積による木化である。木化は、水分の輸送能力と植物の弾性係数（ヤング率）を飛躍的に向上させるはたらきをもつ。その一方で、木化が生じた細胞は分裂が止まり、最終的に細胞の活動としては停止することとなる。

最後に「多年生」とは、二年以上その個体が生存することである。特に樹木は、いわゆる「草本」と呼ばれる草のような植物とは異なり、地上部に露出した幹・枝の構造体が、冬の間もその形態が維持されたままとなっている。これに対して、草本植物では、地上部に露出した構造体をそのまま維持するのではなく、地上部に比べて温度が低くなりにくい地中において種子（あるいは地下茎）を残存させ、冬を越す種が多く存在する。これは、植物の構造の中でも、葉・根・茎はその質量の約70%が水分であると言われており、細胞質内ではその凝固点が0℃以下であるものの、冬季における地表の厳しい環境下にさらされると、十分な耐寒性を持たない植物の細胞壁内部は凍結してしまうためである。多年生の観点は重要であるが、これはあくまで「肥大成長」と「木化」の作用によって副次的に生まれる特徴であるともとれる。

以上を踏まえると、植物学的な観点からみた「木本植物」とは、「二次肥大成長によって伸縮成長後も径が太くなり、その材質は木化によって硬く、そして地上に露出した構造体が二年以上の生存状態にある植物」ということになる。

3.1.2 「木本」でも「草本」でもある植物：既往の分類方法の課題

前節で述べた定義を踏まえ、植物学分野では「重く硬い木本植物」と「軽く柔らかい草本植物」の区別がなされてきた。しかしながら、これらの観点では一概に分類することができない植物が、自然界には数多く存在する。

その代表例こそが「竹」である。竹の稈（樹木における幹に相当する部位）は、前述の木化によって極めて硬い性状を示しており、いわゆる「高木」に相当する高さまで、高く大きく成長することが可能である。この観点で見ると、竹はまぎれもなく「木」である。

しかしながら、その径は二次肥大成長によって明瞭に太くなるようなことがなく、伸縮成長前後で太さにほとんど違いがないため、この点から見ると竹は「草」として分類することができてしまう。さらに、多年生の観点でみると、竹の稈は問題なく越冬することが可能であるため、多年生か一年生かという基準においては、竹は「木」として分類されることとなる。

すなわち、竹は木化や多年生の観点からみると「木本植物」として分類されるが、肥大成長の観点からみると「草本植物」として分類される、ということである。このような例は竹の他にも多数存在し、例えばババナなどは、この類に該当する植物の代表的な例である。

以上のことは、「硬く重たい木本植物」と「細く柔らかい草本植物」の間には、いまだ明確な線引きがなされておらず、これは植物が驚くべき多様性を示していることを裏付けるものであり、前に述べた3つの観点では「木本植物」と「草本植物」を区別することに限界がある、ということを示唆している。

3.1.3 木本植物の形態を力学的に紐解く意義

前節で述べたように、木本植物という植物の定義は、現段階でいくつかの問題や曖昧さを含んでおり、明快に木本植物と草本植物を分類することはできない。しかしながら、力学的な観点から植物の形態をとらえると、その定義を単純に表現することができる。すなわち、木本植物とは「内部水分の状態（細胞の活動状態）に関係なく、木化および肥大成長によって自身の”曲げ剛性”を高めることにより、その体を支持することを可能としている植物」である。

木化および肥大成長は、ともに植物の曲げ剛性に大きく関わるものであり、これらは曲げ剛性を向上させる役割を持つ生理学的現象である。これによって十分な曲げ剛性を獲得した木本植物は、内部水分がもたらす膨圧の有無によらず、すなわち植物細胞の活動状態によらず、自身の体を支えることができる。そのため、地中に比べて冬季の温度低下が著しいであろう地表部の構造体を、長きに渡って維持することが可能となると考えられる。

しかしながら、木化や肥大成長による剛性の向上と引き換えに、木本植物は重量の増加というハンディキャップが課せられる。一般的な材料では、これを構成する物質が規定されていれば、弾性係数と重量（密度）にほとんどの場合で正の相関関係が見られる。そのため、木化に伴う細胞壁における弾性係数の向上は、剛性の獲得には寄与するもの

の、二次肥大成長の有無によらず、単位体積あたりの重量の増加を招いてしまうことが予想される。

そして、体のサイズが大きいということは、この「重い」という特性の影響が大きくなることを意味する。2.3 節において示した、Niklas [8] の調査による「木本種と非木本種（草本類）の高さ－直径の関係」からも分かるように、木本種は高さ・直径のどちらもが、草本種に比べて著しく大きい傾向にある。このことは、直径および木化に伴う材質固有の硬さによって、樹木が高い「曲げ剛性」を有していることを示すと同時に、これと引き換えに「重量の増加」という、自重座屈問題において目をそらすことができない課題に直面していることを示唆するものである。

これらのことがありながらも、実際の樹木は長い寿命において、生育環境を変えることなく、同じ場所で重力をはじめとする様々な作用に抵抗しつつ、高く大きく成長することに成功している。この事実は、前述した「曲げ剛性」と「重量」のトレードオフ関係について、樹木が両者の影響を理解し、これらを巧みに配分していることを示すものである。

以上を踏まえ、本章では、木本植物が有する「曲げ剛性」と「重量」の巧みな配分に着目し、これらが自重座屈問題における力学的安定性、すなわち「最大高さ」に与える影響を明らかにする。さらに、Niklas の計測 [2] によって解明された、「Greenhill の式から予測される最大高さは、実際の植物の高さに対して 4 倍の大きさである」という事実について、Greenhill の定式化において無視されていた、樹木の自重座屈特性の低下を招く要因であると考えられる「初期たわみ・初期傾斜などの初期不整」や「地盤における固定の不完全性」を初めて取り入れた定式化を行い、木本植物が自重座屈に対して設けている安全性について、その物理的意味の理論的な解明を試みる。

3.2 テーパー形状による最大高さの向上

樹木をはじめとする木本植物の幹は、ほとんどが地面から先端にかけて細くなっていく「テーパー形状」を有している[9-12]．このテーパー形状は、重心を下げることにより横荷重への安定性を高めるだけでなく、重量の負荷が大きく作用する地上部付近の曲げ剛性を高めるものであり、自重座屈特性を向上させる効果をもつものと考えられる．本節では、このテーパー形状が最大高さに与える影響を定量的に評価すべく、線形的なテーパー形状を有する重い柱の自重座屈問題を定式化する．

3.2.1 計算モデル

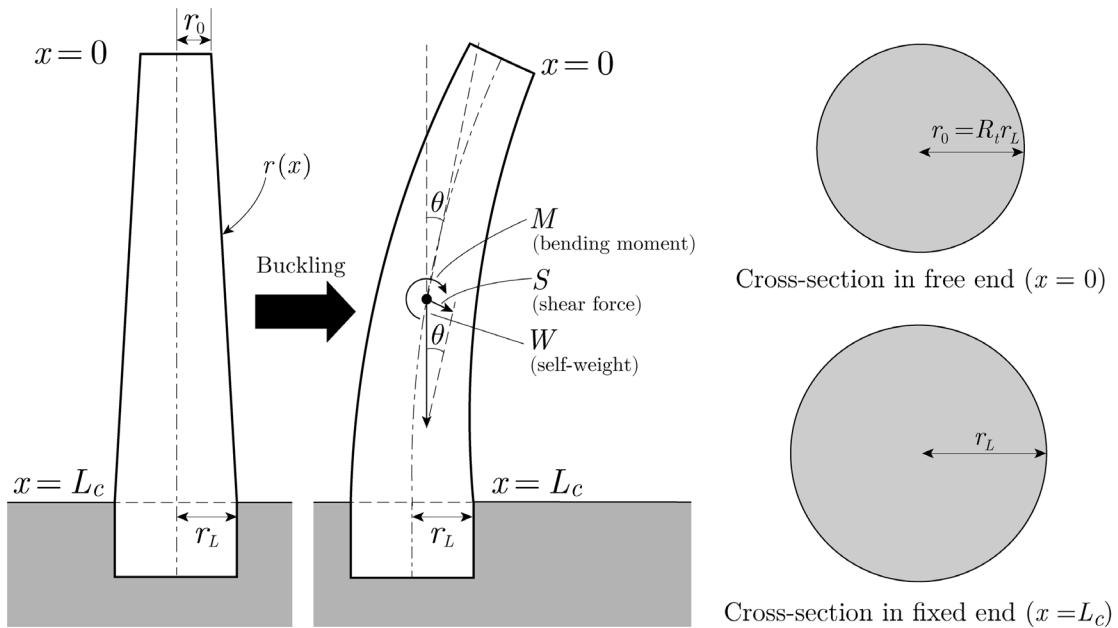


図-3.2.1 線形テーパーを考慮した計算モデル

計算モデルは、図-3.2.1に示すような地面側を固定端とする円錐台形（線形テーパー）の片持ち梁である．座標系は中立軸に沿うものとし、自由端側で $x = 0$ ，固定端側で $x = L_c$ とする．また、最大高さは L_c ，固定端半径は r_L ，単位体積重量は γ と表す．さらに、定式化の簡単のために、自由端の半径 r_0 は固定端の半径 r_L の大きさに比例すると考え、その比例定数を R_t と置く．このとき、 R_t は次式で定義される．

$$R_t = \frac{r_0}{r_L} \quad (3.2.1)$$

ここで、 R_t は樹木のテーパー形状（先細り形状）の度合いを示すパラメータであり、これを本研究では「テーパー比」と定義する．なお、テーパー比 R_t の値域については、先端部の半径は必ず根本の半径より小さくなることを考慮し、かつ支配方程式が特異点を持たないようにするために、 $0 < R_t < 1$ であると定義する．

式(3.2.1)を用いて、**図-3.2.1**に示した計算モデルにおける半径 $r(x)$ の式は、次のように定義できる。

$$r(x) = \left\{ \frac{1 - R_t}{L_c} x + R_t \right\} r_L = (\Lambda x + R_t) r_L \quad (3.2.2)$$

ここに、 Λ は x の係数部分を単純に置き換えたものであり、次式で表される。

$$\Lambda = \frac{1 - R_t}{L_c} \quad (3.2.3)$$

次に、テーパーを考慮したモデルでは、断面積 A および断面二次モーメント I は位置 x の関数となる。これらは次式で与えられる。

$$A(x) = \pi(\Lambda x + R_t)^2 r_L^2 \quad (3.2.4)$$

$$I(x) = \frac{\pi}{4} (\Lambda x + R_t)^4 r_L^4 \quad (3.2.5)$$

3.2.2 体積補正係数 β_V の導入

図-3.2.1に示すような、座屈が発生して静止した状態にある物体について、任意の位置 x において力のつり合いを考え、それを整理していくと支配方程式が得られる。しかしながら、テーパーを考慮したモデルにおいては、厳密な支配方程式から最大高さを導出することが極めて困難である。そのため、適当な近似の導入により単純化を試みる。

まず、任意点 x における力のつり合いより、せん断力 $S(x)$ は次式で得られる。

$$S(x) = \frac{1}{3} \pi \gamma x (r(x)^2 + r(x) R_t r_L + R_t^2 r_L^2) \sin \theta \quad (3.2.6)$$

ここで、式(3.2.6)において、たわみ角 θ を限りなく小さいとすれば、次式が得られる。

$$S(x) \approx \frac{1}{3} \pi \gamma x (r(x)^2 + r(x) R_t r_L + R_t^2 r_L^2) \theta \quad (3.2.7)$$

いま、式(3.2.7)を用いて、前章のGreenhillの方法と同様にして支配方程式を導出すると、次式が得られる。

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{4\Lambda}{(\Lambda x + R_t)} \frac{d\theta}{dx} + \frac{4\gamma x (\Lambda x^2 + 3R_t \Lambda x + 3R_t^2)}{3Er_L^2 (\Lambda x + R_t)^4} = 0 \quad (3.2.8)$$

式(3.2.8)の支配方程式は、左辺第三項目が x に関する多項式で与えられており、一般解を求めることは極めて困難である。そこで、式(3.2.7)において体積 $V(x)$ を表す部分に適当な近似を設けることにより、比較的容易に一般解が得られる支配方程式の導出を試みる。

いま、**図-3.2.2**に示すような2つのモデルについて、自由端から力のつり合いを考える位置 x までの体積 $V(x)$ を考える。左図の灰色部の体積を V_1 、右図の灰色部の体積を V_2 とし、それぞれを求めると次のようになる。

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi x(r(x)^2 + r(x)R_t r_L + R_t^2 r_L^2) \quad (3.2.9)$$

$$V_2 = \pi x r(x)^2 \quad (3.2.10)$$

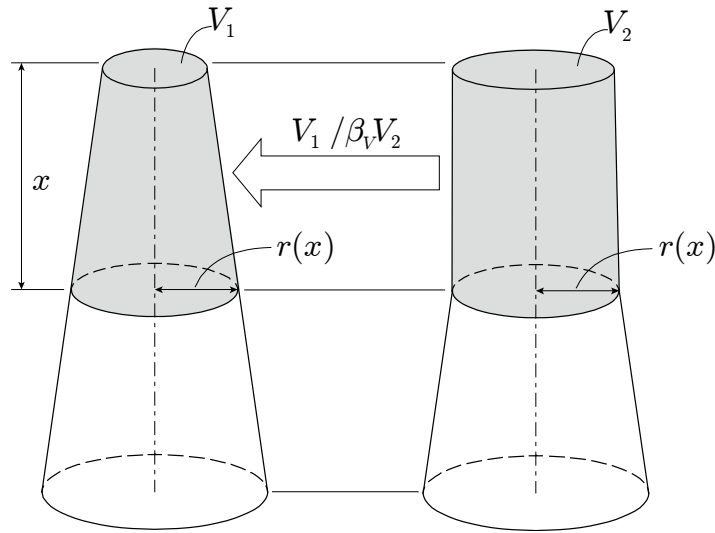


図-3.2.2 体積補正係数 β_V の概念図

ここで、両者の体積を等しくするような補正係数 β_V を考える。この補正係数 β_V の値域が容易に定まるように、 $V_1 = \beta_V V_2$ と置くと、 β_V は次式で与えられる。

$$\beta_V(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{r_L^2}{r(x)^2} + \frac{R_t r_L}{r(x)} + 1 \right) \quad (3.2.11)$$

ここで、式(3.2.11)の β_V を、本研究では体積補正係数と呼ぶこととする。なお、これをそのまま用いると、結果として得られる支配方程式は式(3.2.13)のままである。そのため、本研究では、この支配方程式を簡単にするべく、ここでは適当な定数と置く。

3.2.3 支配方程式の導出

前節の結果を用いて、支配方程式を導出する．まず、式(3.2.7)のせん断力は次のように書ける．

$$S(x) \approx \gamma\beta_V\pi(\Lambda x + R_t)^2 x r_L \theta \quad (3.2.12)$$

次に、任意点における曲げモーメント $M(x)$ は、つり合い状態からの微小変位 w を用いて、次のように書くことができる．

$$M(x) = -EI(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.2.13)$$

ここに、留意すべきは断面二次モーメント $I(x)$ が x の関数になっていることである．式(3.2.13)について、たわみ角 θ が微小であるという仮定から、最終的な曲げモーメント $M(x)$ の式は次のように得られる．

$$M(x) \approx -E \frac{\pi}{4} (\Lambda x + R_t)^4 r_L^4 \frac{d\theta}{dx} \quad (3.2.14)$$

いま、式(3.2.12)と式(3.2.14)をもとに、曲げモーメントとせん断力の関係($V = dM/dx$)を用いて支配方程式を導出する．そのために、式(3.2.14)の x に関する一階微分を求めると、次式が得られる．

$$\frac{dM}{dx} = -E \frac{\pi}{4} (\Lambda x + R_t)^3 r_L^4 \left(4\Lambda \frac{d\theta}{dx} + (\Lambda x + R_t) \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right) \quad (3.2.15)$$

よって、支配方程式は、式(3.2.12)および式(3.2.15)を用いて、次式のように得られる．

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{4\Lambda}{(\Lambda x + R_t)} \frac{d\theta}{dx} + \frac{\gamma\beta_V x}{Er_L^2 (\Lambda x + R_t)^2} \theta = 0 \quad (3.2.16)$$

ここで、Karman and Biot の方法 [12] に基づき、式(3.2.16)の支配方程式に対して、次式を用いた変数変換を行う．

$$\xi(x) = \omega(\Lambda x + R_t) \quad (3.2.17)$$

ここに、 ω は定数である．なお、前章で示した式(2.1.15)の ω とは全く異なるパラメータであり、変数変換パラメータとしての意味は同じであるが、中身は異なるものである．

また、式(3.2.17)を用いて式(3.2.16)の微分に関する項を求めると、次のようになる。

$$\frac{d\xi}{dx} = \omega\Lambda \quad (3.2.18)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi}\omega\Lambda \quad (3.2.19)$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = \frac{d^2\theta}{d\xi^2}\omega^2\Lambda^2 \quad (3.2.20)$$

これを用いて、式(3.2.16)の支配方程式を変換し、最終的な解くべき微分方程式を求めると、次式が得られる。

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{4}{\xi}\frac{d\theta}{d\xi} + \frac{4}{\xi^2}(\xi - \omega R_t)\theta = 0 \quad (3.2.21)$$

ここに、式(3.2.17)の変換パラメータ ω は、支配微分方程式の左辺第三項目の係数部分を最も簡単にするように定めると、次のようになる。

$$\omega = \left(\frac{\gamma\beta_V}{Er_L^2\Lambda^3} \right) \quad (3.2.22)$$

なお、式(3.2.22)は、各種パラメータの値域を考えると $\omega > 0$ であるので、式(3.2.11)の支配方程式は特異点を持たないものとなる。

3.2.4 最大高さ方程式の導出

第2章で示した断面が高さ方向に一定なモデルの最大高さ式を導出する際には、支配方程式の一般解を厳密に解く場合と、級数解法を用いて近似的に解く場合の2通りの手法を示した。しかしながら、前節の式(3.2.21)の級数解を求めても、Greenhillのモデルのように境界条件を適用して最大高さを導出することが出来ない。そのため、ここではGreenhillのように支配方程式の解は厳密なものを利用し、これに適当な数理的・機械的条件を適用することで最大高さ方程式を導出する。

まず、式(3.2.21)の支配方程式について、その一般解をMathematicaにより求めると次式が得られる。

$$\theta(\xi) = \frac{1}{8}\xi^{-3/2}(J_\eta(4\sqrt{\xi})\Gamma(1+\eta)c_1 + J_{-\eta}(4\sqrt{\xi})\Gamma(1-\eta)c_2) \quad (3.2.23)$$

ここに、 c_1 および c_2 は任意定数、 $\Gamma(x)$ はGamma関数である。また、第一種Bessel関数の次数 η は、次式で与えられる。

$$\eta = \sqrt{16R_t\omega + 9} \quad (3.2.24)$$

式(3.2.23)は第一種 Bessel 関数と Gamma 関数の積で表される解の線形結合であり、これに対して式(2.2.13)に示した片持ち梁の境界条件を適用し、有意な $\theta(\xi)$ を与える任意定数 c_1 あるいは c_2 を定めることはできない。この問題は、第2章に示した Greenhill [1], Karman and Biot [13] および Wang and Drachman [14] による定式化手法では、自由端側の境界条件を適用することによって片方の任意定数がゼロとなり、最大高さの導出が容易になるのに対し、テーパーを有する計算モデルでは、支配方程式の一般解が特殊関数の積を線形結合した極めて複雑な形であるために、これを微分しても片方の任意定数が一意に定まらないことが原因であると考えられる。

そこで、本研究では最大高さを導出するために重要となる、微分を必要としない固定端側 ($x = L_c$) の境界条件のみを検討する。Gamma 関数が零点を持たないことに留意すれば、式(3.2.23)より、固定端境界条件の式は次のように書くことができる。

$$J_\eta(4\sqrt{\xi}) = J_{-\eta}(4\sqrt{\xi}) = 0 \quad (3.2.25)$$

式(3.2.25)が成立するとき、式(3.2.23)に示した一般解は固定端側の境界条件を満足することが分かる。ここで、図-3.2.3 に種々の次数 η における第一種 Bessel 関数 $J_\eta(x)$ の形状を例示する。図中の実線が $\eta = 1$ 、点線が $\eta = -1$ 、破線が $\eta = 1.5$ 、一点鎖線が $\eta = -1.5$ の第一種 Bessel 関数 $J_\eta(x)$ を表している。図より、実線の $\eta = 1$ と点線の $\eta = -1$ はともに同じ零点を共有しているのに対し、破線の $\eta = 1.5$ と一点鎖線の $\eta = -1.5$ では同じ零点を持たないことが分かる。以上の例のように、次数 η が整数であるときには、2つの第一種 Bessel 関数 J_η と $J_{-\eta}$ は共に同じ零点を持つ。このことから、式(3.2.25)を成立させるためには、次数 η について次式を満足する必要があることが分かる。

$$|\eta| = \sqrt{16R_t\omega + 9} \in \mathbf{Z} \quad (3.2.26)$$

ここに、 $\mathbf{Z}$ は整数の集合を表す。一般的な Bessel の微分方程式を解いて得られる一般解 ($J_\eta(x)c_1 + J_{-\eta}(x)c_2$) では、式(3.2.26)を導入すると J_η と $J_{-\eta}$ は線形独立な解ではなくなる。そのため、式(3.2.26)の条件下において、式(3.2.23)の線形独立性が失われないか確認する必要があることから、式(3.2.23)の二つの解に対する Wronskian を求めると次のようになる。

$$|W| = \frac{\sqrt{16R_t\omega + 9} c_1 c_2}{64 \xi^4} \quad (3.2.27)$$

式(3.2.27)に含まれる各パラメータの値域より、式(3.2.26)の条件下でも線形独立性が失われないことが確認できる。

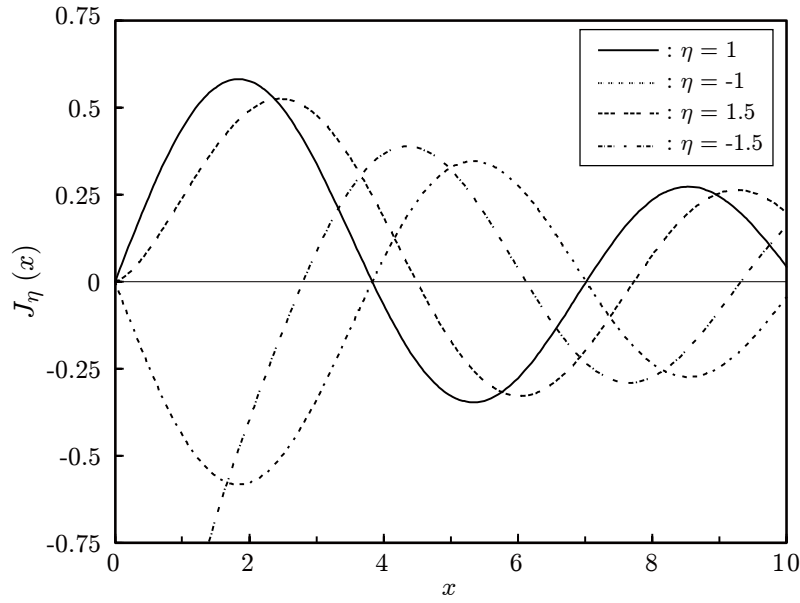


図-3.2.3 Bessel 関数 J_η の分布例と整数次の場合における零点の共有

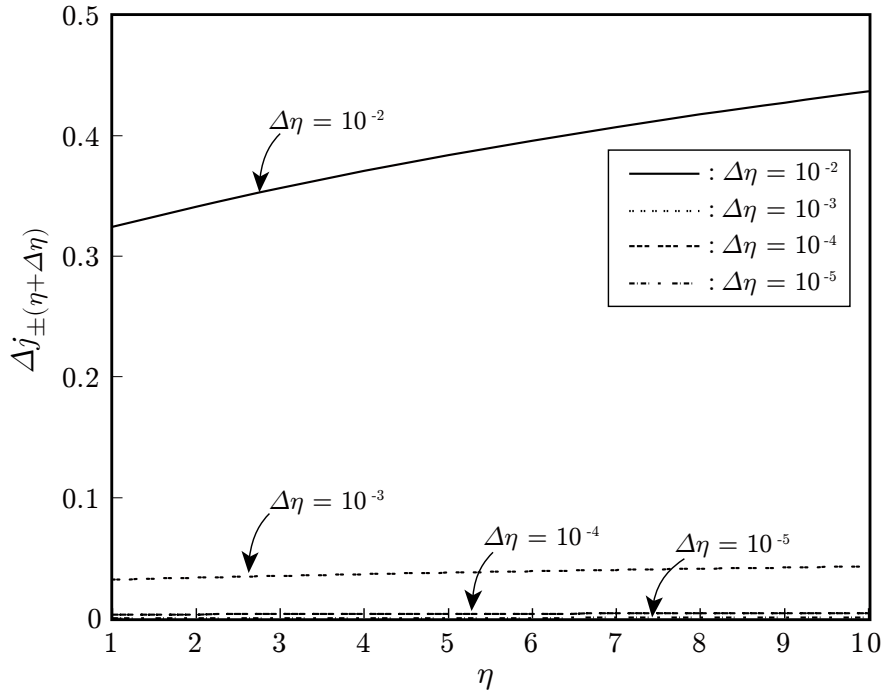
以上の検討により，式(3.2.24)の整数条件式を導入しても式(3.2.23)の線形独立性が失われないことが確認できた．しかしながら，式(3.2.23)に含まれる Gamma 関数 $\Gamma(x)$ は， x が厳密な負の整数であるとき，偏角が不定で絶対値が無限の複素量となるから，式(3.2.26)の整数条件式をそのまま用いた場合には，式(3.2.25)の固定端境界条件を式(3.2.23)に適用したものは不定形となる．

この問題を解決するために，式(3.2.26)に示す整数条件を修正する．次数 η を厳密な整数とするのではなく，整数と見なせる程度の範囲で微小に値をずらし，その上で ξ が固定端側の境界条件を数値的に満足する状態を考える．ここで，次数 η の絶対値に $\Delta\eta$ だけ加えたときの二つの第一種 Bessel 関数 J_η と $J_{-\eta}$ の零点への影響を調べるため，次の関数を定義する．

$$\Delta j_{\pm(\eta+\Delta\eta)} = j_{\eta+\Delta\eta} - j_{-(\eta+\Delta\eta)} \quad (3.2.28)$$

ここに， j_η は次数 η の第一種 Bessel 関数における 1 番目の零点を表し，式(3.2.28)の $\Delta j_{\pm(\eta+\Delta\eta)}$ が大きいくほど， J_η と $J_{-\eta}$ の次数を $\Delta\eta$ だけ変化させたときの零点が互いに離れることを意味する．この差分を調べるために，図-3.2.4 に種々の次数 $(\eta + \Delta\eta)$ に対する差分 $\Delta j_{\pm(\eta+\Delta\eta)}$ を示す．図中の実線が $\Delta\eta = 10^{-2}$ ，点線が $\Delta\eta = 10^{-3}$ ，破線が $\Delta\eta = 10^{-4}$ ，一点鎖線が $\Delta\eta = 10^{-5}$ の差分 $\Delta j_{\pm(\eta+\Delta\eta)}$ を表している．図より，オーダーの低下に伴い差分の値は小さくなり，特に一点鎖線の $\Delta\eta = 10^{-5}$ の場合ほどの次数でもほぼゼロであることから， $\Delta\eta = 10^{-5}$ 程度の値であれば第一種 Bessel 関数の次数 η に加えても式(3.2.25)を十分に満足することが分かる．以上より，式(3.2.26)に示す整数条件式を次式に修正し，Gamma 関数が不定量となる問題を回避する．

$$|\eta| - 10^{-5} = \left| \sqrt{16R_t\omega + 9} \right| - 10^{-5} \in \mathbf{Z} \quad (3.2.29)$$


 図-3.2.4 $\Delta\eta$ による差分 $\Delta j_{\pm(\eta+\Delta\eta)}$ への影響

これまでの内容を踏まえ、式(3.2.25)の固定端境界条件を満足する ξ は次式で得られる。

$$\xi = \frac{j_{\eta,N}^2}{16} = \frac{j_{\eta,1}^2}{16} \quad (3.2.30)$$

ここに、 $j_{\eta,N}$ は次数 η の第一種 Bessel 関数における N 番目の零点を表す。また、最大高さを与える $j_{\eta,N}$ は最小のものであるから、 $N = 1$ とする。なお、 $j_{\eta,1}$ は、修正後の式(3.2.29)の制約下で J_η と $J_{-\eta}$ の零点の位置がほぼ等しくなることから、 $j_{\eta,N} = j_{\eta,1}$ が近似的に成り立つため、 $j_{\eta,1}$ を求めるだけで最大高さを得ることができる。

以上より、Karman and Biot の方法と同様にして、式(3.2.22)および式(3.2.30)を式(3.2.25)の固定端境界条件の式 ($\xi = \omega$) に適用し、最大高さ L_c について解くと次に示す最大高さ方程式が得られる。

$$L_c = (1 - R_t) \left(\frac{j_{\eta,1}^2}{32\beta_V} \right)^{1/3} \left(C \frac{E}{\gamma} r_L^2 \right)^{1/3} \quad (3.2.31)$$

式(3.2.31)は右辺に第一種 Bessel 関数の零点が含まれており、その次数 η の中に最大高さ L_c が存在する極めて特殊な形であり、次数 η には式(3.2.29)の制約が存在するため、一般的な数値計算を用いても解くことが出来ない。

なお、Karman and Biot が導出した円柱モデルにおける最大高さの理論式と比較すると、テーパーを有する円錐台モデルではテーパー比 R_t と第一種 Bessel 関数の零点 $j_{\eta,1}$ を含んでいる点で異なっているが、円柱モデルの式と同様に、円錐台モデルの自重座屈に対する最大高さは固定端半径 r_L の $2/3$ 乗に比例することが分かる。

3.2.5 最大高さ方程式の数値解法

本節では、前節で得られた極めて取り扱いが難しい最大高さ方程式について、これを適当な機械的制約条件を考慮することによって離散的に解く方法について示す。

まず、本研究で導出した式(3.2.31)の最大高さ方程式は、第一種 Bessel 関数の零点が右辺に存在し、その次数部分に最大高さ L_c が含まれる極めて特殊な形である。式(3.2.31)の最大高さ方程式を解いて最大高さを決定するには、式(3.2.29)の整数条件式を満足する第一種 Bessel 関数の次数 $|\eta|$ を式(3.2.31)の最大高さ方程式に適用して最大高さ L_c を求めるとよいが、次数 $|\eta|$ は式(3.2.29)の条件を満たすこと以外の制約がなく、特定の1つの値に決定するための方法がない。そして、ある次数 $|\eta|$ に対して最大高さ L_c は必ず一つ存在するため、次数 $|\eta|$ を決定できなければ最大高さ L_c は無数に存在することとなる。

以上の理由から、本研究では後述する2つの単調減少条件を利用し、式(3.2.31)の最大高さ方程式を満たす理論解をいくつかのテーパー比について離散的に求める。その結果に基づき、円柱・円錐台・円錐モデルに統一的に適用可能な最大高さ算定式を導出する。

(1) 最大高さ比 $R_L(R_t)$ の導入⁹

まず、図-3.2.5に3つの計算モデルを示す。本項では、Model 1とModel 2に関する検討を行う。Model 1とModel 2の弾性係数 E 、固定端半径 r_L 、単位体積重量 γ は等しいものとし、異なるのは最大高さ L_c のみであるとする。

ここで、円錐台モデルの最大高さ L_{c1} は、必ず円柱モデルの最大高さ L_{c2} より大きくなるはずであるから、最大高さ比 $R_L(R_t)$ をModel 2の最大高さ L_{c2} に乘じると次の関係が得られる。

$$L_{c1} = R_L(R_t) L_{c2} = R_L(R_t) \left(C \frac{E}{\gamma} r_L^2 \right)^{1/3} \quad (3.2.32)$$

なお、両者のモデルにおける最大高さの関係を踏まえると最大高さ比 $R_L(R_t)$ は常に $R_L(R_t) \geq 1$ となる必要があることが分かる。

ここで、式(3.2.32)を式(3.2.22)に代入して式(3.2.24)の整数条件式を適用すると、最大高さ比 $R_L(R_t)$ は次のように得られる。

$$R_L(R_t) = (1 - R_t) \left(\frac{(\eta + 10^{-5})^2 - 9}{32R_t\beta_V} \right)^{1/3} \quad (3.2.33)$$

⁹ 本論文では、特定の物理量に対する特定の物理量の比(Ratio)を、大文字の R と下添え字の組み合わせによって表す。ここでは、最大高さを表す文字 L_c になぞらえて、最大高さ比を R_L と表記している。また、テーパー(Taper)の度合いを示すテーパー比を R_t として表しているが、これも同様である。

そのほか、枝葉と幹の重量(Weight)の比を示す R_w や、中空断面(Hollow cross-section)の外半径と内半径の比を示す R_h など、本研究では様々な物理量に関する無次元量をこのように表記する。

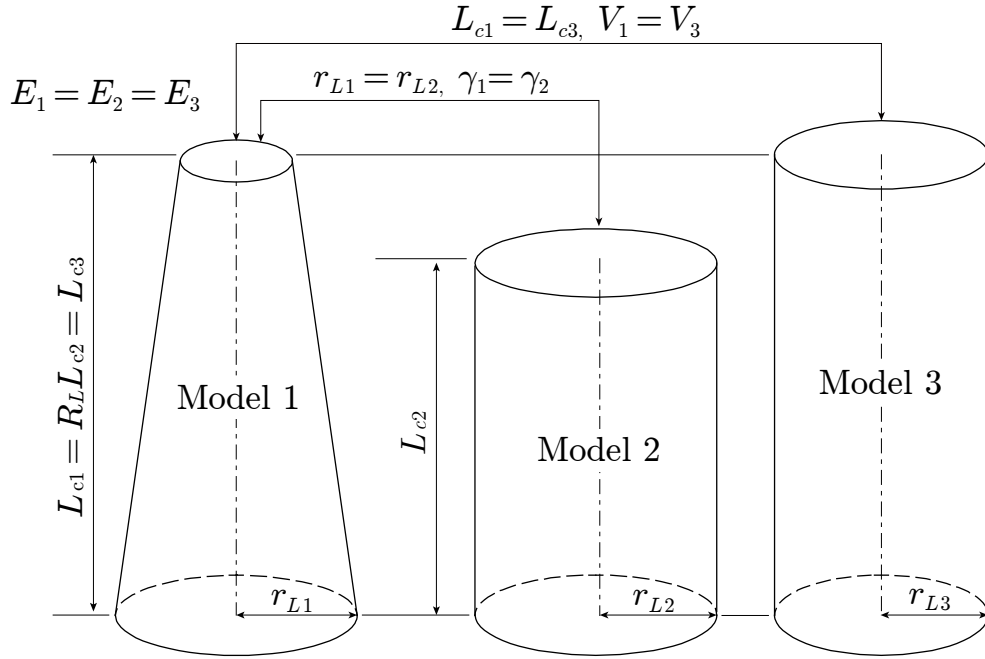


図-3.2.5 最大高さ導出のための計算モデル

(2) テーパー関数 $f(R_t)$ の導入

次に、式(3.2.31)に Karman and Biot が導出した円柱モデルの最大高さ理論式が含まれていることを利用する。式の利用を簡便にするために、円柱モデルの式に含まれない部分をテーパー比のみの関数で表すことを考えると、式(3.2.31)の最大高さ方程式は次のように書くことが出来る。

$$L_{c1} = f(R_t) \left(2 \frac{E}{\gamma} r_L^2 \right)^{1/3} = f(R_t) L_{c2} \quad (3.2.34)$$

ここに、テーパー関数 $f(R_t)$ は次式で与えられる。

$$f(R_t) = (1 - R_t) \left(\frac{j_{\eta,1}^2}{32\beta_V} \right)^{1/3} \quad (3.2.35)$$

両者の最大高さの関係を踏まえると、式(3.2.35)の $f(R_t)$ においても、式(3.2.33)の最大高さ比 $R_L(R_t)$ と同様に、 $f(R_t) \geq 1$ が常に成り立つ必要がある。

(3) テーパー関数 $f(R_t)$ の近似的な算定

式(3.2.31)の最大高さ方程式の取り扱いが困難であるのは、第一種 Bessel 関数の零点 $j_{\eta,1}$ を式中含むことが原因である。

そこで、本研究ではテーパー比 R_t を刻み幅 ΔR_t ずつ変化させ、それぞれのテーパー比におけるテーパー関数 $f(R_t)$ の値を離散的に求める。その結果に対して非線形回帰分析を

行って $f(R_t)$ の回帰曲線を得ることにより、任意のテーパーを有するモデルに適用可能で、かつ簡便に利用できる最大高さ算定式を導出する。

いま、式(3.2.35)に示すテーパー関数 $f(R_t)$ について、種々のテーパー比 R_t における値を求めるために、**図-3.2.5**に示す Model 1 と Model 3 を用いた検討を行う。Model 3 は Model 1 と等しい体積 V ・最大高さ L_c ・弾性係数 E を有しているものとし、固定端半径 r_L および自由端半径 r_0 、密度 ρ は異なるものとする。

ここで、等体積・等高条件より、Model 1 の固定端半径 r_{L1} は Model 3 の固定端半径 r_{L3} を用いて次式で与えられる。

$$r_{L1} = \sqrt{\frac{3}{1 + R_t + R_t^2}} r_{L3} \quad (3.2.36)$$

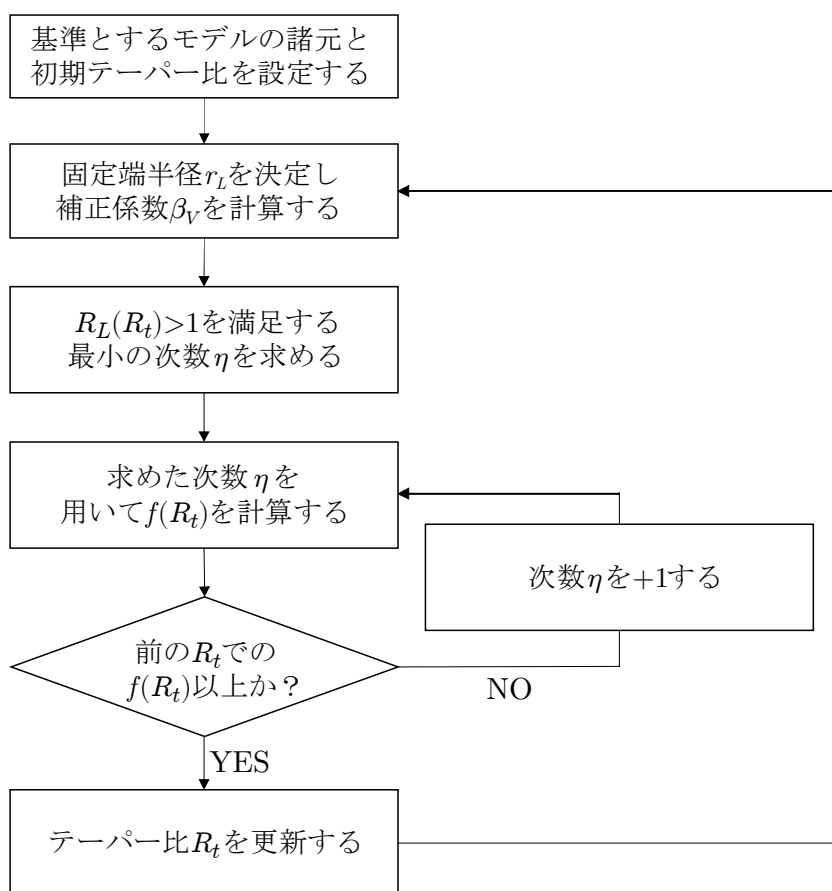
図-3.2.6 には、各テーパー比 R_t におけるテーパー関数 $f(R_t)$ を求める手順について示す。まず、基準となる Model 3 の固定端半径 r_{L3} と最大高さ L_{c3} 、テーパー比 R_t の刻み幅 ΔR_t を設定する。これらを用いて初期テーパー比 $R_t = 1 - \Delta R_t$ 、Model 1 の固定端半径 r_{L1} 、式(3.2.11)の補正係数 β_V を計算する。

次に、**図-3.2.4** の Model 1 と Model 2 の最大高さの比較から考えられる最大高さ比 $R_L(R_t) \geq 1$ の制約条件を式(3.2.33)に考慮すると、次式が得られる。

$$(1 - R_t) \left(\frac{(\eta + 10^{-5})^2 - 9}{32R_t\beta_V} \right)^{1/3} \geq 1 \quad (3.2.37)$$

式(3.2.37)を満足する最小の η を求め、それを式(3.2.35)に適用してテーパー関数 $f(R_t)$ を計算する。テーパー関数 $f(R_t)$ が得られたら、テーパー比 R_t を更新して以上の計算を繰り返す。なお、式(3.2.35)から求められる $f(R_t)$ は、機械的制約条件を踏まえるとテーパー比 R_t について単調減少でなければならない。そのため、この条件を満たさないときには、式(3.2.37)から求められる第一種 Bessel 関数の次数 η を、単調減少条件を満足するまで増やす操作を行う。

また、式(3.2.35)で与えられるテーパー関数 $f(R_t)$ においてテーパー比 $R_t = 1$ とすると $f(1) = 0$ となる。ここで、式(3.2.34)において $f(1) = 1$ であれば Karman and Biot が円柱モデルに対して導出した式とまったく等価となり、円錐・円錐台・円柱モデルに統一的に適用可能な最大高さ算定式が導出できるため、式(3.2.11)の補正係数 β_V は、最大高さ算定式において $R_t = 1$ のとき $f(1) = 1$ を与えるように決定することとする。なお、テーパー関数 $f(R_t)$ の計算における最初の単調減少判定では、 $f(1 - \Delta R_t) > 1$ を満足すれば良いものとする。

図-3.2.6 テーパー関数 $f(R_t)$ を算定するためのフローチャート

(4) 最適刻み幅 $\Delta R_{t(opt)}$ の導入

前項の手順をテーパー比 $0 < R_t < 1$ の範囲内で繰り返すことにより、テーパー関数 $f(R_t)$ が離散的に求められ、その結果から最大高さ算定式を得ることができる。しかしながら、自由端境界条件を考慮せず、固定端境界条件のみを考えて第一種 Bessel 関数の次数における式(3.2.29)の整数条件式を設けることで定式化を行った本研究の場合には、後述する理由により最適な刻み幅 $\Delta R_{t(opt)}$ について検討する必要がある。ここでは、前項に示したテーパー関数 $f(R_t)$ の計算方法を用いて種々の刻み幅 ΔR_t における最大高さ比 $R_L(R_t)$ およびテーパー関数 $f(R_t)$ の挙動を調べ、その結果から最適であると考えられる刻み幅 $\Delta R_{t(opt)}$ を決定する。

まず、図-3.2.5 に示した Model 1 は、テーパー比 R_t の減少に伴って、すなわち先細りが鋭くなるにつれて最大高さ L_{c1} が大きくなると予想される。このことから、式(3.2.33)、(3.2.35)より最大高さ比 $R_L(R_t)$ およびテーパー関数 $f(R_t)$ はともにテーパー比 R_t について単調減少かつ常に 1 以上の値であることが求められる。以上の要求を満足し、かつ計算点が最も多くなる刻み幅 ΔR_t を最適刻み幅 $\Delta R_{t(opt)}$ であると定義する。

ここで、刻み幅 ΔR_t を極めて細かくすれば厳密な $f(R_t)$ を得ることができ、そのときの刻み幅 ΔR_t を最適刻み幅 $\Delta R_{t(opt)}$ とすれば良いように考えられるが、これは誤りである。その理由は、テーパー関数 $f(R_t)$ と最大高さ比 $R_L(R_t)$ は式(3.2.32)、(3.2.34)から見て等価

な関数であるように見えるが、式(3.2.33), (3.2.35)を見ると分かるように、これらは異なる関数であり、最大高さ比 $R_L(R_t)$ は Karman and Biot が円柱モデルにおいて導出した最大高さ理論式と、式(3.2.22)および式(3.2.29)の整数条件式から得られたものであるのに対し、テーパー関数 $f(R_t)$ は本研究の定式化により導出され、第一種 Bessel 関数の零点を式中含んでいる。これらの関数は式(3.2.29)の整数条件を導入したことにより同一の η を用いても両者の値は等しくなるとは限らず、特に刻み幅 ΔR_t が細くなるほど両者の差が顕著になる。このような場合にテーパー関数 $f(R_t)$ と最大高さ比 $R_L(R_t)$ が同時に単調減少条件を満足しないことがあるため、最適刻み幅 $\Delta R_{t(opt)}$ に関する検討が必要となる。

以上の問題を踏まえ、**図-3.2.6**の手順に準拠してテーパー関数 $f(R_t)$ のみ単調減少条件を必ず満足するような数値計算プログラムを Mathematica 上で作成し、そのとき最大高さ比 $R_L(R_t)$ が単調減少条件を満足するか判定する。これを確認するために次の関数を定義し、その挙動を調べることで最適刻み幅 $\Delta R_{t(opt)}$ を決定する。

$$\Delta R_L(R_t) = R_L(R_t + \Delta R_t) - R_L(R_t) \quad (3.2.38)$$

式(3.2.38)が常に負の値をとるとき、最大高さ比 $R_L(R_t)$ が単調減少条件を満足する。

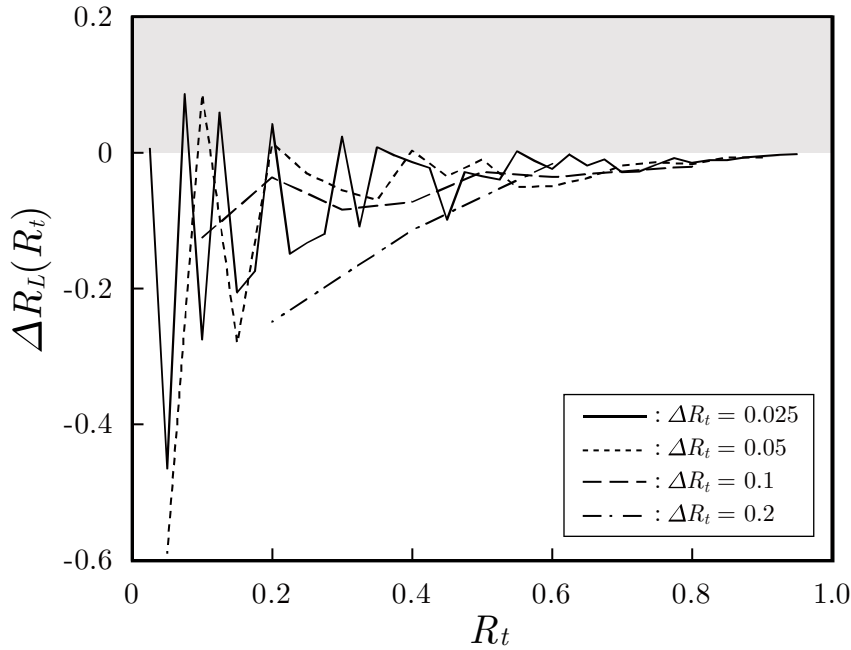


図-3.2.7 種々の刻み幅 ΔR_t における単調減少条件の判定

図-3.2.7 には、各刻み幅 ΔR_t において、 $\Delta R_L(R_t)$ が単調減少条件を満足するかを調べた結果を示す。縦軸に $\Delta R_L(R_t)$ 、横軸にテーパー比 R_t をとって表したものであり、実線が $\Delta R_t = 0.025$ 、点線が $\Delta R_t = 0.05$ 、破線が $\Delta R_t = 0.1$ 、一点鎖線が $\Delta R_t = 0.2$ を示している。図より、刻み幅 $\Delta R_t = 0.02, 0.05$ ではテーパー比 $R_t = 0 \sim 0.4$ において $\Delta R_L(R_t)$ が正となる点があり、最大高さ比 $R_L(R_t)$ の単調減少条件を満足していないのに対し、刻み

幅 $\Delta R_t = 0.1, 0.2$ ではどのテーパー比においても単調減少条件を満足していることが分かる．以上より，テーパー関数 $f(R_t)$ の理論解を求めるための最適刻み幅は， $\Delta R_{t(opt)} = 0.1$ とする．

3.2.6 テーパー形状と自重座屈に対する最大高さ式

本節では，テーパーを有する樹木の自重座屈に対する最大高さ方程式について，前節の方法に基づき離散的に解を求め，それを用いて Dargahi ら [15] の方法により得られる有限要素解との比較検証を行う．また，理論解の計算結果に対して非線形回帰分析を行い，任意のテーパーを有するモデルに適用可能な最大高さ算定式を求める．

(1) テーパー関数推定のための計算モデル

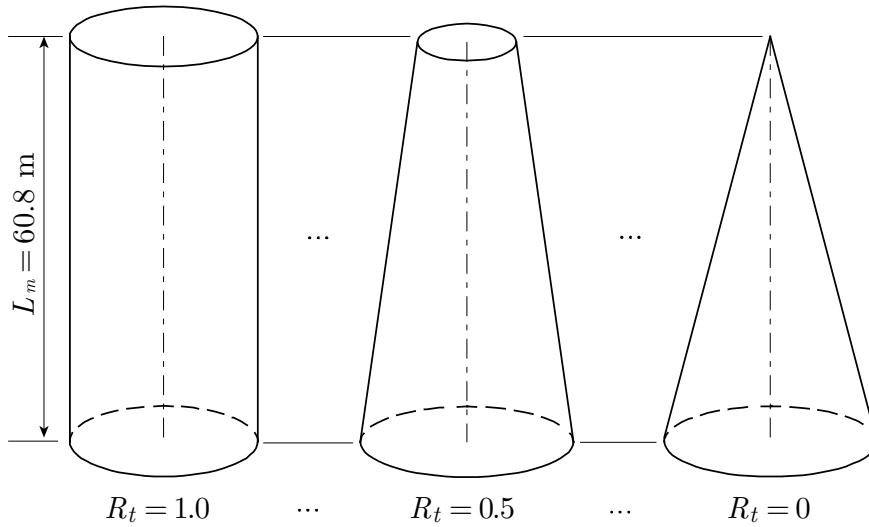


図-3.2.8 数値計算で用いる計算モデル

計算モデルは，図-3.2.8 に示すような円柱・円錐台・円錐モデルであり，円錐台と円錐モデルの固定端半径 r_L は円柱モデルとの等体積・等高条件を満足するように決定する．基準とする円柱モデルの諸元は Niklas [16] および Adam [17] が計算例で示したものを参考とし，固定端半径 $r_L = 0.23$ m，モデル密度 $\rho_m = 526$ kg/m³，弾性係数 $E = 1.1 \times 10^{10}$ kg/m²とする．モデル高さは Karman and Biot の式より得られる $L_m = 60.8$ mとし，有限要素解析ではテーパー比は $R_t = 0, 0.1, \dots, 1.0$ の 11 ケースについて検討する．境界条件は式(2.1.16)に示したものと同様であり，有限要素解析における使用要素は Dargahi らの方法と同様にソリッド要素（四面体一次要素）を用いる．なお，要素サイズは 100 mm とし，ポアソン比は 0.3 とする．

また，理論解の計算に用いる固定端半径および材料定数は有限要素解を求めるものと同様であるが，完全な円柱・円錐モデルについては計算できないため，テーパー比は $R_t = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ の 9 ケースについて検討を行う．式(3.2.11)の補正係数 β_V は，後述する最大高さ算定式において $R_t = 1$ のとき $f(R_t) = 1$ の条件を満足するように決定する．

(2) 理論解の計算結果および最大高さ算定式の導出

本研究では、前章で述べた方法によりテーパー比 $R_t = 0.1, 0.2, \dots, 0.9$ におけるテーパー関数 $f(R_t)$ の理論解を求めるが、この方法では円柱および円錐モデルの最大高さを計算することが出来ない。これは、微分方程式が特異点を持たないようにテーパー比 R_t の値域を設定し定式化を行ったためであり、さらに式(3.2.29)の整数条件の導入により最適刻み幅 $\Delta R_{t(opt)}$ を定義して数値計算を行う必要があるため、理論解は $\Delta R_{t(opt)}$ の間隔で離散的に得られることとなる。また、この段階で式(3.2.11)の補正係数 β_V を特定の値に決定することは不可能である。

そこで、種々の適当な補正係数 β_V を用いて理論解を試行的に求めた結果、理論解がテーパー比 R_t について曲線的な変化を示す性質が明らかとなった。この性質を利用し、離散的に求めた理論解に対して R 3.5.1 を用いた非線形回帰分析を実施することで、理論解の回帰曲線を求めることを考える。ある適当な β_V におけるテーパー関数の理論解を求め、それに対して非線形回帰分析を行った結果から得られる回帰曲線がテーパー比 $R_t = 1$ で $f(R_t) = 1$ の条件を満足するとき、その β_V を最適な β_V と定義する。前述の手順を繰り返すことで最適な β_V を決定し、任意のテーパーを有するモデルに統一的に適用可能な最大高さ算定式を求める。なお、本研究で実施する非線形回帰分析では、最大高さを簡単な形で記述でき、かつ理論解の曲線的性質を表現できるよう、次に示す形の回帰モデルを仮定する。

$$\text{累乗モデル: } f(R_t) = P_1 R_t^{P_2} \quad (3.2.39)$$

$$\text{多項式モデル: } f(R_t) = P_3 R_t^2 + P_4 R_t + P_5 \quad (3.2.40)$$

ここに、 $P_1, P_2, \dots, P_5$ は回帰係数であり、R 3.5.1 を用いた非線形回帰分析によって各係数を決定する。

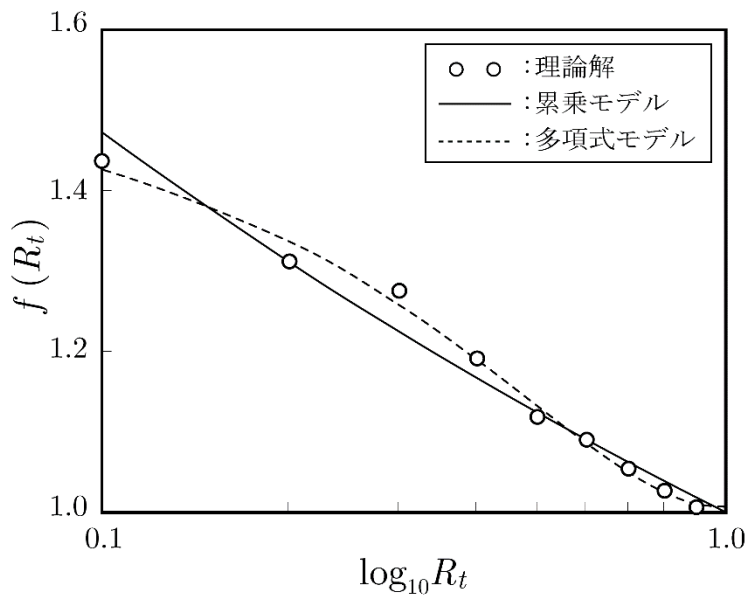


図-3.2.9 テーパー関数 $f(R_t)$ の計算結果と回帰モデル

以上の方法により種々の補正係数 β_V における理論解を求め、理論解および $R_t = 1$ のとき $f(R_t) = 1$ を満足する最大高さ算定式を導出した結果を図-3.2.9に示す。縦軸にテーパー関数 $f(R_t)$ 、横軸にテーパー比 R_t の対数をとって示したもので、○印が理論解、実線が累乗モデルの最大高さ算定式、点線が多項式モデルの最大高さ算定式を表す。

図の結果は、補正係数 $\beta_V(x)$ において $x = L_c/3.16$ を用いたものであり、 x に適当な定数ではなく最大高さ L_c を定数で除した形を用いているのは、この操作によって補正係数 β_V がテーパー比 R_t のみで変化する関数となり、 β_V が計算モデルの形状に依存しなくなるためである。これらの回帰モデルに基づき、R 3.5.1を用いて回帰分析を行った結果について表-3.2.1に示す。

表より、各パラメータは $P_1 = 1$, $P_2 = -1/6$, $P_3 = 1/2$, $P_4 = -1$, $P_5 = 3/2$ のように得られ、最も p 値が大きかった P_3 の p 値は 6.29×10^{-4} であった。このことから、全ての回帰パラメータの p 値は十分に小さく、全パラメータは有意であると言える。よって、テーパー関数 $f(R_t)$ の回帰モデルとして次式が得られる。

$$\text{累乗モデル} : f(R_t) = R_t^{-1/6} \quad (3.2.39)$$

$$\text{多項式モデル} : f(R_t) = \frac{1}{2}R_t^2 - R_t + \frac{3}{2} \quad (3.2.40)$$

表-3.2.1 非線形回帰分析の結果

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
推定値	1	-1/6	1/2	-1	3/2
p 値	1.5×10^{-11}	7.8×10^{-7}	6.3×10^{-4}	1.6×10^{-5}	2.2×10^{-10}

以上より、式(3.2.39)または式(3.2.40)を次式に適用することで、テーパーを考慮した樹木の最大高さ算定式が得られる。

$$L_c = f(R_t) \left(C \frac{E}{\gamma} r_L^2 \right)^{1/3} \quad (3.2.41)$$

なお、累乗モデルではテーパー比 R_t が0に近づくと無限大に発散するため、先端が極めて尖った幹 ($R_t = 0$) を有する樹木における最大高さの計算には妥当でないことに留意する必要がある。

(3) 樹木のテーパー形状が最大高さに与える影響

前項にて導出した任意のテーパー比に対応する最大高さ算定式に基づき、樹木のテーパーが最大高さに与える影響について考察を行う。

まず、式(3.2.41)の最大高さ算定式は、Karman and Biot が円柱モデルに対して導出した式(2.1.49)の自重座屈に対する最大高さ理論式にテーパーの影響を考慮した形式とな

っており、円柱モデルと同様に最大高さは固定端半径 r_L の $2/3$ 乗に比例することが分かる。この法則は、既に述べたように McMahon が 多様な樹木に当てはまることを明らかにしていることから、およそ妥当なものであると考えられる。また、式(3.2.39)の累乗モデルは最大高さ L_c がテーパー比 R_t の $1/6$ 乗に反比例することを示しており、累乗モデルの非線形回帰分析の結果より得られた p 値は P_1 で 1.46×10^{-11} 、 P_2 で 7.79×10^{-7} であったことから、回帰モデルの妥当性は十分であると判断できることを踏まえると、この法則はおよそ妥当なものではないかと考えられる。

次に、Karman and Biot の式には含まれないテーパー比 R_t の観点からみると、テーパー比 R_t が小さくなるほど最大高さが大きくなることを示している。よって、樹木はテーパー形状を有することにより自重を削減し、高く大きく伸びることを実現していると考えられる。さらに、種々の樹木において同じ高さを実現する場合を考えると、テーパー比 R_t が小さくなるほど要求される弾性係数 E が小さくなることや、より大きな単位体積重量 γ を許容できるようになることが分かる。このことは、生育環境下に養分が少なく十分な強度発現が難しい場合や、成長方向に対して垂直な荷重に抵抗するために大きな重量を必要とする場合においても、テーパーを巧みに調節することにより成長の上で必要な樹高を確保できることを示していると考えられる。以上の結果は、テーパー形状が種々の生育環境に多種多様なアプローチから適応することを実現している可能性を示唆するものである。

(4) 有限要素解析を用いた樹木のテーパーを考慮した最大高さの算出

本研究では、ANSYS を用いて図-3.2.8 に示すような円錐・円錐台・円柱モデルの自重座屈に対する最大高さの有限要素解を求め、導出した理論解との比較検証を行う。しかしながら、モデルを作成する段階で高さを指定する必要があるため、有限要素解析では直接的に最大高さを得ることが出来ない。そこで、以下に示す手順で最大高さ L_c を求める。

まず、自重座屈解析を行うモデルを作成する。基準とする円柱モデルを設定し、各テーパー比 R_t について円柱モデルとの等体積・等高さ条件を満足するような固定端半径 r_L と高さ L_m を有するモデルを作成する。

次に、作成したモデルにおいて自重座屈解析を実行すると、次式で定義される座屈荷重係数 λ_q が得られる。

$$\lambda_q = \frac{\rho_c V_m g}{\rho_m V_m g} = \frac{\rho_c}{\rho_m} \quad (3.2.42)$$

ここに、 ρ_c は限界座屈密度、 ρ_m はモデル作成時に指定した密度、 V_m はモデルの体積を表す。なお、座屈荷重係数 λ_q が $0 < \lambda_q \leq 1$ の範囲にあるとき座屈が発生する。解析により座屈荷重係数 λ_q を得るとともに、これを式(3.2.42)に適用して限界座屈密度 ρ_c を求め、次式で定義される限界自重座屈荷重パラメータ λ_{qc} を計算する。

$$\lambda_{qc} = \frac{\rho_c A_L g L_m^3}{EI_L} \quad (3.2.43)$$

限界自重座屈荷重パラメータ λ_{qc} は Dargahi らが示した無次元パラメータであり、 A_L 、 I_L はそれぞれモデル底面 ($x = L_c$) における断面積と断面二次モーメントを表す。なお、式(3.2.43)の λ_{qc} はモデル高さ L_m を座屈が生じる前後で不変のものと考え、密度 ρ_m のみが増加して限界密度 ρ_c に達し座屈が生じた状態を与えるものである。

ここで、密度 ρ_m を座屈が生じる前後で不変のものと考え、高さ L_m が徐々に増加して最大高さ L_c に達し座屈が発生した状態の限界自重座屈荷重パラメータ λ_{qc} を求める。このときの λ_{qc} は式(3.2.43)において $\rho_c = \rho_m$ 、 $L_m = L_c$ とすればよいから、次式で与えられることとなる。

$$\lambda_{qc} = \frac{\rho_m A_L g L_c^3}{E I_L} \quad (3.2.44)$$

以上より、式(3.2.43)、(3.2.44)の λ_{qc} を等しいものとすれば、有限要素法による最大高さ L_c は次式により計算できる。

$$L_c = \left(\frac{\rho_c}{\rho_m} \right)^{1/3} L_m = \lambda_q^{1/3} L_m \quad (3.2.45)$$

なお、用いる諸元は 3.2.6 節の(1)に示した通りである。

(5) 理論解と有限要素解の比較検証

図-3.2.10 には、本研究の検討により得られた円錐・円錐台・円柱モデルにおける自重座屈に対する最大高さの理論解、Dargahi らの自重のみを考慮する場合の方法により得られる有限要素解の計算結果を示す。

図は縦軸に最大高さ L_c 、横軸にテーパー比 R_t をとって表したもので、○印が理論解、△印が有限要素解、実線が累乗モデルの算定式、点線が多項式モデルの算定式による計算結果を示している。○印の理論解と△印の有限要素解を比較した結果より、種々の近似および条件式を導入して離散的に計算された理論解と Dargahi らが確立した方法から得られた有限要素解の計算結果は、テーパー比 $R_t = 0.1 \sim 0.9$ の円錐台モデルの範囲内では概ね一致していることが分かる。また、テーパー比 $R_t = 0$ となる円錐モデルと、 $R_t = 1$ となる円柱モデルについて、円錐および円柱における計算が可能な多項式モデルの算定式から得られる結果と有限要素解の比較を行ってみると、 $R_t = 1$ となる円柱モデルでは類似した結果を示しているが、 $R_t = 0$ となる円錐モデルで、他のテーパー比のケースと大きく離れた値が得られていることが分かる。

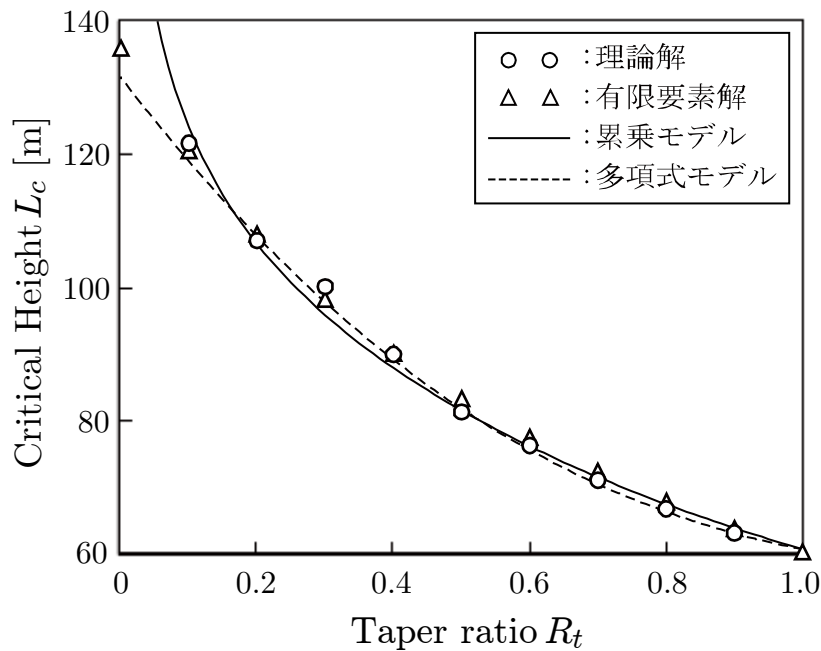


図-3.2.10 最大高さの理論解と有限要素解の比較

3.2.7 本節のまとめ

本節では、樹木のテーパーが最大高さに与える影響を明らかにするために、テーパーを有する樹木の最大高さの理論解を求め、これを用いて各モデルに統一的に適用できる最大高さ算定式を導出するとともに、算定式から推測される樹木の形態が有する合理性について考察を行った。また、本研究の理論解と有限要素解の比較検証を行った結果より、得られた知見を次に示す。

- ① 本研究の理論解より導出された算定式から、樹木の機械的性質のみに基づく自重座屈に対する最大高さは、テーパーの有無にかかわらず固定端半径の $2/3$ 乗に比例し、最大高さは概ねテーパー比の $1/6$ 乗に反比例することが分かった。
- ② 多項式モデルの最大高さ式より、線形テーパーの採用は、テーパーが無い円柱の場合に比べ、最大で約 1.5 倍最大高さが向上させる効果を持つ ($R_t = 0$)。
- ③ 本研究の方法により導出された理論解と、Daghighi らが確立した方法により求められる有限要素解の比較検証を行った結果より、両者の計算結果は概ね一致することが分かった。このことは、種々の数学的・機械的な仮定を導入して得られた本研究の最大高さ式について、その妥当性を保証するものである。

本節で導かれた式は、単に樹木の力学的合理性を説明するだけのものではなく、任意の線形テーパーを有する重い柱の自重座屈に対する最大高さの簡便な算定を可能にするものである。なお、本節に示した成果をまとめたものは、土木学会論文集 A2 (応用力学) にて報告している [研究業績目録, 学術論文(1)]。

