HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	第21 回数学総合若手研究集会 ： 数学の交叉点
Author(s)	廣瀬, 和也; 富樫, 大智; 上野, 龍 他
Citation	Hokkaido University technical report series in Mathematics, 189, i, 1-x, 809
Issue Date	2025-03-27
DOI	https://doi.org/10.14943/112793
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/94305
Type	departmental bulletin paper
File Information	MCYR21 Technical Reports.pdf



Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

第 21 回数学総合若手研究集会

～数学の交叉点～

The 21st Mathematics Conference for Young Researchers

– MCYR21 –

世話人

廣瀬 和也（代表） 富樫 大智（副代表） 上野 龍 田邊 真郷 相原 真生 嘉陽 海渡

古郷 優平 中野 竜之介 長峰 実央 野田 一成 松川 寿人 久保 絢斗 和田 康司

札幌，北海道大学，2025

Series#189. March, 2025

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

#170 N. Tanaka (K. Kiyohara, T. Morimoto, K. Yamaguchi, Eds.), Geometric Theory of Systems of Ordinary Differential Equations II, 519 pages. 2017.

#171 S. -I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, T. Ozawa, T. Sakajo, Y. Tonegawa, and K. Tsutaya, Proceedings of the 42nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations ‐ In memory of Professor Taira Shirota ‐ , 102 pages. 2017.

#172 Shigeru Kuroda, Takao Namiki, Akihiro Yamaguchi, Yutaka Yamaguchi, 複雑系数理の新展開：津田一郎教授退職記念研究集会報告集, 69 pages. 2018.

#173 S. Handa, D. Komori, K. Fujisawa, A. Rodriguez Mulet, M. Aoki, Y. kamijima, I. Fukuda, T. Yabu, 第 14 回数学総合若手研究集会, 580 pages. 2018.

#174 Yoshikazu Giga, Hideo Kubo, Tohru Ozawa, The 11th Mathematical Society of Japan - Seasonal Institute - The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations ‐ , 160 pages. 2018.

#175 S. -I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, Proceedings of 43rd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 99 pages. 2018.

#176 I. Fukuda, M. Aoki, Y. Ueda, Y. Kamijima, T. Yabu, T. Niimura, N. Satoh, H. Toyokawa, K. Matsuzaka, S. Yamagata, K. Yoshida, 第 15 回数学総合若手研究集会, 657 pages. 2019.

#177 S. -I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, T. Ozawa, T. Sakajo, and K. Tsutaya, Proceedings of 44th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 115 pages. 2019.

#178 H. Toyokawa, Y. Otsuto, N. Satoh, K. Matsuzaka, S. Yamagata, K. Yoshida, R. Ashikaga, S. Okida, M. Oyama, K. Kuwata K. Misu, H. Ishii, T. Sukekawa, 第 16 回数学総合若手研究集会, 692 pages. 2020.

#179 S. -I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, T. Ozawa, T. Sakajo, K. Tsutaya, Proceedings of 45th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 106 pages. 2020.

#180 K. Misu, S. Okida, R. Ashikaga, M. Oyama, K. Kuwata, H. Ishii, I. Kudo, T. Sukekawa, M. Seki, A. Hasegawa, K. Hatano, 第 17 回数学総合若手研究集会, 595 pages. 2021.

#181 S.-I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, Y. Liu, T. Ozawa, T. Sakajo, and K. Tsutaya, Proceedings of 46th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 116 pages. 2021.

#182 Tsubasa Sukekawa(Representative organizer), Hiroshi Ishii, Isamu Kudo, Motoki Seki, Aoi Hasegawa, Kohei Hatano, Keisuke Abiko, Yu Tajima, Katsunori Fujie, Shinpei Makida, 第 18 回数学総合若手研究集会, 862 pages. 2022.

#183 S.-I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, Y. Liu, T. Ozawa, T. Sakajo, and K. Tsutaya, Proceedings of 47th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 120 pages. 2022.

#184 Keisuke Abiko(Representative organizer), Katsunori Fujie, Yuta Takada, Yu Tajima, Sakumi Sugawara, Yu Ohno, Takuya Saito, Taichi Togashi, Kotaro Hata, Kazuya Hirose, 第 19 回数学総合若手研究集会, 820 pages. 2023.

#185 S.-I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo, H. Kuroda, Y. Liu, S. Masaki, T. Ozawa, T. Sakajo, and K. Tsutaya, Proceedings of 48th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 136 pages, 2023.

#186 Sakumi Sugawara(Representative organizer), Yu Ohno, Takuya Saito, Ryo Negishi, Shimpei Makida, Ryu Ueno, MasatoTanabe, Taichi Togashi, Kazuya Hirose, Yuhei Kogo, Mao Nagamine, Eitaro Noda, 第 20 回数学総合若手研究集会, 960 pages. 2024.

#187 S.-I. Ei, Y. Giga, N. Hamamuki, S. Jimbo, H. Kubo,H. Kuroda, S. Masaki, T. Ozawa, T. Sakajo, and K. Tsutaya Proceedings of 49th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 106 pages. 2024.

#188 Hiroyuki Tasaki, コンパクト対称空間の極大対蹠集合, 94 pages. 2024.

はじめに

大学院生および若手研究者により組織・運営されている数学総合若手研究集会も 2024 年度で第 21 回を迎えることとなりました。当研究集会は、数学に関わる物理・化学・経済・工学・医学などの様々な分野の若手研究者の講演の場となることで、研究の発展および人的ネットワークの構築を目的として行われてきました。近年、多くの分野で数学的手法が取り入れられているなか、当研究集会のように数学を中心とした分野間交流を行うことは大変意義があるものであると信じております。

2024 年度は対面のみでの開催でした。幅広い分野の若手研究者の方々 99 名にご講演していただきました。また、懇親会へは総勢 96 名の方に参加いただき、非常に大盛況となりました。参加者の皆様のご協力により研究集会が無事開催できたこと、心より感謝申し上げます。

当研究集会の講演は、口頭発表であるシングルセッション（60 分）とパラレルセッション（30 分)、そしてポスターセッションからなります。シングルセッションはあらゆる分野の参加者を対象とした講演であり、問題の背景・動機などの入門的な内容を含んだ講演となっております。パラレルセッションでは分野ごとに分かれ、より専門的な内容の講演が行われます。ポスターセッションは講演者と聴講者との自由な議論の場となっております。

このテクニカルレポート集は講演者の皆様から事前に提供して頂いた原稿をまとめたものです。テクニカルレポートはシングルセッション，パラレルセッション、そしてポスターセッションの順に並んで掲載されております。サブタイトルに「数学の交叉点」とありますように、数学が様々な分野の“交叉点”となることを目的とし、数学以外の分野の方々にもわかりやすく入門的な事項を含んだものとなっております。参加者の皆様が講演をより深く理解し、またご自身の研究を進展させる一助となればこの上ない喜びです。

開催にあたり

- 講演者の皆様、参加者の皆様
- 北海道大学理学部数学教室の先生方，および事務員の方々
- 過去の数学総合若手研究集会世話人の方々

から多大なるご支援を頂きました。この場を借りて心より感謝申し上げます。

2025 年 3 月

MCYR21 世話人

廣瀬 和也（代表）　富樫 大智 （副代表）　上野 龍　田邊 真郷　相原 真生　嘉陽 海渡
古郷 優平　中野 竜之介　長峰 実央　野田 一成　松川 寿人　久保 絢斗
和田 康司

第21回 数学総合若手研究集会

～数学の交叉点～

The 21st Mathematics Conference for Young Researchers

日時： 2025 年 3 月 3 日（月）– 3 月 7 日（金）

場所： 北海道大学理学部 5 号館

S：5-2-03（シングルセッション会場）　A：5-2-06（パラレルセッション会場）
B：5-2-05（パラレルセッション会場）　C：5-3-05（パラレルセッション会場）
D：5-3-04（パラレルセッション会場）　E：5-2-01（ポスター会場）

URL: https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~wakate/mcyr/2025/ja/index.html

• シングルセッション（会場Ｓ）

星野 真生　(Hoshino Mao)　東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
Towards a classification of quantum flag manifolds 3

溝口 史華　(Mizoguchi Fumika)　大阪公立大学大学院理学研究科数学専攻
Quiver から得られる nilpotent Lie 代数と幾何構造 13

松田 凌　(Matsuda Ryo)　京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数学系
ちょっと大きい普遍 Teichmüller 空間の構成に向けて 21

田中 優帆　(Tanaka Yuuho)　早稲田大学基幹理工学部
有向サイクルの二乗グラフの有向全域木について 31

• パラレルセッション（会場Ａ）

内海 凌　(Uchiumi Ryo)　大阪大学大学院理学研究科数学専攻
格子への線形な有限群作用と mod q 置換表現 41

齋藤 琢弥　(Saito Takuya)　北海道大学大学院理学院数学専攻
マトロイドの階数関数の非可換化 51

松下 光虹　(Matsushita Koji)　大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
安定集合凸多面体の余次数について 59

小脇 修和　(Kowaki Nobukazu)　大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
幾何的情報からの組合せ論的変異によるグラスマン多様体のトーリック退化の構成 65

鴻池 真斗　(Konoike Masato)　大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
A new class of magic positive Ehrhart polynomials of reflexive polytopes 71

助永 真之　(Sukenaga Masayuki)　広島大学大学院先進理工系科学研究科
トロピカル有理関数の最小体積表示 77

Tu Binnan　(Binnan Tu)　Department of pure and applied mathematics, graduate school of information science and technology, Osaka University

Unimodular smooth Fano polytopes and their relation with Ewald conditions 85

今村 悠希 (Imamura Yuki) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
dg 圏のホモトピー論に対する形式圏論的アプローチ 91

松川 寿人 (Matsukawa Hisato) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Matsui スペクトラムと thick 部分圏 101

水野 雄貴 (Mizuno Yuki) 早稲田大学基幹理工学部応用数理学科
Bondal-Orlov's reconstruction theorem in noncommutative projective geometry 107

山田 雄斗 (Yamada Yuto) 立教大学大学院理学研究科数学専攻
Nuclear solid modules over Stone δ-rings 117

吉田 智輝 (Yoshida Tomoki) 早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
A simple derived categorical generalization of Ulrich bundles 121

伏見 宗紘 (Fushimi Tokihiro) 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系
正標数代数曲線の基本群の特殊化射の非同型性 131

軽部 尚香 (Naoka Karube) 大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
Dormant opers on elliptic curves 135

橋本 七海 (Hashimoto Nanami) 慶應義塾大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻
Equivalence of categories of E-theory for C*-algebras over topological spaces by reflection functors 139

余 錦波 (Jinbo Yu) 名古屋大学　多元数理科学研究科
Schur multiple Eisenstein series 149

足立 大雅 (Adachi Taiga) 九州大学大学院マス・フォア・イノベーション連係学府
Iwasawa theory for weighted graphs 159

鈴木 望夢 (Nozomu Suzuki) 東京理科大学大学院理学研究科数学専攻
Newton polygon から計算される整環の index 169

安藤 遼哉 (Ando Ryoya) 東京理科大学創域理工学研究科数理科学専攻 / 株式会社スキルアップ NeXt
On a torsion-free modules and semi-hereditary rings 175

高橋 諒 (Takahashi Ryo) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
強 Lefschetz でない Artin Gorenstein 環を作るマトロイドの基底母関数 181

宮下 空 (Miyashita Sora) 大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
The canonical trace of Stanley–Reisner rings that are Gorenstein on the punctured spectrum 191

長峰 実央 (Nagamine Mao) 北海道大学大学院理学院数学専攻
パラメータが Core に属するときの A-超幾何級数 197

島崎 達史 (Shimazaki Tatsushi) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
シフトセットタブローと K-theoretic Schur P, Q 函数の特殊値について 205

• パラレルセッション（会場Ｂ）

渡部 悠人　(Watanabe Yuto)　早稲田大学大学院先進理工学研究科物理学及応用物理学専攻山崎研究室
ロジスティック成長するロトカ・ヴォルテラ型反応拡散方程式の資源分布依存性 217

Li Hsin-Lun　(Hsin-Lun Li)　National Sun Yat-sen university
Garbage disposal game on finite graphs 223

和田 康司　(Wada Koji)　北海道大学大学院理学院数学専攻
最適輸送距離による大域結合写像のクラスター解析 227

加藤 響　(Kato Hibiki)　一橋大学商学部経営学科
リアプノフ指数で測れないカオス力学系の不安定性 237

中野 竜之介　(Nakano Ryunosuke)　北海道大学大学院理学院数学専攻
6 点で分岐する複素射影直線の 4 重被覆の周期積分 247

杉谷 礼　(Sugitani Rei)　筑波大学大学院理工情報生命学術院数理物質科学研究群
余イデアル部分代数を用いた $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数の構成 255

杉田 恭将　(Sugita Yasumasa)　一橋大学大学院経営管理研究科
Numerical analysis of early exercise boundaries for American put options 265

竹村 春希　(Takemura Haruki)　東京大学大学院数理科学研究科
移流方程式に対する CIP 法の誤差評価と浅水方程式への応用 275

丹野 俊将　(Tanno Toshimasa)　神戸大学大学院システム情報学研究科システム情報学専攻
Solovay モデルにおける無限組み合わせ論的対象 285

林 佑亮　(Hayashi Yusuke)　神戸大学システム情報学研究科システム情報学専攻
超限チョコ (Transfinite Chomp) ゲーム 289

村上 真悟　(Murakami Shingo)　九州大学大学院マス・フォア・イノベーション連係学府
数理論理学を用いた法的因果関係概念の分析 293

中田 彬文　(Nakada Akifumi)　広島大学大学院先進理工系科学研究科先進理工系科学専攻数学プログラム
コンパクトアソシエーションスキーム 303

舘川 暁斗　(Tatekawa Akito)　明治大学大学院先端数理科学研究科現象数理学専攻
Kitaev モデルを用いた一般次元のダイアモンド格子のエネルギー関数について 311

武中 亮　(Takenaka Ryo)　大阪公立大学大学院理学研究科数学専攻
Note on exponents associated with Y-systems 321

菅原 明広　(Sugawara Akihiro)　山形大学大学院理工学研究科博士前期課程理学専攻
3 元生成の数値的半群から生じるトーリックイデアルのグレブナー基底 327

和知 秀忠　(Hidetada Wachi)　慶應義塾大学理工学研究科基礎理工学専攻/RIKEN
Decision problem on interactions 335

蔣 崢　(Zheng Jiang)　名古屋工業大学大学院工学専攻情報工学系プログラム情報数理分野

対称群から得られるペアグラフのラマヌジャン性の検証 343

中岡 周太郎 (Nakaoka Shutaro) 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻
Branching rules for level-zero extremal weight modules from $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ to $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ 351

西中 祐介 (Nishinaka Yusuke) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
頂点代数と Costello-Gwilliam の因子化代数 361

谷 光一郎 (Tani Koichiro) 大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻
Initial ideals of generic ideals and variations of Moreno-Socias conjecture 369

貝嶋 優太郎 (Kaijima Yutaro) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
穏健トーリック特異点解消の性質について 375

毛利 健太 (Mori Kenta) 関西学院大学理学部数理科学科
ジョイングラフに付随する対称辺凸多面体のファセット数 383

西村 優作 (Yusaku Nishimura) 早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
Kneser 彩色関数とツリーの完全不変量 391

• パラレルセッション（会場C）

上野 龍 (Ueno Ryu) 北海道大学大学院理学院数学専攻
統計多様体におけるホップ・リノウの定理 403

古郷 優平 (Kogo Yuhei) 北海道大学大学院理学院数学専攻
The evolution of a curve induced by the Pohlmeyer-Lund-Regge equation 409

青木 侑省 (Aoki Yusei) 名古屋工業大学大学院工学研究科博士後期課程工学専攻
佐々木磁場の Legendre 軌道に沿った磁性ヤコビ場の共役値と焦値 419

甲斐 涼哉 (Kai Ryoya) 大阪公立大学大学院理学研究科数学専攻
カンドルのオイラー標数 427

岩本 光平 (Iwamoto Kohei) 立命館大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻数理科学コース
カンドルの距離について 433

神田 秀峰 (Kanda Shuho) 東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
The construction of Oeljeklaus-Toma manifolds from Lie algebras and lattices 441

呉 博韜 (Botao Wu) 東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻
トロピカル射影平面曲線の交点の有理性 451

服部 祐樹 (Yuki Hattori) 横浜国立大学大学院理工学府数物・電子情報系理工学専攻数学教育分野
(3,4)-カスプ辺の内在的不変量 457

山内 優太 (Yamauchi Yuta) 横浜国立大学大学院理工学府数物・電子情報系理工学専攻
特異点をもつ部分多様体の絶対全曲率 467

成田 知将 (Narita Kazumasa) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みとラプラシアンについて 477

姫野 圭佑 (Himeno Keisuke) 広島大学大学院先進理工系科学研究科数学プログラム
ある pretzel knot の non-orientable 4-genus について 485

坂本 穂波 (Sakamoto Honami) お茶の水女子大学理学部数学科
liminal $SL_2\mathbb{Z}_p$-representations of twist knot and cyclic covers 495

安田 順平 (Yasuda Jumpei) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
曲面絡み目の結び目群と結び目対称カンドルの特徴付けについて 503

新井 克典 (Arai Katsunori) 大阪大学大学院理学研究科数学専攻
MGR colorings for Seifert surfaces of oriented links 511

瀧脇 迪哲 (Takiwaki Michiaki) 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻
Radon isometry theorem for sheaves 517

新井 匠 (Arai Takumi) 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻
Guillermou–Kashiwara–Schapira kernels of geodesic flows 527

山口 健太朗 (Yamaguchi Kentaro) 東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻
シンプレクティックトーリック多様体の同変な超曲面に関する Delzant 型定理 531

薮口 怜央 (Yabuguchi Reo) 岡山大学 大学院環境生命自然科学研究科 環境生命自然科学専攻
S^2 上 Lefschetz fibration を用いたエキゾチック構造を持つ多様体のハンドル分解への応用 537

菅原 朔見 (Sugawara Sakumi) 北海道大学大学院理学研究院数学部門
代数曲線補集合のハンドル分解 543

赤川 正朋 (Akagawa Masatomo) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Kaliman modification とハンドル接着 551

和久田 葵 (Wakuda Aoi) 東京大学大学院数理科学研究科
Puncture loops on a non-orientable surface 561

地引 知栄 (Jibiki Chihaya) 東京科学大学理学院数学系数学コース
カンドル順序のカンドル作用による分析 565

• パラレルセッション（会場D）

渡辺 孝佳 (Watanabe Takayoshi) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
クリフォード代数上に構成されたマリアヴァン解析について 571

中島 慶人 (Nakajima Yoshihito) 東北大学大学院理学研究科数学専攻
非整数階時間微分を伴う時間依存する汎函数の劣微分作用素によって支配される非線形発展方程式の可解性とその応用 581

鵜飼 直孝 (Ukai Naotaka) 千葉大学大学院融合理工学府数学情報科学専攻
楕円型・擬放物型システムによる非等方的モノクロ画像処理過程 591

森村 晃子 (Morimura Akiko) 日本女子大学大学院理学研究科数理・物性構造科学専攻
有限体積法による多孔質媒体中の二相流モデルの解析 601

坂本 龍亮 (Sakamoto Ryosuke) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Supports of multi-microlocalizations with growth conditions 609

荒木 康太 (Araki Kouta) 日本大学大学院理工学研究科数学専攻
非線形拡散を持つ Fokker-Planck 方程式における散逸関数の長時間挙動 615

中川 貴就 (Nakagawa Takanari) 早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻
半直線上ノイマン境界条件下での移流拡散方程式の解の長時間挙動 625

國分 海斗 (Kokubu Kaito) 東京理科大学大学院理学研究科数学専攻
二重冪型非線形項をもつ Benjamin–Ono 型方程式の進行波解の安定性解析 635

朝見 陽介 (Asami Yosuke) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
Regularity properties of a generalized Oseen evolution operator in exterior domains, with applications to the Navier-Stokes initial value problem 641

北島 雅也 (Kitajima Masaya) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科多元数理科学専攻
Relation between series representations of functions related to astroid-type closed curves and uniformly asymptotic evaluations of generalized Bessel functions 651

上野 祐一 (Ueno Yuichi) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
3 変数量子 Garnier 系の Takano 理論について 659

髙倉 真和 (Takakura Masakazu) 東京都立大学理学研究科数理科学専攻
最良評価付き L^2 割り算定理と多重劣調和関数の特徴付け 669

藤岡 舜 (Fujioka Hitoshi) 京都大学大学院理学研究科数学・数理解析専攻数理解析系
Hitchin section に含まれる階数 3 の Higgs 束の調和計量 673

田代 紀一 (Tashiro Kiichi) 東京科学大学理学院数学系数学コース
接触角構造付き平均曲率流の存在定理について 679

片山 翔 (Katayama Sho) 東京大学大学院数理科学研究科数理科学専攻
Large time behavior of exponential surface diffusion flows on $\mathbb{R}$ 689

小川 実里 (Ogawa Misato) お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科 理学専攻数学コース / 理化学研究所 革新知能統合研究センター 数理科学チーム
分布型時間遅れをもつバーガーズ方程式の半群理論を用いた研究 697

張 彧瀟 (Ikushou Chou) 広島大学先進理工系科学研究科数学プログラム
Higher order estimate near the boundary of a large solution to semilinear Poisson equation 705

佐藤 一慶 (Sato Ikkei) 東京都立大学大学院理学研究科数理科学専攻
粗凸空間のホロ境界 713

長屋 拓暁 (Nagaya Hiroaki) 広島大学大学院先進理工系科学研究科数学プログラム
Proper action の Bornology と粗幾何学による特徴づけ 721

藤井 大計 (Fujii Taikei) 神戸大学大学院理学研究科数学専攻
ある q 超幾何方程式の接続問題とその退化極限 731

関 元樹 (Motoki Seki) 北海道大学大学院 理学院数学専攻
2 次元 2 状態量子ウォークの弱収束定理 739

• ポスターセッション（会場 E）

兼高 泰河 (Kanetaka Taiga) 名古屋工業大学大学院工学研究科工学専攻情報工学系プログラム情報数理分野
一般の基数の数論変換アルゴリズムの比較 751

滕 懐宇 (huaiyu Teng) 神戸大学大学院システム情報学研究科システム情報学専攻
The optimal vaccination strategy to control COVID-19 761

田邊 真郷 (Tanabe Masato) 北海道大学大学院理学院数学専攻
単純特異点リンクにまつわるはめ込みのトポロジー 771

岸本 勇太 (Kishimoto Yuta) 北海道大学大学院理学院数学専攻
リザバーコンピューティングに基づくてんかん発作分類 781

小村 寅之介 (Omura Toranosuke) 北海道大学大学院理学院数学専攻
Constructing an m × (n+1) trianguloid from an m × n trianguloid 791

坂本 信仁 (Sakamoto Masahiro) 北海道大学大学院理学院数学専攻
エッジ置換による部分自己相似グラフとそのマルチフラクタル解析 799

世話人： 廣瀬 和也（代表） 富樫 大智 （副代表） 上野 龍 田邊 真郷 相原 真生 嘉陽 海渡
古郷 優平 中野 竜之介 長峰 実央 野田 一成 松川 寿人 久保 絢斗
和田 康司

Schedule

3月3日（月）

9:50-10:00	開会			
10:00-11:00	星野 真生 (代数)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:15-11:45	内海 凌 (代数)	渡部 悠人 (数理)	上野 龍 (幾何)	渡辺 孝佳 (解析)
11:45-12:15	齋藤 琢弥 (代数)	Li, Hsin-Lun(数理)	古郷 優平 (幾何)	
12:15-14:15	昼休み			
14:15-14:45	松下 光虹 (代数)	和田 康司 (数理)	青木 侑省 (幾何)	中島 慶人 (解析)
14:45-15:15	小脇 修和 (代数)	加藤 響 (数理)	甲斐 涼哉 (幾何)	鵜飼 直孝 (解析)
15:30-16:00	鴻池 真斗 (代数)	中野 竜之介 (代数)	岩本 光平 (幾何)	森村 晃子 (解析)
16:00-16:30	助永 真之 (代数)	杉谷 礼 (代数)		坂本 龍亮 (解析)
16:45-17:15	Tu Binnan(代数)			

3月4日（火）

10:00-11:00	溝口 史華 (幾何)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:15-11:45	今村 悠希 (代数)	杉田 恭将 (数理)	神田 秀峰 (幾何)	荒木 康太 (解析)
11:45-12:15	松川 寿人 (代数)	竹村 春希 (数理)	呉 博韜 (幾何)	中川 貴就 (解析)
12:15-14:00	昼休み			
14:00-15:30	ポスターセッション (会場 E)			
15:45-16:15	水野 雄貴 (代数)	丹野 俊将 (数理)	服部 祐樹 (幾何)	國分 海斗 (解析)
16:15-16:45	山田 雄斗 (代数)	林 佑亮 (数理)	山内 優太 (幾何)	朝見 陽介 (解析)
17:00-17:30	吉田 智輝 (代数)	村上 真悟 (数理)	成田 知将 (幾何)	

3月5日（水）

	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
10:00-10:30	伏見 宗紘 (代数)	中田 彬文 (数理)	姫野 圭佑 (幾何)	北島 雅也 (解析)
10:30-11:00	軽部 尚香 (代数)	舘川 暁斗 (数理)	坂本 穂波 (幾何)	上野 祐一 (解析)
11:15-11:45	橋本 七海 (代数)	武中 亮 (代数)	安田 順平 (幾何)	髙倉 真和 (幾何)
11:45-12:15	余 錦波 (代数)	菅原 明広 (代数)	新井 克典 (幾何)	藤岡 舜 (幾何)
12:15-14:15	昼休み			
14:15-17:30	ディスカッション			

Schedule

3月6日（木）

10:00-11:00	松田 凌 (解析)			
	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
11:15-11:45	足立 大雅 (代数)	和知 秀忠 (数理)	瀧脇 迪哲 (幾何)	田代 紀一 (解析)
11:45-12:15	鈴木 望夢 (代数)	蒋 崢 (数理)	新井 匠 (幾何)	片山 翔 (解析)
12:15-14:15	昼休み			
14:15-14:45	安藤 遼哉 (代数)	中岡 周太郎 (代数)	山口 健太朗 (幾何)	小川 実里 (解析)
14:45-15:15	高橋 諒 (代数)	西中 祐介 (代数)	薮口 怜央 (幾何)	張 彧瀟 (解析)
15:30-16:00	宮下 空 (代数)	谷 光一郎 (代数)	菅原 朔見 (幾何)	佐藤 一慶 (幾何)
16:00-16:30		貝嶋 優太郎 (代数)	赤川 正朋 (幾何)	長屋 拓暁 (幾何)

3月7日（金）

	会場 A	会場 B	会場 C	会場 D
10:15-10:45	長峰 実央 (代数)	毛利 健太 (数理)	和久田 葵 (幾何)	藤井 大計 (解析)
10:45-11:15	島崎 達史 (代数)	西村 優作 (数理)	地引 知栄 (幾何)	関 元樹 (解析)
11:30-12:30	田中 優帆 (数理)			
12:30-12:40	閉会			

シングルセッション
会場Ｓ

Towards a classification of quantum flag manifolds

東京大学大学院 数理科学研究科 数理科学専攻
星野 真生 (Mao HOSHINO) *

概要

量子群は物理学に背景をもちつつも，現在では純粋に数学的な対象として多くの研究者の関心を集めている．また量子群そのものだけでなく，その作用も主要な研究対象の一つであり，Letzter に端を発する量子対称空間など今なお盛んに研究が行われている．この講演では，旗多様体（もしくは半単純軌道）の量子化について紹介し，$SU(2)$ や $SU(3)$ の場合にその分類結果について紹介する．また可能であれば，その分類結果と Poisson 幾何，表現論との関わりについて紹介する．

1 萌芽：$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ とその一般化

まず，量子群に触れたことがない方のために，最も簡単な（しかし重要な）例である $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を紹介する．これは生成元 $E, F, K^{\pm 1/2}$ と次のような関係式によって定義される $\mathbb{C}$ 代数[*1]（に余積と呼ばれる後述の構造を付け加えたもの）である：

$$K^{\pm 1/2}E = q^{\pm 1}EK^{\pm 1/2}, \quad K^{\pm 1/2}F = q^{\mp 1}FK^{\pm 1/2},$$
$$K^{1/2}K^{-1/2} = K^{-1/2}K^{1/2} = 1, \quad [E,F] = \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}.$$

これがどのように $\mathfrak{sl}_2$ と関連しているかを説明するために，完備（位相）$\mathbb{C}[\![h]\!]$-代数 $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ を生成元 E, F, H と次の関係式により定義する：

$$[H,E] = 2E, \quad [H,F] = -2F, \quad [E,F] = \frac{e^{hH}-e^{-hH}}{e^h-e^{-h}}.$$

このとき $q = e^h, K^{\pm 1/2} = e^{\pm hH/2}$ とおくと，先ほどの関係式を満たしていることに注意されたい．そこで $h = 0$ としてみると，この関係式は

$$[H,E] = 2E, \quad [H,F] = -2F, \quad [E,F] = H$$

となり，いわゆる $\mathfrak{sl}_2$ の関係式が得られることがわかる．

また，このように形式的冪級数に準拠せずとも，表現論の観点から $\mathfrak{sl}_2$ との関連を示唆することもできる．左 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 加群であって $\mathbb{C}$ 線型空間として有限次元なものを $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元表現と

* E-mail:mhoshino@ms.u-tokyo.ac.jp

[*1] 本稿では特に断らない限り $q \in \mathbb{C}^\times$ は 1 の冪根でないとする．また必要に応じて q の有理数乗も固定しておく．

いう．次のように定義される準同型 $\Delta\colon U_q(\mathfrak{sl}_2) \longrightarrow U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を用いることで，二つの表現 M, N のテンソル積 $M \otimes N$ が自然に定まることに注意されたい：

$$\Delta(E) = E \otimes 1 + K \otimes E, \quad \Delta(F) = F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F, \quad \Delta(K^{\pm 1/2}) = K^{\pm 1/2} \otimes K^{\pm 1/2}.$$

Proposition 1.1 (well-known)**.** $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元表現は完全可約であり，既約表現の同値類は非負半整数と符合の組 $(n/2, \pm)$ で分類される．さらに対応する既約表現を $V_{n/2,\pm}$ とおくと，それらのテンソル積は次のように既約表現に分解する：

$$V_{n/2,\pm} \otimes V_{m/2,\pm} \cong V_{(n+m)/2,\pm} \oplus V_{(n+m-2)/2,\pm} \oplus \cdots \oplus V_{|n-m|/2,\pm}.$$

ただし右辺の符合は左辺が同符合なら $+$，異符合なら $-$ である．

特に有限次元表現で $V_{n/2} := V_{n/2,+}$ の直和に分解するものを有限次元可積分表現もしくは **1** 型表現という[*2]．上述の命題によれば，$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の有限次元既約可積分表現と $\mathfrak{sl}_2$ の有限次元既約表現が 1 対 1 で対応し，さらにテンソル積の既約分解則まで完全に一致していることがわかる．例えば $V_{1/2}$ は $\mathfrak{sl}_2$ の $\mathbb{C}^2$ への自然な作用に対応し，次のように行列表示することができる：

$$E = \begin{pmatrix} 0 & q^{1/2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad K^{1/2} = \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 \\ 0 & q^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

最後にもう一つの見方として，$SL_2(\mathbb{C})$ との類似についても紹介する．$\mathbb{C}$ 係数 4 変数多項式を $M_2(\mathbb{C})$ 上の関数とみなして，その $SL_2(\mathbb{C})$ への制限がなす $\mathbb{C}$ 代数 $\mathcal{O}(SL_2)$ を考える．これは多項式環 $\mathbb{C}[a, b, c, d]$ を $ad - bc$ が生成するイデアルで割って得られる $\mathbb{C}$ 代数に他ならない．

一方で $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の（$\mathbb{C}$ 線型空間としての）双対空間 $U_q(\mathfrak{sl}_2)^*$ は $fg = (f \otimes g) \circ \Delta$ により（可換ではない）$\mathbb{C}$ 代数になる．そこで $V_{1/2}$ の行列係数 a, b, c, d が生成する部分環 $\mathcal{O}_q(SL_2)$ を考える：

$$a(x) = e^+(xe_+), \quad b(x) = e^+(xe_-), \quad c(x) = e^-(xe_+), \quad d(x) = e^-(xe_-).$$

ここで (e_+, e_-) は標準基底であり，(e^+, e^-) はその双対基底である．するとこの部分環は a, b, c, d が次の関係式のもとで非可換 $\mathbb{C}$ 代数となることがわかる：

$$ab = qba, \quad ac = qca, \quad bc = cb, \quad bd = qbd, \quad cd = qdc,$$
$$ad - qbc = 1, \quad da - qcb = 1.$$

またこの関係式は，$\mathcal{O}_q(SL_2)$ 係数行列を用いることで次のように整理できる：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -q^{-1}b \\ -qc & a \end{pmatrix}$$

$q = e^h$ としてから $h = 0$ とおくことで，この関係式が $\mathcal{O}(SL_2)$ のものと一致することが確認できる．

ここまでの話を一般化したものが **Drinfeld-神保変形**である．一般に複素半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$（$\mathfrak{sl}_n$ や $\mathfrak{so}_n$ など）が与えられると，それに対して $\mathfrak{g}$ の**量子包絡環** $U_q(\mathfrak{g})$ が定義される．$U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の場合と同様に表現論が展開でき，完全可約性，最高ウェイト理論，BGG 圏 $\mathcal{O}$ など $\mathfrak{g}$ の表現論と同じような結果が成立する．またこれを用いると，連結複素半単純 Lie 群 G について $\mathcal{O}(G)$ の類似物である**量子展開環** $\mathcal{O}_q(G)$ が定義できる．これらの詳細な定義は本稿では重要でないため省略するが，参考文献として [Jan96, Jim12, Kas95, KS97, VY20] をあげておく．

[*2] これは $K^{1/2}$ の作用が対角化可能かつ固有値が $q^{n/2}$ の形に限るというように特徴づけることができる．

2　量子化と Poisson 構造

「量子化」という言葉が使われる典型的な状況は「q というパラメーターを伴った数学的対象であって，$q = 1$ とおくことで元の数学的対象が得られるとき」である．前節で紹介した $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ や $\mathcal{O}_q(SL_2)$ はその意味でそれぞれ $U(\mathfrak{sl}_2)$ と $\mathcal{O}(SL_2)$ の量子化となっている．この状況をもっとも厳密に定式化したものが変形量子化である[*3]．

Definition 2.1. A を可換 $\mathbb{C}$ 代数とする．A の**変形量子化**とは，完備位相 $\mathbb{C}[\![h]\!]$ 代数 A_h と $\mathbb{C}$ 代数の同型 $A_h/hA_h \cong A$ の組であって，A_h が位相 $\mathbb{C}[\![h]\!]$ 加群として $A[\![h]\!]$ に同型であるもののことである．

より平易な定式化として，A 係数形式的冪級数を用いる方法もある．その場合，A の変形量子化とは $A[\![h]\!]$ 上の連続な積 $*_h$ であって，$a, b \in A$ に対して次のような表示をもつもののことである：

$$a *_h b = ab + \sum_{n=1}^{\infty} m_n(a,b)h^n.$$

ここで m_n は $A \times A$ から A への双線型写像である．

Example 2.2. 前節の $\mathcal{O}_q(SL_2)$ の関係式において，$q = e^h$ と置いて得られる $\mathbb{C}[\![h]\!]$ 代数の h 進完備化を $\mathcal{O}_h(SL_2)$ とおく．するとこれは自然な方法で $\mathcal{O}(SL_2)$ の変形量子化を与える．

さて，$A_h \cong A[\![h]\!]$ と A の可換性により，$(x,y) \longmapsto [x,y]$ は $A \times A$ から $hA_h/h^2A_h \cong A$ への双線型写像 $\{\cdot,\cdot\}$ を誘導する．冪級数を用いれば $\{a,b\} = m_1(a,b) - m_1(b,a)$ である．交換子の性質により，これが次の性質を満たすことが確認できる：

(i) $\{a,b\} = -\{b,a\}$（歪対称性）．
(ii) $\{a,bc\} = \{a,b\}c + b\{a,c\}$（Leibniz 則）．
(iii) $\{\{a,b\},c\} + \{\{b,c\},a\} + \{\{c,a\},b\} = 0$（Jacobi 恒等式）．

一般にこのような双線型写像を A 上の **Poisson 括弧**といい，組 $(A, \{\cdot,\cdot\})$ を **Poisson 代数**と呼ぶ．上述の考察は，A の変形量子化から A 上の Poisson 括弧が得られることを意味する．この逆問題，つまり与えられた Poisson 代数 $(A, \{\cdot,\cdot\})$ に対し，A の変形量子化 A_h であってもとの Poisson 括弧を誘導するものが存在するかどうかという問題をしばしば**量子化問題**という．

この問題で最も関心を集めた設定は，A として可微分多様体 M 上の C^∞ 級関数環 $C^\infty(M)$ を考えたものである．一般に可微分多様体 M と $C^\infty(M)$ 上の Poisson 括弧の組を **Poisson 多様体**という．これはある種シンプレクティック多様体を退化させたものということができ，実際にシンプレクティック多様体 (M,ω) に対して $TM \cong T^*M$ のもと ω に対応する双ベクトル場 π_M により $C^\infty(M)$ 上の（非退化な）Poisson 括弧を定めることができる．よく知られているように，シンプレクティック多様体は物理学における古典系の相空間の数学的定式化が背景にあり，その意味で量子化

[*3] ただし，$U(\mathfrak{sl}_2)$ の量子化としての $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ には別の概念を用意する必要がある．

問題は与えられた古典系の正準量子化を常に行えるかどうかを問う問題に他ならない．この問題はまずシンプレクティック多様体の場合に解決され，一般の Poisson 多様体の場合は Kontsevich により解決された．

Theorem 2.3 (M. Kontsevich [Kon03])**.** 任意の Poisson 多様体 $(M, \{\cdot,\cdot\})$ に対し，その変形量子化 $C^\infty(M)$ であって誘導する Poisson 括弧がもとの Poisson 括弧に一致するものが存在する．

Kontsevich 以前にも，シンプレクティック多様体の変形量子化については Fedosov やその他の研究者により存在が示されている．このことについては，[Wei95] にまとめられている．

3　既約表現とシンプレクティック葉

本節では本稿のもう 1 つのトピックである作用素環，特に C*環の紹介をする．参考文献として [Tom24] をあげておく．

Definition 3.1. C*環とは，（可換とは限らない）$\mathbb{C}$ 代数 A，その上の「複素共役」である共役線型写像 $*\colon A \longrightarrow A$，完備ノルム $\|\cdot\|\colon A \longrightarrow [0,\infty)$ の 3 つ組であって，任意の $x, y \in A$ に対して次の条件を満たすもののことである．

$$(xy)^* = y^*x^*, \quad x^{**} = x, \quad \|x^*x\| = \|x\|^2.$$

また C*環 A, B に対し，A から B への $\mathbb{C}$ 代数準同型 φ であって $\varphi(x^*) = \varphi(x)^*$ を満たすものを $*$ **準同型**と呼ぶ[*4]．

C*環はしばしば非可換な空間と呼ばれるが，これは次の定理に基づく見方である[*5]

Theorem 3.2 (Gelfand-Naimark)**.** 可換 C*環とその間の $*$ 準同型のなす圏は，コンパクト Hausdorff 空間とその間の連続写像のなす圏に反変圏同値である．

一般に，$\mathbb{C}$ 代数 A とその上の共役線型写像 $*\colon A \longrightarrow A$ の組であって，C*環と同じような条件を満たすものを $*$ 代数という．またその複素 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への作用 π であって $\langle \pi(x^*)\xi, \eta\rangle = \langle \xi, \pi(x)\eta\rangle$ を満たすものを A の $*$ **表現**もしくは単に**表現**という．C*環を構成する方法の一つとして，$*$ 環 A をとり，その表現が全て連続になるように適切に A にノルムを入れ，さらに完備化をとるという方法がある．このようにして得られる C*環を A の**包絡 C*環**という[*6]．

代数的な方法で定義された「量子化」に対して，その包絡 C*環をとることで作用素環としての「量子化」を考えることができる．

Example 3.3. $0 < q < 1$ のとき，$\mathcal{O}_q(SL_2)$ に次のような方法で $*$ 環の構造が入る：

$$a^* = d, \quad b^* = -qc, \quad c^* = -q^{-1}b, \quad d^* = a.$$

この $*$ 環を $\mathcal{O}_q(SU(2))$ で表し，さらにその包絡 C*環を $C_q(SU(2))$ で表す．

[*4] C*環の射としてはノルム位相に関する連続性も仮定するのが自然だが，実は自動的に成り立つ．

[*5] あくまでも 1 つの見方であって，例えば群の類似物や行列環の類似物と思った方が解釈しやすいときもある．

[*6] ただし，いつでもこのような構成法が適用できるわけではない．

より一般に，K を連結半単純コンパクト Lie 群とし，G をその複素化として得られる連結複素半単純 Lie 群とする．このとき量子展開環 $\mathcal{O}_q(G)$ に対して適切に $*$ 代数の構造を入れることで $\mathcal{O}_q(K)$ が定義される．さらにその包絡 C*環をとることで $C_q(K)$ が定義される．これは K に定まる標準的な Poisson 構造に関する量子化とみなせる．

Example 3.4. K を単連結コンパクト Lie 群とする．このとき K の閉部分群 K' であって，さらに標準的な Poisson 構造に関する Poisson 部分多様体になっているものを考えると，K/K' にも Poisson 構造が入る．このとき，自然な方法で K/K' の「量子化」である $C_q(K/K')$ が定義できる．特に，**旗多様体の標準的な量子化**がこの構成で得られる（c.f. 例 4.5）．

Example 3.5 (Podleś [Pod87])**.** $0 < q < 1$ とする．$\varphi \in \mathbb{C}$ に対して，$\mathcal{O}_{q,\varphi}(SL_2/H)$ を次の関係式を満たす X, Y, Z で生成される $\mathbb{C}$ 代数とする：

$$XZ = q^2 ZX, \quad YZ = q^{-2} ZY,$$
$$q^{-1}XY = \frac{\varphi^2 - 1}{4} - \frac{q(\varphi+1) + q^{-1}(\varphi-1)}{2} q^{-1}Z + q^{-2}Z^2,$$
$$q^{-1}YX = \frac{\varphi^2 - 1}{4} - \frac{q(\varphi+1) + q^{-1}(\varphi-1)}{2} qZ + q^2 Z^2.$$

さらに $\varphi \in \mathbb{R}$ の場合，この $\mathbb{C}$ 代数には次のようにして自然に $*$ 代数の構造を入れることができる：

$$X^* = -Y, \quad Y^* = -X, \quad Z^* = Z.$$

この $*$ 代数を $\mathcal{O}_{q,\varphi}(S^2)$ で表す．この関係式で $q = 1$ とおき，$x = X - Y, y = i(X + Y), z = 2Z - \varphi$ とおくと，$x^* = x$, $y^* = y$, $z^* = z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ が得られるため，$\mathcal{O}_{q,\varphi}(S^2)$ は 2 次元球面の「量子化」と思うことができる．$-1 \leq \varphi \leq 1$ の場合に，この $*$ 代数は非自明な包絡 C*環 $C_{q,\varphi}(S^2)$ を持つ．これを **Podleś 球面**と呼ぶ．この場合も，然るべき S^2 上の Poisson 構造に関する S^2 の「量子化」とみなせる．

変形量子化では不定元 h に関する次数ごとに係数をみることで Poisson 構造との関係を直接的に見ることができた．一方で作用素環の設定では固定された実数 q について考えるため，このようなことはできない．しかし，それでも表現を観察することでその影をみることができる．次の Poisson 多様体に関する一般論が重要である．

Theorem 3.6. $(M, \{\cdot,\cdot\})$ を Poisson 多様体とする．このとき自然な方法で M を連結なシンプレクティック多様体の族に（集合として）直和分解することができる．この分解における各シンプレクティック多様体を**シンプレクティック葉**という．

次の事実が知られている．

Theorem 3.7. 以下の「量子化」A_q について，A_q の既約表現のユニタリ同値類と「対応する」Poisson 多様体のシンプレクティック葉との間に全単射が存在し，しかるべき位相について同相になる．

(i) 単連結コンパクト Lie 群 K について，$A_q = C_q(K)$．(Levendorskii-Soibelman [LS91])

(ii) 単連結コンパクト Lie 群 K とその Poisson 閉部分群 K' について，$A_q = C_q(K/K')$. (Dijkhuizen-Stokman [SD99], Neshveyev-Tuset [NT12])

(iii) $-1 \leq \varphi \leq 1$ のとき，Podleś 球面 $A_q = C_{q,\varphi}(S^2)$. (Podleś [Pod87])

さらに，この対応のもとで 0 次元シンプレクティック葉と 1 次元表現が対応し，1 次元以上のシンプレクティック葉は全て無限次元表現に対応する．

このように，既約表現とシンプレクティック葉の対応を通じて作用素環的な量子化と Poisson 構造は関連することがある．そこで次のような問題を考えるのは自然である．

Problem 3.8. 与えられた Poisson 多様体 M に対して，その「量子化」$C_q(M)$ を定式化することはできるか？またそれができた場合，$C_q(M)$ の既約表現と M のシンプレクティック葉を関連付けることはできるか？

Problem 3.9. 与えられた多様体 M に対して，その「量子化」と M に入りうる Poisson 構造の間に対応を作ることはできるか？あるいは，どのような Poisson 構造に対して「量子化」が存在し，またそれはどれくらい存在するか？

これらの問題を一般性と厳密性をともなって定式化するのは難しいように思うが，筆者が興味を持っている**量子等質空間**の文脈では，比較的扱えるよい設定を与えられるように思う．次節でそのための枠組みを紹介し，その後筆者が現在得ている結果について紹介する．

4 量子群作用における淡中-Krein 双対性

まず，作用素環論では**コンパクト量子群**とよばれるコンパクト群の自然な一般化がある．これはコンパクト群を「量子化」したもの**ではなく**，C*環という「非可換な空間」に基づいてコンパクト群を再定式化して得られるものである．コンパクト量子群の概念が Woronowicz によって見出されて以降，多くの研究者によって理論が整備・展開されてきた（例えば [NT13] を参照）：

- 有限次元表現論（完全可約性，Peter-Weyl の定理）.
- 具体例の構成（Drinfeld-神保変形，自由ユニタリ群，有限グラフの量子自己同型群など）.
- 淡中-Krein 双対性（作用素環論的なテンソル圏とそのファイバー関手の組との対応）.
- Pontryagin 双対性（離散量子群との対応）.
- ...

その定義の発想は非常に簡潔である．コンパクト群 G があると，その積演算 $m\colon G \times G \longrightarrow G$ が得られる．そこでこれが誘導する $*$ 準同型 $m^*\colon C(G) \longrightarrow C(G \times G)$ を考えると実は $C(G \times G)$ は適切な意味でのテンソル積 $C(G) \otimes C(G)$ に同型になっているため $\Delta\colon C(G) \longrightarrow C(G) \otimes C(G)$ を与える．コンパクト量子群の定義はこの $C(G)$ を C*環 A に置き換えることで得られる．同様に，G 空間 X が与えられたとき，作用 $\alpha\colon G \times X \longrightarrow X$ は $C(X) \longrightarrow C(G \times X) \cong C(G) \otimes C(X)$ を誘導するため，$C(G)$ を A に，$C(X)$ を B に置き換えることで，C*環 B への作用が定義される．

Definition 4.1. [*7]コンパクト量子群とは，C*環 A と $*$ 準同型 $\Delta\colon A \longrightarrow A \otimes A$ の組 $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ であって，次の条件を満たすものである：

(i) $(\Delta \otimes \mathrm{id})\Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta$.
(ii) $\Delta(A)(A \otimes 1)$ と $\Delta(A)(1 \otimes A)$ は $A \otimes A$ の中で稠密.

また，コンパクト量子群 $\mathbb{G}$ の C*環 B への作用とは，$*$ 準同型 $\beta\colon B \longrightarrow A \otimes B$ であって，次の条件を満たすもののことである：

(i) $(\mathrm{id} \otimes \beta)\beta = (\Delta \otimes \mathrm{id})\beta$.
(ii) $\beta(B)(A \otimes 1)$ が $A \otimes B$ の中で稠密.

Example 4.2. 連結半単純コンパクト Lie 群 K と $0 < q < 1$ について，$C_q(K)$ は自然な方法でコンパクト量子群を定める．これを K_q で表し，K の Drinfeld-神保変形という．

さて，コンパクト群 G の等質空間とは，局所コンパクト空間 X への G の推移的作用のことであった．この推移性は，作用が誘導する $C(X)$ への G の作用に関して，その不動点環 $C(X)^G = \{f \in C(X) \mid f \circ \alpha_g = f \text{ for all } g \in G\}$ が定数関数のみからなることに同値である．このことを踏まえて量子等質空間は次のように定義される．

Definition 4.3. $\mathbb{G} = (A, \Delta)$ をコンパクト量子群とする．$\mathbb{G}$ の量子等質空間とは，C*環 B とそこへの $\mathbb{G}$ の作用 β の組であって，不動点環 $B^{\mathbb{G}} = \{b \in B \mid \beta(b) = 1 \otimes b\}$ が $\mathbb{C}$ に一致しているもののことである．

この定義も C*環に基づいて等質空間の概念を再定式化したものに過ぎず，何らかの等質空間の量子化を与えるものではまったくない．実際，コンパクト群 G の既約ユニタリ表現 V が与えられたとき，$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$ は共役作用により G の量子等質空間になっている．

さて，$\mathbb{G}$ の量子等質空間 B が与えられると，その上の「$\mathbb{G}$ 同変 Hermite 束」の類似物を考えることができる．この圏を $\mathbb{G}$-Mod_B とすると，これは次の構造・性質を備えている（ [DC17]）：

(i) 半単純である.
(ii) $M \in \mathbb{G}$-$\mathrm{Mod}B^{\mathrm{f}}$ について，その自己準同型環は自然な方法で C*環になる.
(iii) 任意の射 $f\colon M \longrightarrow N$ について，その随伴 $f^*\colon N \longrightarrow M$ が定まり，f^*f は「半正定値」である.
(iv) $M \in \mathbb{G}$-$\mathrm{Mod}B^{\mathrm{f}}$ と $\mathbb{G}$ の有限次元ユニタリ表現 V に対して，自然なテンソル積 $V \otimes M \in \mathbb{G}$-$\mathrm{Mod}B^{\mathrm{f}}$ が定まる.
(v) 任意の $M \in \mathbb{G}$-$\mathrm{Mod}B^{\mathrm{f}}$ について，$\mathbb{G}$ の有限次元ユニタリ表現 V であって $M \subset V \otimes B$ となるものが存在する.

このような構造を備えた圏を $\mathbb{G}$ の有限次元表現圏 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$ 上の**連結な点付き半単純 C*加群圏**という．これに関して次の双対定理が知られている．

[*7] 実はいくつか不正確な点が含まれている.

Theorem 4.4 (De Commer-Yamashita [DCY13], Neshveyev [Nes14])**.** コンパクト量子群 $\mathbb{G}$ について，その量子等質空間と $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$ 上の連結な点付き半単純 C*加群圏との間に自然な対応が存在する．

Example 4.5. $\mathbb{H} = (C(\mathbb{H}), \Delta)$ を $\mathbb{G} = (C(\mathbb{G}), \Delta)$ の部分コンパクト量子群とする．このとき，$\mathbb{H}$ の表現圏 $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{H}$ は表現の制限を通して $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$ 上の連結な点付き半単純 C*加群圏となっている．このとき対応する量子等質空間は $C(\mathbb{G}/\mathbb{H}) = C(\mathbb{G})^{\mathbb{H}}$ である．

Example 4.6 ([DCNTY19])**.** $t \in \mathbb{R}$ に対して $B_t \in U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を $B_t = q^{-1}(E - FK) - itK$ で定め，これが生成する $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ の部分環を $U_q(\mathfrak{so}_2)_t$ とする．するとこれは $\Delta(U_q(\mathfrak{so}_2)) \subset U_q(\mathfrak{sl}_2) \otimes U_q(\mathfrak{so}_2)_t$ を満たし，特に $U_q(\mathfrak{so}_2)_t$ 加群と $SU_q(2)$ の表現とのテンソル積を考えることができる．そこで $SU_q(2)$ の表現の制限として得られる既約表現が生成する $U_q(\mathfrak{so}_2)_t$-Mod の充満部分圏を考えると，これは自然に連結な点付き半単純 C*加群圏となる．これについて，対応する $SU_q(2)$ の量子等質空間は Podleś 球面である．

5　旗多様体の量子化

例 4.5で見たように，部分群で割って得られるような量子等質空間はちょうどその部分群の表現に対応する．もし $\mathbb{G}$ がコンパクト群 G の「量子化」で，さらに G の閉部分群 H に対応する $\mathbb{G}$ の部分コンパクト量子群 $\mathbb{H}$ が存在すれば，$\mathbb{H}$ の表現圏を考えることで G/H の量子化として $\mathbb{G}/\mathbb{H}$ が考えられる．しかしこれは標準的な量子化を考えているだけであり，例 4.6のような非自明な量子化まで含めて考えることには失敗している．

これを解消するために，テンソル積の既約分解則に注目する．

Definition 5.1. コンパクト量子群 $\mathbb{G}$ に対して，その**表現環**もしくは **fusion 代数**とは，その有限次元表現の同値類を生成元とし，次の関係式を考えることでえられる環 $\mathcal{R}(\mathbb{G})$ である[*8]：

$$[V \oplus W] = [V] + [W], \quad [V \otimes W] = [V][W].$$

同様にして，$\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\,\mathbb{G}$ 上の半単純 C*加群圏 $\mathcal{M}$ に対して，その **fusion 加群**とは，$\mathcal{M}$ の対象の同型類を生成元とし，次の関係式を考えることで得られる $\mathcal{R}(\mathbb{G})$ 加群 $\mathcal{R}(\mathcal{M})$ のことである：

$$[M \oplus N] = [M] + [N], \quad [U \otimes M] = [U][M].$$

K を連結半単純コンパクト Lie 群とする．このとき $\mathcal{R}(K_q)$ と $\mathcal{R}(K)$ の間には自然な同型があることが知られているため，これを $\mathcal{R}_K$ で表す．すると，K の量子等質空間と K_q の量子等質空間の両方から $\mathcal{R}_K$ 上の fusion 加群を比較することができる．そこで次のようにして K の等質空間の量子化を定義する．

Definition 5.2. X を K の等質空間とし，$\mathcal{R}(X)$ を K の量子等質空間 $C(X)$ に対応する $\mathcal{R}(K)$ の fusion 加群とする．このとき X の K_q **同変量子化**とは，以下のような組 $(\mathcal{M}, \varphi)$ のことである：

[*8] 本当は単なる環ではなく，生成系の情報も加えた $\mathbb{Z}^+$ 環というものである．fusion 加群についても同様．

- $\mathrm{Rep}^{\mathrm{f}}\, K_q$ 上の連結な点付き半単純 C*加群圏 $\mathcal{M}$.
- $\mathcal{R}_K$ 上の fusion 加群としての同型 $\varphi\colon \mathcal{R}(M) \longrightarrow \mathcal{R}(X)$.

Remark 5.3. この定義の中で fusion 加群の同型 $\mathcal{R}(X) \cong \mathcal{R}(M)$ を固定していることは，気持ちとしては変形量子化の定義における同型 $A_h/hA_h \cong A$ の固定に相当することである．

この定義を踏まえて，X の K_q 同変量子化の構成および分類について考えることができる．ここでは特に K として $SU(n)$ を考え，さらに X として $SU(n)/T$ （ただし T は対角行列からなる閉部分群）を考える．

このとき，$SU(n)/T$ 上の Poisson 構造であって $SU(n)$ の作用と整合的[*9]なものは，次の条件を満たす $\varphi = (\varphi_{ij})_{i\neq j} \in \mathbb{R}^{n(n-1)}$ のなす空間 $X_{SU(n)/T}$ により分類される：

$$\varphi_{ij} = -\varphi_{ji}, \quad \varphi_{ij}\varphi_{jk} + 1 = \varphi_{ik}(\varphi_{ij} + \varphi_{jk})$$

似たような記述は一般の単連結半単純コンパクト Lie 群 K と，その極大トーラスを含む連結閉部分群 L についても知られている．それを $X_{K/L}$ で表す．K/L の変形量子化で Drinfeld-神保変形と整合的なものに関して，次のことが知られている．

Theorem 5.4 (J.Donin [Don01])**.** K/L の K_h 同変変形量子化の族 $\{\mathcal{O}_{h,\varphi}(K/L)\}_{\varphi\in X_{K/L}}$ であって，φ に関して代数的なものが存在する．また，K/L の K_h 同変変形量子化 $\mathcal{O}_h(K/L)$ に対して，$\varphi \in X_{K/L}[\![h]\!]$ であって $\mathcal{O}_h(K/L) \cong \mathcal{O}_{h,\varphi(h)}(K/L)$ となるものが一意に存在する．

ただしこの結果は関連するコホモロジー群の消滅によって示されており，具体的でない．具体的な構成法については Etingof らと Mudrov により generic な $\varphi \in X_{K/L}$ に対して与えられた ([EEM07, Mud07])．これは $U(g)$ の表現論における Verma 加群の構成を少しひねり，その End 環の然るべき部分環として変形量子化が実現できるというものである．

筆者は，この構成を K_q 同変量子化の構成に応用するために，次のような結果を示した．

Theorem 5.5 (H. [Hos25], c.f. De Commer [DC13])**.** 変形された量子包絡環の代数的な族 $\{U_{q,\varphi}(\mathfrak{k})\}_{\varphi\in X_{K/L}}$ を然るべき意味での integral form として構成でき，$q = e^h$ とおいて Verma 加群の構成をまねることで K/L の K_h 同変変形量子化の代数的な族を $X_{K/L}$ 上で構成できる．

特に定理 5.4の後半の主張により，任意の同変変形量子化が構成できている．また integral form で構成を行っているため，作用素環の設定にも応用できる．特に $K = SU(n), X = SU(n)/T$ の場合に，次のことを示した．

Theorem 5.6 (H. in preparation)**.** $X^{\mathrm{quot}}_{SU(n)/T} := X_{SU(n)/T} \cap [-1,1]^{n(n-1)}$ とおく．

(i) 任意の $\varphi \in X^{\mathrm{quot}}_{SU(n)/T}$ について，$U_{q,\varphi}(\mathfrak{su}(n))$ をもとに $SU(n)/T$ の $SU_q(n)$ 同変量子化 $(SU(n)/T)_{q,\varphi}$ が構成できる．

(ii) $(SU(n)/T)_q$ を $SU(n)/T$ の $SU_q(n)$ 同変量子化とする．このとき $\varphi \in X^{\mathrm{quot}}_{SU(n)/T}$ であって $(SU(n)/T)_q \cong (SU(n)/T)_{q,\varphi}$ となるものが一意に存在する．

[*9] これは $SU(n)$ の作用で不変という意味ではなく，$SU(n)$ に定まる標準的な Poisson 構造と整合的という意味である．

参考文献

[DC13] K. De Commer, *Representation theory of quantized enveloping algebras with interpolating real structure*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. **9** (2013), Paper 081, 20. MR3208147

[DC17] K. De Commer, *Actions of compact quantum groups*, Topological quantum groups, Banach Center Publ., vol. 111, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2017, pp. 33–100. MR3675047

[DCNTY19] K. De Commer, S. Neshveyev, L. Tuset, and M. Yamashita, *Ribbon braided module categories, quantum symmetric pairs and Knizhnik-Zamolodchikov equations*, Comm. Math. Phys. **367** (2019), no. 3, 717–769. MR3943480

[DCY13] K. De Commer and M. Yamashita, *Tannaka-Kreĭn duality for compact quantum homogeneous spaces. I. General theory*, Theory Appl. Categ. **28** (2013), No. 31, 1099–1138. MR3121622

[Don01] J. Donin, $U_h(\mathfrak{g})$ *invariant quantization of coadjoint orbits and vector bundles over them*, J. Geom. Phys. **38** (2001), no. 1, 54–80. MR1817512

[SD99] J. V. Stokman and M. S. Dijkhuizen, *Quantized flag manifolds and irreducible $*$-representations*, Comm. Math. Phys. **203** (1999), no. 2, 297–324. MR1697598

[EEM07] B. Enriquez, P. Etingof, and I. Marshall, *Quantization of some Poisson-Lie dynamical r-matrices and Poisson homogeneous spaces*, Quantum groups, Contemp. Math., vol. 433, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, pp. 135–175. MR2349621

[Hos25] M. Hoshino, *Polynomial Families of Quantum Semisimple Coajoint Orbits via Deformed Quantum Enveloping Algebras*, Comm. Math. Phys. **406** (2025), no. 8.

[Jan96] J. C. Jantzen, *Lectures on quantum groups*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. MR1359532

[Jim12] M. Jimbo, 量子群とヤン・バクスター方程式, シュプリンガー現代数学シリーズ, vol. 1, 丸善出版, 2012.

[Kas95] C. Kassel, *Quantum groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 155, Springer-Verlag, New York, 1995. MR1321145

[Kon03] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds*, Lett. Math. Phys. **66** (2003), no. 3, 157–216. MR2062626

[KS97] A. Klimyk and K. Schmüdgen, *Quantum groups and their representations*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1997. MR1492989

[LS91] S. Levendorskiĭ and Y. Soibelman, *Algebras of functions on compact quantum groups, Schubert cells and quantum tori*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), no. 1, 141–170. MR1116413

[Mud07] A. Mudrov, *Quantum conjugacy classes of simple matrix groups*, Comm. Math. Phys. **272** (2007), no. 3, 635–660. MR2304470

[Nes14] S. Neshveyev, *Duality theory for nonergodic actions*, Münster J. Math. **7** (2014), no. 2, 413–437. MR3426224

[NT12] S. Neshveyev and L. Tuset, *Quantized algebras of functions on homogeneous spaces with Poisson stabilizers*, Comm. Math. Phys. **312** (2012), no. 1, 223–250. MR2914062

[NT13] S. Neshveyev and L. Tuset, *Compact quantum groups and their representation categories*, Cours Spécialisés [Specialized Courses], vol. 20, Société Mathématique de France, Paris, 2013. MR3204665

[Pod87] P. Podleś, *Quantum spheres*, Lett. Math. Phys. **14** (1987), no. 3, 193–202. MR0919322

[Tom24] R. Tomatsu, 作用素環論入門, 共立出版, 2024.

[VY20] C. Voigt and R. Yuncken, *Complex semisimple quantum groups and representation theory*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2264, Springer, Cham, 2020. MR4162277

[Wei95] A. Weinstein, *Deformation quantization*, Astérisque **227** (1995), Exp. No. 789, 5, 389–409 (English, with French summary). Séminaire Bourbaki, Vol. 1993/94. MR1321655

Quiver から得られる nilpotent Lie 代数と幾何構造

大阪公立大学　大学院理学研究科　数学専攻
溝口史華 (Fumika MIZOGUCHI) *

概要

微分幾何学において, 与えられた Lie 群が特別な幾何構造を許容するかどうかを調べることは重要な問題である. しかし, 一般に特別な幾何構造を許容する Lie 群を分類することは困難である. 特に, nilpotent や solvable Lie 群に関しては, 体系的な分類も難しく, 一般的な議論が難しいという現状がある. 本講演は, quiver から nilpotent Lie 代数を構成するという新たな方法を紹介する. さらに, 得られた nilpotent Lie 代数に対応する単連結 Lie 群は, すべて左不変 Ricci soliton Riemann 計量を許容することについて述べる. また, Ricci-flat 擬 Riemann 計量や symplectic 構造などの他の左不変幾何構造についての結果も述べる. 本講演の一部は, 田丸博士氏との共同研究に基づく.

1　導入

与えられた多様体が特別な幾何構造を許容するかどうかを調べることは, 微分幾何学において重要な問題である. 多様体の中でも, Lie 群は左不変幾何構造を付随し, 特別な左不変幾何構造を許容する Lie 群の分類も基本的な問題の一つである. しかし, 特定の幾何構造に関して, すべての Lie 群を分類することは困難である. 実際, Lie 群上の左不変 Einstein Riemann 計量の分類は, 5 次元以下でしか達成されていない.

また, Lie 群の研究には Lie 代数が密接に関係しており, 単連結 Lie 群とそれに付随する左不変計量は, Lie 代数とその内積に対応する. Lie 代数の観点から Lie 群上の左不変幾何構造を調べることができる. すべての Lie 代数は, Levi 分解によって semi-simple part と solvable part に分けられる. semi-simple Lie 代数は完全な分類がなされているのに対し, solvable Lie 代数はその部分代数である nilpotent Lie 代数でさえ分類がなされていない. このことから, nilpotent Lie 群上の幾何構造について一般的な議論を行うことは困難となっている.

定義 1.1　Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}^{i-1}, \mathfrak{g}]$ とする. このとき, $\mathfrak{g}^{m-1} \neq 0$, $\mathfrak{g}^m = 0$ を満たすならば, Lie 代数 $\mathfrak{g}$ を m-step nilpotent Lie 代数という.

nilpotent Lie 代数は, 2-step の場合に盛んに研究されている. 2-step nilpotent Lie 代数の具体例の一つに, §2.1 で紹介するグラフから得られる nilpotent Lie 代数がある. この方法で得られた 2-step nilpotent Lie 代数上の幾何構造について様々な研究がなされている. しかし, step 数が高い場合は扱いやすい具体例が少ない. このことから, 扱いやすい step 数の高い nilpotent Lie 代数を構成することは重要である. また, nilpotent Lie 群上の幾何構造は興味深い具体例を多く供給する. 例えば, nilpotent Lie 群は, Einstein でない Ricci soliton Riemann 計量を許容する例を多く持つ. 加えて, Ricci soliton Riemann 計量を許容する nilpotent Lie 群は, solvable Lie 群や等質多様体全体への寄与も大きい. nilpotent Lie 群は, その他の幾何構造についても非常に興味深い対象である.

本研究は, quiver から Lie 代数を構成する. quiver とは, ループと多重辺を許す有向グラフである. quiver の矢 α_1, α_2, …, α_m に対して, 各矢の始点と終点が一致するとき, 矢の列 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m$ を道といい, m を道の長さという. quiver に対して, 道で張られる空間上に積を定めたものを道代数という. この積を用いて, 括弧積を定義することで Lie 代数を構成する. cycle を含まない有限 quiver から得られる Lie 代数は nilpotent で, step 数は

* E-mail:sw23882u@st.omu.ac.jp

quiver の道の最大値である. したがって, この方法により任意の step 数の nilpootent Lie 代数を得られる. これらの nilpotent Lie 代数は, quiver の矢のつながりから括弧積を定めているので計算が比較的容易で扱いやすい. 本研究では, この方法で得られた nilpotent Lie 群が Ricci soliton Riemann 計量のような特別な幾何構造を許容するかどうかを調べる.

2 既知の例

以下では, nilpotent Lie 代数を構成する方法を紹介する.

2.1 グラフから得られる nilpotent Lie 代数

一つ目は, グラフから得られる nilpotent Lie 代数である. 集合 V と集合 $E \subset \{(x,y) \in V \times V \mid x \neq y\}$ の組 $\Gamma = (V, E)$ を単純有向グラフという. V の元を頂点といい, E の元を辺という. 辺 $e = (x, y)$ に対して, x を e の始点といい, y を e の終点という. 単純有向グラフから次のように 2-step nilpotent Lie 代数を定義する.

定義 2.1（Dani-Mainkar, [DM]） 単純有向グラフ $\Gamma = (V, E)$ に対して,

$$\mathfrak{n}_\Gamma \coloneqq \mathrm{span}(V \cup E),$$

$$[x,y] = \begin{cases} e & (x,y \in V, e = (x,y)), \\ -e & (x,y \in V, e = (y,x)), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

とすると, 2-step nilpotent Lie 代数 $\mathfrak{n}_\Gamma$ を得る.

2.2 ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数

2 つ目は, ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数である. ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数とは, 次の例のように行列をブロック分割して, その対角ブロックとそれより下のブロックが 0 となるような行列全体のことである:

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 0 & x_1 & x_5 & x_8 \\ 0 & 0 & x_2 & x_6 & x_9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_3 & x_7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

この方法は, 3-step 以上の nilpotent Lie 代数を構成できる.

3 quiver から得られる Lie 代数

3.1 quiver

定義 3.1 集合 V, E, 写像 $s, t : E \to V$ に対して, 組 $Q = (V, E, s, t)$ を quiver という. V の元を 頂点 , E の元を 辺 , $\alpha \in E$ に対して, $s(\alpha)$ を 始点 , $t(\alpha)$ を 終点 という.

定義 3.2 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E$ に対して, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1}) \quad (1 \leq i \leq n-1)$ であるとき, 辺の列 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ が 道 であるという. このとき, n を 道の長さ という.

例 3.3 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, E = \{a, b, c, d, e\}$ とし, $s(a) = v_1, s(b) = v_2, s(c) = v_3, s(d) = v_3, s(e) = v_4, t(a) = v_2, t(b) = v_4, t(c) = v_4, t(d) = v_4, t(e) = v_5$ とすると quiver となり, 図示すると, 図 1 のようになる.

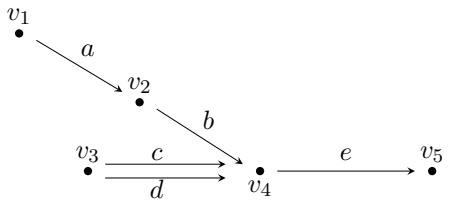


図 1　例 3.3 の quiver

この quiver の道は, $a, b, c, d, e, ab, be, ce, de, abe$ の 10 個.

quiver Q の道 $x = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ に対して, 道 x の始点は, $s(\alpha_1)$ であり, $s(x)$ と書き, 道 x の終点は, $t(\alpha_n)$ であり, $t(x)$ と書く.

3.2　nilpotent Lie 代数の構成

定義 3.4　quiver $Q = (V, E, s, t)$ に対して, Q のすべての道の集まりを $\mathrm{Path}(Q)$ とし, $\mathfrak{n}_Q$ を次で定める:

$$\mathfrak{n}_Q \coloneqq \operatorname{span}\mathrm{Path}(Q).$$

また, $x, y \in \mathrm{Path}(Q)$ 対して, 積と括弧積を

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & (t(x) = s(y)), \\ 0 & (t(x) \neq s(x)), \end{cases} \qquad [x, y] = x \cdot y - y \cdot x$$

と定めると, $\mathfrak{n}_Q$ は Lie 代数となる. これを Q から得られる Lie 代数 という.

注意 3.5　n_Q に積 $\cdot$ を入れたものは道代数として既に知られている. 道代数の場合は, 頂点を長さ 0 の道として含めるのが一般的である. 今回は, 長さ 1 以上を道として扱う.

quiver Q の道 x に対して, $s(x) = t(x)$ であるとき, x を cycle という. 辺が有限集合である有限 quiver が cycle を含まないとき, quiver のすべての道の長さの最大値が存在する. これを quiver の長さ という.

命題 3.6　Q を cycle を含まない有限 quiver とすると, $\mathfrak{n}_Q$ は有限次元の nilpotent Lie 代数となる. また, 長さが m の quiver から得られる Lie 代数は, m-step nilpotent Lie 代数である.

3.3　例

例 3.7　次の図 2 の quiver から得られる Lie 代数 $\mathfrak{n}$ は 3 次元 Heisenberg 代数と同型.



図 2　例 3.7

例 3.8　次の図 3 の quiver から得られる Lie 代数は $\mathfrak{n} = \operatorname{span}\{a, b, c, d, ac, bc, cd, acd, bcd\}$ で次と同型:

$$\left\{ \left(\begin{array}{cc|c|c|c} 0 & 0 & x_1 & x_5 & x_8 \\ 0 & 0 & x_2 & x_6 & x_9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_3 & x_7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & x_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

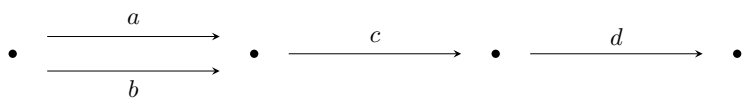


図 3　例 3.8

3.4　既知の例との比較

以下では, quiver から得られる nilpotent Lie 代数と §2 で紹介した既知の方法で得られる具体例を比較する. まずは, グラフから得られる nilpotent Lie 代数と比較する. グラフから Lie 代数を構成する方法は, 2-step nilpotent Lie 代数しか得られない. quiver から得られる nilpotent Lie 代数が 2-step の場合は, 図 4 のような quiver から得られる nilpotent Lie 代数の直和である. 図 4 のような quiver を (m,n)-type quiver と呼ぶ. ただし, $m \geq 1$, $n \geq 0$ であり, $(1,0)$-type quiver から得られる Lie 代数は abelian である.

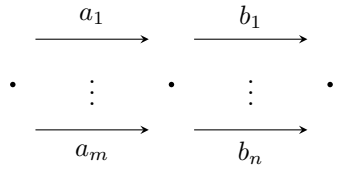


図 4　The (m,n)-type quiver

(m,n)-type quiver から得られる nilpotent Lie 代数は, 図 5 のような (m,n) 完全 2 部グラフから得られる nilpotent Lie 代数と同型である. したがって, quiver から得られる nilpotent Lie 代数が 2-step の場合は, 単純有向グラフから nilpotent Lie 代数を構成する方法によって得られる. しかし, 単純有向グラフからは 3-step 以上の nipotent Lie 代数が得られないので, quiver から得られる nilpotent Lie 代数が 3-step 以上の場合はグラフ方法では得られない.

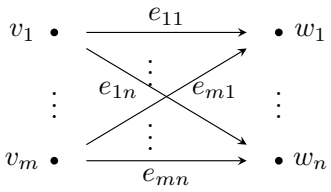


図 5　(m,n) 完全 2 部グラフ

次に, 例 3.7, 例 3.8 は, ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数である. しかし, ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数には quiver から得られないものが存在する. また, quiver から得られる nilpotent Lie 代数には, ブロック分割から得られないものが存在する.

- 次の Lie 代数は quiver からは得られない.

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & x_1 & x_2 & x_5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

- 次のような図 6 の quiver から得られる nilpotent Lie 代数は, ブロック分割からは得られない.

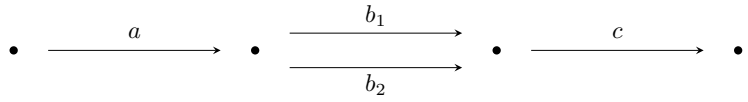


図 6　ブロック分割から得られない nilpotent Lie 代数

この quiver の長さ 1 の道は 4 本, 長さ 2 の道は 4 本, 長さ 3 の道が 2 本である. これを満たすブロック分割は存在しない.

4　主結果

以下では, quiver から得られる nilpotent Lie 代数が特別な左不変幾何構造を許容するかどうかについて述べる. 本研究では, Ricci soliton Riemann 計量, Ricci-flat 擬 Riemann 計量, 左不変 symplectic 構造に関して結果を得た. 以降, 簡単のため幾何構造や定理は Lie 代数の視点で述べる.

4.1　Ricci soliton Riemann 計量

定義 4.1　内積つき Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ が 代数的 Ricci soliton であるとは, $c \in \mathbb{R}, D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ が存在して, 次を満たすこと:

$$\mathrm{Ric} = c \cdot \mathrm{id} + D.$$

一般に, 与えられた nilpotent Lie 群が Ricci soliton Riemann 計量を許容するかどうかは不明である. §2 で紹介した例に関して, 以下のような結果が知られている.

定理 4.2（Lauret-Will, [LW]）　グラフから得られる Lie 代数が, 代数的 Ricci soliton を許容するのは, グラフが “positive” のときである.

定理 4.3（Tamaru, [T]）　ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数には, 代数的 Ricci soliton となる内積が存在する.

quiver から得られる nilpotent Lie 代数において, 次を示した.

定理 4.4（M.-Tamaru, [MT]）　cycle を含まない有限 quiver Q に対して, Q から得られる nilpotent Lie 代数 $\mathfrak{n}_Q$ は, 代数的 Ricci soliton を許容する.

4.2　Ricci-flat 擬 Riemann 計量

定義 4.5　不定値内積つき Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \langle , \rangle)$ に対して, $\mathrm{Ric} = 0$ を満たすとき, $\mathfrak{g}$ がRicci-flatであるという.

Riemann 計量とは異なり, 擬 Riemann 計量においては nilpotent Lie 群がいつ Ricci-flat を許容するか解明されていない. そのため, グラフから得られている nilpotent Lie 代数上においても研究がなされており, 次の定理が知られている.

定理 4.6（Conti-del Barco-Rossi, [CDR]）　グラフから得られる nilpotent Lie 代数はすべて Ricci-flat 擬 Riemann 計量を許容する.

2-step の場合は, quiver から得られる nilpotent Lie 代数はグラフから得られるので, 次が示される.

定理 4.7　長さ 2 の quiver Q に対して, Q から得られる 2-step nilpotent Lie 代数 $\mathfrak{n}_Q$ は Ricci-flat 擬 Riemann 計量を許容する.

3-step 以上の場合はグラフから得られないので, いつ Ricci-flat Riemann 計量を許容するかは不明である.

4.3　symplectic 構造

定義 4.8　Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して, 2-form ω が symplectic 構造であるとは, $d\omega = 0$ and $\omega^n \neq 0$ を満たすことである.

定理 4.9（Pouseele-Tirao, [PT]）　単純有向グラフ $\Gamma = (V, E)$ に対して, Γ から得られる nilpotent Lie 代数 $\mathfrak{n}_\Gamma$ が symplectic 構造を許容する必要十分条件は, $\mathfrak{n}_\Gamma$ の偶数次元であり, $\#E \leq \#V$ を満たすことである.

2-step の場合は, quiver から得られる nilpotent Lie 代数はグラフから得られるので, 次が示される.

定理 4.10　長さ 2 の quiver Q に対して, Q から得られる 2-step nilpotent Lie 代数が symplectic 構造を許容する必要十分条件は, 以下である:

(i)　$\mathfrak{n}_Q$ は偶数次元,
(ii)　Q の連結成分は以下のような $(2,2)$, $(1,n)$, $(n,1)$, $(1,0)$-type quiver のいずれか.



図 7　$(2,2)$-type

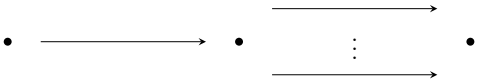


図 8　$(1,n)$-type

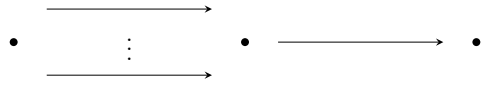


図 9　$(n,1)$-type

図 10　$(1,0)$-type

3-step 以上の場合はグラフから得られないので, いつ symplectic 構造を許容するかは不明である.

参考文献

[ASS] Assem, I., Simson, D. and Skowroński, A., "Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1. Techniques of representation theory", London Math. Soc. Stud. Texts, 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006. x+458 pp.

[CDR] Conti, D., del Barco, V. and Rossi, F. A., "Diagram involutions and homogeneous Ricci-flat metrics", Manuscripta Math. **165** (2021), no. 3-4, 381–413.

[DM] Dani, S. G. and Mainkar, M., "Anosov automorphisms on compact nilmanifolds associated with graphs", Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), no. 6, 2235–2251.

[LW] Lauret, J. and Will, C., "Einstein solvmanifolds: existence and non-existence questions", Math.

Ann. **350** (2011), no. 1, 199–225.

[MT] Mizoguchi, F. and Tamaru, H., "Nilpotent Lie algebras obtained by quivers and Ricci solitons", arXiv:2405.11184.

[M] Mizoguchi, F., "Two-step nilpotent Lie algebras obtained by quivers and geometric structures", to appear.

[PT] Pouseele, H. and Tirao, P., "Compact symplectic nilmanifolds associated with graphs", J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), no. 9, 1788–1794.

[T] Tamaru, H., "Parabolic subgroups of semisimple Lie groups and Einstein solvmanifolds", Math. Ann. **351** (2011), no. 1, 51–66.

ちょっと大きい普遍 Teichmüller 空間の構成に向けて

京都大学大学院　理学研究科　数学・数理解析専攻
松田　凌 (Ryo Matsuda) *

概要

通常, Riemann 面 S の Teichmüller 空間とは, S の擬等角写像を用いて構成される. しかしながら, 擬等角写像の退化版とみなせる David class による S の変形が普遍 Teichmüller 空間の境界に現れる例がいくつか見つかっている. そこで, そのような退化擬等角写像たちをも内点とみなせるような “ちょっと大きな Teichmüller 空間” を構成したくなる. 講演では構成やそれらの性質, また展望について述べたい.

1　動機

Teichmüller 空間論と呼ばれる, Riemann 面の Moduli 理論がある. これは, 簡単に言えば, 2 次元の向きづけられた位相多様体に定まる複素構造の変形空間である. いわゆる代数幾何における Riemann 面の Moduli 空間の普遍被覆であるが, 単にそれだけではない様々な応用, 発展がある. 複素力学系や三次元双曲幾何と相互に刺激し合いながら発展した Teichmüller 空間論は, あまたある”Moduli 理論”の中で最も成功したものの一つと言っても過言ではない. 実際, いくつもの分野で, “○○-Teichmüller 理論” と呼ばれるアナロジーの存在が示すように, いまだに影響を与え続けている. 本講演では, 函数論的な Teichmuüller 空間論を中心に, 無限型 Riemann 面と関連した研究を紹介したいと思う.

まず, タイトルについて説明する必要がある. 数学的に表現するならば,

普遍 Teichmüller 空間 (解析的無限型 Riemann 面) の Teichmüller 空間を構成する際の標識のクラスを, David map に取り替え, 通常の Teichmüller 空間を含み, 位相幾何的な情報が意味を持つ[*1]が,

通常の Teichmüller 空間と同様の (複素) 解析学が展開できるものを構成したい

とかける. 最初に何のためにこのようなことを考えるのか, 動機について少し述べる.

1.1　強すぎる Riemann の写像定理

Poincaré 曰く, 数学とは異なるものを同一視する学問であるらしい. 一般に, 何らかの構造 (ノルム, 位相, 多様体構造など) を持つ二つの対象がその構造を保つ写像で写り合うならば, それらを区別しないのが普通である. 例えば, 線型空間であれば線形同型, 位相空間であれば同相写像などが該当す

* E-mail:matsuda.ryou.82c@st.kyoto-u.ac.jp

[*1] この意味で, 解析的有限型 Riemann 面の Teichmüller 空間と近いと思いたい

る．函数論では, 等角写像 (双正則写像) がそれにあたる．ところが, 二つの領域に等角写像が存在するための条件として, 非常に強力な次の定理が知られている:

Theorem 1.1 (Riemann の写像定理)**.** $\Omega \subset \mathbb{C}$ は単連結かつ $\#\mathbb{C} \setminus \Omega \geq 2$ とする．このとき, Ω と $\mathbb{D}$ の間には双正則写像が存在する．

したがって, 単連結であって $\mathbb{C}, \hat{\mathbb{C}}$ と違うものは, 全て $\mathbb{D}$ と区別がつかないということがわかる．ところが, 函数論的な性質が全て同じか？と考えてみると, なにか違う気がしてくる・・・

$$A := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{z = x + iy \mid x = 1/2^n, 0 < y < 1 - 1/2^n\}$$

どうみても, 領域 A は “ナンカチガウ”．トポロジーの言葉を借りるなら, 領域の局所連結性が違う．$\mathbb{D}$ は $\mathbb{S}^1$ であるが, もう片方は違う．そうすると, 調和関数の性質が違ってくるように思える．(cf. Fatou の補題: $\mathbb{D}$ 上の有界調和関数は境界での振る舞いだけで決定される．)

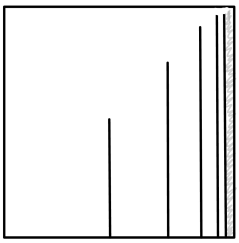


図 1　A のイメージ

なら, 境界が $\mathbb{S}^1$ と同相だったら, 函数論的な性質が全て同じであろうか．これも違う．

ハートの領域の外側 (図の白い方に注目) を考える．$\hat{\mathbb{C}}$ で補集合をとればこれは単連結である．$\mathbb{D}$ 内の点列が境界に近づくときは, 非接極限と接極限が考えられる．一方で, ハートの外側の領域では, 谷間のところで 非接極限と接極限を区別して考えることができない．



図 2　ハートの外側

1.2　解析で切り開く低次元トポロジー

上の例からわかるように, 単連結かつ境界が $\mathbb{S}^1$ と同相 (そのような領域は Jordan 領域と呼ばれる) だからといっても, 函数論的性質が完全に一致しなさそうである．難しいことは考えなくても, 上で考えた, “ナンカチガウ” を, 表現したり説明できるようになりたい．普遍 Teichmüller 空間は, $\mathbb{D}$ の函数論的性質が同じような Jordan 領域の集まりに見える．そこで, 私はほんのちょっとだけ, 普遍 Teichmüller 空間 (とその境界) に現れる Jordan 領域が, Riemann の写像定理より函数論にとって適切な同一視を与えてくれるのではないかと期待する．そこで, 普遍 Teichmüller 空間 (とその境界) に現れる図形たちの特徴づけが, (少なくとも私にとっての) 大きな目標である．

2　準備

Teichmüller 空間といっても, 定義の仕方や解釈の仕方はいくつもある．例えば,

変形の対象	変形する構造	Teichmüller 空間の座標
解析的有限 / 解析的無限	複素構造 / 双曲構造	Fenchl-Nielsen 座標, Bers 埋め込み

などがある. 他にも, 考える境界として, Thurston 境界 / Bers 境界 / Gardiner-Masur 境界などがある. これらの組み合わせだけバリエーションがあり, それぞれの関係性についての研究もある. [*2] 今回は, 解析的無限型 Riemann 面の複素構造の変形空間とみなし, 境界として Bers 境界を考える. 以下では, それらに必要な事柄とここまでの文章に現れた単語のできる限り明確な定義を与える. しかしながら, この研究分野を簡潔に述べる能力を持ち得ないので, もし興味を持たれた場合は, [IT, Gar] などを参照することをお勧めする.

2.1 双曲構造 v.s. 等角構造 (複素構造)

本稿では, 主に複素構造の変形空間として Teichmüller 空間を定義するが, やはり, 双曲構造の変形空間としての側面を無視するわけにはいかない.

Definition 2.1. X を実 2 次元の向きづけられた位相多様体とする. X の Atlas $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ が次の条件: $\varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{C}/\mathbb{H}$ であって, $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ が等角 / (双曲距離に関して) 等長 となるとき, Atlas $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を等角構造[*3]/ 双曲構造 という. また, そのような Atlas を持つとき, X は等角構造[*4]/ 双曲構造を許容するという.

実 2 次元の幾何には, 奇跡が起こっている. それは, 等角構造と双曲構造が一致することにある. 正確には次のように述べられる:

Theorem 2.2 (一意化定理)**.** X を, 種数 g の曲面から $0 \geq n \geq \infty$ を除いたものとする. $3g-3+n > 0$ を満たすか, 無限大か, $\mathbb{S}^1$ と同相な境界を持つならば X が双曲構造を許容することと, 等角構造を許容することは同値である.

上の仮定を満たす X のことを双曲型という. 4 種類の Riemann 面を除いて, 全て双曲型であることが知られている. また, $3g-3+n \leq 0$ であっても, 複素構造を許容する.

Definition 2.3. X を実 2 次元の向きづけられた位相多様体とする. X の複素構造 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ との組み $(X, \{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda})$ を一次元複素多様体 (Riemann 面) という.

2.2 解析的有限 v.s. 解析的無限

種数 $g \geq 0$ の Compact Riemann 面からたかだか n 個の点 (puncture という) を除いたものを有限型 Rienann 面という. 種数が無限大であって, $\mathbb{S}^1$ と同相な境界を持つものを第二種無限型 Rienann 面といい, そうでないものを第一種無限型 Rienann 面という. この解析的有限 / 無限 の区別は, それらの Teichmüller 空間が有限次元になるか無限次元になるかを区別している. 第一種 / 第

[*2] 組み合わせによっては定義されていないものもある. 例えば, 解析的無限型の場合, Thurston 境界を定義することも難しい.

