



Title	Study on a Generalization of Boltzmann's Entropy Formula for Non-compact Classical Spin Systems [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	加治佐, 貴大
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第16081号
Issue Date	2024-09-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/93574
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Takahiro_Kajisa_abstract.pdf, 論文内容の要旨



学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士（理 学） 氏 名 加治佐 貴大

学 位 論 文 題 名

Study on a Generalization of Boltzmann's Entropy Formula for Non-compact Classical Spin Systems
(非コンパクトな古典スピン系におけるボルツマンのエントロピー公式の拡張についての研究)

本研究では統計力学の基礎づけにおいて重要なボルツマンのエントロピーの公式を、格子状におけるスカラー場の量子論の模型などを含むことができるように拡張した。

統計力学における最も素朴な統計的アンサンブルとして、ミクロカノニカルアンサンブルと呼ばれるものがある。これは、あるエネルギー帯 $[E_1, E_2]$ におけるスピン配位が、そこでの全スピン配位の測度 W を分母とする一様確率分布に従って実現することを言う確率モデルである。多くの統計力学の文献では、ここから凸解析的な変換を以てギブスアンサンブルと呼ばれる運用上の都合が良いミクロカノニカルアンサンブルと等価な確率モデルへと変換されることになる。現在の古典統計力学における結果のほぼ全てはギブスアンサンブルを用いての計算によるものであり、したがってミクロカノニカルアンサンブルからギブスアンサンブルへの変換は重要な技術となっている。したがってその変換がどのような条件のときに成り立つのかを調べることは重要な問題であると言える。

一方、数学的にはコンパクト空間にスピンの値域を持つ古典格子スピン系や、有界作用素としてスピンの値を持つ量子格子スピン系においては、上記のような変換を、さらに詳しい内容を伴って厳密に正当化することができる。とりわけ粒子数を無限大へと持っていく熱力学極限を取った後に同種の変換を行うことによって、無限次元の確率測度、あるいは線形汎関数としてそれぞれのアンサンブルが一致することを主張することが可能である。これを厳密な意味でのアンサンブルの等価性と呼ぶ。

ところでミクロカノニカルアンサンブルの熱力学極限を調べる際には、許される全スピン配位の測度 W がどう振る舞うかを追跡することが重要であり、この研究で言うところのボルツマンのエントロピーの公式はそのことを可能にするものである：すなわち、この公式は単位体積あたりの全スピン配位の測度の対数 $\log W$ は、同じく単位体積あたりの熱力学的なエントロピー S と一致することを述べている。そのような意味で、これは有名な公式 $S = \log W$ の厳密化と見ることができる。

本研究では、ここで述べたボルツマンの公式を非コンパクトな空間にスピンの値を持つ古典格子スピン系へと拡張した。証明では相互作用に対する条件を一度強めておくこと、すなわち相互作用の形は問わないが上へ有界なものであると仮定しておくことによって、多くのコンパクトなスピンに対してしか成り立たないであろう計算を省略することができただけでなく、既存の証明に対しても見通しの良い条件立てをすることができた。同時に、そのような厳しい条件については相互作用の形が多項式的である場合において、熱力学極限を計算した後に外すことができることを確認した。本研究では具体例として格子状のスカラー場の模型である ϕ^4 模型を取り上げたが、この結果を量子古典問わずさらに拡張していくことも可能である。