3.3 樹木における枝葉重量の巧妙な配分戦略

自然界の樹木は、草本植物よりもはるかに重たい枝葉を有している。しかしながら、現実の樹木は枝葉を生い茂らせながらも、安定して高く大きく成長することを実現している。これは、恒久的に受け続ける重力の影響を踏まえ、樹木が「重量物としての枝葉」を巧みに配分している可能性を示唆するものである。本節では、樹木の枝葉重量および枝葉分布が最大高さに与える影響を解明し、重量分布の巧妙な配分形態を解明する。

3.3.1 計算モデル

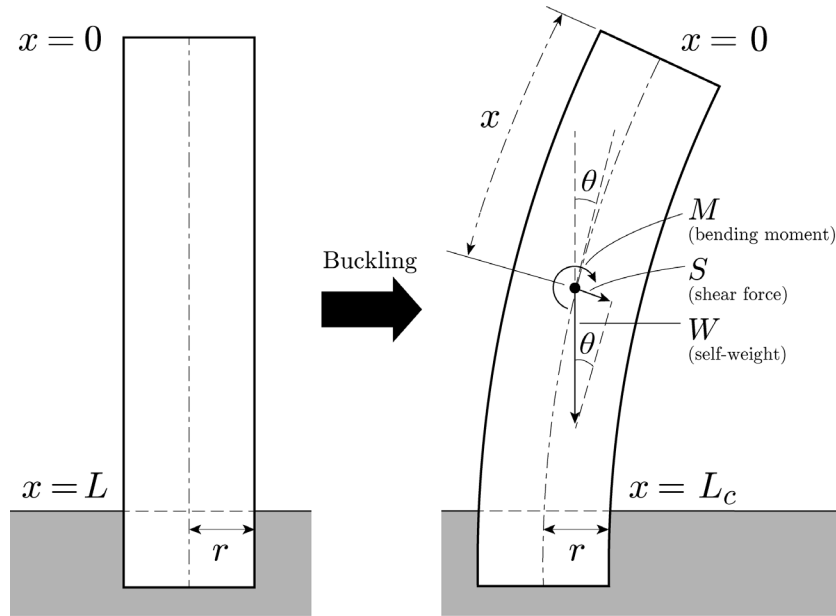


図-3.3.1 計算モデル

計算モデルは、図-3.3.1 に示すような地面側を固定端とする円柱形の片持ち梁であり、座標系や文字の定義は Greenhill [1] や Karman and Biot [13] の計算モデルと全く同じであるが、本節では「密度」の取り扱いが根本的に全く異なる。

既往の研究では、密度は高さ方向に一定であるとして取り扱われてきた（すなわち、 $\rho(x) = \text{const.}$ ）。それに対して、本研究では、樹木の重量分布と最大高さの関係を明らかにするために、密度を高さ方向の関数として取り扱う。本研究で検討する密度関数は、以下に示す4つのモデルである。

$$\text{Model A: } \rho(x) = \left(\frac{n-1}{L_c} x + 1 \right) \rho_0 \quad (3.3.1)$$

$$\text{Model B: } \rho(x) = \left(\frac{1-n}{L_c} x + n \right) \rho_0 \quad (3.3.2)$$

$$\text{Model C: } \rho(x) = \left(\frac{2n}{L_c} x + (1-n) \right) \rho_0 \quad (3.3.3)$$

$$\text{Model D: } \rho(x) = \left(1 - n \cos \left(\frac{\pi x}{L_c} \right) \right) \rho_0 \quad (3.3.4)$$

ここに、 ρ_0 は基準点における密度[kg/m³]、 n は密度分布の形状を支配する無次元パラメータである。図-3.3.2には、それぞれのモデルにおける分布形状の例を示す。

式(3.3.1)の Model A は、上端における密度が一定 ($\rho(0) = \rho_0$) であり、下端の密度が上端の密度の n 倍 ($\rho(L_c) = n\rho_0$) となるモデルである。式(3.3.2)の Model B は、式(3.3.1)の Model A を上限に反転させたものである。そのため、下端における密度が一定 ($\rho(L_c) = \rho_0$) であり、下端の密度が上端の密度の n 倍 ($\rho(0) = n\rho_0$) となるモデルである。よって、両者の n が等しいとき、系全体の総重量も等しくなる。なお、幹に相当する密度が一定であるとする、Model A と Model B における n の値域は、 $0 \leq n \leq 3$ となる。これは、枝の総重量が幹の総重量を超えることがほとんどない事実に基づくものである[17,18]。

式(3.3.3)、(3.3.4)の Model C, D は、高さが不変であるとする、 n が変化しても、系全体が有する総重量は一定となるモデルである。両者の違いは、分布形状が直線か曲線か、という点のみである。また、 $n = 0$ のとき、密度が高さ方向に一定となり、Greenhill や Karman and Biot のモデルに一致する。 $n = -1$ に近づくにつれて上部が重く、 $n = 1$ に近づくにつれて下部が重くなるが、その範囲外では負の密度を持つため、 n の値域は $-1 \leq n \leq 1$ である。表-3.3.1には、以上をまとめたものを示す。

表-3.3.1 検討する密度関数とその数理的条件

モデル名	密度関数	n の値域	密度一定状態の n
Model A	$\rho(x) = \left(\frac{n-1}{L_c}x + 1\right) \rho_0$	$0 \leq n \leq 3$	$n = 1$
Model B	$\rho(x) = \left(\frac{1-n}{L_c}x + n\right) \rho_0$	$0 \leq n \leq 3$	$n = 1$
Model C	$\rho(x) = \left(\frac{2n}{L_c}x + (1-n)\right) \rho_0$	$-1 \leq n \leq 1$	$n = 0$
Model D	$\rho(x) = \left(1 - n \cos\left(\frac{\pi x}{L_c}\right)\right) \rho_0$	$-1 \leq n \leq 1$	$n = 0$

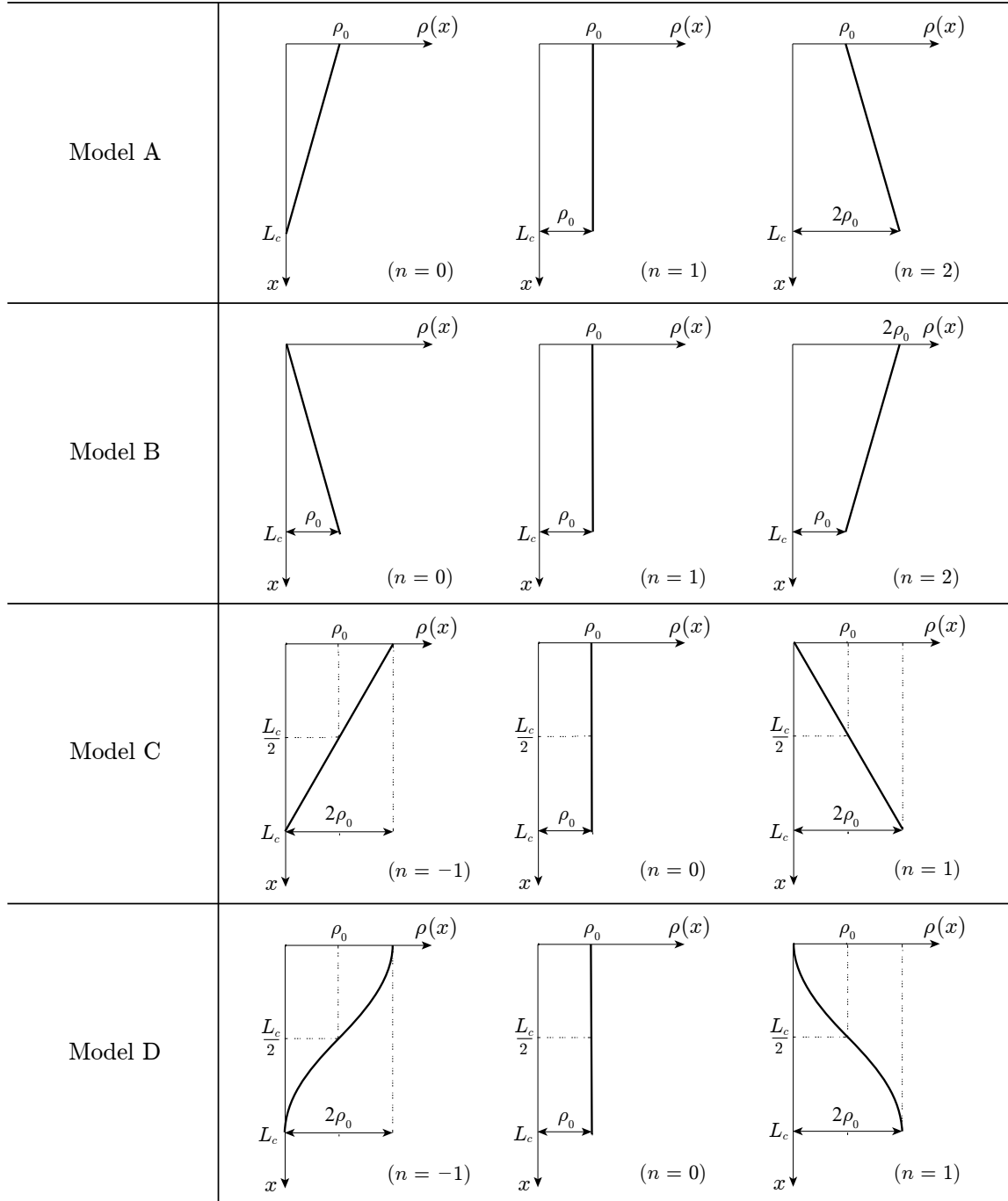


図-3.3.2 検討する密度関数モデルの例

3.3.2 支配方程式の導出

ここでは、前節に示した密度関数を円柱モデルに適用し、そのときの自重座屈に対する最大高さを求めるための支配方程式を導出する。

まず、上端から任意点までの重量 $W(x)$ は、次式で与えられる。

$$W(x) = \iiint_V \rho(x) g \, dV = \int_0^x \rho(x) A g \, dx \quad (3.3.5)$$

このとき、たわみ角を θ とすると、任意点でのせん断力 $S(x)$ は次のようになる。

$$S(x) = W(x) \sin \theta = \int_0^x \rho(x) Ag dx \sin \theta \quad (3.3.6)$$

いま、微小変形の仮定より、 θ が微小であるとする、 $\sin \theta \approx \theta$ が成り立つため、式(3.3.6)は次のように書ける。

$$S(x) \approx \int_0^x \rho(x) Ag dx \theta \quad (3.3.7)$$

ここで、せん断力と曲げモーメントの関係($V = dM/dx$)を用いて、式(3.3.7)および(2.1.3)より次の微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{1}{EI} \int_0^x \rho(x) Ag dx \theta = 0 \quad (3.3.8)$$

式(3.3.8)は、位置 x を独立変数、たわみ角 θ を従属変数とする、二階の線形微分方程式である。ここで、式(3.3.8)の $\rho(x)$ に、式(3.3.1)～(3.3.4)の密度関数を代入して積分する。その結果から得られる式に対し、Karman and Biot と同様に次式を用いて変数変換を行う。

$$\xi(x) = \omega x \quad (3.3.9)$$

ここに、 ω は定数である。

式(3.3.8)に式(3.3.1)～(3.3.4)の密度関数を適用し、式(3.3.9)の変数変換式を用いると、支配方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\text{Model A: } \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \left(\frac{n-1}{2L_c} \frac{\xi}{\omega} + 1 \right) \xi \theta = 0 \quad (3.3.10)$$

$$\text{Model B: } \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \left(\frac{1-n}{2L_c} \frac{\xi}{\omega} + n \right) \xi \theta = 0 \quad (3.3.11)$$

$$\text{Model C: } \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \left(\frac{n}{L_c} \frac{\xi}{\omega} + (1-n) \right) \xi \theta = 0 \quad (3.3.12)$$

$$\text{Model D: } \frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \left(1 - \frac{L_c \omega}{\pi \xi} \sin \left(\frac{\pi \xi}{L_c \omega} \right) \right) \xi \theta = 0 \quad (3.3.13)$$

ここで、支配方程式を最も簡単な形にすることを考えると、 ω は全てのモデルにおいて、いずれも次のように定義される。

$$\omega = \left(\frac{\gamma_0 A}{EI} \right)^{1/3} = \left(\frac{\rho_0 g A}{EI} \right)^{1/3} \quad (3.3.14)$$

なお、この変数変換パラメータは、第二章において示した変数変換パラメータ ω （式(2.1.15)）とほぼ同様の意味を有する。

3.3.3 固有方程式の導出

式(3.3.10)～(3.3.13)の支配方程式の一般解を、Mathematica を用いた級数解法により求める。たとえば、式(3.3.12)の Model C における級数解を求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \theta(\xi) = & \left(1 - \frac{1}{6}\xi^3(n-1) + \frac{1}{180}\xi^6(n-1)^2 + \dots \right) c_1 \\ & + \left(\xi - \frac{1}{12}\xi^4(n-1) + \frac{1}{504}\xi^7(n-1)^2 + \dots \right) c_2 \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

ここに、 c_1, c_2 は任意定数である。

いま、式(2.1.28)に次に示す片持ち梁の境界条件を適用し、最大高さに関する代数方程式を導く。ここで、自由端側の境界条件より、 $c_2 = 0$ となることが分かる。また、固定端側の境界条件を式(3.3.15)に適用すると、非自明解（ $c_1 \neq 0$ である解）を求めるための条件は次のようになる。

$$\left(1 - \frac{1}{6}(\omega L_c)^3(n-1) + \frac{1}{180}(\omega L_c)^6(n-1)^2 + \dots \right) = 0 \quad (3.3.16)$$

よって、自重座屈に対する最大高さの計算は、式(3.3.16)のような高次の代数方程式を満足する最小の正の実数 L_c を求める問題に帰着する。

また、式(3.3.16)は次のように書くこともできる。

$$\left(1 - \frac{1}{6}\xi^3(n-1) + \frac{1}{180}\xi^6(n-1)^2 + \dots \right) = 0 \quad (3.3.17)$$

式(3.3.15)は、 $n = 0$ のとき Karman and Biot の方程式 [13] に一致することが分かる。式(3.3.17)を用いる場合は、これを満足する最小の正の実数 ξ_c を求め、式(3.3.9)および(3.3.14)から最大高さを求めるとよい。

以上を踏まえ、式(3.3.9)、(3.3.14)、(3.3.17)より、最大高さ L_c は次のように書くことができる。

$$L_c = \frac{\xi_c(n)}{(4C)^{1/3}} \left(C \frac{E}{\gamma} r_L^2 \right)^{1/3} \quad (3.3.18)$$

ここに、 C は式(2.1.19)のものと同様の定数である。

式(3.3.18)は、Greenhill および Karman and Biot の最大高さ式に、 n に応じて変化する式(3.3.17)の解 ξ_c を掛けた形で表されている。すなわち、式(3.3.16)を満足する最大高さ L_c を、Greenhill および Karman and Biot の最大高さ式で除すと、 ξ_c の値を計算できる。なお、他のモデルにおいても、式(3.3.18)のように書くことは可能であるが、最大高さに関する高次方程式は、式(3.3.17)のものとは全く異なることに留意すべきである。

3.3.4 セカント法を用いた固有方程式の数値解法

式(3.3.17)のような高次方程式は代数的に解くことが出来ないため、本研究では数値計算により、高次方程式を満足する最小の正実数解を求める。数値計算法には、今後の拡張性を踏まえ、微分が不要であるセカント法を採用する。

その準備として、まず式(3.3.17)を次のように書く。

$$\left(1 - \frac{1}{6}(\omega L_c)^3(n-1) + \frac{1}{180}(\omega L_c)^6(n-1)^2 + \dots\right) = f(L_c) \quad (3.3.19)$$

いま、 L_c の値を増加させて、 $f(L_{c0}) \cdot f(L_{c1}) < 0$ となる区間 $[L_{c0}, L_{c1}]$ を探索する。この L_{c0} と L_{c1} を初期値として、次式を用いた繰り返し計算を行う。

$$L_{c(m+1)} = L_{c(m)} - f(L_{c(m)}) \frac{L_{c(m)} - L_{c(m-1)}}{f(L_{c(m)}) - f(L_{c(m-1)})} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.3.20)$$

なお、収束判定には次の式を用いる。

$$\left| \frac{L_{c(m)} - L_{c(m-1)}}{L_{c(m)}} \right| \leq \epsilon = 1.0 \times 10^{-5} \quad (3.3.21)$$

次に、高次方程式において考慮する級数解の展開次数 N を検討するために、以下の関数を定義する。

$$f_{(N, N+\Delta N)} = \left| \frac{L_{c(N)} - L_{c(N+\Delta N)}}{L_{c(N+\Delta N)}} \right| \quad (3.3.22)$$

ここに、 ΔN は展開次数の増分であり、 $L_{c(N)}$ は展開次数 N を用いた場合に得られる最大高さである。多くの研究では、高さは 10 cm 単位まで測定・計算されている[17,20]。これを踏まえ、項数を決定するための $f_{(N, N+\Delta N)}$ に関する条件には、次の式を用いる。

$$f_{(N, N+\Delta N)} \leq 1.0 \times 10^{-4} \quad (3.3.23)$$

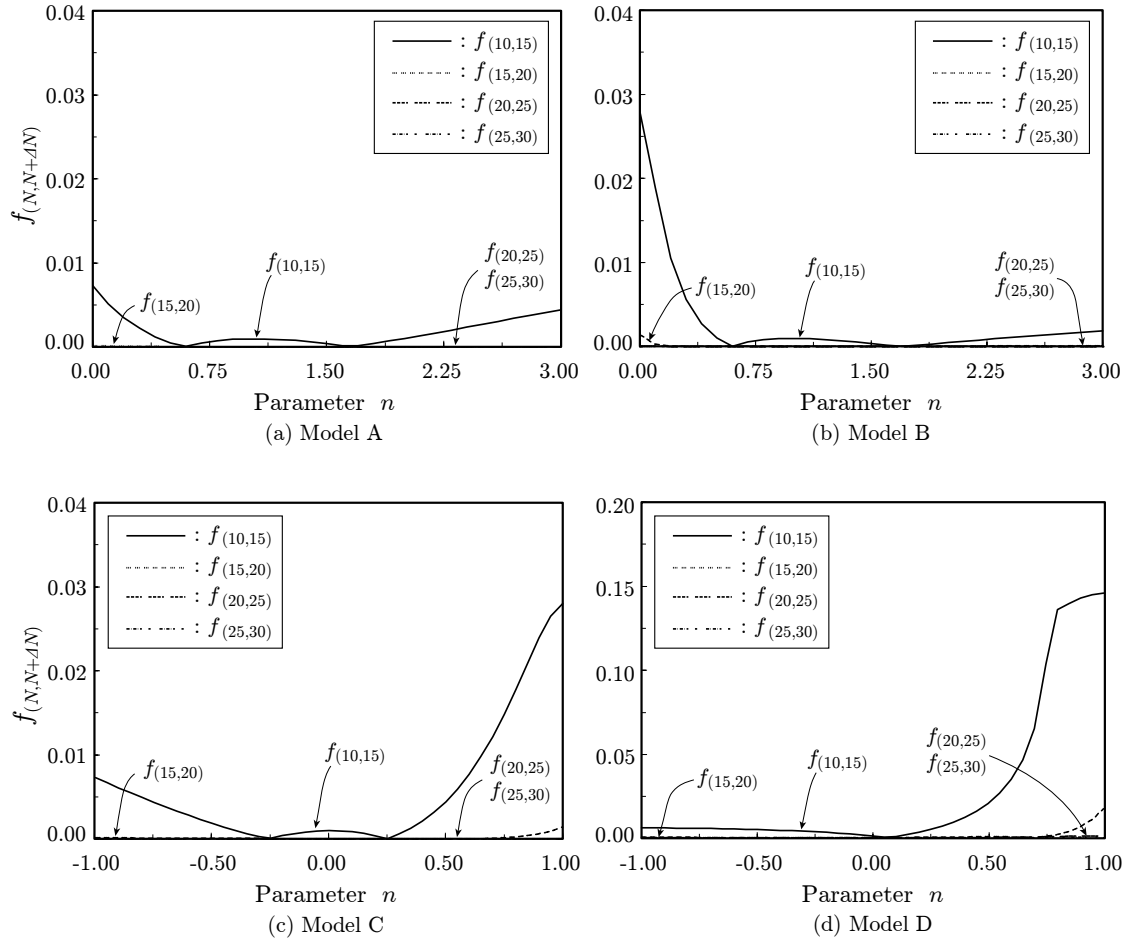


図-3.3.3 各密度モデルにおける展開次数と収束性の関係

これを満足するまで N を ΔN ずつ増加させ、式(3.3.26)を満足する最小の展開次数 N を、本研究で用いる展開次数とする。

以上の方法により、Niklas [16] および Adam [17] が示した物性値に基づき、弾性係数 $E = 1.1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ 、基準密度 $\rho_0 = 526 \text{ kg/m}^3$ 、重力加速度 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ 、半径 $r = 0.23 \text{ m}$ として、収束性の確認を行った結果を図-3.3.3 に示す。

図-3.3.3 は、初期次数 $N_i = 5$ 、増分 $\Delta N = 5$ として、各モデルにおける収束性の検討を行った結果であり、縦軸に収束判定関数 $f_{(N, N+\Delta N)}$ 、横軸にパラメータ n を取って表したものである。図より、全てのモデルにおいて、項数 N の増加により、計算値が収束していくことが確認できる。ただ、密度分布が直線である Model A, B, C に比べ、曲線である Model D は収束性が悪い。実際に、Model A, B, C では、破線で示された $f_{(20,25)}$ で既に式(3.3.23)を満足する収束性が得られる。それに対して、Model D は $f_{(20,25)}$ で式(3.3.23)を満足しない。しかし、一点鎖線で表された $f_{(25,30)}$ では、式(3.3.23)の条件式をすべてのモデルで満足する解が得られる。このことから、 $N = 25$ 以上に設定すると、全てのモデルで十分な収束値が得られると考えられる。よって、級数解の展開次数 N には、 $N = 25$ を用いる。

図-3.3.4 には、展開次数 $N = 25$ を用いて各モデルの最大高さを求めた結果を示す。図は縦軸に最大高さ L_c 、横軸にパラメータ n を取って表したものである。

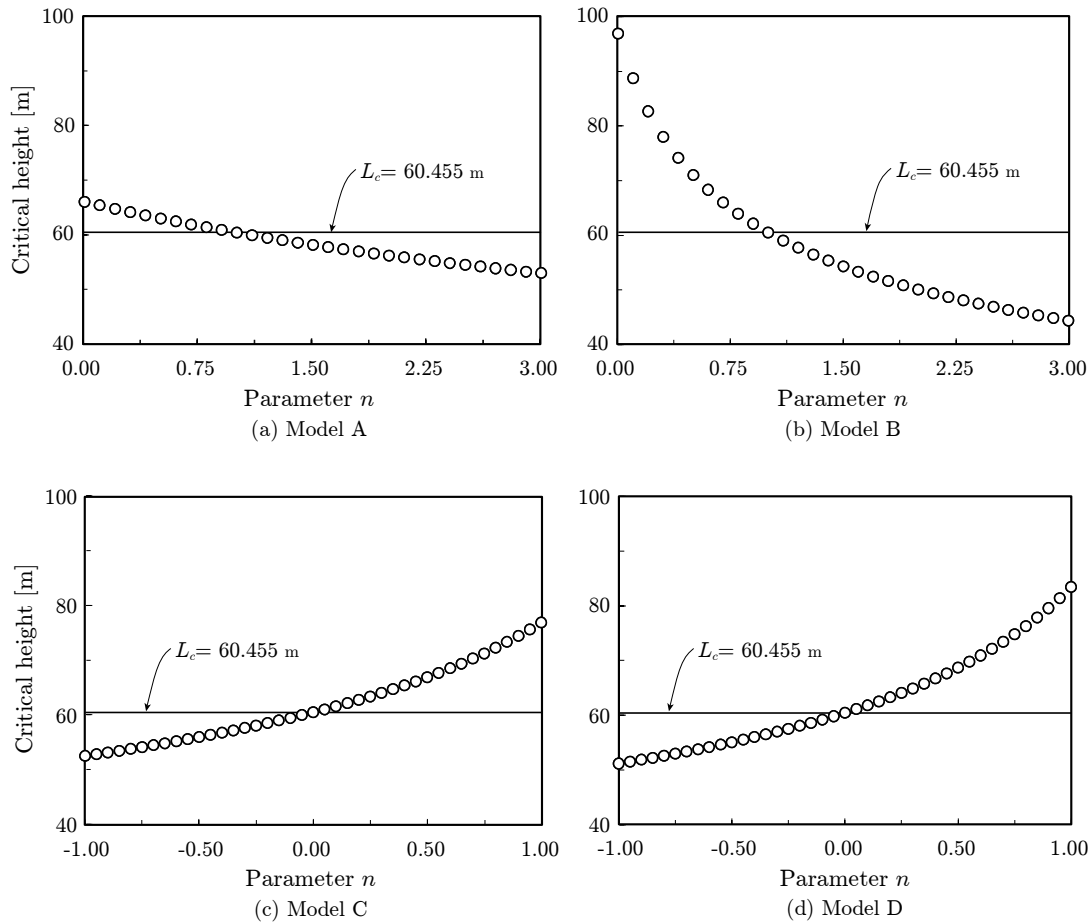


図-3.3.4 重量分布が最大高さを与える影響

まず、Model A では、最大高さ L_c は、パラメータ n に対して緩やかに減少している。それに対して、Model B では、最大高さ L_c がパラメータ n に対して大幅に減少している。両者をより詳しく比較すると、 $0 \leq n < 1$ の区間では Model B の方が高く、 $n = 1$ で両者は一致する。そして、 $1 < n \leq 3$ では Model A の方が高くなる。これは、 $0 \leq n < 1$ の区間では Model A の方が上部に重量が集中し、 $1 < n \leq 3$ の区間では Model B の方が上部に重量が集中するためである。このことは、上部の重量が増加することは、下部の重量が増加することによって最大高さを著しく減少させることを示している。次に、 n によらず総重量が等しい Model C, D では、最大高さ L_c が、パラメータ n の増加に伴って曲線的に増加している。このことは、上部を軽く・下部を重くするように重量物を配分すると、最大高さが飛躍的に大きくなることを意味している。なお、線形である Model C と直線である Model D の違いは、パラメータ n が負の時はほとんどなく、わずかに Model C の方が高い。両者の違いは、パラメータ n の増加に伴って現れはじめ、 n が正のときは Model D の方が高くなる。

また、全てのモデルにおいて、密度が一定となるとき（Greenhill のモデルに一致するとき）、Greenhill の解とほぼ同じ値 $L_c = 60.455$ m が得られている。このことから、支配微分方程式を級数解法で解く場合、項数 $N = 25$ 以上を用いると、厳密に解いた場合と同精度の結果が得られることが分かる。なお、Karman and Boit の解は、 $N = 6$ を用いて導出されたものである。

3.3.5 重量分布が最大高さに与える影響の解明

各モデルにおける最大高さ L_c と密度分布パラメータ n の関係を明確にし、容易に利用可能な最大高さ式を導出するために、次の最大高さ比 $R_L(n)$ を定義する。

$$R_L(n) = \frac{L_c(n)}{L_{cs}} = \frac{L_c(n)}{L_c(0)} \quad (3.3.24)$$

ここに、 $L_c(n)$ はパラメータ n における最大高さ、 L_{cs} は密度一定時の最大高さ（式(2.1.19)または式(2.1.49)）である。すなわち、 $R_L(n) > 1$ ならば、密度一定時よりも最大高さは大きく、 $R_L(n) < 1$ ならば、密度一定時よりも最大高さが小さいことを表す。ここで、式(3.3.9)、(3.3.18)、(3.3.24)より、 ξ_c は n のみで変化する関数であるから、次式が得られる。

$$\frac{\xi_c(n)}{\xi_c(0)} = R_L(n) \quad (3.3.25)$$

いま、密度分布パラメータ n と最大高さ L_c の関係の明確化のために、いくつかの n における $R_L(n)$ の値を離散的に求め、その回帰曲線を得ることを考える。これにより、 ξ_c を簡単な n の関数で表現でき、それを式(3.3.18)に適用することで、最大高さと重量分布の関係を明らかにできる。

本節では、前節と同様に R を用いた非線形最小二乗法による回帰分析を実施する。回帰モデルには以下の式を利用し、有意水準 $\alpha = 0.05$ として統計的検定を行う。

$$\text{Exponential model: } P_1 e^{P_2 n} \quad (3.3.26)$$

$$\text{Linear model: } P_3 n + P_4 \quad (3.3.27)$$

$$\text{Polynomial model: } P_5 n^2 + P_6 n + P_7 \quad (3.3.28)$$

$$\text{Power-law model: } P_8 n^{P_9} \quad (3.3.29)$$

式(3.3.26)、(3.3.29)の Exponential model と Power-law model は、単項式で表される簡単なモデルである。式(3.3.27)、(3.3.28)の Linear model と Polynomial model は、多項式で表されるため、前述のモデルに比べ、より複雑な形となる。特に Polynomial model は二次多項式であり、4つのモデルの中で最も複雑なものとなっている。また、式(3.3.29)の Power-law model では、 $n \leq 0$ のデータに適用できない。そのため、 $n > 0$ のデータのみを利用し、回帰分析を実行する。なお、各モデルの比較については、パラメータ数が異なるため、AIC（赤池情報量規準）を用いて行うものとし、AIC が最小値を示すものを最適な回帰モデルと定義する。

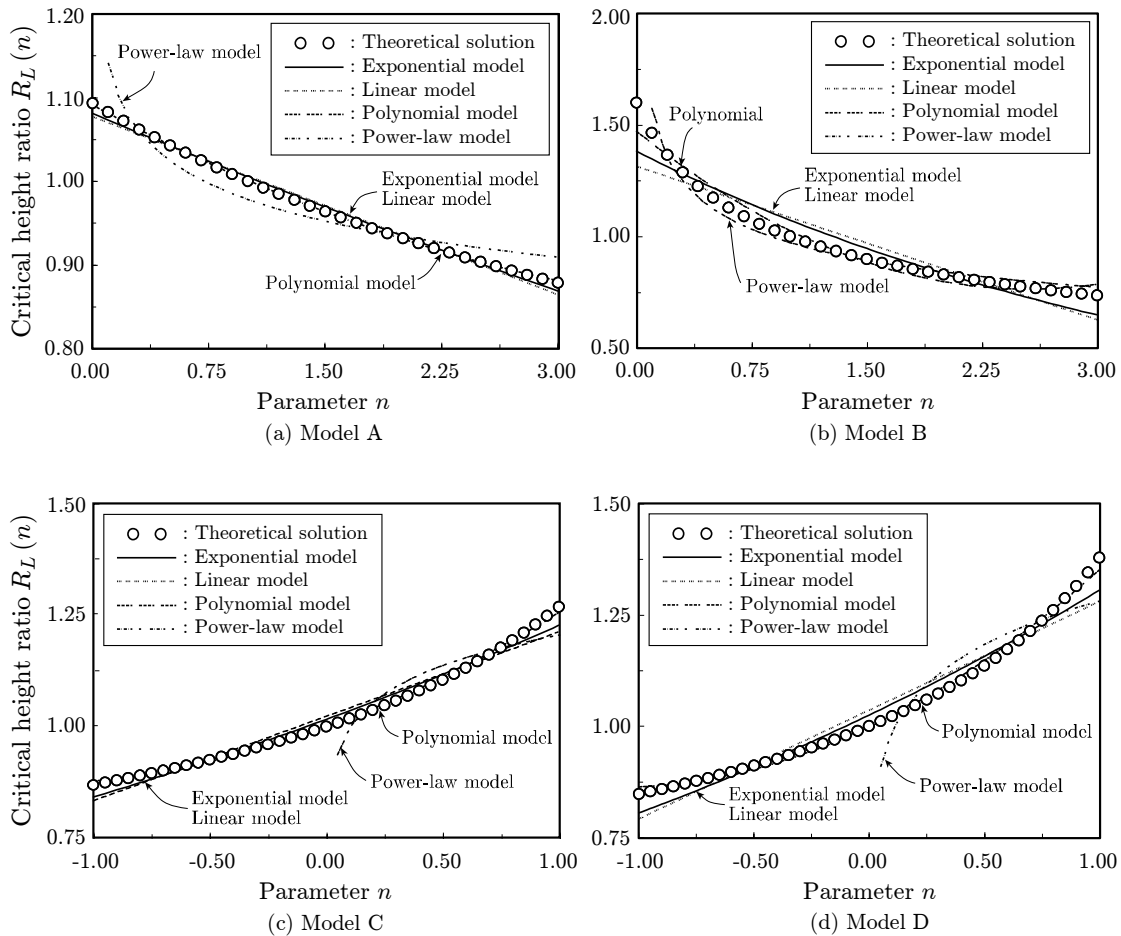


図-3.3.5 最大高さ比と重量分布の関係およびその回帰曲線

図-3.3.5 には、最大高さ比 $R_L(n)$ とパラメータ n の関係、および非線形最小二乗法により得られた回帰曲線をプロットしたものを示す。(a)は Model A, (b)は Model B, (c)は Model C, (d)は Model D の結果を表しており、縦軸に最大高さ比 $R_L(n)$ 、横軸にパラメータ n を取って示したものである。また、図-3.3.2 に、回帰分析の詳細な結果を示している。表より、全ての回帰パラメータの p 値は十分に小さく ($p < 0.05$)、統計的にはこれらの回帰モデルは全て妥当であると言える。

Model A では、パラメータ n の変化に応じて、密度一定の場合に対して 1.09 倍～0.88 倍程度の範囲で最大高さが変化する。また、Power-law model を除く全ての回帰モデルで、理論解とよく一致する解が得られている。AIC (赤池規準) に基づくと、Polynomial model が最も理論解に対する精度が良い。精度と単純性の二つの観点から見ると、Exponential model が良好な回帰モデルである。

Model B では、パラメータ n の変化に応じて、密度一定の場合に対して 1.60 倍～0.73 倍程度の範囲で最大高さが変化する。回帰モデルについては、Polynomial model と Power-law model の二つのモデルで、理論解とよく一致する解が得られている。ただし、Power-law model は $n = 0$ において適用できない。Exponential model と Linear model は、 $n = 0, 3$ の近傍において、理論解との誤差が他の回帰モデルに比べて大きい。AIC に基づくと、Power-law model が最も理論解を有効に表現しているモデルである。

表-3.3.2 Rを用いた回帰分析の詳細な結果

Model A									
回帰モデル	Exponential		Linear		Polynomial			Power-law	
パラメータ	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
推定値	1.081	-0.073	-0.071	1.077	0.010	-1.002	1.091	0.978	-0.067
p 値	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	4.2×10^{-15}
AIC	-2.311×10^2		-2.123×10^2		-3.407×10^2			-1.431×10^2	
Model B									
回帰モデル	Exponential		Linear		Polynomial			Power-law	
パラメータ	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
推定値	1.381	-0.254	-0.230	1.315	0.109	-0.556	1.473	0.972	-0.210
p 値	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	1.1×10^{-11}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}
AIC	-7.314×10^1		-5.800×10^1		-1.078×10^2			-1.115×10^2	
Model C									
回帰モデル	Exponential		Linear		Polynomial			Power-law	
パラメータ	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
推定値	1.016	0.190	0.191	1.023	0.068	0.191	0.999	1.207	0.085
p 値	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	5.6×10^{-8}
AIC	-2.154×10^2		-1.912×10^2		-3.196×10^2			-7.314×10^1	
Model D									
回帰モデル	Exponential		Linear		Polynomial			Power-law	
パラメータ	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
推定値	1.025	0.243	0.245	1.036	0.110	0.245	0.998	1.282	0.115
p 値	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	1.3×10^{-7}
AIC	-1.753×10^2		-1.513×10^2		-2.620×10^2			-5.823×10^1	

Model C では、パラメータ n の変化に応じて、密度一定の場合に対して 1.25 倍～0.87 倍程度の範囲で最大高さが変化する。また、Power-law model を除く全ての回帰モデルで、理論解とよく一致する解が得られている。Power-law model は 0 以下の n に対応しておらず、理論解との誤差も他の回帰モデルに比べて大きい。AIC に基づくと、Polynomial model が最も有効なモデルである。

Model D では、密度一定の場合に対して 1.38 倍～0.85 倍程度の範囲で最大高さが変化する。回帰モデルについては、Power-law model を除く全てのモデルで、理論解とよく一致する解が得られている。Model C と同様に、Power-law model は 0 以下の n に対応しておらず、理論解との誤差も他の回帰モデルに比べて大きい。ここでも、Exponential model は良好な精度と単純性を有している。

ここで、Greenhill のように簡潔なアロメトリー則を導くために、表-3.3.3 に各密度モデルにおいて最適と考えられる回帰モデルを、適当な分数で簡単に表現したものを示す。それぞれの式における適用限界は、表に示す通りである。

表-3.3.3 重量分布を考慮した最大高さ算定式

Model	最大高さ式	適用限界
Model A	$L_c = \frac{11}{10} e^{-3n/40} \left(C \frac{E}{\gamma} r_L^2 \right)^{1/3}$	$0 \leq n \leq 3$
Model B	$L_c = n^{-1/5} \left(C \frac{E}{\gamma} r_L^2 \right)^{1/3}$	$0 < n \leq 3$
Model C	$L_c = e^{n/5} \left(C \frac{E}{\gamma} r_L^2 \right)^{1/3}$	$-1 \leq n \leq 1$
Model D	$L_c = e^{n/4} \left(C \frac{E}{\gamma} r_L^2 \right)^{1/3}$	$-1 \leq n \leq 1$

3.3.6 実際の樹木への適用：枝葉と幹の重量バランスの導入

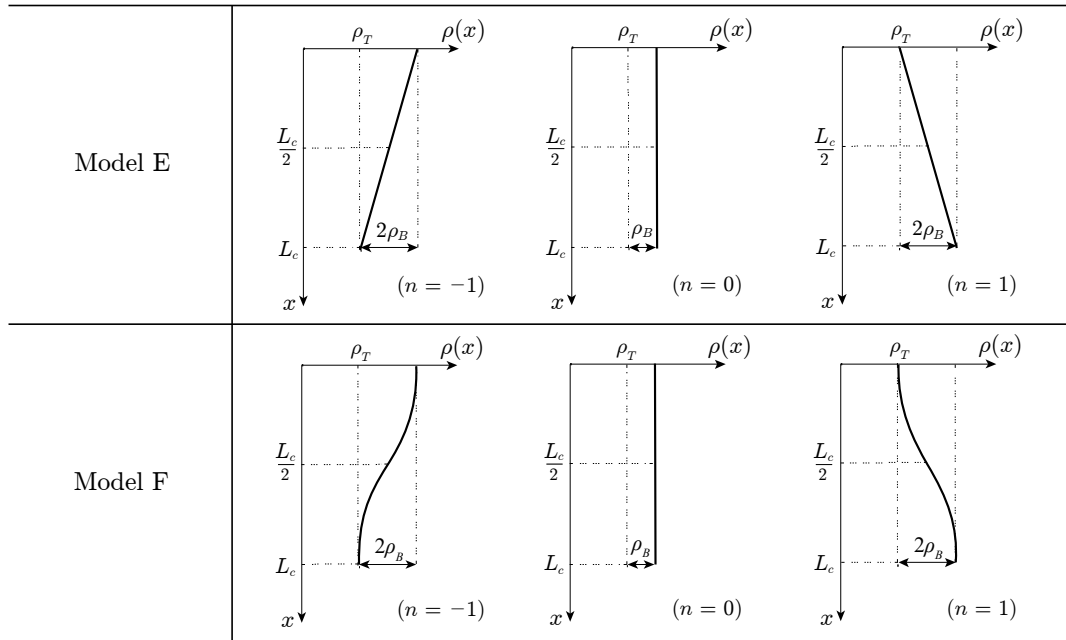


図-3.3.6 実際の樹木を検討するための密度関数モデル

ここでは、本研究の方法を用いて導出した最大高さ式を用いて、樹木の最大高さに重量分布が与える影響を検討する．使用する密度モデルは、Model C, D に幹の重量を加えた次のモデルを用いる．なお、その分布例は図-3.3.6 に示す通りである．

$$\text{Model E: } \rho(x) = \left(\frac{2n}{L_c} x + (1 - n) \right) \rho_B + \rho_T \quad (3.3.30)$$

$$\text{Model F: } \rho(x) = \left(1 - n \cos \left(\frac{\pi x}{L_c} \right) \right) \rho_B + \rho_T \quad (3.3.31)$$

ここに、 ρ_B は枝葉の密度、 ρ_T は幹の密度を表す．本研究では、その密度比を $\rho_B/\rho_T = R_W$ と置く．他モデルと同様の手順により、両者の支配微分方程式は次のように得られる．

$$\text{Model E: } \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \left(\left(\frac{n}{L_c} \xi + (1-n) \right) R_W + 1 \right) \xi \theta = 0 \quad (3.3.32)$$

$$\text{Model F: } \frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \left(\left(1 - \frac{L_c}{\pi} \frac{\omega}{\xi} \sin \left(\frac{\pi}{L_c} \xi \right) \right) R_W + 1 \right) \xi \theta = 0 \quad (3.3.33)$$

なお、本節の検討では、最大高さ比 $R_L(n, R_W)$ を次のように定義する。

$$R_L(n, R_W) = \frac{L_c(n, R_W)}{L_c(n, 0)} \quad (3.3.34)$$

上式の $L_c(n, 0)$ は、枝葉重量をゼロとしたときの最大高さであり、これは n の値によらず一定値を取る。これらを用いて、同様の方法によって幹と枝の重量バランスおよび枝葉の重量分布が最大高さに与える影響を明らかにする。

図-3.3.7 には、実際の樹木への応用例として、枝葉重量と幹重量のバランス、およびその分布が最大高さに与える影響を検討した結果を示す。(a)は Model E, (b)は Model F の結果を示している。

図より、どちらのモデルにおいても、 n の増加に伴って最大高さは大きくなっている。 R_W に着目すると、同じ枝葉量を持つ場合でも、上を軽くする方が最大高さを大きくすることが可能である。Model E と F を比較すると、上側が軽い場合には二次関数分布の方が有利であり、上側が重い場合には一次関数分布の方が有利となる。

ここで、King らの重量比に関する調査[18]、平田らの重量分布に関する研究[19]に基づく、実在の樹木の R_W および n の値域は、 $0.1 \leq R_W \leq 0.6$ および $0 \leq n \leq 1$ である。いま、この範囲内で $R_L(n, R_W)$ の最大・最小値を求めると、次のようになる。

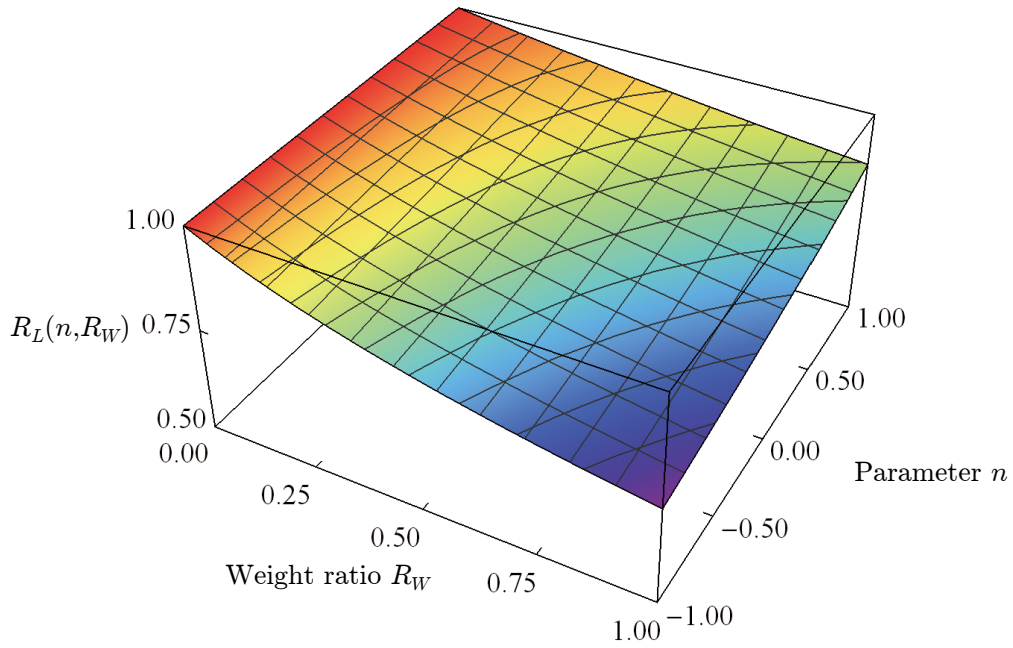
$$\text{Model E: } R_{L_{max}} = 0.985, \quad R_{L_{min}} = 0.855 \quad (3.3.35)$$

$$\text{Model F: } R_{L_{max}} = 0.988, \quad R_{L_{min}} = 0.855 \quad (3.3.36)$$

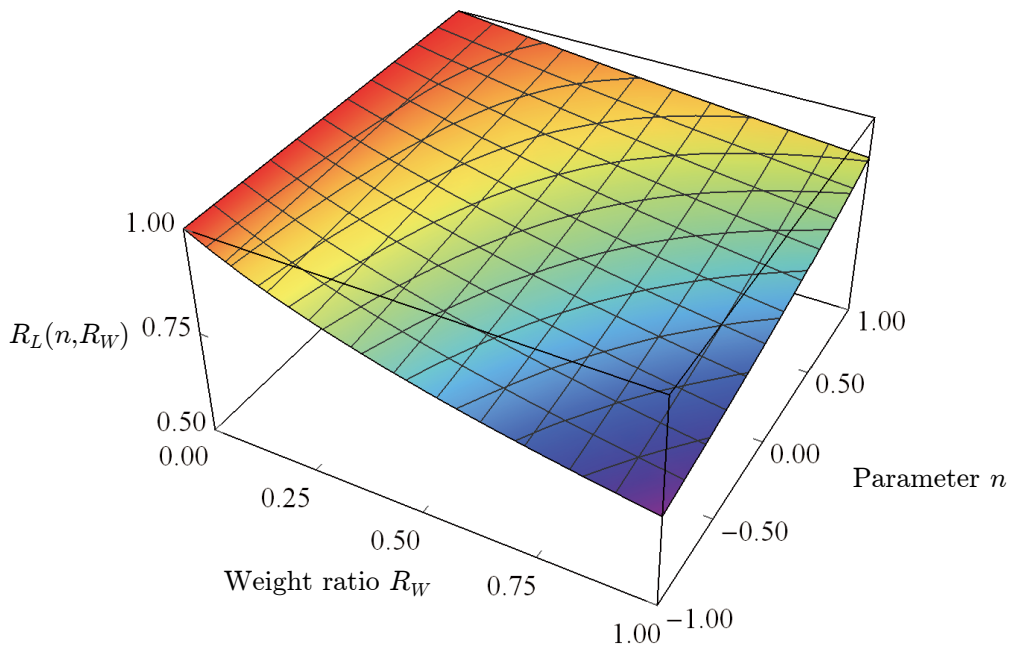
式(3.3.35), (3.3.36)の $R_{L_{max}}$ および $R_{L_{min}}$ は、物理的には「枝葉を全て切り落とした場合に対する最大高さ比の最大値・最小値」を意味する。この結果から、実際の樹木が有する重量分布、および枝葉重量は、最も不利な状態 ($n = 0, R_W = 0.6$) でも、機械的な最大高さを約 15% 減少させる程度に収まっていることが分かる。

2.3 節でも示したように、Niklas は Greenhill の式により得られる最大高さ L_c が、実際の樹木の高さ L_{real} に対して $S_F = 4$ 程度の安全率 ($S_F = L_c / L_{real}$) を有することを報告している[2]。式(3.3.35), (3.3.36)の結果と Niklas らの研究成果を併せると、枝葉の影響を考慮した最大高さ式に対する安全率は、およそ次の範囲内にあると推定できる。

$$3.4 \leq S_F \leq 3.9 \quad (3.3.37)$$



(a) Model E



(b) Model F

図-3.3.7 実際の樹木を検討するための密度関数モデル

実際の樹木は、種々の文献[18,19]においても報告されているように、非常に多様な重量分布を有している。しかしながら、そのような幅広い重量分布を表現できる密度分布関数を用いた本手法で計算し、その結果を実測データで絞り込むことにより、既存の枝葉の重量を無視した最大高さ式よりも、正確に最大高さを推定することが可能となる。

3.3.7 自重座屈モードの導出

ここでは、自重座屈発生時の座屈モードを求める（なお、本節では例として Model C のケースを取り上げる）。まず、たわみの式を求めるために、式(3.3.18)を ξ について積分すると、次式が得られる。

$$w(\xi) = \left(\xi - \frac{1}{24} \xi^4 (n-1) + \frac{1}{1260} \xi^7 (n-1)^2 + \dots \right) c_1 + c_3 \quad (3.3.31)$$

ここに、 c_3 は任意定数である。いま、固定端での境界条件 ($w(\omega L_c) = 0$) を適用すると、 c_3 は次のように得られる。

$$c_3 = - \left(\omega L_c - \frac{1}{24} (\omega L_c)^4 (n-1) + \frac{1}{1260} (\omega L_c)^7 (n-1)^2 + \dots \right) c_1 \quad (3.3.32)$$

いま、式(3.3.19)を(3.3.18)に代入し、 $\xi = \omega x$ の関係を用いると、次式が得られる。

$$w(x) = \left(\omega (x - L_c) - \frac{\omega^4}{24} (n-1)(x^4 - L_c^4) + \frac{\omega^7}{1260} (n-1)^2(x^7 - L_c^7) + \dots \right) c_1 \quad (3.3.33)$$

式(3.3.20)は未定係数 c_1 を含むから、これを除去するために最大たわみ w_{max} との比を取ること考える。最大たわみ w_{max} は必ず先端 ($x = 0$) で生じるから、座屈モードを描画するための w/w_{max} は次式で与えられる。

$$\frac{w}{w_{max}} = \frac{\left(\omega (x - L_c) - \frac{\omega^4}{24} (n-1)(x^4 - L_c^4) + \frac{\omega^7}{1260} (n-1)^2(x^7 - L_c^7) + \dots \right)}{\left(\omega (-L_c) - \frac{\omega^4}{24} (n-1)(-L_c^4) + \frac{\omega^7}{1260} (n-1)^2(-L_c^7) + \dots \right)} \quad (3.3.34)$$

以上より、式(3.3.34)の L_c に、式(3.3.16)の高次方程式を満足する L_c を代入すると、自重座屈時の座屈モードが得られる。

図-3.3.8 は、各密度モデルにおける自重座屈発生時のモード図であり、縦軸に無次元座標 x/L_c 、横軸に無次元たわみ w/w_{max} を取って表したものである。図より、どの密度モデルにおいても座屈モードに大きな違いはなく、Euler 座屈における 1 次モードの波形と類似の結果であり、密度分布パラメータ n や幹と枝の重量比 R_W が変化しても、モード形状に大きな違いは生じないことが分かる。

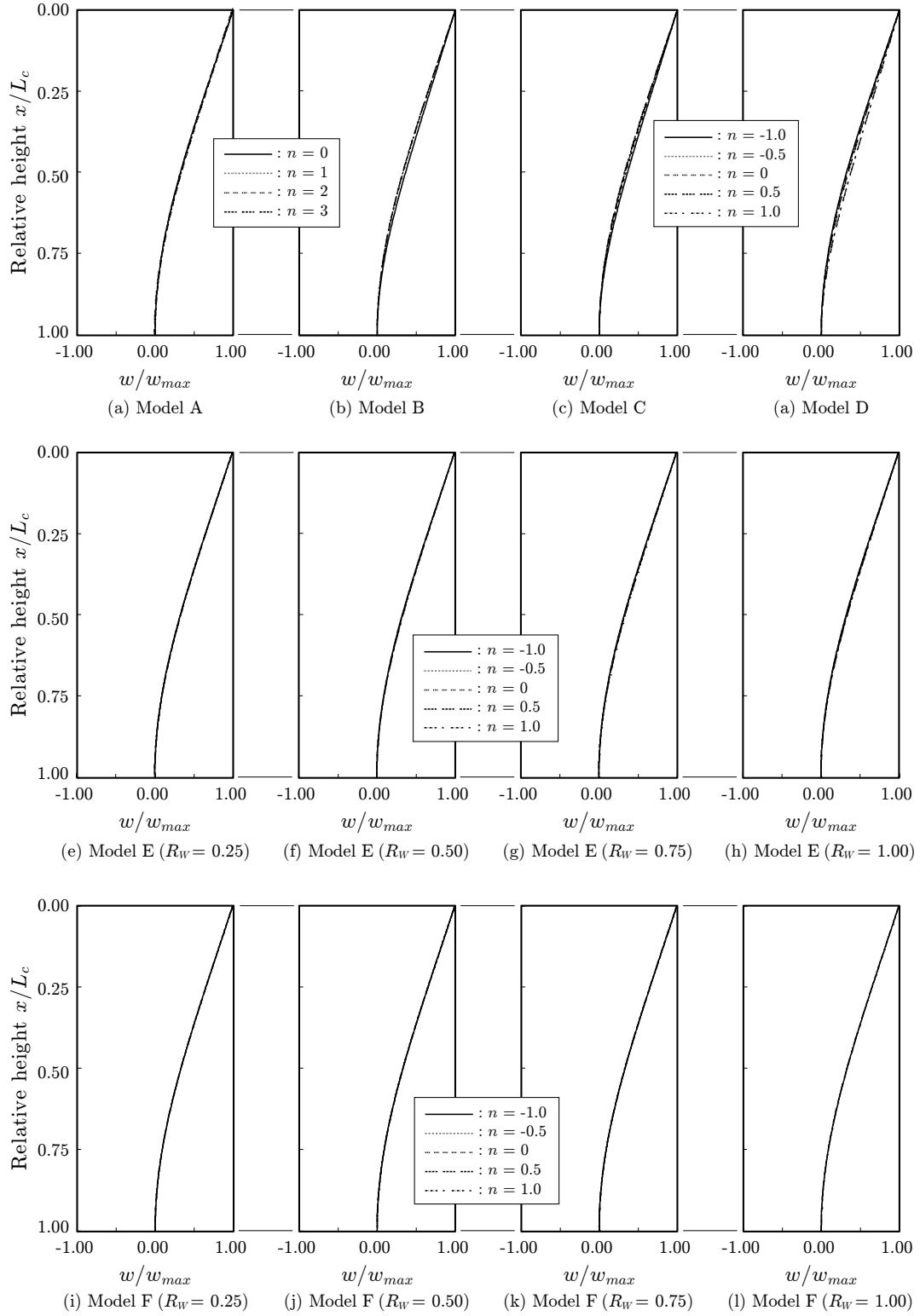


図-3.3.8 各密度モデルにおける座屈モード. Model A~D はパラメータ R_W を含まないが, Model E, F はパラメータ R_W を含むので, これらに関しては $R_W = 0.25, 0.50, 0.75, 1.00$ の 4 ケースについてその結果を示している.

3.3.8 有限要素法に基づく重量分布をもつ円柱の自重座屈解析

本研究の定式化では、その過程において密度関数の積分を含む支配方程式を解く必要があるため、樹木の枝葉重量を高さ方向に滑らかかつ連続に変化する密度関数を用いて表現している。しかしながら、この方法では、不連続的（集中的）に重量が増減するケースを検討することが出来ない。これに対して、有限要素法を用いた場合には、不連続的に密度が変化するケースを容易に検討可能であると考えられる。

本節では、高さ方向への密度変化を考慮したモデルにおける最大高さを有限要素法により導出する方法について検討し、本研究で導出した理論解により妥当性を検証する。

(1) 計算モデル

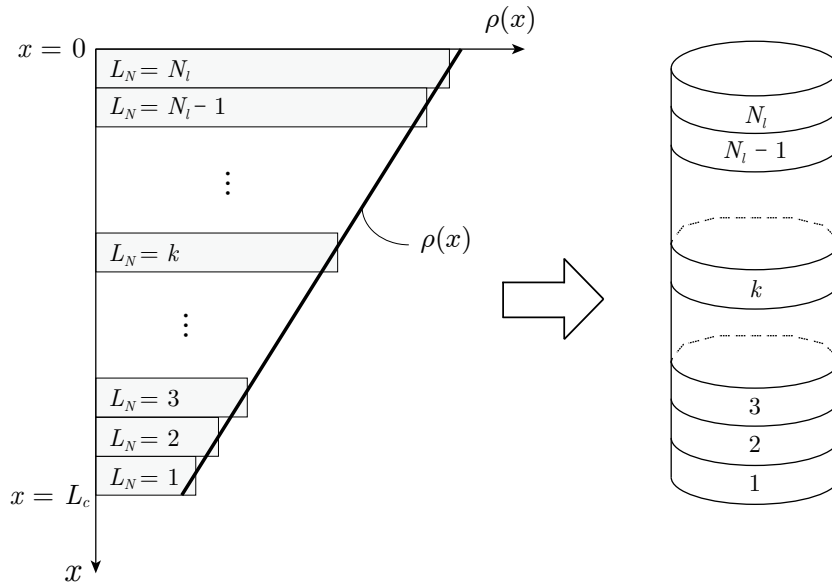


図-3.3.9 計算モデルの概念図

高さ方向の重量分布を表現するために、本研究では図-3.3.9 に示すように円柱を高さ方向に N_l 個に分割し、それぞれに異なる密度を割り振ることにより、図-3.3.6 に示したような重量分布を考慮した計算モデルを作成する。なお、ここでは各段の密度を Model E の密度関数に基づき設定する。

(2) 解析条件の設定

解析に用いる材料定数は、理論解の数値計算例と同様に、Niklas [16] および Adam [17] が示した物性値に基づき、弾性係数 $E = 1.1 \times 10^{10}$ N/m²、基準密度 $\rho_0 = 526$ kg/m³、重力加速度 $g = 9.81$ m/s²、半径 $r = 0.23$ m、モデル高さ $l_m = 60.8$ m とする。また、メッシュ生成は Dargahi らの研究 [15] を参考にし、使用要素は四面体一次要素としてサイズを 100mm に設定する。なお、検討する幹と枝の重量比は $R_W = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$ の 5 ケース、軸方向の分割数は $N_l = 1, 2, 5, 10, 20$ の 5 ケース、密度分布パラメータは $n = -1, 0, 1$ の 3 ケースについて検討し、境界条件には片持ち梁と同様のものを用いる。

(3) 理論解を用いた有限要素解の妥当性検証

まず、図-3.3.10 に有限要素解の収束性について検討した結果を示す。図は横軸に分割数、縦軸に1つ前の分割数との相対誤差を取ったものであり、例えば横軸が5となる座標では、 $N_l = 2$ の解が有する $N_l = 5$ の解に対する相対誤差を示している。

図より、重量分布パラメータ n の値によらず、分割数 N_l の増加につれて、解が収束に向かっていくことが確認できる。また、収束性は幹と枝の重量比 R_W の増加に伴って悪化していくが、分割数 $N_l = 10$ 以降では重量比 R_W によらず解がおおよそ収束していることが確認できる。樹木の最大高さに関する既往の研究が cm 単位までの測定であることを踏まえると、この相対誤差の大きさはおよそ1以下であれば十分と考えられるので、有限要素法による最大高さの算定は、軸方向の分割数 $N_l = 10$ を用いれば十分な収束性が得られると言える。よって、有限要素法を用いて軸方向に密度分布が変化するモデルの解析を行う際には、軸方向の分割数は $N_l = 10$ 以上とすればよい。

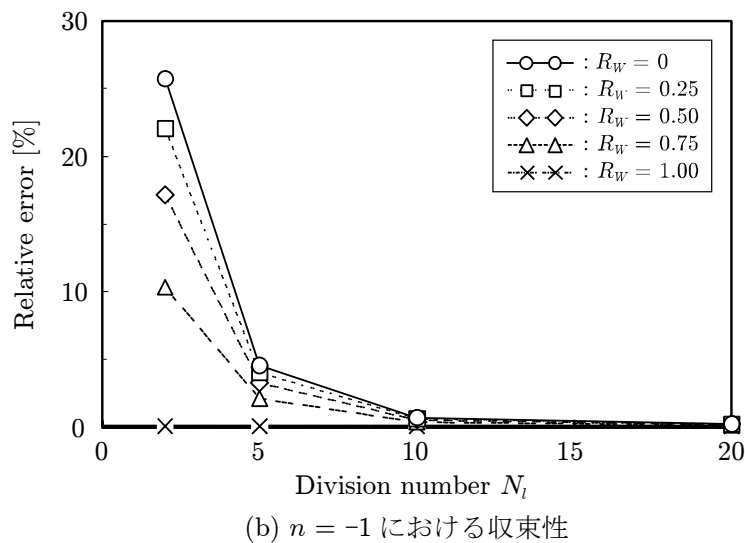
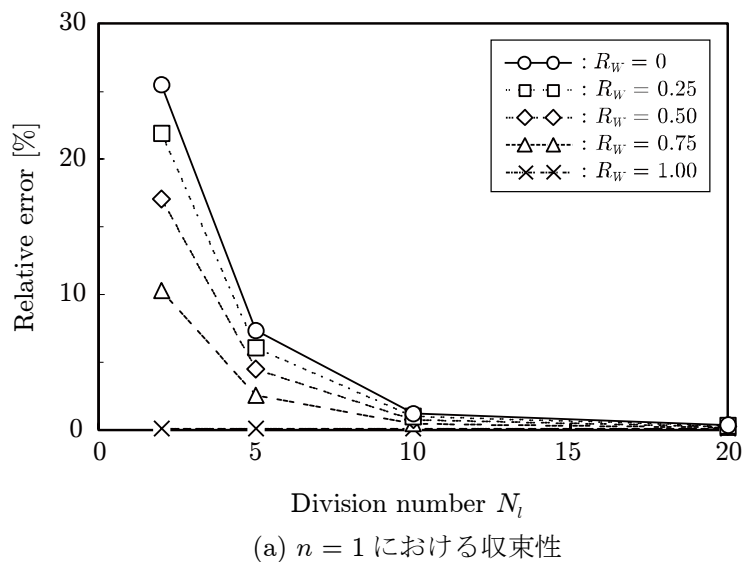


図-3.3.10 有限要素解の収束性

表-3.3.4 理論解に対する有限要素解の相対誤差

N_t		R_W											
		0			0.25			0.5			0.75		
		FEM [m]	理論解 [m]	相対 誤差 [%]	FEM [m]	理論解 [m]	相対 誤差 [%]	FEM [m]	理論解 [m]	相対 誤差 [%]	FEM [m]	理論解 [m]	相対 誤差 [%]
1	n												
	0	60.47	60.46	0.03	56.14	56.12	0.03	52.83	52.81	0.03	50.18	50.17	0.03
	-1				54.71	54.28	0.80	50.66	50.03	1.25	47.59	46.87	1.54
2	0	60.47	60.46	0.03	56.14	56.12	0.03	52.83	52.81	0.03	50.18	50.17	0.03
	1				57.72	58.24	-0.88	55.41	56.30	-1.58	53.43	54.59	-2.14
	-1				54.36	54.28	0.15	50.14	50.03	0.22	46.99	46.87	0.26
5	0	60.47	60.46	0.03	56.14	56.12	0.03	52.83	52.81	0.03	50.18	50.17	0.03
	1				58.17	58.24	-0.12	56.17	56.30	-0.23	54.41	54.59	-0.33
	-1				54.31	54.28	0.06	50.07	50.03	0.07	46.91	46.87	0.08
10	0	60.47	60.46	0.03	56.14	56.12	0.03	52.83	52.81	0.03	50.18	50.17	0.03
	1				58.23	58.24	-0.01	56.28	56.30	-0.04	54.56	54.59	-0.06
	-1				54.29	54.28	0.03	50.05	50.03	0.04	46.89	46.87	0.04
20	0	60.47	60.46	0.03	56.14	56.12	0.02	52.83	52.81	0.02	50.18	50.17	0.03
	1				58.24	58.24	0.02	56.31	56.30	0.01	54.60	54.59	0.00
	-1												

次に、表-3.3.4 には、各重量比および分割数における最大高さの算出結果と理論解に対する相対誤差を示す。なお、座屈解析によって得られる座屈荷重係数を用いた計算方法は、3.2.6 項に示したものと同様である。

表より、理論解に対する有限要素解の相対誤差は、同じ分割数 N_l を用いている場合でも、枝重量の増加に伴って大きくなっていくことが分かる。しかしながら、分割数 $N_l = 10$ 以上のケースでは、どの密度分布パラメータ n においても相対誤差が 0.1 以下となっており、理論解と cm 単位まで一致した結果が得られている。これらのことは、有限要素法を用いて重量分布を考慮した円柱の最大高さを算出する場合には、軸方向に $N_l = 10$ 以上の分割数でジオメトリを分割し、図-3.3.10 のようにそれぞれに対応する密度を割り当てると、十分な精度を有した有限要素解が得られることを示している。

3.3.9 本節のまとめ

本節では、樹木の重量分布が最大高さに与える影響を解明するために、様々な重量分布を有する円柱モデルにおいて、自重座屈による最大高さの定式化を行った。また、離散的に求めた理論解に対して回帰分析を行い、各密度モデルにおける重量分布と最大高さの簡単な関係式を導いた。さらに、求めた最大高さを用いて、様々な重量分布における自重座屈時のモード形状を求めた。結果として、以下に示す知見が新たに得られた。

- ① 一定量の枝葉を高さ方向に配分する場合、上部を軽く・下部を重くするように配分すると、自重による座屈のリスクを低減できる。このような重量の配分方法は、重量を高さ方向に一定に配分する場合と比較すると、直線的に配分する場合は最大で約 1.25 倍、曲線的に配分する場合は最大で約 1.38 倍、最大高さを大きくすることが可能となる。また、許容できる総重量は、直線的に配分する場合は約 2 倍、曲線的に配分する場合は約 2.6 倍大きくなる。
- ② 自重座屈発生時の座屈モードは、高さ方向の重量の分布によらず、一般的な長柱における座屈の 1 次モードと類似したモードである。また、同じ密度モデル内において分布形態が変化しても、モード形状は殆ど変化しない。
- ③ 実在の樹木における重量分布、および枝葉重量の測定結果に基づくと、樹木は最大高さにほとんど影響を与えないよう、極めて合理的に枝葉を分布させていると言える。実際の樹木が取る最も不利な状態 ($n = 0, R_w = 0.6$) を考えても[18,19]、最大高さは枝葉が全くない状態から約 15%減少する程度である。また、Niklas [2] の調査結果に基づくと、枝葉を考慮した本研究の理論的な最大高さに対する実際の樹木の安全率は、およそ 3.4 から 3.9 程度であると推測できる。また、高さ一直径間の 2/3 乗則は、枝葉の影響を考慮した場合も、その分布形状や幹との重量バランスによらず成り立つ。

