HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	An Investigation Into Addition of Classical Negation to First-Order and Generalized Intuitionistic Logic [an abstract of entire text]
Author(s)	豊岡, 正庸
Description	この博士論文全文の閲覧方法については、以下のサイトをご参照ください。 https://www.lib.hokudai.ac.jp/dissertations/copy-guides/
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(文学)
Dissertation Number	甲第16062号
Issue Date	2024-06-28
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/92948
Type	doctoral thesis
File Information	Masanobu_Toyooka_summary.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

学位論文内容の要約

博士の専攻分野の名称：博士（文学）　　氏名：　豊　岡　正　庸

学位論文題名
An Investigation Into Addition of Classical Negation to
First-Order and Generalized Intuitionistic Logic
（　一階および一般化された直観主義論理に対する古典的否定の追加に関する探究　）

・本論文の観点と方法

本論文は一階述語直観主義論理および一般化された直観主義論理に対する、古典的否定の追加を証明論的観点および意味論的観点の両方から研究したものである。古典的否定とは古典論理における否定のことであり、古典論理は真理値を用いてその意味論が与えられることで知られる。直観主義論理は数学者ブラウワーにより 20 世紀初頭に提唱され、古典論理では妥当である排中律（どんな論理式 A についても A または A の否定が成り立つ）を拒否することが大きな特徴とされる。その後、数学の哲学においてだけでなく、論理学の哲学や言語哲学においても、直観主義論理を擁護する論者が現れ、古典論理の擁護者との間に議論が行われてきた。古典論理の擁護者と直観主義論理の擁護者の間の対立は、妥当な論理法則についての対立とみることも可能であるが、(Quine 1986)は異なる論理の擁護者の対立は異なる意味を論理記号に付与していることから生じていると述べた。この見方によれば、排中律を認める古典論理の擁護者と、排中律を認めない直観主義論理の擁護者は、異なった意味を否定もしくは選言、またはその両方に付与している。もしも Quine の述べる通り、古典論理と直観主義論理の擁護者が異なる意味を論理記号に付与しているならば、古典論理の擁護者は、直観主義論理的な意味を持つ論理記号も考慮に入れながら、古典論理を擁護する必要があり、直観主義論理の擁護者にも同じことが言える。ゆえに、古典論理（直観主義論理）の擁護者は直観主義論理（古典論理）の論理記号を含む論理式の意味や、直観主義論理（古典論理）の論理記号に関連する推論ができなくてはならない。これらを探究する手段として、古典論理と直観主義論理の双方を含む一つの論理（以後、「古典論理と直観主義論理の組み合わせ」とよぶ）を考える、という手法があげられる。古典論理と直観主義論理の組み合わせの意味論を与えることで、両方の論理記号を含む論理式の意味の説明が可能となる。また、古典論理と直観主義論理の組み合わせの証明論を与えることで、両方の論理記号の存在を認めた場合に、それぞれの論理記号についてどのような推論が可能か、を特定することができる。

古典論理と直観主義論理の組み合わせへのアプローチの一つとして、否定概念に着目するアプローチがある。直観主義論理の自然演繹は背理法を認めないが、背理法を加えることで、古典論理の自然演繹が得られることが知られている。背理法は否定に関する規則であるため、この事実は、古典論理と直観主義論理の相違は否定の振る舞いに集約することができる、ということを意味する。ゆえに、古典論理と直観主義論理の組み合わせを与えるもっとも単純なアイデアの一つは、古典的否定を直観主義論理の否定とは別で用意し、直観主義論理の証明論に加える、というものである。しかし、このアイデアで得られた論理は古典論理になってしまい、直観主義論理と古典論理の組み合わせにはならないことが(Popper 1948)で指摘されている。ゆえに、古典論理と直観主義論理の組み合わせを与えるために、古典的否定をどのように直観主義論理に加えるか、という問は探求されるべき問である。

本論文はこの問に対し、「オーソドックスな否定」と「経験的否定」という異なる充足条件をもつ二つの否定に焦点を当て、取り組んでいる。これら二つの否定は異なる否定であるが、いずれ