[*4] 一変数函数論の一般論から, 実 2 次元においては, 等角構造と複素構造は一致するため, 本稿では同一視する.

二種は, 無限次元になる原因が異なっていることを区別している. 注意しておくべきことは, 第二種無限型 Rienann 面は, 種数が有限の場合もありうる. これらの Rienann 面の変形理論は, トポロジーからの制約を受けることがあり, ある種の剛性定理が成立することがある. このようなトポロジーを考慮せず, 複素構造の変形のみを考える際には $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ の Teichmüller 空間を考えることがある. これを普遍 Teichmüller 空間という.

2.3 Teichmüller 空間

手始めに, Compact な実 2 次元の向きづけられた位相多様体 X の Teichmüller 空間を定義する. X と同相な Riemann 面 R と向きを保つ同相写像 $f : X \to R$ の組み (R, f) を標識付き Riemann 面といい, f を標識という. 二つの標識付き Riemann 面 (R_1, f_1), (R_2, f_2) が Teichmüller 同値であるとは, ある 等角写像 $c : R_1 \to R_2$ が存在して, $c \circ f_1$ と f_2 が isotopic であることをいう. つまり, ある連続写像 $H(t, x) : [0, 1] \times X \to R_2$ が存在して, $H(0, x) = c \circ f_1, H(1, x) = f_2$ を満たし, 各 $t \in [0, 1]$ ごとに, $H(t, \cdot) : X \to R_2$ は同相写像であることをいう. また,

$$\mathcal{T}_X := \{(R, f) \mid \text{標識付き Riemann 面 }\}/\text{Teichmüller 同値}$$

を, X の Teichmüller 空間という. 通常, X と同相な Riemann 面全体を等角同値で割ったものを Moduli 空間という. Moduli 空間も Teichmüller 空間も, いずれも X を Riemann 面とみなせる Atlas を全て集めてきたものである. 一方で, Moduli 空間と Teichmüller 空間の違いは, 標識をつけることにある. 標識のおかげで, 例えば X 上の本質的単純閉曲線がどんなふうに変形されたか, とか, 基本群の生成系はどう対応したか, という位相幾何学的な情報を利用することができる.

ところで, Compact であることを用いると, 標識として微分同相写像を取ることが知られている. 向きを保つ微分同相写像とは, 次で述べる擬等角写像になっており, これを用いることで, Teichmüller 空間に構造を導入することができる.

2.3.1 擬等角写像

Definition 2.4 (平面擬等角写像)**.** $\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合とし, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ を向きを保つ中への同相写像とする. このとき, f が次の条件 :

1. $f \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$
2. $\exists k \in [0, 1)$ s.t. $|f_{\bar{z}}| \leq k|f_z|$ a.e.

を満たすとき, $K := \frac{1+k}{1-k}$ として, K - 擬等角写像 (K-qc) という. K を f の最大歪曲度といい, $K(f)$ と書く.

一つ目の条件は, 解析的な条件であって今はあまり重要視しないでおく. 二つ目の条件は, 幾何的な説明ができる. Ω 上の C^1 級写像 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ が正則であるための条件として, Cauchy-Riemann 方程式:

$$f_{\bar{z}} = 0 \text{ on } \Omega$$

が知られている．これは, 接写像と言葉で書くと,

$$T_z f = \begin{pmatrix} f_x & -f_y \\ f_y & f_x \end{pmatrix}$$

であるから, $T_z\Omega$ の単位円を, $T_{f(z)}\mathbb{C}$ の単位円に写すことがわかる．一方, 擬等角写像については, $T_z\Omega$ の単位円を $T_{f(z)}\mathbb{C}$ の楕円に写す．楕円の長軸と短軸は, $\frac{|dz|+|d\bar{z}|}{|dz|-|d\bar{z}|}$ で抑えられる．つまり, 定義域上一様に, 楕円の歪み度合いが K で抑えられているものが, 擬等角写像の特徴である．

f を K-擬等角写像とする．$\mu_f := \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$ は, 可測 かつ L^∞ ノルム : $\|\mu_f\|_\infty \leq k := \frac{K-1}{K+1} < 1$ かつ,

$$f_{\bar{z}} = \mu_f f_z$$

なる偏微分方程式を満たす．μ_f を方程式の Beltrami 係数, 方程式を Beltrami 方程式という．これらは, 実に次元の Riemann 幾何において, 等温座標と密接な関係を持っている．Beltrami 方程式と擬等角写像の関係として次が知られている．

Theorem 2.5 (Measurable Riemann mapping Theorem ([Ahl], Chapter 5, B, Theorem 5))**.** $\mathbb{C}$ 上の可測写像 μ で, $\|\mu\|_\infty < 1$ を満たすものに対して, μ を *Beltrami* 係数にもつ $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への擬等角写像が存在する．特に, $0, 1$ *(*自動的に ∞ も*)* を固定するという条件で一意的に決まる．

2.3.2 擬等角写像と Fuchs 群を用いた Teichmüller 空間の定義

Riemann 面 X が与えられたとき, 被覆理論の一般論から, 普遍被覆 $p : \mathbb{H} \to X$ と離散群 $\Gamma < PSL(2;\mathbb{R})$ が存在して, X と 軌道空間 $\mathbb{H}/\Gamma$ は同型になる．Fuchs 群の変形を介して Riemann 面の変形を定義したいと思う．

$$L^\infty(\Gamma) := \left\{ \mu \in L^\infty \middle| \mu \circ \gamma \cdot \frac{\overline{\gamma'}}{\gamma'} = \mu \ (\forall \gamma \in \Gamma) \right\}, \quad \mathrm{Bel}(\Gamma) := \{\mu \in L^\infty(\Gamma) \mid \|\mu\|_{L^\infty} < 1\}$$

とおく．このとき, $\mu \in \mathrm{Bel}(\Gamma)$ に対して, $\overline{\mu(\bar{z})}$ と拡張したものを定理 2.5 に適用すると, 擬等角写像 $f^\mu : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ が手に入る．μ が満たす条件 $\mu \circ \gamma \cdot \frac{\overline{\gamma'}}{\gamma'} = \mu$ によって,

$$\Gamma^\mu := f^\mu \Gamma \circ (f^\mu)^{-1} < PSL(2;\mathbb{R})$$

がわかる．つまり, 軌道空間 $\mathbb{H}/\Gamma, \mathbb{H}/\Gamma^\mu$ の間に写像 $\tilde{f}^\mu : \mathbb{H}/\Gamma \to \mathbb{H}/\Gamma^\mu$ が誘導される．これは, 局所座標ごとに表示すると, 擬等角写像になっていることがわかる．したがって, $\mathrm{Bel}(\Gamma)$ の各元は Riemann 面 $\mathbb{H}/\Gamma$ の変形を与える．次に Teichmüller 同値に相当する条件を定義する必要がある．$\mu, \nu \in \mathrm{Bel}(\Gamma)$ に対して, $\hat{\mathbb{R}}$ 上で $f^\mu = f^\nu$ が成り立つとき円周同値であるという．

Proposition 2.6. 標識つき *Riemann* 面 $(\mathbb{H}/\Gamma^\mu, \tilde{f}^\mu), (\mathbb{H}/\Gamma^\nu, \tilde{f}^\nu)$ が *Teichmüller* 同値であることと, μ と ν が円周同値であることは同値である．ただし, $\mathbb{H}/\Gamma$ が $\mathbb{S}^1$ と同相な境界を持つ場合は, その境界を固定する *isotomic* を考えることとする．

この命題によって, Riemann 面 X の Teichmüller 空間として, $\mathrm{Teich}(X) := \mathrm{Bel}(\Gamma)/$円周同値 と定義する．擬等角写像を用いることで, $\mathrm{Teich}(X)$ に距離構造を容易に導入できる．

Definition 2.7 (Teichmüller 距離)**.** Teich(X) 上に,

$$d_T([\mu],[\nu]) := \frac{1}{2}\inf \log K(w_{\tilde{\mu}} \circ w_{\tilde{\nu}})$$

とおく. ここに, inf は $\mu' \in [\mu]$, $\nu' \in [\nu]$ 全体でとる.

Theorem 2.8 ([Ahl])**.** $(\mathrm{Teich}(X), d_T)$ は完備距離空間である.

さらに, Teichmüller 空間を複素 Banach 空間の開部分集合として実現することができる.

2.3.3 Klein 群と Teichmüller 空間

Definition 2.9.

$$B(\Gamma) := \left\{ \varphi\mathbb{H}^* \text{ 上の } \Gamma \text{ に関する正則二次微分 } \middle| \|\varphi\|_{B(\Gamma)} := \left\|\rho_{\mathbb{H}^*}^{-2}\varphi\right\|_\infty < \infty \right\}$$

とおく. ただし, $\rho_{\mathbb{H}^*}^{-2}$ は $\mathbb{H}^*$ 上の Poincaré 計量である. また, 正則二次微分とは,

$$\varphi \circ \gamma \cdot (\gamma')^2 = \varphi$$

を満たすことをいう.

Theorem 2.10 (Bers embedding[Ber])**.** Γ を *Fuchs* 群とする. このとき, $\mathcal{B} : \mathrm{Teich}(\Gamma) \ni [\mu] \mapsto \{f_\mu, z\} \in B(\Gamma)$ は像の上への同相写像であって, $\Delta_{B(\Gamma)}(0;2) \subset \mathcal{B}(\mathrm{Teich}(\Gamma)) \subset \mathrm{Cl}(\Delta_{B(\Gamma)}(0;6))$ を満たす. *(* ここに, $\{f,z\} := \frac{f'''}{f'}(z) - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}(z)\right)^2$. また, f_μ とは, $\mathbb{H}$ 上で μ, $\mathbb{H}^*$ で 0 とした *Beltrami* 係数に対する $0, 1$ を固定する擬等角写像である. *)*

この定理によって, Bers 埋め込みを介して, Teichmüller 空間には複素構造が定めることができる. また, Riemann-Roch の定理から, $\mathbb{H}/\Gamma$ が解析的有限な双曲型 Riemann 面ならば, $B(\Gamma)$ は $3g-3+n$ 次元であることがわかる. つまり, Teichmüller 空間は 複素 $3g-3+n$ 次元の多様体である. 解析的無限型ならば, $B(\Gamma)$ も無限次元である. いずれの場合も, $B(\Gamma)$ の有界領域になっているから, $B(\Gamma)$ の位相を用いることで $\mathrm{Teich}(X)$ の境界を構成できる. これを Bers 境界といい, $\partial_{\mathrm{Bers}}\,\mathrm{Teich}(X)$ とかく.

Bers 埋め込みと関連して, Klein 群の観点から埋め込まれた Teichmüller 空間の見方について少し述べる. 各 $\varphi \in B(\Gamma)$ に対して, $\mathbb{H}^*$ 上の局所単葉函数で,

$$\{W_\varphi, z\} = \varphi, \quad W_\varphi(z) = (z+i)^{-1} + o(1) \text{ near } z = -i$$

を満たすものがただ一つ存在する. そこで, $B(\Gamma)$ の部分集合で次のようなものを定義する :

$$S(\Gamma) := \{\varphi \in B(\Gamma) \mid W_\varphi \text{は単葉 }\},$$
$$T(\Gamma) := \{\varphi \in S(\Gamma) \mid W_\varphi \text{は } \mathbb{H} \text{ に擬等角拡張を持つ }\}$$

これは, $\mathcal{B}(\mathrm{Teich}(X)) = T(\Gamma)$ であり, $\mathrm{Cl}(T(\Gamma)) \subset S(\Gamma)$ が知られている.

各 $\varphi \in B(\Gamma)$ に対して, ある $\chi_\varphi : \Gamma \to PSL(2;\mathbb{C})$ であって,

$$\chi_\varphi(\gamma) \circ W_\varphi = W_\varphi \circ \gamma$$

を満たす準同型写像が定義される．$\varphi \in S(\Gamma)$ のとき, 像 $\chi_\varphi(\Gamma)$ は離散部分群であって, $\hat{\mathbb{C}}$ に作用する．基本群 $\pi_1(X)$ と Γ が同型であったこと, $PSL(2;\mathbb{C})$ は三次元双曲空間の向きを保つ等長変換群と一致することに注意すると, $\chi_\varphi \in \mathrm{Rep}(\pi_1(X), PSL(2;\mathbb{C}))$ [*5] とみなすことができる．これによって, 三次元双曲幾何との関連がここに生じる．

Definition 2.11 (regular b 群の分類)**.** $\chi_\varphi(\Gamma)$ に対して, 次の条件を考える：

1. $\chi_\varphi(\Gamma)$ の不連続領域の連結成分が二つの時, 擬 Fuchs 群という．
2. $\chi_\varphi(\Gamma)$ の不連続領域の連結成分が一つの時, 全退化 b 群という．
3. ある双曲型の元 $\gamma \in \Gamma$ が存在して, $\chi_\varphi(\gamma)$ が放物型の元になる時, cusp という．

Theorem 2.12 (Bers [Ber], Maskit [Mas])**.** Γ が有限生成第一種 *Fuchs* 群とする．このとき, $\chi_\varphi(\Gamma)$ が擬 *Fuchs* 群ならば, $\varphi \in T(\Gamma)$ である．

また, $\varphi \in \partial T(\Gamma)$ ならば, $\chi_\varphi(\Gamma)$ は *cusp* または全退化 *b* 群である．

第一種 Riemann 面に対応する Fuchs 群の Teichmüller 空間とその Bers 境界に現れる Klein 群は Accola によって定義 2.11 が分類になっていることが知られている．

2.4 David 写像と Teichmüller 空間

Teichmüller 空間は, $\mathrm{Bel}(\Gamma)$ の同値類であったことを思い出すと, その境界には $\|\mu\|_{L^\infty} = 1$ を満たすものによって得られそうである．得られそうではあるが, $\|\mu\|_{L^\infty} = 1$ を満たす $L^\infty(\Gamma)$ に対応する Beltrami 方程式 $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ に同相解があることから非自明である．これは, 次の定理が知られている:

Definition 2.13 (David 条件, 局所指数可積分条件)**.** $U \subset \mathbb{C}$ を開集合とする．$\mu \in L^\infty(U)$ が, ほとんど至るところ $|\mu|_\infty < 1$ かつ, ある $C, \alpha, \varepsilon_0 > 0$ が存在して,

$$|\{z \in \mathbb{C} \mid |\mu(z)| > 1 - \varepsilon\}|_{\mathrm{sph}} \leq C \exp\left(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\right) \quad (0 < \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0)$$

を満たすとき, $(C, \alpha, \varepsilon_0)$*–David* 条件を満たすという．特に, $(C, \alpha, \varepsilon_0)$ を必要としない時, 単に *David* 条件を満たすと言う．$|\cdot|_{\mathrm{sph}}$ は球面測度とする．また, David 条件を満たす Beltrami 微分を, *David-Beltrami* 微分という．また, David-Beltrami 微分全体を $\mathrm{Delt}(U)$ と書くこととする．

また, $\mu \in L^\infty(U)$ が, $K_\mu(z) := \frac{1+|\mu(z)|}{1-|\mu(z)|}$ に対して, ある $p \in (0, \infty)$ が存在して, $e^K \in L^p_{\mathrm{loc}}$ を満たす時, μ は 指数 L^p_{loc} 歪曲条件を満たすと言う．

Theorem 2.14 (Generalized Riemann mapping theorem, [Dav])**.** 開集合 $U \subset \mathbb{C}$ 上の可測関数 μ が *David* 条件を満たすとする．このとき, ある同相写像 $f \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(U)$ が存在し, $f_{\bar{z}} = \mu f_z$ を満たす．また, 前からの等角写像の合成の差を除いて, f は一意的である．

定理 2.14 に適用して得られる解を David 写像という．David 写像によって得られる変形が実際に Teichmüller 空間の Bers 境界に存在することは証明されている:

[*5] 詳細な定義は避けるが, 離散 かつ 忠実な表現全体を $PSL(2;\mathbb{C})$ 共軛で割ったものである．

Theorem 2.15 (M.)**.** X を解析的無限型 *Riemann* 面であって, 単純閉測地線が無限に存在するとする. また,

$$\inf\{\text{length}(\gamma) \mid \gamma \subset X \text{ 単純閉測地線 }\} > 0$$

を満たし, 無限本の測地線の族 $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ とある定数 $M > 0$ が存在して

$$\sup\{\text{length}(\gamma_n) \mid \gamma_n \subset X \text{ 単純閉測地線 }\} < M$$

を満たす. このとき, X の *Fuchs* 群モデル $\mathbb{H}/\Gamma$ とすると, 次を満たす: $\mathrm{Delt}(\mathbb{H}) \cap L^\infty(\Gamma) \neq$ かつ $\mu \in \mathrm{Delt}(\mathbb{H}) \cap L^\infty(\Gamma)$ が与える *David* 写像による変形が, $\partial_{\mathrm{Bers}}\,\mathrm{Teich}(X)$ に存在する.

特に, *David* 写像による変形からなるような *Riemann* 面の正則族が存在する. またパラメーター空間として, 無限次元なものができる.

David 写像による変形が Teichmüller 空間の境界に存在することは, 定理 2.12 に反する. これを反例として捉えて終わり, と思うのではなく, 今の定義で捉えられている変形された複素構造が不十分であると思う立場をとることもできる. そのような立場のもと, 考察の対象とすべき Riemann 面たちを全て集めてきたような十分な Teichmüller 空間の構成を目指しているのがこの研究である.

3 ちょっと大きい Teichmüller 空間の後世に向けて (主結果)

以下では, David-Beltrami 微分の擬等角安定性および, その近傍で Bers 埋め込みが拡張して定義されること, およびその連続性についてまとめる. まず, 計算を簡単にするため,

$$\mathrm{Delt}(\mathbb{D}) := \{\mu \in L^\infty(\mathbb{D}) \mid \mu\text{は David-Beltrami 微分 }\}$$

として, support を $\mathbb{D}$ にしておく. このとき, 球面測度と通常の Lebesgue 測度は比較可能なので, 測度は全て Lebesgue 測度として良い.

3.1 擬等角安定性

David 写像による変形を擬等角写像で摂動することを考える. これには二つの摂動の方法がある:

Theorem 3.1 ((M.) David Beltrami 微分の右側擬等角安定性)**.** *David Beltrami* 微分 μ は, 擬等角安定である. つまり, $\nu \in \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ とし, ν に対して, $f^\nu : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ とする. このとき, $\mathrm{bel}(f_\mu \circ (f^\nu)^{-1}) \circ f^\nu$ は, $(C', \alpha', \varepsilon_0')$ *–David* 条件を満たす.

Theorem 3.2 ((M.)David Beltrami 微分の左側擬等角安定性)**.** $\mu \in L^\infty(\mathbb{D})$ を *David–Beltrami* 微分とし, f_μ をその *Beltrami* 方程式の同相解とし, $\Omega_\mu := f_\mu(\mathbb{D})$ とする. このとき, 任意の $\nu \in \mathrm{Bel}(\Omega_\mu)$ に対して, $\mathrm{bel}(f_\nu \circ f_\mu) \in L^\infty(\mathbb{D})$ は再び *David* 条件を満たす.

これら二つの証明については, 素朴な計算からわかるので, 割愛する.

3.2 Delt($\mathbb{D}$) の構造について

Proposition 3.3. 各 $\mu \in \mathrm{Delt}(\mathbb{D})$ に対して,

$$\Lambda_\mu : \Delta_{L^\infty(\Omega_\mu)}(0;1) \ni \nu \mapsto \mathrm{bel}(f_\nu \circ f_\mu)$$

を考えると, これは $\mathrm{Delt}(\mathbb{D})$ への写像であって, 単射連続になる. また, Λ_μ は *Fréche* 微分可能にもなる.

Proof. 定理 3.2 より, $\Lambda_\mu(\mathrm{Bel}(\Omega_\mu)) \subset \mathrm{Delt}(\mathbb{D})$ を満たす. また, Beltrami 微分の合成則より,

$$\mathrm{bel}(f_\nu \circ f_\mu) = \frac{\theta_\mu^{-1}\nu \circ f_\mu + \mu}{1 + \theta_\mu^{-1}\bar{\mu}\nu \circ f_\mu}$$

とかける. ここで, $\theta_\mu = (f_\mu)_z / \overline{(f_\mu)_z}$ とした. $\nu \in \Delta_{L^\infty(\Omega_\mu)}(0;1)$ とし, 列 (ν_n) を ν に収束するものをとる. このとき,

$$\|\Lambda_\mu(\nu_n) - \Lambda_\mu(\nu)\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty$$

を示す. 十分大きい n において, $\|\nu_n\|_{L^\infty} < 1$ としてよく,

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{bel}(f_{\nu_n} \circ f_\mu) - \mathrm{bel}(f_\nu \circ f_\mu)| \\
&= \left| \frac{\theta_\mu^{-1}\nu_n \circ f_\mu + \mu}{1 + \theta_\mu^{-1}\bar{\mu}\nu_n \circ f_\mu} - \frac{\theta_\mu^{-1}\nu \circ f_\mu + \mu}{1 + \theta_\mu^{-1}\bar{\mu}\nu \circ f_\mu} \right| \\
&= \left| \frac{(\theta_\mu^{-1}\nu_n \circ f_\mu + \mu)(1 + \theta_\mu^{-1}\bar{\mu}\nu \circ f_\mu) - (\theta_\mu^{-1}\nu \circ f_\mu + \mu)(1 + \theta_\mu^{-1}\bar{\mu}\nu_n \circ f_\mu)}{(1 + \theta_\mu^{-1}\bar{\mu}\nu \circ f_\mu)(1 + \theta_\mu^{-1}\bar{\mu}\nu_n \circ f_\mu)} \right| \\
&\leq \frac{(1 + |\mu|^2) \cdot |(\nu_n - \nu) \circ f_\mu|}{(1 - |\theta_\mu^{-1}\bar{\mu}\nu \circ f_\mu|)(1 - |\theta_\mu^{-1}\bar{\mu}\nu_n \circ f_\mu|)} \\
&\leq \mathrm{Const} \cdot |(\nu_n - \nu) \circ f_\mu| \leq \mathrm{Const} \cdot \|\nu_n - \nu\|_{L^\infty(\Omega_\mu)}.
\end{aligned}$$

よって, 連続性がわかる. 単射性は式の形からわかる. つまり, 各点に対して Möbius 変換の形をしていることからわかる.

Fréche 微分可能性も, Möbius 変換の形をしていることから良い. □

上の命題は, $\mathrm{Delt}(\mathbb{D})$ のある種の多様体構造のようなものを与えているように見える. つまり,

$$\{\mathrm{Delt}(\mathbb{D}), (\Lambda_\mu)_{\mu \in \mathrm{Delt}(\mathbb{D})}\}$$

によって, $\mathrm{Delt}(\mathbb{D})$ を多様体のようにみなせるということである. ただし, L^∞-norm に関して開集合ではないことに注意しておく.

Theorem 3.4 ((M.) Extended Bers embedding)**.** $\mu \in \mathrm{Delt}(\mathbb{D})$ とする. $\Delta_{L^\infty(\Omega_\mu)}(0;1) \ni \nu \mapsto S(f_{\Lambda_\mu(\nu)}) \in B(\mathbb{D}^*)$ は連続. 特に *Fréche* 微分可能である.

以上の事実から, $\mathrm{Teich}(\mathbb{D}) = \mathrm{Bel}(\mathbb{D})/\text{Teichmüller 同値}$ を包含する空間として, $\mathrm{Delt}(\mathbb{D})/\text{Teichmüller 同値}$ が定義され, Bers 埋め込みの拡張を介して観察することで解析的構造を持つことがわかったことになる.

3.3 いくつかの注意および今後の課題

まず, Λ_μ の微分 $d_0\Lambda_\mu$ は有界線形作用素であるが, 閉作用素ではない. 実際,

$$d_0\Lambda_\mu(\nu) = (1 - |\mu|)\nu$$

という形をしており, $\mu \in \mathrm{Delt}(\mathbb{D}) \setminus \mathrm{Bel}(\mathbb{D})$ から取れば, 閉ではないことがわかる.

次の仕事は二つある. $\mathrm{Delt}(\mathbb{D})$ が開集合ではない. そこで, L^∞-norm ではない位相を定義することで $\mathrm{Delt}(\mathbb{D})$ を開集合とみなせるか？である. これができれば, 本当の意味で, ちょっと大きい Teichmüller 空間と思える.

Extended Bers embedding を構成できたが, これの (局所的な) 逆写像は構成できるだろうか？紙面の関係で説明できないが, 通常の Teichmüller 空間の場合, Bers 埋め込みの局所的な逆写像として, Ahlfors-Weil 切断というものが存在する. これを David 写像に関しても構成できるかが問題になる.

参考文献

[Ahl] Lars V. Ahlfors with appendix by C. J. Earle, I. Kra, M. Shishikura and J. H. Hubbard, *Lectures on Quasiconformal Mappings* Second Edition (American Mathematical Society, 2006)

[Ber] L. Bers, On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups I, Ann. of Math. **91** (1970), 570–600.

[Dav] G. David, Solutions de l'equation de Beltrami avec $\|\mu\| = 1$, Acta Math. **173**(1994) 37–60.

[Gar] Frederick. P. Gardiner, *Teichmüller Theory and quadratic differentials*, John Wiley and Sons, 1987.

[IT] Y. Imayoshi and M. Taniguchi, *An introduction to Teichmüller spaces*, Springer – Verlag, Tokyo, 1992.

[Mas] B. Maskit, On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups II, Ann. of Math. **91** (1970), 607–639.

[Mat] R. Matsuda, *New degeneration phenomenon for infinite-type Riemann surfaces*, arXiv: 2405.04178(2024).

有向サイクルの二乗グラフの有向全域木について

早稲田大学　基幹理工学部
田中優帆 (Yuuho TANAKA) *

概要

D. J. Kleitman 氏と B. Golden 氏は，1975 年に，行列木定理を使わず，無向サイクルの二乗グラフの頂点数が偶数の場合のみ，平面グラフの位相的性質を使って全域木を数え上げていた．しかし，頂点数が奇数の場合は，同様に全域木の総数を数え上げられることを言及するだけにとどめていた．2024 年には，宗政昭弘氏達が，奇数頂点の場合も含めて，行列木定理を使わずに同様の手法で無向サイクルの二乗グラフの全域木を数え上げることができている．本研究では，その研究を拡張し，有向サイクルの二乗グラフについても，行列木定理を使わず，さらに，頂点数の偶奇に依らずに，有向全域木の総数を数え上げる．

1　はじめに

人間を頂点，関係性を辺と見なすと，社会科学的ネットワークをグラフとして描くことができ，端末を頂点，ケーブルを辺と見なすと，コンピュータネットワークをグラフとして描くことができる．このように様々なネットワークはグラフとして描くことができるため，ネットワークの複雑性を解析するためにグラフが用いられることがしばしばある．そして，グラフの全域木は，ネットワークにおける全ての頂点に接続されているような経路と対応付けられ，ネットワークの複雑性や信頼性を特徴づける重要な指標である [8].

定義 1.1 (全域木)**.** 無向グラフ G に対して,

$$E(G') \subseteq E(G), V(G) = V(G')$$

を満たす G' を G の全域部分グラフであるという．連結グラフ G における全域部分グラフ G' が連結であり，閉路がないグラフであるとき，G' をグラフ G の全域木という（例：図 2)．グラフ G の全域木の総数は，$t(G)$ で表す.

定義 1.2 (有向全域木)**.** 有向グラフ $\overrightarrow{G}$ における有向辺の向きを無視してできるグラフが連結であるとき，有向グラフ $\overrightarrow{G}$ は弱連結であるといい，有向グラフ $\overrightarrow{G}$ に対して,

$$E(\overrightarrow{G'}) \subseteq E(\overrightarrow{G}),\ V(\overrightarrow{G}) = V(\overrightarrow{G})$$

を満たす $\overrightarrow{G'}$ を $\overrightarrow{G}$ の全域部分グラフであるという．弱連結であるグラフ G における全域部分グラフ

* E-mail:tanaka_yuuho@aoni.waseda.jp

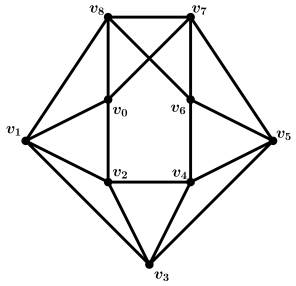


図 1　無向グラフ

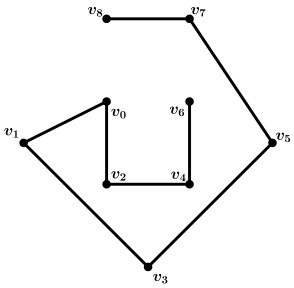


図 2　図 1 の全域木

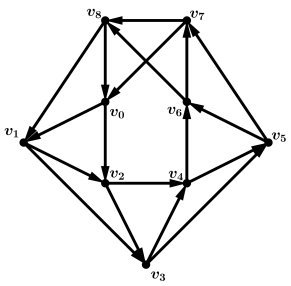


図 3　有向グラフ

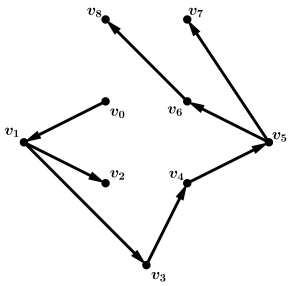


図 4　図 3 の有向全域木

$\overrightarrow{G'}$ が弱連結であり，以下を満たすとき，$\overrightarrow{G'}$ を $u \in V(\overrightarrow{G})$ を根としたグラフ $\overrightarrow{G}$ の有向全域木という（例：図 4）.

- $\overrightarrow{G'}$ は閉路をもたない.
- 任意の頂点 $v \in V(\overrightarrow{G'}) \setminus \{u\}$ に対して，$u \in V(\overrightarrow{G'})$ からの有向道が存在する.
- 任意の頂点 $v \in V(\overrightarrow{G'}) \setminus \{u\}$ の入次数は 1 である.

u を根としたグラフ $\overrightarrow{G}$ の有向全域木の総数は，$t(\overrightarrow{G}, u)$ で表す.

一般に，連結グラフの全域木の総数は行列木定理 [4, 6, 13] を用いて数え上げることができる．より正確には，グラフのラプラシアン行列の非ゼロ固有値の積をグラフの頂点数で割ったものと，グラフの全域木の総数が一致する.

定義 1.3 (ラプラシアン行列)**.** $G = (V, E)$ をグラフとする．このとき，グラフ G のラプラシアン行列 L_G とは，以下のように定義される.

$$L_G(i,j) = \begin{cases} d(i) & \text{if } i = j, \\ -1 & \text{if } i \neq j,\ (i,j) \in E, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

ここで，$d(i)$ は頂点 i が接続している辺の総数である.

定理 1.1 (行列木定理)**.** 無向グラフ G の任意の頂点 u に対して，L_G の第 u 行と第 u 列を除いた部分行列を $L_G[u]$ とすると，

$$\det L_G[u] = t(G).$$

有向グラフ $\overrightarrow{G}$ の任意の頂点 u に対して，$L_{\overrightarrow{G}}$ の第 u 行と第 u 列を除いた部分行列を $L_{\overrightarrow{G}}[u]$ とすると，

$$\det L_{\overrightarrow{G}}[u] = t(\overrightarrow{G}, u).$$

これまで無向巡回グラフ等の全域木の総数の明示的な公式の導出が行われており [7, 9, 10, 15]，有向グラフについても，有向巡回グラフ等の全域木の総数の明示的な公式の導出が行われている [2, 7, 14]．特に，無向サイクルの二乗グラフ（例：図 5）については，G. Baron 氏らによって行列木定理を用いた全域木の総数の導出が行われている [1].

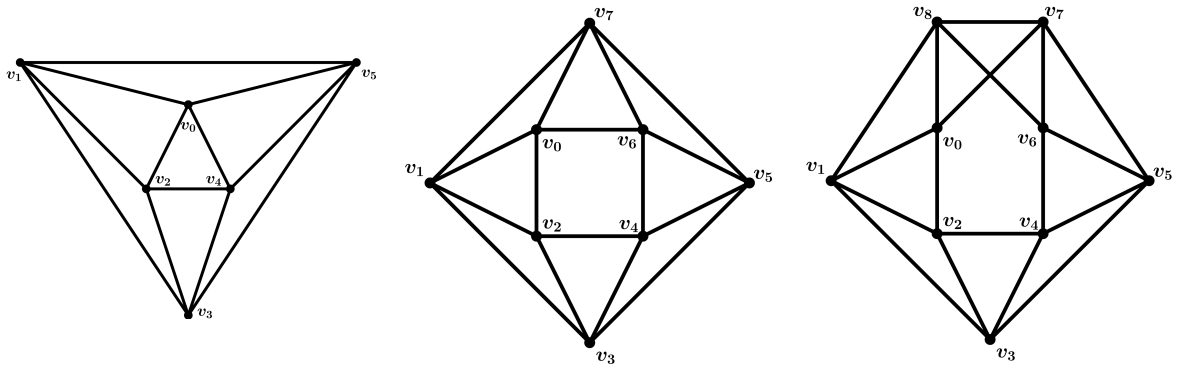


図 5　無向サイクルの二乗グラフ

一方で，D. J. Kleitman 氏らは，行列木定理を使わずに無向サイクルの二乗グラフの全域木の総数を数え上げている．具体的には，頂点数が偶数の場合のみ平面グラフの位相的性質を使って全域木を数え上げており，無向サイクルの二乗グラフの全域木の総数を Fibonacci 数列を用いて表していた [3]．しかし，頂点数が奇数の場合は，同様に全域木の総数を数え上げられることを言及するだけにとどめていた．

定義 1.4 (Fibonacci 数列)**.** 漸化式 $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ によって決まる数列 F_n を Fibonacci 数列という．

定理 1.2 (B. Kleitman, D. J. Golden, 1975 [3])**.**

$$t(C_n^2) = nF_n^2.$$

グラフの全域木の総数は行列木定理を用いることで簡単に求められるが，全域木の構成に関する付加情報は得られない．D. J. Kleitman 氏らの手法を用いると，全域木の構成に関する付加情報を得ながら全域木の総数を数え上げることが可能である．そして，2024 年には，宗政昭弘氏らが，奇数頂点の場合も含めて，行列木定理を使わずに同様の手法で無向サイクルの二乗グラフの全域木を数え上げることができており，無向サイクルの三乗グラフ等にも同様の手法が適用可能であると考えられる [11].

2　主結果 - 有向サイクルの二乗グラフの有向全域木

既に述べたように，一般に，有向グラフ $\overrightarrow{G}$ の頂点 $u \in V(\overrightarrow{G})$ を根とした有向全域木の総数も，行列木定理を用いて求めることができるため，有向サイクルの二乗グラフの $v_j \in V(\overrightarrow{C_n^2})$ を根とした有向全域木の総数についても，行列木定理を用いて公式を導出することが可能である．

定義 2.1 (Jacobsthal 数列)**.** 漸化式 $J_0 = 0, J_1 = 1, J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ によって決まる数列 J_n を Jacobsthal 数列という．

定理 2.1. 有向サイクルの二乗グラフ $\overrightarrow{C_n^2}$ に対して頂点 $v_j (v_j \in V(\overrightarrow{C_n^2}),\ j \in \mathbb{Z})$ を根とした有向全域木の総数は，

$$t(\overrightarrow{C_n^2}, v_j) = J_n.$$

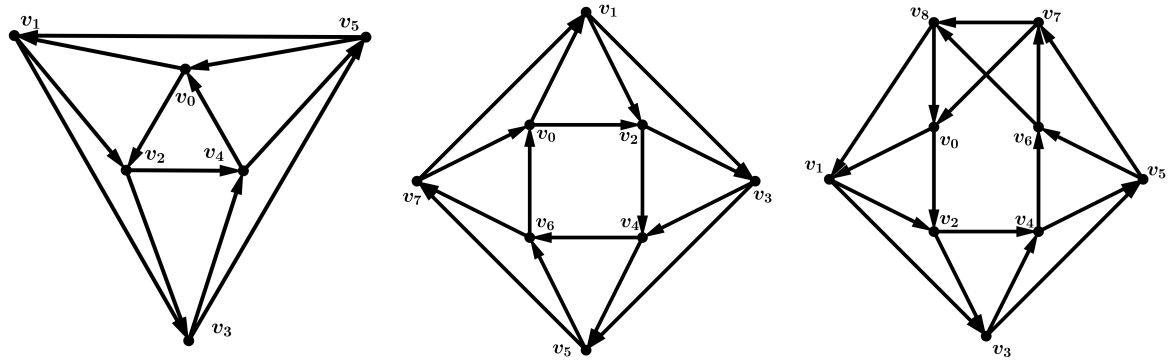


図 6　有向サイクルの二乗グラフ

行列木定理を用いると，有向サイクルの二乗グラフ $\overrightarrow{C_n^2}$ の有向全域木の総数の公式は導出できるが，全域木の構成に関する付加情報は得られない．我々は，[11] と同様に，行列木定理を用いず，有向全域木の構成に関する付加情報を得ながら，有向全域木の総数を数え上げた．本節では，その得られた公式およびその計算過程について紹介する．

定義 2.2 (有向サイクルの二乗グラフ)**.** n 頂点有向サイクルの二乗グラフ $\overrightarrow{C_n^2} = (V(\overrightarrow{C_n^2}), E(\overrightarrow{C_n^2}))$ とは，点集合 $V(\overrightarrow{C_n^2}) = \mathbb{Z}_n$ (n 次巡回群)，辺集合 $E(\overrightarrow{C_n^2}) = \{(v_i, v_j) \mid v_i, v_j \in V(C_n^2),\ i, j \in \mathbb{Z},\ j-i = 1, 2\}$ により定義される（例：図 6）．ここで，$v_i = i + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_n$ とおく．

次に，記法の準備をいくつか行うことにする．有向サイクルの二乗グラフ $\overrightarrow{C_n^2}$ の辺を

$$e_i = (v_i, v_{i+1}),\ f_i = (v_i, v_{i+2}) \quad (i \in \mathbb{Z})$$

と表すことにすると，有向サイクルの二乗グラフ $\overrightarrow{C_n^2}$ の辺集合は，

$$E(\overrightarrow{C_n^2}) = \{e_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \cup \{f_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$$

となる．さらに，$j, k \in \mathbb{Z},\ 0 \le k \le \lceil \frac{n-2}{2} \rceil$ に対して，

$$ES(n, k, j) = \{f_{j-2}, f_{j+2k-1}\} \cup \{e_{j-1}, e_j, e_{j+1}, \ldots, e_{j+2k-1}\}$$

を逃げ道と呼ぶ（例：図 7–10 の波線部）．このとき，グラフ $\overrightarrow{S_{n,k,j}}$ を以下のように定義する（例：図 7–10 の実線部）．

$$V(\overrightarrow{S_{n,k,j}}) = V(\overrightarrow{C_n^2}),$$
$$E(\overrightarrow{S_{n,k,j}}) = E(\overrightarrow{C_n^2}) \setminus ES(n, k, j).$$

一般に，頂点 $u \in V(\overrightarrow{G})$ を根とした有向グラフ $\overrightarrow{G}$ の有向全域木全体の集合を $T_{\overrightarrow{G},u}$ とする．したがって，$t(\overrightarrow{G}, u) = |T_{\overrightarrow{G},u}|$ となる．

このとき，グラフ $\overrightarrow{S_{n,k,j}}$ の有向全域木の総数と有向ストリップグラフ $\overrightarrow{S_{n-2k}}$ の有向全域木の総数に関する以下の補題が成り立つ．

定義 2.3 (有向ストリップグラフ)**.** $V(\overrightarrow{S_n}) = \{i \in \mathbb{Z} \mid 1 \le i \le n\}$，$E(\overrightarrow{S_n}) = \{(i, j) \mid i, j \in V(S_n), 1 \le j - i \le 2\}$ で定義されるグラフ $\overrightarrow{S_n} = (V(\overrightarrow{S_n}), E(\overrightarrow{S_n}))$ を有向ストリップグラフという（例：図 16）．

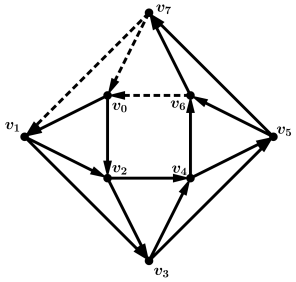


図 7　$n = 8$, $k = 0,\ j = 0$

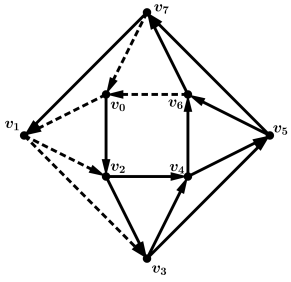


図 8　$n = 8$, $k = 1,\ j = 0$

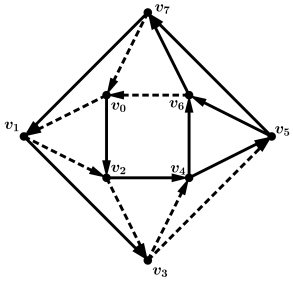


図 9　$n = 8$, $k = 2,\ j = 0$

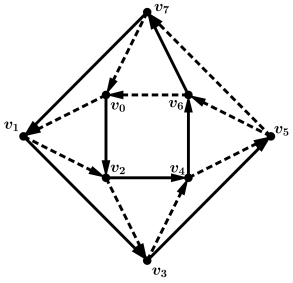


図 10　$n = 8$, $k = 3,\ j = 0$

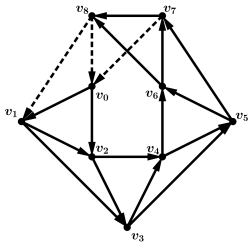


図 11　$n = 9$, $k = 0,\ j = 0$

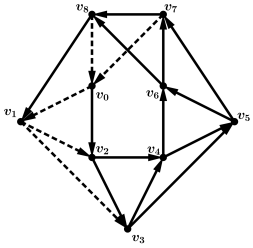


図 12　$n = 9$, $k = 1,\ j = 0$

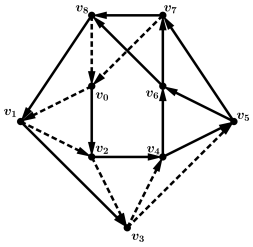


図 13　$n = 9$, $k = 2,\ j = 0$

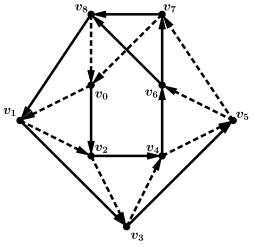


図 14　$n = 9$, $k = 3,\ j = 0$

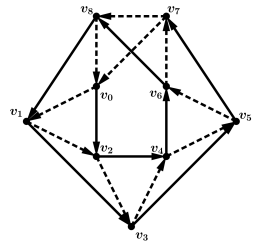


図 15　$n = 9$, $k = 4,\ j = 0$

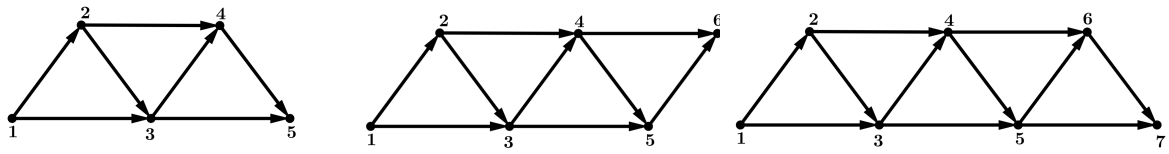


図 16　有向ストリップグラフ

補題 2.1. 任意の $v_j (v_j \in V(\overrightarrow{C_n^2}),\ j \in \mathbb{Z})$ に対して，

$$t(\overrightarrow{S_{n,k,j}}, v_j) = t(\overrightarrow{S_{n-2k}}, 1) \quad (j, k \in \mathbb{Z},\ 0 \le k \le \lceil \frac{n-2}{2} \rceil .)$$

特に，

$$T_{\overrightarrow{S_{n,\lceil \frac{n-2}{2} \rceil, j}}, v_j} = \{\overrightarrow{S_{n,\lceil \frac{n-2}{2} \rceil}}, j\}.$$

そして，有向ストリップグラフ $\overrightarrow{S_n}$ の有向全域木の総数について，以下の補題が成り立つ．

補題 2.2.

$$t(\overrightarrow{S_n}, 1) = J_{n-2} + J_{n-1}.$$

次に，有向サイクルの二乗グラフ $\overrightarrow{C_n^2}$ の有向全域木とグラフ $\overrightarrow{S_{n,k,j}}$ の有向全域木の関係について述べる．有向サイクルの二乗グラフ $\overrightarrow{C_n^2}$ に対して，

$$T_i = \{e_i, e_{i+1}, f_i\} \quad (i \in \mathbb{Z})$$

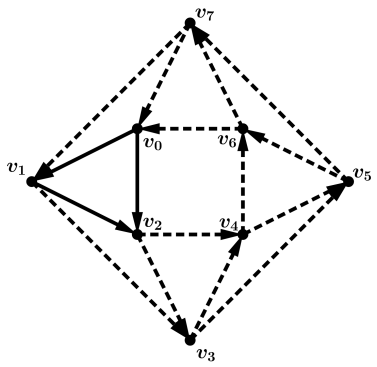


図 17　T_0

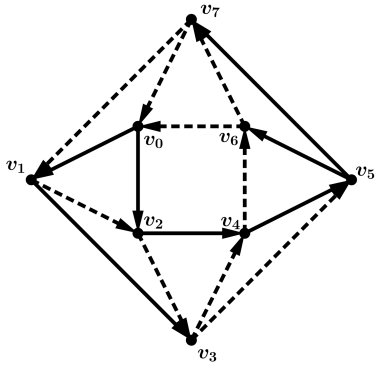


図 18　三角形に関して閉じていない

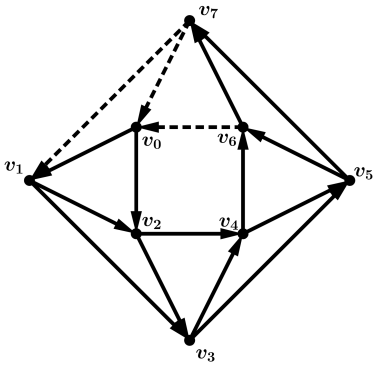


図 19　三角形に関して閉じている

とする（例：図 17）．$i(i \in \mathbb{Z})$ に対して，$\overrightarrow{C_n^2}$ の部分グラフ $\overrightarrow{G}$ が，

$$|T_i \cap E(\overrightarrow{G})| \text{ または } T_i \subseteq E(\overrightarrow{G})$$

を満たすとき，$\overrightarrow{G}$ は三角形 T_i に関して閉じているという．任意の $i(i \in \mathbb{Z})$ に対して，$\overrightarrow{G}$ が三角形 T_i に関して閉じているとき，$\overrightarrow{G}$ は三角形に関して閉じているという（例：図 18，19）．

全域木に対して，三角形に関して閉じるように有向サイクルの二乗グラフ $\overrightarrow{C_n^2}$ の辺を追加していくと，やがて，以下の定理に現れるグラフになる．

定理 2.2. $\overrightarrow{G}$ を三角形に関して閉じている有向サイクルの二乗グラフ $\overrightarrow{C_n^2}$ の弱連結な全域部分グラフとする．このとき，次のいずれかが成り立つ．

- $E(\overrightarrow{G}) = E(\overrightarrow{C_n^2})$.
- ある $k, j(0 \leq j \leq n-1,\ 0 \leq k \leq \lceil \frac{n-2}{2} \rceil)$ が存在して，$E(\overrightarrow{G}) = E(\overrightarrow{S_{n,k,j}})$.
- n は奇数で，$E(\overrightarrow{G}) = \{f_{j-1}, f_j, \ldots, f_{j+n-2}\}$.

したがって，有向サイクルの二乗グラフ $\overrightarrow{C_n^2}$ の有向全域木とグラフ $\overrightarrow{S_{n,k,j}}$ の有向全域木について，以下の定理が成り立つ．

定理 2.3. 任意の $v_j(v_j \in V(\overrightarrow{C_n^2}),\ j \in \mathbb{Z})$ に対して，

$$T_{\overrightarrow{C_n^2}, v_j} = \bigcup_{k=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} T_{\overrightarrow{S_{n,k,j}}, v_j} \quad \text{(disjoint)}.$$

以上の補題および定理と，以下の補題 2.3 を用いることで，定理 2.1 を証明することができる．

補題 2.3 (A. F. Horadam, 1996 [5])**.**

$$\sum_{k=1}^{n-1} J_k = \frac{1}{2}(J_{n+1} - 1).$$

定理 2.1 の証明

$$
\begin{aligned}
t(\overrightarrow{C_n^2}, v_j) &= |T_{\overrightarrow{C_n^2}, v_j}| \\
&= |\bigcup_{k=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} T_{\overrightarrow{S_{n,k,j}}, v_j}| && \text{（定理 2.3 より）} \\
&= \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} t(\overrightarrow{S_{n,k,j}}, v_j) \\
&= \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n-2}{2} \rceil} t(\overrightarrow{S_{n-2k}}, 1) && \text{（補題 2.1 より）} \\
&= \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} t(\overrightarrow{S_{2k+2}}, 1) & \text{if } n \text{ は偶数} \\ 1 + \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} t(\overrightarrow{S_{2k+3}}, 1) & \text{if } n \text{ は奇数} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} (J_{2k} + J_{2k+1}) & \text{if } n \text{ は偶数} \\ 1 + \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} (J_{2k+1} + J_{2k+2}) & \text{if } n \text{ は奇数} \end{cases} && \text{（補題 2.2 より）} \\
&= \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} J_k & \text{if } n \text{ は偶数} \\ 1 + \sum_{k=1}^{n-1} J_k & \text{if } n \text{ は奇数} \end{cases} \\
&= \frac{1}{2}(J_{n+1} - (-1)^n) && \text{（補題 2.3 より）} \\
&= J_n.
\end{aligned}
$$

□

3 最後に

本講演では，有向サイクルの二乗グラフを対象とし，有向全域木の構成の付加情報を得られるような手法で有向全域木の総数を数え上げた．なお，本稿の内容は，[12] に基づく．

今後の展望としては，有向サイクルの二乗グラフの有向全域木の総数の公式に現れる Jacobsthal 数列に組合せ論的解釈を与えることが考えられる．さらに，無向サイクルの三乗グラフ等の全域木の総数を同様の手法で数え上げる，二点を同一視した全域木の総数を同様の手法で数え上げる，等も考えられる．

■謝辞　本研究は，科学研究費補助金（課題番号 23KJ2020）の助成を受けている．

参考文献

[1] G. Baron, H. Prodinger, R. F. Tichy, F. T. Boesch, J. F. Wang. : The number of spanning trees in the square of a cycle, *Fibonacci Quart.* **23**(3) (1985) 258–264.

[2] X. Chen. : The number of spanning trees in directed circulant graphs with non-fixed jumps, *Discrete Math.* **307** (2007) 1873–1880.

[3] D. J. Kleitman, B. Golden. : Counting trees in a certain class of graphs, *Amer. Math. Monthly*, **82**(1) (1975) 40–44.

[4] C. Godsil, G. Royle. : *Algebraic Graph Theory*, Springer, 2001.

[5] A. F. Horadam. : Jacobsthal representation numbers, *Fibonacci Quart.* **34**(1) (1996) 68–74.

[6] P. D. Leenheer. : An elementary proof of a matrix tree theorem for directed graphs, *SIAM Rev.* **62** No.3 (2020) 716–726.

[7] J. Louis. : Spanning trees in directed circulant graphs and cycle power graphs, *Monatsh Math* **182** (2017) 51–63.

[8] F. Ma, B. Yao. : An iteration method for computing the total number of spanning trees and its applications in graph theory, *Theoretical Computer Science* **708** (2018) 46–57.

[9] A. D. Mednykh, I. A. Mednykh. : The number of spanning trees in circulant graphs, its arithmetic properties and asymptotic, *Discrete Math.* **342**(6) (2019) 1772–1781.

[10] A. D. Mednykh, I. A. Mednykh. : On rationality of generating function for the number of spanning trees in circulant graphs, *Algebra Colloq.* **27**(1) (2020) 87–94.

[11] A. Munemasa, Y. Tanaka. : Convex subgraphs and spanning trees of the square cycles, *Australas. J. Combin.* **88**(2) (2024) 204–211.

[12] Y. Tanaka. : The spanning trees in the directed square cycles, in preparation.

[13] W. T. Tutte. : *Graph Theory*, Cambridge University Press, 2001.

[14] J. M. Wojciechowski, M. Fellows. : Counting spanning trees in directed regular multigraphs, *J. Franklin Inst.* **326** (1989) 889–896.

[15] X. Yong, T. Acenjian. : The numbers of spanning trees of the cubic cycle C_N^3 and the quadruple cycle C_N^4, *Discrete Math.* **169** (1997) 293–298.

パラレルセッション
会場Ａ

格子への線形な有限群作用と mod q 置換表現

大阪大学　大学院理学研究科　数学専攻
内海　凌 (Ryo UCHIUMI) *

概要

格子 L への線形な有限群作用が与えられたとき，各正整数 q に対して，L/qL 上の置換表現 (mod q 置換表現) が定まる．この置換表現や各既約指標に関する重複度，軌道の個数などは，いずれも q に関する準多項式となる．本稿では，これらの準多項式がもついくつかの性質を述べる．さらに，Weyl 群と coroot lattice での結果として，mod q 置換表現の各既約指標に関する重複度が，対応する fundamental alcove の Ehrhart 準多項式と関係深いことを紹介する．

1 Introduction

この章では，数え上げ関数としてよく現れる準多項式を定義し，本研究の背景にある諸理論について紹介する．

1.1 Quasi-polynomials

R を可換環とする．写像 $F : \mathbb{Z}_{(>0)} \longrightarrow R$ が**準多項式 (quasi-polynomial)** であるとは，**周期 (period)** と呼ばれる正整数 $\tilde{n} \in \mathbb{Z}_{>0}$，**構成素 (constituent)** と呼ばれる多項式 $f_1(t), \ldots, f_{\tilde{n}}(t) \in R[t]$ が存在して，

$$F(z) = f_r(z), \quad \text{if } z \equiv r \mod \tilde{n}, \qquad (1 \leq r \leq \tilde{n})$$

を満たしているときにいう．準多項式はしばしば “周期的な多項式” とも呼ばれており，特に数え上げ問題に関連した様々な場面で現れている．

準多項式 F が **gcd-property** をもつとは，各構成素 f_i が $\gcd\{\tilde{n}, i\}$ の値だけで決まるときにいう．つまり，$\gcd\{\tilde{n}, i\} = \gcd\{\tilde{n}, j\}$ であるとき $f_i = f_j$ を満たす．すべての準多項式が gcd-property をもつわけではないが，準多項式における重要な性質の一つである．

以下では，本研究と関係深い二種類の準多項式を紹介する．

1.1.1 Ehrhart quasi-polynomial

$\mathcal{P}$ を $\mathbb{R}^\ell$ 上の有理多面体とし，これを q 倍した多面体 $q\mathcal{P}$ の格子点を数えることを考える．このとき，$q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に関する数え上げ関数

$$L_{\mathcal{P}} : q \longmapsto \#(q\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^\ell)$$

* E-mail: uchiumi.ryou.1xu@ecs.osaka-u.ac.jp / ryo.uchiumi.math@gmail.com

は準多項式である [BR07]．関数 $L_{\mathcal{P}}$ は **Ehrhart 準多項式 (Ehrhart quasi-polynomial)** と呼ばれる．特に，$\mathcal{P}$ が格子多面体であれば，$L_{\mathcal{P}}$ は単に多項式 (最小周期 1 の準多項式) となる．

Example 1.1. $\mathbb{R}$ 上の有理多面体として，長さ 1 の線分 $\mathcal{P} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ を考える．このとき，関数 $L_{\mathcal{P}}$ は周期 2 の準多項式となる:

$$L_{\mathcal{P}}(q) = \begin{cases} q & \text{if } q \equiv 1 \pmod 2; \\ q+1 & \text{if } q \equiv 2 \pmod 2. \end{cases}$$

1.1.2 Characteristic quasi-polynomial

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}^\ell$ を整数係数の零でない列ベクトルとする．正整数 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\mathbb{Z}_q \coloneqq \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ とおく．各列ベクトル $\alpha_i = {}^t(a_{i1}, \ldots, a_{i\ell}) \in \mathbb{Z}^\ell$ に対して，

$$[\alpha_i]_q \coloneqq {}^t([a_{i1}]_q, \ldots, [a_{i\ell}]]_q) \in \mathbb{Z}_q^\ell$$

とおく．ただし，$[a_{ij}]_q \coloneqq a_{ij} + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_q$ とする．$[\alpha_i]_q$ は α_i の ***q*-reduction** と呼ばれる．各 i に対して，$\mathbb{Z}_q^\ell$ 上の “超平面” $H_{q,i}$ を

$$H_{q,i} \coloneqq \left\{ x = (x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathbb{Z}_q^\ell \;\middle|\; x[\alpha_i]_q = [0]_q \right\}$$

で定め，$\mathbb{Z}_q^\ell$ 上の “超平面配置” $\mathcal{A}_q \coloneqq \{H_{q,1}, \ldots, H_{q,n}\}$ を与える．また，配置 $\mathcal{A}_q$ の補集合を

$$M(\mathcal{A}_q) \coloneqq \mathbb{Z}_q^\ell \setminus \bigcup_{i=1}^n H_{q,i}$$

で定義する．このとき，有限集合 $M(\mathcal{A}_q)$ を数え上げる関数

$$\chi_{\mathcal{A}}^{\mathrm{quasi}} : q \longmapsto \#M(\mathcal{A}_q)$$

は gcd-property をもつ準多項式であることが知られており [KTT08]，**特性準多項式 (characteristic quasi-polynomial)** と呼ばれている．さらに，準多項式 $\chi_{\mathcal{A}}^{\mathrm{quasi}}$ の第 1 構成素は，列ベクトル $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ で定義される $\mathbb{R}^\ell$ 上の超平面配置

$$\mathcal{A} \coloneqq \{H_1, \ldots, H_n\}, \qquad H_i \coloneqq \left\{ x = (x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell \;\middle|\; x\alpha_i = 0 \right\}$$

の**特性多項式 (characteristic polynomial)** となる，超平面配置の特性多項式は，超平面の交わり方だけで決まる多項式であり，超平面配置の不変量として最も重要であるといわれている．特性準多項式はその特性多項式を精密化したものと捉えることができる．また，特性準多項式は正整数 q ごとに点を数え上げるという点で Ehrhart 準多項式と類似しており，Ehrhart 準多項式の “mod q 版” といわれることもある．特に，ルート系から決まる超平面配置 (Coxeter arrangement) の特性準多項式は，そのルート系における fundamental alcove の (coweight lattice に関する) Ehrhart 準多項式と密接に関係している (cf. [Yos18])．

1.2 Group action and Equivariant Ehrhart theory

この節では，本研究の背景にある**同変 Ehrhart 理論 (Equivariant Ehrhart theory)** を紹介する．これは，Stapledon [Sta11] が導入した Ehrhart 理論の同変版であり，有限群による対称性をもつ多面体において，その上の格子点を表現の構造込みで数えるものである．

1.2.1 Group action and representation

Γ を有限群とし，Γ が有限集合 X へ作用しているとする．すなわち，Γ は X の対称群の部分群とみなせる．$\gamma \in \Gamma$ で不変な元の集合を X^γ で表す:

$$X^\gamma \coloneqq \Big\{ x \in X \;\Big|\; \gamma x = x \Big\}.$$

元 $x \in X$ の **Γ-軌道 (Γ-orbit)** とは，Γ による像 $\Gamma(x)$ のことをいい，$x \in X$ の**固定部分群 (stabilizer subgroup)**[*1]とは，x を固定する元からなる部分群 Γ_x のことをいう:

$$\Gamma(x) \coloneqq \Big\{ \gamma x \in X \;\Big|\; \gamma \in \Gamma \Big\}, \qquad \Gamma_x \coloneqq \Big\{ \gamma \in \Gamma \;\Big|\; \gamma x = x \Big\}.$$

有限群 Γ が有限集合 X に作用しているとする．X で生成される $\mathbb{C}$ 上の線形空間 $\mathbb{C}X \coloneqq \bigoplus_{x\in X} \mathbb{C}x$ に対して，Γ の作用から得られる群準同型 $\rho_X : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}X)$ を X の**置換表現 (permutation representation)**[*2]という．X の**置換指標 (permutation characrter)** とは，各線形写像 $\rho_X(\gamma)$ の trace を与える関数

$$\chi_X : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C};\ \gamma \longmapsto \mathrm{tr}\big(\rho_X(\gamma)\big)$$

のことをいう．X の置換表現 ρ_X における各元 $\gamma \in \Gamma$ の表現行列として置換行列がとれるため，

$$\chi_X(\gamma) = \#X^\gamma$$

となることに注意する．

関数 $\phi, \psi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}$ に対して，その内積 (ϕ, ψ) を

$$(\phi, \psi) = \frac{1}{\#\Gamma} \sum_{\gamma\in\Gamma} \phi(\gamma)\overline{\psi(\gamma)}$$

で定義する．ただし，$z \in \mathbb{C}$ に対して，$\overline{z}$ はその複素共役である．

本稿では，Γ の既約指標 (irreducible character) 全体を $\chi_1, \ldots, \chi_k$ のように表す．Γ の任意の指標 χ は既約指標の和で

$$\chi = m_1\chi_1 + \cdots + m_k\chi_k$$

のように一意的に表せる．特に，各係数は $m_i = (\chi, \chi_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ となる．m_i は χ の χ_i における**重複度 (multiplicity)** という．

[*1] 安定化部分群，等方部分群，isotropy group などともいう．

[*2] 一般に，線形空間 V に対して定まる群準同型 $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ を V 上の**表現 (representation)** といい，関数 $\chi_\rho : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C};\ \gamma \longmapsto \mathrm{tr}\,\rho(\gamma)$ を表現 ρ の**指標 (character)** という．

1.2.2 Equivariant Ehrhart theory

Γ を有限群とする．$L \cong \mathbb{Z}^\ell$ を lattice (格子) とし，線形な作用 $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(L)$ が与えられているとする．ただし，$\mathrm{GL}(L)$ は L 上の同型写像からなる群である．$\mathcal{P}$ を Γ の作用で不変な格子多面体とし，これを q 倍した多面体上の格子点の集合 $q\mathcal{P} \cap L$ の置換指標 $\chi_{q\mathcal{P}}$ を考える．

このとき，置換指標 $\chi_{q\mathcal{P}}$ が q についてどのように依存しているのかが問題の一つである．特に Γ の単位元 1 に対しては，

$$\chi_{q\mathcal{P}}(1) = \#(q\mathcal{P} \cap L) = L_{\mathcal{P}}(q)$$

となり，これは単に Ehrhart 多項式である．一般には，次のようにして準多項式が現れることが知られている．

Theorem 1.2 ([Sta11, Theorem 5.7, Corollary 5.9])**.** 次の写像はいずれも準多項式である:

(1) $q \longmapsto \chi_{q\mathcal{P}}$;
(2) Γ の既約指標 χ に対して，$q \longmapsto (\chi_{q\mathcal{P}}, \chi)$.

2 Main results

2.1 Set up

L を lattice (格子) とし，$B \coloneqq \{\beta_1, \ldots, \beta_\ell\}$ を L の $\mathbb{Z}$-basis とする．つまり，$L = \mathbb{Z}\beta_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\beta_\ell$ である．Γ を有限群とし，Γ が L に対して線形に作用しているとする．すなわち，群準同型 $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(L)$ が存在している．各元 $\gamma \in \Gamma$ に対して，$\rho(\gamma)$ の $\mathbb{Z}$-basis B に関する表現行列を R_γ で表す．元 $x = x_1\beta_1 + \cdots + x_\ell\beta_\ell$ とベクトル $x = (x_1, \ldots, x_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ を同一視すると，写像 $\rho(\gamma)$ は行列倍写像とみなすことができる:

$$\rho(\gamma) : x \longmapsto xR_\gamma$$

正整数 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$L_q \coloneqq L/qL$ とおく．群 Γ の L への作用は L_q への作用 $\rho_q : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(L_q)$ を誘導する．特に，各 $\gamma \in \Gamma$ に対して，写像 $\rho_q(\gamma)$ は行列倍写像

$$\rho_q(\gamma) : x \longmapsto x[R_\gamma]_q$$

とみなせることに注意する．ただし，$[R_\gamma]_q$ は行列 R_γ の q-reduction，すなわち $R_\gamma = (r_{ij})_{ij}$ であるとき $[R_\gamma]_q = \big([r_{ij}]_q\big)_{ij}$ である．

2.2 Quasi-polynomiality of the permutation representation and multiplicities

本研究の目的は L_q の置換表現およびその指標 χ_{L_q} について調べることである．Γ の既約指標 $\chi_1, \ldots, \chi_k$ に対して，q についての関数

$$m(\chi_i;\, q) \coloneqq (\chi_{L_q}, \chi_i)$$

を与える．各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$m(\chi_i;\, q)$ は χ_{L_q} の既約指標 χ_i に関する重複度である:

$$\chi_{L_q} = m(\chi_1;\, q)\chi_i + \cdots + m(\chi_k;\, q)\chi_k.$$

本研究の主結果の一つとして，吉永正彦氏[*3]との共同研究において次の結果を得た．

Theorem 2.1 ([UY, Corollary 2.2, Theorem 2.5])**.** 次の写像はいずれも gcd-property をもつ準多項式である:

(1) $m(\chi_i;\, q)$;
(2) $q \longmapsto \chi_{L_q}$.

さらに，$\chi_{L_q}(\gamma)$ や重複度の関数 $m(\chi_i;\, q)$ は明示的に次のように表すことができる:

$$\chi_{L_q}(\gamma) = \left(\prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, q\}\right) q^{\ell - r(\gamma)}, \qquad m(\chi_i;\, q) = \frac{1}{\varGamma} \sum_{\gamma \in \varGamma} \chi_i(\gamma) \left(\prod_{j=1}^{r(\gamma)} \gcd\{e_{\gamma,j}, q\}\right) q^{\ell - r(\gamma)}.$$

ただし，単位行列 I に対して，$r(\gamma) \coloneqq \operatorname{rank}(R_\gamma - I)$，$e_{\gamma,1}, \ldots, e_{\gamma,r(\gamma)}$ は行列 $R_\gamma - I$ の単因子である．

2.3 The number of orbits

$\varGamma$ の L_q への作用における $\varGamma$-軌道の集合を $L_q/\varGamma$ で表す:

$$L_q/\varGamma \coloneqq \Big\{\, \varGamma(x) \;\Big|\; x \in L_q \,\Big\}.$$

λ を $\varGamma$ の 1 次元既約指標とする．$\varGamma$-軌道 $\varGamma(x)$ のうち，固定部分群 $\varGamma_x$ が $\lambda^{-1}(1)$ に含まれるものの個数を $f_{L/\varGamma}(\lambda;\, q)$ で表す:

$$f_{L/\varGamma}(\lambda;\, q) \coloneqq \#\Big\{\, \varGamma(x) \in L_q/\varGamma \;\Big|\; \varGamma_x \subseteq \lambda^{-1}(1) \,\Big\}.$$

特に，自明な指標 $\mathbf{1}$ に対して $f_{L/\varGamma}(\lambda;\, q) = \#(L_q/\varGamma)$ である．このとき，$f_{L/\varGamma}(\lambda;\, q)$ が χ_{L_q} の λ に関する重複度 $m(\lambda;\, q)$ に等しいため (cf. [UY, Lemma 2.7])，次が従う．

Theorem 2.2 ([UY, Corollary 2.8])**.** $f_{L/\varGamma}(\lambda;\, q)$ は q に関して gcd-property をもつ準多項式となる．

2.4 Reciprocity for the multiplicities

$\varGamma$ 上の関数 $\boldsymbol{\delta} : \varGamma \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$\boldsymbol{\delta}(\gamma) = (-1)^{r(\gamma)}$$

[*3] 大阪大学大学院理学研究科教授

で定める．ただし，$r(\gamma) = \mathrm{rank}(R_\gamma - I)$ である．このとき，$\boldsymbol{\delta}(\gamma) = \det R_\gamma$ であることがわかり，$\boldsymbol{\delta}$ は Γ の 1 次元既約指標となる (cf. [UY, Lemma 2.9], [Sta11, Lemma 5.5])．ゆえに，Γ の既約指標 χ_i に対して，その積 $\chi_i \otimes \boldsymbol{\delta}$ も Γ の既約指標となる．それぞれの重複度の関数 $m(\chi_i; q)$, $m(\chi_i \otimes \boldsymbol{\delta}; q)$ の間には，次の関係がある．

Theorem 2.3 ([UY, Theorem 2.10])**.** Γ の既約指標 χ_i に対して，

$$m(\chi_i \otimes \boldsymbol{\delta}; q) = (-1)^\ell m(\chi_i; -q).$$

特に，$\boldsymbol{\delta}$ が自明な指標であるとき，$m(\chi_i; q)$ は偶関数または奇関数のいずれかである．

この関係は，準多項式 $F : q \longmapsto \chi_{L_q}$ に関する次の関係式を誘導する．

Corollary 2.4 ([UY, Corollary 2.11])**.** 各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，

$$F(q) = (-1)^\ell \boldsymbol{\delta} F(-q).$$

2.5 Example

Γ を γ で生成される 6 次巡回群とする．

$$\chi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}; \quad \gamma \longmapsto \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{6}\right)$$

で定まる群準同型は Γ の既約指標で，残りの既約指標は χ^2, χ^3, χ^4, χ^5, χ^6 である．特に，χ^6 は自明な指標 $\mathbf{1}$ に等しい．2 次元の lattice $L = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ を考え，Γ の L への作用は，

$$\gamma(e_1) = e_1 + e_2, \quad \gamma(e_2) = -e_1$$

となるように定める．このとき，e_1, e_2 をうまく並べることで，Γ は平面の 60 度回転として作用することになる．χ_{L_q} における重複度の関数を計算すると，次の通りである:

$$m(\chi; q) = m(\chi^5; q) = \begin{cases} \frac{1}{6}(q^2-1) & \gcd\{6,q\} = 1; \\ \frac{1}{6}(q^2-4) & \gcd\{6,q\} = 2; \\ \frac{1}{6}(q^2-3) & \gcd\{6,q\} = 3; \\ \frac{1}{6}(q^2-6) & \gcd\{6,q\} = 6, \end{cases} \quad m(\chi^3; q) = \begin{cases} \frac{1}{6}(q^2-1) & \gcd\{6,q\} = 1; \\ \frac{1}{6}(q^2-4) & \gcd\{6,q\} = 2; \\ \frac{1}{6}(q^2+3) & \gcd\{6,q\} = 3; \\ \frac{1}{6}q^2 & \gcd\{6,q\} = 6, \end{cases}$$

$$m(\chi^2; q) = m(\chi^4; q) = \begin{cases} \frac{1}{6}(q^2-1) & \gcd\{6,q\} = 1; \\ \frac{1}{6}(q^2+2) & \gcd\{6,q\} = 2; \\ \frac{1}{6}(q^2-3) & \gcd\{6,q\} = 3; \\ \frac{1}{6}q^2 & \gcd\{6,q\} = 6, \end{cases} \quad m(\mathbf{1}; q) = \begin{cases} \frac{1}{6}(q^2+5) & \gcd\{6,q\} = 1; \\ \frac{1}{6}(q^2+8) & \gcd\{6,q\} = 2; \\ \frac{1}{6}(q^2+9) & \gcd\{6,q\} = 3; \\ \frac{1}{6}(q^2+12) & \gcd\{6,q\} = 6. \end{cases}$$

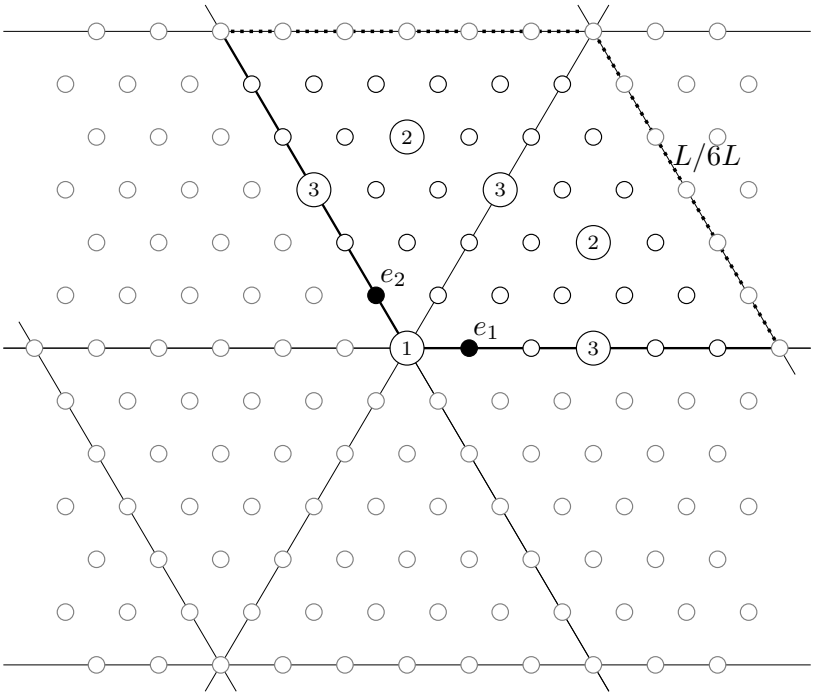


図 1　lattice L と $L/6L$. ⓘ はその点が長さ i の orbit に含まれる点であることを意味している．$L/6L$ のその他の点はすべて長さ 6 の orbit に含まれる．• は L の $\mathbb{Z}$-basis である．

Γ の既約指標はすべて 1 次元であるから，重複度の関数はすべて Γ-軌道を数える関数で，$m(\chi;\, q)$ は長さ 6 の Γ-軌道の個数，$m(\chi^2;\, q)$ は長さ $3, 6$ の Γ-軌道の個数，$m(\chi^3;\, q)$ は長さ $2, 6$ の Γ-軌道の個数，$m(\mathbf{1};\, q)$ はすべての Γ-軌道の個数をそれぞれ数えている．実際，長さ 1 の Γ-軌道は 1 つ，長さ 2 の Γ-軌道は $q \in 3\mathbb{Z}$ のときに 1 つ，長さ 3 の Γ-軌道は $q \in 2\mathbb{Z}$ のときに 1 つ現れ，その他はすべて長さ 6 の Γ-軌道となる (図 1 も参照).

3　Weyl groups

3.1　Coroot lattice and fundamental alcove

V を内積 $(\cdot, \cdot)$ をもつ ℓ 次元 Euclid 空間とし，Φ を V 上の既約な root 系とする．群 Γ を Φ の Weyl 群 $W = W(\Phi)$ とし，lattice L として Φ の coroot lattice $\check{Q} = \check{Q}(\Phi)$ を考える:

$$\check{Q} = \check{Q}(\Phi) = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathbb{Z}\alpha^\vee, \qquad \alpha^\vee \coloneqq \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}.$$

各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，$\check{Q}_q \coloneqq \check{Q}/q\check{Q}$ とおく．また，群 $qW_{\mathrm{aff}} \coloneqq q\check{Q} \rtimes W$ を与える．$q = 1$ であるときは，$1W_{\mathrm{aff}} = \check{Q} \rtimes W$ を **affine Weyl 群**といい，単に W_{aff} で表す．正 root $\alpha \in \Phi^+$ と整数 $k \in \mathbb{Z}$ に対して，affine 超平面 $H_{\alpha,k}$ を

$$H_{\alpha,k} \coloneqq \left\{ x \in V \;\middle|\; (\alpha, x) = k \right\}$$

で定義する．これらの超平面の補集合 $V \setminus \bigcup_{\substack{\alpha\in\Phi^+\\ k\in\mathbb{Z}}} H_{\alpha,k}$ の連結成分は **alcove** と呼ばれ，特に

$$A_\circ := \left\{ x \in V \;\middle|\; 0 < (\alpha, x) < 1 \;\text{ for all } \alpha \in \Phi^+ \right\}$$

は root 系 Φ の **fundamental alcove** という．各 alcove の閉包は ℓ 次元単体である．root 系 Φ の simple root $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ と highest root $\tilde{\alpha}$ に対して

$$\mathcal{W} := \{H_{\alpha_1,0}, \dots, H_{\alpha_\ell,0}, H_{\tilde{\alpha},1}\}$$

とおく．$\mathcal{W}$ の各超平面を $A_\circ$ の**壁 (wall)** という．各 $H \in \mathcal{W}$ から定まる開半空間のうち $A_\circ$ を含む方を H^+ で表すと，$\bigcap_{H\in\mathcal{W}} H^+ = A_\circ$ となる．

$$\mathcal{F} := \left\{ \bigcap_{H\in\mathcal{U}} H \cap \bigcap_{H\notin\mathcal{U}} H^+ \neq \emptyset \;\middle|\; \mathcal{U} \subseteq \mathcal{W} \right\}$$

とおく．$\mathcal{F}$ の各元を**面 (face)** という．$\overline{A_\circ} = \bigsqcup_{F\in\mathcal{F}} F$ であることに注意する．

また，affine Weyl 群 W_{aff} は alcove の集合に simply transitive に作用している．つまり，$\overline{A_\circ}$ は affine Weyl 群 W_{aff} の基本領域 (fundamental domain) となるから，$\check{Q}_q$ の W-軌道と $q\overline{A_\circ}$ 上の格子点の間には一対一対応があることがわかる．

Lemma 3.1 ([Hai94, Lemma 7.4.1])**.** 各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，次の対象の間には一対一対応がある:

- $\check{Q}_q$ の W-軌道;
- $\check{Q}$ の qW_{aff}-軌道;
- $\check{Q} \cap q\overline{A_\circ}$ の点.

さらに Lemma 3.1 の帰結として，自明な指標 $\mathbf{1}$ および行列式指標 $\boldsymbol{\delta}$ に関する $\chi_{\check{Q}_q}$ の重複度について次がわかる．

Proposition 3.2 ([Hai94, §7.4])**.** $m(\mathbf{1}; q)$ および $m(\boldsymbol{\delta}; q)$ はそれぞれ $\overline{A_\circ}$，$A_\circ$ の $\check{Q}$ に関する Ehrhart 準多項式である:

(1) $m(\mathbf{1}; q) = \#(\check{Q} \cap q\overline{A_\circ})$;
(2) $m(\boldsymbol{\delta}; q) = \#(\check{Q} \cap qA_\circ)$.

W における一般の既約指標 χ に対しては，fundamental alcove の各面における Ehrhart 準多項式との関係として次が得られた．

Theorem 3.3 (U.)**.** W の既約指標 χ に対して，

$$m(\chi; q) = \sum_{F\in\mathcal{F}} \frac{\#(qF \cap \check{Q})}{\#W_F} \sum_{w\in W_F} \chi(w). \tag{3.1}$$

ただし，W_F は F を含む壁に付随した鏡映で生成される W の部分群である．

式 (3.1) は，$\check{Q}_q$ の置換指標 $\chi_{\check{Q}_q}$ を各軌道の置換指標で分解することで得られ，Proposition 3.2 の各式は (3.1) の特別な場合となる．

3.2 Symmetric group

Γ が ℓ 次対称群 $\mathfrak{S}_\ell$ である場合を考える．$\mathbb{R}^\ell$ の標準基底 $\{e_1, \dots, e_\ell\}$ に対して，

$$L \coloneqq \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_\ell$$

とおく．対称群 $\mathfrak{S}_\ell$ は $\{e_1, \dots, e_\ell\}$ の置換として作用しているとする．

整数 ℓ の**分割 (partition)** とは，非負整数の列 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ で，

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0, \qquad \lambda_1 + \cdots + \lambda_p = \ell$$

を満たしているものをいう．ここで，p は分割 λ の長さ (length) といい，$\ell(\lambda)$ で表す．

以下に述べるように，ℓ 次対称群 $\mathfrak{S}_\ell$ は ℓ の分割と密接にかかわっている．元 $w \in \mathfrak{S}_\ell$ の **cycle type** とは，w を巡回置換の積で表すときに現れる各巡回置換の長さを降順に並べたものをいい，ℓ の分割となる．例えば，$w = (1\ 2)(3\ 4\ 6) \in \mathfrak{S}_6$ の cycle type は $(3, 2, 1)$ である．また，$\mathfrak{S}_\ell$ の既約指標全体と ℓ の分割全体の間には一対一対応があることが知られている．ℓ の分割 μ に対応する $\mathfrak{S}_\ell$ の既約指標を χ^μ で表す．

各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して，置換指標 χ_{L_q} およびその重複度の関数 $m(\chi^\mu; q)$ を具体的に求めたい．各元 $w \in \mathfrak{S}_\ell$ の基底 $\{e_1, \dots, e_\ell\}$ に関する表現行列 R_w は置換行列であるから，単位行列 I に対して $R_w - I$ の単因子を計算することは容易である．

Lemma 3.4. $w \in \mathfrak{S}_\ell$ の cycle type を λ とするとき，$r(w) = \operatorname{rank}(R_w - I)$ は $\ell - \ell(\lambda)$ に等しい．また，行列 $R_w - I$ の単因子はすべて 1 である．

したがって，各 $w \in \mathfrak{S}_\ell$ の cycle type を λ_w で表すとき，

$$\chi_{L_q}(w) = q^{\ell(\lambda_w)}$$

となる．また，ℓ の分割 μ に対応する既約指標 χ^μ に対して，

$$m(\chi^\mu; q) = \frac{1}{\ell!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_\ell} \chi^\mu(w) q^{\ell(\lambda_w)} \tag{3.2}$$

となるため，$m(\chi^\mu; q)$ は周期 1 の準多項式 (つまり単に多項式) となる．したがって，χ_{L_q} も周期 1 の準多項式である．また，(3.2) の右辺は，古くから様々な形で研究されている多項式である．特に，右辺の多項式の根がすべて整数であることが知られており，分割 μ から容易に得られる．

Theorem 3.5 (cf. [Lit36, p.56], [Mol82, Theorem 1])**.** $\mathfrak{S}_\ell$ の既約指標 χ^μ に対して，

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_\ell} \chi^\mu(w) q^{\ell(\lambda_w)} = \chi^\mu(1) \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} \prod_{j=1}^{\mu_i} (q - i + j).$$

また，$\mathfrak{S}_\ell$ は $A_{\ell-1}$ 型の root 系の Weyl 群であり，対応する coroot lattice $\check{Q}$ は

$$\check{Q} = \mathbb{Z}(e_1 - e_2) \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}(e_{\ell-1} - e_\ell)$$

となる．各 $q \in \mathbb{Z}_{>0}$，$w \in \mathfrak{S}_\ell$ に対して $\chi_{\check{Q}_q}(w)$ を計算したいが，具体的に行列の単因子を計算するのは (不可能ではないが) 容易ではない．(比較的) 容易に計算をするために，L と rank の等しい sublattice

$$M \coloneqq \check{Q} \oplus \mathbb{Z}(e_1 + \cdots + e_\ell)$$

を与える．$e_1 + \cdots + e_\ell$ が $\mathfrak{S}_\ell$ の作用で不変であるから，任意の $w \in \mathfrak{S}_\ell$ に対して

$$\chi_{M_q}(w) = q \cdot \chi_{\check{Q}_q}(w) \tag{3.3}$$

がわかる．

一方で，$\chi_{L_q}(w)$ と $\chi_{M_q}(w)$ は，q, w を固定するごとに定数倍の違いしかないことがわかる[*4]:

$$\chi_{M_q}(w) = \gcd\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\ell(\lambda)}, q\} \cdot \chi_{L_q}(w). \tag{3.4}$$

ただし，$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{\ell(\lambda)})$ は $w \in \mathfrak{S}_\ell$ の cycle type である．よって，(3.3)，(3.4) より

$$\chi_{\check{Q}_q}(w) = \gcd\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{\ell(\lambda)}, q\} \cdot q^{\ell(\lambda)-1}$$

となる．ゆえに，$\chi_{\check{Q}_q}$ は周期 ℓ の準多項式である．

参考文献

[BR07] M. Beck and S. Robins, *Computing the continuous discretely*, Undergraduate Texts in Mathematics, vol. 285, Springer New York, Berlin, Heidelberg, October 2007.

[Hai94] M. D. Haiman, *Conjectures on the quotient ring by diagonal invariants*, Journal of Algebraic Combinatorics **3** (1994), 17–76.

[KTT08] H. Kamiya, A. Takemura, and H. Terao, *Periodicity of hyperplane arrangements with integral coefficients modulo positive integers*, Journal of Algebraic Combinatorics **27** (2008), no. 3, 317–330.

[Lit36] D. E. Littlewood, *Some properties of s-functions*, Proceedings of the London Mathematical Society **s2-40** (1936), no. 1, 49–71.

[Mol82] V. F. Molchanov, *Poincaré polynomials of representations of finite groups generated by reflections*, Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR **31** (1982), no. 6, 423–427.

[Sta11] A. Stapledon, *Equivariant ehrhart theory*, Advances in Mathematics **226** (2011), no. 4, 3622–3654.

[UY] R. Uchiumi and M. Yoshinaga, *The quasi-polynomiality of mod q permutation representation for a linear finite group action on a lattice*, arXiv:2409.01084 [math].

[Yos18] M. Yoshinaga, *Worpitzky partitions for root systems and characteristic quasi-polynomials*, Tohoku Mathematical Journal **70** (2018), no. 1, 39–63.

[*4] この事実は一般の lattice L と rank の等しい sublattice M について得られる．

マトロイドの階数関数の非可換化

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
齋藤琢弥（Takuya SAITO）*

概要

マトロイドとはグラフのサイクルの構造や行列の階数などを抽象化した概念であり，有限集合とその冪集合上の階数関数と呼ばれる整数値関数の組として定義される．また，その不変量はグラフの彩色多項式，線形符号の重さ多項式をはじめとする抽象化する前の多くの不変量を一般化していることが知られている．本講演では，階数関数の値域を一般の順序群としたマトロイドの非可換化を考える．

1　導入：グラフ彩色

多重辺とループを許した有限グラフ $\Gamma = (V, E)$ に対して，その λ-頂点彩色とは，写像 $c : V \to [\lambda] := \{1, \cdots, \lambda\}$ であって隣接する任意の 2 頂点 u, v に対して $c(u) \neq c(v)$ となるものである．グラフ Γ を固定し，

$$\chi(\Gamma; \lambda) = \left\{ c : V \to [\lambda] \mid c \text{ は頂点彩色} \right\}$$

とおくと，実は $\chi(\Gamma; \lambda)$ は λ に関する多項式になり，彩色多項式と呼ばれる．多項式になることは次の関係式から直ちに従う．

$$\chi(\Gamma; \lambda) = \begin{cases} \lambda^{|V|} & (E = \emptyset) \\ 0 & (\Gamma \text{がループを持つ}) \\ \chi(\Gamma \setminus e; \lambda) - \chi(\Gamma / e; \lambda) & (e \in E \text{ がループではない}) \end{cases}$$

ここで $\Gamma \setminus e = (V, E \setminus \{e\})$ は e の削除，Γ / e は e による縮約，つまり e の両端を同一視し，さらに e を取り除いて得られるグラフである．一方で $\kappa((V, S))$ を部分グラフ $(V, S) \subset \Gamma$ の連結成分数とすると，包除原理から次の等式が成り立つ；

$$\chi(\Gamma; \lambda) = \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|} \lambda^{\kappa((V,S))}.$$

従って，辺の部分集合から誘導されるグラフの連結成分数 $\kappa((V, S))$ が，彩色多項式を考える上で重要な関数であるといえる．少し修正した次の関数 $\mathrm{rank} : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}; S \mapsto |V| - \kappa((V, S))$ を考えると以下の性質を満たしている．

(R1)　$0 \leq \mathrm{rank}(S) \leq |S|$ for all $S \subset E$,

* E-mail:saito.takuya.p6@elms.hokudai.ac.jp

(R2) $\mathrm{rank}(S_1) \leq \mathrm{rank}(S_2)$ if $S_1 \subset S_2 \subset E$,
(R3) $\mathrm{rank}(S_1 \cup \{e\}) - \mathrm{rank}(S_1) \geq \mathrm{rank}(S_2 \cup \{e\}) - \mathrm{rank}(S_2)$ for all $S_1 \subset S_2 \subset E, e \in E$.

