



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Associated groups of involutive quandles and their second quandle homology [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	長谷川, 蒼
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第15734号
Issue Date	2024-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/92197
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Aoi_Hasegawa_abstract.pdf, 論文内容の要旨



学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士 (理 学) 氏 名 長谷川 蒼

学 位 論 文 題 名

Associated groups of involutive quandles and their second quandle homology
(対合的カンドルの付随群とその2次カンドルホモロジー)

カンドルとは結び目理論のライデマイスター移動を背景に導入された代数系である。カンドルは結び目理論のみならず、Yang-Baxter の方程式集合論的解、対称空間等の研究で応用がなされている。任意のカンドル Q に対してその付随群 $As(Q)$ が群の表示を用いて定義される。付随群の構造を調べることはカンドルの構造を調べるのに有効であるが、付随群は群の表示を用いて定義されているため、付随群の構造を調べることは一般には難しい。また、カンドルホモロジーは状態和における結び目不変量を定義するために導入された概念である。Eisermann[1]によって2次カンドルホモロジーを計算するための定理が得られたが、それを使って2次カンドルホモロジーを計算する場合、連結なカンドルの場合であっても、付随群の安定化部分群と交換子部分群を調べる必要があるため、2次カンドルホモロジーの具体的な計算を完遂することは一般には難しい。

本論文は2部構成となっている。前半では、本論文では秋田-長谷川-丹野[2]に着想を得て、対合的なカンドル Q に対して $As(Q)$ の剰余群である $As_f(Q)$ を導入する。それにより、以下のような $As_f(Q)$ に関する結果を得た：

- (1) 対合的カンドル Q が有限集合ならば、 $As_f(Q)$ は有限群である。(命題 3.3)
- (2) $As(Q)$ から $As_f(Q)$ への射影が、 $As(Q)$ の交換子部分群から $As_f(Q)$ の交換子部分群への同型写像を誘導する(定理 3.8)。
- (3) $As(Q)$ は $As_f(Q) \rightarrow As_f(Q)_{ab} \leftarrow As(Q)_{ab}$ による引き戻しである。ただし、 ab はアーベル化を表す。さらに、 $K(As(Q), 1)$ は $K(As_f(Q), 1) \rightarrow K(As_f(Q)_{ab}, 1) \leftarrow K(As(Q)_{ab}, 1)$ のホモトピー引き戻しである。ただし、群 G に対して $(G, 1)$ 型の Eilenberg-Mac Lane 空間を $K(G, 1)$ とする(定理 3.10)。
- (4) Q を連結で対合的なカンドルとし、 $x_0 \in Q$ とする。このとき Q の2次カンドルホモロジーは、 $(\text{Stab}_{As_f(Q)}(x_0) \cap [As_f(Q), As_f(Q)])_{ab}$ と同型である。ただし、 $\text{Stab}_{As_f(Q)}(x_0)$ は $As_f(Q)$ 作用に関する x_0 の安定化部分群、 $[As_f(Q), As_f(Q)]$ は $As_f(Q)$ の交換子部分群であり、群 G のアーベル化を G_{ab} とする(定理 4.7)。

後半では(4)の結果を応用して、特定の Coxeter カンドルに対してその2次カンドルホモロジーを計算する。Coxeter 群 W に関する Coxeter カンドル Q_W に対して、 $As_f(Q_W)$ は W 同型である(命題 5.8)。ある特定の Coxeter カンドルに関して次のような主張が成立する：

- (5) W を奇 Coxeter グラフが木である Coxeter 群、 Q_W をその Coxeter カンドル、 $x_0 \in Q_W$ とする。このとき、 Q_W の2次カンドルホモロジーは $(Z_W(x_0) \cap [W, W])_{ab}$ と同型である。ただし、 $Z_W(x_0)$ は x_0 の中心化部分群である(定理 5.10)。

(W, S) を Coxeter グラフが木である Coxeter 系とし、 $x_0 \in S$ とする。このとき、 x_0 の中心化部分群は、 $\Gamma(x_0) \cup \{\pm \alpha_{x_0}\}$ から得られる W の部分群である。ここで、 α_{x_0} は x_0 が α_{x_0} の鏡映となるようなルートであり、 $\Gamma(x_0)$ は α_{x_0} に直交するルートの集合である(定理 5.4)。さらに、 $Z_W(x_0) \cap [W, W]$ は特定の群の表示を持つ群と同型である(定理 5.6)。したがって、 Q_W の2次カンドルホモロジーを具体的に計算することができる。特に、特定の種類の Coxeter 群について、2次カンドルホモロジーを計算した：

- (6) W が $A_n(n \geq 1)$, $D_n(n \geq 4)$, E_6 , E_7 , E_8 , $I_2(n)$ ($n \geq 3$ かつ奇数), H_4 , H_3 型の Coxeter 群であるとき、その Coxeter カンドルの2次カンドルホモロジー $H_2(Q_W)$ は表1の通りになる。(定理 6.1)

型	$A_n(n \geq 1)$	$D_n(n \geq 4)$	E_6	E_7
$H_2(Q_W)$	$0(n \leq 2)$ $\mathbb{Z}_2(n \geq 3)$	$\mathbb{Z}_2^3(n = 4)$ $\mathbb{Z}_2^2(n \geq 5)$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$

型	E_8	$I_2(n) (n \geq 3)$	H_4	H_3
$H_2(Q_W)$	$\mathbb{Z}_2$	$0 (n \text{は奇数})$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2^2$

表 1 Coxeter カンドルの 2 次カンドルホモロジーの計算結果

本論文は全部で 14 節からなる. 2 節ではカンドルと $\text{As}(Q)$ を定義し, $\text{As}(Q)$ が成り立つ性質について述べる. 3 節では $\text{As}_f(Q)$ の定義と (1), (2), (3) の証明を述べる. 4 節ではカンドルホモロジーを定義し, (4) の証明を述べる. 5 節では Coxeter 群の定義とその性質について復習し, (5) の証明を述べる. 6 節では, 7 節から 14 節で使用される記号を導入し, 2 次カンドルホモロジーの計算結果を述べる. 7 節から 14 節までで (6) の計算過程を述べる.

参考文献

- [1] Michael Eisermann, Quandle coverings and their Galois correspondence, Fund. Math. 225 (2014), no. 1, 103-168, DOI 10.4064/fm225-1-7. MR3205568 ↑ 3, 11, 12
- [2] Toshiyuki Akita, Aoi Hasegawa, and Masayoshi Tanno, Structure of the associated groups of quandles, Kodai Math. J. 45 (2022), no. 2, 270-281. ↑ 3