学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　　氏　名　　高田　佑太

学 位 論 文 題 名

Characteristic polynomials of isometries of even unimodular lattices
and dynamical degrees of automorphisms of K3 surfaces
（偶ユニモジュラー格子の等長変換の固有多項式と K3 曲面の自己同型の力学的次数）

格子とは，有限生成自由 $\mathbb{Z}$ 加群で非退化対称双線型形式（以下，単に内積）を備えたもののことである．偶ユニモジュラー格子は，任意の元の自己内積が偶数で，かつ，内積に関して自己双対的な格子のことである．また，K3 曲面とは，楕円曲線のある種の二次元版で，コンパクト複素曲面の重要なクラスをなしている．

2000 年頃から「コンパクト複素曲面上の自己同型の力学的次数としてどのような数が実現可能か」という問題が考えられている．ここでコンパクト複素曲面 Σ の自己同型 ϕ の力学的次数とは，その 2 次コホモロジー群 $H^2(\Sigma,\mathbb{C})$ への誘導 ϕ^* のスペクトル半径，すなわち固有値の最大絶対値として与えられる 1 以上の実数である．一般に，(ねじれを法とした) 整数係数の 2 次コホモロジー群 $H^2(\Sigma,\mathbb{Z})$ は交叉形式を内積として格子の構造をもち，誘導 ϕ^* はその格子の構造を保つ，すなわち等長変換である．Σ が K3 曲面のとき，$H^2(\Sigma,\mathbb{Z})$ は符号数 $(3,19)$ の偶ユニモジュラー格子となる．また，K3 曲面の自己同型の力学的次数は 1 か高々22 次の Salem 数となることが知られている（Salem 数とは偶数次のある種の代数的整数で，無限個存在する）．

B.H. Gross と C.T. McMullen は，K3 曲面の自己同型の研究と関係して「どのような多項式が与えられた符号をもつ偶ユニモジュラー格子の等長変換の固有多項式として実現されるか」という，純粋に格子理論の問題を考えた．必要条件として，偶ユニモジュラー格子の等長変換の固有多項式の定数項は 1 または -1 であることを注意しておく．本研究は，この問題とその K3 曲面の自己同型の力学的次数の問題への応用に関するものである．

E. Bayer-Fluckiger と L. Taelman は，Gross-McMullen の問題に対して，整数論の局所大域原理の考え方を取り入れることにより，多項式が既約な場合にひとつの解答を与えた．これによって 22 次の Salem 数が K3 曲面の自己同型の力学的次数として実現可能であるための簡明な必要十分条件が，その最小多項式の言葉で与えられた．その後，Bayer-Fluckiger は，定数項が 1 の既約とは限らない多項式が偶ユニモジュラー格子の等長変換の固有多項式として実現されるための局所大域的な障害を記述することで，その必要十分条件を与えた．これにより彼女は次数が 4, 6, 8, 12, 14, 16 の任意の Salem 数が非射影的な K3 曲面の自己同型の力学的次数として実現可能であることを証明した．

本研究では，彼女により与えられた局所大域的な障害を再定式化することなどにより，理論により明瞭な説明を与えている．また，主には素数 2 における局所的な議論をより注意深く行うことで，多項式の定数項が 1 でない場合，つまり -1 である場合も含む完全な形で理論を一般化した．これにより 20 次の任意の Salem 数が非射影的な K3 曲面の自己同型の力学的次数として実現可能であることを明らかにした．さらに，局所大域的な障害を組織的に計算する方法を確立し，次数が 10, 18 の Salem 数が非射影的な K3 曲面の自己同型の力学的次数として実現可能であるための必要十分条件を，その最小多項式の言葉で与えた．

本学位論文は 4 つの章から成る．代数的整数論からの準備を行う第 1 章，内積の古典的な理論についてまとめた第 2 章，上で述べた偶ユニモジュラー格子の等長変換の固有多項式に関する理論が展開される第 3 章，そして，最初のモチベーションであった K3 曲面の自己同型の力学的次数の問題に第 3 章の結果を応用する第 4 章である．第 1 章と第 2 章は，第 3 章の内容が自己完結的になるように用意されている．

第 3 章は第 6 節から第 11 節までの全 6 節で構成される．それぞれの内容は以下の通りである．まず，第 6 節では，同変 Witt 群とよばれるものを導入する．その言葉を用いることで，離散付値体上の内積空間がいつユニモジュラー格子を含むかを，群作用も考慮に入れた形で記述できる．第 7 節では内積空間の等長変換について論じ，第 8 節では Gross-McMullen の問題の局所版にあたる内容を扱う．そして第 9 節で，上述の局所大域的な障害を記述し，多項式が偶ユニモジュラー格子の等長変換の固有多項式として実現されるため必要十分条件を与える．第 10 節と第 11 節の内容は障害の組織的な計算法を提供するものである．

K3 曲面の自己同型の力学的次数の問題を論じる第 4 章では，K3 曲面に関する最小限の準備の後で，どのような Salem 数が非射影的な K3 曲面の自己同型の力学的次数として実現可能であるかを述べた定理を，先行研究で得られている結果も併せて，一貫した方法で証明している．また，K3 曲面に限らず，コンパクト複素曲面上の自己同型の力学的次数の問題に関する短いサーベイも付してある．