この性質を一般化したものがマトロイドである．本稿では値域を非負整数から順序群に一般化し，通常のマトロイドで成立する種々の性質が成り立つことを紹介する．また，可換な順序群に値域を持つ一般化に関する先行研究として [7]，一般的な双対性に関する先行研究として [3, 5] などを挙げておく．

2　マトロイドと多項式不変量

ここでは一般化する前のマトロイドに関して，基本的な事実をまとめておく．マトロイドやその多項式不変量に関する詳細は，それぞれ [6] や [2, 8] などを参照されたい．

定義 1. マトロイド $M = (E, \mathrm{rank})$ とは有限集合 E と階数関数 $\mathrm{rank} := \mathrm{rank}_M : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の組であって (R1),(R2),(R3) を満たすもののことである．

定義から直ちにグラフ $\Gamma = (V, E)$ に対して $M(\Gamma) = (E, |V| - \kappa((V, -)) : 2^E \to \mathbb{Z}_{\geq 0})$ はマトロイドになることがわかる．

例 2 (線形マトロイド)**.** 有限集合 E で列に添字づけられた体 $\mathbb{K}$ を成分に持つ行列 A を考える．A_S を $S \subset E$ で添字づけられた列のみから構成される A の部分行列とする．このとき $\mathrm{rank}(S) := \mathrm{rank}\, A_S$ とおくと (E, rank) はマトロイドになる．

A の行空間 $\mathrm{row}(A) \subset \mathbb{K}^E$ から $\mathrm{rank}(S) = \dim \mathrm{row}(A) \cap \mathbb{K}^S$ として階数を定めたものとも一致する．

定義 3 (双対，削除，縮約，制限)**.** マトロイド $M = (E, \mathrm{rank})$ の双対は $\mathrm{rank}^*(S) := \mathrm{rank}(E \setminus S) - \mathrm{rank}(E) + |S|$ によって定義されるマトロイド $M^* = (E, \mathrm{rank}^*)$ である．マトロイド $M = (E, \mathrm{rank})$ の制限 $M|_T = (T, \mathrm{rank}\,|_T)$ を階数関数の定義域を単に 2^T に制限したものとして定義する．また，削除 $M \setminus T = M|_{E \setminus T}$ であり，その双対として縮約 $M/T = (M^* \setminus T)^*$ が定義される．実は $\mathrm{rank}_{M/T}(S) = \mathrm{rank}(S \cup T) - \mathrm{rank}(T)$ で与えられる．

マトロイドの削除と縮約はグラフにおけるそれの一般化である．また，双対は平面グラフの幾何学的双対の一般化である．線形マトロイドで考えた場合，双対は行空間の直交補空間が対応する．

さて，グラフの彩色多項式のマトロイドへの一般化である特性多項式と，その 2 変数版と言える多項式不変量を定義する．

定義 4. $M = (E, \mathrm{rank})$ をマトロイドとする．このとき，特性多項式 $\chi(M; t)$ と階数母関数，あるいは余階数零度多項式 $S(M; x, y)$ を以下のように定義する；

$$\chi(M; t) = \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|} t^{\mathrm{rank}(E) - \mathrm{rank}(S)},$$
$$S(M; x, y) = \sum_{S \subset E} x^{\mathrm{rank}(E) - \mathrm{rank}(S)} y^{|S| - \mathrm{rank}(S)}.$$

グラフ Γ の彩色多項式は $\chi(\Gamma;t) = t^{\kappa(\Gamma)}\chi(\Gamma;t)$ として計算できる．

定理 5. マトロイド $M = (E, \mathrm{rank})$ と $e \in E$ に対して次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\chi(M;t) =& t^{\mathrm{rank}(E)-\mathrm{rank}(E\setminus e)}\chi(M\setminus e;t) - \chi(M/e;t),\\
S(M^*;x,y) =& S(M;y,x),\\
S(M;x,y) =& x^{\mathrm{rank}(E)-\mathrm{rank}(E\setminus e)}S(M\setminus e;x,y) + y^{|\{e\}|-\mathrm{rank}(\{e\})}S(M/e;x,y),\\
S(M;x,y) =& (-1)^{\mathrm{rank}(E)}\sum_{T\subset E}(-1)^{|T|}\chi(M/T;-x)\chi((M|_T)^*;-y).
\end{aligned}$$

3 順序群

この節では順序群を導入する．より詳しい議論は [1] などを参照されたい．

定義 6 (両側順序群)**.** G を群，$\leq$ を G の上の（半）順序関係とする．任意の $g_1, g_2, h_1, h_2 \in G$ に対して，

$$h_1g_1h_2 \leq h_1g_2h_2 \text{ if } g_1 \leq g_2$$

が成り立つとき，$(G, \leq)$ を両側順序群と呼ぶ．

定義から直ちに 3 つの不等式 $g_1 \leq g_2$，$1_G \leq g_1^{-1}g_2$，$1_G \leq g_2g_1^{-1}$ が同値であることが従うことに注意しておく．

例 7. 実数の加法群の部分群 $G \subset (\mathbb{R}, +)$ と $\mathbb{R}$ 上の通常の順序 $\leq$ を考えると，$(G, \leq)$ は両側順序群になる．

以降断らない限り G の乗法を積で書き，単位元を 1_G で書く．

例 8 (Heisenberg 群 [1])**.** R を可換順序環とし，一般線形群の部分群

$$H_3(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in R \right\}$$

を考える．$X \geq 1_{H_3(R)}$ を以下の 3 つのいずれかを満たすときとする；(a) $x > 0$，(b) $x = 0$ かつ $y > 0$，(c) $x = y = 0$ かつ $z > 0$. この順序によって $H_3(R)$ は両側順序群の構造を持つ．

例 9 (組紐群 [4])**.** n 次の組紐群

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{ll} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i & \text{if } |i-j| \geq 2 \text{ for } i,j = 1, \cdots, n-1 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} & \text{for } i = 1, \cdots, n-2 \end{array} \right\rangle$$

から $\mathbb{Z}$ への準同型 $\sigma_i \mapsto 1 (i = 1, \cdots, n-1)$ を考えると $\mathbb{Z}$ の順序が自然に B_n の半順序を誘導し両側順序群の構造を持つ．

また，B_n から n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ への自然な全射 $B_n \to \mathfrak{S}_n$ の核を純組紐群といい P_n と書く．例えば $P_1 \cong 1, P_2 \cong \mathbb{Z}$ であり明らかに両側順序群になる．さらに単完全列

$$1 \to F_{n-1} \to P_n \to P_{n-1} \to 1$$

を考えることで P_{n-1} と $n-1$ 元集合で生成される自由群 F_{n-1} に定まる両側順序群の構造から帰納的に P_n 上の両側全順序群の構造が定まる．

また，組紐群 B_n と純組紐群 P_n の中心 $Z(B_n) = Z(P_n)$ は共に $(\sigma_1 \dots \sigma_{n-1})^n$ で生成される無限巡回群になる．

4 主結果

この節ではマトロイドの一般化として G 値マトロイドを議論する．

定義 10. 有限集合 E と順序群 G に対して関数 $|-|_G : 2^E \to G; S \mapsto |S|_G$ が任意の $S \subset E$ で $|S|_G = \prod_{e\in S} |\{e\}|_G$, $|S|_G \geq 1_G$ かつ $|S|_G \in Z(G)$ を満たすとき長さ関数と呼ぶ．ここで，$Z(G)$ は G の中心である．

定義 11. 有限集合 E と順序群 G，長さ関数 $|-|_G : 2^E \to G$ に対して $M = (E, |-|_G, \rho)$ が

(GR1) $1_G \leq \rho(S) \leq |S|_G$ for all $S \subset E$,
(GR2) $\rho(S_1) \leq \rho(S_2)$ if $S_1 \subset S_2 \subset E$,
(GR3) $\rho(S_1 \cup \{e\})\rho(S_1)^{-1} \geq \rho(S_2 \cup \{e\})\rho(S_2)^{-1}$ for all $S_1 \subset S_2 \subset E, e \in E$

を満たすとき G 値マトロイドと定め，ρ を階数関数と呼ぶ，

(GR3) は任意の $S_1 \subset S_2 \subset E$，$S_3 \subset E$ で $\rho(S_1 \cup S_3)\rho(S_1)^{-1} \geq \rho(S_2 \cup S_3)\rho(S_2)^{-1}$ と同値であること，特に $S_1 = \emptyset$ とすると $\rho(S_3)\rho(S_2) \geq \rho(S_2 \cup S_3)$ になることに注意しておく．

定理 12 (双対性)**.** G 値マトロイド $M = (E, |-|_G, \rho)$ に対して $M^* = M = (E, |-|_G, \rho^*)$ を $\rho^*(S) = \rho(E \setminus S)\rho(E)^{-1}|S|_G$ とする．このとき M^* は G 値マトロイドになる．この G 値マトロイド M^* を M の双対と呼ぶ．さらに，$(M^*)^*$ が成り立つ．

Proof. (GR1) $S \subset E$ に対して

$$\begin{aligned}
|S|_G \geq& \rho(E \setminus S)\rho(E)^{-1}|S|_G = \rho^*(S) && \text{(by (GR2), } \rho(E \setminus S) \leq \rho(E)) \\
=& \rho(\emptyset)\rho(S)^{-1}|S|_G && \text{(by (GR3), } \rho(E)\rho(E \setminus S)^{-1} \leq \rho(S)\rho(\emptyset)^{-1}) \\
=& 1_G && \text{(by (GR1), } \rho(S)^{-1}|S|_G \geq 1_G).
\end{aligned}$$

(GR2) $S_1 \subset S_2 \subset E$ に対して

$$\begin{aligned}
\rho^*(S_1) \geq& \rho(E \setminus S_2)\rho(E)^{-1}|S_2|_G \\
=& \rho(E \setminus S_2)|S_2 \setminus S_1|_G|S_1|_G\rho(E)^{-1} \\
\geq& \rho(E \setminus S_2)\rho(S_2 \setminus S_1)|S_1|_G\rho(E)^{-1} && \text{(by (GR1), } |S_2 \setminus S_1|_G \geq \rho(S_2 \setminus S_1)) \\
\geq& \rho(E \setminus S_1)\rho(E)^{-1}|S_1|_G = \rho^*(S_1) && \text{(by (GR3), } \rho(E \setminus S_2)\rho(S_2 \setminus S_1) \geq \rho(E \setminus S_1))
\end{aligned}$$

(GR3) $S_1 \subset S_2 \subset E$，$e \in E$ に対して

$$\begin{aligned}
&\rho^*(S_1 \cup \{e\})\rho^*(S_1)^{-1} \\
=&\rho(E \setminus (S_1 \cup \{e\}))\rho(E)^{-1}|S_1 \cup \{e\}|_G(\rho(E \setminus S_1)\rho(E)^{-1}|S_1|_G)^{-1} \\
=&\rho(E \setminus (S_1 \cup \{e\}))\rho(E \setminus S_1)^{-1}|\{e\}|_G \\
\geq&\rho(E \setminus (S_2 \cup \{e\}))\rho(E \setminus S_2)^{-1}|\{e\}|_G && \text{(by (GR3))} \\
=&\rho(E \setminus (S_2 \cup \{e\}))\rho(E)^{-1}|S_2 \cup \{e\}|_G(\rho(E \setminus S_2)\rho(E)^{-1}|S_2|_G)^{-1} \\
=&\rho^*(S_2 \cup \{e\})\rho^*(S_2)^{-1}.
\end{aligned}$$

よって M^* は G 値マトロイド．最後に $\rho^{**} = \rho$ を確認する．任意の $S \subset E$ に対して，

$$\begin{aligned}
\rho^{**}(S) =&\rho^*(E \setminus S)\rho^*(E)^{-1}|S|_G \\
=&\rho(S)\rho(E)^{-1}|E \setminus S|_G(\rho(\emptyset)\rho(E)^{-1}|E|_G)^{-1}|S|_G \\
=&\rho(S)\rho(E)^{-1}|E \setminus S|_G|E|_G{}^{-1}\rho(E)\rho(\emptyset)^{-1}|S|_G \\
=&\rho(S)\rho(E)^{-1}\rho(E)|E \setminus S|_G|E|_G{}^{-1}|S|_G = \rho(S).
\end{aligned}$$

□

上記の定理に関しては [7, Section 5] と同様の方法で値域をブール束 2^E の代わりに一般の束としても成立することに注意されたい．

命題 13 (削除，縮約)**.** G 値マトロイド $M = (E, |-|_G, \rho)$ に対して削除 $M \setminus T$ は G 値マトロイドになる．さらに縮約 $M/T = (M^* \setminus T)^*$ の階数関数 $\rho_{M/T}$ は $\rho_{M/T}(S) = \rho(S \cup T)\rho(T)^{-1}$ になる．

Proof. 削除 $M \setminus T$ が G 値マトロイドになることは明らか．また，

$$\begin{aligned}
\rho_{M/T}(S) = \rho^*_{M^* \setminus T}(S) =&\rho_{M^* \setminus T}(E \setminus (S \cup T))\rho_{M^* \setminus T}(E \setminus T)^{-1}|S|_G \\
=&\rho^*(E \setminus (S \cup T))\rho^*(E \setminus T)^{-1}|S|_G \\
=&\rho(S \cup T)\rho(E)^{-1}|E \setminus (S \cup T)|_G(\rho(T)\rho(E)^{-1}|E \setminus T|_G)^{-1}|S|_G \\
=&\rho(S \cup T)\rho(T)^{-1}
\end{aligned}$$

より縮約の階数関数もわかる． □

さて，G 値マトロイドに対しても多項式不変量に類するものを考えよう．多項式が群環 $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]$ や $\mathbb{Z}[\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}]$ の元であると思えることを思い出そう．この一般化として G 値マトロイド M に対して群環 $\mathbb{Z}[G]$ と $\mathbb{Z}[G \times G]$ の元を対応づける．

定義 14. $M = (E, |-|_G, \rho)$ を G 値マトロイドとする．このとき，特性多項式 $\chi(M) \in \mathbb{Z}[G]$ と修正階数母関数 $\tilde{S}(M) \in \mathbb{Z}[G \times G]$ を以下のように定義する；

$$\begin{aligned}
\chi(M) &= \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|}\rho(E)\rho(S)^{-1}, \\
\tilde{S}(M) &= \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|}(\rho(E)\rho(S)^{-1}, |S|_G\rho(S)^{-1}).
\end{aligned}$$

このとき，定理 5 と類似の以下の性質が成り立つ．

定理 15. マトロイド $M = (E, \mathrm{rank})$ と $e \in E$ に対して次の等式が成り立つ;

(i) $\chi(M) = \rho(E)\rho(E \setminus e)^{-1}\chi(M \setminus e; t) - \chi(M/e; t)$,
(ii) $\tilde{S}(M^*) = (-1)^{|E|}\phi(\tilde{S}(M))$
(iii) $\tilde{S}(M) = (\rho(E)\rho(E \setminus e)^{-1}, 1_G)S(M \setminus e) - (1_G, |\{e\}|_G\rho(\{e\})^{-1})S(M/e)$,
(iv) $\tilde{S}(M) = \sum_{T \subset E}(-1)^{|T|}\chi(M/T)\chi((M|_T)^*)$

ただし，$\phi : \mathbb{Z}[G \times G] \to \mathbb{Z}[G \times G]; \sum_{g_1,g_2} n_{g_1,g_2}(g_1, g_2) \mapsto \sum_{g_1,g_2} n_{g_1,g_2}(g_2, g_1)$ で定まる対合である．さらに最後の式で $\chi(M/T)$ は単射 $\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z}[G \times 1] \to \mathbb{Z}[G \times G]$, $\chi((M|_T)^*)$ は単射 $\mathbb{Z}[G] \cong \mathbb{Z}[1 \times G] \to \mathbb{Z}[G \times G]$ の元で $\mathbb{Z}[G \times G]$ の元として扱う．

Proof. 定義に従い展開し，それぞれ等式を示す．

(i)

$$\begin{aligned}
\chi(M) =& \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|}\rho(E)\rho(S)^{-1} - \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|}\rho(E)\rho(S \cup e)^{-1} \\
=& \rho(E)\rho(E \setminus e)^{-1} \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|}\rho(E \setminus e)\rho(S)^{-1} \\
& - \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|}\rho(E)\rho(\{e\})^{-1}\rho(\{e\})\rho(S \cup e)^{-1} \\
=& \rho(E)\rho(E \setminus e)^{-1}\chi(M \setminus e; t) - \chi(M/e; t).
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(M^*) =& \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|}(\rho^*(E)\rho^*(S)^{-1}, |S|_G\rho^*(S)^{-1}) \\
=& \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|}(\rho(\emptyset)\rho(E)^{-1}|E|_G(\rho(E \setminus S)\rho(E)^{-1}|S|_G)^{-1}, |S|_G(\rho(E \setminus S)\rho(E)^{-1}|S|_G)^{-1}) \\
=& (-1)^{|E|} \sum_{S \subset E} (-1)^{|E \setminus S|}(|E \setminus S|_G\rho(E \setminus S))^{-1}, \rho(E)\rho(E \setminus S)^{-1}) \\
=& (-1)^{|E|} \sum_{S \subset E} (-1)^{|S|}(|S|_G\rho(S))^{-1}, \rho(E)\rho(S)^{-1}).
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(M) =& \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|}(\rho(E)\rho(S)^{-1}, |S|_G\rho(S)^{-1}) \\
& - \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|}(\rho(E)\rho(S \cup e)^{-1}, |S \cup e|_G\rho(S \cup e)^{-1}) \\
=& \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|}(\rho(E)\rho(E \setminus e)^{-1}\rho(E \setminus e)\rho(S)^{-1}, |S|_G\rho(S)^{-1}) \\
& - \sum_{S \subset E \setminus e} (-1)^{|S|}(\rho(E)\rho(\{e\})^{-1}\rho(\{e\})\rho(S \cup e)^{-1}, |\{e\}|_G\rho(\{e\})^{-1}|S|_G\rho(S \cup e)^{-1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=(\rho(E)\rho(E\setminus e)^{-1},1_G)\sum_{S\subset E\setminus e}(-1)^{|S|}(\rho(E\setminus e)\rho(S)^{-1},|S|_G\rho(S)^{-1})\\
&\quad-(1_G,|\{e\}|_G\rho(\{e\})^{-1})\sum_{S\subset E\setminus e}(-1)^{|S|}(\rho(E)\rho(\{e\})^{-1}(\rho(S\cup e)\rho(\{e\})^{-1})^{-1},|S|_G\rho(S\cup e)^{-1})\\
&=(\rho(E)\rho(E\setminus e)^{-1},1_G)S(M\setminus e)-(1_G,|\{e\}|_G\rho(\{e\})^{-1})S(M/e).
\end{aligned}
$$

(iv) $S_1,S_2\subset E$ が $S_1\neq S_2$ のとき $\sum_{S_1\subset T\subset S_2}(-1)^{|T|}=0$ に注意する．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{T\subset E}(-1)^{|T|}\chi(M/T)\chi((M|_T)^*)\\
&=\sum_{T\subset E}(-1)^{|T|}\left(\sum_{S\subset E\setminus T}(-1)^{|S|}(\rho(E)\rho(S\cup T)^{-1},1_G)\right)\\
&\quad\times\left(\sum_{S'\subset T}(-1)^{|S'|}(1_G,\rho^*_{M|_T}(T)\rho^*_{M|_T}(S')^{-1})\right)\\
&=\sum_{T\subset E}(-1)^{|T|}\left(\sum_{S\subset E\setminus T}(-1)^{|S|}(\rho(E)\rho(S\cup T)^{-1},1_G)\right)\\
&\quad\times\left(\sum_{S'\subset T}(-1)^{|S'|}(1_G,\rho(T)^{-1}|T|_G(\rho(T\setminus S)\rho(T)^{-1}|S'|_G)^{-1})\right)\\
&=\sum_{T\subset E}(-1)^{|T|}\left(\sum_{S\subset E\setminus T}(-1)^{|S|}(\rho(E)\rho(S\cup T)^{-1},1_G)\right)\\
&\quad\times\left(\sum_{S'\subset T}(-1)^{|S'|}(1_G,|T\setminus S'|\rho(T\setminus S')^{-1})\right)\\
&=\sum_{T\subset E}\left(\sum_{T\subset S\subset E}(-1)^{|S|}(\rho(E)\rho(S)^{-1},1_G)\right)\left(\sum_{S'\subset T}(-1)^{|S'|-|T|}(1_G,|S'|_G\rho(S')^{-1})\right)\\
&=\sum_{S,S'\subset E}(-1)^{|S|}(\rho(E)\rho(S)^{-1},|S'|_G\rho(S')^{-1})\left(\sum_{S'\subset T\subset S}(-1)^{|T|-|S'|}\right)\\
&=\sum_{S\subset E}(-1)^{|S|}(\rho(E)\rho(S)^{-1},|S|_G\rho(S)^{-1}).
\end{aligned}
$$

□

上の定理の等式 (iv) は $\tilde{S}(M)$ を $\tilde{S}'(M)=\sum_{S\subset E}(-1)^{|S|}\rho(E)\rho(S)^{-1}|S|_G\rho(S)^{-1}\in\mathbb{Z}[G]$ と置き換えても成立する一方で，等式 (iii) は成り立たないことにコメントしておく．

5　注意；直和に関して

マトロイド $M_1=(E_1,\mathrm{rank}_1)$ と $M_2=(E_2,\mathrm{rank}_2)$ の直和 $M_1\oplus M_2=(E_1\sqcup E_2,\mathrm{rank}_{M_1\oplus M_2})$ を $\mathrm{rank}_{M_1\oplus M_2}(S)=\mathrm{rank}_1(S\cap E_1)+\mathrm{rank}_2(S\cap E_2)$ によって定義する．直和はグラフの非交和ないし一点和や行空間の直和に対応している．このとき，$\chi(M_1\oplus M_2;t)=\chi(M_1;t)\chi(M_2;t)$

や $T(M_1 \oplus M_2; x, y) = T(M_1; x, y)T(M_2; x, y)$ が成り立つ．さらに，削除や縮約と直和は可換な操作であり（両側）分配律 $(T(M_1 \setminus e; x, y) + T(M_1/e; x, y))T(M_2; x, y) = T(M_1; x, y)T(M_2; x, y) = T(M_1 \oplus M_2; x, y) = T(M_1 \oplus M_2 \setminus e; x, y) + T(M_1 \oplus M_2/e; x, y) = T(M_1 \setminus e; x, y)T(M_2; x, y) + T(M_1/e; x, y)T(M_2; x, y)$ などが成立する．このような性質は，G 値マトロイド $M_1 = (E_1, |-|_G, \rho_1)$ と $M_2 = (E_2, |-|_G, \rho_2)$ の直和 $M_1 \oplus M_2 = (E_1 \sqcup E_2, |-|_G, \rho)$ の階数関数を単なる積 $\rho(S) = \rho_1(S \cap E_1)\rho_2(S \cap E_2)$ で定めた場合には成立しない．

参考文献

[1] Birkhoff, Garrett. *Lattice theory.* Vol. 25. American Mathematical Soc., 1940.

[2] Ellis-Monaghan, Joanna A., and Iain Moffatt, eds. *Handbook of the Tutte polynomial and related topics.* CRC Press, 2022.

[3] Gordon, Gary. "On Brylawski's generalized duality." *Mathematics in Computer Science* 6.2 (2012): 135-146.

[4] Kassel, Christian, and Vladimir Turaev. *Braid groups.* Vol. 247. Springer Science & Business Media, 2008.

[5] Martínez-Bernal, José, Miguel A. Valencia-Bucio, and Rafael H. Villarreal. "Hamming polynomial of a demimatroid." *São Paulo Journal of Mathematical Sciences* 17.1 (2023): 268-299.

[6] Oxley, James G. *Matroid theory.* Vol. 3. Oxford University Press, USA, 2006.

[7] Vertigan, Dirk. "Latroids and their representation by codes over modules." *Transactions of the American Mathematical Society* 356.10 (2004): 3841-3868.

[8] White, Neil, ed. *Matroid applications.* No. 40. Cambridge University Press, 1992.

安定集合凸多面体の余次数について

大阪大学　大学院情報科学研究科　情報基礎数学専攻
松下光虹 (Koji MATSUSHITA) *

概要

安定集合凸多面体はグラフから生起する凸多面体であり, そこから得られるトーリック環, 及び Ehrhart 環の可換環論的性質と元のグラフの組合せ論的性質との関係が近年よく調べられている. 一方で, 一般の整凸多面体の余次数は Ehrhart 環の a-不変量やトーリック環の Castelnuovo–Mumford regularity といった代数的不変量と密接な関係にあることが知られている. 本講演では, 安定集合凸多面体の余次数とグラフ不変量であるクリーク数, 彩色数の関係性について得られた結果を紹介する.

本講演は土谷昭善氏との共同研究 [6] の内容に基づく.

1　導入

以下, $\Bbbk$ は体とする. $P \subset \mathbb{R}^d$ を格子凸多面体とする. つまり, P はその全ての頂点が $\mathbb{Z}^d$ であるような凸多面体とする. このとき,

$$\Bbbk[P] := \Bbbk[t_1^{m_1} \cdots t_d^{m_d} t_{d+1} : (m_1, \ldots, m_d) \in P \cap \mathbb{Z}^d] \subset \Bbbk[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}, t_{d+1}]$$

を P の**トーリック環**といい,

$$\mathcal{A}(P) := \Bbbk[t_1^{m_1} \cdots t_d^{m_d} t_{d+1}^{n} : n \in \mathbb{Z}_{>0},\ (m_1, \ldots, m_d) \in nP \cap \mathbb{Z}^d] \subset \Bbbk[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_d^{\pm 1}, t_{d+1}]$$

を P の **Ehrhart 環**という. 両者ともに, $\deg(t_1^{m_1} \cdots t_d^{m_d} t_{d+1}^{n}) = n$ として次数付き環とみなす. このとき, $\dim \Bbbk[P] = \dim \mathcal{A}(P) = \dim P + 1$ であり, $\Bbbk[P]$ は標準的次数付き環, $\mathcal{A}(P)$ は半標準的次数付き環となる. $\Bbbk[P]$ は $\mathcal{A}(P)$ の部分代数であり, 一般に一致しないが, P が整分割性を持つとき, またその時に限り一致することが知られている. ここで, P が**整分割性**を持つとは, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $\alpha \in nP \cap \mathbb{Z}^d$ に対し, ある $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in P \cap \mathbb{Z}^d$ があって $\alpha = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ となるときにいう.

トーリック環, 及び, Ehrhart 環の可換環論的な性質を元の多面体の組合せ論的な言葉を使って記述したり, 逆に多面体の組合せ論的な性質を可換環論的な情報から特徴づけることが, 本研究の基本的なモチベーションである. 本講演では特に凸多面体の余次数に着目する. ここで, 凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^d$ の**余次数** $\operatorname{codeg}(P)$ を次で定義する:

$$\operatorname{codeg}(P) := \min\left\{n \in \mathbb{Z}_{>0} : \operatorname{int}(nP) \cap \mathbb{Z}^d \neq \emptyset\right\}.$$

* k-matsushita@ist.osaka-u.ac.jp

ただし, $\mathrm{int}(P)$ は P の相対内部を表す. また, 同様に P の**次数** $\deg(P)$ を次で定義する:

$$\deg(P) := \dim P + 1 - \mathrm{codeg}(P).$$

このとき, $-\mathrm{codeg}(P)$ は $\mathcal{A}(P)$ の a-不変量と一致することが知られている. つまり, $\omega_{\mathcal{A}(P)}$ を $\mathcal{A}(P)$ の正準加群としたとき, $\mathrm{codeg}(P) = \min\left\{n \in \mathbb{Z}_{>0} : (\omega_{\mathcal{A}(P)})_n \neq 0\right\}$ が成立する. また, $\mathcal{A}(P)$ が半標準的次数付き環であるから, その Hilbert 級数 $\sum_{n\geq 0}(\dim_{\Bbbk} \mathcal{A}(P)_n)t^n$ は $(h_0^* + h_1^* t + \cdots + h_s^* t^s)/(1-t)^{\dim P+1}$ の形で書ける（ただし, $h_s^* \neq 0$）が, このときの s の値が $\deg(P)$ に等しいことが知られている. さらに, $S := \Bbbk[x_m : m = (m_1, \ldots, m_d) \in P \cap \mathbb{Z}^d]$ を $\deg x_i = 1$ とする多項式環とし, $\Bbbk$ 代数準同型射 $\phi : S \to \Bbbk[P]$ を $\phi(x_m) := t_1^{m_1} \cdots t_d^{m_d} t_{d+1}$ から誘導されるものとする. この射は次数を保つ全射なので $I_P := \ker \phi$ は斉次となり, $S/I_P \cong \Bbbk[P]$ である. $\Bbbk[P]$ の極小自由分解を

$$0 \to \bigoplus_{j\geq 1} S(-j)^{\beta_{h,j}} \to \cdots \to \bigoplus_{j\geq 1} S(-j)^{\beta_{1,j}} \to S \to \Bbbk[P] \to 0$$

としたとき,

$$\mathrm{reg}(\Bbbk[P]) = \max\{j - i : \beta_{i,j} \neq 0\}$$

を $\Bbbk[P]$ の **Castelnuovo-Mumford regularity**（以降, 単に **regularity**）という. この値も, 上述した多面体の不変量との間に関係性がある:

命題 1 ([5, p. 5952]). *$P \subset \mathbb{R}^d$ を整凸多面体とし, $\dim P = d$, $\left\{\sum_{m\in P\cap\mathbb{Z}^d} a_m m : a_m \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{Z}^d$ であるとする. このとき, $\mathrm{reg}(\Bbbk[P]) \geq \deg(P)$ が成立する. 特に, P が整分割性を持つなら, $\mathrm{reg}(\Bbbk[P]) = \deg(P)$ である.*

本講演では, グラフから生起する**安定集合凸多面体**について, 上述した不変量と元のグラフに付随する不変量との関係を調べる.

2 安定集合凸多面体

これ以降扱うグラフは全て有限単純グラフとする. つまり, ループや重複辺は持たないグラフであるとする. グラフ G に対し, $V(G) = [d] := \{1, \ldots, d\}$ を G の頂点集合, $E(G)$ を G の辺集合とする. 頂点集合の部分集合 $S \subset V(G)$ について, 任意の S の 2 頂点が辺で結ばれていない (resp. 結ばれている) とき, S を G の**安定集合**または, **独立集合** (resp. **クリーク**) という. 空集合, 1 点集合は安定集合とみなす. また, $A \subset [d]$ に対し, $\mathbf{e}_A := \sum_{i\in A} \mathbf{e}_i$ とおく. ただし, $\mathbf{e}_i$ は $\mathbb{R}^d$ の i 番目の単位ベクトルとする. $\mathbf{e}_\emptyset = \mathbf{0}$ と定める.

$$P_G := \mathrm{conv}(\{\mathbf{e}_S : S \subset V(G) \text{ は } G \text{ の安定集合 }\})$$

を G の**安定集合凸多面体**という.

安定集合凸多面体の多面体的な性質と元のグラフの情報との関係が研究されているが, 特にグラフが**理想グラフ**である場合については非常によく調べられている. 理想グラフを定義する前にいくつかの用語を定義する.

グラフ G に対し, そのクリークの濃度の最大値を**クリーク数**といい, $\omega(G)$ で表す. 正整数 k について, 任意の辺 $\{i,j\} \in E(G)$ に対し, $f(i) \neq f(j)$ を満たす写像 $f : V(G) \to [k]$ を G の k **彩色**といい, k 彩色が存在する最大の正整数 k を G の**彩色数**といい, $\chi(G)$ で表す. グラフの k 彩色とは, 簡単に言えば, 「グラフの頂点を, 辺で結ばれている頂点同士は異なる色が塗られているように, k 色で塗り分けること」である. ここで, 彩色を考えるとき, グラフのクリークになっている部分は全て異なる色で塗らなければならないから, 必ずクリーク数以上の色が必要になる. つまり, $\omega(G) \leq \chi(G)$ が成立する. この等号がいつ成立するか, という問いがグラフ理論において基本的で重要なものになる.

定義 2 ([1])**.** G の任意の誘導部分グラフ H に対し, $\omega(H) = \chi(H)$ が成立するとき, G を**理想グラフ**という.

二部グラフや弦グラフなどは理想グラフであることが知られている. また, 「強理想グラフ定理」と呼ばれる以下の重要な特徴づけがある:

定理 3 ([3])**.** グラフ G が理想グラフであることと, G とその補グラフが長さ 5 以上の奇サイクルを誘導部分グラフとして含まないことは同値である.

さらに, 安定集合凸多面体を用いた特徴づけもある:

定理 4 ([4, Theorem 3.1])**.** グラフ G が理想グラフであることと, P_G が次の表示を持つことが同値である:

$$P_G = \left\{ (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^n \ : \ \begin{array}{rll} x_i & \geq 0, & \forall i \in [d] \\ \displaystyle\sum_{i \in Q} x_i & \leq 1, & \text{任意の } G \text{ の極大クリーク } Q \end{array} \right\}.$$

その他にも, 様々なグラフの安定集合凸多面体の性質が調べられていが, 本講演では, **線グラフ**と h **理想グラフ**に着目して調べる.

まず, 線グラフについて紹介する. グラフ G に対し, その辺集合を頂点集合とみなして, 2 つの辺がある頂点を共有するときに, その辺に対応する頂点同士を辺で結んで得られるグラフを $L(G)$ とおく. つまり, $V(L(G)) = E(G)$ で, $E(L(G)) = \{\{e, e'\} : e, e' \in E(G), e \neq e', e \cap e' \neq \emptyset\}$ である. このグラフ $L(G)$ を G の**線グラフ**という. G の 1 つの頂点に接続している辺たちは, $L(G)$ においてクリークを成すので, $\Delta(G) \leq \omega(L(G)) \leq \chi(L(G))$ が成り立つことがわかる. ただし, $\Delta(G)$ は G の最大次数を表す. さらに, G が単純グラフである場合は次が成り立つ:

定理 5 ([7])**.** $\Delta(G) \leq \chi(L(G)) \leq \Delta(G) + 1$ である.

次に h 理想グラフについて説明する. 一般のグラフ G について以下の包含関係が成立することが

わかる:

$$P_G \subseteq \left\{ (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^n \ : \ \begin{array}{rll} x_i & \geq 0, & \forall i \in [d] \\ \sum_{i \in Q} x_i & \leq 1, & \text{任意の } G \text{ の極大クリーク } Q \\ \sum_{i \in C} x_i & \leq \frac{|C|-1}{2}, & \text{任意の } G \text{ の奇サイクル } C \end{array} \right\}. \tag{1}$$

定義 6. *(1)* の包含の等号が成立するようなグラフ G を h **理想グラフ**という.

定理 4 から, 理想グラフは h 理想グラフであることがわかる. また, 長さ 5 以上の奇サイクルは理想グラフではない h 理想グラフであることがわかる.

3 主結果

本講演では, 安定集合凸多面体の余次数, 及び, そのトーリック環の regularity とグラフ不変量の関係を見る. さらに, グラフが線グラフ, あるいは, h 理想グラフである場合に, その安定集合凸多面体の余次数の明示的な公式を与える.

次が本講演の主定理である:

定理 7. 任意の有限単純グラフ G について,

$$\omega(G) + 1 \leq \operatorname{codeg}(P_G) \leq \chi(G) + 1$$

が成立する.

つまり, $\operatorname{codeg}(P_G) - 1$ は $\omega(G) \leq \chi(G)$ というグラフ理論において基本的な不等式の間に入る量であるということがわかる. また, G が理想グラフであれば $\omega(G) = \chi(G)$ が成立するので, 直ちに次がわかる:

系 8. G が理想グラフであれば,

$$\operatorname{codeg}(P_G) = \omega(G) + 1 = \chi(G) + 1$$

である.

さらに, 命題 1 から, トーリック環 $\Bbbk[P_G]$ の regularity についても関係性が見出せる:

定理 9. G を d 頂点の有限単純グラフとしたとき,

$$d - \chi(G) \leq \operatorname{reg}(\Bbbk[P_G])$$

が成り立つ. さらに, もし P_G が整分割性を持つなら,

$$\operatorname{reg}(\Bbbk[P_G]) \leq d - \omega(G)$$

も成り立つ.

グラフが線グラフである場合, 定理 5 と我々の主定理から, $\mathrm{codeg}(P_{L(G)})$ の値は $\Delta(G)+1$ か $\Delta(G)+2$ であることがわかるが, どちらの値になるかを完全に特徴づけられた:

定理 10. G を有限単純グラフとし, $G_1, \ldots, G_r$ を G の連結成分とする. このとき,

$$\mathrm{codeg}(P_{L(G)}) = \begin{cases} \Delta(G)+2 & (\Delta(G) \text{ が偶数で } \Delta(G_i)=\Delta(G) \text{ なる } G_i \text{ は完全グラフ}), \\ \Delta(G)+1 & (\text{それ以外}), \end{cases}$$

さらに, グラフが h 理想グラフであるときも余次数を計算することが出来た:

定理 11. G を有限単純な h 理想グラフとする. このとき,

$$\mathrm{codeg}(P_G) = \omega(G)+1$$

である.

4 主定理に関する例と問題

我々の主定理 7 の不等式は, 次の 4 つの場合に分けられる:

(i) $\omega(G)+1 = \mathrm{codeg}(P_G) = \chi(G)+1$;
(ii) $\omega(G)+1 < \mathrm{codeg}(P_G) = \chi(G)+1$;
(iii) $\omega(G)+1 = \mathrm{codeg}(P_G) < \chi(G)+1$;
(iv) $\omega(G)+1 < \mathrm{codeg}(P_G) < \chi(G)+1$.

それぞれの条件を満たすグラフが存在するか？という問いは自然であるが, 次の例でその全てを与える:

例 12. (1) 任意の理想グラフは (i) を満たす.

(2) $n \geq 5$ を奇数とし, $G = L(K_n)$ とおく. ただし, K_n は n 頂点完全グラフを表す. このとき, $\omega(G) = n-1, \chi(G) = n$ であり, 定理 10 から $\mathrm{codeg}(P_G) = n+1$ であるので, (ii) を満たす.

(3) $n \geq 5$ を奇数とし, $G = C_n$ とおく. ただし, C_n は長さ n のサイクルを表す. このとき, $\omega(G) = 2, \chi(G) = 3$ であり, G は h 理想グラフであるから, 定理 11 より, $\mathrm{codeg}(P_G) = 3$ であるので, (iii) を満たす.

(4) G を C_5 と $L(K_5)$ のジョインとする, つまり, $V(G) = V(C_5) \sqcup V(L(K_5))$ であり,

$$E(G) = E(C_5) \cup E(L(K_5)) \cup \{\{u,v\} : u \in V(C_5), v \in V(L(K_5))\}$$

である. このとき, $\omega(G) = \omega(C_5)+\omega(L(K_5)) = 2+4 = 6$ で $\chi(G) = \chi(C_5)+\chi(L(K_5)) = 3+5 = 8$ であり, 計算機ソフト Normaliz [2] を用いることで, $\mathrm{codeg}(P_G) = 8$ が確認できる. なので, G は (iv) を満たす.

問 13. a, b, c を $0 < a \leq b \leq c$ を満たす整数とするとき, 次を満たすグラフ G が存在するかどうかを決定せよ:

$$\omega(G)+1 = a, \quad \mathrm{codeg}(P_G) = b, \quad \chi(G)+1 = c.$$

また, 定理 9 において, P_G が整分割性を持つなら $\mathrm{reg}(\Bbbk[P_G]) \leq d - \omega(G)$ が成り立つことを確認したが, 整分割性の仮定を外した時に反例があるかどうかはわかっていない.

問 14. 任意の d 頂点有限単純グラフ G に対し,

$$\mathrm{reg}(\Bbbk[P_G]) \leq d - \omega(G)$$

が成立するか.

参考文献

[1] Claude Berge. Les problèmes de coloration en théorie des graphes. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 9:123–160, 1960.

[2] W. Bruns, B. Ichim, C. Söger, and U. von der Ohe. Normaliz. algorithms for rational cones and affine monoids. Available at https://www.normaliz.uni-osnabrueck.de.

[3] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. The strong perfect graph theorem. *Ann. of Math. (2)*, 164(1):51–229, 2006.

[4] V. Chvátal. On certain polytopes associated with graphs. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 18:138–154, 1975.

[5] Johannes Hofscheier, Lukas Katthän, and Benjamin Nill. Ehrhart theory of spanning lattice polytopes. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (19):5947–5973, 2018.

[6] Koji Matsushita and Akiyoshi Tsuchiya. Codegree and regularity of stable set polytopes. *arXiv preprint arXiv:2412.10090*, 2024.

[7] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskret. Analiz*, (3):25–30, 1964.

幾何的情報からの組合せ論的変異によるグラスマン多様体のトーリック退化の構成

大坂大学　大学院情報科学研究科　情報基礎数学専攻
小脇 修和 (Nobukazu Kowaki) *

概要

マッチングフィールド多面体の組み合わせ論的変異の列はそのマッチングフィールドがグラスマン多様体のトーリック退化を生じるかという性質を保存する。この講演では、トロピカル超平面配置を用いて二つのマッチングフィールド多面体が組み合わせ論的変異同値かどうかを調べる十分条件を述べる。この系として、ブロックダイアゴナルマッチングフィールドはダイアゴナルマッチングフィールドに組合せ論的変異同値であることを示す。これは Clarke-Higashitani-Mohammadi[2] の結果の別証明となっている。

1　導入

グラスマン多様体のトーリック退化は様々な手法で研究されている分野の一つである。私は SAGBI 基底を用いた手法でのトーリック退化を研究している。

定義 1 (SAGBI 基底)**.** 多項式環における多項式の集合 $\{f_1, \cdots f_r\}$ が与えられた項順序 $<$ で**SAGBI 基底**であるとは、任意の多項式 $f \in \mathbb{K}[f_1, \cdots, f_r]$ に対し、$\mathrm{in}_< f$ が $\mathrm{in}_< f_1, \cdots, \mathrm{in}_< f_r$ の積で書けるということである。

順序の導入にマッチングフィールドというものを導入する。これは $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$、$\mathbf{I}_{k,n} = \{I \subset [n] : |I| = k\}$、$S_k$ を対称群として、$\Lambda : \mathbf{I}_{k,n} \to S_k$ で定義される写像である。マッチングフィールドは I に対応する変数行列 X_I の行列式の項を一つ選ぶものである。行列で誘導されるマッチングフィールドをコヒーレントマッチングフィールドという。

Plücker 座標がマッチングフィールドから誘導される順序で Plücker 代数の SAGBI 基底となっているなら、そのマッチングフィールドにより**グラスマン多様体のトーリック退化**が行えるという [4]。

以下がこの分野の究極の目的である。

目標. 全てのコヒーレントマッチングフィールドでトーリック退化の可否を判定する。

その解決のために**既知のマッチングフィールドの結果から別のマッチングフィールドのトーリック退化の判定を行う**方法が欲しい。

* E-mail:u793177f@ecs.osaka-u.ac.jp

2 準備

2.1 グラスマン多様体とその斉次座標環

ここではグラスマン多様体について基本的なことを説明する。

定義 2 (グラスマン多様体)**.** **グラスマン多様体** $\mathrm{Gr}(d,n)$ とは、n 次元ベクトル空間の d 次元部分空間を集めたものである。

以降、以下の記法を用いる。

- $\mathrm{Gr}(k,n)$: グラスマン多様体
- $[n]=\{1,2,\ldots,n\}$、$\mathbf{I}_{k,n}=\{I\subset[n]:|I|=k\}$
- X: $k\times n$ 変数行列、X_I: X から I に対応する列で作る $k\times k$ 変数行列
- S_k: 対称群

グラスマン多様体の斉次座標環を与えるために以下の写像を定義する。

定義 3 (プリュッカー埋め込み)**.**

$$\begin{aligned}\varphi:\mathbb{K}[P_I:I\in\mathbf{I}_{k,n}]&\to\mathbb{K}[x_{ij}:1\le i\le k,1\le j\le n]\\ P_I&\mapsto \det X_I\end{aligned}$$

これによる座標はグラスマン多様体の点と 1 対 1 に対応している。この写像の核を求めて、グラスマン多様体の斉次座標環であるプリュッカー代数を構成する。

定義 4 (プリュッカーイデアル)**.** プリュッカー埋め込みのカーネルを**プリュッカーイデアル**と呼ぶ。

定義 5 (プリュッカー座標)**.** $I\in\mathbf{I}_{k,n}$ とし、$\det X_I$ を X の**プリュッカー座標**と呼ぶ。これは対応するプリュッカー変数 P_I と同一視される。

定義 6 (プリュッカー代数)**.** $\mathcal{I}$ をプリュッカーイデアルとする。$\mathbb{K}[P_I:I\in\mathbf{I}_{k,n}]/\mathcal{I}$ を**プリュッカー代数**と呼ぶ。

2.2 マッチングフィールド

ここではマッチングフィールドの正確な定義を与える。

定義 7 (マッチングフィールド)**.** 写像 $\Lambda:\mathbf{I}_{k,n}\to S_k$ を**マッチングフィールド**と呼ぶ。

注意 1. マッチングフィールドは、X_I の行列式の項を一つ選ぶ操作である。つまり、$I=\{i_1,\cdots,i_k\}$ のとき $\det X_I=\sum_{\sigma\in S_k}\mathrm{sgn}(\sigma)x_{1i_{\sigma(1)}}\cdots x_{ki_{\sigma(k)}}$ の中で $\sigma=\Lambda(I)$ の項を選ぶ操作である。

行列 $M=(m_{ij})$ とし、m_{ij} を変数行列の対応する変数の重みとする。$I=\{i_1,\cdots,i_k\}$ に対し、

$\mathrm{in}_M(\mathrm{det}X_I) = x_{1i_{\sigma(1)}} \cdots x_{ki_{\sigma(k)}}$ とする。 ただし、$\mathrm{det}X_I$ の項の中で M による重みが最小となる項が先頭項である。$I \mapsto \sigma$ で作られる写像をこの**行列から誘導される**マッチングフィールドと呼ぶ。

定義 8 (コヒーレントマッチングフィールド)**.** マッチングフィールドが行列から誘導されるなら、それは**コヒーレントマッチングフィールド**であるという。

定義 9 (ダイアゴナルマッチングフィールド)**.** 全ての $\mathbf{I}_{k,n}$ の元を id に送るマッチングフィールドを**ダイアゴナルマッチングフィールド**という。

ブロックダイアゴナルマッチングフィールドには様々な拡張された定義が存在するが、ここでは Mohammadi-Shaw の定義に従う。

定義 10 (ブロックダイアゴナルマッチングフィールド)**.**

$$\mathcal{B}_\ell(I) := \begin{cases} \mathrm{id} & |I \cap [\ell]| \neq 1, \\ (12) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

となるマッチングフィールドを**ブロックダイアゴナルマッチングフィールド**と呼ぶ。

ダイアゴナルマッチングフィールドとブロックダイアゴナルマッチングフィールドはともにコヒーレントマッチングフィールドであることを知られている。

マッチングフィールド多面体の定義のために記法をいくつか定めておく。

- $\mathbb{R}^{k\times n}$: $k \times n$ 行列のベクトル空間
- $e_{i,j}$: (i,j) 成分のみ 1、残りすべて 0 となる標準的な基底行列
- Λ: マッチングフィールド, $I = \{i_1, \cdots, i_k\} \in \mathbf{I}_{k,n}$
- $v_{I,\Lambda} := \sum_{j=1}^{k} e_{j,i_{\Lambda(I)(j)}}$

定義 11 (マッチングフィールド多面体)**.** $P_\Lambda = \mathrm{Conv}\{v_{I,\Lambda} : I \in \mathbf{I}_{k,n}\}$.

2.3 SAGBI 基底

SAGBI は Subalgebra Analogue to Gröbner Bases for Ideals の略である。

定義 12 (SAGBI 基底)**.** 多項式環における多項式の集合 $\{f_1, \cdots f_r\}$ が与えられた項順序 $<$ で**SAGBI 基底**であるとは、任意の多項式 $f \in \mathbb{K}[f_1, \cdots, f_r]$ に対し、$\mathrm{in}_< f$ が $\mathrm{in}_< f_1, \cdots, \mathrm{in}_< f_r$ の積で書けるということである。

注意 2. プリュッカー座標がコヒーレントマッチングフィールドで誘導される項順序でプリュッカー代数の SAGBI 基底になっていれば、グラスマン多様体のトーリック退化が得られる。

2.4 トロピカル幾何

M=(m_{ij}) をマッチングフィールドを誘導する行列とする。これにより、トロピカル多項式 $F_j((x_2, \cdots, x_k)) := \max\{m_{1j}, m_{2j} + x_2, \cdots, m_{kj} + x_k\}$ を考え、F_j のトロピカル曲線 H_j を F_j が

max を 2 回以上とる点の集合として定義する。$\mathcal{A} = \{H_1, \cdots, H_n\}$ を $F_1, \cdots, F_n$ で定義されるトロピカル超平面配置として定める。これにより、コヒーレントマッチングフィールドに対応するトロピカル超平面配置を定義できる。

Λ をコヒーレントマッチングフィールドとし、M をマッチングフィールド Λ を誘導する行列、$I = \{i_1, \cdots, i_k\}$ with $i_1 < \cdots < i_k$ を定め、$\{H_i\}_{i \in I}$ を対応するトロピカル超平面の族、$(\{c_1\}, \cdots, \{c_k\})$ をコースコベクトルのすべての成分が 1 となるような I に対するただ一つのコベクトルとする。

このとき、以下の命題により、トロピカル超平面配置からマッチングフィールドを復元できる。

命題 1 (Mohammadi and Shaw [5])**.**

$$\mathrm{in}_M(\det(X_I)) = x_{1c_1} x_{2c_2} \dots x_{kc_k}$$

2.5 組合せ論的変異

組合せ論的変異の定義のために記法をいくつか固定する。

- $N = \mathbb{Z}^d$, $M = Hom_{\mathbb{Z}}(N, \mathbb{Z})$
- $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$
- 内積 $N_{\mathbb{R}} \times M_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$, $(v, u) \mapsto u(v)$
- w: M の原始的な格子点
- F: $F \subset w^{\perp} \subset N_{\mathbb{R}}$ を満たす格子多面体 ($w^{\perp}$ は w の直交空間)
- $\varphi_{w,F}$: $M_{\mathbb{R}} \to M_{\mathbb{R}}$, $u \mapsto u - u_{\min} w \quad (u_{\min} = \min\{u(p) : p \in F\})$

定義 13 (組合せ論的変異 (Akhtar-Coates-Galkin-Kasprzyk, 2012 [1]))**.** $P \subset M_{\mathbb{R}}$ を格子多面体とし、$\varphi_{w,F}(P)$ が凸であるとする。この時多面体 $\varphi_{w,F}(P)$ は P の**組合せ論的変異**という。

3 主定理

$\mathrm{Gr}(3, n)$ で、Λ をトーリック退化可能なマッチングフィールド、Λ' を隣接する 2 本のトロピカルライン i, j を入れ替えたことを除いて対応するトロピカル配置が Λ と同じとなるマッチングフィールドとする。i, j に対して下図のように領域の色分けを行い、青とオリーブ色の領域にトロピカルラインの中心点が全く入っていない場合を考える

定理 1 (K.)**.** 上の条件が満たされているなら、2 つのマッチングフィールド多面体 $P_{\Lambda}, P_{\Lambda'}$ は**組合せ論的変異**により同値となっている。

定理 2 (K.)**.** このとき、Λ' もトーリック退化可能である。

さらなる詳細は [3] を参照してほしい。

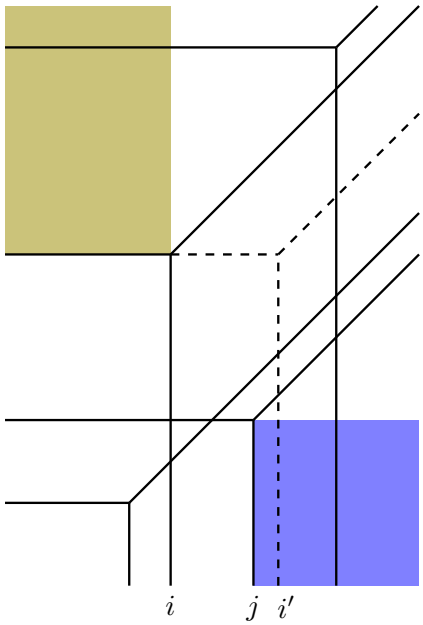


図 1　領域の色分け

参考文献

[1] M. Akhtar, T. Coates, S. Galkin, and A. M. Kasprzyk, Minkowski polynomials and mutations, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 2012.

[2] O. Clarke, A. Higashitani, and F. Mohammadi, Combinatorial mutations and block diagonal polytopes, Collectanea Mathematica, 2021.

[3] N. Kowaki, Tropical hyperplane arrangements and combinatorial mutations of the matching field polytopes of Grassmannians, arXiv:2405.15215.

[4] E. Miller, and B. Sturmfels, Combinatorial commutative algebra, Springer Science & Business Media, 2005.

[5] F. Mohammadi, and K. Shaw, Toric degenerations of Grassmannians from matching fields, Algebraic Combinatorics, 2019.

A new class of magic positive Ehrhart polynomials of reflexive polytopes

大阪大学　大学院情報科学研究科　情報基礎数学専攻
鴻池真斗 (Masato KONOIKE) *

概要

Ehrhart 多項式の magic positive 性は, h^* 多項式の real-rooted 性を示すための有用な道具である. 本稿では, Ehrhart 多項式が magic positive になる新たなクラスの反射的多面体を紹介する. 初めに, Stasheff polytope の Ehrhart 多項式の magic positive 性について紹介し, 次に, サイクルグラフから生じる対称辺多面体の双対に対する Ehrhart 多項式の magic positive 性について紹介する.

本講演は [9] の内容に基づく.

1　導入

この章では Ehrhart 理論の基本的な事実を紹介する.

$P \subset \mathbb{R}^d$ を d 次元整凸多面体, つまり, 任意の頂点の座標が全て整数であるような凸多面体とし, ∂P をその境界とする.

$\mathbb{R}^d$ の原点が P の内部に属する唯一の整数点になっていると仮定する. このとき, 整凸多面体 P が**反射的**であるとは, その双対凸多面体

$$P^* := \{y \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, y\rangle \leq 1, \forall x \in P\}$$

もまた整凸多面体となるときに言う. ここで, $\langle x, y\rangle$ は $\mathbb{R}^d$ の通常の内積のことである. 一般に, 整凸多面体 P, Q が $P \subset Q$ ならば $Q^* \subset P^*$ が成り立つ.

任意の正の整数 n について, $E_P(n)$ を

$$E_P(n) = |nP \cap \mathbb{Z}^d|$$

で定義する. [3] により, $E_P(n)$ は n についての次数 d の多項式で定数項が 1 になることが知られている. この多項式 $E_P(n)$ を P の **Ehrhart 多項式**と呼ぶ.

Ehrhart 多項式の母函数 $1 + \sum_{n\geq 1} E_P(n)t^n$ を考えると, 次のような有理関数の形になることが知られている：

$$1 + \sum_{n\geq 1} E_P(n)t^n = \frac{h_0^* + h_1^* t + \cdots + h_d^* t^d}{(1-t)^{d+1}}.$$

* E-mail:kounoike-m@ist.osaka-u.ac.jp

この母函数の分子の係数からなる数列

$$h^*(P) = (h_0^*, h_1^*, \ldots, h_d^*)$$

を P の h^* **列**と呼ぶ. また, h^* 列を係数とする多項式 $h_P^*(t) = h_0^* + h_1^* t + \cdots + h_d^* t^d$ を P の h^* **多項式**と呼ぶ. また, [6] により, 整凸多面体 P が反射的凸多面体となる必要十分条件は h^* 列が対称, つまり

$$h_i^* = h_{d-i}^* \quad 0 \leq \forall i \leq d$$

が成立することが知られている. さらに, h^* 列について次のことが成立する.

- $h_0^* = 1$, $h_1^* = |P \cap \mathbb{Z}^d| - (d+1)$, $h_d^* = |(P \backslash \partial P) \cap \mathbb{Z}^d|$.
- h_i^* は非負である [11].
- $E_P(n)$ の最高次の係数 $\sum_{i \geq 0} h_i^*/d!$ は通常の P の体積と一致する.

d 次元整凸多面体 $P, Q \subset \mathbb{R}^d$ について, P と Q が **unimodular 同値**であるとは, unimodular 行列 $U \in \mathbb{Z}^{d \times d}$ と整数ベクトル $w \in \mathbb{Z}^d$ が存在して, U により定義される線形写像 $f_U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ を用いて $Q = f_U(P) + w$ とできる時に言う. ここで $v \in \mathbb{R}^d$ に対し, $f_U(v) = vU$ と定める. P と Q が unimodular 同値ならば $E_P(n) = E_Q(n)$ が成立する.

2 準備

この章では主結果で必要となる事実を紹介する.

2.1 多項式の real-rooted 性

次数 d の実係数を持つ多項式 $f = \sum_{i=0}^{d} a_i t^i$ が **real-rooted** であるとは, その根が全て実数であるときに言う. また, real-rooted な多項式のすべての係数が非負, すなわち, そのすべての実根が非正であるとき, 任意の i について $a_i^2 \geq a_{i-1} a_{i+1}$ が成り立つ. この不等式を満たす係数列 a_i を **log-concave** と言う. この log-concave な数列が非負であるとき **unimodal** になる. つまり, ある k に対して $a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \geq \cdots \geq a_d$ が成立することを意味する.

2.2 Stasheff polytope

St_d を集合

$$\{\pm e_i : 1 \leq i \leq d\} \cup \{e_i + \cdots + e_j : 1 \leq i < j \leq d\}$$

の凸包で定義する. ここで $e_1, \ldots, e_d$ を $\mathbb{R}^d$ の単位ベクトルとする. このとき, St_d は次元 d の反射的整凸多面体であり, この整凸多面体の双対を **Stasheff polytope**(**associahedron**) と言う.

2.3 対称辺多面体

G を頂点集合 $[d]$ 上の有限単純グラフとし, その辺集合を $E(G)$ とする. **対称辺多面体** $P_G \subset \mathbb{R}^d$ は, 集合

$$\{\pm(e_v - e_w) \in \mathbb{R}^d \mid vw \in E(G)\}$$

の凸包で定義する. ここで $e_v \in \mathbb{R}^{|V|}$ は G の頂点 v によって添字付けられた単位ベクトルとする. P_G はある反射的な整凸多面体と unimodular 同値であることが知られている [10].

2.4 Magic positive 性

$E_P(n)$ を次のような異なる基底で表すことを考える：

$$E_P(n) = \sum_{i=0}^{d} a_i n^i (1+n)^{d-i}.$$

$a_0, \ldots, a_d \geq 0$ であるとき, $E_P(n)$ は **magic positive** であると言う. Ehrhart 多項式が magic positive であるとき, Ehrhart 多項式の係数は全て正であり, h^* 多項式は real-rooted になることが知られている [4, Theorem 4.19]. また, [1, Proposition 4.11] より, d 次元整凸多面体 P が反射的整凸多面体であることと, 任意の $0 \leq j \leq d$ に対して $a_j = a_{d-j}$ が成り立つことは同値である.

自然な問題として、次の問題を考える.

問題 2.1. Ehrhart 多項式が magic positive になる整凸多面体は何か.

Ehrhart 多項式が magic positive になる整凸多面体は次の 2 つが知られている.

- Zonotope[1]
- Pitman-Stanley polytope[5]

ここで, Ehrhart 多項式が magic positive になる多面体の例をいくつか紹介する.

例 2.2 (cross polytope の双対)**.** Cr_d を集合

$$\{\pm\mathbf{e}_i \mid 1 \leq i \leq d\}$$

の凸包で定義する. このとき, Cr_d は次元 d の反射的整凸多面体であり, この多面体を **cross polytope** と呼ぶ. Cr_d の双対は $[-1,1]^d$ になるので, Ehrhart 多項式は次のように計算できる:

$$E_{\mathrm{Cr}_d^*}(n) = (2n+1)^d = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} (n+1)^{d-i} n^i.$$

従って, $E_{\mathrm{Cr}_d^*}(n)$ は magic positive である.

例 2.3 (A 型 root polytope の双対)**.** $\mathbf{A}_d$ を集合

$$\{\pm\mathbf{e}_i \mid 1 \leq i \leq d\} \cup \{\pm(\mathbf{e}_i + \cdots + \mathbf{e}_j) \mid 1 \leq i < j \leq d\}$$

の凸包で定義する．このとき, $\mathbf{A}_d$ は次元 d の反射的整凸多面体であり, この多面体を **A 型 root polytope** と呼ぶ．$\mathbf{A}_d$ の双対の Ehrhart 多項式は [7, Lemma 5.3] で計算されていて, 次のようになる:

$$E_{\mathbf{A}_d^*}(n) = \sum_{k=0}^{d} \binom{d+1}{k} n^k = \sum_{i=0}^{d} (n+1)^{d-i} n^i.$$

従って, $E_{\mathbf{A}_d^*}(n)$ は magic positive である．

例 2.4 (C 型 root polytope の双対)**.** $\mathbf{C}_d$ を集合

$$\{\pm\mathbf{e}_i \mid 1 \leq i \leq d\} \cup \{\pm(\mathbf{e}_i + \cdots + \mathbf{e}_{j-1}) \mid 1 \leq i < j \leq d\} \cup \{\pm(2\mathbf{e}_i + \cdots + 2\mathbf{e}_{d-1} + \mathbf{e}_d) \mid 1 \leq i \leq d-1\}$$

の凸包で定義する．このとき, $\mathbf{C}_d$ は次元 d の反射的整凸多面体であり, この多面体を **C 型 root polytope** と呼ぶ．$\mathbf{C}_d$ の双対の Ehrhart 多項式は [8, Theorem 1.1] で計算されていて, 次のようになる:

$$E_{\mathbf{C}_d^*}(n) = (n+1)^d + n^d.$$

従って, $E_{\mathbf{C}_d^*}(n)$ は magic positive である．

3 主結果

3.1 Stasheff polytope の Ehrhart 多項式の magic positive 性

はじめに, Stasheff polytope の Ehrhart 多項式の magic positive 性を考えるに至った動機について説明する．

[7] で cross polytope, Stasheff polytope の双対, A 型 root polytope と C 型 root polytope の CL 性について研究された．ここで反射的整凸多面体 P が **CL-polytope** であるとは, Ehrhart 多項式 $E_P(n)$ の全ての根の実部が $-\frac{1}{2}$ になるときに言う．これらの整凸多面体の双対は Stasheff polytope の双対を除き zonotope であることが知られている [2]．しかし, Stasheff polytope は zonotope でも Pitman-Stanley polytope でもないので, Ehrhart 多項式が magic positive かどうかは直ちに分からない．そこで, 本稿の 1 つ目の主結果として, Stasheff polytope の Ehrhart 多項式が magic positive であることを示した．

定理 3.1. Stasheff polytope の Ehrhart 多項式は magic positive である．

次の命題 3.2 を用いることで, Stasheff polytope の Ehrhart 多項式を具体的に求めることなく magic positive 性を示すことができる．

命題 3.2. 任意の $d \geq 2$ に対して, $E_{\mathrm{St}_d^*}(n)$ は次の漸化式を満たす．

$$E_{\mathrm{St}_d^*}(n) = (2n+1)E_{\mathrm{St}_{d-1}^*}(n) - \frac{1}{2}n(n+1)E_{\mathrm{St}_{d-2}^*}(n).$$

3.2 対称辺多面体の Ehrhart 多項式の magic positive 性

次にサイクルグラフから生じる対称辺多面体の Ehrhart 多項式の magic positive 性を考えるに至った動機について説明する.

d 頂点の完全グラフ K_d と木 T_d から生じる対称辺多面体は, それぞれ cross polytope と type A の root polytope と unimodular 同値になる. 従って, $E_{P^*_{K_d}}$ と $E_{P^*_{T_d}}$ は magic positive である. また, 任意の d 頂点連結グラフ G に対して $P^*_{K_d} \subset P^*_G \subset P^*_{T_d}$ が成り立つ. これらの事実から, 次のような問題が自然に浮かび上がる.

問題 3.3. 任意の連結グラフから生じる対称辺多面体の Ehrhart 多項式は magic positive か.

この問題に対して $E_{P^*_{K_{3,7}}}$ や $E_{P^*_{K_{10}\setminus\{e\}}}$ が magic positive にならないことが分かった. 具体的には次のようになる.

$$\begin{aligned} E_{P^*_{K_{3,7}}}(n) &= \frac{128}{3}n^9 + 192n^8 + 448n^7 + 672n^6 + \frac{3528}{5}n^5 + 532n^4 + \frac{820}{3}n^3 + 86n^2 + \frac{72}{5}n + 1 \\ &= (n+1)^9 + \frac{27}{5}(n+1)^8 n + \frac{34}{5}(n+1)^7 n^2 - \frac{142}{15}(n+1)^6 n^3 + \frac{88}{5}(n+1)^5 n^4 \\ &\quad + \frac{88}{5}(n+1)^4 n^5 - \frac{142}{15}(n+1)^3 n^6 + \frac{34}{5}(n+1)^2 n^7 + \frac{27}{5}(n+1)n^8 + n^9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{P^*_{K_{10}\setminus\{e\}}}(n) &= \frac{92}{9}n^9 + 46n^8 + \frac{364}{3}n^7 + 210n^6 + \frac{3766}{15}n^5 + 210n^4 + \frac{1084}{9}n^3 + 45n^2 + \frac{149}{15}n + 1 \\ &= (n+1)^9 + \frac{14}{15}(n+1)^8 n + \frac{23}{15}(n+1)^7 n^2 - \frac{19}{45}(n+1)^6 n^3 + \frac{31}{15}(n+1)^5 n^4 \\ &\quad + \frac{31}{15}(n+1)^4 n^5 - \frac{19}{45}(n+1)^3 n^6 + \frac{23}{15}(n+1)^2 n^7 + \frac{14}{15}(n+1)n^8 + n^9. \end{aligned}$$

そして, サイクルグラフから生じる対称辺多面体の Ehrhart 多項式が magic positive になることを予想し, この予想を部分的に解決した. これが本稿 2 つ目の主結果である.

定理 3.4. $E_{P^*_{C_{d+1}}}(n)$ を $E_{P^*_{C_{d+1}}}(n) = \sum_{j=0}^{d} a_j n^j (1+n)^{d-j}$ と変形する. このとき, $i = 0, 1, 2$ に対して, 係数 a_i と a_{d-i} は正である. ここで, C_d は d 頂点サイクルグラフを表す.

この定理を証明するために次の命題を使う.

命題 3.5. P_{C_d} を d 頂点サイクルグラフの対称辺多面体とする. このとき, 次が成り立つ.

$$E_{P^*_{C_{d+1}}}(n) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} (-1)^i \binom{(d+1-2i)n + (d-i)}{d} \binom{d+1}{i}.$$

参考文献

[1] Matthias Beck, Katharina Jochemko, and Emily McCullough. h^*-polynomials of zonotopes. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 371(3):2021–2042, 2019.

[2] Paola Cellini and Mario Marietti. Polar root polytopes that are zonotopes. *Sém. Lothar. Combin.*, 73:Art. B73a, 10, [2014–2016].

[3] Eugène Ehrhart. Sur les polyèdres rationnels homothétiques à n dimensions. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 254:616–618, 1962.

[4] Luis Ferroni and Akihiro Higashitani. Examples and counterexamples in Ehrhart theory, 2024.

[5] Luis Ferroni and Alejandro H. Morales. h^*-polynomial of Pitman-Stanley polytopes, in preparation.

[6] Takayuki Hibi. Dual polytopes of rational convex polytopes. *Combinatorica*, 12(2):237–240, 1992.

[7] Akihiro Higashitani, Mario Kummer, and Mateusz Michałek. Interlacing Ehrhart polynomials of reflexive polytopes. *Selecta Math. (N.S.)*, 23(4):2977–2998, 2017.

[8] Akihiro Higashitani and Yumi Yamada. The distribution of roots of Ehrhart polynomials for the dual of root polytopes of type C. *Graphs Combin.*, 39(4):Paper No. 83, 13, 2023.

[9] Masato Kounoike. A new class of magic positive ehrhart polynomials of reflexive polytopes. *arXiv preprint arXiv:2409.16648*, 2024.

[10] Tetsushi Matsui, Akihiro Higashitani, Yuuki Nagazawa, Hidefumi Ohsugi, and Takayuki Hibi. Roots of Ehrhart polynomials arising from graphs. *J. Algebraic Combin.*, 34(4):721–749, 2011.

[11] Richard P. Stanley. Decompositions of rational convex polytopes. *Ann. Discrete Math.*, 6:333–342, 1980.

トロピカル有理関数の最小体積表示

広島大学　大学院先進理工系科学研究科　数学プログラム
助永真之 (Masayuki SUKENAGA) *

概 要

$\mathbb{R}^n$ 上のトロピカル有理関数 φ とは、トロピカル多項式 f と g を用いて $\varphi = f \oslash g$ と表すことができるもののことである。トロピカル多項式に関する双対定理をトロピカル有理関数に対して拡張し、組 (f, g) の体積を定義する。$n = 1$ のとき、$\varphi(x) = f(x) \oslash g(x)$ を満たす組 (f, g) の中で体積が最小のものが存在し、$f(x) \oplus (y \odot g(x))$ の双対分割は平行移動を除いて一意であることを示す。また、$n = 2$ のときは体積最小の表示が一意ではない例があることも紹介する。

1　導入

$\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $\oplus = \max$, $\odot = +$ の三つ組 $(\mathbb{T}, \oplus, \odot)$ をトロピカル代数という。ただし、$-\infty$ に関する演算は、$x \in \mathbb{T}$ に対して $x \oplus -\infty = -\infty \oplus x = x$, $x \odot -\infty = -\infty \odot x = -\infty$ と定める。これは体の公理のうち「加法に関する逆元の存在」以外をすべて満たしており、半体と呼ばれる。$-\infty$ が加法 $\oplus$ に関する単位元（零元）であり、$0 \in \mathbb{R}$ が乗法 $\odot$ に関する単位元であることに注意する。$a, b \in \mathbb{T}$ $(b \neq -\infty)$ に対して $a \oslash b := a - b$ と定めると、これがトロピカル代数における割り算になる。

トロピカル代数に基づく幾何学をトロピカル幾何学という。ここでは、トロピカル多項式から定まるトロピカル超曲面というものが基本的な対象である。トロピカル多項式から定まる格子多面体的複体とトロピカル超曲面の間には双対性があり、トロピカル多様体に関する情報を組み合わせ論的に調べることができる。少しだけ代数幾何との関連を述べておくことにする。k を体とするとき、次を満たす写像 $v\colon k \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ を k 上の付値という：

- $v(a + b) \geq \min(v(a), v(b))$,
- $v(ab) = v(a) + v(b)$,
- $v(a) = \infty \Leftrightarrow a = 0$.

これを -1 倍した $-v$ を考えると、加法が max に関係し、乗法が通常の和に対応していることがわかる。また、加法の単位元 0 は $-\infty$ に対応している。このように見ると、付値はトロピカル代数と関連するものだと納得していただけると思う。代数多様体とは、体上の有限個の多項式の共通零点となっているもののことである。付値体上の代数多様体 X が与えられたとき、X の各点の付値をとり、-1 を掛けて通常の閉包をとる操作をトロピカル化という。X をトロピカル化することで、トロピカル多様体が得られるので、代数多様体に関する情報を組み合わせ論的に得る

*E-mail: sukenaga@hiroshima-u.ac.jp

ことができることがある。今回の話ではトロピカル化は出てこないが、こういった観点からのトロピカル幾何学の研究も行われている。

トロピカル多項式の説明に戻る。$\mathbb{T}$ に係数 $c_{\mathbf{i}}$ を持つ和 $\bigoplus_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ を n 変数トロピカル（ローラン）多項式という。ここで、$\mathbf{i}=(i_1,\dots,i_n)$ に対して $\mathbf{x}^{\mathbf{i}}:=x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}$ であり、係数 $c_{\mathbf{i}}\in\mathbb{T}$ は有限個を除いて $-\infty$ である。（通常の体上の多項式の係数は有限個を除いて 0 でないことに対応していると考えるとよい。トロピカル代数における零元は $-\infty$ であった。）トロピカル多項式 $f=\bigoplus_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}$ は次のように関数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{T}$ を定める：

$$(t_1,\dots,t_n)\mapsto \max_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{Z}^n}\left(c_{(i_1,\dots,i_n)}+i_1t_1+\dots+i_nt_n\right).$$

これは通常の多項式における代入と同じ操作である。つまり、まず各項に $(t_1,\dots,t_n)$ を代入したものをトロピカルの意味で掛け（すなわち通常の足し算をする）、次にそれらをトロピカルの意味で足しあげる（最大値を取る）操作になっている。

$\mathbb{R}^n$ 上のトロピカル有理関数とは、トロピカル多項式の組 $f,\,g$（ただし、$g\neq-\infty$）を用いて $f\oslash g\,(=f-g)$ と表せる関数である。[5] において、トロピカル多項式に対する単項式複雑度と、有限個のトロピカル多項式の列に対する分解複雑度というものが考察されている。彼らはトロピカル多項式の組全体の集合の上に $\leq_{\mathrm{mComp}}$ という前順序を

$$(f_1,g_1)\leq_{\mathrm{mComp}}(f_2,g_2)\ :\Leftrightarrow\ \begin{cases}\mathrm{mComp}(f_1)\leq\mathrm{mComp}(f_2)\\ \text{かつ }\mathrm{mComp}(g_1)\leq\mathrm{mComp}(g_2)\end{cases}$$

と定めた。ここで、mComp はトロピカル多項式の（単項式）複雑度を測る関数であり、$\mathrm{mComp}(f)$ は $\mathbb{R}^n\setminus V(f)$ ($V(f)$ は f の定めるトロピカル平面曲線というもの) の連結成分の個数と定義される。彼らはこの前順序において小さな組を見つける方法を考察したのだが、比較不能なペアが数多く存在するという問題があった。そこで、私はトロピカル有理関数に関する双対定理を示し、それを用いてトロピカル多項式の組に対して体積を定義することにより、全てのペアを比較可能にした。一変数のトロピカル有理関数 $\varphi(x)$ を考えたとき、$\varphi(x)=f(x)\oslash g(x)$ を満たす組 (f,g) の中で体積が最小のものに対して、$f(x)\oplus(y\odot g(x))$ の双対分割は平行移動を除いて一意であることを示した。しかし、二変数のときは体積最小の表示が一意ではない例が存在することを示した。

2　トロピカル有理関数と体積

n 変数トロピカル多項式全体の集合を $\mathbb{T}[x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1}]$ と書く。$f=\bigoplus_{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^n} c_{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}\in\mathbb{T}[x_1^{\pm1},\dots,x_n^{\pm1}]$ とする。ある $\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^n$ $(\mathbf{i}\neq\mathbf{j})$ に対して、$c_{\mathbf{i}}\mathbf{x}^{\mathbf{i}}(P)=c_{\mathbf{j}}\mathbf{x}^{\mathbf{j}}(P)=f(P)$ が成り立つような点 $P\in\mathbb{R}^n$ 全体の集合を f の定めるトロピカル超曲面といい、$V(f)$ と書く。特に、二変数トロピカル多項式の定めるトロピカル超曲面で空集合でも $\mathbb{R}^2$ でもないものをトロピカル平面曲線という。通常の代数幾何では多項式 f の零点集合は $V(f)=\{(p_1,\dots,p_n)\in k^n\mid f(p_1,\dots,p_n)=0\}$ である。トロピカルの世界で零点集合（トロピカル超曲面のこと）をなぜ上のように定めるのかうまい説明を思いつかないが、付値を用いたトロピカル化との関係を考えるときにはこう定義しておくと色々うまくいくのである。

Definition 2.1 (双対分割, [3, Definition 3.10])**.** $f=\bigoplus_{\mathbf{i}} c_{\mathbf{i}}x_1^{i_1}\dots x_n^{i_n}$ をトロピカル多項式とする。集合 $\{\mathbf{i}\in\mathbb{Z}^n\mid c_{\mathbf{i}}\neq-\infty\}$ の凸包をニュートン多面体といい、$\mathrm{Newt}(f)\subset\mathbb{R}^n$ と書く。$\Delta_f^{\uparrow}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ を次の集合の凸包と定める：

$$\{(\mathbf{i},\alpha)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{R}\ \mid\alpha\leq c_{\mathbf{i}}\}.$$

$\Delta_f^{\uparrow}$ の有界な面を $\mathbb{R}^n$ に射影することで、Newt(f) の分割が得られる。これを f の双対分割といい、Δ_f と書く。

トロピカル超曲面に関する双対定理というものがあるのだが、ここではトロピカル平面曲線 $V(f)$ に関する双対性の例を見る。Newt(f) に含まれる格子点 (i,j) に、対応する f の係数 $c_{i,j}$ を高さとする（z 軸の負の方向に無限に延びる）ポールを立て（ただし係数が $-\infty$ の所にはポールはない）、それらの凸包をとると $\Delta_f^{\uparrow}$ が得られる（テントを張るイメージ）。

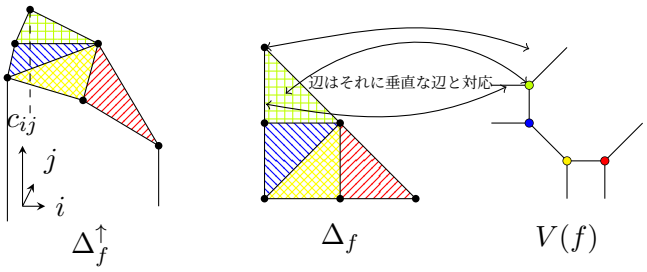


図 1: $f = x^2 \oplus 4xy \oplus 4y^2 \oplus 2x \oplus 4y \oplus 3$ に関する双対.

図 1 のように、トロピカル多項式 f の係数から f のニュートン多面体 Newt(f) の分割 Δ_f が得られ、これと $V(f)$ が双対になる。Δ_f の 2 次元 cell が $V(f)$ の頂点に対応し、Δ_f の 1 次元 cell が $V(f)$ の辺に対応している。Δ_f から $V(f)$ の概形が復元できる。この双対性により、トロピカル多様体を組み合わせ論的に調べることができる。また、双対定理を用いてトロピカル平面曲線の各辺に重みをつける。

Definition 2.2. $V(f)$ をトロピカル平面曲線とし、σ をその辺とする。σ の重み w_σ を双対分割 Δ_f において対応する 1 次元 cell の格子長と定める。

これ以降、トロピカル平面曲線と書いたら各辺に重みがついているものとする。重みをつけることでトロピカル平面曲線はバランス条件というものを満たすことが知られている。

$\mathbb{R}^n$ 上のトロピカル有理関数 $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}$ とは、n 変数トロピカル多項式 f と $g \neq -\infty$ を用いて $\varphi = f \oslash g$ と表すことができるものであった。組 (f,g) の体積を Newt$(f \oplus (x_{n+1} \odot g))$ の体積と定義するのだが、その理由は次のトロピカル有理関数に関する双対定理にある。

Theorem 2.3 (トロピカル有理関数に関する双対定理)**.** φ をトロピカル有理関数とし、$f \in \mathbb{T}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ と $g \in \mathbb{T}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}] \setminus \{-\infty\}$ を $\varphi = f \oslash g$ を満たすトロピカル多項式とする。このとき、次が成り立つ：

$$\begin{aligned} V(f \oplus (x_{n+1} \odot g)) \quad = \quad & \{(\mathbf{x}, \varphi(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \varphi(\mathbf{x}) \neq -\infty\} \\ & \cup \{(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in V(f), x_{n+1} < \varphi(\mathbf{x})\} \\ & \cup \{(\mathbf{x}, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \mathbf{x} \in V(g), x_{n+1} > \varphi(\mathbf{x})\}. \end{aligned}$$

右辺の一つ目の集合が φ のグラフとなっている。例は図 2 を参照していただきたい。証明が明示された文献が見当たらなかったため [4] でこの定理の証明を与えたが、トロピカル幾何の専門家にとってはよく知られている事実であると思われる。通常の代数幾何では、有理関数 f/g のグラフは $f - x_{n+1}g$ の零点集合である。上の定理は、トロピカル有理関数 $f \oslash g$ はある意味で、一変数追加したトロピカル多項式 $f \oplus (x_{n+1} \odot g)$ の双対分割 $\Delta_{f \oplus (x_{n+1} \odot g)}$ に双対であるということを言っている。

Definition 2.4. $f, g \in \mathbb{T}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ をトロピカル多項式とする。$\mathrm{Newt}(f \oplus (x_{n+1} \odot g))$ のアフィンスパンの次元が $n+1$ より真に小さいとき、$\mathrm{vol}(f, g) = 0$ と定め、$\mathrm{Newt}(f \oplus (x_{n+1} \odot g))$ のアフィンスパンの次元が $n+1$ のとき、$\mathrm{vol}(f, g)$ を $\mathrm{Newt}(f \oplus (x_{n+1} \odot g))$ の体積と定める。組 (f, g) の体積を $\mathrm{vol}(f, g)$ と定義する。

ここで、$\mathrm{Newt}(f \oplus (x_{n+1} \odot g))$ に含まれる格子点の数は $\mathrm{Newt}(f)$ と $\mathrm{Newt}(g)$ に含まれる格子点の数の和に等しい。$\mathrm{Newt}(f \oplus (x_{n+1} \odot g))$ の体積が小さいほど、$\mathrm{Newt}(f \oplus (x_{n+1} \odot g))$ に含まれる格子点の数は少ない傾向にあり、結果として $\mathrm{Newt}(f)$ と $\mathrm{Newt}(g)$ に含まれる格子点の数や f と g の単項式複雑度も小さくなる傾向があることに注意しておく。

トロピカル有理関数と体積の例を見る。一変数トロピカル多項式 $f_1(x) = x \oplus 0$, $g_1(x) = x \oplus 1$ を用いて、$\varphi(x) = f_1(x) \oslash g_1(x)$ と表せるトロピカル有理関数 $\varphi(x)$ を考える。関数 $\varphi(x)$ は $f_2(x) = (-2)x^2 \oplus x \oplus 0$, $g_2(x) = (-2)x^2 \oplus x \oplus 1$ を用いて $\varphi(x) = f_2(x) \oslash g_2(x)$ と表すこともできる。組 (f_1, g_1) の体積 $\mathrm{vol}(f_1, g_1)$ は $f_1 \oplus (y \odot g_1)$ の Newton 多角形の面積であり、1 である（図 2 参照）。一方、$\mathrm{vol}(f_2, g_2) = 2$ である。

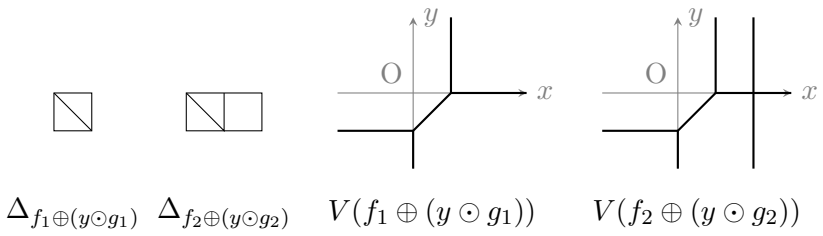


図 2: トロピカル有理関数の二つの表示.

