



Title	高解像度火星大気LESから得られた流れ場と地表面応力分布
Author(s)	村橋, 究理基
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第15599号
Issue Date	2023-09-25
DOI	https://doi.org/10.14943/doctoral.k15599
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/93208
Type	doctoral thesis
File Information	Kuriki_Murahashi.pdf



博士学位論文
Doctoral Dissertation

高解像度火星大気 LES から得られた
流れ場と地表面応力分布

The relationship between the flow fields and
surface stress distributions obtained from a
high-resolution Martian LES

村橋 究理基
Murahashi Kuriki

北海道大学 大学院理学院
宇宙理学専攻

令和 5 年 9 月

要旨

高解像度火星大気 Large Eddy Simulation (LES) 計算の結果を解析し、大気へのダスト巻き上げ量を決定づける地表面応力と流れ場構造との関連について調査した。これにより火星 GCM では統計的にパラメタライズすることで表現されている大気へのダスト巻き上げ量を決定づける地表面応力と具体的な流れ場の関係を明らかにすることを目的とする。本研究で用いたデータは Nishizawa et al. (2016) で得られた LES 計算結果である。このデータは計算領域が水平 19.2 km, 鉛直 21 km, 空間解像度 5, 10, 25, 50, 100 m の設定で計算した結果から得られたものである。この数値実験では、火星境界層における対流を自然に表現できる広範囲な計算領域が採用されており、かつ数 m スケールの流れ場構造を表現できる高い解像度が用いられている。本研究では、まず解像度 5 m の計算結果を用いて、流れ場の全体構造の把握と地表面応力場と流れ場の関係性の調査を行った。流れ場の全体構造を調査したところ、高度 6 km, 水平スケール数 km を持つ対流セルが卓越し、地球設定計算でも得られているような上昇流のプルーム状構造 (Sullivan and Patton, 2011) が存在することがわかった。また高度 1 km 以下の地表面付近では上昇流が網目状に広がり、数十 m ほどの幅の上昇流領域を境界にもつ多角形構造の存在が示された。更に、Nishizawa et al. (2016) の手法を用いて流れ場から渦構造を抽出したところ、地表面付近の渦構造は上昇流による多角形構造の境界の中に分布していることがわかった。以上の結果は、地球設定 LES 計算 (Giersch and Raasch, 2023) で現れる流れ場の特徴と同様のものとなっており、火星でも地球でも境界層内の流れ場には多くの共通点があることが示唆される。次に、地表面応力場と流れ場構造の関連性について調査を行った。地表面応力を求めたところ、Greeley and Iversen (1985) の風洞実験で得られたダスト巻き上げの応力閾値である 0.03 Pa を超える応力値が存在すること、強い地表面応力は主に渦構造に伴う流れによって生じていることがわかった。この特徴を計算解像度別に調査すると、粗い解像度においても強い地表面応力が渦構造によってもたらされている傾向が確認された。最後に、計算解像度による違いを調べた。その結果、粗い解像度においても強い地表面応力は主に渦構造に伴う傾向があることが確認された。しかし、25 m よりも粗い 50, 100 m 解像度の結果においては、強い応力が現れる点のうち渦構造によって

もたらされるものの割合は半数を超えなくなる。このことから、強い地表面応力をもたらし渦構造を考慮してダスト巻き上げ量を見積もるには少なくとも 25 m よりも高解像度で検討することが望ましい。

目次

第 1 章	研究背景と目的	1
1.1	火星大気とダスト	1
1.2	火星大気ของダストに関する数値計算	4
1.3	具体的な流れ場に注目した数値計算	5
1.4	本研究の目的	9
第 2 章	計算データ	11
2.1	使用する数値モデル	11
2.1.1	SCALE-LES	11
2.1.2	計算設定	11
2.1.3	地表面応力	13
2.2	渦構造の抽出方法	14
第 3 章	解析結果	17
3.1	流れ場の概観	17
3.1.1	流れ場全体の鉛直構造	17
3.1.2	モデル最下層に見られる流れ場	19

3.2	流れ場から得られた渦構造	27
3.2.1	孤立渦の空間分布	27
3.2.2	孤立渦パラメータの統計量	31
3.3	渦パラメータの統計量	33
3.3.1	孤立渦パラメータ平均値の高度変化	33
3.3.2	渦度の 3 次元分布	41
3.3.3	渦構造を含めた流れ場の全体像	41
3.4	地表面応力	44
3.4.1	地表面応力の空間分布	44
3.4.2	地表面応力の強度分布	44
3.4.3	地表面応力が強い点と渦構造	47
3.4.4	強い地表面応力をもたらす流れ場	50
3.5	計算解像度依存性	65
3.5.1	空間分布	66
3.5.2	強度分布	66
3.5.3	強い地表面応力と渦構造との関係	66
3.5.4	計算解像度別の渦の特徴	72
第 4 章 まとめと議論		75
付 録 A 図集		83
付 録 B Kahre et al. (2006) におけるダスト巻き上げスキーム		105

B.1	風応力スキーム	105
B.2	ダストデビル巻き上げスキーム	106
付 録 C	SCALE-LES ver.3 モデルで用いられる方程式	107
C.1	基礎方程式	107
C.1.1	地表面フラックス	108
付 録 D	渦判定プログラム	111
D.1	渦判定スクリプト	111
D.1.1	フローチャート	111
D.1.2	スクリプトフロー	112
D.1.3	メイン関数	113
D.2	Rankine 渦近似	118
D.2.1	<code>solver</code> 関数	118
D.2.2	<code>center</code> 関数	120
D.2.3	<code>inner</code> 関数	122
D.2.4	<code>fitting</code> 関数	123
D.2.5	<code>get_L</code> 関数	124
D.2.6	<code>renew</code> 関数	127
D.3	Burgers-Rott 渦近似	132
D.3.1	<code>solver</code> 関数	132
D.3.2	<code>center</code> 関数	132
D.3.3	<code>inner</code> 関数	133

D.3.4	fitting 関数	133
D.3.5	get _L 関数 (Burgers-Rott)	133
D.3.6	renew 関数 (Burgers-Rott)	135
付 録 E Burgers-Rott 渦		141
E.1	渦度方程式	141
E.2	パラメタライズ (正規化)	145
付 録 F Marquardt 法の解説		147
F.1	状況設定	147
F.2	計算方法	147

図 目 次

1.1	火星大気中におけるダスト現象の時空間スケール. 横軸が空間スケール, 横軸が時間スケールを表す.	1
1.2	探査機 Curiosity によって撮影されたダストデビル (画面中央の白く細長く立ち昇っているもの). 水平スケールは 5 メートル, 鉛直スケールは 50 メートル程度と推定されている. (https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA)	
1.3	火星の光学的厚さの日中における東西平均の季節変化. 縦軸が緯度, 横軸が時間を示す. 火星中心黄経 $L_s = 180^\circ$ が北半球秋分, $L_s = 270^\circ$ が北半球冬至に対応する. Kass et al. (2019), Fig. 2 より抜粋.	2
1.4	東西平均気温 (上段) と子午面循環 (下段) の空間分布. 横軸が緯度で, 縦軸が高度を示す. 左列はグローバルダストストームが生じていない年 (MY 24), 右列はグローバルダストストームが生じた年 (MY 25). いずれも $L_s = 195^\circ$ – 225° の期間 (火星北半球秋) の時間平均. Montabone et al. (2005), Fig. 7 より引用.	3

1.5	大気中のダスト量によって変化する光学的厚さの全球平均された季節変化. 横軸が L_s , 縦軸が光学的厚さの変化に伴う大気透過率を示す. 実線が風応力 (KMH スキーム) によってもたらされる変化, 破線がダストデビル (DDA スキーム) によってもたらされる変化. Kahre et al. (2006), Fig. 10 より引用.	5
1.6	解像度水平 5 m, 鉛直 2 m の計算結果における対流 PBL の鉛直風の水平分布. それぞれ画像の高度は異なっている. PBL の上端の高度を z_i , 各画像の示す高度を z としたとき, 左上は地上付近 $z/z_i = 0.04$, 右上は $z/z_i = 0.1$, 左下は PBL の真ん中で $z/z_i = 0.5$, 右下は $z/z_i = 0.9$ を示す. カラーバーのスケールは図ごとに異なる. Sullivan and Patton. (2011), Fig. 13 より引用.	7
1.7	各計算解像度別に得られた渦周辺の正規化された温位と風速ベクトル, 気圧の鉛直分布. 横軸が渦中心からの距離, 縦軸が地面からの高さを示す. 色が温位, 等値線が 8 Pa ごとの中心からの気圧差の等値線を表している. 計算解像度はそれぞれ (a) 10 m, (b) 5 m, (c) 2.5 m, (d) 2 m, (e) 1.25 m, (f) 1 m の結果である. Giersch and Raasch. (2023), Fig. 13 より引用.	8
1.8	複数の計算解像度別によって得られた渦構造の持つ接線風速の強度別の数密度ヒストグラム. 横軸が渦の接線風速の最大値, 縦軸が数密度を示す. 解像度 5, 10, 25, 50, 100 m のそれぞれの結果が並んでいる. Nishizawa et al. (2016), Fig. 3 より抜粋.	9
2.1	地表面温度の時間変化. 横軸が計算開始からの時間 (現地時刻に等しい), 縦軸が絶対温度を示す.	12
2.2	大気加熱率の鉛直分布. 横軸が温位 [K], 縦軸が高度を示す. ここでは計算開始時点の LT = 00:00 のものを示している.	13
2.3	渦の種類別の接線風速の動径方向の分布の例. 横軸が中心からの距離 [m], 縦軸が接線風速 [ms^{-1}] を示す. 実線が Rankine 渦, 破線が Burgers-Rott 渦を想定している.	15

3.1	水平全領域の鉛直風分布. (a) – (i) までモデル最下層の高度 2.5 m からいくつかの高度断面を示す. 赤い領域が上昇流で, 青い領域が下降流を示す. カラーバーのスケールは高度ごとに異なる.	18
3.2	プルーム状構造を構成する鉛直風の 3 次元プロット. 水平方向に $x = 2,500 - 4,500$ m, $y = 2,500 - 4,500$ m, 鉛直方向に 0 – 3 km の領域を切り出している. プロットされている領域が鉛直風 1.5 ms^{-1} 以上の領域を表す. 左上図 (a) が x 軸方向が紙面手前で, y 軸方向が右奥の角度, そこから右上図 (b), 左下図 (c), 右下図 (d) の順に, z 軸に対して時計回りに回転してさせた図を表している.	20
3.3	$y = 5442.5$ m における風速 x 成分 (U), 風速 y 成分 (V), 鉛直風 (W), 温位 (PT) の鉛直断面. x 軸方向の全領域を示しており, 縦軸は z 軸であり, $z = 10$ km までの鉛直領域を示している. 鉛直風において赤色は上昇流領域を, 青色は下降流領域を示している.	21
3.4	鉛直風の絶対値及び温位の水平平均の鉛直分布. 横軸がそれぞれ鉛直風絶対値 (a), と温位 (b) を表し, 縦軸が高度 [km] を表す.	21
3.5	モデル最下層 ($z = 2.5$ m) の鉛直風分布. 水平全領域を示す. 赤い領域が上昇流で, 青い領域が下降流を示す.	22
3.6	$z = 2.5$ m における鉛直風水平分布. 水平領域の一部 (2 km 四方) を抜き出し拡大したもの.	23
3.7	モデル最下層 ($z = 2.5$ m) の水平風速分布. 水平全領域を示す. 白い領域が水平風が強い領域を示す.	25
3.8	$z = 2.5$ m における水平風水平分布. 水平領域の一部 (2 km 四方) を抜き出し拡大したもの. 範囲は図 3.6 と同じ.	26
3.9	モデル最下層 ($z = 2.5$ m) の水平風収束発散分布. 水平全領域を示す. 赤色が発散領域, 青色が収束領域を示す.	28
3.10	$z = 2.5$ m における水平風収束発散水平分布. 水平領域の一部 (2 km 四方) を抜き出し拡大したもの. 範囲は図 3.6 と同じ.	29
3.11	モデル最下層 ($z = 2.5$ m) の鉛直渦度の水平分布. 水平全領域を示す. 赤色が正の渦 (時計回り), 青色が負の渦 (反時計回り) を示す.	30

3.12 $z = 2.5$ m における渦度の水平分布. 水平領域の一部 (2 km 四方) を抜き出し拡大したもの. 範囲は図 3.6 と同じ.	31
3.13 モデル最下層 ($z = 2.5$ m) における渦構造の水平空間分布	32
3.14 抽出された渦構造の水平分布. 黒円の中心が渦の中心座標を示す. 色は図 3.5 で示したモデル最下層 ($z = 2.5$ m) の鉛直風の水平分布. 赤色が上昇流, 青色が下降流を表す.	32
3.15 高度 2.5 m における渦パラメータの統計値. 縦軸が対数スケールの数密度 [km^{-2}] を表しており, それぞれ半径 [m] (上段左), 最大接線風速 [ms^{-1}] (上段右), 最大渦度 [s^{-1}] (中断左), 圧力降下 [Pa] (中断右), 循環 [m^2s^{-1}] (下段) を表す.	34
3.16 図 3.15 に対応する高度 997.5 m における渦パラメータの統計値.	35
3.17 図 3.15 に対応する高度 5997.5 m における渦パラメータの統計値.	36
3.18 図 3.15 に対応する高度 6997.5 m における渦パラメータの統計値.	37
3.19 図 3.15 に対応する高度 7997.5 m における渦パラメータの統計値.	38
3.20 抽出された孤立渦における渦度 (絶対値) の平均値の高度変化. 縦軸が高度 [m] で, 横軸が渦度.	39
3.21 抽出された孤立渦における最大接線風速となる値の平均値の高度変化. 縦軸が高度 [m] で, 横軸が最大接線風速.	40
3.22 抽出された孤立渦における地表面応力最大となる値の平均値の高度変化. 縦軸が高度 [m] で, 横軸が地表面応力.	40
3.23 抽出されたそれぞれの孤立渦の平均接線風速の平均値の高度変化. 縦軸が高度 [m] で, 横軸が平均接線風速の平均値.	41
3.24 渦度の 3 次元プロット. 水平方向に約 1.6 km, 鉛直方向に約 1.5 km を切り出し, 渦度 $\pm 0.9 \text{ s}^{-1}$ 以上の領域をプロットしている. 底面は渦度の水平分布で, 赤と青はそれぞれ正の渦度と負の渦度に対応している.	42

3.25	計算領域全体で得られた流れ場の模式図. 地表面付近では幅数十から 100 m スケールの上昇流領域で構成される多角形構造が存在し, その水平スケールは数 km から最大 10 km 程度である. 多角形構造の教会では渦構造が発達している. 上昇流は上空ブルーム状構造に変化し, 最大高度 6 km 程度までの様々な高度まで発達して水平発散する. 発散した流れは下降流となって対流セルを形成している.	43
3.26	水平全領域の地表面応力分布. 白い領域が地表面応力が大きい領域を示す.	45
3.27	水平領域の一部 (2 km 四方) を抜き出し拡大した地表面応力分布. 範囲は図 3.6 と同じ.	46
3.28	地表面応力の強度分布ヒストグラム. 横軸が応力のランク [Pa], 縦軸が個数 (対数スケール).	47
3.29	抽出した渦の半径と地表面応力の水平分布. カラートーンが地表面応力 [Pa], 黄色い円が抽出された渦の最大接線風速を持つ半径を表す.	48
3.30	地表面応力の強度分布ヒストグラムにおいて, 応力のランクごとに渦によってもたらされた計算格子点の割合を示すグラフ. 横軸が応力のランクを示し, 縦軸に各ランクごとに渦によってもたらされている点の割合を示す.	49
3.31	水平全領域における地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (緑 X マーク) と抽出された渦を示す点 (黒丸) と鉛直風 ($z = 2.5$ m) の水平分布.	51
3.32	地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (緑点, キャプションに点数) 周りの水平風ベクトル及び鉛直風分布.	53
3.33	地表面応力が強い場所 (a) における水平風ベクトルと鉛直風及びの地表面応力が 0.025 Pa を超える計算格子点の水平分布 (左図) と渦度の 3 次元分布 (右図). 左図において鉛直風のカラートーンは抽出した渦の最大接線風速の内側領域のみを描画している. 右図では赤色と青色で絶対値 0.6 s^{-1} 以上の正と負の渦度をプロットしている. 水平方向の描画範囲は約 1 km である.	54

3.34 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (b) の図.	54
3.35 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (c) の図.	55
3.36 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (d) の図.	55
3.37 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (e) の図.	56
3.38 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (f) の図.	56
3.39 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (g) の図.	57
3.40 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (h) の図.	57
3.41 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (i) の図.	58
3.42 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (j) の図.	58
3.43 地表面応力が強い場所における応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) 及び水平風の絶対値 [ms^{-1}] (カラートーン) の水平分布. 円は抽出 した渦の最大接線風速となる半径を示す.	59
3.44 地表面応力が強い場所における応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) 及び鉛直風 [ms^{-1}] (カラートーン) の水平分布. 円は抽出した渦の 最大接線風速となる半径を示す.	60
3.45 地表面応力が強い場所における応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) 及び水平発散 [s^{-1}] (カラートーン) の水平分布. 円は抽出した渦の 最大接線風速となる半径を示す.	61
3.46 地表面応力が強い場所における応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) 及び気圧 [Pa] (カラートーン) の水平分布. 円は抽出した渦の最大 接線風速となる半径を示す.	62
3.47 地表面応力が強い場所における応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) 及び平均からの温位偏差 [K] (カラートーン) の水平分布. 円は抽出 した渦の最大接線風速となる半径を示す.	63

3.48	地表面応力が強い場所における応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) 及び密度 [kgm^{-3}] (カラートーン) の水平分布. 円は抽出した渦の最大接線風速となる半径を示す.	64
3.49	計算解像度別の水平全領域の地表面応力の水平分布. それぞれの解像度ごとに地表面応力の強さが異なるため, カラーバーのスケールが異なっている.	67
3.50	計算解像度別の水平全領域の鉛直風の水平分布.	68
3.51	計算解像度別に各最下層において抽出された渦の空間分布. 赤点が抽出した渦の中心座標を示す.	69
3.52	計算解像度別の地表面応力の強度分布ヒストグラム. 色はそれぞれ解像度が異なり, ピンクが 5 m, 青が 10 m, 橙が 25 m, 赤が 50 m, 紫が 100 m の結果を示す.	70
3.53	地表面応力の強度分布ヒストグラムにおいて, 応力のランクごとに渦によってもたらされた計算格子点の割合を示すグラフ. 横軸が応力のランクを示し, 縦軸に各ランクごとに渦によってもたらされている点の割合を示す. 色と計算解像度の対応は図 3.52 と同じ. . . .	71
3.54	抽出された個々の渦について最大接線風速となる半径 [m] (横軸) と地表面応力の最大値 [Pa] (縦軸) の計算解像度別の散布図. 個々の赤い点が個々の渦構造に対応している.	73
4.1	本研究で解析した渦 (オレンジ) と衛星観測から得られたダストデビル (青; Stanzel et al., 2008) の半径のヒストグラム. 横軸が半径 [m], 縦軸が渦の個数を表す. ヒストグラムのランク幅はおよそ 10 m である. 本研究の結果で, 半径が小さい渦は数百個あるが, このグラフは見やすさのため縦軸を上限 30 に設定している.	77
4.2	本研究で抽出した渦 (黒点) とローバー観測で推定された渦 (赤点; Ringrose et al., 2003) の最大接線風速と最大接線風速となる半径の散布図. 横軸が半径 [m], 縦軸が風速 [ms^{-1}] を表す.	77

4.3	本研究で解析した渦 (オレンジ) とランダー観測から得られた渦 (青; Onodera et al., 2023) の風速のヒストグラム. 横軸が風速 [ms^{-1}], 縦軸が渦の個数を表す.	78
A.1	地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 1 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	84
A.2	地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 2 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	85
A.3	地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 3 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	86
A.4	地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 4 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	87
A.5	地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 5 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	88
A.6	地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 6 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	89
A.7	地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 7 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	90
A.8	地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 8 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	91
A.9	地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 9 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	92
A.10	地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 10 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	93
A.11	地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 1 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	94
A.12	地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 2 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	95

A.13 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 3 番目付近における 抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	96
A.14 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 4 番目付近における 抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	97
A.15 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 5 番目付近における 抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	98
A.16 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 6 番目付近における 抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	99
A.17 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 7 番目付近における 抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	100
A.18 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 8 番目付近における 抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	101
A.19 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 9 番目付近における 抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	102
A.20 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 10 番目付近における 抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.	103
D.1 全体のフローチャート. 右上の数字は対応する節番号. 薄緑色と赤 色の網掛は対応するスクリプトを表す.	112

第1章 研究背景と目的

1.1 火星大気とダスト

火星大気には定常的にダストが存在しており、様々な時空間スケールのダストを伴う現象が知られている。図 1.1 にその時空間スケールの一部を示す。最も時空間スケールが大きな全球規模の現象として知られるグローバルダストストーム (Global Dust Storm) は火星表面の様子を大きく変えてしまう様子が知られている。また時空間スケールの小さな現象として乱流やダストデビル (塵旋風, つむじ風) と呼ばれる鉛直渦によってダストが巻き上げられる現象も知られている (図 1.2)。その間のスケールにもローカルダストストーム (Local Dust Storm) やリージョナルダストストーム (Regional Dust Storm) と呼ばれる現象が存在している。

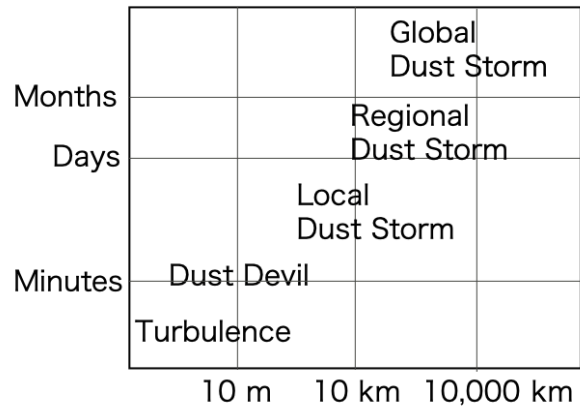


図 1.1: 火星大気中におけるダスト現象の時空間スケール。横軸が空間スケール、縦軸が時間スケールを表す。

これらの現象に伴って変化する大気中ダスト量によって、火星大気の光学的厚さが影響を受ける。図 1.3 は Mars Reconnaissance Orbiter で得られた気温の季節変化である。グローバルダストストームが生じたことで大気中のダスト量が増えた時期



図 1.2: 探査機 Curiosity によって撮影されたダストデビル (画面中央の白く細長く立ち昇っているもの). 水平スケールは 5 メートル, 鉛直スケールは 50 メートル程度と推定されている. (<https://photojournal.jpl.nasa.gov/catalog/PIA24039>)

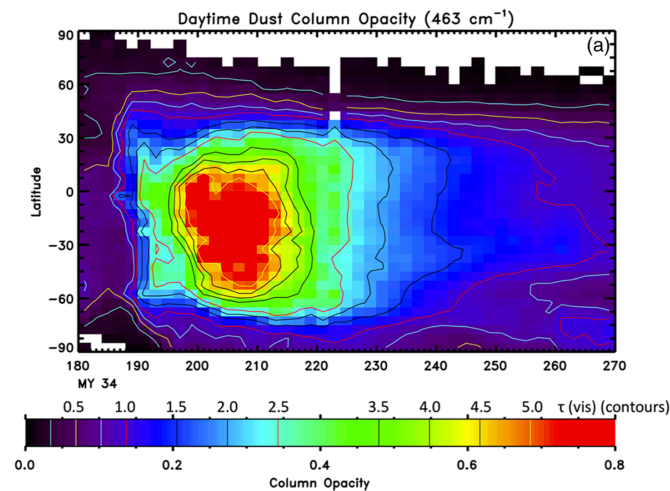


図 1.3: 火星の光学的厚さの日中における東西平均の季節変化. 縦軸が緯度, 横軸が時間を示す. 火星中心黄経 $L_s = 180^\circ$ が北半球秋分, $L_s = 270^\circ$ が北半球冬至に対応する. Kass et al. (2019), Fig. 2 より抜粋.

を含む気温の季節変化に関する観測結果である (Kass et al., 2019). 北半球の秋から冬にかけて火星の広い範囲で光学的厚さが大きくなっている様子が見られる. これは全球規模のダストイベントによるものである. 大気的光学的厚さが変化することで, 大気の温度分布や循環構造が影響を受ける. 図 1.4 は Mars Global Surveyor による観測をデータ同化した数値計算によって得られた東西平均及び時間平均された大気の温度と循環場の空間分布を示した結果である (Montabone et al., 2005). グローバルダストストームが発生した大気中のダストが多い年と少ない年の結果を比較している. 大気中のダストが少ない年に比べて, 多い年は地面付近で温度が高い領域が広がり, 循環構造が強くなっていることがわかる. Rafkin (2009) では,

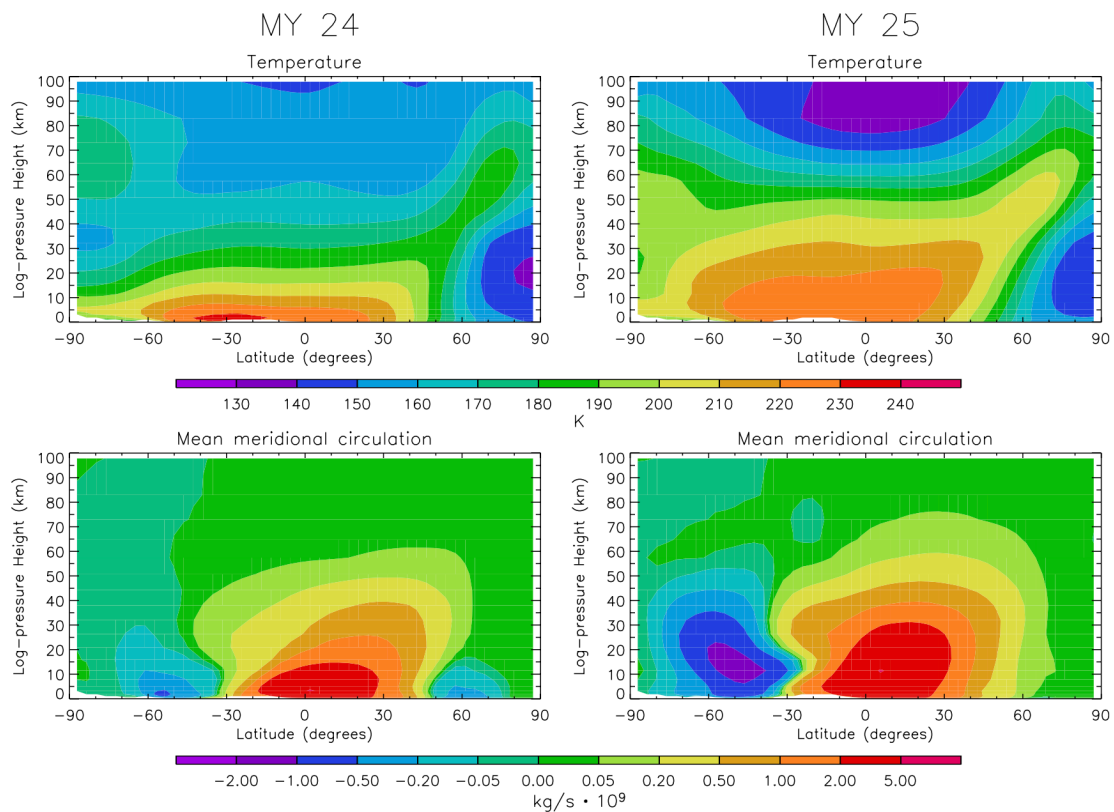


図 1.4: 東西平均気温 (上段) と子午面循環 (下段) の空間分布. 横軸が緯度で, 縦軸が高度を示す. 左列はグローバルダストストームが生じていない年 (MY 24), 右列はグローバルダストストームが生じた年 (MY 25). いずれも $L_s = 195^\circ$ – 225° の期間 (火星北半球秋) の時間平均. Montabone et al. (2005), Fig. 7 より引用.

ダストの巻き上げとそれに伴う大気対流の変化が与える相互フィードバック作用に関する数値計算を行った。その結果、ダスト量の増加により熱放射量が上昇し、より強い流れ場を生み出すことで、さらにダストを巻き上げるというフィードバックが生じていることが示された。

以上のように火星環境に大きな影響を与える大気中ダストは、地表にあるダストが流れ場によって巻き上げられることで存在していると考えられる。大気中にダストがどのように巻き上げられるかを調べるために数値計算を使って推定する試みが行われている。

1.2 火星大気のダストに関する数値計算

火星の気象状態を表現するために GCM を用いた研究は数多く行われている。大気中ダスト分布の季節変化の表現を試みた研究に Kahre et al. (2006) がある。Kahre et al. (2006) では火星の大気大循環モデル (Global Circulation Model; GCM) を用いた全球モデルの数値実験により、観測で得られているような大気のダスト分布を表現するために、ダストデビルによるものと、大気境界層において吹く風 (風応力) による効果を考慮した 2 つのダスト巻き上げスキームを考慮することが必要なことを示した。

Kahre et al. (2006) で用いられている風応力スキーム (KMH スキーム) は地球の砂漠で生じるダストストームの再現を目的として開発された地表面におけるダストの巻き上げ量を推定するスキームであり、Kahre et al. (2006) では火星重力を考慮した形に修正したものをを用いている。このスキームでは GCM で表現される平均風の強さからダストの巻き上げ量を見積もっている。もう一つのダストデビル巻き上げスキーム (DDA スキーム) は大気の運動におけるダストデビルの働きを考慮したスキームである。火星表面における対流運動に伴う運動エネルギーの一部がダストデビルによるダスト巻き上げエネルギーに変換され则认为、ダストの巻き上げ量を見積もっている¹⁾。図 1.5 は 2 種類のそれぞれのスキームによって表現された全球平均した光学的厚さの季節変化を示したものである。KMH スキームによって季節的に変化するダスト量が表現され、DDA スキームによって年間を通して定常的に存在するダスト量が表現されている。

しかし Kahre et al. (2006) で用いられた二つのダスト巻き上げスキームは、実際

¹⁾ Kahre et al. (2006) で用いられた 2 種類のスキームについては、付録 B 参照。

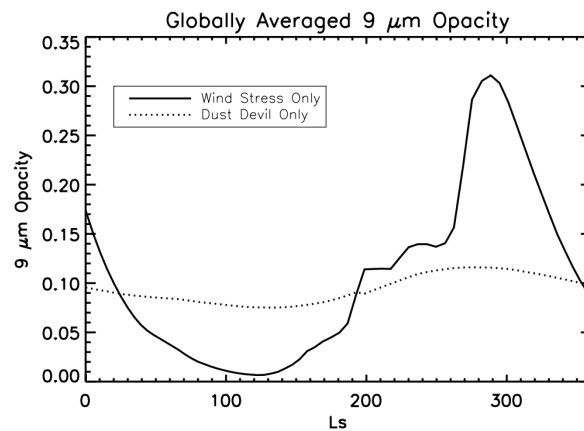


図 1.5: 大気中のダスト量によって変化する光学的厚さの全球平均された季節変化. 横軸が L_s , 縦軸が光学的厚さの変化に伴う大気透過率を示す. 実線が風応力 (KMH スキーム) によってもたらされる変化, 破線がダストデビル (DDA スキーム) によってもたらされる変化. Kahre et al. (2006), Fig. 10 より引用.

の流れ場を解析することによる検証ができていない. DDA スキームは顕熱フラックスから推定した運動エネルギーによる見積もりに過ぎない. KMH スキームは風速によってダスト巻き上げ量を推定しているが, 実際には火星地表面ではダストデビルなどの小スケールの現象が生じていることが知られており, 一様な流れ場分布を仮定することによって推定された巻き上げ量とは異なる可能性がある. このため, 地表面から巻き上げられるダスト量を推定するためには地表面付近における小スケールの流れ場分布やダスト巻き上げ量を定める地表面応力の強さを知ることが重要だと考えられるが, 観測によって調べることは原理的に不可能である.

1.3 具体的な流れ場に注目した数値計算

地表付近の微細な流れ場について調べるため, 地球や火星の設定で Large Eddy Simulation (LES) を用いた数値計算による研究が行われている.

惑星大気境界層 (Planetary Boundary Layer; PBL) の地表面付近における流れ場の空間分布について, 対流層上方で上昇流が塊状に分布し, 上昇流を地表付近まで辿っていくと地表付近では多角形構造を構成する様子がみられる (地球設定: Sullivan and Patton, 2011; 図 1.6, 火星設定: Michaels and Rafkin, 2004). 対流層上方における上昇流の塊状の構造はプルーム状構造と呼ばれている (Sullivan and Patton, 2011). 地表付近の上昇流による多角形構造の境界上では, ダストデビルのような

渦構造が形成されることが示されている (地球設定 : Ohno and Takemi, 2010; Ito et al., 2013, 火星設定 : Toigo et al., 2003; Spiga et al., 2020) ダストデビルのような渦構造の形成について, 計算解像度依存性について調べられており, 得られた渦を統計的に調査すると, 渦構造内部の圧力降下の大きさが計算解像度 1.25 m で収束することなどが示されている (地球設定 : Giersch and Raasch, 2023; 図 1.7). 地表付近における風の摩擦速度や気圧の分布, 乱流場が背景風が適度に存在する場合に強まることが調査されている (火星設定 : Fenton and Michaels, 2010) 大気中ダスト量の空間分布が局在的である場合に地表面付近の乱流が強まることが示唆されている (火星設定 : Wu et al., 2021). ダスト巻き上げ量を決定づける地表面応力について 2 次元の計算を行い, 地表面応力がダスト巻き上げ閾値を超える可能性が示されている (火星設定 : Odaka et al., 2001).

ダストデビルのような渦構造に注目し, 高解像度火星大気 LES による調査を試みたのが Nishizawa et al. (2016) である. Nishizawa et al. (2016) では火星大気を想定した設定で, 解像度を様々に変えた LES 実験を実施し, 生じた渦を構成するパラメータの統計量について計算解像度別に調査した. 各解像度の計算において高度約 62.5 m の流れ場について調べた結果, 計算解像度を細かくするほど発生する渦構造の数が多く, 風速や渦度の強い渦が生じていることがわかった. 計算解像度が 100 m から 5 m と変わることによって, 抽出される渦構造の数は 17 個から 3046 個と増え, $O(100)$ も多くの孤立渦構造が存在することが示された. 図 1.8 は計算解像度別に抽出した渦における最大接線風速別の数密度ヒストグラムである. 最大接線風速の数密度は $3 - 4 \text{ m s}^{-1}$ あたりにピークをもつ分布となっており, これはどの計算解像度でも似たような分布を持っている. この強度分布はべき乗速に従うことが示された. それぞれの計算解像度ごとに数密度分布は似ているが, その個数は指数的に増加する様子がみられる.

GCM を用いた研究において, 地面付近の具体的な流れ場を調査した上でダスト巻き上げ量を見積もっているとは言えず, LES を用いた研究において具体的な流れ場やダストデビルのような渦構造に注目していても, ダスト巻き上げ量を決定づける地表面応力との関係について詳しく調べられているとは言えない. ダストを巻き上げるような強い地表面応力をもたらす流れ場構造には, 具体的にどのようなものがあるのか調べるのが, 火星大気へのダスト巻き上げプロセスの理解には重要である.

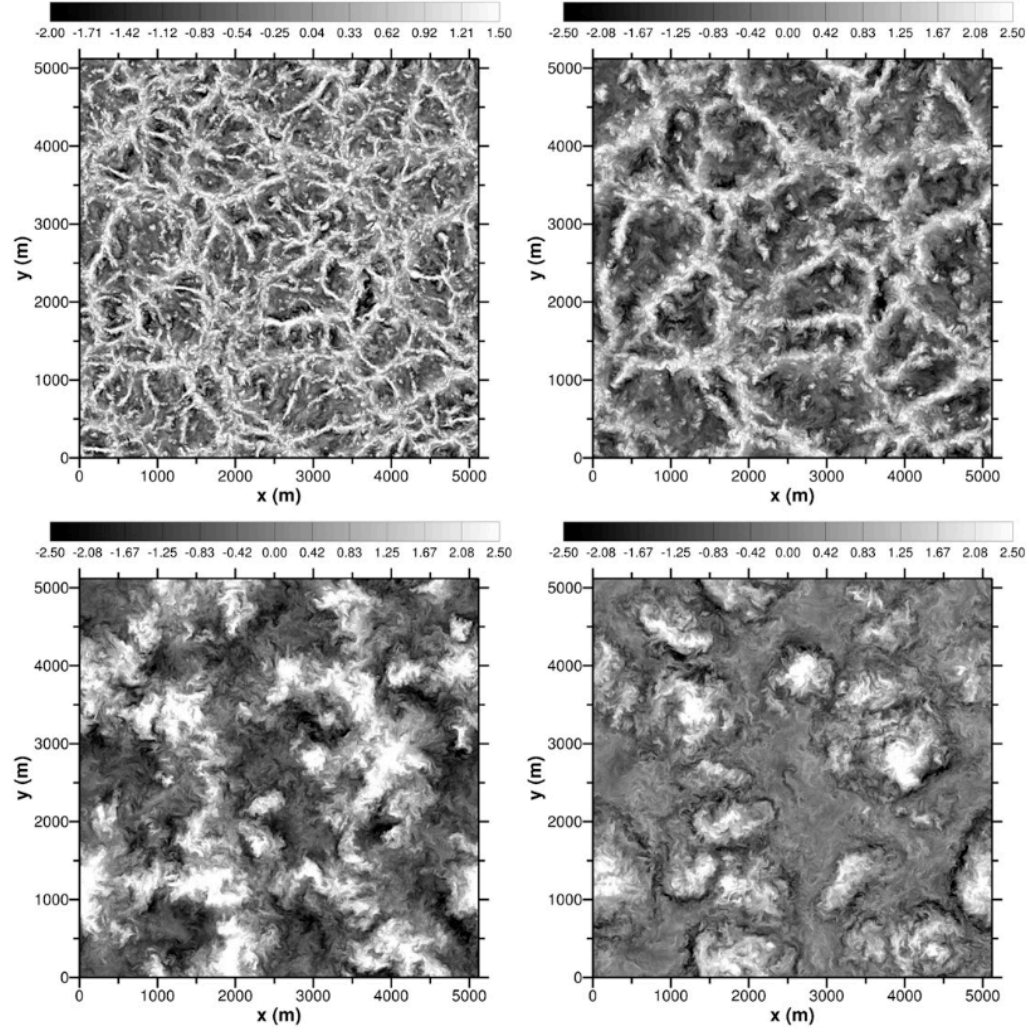


図 1.6: 解像度水平 5 m, 鉛直 2 m の計算結果における対流 PBL の鉛直風の水平分布. それぞれ画像の高度は異なっている. PBL の上端の高度を z_i , 各画像の示す高度を z としたとき, 左上は地上付近 $z/z_i = 0.04$, 右上は $z/z_i = 0.1$, 左下は PBL の真ん中で $z/z_i = 0.5$, 右下は $z/z_i = 0.9$ を示す. カラーバーのスケールは図ごとに異なる. Sullivan and Patton. (2011), Fig. 13 より引用.

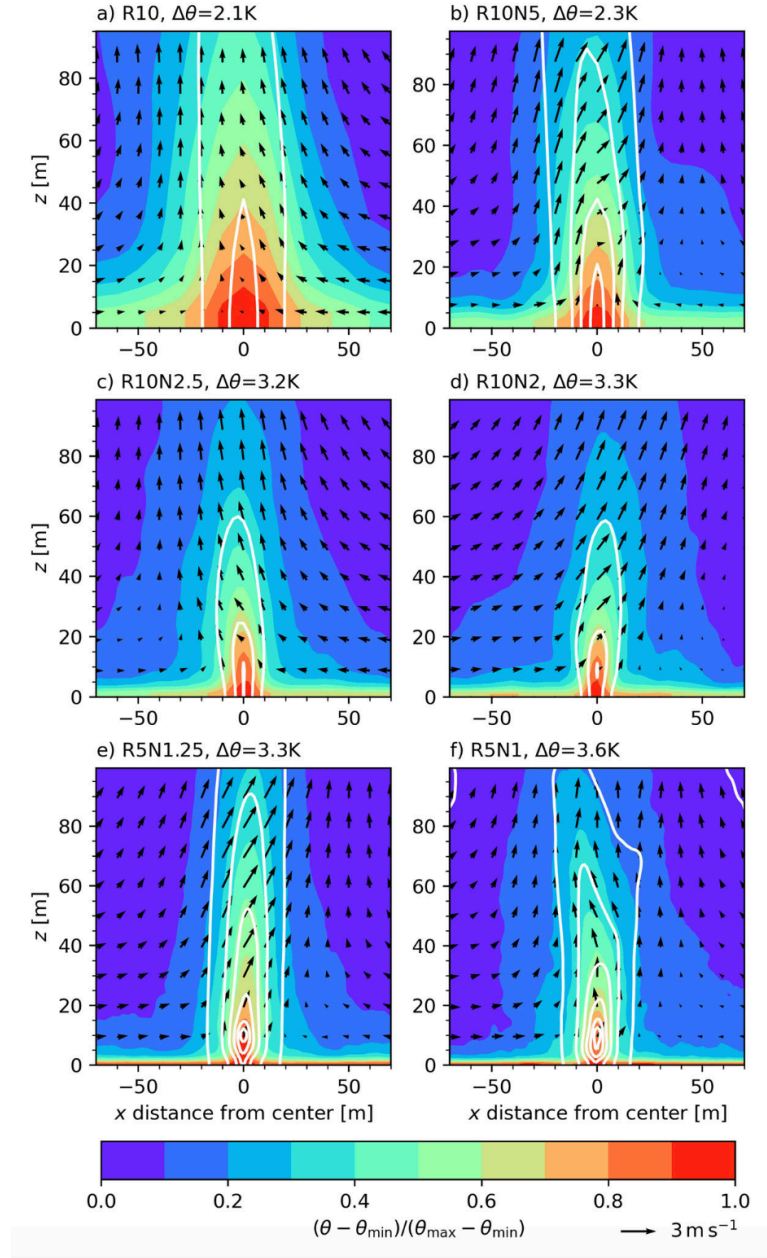


図 1.7: 各計算解像度別に得られた渦周辺の正規化された温位と風速ベクトル、気圧の鉛直分布. 横軸が渦中心からの距離, 縦軸が地面からの高さを示す. 色が温位, 等値線が 8 Pa ごとの中心からの気圧差の等値線を表している. 計算解像度はそれぞれ (a) 10 m, (b) 5 m, (c) 2.5 m, (d) 2 m, (e) 1.25 m, (f) 1 m の結果である. Giersch and Raasch. (2023), Fig. 13 より引用.

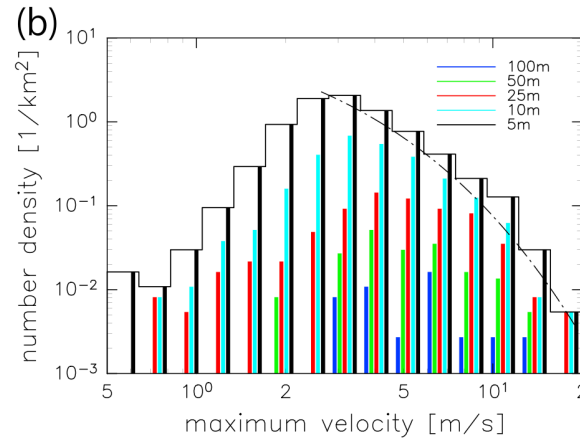


図 1.8: 複数の計算解像度別によって得られた渦構造の持つ接線風速の強度別の数密度ヒストグラム。横軸が渦の接線風速の最大値、縦軸が数密度を示す。解像度 5, 10, 25, 50, 100 m のそれぞれの結果が並んでいる。Nishizawa et al. (2016), Fig. 3 より抜粋。

1.4 本研究の目的

本研究では火星ダストを大気への巻き上げ量を決めると考えられる地表面応力について調べ、ダストを巻き上げるような強い地表面応力がどのような流れ場構造に伴って生じているか調査することを目的とする。そのため、広い領域で高解像度の火星大気数値計算を行った Nishizawa et al. (2016) のデータを元にして解析を行う。高解像度の計算であるため、観測でも知られているような小スケールの現象であるダストデビルのような渦構造を陽に表現でき、広範囲の計算であるため、広く大きな領域で生じる構造を含めた流れ場全体について同時に調べられることが期待できる。

解析では観測でも知られているダスト巻き上げ現象であるダストデビルのような渦構造に注目し、地表面応力と渦などの微細な流れ場構造との関係を初めて明らかにすることを目指す。さらに得られた結果について、最高解像度の 5 m 以外の粗い解像度のデータを解析した結果と比較することで、計算解像度依存性についても調査を試みる。

本論文の構成は以下のとおりである。第 2 章では本研究で使用する Nishizawa et al. (2016) のデータと、計算した数値モデルについて解説する。第 3 章では主に計算解像度 5 m の結果について解析結果を示す。まず流れ場全体の概要を把握するため、計算領域全体を俯瞰し、得られた流れ場構造を観察する。続いて観測でもダ

ストが巻き上げられている様子が知られるダストデビルのような渦構造について調査する。そしてダスト巻き上げに関わる地表面応力について調べ、強い地表面応力がどのような流れ場構造によってもたらされるか調べる。特に渦構造との関係について詳しく調査する。その上で、粗い計算解像度の結果と比較することで、計算解像度の影響を考察する。第 4 章では解析結果についてまとめ、本研究の解析結果と観測結果を比較して議論を行う。

第2章 計算データ

本研究で解析を行う Nishizawa et al. (2016) で得られた火星大気の数値計算における数値モデルと出力結果について記述する.

2.1 使用する数値モデル

2.1.1 SCALE-LES

Nishizawa et al. (2016) で得られた結果は RIKEN AICS が開発した LES モデル SCALE-LES ver3.0 (Nishizawa et al., 2015; Sato et al., 2015) によって計算された. LES では計算解像度よりも大きな渦は陽に計算し, 解像度よりも小さな渦をパラメタリゼーションによって表現する.

SCALE-LES では 3 次元の完全圧縮非静力学流体方程式を解いている¹⁾. 乱流モデルには Smagorinsky モデル (Brown et al., 1994) を用いている.

2.1.2 計算設定

Nishizawa et al. (2016) では火星大気を想定したパラメータを設定し数値計算を行った

計算領域のサイズは水平方向に 19.2 km × 19.2 km で, 垂直方向に 21 km を取った. 空間解像度は 100, 50, 25, 10, 5 m のそれぞれで計算を実施しており, 高度 15 km までは等方な計算グリッドをもち, それ以上の高度では鉛直方向のグリッドを

¹⁾ 使用している方程式系については詳細は付録 C を参照.

徐々に大きくしている。この空間解像度はダストデビルのような渦構造を陽に解像することを目的として設定された。

火星大気にはほとんど水分が存在しないことから、湿潤過程は考慮せず、乾燥大気による実験を行った。

地表面及び大気の加熱・冷却率として Odaka et al. (2001) によって計算された 1 次元放射対流モデルによる結果を外部から与えられた。地表面との熱フラックスをバルク法によってモデル最下層に与えている。この加熱率は北緯 20° における火星の夏 ($L_s = 100^\circ$ のころ) を想定したものである。図 2.1 はモデルで与えた地表面温度の時間変化である。

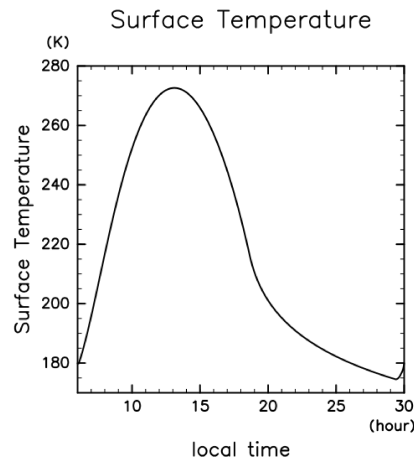


図 2.1: 地表面温度の時間変化。横軸が計算開始からの時間 (現地時刻に等しい)、縦軸が絶対温度を示す。

水平方向の境界条件として周期境界条件を用いている。

初期条件及び積分時間は計算解像度によって異なる。計算解像度 100, 50, 25, 10 m の実験においては Odaka et al. (2001) による鉛直温度分布 (図 2.2) に微小な温位擾乱を加えた静止大気を初期条件とした。LT = 00:00 (Local Time; 地方時) から 24 時間分の計算を行った。計算解像度 5 m の実験においては、計算解像度 10 m の LT = 14:00 の結果を内挿した結果を初期条件とした。そこから LT = 15:00 までの 1 時間分の計算を行った。

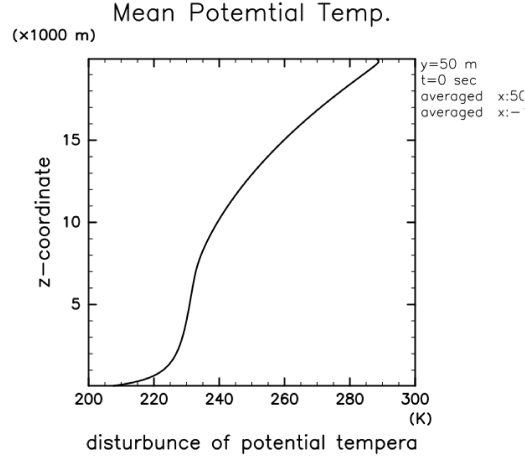


図 2.2: 大気加熱率の鉛直分布. 横軸が温位 [K], 縦軸が高度を示す. ここでは計算開始時点の LT = 00:00 のものを示している.

2.1.3 地表面応力

地表からのダストの巻き上げ量は, 流れ場による地表面応力によって決まると考えられる. 地表面応力 τ は地表面との摩擦速度 u_* と大気密度 ρ によって求められ,

$$\tau = \rho u_*^2$$

である. 摩擦速度 u_* は SCALE-LES が地表面フラックスとして用いている Uno et al. (1995) モデルを使って求める. Uno et al. (1995) は Louis (1979) のモデルを拡張したものである. 高度 z における風速 u , 中立状態における摩擦係数 a を用いて, 地表面粗度を z_0 として

$$u_*^2 = a^2 u^2 F_m$$

と表現する (k はカルマン定数). F_m は運動量フラックスである. Uno et al. (1995) ではバルクリチャードソン数 Ri_B の正負によって運動量フラックスを以下のように定めている.

$$F_m = 1 - \frac{b Ri_B}{1 + c \sqrt{|Ri_B|}} \quad (Ri_B < 0),$$

$$F_m = \frac{1}{(1 + b' Ri_B)^2} \quad (Ri_B > 0).$$

ここでそれぞれのパラメータは以下の通りである.

$$\begin{aligned} Ri_B &= \frac{gz(\theta - \theta_s)}{\theta u^2}, \\ c &= C_m^* a^2 b \sqrt{\frac{z}{z_0}}, \\ b &= 2b' = 9.4, \\ C_m^* &= 7.4. \end{aligned}$$

ここで θ, θ_s はそれぞれ温位と地表面温度, g は重力加速度を表す.