次節では、テーパ形状とは異なる自重座屈特性を向上させるアプローチである「中空断面」に着目し、その力学的合理性について解明する。また、実際の中空円筒形状を有する植物である竹の重量分布に着目し、その形態が有する合理性を解明するとともに、中空の硬く重い植物に適用するための最大高さ式を導出する。なお、本章に示した成果をまとめた論文は、Scientific Reports 誌にて報告している [研究業績目録, 学術論文(2)]。

3.4 竹に見られる断面の中空化：軽量化と剛性のトレードオフ

これまで示した最大高さ式は、いずれも最大高さを大きくするためには「曲げ剛性を大きくすること」および「重量を軽くすること」が有効であると主張している．これを踏まえると、生存のために高さを必要とする植物のような生体では、出来るだけ全体の重量を減らしつつ、かつ高い曲げ剛性を確保することが求められると推測できる．しかし、例えば密度が一定の中実な円柱において、曲げ剛性を高めるために断面積を大きくすることは、結果として重量の増加に繋がる．これに対し、軽量化のために断面積を小さくすることは、結果として曲げ剛性の低下を招いてしまう．このことから、一定量の材料を用いて経済的に自重座屈耐性を高めるためには、樹木のような中実な円柱構造をとるよりも、竹のような中空な円筒構造をとる方が合理的であると推測される．

本節では、中実円柱および中空円筒構造に統一的に適用できる自重座屈に対する簡潔な最大高さ式を導出し、円柱における断面の中空化が自重座屈耐性に与える影響を理論的に明らかにする．

3.4.1 計算モデル

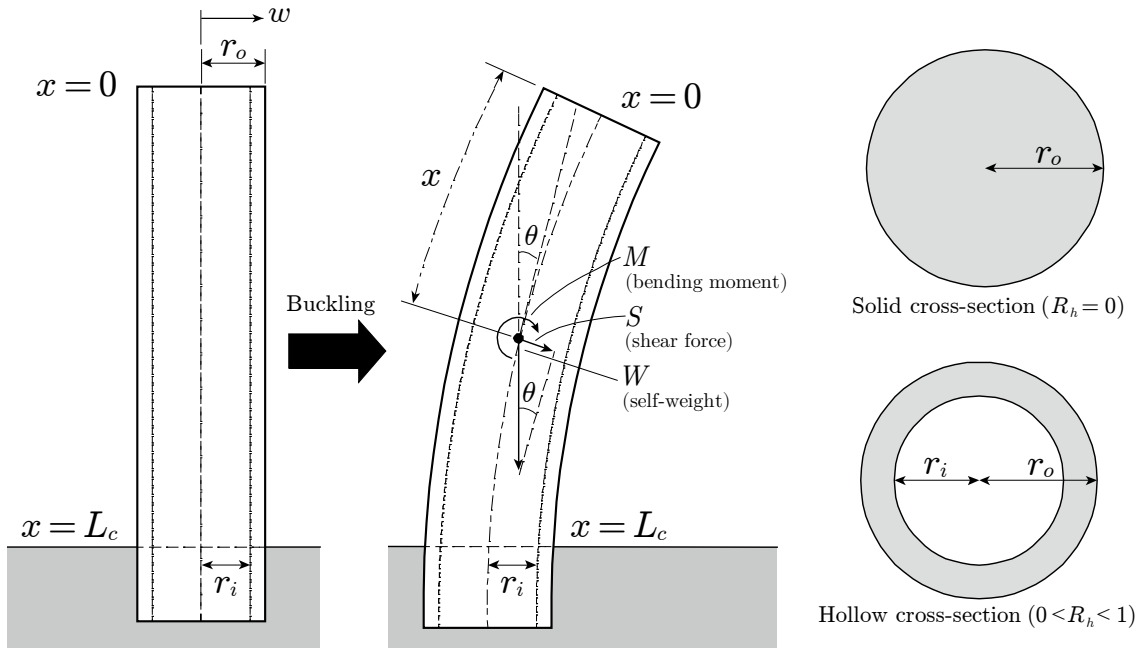


図-3.4.1 断面の中空化を考慮した計算モデル

計算モデルは、図-3.4.1 に示す円柱の片持ち梁である．座標系は中立軸に沿うものとし、自由端側を $x = 0$ ，固定端側を $x = L_c$ とする．また、外径を r_o ，内径を r_i と表し、その比を中空比 R_h として次式で与える．

$$R_h = \frac{r_i}{r_o} \quad (3.4.1)$$

すなわち、中空比 $R_h = 0$ のとき断面は中実となり、 R_h の増加に伴って空洞部の体積が大きくなる。なお、 $R_h = 1$ のときは計算モデルが消失してしまうため、中空比 R_h の値域は $0 \leq R_h < 1$ と定義する。

3.4.2 支配方程式の導出

このような円筒が自重により座屈したとき、任意の点 x における力の釣り合いを考え、せん断力 $S(x)$ は次式で表される。

$$S(x) = \gamma A x \sin \theta \quad (3.4.2)$$

ここに、 γ は単位体積重量 $[\text{N}/\text{m}^3]$ 、 A は断面積 $[\text{m}^2]$ 、 θ はたわみ角である。任意の点 x における曲げモーメント $M(x)$ は、弾性曲線方程式より次式で与えられる。

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.4.3)$$

ここに、 w はたわみを表す。いま、たわみ角 θ が微小であるとする、せん断力 $S(x)$ および曲げモーメント $M(x)$ は次のように書ける。

$$S(x) \approx \gamma A x \theta \quad (3.4.4)$$

$$M(x) \approx -EI \frac{d\theta}{dx} \quad (3.4.5)$$

せん断力と曲げモーメントの関係 ($S = dM/dx$) を用いて、式(3.4.4)および(3.4.5)より次の支配方程式が得られる。

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{\gamma A}{EI} x \theta = 0 \quad (3.4.6)$$

すなわち、このモデルにおける支配方程式は Greenhill [1]のものと全く同じである。

3.4.3 固有方程式の導出

支配方程式が同一であるので、その解も Greenhill のものと同様に、次のようになる。

$$\theta(x) = J_{1/3} \left(\frac{2}{3} (\omega x)^{3/2} \right) \sqrt{x} c_1 + J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} (\omega x)^{3/2} \right) \sqrt{x} c_2 \quad (3.4.7)$$

ここに、 $J_\eta(x)$ は次数 η の第一種 Bessel 関数、 c_1, c_2 は任意定数である。なお、 ω は式(2.1.15)で与えられるパラメータである。

また、境界条件も同様（式(2.1.16)）である．これを適用すると、自由端側（ $x = 0$ ）の境界条件より、任意定数 $c_1 = 0$ が得られる．また、固定端側（ $x = L_c$ ）の境界条件より、有意な L_c を求めるために $c_2 \neq 0$ とおくと、次式が得られる．

$$J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} (\omega L_c)^{3/2} \right) = 0 \quad (3.4.8)$$

これが、この問題において解くべき固有方程式である．

3.4.4 中空円筒における自重座屈に対する最大高さ式

式(3.4.8)に示した L_c に関する固有方程式は、Greenhill の定式化において得られる固有方程式と完全に一致している．すなわち、最大高さ L_c について解くと、次のようになる．

$$L_c = \left(\frac{9}{4\omega^3} (j_{-1/3,1})^2 \right)^{1/3} \quad (3.4.9)$$

ここに、 $j_{-1/3,1}$ は第一種 Bessel 関数 $J_{-1/3}(x)$ の一番目の零点である．また、断面二次モーメント I および断面積 A は、次式で与えられる．

$$I = \frac{(1 - R_h^4) \pi r_o^4}{4} \quad (3.4.10)$$

$$A = (1 - R_h^2) \pi r_o^2 \quad (3.4.11)$$

以上を踏まえると、中実円柱および中空円筒に統一的に適用可能な最大高さ式が次のように得られる．

$$L_c = (1 + R_h^2)^{1/3} \left(C \frac{E}{\gamma} r_o^2 \right)^{1/3} \quad (3.4.12)$$

ここに、 C は定数であり、Greenhill [1] または Wang and Drachman [14] の場合は $C = 1.959$ 、Karman and Biot [13] の場合は $C = 2$ である．すなわち、本節により得られた式(3.4.12)の最大高さ式において、断面が中実な状態を考えると（ $R_h = 0$ ）、Greenhill が導いた式(2.1.19)に一致することが確認できる．また、中空円筒構造の最大高さは、中実な円柱構造の最大高さに、中空比による影響を考慮するための係数 $(1 + R_h^2)^{1/3}$ を掛けることによって表されることが分かる．

ここで、係数 $(1 + R_h^2)^{1/3}$ は、外径 r_o の中実円柱における断面二次半径 $\bar{r}_s$ 、外径 r_o および中空比 R_h 中空円筒における断面二次半径 $\bar{r}_h$ を用いて、次のように表すことができる．

$$(1 + R_h^2)^{1/3} = \left(\frac{\bar{r}_h}{\bar{r}_s} \right)^{2/3} = R_r^{2/3} \quad (3.4.13)$$

ここに、 R_r は、**図-3.4.1**の右部に示すような等しい外径 r_o を有する中空断面と中実断面の断面二次半径の比を表す。以上より、式(3.4.12)は次のように書くこともできる。

$$L_c \approx \left(C \frac{E}{\gamma} R_r^2 r_o^2 \right)^{1/3} \quad (3.4.14)$$

よって、円柱および円筒の自重座屈に対する最大高さは、中空時の断面二次半径と中実時の断面二次半径の比 R_r の3/2乗に比例する。

3.4.5 中実円柱および中空円筒における自重座屈特性の和算法則

ここでは、先ほど導出した最大高さの理論式に基づき、中空構造と中実構造の間に成り立つ2つの重要な自重座屈特性の関係式を導出する。これにより、中空構造の自重座屈特性が、容易に検討可能な中実構造の結果を用いて記述できることを示す。

(1) 最大高さに関する三乗和の法則

いま、式(3.4.12)の両辺を三乗して展開すると、次式が得られる。

$$L_c^3 = \left(C \frac{E}{\gamma} r_o^2 \right) + \left(C \frac{E}{\gamma} (R_h r_o)^2 \right) \quad (3.4.15)$$

ここで、式(2.1.19)および式(3.4.1)より、中空円筒および中実円柱の最大高さに関する次の関係式が得られる。

$$L_c^3 = L_{co}^3 + L_{ci}^3 \quad (3.4.16)$$

ここに、 L_c は中空円筒モデルの最大高さ、 L_{ci} は半径が r_i の中実な円柱モデルの最大高さ、 L_{co} は半径が r_o の中実な円柱モデルの最大高さである。**図-3.4.2**は、式(3.4.16)の関係を図示したものであり、断面が中空なモデルの最大高さは、同じ弾性係数 E と単位体積重量 γ を持つ中実なモデルの最大高さにより記述できることを表している。

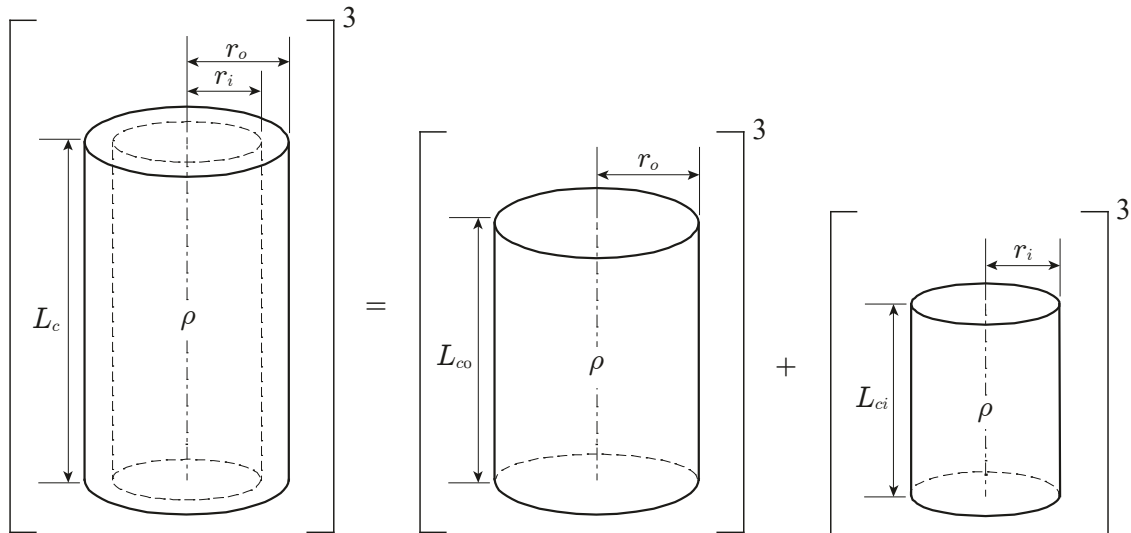


図-3.4.2 重い柱の最大高さに関する三乗和の法則

(2) 限界密度に関する和の法則

さらに，式(3.4.16)の最大高さ L_c に関する式を限界密度 ρ_c に関する式に書き換えると，次式が得られる．

$$\rho_c = \rho_{ci} + \rho_{co} \quad (3.4.17)$$

ここに， ρ_c は中空モデルの限界密度， ρ_{ci} は半径が r_i である中実な円柱モデルの限界密度， ρ_{co} は半径が r_o である中実な円柱モデルの限界密度である．式(3.4.17)を図示したものが図-3.4.3であり，中空にした場合に支えることができる限界密度は，同じ高さ L ，弾性係数 E を持つ半径 r_o の中実円柱における限界密度 ρ_{co} と，半径 r_i の中実円柱における限界密度 ρ_{ci} の和で得られることを示している．

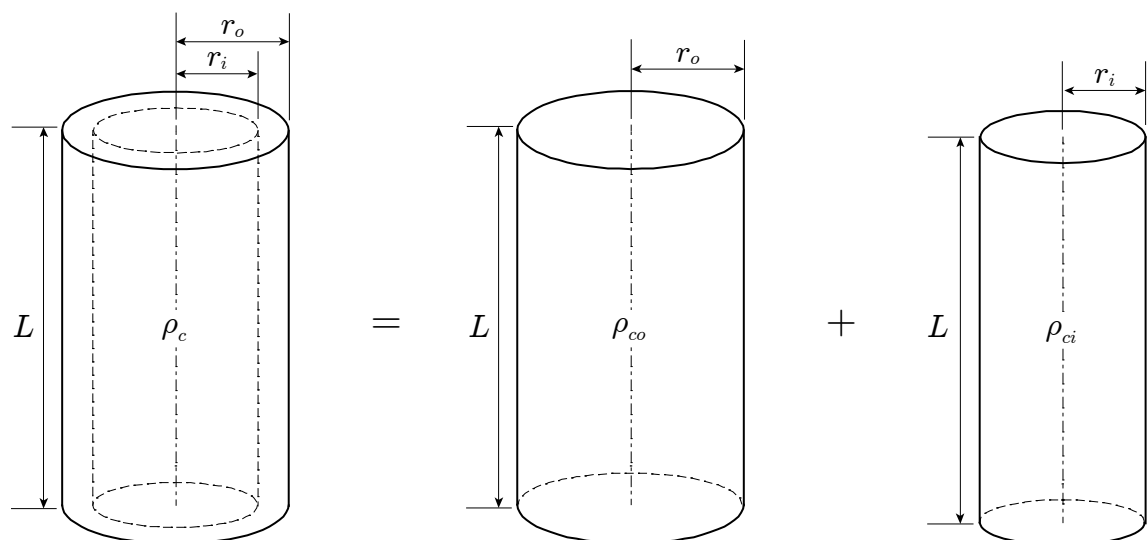


図-3.4.3 重い柱の限界密度に関する和の法則

3.4.6 本研究の理論解を用いた有限要素解の妥当性検証

本項では、導出した式(3.4.12)の中空円筒構造に対する最大高さの理論解と、Dargahi らの方法[15]により得られる有限要素解の比較検証を行う。諸元については、Niklas および Adam の調査結果を参考に設定し、固定端半径 $r_l = 0.23$ m, 弾性係数 $E = 1.1 \times 10^{10}$ kN/m², モデル密度 $\rho_m = 526$ kg/m³, モデル高さ $L_m = 60.8$ m を用いる。このモデルに対して、Dargahi らの方法を参考に、使用要素は、要素時数 $j = 1, 2$ とする四面体要素とし、メッシュサイズを 100 mm および 50 mm としてメッシュ分割を行う。中空比 R_h は、 $R_h = 0, 0.05, \dots, 0.95$ とする。なお、詳細な計算方法については、3.2 節に示した方法と同様であるため、ここでは省略する。

また、本項では、断面の中空化が自重座屈に対する最大高さに与える影響を考察するために、次式で与えられる最大高さ比 $R_L(R_h)$ を定義する。

$$R_L(R_h) = \frac{L_c(R_h)}{L_c(0)} \quad (3.4.18)$$

ここに、 R_h は式(3.4.1)で与えられる中空比を示す。すなわち、式(3.4.18)は中実な円柱の最大高さに対する、中空比 R_h の円筒における最大高さの比を示すものである。また、最大高さと限界密度の関係より、次に示す限界密度比が定義できる。

$$R_\rho(R_h) = \frac{\rho_c(R_h)}{\rho_c(0)} = R_L^3(R_h) \quad (3.4.19)$$

上式は、中実な円柱の限界密度に対する、中空比 R_h の円筒および円柱における限界密度の比を示すものである。式(3.4.14)に示した最大高さの式からも分かるように、限界密度比 $R_\rho(R_h)$ は最大高さ比 $R_L(R_h)$ の三乗で表すことができる。

図-3.3.4 には、断面の中空化が自重座屈特性に与える影響を示す。図-3.3.4 (a) は縦軸に最大高さ比 R_L 、図-3.3.4 (b) は縦軸に限界密度比 R_ρ を取って示しており、横軸はどちらも式(3.4.1)で与えられる中空比 R_h である。図中の実線は本節で導出した最大高さの理論式を表しており、○印などの離散的な点は有限要素法に基づく数値解を示す。

まず、有限要素解と理論解の違いを見ると、最大高さ比 R_L および限界密度 R_ρ のどちらの場合においても、○印で示された要素次数 $j = 1 \cdot$ メッシュサイズ 100 mm の解析条件より得られた有限要素解は、理論解と大きく離れた値となっている。それに対して、要素次数を変更せず、メッシュサイズを半分の 50 mm に設定した□印の場合には、理論解と概ね一致した解が得られている。なお、要素次数 $j = 2$ とすると、メッシュサイズが 100 mm の場合でも理論解と一致した解が得られる。

次に、理論解のみに着目すれば、今回の中空比の範囲 $0 \leq R_h \leq 0.95$ においては、最大高さ比 R_L はおよそ 1.25、限界密度比はおよそ 2.00 まで、断面の中空化によって自重座屈特性が向上することが分かる。

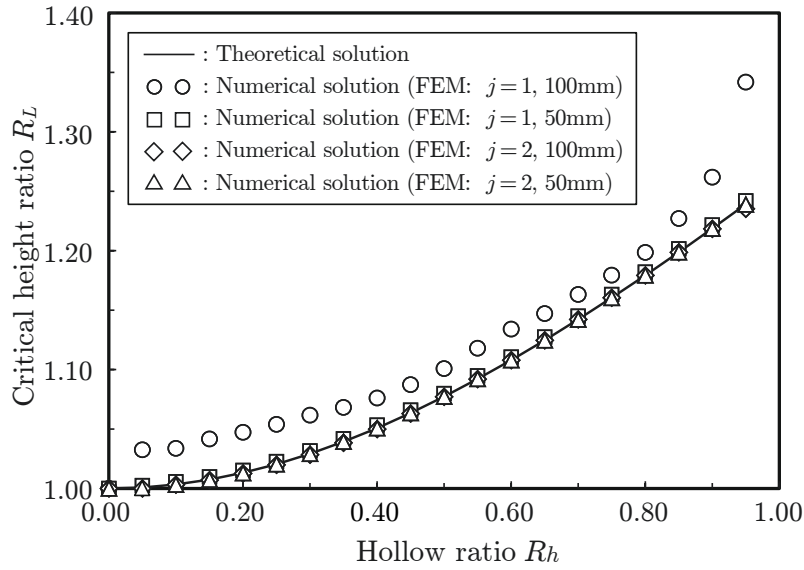
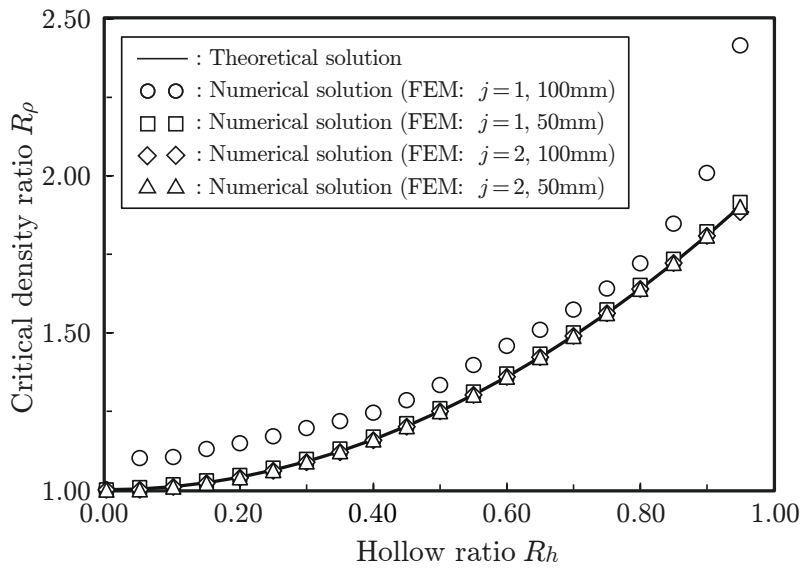

 (a) 中空比 R_h が最大高さに与える影響

 (b) 中空比 R_h が限界密度に与える影響

図-3.4.4 断面の中空化が自重座屈特性に与える影響

ここで、Greenhill が導出した式(2.1.19)の円柱における最大高さ L_{cs} を用いれば、式(3.4.14)は次のように定義できる。

$$L_c = (1 + R_h^2)^{1/3} L_{cs} \quad (3.4.20)$$

上式における係数 $(1 + R_h^2)^{1/3}$ こそが、理論式における最大高さ比 $R_L(R_h)$ の定義である。なお、今回の計算では外半径 $r_o = \text{const.}$ であり、さらに図-3.4.4 はいずれも中空比 R_h に対して単調増加の傾向を示している。このことは、断面の中空化によって曲げ剛性の低

下が引き起こされるにも関わらず、重量の軽量化がこれを補って余りある効果を発揮し、結果として自重座屈特性が向上することを示している。

3.4.7 自重座屈に対する安全率の図形的表現：安全率の円弧

いま、式(3.4.15)の左辺が外径 r_o と内径 r_i の二乗和となるように式変形を行うと、次式が得られる。

$$r_{co}^2 + r_{ci}^2 = \zeta^2 \quad (3.4.20)$$

ここに、右辺の ζ は次式で与えられる。

$$\zeta^2 = \frac{\gamma L^3}{EC} \quad (3.4.21)$$

式(3.4.20)は円の方程式と同じ形であるから、外径 r_o と内径 r_i のなす平面上に円弧として図示することができる。図-3.4.5は、実際に式(3.4.20)を図に示したものであり、横軸に外径 r_o 、縦軸に内径 r_i を取って表している。

まず、図-3.4.5 (a)は、 $r_o - r_i$ 平面内に式(3.4.20)を単純に図示したものである。いま、外径 r_o および内径 r_i の定義域は、 $r_o > 0$ および $0 \leq r_i < r_o$ であるから、式(3.4.20)の有効な領域は r_o 軸と直線 $r_i = r_o$ で囲まれた区間のみである（なお、直線 $r_i = r_o$ 側の境界を含まない）。これを踏まえると、式(3.4.20)の有効な領域は図-3.4.5 (b)の灰色部のように図示することが出来る。すなわち、この灰色部の領域は、実際の円柱および円筒構造が取り得る内径および外径の組み合わせ(r_o, r_i)の範囲を示している。

式(3.4.21)は、ある単位体積重量 γ 、弾性係数 E を持つ材料からなる高さ L の中実円柱および中空円筒における、自重座屈が発生する臨界の内径および外径の組み合わせ(r_o, r_i)を意味している。すなわち、図-3.4.5 (c)に示されている赤線の円弧は、自重座屈が発生する危険側と発生しない安全側の境界線であり、これより内側（赤色部）にあれば自重座屈が発生し、外側（青色部）にあれば自重座屈が発生する。また、図中の Θ は、中空比 R_h を用いて次のように表すことができる。

$$\Theta = \tan^{-1} R_h \quad (3.4.22)$$

すなわち、半径を β 、中心角を θ とする円弧上の点は全て等価な自重座屈に対する安全率を有しているが、 r_o 軸から正の円周方向に進むほど系の総体積は小さくなり、より省材料で必要な自重座屈耐性を得ることが可能であることを意味している。なお、本研究の定式化は梁の座屈モードを対象としているため、(r_o, r_i)が直線 $r_i = r_o$ 線上に限りなく近い「局部座屈が生じるような薄肉構造」を除いた領域で有効である。

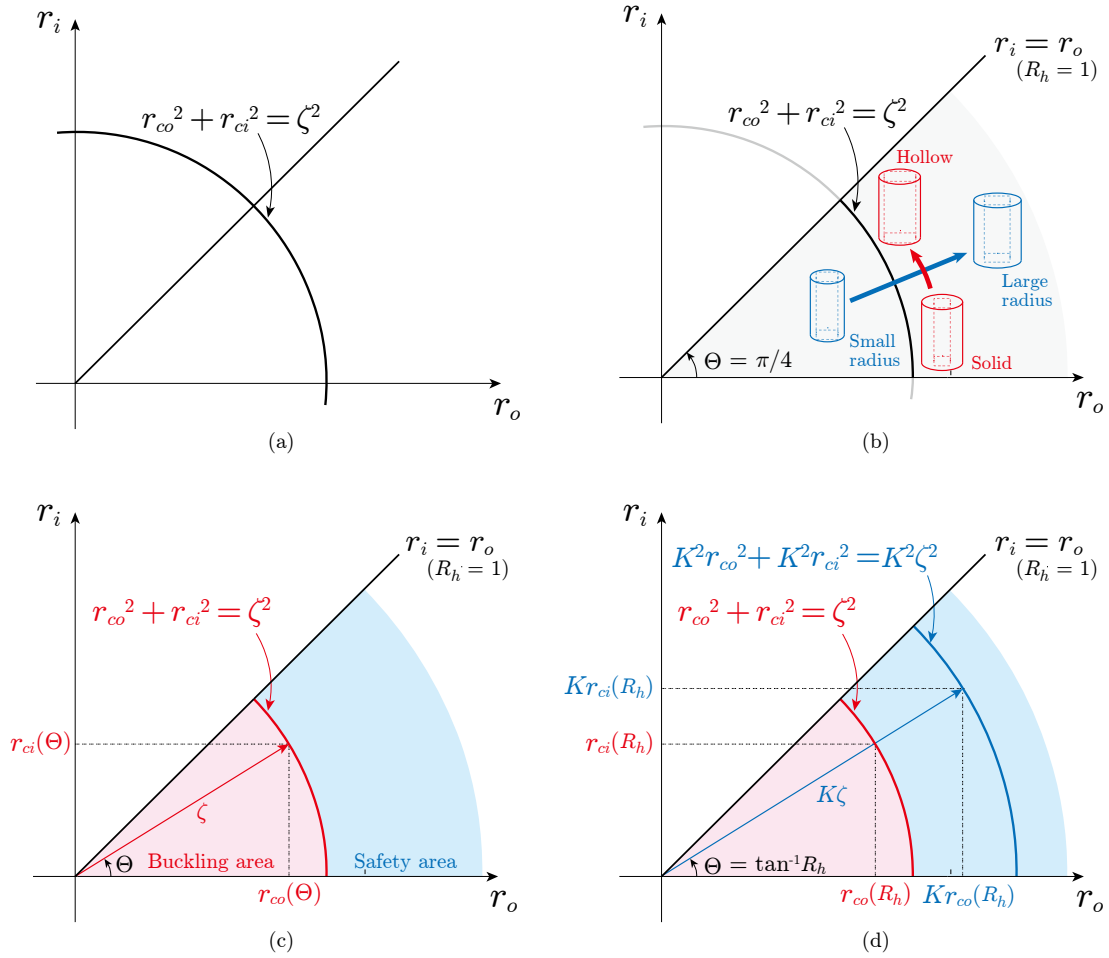


図-3.4.5 円柱および円筒における自重座屈特性の円弧を用いた図形的表現

次に、図-3.4.5 (c)の半径を ζ とする円弧について、これを半径方向に K 倍だけ拡大したものを図-3.4.5 (d)に示す。このとき、自重座屈に対する最大高さ L_c の安全率 $S_{F(L)}$ および限界密度 ρ_c の安全率 $S_{F(\rho)}$ は、式(3.4.20)より K を用いて次のように書くことができる。

$$S_{F(L)} = L/L_c = K^{2/3} \quad (3.4.23)$$

$$S_{F(\rho)} = \rho/\rho_c = K^2 = S_{F(L)}^{1/3} \quad (3.4.24)$$

以上より、特定の安全率 $S_{F(L)}$ および $S_{F(\rho)}$ を確保するための外半径 r_o および内半径 r_i は、次式で与えられる。

$$r_o = S_{F(L)}^{3/2} r_{co}, \quad r_i = R_h r_o \quad (3.4.25)$$

$$r_o = S_{F(L)}^{3/2} r_{co}, \quad r_i = R_h r_o \quad (3.4.26)$$

すなわち、青で示した円弧上の点(Kr_{co}, Kr_{ci})は、赤で示した自重座屈発生境界である円弧上の点(r_{co}, r_{ci})に対して、どの点においても安全率は一定である。また、自重座屈に対する安全率 S_F は、 $r_o - r_i$ 平面内における原点から円弧までの半径方向の距離のみによって一様に定まり、円弧上は全て等価な自重座屈耐性を有する。

3.4.8 中空円筒形状を有する植物のスケーリング則としての適用可能性

ここでは、本研究で導いた中空円筒に対する最大高さ式が、中空断面を有する硬く重たい植物、すなわち竹におけるスケーリング則を示している可能性について考察する。まず、本研究により導出した中空円筒の最大高さ式において、次のような式変形を行う。

$$L_c = (1 + R_h^2)^{1/3} \left(C \frac{E}{\gamma} r_o^2 \right)^{1/3} = \left(1 + \frac{A_i}{A_o} \right)^{1/3} \left(C \frac{E}{\gamma} r_o^2 \right)^{1/3} \quad (3.4.27)$$

ここに、 A_i および A_o は、それぞれ内径と外径がなす断面積を表す。本研究では、簡単のために外径 r_o および中空比 α を高さ方向に一定であると仮定しているが、例えば自然界の竹は、高さ方向に肉厚が変化するような形状を取っている[22,23]。しかし、Inoue ら[24]は、実測のデータを用いて、竹において次の形状則が成り立つことを示している。

$$\frac{A_i}{A_o} = \text{const.} \quad (3.4.28)$$

すなわち、竹のスケーリング則を考える上では、中空比 R_h は一定とすることができる。ここで、テーパーを考慮していない Greenhill のスケーリング則が、テーパーを有している実在の樹木に適合したことを考えると、式(3.4.28)の成立は、本研究のスケーリング則が竹に適用できる可能性を示唆するものであると言える。

3.4.9 中空断面を有する植物における重量分布の影響

本項では、竹などの中空断面を有する植物において、枝葉重量の分布や幹（稈）との重量バランスが自重座屈特性に与える影響について検討する。

まず、3.3 節の内容に基づき、ここでは次の重量分布モデルを用いる。

$$\rho(x) = \left(\frac{2n}{L_c} x + (1 - n) \right) \rho_B + \rho_T \quad (3.4.29)$$

ここに、 n は重量分布を支配するパラメータであり、 ρ_B は枝葉の密度 [kg/m^3]、 ρ_T は幹部（稈）の密度 [kg/m^3]を表す。その分布例は、図-3.4.6 に示す通りである。

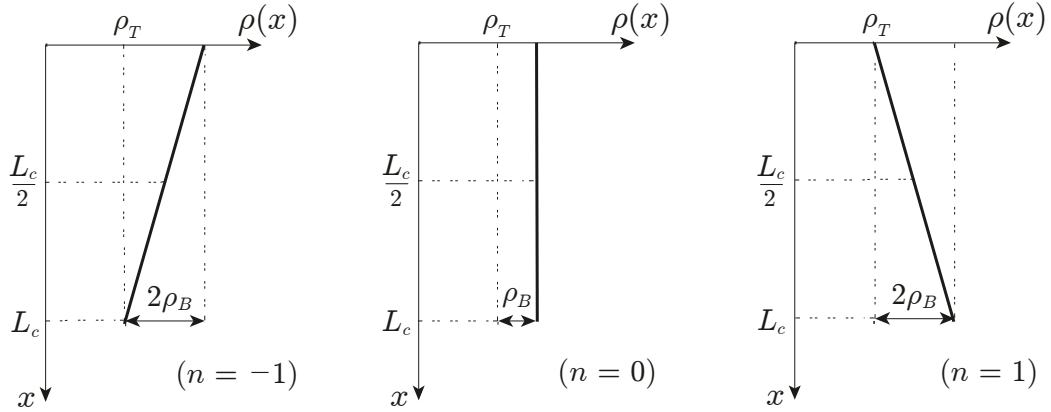


図-3.4.6 本節の検討で用いる密度関数モデルの分布形状の例

この密度関数モデルは、式(3.3.30)に示したものと同様である。これは、密度分布パラメータ $n < 0$ のとき上部が重く、 $n = 0$ のときには高さ方向に密度が一定であり、 $n > 0$ のときには下部に重量物が集中する、というものである。なお、その分布形状は線形である。

次に、これまでと同様の方法を用いて支配方程式を求めると、次式が得られる。

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \left(\left(\frac{n}{L_c}x + (1-n) \right) R_W + 1 \right) \frac{\rho_T g A}{EI} x \theta = 0 \quad (3.4.30)$$

ここに、 R_W は幹重量に対する枝葉重量の比 ($R_W = \rho_B/\rho_T$) である。上式の級数解は、次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \theta(x) = & \left(1 - \frac{1}{6} ((1-n)R_W + 1) \omega^3 x^3 + \dots \right) c_1 \\ & + \left(x - \frac{1}{12} ((1-n)R_W + 1) \omega^3 x^4 \dots \right) c_2 \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

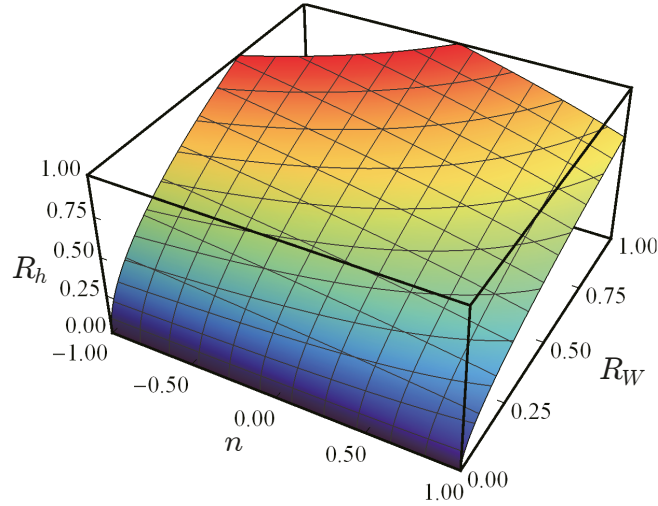
ここに、パラメータ ω は次式を用いて与えられる。

$$\omega = \left(\frac{\rho_T g A}{EI} \right)^{1/3} \quad (3.4.32)$$

すなわち、その物理的意味はこれまでに示した変数変換パラメータ ω と同様である（式(2.1.15)および式(3.3.14)を参照）。

ここで、式(3.4.30)にこれまでと同様に片持ち梁の境界条件（式(2.1.28)）を適用すれば、中空円筒における重量分布を考慮した最大高さ L_c に関する固有方程式が次のように求められる。

$$\left(1 - \frac{1}{6} ((1-n)R_W + 1) \omega^3 L_c^3 + \dots \right) = 0 \quad (3.4.33)$$


 図-3.4.7 枝葉重量の影響を消失させるための中空比 R_h

式(3.4.33)の高次代数方程式を数値的に解くことにより，枝葉重量の影響を考慮した最大高さ L_c が得られる．なお，ここでは **3.3 節**と同様に，10 cm 単位までの収束性が確認できれば良いものとし，展開次数はこれを満足する $N = 25$ を用いた．

ここで，枝葉の重量分布と幹との重量バランスが自重座屈特性に与える影響を調べるために，次に示す最大高さ比 $R_L(n, R_h, R_W)$

$$R_L(n, R_h, R_W) = \frac{L_c(n, R_h, R_W)}{L_c(0, 0, 0)} = R_\rho^3(n, R_h, R_W) \quad (3.4.34)$$

ここに， $L_c(0, 0, 0)$ は，枝葉が全くなく，断面が中実な場合の最大高さであり，すなわち Greenhill が導出した式から得られる最大高さである．式(3.4.34)を式(3.4.33)に代入することにより，以下に示す最大高さ比 R_L を固有値とする固有方程式が得られる．

$$\left(1 - \frac{3((1-n)R_W + 1)}{8(1 + R_h^2)} j_{-1/3,1}^2 R_L^3 + \dots \right) = 0 \quad (3.4.35)$$

3.3 節にも示したように，枝葉重量とその分布によって，自重座屈特性は必ず低下してしまう．しかしながら，中空円筒構造を有する竹などの植物は，断面の中空化による重量の低減により，枝葉による自重座屈特性の低下を防ぐことが可能であると考えられる．

図-3.4.7 には，式(3.4.35)の最大高さ比 R_L を $R_L = 1$ とした場合の，ある重量比 R_W および分布パラメータ n に対応する中空比 R_h を示す．すなわち，枝葉の影響を考慮した中空円筒において，枝葉が全くない中実円柱モデルと同様の最大高さを実現するためには，どの程度の中空比 R_h を確保すればよいかを示すものである．

図より，断面の中空化によって，枝葉重量の影響をある程度消失させることができることが分かる．しかしながら，枝葉重量が上部に集中し ($n < 1$)，かつ枝葉重量が大きい場合 ($R_W > 0.8$) には，枝葉の影響を消失させることが可能な中空比 R_h が存在しないこ

とが分かる．実際の竹は、枝葉重量を上部に集中させてこそのもの、樹木に比べればその枝葉は軽量である[18, 25]．これらのことは、光合成の効率化のために枝葉を上部に集中させた場合でも、中空断面の採用と軽量な枝葉により、竹が十分な自重座屈耐性を確保していることを示唆するものである．

3.4.10 本節のまとめ

本節では、高さ方向に断面が一定な中実および中空円筒に統一的に適用可能な最大高さ式を導くことにより、断面の中空化が自重座屈特性に与える影響を理論的に明らかにした．さらに、中実円柱と中空円筒の自重座屈特性を結びつける様々な関係式を導き、中空円筒の自重座屈特性が二つの中実円柱の自重座屈特性の和で表現できることを示した．本節で得られた主要な結論は、以下の通りである．

- ① 中空円筒構造の場合においても、最大高さは中空比 R_h の大きさによらず、Greenhillの式と同様に半径の $2/3$ 乗に比例する．また、最大高さは、中実断面($R_h = 0$)の場合の断面二次半径と中空断面の場合($R_h \neq 0$)の断面二次半径の比の $2/3$ 乗に比例する．
- ② 中空円筒の自重座屈特性は、その中空円筒が有する内半径および外半径とそれぞれ半径が等しい2つの中実円柱の自重座屈特性の和によって表すことができる．まず、中空円筒の最大高さの3乗は、その内半径・外半径と等しい大きさの半径を有する二つの中実円柱の最大高さの3乗和に等しい．さらに、中空円筒の限界密度は、その内半径・外半径と等しい大きさの半径を有する二つの中実円柱の限界密度の和によって与えられる．
- ③ 中空円筒および中実円柱の自重座屈特性は、内半径 r_i および外半径 r_o がなす平面上に円弧として図示することができる．さらに、自重座屈に対する安全率は、この円弧からの半径方向の距離によって一意に定まる．
- ④ 中空円筒における重量分布を考慮した定式化の結果より、自然界の竹は、自重を巧みに配分することによって、光合成のために高い位置で光を獲得することと自重座屈耐性の確保を両立している可能性が示唆された．

実際の木本植物は、そのほとんどがテーパ形状のみを有しており、その断面は密実である．次節では、3.2 節および3.4 節に示された「テーパ形状」と「断面の中空化」について、両者の影響を同時に考慮した場合の最大高さ式を導出するとともに、それぞれが自重座屈特性に与える影響を比較し、ほとんどの木本植物がテーパ形状のみを有している理由を力学的な観点から明らかにする．なお、本章に示した成果をまとめたものは、Mechanics Research Communications にて報告している [研究業績目録, 学術論文(3)]．

3.5 木本植物は先細りになるべきか、それとも中空になるべきか？

これまで示した最大高さ式は、いずれも最大高さを大きくするためには「曲げ剛性を大きくすること」および「重量を軽くすること」が有効であると主張している。3.2節および3.4節で示した「テーパ形状」と「断面の中空化」は、両者ともにこれらを達成するためのアプローチであり、自重座屈特性を効果的に向上させることができる。

しかし、人々の身長を超えるほど高く成長する木本植物は、水や養分を輸送する微細な管（維管束）を有しているものの、断面そのものはほぼ密実であり、テーパ形状のみを有する。この事実は、光合成のために高さを必要とする植物にとって、断面を中空にするよりも、テーパ形状を導入する方が、安定性と高さの確保を両立する優れた手段である可能性を示唆している。これを力学的な観点から洞察することは、植物が進化の過程で姿かたちを変えながらも残してきた「効率の良い重力抵抗メカニズム」や、バイオマス量の推定等に応用可能な「木本植物のスケーリング則」を解明することに繋がるとともに、断面の中空化とテーパ形状の取捨選択をはじめとする、植物形態の本質に迫る生態学的な知見をもたらすことが期待できる。

本節では、任意のテーパと中空部を有する柱について、自重座屈に対する簡潔な最大高さ式を導出し、植物の形態が有する巧妙な重力抵抗メカニズムを解明するとともに、最大高さの観点におけるテーパ形状と中空断面の得失を明らかにすることを目的とする。これにより、最大高さの観点からテーパ形状および中空断面の得失を解明するだけでなく、成長戦略としての両者の得失について考察を行い、両アプローチの力学的優位性の解明を試みる。

3.5.1 計算モデル

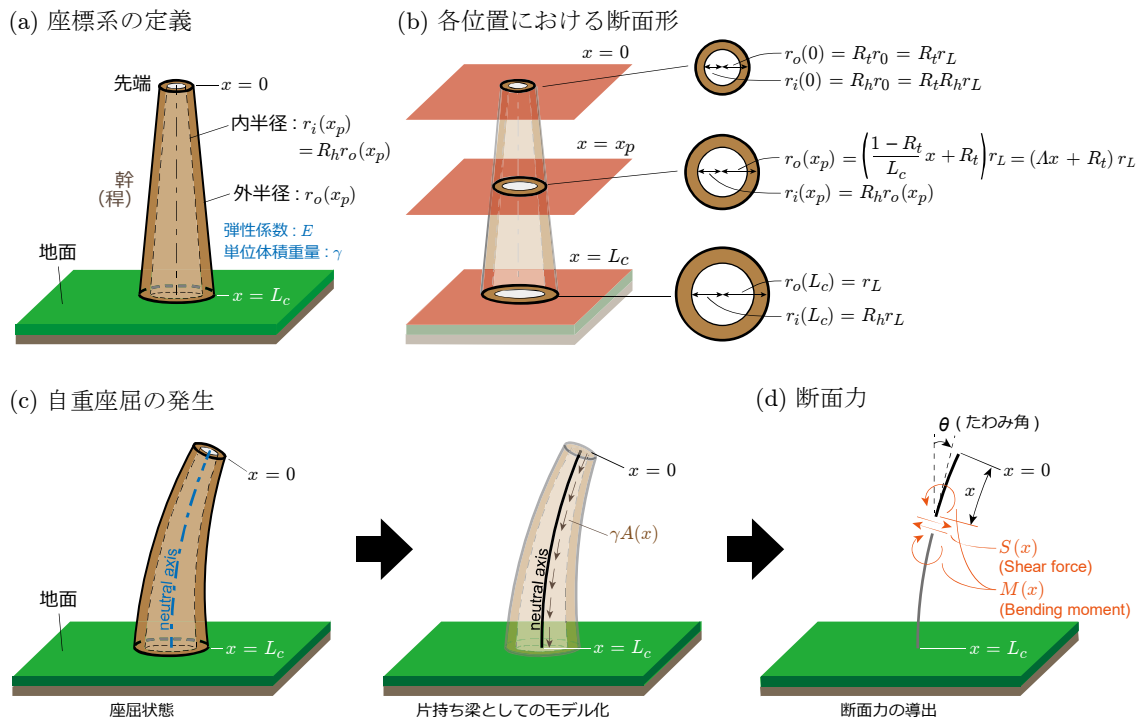


図-3.5.1 テーパ形状および断面の中空化の双方を考慮した計算モデル

表-3.5.1 本節で用いる計算モデルにおける物理量の定義

パラメータ	シンボル	単位	備考
座標系	x	[m]	先端で $x = 0$, 地面で $x = L$
高さ	L	[m]	-
最大高さ	L_c	[m]	自重座屈が発生する瞬間の高さ
先端での外半径 ($x = 0$)	r_0	[m]	下添え字が座標値に対応
地面での外半径 ($x = L$)	r_L	[m]	
外半径	$r_o(x)$	[m]	$r_o(x) = \left(\frac{1 - R_t}{L_c}x + R_t\right)r_L$
内半径	$r_i(x)$	[m]	$r_i(x) = R_h(\Lambda x + R_t)r_L$
テーパー比	R_t	-	$R_t = r_0/r_L$
中空比	R_h	-	$R_h = r_i(x)/r_o(x) = \text{const.}$
弾性係数	E	[N/m ²]	今回は高さ方向に一定とする
単位体積重量	γ	[N/m ³]	

本節の検討において用いる計算モデルは、**図-3.5.1 (a)**に示すような中空テーパー構造の片持ち梁である。このモデルは、3.2 節および 3.4 節のモデルを組み合わせたようなものとなっており、それぞれの物理量や文字の意味は前節までの内容のものと同様である。そこで、改めて**表-3.5.1**に各パラメータの意味をまとめたものを示す。

図-3.5.1 (b)には、先端 ($x = 0$)、根元 ($x = L$)、任意位置 x_p における断面形を示す。本研究の計算モデルにおける外半径 r_o および内半径 r_i は、それぞれ次式で与えられる。

$$r_o(x) = \left(\frac{1 - R_t}{L_c}x + R_t\right)r_L = (\Lambda x + R_t)r_L \quad (3.5.1)$$

$$r_i(x) = R_h r_o(x) = R_h(\Lambda x + R_t)r_L \quad (3.5.2)$$

ここに、 R_t はテーパー比、 R_h は中空比を表し、それぞれ次式で与えられる。

$$R_t = \frac{r_0}{r_L} \quad (3.5.3)$$

$$R_h = \frac{r_i(x)}{r_o(x)} = \text{const.} \quad (3.5.4)$$

すなわち、テーパー比 $R_t = 0$ のときは円錐に、 $R_t = 1$ のときは円柱に一致する。また、中空比 $R_h = 0$ のとき断面は中実となり、 R_h の増加に伴って空洞部の体積が大きくなる。なお、 $R_h = 1$ のときは計算モデルが消失する。さらに、既往の竹における断面形状の調査研究[24]では、中空比 R_h は高さ方向に一定であることが報告されており（式(3.4.28)を参照）、ここではこれを定数として取り扱う。なお、本研究では、幹・茎そのものの自重座屈特性に着目するため、枝葉の影響は考慮しない。

また、自然界の竹をはじめとする中空の稈や茎をもつ植物は、断面内で離散的に「節」を配置し、風をはじめとする横荷重によって生じる断面の楕円化と、それに伴う局部座屈の発生を防いでいることが知られている[26-28]．このような節が有する断面変形（楕円化）の抑制効果は、局部座屈の発生を抑制させるとともに、結果的に竹を「全体がしなることによって曲げに抵抗する梁」として機能させる重要な役割を果たしている．本研究では、このような節が有する断面変形の抑制効果を考慮して、全体が梁として曲げられる自重座屈問題に焦点を当てて、その最大高さの導出を行う．

3.5.2 支配方程式の導出

次に、この問題における支配方程式を導出する．ここで、**図-3.5.1 (c)**のように、片持ち梁が自重により座屈したとき、**図-3.5.1 (d)**に示すように任意の点 x における力の釣り合いを考えると、せん断力 $S(x)$ は次式で表される．

$$S(x) = \gamma V(x) \sin \theta \quad (3.5.5)$$

ここに、 γ は単位体積重量[N/m³]、 V は先端から位置 x までの区間の体積[m³]、 θ はたわみ角である．いま、先端から位置 x までの区間の体積 V は次式で与えられる．

$$V(x) = (1 - R_h^2) \left(\frac{1}{3} \Lambda^2 x^2 + \Lambda R_t x + R_t^2 \right) \pi r_L^2 x \quad (3.5.6)$$

式(3.5.6)は極めて煩雑な形であるため、これをそのまま用いて定式化を進めても、得られる支配微分方程式を解くことは不可能である．そこで、**図-3.5.2**に示すような二つのモデルを検討することにより、せん断力を簡単な形式に書き換える．

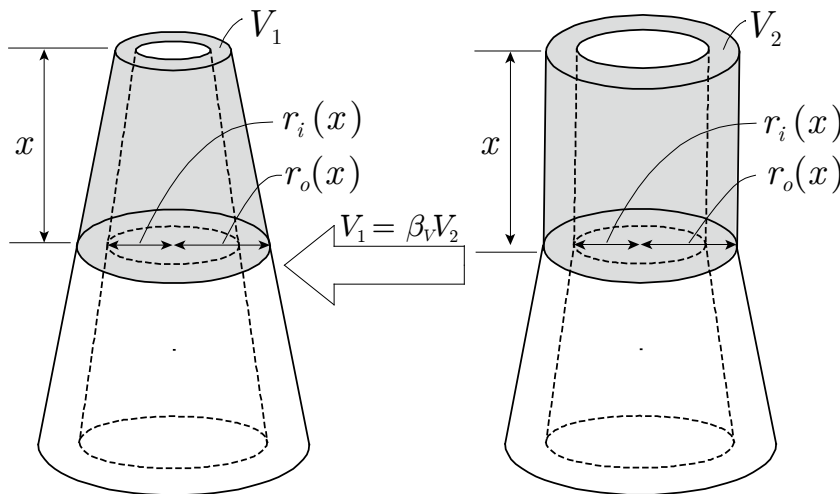


図-3.5.2 体積補正係数 β_V の導入

まず、**図-3.5.2**の左に示す斜線部の体積 V_1 は、式(3.5.6)で与えられる．それに対して、

図-3.5.2 の右に示す斜線部の体積 V_2 は、次式で与えられる．

$$V_2(x) = (1 - R_h^2)(\Lambda x + R_t)^2 \pi r_L^2 x \quad (3.5.7)$$

ここで、図-3.5.2 に示した二つのモデルにおける体積が等しくなるような補正係数 β_V を導入する．補正係数 β_V を V_2 に乘じると β_V の値域が容易に定まることから、 $V_1 = \beta_V V_2$ とすると次式が得られる．

$$\beta_V(x) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{R_t r_L}{r_o(x)} + \frac{R_t^2 r_L^2}{r_o^2(x)} \right) \quad (3.5.8)$$

よって、式(3.5.8)の体積補正係数 β_V は、中空比 R_h に依存しない．また、中実な円錐台モデルにおける体積補正係数と同じ式であるため、中実な円錐台モデルにおける体積補正係数と同様に、 β_V を x に依存せず、 R_t のみで変化する関数と考えることができる．

ここで、たわみ角 θ が微小であるとすれば、式(3.5.5)のせん断力 $S(x)$ は次のように書ける．

$$S(x) = \gamma \pi \beta_V (1 - R_h^2)(\Lambda x + R_t)^2 r_L^2 x \theta \quad (3.5.9)$$

次に、任意の点 x における曲げモーメント $M(x)$ は、弾性曲線方程式より次式で与えられる．

$$M(x) = -EI \frac{d\theta}{dx} \quad (3.5.10)$$

ここで、せん断力と曲げモーメントの関係（ $S = dM/dx$ ）を用いて、式(3.5.9)および(3.5.10)より次の支配方程式が得られる．

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{4\Lambda}{(\Lambda x + R_t)} \frac{d\theta}{dx} + \frac{4\gamma \beta_V}{E(1 - R_h^2)(\Lambda x + R_t)^2 r_L^2} x \theta = 0 \quad (3.5.11)$$

いま、式(3.5.11)の支配方程式において、中実な円錐台モデルと同様の次式を利用し、変数変換を行う．

$$\xi(x) = (\Lambda x + R_t) \omega \quad (3.5.12)$$

ここに、 ω は定数である．式(3.5.12)を用いて式(3.5.11)の変数変換を行うと、変換後の微分方程式は次のようになる．

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{4}{\xi} \frac{d\theta}{d\xi} + \frac{4}{\xi^2} (\xi - \omega R_t) \theta = 0 \quad (3.5.13)$$

なお、変数変換パラメータ ω は、式(3.5.12)の第三項目を最も簡単にするように定義すれば、次のようになる。

$$\omega = \frac{1}{(1 - R_t)^3} \frac{1}{(1 + R_h^2)} \frac{\gamma \beta_V L_c^3}{E r_L^2} \quad (3.5.14)$$

3.5.3 固有方程式の導出

式(3.5.13)の支配方程式は中実円錐台のものと全く同じであり、その一般解は次のように得られる。

$$\theta(\xi) = \frac{1}{8} \xi^{-3/2} (J_\eta(4\sqrt{\xi}) \Gamma(1 + \eta) c_1 + J_{-\eta}(4\sqrt{\xi}) \Gamma(1 - \eta) c_2) \quad (3.5.15)$$

ここに、 $J_\eta(x)$ は次数 η の第一種 Bessel 関数、 c_1 、 c_2 は任意定数であり、 η は次式で与えられる。

$$\eta = \sqrt{16\omega R_t + 9} \quad (3.5.16)$$

ここで、次に示す片持ち梁の境界条件を利用して、 ξ に関する条件式を導出する。式(3.5.13)の支配方程式および式(3.5.16)に示した Bessel 関数の次数 η は、 ω の定義を除いて中実円錐台モデルと全く同様である。そのため、中実テーパ柱の定式化（3.2 節）と同様に、固定端側の境界条件（式(2.1.28)）を用いて、 ξ に関する次の条件式を得ることができる。

$$J_\eta(4\sqrt{\xi}) = J_{-\eta}(4\sqrt{\xi}) = 0 \quad (3.5.17)$$

ここで、式(3.5.16)に示した第一種 Bessel 関数の次数 η において、 η が整数であれば、式(3.5.17)を満足する ξ が一意に定まる。式(2.1.28)に示す固定端側の境界条件から式(3.5.17)が導かれることを踏まえると、次に示す最大高さ方程式が得られる。

$$L_c = \left(\frac{j_{\eta,1}^2}{32\beta_V} (1 - R_t)^3 \right)^{1/3} \left(C \frac{E}{\gamma} r_L^2 (1 + R_h^2) \right)^{1/3} \quad (3.5.18)$$

ここに、 $j_{\eta,1}$ は次数 η の第一種 Bessel 関数における一番目の零点である。なお、式(3.4.14)より、テーパのない中空円筒の最大高さを L_{ch} とおくと、これは次式で与えられる。

$$L_{ch} = (1 + R_h^2)^{1/3} \left(C \frac{E}{\gamma} r_L^2 \right)^{1/3} = f(R_h) L_{cs} \quad (3.5.19)$$

ここに、 L_{cs} は Greenhill が導いた中実円柱の自重座屈に対する最大高さ、 $f(R_h)$ は中空比 R_h の影響を考慮するための関数であり、次式で与えられる。

$$f(R_h) = (1 + R_h^2)^{1/3} \quad (3.5.20)$$

これを用いて、式(3.5.19)は次のように書ける。

$$L_c = \left(\frac{j_{\eta,1}^2}{32\beta_V} (1 - R_t)^3 \right)^{1/3} L_{ch} = f(R_h) f(R_t) L_{cs} \quad (3.5.21)$$

ここに、 $f(R_t)$ は、テーパ比 R_t の影響を考慮するための関数である。以上より、中空円錐台の最大高さ L_c は、中実円柱の最大高さ L_{cs} に、テーパおよび中空化の影響を表す係数をかけた形で表されていることが分かる。

3.5.4 固有方程式の数値解法と最大高さ式の導出

式(3.5.21)は、整数条件を加味した第一種 Bessel 関数の次数 η の中に最大高さ L_c が含まれており、取り扱いが困難な最大高さ L_c に関する方程式である。これを解くために、中実円錐台と同様の手法により、次に示すような二つの計算モデルの機械的性質を考えることにより、式(3.5.21)の係数部分を導出する。

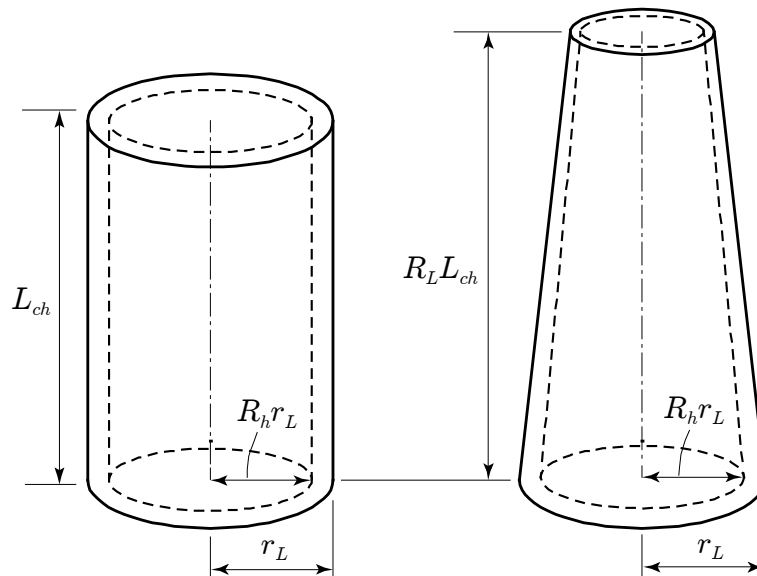


図-3.5.3 テーパー関数を導出するための計算モデル

まず、図-3.5.3に示すような、全く同じ固定端半径 r_L 、中空比 R_h 、単位体積重量 γ 、弾性係数 E 、中空比 R_h をもち、テーパ比 R_t のみが異なる二つのモデルを考える。このとき、テーパを持たない左図の場合に比べ、テーパを有する右図のモデルの方が、自重座屈に対する最大高さを大きくできると予想される。

そこで、テーパを持たないモデルの最大高さを L_{cs} 、テーパを有するモデルの最大高さを L_c とし、両者の最大高さ比 R_L を次のように定義する。

$$R_L = \frac{L_c}{L_{cs}} \quad (3.5.22)$$

この最大高さ比 R_L は、両者の最大高さの関係より、常に $R_L \geq 1$ となるはずである。

次に、式(3.5.16)に式(3.5.14)を代入し、次の関係式を得る。

$$16R_t \frac{1}{(1-R_t)^3} \frac{1}{(1+R_h^2)} \frac{\gamma\beta_V L_c^3}{Er_L^2} + 9 = \eta^2 \quad (3.5.23)$$

ここで、式(3.5.23)に式(3.5.19)、(3.5.21)、(3.5.22)を代入すると、次式が得られる。

$$R_L(R_t) = (1-R_t) \left\{ \frac{\eta^2 - 9}{32R_t\beta_V} \right\}^{1/3} \quad (3.5.24)$$

これは、中空比 R_h に対して独立であり、中実円錐台の定式化と全く同じものである。したがって、その結果を引用して、式(3.5.24)は次のように書くことができる。

$$R_L(R_t) = f(R_t) \approx \frac{1}{2}R_t^2 - R_t + \frac{3}{2} \quad (3.5.25)$$

すなわち、テーパの影響を考慮するための関数は、3.2節のものと完全に同じである。なお、中空円筒の最大高さが、中空部とテーパを持たない中実円柱と式(3.5.20)に示した中空比 R_h の関数の積で与えられるため、中空円錐台モデルの最大高さ L_c は次式を用いて求めることができる。

$$L_c = f(R_t)f(R_h) \left(C \frac{E}{\gamma} r_L^2 \right)^{1/3} = f(R_t)f(R_h)L_{cs} \quad (3.5.26)$$

ここに、 C は定数 ($C \approx 1.986$ 、第2章を参照) であり、 L_{cs} はGreenhill [1]が導いた円柱の自重座屈に対する最大高さである。また、式中の $f(R_t)$ および $f(R_h)$ は、それぞれ式(3.5.25)と式(3.5.20)で与えられる。

式(3.5.26)は、中空円錐台の最大高さが、テーパー比 R_t および中空比 R_h に応じて変化する関数を円柱の最大高さにかけることで得られることを示している。すなわち、既に McMahon によって立証されている高さ－直径間のスケーリング則[3,4]は、テーパー形状および断面の中空化の双方を考慮した場合にも、円柱としてモデル以下した場合と同様に、理論的に成り立つものである。また、式(3.5.26)を材料物性的な観点からみると、材質を硬くしつつ、密度を低く保つことが、最大高さを向上させるために重要である、ということの意味している。さらに、形状的な観点では、テーパー形状や断面の中空化によって体積を低減させつつ、固定端半径を大きくすることで、モーメントの大きな根元付近の剛性を高く保つことが重要であることを示すものである。

3.5.5 テーパー形状と中空断面が自重座屈特性に与える影響：固定端半径一定

式(3.5.21)は、整数条件を加味した第一種 Bessel 関数の次数 η の中に最大高さ L_c が含まれており、取り扱いが困難な最大高さ L_c に関する方程式である。これを解くために、中実円錐台と同様の手法により、次に示すような二つの計算モデルの機械的性質を考えることにより、式(3.5.21)の係数部分を導出する。

植物は、生存のために光をめぐる他の植物との競争を可能な限り優位に進める必要がある。すなわち、最も優先されるべきは、「肥大成長のような半径方向への成長」ではなく、「光資源獲得のための高さ方向への樹高成長」であると予想され、これは先端付近の成長が優先される「頂芽優勢」からも推測される事象である。ただし、最大高さ向上のために密度を軽量化することは効果的であるが、密度は弾性係数と密接な関連を有していることに加え、幹における重量の過剰な低減は、風をはじめとする横荷重への抵抗性の低下を招き、転倒のリスクを増加させてしまう恐れもある[29-31]。

前述の内容を踏まえ、まず固定端半径 r_L が一定であるという条件のもと、テーパー比 R_t と中空比 R_h が自重座屈特性（最大高さ、最大密度）に与える影響について検討を行ったものを図-3.5.4 (a)に示す。なお、縦軸は中実円柱の自重座屈特性に対する中空円錐台の自重座屈特性の比を示しており、図中に示す最大高さ比 $R_L(R_t, R_h)$ および最大密度比 $R_\rho(R_t, R_h)$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$R_L = f(R_t)f(R_h) \quad (3.5.27)$$

$$R_\rho = f(R_t)^3 f(R_h)^3 = R_L^3 \quad (3.5.28)$$

また、テーパー比 R_t と中空比 R_h の範囲は、以降の全ての数値計算例において、実際の竹および樹木における測定結果[6, 18, 24, 32-39]を参考に、それぞれ $0 \leq R_t \leq 1$, $0 \leq R_h \leq 0.9$ であるものとした。なお、図-3.5.4における計算結果は、全て弾性係数 E を一定とした場合のものである。

図より、固定端半径 r_L を一定とした場合には、中空化のみを採用する場合は最大で約 1.2 倍、テーパー形状のみを採用する場合には最大で約 1.5 倍まで、最大高さを向上させることが可能である。さらに、自然界の竹のようなテーパー形状と中空断面の両方を同時に採用する場合には、中実な円柱の約 1.8 倍にまで最大高さを大きくすることができ、両者の最大高さ向上への寄与が確認できる。なお、テーパー形状および中空断面の一方

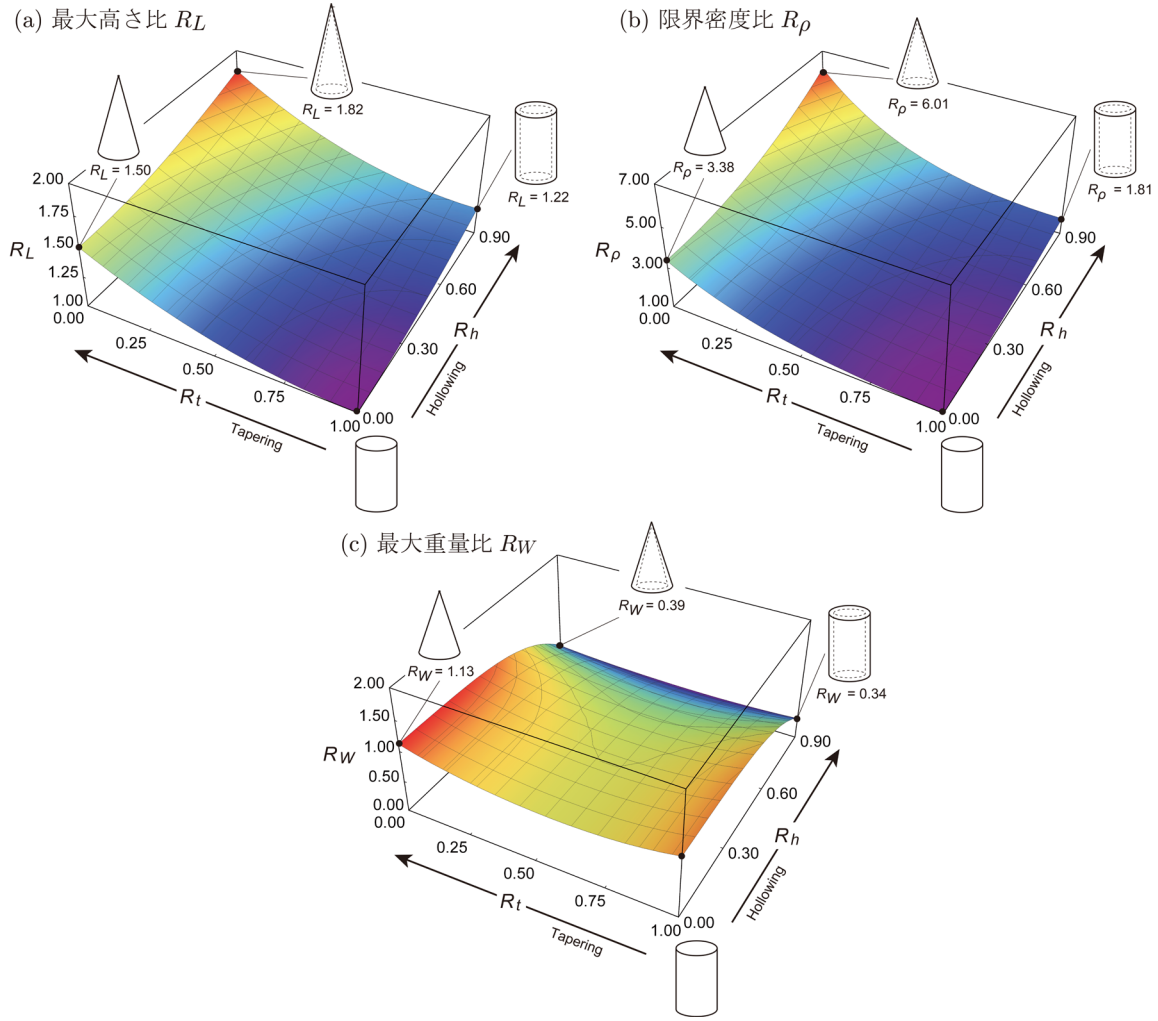


図-3.5.4 固定端半径を一定とした場合のテーパ形状・中空断面の自重座屈特性への影響

のみを採用する場合，固定端半径を一定とするこのケースでは，実現可能な最大高さの最大値という観点からみると，中空化よりテーパ形状の採用が最大高さの向上に効果的であると言える。

