



Title	On representatives of hyperfunctions with several growth orders via relative Čech-Dolbeault cohomology [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	西田, 竜葵
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第16188号
Issue Date	2024-12-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/94056
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Tatsuki_Nishida_abstract.pdf, 論文内容の要旨



学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士（理 学） 氏 名 西田 竜葵

学 位 論 文 題 名

On representatives of hyperfunctions with several growth orders via relative Čech-Dolbeault cohomology
(相対チェックドルボーコホモロジーによる佐藤超関数の種々の増大度を持つ代表元について)

佐藤幹夫により 1958 年に考案された佐藤超関数は、シュワルツ超関数を含む十分広い関数のクラスであり、微分方程式の解の特異性を考える際に有用である。佐藤超関数の理論は、層係数の局所コホモロジー理論で展開されている。その具体的な表示には正則関数層 $\mathcal{O}$ を係数とした相対チェックコホモロジーが用いられてきた。この表示では、いくつかの正則関数の直和が代表元となり、多変数複素解析の技巧的な手法が必要になる場合も多い。本論文では、解析的に扱いやすい代表元を与える「相対チェックドルボーコホモロジー」を考える。この表示の定義や基本的な演算などは本多-伊澤-諏訪[1] によって詳しく研究されている。

佐藤超関数の相対チェックドルボーコホモロジーによる表示では、正則関数層の軟層分解である「ドルボー複体」を係数として相対チェックコホモロジーを考える。係数とする層が柔軟性を持つため、解析的に扱いやすい佐藤超関数の表示が得られる。例えば、代表元に対して滑らかなカットオフ関数を掛けることで、その台をコントロールすることができる。また、相対チェックコホモロジーでは代表元の定義域は Stein 領域でなければならないが、相対チェックドルボーコホモロジーではそのような制約が無くなり、常に 2 つの微分形式で表すことが可能となる。

本論文の主題は、佐藤超関数の新たな表示法である相対チェックドルボーコホモロジーにおいて、「 C^∞ 級関数およびシュワルツ超関数の代表元はどのような性質を持つか」というものである。相対チェックコホモロジーの場合については、佐藤超関数理論の黎明期より詳しく研究されており、複素領域で定義される代表元に対して実軸への極限をとれば元の関数が得られると知られている（金子[2]、小松[3]）。一方、相対チェックドルボーコホモロジーは、一般に実軸への極限が収束しない場合がある。本論文では、 C^∞ 級関数およびシュワルツ超関数のそれぞれについて良い特徴を持つ代表元のクラスを導入し、佐藤超関数の中でそれぞれの関数が満たすべき条件を考察していく。

本論文は 2 部構成となっている。それぞれ、第 I 部は C^∞ 級関数、第 II 部はシュワルツ超関数を目標に据えた内容となっている。

第 I 部では、 C^∞ 級関数に対して、良い特徴を持つ代表元を定義するため、quasi-Whitney $(0, n-1)$ -形式と呼ばれる新たな微分形式を導入する。これは、実軸への極限が収束するような代表元を集めたクラスとなっており、相対チェックコホモロジーの場合と同様に元の関数を極限で復元できる対象である。この極限により元の関数が得られることは、2 つのコホモロジー表示の対応関係を考察することで示される。

第 II 部では、subanalytic site 上の層に対して相対チェックドルボーコホモロジーを定義する。これはシュワルツ超関数を条件付ける代表元として緩増加なドルボー複体を用いるためである。この複体は導来層として $\mathcal{O}^t$ と書かれる。このように増大度が付随した対象は古典的な層理論では取り扱うことができない。そのため、subanalytic site 上の層理論を用いる必要がある（柏原-Schapira [4]、Prelli [5]、Guillermou-Schapira [6]）。また、相対チェックドルボーコホモロジーの理論を展開するためには柔軟層の概念が重要であるが、subanalytic site 上の層に対しては柔軟性の条件が古典的層と異なることが知られている（Guillermou [7]）。本論文では、相対チェックドルボーコホモロジー理論のために、柔軟性の定義を発展させ、 U -柔軟性を用いる（ U は subanalytic 開集合）。

以下、第 I 部、第 II 部それぞれについて、全体の構成を説明する。

第 I 部は全 4 節からなる。第 1 節は第 I 部の序文であり、第 2 節は記号の注意である。第 3 節では、相対チェックコホモロジーと相対チェックドルボーコホモロジーの対応関係について詳しく述べる。3.1 節では相対チェックドルボーコホモロジーを導入し、3.2 節で相対チェックコホモロジーの導入および 2 つのコホモロジーの同型射を説明する。また、通常の間数を佐藤超関数と見做す必要があるため、3.4 および 3.5 節では、それぞれのコホモロジーにおけるシュワルツ超関数の埋め込みについて述べる。そして、第 4 節で本論に入る。まず、4.1 節では微分形式の実軸への極限について、多様体での議論ができるように記号などを定義する。続いて、4.2 節では、台がコンパクトな場合であれば代表元から自然に元の間数を得られることを説明する。これは、2 つのコホモロジーの対応関係と佐藤超関数の積分の性質を用いて示される。最後に 4.3 節では、台がコンパクトではない場合を扱う。主結果となるのは定理 4.10 である。この定理で、 C^∞ 級関数に対して良い条件を持つ代表元が存在し、その代表元に対しては実軸の極限が元の間数に戻ることがわかる。

第 II 部も第 I 部と同様に全 4 節からなり、第 1 節は序文、第 2 節は記号の注意である。続いて第 3 節では、subanalytic site 上の層に対して相対チェックドルボーコホモロジーを定義することを目指す。3.1 節では、subanalytic 開集合 U に対して U -柔軟層の概念を導入し、その満たすべき性質を証明する。その後 3.2 節では、subanalytic site 上の層からなる複体に対して相対チェック導来関手を定義する。これにより相対チェックドルボーコホモロジーが定義できる。3.3 節は 3.2 節で大域的に定義したものを局所的に考え、層の圏から層の圏への関手として相対チェック導来関手を実現する。最後に第 4 節で、この理論の応用として、緩増加超関数の相対チェックドルボーコホモロジー表示を定義する。この表示を用いることで、定理 4.13 が得られ、シュワルツ超関数の良い性質を持つ代表元を定めることができる。

参考文献

- [1] N. Honda, T. Izawa, and T. Suwa. *Sato hyperfunctions via relative Dolbeault cohomology*. pp.229-290, Vol. 75 (1), J. Math. Soc. Japan, 2023.
- [2] A. Kaneko. *Introduction to hyperfunctions*. KTK Scientific Publ., Kluwer Academic Publ., 1988.
- [3] H. Komatsu. *Introduction to the theory of the generalized functions*. Iwanami-Koza Kiso-Sugaku, Analytics (II) ix. Iwanami Shoten, 1978 (in Japanese).
- [4] M. Kashiwara and P. Schapira. *Ind-sheaves*. no. 271, Astérisque, 2001.
- [5] L. Prelli. *Sheaves on subanalytic sites*. No. 120 in Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 2008.
- [6] S. Guillermou and P. Schapira. *Construction of sheaves on the subanalytic site*. pp.1-60 of *Subanalytic Sheaves and Sobolev Spaces*. Tome. 383, Astérisque, 2016.
- [7] S. Guillermou. *dg-Methods for Microlocalization*. pp.99-140, Vol. 47, PRIMS., 2011.