2.2 渦構造の抽出方法

観測でも知られており, 数値的研究においても注目されているように火星のダスト巻き上げプロセスにはダストデビルのような渦構造が重要だと考えられている. 本研究においても渦構造に注目し, 解析を行うために流れ場から渦構造を抽出することを試みる. 渦構造の抽出方法は Nishizawa et al. (2016) と同じものを用いた. Nishizawa et al. (2016) では鉛直渦度の強度分布について標準偏差 σ をとり, 3σ よりも強い渦度をもつ計算格子点を特定する (すなわち統計的に高い渦度を持つ点を絞り込む) ことで, 渦の抽出を行っている²⁾.

渦度強度で絞り込んだ計算格子点周りの流れ場に対してフィッティングを行うことで, 渦構造か否かについて判定と渦度や半径などのパラメータの決定を行っている. まず 2 種類の渦 (Rankine 渦, Burgers-Rott 渦) を想定した流れ場でフィッティングを行う.

Rankine 渦は接線風速が渦中心からの距離に線形に比例して増加する渦である. 接線風速 v が最大となる半径を a とおけば, 接線風速の動径方向の分布は, 中心からの距離 r で表現され,

$$v = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega r, & (r < a) \\ \frac{1}{2}\omega \frac{a^2}{r} & (r > a) \end{cases}$$

となる.

²⁾ Nishizawa et al. (2016) による渦抽出プログラムのアルゴリズム詳細については付録 D を参照のこと.

Burgers-Rott 渦は接線風速が渦中心からの距離に非線形に比例して増加する渦である。接線風速 v が最大となる半径を a , 最大接線風速を V とおけば, 接線風速の動径方向の分布は, 中心からの距離 r で表現され,

$$v = \frac{Va}{(1 - e^{-K})r} \left\{ 1 - e^{-K\left(\frac{r}{a}\right)^2} \right\}$$

となる。ここでパラメータ K は Nishizawa et al. (2016) においては $K = 1.2564$ としている³⁾。

図 2.3 はそれぞれの渦の接線風速分布の概形を示したグラフである。

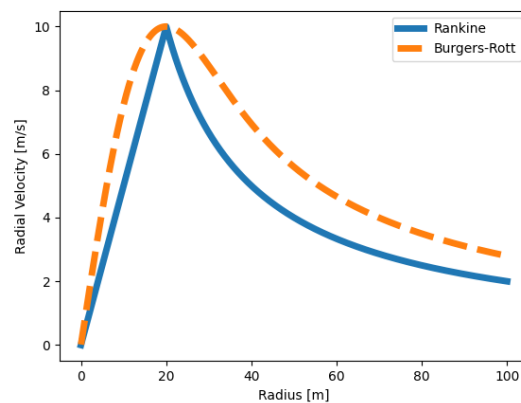


図 2.3: 渦の種類別の接線風速の動径方向の分布の例。横軸が中心からの距離 [m], 縦軸が接線風速 [ms^{-1}] を示す。実線が Rankine 渦, 破線が Burgers-Rott 渦を想定している。

Rankine 渦と Burgers-Rott 渦のフィッティングは次の手順で行われる。

1. 半径 10 m の渦を仮定する
2. 抽出された渦中心と仮定した半径を元に渦度を求め, フィッティングしたいタイプの渦の渦度と比較し, Marquardt 法を用いて二乗残差からフィッティングを行う⁴⁾
3. フィッティングの結果, 渦中心が大きくズレなければ判定を終了する

³⁾Burgers-Rott 渦の詳細については付録 D 参照。

⁴⁾Marquardt 法については付録 F 参照。

4. 渦中心が大きくズレていれば, 仮定する半径の大きさを大きくする.
5. 手順 2 から繰り返す

接線風速フィッティングは上記の方法で Rankine フィッティングされた渦パラメータに対してさらに絞り込みをかけるフィッティングである. 渦中心から一定の距離ごとに区切った同心円状領域別に平均接線風速を求め, その風速分布の変化が緩やかであるかどうかでフィッティングを行う.

以上の 3 種類のフィッティングを行い, 全てのフィッティングで渦と判定されたものを孤立渦として数える.

第3章 解析結果

はじめに最高解像度である 5 m の計算結果について解析を行う。その後に、他の解像度の結果を解析し、解像度依存性について調査する。

3.1 流れ場の概観

ダストの巻き上げに関わる地表面応力について調べる前に流れ場の全体構造の様相について把握することを目指す。そのためまずは計算領域全体を俯瞰して得られる流れ場の概観について記述する。

3.1.1 流れ場全体の鉛直構造

図 3.1 は鉛直風の水平分布である。各高度において計算領域全体 (水平 19.2 km) を描画している。赤色の領域が上昇流、青色の領域が下降流を示す。カラースケールは各高度によって異なる。Nishizawa et al. (2016) が解析していた高度と同じ 62.5 m の分布 (a) と 97.5 m の分布 (b) を並べている。加えて、997.5 m から 6997.5 m の高さまで 1,000 m おきに分布を並べた (c - i)。

高度 62.5 m では数十 m スケールの幅の細い上昇流領域が網目状に細かく広がっている様子が見られる。上昇流領域は多角形構造を形成しており、その水平スケールは直径数 km から、最大で 10 km 程度となっていることがわかる。この多角形構造は地球設定の計算 (Sullivan and Patton, 2011) や火星設定の計算 (Michaels and Rafkin, 2003) で見られる構造に対応していると考えられる。高度 97.5 m になると、高度 62.5 m で見られた上昇流領域がまとまって少し太くなり、高度 997.5 m では細かい構造がさらにまとまって、10 km スケールの大きな構造になっている様子が見られる。この上昇流が高度ごとに変化している様子は Sullivan and Patton

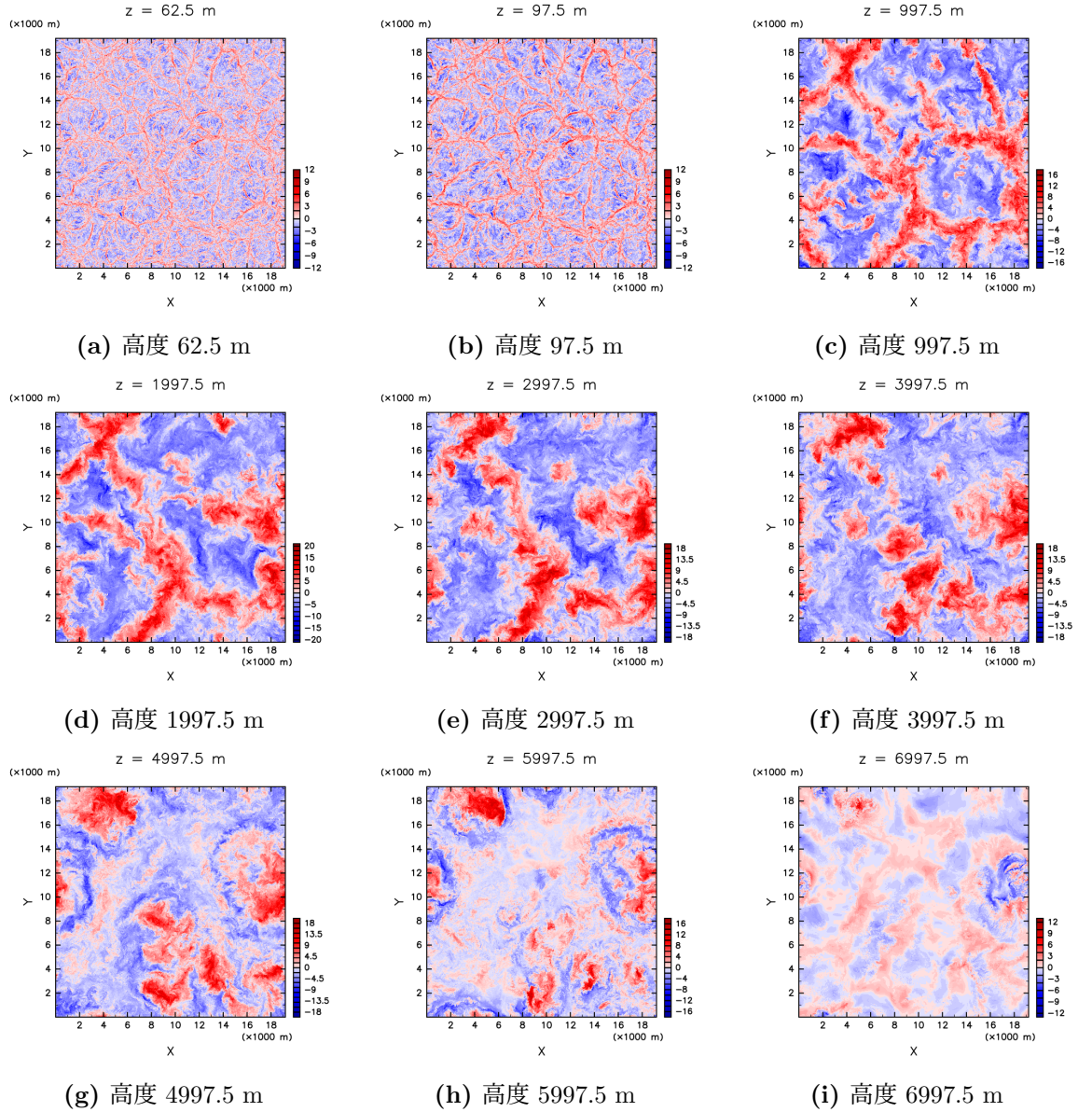


図 3.1: 水平全領域の鉛直風分布. (a) – (i) までモデル最下層の高度 2.5 m からいくつかの高度断面を示す. 赤い領域が上昇流で, 青い領域が下降流を示す. カラーバーのスケールは高度ごとに異なる.

(2011) で得られていたプルーム状構造に対応していると考えられる. その後, 高度 4,997 m あたりで構造が壊れはじめ, 高度 6,997 m になると目立った上昇流領域はなくなっていく. プルーム状構造について具体的な流れ場の様子を描画してみた. 図 3.2 は計算領域のうち水平 2 km, 鉛直 3 km (座標 $[x, y, z] = [2500 - 4500, 2500 - 4500, 0 - 3000]$) の領域を切り出した上昇流の 3 次元プロットである. こ

ここでは水平スケール 1 km 程度, 鉛直スケール 3 km 程度のプルーム状構造が発達している. 上昇流が 1.5 ms^{-1} 以上の境界をプロットしているが, その境界はなめらかではなく複雑な構造となっている様子が見られる. このプルーム状構造は数 km 程度の様々なスケールで発達している様子が見られる.

図 3.3 は水平風, 鉛直風及び温位の $y = 5442.5 \text{ m}$ における鉛直断面である. x 軸方向は領域全体を, 高さ方向は高度 10 km までを描画している. 水平風及び鉛直風の強さが高度 6,000 m 付近を境界に変化している様子が見られる. 鉛直風分布における上昇流領域 (赤い領域) が温位が高い領域と重なり, よく対応している様子が見られる.

図 3.4 は鉛直風の絶対値と温位の水平平均値の鉛直分布である. 左図の鉛直風水平平均の強さは地表面付近については地面との摩擦により小さい. 地表面から離れるに従って大きくなり, 高度 2,000 m 付近でピークを迎える. その後, 高度 7,000 m 付近まで減少し, そこから上で一定となる様子が見られる.

右図の温位の鉛直分布は高度 6,000 m 付近までは高度変化はなく一定で, それより上では減少していく様子が見られる. 以上より高度 6,000 m までは熱対流が活発に生じており, 対流圏の高さが 6,000 m となっている. これは Nishizawa et al. (2016) で示されていた結果と同様である.

3.1.2 モデル最下層に見られる流れ場

ダストは地表面から巻き上げられるため, 地表面付近の様子を調べるのが重要である. そのため地表面付近で流れ場がどのような構造を持っているか調査を行った. 計算モデルにおいて最も地表面に近いモデル高度は 2.5 m であるため, その高度における流れ場の様子を記述する.

モデル最下層の鉛直風分布

図 3.5 はモデル最下層の高度 2.5 m における鉛直風の水平分布である. 計算領域全体 (水平 19.2 km) を描画している. 赤色の領域が上昇流, 青色の領域が下降流を示す. 風速の最大値は約 3.0 ms^{-1} 程度である. 図 3.6 は全体のうち一部分 (2 km 四方) を切り出して拡大したものである.

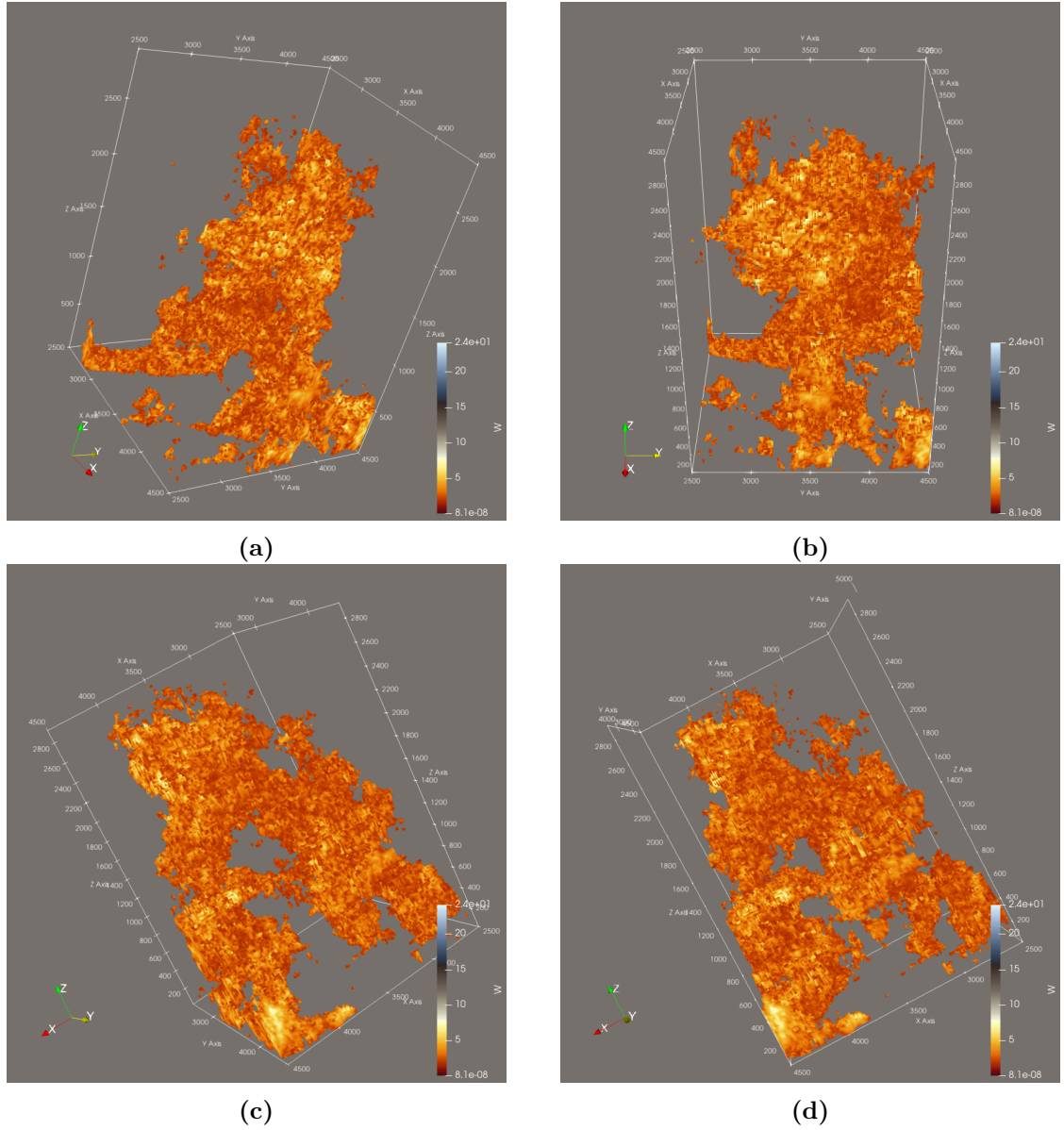


図 3.2: プルム状構造を構成する鉛直風の 3 次元プロット. 水平方向に $x = 2,500 - 4,500$ m, $y = 2,500 - 4,500$ m, 鉛直方向に $0 - 3$ km の領域を切り出している. プロットされている領域が鉛直風 1.5 ms^{-1} 以上の領域を表す. 左上図 (a) が x 軸方向が紙面手前で, y 軸方向が右奥の角度, そこから右上図 (b), 左下図 (c), 右下図 (d) の順に, z 軸に対して時計回りに回転してさせた図を表している.

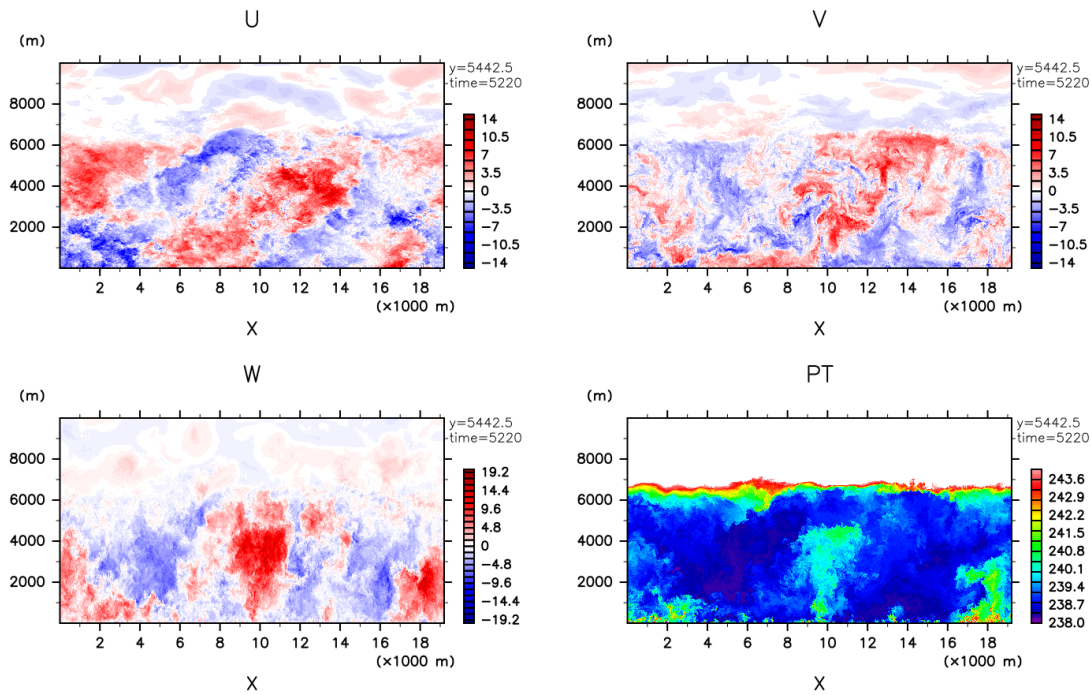
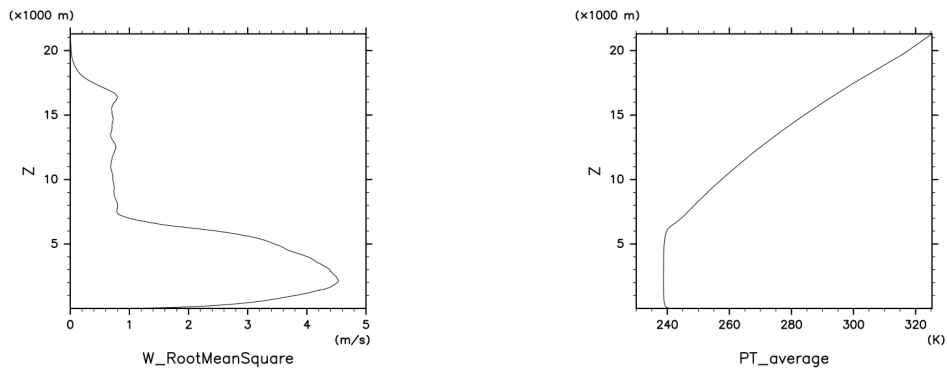


図 3.3: $y = 5442.5$ m における風速 x 成分 (U), 風速 y 成分 (V), 鉛直風 (W), 温位 (PT) の鉛直断面. x 軸方向の全領域を示しており, 縦軸は z 軸であり, $z = 10$ km までの鉛直領域を示している. 鉛直風において赤色は上昇流領域を, 青色は下降流領域を示している.



(a) 水平平均した鉛直風の絶対値

(b) 水平平均した温位

図 3.4: 鉛直風の絶対値及び温位の水平平均の鉛直分布. 横軸がそれぞれ鉛直風絶対値 (a), と温位 (b) を表し, 縦軸が高度 [km] を表す.

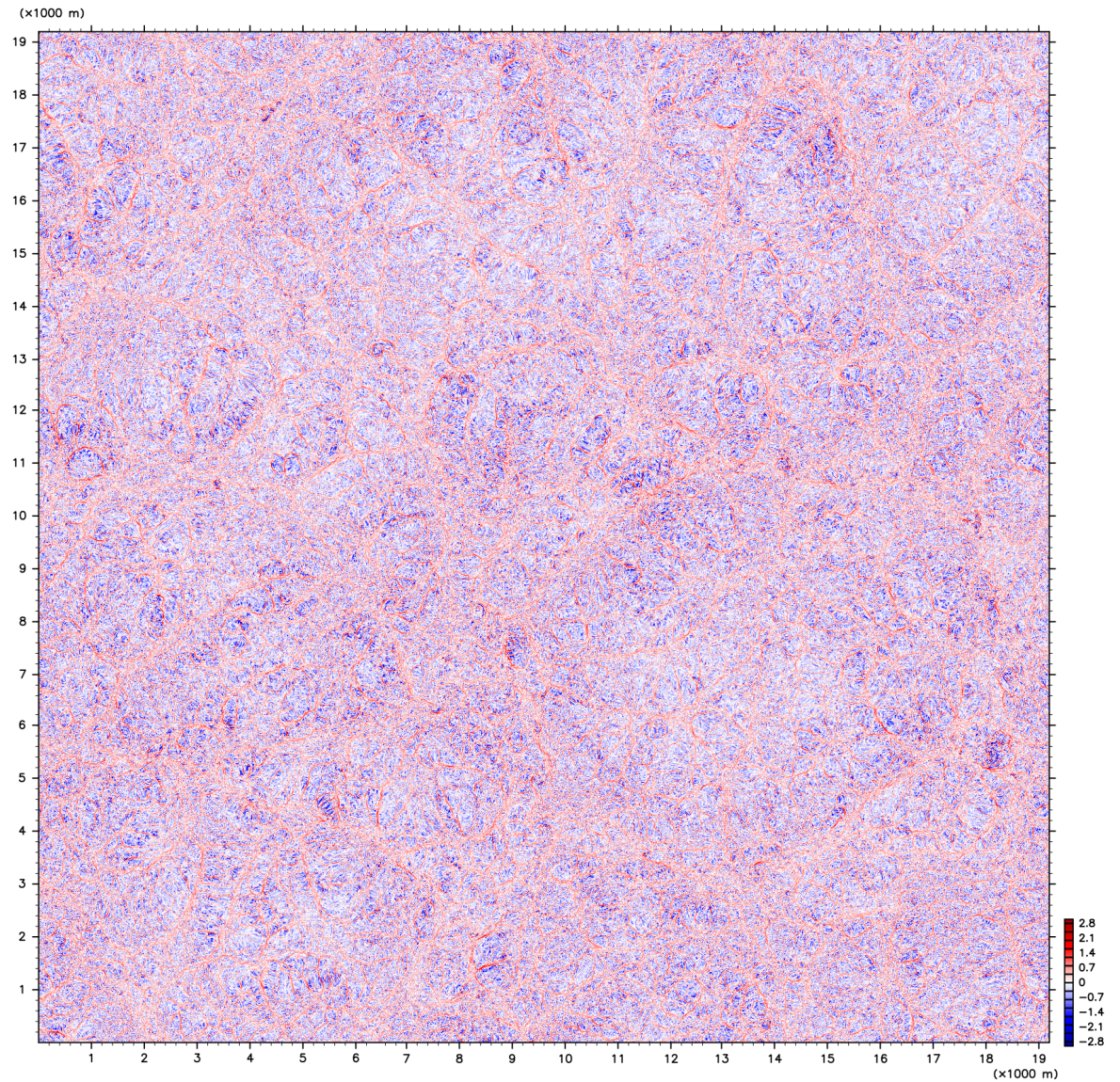
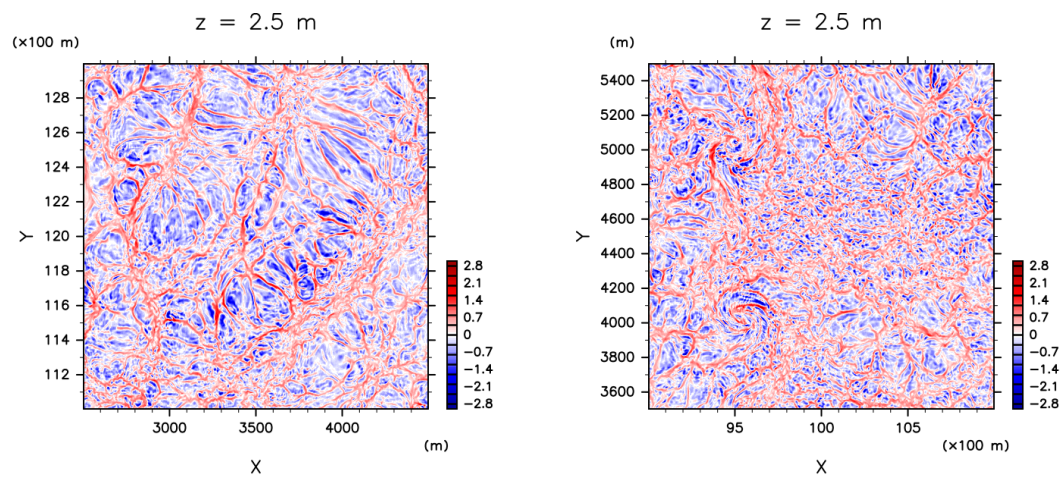


図 3.5: モデル最下層 ($z = 2.5$ m) の鉛直風分布. 水平全領域を示す. 赤い領域が上昇流で, 青い領域が下降流を示す.



(a) $[x, y] = [2500 - 4500, 11000 - 13000]$ の範囲 (b) $[x, y] = [9000 - 11000, 3500 - 5500]$ の範囲.

図 3.6: $z = 2.5$ m における鉛直風水平分布. 水平領域の一部 (2 km 四方) を抜き出し拡大したもの.

まず拡大図 3.6 について、左図の赤い上昇流領域に注目して見ると、数十 m 程度の幅を持った細かい筋状の強い上昇流領域が網目状に広がっている様子がみられる。その網目状の上昇流領域の合間に弱い下降流領域が薄く広がっている。右図においても左図と同様の筋状の上昇流領域がみられる他、図の中心付近などにさらに細かい上昇流の筋の中に下降流がスポット的に存在している様子がわかった。

続いて全体図 3.5 において全体を俯瞰してみれば、拡大図 3.6 で示したような構造は計算領域全体にわたって確認できる。さらに筋状の上昇流領域が連なることで、多角形状の大きな構造を形作っている。この大きな多角形の高度 62.5 m のものと同様に水平スケールで直径数百 m から数 km 程度であり、最大で 10 km 程度の直径の多角形構造が確認できる。

以上のように、鉛直風分布で見ると数十 m 程度幅を持った細かい筋状の小さな構造と、数百 m から数 km 程度の大きな構造を持っていることがわかった。

モデル最下層の水平風速分布

渦度と同じく、鉛直風分布で見られた構造が、水平風速分布とどのように対応しているか確かめる。

図 3.7 はモデル最下層の高度 2.5 m における水平風速の水平分布である。計算領域全体 (水平 19.2 km) を描画している。色が黒いほど風速が小さく、色が白いほど風速が大きいことを示している。渦度の最大値は約 25 ms^{-1} 程度である。

図 3.8 は全体のうち一部分 (2 km 四方) を切り出して拡大したものである。これらの拡大図は渦度の拡大図と同様に、鉛直風の拡大図 3.6 と同じ範囲を切り出している。全体図 3.7 を眺めると、セルの中心から外側に向かって風速が大きくなりながら広がっているような構造が重なりあっている様子がみられる。水平風速が大きくなっているところは、鉛直風の全体図 3.5 で示した上昇流領域による多角形構造の境界に沿って存在している。すなわち、多角形構造の内側からゆっくりと多角形構造の境界に向けて風が吹き、境界にある上昇流で引き上げられるところで風速が大きくなっていることがわかる。

拡大図 3.8 の左図でも全体図でみられたものと同様に上昇流領域に向かって段々と水平風速が大きくなっている様子が確認できる。また右図についてみると、上昇流領域に向かって水平風速が大きくなる領域の他に大きく強くなっているスポットがある ($x = 9500 \text{ m}$, $y = 4000 \text{ m}$ 付近)。これは渦度の拡大図 3.12 で示した渦

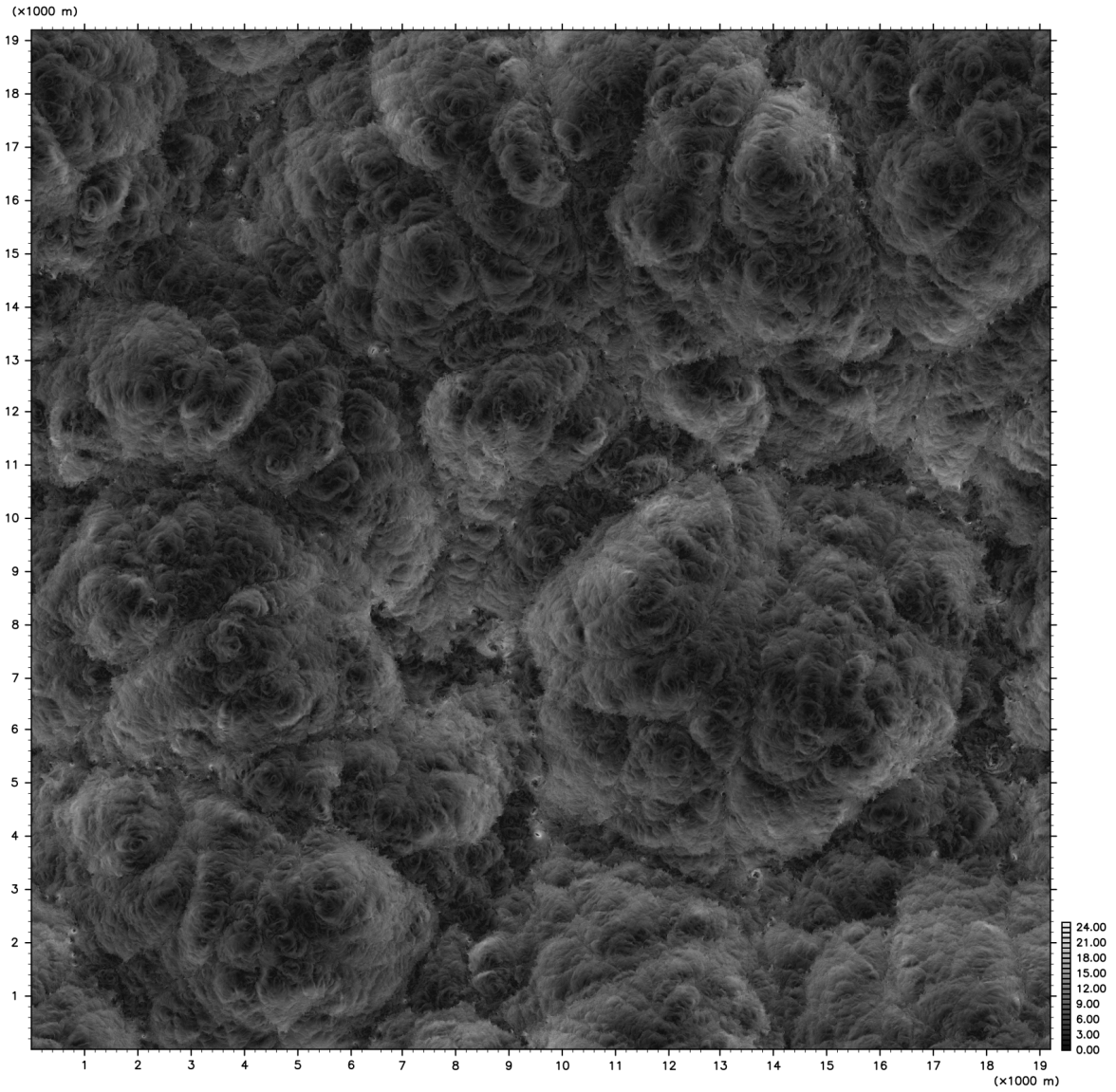
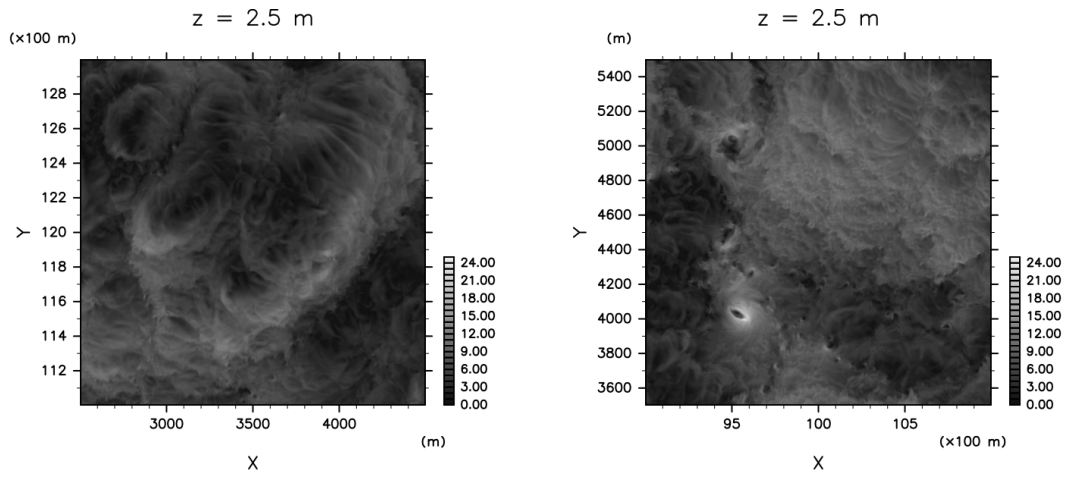


図 3.7: モデル最下層 ($z = 2.5$ m) の水平風速分布. 水平全領域を示す. 白い領域が水平風が強い領域を示す.



(a) $[x, y] = [2500 - 4500, 11000 - 13000]$ の範囲. (b) $[x, y] = [9000 - 11000, 3500 - 5500]$ の範囲.

図 3.8: $z = 2.5$ m における水平風水平分布. 水平領域の一部 (2 km 四方) を抜き出し拡大したもの. 範囲は図 3.6 と同じ.

度が大きい領域に対応している。渦の構造によって水平風速が強まっている様子が確認できる。

モデル最下層の水平風の収束発散分布

図 3.5 はモデル最下層の高度 2.5 m における水平風の収束発散の水平分布である。計算領域全体 (水平 19.2 km) を描画している。赤色の領域が発散領域、青色の領域が収束領域を示す。

図 3.10 は全体のうち一部分 (2 km 四方) を切り出して拡大したものである。

まず拡大図 3.10 について、青い収束領域と赤い発散領域の空間分布が鉛直風の空間分布 3.5 とよく対応している。すなわち数十 m 程度の幅を持った細かい筋状の収束領域があり、その網目状の収束領域の合間に弱い発散領域が広がっている。

収束発散の全体図 3.9 と鉛直風の全体図 3.5 を見比べればこのような鉛直風との対応は計算領域全体に渡って表現されていることがわかる。鉛直風の分布と同様に、水平風の収束発散も数十 m から数百 m 程度の水平スケールを持った細かい構造や数百 m から数 km 程度の水平スケールの大きな多角形状の構造を持っている。

3.2 流れ場から得られた渦構造

Kahre et al. (2006) や Nishizawa et al. (2016) でも注目されているように火星のダスト巻き上げ過程においてダストデビルが重要であることが示唆されている。そのため本研究においてもダストデビルを構成する渦構造がどのような特徴を持っているか調査を行った。

3.2.1 孤立渦の空間分布

図 3.11 はモデル最下層の高度 2.5 m における鉛直渦度の水平分布である。計算領域全体 (水平 19.2 km) を描画している。赤色の領域が正の渦度 (反時計回り)、青色の領域が負の渦度 (時計回り) を示す。渦度の最大値は約 3.0 s^{-1} 程度である。

図 3.12 は全体のうち一部分 (2 km 四方) を切り出して拡大したものである。これ

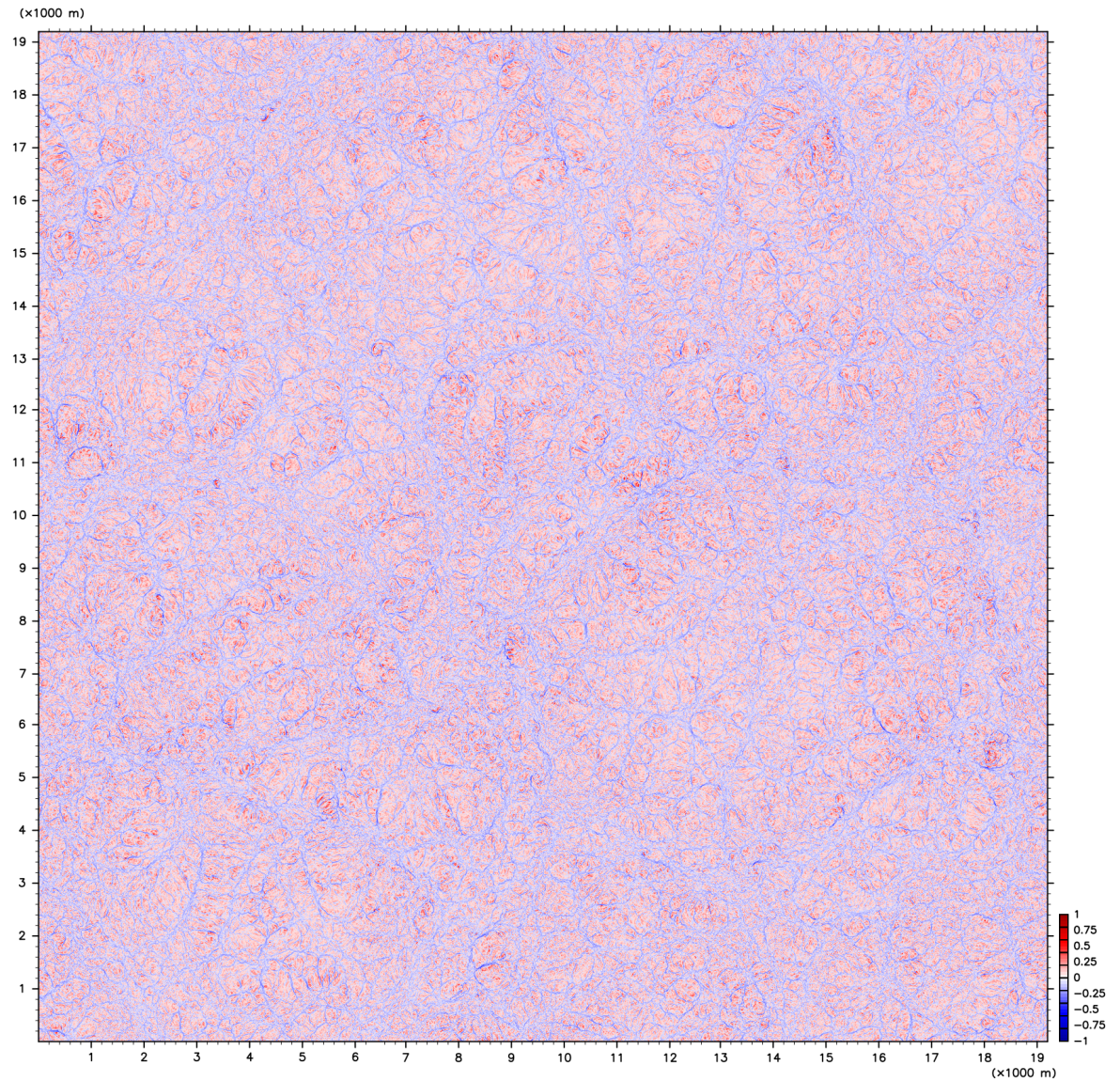
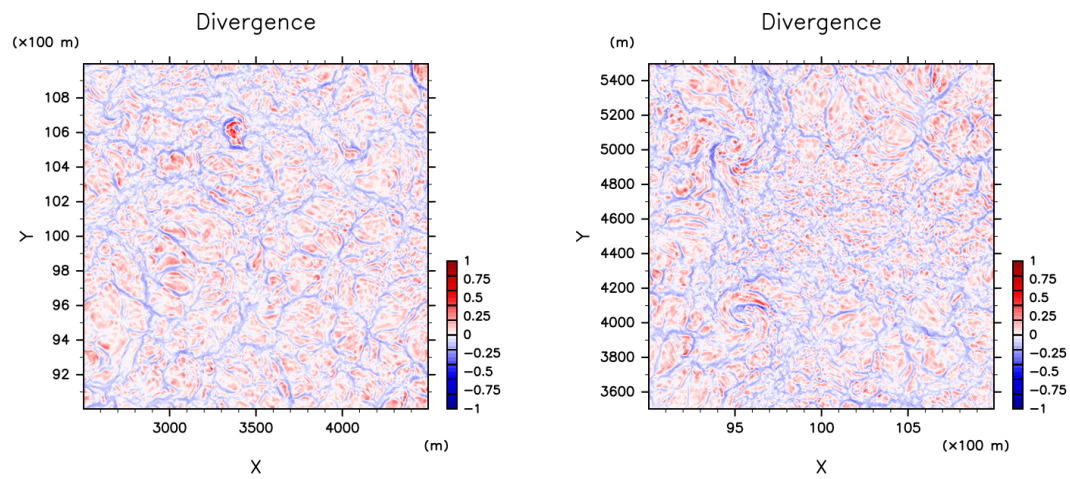


図 3.9: モデル最下層 ($z = 2.5$ m) の水平風収束発散分布. 水平全領域を示す. 赤色が発散領域, 青色が収束領域を示す.



(a) $[x, y] = [2500 - 4500, 11000 - 13000]$ の範囲 (b) $[x, y] = [9000 - 11000, 3500 - 5500]$ の範囲.

図 3.10: $z = 2.5$ m における水平風収束発散水平分布. 水平領域の一部 (2 km 四方) を抜き出し拡大したもの. 範囲は図 3.6 と同じ.

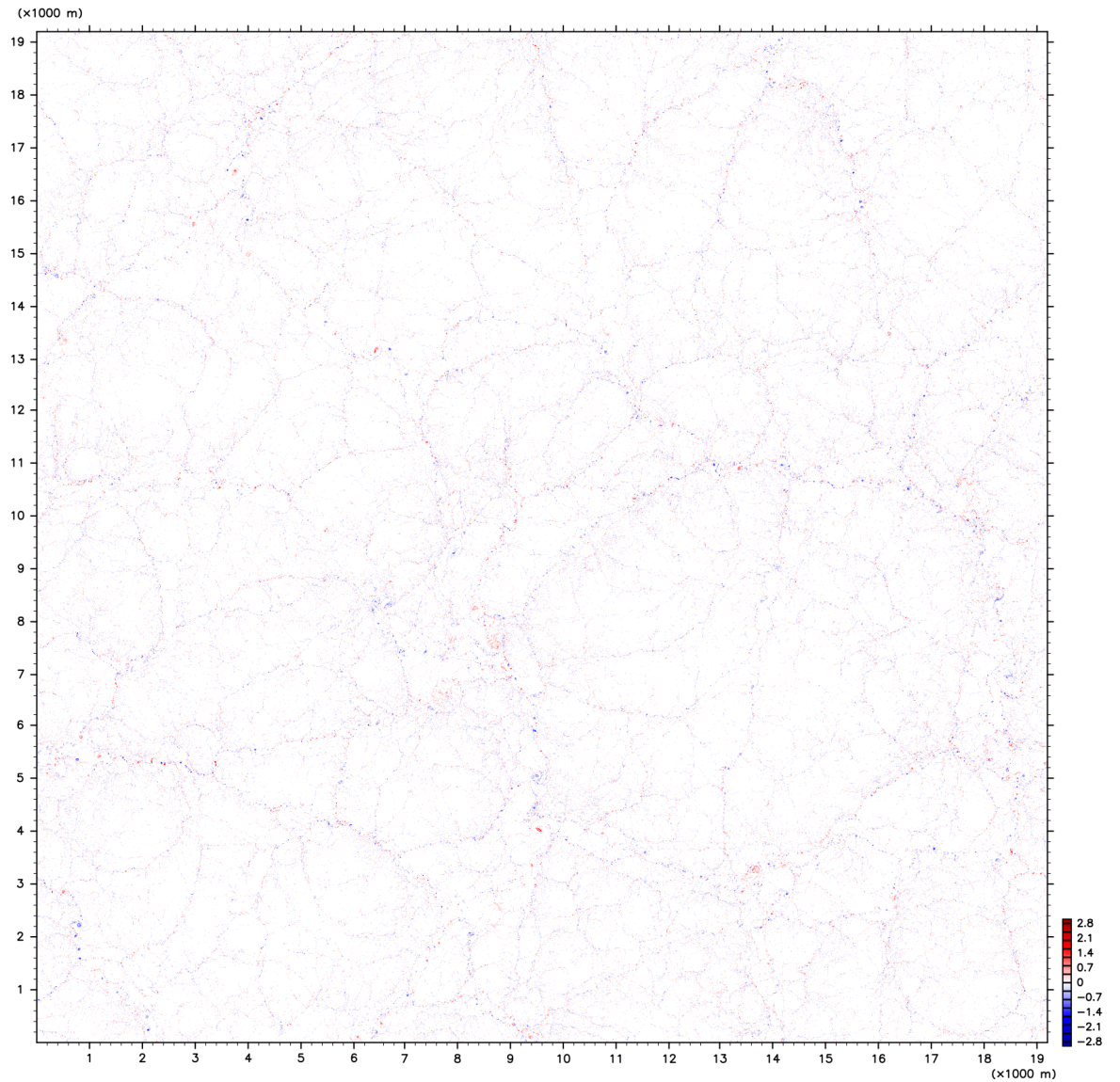
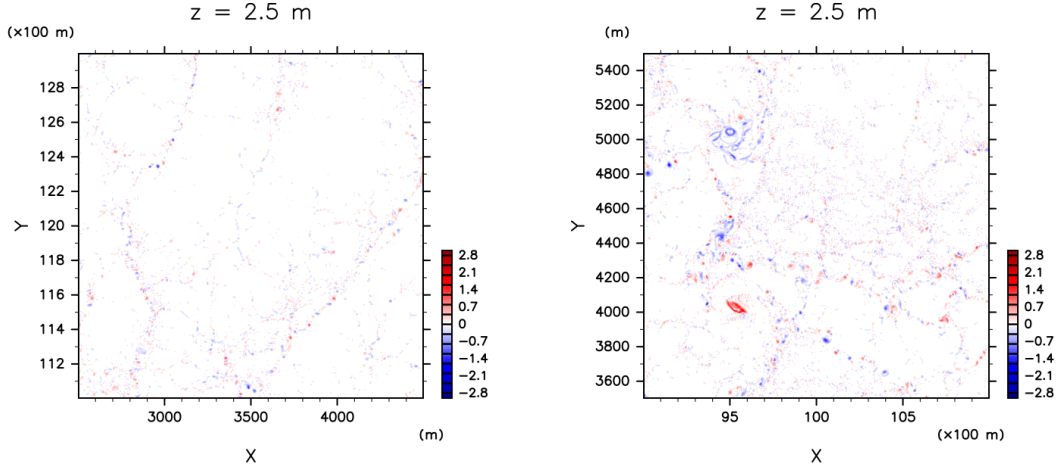


図 3.11: モデル最下層 ($z = 2.5$ m) の鉛直渦度の水平分布. 水平全領域を示す. 赤色が正の渦 (時計回り), 青色が負の渦 (反時計回り) を示す.

らの拡大図は鉛直風の拡大図 3.6 と同じ範囲を切り出している。



(a) $[x, y] = [2500 - 4500, 11000 - 13000]$ の範囲. (b) $[x, y] = [9000 - 11000, 3500 - 5500]$ の範囲.

図 3.12: $z = 2.5$ m における渦度の水平分布. 水平領域の一部 (2 km 四方) を抜き出し拡大したもの. 範囲は図 3.6 と同じ.

先に示した鉛直風の水平分布 (図 3.5) における上昇流で構成される多角形構造構造の境界に沿って、渦度が大きい領域が並んでいる様子がみられる. ほとんどの渦の水平スケールは十数 m スケール程度である. しかし拡大図 3.12 の右図の左下 ($x = 9500$ m, $y = 4000$ m 付近) にみられるような 100 m スケールの大きな範囲で渦度が大きくなっている場所も存在している. 図 3.14 はモデルデータ最下層の高度 2.5 m における流れ場においてさらに Nishizawa et al. (2016) と同じ方法で渦フィッティングを適用して得られた孤立渦の空間分布である. 渦の位置は計算領域全体に満遍なく存在しているのではなく、網目状に連なった構造を持っている様子が見られる. この分布は図 3.5 で示した上昇流で構成されるセルの境界の分布とよく一致している. この結果は Sullivan and Patton (2011) や Giersch and Raasch (2023) の地球設定の計算で得られている様子とよく対応している.

3.2.2 孤立渦パラメータの統計量

抽出された渦の特徴について調べるため、孤立渦を抽出した際に得られるパラメータの統計量について記述する.