また，図-3.5.4 (b)の最大密度に関しては，中空化のみを採用する場合は最大で約 1.8 倍，テーパ形状のみを採用する場合には最大で約 3.4 倍まで最大密度を向上させることが可能である。さらに，自然界の竹のようなテーパ形状と中空断面の両方を同時に採用する場合には，中実な円柱の約 6.0 倍にまで最大密度を大きくすることができる。なお，最大高さの場合と同様に，実現可能な最大密度の最大値という観点からみると，中空化よりテーパ形状の採用が最大高さの向上に効果的であると言える。

図-3.5.4 (c)は，この最大密度の結果を用いて，中実円柱が自重座屈せずに許容できる最大総重量に対する，中空円錐台の最大総重量の比を計算したものである。なお，縦軸の最大重量比 $R_W(R_t, R_h)$ は，次式で与えられる。

$$R_W = f(R_t)^3 f(R_h)^3 \left(\frac{1}{3} (R_t^2 + R_t + 1) (1 - R_h^2) \right) \quad (3.5.29)$$

図より、テーパー形状を採用する場合には、許容できる最大重量は顕著には変化しないことが分かる。ただし、最も高い自重座屈特性（最大高さ、最大密度）を獲得できるテーパー比 $R_t = 0$ のときには、基準とする円柱よりも最大重量が大きくなっていることが分かる（ $R_w > 1$ ）。これに対して、中空断面を採用する場合には、断面の中空化に伴って最大重量は徐々に減少していき、 $R_h = 0.9$ の場合には、およそ7割程度の軽量化が行われていることが分かる。これは、テーパーを採用した場合でもほぼ同様である。すなわち、固定端半径および高さを一定とするこの条件においては、最大密度は高まるものの、中空化によって体積は大きく減少するため、結果として許容可能な最大重量が低下することを示している。

3.5.6 テーパー形状と中空断面が自重座屈特性に与える影響：体積一定

植物が利用可能なバイオマス量には、その成長段階に応じて必ず限りがあると予想される。そこで本節では、体積が一定である場合のもと、テーパー形状および断面の中空化が自重座屈耐性に与える影響を検討する。

図-3.5.5は、体積一定条件におけるテーパー比 R_t と中空比 R_h が自重座屈特性に与える影響を図示したものである。いま、半径を r_s とする中実円柱と高さが等しい中空円錐台を考え、両者の体積が等しいものとする、任意のテーパー比 R_t および中空比 R_h をもつモデルの固定端半径 r_L は、次式で与えられる。

$$r_L = \sqrt{\frac{3}{(1 - R_h^2)(1 + R_t + R_t^2)}} r_s \quad (3.5.30)$$

式(3.5.30)を式(3.5.26)に代入すれば、最大密度 ρ_c が得られる（図-3.5.5 (b)）。そして、これを用いて基準円柱における最大単位体積重量 γ_{cs} との比を算出し、これを高さの比に変換すれば、図-3.5.5 (a)に示した最大高さ比 $R_L(R_t, R_h)$ が得られる。

図より、体積一定の条件下では中空化のみを採用する場合は最大で約2.1倍、テーパー形状のみを採用する場合には最大で約2.2倍まで、最大高さを大きくすることが可能であることが分かる。さらに、自然界の竹のような双方を同時に採用する場合には、著しく最大高さを向上させることができ、これは中実な円柱の約4.6倍にまで到達する。なお、この両者のうちどちらかを採用する場合を考えると、体積を一定とするこのケースの場合においては、断面の中空化とテーパー形状の採用が自重座屈耐性の向上に同程度の効果を与えることが分かる。これらは、図-3.5.5 (b)の最大密度に関しても、ほとんど同様の傾向である。

また、式(3.5.30)からも分かるように、体積一定条件に基づく検討では、テーパー形状および断面の中空化によって、固定端半径 r_L が基準円柱の半径 r_s に比べて増加していくこととなる。これを示したものが図-3.5.5 (c)であり、図の縦軸は次式で与えられる固定端半径比 $R_r(R_t, R_h)$ を示す。

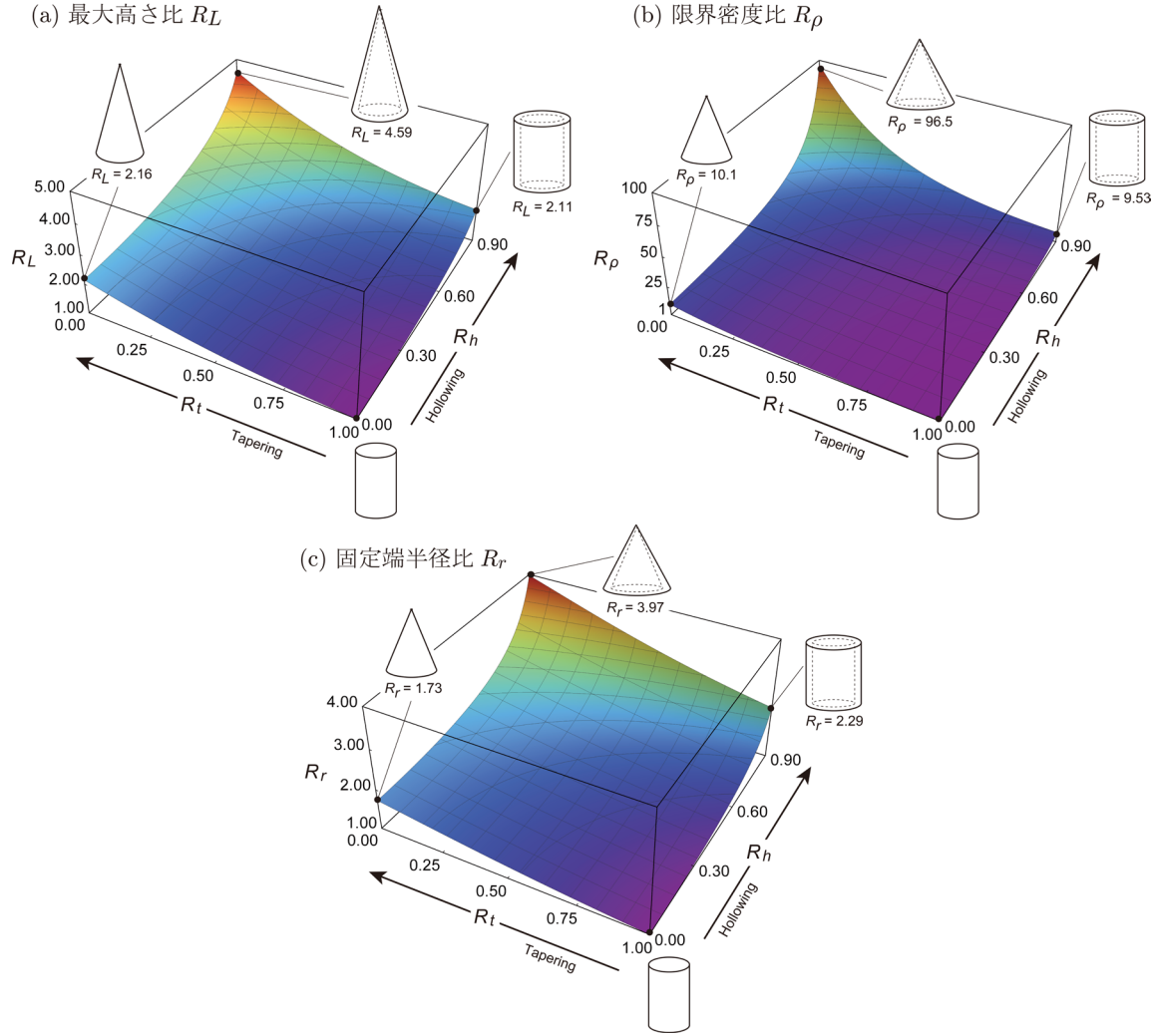


図-3.5.5 モデルの体積を一定とした場合のテーパー形状・中空断面の自重座屈特性への影響

$$R_r(R_t, R_h) = \frac{r_L}{r_s} = \sqrt{\frac{3}{(1 - R_h^2)(1 + R_t + R_t^2)}} \quad (3.5.31)$$

すなわち，一定の体積を配分する場合，テーパー形状のみを採用する場合では最大で 1.7 倍，断面の中空化のみを採用する場合には最大で 2.3 倍ほど，固定端における半径が基準円柱の半径よりも大きくなる．この両者を採用する場合には，基準円柱の約 4.0 倍まで半径が肥大化する．なお，根元半径の増大は，横荷重による転倒への抵抗モーメントを増加させる効果を有するが[40]，より多くの面積を占有しなければならないことと，光資源獲得のための高さ方向への成長が最も優先されるべきであることに留意する必要がある．

3.5.7 特定の自重座屈特性を実現するために要求される力学的性能

3.5.5 項および 3.5.6 項の検討は，特定の条件下において，より高い自重座屈特性を獲得できる形態はどのようなものかを考えるものであった．しかし，実際の樹木では，まずとにかく光を十分に獲得できる特定の高さまで成長させることが重要であり，その体

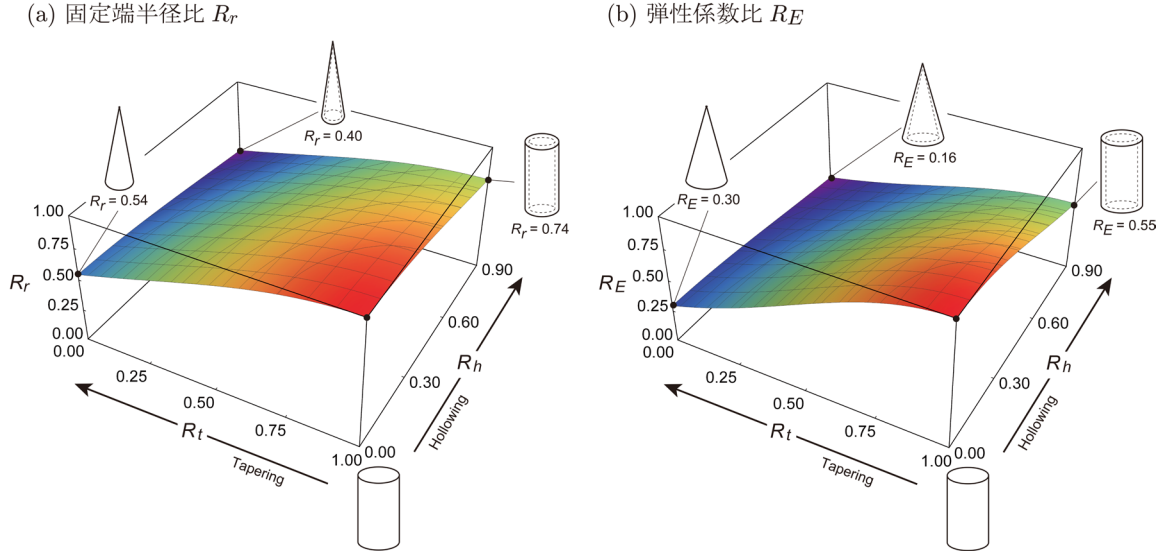


図-3.5.6 自重座屈特性を一定とした場合に要求される力学的性能

に耐える自重座屈耐性を獲得することが重要である．本節では，これまでとは真逆のアプローチとして，「特定の自重座屈特性を実現するためには，どのような性能が要求されるのか」という観点のもと，テーパ形状および断面の中空化が自重座屈耐性に与える影響について考察する．

図-3.5.6 は，基準とする円柱の最大高さと同等の最大高さを実現させるために必要な固定端半径・弾性係数を計算したものを示す．すなわち，図-3.5.6 (a)および図-3.5.6 (b)の縦軸は，それぞれ次式で与えられる．

$$R_r(R_t, R_h) = (f(R_t)f(R_h))^{-3/2} \quad (3.5.32)$$

$$R_E(R_t, R_h) = (f(R_t)f(R_h))^{-3} \quad (3.5.33)$$

まず，図-3.5.6 (a)に示した固定端半径比 R_r に関する計算結果では，中空化のみを採用する場合は基準円柱の 0.74 倍，テーパ形状のみを採用する場合には基準円柱の 0.54 倍の固定端半径で，同等の最大高さに到達することができることが分かる．さらに，両者を同時に採用する場合には，基準円柱の 0.4 倍の固定端半径で，同等の最大高さに達することができる．すなわち，テーパ形状および断面の中空化は，半径方向への肥大成長に要するエネルギーを円柱の場合に比べて節約することができ，その分だけ樹高成長に多くエネルギーを費やすことができると考えられる．なお，この両者のどちらか一方を採用する場合には，テーパ形状のみを採用する方が優位であることが分かる．

さらに，図-3.5.6 (b)に示した弾性係数比 R_E の場合もほぼ同様の傾向が見られ，中空化のみを採用する場合は基準円柱の 0.55 倍，テーパ形状のみを採用する場合には基準円柱の 0.30 倍の弾性係数で，同等の最大高さに到達することができることが分かる．さらに，両者を同時に採用する場合には，基準円柱の 0.16 倍の弾性係数で，同等の最大高さに達することができる．弾性係数は，木化現象などにより成長に伴って大きくなっていることが予想される機械的特性であるため，より小さな弾性係数で同等の高さを実現できる方が優位である．これを踏まえると，テーパ形状と中空化のどちらか一方を採

用する場合には、テーパー形状の方が、より早い成長段階で特定の自重座屈特性に到達できることが分かる。

3.5.8 自重座屈特性に対するテーパー形状と中空断面の得失

本節では、植物におけるテーパー形状と中空断面の自重座屈特性に対する得失について考察する。表-3.5.2 には、前節までに示した結果を表としてまとめたものを示す。

表-3.5.2 計算結果の概要

固定端半径・弾性係数一定		テーパーのみ	中空化のみ	テーパー・中空化
最大高さ比	密度一定	1.50	1.22	1.82
最大密度比	高さ一定	3.38	1.81	6.01
最大重量比	高さ一定	1.13	0.34	0.39
体積・弾性係数一定		テーパーのみ	中空化のみ	テーパー・中空化
最大高さ比	密度一定	2.16	2.11	4.59
最大密度比	高さ一定	10.1	9.53	96.5
固定端半径比	高さ一定	1.73	2.29	3.97
高さ・密度一定		テーパーのみ	中空化のみ	テーパー・中空化
固定端半径比	弾性係数一定	0.54	0.74	0.40
弾性係数比	固定端半径一定	0.30	0.55	0.16

表より、いずれの条件下における解析でも、自重座屈特性の獲得という目的においては、断面の中空化よりも、テーパー形状の採用が優位であることが分かる。さらに、その双方を採用することにより、自重座屈特性をいずれの条件下でも飛躍的に高めることができる。これを踏まえると、断面の中空化とテーパー形状のどちらか一方を採用する場合には、まずはテーパー形状を優先的に採用すべきであるといえる。また、断面の中空化は、軽量化による成長速度の向上が見込めるものの、つぶれや転倒への抵抗性能を低下させてしまう。これに対して、テーパー形状は顕著な力学的損失を生じさせることなく、自重座屈特性を確保できる優位なアプローチである。これらのことは、高さを求めるあらゆる植物にとって、テーパー形状の採用が機械的に最も優先されるべき行為であることを示唆している。実際に、植物の形状を観察しても、中空でない植物は樹木をはじめとして代表例がいくつか存在するが、テーパー形状は木本類・草本類を問わず、ほとんどの植物が有している形状的特徴である。

また、中実・中空断面のような違いは、「個としての植物」と「群としての植物」といった生存戦略と、生存年数の違いが大きく影響していると予想される。まず、寿命が長く、それぞれが独立した個体である樹木のような植物にとっては、それ単体で様々な外力への抵抗性能を十分に有していなくてはならない。そのため、つぶれへの抵抗性の低下や、軽量化による転倒抵抗モーメントの低減を招く恐れがある中空断面を採用せず、テーパー形状のみを採用するに至っていると推測できる。なお、テーパー形状の採用は、

単純な高さと自重の確保だけでなく、断面二次モーメントをはじめとする断面性能を傾斜化させるものでもある。これは、自由端にかけて徐々に破壊リスクを上昇させることを可能とし、樹木にとって最も致命的となる「根返り」のリスクを低下させることに繋がっていると予想される。

このような樹木に対して、寿命が樹木に比べ短く、地下茎で繋がっている竹[40]のような植物の場合には、地上部へ進出する本数の増加や、迅速な成長速度を確保するべく、各個体の外力抵抗性を犠牲にしても、自身の体を軽量化させる戦略を取っているのではないかと考えられる。なお、木本類における中空植物の代表例である竹は、テーパ形状と中空化の双方を同時に採用することで[12]、樹木と同程度の高さに驚異的な速度で到達することを可能にしていると予想される。さらに、テーパ形状は、断面の中空化に比べて、より小さな固定端半径で高い自重座屈特性を獲得できる。このことは、集団で群生する竹にとって、一つ一つの個体が占有する地上部の面積を削減できることを意味し、これも大きな利点として作用すると考えられる。

なお、自然界の竹をはじめとする中空の稈や茎をもつ植物は、断面内で離散的に「節」を配置し、風をはじめとする横荷重によって生じる断面の楕円化と、それに伴う局部座屈の発生を防いでいることが知られている[26-28]。このような節が有する断面変形（楕円化）の抑制効果は、局部座屈の発生を抑制させるとともに、結果的に竹を「全体がしなることによって曲げに抵抗する梁」として機能させる重要な役割を果たしている。本研究の計算モデルには、一見すると節の影響を取り入れていないかのように見えるが、あくまで本研究では節が有する断面変形の抑制効果を考慮して、全体が梁として曲げられる自重座屈問題に焦点を当てて、その最大高さの導出を行い、以上のような考察を得ていることに留意する必要がある。

3.5.9 本節のまとめ

本研究では、自重座屈に対する最大高さの観点から、テーパ形状および断面の中空化が有する得失を明らかにするために、木本植物をテーパ形状および中空断面をもつ片持ち梁としてモデル化するとともに、そのときの自重座屈に対する最大高さ式を理論的に導出した。この式を用いて考察を行った結果、以下に示す知見が得られた。

- ① テーパ形状と中空断面を同時に考慮した最大高さの式は、円柱の最大高さの式とテーパ形状および中空断面を考慮した関数の積で表すことができる。したがって、Greenhill [1] が提案した円柱のスクーリングの法則、すなわち最大高さは固定端半径の $2/3$ 乗に比例するという法則は、テーパ形状や中空断面を考慮した場合でも有効である。これは McMahon [3,4] の結果とも一致し、樹木に対するこの法則の適用性を裏付けるものである。
- ② 本研究における理論式に基づく考察から、テーパ形状の方が中空断面よりも早い成長段階で樹高を大きくすることができることが分かった。したがって、すべての植物が成長のために十分な光を求め、先端から軸方向への伸長が最も優先されること（一次肥大成長）を踏まえると、本節で導いた式は、ほとんどすべての植物が先細り型を示す理由を理論的に説明するものであると考えられる。

- ③ 中空断面も、テーパー型と同様の自己屈曲性を確保するための有効な方法である。しかし、風などの横荷重による楕円化や転倒に対する抵抗力は低下する。このことから、中空断面と中実断面の採用の違いには、「個体としての植物」や「集団としての植物」といった生存戦略の観点や、それぞれの寿命が関係していることが示唆される。

この成果は、土木構造物の設計や構造計算だけでなく、森林管理やバイオマスの推定にも貢献することが期待でき、さらに統計的・実験的アプローチでは解明することができない生態学的知見を与えるものであり、初めて植物のテーパー形状および中空断面の影響を定量化したものである。なお、本章に示した成果をまとめたものは、Scientific Reports 誌にて論文として報告している [研究業績目録, 学術論文(6)]。

次節では、これまでのような「自重座屈特性に対してよい影響を与えると考えられる要素」とは対照的に、自重座屈特性に顕著な悪影響を与えると予想される「初期不整」の問題を取り上げるとともに、樹木が有する自重座屈に対する安全率の意味を解明する。

3.6 初期たわみと初期傾斜を考慮した樹木の形態形成戦略

ここまで、地球上に存在する全ての構造物に等しく作用する「重力」に焦点を当て、重力に起因する自重座屈問題について議論を行ってきた。しかしながら、重力のほかにもう一つ、構造物が人為的・自然的なものであるかによらず、座屈問題においては無視できない重要な問題が存在する。

それは、ほぼ全ての構造物に生じてしまう「初期不整」である。あらゆる構造物において、製造時にわずかなたわみや歪みが生じることは避けられない[38]。これは、人為的に造られた柱だけでなく、自然由来の構造物である樹木や竹のような直立する植物も同様である。このような初期不整は、特に座屈問題でその影響が顕著であり、これを考慮することの重要性がしばしば指摘されている[41-43]。しかしながら、長柱の自重座屈に関する研究の起点となった Greenhill の研究は、初期不整の影響については全く言及していない。さらに、この式は前述の通り生態学分野で広く使われてきたが、研究対象である植物にはほとんど必ず初期不整が必ず生じているのにも関わらず、その影響は完全に無視されている。実際に、植物が成長可能な最大高さを支配する要因を探るいくつかの研究では、Greenhill の式が実際よりも高さを過大に評価することを指摘し、最大高さは自重座屈問題に支配されるものではないと結論付けている[44,45]。これについても、初期不整に関する言及はなく、初期不整のない Greenhill の式を用いているのみである。

これを踏まえて、本節では、自重を考慮する必要がある「重い柱」について、初期不整がその自重座屈特性に与える影響を理論的に解明することを目的とする。断面が一定で均質な材料からなる片持ち梁について、先端荷重と自重の双方を考慮し、いくつかの簡単なケースについて自重座屈問題の定式化を行う。

3.6.1 初期たわみを考慮した自重座屈に対する最大高さ

はじめに、部材が完全に鉛直方向にまっすぐ伸長しており、そこから初期不整として初期たわみ”のみ”が生じている場合について、このときの最大高さの定式化を行う。

(1) 計算モデル

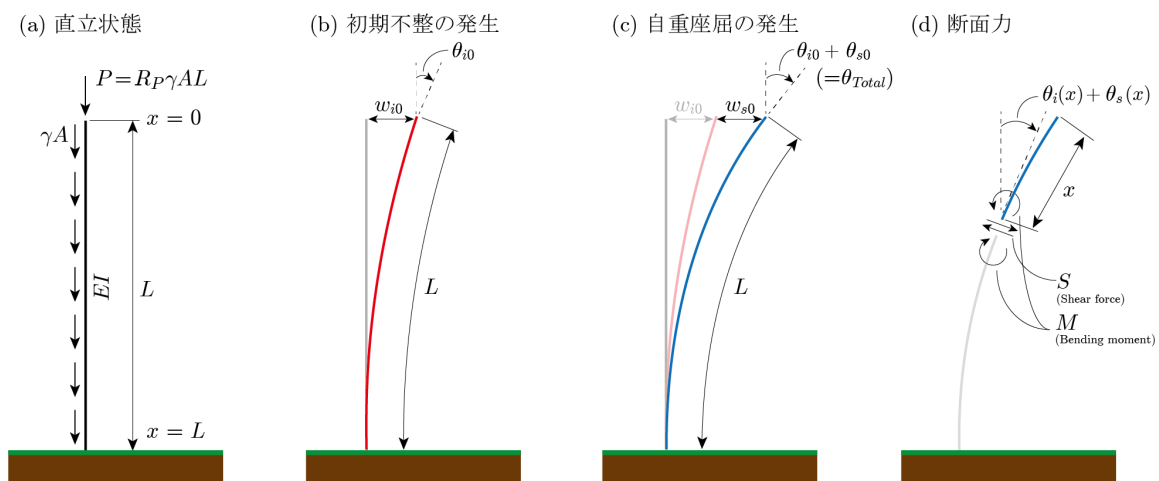


図-3.6.1 部材の初期たわみを考慮した計算モデル

まず、鉛直方向にまっすぐ伸長し、その状態に初期たわみのみを与えた場合の自重座屈問題について説明する。計算モデルは、**図-3.6.1** に示すような地面側を固定端とする円柱形の片持ち梁である。**図-3.6.1 (a)**に示すように、座標系は中立軸に沿うものとし、自由端で $x = 0$ 、固定端で $x = L$ とする。

なお、曲げ剛性 EI [N/m^2]は長さ方向に一様であるものとし、単位体積重量を γ [N/m^3], 断面積を A [m^2]と表記する。また、先端に載荷する圧縮荷重 P [N]については、長柱の体積力 γAL との圧縮力比 $R_P (= P/\gamma AL)$ を用いて、 $P = R_P \gamma AL$ として与える。たとえば、 $R_P = 0$ のときは自重のみが作用する状態、 $R_P = 1$ のときは自重による体積力と同じ大きさの圧縮力が先端に作用していることを意味する。

(2) 支配方程式の導出

ここで、**図-3.6.1 (b)**のように、このモデルに微小な初期たわみが生じている状態を考える。このときのたわみ角を $\theta_i(x)$ として与え、自由端では初期たわみ角 θ_{i0} が生じているものとする。この状態から、**図-3.6.1 (c)**のように自重によって座屈が生じたとき、**図-3.6.1 (b)**に対する**図-3.6.1 (c)**のたわみ角を $\theta_s(x)$ と表すと、**図-3.6.1 (d)**に示すような変形後の力のつり合いより、せん断力 $S(x)$ が次のように得られる。

$$S(x) = \gamma A(x + R_P L) \sin(\theta_{Total}(x)) = \gamma A(x + R_P L) \sin(\theta_i(x) + \theta_s(x)) \quad (3.6.1)$$

ここで、総たわみ角 $\theta_{Total}(x) = \theta_i(x) + \theta_s(x)$ が微小であるとすれば、式(3.6.1)は次のように変形できる。

$$S(x) \approx \gamma A(x + R_P L)(\theta_i(x) + \theta_s(x)) \quad (3.6.2)$$

また、梁の微分方程式より、この系における曲げモーメントは次式で与えられる。

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w_s}{dx^2} \quad (3.6.3)$$

ここに、 $w_s(x)$ は任意点における初期たわみ－自重座屈発生の際に生じたたわみである。いま、曲げモーメントとせん断力の関係 $S = dM/dx$ を用いて、この系における支配方程式は次のように得られる。

$$\frac{d^2 \theta_s}{dx^2} + \frac{\gamma A}{EI} (\theta_i(x) + \theta_s(x))(x + R_P L) = 0 \quad (3.6.4)$$

ここで、これまでと同様に次式を用いた変数変換を行う。

$$\xi = \omega x \quad (3.6.5)$$

ここに、 ω は変数変換パラメータであり、これを用いて式(3.6.4)の支配方程式を次のように変換する.

$$\frac{d^2\theta_s}{d\xi^2} + (\theta_i(\xi) + \theta_s(\xi))(\xi + R_P\omega L) = 0 \quad (3.6.6)$$

なお、パラメータ ω は、式(3.6.4)の左辺第二項目の係数部を最も単純化するように定義すると、次式により与えられる.

$$\omega = \left(\frac{\gamma A}{EI} \right)^{1/3} \quad (3.6.7)$$

さらに、 $\theta_i(\xi) = 0$ を式(3.6.6)に代入することにより、初期不整を含まない問題の支配方程式、すなわち式(2.1.26)と全く同じ結果を得ることができる.

(3) 初期たわみを考慮した最大高さの定式化：Sin-curve model

式(3.6.6)に示した支配方程式は、初期たわみ角 $\theta_i(x)$ の与え方によっては、その厳密解を得ることが難しくなってしまうと予想される. ここでは、この問題における簡単な解の例として、初期たわみ角 $\theta_i(x)$ を Euler 座屈の一次モードを表す三角関数を用いて与えた場合について、その最大高さを導出する.

いま、片持ち梁における固定端の境界条件 ($\theta = 0$, at $x = L$) を満足するようなたわみの式を、次のような三角関数の形で定義する.

$$w_i(x) = w_{i0} \left(1 - \sin \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \right) \quad (3.6.8)$$

ここで、式(3.6.9)の x に関する一階微分を求めることにより、初期たわみ角 $\theta_i(x)$ が次のように得られる.

$$\theta_i(x) = -w_{i0} \frac{\pi}{2L} \cos \left(\frac{\pi x}{2L} \right) \quad (3.6.9)$$

式(3.6.9)に $x = 0$ を代入することにより、自由端における初期たわみ角 $\theta_i(0) = \theta_{i0}$ が以下に示すように得られる.

$$\theta_{i0} = \frac{w_{i0}\pi}{2L} \quad (3.6.10)$$

これを用いて、式(3.6.9)は次のように書ける.

$$\theta_i(x) = -\theta_{i0} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \quad (3.6.11)$$

このたわみ角の符号に留意して式(3.6.11)を式(3.6.5)の支配方程式に代入することにより、この問題における解くべき支配方程式が次のように得られる。

$$\frac{d^2\theta_s}{d\xi^2} + \left(\theta_s(\xi) + \theta_{i0} \cos\left(\frac{\pi\xi}{2\xi_c}\right) \right) (\xi + R_P\xi_c) = 0 \quad (3.6.12)$$

ここに、 ξ_c は最大高さ L_c を与える固有値であり、式(3.6.5)に $x = L_c$ を代入したものである（すなわち、 $\xi_c = \omega L_c$ ）。式(3.6.12)の一般解を Mathematica により求めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \theta_s(\xi) = & \text{Ai}(k(\xi + R_P\xi_c))c_1 + \text{Bi}(k(\xi + R_P\xi_c))c_2 \\ & - \text{Ai}(k(\xi + R_P\xi_c)) \int_1^\xi k^2 \pi \theta_{i0} \text{Bi}(k(K_1 + R_P\xi_c)) \cos\left(\frac{\pi K_1}{2\xi_c}\right) (R_P\xi_c + K_1) dK_1 \\ & + \text{Bi}(k(\xi + R_P\xi_c)) \int_1^\xi k^2 \pi \theta_{i0} \text{Ai}(k(K_2 + R_P\xi_c)) \cos\left(\frac{\pi K_2}{2\xi_c}\right) (R_P\xi_c + K_2) dK_2 \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

ここに、 $k = (-1)^{1/3}$ 、 $\text{Ai}(\xi)$ と $\text{Bi}(\xi)$ はそれぞれ第一種・第二種 Airy 関数、 c_1, c_2 は任意定数である。また、式中の K_1, K_2 は積分におけるダミー変数である。

なお、この問題における境界条件は、次式を用いて与えられる。

$$\begin{cases} at & x = 0 \ (\xi = 0), & \frac{d\theta_s}{dx} = 0 \\ at & x = L_c \ (\xi = \omega L_c), & \theta_s = 0 \end{cases} \quad (3.6.14)$$

ここで、式(3.6.14)における自由端側の境界条件を適用するために、式(3.6.13)の ξ に関する一階微分を求めると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \theta_s(\xi) = & \omega \text{Ai}'(k(\xi + R_P\xi_c))c_1 + \omega \text{Bi}'(k(\xi + R_P\xi_c))c_2 \\ & - k\omega \text{Ai}'(k(\xi + R_P\xi_c)) \int_1^\xi k^2 \pi \theta_{i0} \text{Bi}(k(K_1 + R_P\xi_c)) \cos\left(\frac{\pi K_1}{2\xi_c}\right) (R_P\xi_c + K_1) dK_1 \\ & + k\omega \text{Bi}'(k(\xi + R_P\xi_c)) \int_1^\xi k^2 \pi \theta_{i0} \text{Ai}(k(K_2 + R_P\xi_c)) \cos\left(\frac{\pi K_2}{2\xi_c}\right) (R_P\xi_c + K_2) dK_2 \end{aligned} \quad (3.6.15)$$

ここに、 $\text{Ai}'(\xi)$ と $\text{Bi}'(\xi)$ はそれぞれ第一種・第二種 Airy 関数の ξ に関する一階微分を表す。

これを用いて、未知定数 c_1, c_2 の間に成り立つ関係を導出するために、式(3.6.15)に自由端側の境界条件を適用すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_s}{d\xi} = & \text{Ai}'(kR_P\xi_c) \left(c_1 - \int_1^0 k^2\pi\theta_{i0}\text{Bi}(k(K_1 + R_P\xi_c)) \cos\left(\frac{\pi K_1}{2\xi_c}\right) (R_P\xi_c + K_1)dK_1 \right) \\ & + \text{Bi}'(kR_P\xi_c) \left(c_2 + \int_1^0 k^2\pi\theta_{i0}\text{Ai}(k(K_2 + R_P\xi_c)) \cos\left(\frac{\pi K_2}{2\xi_c}\right) (R_P\xi_c + K_2)dK_2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

上式を c_1 について解くと、次のようになる。

$$\begin{aligned} c_1 = & \int_1^0 k^2\pi\theta_{i0}\text{Bi}(k(K_1 + R_P\xi_c)) \cos\left(\frac{\pi K_1}{2\xi_c}\right) (R_P\xi_c + K_1)dK_1 \\ & - \frac{\text{Bi}'(kR_P\xi_c)}{\text{Ai}'(kR_P\xi_c)} \left(c_2 + \int_1^0 k^2\pi\theta_{i0}\text{Ai}(k(K_2 + R_P\xi_c)) \cos\left(\frac{\pi K_2}{2\xi_c}\right) (R_P\xi_c + K_2)dK_2 \right) \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

式(3.6.17)を式(3.6.13)に代入することにより、一般解から未知定数 c_1 を次のように消去することができる。

$$\begin{aligned} \theta_s(\xi) = & \text{Bi}(k(\xi + R_P\xi_c)) (c_2 + K_{\xi A}\theta_{i0}) \\ & + \text{Ai}(k(\xi + R_P\xi_c)) \left((K_{0B} - K_{\xi B})\theta_{i0} - \frac{\text{Bi}'(kR_P\xi_c)}{\text{Ai}'(kR_P\xi_c)} (c_2 + K_{0A}\theta_{i0}) \right) \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

ここに、 K_{0A} , K_{0B} , $K_{\xi A}$ および $K_{\xi B}$ は次式で与えられる。

$$K_{0A} = \int_1^0 k^2\pi\text{Ai}(k(K_2 + R_P\xi_c)) \cos\left(\frac{\pi K_2}{2\xi_c}\right) (R_P\xi_c + K_2)dK_2, \quad (3.6.19)$$

$$K_{0B} = \int_1^0 k^2\pi\text{Bi}(k(K_1 + R_P\xi_c)) \cos\left(\frac{\pi K_1}{2\xi_c}\right) (R_P\xi_c + K_1)dK_1, \quad (3.6.20)$$

$$K_{\xi A} = \int_1^\xi k^2\pi\text{Ai}(k(K_2 + R_P\xi_c)) \cos\left(\frac{\pi K_2}{2\xi_c}\right) (R_P\xi_c + K_2)dK_2, \quad (3.6.21)$$

$$K_{\xi B} = \int_1^\xi k^2\pi\text{Bi}(k(K_1 + R_P\xi_c)) \cos\left(\frac{\pi K_1}{2\xi_c}\right) (R_P\xi_c + K_1)dK_1. \quad (3.6.22)$$

さらに、式(3.6.18)に $\xi = 0$ を代入することにより、自由端における初期たわみ—自重座屈発生にかけて生じたたわみ角 $\theta_s(0) = \theta_{s0}$ を次のように得ることができる。

$$\theta_{s0} = \text{Ai}(kR_P\xi_c) \left(\frac{\text{Bi}(kR_P\xi_c)}{\text{Ai}(kR_P\xi_c)} - \frac{\text{Bi}'(kR_P\xi_c)}{\text{Ai}'(kR_P\xi_c)} \right) (c_2 + K_{0A}\theta_{i0}) \quad (3.6.23)$$

なお、自重座屈発生時において、 θ_{s0} は必ず非零の値を取る．ここで、式(3.6.23)を未知定数 c_2 について解くと、次式が得られる．

$$c_2 = -(K_{0A}\theta_{i0} + \pi\theta_{s0}\text{Ai}'(kR_P\xi_c)) \quad (3.6.24)$$

ここで、式(3.6.24)を式(3.6.18)に代入することにより、未知定数を含まない $\theta_s(\xi)$ の式が次のように得られる．

$$\begin{aligned} \theta_s(\xi) = & \text{Ai}(k(\xi + R_P\xi_c)) \left((K_{0B} - K_{\xi B})\theta_{i0} + \pi\text{Bi}'(kR_P\xi_c)\theta_{s0} \right) \\ & - \text{Bi}(k(\xi + R_P\xi_c)) \left((K_{0A} - K_{\xi A})\theta_{i0} + \pi\text{Ai}'(kR_P\xi_c)\theta_{s0} \right) \end{aligned} \quad (3.6.25)$$

いま、式(3.6.25)を一変数の固有値問題に帰着させるために、上式に含まれる θ_{i0} と θ_{s0} の関係を導入する．本研究では、次式を用いて式(3.6.25)から θ_{i0} を消去する．

$$R_\theta = \frac{\theta_{i0}}{\theta_{Total}(0)} = \frac{\theta_{i0}}{\theta_{i0} + \theta_{s0}} \quad (3.6.26)$$

上式の R_θ は、完全に鉛直方向に伸長した状態から、自重座屈が発生するまでにかけて自由端において生じたたわみ角 $\theta_{Total}(0)$ のうち、初期不整によって生じていた自由端におけるたわみ角 θ_{i0} が占める割合を示すものである（**図-3.6.1**を参照）．すなわち、 R_θ が大きければ大きいほど、著しい初期不整が生じていることを示しており、 $R_\theta = 0$ のときには、初期不整が生じていない完全問題の解を与えることとなる．ここで、上式を θ_{i0} について解くと、次式が得られる．

$$\theta_{i0} = \frac{R_\theta}{1 - R_\theta} \theta_{s0} \quad (3.6.27)$$

ここで、式(3.6.27)を式(3.6.25)に代入し、固定端側の境界条件 ($\theta_s(\xi_c) = 0$, at $\xi = \xi_c$) を適用することにより、未知定数 c_1, c_2 を含まない自重座屈分のたわみ角 $\theta_s(\xi)$ の式を次のように得ることができる．

$$\begin{aligned} \theta_s(\xi) = & \text{Ai}(k\xi_c(1 + R_P)) \left((K_{0B} - K_{\xi B}) \frac{R_\theta}{1 - R_\theta} + \pi\text{Bi}'(kR_P\xi_c) \right) \theta_{s0} \\ & - \text{Bi}(k\xi_c(1 + R_P)) \left((K_{0A} - K_{\xi A}) \frac{R_\theta}{1 - R_\theta} + \pi\text{Ai}'(kR_P\xi_c) \right) \theta_{s0} = 0 \end{aligned} \quad (3.6.28)$$

ここに、 $K_{\xi_c A}$ および $K_{\xi_c B}$ は、それぞれ次式で与えられる。

$$K_{\xi_c A} = \int_1^{\xi_c} k^2 \pi \text{Ai}(k(K_2 + R_P \xi_c)) \cos\left(\frac{\pi K_2}{2\xi_c}\right) (R_P \xi_c + K_2) dK_2 \quad (3.6.29)$$

$$K_{\xi_c B} = \int_1^{\xi_c} k^2 \pi \text{Bi}(k(K_1 + R_P \xi_c)) \cos\left(\frac{\pi K_1}{2\xi_c}\right) (R_P \xi_c + K_1) dK_1. \quad (3.6.30)$$

いま、 $\theta_{s0} \neq 0$ であることを踏まえれば、最大高さを求めるための固有方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[\text{Ai}(k\xi_c(1 + R_P)) \left((K_{0B} - K_{\xi_c B}) \frac{R_\theta}{1 - R_\theta} + \pi \text{Bi}'(kR_P \xi_c) \right) \right. \\ \left. - \text{Bi}(k\xi_c(1 + R_P)) \left((K_{0A} - K_{\xi_c A}) \frac{R_\theta}{1 - R_\theta} + \pi \text{Ai}'(kR_P \xi_c) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.6.31)$$

ここに、 $\text{Re}[z]$ は複素数 z の実部を示す。この問題における最大高さを得るためには、式(3.6.31)を満足する正の最小の実数解 $\xi_{c(\text{sol})}$ を求めるとよい。なお、式(3.6.31)において $R_\theta = R_P = 0$ を代入することにより、この問題の固有方程式が初期不整を考慮しない場合の固有方程式と等価であることが確認できる。また、式(3.6.31)の固有方程式は、 R_P, R_θ および ξ_c の計3つのパラメータを含む式であるから、この固有値問題を満足する $\xi_{c(\text{sol})}$ は、 R_P および R_θ の2つの変数を持つ関数として与えられる。

ここで、最大高さ L_c を求めるために、式(3.6.31)を満足する正の最小の実数解 $\xi_{c(\text{sol})}(R_P, R_\theta)$ を求める。本研究では、後述するセカント法を用いた数値計算によって式(3.6.31)の固有値を求め、それを式(3.6.5)および式(3.6.7)から得られる次式に代入することで最大高さを求める。

$$L_c = \xi_{c(\text{sol})}(R_\theta, R_P) \left(\frac{EI}{\gamma A} \right)^{1/3} \quad (3.6.32)$$

また、初期不整が生じていない自重のみが作用する場合の最大高さ、すなわち $R_\theta = R_P = 0$ である Greenhill が導出した最大高さ L_{cs} （式(2.1.19)）を用いて、初期不整を考慮した場合の最大高さ L_c を次のように書くことができる。

$$L_c = \frac{\xi_{c(\text{sol})}(R_\theta, R_P)}{\xi_c(0,0)} \left(C \frac{E}{\gamma} r^2 \right)^{1/3} = \frac{\xi_{c(\text{sol})}(R_\theta, R_P)}{\xi_c(0,0)} L_{cs} \quad (3.6.33)$$

したがって、このモデルにおいては、初期不整の有無にかかわらず、自重座屈に対する最大高さは半径の $2/3$ 乗に比例する。この結果は、McMahon [2,3] が実際の樹木を用いて証明したものと同一である。

なお、初期不整および集中荷重のない系における最大高さに対する、初期たわみおよび集中荷重を考慮した最大高さの比を示す最大高さ比 $R_L(R_\theta, R_P)$ は、式(3.6.33)より次式で与えられる。

$$R_L(R_\theta, R_P) = \frac{L_c(R_\theta, R_P)}{L_{cs}} = \frac{\xi_{c(\text{sol})}(R_\theta, R_P)}{\xi_c(0,0)} \quad (3.6.34)$$

これは、たとえば $R_L = 0.5$ であるとき、その系の最大高さは、Greenhill が導いた初期不整および集中荷重のない系における最大高さの半分であることを意味する。

なお、式(3.6.12)の支配方程式は、級数解法により解くこともできる。その場合、級数解は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \theta_s(\xi) = & \left(1 - \frac{\xi^2}{2} R_P \xi_c - \frac{\xi^3}{6} - \dots\right) c_1 + \left(\xi - \frac{\xi^3}{6} R_P \xi_c - \frac{\xi^4}{12} \dots\right) c_2 \\ & + \left(-\frac{\xi^2}{2} R_P \xi_c - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^6}{180} + \dots\right) \theta_{i0} \end{aligned} \quad (3.6.35)$$

ここに、 c_1, c_2 は未知定数である。ここで、式(3.6.14)に示した境界条件のうち、自由端側の境界条件を適用すると、 $c_2 = 0$ が得られる。さらに、上式に $\xi = 0$ を代入すると、 $c_1 = \theta_{s0}$ が得られる。これは、初期たわみ－自重座屈発生の間に生じるたわみ角である（図-3.6.1 を参照）。ここで、 $\theta_{s0} \neq 0$ であることを踏まえ、式(3.6.35)に固定端における境界条件を適用すると、次に示す固有方程式が得られる。

$$\left(-\frac{\xi_c^3}{2} R_P - \frac{\xi_c^3}{6} + \frac{\xi_c^6}{180} - \frac{\xi_c^9}{12960} + \dots\right) \theta_{i0} + \left(1 - \frac{\xi_c^3}{2} R_P - \frac{\xi_c^3}{6} + \frac{\xi_c^6}{180} - \dots\right) \theta_{s0} = 0 \quad (3.6.36)$$

ここで、上式を θ_{s0} に関する固有方程式に帰着させるために、式(3.6.27)に示した関係式を用いて、式(3.6.36)を次式のように変形する。

$$\left(1 - \left(\frac{1}{1 - R_\theta}\right) \left(\frac{\xi_c^3}{6} (1 + 3R_P) - \frac{\xi_c^6}{180} (1 + 6R_P) + \dots\right)\right) \theta_{s0} = 0 \quad (3.6.37)$$

すなわち、 $\theta_{s0} \neq 0$ であるから、この系における級数解を用いた場合の固有方程式は次のように得られる。

$$\left(1 - \left(\frac{1}{1 - R_\theta}\right) \left(\frac{\xi_c^3}{6}(1 + 3R_P) - \frac{\xi_c^6}{180}(1 + 6R_P) + \dots\right)\right) = 0 \quad (3.6.38)$$

したがって、式(3.6.38)の固有方程式を満足する正の最小の実数解 $\xi_{c(\text{sol})}$ を R_θ, R_P について求め、それを式(3.6.33)に代入すると、この系における最大高さが求められる。なお、 $R_\theta = R_P = 0$ とすれば、この固有方程式が Karman and Biot の級数解からなる固有方程式[13]と同一のものであることが確認できる。

(4) 初期たわみを考慮した最大高さの定式化：Hypergeometric model

初期不整のない自重座屈問題における座屈モードは、超幾何関数を用いた式(2.1.54)で与えられることを第2章において示した。本節では、これを初期たわみの関数として与え、そのときの自重座屈に対する最大高さの定式化を行う。

本節では、次式を用いて初期たわみを与える。

$$w_s(\xi) = w_{s0} \left(1 - \frac{\xi}{\xi_c} \frac{{}_pF_q \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{\xi^3}{9}\right]}{{}_pF_q \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{\xi_c^3}{9}\right]}\right) \quad (3.6.39)$$

ここで、初期たわみ角 $\theta_i(\xi)$ を求めるために、これを ξ で一階微分すると次式が得られる。

$$\theta_i(\xi) = -\frac{w_{i0}}{L} \left(\frac{{}_0F_1 \left[\frac{2}{3}; -\frac{\xi^3}{9}\right]}{{}_pF_q \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{\xi_c^3}{9}\right]} \right) \quad (3.6.40)$$

ここで上式において $\xi = 0$ を代入することにより、自由端において生じる初期たわみ角 θ_{i0} が次のように得られる。

$$\theta_{i0} = \frac{w_{i0}}{L} \frac{1}{{}_pF_q \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{\xi_c^3}{9}\right]} \quad (3.6.41)$$

したがって、このモデルでは、初期たわみ角 $\theta_i(\xi)$ は次式で与えられる。

$$\theta_i(\xi) = -\theta_{i0} {}_0F_1 \left[\frac{2}{3}; -\frac{\xi^3}{9}\right] \quad (3.6.42)$$

ここで、たわみ角の符号に留意して式(3.6.42)を式(3.6.6)の支配方程式に代入すると、解くべき支配方程式が得られる。

$$\frac{d^2\theta_s}{d\xi^2} + \left(\theta_s(\xi) + \theta_{i0} {}_0F_1 \left[\frac{2}{3}; -\frac{\xi^3}{9} \right] \right) (\xi + R_P \xi_c) = 0 \quad (3.6.43)$$

この支配方程式の一般解は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \theta_s(\xi) = & \text{Ai}(k(\xi + R_P \xi_c))c_1 + \text{Bi}(k(\xi + R_P \xi_c))c_2 \\ & - \text{Ai}(k(\xi + R_P \xi_c)) \int_1^\xi k^2 \pi \theta_{i0} \text{Bi}(k(K_1 + R_P \xi_c)) {}_0F_1 \left[\frac{2}{3}, -\frac{K_1^3}{9} \right] (R_P \xi_c + K_1) dK_1 \\ & + \text{Bi}(k(\xi + R_P \xi_c)) \int_1^\xi k^2 \pi \theta_{i0} \text{Ai}(k(K_2 + R_P \xi_c)) {}_0F_1 \left[\frac{2}{3}, -\frac{K_2^3}{9} \right] (R_P \xi_c + K_2) dK_2 \end{aligned} \quad (3.6.44)$$

式(3.6.44)の一般解は、Sin-curve modelにおける一般解（式(3.6.15)）と被積分関数を除いてほとんど同じである。すなわち、この問題における固有方程式は、Sin-curve modelの場合と同様のプロセスを経て、次のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[\text{Ai}(k\xi_c(1 + R_P)) \left((K_{0B} - K_{\xi_c B}) \frac{R_\theta}{1 - R_\theta} + \pi \text{Bi}'(kR_P \xi_c) \right) \right. \\ \left. - \text{Bi}(k\xi_c(1 + R_P)) \left((K_{0A} - K_{\xi_c A}) \frac{R_\theta}{1 - R_\theta} + \pi \text{Ai}'(kR_P \xi_c) \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.6.45)$$

ここに、 $K_{\xi_c A}, K_{\xi_c B}$ はそれぞれ次式で与えられる。

$$K_{\xi_c A} = \int_1^{\xi_c} k^2 \pi \text{Ai}(k(K_2 + R_P \xi_c)) {}_0F_1 \left[\frac{2}{3}, -\frac{K_2^3}{9} \right] (R_P \xi_c + K_2) dK_2 \quad (3.6.46)$$

$$K_{\xi_c B} = \int_1^{\xi_c} k^2 \pi \text{Bi}(k(K_1 + R_P \xi_c)) {}_0F_1 \left[\frac{2}{3}, -\frac{K_1^3}{9} \right] (R_P \xi_c + K_1) dK_1 \quad (3.6.47)$$

したがって、このモデルでは、式(3.6.45)を満足する正の最小の実数解 $\xi_{c(\text{sol})}$ を求め、それを式(3.6.33)に代入すれば、最大高さを求めることができる。ここで、式(3.6.44)の固有方程式に $R_\theta = R_P = 0$ を代入すると、Greenhill が導出した初期たわみおよび集中荷重のない系における固有方程式と同様のものが得られる。

また、式(3.6.43)の支配方程式の級数解は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\theta_s(\xi) = & \left(1 - \frac{\xi^2}{2} R_P \xi_c - \frac{\xi^3}{6} - \dots\right) c_1 + \left(\xi - \frac{\xi^3}{6} R_P \xi_c - \frac{\xi^4}{12} \dots\right) c_2 \\ & + \left(-\frac{\xi^2}{2} R_P \xi_c - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^6}{180} + \dots\right) \theta_{i0}\end{aligned}\quad (3.6.48)$$

このケースにおいても、前項の方法で最大高さを求めるための ξ_c に関する固有方程式が次のように得られる。

$$\left(1 - \left(\frac{1}{1 - R_\theta}\right) \left(\frac{\xi_c^3}{6} (1 + 3R_P) - \frac{\xi_c^6}{180} (1 + 6R_P) + \dots\right)\right) = 0 \quad (3.6.49)$$

このとき、式(3.6.49)の固有方程式を満足する正の最小の実数解 $\xi_{c(\text{sol})}$ を求め、それを式(3.6.33)に代入すれば、この系における最大高さを求めることができる。

3.6.2 初期傾斜を考慮した自重座屈に対する最大高さの定式化

次に、初期不整として部材が傾いた状態で伸長しており、その傾斜によってたわみが生じている場合について、最大高さの定式化を行う。

(1) 計算モデル

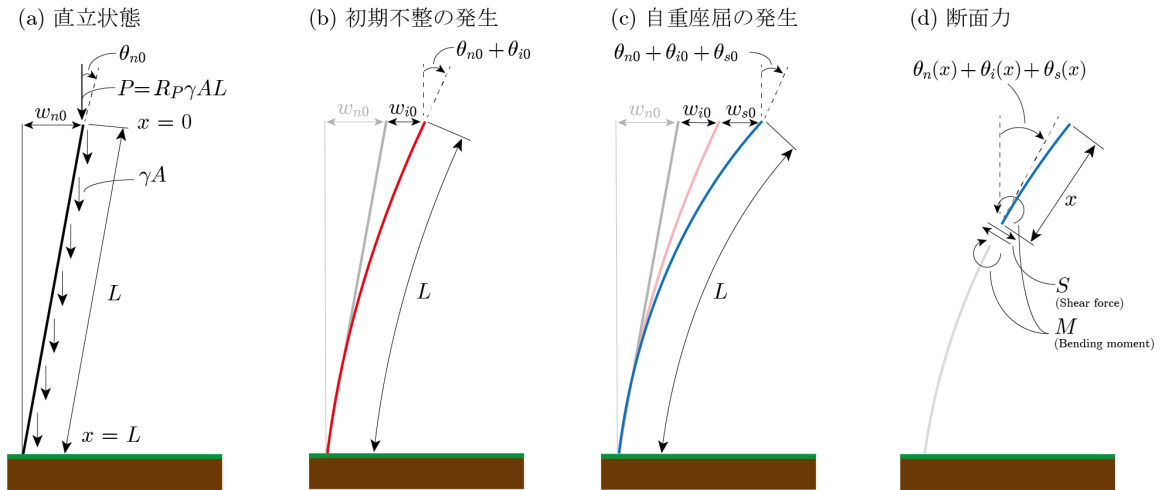


図-3.6.2 部材の初期傾斜と初期たわみの双方を考慮した計算モデル

前節のモデルは、部材が完全に鉛直方向にまっすぐ伸長したモデルある。しかしながら、実際の樹木は、地面に対して完全に鉛直方向に自立しているとは必ずしも言い切れない。そこで、本節では図-3.6.2 に示すような地面側を固定端とする円柱形の片持ち梁について、初期傾斜と初期たわみを与える問題を考える。なお、座標系はこれまでと同様に中立軸に沿うものとし、自由端で $x = 0$ 、固定端で $x = L$ とする。

図-3.6.2 (a)に示すように、この計算モデルは、部材そのものは初期状態で完全な直線形であるものの、地面に対して θ_{n0} だけ傾いた状態で固定されている。このモデルにおいて、図-3.6.2 (b)のように初期傾斜に起因して初期たわみが $\theta_i(x)$ だけ生じたものとし、最終的に図-3.6.2 (c)のような形で自重座屈が発生した状態を考える。なお、初期たわみー自重座屈発生間に生じたたわみ角は $\theta_s(x)$ と表記する。

以上より、図-3.6.2 (d)に示すように力のつり合いを考えると、せん断力 $S(x)$ は次式で与えられる。

$$S(x) = \gamma A(x + R_P L) \sin(\theta_{Total}(x)) = \gamma A(x + R_P L) \sin(\theta_n(x) + \theta_i(x) + \theta_s(x)) \quad (3.6.50)$$

これまで同様の方法を用いることにより、この問題の支配方程式は次のように得られる。

$$\frac{d^2 \theta_s}{d\xi^2} + (\theta_n(\xi) + \theta_i(\xi) + \theta_s(\xi))(\xi + R_P \xi_c) = 0 \quad (3.6.51)$$

(2) 初期傾斜を考慮した最大高さの定式化：Diagonal model

ここで、初期傾斜の影響を理解するために、初期不整としては初期傾斜 $\theta_n(\xi)$ の項のみを考える。 $\theta_{Total}(\xi)$ が微小量であるものとし、初期傾斜に起因するたわみ角の成分 $\theta_s(\xi)$ が無視できるものとする。このとき、部材が完全な直線を維持したまま、地面に対して斜めに自立した状態を示す。このようなモデルにおいて、初期不整の影響を考慮するための関数 $\theta_n(\xi), \theta_i(\xi)$ は次式で与えられる。

$$\theta_n(x) = -\theta_{n0}, \quad \theta_i(x) = 0 \quad (3.6.52)$$

ここで、式(3.6.52)を式(3.6.51)に代入し、その一般解を求めると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \theta_s(\xi) = & \text{Ai}(k(\xi + R_P \xi_c))c_1 + \text{Bi}(k(\xi + R_P \xi_c))c_2 \\ & - \pi \theta_{n0} \left(\text{Ai}'(k(\xi + R_P \xi_c))\text{Bi}(k(\xi + R_P \xi_c)) - \text{Ai}(k(\xi + R_P \xi_c))\text{Bi}'(k(\xi + R_P \xi_c)) \right) \end{aligned} \quad (3.6.53)$$

ここに、 $k = (-1)^{1/3}$ 、 $\text{Ai}(\xi)$ と $\text{Bi}(\xi)$ はそれぞれ第一種・第二種 Airy 関数、 c_1, c_2 は任意定数である。

この系において、式(3.6.14)に示した自由端側の境界条件を適用することにより、2つの未知定数の間に成り立つ関係式を次のように

$$c_1 = -\frac{\text{Bi}'(kR_P \xi_c)}{\text{Ai}'(kR_P \xi_c)} c_2 \quad (3.6.54)$$

式(3.6.54)を式(3.6.53)に代入することにより、自重座屈分のたわみ角 $\theta_s(\xi)$ から未知定数 c_1 を消去すると、次式が得られる。

$$\theta_s(\xi) = -\theta_{n0} + \frac{\text{Ai}'(-R_P\xi_c)\text{Bi}(-(\xi + R_P\xi_c)) - \text{Ai}(-(\xi + R_P\xi_c))\text{Bi}'(-R_P\xi_c)c_2}{\text{Ai}'(-R_P\xi_c)} \quad (3.6.55)$$

ここで、式(3.6.55)に $\xi = 0$ を代入すると、次式が得られる。

$$\theta_s(0) = -\theta_{n0} + \frac{c_2}{\pi\text{Ai}'(-R_P\xi_c)} = \theta_{s0} \quad (3.6.56)$$

これを c_2 について解き、式(3.6.55)に代入することにより、自重座屈分のたわみ角 $\theta_s(\xi)$ の式から未知定数が次のように消去できる。

$$\theta_s(\xi) = -\theta_{n0} + \pi(\theta_{n0} + \theta_{s0}) \left(\text{Ai}'(-R_P\xi_c)\text{Bi}(-(\xi + R_P\xi_c)) - \text{Ai}(-(\xi + R_P\xi_c))\text{Bi}'(-R_P\xi_c) \right) \quad (3.6.57)$$

ここで、式(3.6.57)を θ_{s0} に関する固有値問題に帰着させるために、次式で定義される初期不整に関するパラメータを用いる。

$$R_\theta = \frac{\theta_{n0}}{\theta_{Total}(0)} = \frac{\theta_{n0}}{\theta_{n0} + \theta_{s0}} \quad (3.6.58)$$

このパラメータは、完全に鉛直方向に自立した状態から自重座屈発生時にかけて自由端に生じた総たわみ角 $\theta_{Total}(0)$ のうち、初期傾斜によって自由端に生じているたわみ角 θ_n がどれくらいの割合を占めているかを示すものである。

式(3.6.58)を式(3.6.57)に代入し、固定端側の境界条件を適用することにより、 ξ_c に関する固有値問題が得られる。このとき、 ξ_c に関する固有方程式は次のようになる。

$$\text{Re}[R_\theta + \pi\text{Ai}'(-R_P\xi_c)\text{Bi}(-\xi_c(1 + R_P)) - \pi\text{Ai}(-\xi_c(1 + R_P))\text{Bi}'(-R_P\xi_c)] = 0 \quad (3.6.59)$$

ここに、 $\text{Re}[z]$ は複素数 z の実部である。したがって、このモデルにおける最大高さを計算する場合には、式(3.6.59)を満足する正の最小の実数解 $\xi_{c(\text{sol})}$ を求め、それを式(3.6.33)に代入するとよい。なお、式(3.6.59)において $R_\theta = R_P = 0$ とすれば、Greenhill が初期不整および集中荷重のない重い柱において導いた自重座屈問題の固有方程式の同様のものが得られる。

なお、このモデルにおける級数解は、次式により与えられる。

$$\begin{aligned} \theta_s(\xi) = & \left(1 - \frac{\xi^2}{2} R_P \omega L - \frac{\xi^3}{6} - \dots\right) c_1 + \left(\xi - \frac{\xi^3}{6} R_P \omega L - \frac{\xi^4}{12} \dots\right) c_2 \\ & + \left(-\frac{\xi^2}{2} R_P \omega L - \frac{\xi^3}{6} + \frac{\xi^6}{180} + \dots\right) \theta_{n0} \end{aligned} \quad (3.6.60)$$

このケースにおいても、これまでと同様の方法で固有方程式が求められる。まず、自由端における境界条件の適用によって $c_2 = 0$ が得られ、さらに $\xi = 0$ を代入することにより、自由端で生じる自重座屈分のたわみ角 θ_{s0} が得られる。そして、式(3.6.58)を用いることにより θ_{n0} を消去し、固定端側の境界条件を適用するとともに、 θ_{s0} が非零であることを踏まえれば、この系における固有方程式は次のように得られる。

$$\left(1 - \left(\frac{1}{1 - R_\theta}\right) \left(\frac{\xi_c^3}{6} (1 + 3R_P) - \frac{\xi_c^6}{180} (1 + 6R_P) + \dots\right)\right) = 0 \quad (3.6.61)$$

この固有方程式を満足する正の最小の実数解 $\xi_{c(sol)}$ を求め、それを式(3.6.33)に代入することにより、級数解法を用いた場合の最大高さが得られる。なお、上式に $R_\theta = R_P = 0$ を代入することにより、Karman and Biot [13] の固有方程式と等価になることが確認できる。

3.6.3 初期不整を考慮した自重座屈における固有方程式の数値解法

本節で示した式(3.6.31), (3.6.45), (3.6.59)の固有方程式は、いずれも Airy 関数といった特殊関数を含むものであり、これを代数操作によって解くことはできない。また、級数解を用いた場合の固有方程式についても、用いる展開次数 N の大きさによっては高次の代数方程式となるため、これも厳密に解くことは難しい。

これを踏まえ、本節ではセカント法を用いた数値計算法により、それぞれの固有方程式を満足する正の最小の実数解 $\xi_{c(sol)}(R_\theta, R_P)$ を数値的に得ることで、最大高さを求める。ここで、式(3.6.31)の固有方程式を例にとりて数値計算のプロセスを示す。まず、固有方程式を次のように置く。

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[\text{Ai}(k\xi_c(1 + R_P)) \left((K_{0B} - K_{\xi_c B}) \frac{R_\theta}{1 - R_\theta} + \pi \text{Bi}'(kR_P \xi_c) \right) \right. \\ \left. - \text{Bi}(k\xi_c(1 + R_P)) \left((K_{0A} - K_{\xi_c A}) \frac{R_\theta}{1 - R_\theta} + \pi \text{Ai}'(kR_P \xi_c) \right) \right] = f(\xi_c, R_\theta, R_P) \end{aligned} \quad (3.6.62)$$

ここで、ある初期値 ξ_i から、上式における固有値 ξ_c を差分 $\Delta\xi_c$ ずつ増加させていき、 $f(\xi_{c0}, R_\theta, R_P) \cdot f(\xi_{c1}, R_\theta, R_P) < 0$ を満足する区間 $[\xi_{c0}, \xi_{c1}]$ を探索する．この ξ_{c0} , ξ_{c1} を初期値として、次式を用いた反復計算を行う．

$$\xi_{c(m+1)} = \xi_{c(m)} - f(\xi_{c(m)}, R_\theta, R_P) \frac{\xi_{c(m)} - \xi_{c(m-1)}}{f(\xi_{c(m)}, R_\theta, R_P) - f(\xi_{c(m-1)}, R_\theta, R_P)} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.6.63)$$

なお、収束規準には次式を用いる．

$$\left| \frac{\xi_{c(m)} - \xi_{c(m-1)}}{\xi_{c(m)}} \right| \leq \delta = 1.0 \times 10^{-4} \quad (3.6.64)$$

これは、Niklas [16] や Adam [17] の計測が 10 cm 単位までのものであることに由来した収束規準の式である．

3.6.4 初期不整が自重座屈特性に与える影響

ここでは、本研究で取り扱った 3 つの初期不整モデルについて、その固有方程式を満足する固有値を前節の方法を用いて数値的に解き、初期不整が最大高さに与える影響を定量的に評価する．

(1) Sin-curve model の初期たわみを与えた場合

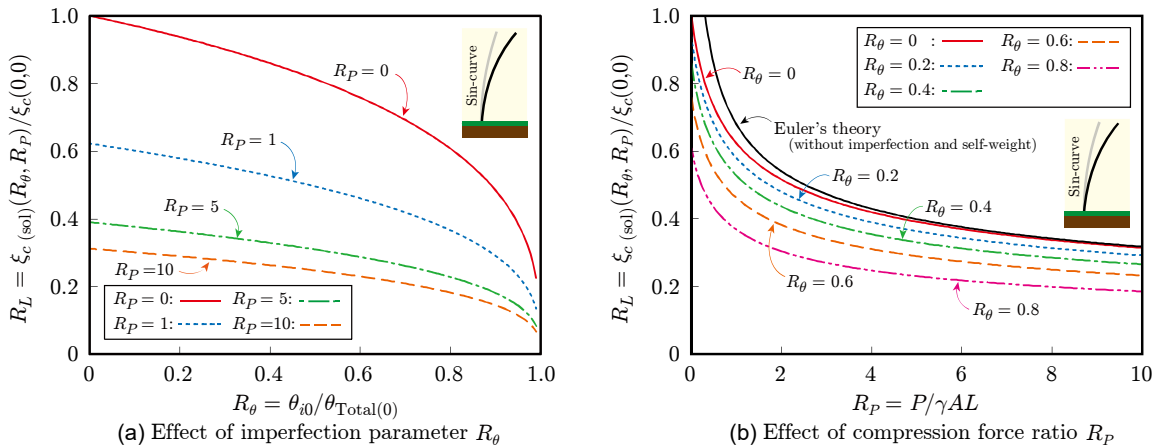


図-3.6.3 部材の初期たわみが最大高さ比に与える影響：Sin-curve model

図-3.6.3 は、式(3.6.31)の固有方程式に基づき、Sin-curve model の初期たわみを与えた場合における、初期不整が自重座屈特性に与える影響を検討したものを示す．図の縦軸は、初期不整および集中荷重が一切なく、自重のみが考慮されている場合の最大高さ（Greenhill の予測値）に対する、初期不整および集中荷重を考慮した場合の最大高さの比 R_L である．

