学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　　氏　名　　清原悠貴

学 位 論 文 題 名

Geometry of timelike minimal surfaces in the three-dimensional Heisenberg group
（3次元ハイゼンベルグ群における時間的極小曲面の幾何）

3次元ハイゼンベルグ群の左不変ローレンツ計量はリー環の中心方向の性質（空間的・時間的・光的）によって、等長的に3種類に分類されることがS. Rahmaniによって示されている。特に2種類存在する非平坦な計量はハイゼンベルグ群のよく知られた左不変リーマン計量によく似た形で表され、これらの計量に関する空間的・時間的曲面には正定値の曲面が有する性質に類似した結果が期待できる。本学位論文は3次元ハイゼンベルグ群のある非平坦な左不変ローレンツ計量に関する時間的曲面について調査したものであり、可積分系の観点による時間的曲面の極小性の特徴付け、ループ群の分解定理を応用した時間的極小曲面の一般化Weierstrass型表現を与えた小林真平准教授（北海道大学）と学位申請者の共著論文“Timelike Minimal Surfafces in the Three-Dimensional Heisenberg Group”および時間的曲面特有の性質を有する「極小null scroll」という時間的極小曲面の構成方法を与えた申請者の単著論文“Minimal null scrolls in the three-dimensional Heisenberg group”をまとめたものである。

本学位論文では主として時間的曲面を扱うが、小林准教授との共同研究における手法は左不変リーマン計量のもとで論じられた3次元ハイゼンベルグ群の曲面論を時間的曲面に適応させたものである。そのため、主題に入る前（Section 3）にリーマン計量のもとでのJ. F. Dorfmeister, J. Inoguchi, S-P. Kobayashiによる先行研究を紹介している。3次元ハイゼンベルグ群の曲面の研究ではJ. InoguchiやB. Danielが法ベクトル場から自然に得られる正規ガウス写像と呼ばれる双曲面への写像の調和性によって曲面の極小性を特徴づけられることを証明しているが、Dorfmeister-Inoguchi-Kobayashiの研究では、D. A. BerdinskiĭとI. A. Taĭmanovによる3次元等質空間における曲面の積分表示を与えた研究で得られた、スピノルによる曲面の構造方程式の表示が可積分系に書き換えられる事を示すことで（Theorem 3.2.3）、曲面の極小性を自明束上の接続の族を用いて特徴づけている（Theorem 3.4.3）。一方で双曲面への調和写像はミンコフスキー空間の平均曲率一定曲面と対応することから、ハイゼンベルグ群の極小曲面はミンコフスキー空間の平均曲率一定曲面を誘導する。定曲率空間形の平均曲率一定曲面の表現として、拡張動標構と呼ばれる調和写像の動標構の1径数族を用いたSym-Bobenkoの公式が知られている。この表現では拡張動標構をスペクトルパラメータで微分することで得られるが、Dorfmeister-Inoguchi-Kobayashiは拡張動標構を2回微分することにより3次元ハイゼンベルグ群の極小曲面の表現を与えた（Theorem 3.5.4）。また、対称空間への調和写像は1970年頃からよく調べられており、上記の接続の族による特徴付けはK. Pohlmeyerによる零曲率表示と呼ばれる調和写像の特徴付けを利用したものである。J. F. Dorfmeyster, F. Pedit, H. Wuの3人は調和写像の零曲率表示およびループ群の分解定理を用いて対称空間への調和写像のWeierstrass型の構成方法（DPW法）を与えており、DPW法と上記の極小曲面の表現公式によって、3次元ハイゼンベルグ群の極小曲面のWeierstrass型の表現が得られる（Theorem 3.6.4, Remark 3.6.5）。

Section 4では小林准教授との共同研究の内容を、Section 3の話の展開に並行するように記述している。曲面をローレンツ面からハイゼンベルグ群への等角写像と見なし、座標系としてパラ複素数を用いることで、正定値の場合と同様に時間的曲面のスピノル表示（Proposition 2.2.6）、時間的曲面のAbresch-Rosenberg微分（に相当する2次微分）、時間的曲面から得られる可積分系（Theorem 4.2.3）、自明束上の平坦接続の族による曲面の極小性の特徴付け（Theorem 4.4.1）、ミンコフスキー空間の時間的平均曲率一定曲面の表現公式であるSym-Bobenkoの公式を活用し