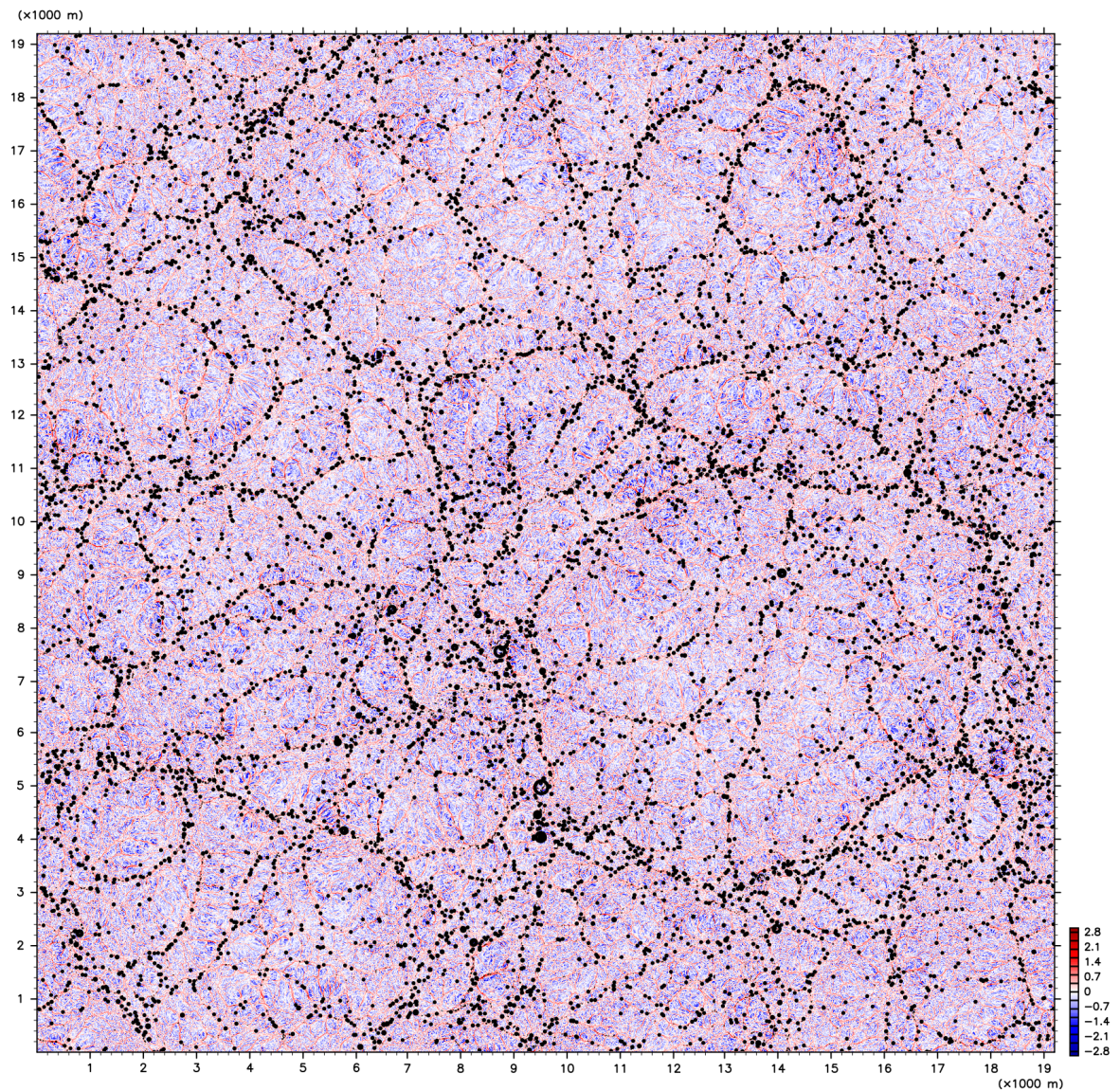


図 3.13: モデル最下層 ($z = 2.5$ m) における渦構造の水平空間分布

図 3.14: 抽出された渦構造の水平分布. 黒円の中心が渦の中心座標を示す. 色は図 3.5 で示したモデル最下層 ($z = 2.5$ m) の鉛直風の水平分布. 赤色が上昇流, 青色が下降流を表す.

解析したデータ

Rankine フィッティング, Burgers-Rott フィッティング, 接線風速フィッティングによってフィッティングされた孤立渦のパラメータについて統計量をとった. 解析した高度を表 3.2.1 に示す.

表 3.2.1: フィッティングされた渦を調べた高度

	高度刻み	範囲
100 m 未満	5 m 間隔	2.5 m – 97.5 m
1000 m 未満	100 m 間隔	97.5 m – 997.5 m
1000 m 以上	1000 m 間隔	997.5 m – 9997.5 m

図 3.15 – 3.19 は渦を構成するパラメータである渦度, 接線風速が最大となる半径, 最大接線風速, 渦中心の圧力降下, 循環の各量について全ての孤立渦における統計値の高度別のグラフである. 横軸がそれぞれのパラメータにおける強度のランクで, 縦軸が単位面積あたりの数密度になっている.

モデル最下層から高度 6,000 m 付近までは統計量のグラフの概形に大きな変化が見られない. 高度 7,000 m, 8,000 m になるとグラフの形は大きく変わり, 全体的にどのパラメータも弱まることがわかる. 高度 6,000 m 付近までグラフの概形に大きな変化が見られないことは, 対流セルの高さが 6,000 m であることと一致しており, 対流セルの高さ程度までは孤立渦がよく発達していると考えられる.

3.3 渦パラメータの統計量

抽出された孤立渦のパラメータについて統計的に調べてみる.

3.3.1 孤立渦パラメータ平均値の高度変化

図 3.20, 3.22 及び 3.21 は抽出された孤立渦のパラメータについて, 各高度ごとに平均値をとって高度変化を示したものである. それぞれ縦軸が高度で, 横軸がそれぞれのパラメータの値となっている. 各図の左側は高度軸が線形, 右側は高度軸が

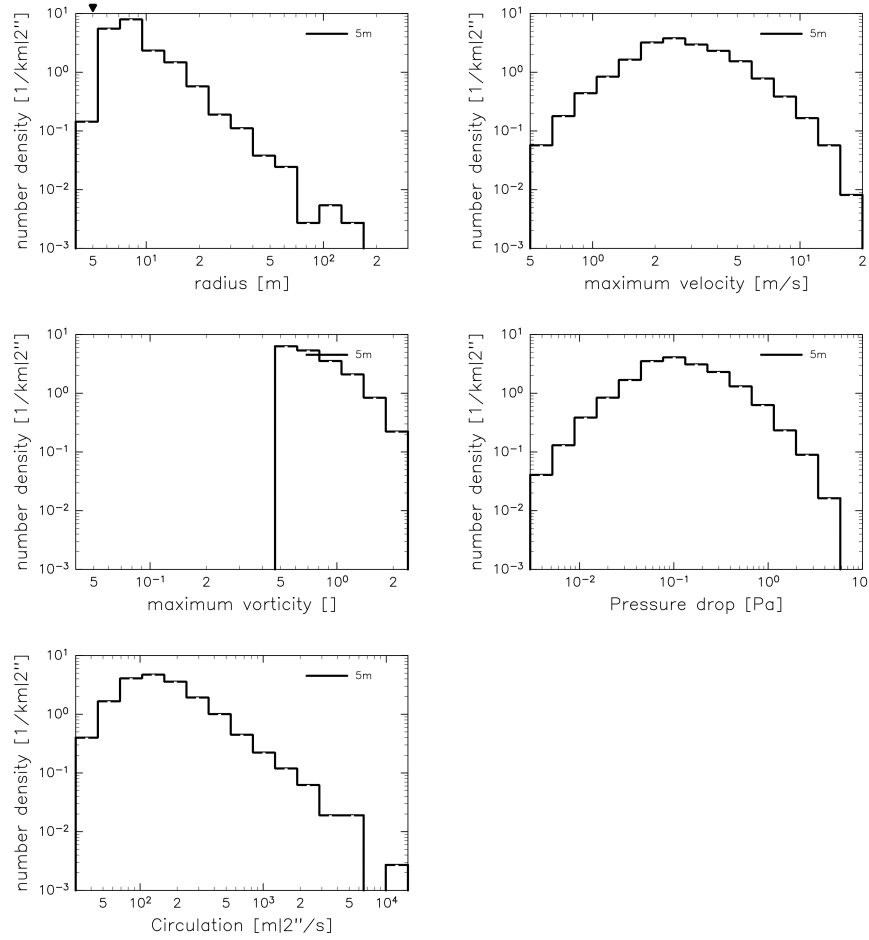


図 3.15: 高度 2.5 m における渦パラメータの統計値. 縦軸が対数スケールの数密度 [km^{-2}] を表しており, それぞれ半径 [m] (上段左), 最大接線風速 [ms^{-1}] (上段右), 最大渦度 [s^{-1}] (中断左), 圧力降下 [Pa] (中断右), 循環 [m^2s^{-1}] (下段) を表す.

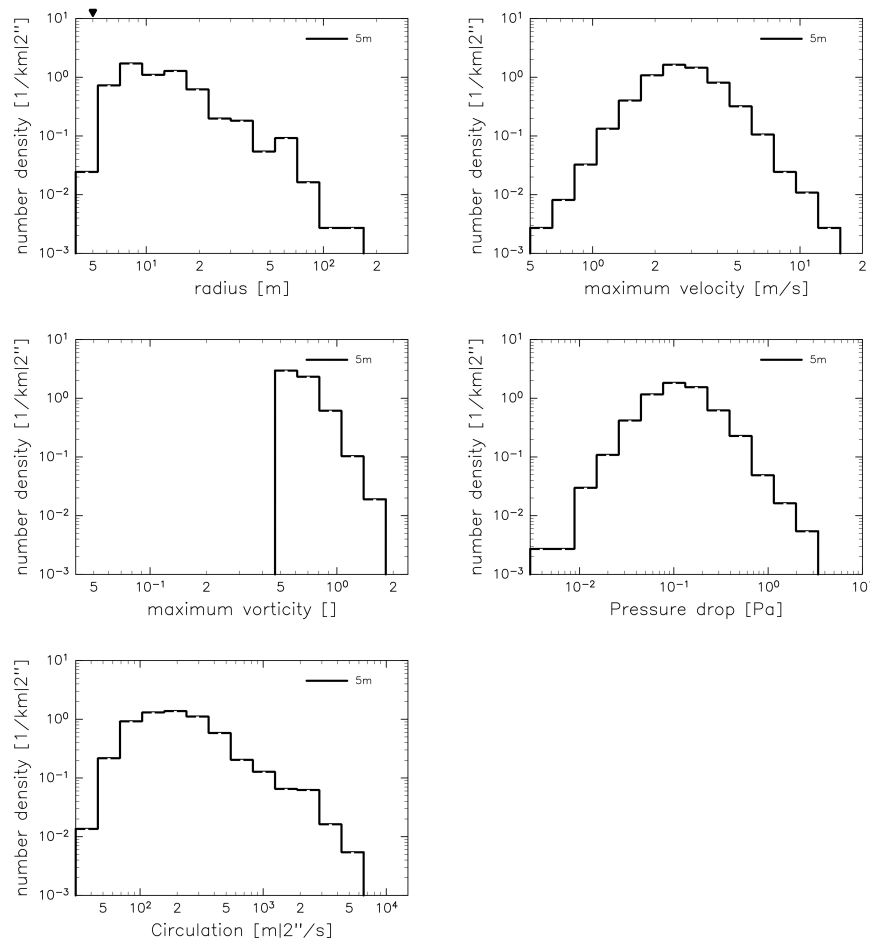


図 3.16: 図 3.15 に対応する高度 997.5 m における渦パラメータの統計値.

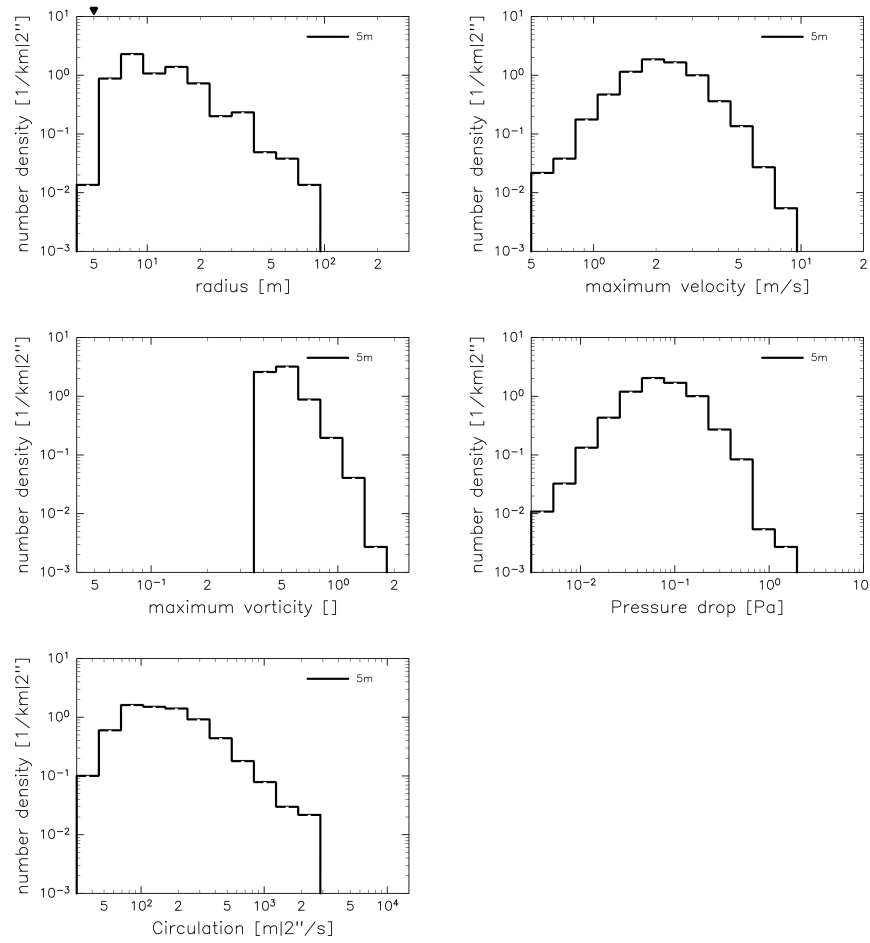


図 3.17: 図 3.15 に対応する高度 5997.5 m における渦パラメータの統計値.

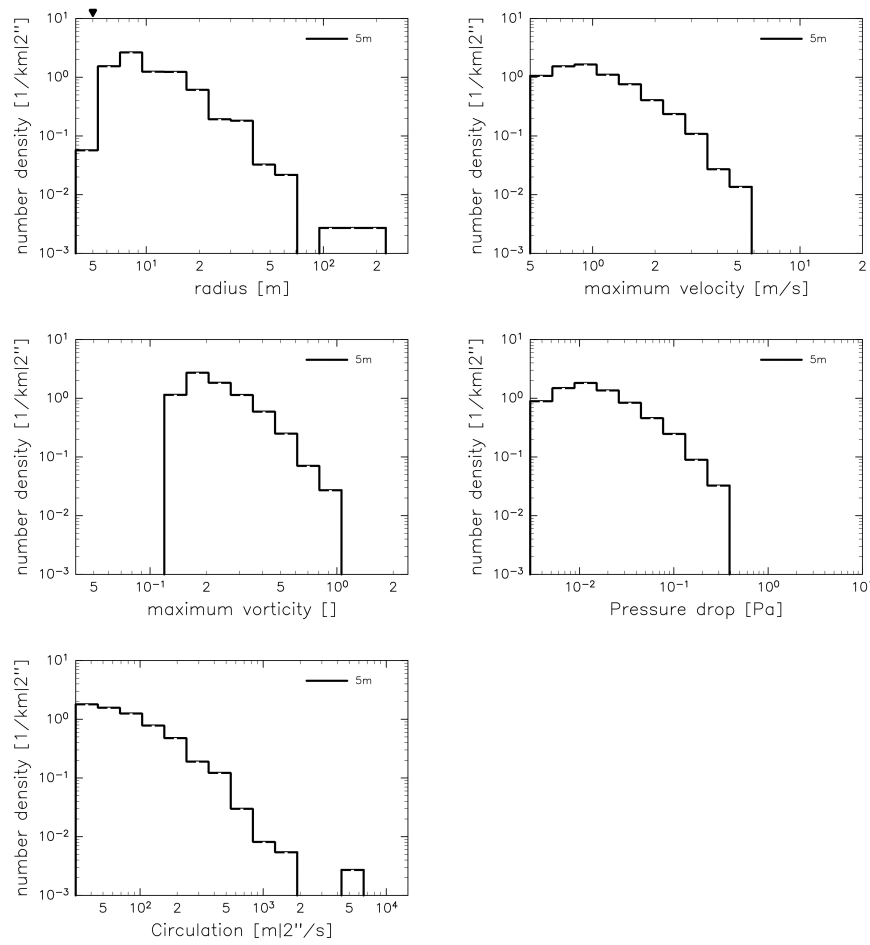


図 3.18: 図 3.15 に対応する高度 6997.5 m における渦パラメータの統計値.

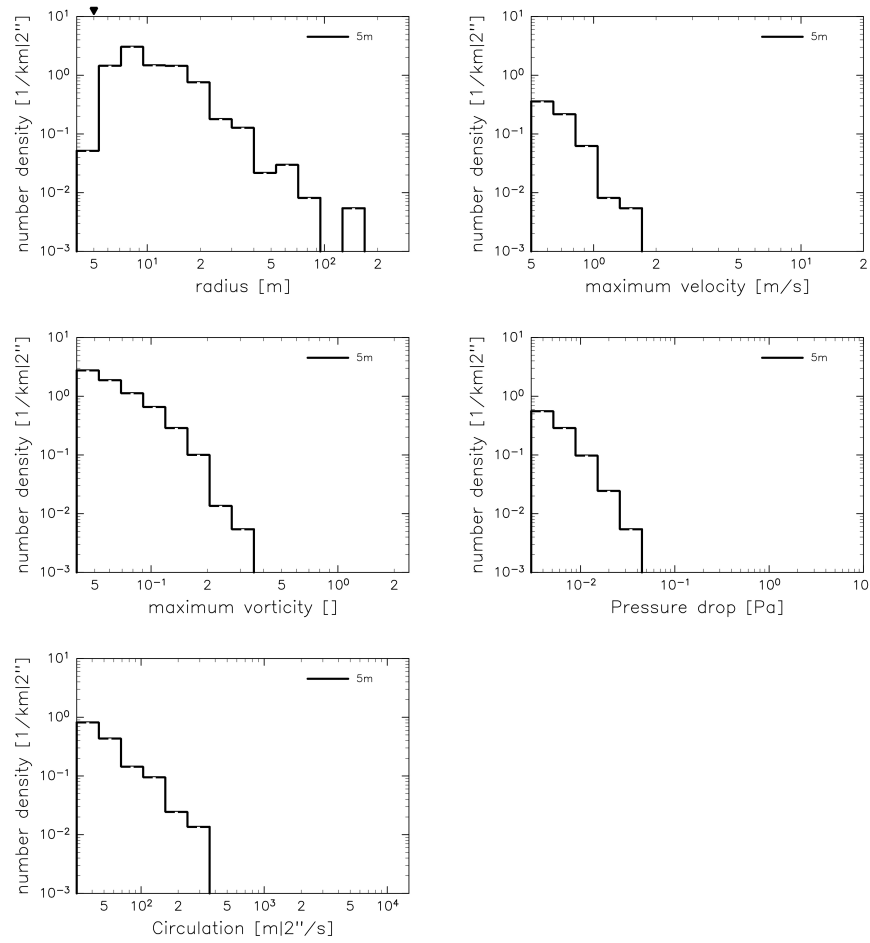


図 3.19: 図 3.15 に対応する高度 7997.5 m における渦パラメータの統計値.

対数軸となっている。実際の値が点で表現され、見やすさのため隣り合った高度が点が直線でつながれている。

図 3.20 は渦度の大きさの平均の高度変化である。地表面付近では高度 22.5 m 程度までは 0.7 s^{-1} と一定である。そこから高度 100 m までは急激に急激に減少し、 0.5 s^{-1} 程度まで減少する。さらに高度 5000 m 程度までは一定で、そこから上層では急激に減少するような分布となっている。

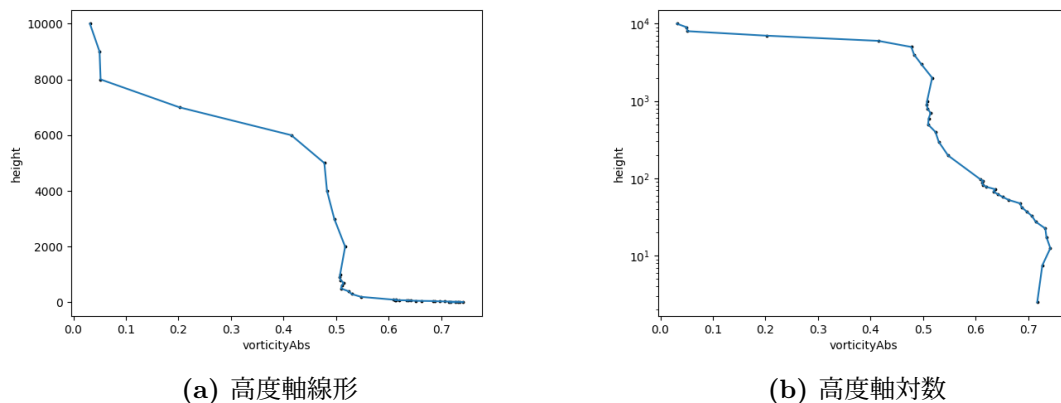


図 3.20: 抽出された孤立渦における渦度 (絶対値) の平均値の高度変化。縦軸が高度 [m] で、横軸が渦度。

図 3.21 は抽出されたそれぞれの渦における最大接線風速の平均値の高度変化である。地表面付近の高度 2.5 m では 4 ms^{-1} 程度の大きさを持つ。その後、高度 17.5 m までに 3 ms^{-1} まで減少する。そこから高度 6,000 m 程度までは高度にしたがって緩やかに 2 ms^{-1} まで減少する。それ以上の高度では急激に減少し、ほとんど風速がない状態にまで漸近する様子がみられる。

図 3.22 は抽出された渦半径に含まれる領域のうち、最大となる地表面応力の平均値の高度変化である。地表面付近の高度 2.5 m から高度 62.5 m 程度までは高度が高くなるに従って徐々に大きくなる様子がみられる。これは高度が高い方が地面の摩擦の影響を受けにくく、風速が大きくなることに対応していると考えられる。そこから高度 1,000 m 付近まで急激に変化し、 0.004 Pa まで減少する。高度 1,000 m 以上は高度に比例して減少し、高度 6,000 m で 0.003 Pa まで下がる。さらにそこから減少して 0 Pa に漸近していく様子がわかった。

図 3.23 は抽出されたそれぞれの渦における平均接線風速の平均値の高度変化である。地表面付近の高度 2.5 m から高度 47.5 m 程度までは高度が高くなるに従っ

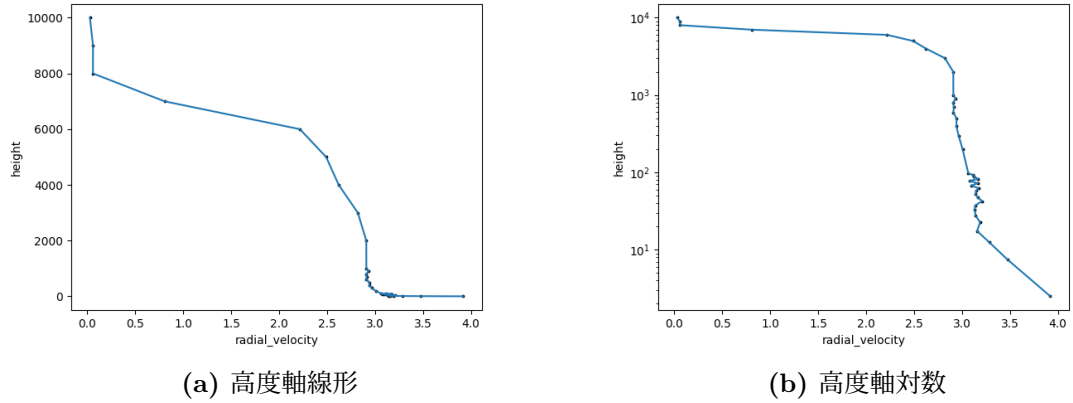


図 3.21: 抽出された孤立渦における最大接線風速となる値の平均値の高度変化. 縦軸が高度 [m] で, 横軸が最大接線風速.

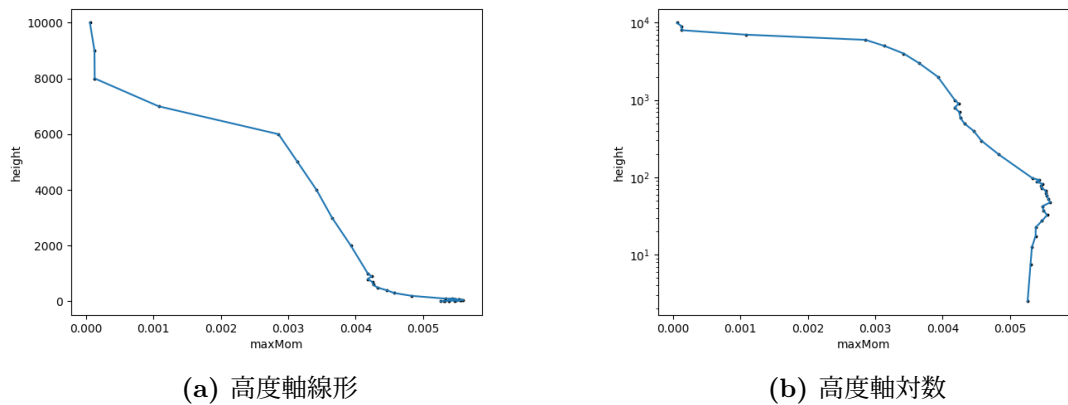


図 3.22: 抽出された孤立渦における地表面応力最大となる値の平均値の高度変化. 縦軸が高度 [m] で, 横軸が地表面応力.

て接線風速の平均値が急激に大きくなり, 1.3 ms^{-1} まで上がる様子がみられる. 高度 47.5 m でピークを迎えたあとは高度に従って急激に減少し, 500 m 程度で 1.3 ms^{-1} 程度まで下がる. そこから高度 5,000 m まで高度に従って緩やかに減少し, 高度 6,000 m で急激に減少する分布となっている.

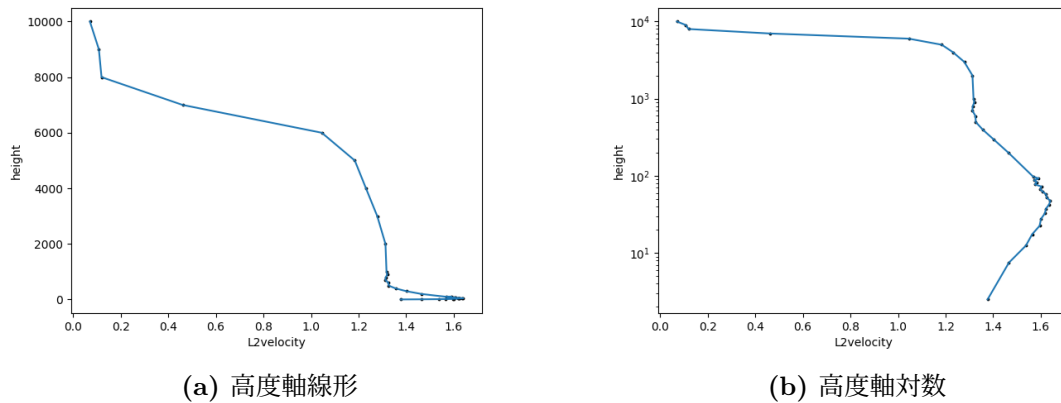


図 3.23: 抽出されたそれぞれの孤立渦の平均接線風速の平均値の高度変化. 縦軸が高度 [m] で, 横軸が平均接線風速の平均値.

3.3.2 渦度の 3 次元分布

図 3.24 は計算領域の一部 (水平 1.6 km, 鉛直 1.5 km) を切り出した渦度の 3 次元分布である. 渦度が $\pm 0.9 \text{ s}^{-1}$ 以上の領域を著している. 描画領域中心に背の高い渦度の大きな領域が見られる. これは半径 100 m スケールの大きな渦であり, 高さは 1.4 km 程度にまで及んでいる. またその周辺には半径数十 m スケールで高さ 100 m 程度の渦度の大きな領域がプロットされている様子もみられる.

この様子からも 100 m オーダーの高さを持つ渦が多いことや, 高度 1,000 m を超えるような背の高い孤立渦が存在していることがわかる.

3.3.3 渦構造を含めた流れ場の全体像

ここまで得た結果をまとめると, 図 3.25 で示す模式図のようになる.

地表面付近では幅数十から 100 m スケールの上昇流領域で構成される多角形構造

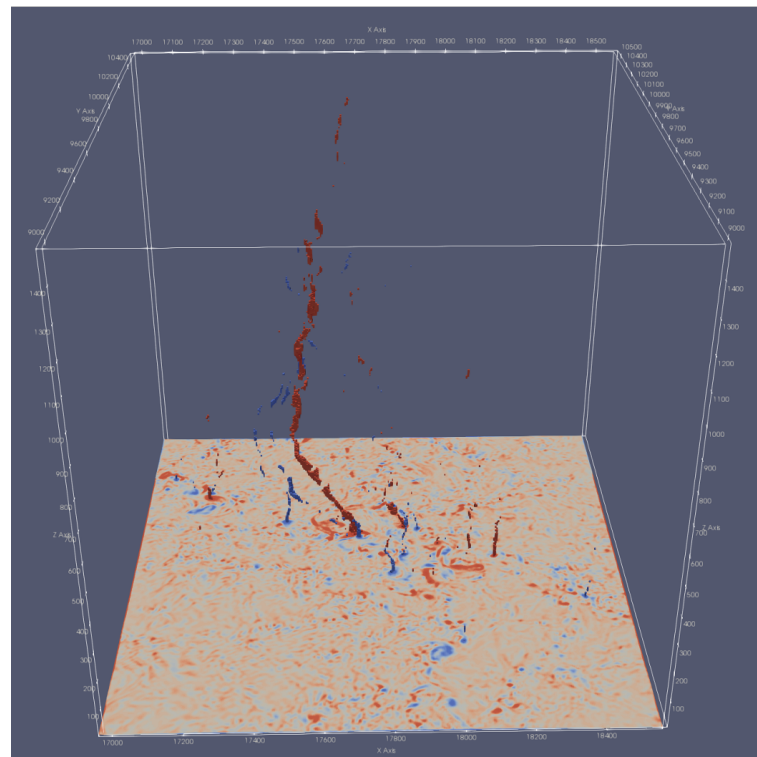


図 3.24: 渦度の 3 次元プロット. 水平方向に約 1.6 km, 鉛直方向に約 1.5 km を切り出し, 渦度 $\pm 0.9 \text{ s}^{-1}$ 以上の領域をプロットしている. 底面は渦度の水平分布で, 赤と青はそれぞれ正の渦度と負の渦度に対応している.

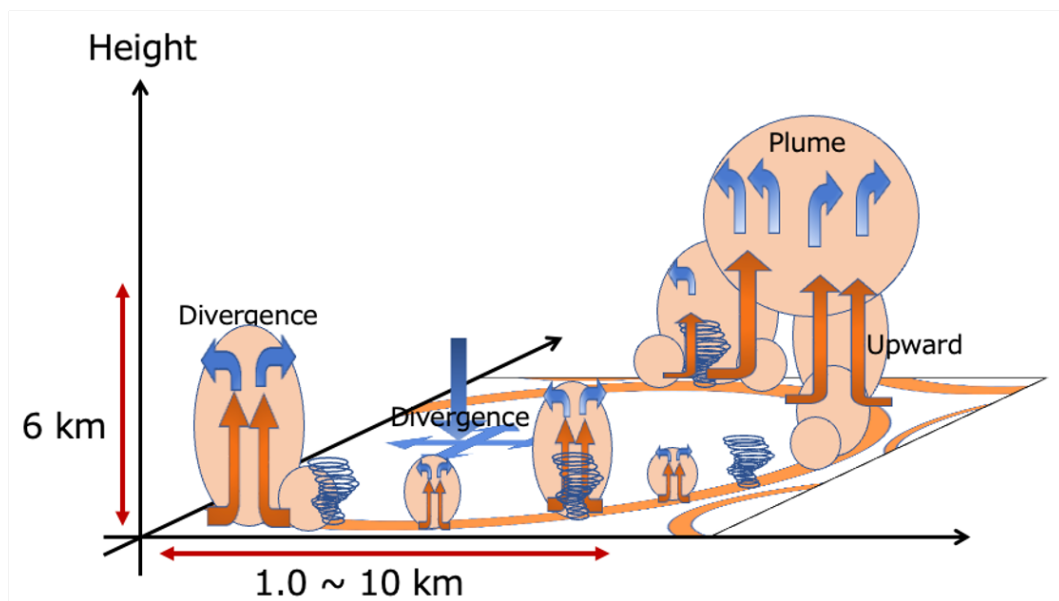


図 3.25: 計算領域全体で得られた流れ場の模式図. 地表面付近では幅数十から 100 m スケールの上昇流領域で構成される多角形構造が存在し, その水平スケールは数 km から最大 10 km 程度である. 多角形構造の教会では渦構造が発達している. 上昇流は上空プルーム状構造に変化し, 最大高度 6 km 程度までの様々な高度まで発達して水平発散する. 発散した流れは下降流となって対流セルを形成している.

が存在し、その水平スケールは数 km から最大 10 km 程度である (3.1.2 節). 多角形構造の境界では渦構造が発達している (3.2.1 節). 渦の高さは数百 m 程度のものが多く、1,000 m を超えるような高さの渦も発達している (3.3.2 節). 上昇流は高度が高くなるに従い塊状になり、プルーム状構造に変化する (3.1.1 節). プルーム状構造は最大高度 6 km 程度までの様々な高度まで発達して水平発散し、下降流となって地表面まで降下して再び上昇流領域へ吹き込んでいき、対流セルを形成している様子がみられた.

3.4 地表面応力

ここまで、計算領域全体にわたって流れ場の全体構造と、ダストデビルのような渦構造に注目して特徴を調べた. 本節より、ダスト巻き上げ量の決定に重要である地表面応力について記述する. まず地表面応力の空間分布と強度分布について示す. 続いて強い地表面応力がどのような流れ場によってもたらされるのか、特に渦構造との関係について示し、強い地表面応力をもたらし流れ場について具体的に示す.

3.4.1 地表面応力の空間分布

図 3.26 は地表面応力の水平分布である. 計算領域全体 (水平 19.2 km) を描画している. 図 3.27 は全体のうち一部分 (2 km 四方) を切り出して拡大したものである. これらの拡大図はすでに示した鉛直風の拡大図 3.6 と同じ範囲を切り出している.

水平領域全体図 3.26, 拡大図 3.27 のいずれも水平風速の水平領域全体図 3.7 及び拡大図 3.8 で得られた分布とよく似ている. 地表面応力の大きさは風速の大きさでほとんど決まっているため、整合的な結果と考えられる. 鉛直風の水平領域全体図 3.5 と比べると、上昇流によって構成される多角形構造の境界付近で応力が強い領域が生じているようすがわかる.

3.4.2 地表面応力の強度分布

得られた地表面応力がどのような強度を持っているか調査を試みた. 図 3.28 は地表面応力の強度ヒストグラムである. 横軸が地表面応力の強度ランクで 0.002 Pa 刻みとなっている. 最小値が 0 Pa で、最大値が 0.05 Pa である. 縦軸が各ランク

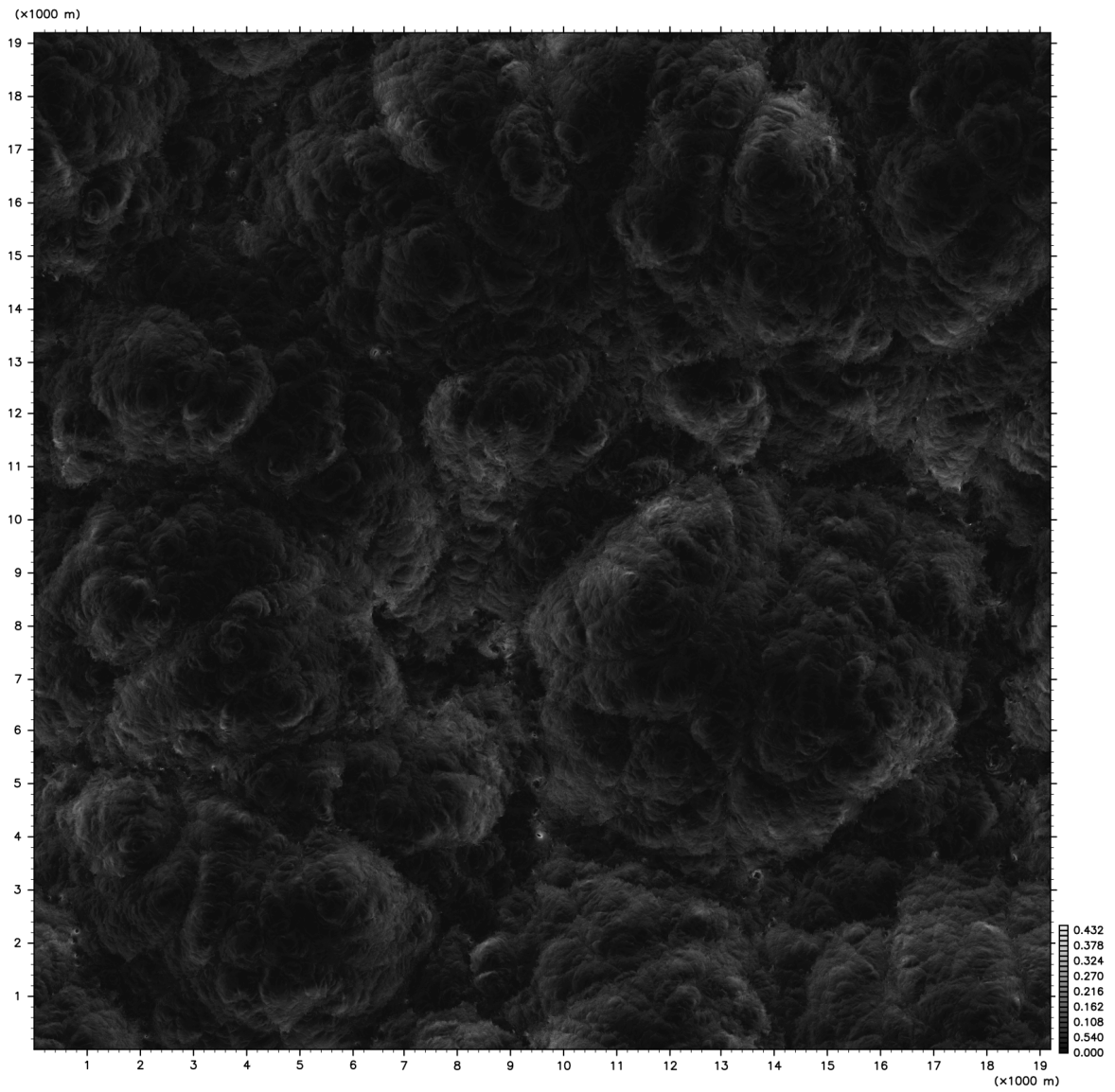
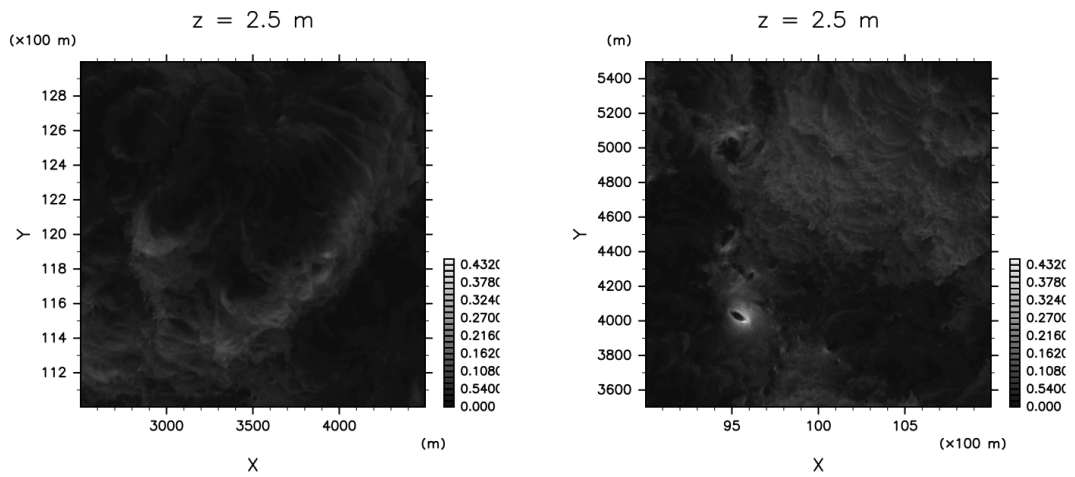


図 3.26: 水平全領域の地表面応力分布. 白い領域が地表面応力が大きい領域を示す.



(a) $[x, y] = [2500 - 4500, 11000 - 13000]$ の範囲. (b) $[x, y] = [9000 - 11000, 3500 - 5500]$ の範囲.

図 3.27: 水平領域の一部 (2 km 四方) を抜き出し拡大した地表面応力分布. 範囲は図 3.6 と同じ.

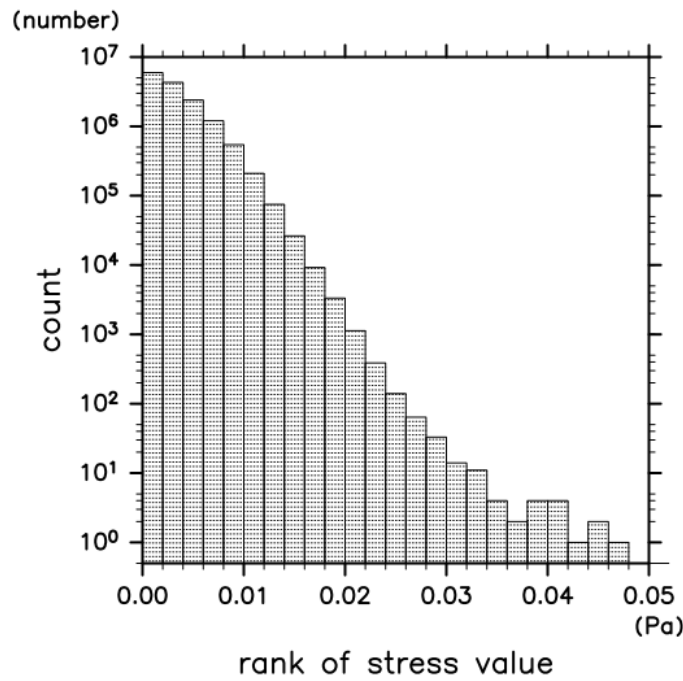


図 3.28: 地表面応力の強度分布ヒストグラム. 横軸が応力のランク [Pa], 縦軸が個数 (対数スケール).

における個数で対数軸となっている. 強い地表面応力を持つ計算格子点の数は, 強度が上がるにしたがって指数関数的に減少している. しかし風洞実験で得られたダスト巻き上げの応力閾値である 0.03 Pa (Greeley and Iversen, 1985) を超える地表面応力が生じている計算格子点が生じていることが判明した. すなわち本研究によって, 5 m 解像度の結果においてダストを巻き上げるのに十分な地表面応力が表現できることが示された.

3.4.3 地表面応力が強い点と渦構造

観測で存在が知られており, 数値計算による研究 (Kahre et al., 2006; Nishizawa et al., 2016 など) でもダストデビルに注目しているように, 本研究でもダストデビルのような渦構造に注目して, 地表面応力との関係について解析を試みた. そのため

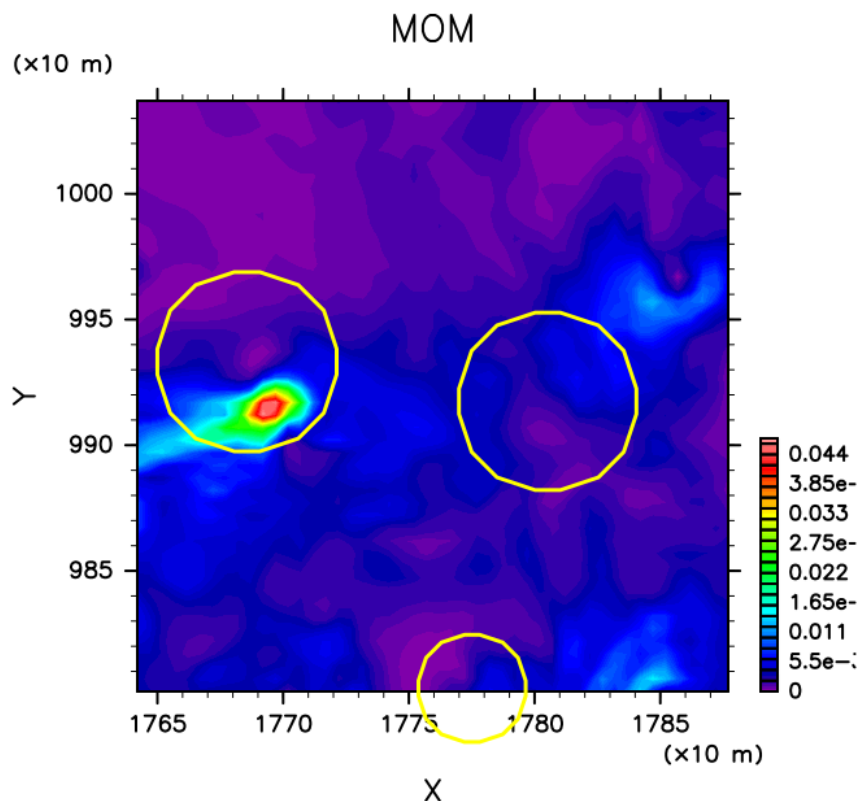


図 3.29: 抽出した渦の半径と地表面応力の水平分布. カラートーンが地表面応力 [Pa], 黄色い円が抽出された渦の最大接線風速を持つ半径を表す.

に図 3.28 で示した地表面応力の強度ヒストグラムを用いて, 渦によってもたらされた応力とそれ以外の応力について分類することを試みた.

地表面応力が渦によってもたらされている点の判定方法

ここでは Nishizawa et al. (2016) と同じ方法で抽出した個々の渦の中心位置と最大接線風速を持つ半径の情報を元に, 応力が渦によってもたらされたかどうかを判定する. 図 3.29 は例として地表面応力と抽出した渦の位置と大きさを計算領域の一部 (250 m 四方) をプロットしたものである. この例において図 3.29 の左の渦 (中心位置が約 $x = 17690$ m, $y = 9930$ m) に注目すると, 地表面応力が強い領域の大部分は最大接線風速を示す円の内側に入っているが, 左下の方にはみ出している領域もみられる. 図 2.3 で示したように, 渦の接線風速の大きさは最大接線風速よりも広い領域では中心からの距離に反比例して減少する. そのため, 渦によって

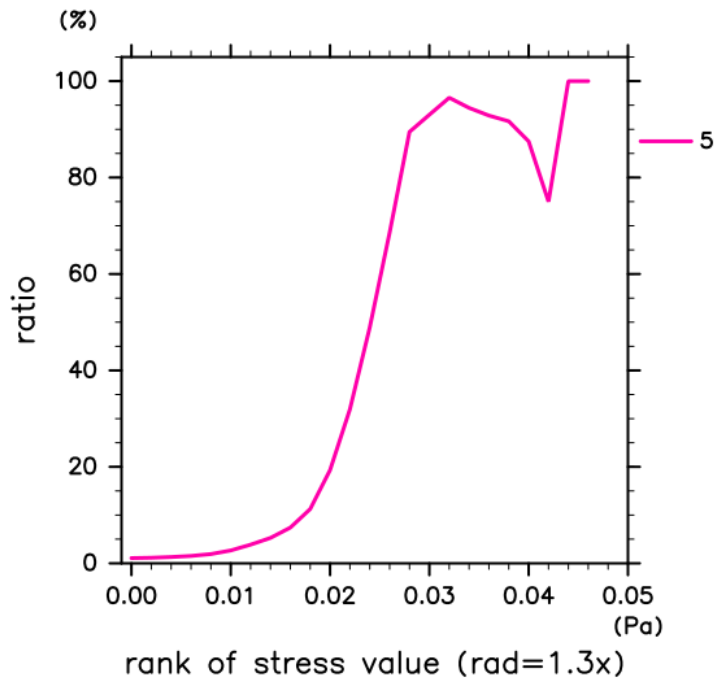


図 3.30: 地表面応力の強度分布ヒストグラムにおいて、応力のランクごとに渦によってもたらされた計算格子点の割合を示すグラフ。横軸が応力のランクを示し、縦軸に各ランクごとに渦によってもたらされている点の割合を示す。

風速が大きい、すなわち強い地表面応力が生じている場所は、渦の最大接線風速によって決まる半径よりも広い領域に存在する場合がある。本研究ではフィッティングして得られた渦の最大接線風速半径よりも少し外側の領域における応力も渦によってもたらされたものと考え、最大接線風速半径の 1.3 倍の半径を使って、渦によってもたらされた地表面応力と考えることにする。

強い地表面応力が渦によってもたらされる割合

図 3.30 は図 3.28 のヒストグラムにおいて、各応力のランクごとに渦によってもたらされる計算格子点の割合を示したものである。この割合は応力の各強度に対する渦の貢献度と見ることもできる。グラフから応力が強くなるほど（グラフの右側にいくほど）、渦によってもたらされる計算格子点の割合が高くなっていることが

表 3.4.2: 地表面応力が強い場所 (上位 10 個) の一覧.

図番号	順番	格子点数	最大応力値 [Pa]	x 座標 [m]	y 座標 [m]
(a)	1 番	12	0.0467	17692.5	9912.5
(b)	2 番	105	0.0415	9577.5	3997.5
(c)	3 番	34	0.0314	17492.5	10612.5
(d)	4 番	3	0.0279	2412.5	5277.5
(e)	5 番	15	0.0272	15052.5	17202.5
(f)	6 番	14	0.0270	18012.5	2307.5
(g)	7 番	4	0.0270	3362.5	5312.5
(h)	8 番	6	0.0264	11742.5	10207.5
(i)	9 番	3	0.0258	13597.5	3307.5
(j)	10 番	1	0.0253	16682.5	11482.5

わかる. 特に応力閾値である 0.03 Pa を超える点については 8 割以上が渦によってもたらされている. すなわち, 地表面応力が強い領域のほとんどは渦構造によってもたらされていることが明らかとなった.