3 主定理

一変数トロピカル有理関数 $\varphi(x)$ に対して、単項式複雑度と分解複雑度を共に最小にするような表示 $\varphi(x) = f(x) \oslash g(x)$ がただ一つ存在することが [5] において示された。これと同様、$n = 1$ のときには、$\varphi(x) \neq -\infty$ を $f(x) \oslash g(x)$ と表せるような組 (f, g) の中で体積最小なものが一意に存在することを明らかにした。

Theorem 3.1. $\mathbb{R}$ 上の $-\infty$ でない任意のトロピカル有理関数 $\varphi(x) \neq -\infty$ に対して、最小体積表示 $\varphi(x) = f(x) \oslash g(x)$ が存在する。$f'(x)$ と $g'(x)$ が $\varphi(x) = f'(x) \oslash g'(x)$, $\mathrm{vol}(f', g') = \mathrm{vol}(f, g)$ を満たすならば、$f' \oplus (y \odot g')$ の双対分割は $f \oplus (y \odot g)$ の双対分割を平行移動したものである。

一方、$n > 1$ のとき、最小体積表示が一意に定まらないような例があることを示した。

Proposition 3.2. $\mathbb{R}^2$ 上のトロピカル有理関数であって、ちょうど二つの異なる最小体積表示を持つものが存在する。

4 証明の準備（トロピカル平面曲線の和と差の導入）

Lemma 4.1. *[1, Lemma 4.6]* トロピカル多項式 $f, g \in \mathbb{T}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ に対して

$$V(f \odot g) = V(f) \cup V(g)$$

が成り立つ。

Remark 4.2. 上の等式の右辺を重みも含めた和と見ると、重みも込めて等号が成立する。

Definition 4.3. トロピカル平面曲線 Γ は空でない $V(f), V(g)$（f, g はトロピカル多項式）により $\Gamma = V(f) \cup V(g)$ と表すことができないとき、既約であるという。

Notation 4.4. $A, B \subset \mathbb{R}^n$ のミンコフスキー和を $A + B$ と書く。

Definition 4.5. f を二変数トロピカル多項式とする。f のニュートン多角形が一点集合ではなく、もしトロピカル多項式 f, g を用いて $\mathrm{Newt}(f) = \mathrm{Newt}(g) + \mathrm{Newt}(h)$ と書けているなら $\mathrm{Newt}(g)$ または $\mathrm{Newt}(h)$ が一点集合であるとき、既約であるという。

二つ目の主結果の証明で次の Lemma を使う。これは $\mathrm{Newt}(f \odot g) = \mathrm{Newt}(f) + \mathrm{Newt}(g)$ から簡単にわかる。

Lemma 4.6. $V(f)$ を $f = \bigoplus_{i,j} 0x^i y^j$（係数はすべて 0 であることに注意）から定まるトロピカル平面曲線とする。$V(f)$ が既約であることと $\mathrm{Newt}(f)$ が既約であることは同値である。

トロピカル有理関数は二つのトロピカル多項式関数をトロピカルな意味で割り算することで得られる。これは通常の実数の世界での引き算に対応している。Lemma 4.1 より、トロピカル多項式 f, g のトロピカル積 $f \odot g$ の定めるトロピカル平面曲線は、トロピカル平面曲線 $V(f), V(g)$ の和とみなせるから、トロピカル有理関数から二つのトロピカル平面曲線の差を考えることは自然である。トロピカル平面曲線の和と差（特に差）を考えるために、次のように Div を定義した。

Definition 4.7. $\mathrm{Div}^+ := \{L \subset \mathbb{R}^2 \mid L \text{ は直線、半直線または線分 }\}$,

$$\mathrm{Div}^{\#} := \left\{ \sum_{L \in \mathrm{Div}^+} w_L L \ \ (\text{formal sum}) \;\middle|\; \begin{array}{l} w_L \in \mathbb{Z}, \\ \#\{L \in \mathrm{Div}^+ \mid w_L \neq 0\} < \infty \end{array} \right\}$$

と定義する。二つの元 $\sum_{L \in \mathrm{Div}^+} w_L L \in \mathrm{Div}^{\#}$ と $\sum_{L \in \mathrm{Div}^+} w'_L L \in \mathrm{Div}^{\#}$ の和 $\sum_{L \in \mathrm{Div}^+} w_L L + \sum_{L \in \mathrm{Div}^+} w'_L L$ を $\sum_{L \in \mathrm{Div}^+} (w_L + w'_L) L$ と定める。$L_1, L_2 \in \mathrm{Div}^+$ であって、$\#(L_1 \cap L_2) = 1$ と $\exists L_3 \in \mathrm{Div}^+$ s.t. $L_1 \cup L_2 = L_3$ を満たすものと、各整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して、$\sum_{L \in \mathrm{Div}^+} w_L L$ と $\sum_{L \in \mathrm{Div}^+ \setminus \{L_1, L_2, L_3\}} w_L L + (w_{L_1} - n) L_1 + (w_{L_2} - n) L_2 + (w_{L_3} + n) L_3$ を同一視する。上の同一視により、$\mathrm{Div}^{\#}$ 上の同値関係が定まる。この同値関係による商を Div と書く。Div 上の和を $\mathrm{Div}^{\#}$ における和から誘導されるものとして定める。

Remark 4.8. トロピカル平面曲線は重み付きの辺の和とみなせるので、Div の元とみなせる。

Notation 4.9. トロピカル平面曲線 Γ の各辺の重みを -1 倍することで得られる Div の元を $-\Gamma$ と書く。

Notation 4.10. Γ_1, Γ_2 をトロピカル平面曲線としたとき、Γ_1 と $-\Gamma_2$ の和により定まる Div の元を $\Gamma_1 \oslash \Gamma_2$ と書く。

5 主定理の証明

Lemma 5.1. $f(x), g(x) \in \mathbb{T}[x^{\pm 1}]$ が関数として $f = g$ であるならば、これらの双対分割は等しい。

Proof. トロピカル有理関数 $f(x) \oslash 0$, $g(x) \oslash 0$ は関数として等しい。特に、$f(x) \oslash 0$, $g(x) \oslash 0$ のグラフは等しい。トロピカル有理関数に関する双対定理により、$\Delta_{f(x) \oplus y} = \Delta_{g(x) \oplus y}$ がわかる。よって、$\Delta_f = \Delta_g$ である。 □

一つ目の主定理を証明する。

Theorem 5.2. $\mathbb{R}$ 上の $-\infty$ でない任意のトロピカル有理関数 $\varphi(x) \neq -\infty$ に対して、最小体積表示 $\varphi(x) = f(x) \oslash g(x)$ が存在する。$f'(x)$ と $g'(x)$ が $\varphi(x) = f'(x) \oslash g'(x)$, $\mathrm{vol}(f', g') = \mathrm{vol}(f, g)$ を満たすならば、$f' \oplus (y \odot g')$ の双対分割は $f \oplus (y \odot g)$ の双対分割を平行移動したものである。

Proof. Pick の定理から、有限個の格子点の Newton 多角形の面積は $1/2$ の倍数である。よって、$\varphi \neq -\infty$ に対して、ある $f, g \in \mathbb{T}[x^{\pm 1}] \setminus \{-\infty\}$ であって、$\varphi = f \oslash g$ を満たすものの中で体積最小のものがある。トロピカル代数における代数学の基本定理（[2, p.5]）により、関数 f, g は次のように線形関数のトロピカル積に一意に書き表すことができる：

$$\begin{aligned} f &= \alpha_1 x^{i_0} (x \oplus a_1)^{i_1} \odot \cdots \odot (x \oplus a_n)^{i_n}, \\ g &= \alpha_2 x^{j_0} (x \oplus b_1)^{j_1} \odot \cdots \odot (x \oplus b_m)^{j_m}. \end{aligned}$$

ただし、$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $i_0, j_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, $i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_m \in \mathbb{Z}_{>0}$ である。Lemma 5.1 と Pick の定理により、

$$\mathrm{vol}(f, g) = \frac{\sum_{s=1}^{n} i_s + 1 + \sum_{s=1}^{m} j_s + 1}{2} - 1$$

となることに注意する。また、実数 $a \in \mathbb{R}$ とトロピカル多項式 $h(x)$, $h'(x)$ に対して、$h \oslash h' = (h \odot (x \oplus a)) \oslash (h' \odot (x \oplus a))$ となることにも注意する。$\mathrm{vol}(f, g)$ が最小体積であることと組み合わせると、$\{a_1, \ldots, a_n\} \cap \{b_1, \ldots, b_m\} = \emptyset$ がわかる。

$f'(x)$, $g'(x)$ が $\varphi(x) = f'(x) \oslash g'(x)$ と $\mathrm{vol}(f', g') = \mathrm{vol}(f, g)$ を満たすと仮定する。このとき、関数 f', g' は次のように線形関数のトロピカル積に一意に書き表すことができる：

$$\begin{aligned} f' &= \alpha_3 x^{k_0} (x \oplus c_1)^{k_1} \odot \cdots \odot (x \oplus c_u)^{k_u}, \\ g' &= \alpha_4 x^{l_0} (x \oplus d_1)^{l_1} \odot \cdots \odot (x \oplus d_v)^{l_v}. \end{aligned}$$

ただし、$\alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$, $k_0, l_0 \in \mathbb{Z}$, $c_1, \ldots, c_u, d_1, \ldots, d_v \in \mathbb{R}$, $k_1, \ldots, k_u, l_1, \ldots, l_v \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\{c_1, \ldots, c_u\} \cap \{d_1, \ldots, d_v\} = \emptyset$ である。関数として $f \oslash g = f' \oslash g'$ であるから、関数 $f \odot g'$ と $f' \odot g$ は等しい。したがって、関数 $(\alpha_1 \odot \alpha_4) x^{i_0 + l_0} (x \oplus a_1)^{i_1} \odot \cdots \odot (x \oplus a_n)^{i_n} \odot (x \oplus d_1)^{l_1} \odot \cdots \odot (x \oplus d_v)^{l_v}$ と $(\alpha_3 \odot \alpha_2) x^{k_0 + j_0} (x \oplus c_1)^{k_1} \odot \cdots \odot (x \oplus c_u)^{k_u} \odot (x \oplus b_1)^{j_1} \odot \cdots \odot (x \oplus b_m)^{j_m}$ は等しい。これらの線形関数のトロピカル積としての表示は一意である。$\{a_1, \ldots, a_n\} \cap \{b_1, \ldots, b_m\} = \emptyset$ かつ $\{c_1, \ldots, c_u\} \cap \{d_1, \ldots, d_v\} = \emptyset$ であることと組み合わせると、添え字の付け替えにより、$\alpha_1 - \alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_4$, $i_0 - k_0 = j_0 - l_0$, $n = u$, $a_s = c_s$ $(1 \leq s \leq n)$, $m = v$, $b_t = d_t$ $(1 \leq t \leq m)$ が成り立つ。Lemma 5.1 と組み合わせることで、$\Delta_f^{\uparrow}$ (resp. $\Delta_g^{\uparrow}$) は $\Delta_{f'}^{\uparrow}$ (resp. $\Delta_{g'}^{\uparrow}$) をベクトル $(i_0 - k_0, \alpha_1 - \alpha_3) \in \mathbb{R}^2$ だけ平行移動したものとなり、したがって、$\Delta_{f \oplus (y \odot g)}^{\uparrow}$ は $\Delta_{f' \oplus (y \odot g')}^{\uparrow}$ をベクトル $(i_0 - k_0, 0, \alpha_1 - \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ だけ平行移動したものになる。よって、$\Delta_{f \oplus (y \odot g)}$ は $\Delta_{f' \oplus (y \odot g')}$ をベクトル $(i_0 - k_0, 0)$ だけ平行移動したものである。 □

次に二つ目の結果の証明に入る。具体的な計算により、次の二つの Lemma を得る。

Lemma 5.3. Δ_1 を三点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ の凸包、Δ_2 を三点 $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ の凸包、Δ を有限個の格子点の凸包とする。Δ は一点集合ではないとする。Δ が次のいずれかであるとき、$i=1,2$ に対して、Δ_i と Δ のミンコフスキー和 $\Delta_i+\Delta$ の面積は $3/2$ となる：

$$\mathrm{Conv}\{(0,0),(1,0)\},\ \mathrm{Conv}\{(0,0),(0,1)\},\ \mathrm{Conv}\{(1,0),(0,1)\},$$

また、Δ が Δ_i を平行移動したものであれば 2 となり、それ以外の場合は $5/2$ 以上になる。

Lemma 5.4. Δ_1 を三点 $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ の凸包、Δ_2 を三点 $(1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ の凸包、Δ を有限個の格子点の凸包とする。$\Delta_1+\Delta$ の面積と $\Delta_2+\Delta$ の面積はともに 2 以上とする。このとき、$\{(x,y,0)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in\Delta_1+\Delta\}\cup\{(x,y,1)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in\Delta_2+\Delta\}$ の凸包の体積は $11/6$ 以上となる。

最後に二つ目の主定理とその証明を述べる。上の二つの Lemma を使った具体的な計算による証明である。

Proposition 5.5. $\mathbb{R}^2$ 上のトロピカル有理関数であって、ちょうど二つの異なる最小体積表示を持つものが存在する。

Proof. $f_1=xy\oplus(-1)y^2\oplus x\oplus y\oplus 0$, $g_1=(-1)xy^2\oplus xy\oplus(-1)y^2\oplus x\oplus y$ とする。このとき、トロピカル曲線と $V(f_1)\oslash V(g_1)\in\mathrm{Div}$ は図 3 のようになる。$V(f_1)\oslash V(g_1)$ の太線部の半直線たちが重み 1、破線部が重み -1 である。一方、トロピカル多項式 $f_2=x^2\oplus xy\oplus(-1)y^2\oplus x\oplus(-1)y$, $g_2=(-1)x^2y\oplus(-1)xy^2\oplus x^2\oplus xy\oplus(-1)y^2$ も関数として $f_1\oslash g_1=f_2\oslash g_2$ を満たす。ここで、$V(f_1)\oslash V(g_1)$ と $V(f_2)\oslash V(g_2)$ は三本の半直線 $R_1:=\{(t,t+1)\mid t\geq 0\}$, $R_2:=\{(0,-t)\mid t\geq 0\}$, $R_3:=\{(-t,0)\mid t\geq 0\}$ を重み 1 で含むことに注意する。また、体積を計算すると $\mathrm{vol}(f_1,g_1)=\mathrm{vol}(f_2,g_2)=5/3$ となっている。

トロピカル多項式の組 (f,g) が関数として $f\oslash g=f_1\oslash g_1$ を満たすとしてみよう。すると、$V(f)$ は三本の半直線 R_1, R_2, R_3 を含まなければならない。ここで、十分大きな $d\in\mathbb{R}_{>0}$ をとると、$V(f)\setminus U_d$ は有限個の半直線 $L_1,\dots,L_n$ の非交和となる。L_1 は R_1 と、L_2 は R_2 と、そして L_3 は R_3 と非有界な交わりを持つとしてよい。もし $n=3$ であれば、$\mathrm{Newt}(f)$ は $\Delta_1:=\mathrm{Conv}\{(0,0),(1,0),(0,1)\}$ を平行移動したものになり、したがって $V(f)$ は $V(x\oplus y\oplus 0)$ を平行移動したものとなる。しかし、これは $R_1\cup R_2\cup R_3$ を含まない。よって、$n\geq 4$ となる。

半直線 $L_1,\dots,L_n$ たちはバランス条件を満たす。三本の半直線 L_1, L_2, L_3 はバランス条件を満たしているから、残りの $L_4,\dots,L_n$ たちもバランス条件を満たさなければならない。このとき、Lemma 4.6 より $\mathrm{Newt}(f)$ は Δ_1 と凸格子多角形であって一点ではないもの Δ とのミンコフスキー和として表すことができる。同様に、$\mathrm{Newt}(g)$ は $\mathrm{Conv}\{(1,0),(0,1),(1,1)\}$ と Δ のミンコフスキー和を平行移動させたものとして表せる。

図 5 のように、$\Delta':=\mathrm{Conv}\{(0,0),(2,0),(1,1),(0,1)\}$ はちょうど八種類の分割が可能である。これらの双対になるトロピカル平面曲線はいずれも三つの半直線 R_1, R_2, R_3 を同時に含むことはなく、したがって、$\mathrm{Newt}(f)$ は Δ' を平行移動させたものではないことがわかる。よって、Δ は $\mathrm{Conv}\{(0,0),(1,0)\}$ を平行移動させたものではない。もし Δ が $\mathrm{Conv}\{(0,0),(1,1)\}$ を平行移動させたものであれば、$\mathrm{Newt}(f)$ と $\mathrm{Newt}(g)$ の面積はともに $5/2$ となる。もし Δ が二次元集合であれば、Lemma 5.3 により $\mathrm{Newt}(f)$ と $\mathrm{Newt}(g)$ の面積はともに 2 以上となる。いずれの場合も Lemma 5.4 により $\mathrm{vol}(f,g)\geq 11/6>5/3$ となる。したがって、$\varphi=f_1\oslash g_1$ と $\varphi=f_2\oslash g_2$ のちょうど二つだけが φ の最小体積表示である。 □

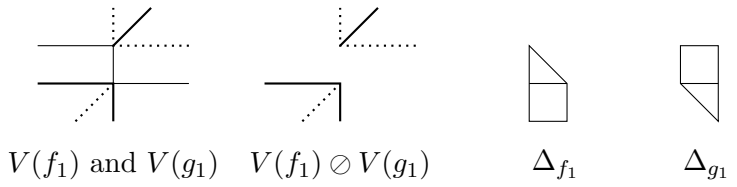


図 3: トロピカル平面曲線 $V(f_1)$ と $V(g_1)$.

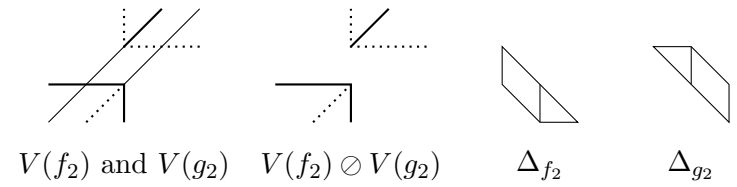


図 4: トロピカル平面曲線 $V(f_2)$ と $V(g_2)$.

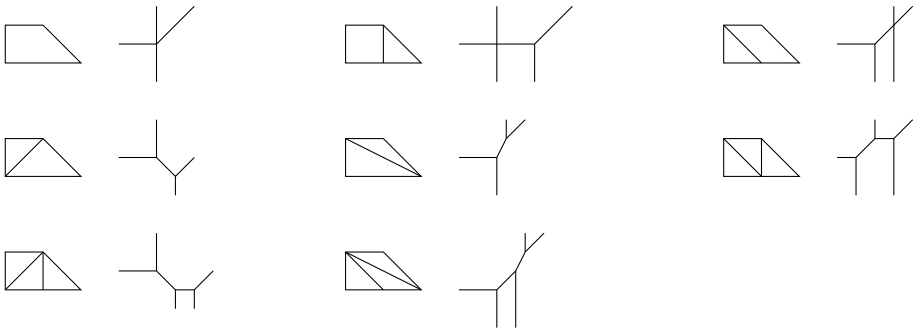


図 5: Δ' の八つの分割と双対トロピカル曲線の概形.

参考文献

[1] Joswig, M., "Essentials of tropical combinatorics," Graduate Studies in Mathmatics **219**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2021.

[2] Maclagan, D. and Sturmfels, B., "Introduction to Tropical Geometry," Graduate Studies in Mathematics **161**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[3] Mikhalkin, G., *Enumerative tropical algebraic geometry in* $\mathbb{R}^2$, J. Amer. Math. Soc. **18** (2005), no. 2, 313–377.

[4] Sukenaga, M., *Minimum volumes of tropical rational functions*, (プレプリント), arXiv:2409.18348 (2024).

[5] Tran, M. and Wang, J, *Minimal representations of tropical rational functions*, Algebr. Stat. **15** (2024), no. 1, 27–59.

Unimodular smooth Fano polytopes and their relation with Ewald conditions

Department of Pure and Applied Mathematics,
Graduate School of Information, Science and Technology, Osaka University
Binnan TU *

Abstract

Smooth Fano polytopes (SFPs) play an important role in toric geometry and combinatorics. In this paper, we introduce a specific subcollection of them, i.e., the unimodular smooth Fano polytopes (USFPs). In Section 2, they are verified to satisfy the three (weak, strong, star) Ewald conditions. Besides, a characterisation of USFPs is provided as a corollary of the famous Seymour's decomposition theorem. After that, we introduce the previous result by L. Crespo, A. Pelayo and F. Santos, and give a proof of the claim that any deeply monotone polytope is in fact the dual polytope of some USFP. In other words, we extend their results on deeply monotone polytopes to the case of USFPs.

1 Introduction

Smooth Fano polytopes have been intensively studied for several decades. Their unimodular equivalence classes are convex geometric objects corresponding to the ones of smooth toric Fano varieties. Thus, it allows one to pose, consider, and solve problems about them from both combinatorial and algebraic view points. The dual concept of smooth Fano polytopes is known as monotone (moment) polytopes, which correspond to monotone symplectic manifolds. For more details on them on symplectic geometry, we refer to the book by Cannas da Silva [4]. In addition, they also have an emphasis on classical mechanics. See, e.g., [1]. Up to unimodular equivalence, smooth Fano polytopes and monotone polytopes share the same amount for any fixed dimension. Currently, they have been completely classified until dimension 9 [7], [11]. However, it is hard to proceed the process in higher dimension since the number increases rapidly. Meanwhile, people are also interested in searching for possible bounds on invariants. For example, Casagrande showed that the maximal number of vertices of a smooth Fano n-polytope is $3n$ [3]. Besides, there are also bounds on volume and lattce points. An interesting example without smoothness can be found in [10], Theorem B and C. For the smooth case, an attractive open question is the Ewald conjecture [5], which claims a volumn bound for any smooth Fano n-polytope. The most recent partial result of this conjecture is given by Crespo, Pelayo and Santos [2].
For approaching Ewald conjecture, we are motivated to generalize his result to a larger subcollection of smooth Fano polytopes. So, an important goal of this paper is to show that the set of so-called unimodular smooth Fano polytopes is such an extension.

1.1 Smooth Fano Polytopes and Monotone Polytopes

Definition 1. Let $P \subset N_R(\cong \mathbb{R}^n)$ be an n-dimensional lattice polytope, then it is said to be

*E-mail:u244520i@ecs.osaka.u-ac.jp
arXiv:2409.14678

(1) *projective* if it contains the origin as its interior;

(2) *Fano* if it's projective and any of its vertices is a primitive lattice point;

(3) *reflexive* if its dual polytope is still a lattice polytope. The dual polytope P^* consists of $x \in \mathbb{R}^n$ s.t. $\langle x, y\rangle \geq -1$ for all $y \in P$, where $\langle x, y\rangle$ is the standard inner product of $\mathbb{R}^n$.

Nowadays, the two 'dual' definitions of smooth lattice polytopes are both commonly used by mathematicians. One starts with the polyhedral cone, whose apex is the origin, over a facet of the polytope, e.g., [11]. The other regards the corner at a fixed vertex of the polytope as a cone, e.g. [2],[8]. Let $N \cong \mathbb{Z}^n$ be a lattice with associated real vector space $N_R \cong N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ and let M be the dual lattice of N with associated real vector spaces $M_R \cong M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Then we have the two definitions as follows:

Definition 2. Let $P \subset N_R(\cong \mathbb{R}^n)$ be an n-dimensional lattice polytope, then it is said to be

(4a) *simplicial* if there are precisely n vertices for each facet;

(5a) *smooth* if it is simplicial and the vertices of any facet of P form a basis of the lattice N.

Definition 3. Let $Q \subset M_R(\cong \mathbb{R}^n)$ be an n-dimensional lattice polytope, then it is said to be

(4b) *simple* if there are precisely n edges meeting at each fixed vertex;

(5b) *smooth* if it is simple and the primitive edge-direction vectors at each vertex form a basis of the lattice M.

When talking about *smooth Fano polytope*, we always mean the polytope in N_R, i.e., Definition 2. Besides, the smooth reflexive polytope in M_R with Definition 3 is also called a *monotone polytope* (or *reflexive Delzant polytope*), whose name arises from the research of sympletic toric geometry. In most cases where the definition is clear, we simply use $\mathbb{R}^n$ as our vector space for polytopes.

Unimodular equivalence

Let P and P' be two lattice polytopes in $\mathbb{R}^n$, then we say that P and P' are *unimodularly equivalent* if there exists a unimodular transformation which maps P to P'. Here, a *unimodular transformation* is a linear map whose representative matrix is an integer matrix and has the determinant ± 1. All the polytoeps in this paper, if nothing more is mentioned, are up to unimodular equivalence.

Example 1. There are precisely 5 smooth Fano polytopes in dimension 2 up to unimodular equivalence. They are shown in Figure 1 together with their dual polytopes.

1.2 Ewald Conjectures and Ewald Conditions

In the research of smooth Fano polytopes, there is a long-standing open question raised by Gü nter Ewald in 1988 [5]. He conjectured that any n-dimensional smooth Fano polytope can be embedded into $[-1, 1]^n$. After that, Mikkel Øbro [11] mentioned a stronger version of Ewald conjecture and gave a positive answer to the case up to dimension 7. Since it's hard to prove these Ewald conjectures directly, a natural idea is to find a possible collection of polytopes with more restrictions such that they satisfy the condition of these conjectures, and then 'expand' it to the original conjectures. In other words, we are trying to find the maximal subset of smooth

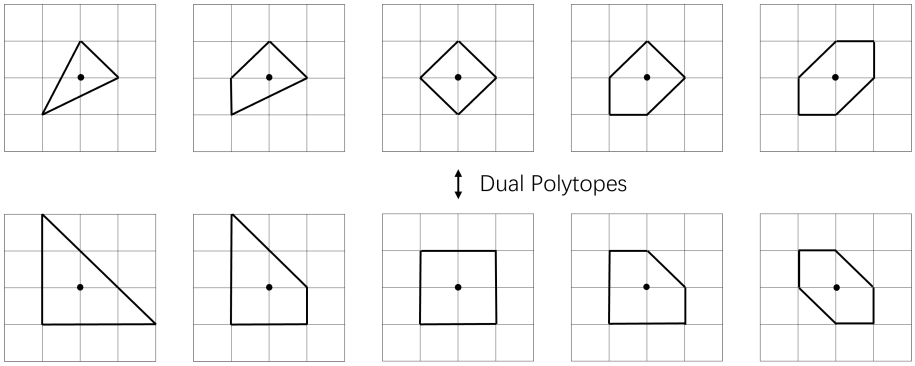


Figure 1: 2-dimensional smooth Fano polytopes and their duals

Fano polytopes that is true for the so-called weak and strong 'Ewald conditions'. Moreover, Dusa McDuff introduced another Ewald condition called star Ewald, inspired by problems in toric symplectic geometry [8]. The concrete expression of these conditions are listed below.

Definition 4. Let P be an n-dimensional projective polytope, then we say that

- it satisfies *the weak Ewald condition* if P can be embedded into the hypercube $[-1,1]^n$ via a unimodular transformation;
- equivalently, it satisfies *the weak Ewald condition* if the symmetric point set $\mathcal{E}(P^*)$ of its dual polytope P^* contains a unimodular basis of $\mathbb{Z}^n$, where the *symmetric point set* is defined to be
$$\mathcal{E}(P^*) := P^* \cap (-P^*) \cap \mathbb{Z}^n;$$
- it satisfies *the strong Ewald condition* if for any vertex $v \in P$, there exists a unimodular transformation ϕ, s.t. $\phi(P) \subset [-1,1]^n$ and $\phi(v) = \sum_{i=1}^n e_i$, where e_i are standard basis vectors of $\mathbb{R}^n$;
- equivalently, it satisfies *the strong Ewald condition* if for any facet F of its dual polytope P^*, the set $\mathcal{E}(P^*) \cap F$ contains a unimodular basis of $\mathbb{Z}^n$;
- P^* satisfies *the star Ewald condition* if every face of P^* satisfies the star Ewald condition. A face f of P^* is said to be *star Ewald* if there exists a symmetric point $\lambda \in \mathcal{E}(P^*)$ s.t. $\lambda \in \mathrm{Star}^*(f)$ and $-\lambda \notin \mathrm{Star}(f)$. Here, $\mathrm{Star}(f)$ is the union of all facets (face of codimension 1) containing face f, and $\mathrm{star}(f)$ is the union of all ridges (face of codimension 2) containing face f. Besides, $\mathrm{Star}^*(f) := \mathrm{Star}(f) \backslash \mathrm{star}(f)$.

Furthermore, Benjamin Nill generalized the weak Ewald conjecture in 2009 to the case where reflexivity of the dual polytope is not required [9]:

Conjecture 1 (Generalized Ewald conjecture [9]). *Let $P \subset N_{\mathbb{R}}$ be an n-dimensional polytope whose dual polytope P^* is a smooth projective lattice polytope in $M_{\mathbb{R}}$, then P lies in the hypercube $[-1,1]^n$.*

A recent result in dimension 2 and some partial results in dimension 3 have been verified by Luis Crespo [2]. Though it seems more general without the requirement of reflexivity, Nill's conjecture is believed to be implied by the weak Ewald conjecture [2].

2 Main Results

DEFINITION 5. Let $P \subset \mathbb{R}^n$ be a lattice polytope, then the (coordinate) matrix of P is an $m \times n$-matrix ($m > n$) whose each row is the coordinates of a vertex. The polytope P is said to be *unimodular* if any n vertices form either a basis of the lattice or are linearly dependent. In other words, any $n \times n$-submatrix has determinant ± 1 or 0.

There are three main theorems in this paper:

THEOREM 2.1. *Let P be an n-dimensional unimodular smooth Fano polytope with m vertices, then*

(i) P satisfies the strong Ewald condition, and

(ii) the dual polytope P^* of P satisfies the star Ewald condition.

THEOREM 2.2. *Let P be a unimodular smooth Fano polytope. Then its coordinate matrix M can be constructed from graphic matrices by elementary operations, (matroid-) dualizing and k-sums for $k = 1, 2, 3$.*

REMARK 1. This result can be seen as a corollary of the famous Seymour's decomposition theorem on matroids [13]. In addition, for any given graphic matrices, one may construct a lattice polytope on it. If the polytope is smooth Fano, then we call it a *smooth Fano polytope arising from directed graph* (SFPdG for short, and details can be found in [6]). Obviously, each SFPdG is a USFP.

DEFINITION 6. An n-dimensional monotone polytope P is said to be *deeply (smooth)* if the paralledpiped at any vertex v of P, i.e.,

$$\{v + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i |\ \lambda_i \in [0, 1],\ \forall i\}$$

is contained in P.

THEOREM 2.3. *Any deeply monotone polytope is the dual polytope of a unimodular smooth Fano polytope.*

REMARK 2. With the results above, we have the following relations:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Deeply monotone polytopes}\} & \subset & \{\text{Duals of USFPs}\} \\ \cap & & \cup \\ \{\text{UT-free monotone polytopes}\} & & \{\text{Duals of SFPdGs}\} \end{array}$$

Here, a *UT-free monotone polytope* is a monotone polytope without any unimodular triangle as a 2-face [2].

Now, we know that USFPs satisfy three Ewald conditions by Theorem 2.1, and then, DMP and SFPdG follow from the inclusions. Naturally, one may conjecture:

CONJECTURE 2. *UT-free monotone polytopes are the duals of USFPs (up to unimodular equivalence). In particular, all the UT-free monotone polytopes satisfy the three Ewald conditions.*

REMARK 3. Furthermore, we can replace the 'USFPs' in Conjecture 2 by the 'SFPdGs', i.e.,

$$\{\text{UT-free monotone polytopes}\} \subset \{\text{Duals of SFPdGs}\}.$$

which is still very likely to be true.

REMARK 4. The numbers of these types of polytopes, up to dimension 6 are listed below:

Dimension	SFPs	UT-free	DMPs	SFPdGs	USFPs
2	5	5	5	5	5
3	18	16	16	16	16
4	124	74	72	95	96
5	866	336	300	551	554
6	7622	1699	1352	≥ 3920	4097

References

[1] Abraham, R. and Marsden, J.E.: Foundations of Mechanics (2-nd Edition), Benjamin/Cummings Pub. Co., Reading, Mass, 1978.

[2] Crespo, L., Pelayo, A. and Santos, F.: Algorithms for Computer Algebra. Kluwer, Boston (1992)

[3] Casagrande, C.: The number of vertices of a Fano polytope, Annales de l'Institut Fourier, Volume 56 (2006), 121-130.

[4] Cannas da Silva, A.: Lectures in Symplectic Geometry, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[5] Ewald, G.: On the classification of toric fano varieties, Discrete Comput. Geom. 3 (1988), 49–54.

[6] Higashitani, A.: Smooth Fano polytopes arising from finite directed graphs, Kyoto J. Math. 55(3) (2015), 579-592.

[7] Lorenz, B. and Paffenholz, A.: Smooth Reflexive Lattice Polytopes, Data available at http://polymake.org/polytopes/paffenholz/www/fano.html.

[8] McDuff, D.: Displacing Lagrangian toric fibers via probes, In Low-dimensional and symplectic topology. Proceedings of the 2009 Georgia International Topology Conference held at the University of Georgia, Athens, GA, May 18–29, 2009, Proc. Sympos., 131–160, Pure Math. 82, American Mathematical Society, Providence, RI., 2011.

[9] Nill, B.: Gorenstein toric Fano varieties, Manuscripta Math. 116 (2005), 183–210.

[10] Nill, B.: Volume and lattice points of reflexive simplices, Discr. Comp. Geom. 37 (2007), 301-320.

[11] Øbro, M.: Classification of smooth Fano polytopes, Ph. D. thesis, Aarhus Universitetsforlag (2008), 1–148.

[12] Ohsugi, H. and Hibi, T.: Hamiltonian Tournaments and Gorenstein Rings, Europ. J. Comb. 23 (2002), 463–470.

[13] Seymour, P.D.: Decomposition of regular matroids, Journal of Combinatorial Theory, Series B, Volume 28, Issue 3 (1980), 305–359 .

dg 圏のホモトピー論に対する形式圏論的アプローチ

大阪大学大学院理学研究科数学専攻
今村 悠希 (Yuki IMAMURA) *

概要

dg 圏とは，Hom 集合が加群の複体の構造を持っているような圏のことをいう．dg 圏には擬同値と呼ばれる同値概念があり，すべての dg 圏は擬同値のもとで区別するべきとされる（dg 圏のホモトピー論）．本講演では，dg 圏のホモトピー論に対して 2 圏論・形式圏論の観点からアプローチを行う．形式圏論の理論においては，圏における極限の概念を形式的に定義できる．これを dg 圏のホモトピー論に適用することで，dg 圏のプレ三角性が一種の完備性として捉えられることを紹介する．

1 導入

dg 圏とは，Hom 集合が加群の複体の構造を持っているような圏である．dg 圏 $\mathcal{A}$ がプレ三角と呼ばれる性質を持つとき，その H^0-圏 $H^0(\mathcal{A})$ が自然に三角圏の構造を持つ．このため dg 圏は，多元環の表現論をはじめ，三角圏を扱う代数幾何学や数理物理などの分野において重要な研究対象となっている．

dg 圏には通常の圏同値に加えて，圏同値を弱めた**擬同値**と呼ばれる同値概念が存在する．dg 圏を擬同値のもとで識別する理論を**「dg 圏のホモトピー論」**と呼ぶ．この dg 圏のホモトピー論に立てば，dg 圏のなす圏 dgCat の代わりに dgCat を擬同値によって局所化した圏 $\mathsf{HodgCat}$ を考えるのが自然である．この圏 $\mathsf{HodgCat}$ を**「dg 圏のなすホモトピー圏」**と呼び，$\mathsf{HodgCat}$ の射を dg 圏の**擬関手**という．

本小論では，dg 圏のホモトピー論に対して 2 圏論・形式圏論の観点からアプローチを行う．

dg 圏のなすホモトピー圏 $\mathsf{HodgCat}$ は対象と射だけを持つ通常の 1 圏として構成されるため，2 圏の構造を備えてはいない．一方で Toën [Toë07] による次の結果が知られている：擬関手の集合と右擬表現可能な dg 両加群の同型類の集合の間に全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{HodgCat}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \cong \mathrm{Iso}(D(\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{B})^{\mathrm{rqr}})$$

が存在する．この結果から，$D(\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{B})^{\mathrm{rqr}}$ を Hom 圏とする 2 圏[*1] $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ は $\mathsf{HodgCat}$ の自然な精密化となるような 2 圏だと思うことができる．これは dg 両加群の導来圏 $D(\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{B})$ を Hom 圏とする 2 圏 DBimod の部分 2 圏である．

* E-mail: u287972b@alumni.osaka-u.ac.jp

[*1] 正確には双圏 (bicategory) になる．

本小論では，二つの 2 圏 $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}, \mathsf{DBimod}$ の 2 圏的な性質（随伴や同値の特徴づけ）を調べた後，埋め込み $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}} \hookrightarrow \mathsf{DBimod}$ が形式圏論における副射装備と呼ばれる構造になっていることを確認する．**形式圏論**とは，2 圏論の一分野で，圏論それ自体を形式化しようとする試みのことを指し，**副射装備**は形式圏論を展開するための枠組みの一つである．副射装備の構造があると，通常の圏論におけるような極限の概念を抽象的な方法で定義することができる．この極限の形式的な定義を副射装備 $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}} \hookrightarrow \mathsf{DBimod}$ に適用することで，dg 圏における**ホモトピー極限**の概念を導入できる．その具体例として，プレ三角な dg 圏における錐やシフトが得られることを確認し，プレ三角性がある種の完備性として捉えられることを紹介する．

本小論は [Ima24] に基づく．

2　dg 圏のホモトピー論と 2 圏的構造

簡単のため，基礎体 $\Bbbk$ 上で考える．$\Bbbk$ 上の加群の複体のなす圏を $\mathsf{Ch}(\Bbbk)$ とすると，複体のテンソル積 $\otimes_{\Bbbk}$ と Hom 複体 $\mathrm{Hom}^{\bullet}$ の構成により $\mathsf{Ch}(\Bbbk)$ は対称モノイダル閉圏になる．（$\Bbbk$ 上の）dg 圏とは，モノイダル圏 $\mathsf{Ch}(\Bbbk)$ 上の豊穣圏のことを指す．

定義 2.1. dg 圏 $\mathcal{A}$ とは，

- 対象の集まり $\mathrm{ob}(\mathcal{A})$
- 各対象 $A, B \in \mathcal{A}$ に対して Hom 複体 $\mathcal{A}(A,B) \in \mathsf{Ch}(\Bbbk)$ が与えられている
- 各対象 $A, B, C \in \mathcal{A}$ に対して複体の射 $\circ\colon \mathcal{A}(B,C) \otimes_{\Bbbk} \mathcal{A}(A,B) \to \mathcal{A}(A,C)$ が与えられている（合成射と呼ぶ）
- 各 $A \in \mathcal{A}$ に対して複体の射 $\mathrm{id}_A\colon \Bbbk \to \mathcal{A}(A,A)$ が与えられている（恒等射と呼ぶ）

からなるデータであって，結合律と単位律をみたすもののことである（詳しくは [Kel82] を見よ）．

例えば，$\Bbbk$-加群の複体は Hom 複体 $\mathrm{Hom}^{\bullet}(X,Y)$ を Hom 対象とすることで dg 圏 $C_{\mathrm{dg}}(\Bbbk)$ をなす．また dg 代数は対象をただ一つだけ持つ dg 圏とみなせ，dg 代数上の dg 加群もまだ dg 圏をなす．

dg 圏 $\mathcal{A}$ に対して，$Z^0(\mathcal{A})(A,B) = Z^0(\mathcal{A}(A,B))$ を Hom 集合とする圏を $Z^0(\mathcal{A})$，$H^0(\mathcal{A})(A,B) = H^0(\mathcal{A}(A,B))$ を Hom 集合とする圏を $H^0(\mathcal{A})$ と表す．$Z^0(\mathcal{A})$ を **Z^0-圏**あるいは**台圏**，$H^0(\mathcal{A})$ を **H^0-圏**あるいは**ホモトピー圏**と呼ぶ．

通常の圏論と同じように，dg 圏の間の dg 関手やその間の dg 自然変換が定義できる．dg 代数の導来圏の一般化として，dg 圏の導来圏も定義できる．

定義 2.2. $\mathcal{A}$ を dg 小圏とする．

(1) **（右）dg $\mathcal{A}$-加群** M とは，dg 関手 $M\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to C_{\mathrm{dg}}(\Bbbk)$ のことである．dg 加群の間の射とは，dg 関手の間の dg 自然変換のことである．dg 加群の dg 圏を $C_{\mathrm{dg}}(\mathcal{A})$ で表し，$C(\mathcal{A}) = Z^0(C_{\mathrm{dg}}(\mathcal{A}))$ とおく．

(2) dg $\mathcal{A}$-加群の射 $\theta\colon M \to N$ が**擬同型**であるとは，各 $A \in \mathcal{A}$ について複体の射 $\theta_A\colon M(A) \to N(A)$ が擬同型であるときをいう．

命題 2.3. dg 小圏 $\mathcal{A}$ 上の dg 加群の圏 $C(\mathcal{A})$ の擬同型に関する局所化 $D(\mathcal{A})$ が存在する．これを $\mathcal{A}$ の**導来圏**と呼ぶ．さらに導来圏 $D(\mathcal{A})$ は三角圏の構造を持つ．

dg 米田埋め込み $\mathsf{y}\colon \mathcal{A} \to C_{\mathrm{dg}}(\mathcal{A})$ から関手 $H^0(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A})$ が誘導され，これは充満忠実になる．

定義 2.4. dg 圏 $\mathcal{A}$ が**プレ三角**であるとは，埋め込み $H^0(\mathcal{A}) \hookrightarrow D(\mathcal{A})$ のもとで $H^0(\mathcal{A})$ が三角圏 $D(\mathcal{A})$ におけるシフトと錐を取る操作で閉じるときをいう．

dg 圏 $\mathcal{A}$ がプレ三角のとき，$H^0(\mathcal{A})$ は $D(\mathcal{A})$ の部分三角圏になる．

dg 圏と dg 関手と dg 自然変換のなす 2 圏 dgCat における同値射として dg 圏の圏同値が定まるが，dg 圏には複体のホモトピー論を考慮した擬同値と呼ばれる同値概念が存在する．

定義 2.5. dg 関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ について，

(1) F が**擬充満忠実**であるとは，すべての $A, A' \in \mathcal{A}$ に対して複体の射 $F_{AA'}\colon \mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(FA, FA')$ が擬同型であるときをいう．
(2) F が**擬本質的全射**であるとは，ホモトピー圏の間に誘導される射 $H^0(F)\colon H^0(\mathcal{A}) \to H^0(\mathcal{B})$ が本質的全射であるときをいう．
(3) F が**擬同値**であるとは，擬充満忠実かつ擬本質的全射であるときをいう．

明らかに dg 圏同値ならば擬同値であり，F が擬同値ならば誘導される関手 $H^0(F)$ は圏同値になる．特にプレ三角な dg 圏の間の擬同値 F が存在すれば，三角圏同値 $H^0(\mathcal{A}) \simeq H^0(\mathcal{B})$ が誘導される．

このことから擬同値な dg 圏は同じものだとみなすべきである．擬同値に関する dg 圏のホモトピー論を展開するために，モデル圏構造が存在すると便利である．

定理 2.6 (dgCat 上の Tabuada モデル圏構造 [Tab05])**.** 小さい dg 圏のなす圏 dgCat には，擬同値を弱同値とするようなモデル圏構造が存在する．特に dgCat の擬同値による局所化が存在する．この局所化を $\mathsf{HodgCat}$ で表し，**dg 圏のなすホモトピー圏**と呼ぶ．

局所化 $\mathsf{HodgCat}$ は，擬同値な射が同型になるような圏の中で最も普遍的なものである．

dg 圏のなすホモトピー圏 $\mathsf{HodgCat}$ の射は，dg 両加群を用いた記述が知られている．これを紹介するために，いくつか準備をする．

定義 2.7. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を dg 小圏とする．**dg** $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$**-両加群** X とは，dg $(\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{op}})$-加群，すなわち dg 関手 $X\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{A} \to C_{\mathrm{dg}}(\Bbbk)$ のことである．これを $X\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ と書くことにする．dg 両加群の dg 圏を $C(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = C(\mathcal{B} \otimes \mathcal{A}^{\mathrm{op}})$ で表し，$C(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = Z^0(C_{\mathrm{dg}}(\mathcal{A}, \mathcal{B}))$ とおく．

dg $(\Bbbk, \mathcal{B})$-両加群がちょうど右 dg $\mathcal{B}$-加群と同じものである．

dg 両加群は環上の両側加群の dg 類似である．環上の加群と同様に，dg 両加群はテンソル-Hom 随伴を誘導する．すなわち，dg 両加群 $X\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ に対して，dg 加群圏の間の dg 随伴

$$T_X\colon\ C_{\mathrm{dg}}(\mathcal{A}) \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} C_{\mathrm{dg}}(\mathcal{B})\ \colon H_X$$

が得られる．ここで $T_X = - \otimes_{\mathcal{A}} X$ である．この随伴の導来関手を取ることで，導来圏の間の導来

随伴

$$\mathbb{L}T_X\colon\ D(\mathcal{A}) \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{\perp}} D(\mathcal{B})\ \colon \mathbb{R}H_X$$

も得られる．

定義 2.8. $\mathcal{A},\mathcal{B}$ を dg 小圏とする．

(1) dg 加群 $M \in C(\mathcal{A})$ が**擬表現可能**であるとは，導来圏 $D(\mathcal{A})$ において表現可能関手と同型となるときをいう．擬表現可能な dg 加群のなす充満部分圏を $\overline{\mathcal{A}} \subseteq D(\mathcal{A})$ と表す．

(2) dg 両加群 $X\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ が**右擬表現可能**であるとは，任意の $A \in \mathcal{A}$ について dg 加群 $X(-,A) \in C(\mathcal{B})$ が擬表現可能となるときをいう．右擬表現可能な dg 両加群のなす充満部分圏を $D(\mathcal{A},\mathcal{B})^{\mathrm{rqr}} \subseteq D(\mathcal{A},\mathcal{B})$ と書く．

例えば，dg 関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に付随して得られる dg 両加群 $F_* = \mathcal{B}(-,F(-))\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ は，右擬表現可能である．

dg 両加群 $X\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ が右擬表現可能であることは，導来テンソル関手 $\mathbb{L}T_X\colon D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$ が擬表現可能 dg 加群を保つことと同値である．このとき $\mathbb{L}T_X$ は関手 $\mathbb{L}T_X|_{\overline{\mathcal{A}}}\colon \overline{\mathcal{A}} \to \overline{\mathcal{B}}$ を誘導する．

命題 2.9 (Toën [Toë07])**.** dg 圏 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ に対して，HodgCat の射の集合と右擬表現可能な dg 両加群の同型類の集合の間に全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{HodgCat}}(\mathcal{A},\mathcal{B}) \cong \mathrm{Iso}(D(\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{B})^{\mathrm{rqr}})$$

が存在する．ここで Iso は圏の対象の同型類の集合を表す．

以降，右擬表現可能な両加群も擬関手と呼ぶことにする．この Toën の結果から，$D(\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{B})^{\mathrm{rqr}}$ を Hom 圏に持つ 2 圏は dg 圏のなすホモトピー圏 HodgCat の上にあるような 2 圏構造となることが示唆される．そこで次のような圏を導入する．

定義 2.10. 次のデータは，2 圏[*2]DBimod を定める．

- DBimod の対象は，dg 小圏とする[*3]．
- DBimod の Hom 圏は，dg 両加群の導来圏 $D(\mathcal{A},\mathcal{B})$ とする．
- DBimod の合成は，dg 両加群の導来テンソル積 $\odot^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}}\colon D(\mathcal{B},\mathcal{C}) \times D(\mathcal{A},\mathcal{B}) \to D(\mathcal{A},\mathcal{C})$ とする．
- DBimod の恒等射は，Hom 関手 $\mathcal{A}(-,-)\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{A} \to C_{\mathrm{dg}}(\Bbbk)$ を dg 両加群 $I_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{A}$ とみなしたものとする．

右擬表現可能な dg 両加群のなす DBimod の部分 2 圏を $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ で表す．

圏なす 2 圏 Cat と同じように一般の 2 圏においても同値や随伴を定義することができ，DBimod や $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ における同値・随伴は何か，と問うことが意味を成す．この問いについては，4 節で議

[*2] 正確には弱 2 圏または双圏 (bicategory) と呼ばれる，結合律や単位律が up to iso. で成り立つような 2 圏になる．本稿ではこれらもまとめて単に 2 圏と呼ぶことにする．

[*3] 基礎環 $\Bbbk$ が一般の可換環の場合，DBimod の対象は locally h-projective な dg 圏に限定する必要がある．本稿では $\Bbbk$ を体としており，この場合すべての dg 圏が locally h-projective になる．

論を行う．

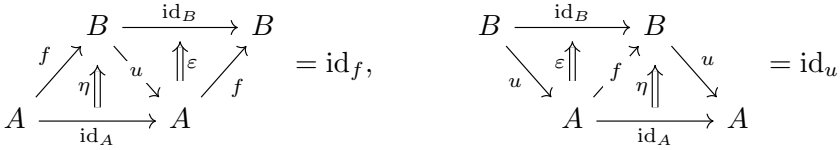
3　形式圏論と副射装備

2 圏とは，圏と関手と自然変換のなす 2 圏 Cat のように，対象と射に加えて射の間の射（2 射）の概念を備えた圏のことである．抽象的な 2 圏においても，同値や随伴の概念が定義可能である．

定義 3.1. $\mathcal{K}$ を 2 圏とする．

(1) $\mathcal{K}$ における**同値**とは，射 $f\colon A \to B$ と $u\colon B \to A$ の組であって，$u \circ f \cong \mathrm{id}_A$ かつ $f \circ u \cong \mathrm{id}_B$ となるものをいう．

(2) $\mathcal{K}$ における**随伴**とは，射 $f\colon A \to B$，$u\colon B \to A$ と 2-セル $\eta\colon \mathrm{id}_A \Rightarrow u \circ f$，$\varepsilon\colon f \circ u \Rightarrow \mathrm{id}_B$ の四つ組であって，三角等式



をみたすものをいう．このとき f を**左随伴**，u を**右随伴**，η を**単位**，ε を**余単位**と呼ぶ．

さて，環上の加群に関する議論がアーベル圏での抽象ホモロジー代数として形式化されたように，圏の理論を形式化することはできないだろうか．例えば，加群のなす圏が持つ性質を抽象化することでアーベル圏が導入されたのと同じように，圏のなす 2 圏が備えている性質や構造を抽出することで，圏論を形式的に展開する枠組みを定義できないだろうか．このような，通常の圏論での諸理論を 2 圏論的に抽象化しようとする試みを**形式圏論**と呼ぶ．

より具体的に言えば，圏のなす 2 圏 Cat において成り立つ定理を synthetic な視点から捉え直し，そうした定理を一般の 2 圏 $\mathcal{K}$ において公理的に展開しようとする分野が形式圏論である．圏の名を冠する概念には通常の圏に加えて，豊穣圏や内部圏，無限圏などさまざまなものが存在しているが，多くの場合，そのそれぞれが通常の圏と同じように 2 圏をなし，本質的に同じ定理が証明できる．そうした現象を統一的に扱おうとすることが形式圏論の目的である．

副射装備は，形式圏論を行うための枠組みの一つで Wood [Woo82, Woo85] により導入された．副射装備の実体は 2 圏の間の埋め込み $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{M}$ であり，$\mathcal{M}$ という補助的な 2 圏を用いることで 2 圏 $\mathcal{K}$ における “圏論” を形式的に展開することを可能にする．典型例は，圏のなす 2 圏 Cat からプロ関手のなす 2 圏への埋め込み関手 $(-)_*\colon \mathsf{Cat} \hookrightarrow \mathsf{Prof}$ である．副射装備の構造を用いると，通常の圏論におけるような極限の概念が対象 $K \in \mathcal{K}$ 上に抽象的な方法で定義できる．もちろん Cat に付随する副射装備 $(-)_*\colon \mathsf{Cat} \hookrightarrow \mathsf{Prof}$ において極限を考えれば，圏 $C \in \mathsf{Cat}$ での極限の定義が復元される．

副射装備の定義を述べよう．

定義 3.2 ([Woo82, Woo85])**.** 2 圏の間の 2 関手[*4] $(-)_*\colon \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ が**副射装備**であるとは，三条件

(1) $(-)_*$ は対象上全単射である

(2) $(-)_*$ は局所充満忠実である

(3) 任意の $\mathcal{K}$ の射 f に対して，f_* は $\mathcal{M}$ において右随伴 f^* を持つ

をみたすときをいう．

$\mathcal{M}$ の射 X が $\mathcal{K}$ の射 f を用いて $X \cong f_*$ となるとき，X は f によって *representable* であるという．副射装備 $(-)_*$ は対象上全単射であるから，以降 $\mathcal{K}$ と $\mathcal{M}$ の対象を同一視して $\mathrm{ob}(\mathcal{K}) = \mathrm{ob}(\mathcal{M})$ であるとする．

例 3.3. 小圏 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して，**プロ関手** $X\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ とは関手 $X\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$ のことを指す．プロ関手 $X\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$，$Y\colon \mathcal{B} \nrightarrow \mathcal{C}$ に対して，その “合成” $Y \odot X\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{C}$ をコエンド

$$(Y \odot X)(c, a) = \int^{b \in \mathcal{B}} Y(c, b) \times X(b, a)$$

によって定義する．この合成によって，小圏とその間のプロ関手は 2 圏 Prof をなす．Hom 関手 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(-,-)\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$ をプロ関手 $I_{\mathcal{A}}\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{A}$ とみなしたものが Prof における $\mathcal{A}$ の恒等射となる．

関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対してプロ関手 $F_*\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ を

$$F_* = \mathcal{B}(-, F(-))\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{A} \to \mathsf{Set}$$

によって定める．このとき F_* は Prof において $F^* = \mathcal{B}(F(-), -)\colon \mathcal{B} \nrightarrow \mathcal{A}$ を右随伴に持つことがわかる．したがって 2 関手

$$(-)_*\colon \mathsf{Cat} \to \mathsf{Prof}, \quad F \mapsto F_*$$

は副射装備である．

例 3.4. より一般に $\mathcal{V}$ をコスモス[*5]とするとき，$\mathcal{V}$-豊穣小圏の間の豊穣プロ関手 $X\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ を，$\mathcal{V}$-関手 $X\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{V}$ によって定義する．このとき $\mathcal{V} = \mathsf{Set}$ のときと同様に，$\mathcal{V}$-プロ関手は 2 圏をなし，2 関手

$$(-)_*\colon \mathcal{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathcal{V}\text{-}\mathsf{Prof}, \quad F \mapsto \mathcal{B}(-, F(-))$$

は副射装備になる．

副射装備の構造を用いると，極限の概念を 2 圏論的に定義することができる．

定義 3.5 ([Woo82, §2])**.** $(-)_*\colon \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ を副射装備とする．$\mathcal{K}$ の射 $f\colon J \to A$ と $\mathcal{M}$ の射 $W\colon J \to M$ に対して，f の **W-重み付き極限**とは，$\mathcal{K}$ の射 $\lim^W f = \{W, f\}\colon M \to A$ と $\mathcal{M}$ における右 Kan 拡張

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ {\scriptstyle W}\uparrow & \overset{\{W,f\}_*}{\searrow} & \\ J & \xrightarrow[f_*]{} & A \end{array} \quad (\pi \Downarrow)$$

の組のことをいう．f の W-重み付き極限が存在すれば，$\{W, f\}_* = \mathrm{Ran}_W f_*$ である．言い換えれば極限 $\{W, f\}$ が存在するのは，右 Kan 拡張 $\mathrm{Ran}_W f_*$ が存在してこれが representable なときである．

[*4] ここでは弱 2 関手または pseudo-functor のこともまとめて 2 関手と呼ぶことにする．

[*5] 完備かつ余完備な対称モノイダル閉圏のことを**コスモス**という．複体の圏 $\mathsf{Ch}(\Bbbk)$ はコスモスの例である．

例 3.6. 例 3.4 のように豊穣圏のなす副射装備 $(-)_*\colon \mathcal{V}\text{-}\mathsf{Cat} \to \mathcal{V}\text{-}\mathsf{Prof}$ を考える．$M = \mathcal{I}$ を単位 $\mathcal{V}$-豊穣圏とする．$\mathcal{V}$-関手 $F\colon \mathcal{J} \to \mathcal{A}$ と $\mathcal{V}$-プロ関手 $W\colon \mathcal{J} \nrightarrow \mathcal{I}$ に対して，$\mathcal{V}$-Prof における右 Kan 拡張 $\mathrm{Ran}_W F_*\colon \mathcal{I} \nrightarrow \mathcal{A}$ は

$$\mathrm{Ran}_W F_*(A, *) = \mathsf{Fun}(\mathcal{J}, \mathcal{V})(W(*, -), \mathcal{A}(A, F-))$$

で与えられる．このことから定義 3.5 の意味での F の W-重み付き極限とは，ちょうど [Kel82, §3.1] の意味で余前層 $W\colon \mathcal{J} \cong \mathcal{I}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{J} \to \mathcal{V}$ を重みとする F の極限に等しい．

4　主結果

dg 圏のホモトピー圏 HodgCat は 1 圏であり 2 射の構造を持っていないが，dg 両加群を用いて HodgCat の上部にあるような 2 圏 $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ を構成することができる．これは 2 圏 DBimod の部分 2 圏である．こうした 2 圏においても，Cat と同様，同値や随伴を定義することができる．それらは dg 圏の間のホモトピー論を考慮した同値・随伴の概念を捉えていると考えられる．先行研究として，2 圏 DBimod における随伴について次の結果が示されていた．

命題 4.1 (Genovese [Gen17])**.** 右擬表現可能な dg 両加群は DBimod において右随伴を持つ．

この結果を一般化し，2 圏 DBimod や $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ における同値・随伴について以下のような特徴づけを明らかにした．

定理 4.2 (I.)**.** dg 両加群 $X\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ に対し，次は同値：

(1) X は 2 圏 DBimod において右随伴を持つ．
(2) 導来 Hom により誘導される関手 $\mathbb{R}H_X\colon D(\mathcal{B}) \to D(\mathcal{A})$ は余積を保つ．
(3) X は右コンパクト，すなわち任意の $A \in \mathcal{A}$ について $X(-, A) \in D(\mathcal{B})$ はコンパクト対象である[*6]．

擬表現可能な dg 加群はコンパクトだから，この定理からも確かに右擬表現可能な dg 両加群は右随伴を持つことがわかる．

定理 4.3 (I.)**.** dg 両加群 $X\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ が 2 圏 DBimod において同値射であることは，導来テンソル積により誘導される関手 $\mathbb{L}T_X\colon D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$ が圏同値になることと同値である．

定理 4.4 (I.)**.** 擬関手 $X\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ が 2 圏 $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ において同値射であることは，誘導される二つの関手 $\mathbb{L}T_X\colon D(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{B})$，$\mathbb{L}T_X|_{\overline{\mathcal{A}}}\colon \overline{\mathcal{A}} \to \overline{\mathcal{B}}$ の両方が圏同値になることと同値である．

この特徴づけから特に次がわかる．

系 4.5 (I.)**.** dg 関手 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が擬同値であることは，付随する dg 両加群 $F_* = \mathcal{B}(-, F(-))\colon \mathcal{A} \nrightarrow \mathcal{B}$ が 2 圏 $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ において同値射になることと同値である．

[*6] ここで余積を持つ三角圏 $\mathcal{T}$ の対象 C がコンパクトであるとは，関手 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(C, -)\colon \mathcal{T} \to \mathsf{Ab}$ が余積を保つときをいう．

2 圏 $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ における随伴は，**擬同値の随伴**と呼ばれる．$\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}}$ は DBimod の局所充満な部分 2 圏であることから，擬関手 f が右随伴を持つことは，DBimod における右随伴 $f^\star$ が擬関手となることと同値である．

豊穣関手としての dg 関手の随伴や H^0-圏の間の随伴との関係について，以下のことも証明した．

命題 4.6 (I.)**.** dg 関手の随伴 $F \dashv G\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対して，付随する擬関手の随伴 $F_* \dashv G_*$ が成り立つ．

命題 4.7 (I.)**.** 擬関手の随伴 $f \dashv u\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ があるとき，通常の随伴 $\overline{f} \dashv \overline{u}\colon \overline{\mathcal{A}} \to \overline{\mathcal{B}}$ が得られる．圏同値 $H^0(\mathcal{A}) \simeq \overline{\mathcal{A}}$ が成り立つことから，$H^0(\mathcal{A})$ と $H^0(\mathcal{B})$ の間の随伴も誘導される．

Genovese の結果（命題 4.1）もしくは定理 4.2 より，擬関手は DBimod において右随伴を持つ．よって包含関手 $\mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}} \hookrightarrow \mathsf{DBimod}$ を $(-)_\star$ で表すとき，

(1) $(-)_\star$ は対象上全単射である
(2) $(-)_\star$ is locally fully faithful.
(3) 擬関手 $f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対し $f_\star$ は DBimod において右随伴 $f^\star$ を持つ

が成り立つ．すなわちこれは包含関手 $(-)_\star\colon \mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}} \hookrightarrow \mathsf{DBimod}$ が副射装備であることを意味する．したがって 3 節で紹介したような副射装備の理論が適用できる．

副射装備 $(-)_\star\colon \mathsf{DBimod}^{\mathrm{rqr}} \hookrightarrow \mathsf{DBimod}$ に対し副射装備における（余）極限の定義を適用したものを，dg 圏における**ホモトピー（余）極限**と呼ぶ．例えば，終対象の対応物を考えると次のように翻訳される．

定義 4.8 (h-terminal object)**.** dg 圏 $\mathcal{A}$ に対し，$\mathcal{J} = \emptyset$ を空な dg 圏，$f\colon \emptyset \to \mathcal{A}$ を一意的な dg 関手 $\emptyset \to \mathcal{A}$ に付随する擬関手，$W\colon \emptyset \nrightarrow \Bbbk$ を 0 加群とする．このとき f の W-重み付き極限を，$\mathcal{A}$ での **h-終対象**と呼ぶ．

命題 4.9 (I.)**.** dg 圏 $\mathcal{A}$ が h-終対象を持つことは，$H^0(\mathcal{A})$ が終対象（零対象）を持つことと同値である．

dg 圏における豊穣極限としての終対象の存在は台圏 $Z^0(\mathcal{A})$ における終対象の存在と同値であるから，h-終対象は dg 圏のホモトピー論的側面を反映した終対象の概念を捉えられている．

シフトや余錐の対応物は以下のようになる．ここで複体 $S(\Bbbk), D(\Bbbk)$ を

$$S(\Bbbk)\colon \cdots \to 0 \to 0 \to \Bbbk \to 0 \to \cdots \qquad \text{with } S(\Bbbk)^0 = \Bbbk$$
$$D(\Bbbk)\colon \cdots \to 0 \to \Bbbk \xrightarrow{\mathrm{id}} \Bbbk \to 0 \to \cdots \qquad \text{with } D(\Bbbk)^{-1} = D(\Bbbk)^0 = \Bbbk$$

とし自然な単射を $\iota\colon S(\Bbbk) \to D(\Bbbk)$ とする．

定義 4.10 (h-shift)**.** dg 圏 $\mathcal{A}$ に対し，$\mathcal{J} = \Bbbk$ を単位 dg 圏，$f\colon \Bbbk \to \mathcal{A}$ を対象 $A\colon \Bbbk \to \mathcal{A}$ に付随する擬関手，$W\colon \Bbbk \nrightarrow \Bbbk$ を複体 $S^n(\Bbbk) \coloneqq S(\Bbbk)[-n]$ を選択する dg 関手 $\Bbbk^{\mathrm{op}} \otimes \Bbbk \cong \Bbbk \to C_{\mathrm{dg}}(\Bbbk)$ とする．このとき f の W-重み付き極限を A の**ホモトピー n-シフト**と呼ぶ．

命題 4.11 (I.)**.** dg 圏 $\mathcal{A}$ がすべてのホモトピーシフト (h-シフト) を持つことは, 埋め込み $H^0(\mathcal{A}) \hookrightarrow D(\mathcal{A})$ のもと $H^0(\mathcal{A})$ が $D(\mathcal{A})$ のシフトで閉じることと同値である.

定義 4.12 (h-cocone)**.** dg 圏 $\mathcal{A}$ に対し, $\mathcal{J} = 2$ を順序集合 $\{0 < 1\}$ で生成される自由 dg 圏, $f\colon 2 \to \mathcal{A}$ を $\mathcal{A}$ の射 $a\colon A \to B$ を選択する dg 関手 $2 \to \mathcal{A}$ に付随する擬関手, $W\colon 2 \twoheadrightarrow \Bbbk$ を複体の射 $\iota\colon S(\Bbbk) \hookrightarrow D(\Bbbk)$ を選択する dg 関手 $\Bbbk^{\mathrm{op}} \otimes 2 \cong 2 \to C_{\mathrm{dg}}(\Bbbk)$ とする. このとき f の W-重み付き極限を a の **h-余錐**と呼ぶ.

命題 4.13 (I.)**.** dg 圏 $\mathcal{A}$ がすべての h-余錐を持つことは, 埋め込み $H^0(\mathcal{A}) \hookrightarrow D(\mathcal{A})$ のもと $H^0(\mathcal{A})$ が $D(\mathcal{A})$ の余錐で閉じることと同値である.

これらの特徴づけから, dg 圏のプレ三角性が特定のホモトピー極限を持つこととして特徴づけられることがわかる:

系 4.14 (I.)**.** dg 圏 $\mathcal{A}$ がプレ三角であることは, $\mathcal{A}$ がすべての h-シフトと h-余錐を持つことと同値である.

参考文献

[Gen17] F. Genovese. *Adjunctions of quasi-functors between dg-categories*. Appl. Categor. Struct. 25 (2017), 625–657.

[Ima24] Yuki Imamura. *A formal category theoretic approach to the homotopy theory of dg categories*. arXiv preprint, 2024. arXiv: 2405.07873 [math.CT].

[Kel82] G. M. Kelly. *Basic concepts of enriched category theory*. Vol. 64, London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1982.

[Tab05] Goncalo Tabuada. *Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des dg-catégories*. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 340 (2005), No. 1, 15–19.

[Toë07] B. Toën. *The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory*. Invent. Math. 167 (2007), 615–667.

[Woo82] R. J. Wood. *Abstract proarrows I*. Cah. Topol. Goem. Différ. Catég. 23 (1982), No. 3, 279–290.

[Woo85] R. J. Wood. *Proarrows II*. Cah. Topol. Goem. Différ. Catég. 26 (1985), No. 2, 135–168.

Matsui スペクトラムと thick 部分圏

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
松川寿人 (Hisato MATSUKAWA) *

概要

与えられた三角圏の thick 部分圏の分類は伝統的な問題である. Matsui はその分類のため, 三角圏からスペクトラムを構成する方法を定めた. 筆者は Matsui スペクトラムでの台集合によってその三角圏の thick 部分圏が完全に分類できることを示した. また, いくつかの曲線の導来圏でその例を計算した. Ito, Matsui によると代数閉体上準射影的な被約代数多様体はその導来圏の Matsui スペクトラムに開に埋め込まれる. 筆者は導来無限圏を考えることでこの結果をより広いスキームへと拡張できることを示した.

1　導入

三角圏の thick 部分圏の分類は伝統的な問題であり, その三角圏を理解するための重要な道具の一つでもある. Balmer はテンソル三角圏のテンソル thick イデアルが Balmer スペクトラムにおける台集合によって, 完全にではないものの分類できることを示した ([Ba]). Matsui は [Ma1],[Ma2] にて Balmer スペクトラムの類似として三角圏 T のスペクトラム $\mathrm{Spec}_{\triangle}T$ を定めた. また, これを用いて Matsui と Takahashi は radical な thick 部分圏がその $\mathrm{Spec}_{\triangle}T$ における台集合で分類できることを示した ([MT]). 筆者は三角圏の素 thick 部分圏が十分たくさんあることを示し, 全ての thick 部分圏が $\mathrm{Spec}_{\triangle}T$ における台集合で分類できることを示した.

定理 1. T を三角圏, $\mathrm{Th}(T)$ を T の thick 部分圏の集合とする. このとき, 台集合を与える対応

$$\mathrm{Supp} : \mathrm{Th}(T) \to \{Z \subset \mathrm{Spec}_{\triangle}T\}$$

は左逆射

$$\{Z \subset \mathrm{Spec}_{\triangle}T\} \to \mathrm{Th}(T); \qquad Z \mapsto \bigcap_{x \in \mathrm{Spec}_{\triangle}T \setminus Z} I_x$$

を持つ. ここで $\{Z \subset \mathrm{Spec}_{\triangle}T\}$ は Matsui スペクトラムの底空間の部分集合を表し, I_x は点 x に対応する素 thick 部分圏を表している.

とくに射 Supp は単射であり, 全ての thick 部分圏はその Matsui スペクトラムにおける台集合で決定される. また, 全ての thick 部分圏は素 thick 部分圏の交わりとして書ける, つまり radical である.

* E-mail:hmnr0211@gmail.com

また, これを用いていくつかのスキームの導来圏の thick 部分圏を実際に分類した.

Matsui スペクトラムはその構成にテンソル構造を要請しない. よって, テンソル構造に縛られない導来同値なスキームの情報などを含んでいる. これが Matsui スペクトラムを考える上での利点の一つである.

Balmer は Balmer スペクトラムを用いてテンソル構造つきのスキームの導来圏から元のスキームを復元できることを示した. また, Ito と Matsui は被約スキーム X がその導来圏の Matsui スペクトラム $\mathrm{Spec}_{\triangle}\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ に埋め込めることを示した ([IM]). また, X が代数閉体上の被約擬射影的スキームの場合は開に埋め込めることを示した. ここで被約性は構造層の射を考えるためにのみ必要であり, 底空間の埋め込みを考える上では必要ない. 筆者は [IM] の結果を一般のスキームに拡張した.

定理 2. X を位相的にネーターなスキームとする. このとき

$$X_{\mathrm{red}} \to \mathrm{Spec}_{\triangle}\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$$

は開埋め込みである.

系 3. X, Y を位相的にネーターなスキームとする. もし X と Y が導来同値, つまり $\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X) \cong \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(Y)$ であれば開埋め込み

$$Y_{\mathrm{red}} \to \mathrm{Spec}_{\triangle}\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$$

が存在する.

また, 相対的な Matsui スペクトラムと安定無限圏におけるその類似を考えた. 相対的な Matsui スペクトラムはテンソル三角圏による作用で閉じている thick 部分圏を分類するものである. Matsui スペクトラムは一般には非常に計算が難しい. 相対的な Matsui スペクトラムは一般の Matsui スペクトラムよりも小さい分, 幾分か計算がしやすいという利点がある.

単に三角圏ではなく安定無限圏を考えることには幾つかの利点がある. 一つは被約でない構造層を持つスペクトラムを考えることが出来ることである. スキームの導来無限圏を考えることで上の定理は次のように拡張される.

定理 4. S をアフィンな対角写像を持つ準コンパクト準分離的スキームとする. X を S 上アフィンな対角写像を持つ位相的にネーターなスキームとする. このとき, 開埋め込み

$$X \to \mathrm{Spec}_{\mathrm{st}}^{\mathrm{D}_{\infty}^{\mathrm{perf}}(S)}\mathrm{D}_{\infty}^{\mathrm{perf}}(X)$$

が存在する. ここで $\mathrm{D}_{\infty}^{\mathrm{perf}}$ は導来無限圏を表す.

もう一つの利点は Lurie によるものを始めとする無限圏に対する様々な結果を用いてこれを調べられることである.

Balmer スペクトラムと Matsui スペクトラム

記号

スキーム X に対して $\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ を X の準連接層の導来圏のうち, perfect 複体と擬同型な対象たちのなす充満部分圏とする. また, $\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}_{\infty}(X)$ を X の準連接層の導来無限圏における同様の充満部分圏とする.

1.1 Balmer スペクトラム

この小節では [Ba] に基づいて Balmer スペクトラムの説明をする. Balmer スペクトラムとは Balmer によって導入されたテンソル三角圏に対して定まる環付き空間である. これはテンソルイデアルをその台集合によってよく分類する. また, スキームの導来圏の Balmer スペクトラムは元のスキームを復元する.

T を三角圏とする. また, $\otimes$ を T の対称モノイダル構造であるとする.

定義 5 ([Ba])**.** $(T,\otimes)$ がテンソル三角圏であるとは, 任意の $a\in T$ に対して関手 $a\otimes -: T\to T$ が完全であることをいう.

入っているテンソル構造が文脈上明らかな場合は $(T,\otimes)$ を単に T と略記する.

定義 6 ([Ba])**.** T をテンソル三角圏とする.

(1) Thick 部分圏 $I\subset T$ がテンソルイデアルであるとは, 任意の $a\in T, b\in I$ について $a\otimes b\in I$ となることをいう.
(2) テンソルイデアル $I\subset T$ が radical であるとは, 任意の $a\in T$ について, ある n があって $a^{\otimes n}\in I$ ならば $a\in I$ であることをいう.
(3) テンソルイデアル $I\subset T$ が素であるとは, 任意の $a,b\in T$ に対して $a\otimes b\in I$ ならば $a\in I$ または $b\in I$ となることをいう.

$\mathrm{Spec}_{\otimes}T$ を T の素イデアル全体の集合とする. 部分集合 $S\subset T$ に対してその台集合を

$$\mathrm{Supp}_{\mathrm{Spec}_{\otimes}T}(S)=\{I\in\mathrm{Spec}_{\otimes}T\mid S\not\subset I\}$$

と定める.

補題 7 ([Ba])**.** (1) $\mathrm{Supp}(a\oplus b)=\mathrm{Supp}(a)\cup\mathrm{Supp}(b)$.
(2) $\mathrm{Supp}(a\otimes b)=\mathrm{Supp}(a)\cap\mathrm{Supp}(b)$.

$\mathrm{Spec}_{\otimes}T$ に $\mathrm{Spec}_{\otimes}T\setminus\mathrm{Supp}_{\mathrm{Spec}_{\otimes}T}(a)$ $(a\in T)$ で生成される位相を入れ, これをもって位相空間とする.

$I\subset T$ をテンソルイデアルとする. このとき Verdier 商 T/I にも自然にテンソル構造が入り, テンソル三角圏となる.

部分集合 $S \subset \mathrm{Spec}_{\otimes} T$ に対して

$$I_S = \bigcap_{I \in S} I$$

と定める．これはテンソルイデアルである．対応

$$U \mapsto \mathrm{End}(1_{T/I_U})$$

によって位相空間 $\mathrm{Spec}_{\otimes} T$ 上に可換環の前層を定める．ここで $1_{T/I_U}$ はテンソル三角圏 T/I_U の単位対象である．$\mathcal{O}_{\mathcal{T},\otimes}$ をその層化とする．

定義 8 ([Ba])**.** テンソル三角圏 T に対し, 環付き空間

$$\mathrm{Spec}_{\otimes} T = (\mathrm{Spec}_{\otimes} T, \mathcal{O}_{\mathcal{T},\otimes})$$

をその Balmer スペクトラムという．

Balmer スペクトラムは次の意味でスキームの拡張となっている．

定理 9 ([Ba])**.** X を位相的ネーターなスキームとする．このとき環付き空間の同型

$$X \cong \mathrm{Spec}_{\otimes} \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$$

が存在する．$\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$ には X から定まる標準的なテンソル構造を考えている．

1.2 Matsui スペクトラム

この小節では [Ma1, Ma2] に基づいて Matsui スペクトラムの説明をする．Matsui スペクトラムは Matsui によって Balmer スペクトラムの類似として定義された．Balmer スペクトラムとの最も大きな違いはその定義にテンソル構造を必要としないことである．よってテンソル構造に縛られない一般の thick 部分圏の情報や, スキームの導来同値の情報などを含んでいる．

以降, 三角圏 T の thick 部分圏の集合を $\mathrm{Th}(T)$ で表す．また, 部分集合 $S \subset T$ に対して S で生成される T の thick 部分圏を $\langle S \rangle$ で表す．$\langle S \rangle = T$ なら S は T を分裂生成するという．

定義 10 ([Ma1, Ma2])**.** T を三角圏とする．

(1) Thick 部分圏 $I \subset T$ が素であるとは, 集合 $\{J \in \mathrm{Th}(T) \mid J \supsetneq I\}$ が包含関係に関して最小元をもつことをいう．このとき, その最小元を $\overline{I}$ で表す．
(2) Thick 部分圏 $I \subset T$ が radical であるとは, I が素 thick 部分圏の共通部分としてかけることをいう．

$\mathrm{Spec}_{\triangle} T$ を T の素イデアルの集合とする．部分集合 $S \subset T$ に対してその台集合を

$$\mathrm{Supp}_{\mathrm{Spec}_{\triangle} T}(S) = \{I \in \mathrm{Spec}_{\triangle} T \mid S \not\subset I\}$$

と定める．$\mathrm{Spec}_{\triangle} T$ に $\mathrm{Spec}_{\triangle} T \setminus \mathrm{Supp}_{\mathrm{Spec}_{\triangle} T}(a)$ $(a \in T)$ で生成される位相を入れ, これをもって位相空間とする．

部分集合 $S \subset \mathrm{Spec}_{\triangle} T$ に対して

$$I_S = \bigcap_{I \in S} I$$

と定める．これは T の thick 部分圏である．Verdier 商の冪等完備化によって

$$T_S = \mathrm{Idem} D/I_S$$

と定める．

圏の間の関手 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ と自然変換 $\eta : F \to F$ に対して, F が局所冪零であるとは任意の $a \in \mathcal{C}$ に対して η_a が冪零であることをいう．

対応

$$U \mapsto \{\eta \in \mathrm{Nat}(\mathrm{Id}_{T_U}, \mathrm{Id}_{T_U}) \mid \eta[1] = [1]\eta\}/\{ \text{左のうち局所冪零な自然変換} \}$$

によって位相空間 $\mathrm{Spec}_{\triangle} T$ 上に可換環の前層を定める．この層化を $\mathcal{O}_{\mathcal{T},\triangle}$ とする．

定義 11 ([Ma1, Ma2])**.** 三角圏 T に対し, 環付き空間

$$\mathrm{Spec}_{\triangle} T = (\mathrm{Spec}_{\triangle} T, \mathcal{O}_{\mathcal{T},\triangle})$$

をその Matsui スペクトラムという．

次の命題から, thick 部分圏や Matsui スペクトラムを考える上では冪等完備化は何の影響も及ぼさない．よって必要ならば冪等完備化して物事を考えてもよい．

命題 12 ([Ma1, Ma2])**.** T, T' を三角圏, $F : T \to T'$ を忠実充満三角関手とする．また, 任意の $a \in T'$ に対してある $b \in T$ があって a は $F(b)$ の直和因子になっているとする．このとき, 次が成り立つ．

(1) $\mathrm{Th}(T) \cong \mathrm{Th}(T')$.
(2) $\mathrm{Spec}_{\triangle} T \cong \mathrm{Spec}_{\triangle} T'$.

命題 13 ([Ma1, Ma2])**.** T を三角圏, $I \subset T$ を thick 部分圏とする．このとき, 埋め込み

$$\mathrm{Spec}_{\triangle} T/I \to \mathrm{Spec}_{\triangle} T$$

が存在する．I が有限生成ならこの射は開埋め込みである．

定理 14 ([Ma1, Ma2, IM])**.** X をネータースキームとする．このとき, 埋め込み

$$X_{\mathrm{red}} \to \mathrm{Spec}_{\triangle} \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(X)$$

が存在する．X が準アフィンならば上の射は同型である．X が代数閉体 k 上の準射影的スキームならば上は開埋め込みである．

例 15 ([Ma2])**.** k を代数閉体とする．

(1) 射影直線の Matsui スペクトラムは以下のようになっている．

$$\mathrm{Spec}_{\triangle} \mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(\mathbb{P}_1) \cong \mathbb{P}_1 \coprod \left(\coprod_{\mathbb{Z}} \mathrm{Spec}\ k \right)$$

(2) E を楕円曲線とする．このとき，

$$\mathrm{Spec}_{\triangle}\mathrm{D}^{\mathrm{perf}}(E) \cong \coprod E.$$

右辺は加算無限個の余積である．

参考文献

[Ba] P. Balmer, *The spectrum of prime ideals in tensor triangulated categories*, J. Reine Angew. Math. 588 (2005), 149–168.

[IM] D. Ito, H. Matsui, *A new proof of the Bondal-Orlov reconstruction using Matsui spectra*, arXiv preprint arXiv:2405.16776 (2024).

[MT] H. Matsui, R. Takahashi, *Construction of spectra of triangulated categories without tensor structure and applications to commutative rings*, J. Math. Soc. Japan 72 (2020), no. 4, 1283–1307.

[Ma1] H. Matsui, *Prime thick subcategories and spectra of derived and singularity categories of noetherian schemes*, Pacific Journal of Mathematics 313 (2021), no. 2, 433–457.

[Ma2] H. Matsui, *Triangular spectra and their applications to derived categories of noetherian schemes*, arXiv preprint arXiv:2301.03168 (2023).

Bondal-Orlov's reconstruction theorem in noncommutative projective geometry

早稲田大学　基幹理工学部　応用数理学科
水野 雄貴 (Yuki Mizuno) *

Abstract

滑らかな射影スキームで標準束が豊富または反豊富なものは, その導来圏によって復元できることが知られている ([BO01]). 一方で, 射影スキームの類似として非可換次数付き代数に付随する非可換射影スキームがアーベル圏として定義できる ([AZ94]). 本講演では, [Miz24a] で証明した非可換射影幾何学における Bondal-Orlov の復元定理について紹介する.

1　導入

代数幾何学で扱う代数多様体やその一般化となるスキームを考える時, その上の (準) 連接層の圏は十分多くの多様体の情報を持っている. 実際, ネータースキームは連接層の圏により復元されることが P. Gabriel によって示されている.

定理 1.1 ([Gab62])**.** ネータースキーム X, Y に対して,

$$\mathrm{Coh}(X) \simeq \mathrm{Coh}(Y) \Rightarrow X \simeq Y.$$

一方で, 代数多様体の連接層の導来圏は必ずしも多様体を復元できるとは限らない. 実際, [Muk81] により, アーベル多様体とその双対アーベル多様体の導来圏は同型であることが知られている. ただ, 標準束が豊富または反豊富な射影スキームに対しては, その導来圏によって射影スキームを復元できることが知られている.

定理 1.2 ([BO01])**.** 滑らかな体 k 上の射影スキーム X, Y に対して, X, Y が標準束が豊富 *(*または反豊富*)* であるとする.

$$D^b(\mathrm{Coh}(X)) \simeq D^b(\mathrm{Coh}(Y)) \Rightarrow X \simeq Y.$$

本講演の主題はこの Bondal-Orlov の復元定理を非可換射影幾何学に拡張することである. 非可換射影幾何学は最初, M. Artin と J. J. Zhang によって 1994 年 ([AZ94]) に導入された概念である. 非可換射影スキームの定義の背景には以下の Serre による定理 ([Ser55]) がある.

定理 1.3 ([Ser55])**.** R を体 k 上の有限生成な次数付き可換代数で, 次数 *1* で生成されるとする. この時, 射影多様体 $X = \mathrm{Proj}(R)$ に対して,

$$\mathrm{Coh}(X) \simeq \mathrm{qgr}(R) := \mathrm{gr}(R)/\mathrm{tor}(R).$$

ただし, $\mathrm{gr}(R)$ は R 上の有限生成次数付き R-加群の圏で, $\mathrm{tor}(R)$ は捩れ加群を対象とする部分圏である. そして, $\mathrm{qgr}(R) := \mathrm{gr}(R)/\mathrm{tor}(R)$ は $\mathrm{gr}(R)$ の $\mathrm{tor}(R)$ による *Serre* 商圏である.

この結果を踏まえて, k 上の右ネーターな次数付き代数 A に対して, その非可換射影スキームを $\mathrm{qgr}(A) = \mathrm{gr}(A)/\mathrm{tor}(A)$ として定義する. ただし, $\mathrm{gr}(A)$ は A 上の有限生成次数付き右 A-加群の圏で, $\mathrm{tor}(A)$ は捩れ加群を対象とする部分圏である. そして, 主結果は以下のように述べられる.

*E-mail:mizuno.y@aoni.waseda.jp, m7d5932a72xxgxo@fuji.waseda.jp

定理 1.4 ([Miz24a, Theorem 1.5])**.** k 上のネーターな連結な次数付き k 代数 A, B に対して, 付随する非可換射影スキームが標準両側加群を持ち, 豊富 (または反豊富) であるとする. この時,

$$D^b(\mathrm{qgr}(A)) \simeq D^b(\mathrm{qgr}(B)) \Rightarrow \mathrm{qgr}(A) \simeq \mathrm{qgr}(B).$$

上の定理中にある標準両側加群や豊富, 反豊富という条件は, 後の節で定義する. また, この定理の系として, 非可換次数付き代数の中でも多項式環に相当する重要なクラスである AS 正則代数に関して次の結果が得られる.

系 1.5 ([Miz24a, Corollary 1.6])**.** A, B を k 上のネーター AS 正則代数とする. この時,

$$D^b(\mathrm{qgr}(A)) \simeq D^b(\mathrm{qgr}(B)) \Rightarrow \mathrm{qgr}(A) \simeq \mathrm{qgr}(B).$$

注意 1.6. 定理 1.4 や系 1.5 は, A, B が局所有限なネーター次数つき k 代数というより一般的な条件で成り立つが簡単のためにこのように述べた.

この他にも, [Miz24a] では, 非可換射影スキームの導来圏間の充満忠実関手が Fourier-向井型であることも示している. この結果は, [LO10] の結果の非可換射影幾何学への拡張だと言える.

本レポートでは, 非可換射影幾何学に馴染みのない読者にも理解しやすいように, まずは非可換射影スキームの定義と基本的な性質についてある程度詳しく説明する. そのため, どちらかというと非可換射影幾何学の入門としての性格が強いと思われる. その後, 主結果である非可換 Bondal-Orlov の復元定理について述べる. 結果の詳細については, 講演で聞いていただければと幸いである.

2 非可換射影幾何学のまとめ

ここでは, 非可換射影幾何学の基本的な定義や性質について述べる. 文献としては, [AZ94] などを主に参考にした.

2.1 導入

記号 2.1.

1. k は体を表す.
2. $A := \bigoplus_{i\geq 0} A_i$ は k 上の $\mathbb{N}$-次数付き代数を表す.
3. $\mathrm{Gr}(A)$ で次数付き右 A-加群の圏を表す.
4. $\mathrm{gr}(A)$ で有限生成次数付き右 A-加群の圏を表す.
5. $M \in \mathrm{Gr}(A), n \in \mathbb{Z}$ に対して, $M(n) \in \mathrm{Gr}(A)$ を $M(n) := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_{n+i}$ と定義する.

注意 2.2. A については, 連結 (i.e., $A_0 = k$) や k-代数として有限生成であることをしばしば仮定する. A が右ネーターであれば, $\mathrm{gr}(A)$ はアーベル圏である. $\mathrm{Gr}(A)$ は A のネーター性に関わらず, アーベル圏である. また, 非可換代数は有限生成だからといって必ずしもネーターであるとは限らない. (例. k 上の自由代数)

定義 2.3 (非可換射影スキーム)**.** A は右ネーターな次数付き k 代数とする. このとき, A に付随する**非可換射影スキーム** $\mathrm{qgr}(A)$ は次の圏で定義される.

- 対象: A 上の有限生成次数付き右加群
- 射: $M, N \in \mathrm{gr}(A)$ に対して, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{qgr}(A)}(\pi(M), \pi(N)) := \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}(A)}(M_{\geq n}, N_{\geq n})$. ただし, $M_{\geq n} := \bigoplus_{i\geq n} M_i$, $\pi : \mathrm{gr}(A) \to \mathrm{qgr}(A)$ は自然な射影.

また, $\mathcal{O}_A := \pi(A)$ として, $\mathrm{proj}_{\mathrm{nc}}(A) := (\mathrm{qgr}(A), \mathcal{O}_A)$ と書き, こちらを非可換射影スキームと定義することも多い.

非可換射影スキームの定義をするには, これで十分であるが, 実はこれは $\mathrm{gr}(A)$ の $\mathrm{tor}(A)$ による (Serre) 商圏の定義を具体的に述べたに過ぎない. (Serre) 商圏の一般論について, 知っておくことは色々便利であるので, 以下で述べておく.

2.2 Serre 部分圏と商圏

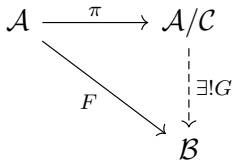
定義 2.4 (Serre 部分圏, 例えば, [Pop73, Section 4.3])**.** $\mathcal{A}$ をアーベル圏とする. $\mathcal{C}$ は $\mathcal{A}$ の充満部分圏とする. このとき, $\mathcal{C}$ が *Serre* **部分圏**であるとは, 任意の $\mathcal{A}$ 上の短完全列

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

に対して, $Y \in \mathcal{C}$ であることと $X, Z \in \mathcal{C}$ であることが同値であることをいう.

定理 2.5 (例えば, [Pop73, Section 4.3, Theorem 3.3])**.** $\mathcal{A}$ をアーベル圏, $\mathcal{C}$ を $\mathcal{A}$ の *Serre* 部分圏とする. この時, あるアーベル圏 $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ とアーベル圏の間の完全関手 $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{C}$ が存在して, 以下の条件を満たす.

- $\pi(\mathcal{C}) = 0$.
- $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は $F(\mathcal{C}) = 0$ を満たす完全関手であるとする.
  この時, $G : \mathcal{A}/\mathcal{C} \to \mathcal{B}$ が存在して, $F \simeq G \circ \pi$ となる. かつ, G は自然同型を除いて一意である.



この時, $\mathcal{A}/\mathcal{C}$ を $\mathcal{A}$ の $\mathcal{C}$ による (Serre) 商圏という.

定義 2.6. A を右ネーターな次数付き k 代数とする. この時, $M \in \mathrm{Gr}(A)$ が**捩れ** *(torsion)* **加群**であるとは, 任意の $m \in M$ に対して, ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して, $mA_{\geq n} = 0$ となることをいう. また, 捩れ加群全体のなす $\mathrm{Gr}(A)$ の部分圏を $\mathrm{Tor}(A)$ と書く. さらに, $\mathrm{gr}(A)$ の部分 $\mathrm{tor}(A)$ を $\mathrm{tor}(A) := \mathrm{gr}(A) \cap \mathrm{Tor}(A)$ と定義する.

定理 2.7. A を右ネーターな次数付き k 代数とする.

(1) $\mathrm{Tor}(A)$ と $\mathrm{tor}(A)$ はそれぞれ, $\mathrm{Gr}(A)$ と $\mathrm{gr}(A)$ の *Serre* 部分圏である.

(2) $\mathrm{qgr}(A) \simeq \mathrm{gr}(A)/\mathrm{tor}(A)$.

2.3 その他の基本的性質や定義

よって, 最初の非可換射影スキームの定義 2.3 は, 定理 2.5 における Serre 商圏としてかけること述べることができた. したがって, $\mathrm{qgr}(A)$ と同様に, $\mathrm{QGr}(A)$ を $\mathrm{Gr}(A)/\mathrm{Tor}(A)$ として定義することにする. さらに, $\mathrm{qgr}(A)$ をアーベル圏の一般論に組み込むことができたので, 様々な良い性質を確かめることができるので, それらを紹介することにする.

命題 2.8. A を右ネーターな次数付き k 代数とする. この時, $\pi : \mathrm{Gr}(A) \to \mathrm{QGr}(A)$ は右随伴関手

$$\omega : \mathrm{QGr}(A) \to \mathrm{Gr}(A)$$

を持ち,

- $\omega \circ \pi \simeq \mathrm{Id}_{\mathrm{Gr}(A)}$.
- ω : 忠実充満関手.
- $\omega(\mathcal{M})$ は捩れなし *(torsion-free)* $(\mathcal{M} \in \mathrm{QGr}(A))$.

さらに, $M \in \mathrm{Gr}(A)$ に対して,

$$(\omega \circ \pi)(M) \simeq \varinjlim_{n \in \mathbb{N}} \underline{\mathrm{Hom}}_A(A_{\geq n}, M),$$

ここで,

$$\underline{\mathrm{Hom}}_A(N, M) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(N, M(i))$$

と定義する.

また, 次が知られている.