た時間的極小曲面の表現（Theorem 4.5.4）が得られる。特にTheorem 4.4.1では時間的曲面が極小であることと正規ガウス写像がド・ジッター球面への非等角なローレンツ調和写像になることが同値であることを示しており、J. InoguchiやB. Danielによる正定値での特徴付けの類似にもなっている。またTheorem 4.2.3の可積分条件は、曲面のある法ベクトル場とハイゼンベルグ群のReebベクトル場が各点でなす角度を与える関数（支持関数）とAbresch-Rosenberg微分が時間的極小曲面を微分に関する初期条件のもと決定することを意味する。時間的極小曲面と通常の極小曲面の結果の決定的な違いは座標系として複素座標系ではなくパラ複素座標系を使用している点にあり、自明束上の接続の族を与えるスペクトルパラメータが円ではなく双曲線を描くため、ハイゼンベルグ群の時間的極小曲面に対するDPW法の構成はsplit型のループ群の分解定理に帰着される。split型の実パラメータのループ群の分解定理はJ. F. Dorfmeister, J. Inoguchi, M. Todaによるミンコフスキー空間の時間的平均曲率一定曲面のループ群を用いたWeierstrass型表現を与えた論文で証明されている。小林准教授と申請者の論文ではパラ複素パラメータのループ群やループ代数を扱い、実パラメータのループ群やループ代数との同型を与えることで分解定理（Birkhoff/Iwasawa分解）を証明した（Theorem 4.6.1）。また、時間的極小曲面の正規ガウス写像の拡張動標構をBirkhoff分解することでド・ジッター球面へのローレンツ調和写像のWeierstrassデータが得られる（Theorem 4.6.3）。Weierstrassデータは時間的曲面のAbresch-Rosenberg微分と支持関数によって決定されるパラ正則な1次微分形式である。逆にWeierstrassデータをMaurer-Cartan形式にもつループ群値の写像をIwasawa分解すると要素の一つにド・ジッター球面へのローレンツ調和写像の拡張動標構が現れることを示した（Theorem 4.6.5）。

小林准教授との共同研究では、正定値の場合に倣って、Abresch-Rosenberg微分が恒等的に消える時間的極小曲面をhorizontal umbrellaと呼んだ。しかし時間的曲面の座標系としてパラ複素座標系を導入しているため、「自身は0ではないが、パラ複素共役との積は0になる」関数を係数とするAbresch-Rosenberg微分をもつ時間的極小曲面が考えられる。これは複素座標を用いる（空間的）曲面には見られない条件である。Section 4ではWeierstrass型表現を用いて上記の条件を満たす曲面の例を与えた（Example 4.7.4）。ここで与えられた曲面は、ミンコフスキー空間のB-scrollを誘導する、B-scroll型極小曲面と名付けられた時間的極小曲面の例である。Section 5では上記の条件を満たす時間的極小曲面を扱った申請者の論文の内容をまとめており、そのような時間的極小曲面はリー環の光錘に値をもつ曲線と指数写像の合成とnull曲線との積で定義される曲面（ハイゼンベルグ群におけるnull scrollという）のみであることを示した（Theorem 5.3.10）。これはJ. Clellandによるミンコフスキー空間の全擬臍的な時間的曲面の特徴付けを与えた研究の3次元ハイゼンベルグ群におけるある種のアナロジーである。また、Theorem 5.3.10はハイゼンベルグ群のリー環をミンコフスキー空間と同一視することで、ミンコフスキー空間の曲線論をハイゼンベルグ群に導入して証明される。特に曲線の曲率に相当する関数から極小null scrollを構成することができる（Corollary 5.3.7）。支持関数が消える時間的極小曲面を除いて、この手法によって構成される極小null scrollはB-scroll型極小曲面である。さらにこの研究では、ハイゼンベルグ群におけるnull scrollの極小性を調べることで極小null scrollの上記とは異なる構成方法を発見した。ハイゼンベルグ群におけるnull scrollの極小条件はnull曲線の速度ベクトルとリー環の光錘の曲線の位置ベクトルがなす角度によって記述される（Theorem 5.2.4）。これよりリー環の光錘の曲線を指定すると極小条件を満たすnull曲線が初等的な計算のみで構成でき、すべての極小null scrollをリー環の光錘の曲線から構成できる（Theorem 5.4.12）。Theorem 5.4.12で与えられるnull曲線は一意ではないが、Theorem 5.3.10により支持関数が消える時間的極小曲面を除いて極小null scrollはB-scroll型極小曲面として表現できることから、null曲線は一意に定まると考えてよい（Theorem 5.4.13）。一方でミンコフスキー空間のnull scrollをB-scrollへ書き換える方法についてはA. Fujioka, J. Inoguchi やH. Liu、Z. M. Sipus, L. P. Gajčić, I. Protrkaによる研究が知られており、Theorem 5.4.13はこれらの研究のハイゼンベルグ群におけるアナロジーを与えている。