左図は、最大高さ比 R_L とたわみ角比 R_θ の関係を示したものである。なお、集中荷重の大きさを示す R_P については、 $R_P = 0, 1, 5, 10$ の4ケースについて検討を行っており、これが大きくなるほど、自重に対して先端圧縮力が多いことを意味する。たわみ角比 R_θ については、 $R_\theta = 0, 0.01, 0.02, \dots, 0.99$ として離散的に計算を行った。

図より、自重座屈せずに到達可能な最大高さは、初期不整の増大や先端圧縮力の増加に伴って単調に減少していくことが分かる。また、 R_P が小さいほど、たわみ角比 R_θ に対して最大高さ比は著しく減少する傾向にあり、集中荷重の増大によって初期不整の影響が小さくなっている。なお、本検討において最も初期不整の度合いが大きな $R_\theta = 0.99$ における最大高さ比は、 $R_P = 0$ のとき $R_L = 0.23$ 、 $R_P = 1$ のとき $R_L = 0.14$ 、 $R_P = 5$ のとき $R_L = 0.08$ 、 $R_P = 10$ のとき $R_L = 0.07$ であった。

右図は、最大高さ比 R_L と圧縮力比 $R_P (= P/\gamma AL)$ の関係を示したものである。なお、初期不整の大きさを示す R_θ については、 $R_\theta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ の5ケースについて検討を行った。圧縮力比 R_P については、 $R_P = 0, 0.1, 0.2, \dots, 10$ として離散的に計算を行った。

図より、こちらも先ほどと同様に、自重座屈せずに到達可能な最大高さは、初期不整の増大や先端圧縮力の増加に伴って単調に減少していくことが分かる。さらに、図中には Euler 座屈の解（黒い実線）を示したが、これは初期不整のない $R_\theta = 0$ （赤の実線）の場合において、圧縮力比 R_P が大きくなるにつれ、Euler の解に漸近していくことが確認できる。なお、 R_P が小さい場合、すなわち自重の影響が支配的な場合においては両者が離れていることから、Euler の座屈理論の解が自重座屈問題に対して有効でないことが確認できる。本検討において最も大きな圧縮力比 $R_P = 10$ における最大高さ比は、 $R_\theta = 0$ のとき $R_L = 0.31$ 、 $R_\theta = 0.2$ のとき $R_L = 0.29$ 、 $R_\theta = 0.4$ のとき $R_L = 0.26$ 、 $R_\theta = 0.6$ のとき $R_L = 0.23$ 、 $R_\theta = 0.8$ のとき $R_L = 0.18$ であった。

(2) Hypergeometric model の初期たわみを与えた場合

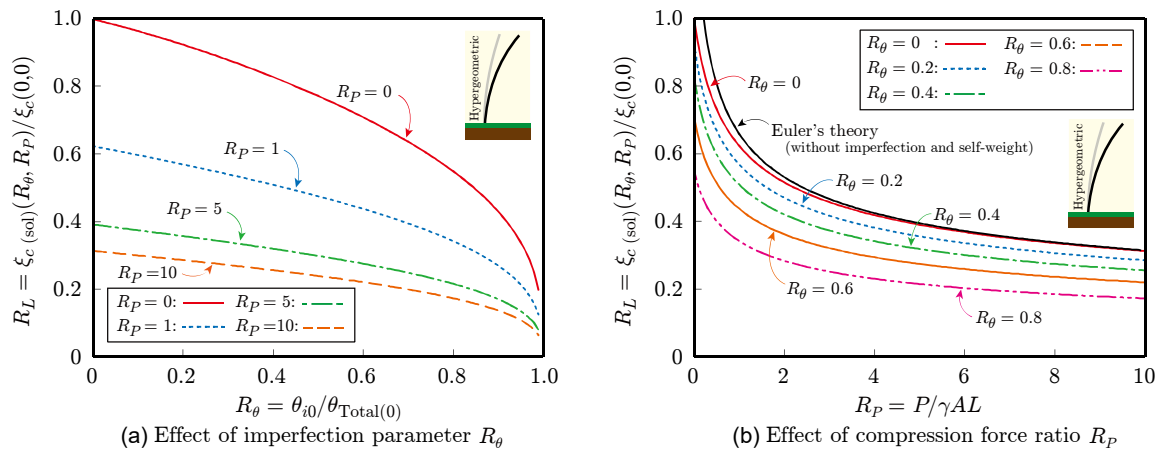


図-3.6.4 部材の初期たわみが最大高さ比に与える影響：Hypergeometric model

図-3.6.4 は、式(3.6.44)の固有方程式に基づき、Hypergeometric model の初期たわみを与えた場合における、初期不整が自重座屈特性に与える影響を検討したものを示す。図の縦軸および横軸の意味や、計算条件については Sin-curve model のものと同様である。

左図は、最大高さ比 R_L とたわみ角比 R_θ の関係を示したものである。なお、集中荷重の大きさを示す R_P については、 $R_P = 0, 1, 5, 10$ の4ケースについて検討を行っており、これが大きくなるほど、自重に対して先端圧縮力が大きいことを意味する。たわみ角比 R_θ については、 $R_\theta = 0, 0.01, 0.02, \dots, 0.99$ として離散的に計算を行った。

図より、自重座屈せずに到達可能な最大高さは、Sin-curve model のときと同様に、初期不整の増大や先端圧縮力の増加に伴って単調に減少していくことが分かる。また、 R_P が小さいほど、たわみ角比 R_θ に対して最大高さ比は著しく減少する傾向にあり、集中荷重の増大によって初期不整の影響が小さくなっている。なお、本検討において最も初期不整の度合いが大きな $R_\theta = 0.99$ における最大高さ比は、 $R_P = 0$ のとき $R_L = 0.20$ 、 $R_P = 1$ のとき $R_L = 0.12$ 、 $R_P = 5$ のとき $R_L = 0.08$ 、 $R_P = 10$ のとき $R_L = 0.06$ であった、この観点で見ると、Sin-curve model よりもわずかに Hypergeometric modelの方が初期不整の影響が大きいと言える。

右図は、最大高さ比 R_L と圧縮力比 $R_P (= P/\gamma AL)$ の関係を示したものである。なお、初期不整の大きさを示す R_θ については、 $R_\theta = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ の5ケースについて検討を行った。圧縮力比 R_P については、 $R_P = 0, 0.1, 0.2, \dots, 10$ として離散的に計算を行った。

図より、こちらも先ほどと同様に、自重座屈せずに到達可能な最大高さは、初期不整の増大や先端圧縮力の増加に伴って単調に減少していくことが分かる。さらに、図中には Euler 座屈の解（黒い実線）を示したが、これは初期不整のない $R_\theta = 0$ （赤の実線）の場合において、圧縮力比 R_P が大きくなるにつれ、Euler の解に漸近していくことが確認できる。なお、 R_P が小さい場合、すなわち自重の影響が支配的な場合においては両者が離れており、Euler 座屈理論の解が自重座屈問題に対して有効でないことが分かる。本検討において最も大きな圧縮力比 $R_P = 10$ における最大高さ比は、 $R_\theta = 0$ のとき $R_L = 0.31$ 、 $R_\theta = 0.2$ のとき $R_L = 0.29$ 、 $R_\theta = 0.4$ のとき $R_L = 0.26$ 、 $R_\theta = 0.6$ のとき $R_L = 0.22$ 、 $R_\theta = 0.8$ のとき $R_L = 0.17$ であった。この結果は Sin-curve model のものとほぼ同様であり、これは、本研究で取り扱った根元から先端にかけて単調にたわみ角が増加していくようなモデルにおいては、自重座屈特性は初期不整の度合いと集中荷重の大きさによって決定され、初期不整の形状にはほとんど依存しない可能性を示唆するものである。

(3) Diagonal model の初期傾斜を与えた場合

次に、初期傾斜として Diagonal model のたわみ角を与えた場合について、初期不整が自重座屈特性に与える影響を検討したものを図-3.6.5 に示す。図の縦軸は、初期不整および集中荷重が一切なく、自重のみが考慮されている場合の最大高さ（Greenhill の予測値）に対する、初期不整および集中荷重を考慮した場合の最大高さの比 R_L である。すなわち、図の縦軸および横軸の意味については、初期たわみを二つのモデルを用いて与えた前項までの検討と同様である。

左図は、最大高さ比 R_L とたわみ角比 R_θ の関係を示したものである。なお、集中荷重の大きさを示す R_P については、こちらも $R_P = 0, 1, 5, 10$ の4ケースについて検討を行っており、これが大きくなるほど、自重に対して先端圧縮力が大きいことを意味する。たわみ角比 R_θ については、 $R_\theta = 0, 0.01, 0.02, \dots, 0.99$ として離散的に計算を行っている。

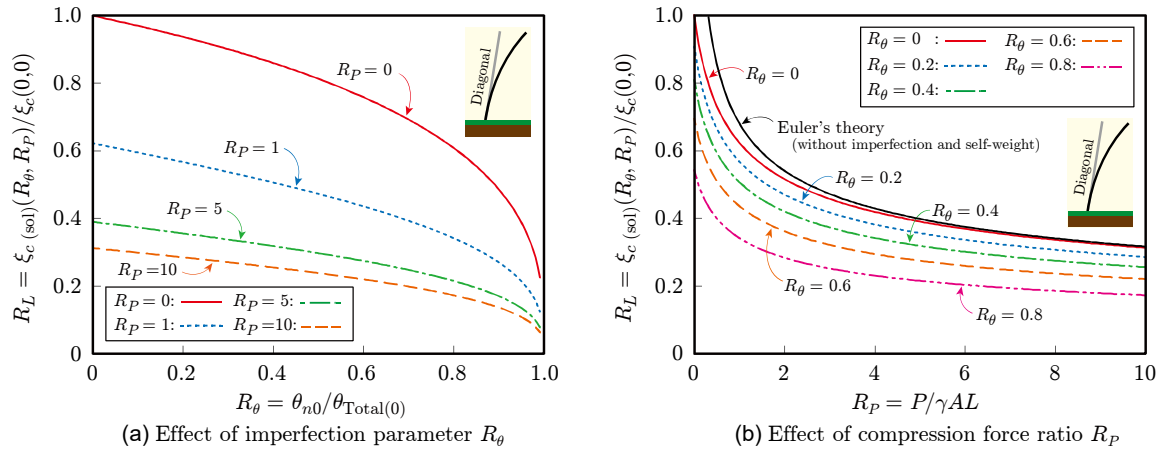


図-3.6.5 部材の初期傾斜が最大高さ比に与える影響：Diagonal model

まず左図より，自重座屈せずに到達可能な最大高さは，Sin-curve model や Hypergeometric model と同様に，初期不整の増大や先端圧縮力の増加に伴って単調に減少していくことが分かる． R_P が小さいほど，たわみ角比 R_θ に対して最大高さ比が著しく減少してしまう傾向も同じである．同一の R_θ で Sin-curve model と Diagonal model の結果を比較できるとすれば，自重座屈特性に初期不整が与える影響は，わずかに Diagonal model の方が大きいと言える．なお，本検討において最も初期不整の度合いが大きな $R_\theta = 0.99$ における最大高さ比は， $R_P = 0$ のとき $R_L = 0.23$ ， $R_P = 1$ のとき $R_L = 0.12$ ， $R_P = 5$ のとき $R_L = 0.08$ ， $R_P = 10$ のとき $R_L = 0.06$ である．

右図は，最大高さ比 R_L と圧縮力比 $R_P (= P/\gamma AL)$ の関係を示したものである．こちらも，検討ケースは Sin-curve model のものと全く同様である．図より，このケースにおいても，自重座屈せずに到達可能な最大高さは，初期不整の増大や先端圧縮力の増加に伴って単調に減少していくことが分かる．また，集中荷重の増大による Euler 座屈理論の解への収束は，この場合でも確認することができる．なお，本検討において最も大きな圧縮力比 $R_P = 10$ における最大高さ比は， $R_\theta = 0$ のとき $R_L = 0.31$ ， $R_\theta = 0.2$ のとき $R_L = 0.29$ ， $R_\theta = 0.4$ のとき $R_L = 0.26$ ， $R_\theta = 0.6$ のとき $R_L = 0.22$ ， $R_\theta = 0.8$ のとき $R_L = 0.17$ であり，こちらも Sin-curve model および Hypergeometric model とほとんど同様の値を示している．これは，集中荷重が支配的であり，かつ固定端から自由端にかけて単調にたわみが増加していくような初期不整を与える場合には，初期不整の形状に依存せず，初期不整の度合いと集中荷重の大きさによって座屈特性が決定される可能性を示唆するものである．

3.6.5 初期不整を考慮した自重座屈問題における固有値 $\xi_{c(sol)}$ の分布

本節では，本章で検討を行った計3つの初期たわみおよび初期傾斜モデルについて，支配方程式の一般解を級数解および理論解によって導いた場合の固有値 $\xi_{c(sol)}$ の分布を示すとともに，各モデルにおける級数解法の有効性について議論する．

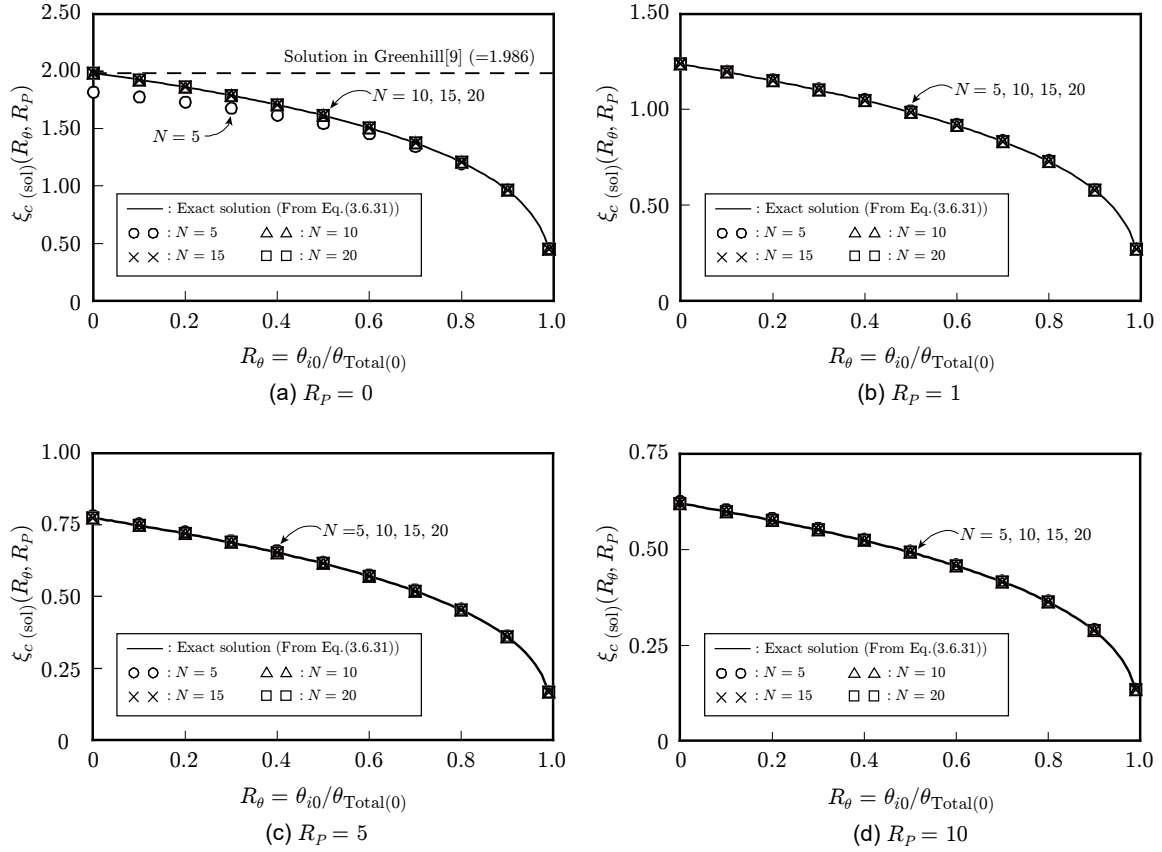


図-3.6.6 Sin-curve model における固有値の分布

図-3.6.6 は、Sin-curve model の初期たわみを与えた場合における、式(3.6.31)の固有方程式を満足する固有値 $\xi_{c(sol)}(R_\theta, R_P)$ をセカント法により数値的に求めた結果を示す。図の縦軸は固有値 $\xi_{c(sol)}(R_\theta, R_P)$ を表しており、図の横軸は初期不整の度合いを示すパラメータ R_θ である。さらに、図中の実線は式(3.6.31)の固有方程式、すなわち支配方程式の一般解として Airy 関数で書かれる解を用いた場合の固有方程式から固有値を求めたものである。その他の離散的な点は、式(3.6.39)の固有方程式、すなわち支配方程式の一般解として級数解を用いた場合に得られる固有値を示す(なお、それぞれ○：展開次数 $N = 5$ 、△： $N = 10$ 、×： $N = 15$ 、□： $N = 20$ の結果)。また、圧縮力比は $R_P = 0, 1, 5, 10$ の4ケースについて検討を行った。

まず、図-3.6.6 (a)に示した自重のみが作用する圧縮力比 $R_P = 0$ の結果では、初期不整のない $R_\theta = 0$ の場合に得られる固有値が、Greenhill の定式化において得られている固有値と等しいことが確認できる。これは、本研究の定式化の妥当性を保証するものである。さらに、級数解と理論解の差に着目すると、初期不整の度合いが小さい場合においては、○印で示された展開次数 $N = 5$ の場合に得られる級数解は、理論解と大きく離れた結果となっている。しかしながら、初期不整の度合いが大きくなると、理論解と級数解の傾向は、展開次数 N が小さい場合でもほぼ同様となる。なお、展開次数 $N < 10$ である場合には、初期不整の度合いに寄らず理論解と級数解はほぼ一致する固有値を与えることが分かる。これに対して、図-3.6.6 (b)~(d)に示した $R_P = 1, 5, 10$ の場合には、展開次数 $N = 5$ の場合においても、理論解とほとんど変わらない固有値が得られることが分かる。この

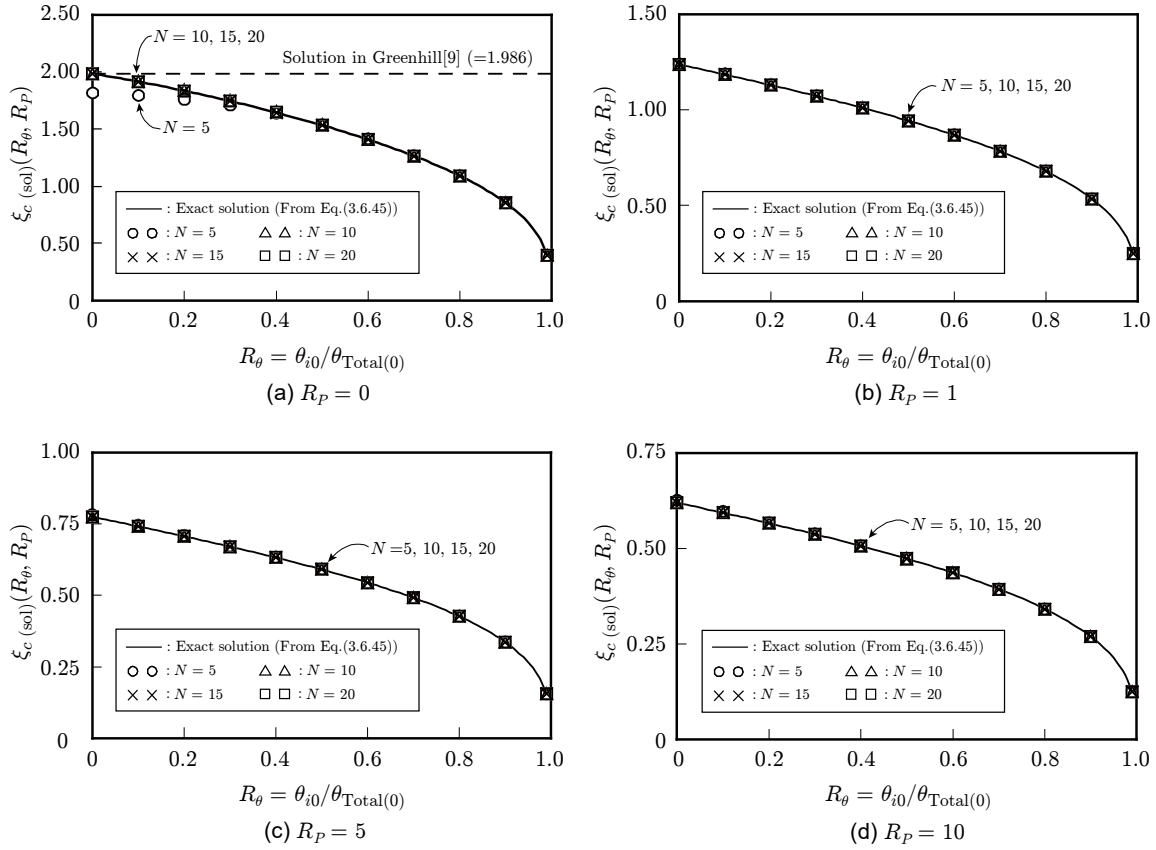


図-3.6.7 Hypergeometric model における固有値の分布

ことは、自重の影響が卓越する系においては、高次の項の影響が支配的となるのに対し、先端圧縮力の影響が徐々に大きくなってくると、低次の項が固有値の算定において支配的になることを示すものである。

次に、図-3.6.7 は、Hypergeometric model の初期たわみを与えた場合における、式(3.6.44)の固有方程式を満足する固有値 $\xi_{c(sol)}(R_\theta, R_P)$ をセカント法により数値的に求めた結果を示す。図の縦軸は固有値 $\xi_{c(sol)}(R_\theta, R_P)$ を表しており、図の横軸は初期不整の度合いを示すパラメータ R_θ である。さらに、図中の実線は式(3.6.45)の固有方程式、すなわち支配方程式の一般解として Airy 関数で書かれる解を用いた場合の固有方程式から固有値を求めたものである。その他の離散的な点は、式(3.6.49)の固有方程式、すなわち支配方程式の一般解として級数解を用いた場合に得られる固有値を示す。記号の意味については、図-3.6.6 と同様である。

まず、Sin-curve model の場合と同様に、図-3.6.7 (a)に示した自重のみが作用する圧縮力比 $R_P = 0$ の結果において、初期不整のない $R_\theta = 0$ の場合に得られる固有値が、Greenhill の定式化において得られている固有値と等しいことが確認できる。さらに、級数解と理論解の差に関する傾向も同様であり、初期不整の度合いが小さい場合においては、○印で示された展開次数 $N = 5$ の場合に得られる級数解は、理論解と大きく離れた結果となっている。しかしながら、初期不整の度合いが大きくなると、理論解と級数解の傾向は、展開次数 N が小さい場合でもほぼ同様となる。なお、展開次数 $N < 10$ である場合には、初期不整の度合いに寄らず理論解と級数解はほぼ一致する固有値を与えるこ

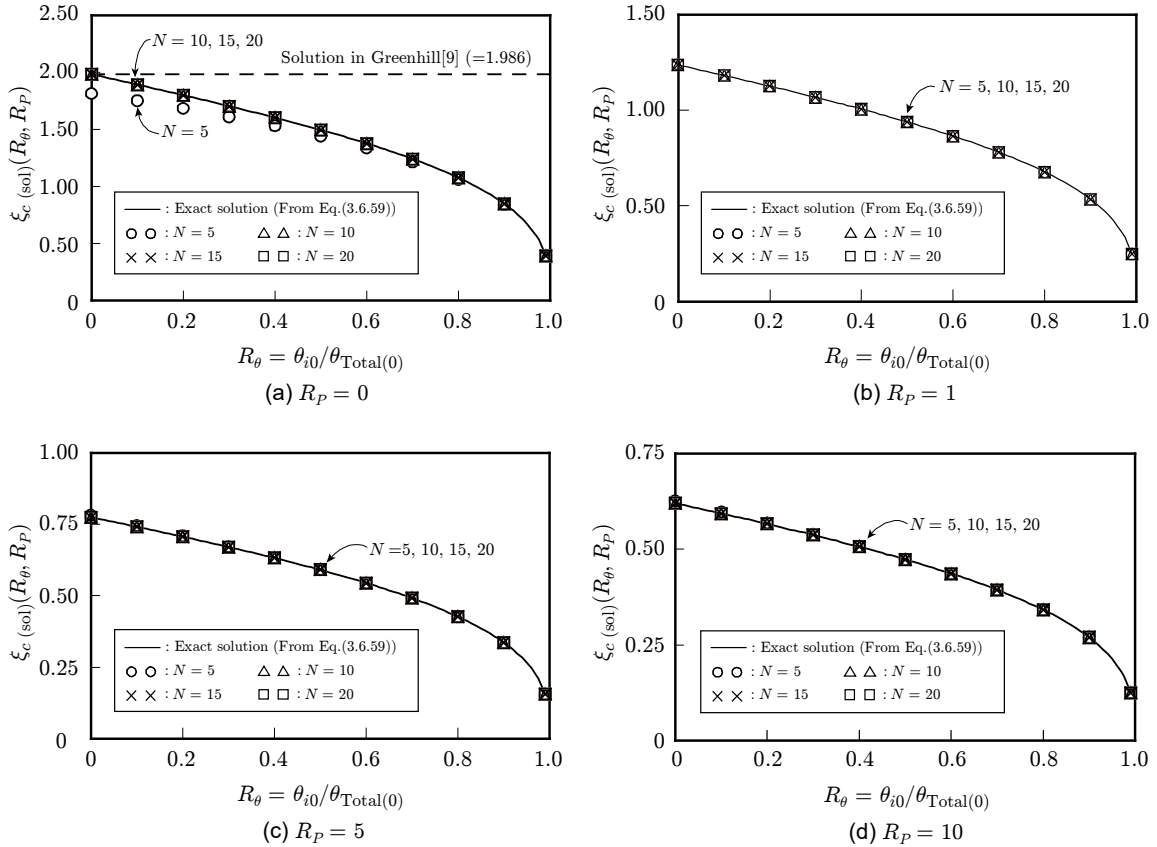


図-3.6.8 Diagonal model における固有値の分布

とが分かる．これに対して，図-3.6.7 (b)~(d)に示した $R_P = 1, 5, 10$ の場合には，展開次数 $N = 5$ の場合においても，理論解とほとんど変わらない固有値が得られることが分かる．すなわち，級数解法による得られる固有方程式では，自重の影響が支配的である場合には高次の項が重要であり，集中荷重の影響が支配的になるについて，低次の項の重要性が高まっていくこととなる．

最後に，図-3.6.8 は，Diagonal model の初期傾斜を与えた場合における，式(3.6.59)の固有方程式を満足する固有値 $\xi_{c(sol)}(R_\theta, R_P)$ をセカント法により数値的に求めた結果を示す．図の縦軸は固有値 $\xi_{c(sol)}(R_\theta, R_P)$ を表しており，図の横軸は初期不整の度合いを示すパラメータ R_θ である．さらに，図中の実線は式(3.6.59)の固有方程式，すなわち支配方程式の一般解として Airy 関数で書かれる解を用いた場合の固有方程式から固有値を求めたものである．その他の離散的な点は，式(3.6.61)の固有方程式，すなわち支配方程式の一般解として級数解を用いた場合に得られる固有値を示す．記号の意味については，図-3.6.6，図-3.6.7 と同様である．

このモデルにおいても，Sin-curve model や Hypergeometric model の場合と同様に，図-3.6.8 (a)に示した自重のみが作用する圧縮力比 $R_P = 0$ の結果において，初期不整のない $R_\theta = 0$ の場合に得られる固有値が，Greenhill の定式化において得られている固有値と等しいことが確認できる．さらに，級数解と理論解の差に関する傾向も同様であり，初期不整の度合いが小さい場合においては，○印で示された展開次数 $N = 5$ の場合に得られる級数解は，理論解と大きく離れた結果となっている．しかしながら，初期不整の度

合いが大きくなると、理論解と級数解の傾向は、展開次数 N が小さい場合でもほぼ同様となる。なお、展開次数 $N < 10$ である場合には、初期不整の度合いに寄らず理論解と級数解はほぼ一致する固有値を与えることが分かる。これに対して、図-3.6.8 (b)~(d)に示した $R_P = 1, 5, 10$ の場合には、展開次数 $N = 5$ の場合においても、理論解とほとんど変わらない固有値が得られることが分かる。すなわち、本研究で検討した初期不整モデルにおいては、いずれも自重の影響が支配的である場合には高次の項が重要であり、集中荷重の影響が支配的になるについて、低次の項の重要性が高まる。

3.6.6 初期不整を考慮した樹木における最大高さと実際の樹高との関係

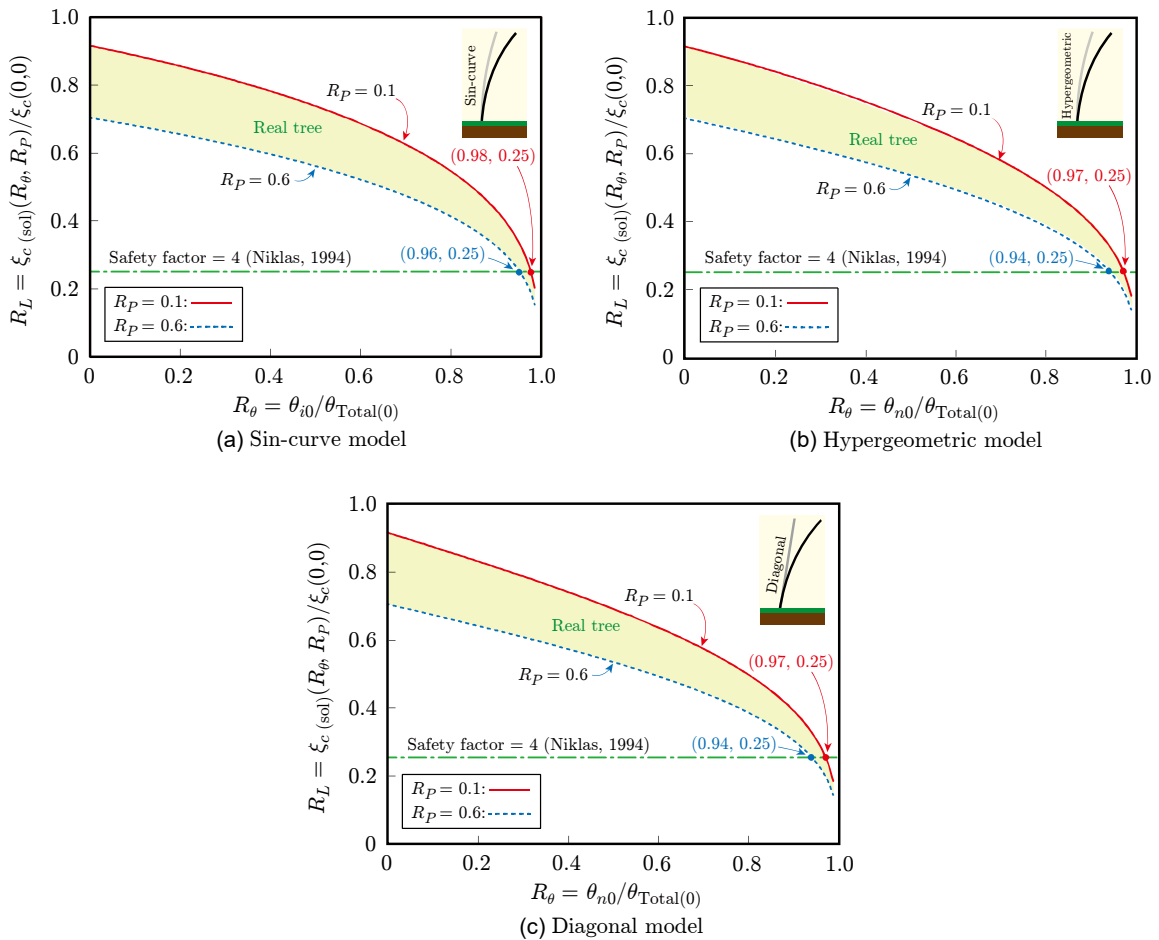


図-3.6.9 初期たわみと傾斜が実際の樹木の高さに及ぼす影響

ここでは、本研究で用いたすべての初期不整モデルを用いて、実際の樹高と理論的な最大高さの関係について述べる。なお、樹冠の影響については、先行研究[15]を参考に、先端圧縮力に置き換えて取り扱うものとし、King and Loucks が実際の樹木において測定した樹冠一幹の重量比[18]を参考に、圧縮力比 R_P を $0.1 \leq R_P \leq 0.6$ の範囲に設定する。なお、Sin-curve model は、枝葉の平面的な分布の偏りに起因するモーメントがなす初期たわみを想定したものである。これは枝葉（樹冠）の影響が集中荷重として置換されることを踏まえ、これに伴って生じる Euler 座屈の波形が Sin 関数で与えられるに基づくものである。また、Hypergeometric model は、自重座屈によって生じる座屈モード

が超幾何関数の形で書かれることに由来しており、これは、樹木が成長過程において、自身の体を支持するために十分な剛性を有していない場合に対応する。さらに、Diagonal model は、根系―地盤の相互作用がなす端部の支持能力に不整が存在し、直線形を維持したまま斜め方向に伸長している場合に相当するものである。

図-3.6.9 は、実際の樹木における枝葉一幹の重量比[18]に基づき、初期不整が自重座屈特性に与える影響を検討したものを示す。圧縮力比 R_P は $0.1 \leq R_P \leq 0.6$ の範囲とし、図中に示された緑色の点線は、Niklas の測定で明らかにされた、実際の樹木における樹高が有する実現可能な最大高さに対する安全率 S_F を示す[2]。これは、実際の樹高 L_{real} と Greenhill 式に基づく最大高さ L_{cs} を用いて、次式により与えられる。

$$S_F = \frac{L_{cs}}{L_{real}} \quad (3.6.64)$$

したがって、この安全率 $S_F < 1$ であるとき、理論上到達可能な最大高さを実際の樹高が超えていることを意味する。Niklas は、111 本の植物について、実際の高さを測定するとともに、その単位体積重量・弾性係数・胸高直径から想定される理論上の最大高さを Greenhill 式に基づいて求め、統計的解析によって式(3.6.64)で与えられる安全率が、種やスケールによらず $S_F \approx 4$ であることを導いた（詳細は 2.2.1 項を参照）。

図より、実際の樹木における樹高は、初期不整の影響を考慮した場合においても、自重座屈に対して十分な安全性を有していることが分かる。なお、安全率 $S_F = 4$ に対応する初期不整パラメータ R_θ は、Sin-curve model では $R_P = 0.1$ において $R_\theta = 0.98$ 、 $R_P = 0.6$ において $R_\theta = 0.96$ である。また、Hypergeometric model では $R_P = 0.1$ において $R_\theta = 0.97$ 、 $R_P = 0.6$ において $R_\theta = 0.94$ であり、Diagonal model では $R_P = 0.1$ において $R_\theta = 0.97$ 、 $R_P = 0.6$ において $R_\theta = 0.94$ である。この結果は、実際の樹木が有している自重座屈に対する安全率 $S_F \approx 4$ が、たとえ著しい初期不整が生じている場合においても、自重に伴う座屈の発生を避けることができるように、巧みに設定された値である可能性を示唆するものである。この結果は、Greenhill の式が高さを実際の樹高よりも過剰に見積もるために、先行研究[41,43]によって棄却されてきた「樹高は自重座屈問題によって制限されている」という仮説について、その主張の妥当性を再考する必要があることを示唆するものである。

また、これ以上の初期不整が生じる場合には、Niklas らが計測した実際の樹木における安全率を下回る結果となる。しかし、本研究の検討では、樹冠の影響を集中荷重として先端に一樣に载荷していることや、先端に向かって細くなっていくテーパ形状を考慮していないなど、樹木にとって不利な状態を検討していることに留意すべきである。したがって、実際には Niklas らの測定結果に対して上側に理論値が移動すると考えられるため、初期不整に対する実際の安全性は、図-3.6.9 に示す結果よりも高いことが予想される。

3.6.7 本節のまとめ

本節では、自重を考慮する必要がある「重い柱」において、初期不整が自重座屈特性に与える影響を理論的に明らかにするために、断面が一定で均質な材料からなる片持ち梁について、先端荷重と自重の双方を考慮した簡単なケースの自重座屈問題を定式化した。その結果の考察から、以下に示す知見が得られた。

- ① Greenhill により提唱された「自重座屈に対する最大高さは、半径の $2/3$ 乗に比例する」という自重座屈に関するスケーリング則は、初期不整が生じた場合においても、同様にして成り立つものである。これは、樹木に対するこの法則の適合性を検証した McMahon の結果とも矛盾しない。
- ② 自重座屈問題における初期不整は、一般的な座屈問題と同様に、自重座屈特性を悪化させる影響を有する。なお、本研究で導出した最大高さ式は、自重及び圧縮荷重の双方の影響を含んでおり、圧縮力比 R_p を大きくしていくことによって、Euler が定式化した集中荷重のみを考慮する一般的な座屈問題の解を求めることが可能である。
- ③ 実際の樹木では、およそほとんどの場合において、仮に甚大な初期不整が生じていたとしても、自重座屈が発生しないような安全率を確保している。これは、今まで棄却されてきた「樹木の最大高さが自重座屈によって制限される」という仮説について、初期不整の影響を考慮したさらなる調査をもって、その判断を再考すべきであることを指摘する結果であると考えられる。

なお、本節の成果は、単に樹木の最大高さについていくつかの知見を与えただけでなく、初期不整が重い柱の座屈特性に与える影響を初めて理論的に明らかにしたものである。本節に示した成果をまとめたものは、International Journal of Engineering Science 誌にて論文として報告している [研究業績目録, 学術論文(8)]。

また、本節で取り上げた初期不整に加え、実際の樹木においては無視することができない、自重座屈特性に大きな影響を与えうる因子が存在する。それは「地面における固定の不完全性」である。Greenhill の研究を含め、これまでの定式化では、樹木を完全に地面に固定された片持ち梁としてモデル化したものである。次節では、樹木と地盤の接続部を、たわみ角に比例して回転に抵抗する「回転ばね」としてモデル化することにより、地面における固定の不完全性と最大高さの関係を導出するとともに、樹木の形態形成戦略と地盤－根系がなす固定力の関係を理論的に解明する。さらに、樹木の地表部の特性から地盤内部の力学特性を推定できる可能性について言及する。

3.7 地盤における固定の不完全性と最大高さ：根と幹のバランス

本研究におけるこれまでの定式化を含め、ほとんどの樹木の自重座屈特性に関する理論的研究では、樹木を「端部が完全に固定された片持ち梁」として取り扱っている[1,18]。それは、樹木の最大高さに関する研究の起点となった Greenhill の研究から、いずれも樹木の「地表部」における力学的挙動に焦点を当てているためである。

実際には、樹木の致命的な破壊形態は、地上に露出した幹部が破壊する「幹折れ」だけでなく、樹木が根差している地盤側から一体的に破壊してしまう「根返り」も存在する[46-53]。しかしながら、地面側をたわみ角の発生を許容しない完全な固定端としてモデル化する場合には、「根返り」に相当する破壊モードを評価することはできない。このことは、樹木の力学的安定性やスケーリング則を議論する上で、地面で完全に固定されている状態のみを考えることが妥当でない可能性を示唆するものである。

これについて、樹木の力学的安定性に関する実験的・解析的アプローチを主とする既往の研究では、「回転ばね」の導入によって根系－土壌の相互作用に起因する端部の抵抗モーメントを表現し、地盤における固定力の不確実性を考慮する試みがなされてきた[54-56]。回転ばねとは、変形に対してたわみ角に比例するモーメント反力を生じさせるものであり、これは一般的な座屈問題においても、境界条件の一つとしてしばしば取り上げられている[57-59]。この回転ばねのばね定数が自重座屈特性に与える影響を理論的に解明することは、単に工学分野における自重座屈研究に新たな知見を与えるだけでなく、地盤の不確実性を考慮した最大高さが得られることにより、樹木の力学的安定性や破壊形態に関する理論的研究に有用な知見の獲得に繋がると考えられる。さらには、既往の実験的研究では引き抜き試験によって推定される根系－土壌の相互作用に起因する抵抗モーメント、すなわち回転ばねの比例定数について、これを地上に露出した幹部の力学特性や形状の測定により、非破壊的に推定できる手法の確立に繋がると考えられる。

本節では、地盤の固定力と樹木の力学的安定性の関係を理論的に解明するために、端部の回転剛性が重い柱の自重座屈特性に与える影響を明らかにする。自重を無視できない重い柱について、回転ばね－自由端の拘束条件において、自重座屈問題の定式化を行う。このモデルでは、回転ばねの剛性に起因して、ばね側の座屈による直線的な形状を保ったまま傾く剛体モードと、梁側の座屈による曲線的なモード形状を示す梁モードの二種類の座屈モードが存在する。剛体モードでは、微小な傾きが発生した状態におけるモーメントのつり合いから、回転ばねの剛性と最大高さの関係式を導出する。梁モードでは、部材側が座屈した状態における力のつり合いから支配方程式を導出し、その一般解に境界条件を適用することで得られる固有方程式を数値的に解くことで、回転ばねの剛性と最大高さの関係式を導出する。これにより、回転剛性が Greenhill の半径－最大高さ間のスケーリング則に影響を与えるかを調べるとともに、実際の樹木における根系－土壌の回転剛性やスケーリング則に関する知見を用いて、根系－土壌の回転剛性が自重座屈特性に与える影響を考察する。

3.7.1 計算モデル

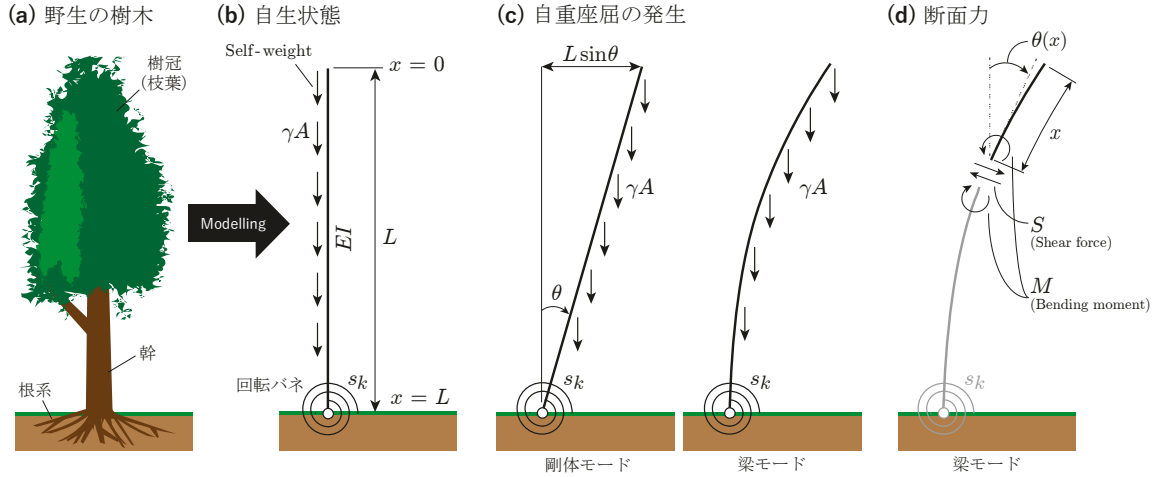


図-3.7.1 計算モデル

図-3.7.1 (a)は、本研究の対象とする樹木の構造を簡略化して示したものである。野生の樹木は、幹と樹冠（枝葉）から構成される地表部を、樹木の根系－地盤が連結した構造体によって支持している。これまでの樹木の自重座屈特性に関する研究では、樹木の根と土壌からなる支持部により、地表部が完全に固定されているものとして取り扱われてきた。そのため、モデル化の際には境界条件として片持ち梁のものが用いられており、地面におけるたわみ角の発生を完全に許容しない状態として研究されてきた。

これに対して、本節の計算モデルは、一端をヒンジおよび回転ばねで支持し、他端を自由な状態とした図-3.7.1 (b)に示すような梁である。座標系は中立軸に沿うものとし、自由端を $x = 0$ 、地面側を $x = L$ とする。また、曲げ剛性 EI [$\text{N} \cdot \text{m}^2$]については、断面方向に一定であるものとする。梁の断面は、半径を r [m]とする円形断面を仮定し、その断面積を A [m^2]と表す。さらに、単位体積当たりの重量は γ [N/m^3]と表記する。

なお、ヒンジ部におけるたわみ角に応じてモーメント反力を生じさせる回転ばねについては、その回転剛性を s_k [$\text{N} \cdot \text{m}$]と表す。すなわち、地面側におけるたわみ角を θ_L とすれば、変形に対して回転ばねがもたらすモーメント反力 M_s は次式で与えられる。

$$M_s = s_k \theta_L \quad (3.7.1)$$

すなわち、 s_k を無限に大きくしていくことにより、この柱の自重座屈特性（限界密度・最大高さ）は、一端が固定端・多端を自由とする片持ち梁[1]と同様の値に収束していくと推測される。なお、現実の問題として、このバネ定数 s_k には地盤の剛性や構造物－地盤間における摩擦力、さらに樹木などの植物の場合には根系と地盤の結合力など、複合的な要因が含まれる[46-56]。また、樹木の枝葉（樹冠）の影響については、樹木が自重座屈特性に致命的な影響を与えないように枝葉重量を配分していることを踏まえ（3.3 節を参照のこと）、本節ではこの影響を取り入れずに定式化を行う。

3.7.2 剛体モードにおける最大高さ式の導出

まず、先ほど示した計算モデルにおいて自重座屈が発生し、**図-3.7.1 (c)**に示すような状態に移行した場合を考える。このとき、ばねの回転剛性 s_k の大きさに応じて、梁が直線を維持したまま倒れるような剛体モードと、梁そのものが曲がる梁モードの二つのつり合い状態が想定される。ここではまず、梁が直線を維持したまま倒れるような剛体モードについて検討を行う。

いま、自重により**図-3.7.1 (c)**に示すような剛体モードの変形が生じた状態を考える。ここで、中立状態からのスパンに渡って一定なたわみ角を θ と置き、これを微小量と仮定することにより、次式が得られる。

$$\left(\frac{\gamma AL^2}{2} - s_k\right) \theta = 0 \quad (3.7.2)$$

すなわち、任意の回転剛性および自重モーメントにおいて、 $\theta = 0$ であればモーメントのつり合いが成り立つ。また、任意の回転角 θ においてモーメントのつり合いが成り立つための回転剛性 s_k は、式(3.7.2)から次式のように得られる。

$$s_k = \frac{\gamma AL^2}{2} \quad (3.7.3)$$

ここで、この系の安定・不安定を判別するために、次に示すパラメータ R_M を導入する。

$$R_M = \frac{2s_k}{\gamma AL^2} \quad (3.7.4)$$

このパラメータ R_M は、剛体モード時の自重によるモーメントに対する回転ばねの抵抗モーメントの比を示すものである。

ここで、自重座屈により剛体モードを示したつり合い状態にある系において、ばねの回転剛性 s_k を増加させることを考える。このとき、モーメントのつり合い状態は失われ、回転ばねによる復元力でたわみ角が徐々に減少し、 $\theta = 0$ のつり合い状態に移行していくと考えられる。これに対して、回転ばねの剛性 k を小さくすれば、自重によるモーメントがばねの抵抗モーメントを上回り、何もしなくても θ が増加し続け、最終的に倒伏すると予想される。

以上をまとめると、式(3.7.4)の R_M は、 $R_M > 1$ のときは $\theta = 0$ の直立した状態を保つが、 $R_M = 1$ のときは剛体モードとして座屈が発生し、さらに $R_M < 1$ のときは系が不安定である状態を示すものである。したがって、この系の最大高さ式は次のように得られる。

$$L_{c(\text{rigid})} \leq \sqrt{\frac{2s_k}{\pi\gamma}} r^{-1} \quad (3.7.5)$$

3.7.3 梁モードにおける自重座屈に対する最大高さ式の導出

前節においては、「剛体モードにおいて $R_M > 1$ が満たされる場合には、系のつり合い状態は $\theta = 0$ においてのみ存在すると考えられる」と記した。しかしながら、回転ばねの剛性 s_k が十分に高い場合でも、長柱の曲げ剛性 EI が十分な大きさを持たない場合には、回転ばねではなく長柱側において曲げ座屈が生じることが予想される。本節では、このような「梁モード」について、最大高さの定式化を行う。

まず、自重座屈発生時の任意点における力のつり合いより、せん断力 $S(x)$ が次のように得られる。

$$S(x) = \gamma Ax \sin(\theta(x)) \quad (3.7.6)$$

このとき、たわみ角 $\theta(x) \ll 1$ である微小変形を仮定することで、せん断力は次のように書ける。

$$S(x) \approx \gamma Ax \theta(x) \quad (3.7.7)$$

また、梁の二階微分方程式より、曲げモーメント $M(x)$ は次のようになる。

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.7.8)$$

ここに、 $w(x)$ は任意点において生じるたわみである。ここで、微小変形を仮定し、せん断力および曲げモーメントの関係式 $S(x) = dM(x)/dx$ を用いることで、次に示す支配微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{\gamma A}{EI} \theta x = 0 \quad (3.7.9)$$

ここで、次式を用いて変数変換を行う。

$$\xi = \omega x \quad (3.7.10)$$

ここに、 ω は定数である。これを用いて、式(3.7.9)の支配方程式は次のように変換される。

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \xi \theta = 0 \quad (3.7.11)$$

なお、支配方程式の左辺第二項を簡単にするように定数 ω を定めると、次のようになる。

$$\omega = \left(\frac{\gamma A}{EI} \right)^{1/3}. \quad (3.7.12)$$

すなわち，支配方程式および変数変換パラメータは，これまでのものと同様である．

また，式(3.7.11)の一般解は，二つの Airy 関数の線形結合により次のように得られる．

$$\theta(\xi) = \text{Ai}((-1)^{1/3}\xi)c_1 + \text{Bi}((-1)^{1/3}\xi)c_2 \quad (3.7.13)$$

ここに， $\text{Ai}(x)$ は第一種 Airy 関数， $\text{Bi}(x)$ は第二種 Airy 関数であり， c_1, c_2 はそれぞれ任意定数を表す．この一般解に境界条件を適用し，最大高さを求めるための固有方程式を導出する．なお，この問題における境界条件は，これまでの定式化とは完全に異なり，次式で与えられる．

$$\begin{cases} \text{at } x = 0, & \frac{d\theta}{dx} = 0 \\ \text{at } x = L, & \frac{d\theta}{dx} = -\frac{M(L)}{EI} \end{cases} \quad (3.7.14)$$

これらの境界条件を適用するために，式(13)に示した一般解の一階微分を次のように求める．

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = (-1)^{1/3}\omega(\text{Ai}'((-1)^{1/3}\xi)c_1 + \text{Bi}'((-1)^{1/3}\xi)c_2) \quad (3.7.15)$$

ここに， $\text{Ai}'(x)$ ， $\text{Bi}'(x)$ はそれぞれ x に関する一階微分を表す．いま，式(3.7.14)に示す境界条件のうち，自由端側（ $x = 0$ ）における境界条件を適用すると，二つの未知定数 c_1, c_2 間に成り立つ次の関係式が得られる．

$$c_2 = \frac{c_1}{\sqrt{3}} \quad (3.7.16)$$

これを用いて，たわみ角（式(3.7.13)）およびその一階微分（式(3.7.15)）は次のようになる．

$$\theta(\xi) = \left(\text{Ai}((-1)^{1/3}\xi) + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{Bi}((-1)^{1/3}\xi) \right) c_1 \quad (3.7.17)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\omega \left(\text{Ai}'(-\xi) + \frac{\sqrt{3}}{3}\text{Bi}'(-\xi) \right) c_1 \quad (3.7.18)$$

ここで、二つ目の境界条件を適用するために、下端におけるモーメントのつり合いを考えると、次に示す関係式が得られる。

$$M(L) = s_k \left(\text{Ai}((-1)^{1/3} \omega L) + \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Bi}((-1)^{1/3} \omega L) \right) = \frac{2s_k}{3^{2/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} {}_0F_1\left(\frac{2}{3}; -\frac{\xi_c^3}{9}\right) c_1 \quad (3.7.19)$$

ここに、 $\Gamma(x)$ は Gamma 関数、 ${}_0F_1(a; z)$ は合流型超幾何関数を表す。また、 ξ_c は最大高さを与える固有方程式の解であり、これまでと同様に、式(3.7.10)に $x = L$ を代入したものとして次式で与えられる。

$$\xi_c = \omega L \quad (3.7.20)$$

すなわち、式(3.7.14)の固定端側の境界条件を式(3.7.17)に適用し、 $c_1 \neq 0$ であるものとするれば、式(3.7.18), (3.7.19)より最大高さを与える ξ_c に関する固有方程式が次のように与えられる。

$$\left(\frac{3k}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} {}_0F_1\left(\frac{2}{3}; -\frac{\xi_c^3}{9}\right) - \frac{\omega EI}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} {}_0F_1\left(\frac{5}{3}; -\frac{\xi_c^3}{9}\right) \xi_c^2 \right) = 0 \quad (3.7.21)$$

ここで、剛体モードとの関係性を容易に理解できるようにするために、式(3.7.4)を用いて回転剛性 s_k を次のように与える。

$$s_k = R_M \frac{\gamma AL^2}{2} \quad (3.7.22)$$

いま、式(3.7.12)および式(3.7.20)を用いることで、式(3.7.22)は次のように書くこともできる。

$$s_k = \frac{R_M}{2} \omega EI \xi_c^2 \quad (3.7.23)$$

よって、式(3.7.21)の固有方程式は次のように変換できる。

$$\frac{\omega EI}{2} \xi_c^2 \left(\frac{3R_M}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} {}_0F_1\left(\frac{2}{3}; -\frac{\xi_c^3}{9}\right) - \frac{2}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} {}_0F_1\left(\frac{5}{3}; -\frac{\xi_c^3}{9}\right) \right) = 0 \quad (3.7.24)$$

式(3.7.24)の係数部分是非零であるため、最終的な解くべき固有方程式は次のように与えられる.

$$\operatorname{Re} \left[\left(\frac{3R_M}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} {}_0F_1\left(\frac{2}{3}; -\frac{\xi_c^3}{9}\right) - \frac{2}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} {}_0F_1\left(\frac{5}{3}; -\frac{\xi_c^3}{9}\right) \right) \right] = 0 \quad (3.7.25)$$

ここに、 $\operatorname{Re}[z]$ は複素数 z の実部を示す. この固有方程式の解を $\xi_{c(\text{sol})}$ と表記すれば、この固有方程式の変数が R_M および ξ_c の2つのみであることを踏まえると、梁モードの最大高さ式は次のように定義できる.

$$L_c = \xi_{c(\text{sol})}(R_M) \left(\frac{E}{4\gamma} r^2 \right)^{1/3} \quad (3.7.26)$$

すなわち、既に実際の樹木に対する適合性が保証されている「最大高さが半径の2/3乗に比例する」というスケーリング則は、地盤剛性を回転ばねとして考慮した場合においても同様に成り立つ. なお、多端を固定・一端を自由とする円柱の自重座屈に対するGreenhillの最大高さ式を用いて、ばねの回転剛性 s_k が最大高さに与える影響を明確にするために、次に示す最大高さ比 R_L を定義する.

$$R_L = \frac{L_c}{L_{cs}} = \frac{\xi_{c(\text{sol})}(R_M)}{\xi_{c(\text{sol})}(\infty)} \quad (3.7.27)$$

$\xi_{c(\text{sol})}(\infty)$ は、回転剛性の大きさを表すパラメータ R_M について、 $R_M \rightarrow \infty$ の極限を考えるものであり、地面を完全な固定端として考えた場合に相当する. これは、式(3.7.25)における $R_M \rightarrow \infty$ の極限を考えると、左辺第一目の影響が卓越し、結果として固有方程式がGreenhillのものと一致することからも確認できる. すなわち、 $\xi_{c(\text{sol})}(\infty)$ はGreenhillの固有値問題において与えられる正の最小の固有値 $\xi_{c(\text{sol})}(\infty) \approx 1.986$ である.

3.7.4 セカント法を用いた固有方程式の数値解法

式(3.7.25)の固有方程式は、複数の特殊関数を含む式であり、これを代数的に解くことはできない.

本研究では、今後の拡張性を考慮し、微分が不要なセカント法を数値計算法として採用する. まず、式(3.7.25)の固有方程式を次のように置く.

$$\operatorname{Re} \left[\left(\frac{3R_M}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} {}_0F_1\left(\frac{2}{3}; -\frac{\xi_c^3}{9}\right) - \frac{2}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} {}_0F_1\left(\frac{5}{3}; -\frac{\xi_c^3}{9}\right) \right) \right] = f(R_M, \xi_c) \quad (3.7.28)$$

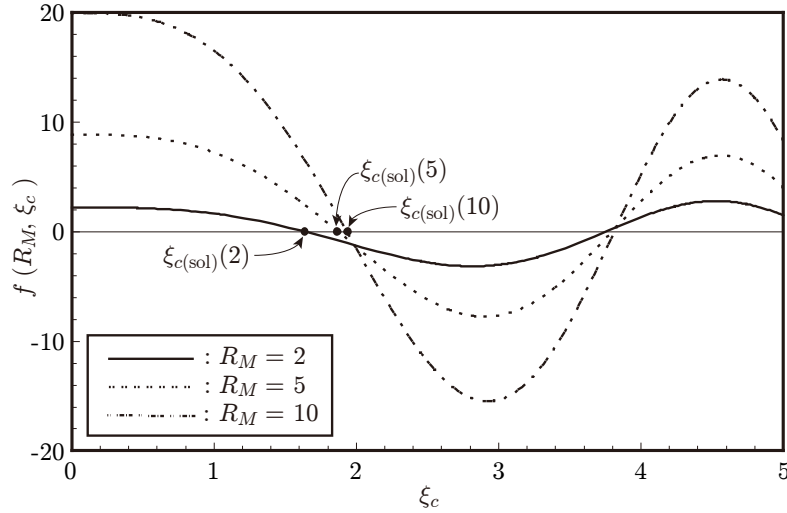

 図-3.7.2 関数 $f(R_M, \xi_c)$ の分布例

図-3.7.2 には, $R_M = 2, 5, 10$ における関数 $f(R_M, \xi_c)$ の分布例を示す. 図は横軸に ξ , 縦軸に式(3.7.28)の $f(R_M, \xi_c)$ をとって示したものである. また, 図中に示す $\xi_{c(sol)}(R_M)$ が, それぞれの R_M における正の最小の零点である. 本研究では, 離散的な $R_M = 1.01, 1.02, \dots, 100$ について, この $\xi_{c(sol)}(R_M)$ をセカント法を用いた数値解法により数値的に求めることとする.