3.4.4 強い地表面応力をもたらす流れ場

ここまで強い地表面応力の多くが渦によってもたらされていることを統計的に示した. ここから, 強い地表面応力がどのような流れ場によってもたらされているのか具体的に確認していく. そのためにまず「地表面応力が強い場所」について考える. 地表面応力が強い計算格子点はある程度集団となって存在している. ここではその集団を一つの塊とみなし, 「地表面応力が強い場所 (場所)」として考えることにする. このような地表面応力が強い場所について, その「場所」に含まれる応力が強い順番に計算領域全体から 10 個の場所を抽出したのが表 3.4.2 である. 風洞実験で得られたダスト巻き上げ閾値である 0.03 Pa を超える点が含まれるのはこの表に示した場所の中では上位 3 つの場所のみである. 本研究では強い地表面応力と流れ場の関係について調べるため, 巻き上げ閾値に拘らず, 地表面応力上位 10 個の場所について流れ場の調査を試みた. この表に含まれる計算格子点は地表面応力が 0.025 Pa 以上の点となっている.

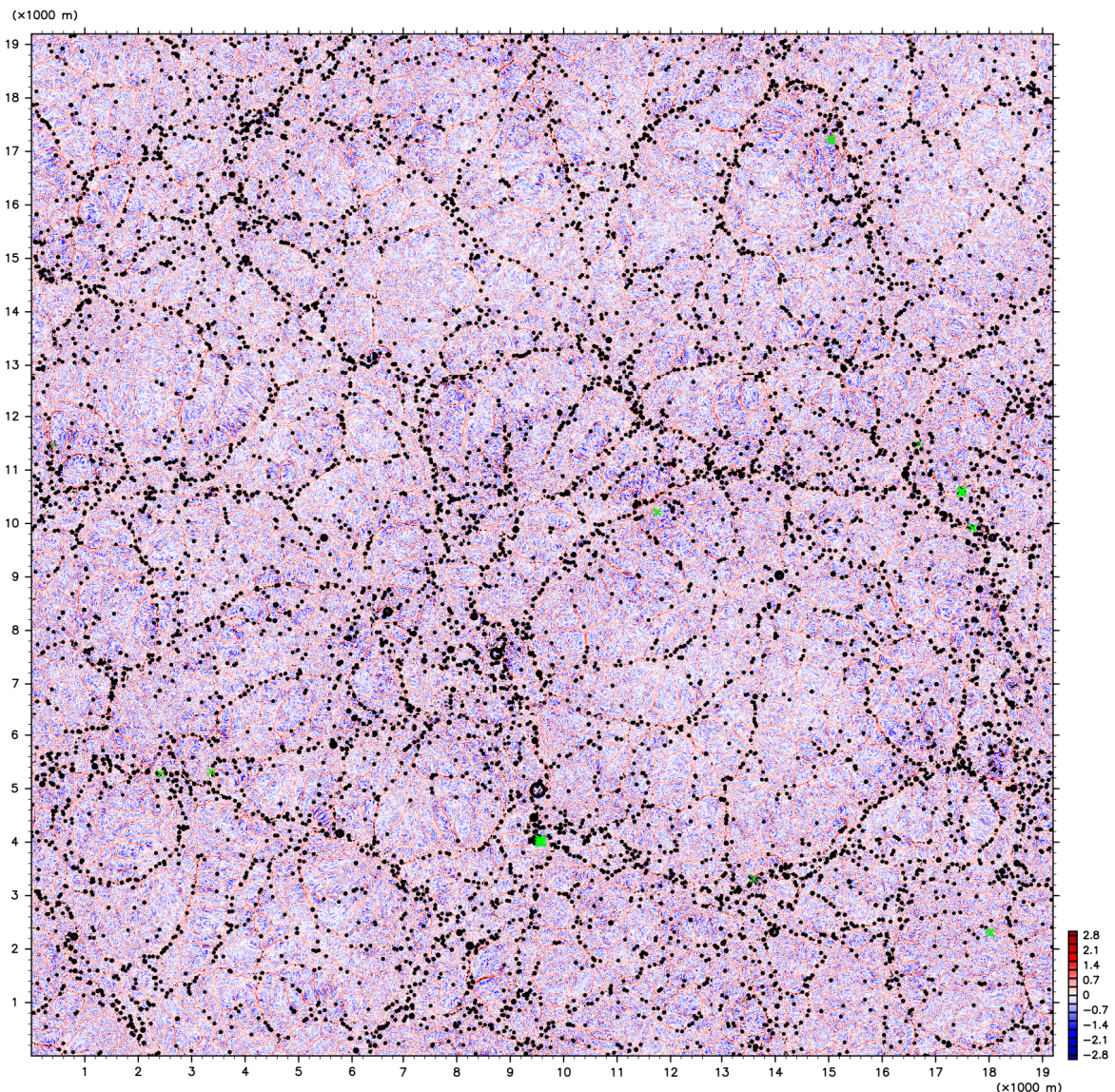


図 3.31: 水平全領域における地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (緑 X マーク) と抽出された渦を示す点 (黒丸) と鉛直風 ($z = 2.5 \text{ m}$) の水平分布.

地表面応力が強い場所の空間分布

図 3.31 は計算領域全体における地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (緑 X マーク) と抽出された渦を示す点 (黒丸) 及び高度 2.5 m の鉛直風の水平分布である. 強い地表面応力をもたらす点は計算領域全体で 197 格子点であり, これは全体割合として $10^{-3}\%$ 程度の格子点にあたる. 応力が強い点が渦の分布に沿って存在してい

る様子が見られる。

強い地表面応力を持つ場所における流れ場の様子

表 3.4.2 に示した 10 個の場所において、どのような流れ場となっているか詳しく調査した。図 3.32 はそれぞれの場所について 1 km 領域を拡大し、地表面応力が強い点と水平風ベクトル、鉛直風を示した図である。図 3.33 から 3.42 までの図は表 3.4.2 で示した各場所について図 3.32 の右に渦度の 3 次元分布を示した。渦度の 3 次元分布は高度 1,500 m 程度の高さまでプロットしており、渦度の大きな領域が地表付近から上の方まで連続している様子が見られる場所がある。

渦度の 3 次元分布を確認すると、図 3.32 (a), (b), (c), (d), (g), (i), (j) の 7 個の場所においては渦構造によって強い地表面応力がもたらされていると考えることができる。特に (a), (b), (i) の 3 箇所は渦度の大きな部分が 1,000 m を超える背の高い構造を持っていることがわかる (図 3.33, 図 3.34, 図 3.42)。特に図 3.32 (b), 図 3.34 には地表面応力が強い計算格子点が 105 点含まれており、表 3.4.2 における計算格子点のうち半数以上を含んでいる。このように強い地表面応力のほとんどは渦の存在によってもたらされていることが具体的な流れ場構造を見ることで明らかとなった。

しかし、図 3.32 (e), (f), (h) のように渦構造を伴わない場所も見られる。

強い地表面応力をもたらす流れ場の特徴

地表面応力が強い 10 個の場所において、渦構造を伴う場所が 7 個あることがわかった。これらを含めたそれぞれの場所の特徴について詳細に調べるため、地表面応力が強い場所について他の物理量の空間分布と比較した図が図 3.43 から図 3.48 である。それぞれ、水平風の 2 乗平均平方根 (図 3.43)、鉛直風 (図 3.44)、水平風の収束発散 (図 3.45)、気圧 (図 3.46)、温位偏差 (図 3.47)、大気密度 (図 3.48) の空間分布と比較している。

地表面応力が強い場所のそれぞれにおける、物理量の水平分布の高さ方向への変化は付録 A を参照されたい。

地表面応力が強い場所を詳しく調べたところ、数十から数 100 m スケールの孤立渦構造が伴うほか、同じく数十から数 100 m スケールの水平風の収束発散場によっ

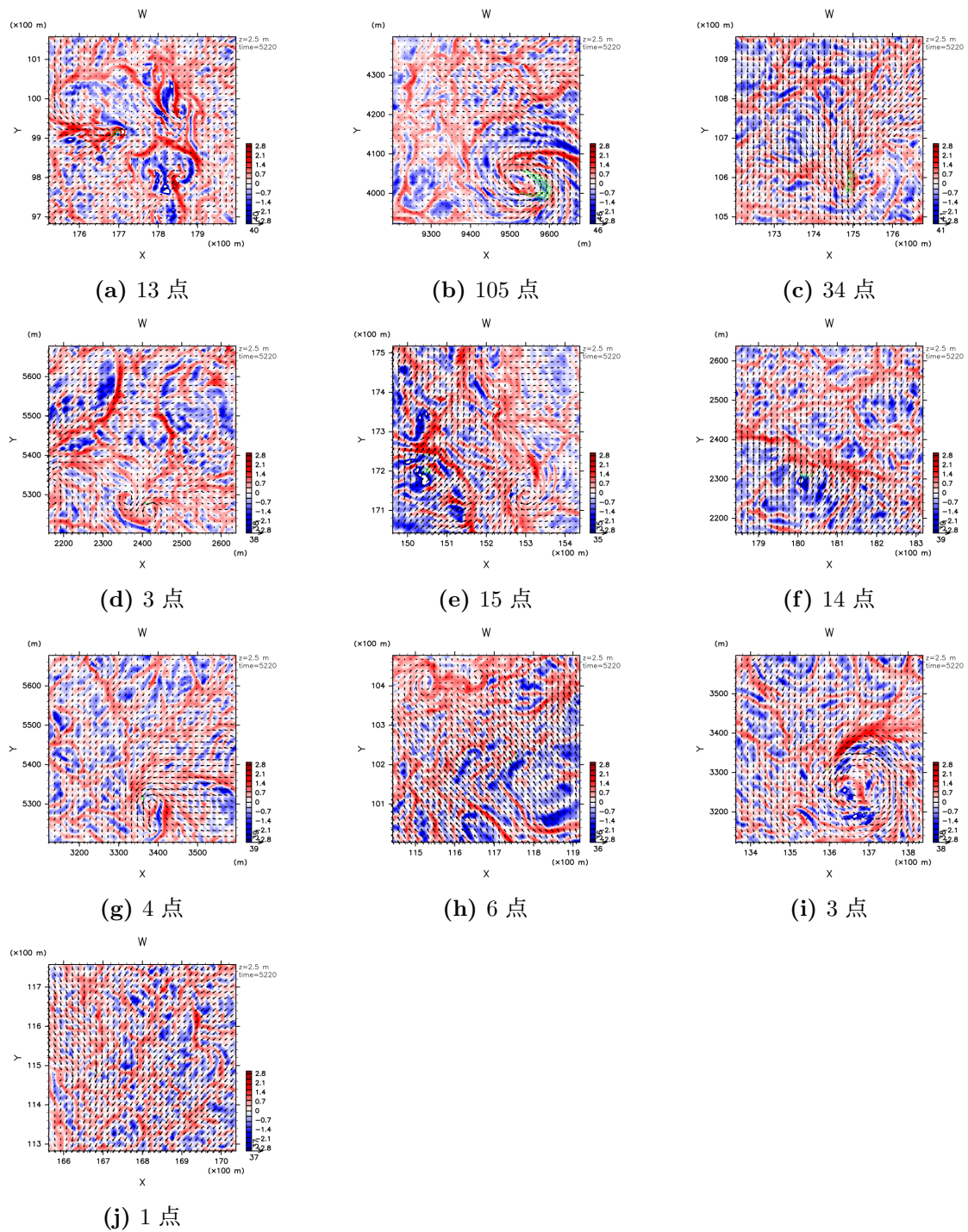
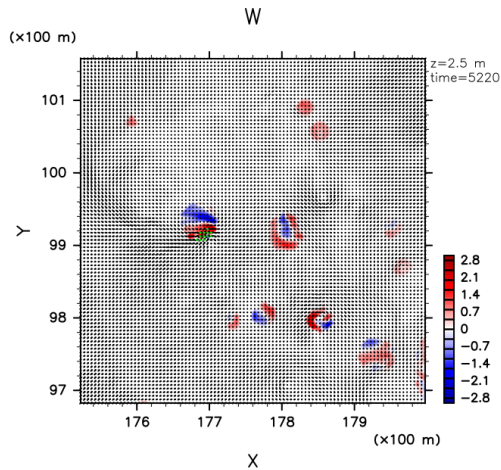
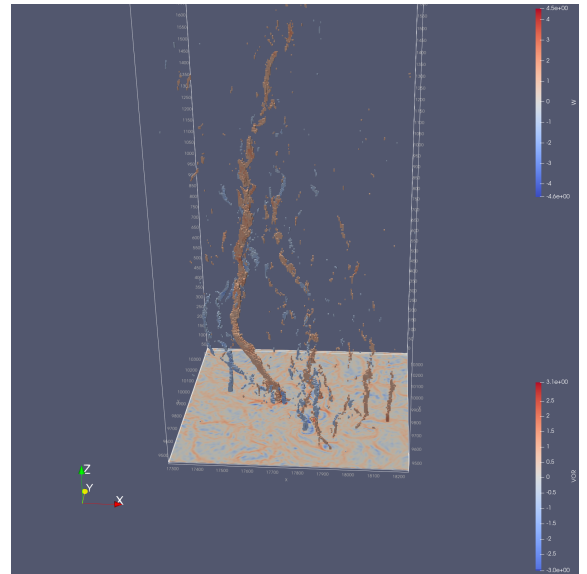


図 3.32: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (緑点, キャプションに点数) 周りの水平風ベクトル及び鉛直風分布.

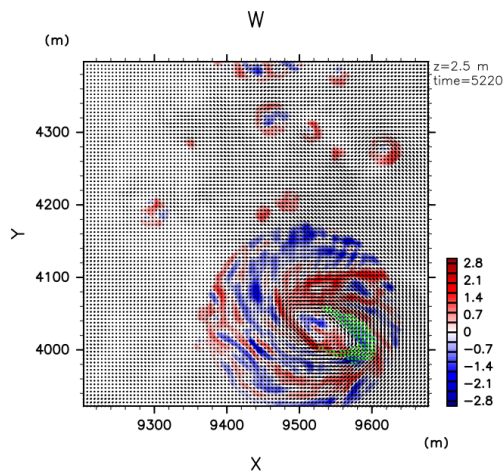


(a) 13 点

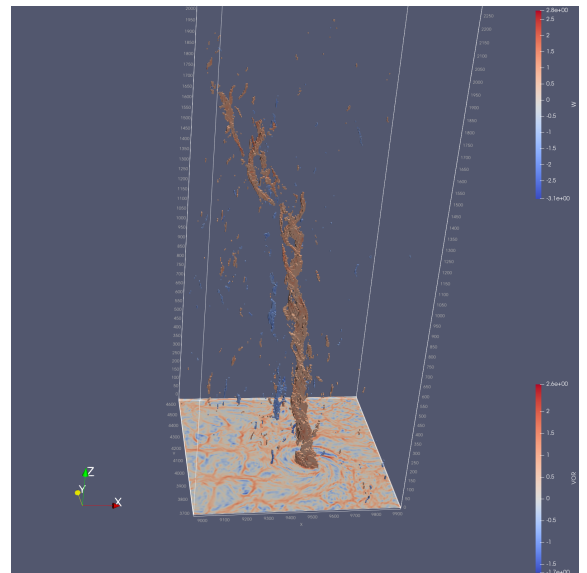


(b) 3 次元分布

図 3.33: 地表面応力が強い場所 (a) における水平風ベクトルと鉛直風及びの地表面応力が 0.025 Pa を超える計算格子点の水平分布 (左図) と渦度の 3 次元分布 (右図). 左図において鉛直風のカラー トーンは抽出した渦の最大接線風速の内側領域のみを描画している. 右図では赤色と青色で絶対値 0.6 s^{-1} 以上の正と負の渦度をプロットしている. 水平方向の描画範囲は約 1 km である.

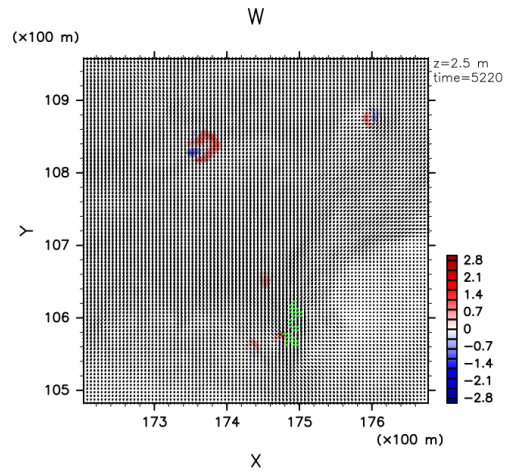


(a) 105 点

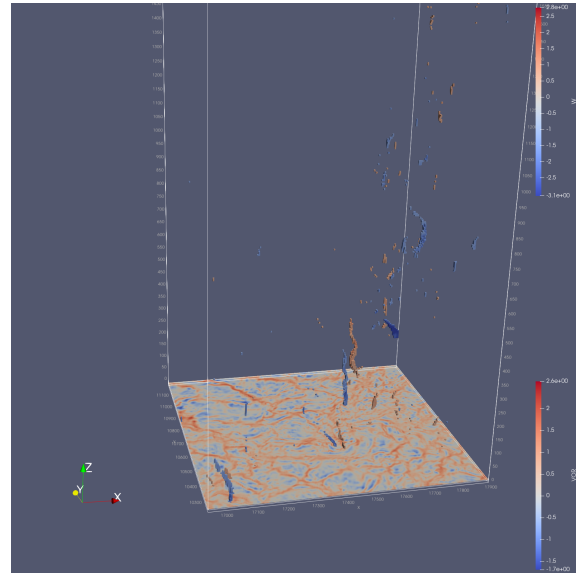


(b) 3 次元分布

図 3.34: 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (b) の図.

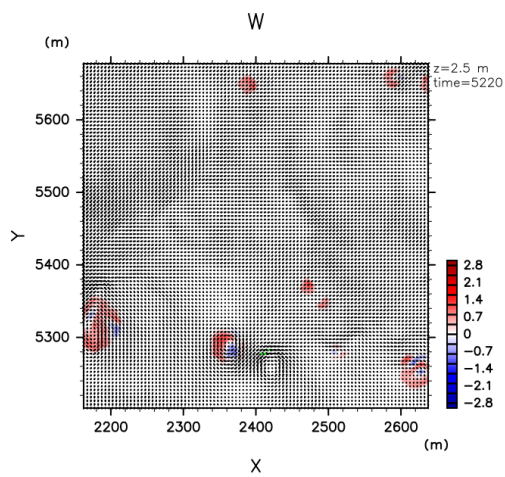


(a) 34 点

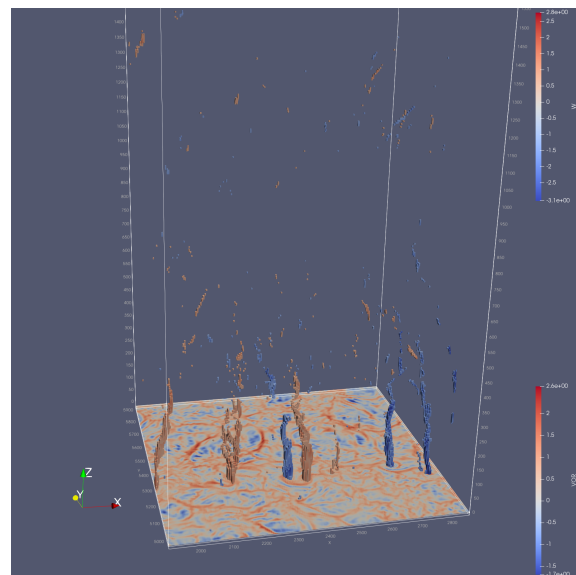


(b) 3 次元分布

図 3.35: 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (c) の図.

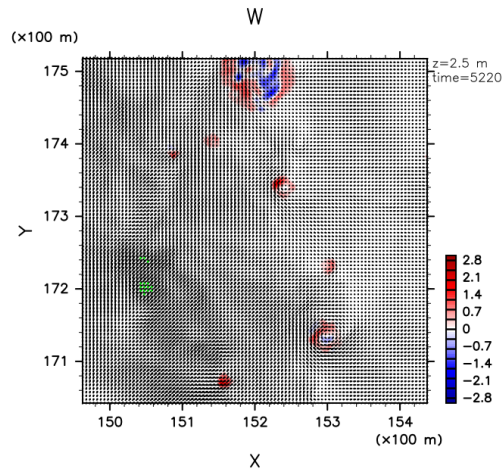


(a) 3 点

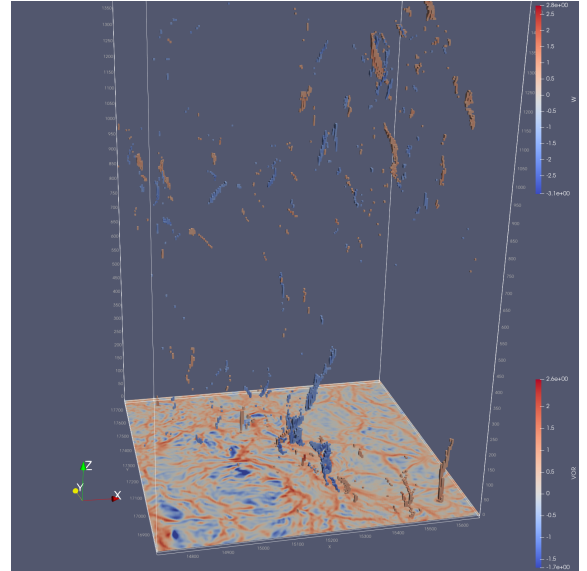


(b) 3 次元分布

図 3.36: 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (d) の図.

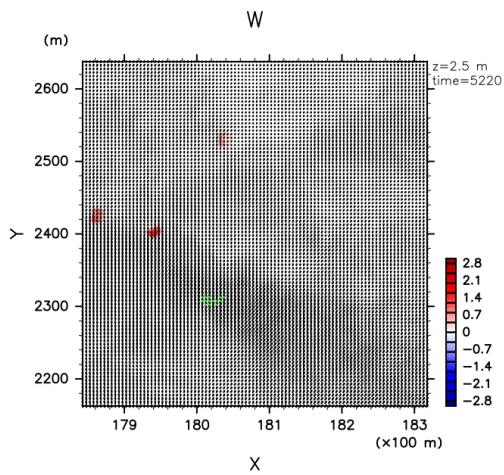


(a) 15 点

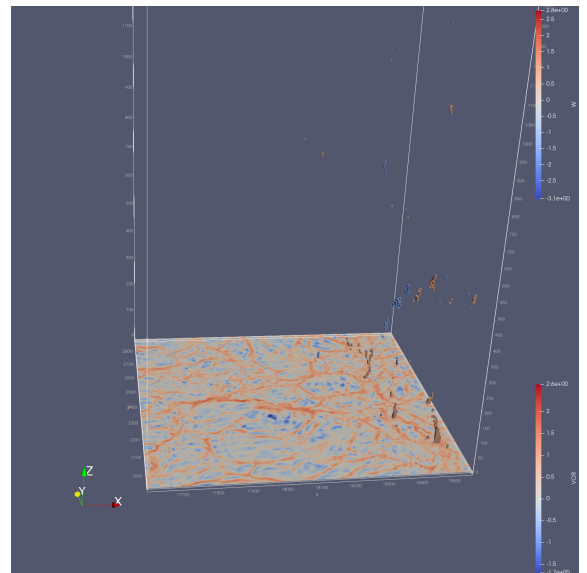


(b) 3 次元分布

図 3.37: 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (e) の図.

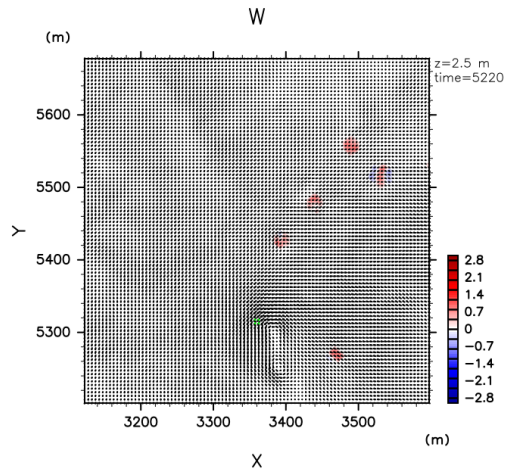


(a) 14 点

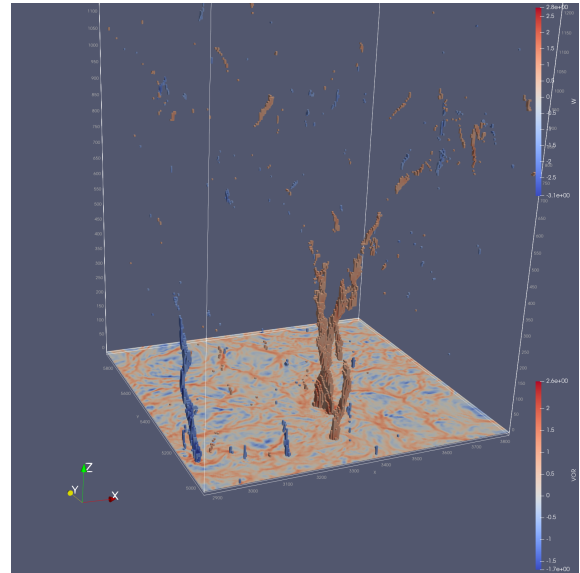


(b) 3 次元分布

図 3.38: 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (f) の図.

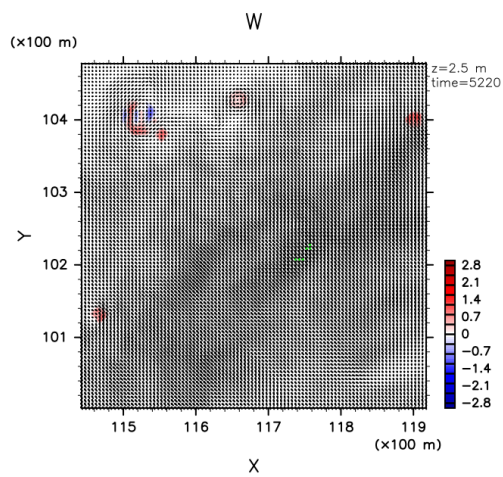


(a) 4 点

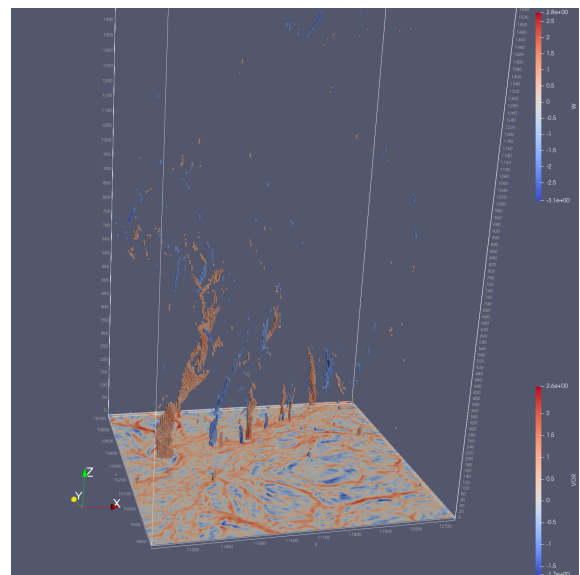


(b) 3 次元分布

図 3.39: 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (g) の図.

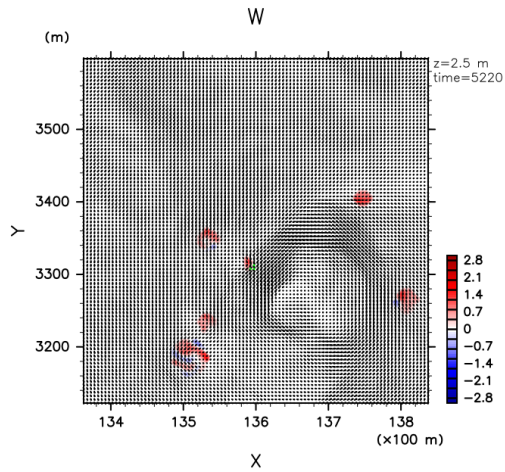


(a) 6 点

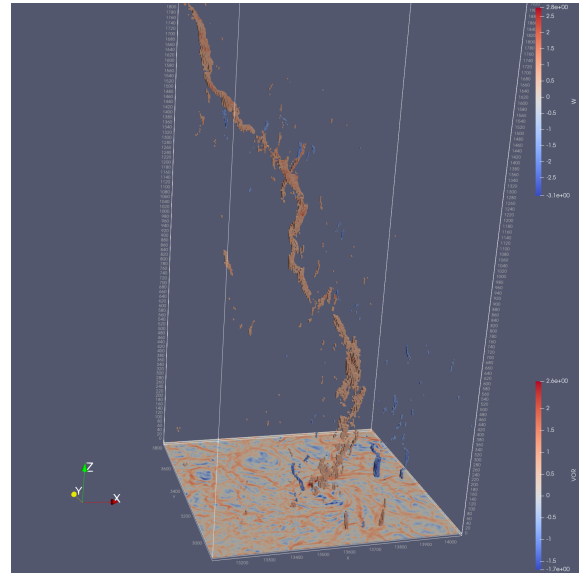


(b) 3 次元分布

図 3.40: 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (h) の図.

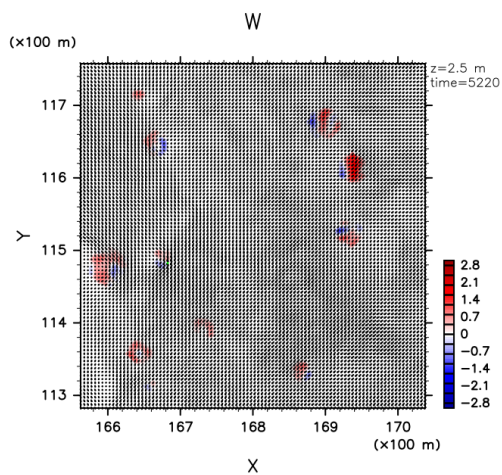


(a) 3 点

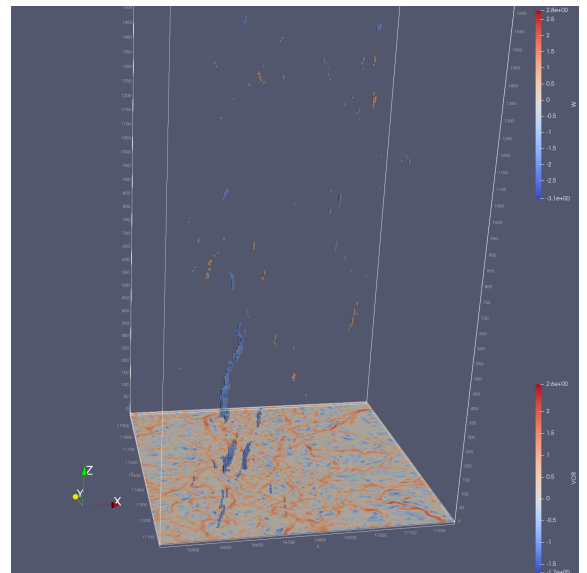


(b) 3 次元分布

図 3.41: 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (i) の図.



(a) 1 点



(b) 3 次元分布

図 3.42: 図 3.33 に対応する地表面応力が強い場所 (j) の図.

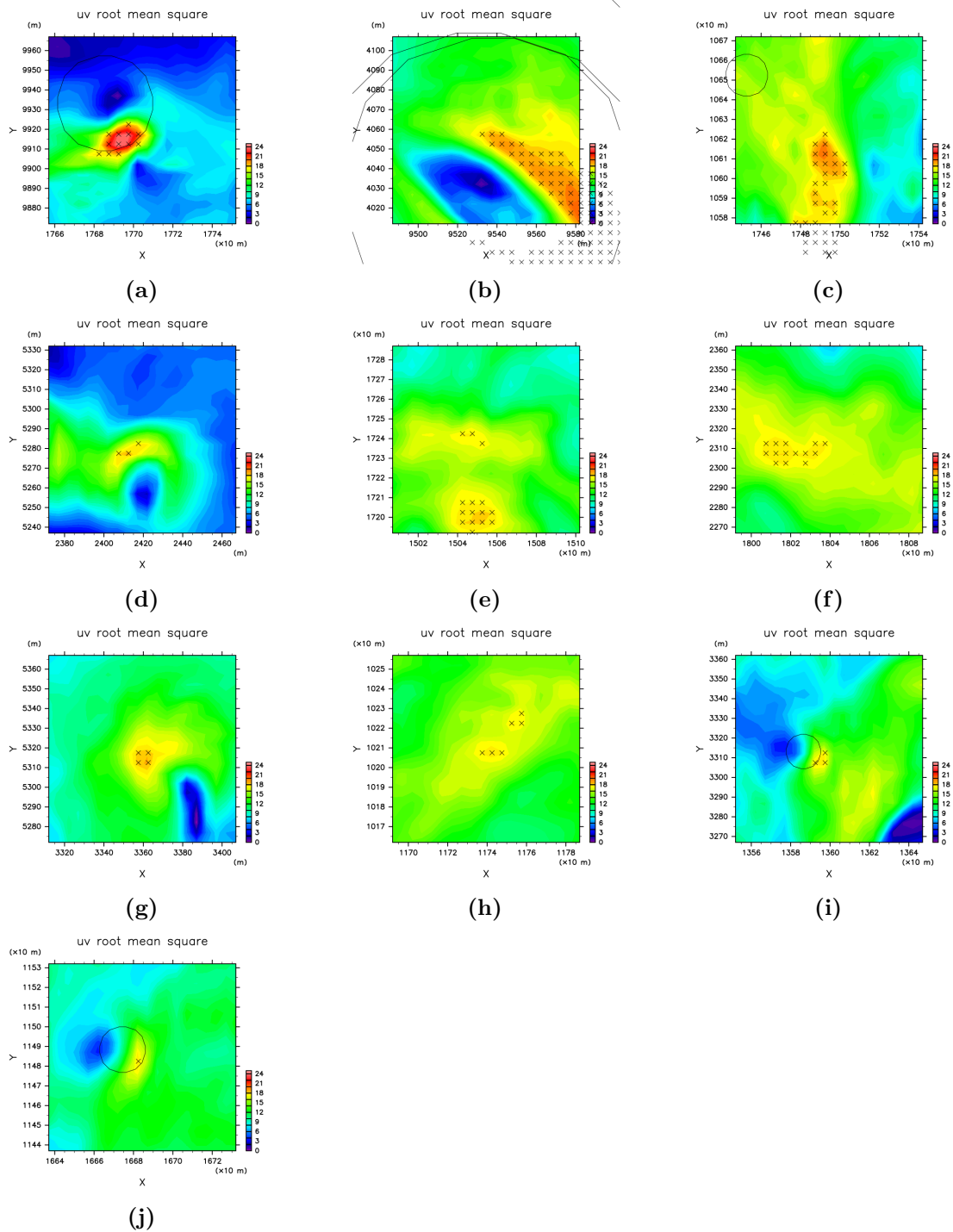


図 3.43: 地表面応力が強い場所における応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) 及び水平風の絶対値 [ms^{-1}] (カラー トーン) の水平分布. 円は抽出した渦の最大接線風速となる半径を示す.

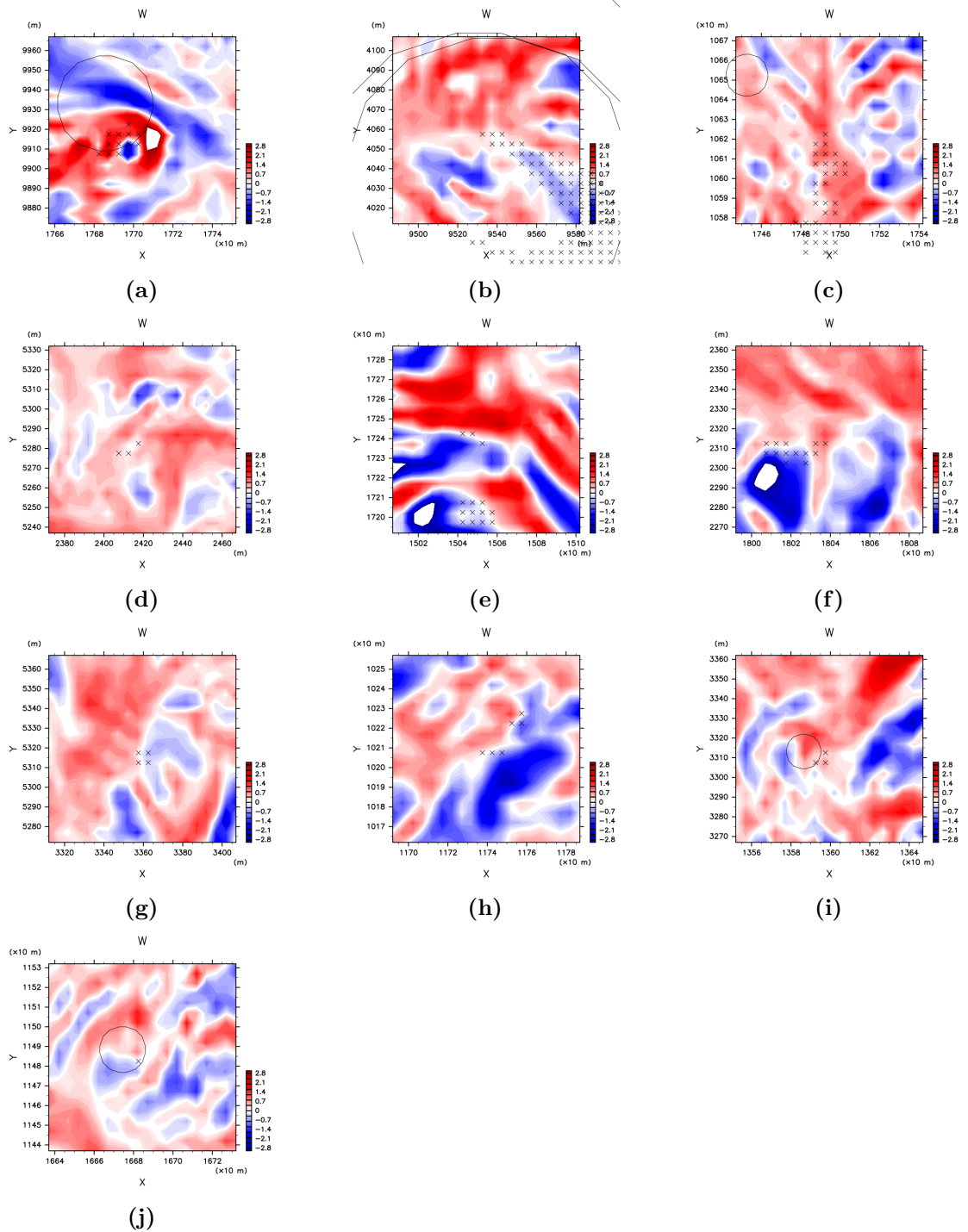


図 3.44: 地表面応力が強い場所における応力が 0.025 Pa を超える点 ($\times$ 印) 及び鉛直風 $[\text{ms}^{-1}]$ (カラートーン) の水平分布. 円は抽出した渦の最大接線風速となる半径を示す.

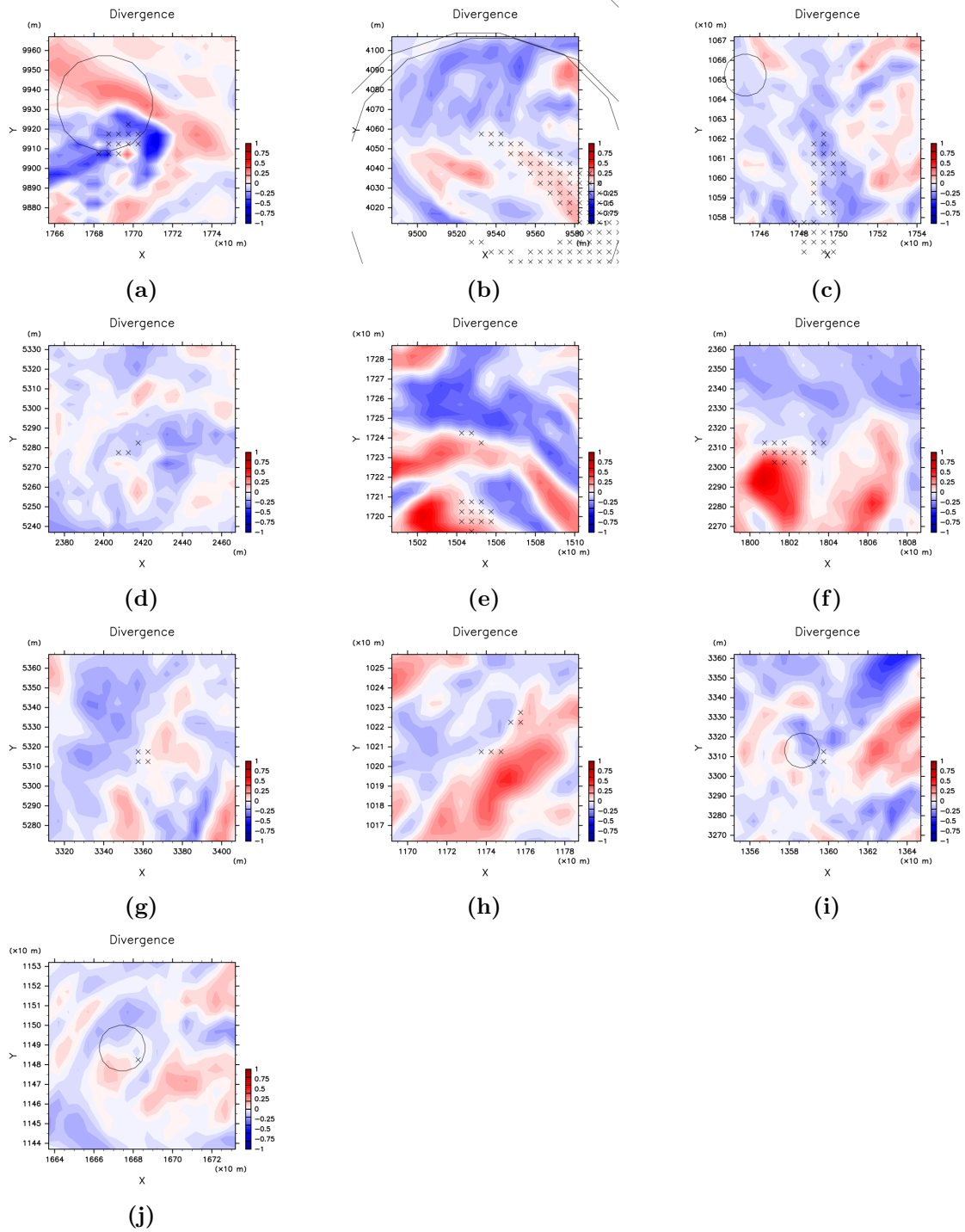


図 3.45: 地表面応力が強い場所における応力が 0.025 Pa を超える点 ($\times$ 印) 及び水平発散 $[\text{s}^{-1}]$ (カラー トーン) の水平分布. 円は抽出した渦の最大接線風速となる半径を示す.

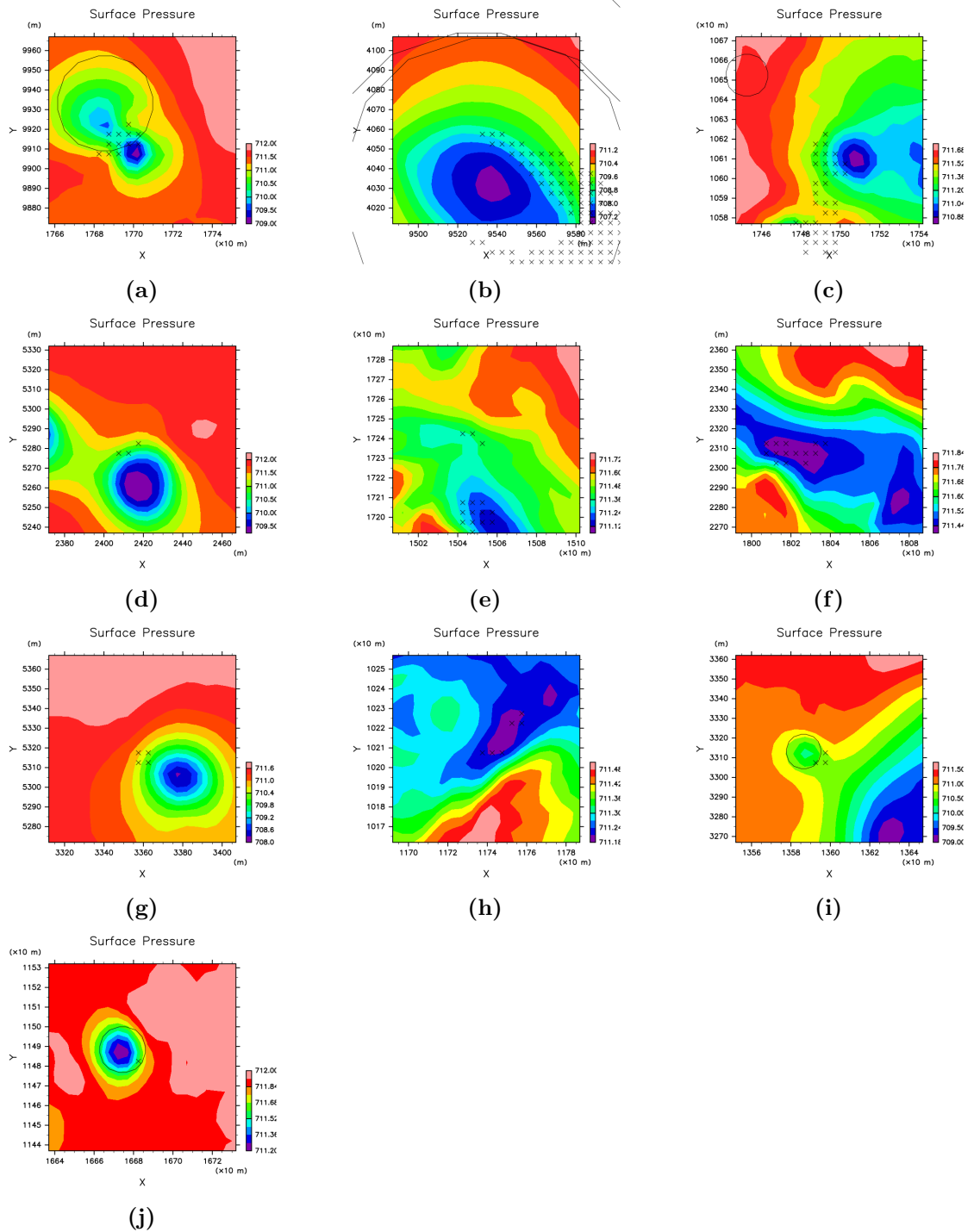


図 3.46: 地表面応力が強い場所における応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) 及び気圧 [Pa] (カラー トーン) の水平分布. 円は抽出した渦の最大接線風速となる半径を示す.

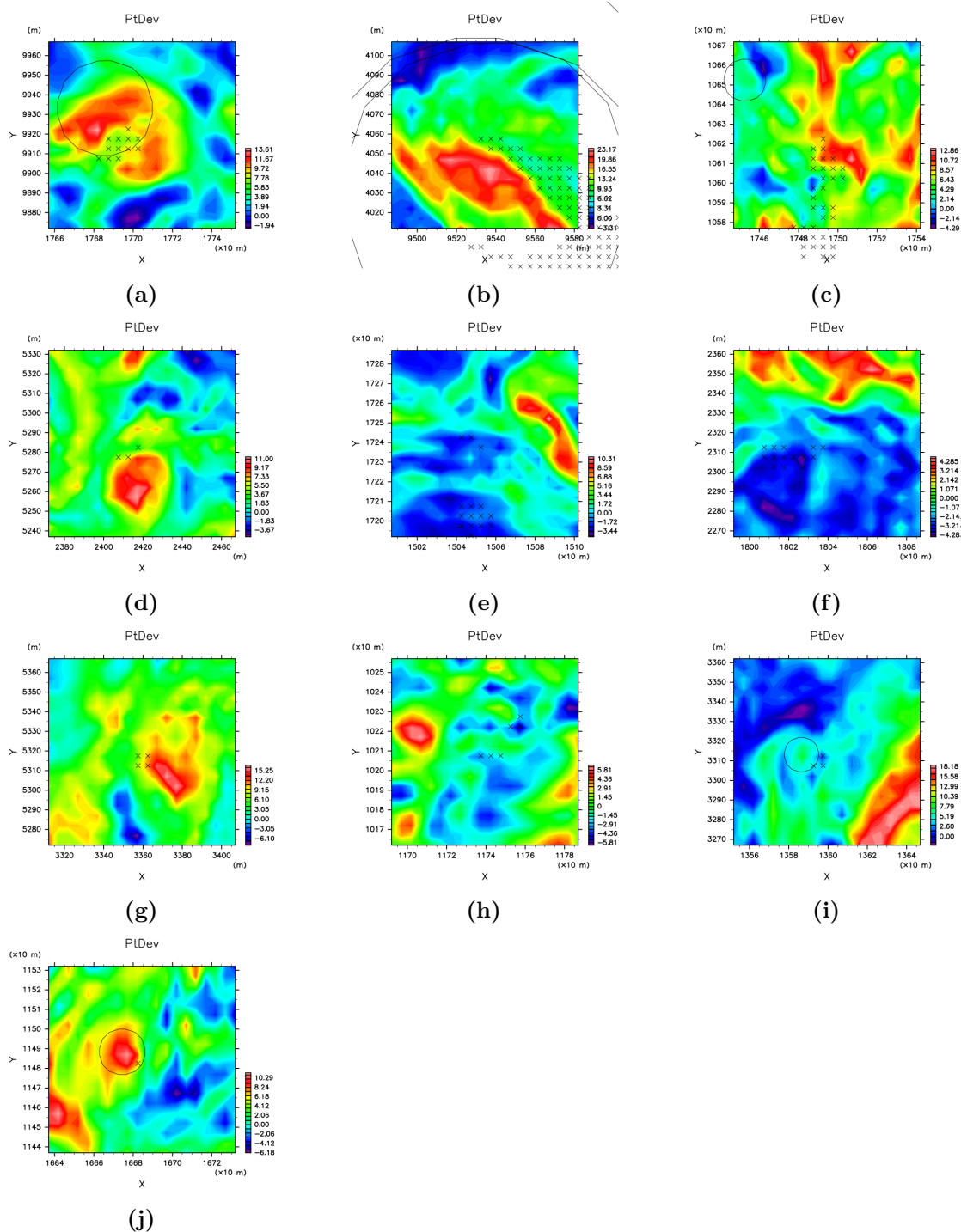


図 3.47: 地表面応力が強い場所における応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) 及び平均からの温度偏差 [K] (カラー トーン) の水平分布. 円は抽出した渦の最大接線風速となる半径を示す.

