学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　　三栖　邦康

学 位 論 文 題 名

Asymptotic analysis of mean curvature flow equations via games
（ゲームを用いた平均曲率流方程式の漸近解析）

様々な物理現象を表す偏微分方程式の中でも、界面発展方程式は曲線・曲面の動きを記述するものである。これは曲線ないしは曲面の法線方向の速度 V を指定する方程式であり、平均曲率流方程式（$\mathrm{V} = -\kappa$、κは平均曲率）はその代表的なものである。

平均曲率流方程式は、材料化学者の Mullins によって、金属を焼きなます時の粒界の動きを記述する方程式として最初に発表されたもので、現在ではノイズ除去等の画像処理への応用もあり、自然科学、工学と幅広い分野で関心を持たれている方程式である。

一般に、界面発展方程式で記述される界面の運動を追跡するためのアイデアの一つとして、界面発展を未知関数$u(x,t)$の等高面$\Gamma_t = \{u(\cdot,t) = 定数\}$で表現し、この$u$についての方程式を扱おうというものがある。このようにして得られる方程式を等高面方程式という。

等高面方程式を古典解の範囲で解こうとすると、時間発展で解の滑らかさを損なうことがあるが、粘性解という弱解を考えることによって、滑らかさを損なった後の界面発展も追跡できるようになった（[Chen Giga Goto 1991]、[Evans Spruck 1991]）。界面発展方程式の等高面方程式はこの意味で粘性解の顕著な応用である。

一方で、粘性解の概念は元々、ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式において、ある種の最適制御問題の値関数を一意的な解として捕捉する解概念として、Crandall、Lions により導入された。粘性解の概念はより一般のアイザック方程式においても有効で、この場合は微分ゲームに現れる値関数を捕捉している。尚、ここでいうゲームとは、二人零和ゲームであり、値関数とは、ゲームの初期位置などの入力に対して、二人のプレイヤーが最善の手を尽くした時に得られる一方のプレイヤーの得点を出力する関数である。

粘性解の導入と応用の二つを組み合わせた研究として、[Kohn Serfaty 2006]がある。この研究では、平均曲率流方程式の解を時間が離散的なあるゲームの値関数で表現した。

さて、本研究で扱う方程式は、上記で説明した平均曲率流方程式をベースにしたもので、大きく二つある。一つは不連続外力項付き平均曲率流方程式であり、もう一つは平均曲率流方程式の障害物問題である。

まず不連続外力項付き平均曲率流方程式は、二次元核生成と呼ばれる結晶成長現象の数理モデルである。二次元核生成とは、結晶表面上で新たに結晶が生成されるプロセスであり、大まかに言うと、結晶粒子が結晶表面に付着し、ある一定以上の大きさを持つ島ができたら、それがパンケーキのように水平に広がっていくというものである。こういった状況を数学的に考える上で、結晶粒子が供給される平面上の領域をΩとし、それに伴って、結晶表面に対して垂直な方向に結晶が積みあがっていく速さを、Ωの定義関数（Ω上の点で１になり、それ以外の点で０になる関数）で表現する。この定義関数が外力項に相当するもので、これは不連続関数となる。結晶の島の水平方向の動きは、平均曲率流方程式に駆動力項と呼ばれる項を加えた$\mathrm{V} = -\kappa + \nu$という界面発展方程式に支配される。$\Omega$の幾何学的形状によって、解の一意性の成否や解の漸近挙動が大きく変わるという点が、この問題の難しいところである。

次に障害物問題とは、解が透過できない障害物が最初に与えられているという条件付きの問題

のことを言う。平均曲率流方程式の障害物問題に関して、既に適切な条件下での解の存在性・一意性についての結果は得られている。([Mercier arXiv:1409.7657v3]、[Ishii Kamata Koike 2017]) 一方で、この問題の解の漸近挙動についての結果は限定的なもの ([Spadaro 2019]) しかなく、本研究では様々な初期曲面と障害物の形状に対して漸近挙動を明らかにしようと試み、そのうちのいくらかを解決した。平均曲率流の性質により、解が障害物にぶつかると、その挙動が、障害物がない場合と比べて大域的に変化する点が、この問題の難しいところである。

それでは、本学位論文の結果について述べる。

前者の不連続外力項の方程式に関して、平均曲率流方程式を含む一般的な設定の下、解の一意性の結果を得た ([2])。平均曲率流方程式の場合で、さらに、Ωに外部球条件という条件 (論文本体ではこれよりもう少し弱い条件) を課すことによって、解の漸近形を対応する定常問題の解によって特徴づけることに成功した ([3])。外部球条件とは、領域Ωの境界の任意の点に対して、それに接し、尚且つ半径が $1/\nu$ より大きな外部球が取れるという仮定である。

不連続外力項 ([3])、障害物問題 ([1]) の両者の問題の解の漸近解析においては、先程紹介した[Kohn Serfaty 2006]のゲームをベースに、適切なゲーム解釈を与え、そのゲームを用いた計算を行った。特に障害物問題の方では、閉曲線の内側に障害物がある場合、適切な仮定の下、閉曲線の内部が障害物の凸包に収束するという結果を得た。また、一般次元の場合では、障害物がある条件 (狭義凸とほぼ同じ) を満たす時に、ある時刻以上で曲面に囲まれた部分が障害物に一致するということを示した。駆動力項付きの場合も計算を行い、障害物と初期曲線に囲まれた領域が十分小さい時に、漸近形の外側からの評価 (漸近形はなんらかの図形の内側にあるということ) を行うことに成功した。また、いくつかの障害物の具体例においては、内側からの評価 (漸近形はなんらかの図形の外側にあるということ) も示し、漸近形が求まった。障害物問題のパートの最後では、障害物が初期曲線の外側にある場合で、[Giga Mitake Tran 2016]でも扱われた問題を含めた問題をゲームで解いた。

不連続外力項の方程式に関しては、[Giga Mitake Tran 2016]で扱われていた、Ωが二つのボールを接合させた形状である場合の漸近速度を計算し (単純な図形であるが漸近速度の計算が難しい)、[Giga Mitake Tran 2016]で得られていた結果を更新した。

引用文献

[1] K. Misu, "A game-theoretic approach to the asymptotic behavior of solutions to an obstacle problem for the mean curvature flow equation", Hokkaido University Preprint Series in Mathematics, vol.1149, 1-40, 2023.

[2] N. Hamamuki and K. Misu, "Weak comparison principles for fully nonlinear degenerate parabolic equations with discontinuous source terms", Minimax Theory Appl., vol.8, no.1, 37-60, 2023.

[3] N. Hamamuki and K. Misu, "Asymptotic shape of solutions to the mean curvature flow equation with discontinuous source terms", in preparation.