命題 2.9. A を右ネーターな次数付き k 代数とする. この時, $\mathrm{QGr}(A)$ は入射的対象が十分多く存在する.

したがって, 可換な場合と同様にコホモロジーを考えることができる.

定義 2.10 ([AZ94, Section 7])**.** A を右ネーターな次数付き k 代数とする. $M \in \mathrm{Gr}(A)$ に対して, $i \in \mathbb{N}$ に対して, i 次の**コホモロジー**を

$$H^i(\mathrm{QGr}(A), \pi(M)) := \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{QGr}(A)}(\mathcal{O}_A, \pi(M))$$

と定義する.

さらに, コホモロジーに関しては, [Har77, Theorem III.5.2] にあるような Serre の有限性定理が成り立つ.

ただ, 定理を述べるには, χ-条件と呼ばれる非可換代数特有の条件を述べる必要がるので, それについてまずは述べることにする.

定義 2.11 ([AZ94, Definition 3.2, 3.7, Proposition 3.11])**.** A は局所有限な右ネーターな次数付き k 代数とする. この時, A が χ_i **条件**を満たすとは, 任意の $M \in \mathrm{gr}(A), j \leq i$ に対して, $\underline{\mathrm{Ext}}^j_A(A_0, M)$ が有界, すなわち, ある $k, l \in \mathbb{Z}$ が存在して,

$$\underline{\mathrm{Ext}}^j_A(A_0, M)_n = 0, \quad {}^\forall n \leq k,\ l \leq {}^\forall n$$

となることをいう. 任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して, A が χ_i 条件を満たすとき, A は χ **条件**を満たすという. また, A^{op} が χ 条件を満たすとき, A は χ^{op} **条件**を満たすという.

注意 2.12. この χ 条件の定義は, [AZ94] において, 最初定義された χ 条件とは異なる. [AZ94] における χ° 条件と呼ばれるものとなっている. こちらの定義を採用した理由としては, A が局所有限な右ネーターな次数付き k 代数である時は, 元々の χ 条件と χ° 条件が同値であるためである. さらに, 元々の χ 条件より見やすいことも理由の一つである.

定理 2.13 ([AZ94, Theorem 7.4])**.** A は局所有限な右ネーターな次数付き k 代数で, χ 条件を満たすとする. $M \in \mathrm{gr}(A)$ に対して, 以下が成り立つ.

(1) $\dim_k H^i(\mathrm{QGr}(A), \pi(M)) < \infty$.

(2) $H^i(\mathrm{QGr}(A), \pi(M)) = 0$ *for* $i \gg 0$.

逆に, A が χ_1 条件と上記の *(1),(2)* を満たすとき, A は χ 条件を満たす.

この定理から, χ 条件は自然な条件であることと考えることができるだろう.

2.4 Artin-Zhang 理論について

非可換射影幾何学において, アーベル圏 $\mathrm{qgr}(A)$ が中心的な研究対象となることは, これまで述べたことからなんとなく理解できるだろう. それでは, 逆にいつ任意のアーベル圏が $\mathrm{qgr}(A)$ として記述できるか考えることは自然な問いであるように思われる. この問いに対して, 一つの答えを出したのが Artin-Zhang による [AZ94] における主結果となる. ここではその結果について述べる.

まず, この節で中心となる定義を述べる.

定義 2.14. 代数的 *3* つ組 *(algebraic triple)* とは, 以下のようなデータの組 $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, s)$ のことをいう.

- $\mathcal{A}$: アーベル圏.
- $\mathcal{O}$: $\mathcal{A}$ の対象.
- $s : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$: 自己同値関手.

次の例が我々が念頭に置いている代数的 3 つ組の例である.

例 2.15.

1. A : 右ネーターな次数付き k 代数とする. この時, $(\mathrm{qgr}(A), \mathcal{O}_A, (1))$ は代数的 3 つ組である. ここで, $(1) : \mathrm{qgr}(A) \to \mathrm{qgr}(A)$ は $(1) : \mathrm{gr}(A) \to \mathrm{gr}(A)$ から誘導される自己同値関手である.
2. X : k 上の射影スキームとし, $\mathcal{O}_X$ を構造層, $\mathrm{Coh}(X)$ を X 上の連接層の圏, L を直線束とする. この時, $(\mathrm{Coh}(X), \mathcal{O}_X, - \otimes_{\mathcal{O}_X} L)$ は代数的 3 つ組である.

定義 2.16 ([AZ94, page 237])**.** $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, s)$ と $\mathcal{T}' = (\mathcal{A}', \mathcal{O}', s')$ を 2 つの代数的 3 つ組とする. この 2 つの間の**射** $(F, \tau, \mu) : (\mathcal{A}, \mathcal{O}, s) \to (\mathcal{A}', \mathcal{O}', s')$ とは, 以下のデータの組みである.

- $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$: アーベル圏の間の関手.
- $\tau : F(\mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}'$: 同型射.
- $\mu : F \circ s \Rightarrow s' \circ F$: 自然同型.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{F} & \mathcal{A}' \\ {\scriptstyle s}\downarrow & \overset{\mu}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle s'} \\ \mathcal{A} & \xrightarrow[F]{} & \mathcal{A}' \end{array}$$

F が圏同値である時, この射を**代数的 *3* つ組の同型**という.

定義 2.17 ([AZ94, page 250])**.** $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, s)$ を代数的 3 つ組とする. この時, s が $\mathcal{T}$ に関して**豊富** *(ample)* であるとは, 以下の 2 つの条件を満たすことをいう:

- 任意の $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$ に対して, ある $\ell_1, \cdots, \ell_p \in \mathbb{N}$ と エピ射
$$\varphi : \bigoplus_{i=1}^{p} s^{-\ell_i}(\mathcal{O}) \twoheadrightarrow \mathcal{M}.$$
が存在する.
- 任意の $\mathcal{A}$ におけるエピ射 $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ に対して, ある $n_0 \in \mathbb{Z}$ が存在して, 任意の $n \geq n_0$ に対して, 自然な射
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{O}, s^n(\mathcal{M})) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{O}, s^n(\mathcal{N}))$$
が全射である.

また, s^{-1} が $\mathcal{T}$ に関して豊富であるとき, s は**反豊富** *(anti-ample)* であるという.

例 2.18. X を k 上の射影スキームとし, $\mathcal{O}_X$ を構造層, $\mathrm{Coh}(X)$ を X 上の連接層の圏, L を豊富な直線束とする. この時, $-\otimes_{\mathcal{O}_X} L$ は $(\mathrm{Coh}(X), \mathcal{O}_X, -\otimes_{\mathcal{O}_X} L)$ に関して豊富である.

命題 2.19 ([AZ94, Proposition 4.4])**.** A : 右ネーターな次数付き k 代数で, χ_1 条件を満たすとする. この時, (1) は $(\mathrm{qgr}(A), \mathcal{O}_A, (1))$ に関して豊富である.

これで, Artin-Zhang の主結果を述べる準備が整った.

定理 2.20 ([AZ94, Theorem 4.5])**.** *(1)* $\mathcal{T} = (\mathcal{A}, \mathcal{O}, s)$ を代数的 *3* つ組とする. $\mathcal{T}$ は以下の条件を満たすとする.

(a) $\mathcal{O}$ はネーターな対象.

(b) $A_0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ は右ネーター環であり, 任意の $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$ に対し, $H^0(\mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{O}, \mathcal{M})$ は A_0-加群として有限生成.

(c) s は $\mathcal{T}$ に関して豊富.

$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(s^n(\mathcal{O})) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{O}, s^n(\mathcal{O}))$ とする. この時, A は右ネーターな次数付き k 代数で χ_1 条件を満たす. そして, 代数的 *3* つ組の同型 $(\mathrm{qgr}(A), \mathcal{O}_A, (1)) \simeq \mathcal{T}$ が存在する.

(2) 逆に, B が右ネーターな次数付き k 代数で χ_1 条件を満たすとする. この時, 代数的 *3* つ組の同型 $(\mathrm{qgr}(B), \mathcal{O}_B, (1))$ は *(1)* の *(a), (b), (c)* を満たす.

2.5 双対化複体について

可換な場合は, 射影スキームの Serre 双対性やその一般化である Serre 関手の存在が知られている. ここでは, 同様の結果が非可換射影スキームにも成り立つことを述べる. そのために, 双対化複体について述べる.

定義 2.21 ([Yek92, Definition 3.3, 4.1], [Yek20, Chapter 17])**.** A をネーターで連結な次数付き k 代数とする. この時に, A の**双対化複体** *(dualizing complex)* とは, 以下のような性質を満たす複体 $R_A \in D^b(\mathrm{Gr}(A^{\mathrm{en}}))$ のことをいう.

(1) 任意の i に対して, $H^i(R_A)$ は A, A^{op} 上有限生成.

(2) R_A は A, A^{op} 上有限な単射次元を持つ.

(3) 自然な $D^b(\mathrm{Gr}(A^{\mathrm{en}}))$ の射

$$\Phi : A \to \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(R_A, R_A), \quad \Phi^{\mathrm{op}} : A^{\mathrm{op}} \to \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{A^{\mathrm{op}}}(R_A, R_A)$$

は同型射になる.

さらに, 以下の条件を満たす時, R_A は *balanced* という.

(4) $\Gamma_{\mathfrak{m}_A}(-) := \varinjlim_{n\to\infty} \underline{\mathrm{Hom}}_A(A/A_{\geq n}, -), A' := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_k(A_{-i}, k)$ とした時, 以下の同型が成り立つ.

$$\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}_A}(R_A) \simeq \mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}_{A^{\mathrm{op}}}}(R_A) \simeq A' \in D(\mathrm{Gr}(A^{\mathrm{en}})).$$

ここで, $\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}_A}$ は $\Gamma_{\mathfrak{m}_A}$ の導来関手を表す.

双対化複体の名前の由来は双対化複体が以下のような双対化関手を持つことに由来する (と思われる).

命題 2.22 ([Yek92, Proposition 3.5])**.** A をネーターで連結な次数付き k 代数とする．A が双対化複体 R_A を持つとする．この時, 次の関手 D_A, D_A^{op}

$$D_A : D^b(\mathrm{gr}(A))^{\mathrm{op}} \to D^b(\mathrm{gr}(A^{\mathrm{op}})), \quad M \mapsto \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_A(M, R_A),$$
$$D_A^{\mathrm{op}} : D^b(\mathrm{gr}(A^{\mathrm{op}}))^{\mathrm{op}} \to D^b(\mathrm{gr}(A)), \quad N \mapsto \mathbf{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{A^{\mathrm{op}}}(N, R_A)$$

は圏同値を与える．

また, balanced な双対化複体が存在することは, χ 条件と深く関係している．

定理 2.23 ([VdB97, Theorem 6.3])**.** A をネーターで連結な次数付き k 代数とする．この時, A が *balanced* な双対化複体を持つことと, 以下の *2* 条件を満たすことが同値である．

(1) A は χ, χ^{op} 条件を満たす．

(2) $\Gamma_{\mathfrak{m}_A}, \Gamma_{\mathfrak{m}_{A^{\mathrm{op}}}}$ のコホモロジー次元が有限である．

さらに, この時, R_A は $\mathbf{R}\Gamma_{\mathfrak{m}_A}(A)'$ により与えられる．

以下で, 双対化複体の存在によって, 非可換射影スキームの Serre 双対性が成り立つことを述べる．

定理 2.24 ([DNB04, Theorem A.4])**.** A をネーターで連結な次数付き k 代数とする．また, A は *balanced* な双対化複体 R_A を持つとする．さらに, $\mathrm{qgr}(A)$ は有限な大域次元を持つとする．この時, 以下で定義される関手

$$\mathcal{S}_A : D^b(\mathrm{qgr}(A)) \to D^b(\mathrm{qgr}(A^{\mathrm{op}})),$$
$$\pi(M) \mapsto \pi(M \otimes^{\mathbb{L}}_A R_A)[-1]$$

は *Serre* 関手となる, すなわち, $\mathcal{S}_A$ は $D^b(\mathrm{qgr}(A))$ の自己同値関手となり, 任意の $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in D^b(\mathrm{qgr}(A))$ に対して, k 上の同型

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathrm{qgr}(A))}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\mathrm{qgr}(A))}(\mathcal{N}, \mathcal{S}_A(\mathcal{M}))^{\vee}$$

を満たす．

注意 2.25. この節では, 連結なネーター次数付き代数のみについて述べたが, 局所有限なネーター次数付き代数についても同様の結果が成り立つことが同様にして確かめることができる (cf. [Miz24a, Section 2.2])．

また, 主結果の説明に必要な標準両側加群の定義について述べておく．

定義 2.26. $\mathcal{C}$ をアーベル圏とする．この時, $\mathcal{C}$ の**標準両側加群**とは, $\mathcal{C}$ の自己同値関手で F で, ある $n \in \mathbb{Z}$ に対して, 導かれる自己同値関手

$$F[n] : D^b(\mathcal{C}) \to D^b(\mathcal{C})$$

が Serre 関手となるもののことをいう．

例 2.27. X を滑らかな k 上の射影スキームとし, ω_X を標準束とする．この時, $- \otimes_X \omega_X$ は $\mathrm{Coh}(X)$ の標準両側加群である．n としては $\dim X$ を取ればよい．

2.6 Artin-Schelter(AS) 正則代数について

この節では, 非可換射影幾何学において重要な研究対象である Artin-Schelter(AS) 正則代数について述べる. 早速, AS 正則代数の定義を述べる.

定義 2.28 ([AS87])**.** A を連結次数付き k 代数とする. A が以下の条件を満たす時, A は *Artin-Schelter(AS)* **正則**であるという.

1. A の大域次元は有限 (d とする).
2. A の GK 次元は有限.
3. A は Gorenstein 条件を満たす, すなわち, ある整数 l が存在して, 以下が成り立つ.

$$\underline{\mathrm{Ext}}^i_A(k, A) \simeq \begin{cases} k(l) & (i = d), \\ 0 & (i \neq d). \end{cases}$$

ここで, l は A の *Gorestein* **パラメーター**という.

注意 2.29. A の GK 次元は有限という条件は, A の Hilbert 関数 $h_A(n) = \dim_k A_i$ が多項式増加であることすなわち, 多項式関数で押さえられることを意味する. この条件は, A がネーターの場合は自動的に成り立つ. また, この AS 正則代数の定義は連結な場合のみだが, 局所有限な場合にも同様の定義が存在し, 連結な場合と同様に豊かな理論が展開されている (例えば, [MM11] を見よ).

以下では, AS 正則代数の例をいくつか紹介する (興味のある方は, サーベイ論文 [Rog23] を見よ).

例 2.30. 有限生成で可換な AS 正則代数は, (重みつき) 多項式環に限られる. よって, この意味で, AS 正則代数は多項式環の非可換版と考えることができる.

例 2.31. 有限生成な大域次元 1 の AS 正則代数は, 1 変数多項式環 $k[x]$ に限られる.

例 2.32. 有限生成な大域次元 2 の AS 正則代数は, 以下の 2 つに限られる.

(1) $k[x, y]_q = k\langle x, y\rangle/(xy - qyx)$ $(0 \neq q \in k)$.

(2) $k\langle x, y\rangle/(xy - yx - y^2)$.

前者は**量子平面**と, 後者は *Jordan* **平面**としばしば呼ばれる.

AS 正則代数の分類は, 大域次元 3 から複雑になってくる. ここでは, 大域次元 3 の AS 正則代数の中でも重要な Sklyanin 代数について述べる.

例 2.33. k 上の代数 $S_{a,b,c}$ $(a, b, c \in k)$ を以下で定義する.

$$S_{a,b,c} := k\langle x, y, z\rangle/(f_1, f_2, f_3) \quad (\deg(x) = \deg(y) = \deg(z) = 1),$$
$$f_1 = ayz + bzy + cx^2,\ f_2 = azx + bxz + cy^2,\ f_3 = axy + bxy + cz^2.$$

ただし, $[a : b : c] \in \mathbb{P}^2$ とみなす時,

$$[a : b : c] \notin \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\} \cup \{[\alpha : \beta : \gamma] \mid \alpha^3 = \beta^3 = \gamma^3\}$$

とする. この時, $S_{a,b,c}$ は AS 正則代数となり, この代数を *Sklyanin* **代数**と呼ぶ.

大域次元が 4 以上の AS 正則代数の分類はまだ全くの未解決問題であるが, elliptic algebra を始めとした様々な興味深い例が知られている.

3　主結果について

再度, 本研究の主結果を述べる.

定理 3.1 ([Miz24a, Theorem 1.5])**.** k 上のネーターな連結な次数付き k 代数 A, B に対して, 付随する非可換射影スキーム $\mathrm{qgr}(A), \mathrm{qgr}(B)$ が標準両側加群 $\omega_{\mathrm{qgr}(A)}, \omega_{\mathrm{qgr}(B)}$ を持ち, 豊富 (または反豊富) であるとする. この時,

$$D^b(\mathrm{qgr}(A)) \simeq D^b(\mathrm{qgr}(B)) \Rightarrow \mathrm{qgr}(A) \simeq \mathrm{qgr}(B).$$

系 3.2 ([Miz24a, Corollary 1.6])**.** A, B を k 上のネーター AS 正則代数とする. この時,

$$D^b(\mathrm{qgr}(A)) \simeq D^b(\mathrm{qgr}(B)) \Rightarrow \mathrm{qgr}(A) \simeq \mathrm{qgr}(B).$$

3.1　主結果の証明について

定理 3.1 の証明における主な目標は (反) 標準環の同型を導くことである. (反) 標準環は以下のように定義される.

定義 3.3. $\mathcal{T} = (\mathcal{C}, \mathcal{O}, s)$ を代数的 3 つ組とする. この時に, $\mathcal{T}$ の**標準環** $R_{can}(\mathcal{T})$ **または反標準環** $R_{anti\text{-}can}(\mathcal{T})$ とは,

$$R_{\mathrm{can}}(\mathcal{T}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O}, s^n(\mathcal{O})), \quad R_{\mathrm{anti\text{-}can}}(\mathcal{T}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O}, s^{-n}(\mathcal{O}))$$

により定義される $\mathbb{Z}$ 次数付き環のことをいう.

詳細に言えば, 代数的 3 つ組 $\mathcal{T}_A := (\mathrm{qgr}(A), \mathcal{O}_A, \omega_{\mathrm{qgr}(A)}), \mathcal{T}_B := (\mathrm{qgr}(B), \mathcal{O}_B, \omega_{\mathrm{qgr}(B)})$ に関して, これらに付随する (反) 標準環が同型であることを示すことが目標となる. もし, これらが示されれば, 定理 2.20 より $\omega_{\mathrm{qgr}(A)}, \omega_{\mathrm{qgr}(B)}$ が豊富なときは,

$$\mathrm{qgr}(A) \simeq \mathrm{qgr}(R_{\mathrm{can}}(\mathcal{T}_A)) \simeq \mathrm{qgr}(R_{\mathrm{can}}(\mathcal{T}_B)) \simeq \mathrm{qgr}(B)$$

となり, 主結果が従う ($\omega_{\mathrm{qgr}(A)}, \omega_{\mathrm{qgr}(B)}$ が反豊富な場合は, $R_{\mathrm{anti\text{-}can}}$ を用いればよい.). これを実際に示すには, 様々な準備が必要である. ここでは紙面の都合上, 詳細は省略するが, 非可換射影スキームにおける Fourier-向井関手の性質の調べることや充満忠実関手が常に Fourier-向井関手となることを示すことが重要である. 加えて, 非可換射影スキームにおける Fourier-向井関手の定義には, dg 圏 (または $\mathbb{Z}$-代数) の概念が本質的に必要となるため, より多くの概念の導入が必要となる. 元々の Bondal と Orlov の [BO01] における可換な場合の証明は, point-like object や invertible object のような概念を用いていたが, 非可換射影幾何学ではそのような概念を用いた議論が難しいため, 代わりに Fourier-向井関手を用いる議論を行うことにした (cf. [Huy06, Proposition 6.1]).

系 3.2 についても少し述べる. 系の証明には AS 正則代数 A が, $\omega_{\mathrm{qgr}(A)}$ が反豊富であることを示す必要がある. A の Gorenstein パラメーター l が正であることは, よく知られているのだが, そこから $\omega_{\mathrm{qgr}(A)}$ が反豊富であることが直接従うわけではない. ここで, A の quasi-Veronese 代数 $A^{[l]}$ というものを考える必要が出てくる. これを考える理由としては, $A^{[l]}$ が Gorenstein パラメーターが 1 となり, $\mathrm{qgr}(A) \simeq \mathrm{qgr}(A^{[l]})$ となることが分かるからである ([Miz24b], [MM11]). したがって, $A^{[l]}$ に対して, 定理 3.1 を適用することができる. ただ, ここで注意なのは, $A^{[l]}$ は一般に連結ではないことである. これが, [Miz24a] において, 連結でない場合にも定理 3.1 を示した理由となる. また, A が AS-Gorenstein の場合も同じように Gorenstein パラメーター 1 の場合に帰着することができれば, 同様の議論ができる.

References

[AZ94] M. Artin and J. J. Zhang. "Noncommutative Projective Schemes". *Adv. Math.* **109.2** (1994), pp. 228–287.

[AS87] M. Artin and W. F. Schelter. "Graded algebras of global dimension 3". *Adv. in Math.* **66.2** (1987), pp. 171–216.

[BO01] A. Bondal and D. Orlov. "Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences". *Compos. Math.* **125.3** (2001), pp. 327–344.

[DNB04] K. De Naeghel and M. Van den Bergh. "Ideal classes of three-dimensional Sklyanin algebras". *J. Algebra* **276.2** (2004), pp. 515–551.

[Gab62] P. Gabriel. "Des catégories abéliennes". *Bull. Soc. Math. France* **90** (1962), pp. 323–448.

[Har77] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*. Vol. No. 52. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, pp. xvi+496.

[Huy06] D. Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006, pp. viii+307.

[LO10] V. Lunts and D. Orlov. "Uniqueness of enhancement for triangulated categories". *J. Amer. Math. Soc.* **23.3** (2010), pp. 853–908.

[MM11] H. Minamoto and I. Mori. "The structure of AS-Gorenstein algebras". *Adv. Math.* **226.5** (2011), pp. 4061–4095.

[Miz24a] Y. Mizuno. *Bondal-Orlov's reconstruction theorem in noncommutative projective geometry*. 2024. arXiv: 2411.07813 [math.AG].

[Miz24b] Y. Mizuno. "Some examples of noncommutative projective Calabi–Yau schemes". *Canad. Math. Bull.* **67.3** (2024), pp. 706–726.

[Muk81] S. Mukai. "Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves". *Nagoya Math. J.* **81** (1981), pp. 153–175.

[Pop73] N. Popescu. *Abelian categories with applications to rings and modules*. Vol. No. 3. London Mathematical Society Monographs. Academic Press, London-New York, 1973, pp. xii+467.

[Rog23] D. Rogalski. *Artin-Schelter Regular Algebras*. 2023. arXiv: 2307.03174 [math.RA].

[Ser55] J.-P. Serre. "Faisceaux algébriques cohérents". *Ann. of Math. (2)* **61** (1955), pp. 197–278.

[VdB97] M. Van den Bergh. "Existence Theorems for Dualizing Complexes over Non-commutative Graded and Filtered Rings". *J. Algebra* **195.2** (1997), pp. 662–679.

[Yek92] A. Yekutieli. "Dualizing complexes over noncommutative graded algebras". *J. Algebra* **153.1** (1992), pp. 41–84.

[Yek20] A. Yekutieli. *Derived categories*. Vol. 183. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2020, pp. xi+607.

Nuclear solid modules over Stone δ-rings

立教大学大学院 理学研究科 数学専攻
山田雄斗 (Yuto YAMADA) *

概要

距離付け可能な副有限集合による δ-環上の”導来圏”の候補を (light) condensed mathematics を用いて与える. それが, その位相空間上の層に対応することを明らかにした.

1 導入

まずは, P.Scholze と D.Clausen により導入された新しい枠組みである **(light) condensed mathematics** に説明する ([LCM] や [AnStk]). これは, 距離付け可能な副有限集合上の層の理論である. とくに重要なものとして, 以下の 2 つが存在する:

$$\mathrm{Cond} := \mathrm{Shv}_{\mathrm{eff}}(\mathrm{ProFin}^{\mathrm{light}}, \mathrm{Set}), \quad \mathrm{CondAb} := \mathrm{Shv}_{\mathrm{eff}}(\mathrm{ProFin}^{\mathrm{light}}, \mathrm{Ab}).$$

具体的には, Cond は, 以下をみたすような関手 $(\mathrm{ProFin}^{\mathrm{light}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ 全体である (CondAb についても同様である.):

1. $F(\emptyset) = *$ である.
2. 任意の $S_1, S_2 \in \mathrm{ProFin}^{\mathrm{light}}$ に対して, $F(S_1 \sqcup S_2) = F(S_1) \times F(S_2)$ が成立する.
3. 任意の $\mathrm{ProFin}^{\mathrm{light}}$ での全射 $S_1 \to S_2$ に対して, $F(S_2) = \mathrm{eq}(F(S_1) \rightrightarrows F(S_1 \times_{S_2} S_1))$ が成立する.

Cond は収束性の備わった集合と見做すこともできて, condensification という関手 $\mathrm{Top} \ni T \longmapsto \mathrm{Cont}(-, T) \in \mathrm{Cond}$ により, 距離付け可能なコンパクトハウスドルフ空間を忠実充満に含んでいる.

また, CondAb は Cond に (abel) 群作用の入ったものである. この内で収束性と総和可能性が一致するような充満部分圏を Solid と表す. 実際, Solid に, 実数体 $\mathbb{R}$ は含まれず, p-進整数環 $\mathbb{Z}_p$ や整数環 $\mathbb{Z}$ は含まれる.

更に, Solid には $\otimes^{\blacksquare}$ という対称モノイダル構造が存在して, これは通常のテンソル積に対して, 位相構造が含まれたものと見做すことができる.

これの $\mathbb{Z}_p$-加群の **nuclear 対象**を $\mathcal{D}$ とする. これは, つまり, 以下のような (∞-) 圏である:

$$\mathcal{D}(\mathrm{Solid}_{\mathbb{Z}_p}) := \{M \in \mathcal{D}(\mathrm{Solid}) \mid M \otimes^{L\blacksquare} \mathbb{Z}_p \simeq M\},$$
$$\mathcal{D} := \mathrm{Nuc}(\mathcal{D}(\mathrm{Solid}_{\mathbb{Z}_p}))) = \{M \in \mathcal{D}(\mathrm{Solid}_{\mathbb{Z}_p}) \mid M \text{ is } p\text{-complete and } M/^L p \text{ is discrete}\}.$$

* E-mail:23lc012z@rikkyo.ac.jp

ただし, $\mathcal{D}(\mathrm{Solid})$ は Solid の $(\infty$-$)$ 導来圏を意味する.

次に, p-導分と呼ばれる自己写像を備えた環である **δ-環**について説明する. 正確には, p-導分とは以下をみたすような自己写像 $\delta : A \to A$ である:

1. $\delta(1) = 0$ である.
2. 任意の $x, y \in A$ に対して, $\delta(xy) = x^p\delta(y) + \delta(x)y^p + p\delta(x)\delta(y)$ が成立する.
3. 任意の $x, y \in A$ に対して, $\delta(x+y) = \delta(x) + \delta(y) + \dfrac{(x^p + y^p) - (x+y)^p}{p}$ が成立する.

この例は $\mathbb{F}_p$-代数の Witt 環により得ることが出来る. 更に, Frobenius 射が同型となるような perfect $\mathbb{F}_p$-代数は, この Witt 化により, δ-環に忠実充満に含まれる.

一方で, Frobenius 射が恒等的であるような p-Bool 代数は, Stone 双対により, 副有限集合と (反対) 圏同値である. これは, とくに Frobenius 射が同型であるので, perfect $\mathbb{F}_p$-代数であることに注意する. これの Witt 環でかけるような p-進完備な δ-環を **Stone δ-環**という. これは, δ-環 A の p-導分を用いて $x \longmapsto x^p + p\delta(x)$ で定まる **Frobeninus lift** が恒等射になるものと見做すこともできる.

これらの圏同値は具体的に以下の関手で与えられることに注意しておく:

$$(\mathrm{Stone}^{\delta,\wedge})^{\mathrm{op}} \ni A \longmapsto \mathrm{Hom}_\delta(A, \mathbb{Z}_p) \in \mathrm{ProFin},$$
$$\mathrm{ProFin} \ni S \longmapsto \mathrm{Cont}(S, \mathbb{Z}_p) \in (\mathrm{Stone}^{\delta,\wedge})^{\mathrm{op}}$$

2 主定理

1 つ目に, Stone δ-環には p-進忠実平坦による位相を備えることで, 以下の site の同型を得た:

$$((\mathrm{Stone}^{\delta,\wedge})^{\mathrm{op}}, \tau_{p\text{-fpqc}}) \simeq (\mathrm{ProFin}, \tau_{\mathrm{eff}}).$$

ただし, 環の射 $A \to B$ が **p-進忠実平坦**であるとは, 法 p 還元により誘導される射が忠実平坦であり, 導来テンソル積 $B \otimes^L_A A/p$ が 0 次に集中しているということである.

また, p-捻れのない p-進完備な δ-環は Stone δ-環による p-進忠実平坦な (標準的な) 被覆をもつこともわかった:

$$A \to \mathrm{coker}(A_{\mathrm{coperf}} \xrightarrow{\tilde{\phi}-1} A_{\mathrm{coperf}})^\wedge_{(p)}.$$

ただし, $\phi, \tilde{\phi}$ は A, A_{coperf} の Frobenius lift であり, A_{coperf} は以下の余極限を意味する:

$$A_{\mathrm{coperf}} = \mathrm{colim}(A \xrightarrow{\phi} A \xrightarrow{\phi} \cdots) \quad \text{in } \mathrm{Ring}^\delta.$$

2 つ目に, 以下に沿って, 距離付け可能な副有限集合 S 上の"構造層"を定めた. ここで, A を $\mathrm{Cont}(S, \mathbb{Z}_p)$ とすると, 先の対応を以て, (Stone) δ-環の構造をもつ. また, $\mathcal{D}_A$ を $\mathrm{Mod}_A(\mathcal{D}) = \{M \in \mathcal{D} \mid M \otimes^{L\blacksquare} A \simeq M\}$ とする.

$$\mathrm{Closed}(S) \ni K \longmapsto \mathrm{Cont}(K, \mathbb{Z}_p) \in \mathrm{Idem}(\mathcal{D}_A)^{\mathrm{op}}$$

という関手は有限余極限と極限と交換する. これにより, $\mathbb{Z}_p$-値の関数環を与える"構造層" $(=\mathcal{D}_A$ の可換代数対象の層$)$ $\mathcal{O}$ を得る. これを用いて, 以下の関手を得る:

$$\mathcal{D}_A \ni M \longmapsto (K \longmapsto M \otimes^{L\blacksquare}_A \mathcal{O}(K)) \in \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Shv}(S, \mathcal{D})).$$

これは, S の開集合 U に対して, $\mathrm{fib}(A \to \mathcal{O}(S \setminus U))$ が $\mathrm{Mod}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Shv}(S, \mathcal{D}))$ の”生成子” h_U に写るので, 主定理の以下の $(\infty$-$)$ 圏の同型を得る:

$$\mathcal{D}_A \simeq \mathrm{Mod}_{\mathcal{O}}(\mathrm{Shv}(S, \mathcal{D})).$$

これを推し進めることで, δ-環の”幾何学的対象”について研究していきたい.

参考文献

[LCM] Dustin Clausen and Peter Scholze, *Lectures on Condensed Mathmatics*, available at the website [LCM] (2019)

[AnStk] Dustin Clausen and Peter Scholze, *Analytic Stacks*, available at YouTube [AnStk] (2024)

A simple derived categorical generalization of Ulrich bundles

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻

吉田 智輝 (Tomoki Yoshida) [*1]

概要

本稿では，Ulrich 束の導来圏的一般化として Ulrich 対象を定義する．Ulrich 束とは非常に豊富な直線束による偏極非特異射影代数多様体 $(X, \mathscr{O}_X(1))$ 上に定まる特殊な層の一種である．また，連接層の導来圏とは代数多様体上の層のコホモロジーの情報を統一的に扱うことのできる圏である．層の Ulrich 性にはいくつかの特徴づけが知られており [ES03]，それはコホモロジー的な条件による特徴づけを含んでいる．この特徴づけを用いて Ulrich 性の定義を層の複体へと一般化することで Ulrich 対象を定義する．また，[ES03] における Ulrich 束の特徴づけの Ulrich 対象における類似の結果や，Ulrich 対象を用いた Eisenbud-Schreyer 予想への応用についても紹介し，それらの証明の概略を解説する．

1 イントロダクション

代数幾何学は，有限個の多項式の零点集合を貼り合わせて構成される代数多様体と呼ばれる幾何的対象の性質を研究する分野である．代数多様体はその幾何的性質によってその呼び名が決まることが多い．たとえば，標準束が自明であり，不正則数 $q = 0$ を満たす代数曲面は K3 曲面と呼ばれる．また，射影曲面を一般の位置にある $d(< 9)$ 個の点で爆発して得られる曲面は del Pezzo 曲面と呼ばれる．これらの代数多様体は多様体としての性質が豊かである一方で，それらを定義する具体的な代数方程式の形を明らかにすることは，しばしば非常に困難である．

具体的な方程式を考える上で最も単純なケースは超曲面の場合である．代数多様体が射影空間 $\mathbb{P}^{n+1}_k$ 内の超曲面であるとは，ある代数的な既約斉次多項式 $F \in k[x_0, \dots, x_n]$ の零点集合 $(F = 0)$ により定義されるときをいう．このときは Beauville によって次のようなことが知られている：

定理 A ([Bea00])**.** $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ を次数 d の斉次方程式 F により定義される超曲面とする．このとき，次の 2 条件は同値である：

1. 正整数 r と 1 次式係数行列が M が存在して $F^r = \det M$ と書ける，
2. X 上の階数 r ベクトル束 $\mathcal{E}$ で次の線形分解を持つものが存在：

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}(-1)^{\oplus rd} \xrightarrow{M} \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n+1}}^{\oplus rd} \to \mathcal{E} \to 0.$$

つまり，特殊な条件を満たすベクトル束の存在性が，超曲面が “線形代数的” な表示をもつことに対応している，ということを示している．

1.1 Ulrich 束について

Eisenbud と Schreyer ([ES03]) は，一般の射影空間に埋め込まれた非特異射影代数多様体 $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ に対して定理 A の同値条件 2. の線形分解の長さを一般化した性質をもつ X 上の特殊なベクトル束

[*1] E-mail: tomoki_y[at]asagi.waseda.jp or tomoki.yoshida6[at]gmail.com

を **Ulrich 束**と定義した．定義方程式について議論するためには，代数多様体が射影空間へどのように埋め込まれているかについても固定しておかなければならないこと，代数多様体 X の射影空間への埋め込みは，X 上の非常に豊富な直線束 $\mathscr{O}_X(1)$(または単に $\mathscr{O}(1)$) を固定することに対応している [Har77, Chapter II, Section 7] ことに注意する．

以上をまとめると，次のようになる：X を n 次元の非特異射影代数多様体，$\Phi_{|\mathscr{O}(1)|} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ を X 上の非常に豊富な直線束 $\mathscr{O}(1)$ による埋め込みとする．X 上の連接層 $\mathcal{E}$ が Ulrich 束であるとは，次の（$\mathbb{P}^N$ 上における）線形分解が存在するときをいう：

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(-N+n)^{\oplus a_{N-n}} \to \cdots \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(-1)^{\oplus a_1} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}^{\oplus a_0} \to \mathcal{E} \to 0.$$

（Ulrich 束にはいくつかの同値な定義がある．定義 2.2 と定理 2.4 をみよ．）

従って，与えられた $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ 上に Ulrich 束が存在するということは，射影空間 $\mathbb{P}^N$ の中で X が（X に台を持つ層 $\mathcal{E}$ を通じて）線形代数的な情報のみによって切り出すことができるということに等しい．従って，このような出自から Ulrich 束の研究上最も重要視される点はその存在性である．次の予想は，今日 Eisenbud-Schreyer 予想と呼ばれている予想である．

予想 B (Eisenbud-Schreyer 予想)**.** 任意の非特異射影代数多様体 X と X 上の非常に豊富な因子 $\mathscr{O}_X(1)$ に対して，Ulrich 束が存在する．

Eisenbud-Schreyer 予想は広く肯定的な答えを持っていると考えられている．現時点で知られている例としては，代数曲線 [ES09]，完全交叉 [HUB91]，グラスマン多様体 [CMR15] などがある．これらの証明は完全交叉の場合は超曲面の行列因子化，グラスマンの場合は Borel-Weil-Bott の定理などそれぞれの代数多様体固有の技術を用いている．そのため予想 B の一般的な解決には遠い状況である．

1.2 連接層の導来圏と Ulrich 対象について

連接層の導来圏とは， X 上の連接層の複体を対象に持つ圏であり，三角圏の一種である．代数多様体を調べる際に導来圏を考えることは，環を調べる際に環上の加群の複体の圏を考えることに対応している．連接層の導来圏は層係数コホモロジー理論の基盤言語として導入された．その後，Bondal と Orlov によって，標準層が豊富もしくは反豊富のとき，導来圏の同値 $D^b(X) \cong D^b(Y)$ が多様体の同型 $X \cong Y$ を誘導することが示された．これをきっかけに代数幾何学における文脈では，主に代数多様体の不変量として研究されてきた．

そのようにして発展してきた導来圏の理論は近年，ベクトル束や層それ自体の分類や研究にも役に立つことが分かっている．例えば，福岡，原，石川は [FHI23] において，「次数 2 以下の 3 次元 del Pezzo 多様体上の階数 2 の弱ファノ束は常に分裂する」という主張を導来圏の例外生成列やその変異関手といった手法を用いて証明している．

[Yos25] では，そのベクトル束として Ulrich 束に着目し，導来圏の理論を適用することを考える．まず，Ulrich 束の導来圏への一般化として，**Ulrich 対象**を定義する．そのために Ulrich 束のコホモロジー的特徴づけ（定理 2.4）を利用する．その定義の下で，Ulrich 束の特徴づけ（定理 2.4）の部分的な Ulrich 対象における類似として，次の定理を得た．

定理 C ([Yos25, Proposition 2.2])**.** $(X, \mathscr{O}_X(1))$ を非常に豊富な直線束による偏極非特異射影代数多

様体とし，$E \in D^b(X)$ を Ulrich 対象，$\pi : X \to \mathbb{P}^n$ を有限線形射影 (定義 2.3 をみよ) とする．このとき，次は同値である：

1. $E \in D^b(X)$ が Ulrich 対象である．
2. $\pi_* E \in \langle \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \rangle$.
3. ゼロでない任意のコホモロジー層 $\mathcal{H}^i(E)$ が Ulrich 束である．

1.3 Eisenbud-Schreyer 予想への応用について

定理 C から，Ulrich 束の存在性と Ulrich 対象の存在性は同値である．これを導来圏的観点から再解釈すると，Ulrich 束の存在性は次のように言い換えることができる：

$$\mathscr{O}(1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}(n) \text{ が導来圏 } D^b(X) \text{ の生成元でない.}$$

これを用いて次の定理を得た：

定理 D ([Yos25, ES09])**.** 任意の代数曲線 C とその上の非常に豊富な因子に対して，Ulrich 対象が存在する．

代数曲線上の Ulich 束の存在性は，結果としては既に [ES09] で知られていた．しかし本研究で行った証明はこれまでの証明と比べ，代数多様体自体の幾何学的条件やその射影空間への埋め込みに依らない証明である．

本稿の内容は筆者による論文 [Yos25] に基づく．

また，本稿を通じて，$k = \bar{k}$ で代数閉体，X で k 上定義された n 次元非特異射影代数多様体，$\mathscr{O}_X(1)$ (または単に $\mathscr{O}(1)$) によって X 上の非常に豊富な直線束を表すものとする．また，$(X, \mathscr{O}_X(1))$ 上の層 $\mathcal{E}$ に対し，$\mathcal{E}(i) \coloneqq \mathcal{E} \otimes \mathscr{O}_X(i)$ と定める．

本稿の構成. Section 2 では, Ulrich 対象の定義とその特徴づけ (定理 C) を紹介し, その証明で用いられる技術やアイデアに関して記述する．そのために Section 2.1 では Ulrich 束に関する準備，Section 2.2 では導来圏に関する準備を行う．Section 3 では，Ulrich 束の導来圏への一般化である Ulrich 対象を用いた予想 B へのアプローチについて紹介する．特に定理 D の証明の概略を紹介する．

謝辞. 本研究は JST SPRING, Grant Number JPMJSP2128 の助成を受けたものである．

2 Ulrich 対象の定義と初等的性質

2.1 Ulrich 束に関する準備

本節では，Ulrich 束に関してその基本的な定義と性質を述べる．基本的な事柄や証明については [CMRPL21] を参照.

定義 2.1. X 上の層 $\mathcal{E}$ が **arithmetically Cohen-Macaulay** (または単に aCM) とは，locally Cohen-Macaulay (つまり，任意の $x \in X$ に対して $\operatorname{depth} \mathcal{E}_x = \dim \mathscr{O}_{X,x}$) かつ任意の $t \in \mathbb{Z}$ と

$i = 1, \dots, n-1$ に対して $H^i(X, \mathcal{E}(t)) = 0$ が成り立つときをいう．

定義 2.2. $(X, \mathscr{O}(1))$ 上の正規化された (initialized) 層 $\mathcal{E}$ が **Ulrich 束**であるとは，aCM 束かつ $h^0(\mathcal{E}) = \deg X \operatorname{rk} \mathcal{E}$ が成り立つときをいう．

Ulrich 層がどのようなものであるかを主張する特徴づけを紹介する前に，ひとつ記法を導入する．

定義 2.3. $(X, \mathscr{O}(1))$ に対して，射 $\pi : X \to \mathbb{P}^n$ を次のように定める：

$$\begin{array}{ccc} X & \xhookrightarrow{\Phi_{|\mathscr{O}(1)|}} & \mathbb{P}^N \\ & \searrow^{\pi} & \downarrow p \\ & & \mathbb{P}^n, \end{array}$$

ここで，p は $\mathbb{P}^N \setminus X$ の点からの線形射影の合成であり，$\pi := p \circ \Phi_{|\mathscr{O}(1)|}$ である．このように定められた π を**有限線形射影 (finite linear projection)** と呼ぶ．

注意.
- Ulrich 層は aCM であるから常にベクトル束である．実際，Auslander-Buchsbaum の公式から，各 $x \in X$ に対して
$$\operatorname{pd} \mathcal{E}_x = \operatorname{depth} \mathscr{O}_{X,x} - \operatorname{depth} \mathcal{E}_x = 0$$
が成り立つ．従って，$\mathcal{E}_x$ は $\mathscr{O}_{X,x}$ 自由加群となる．従って，Ulrich 層と Ulrich 束は同一の概念であり，特に区別なくどちらの呼称も用いる．
- 有限線形射影は有限射である．

以上の準備の下，Eisenbud と Schreyer によって証明された，Ulrich 束の性質を記述する特徴付けを紹介する．

定理 2.4 ([ES03, Proposition 2.1.])**.** X の埋め込みを $\Phi_{|\mathscr{O}_X(1)|} : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ とかく．また，$\mathcal{E}$ を正規化された X 上のベクトル束とする．このとき次の 4 条件は同値となる：

1. $\mathcal{E}$ は Ulrich 束である．
2. 次の分解が存在する：
$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(-N+n)^{\oplus a_{N-n}} \to \cdots \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}(-1)^{\oplus a_1} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^N}^{\oplus a_0} \to \mathcal{E} \to 0.$$
3. $H^i(\mathcal{E}(-j)) = 0$ $(i \geq 0,\ j = 1, \dots, n)$,
4. ある有限線形射影 $\pi : X \to \mathbb{P}^n$ と，ある正整数 m に対して，$\pi_* \mathcal{E} \cong \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}^{\oplus m}$ が成り立つ．

定理 2.4 の特徴づけは各々が非常に意義のある表示をしている．2 つめは，Ulrich 束は Beauville の結果定理 A を一般化したものであるということ，3 つめは Ulrich 束はコホモロジー的に特徴づけることができるということ，4 つめは，Ulrich 束とはある種，射影空間の構造層のような振る舞いをする層のことであるということを示している．

2.2 導来圏に関する簡潔な復習

ここでは，Section 2.3 以降で用いられる連接層の導来圏に関する基本的事項や記法・約束について簡単に述べる．より正確には，また，証明については [Huy06, 上戸 20] を参照．

X を n 次元の非特異射影代数多様体とし，$D^b(X) \coloneqq D^b(\mathbf{Coh}(X))$ を連接層の有界導来圏とする (右肩の b は有界を表す bounded の b である)．導来圏の対象 $E \in D^b(X)$ は実体としては次のような連接層の複体である：

$$E : \left(\cdots \overset{d^{-2}}{\to} E^{-1} \overset{d^{-1}}{\to} E^0 \overset{d^0}{\to} E^1 \overset{d^1}{\to} E^2 \overset{d^2}{\to} \cdots \right).$$

ここで，各 E^i は X 上の連接層であり，各 $i \in \mathbb{Z}$ に対して $d^i \circ d^{i-1} = 0$ を満たす．また，複体が有界であるとは，$|i| \gg 0$ に対し，$E^i = 0$ が成り立つときをいう．

導来圏の対象 E に対して，層の複体としての i 次コホモロジー層を $\mathcal{H}^i(E) \in \mathbf{Coh}(X)$ と書き，(通常の意味での，つまり層コホモロジーの導来圏の対象への一般化の) コホモロジー群を $H^i(E) \coloneqq \mathcal{H}^i(\mathbf{R}\Gamma(E)) \in \mathbf{Vec}$ と書く．ここで，$\mathbf{R}\Gamma : D^b(X) \to D^b(\mathbf{Vec})$ は大域切断関手の右導来関手である．

また，$E, F \in D^b(X)$ に対して $\mathrm{Ext}^i(E,F) \coloneqq R^i \mathrm{Hom}(E,F)$ と定める．このとき，

$$\mathrm{Ext}^i(E,F) = \mathrm{Hom}(E, F[i])$$

が成り立つ．ここで，F の i 次シフト $F[i]$ とは，$(F[i])^j = F^{j+i}, d^j_{F[i]} = (-1)^i d^{j+i}_F$ によって定義される対象である．各 $\mathrm{Hom}(E,F)$ は有限次元の k ベクトル空間である．簡単のため $\hom(E,F) \coloneqq \dim \mathrm{Hom}(E,F)$ と略記する．

次に，導来圏の部分圏と生成について定義と記法を導入しておく：

定義 2.5. $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ を充満部分圏，Ω を三角圏 $\mathcal{D}$ の対象からなる部分集合（もしくは部分圏）とする．

1. $\mathcal{C}$ の（$\mathcal{D}$ 内での）thick 閉包とは，$\mathcal{C}$ の対象を含み，直和因子で閉じているような最小の部分三角圏である．また，$\mathcal{C}$ の thick 閉包を $\mathrm{thick}\,\mathcal{C}$ と書く．
2. 部分三角圏 $\mathcal{C}$ が **thick** であるとは，$\mathcal{C} = \mathrm{thick}\,\mathcal{C}$ が成り立つときをいう．また，$\mathcal{C}$ を含む最小の thick 部分三角圏を $\langle \mathcal{C} \rangle$ で表す．
3. Ω を含む $\mathcal{D}$ の最小の thick 部分三角圏を $\langle \Omega \rangle$ とかく．

もうひとつ記法を導入する：Ω を三角圏 $\mathcal{D}$ の対象からなる部分集合（もしくは部分圏）とする．このとき Ω の右直交部分圏 $\langle \Omega \rangle^\perp$ を次で定める：

$$\begin{aligned} \langle \Omega \rangle^\perp &\coloneqq \{ E \in \mathcal{D} \mid \mathbf{R}\mathrm{Hom}(X, E) = 0, {}^\forall X \in \Omega \} \\ &= \{ E \in \mathcal{D} \mid \mathbf{R}\mathrm{Hom}(X, E) = 0, {}^\forall X \in \langle \Omega \rangle \}. \end{aligned}$$

2 つ目の等号は自明ではないが容易である．

次に，導来圏もしくはより一般の三角圏における半直交分解と例外列について復習しておく．半直交分解とは導来圏の “既約分解” ともいえる概念であり，導来圏をより小さい三角圏に分割していくための議論である．

定義 2.6. $\mathcal{D}$ を三角圏とする．充満部分圏の列 $\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_l\}$ が $\mathcal{D}$ の半直交分解であるとは，次の 2 条件を満たすときをいう：

(1) $m > n$ に対して，$\mathrm{Hom}(\mathcal{C}_m, \mathcal{C}_n) = 0$.
(2) 任意の対象 $D \in \mathcal{D}$ に対して，$\mathrm{Cone}(D_i \to D_{i-1}) \in \mathcal{C}_i$ であるような次の列が存在する

$$0 = D_l \to D_{l-1} \to \cdots \to D_1 \to D_0 = D.$$

充満部分圏の列 $\{\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_l\}$ が $\mathcal{D}$ の半直交分解を与えるとき，$\mathcal{D} = \langle \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_l \rangle$ と書く．

例外生成列は半直交分解の中でも最も単純な構造をもつ半直交分解である．ざっくりといえば，例外生成列の各成分である例外対象はベクトル空間における長さ 1 のベクトル（の張る部分空間）に対応し，例外生成列はベクトル空間の正規直交基底に対応する概念である．

定義 2.7. $\mathcal{D}$ を三角圏，E を $\mathcal{D}$ の対象とする．E が例外対象であるとは，次の条件を満たすときをいう：

$$\hom(E, E[i]) = \begin{cases} 1 & (i = 0), \\ 0 & (i \neq 0). \end{cases}$$

定義 2.8. (順序付き) 例外対象の列 $(E_1, \ldots, E_n) \subset \mathcal{D}$ が例外列であるとは，任意の $j < i$ なる $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ と任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$\mathrm{Hom}(E_i, E_j[k]) = 0$$

が成り立つときをいう．また，例外列 $\mathbb{E} = (E_1, \ldots, E_n)$ が例外生成列であるとは，$\mathbb{E}$ が導来圏全体をシフトと拡大によって生成するときをいう．

例 2.9 ([Bei78])**.** 射影空間 $\mathbb{P}^n$ の導来圏 $D^b(\mathbb{P}^n)$ 上には次の例外生成列が存在する：

$$D^b(\mathbb{P}^n) = \mathbb{E} \coloneqq (\mathscr{O}, \mathscr{O}(1), \ldots, \mathscr{O}(n)).$$

この例外生成列は，Beilinson の例外生成列と呼ばれる．

2.3 Ulrich 対象の定義と初等的性質

準備が整ったので，Ulrich 束の導来圏への一般化として Ulrich 対象を定義する．定理 2.4 における Ulrich 層のコホモロジー的特徴づけを用いて複体の Ulrich 性を定めることを考える．正確には，次のような定義をする：

定義 2.10. X を n 次元非特異射影代数多様体，$\mathscr{O}(1)$ を X 上の非常に豊富な因子，E を導来圏 $D^b(X)$ の対象とする．E が (偏極 $\mathscr{O}(1)$ に関して)**Ulrich 対象**であるとは，各 $i \in \mathbb{Z}$ と $1 \leq j \leq n$ に対して次が成り立つときをいう：

$$H^i(E(-j)) = 0.$$

この定義の下，定理 2.4 の部分的な類似として次の特徴付けを得た：

命題 2.11. 定義 2.10 と同じ設定の下，$E \in D^b(X)$ を Ulrich 対象とする．また，$\pi : X \to \mathbb{P}^n$ を有限線形射影 (定義 2.3) とする．このとき，次は同値である：

1. $E \in D^b(X)$ が Ulrich 対象である．
2. $\pi_* E \in \langle \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n} \rangle$.
3. ゼロでない任意のコホモロジー層 $\mathcal{H}^i(E)$ が Ulrich 束である．

Outline of the Proof. 詳細な証明は書かないが，その証明のアイデアと主な手法についてコメントしておく．

(1)⇒ (2) 定義から，Ulrich 対象は π によって $\{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(1),\dots,\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n}(n)\}$ の右直交部分圏に入るが，ここで Beilinson の例外生成列を用いれば主張が従う．

(2)⇒ (3) π が有限射であることと，射影空間 $\mathbb{P}^n$ の構造層が例外対象であることを用いれば，Eisenbud-Schreyer による特徴づけ定理 2.4 の条件 4. を満たすことが分かる．

(3)⇒ (1) 複体のコホモロジーを各コホモロジー層のコホモロジーを用いて分割するスペクトル系列

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{H}^q(E)(-j)) \Longrightarrow H^{p+q}(E(-j))$$

を用いればよい． □

上の定理から，導来圏の一般化を考えても真に新しいものは生まれないということが推測されるが，Ulrich 対象であって，Ulrich 束でないものは存在する．それは Ulrich 束の間の高次の拡大に対応する複体である米田拡大と呼ばれる技術を用いて構成されるが，本稿ではこれ以上説明をしないことにする．つまり，Ulrich 対象へ一般化して考えることは，Ulrich 束に加え，Ulrich 束の間の高次の拡大までの情報を統一的に扱う対象のクラスを考えることにするということである．

3 Eisenbud-Schreyer 予想への応用

命題 2.11 から，$(X,\mathscr{O}(1))$ 上に Ulrich 対象 E が存在すれば，そこからゼロでないコホモロジー層を取ることで Ulrich 層を構成することができる．逆に，定義より自明に Ulrich 層は Ulrich 対象である．従って，Ulrich 層の存在性と Ulrich 対象の存在性は同値となる．導来圏の対象 $E \in D^b(X)$ が Ulrich であることと E が部分圏 $\langle\{\mathscr{O}(1),\dots,\mathscr{O}(n)\}\rangle^{\perp}$ に入っていることは同値であったから，Ulrich 束の存在性と $\langle\{\mathscr{O}(1),\dots,\mathscr{O}(n)\}\rangle^{\perp} \neq 0$ は同値である．

この直交成分がゼロかそうでないかという条件は導来圏において重要な意味がある．その意味を明らかにするために，導来圏の生成元の概念を導入する必要がある．

3.1 導来圏の生成元

定義 3.1. $\mathcal{D}$ を三角圏，Ω を三角圏 $\mathcal{D}$ の対象からなる部分集合（もしくは部分圏）とする．このとき，Ω が

1. **古典的生成元**であるとは，$\langle\Omega\rangle = \mathcal{D}$ が成り立つときをいい，
2. **弱生成元** (もしくは単に**生成元**) であるとは，$\langle\Omega\rangle^{\perp} = 0$ が成り立つときをいう．

ここで，

$$\begin{aligned}\langle\Omega\rangle^{\perp} &= \{E \in \mathcal{D} \mid \mathbf{R}\mathrm{Hom}(X,E) = 0, {}^{\forall}X \in \langle\Omega\rangle\} \\ &= \{E \in \mathcal{D} \mid \mathbf{R}\mathrm{Hom}(X,E) = 0, {}^{\forall}X \in \Omega\}.\end{aligned}$$

であったことを思い出すと，古典的生成元は弱生成元である．しかし，一般に逆は成り立たない．

例 3.2. X を代数多様体とする．このとき $\Omega = \{k(x)\}_{x\in X}$ とすると，Ω は連接層の導来圏 $D^b(X)$ の弱生成元であるが古典的生成元ではない．

次に古典的生成元の性質をいくつか紹介する．例 3.2 は弱生成元の例でもあったが，古典的生成元の例としては次のようなものがある．

定理 3.3 ([Orl09, Theorem 4.])**.** X を n 次元の非特異射影代数多様体，$\mathscr{O}(1)$ を X 上の非常に豊富な直線束とする．このとき，$G = \mathscr{O}_X \oplus \mathscr{O}_X(1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_X(n)$ は $D^b(X)$ の古典的生成元である．

命題 3.4 ([Sta18, Tag 09SR], [Nee92])**.** $\mathcal{D}$ を任意の直和を含む三角圏とし，G を $\mathcal{D}$ のコンパクト対象であるとする．このとき，次は同値である：

1. G は $\mathcal{D}^{\mathrm{cpt}}$ の古典的生成元かつ $\mathcal{D}$ がコンパクト生成，
2. G が $\mathcal{D}$ の生成元．

我々の考える代数幾何学的設定においては，「任意の直和を含む三角圏」として準連接層のなすアーベル圏の非有界導来圏 $D(\mathbf{Qcoh}(X))$ をとることを念頭に置いている．このとき，代数多様体 X が非特異であれば，$\mathcal{D}^{\mathrm{cpt}} = D(\mathbf{Qcoh}(X))^{\mathrm{cpt}} = \mathrm{Perf}(X) = D^b(X)$ が成り立つ．

3.2 定理 D の証明

本節では，定理 D の証明の概略について述べる．その前に定理の主張を再掲する．

定理 3.5. $\Phi_{|\mathscr{O}_C(1)|} : C \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ を滑らかな代数曲線 C の非常に豊富な直線束 $\mathscr{O}_C(1)$ による埋め込みとする．このとき，$(C, \mathscr{O}_C(1))$ 上に Ulrich 対象が存在する．

証明のアイデアは以下のとおりである：

Ulrich 束は代数多様体とその埋め込みのペアに対して定義される概念であった．定理 3.3 から，射影代数多様体に対して埋め込みを固定することは導来圏の古典的生成元をひとつ固定することであると考えることができる．従って，Ulrich 束の存在性問題に導来圏の生成性に関する議論を使うには弱生成元のまま考えるより，古典的生成元となにかしらの関係付けを行う方がよいように見える．

本証明ではまず，理想的な条件の下，弱生成元と古典的生成元の概念が同値であることを示す．そうすれば Ulrich 束の存在証明は，三角圏 $\langle\{\mathscr{O}(1), \ldots, \mathscr{O}(n)\}\rangle$ が三角圏 $D^b(X)$ 全体に一致しないことを証明することに帰着できる．そのためには，いずれかの三角圏としての不変量を比較すればよい．これが純導来圏的な議論によって Ulrich 束の存在性を証明するためのアイデアである．

命題 3.6. C を代数曲線とし，$G \in D^b(C)$ とする．G が $D^b(C)$ を弱生成するとき，G は $D^b(C)$ を古典的に生成する．

Outline of the Proof. 証明に用いる材料は主に 3 つである：

1. 命題 3.4．これを用いて古典的生成性の証明を “大きい” 三角圏の生成性を証明することに帰着させる．
2. ホモトピー余極限．帰納極限の概念の導来圏における類似である． 正確な定義は [Sta18, Tag 0A5K] を参照のこと．これを用いて “大きい” 三角圏の対象を “小さい” 三角圏の対象で近似する．

3. 対象の分裂．アーベル圏 $\mathcal{A}$ の大域次元が 1 以下のとき，任意の $D^b(\mathcal{A})$ の対象 E は

$$E \cong \bigoplus_i \mathcal{H}^i(E)[-i]$$

とかける． □

Proof of 定理 *3.5.* 命題 3.6 から，$\mathscr{O}(1) \in D^b(C)$ の生成する三角圏が導来圏全体でないことを証明すればよい．

そのためには，$\mathscr{O}$ の生成する導来圏が全体でないことをいえばよい．ここで，$\mathscr{O}$ は安定層であるから，$\operatorname{rk} K_0(\langle \mathscr{O} \rangle) = 1$ である．一方，$2 = \operatorname{rk} K_0(D^b(C))$ であるから，

$$2 = \operatorname{rk} K_0(D^b(C)) > \operatorname{rk} K_0(\langle \mathscr{O}_C \rangle) = 1$$

となり示された． □

参考文献

[Bea00] Arnaud Beauville, *Determinantal hypersurfaces*, Michigan Math. J. **48** (2000), 39–64, Dedicated to William Fulton on the occasion of his 60th birthday. MR 1786479

[Bei78] A. A. Beilinson, *Coherent sheaves on* $\mathbf{P}^n$ *and problems in linear algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **12** (1978), no. 3, 68–69. MR 509388

[CMR15] L. Costa and R. M. Miró-Roig, $GL(V)$*-invariant Ulrich bundles on Grassmannians*, Math. Ann. **361** (2015), no. 1-2, 443–457. MR 3302625

[CMRPL21] Laura Costa, Rosa María Miró-Roig, and Joan Pons-Llopis, *Ulrich bundles—from commutative algebra to algebraic geometry*, De Gruyter Studies in Mathematics, vol. 77, De Gruyter, Berlin, [2021] ©2021. MR 4409698

[ES03] David Eisenbud and Frank-Olaf Schreyer, *Resultants and Chow forms via exterior syzygies*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 3, 537–579, With an appendix by Jerzy Weyman. MR 1969204

[ES09] ———, *Betti numbers of graded modules and cohomology of vector bundles*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), no. 3, 859–888. MR 2505303

[FHI23] Takeru Fukuoka, Wahei Hara, and Daizo Ishikawa, *Rank two weak Fano bundles on del Pezzo threefolds of degree five*, Internat. J. Math. **34** (2023), no. 13, Paper No. 2350084, 36. MR 4663826

[Har77] Robin Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. No. 52, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. MR 463157

[HUB91] J. Herzog, B. Ulrich, and J. Backelin, *Linear maximal Cohen-Macaulay modules over strict complete intersections*, J. Pure Appl. Algebra **71** (1991), no. 2-3, 187–202. MR 1117634

[Huy06] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2006. MR 2244106

[Nee92] Amnon Neeman, *The connection between the K-theory localization theorem of Thomason, Trobaugh and Yao and the smashing subcategories of Bousfield and Ravenel*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **25** (1992), no. 5, 547–566. MR 1191736

[Orl09] Dmitri Orlov, *Remarks on generators and dimensions of triangulated categories*, Mosc. Math. J. **9** (2009), no. 1, 153–159, back matter. MR 2567400

[Sta18] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, https://stacks.math.columbia.edu, 2018.

[Yos25] Tomoki Yoshida, *A simple derived categorical generalization of Ulrich bundles*, Preprint, 2025.

[上戸 20] 上原北斗 and 戸田幸伸, **連接層の導来圏と代数幾何学**, シュプリンガー現代数学シリーズ / 伊藤雄二編, no. [21], 丸善出版, 2020.

正標数代数曲線の基本群の特殊化射の非同型性

京都大学大学院　理学研究科　数学・数理解析専攻
伏見宗紘 (Tokihiro FUSHIMI) *

概要

講演者はある正標数完備離散付値体上のある種の多様体上の相対曲線に対して，多様体の「単位開円盤」上で幾何的 étale (tame) 基本群が constant でないことを示した．また，同様の手法を用いて有限体上の (smooth で) 双曲的な曲線の粗モジュライ空間上の任意の閉点に対して，その閉点を含む飽和した鎖であって，各点に対応する幾何的 étale (tame) 基本群の間の specialization homomorphism が全て非同型になるようなものの存在を示した．第一の結果については，Saïdi, Mohamed 氏と玉川安騎男氏の研究による技術をその「non-smooth」版に発展させることによってその応用として帰結し，第二の結果では従来の技術をその「絶対版」とも呼べる形に発展させ，それを応用することによって証明した．本講演では，正標数代数閉体上の遠アーベル幾何学についての概況を説明し，上記に記した講演者の結果を紹介する．

1　導入

k を代数閉体とし，X を k 上の proper，smooth な曲線とする．いま，X の étale 基本群 $\pi_1(X)$ が抽象的な副有限群としてどれほど元の曲線 (の同型類) の情報を持っているかという問題に関心がある．この問題には色々な “強さ” の定式化が知られているがその 1 つとして次の問題がある．

問題 1.1. ((absolute) weak Isom 版)
X，Y を k 上の proper，smooth な曲線とする．このとき

$$X \simeq Y \text{ (スキームとして)} \Longleftrightarrow \pi_1(X) \simeq \pi_1(Y) \text{ (副有限群として)} \tag{1}$$

が成立するか？

(π_1 の関手性から ($\Longrightarrow$) については常に成立することに注意する.)

k の標数が 0 の場合は，Riemann の存在定理よりその étale 基本群 $\pi_1(X)$ は種数 g の Riemann 面の位相的基本群の副有限完備化 Γ_g と同型であることが知られている．この場合は基本群は曲線の種数の情報しか持っておらず，この問題の成立とは程遠い状況にある．

k が標数 $p > 0$ の場合は，一般に副有限群の全射 $\Gamma_g \twoheadrightarrow \pi_1(X)$ があり，これは maximal pro-prime-to-p quotiont の間の同型 $\Gamma_g^{p'} \xrightarrow{\sim} \pi_1(X)^{p'}$ を誘導する．以下では少し用語の準備をし，標数 $p > 0$ では標数が 0 の場合と異なり étale 基本群 (や tame 基本群) がより多くの情報を持っていることを確認する．

ここでは (g, n) 型の曲線とは，k 上の proper，smooth な曲線 X でその種数が g のものと，X の n 点からなる真部分閉集合 D の組 (X, D) のこと (曲線 $X - D$ そのものを指すこともある) で，さらに

* E-mail:fushimi@kurims.kyoto-u.ac.jp

$2-2g-n<0$ を満たすときに双曲的という．ここからはより広く標数 $p>0$ の代数閉体 k 上の (g,n) 型の双曲的な曲線 (X,D) に対して，その étale 基本群 $\pi_1(X-D)$ が元の曲線 (X,D) についてどれほどの情報を持っているかということについて考えるが，proper でない曲線の étale 基本群は扱いが難しく，その代わりに tame 基本群 $\pi_1^t(X,D)$ を用いて議論を進めることがある．しかし，2 つの (g,n) 型曲線 (X,D), (Y,E) に対して [T1]Corollary 1.5 より

$$\pi_1(X-D)\simeq\pi_1(Y-E)\Longrightarrow\pi_1^t(X,D)\simeq\pi_1^t(Y,E) \tag{2}$$

という関係がある．よって tame 基本群がどれほど元の曲線の情報を持っているかという問題が自然と生じる．その 1 つの結果に次の定理がある．

定理 1.2. (c.f. [T2] Theorem 4.1)
$i=1,2$ とする．k_i を標数が $p_i>0$ の代数閉体とし，(X_i,D_i) を (g_i,n_i) 型の曲線とする．このとき，$g_i=0$ かつ $n_i\leq 1$ $(i=1,2)$ の場合を除けば

$$\pi_1^t(X_1,D_1)\simeq\pi_1^t(X_2,D_2)\Longrightarrow(p_1,g_1,n_1)=(p_2,g_2,n_2) \tag{3}$$

が成立する．(簡明に述べるため元の主張よりは精度を落としたことに注意する.)

さらに $k_0\overset{\text{def}}{=}\overline{\mathbb{F}_p}$ 上の曲線については次の結果がある．

定理 1.3. (c.f. [T3] Theorem 8.6)
副有限群 Π に対して tame 基本群 $\pi_1^t(X,D)$ が副有限群として Π と同型になる (g,n) 型の双曲的な曲線 (X,D) の同型類は高々有限個である．

これは k_0 上で問題 1.1 が有限個の差を除けば成り立つということを意味する重要な結果である．

以下では (p,g,n) の組の情報が与えられている双曲的な曲線に絞って話をする．これを曲線のモジュライ空間の言葉を用いて言い換えたい．$\mathbb{F}_p$ 上の (g,n) 型の双曲的な曲線の coarse モジュライ空間を $M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ とすると，$M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ の各閉点はある k_0 上定義される (g,n) 型の曲線 (の同型類) に対応しており，またこの逆も成り立つ．この対応を $s\leftrightarrow(X_{\overline{s}},D_{\overline{s}})$ と表すと，定理 1.3 は $\Pi\simeq\pi_1^t(X_{\overline{s}},D_{\overline{s}})$ が成り立つような $M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ の閉点 s は高々有限個である，と言い換えられる．

また, 定理 1.3 を示すのには $M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ 上での Grothendieck による specialization 理論を用いた次の定理 1.4 が本質的に用いられた．ここで，specialization homomorphism とは $\eta\rightsquigarrow s\in M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ $(\overset{\text{def}}{=}s\in\overline{\{\eta\}})$ のときに基本群の間に内部自己同型の差を除いて標準的に誘導される全射 $\mathrm{Sp}_{\eta,s}^t:\pi_1^t(X_{\overline{\eta}},D_{\overline{\eta}})\twoheadrightarrow\pi_1^t(X_{\overline{s}},D_{\overline{s}})$ のことである．

定理 1.4. $s\in M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ を閉点，$\eta\in M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ を s とは異なる点で $\eta\rightsquigarrow s\in M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ を満たしているものとする．このとき $\mathrm{Sp}_{\eta,s}^t:\pi_1^t(X_{\overline{\eta}},D_{\overline{\eta}})\twoheadrightarrow\pi_1^t(X_{\overline{s}},D_{\overline{s}})$ は同型でない．

k_0 あるいは $\mathbb{F}_p$ 上に限った結果を紹介したが，一般の標数 $p>0$ の代数閉体 k 上で定理 1.3 のような，問題 1.1 を弱めたバージョンについて何か言えないだろうか？という問いが生じる．これはモジュライ空間の言葉を用いて直感的に言うと，k_0 上の曲線が $M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ の閉点のみを見ているのに対して，k が “大きければ”$M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ の他の点を見ていることになる．その問題の 1 つの定式化の方向性として次の系統の問題が考えられる．

問題 1.5. どのような部分集合 $S\subset M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ に対して，π_1^t は S 上 constant か？ (あるいは non-constant か？)

どのような部分集合 $S' \subset M_{g,[n],k}$ に対して，π_1^t は S' 上 constant か？ (あるいは non-constant か？)

ここで「π_1^t が S 上 constant である」とは $\{\pi_1^t(X_{\overline{s}}, D_{\overline{s}})\}_{s\in S}$ の副有限群としての同型類が 1 つであることを指す．S' についても同様に定められる．定理 1.4 はそこでの記法を用いたとき，π_1^t が $S = \{\eta, s\} \subset M_{g,[n],\mathbb{F}_p}$ 上 non-constant である，と言い換えられる．このような問いを考えるにあたって注意するべきことの 1 つに，k 上定義される曲線がたとえ k スキームとして同型でなくても $(\mathbb{F}_p)$ スキームとして同型なら基本群は同型である，ということがある．特に一般の標数 $p > 0$ の代数閉体 k に対して $\eta' \rightsquigarrow s' \in M_{g,[n],k}$ の関係にある異なる 2 点で，s' が閉点であったとしても π_1^t は $S' = \{\eta', s'\}$ 上 constant になる例がある．

この系統の問題の 1 つの定式化であり，示されたことに次の定理がある．

定理 1.6. ([ST] Theorem 3.6)
任意の正の次元を持つ部分多様体 $S \subset M_{g,k}$ に対して π_1 は S 上 constant にならない．

また双曲的 (g, n) 型，tame 版に対する類似の結果も成立する ([ST]Remark 3.11，Theorem 3.12)．[ST] では k 上有限型被約連結スキーム S 上の相対曲線 $f : X \to S$ が non-isotrival である ($\Longleftrightarrow$ 粗分類写像 $h : S \to M_{g,k}$の像が 1 点でない) という概念を用いてそのような S に対して定理 1.6 と同様の主張 (c.f. [ST] Theorem 3.9) を示し，それの応用として定理 1.6 を証明していた．((g, n) 型の双曲的な相対曲線の場合も同様である.)

ここまではある種の集合上では，π_1 あるいは π_1^t が “constant でない” ということを用いて正標数代数閉体上での基本群の構造の “複雑さ” を測ったが，別のアプローチとして定理 1.4 を一般化した次の問題の定式化も考えられる．

問題 1.7. (g, n) は $2 - 2g - n < 0$ を満たす非負整数とする．このとき，

$$\eta \rightsquigarrow s \in M_{g,[n],\mathbb{F}_p}\text{が相異なる点} \implies \mathrm{Sp}^t_{\eta,s}\text{は同型でない} \tag{4}$$

は成立するか？

2 主定理

問題 1.5 に関連して定理 1.6 の主張に現れる S をより “小さくして”π_1(あるいは π_1^t) の non-constant 性が言えないか？という疑問が生じる．講演者はこれの限定的な状況ではあるが “開円盤版” とも言える定理 2.1 を示した．ここでは正標数代数閉体上の (g, n) 型の曲線 (X, D) が有限体上で定義される曲線の base change で書けるとき constant pair と言う．

定理 2.1. R を正標数完備離散付値環で K をその商体，k をその剰余体で代数閉体になっているとする．M を R 上の smooth スキームとし，$(\mathcal{X}, \mathcal{D}) \to M$ は (g, n) 型の双曲的な相対曲線とする．さらに $(\mathcal{X}_k, \mathcal{D}_k) \to M_k$ の粗分類写像 $h : M_k \to M_{g,[n],k}$ が quasi-finite であるとする．また，“constant pair” に対応する点 $s \in M_k$ を 1 つ固定する．このとき M の s を含む局所閉部分スキーム $\mathcal{V}$ であって，R 上は smooth で s における相対次元が 1 以上のものに対して $V = \mathcal{V} \times_R K$ と定めると，π_1^t は $\underline{D^o_{M,s}(V)}_{gen,V}$ 上 constant でない．

ただしここで $D^o_{M,s}(V) \subset V^{cl}$ は V の M_K の中で s に関する単位開円盤，$\underline{D^o_{M,s}(V)}_{gen,V} = \bigcup_{v\in D^o_{M,s}(V)} \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{V,v} \subset V$ のことである．

さらに講演者は問題 1.7 に対する 1 つの “証拠” として定理 2.2 を証明した.

定理 2.2. (g,n) は $2-2g-n<0$ を満たすとする．$M_{g,[n],k}$ 上 $v \rightsquigarrow s$ の関係にある 2 点で，s が constant pair に対応する点だとする.

このとき，以下を満たす $v_i \in M_{g,[n],k}$ $(0 \leq i \leq r)$ が存在する.

$$v = v_0 \rightsquigarrow v_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow v_r = s \tag{5}$$

は飽和した鎖 (特に $r = \dim\{v\}$) であり，$\mathrm{Sp}^t_{v_i,v_{i+1}}$ $(0 \leq i \leq r-1)$ は全て同型でない.

参考文献

[ST] Saïdi Mohamed, Akio Tamagawa, *Variation of fundamental groups of curves in positive characteristic,* Journal of Algebraic Geometry **26** (2017), pp. 1–16.

[T1] Akio Tamagawa, *Fundamental groups and geometry of curves in positive characteristic,* Arithmetic fundamental groups and noncommutative algebra (Berkeley, CA, 1999), Proc. Sympos. Pure Math., 70, American Mathematical Society, Providence, RI, pp.297–333.

[T2] Akio Tamagawa, *On the tame fundamental groups of curves over algebraically closed fields of characteristic* > 0, Cambridge University Press, Cambridge Mathematical Sciences Research Institute Publications **41** (2003), pp.47–105.

[T3] Akio Tamagawa, *Finiteness of isomorphism classes of curves in positive characteristic with prescribed fundamental groups,* Journal of Algebraic Geometry **13** (2004), pp. 675–724.

Dormant opers on elliptic curves

大阪大学大学院　情報科学研究科　情報基礎数学専攻
軽部尚香 (Naoka KARUBE) *

概要

oper とは然るべき代数曲線上の平坦接続つき主束であり，Langlands 対応における基本的対象として，$\mathbb{C}$ 上の設定の元で Beilinson-Drinfeld により導入された．本論文では正標数の oper の中で，p 曲率という不変量で特徴づけられるものを扱い，oper の底空間である代数曲線が楕円曲線の場合にそのモジュライ空間がどのような大域的構造を持つのかをより詳細かつ明示的に調べた．

1　背景

簡約代数群 G に対して定まる G-oper とは代数曲線上の然るべき接続付き主 G 束であり，G-oper およびそれらを分類するモジュライ空間は，その変種である (generic) Miura G-oper とともに幾何的 Langlands 対応や Teichmüller 理論などをはじめとする様々な取り組みにおいて基本的な対象となっている ([BeDr1],[BeDr2]).

たとえば X を代数閉体 k 上の代数曲線とするとき，X 上の GL_n-oper は次のようなデータによって与えられる：

$$\mathscr{F} := (\mathcal{F}, \nabla, \{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n)$$

ただし，$\mathcal{F}$ は X 上定義された階数 n のベクトル束，∇ は $\mathcal{F}$ 上の接続（つまり，Leibniz 則をみたす k 線形射 $\mathcal{F} \to \Omega_X \otimes \mathcal{F}$)，そして $\{\mathcal{F}^j\}_j$ は各部分商 $\mathcal{F}^j/\mathcal{F}^{j+1}$ が直線束となる降下フィルトレーションである．そしてこれらは次の 2 条件をみたす：

- $\nabla(\mathcal{F}^j) \subseteq \Omega_X \otimes \mathcal{F}^{j-1}$（$1 \leq i \leq n-1$）；
- ∇ から誘導される射 $\mathcal{F}^j/\mathcal{F}^{j+1} \to \Omega_X \otimes (\mathcal{F}^{j-1}/\mathcal{F}^j)$ は同型（$1 \leq i \leq n-1$).

このような対象は適切なゲージ変換により，可逆な主表象をもつ X 上の n 階単独型線形常微分作用素と同一視される．また，$k = \mathbb{C}$ のとき，X 上の PGL_2-oper は X に付随する Riemann 面上の射影構造と（Riemann-Hilbert 対応を介して）同値であり，generic Miura PGL_2-oper はアフィン構造と同値な概念である．

基礎体 k が正標数の場合における oper の体系的研究は p 進 Teichmüller 理論（p は素数）に端を発する [Moc]．p 進体上の双曲的代数曲線の一意化に関する当該理論では，p **曲率**と呼ばれる不変量

* E-mail:takadanaoka09@gmail.com

によって特徴付けられる PGL_2-oper のモジュライ空間を分析することが議論の根幹となっている．それに引き続き [Wak4] では，一般の G に対する標数 p の G-oper に関するモジュライ理論を展開している．ここで重要となる対象は，p 曲率が零となる G-oper，つまり dormant G-oper と呼ばれるものである．

Dormant G-oper を分類するモジュライ空間の幾何構造において注目すべき性質の一つは生成的エタール性である．この性質を用いてモジュライ空間の変形や退化を分析することができ，その結果として，たとえば Gromov-Witten 理論や affine Lie 環の共形場理論，そして多面体やグラフに関連する組み合わせ論などと正標数の oper の理論を関連づけることができる．

2 Nilpotent G-opers

主結果の証明の鍵となる nilpotent G-oper について説明する．

標数 p の k 上で定義された楕円曲線を分類するモジュライ空間を $\mathcal{M}_{\mathrm{ell}}$，その Deligne-Mumford コンパクト化を $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ で表す．G-oper, Miura G-oper の定義に関しては [Wak4, Definition 2.1], [Wak2, Definition 3.2.1] を参照しここでは省略する．また p 曲率が 0 となる G-oper を dormant G-oper と言う．

G は随伴型半単純代数群であると仮定し，$\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ が分類する代数曲線上の dormant G-oper のモジュライ空間を

$$\mathcal{O}p_G^{\mathrm{Zzz}\cdots} := \left\{(X, \mathscr{F}) \,\middle|\, X \in \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}},\ \mathscr{F} \text{ は } X \text{ 上の dormant } G\text{-oper}\right\}$$

とする．同様に dormant generic Miura G-oper に対するモジュライ空間を $\mathcal{MO}p_G^{\mathrm{Zzz}\cdots}$ とおくと，$(X, \mathscr{F}) \mapsto X$ によって定まる自然な射影

$$\Pi_G : \mathcal{O}p_G^{\mathrm{Zzz}\cdots} \to \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}, \qquad \widehat{\Pi}_G : \mathcal{MO}p_G^{\mathrm{Zzz}\cdots} \to \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$$

を得る．また G の Borel 部分群 B, 極大トーラス T をとる．G, B, T のリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}, \mathfrak{b}, \mathfrak{t}$ と表す．これらは適切に $\mathbb{F}_p$ 上定義されているとする．さらに W を (G, T) の Weyl 群とし，$\mathfrak{c}$ で GIT 商 $\mathfrak{t}/\!\!/W$ を表すと，Chevalley の定理より $\mathfrak{c}$ は GIT 商 $\mathfrak{g}/\!\!/G$ と同型である．$\mathcal{N} := T^\vee\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}} \setminus \mathrm{Im}(0_{T^\vee\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}})$ と定める．さらに，$\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ 上の層 $\mathcal{B}$ (resp., $\mathcal{B}^\nabla$) を，$\mathscr{X} \in \mathrm{ob}(\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}})$ (ここで $\mathscr{X} := (X/S, \sigma)$ とする) を，射 $\varsigma : X \to (F_X^*(\Omega))^\times \times^{\mathbb{G}_m} \mathfrak{c}$ (resp., $X \to \Omega^\times \times^{\mathbb{G}_m} \mathfrak{c}$) の集合に送ることで定義する．ここで，任意の直線束 $\mathcal{L}$ に対して, $\mathcal{L}$ に対応する $\mathbb{G}_m$ 束を $\mathcal{L}^\times$ で表す．$\mathcal{B}$ や $\mathcal{B}^\nabla$ はどちらも $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ 上有限型のスキームで表現できる．また フロベニウス射 $F_{X/S}$ の引き戻しによって $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ 上の射 $F^{\nabla\Rightarrow\emptyset} : \mathcal{B}^\nabla \to \mathcal{B}$ が引き起こされ，これは閉埋め込みである．

$\mathscr{X} := (X/S, \sigma)$, $\mathscr{E}^\spadesuit := (\mathcal{E}_B, \nabla)$ とし，$(\mathscr{X}, \mathscr{E}^\spadesuit)$ を $\mathcal{O}p_G$ の対象とする．この時 $(\mathcal{E}_G, \psi(\nabla))$ は商スタック $[((F_X^*(\Omega))^\times \times^{\mathbb{G}_m} \mathfrak{g})/G]$ の大域切断を定める．$\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{c}$ から誘導される射

$$[((F_X^*(\Omega))^\times \times^{\mathbb{G}_m} \mathfrak{g})/G] \to (F_X^*(\Omega))^\times \times^{\mathbb{G}_m} \mathfrak{c} \tag{1}$$

と上の切断を合成すると，$(F_X^*(\Omega))^\times \times^{\mathbb{G}_m} \mathfrak{c}$ の X-有理点 $\overline{\psi(\nabla)}$ を得る．これは同時に $\mathcal{B}$ の S-有理点である．この対応 $\mathscr{E}^\spadesuit \mapsto \overline{\psi(\nabla)}$ により $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ 上の射

$$\mathrm{HM} : \mathcal{O}p_G \to \mathcal{B}. \tag{2}$$

を得る．さらに HM は $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ 上の射

$$\mathrm{HM}^{\nabla} : \mathcal{O}p_G \to \mathcal{B}^{\nabla} \tag{3}$$

に制限でき，これを **Hitchin-Mochizuki 射**と呼ぶ.

次に, $(\mathscr{X}, \delta, \varsigma)$ を $\mathcal{N} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}} \mathcal{B}^{\nabla}$ の対象とする．invarient differential δ による Ω の自明化 $\Omega = \mathcal{O}_X$ により $\Omega^{\times} \times^{\mathbb{G}_m} \mathfrak{c} = X \times_k \mathfrak{c}$ と同一視できる．これにより， ς は $\mathfrak{c}(X)\,(= \mathfrak{c}(S))$ の元 ς' と対応する．$(\mathscr{X}, \delta, \varsigma) \mapsto (\mathscr{X}, \delta, \varsigma')$ と対応させることで $\mathcal{N}$ 上の同型

$$\mathcal{N} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}} \mathcal{B}^{\nabla} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N} \times_k \mathfrak{c} \tag{4}$$

を得る. 射影 $\mathcal{N} \to \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ で基底変換することで, $\mathcal{N}$ 上の $\mathcal{N} \times_k \mathfrak{c}$ の自己準同型

$$\xi : \mathcal{N} \times_k \mathfrak{c} \xrightarrow{\mathcal{N}} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}} \mathcal{O}p_G \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathcal{N}} \times \mathrm{HM}^{\nabla}} \mathcal{N} \times_k \mathcal{B}^{\nabla} \xrightarrow{\mathcal{N}} \times_k \mathfrak{c} \tag{5}$$

が得られる．この射は明らかに $(\mathscr{X}, \delta, \rho)$ (for $w \in \mathfrak{c}(S)$) を $(\mathscr{X}, \delta, \gamma_{H(\mathscr{X},\delta)}(\rho))$ に送っている．ここで $H^0(S, \mathcal{O}_S)$ の任意の a と $\mathfrak{c}(S)$ の任意の ρ に対し,

$$\gamma_a(\rho) := \chi((q_{-1} + \kappa^{-1}(\rho))^{[p]} - a \cdot (q_{-1} + \kappa^{-1}(\rho))). \tag{6}$$

と定めている（q_{-1} は $\mathfrak{g}_{-1}$　の元）

Proposition 2.1. 射 ξ は有限で忠実平坦であり，次数は $p^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}$ である．さらに，$\mathcal{N}^{\mathrm{ss}} := \mathcal{N} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}} \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{ss}}$ と表すと, $\mathcal{N}^{\mathrm{ss}}\,(\subseteq \mathcal{N})$ での制限射 $\xi^{\mathrm{ss}} : \mathcal{N}^{\mathrm{ss}} \times_k \mathfrak{c} \to \mathcal{N}^{\mathrm{ss}} \times_k \mathfrak{c}$ *of* ξ は $\mathrm{id}_{\mathcal{N}^{\mathrm{ss}}} \times F_{\mathfrak{c}/k}$ と一致する.

さらに， fpqc 射 $\mathcal{N} \to \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ で降下することにより以下の主張が導かれる.

Corollary 2.2. *Hitchin-Mochizuki* 射　HM^{∇} は有限で忠実平坦であり，次数は $p^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}$ である．さらに $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{ss}}$ の任意の k-有理点 a 上の HM^{∇} のファイバーは，同一視 $\mathcal{O}p_G|_a = \mathcal{B}^{\nabla}|_a = \mathfrak{c}$ の元で，$F_{\mathfrak{c}/k}$ と一致する.

ゼロ切断 $X \to \Omega^{\times} \times^{\mathbb{G}_m} \mathfrak{c}$ が定める大域切断 $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}} \to \mathcal{B}^{\nabla}$ を $0_{\mathcal{B}^{\nabla}}$ と表す．$0_{\mathcal{B}^{\nabla}}$ HM^{∇} による $0_{\mathcal{B}^{\nabla}}$ の逆像は $\mathcal{O}p_G$ の閉部分スタック

$$\mathcal{O}p_G^{p\text{-nilp}} := (\mathrm{HM}^{\nabla})^{-1}(0_{\mathcal{B}^{\nabla}}) \tag{7}$$

を定める．これは $\overline{\psi(\nabla)} = 0$ となる G-opers $\mathscr{E}^{\spadesuit} := (\mathcal{E}_B, \nabla)$ を分類するスタックであり，このような G-opers を ***p*-nilpotent** という.

Theorem 2.3. スタック $\mathcal{O}p_G^{p\text{-nilp}}$ は $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ 上有限で忠実平坦であり，次数は $p^{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}$ である．さらに *Moreover, the fiber of* 射影　$\mathcal{O}p_G^{p\text{-nilp}} \to \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ の $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{ss}}$ の任意の k-有理点 a 上のファイバーは $\mathrm{Spec}(k[\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}]/(\epsilon_1^p, \cdots, \epsilon_{\mathrm{rk}(\mathfrak{g})}^p))$　と同型である.