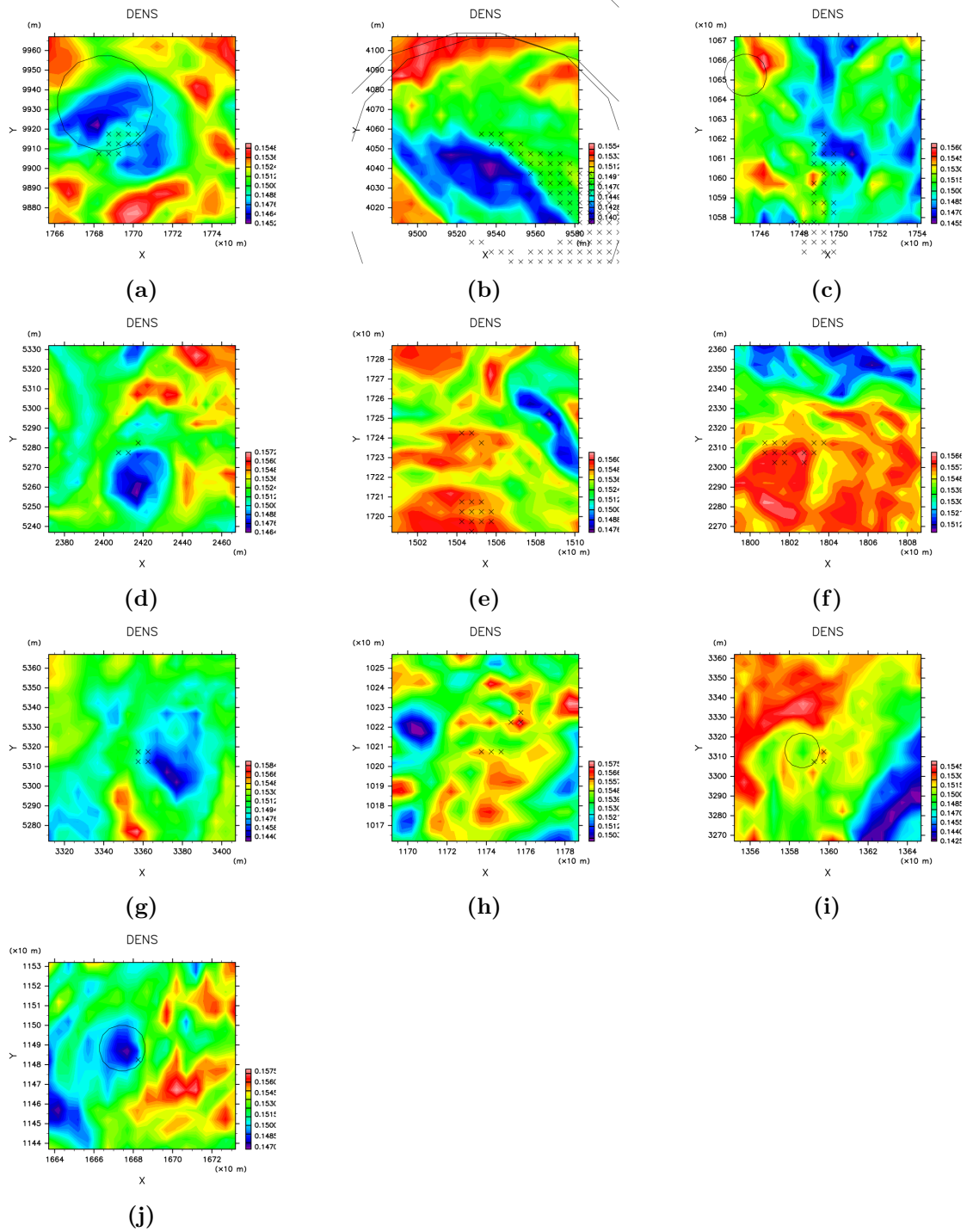


図 3.48: 地表面応力が強い場所における応力が 0.025 Pa を超える点 ($\times$ 印) 及び密度 $[\text{kgm}^{-3}]$ (カラー トーン) の水平分布. 円は抽出した渦の最大接線風速となる半径を示す.

でもたらされている様子がみられた。

孤立渦構造を伴う 7 箇所において、渦の中心部では周辺より気圧が $1 - 2 \text{ Pa}$ 程度下がっており (図 3.46), 周囲と比べて $3 - 4 \text{ K}$ ほど温度が高いコアを持っている様子が見られる (図 3.47). また温度が高いことに関連して、渦の中心部においては大気密度が $5 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$ 程度低くなっている (図 3.48). 渦構造があるため、水平風の収束発散の強さ (絶対値) は大きくなく、 0.5 s^{-1} 程度となっている (図 3.45). 地表面応力の大きさは水平風の強さに大きく依存し、水平風の 2 乗平均平方根 (図 3.43) は $18 - 25 \text{ m s}^{-1}$ と大きくなっている. また鉛直風の分布 (図 3.44) は水平風の収束発散の分布 (図 3.45) と対応している. 水平風が収束するところで上昇流が生じ、発散するところで下降流が生じており、その強さはそれぞれ 3 m s^{-1} 程度である.

孤立渦構造を伴わない 4 箇所については周囲より気温が $1 - 5 \text{ K}$ ほど低く (図 3.47), 大気密度が $2 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$ ほど高まっているところ (図 3.48) で地表面応力が大きくなっている様子が見られる. 地表面気圧は周囲より 0.5 Pa 程度下がっている (図 3.46). 孤立渦構造を伴う場合と同様に、地表面応力の大きさは水平風の強さに大きく依存しているため、水平風の 2 乗平均平方根 (図 3.43) は周囲より 20 m s^{-1} 程度大きくなっている. このような場所は水平風の発散領域と収束領域の間に存在している (図 3.45). 孤立渦構造を伴う場合と同様に、地表付近においては水平風の収束発散場の分布は強さが $\pm 3 \text{ m s}^{-1}$ 程度の鉛直風の分布 (図 3.44) とよく対応しており、上昇流のあるところで水平風は収束し、下降流のあるところで水平風はよく発散している. すなわち下降流によって上層から降りてきた風が上昇流に向かって吹き込んでいくところで地表面応力が強くなっていることがわかる. このような強い地表面応力をもたらす水平風の収束発散の構造は水平スケールが数十から 100 m スケールの分布となっており、その強さは $\pm 1 \text{ s}^{-1}$ 程度の差があるような構造となっている.

3.5 計算解像度依存性

ここまで最高解像度である解像度 5 m の結果を用いて解析を行ってきた. その結果、風洞実験で得られたダスト巻き上げ閾値を超える強い応力が生じていることや、強い地表面応力が渦構造によって引き起こされることを示した. ここから Nishizawa et al. (2016) で計算された 5 m 以外の空間解像度 $10, 25, 50, 100 \text{ m}$ の結果を解析し、 5 m 解像度実験での解析で得られた結果とどのような違いが生じ

るのか調査した結果を載せる。

3.5.1 空間分布

それぞれの計算解像度別にモデル最下層における地表面応力の空間分布を調べる。水平分布はどの計算解像度でも一様に分布しているわけではなく、あるパターンを持って分布している様子がみられる (図 3.49)。この結果はすでに 5 m の結果で示したものと同様で、上昇流領域をで構成される多角形構造の境界に対応していることがわかる (図 3.50)。多角形構造の水平スケールや境界を構成する上昇流領域の幅は計算解像度によって異なり、解像度が粗くなるほど大きくなるが、それぞれの構造の形状は似ており、相似적であると考えられる。

図 3.51 は各計算解像度別の最下層において抽出された渦の中心位置の空間分布である。図 3.50 と見比べると、どの計算解像度においても上昇流で構成される多角形構造の境界に渦が存在しており、5 m の結果と同じ傾向を持っていることがわかる。

3.5.2 強度分布

地表面応力の強度分布を解像度別に比べる (図 3.52)。計算解像度 5 m の結果では風洞実験で得られた火星のダスト巻き上げ閾値である応力値 0.03 Pa を超える点が存在するが、他の計算解像度には存在しないことが示された。また計算解像度 5 m とそれ以外では強度分布の概形が大きく異なる形をしている。5 m では 0.03 Pa を超えるあたりから応力が強い点がロングテールのように伸びて存在している。確率密度で一桁小さい数の格子点が 0.05 Pa 近い強度まで分布している様子が見られる。他の計算解像度にはそのような傾向はみられない。

3.5.3 強い地表面応力と渦構造との関係

計算解像度 5 m の結果 (図 3.30) で示したように、強い地表面応力と渦構造との関係について調査を試みた。5 m の解析方法と同じく、抽出された渦の最大接線風速となる半径の 1.3 倍の半径の領域を考え、応力のランク別に渦構造によってもたらされた点の割合を求めた (図 3.53)。どの計算解像度の結果においても、応力が強い

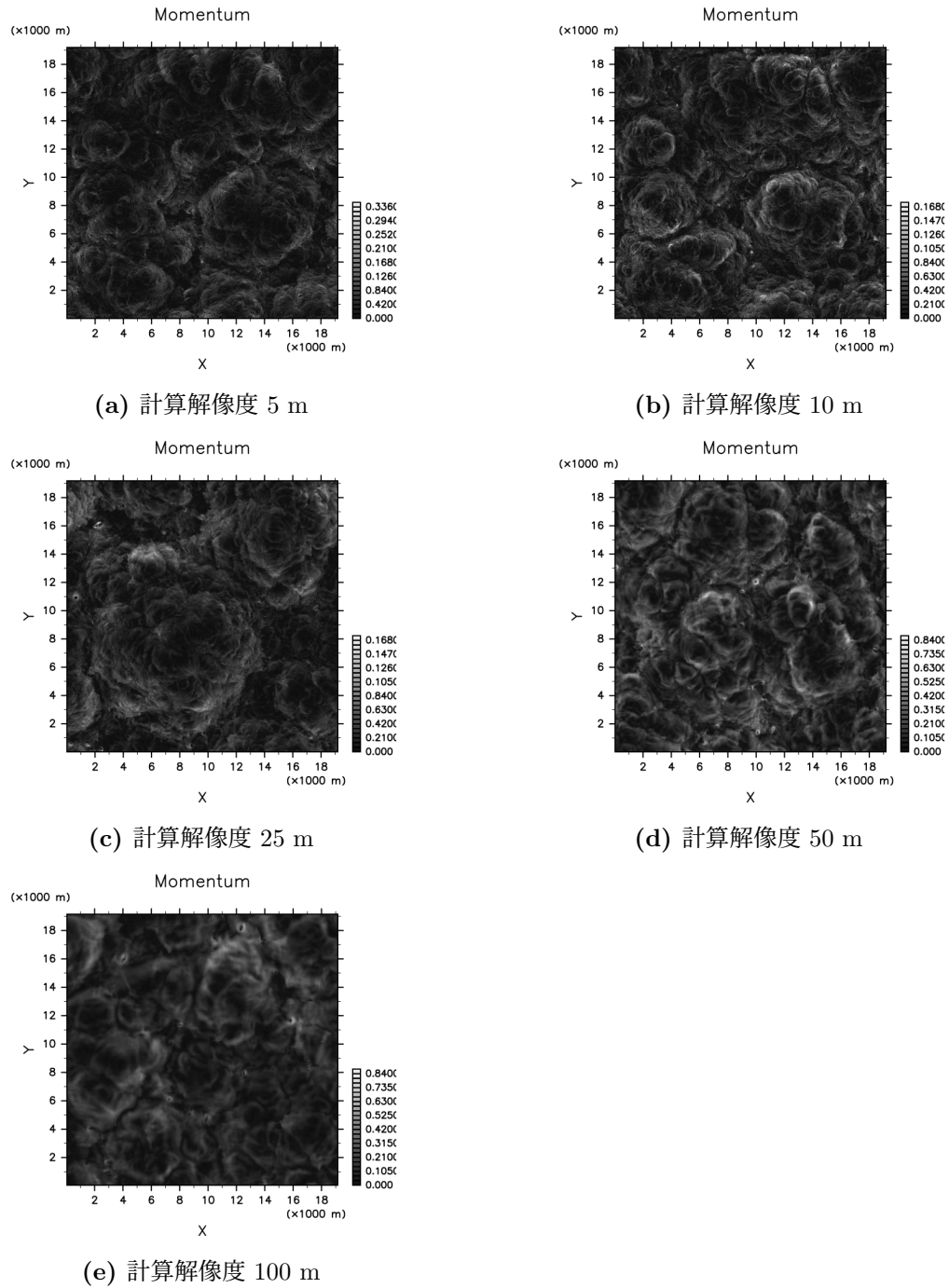


図 3.49: 計算解像度別の水平全領域の地表面応力の水平分布. それぞれの解像度ごとに地表面応力の強さが異なるため, カラーバーのスケールが異なっている.

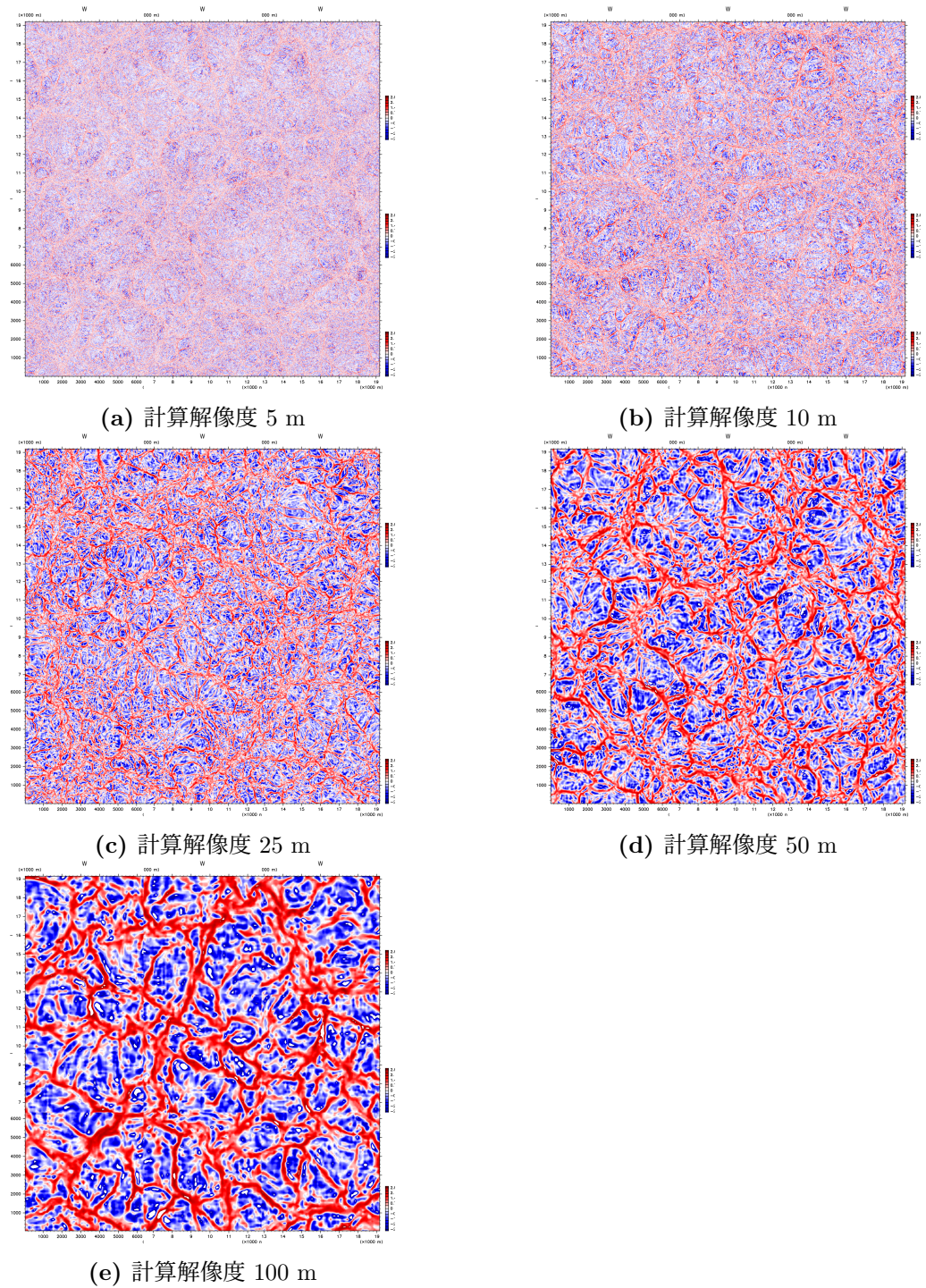
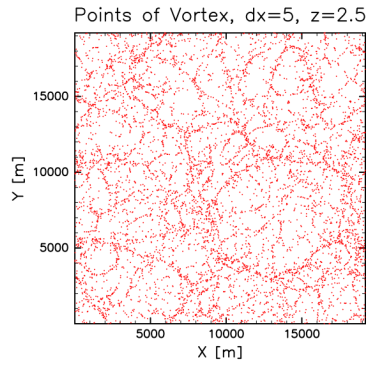
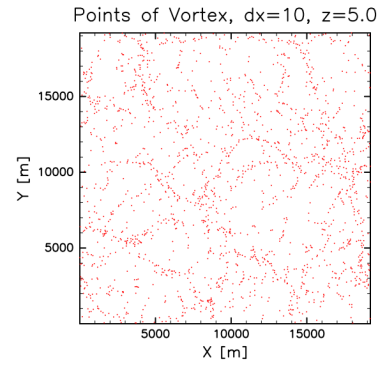


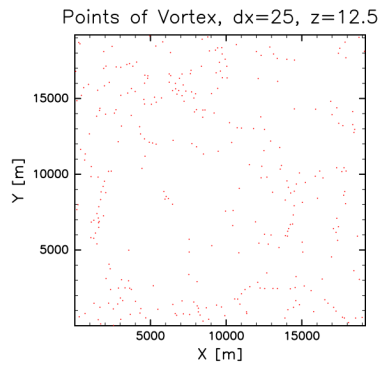
図 3.50: 計算解像度別の水平全領域の鉛直風の水平分布.



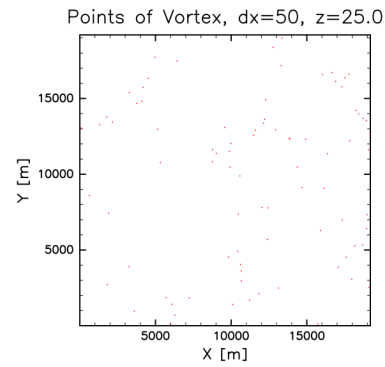
(a) 計算解像度 5 m



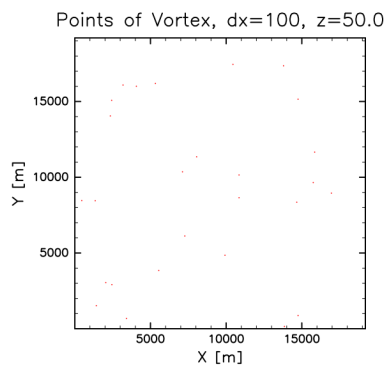
(b) 計算解像度 10 m



(c) 計算解像度 25 m



(d) 計算解像度 50 m



(e) 計算解像度 100 m

図 3.51: 計算解像度別に各最下層において抽出された渦の空間分布. 赤点が抽出した渦の中心座標を示す.

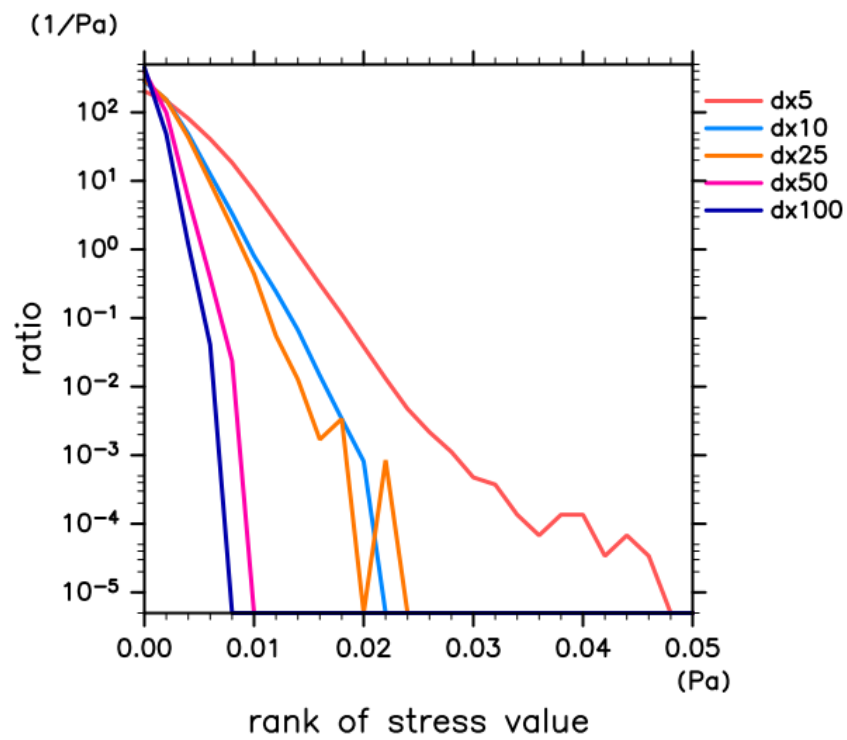


図 3.52: 計算解像度別の地表面応力の強度分布ヒストグラム. 色はそれぞれ解像度が異なり, ピンクが 5 m, 青が 10 m, 橙が 25 m, 赤が 50 m, 紫が 100 m の結果を示す.

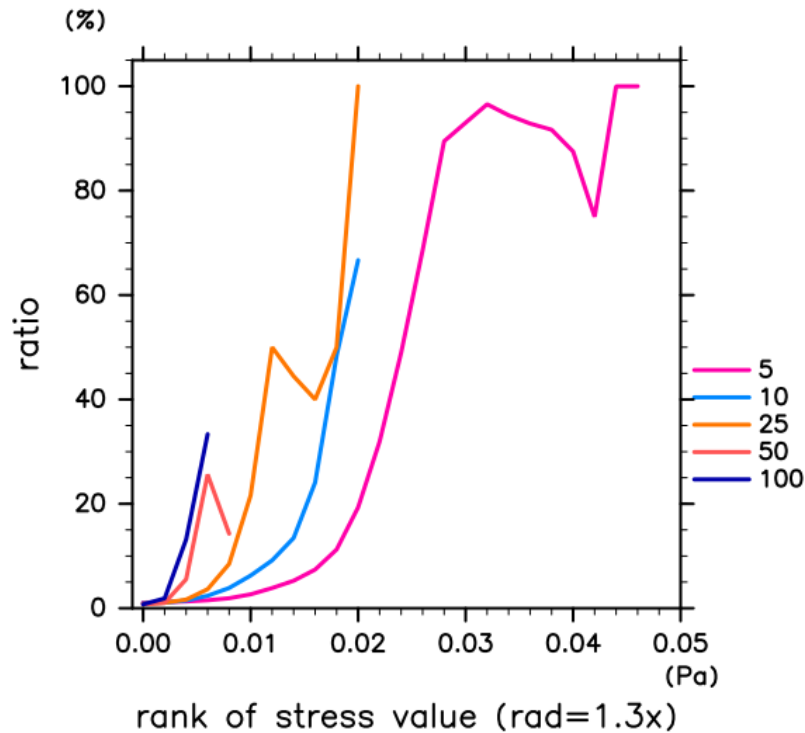


図 3.53: 地表面応力の強度分布ヒストグラムにおいて, 応力のランクごとに渦によってもたらされた計算格子点の割合を示すグラフ. 横軸が応力のランクを示し, 縦軸に各ランクごとに渦によってもたらされている点の割合を示す. 色と計算解像度の対応は図 3.52 と同じ.

ほど (グラフの右側にいくほど) 渦によってもたらされる計算格子点の割合が高くなっていることがわかる. したがって, 計算解像度によらず, 強い地表面応力をもたらすのに渦構造は重要な役割を持っていると考えられる. しかし計算解像度 100 m 及び 50 m の粗い解像度ではもっとも強い地表面応力でも渦による割合は 50% を超えない. それに対し, 解像度 25 m 以上の高解像度では強い応力が渦によってもたらされる点の割合が 50% を超えるようになる. したがって, 地表面応力の渦による効果を調べる際には, 少なくとも計算解像度 25 m 以上の細かい解像度が必要になると考えられる.

表 3.5.3: 計算解像度別にモデル最下層で抽出された渦の数

計算解像度	正渦の数	負渦の数	抽出された渦の総数
5 m	3404	3375	6709
10 m	887	976	1863
25 m	159	159	318
50 m	36	49	85
100 m	14	13	27

3.5.4 計算解像度別の渦の特徴

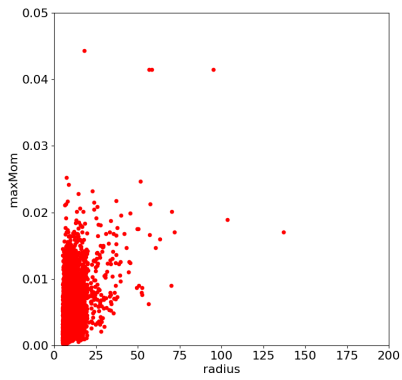
ここまで、計算解像度が粗くなっても、強い地表面応力をもたらすには渦構造が重要であることを示した。ここからそれぞれの計算解像度別に抽出された渦の特徴について比較を行った。

まず解像度別に抽出されている渦の数は表 3.5.3 のとおりである。正渦と負渦はそれぞれ回転する向きによって決まっている。どの計算解像度においても正負の渦の数は同程度存在している。計算解像度が細くなるにつれて、抽出される渦の数は急激に増えることがわかる。

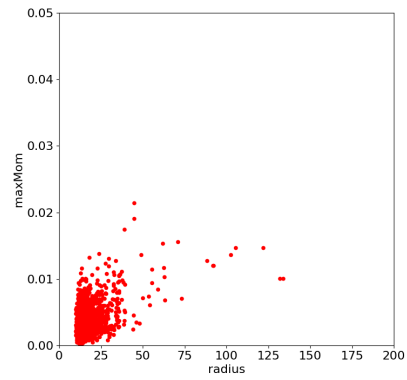
解像度別に表現される渦構造と渦がもたらす地表面応力の関係について調べることを試みた。図 3.54 の (a) は計算解像度 5 m において抽出された渦の接線風速最大となる半径とその渦の半径領域内における最大地表面応力の関係を示した散布図である。まず地表面応力が 0.04 Pa を超える渦に注目すると 4 個ある。それぞれ半径はおよそ 20 m, 60 m, 100 m の 3 種類である。まず半径 20 m のような小スケールの渦構造は、解像度 10 m より低解像度ではそもそも解像できない。そのため、当然ながら強い地表面応力をもたらす渦のうち、半径が小さな渦は計算解像度が粗いと表現できない。しかし半径 100 m スケールの大きさの渦構造は最も低解像度である 100 m の計算でも得られているが、図 3.54 のそれぞれの解像度における結果を確認すると、同様のスケールの渦においても、5 m の結果ほど最大地表面応力が大きくならない。また計算解像度が低解像度になるにつれて、応力の強さは弱まる傾向にある。

すなわちそれぞれの計算解像度で得られた渦構造について次の 2 点のことが読み取れる。

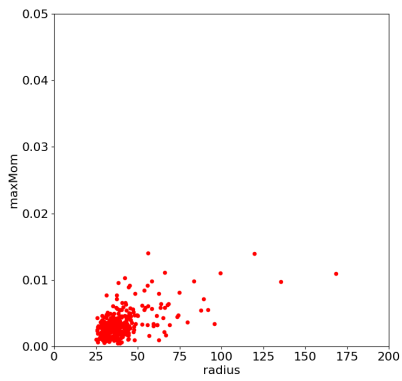
1. 強い地表面応力をもたらす渦構造は低解像度では表現できないスケールのも



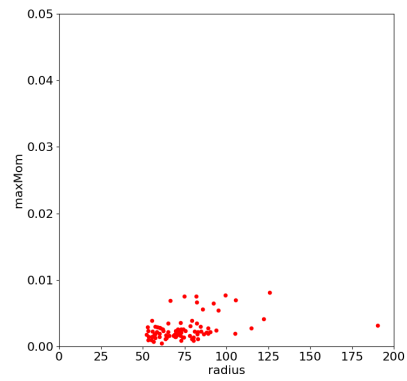
(a) 計算解像度 5 m



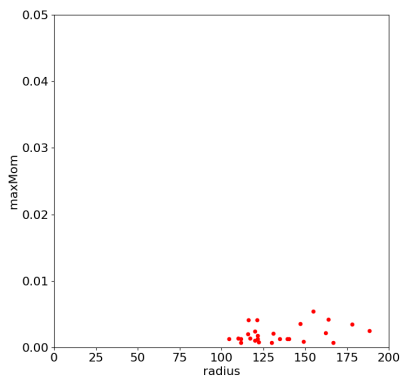
(b) 計算解像度 10 m



(c) 計算解像度 25 m



(d) 計算解像度 50 m



(e) 計算解像度 100 m

図 3.54: 抽出された個々の渦について最大接線風速となる半径 [m] (横軸) と地表面応力の最大値 [Pa] (縦軸) の計算解像度別の散布図. 個々の赤い点が個々の渦構造に対応している.

のがある。

2. 低解像度で表現可能なスケールの渦構造でも、高解像度で表現された同じスケールの渦構造より強さが弱化する。

第4章 まとめと議論

本研究では高解像度 LES モデルを用いた Nishizawa et al. (2016) による高領域かつ小スケールの流れ場構造まで表現した火星大気数値実験のデータを使って火星のダスト巻き上げ過程に関わる地表面応力と流れ場の関係について調査した。

まず流れ場全体構造の把握を試みたところ、地表面付近の高さ 1,000 m 程度の領域において、水平スケールが数 km から最大 10 km 程度の上昇流領域を境界とする多角形構造が存在することがわかった。上昇流は高度が上がると塊状に変化し、プルーム状と呼ばれる構造 (Sullivan and Patton, 2011) になっていく様子がみられた。プルーム状構造は最大 6 km 程度までの様々な高度まで成長して水平方向に発散し、下降流へ繋がっていく。下降流は地表面付近で多角形構造の内側を構成し、対流セルを形成していた。観測でも知られているダストデビルのような渦構造に注目し、流れ場を解析することで渦の抽出を試みたところ、多角形構造の境界である上昇流領域には渦の中心が分布している様子が見られた。これは地球設定の計算における傾向と同様である (Giersch and Raasch, 2023)。抽出された渦構造を統計的に調べると、高度 100 m 程度までは数多くの渦度や接線風速の値が大きな渦が見られ、その個数は高度に伴って減少していくことがわかった。また孤立渦は対流セルと同じ高度 6,000 m になるとほとんど見られなくなっており、対流セルの鉛直スケールが渦構造の最大鉛直スケールに影響していることがわかった。このような渦構造の鉛直スケールの様子は Nishizawa et al. (2016) では調べられていなかった特徴である。モデル中で表現された孤立渦は高度に寄るが、対流構造に伴う微細な渦構造は数千個程度存在している。

次にダスト巻き上げに関わる地表面応力について調査すると地表面応力が強い領域は偏在し、地表面付近における上昇流による多角形構造の境界付近で強くなっていることがわかった。強度分布から風洞実験で得られているダスト巻き上げ閾値である 0.03 Pa (Greeley and Iversen, 1978) を超える強さの地表面応力が得られることが判明した。応力が強い計算格子点は全体のおよそ 0.001 % に過ぎない。強い地表面応力をもたらす構造として渦構造に注目して調べた結果、強い地表面応力

を持つ計算格子点の 8 割以上は渦構造を伴い、応力が強いほど渦を伴う割合が増えることが明らかとなった。これらの渦は水平スケールが数十から 100 m 規模であり、中心で数 Pa ほど気圧が下がり、3 – 4 K ほど温度が高いコアを持つ構造を持っている。強い応力をもたらす場所のうち、渦構造を伴わない場所もいくらか存在し、そこでは地表面付近が暖かくなることで上昇流が生じるところに水平風が吹き込むことで応力が強くなっていることがわかった。

最後に、地表面応力と流れ場の関係について計算解像度依存性を調査した結果、上昇流による多角形構造の境界付近で応力が強くなることや、地表面応力が強い計算格子点ほど渦を伴う割合が増える特徴は計算解像度に依らないことがわかった。特に解像度 25 m より細かい解像度の計算で応力が渦によって強くなる傾向が高まり、強い応力の半数以上は渦構造が伴っていた。各計算解像度別に抽出した渦の半径ともたらず地表面応力の大きさについて調査した結果、半径数十 m 程度の渦で粗い解像度でも解像できているような渦にも関わらず、解像度 5 m の結果と比べて強い応力をもたらさないことがわかった。解像度が粗くなると同じような水平スケールの渦でも強い応力を持つことができないことが示された。

本研究により、ダスト巻き上げるような強い地表面応力は数十から数百 m スケールの渦構造によってもたらされることが明らかとなった。今回抽出した渦構造について、観測結果と比較すると、中心で気圧が下がり、数 K ほど温度が高い構造を持っていることは火星ローバー観測から得られたダストデビルの特徴と同様であった (Ringrose et al., 2003)。Mars Express orbiter の高解像度ステレオカメラによって観測されたダストデビルの半径 (Stanzel et al., 2008) と本研究において抽出した渦の半径をヒストグラムにして比較したものが図 4.1 である。渦の半径の分布を見ると、半径の小さな渦が多く、半径が大きくなるにつれて存在数が少なくなっていく傾向は同様である。図 4.2 は火星ローバー Viking 2 号によって得られた風速から推定した渦 (Ringrose et al., 2003) と本研究で抽出した渦の最大接線風速と半径をプロットした散布図である。観測でダストデビルと認められた渦は 8 個であった。Ringrose et al. (2003) によるローバー観測から推定した結果では観測から推定した結果で半径が 50 m を下回ると推定されているものは 6 個示されており、このようなスケールの渦は本研究で抽出された渦にも数多く含まれている。しかし本研究で得られた渦の風速は観測から推定された結果よりは小さい。図 4.3 は火星ランダー InSight によって得られた渦構造の接線風速 (Onodera et al., 2023) と本研究で抽出した渦の最大接線風速を比較したヒストグラムである。この結果も本研究で得られた接線風速の大きさが観測結果と比べて弱まっていることがわかる。

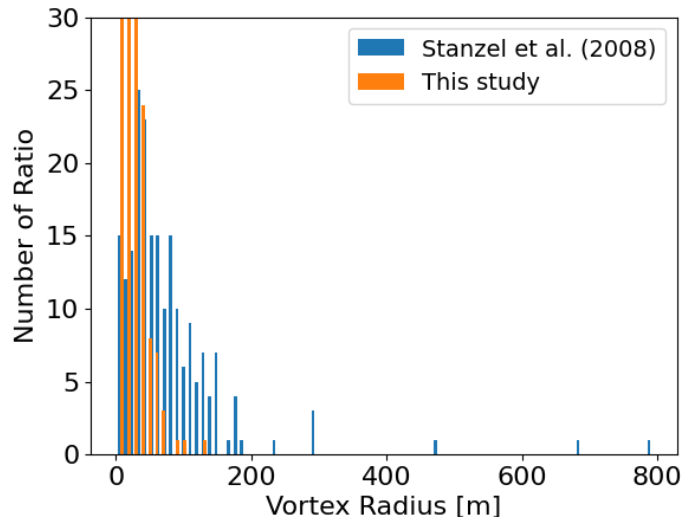


図 4.1: 本研究で解析した渦 (オレンジ) と衛星観測から得られたダストデビル (青; Stanzel et al., 2008) の半径のヒストグラム. 横軸が半径 [m], 縦軸が渦の個数を表す. ヒストグラムのランク幅はおよそ 10 m である. 本研究の結果で, 半径が小さい渦は数百個あるが, このグラフは見やすさのため縦軸を上限 30 に設定している.

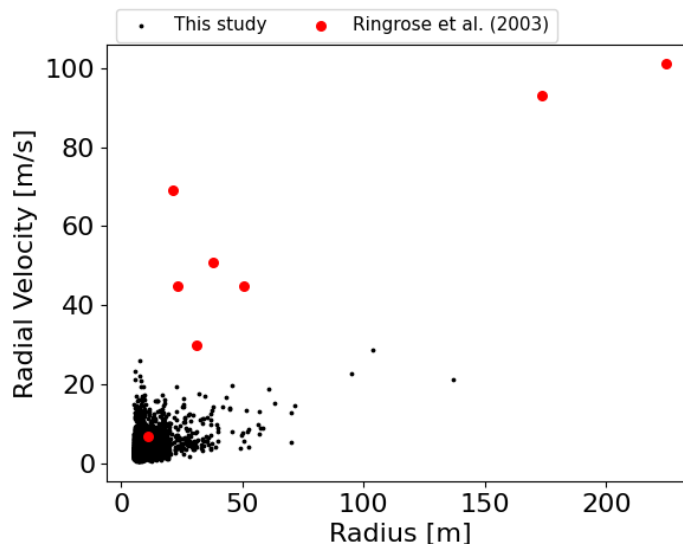


図 4.2: 本研究で抽出した渦 (黒点) とローバー観測で推定された渦 (赤点; Ringrose et al., 2003) の最大接線風速と最大接線風速となる半径の散布図. 横軸が半径 [m], 縦軸が風速 $[\text{ms}^{-1}]$ を表す.

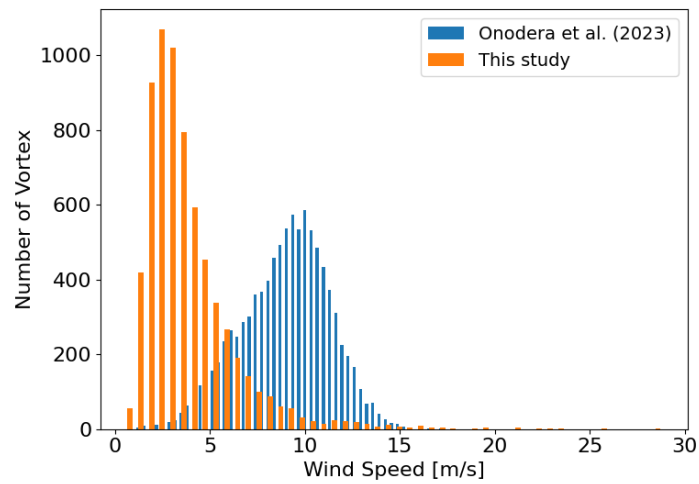


図 4.3: 本研究で解析した渦 (オレンジ) とランダー観測から得られた渦 (青; Onodera et al., 2023) の風速のヒストグラム. 横軸が風速 $[\text{ms}^{-1}]$, 縦軸が渦の個数を表す.

観測で得られた結果と今回の解析で得られた結果にはいくらかの違いが見られる。原因の一つとして考えられるのは時間的な問題である。今回の解析に用いたデータはとある 1 時刻のスナップショットであり、もっと他の時刻を調べるともっと多くの数の孤立渦が見つかる可能性がある。また今回解析に用いた計算モデルでは地形が考慮されていない。地形の効果によって対流構造のでき方や、それに伴って生じる孤立渦構造などにも影響を与える可能性がある。しかしいずれの観測と比較しても、本研究で得られた結果が観測と比べて弱く小さいという結果であった。したがって現実の火星では、本研究で得られた渦よりも半径が大きく、風速の速い渦が存在している可能性が高い。そのため強い地表面応力が渦によってもたらされるという本研究の結論は、現実的にはより強まる可能性が考えられる。

本研究においては $LT = 14:30$ における、とある瞬間における結果しか解析していない。前述のように観測結果と比べると、ほんのわずかな瞬間の結果に過ぎず、より一般性のある結果得るためにはもっとより長い時間、異なる時刻での調査が必要と考えられる。ダストデビルの持続時間は数分程度とされている (Ringrose et al., 2003) ことから実際にダストが巻き上げられる量などを評価するためには、数分程度のタイムスケールにおいて孤立渦や水平風の収束発散構造を調査することが望ましい。さらに一般的な結果を得るためには少しずつパラメータを変えるなどしてアンサンブル実験を行うことが理想的であるが、今回使った計算データの他にも 5 分おきに出力された $LT = 14$ 時台における他の時刻においてもどのような傾向にあるのか調べることでこの時間帯におけるより一般性の高い結果が得られることが期待される。前述のように観測結果と比較したところ、本研究において抽出された渦は接線風速が小さい傾向にあることがわかった。数値計算で得られた渦の風速が小さい理由として一般風がなかったことが考えられる。Nishizawa et al. (2016) の計算では無風状態の $LT = 00:00$ から計算を始めており、14 時間積分したものを解析したため、一般風と呼べるものは存在していない。実際には渦構造は一般風に伴って動くことが多く、それによってより強い接線風速を持つ可能性がある。さらに今回調査したモデルの計算結果には地形が入っていない。地形を入れたモデルで検討することによって、火星のダスト巻き上げプロセスの理解がより深められると期待できる。

謝辞

本論文を作成するにあたり、多くの方々に支えていただき、また協力していただきました。

指導教員である北海道大学理学研究院の石渡正樹教授には私が学士、修士の頃からご多忙の中、多くの時間を割いていただき、研究の方針から内容の精査まで幅広く、深く助言いただきました。RIKEN/R-CCS 上級研究員の西澤誠也博士には Nishizawa et al. (2016) で計算した SCALE-LES による計算結果をご提供いただきました。また孤立渦の抽出スクリプトをご提供いただき、使用方法や抽出方法についてアドバイスをいただきました。加えて、解析の手法やデータの取り扱い方法など多くの助言をいただきました。九州大学理学研究院の中島健介准教授には気象学のデータの読み取り方、解析手法などの助言をいただき、見るべき物理量の取り扱いなどをご教示いただきました。北海道大学理学研究院の倉本圭教授にはセミナーなどを通して、研究の進め方や方針について助言いただきました。松江工業高等専門学校情報工学科の杉山耕一郎教授には本研究で扱っている大容量データの可視化のためのソフトウェアの開発をしていただき、解析そのものさえ困難であったデータの取り扱いについて助言、助力いただきました。神戸大学理学研究院の林祥介教授、高橋芳幸准教授には火星を含めた惑星大気に関する俯瞰的な見地や深い視点から多くのアドバイスをいただき、研究をまとめる際の参考になりました。神戸大学理学研究院の檜村博基講師には火星大気に関する数値計算について議論していただき、研究内容をより深く理解することにつながりました。東北大学理学研究科の伊藤純至准教授には地球ダストデビルに関する知見を共有いただき、本研究における解析のアイデアとなる情報を多くいただきました。日本カーリング協会の小高正嗣事務局長には北海道大学理学研究院の助教在籍時に領域モデルの扱いを教授していただいたり、計算機の利用方法、研究環境整備に関してお世話になりました。北海道情報大学情報メディア学部の佐々木洋平准教授には数値モデルの取り扱いや計算環境の整備方法などを教授していただき、様々な場面で会食などを通して相談に乗っていただきました。

北海道大学 (北大) には理学部へ入学した 2010 年から学部, 大学院修士課程, 博士後期過程と長きにわたって在籍し, 結果として 13 年と半年間, 学生としてお世話になることになりました. 紆余曲折あったものの, 美しく整備された札幌キャンパスの中で学び, 研究し続けられたことは大変ありがたく感謝しております. 北大周辺の飲食店などのお店の方々にも長くお世話になり, 生活の彩りとなりました. 特にらーめん五丈原, カネサビルのつくしのこ, らくようには店員の方のみならず, 通っているお客さんとのやりとりも励みになりました. 学部生活を過ごした北大の恵迪寮自治会並びに一般社団法人恵迪寮同窓会で出会った皆様にはいつまでも変わらない学生寮の空気感で接していただき, 一緒に酒を飲み, 寮歌を歌い, 心地よく生活し, 研究活動を進めていく助けになりました. 北大理学部 8 号館の惑星宇宙グループの同期, 先輩, 後輩たち, スタッフの皆様にはいつも助けていただき, 研究の刺激となりました. 株式会社岩谷技研には, 博士学位論文執筆の最後の方のタイミングで恵迪寮の後輩を通じてご縁があり, 私が研究活動で業務への集中が難しいのにも関わらず, 仕事と賃金を与えてくださり, 生活と研究活動を継続することができました. X (旧名称 Twitter) などのソーシャルネットワーキングサービス (SNS) を通じて生まれたほとんど名前も顔も知らない数多くの人々とのやりとりは, 普段の生活や研究活動を進めていくことへの活力となりました.

父の村橋光臣と母の村橋里美を始めとした家族, 親類には様々な形で心配と迷惑をかけつつも長い学生生活を見守っていただきました. 博士課程在学中に物故した祖父の小原伸, 叔父の村橋昌至, 叔父の村橋智至, 並びに大叔父の村橋鎔男には心配をかけさせたままとなりました. この場で感謝と哀悼の意を表させていただきます.

本論文の図の作成にあたっては, 地球流体電脳倶楽部 (<https://www.gfd-dennou.org/>) が頒布している地球流体電脳ライブラリ (DCL), 電脳 Ruby 製品を利用しました. Python ライブラリである Matplotlib を利用しました. 3D 描画には Paraview を用いました.

博士学位論文執筆にあたり, ここには書けない方, 書き切れないほどの多くの方々にもご指導, ご協力, 叱咤激励, ご配慮いただきました. みなさまに深く感謝申し上げます.

付 録 A 図集

ここでは本文に掲載していない図を示す.

本文の 3.4 節において調べた「地表面応力が強い場所」の 10 個それぞれの場所について物理量の水平分布を各高度ごとに並べた図となっている. 図 A.1 から 図 A.10 は温位偏差の水平分布を高度ごとに示したものである. 図 A.11 から 図 A.20 は鉛直風の水平分布を高度ごとに示したものである.

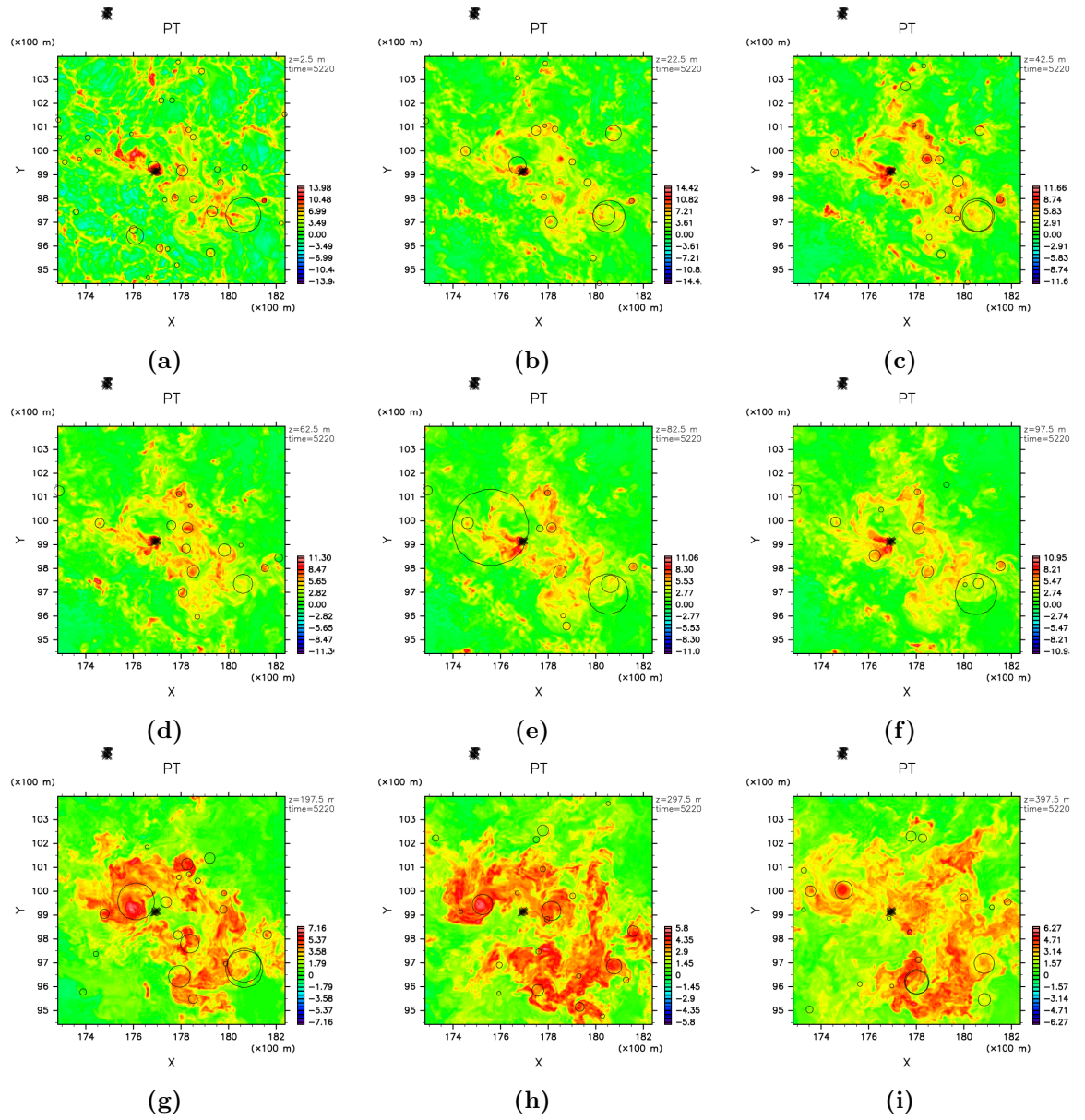


図 A.1: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 1 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.