いま, ξ_c の値を刻み幅 $\Delta\xi$ ずつ変化させて, $f(R_M, \xi_0) \cdot f(R_M, \xi_1) < 0$ となる区間 $[\xi_0, \xi_1]$ を探索する. この ξ_0 と ξ_1 を初期値として, 次式を用いた繰り返し計算を行う.

$$\xi_{(m+1)} = \xi_{(m)} - f(R_M, \xi_{(m)}) \frac{\xi_{(m)} - \xi_{(m-1)}}{f(R_M, \xi_{(m)}) - f(R_M, \xi_{(m-1)})} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (3.7.29)$$

なお, 収束判定には次の式を用いる.

$$\left| \frac{\xi_{(m)} - \xi_{(m-1)}}{\xi_{(m)}} \right| \leq \delta = 1.0 \times 10^{-4} \quad (3.7.30)$$

3.7.5 端部の回転剛性と自重座屈モード

本節では, 梁モードにおける座屈モードの描画方法について, その詳細を示す. まず, 式(3.7.17)に示した未知定数 c_1 を含むたわみ角 θ の一般式について x に関する積分を行い, たわみの式を次のように求める.

$$w(R_M, \xi) = \frac{1}{\omega} \int \theta(\xi) d\xi = \frac{1}{3^{1/6} \pi \omega} \xi \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) {}_pF_q\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{\xi^3}{9}\right) c_1 + c_3 \quad (3.7.31)$$

ここに, c_3 は任意定数, ${}_pF_q(a; b; z)$ は一般化された超幾何関数である. いま, 回転ばね端 ($x = L, \xi = \xi_c$) におけるたわみはゼロであるから, c_3 は次のようになる.

$$c_3 = -\frac{1}{3^{1/6}\pi} \frac{\xi_c(R_M)}{\omega} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) {}_pF_q\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{\xi_c(R_M)^3}{9}\right) c_1 \quad (3.7.32)$$

すなわち、たわみの一般式は、次に示すように与えられる。

$$\begin{aligned} w(R_W, \xi) &= \frac{1}{\omega} \int \theta(\xi) d\xi \\ &= \frac{\Gamma(1/3)}{3^{1/6}\pi} \frac{\xi}{\omega} \left({}_pF_q\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{\xi^3}{9}\right) - \frac{\xi_c(R_W)}{\xi} {}_pF_q\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{\xi_c^3(R_W)}{9}\right) \right) c_1 \end{aligned} \quad (3.7.33)$$

ここで、未知定数 c_1 の影響を消去するために、一次の梁モードにおいては一様に自由端で生じると推測される最大たわみを用いて、式(3.7.33)を正規化することを考える。すなわち式(3.7.33)において $\xi = 0$ としたものを用いて、正規化された座屈モード式が次のように求められる。

$$\frac{w(R_W, \xi)}{w(R_W, 0)} = 1 - \frac{\xi}{{}_pF_q\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{\xi_c^3}{9}\right)} \frac{{}_pF_q\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{\xi^3}{9}\right)}{\xi_c} \quad (3.7.34)$$

すなわち、式(3.7.25)を満足する ξ_c を $R_W > 1$ を満たす R_W について求め、それを上式に代入することにより、一次モードの自由端で生じる最大たわみ値で正規化された座屈モードが得られる。なお、式(3.7.10)および(3.7.20)より、座屈モードの式(3.7.34)について、相対座標系 $R_x = x/L$ を用いて書き変えると次のようになる。

$$\frac{w(R_M, R_x)}{w(R_M, 0)} = 1 - R_x \frac{{}_pF_q\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{1}{9}\xi_c^3 R_x^3\right)}{{}_pF_q\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; -\frac{\xi_c^3}{9}\right)} \quad (3.7.35)$$

なお、 $R_x = 0$ で自由端、 $R_x = 1$ で固定端を示す

3.7.6 端部の回転剛性が自重座屈特性に与える影響

図-3.7.3 は、端部が回転ばねで固定された片持ち梁の自重座屈に対する安定性の位相図であり、回転剛性に関するパラメータ R_M が最大高さ比に与える影響を表したものである。図の横軸は式(3.7.4)のパラメータ R_M を対数グラフとして示したものであり、縦軸は式(3.7.27)の最大高さ比 R_L を示す。なお、図中には最大高さ比 $R_L = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.95$ を示すパラメータ R_M の点を例示している。

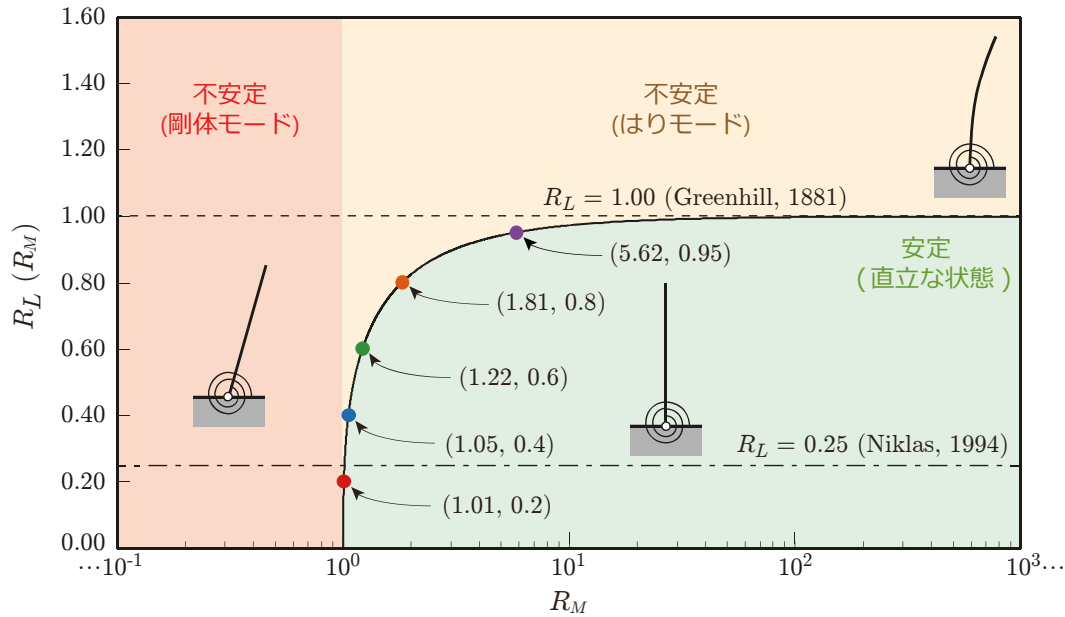


図-3.7.3 回転剛性を考慮した重い柱の自重座屈問題における安定性の位相図

まず、図中の背景色は、赤の領域で剛体モードの座屈、オレンジの領域で梁モードの座屈が発生することを示し、緑の領域は自重座屈を回避できる領域であることを示す。

3.7.1 項でも概要を示したように、 $R_M < 1$ のときは系が必ず不安定であるから、どのような高さであっても必ず剛体モードの座屈が生じる。また、 $s_k = \gamma AL^2/2$ の関係が常に満足されている $R_M = 1$ の場合においては、剛体モードとしてのつり合い状態を示すものの、高さ L がどのような値であっても座屈が生じてしまうため、最大高さ比は $R_L = 0$ となっている。すなわち、土と根の相互作用による回転剛性 s_k が、 $s_k \leq \gamma AL^2/2$ であるとき、野生の樹木は自立することができず、剛体モードに相当する「根返り」の破壊モードを示すと予想される。

次に、梁モードの座屈波形を示す $R_M > 1$ の範囲では、回転ばねの剛性を大きくしていくことにより、徐々に最大高さが向上することが確認できる。すなわち、地盤—根系の相互作用に伴う拘束力が大きくなるほど、最大高さが向上する。特に、 $1 < R_M < 2$ の範囲で最大高さは極めて顕著に向上しており、 $R_M = 2$ の場合には、地面で完全に固定されている場合から最大高さ比が20%ほど減少する程度に座屈特性への影響が抑えられている。そして、 $R_M > 2$ の範囲では、 R_M の増加に伴って $R_L = 1$ に収束していくような挙動が確認され、 $R_M = 100$ 程度で $R_L \approx 1$ の結果が得られる。これは、ばね定数 s_k の増加によって端部の拘束が強まり、固定端の場合の解に近づいていくことを意味するものである。そして、この黒で示された実線よりも上の領域では、梁モードの座屈に相当する「幹折れ」の破壊モードを示すと考えられる。

また、図中の一点鎖線は、Niklas が計測した実際の樹木の高さ L_{real} に対する、Greenhill 式により予測される樹木の最大高さ L_{cs} の比($R_L = L_{cs}/L_{real} \approx 0.25$)を示すものである。これは、3.6 節において述べた先行研究と同様であり、これは木本種においてスケールに依存しないことが報告されている[2]。

$R_L = 0.25$ との交点は、およそ $R_M = 1.02$ 程度のところに存在している．すなわち、梁モードにおける座屈は実際の樹木でほとんど発生しないよう、自重座屈に対する安全率を確保していることが分かる．ただし、剛体モードは R_L に依存せずに発生する問題である．

3.7.7 端部の回転剛性と自重座屈モードの関係

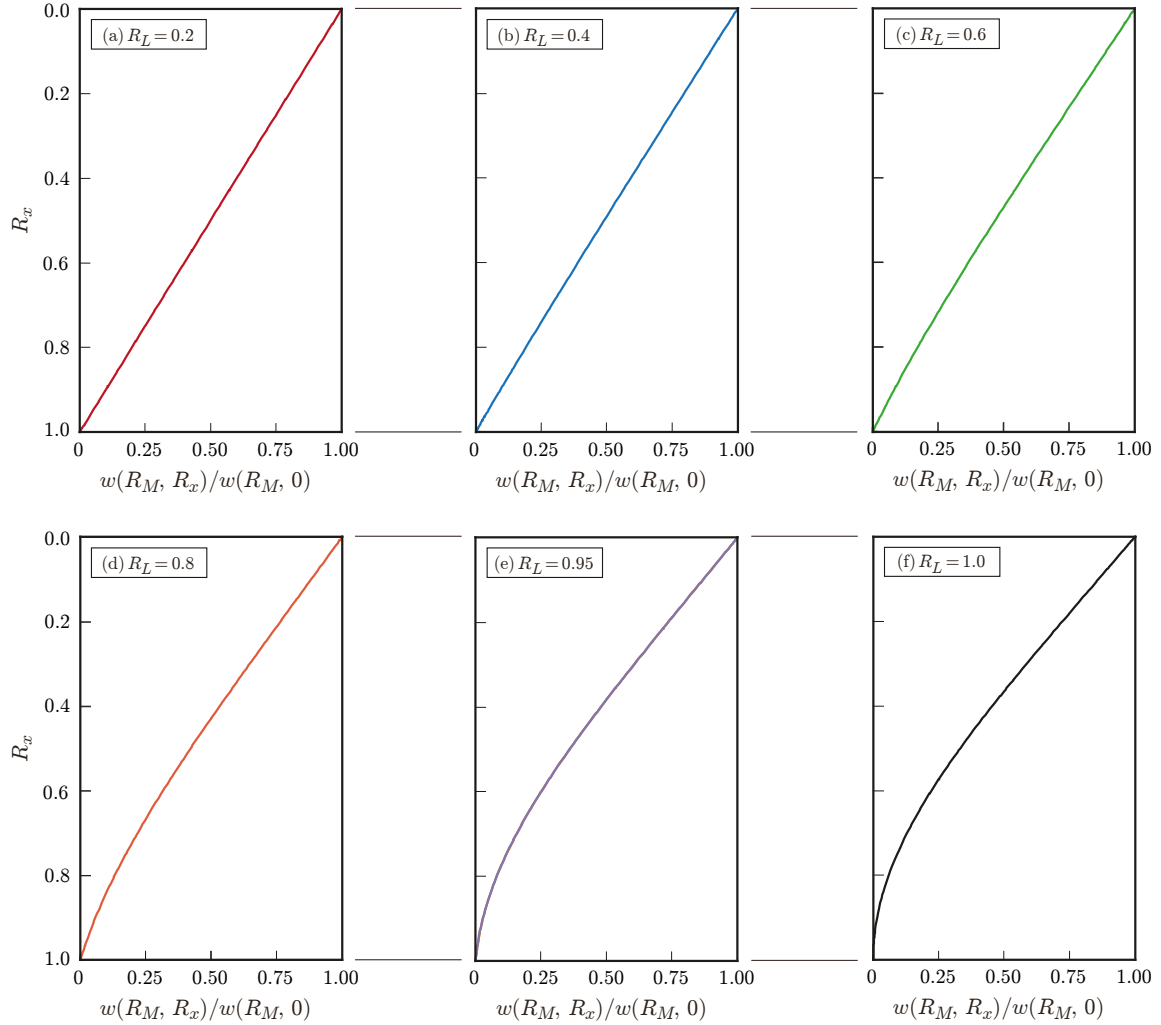


図-3.7.5 端部における回転剛性を考慮した自重座屈モード

図-3.7.5 は、それぞれ $R_L = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.95, 1.0$ を与える場合における、自重座屈発生時のモード形状を示している．これは縦軸に相対座標 R_x ($R_x = 0$ は自由端、 $R_x = 1$ はばね端を示す)を取り、横軸に先端部のたわみで正規化されたたわみ $w(R_M, R_x)/w(R_M, 0)$ を取って示したものである．

自重座屈発生時のモード形状は、図-3.7.5 (a)に示した最大高さ比 $R_L = 0.20$ の場合にはほぼ直線的な形状を示し、剛体モードの形状と極めて類似したものとなっている．しかし、最大高さ比が大きくなっていくにつれ、すなわち端部の剛性が大きくなっていくにつれてモード形状は変化し、例えば図-3.7.5 (d)の $R_L = 0.8$ の場合には、ばね端部付近におけるたわみが $R_L = 0.2, 0.4, 0.6$ の場合と比較して大きく抑制されていることが分か

る。図-3.7.5 (e)の最大高さ比 $R_L = 0.95$ の場合には、ばね端部付近におけるたわみがさらに大きく抑制され、端部を固定端とした場合（図-3.7.5 (f)）の一般的な座屈モードに類似した結果を示している。これらの結果から、自重座屈モードは、自重による剛体モーメント $\gamma AL^2/2$ と回転剛性 s_k の比により、直線あるいは曲線の形状を示すことが分かる。

3.7.8 自重座屈に対するスケーリング則と樹木における回転剛性 R_M の推定

ここでは、本研究により得られた二つの座屈モードの最大高さ式について、それぞれの特性を簡単にまとめるとともに、実際の樹木において観測されている事象や結果との比較・考察を行う。

まず、既往の研究[55]により、端部の回転剛性 s_k は次の関係に従うことが経験的に明らかになっている。

$$s_k = pD_h^2 \quad (3.7.36)$$

ここに、 p は定数（参考文献[55]では $p = 28427 \text{ kN/m}$ ）， D_h は胸高直径 [m] を示す。これを用いて、 $D_h \approx 2r$ を仮定すると、式(3.7.5)に示した剛体モードの最大高さ式が次のように変形できる。

$$L_{c(\text{rigid})} = \sqrt{\frac{8p}{\pi\gamma}} \quad (3.7.37)$$

式(3.7.37)は、剛体モードの最大高さ式が直径に依存しないことを示しており、最大高さは弾性係数や断面二次モーメントに関係なく、単位体積重量のみによって規定されることを表している。すなわち、実際の樹木は、回転剛性 s_k を式(3.7.46)のスケーリング則に基づいて決定することにより、剛体モードの最大高さを身体スケールに依存しない問題へと帰着させている。

表-3.7.1 本節で得られた最大高さ式のまとめ

座屈モード	剛体モード (根返りに対応)	梁モード (幹折れに対応)
	$L_{c(\text{rigid})}$	$L_{c(\text{Beam})}$
最大高さ式	$= \sqrt{\frac{2s_k}{\pi\gamma}} r^{-1} \left(\approx \sqrt{\frac{8p}{\pi\gamma}}, \quad p = 28427 \text{ [55]} \right)$	$= \frac{\xi_c(R_M)}{\xi_c(\infty)} \left(C \frac{E}{\gamma} r^2 \right)^{1/3}$
スケーリング則	なし (L_c は r に依存しない)	$L \propto r^{2/3}$
適用範囲	$R_M = 1$ ($R_M < 1$ のとき根返りが発生)	$R_M > 1$
モード形状	直線形	Sin 曲線

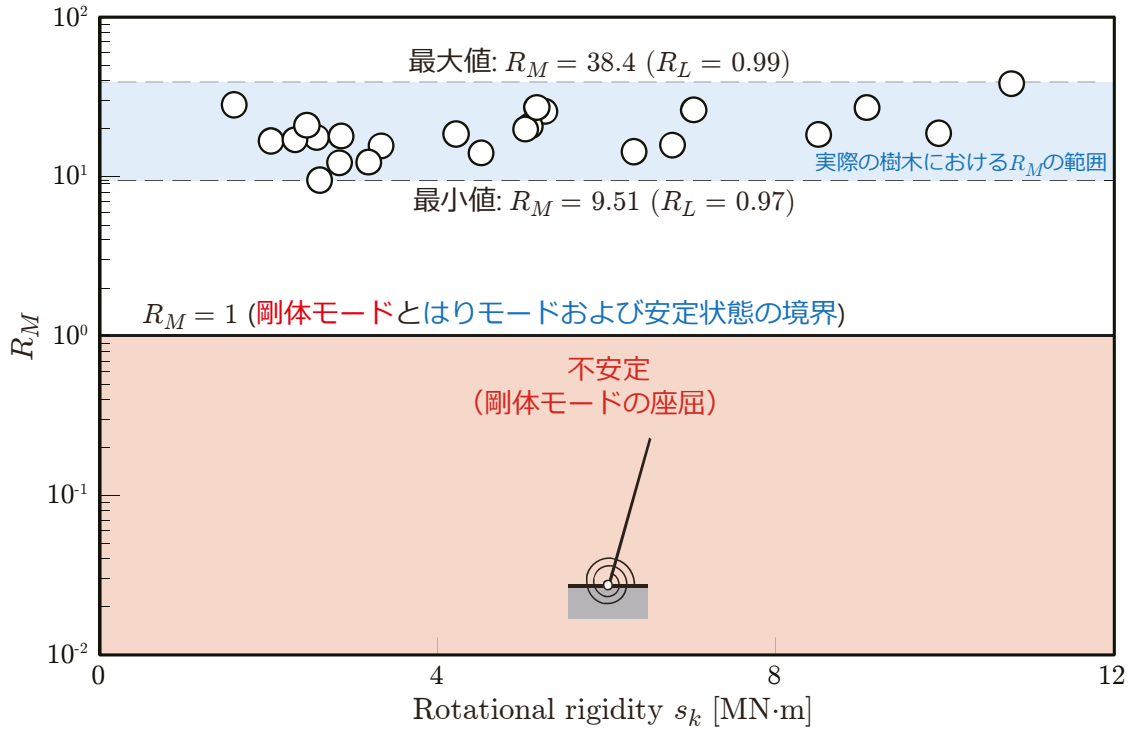


図-3.7.5 端部における回転剛性を考慮した自重座屈モード

そして、表-3.7.1 には、本研究によって得られた二つの主要な最大高さ式について、それぞれの特性を簡単にまとめたものを示す。まず注目すべきは、最大高さ式における半径の次数である。実際の樹木において観測されている高さ一直径間に成り立つスケーリング則は、「高さが直径の $2/3$ 乗に比例する」というものであり、これは梁モードのスケーリング則に一致する[3,4]。これは、地盤剛性一直径間に成り立つ式(3.7.37)のスケーリング則により、剛体モードの最大高さが半径に依存しない問題に帰着されていることに起因すると考えられる。

また、実際の樹木が梁モードのスケーリング則に対応しているという事実は、地盤—根系の相互作用によってもたらされる端部の回転剛性 s_k について、種や環境を問わず、次の関係式が成長過程で自動的に満足されているということを裏付けるものでもある。

$$s_k > \frac{\gamma AL^2}{2} \quad (3.7.38)$$

本節では、この仮説を検証するために、Jonsson ら[55]と Niklas [60]の実験的研究による測定データに基づき、実際の樹木における回転剛性パラメータ R_M の範囲を推定する。

Jonsson らは、計 23 本の樹木について、その回転剛性 s_k 、胸高直径 D_h 、樹高 L 、弾性係数 E の測定を行った[55]。しかしながら、回転剛性パラメータ R_M を計算するにあたって必要となる、幹の単位体積重量 γ のデータは含まれていない。そこで、本研究では Niklas が報告している弾性係数 E と単位体積重量 γ の経験的な関係式[60]を用いることにより、

γ の値を推定する．Niklas は，弾性係数 E と単位体積重量 γ の間に次の関係が成り立つことを明らかにしている．

$$\gamma = \frac{E}{125^3} \quad (3.7.39)$$

式(3.7.39)を式(3.7.3)に用いることにより，次式が得られる．

$$R_M = \frac{2k}{AL^2} \frac{125^3}{E} \quad (3.7.40)$$

上式を用いることにより，Jonsson らの測定データに基づき回転剛性パラメータ R_M を推定することができる．

図-3.7.5 は，式(3.7.40)および Jonsson らの測定に基づき，回転剛性パラメータ R_M と回転剛性 s_k の関係を示したものである．図の横軸は回転剛性 s_k [MN・m]，図の縦軸は回転剛性パラメータ R_M を表す．さらに，図中の赤の領域は $R_M < 1$ となる不安定な領域（剛体モードが発生）を示し，青の領域は実際の樹木における R_M の範囲を示す．離散的な○印は，式(3.7.40)から得られた計 23 本分の測定データに基づく回転剛性パラメータ R_M の推定値である．

図より，剛体モードが発生する赤の領域に一つも○印が無いことが確認できる．さらに，実際の樹木における回転剛性パラメータ R_M の最大値および最小値はそれぞれ $R_{M(\text{Max})} = 38.4$ および $R_{M(\text{Min})} = 9.51$ である．そして， $R_{M(\text{Min})} = 9.51$ における最大高さ比 R_L は， $R_L(9.51) \approx 0.97$ である．このことは，実際の樹木において確保されている根系－土壌の相互作用がなす回転剛性は，単に剛体モードの発生を防止するために十分であるというだけでなく，梁モードの自重座屈の発生を回避するためにも十分な値であることを示すものである．すなわち，樹木における回転剛性パラメータ R_M の範囲は，完全に地面において固定されていると仮定する場合に対して，もっとも不利な状態でも，最大高さがおよそ 3%減少する程度に抑えられるように確保されているということである．

これらのことと図-3.7.3 の結果を合わせて考えると，式(3.7.38)が満足されていることを前提とすれば，樹木が確保している梁モードの自重座屈に対する安全率は，ほぼすべての場合で自重座屈の発生を回避できるように選択された，極めて巧妙なものであると言える．しかしながら，式(3.7.37)が曲げ剛性に依存しないという事実は，樹木における根系－土壌の相互作用が失われ，式(3.7.38)の規準を下回ってしまうと，幹の曲げ剛性がたとえどんなに高い水準にあったとしても，倒伏が発生することを避けられないことを意味するものでもある．なお，今回は樹木が恒久的に支持しなければならない自重に着目して座屈問題の定式化を行ったが，倒伏現象には風のような横方向からの荷重の急激な変化に起因するものも存在することについて，十分に留意する必要がある．

最後に，自立した樹木においては式(3.7.38)が必ず満たされていることから，式(3.7.38)の右辺の成分を測定することにより，根系－土壌が有している回転剛性 s_k の下限値を推定することが可能であることが分かる．今後の研究の発展によって， s_k に根系・土壌の

特性がどのように寄与するかを定量的に明らかにすることが可能となれば、根系や土壌の状態に対する非破壊的な調査手法の確立に繋がることが期待できる。

3.7.9 本節のまとめ

本節では、樹木における地盤の拘束力が自重座屈特性に与える影響を明らかにするために、根系－土壌の相互作用に起因する外力への抵抗モーメントを回転ばねによって取り入れ、自由端－回転ばねで支持された片持ち梁の自重座屈問題の定式化を行った。その結果、以下に示す知見が得られた。

- ① 体積力による転倒モーメントと回転ばねによる抵抗モーメントのバランスにより、回転ばねで座屈が生じる剛体モードと、梁で座屈が生じる梁モードの二つの座屈モードが存在する。これは、剛体モードが生じる場合のモーメントのつり合いから得られる基準式を用いて、どちらの座屈が生じうるかを判断することができる。
- ② 梁モードおよび剛体モードについてそれぞれの最大高さ式を導出した結果、梁モードの最大高さ式において、Greenhill により提唱された「自重座屈に対する最大高さは、半径の $2/3$ 乗に比例する」という自重座屈に関するスケーリング則と同様の法則が見られた。これに対して、既往の研究によって明らかにされている回転剛性－直径間の統計的な関係式より、剛体モードはスケールに依存しない問題であり、剛体モードの最大高さは単位体積重量のみによって規定されることが分かった。
- ③ 実際の樹木におけるスケーリング則は、梁モードの最大高さ式に適合するものであった。このことは、およそほとんどの場合において、根系－土壌の相互作用による回転剛性は、剛体モードの座屈を回避できるように確保されていることを示唆している。この仮説を検証するために、既往の研究における樹木の測定データと各パラメータ間の統計的関係に基づき、樹木が有する回転剛性の値を推定した。その結果、樹木は剛体モードの発生を防ぐために十分な回転剛性を有していることが明らかになった。このことと実際の樹木が有している自重座屈に対する安全率を踏まえると、樹木は剛体モード・梁モードの双方に対し、十分な安全性を有していると考えられる。

本節の成果は、樹木の自重座屈特性に関する研究の中で、初めて地盤剛性の影響を力学理論に基づき定量的に取り入れたものである。これは、樹木において観測されていた「根返り」「幹折れ」の計二つの破壊モードの評価を可能にするとともに、樹木の地表部の状態から、地盤内部の状態を非破壊的に推定することを可能にするものである。本節の成果を論文としてまとめたものは、Journal of Mechanics 誌に査読論文として投稿している[研究業績目録, 学術論文(7)].

3.8 本章のまとめ

ここでは、本章において得られた新たな木本植物の最大高さ式について、そのまとめを示すとともに、本章における定式化の限界について言及する。

表-3.8.1 には、Greenhill が導出した重い円柱における最大高さ式と、本章の定式化によって得られた新たな最大高さ式について、それぞれをまとめたものを示している。表の背景色の意味は、基準となる Greenhill 式を緑色としており、これに対して最大高さを向上させると考えられる因子が含まれているものが赤色で示されており、青色のものが最大高さを低下させると考えられる因子が含まれているものである。

表より、驚くべきことに、本研究で取り扱った計算モデルにおける最大高さ式は、いずれも「基準とする Greenhill の式」と「本研究によって新たに考慮した要素に依存する関数」の積という、極めて単純な形で与えられることが分かる。すなわち、本研究で新たに導出した 6 つの自重座屈に対する最大高さに関する式は、McMahon によってその妥当性が確認されている「樹木の高さは直径の $2/3$ 乗に比例する」という法則を保持する結果を示しており、これは $2/3$ 乗則が樹木の多様な形態を貫いて成り立つ理由を裏付けるものである。

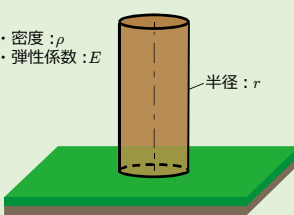
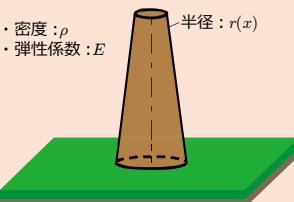
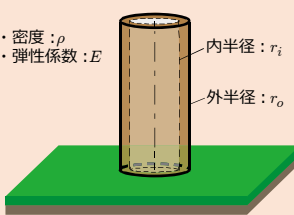
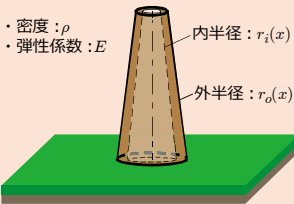
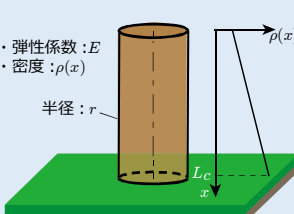
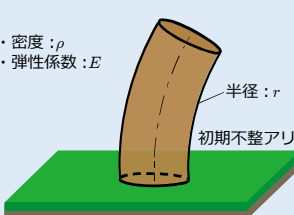
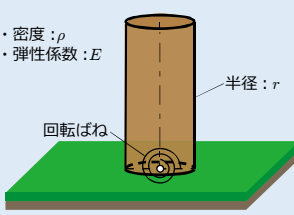
しかしながら、このスケーリング則があらゆる植物に適用できるかということについては、第2章でもその概要を示した通り、それは否である。これは Niklas の調査によって明らかにされているように、この法則はあくまで硬く重い木本植物に対してのみ、その適合性が確認されているものであり、軽く柔らかい草本植物には全く適合しない。

その理由を力学的な観点から推測すると、両者の体を支える仕組みが根本的に違うためであると考えられる。部材そのものが硬く、径が太い木本植物は、自身が有する「曲げ剛性」によって身体を支えることが可能である。これに対して、草本植物は材質が柔らかく、かつ径も木本植物に比べて極めて小さい。しかしながら、自生状態にある草本植物は、光合成のために光を得るべく高さ方向に成長し、自立した状態を保っている。このことは、草本植物は「曲げ剛性」ではなく、他の仕組みを用いて自身の体を支持していることを示唆するものである。

そして、この「体を支える仕組みの違い」という観点は、既往の生態学的研究において、完全に無視されてきた。Niklas が草本植物・木本植物のスケーリング則の検証において用いた Greenhill の式は、部材そのものが剛であるという仮定に基づき導出されたものであるにも関わらず、曲げ剛性によって身体を支持することができないであろう草本植物に対しても適用されている。このことから、曲げ剛性ではない仕組みによって身体を支持していると考えられる草本植物について、その身体支持の仕組みを力学理論の立場から明らかにすることは、モノづくりの一助となる工学的な知見が得られるだけでなく、植物学分野における「曲げ剛性と幾何剛性の混同」を解消する、極めて重要な知見を与えるものであると予想される。

以上を踏まえて、次章では柔らかく軽い草本植物に焦点を当て、張力を活かした巧みな身体支持の仕組みを「力学理論の立場」から解明し、その知見を整理する。これにより、生物形態模倣の観点をはじめとする工学的な知見だけでなく、従前の経験的・統計的アプローチでは解明することができない植物学・生態学的な知見の獲得を目指す。

表-3.8.1 本章において得られた最大高さ式のまとめ

円柱モデル (Greenhill)		$L_{cs} = \left(C \frac{E}{\gamma} \right)^{1/3} r^{2/3}$ - 基準となる Greenhill の式 Cは定数 ($C \approx 1.959$) であり, $L_{cs} \propto r^{2/3}$を発見.
テーパー モデル (3.2 節)		$L_c = f(R_t) \left(C \frac{E}{\gamma} \right)^{1/3} r_L^{2/3} \quad (f(R_t) = R_t^{-1/6} \text{ など})$ R_t: テーパー比 (先端半径/根元半径) r_L: 根元半径 (Greenhill モデルにおける r に対応)
中空 モデル (3.4 節)		$L_c = f(R_h) \left(C \frac{E}{\gamma} \right)^{1/3} r_o^{2/3} \quad (f(R_h) = (1 + R_h^2)^{1/3})$ R_h: 中空比 (内半径/外半径) r_o: 外半径 (Greenhill モデルにおける r に対応)
中空テーパー モデル (3.5 節)		$L_c = f(R_t) f(R_h) \left(C \frac{E}{\gamma} \right)^{1/3} r_L^{2/3}$ 単純なテーパー関数 $f(R_t)$, 中空比関数 $f(R_h)$ の積
枝葉考慮 モデル (3.3 節)		$L_c = f(n, R_W) \left(C \frac{E}{\gamma} \right)^{1/3} r^{2/3}$ $(f(n, R_W): \text{式(3.3.16)等の正の最小の実数解})$ R_W: 枝葉の重量 / 幹の重量 n: 重量分布パラメータ, 正で下部, 負で上部が重い
初期不整 モデル (3.6 節)		$L_c = f(R_\theta, R_P) \left(C \frac{E}{\gamma} \right)^{1/3} r^{2/3}$ $(f(R_\theta, R_P): \text{式(3.6.31)等の正の最小の実数解})$ R_θ: 初期不整パラメータ, 不整の大きさを表す R_P: 先端圧縮力/体積力
回転ばね モデル (3.7 節)		$L_c = f(R_M) \left(C \frac{E}{\gamma} \right)^{1/3} r^{2/3}$ $(f(R_M): \text{式(3.7.25)の正の最小の実数解})$ R_M: 回転ばねの剛性 s_k / 柱の剛体モーメント $\gamma A L^2 / 2$ R_Mによって座屈モードが分岐 (上記は $R_M > 1$ の場合)

参考文献

- [1] Greenhill, A.-G., Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical pole or mast can be made, and the greatest height to which a tree of given proportions can grow, *Proc. Camb. Philol. Soc.* **4**, 62-73 (1881).
- [2] Niklas, K. J., Interspecific allometries of critical buckling height and actual plant height, *Amer. J. Bot.*, **81**, 1275-1279 (1994).
- [3] McMahon, T. A., Size and shape in biology-elastic, *Science*, **179**, 1201-1204 (1973).
- [4] McMahon, T. A. & Kronauer, R. E., Tree structures: deducing the principle of mechanical design, *J. Theor. Biol.*, **59**, 443-466 (1976).
- [5] 山田常夫ら編集, 岩波生物学辞典 第3版, 岩波書店, (1989).
- [6] King, D., Tree dimensions: maximizing the rate of height growth in dense stands. *Oecologia*, **51**, 351-356 (1981).
- [7] Clark, M. A., Choi, J. & Douglas, M., Biology 2e, Rice University (2020).
- [8] Niklas, K. J., The scaling of plant height: A comparison among major plant clades and anatomical grades, **72**, *Ann. Bot.*, 165-172 (1993).
- [9] Bilous, A. et al., Semi-empirical estimation of log taper using stem profile equations, *J. For. Sci.*, **67**, 318-327 (2021).
- [10] Myroniuk, V. et al., Taper equations for eight major forest tree species in flat land Ukraine, *Forestry*, **96**, 498-508 (2023).
- [11] Oderwald, R. G. & Rayamajhi, J. N., Biomass inventory with tree taper equations, *Bioresour. Technol.*, **36**, 235-239 (1991).
- [12] Inoue, A., Sato, M. & Shima, H., A new taper index based on form-factor: application to three bamboo species (*Phyllostachys* spp.), *Eur. J. For. Res.*, **140**, 1533-1542 (2021).
- [13] von Karman, T & Biot, M. A., *Mathematical Methods in Engineering*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1940.
- [14] Wang, C. Y. & Drachman, B., Stability of a heavy column with an end load, *J. Appl. Mech.*, **48**, 668-669 (1981).

- [15] Dargahi, M., Newson, T. & Moore, J., Buckling behaviour of trees under self-weight loading, *Forestry*, **92**, 393-405 (2019).
- [16] Niklas, K. J., *Plant Biomechanics – An Engineering Approach to Plant Form and Function*, Chicago, Univ. Of Chicago Press (1992).
- [17] Adam, J. A., *Mathematical Methods in Engineering*, Cambridge, Cambridge Univ. Press (1940).
- [18] King, D. & Loucks, O. L., The theory of tree bole and branch form, *Radiat. Environ. Biophys.*, **15**, 141-165 (1978).
- [19] Hirata, Y., Studies on the quality-growth at the stems of Sugi (On the distribution of the weight of stems and branches in the kinds of Sugi), *J. Nara Gakugei Univ.*, **13**, 59-65 (1965).
- [20] Osunkoya, O. O. et. al., Comparative height crown allometry and mechanical design in 22 tree species of Kuala Belalong rainforest, Brunei, Borneo, *Amer. J. Bot.*, **94**, 1951-1962 (2007).
- [21] Timoshenko, S. P. & Gere, J. M., *Mechanics of Materials*, Van Nostrand Reinhold, New York (1972).
- [22] Inoue, A., Shima, H. & Sato, M., A new taper index based on form-factor: application to three bamboo species (*Phyllostachys* spp.), *Eur. J. For. Res.*, **140**, 1533-1542 (2021).
- [23] Inoue, A., Culm form analysis for bamboo, *Phyllostachys pubescens*, *J. For. Res.*, **24**, 525-530 (2013).
- [24] Inoue, A., Kitahara, F., Suga, H. & Wajima, T., Deriving a reduction factor for woody part of culm for bamboo *Phyllostachys pubescens*, *Lands. Ecol. Eng.*, **7**, 153-157 (2011).
- [25] Ishii, S., Operating time of cutting and moisture content of *phyllostachys pubescens*, *Bull. Okayama Prefect. Technol. Cent. Agric. For. Fish. Res. Inst. For. For. Prod.*, **26**, 19-28 (2010).
- [26] Shima, H., Sato, M. & Inoue, A., Self-adaptive formation of uneven node spacings in wild bamboo, *Phys. Rev. E*, **93**, 022406_1-9 (2016).
- [27] Kappel, R., Mattheck, C., Bethge, K. & Tesari, I., Bamboo as a composite structure and its mechanical failure behaviour, *WIT Trans. Ecol. Environ.*, **73**, 286-293 (2004).
- [28] Spatz, H. C., Speck, T. & Vogelhehner, D., Contributions to the biomechanics of plants.; II. Stability against local buckling in hollow plant stems, *Bot. Acta.*, **103**, 123-130 (1990).
- [29] Niklas, K. J., The influence of gravity and wind on land plant evolution, *Rev. Palaeobot. Palynol.*, **102**, 1-14 (1998).

- [30] Niklas, K. J. & Spatz, H.-C., Wind-induced stresses in cherry trees: evidence against the hypothesis of constant stress levels, *Trees*, **14**, 230-237 (2000).
- [31] Vogel, S., Blowing in the wind: storm-resisting features of the design of trees, *J. Arboric.* **22**, 92-98 (1996).
- [32] Socha, J. & Kulej, M., Variation of the tree form factor and taper in European larch of Polish provenances tested under conditions of the Beskid Sądecki mountain range (southern Poland), *J. For. Sci.*, **53**, 538-547 (2007).
- [33] Bilous, A. et al., Semi-empirical estimation of log taper using stem profile equations, *J. For. Sci.*, **67**, 318-327 (2021).
- [34] Myroniuk, V. et al., Taper equations for eight major forest tree species in flat land Ukraine, *Forestry*, **96**, 498–508 (2023).
- [35] Oderwald, R. G. & Rayamajhi, J. N., Biomass inventory with tree taper equations, *Bioresour. Technol.*, **36**, 235-239 (1991).
- [36] Egbewole, Z. T., Rotowa, O. J. & Omoake, P. O., Evaluation of fibre quality of *Bambusa vulgaris* (Bamboo) as a raw material for pulp and paper production, *PAT*, **11**, 188-202 (2015).
- [37] Lorenzo, R., Mimendi, L. & Li, H. Digital analysis of the geometric variability of bamboo poles in bending, *MATEC Web Conf.*, **275**, 01007_1-12 (2019).
- [38] Nie, Y., Wei, Y., Huang, L., Liu, Y. & Dong, F., Influence of slenderness ratio and sectional geometry on the axial compression behavior of original bamboo columns, *J. Wood Sci.*, **67**, 36_1-20 (2021).
- [39] Yen, T. M., Culm height development, biomass accumulation and carbon storage in an initial growth stage for a fast-growing moso bamboo (*Phyllostachy pubescens*). *Bot. Stud.* **57**, 10_1-9 (2016).
- [40] Kobayashi, K., Ohashi, M., Fujihara, M., Kitayama, K. & Onoda, Y., Rhizomes play significant roles in biomass accumulation, production and carbon turnover in a stand of the tall bamboo *Phyllostachys edulis*, *J. For. Res.*, **28**, 42-50 (2023).
- [41] Harvey, P. S., Jr, & Cain, T. M. N., Buckling of elastic columns with initial imperfections and load eccentricity, *Structures*, **23**, 660–664 (2020).
- [42] Madah, H., & Amir, O., Concurrent structural optimization of buckling-resistant trusses and their initial imperfections, *Int. J. Solids Struct.*, **162**, 244–258 (2019).
- [43] Klasson, A., Crocetti, R., & Hansson, E. F., Slender steel columns: How they are affected by imperfections and bracing stiffness, *Structures*, **8**, 35–43 (2016).

- [44] Niklas K. J. & Spatz H.-C., Growth and hydraulic (not mechanical) constraints govern the scaling of tree height and mass, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **101**, 15663_1-3 (2004).
- [45] Niklas K. J., Maximum plant height and the biophysical factors that limit it, *Tree Physiol.*, **27**, 433-440 (2007).
- [46] Vojackova, B. et. al., The effect of stem and root-plate defects on the tree response during static loading—Numerical analysis, *Urban For. Urban Green.* **59**, 127002_1-13 (2021).
- [47] Ghani, M. A., Stokes, A. & Fourcaud, T., The effect of root architecture and root loss through trenching on the anchorage of tropical urban trees (*Eugenia grandis* Wight), *Trees*, **23**, 197-209 (2009).
- [48] Kim, Y., Rahrdjo, H., Tsen-Tieng, D. L., Mechanical behavior of trees with structural defects under lateral load: A numerical modeling approach, *Urban For. Urban Green.* **59**, 126987_1-10 (2021).
- [49] Gardiner, B., Peltola, H., Kellomäki, S., Comparison of two models for predicting the critical wind speeds required to damage coniferous trees, *Ecol. Modell.*, **129**, 1–23 (2000).
- [50] Peltola, H., Kellomäki, S., Väisänen, H., Ikonen, V-P., A mechanistic model for assessing the risk of wind and snow damage to single trees and stands of Scots pine, Norway spruce, and birch, *Can. J. For. Res.*, **29**, 647-661 (1999).
- [51] Philippe, A., Benoit, C., Thierry, F., Development of an individual tree-based mechanical model to predict wind damage within forest stands, *For. Ecol. Manag.*, **203**, 101-121 (2004).
- [52] McCarthy, J. K., Hood, I. A., Brockerhoff, E. G., Carlson, C. A., Pawson, S. M., Forward, N., Walbert, K., Gardner, J. F., Predicting sapstain and degrade in fallen trees following storm damage in a *Pinus radiata* forest, *For. Ecol. Manag.*, **260**, 1456-1466 (2010).
- [53] Lundström, T., Jonas, T., Stöckli, V., Ammann, W., Anchorage of mature conifers: resistive turning moment, root–soil plate geometry and root growth orientation, *Tree Physiol.*, **27**, 1217–1227 (2007).
- [54] Szoradova, A., Praus, L., Kolarik, J., Evaluation of the root system resistance against failure of urban trees using principal component analysis, *Biosys. Eng.*, **115**, 244-249 (2013).
- [55] Jonsson, M. J. et. al., Root-soil rotation stiffness of Norway spruce (*Picea abies* (L.) Karst) growing on subalpine forested slopes, *Plant Soli.*, **285**, 267-277 (2006).

- [56] Neild, S. A., Wood, C. J., Estimating stem and root-anchorage flexibility in trees, *Tree Physiol.*, **19**, 141-151 (1999).
- [57] Izzuddin, B. A., Rotational spring analogy for buckling analysis, *J. Struct. Eng.*, **133**, 739-751 (2007).
- [58] Wang, C. Y., Effect of base fixity on buckling heavy column with end load, *J. Eng. Mech.*, **129**, 117-119 (2003).
- [59] Izzuddin, B. A., Simplified buckling analysis of skeletal structures, *P. I. Civil Eng-Str. B.*, **159**, 217-228 (2006).
- [60] Niklas, K. J., The allometry of safety factors for plant height, *Amer. J. Bot.*, **81**, 345-351 (1994).

第4章 水分による膨圧を活用した 張力構造のモデル化

前章では、「自身そのものの材質や形状がなす曲げ剛性」により体を支えている硬く重たい木本植物が、木化と肥大成長による曲げ剛性の発現と、これらによって引き起こされる「重量の増加」の相互関係を巧みに制御することにより、自重座屈に対する最大高さを飛躍的に高めていることを明らかにした。

また、主幹にみられる初期たわみ・初期傾斜をはじめとする初期不整や、根系―地盤の相互作用に起因する固定力の不完全性など、「自重座屈耐性の低下を招くと考えられる要素」を含む最大高さの定式化を行い、森林科学分野で蓄積されてきた実験・実測による測定データと比較・検証を行うことで、木本植物が自重座屈に対する十分な安全性を確保し、自身の身体スケールを実に巧妙に決定していることを明らかにした。さらに、その過程において、部材そのものが剛であるという前提、すなわち「曲げ剛性によって身体を支持すること」を前提に導かれた最大高さ式においては、木本植物において成り立つ「高さ―直径間の2/3乗則」が一貫して成立することが証明された。

しかしながら、この「高さ―直径間の2/3乗則」は、あくまで木本植物においてのみ成り立つものであり、木本植物とは対照的な力学特性を有する「軽く柔らかい草本植物」には、この法則が適合しないことが知られている[1]。その背景には、硬く重たい構造と軽く柔らかい構造における、それぞれの体を支持する仕組みの違いが関係していると考えられる。

木本植物の場合、その定義から推察される力学特性より、主として自身が有する曲げ剛性によって身体を支持しているものと予想される。これに対して、一般的に曲げ剛性が極めて小さな草本植物の場合には、内部水分による張力がもたらす「幾何剛性」により、主として自身の体を支えていると考えられる。なお、内部水分は木本植物・草本植物を問わず生命活動を維持するために内部に蓄えられているものであり、幾何剛性は木本植物においても存在すると予想されるが、その影響が曲げ剛性に比べて極めて小さいために、曲げ剛性のみを考えて導出された形状則に適合していると推測される。これに対して、草本植物の場合は幾何剛性の影響が卓越しているものと予想されるが、既往の植物学・生態学分野の研究では、硬く重たい構造に対して定式化されたスケーリング則[2]が草本植物にそのまま適用されるなど、両者の身体支持機構の違いを無視した研究がほとんどである[3-8]。

以上のことは、植物に対する力学理論の開発において、内部水分がもたらす幾何剛性に着目する重要性を示唆するものであり、その影響を力学理論に基づき解明することは、

内部水分を巧みに活用した張力構造の力学的合理性を明らかにするだけでなく、植物学・生態学的に混同されてきた「両者の身体支持機構の違い」を明確にすることに繋がると考えられる。さらに、曲げ剛性・幾何剛性の両者を力学的に正しく考慮した最大高さ式を導出することは、「植物全体の力学的なスケーリング則」の解明に資する知見の獲得に繋がるとともに、体を支持する仕組みに起因したスケーリング則の違いに基づく、木本・草本植物の明快な分類法則の開発を実現するものであると考えられる。

本章では、内部水分がもたらす膨圧による張力を活用した巧みな剛性発現の仕組みを力学理論の立場から解明し、張力を活用する構造形態の力学的合理性を明らかにするだけでなく、既往の植物学・生態学分野において混同されている「部材そのものが有する硬さ（曲げ剛性）」と「内部の水分がもたらす見かけの硬さ（幾何剛性）」の差異を明確化するために、第3章の自重座屈理論を一般化して「”内部水分による幾何剛性”と”部材そのものが有する曲げ剛性”の双方を正しく捉えた自重座屈理論」の開発を試みる。

4.1 「植物学上」の草本植物の定義

ここでは、植物学上の「草本植物」について、その一般的な定義を説明するとともに、その定義から推測される力学特性に着目し、木本植物との根本的な身体支持機構の違いを説明するとともに、力学理論の立場から草本植物の形態を紐解く意義について述べる。

4.1.1 「草本植物」とは何者か

茎横断面の模式図：双子葉植物の例

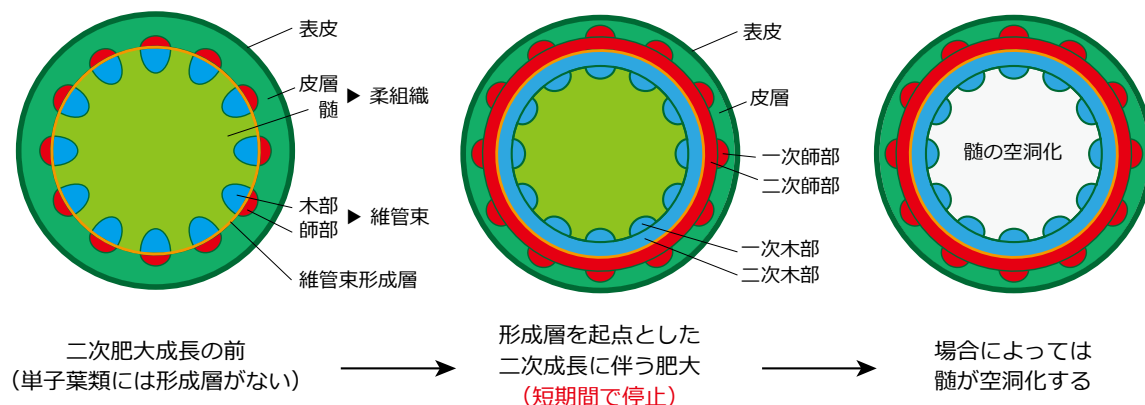


図-4.1.1 草本類（双子葉植物）における茎横断面図（[9]を参考に作成）

第3章において、木本植物とは「茎および根において肥大成長により多量の木部を形成し、その細胞壁は多く木化して強固になっている植物。地上部は多年性で、高木と低木に分かれる。」と定義された植物であると述べた。すなわち、草本植物の定義もまた「肥大成長」「木化」「多年生」という3つのキーワードが重要である。

岩波生物学辞典[10]では、草本植物とは「木部があまり発達しない草質または多肉質の茎をもち、地上部は多くは一年で枯れる植物体をいう。しかし地下茎が発達して二年生・多年生のものや常緑葉のものもある」のように定義された植物であると述べられている。この定義には、一見すると「肥大成長」の話が含まれていないように見えるが、草本・木本の定義における肥大成長とは「二次肥大成長」のことであり、これは多量な木部の形成によって径が太くなる成長を呼ぶ。すなわち「木部があまり発達しない」ということは、「先端部における細胞分裂による伸長成長が停止した以降（すなわち、一次肥大成長の終了後）において、明瞭な二次肥大成長が見られない」という意味である。このことから、上記の草本植物の定義において肥大成長という単語は含まれていないものの、この観点は実質的に関係していることが分かる。

図-4.1.1には、双子葉植物のうち、草本類における茎横断面の模式図を示す。双子葉植物の場合であれば、円周方向に維管束が整然と並んでおり、導管を束ねる木部と師管を束ねる師部の境界に、維管束形成層が位置している場合がほとんどである（単子葉植物は、木部と師部を束ねる維管束が組織全体に点在しており、さらに維管束は形成層をそもそも欠いた構造となっている）。木本植物の場合であれば、この形成層から円周方向に二次木部・二次師部を形成し、径が明瞭に太くなる二次肥大成長を示す。これに対

して、草本植物には形成層を有する種はほとんどなく、仮に形成層を有している種であっても、明瞭な二次成長はほとんど認められない。そのため、最終的に自身の体のほとんどは、一次肥大成長の際に生成された材質から構成されることとなる。

これに加えて、草本植物では木化による木部の形成がないため、その材質そのものの弾性係数が大きくなることはない。これに加えて、草本植物は短期間の二次成長の後、髄が空洞化するケースも存在する。木本植物の場合であれば、密実な構造を維持しつつ、多量の木部を形成するとともに、二次肥大成長に伴う径の増加が見られるため、材質および形状の両面において、曲げ剛性を増加させることが可能である。これらを踏まえると、二次肥大成長および形成層の木化が生じない草本植物の曲げ剛性は、木本植物に比べて極めて小さいことが予想され、これは実際の測定によっても証明されている事実である[11-15]。

そのほか、多年生という観点からみると、草本植物は地上部が越冬せず、外気よりも温度低下が小さな地中に種子を残し、地下部において厳しい冬季の寒さを越えるものが大多数を占める。例外的に越冬する草本植物は、細胞壁内部の溶質濃度を高めることによって凝固点を下げる「耐凍性」の獲得や、細胞膜の組成を変化させ、水分の透過性を向上させることにより、凍結を感知した際に細胞内部から速やかに脱水を行い、細胞壁の内部から間隙に凍結の発生位置を移す「細胞外凍結」により、厳しい低温の環境下を乗り切ることを試みている[16]。

これらのアプローチは、いずれも水分の凍結膨張作用に伴う細胞の損傷を避けるものである。このことは、木化によって既に細胞レベルでの生命活動を停止した「硬い木質部」によって身体を支えている木本植物とは異なり、草本植物は細胞壁内の生理学的な作用によって、初めて地上茎の剛性を維持できることを示唆するものである。

4.1.2 草本植物の形態を力学的に紐解く意義

第3章でも述べたように、木本植物・草本植物という植物の定義は、現段階でいくつかの問題や曖昧さを含んでおり、明快にこれらを分類する手法は確立されていない。しかしながら、木本植物と同様に、力学的な観点から植物の形態をとらえると、草本植物の定義もまた、実に単純に力学の言葉で表現することができる。すなわち、草本植物とは「木化および肥大成長による曲げ剛性の向上ではなく、水分に起因する細胞壁内部の生理学的な作用によって自身の体を支持している植物」である。

木化および肥大成長は、ともに植物の曲げ剛性を増加させることができる反面、構造物の体積と密度、すなわち「重量」を増加させてしまうデメリットがある。しかしながら、草本植物は木化や肥大成長による剛性の向上が生じない。これは、曲げ剛性が成長過程で明瞭に向上することはないものの、自重座屈に対する最大高さを低下させる「重量の増加」という問題を回避することができる、という意味である。そして、耐寒性を獲得するためのアプローチからも推察できる、細胞壁内部における生理学的作用の重要性から、曲げ剛性の獲得とは本質的に異なる「他のアプローチ」により、草本植物が自身の体を支えている可能性が考えられる。しかしながら、既往の研究ではこの点に関する議論が十分でなく、草本植物も木本植物と同様に曲げ剛性によって身体を支持しているものとして取り扱われている場合が多い[3-8,15]。

以上を踏まえ、木本植物とは異なると考えられる草本植物の身体支持の仕組みについて、これを力学理論に基づき明らかにすることは、単に曲げ剛性の小さな「細く柔らかい部材」を用いた構造設計に資する知見が得られるだけでなく、既往の植物学的研究では十分に考慮できていない「体を支持する仕組みの違い」を明瞭化することに繋がると考えられる。

4.2 草本植物の膨圧による張力を活用した身体支持機構

前節で述べたように、草本植物は木本植物と比べると径が極めて細く、かつ弾性係数も小さな値に留まっており、さらにその構造はほとんどが薄肉の中空円筒である[11-15,17]。このような特性を有する草本植物は、「部材そのものが有する曲げ剛性」によって自身の体を支えることはできず、他のアプローチによって身体を支えていると予想される。本節では、実現象の観測や既往の研究における調査報告に基づき、草本植物の身体支持機構に大きく関わっていると考えられる「膨圧による張力」について説明する。

4.2.1 内部水分の流出に伴うたわみの発生

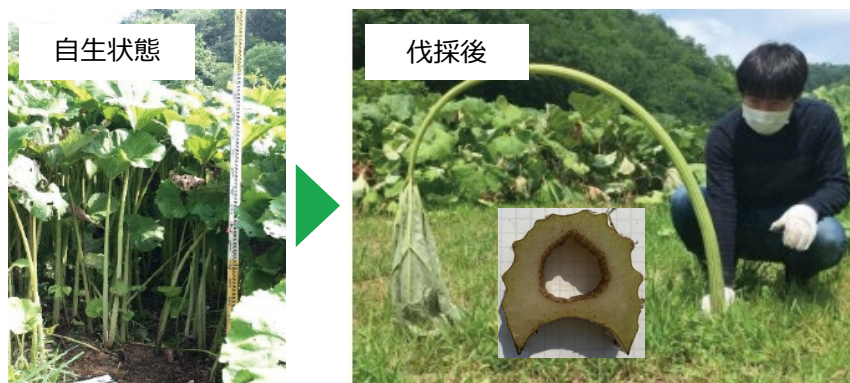


図-4.2.1 北海道足寄町に自生するラワンブキの自生状態と伐採後の様子

図-4.2.1 は、北海道の足寄町に群生する、「ラワンブキ」という種類のフキにおける、自生状態と伐採後の様子を比較した写真である。ラワンブキは、草本植物の中でもとりわけ高く成長する特徴をもち、その高さはおよそ2～3m程度にまで達する。これは、草本植物の中では極めて珍しく、人間の一般的な身長を超えるほどの大きさまで成長するものであり、日本一大きなフキとして知られている品種である[18]。

ラワンブキは、竹のように茎が地下部で繋がった「地下茎」と呼ばれる構造を有し、地上部は越冬せず、地下部で冬を越す多年生の植物である。ラワンブキは植物学的には草本植物として分類されるものであるが、写真に示したように、草本植物の中でも特に高く成長する種であり、自生状態では鉛直方向に体をピンと張った状態を維持しているが、伐採によってひとたび水分が流出すると、自身の重さにより途端に大きな変形が生じ、最終的に写真右のようなたわみ形状を示す。このことは、ラワンブキは自身が有する材質・形状的な硬さがなす「曲げ剛性」ではなく、内部水分に起因する何らかの力学的作用によって自身の身体を支持していることを示唆するものである。

図-4.2.2 には、植物学的研究においてサンプルとしてしばしば扱われる、藻類の一種である「シャジクモ」の写真を示した。これは、乾燥により萎れている状態に水分を付加した際のたわみ形状の変化を観察したものである。

図-4.2.2 (a)が乾燥状態の様子であり、自重を支えることができず、鉛直方向に大きくたわんでいる状態を示している。これに対して、水分を付加した直後である図-4.2.2 (b)

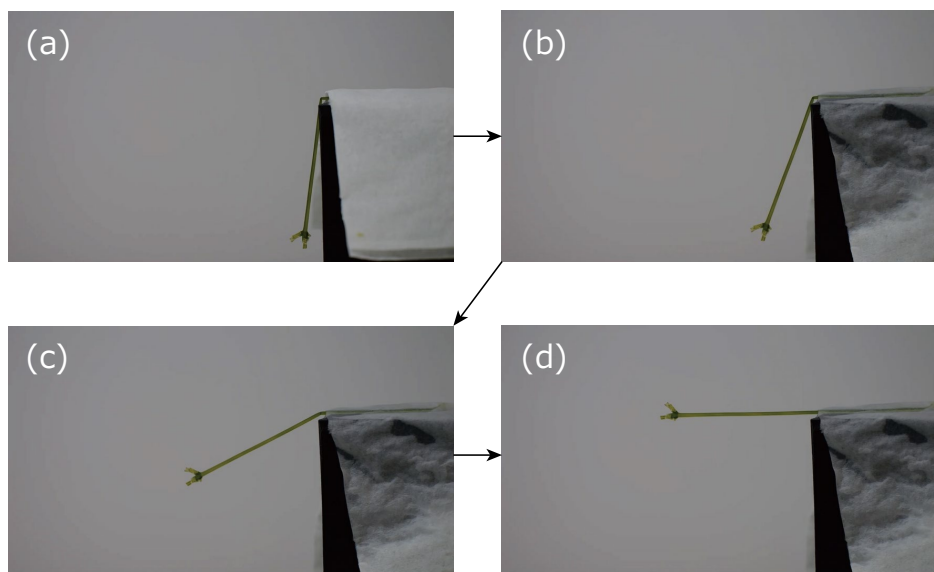


図-4.2.2 シャジクモのたわみ形状に水分が与える影響（秋田県立大学 津川暁助教提供）

においては，乾燥状態に比べてたわみが抑制されはじめていることが確認できる．そして，時間の経過に伴ってさらにたわみが減少し，最終的には図-4.2.2 (d)のように，ほぼ地面に対して水平な状態まで回復する．このような水分の負荷によるたわみの抑制現象から，内部水分と身体支持メカニズムの深い関連性がうかがえる．

また，水分によってたわみが抑制されていく過程において，常に直線的なたわみ形状を示していることが特徴的である．この様相は，曲げ剛性によって変形に抵抗する構造・部材には見られないものである．例えば，曲げ剛性が卓越する場合と，幾何剛性が卓越する場合の梁のたわみ w に関する支配方程式は，それぞれ次のように与えられる．

$$\text{曲げ剛性が卓越する場合：} EI \frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \quad (4.2.1)$$

$$\text{幾何剛性が卓越する場合：} T \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (4.2.2)$$

ここで， EI は梁の曲げ剛性， T は梁に作用する軸方向張力である．なお，式(4.2.1)および式(4.2.2)は，いずれも自重としての分布荷重が無視できるほどの大きさであると仮定した場合のものである．この式から，たわみ曲線を求めるために両辺に対して x に関する積分を行うと分かるように，曲げ剛性が卓越する場合にはたわみ形状は三次曲線，幾何剛性が卓越する場合にはたわみ形状は直線（一次式）となる．このことは，シャジクモにおいて幾何剛性が卓越していることを理論的に裏付けるものであり，かつ曲げ剛性と幾何剛性は質的に全く異なる剛性であるということ，そして両者の違いを明確化することの重要性を示している．

また，内部水分の状態が草本植物の身体支持に極めて大きく寄与していることは，草本植物と木本植物を分ける「地上部は一年生か多年生か」という生物学的な観点からみても，およそ推測可能なものである．植物の細胞壁内部は，溶質の作用により，水分の

凝固点が 0°C 未満に保たれている。しかしながら、植物体の温度そのものは外気温とほぼ等しい状態にあり、冬季の氷点下によっては凍結の危険にさらされる。内部の水分が凍結されてしまうと、凍結に伴う体積膨張作用により、細胞壁の組織が内部から破壊されることとなる。耐凍性を有する植物は、この破壊を避けるために、外気の低温化に対する適応として、糖などの溶質を細胞壁内部に冬季に向けて少しずつ蓄え、水分の凍結温度を低下させることで凍結の回避を試みる。他にも、細胞膜の組成そのものを変化させることにより、細胞膜における水分の透過性を高め、凍結を感知すると速やかに多くの水分を外部へと流出させることが可能な状態を整えておくことで、細胞壁内部の凍結を回避しているアプローチをとる植物も存在する[16]。このような性質を有さない草本植物は、秋～冬にかけての落葉や、地上部の生命活動を維持することができず枯れてしまう、といった状況に陥ることとなる。

これらのことと、内部水分が流出したことによる大きなたわみの観測や、水分の供給に伴う変形状態からの著しい回復現象を総合的に考えると、草本植物の自身の体を支える仕組みには、「細胞壁組織の健全性」と「内部水分」の二つの要素が大きく関係していると予想される。

4.2.2 中空円筒モデルにおける膨圧と軸方向張力の関係

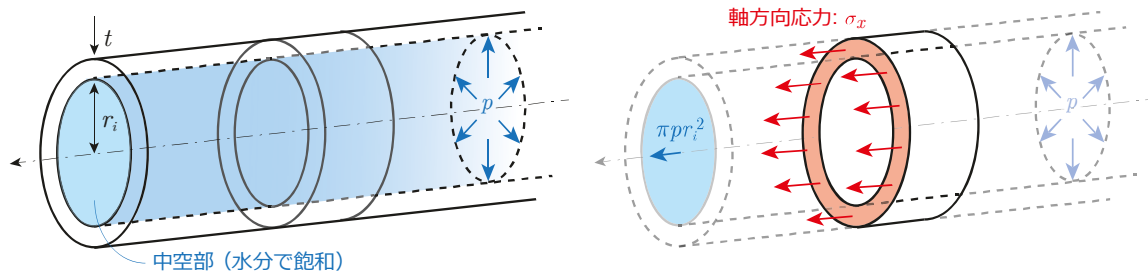


図-4.2.2 中空円筒モデルにおける膨圧による軸方向張力の発現

ここでは、内部水分によって軸方向張力がもたらされるメカニズムを説明する。いま、図-4.2.2 に示すような内部が水で飽和した中空円筒モデルを考える。

ここで「内部から外部への水分の流出量」を「内部に吸収される水分の流入量」が上回るとき、内側・外側の圧力を平衡させるべく、「膨圧」と呼ばれる正の圧力が生じる[14, 19-21]。なお、水分の流出量が流入量を上回ってしまう場合には、この膨圧が消失し、その形状を維持することが出来なくなり、やがて萎れに至る。

ここで重要なことは、「内部水分による膨圧がもたらす剛性と材質そのものの剛性は、互いに全く別の概念である」ということである。もし仮に、内部の水分が外壁の弾性を著しく高める、すなわち材質そのものを変えるほどの影響があるとすれば、その自重によるたわみ曲線の形状は曲線形で与えられると考えられる。しかしながら、先に示したシャジクモの例では、たわみ状態からの回復過程において、直線的な形状を保持したまま、ほぼ水平な状態まで回復することが確認されている。このことは、膨圧が外壁の弾性率に与える影響はごくわずかなものであり、他に何らかの支配的な作用および現象が存在することを示唆するものである。

その作用こそが「膨圧により発現する軸方向張力」である。図のように内径 r_i 、厚さ t を持つ薄肉円筒において、膨圧 p が外壁に張力ストレスを与えることで、軸方向には膨圧 p が断面積 πr_i^2 の外壁を押す力が生じるから、結果として張力 $T = \pi p r_i^2$ [N]がもたらされる。この内部水分による膨圧がもたらす軸方向張力が、“材質や形状による固有の硬さである曲げ剛性”とは根本的に異なる、“水分による疑似的な硬さである幾何剛性”が発現させると考えられる。なお、内部水分による幾何剛性は、木本・草本を問わず発現するものであることに留意する必要がある。

4.3 膨圧による軸方向張力に起因した「幾何剛性」の発現

前節において、草本植物では、材質や形状による固有の硬さである曲げ剛性とは根本的に異なる、水分による疑似的な硬さである「幾何剛性」が卓越した状態にあると予想される根拠を述べた。ここでは、この「幾何剛性」について、これを活用した身近な構造の事例をいくつか取り挙げるとともに、その概要を説明する。

4.3.1 幾何剛性の存在と従前の植物学的研究における問題点

幾何剛性 (Geometric rigidity) とは、「面内方向の応力によって発現する面外方向の剛性」である[23-27]。ある部材の面内方向に引張応力が生じると、部材の幾何剛性は向上し、より強い面外荷重に抵抗することが可能となる。これに対して、面内方向に圧縮応力が生じる場合には、部材の幾何剛性は低下する。部材の曲げ剛性の影響が大きい場合には、この幾何剛性の影響は無視できる場合が多く、両者のどちらが支配的かによって、その力学的な挙動は全く異なる。

そして、幾何剛性は、いわゆる「梁や板の曲げ剛性」とは、根本的に全く異なる剛性である。曲げ剛性は部材の弾性係数や断面二次モーメントといった「部材や材質がもつ固有の特性」によって決まるものの、幾何剛性はあくまで「外力に起因して発生する応力」に起因するものであり、両者はそれぞれ「面外方向の変形に対する剛性」という意味では類似した概念であるが、「何によって生じる剛性か」という点で完全に異なる。しかしながら、従前の植物学的な研究においては、これらの影響は完全に混同されている。例えば、草本植物の力学特性を調査するために、細胞壁の弾性率をその力学特性から測定するために、膨圧が生じているサンプルにおいて三点曲げ試験を行い、その最大たわみ w_{max} から、次式を用いて弾性係数が算定されている[15,28]。

$$E = \frac{PL^3}{48Iw_{max}} \quad (4.3.1)$$

ここに、 L は両端の支点間の距離、 I はサンプルの断面二次モーメントである。この式は、スパン中央に集中荷重 P のみが載荷された場合の式であり、膨圧によって発生する軸方向張力 T の影響は全く取り入れられていない。すなわち、上式から算定される弾性係数には、この幾何剛性の影響が混在していることとなる。

また、大変形を考慮した片持ち状態における座屈特性を実験的アプローチによって測定し、その結果から次式を用いて弾性係数を算定する研究も見られる[7]。

$$E = \frac{P_c L^2}{K \left(\sin \frac{\theta}{2} \right) I^2} \quad (4.3.2)$$

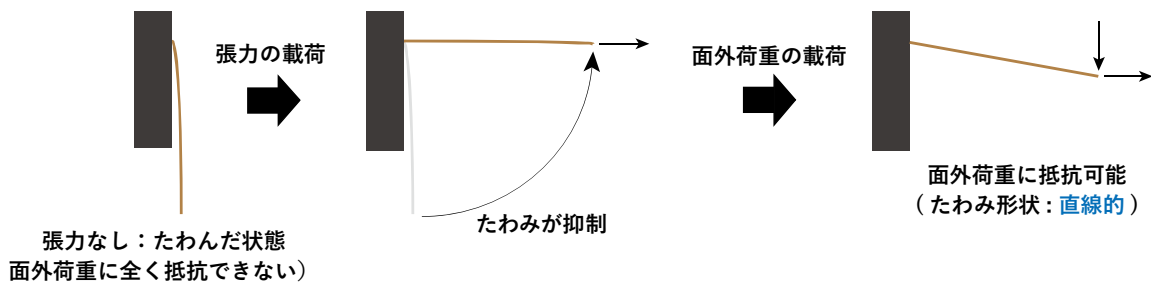
ここに、 P_c は座屈荷重、 L は試験体の長さ、 $K(f(\theta))$ はたわみ角に関する第一種の完全

楕円積分であり、 I は断面二次モーメントである。この式もまた膨圧によって発生する軸方向張力 T の影響は全く取り入れられておらず、全ての影響を弾性係数 E に（曲げ剛性に）考慮するような取り扱いとしている。

このような事例は、植物学的な研究においては数多く存在しており、ほとんどの場合において、膨圧は細胞壁の弾性率を変化させる影響を与えるものとしてのみ取り扱われている。しかしながら、先にも述べたように、膨圧に起因して生じる張力、すなわち長手方向に生じる応力に起因する剛性は、材料固有の弾性係数（弾性率）に由来する曲げ剛性ではなく、幾何剛性の方である。すなわち、この幾何剛性と曲げ剛性の差異を理解し、これを力学的に正しく考慮することは、従前の植物学的研究において混同されてきた両者の剛性の違いを明確化し、独立した研究体系では解明できない植物形態の智慧を工学の言葉で取り込むことを可能とするものである。

(1) 幾何剛性の例：一次元的な構造における静的問題

・糸の場合（曲げ剛性が小さい）



・針金の場合（曲げ剛性が大きい）



図-4.3.1 幾何剛性の例：糸と針金の場合

図-4.3.1 には、一端が完全に固定された、太さおよび長さが全く等しい糸と針金の図を示す。その太さは長さに対してどちらも極めて小さいと仮定し、一次元体として取り扱うことができるものとする。

まず、上に示した糸の場合、自身が有する曲げ剛性は極めて小さいため、張力を載荷しない状態では、面外荷重である自重を支えることができず、図のように大きくたわんだ状態を示す。しかしながら、水平方向に張力を与えることにより、大きくたわみが抑制される。この状態において、自由端に鉛直下向きの集中荷重を載荷すると、水平方向に作用させた張力の大きさに応じて、面外方向の変形に対して抵抗することが可能となる。このとき、固定端から自由端にかけて、そのたわみ形状は直線的な形状を示す。これが「幾何剛性が卓越した状態」である。



図-4.3.2 膨圧による剛性発現の例：風船 [29,30]

これに対して、下に示した針金の場合には、張力が作用していない場合においても、自身が有する曲げ剛性によって、ほとんどたわみを発生させることなく、自身の体を支えることが可能である。このような部材の先端部において、面外方向に集中荷重を載荷すると、梁理論より導かれるたわみの式からも確認することができるように、そのたわみ形状は三次曲線を示す。これが「曲げ剛性が卓越した状態」である。

図-4.3.2 には、空気を入れる前の風船と、空気を入れた後の風船の写真を示す。前述の例において、空気を入れていない風船は、張力が作用していない状態の糸に対応しており、この状態では面外方向の作用に抵抗することはできない。しかしながら、空気の注入により軸方向張力が生じることによって、体をピンと張った状態に保つことが可能となる。この現象は、圧力が水に由来するか空気に由来するかという点においては異なるものの、シャジクモにおいて見られる身体支持のメカニズムと極めて類似していると考えられる。なお、ここで留意すべき点は、空気を注入する前後において、風船そのものの弾性率（材料固有の力学特性）は全く変化していない、ということである。

以上のように、曲げ剛性と幾何剛性のどちらが卓越した状態にあるかによって、その力学挙動は全く異なるものとなる。

(2) 幾何剛性の例：二次元的な構造における静的問題



図-4.3.3 東京ドームの屋根（写真左から右にかけて、空気を送り込んでいる） [31]

次に、空気の圧力差を上手く活用して幾何剛性を発現させた二次元的な構造の例を取り上げる。図-4.3.3 には、東京ドームの屋根の写真を示した。この屋根膜は、フッ素樹脂によってコーティングされたガラス繊維の膜材が使用されている。これは、28本のケーブルによって支持されており、その総重量は400 tに達する。この膜は二重の構造であるものの、その厚さは内膜が0.35 mm、外膜が0.8 mmと極めて薄い[31]。

上記の特性から、屋根膜を取り付けた段階においては自重を支え切れず、写真左に示すように下に凸の曲面形状を示している。しかしながら、屋内側から空気を注入することにより、徐々に曲面の性状は変化していき、充填後は上に凸の曲面形状を示す。

これは、屋外と屋内の「気圧差」に起因しており、屋内から送り出す空気により、屋内における気圧を屋外よりも 0.3 %ほど高い状態に保つことで、上に凸の膨らんだ状態を維持することに成功している。このような圧力差に起因する膨張作用は、植物細胞における細胞内外の浸透圧の差に起因する膨圧の作用と、極めて類似した現象である。

(3) 幾何剛性の例：一次元的な構造における動的問題

次に、静的作用に対する二つの剛性の問題だけでなく、動的作用に対する曲げ剛性および幾何剛性の影響について述べる。

図-4.3.4 には、この問題の例としてエレキギターのイラストを示した。エレキギターは、「フレット」と呼ばれる部分の近傍を片方の手で抑え、もう一方の手で弦を弾くことによって演奏する楽器である。一般的なエレキギターの弦は 6 本であり、奏者から見て下から（図-4.3.4 では上から）1 弦, 2 弦, ..., 6 弦と呼び、数字の大小は弦の太さに対応しており、数字が大きくなるにつれて弦は太くなる。

