学 位 論 文 審 査 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　　博士（理学）　　　　　氏　名　　河本　野恵

	主 査　教 授	坂井　哲
審査担当者	副 査　教 授	行木　孝夫
	副 査　教 授	宮尾　忠宏

学 位 論 文 題 名

Critical points for the spread-out models of self-avoiding walk, lattice trees and lattice animals

（有限記憶自己回避歩行，格子木，格子動物の臨界点について）

博士学位論文審査等の結果について（報告）

水の沸騰や磁性の消失，伝染病の蔓延など，少数のパラメターを変えると様相が劇的に変化する「相転移現象」が世の中には溢れている．そのような現象を厳密に理解するために考案された統計力学模型として，線形高分子を模した「自己回避歩行（Self-Avoiding Walk）」や，分岐高分子を模した「格子樹（Lattice Trees）・格子動物（Lattice Animals）」がある．d 次元正方格子 $\boldsymbol{Z}^d$ 上の原点 o と点 x をつなぐ高分子の母関数（2 点関数とも呼ばれ，n 本のボンドから成る高分子に重み p^nを与え，$n \geq 0$ について和を取ったもの）を更に $x \in \boldsymbol{Z}^d$について和を取ったもの（伝統的な磁性体の相転移・臨界現象に倣い，帯磁率とも呼ばれる）の収束半径 p_cが臨界点であり，その値を特定することは非常に興味深く，重要である．

本論文は，高次元 p_cの漸近評価に関する 2 編の論文（うち 1 編は共著で Combinatorics, Probability & Computing に掲載済み，もう 1 編は単著で投稿準備中）を纏めたものである．尚，本論文では触れられていないが，申請者には別の共著論文が 1 編あり，Journal of Statistical Physics に掲載済みである．

第 1 章では，自己回避歩行やその体積排除効果を直近の過去 τ ステップだけに限定した「メモリー τ 模型」，格子樹・格子動物の 4 つのモデルを，$\boldsymbol{Z}^d$ 上のボンドの連結成分として定義している．ただし，各ボンドの端点間距離は L 以下とする（標準的な最近接モデルの場合，Euclid 距離で $L = 1$）．第 1.2 節では，先行研究を凌駕する結果（上記 2 編の論文で得られたもの）が述べられている．

第 2 章では，上記 4 つのモデルを評価するための共通言語である「レース展開」が解説されている．

第 3 章では，自己回避歩行とメモリー τ 模型のレース展開が解析されている．それぞれの臨界点 p_c^∞, p_c^τ はレース展開係数の総和で書き下すことができるのだが，それらの差を高次元 $d > 4$ 自己回避歩行の臨界 2 点関数に対する局所極限定理（2002 年，van der Hofstad と Slade によって証明）を用いて精密に評価したことにより，先行研究を凌駕する結果（$\tau \nearrow \infty$ のとき $p_c^\infty - p_c^\tau \sim C_L \tau^{-(d-2)/2}$，しかも$L \nearrow \infty$ のとき $C_L \sim \exists a_d L^{-d}$）が得られると解説されている．

第 4 章では，格子樹・格子動物のレース展開が解析されている．自己回避歩行やメモリー τ 模型とは異なり，格子樹・格子動物の臨界点 p_c^{LT}, p_c^{LA} はレース展開係数の総和だけでなく，1 点関数 g_p^{LT}, g_p^{LA} が大きく関与している．本章では，1 点関数を用いて「基準点 p_1」を上手く選び，臨界点をそこからの摂動として捉えることで，レース展開の精密評価を（先行研究の緩い評価さえあれば十分という意味で）回避しつつも，先行研究を凌駕する結果（高次元 $d > 8$ で $p_c^{\mathrm{LT}} = 1/e + \exists C^{\mathrm{LT}} L^{-d} + O(L^{-d-1})$）が得られると解説されている．第 4.3 節では，格子動物の 1 点関数 g_p^{LA} に含まれる（g_p^{LT} には存在し得ない）自己ループを精密に評価して，p_c^{LT} とp_c^{LA} の差（すなわち L^{-d} の係数 C^{LT} と C^{LA} の差）の主要項を特定したことが解説されている．尚，この章の結果は Combinatorics, Probability & Computing の FirstView（2023 年）に掲載された．

これらの内容から，著者がレース展開という難しい解析手法をマスターし，未解決問題に取り組む気概を持ち，そして解決するまでの忍耐強さを有していることが窺える．したがって，本論文の著者は，北海道大学博士（理学）の学位を授与される資格あるものと認める．