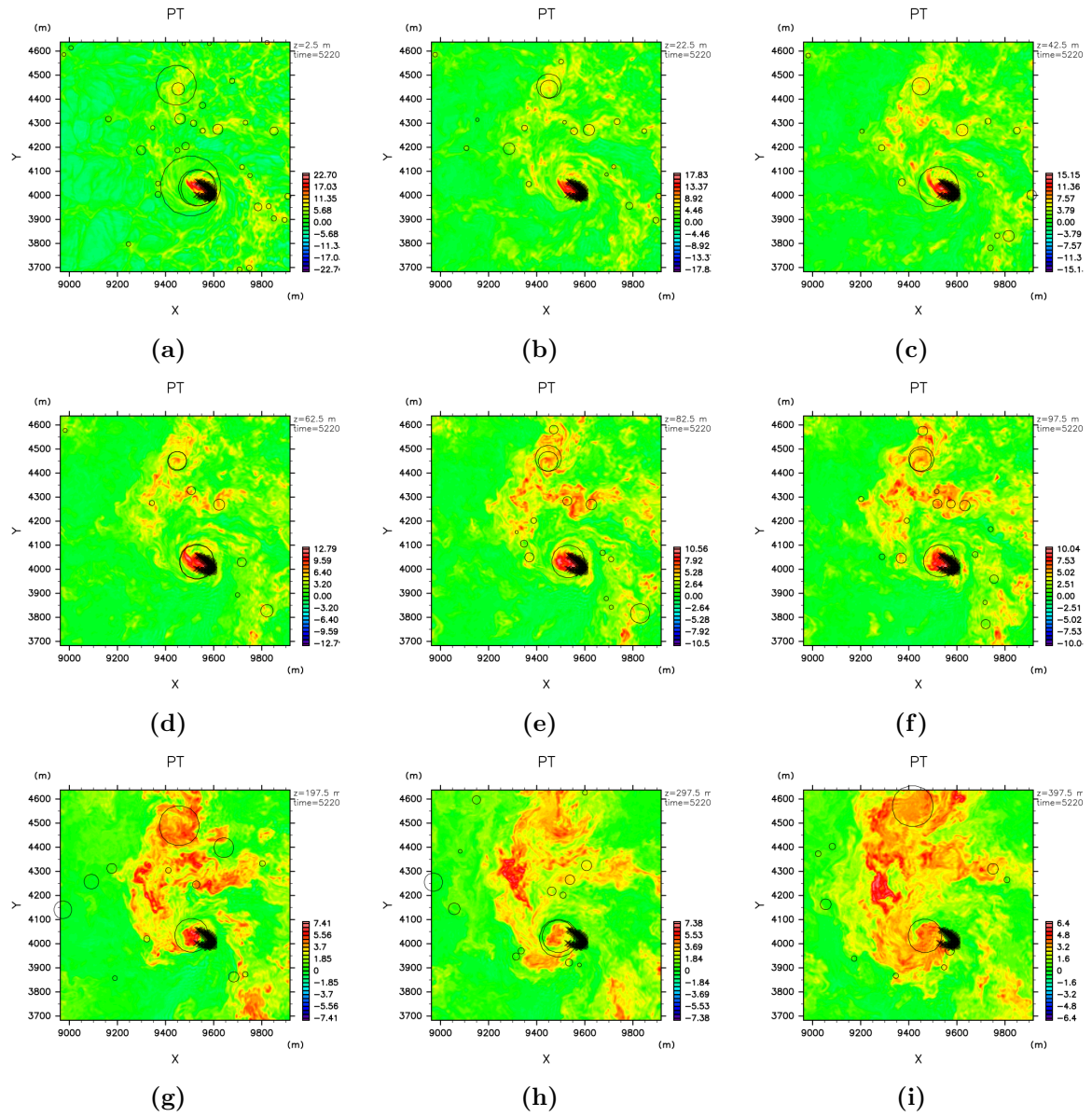


図 A.2: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 2 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.

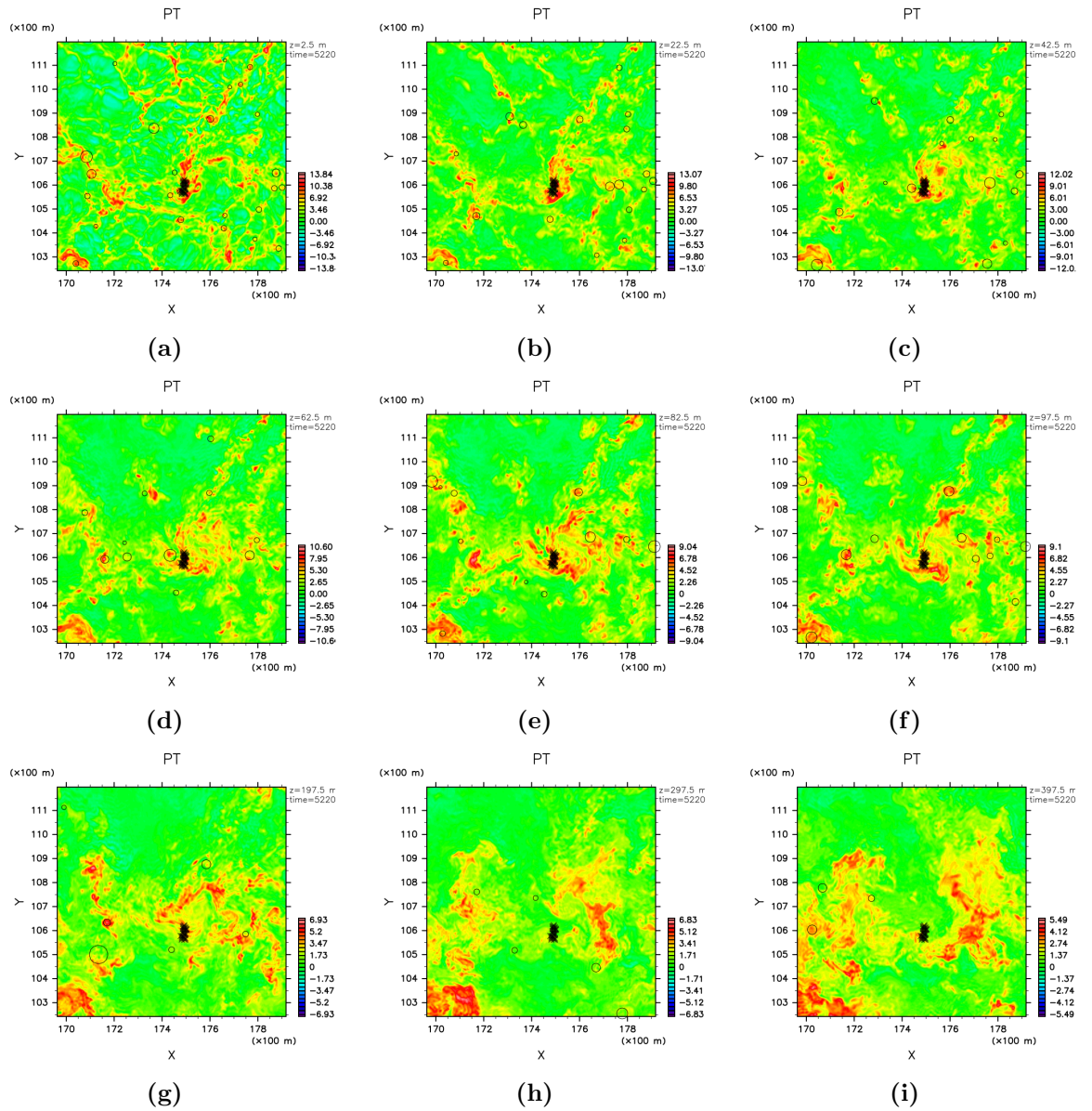


図 A.3: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 3 番目付近における抽出された渦の範囲と温度偏差の水平分布の高度変化。

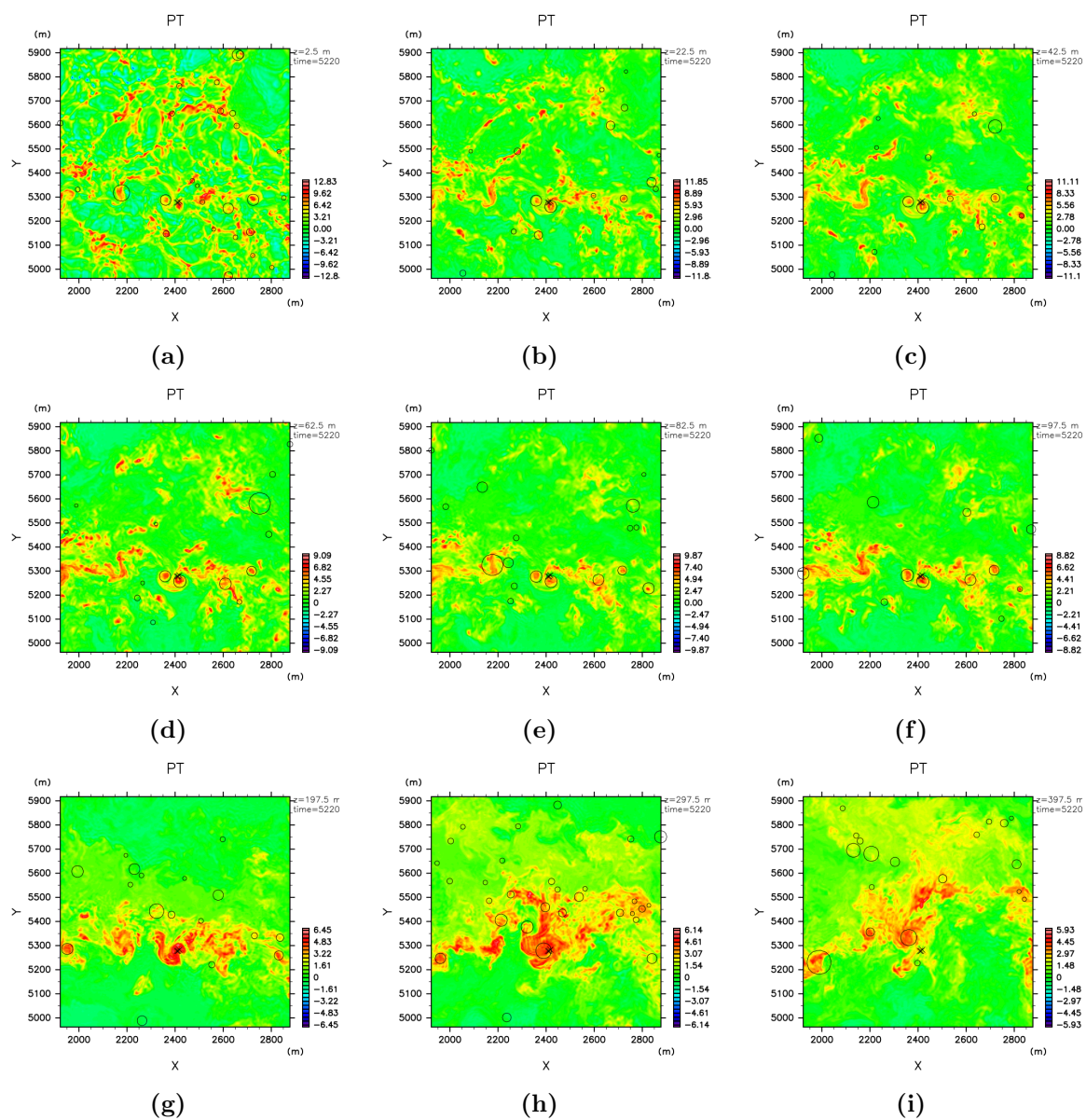


図 A.4: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 4 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.

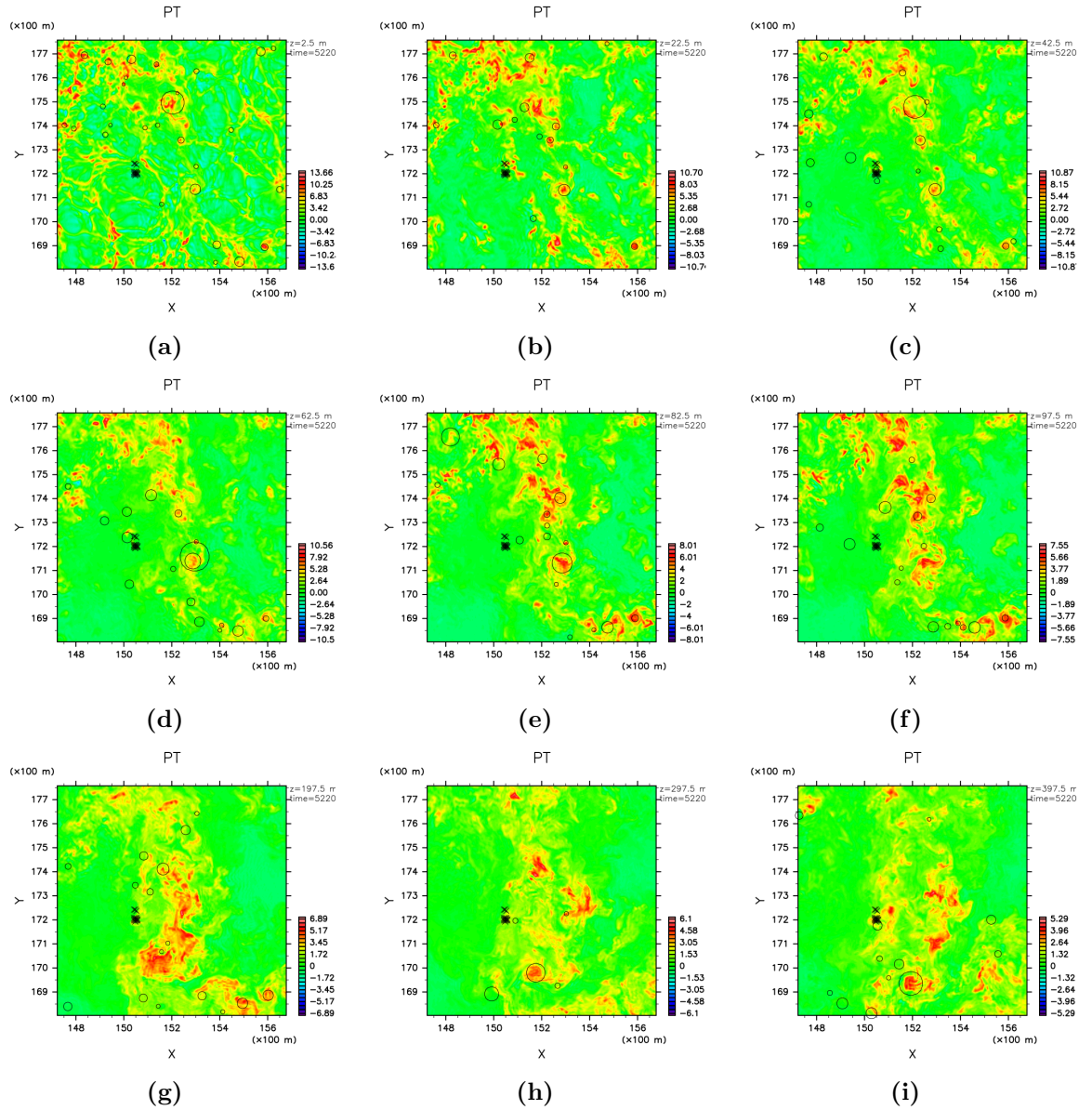


図 A.5: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 5 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.

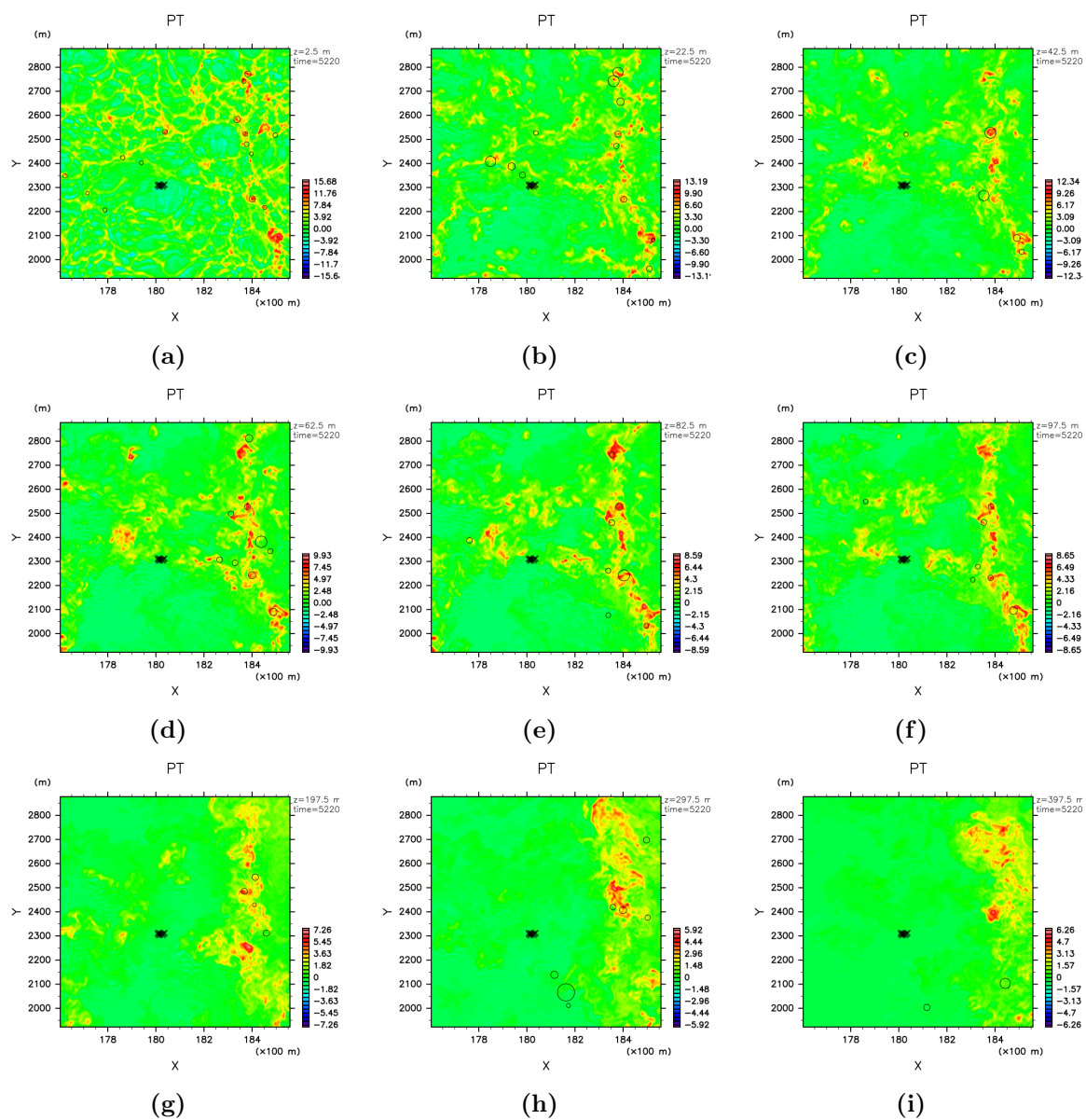


図 A.6: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 6 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.

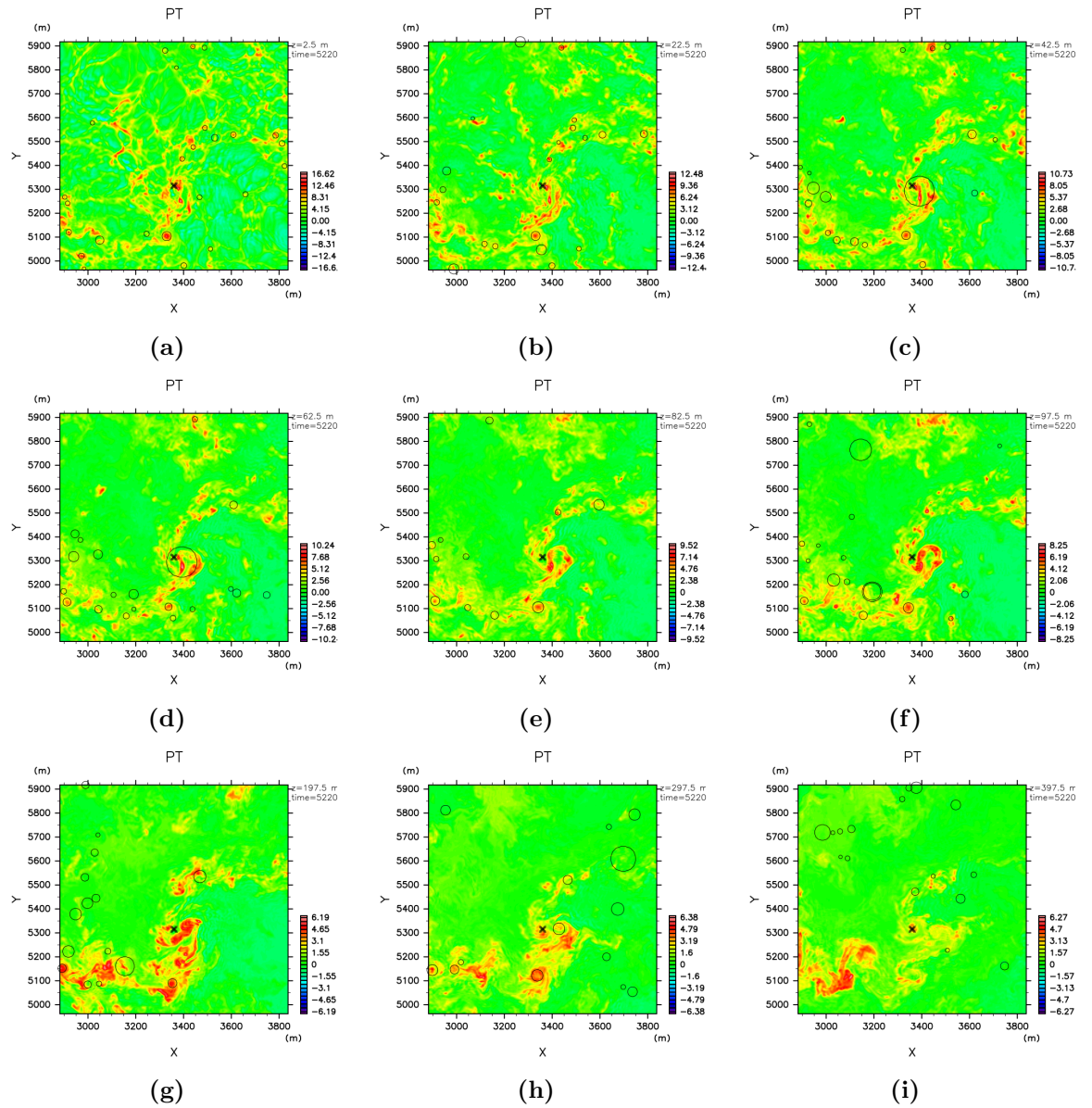


図 A.7: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 7 番目付近における抽出された渦の範囲と温度偏差の水平分布の高度変化。

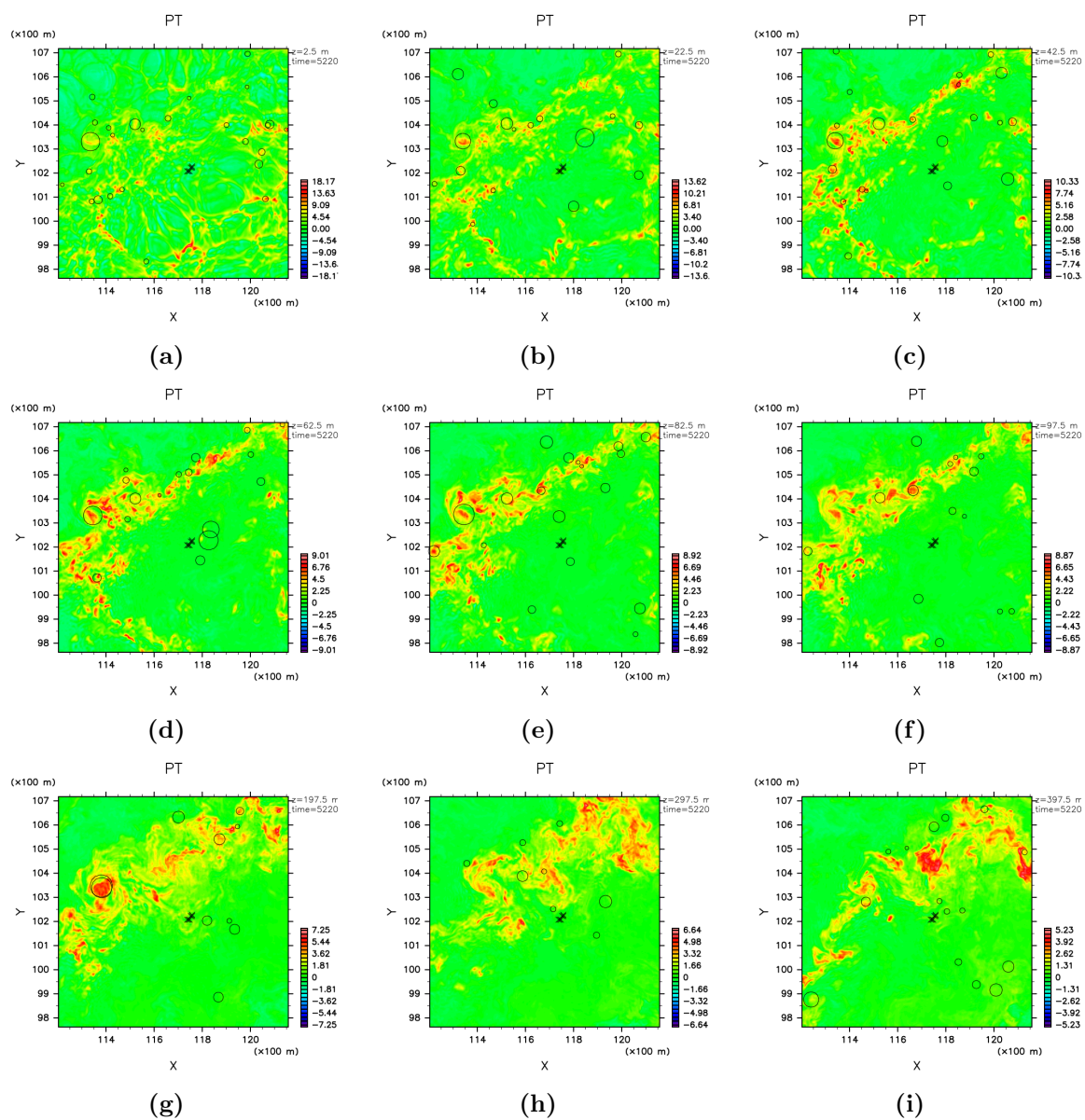


図 A.8: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 ($\times$ 印) の 8 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.

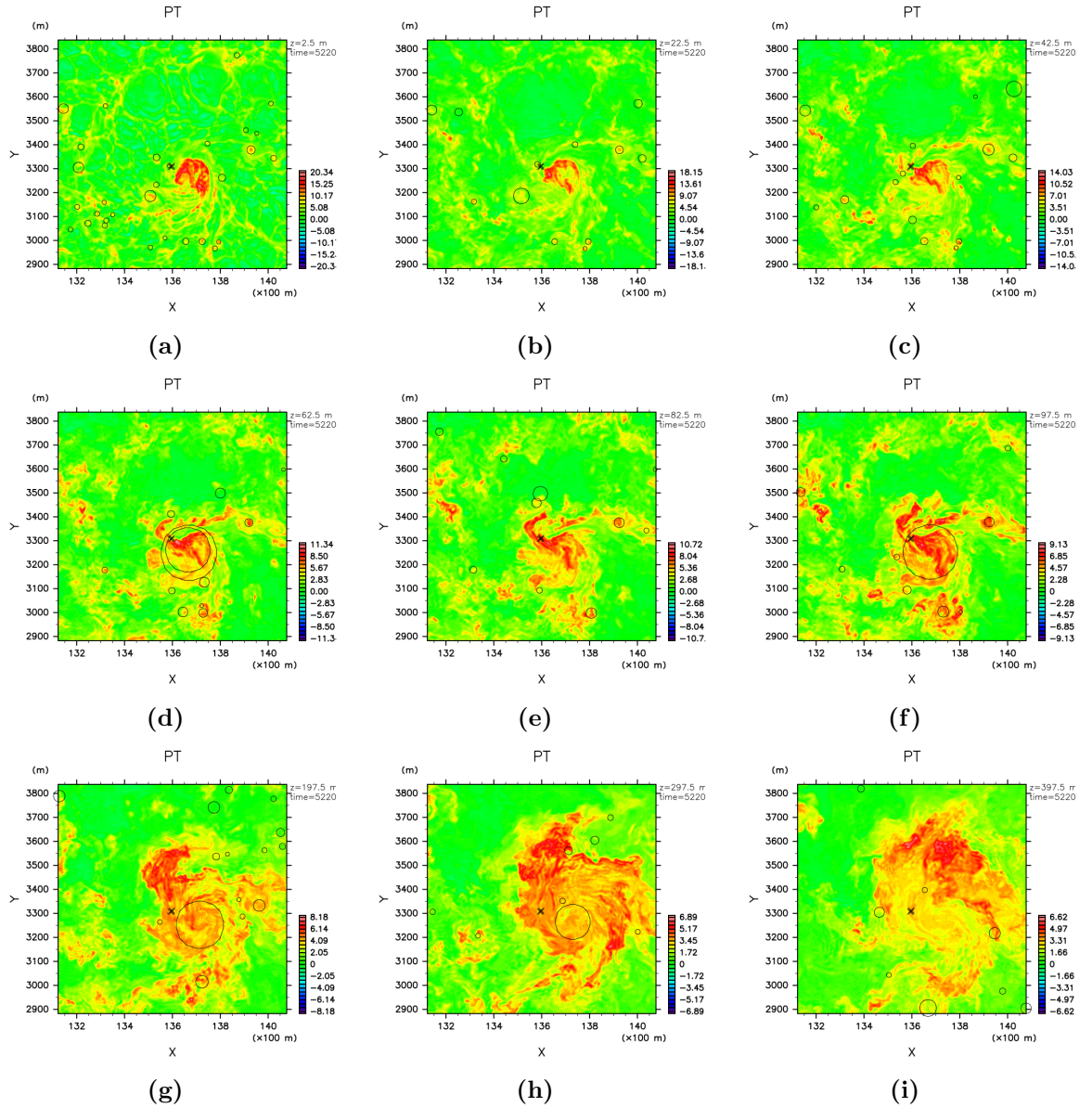


図 A.9: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 9 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.

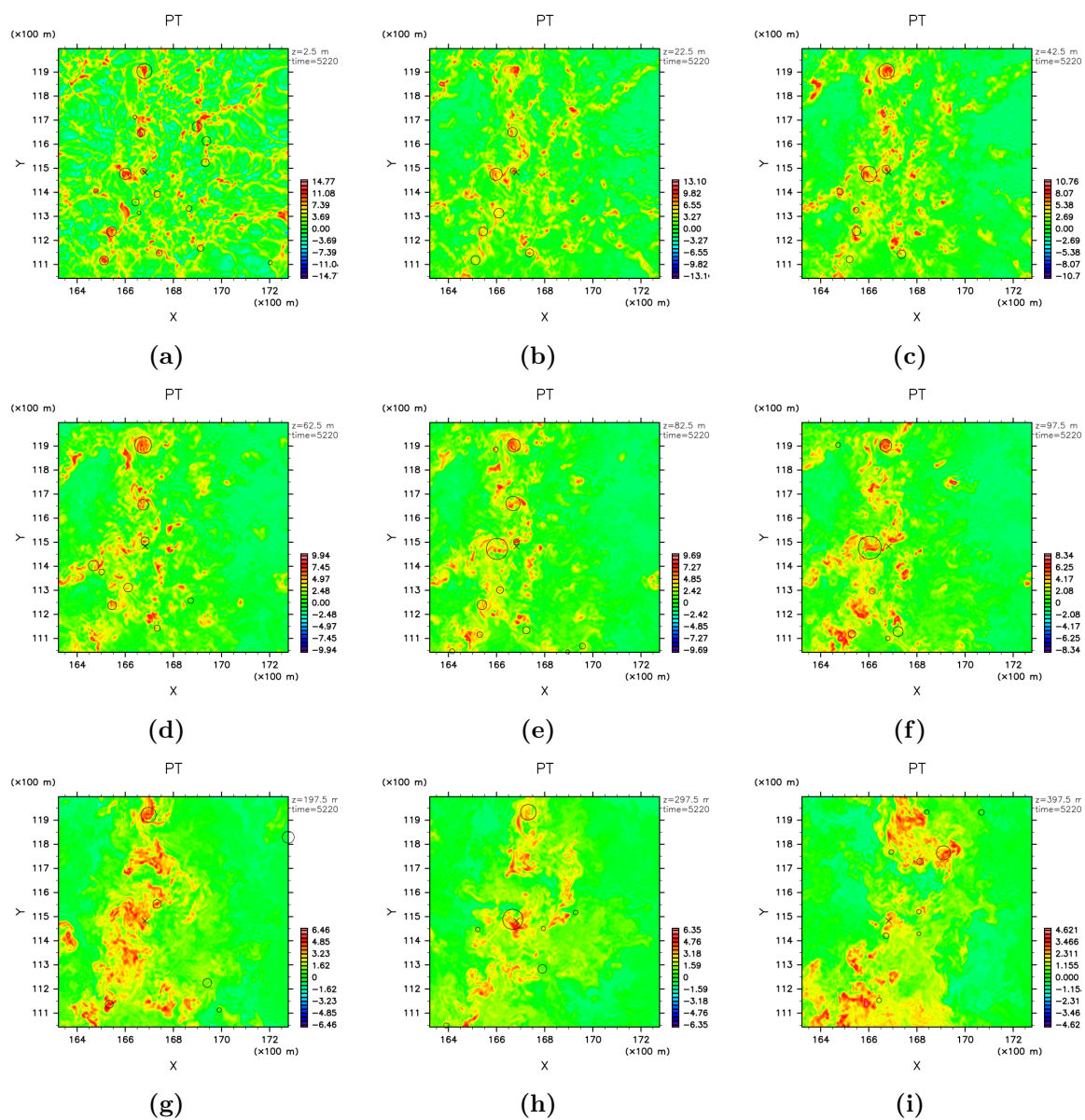


図 A.10: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 ($\times$ 印) の 10 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.

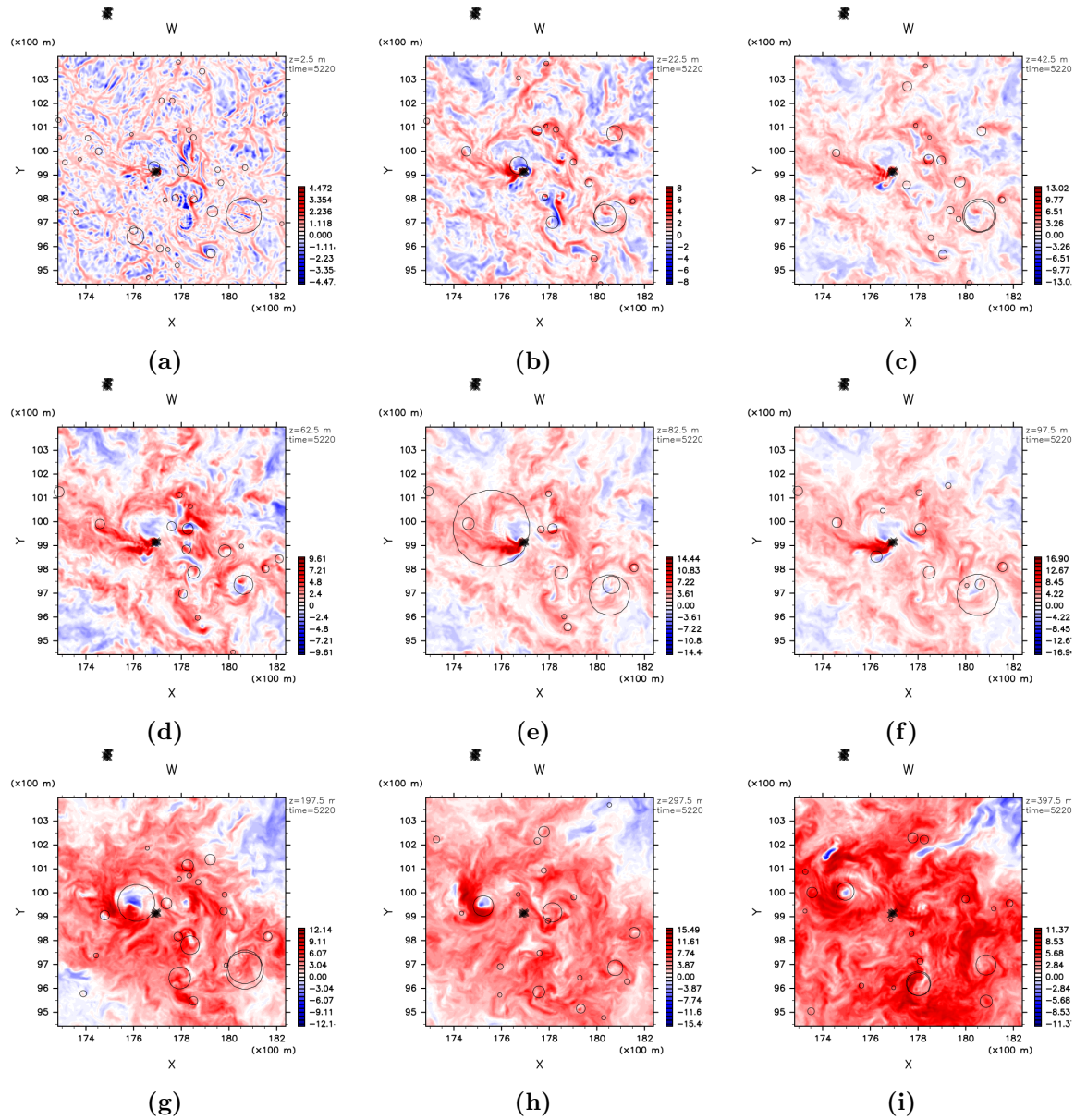


図 A.11: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 1 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化。

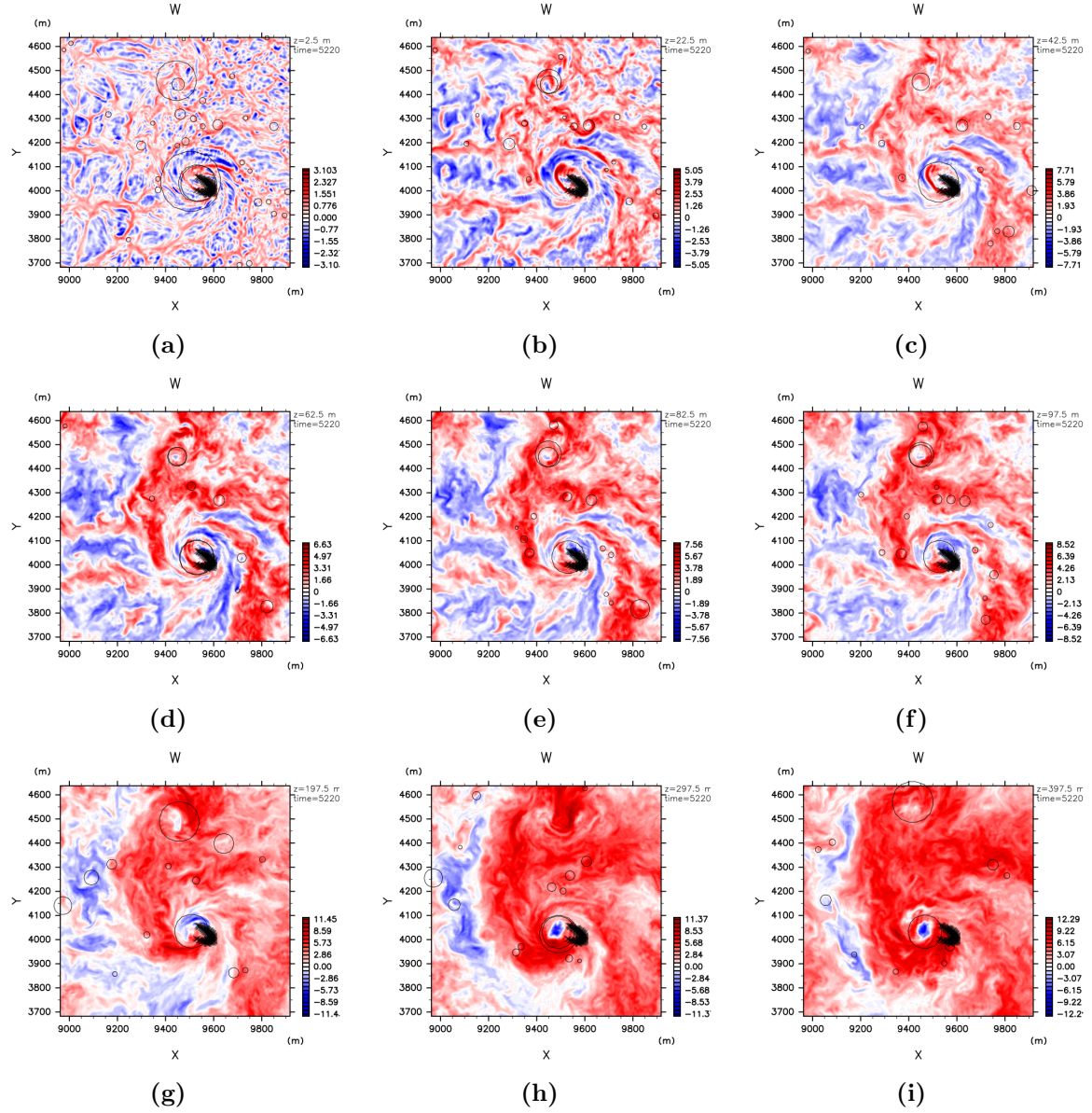


図 A.12: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 ($\times$ 印) の 2 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化。

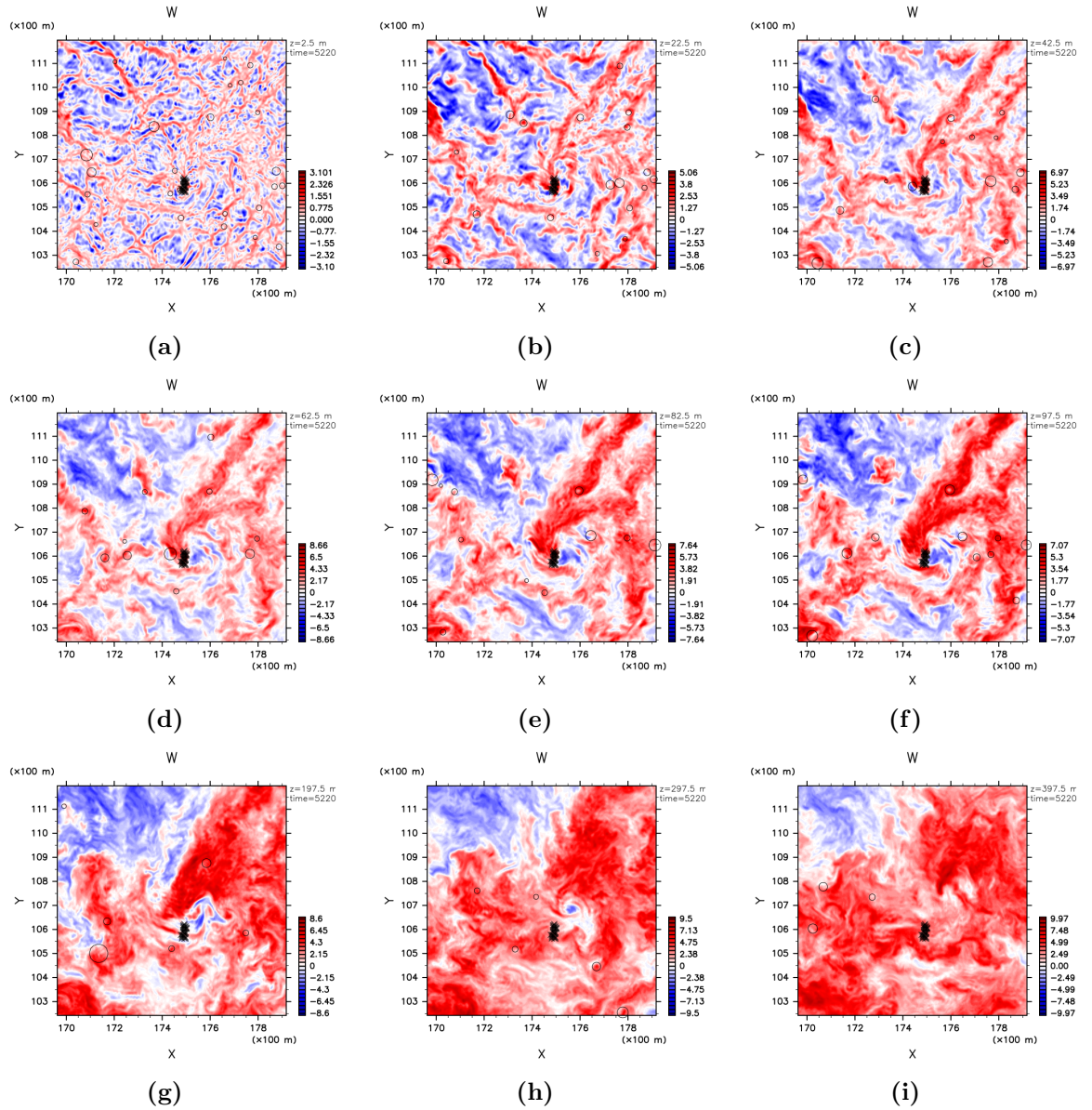


図 A.13: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 ($\times$ 印) の 3 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化。

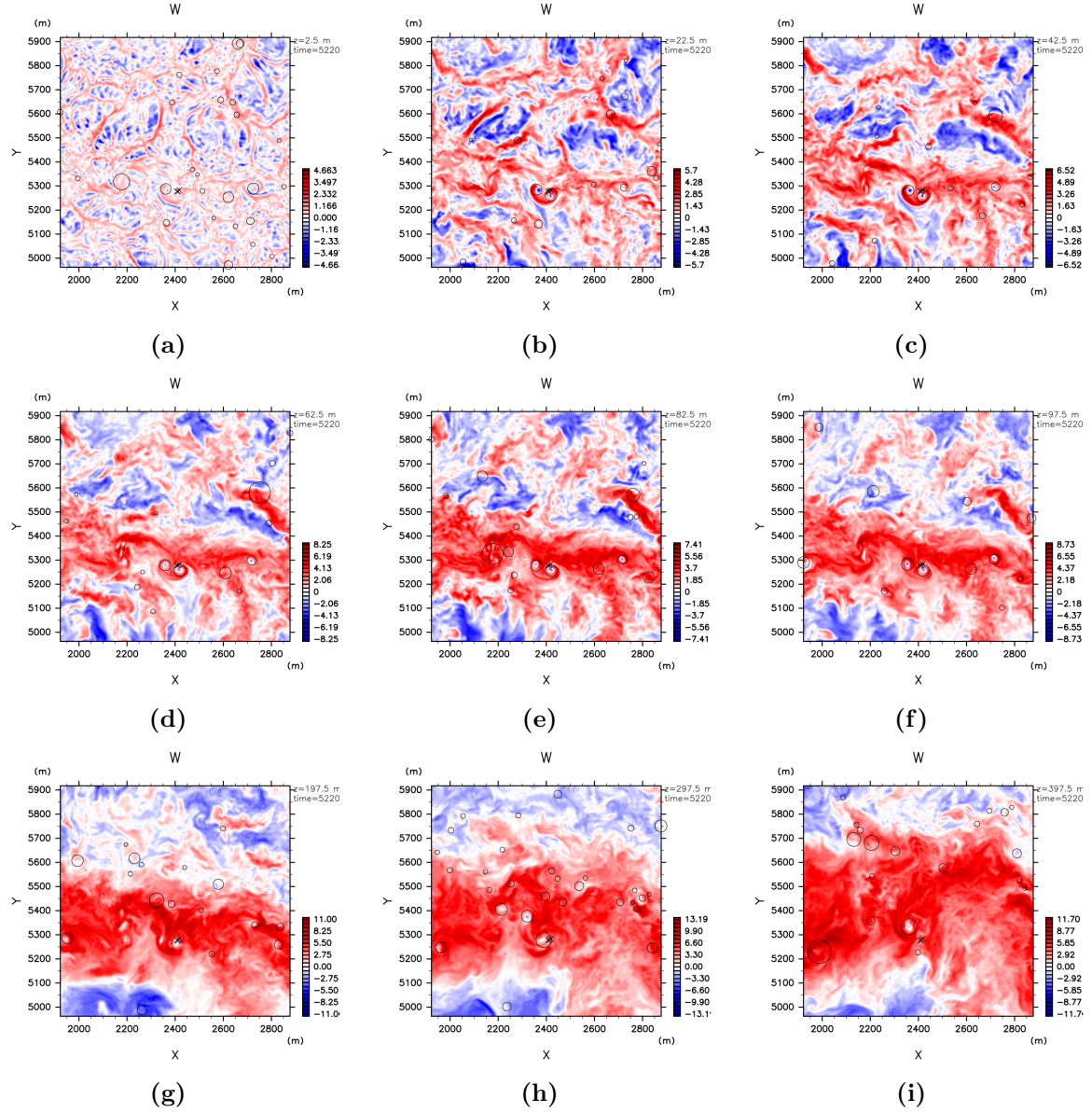


図 A.14: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 ($\times$ 印) の 4 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化。

