



Title	On the topology of the complements of plane algebraic curves [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	菅原, 朔見
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第16082号
Issue Date	2024-09-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/93603
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Sakumi_Sugawara_abstract.pdf, 論文内容の要旨



学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士 (理 学) 氏 名 菅原 朔見

学 位 論 文 題 名

On the topology of the complements of plane algebraic curves
(平面代数曲線補集合のトポロジーについて)

複素平面代数曲線とは、複素二変数の多項式の零点集合として定義された複素 2 次元のユークリッド空間内の複素 1 次元の代数多様体である。これはもっとも基本的な代数多様体として、古くから研究されてきた対象であり、トポロジーの観点からもその研究の歴史は長い。平面代数曲線補集合のトポロジーの研究の端緒は、1924 年に Lefschetz が今日 Lefschetz 超平面切断定理と呼ばれる定理を示し [Lef24]、1930 年頃に Zariski—van Kampen によって、補集合の基本群を記述する方法が与えられた [Zar29, vK33] ことにあるだろう。Zariski—van Kampen の方法は 1980 年頃、Moishezon により導入されたブレイドモノドロミーという概念へと発展する [Moi81]。ブレイドモノドロミーでは、曲線が定義される複素 2 次元空間から複素直線への射影を利用する。この射影を適切に制限することで、曲線の特異点の近くで補集合に局所的なブレイド群の作用が定まり、この作用を用いて補集合の基本群の表示を与えることができる。ブレイドモノドロミーは非常に強力な手法であり、実際 Libgober は、この表示を与える実 2 次元の CW 複体と曲線補集合がホモトピー同値であると示している [Lib86]。さらに Artal—Carmona—Cogolludo により、ブレイドモノドロミーが補集合の埋め込みの位相の不変量であることが示されている [ACC03]。

一方で、平面代数曲線の補集合は Stein 構造を持つ複素曲面 (=Stein 曲面) である。Andreotti—Frankel により、複素 n 次元の Stein 多様体は実 $2n$ 次元多様体として指数 n 以下のハンドルのみからなるハンドル分解を持つことが示されており [AF59]、従って特に平面代数曲線補集合は実 4 次元の 2-ハンドル体と微分同相となる。さらに Gompf により、Stein 曲面のハンドル分解による特徴付けが与えられており [Go98]、Stein 曲面は 4 次元トポロジーの観点からも盛んに研究されている。

本学位論文では、平面代数曲線の補集合に対し、その微分同相型を表すハンドル分解と Kirby 図式を具体的に記述することを目的とする。先に述べた通り、Libgober はブレイドモノドロミーを用いて補集合のホモトピー型の記述を与えている。しかし、Libgober はホモトピー型を記述する際に、特異点の近傍で 3 次元球面への変位レトラクトを構成しているため、彼の定理からそのままハンドル分解を求めることは難しい。そこで本研究では変位レトラクトを構成する代わりに、特異点の近傍をいくつかのパーツへと分け、それらが互いにどう接着しているかを見る。1-ハンドルは比較的簡単に見出すことができ、これをアイソトピーを用いてできる限り拡張する。一方、2-ハンドルはブレイドモノドロミーを用いる際に使った直線への射影を、補集合の正則近傍の境界へ制限することで得られる 3 次元多様体上の安定写像の臨界点を観察することで見出せる。このようにして、平面代数曲線補集合の具体的なハンドル分解を得ることができる。さらに、ハンドル分解を表す Kirby 図式をブレイドモノドロミーで現れるブレイドを用いて表せることもわか

った。

(参考文献)

- [AF59] A. Andreotti, T. Frankel, The Lefschetz theorem on hyperplane sections, Ann. of Math., 69 (1959) no. 2, 713-717.
- [ACC03] E. Artal Bartolo, J. Carmona Ruber, and J. I. Cogolludo Agustín, Braid monodromy and topology of plane curves, Duke Math. J. 118 (2003), 261-278.
- [Go98] R. E. Gompf, Handlebody construction of Stein surfaces, Ann. of Math. 148 (1998), no. 2, 619-693.
- [vK33] E. R. van Kampen, On the fundamental group of an algebraic curve, Amer. J. Math., 55 (1933), 255-260.
- [Lef24] S. Lefschetz, L' Analysis Situs et la Géométrie Algébriques, Gauthier-Villars, Paris, 1924.
- [Lib86] A. Libgober, On the homotopy type of the complement to plane algebraic curves, J. Reine Angew. Math., 367 (1986), 103-114.
- [Moi81] B. Moishezon, Stable branch curves and braid monodromies, Lectures Notes in Math., 862, Springer-Verlag, (1981), 107-192.
- [Zar29] O. Zariski, On the problem of existence of algebraic function of two variables possessing a given branch curve, Amer. J. Math., 51 (1929), 305-328.