



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Formal Truth as Provability : Proof-Theoretic Studies [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	林, 大智
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(文学)
Dissertation Number	甲第16167号
Issue Date	2024-09-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/93289
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Daichi_Hayashi_abstract.pdf, 論文内容の要旨



学位論文内容の要旨

博士の専攻分野の名称：博士（文学）

氏名： 林 大智

学位論文題名

Formal Truth as Provability: Proof-Theoretic Studies
(証明可能性としての形式的な真理：証明論的研究)

・本論文の観点と方法

本論文の主題は、初等（一階）算術における真理概念を、真理述語を用いて形式化することを試みる公理的真理理論である。特に、本論文では、初等算術の形式体系であるペアノ算術 (PA) に対して、真理述語に関する公理や規則を追加して得られる形式体系がどのような証明論的性質をもつかを扱う。真理概念の数学的研究は Tarski による 1920 年代の成果に端を発するが、Tarski の主な関心は、その真理を考察したい対象言語における真なる文の集合（真理の外延）を、強力なメタ理論において定義するという意味論的考察であった。その後、Tarski の真理定義は、Kripke (1976) や Friedman-Sheard (1987) の成果に代表されるように、真理述語の自己適用を許すような様々な意味論的真理概念へと拡張された。特に Kripke による意味論的真理定義のアイデアは、真とみなせる文の集合を、推論規則群を持った演繹体系における証明可能性として特徴づけるというものであり、これは我々が真なる文にいかにして到達できるかの単純な説明を与えている。本論文では、こうした証明可能性としての真理概念に基づいた、様々な真理述語の形式体系を提示する。一般に、ゲーデルの第一不完全性定理により、意味論的に定義された真なる文の集合は、(通常の意味での) 形式体系においてその全てを導出することはできない。そのため、様々な真理の形式体系が、どの程度まで意図する意味論的真理定義を捉えられているかを明確にする課題が生じる。この課題に対するアプローチの一つは、Gentzen によって最初に与えられた順序数解析の手法であり、これは算術や集合の形式体系の演繹的な強さを、証明論的順序数と呼ばれる順序数で測るものであり、近年そうした成果は、真理の形式体系にも盛んに応用されている。本論文の主要な結果では、体系の強さの上限を与えるカット除去の手法と体系の強さの下限を求める整礎性証明の方法を使って、真理の形式体系の証明論的順序数が特徴づけられる。

・本論文の内容

本論文の内容は 6 章からなる。第 1 章で概要が述べた後、第 2 章では本論文で扱われる代表的な意味論的真理理論とその形式体系が概観される。Tarski (1983) に由来する型付きの真理理論 CT、Friedman-Sheard (1987) によって定式化された 9 つの真理理論 A~I、そして Kripke (1976) の方法に由来する 3 つの真理理論 KF, DT, VF が定義される。

第 3 章では、Friedman-Sheard による理論 A~I のうち、D, E, F, G, I の証明論的順序数（の上限）が考察される。D の強さは Halbach (1994) によって、E, F, G, I の強さは Leigh-Rathjen (2010) によってそれぞれ決定されたが、後者の上限については、証明論におけるカット除去論証で得られている。この証明論的手法では、考察下の真理理論が無限的推件計算における再帰的証明可能性として解釈される。第 3 章ではまず Leigh と Rathjen のオリジナルの証明にギャップがあることが指摘される。その上で、元の証明を修正した新たなカット除去論証を与え、Leigh と Rathjen が与えた証明論的順序数は結果として正しいことが証明される。3 章ではさらに、体系 D についてもカット除去論証が与えられ、したがって D を再帰的証明可能性として解釈できることを示す。結果として Halbach が与えた D の証明論的順序数の別証明を与える。しかし、同時に、D の（再帰的）証明可能性としての解釈が E, F, G, I よりも制限された意味でのものとなる。

第 4 章では、証明を弱めた概念として、計算可能性に依拠した合成的な真理理論が与えられる。Tarski の理論 CT や体系 D に代表される合成的な理論は真理理論として自然である一方で、証明としての真理の考えと相性が悪いことが多い。本章では、計算可能性として Krivine による古典的実

現可能性を採用している。これは Krivine の古典的実現可能性の特殊な場合として通常の算術的真理の概念を扱える利点があるためである。第 4 章では、古典的実現可能性の形式化の第一歩として、まず Tarski 的な型付きの合成的理論 CR を定式化し、その証明論的強さを考察する。また、これがある仮定の下で真理論 CT とみなせることを示し、我々の理論が公理的真理一論の一般化とみなせることを確認する。さらに、これを自己言及的な理論 FSR へと一般化し、その証明論的性質を考察する。主な結果として、FSR は自己実現可能であること、つまり、ある文が FSR で証明されたならば、その文がある数項によって実現されることもまた FSR で証明できることが示される。

第 5 章では、証明可能性としての真理概念に基づいて、どれほど証明論的に強力な公理的真理理論を得られるかが考察される。与えられた真理理論を強化する方法の一つとして、次のような直観に基づく、真理述語の反復というアイデアが提案されている。対象言語 L の理論 B に対して、真理述語 T_0 を用いて、その真理理論 S_0 が構成できる。今度は、 S_0 自身に対して新たな真理述語 T_1 を用いることで、新たな真理理論 S_1 が作られる。このプロセスは超限回繰り返すことができ、その回数的大小に応じて強力な真理理論を得ることができる。こうした方法で得られた理論としては、Fujimoto (2011)による理論 $\text{Aut}(\text{VF})$ が現状最も強力である。そこで本論文では、この方針に基づいてさらに強い結果を与えることを目標とする。この目的のために、我々はフレーゲ構造と呼ばれる枠組みを採用する。これは形式体系としては、組み合わせ論理 (combinatory logic)を形式理論として表現した適用的理論 (applicative theory)上における公理的真理理論とみなせる。ただし、適用的理論とペアノ算術は互いに相対的解釈可能であるため、フレーゲ構造と通常の PA 上の真理理論の違いは単に表現の仕方の相違となる。フレーゲ構造において真理述語の反復に対応するのは universe という概念である。各 universe は疑似的な真理述語を表しており、極限公理と呼ばれる原理によって、存在する universe から、さらに強い universe が生成できる。そこで本論では、第 2 章で紹介された Kripke 流の理論の、フレーゲ構造における対応版理論に対して、次の三つの成果を与える。第一に、KF のフレーゲ構造版の極限公理による拡張は Cantini (1996)や Kahle (2003)によって与えられたが、そのさらなる 2 種類の拡張を与える。第二に、DT のフレーゲ構造版である PT に対して、KF と同様の結果を与える。第三に、VF を極限公理によって拡張する。5 章の主な結果として、これらは全て Feferman (1975)が定式化した explicit mathematics の形式体系 T_0 と同等の強さを持っていることが示され、したがって、 $\text{Aut}(\text{VF})$ よりも強力であることがわかる。

第 6 章では本論文全体の結果が、今後の課題とともにまとめられる。