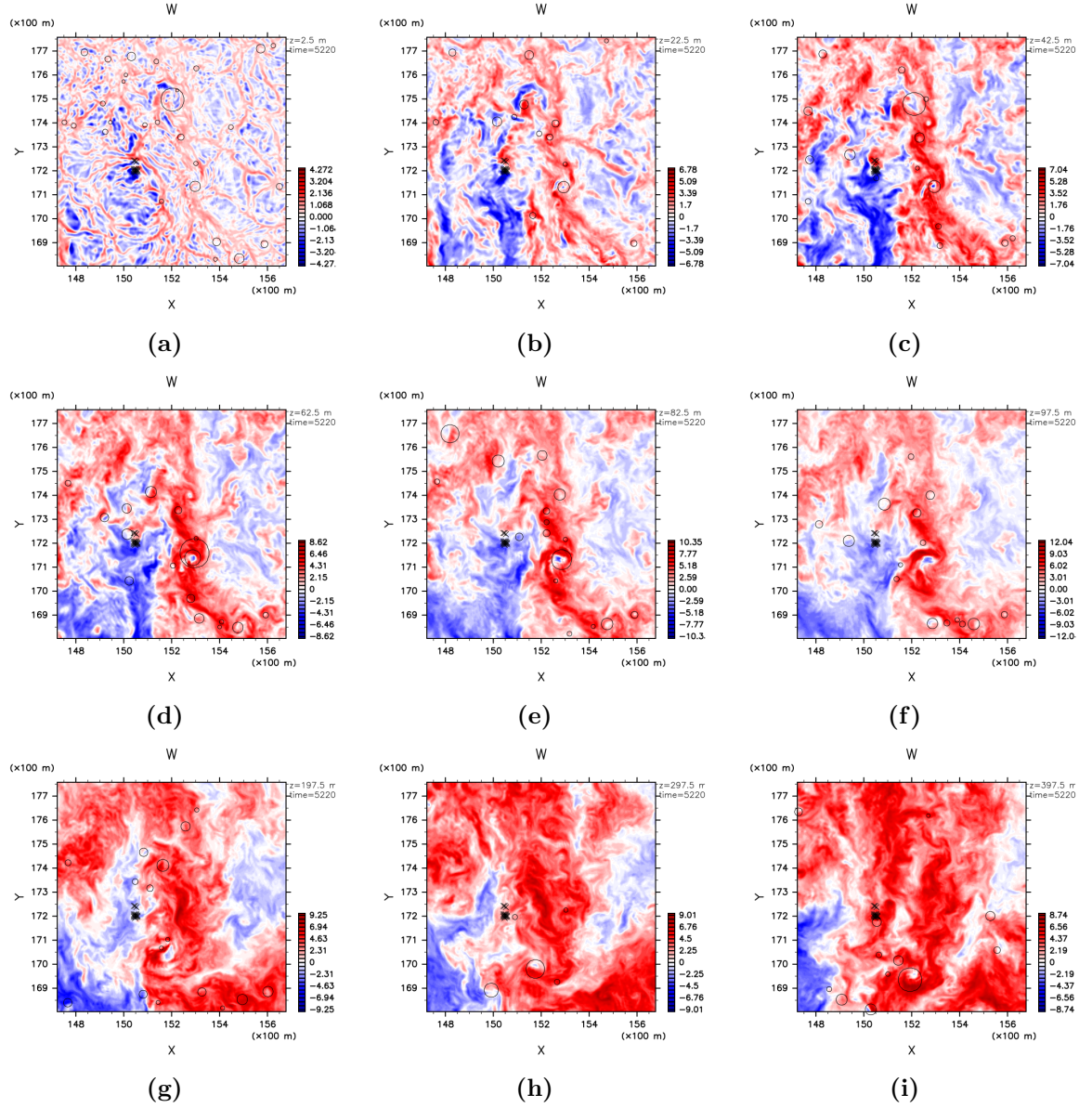


図 A.15: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 ($\times$ 印) の 5 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化。

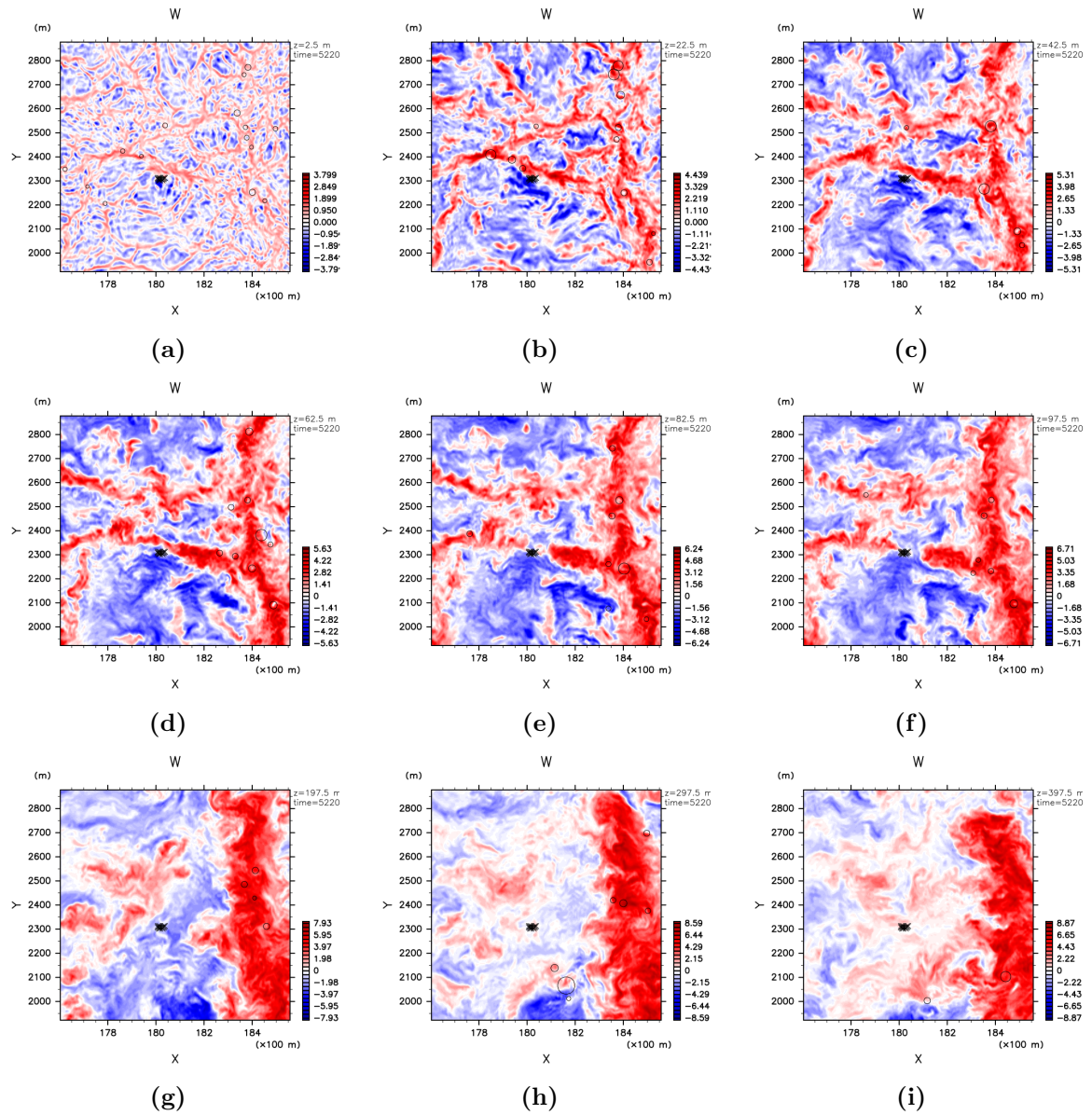


図 A.16: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 6 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化。

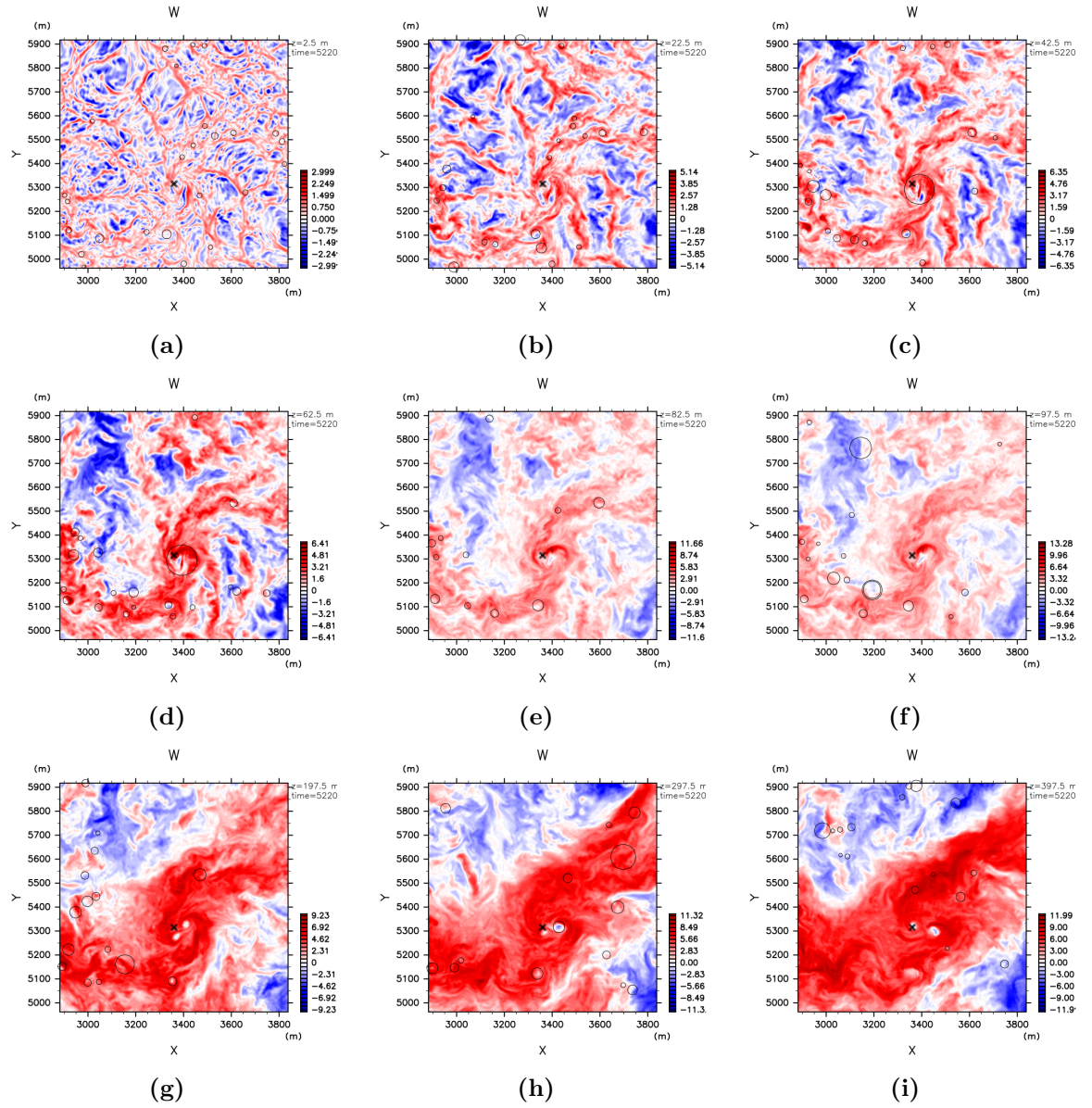


図 A.17: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 ($\times$ 印) の 7 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化。

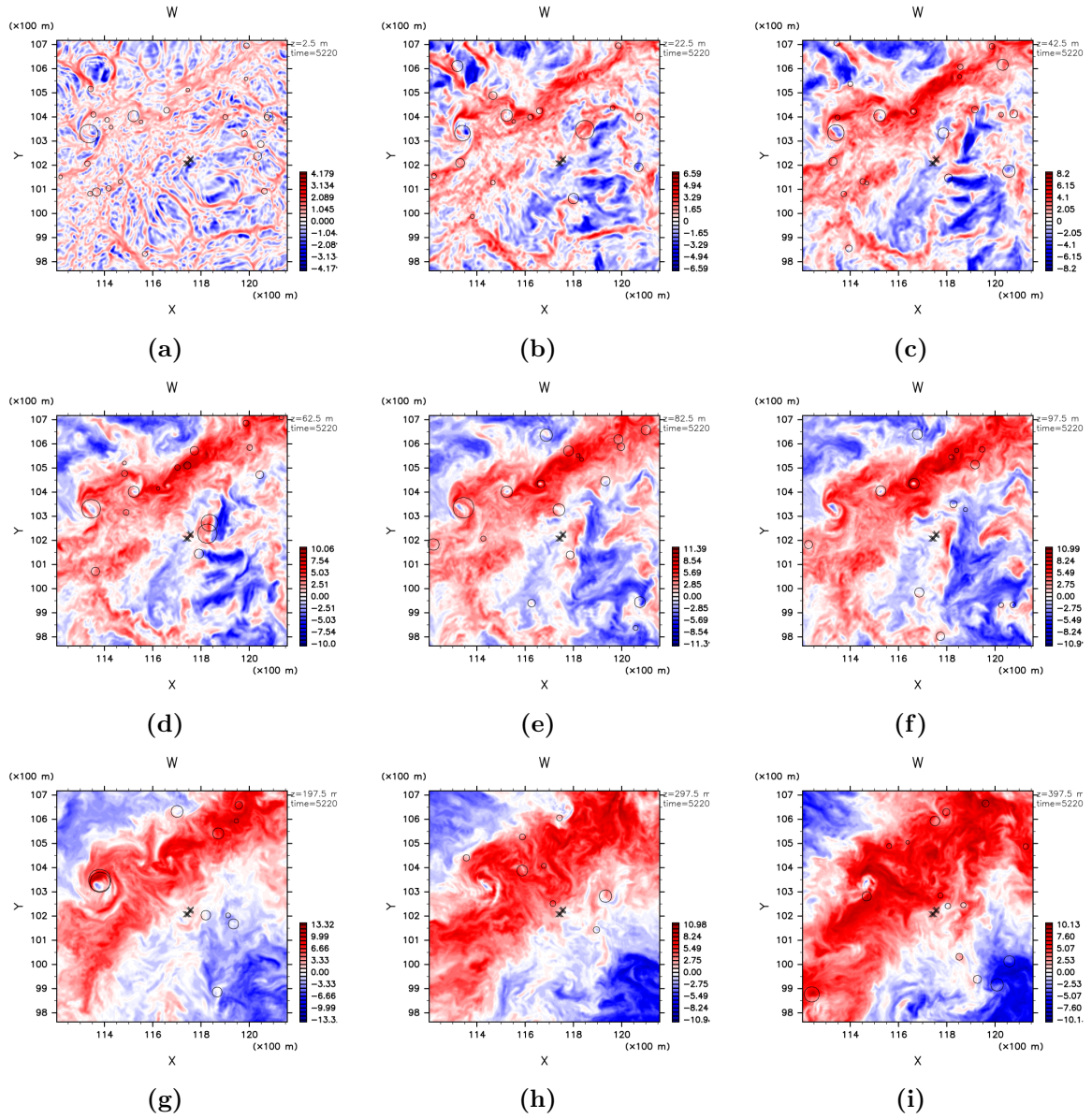


図 A.18: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 ($\times$ 印) の 8 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化.

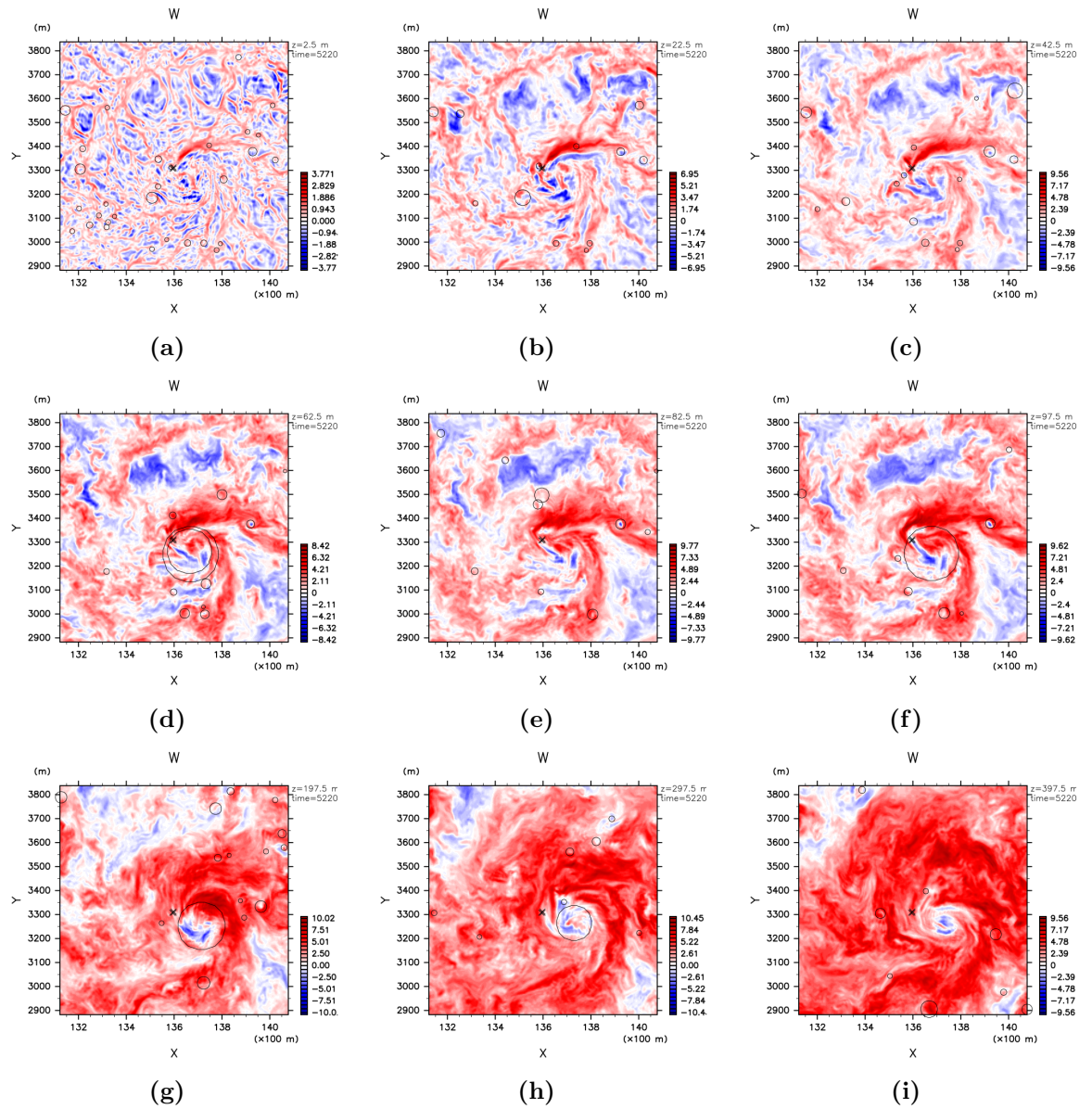


図 A.19: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 ($\times$ 印) の 9 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化。

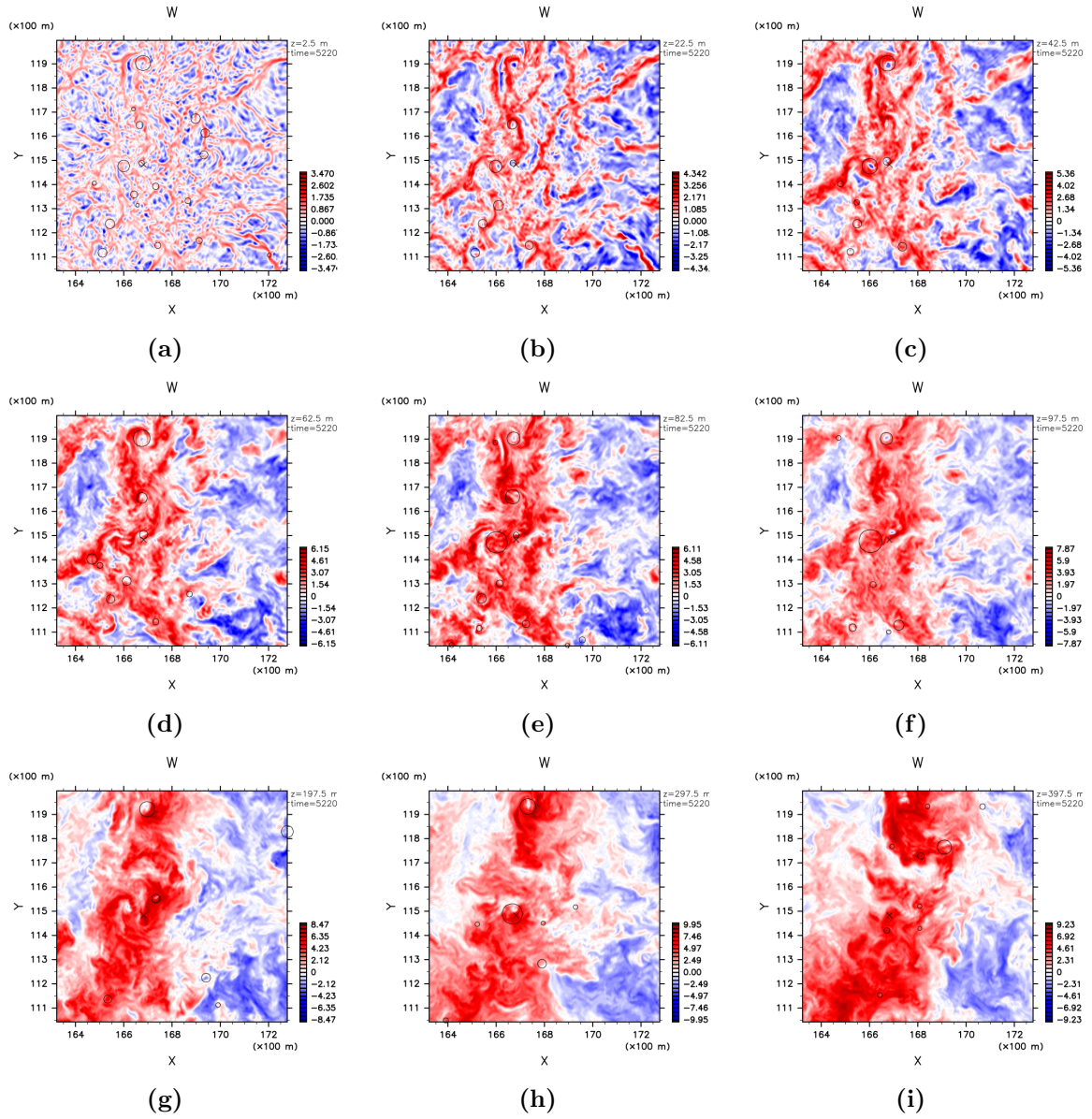


図 A.20: 地表面応力が 0.025 Pa を超える点 (× 印) の 10 番目付近における抽出された渦の範囲と温位偏差の水平分布の高度変化。

付 録 B Kahre et al. (2006) におけるダスト巻き上げスキーム

Kahre et al. (2006) では大気中のダストを表現するために 2 種類のダスト巻き上げスキームを用いている.

- 風応力スキーム (KMH スキーム; Kahre et al., 2006)
- ダストデビル巻き上げスキーム (DDA スキーム; Rennò et al., 2001)

それぞれのスキームについて解説する.

B.1 風応力スキーム

風応力スキーム (KMH スキーム) は GCM で表現されるような平均風の強さからダストの巻き上げ量を見積もるスキームである. ダストフラックスを F_w とすると

$$F_w = \alpha_w \times 2.3 \times 10^{-3} \tau^2 \left(\frac{\tau - \tau^*}{\tau^*} \right)$$

と表現される. τ は地表面摩擦速度 (N m^{-2}), τ^* は摩擦速度の閾値 (N m^{-2}), α_w は無次元の効率因子である. Kahre et al. (2006) では効率因子を次の表 2.1.1 のように変化させて, ダスト巻き上げ量を見積もっている. 効率因子の値自体に何か意味があるものではなく, 季節性のダスト量変化を再現するために色々と試された結果である.

τ^*	α_w
10×10^{-3}	0.02
22.5×10^{-3}	0.1
35×10^{-3}	0.45

表 2.1.1: Kahre et al. (2006) で用いられたパラメーター一覧

B.2 ダストデビル巻き上げスキーム

ダストデビル巻き上げスキーム (DDA スキーム) は火星表面における対流運動に伴う運動エネルギーの一部がダストデビルによるダスト巻き上げエネルギーに変換されると考えて, ダストの巻き上げ量を見積もるスキームである. ダストフラックスを F_D ($\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$) とすると

$$F_D = \alpha_D F_s (1 - b).$$

と表現される. F_s は地表からの顕熱フラックス (W m^{-2}), α_D は効率因子 (kg J^{-1}) である. b は地表面気圧と対流圏上端の気圧によって決まるパラメータで, 地表の顕熱から対流運動へのエネルギー変換効率を表すものである. これは顕熱によって生じる対流運動を一種の熱機関エンジンとみなし, 熱から変換される仕事率からダストの巻き上げ量を見積もろうとするものである.

ここで b は以下のように定義されている.

$$b = \frac{p_s^{\chi+1} - p_{\text{con}}^{\chi+1}}{(p_s - p_{\text{con}})(\chi + 1)p_s^{\chi}} \chi \quad \equiv \quad \frac{R}{c_p}.$$

ここで p_s は地表面気圧 (Pa), p_{con} は対流層の上端に置ける気圧 (Pa), c_p は定圧比熱, R は気体定数である.

付 録 C SCALE-LES ver.3 モデル で用いられる方程式

SCALE-LES ver.3 モデルで用いられている方程式について載せる.

C.1 基礎方程式

SCALE-LES では 3 次元の完全圧縮非静力学流体方程式を解いている.

連続の式 :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

運動方程式 :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \times \mathbf{u}) = -\nabla p - \rho g \mathbf{e}_z.$$

熱力学方程式 :

$$\frac{\partial \rho \theta}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \theta \mathbf{u}) = 0.$$

状態方程式 :

$$p = p_{00} \left(\frac{\rho \theta R}{p_{00}} \right)^{\frac{c_p}{c_p - R}}.$$

変数の表記は表 3.1.1 のとおり.

表 3.1.1: 変数

ρ	密度	kg m^{-3}
t	時間	s
$\mathbf{u}$	風速ベクトル	m s^{-1}
p	気圧	N m^{-2}
g	重力加速度	9.8m s^{-2}
$\mathbf{e}_z$	鉛直上向き単位ベクトル	—
θ	温位	K
p_{00}	基準気圧	700Pa
R	気体定数	J kg^{-1}
c_p	定圧比熱	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$

C.1.1 地表面フラックス

SCALE-LES では地表面フラックスの計算に Uno et al. (1995) モデルを用いている. Uno et al. (1995) は Louis (1979) を拡張したもので, 地表面との摩擦速度 u_* を以下のように表現している.

$$u_*^2 = a^2 u^2 F_m.$$

u は風速, a は中立状態における摩擦係数で高度を z , 地表面粗度を z_0 として

$$a^2 = \frac{k^2}{\{\ln \frac{z}{z_0}\}^2}$$

と表現される (k はカルマン定数). F_m は運動量フラックスである. Louis (1979) ではバルクリチャードソン数 Ri_B の正負によって運動量フラックスを以下のように定めている.

$$F_m = 1 - \frac{b Ri_B}{1 + c \sqrt{|Ri_B|}} \quad (Ri_B < 0)$$

$$F_m = \frac{1}{(1 + b' Ri_B)^2} \quad (Ri_B > 0)$$

ここでそれぞれのパラメータは以下の通り.

$$Ri_B = \frac{gz(\theta - \theta_s)}{\theta u^2} \quad : \text{バルクリチャードソン数}$$
$$c = C_m^* a^2 b \sqrt{\frac{z}{z_0}}$$
$$b = 2b' = 9.4$$
$$C_m^* = 7.4$$

ここで θ, θ_s はそれぞれ温位と地表面温度, g は重力加速度を表す.

付 録 D 渦判定プログラム

Nishizawa et al. (2016) で用いられている渦判定プログラムについて記述する. 渦判定プログラムは以下のスクリプトから成る.

- rankine_mars.rb
- rankine.rb
- burgers-rott.rb

rankine_mars.rb にメイン関数が記載されており, その中で rankine.rb (Rankine 渦にフィッティングする場合), burger-rott.rb (Burger-Rott 渦にフィッティングする場合) を呼び出している.

D.1 渦判定スクリプト

渦判定プログラムによる処理の全体の流れについてまとめる.

D.1.1 フローチャート

全体の流れとしては「渦半径 (最大接線風速を持つ半径) 及び考慮する領域をだんだん広げながら」「渦パラメータ (渦中心座標, 渦度, 渦半径) を求めていく」流れとなっている.

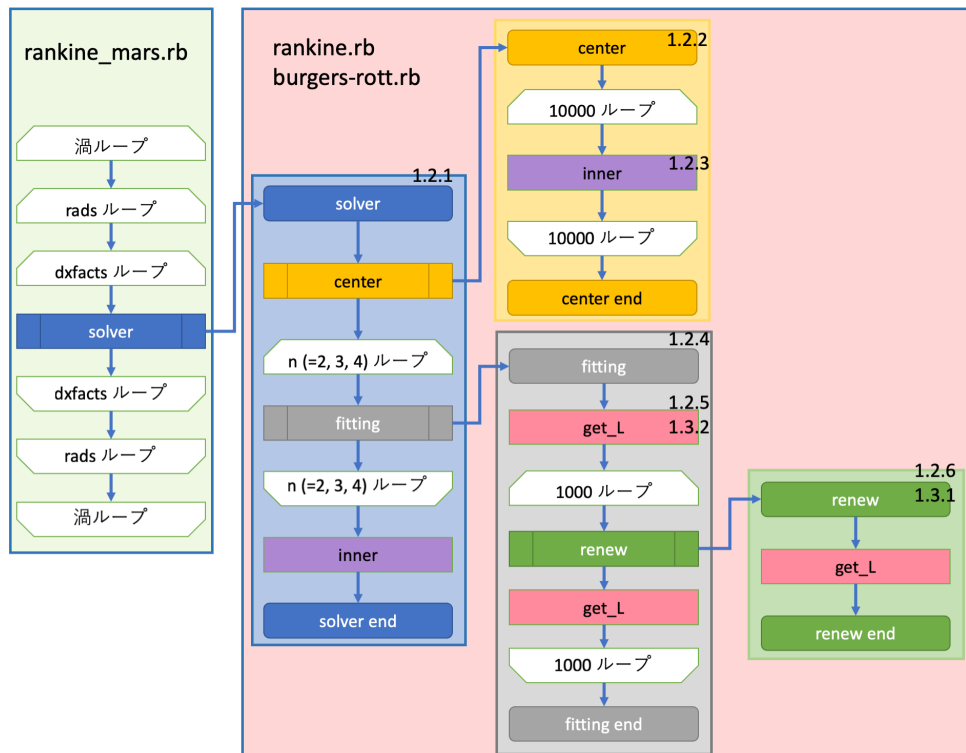


図 D.1: 全体のフローチャート. 右上の数字は対応する節番号. 薄緑色と赤色の網掛は対応するスクリプトを表す.

D.1.2 スクリプトフロー

3 つのスクリプトの概要を図 D.1 に示す.

メイン関数の内容

vortices の渦ループ

- 最大風速の半径と考慮する領域半径 $[rr, rad]$ の rads ループ
 - * 渦パラメータの係数 $[dxfact]$ ループ
 - ・ `solver` 関数呼び出し

Solver 関数の内容

- `center` 関数呼び出し

- `inner` 関数呼び出し (10000 回ループ)
- $n = 2.0, 3.0, 4.0$ のループ
 - `fitting` 関数呼び出し
 - * `get_L` 関数呼び出し
 - * 1000 回ループ
 - `renew` 関数呼び出し
 - (`renew` 関数内で `get_L` 関数呼び出し)
 - `get_L` 関数呼び出し
 - * 1000 回ループ終了
- $n = 2.0, 3.0, 4.0$ のループ終了
- `inner` 関数呼び出し

D.1.3 メイン関数

`rankine_mars.rb` におけるメインループについて解説する.

メイン関数では `vor_dist_tau2.0_dx5_z2.5_slX-X.dat` ファイルから表 4.1.1 のパラメータを読み込む.

表 4.1.1: 変数の説明

変数名	意味
u	速度空間分布 (配列)
v	速度空間分布 (配列)
nx	x 格子点数
ny	y 格子点数
x	原点からの x 距離
y	原点からの y 距離
dx_2	計算解像度 (= 5)

渦半径を推定するためのパラメータ配列 `rads` を表 4.1.2 のように設定する.

表 4.1.2: rads 配列の値

rad	rr	粗視化された格子点数 (1 次元方向)
80	10	3840
160	20	1920
320	40	960
640	80	480
1280	160	240
2560	320	120
5120	640	60

ここで rr は計算解像度 dx_2 を元に決定された値であり, $rr = 2dx$. また $rad = rr \times fact$ ($fact = 8.0$ である¹⁾). さらにこの rad, rr に合わせて領域解像度を半分にして粗視化した水平風速場配列 u, v と軸配列 x, y も定義されている. すなわち 8 種類の解像度を粗視化した風速の配列を用意している.

渦ループ

$[nv, vv, vxy, fact]$ に関するループを実行する.

表 4.1.3: 渦ループのパラメータ

変数名	意味
nv	渦の番号配列 (n 番目の渦)
vv	渦度配列 (n 番目の渦)
vxy	渦の座標配列 (n 番目の渦の座標 x, y)
$fact$	パラメータ. Rankine は 1.0 で固定, Burgers-rott は $1.0/K$

以下のような初期値を持つ配列 β を定義.

$$\begin{aligned}\beta &= [xx_0, yy_0, \omega, 0] \\ &= [\text{渦の } x \text{ 座標}, \text{渦の } y \text{ 座標}, \text{渦度}, \text{接線風速最大となる半径}]\end{aligned}\tag{D.1}$$

¹⁾ rad は考える領域の最大値を示しており, rr に依存している. rr は後に dx_{fact} によって $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2$ が掛けられて振られるパラメータとなる.

rads ループ

渦パラメータである rad, rr を変更するループ. 値は表 4.1.2 のとおり.

あらたな変数 xd, yd を定義.

$$xd = |x - xx_0| \quad (D.2)$$

$$yd = |y - yy_0| \quad (D.3)$$

それぞれ渦の座標 (xx_0, yy_0) を $(0, 0)$ とした座標系に変換している. この後に周期境界を考慮した処理がなされており, 計算座標条の任意の渦位置を中心として $0 - [$ 空間座標の最大値 $]$ の配列となっている.

変数 xd, yd を用いて, rad パラメータで定義した距離未満の範囲の速度場, 軸の配列 $u_{sub}, v_{sub}, x_{sub}, y_{sub}$ を定義.

$$u_{sub} = u[x, y < rad] \quad (D.4)$$

$$v_{sub} = v[x, y < rad] \quad (D.5)$$

$$x_{sub} = x[x, y < rad] \quad (D.6)$$

$$y_{sub} = y[x, y < rad] \quad (D.7)$$

ここで rad は表 4.1.2 のとおり, $rad = [80, 160, 320, 640, 1280, 2560, 5120]$ のいずれかである.

さらに u_{sub}, v_{sub} は平均からの差分を取った配列になる.

$$u_{sub} = u_{sub} - \overline{u_{sub}} \quad (D.8)$$

$$v_{sub} = v_{sub} - \overline{v_{sub}} \quad (D.9)$$

すなわち, rad パラメータで示した範囲の速度の平均からの偏差となる. また新しい u_{sub}, v_{sub} を使って 2 乗平均 uv_{sub} も定義する.

$$uv_{sub} = \sqrt{u_{sub}^2 + v_{sub}^2} \quad (D.10)$$

ここで dx_{fact} を変更するループに入る前に $l_p = 10$ を定義する.

dxfact ループ

dx_{fact} は次のように定義されている.

$$dx_{fact} = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2] \quad (\text{D.11})$$

dx_{fact} を用いて渦のパラメータである rr を変更したパラメータ rrr を定義する.

$$rrr = rr \times dx_{fact} \quad (\text{D.12})$$

ただし, ここで $rrr > 640$ となる場合には dxfact ループを抜ける. また `solver` 関数の結果, 返ってきた変更後の rrr が $1.5rrr$ よりも大きい場合は次のループを開始し, dx_{fact} を変更する.

`solver` 関数を呼び出す. 引数は表 4.1.4 のとおり.

$$\beta_{NN}, ll, ll_2 = \text{solver}([xx, yy, \omega, rrr], uv_{sub}, u_{sub}, v_{sub}, x_{sub}, y_{sub}, rad, dx, 10^{-4}) \quad (\text{D.13})$$

表 4.1.4: `solver` 関数の引数

変数名	意味
xx	渦の x 座標
yy	渦の y 座標
ω	渦度
rrr	接線風速が最大となる半径
uv_{sub}	水平風速の平均からの差分
u_{sub}	x 方向風速の偏差
v_{sub}	y 方向風速の偏差
x_{sub}	x 方向渦からの距離配列
y_{sub}	y 方向渦からの距離配列
rad	考慮する領域半径
dx	計算解像度 (5 m)

`solver` 関数の返り値は表 4.1.5 のとおり.

すなわち, `solver` 関数は渦の座標 xx, yy と渦度 ω , 速度場 u, v を与え, パラメータとして接線風速が最大となる半径 rr をいくつか与えて, xx, yy, ω を更新する関数

表 4.1.5: `solver` 関数の返り値

変数名	意味
$\beta_{NN}[0] = x_0$	渦 x 座標
$\beta_{NN}[1] = y_0$	渦 y 座標
$\beta_{NN}[2] = \omega$	渦度
$\beta_{NN}[3] = rr$	接線風速が最大となる半径
ll	rad の範囲の接線風速場の風速の 2 乗の総和
ll_2	rr の 4 倍範囲の接線風速場の風速平均値

$ll \neq \text{nil}$ かつ $ll < l_p (= \text{初期値 } 10)$ のとき, $res = [\beta_{NN}, ll, ll_2]$ と結果が保存され, $l_p = ll$ となる. まとめると, 収束する条件は以下の通り

- A. 新しい rr' が $rr' \geq \frac{1}{2}rr$ のとき (新しく得られた rr が十分大きいとき)
- B. 新しい xx, yy が元の x_0, y_0 に対して $(xx - x_0)^2 + (yy - y_0)^2 \leq rr'$ のとき (新しい接線風速最大の半径よりも渦位置のズレが小さいとき)
- C. $|\log \frac{\omega}{\omega'}| \leq \log 10$ のとき (新しい渦度 ω' の変化割合が 10% より小さいとき)
- D. $u_{max} = \frac{1}{2}\omega \times rr' \times fact$ を定義し, $\frac{ll_2}{u_{max}} \geq 0.1$ のとき. ここで $fact$ は rankine 渦か burgers-rott 渦かで変わるパラメータ (平均接線風速が渦の最大風速に比べて十分大きいとき)

dx_{facts} ループで新しい座標, 渦度, 渦半径 xx, yy, ω', rr' が決定されなかったとき, 次の $rads$ ループが始まる (想定する渦の領域サイズを変更する). また $ll > 50$ を満たすとき (風速場の 2 乗和が大きすぎるとき) も次の $rads$ ループが始まる.

dx_{facts} ループ終了後, β_{NN} が `nil` だったら (渦パラメータが求まらなかったら) dx_{facts} ループを抜け, $rads$ ループを次のループへ. また $ll > 50$ となるように接線風速の総和が大きすぎても dx_{facts} ループを抜け, $rads$ ループを次のループへ.

上記条件によって dx_{facts} ループを抜けなければ, u_{max} を定義する.

$$u_{max} = \frac{1}{2}\omega * rrr * fact \quad (\text{D.14})$$

l が `nil` または $l < ll$ のとき: $l = ll, l_2 = ll_2, \beta_N = \beta_{NN}$ とする.

$\omega * fact < 0.0$ のとき, 「渦度の符号が逆」と例外を投げる.

dx_{facts} ループはここで終了.

rads ループ終了

l が nil であれば次の渦度 nv に渦ループを回す.

D.2 Rankine 渦近似

メイン関数から呼ばれ, rankine.rb で処理が行われる.

D.2.1 solver 関数

メイン関数から以下の関数が呼ばれる.

$$\beta_{NN}, ll, ll_2 = \text{solver}(\beta = [x_0, y_0, \omega, r], uv, u, v, x, y, rad, dx, sl = 10^{-4}). \quad (\text{D.15})$$

与えられた渦パラメータや半径 $rads$ などの情報を元に, Marquardt 法 ([節番号] renew 関数の解説の中に詳細を記述する) を用いて更新した渦のパラメータ $[\beta, ll, ll_2] = [\text{渦中心の } x \text{ 座標}, \text{渦中心の } y \text{ 座標}, \text{渦度}, \text{最大接線風速半径}]$ と接線風速の 2 乗総和, 平均接線風速を返す.

与える引数は以下のとおり.

- $\beta : [x_0, y_0, \omega, rrr]$ の配列
 $rrr = rr * dx_{fact} : [10, 20, 40, \dots, 640] * [0.25, 0.5, 1.0, 2.0]$ のいずれか
- $uv : uv_{sub}$ 水平風速の差分の配列
- $u, v : u_{sub}, v_{sub}$, 平均風速からの差分配列
- $x, y : rad$ 範囲の x, y 座標配列
- rad : 考慮する領域サイズ. 80, 160, 320, ..., 5120 が順番に入る

- dx : 空間格子間隔
- sl : 微小量, 1e-4

まず **center** 関数を呼ぶことで渦の中心座標を求める.

パラメータ n を $[2.0, 3.0, 4.0]$ の範囲で動かしながらループを回す. ws を以下のよう
に定義する.

$$ws = n \times r_0 \quad (\text{D.16})$$

これを使って **fitting** 関数を呼ぶ.

$$\omega_0, r_0, l = \text{fitting}(u, v, x, y, \omega_0, rad, sl, ws).$$

fitting 関数を呼んだ後, 得られる l が nil でないかつ, $l < l_p = 10$ を満たした場合に

- A. $r < 0.9r_0, 1.1r_0 < r$ ではないときかつ
- B. $r < ws$ ではないときかつ (ここで then $\frac{dF}{dR} \sim 0$ というコメントあり)
- C. $r < 0.25\text{rad}$ ではないとき (ここで then $\frac{dF}{dR} \sim 0$ というコメントあり)

次のループへ next する (n が変わる). そうでなければ res に **fitting** 関数の返り
値 w, r, l を代入. また l_p として l を代入し, 次のループへ行く.

solver 関数が終了するのは以下の条件が全て満たされる場合である.

- 引数に与えた考慮する領域の大きさ rad が, 最初に推定した渦半径の 4 倍より大きいとき.
- 新しい渦中心の座標の変化量が, 計算解像度の 10 倍 (解像度 5 m なら 50 m) よりも小さいとき.
- 新しい渦半径が元の渦半径の 10 % より増減しているとき. ($r_{new} < 0.9r_0, 1.1r_0 < r_{new}$)
- 新しい渦半径が元の渦半径の 2, 3, 4 倍より小さいとき. ($r_{new} < n \times r_o$)

- 新しい渦半径が考慮する領域の大きさの $1/4$ より小さいとき

上記が満たされないと `solver` 関数は `nil` を返し, `dxfact` ループ, `rads` ループを回す (推定する半径を大きくとる). まとめると, `solver` 関数では「渦中心の位置が大きく変化せず」「できるだけ渦半径が大きくなる」ような渦パラメータを求める.

`solver` で新しい渦パラメータが出た場合の収束条件は以下の条件が全て満たされる場合である.

- 新しい渦半径が元の推定した渦半径の半分以上.
- 新しい渦中心座標と元の渦中心座標の変化量が, 新しい半径よりも小さい.
- 新しい渦度と元の渦度の大きさの比が 10 倍以内. (渦度の変化が大きすぎない)
- 新しい渦の平均接線風速が新しい最大接線風速の $1/10$ より大きい.

上記が満たされないと `dxfact` ループ及び `rads` ループを回す. 基本的には「元の渦パラメータから変化しすぎず」かつ「平均接線風速が十分大きい」渦を求めていく.

D.2.2 `center` 関数

`solver` 関数から以下のように呼ばれる.

$$x_0, y_0 = \text{center}(x_0, y_0, u, v, rad, \omega_0, sl). \quad (\text{D.17})$$

座標と渦半径を引数に与え, 更新された渦の中心座標を返す. 返り値は実数であり, サブグリッドスケールでの渦中心座標を返すと思われる.

$$\lambda = 100.0, \quad l = -1e10, \quad dldx = 0.0, \quad dldy = 0.0$$

λ は数学的な意味をもたない変数で, ループ処理を行う際に重みとして変更する値と考えられる. l は `mask` で囲まれた範囲における接線風速の平均値であり, ここではその初期値として小さい数字を与えている (実際の計算は `inner` 関数内で実行). `dldx`, `dldy` は何を表しているのかははっきりとわかっていないが, 変数の文字列に注意すると $\partial l / \partial x$, $\partial l / \partial y$ と捉えることができ, 接線風速を微分したようなものではないかと予想される.

10000 回ループ

ループの内容としては、元の渦中心 x_0, y_0 (渦度の極大値がある点) から位置を少しずつずらして、渦の中心の位置を求める作業を行っている。その際、ずらした後の中心位置の座標を表す x_{0N}, y_{0N} を用意する。

$$x_{0N} = x_0 + dldx * \lambda$$

$$y_{0N} = y_0 + dldy * \lambda$$

ここで **inner** 関数を呼び出す。

$$l_N, r, xx, yy, mask = \text{inner}(x_{0N}, y_{0N}, u, v, x, y, rad, \omega_0)$$

inner 関数では 10000 回のループで更新された x_{0N}, y_{0N} の値を用いて mask 領域の範囲と渦中心からの距離を表す配列を更新し、その領域内における平均接線風速を計算する。

center 関数の終了判定

以下の条件を満たすとき、渦の中心座標は更新され、**center** 関数は終了する。

$$|l - l_N| < sl$$

$$|dldx|\lambda < sl$$

$$|dldy|\lambda < sl$$

inner 関数を実行して、出てきた新しい l_N と前の l 平均接線風速の差の絶対値、 $dldx, dldy$ とそれぞれの λ の積がどちらも微少量 sl より小さいとき、 x_0, y_0 を返してループを抜ける。

inner 関数による新しい l_N と前の l の大小関係を比較して、結果に応じて λ の値を変更してループを進める。

$$\lambda = 4\lambda \quad (l_N > l \text{ のとき})$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\lambda \quad (l_N \leq l \text{ のとき})$$

λ を 4 倍した結果, 10^{10} を超える場合 (λ が大きくなりすぎた場合), nil をリターンして終了する. (`center` によって渦の中心位置は求まらなかったことになる)

λ を 4 倍する場合, すなわち $l_N > l$ (平均接線風速が大きくなる) のとき, x_0, y_0 を更新し, $dldx, dldy$ を次のように求める.

$$dldx = -\frac{(u * xx + v * yy) * yy}{r^3} .mul_add(\omega_0, 0) / cnt$$

$$dldy = \frac{(u * xx + v * yy) * xx}{r^3} .mul_add(\omega_0, 0) / cnt$$

その後, `inner` 関数で作成された新しい渦中心 x_{0N}, y_{0N} からの距離を表す配列 xx, yy を使って $dldx, dldy$ を計算する

D.2.3 `inner` 関数

`center` 関数から以下のように呼ばれる.

$$l_N, r, xx, yy, mask = \text{inner}(x_0, y_0, u, v, x, y, rad, \omega_0) \quad (\text{D.18})$$

`inner` 関数は, `center` 関数で更新されていく渦中心の位置 x_0, y_0 を元に, 渦中心からの距離配列 xx, yy と渦の内側領域をマスクする `mask` 領域及び `mask` 領域内における平均接線風速を求めるメソッドである.

x 方向, y 方向それぞれの (x_0, y_0) を中心とした距離配列 xx, yy を元にして, 中心からの距離配列 r を求める.

$$r = \sqrt{xx^2 + yy^2} + 10^{-6}$$

$$mask = r \quad (r \leq 4 \times rad).$$

r には微少量を足している (0 割り算を防止?). また, `mask` を `rad` の 4 倍よりも渦中心に近い領域とする.

ここで `mask` 領域が定義されなかった (`rad` の 4 倍よりも小さな領域がなかった) 場合は `inner` 関数は $l = -10^{10}$ を返して終了する (おそらくその状況にはほとんどの場合ならない).

mask 領域が定義できている場合は次のようにして l を求める.

$$\begin{aligned}\sin &= \frac{yy}{r} \\ \cos &= \frac{xx}{r} \\ l &= \overline{(v \cos - u \sin)} \frac{\omega_0}{|\omega_0|}\end{aligned}$$

ここで $\bar{X}$ は X の領域平均を示す. $\frac{\omega_0}{|\omega_0|}$ は渦度の符号だけを取り出すため、これにかけることで、接線風速平均の正負を渦の回転方向に寄らないように調整している.

これらの結果から以下のパラメータを返して `inner` 関数は終了する.

$$[l, r, xx, yy, mask]$$

D.2.4 fitting 関数

`solver` 関数から以下のようにして呼ばれる.

$$\omega_0, r_0, l = \text{fitting}(u, v, x, y, \omega_0, rad, sl, ws). \quad (\text{D.19})$$

速度場, 渦の中心座標, 渦度, 想定する渦半径を引数とし, `renew` 関数を呼び出して Marquardt 法を利用することで渦度と渦半径を求める関数.

$ws < r_0$ で `[nil, nil, nil]` を返す. ws は dx_{fact} の値によっては r より小さくなる.

一番最初に λ に 0.0001 を代入. `get_L` 関数を呼ぶ. l を取得する. これは保存され、次のループで得られる新しい l と比較される.

1000 回ループを始める. `renew` 関数を呼ぶ. `renew` 関数は ω_N と r_N を更新する.

ω_N が nil のとき, `[nil, nil, nil]` を返して `fitting` 関数を終了.

新しい ω_N, r_N で再び `get_L` 関数を呼び、新しい l である ll を計算.

l と ll を比較し, $|l - ll| < l \times sl$ であれば l に ll を代入してループを終了し, ω_0, r_0, l を返して `fitting` 関数を終了ここで sl は 0.0001 である.

$ll \leq l$ の場合

- A. $l < 0.1$ のとき
 l に ll を代入してループを終了し, ω_0, r_0, l を返して fitting 関数を終了.
- B. それ以外 $\omega_0 = \omega_N, r_0 = r_N, l = ll, \lambda' = 0.5\lambda$ として次のループに行く. (`get_L` 関数, `renew` 関数が呼ばれる)

$ll > l$ の場合

- A. $\lambda' = 2\lambda$ として次のループに行く. ただし $\lambda > 10$ となるときは `[nil, nil, nil]` を返して fitting 関数を終了.

D.2.5 `get_L` 関数

fitting 関数や renew 関数から以下のように呼ばれる.

$$l, r, su_1, sv_1, su_1, sv_2, mask_1, mask_2 = \text{get_L}(u, v, x, y, \omega, rr, rad, ws). \quad (\text{D.20})$$

速度場, 渦中心の座標, 渦度, 渦半径を引数に与え, 与えた範囲における接線風速の 2 乗の総和を返す関数.

