



Title	Limit theorems on random matrices and finite free probability [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	藤江, 克徳
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第15735号
Issue Date	2024-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/92266
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Katsunori_Fujie_abstract.pdf, 論文内容の要旨



学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士 (理 学) 氏 名 藤 江 克 徳

学 位 論 文 題 名

Limit theorems on random matrices and finite free probability
(ランダム行列と有限自由確率論に関する極限定理)

1980年代に作用素論の著名な研究者である Voiculescu 氏が自由確率論—代数的確率論の枠組みで測度論的確率論における独立性を自由独立性で置き換えた理論—を創始して以来、元々の動機であった作用素環論の未解決問題への貢献、そしてランダム行列に対する応用を契機とした量子物理との交わりの深化などを経て、当該分野は発展を続けてきている。なかでも近年の興味深い進展として、とくに 2010 年代に Marcus・Spielman・Srivastava 氏の 3 名によって拓かれた有限自由確率論を挙げたい。彼らは計算科学分野において興味を持たれていた非自明な Ramanujan Graph の構成に成功すると同時に、作用素環論における未解決問題であった Kadison—Singer 予想を肯定的に解決することで一挙に注目を集めた。彼らのアイデアや理論は当初、自由確率論との関わりがあまり意識されていなかったようであるが、Marcus 氏によって関連が指摘された後は有限自由確率論と呼ばれるようになり、両者の関係に注目した研究が行われている。典型的な研究として自由確率論において既に知られている確率論的類似が有限自由確率論においても成り立ち、多項式の次数極限をとることで自由確率論の結果と一致するという現象を挙げることができる。

本学位論文は 4 つの章から構成されている。

第 1 章では研究の背景となる自由確率論の歴史について概観した後、記号および記法を定め主結果の概略を述べている。

第 2 章では、解析の道具となる組み合わせ論の準備を行う。半順序集合およびその上に定まるメビウス関数の議論は標準的であるものの、その具体例としてとくに集合の分割について詳細に説明している。実際、解析の主な武器となる (有限) 自由キウムラントはそれらを用いることによって定義され、様々な議論を組み合わせ的に解決することを可能にしている。第 2 章は新規の結果である等式を 2 つ含んでいる。1 つ目のものは Markov-Krein 対応と呼ばれる確率測度と符号付き測度の変換に関連する、モーメント・自由キウムラントの関係式である。これは第 3 章において利用される。2 つ目の等式は多項式と集合の分割にまつわるものである。これは第 4 章において、有限自由キウムラントの極限を考えた際、主要項として現れるものである。

第 3 章ではユニタリ不変なランダム行列の主小行列の固有値分布について解析を行っている。一般にランダム行列のサイズを大きくして行った際、固有値分布がある決まった確率測度に収束するならば、その主小行列の固有値分布は interlace するため、極限をとると同様の振る舞いを見せることがわかる。このとき、それらの差をとった分布を考えると、ユニタリ不変の性質から、Markov-Krein 対応から理論的に計算される符号付き測度へ収束することが先行研究において予想されていた。この予想を自由確率論的な手法、すなわち自由キウムラントや Weingarten 計算などによって解決する—というのが主な内容である。

第 4 章では、有限自由確率論の極限定理について 5 種類の定理を証明している。それらはすべて自由確率論において知られたものの有限自由類似であり、多項式の次数極限あるいは畳み込み回数との比をとった極限をとることで、既知の自由確率論の結果へと移行できることを示している。