も古典的否定としてふるまうことで知られる。オーソドックスな否定は通常の古典様相論理と同じ充足条件をもつ否定であり、直観主義論理への追加は(Humberstone 1979)などで研究されている。一方、経験的否定は(De 2013)において考案され、同論文で直観主義命題論理に加えられている。本研究には大きく分けて二つの特色がある。第一に、先行研究では古典論理と直観主義論理を双方含む論理を与える際に、命題論理レベルのみを考えることが多いが、本論文では一階述語論理レベルでのこの二種類の否定の追加を探求している。第二に、直観主義論理だけではなく、直観主義論理のクリプキ意味論から意味論的性質を落として得られる、より一般化された論理に対して、二つの否定を追加し、得られる論理の比較を行っている。

・本論文の内容

具体的には、本論文は以下の三つのテーマをもつ：

(1)　オーソドックスな否定と経験的否定の追加という観点からの古典一階述語論理と直観主義命題論理の一階述語論理拡大の組み合わせ
(2)　下位直観主義論理の定領域クリプキ意味論による一階述語論理拡大に対するオーソドックスな否定と経験的否定の追加
(3)　下位直観主義論理のクリプキ意味論よりも一般化されたフレームワークに対するオーソドックスな否定と経験的否定の追加

以下では、それぞれのテーマについて具体的にどのような研究を行っているかを概観する。

(1) はオーソドックスな否定と経験的否定を、直観主義論理の一階述語論理拡大に加えることで、古典述語論理と直観主義論理の一階述語論理拡大の組み合わせを考える、というものである。これにより、一階述語論理レベルでの、オーソドックスな否定と経験的否定の比較が可能となる。

(2) は下位直観主義論理の定領域クリプキ意味論による一階述語論理拡大を考え、オーソドックスな否定と経験的否定を追加する、というものである。下位直観主義論理は直観主義命題論理のクリプキ意味論から条件を落として得られる論理一群（直観主義命題論理それ自体も含む）を指す。下位直観主義論理に対するオーソドックスな否定および経験的否定の追加はすでに(De & Omori 2016)などでなされているが、これらの論理の一階述語論理への拡大は筆者の知る限り、存在していない。また、経験的否定のいかなる一階述語論理への追加も、なされていない。

(3)では新しい論理 WSJ を提供したうえで、オーソドックスな否定と経験的否定の追加を行う。下位直観主義論理で最も弱い論理は条件のないクリプキ意味論をもつが、古典様相論理と同様、近傍意味論と呼ばれる意味論を考えることで、さらに弱い論理を考えることが可能である。換言すれば、近傍意味論により、下位直観主義論理のクリプキ意味論よりも、一般化された意味論的フレームワークを与えることができる。類似した試みはすでに(Shirmommadzadeh Maleki & de Jongh 2017)でなされており、(3)ではこの試みを参考に WSJ を与えたうえで、オーソドックスな否定と経験的否定の追加を行う。論理 WSJ は(Shirmommadzadeh Maleki & de Jongh 2017)で与えられた論理 WF と似て非なる性質をもつ新たな論理である。また、オーソドックスな否定と経験的否定の下位直観主義論理よりも弱い論理への追加は、少なくとも筆者が知る限り存在しない。

以下では本論文の構成を述べる。本論文は 7 章からなる。第 1 章はオーソドックスな否定および経験的否定について説明したうえで、(1)～(3)の背景および先行研究を要約している。また、それぞれのテーマを研究する動機も述べられる。

第 2 章は第 3 章以降の準備として、古典論理と直観主義論理、および両者の関係についての既知の事実を説明している。具体的には、古典論理および直観主義論理の、命題論理レベルと述語論理レベルのシークエント計算、ヒルベルト公理系、モデル論的意味論、クリプキ意味論が要約されるほか、古典論理の直観主義論理への翻訳も説明される。