3　主定理

これらの対象に関する本講演の中心的な成果は以下のとおりである：

Theorem 3.1. *(i)* $\mathcal{O}p_G^{\mathrm{Zzz}\cdots}$ および $\mathcal{MO}p_G^{\mathrm{Zzz}\cdots}$ は連結かつ k 上固有な *Deligne-Mumdord* スタックとして表現され，Π_G, $\widehat{\Pi}_G$ はともに有限な全射である．

(ii) 通常楕円曲線を分類する $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}$ の開部分空間を $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{ord}}$ とするとき，Π_G, $\widehat{\Pi}_G$ はともに $\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{ord}}$ 上エタールであり，生成的次数は $\sharp(\mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}(\mathbb{F}_p)/W)$，$\sharp(W)$ にそれぞれ一致する（ただし，$\mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}$ は G の固定された極大トーラス T の *Lie* 環 $\mathfrak{t}$ に含まれる正則元全体の空間，そして W は (G,T) の *Weyl* 群とする）．そして自然な射影

$$\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{ord}} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}} \mathcal{MO}p_G^{\mathrm{Zzz}\cdots} \to \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}^{\mathrm{ord}} \times_{\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{ell}}} \mathcal{O}p_G^{\mathrm{Zzz}\cdots}$$

はエタール *Galois* 被覆であり，その *Galois* 群は W と同型である．

なお，[Wak4] では双曲的代数曲線上の dormant PGL_n-oper の個数を数える明示公式を証明しており，この公式を拡張することは「dormant oper の数え上げ幾何学」において中心的課題の一つといえる．上で述べた定理は，楕円曲線の場合に，PGL_n だけでなく一般の G に対してその課題に対する明示的な解答を与えた結果となっている．

参考文献

[BeDr1] A. A. Beilinson, V. Drinfeld, Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves, available at: `https://inspirehep.net/literature/`

[BeDr2] A. Beilinsion, V. Drinfeld, Opers, *arXiv: math. AG/0501398v1*, (2005).

[Moc] S. Mochizuki, *Foundations of p-adic Teichmüller theory*, American Mathematical Society, (1999).

[Wak4] Y. Wakabayashi, *A theory of dormant opers on pointed stable curves*, Astérisque **432**, Soc. Math. de France, (2022), ix+296 pp.

[Wak5] Y. Wakabayashi, Gaudin model modulo p, Tango structures, and dormant Miura opers, *J. Geom. Phys.* **200** (2024), Paper No. 105175, 18 pp.

[Wak2] Y. Wakabayashi, Moduli of Tango structures and dormant Miura opers, *Moscow Math. J.* **20** (2020), pp. 575-636.

Equivalence of categories of E-theory for C*-algebras over topological spaces by reflection functors

慶應義塾大学大学院 理工学研究科 基礎理工学専攻
橋本 七海 (Nanami HASHIMOTO) *

Abstract

本稿では, 2 つの有限 T_0-空間 X, X' に対応するハッセ図が無向グラフとして同じ木を表すとき, 対応する E-理論の圏 $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(X')$ が同値であることを示す.

0 導入

作用素環の一種である **C*-環**はさまざまな数学的・物理的対象から自然に現れるものである. 異なる対象から異なる手段を用いて現れた 2 つの C*-環がどのような場合に同型になるのかを問う分類理論は, C*-環の研究において普遍的なテーマである. 講演者は, 単純とは限らない C*-環, すなわち非自明なイデアルをもつような C*-環の分類理論を専門に研究している.

Connes, Higson [CH90] によって導入された **E-理論**は C*-環の分類理論において強力な道具である. E-理論とは, 可分 C*-環 A, B に対し, アーベル群 $\mathrm{E}(A, B)$ を関連付けて, その構造を調べるというものである. Dadarlat, Meyer [DM12] は, 通常の E-理論を一般化し, 第二可算な位相空間 X 上の可分 C*-環 (イデアル束に X からの良い作用をもつ可分 C*-環)A, B に対して, アーベル群 $\mathrm{E}(X; A, B)$ を定義することで, イデアルの情報も込めた E-理論を導入した. 第二可算な位相空間 X 上の可分 C*-環を対象とし, A から B への射の集合を $\mathrm{E}(X; A, B)$ とすることで, 圏 $\mathbf{E}(X)$ を定義することができる.

本研究では, ある条件をみたす 2 つの位相空間 X_1, X_2 に対し, 対応する E-理論の圏 $\mathbf{E}(X_1), \mathbf{E}(X_2)$ の間に**鏡映関手**を定義し, それが圏同値を与えることを証明した (定理 2.4). ここで導入した鏡映関手は, 箙の表現論における Bernstein, Gelfand, Ponomarev [BGP73] の鏡映関手のアナロジーになっており, 非常に興味深い. さらに, この帰結として, 2 つの有限 T_0-空間 X, X' に対応するハッセ図が無向グラフとして同じ木[1]を表すとき, 対応する E-理論の圏 $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(X')$ が同値であることを証明した (系 2.7). 本稿では, これらの結果を紹介する.

1 準備

1.1 有限集合に定まる位相

はじめに, 有限集合に定まる位相について簡単に説明しておこう. 有限集合 X に対し, 次のような全単射とその逆写像がある:

$$\{X \text{ 上の } \mathrm{T}_0\text{-位相 }\} \underset{\text{(ii)}}{\overset{\text{(i)}}{\rightleftarrows}} \{X \text{ 上の順序}^{2}\} \underset{\text{(iv)}}{\overset{\text{(iii)}}{\rightleftarrows}} \{X \text{ のハッセ図 }\}.$$

ここで, (i)-(iv) は次のような操作で定まる写像である.

*E-mail: nanami_hashimoto@keio.jp

[1]木とは, 閉路をもたない無向グラフのことである.

[2]本稿では, 反射律, 推移律, 反対称律をみたす二項関係を順序とよぶ.

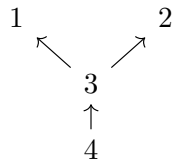
(i) $x, y \in X$ に対し, $\overline{\{x\}} \subset \overline{\{y\}}$ が成り立つとき, $x \leq y$ と定める.

(ii) $U \subset X$ に対し, $\forall x \in U,\ \forall y \in X,\ x \leq y \Rightarrow y \in U$ が成り立つとき, U を開集合とする.

(iii) $x, y \in X$ に対し, $x < y$ かつ $\nexists z \in X$ s.t. $x < z < y$ のとき, y から x に辺を描く.

(iv) $x, y \in X$ に対し, $x = y$ または y から x に道があるとき, $x \leq y$ と定める.

例 1.1. 4 点集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ に対して, 次のハッセ図を考える.



このとき, X には $1 < 3$, $2 < 3$, $3 < 4$, $1 < 4$, $2 < 4$ という順序が定まる. また, X の開集合は $\emptyset, 4, 34, 134, 234, 1234$ である. ここで, $34 := \{3, 4\}$ などの表記に注意してほしい.

1.2 有限 T_0-空間上の C*-環

まずは C*-環の定義を手短に述べる. 詳細は [Bla06] などを参照してほしい.

定義 1.2. 複素数体 $\mathbb{C}$ 上の代数 A であって, 次の条件をみたす共役線形な写像 $A \ni a \mapsto a^* \in A$ と完備ノルムを備えたものを **C*-環** (**C*-algebra**) という:

$$(ab)^* = b^* a^*, \quad a^{**} = a, \quad \|ab\| \leq \|a\|\|b\|, \quad \|a^* a\| = \|a\|^2 \quad (\forall a, b \in A).$$

本稿では, 後で E-理論を考えるために単に C*-環というだけで常に可分性[3]を仮定することにする.

例 1.3. 複素数体 $\mathbb{C}$ は複素共役と絶対値によって C*-環となる.

例 1.4. 閉区間 $[0, 1]$ 上の複素数値連続関数全体の代数 $\mathrm{C}[0, 1]$ は, 各点での複素共役と sup ノルムによって C*-環となる.

例 1.5. 可分ヒルベルト空間上のコンパクト作用素全体の代数 $\mathbb{K}$ は随伴と作用素ノルムによって C*-環となる.

注意 1.6. C*-環 A, B のベクトル空間としての直和 $A \oplus B$ に, 成分ごとの積, $*$-演算を入れ, $\|(a, b)\| := \max\{\|a\|, \|b\|\}$ でノルムを定めると, C*-環になる.

定義 1.7. C*-環 A の閉部分空間 I であって, 任意の $a \in A,\ b \in I$ に対して $ab, ba \in I$ をみたすものを**イデアル** (**ideal**) という.

注意 1.8. 実は, C*-環のイデアルは C*-環である. また, 商空間 A/I も $(a + I)^* := a^* + I$ という $*$-演算と商ノルムで C*-環となる.

例 1.9. $\mathrm{C}_0(0, 1) = \{f \in \mathrm{C}[0, 1] \mid f(0) = f(1) = 0\}$ は $\mathrm{C}_0[0, 1) = \{f \in \mathrm{C}[0, 1] \mid f(1) = 0\}$ のイデアルである.

定義 1.10. C*-環 A, B に対し, 積と $*$-演算を保つ線形写像 $\varphi : A \to B$ を **$*$-準同型** (**$*$-homomorphism**) という[4].

定義 1.11. 対象を C*-環, 射を $*$-準同型として得られる圏を $\mathbf{C}^*$ と表記する.

[3] C*-環が可分であるとは, 位相空間として可分, すなわち可算な稠密部分集合をもつことを意味する.
[4] 実は, $*$-準同型 $\varphi : A \to B$ は, 任意の $a \in A$ に対して, $\|\varphi(a)\| \leq \|a\|$ をみたす.

定義 1.12. $\mathbf{C}^*$ における図式

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} Q \longrightarrow 0$$

が**完全列**であるとは, i が単射, q が全射で, $\operatorname{Im} i = \operatorname{Ker} q$ が成り立つ[5]ときをいう. 以降, i を包含写像とみなすことにする.

次に, 有限 T_0-空間上の C*-環を導入する[6]. X を有限 T_0-空間とし, X の開集合全体の集合を $\mathbb{O}(X)$ と表記する. また, C*-環 A のイデアル全体の集合を $\mathbb{I}(A)$ と表記する.

定義 1.13. X 上の C*-環とは, 次の条件をみたす $\mathbb{O}(X) \ni U \mapsto A(U) \in \mathbb{I}(A)$ を備えた C*-環 A を指す:

(i) $A(\emptyset) = 0$, $A(X) = A$;

(ii) 任意の $U, V \in \mathbb{O}(X)$ に対し, $A(U \cap V) = A(U) \cap A(V)$, $A(U \cup V) = A(U) + A(V)$[7].

注意 1.14. X 上の C*-環 A, B の C*-環としての直和 $A \oplus B$ は, 各 $U \in \mathbb{O}(X)$ に対して $(A \oplus B)(U) := A(U) \oplus B(U)$ と定めることで, X 上の C*-環になる.

定義 1.15. A, B を X 上の C*-環とし, $\varphi : A \to B$ を $*$-準同型とする. 任意の $U \in \mathbb{O}(X)$ に対し, $\varphi(A(U)) \subset B(U)$ となるとき, φ は **X-同変** (X**-equivariant**) であるという.

定義 1.16. 対象を X 上の C*-環, 射を X-同変な $*$-準同型として得られる圏を $\mathbf{C}^*(X)$ と表記する.

注意 1.17. X が 1 点空間のとき, $\mathbf{C}^*(X) = \mathbf{C}^*$ となる.

定義 1.18. $\mathbf{C}^*(X)$ における図式

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} Q \longrightarrow 0$$

が X **上の C*-環の完全列**であるとは, 各 $U \in \mathbb{O}(X)$ に対し,

$$0 \longrightarrow I(U) \xrightarrow{i} A(U) \xrightarrow{q} Q(U) \longrightarrow 0$$

が C*-環の完全列であるときをいう.

1.3 懸垂と写像錐

C*-環 A, B に対し, $A \otimes B$ で maximal tensor product を表すことにする. C*-環の tensor product については, ここでは深入りしないことにする. 詳細は [BO08] を参照せよ.

X を有限 T_0-空間とする.

補題 1.19. C*-環 D と X 上の C*-環 A に対し, $D \otimes A$ は $\mathbb{O}(X) \ni U \mapsto D \otimes A(U) \in \mathbb{I}(D \otimes A)$ によって X 上の C*-環となる. このようにして, 関手 $D \otimes - : \mathbf{C}^*(X) \to \mathbf{C}^*(X)$ が得られる.

定義 1.20. この補題から関手

$$C := \mathrm{C}_0\,[0,1) \otimes - : \mathbf{C}^*(X) \to \mathbf{C}^*(X), \quad S := \mathrm{C}_0\,(0,1) \otimes - : \mathbf{C}^*(X) \to \mathbf{C}^*(X)$$

が定まる. S を**懸垂関手 (suspension functor)** という.

[5] $\operatorname{Ker} q$ は A のイデアルであることに注意せよ.
[6] 一般の位相空間上の C*-環も定義できるが, 本稿では説明を省略する. 詳細は [MN09] を参照せよ.
[7] C*-環 A のイデアル I, J に対し, $I \cap J$ と $I + J := \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$ は A のイデアルになる.

注意 1.21. X 上の C*-環 A に対し, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{C}\,[0,1] \otimes A = \mathrm{C}\,([0,1], A) = \{f : [0,1] \to A \mid f \text{ は連続 }\},\\
&CA = \mathrm{C}_0\,[0,1) \otimes A = \mathrm{C}_0\,([0,1), A) = \{f \in \mathrm{C}\,([0,1], A) \mid f(1) = 0\},\\
&SA = \mathrm{C}_0\,(0,1) \otimes A = \mathrm{C}_0\,((0,1), A) = \{f \in \mathrm{C}\,([0,1], A) \mid f(0) = f(1) = 0\}.
\end{aligned}$$

また, 次の X 上の C*-環の完全列が得られる:

$$0 \longrightarrow SA \longrightarrow CA \xrightarrow{f \mapsto f(0)} A \longrightarrow 0.$$

定義 1.22. 2 つの X-同変な $*$-準同型 $\varphi_0, \varphi_1 : A \to B$ が**ホモトピック (homotopic)** であるとは, ある X-同変な $*$-準同型 $\varphi : A \to \mathrm{C}\,([0,1], B)$ が存在して, 各 $a \in A$ に対し, $\varphi(a)(0) = \varphi_0(a)$ と $\varphi(a)(1) = \varphi_1(a)$ が成り立つことをいう.

定義 1.23. X 上の C*-環 A が**可縮 (contractible)** であるとは, 恒等写像 $\mathrm{id} : A \to A$ が $0 : A \to A$ とホモトピックであることをいう.

例 1.24. X 上の C*-環 A に対し, CA は可縮である.

本稿で中心的な役割を果たすのが, 次に導入する写像錐である.

定義 1.25. X-同変な $*$-準同型 $\varphi : A \to B$ に対し,

$$C_\varphi := \{(a, f) \in A \oplus CB \mid f(0) = \varphi(a)\}$$

と定める. 各 $U \in \mathbb{O}(X)$ に対し, $C_\varphi(U) := \{(a, f) \in A(U) \oplus CB(U) \mid f(0) = \varphi(a)\}$ と定めると, C_φ は X 上の C*-環となる. C_φ を φ の**写像錐 (mapping cone)** という.

X-同変な $*$-準同型 $\varphi : A \to B$ に対し, 次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & SB & \longrightarrow & C_\varphi & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0\\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \\
0 & \longrightarrow & SB & \longrightarrow & CB & \xrightarrow[f \mapsto f(0)]{} & B & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

ここで, 図式内の 2 つの行は X 上の C*-環の完全列である. さらに, 写像錐は次の普遍性をもつ.

命題 1.26 (写像錐の普遍性)**.** $\mathbf{C}^*(X)$ において, 次の可換図式が与えられているとする.

$$\begin{array}{ccc}
A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1\\
{\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta}\\
A_2 & \xrightarrow[\varphi_2]{} & B_2.
\end{array}$$

このとき, X-同変な $*$-準同型 $C_{\varphi_1} \to C_{\varphi_2}$ が一意に存在して, 次の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & SB_1 & \longrightarrow & C_{\varphi_1} & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & 0\\
 & & {\scriptstyle S\beta}\swarrow\ \| & & \swarrow\ \downarrow & & {\scriptstyle \alpha}\swarrow\ \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \\
0 & \longrightarrow & SB_2 & \longrightarrow & C_{\varphi_2} & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & 0\\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} & & \\
0 & \longrightarrow & SB_1 & \longrightarrow & CB_1 & \longrightarrow & B_1 & \longrightarrow & 0\\
 & & {\scriptstyle S\beta}\swarrow & & {\scriptstyle C\beta}\swarrow & & {\scriptstyle \beta}\swarrow & & \\
0 & \longrightarrow & SB_2 & \longrightarrow & CB_2 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

ここで, 4 つの行はすべて X 上の C*-環の完全列である.

1.4 Bott 関手

E-理論を説明するための準備として Bott 関手を導入する. X を有限 T_0-空間, $\mathbf{A}$ を加法圏[8]とする.

定義 1.27. 次の 3 つの条件をみたす関手 $F : \mathbf{C}^*(X) \to \mathbf{A}$ を **Bott 関手**という:

(HI) $\varphi_0, \varphi_1 : A \to B$ がホモトピックであるならば, $F\varphi_0 = F\varphi_1$ が成り立つ;

(S) A を X 上の C*-環, $e \in \mathbb{K}$ をランク 1 の射影とし, X-同変な $*$-準同型 $\iota : A \hookrightarrow \mathbb{K} \otimes A$ を $\iota(a) := e \otimes a$ として定めると, $F\iota : FA \to F(\mathbb{K} \otimes A)$ は同型である;

(HX) X 上の C*-環の完全列 $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \longrightarrow Q \longrightarrow 0$ に対し, 誘導される 2 つのアーベル群の列

$$\mathbf{A}(FD, FI) \longrightarrow \mathbf{A}(FD, FA) \longrightarrow \mathbf{A}(FD, FQ), \quad \mathbf{A}(FQ, FD) \longrightarrow \mathbf{A}(FA, FD) \longrightarrow \mathbf{A}(FI, FD)$$

が完全列になる.

命題 1.28 (Bott 周期性)**.** Bott 関手 $F : \mathbf{C}^*(X) \to \mathbf{A}$ は, 懸垂関手 $S : \mathbf{C}^*(X) \to \mathbf{C}^*(X)$ を 2 回合成して得られる関手 $FS^2 : \mathbf{C}^*(X) \to \mathbf{A}$ と自然同型である.

命題 1.29. $F : \mathbf{C}^*(X) \to \mathbf{A}$ を Bott 関手とする. X 上の C*-環の完全列

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{\ i\ } A \xrightarrow{\ q\ } Q \longrightarrow 0$$

が与えられているとする. このとき, 次が成り立つ.

(1) I が可縮であるならば, $Fq : FA \to FQ$ は同型である.

(2) Q が可縮であるならば, $Fi : FI \to FA$ は同型である.

1.5 E-理論

まずは, 通常の C*-環に対する E-理論を手短に定義する. 詳細は [Bla98] などを参照してほしい.

定義 1.30. C*-環 A, B に対し, $SA \otimes \mathbb{K}$ から $SB \otimes \mathbb{K}$ への asymptotic morphism のホモトピー同値類のなすアーベル群を $\mathrm{E}(A, B)$ と表記する. C*-環を対象とし, A から B への射の集合を $\mathrm{E}(A, B)$ とする加法圏 $\mathbf{E}$ が定義できる.

詳しくは述べないが, $\mathbf{E}$ は可算余直積をもち, 懸垂関手 $S : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ によって三角圏になることが知られている.

ここで, **K-理論**との関係について触れておこう. K-理論の基本的な考え方は, C*-環 B に対して得られる 2 つのアーベル群 $\mathrm{K}_0(B)$ と $\mathrm{K}_1(B)$ の構造を調べることで, B の構造を調べるというものである. C*-環 B に対し, $\mathrm{E}(\mathbb{C}, B)$ は $\mathrm{K}_0(B)$ に一致し, $\mathrm{E}(S\mathbb{C}, B)$ は $\mathrm{K}_1(B)$ に一致する. 2 つの C*-環 A, B が $\mathbf{E}$ で同型であるならば, $i = 0, 1$ に対して $\mathrm{K}_i(A)$ と $\mathrm{K}_i(B)$ は同型である. 逆については, Rosenberg, Schochet [RS87] の**普遍係数定理 (universal coefficient theorem, UCT)** により, C*-環 A, B が **bootstrap class** $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$[9]に属するとき, $i = 0, 1$ に対して $\mathrm{K}_i(A)$ と $\mathrm{K}_i(B)$ が同型であるならば, A, B は $\mathbf{E}$ で同型であることが知られている.

次に, 有限 T_0-空間上の C*-環に対する E-理論を概説する[10]. 詳細は [DM12] を参照してほしい. X を有限 T_0-空間とする.

[8]加法圏とは, 零対象をもち, 対象 $A, B \in \mathbf{A}$ に対し, 射の集合 $\mathbf{A}(A, B)$ がアーベル群で, 直和 $A \oplus B$ が存在するような圏のことである.

[9]$\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$ は三角圏 $\mathbf{E}$ において $\mathbb{C}$ を含む $\aleph_0$-localizaing subcategory として定義される.

[10]第二可算空間上の C*-環に対する E-理論も同様にして定義できる.

定義 1.31. X 上の C*-環 A, B に対し, $SA \otimes \mathbb{K}$ から $SB \otimes \mathbb{K}$ への approximately X-equivariant asymptotic morphism のホモトピー同値類のなすアーベル群を $\mathrm{E}(X; A, B)$ と表記する. X 上の C*-環を対象とし, A から B への射の集合を $\mathrm{E}(X; A, B)$ とする加法圏 $\mathbf{E}(X)$ が定義できる.

注意 1.32. X が 1 点空間のとき, $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}$ である.

これも詳しくは述べないが, $\mathbf{E}(X)$ は可算余直積をもち, 懸垂関手 $S : \mathbf{E}(X) \to \mathbf{E}(X)$ によって三角圏になることが知られている. 未定義語を用いて $\mathbf{E}(X)$ を定義したが, どのように構成されるのかを理解することは不要で, 次に挙げる普遍性が重要である.

命題 1.33 (E-理論の普遍性)**.** 対象をそのまま移すような標準的な Bott 関手 $\mathbf{C}^*(X) \to \mathbf{E}(X)$ が存在し, 次の普遍性をみたす. $\mathbf{A}$ が加法圏で $F : \mathbf{C}^*(X) \to \mathbf{A}$ が Bott 関手であるならば, ある関手 $\widehat{F} : \mathbf{E}(X) \to \mathbf{A}$ が一意に存在して, 次の図式を可換にする:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^*(X) & & \\ \downarrow & \searrow^{F} & \\ \mathbf{E}(X) & \overset{\widehat{F}}{\dashrightarrow} & \mathbf{A}. \end{array}$$

C*-環の分類理論における著名な結果として, Kirchberg [Kir94] は, X 上の C*-環 A, B が安定, 純無限, 核型, 緊密[11]であるとき, A, B が $\mathbf{E}(X)$ で同型であるならば, X 上の C*-環として同型であることを証明した[12]. また, X が 1 点空間の場合に対して, Phillips [Phi00] は別証明を与えた[13].

そこで, どのような場合に X 上の C*-環 A, B が $\mathbf{E}(X)$ で同型になるのかを考えるのは, 自然で重要な問いである. X が 1 点空間の場合, 先で述べたように, $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}$ に属する 2 つの C*-環は, K_0-群, K_1-群がそれぞれ同型であるならば, $\mathbf{E}$ で同型になる. その一般化として, ハッセ図が無向グラフとしてディンキン図形の A 型であるような有限 T_0-空間 X に対して, Meyer, Nest [MN12], Bentmann, Köhler [BK11] は, **filtrated K-theory** とよばれる不変量に対して UCT を証明することで, X-同変な bootstrap class $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}(X)$[14]に属する 2 つの C*-環は, filtrated K-theory が同型であるならば, $\mathbf{E}(X)$ で同型であることを証明した. この問題は X が一般の有限 T_0-空間の場合には未解決だが, UCT をみたす K-理論的不変量を導出する際, 本稿で紹介する主結果は有用であると期待している.

1.6 制限関手と拡張関手

本小節では, 局所閉集合への制限によって得られる関手および連続写像から誘導される関手を導入する. これらの関手は, 鏡映関手を定義するときに使う.

定義 1.34. A を X 上の C*-環とする. X の局所閉集合 Y とは, $V \subset U$ をみたす $U, V \in \mathbb{O}(X)$ を用いて $Y = U \setminus V$ と表される集合のことだった. ここで, C*-環 $A(Y)$ を次の商で定める:

$$A(Y) := A(U)/A(V).$$

$A(Y)$ は U, V の取り方に依存するように見えるが, 実は自然な同型を除いて一意に定まる.

注意 1.35. 開集合や閉集合は局所閉集合である. 開集合 U は $U = U \setminus \emptyset$ と表せ, $A(\emptyset) = 0$ なので, 元々与えられている $A(U)$ と今定義された $A(U)$ は一致する. さらに, $A(X) = A$ なので, 閉集合 E に対し, $A(E) = A/A(X \setminus E)$ が成り立つ.

[11] X 上の C*-環 A が緊密であるとは, $\mathbb{O}(X) \ni U \mapsto A(U) \in \mathbb{I}(A)$ が全単射であることを指す. C*-環が単純であることと 1 点空間上の C*-環として緊密であることは同値である.

[12] Kirchberg は E-理論ではなく, Kasparov によって導入された KK-理論を本質的に用いて分類定理を証明した. E-理論と KK-理論は異なる普遍性をもつが, 非常によく似ている. 実際, 核型 C*-環に対しては E-理論と KK-理論は一致する. 本稿では, E-理論と KK-理論の違いには深入りしないことにする.

[13] Phillips による証明では, E-理論が本質的に使われている.

[14] $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}(X)$ は三角圏 $\mathbf{E}(X)$ において $x \in X$ に対する $i_x^X\mathbb{C}$ を含む $\aleph_0$-localizaing subcategory として定義される.

定義 1.36. X を有限 T_0-空間とし, $Y \subset X$ を局所閉集合とする. X から Y への**制限関手 (restriction functor)**

$$r_X^Y : \mathbf{C}^*(X) \to \mathbf{C}^*(Y)$$

は次のようにして定まる. X 上の C*-環 A に対し, $r_X^Y A := A(Y)$ は $\mathbb{O}(Y) \ni U \mapsto A(U) \in \mathbb{I}(r_X^Y A)$ によって Y 上の C*-環となる. X-同変な $*$-準同型 $\varphi : A \to B$ に対し, Y-同変な $*$-準同型 $r_X^Y \varphi : r_X^Y A \to r_X^Y B$ を次の図式を可換にする一意的な写像として定める:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A(V) & \longrightarrow & A(U) & \longrightarrow & A(Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \varphi\downarrow & & \varphi\downarrow & & \vdots r_X^Y\varphi & & \\ 0 & \longrightarrow & B(V) & \longrightarrow & B(U) & \longrightarrow & B(Y) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

ここで, Y を $V \subset U$ をみたす $U, V \in \mathbb{O}(X)$ を用いて $Y = U \setminus V$ と表した. なお, 図式内の 2 つの行は C*-環の完全列である.

定義 1.37. X, X' を有限 T_0-空間とする. 連続写像 $\theta : X \to X'$ は関手

$$\theta_* : \mathbf{C}^*(X) \to \mathbf{C}^*(X')$$

を次のように誘導する. X 上の C*-環 A に対し, $\theta_* A := A$ は $\mathbb{O}(X) \ni U \mapsto A(\theta^{-1}(U)) \in \mathbb{I}(\theta_* A)$ によって X' 上の C*-環となる. X-同変な $*$-準同型 $\varphi : A \to B$ に対し, X'-同変な $*$-準同型 $\theta_*\varphi : \theta_* A \to \theta_* B$ を $\theta_*\varphi := \varphi$ として定める.

定義 1.38. X を有限 T_0-空間とし, $Y \subset X$ とする. Y から X への**拡張関手 (extension functor)**

$$i_Y^X : \mathbf{C}^*(Y) \to \mathbf{C}^*(X)$$

は包含写像 $Y \hookrightarrow X$ から誘導される関手として定まる.

2 主結果

K を有限 T_0-空間とする. $\{L_j\}_{j \in J}$ を空でない有限 T_0-空間からなる有限族とする. 各 $j \in J$ に対し, $l_j \in L_j$ を固定する. 集合としての非交和 $K \amalg \coprod_{j \in J} L_j$ に次のように 2 通りの位相を入れて, 有限 T_0-空間 X_1, X_2 を構成する.

(1) $k_1, \ldots, k_m$ を K に対応するハッセ図の source (辺を受け取らない点) としたとき, 各 $j \in J$ に対し, l_j から $k_1, \ldots, k_m$ すべてに辺を引いて得られるハッセ図に対応する有限 T_0-空間を X_1 として定める.

(2) $k'_1, \ldots, k'_{m'}$ を K に対応するハッセ図の sink (辺を出さない点) としたとき, 各 $j \in J$ に対し, l_j に $k'_1, \ldots, k'_{m'}$ すべてから辺を引いて得られるハッセ図に対応する有限 T_0-空間を X_2 として定める.

構成から, K に定まる X_1 の相対位相と X_2 の相対位相は一致する (L_j たちに定まる相対位相についてもそうである). また, X_1 において, K は閉集合, L_j たちは開集合である. X_2 において, K は開集合, L_j たちは閉集合である.

少しわかりづらいと思うので, 次に 2 つの例を挙げる.

例 2.1. $K := \{1\}, L_1 := \{3\}, L_2 = \{4\}, L_3 := \{2, 5\}$ とし, L_3 に定まる順序を $2 < 5$ として定め, $l_1 := 3$, $l_2 := 4$, $l_3 := 5$ とおく. このとき, 左のハッセ図が X_1, 右のハッセ図が X_2 に対応する.



この例のように, $K=\{k\}$ の場合, k は X_1 に対応するハッセ図の sink で, l_j から k への辺の向きをすべて反対にして得られるハッセ図に対応する有限 T_0-空間が X_2 である. この操作は, 古くから知られる Bernstein, Gelfand, Ponomarev [BGP73] による箙の鏡映変換そのものである. この観察は系 2.7を得る上で重要となる.

次の例は, 箙の鏡映変換とは異なる変換を表しており, このような場合でも定理 2.4が得られるのは興味深い.

例 2.2. $K:=\{1.2,3\}, L_1:=\{4\}, L_2=\{5\}$ とし, K に定まる順序を $1<2, 1<3$ として定め, $l_1:=4$, $l_2:=5$ とおく. このとき, 左のハッセ図が X_1, 右のハッセ図が X_2 に対応する.



各 $j\in J$ に対し, $\theta_j : K \amalg L_j \to L_j$ を次のように定める:

$$\theta_j(x):=\begin{cases} l_j & x\in K \text{ のとき} \\ x & x\in L_j \text{ のとき.}\end{cases}$$

このとき, θ_j は $K\cup L_j$ と L_j に X_1 の相対位相を入れても連続で, $K\cup L_j$ と L_j に X_2 の相対位相を入れても連続である. また, $\{\iota_j:(0,1)\to(0,1)\}_{j\in J}$ を像への同相写像の族であって, $\{\iota_j(0,1)\}_{j\in J}$ が非交和であるものとして固定する[15].

ここまでの準備をもって, いよいよ鏡映関手を定義し, 主結果を述べよう.

定義 2.3. 鏡映関手 (reflecton functor)

$$\mathbf{C}^*(X_1) \underset{S^-}{\overset{S^+}{\rightleftarrows}} \mathbf{C}^*(X_2)$$

を次のように定める.

(1) X_1 上の C*-環 A に対し, X_2 上の C*-環 S^+A を次の X_2-同変な $*$-準同型の写像錐として定義する:

$$\bigoplus_{j\in J} i^{X_2}_{L_j}\theta_{j*}r^{K\cup L_j}_{X_1}SA \to i^{X_2}_K r^K_{X_1}SA, \quad (f_j)_j\mapsto f,$$

$$f(t):=\begin{cases}\pi^K_{K\cup L_j}(f_j(s)) & \text{ある } j\in J,\ s\in(0,1) \text{ が存在して } t=\iota_j(s) \text{ のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき.}\end{cases}$$

ここで, $\pi^K_{K\cup L_j}: A(K\cup L_j)\to A(K)$ は商写像を表す. 次に, X_1-同変な $*$-準同型 $\varphi: A_1\to A_2$ に対し, $S^+\varphi: S^+A_1\to S^+A_2$ を次の可換図式から写像錐の普遍性 (命題 1.26) により誘導される X_2-同変な $*$-準同型として定める:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_j i^{X_2}_{L_j}\theta_{j*}r^{K\cup L_j}_{X_1}SA_1 & \longrightarrow & i^{X_2}_K r^K_{X_1}SA_1 \\ \downarrow{\scriptstyle \bigoplus_j i^{X_2}_{L_j}\theta_{j*}r^{K\cup L_j}_{X_1}S\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle i^{X_2}_K r^K_{X_1}S\varphi} \\ \bigoplus_j i^{X_2}_{L_j}\theta_{j*}r^{K\cup L_j}_{X_1}SA_2 & \longrightarrow & i^{X_2}_K r^K_{X_1}SA_2. \end{array}$$

[15] 例えば, $J=\{0,\dots,n-1\}$ なら, 各 $j\in J$ に対し, $\iota_j(s):=(j+s)/n$ と定めればよい.

(2) X_2 上の C*-環 B に対し, X_1 上の C*-環 S^-B を次の X_1-同変な $*$-準同型の写像錐として定義する:

$$i_K^{X_1} r_{X_2}^K B \to \bigoplus_{j\in J} i_{L_j}^{X_1} \theta_{j*} r_{X_2}^{K\cup L_j} B, \quad b \mapsto (b)_j.$$

次に, X_2-同変な $*$-準同型 $\psi : B_1 \to B_2$ に対し, $S^-\psi : S^-B_1 \to S^-B_2$ を次の可換図式から写像錐の普遍性 (命題 1.26) により誘導される X_1-同変な $*$-準同型として定める:

$$\begin{array}{ccc} i_K^{X_1} r_{X_2}^K B_1 & \longrightarrow & \bigoplus_j i_{L_j}^{X_1} \theta_{j*} r_{X_2}^{K\cup L_j} B_1 \\ {\scriptstyle i_K^{X_1} r_{X_2}^K \psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bigoplus_j i_{L_j}^{X_1} \theta_{j*} r_{X_2}^{K\cup L_j} \psi} \\ i_K^{X_1} r_{X_2}^K B_2 & \longrightarrow & \bigoplus_j i_{L_j}^{X_1} \theta_{j*} r_{X_2}^{K\cup L_j} B_2. \end{array}$$

$\mathbf{C}^*(X_1)$ と $\mathbf{C}^*(X_2)$ の間の鏡映関手は, E-理論の普遍性 (命題 1.33) により, 次のように $\mathbf{E}(X_1)$ と $\mathbf{E}(X_2)$ の間の関手 (これも鏡映関手とよび, 同じ記号を用いる) を誘導する:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^*(X_1) & \xrightarrow{S^+} & \mathbf{C}^*(X_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{E}(X_1) & \xrightarrow[S^+]{} & \mathbf{E}(X_2), \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{C}^*(X_1) & \xleftarrow{S^-} & \mathbf{C}^*(X_2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{E}(X_1) & \xleftarrow[S^-]{} & \mathbf{E}(X_2). \end{array}$$

定理 2.4. 鏡映関手

$$\mathbf{E}(X_1) \underset{S^-}{\overset{S^+}{\rightleftarrows}} \mathbf{E}(X_2)$$

は三角圏としての同値を与え, さらに $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}(X_1), \mathcal{B}_{\mathrm{E}}(X_2)$ の同値を誘導する.

証明の概略. X_2 上の C*-環 B が S^+S^-B と $\mathbf{E}(X_2)$ で同型であることを証明しよう. X_2 上の C*-環 $\widetilde{B}$ を次の X_2-同変な $*$-準同型の写像錐として定義する[16]:

$$\bigoplus_{j\in J} i_{L_j}^{X_2} \theta_{j*} r_{X_2}^{K\cup L_j} SCB \to SB, \quad (f_j)_j \mapsto f,$$

$$f(t) := \begin{cases} f_j(s,0) & \text{ある } j\in J,\ s\in(0,1) \text{ が存在して } t = \iota_j(s) \text{ のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき.} \end{cases}$$

すると, 次の可換図式が得られる:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & i_K^{X_2} r_{X_2}^K S^2B & \longrightarrow & S^+S^-B & \longrightarrow & \bigoplus_j i_{L_j}^{X_2} \theta_{j*} r_{X_1}^{K\cup L_j} SS^-B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & {\scriptstyle \iota_2}\downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S^2B & \xrightarrow{\iota_1} & \widetilde{B} & \longrightarrow & \bigoplus_j i_{L_j}^{X_2} \theta_{j*} r_{X_2}^{K\cup L_j} SCB & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \bigoplus_j i_{L_j}^{X_2} r_{X_2}^{L_j} S^2B & \longrightarrow & \bigoplus_j i_{L_j}^{X_2} r_{X_2}^{L_j} CSB & \longrightarrow & \bigoplus_j i_{L_j}^{X_2} r_{X_2}^{L_j} SB & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}.$$

[16] $SCB(K\cup L_j) = \mathrm{C}_0((0,1)\times[0,1), B(K\cup L_j)) = \{f \in \mathrm{C}([0,1]\times[0,1], B(K\cup L_j)) \mid f(0,t) = f(1,t) = 0\ (\forall t \in [0,1])$ かつ $f(s,1) = 0\ (\forall s \in [0,1])\}$ となることに注意せよ.

ここで, 3 つの行と 3 つの列はすべて X_2 上の C*-環の完全列となる. $\bigoplus_j i_{L_j}^{X_2}\theta_{j*}r_{X_2}^{K\cup L_j}SCB$ と $\bigoplus_j i_{L_j}^{X_2}r_{X_2}^{L_j}CSB$ はどちらも可縮なので, ι_1, ι_2 は標準的な Bott 関手 $\mathbf{C}^*(X_2) \to \mathbf{E}(X_2)$ で送ると, 命題 1.29 (2) により, $\mathbf{E}(X_2)$ においてどちらも同型射になる. さらに Bott 周期性 (命題 1.28) により, B と S^2B は $\mathbf{E}(X_2)$ で同型である. 以上から, B が S^+S^-B と $\mathbf{E}(X_2)$ で同型であることが証明された. 同様に命題 1.29 (1) と Bott 周期性 (命題 1.28) を用いることで, X_1 上の C*-環 A が S^-S^+A と $\mathbf{E}(X_1)$ で同型であることが証明できる. □

注意 2.5. この定理は, 同様の設定の下, X_1, X_2 が有限とは限らない第二可算なアレクサンドロフ空間 (前順序から定まる位相空間) で J が可算集合の場合にも示すことができる.

注意 2.6. $S^+ : \mathbf{C}^*(X_1) \to \mathbf{C}^*(X_2)$ は $\{\iota_j\}_{j\in J}$ の取り方に依存しているが, この定理の系として, 誘導される $S^+ : \mathbf{E}(X_1) \to \mathbf{E}(X_2)$ は自然同型を除いて依存しないことがわかる.

系 2.7. X, X' を有限 T_0-空間とし, 対応するハッセ図が無向グラフとして同じ木を表すとする. このとき, 2 つの三角圏 $\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(X')$ は同値で, さらに $\mathcal{B}_{\mathrm{E}}(X), \mathcal{B}_{\mathrm{E}}(X')$ の同値を誘導する.

証明の概略. [ASS06, Lemma 5.2] より, 「sink を 1 つ選んでその点に入る辺の向きを反対にする」という操作を有限回 X に施すことで X' が得られる. よって, 定理 2.4から主張が従う. □

先述の通り, 一般の有限 T_0-空間上の C*-環に対し, どのような K-理論的不変量が UCT をみたすのかは知られていない. しかし, この結果を応用することで, 無向グラフとして木であるような有限 T_0-空間 X に対して UCT を証明することができれば, X の辺の向きを変えて得られる有限 T_0-空間 X' に対して UCT が証明できると期待している.

References

[ASS06] Ibrahim Assem, Andrzej Skowronski, and Daniel Simson, *Elements of the representation theory of associative algebras: Techniques of representation theory*, London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, 2006.

[BGP73] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, and V. A. Ponomarev, *Coxeter functors and Gabriel's theorem*, Uspehi Mat. Nauk **28** (1973), no. 2, 19–33.

[BK11] Rasmus Bentmann and Manuel Köhler, *Universal coefficient theorems for C*-algebras over finite topological spaces*, 2011.

[Bla98] Bruce Blackadar, *K-theory for operator algebras*, second ed., Mathematical Sciences Research Institute publications, vol. 5, Cambridge University Press, 1998.

[Bla06] ———, *Operator algebras: Theory of C*-algebras and von Neumann algebras*, vol. 122, Springer Science & Business Media, 2006.

[BO08] Nathanial P. Brown and Narutaka Ozawa, *C*-algebras and finite-dimensional approximations*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2008.

[CH90] Alain Connes and Nigel Higson, *Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie bivariante*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **311** (1990), no. 2, 101–106.

[DM12] Marius Dadarlat and Ralf Meyer, *E-theory for C*-algebras over topological spaces*, Journal of Functional Analysis **263** (2012), no. 1, 216–247.

[Kir94] Eberhard Kirchberg, *The classification of purely infinite C*-algebras using Kasparov's theory*, 1994.

[MN09] Ralf Meyer and Ryszard Nest, *C*-algebras over topological spaces: The bootstrap class*, Muenster Journal of Mathematics **2** (2009), 215–252.

[MN12] ———, *C*-algebras over topological spaces: Filtrated K-theory*, Canadian Journal of Mathematics **64** (2012), no. 2, 368–408.

[Phi00] N. Christopher Phillips, *A classification theorem for nuclear purely infinite simple C*-algebras*, Documenta Mathematica **5** (2000), 49–114.

[RS87] Jonathan Rosenberg and Claude Schochet, *The Künneth theorem and the universal coefficient theorem for Kasparov's generalized K-functor*, Duke Mathematical Journal **55** (1987), no. 2, 431–474.

Schur multiple Eisenstein series

Graduate School of Mathematics, Nagoya University
Jinbo Yu *

Abstract

Eisenstein series provide the classical examples of modular forms, with their constant Fourier coefficients given by Riemann zeta values. In 2006, Gangl, Kaneko, and Zagier introduced double Eisenstein series to relate double zeta values to modular forms, and Bachmann (2012) later generalized this to multiple Eisenstein series. This survey article explores a further generalization, called Schur multiple Eisenstein series. These series have Fourier expansions whose constant terms are Schur multiple zeta values and satisfy certain relations similar to Schur multiple zeta values, such as the Jacobi-Trudi formula. We also consider some special cases related to modularity. Further we introduce a certain Hopf algebra which can be used to describe the Fourier expansion of Schur multiple Eisenstein series.

1 Introduction

This report summarizes some of the results obtained by the author in [Yu], where Schur multiple Eisenstein series are introduced. These generalize classical Eisenstein series which are examples of modular form for the full modular group. For an even integer $k > 2$, and an element τ in the complex upper half plane $\mathbb{H}$, the Eisenstein series of weight k is defined by

$$G(k;\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n\in\mathbb{Z} \\ (m,n)\neq(0,0)}} \frac{1}{(m\tau+n)^k} = \zeta(k) + \frac{(2\pi i)^k}{(k-1!)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n, \quad q = e^{2\pi i\tau}.$$

One important result in the theory of modular forms is that Eisenstein series are the fundamental building blocks of all modular forms. Specifically, every modular form can be expressed as a polynomial in $G(4;\tau)$ and $G(6;\tau)$. The second expression is its Fourier series, the coefficients are divisor function $\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k$, and the constant term is the Riemann zeta function $\zeta(k) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^k}$.

1.1 Multiple zeta values and multiple Eisenstein series

The product of two Riemann zeta values can be expressed as

$$\begin{aligned} \zeta(r)\zeta(s) &= \zeta(r,s) + \zeta(s,r) + \zeta(s+r) \quad (r,s \geq 2), \\ \zeta(r)\zeta(s) &= \sum_{j=2}^{s+r-1} \left[\binom{j-1}{r-1} + \binom{j-1}{s-1} \right] \zeta(j, s+r-j) \quad (2 \leq j \leq \frac{s+r}{2}), \end{aligned} \tag{1.1}$$

*E-mail:jinbo.yu.e6@math.nagoya-u.ac.jp

where $\zeta(r,s)=\sum_{0<m<n}\frac{1}{m^r n^s}$ are called double zeta values, which are known to satisfy a collection of relations. The relations (1.1) are double shuffle relations. In particular, the first expression for the product is referred to as the stuffle relation, while the second one is called shuffle relation. Since the Riemann zeta functions are the constant term of Eisenstein series, the natural question arises: "Do Eisenstein series also satisfy these relations derived from zeta values?" In 2006 Gangl, Kaneko and Zagier [GKZ] showed that the structure of the $\mathbb{Q}$-vector space of all relations among double zeta values of weight k is connected in many different ways to the structure of the space of modular forms M_k of weight k on the full modular group $\Gamma_1=PSL(2,\mathbb{Z})$, by introducing double Eisenstein series. In 2012, Bachmann [Ba] generalized this idea to multiple version. He studied the multiple Eisenstein series which are defined by

$$G(s_1,\dots,s_r;\tau)=\sum_{\substack{0\prec\lambda_1\prec\cdots\prec\lambda_r\\ \lambda_i\in\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}}}\frac{1}{\lambda_1^{s_1}\cdots\lambda_r^{s_r}}\quad(\tau\in\mathbb{H};s_i\in\mathbb{N}_{\geq 2},\ i=1,\dots,r),$$

where the order $m_1\tau+n_1\prec m_2\tau+n_2$ means $m_1<m_2\vee(m_1=m_2\wedge n_1<n_2)$. Although not all multiple Eisenstein series are modular forms, we observe that $G(s_1,\dots,s_r;\tau)=G(s_1,\dots,s_r;\tau+1)$, which provides the Fourier expansion of multiple Eisenstein series.

Theorem 1.1 ([Ba]). *For $k_1,\dots,k_r\geq 2$ there exist explicit $\alpha_{l_1\dots l_r,j}^{k_1,\dots k_r}\in\mathbb{Z}$ such that*

$$G(k_1,\dots,k_r)=\zeta(k_1,\dots,k_r)+\sum_{\substack{0<j<r\\ l_1+\cdots+l_r=k_1+\cdots+k_r\\ l_1,\dots,l_r\geq 1}}\alpha_{l_1\dots l_r,j}^{k_1,\dots k_r}\zeta(l_1,\dots,l_j)g(l_{j+1},\dots,l_r)+g(k_1,\dots,k_r).$$

Here, in the case of Eisenstein series, $g(k)$ represents the generating series of the divisor sums. For higher depths, multiple versions are defined for $k_1,\dots,k_r\geq 1$ as follows:

$$g(k_1,\dots,k_r;\tau)=g(k_1,\dots,k_r)=(-2\pi i)^{k_1+\cdots+k_r}\sum_{\substack{0<m_1<\cdots<m_r\\ n_1,\dots,n_r>0}}\frac{n_1^{k_1-1}}{(k_1-1)!}\cdots\frac{n_r^{k_r-1}}{(k_r-1)!}q^{m_1n_1+\cdots+m_rn_r},$$

where $q=e^{2\pi i\tau}$. By the Lipschitz formula, the monotangent function $\Psi(k;\tau)$ is defined as

$$\Psi(k;\tau)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(\tau+n)^k}=\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\sum_{d>0}d^{k-1}q^d\,.$$

In particular, we can replace τ by $m_1\tau,\dots,m_r\tau$ and take the sum over all $1\leq m_1<\cdots<m_r$ to obtain

$$g(k_1,\dots,k_r)=\sum_{0<m_1<\cdots<m_r}\Psi(k_1;m_1\tau)\cdots\Psi(k_r;m_r\tau)\,.\tag{1.2}$$

Also, the constant term corresponds to the multiple zeta values with same index, denoted by $\zeta(s_1,\dots,s_r)$. For integers $s_1,\dots,s_{r-1}\geq 1$ and $s_r\geq 2$, the multiple zeta values (MZVs) and multiple zeta-star values (MZSVs) are defined by

$$\zeta(s_1,\dots,s_r)=\sum_{0<n_1<\cdots<n_r}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_r^{s_r}},\quad\zeta^\star(s_1,\dots,s_r)=\sum_{0<n_1\leq\cdots\leq n_r}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_r^{s_r}}.$$

Since each term in Fourier expansion of multiple Eisenstein series contains an MZV factor, certain relations in the $\mathbb{Q}$-vector space of all MZVs can be extended to the $\mathbb{Q}$-vector space of all multiple Eisenstein series, such as the double shuffle relation (1.1).

1.2 Algebra setup

To study the double shuffle relations(1.1), Hoffman introduced the quasi-shuffle products [Ho]. Let L be an alphabet. A monic monomial in the non-commutative polynomial ring $\mathbb{Q}\langle L\rangle$ is called a word, and the empty word is denoted by $\mathbf{1}$. The symbol $\diamond$ represents a commutative and associative product on the $\mathbb{Q}$-vector space generated by L. The *quasi-shuffle product* $*_\diamond$ on $\mathbb{Q}\langle L\rangle$ is defined as a $\mathbb{Q}$-bilinear product satisfying $\mathbf{1} *_\diamond \mathbf{w} = \mathbf{w} *_\diamond \mathbf{1} = \mathbf{w}$ for any word $w \in \mathbb{Q}\langle L\rangle$ and

$$aw *_\diamond bv = a(w *_\diamond bv) + b(aw *_\diamond v) + (a \diamond b)(w *_\diamond v) \tag{1.3}$$

for any $a, b \in L$ and words $w, v \in \mathbb{Q}\langle L\rangle$. This defines a commutative $\mathbb{Q}$-algebra $(\mathbb{Q}\langle L\rangle, *_\diamond)$, which is called *quasi-shuffle algebra*. There have two different alphabets: $L_{xy} = \{x, y\}$, with the product $a \diamond b = 0$ for $a, b \in L_{xy}$ and $L_z = \{z_k | k \geq 1\}$, with the product $z_{k_1} \diamond z_{k_2} = z_{k_1+k_2}$ for $k_1, k_2 \geq 1$. The corresponding quasi-shuffle product of L_{xy} is $\sqcup\!\sqcup = *_\diamond$ referred to as the *shuffle product*, and the corresponding quasi-shuffle product of L_z is $* = *_\diamond$, referred to as the *stuffle product*.

Let $\mathcal{Z}$ be the $\mathbb{Q}$-vector space generated by all MZVs, and let $\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle L_{xy}\rangle = \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$. Define the subspaces of $\mathfrak{H}$ as $\mathfrak{H}^0 = \mathbb{Q} + x\mathfrak{H}y \subset \mathfrak{H}^1 = \mathbb{Q} + \mathfrak{H}y \subset \mathfrak{H}$.

By identifying $z_k \leftrightarrow \overbrace{x \cdots x}^{k-1} y$, we can associate $\mathbb{Q}\langle L_z\rangle$ with $\mathfrak{H}^1$. In what follows, we consider them to be equivalent. Using the usual power series multiplication, the linear map defined on the generators as

$$\begin{aligned} \zeta : \mathfrak{H}^0 &\longrightarrow \mathcal{Z}\,, \\ z_{k_1} \dots z_{k_r} &\longmapsto \zeta(k_1, \dots, k_r)\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

gives a $\mathbb{Q}$-algebra homomorphism $\zeta : (\mathfrak{H}^0, \bullet) \longrightarrow \mathcal{Z}$ for $\bullet \in \{*, \sqcup\!\sqcup\}$. That is, for any $w, v \in \mathfrak{H}^0$, $\zeta(w)\zeta(v) = \zeta(w \sqcup\!\sqcup v) = \zeta(w * v)$. Following the map ζ, elements of $\mathfrak{H}^1$ correspond the MZVs with arbitrary indices, while elements of $\mathfrak{H}^0$ correspond the absolutely convergence MZVs. By combining (1.3) and (1.4) over $\mathfrak{H}^0$, we can derive (1.1).

By the work of Hoffman ([Ho][HI]), any quasi-shuffle algebra can be equipped with the structure of a Hopf algebra using the deconcatenation coproduct Δ_{dec} which splits a word into different parts. For $w, u, v \in \mathfrak{H}^1$,

$$\Delta_{dec}(w) = \sum_{uv=w} u \otimes v.$$

For any Hopf algebra A with coproduct Δ and a $\mathbb{Q}$-algebra B with multiplication m and for $f, g \in \mathrm{Hom}(A, B)$, the convolution product is defined as

$$f \star g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta.$$

The antipode $S : A \to A$ is the inverse of Id with respect to $\star$. In quasi-shuffle algebra $(\mathfrak{H}^1, *, \Delta_{dec})$, the antipode S is given by

$$\sum_{i=0}^{r} S(z_{k_1} \dots z_{k_i}) * z_{k_{i+1}} \dots z_{k_r} = 0. \tag{1.5}$$

Acting map (1.4) on (1.5), we obtain

$$\zeta(S(z_{k_1} \dots z_{k_r})) = (-1)^r \zeta^\star(k_r, \dots, k_1).$$

Hence, the antipode formula for MZVs can be derived as follows:

Theorem 1.2 ([Ho]). *For $k_1, \dots, k_r \geq 2$, we have*

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \zeta(k_1, \dots, k_i) * \zeta^\star(k_r, \dots, k_{i+1}) = 0.$$

1.3 Schur MZV and multiple Schur function

Nakasuji, Phuksuwan and Yamasaki [NPY] introduced Schur multiple zeta values, which combinatorially interpolate both MZVs and MZSVs. It was first mentioned in [Ya] in the context of studying multiple Dirichlet L-values. We generalize their construction and introduce the notion of multiple Schur function as follows:

(i) A *partition* of a natural number n is a tuple $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$ of positive integers $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_h \geq 1$ with $n = |\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_h$. For another partition $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ we write $\mu \subset \lambda$ if $r \leq h$ and $\mu_i \leq \lambda_i$ for $i = 1, \dots, r$, and we define *(skew) Young diagram* $D(\lambda/\mu)$ of λ/μ by

$$D(\lambda/\mu) = \left\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 1 \leq i \leq h\,, \mu_i < j \leq \lambda_i\right\},$$

where $\mu_i = 0$ for $i > r$. In the case where $\mu = \varnothing$ is the empty partition (i.e., the unique partition of zero) we just write $\lambda/\mu = \lambda$. In the following we will just focus on the case $\mu = \varnothing$, but one should keep in mind that everything also makes sense for arbitrary μ. $C(\lambda) = \{(i,j) \in D(\lambda) | (i+1,j), (i,j+1) \notin D(\lambda)\}$ denote the set of corner of Young diagram $D(\lambda)$.

(ii) For an arbitrary set A and a partition λ denote by $\mathrm{YT}(\lambda, A)$ all *Young tableaux* with entries in A:

$$\mathrm{YT}(\lambda, A) = \{(m_{i,j})_{(i,j)\in D(\lambda)} \mid m_{i,j} \in A\}.$$

(iii) For a finite totally ordered set $\mathcal{X} = (X, \prec)$ define the *semi-standard Young tableaux* for a partition λ by

$$\mathrm{SSYT}(\lambda, \mathcal{X}) = \{(m_{i,j}) \in \mathrm{YT}(\lambda, X) \mid m_{i,j} \preceq m_{i,j+1}, m_{i,j} \prec m_{i+1,j}\}.$$

Here we write $a \preceq b$ if $a \prec b$ or $a = b$.

(iv) Let $\mathcal{R}$ be a commutative $\mathbb{Q}$-algebra, W an arbitrary set and $\mathcal{X}$ a finite totally ordered set. Then for a function

$$f : W \times \mathcal{X} \to \mathcal{R}$$

define the corresponding multiple Schur function for a Young tableaux $\Bbbk = (k_{i,j}) \in \mathrm{YT}(\lambda, W)$ by

$$S_f(\Bbbk) = \sum_{(m_{i,j}) \in \mathrm{SSYT}(\lambda, \mathcal{X})} \prod_{(i,j)\in D(\lambda)} f(k_{i,j}, m_{i,j}).$$

Example 1. *In the case $\mathcal{R} = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{Z}$ and $\mathcal{X} = \{1, \ldots, M\}$ (with the usual order of natural numbers) for some $M \geq 1$ let*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times \{1, \ldots, M\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (k, m) &\longmapsto \frac{1}{m^k}, \end{aligned}$$

With this setup, the above definition yields the (truncated) Schur multiple zeta values $\zeta_M(\Bbbk) = S_f(\Bbbk)$

By taking the limit as $\lim M \to \infty$, Schur multiple zeta values $\zeta(\Bbbk) = \lim_{M\to\infty} \zeta_M(\Bbbk)$ converges absolutely whenever $\Bbbk \in W_\lambda$, where

$$W_\lambda = \left\{ \Bbbk = (k_{ij}) \in \mathrm{SSYT}(\lambda, \mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} k_{ij} \geq 1 \text{ for all } (i,j) \in D(\lambda) \setminus C(\lambda) \\ k_{ij} > 1 \text{ for all } (i,j) \in C(\lambda) \end{array} \right\}.$$

Schur multiple zeta values (Schur MZVs) preserve certain properties of the Schur function, such as Jacobi-Trudi formula.

Theorem 1.3 ([NPY] Jacobi-Trudi formula)**.** *Assume that $\Bbbk = (k_{ij}) \in \mathrm{SSYT}(\lambda/\mu,)$ and $k_{i,j} = a_{j-i}$ for all $(i,j) \in D(\lambda/\mu)$. $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s) = \#\{j \mid \lambda_j \geq i\}$, $\mu' = (\mu'_1, \ldots, \mu'_s)$ are the conjugate of λ and μ. Then, we have*

$$\zeta_{\lambda/\mu}(\Bbbk) = \det\left[\zeta(a_{-\mu'_j+j-1}, a_{-\mu'_j+j-2}, \ldots, a_{-\mu'_j+j-(\lambda'_i-\mu'_j-i+j)})\right]_{1\leq i,j\leq s}. \tag{1.6}$$

Here, we understand that $\zeta(\cdots) = 1$ if $\lambda'_i - \mu'_j - i + j = 0$ and 0 if $\lambda'_i - \mu'_j - i + j < 0$.

2 Main Results

Our main results are presented in two parts. In the first part, we introduce some analytic properties of Schur multiple Eisenstein series, including its precise definition, Fourier expansion, Jacobi-Trudi formula, and modularity theory. In the second part, we explore the algebraic structure of Schur multiple Eisenstein series by connecting them to the $\mathbb{Q}$-vector space of multiple zeta values. This result is then extended to the algebraic structure of Young tableaux.

2.1 Schur Multiple Eisenstein series

To define Schur multiple Eisenstein series, we set $\mathbb{Z}_M = \{-M, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, M\}$ and consider, for $M, N \geq 1$ and $\tau \in \mathbb{H}$ the set $X^\tau_{M,N} = \mathbb{Z}_M\tau + \mathbb{Z}_N$. This gives a finite ordered set $\mathcal{X}^\tau_{M,N} = (X^\tau_{M,N}, \prec)$. Next, we consider the subset of "positive" lattice points defined as

$$X^{\tau,>0}_{M,N} = \{\lambda \in X^\tau_{M,N} \mid 0 \prec \lambda\}.$$

This gives another finite ordered set $\mathcal{X}^{\tau,>0}_{M,N} = (X^{\tau,>0}_{M,N}, \prec)$ We then define the map

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} \times X^{\tau,>0}_{M,N} &\to \mathbb{R} \\ (k, m\tau + n) &\longmapsto \frac{1}{(m\tau + n)^k}, \end{aligned}$$

and introduce the ***(truncated) Schur multiple Eisenstein series*** for $\Bbbk \in \mathrm{YT}(\mathbb{Z})$ by $G_{M,N}(\Bbbk) = S_f$. More explicitly, for a partition λ and $\Bbbk = (k_{i,j}) \in \mathrm{YT}(\lambda, \mathbb{Z})$, these are defined as

$$G_{M,N}(\Bbbk;\tau) = \sum_{(m_{i,j}\tau+n_{i,j})\in \mathrm{SSYT}(\lambda, \mathcal{X}_{M,N}^{\tau,>0})} \prod_{(i,j)\in D(\lambda)} \frac{1}{(m_{i,j}\tau+n_{i,j})^{k_{i,j}}}\,. \tag{2.1}$$

We can now establish the following proposition:

Proposition 2.1. *If $k_{i,j} \geq 2$ for all $(i,j) \in D(\lambda)$ then the following limit exists*

$$G(\Bbbk;\tau) := \lim_{M\to\infty} \lim_{N\to\infty} G_{M,N}(\Bbbk;\tau)\,. \tag{2.2}$$

This is the definition of the ***Schur multiple Eisenstein series***. If we defined Schur multiple Eisenstein series without using the limit of summation, the conditions $k_{i,j} \geq 3\,((i,j) \in C(\lambda/\mu))$, $k_{i,j} \geq 2\,((i,j) \in D(\lambda/\mu) \setminus C(\lambda/\mu))$ are necessary for the absolute convergence of the sum. However, by a similar argument as in [BT], the order of the limits in (2.2) ensures convergence even in the case where $k_{i,j} = 2$ for $(i,j) \in C(\lambda/\mu)$. This approach aligns with the usual method for defining the quasi-modular form $G(2,\tau)$. The construction of the Fourier expansion described below uses exactly this Eisenstein summation:

Theorem 2.2 ([Yu], Fourier expansion)**.** *For $\Bbbk = (k_{i,j}; \lambda/\mu) \in \mathrm{YT}$, and $q = e^{2\pi i\tau}$, there exist explicit $\alpha^{\Bbbk}_{\mathbb{l},\mathbb{h}} \in \mathbb{Z}$ such that*

$$G(\Bbbk) = \zeta(\Bbbk) + \sum_{|\Bbbk|=|\mathbb{l}|+|\mathbb{h}|} \alpha^{\Bbbk}_{\mathbb{l},\mathbb{h}} \zeta(\mathbb{l}) g(\mathbb{h}) + g(\Bbbk). \tag{2.3}$$

Also, we have

$$G(\Bbbk) = \zeta(\Bbbk) + \sum_{\mu\subsetneq\eta\subsetneq\lambda} \zeta(\Bbbk_{\eta/\mu})\check{g}(\Bbbk_{\lambda/\eta}) + \check{g}(\Bbbk). \tag{2.4}$$

In particular,

$$G(\Bbbk;\tau) = \zeta(\Bbbk) + \sum_{n>0} a_{\Bbbk}(n) q^n \qquad for \quad a_{\Bbbk}(n) \in \mathcal{Z}[\pi i].$$

Here we show two ways to writing the Fourier expansion of th Schur multiple Eisenstein series. Equation (2.3), analog of theorem1.1, represents the classical form of the Fourier expansion of Eisenstein series. It extends multiple q-series $g(k_1,\ldots,k_r)$ in (1.2) to the Schur versions, given by

$$g(\Bbbk_{\lambda/\mu}) = g(\Bbbk_{\lambda/\mu};\tau) = \sum_{m_{i,j}\in \mathrm{SSYT}(\lambda/\mu)} \prod_{(i,j)\in D(\lambda/\mu)} \Psi(k_{i,j}; m_{i,j}\tau) \in \mathbb{Q}[\pi i][\![q]\!].$$

On the other hand, in the summation of (2.1), the terms can be split into two parts based on whether $m_{i,j} = 0$ or $m_{i,j} \geq 1$. The part where $m_{i,j} = 0$ is in fact equal a Schur multiple zeta values. We denote the summation where $m_{i,j} \geq 1$ as $\check{g}$.

Using the semi-standard condition, the Young tableau can be divided into two parts: the top-left part corresponds to ζ, and the bottom-right part corresponds to $\check{g}$. This decomposition gives rise to (2.4), where the summation in the red region represents Schur MZVs, and the summation in the blue region corresponds to $\check{g}$ in the following figure.

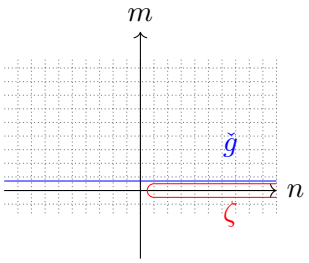


Figure 1: The region corresponding to the summation of ζ and $\check{g}$

Example 2. *For example, the Fourier expansion of* $G\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)$ *can be written as:*

$$\begin{aligned} G\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right) &= \zeta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)+\zeta\left(\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)\check{g}\left(\begin{array}{|c|}\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)+\zeta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\cline{1-2}\end{array}\right)\check{g}\left(\begin{array}{|c|}\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)+\zeta\left(\begin{array}{|c|}\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)\check{g}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline &2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)+\check{g}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)\\ &= \zeta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)+\zeta\left(\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)g\left(\begin{array}{|c|}\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)+\zeta\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\cline{1-2}\end{array}\right)g\left(\begin{array}{|c|}\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)+\zeta(2)g(4)+4\zeta(2)g(2,2)+g\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right). \end{aligned}$$

Proposition 2.3 ([Yu])**.** *The* $\check{g}$ *can be written as a MZV-linear combination of* g*.*

Example 3.

$$\check{g}\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)=g\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right)+2\zeta(2)g\left(\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}\right).$$

Let's consider a special Young tableau, where all the diagonal variables are the same. In this case, we can generalize many formulas for Schur polynomials to Schur multiple Eisenstein series, such as Jacobi-Trudi formula. Following the similar argument of [NPY], we obtain the following result:

Theorem 2.4 ([Yu], Jacobi-Trudi formula)**.** *Schur multiple Eisenstein series also satisfy the Jacobi-Trudi formula.*

Example 4. *For example, when* $\lambda/\mu=(4,3,2)/(2,1)$*, with* $a,b,c,d,e,f\in\mathbb{N}_{\geq 2}$*, we have*

$$G\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline &d&e&f\\\hline &c&d\\\cline{2-3}a&b\\\cline{1-2}\end{array};\tau\right)=\det\begin{pmatrix}G(a;\tau)&G(d,c,b,a;\tau)&G(e,d,c,b,a;\tau)&G(f,e,d,c,b,a;\tau)\\1&G(d,c,b;\tau)&G(e,d,c,b;\tau)&G(f,e,d,c,b;\tau)\\0&G(d;\tau)&G(e,d;\tau)&G(f,e,d;\tau)\\0&0&1&G(f;\tau)\end{pmatrix}.$$

Lemma 2.5 ([Yu])**.** *For* $k\geq 2$*, we have*

$$\exp\left(\sum_{i\geq 1}\frac{(-1)^{i-1}}{i}G(ik;\tau)X^i\right)=\sum_{n=0}^{\infty}G(\underbrace{k,\ldots,k}_{n};\tau)X^n.$$

Lemma 2.5 is an application of Hoffman-Ihara's [HI] result. It allows us to rewrite the multiple Eisenstein series with the index that all variables are k, as a polynomial in the Eisenstein series with

index $k \times l$ for $l \in \mathbb{N}$. By choosing a special case where Young tableau with all variables are same, Corollary 2.4 tell us that these Schur multiple Eisenstein series can be written as a polynomial of multiple Eisenstein series with same variables. By lemma 2.5, it can also be written as a polynomial of Eisenstein series with multiple indices. On the other hand, we have the following relations:

$$G(2;\tau) = G\left(\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline \end{array};\tau\right), \; G(4;\tau) = G\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline \end{array};\tau\right) - G\left(\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array};\tau\right),$$

$$G(6;\tau) = G\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array};\tau\right) - G\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array};\tau\right) + G\left(\begin{array}{|c|}\hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array};\tau\right).$$

Following these formulas, we can then obtain the modularity results.

Corollary 2.6 ([Yu], Modularity)**.** *Let $\Bbbk \in \mathrm{YT}$ with $k_{i,j} = k \geq 2$, then*

(i) $G(\Bbbk;\tau) \in \mathbb{Q}[G(kl;\tau)|l \geq 1]$.

*(ii) If $k = 2$, $G(\Bbbk;\tau)$ is quasi modular form, and **every** quasi modular forms can be written as a linear combination of these $G(\Bbbk;\tau)$.*

(iii) For even $k \geq 4$, $G(\Bbbk;\tau)$ is a modular form.

2.2 Algebra structure of Young tableaux

Let $\mathbb{Q}\,\mathrm{YT}$ be the $\mathbb{Q}$-vector space generated by the set YT. Let $D_1, \ldots D_r$ be non-empty subsets of the skew Young diagram $D(\lambda/\mu)$ that provide a disjoint decomposition of $D(\lambda/\mu)$, i.e., $D(\lambda/\mu) = D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_r$. A tuple $(D_1, \ldots, D_r)$ with $D_a \subset D(\lambda/\mu)$ is called semi standard decomposition of λ/μ if

(i) $D(\lambda/\mu) = D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_r$,

(ii) the Young tableau $(t_{ij}) \in YT(\lambda/\mu)$ with $t_{ij} = a$ if $(i,j) \in D_a (a = 1, \ldots, r)$ is semi standard.

Let $SSD(\lambda/\mu)$ denote the set of all semi-standard decompositions of $D(\lambda/\mu)$. For example,

$$SSD((2,1)) = SSD\left(\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \end{array}\right) = \left\{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}\right\},$$

where in the case $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \end{array}$, $D_1 = \{(1,1),(2,1)\} = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \end{array}$, $D_2 = \{(2,1)\} = \begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \end{array}$.

Define the linear map:

$$\begin{aligned} L : \mathbb{Q}\,\mathrm{YT} &\longrightarrow \mathfrak{H}^1_* \\ \Bbbk = (k_{i,j}) &\longmapsto \sum_{((D_1,\ldots,D_r)\in SSD(\lambda/\mu))} z_{\sum_{(i,j)\in D_1} k_{i,j}} \cdots z_{\sum_{(i,j)\in D_r} k_{i,j}}. \end{aligned}$$

Let the space $\mathcal{Y}$ be defined as:

$$\mathcal{Y} = {}^{\mathbb{Q}\,\mathrm{YT}}\!\diagup_{\ker(L)}.$$

By definition, we have $\mathcal{Y} \cong \mathfrak{H}^1$ as $\mathbb{Q}-$vector space.

We can express the product of two Schur multiple Eisenstein series as a single Schur multiple Eisenstein series by placing one Young tableau on the top right of the other:

$$G\left(\begin{array}{|c|c|}\hline \multicolumn{1}{|c|}{} & a & b \\ \hline c & d \\ \cline{1-2} e \\ \cline{1-1} f \\ \cline{1-1}\end{array}\ ;\tau\right) G\left(\begin{array}{|c|c|}\hline g & h \\ \hline i \\ \cline{1-1}\end{array}\ ;\tau\right) = G\left(\begin{array}{|c|c|}\hline \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & g & h \\ \cline{3-4} \multicolumn{1}{|c|}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & i \\ \cline{2-3} \multicolumn{1}{|c|}{} & a & b \\ \cline{2-3} c & d \\ \cline{1-2} e \\ \cline{1-1} f \\ \cline{1-1}\end{array}\ ;\tau\right).$$

Following this idea, we define the harmonic product $\check{*}$ of Young tableaux by attaching one to the top right of the other. For tuples $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\lambda' = (\lambda'_1 \ldots, \lambda'_m)$, $\mu' = (\mu'_1, \ldots, \mu'_m)$ and Young tableaux $\Bbbk = \Bbbk_{\lambda/\mu}$, $\Bbbh = \Bbbh_{\lambda'/\mu'} \in \mathrm{YT}$, we define:

$$\Bbbk \check{*} \Bbbh = \mathbb{I}_{\alpha/\beta},$$

where the Young diagram α/β is given by $\alpha = (\lambda'_1 + \lambda_1, \lambda'_1 + \lambda_2, \ldots, \lambda'_1 + \lambda_n, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_m)$ and $\beta = (\mu_1 + \lambda'_1, \ldots, \mu_n - \lambda'_1, \mu'_1, \ldots, \mu'_m)$.

Theorem 2.7 ([Yu])**.** $(\mathcal{Y}, \check{*})$ *is a algebra.*

Proposition 2.8 ([Yu])**.** *For* $\Bbbk,\ \Bbbh \in \mathrm{YT}$*, we have:*

$$L(\Bbbk \check{*} \Bbbh) = L(\Bbbk) * L(\Bbbh).$$

This proposition shows L is a bijective algebra morphism from $(\mathcal{Y}, \check{*})$ to $(\mathfrak{H}^1, *)$.

On the other hand, following the Fourier expansion (2.4), Schur multiple Eisenstein series can be written as a decomposition of Schur multiple zeta values and Schur type $\check{g}$:

$$G(\Bbbk_{\lambda/\mu}; \tau) = \sum_{\mu \subseteq \eta \subseteq \lambda} \zeta(\Bbbk_{\eta/\mu}) \check{g}(\Bbbk_{\lambda/\eta}).$$

Forcing on the index, we can generalize this decomposition to the $\mathbb{Q}\,\mathrm{YT}$ as the deconcatenation coproduct $\check{\Delta}$,

$$\begin{aligned} \check{\Delta} : \mathbb{Q}\,\mathrm{YT} &\longrightarrow \mathbb{Q}\,\mathrm{YT} \otimes \mathbb{Q}\,\mathrm{YT} \\ \Bbbk_{\lambda/\mu} &\longmapsto \sum_{\mu \subseteq \eta \subseteq \lambda} \Bbbk_{\eta/\mu} \otimes \Bbbk_{\lambda/\eta}. \end{aligned}$$

Proposition 2.9. *For* $\Bbbk \in \mathrm{YT}$*, we have*

$$L(\check{\Delta}(\Bbbk)) = \Delta(L(\Bbbk)).$$

Note that both the harmonic product and the deconcatenation coproduct are graded by the number of boxes in the Young tableaux. From this, we obatin the following results:

Theorem 2.10 ([Yu])**.** *(i)* $(\mathcal{Y}, \check{\Delta})$ *is a coalgebra, which is isomorphic to* $(\mathfrak{H}^1, \Delta_{dec})$

(ii) $(\mathcal{Y}, \check{*}, \check{\Delta})$ *is a Hopf-algebra, which is isomorphic to* $(\mathfrak{H}^1, *, \Delta_{dec})$.

Further, without considering the linear map L, we can also show the following:

Theorem 2.11 ([Yu])**.** $(\mathbb{Q}\,\mathrm{YT}, \check{*}, \check{\Delta})$ *is a graded-Hopf algebra.*

This theorem implies that for any symmetric multiple Schur function F, we can find two symmetric multiple Schur function U and V such that $F = \sum U \otimes V$, and F satisfy the stuffle relation.

3 Future work

Future work will be carried out on two fronts in the short term. The first area of focus is the refinement of Theorem 2.10 and 2.11. One of the most important features of being a Hopf algebra is that it consists of an antipode S. While we can technically write the antipode on the Hopf-algebra $\mathcal{Y}$ using the inverse of the map L on the antipode in $\mathfrak{H}_*^1$. But it does not relate directly to a transformation of Young tableaux. Our goal is to represent the antipode by cutting and inverting the Young tableaux, and this representation should be suitable for both $\mathbb{Q}\,\mathrm{YT}$ and $\mathcal{Y}$.

The second area of focus is generalized the shuffle product $\sqcup\!\sqcup$ to Schur multiple Eisenstein series and $\mathbb{Q}\,\mathrm{YT}$. Hirose[HMO] provides a Yamamoto integral representation of the Schur multiple zeta values with same diagonal variables. Although, for the moment we cannot find an exact iterated integral representation of Eisenstein series. Bachmann and Tasaka [BT] discovered an explicit connection between the Fourier expansion of multiple Eisenstein series and the Goncharov coproduct on Hopf algebras of iterated integrals. We hope to follow these ideas to build a connection between $(\mathbb{Q}\,\mathrm{YT}, \check{\sqcup\!\sqcup}, \check{\Delta}_{Gon})$ and Schur multiple Eisenstein series. Our task will be to define $\check{\sqcup\!\sqcup}$ and $\check{\Delta}_{Gon}$ in a precise manner and to study the algebra structure of $(\mathbb{Q}\,\mathrm{YT}, \check{\sqcup\!\sqcup}, \check{\Delta}_{Gon})$.

References

[Ba] H. Bachmann: *Multiple Zeta-Werte und die Verbindung zu Modulformen durch Multiple Eisensteinreihen*, Master thesis, Hamburg University (2012).

[BT] H. Bachmann, K. Tasaka: *The double shuffle relations for multiple Eisenstein series*, Nagoya Math. Journal **230** (2017), 1–33.

[GKZ] H. Gangl, M. Kaneko, D. Zagier: *Double zeta values and modular forms*, in "Automorphic forms and zeta functions" World Sci. Publ., Hackensack, NJ (2006), 71–106.

[HMO] M. Hirose, H. Murahara, T. Onozuka: *Integral expressions for Schur multiple zeta values*, Indagationes Mathematicae **35** (2024),1197-1211.

[Ho] M.E. Hoffman: *Quasi-shuffle products*, J. Algebraic Combin. **11** (2000), 49–68.

[HI] M.E. Hoffman, K. Ihara: *Quasi-shuffle products revisited*, J. Algebra **481** (2017), 293–326.

[NPY] M. Nakasuji, O. Phuksuwan and Y. Yamasaki: *On Schur multiple zeta functions: a combinatoric generalization of multiple zeta functions*, Adv. Math. **333** (2018), 570–619.

[Ya] Y. Yamasaki: *Evaluations of multiple Dirichlet L-values via symmetric functions*, J. Number Theory **129** (2009), no. 10, 2369–2386.

[Yu] J. Yu: *Schur mutliple Eisenstein series*, in preparation.

Iwasawa theory for weighted graphs *
(荷重グラフの岩澤理論)

九州大学 大学院マス・フォア・イノベーション連係学府
足立 大雅 (Taiga ADACHI) †

概要

イデアル類群に対して始まった岩澤理論の研究は, その後, 楕円曲線や p 進 Galois 表現等の岩澤理論へと高度な発展を遂げている. 別方向の発展として, 結び目理論やグラフ理論のように整数論とは異なる分野や対象に対する岩澤理論的現象の研究が挙げられる. 特に, グラフの岩澤理論は 2020 年頃から論文が発表され始め, 近年大きな発展を遂げている比較的新しい分野である.

1 導入

整数論において, 代数体のイデアル類群の位数 (類数) や構造を調べることは非常に重要な研究テーマである. 岩澤健吉は, 代数体のある無限族における類数の漸近挙動を記述することに成功した (岩澤類数公式). 岩澤類数公式は本研究の出発点となる重要な公式なので, その主張について説明する. p を素数とする. 代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{Q}}_p$ と埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定する. v_p を $v_p(p) = 1$ で正規化された $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の p 進付値とする. 代数体 K に対して, $\mathrm{Cl}(K)$ で K のイデアル類群を表すものとする.

定理 1.1 ([Iwa59], [CM81, Theorem I])**.** *K を代数体, K_∞/K を $\mathbb{Z}_p^d$-拡大 ($d \in \mathbb{N}$), K_n を $\mathbb{Z}_p^d$ の部分群 $(p^n\mathbb{Z}_p)^d$ に (無限次 Galois 理論により) 対応する K_∞/K の中間体とする. つまり, 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\mathrm{Gal}(K_n/K) \cong (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$ となる, 以下の K の代数拡大塔を考える.*

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n \subset \cdots$$

このとき, 非負整数 μ, λ が存在して

$$v_p(\#\,\mathrm{Cl}(K_n)) = (\mu p^n + \lambda n + O(1))p^{(d-1)n} \ (n \to \infty).$$

全ての辺に重み 1 (自明な重み) がかかるグラフに対しては, 定理 1.1 の類似が以下の先行研究により得られている. ただし, $d \geq 2$ の場合には定理 1.1 よりも精密な形が得られている.

- ($d = 1$ のとき) Gonet [Gon22], Vallières [Val21], McGown–Vallières ([MV23], [MV24]).
- ($d \geq 2$ のとき) DuBose–Vallières [DV23], Kleine–Müller [KM24a].

---

* 本稿は, 水野宏亮氏 (名古屋大学) と舘野荘平氏 (名古屋大学) との共同研究に基づく.

† E-mail: adachi.taiga.873@s.kyushu-u.ac.jp

証明の手法として, (i) グラフの Jacobian を調べる加群論的アプローチ, (ii) グラフの Artin–Ihara L 関数の (導関数の) 特殊値を調べる解析的アプローチの 2 つが挙げられる. 上述した先行研究では, [Gon22] と [KM24a] の 2 つが (i) の手法で, それ以外は (ii) の手法をとっている. さらに Ray–Vallières [RV22] は, (ii) の手法により, 自明な重みを持つグラフの Galois 被覆による μ と λ の変化を $d = 1$ の場合に記述する公式を得ている. これは整数論における木田の公式のグラフ類似となっている. 本研究では, (ii) の手法を用いて以下の結果を得ることができた.

- 定理 1.1 の荷重グラフにおける類似 (の精密化).
- Ray–Vallières [RV22] の, $d \geq 2$ で荷重グラフの場合を含む形への一般化.
- 定理 1.1 の類似に用いた手法や考えを応用して, グラフの離散時間量子ウォークの遷移行列の固有多項式に固有値以外の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の元を代入したときの値の漸近挙動の記述.

2 グラフ理論の用語

本節では, 主結果の説明に必要なグラフ理論の用語について述べる. 本稿はグラフの岩澤理論という分野の紹介も兼ねているので, 以下に (筆者の好みではあるが) 文献を挙げておく. (自明な) グラフの被覆や Artin–Ihara L 関数については, Terras 氏のテキスト [Ter11] で述べられている. Voltage assignment を用いた被覆や L 関数の定義など, 岩澤理論に必要な概念については, 例えば, Gonet 氏の博士論文 [Gon21], 片岡氏の論文 [Kat24a], McGown–Vallières の論文 [MV24] を挙げておく.

2.1 グラフの被覆

定義 2.1. 荷重対称有向グラフ (weighted symmetric digraph) X とは, 以下のデータからなる組 $(V_X, \mathbb{E}_X, \mathrm{inc}, \bar{\cdot})$ のことである:

頂点集合 V_X, 有向辺からなる集合 $\mathbb{E}_X$, 重み関数 $w_X : \mathbb{E}_X \to \overline{\mathbb{Q}}_p$, 写像 $\mathrm{inc} : \mathbb{E}_X \ni e \mapsto (o_X(e), t_X(e)) \in V_X \times V_X$, 写像 $\bar{\cdot} : \mathbb{E}_X \to \mathbb{E}_X$ で, 以下の条件を満たすようなもの.

- $\bar{e} \neq e$, $\bar{\bar{e}} = e$,
- $o_X(\bar{e}) = t_X(e)$, $t_X(\bar{e}) = o_X(e)$.

$o(e)$ (resp. $t(e)$) を $e \in \mathbb{E}_X$ の**始点** (resp. **終点**) といい, $\bar{e}$ を e の **inverse edge** という. 単に**荷重有向グラフ (weighted digraph)** というときは, inverse edge $\bar{e}$ の存在を仮定しないものとする.

以下, 本稿では X を荷重対称有向グラフとする. また, 本稿で扱われるグラフは全て有限グラフ, すなわち $\#V_X$, $\#\mathbb{E}_X < \infty$ とする. さらに, $V_X := \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, $\mathbb{E}_{ij} := \{e \in \mathbb{E}_X \mid o(e) = v_i,\ t(e) = v_j\}$, $\mathbb{E}_{X,v} := \{e \in \mathbb{E}_X \mid o(e) = v\}$ $(v \in V_X)$ とおく.

定義 2.2. X の**隣接行列 (adjacency matrix, weighted matrix)** $\boldsymbol{W}(X)$ を

$$\boldsymbol{W}(X) := \left(\sum_{e \in \mathbb{E}_{ij}} w(e) \right)_{i,j}$$

と定義する.

定義 2.3. X' を荷重有向グラフとする.

$$X' \text{ が } \boldsymbol{X} \text{ の部分グラフである} \overset{\text{def}}{\iff} \begin{cases} \bullet\ V_{X'} \subseteq V_X,\ \mathbb{E}_{X'} \subseteq \mathbb{E}_X, \\ \bullet\ w_X|_{\mathbb{E}_{X'}} = w_{X'}. \end{cases}$$

以降, X, Y を連結荷重対称有限有向グラフとする.

定義 2.4. 射 $f : Y \to X$ を二つの写像 $f_V : V_Y \to V_X$ と $f_{\mathbb{E}} : \mathbb{E}_Y \to \mathbb{E}_X$ の組 $(f_V, f_{\mathbb{E}})$ で, 任意の $e \in \mathbb{E}_Y$ に対して以下の条件

- $\mathrm{inc}_X(f_{\mathbb{E}}(e)) = (f_V(o_Y(e)), f_V(t_Y(e)))$,
- $\overline{f_{\mathbb{E}}(e)} = f_{\mathbb{E}}(\bar{e})$,
- $w_X(f_{\mathbb{E}}(e)) = w_Y(e)$

を満たすものとする.

定義 2.5. 射 $f : Y \to X$ が**同型**である $\overset{\text{def}}{\iff}$ f_V, $f_{\mathbb{E}}$ が全単射である.
Y と X の間に同型射が存在するとき, $Y \cong X$ と表す.

定義 2.6. 射 $\pi : Y \to X$ が**被覆**である $\overset{\text{def}}{\iff}$
$\begin{cases} \bullet\ \pi_V \text{と} \pi_{\mathbb{E}} \text{が全射である.} \\ \bullet\ \text{任意の } v \in V_Y \text{に対して}, \pi_{\mathbb{E}}|_{\mathbb{E}_{Y,v}} : \mathbb{E}_{Y,v} \to \mathbb{E}_{X,\pi_V(v)} \\ \quad \text{が全単射である (局所同相性).} \end{cases}$

Remark 2.7. 上記の被覆は正確には「不分岐」被覆である. 本稿では不分岐被覆のみを扱う. 分岐被覆の岩澤理論に関しては Gambheera–Vallières [GV24], 片岡 [Kat24b], Kundu–Müller [KM24b] により研究されている.

被覆 $\pi : Y \to X$ に対して, その被覆変換群を $\mathrm{Aut}_\pi(Y) := \{\text{同型射 } \sigma : Y \xrightarrow{\sim} Y \mid \pi \circ \sigma = \pi\}$ と定める.

定義 2.8. 被覆 $\pi : Y \to X$ が **Galois** である $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $v \in V_X$ に対して, $\#\pi_V^{-1}(v) = \#\,\mathrm{Aut}_\pi(Y)$.
このとき, $\mathrm{Gal}(Y/X) := \mathrm{Aut}_\pi(Y)$ と表し, これを **Galois 被覆 $\boldsymbol{Y/X}$ の Galois 群**という.

2.2 Weighted complexity

本小節では, 整数論における類数の荷重グラフ類似にあたる weighted complexity を導入する.

定義 2.9. T を X の部分グラフ, $v \in V_X$ とする. T が **$\boldsymbol{v}$ を根とする全域有向木**である $\overset{\text{def}}{\iff}$ $V_T = V_X$ であり, 任意の $v'(\neq v) \in V_X$ に対して, 道 $C = e_1 \dots e_r$ で $o(e_1) = v$ かつ $t(e_r) = v'$ となるものが一意的に存在する.

定義 2.10. X を連結荷重対称有向グラフとし, $\boldsymbol{W}(X)$ が対称行列であるとする. X の **weighted**

complexity を

$$\kappa^W(X) := \sum_T \left(\prod_{e \in \mathbb{E}_T} w(e) \right)$$

と定義する. ただし, T は $v \in V_X$ を根とする X の全域有向木全体を渡るものとする.

Remark 2.11. Weighted complexity について, 以下の補足をしておく.

- $\boldsymbol{W}(X)$ が対称行列となるときは, $\kappa^W(X)$ は根 v の取り方に依存しない.
- X が自明な重みを持つ, すなわち, 任意の $e \in \mathbb{E}_X$ に対して $w(e) = 1$ となるときは, $\kappa^W(X)$ は v を根とする X の全域有向木の数に一致する.

2.3 $\mathbb{Z}_p^d$-被覆塔

定義 2.12. G を群とする. 写像 $\alpha : \mathbb{E}_X \to G$ が **voltage assignment** である $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $e \in \mathbb{E}_X$ に対して, $\alpha(\bar{e}) = \alpha(e)^{-1}$.