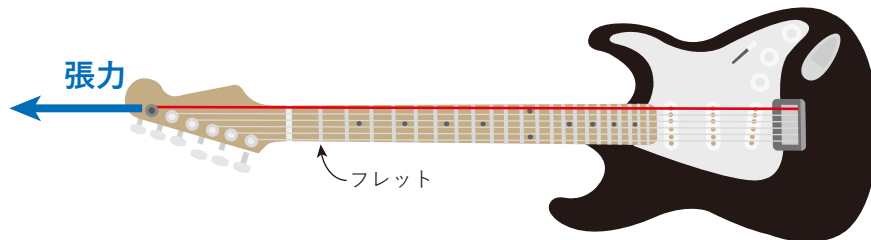


図-4.3.4 幾何剛性の例：エレキギター [32]

エレキギターをはじめとする弦楽器における音階の変動は、弦の動的な特性、すなわち「弦の固有振動数」という物理量から理論的に説明できる概念である。

弦の固有振動数は「弦の長さ」「弦の太さ」「弦を張る強さ」の計三つの要素によって支配される¹⁰。すなわち、弦を張る強さと抑えるフレットの位置が完全に同じであった場合においても、弾く弦の太さが異なると全く異なる音階を発する、ということである。これが「曲げ剛性」に起因する音階の違いである。

これに対して、同一のフレットにおいて特定の弦を抑え、これを弾いて音を鳴らした場合においても、「弦の張る強さ」が異なると、その音階はまた異なるものとなる。これが「幾何剛性」に起因する音階の違いである。

弦そのものが有する曲げ剛性は、材料固有の弾性係数に依存するパラメータであるため、弦の材質を変えると、同様の条件で同一の音階が奏でられない場合が存在する。また、室温・外気温によって弦の長さに変化が生じ、その結果として弦のゆるみが発生する場合もある。このような問題に対応するために、いかなる環境、いかなる弦でも同様の音階で楽曲を奏でられるよう、それぞれの弦で基準とする音階に音を揃える「チューニング」と呼ばれる操作が演奏前に必ず行われる。ギターの場合、フレットに触らない状態であらかじめ定められた音階を発するように、それぞれの弦に連動したペグ（写真左部のネジ）を回して張力を調節し、チューニングを行う。すなわち、弦楽器によって

¹⁰ 厳密には、気温（室温）によっても音階の変動が生じるが、ここでは弦の力学特性のみに着目する。

幅広い音階が奏でられることと、どのような環境下でも同様の音階を発生させることができる秘密には、幾何剛性の活用が大きく関係しているということである。

(4) 幾何剛性の例：二次元的な構造における動的問題

次に、動的作用に対する幾何剛性の影響として、二次元的な構造である膜を用いた「ティンパニ」について紹介する(図-4.3.5)。これもギターと同様に楽器の一つであるが、これはギターとは異なり「打楽器」に分類されるものである。



図-4.3.5 幾何剛性の例：ティンパニ [33]

ティンパニは、「ヘッド」と呼ばれる膜の部分と、膜の下を覆う「ケトル」という部材から主として構成される楽器である。このヘッドおよびケトルの口径に応じて奏でることが可能な音階の範囲が変化し、これが大きいほど低い音階、これが小さいほど高い音階に対応する。すなわち、写真における左側のものは低い音に対応しており、右側に行くにつれて高い音に対応したものとなっている。

また、ティンパニは、写真下部に示されているペダルを踏みこむことにより、膜を張る強さを変化させることが可能である。奥に踏み込むと膜が強く張られ、固有振動数が大きくなり、より高い音階を奏でることができる。反対に手前側に踏み込むと膜が緩んで固有振動数は低下し、より低い音階を奏でることができる。よって、一つにつき一音しか奏でられないということではなく、複数の音階を奏でることが可能である。ティンパニのチューニングには、面の側部に取り付けられているチューニングインジケーターという部分が用いられ、既定の音が出るような踏み込みの深さ（浅さ）に応じて、それぞれ印となるパーツを調節することで適宜行われる。すなわち、エレキギターをはじめとする弦楽器と同様に、ティンパニもまた「幾何剛性」を巧みに活用した構造により、人々の心を動かす豊かな演奏を可能としている楽器である。

以上のように、幾何剛性は実に幅広い分野で人間が活用している「部材そのものがもつ硬さとは異なる硬さ」である。硬くもなく太くもない草本植物の場合には、シャジクモやラワンブキの力学挙動からも推測できるように、内部水分が起因して幾何剛性が発現している可能性が考えられる。次節ではその影響を解明する起点として、幾何剛性が水平方向に伸長した片持ち梁の曲げ特性に与える影響を理論的に解明する。

4.4 軸方向張力がたわみ抑制効果に与える影響

前節においてその詳細を述べた「幾何剛性」を踏まえ、本節では内部水分がもたらす張力による巧みな剛性制御の仕組みを明らかにするために、膨圧により生じる軸方向張力に起因するたわみの抑制メカニズムを解明する。部材そのものの材質や形状がなす曲げ剛性とは本質的に異なる「膨圧による張力がもたらす幾何剛性」の影響に焦点を当てるべく、本節では自重と軸方向張力が作用する水平な片持ち梁を考える。このモデルにおいて、力のつり合いよりたわみに関する四階の支配微分方程式を導出し、その一般解を求める。この一般解に境界条件を適用することにより、自重と張力を考慮した片持ち梁におけるたわみの式を導出する。これを自重のみが作用する片持ち梁のたわみの式と比較・考察することにより、軸方向張力がたわみ抑制にどのように寄与するのかを明らかにする。

4.4.1 計算モデル

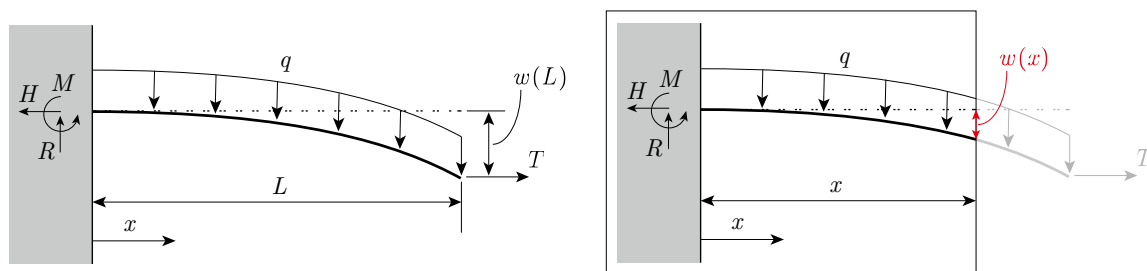


図-4.4.1 計算モデル

計算モデルは、図-4.4.1に示すような自重 q [N/m]、膨圧による張力 T [N]を考慮した片持ち梁である。座標系は固定端側を $x = 0$ 、固定端側を $x = L$ とし、曲げ剛性 EI は軸方向に一定であるものとする。

なお、その構造については、図-4.2.2に示したような内径 r_i 、厚さ t の薄肉円筒構造を仮定し、内部水分がもたらす膨圧 p [N/m²]は、最終的に厚さ t の表皮のみに作用するものとする。ここで、自由端側が薄い膜で覆われているものとすれば、張力 T と膨圧 p [N/m²]の具体的な関係は、4.2.2節でも示したように、膨圧 p とこれが作用する面積 πr_i^2 の積によって与えられる「膨圧の合力」と張力 T が釣り合うことから、 $T = \pi p r_i^2$ として与えられる。なお、本節の定式化では、微小変形の仮定に基づき、張力の方向は、梁の曲げに追従して作用方向が変化することではなく、常に水平方向に作用するものと仮定する。

4.4.2 支配方程式の導出

ここで、図-4.4.1の左に示すように、自重によってたわみが生じた片持ち梁に張力が作用するとき、固定端の水平反力 H 、鉛直反力 R 、反力モーメント M は、任意点における力のつり合いから次のように得られる。

$$H = T \quad (4.4.1)$$

$$R = qL \quad (4.4.2)$$

$$M = \frac{qL^2}{2} - Tw(L) \quad (4.4.3)$$

これらを用いて、固定端から位置 x において仮想的に部材を切断し、その面における力のつり合いから、固定端を原点とする曲げモーメント $M(x)$ は、次のようになる。

$$M(x) = -\frac{q}{2}(L-x)^2 + T(w(L) - w(x)) \quad (4.4.4)$$

式(4.4.4)の曲げモーメントを弾性曲線方程式に代入すると、次式が得られる。

$$-EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{q}{2}(L-x)^2 + T(w(L) - w(x)) \quad (4.4.5)$$

上式の x に関する二階微分を求めることにより、次の最終的な支配方程式が得られる。

$$\frac{d^4 w}{dx^4} - \kappa^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{q\kappa^2}{T} \quad (4.4.6)$$

ここに、式中のパラメータ κ は次式で与えられる。

$$\kappa = \sqrt{\frac{T}{EI}} \quad (4.4.7)$$

4.4.3 曲げ剛性と幾何剛性の双方を含むたわみ曲線の導出

いま、式(4.4.6)の解を Mathematica により求めると、次式が得られる。

$$w(x) = \frac{e^{\kappa x}}{\kappa^2} c_1 + \frac{e^{-\kappa x}}{\kappa^2} c_2 + c_3 x + c_4 - \frac{qx^2}{2T} \quad (4.4.8)$$

ここに、 $c_1, c_2, \dots, c_4$ は任意定数を表す。ここで、自由端側のたわみ $w(L)$ を式中に考慮すべく、固定端($x = 0$)における次の四つの境界条件を用いる。

$$\begin{cases} \text{at } x = 0, & w = 0 \\ \text{at } x = 0, & \frac{dw}{dx} = 0 \\ \text{at } x = 0, & \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{\kappa^2}{T} \left(-\frac{qL}{2} + Tw(L) \right) \\ \text{at } x = 0, & \frac{d^3w}{dx^3} = -\frac{\kappa^2}{T} qL \end{cases} \quad (4.4.9)$$

以上を用いて任意定数を定めると、最終的なたわみ $w(x)$ の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} w_T(x) = \frac{qe^{-\kappa x}}{2\kappa^2 T(e^{2\kappa L} + 1)} & (2e^{\kappa L} - 4e^{\kappa L + \kappa x} + 2e^{\kappa L + 2\kappa x} + 2\kappa L e^{2\kappa L} - 2\kappa L e^{2\kappa x} \\ & + \kappa e^{2\kappa L + \kappa x} (2\kappa L x - 2L - \kappa x^2) - \kappa e^{\kappa x} (\kappa x^2 - 2\kappa L x - 2L)) \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

ここに、下添え字の T は、張力を考慮したたわみの式であることを区別するためのものである。なお、ここで上式において $x = L$ を代入することにより、次の最大たわみの式が得られる。

$$w_{T(\text{Max})} = \frac{q}{\kappa^2 T} \left(1 + \frac{\kappa^2 L^2}{2} - \text{sech } \kappa L - \kappa L \tanh \kappa L \right) \quad (4.4.11)$$

4.4.4 張力によるたわみ抑制効果の評価

いま、膨圧による張力の影響を評価するために、自重のみが作用する梁の最大たわみとの比較を行う。まず、自重のみが作用する梁の最大たわみ w_S は次式で与えられる[22]。

$$w_S = \frac{qL^4}{8EI} \quad (4.4.12)$$

ここで、式(4.4.12)を式(4.4.7)のパラメータ κ を用いて書くと、次のようになる。

$$w_S = \frac{\kappa^2 qL^4}{8T} \quad (4.4.13)$$

いま、式(4.4.11)の張力を考慮した最大たわみ式を、張力を考慮しない場合のたわみ式で除すことにより、次式が得られる。

$$R_w(x) = \frac{4e^{-\kappa x}}{\kappa^4 L^4 (e^{2\kappa L} + 1)} (2e^{\kappa L} - 4e^{\kappa L + \kappa x} + 2e^{\kappa L + 2\kappa x} + 2\kappa L e^{2\kappa L} - 2\kappa L e^{2\kappa x} + \kappa e^{2\kappa L + \kappa x} (2\kappa L x - 2L - \kappa x^2) - \kappa e^{\kappa x} (\kappa x^2 - 2\kappa L x - 2L)) \quad (4.4.14)$$

ここで、次式で与えられる相対座標 R_x を導入する.

$$R_x = \frac{x}{L} \quad (4.4.15)$$

式(4.4.15)を式(4.4.14)に代入することにより、相対座標における相対たわみ $R_w(R_x)$ の式が得られる.

$$R_w(R_x) = \frac{4e^{-\kappa L R_x}}{\kappa^4 L^4 (e^{2\kappa L} + 1)} (2e^{\kappa L} - 4e^{\kappa L(1+R_x)} + 2e^{\kappa L(1+2R_x)} + 2\kappa L e^{2\kappa L} - 2\kappa L e^{2\kappa L R_x} + e^{\kappa L(2+R_x)} (2\kappa^2 L^2 R_x - 2\kappa L - \kappa^2 L^2 R_x^2) - e^{\kappa L R_x} (\kappa^2 L^2 R_x^2 - 2\kappa^2 L^2 R_x - 2\kappa L)) \quad (4.4.16)$$

ここで、以下に示す無次元パラメータ R_s を導入する.

$$R_s = \kappa L = \sqrt{\frac{T}{EI}} L \quad (4.4.17)$$

上式は、曲げ剛性に対する幾何剛性の比を示す無次元パラメータであり、下添え字は剛性（ここでは stiffness）の頭文字に由来するものである．曲げ剛性に対して幾何剛性の影響が大きいほど、このパラメータ R_s は大きくなる．式(4.4.17)の無次元パラメータ R_s を式(4.4.16)に用いることにより、最終的な相対たわみの式が得られる．

$$R_w(R_x) = \frac{4e^{-R_s R_x}}{R_s^4 (e^{2R_s} + 1)} (2e^{R_s} - 4e^{R_s(1+R_x)} + 2e^{R_s(1+2R_x)} + 2R_s e^{2R_s} - 2R_s e^{2R_s R_x} + e^{R_s(2+R_x)} (2R_s^2 R_x - 2R_s - R_s^2 R_x^2) - e^{R_s R_x} (R_s^2 R_x^2 - 2R_s^2 R_x - 2R_s)) \quad (4.4.18)$$

ここで、両者の最大たわみの比を示す $R_{w(\text{Max})}$ は、式(4.4.16)において $R_x = 1$ と置くことにより、次のように得られる．

$$R_{w(\text{Max})} = \frac{4}{R_s^4} (2 + R_s^2 - 2 \operatorname{sech} R_s - 2R_s \tanh R_s) \quad (4.4.19)$$

式(4.4.19)の最大たわみ比 $R_{w(\text{Max})}$ を用いることにより、最大たわみの相対的な減少率 D_R [%]が次のように定義される。

$$D_R = (1 - R_{w(\text{Max})}) \times 100 \quad (4.4.20)$$

式(4.4.20)のたわみ減少率 $D_R = 20\%$ であるとき、「張力込みの最大たわみ」が「自重のみの最大たわみ」に対して20%小さくなっていることを表し、両者の比が $R_w = 0.8$ であることを意味する。

4.4.5 数値解法によるたわみ抑制率 D_R とパラメータ R_s の関係の導出

式(4.4.19)および(4.4.20)は、無次元パラメータ R_s とたわみ減少率 D_R の関係を表す式である。この式の応用性を確保するためには、 R_s について陽に表せることが望ましい。しかしながら、これを R_s について代数的に解くことは極めて困難である。さらに、張力がない自重のみの場合を考えると、無次元パラメータ R_s は必然的にゼロとなり、そのときのたわみ減少率 D_R は、理論的にはゼロとなるべきである。しかし、 $R_s = 0$ の場合には、式(4.4.18)が不定となり、有意な D_R を求めることができない。これは、本理論が張力の存在を前提に定式化されているためである。

そこで、本研究では式(4.4.20)を満足する R_s をセカント法を用いて離散的に求め、それを $R_s = 0$ において $D_R = 0$ を満たす回帰モデルを用いて補間することにより、容易に利用可能なたわみ減少率 D_R とパラメータ R_s の関係式を導出する。

まず、式(4.4.16)を次のように書く。

$$\left(100 - \frac{400}{R_s^4} \left(1 + \frac{R_s^2}{2} - \text{sech } R_s - R_s \tanh R_s \right) \right) - D_R = f(R_s, D_R) \quad (4.4.21)$$

ここで、離散的な $D_R = 1, 2, \dots, 99\%$ について、それに対応するパラメータ R_s を求めることを考える。このとき、剛性パラメータ R_s の値を刻み幅 ΔR_s ずつ変化させて、 $f(R_{s(0)}, D_R) \cdot f(R_{s(1)}, D_R) < 0$ となる区間 $[R_{s(0)}, R_{s(1)}]$ を探索する。この $R_{s(0)}$ と $R_{s(1)}$ を初期値として、次式を用いた繰り返し計算を行う。

$$R_{s(m+1)} = R_{s(m)} - f(R_{s(m)}, D_R) \frac{R_{s(m)} - R_{s(m-1)}}{f(R_{s(m)}, D_R) - f(R_{s(m-1)}, D_R)} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.4.22)$$

なお、収束判定には次の式を用いる。

$$\left| \frac{R_{s(m)} - R_{s(m-1)}}{R_{s(m)}} \right| \leq \delta = 1.0 \times 10^{-5} \quad (4.4.23)$$

4.4.6 剛性パラメータ R_s と膨圧 p の関係

ここでは、内部が水分で満たされた薄肉円筒において、膨圧 p と張力 T の関係式を導出する。いま、図-4.2.2 に示した内径 r_i 、厚さ t の中空円筒構造の内部が水分で満たされ、それに伴い膨圧 p が生じているとする。このとき、微小区間 x に働く力と、モデルの上下面にかかる圧力の総和が釣り合うことから、軸応力 σ_x は結果として次のように求まる。

$$\sigma_x = \frac{pr_i}{2t} \quad (4.4.24)$$

ここで、式(4.4.24)は単位面積当たりの力であるから、これに面積を乗じることで膨圧 p と張力 T に関する関係式が得られる。

$$T = 2\sigma_x \pi r_i t = \pi p r_i^2 \quad (4.4.25)$$

また、内径 r_i に対して厚さ t が極めて小さい薄肉断面の断面二次モーメント I は、次式を用いて与えられる。

$$I = \pi \left(r_i + \frac{t}{2} \right)^3 t \quad (4.4.26)$$

すなわち、膨圧 p 、内径 r_i 、厚さ t を用いて無次元パラメータ R_s を書き換えると、次のようになる。

$$R_s = \sqrt{\frac{pr_i^2}{E \left(r_i + \frac{t}{2} \right)^3 t}} L \quad (4.4.27)$$

ここで、厚さ t が極めて薄いと仮定していることを踏まえ、 t に関する高次の項を無視できるものとする、剛性パラメータ R_s は最終的に次式で書くことができる。

$$R_s = \sqrt{\frac{pL^2}{Er_it}} \quad (4.4.28)$$

また、次に示す肉厚に関する無次元量 λ_t と細長さに関する無次元量 λ_s を導入する。

$$\lambda_t = \frac{r_i}{t}, \quad \lambda_s = \frac{L}{r_i} \quad (4.4.29)$$

これを用いて、式(4.4.28)は次のように書くことができる。

$$R_s = \sqrt{\frac{p}{E} \lambda_s^2 \lambda_t} \quad (4.4.30)$$

なお、式(4.4.29)の無次元パラメータ λ_t は、肉厚に対して内径が大きいほど大きくなるパラメータであり、すなわち「肉が薄いほど大きくなるパラメータ」である。また、無次元パラメータ λ_s は、内径に対して長さが大きくなるほど大きくなるパラメータであり、これは「部材が中空かつ細長いほど大きくなるパラメータ」である。ここに、中実部材($r_i = 0$)においては、式(4.4.28)がそもそも不定量であることに留意する必要がある。

4.4.7 剛性パラメータ R_s がたわみ抑制効果に与える影響

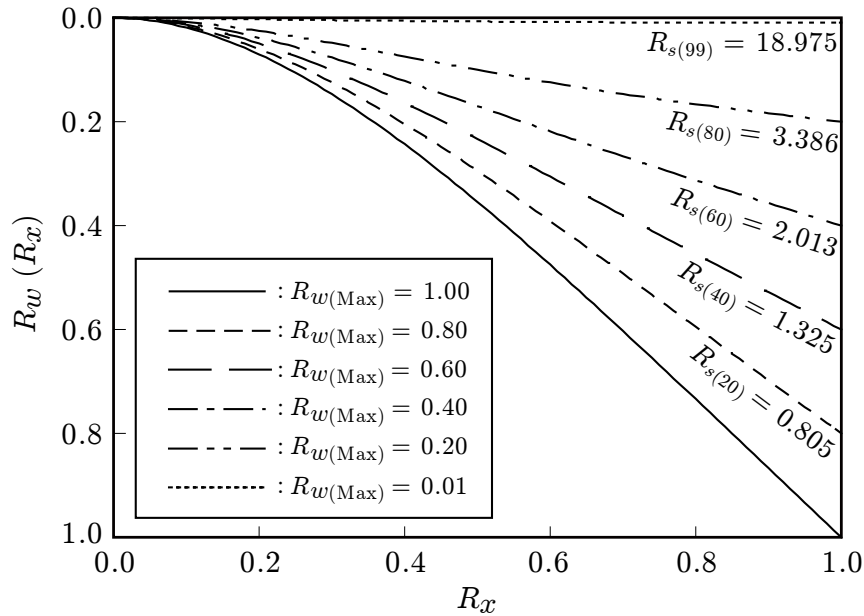


図-4.4.2 自重のみを受ける梁の最大たわみで相対化された自重と張力を受ける梁のたわみ曲線

図-4.4.2 は、張力がない場合の自由端における最大たわみを用いて、張力を考慮した場合のたわみ曲線を無次元化したものを示す。なお、横軸が式(4.4.15)の相対座標 R_x 、縦軸が式(4.4.16)の無次元たわみ $R_w(R_x)$ である。また、図中にはそれぞれの $R_{w(\text{Max})}$ に対応するパラメータ $R_{s(D_R)}$ の値を示す。

図より、パラメータ R_s の増加に伴い、相対最大たわみ $R_{w(\text{Max})}$ を抑制する効果が高まることわかる。 R_s が小さい場合には、たわみ曲線は相対位置 R_x に対して曲線的な変化を示すが、 R_s の増加に伴い、たわみを抑制する効果が高まっていき、 $R_{w(\text{Max})} = 0.20$ （たわみ減少率 $D_R = 80\%$ ）の場合には、ほとんど直線的なたわみ形状となる。

式(4.4.30)を踏まえると、単純に膨圧 p を高める以外にも、弾性係数が小さく柔らかい材質を選定するとともに、より細長く・薄い形状を選択することにより、パラメータ R_s を大きくできることわかる。このことは、内部水分による張力を巧みに活用するため

には、細長い・柔らかい・肉厚が薄いといった特徴を選択することが有効であることを示すものである。

4.4.8 剛性パラメータ R_s とたわみ抑制率 D_R の関係

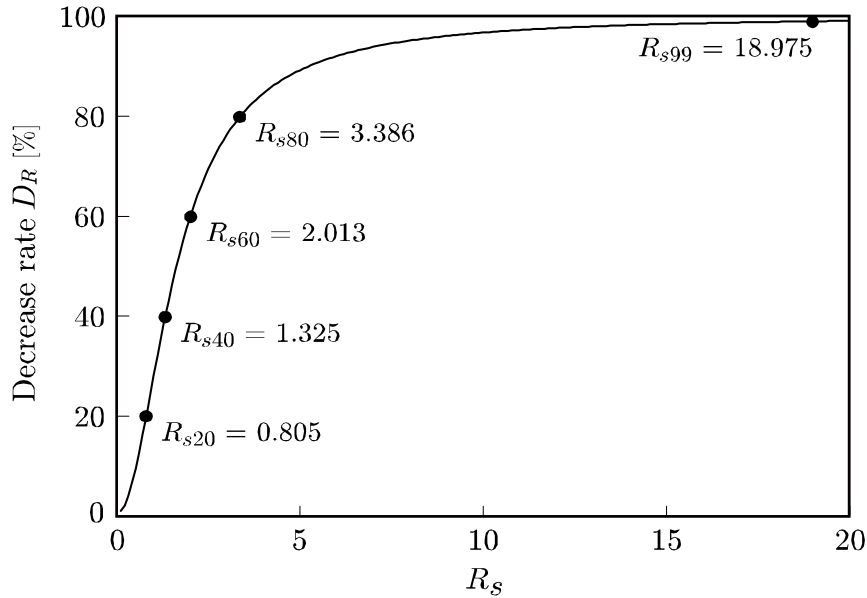


図-4.4.3 無次元パラメータ R_s がたわみ抑制率 D_R に与える影響

図-4.4.3 は、式(4.4.20)に示したたわみ減少率 D_R について、 $0 < R_s \leq 20$ の範囲で値をプロットしたものである。なお、縦軸にたわみ減少率 D_R 、横軸に無次元パラメータ R_s をとって示している。

図より、無次元パラメータ $0 < R_s \leq 3$ 程度の範囲では、わずかな R_s の増加で著しくたわみ減少率 D_R が増加することがわかる。しかし、 $R_s = 3$ を超えると、 R_s の増加に対する D_R の増加量がとたんに小さくなる。なお、 R_s を限りなく大きくしていくと $D_R = 100\%$ に漸近するが、 $D_R = 100\%$ の状態、すなわちたわみが完全に打ち消せるような状態は、 R_s をどれだけ大きくしても存在しない。しかし、図中に示した値からもわかるように、 $R_s \geq 18.795$ のとき、自重のみが作用する場合に比べ、99%以上のたわみを打ち消すことが可能である。

また、4.4.5 項でも述べたように、膨圧が存在しない場合には、自重のみのたわみを考えることと同義であるから、 $R_s = 0$ においてたわみ減少率 $D_R = 0$ となることが予想される。しかし、式(4.4.19)からもわかるように、 $R_s = 0$ のとき最大たわみ比は不定となるので、この境界条件を満足することができない。そこで、本研究では回帰分析を用いて、前述の境界条件を満足する D_R と R_s の簡便な関係式を導出する。

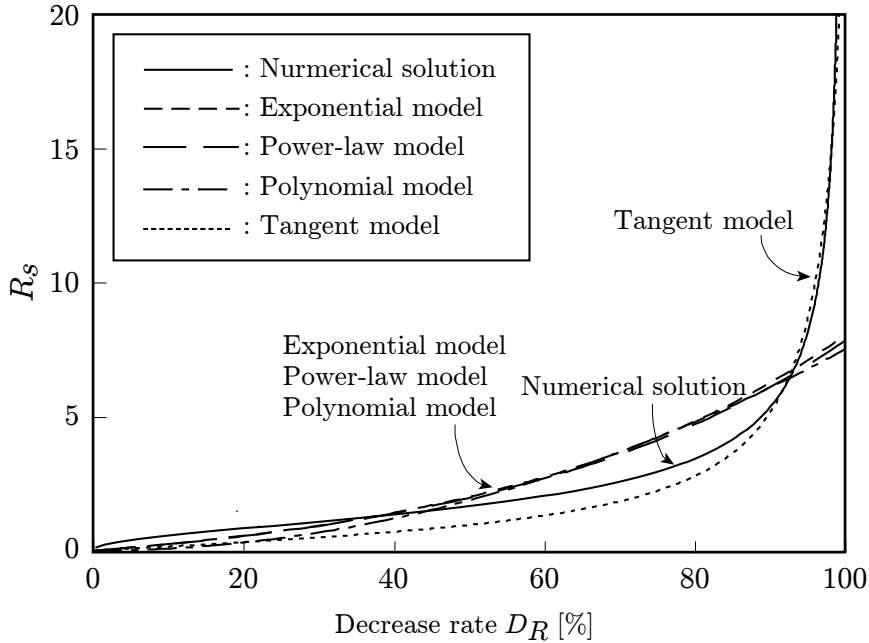
4.4.9 回帰分析に基づく $R_s - D_R$ 関係の導出

 図-4.4.4 たわみ抑制率 D_R に対する剛性パラメータ R_s の変動

図-4.4.4 は、3.4 節に示す手法によって式(4.4.18)を数值的に解き、その結果を用いてたわみ減少率 D_R [%] と無次元パラメータ R_s の関係をプロットしたものである。なお、縦軸にたわみ減少率 D_R ，横軸に無次元パラメータ R_s をとって示している。

図中の実践より、たわみ減少率 D_R に対する無次元パラメータ R_s の変化は、たわみ減少率 $0 < D_R \leq 60\%$ の範囲で、傾きがなだらかな直線的形状となることがわかる。これに対して、 $D_R \geq 60\%$ の範囲では曲線的な変化を示し、 $D_R = 100\%$ に近づくと無限大に発散する。また、実線以外で描かれた曲線は、両者の簡便な関係式を導出するために、以下の回帰モデルを用いて回帰分析を行い、得られた回帰曲線である。

$$\text{Exponential model: } R_s = e^{P_1 D_R} - 1 \quad (4.4.29)$$

$$\text{Power-law model: } R_s = P_2^{D_R} - 1 \quad (4.4.30)$$

$$\text{Polynomial model: } R_s = P_3 D_R^2 \quad (4.4.31)$$

$$\text{Tangent model: } R_s = \tan P_4 D_R \quad (4.4.32)$$

ここに、 $P_1 \sim P_4$ は回帰係数である。上記の回帰モデルはすべて $D_R = 0$ において $R_s = 0$ を満足し、かつ回帰パラメータを一つのみ含む、極めて簡便なモデルである。

表-4.4.1 には、上記の回帰モデルを用いて R により非線形回帰分析を行った詳細な結果について示す。表より、すべてのモデルにおける p 値が有意水準 $\alpha = 0.05$ を下回ることから、すべてのパラメータは有意であるといえる。しかし、グラフを見ると分かるように、すべてのモデルにおいて、式(4.4.18)の数値解に対する誤差は決して小さくない。特に、Tangent model を除く三つのモデルでは、 $D_R \geq 50\%$ の範囲で著しい誤差が生じてい

る. AIC を比較してみると, これらのモデルにおける AIC はほぼ同値であるが, Tangent model のみ比較的小さな値を示している.

表-4.4.1 $R_s - D_R$ 関係に対する回帰分析の結果のまとめ

回帰モデル	Exponential	Power-law	Polynomial	Tangent
パラメータ	P_1	P_2	P_3	P_4
推定値	2.221×10^{-2}	1.022	7.569×10^{-4}	1.530×10^{-2}
p 値	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}	2.0×10^{-16}
AIC	362.85	362.85	372.19	179.82

これらのことから, 式(4.4.29)~(4.4.32)に示した回帰モデルの中では, Tangent model が R_s と D_R の関係を最も適当に表現できるモデルであると考えられる. ただし, Tangent model は $D_R \geq 90\%$ の範囲をほぼ正確に表現することができるものの, $0 \leq D_R \leq 90\%$ の範囲でパラメータ R_s を本来よりも過小評価してしまうことに留意する必要がある.

4.4.10 本節のまとめ

本節では, 膨圧による剛性発現の仕組みとその力学的合理性を明らかにすべく, 自重と軸方向張力が作用する水平な片持ち梁において, 膨圧による張力がもたらす幾何剛性の影響を力学的に正しく取り入れた曲げたわみの式を理論的に導いた. また, これを自重のみが作用する片持ち梁のたわみの式と比較・考察することにより, 以下に示す知見が得られた.

- ① 膨圧によって水平方向に張力が生じることで, 自重によるたわみを大きく抑制することができる. この張力によるたわみ抑制効果は, ヤング率 E , 膨圧 p , 形状の細長さに関する無次元量 λ_s , 肉厚に関する無次元量 λ_t の計四つのパラメータを用いて表現することができる.
- ② 張力によるたわみの抑制効果は, ヤング率 E が小さい柔らかな材料ほど大きくなる. また, 形状が細長くなるほど, 肉厚が薄くなるほど大きくなる. すなわち, 内部水分を巧みに活用するためには, 柔らかく・細長く・かつ薄肉の形態を選択することが有効である.
- ③ 本研究の計算モデルは, あくまで水平方向に体が伸長した場合のものであるが, 幹や茎といった鉛直方向に伸長したモデルにおいても, 同様のたわみ抑制効果が期待できる. このことは, 既往のスケーリング則に関する研究で棄却されてきた力学的制約説 (自重座屈による高さ制限) について, 再考の必要性を示唆するものである.

本節の知見は, 植物の力学特性に基づく膨圧やヤング率の推定に応用できる可能性を有する. また, 張力を考慮した場合のたわみの理論式が導出されたことにより, 曲げ剛性と幾何剛性の本質的な違いが明らかになったとともに, これまでの研究において「三点曲げ試験」と「張力を考慮していないたわみの式」から推定されてきた草本植物の弾

性係数について、その値の信頼性を再考すべきである可能性が理論的に示された。このように、これまでに混同されていた「曲げ剛性」と「幾何剛性」の立場を力学的に明瞭化することは、これからの植物学分野における植物形態形成メカニズムの研究に大きく貢献するものであると考えられる。なお、本節の内容を査読論文としてまとめたものは、Scientific Reports 誌において掲載されている[研究業績目録，学術論文(4)]。

いよいよ次節では、第3章における曲げ剛性のみを考慮した自重座屈理論を一般化し、膨圧により発現する幾何剛性の影響と部材そのものが有する曲げ剛性の双方について、両者を力学理論的に正しく捉えた植物の最大高さ式を導出し、植物全体を貫くスケーリング則に関する知見の獲得を目指す。

4.5 内部水分による張力がもたらす最大高さの向上効果

木本植物のような径が太く硬い植物の高さは、胸高直径の $2/3$ 乗に比例する。しかしながら、径が細く柔らかい草本植物は、自身の体を支える仕組みが根本的に異なるため、この法則が全く適合しない。

木本植物の場合、その定義から推察される力学特性より、主として自身が有する曲げ剛性によって身体を支持しているものと予想される。これに対して、一般的に曲げ剛性が極めて小さな草本植物の場合には、内部水分による張力がもたらす「幾何剛性」により、主として自身の体を支えているものと考えられる。内部水分は木本植物・草本植物を問わず生命活動を維持するために内部に蓄えられているものであり、幾何剛性は木本植物においても存在すると予想されるが、その影響が曲げ剛性に比べて極めて小さいために、曲げ剛性のみを考えて導出された形状則[2]に適合していると推測される。これに対して、草本植物の場合は幾何剛性の影響が卓越しているものと予想されるが、既往の植物学・生態学分野の研究では、硬く重たい構造に対して定式化された Greenhill のスケーリング則[2]が草本植物にそのまま適用されるなど、両者の身体支持機構の違いを無視した研究がほとんどである[3-8]。

以上のことは、内部水分がもたらす幾何剛性に着目する重要性を示唆するものであり、その影響を曲げ剛性も含めて力学理論に基づき解明することは、内部水分を巧みに活用した張力構造の力学的合理性を明らかにするだけでなく、植物学・生態学的に混同されてきた「両者の身体支持機構の差異」を明確にすることに繋がると考えられる。さらに、曲げ剛性・幾何剛性の両者を力学的に正しく考慮した最大高さ式を導出することは、「植物全体の力学的なスケーリング則」の解明に資する知見の獲得に繋がるとともに、体を支持する仕組みに起因したスケーリング則の違いに基づく、木本・草本植物の明快な分類法則の開発を実現するものであると考えられる。

本節では、植物全体をつらぬくスケーリング則を解明するために、第3章における曲げ剛性のみを考慮した自重座屈理論を一般化し、植物における内部水分がもたらす軸方向張力、すなわち幾何剛性が最大高さに与える影響を理論的に明らかにすることを目的とする。地面側を固定端とする片持ち梁として植物をモデル化し、自重と先端荷重が同時に作用する場合について、座屈発生後の力のつり合いより支配方程式を導出する。この支配方程式の一般解を求め、この解に片持ち梁の境界条件を適用することにより、最大高さに関する固有方程式を求める。この固有方程式は、二つの Airy 関数による線形結合であり、代数的に解くことは極めて困難である。そこで、セカント法を用いた数値解法によって任意の先端荷重に対する固有値を求めることにより、自重と先端荷重のバランスが最大高さに与える影響の解明を試みる。

4.5.1 計算モデル

ここでは、植物に見られる膨圧による幾何剛性の制御機能と、植物自身が有する曲げ剛性が最大高さに与える影響を明らかにするために、自由端に張力を作用させた場合の自重座屈に対する最大高さ式を導出する。

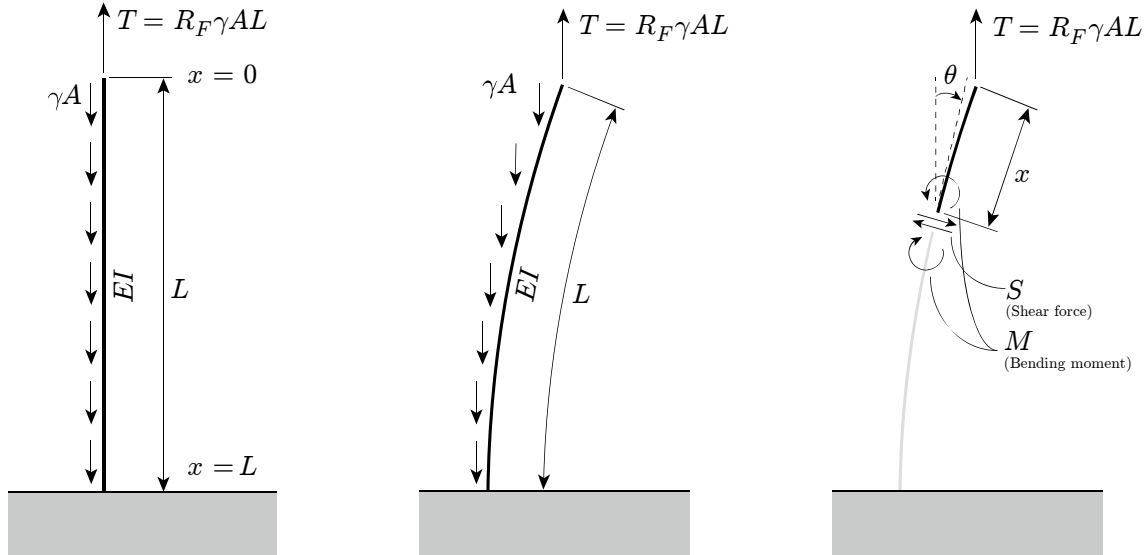


図-4.5.1 計算モデル

計算モデルは、図-4.5.1 に示すような単位体積重量 γ [N/m³]と鉛直方向の集中荷重 T [N]を考慮した片持ち梁である。座標系は中立軸に沿うものとし、固定端側を $x = 0$ 、固定端側を $x = L_c$ とする。なお、曲げ剛性 EI は、軸方向に一定であるものとする。

4.5.2 支配方程式の導出

ここで、自重によってたわみが生じた片持ち梁の先端において、鉛直方向に引張力 T が作用する場合を考える。このとき、これまでの定式化と同様に、任意点における力のつり合いを考えると、せん断力 $S(x)$ が次式で得られる。

$$S(x) = (\gamma Ax - T) \sin \theta, \quad (4.5.1)$$

ここに、 γ は単位体積重量 [N/m³]、 A は断面積 [m²]、 θ はたわみ角を表す。なお、圧縮力を考慮する場合には、上式において $T = -T$ と置けばよく、定式化の流れも後述のものと同様である。

ここで、変形が微小である場合には、式(4.5.1)を次のように書くことができる。

$$S(x) \approx (\gamma Ax - T) \theta \quad (4.5.2)$$

なお、微小変形の範囲では、 T は鉛直方向の成分が支配的であるため、たわみ角に独立な鉛直方向に作用する力とみなすことができる。

次に、よく知られた梁のたわみに関する二階微分方程式は、次式で与えられる。

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (4.5.3)$$

ここに、 w は梁のたわみ、 M は曲げモーメントを表す。いま、梁の変形が微小であるため、式(4.5.3)はたわみ角 θ を用いて次のように書くことができる。

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M}{EI} \quad (4.5.4)$$

ここで、よく知られたせん断力 $S(x)$ と曲げモーメント $M(x)$ の一階微分に関する式($S(x) = dM(x)/dx$)を用いると、式(4.5.2), (4.5.4)より、次の支配方程式が得られる。

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{1}{EI}(\gamma Ax - T)\theta = 0 \quad (4.5.5)$$

いま、Wang and Drachman [35]および Karman and Biot [36]の方法と同様に、次式を用いた変数変換を行う。

$$\xi = \omega x \quad (4.5.6)$$

ここに、 ω は定数パラメータである。式(4.5.6)を用いて式(4.5.5)における変数変換を行うと、変換後の微分方程式が次のように得られる。

$$\frac{d^2 \theta}{d\xi^2} + \left(\frac{\gamma A}{EI \omega^3} - \frac{T}{EI \omega^2} \right) \theta = 0 \quad (4.5.7)$$

ここで、左辺第二項目の係数部を最も簡単にするように、定数パラメータ ω を次のように定義する。

$$\omega = \left(\frac{\gamma A}{EI} \right)^{1/3} \quad (4.5.8)$$

また、張力 T を次式により体積力 γAL との比で与える。

$$T = R_F \gamma AL \quad (4.5.9)$$

ここに、 R_F は「自重による体積力に対する張力の比」を表す無次元パラメータである¹¹。以上より、式(4.5.8), (4.5.9)を式(4.5.7)に適用することで、以下に示す最終的な解くべき微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + (\xi - R_F\omega L)\theta = 0 \quad (4.5.10)$$

4.5.3 固有方程式の導出

式(4.5.10)の一般解を Mathematica により求めると、次式が得られる。

$$\theta(\xi) = \text{Ai}\left((-1)^{1/3}(\xi - R_F\omega L)\right)c_1 + \text{Bi}\left((-1)^{1/3}(\xi - R_F\omega L)\right)c_2 \quad (4.5.11)$$

ここに、 $\text{Ai}(x)$ は第一種 Airy 関数、 $\text{Bi}(x)$ は第二種 Airy 関数、 c_1, c_2 は任意定数を表す。また、式の表記を簡単にするために、Airy 関数の引数部分を次式により置き換える。

$$\Xi(\xi) = (-1)^{1/3}(\xi - R_F\omega L) \quad (4.5.12)$$

次に、式(4.5.11)の一般解に、次式で与えられる片持ち梁の境界条件を適用する。

$$\begin{cases} \text{at } \xi = 0 \ (x = 0), & \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \\ \text{at } \xi = \omega L \ (x = L), & \theta = 0 \end{cases} \quad (4.5.13)$$

いま、自由端側 ($x = 0$) における境界条件を式(4.5.11)の一般解に適用すると、任意定数 c_1 と c_2 の関係が次のように得られる。

$$c_2 = -\frac{\text{Ai}'(\Xi - (-1)^{1/3}\xi)}{\text{Bi}'(\Xi - (-1)^{1/3}\xi)}c_1 \quad (4.5.14)$$

ここに、 $\text{Ai}'(\xi)$ および $\text{Bi}'(\xi)$ は、それぞれの ξ に関する一階微分を示す。この式(4.5.14)を式(4.5.11)に代入すると、たわみ角の式が以下のように得られる。

$$\theta(\xi) = \frac{c_1}{\text{Bi}'(\Xi - (-1)^{1/3}\xi)} \left(\text{Ai}(\Xi)\text{Bi}'(\Xi - (-1)^{1/3}\xi) - \text{Ai}'(\Xi - (-1)^{1/3}\xi)\text{Bi}(\Xi) \right) \quad (4.5.15)$$

¹¹ 3.6 節において用いた圧縮力比 R_P とは異なり、このパラメータ R_F は正の値のときに「引張力」を示すものである。なお、どちらも体積力と先端力の「力の比(Force of ratio)」という意味では同様である。下添え字については、圧縮 (Compression) と引張 (Tensile) に由来しておらず、これは 3.2 節において登場したテーパー比 R_t との混乱を避けるべく、 R_T および R_C の表記を避けたためである。また、 R_P の定義域は $0 < R_P < \infty$ であるが、 R_F の定義域は $-\infty < R_F < \infty$ である。

ここで、固定端側 ($x = L$) の境界条件を適用することを考える。このとき、 $c_1 = 0$ は境界条件を満足する一つの解であるが、これはたわみ角が高さ方向に一定でゼロとなること、すなわち座屈が発生しない状態を表す。そのため、 $c_1 \neq 0$ とすれば、次に示すパラメータ ξ に関する条件式が得られる。

$$\operatorname{Re}[\operatorname{Ai}(\Xi)\operatorname{Bi}'(\Xi - (-1)^{1/3}\xi) - \operatorname{Ai}'(\Xi - (-1)^{1/3}\xi)\operatorname{Bi}(\Xi)] = 0 \quad (4.5.16)$$

ここに、 $\operatorname{Re}[z]$ は複素数 z の実部を示す。なお、式(4.5.12)、(4.5.13)より、固定端側の境界条件を適用することにより、式(4.5.16)は $\xi_{c(\text{sol})}$ と R_F のみを含む方程式となる。そのため、任意の R_F において式(4.5.16)を満たす解を $\xi_{c(\text{sol})}(R_F)$ と表記すると、式(4.5.8)、(4.5.13)より最大高さ L_c は次のように書くことができる。

$$L_c = \xi_{c(\text{sol})}(R_F) \left(\frac{EI}{\gamma A} \right)^{1/3} \quad (4.5.17)$$

これを、Greenhill [2] および Wang and Drachman [35] が導出した、先端に荷重がない円柱における自重座屈に対する最大高さ L_s を用いて書くと次のようになる。

$$L_c = \frac{\xi_{c(\text{sol})}(R_F)}{\xi_{c(\text{sol})}(0)} \left(C \frac{E}{\gamma} r^2 \right)^{1/3} = R_L(R_F) L_s \quad (4.5.18)$$

ここに、 $C = 1.986$ である。また、 $R_L(R_F)$ は最大高さ比であり、次式で与えられる。

$$R_L(R_F) = \frac{\xi_{c(\text{sol})}(R_F)}{\xi_{c(\text{sol})}(0)} \approx \frac{\xi_{c(\text{sol})}(R_F)}{2} \quad (4.5.19)$$

$R_L(R_F)$ の物理的な意味は、「自重のみが作用する場合の最大高さに対する、張力を考慮した場合の最大高さの比」を示している。また、式(4.5.18)は先端荷重の大きさや荷重方向が圧縮か・引張かによらず、座屈に対する最大高さが半径の $2/3$ 乗に比例することを意味するものである。

なお、式(4.5.17)は中空円筒においても同様に適用可能であり、その場合の最大高さ式は次式で与えられる。

$$L_c = \frac{\xi_{c(\text{sol})}(R_F)}{\xi_{c(\text{sol})}(0)} (1 + R_h^2)^{1/3} \left(C \frac{E}{\gamma} r_o^2 \right)^{1/3} = f(R_F) f(R_h) L_s \quad (4.5.20)$$

ここに、 r_o は計算モデルの外半径である。また、 R_h は第3章で用いた空洞部の大きさを表す無次元パラメータであり、これは内半径 r_i を用いて次式で与えられる。

$$R_h = \frac{r_i}{r_o} \quad (4.5.21)$$

このパラメータは、 $R_h = 0$ で中実円柱、 $R_h = 1$ でモデルが消失することを意味する。

4.5.4 固有方程式の数値解法

式(4.5.16)に示した ξ に関する方程式は、二種の Airy 関数の線形結合であり、これを代数的に解くことは出来ない。そこで、本研究では数値計算により、この方程式を満足する最小の正の実数解 $\xi_{c(\text{sol})}(R_F)$ を求める。数値計算法には、今後の拡張性を踏まえ、微分が不要であるセカント法を採用する。

まず、式(4.5.16)を次のように書く。

$$\text{Re} \left(\text{Ai}(\Xi) \text{Bi}'(\Xi - (-1)^{1/3} \xi) - \text{Ai}'(\Xi - (-1)^{1/3} \xi) \text{Bi}(\Xi) \right) = f(R_F, \xi) \quad (4.5.22)$$

図-4.5.2 には、 $R_F = -0.5, 0, 0.5$ における関数 $f(R_F, \xi)$ の分布例を表しており、横軸は ξ 、縦軸は式(4.5.22)の $f(R_F, \xi)$ を示す。また、図中に示す $\xi_{c(\text{sol})}(R_F)$ が、それぞれの R_F における正の最小の零点である。本研究では、離散的な $R_F = -1.00, -0.99, \dots, 1.00$ について、この $\xi_s(R_F)$ をセカント法に基づく数値解法により数値的に求める。

いま、 ξ の値を刻み幅 $\Delta\xi$ ずつ変化させて、 $f(R_F, \xi_0) \cdot f(R_F, \xi_1) < 0$ となる区間 $[\xi_0, \xi_1]$ を探索する。この ξ_0 と ξ_1 を初期値として、次式を用いた繰り返し計算を行う。

$$\xi_{(m+1)} = \xi_{(m)} - f(R_F, \xi_{(m)}) \frac{\xi_{(m)} - \xi_{(m-1)}}{f(R_F, \xi_{(m)}) - f(R_F, \xi_{(m-1)})} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4.5.23)$$

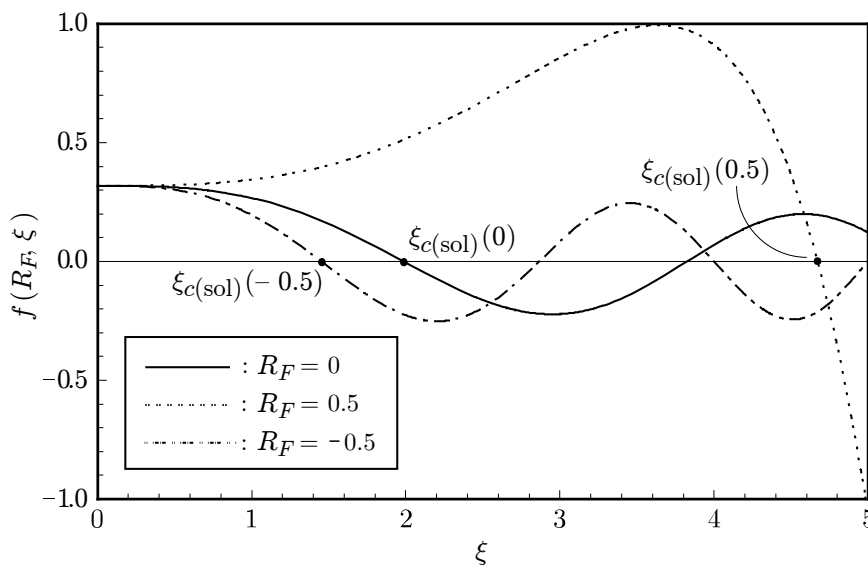
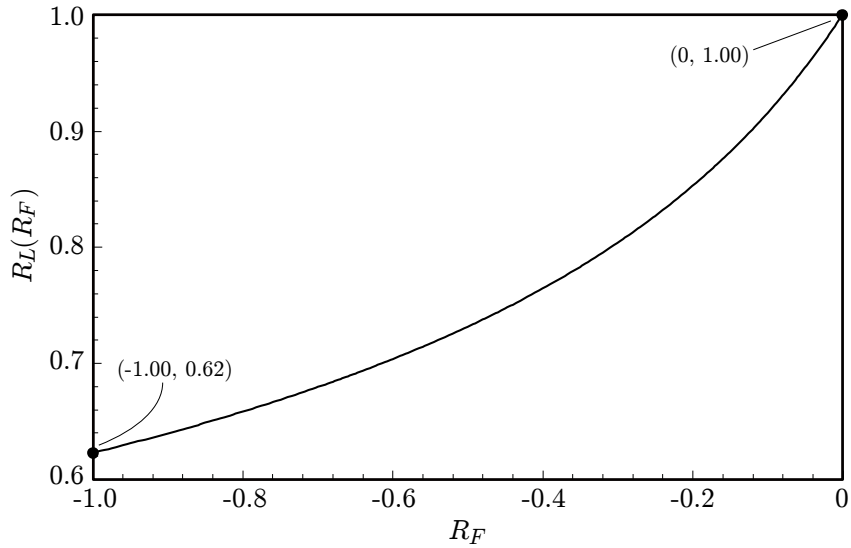


図-4.5.2 関数 $f(R_F, \xi)$ の分布例 (式(4.5.22))

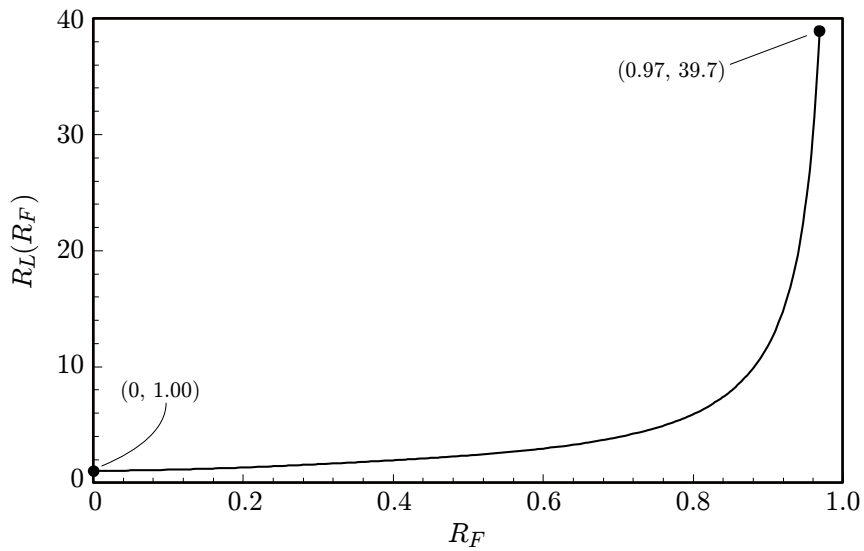
なお、収束判定には次の式を用いる。

$$\left| \frac{\xi_{(m)} - \xi_{(m-1)}}{\xi_{(m)}} \right| \leq \delta = 1.0 \times 10^{-5} \quad (4.5.24)$$

4.5.5 張力パラメータ R_F と最大高さの関係



(a) 先端に圧縮力が作用する場合 ($-1 \leq R_F \leq 0$)



(b) 先端に引張力が作用する場合 ($0 \leq R_F \leq 1$)

図-4.5.3 最大高さ比 $R_L(R_F)$ と張力パラメータ R_F の関係

図-4.5.3 は、最大高さ比 $R_L(R_F)$ と張力パラメータ R_F の関係を示したものであり、図-4.5.3 (a)に圧縮力の場合($-1 \leq R_F \leq 0$)、図-4.5.3 (b)に引張力の場合($0 \leq R_F \leq 1$)を示している。なお、いずれも縦軸に最大高さ比 $R_L(R_F)$ 、横軸に張力パラメータ R_F を表したものである。この結果は、 $R_F = -1.00, -0.99, \dots, 1.00$ のように、0.01 ごと張力パラメータを変化させ、それぞれで前節に示した数値計算法を用いて算出されたものである。

図より、まず圧縮力が作用する場合（図-4.5.3 (a)）には、荷重の増加に伴って最大高さは減少していくことが分かる。体積力と同じ大きさの圧縮力が生じる場合（ $R_F = 1$ ）には、最大高さはおよそ 40%減少してしまうことが分かる。この結果は、3.6 節における初期不整および先端圧縮力の影響を考慮した検討において、初期不整がなく、体積力と同じ大きさの先端圧縮力が生じている場合、すなわち $R_\theta = 0$ 、 $R_P = 1$ の最大高さ比と同様のものである。また、自重のみを考慮した $R_F = 0$ の場合について、その最大高さ比 $R_L = 1$ であることから、Greenhill および Wang and Drachman と同様の結果が得られていることが確認できる。これらのことは、本節における定式化の妥当性を保証するものである。

これに対して、引張力が作用する場合（図-4.5.3 (b)）には、荷重の増加に伴って最大高さが上昇していき、およそ $R_F = 0.4$ 程度で最大高さを 2 倍にまで引き上げることができる。さらにその後も飛躍的に最大高さは向上し、 $R_F = 0.9$ では約 10 倍、 $R_F = 0.95$ では約 20 倍にまで到達する。そして、 $R_F = 0.97$ において最大となる約 40 倍へと到達する。以上のように、張力パラメータ R_F の増加に伴って最大高さは単調増加の傾向を示す。なお、これを超える $0.97 < R_F \leq 1.00$ の範囲では、セカント法の初期値および刻み幅をどのように設定しても、式(4.5.16)の固有方程式を満足する $\xi_{c(sol)}$ を数値的に得ることができないことが分かった。

4.5.6 本節のまとめ

本研究では、部材そのものが有する曲げ剛性に加え、内部水分による膨圧が起因して発生する張力がもたらす幾何剛性を考慮した場合について、自重座屈に対する最大高さ式を理論的に導出するとともに、「自重による体積力」と「膨圧による張力」のバランスが最大高さに与える影響について考察を行った。その結果、以下に示すような知見が得られた。

- ① 既往の研究により理論・実験の両面から明らかにされてきた「自重のみが作用する場合には、自重座屈に対する最大高さが根元半径の 2/3 乗に比例する」というスケーリング則は、先端に集中荷重を付加した場合においても、その力が圧縮か引張かによらず成立する。
- ② 膨圧による体積力に対する張力の比を示す「張力パラメータ」の増加に伴い、最大高さは単調に増加する。このことは、膨圧による内部水分が自重座屈特性を高めることを示している。なお、張力パラメータの定義および膨圧と張力の関係より、体積力に対して大きな張力を確保するためには、単に膨圧を大きくすることのほかに、背を小さく、断面を薄肉の円筒構造とし、かつ軽い材質で体を形成することが有効であると言える。

4.6 本章のまとめ

本章では、木本植物のような径が太く硬い植物において得られた知見と定式化のノウハウを駆使し、内部水分が植物の力学特性に与える影響を明確化すべく、植物を膨圧による水分を活用した張力構造としてモデル化し、張力を活用した身体支持の仕組みを明らかにした。その結果、軽く細く柔らかいという力学的特徴の選択により、水平方向に伸長した片持ち梁における曲げたわみの問題、鉛直方向に伸長した片持ち梁における自重座屈問題の双方において、張力による身体支持能力が飛躍的に高まることが分かった。そして、特筆すべきは、内部水分による張力の影響を取り入れた最大高さ式においても、高さ一直径間における $2/3$ のべき乗則が見られた点である。

また、本章の成果は、単に植物における内部水分がもたらす力学特性の向上効果を明らかにしただけでなく、幾何剛性の影響を”正しく”考慮した植物の力学理論を整備したものであり、従前の植物学分野においてしばしば混同されてきた「部材そのものが持つ曲げ剛性」と「膨圧により生じる幾何剛性」の立場を明瞭化したものである。これは、今後の植物学的研究の発展に大幅に寄与することが期待できるだけでなく、植物学と力学を結びつける、学際的な研究体系を切り拓いていくことが期待できる成果である。

いよいよ次章では、植物全体をつらぬくスケーリング則を解明すべく、これまでに得られた知見の統合的な洞察を行う。4.5 節における、張力パラメータと固有方程式における解の関係において見られた「 $R_F = 0.97$ 付近で数値解が消失する」という問題の考察を行い、これまでの観点では分類上の問題があった「草本植物」と「木本植物」の区分について、両者を力学理論に基づき定量的かつ明快に分類する法則を提案する、さらに、この式を用いて、植物の生存戦略や生理学的な知見を力学的観点から洞察し、単一的な研究体系では獲得できない知見の獲得を試みる。

参考文献

- [1] Niklas, K. J., The scaling of plant height: A comparison among major plant clades and anatomical grades, **72**, *Ann. Bot.*, 165-172 (1993).
- [2] Greenhill, A.-G., Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical pole or mast can be made, and the greatest height to which a tree of given proportions can grow, *Proc. Camb. Philol. Soc.* **4**, 62-73 (1881).
- [3] Niklas, K. J., The allometry of safety factors for plant height, *Amer. J. Bot.*, **81**, 345-351 (1994).
- [4] Niklas, K. J., *Plant Biomechanics – An Engineering Approach to Plant Form and Function*, Chicago, Univ. Of Chicago Press (1992).
- [5] Niklas, K. J. & Spatz H.-C., Growth and hydraulic (not mechanical) constraints govern the scaling of tree height and mass, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **101**, 15663_1-3 (2004).
- [6] Caliaro, M., Schmich, F., Speck, T. & Speck, O., Effect of drought stress on bending stiffness in petioles of *Caladium bicolor* (Araceae), *Amer. J. Bot.*, **100**, 2141-2148 (2013).
- [7] Niklas, K. J., Flexural stiffness and modulus of elasticity of flower stalks from allium sativum as measured by multiple resonance frequency spectra, *Amer. J. Bot.*, **75**, 1517-1525 (1988).
- [8] Niklas, K. J., Plant height and the properties of some herbaceous stems, *Ann. Bot.*, **75**, 133-142 (1995).
- [9] Clark, M. A., Choi, J. & Douglas, M., *Biology 2e*, Rice University (2020).
- [10] 山田常夫ら編集, 岩波生物学辞典 第3版, 岩波書店 (1989).
- [11] Niklas, K. J., *Plant Allometry: The Scaling of Form and Process*, The Univ. of Chicago Press, Chicago (1994).
- [12] Li, W., Keynia, S., Belteton, S. A., Afshar-H. F., Szymanski, B. D. & Turner, J. A., Protocol for mapping the variability in cell wall mechanical bending behavior in living leaf pavement cells, *Plant Physiol.*, **188**, 1435-1449 (2022).

- [13] Olson, M. E., A-Hernandez, R & Rosell, J. A., Universal foliage-stem scaling across environments and species in dicot trees: plasticity, biomechanics and Corners Rules, *Ecol. Lett.* **12**, 210-219 (2009).
- [14] Wei, C. & Lintilhac, P. M., Loss of stability: A new look at the physics of cell wall behavior during plant cell growth. *Plant Physiol.*, **145**, 763-772 (2007).
- [15] Usherwood, J. R., Ennos, A. R. & Ball, D. J., Mechanical and anatomical adaptations in terrestrial and aquatic buttercups to their respective environments, *J. Exp. Bot.*, **48**, 1469-1475 (1997).
- [16] 石原勝敏, 末光隆志編集, 生物の辞典, 朝倉書店 (2010).
- [17] King, D. & Loucks, O. L., The theory of tree bole and branch form. *Radiat. Environ. Biophys.*, **15**, 141-165 (1978).
- [18] Chiwa, M., Utsumi, Y., Tashiro, N., Yasuda, Y., Shinozuka, K. Ru, Y., Nagano, N., Murata, S., Nakamura, T., Yamauchi K., Kabemura, Y., Ando, T. & Sawamura, H., Nutrients exported from upland stream water enlarge perennial biomass crops, *Sci. Rep.*, **11**, 2200_1-8 (2021).
- [19] Zonia, L. & Munnik, T., Life under pressure: hydrostatic pressure in cell growth and function, *Trends Plant Sci.*, **12**, 90-97 (2007).
- [20] Cosgrobe, D. J., Wall extensibility: its nature, measurement and relationship to plant cell growth, *New Phytol.*, **124**, 1-23 (1993).
- [21] Tsugawa, S., Yamasaki, Y., Horiguchi, S., Zhang, T., Muto, T., Nakaso, Y., Ito, K., Takebayashi, R., Okano, K., Akita, E., Yasukuni, R., Demura, T., Mimura, T., Kawaguchi, K. & Hosokawa, Y., Elastic shell theory for plant cell wall stiffness reveals contributions of cell wall elasticity and turgor pressure in AFM measurement, *Sci. Rep.*, **12**, 13044_1-11 (2022).
- [22] 構造工学委員会, 構造力学公式集改訂委員会編集, 構造力学公式集 第2版, 公益社団法人土木学会 (1986).
- [23] Licup, A. J., Munster, S., Sharma, A., Sheinman, M., Jawerth, L. M., Febry, B., Weitz, D. A. & MacKintosh, F. C., Stress controls the mechanics of collagen networks, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **112**, 9573-9578 (2015).
- [24] Chen, B. & Jiang, H., Instability results from purely rotational stiffness for general tensegrity structure with rigid bodies, *Mech. Mach. Theory*, **167**, 104485_1-24 (2022).
- [25] Saitoh, M. & Okada, A., The role of string in hybrid string structure, *Eng. Struct.*, **21**, 756-769 (1999).
- [26] Hmdzic, I & Reed, K. B., Musical kinetic shape: A variable tension string instrument, *Appl. Acoust.*, **85**, 143-139 (2014).

- [27] Olverm A. V., Wilson, D & Crofton, P. S. J., Investigation of service failures of steel music wire, *Eng. Fail. Anal.*, **14**, 1224-1232 (2007).
- [28] Skubisz, G., Developement of Studies on the mechanical properties of winter rape stems, *Int. Agrophysics.*, **15**, 197-200 (2001).
- [29] “バルーンアートの写真素材”, photo AC, <https://www.photo-ac.com/main/detail/3412022> (参照 2023-12-15).
- [30] “バルーンアートの写真素材”, photo AC, <https://www.photo-ac.com/main/detail/3397473> (参照 2023-12-15).
- [31] “東京ドームとは”, 東京ドームシティ, <https://www.tokyo-dome.co.jp/tourists/dome/about.html> (参照 2023-12-05)
- [32] “エレキギターの無料アイコン・イラスト素材”, フリーアイコンズ, <https://free-icons.net/music017/> (参照 2023-12-03).
- [33] “ティンパニ 製品 | Ludwig”, Ludwig, <https://www.nonaka.com/ludwig/products/timpani/> (参照 2023-12-01).
- [34] Karam, G. N. & Gibson, L. J., Biomimicking of animal quills and plant stems: natural cylindrical shells with foam cores, *Mater. Sci. Eng. C*, **2**, 113-132 (1994).
- [35] Wang, C. Y. & Drachman, B. Stability of a heavy column with an end load *J. Appl. Mech.*, **48**, 668–669 (1981).
- [36] von Karman, T & Biot, M. A., *Mathematical Methods in Engineering*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1940).