第 3 章は (1) に関するものであり、オーソドックスな否定の追加により得られる、一階述語論理レベルでの古典論理と直観主義論理の組み合わせ FOC+J を研究している。論理 FOC+J はすでに(Lucio 2000)で提供され、シークエント計算が同論文で与えられている。しかし、同論文のシークエント計算はシークエント概念の拡張を必要とする。第 3 章では、通常のシークエント概念を用いた FOC+J に対するシークエント計算が与えられる。また、シークエント計算で最も重要な定理の一つであるカット除去定理が示され、その系としてクレイグ補間定理や命題論理断片の決定

可能性が示される。また、FOC+J の命題論理断片（以後、C+J とよぶ）に対して(del Cerro & Herzig 1996)で与えられたヒルベルト公理系が、意味論的に不完全であることも示される。

第 4 章も(1)に関連するものであり、C+J が、論理学の哲学および言語哲学の議論に対し、どのように応用可能かが示される。具体的には、C+J のシークエント計算に対して、(Restall 2009)および(Takano 2018)の手法を用いて、論理式の意味の証明論的な分析を提供する。論理式の意味の証明論的な分析は、真理やモデル、妥当性といった概念を用いずに論理式の意味を分析する試みであり、ウィトゲンシュタインの意味―使用説の論理学の言語への実装として知られる。こうした意味の分析の試みはもともと(Dummett 1991)などで、直観主義論理に対してなされることが多かったが、(Rumfitt 2000)など古典論理に対する研究も存在する。第 4 章では、古典論理と直観主義論理の命題論理レベルの組み合わせ C+J にも、論理式の意味の証明論的な分析が可能であることが示される。

第 5 章は主に (2) に関するものであり、下位直観主義論理の定領域クリプキ意味論を用いた一階述語論理への拡大を行い、オーソドックスな否定と経験的否定を加える。これらの論理の証明論として、ツリーシークエント計算とヒルベルト公理系を与える。ツリーシークエント計算は(Kashima 1999)などで用いられており、シークエント概念の拡張を含むシークエント計算として知られる。ツリーシークエント計算を経由することで、ヒルベルト公理系の意味論的完全性の証明が容易になることで知られており、本論文でもこの方法を用いている。なお、経験的否定を直観主義命題論理に加えた論理に対する、(Niki & Omori 2020) や(Niki 2020)のシークエント計算は帰結関係を直接は捉えていないのに対し、本論文のツリーシークエント計算は帰結関係を直接捉えている。また、本論文のヒルベルト公理系は(De & Omori 2016)で与えられた、経験的否定を下位直観主義論理に加えた論理に対するヒルベルト公理系を拡大することで得られる。なお、下位直観主義論理の中に直観主義命題論理も含まれるため、第 5 章で提供される論理には、経験的否定の追加によって得られる、古典一階述語論理と直観主義命題論理の一階述語論理拡大の組み合わせも含まれる。ゆえに、第 5 章は部分的に(1)にも関連する。

第 6 章は(3)に関するものであり、近傍意味論を用いて、最も弱い下位直観主義論理よりも弱い論理 WSJ を(Shirmommadzadeh Maleki & de Jongh 2017)における論理 WF の近傍意味論をもとに与える。証明論としてはヒルベルト公理系を提供する。このヒルベルト公理系は (Restall 1994) の下位直観論理に対するヒルベルト公理系と(Shirmommadzadeh Maleki & de Jongh 2017)の WF に対するヒルベルト公理系を参考にして与えられる。また、クリプキ意味論の上で考えられてきた継起性と反射性が WSJ の上でどのように定義されるかを示し、これらの性質による WSJ の拡張に対し、ヒルベルト公理系を与える。そのうえで、オーソドックスな否定および経験的否定の WSJ の近傍意味論への追加を行い、証明論としてヒルベルト公理系を与える。その過程で、オーソドックスな否定および経験的否定に関する、これまでの先行研究よりも簡潔な公理と規則が見出される。

第 7 章では、結論として、第 3 章から第 6 章において得られた重要な結果がまとめられる。また、本論文で考えられてきた様々な論理において、オーソドックスな否定と経験的否定にどのような類似点と相違点が存在するかが提示される。最後に、今後の研究の方向性が述べられる。