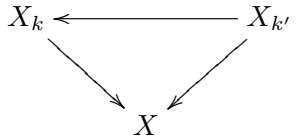
G を有限群, $\alpha : \mathbb{E}_X \to G$ を voltage assignment とする.
Voltage assignment を用いて, voltage cover $Y := X(G, \alpha)$ を以下の手順で構成することができる:

$$V_Y := V_X \times G,\ \mathbb{E}_Y := \mathbb{E}_X \times G,\ w_Y(e, g) := w_X(e)((e, g) \in \mathbb{E}_Y)$$
$$o_Y(e, g) := (o_X(e), g),\ t_Y(e, g) := (t_X(e), g\alpha(e)),\ \overline{(e, g)} := (\bar{e}, g\alpha(e))$$

により定義することができる. 以下の事実が, 重みが自明な場合と同様にして示せる.

命題 2.13 (cf. [Gon21, Theorem 8])**.** $X(G, \alpha)$ が連結グラフであるならば, $X(G, \alpha)/X$ は Galois 被覆であり, その Galois 群は G と同型である. 逆に, Y/X が有限 Galois 被覆であり, その Galois 群を G とするならば, voltage assignment $\alpha : \mathbb{E}_X \to G$ が存在して $Y \cong X(G, \alpha)$ となる.

$\alpha : \mathbb{E}_X \to \mathbb{Z}_p^d$ を voltage assignment とする. 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, α と自然な射影 $p_n : \mathbb{Z}_p^d \twoheadrightarrow (\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$ の合成 $p_n \circ \alpha$ を α_n と表すことにする. $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^d$ は有限群なので先述した構成法を適用することができ, compatible system $\{X_n := X(\Gamma_n, \alpha_n)\}_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$, すなわち, 任意の $k' > k$ に対して, 以下の図式



が可換となるような族が構成できる. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, X_n/X が Galois 被覆となるときに

$$X = X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow \ldots \leftarrow X_n \leftarrow \ldots \tag{1}$$

を $\boldsymbol{(X, \alpha)}$ **の** $\boldsymbol{\mathbb{Z}_p^d}$**-被覆塔**という.

Remark 2.14. Voltage assignment $\alpha : \mathbb{E}_X \to \mathbb{Z}_p^d$ を与えれば $\{X_n\}_{n \geq 0}$ を構成することは出来るが, X_n/X が Galois 被覆になるとは限らない. X_n/X が連結であることと Galois 被覆であること

は同値である．Voltage cover が連結になる必要十分条件は [Gon21, Theorem 4] により与えられている．

3　主定理と具体例

本節では主定理とその具体例を述べる．具体例の図では見易さを重視して, 任意の $e \in \mathbb{E}_X$ に対して, e と $\bar{e}$ をまとめて一本の無向辺で表している．(任意の $e \in \mathbb{E}_X$ に対して $w(e) = w(\bar{e})$ が成り立つ場合には, このような表記は正統化されることに注意する.) 始めに, 岩澤類数公式の荷重グラフ類似について述べる．以降, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\kappa_n^W := \kappa^W(X_n)$ とする．

定理 3.1 ([AMT24, Theorem 3.9])**.** *X を連結荷重対称有限有向グラフ, $\alpha : \mathbb{E}_X \to \mathbb{Z}_p^d$ を voltage assignment とする．(X, α) の $\mathbb{Z}_p^d$-被覆塔 (1) を考える．以下の条件*

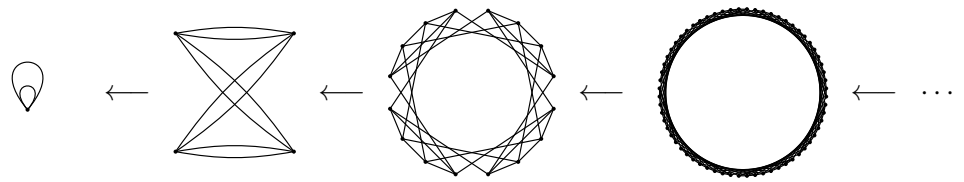
- *任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, X_n が連結であり, $W(X_n)$ が対称行列となる．*
- *任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $\kappa_n^W \neq 0$.*

を仮定する．このとき, $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_{d-1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}, \nu \in \mathbb{Q}$ が存在して, 十分大きな全ての n に対して

$$v_p(\kappa_n^W) = (\mu p^n + \lambda n)p^{(d-1)n} + \left(\sum_{i=1}^{d-1} (\mu_i p^n + \lambda_i n) p^{(d-i-1)n} \right) + \nu.$$

Remark 3.2. 定理 3.1 の 2 つ目の条件が満たされない, すなわち, ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $\kappa_{n_0}^W = 0$ になるときには, 任意の $n \geq n_0$ に対して $\kappa_n^W = 0$ となることが命題 4.2 の帰結として得られる．

例 3.1 ([AMT24, Example 25])**.** *$p = 2$, $d = 2$, X を 1 つの頂点と 2 つのループ (内側から順に e_1, e_2 とする) を持つグラフで重み関数を $w_X(e_i) = w_X(\bar{e}_i) := a_i \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ $(i = 1, 2)$ とする．Voltage assignment を $\alpha : \mathbb{E}_X \to \mathbb{Z}_2^2$ を $\alpha(e_1) = (0, 1)$, $\alpha(e_2) = (1, 0)$ により定めると, (X, α) の $\mathbb{Z}_2^2$-塔は*



となる．岩澤不変量は, $\mu = \max\{v_2(a_1), v_2(a_2)\}$, $\lambda = 2$ となる．

次に, 木田の公式の荷重グラフ類似について述べる．

定理 3.3 ([AMT24, Theorem 4.1])**.** *X を連結荷重対称有限有向グラフ, $\alpha : \mathbb{E}_X \to \mathbb{Z}_p^d$ を voltage assignment とする．(X, α) の $\mathbb{Z}_p^d$-被覆塔 (1) を考える．$\pi : Y \to X$ を次数 $[Y : X] := \#\mathrm{Gal}(Y/X)$ が p 冪の Galois 被覆とする．以下の条件が満たされるとする．*

- *任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $Y_n := Y(\Gamma_n, \alpha_n \circ \pi_{\mathbb{E}})$ が連結であり, $\boldsymbol{W}(X_n), \boldsymbol{W}(Y_n)$ は対称行列となる．*

- Y/X が部分被覆として如何なる X_n も含まない.
- 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $\kappa^W(Y_n) \neq 0$ となる.

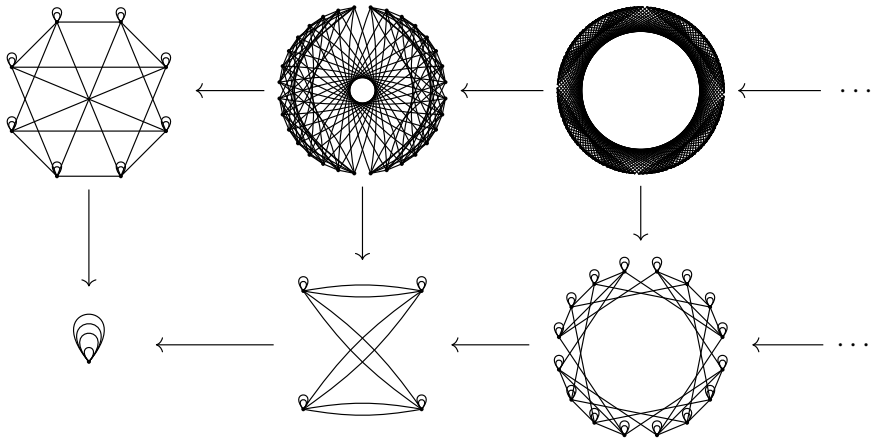
以下の compatible な 2 つの $\mathbb{Z}_p^d$-塔を考える.

$$\begin{array}{ccccccccc} Y = Y_0 & \longleftarrow & Y_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & Y_n & \longleftarrow & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ X = X_0 & \longleftarrow & X_1 & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & X_n & \longleftarrow & \cdots \end{array}$$

このとき, $\mu(X, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \mu(Y, \alpha \circ \pi_{\mathbb{E}}) = 0$ であり, これらの同値な条件が満たされるとき, 以下の関係式が成り立つ.

$$\lambda(Y, \alpha \circ \pi_{\mathbb{E}}) = \begin{cases} [Y : X](\lambda(X, \alpha) + 1) - 1 & (d = 1), \\ [Y : X]\lambda(X, \alpha) & (d \geq 2). \end{cases}$$

例 3.2 ([AMT24, Example 26])**.** $p = 2$, $d = 2$ とする. X を頂点 1 つ, ループ 4 つ (内側から順に e_1, e_2, e_3, e_4 とする) からなるグラフとする. $w_X(e_i) = w_X(\bar{e}_i) := a_i \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ $(1 \leq i \leq 4)$ とする. ただし, $a_1, a_2 \neq 0$ とする. Voltage assignment $\alpha : \mathbb{E}_X \to \mathbb{Z}_2^2$ を $\alpha(e_1) = (0, 1)$, $\alpha(e_2) = (1, 0)$, $\alpha(e_3) = \alpha(e_4) = 0$ により定める. $Q_8 := \langle \sigma, \tau \mid \sigma^4 = 1,\ \tau^2 = \sigma^2,\ \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$ を四元数群, voltage assignment $\beta : \mathbb{E}_X \to Q_8$ を $\beta(e_1) = \beta(e_2) := 1_{Q_8}$, $\beta(e_3) := \sigma$, $\beta(e_4) := \tau$ により定め, $Y := X(Q_8, \beta)$ とおく. このとき, 定理 3.3 における図式は以下のようになる.



§4 で定義する $Q_{X,\alpha}(T)$ と $Q_{Y,\alpha\circ\pi_{\mathbb{E}}}(T)$ を用いて計算すると

$$\mu(X, \alpha) = \mu(Y, \alpha \circ \pi_{\mathbb{E}}) = \max\{v_2(a_1), v_2(a_2)\},\ \lambda(X, \alpha) = 2,\ \lambda(Y, \alpha \circ \pi_{\mathbb{E}}) = 16 = \lambda(X, \alpha) \times \#Q_8$$

となり, X と Y に対して定理 3.3 が成り立つことが確認できた.

4 証明の概要

本節では定理 3.1 の証明の概要を述べる. 詳細に関しては, 他の定理の証明も含め [AMT24] を参照してほしい. 第 1 節でも述べたように, グラフの Artin–Ihara L 関数を用いて証明する. X,

$\alpha_n : \mathbb{E}_X \to \Gamma_n$, 指標 $\psi \in \widehat{\Gamma}_n := \mathrm{Hom}(\Gamma_n, \overline{\mathbb{Q}})$ に対して, Artin–Ihara L 関数 $L_X(\psi, \alpha_n, t) \in \overline{\mathbb{Q}}_p[\![t]\!]$ が定義される (詳細は [AMT24, §2.3], [MS04], [Sat07] を参照). グラフの L 関数に対しては, **3 項行列式公式 (伊原型行列式表示)** と呼ばれる以下の重要な公式がある.

定理 4.1 ([Sat07, Theorem 6])**.** 荷重対称有向グラフ X と任意の $\psi \in \widehat{\Gamma}_n$ に対して

$$L_X(\psi, \alpha_n, t)^{-1} = (1-t^2)^{\frac{1}{2}\#\mathbb{E}_X - \#V_X} \det\left(\boldsymbol{I}_m - t\sum_{\sigma\in\Gamma_n}\psi(\sigma)\boldsymbol{W}(\sigma) + t^2(\boldsymbol{D}(X) - \boldsymbol{I}_m)\right). \quad (2)$$

ここで, $\boldsymbol{I}_m$ は m 次単位行列を表し, 2 つの m 次正方行列を $\boldsymbol{W}(\sigma) := \left(\sum_{\substack{e\in\mathbb{E}_{ij}\\ \alpha_n(e)=\sigma}} w(e)\right)_{i,j}$, $\boldsymbol{D}(X) := \left(\delta_{ij}\sum_{e\in\mathbb{E}_{X,v_i}}\right)_{i,j}$ とする.

ここで, 式 (2) の右辺の行列式を $h_X(\psi, \alpha_n, t)$ と表すことにする. この h_X を用いることで, κ_n^W と κ_0^W の漸化式を得ることができる.

命題 4.2 ([MS03, Corollary 1] と [AMT24, Theorem 3.2] の帰結)**.** X を荷重対称有向グラフ, $\alpha : \mathbb{E}_X \to \mathbb{Z}_p^d$ を voltage assignment とする. $\mathbb{Z}_p^d$-被覆塔 (1) を考える. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, X_n が連結で $\kappa_n^W \neq 0$ となるとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\kappa_n^W = \frac{\kappa_0^W}{p^{nd}} \prod_{1\neq\psi\in\widehat{\Gamma}_n} h_X(\psi, \alpha_n, 1). \quad (3)$$

Remark 4.3. 水野–佐藤 [MS03, Corollary 1] では, total weight $\sum_{e\in\mathbb{E}_X} w(e)$ が $2m$ とは一致しない, という条件が課されている. [AMT24, Theorem 3.2] では表現論的手法を用いて, より精密な議論を行うことにより total weight の仮定を外すことに成功した. Total weight の仮定は自明な重みでは Euler 標数 $\chi(X) := \#V_X - (1/2)\#\mathbb{E}_X$ が 0 でない, 言い換えると種数 (cycle の数) が 1 でないという条件になる. しかし, 重みが一般の場合には, cycle が 1 以外のかなり多くのグラフが除外されてしまう. そういう観点でも, total weight の仮定を外せたのは新規性が高いと言えるだろう.

定義 4.4. $K := \mathbb{Q}_p(\zeta_p, \mathrm{Im}\, w_X)$, K の整数環を $\mathcal{O} := \mathcal{O}_K$ とする. m 次正方行列 $\boldsymbol{W}_\alpha$ を

$$\boldsymbol{W}_\alpha := \left(\sum_{e\in\mathbb{E}_{ij}} (1+T_1)^{a_1(e)}\cdots(1+T_d)^{a_d(e)} w(e)\right)$$

と定義する. ただし, 各 $e \in \mathbb{E}_X$ に対して $\alpha(e) = (a_1(e), \ldots, a_d(e)) \in \mathbb{Z}_p^d$ $(a_i(e) \in \mathbb{Z}_p)$ とする. さらに $Q_{X,\alpha}(T) \in \Lambda_d \otimes_{\mathcal{O}} K$ を以下のように定義する.

$$Q_{X,\alpha}(T) := Q_{X,\alpha}(T_1, \ldots, T_d) := \det(\boldsymbol{D}(X) - \boldsymbol{W}_\alpha).$$

$Q_{X,\alpha}$ と L 関数は以下の命題により関連付けられる.

命題 4.5 ([AMT24, Proposition 3.8])**.** X を荷重対称有向グラフ, $\alpha : \mathbb{E}_X \to \mathbb{Z}_p^d$ を voltage assignment とする. 任意の指標 $\psi_n = (\psi_n)_{(1)} \otimes \cdots \otimes (\psi_n)_{(d)} \in \widehat{\Gamma}_n$ $((\psi_n)_{(j)} \in \widehat{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}})$ に対して, 以下の等式が成り立つ.

$$Q_{X,\alpha}(\boldsymbol{\zeta_{\psi_n}} - \mathbf{1}) := Q_{X,\alpha}((\psi_n)_{(1)}(1) - 1, \ldots, (\psi_n)_{(d)}(1) - 1) = h_X(\psi_n, \alpha_n, 1). \quad (4)$$

上記命題を用いて定理 3.1 を証明できる. $W_n := \{\zeta \in \overline{\mathbb{Q}} \mid \zeta^{p^n} = 1\}$ とする. 式 (3) により

$$\begin{aligned} v_p(\kappa_n^W) &= v_p(\kappa_0^W) - nd + \sum_{1 \neq \psi_n \in \widehat{\Gamma}_n} v_p(h_X(\psi_n, \alpha_n, 1)) \\ &\overset{(4)}{=} v_p(\kappa_0^W) - nd + \sum_{1 \neq \psi_n \in \widehat{\Gamma}_n} v_p(Q_{X,\alpha}(\boldsymbol{\zeta_{\psi_n}} - \mathbf{1})) \\ &= v_p(\kappa_0^W) - nd + \sum_{\boldsymbol{\zeta} \in W_n^d \setminus \{(1,\dots,1)\}} v_p(Q_{X,\alpha}(\boldsymbol{\zeta} - \mathbf{1})) \end{aligned} \tag{5}$$

となる. ここで式 (5) の第 3 項の和に対して, Cuoco–Monsky [CM81, Theorem 1.7] と Monsky [Mon81, Theorem 5.6] (+[AMT24, §3.2] による修正) を用いることで定理 3.1 を示すことができる.

Remark 4.6. 定理 3.1 における μ と λ に関しては, $Q_{X,\alpha}(T)$ を用いて明示的に与えることができる.

5 グラフの離散時間量子ウォークへの応用

岩澤型公式の証明の手法を応用して, グラフにおける離散時間量子ウォークの遷移行列の固有多項式の漸近挙動を記述することができる. 本節では, $\mathbb{E}_X := \{e_1, \dots, e_l, e_{l+1} := \overline{e}_1, \dots, e_{2l} := \overline{e}_l\}$ とする. 引き続き $\mathbb{Z}_p^d$-被覆塔 (1) を考える. 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $\boldsymbol{W}(X_n)$ は必ずしも対称行列とは限らないものとし, $2l_n := \#\mathbb{E}_{X_n}$, $w_{X_n}(e) := 2/d_{o(e)}$ とする.

Remark 5.1. 今回は不分岐被覆を考えているので, 局所同相性により, 上記で与えた X_n の重み関数 w_{X_n} は voltage assignment により定まる重みと一致する.

定義 5.2. 各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と各 $1 \leq i, j \leq 2l_n$ に対して

$$u_{ij} := \begin{cases} 2/d_{o(e_i)} & (o(e_i) = t(e_j),\ \overline{e}_i \neq e_j), \\ 2/d_{t(e_i)} - 1 & (\overline{e}_i = e_j), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

と定め, $2l_n$ 次正方行列 $\boldsymbol{U_n}$ を $\boldsymbol{U_n} := (u_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2l_n}$ と定義する. この $\boldsymbol{U_n}$ を **$\boldsymbol{X_n}$ における離散時間量子ウォークの遷移行列**という.

時間 $t = t_0$ における, 量子ウォークの挙動は $\boldsymbol{U}_n^{t_0}$ により定まる. そこで, $\boldsymbol{U}_n$ の固有値を調べることが重要となるが, 以下の結果が知られている.

定理 5.3 ([EHSW06, Proposition 2.2] と [KS12, Corollary 4.2] の帰結)**.** X を連結荷重対称有限有向グラフ, $\alpha : \mathbb{E}_X \to \mathbb{Z}_p^d$ を voltage assignment とする. (X, α) の $\mathbb{Z}_p^d$-被覆塔 (1) を考える. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, X_n は連結で $w_{X_n}(e) = 2/d_{o(e)}$ とする. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $\boldsymbol{U}_n$ の $2l_n$ 個の固有値は以下の集合

$$\left\{ \frac{1}{2} a_{\boldsymbol{W}} + \frac{1}{2} i \sqrt{4 - a_{\boldsymbol{W}}^2} \;\middle|\; a_{\boldsymbol{W}} \text{は } \boldsymbol{W}(X_n) \text{ の固有値} \right\} \cup \{\pm 1\}$$

に属する.

上記の定理を踏まえて, 固有多項式に固有値以外の値を代入して得られる値の p 進付値の, $\mathbb{Z}_p^d$-塔における漸近挙動を調べることが本研究の動機の一つとなっており, 以下の結果を得ることができた.

定理 5.4 ([AMT24, Theorem 7.3])**.** X を連結荷重対称有限有向グラフ, $\alpha : \mathbb{E}_X \to \mathbb{Z}_p^d$ を voltage assignment とする. (X, α) の $\mathbb{Z}_p^d$-被覆塔 (1) を考える. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, X_n は連結で $w_{X_n}(e) = 2/d_{o(e)}$ とする. a を, 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\boldsymbol{U}_n$ の固有値にならないような $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の元とする. このとき, $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_{d-1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_{d-1}, \nu \in \mathbb{Q}$ が存在して, 十分大きな全ての n に対して

$$v_p(\det(a\boldsymbol{I}_{2l_n} - \boldsymbol{U}_n)) = (\mu p^n + \lambda n)p^{(d-1)n} + \left(\sum_{i=1}^{d-1} (\mu_i p^n + \lambda_i n) p^{(d-i-1)n} \right) + \nu.$$

定理 5.4 の証明の概要. Konno–Sato [KS12, Theorem 4.1] により示された以下の重要な関係式

$$\zeta_{X_n}(t)^{-1} = \det(\boldsymbol{I}_{2l_n} - t\boldsymbol{U}_n)$$

が証明の鍵になる. この式により

$$\det(\boldsymbol{I}_{2l_n} - t\boldsymbol{U}_n) = (1-t^2)^{-p^{dn}\chi(X)} \prod_{\psi_n \in \widehat{\Gamma}_n} h_X(\psi_n, \alpha_n, t)$$

が得られる. ここで, $u := 1/t$ として分母の u を払い, u に a を代入することで, 定理 3.1 と同様の議論で定理 5.4 を示すことができる. 岩澤不変量を計算する際には, $Q_{X,\alpha}$ の代わりに以下の Q_a を用いる.

$$Q_a(T_1, \ldots, T_d) := \det(a^2\boldsymbol{I}_m - a\boldsymbol{W}_\alpha + (\boldsymbol{D}^W(X) - \boldsymbol{I}_m)).$$

□

謝辞. 共同研究者であり, 本稿作成にもご協力くださった水野宏亮氏 (名古屋大学) と舘野荘平氏 (名古屋大学), グラフの岩澤理論に関して多くの示唆を与えてくださった片岡武典先生 (東京理科大学) に深く感謝申し上げます. また, 本研究において筆者は九州大学マス・フォア・イノベーション卓越大学院プログラムの支援を受けております. この場を借りて改めて感謝申し上げます.

参考文献

[AMT24] Taiga Adachi, Kosuke Mizuno, and Sohei Tateno, *Iwasawa theory for weighted graphs*, Preprint, arXiv:2412.01612v2 (2024).

[CM81] Albert A. Cuoco and Paul Monsky, *Class numbers in $\mathbf{Z}_p^d$-extensions*, Math. Ann. **255** (1981), no. 2, 235–258. MR 614400

[DV23] Sage DuBose and Daniel Vallières, *On $\mathbb{Z}_\ell^d$-towers of graphs*, Algebr. Comb. **6** (2023), no. 5, 1331–1346. MR 4668931

[EHSW06] David Emms, Edwin R. Hancock, Simone Severini, and Richard C. Wilson, *A matrix representation of graphs and its spectrum as a graph invariant*, Electron. J. Combin. **13** (2006), no. 1, Research Paper 34, 14. MR 2212507

[Gon21] Sophia R. Gonet, *Jacobians of Finite and Infinite Voltage Covers of Graphs*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2021, Thesis (Ph.D.)–The University of Vermont and State Agricultural College. MR 4257412

[Gon22] ———, *Iwasawa theory of Jacobians of graphs*, Algebr. Comb. **5** (2022), no. 5, 827–848. MR 4511153

[GV24] Rusiru Gambheera and Daniel Vallières, *Iwasawa theory for branched $\mathbb{Z}_p$-towers of finite graphs*, Doc. Math. **29** (2024), no. 6, 1435–1468. MR 4831263

[Iwa59] Kenkichi Iwasawa, *On Γ-extensions of algebraic number fields*, Bull. Amer. Math. Soc. **65** (1959), 183–226. MR 124316

[Kat24a] Takenori Kataoka, *Fitting ideals of Jacobian groups of graphs*, Algebr. Comb. **7** (2024), no. 3, 597–625.

[Kat24b] ———, *Kida's formula for graphs with ramifications*, Preprint, arXiv:2407.16934v1 (2024).

[KM24a] Sören Kleine and Katharina Müller, *On the growth of Jacobian in $\mathbb{Z}_p^l$-voltage covers of graphs*, To appear in Algebraic Combinatorics, arXiv:2211.09763 (2024).

[KM24b] Debanjana Kundu and Katharina Müller, *Iwasawa theory of graphs and their duals*, Preprint, arXiv:2410.11704 (2024).

[KS12] Norio Konno and Iwao Sato, *On the relation between quantum walks and zeta functions*, Quantum Inf. Process. **11** (2012), no. 2, 341–349. MR 2897588

[Mon81] Paul Monsky, *On p-adic power series*, Math. Ann. **255** (1981), no. 2, 217–227. MR 614398

[MS03] Hirobumi Mizuno and Iwao Sato, *On the weighted complexity of a regular covering of a graph*, J. Combin. Theory Ser. B **89** (2003), no. 1, 17–26. MR 1999734

[MS04] ———, *Weighted zeta functions of graphs*, J. Combin. Theory Ser. B **91** (2004), no. 2, 169–183. MR 2064866

[MV23] Kevin McGown and Daniel Vallières, *On abelian ℓ-towers of multigraphs II*, Ann. Math. Qué. **47** (2023), no. 2, 461–473. MR 4645700

[MV24] ———, *On abelian ℓ-towers of multigraphs III*, Ann. Math. Qué. **48** (2024), no. 1, 1–19. MR 4718567

[RV22] Anwesh Ray and Daniel Vallières, *An analogue of Kida's formula in graph theory*, Preprint, arXiv:2209.04890 (2022).

[Sat07] Iwao Sato, *A new Bartholdi zeta function of a graph*, Int. J. Algebra **1** (2007), no. 5-8, 269–281. MR 2343001

[Ter11] Audrey Terras, *Zeta functions of graphs*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 128, Cambridge University Press, Cambridge, 2011, A stroll through the garden. MR 2768284

[Val21] Daniel Vallières, *On abelian ℓ-towers of multigraphs*, Ann. Math. Qué. **45** (2021), no. 2, 433–452. MR 4308188

Newton polygon から計算される整環の index

東京理科大学大学院　理学研究科　数学専攻
鈴木望夢 (Nozomu SUZUKI) *

概要

Montes と Nart は Ore の定理を拡張し，整環の index が Newton polygon から計算される量と一致する必要十分条件を与えた．しかしながら，彼らは定理の証明を省略しており，また与えられた条件には若干の不足がある．本講演では修正した定理を紹介し，講演者がその証明を与えたことを報告する．

1 Introduction

K を有理数体 $\mathbb{Q}$ の有限次拡大体とする．整数論において，拡大 $K/\mathbb{Q}$ で素数 p がどのように分解するかを求める問題は基本的かつ重要であり，その手法についてもさまざまな研究が知られている．

Dedekind は 1878 年に，K の定義多項式がある条件を満たすとき，その有限体 $\mathbb{F}_p$ 上での分解と素数 p の $K/\mathbb{Q}$ の分解が対応することを示した．Dedekind の定理が適用できない多項式が存在することは知られているが，Ore は 1928 年に Newton polygon を用いることで Dedekind の定理を拡張し，より多くの多項式から素数の分解が計算できるようになった．

さらに 1992 年に Montes と Nart により Ore の定理が拡張され，適用可能な多項式が著しく増加した．Montes と Nart の定理における多項式に要求される条件は，それ自体を確認することは難しく，彼らは同じ論文でその条件に関する，多項式から容易に計算可能な判定法をも与えた．

しかしながら，彼らは論文内でその証明を省略しており，与えられた判定法にも若干の不備があったため，講演者はこの条件を修正し，その証明を与えた．本レポートでは，修正した判定法を例とともに紹介する．

* E-mail:1123702@ed.tus.ac.jp

2 Preliminaries

p を素数，$\mathbb{Q}_p$ を p 進数体とし，その代数閉包をひとつ固定して $\overline{\mathbb{Q}_p}$ とおく．$\mathbb{Q}_p$ で正規化された $\overline{\mathbb{Q}_p}$ の付値を v とする．また，$\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環とする．多項式

$$a(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_l X^l \in \mathbb{Z}_p[X]$$

に対し，

$$v(a(X)) = \min\{v(\alpha_i) \mid i = 0, 1, \ldots, l\}$$

と定め，v を $\mathbb{Z}_p[X]$ まで拡張する．多項式 $f(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$ と，$\mathbb{F}_p$ 上で既約な monic 多項式 $\varphi(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$ に対し，$0 \leq \deg a_i(X) < \deg \varphi(X)$ である $a_i(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$ を用いて，

$$f(X) = a_0(X) + a_1(X)\varphi(X) + \cdots + a_n(X)\varphi(X)^n \tag{1}$$

と一意的にかき，$\mathbb{R}^2$ 内に点の集合 $V = \{(i, v(a_i(X))) \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ をとる．これに対して，V の頂点をいくつか選んで線分で結んで作られる下に凸な折れ線 Γ であって，V の任意の点が Γ の下に存在しないようなものが一意にとれる．これを f の **φ-polygon** という．f が monic であるとき，φ-polygon の負の傾きをもつ辺全体を **principal part** という．Γ の各線分を Γ の**辺**という．S を Γ の辺としたとき，S の横軸方向の長さを S の**長さ**，縦軸方向の長さを**高さ**という．また，S の長さと高さの最大公約数を S の**次数**という．

Example 1. $p = 3$ とし，$f(X) = X^8 + X^7 + 7X^6 + 3^6X + 3^6$ とする．このとき，f の $\mathbb{F}_3$ での既約分解は $\bar{f}(X) = X^6(X+2)^2$ である．もし $\varphi(X) \neq X, X+2$ であるとき，f の φ-polygon は長さ 8, 高さ 0 の辺のみからなり，principal part をもたない．

$\varphi(X) = X$ であるとき，f の X-polygon Γ_X は Figure 1 のようになる．Γ_X の辺を右から S_1, S_2 とすると，Γ_X の principal part は S_2 である．また，例えば S_2 の長さと高さはどちらも 6 であり，したがって，次数は 6 である．

一方 $\varphi(X) = X + 2$ とすると，

$$\begin{aligned} f(X) =& (X+2)^8 - 15(X+2)^7 + 105(X+2)^6 - 448(X+2)^5 \\ &+ 1260(X+2)^4 - 2352(X+2)^3 + 2800(X+2)^2 - 1191(X+2) - 153 \end{aligned}$$

となるから，f の $(X+2)$-polygon は Figure 2 のようになる． なお，X を $X-2$ とすることで，$f(X)$ に対する $(X+2)$-polygon を考えることと $f(X-2)$ の X-polygon を考えることは同等である．すなわち，

$$g(X) := f(X-2) = X^8 - 15X^7 + 105X^6 - 448X^5 + 1260X^4 - 2352X^3 + 2800X^2 - 1191X - 153$$

の X-polygon を考えれば良い．これにより g の X-polygon と f の $(X+2)$-polygon を同一視する．

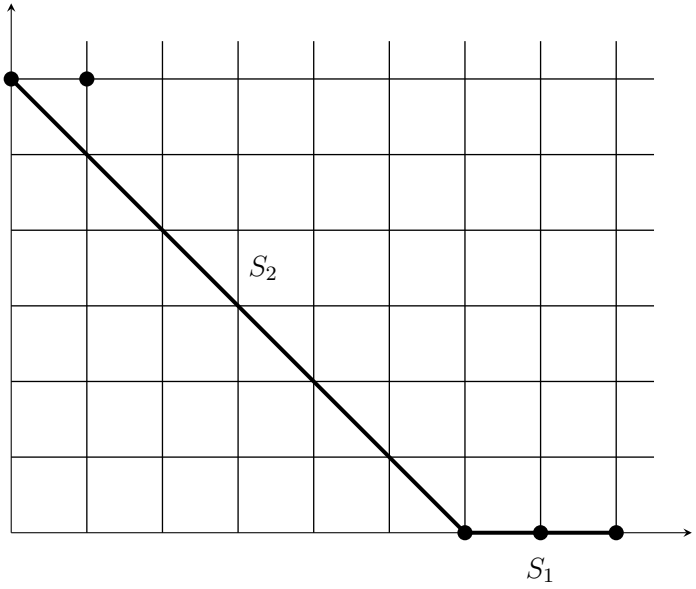


Figure 1　f の X-**polygon**

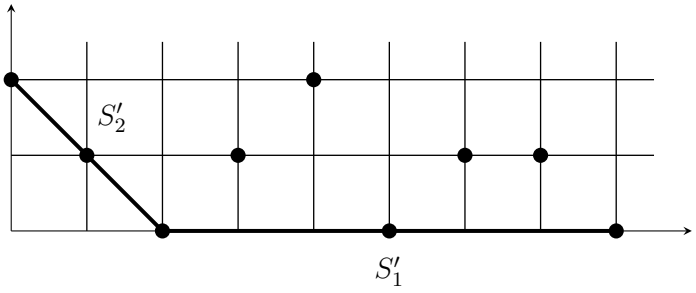


Figure 2　f の $(X+2)$-**polygon**

また，特に $\varphi(X)=X$ の場合の φ-polygon は **Newton polygon** とよばれる．

Definition 2 (associated polynomial)．上の記号の設定の下，S を φ-polygon の辺とし，その両端点を $(s_1,t_1),(s_2,t_2)$ とする．ただし，$s_1<s_2$ である．多項式 $f(X)$ の S に関する **associated polynomial** $f_S(Y)$ を次のように定義する．

$E=s_2-s_1, H=t_1-t_2, d=\gcd(E,H), e=E/d, h=H/d$ とおく．また，φ で定まる不分岐拡大を T とし，その剰余体を $\mathbb{F}_T$ とする．このとき，

$$f_S(Y)=\overline{a_{s_2}/\pi^{t_2}}(\zeta)^{-1}\sum_{i=0}^{d}\overline{a_{s_1+ie}/\pi^{t_1-ih}}(\zeta)Y^i\in\mathbb{F}_T[Y]$$

と定める．ここで，ζ は reduction $\overline{\varphi}(X)\in\mathbb{F}_p[X]$ の根である．

Example 3. Example 1 の記号を用いる．このとき

$$f_{S_1}(Y)=Y^2+Y+1=(Y+2)^2,\qquad f_{S_2}(Y)=Y^6+1=(Y^2+1)^3,$$
$$g_{S_1'}(Y)=Y^6+2Y^3+1=(Y+1)^6,\qquad g_{S_2'}(Y)=Y^2+2Y+1=(Y+1)^2$$

である．

Definition 4 (index)**.** monic な既約多項式 $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ に対し，$f(X)$ の根 α をとって，$L = \mathbb{Q}(\alpha)$ とし，その整数環を $\mathcal{O}_L$ とする．

(i)$\mathrm{i}_p(f) = v([\mathcal{O}_L : \mathbb{Z}[\alpha]])$ と定める．

(ii)$\mathrm{i}_\varphi(f)$ を，f の φ-polygon と X 軸，Y 軸に囲まれた領域内の整数格子点であって，軸上にないものの個数に $\deg\varphi$ をかけたものとして定義する．

Theorem 5（Ore [2, Theorem of the index]） 多項式 $\bar{f}(X)$ の各既約因子の $\mathbb{Z}_p[X] \to \mathbb{F}_p[X]$ による monic な引き戻しをひとつずつ選んできたものからなる集合を $\Phi \subset \mathbb{Z}_p[X]$ とする．このとき，次が成り立つ．

$$\mathrm{i}_p(f) \geq \sum_{\varphi\in\Phi} \mathrm{i}_\varphi(f).$$

Example 6. 再び Example 1 の状況を考える．このとき

$$\mathrm{i}_X(f) = 15, \quad \mathrm{i}_{X+2}(f) = 1$$

である．したがって $\mathrm{i}_3(f) \geq 16$ を得る．

Definition 7. monic 多項式 $f(X) \in \mathbb{Z}_p[X]$ を (1) のようにかいたとき，$a_n(X) = 1$ であると仮定する．f の φ-polygon の辺を $S_1, \ldots, S_g$ とし，$S = S_i$ をひとつ固定する．S に関する f の associated polynomial を $\mathbb{F}_T$ 上で

$$f_S(Y) = \psi_1(Y)^{e_1} \cdots \psi_k(Y)^{e_k}$$

と既約分解する．各 $\psi_j(Y)$ を，ζ を X とするようにして $\mathbb{Z}_p[X, Y] \to \mathbb{F}_T[Y]$ で引き戻したものを $\Psi_j(X, Y)$ とする．S に対し，E, H, d, e, h を Definition 2 のようにとる．このとき，

$$f_i^0(X) = p^H \prod_{j=1}^{k} \Psi_j(X, \varphi(X)^e/p^h)^{e_j}$$

と定め，

$$f^1(X) = f(X) - \prod_{i=1}^{g} f_i^0(X)$$

と定義する．

Example 8. 再度 Example 1 を用いることとし，$\varphi(X) = X$ とする．このとき Example 3 により

$$\begin{aligned} f_1^0(X) \cdot f_2^0(X) &= (X+2)^2 \cdot 3^6((X/3)^2+1)^3 \\ &= X^8 + 4X^7 + 31X^6 + 108X^5 + 351X^4 + 972X^3 + 1701X^2 + 2916X + 2916 \end{aligned}$$

ととることができ，これを用いることで

$$f^1(X) = -3X^7 - 24X^6 - 108X^5 - 351X^4 - 972X^3 - 1701X^2 - 2187X - 2187$$

を得る．同様に，$\varphi(X) = X + 2$ の場合，

$$g_1^0(X) \cdot g_2^0(X) = (X+1)^6(X+3)^2,$$
$$g^1(X) = -27X^7 + 45X^6 - 612X^5 + 990X^4 - 2628X^3 + 2628X^2 - 1251X - 162$$

となる．

3 Main theorem

講演者は Montes と Nart による判定法を修正し，次の定理を与え証明した．

Theorem 9（Montes-Nart の判定法の修正版 (cf.[2, Theorem 2])） Theorem 5 と同じ記号を用いる．このとき

$$\mathrm{i}_p(f) = \sum_{\varphi \in \Phi} \mathrm{i}_\varphi(f)$$

が成り立つ必要十分条件は，任意の $\varphi \in \Phi$ と，任意の f の φ-polygon の principal part の辺 S に対し，以下の条件が成り立つことである．

$$\psi(Y) \mid f_S(Y) \text{ に対し，} \quad \psi(Y)^2 \nmid f_S(Y) \text{ または } \psi(Y) \nmid f^1_{\tilde{S}}(Y).$$

ここで，$\tilde{S}$ は S を $1/e$ だけ上に並行移動して，それを延長して得られる直線である．

Example 10. Example 1 の多項式に対して Theorem 9 を適用する．Example 8 により，

$$f^1_{\tilde{S}_1}(Y) = Y^6 + 2Y^4 + 2Y^2 + 2, \quad g^1_{\tilde{S}'_1}(Y) = 2$$

であり，Example 3 より f は Theorem 9 の条件を満たすことがわかる．したがって Example 6 より

$$\mathrm{i}_3(f) = 16 \tag{2}$$

を得る．

Remark 11. Example 10 において non-principal part については条件を確認しなかった．元の Montes と Nart の主張では，すべての辺に対して条件を確認する必要があったが，実際，$g^1_{S'_2}(Y) = 0$ であるから，non-principal part S'_2 に対しては定理の条件は満たしていない．しかしながら，等式 (2) は代数計算ソフト Magma[1] による計算で確かめることができる．ゆえに定理は Theorem 9 のように修正されなければならない．

参考文献

[1] Wieb Bosma, John Cannon, and Catherine Playoust, *The Magma algebra system. I. The user language*, J. Symbolic Comput. **24** (1997), no. 3-4, 235–265, Computational algebra and number theory (London, 1993). MR MR1484478

[2] Jesús Montes and Enric Nart, *On a theorem of Ore*, J. Algebra **146** (1992), no. 2, 318–334. MR 1152908

On a torsion-free modules and semi-hereditary rings

東京理科大学創域理工学研究科数理科学専攻 / 株式会社スキルアップ NeXt
安藤遼哉 (Ryoya ANDO) *

概要

半遺伝環（semi-hereditary ring）は，必ずしも Noether 性を仮定しない可換環論において重要なクラスの 1 つである．近年，ホモロジー代数周辺の可換環論では，パーフェクトイド環論など非 Noether 環を本質的な道具として扱う議論の重要性が増してきている．歴史的には，これらの分野の研究者の主な興味の対象は Noether 環であったこともあり，Noether 性を仮定しない可換環論には依然様々な課題が存在する．本講演では，半遺伝環の構造論に関するいくつかの結果を，半遺伝環と torsion-free 加群の平坦性との関係を中心に議論する．また，フロベニウス写像の平坦性に関する下元 [Shi] の問題についても考察する．本稿はプレプリント [And24] に基づく．

1 導入

本稿を通して，環といえば 1 を持つ可換環のこととする．特に断らない限り Noether 性は課さない．

可換環論においては，分野間の関連性の強い代数幾何学で扱われる環の多くや，初等的な例が Noether 環，特に体上の有限生成代数であったことや，イデアルの有限性からくる扱いやすさもあり，Noether 環は主要な興味の対象であり，深い研究がなされてきた．一方，世界各国においては，Noether 性を仮定しない環に関する研究が脈々と続いてきたことも事実である．

近年，Noether 環のホモロジー代数的な不変量に関する「ホモロジカル予想」と呼ばれる一連の予想の研究の中で，大予想の 1 つであった big CM 予想が André [And18a],[And18b] によって解決された．その中で本質的に用いられてきたパーフェクトイド代数と概可換環論（almost ring theory）は非 Noether 環を積極的に扱うものであったことは注目に値する．これらについての詳細は拙稿 [And23] をご参照いただきたい．

このように，Noether 環を深く知ることが目的の研究においても，Noether とは限らない環を本質的に扱うようになってきており，Noether 性を仮定しない可換環に関する研究について注目が集まってきているという流れが存在する．

* E-mail:andou@ma.noda.tus.ac.jp, r_ando@skillupai.com.

2　パーフェクトイド代数と torsion-free 加群

局所環 $(A, \mathfrak{m}, k = A/\mathfrak{m})$ について，標数について整理をしておく．A と k の標数が同じとき，A は**等標数**であるといい，A と k の標数が異なるとき，**混標数**であるという．特に A, k の標数の組は次の４通りしかない．

表 1　局所環の標数

	A の標数	k の標数
等標数 0	0	0
等標数 p	p	p
混標数 $(0, p)$	0	p
混標数 (p^n, p)	p^n	p

ここで p は素数，$n \geq 2$ である．Frobenius 射：

$$F : A \to A; a \mapsto a^p$$

は標数 p の環においては環の射（準同型）となり，「Frobenius 射の解析が微積分の代用になる」という問題意識のもと，Frobenius 射についての解析が進められてきた．特に根底にあるものが次の Kunz の定理である．

定理 2.1 (Kunz の定理)**.**
A を標数 $p > 0$ の Noether 局所環とする．このとき次は同値である．

(i) A は正則である．
(ii) Frobenius 射 $F : a \mapsto a^p$ は平坦である．

この定理を，（Noether とは限らない）A 上の代数の言葉で言い換えることを考えてみよう．２つの A 代数を定義する．

定義 2.2 (絶対整閉包)**.**
A を整域とし，その全商環を $Q(A)$ とする．$Q(A)$ の代数閉包 $\overline{Q(A)}$ における A の整閉包を A^+ とかいて，A の**絶対整閉包 (absolute integral closure)** という．

定義 2.3 (完全環，完全閉包)**.**
環 A について, Frobenius 射 $A/pA \to A/pA$ が全単射であるとき, A は p について**完全 (perfect)** であるという．また A を正標数 p の Noether 局所環とするとき，

$$A_{\mathrm{perf}} \coloneqq \varinjlim_{F} \{A \xrightarrow{F} A \xrightarrow{F} A \xrightarrow{F} \cdots\}$$

を A の**完全閉包 (perfect closure)** という．

A が（正標数 p の Noether 局所）整域であるとき；

$$A_{\mathrm{perf}} = \left\{ a \in A^+ \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N}; a^{p^n} \in A \right\}$$

とかけることに注意する．完全閉包によって，Kunz の定理は次のように言い換えることができる；

「A を標数 $p > 0$ の Noether 局所環とするとき，A が正則であることと，自然な射 $A \to A_{\mathrm{perf}}$ が平坦であることは同値.」

この完全性を混標数に一般化する方法の１つがパーフェクトイド環である．いくつか定義する方法があるが，ここではその１つを紹介する．

定義 2.4 (整パーフェクトイド環)**.**

A を p 進完備であるとする．ある $\varpi \in A$ であって，ある $u \in A^\times$ が存在して $\varpi^p = pu$ となるものが存在し，かつ Frobenius 射 $A/pA \to A/pA$ が全射でありその核が ϖ で生成されるとき，A を**整パーフェクトイド (integral prerfectoid)** であるという．

このとき，Kunz の定理は次のように混標数に一般化される．

定理 2.5 ([BIM19])**.**

A を $\mathbb{Z}_P$ 上忠実平坦な Noether 局所環とする．A が正則であることと，A 上充実平坦な整パーフェクトイド代数が存在することは同値である．

[Lur20] は A が Noether であって，ϖ^p が p を割り切る場合の Frobenius 射 $A/\varpi A \to A/\varpi^p A$ の平坦性についての条件を与えている．それに関連して [Shi] は次の命題を示した．

命題 2.6 ([Shi, Proposition 7.12.])**.**

A を環とする．ある $\varpi \in A$ について，ある $u \in A^\times$ と $b \in A$ が存在して $\varpi^p = bu, A/bA$ が標数 p の環となっていると仮定する．このとき，ある忠実平坦 A 代数 B が存在して，Frobenius 射 $B/bB \to B/bB$ が全射でありその核が ϖ で生成されるとき，Frobenius 射 $A/\varpi A \to A/pA$ は平坦である．特に，A が付値環であるとき Frobenius 射の平坦性は保たれる．

この証明において，A が付値環であるときは，B として絶対整閉包 A^+ をとるとよく，また付値環上では次に紹介する torsion-free 加群がすべて flat となっていることが重要な役割を果たしている．そこで torsion-free 加群の定義を述べる．

定義 2.7 (torsion-free 加群)**.**

A を環とする．A 加群 M について，すべての非零因子 $a \in A$ に対して，自然な $a\cdot : M \to M$ が単射であるとき，M を torsion-free であるという．

上述の通り，命題 2.6の証明では，付値環において torsion-free 加群がすべて flat であることが重要な役割を果たしていたため，下元氏は次の問題を提唱した．

問題 2.8 ([Shi, Open Problem 7.13.])**.**

任意の torsion-free 加群 M が平坦となるような環を特徴つけよ．

3　主定理

[And24, Theorem 4.10] において，任意の加群が torsion-free になるような環は半遺伝環 (semi-hereditary ring) にほかならないことを証明し，下元氏の問題（問題 2.8）を解決した．そこで，本節では半遺伝環を定義し，[And24, Theorem 4.10] の証明の概略を述べる（定理 3.5）．

定義 3.1 (遺伝環，半遺伝環)**.**
A を環とする．A のすべてのイデアルが射影的であるとき，A を**遺伝環 (hereditary ring)** であるという．またすべての有限生成イデアルが射影的であるとき，A を**半遺伝環 (semi-hereditary ring)** であるという．

基本的な例として付値環や Dedekind 整域は半遺伝環である．詳細は述べないが，これらの環のクラスは**連接環 (coherent ring)** と呼ばれる重要な環のクラスの部分クラスである．Noether とは限らない環を扱うとは言っても，無秩序にすべての環を扱うのではなく，各種不変量などに着目して，適切なクラス分類を行っていきたいと考えることは自然であり，連接環は Noether 環の自然な一般化となっている．連接環については教科書 [Gla89] が詳しい．

[Cha60] による半遺伝環の特徴づけを紹介する．ここで，環 A 上の加群 M が torsion-less であるとは，次の線型写像が単射であることをいう．

$$M \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(M, A), A); x \mapsto (f \mapsto f(x))$$

定理 3.2 ([Cha60, theorem 4.1])**.**
環 A が半遺伝環であることと，任意の torsion-less A 加群が平坦であることは同値である．

torsion-less 加群は torsion-free であるが，逆は成り立たない（$\mathbb{Z}$ 加群 $\mathbb{Q}$ を考えよ）． この定理により任意の torsion-free 加群が平坦であるような環は半遺伝環に限ることがわかる．

では逆について考えよう．その際次の言い換えが重要となる．

定理 3.3 ([Gla89, Corollary 4.2.19])**.**
A を環とする．次は同値である．

(i) A は半遺伝環である．
(ii) A の全商環 $Q(A)$ は von Neumann 正則，すなわち 0 次元被約環である．かつ，任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して，$A_{\mathfrak{m}}$ は付値環となる．

ここで A が被約であるとき，$Q(A)$ もそうであることに注意する．さらに A が Noether のとき $\dim Q(A) = 0$ となるが，一般にはそうではない（[Que71]，[And24, Example 4.8]）．この $\dim Q(A) = 0$ という条件が，torsion-free が局所化して保たれるための十分条件として働く．

命題 3.4 ([And24, Proposition 4.5])**.**
A を $\dim Q(A) = 0$ であるような環とする．任意の torsion-free A 加群 M と，素イデアル $P \in \mathrm{Spec}\, A$ に対して，M_P は torsion-free A_P 加群となる．

これにより，所望の定理を得ることができる．

定理 3.5 ([And24, Theorem 4.10])**.**
A を環とする．A が半遺伝環であることと，任意の torsion-free 加群が平坦であることは同値である．

証明.
($\Longrightarrow$)
M を torsion-free A 加群とする．半遺伝環は被約であって $\dim Q(A) = 0$ であるので，命題 3.4により任意の極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $M_{\mathfrak{m}}$ は torsion-free $A_{\mathfrak{m}}$ 加群となる．定理 3.3により $A_{\mathfrak{m}}$ は付値環であり，付値環上では torsion-free 加群は平坦なので，$M_{\mathfrak{m}}$ は平坦である．よって M も平坦となる．
($\Longleftarrow$)
M を torsion-less 加群とすると，M は torsion-free となる．仮定より M は平坦であり，定理 3.2により A は半遺伝環である．

□

参考文献

[And23] R. Ando, *Noether* とは限らない可換環上のホモロジー代数について, 第 19 回数学総合若手研究集会：数学の交叉点 (2023), 519–524.

[And24] R. Ando, *On torsion-free modules and semi-hereditary rings*, 2024. preprint. arXiv:2412.16618.

[And18a] Y. André, *La conjecture du facteur direct*, Publications mathématiques de l'IHÉS **127** (2018), no. 1, 71-93.

[And18b] Y. André, *Le lemme d' Abhyankar perfectoide*, Publications mathématiques de l'IHÉS **127** (2018), no. 1, 1–70.

[BIM19] B. Bhatt, S. B. Iyengar, and L. Ma, *Regular rings and perfect(oid) algebras*, Comm. Alg. **47** (2019), no. 6, 2367–2383.

[Cha60] S. U. Chase, *Direct products of modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **97** (1960), no. 3, 457–473.

[Gla89] S. Glaz, *Commutative Coherent Rings*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1371, Springer–Verlag, 1989.

[Lur20] J. Lurie, *Level Structures on Elliptic Curves*, 2020. available at `https://www.math.ias.edu/~lurie/`.

[Que71] Y. Quentel, *Sur la compacité du spectre minimal d'un anneau*, Bulletin de la Société Mathématique de France **99** (1971), 265–272.

[Shi] K. Shimomoto, *Lectures on perfectoid geometry for commutative algebraists*. in preparation.

強 Lefschetz でない Artin Gorenstein 環を作る マトロイドの基底母関数

東北大学　大学院理学研究科　数学専攻
高橋 諒 (Ryo TAKAHASHI) *

概要

次数付き Artin Gorenstein 環は斉次多項式を使った表示を持ち，そのような環の強 Lefschetz 性は斉次多項式の高次ヘッセ行列の正則性で特徴付けられる．前野・沼田は，この斉次多項式がマトロイドの基底母関数であったとき強 Lefschetz 性を持つと予想したが，我々はグラフ的マトロイドによる反例を与えた．高次ヘッセ行列の非正則性を示すため，行列のカーネルに属する非ゼロ要素を具体的に計算した．

本講演は [11] の内容に基づく．1 章から 4 章でそれぞれ次数付き Artin Gorenstein 環，強 Lefschetz 性，基底母関数，前野–沼田の予想について導入し，最後に 5 章で主結果について述べる．この分野の教科書として [3] を大いに参考にした．

1 Artin Gorenstein 環

この章ではまず本研究で扱う次数付き環を定義し，次にそれが持つ性質について見る．

1.1 次数付き環

$f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ を n 変数 d 次斉次多項式とし，偏微分作用素 $\partial_i \coloneqq \frac{\partial}{\partial x_i}$ たちの多項式環 $Q \coloneqq \mathbb{R}[\partial_1, \dots, \partial_n]$ における f の *annihilator* を

$$\mathrm{Ann}(f) \coloneqq \{\alpha \in Q \mid \alpha f = 0\}$$

とする．$\alpha \in Q$ の f への作用は通常の偏微分によって行われる．f が斉次であることから $\mathrm{Ann}(f)$ は**斉次イデアル**，すなわち斉次元によって生成されるイデアルである．そこで商環

$$A = A(f) \coloneqq Q/\mathrm{Ann}(f)$$

を考える．

$\alpha \in Q$ に対し，$\alpha + \mathrm{Ann}(f) \in A$ の f への作用もまた αf と定める．さらに α が斉次元で $\alpha f \neq 0$ のとき，$\alpha + \mathrm{Ann}(f) \in A$ を A における $\deg \alpha$ 次の斉次元と見なす．これらは well-defined で

* E-mail:ryo.takahashi.r2@dc.tohoku.ac.jp

ある．特に後者は $\mathrm{Ann}(f)$ が斉次イデアルであることから言える．以降，誤解の生じない範囲で $\alpha + \mathrm{Ann}(f) \in A$ を単に $\alpha \in A$ と書き，Q の元を用いて表示する．

先ほどの斉次元の定義により，A も多項式環 Q と同様**次数付き環**として

$$A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots \oplus A_d$$

と表示することができる．ここに A_i は A の i 次斉次元と 0 からなる $\mathbb{R}$-加群である．Q における $d+1$ 次以上の斉次元はすべて $\mathrm{Ann}(f)$ に入るため，$i > d$ に対して $A_i = \{0\}$ である．

1.2 ポアンカレ双対性

A，並びに各 A_i は極小な生成系を取って基底とすることでベクトル空間の構造を持つ．A は次の性質を満たすことが知られている：

- 線形写像
$$A_d \to \mathbb{R}\,; \quad \alpha \mapsto \alpha f$$
は A_d から $\mathbb{R}$ への同型写像である．
- $i = 0, \ldots, d$ に対し双線形形式
$$A_i \times A_{d-i} \to A_d \cong \mathbb{R}\,; \quad (\xi, \eta) \mapsto \xi\eta$$
は非退化.

これらの性質を次数付き環における**ポアンカレ双対性**という．

A はベクトル空間として有限次元であるため *Artin* **環**である．このとき A がポアンカレ双対性を満たすことと A が *Gorenstein* **環**であることは同値 ([3, Theorem 2.79])．したがって A は Artin Gorenstein 環である．逆に，任意の次数付き Artin Gorenstein 環は斉次多項式 f を用いた $A(f)$ という表示を持つ ([3, Lemma 3.74])．

Example 1.1. $f = x_1^2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2^2x_5$ とする．これは [3, Example 3.78] にある多項式と同一である．

$$\begin{aligned}
\partial_1\partial_3 f = 2\partial_2\partial_4 f &= 2x_1,\\
2\partial_1\partial_4 f = \partial_2\partial_5 f &= 2x_2,\\
\partial_1^2 f &= 2x_3,\\
\partial_1\partial_2 f &= x_4,\\
\partial_2^2 f &= 2x_5
\end{aligned}$$

であり，$A = A(f)$ について A_1，A_2 の基底としてそれぞれ

$$\{\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5\}, \quad \{\partial_1^2, \partial_1\partial_2, \partial_1\partial_3, \partial_1\partial_4, \partial_2^2\}$$

を取れる．この基底に関して双線形形式 $A_1 \times A_2 \to \mathbb{R}$ を行列表示すると

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

が得られ，行列式は 8 である．したがってこの双線形形式は非退化.

2 強 Lefschetz 性

この章では強 Lefschetz 性を定義し，またその成立を判定するための高次ヘッセ行列を用いた定理を紹介する.

2.1 強 Lefschetz 性の定義

次数付き環 $A = \bigoplus_{i=0}^{d} A_i$ における**強** *Lefschetz* **性**を定義する.

Definition 2.1 (強 Lefschetz 性)**.** ある $\ell \in A_1$ が存在し，掛け算写像

$$\times \ell^i \colon A_k \to A_{k+i}$$

がすべての $k = 0, \dots, d-1$，$i = 1, \dots, d-k$ でフルランクとなるとき，A は強 Lefschetz 性を持つといい，また ℓ を *Lefschetz* **元**と呼ぶ.

またこの条件を $i = 1$ のみに弱めたものを**弱** *Lefschetz* **性**という.

今，A はポアンカレ双対性を持つため，特にすべての i で $\dim A_i = \dim A_{d-i}$ である．このとき強 Lefschetz 性は，次の狭義の場合がすべての k で成立することと同値になる.

Definition 2.2 (狭義の強 Lefschetz 性)**.** $k \le d/2$ を非負整数とする．ある $\ell \in A_1$ が存在して掛け算写像

$$\times \ell^{d-2k} \colon A_k \to A_{d-k}$$

が同型写像となるとき，A は ℓ に関して k 次の強 Lefschetz 性 (*strong Lefschetz property*，SLP_k) を持つという.

A がすべての $k \le d/2$ について，**ある共通の** $\ell \in A_1$ **に関して** SLP_k を持つならば,

$$\begin{aligned} A_k \xrightarrow{\times \ell^i} A_{k+i} \xrightarrow{\times \ell^{d-2k-i}} A_{d-k} \qquad & (k+i \le d-k) \\ A_{d-k-i} \xrightarrow{\times \ell^{2k+i-d}} A_k \xrightarrow{\times \ell^i} A_{k+i} \qquad & (k+i > d-k) \end{aligned}$$

という同型写像を考えることで，ℓ を Lefschetz 元とした狭義でない強 Lefschetz 性の成立が従う．さらにすべての k で SLP_k を持てば共通の ℓ が取れることが Remark 2.5 によりわかる.

2.2 強 Lefschetz 性の判定

ポアンカレ双対性にある非退化な双線形形式を用いて，狭義の強 Lefschetz 性の成立を判定することができる．準備として**高次ヘッセ行列**を導入する．

Definition 2.3 (高次ヘッセ行列)**.** k を非負整数，$B_k = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset Q$ を k 次斉次多項式の集合とする．多項式 g の k **次ヘッセ行列** $\boldsymbol{H}_{B_k}(g)$ を

$$(\boldsymbol{H}_{B_k}(g))_{i,j} \coloneqq (\alpha_i \alpha_j) g \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

として定める．

$B_1 = \{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ のとき，$\boldsymbol{H}_{B_1}(g)$ は通常のヘッセ行列と一致する．

Theorem 2.4 ([3, Theorem 3.76],[6, Theorem 3.1],[13, Theorem 4])**.** $k \leq d/2$ を非負整数とし，$B_k = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ をベクトル空間 A_k の基底とする．$(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ について，A が $\ell = a_1\partial_1 + \cdots + a_n\partial_n \in A_1$ に関して SLP_k を持つことと，$\boldsymbol{H}_{B_k}(f)(a_1, \dots, a_n)$ が正則であることは同値.

双線形形式

$$A_k \times A_k \to A_d \cong \mathbb{R}\,; \quad (\xi, \eta) \mapsto \ell^{d-2k}\xi\eta$$

の基底 B_k に関する表現行列が, 斉次関数におけるオイラーの定理より $(d-2k)!\,\boldsymbol{H}_{B_k}(f)(a_1, \dots, a_n)$ となることから示される.

Remark 2.5. A が SLP_k を持つことと多項式行列 $\boldsymbol{H}_{B_k}(f)$ が正則であること，すなわち $\det \boldsymbol{H}_{B_k}(f) \neq 0$ であることは同値．特にすべての k で SLP_k を持てば，非ゼロ多項式 $\det \boldsymbol{H}_{B_0}(f), \dots, \det \boldsymbol{H}_{B_{\lfloor d/2 \rfloor}}(f)$ で共通して根でない点 $(a_1, \dots, a_n)$ が存在し, $\ell = a_1\partial_1 + \cdots + a_n\partial_n$ を Lefschetz 元として A は強 Lefschetz 性を持つ.

Example 2.6 ([3, Example 3.78])**.** Example 1.1 と同様 $f = x_1^2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2^2x_5$ とすると，$A = A(f)$ は SLP_1 を持たない．実際，A_1 の基底 $B_1 = \{\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4, \partial_5\}$ に対し

$$\boldsymbol{H}_{B_1}(f) = \begin{pmatrix} 2x_3 & x_4 & 2x_1 & x_2 & 0 \\ x_4 & 2x_5 & 0 & x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり，その行列式は 0 となる．この事実は

$$\boldsymbol{H}_{B_1}(f) \times (0, 0, x_2^2, -2x_1x_2, x_1^2)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$$

であることからも観察できる.

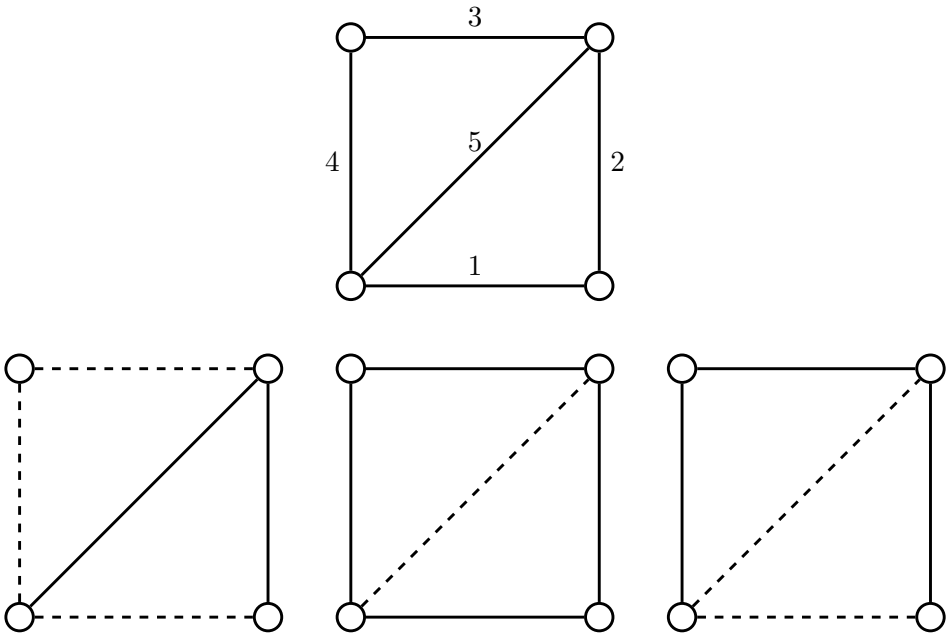


図 1　上段：4 頂点 5 辺のグラフ，下段左：極大でないため基底でない，下段中央：独立集合でない，下段右：基底の一つ (対応する単項式は $x_2x_3x_4$)

3　マトロイドと基底母関数

この章では本研究で扱う基底母関数をグラフ，マトロイドに対して定義する．

3.1　グラフの基底母関数

グラフ G を，$d+1$ 頂点 n 辺の連結な無向グラフで自己ループや多重辺を持たないものとする．辺には番号 $1,\dots,n$ を割り振り，辺集合を $E \coloneqq \{1,\dots,n\}$ と書く．

辺の部分集合 $I \subset E$ が**独立集合**であるとは，I に含まれる辺のみからなる閉路がないことを言う．さらに包含関係について極大な独立集合のことを**基底**と呼ぶ．基底とはマトロイドにおける用語であり，グラフ理論においては**全域木**と対応する．グラフ G の連結性より基底のサイズは必ず d となる．そこでグラフ G の**基底母関数** $f_G \in \mathbb{R}[x_1,\dots,x_n]$ を

$$f_G \coloneqq \sum_{I:\text{基底}} \prod_{e\in I} x_e$$

と定めると，これは d 次斉次多項式となる．

3.2　マトロイドについて

グラフ G に対し，独立集合のみを集めた E の部分集合族を $\mathcal{I}$ とすると，$\mathcal{I}$ は次の性質を満たす：

1. $\emptyset \in \mathcal{I}$

2. $X \in \mathcal{I}$ かつ $Y \subset X$ のとき，$Y \in \mathcal{I}$
3. $X, Y \in \mathcal{I}$ かつ $|X| > |Y|$ のとき，ある $e \in X \setminus Y$ が存在して $Y \cup \{e\} \in \mathcal{I}$

このとき組 $(E, \mathcal{I})$ を**マトロイド**と呼ぶ．特にグラフから定められたため**グラフ的マトロイド**とも呼ぶ．

一般にマトロイド $M = (E, \mathcal{I})$ とは，有限集合 E と，その部分集合族 $\mathcal{I}$ であって先ほどの三つの条件を満たすものの組である．例えば E をベクトル空間の元の有限部分集合とし，部分集合 $I \subset E$ が $I \in \mathcal{I}$ であることをその線形独立性によって定めたときも三つの条件を満たす．

$\mathcal{I}$ の元のうち極大なものを**基底**と呼ぶ．三つ目の条件からすべての基底はサイズが等しい．マトロイド M に対する基底母関数 f_M もグラフに対するものと同様に定義される．

4 前野–沼田の予想

この章では本研究で取り組んだ予想とその応用について述べる．

4.1 予想と先行研究

Conjecture 4.1 ([4, 5])**.** 任意のマトロイド M について，次数付き環 $A(f_M)$ は強 Lefschetz 性を持つ．

Theorem 2.4 による SLP_1 と通常のヘッセ行列の関係から，1 次の強 Lefschetz 性については [7, 8, 14] などの先行研究がある．最も一般的な結果として，[7, Theorem 3.8 and Remark 3.9] により，任意のマトロイド M とすべての $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n_{>0}$ について，$A(f_M)$ は $\ell = a_1\partial_1 + \cdots + a_n\partial_n$ を Lefschetz 元として SLP_1 を持つことが知られている．一方 2 次以降の強 Lefschetz 性については，現在限られたクラスのマトロイドで示されているのみである．

Example 4.2. $E = \{1, \ldots, n\}$，$\mathcal{I} = 2^E$ とすると，$M = (E, \mathcal{I})$ はマトロイドであり，その基底は E 自身のみであるから $f_M = x_1 \ldots x_n$ となる．このとき $\mathrm{Ann}(f_M)$ は $\{\partial_i^2 \mid i = 1, \ldots, n\}$ によって生成され，[2] によれば $A(f_M)$ は $\ell = \partial_1 + \cdots + \partial_n \in A_1$ を Lefschetz 元として強 Lefschetz 性を持つ．

4.2 Example 4.2 の応用

この章の内容について，詳しくは [3, Section 1.4] を参照されたい．

$\mathcal{I}_k$ を $E = \{1, \ldots, n\}$ の k 元集合全体とする．$\mathcal{I} = \bigsqcup_{k=0}^n \mathcal{I}_k$ である．$k < n/2$ に対して掛け算写像 $\times\ell \colon A_k \to A_{k+1}$ は単射であるが，各 $I \in \mathcal{I}_k$ に対して

$$\ell \times \prod_{e \in I} \partial_e = \sum_{\substack{I' \in \mathcal{I}_{k+1} \\ I' \supset I}} \prod_{e \in I'} \partial_e \quad (\in A_{k+1})$$

の項からうまく一つ選ぶことにより，**単射**な写像 $\mu_k \colon \mathcal{I}_k \to \mathcal{I}_{k+1}$ であってすべての $I \in \mathcal{I}_k$ に対し $\mu_k(I) \supset I$ となるようなものが構成できる．

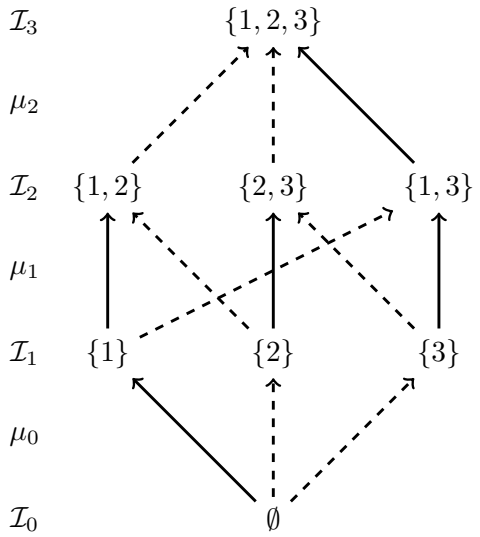


図 2　$n = 3$ に対する μ_k たち (点線は μ_k を構成する操作において選ばなかった項を表す)

これをすべての $k < n/2$ に対して行い，さらに $k \geq n/2$ に対しても $\mathcal{I}_k$ と $\mathcal{I}_{k+1}$ を入れ替えて同様のことを行う．$n = 3$ のときの一例を図 2 に示した．この図において実線の矢印をつなぐことによって，

$$C_1 \colon \emptyset \subset \{1\} \subset \{1,2\},$$
$$C_2 \colon \{2\} \subset \{2,3\},$$
$$C_3 \colon \{3\} \subset \{1,3\} \subset \{1,2,3\}$$

として，包含関係に関する全順序部分集合による $\mathcal{I}$ の分割が構成できる．この分割のサイズは $\max_k |\mathcal{I}_k|$ であり，特に μ_k たちの存在から $\left|\mathcal{I}_{\lfloor n/2 \rfloor}\right|$ である．このことから次の定理が従う．

Theorem 4.3 (Sperner の定理 [10])**.** $\mathcal{I} = 2^E$ を包含関係による**半順序集合**と見る．部分集合 $A \subset \mathcal{I}$ が**反鎖**であるとは，任意の $X, Y \in A$ について $X \neq Y$ なら $X \not\subset Y$ かつ $X \not\supset Y$ であることをいう．このとき

$$\max_{A\colon \text{反鎖}} |A| = \max_k |\mathcal{I}_k| \quad \left(= \left|\mathcal{I}_{\lfloor n/2 \rfloor}\right| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \right).$$

$\mathcal{I}_k$ 自身も反鎖であるから，非自明なのは不等式 $\max_A |A| \leq \max_k |\mathcal{I}_k|$ である．これは任意の反鎖 A と任意の全順序部分集合 $C \subset \mathcal{I}$ について $|A \cap C| \leq 1$ であること，$\mathcal{I}$ を $\max_k |\mathcal{I}_k|$ 個の全順序部分集合たちへ分割できることから従う．

この性質を一般化したものは *Sperner* **性**と呼ばれる．[5] では Conjecture 4.1 を特殊なマトロイドのクラスに対して示すことにより，ある構造の Sperner 性という組合せ論的な性質に対して代数的な証明を与えた．

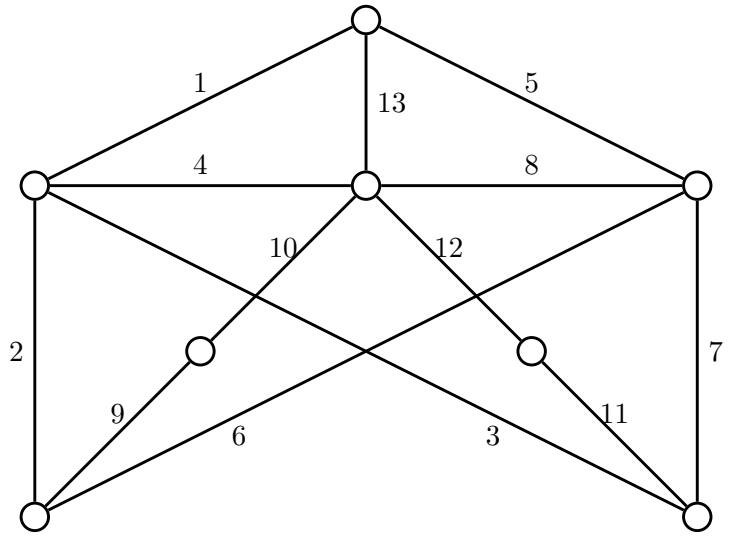


図 3　反例となったグラフ G

5　主結果

Conjecture 4.1 に対し，8 頂点 13 辺のグラフ G (図 3) であって $A = A(f_G)$ が SLP_3 を持たないものを，数式処理システム `SageMath` [12] による数値計算で発見した．このとき $d = 7$ より SLP_3 の不成立は

$$\times \ell \colon A_3 \to A_4$$

がフルランクとなる $\ell \in A_1$ が存在しないことを表し，従って A は弱 Lefschetz 性も持たない．

数値計算は，`SageMath` によって頂点数の少ないほうからグラフ G を列挙し，それぞれ $k \leq d/2$ に対して $A(f_G)$ が SLP_k を持つか判定した．この判定においては，Theorem 2.4 により次のことを行えばよい．

1. f_G を計算する
2. $A(f_G)$ の k 次部分の基底 B_k を一つ求める
3. 多項式行列 $\boldsymbol{H}_{B_k}(f_G)$ の正則性を確認する

このうち 1 番と 2 番，さらに 3 番の多項式行列 $\boldsymbol{H}_{B_k}(f_G)$ は直接計算可能である．一方，$\boldsymbol{H}_{B_k}(f_G)$ は成分が n 変数 $d - 2k$ 次多項式の $\dim A_k$ 次正方行列であり，その正則性を行列式を直接計算することによって確認するのは難しい．例えば図 3 の G に対しては $\dim A_3 = 166$ であったから，13 変数 166 次の多項式を扱う必要が生じる．

このため，正則性の確認には以下で述べるような乱択アルゴリズムと決定的アルゴリズムを用いた．以降グラフ G を図 3 のものとし，$A = A(f_G)$，さらに A_3 の基底 B_3 を一つ固定して $\boldsymbol{H} \coloneqq \boldsymbol{H}_{B_3}(f_G)$ とする．

5.1 乱択アルゴリズム

多項式 $g \coloneqq \det \boldsymbol{H}$ を計算するのは難しいが，$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して $g(a_1, \ldots, a_n) = \det(\boldsymbol{H}(a_1, \ldots, a_n))$ を計算するのは $\boldsymbol{H}(a_1, \ldots, a_n)$ が実行列であることから可能である．そしてもし $g(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ であれば，$g \neq 0$ であることがわかる．

この手法の有用性を示すため，次のよく知られた補題を用いる．

Lemma 5.1 (Schwartz—Zippel の補題 [1, 9, 15])**.** $g \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ を非ゼロ多項式とし，S を $\mathbb{R}$ の有限部分集合とする．$a_1, \ldots, a_n$ を S から独立かつ一様ランダムに選んだとき，

$$\Pr[g(a_1, \ldots, a_n) = 0] \leq \frac{\deg g}{|S|}.$$

実際の計算では $S = \{1, \ldots, 10^9\}$ とし，$a_1, \ldots, a_n$ をランダムに選んで $g(a_1, \ldots, a_n) = 0$ を確かめるという計算を 100 回行った．実際，一度も $g(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ とはならなかったわけだが，もし $g \neq 0$ であるとすれば，そのようなことが発生する確率は $(166/10^9)^{100} \approx 10^{-678}$ 以下と非常に小さい．

この手法により，8 頂点のグラフ G で $A(f_G)$ が SLP_3 を持たない**可能性が高い**ものを 152 個発見した．一方，8 頂点以下のグラフ G に対して $A(f_G)$ が常に SLP_2 を持つことも確認された．

5.2 決定的アルゴリズム

非ゼロベクトル $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]^{166}$ であって $\boldsymbol{H}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ となるようなものがあれば，$\boldsymbol{H}$ が正則でないことを示せる．そのような $\boldsymbol{F}$ を実際に構成することに成功した．

構成には (多変数の) **多項式補間**を用いた．十分多くの点 $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ で $\boldsymbol{F}(a_1, \ldots, a_n)$ を求めることができれば，$\boldsymbol{F}$ 自体を一意的に復元することができる．どのくらい多ければよいかは $\boldsymbol{F}$ に現れる各変数の最大次数によって定まり，この次数もまた (1 変数の) 多項式補完を行って見積もった．

$\boldsymbol{F}(a_1, \ldots, a_n)$ の値は，$\boldsymbol{F}(a_1, \ldots, a_n) \in \ker \boldsymbol{H}(a_1, \ldots, a_n)$ であることを用いて次のようにして計算した．ただし $a_1, \ldots, a_n$ は実数ではなく，それぞれ正整数であるものとする．

1. $\ker \boldsymbol{H}(a_1, \ldots, a_n)$ がちょうど 1 次元であることを確認する
2. 非ゼロベクトル $\boldsymbol{F}' \in \ker \boldsymbol{H}(a_1, \ldots, a_n)$ を一つ求める
3. $\boldsymbol{F}'$ に係数 $c \neq 0$ を掛けて正規化する．c は次を満たすように定める：
   - $c\boldsymbol{F}'$ の各成分は整数である
   - $c\boldsymbol{F}'$ の成分の最大公約数は 1 である
   - $c\boldsymbol{F}'$ において**あらかじめ決めておいた添字**の成分が正である
4. $c\boldsymbol{F}'$ を求める値とする

$\boldsymbol{F}(a_1, \ldots, a_n)$ の成分の最大公約数が 1 となりやすいよう，a_i たちは素数のべき乗から選んだ．また，あらかじめ決めておいた添字の成分は最終的に $2(x_1 + x_5 + x_{13})(x_2 + x_6)x_{10}^2 x_{11} x_{12}$ へと復元された．

参考文献

[1] R. A. Demillo and R. J. Lipton, *A probabilistic remark on algebraic program testing*, Information Processing Letters **7** (1978), no. 4, 193–195.

[2] M. Hara and J. Watanabe, *The determinants of certain matrices arising from the Boolean lattice*, Discrete Math. **308** (2008), no. 23, 5815–5822. MR2459403

[3] T. Harima, T. Maeno, H. Morita, Y. Numata, A. Wachi, and J. Watanabe, *The Lefschetz properties*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2080, Springer, Heidelberg, 2013. MR3112920

[4] T. Maeno and Y. Numata, *Sperner property, matroids and finite-dimensional Gorenstein algebras*, Tropical geometry and integrable systems, Contemp. Math. **580** (2012), Amer. Math. Soc., Providence, RI, pp. 73–84. MR2985388

[5] ———, *Sperner property and finite-dimensional Gorenstein algebras associated to matroids*, J. Commut. Algebra **8** (2016), no. 4, 549–570. MR3566530

[6] T. Maeno and J. Watanabe, *Lefschetz elements of Artinian Gorenstein algebras and Hessians of homogeneous polynomials*, Illinois J. Math. **53** (2009), no. 2, 591–603. MR2594646

[7] S. Murai, T. Nagaoka, and A. Yazawa, *Strictness of the log-concavity of generating polynomials of matroids*, J. Combin. Theory Ser. A **181** (2021), Paper No. 105351, 22. MR4223331

[8] T. Nagaoka and A. Yazawa, *Strict log-concavity of the Kirchhoff polynomial and its applications to the strong Lefschetz property*, J. Algebra **577** (2021), 175–202. MR4234203

[9] J. T. Schwartz, *Fast probabilistic algorithms for verification of polynomial identities*, J. Assoc. Comput. Mach. **27** (1980), no. 4, 701–717. MR594695

[10] E. Sperner, *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge*, Math. Z. **27** (1928), no. 1, 544–548. MR1544925

[11] R. Takahashi, *Failure of the Lefschetz property for the Graphic Matroid*, 2025. arXiv preprint arXiv:2501.13348.

[12] The Sage Developers, *Sagemath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.5)*, 2022. `https://www.sagemath.org`.

[13] J. Watanabe, *A remark on the Hessian of homogeneous polynomials*, The Curves Seminar at Queen's, vol. XIII, Queen's Papers Pure and Appl. Math. **119** (2000), pp. 171–178.

[14] A. Yazawa, *The eigenvalues of Hessian matrices of the complete and complete bipartite graphs*, J. Algebraic Combin. **54** (2021), no. 4, 1137–1157. MR4348920

[15] R. Zippel, *Probabilistic algorithms for sparse polynomials*, Symbolic and algebraic computation (EUROSAM '79, Internat. Sympos., Marseille, 1979), pp. 216–226. MR575692

The canonical trace of Stanley–Reisner rings that are Gorenstein on the punctured spectrum

大阪大学大学院 情報科学研究科 情報基礎数学専攻
宮下 空 (Sora MIYASHITA) *

Abstract

本稿を通じて, $\Bbbk$ は常に体とする. 本稿では, クルル次元が 3 以上の nearly Gorenstein Stanley–Reisner 環は全て Gorenstein であることを報告する. 著者のこれまでの研究とあわせることで, nearly Gorenstein Stanley–Reisner 環の完全な特徴づけが得られる. さらに, Cohen–Macaulay Stanley–Reisner 環 $\Bbbk[\Delta]$ が punctured spectrum 上 Gorenstein であることは, $\Bbbk[\Delta]$ が nearly Gorenstein である場合, または $\Bbbk[\Delta]$ の正準トレースが次数付き極大イデアルの平方である場合に限る. 特に後者は Δ が向き付け不可能ホモロジー多様体であることと同値である.

1 導入

本稿の内容はジェノバ大学の Matteo Varbaro 氏との共同研究 ([10]) に基づく. Cohen–Macaulay 局所環 (または次数付き環)R の正準加群 $\mathrm{tr}(\omega_R)$ のトレースは, 対応する代数多様体の非 Gorenstein 軌跡を記述し [12, Lemma 6.19] または [13, Lemma 2.1] を参照), 近年「正準トレース」に関する活発な研究を引き起こしている [4, 5, 7, 8, 13] を参照. 特に興味深いのは, 正準トレースが次数付き極大イデアル $\mathfrak{m}_R$ を含む Cohen–Macaulay 環 R のクラスであり, これは punctured spectrum 上 Gorenstein である環に含まれるクラスである. これらの環は, Herzog, Hibi, および Stamate によって [13] で「nearly Gorenstein 環」として再導入されて以来, 様々な文脈でその性質を探求する多くの研究が行われ, 研究の焦点となっている ([1, 3, 6, 11, 14–18, 21, 22, 24] を参照).

特に, 低次元の単体的複体から生じる nearly Gorenstein Stanley–Reisner 環については, [20, Section 4] で調査されている. 結論として, [20] は次の問いを提起した: **「クルル次元が** *3* **以上の** *Cohen–Macaulay Stanley–Reisner* **環において**, *nearly Gorenstein* **性は** *Gorenstein* **性と同値か？」**
本報告では, punctured spectrum 上 Gorenstein である Stanley–Reisner 環の正準トレースを分類する. これにより, 前述の問いに肯定的な解答を与えることが本稿の目的である.

2 準備

この節では, 主要な結果を述べるために必要な記号を準備する. 本報告全体を通じて, 非負整数の集合を $\mathbb{N}$, 整数の集合を $\mathbb{Z}$ と表す. さらに非負次数付き Noether 環 $R = \bigoplus_{i\geq 0} R_i$ に対して, 常に R_0 が体であると仮定する. この文脈において, すべての非負次数付き Noether 環 R はただ一つ

*E-mail:u804642k@ecs.osaka-u.ac.jp

の次数付き極大イデアル $\mathfrak{M}_R$ を持ち, 次数付き正準加群 ω_R を持つ. R の a-不変量を a_R とする. $a_R = -\min\{j : (\omega_R)_j \neq 0\}$ である. $\mathbb{Z}$-次数付き R-加群 M に対して, $\mathrm{tr}_R(M)$ を次のように定義する: $\phi \in \mathrm{Hom}_R^*(M,R) := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R^i(M,R)$ (M が有限生成なら $\mathrm{Hom}_R^*(M,R) = \mathrm{Hom}_R(M,R)$ であることに注意) を満たす写像 ϕ によるイデアル $\phi(M)$ の和である. すなわち,

$$\mathrm{tr}_R(M) = \sum_{\phi\in\mathrm{Hom}_R^*(M,R)} \phi(M).$$

ここで $\mathrm{Hom}_R^i(M,R) = \{\phi \in \mathrm{Hom}_R(M,R) : \phi(M_k) \subseteq R_{k+i} \text{ for any } k \in \mathbb{Z}\}$. 係数環について混乱の余地がないとき, 単に $\mathrm{tr}(M)$ と書く. R が Cohen–Macaulay であるとき, $\mathrm{tr}(\omega_R)$ は非 Gorenstein 軌跡を記述することが知られている ([12, Lemma 6.19] または [13, Lemma 2.1] を参照). R が *punctured spectrum* 上 *Gorenstein* であるとは, R の任意の次数付き素イデアル $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{M}_R$ に対して $R_\mathfrak{p}$ が Gorenstein であることを意味する. この定義は R 自体が Cohen–Macaulay である必要はないことに注意する. 以下の 3 つの定義では, R が Cohen–Macaulay であると仮定する.

Definition 2.1. R が *nearly Gorenstein* [13] とは, $\mathrm{tr}(\omega_R) \supseteq \mathfrak{M}_R$ であることをいう. R が punctured spectrum $\mathrm{Spec}(R) \setminus \{\mathfrak{M}_R\}$ 上 Gorenstein であることは, $\sqrt{\mathrm{tr}(\omega_R)} \supseteq \mathfrak{M}_R$ と同値である ([13, Lemma 2.1]). 特に nearly Gorenstein 環は必ず punctured spectrum 上 Gorenstein である.

以下, 次数付き環の文脈で Gorenstein 環の最初期の一般化の一つである level 環 ([25]) と almost Gorenstein(次数付き) 環の定義を述べる. 本稿の最後で punctured spectrum 上 Gorenstein である環とこれらのクラスの関係を明らかにする.

Definition 2.2. R が *level* ([25]) であるとは, ω_R が次数付き R 加群として同じ次数からなる生成系をもつことをいう. R が *almost Gorenstein* ([9, Section 10]) であるとは, R 加群の次数 0 の単射 $\phi : R \hookrightarrow \omega_R(-a_R)$ が存在し, 余核 $C := \mathrm{coker}(\phi)$ が (0) か, または Ulrich R-加群であることを意味する. すなわち, C が Cohen–Macaulay (この場合は自動的に成り立つ) であり, $\mu(C) = e(C)$ である. ここで, $\mu(C)$ (または $e(C)$) はそれぞれ C の極小生成系の元の個数 (または $\mathfrak{M}_R$ に関する C の重複度) を表し, $\omega_R(-a_R)$ は R 加群の構造は ω_R と同じだが, その次数を $-a_R$ だけずらした次数付き R 加群である. つまり, 任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $[\omega_R(-a_R)]_n = [\omega_R]_{n-a_R}$ で次数が定まる.

次に, 本報告で必要となる Stanley–Reisner 環に関連する用語をまとめる. $S = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ を n 変数の多項式環とし, 標準的な次数付け $\deg(x_i) = 1$ を備えている.

n 頂点からなる単体的複体 Δ について, Stanley–Reisner イデアル $I_\Delta \subseteq S$ は, $\{i_1, \ldots, i_s\} \notin \Delta$ を満たす単項式 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_s}$ によって生成されるイデアルである. この対応は, n 頂点の単体的複体と S の平方自由な単項式イデアルとの間の全単射を与える. 剰余環 $\Bbbk[\Delta] = S/I_\Delta$ を Δ の *Stanley–Reisner* 環と呼ぶ. 単体 $\sigma \in \Delta$ の次元を $\dim\sigma = |\sigma| - 1$, 単体的複体 Δ の次元を $\dim\Delta = \max\{\dim\sigma : \sigma \in \Delta\}$ と定義する. $\sigma \in \Delta$ が Δ の *i-face* であるとは, $\dim\sigma = i$ であることをいう. Δ の単体の中で包含関係で極大であるものを ファセット と呼ぶ. $\mathcal{F}(\Delta)$ を Δ のファセットの集合とし, $\dim\sigma = \dim\Delta$ が任意の $\sigma \in \mathcal{F}(\Delta)$ について成り立つとき, Δ は 純 であるという. 単体的複体 Δ が 強連結 であるとは, 任意の $\sigma, \tau \in \mathcal{F}(\Delta)$ に対して, $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k \in \mathcal{F}(\Delta)$ が存在し, $\sigma_0 = \sigma$, $\sigma_k = \tau$ かつ任意の $i = 1, \ldots, k$ について $\dim\sigma_i \cap \sigma_{i-1} = \dim\Delta - 1$ が成り立つことをいう. Δ が 強連結 であるとき, 必ず Δ は 純 である. 任意の $\sigma \in \Delta$ に対して, その *star,*

costar および *link* を以下の単体的複体として定義する:

$$\begin{aligned} \mathrm{st}_\Delta \sigma &= \{\tau \in \Delta : \tau \cup \sigma \in \Delta\}, \\ \mathrm{cost}_\Delta \sigma &= \{\tau \in \Delta : \tau \not\supseteq \sigma\}, \\ \mathrm{lk}_\Delta \sigma &= \{\tau \in \Delta : \tau \cup \sigma \in \Delta \text{ and } \tau \cap \sigma = \emptyset\}. \end{aligned}$$

$\mathrm{lk}_\Delta \sigma = \mathrm{st}_\Delta \sigma \cap \mathrm{cost}_\Delta \sigma$ であることに注意する. Δ の単体 $\tau \in \Delta$ が 錐 であるとは, 任意のファセット $\sigma \in \mathcal{F}(\Delta)$ に対して $\tau \in \sigma$ であることをいう. 単体的複体 Δ が 正規 であるとは, $\dim \Delta \geq 1$ の任意の i-face σ に対して $\mathrm{lk}_\Delta \sigma$ が連結であることを意味する. $\dim \emptyset = -1$ および $\mathrm{lk}_\Delta \emptyset = \Delta$ であるため, 次元が少なくとも 1 の正規単体的複体は連結である. $d = \dim(\Delta)$ とおく.