第5章 木本植物および草本植物における スケーリング則の横断的洞察

前章では、草本植物における伐採前後の様子から、植物に対する力学理論の開発において幾何剛性（内部水分）に着目する重要性を指摘し、第3章における部材そのものが有する曲げ剛性のみを考慮した自重座屈理論を一般化するために、内部水分による張力がもたらす幾何剛性を取り入れた自重座屈理論を開発した。さらに、身体支持メカニズムの差異を考慮していなかったために従前の植物学分野で完全に混同されていた「曲げ剛性」と「幾何剛性」について、本研究では両者の影響を力学理論に基づき個別に取り入れることにより、そのはたらきの違いを明瞭化することに成功した。

このような本研究の成果は、植物学および力学の分野において、それぞれが長い年月をかけて独自に蓄積してきた叡智を相互に結び付けることにより、初めて得られたものである。しかしながら、内部水分による膨圧がもたらす剛性発現メカニズムに着目して導かれた最大高さの式は、植物学分野において「考察」や「解釈」によって人為的に誤解されていた幾何剛性のような問題とは異なり、「観測」によって得られている事実と大きく矛盾する、一つの疑問を含んでいる。

それは、「膨圧による幾何剛性の影響を考慮した最大高さ式においても、高さ一直径間の $2/3$ 乗則が理論的に成り立つこと」である。第2章および第3章において示したように、木本植物の場合であれば、McMahon や Niklas によって $2/3$ 乗則が成立することが立証されている[1-4]。本論文の第3章に示した自重座屈に対する最大高さ式は、自重座屈特性に大きな影響を与えると予想される様々な要素を考慮した全ての場合において、「高さ一直径間の $2/3$ 乗則」を支持する結果となっており、これらは McMahon らの観測の妥当性をさらに強調するものであった。そして、第4章において得られた「膨圧による幾何剛性の影響を考慮した最大高さ式」は、これまで同様に高さ一直径間の $2/3$ 乗則が理論的に成り立つことを示している。しかしながら、Niklas が草本植物へと計測対象を拡張した結果、この法則が草本植物に適合しないことが確認されている[4]。このことは、自重座屈によって草本植物の最大高さが支配されているわけではなく、他の要因によって最大高さが支配されている可能性を示唆するものである。

本章では、これまでの最大高さ式を俯瞰的に洞察し、草本植物の最大高さを支配している「真の要因」について洞察するとともに、支配要因の違いの観点から、木本・草本の分類を明快かつ定量的に行う手法を提案する。

5.1 本研究により得られたスケーリング則の総括

ここでは、本研究により得られたすべての自重座屈に対する最大高さ式について総括するとともに、植物学分野の研究における観察との矛盾を指摘する。

まず、第3章および第4章において得られたすべての最大高さ式より、植物の自重座屈に対する最大高さは、一様に次のような極めて単純な形で書くことができる。

$$L_c = f(R_a) \left(C \frac{E}{\gamma} \right)^{1/3} r^{2/3} \quad (5.1.1)$$

ここに、 L_c は最大高さ、 C は定数 ($C \approx 1.959$)、 r は地面との接合部における外半径である。また、 $f(R_a)$ は任意のパラメータ（テーパー比 R_t 、中空比 R_h など）の関数であり、これは各計算モデルにおける固有方程式を満足する正の最小の実数解 $\xi_{c(sol)}$ によってその形が定まる関数である。

式(5.1.1)は、その部材が曲げ剛性および幾何剛性のどちらによって支えられているかによらず、重い柱¹²の自重座屈に対する最大高さ式として用いることが可能である。さらに、この式は以下に示す二つの重要な知見を与えるものである。

- ① 自重座屈特性を向上させるテーパー形状や断面の中空化、自重座屈特性を悪化させる枝葉重量および初期不整や地盤における固定の不確実性、さらに軸方向張力によって発現する幾何剛性を考慮した最大高さは、いずれもこれらの影響を評価するための関数と、最も単純化されたモデルである「剛性および密度が高さ方向に一定の片持ち梁」の最大高さの積によって与えられる。
- ② 梁理論に基づき得られる重い柱の自重座屈に対する最大高さ L_c は、本研究で検討した全てのモデルにおいて、地面との接合部における外半径の $2/3$ 乗に比例する。

以上の知見は、McMahonの検証によって証明されている「木本植物の最大高さが胸高直径の $2/3$ 乗に比例する」という事実には則したものであるが、Niklasの検証によって証明されている「草本植物の最大高さは直径の $2/3$ 乗に比例しない」という事実とは、完全に反するものである。このことは、両者の体を支える仕組みが単に異なるというだけでなく、その特徴によって両者の最大高さを支配する要因が異なっている可能性を示唆するものである。これを明らかにすることは、単に「 $2/3$ 乗則が適合する理由（あるいは適合しない理由）」を理論的に解明するだけではなく、「最大高さを支配する要因の違い」という観点から、従前の基準では分類が困難である竹のような植物も含めた「木本植物と草本植物の簡潔かつ明快な分類法則」の発見に繋がると予想される。

¹² この「重い柱」とは、木本-草本間の比較による相対的な「重い」という意味ではなく、「自重の影響を無視することができない柱（先端荷重に比べ自重が支配的な柱）」という意味である。

5.2 力学理論に基づく新しい植物の分類法則

ここでは、「木本植物と草本植物の最大高さを支配する要因が異なる」という仮説を検証するべく、両者の定式化の過程で見られた決定的な違い、すなわち「自重による体積力と張力が均衡する点の近傍で見られる、固有値の特異的な挙動」について考察を行う、さらに、この考察の結果を踏まえて、力学理論に基づく植物の単純明快な新しい分類法則を提案する。

5.2.1 幾何剛性の影響を考慮した自重座屈問題における固有値の挙動

これまで、様々な影響および因子を考慮して、木本植物・草本植物の自重座屈に対する最大高さの定式化を行ってきた。しかしながら、幾何剛性の影響を考慮した最大高さの導出過程においてのみ、固有方程式を満足する正の最小の実数である固有値 $\xi_{c(sol)}$ が特異的な挙動を示していた。

まず、幾何剛性の影響を考慮した場合の自重座屈問題における固有方程式を、改めて以下に示す。

$$\text{Re}[\text{Ai}(\Xi)\text{Bi}'(\Xi - (-1)^{1/3}\xi) - \text{Ai}'(\Xi - (-1)^{1/3}\xi)\text{Bi}(\Xi)] = 0 \quad (5.2.1)$$

ここに、 $\Xi(\xi)$ は次式で与えられる。

$$\Xi(\xi) = (-1)^{1/3}(\xi - R_F \omega L) \quad (5.2.2)$$

いま、この固有方程式を満足する解を ξ_c と置き、式(4.5.16)を整理すると、次式が得られる。

$$\text{Re}[\text{Ai}((R_F - 1)\xi_c)\text{Bi}'(R_F \xi_c) - \text{Ai}'(R_F \xi_c)\text{Bi}((R_F - 1)\xi_c)] = 0 \quad (5.2.3)$$

5.4 節の検討では、体積力 γAL に対する張力 T の比である張力パラメータ R_F について、その範囲を $-1 \leq R_F \leq 1$ として式(5.2.3)の解を数値的に求め、先端力が自重座屈特性に与える影響を調べた。そして、その過程で「張力と体積力がほぼ等しくなる $0.97 < R_F < 1.00$ の範囲において、式(5.2.3)を満足する正の最小の実数解 $\xi_{c(sol)}$ を得ることができなくなる」という現象が見られた。これは、第3章において示した木本植物の最大高さを定式化する過程では全く見られなかったものであり、内部水分による膨圧がもたらす幾何剛性の影響を考慮した定式化において、初めて確認されたものである¹³。この問題について詳細な検証を行うべく、張力パラメータ R_F を検討する範囲を圧縮・引張ともに拡大し、そのときの式(5.2.3)を満たす固有値を求め、同様の現象が発生するかを確認する。

¹³ 第3章の最大高さに関する定式化では、計算モデルを成立させるために、テーパー比 R_t や中空比 R_h などのパラメータについて実数値での定義域を設けている。これに対して、張力パラメータ R_F の定義域は $-\infty < R_F < \infty$ であり、この範囲内で計算モデルに関する問題は発生しない。計算モデルが成立する定義域の中において固有値の消失が確認されたのは4.5節の幾何剛性を考慮した場合のみである。

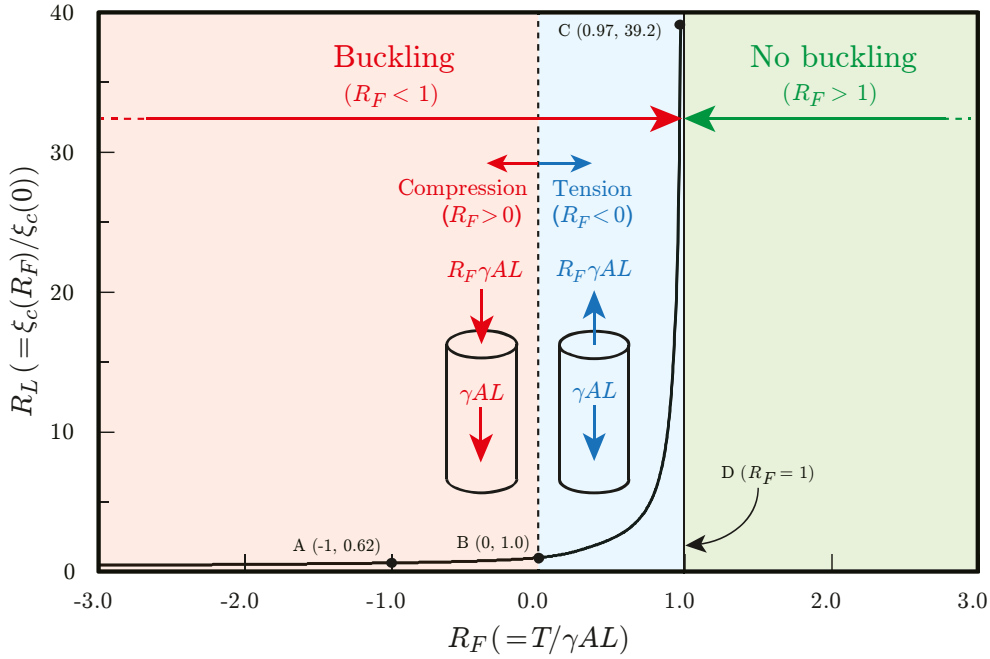


図-5.2.1 最大高さ比 R_L と張力パラメータ R_F の関係および応力分布の例

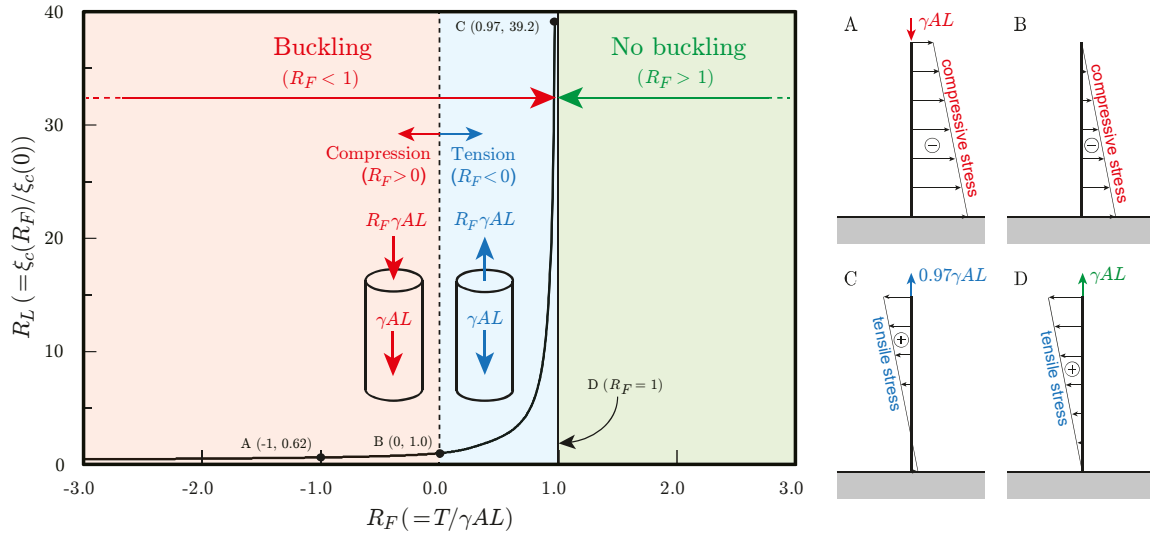
図-5.2.1 には、張力パラメータの範囲を $-3 \leq R_F \leq 3$ とし、膨圧により発現する軸方向張力が最大高さに与える影響を検討したものを示す。左図の縦軸は、先端力が存在しない状態 ($R_F = 0$) の最大高さで先端力が存在する場合の最大高さを除した最大高さ比 $R_L (= \xi_{c(\text{sol})}(R_F)/\xi_{c(\text{sol})}(0))$ であり、先端力が自重座屈に対する最大高さに与える影響を示すパラメータである。また、横軸は張力パラメータ R_F を表し、これは負の値のときは圧縮力、正の値のときは引張力が先端に载荷されていることを意味しており、 $R_F = 0$ は自重のみが作用している状態を示す。なお、図-5.2.1 は、4.5 節に示した図-4.5.3 とは異なり、張力パラメータを $-3 \leq R_F \leq 3$ の範囲とし、先端力が圧縮・引張の場合における最大高さ比を一つの図としてプロットしたものである。

まず、先端荷重が存在しない $R_F = 0$ の場合について、このとき最大高さ比 $R_L = 1$ であることから、4.5 節の検討と同様に Greenhill の式との整合性が確認できる。これを基準に、 R_F の増加に伴って最大高さ比 R_L が増加し、 R_F の低下に伴って最大高さ比 R_L が低下していくことが分かる。

次に、先端に体積力と同等の圧縮荷重を载荷する場合 ($R_F = -1$, 点 A) には、自重のみが作用する場合に比べて 40% ほど最大高さが減少する。張力パラメータの低下に伴い最大高さが減少は緩やかなものと変化していくが、これは最大高さが低下に伴い、先端荷重の絶対値が小さくなっていくことに起因していると予想される。

そして、先端に引張荷重を载荷する場合 ($R_F > 0$) には、その大きさの増加に伴って飛躍的に最大高さが向上していくことが分かる。ここで、4.5 節の場合と同様に、 $R_F > 0.97$ の範囲より、セカント法の初期値および刻み幅をどのように設定しても、式(5.2.3)の固有方程式を満足する $\xi_{c(\text{sol})}$ を数値的に得ることができないことが分かった。

5.2.2 応力状態に基づく新しい植物の分類法則


 図-5.2.2 最大高さ比 R_L と張力パラメータ R_F の関係および応力分布の例

前節において、 $R_F \geq 1$ の領域では、この問題における固有方程式を満足する正の最小の実数解 $\xi_{c(sol)}$ が存在しないことが分かった。この現象は、 $R_F \geq 1$ のとき、軸方向応力が全スパンに渡って引張応力のみとなることに起因すると考えられる。

図-5.2.2 には、先ほど示した最大高さ比 R_L と張力パラメータ R_F の関係に加え、代表的な点 A, B, C および線分 D を抽出し（それぞれ $R_F = -1, 0, 0.97, 1$ ），右に各点および各線分における軸方向応力の分布を示す。

まず、本研究の計算モデルにおいては、先端に自重と同じ軸方向圧縮力が作用する場合（ $R_F = -1$, 点 A）や軸方向力がそもそも存在しない場合（ $R_F = 0$, 点 B）には、図のように圧縮応力のみが生じる応力分布となる。次に、数値解が得られる最大の張力パラメータの場合（ $R_F = 0.97$, 点 C），先端に体積力 γAL とほぼ同じ大きさの軸方向張力が作用することにより、固定端付近で圧縮応力がごく僅かに生じるものの、スパンのほとんどで引張応力が生じる状態となる。そして、体積力 γAL と全く同じ大きさの張力 T が作用する場合には（ $R_F = 1$, 線分 D），圧縮応力はどの位置でも完全に消失し、全スパンに渡って引張応力のみが生じる状態となる。

ここで重要であるのが、「座屈現象は圧縮力に起因して生じる不安定問題」ということである。 $R_F \geq 1$ のような全スパンに渡って引張応力のみが生じる場合には、そもそも座屈が発生しないため、その結果として式(5.2.3)の固有方程式を満足する ξ が得られなくなっていると考えられる。これらのことから、「構造力学的な観点からみると、 $R_F \geq 1$ を満たすような植物の最大高さは、自重座屈による制約を受けなくなる」といえる。

これを踏まえ、張力パラメータ R_F の定義（自重による体積力に対する張力 T の比： $R_F = T/\gamma AL$ ），および膨圧 p と張力 T の関係（ $T = \pi p r_i^2$ ）より、自重座屈によって高さが制約されるか否かについて、次の判別式が得られる。

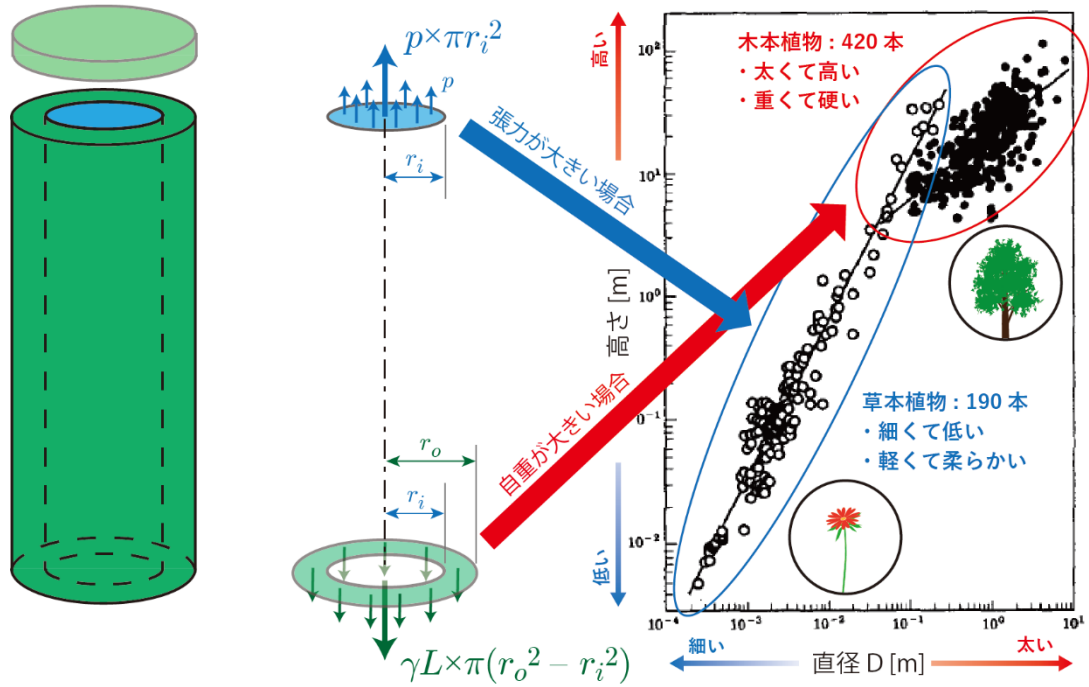


図-5.2.3 式(5.2.4)の概念図：卓越する剛性の判定と植物の分類 [4]

$$R_F = R_\sigma R_c \geq 1 \quad (5.2.4)$$

ここに、 R_s および R_c はそれぞれ次式で与えられる無次元量である。

$$R_\sigma = \frac{p}{\gamma L}, \quad R_c = \frac{r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} = \frac{R_h^2}{1 - R_h^2} \quad (5.2.5)$$

すなわち、 R_σ は自重により固定端で生じる最大応力 $\sigma_{max} = \gamma AL/A$ に対する膨圧 p の比（ $= p/\gamma L$ ）， R_c は断面の中空洞合いを表すパラメータである。式(5.2.4)を図示したものが図-5.2.3であり、これは膨圧により生じる合力である張力 T と、体積力によって底面に生じる圧縮力のどちらが大きいかを比較しているものである。このとき、張力の方が大きい場合は式(5.2.4)を満たし、高さ方向には引張応力のみが生じることとなるため、その植物は座屈現象によって高さが制限されることはない。言い換えれば、式(5.2.4)の判別式は、「曲げ剛性」と「幾何剛性」のどちらが支配的であることを示すものである。

この式を用いることにより、身体を支持する仕組みの観点から、植物を大きく二つに分類することが可能となると考えられる。なお、式(5.2.4)は多くの植物が有するテーパ形状を考慮したものではないが、テーパ形状においても、全スパンに渡って引張応力のみが作用する場合であれば、理論上は自重座屈の発生が回避できると予想される。

以上を踏まえ、木本植物と草本植物の力学的・形状的特性を考える。木本植物は、そのほとんどが「密実で重く、太く大きな身体」を有している。このような特性は、張力パラメータ R_F を小さくする働きをもつため、式(5.2.4)の条件を満足しない。これに対し、草本植物はそのほとんどが「中空で軽く、細く小さい身体」を有している。このよ

うな特性は張力パラメータ R_F を大きくする働きをもつため、草本植物では式(5.2.4)の条件が満足され、自重座屈の発生を回避している可能性が考えられる。このことは、Niklas [4,5]が述べているような「草本植物には Greenhill のスケーリング則が適合しない」という事実について、これを理論的に裏付けるものであると推測される。

また、式(5.2.4)を長さ L について解くと、次式が得られる。

$$L = \frac{p}{\gamma} \frac{R_c}{R_F} \quad (5.2.6)$$

すなわち、式(5.2.4)を満たす場合には、その最大高さは式(4.5.20)ではなく式(5.2.6)によって定まると考えられる。なお、式(5.2.6)は張力により生じる幾何剛性が卓越した状態を示すため、弾性係数 E を含まない形で表されている。また、分母に R_F が存在することから、体積力に対して張力をただ大きくしても、高さの向上には有効でないことが分かる。これは、式(5.2.6)が実質的には応力に基づく最大高さ式であることに由来すると推測される。

5.3 草本植物の測定データに基づく新しい分類則の検証

ここでは、「式(5.2.4)に示した自重による体積力と内部水分に起因する張力のどちらが大きいかわかる式が、木本植物と草本植物を定量的かつ明快に分ける規準として用いることが出来るのではないか」という仮説について、その妥当性を植物学分野における草本植物の実測データを用いて検証する。

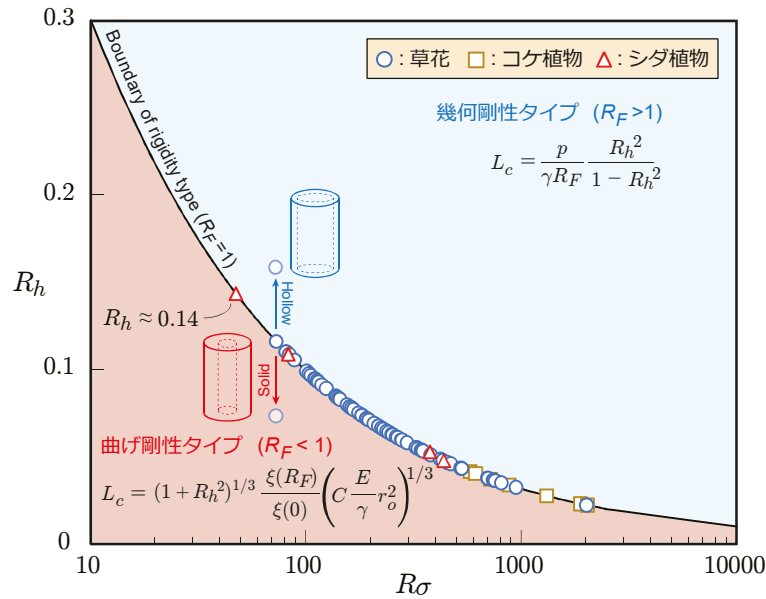


図-5.3.1 草本植物 76 種の測定データを用いた本研究における仮説の検証

図-5.3.1 には、Niklas の草本種 76 種に対する高さ L ・単位体積重量 γ に関する測定結果[6]を用いて、膨圧による引張応力と体積力による圧縮応力の比を表す R_σ について、 $R_F = 1$ となるような中空比 R_h を試行的に計算した結果を示す。図は縦軸に中空比 R_h 、横軸に式(5.2.5)の最大応力－膨圧比 R_σ を取って示したものであり、実線は式(5.2.3)を中空比 R_h について $R_F = 1$ として解いた結果である。すなわち、この図は、全ての植物における測定データより R_σ を計算し、これが実線に重なるような R_h を計算してプロットしたものである。そして、実線より上の領域に位置する場合、その形態は自重座屈を回避できることを意味し、その体は主に幾何剛性によって支持されていることを示す。実線より下の領域に位置する場合には、曲げ剛性が支配的であり、スケーリング則として式(4.5.20)が適用できると考えられる。なお、計算における膨圧 p は、76 種のすべてにおいて、先行研究[7]で報告されている一般的な値 $p = 0.3 \sim 1.0$ MPa の範囲から、下限である $p = 0.3$ MPa を用いた。また、○は草花、□はコケ植物、△はシダ植物を表す。

図より、中空比 R_h の最大値は、およそ $R_h \approx 0.14$ 程度である。すなわち、 $R_h \geq 0.14$ の範囲では、76 種すべてにおいて、幾何剛性による身体支持モード（青、○印）となる。いま、Niklas が計測した植物がすべて本研究の計算モデルのような薄肉円筒としてモデル化できるものであれば、草本植物の構造が極めて薄肉なものであることを踏まえると、

$R_h \geq 0.14$ の条件は満足されており、結果として全て式(5.2.4)を満たすことが予想される。このことは、実際の草本植物がその形態によって自重座屈の発生そのものを巧みに回避し、自身の体を水分に起因する幾何剛性によって支えていることを示唆するものである。

また、例えば断面がほとんど密実 ($R_c \approx 0$) である樹木や、中空であるものの内部が水で飽和していない竹 ($p \approx 0$) は、その背丈や重量も相まって、 $R_F \leq 1$ の範囲に位置していると予想される。すなわち、これらは曲げ剛性によって身体を支持していると考えられ、その結果として Greenhill の形状則が適合していることが予想される。図-5.3.2 には、以上の内容を図としてまとめたものを示す。

このように、本研究で導出した式(5.2.4)は、生態学的に極めて細分化されてきた既往の植物における分類に対して、力学的な身体支持メカニズムに基づき、明快に植物を分ける新たなルールとして適用できる可能性がある。ただし、その適用性に関しては、実測・統計的アプローチによる更なる検証が必要である。なお、以上の内容を論文にまとめたものについては、Proceedings of the National Academy of Sciences 誌に査読論文として投稿している[研究業績目録, 学術論文(5)]。

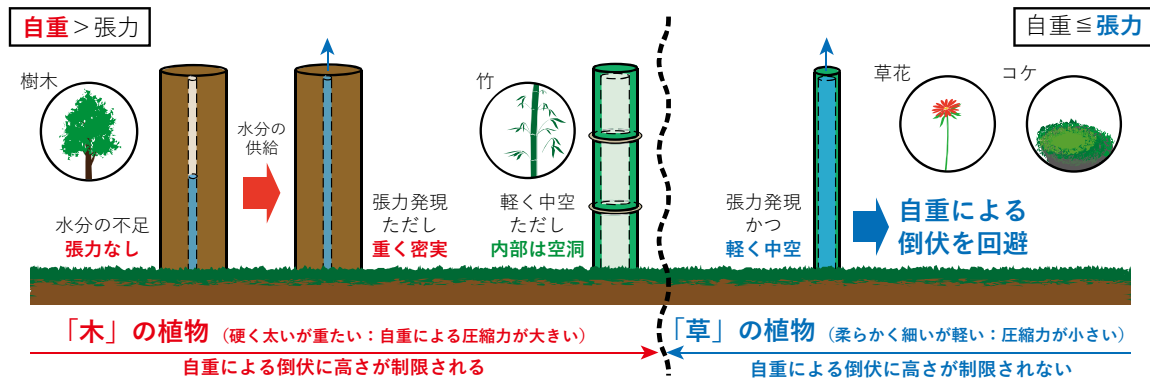


図-5.3.2 本研究により得られた新たな植物の分類法則

5.4 植物全体をつらぬくスケーリング則の洞察

本研究における植物形態のスケーリング則に関する結論を要約すると、以下の二点にまとめることができる。

- ① 本研究の力学理論に基づく重い柱における自重座屈問題の定式化の結果、曲げ剛性で体を支持することを前提とする硬く太い木本植物の場合、自重座屈に対する最大高さは必ず半径の $2/3$ 乗に比例する。これは、Greenhill の式および McMahon の検証によって提唱・証明された結果と矛盾しない。
- ② 幾何剛性によって自身の体を支持する草本植物には、 $2/3$ 乗の法則は適合しない。これは、体を支える仕組みが異なることに由来しており、草本植物の場合には、内部水分によって生じる軸方向の引張力が体積力による圧縮の力を打ち消すことで、自重座屈の発生そのものが回避されているためである。

既往の植物学的研究[4,5]では、全体的な一つの支配要因により、植物の高さ方向への成長限界が規定されるものとして考えられてきた。しかしながら、上で述べた本研究の結論は、単一的な要因で植物全体の形状則を記述することの限界を指摘し、植物の形態形成を支配する要因が特定の条件によって切り替わる可能性を示唆するものである。ここでは、前節で得られたスケーリング則のさらなる洞察を行い、植物形態をつらぬく形状則の解明を試みる。

まず、草本植物における統一的なスケーリング則の存在について言及する。表-5.4.1には、計 610 本の植物サンプル（木本植物 420 本、草本植物 190 本）の直径－高さ測定から得られたべき乗の統計的関係について、先行研究における結果をまとめたものを示す。

表-5.4.1 種別の高さ－直径間のべき乗則関係

種類	スケーリング指数 (高さ $H \propto$ 直径 D^α における α)	サンプル数
コケ類	1.10	40
シダ植物	1.59	16
双子葉草本	1.26	117
ヤシ	1.76	17
非木本種：草本植物 (すなわち、上 4 種の合計)	1.29	190
木本種	0.538	420

表は、植物学的な分類に基づき、それぞれのグループごとに回帰分析を行って得られたスケーリング指数と、回帰分析に用いられた種ごとのサンプル数を示す。なお、このスケーリング指数が、「高さが直径の何乗に比例するか」を表す「べき指数」である。

まず着目すべきは、草本植物の全体としてのスケーリング指数 ($=1.29$) と、種別のスケーリング指数が大きく異なっている点である。このことは、Niklas が示した直径－高

さ関係の図（例えば、**図-2.3.1**や**図-5.2.3**）では、草本植物を統一的につらぬくスケーリング則が存在するかのように見受けられるが、実際には種間で大きく異なる傾向を有していることを示している。また、双子葉草本に区分されるサンプルの総数は117本となっており、他の草本種に比べてサンプル数に著しい偏りが存在する。このことが、Niklasの成果が草本植物における統一的なスケーリング則の存在を仄めかす要因となっていると考えられる。なお、木本植物のスケーリング指数は、被子植物の木本と裸子植物の木本が一つの分類によって扱われた結果であるが、両者に対して個別に得られているべき指数はわずか0.05程度の差であり、草本に比べると極めて小さなものである[4]。

また、本研究の知見をこのデータを用いて洞察する上では、「成長過程における身体支持メカニズムの転換」がデータ上に考慮されていないことに留意する必要がある。植物はその成長過程において、幾何剛性で体を支持する段階と、曲げ剛性で体を支持する段階が存在すると考えられる。例えば樹木における「芽」の状態は、自身の身体を支えるのに十分な曲げ剛性を有していないと予想され、これは幾何剛性によって身体を支持しているものと推測される。他にも、伸長成長を開始する前の竹の状態である「タケノコ」と、伸長成長が終了し成熟した竹の状態では、体を支える仕組みが異なっているものと予想される。しかしながら、このような身体支持の違いは**表-5.4.1**の結果において考慮されておらず、これはあくまで一般的な植物学の定義に基づいて分類され、その中で個別に回帰分析を行った結果であることに留意する必要がある。

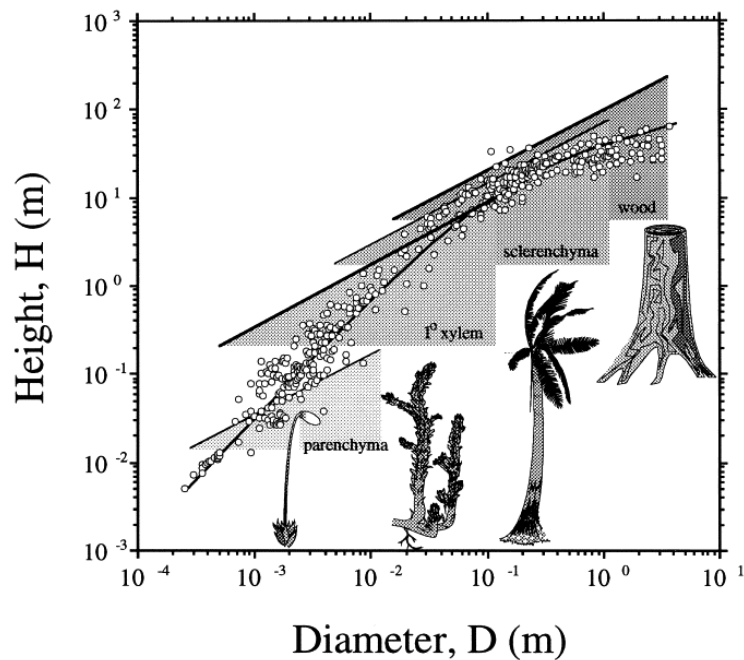


図-5.4.2 陸上植物 418 種における高さ一直径関係 [8]

図-5.4.2 には、幹および茎を形成する主成分の観点から、高さ一直径関係を調査した先行研究の結果を示す ([8]より引用)。図中における○印は、計 418 本の陸上植物における高さ・直径のデータであり、「wood (”二次”木部)」「sclerenchyma (厚壁組織)

¹⁴「1⁰xylem(“一次”木部, すなわち二次肥大成長が明瞭でない植物の木部)」「parenchyma(柔組織)」に関する実線は, その材質のみで形成される幹および茎をもつ植物を仮定し, これを主成分とする植物においてみられる一般的な直径の範囲内で, Greenhill の 2/3 乗則の関係に当てはめたものを試験的に示したものである.

図より, 樹木やヤシのような木化が良好に発達する種 (wood および sclerenchyma) においては, Greenhill の 2/3 乗則によく適合した結果が得られていることが分かる. これらに対し, 木化の進行が顕著でない種の場合 (1⁰xylem および parenchyma) においては, 2/3 乗則から大きく逸脱した結果を示している. そして, 曲げ剛性では体を支持できないと予想される 1⁰xylem と parenchyma の 2/3 乗則に対する逸脱度合いを比較すると, これもまた大きく異なる結果を示しており, 柔組織のみで構成される曲げ剛性が著しく小さい場合には, より 2/3 乗則から逸脱することが読み取れる. このことは, 幾何剛性によって身体を支持していると予想される草本類の場合には, 茎の主成分に応じてスケーリング則が変化することを示唆するものであり, 草本植物の多様性を裏付ける結果である.

以上のように, Niklas の研究成果をはじめとして, 既往の植物学的研究では草本植物に統一的なスケーリング則が存在しないことが示されている. これを力学的観点から検証するために, 本研究で得られた草本植物 (幾何剛性で体を支持する植物) における最大高さ式について考察する.

ここで, 草本植物の最大高さ式 (式(5.2.6)) は, 次のように書き変えることができる.

$$L_c = \frac{\sigma_a}{\gamma} \quad (5.4.1)$$

ここに, σ_a は表皮の引張強度である. 式(5.4.1)の物理的な意味は至ってシンプルであり, 「体積力によって生じる圧縮応力を打ち消すための引張力を作用させる上で, これに伴って生じる引張応力に表皮が耐えられなければならない」ということを意味するものである. また, 上式は水理学的条件を含むものであり, 水分の供給がなされ, 膨圧が十分に発現されていることを前提に適用できるものである. すなわち, 水分輸送上の問題をクリアしていることが前提となっている式であり, 一般的な水理学的制限[9]よりもシビアな状態を表していると考えられる.

式(5.4.1)には, 半径に関するパラメータが全く含まれておらず, 材質そのものの特性によって最大高さが規定されることを示すものである. 筆者の知る限りでは, 現段階において, 草本植物の表皮における引張強度や茎の半径, あるいは単位体積重量と半径に関する統計的關係は明らかにされていない. この点に関しては更なる調査が必要であるものの, 逆説的に考えると, この結果は「引張強度」と「半径」の間にスケーリングが存在することを示唆するものである. 先に取り挙げた草本種に関するスケーリング則の研究[4]に加え, Niklas and Spatz [10]は, 経験則に基づく力学的作用に依存しない草本植物のアロメトリー関係を用いて植物の驚くべき多様性を指摘し, 植物全体を支配するスケ

¹⁴ 二次成長が明瞭でないヤシのような植物における木部のことを指す. 木化そのものは進行している状態であるため, 材質的な硬さは発現されているものと予想される.

ーリング則は存在しないものと結論付けている。この結論と本研究の結論は矛盾するものではなく、それは本研究が「張力と体積力のバランス」によって木本と草本で形状則が切り替わり、かつ草本植物には種別にスケーリング則が存在する可能性を指摘しているためである。

以上のように、本研究の成果は、経験則に基づく草本植物におけるスケーリング則の多様性を力学理論の観点から裏付けるとともに、引張強度と半径の間にスケーリング関係が存在する可能性を新たに示しただけでなく、木本植物と草本植物のスケーリング則が異なる理由を理論ベースで明快に説明することに初めて成功したものである。

また、草本植物の多様性は、膨圧の巧みな利用によって重力の影響を回避することで、木本植物に比べて環境への適合に傾倒することが可能となったことに起因していると推測される。このことは、木本・草本における生息域の違いからも説明することができる。

例えば、植物の生息域に関して「森林限界」という言葉がある[11]。森林限界とは、針葉樹などの高木が生い茂っている亜高山帯と、低木や草本類のみからなる低木帯（高山帯）が切り替わる場所のことである。高山帯では高木は育つことはできず、これより上の高度では草本植物または低木のみが植生している。また、水中で生活を営む草本類である水生植物をはじめとして、草本植物は基本的に木本植物よりも極めて多様な環境下で生息している[12]。以上のような例は、内部水分による張力を活用した自重座屈の回避により、草本植物が豊かな環境への適合性を獲得している可能性を示唆するものである。

さらに、寿命の長さという観点もまた、形状則の存在とその消失に関連していると考えられる。木本植物は草本に比べ極めて長寿な植物であり、その過程において様々な外的作用に抵抗しつつ、とりわけ重い体を支え続けなくてはならない。このことは、力学挙動に影響を与える因子の中で、木本植物にとって最も長い時間をかけて向き合い続けなければならない作用が「重力」であることを示している。したがって、木本植物は自重座屈によって規定される形状則に従っているものと推測される。

これに対して、草本植物は地上部が越冬しない「一年草」をはじめとして、樹木に比べ寿命が短いものが多い[13]。しかしながら、種子から発芽して開花し、枯れるまでのサイクルを短くするという戦略は、その場で長い年月ものあいだ拘束され続ける樹木に比べ、あらゆる環境に適合しやすくなることは明らかである。このような生命サイクルの短周期化もまた、草本植物の形態を多様化させている一つの要素であると考えられる。

以上のような草本植物の多様性は、結果として自身の身体を形成する材質に多様性を与えているものと予想される。これによってそれぞれの引張強度が種別に異なるために、草本においては種別に形状則が異なっているのではないかと推測される。この仮説の妥当性については、今後の実験的検証によって明らかにしていきたい。

参考文献

- [1] Greenhill, A.-G., Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical pole or mast can be made, and the greatest height to which a tree of given proportions can grow, *Proc. Camb. Philol. Soc.* **4**, 62-73 (1881).
- [2] McMahon, T. A., Size and shape in biology-elastic, *Science*, **179**, 1201-1204 (1973).
- [3] McMahon, T. A. & Kronauer, R. E., Tree structures: deducing the principle of mechanical design, *J. Theor. Biol.*, **59**, 443-466 (1976).
- [4] Niklas, K. J., The scaling of plant height: A comparison among major plant clades and anatomical grades, **72**, *Ann. Bot.*, 165-172 (1993).
- [5] Niklas, K. J., Influence of tissue density-specific mechanical properties on the scaling of plant height, *Ann. Bot.*, **72**, 165-172 (1993).
- [6] Niklas, K. J., Plant height and the properties of some herbaceous stems, *Ann. Bot.*, **75**, 133-142 (1995).
- [7] Wei, C. & Lintilhac, P. M., Loss of stability: A new look at the physics of cell wall behavior during plant cell growth, *Plant, Physiol.*, **145**, 763-772 (2007).
- [8] Niklas, K. J., The influence of gravity and wind on land plant evolution, *Rev. Palaeobot. Palynol.*, **102**, 1-14 (1998).
- [9] Ryan, M. G. & Yoder, B. J., Hydraulic limits to tree height and tree growth, *BioScience.*, **47**, 235-242 (1997).
- [10] Niklas, K. J. & Spatz H.-C., Growth and hydraulic (not mechanical) constraints govern the scaling of tree height and mass, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **101**, 15663_1-3 (2004).
- [11] 岡 秀一, わが国山岳地域における森林限界高度の規定要因について, 地学雑誌 (*Journal of Geography*), **100**, 673-696 (1991).
- [12] 福原達人, "5-1. 木本と草本", <https://staff.fukuoka-edu.ac.jp/fukuhara/keitai/5-1.html> (参照 2023-12-01).
- [13] 山田常夫ら編集, 岩波生物学辞典 第3版, 岩波書店, (1989).

第 6 章 結論

本論文は、力学的見地から植物形態に潜む構造力学的学理を広く探究し、その知見を整理・洞察することで、植物の形を支配する法則をはじめとする「植物が多様な形態の奥底で守り続けてきた叡智」を明らかにすることを目的としたものである。これを達成すべく、自重座屈問題に対する安定性の指標である「最大高さ」に着目し、植物形態に潜む多様な力学的合理性を解明するための力学モデルを構築するとともに、これに対応する自重座屈理論の開発を行った。本章では論文を総括し、今後の展望について述べる。

6.1 本研究の総括

まず、本研究で得られた主要な知見は以下の通りである。

- ① 本研究で取り扱ったモデルの範囲内においては、硬く重たい木本植物の自重座屈に対する最大高さは、どのような場合においても半径の $2/3$ 乗に比例する。これは Greenhill [1] および McMahon [2,3] が理論・実測の両面から示したものと同様の結果であり、この法則が木本植物に対して普遍的なものであることが分かった。
- ② 自重座屈特性を向上させる主なアプローチである「幹や茎における先端に向かって細くなっていくテーパ形状」と「断面内を空洞にして軽量化を図る断面の中空化」の最大高さへの影響について、植物の中でも特に高さを必要とする木本植物の生存戦略と照らし合わせて洞察した。その結果、光を求めて高く成長する木本植物では、テーパ形状の採用が最も優先されるべきであることが分かった。また、個々が独立した個体で地上部が長く残存し、様々な作用に対して壊れることなく抵抗し続ける必要がある樹木においては、テーパ形状のみを採用している。これに対して、複数の地上部が地下茎で接続されている竹の場合には、個々の破壊リスクが増加してしまうものの、テーパ形状と中空断面の双方を同時に採用することで、各個体への資源配分を抑えつつ「集団」として巧みに生存する方針を選択していると考えられる。
- ③ Niklas [4] により報告された「Greenhill の式から推定される理論上の最大高さは、実際の樹木の 4 倍程度」という事実について、この「4 倍」という安全率は、成長過程で起こり得る形状の初期不整や初期傾斜、地盤-根系の固定力の不完全性を念頭に置いた上で極めて巧妙に選択されたものであることが明らかになった。これは、この安全率を人為的なものとして結論づけ、自重座屈による最大高さの制約仮説を棄却している既往の研究[5]について、その考察を再考する必要性を指摘するものである。

- ④ 自重による体積力と内部水分がもたらす膨圧による張力のバランスに応じて、植物の力学的なスケーリング則が変化することが分かった。内部水分がもたらす張力が体積力を上回る場合には、「内部水分による疑似的な硬さである”幾何剛性”」が卓越した状態となり、その最大高さは自重座屈現象に支配されることがなくなる。
- ⑤ ④を踏まえ、主として幾何剛性によって身体を支持していると推測される草本植物について、草本類 76 種の実測データ[6]をもとに、内部水分による張力と自重による体積力の比を推定した。その結果、76 種の全ての草本植物において、張力の影響が自重の影響を上回っており、これにより草本植物の高さは自重座屈現象に支配されることがなく、その結果として Greenhill の $2/3$ 乗則に適合しなくなることが明らかになった。この体積力と張力の大きさが釣り合う「形状則が切り替わる点」は、既往の植物学では明快な分類が困難であった竹のような植物も含めて、「木本植物と草本植物を明快に分けることができる規準」として応用できるものである (図-5.3.2)。
- ⑥ 最終的に得られた草本植物の力学的なスケーリング則は、「”自重の影響を打ち消すための膨圧”に伴って生じる引張応力に耐えられる引張強度」によって規定されることが分かった。これはあらゆる植物の共通項である「重力」から逸脱したスケーリング則であり、既往の研究でも指摘されている草本植物の形態学的な多様性[5]を裏付けるものであると考えられる。

本研究は、工学分野で研ぎ澄まされてきた「モデル化」という武器を用いて、植物形態に潜む力学的合理性をはじめとする様々な知恵を紐解き、その知見を植物学における統計・測定データを用いて検証することにより、工学・植物学の両面で価値の高い知見の獲得に成功したものである。このアプローチは、工学・植物学がそれぞれ単一的に研究を進める従前の研究体系では、決して到達できない知見の獲得をもたらした。また、本研究により、工学と植物学を結びつけ、両者の叡知を双方向的に応用可能な新しい研究体系の礎を築き上げることができたと考えられる。これからも、様々な環境に適合する植物の知恵から、モノづくりへ生きる知見を学ぶだけでなく、研究を進める過程で工学の新しい応用可能性を見出し、異分野と融合した革新的な研究を展開していきたい。

6.2 今後の展望

本論文の内容を踏まえ、本節ではこれからの研究の展開について述べる。

6.2.1 力学モデルの共通性を応用する研究体系の確立

これまでは、柱や梁などの人工物に対して構築された力学理論を、梁や柱と等価な力学モデルに帰着可能な「植物」に応用してきた。特に、第4章では張力を活用した構造としての草本植物を取り上げ、その力学的合理性を解明するための理論開発を行ったが、このような張力を活用した現象は、幾何剛性の例において取り挙げたものをはじめとして、身近に多様な事例がいくつも存在する。

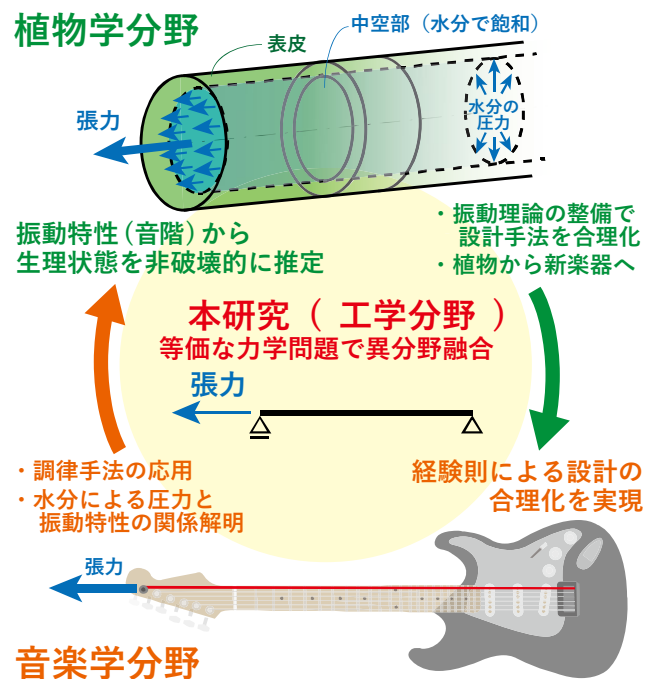


図-6.2.1 将来的な研究の概念図

例えば、細長い形状で張力を活用する「草本植物」と「弦楽器」は、力学モデルとしては全く等価な問題である。ここで、異なる目的に対して蓄積されてきた植物学と音楽学の叡知について、両者を力学の言葉を共通言語として融合させることで、両分野が抱える課題の解決が実現できるのではないかと考えられる。

(1) 植物の優れた知恵を活かした楽器設計プロセスの合理化と新楽器の創造

従来の楽器の設計は、その多くが経験則に依存したものとなっており、数値シミュレーションに基づく設計の合理化が望まれている[7]。そこで、草本植物と弦楽器が力学モデルとして等価であることに着目するとともに、植物の膨圧を考慮した振動理論の開発により、生体の優れた知恵を活用する生物形態模倣の観点から、楽器設計プロセスを合

理化するための知見を獲得できると考えられる。

さらに、異なる目的を持って発展してきた二つの学術分野の融合により、植物のユニークな振動特性に着想を得た新楽器の創造をはじめとして、音楽分野における芸術の幅を工学・植物学の観点から拡大する、学際的知見の獲得をもたらす研究体系が実現できると予想される。

(2) 調律手法を応用した力学理論に基づく植物の生理状態推定手法の開発

内部水分に起因する膨圧は、植物の力学的安定性を支配する重要な指標である。しかしながら、従来の膨圧測定手法は高価な測定機器を要し、かつサンプルの破壊を伴うものが主流となっている[8]。そこで、本研究では膨圧を含む振動理論を整備し、音響学の理論から膨圧と音階の関係を導くことで、安価で非破壊的に音階が測定可能な「チューナー」を用いた膨圧測定手法の開発を試みる。

学術的な専門分野には、それぞれに先人が蓄積してきた卓越した強みがある。この強みを最大限活用するための研究展開として、力学の言葉を共通言語として各学術分野の叡知を相互に応用する研究体系の確立を目指したい。これは、それぞれ異なる目的を持って発展を遂げてきた学術分野の叡知を様々なベクトルで活用し、例えば力学理論による植物の幾何剛性に関する研究のように、各分野が行き詰まっている問題を明瞭に解決するフレームワークの構築を可能とするものである。

参考文献

- [1] Greenhill, A.-G., Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical pole or mast can be made, and the greatest height to which a tree of given proportions can grow, *Proc. Camb. Philol. Soc.* **4**, 62-73 (1881).
- [2] McMahon, T. A., Size and shape in biology-elastic, *Science*, **179**, 1201-1204 (1973).
- [3] McMahon, T. A. & Kronauer, R. E., Tree structures: deducing the principle of mechanical design, *J. Theor. Biol.*, **59**, 443-466 (1976).
- [4] Niklas, K. J., Interspecific allometries of critical buckling height and actual plant height, *Amer. J. Bot.*, **81**, 1275-1279 (1994).
- [5] Niklas, K. J. & Spatz H.-C., Growth and hydraulic (not mechanical) constraints govern the scaling of tree height and mass, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.*, **101**, 15663_1-3 (2004).
- [6] Niklas, K. J., Plant height and the properties of some herbaceous stems, *Ann. Bot.*, **75**, 133-142 (1995).
- [7] Stulov, A., Physical modelling of the piano string scale, *Appl. Acoust.*, **69**, 977-984 (2008).
- [8] Wang, L., Hukin, D., Pritchard, J. & Thomas, C., Comparison of plant cell turgor pressure measurement by pressure probe and micromanipulation, *Biotechnol. Lett.*, **28**, 1147-1150 (2006).

記号一覧

A : 梁および柱の断面積 23
 A_i : 内径がなす断面積 94
 A_o : 外径がなす断面積 94
 $Ai(x)$: 第一種 Airy 関数 27

 $Bi(x)$: 第二種 Airy 関数 27

 C : 定数 9
 c_n : 微分方程式の一般解における
任意定数 ($n = 1, 2, \dots$) 24

 D : 直径 38
 D_h : 胸高直径 148
 D_R : 張力による最大たわみの抑制率 175

 E : 弾性係数 8

 g : 重力加速度 67

 ${}_0F_1(a; z)$: 合流型超幾何関数 28
 ${}_pF_q(a; b; z)$: 一般化された超幾何関数 32

 H : 実際の植物の高さ 35
 H_{crit} : 理論上の最大高さ 35

 I : 断面二次モーメント 8

 $J_\eta(x)$: 次数 η の第一種 Bessel 関数 24
 $j_{\eta,n}$: 第一種 Bessel 関数の n 番目の零点 25

 $K(a)$: a に関する第一種完全楕円積分 36
 K_n : 数値積分におけるダミー変数 116
 K : 中空円筒の自重座屈に対する
安全率に関するパラメータ 93

 L : 部材の長さ 8
 L_c : 自重座屈に対する最大高さ 9
 L_{cs} : Greenhill の式に基づく最大高さ 91
 L_m : FEM モデルの部材の長さ 62
 L_{real} : 実際の”樹木の”高さ 77

$M(x)$: 曲げモーメント 23

 N : 微分方程式の
級数解における展開次数 31
 n : 重量分布パラメータ 65

 P : 集中荷重 (特に圧縮) 113
 P_c : 座屈荷重 8
 p : 膨圧 166

 q : 単位長さ当たりの自重 173

 R_α : 任意のパラメータ同士の無次元量 197
 R_E : 弾性係数比 109
 R_F : 張力パラメータ 185
 R_L : 最大高さ比 54
 R_M : 回転剛性パラメータ ($= 2s_k/\gamma AL^2$) 139
 R_P : 圧縮力比 ($= P/\gamma AL$) 113
 R_W : (最大)重量比 77
 R_c : 薄肉度合いに関するパラメータ 201
 R_h : 中空比 ($= r_i/r_o$) 85
 R_r : 半径比 107
 R_s : 剛性比 ($= L\sqrt{T/EI}$) 176
 R_t : テーパー比 ($= r_o/r_L$) 46
 $R_{w(\text{Max})}$: 最大たわみ比 176
 R_x : 相対座標 ($= x/L$) 176
 R_θ : 初期不整パラメータ 118
 R_ρ : 限界密度比 90
 R_σ : 応力比 201
 r : 梁および柱断面の半径 9
 r_0 : 先端部の半径 46
 r_L : 固定端の半径 46
 r_o : 外半径 85
 r_i : 内半径 85
 $\bar{r}$: 断面二次半径 88

 $S(x)$: せん断力 23
 S_F : 自重座屈に対する安全率 135
 s_k : 回転ばねの剛性 138

*ページ番号は、いずれも式としての定義が初出となるページのみを記載

T : 張力 165
 t : 円筒の（表皮の）厚さ 166

V : 体積 67
 V_m : 有限要素解析における
計算モデルの体積 62

$W(x)$: 重量（体積力） 23
 w : はりのたわみ 23
 w_i : 初期不整分のたわみ 113
 w_{i0} : 自由端における
初期不整分のたわみ 113
 w_n : 初期傾斜分のたわみ 123
 w_{n0} : 自由端における
初期傾斜分のたわみ 123
 w_s : 自重座屈分のたわみ 123
 w_{s0} : 自由端における
自重座屈分のたわみ 123

x : 座標に関するパラメータ 23

β_V : 体積補正係数 48

$\Gamma(x)$: Gamma 関数 25
 γ : 単位体積重量 9

Θ : 中空円筒の自重座屈特性における
安全率に関するパラメータ 92
 θ : たわみ角 23
 θ_L : 地面側の端部におけるたわみ角 138
 θ_s : 自重座屈分のたわみ角 113
 θ_{s0} : 自由端における
自重座屈分のたわみ角 113
 θ_i : 初期たわみ分のたわみ角 113
 θ_{i0} : 自由端における
初期たわみ分のたわみ角 113
 θ_n : 初期傾斜分のたわみ角 123

κ : 剛性比パラメータ($=\sqrt{T/EI}$) 174

Λ : テーパーに関する
パラメータ($= (1 - R_t)/L_c$) 47
 λ_t : 肉厚のパラメータ ($=r_i/t$) 178
 λ_s : 細長さのパラメータ ($=L/r_i$) 178
 λ_q : 座屈荷重係数 62
 λ_{qc} : 限界自重座屈荷重パラメータ 62

ρ : 密度 65
 ρ_0 : 基準位置における密度 65
 ρ_T : 幹の密度 76
 ρ_B : 枝葉の密度 76
 ρ_c : 限界密度 89
 ρ_m : FEM モデルの密度 62

σ : 応力 166
 σ_a : 引張強度 207

ξ : 変数変換用の座標パラメータ($=\omega x$) 26
 ξ_c : 固有値($=\omega L_c$) 28
 $\xi_{c(sol)}$: 正の最小の固有値 28

ω : 変数変換パラメータ（定数） 25

研究業績目録

学術論文（学位論文関係）

- (1) 金浜瞳也, 藤村高憲, 佐藤太裕, “テーパーを有する樹木の自重座屈に対する限界高さの導出”, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.77, pp.62-71 (2021).
- (2) Tohya Kanahama and Motohiro Sato, “Mathematical modelling to determine the greatest height of trees”, Scientific Reports, Vol.12, pp.2039_1-15 (2022).
- (3) Tohya Kanahama and Motohiro Sato, “Summation rules in critical self-buckling states of cylinders”, Mechanics Research Communications, Vol.123, pp.103905_1-7 (2022).
- (4) Tohya Kanahama, Satoru Tsugawa and Motohiro Sato, “Rigidity control mechanism by turgor pressure in plants”, Scientific Reports, Vol.13, pp.2063_1-9 (2023).
- (5) Tohya Kanahama and Motohiro Sato, “Mechanics-based classification rule for plants”, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol.120, pp.e2308319120_1-5 (2023).
- (6) Tohya Kanahama and Motohiro Sato, “Plant strategies for greatest height: tapering or hollowing”, Scientific Reports, Vol.13, pp.18158_1-12 (2023).
- (7) Tohya Kanahama, Carol Lee Chalermisin and Motohiro Sato, “Mechanical instability of heavy column with rotational spring”, Journal of Mechanics, Vol.39, pp.480-490 (2023).
- (8) Tohya Kanahama and Motohiro Sato, “Self-buckling with initial imperfections: application to trees”, International Journal of Engineering Science, Vol.194, pp.103972_1-18 (2024).

学術論文（その他）

- (1) 渡辺 力, 金浜瞳也, 佐々木恵一, “異方性積層板の自由振動解析における厳密解の導出と改良 ZIG-ZAG 理論の精度検証”, 構造工学論文集 A, Vol.66A, pp.187-200 (2020).

国際学会における発表（学位論文関係）

- (1) Tohya Kanahama, Takanori Fujimura, Motohiro Sato, “Growing rule in tapered trees under self-weight loading”, The 2021 World Congress on Advances in Structural Engineering and Mechanics (ASEM21), Online (August 2021).
- (2) Tohya Kanahama, Motohiro Sato, ” Effect of turgor pressure on the deflection in plants” , The 2023 World Congress on Advances in Structural Engineering and Mechanics (ASEM23), Seoul, Korea (August 2023).

国内学会における発表（学位論文関係）

- (1) 金浜瞳也, 藤村高憲, 佐藤太裕, 「樹木のテーパー形状が限界高さに与える影響」, 土木学会応用力学委員会, 第 24 回応用力学シンポジウム (2021 年 5 月).
- (2) 金浜瞳也, 藤村高憲, 佐藤太裕, 「樹木の幹形状と樹冠重量および位置が自重座屈耐性に与える影響」, 土木学会, 令和 3 年度土木学会全国大会 第 76 回年次学術講演会 (2021 年 9 月).
- (3) 金浜瞳也, 佐藤太裕, 「樹木の重量分布が自重座屈耐性に与える影響」, 日本機械学会, M&M2021 材料力学カンファレンス (2021 年 9 月).
- (4) 金浜瞳也, 佐藤太裕, 「テーパー形状と中空断面が自重座屈耐性に与える影響」, 土木学会応用力学委員会, 第 25 回応用力学シンポジウム (2022 年 5 月).
- (5) 津川 暁, 入口大修, 金浜瞳也, 佐藤太裕, 三村徹郎, 細川陽一郎, 「シャジクモの力学と張力構造」, 日本機械学会, M&M2022 材料力学カンファレンス (2022 年 9 月).
- (6) 蜂谷啓人, 金浜瞳也, 佐藤太裕, 「有限要素法による樹木の重量分布を考慮した自重座屈解析」, 日本機械学会, M&M2022 材料力学カンファレンス (2022 年 9 月).
- (7) 金浜瞳也, 佐藤太裕, 「中空断面を有する植物の自重座屈に対する最大高さ」, 日本機械学会, M&M2022 材料力学カンファレンス (2022 年 9 月).
- (8) 金浜瞳也, 佐藤太裕, 「なぜ草本植物には $2/3$ のべき乗則が適用できないのか?」, 明治大学先端数理科学インスティテュート, CMMA 共同研究集会: 植物の「カタチ」と「チカラ」を解き明かす 2023 (2023 年 9 月).
- (9) 三島佑太, 金浜瞳也, 蜂谷啓人, 佐藤太裕, 「膨圧と断面形状が織り成す相互作用の力学的理解」, 日本機械学会 M&M2023 材料力学カンファレンス (2023 年 9 月).
- (10) 金浜瞳也, 佐藤太裕, 「植物の膨圧を考慮した自重座屈に対する最大高さ」, 日本機械学会, M&M2023 材料力学カンファレンス (2023 年 9 月).

国内学会における発表（その他）

- (1) 金浜瞳也, 渡辺 力, 「Global-Local 重合理論による異方性積層板の厚板解析」, 土木学会北海道支部, 平成 29 年度年次技術研究発表会 (2018 年 1 月).
- (2) 金浜瞳也, 渡辺 力, 「三次元弾性理論に基づく周辺単純支持異方性積層板の自由振動解析」, 土木学会北海道支部, 平成 30 年度年次技術研究発表会 (2019 年 1 月).
- (3) 善端佑太, 金浜瞳也, 小川景太郎, 佐藤太裕, 「植物の多彩な断面形状が力学特性に与える影響」, 日本機械学会, M&M2023 材料力学カンファレンス (2023 年 9 月).

謝辞

本研究を遂行するにあたり、多くの方々によるご指導とご協力を賜りました。本論文は、周囲で支えてくださった皆様の存在なくしては書くことができないものでした。心より感謝申し上げます。

指導教員である佐藤太裕教授に、深く感謝申し上げます。佐藤先生には、函館高専在学時のインターンシップよりお世話になっており、当時は私が高専専攻科の特別研究で取り組んでいた「異方性積層板の振動特性に関する研究」を踏まえ、樹木の振動特性に関するテーマを与えてくださいました。この経験を通して、構造力学・材料力学を用いて自然の仕組みを紐解くことの面白さに出会い、研究に対するモチベーションが飛躍的に高まりました。そして、当時はうっすらとしていた「大学院に進学できた際には、博士に進んで研究に打ち込みたい」という気持ちが、強いものへと変わっていきました。

大学院への進学後も、ご多忙の中で研究について多くの議論をさせていただいただけでなく、私の将来や進路に関しても、常に気にかけてくださいました。修士一年の夏、博士課程に進学したい意志を先生にお伝えすると、先生はすぐさま博士課程への進学後を見通し、学術誌に投稿する論文の作成や、日本学術振興会特別研究員の申請書作成など、ありとあらゆる場面で熱心にご指導くださいました。

博士課程における研究は、修士課程よりも遥かにつらく、とても厳しいものでした。とりわけ博士課程への進学直後は、全く思うように研究が進まず、研究に対する熱意を失ってしまいそうになることもありました。それでも、いつでも正面から向き合ってください先生のおかげで、博士課程へ進学したことを悔やむようなことは、これまで一時もありませんでした。土木学会北海道支部の年次技術研究発表会で先生の竹に関する研究と出会い、こうして先生のご指導のもとで博士課程を過ごすことができたのは、本当に僥倖であったと感じます。重ねて感謝申し上げます。

本研究に関して、多くの先生方に多大なご協力・ご助言をいただきました。山梨大学大学院総合研究部の島弘幸教授には、定期的に研究について議論させて頂き、多数のご助言を賜りました。また、MIMS 共同研究集会において「植物の形状則に関する研究」について発表させていただいた経験は、本論文を執筆する上で欠かすことのできない大きな経験となりました。秋田県立大学システム科学技術学部の津川暁助教には、植物の内部水分がもたらす膨圧による幾何剛性の理論的研究をはじめとして、実験・実測的な見地から、研究に関する多数のご助言をいただきました。山梨大学大学院総合研究部の秋葉祐里助教には、研究の面だけでなく、日本学術振興会特別研究員の申請書作成においても、多数のご助言とご指導をいただきました。心より感謝申し上げます。

ご多忙の中、本学位論文の副査をお引き受けいただきました北海道大学大学院工学研究院の中村孝教授、佐々木克彦教授、加藤博之准教授に深くお礼申し上げます。博士論文審査会で先生方よりあたたかなご助言を多数いただいたことで、公開論文説明会へ向けて論文および発表の質を大きく高めることが出来ました。重ねてお礼申し上げます。

函館高専在学時の指導教員である函館高専社会基盤工学科の渡辺力教授に、深く感謝申し上げます。私がこの学問に興味を持ち、博士課程への進学を意識するようになったきっかけこそ、先生が担当されていた「構造力学」の授業でした。今でも、研究の中で復習したいことに直面したときはもちろん、研究への意欲や熱意を失いそうになったとき、まずは当時の授業ノートを見返して、この学問を面白いと感じたときの気持ちを思い出すようにしています。私が渡辺先生の研究室に配属となった以降も、先生は私の専攻科修了後を踏まえたうえで、お忙しい中でとても熱心にご指導くださいました。このときの経験は、私の修士・博士課程における研究生生活の礎となっております。心より感謝申し上げます。

函館高専社会基盤工学科の平沢秀之教授には、非常に様々な面でお世話になりました。特に、専攻科でのインターンシップをはじめとして、私の進路関係について深く相談に乗っていただきました。博士課程への進学後も私を気にかけてくださり、先生より時折いただいた激励の言葉は、博士課程における険しい研究生生活を乗り越えるための大きな励みとなっていました。心より感謝申し上げます。

北海道科学大学 工学部都市環境学科の蟹江俊仁教授に、深く感謝申し上げます。構造システム研究室への受け入れを蟹江先生に承諾していただいたことで、私は大学院での研究生生活を始めることができました。私が博士課程へ進学し、材料力学研究室の所属となった後も、いつも私の近況を気かけ、学内でお会いした際には必ず励ましの言葉をくださいました。ハルビン工科大学の鄭好教授には、インターンシップで右も左も分からない私を常に気にかけてくださり、そして大学院への進学後も親身にご指導いただきました。重ねて感謝申し上げます。

本研究室の秘書である沼田さんには、出張関係や物品購入をはじめとする種々の手続き関係だけでなく、生活面に関する様々な相談にも快く応じていただきました。構造システム研究室・材料力学研究室を修了した同期の皆さんには、社会人として多忙な日々を送る合間で私の投稿論文を読み、あたたかな励ましのコメントを送っていただきました。また、研究室の後輩たちの支えも非常に大きいものでした。特に、昨年度修士課程を修了した佐々木重也君、そして現修士二年の小川景太郎君、仲本義邦君、蜂谷啓人君には、ゼミでの頼もしいコメントをはじめとする研究面での支えだけでなく、研究の息抜きにいつも快く付き合ってくださいました。本当にありがとうございました。

最後に、私の博士課程における研究生生活を支えてくださった皆様、そして学業全般にわたって経済的・心身的に支援してくださった家族に、心より感謝申し上げます。

令和6年2月19日 金浜 瞳也