`get_L` 関数の式. fitting $(u, v, rx, ry, w_0, r_0, rad, sl, ws)$ 関数の中で呼ばれる.

$$rx = x - x_0,$$

$$ry = y - y_0.$$

$(x - x_0, y - y_0)$: 渦中心 (x_0, y_0) からの距離. `get_L` 関数に $(x, y) = (x - x_0, y - y_0)$ として与えられる.

$$|r| = \sqrt{x^2 + y^2} + 10^{-16} : \text{渦中心からの距離 (+微少量)}. \quad (\text{D.21})$$

$$r = (x, y) = (x - x_0, y - y_0).$$

ここで v_{max} となるような渦の半径 $r_0 = \text{mask1}$ (範囲 : 2.5 - 1280) と, その外側で考慮する領域の半径 $rad = \text{mask2}$ を分けて考える. mask_1 はとある長さ rr 以下の渦周りの範囲. mask_2 は rr の 4 倍から 32 倍の大きさ (範囲 : 80 - 2560) かつ mask_1 に含まれない渦周りの範囲.

$$\text{mask}_1 = \mathbf{r} \leq rr, \quad (\text{D.22})$$

$$\text{mask}_2 = (\text{not mask}_1) \ \& \ (\mathbf{r} \leq rad). \quad (\text{D.23})$$

$$(rr = rr \times dx_{fact})$$

$$(rad = [32rr, 16rr, 8rr, 4rr] \text{ のいずれか})$$

表 4.2.6: rad, rr, dx_{fact}, n の組み合わせ

rad	rr	dx_{fact}	n
80.0	10.0	0.25	1.0
160.0	20.0	0.5	2.0
320.0	40.0	1.0	3.0
640.0	80.0	2.0	
1280.0	160.0		
2560.0	320.0		
5120.0	640.0		

mask_1 は rr 以下の渦中心の範囲.

$$sv = \begin{cases} v - \frac{1}{2}\omega(x - x_0) & \mathbf{r} \leq r_0 \\ v - \frac{1}{2}\omega r_0^2 \frac{(x-x_0)}{|\mathbf{r}|^2} & \mathbf{r} > r_0 \end{cases}$$

$$su = \begin{cases} u - \frac{1}{2}\omega(y - y_0) & \mathbf{r} \leq r_0 \\ u - \frac{1}{2}\omega r_0^2 \frac{(y-y_0)}{|\mathbf{r}|^2} & \mathbf{r} > r_0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} sv_1 &= v[\text{mask}_1] - \frac{1}{2}\omega(x - x_0)[\text{mask}_1] \\ &= v[\text{mask}_1] - \frac{1}{2}\omega \mathbf{r}_x[\text{mask}_1], \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

$$\begin{aligned} su_1 &= u[\text{mask}_1] + \frac{1}{2}\omega(y - y_0)[\text{mask}_1] \\ &= u[\text{mask}_1] + \frac{1}{2}\omega \mathbf{r}_y[\text{mask}_1]. \end{aligned} \quad (\text{D.25})$$

mask_2 は rr 以上かつ rad 以下の渦中心の範囲.

$$\begin{aligned} sv_2 &= v[\text{mask}_2] - \frac{1}{2}\omega(rr)^2 \frac{(x - x_0)[\text{mask}_2]}{|\mathbf{r}|^2[\text{mask}_2]} \\ &= v[\text{mask}_2] - \frac{1}{2}\omega(rr)^2 \frac{\mathbf{r}_x}{|\mathbf{r}|^2}[\text{mask}_2], \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

$$\begin{aligned} su_2 &= u[\text{mask}_2] + \frac{1}{2}\omega(rr)^2 \frac{(y - y_0)[\text{mask}_2]}{|\mathbf{r}|^2[\text{mask}_2]} \\ &= u[\text{mask}_2] + \frac{1}{2}\omega(rr)^2 \frac{\mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}|^2}[\text{mask}_2]. \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

sv_1, sv_2 は Rankine 渦の風速分布を足した, または引いた分布である.

以下のような wt を定義する.

$$wt = \frac{\frac{rad}{r} - 1.0}{rad - ws} (\mathbf{r} \geq ws, r \text{ の関数}) \quad (\text{D.28})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{[\text{mask}_2 \text{ の範囲}]}{[\text{渦中心からの距離}] - 1.0}}{[\text{mask}_2 \text{ の範囲}] - [\text{mask}_1 \text{ の範囲} \times n]}, \\ wt &= \frac{1.0}{ws} (\mathbf{r} < ws, \text{定数}) \end{aligned} \quad (\text{D.29})$$

$$= \frac{1.0}{[\text{mask}_1 \text{ の範囲} \times n]}.$$

$$wt_1 = wt[\text{mask}_1], \quad (\text{D.30})$$

$$wt_2 = wt[\text{mask}_2]. \quad (\text{D.31})$$

ws の出し方は以下のとおり. n は $n = [2.0, 3.0, 4.0]$ のいずれか.

$$ws = r_0 \times n \quad (\text{get.L 関数の呼び出し時})$$

$$r_0 = r = \text{beta}[3] = rrr \quad (\text{fitting 関数の呼び出し時})$$

$$rrr = rr \times dx_{\text{fact}} \quad (\text{solver 関数の呼び出し時})$$

$$\therefore ws = rr \times dx_{\text{fact}} \times n \quad (\text{同一ループでは定数})$$

wt を全領域で足し合わせた s を定義.

$$\begin{aligned} s &= \sum wt_1 + \sum wt_2 \\ &= \sum \frac{\frac{rad}{r} - 1.0}{rad - ws} + \sum \frac{1.0}{ws}. \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

s をつかって wt_1, wt_2 を割る. 無次元になる.

$$wt_1 = \frac{wt_1}{s}, \quad (D.33)$$

$$wt_2 = \frac{wt_2}{s}. \quad (D.34)$$

l を返す. l は速度の 2 乗の和.

$$\begin{aligned} l &= \sum [\{ (su_1)^2 + (sv_1)^2 \} wt_1] + \sum [\{ (su_2)^2 + (sv_2)^2 \} wt_2] \\ &= \sum [\text{mask}_1 \text{ 範囲の } \mathbf{sv}_1^2] wt_1 + \sum [\text{mask}_2 \text{ 範囲の } \mathbf{sv}_2^2] wt_2 \end{aligned} \quad (D.35)$$

D.2.6 **renew** 関数

fitting 関数から以下のように呼ばれる.

$$\omega_N, r_N = \text{renew}(\lambda, u, v, x, y, w, r_0, rad, ws). \quad (D.36)$$

速度場, 渦中心の座標, 渦度, 渦半径, を引数に与え, Marquardt 法²⁾ によって渦度と渦半径を更新する関数.

まず **get_L** 関数 (D.20) を呼ぶ.

$$l, r, su_1, sv_1, su_2, sv_2, mask_1, mask_2 = \text{get_L}(u, v, x, y, \omega, r_0, rad, ws)$$

wt を計算する. このあたりは **get_L** 関数と処理がほとんど同じ. wt は重み付けで,

²⁾Marquardt 法については付録 F 参照.

渦中心に近いほど重みが大きく, $r < \text{ws}$ の範囲では一定.

$$\text{wt} = \frac{\frac{\text{rad}}{r} - 1.0}{\text{rad} - \text{ws}} (r \geq \text{ws}, r \text{ の関数}) \quad (\text{D.37})$$

$$= \frac{\frac{[\text{mask}_2 \text{ の範囲}]}{[\text{渦中心からの距離}] - 1.0}}{[\text{mask}_2 \text{ の範囲}] - [\text{mask}_1 \text{ の範囲} \times n]},$$

$$\text{wt} = \frac{1.0}{\text{ws}} (r < \text{ws}, \text{定数}) \quad (\text{D.38})$$

$$= \frac{1.0}{[\text{mask}_1 \text{ の範囲} \times n]}.$$

$$\text{wt}_1 = \text{wt}[\text{mask}_1], \quad (\text{D.39})$$

$$\text{wt}_2 = \text{wt}[\text{mask}_2], \quad (\text{D.40})$$

$$\frac{d\text{wt}}{dr}_1 = 0.0, \quad (\text{D.41})$$

$$\frac{d\text{wt}}{dr}_2 = 0.0. \quad (\text{D.42})$$

wt を全領域で足し合わせた s を定義. このあたりも `get_L` 関数とほとんど同じである.

$$s = \sum \text{wt}_1 + \sum \text{wt}_2$$

$$= \sum \frac{\frac{\text{rad}}{r} - 1.0}{\text{rad} - \text{ws}} + \sum \frac{1.0}{\text{ws}}. \quad (\text{D.43})$$

$$\text{wt}_1 = \frac{\text{wt}_1}{s}, \quad (\text{D.44})$$

$$\text{wt}_2 = \frac{\text{wt}_2}{s}. \quad (\text{D.45})$$

ここからが `get_L` 関数とは違うところ. $\frac{dF}{d\omega}|_1, \frac{dF}{d\omega}|_2, \frac{dF}{dr}|_1, \frac{dF}{dr}|_2$ を計算する³⁾. $\frac{dF}{d\omega}$

³⁾Marquardt 法を利用すると考える. 関数 $F(r_0, \omega_0)$ を Rankine 渦を表すものとして次のようにおく.

$$F(r_0, \omega_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}\omega_0 r & (r < r_0) \\ \frac{1}{2}\omega_0 \frac{r_0^2}{r} & (r > r_0) \end{cases}$$

ここで r_0 は接線風速が最大となる渦半径. スクリプトの中で変更するパラメータは ω_0, r_0 , 数値計算の結果から与えるデータは $r_i = r(x, y), v_i = v(x, y)$. v_i は速度の接線成分. 理想的な Rankine 渦の風速分布を示す $F(r_0, \omega_0)$ に風速分布 v_i がフィッティングできるか調べたいので, $Y_i = F(x_i)$

は長さ次元, $\frac{dF}{dr}$ は渦度次元.

$$\left. \frac{dF}{d\omega} \right|_1 = \frac{1}{2} (x[\text{mask}_1] - y[\text{mask}_1]), \quad (\text{D.46})$$

$$\left. \frac{dF}{d\omega} \right|_2 = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{x[\text{mask}_2] - y[\text{mask}_2]}{r[\text{mask}_2]^2}, \quad (\text{D.47})$$

$$\left. \frac{dF}{dr} \right|_1 = 0.0, \quad (\text{D.48})$$

$$\left. \frac{dF}{dr} \right|_2 = \omega_0 r_0 \frac{x[\text{mask}_2] - y[\text{mask}_2]}{r[\text{mask}_2]^2}. \quad (\text{D.49})$$

これは $(u, v) = (v_x, v_y) = (-v_\theta \sin \theta, v_\theta \cos \theta)$ とおいたことによる⁴⁾. 新たに ata に対応する式は

$$\begin{cases} v_i - \frac{1}{2} \omega_0 r_i & (r < r_0) \\ v_i - \frac{1}{2} \omega_0 \frac{r_0^2}{r_i} & (r > r_0) \end{cases}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \omega_0} &= \begin{cases} \frac{r}{2} & (r < r_0) \\ \frac{r_0^2}{2r} & (r > r_0) \end{cases} \\ \frac{\partial F}{\partial r_0} &= \begin{cases} 0 & (r < r_0) \\ \omega_0 \frac{r_0}{r} & (r > r_0) \end{cases} \end{aligned}$$

となる. この各式に $\frac{x-y}{r}$ を掛けると式 (D.46), (D.47), (D.48), (D.49) と同じような形になる.

⁴⁾ v_θ を極座標系における接線方向 (方位角 θ 方向) の速度と考えると, 直交座標系における v_x, v_y は

$$(v_x, v_y) = (-v_\theta \sin \theta, v_\theta \cos \theta)$$

と表現される. ここで

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \cos \theta = \frac{x}{r}$$

なので

$$(v_x, v_y) = \left(-v_\theta \frac{y}{r}, v_\theta \frac{x}{r} \right)$$

である. v_x, v_y を用いると xy 平面上的速度は $V = v_x + v_y$ で表されるので

$$\begin{aligned} V &= -v_\theta \frac{y}{r} + v_\theta \frac{x}{r} \\ &= \frac{x-y}{r} v_\theta. \end{aligned}$$

行列と ats を以下のように定義する⁵⁾.

$$ata = \begin{bmatrix} \sum \left(\left(\frac{dF}{d\omega} \right)_1^2 \text{wt}_1 \right) + \sum \left(\left(\frac{dF}{d\omega} \right)_2^2 \text{wt}_2 \right) + \lambda & \sum \left(\frac{dF}{d\omega} \right)_1 \frac{dF}{dr} \Big|_1 \text{wt}_1 + \sum \left(\frac{dF}{d\omega} \right)_2 \frac{dF}{dr} \Big|_2 \text{wt}_2 \\ \sum \left(\frac{dF}{d\omega} \right)_1 \frac{dF}{dr} \Big|_1 \text{wt}_1 + \sum \left(\frac{dF}{d\omega} \right)_2 \frac{dF}{dr} \Big|_2 \text{wt}_2 & \sum \left(\left(\frac{dF}{dr} \right)_2^2 \text{wt}_2 \right) + \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{D.50})$$

$$ats = \begin{bmatrix} \sum \left((\text{su}_1 + \text{sv}_1) \frac{dF}{d\omega} \Big|_1 \text{wt}_1 \right) + \sum \left((\text{su}_2 + \text{sv}_2) \frac{dF}{d\omega} \Big|_2 \text{wt}_2 \right) \\ \sum \left((\text{su}_1 + \text{sv}_1) \frac{dF}{dr} \Big|_1 \text{wt}_1 + (\text{su}_1^2 + \text{sv}_1^2) \frac{dwt}{dr} \Big|_1 \right) + \sum \left((\text{su}_2 + \text{sv}_2) \frac{dF}{dr} \Big|_2 \text{wt}_2 + (\text{su}_2^2 + \text{sv}_2^2) \frac{dwt}{dr} \Big|_2 \right) \end{bmatrix} \quad (\text{D.51})$$

Rankine 渦において v_θ は

$$v_\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \omega_0 r, & (r < r_0), \\ \frac{1}{2} \omega_0 \frac{r_0^2}{r}, & (r > r_0) \end{cases}$$

であるので、

$$V = \begin{cases} \frac{1}{2} \omega_0 (x - y), & (r < r_0), \\ \frac{1}{2} \omega_0 r_0^2 \frac{x - y}{r^2}, & (r > r_0). \end{cases}$$

このとき

$$\frac{\partial V}{\partial \omega_0} = \begin{cases} \frac{1}{2} (x - y), & (r < r_0), \\ \frac{1}{2} r_0^2 \frac{x - y}{r^2}, & (r > r_0), \end{cases}$$

$$\frac{\partial V}{\partial r_0} = \begin{cases} 0, & (r < r_0), \\ \omega_0 r_0 \frac{x - y}{r^2}, & (r > r_0). \end{cases}$$

⁵⁾疑問: 行列 ata における λ の扱いがわからない. Marquardt 法に従うのであれば行列 ata は

$$ata = \begin{bmatrix} (1 + \lambda) \sum wt \frac{\partial F^2}{\partial \omega} & \sum wt \frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{\partial F}{\partial r} \\ \sum wt \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial \omega} & (1 + \lambda) \sum wt \frac{\partial F^2}{\partial r} \end{bmatrix}$$

のような形になると想像されるが, $(1 + \lambda)$ がかけられるのではなく, 対角成分に λ が足されている形になっている.

$$ata = \begin{bmatrix} \sum wt \frac{\partial F^2}{\partial \omega} + \lambda & \sum wt \frac{\partial F}{\partial \omega} \frac{\partial F}{\partial r} \\ \sum wt \frac{\partial F}{\partial r} \frac{\partial F}{\partial \omega} & \sum wt \frac{\partial F^2}{\partial r} + \lambda \end{bmatrix}$$

$(1 + \lambda)$ を展開してすべて λ にまとめてしまっているのかもしれない.

また (D.41), (D.42), (D.48) より

$$\begin{aligned}\left.\frac{dwt}{dr}\right|_1 &= 0.0, \\ \left.\frac{dwt}{dr}\right|_2 &= 0.0, \\ \left.\frac{dF}{dr}\right|_1 &= 0.0\end{aligned}$$

なので, ata と ats はそれぞれ

$$\begin{aligned}ata &= \begin{bmatrix} \sum \left(\left(\frac{dF}{d\omega} \right|_1 \right)^2 wt_1 \right) + \sum \left(\left(\frac{dF}{d\omega} \right|_2 \right)^2 wt_2 \right) + \lambda \sum \left(\frac{dF}{d\omega} \right|_1 \times 0 \times wt_1 \right) + \sum \left(\frac{dF}{d\omega} \right|_2 \frac{dF}{dr} \right|_2 wt_2 \right) \\ \sum \left(\frac{dF}{d\omega} \right|_1 \times 0 \times wt_1 \right) + \sum \left(\frac{dF}{d\omega} \right|_2 \frac{dF}{dr} \right|_2 wt_2 \right) & \quad \sum \left(\left(\frac{dF}{dr} \right|_2 \right)^2 wt_2 \right) + \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum \left(\left(\frac{dF}{d\omega} \right|_1 \right)^2 wt_1 \right) + \sum \left(\left(\frac{dF}{d\omega} \right|_2 \right)^2 wt_2 \right) + \lambda \sum \left(\frac{dF}{d\omega} \right|_2 \frac{dF}{dr} \right|_2 wt_2 \right) \\ \sum \left(\frac{dF}{d\omega} \right|_2 \frac{dF}{dr} \right|_2 wt_2 \right) & \quad \sum \left(\left(\frac{dF}{dr} \right|_2 \right)^2 wt_2 \right) + \lambda \end{bmatrix} \quad (D.52)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ats &= \begin{bmatrix} \sum \left((su_1 + sv_1) \frac{dF}{d\omega} \right|_1 wt_1 \right) + \sum \left((su_2 + sv_2) \frac{dF}{d\omega} \right|_2 wt_2 \right) \\ \sum \left((su_1 + sv_1) \times 0 \times wt_1 + (su_1^2 + sv_1^2) \times 0 \right) + \sum \left((su_2 + sv_2) \frac{dF}{dr} \right|_2 wt_2 + (su_2^2 + sv_2^2) \times 0 \right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum \left((su_1 + sv_1) \frac{dF}{d\omega} \right|_1 wt_1 \right) + \sum \left((su_2 + sv_2) \frac{dF}{d\omega} \right|_2 wt_2 \right) \\ \sum \left((su_2 + sv_2) \frac{dF}{dr} \right|_2 wt_2 \right) \end{bmatrix} \quad (D.53)\end{aligned}$$

ats , ata を用いて以下のような $(db_0, db_1) = (\text{渦度}, \text{長さ})$ を求めることが目的である.⁶⁾

$$ata \begin{bmatrix} db_0 \\ db_1 \end{bmatrix} = ats \quad (D.55)$$

⁶⁾ ata 行列を Cholesky 分解する (Cholesky.decomp 関数). Cholesky 分解は正方行列 A に対して

$$A = LL^T$$

を満たす下三角行列 L を求める. ここで求めた行列を C とする (Cholesky の C). すなわち,

$$C = \text{Cholesky.decomp}(ata). \quad (D.54)$$

Cholesky.svx 関数ならびに Cholesky.solve 関数は正方行列 A を用いた

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \sum \left(\left(\frac{dF}{d\omega} \right)_1^2 \text{wt}_1 \right) + \sum \left(\left(\frac{dF}{d\omega} \right)_2^2 \text{wt}_2 \right) + \lambda & \sum \left(\frac{dF}{d\omega} \right)_2 \frac{dF}{dr} \Big|_2 \text{wt}_2 \\ \sum \left(\frac{dF}{d\omega} \right)_2 \frac{dF}{dr} \Big|_2 \text{wt}_2 & \sum \left(\left(\frac{dF}{dr} \right)_2^2 \text{wt}_2 \right) + \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} db_0 \\ db_1 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \sum \left((\text{su}_1 + \text{sv}_1) \frac{dF}{d\omega} \Big|_1 \text{wt}_1 \right) + \sum \left((\text{su}_2 + \text{sv}_2) \frac{dF}{d\omega} \Big|_2 \text{wt}_2 \right) \\ \sum \left((\text{su}_2 + \text{sv}_2) \frac{dF}{dr} \Big|_2 \text{wt}_2 \right) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ω_N と r_N を以下のように定義.

$$\omega_N = \omega + db_0 \quad (\text{D.56})$$

$$r_N = r_0 + db_1 \quad (\text{D.57})$$

ここで $r_N < 0.0$ かつ $\omega_N \times \omega > 0$ (新旧の ω の符号が一致) のとき,

$$\omega = \omega_N \quad (\text{D.58})$$

$$r_0 = r_N \quad (\text{D.59})$$

最終的に ω, r_0 を返して **renew** 関数を終了.

D.3 Buregers-Rott 渦近似

メイン関数から以下の関数が呼ばれる. 基本的な手順は Rankine 渦近似のスク립トと同じである.

solver 関数の中で **center** 関数を呼んで渦の中心座標を求めるところ, $n = 2.0, 3.0, 4.0$ でループを回す部分は共通で, その後 **fitting** 関数の中で呼ぶ **renew** 関数と **get_L** 関数が異なっている.

D.3.1 **solver** 関数

Rankine 渦の **solver** 関数 (D.2.1 節) と同じ.

D.3.2 **center** 関数

Rankine 渦の **center** 関数 (D.2.2 節) と同じ.

D.3.3 inner 関数

Rankine 渦の inner 関数 (D.2.3 節) と同じ.

D.3.4 fitting 関数

Rankine 渦の fitting 関数 (D.2.4 節) と同じ.

D.3.5 get_L 関数 (Burgers-Rott)

fitting 関数や renew 関数から以下のように呼ばれる.

$$l, r, x, y, su, sv = \text{get_L}(u, v, x, y, \omega, rr, rad, ws). \quad (\text{D.60})$$

速度場, 渦中心の座標, 渦度, 渦半径を引数に与え, 与えた範囲における接線風速の 2 乗の総和を返す関数.

以下では rad の内側範囲 (= 外側半径範囲) を mask して考える.

渦中心からの距離場 r を計算.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} + 10^{-16} : \text{渦中心からの距離 (+微少量)}. \quad (\text{D.61})$$

中心からの距離を内側半径で正規化した ρ を定義する.

$$\rho = \frac{r}{r_0}$$

ut を定義する⁷⁾. ここで $K = 1.2564$ である⁸⁾.

$$\begin{aligned} ut &= \frac{\omega_0 r_0}{2K} \frac{1 - e^{-K\rho^2}}{0.7153\rho} \\ &\simeq \frac{\omega_0 r_0}{2K} \frac{1}{\rho} \frac{1}{1 - e^{-K}} \left(1 - e^{-K\rho^2}\right) \\ &= \frac{\omega_0 r_0^2}{2K r} \frac{1}{1 - e^{-K}} \left(1 - e^{-K\rho^2}\right) \end{aligned}$$

⁷⁾ Tangential な速度場 U で ut である.

⁸⁾ ut について Burgers-Rott 渦の定義から求めることを考える. 定義によれば接線風速 v_θ は

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-K\rho^2}\right).$$

$r = r_0 = \sqrt{\frac{2K\nu}{\alpha}}$ のとき, すなわち $\rho = 1$ のときの渦度 ω_0 は

$$\omega_0 = \frac{\alpha\Gamma}{2\pi\nu} e^{-\frac{\alpha r_0^2}{2\nu}} = \frac{K\Gamma}{\pi r_0^2} e^{-K}.$$

ここで $\frac{\alpha}{2\nu} = \frac{K}{r_0^2}$ である. このとき

$$\frac{\Gamma}{2\pi} = \frac{\omega_0 r_0^2}{2K} e^K$$

であるため, v_θ は

$$v_\theta = \frac{\omega_0 r_0^2}{2Kr} e^K \left(1 - e^{-K\rho^2}\right)$$

となる.

sv, su を定義する⁹⁾.

$$\begin{aligned} sv &= v[\text{mask}] - ut \frac{x}{r} \\ &= v[\text{mask}] - (ut \cos \theta), \\ su &= u[\text{mask}] + ut \frac{y}{r} \\ &= u[\text{mask}] - (-ut \sin \theta). \end{aligned}$$

以下のような wt を定義する.

$$\begin{aligned} wt &= \frac{\frac{rad}{r} - 1.0}{rad - ws} (r \geq ws, r \text{ の関数}) \\ &= \frac{\frac{[\text{外側半径範囲}]}{[\text{渦中心からの距離}] - 1.0}}{[\text{外側半径範囲}] - [\text{内側半径範囲} \times n]}, \\ wt &= \frac{1.0}{ws} (r < ws, \text{定数}) \\ &= \frac{1.0}{[\text{内側半径範囲} \times n]}. \\ wt &= \frac{wt}{\sum wt}. \end{aligned} \tag{D.62}$$

l を返す

$$l = \sum \{(su^2 + sv^2)wt\} \tag{D.63}$$

D.3.6 **renew** 関数 (Burgers-Rott)

fitting 関数から以下のように呼ばれる.

$$\omega_N, r_N = \text{renew}(\lambda, u, v, x, y, w, r_0, rad, ws). \tag{D.64}$$

⁹⁾速度場 u, v の接線風速からの差分と思われる. 極座標における Burgers-Rott 渦の接線風速を v_θ とすると, 直交座標成分 (v_x, v_y) は

$$\begin{aligned} (v_x, v_y) &= (-\sin \theta v_\theta, \cos \theta v_\theta) \\ &= \left(-\frac{y}{r} v_\theta, \frac{x}{r} v_\theta\right) \end{aligned}$$

である.

速度場, 渦中心の座標, 渦度, 渦半径, を引数に与え, Marquardt 法によって渦度と渦半径を更新する関数.

まず `get_L` 関数 (D.20) を呼ぶ.

$$l, r, x, y, su, sv = \text{get_L}(u, v, x, y, \omega, r_0, rad, ws)$$

wt を計算する. このあたりは `get_L` 関数と処理がほとんど同じ. wt は重み付けで, 渦中心に近いほど重みが大きく, $r < ws$ の範囲では一定.

$$wt = \frac{\frac{rad}{r} - 1.0}{rad - ws} (r \geq ws, r \text{ の関数}) \quad (\text{D.65})$$

$$= \frac{\frac{\text{[外側半径範囲]}}{\text{[渦中心からの距離]}} - 1.0}{\text{[外側半径範囲]} - \text{[内側半径範囲} \times n\text{]}}$$

$$wt = \frac{1.0}{ws} (r < ws, \text{定数}) \quad (\text{D.66})$$

$$= \frac{1.0}{\text{[内側半径範囲} \times n\text{]}}$$

$$wt = \frac{wt}{\sum wt}. \quad (\text{D.67})$$

wt を全領域で足し合わせた s を定義.

ここから Rankine 渦とは異なる. パラメータ $K = 1.2564$ を用いて $k\rho$ を定義.

$$K \times \rho^2 = K \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \quad (\text{D.68})$$

また $\frac{\partial F}{\partial \Gamma}, \frac{\partial F}{\partial r_0}$ を定義^{10) 11) 12) 13)}.

$$\frac{\partial F}{\partial \omega_0} = \frac{x-y}{r^2} r_0^2 \frac{1 - e^{-K\rho^2}}{1.430K}, \quad (\text{D.69})$$

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{x-y}{r^2} r_0 \omega_0 \frac{1 - (1 + K\rho^2)e^{-K\rho^2}}{0.7153K}. \quad (\text{D.70})$$

¹⁰⁾ 接線風速 $v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}}\right)$ の定義については付録 E 参照.

¹¹⁾ xy 平面上の速度 $V = v_x + v_y$ は極座標における接線風速 v_θ を用いて

$$V = \frac{x-y}{r} v_\theta$$

と表される. Burgers-Rott 渦において v_θ は

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}}\right) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-K\rho^2}\right)$$

である. ここで $\rho = \frac{r}{r_0}, r_0 = \sqrt{\frac{2K\nu}{\alpha}}$ とおいた. このとき V は

$$V = \frac{x-y}{r^2} \frac{\Gamma}{2\pi} \left(1 - e^{-K\rho^2}\right).$$

Burgers-Rott 渦における渦度 $\omega = \frac{\alpha\Gamma}{2\pi\nu} e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}}$ は $r = r_0$ のとき

$$\omega_0 = \frac{\alpha\Gamma}{2\pi\nu} e^{-\frac{\alpha r_0^2}{2\nu}} = \frac{K\Gamma}{\pi r_0^2} e^{-K}.$$

また $r = r_0$ のとき v_{θ_0} は

$$v_{\theta_0} = \frac{\Gamma}{2\pi r_0} (1 - e^{-K})$$

ここから

$$\frac{\Gamma}{2\pi} = \frac{\omega_0 r_0^2}{2K} e^K = \frac{v_{\theta_0} r_0}{1 - e^{-K}}.$$

したがって V は

$$V = \frac{x-y}{r^2} \frac{\omega_0 r_0^2}{2K} e^K (1 - e^{-K\rho^2}).$$

¹²⁾ $V = v_x + v_y$ は

$$V = \frac{x-y}{r^2} \frac{\omega_0 r_0^2}{2K} e^K (1 - e^{-K\rho^2}).$$

となるはずであるが, スクリプトから推定されるフィッティング対象の V は

$$F(r_0, \omega_0) = \frac{x-y}{r^2} r_0^2 \omega_0 \frac{1 - e^{-K\rho^2}}{2K(1 - e^{-K})}$$

と読み取れる. そのためフィッティング対象の F は

$$F = \frac{1}{e^K(1 - e^{-K})} V$$

新たに ata 行列と ats を以下のように定義する

$$ata = \begin{bmatrix} \sum \left(\frac{dF}{d\omega_0} \right)^2 \text{wt} + \lambda & \sum \frac{dF}{d\omega_0} \frac{dF}{dr_0} \text{wt} \\ \sum \frac{dF}{d\omega_0} \frac{dF}{dr_0} \text{wt} & \sum \left(\frac{dF}{dr_0} \right)^2 \text{wt} + \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{D.71})$$

$$ats = \begin{bmatrix} \sum \left((\text{su} + \text{sv}) \frac{dF}{d\omega_0} \text{wt} \right) \\ \sum \left((\text{su} + \text{sv}) \frac{dF}{dr_0} \text{wt} \right) \end{bmatrix} \quad (\text{D.72})$$

ats , ata を用いて以下のような $(db_0, db_1) = (\text{渦度}, \text{長さ})$ を求めることが目的.

$$ata \begin{bmatrix} db_0 \\ db_1 \end{bmatrix} = ats \quad (\text{D.73})$$

$$\begin{bmatrix} \sum \left(\frac{dF}{d\omega_0} \right)^2 \text{wt} + \lambda & \sum \frac{dF}{d\omega_0} \frac{dF}{dr_0} \text{wt} \\ \sum \frac{dF}{d\omega_0} \frac{dF}{dr_0} \text{wt} & \sum \left(\frac{dF}{dr_0} \right)^2 \text{wt} + \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} db_0 \\ db_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \left((\text{su} + \text{sv}) \frac{dF}{d\omega_0} \text{wt} \right) \\ \sum \left((\text{su} + \text{sv}) \frac{dF}{dr_0} \text{wt} \right) \end{bmatrix}$$

ここで新しく ω_N と r_N を以下のように更新.

$$\omega_N = \omega_0 + db_0 \quad (\text{D.74})$$

$$r_N = r_0 + db_1 \quad (\text{D.75})$$

¹³⁾関数 $F(r, \omega)$ について考える. 以下の 2 式

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \omega_0} &= \frac{x-y}{r^2} r_0^2 \frac{1 - e^{-K\rho^2}}{1.430K}, \\ \frac{\partial F}{\partial r_0} &= \frac{x-y}{r^2} r_0 \omega_0 \frac{1 - (1 + K\rho^2)e^{-K\rho^2}}{0.7153K} \\ &= \frac{x-y}{r^2} r_0 \omega_0 \frac{2\{1 - (1 + K\rho^2)e^{-K\rho^2}\}}{1.4306K} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} F(r_0, \omega_0) &= \frac{x-y}{r^2} r_0^2 \omega_0 \frac{1 - e^{-K\rho^2}}{1.430K} \\ &= \frac{x-y}{r^2} r_0^2 \omega_0 \frac{1 - e^{-K\rho^2}}{2K(1 - e^{-K})} \end{aligned}$$

と考えられる (r_0, ω_0 それぞれで偏微分すると一致する). ここで $1.430 \simeq 2(1 - e^{-K})$ である.

このとき新しい半径 $r_N > 0.0$ かつ渦度について $\omega_N \times \omega_0 > 0$ (新旧の ω の符号が一致) のとき,

$$\omega_0 = \omega_N \tag{D.76}$$

$$r_0 = r_N \tag{D.77}$$

最終的に ω_0, r_0 を返して `renew` 関数を終了.

付 録 E Burgers-Rott 渦

Burgers-Rott 渦について解説する.

E.1 渦度方程式

円筒座標系 (r, θ, z) で考える. このとき速度ベクトル $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ の各成分を

$$v_r = -\alpha r, \quad (\text{E.1})$$

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} g(r), \quad (\text{E.2})$$

$$v_z = 2\alpha z \quad (\text{E.3})$$

と置く. ここで α は $\alpha > 0$ を満たす渦の歪みを示すパラメタ. $\Gamma > 0$ は循環とする.

このとき

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta + \frac{\partial}{\partial z} v_z \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (-\alpha r^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{\Gamma}{2\pi r} g(r) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} (2\alpha z) \\ &= \frac{-2\alpha r}{r} + 0 + 2\alpha \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり, 渦は定常で密度 ρ も一定とした場合, 連続の式を満たす¹⁾.

¹⁾連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

ナビエーストークス方程式の圧力項および外力項を無視した式は

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (\text{E.4})$$

である. ここで ν は動粘性係数である. このとき円筒座標系における式 (E.4) の θ 成分は以下のように表される²⁾.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= \nu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right), \\ 0 + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} 0 + v_z 0 + \frac{v_r v_\theta}{r} &= \nu \left(\nabla^2 v_\theta + \frac{2}{r^2} 0 - \frac{v_\theta}{r^2} \right), \\ v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= \nu \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

式 (E.5) の左辺は

$$\begin{aligned} v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_r v_\theta}{r} &= v_r \left\{ \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(\frac{\partial}{\partial r} g(r) - \frac{1}{r} g(r) \right) \right\} + \frac{v_r}{r} \frac{\Gamma}{2\pi r} g(r) \\ &= v_r \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(\frac{\partial}{\partial r} g(r) \right) \\ &= -\frac{\alpha \Gamma}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} g(r) \right). \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

である. 密度一定のときは

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

となる.

²⁾円筒座標系における ∇ 及び ∇^2 は

$$\begin{aligned} \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \\ \nabla^2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

また $\nabla^2 v_\theta$ は

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 v_\theta &= \frac{\Gamma}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \frac{g(r)}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{g(r)}{r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{g(r)}{r} \right\} \\
 &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \frac{g(r)}{r} \right) \right\} \\
 &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} g(r) - \frac{g(r)}{r^2} \right) \right\} \\
 &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} g(r) - \frac{g(r)}{r} \right) \\
 &= \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} g(r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} g(r) + \frac{1}{r^2} g(r) \right).
 \end{aligned}$$

したがって式 (E.5) の右辺は

$$\begin{aligned}
 \nu \left(\nabla^2 v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} \right) &= \nu \left\{ \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} g(r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} g(r) + \frac{1}{r^2} g(r) \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\Gamma}{2\pi r} g(r) \right\} \\
 &= \frac{\nu \Gamma}{2\pi r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} g(r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} g(r) \right). \tag{E.7}
 \end{aligned}$$

式 (E.6) 及び式 (E.7) より, ナビエストークス方程式の θ 成分である式 (E.5) は

$$\begin{aligned}
 -\frac{\alpha \Gamma}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} g(r) \right) &= \frac{\nu \Gamma}{2\pi r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} g(r) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} g(r) \right), \\
 -\frac{\alpha r^2}{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial r} g(r) \right) &= r \frac{\partial^2}{\partial r^2} g(r) - \frac{\partial}{\partial r} g(r), \\
 r \frac{\partial^2}{\partial r^2} g(r) + \left(\frac{\alpha r^2}{\nu} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial r} g(r) &= 0. \tag{E.8}
 \end{aligned}$$

また軸上では $g(0) = 0$, すなわち $v_\theta = 0$ である. したがって $g(r)$ および v_θ は

$$g(r) = 1 - e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}}, \tag{E.9}$$

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}} \right) \tag{E.10}$$

となる³⁾. このとき渦度 ω_z は

$$\begin{aligned}
 \omega_z = (\nabla \times \mathbf{v})_z &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r v_\theta - \frac{\partial}{\partial \theta} v_r \right) \\
 &= \frac{1}{r} \left(v_\theta + r \frac{\partial}{\partial r} v_\theta - 0 \right) \\
 &= \frac{1}{r} \left[\frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}} \right) + r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}} \right) \right\} \right] \\
 &= \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \left(1 - e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \left\{ \left(\frac{\alpha r^2}{\nu} + 1 \right) e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}} - 1 \right\} \\
 &= \frac{\alpha \Gamma}{2\pi \nu} e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}} \tag{E.11}
 \end{aligned}$$

³⁾式 (E.9) が正しいことを式 (E.8) に代入することで確かめる. まずそれぞれの 1 階微分と 2 階微分は

$$\frac{\partial}{\partial r} g(r) = -\frac{\alpha 2r}{2\nu} e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}} = \frac{\alpha r}{\nu} e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}},$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial r^2} g(r) &= \frac{\alpha}{\nu} e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}} + \frac{\alpha r}{\nu} \left(-\frac{\alpha r}{\nu} e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}} \right) \\
 &= \frac{\alpha}{\nu} e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}} \left(1 - \frac{\alpha r^2}{\nu} \right) \\
 &= -\frac{\alpha}{\nu} e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}} \left(\frac{\alpha r^2}{\nu} - 1 \right).
 \end{aligned}$$

これを式 (E.8) に代入すると,

$$\begin{aligned}
 r \frac{\partial^2}{\partial r^2} g(r) + \left(\frac{\alpha r^2}{\nu} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial r} g(r) &= -\frac{\alpha r}{\nu} e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}} \left(\frac{\alpha r^2}{\nu} - 1 \right) + \left(\frac{\alpha r^2}{\nu} - 1 \right) \frac{\alpha r}{\nu} e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

したがって式 (E.9) が正しいことが示された.

となる⁴⁾.

E.2 パラメタライズ (正規化)

Wood and White (2010) による接線風速が最大となる半径 R_m を用いたパラメタライズについて記述する. Burgers-Rott 渦における接線風速 v_θ は式 (E.10) より

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}}\right).$$

ここで接線風速が最大となる半径を $R_m = \sqrt{\frac{2K\nu}{\alpha}}$ とおいて, $\rho = \frac{r}{R_m}$ とすると,

$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-K\rho^2}\right).$$

このとき接線風速の最大値 v_m は $r = R_m$ のときであり,

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{\Gamma}{2\pi R_m} (1 - e^{-K}) \\ &\simeq 0.7153 \frac{\Gamma}{2\pi R_m}. \end{aligned}$$

これを用いて最大接線風速 v_m によって正規化された接線風速 v_θ^* は

$$\begin{aligned} v_\theta^* &= \frac{v_\theta}{v_m} \\ &\simeq \frac{1}{0.7153} \frac{1}{\rho} \left\{1 - e^{-K\rho^2}\right\} \end{aligned}$$

⁴⁾ $\frac{\partial v_\theta}{\partial r}$ を計算する.

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}}\right) \right\} \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \left(1 - e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left(1 - e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}}\right) \\ &= -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} \left(1 - e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(\frac{\alpha r}{\nu} e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}}\right) \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \left(-1 + e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}} + \frac{\alpha r^2}{\nu} e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}}\right) \\ &= \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \left\{ \left(\frac{\alpha r^2}{\nu} + 1\right) e^{-\frac{\alpha r^2}{2\nu}} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

ここで $K = 1.2564$ であり, この値は数値計算によく用いられているものである⁵⁾ [Vatistas (1998), Davies-Jones and Wood (2006), Alekseenko et al. (2007)]. このように $K\rho^2$ を用いることで α や ν を知る必要がなくなることがこのパラメタライズの利点である.

⁵⁾ R_m は接線風速が極大となる半径なので $\frac{\partial v_\theta}{\partial r}$ が 0 となるような r であると考えられ, ここから K を数値的に求めたと思われる.

付 録 F Marquardt 法の解説

渦パラメータフィッティングを行う際の Marquardt 法について説明する. ここでフィッティングするパラメータ変数は渦度と渦半径の 2 つであるため, 2 変数における場合について解説する.

F.1 状況設定

n 個の観測データ

$$(X_1, V_1), (X_2, V_2), \dots, (X_n, V_n)$$

があるとする. ここで $X_i = (x_i, y_i)$ は空間座標, V_i は点 (x_i, y_i) における速度である. このときにパラメータ ω, r を含む関数

$$V = F(\omega, r, X)$$

にフィッティングすることを考える. ここで ω は渦度, r は接線風速最大となる半径である. F は Rankine 渦や Burgers-Rott 渦の速度分布を表す関数である.

F.2 計算方法

まず適当な初期パラメータ

$$(\omega_0, r_0)$$

を与え, 二乗残差 R を求める.

$$R = \sum_{i=1}^n \{V_i - F(\omega_0, r_0, X_i)\}^2.$$

続いて F を各パラメータで偏微分し、そのときのパラメータ値を組み合わせた成分で以下のような対称行列をつくる。

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} (1 + \lambda) \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{\partial F(r_0, \omega_0, X_i)}{\partial \omega} \right)^2 & \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{\partial F(r_0, \omega_0, X_i)}{\partial \omega} \frac{\partial F(r_0, \omega_0, X_i)}{\partial r} \right) \\ \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{\partial F(r_0, \omega_0, X_i)}{\partial r} \frac{\partial F(r_0, \omega_0, X_i)}{\partial \omega} \right) & (1 + \lambda) \sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{\partial F(r_0, \omega_0, X_i)}{\partial r} \right)^2 \end{bmatrix}.$$

ここで λ は対角成分を強調させるための係数である。 w_i は観測点ごとの重み (誤差の 2 乗の逆数, 不明な場合は 1 を与える) である。

さらに残差に偏微分を掛けたような以下の行列を計算する。

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n w_i \{V_i - F(\omega_0, r_0, X_i)\} \frac{\partial F(r_0, \omega_0, X_i)}{\partial \omega} \\ \sum_{i=1}^n w_i \{V_i - F(\omega_0, r_0, X_i)\} \frac{\partial F(r_0, \omega_0, X_i)}{\partial r} \end{bmatrix}.$$

この 2 つの行列を使って新しいパラメータ

$$(\omega', r')$$

を以下のようにして求める。

$$\begin{bmatrix} \omega' \\ r' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_0 \\ r_0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{\alpha}^{-1} \boldsymbol{\beta}.$$

続いてこの新しいパラメータ (ω', r') を用いて二乗残差 R' を求める。

$$R' = \sum_{i=1}^n \{V_i - F(\omega', r', X_i)\}^2.$$

もし $R' < R$ であれば (ω', r') を新しいパラメータとし、 λ を 0.1 – 0.5 倍する。もし $R' > R$ であれば (ω', r') を破棄して、 λ を 2 – 10 倍する。

上記操作を複数回繰り返し、 R', R の変化が適当に小さくなったところで計算を終了する。

この方法が行っていることは次のようなものである。 F が非線形な関数であったとしても、真の解近傍では F の 1 次のテイラー展開で十分近似でき、線形的に取り扱うことができる。このとき λ を小さくすることで誤差行列の対角項と非対角項を平等に扱ってパラメータを変更する。一方、真の解から遠い場合は線形的に扱

うことができない。そこで $\nabla \cdot R$ に従うようにパラメータを変更する。そのために λ を大きくすることで対角成分を強調している。

すなわちこの方法は、逐次計算に成功し誤差が小さくなった場合は、大きく (= 線形的に) パラメータを変更し、失敗し誤差が大きくなった場合は、より小さく勾配に沿ってパラメータを変更するものと考えられる。この特徴によって収束の早いパラメータフィッティングを実現している。

参考文献

- [1] Alekseenko S. V., P. A. Kuibin, and V. L. Okulov, 2007: Theory of Concentrated Vortices. Springer-Verlag, 494 pp.
 - [2] Brown, A. R., S. H. Derbyshire, and P. J. Mason, 1995: Large-eddy simulation of stable atmospheric boundary layers with a revised stochastic subgrid model, *Q.J.R.Meteorol.SOC*, **120**, 1485 – 1512.
 - [3] Davies-Jones R. P., and V. T. Wood, 2006: Simulated Doppler velocity signatures of evolving tornado-like vortices. *J.Atmos.OceanicTechnol.*, **23**, 1029–1048.
 - [4] Fenton K. L., and T. I. Michaels, 2010: Characterizing the sensitivity of daytime turbulent activity on Mars with the MRAMS LES: Early results, *International Journal of Mars Science and Exploration*, **5**, 159 – 171.
 - [5] Giersch S., and S. Raasch, 2023: How Do Dust Devil-Like Vortices Depend on Model Resolution? A Grid Convergence Study Using Large-Eddy Simulation, *Boundary – Layer Meteorology*, **187**, 703–742, doi:10.1007/s10546-023-00792-3.
 - [6] Greeley R., and J. Iversen, 1985: Wind as a Geological Process: On Earth, Mars, Venus and Titan, Cambridge Univ. Press., doi:10.1017/CBO9780511573071.
 - [7] Ito J., H. Niino, and M. Nakanishi, 2013: Formation mechanism of dust devil-like vortices in idealized convective mixed layers, *J.Atmos.Sci.*, **70**, 1173 – 1186.
 - [8] Iversen J. D., R. Greeley, and J. B. Pollack, 1976: Windblown Dust on Earth, Mars and Venus, *J.Atmos.Sci.*, **33**, 2425–2429.
-

- [9] Kahre M. A., J. R. Murphy, and R. M. Haberle, 2006: Modeling the Martian dust cycle and surface dust reservoirs with the NASA Ames general circulation model, *J.Geophys.Res.*, **111**, E06008.
 - [10] Kass D. M., J. T. Schofield, A. Kleinböhl, D. J. McCleese, N. G. Heavens, J. H. Shirley, and L. J. Steele., 2020: Mars Climate Sounder observation of Mars’ 2018 global dust storm, *Geophys.Res.Lett.* **47**, e2019GL083931.
 - [11] Louis J.-F., 1979: A parametric model of vertical eddy fluxes in the atmosphere, *Boundary – Layer Meteorol.*, **17**, 187–202.
 - [12] Michaels T. I., and S. C. R. Rafkin, 2004: Large-eddy simulation of atmospheric convection on Mars, *Q.J.R.Meteorol.Soc.*, **130**, 1251 – 1274.
 - [13] Montabone L., S. R. Lewis, and P. L. Read, 2005: Interannual variability of Martian dust storms in assimilation of several years of Mars global surveyor observations, *Adv.Space.Res.*, **36**, 2146–2155.
 - [14] Nishizawa S., H. Yashiro, Y. Sato, Y. Miyamoto, and H. Tomita, 2015: Influence of grid aspect ratio on planetary boundary layer turbulence in large-eddy simulations, *Geosci.ModelDev.*, **8**, 3393–3419, doi:10.5194/gmd-8-3393-2015.
 - [15] Nishizawa S., M. Odaka, Y. O. Takahashi, K. Sugiyama, K. Nakajima, M. Ishiwatari, S. Takehiro, H. Yashiro, Y. Sato, H. Tomita, and Y.-Y. Hayashi, 2016: Martian dust devil statistics from high-resolution large-eddy simulations. *Geophys.Res.Lett.*, **43**, 41804188.
 - [16] Odaka M., K. Nakajima, M. Ishiwatari, and Y.-Y. Hayashi, 2001: A numerical simulation of thermal convection in the Martian lower atmosphere with a two-dimensional anelastic model. Nagare multimedia 2001, <http://www.nagare.or.jp/mm/2001/odaka/>.
 - [17] Ohno H., and T. Takemi, 2010: Mechanisms for intensification and maintenance of numerically simulated dust devils, *Atmos.Sci.Lett.*, **11**, 27 – 32.
 - [18] Onodera K., K. Nishida, T. Kawamura, N. Murdoch, M. Drilleau, R. Otsuka, R. D. Lorenz, A. C. Horleston, R. W.-Schnidrig, M. Schimmel, S. Rodriguez, S. Carrasco, S. Tanaka, C. Perrin, P. Lognonné, A. Spiga, D. Banfield, M. P. Panning, and W. B. Banerdt, 2023: Systematic catalog of Martian convective vortices observed by InSight, Zenodo, doi:10.5281/zenodo.7801343.
-

-
- [19] Rafkin C. S. R., 2009: A positive radiative-dynamic feedback mechanism for the maintenance and growth of Martian dust storms, *J.Geophys.Res.*, **114**, E01009.
- [20] Rennò N. O., M. L. Burkett, and M. P. Larkin, 1998: A simple thermodynamical theory for dust devils, *J.Atmos.Sci.*, **55**, 3244.
- [21] Ringrose T. J., M. C. Towner, and J. C. Zarnecki, 2003: Convective vortices on Mars: a reanalysis of Viking Lander 2 meteorological data, sols 1–60, *Icarus*, **163**, 78–87.
- [22] Sato Y., S. Nishizawa, H. Yashiro, Y. Miyamoto, Y. Kajikawa, and H. Tomita, 2015: Impacts of cloud microphysics on trade wind cumulus: Which cloud microphysics processes contribute to the diversity in a large eddy simulation?, *Prog.EarthPlanet.Sci.*, **2**, 23, doi:10.1186/s40645-015-0053-6.
- [23] Spiga A., N. Murdoch, R. Lorenz, F. Forget, C. Newman, S. Rodriguez, J. Pla-Garcia, D. V. Moreiras, D. Banfield, C. Perrin, N. T. Mueller, M. Lemmon, E. Millour, and W. B. Banerdt, 2020: A Study of Daytime Convective Vortices and Turbulence in the Martian Planetary Boundary Layer Based on Half-a-Year of InSight Atmospheric Measurements and Large-Eddy Simulations, *J.Geophys.Res.Planets*, **126**, e2020JE006511.
- [24] Stanzel C., M. Patzold, D. Williams, P. Whelley, R. Greeley, G. Neukum, and HRSC Co-Investigator Team, 2008: Dust devil speeds, directions of motion and general characteristics observed by the Mars Express High Resolution Stereo Camera, *Icarus*, **197**, 39–51.
- [25] Sullivan P. P., and E. G. Patton, 2011: The Effect of Mesh Resolution on Convective Boundary Layer Statistics and Structures Generated by Large-Eddy Simulation, *J.Atmos.Sci.*, **68**, 2395–2415.
- [26] Toigo A. D., M. I. Richardson, S. P. Ewald, and P. J. Gierasch, 2003: Numerical simulation of Martian dust devils, *J.Geophys.Res.Planets*, **108**, 5047.
- [27] Uno I., X.-M. Cai, D. G. Steyn, and S. Emori, 1995: A simple extension of the Louis method for rough surface layer modelling, *Boundary – LayerMeteorology*, **76**, 395–409.
- [28] Vatistas G. H., 1998: New model for intense self-similar vortices. *J.Prop.Power*, **14**, 462–469.
-

- [29] Wood V. T., and L. W. White, 2011: A New Parametric Model of Vortex Tangential-Wind Profiles: Development, Testing, and Verification., *J.Atmos.Sci.*, **68**, 990–1006, doi:10.1175/2011JAS3588.1.