- Δ が $\Bbbk$-ホモロジー球面 であるとは, 任意の $\sigma \in \Delta$ に対して,

$$\widetilde{H}_i(\mathrm{lk}_\Delta(\sigma), \Bbbk) = \begin{cases} \Bbbk, & \text{if } i = \dim(\mathrm{lk}_\Delta(\sigma)), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad -(*)$$

- Δ が境界を持たない $\Bbbk$-ホモロジー多様体 であるとは, Δ が連結であり, 任意の $\sigma \in \Delta$ で $\sigma \neq \emptyset$ のとき $(*)$ が成り立つことをいう.

- Δ が疑多様体 であるとは, Δ が強連結 で, 任意の $(d-1)$-face がちょうど 2 つのファセットに含まれることをいう (これは σ が Δ のファセットのとき (*) が成り立つことを意味する).

任意の単体的複体 Δ に対して, Hochster の古典的な定理により, $\Bbbk[\Delta]$ が Gorenstein であるのは, Δ を錐でない頂点全体の集合 W に制限して得られる単体的複体 Δ_W が $\Bbbk$-ホモロジー球面 であることと同値である (例えば [2, Theorem 5.6.1] を参照). 最後に, d 次元の疑多様体 Δ が *orientable* であるとは, $H_d(\Delta; \mathbb{Z}) \neq 0$ であり, $\Bbbk$-向き付け可能 であるとは, $H_d(\Delta; \Bbbk) \neq 0$ であるという.

3 主結果

次が本稿の 1 つ目の主結果である.

Theorem A. *Δ を単体的複体, $R = \Bbbk[\Delta]$ を Δ の Stanley–Reisner 環とし, R は Cohen–Macaulay であるとする. 以下が正しい:*

(X) *R が punctured spectrum 上 Gorenstein である $\Leftrightarrow$ ある $i \in \{0, 1, 2\}$ に対して $tr(\omega_R) = \mathfrak{M}_R^i$.*

(Y) 以下の条件は同値である:

  (1) *$tr(\omega_R) = \mathfrak{M}_R$, 即ち, R は nearly Gorenstein だが Gorenstein でない;*

  (2) *Δ は $n \geq 3$ 個からなる離散点の集合または長さ $n \geq 3$ の path と同型である.*

(Z) 以下の条件は同値である:

  (1) *$tr(\omega_R) = \mathfrak{M}_R^2$;*

  (2) *Δ は $\Bbbk$-向き付け不可能な $\Bbbk$-ホモロジー多様体である.*

この結果は [20] で提起された問いに対して肯定的な解答を与える. 即ち, 次が正しい.

Corollary 3.1. *3* 次元以上の *nearly Gorenstein Stanley–Reisner* 環は**全て Gorenstein** である.

Almost Gorenstein 環のクラス ([9]) と nearly Gorenstein 環のクラスとの関係性については, [19,20,23] などで研究されている. 例えば, 標準的次数付きアフィン半群環のとき, nearly Gorenstein 環と almost Gorenstein 環の交わりは, 非 Gorenstein 環をごく一部しか含まないことが示されている ([19, Theorem 6.1] を参照). この洞察を基に Stanley–Reisner 環を考えると, 同様の現象が生じることを解明した. 次が本稿の 2 つ目の主結果である.

Theorem B. 以下の命題が成り立つ*:*

(X) Punctured spectrum 上 *Gorenstein* である *Stanley–Reisner* 環は全て *level* である.

(Y) Δ を単体的複体とする. $R = \Bbbk[\Delta]$ を *Cohen–Macaulay* だが *Gorenstein* でない *Stanley–Reisner* 環とする. このとき, 以下の条件は同値である*:*

(1) R は *punctured spectrum* 上 *Gorenstein* であり, かつ *almost Gorenstein* である*;*

(2) R は *nearly Gorenstein* であり, かつ *almost Gorenstein* である*;*

(3) R は *nearly Gorenstein* である*;*

(4) Δ は $n \geq 3$ 個からなる離散点の集合または長さ $n \geq 3$ の *path* と同型である.

References

[1] M. Bagherpoor and A. Taherizadeh, *Trace ideals of semidualizing modules and two generalizations of nearly Gorenstein rings*, *Communications in Algebra* **51** (2023), no. 2, 446–463. ↑1

[2] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen–Macaulay rings*, Cambridge university press, 1998. ↑3

[3] A. Caminata and F. Strazzanti, *Nearly Gorenstein cyclic quotient singularities*, *Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry* **62** (2021), no. 4, 857–870. ↑1

[4] E. Celikbas, J. Herzog, and S. Kumashiro, *Traces of semi-invariants*, arXiv preprint, arXiv:2312.00983 (2023). ↑1

[5] H. Dao, T. Kobayashi, and R. Takahashi, *Trace ideals of canonical modules, annihilators of Ext modules, and classes of rings close to being Gorenstein*, *Journal of Pure and Applied Algebra* **225** (2021), no. 9, 106655. ↑1

[6] S. Ding, *A note on the index of Cohen–Macaulay local rings*, *Communications in Algebra* **21** (1993), no. 1, 53–71. ↑1

[7] A. Ficarra, *The canonical trace of Cohen–Macaulay algebras of codimension 2*, arXiv preprint, arXiv:2406.07517 (2024). ↑1

[8] A. Ficarra, J. Herzog, D. I Stamate, and V. Trivedi, *The canonical trace of determinantal rings*, *Archiv der Mathematik* **123** (2024), no. 5, 487–497. ↑1

[9] S. Goto, R. Takahashi, and N. Taniguchi, *Almost Gorenstein rings–towards a theory of higher dimension*, *Journal of Pure and Applied Algebra* **219** (2015), no. 7, 2666–2712. ↑2, 4

[10] S. Miyashita and M. Varbaro, *The canonical trace of Stanley-Reisner rings that are Gorenstein on the punctured spectrum*, arXiv preprint, arXiv:2412.12860 (2024). ↑1

[11] T. Hall, M. Kölbl, K. Matsushita, and S. Miyashita, *Nearly Gorenstein polytopes*, *The Electronic Journal of Combinatorics 30 (4)* (2023). ↑1

[12] J. Herzog and E. Kunz, *Der kanonische Modul eines Cohen–Macaulay Rings*, Vol. 238, Lect. Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin, 1971. ↑1, 2

[13] J. Herzog, T. Hibi, and D. I. Stamate, *The trace of the canonical module*, *Israel Journal of Mathematics* **233** (2019), 133–165. ↑1, 2

[14] C. Huneke and A. Vraciu, *Rings that are almost Gorenstein*, *Pacific Journal of Mathematics* **225** (2006), no. 1, 85–102. ↑1

[15] R. Jafari, F. Strazzanti, and S. Z. Armengou, *On nearly Gorenstein affine semigroups*, arXiv preprint, arXiv:2411.12081 (2024). ↑1

[16] S. Kumashiro, N. Matsuoka, and T. Nakashima, *Nearly Gorenstein local rings defined by maximal minors of a* $2 \times n$ *matrix*, arXiv preprint, arXiv:2308.04234 (2023). ↑1

[17] D. Lu, *The chain algebra of a pure poset*, arXiv preprint, arXiv:2410.05024 (2024). ↑1

[18] J. Lyle and S. Maitra, *Annihilators of (co) homology and their influence on the trace ideal*, arXiv preprint, arXiv:2409.04686 (2024). ↑1

[19] S. Miyashita, *Comparing generalized Gorenstein properties in semi-standard graded rings*, *Journal of Algebra* **647** (2024), 823–843. ↑4

[20] ———, *Levelness versus nearly Gorensteinness of homogeneous rings*, *Journal of Pure and Applied Algebra* **228** (2024), no. 4, 107553. ↑1, 4

[21] ———, *A linear variant of the nearly Gorenstein property*, arXiv preprint, arXiv:2407.05629 (2024). ↑1

[22] M. Miyazaki and J. Page, *Non-Gorenstein loci of Ehrhart rings of chain and order polytopes*, *Journal of Algebra* **643** (2024), 241–283. ↑1

[23] A. Moscariello and F. Strazzanti, *Nearly Gorenstein vs almost Gorenstein affine monomial curves*, *Mediterranean Journal of Mathematics* **18** (2021), no. 4, 127. ↑4

[24] P. Srivastava, *On nearly Gorenstein simplicial semigroup algebras*, arXiv preprint, arXiv:2310.00619 (2023). ↑1

[25] R. P Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra*, Vol. 41, Springer Science & Business Media, 2007. ↑2

パラメータが Core に属するときの A-超幾何級数

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
長峰実央 (Mao NAGAMINE) *

概要

ジェネリックなパラメータにおける A-超幾何系の基本解は Gel'fand らによって示されている．パラメータが特殊な場合は Okuyama, Saito によって，特定の条件下でフロベニウスの方法の適用が確認された．しかし，実際の計算で使うには，適用するための条件と解空間の基底の計算という 2 段階のとてつもない計算量の多さを考慮するとかなり困難である．そこで三角形分割に注目することで，これらの計算を必要とせず，容易に計算できる条件を示し,fake exponent の負の整数部分が同条件を満たしているときに, フロベニウスの方法で A-超幾何級数が構成できることを示した．

本講演は [3] の内容に基づく．

1　導入

A-超幾何系とは，1970 年代に W. Miller Jr. らによって定義され，1980 年代後半に Gel'fand らにより組織的な研究が開始された，行列 A とパラメータ β によって定まる線型偏微分方程式系であり，Gauss の超幾何微分方程式を多変数に拡張したものである．この方程式系の特徴の一つとして，凸多面体の三角形分割を用いて幾何的に記述できるというものがある．A-超幾何級数解に関する先行研究として，Gel'fand, Kapranov, Zelevinsky はパラメータがジェネリックの場合に三角形分割を用いた方法で解空間の基底を構成した [2]．この時の解空間の基底の個数は A の体積と一致することが [1] によって示されている．この場合のすべての基底は log を持たない．Saito, Sturmfels, Takayama はパラメータが特殊な場合について，ジェネリックなものから特殊なものへの極限を考えることで A の体積分の log を含む解空間の基底を求めている [5]. しかし，パラメータが特殊な場合は解空間の基底の個数が体積よりも大きくなり得るため，その場合に A の体積以上の解は構成できない．Okuyama, Saito は決定方程式の指数を摂動することで，特定の条件下でフロベニウスの方法で log を含む解空間の基底が構成できることを示した [4]．しかし，この方法を用いるために行う計算は一般的には困難であり，実際に解を求めることは現実的ではない．

本研究では，Okuyama, Saito によるフロベニウスの方法において，ジェネリックな重みベクトルから得られる三角形分割に注目し，全ての単体の頂点の共通部分と指数 v の負の整数部分が特定の条

* E-mail:nagamine.mao.d9@elms.hokudai.ac.jp

件の場合に，摂動関数

$$F_{\mathcal{N}}(x,s) := \sum_{u \in L'} a_u(s) x^{v+Bs+u}$$

が，$s=0$ で極を持たないことを示した．ここで，B は $L = (\mathrm{Ker}_{\mathbb{Z}} A)$ の基底で，L' は L のある部分集合である．すなわち，mod L で重複をもつ fake exponent の負の成分が上記の条件を満たしている場合に，フロベニウスの方法によって，v に関する A-超幾何級数を構成できることを示した．この結果の恩恵は，上記で述べた煩雑な計算が楽になるという点である．また，よくある具体的な例として A が unimodular のときでパラメータが Core に属している場合でも同様のことが言えることがわかったので，本講演ではそれらを紹介する．

2 準備

2.1 A-超幾何系

$A = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n) = (a_{ij}) \in M_{d\times n}(\mathbb{Z})$ とし，$\mathrm{rank} A = d$ とする．また，$\boldsymbol{a}_j$ たちは原点を通らない超平面に属すると仮定する．

$$I_A = \langle \partial^{\boldsymbol{u}} - \partial^{\boldsymbol{v}} \mid A\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{N}^n \rangle \subseteq \mathbb{C}[\boldsymbol{\partial}].$$

を A から決まるトーリックイデアルという．パラメータベクトル $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_d)^T \in \mathbb{C}^d$ が与えられたとき，

$$M_A(\beta) + D/(DI_A + \sum_{i=1}^{d} D(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\theta_j - \beta_i))$$

をパラメータベクトル β を持つ A-超幾何系という．ここで，D はワイル代数 $D = \mathbb{C}\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\partial} \rangle$ で，$\theta_j = x_j \partial_j$ である．

2.2 主定理に向けた記号

まずは [4] の記号を基に今回の結果に向けた改良をする．

$\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)^T \in \mathbb{C}^n$ に対して，$\mathrm{supp}(\boldsymbol{v})$ と $\mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v})$ をそれぞれ

$$\mathrm{supp}(\boldsymbol{v}) := \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid v_j \neq 0\},$$
$$\mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v}) := \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid v_j \in \mathbb{Z}_{<0}\},$$

で定義する．また $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ と $\boldsymbol{u} \in \mathbb{N}^n$ に対して，

$$[\boldsymbol{v}]_{\boldsymbol{u}} := \prod_{j=1}^{n} v_j(v_j - 1) \cdots (v_j - u_j + 1).$$

ここで $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ であることを述べておく．

さらに $\boldsymbol{u} \in \mathbb{Z}^n$ は $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_+ - \boldsymbol{u}_-$ で書ける．ここで，$\boldsymbol{u}_+, \boldsymbol{u}_- \in \mathbb{N}^n$, $\mathrm{supp}(\boldsymbol{u}_+) \cap \mathrm{supp}(\boldsymbol{u}_-) = \emptyset$ である．

仮定 2.1. $B = \{\boldsymbol{b}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{b}^{(h)}\}$ は $L_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ の基底とし，$B \in M_{n\times(n-d)}(\mathbb{Z})$ と見ることにする．これは B のどの行も 0 ベクトルでないことを意味している．

$\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_h)^T$ を新たな変数とし，$j = 1, \ldots, n$ に対して，

$$(B\boldsymbol{s})_j = \sum_{k=1}^{n-d} b_j^{(k)} s_k \in \mathbb{C}[\boldsymbol{s}] := \mathbb{C}[s_1, \ldots, s_{n-d}].$$

また，$J \subset \{1, \ldots, n\}$ に対して，

$$(B\boldsymbol{s})_J := \prod_{j\in J} (B\boldsymbol{s})_j \in \mathbb{C}[\boldsymbol{s}]$$

とおく．ここで，$J \not\subset \mathrm{supp}(B) \Rightarrow (B\boldsymbol{s})_J = 0$ なので，$j \notin \mathrm{supp}(B) \Rightarrow (B\boldsymbol{s})_j = 0$ である．$\mathrm{supp}(B) = n$ はこのような状況が起こらないことを保証している．

$\boldsymbol{w}$ をジェネリックなウェイトベクトルとする．

$$\mathcal{G} := \{\partial^{\boldsymbol{g}_{(i)}^+} - \partial^{\boldsymbol{g}_{(i)}^-} \mid i = 1, \ldots, m\}$$

を I_A の $\boldsymbol{w}$ に関する被約グレブナー基底とし，任意の i に対して $\partial^{\boldsymbol{g}_+^{(i)}} \in \mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(I_A)$ とする．

定義 2.2. $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\beta}$ と $\partial^{g_{(i)}^+} x^{\boldsymbol{v}} = 0$ の両方が成り立つとき，$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{w}$ に関する $H_A(\boldsymbol{\beta})$ の *fake exponent* と呼ぶ．

ジェネリックな重みベクトル $\boldsymbol{w}$ と $\boldsymbol{w}$ に関する $H_A(\boldsymbol{\beta})$ の fake exponent $\boldsymbol{v}$ を固定する．以降は $\boldsymbol{u} \in L$ に対して，$\mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u})$ を $I_{\boldsymbol{u}}$ と表記する．特に，$I_{\boldsymbol{0}} = \mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v})$ である．

$\boldsymbol{u} \in L$ に対して，

$$a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{s}) := \frac{[\boldsymbol{v} + B\boldsymbol{s}]_{\boldsymbol{u}_-}}{[\boldsymbol{v} + B\boldsymbol{s} + \boldsymbol{u}]_{\boldsymbol{u}_+}}.$$

とおく．

補題 2.3. [4, Lemma 2.4] 仮定 2.1 を満たしているとき，$\boldsymbol{u} \in L$ に対して $a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{s}) \neq 0$.

2.3 Okuyama, Saito による結果

$\boldsymbol{g}^{(i)}$ を $\mathcal{G}$ で得られたものとする．すなわち，$\boldsymbol{g}^{(i)}$ は $\partial^{\boldsymbol{g}_+^{(i)}} \in \mathrm{in}_{\boldsymbol{w}}(I_A)$ を満たす I_A の被約グレブナー基底とし，

$$C(\boldsymbol{w}) := \sum_{i=1}^{m} \mathbb{N}\boldsymbol{g}^{(i)}.$$

と定義する．

$I_{\boldsymbol{u}}$ $(\boldsymbol{u} \in L)$ に対して，$\mathrm{NS}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v})$ と $\mathrm{NS}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v})^c$ を次で定義する．

$$\mathrm{NS}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}) := \{I_{\boldsymbol{u}} \mid \boldsymbol{u} \in L.\ \text{If } I_{\boldsymbol{u}} = I_{\boldsymbol{u}'} \text{ for } \boldsymbol{u}' \in L,\ \text{then } \boldsymbol{u}' \in C(\boldsymbol{w})\}$$
$$\mathrm{NS}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v})^c := \{I_{\boldsymbol{u}} \mid \boldsymbol{u} \in L\} \setminus \mathrm{NS}_{\boldsymbol{w}}(\boldsymbol{v}).$$

次に，L の部分集合 L' を以下で定義する．

$$L' := \{\boldsymbol{u} \in L \mid I_{\boldsymbol{u}} \in \mathrm{NS}_w(\boldsymbol{v})\}.$$

定義から $L' \subset C(\boldsymbol{w})$ である．

$$K := \bigcap_{I \in \mathrm{NS}_w(\boldsymbol{v})} I$$

とし，$\mathbb{C}[\boldsymbol{s}]$ の斉次イデアル P を

$$P := \left\langle (B\boldsymbol{s})^{I \cup J \setminus K} \mid I \in \mathrm{NS}_w(\boldsymbol{v}), J \in \mathrm{NS}_w(\boldsymbol{v})^c \right\rangle.$$

で定義し，その直交 $P^\perp$ を

$$\begin{aligned} P^\perp &:= \{q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \in \mathbb{C}[\partial_{\boldsymbol{s}}] \mid (q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \bullet h(\boldsymbol{s}))_{|\boldsymbol{s}=0} = 0 \text{ for all } h(\boldsymbol{s}) \in P\} \\ &= \{q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \in \mathbb{C}[\partial_{\boldsymbol{s}}] \mid q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \bullet P \subset \langle s_1, \ldots, s_h \rangle\} \end{aligned}$$

で定義する．ここで，$\mathbb{C}[\partial_{\boldsymbol{s}}] := \mathbb{C}[\partial_{s_1}, \ldots, \partial_{s_h}]$ である．ここで A-超幾何級数を

$$m(\boldsymbol{s}) := (B\boldsymbol{s})^{I_{\mathbf{0}} \setminus K},$$

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) := \sum_{\boldsymbol{u} \in L'} a_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{s}) x^{\boldsymbol{v} + B\boldsymbol{s} + \boldsymbol{u}},$$

$$\widetilde{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}) := m(\boldsymbol{s}) F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}).$$

で定義する．$m(s)$ は F での極を打ち消す役割をしている．次に，$i = 1, \ldots, m$ に対して，$G^{(i)}$ と P_B を

$$G^{(i)} := I_{-\boldsymbol{g}^{(i)}} \setminus I_{\mathbf{0}},$$

$$P_B := \langle (B\boldsymbol{s})^{G^{(i)}} \mid i = 1, \ldots m \rangle.$$

で定義する．[4] では P と P_B の関係がいくつか示されており，本結果において次の [4, Proposition 3.4] が重要である．

$$m(\boldsymbol{s}) \cdot P_B \subset P \subset P_B.$$

特に，$K = I_{\mathbf{0}}$ のとき $P = P_B$ である．直交についても同様の関係を見ることができる．

$U(\partial_{\boldsymbol{z}}) \in \mathbb{C}[\partial_{\boldsymbol{z}}]$ と $q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \in \mathbb{C}[\partial_{\boldsymbol{s}}]$ に対して，$\mathbb{C}$-線形作用素 $U(\partial_{z_1}, \ldots, \partial_{z_h}) \star q(\partial_{\boldsymbol{s}})$ を

$$U(\partial_{z_1}, \ldots, \partial_{z_h}) \star q(\partial_{\boldsymbol{s}}) := (U(\partial_{\boldsymbol{z}}) \bullet q(\boldsymbol{z}))|_{\boldsymbol{z} = \partial_{\boldsymbol{s}}} \in \mathbb{C}[\partial_{\boldsymbol{s}}].$$

で定義すると，

$$m(\boldsymbol{s}) \star P^\perp \subset P_B^\perp \subset P^\perp.$$

となる．特に，$K = I_{\mathbf{0}}$ のとき $P^\perp = P_B^\perp$ である．

定義 2.4. A-超幾何級数

$$x^v \cdot \sum_{u \in \mathrm{Ker}_{\mathbb{Z}} A} g_u(\log x) x^u \qquad (g_u \in \mathbb{C}[x])$$

が $\boldsymbol{w}$ 方向であるとは，$w \cdot u^{(j)} > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ であるような，ある $\mathbb{Q}^n$ の基底 $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$が存在し，$u \notin \sum_{j=1}^n \mathbb{Q}_{\geq 0} u^{(j)}$ のとき $g_u = 0$ を満たすときにいう．

次の定理が Okuyama, Saito[4] の主定理である.

定理 2.5. [4, Theorem 4.4] $P = m(\boldsymbol{s}) \cdot P_B$ を満たすとき，$\boldsymbol{v}$ は exponent であり，

$$\{q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \bullet \tilde{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s})_{|\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}} \mid q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \in P^{\perp}\}$$

は exponent $\boldsymbol{v}$ に関して，$M_A(\boldsymbol{\beta})$ の $\boldsymbol{w}$ 方向の解空間の基底を張る.

3 主定理

Okuyama, Saito による結果では，P の計算と $P = m(s) \cdot P_B$ を満たしているかの確認が非常に困難である．本講演における主定理は $P = m(s) \cdot P_B$ を常に満たし，P から分かる微分作用素の計算が非常に楽になる条件の明示である.

3.1 一般の A における主定理

$$\Delta := \{\sigma \mid (\boldsymbol{a}, \sigma) \in S(\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}} I_A)\},$$
$$C := \cap_{\sigma \in \Delta} \sigma \quad (\subset [1, n]).$$

とおく.

定理 3.1. $I_{\boldsymbol{0}} = \mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v}) \subset C$ ならば $I_{\boldsymbol{0}} = K$.

系 3.2. $\mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v}) \subset C$ とする．このとき

$$\{(q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \bullet F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{s}))_{|\boldsymbol{s}=\boldsymbol{0}} \mid q(\partial_{\boldsymbol{s}}) \in P_B^{\perp}\}$$

は exponent $\boldsymbol{v}$ に関して，$M_A(\boldsymbol{\beta})$ の $\boldsymbol{w}$ 方向の解空間の基底を張る.

3.2 A が unimodular の場合

定義 3.3. $\boldsymbol{w}$ による三角形分割 $\Delta_{\boldsymbol{w}}$ が unimodular であるとは，$\Delta_{\boldsymbol{w}}$ の全ての facet σ の標準体積が 1 であるときにいう．$A \in M_{d \times n}(\mathbb{Z})$ が unimodular であるとは，全ての $d \times d$ 小行列の行列式が $+1$ または -1 であるときにいう.

[5, p.139] から，A が unimodular ならば，全ての三角形分割は unimodular である.

定義 3.4.

$$\mathrm{Core}(\Delta_{\boldsymbol{w}}) := \bigcap_{F:\text{facet of } \Delta_{\boldsymbol{w}}} \mathbb{C}F.$$

系 3.5. $\Delta_{\boldsymbol{w}}$ を unimodular する．このとき $\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{Core}(\Delta_{\boldsymbol{w}})$ ならば，$\boldsymbol{\beta}$ は $\boldsymbol{w}$ に関して唯一の fake exponent $\boldsymbol{v}$ を持つ．さらに，$\mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v}) \subset C$ が成り立つとき，$I_{\boldsymbol{0}} = K$．特に，$\boldsymbol{\beta} \in \mathrm{Core}(\Delta_{\boldsymbol{w}})$ のときは，フロベニウスの方法で $\boldsymbol{w}$ 方向の A-超幾何級数解を得られる.

例 3.6. [5, Example 4.2.7]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

について，重みベクトルを $\boldsymbol{w} = (5, 3, 1, 0, 0, 0)$ とおく．この重みについてのトーリックイデアルの被約グレブナー基底は，

$$I_A = \langle \partial_2\partial_5 - \partial_3\partial_6,\ \partial_1\partial_4 - \partial_3\partial_6,\ \partial_3\partial_5^2 - \partial_4^2\partial_6,\ \partial_2\partial_4^2 - \partial_3^2\partial_5,\ \partial_1\partial_5^2 - \partial_4\partial_6^2,$$
$$\partial_1\partial_3\partial_5 - \partial_2\partial_4\partial_6,\ \partial_1\partial_3^2 - \partial_2^2\partial_4,\ \partial_1^2\partial_5 - \partial_2\partial_6^2,\ \partial_1^2\partial_3 - \partial_2^2\partial_6\rangle.$$

であり，生成元から得られる重みに関するイニシャルイデアルは，

$$\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}} I_A = \langle \partial_2\partial_5,\ \partial_1\partial_4,\ \partial_3\partial_5^2,\ \partial_2\partial_4^2,\ \partial_1\partial_5^2,\ \partial_1\partial_3\partial_5,\ \partial_1\partial_3^2,\ \partial_1^2\partial_5,\ \partial_1^2\partial_3\rangle.$$

となる．このときの $\mathrm{in}_{\boldsymbol{w}} I_A$ から得られる standard pairs を考えよう．top dimensional prime は，

$$(*, *, 0, 0, 0, *) \quad (0, 0, *, *, 0, *) \quad (0, *, *, 0, 0, *) \quad (0, 0, 0, *, *, *)$$
$$(0, 0, *, *, 1, *) \quad (0, *, *, 1, 0, *),$$

embedded prime は，

$$(1, *, 1, 0, 0, *), \quad (1, 0, 0, 0, 1, *).$$

の計 8 種類の standard pairs があることがわかる．これらに対応する三角形分割の頂点 $\boldsymbol{a}_j$ の添字は，

$$\Delta = \{\{1, 2, 6\}, \{2, 3, 6\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 6\}, \{2, 6\}, \{6\}\},$$

であり，$C = \{6\}$ である．

$\boldsymbol{\beta} = (-1, 1, 0) = -\boldsymbol{a}_6$ とすると，この $\boldsymbol{\beta}$ に対応する fake exponent は 3 つあり，$\boldsymbol{v} = (0, 0, 0, 0, -1)$，$\boldsymbol{v}' = (0, 1, -\frac{3}{2}, 1, 0, -\frac{3}{2})$，$\boldsymbol{v}'' = (0, 0, \frac{1}{2}, -1, 1, -\frac{3}{2})$ である．$\boldsymbol{v}$ に対応する standard pairs は $(*, *, 0, 0, 0, *)$，$(0, *, *, 0, 0, *)$，$(0, 0, *, *, 0, *)$，$(0, 0, 0, *, *, *)$ であり，$\boldsymbol{v}'$ は $(0, *, *, 1, 0, *)$，$\boldsymbol{v}''$ は $(0, 0, *, *, 1, *)$ にそれぞれ対応している．このとき，$\mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v}) = \{6\} = C$ なので，$\mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v}') = \emptyset \subset C$ と $\mathrm{nsupp}(\boldsymbol{v}') = \{4\} \not\subset C$ がわかる．よって，Theorem 3.1 から fake exponents $\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{v}'$ について $I_{\boldsymbol{0}} \subset K$ が成り立つ．

参考文献

[1] A. Adolphson. Hypergeometric functions and rings generated by monomials. Duke Mathematical Journal, 1994, 73.2: 269.

[2] I.M. Gel'fand, A.V. Zelevinsky and M.M. Kapranov. Hypergeometric functions and toral manifolds. Funktsional'nyi Analiz i ego Prilozheniya, 1989, 23.2: 12-26.

[3] M. Nagamine. A-hypergeometric series with parameters in the core. arXiv preprint arXiv:2404.11085, 2024.

[4] G. Okuyama and M. Saito. Logarithmic A-hypergeometric series II. Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry, 2023, 64.4: 1057-1086.

[5] M. Saito, B. Sturmfels and N. Takayama. *Gröbner deformations of hypergeometric differential equations*, Algorithms and Computation in Mathematics, 2000, 6.

シフトセットタブローと K-theoretic Schur P, Q 函数の特殊値について

神戸大学　大学院理学研究科　数学専攻

島崎達史 (Tatsushi SHIMAZAKI) *

概要

シフトセットタブローは，K 理論的 Schur P，Q 函数を組み合わせ論的に表現するため，池田岳氏と成瀬弘氏によって導入された．本講演では，シフトセットタブローの個数に関する性質を，K 理論的 Schur P，Q 函数の特殊値を用いて述べる．また，K 理論的歪 Schur P，Q 函数の特殊値からシフト歪セットタブローの個数の特性についても触れる．本講演は，神戸大学の信川喬彦氏との共同研究と，早稲田大学の中山勇祐氏，杉本奨吾氏との議論に基づく．

1　導入

Schur Q 函数は，対称群の射影表現の研究において Schur が導入した対称函数である [7]．Schur 函数が対称群または一般線型群の既約表現の指標を表すように，Schur Q 函数は対称群の既約射影表現の指標を表す．また，Schur 函数は半標準盤（タブロー）を用いて定義できるのと同様に，Schur P 函数もシフトされた半標準盤（シフトタブロー）を用いて定義できる．さらに，Schur P 函数と Schur Q 函数は密接に関係しており，互いに他方を用いて表現することが可能である．本講演では，Schur P, Q 函数をシフトタブローを用いた組合せ論的表示を定義とする．

Schur P 函数, Schur Q 函数の各々の K 理論版として，GP 函数と GQ 函数が池田岳氏と成瀬弘氏により導入された [2]．これらは Schubert calculus において，Schubert class を表す特殊函数 (または特殊多項式) である．GP 函数，GQ 函数もまたシフトされた集合値半標準盤 (シフトセットタブロー) を用いて組合せ論的に定義できる．ここでは，これらの函数もシフトセットタブローを用いた表示を定義とし議論する．

1.1　ストリクトな分割とシフトされた Young 図形およびシフトタブロー

非負の整数列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ が $\lambda_i > \lambda_{i+1} > 0$ $(1 \leq i \leq r-1)$ を満たすとき，λ をストリクトな分割（strict partition）とよぶ．集合 $\mathcal{SP}$ を非負整数のストリクトな分割の全体とし，集合 $\mathcal{SP}_l$ を非負整数 l のストリクトな分割の全体とする．集合 $\mathcal{SP}_l$ に属するストリクト分割は，r 個の異なる正の整数 λ_i から成り，$|\lambda| := \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_r = l$ とする．また，非負の整数列 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ と

* E-mail: tsimazak@math.kobe-u.ac.jp

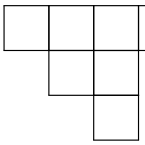
$(\lambda_1, \ldots, \lambda_r, 0)$ を同一視する．分割 λ の 長さを，$\lambda_r > 0$ かつ $\lambda_{r+1} = 0$ をみたす正の整数 r と定義し，この長さを $r = \ell(\lambda)$ と書く．

ストリクトな分割 λ に対して，形が λ であるシフトされた Young 図形（shifted Young diagram）は次のように定義される．

$$\mathrm{SYD}_\lambda \coloneqq \{(i,j) \in (\mathbb{Z}_{\geq} 0)^2 \mid 1 \leq i \leq \ell(\lambda),\ i \leq j \leq \lambda_i + i - 1\}.$$

シフトされた Young 図形を，正方形を用いて図示し，ここではそれらを箱とよぶ．また，ストリクトな分割 $\lambda \in \mathcal{SP}$ と，それに対応するシフトされた Young 図形を同一視する．たとえば，ストリクトな分割 $\lambda = (4,2,1) \in \mathcal{SP}_7$ に対応するシフトされた Young 図形は，以下である．

$\lambda =$



正の整数 $k \in [n] \coloneqq \{1, 2, \ldots, n\}$ $(n \in \mathbb{Z}_{>0})$ に対して，$k' \coloneqq k - \frac{1}{2}$ と定義する．即ち，このとき $k - 1 < k' < k$ が成り立つ．また，$[n'] \coloneqq \{1', 2', \ldots, n'\}$ および $[n', n] \coloneqq \{1', 1, 2', 2, \cdots, n', n\}$ と書く．

定義 1.1. 形が λ のシフトされた半標準盤（shifted semistandard tableaux）は，写像 $T : \mathrm{SYD}_\lambda \to [n', n]$ であり，以下の条件をみたすものをいう．

(1) $|T_{i,j}| = 1, \quad T_{i,j} \leq T_{i,j+1}, \quad T_{i,j} \leq T_{i+1,j}$;
(2) $k \in [n]$ は各列に高々 1 回だけ現れる;
(3) $k' \in [n']$ は各行に高々 1 回だけ現れる;
(4) $T_{i,i} \subseteq [n]$;

ただし，$T_{i,j} \in [n', n]$ である．

シフトされた半標準盤を，ここではシフトタブローとよび T と書く．形が λ であり，箱に入れる変数の個数が n であるすべてのシフトタブローを $\mathrm{ShT}_P(\lambda, n)$ と記す．さらに，シフトタブローのうち，条件 (4) を除外したものの全体を $\mathrm{ShT}_Q(\lambda, n)$ と表す．ここでは，$\mathrm{ShT}_P(\lambda, n) \neq \emptyset$ かつ $\mathrm{ShT}_Q(\lambda, n) \neq \emptyset$ である場合のみを考える．

例 1.1. $\lambda = (4,2,1) \in \mathcal{SP}_7,\ n = 3$ とする．以下のように，$\mathrm{ShT}_P(\lambda, 3)$ および $\mathrm{ShT}_Q(\lambda, 3)$ から，それぞれシフトタブローを 2 つ選ぶ．

$\mathrm{ShT}_P(\lambda, 3) \ni T_1 =$

1	1	1	2
	2	2	
		3	

, $T_2 =$

1	1	$3'$	3
	2	$3'$	
		3	

.

$\mathrm{ShT}_Q(\lambda, 3) \ni T_3 =$

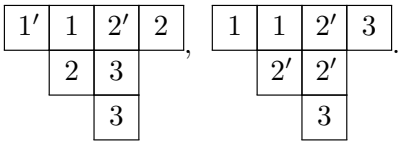
$1'$	1	1	$2'$
	2	2	
		3	

, $T_4 =$

$1'$	$2'$	$3'$	3
	$2'$	$3'$	
		3	

.

他方，以下の 2 つの図形は，$\mathrm{ShT}_P(\lambda,3)$ および $\mathrm{ShT}_Q(\lambda,3)$ のどちらにも属さない．



($\begin{smallmatrix}\boxed{k}\\ \boxed{k}\end{smallmatrix}$ は許されない．)　($\boxed{k'}\boxed{k'}$ は許されない．)

シフトタブロー T のウェイト $\omega(T)$ を以下で定義める．

$$\omega(T) \coloneqq (\omega_1(T), \omega_2(T), \ldots, \omega_n(T)) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n. \tag{1.1}$$

ここで，$\omega_k(T) = |\{k', k \in [n', n] \mid k', k \in T\}|$ とする．また，ウェイト $\omega(T)$ を用いて，$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ に対応する単項式 $x^{\omega(T)}$ を次で定める．

$$x^{\omega(T)} \coloneqq x_1^{\omega_1(T)} x_2^{\omega_2(T)} \cdots x_n^{\omega_n(T)}. \tag{1.2}$$

例 1.1の T_1 から T_4 の単項式は，次のようになる．

$$x^{\omega(T_1)} = x_1^3 x_2^3 x_3,\ x^{\omega(T_2)} = x_1^2 x_2 x_3^4,\ x^{\omega(T_3)} = x_1^3 x_2^3 x_3,\ x^{\omega(T_4)} = x_1 x_2^2 x_3^4.$$

Schur P，Q 函数は，次のように定義される．

$$P_\lambda(x) \coloneqq \sum_{T \in \mathrm{ShT}_P(\lambda,n)} x^{\omega(T)}, \tag{1.3}$$

$$Q_\lambda(x) \coloneqq \sum_{T \in \mathrm{ShT}_Q(\lambda,n)} x^{\omega(T)}. \tag{1.4}$$

これらは，以下の等式をみたす．

$$Q_\lambda(x) = 2^{\ell(\lambda)} P_\lambda(x).$$

1.2　集合値シフトタブローと K 理論的 Schur P，Q 函数

文献 [2] に従い，シフトされた集合値半標準盤を次のように定める．

定義 1.2 ([2])**.** 形が λ であるシフトされた集合値半標準タブローは，次の条件を満たす写像 $T : \mathrm{SYD}_\lambda \to [n', n]$ である．

(1) $|T_{i,j}| \geq 1, \quad \max T_{i,j} \leq \min T_{i,j+1}, \quad \max T_{i,j} \leq \min T_{i+1,j}$;
(2) $k \in [n]$ は各列において最大 1 回しか現れない;
(3) $k' \in [n']$ は各行において最大 1 回しか現れない;
(4) $T_{i,i} \subseteq [n]$;

ここで，$T_{i,j} \subseteq [n', n]$ である．

シフトされた集合値半標準タブローをシフトセットタブローとよび，形が λ であり変数の個数が n であるシフトセットタブロー全体を $\mathrm{SSVT}_P(\lambda, n)$ と書く．さらに，定義 1.2の条件 (4) を除いたシフトセットタブローの集合を $\mathrm{SSVT}_Q(\lambda, n)$ と記す．ここでは，$\mathrm{SSVT}_P(\lambda, n) \neq \emptyset$ および $\mathrm{SSVT}_Q(\lambda, n) \neq \emptyset$ である場合を考える．

例 1.2. $\lambda = (4, 2, 1) \in \mathcal{SP}_7$, $n = 3$ とする．$\mathrm{SSVT}_P(\lambda, 3)$ および $\mathrm{SSVT}_Q(\lambda, 3)$ のそれぞれから 2 つのシフトセットタブローを以下のように取る．

$$\mathrm{SSVT}_P(\lambda,3) \ni T^{(1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1 & 3' \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{|c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{23'} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-3} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{|c|}{3} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{3-3} \end{array}, \quad T^{(2)} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2' & 2 & 23 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{|c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{3'} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-3} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{|c|}{3} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{3-3} \end{array}.$$

$$\mathrm{SSVT}_Q(\lambda,3) \ni T^{(3)} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1' & 1 & 1 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{|c|}{2'} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-3} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{|c|}{3'3} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{3-3} \end{array}, \quad T^{(4)} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1' & 1 & 1 & 123 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{|c|}{2} & \multicolumn{1}{c|}{2} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-3} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{|c|}{3'} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{3-3} \end{array}.$$

本講演では，変数の個数が 1 桁である例のみを扱う．そのため，シフトセットタブローの箱に割り当てる変数たちの間のカンマ「,」を省略する．たとえば，$T^{(2)}$ の $\boxed{23}$ は箱 (1,4) へ $T_{1,4} = \{2, 3\} \subset [3]$ を割り当てていることとする．

$T \in \mathrm{SSVT}_P(\lambda, n)$ および $T \in \mathrm{SSVT}_Q(\lambda, n)$ のウェイト $\omega(T)$ を (1.1)，単項式 $x^{\omega(T)}$ を (1.2) で各々定める．例 1.2における $T^{(1)}$ から $T^{(4)}$ に対応する単項式は，次のようになる．

$$x^{\omega(T^{(1)})} = x_1^3 x_2^2 x_3^3,\ x^{\omega(T^{(2)})} = x_1 x_2^4 x_3^3,\ x^{\omega(T^{(3)})} = x_1^4 x_2^2 x_3^2,\ x^{\omega(T^{(4)})} = x_1^4 x_2^3 x_3^2.$$

[2] に基づき，K 理論的 Schur P および Q 函数は次のように定義される．

$$GP_\lambda(x \mid \beta) \coloneqq \sum_{T \in \mathrm{SSVT}P(\lambda,n)} \beta^{|T|-|\lambda|} x^{\omega(T)}, \tag{1.5}$$

$$GQ_\lambda(x \mid \beta) \coloneqq \sum_{T \in \mathrm{SSVT}Q(\lambda,n)} \beta^{|T|-|\lambda|} x^{\omega(T)}. \tag{1.6}$$

ここで，$|T|$ はシフトセットタブロー T に割り当てられた正の整数および正の半整数の個数を表す．式 (1.5) および (1.6) において $\beta = 0$ とすると，$GP_\lambda(x \mid 0) = P_\lambda(x)$ および $GQ_\lambda(x \mid 0) = Q_\lambda(x)$ が成り立つ．

2 主結果

2.1 GP 函数 GP_λ および GQ 函数 GQ_λ の特殊値とシフトセットタブローの個数の奇数性

GP 函数および GQ 函数について，以下のことを明らかにした．

定理 2.1 ([4])**.** 任意の $\lambda \in \mathcal{SP}$ に対し，次が成り立つ．

$$GP_\lambda(\beta, \dots, \beta \mid -\beta^{-1}) = \beta^{|\lambda|}, \tag{2.1}$$
$$GQ_\lambda(\beta, \dots, \beta \mid -\beta^{-1}) = \beta^{|\lambda|}. \tag{2.2}$$

証明は，シフトセットタブローに作用する符号反転対合 (sign-reversing involution) ι_P および ι_Q を各々構成し，組合せ論的に行った．ここでは，例を用いることにより (2.1) の証明の流れを述べる．

例 2.1. $\lambda = (4,2,1) \in \mathcal{SP}_7$ とし，$n = 3$ とする．まず，シフトされた Young 図形の相異なる箱 (i,j) と $(\tilde{i},\tilde{j})$ に対し，順序を以下で定める．

$$(i,j) < (\tilde{i},\tilde{j}) \quad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} j < \tilde{j}, \\ j = \tilde{j} \text{ and } i < \tilde{i}. \end{cases} \tag{2.3}$$

即ち，より左上にある箱が順序として小さいものとする．次に，各箱 (i,j) に $T_{i,j} = \{i\} \in [3]$ を割り当てたシフトセットタブローを $T_P \in \mathrm{SSVT}_P(\lambda, 3)$ とする．

$$T_P = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-3} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{3} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{3-3} \end{array}.$$

このとき，

$$\mathrm{SSVT}'_P(\lambda, n) \coloneqq \mathrm{SSVT}_P(\lambda, n) \setminus \{T_P\}.$$

とする．シフトセットタブロー $T \in \mathrm{SVT}'(\lambda, n)$ に対し，$T_{i,j} \neq (T_P)_{i,j}$ をみたす最小の箱を特定する．このとき，写像 $\iota_P : \mathrm{SSVT}'_P(\lambda, n) \to \mathrm{SSVT}'_P(\lambda, n)$ を以下で定める．

$$\begin{aligned} &\iota_P : \mathrm{SSVT}'_P(\lambda, n) \to \mathrm{SSVT}'_P(\lambda, n) \\ &T_{i,j} \mapsto \begin{cases} T_{i,j} \setminus (T_P)_{i,j} & (T_{i,j} \cap (T_P)_{i,j} \neq \emptyset), \\ T_{i,j} \sqcup (T_P)_{i,j} & (T_{i,j} \cap (T_P)_{i,j} = \emptyset), \end{cases} \\ &T_{\tilde{i},\tilde{j}} \mapsto T_{\tilde{i},\tilde{j}} \quad ((\tilde{i},\tilde{j}) \neq (i,j)). \end{aligned} \tag{2.4}$$

例 1.2 の $T^{(1)}$, $T^{(2)} \in \mathrm{SSVT}'_P(\lambda, 3)$ に対し，ι_P を作用させると，次のようになる．

$$T^{(1)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3' \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{23'} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-3} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{3} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{3-3} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \iota_P(T^{(1)}) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 3' \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{3'} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-3} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{3} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{3-3} \end{array}.$$

$$T^{(2)} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2' & 2 & 23' \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{3'} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-3} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{3} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{3-3} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \iota_P(T^{(2)}) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 12' & 2 & 23' \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{3'} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{2-3} \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{3} & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{3-3} \end{array}.$$

写像 ι_P は well-defined であり，$\iota_P^2 = \mathrm{id}$, $|\iota(T)| = |T| \pm 1$ $(T \neq T_0)$ をみたす．これより，次が成り立つ．

$$GP_\lambda(\beta, \beta, \beta \mid -\beta^{-1}) = \beta^{|T_P|} + \sum_{T \in \mathrm{SSVT}'_P(\lambda, n)} (-\beta^{-1})^{|T|-|\lambda|} \beta^{|T|} = \beta^{|\lambda|} = \beta^7.$$

定理 2.1を用いて，以下が成り立つことを示した．

系 2.1. 任意の $\lambda \in \mathcal{SP}$ に対して，位数 $|\mathrm{SSVT}_P(\lambda, n)|$ かつ $|\mathrm{SSVT}_Q(\lambda, n)|$ は共に奇数である．

2.2 歪 GP 函数 $GP_{\lambda/\mu}$ および GQ 函数 $GQ_{\lambda/\mu}$ の特殊値とシフトセットタブローの個数の奇数性

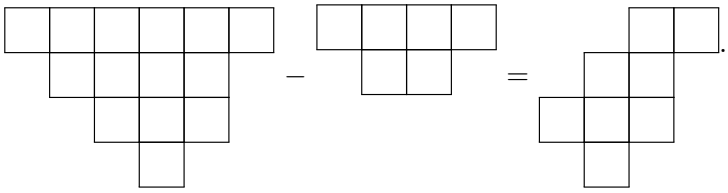
非負整数 l, m $(l \geq m)$ のストリクトな分割 $\lambda \in \mathcal{SP}_l$ と $\mu \in \mathcal{SP}_m$ に対し，全ての i について $\lambda_i \geq \mu_i$ が成り立つとき，$\lambda \supseteq \mu$ と書く．もし，$\ell(\lambda) > \ell(\mu)$ の場合は，μ の長さが λ の長さと一致するように μ の成分へ 0 を挿入する．このとき，これら λ, μ $(\lambda \supseteq \mu)$ の差を次のように定める．

$$\lambda - \mu \coloneqq (\lambda_1 - \mu_1, \lambda_2 - \mu_2, \ldots, \lambda_{\ell(\mu)} - \mu_{\ell(\mu)}, \lambda_{\ell(\mu)+1}, \ldots, \lambda_{\ell(\lambda)})$$

この $\lambda - \mu$ を λ/μ と表記し，対応する集合を次のように定義する．

$$\mathrm{SSYD}_{\lambda/\mu} \coloneqq \{(i, j) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2 \mid 1 \leq i \leq \ell(\lambda),\ \mu_i + i \leq j \leq \lambda_i + i - 1\}.$$

この集合を，形が λ/μ のシフトされた歪 Young 図形とよぶ．シフトされた歪 Young 図形 λ/μ も，シフト Young 図形と同様に箱を用いて図示する．また，2 つのストリクトな分割の差 λ/μ $(\lambda \supseteq \mu)$ とその対応するシフトされた歪 Young 図形は同じものと見なす．たとえば，$\lambda = (6, 4, 3, 1) \in \mathcal{SP}_{14}$ と $\mu = (4, 2) \in \mathcal{SP}_6$ に対する，シフトされた歪 Young 図形は次のようになる．

$\lambda/\mu =$  (2.5)

シフトされた歪 Young 図形の対角成分の箱たちは，λ に属するものととして考える．

シフトされた歪 Young 図形 $\lambda/\mu \in \mathrm{SSYD}_{\lambda/\mu}$ に対して，シフトされた歪半標準盤 (以下，歪シフトタブロー) を，定義 1.1 の条件をみたす図として定める．形が λ/μ，変数の個数が n 個であるすべての歪シフトタブロー全体の集合を $\mathrm{ShT}_P(\lambda/\mu, n)$ 書く．また，定義 1.1 の条件 (4) を除外した場合のすべての歪シフトタブローを $\mathrm{ShT}_Q(\lambda/\mu, n)$ と記す．歪シフトタブロー T について，ウェイトと単項式を同様に定める．歪 Schur P 函数，歪 Schur Q 函数は各々次で定義される．

$$P_{\lambda/\mu}(x) \coloneqq \sum_{T \in \mathrm{ShT}_P(\lambda/\mu, n)} x^{\omega(T)}, \tag{2.6}$$

$$Q_{\lambda/\mu}(x) \coloneqq \sum_{T \in \mathrm{ShT}_Q(\lambda/\mu, n)} x^{\omega(T)}. \tag{2.7}$$

これらの K 理論版が Lewis-Marberg [3] によって導入された．与えられた λ/μ に対して，シフトされた集合値歪半標準盤 (以下，歪シフトセットタブロー) を定義 1.2 の条件をみたす図として定義する．形が λ/μ であり，変数の個数が n であるすべての歪シフトセットタブローの集合を $\mathrm{SSVT}_P(\lambda/\mu, n)$ と表記する。歪シフトセットタブロー $T \in \mathrm{SSVT}_P(\lambda/\mu, n)$ に対して，重みを (1.1) で定め，単項式を $x^{\omega(T)}$ (1.2) により定義する．さらに，定義 1.2 の条件 (4) を除外した場合の形が λ，変数の個数が n である歪シフトセットタブロー全体の集合を $\mathrm{SSVT}_Q(\lambda/\mu, n)$ と書き，$T \in \mathrm{SSVT}_Q(\lambda/\mu, n)$ に対しても，ウェイト $\omega(T)$ と単項式 $x^{\omega(T)}$ を同様に定める．このとき，[3] ([5] も参照) に従い，歪 GP 函数と歪 GQ 函数を各々次で定義する．

$$GP_{\lambda/\mu}(x \mid \beta) := \sum_{T \in \mathrm{SSVT}_P(\lambda/\mu, n)} \beta^{|T|-|\lambda/\mu|} x^{\omega(T)},$$
$$GQ_{\lambda/\mu}(x \mid \beta) := \sum_{T \in \mathrm{SSVT}_Q(\lambda/\mu, n)} \beta^{|T|-|\lambda/\mu|} x^{\omega(T)}.$$

第 1.2 節と同様に，$\beta = 0$ とすれば， $GP_{\lambda/\mu}(x \mid 0) = P_{\lambda/\mu}(x)$ かつ $GQ_{\lambda/\mu}(x \mid 0) = Q_{\lambda/\mu}(x)$ である．歪 GP 函数 $GP_{\lambda/\mu}$ と歪 GQ 函数 $GQ_{\lambda/\mu}$ に対して，定理 2.1と同様の結果を明らかにした．

定理 2.2 ([4])**.** 任意の λ/μ $(\lambda \supseteq \mu)$ に対して，次が成り立つ．

$$GP_{\lambda/\mu}(\beta, \ldots, \beta \mid -\beta^{-1}) = \beta^{|\lambda/\mu|}, \tag{2.8}$$
$$GQ_{\lambda/\mu}(\beta, \ldots, \beta \mid -\beta^{-1}) = \beta^{|\lambda/\mu|}. \tag{2.9}$$

証明は，定理 2.1と同様に符号反転対合 ι_P^{skew} と ι_Q^{skew} を構成することにより示した．以下に，ι_Q^{skew} の作用の例を与える．

例 2.2. 式 (2.5) の歪 Young 図形を考え，$n = 5$ とする．このとき，$T_Q \in \mathrm{SSVT}_Q(\lambda/\mu, 5)$ は次である．

$$T_Q = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & 1' & 1 \\ \hline & 1' & 1 & \\ \hline 1' & 1 & 2' & \\ \hline & 2' & & \\ \hline \end{array}.$$

歪シフトセットタブロー $T^{\langle 3 \rangle}$, $T^{\langle 3 \rangle} \in \mathrm{SSVT}_Q(\lambda/\mu, 5)$ をとり，各々に ι_Q^{skew} を作用させると以下のようになる．

$$T^{\langle 3 \rangle} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & 1' & 123 \\ \hline & 1' & 1 & \\ \hline 1' & 1 & 2' & \\ \hline & 2' & & \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \iota_Q^{\mathrm{skew}}(T^{\langle 3 \rangle}) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & 1' & 23 \\ \hline & 1' & 1 & \\ \hline 1' & 1 & 2' & \\ \hline & 2' & & \\ \hline \end{array}.$$

$$T^{\langle 4 \rangle} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & 3' & 345 \\ \hline & 1' & 3'4' & \\ \hline 1' & 1 & 4'5 & \\ \hline & 2' & & \\ \hline \end{array} \quad \longrightarrow \quad \iota_Q^{\mathrm{skew}}(T^{\langle 4 \rangle}) = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & 1'3' & 345 \\ \hline & 1' & 3'4' & \\ \hline 1' & 1 & 4'5 & \\ \hline & 2' & & \\ \hline \end{array}.$$

定理 2.2から，以下が成り立つことを示した．

系 2.2. 任意の λ/μ $(\lambda \supseteq \mu)$ に対して，位数 $|\mathrm{SSVT}_P(\lambda/\mu, n)|$ かつ $|\mathrm{SSVT}_Q(\lambda/\mu, n)|$ は奇数である．

2.3 歪 GP 函数 $GP_{\lambda/\!/\mu}$ および歪 GQ 函数 $GQ_{\lambda/\!/\mu}$ の特殊値と歪シフトセットタブローの個数について

歪 GP 函数と歪 GQ 函数にはもう 1 つの種類が存在する．ストリクトな分割 $\mu \in \mathcal{SP}_m$ に対して，$\mu \setminus \{(i,j)\} \in \mathcal{SP}_{m-1}$ となるとき，位置 $(i,j) \in \mu$ を取り除き可能な箱 (removable box) とよぶ．$\mathrm{Rem}(\mu)$ を，μ の取り除き可能な箱すべての集合とする．このとき，歪 GP 函数 $GP_{\lambda/\!/\mu}$ および $GQ_{\lambda/\!/\mu}$ が Lewis-Marberg [3] により，以下のように定義された．

$$GP_{\lambda/\!/\mu}(x \mid \beta) \coloneqq \sum_{\nu \subseteq \mu} \beta^{|\mu/\nu|} GP_{\lambda/\nu}(x \mid \beta), \tag{2.10}$$

$$GQ_{\lambda/\!/\mu}(x \mid \beta) \coloneqq \sum_{\nu \subseteq \mu} \beta^{|\mu/\nu|} GQ_{\lambda/\nu}(x \mid \beta). \tag{2.11}$$

どちらの和においても，$\mu/\nu \subseteq \mathrm{Rem}(\mu)$ を満たすストリクトな分割 $\nu \subseteq \mu$ 全体をわたる．もし $\mu \nsubseteq \lambda$ ならば，$GP_{\lambda/\!/\mu}(x \mid \beta) = 0$ および $GQ_{\lambda/\!/\mu}(x \mid \beta) = 0$ とする．

ここで，変数 $x, y \in \mathbb{C}^n$ に対し対称函数 $f(x,y) \coloneqq f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ とする．このとき，歪 Schur P 函数，Q 函数は次のようにも定義できる [8].

$$P_\lambda(x,y) = \sum_\nu P_\nu(x) P_{\lambda/\nu}(y), \tag{2.12}$$

$$Q_\lambda(x,y) = \sum_\nu Q_\nu(x) Q_{\lambda/\nu}(y). \tag{2.13}$$

ここで，和の ν は全てのストリクトな分割をわたる．

これらの K 理論版として，歪 GP 函数 $GP_{\lambda/\!/\mu}$ および歪 GQ 函数 $GQ_{\lambda/\!/\mu}$ は以下の関係式をみたす [1] ([3, 6] も参照).

$$GP_\lambda(x,y \mid \beta) = \sum_\nu GP_\nu(x \mid \beta) GP_{\lambda/\!/\nu}(y \mid \beta), \tag{2.14}$$

$$GQ_\lambda(x,y \mid \beta) = \sum_\nu GQ_\nu(x \mid \beta) GQ_{\lambda/\!/\nu}(y \mid \beta). \tag{2.15}$$

2 種類の歪 GP 函数 $GP_{\lambda/\mu}$ と $GP_{\lambda/\!/\mu}$(GQ 函数 ($GQ_{\lambda/\mu}$ と $GQ_{\lambda/\!/\mu}$ についても同様) は一般には相異なる．これらの違いを明確に示す結果の 1 つとして，次の結果を導出した．証明には，定理 2.2を用いた．

系 2.3. 任意の $\emptyset \neq \mu \subseteq \lambda$ について，次が成り立つ．

$$GP_{\lambda/\!/\mu}(\beta, \ldots, \beta \mid -\beta^{-1}) = 0, \tag{2.16}$$

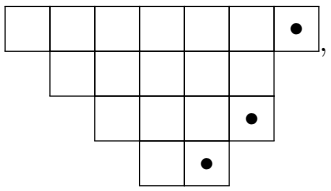
$$GQ_{\lambda/\!/\mu}(\beta, \ldots, \beta \mid -\beta^{-1}) = 0. \tag{2.17}$$

この結果から，(2.14) かつ (2.15) の和に現れる歪シフトセットタブローの個数は，常に偶数個であることが分かった．そこで，シフト歪 Young 図形から 1 つの箱を取り除く写像 ϖ を構成したことにより，これらの歪シフトセットタブローが自然に組にできるという以下の結果を明らかにした．

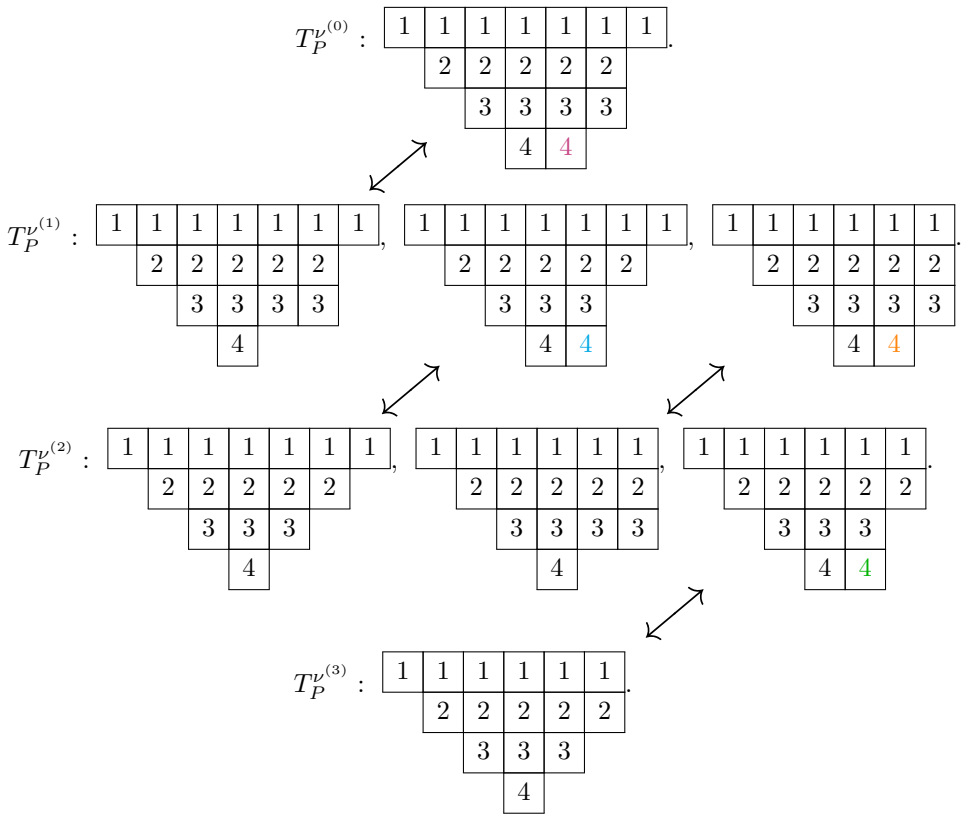
命題 2.1 ([4])**.** ストリクトな分割 $\emptyset \neq \mu \subseteq \lambda$ と ν に対して，式 (2.10) または (2.11) に現れる歪シフトセットタブローは，ϖ と ι_P^{skew} または ι_Q^{skew} によって 2 つ組を成す．

以下では，$GP_{\lambda /\!\!/ \mu}$ について，写像 ϖ によって 2 つ組となるものたちの例を書く．

例 2.3. $\lambda = (9,8,6,4) \in \mathcal{SP}_{27}$, $\mu = (7,5,4,2) \in \mathcal{SP}_{18}$ であり，$n = 5$ とする．このとき，$\mathrm{Rem}(\mu) = \{(1,7),(3,6),(4,5)\} = \{\mu^{(1)}, \mu^{(3)}, \mu^{(4)}\}$ である．即ち，μ の $\mathrm{Rem}(\mu)$ に対応する箱を図示すると次のようになる．

$\mu =$  ,

ここで，黒い点 $\boxed{\bullet}$ のある箱は $\mathrm{Rem}(\mu)$ を表す．このとき，写像 ϖ により 2 つ組になるものたちを矢印で結ぶと次のようになる．



ただし，$\nu^{(b)}$ は μ から $\mathrm{Rem}(\mu)$ に属する b $(0 \leq b \leq 3)$ 個の箱を取り除いたシフトされた Young 図形を表す．

謝辞

第 21 回数学総合若手研究集会での講演の機会を与えていただき，世話人の皆様に心より感謝申し上げます．本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2148 の支援を受けたものです.

参考文献

[1] Y.-C. Chiu and E. Marberg, *Expanding K-theoretic Schur Q-functions*, Algebraic Combinatorics, **6**(6): 1419–1445, 2023.

[2] T. Ikeda and H. Naruse, *K-theoretic analogues of factorial Schur P-and Q-functions*, Advances in Mathematics, **243**: 22–66, 2013.

[3] J. B. Lewis and E. Marberg, *Enriched set-valued P-partitions and shifted stable Grothendieck polynomials*, Mathematische Zeitschrift, **299**: 1929–1972, 2021.

[4] T. Nobukawa, and T. Shimazaki, *Special values of K-theoretic Schur P- and Q-functions*, arXiv:2410.15739, 2024.

[5] H. Naruse, *Excited Young diagram and Yang-Baxter relations*, Lecture in The Mathematical Society of Japan, in Japanese, 2011.

[6] E. Marberg, *Shifted combinatorial Hopf algebras from K-theory*, Algebraic Combinatorics, **7**(4): 1123–1156, 2024.

[7] I. Schur, *Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **139**: 155–250, 1911.

[8] J. R. Stembridge, *Shifted tableaux and the projective representations of symmetric groups*, Advances in Mathematics, **74**(1): 87–134, 1989.

パラレルセッション
会場Ｂ

ロジスティック成長するロトカ・ヴォルテラ型反応拡散方程式の資源分布依存性

早稲田大学　大学院先進理工学研究科　物理学及応用物理学専攻　山崎研究室
渡部悠人 (Yuto WATANABE) *

概要

フィッシャー方程式において資源分布を考慮した系では、bang-bang type と呼ばれる資源分布が生物数を最大化させることが知られている。我々は、この性質が捕食者と被捕食者の数の時間変化を表すロトカ・ヴォルテラ方程式に基づく反応拡散系においても成り立つかどうかを調べており、本発表では、bang-bang type を満たす資源分布の中でもどのような分布が生物数を最大化させるかについてのシミュレーション結果を発表する。

1　導入

1.1　反応拡散方程式

反応拡散方程式は放物型偏微分方程式の一種である。反応拡散方程式は反応項と拡散項をもち，各場所で反応と拡散が同時におこっているような時間発展する過程を記述する。化学反応や生態系の運動，神経線維の興奮など，様々な現象を表すモデル方程式として登場する。反応拡散方程式は具体的に 1 成分系では

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \Delta u(\boldsymbol{x},t) + f(u)$$

で記述される。ここで，Δu は拡散項，$f(u)$ は反応項に相当する。また，1 成分系を連立させた 2 成分系は

$$\begin{cases} \frac{\partial u(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \Delta u(\boldsymbol{x},t) + f(u,v) \\ \frac{\partial v(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \Delta v(\boldsymbol{x},t) + g(u,v) \end{cases}$$

で記述される。ただし $\Delta := \Sigma_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ である。反応拡散方程式の解は空間一様解，定常解，進行波解等の基本的な解や，時間周期解，爆発解，時空間パターン，連結解等の空間的に特徴の見られる解が存在する。

* E-mail:watanabe3y@ruri.waseda.jp

1.2 ロジスティック方程式

ロジスティック方程式はピエール=フランソワ・フェルフルストによって発案された生物の個体数について記述された非線形な常微分方程式であり、具体的に

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}) \tag{1}$$

と書き表される [1]。ここで N は生物の個体数，r は生物の増殖率，K は環境収容力を表す。生物が生息している環境には生物数が増加できる上限があると考え，その数を環境収容力 K とし，生物数が増加するにつれ餌の取り合いなどによって増加率が減ると考えることによってロジスティック方程式が考え出される。以下では，ロジスティック方程式と同じように，生物の増加が抑えられている系をロジスティック成長する系と呼ぶ。
また，ロジスティック方程式を反応拡散系に拡張した系をフィッシャー方程式と呼ぶ。フィッシャー方程式は

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t} = \Delta u(\boldsymbol{x}, t) + u(\boldsymbol{x}, t)(1 - u(\boldsymbol{x}, t)) \tag{2}$$

で表される。これは 1 次元において，適切な初期値に対して進行波解を持つことが知られている [2]。

1.3 ロトカ・ヴォルテラ方程式

ロトカ・ヴォルテラ方程式は，アルフレッド・ロトカとヴィト・ヴォルテラにより発案された生物の捕食，被捕食による個体数の時間発展を示した二成分系の非線形常微分方程式である。[1] 具体的な形は

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = au - buv \\ \frac{dv}{dt} = -cv + duv \end{cases} \tag{3}$$

と書き表される。ここでは，u が非捕食者の個体数を表し，a の増加率で増え，b の減少率で捕食され個体数が減少する。第二項が uv の積の形になっているのは，非捕食者が増えれば捕食者に見つかりやすくなり捕食される数が多くなり，捕食者が増えればその分非捕食者が捕食される数が増えるためである。v は捕食者の個体数を表し，c の減少率で減り，d の増加率で捕食し個体数が増加する。ロトカ・ヴォルテラ方程式は非線形問題の解析の観点から，リエナール系であり，$x = \ln u, y = \ln v$ とすれば，保存量

$$H = d\exp\{x\} + b\exp\{y\} - ay - cx \tag{4}$$

を用いて

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \end{cases} \tag{5}$$

と書き換えられ，ハミルトン系であることがわかると同時に，解の軌道は非線形のセンターとして閉軌道が無数に存在することが分かる。

ロトカ・ヴォルテラ方程式を反応拡散系に拡張した反応拡散ロトカ・ヴォルテラ方程式は,

$$\begin{cases} \frac{\partial u(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \Delta u(\boldsymbol{x},t) + au(\boldsymbol{x},t) - bu(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x},t) \\ \frac{\partial v(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \Delta v(\boldsymbol{x},t) - cv(\boldsymbol{x},t) + du(\boldsymbol{x},t)v(\boldsymbol{x},t) \end{cases} \tag{6}$$

とかける。

2 先行研究

フィッシャー方程式に空間依存する資源分布関数を導入し，その生物数を最大化させるような資源分布の関数系を求めた研究として，永原 [3] の結果がある。永原 [3] によると，以下の系

$$\begin{cases} \frac{\partial u(\boldsymbol{x},t)}{\partial t} = \Delta u(\boldsymbol{x},t) + u(\boldsymbol{x},t)(m(x) - u(\boldsymbol{x},t)) & \text{in} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) \geq 0, u(x,0) \not\equiv 0 & \text{in} \quad \overline{\Omega} \end{cases}$$

において $m(x)$ は資源分布関数を表し，ロジスティック方程式の環境収容力を置き換えたものとしても理解ができる。ただし，Ω は有界領域，ν はその境界の法線方向の微分を表し，二つ目の式は反射壁境界条件を示す。この系において，資源分布関数 $m(x)$ が，3 つの条件

$$\begin{aligned} &(1) \quad \underline{m}(x) \leq m(x) \leq \overline{m}(x) \quad \text{a.e.} \quad \text{in} \quad \Omega \\ &(2) \quad \int_\Omega m(x)dx \leq M \\ &(3) \quad u(x,t) \not\equiv 0 \quad \text{は不安定} \end{aligned}$$

を満たすとき，$\int_\Omega u(x,t)dx$ を最大化させる $m(x)$ は bang-bang type であると導いた。ここで，bang-bang type とは

$$m(x) = \overline{m}(x)\chi_E + \underline{m}(x)\chi_{\Omega \setminus E}$$

の形でかける関数である。χ は特性関数，$E \subset \Omega$ はある領域を示す。
また，この系について，資源の総量と生物数の比が，資源分布によらずに上に有界であるかを調べた研究として，X.Bai-X.He-F.Li[4] の結果がある。そこでは，$\Omega = [0,1]$ として，

$$\frac{\int_\Omega u(x,t)dx}{\int_\Omega m_\varepsilon(x)dx} \to 3, \quad \text{as} \quad \varepsilon \to 0^+$$

$$m_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 1-\varepsilon] \\ 1/\varepsilon & x \in (1-\varepsilon, 1] \end{cases}$$

と導出されている。すなわち，境界の端に餌を積み上げる極限で上界が導出されている。

3　モデル

先行研究を受け、反応拡散型ロトカ・ヴォルテラ方程式に資源分布をロジステック成長の環境収容力と同じ形で導入する。すなわち、モデルは以下のようになる。

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t)(m(x) - u(x,t) - bv(x,t)) & \text{in} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + v(x,t)(-c + du(x,t)) & \text{in} \quad \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) \geq 0, u(x,0) \not\equiv 0 \quad \text{in} \quad \overline{\Omega} \end{cases}$$

なお、今回は 1 次元での特性を見るためラプラシアンを空間の二階微分で表現しており、Ω は有界領域である。

3.1　パラメーターの選定

今考えている系には，3 つのパラメータ b, c, d が存在する。先行研究でもあったとおり，絶滅する解, つまり $u(x,t), v(x,t)$ が 0 に収束するような解を排除するようにパラメータを決定する。柳田 [5] によると，$m(x) > c/d$ であり，定数であるとき，解は固定点をなす定数定常解に収束するので，常微分系を考える。

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = u(t)(m - u(t) - bv(t)) \\ \frac{dv(t)}{dt} = v(t)(-c + du(t)) \end{cases}$$

固定点は，$(0,0), (m,0), (c/d, 1/b(m - c/d))$ である。$(0,0), (m,0)$ が不安定になるようにパラメータを決定する。

3.1.1　(0,0) の場合

ヤコビ行列は

$$\begin{pmatrix} m - 2u - bv & -bu \\ dv & -c + du \end{pmatrix}$$

となり，(0,0) を代入すると，

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

となる。固有値が $m > 0$ において片方正，片方負となるので $m > 0$ で (0,0) は不安定となる。

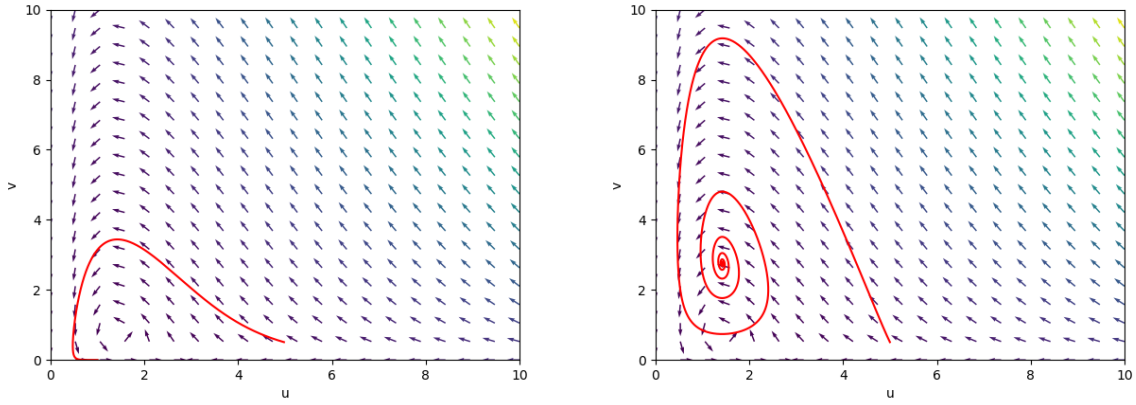
3.1.2　(m,0) の場合

ヤコビ行列に $(m, 0)$ を代入すると，

$$\begin{pmatrix} -m & -bm \\ 0 & -c + dm \end{pmatrix}$$

となり，固有値は $\frac{mc-m-c\pm|c-m-md|}{2}$ となる。固有値のいずれかが正となればよいので，例えば $c = 7.1, d = 5$ とすればよい。このとき，b はどの値をとっても良い。前提条件より $m(x) > c/d = 1.42$ と考える。こうすることにより，3 つ目の固定点が正となり，系の正値性も保たれる。

以下に，実際の常微分系での相図を示す。$m = 1$ の時は (1,0) に，$m = 5$ の時は (1.42,2.75) に収束していることが分かる。



(a) m=1 のとき　　**(b)** m=5 のとき

図 3.1 各 m に対する相図 $b = 1.3, c = 7.1, d = 5$ 初期値 $u = 5, v = 0.5$

4　主結果

上のモデルを差分法による数値計算を行い、bang-bang type の資源分布の中でもどのような資源分布が生物数を最大化するのかを調べた。本研究は資源を領域の境界から少し離したところに積み上げると生物の総量 $u + v$ が最大化するのではないかということを示唆した。

資源を積み上げる例

先行研究 [2] より、資源の総数が等しいとき、資源を積み上げていく極限で上界が求まっていた。このことから資源を積み上げる方が生物の総数は大きくなると考え、確かめた。結果は以下の図 4.1 の通りになり、横軸（資源の高さ）が 40 を超えたあたりで急激に $u + v$ の総量が大きくなり始めるのが分かる。

資源の山を動かす例

資源は高く積んだ方が $u + v$ を最大化するとわかったので、次に領域のどこに積み上げればよいのかをシミュレーションした。結果は以下の図 4.2 のようになり、資源の山は領域の境界でもなく、真ん中でもなく、境界から少しずらしたところが最大になることが分かった。

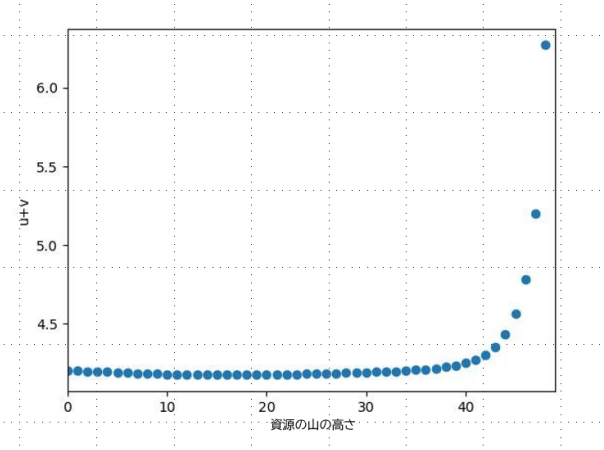


図 4.1 領域の真ん中に資源を積み上げる例の結果　　縦軸は $u+v$ の総量、横軸は資源の高さである

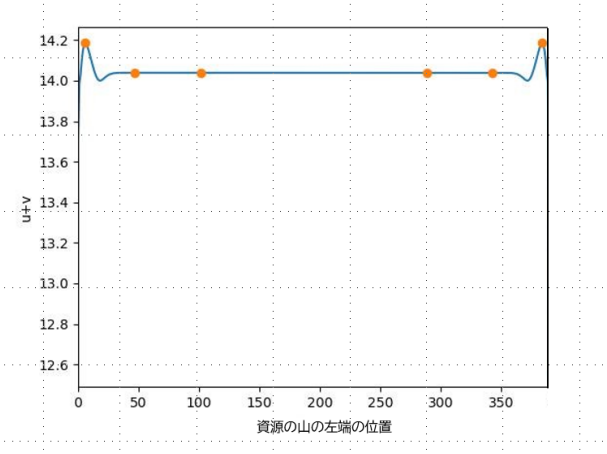


図 4.2 資源の山を移動させる例の結果　　縦軸は $u+v$ の総量、横軸は資源の山の左端の位置である。オレンジの点は極大値を示している。

参考文献

[1] Steven H.Strogatz,Nonlinear Dynamics and Chaos,CRC Press,(2019)

[2] A. Kolmogorov, I. Petrovsky and N. Piskunov,Etude de l’ equation de la diffusion avec croissancee la quantite de matiere et son application an probleme biologique, Bjul. Moskowskogo Gos.Univ. Ser. Internat. Sec. **A**(1),(1937)

[3] K.Nagahara and E.Yanagida:Maximization of the total population in a reaction–diffusion model with logistic growth,Calculus of Variations and Partial Differential Equations.**57**(80),(2018)

[4] X.Bai, X.He and F.Li:AN Optimization problem and its application in population dynamics.Proceedings of the American Mathematical Society.**144**(5),2161–2170(2015)

[5] 柳田 英二, 反応拡散方程式, 東京大学出版会,(2015)

Garbage disposal game on finite graphs

National Sun Yat-sen University, Kaohsiung 804, Taiwan
Hsin-Lun Li *

Abstract

The garbage disposal game involves a finite set of individuals, each of whom updates their garbage by either receiving from or dumping onto others. Instead of applying game theory, we investigate the game from a mathematical perspective. We examine the case where only social neighbors, whose garbage levels differ by at most a given threshold, can offload an equal proportion of their garbage onto others. Remarkably, in the absence of this threshold, the garbage amounts of all individuals converge to the initial average on any connected social graph of order at least 3.

1 Introduction

The garbage disposal game comprises a set of n individuals. Each individual updates their garbage either by receiving garbage from others or by dumping garbage onto others [8]. Mathematically, let $[n] = \{1, \ldots, n\}$ represent the set of all individuals, and let $x_i(t) \geq 0$ denote the amount of garbage held by individual i at time t. The update rule for individual i's garbage is given by $x_i(t+1) = \sum_{j\in[n]} A_{ij}(t)x_j(t)$, where $A_{ij}(t) \in [0, 1]$ represents the proportion of individual j's garbage that is dumped onto individual i at time t. This ensures that $\sum_{i\in[n]} A_{ij}(t) = 1$. A vector is *stochastic* if all entries are nonnegative and add up to 1. A square matrix is *row-stochastic* if each row is stochastic, and *column-stochastic* if each column is stochastic. Writing the update mechanism in matrix form:

$$x(t+1) = A(t)x(t) \tag{1}$$

where

$$x(t) = \text{transpose of } (x_1(t), \ldots, x_n(t)) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))' \in \mathbb{R}^n_{\geq 0},$$
$$A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ is column-stochastic with the } (i, j)\text{-th entry } A_{ij}(t).$$

The utility of individual i at time t is $u_i(x_i(t))$, where u_i is a decreasing function. This indicates that the more garbage an individual processes, the less utility they derive.

Unlike certain opinion models, such as the voter model, the threshold voter model and the asynchronous Hegselmann-Krause model, where an agent solely updates their opinion at each time step, an agent in the garbage disposal game cannot update their garbage independently if they dump onto others [14, 3, 13, 11, 5, 1, 6, 7, 16, 4, 9]. In the Hegselmann-Krause (HK) model, an agent updates their opinion by averaging the opinions of their opinion neighbors. In the synchronous HK model, all agents update their opinions at each time step, whereas in the asynchronous HK model, only one agent, uniformly selected at random, updates their opinion at each time step [12, 13, 15]. The HK model belongs to averaging dynamics but is not necessarily

*E-mail:hsinlunl@math.nsysu.edu.tw

a garbage disposal game. Moreover, the matrix $A(t)$ is not always row-stochastic, so the garbage disposal game does not necessarily belong to averaging dynamics.

In this paper, we consider the garbage disposal game, in which an individual can dump garbage onto others if and only if they are social neighbors and their garbage differs by at most a confidence threshold $\epsilon > 0$, which is a random variable. In detail, let $G = ([n], E)$ be an undirected simple social graph with vertex set $[n]$ and edge set E. An edge $(i, j) \in E$ symbolizes that agents i and j are social neighbors. Let $G_t = ([n], E_t)$ be a subgraph of G at time t with vertex set $[n]$ and edge set $E_t = \{(i, j) \in E : |x_i(t) - x_j(t)| \leq \epsilon\}$, recording agents who are social neighbors and whose garbage differs by at most the threshold ϵ. $N_i(t) = \{j \in [n] : (i, j) \in E_t\}$ includes all social neighbors of agent i at time t whose garbage differs by at most the threshold ϵ. The proportion of agent j's garbage dumping onto agent i equals $\frac{1}{|E_t|}$ if $(i, j) \in E_t$, $1 - \frac{|N_i(t)|}{|E_t|}\mathbb{1}\{E_t \neq \emptyset\}$ if $i = j$, and 0 otherwise. Namely,

$$A_{ij}(t) = \frac{1}{|E_t|}\mathbb{1}\{(i, j) \in E_t\} \quad \text{if } i \neq j, \quad A_{ii}(t) = 1 - \frac{|N_i(t)|}{|E_t|}\mathbb{1}\{E_t \neq \emptyset\}.$$

Thus, agents i and j dump the same proportion of their garbage onto each other if they are social neighbors and their garbage differs by at most the threshold ϵ. For instance, if G_t is the star graph of order 6, as shown in Figure 1, then agent 1 can dump $\frac{1}{5}$ of their garbage onto each of the other agents, and each of the other agents can dump $\frac{1}{5}$ of their garbage onto agent 1. Note that agent 1 is the center of the star graph and is the only agent emptying their original garbage. The update mechanism is as follows for all $i \in [n]$:

$$x_i(t + 1) = \frac{\mathbb{1}\{E_t \neq \emptyset\}}{|E_t|} \sum_{j \in N_i(t)} x_j(t) + \left(1 - \frac{|N_i(t)|}{|E_t|}\mathbb{1}\{E_t \neq \emptyset\}\right) x_i(t). \tag{2}$$

Observe that the garbage disposal game described in (2) falls within the category of averaging dynamics. We assume that $x_i(0)$, $i \in [n]$, are nonnegative real-valued random variables. Let $a \wedge b$ and $a \vee b$ denote the *minimum* and *maximum* of a and b, respectively. A graph G is termed *δ-trivial* if the distance between any two vertices is at most δ. Let $V(H)$ represent the vertex set of the graph H. Let $\mathbb{1}$ denote the vector with all entries equal to 1. The *Laplacian* $\mathscr{L}$ on the simple graph $G = ([n], E)$ is defined as $\mathscr{L} = \text{diag}(d_1, \ldots, d_n) - A$, where d_i is the degree of vertex i in G, and A is the adjacency matrix of G with $A_{ij} = \mathbb{1}\{(i, j) \in E\}$. The *convex hull* generated by $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^d$ is the smallest convex set containing $v_1, v_2, \ldots, v_n$. It is defined as follows:

$$C(\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}) = \left\{ v : v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \text{ where } (\lambda_i)_{i=1}^n \text{ is a stochastic vector} \right\}.$$

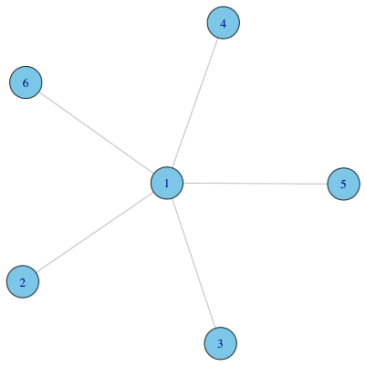


Figure 1: Star graph of order 6

2 Main Results

The ϵ-triviality of the graph G_s implies $G = G_s$, which is equivalent to the case without the threshold ϵ. We will later prove that the graph G_t preserves δ-triviality over time for all $\delta > 0$, leading to $G_t = G$ for all $t \geq s$. Thus, from time s onward, the garbage disposal game is played on the social graph G. Consequently, Theorem 1 shows that, without the threshold ϵ, the garbage amounts of all agents will converge to the initial average on any connected social graph of order at least 3. Note that setting $\epsilon = \max_{i,j\in[n]} |x_i(0) - x_j(0)|$ is equivalent to having no threshold ϵ.

Theorem 1. *Assume that*

- *the social graph G is connected with $n \geq 3$, and*
- *the graph G_s is ϵ-trivial at some time $s \geq 0$.*

Then, $x_i(t)$ converges to $\frac{1}{n}\sum_{k\in[n]} x_k(0)$ as $t \to \infty$ for all $i \in [n]$.

Observe that when $n = 2$, it is a process of mutually interchanging garbage. Under the assumption of Theorem 1, those whose garbage is above average benefit from the game, while those whose garbage is below average suffer in the game.

References

[1] E. D. Andjel, T. M. Liggett, and T. Mountford. Clustering in one-dimensional threshold voter models. *Stochastic processes and their applications*, 42(1):73–90, 1992.

[2] L. W. Beineke, R. J. Wilson, P. J. Cameron, et al. *Topics in algebraic graph theory*, volume 102. Cambridge University Press, 2004.

[3] C. Castellano, S. Fortunato, and V. Loreto. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of modern physics*, 81(2):591, 2009.

[4] P. Clifford and A. Sudbury. A model for spatial conflict. *Biometrika*, 60(3):581–588, 1973.

[5] J. Cox and R. Durrett. Nonlinear voter models. In *Random Walks, Brownian Motion, and Interacting Particle Systems: A Festschrift in Honor of Frank Spitzer*, pages 189–201. Springer, 1991.

[6] R. Durrett. Multicolor particle systems with large threshold and range. *Journal of Theoretical Probability*, 5:127–152, 1992.

[7] R. Durrett and J. E. Steif. Fixation results for threshold voter systems. *The Annals of Probability*, pages 232–247, 1993.

[8] T. Hirai, T. Masuzawa, and M. Nakayama. Coalition-proof nash equilibria and cores in a strategic pure exchange game of bads. *Mathematical Social Sciences*, 51(2):162–170, 2006.

[9] R. A. Holley and T. M. Liggett. Ergodic theorems for weakly interacting infinite systems and the voter model. *The annals of probability*, pages 643–663, 1975.

[10] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge university press, 2012.

[11] N. Lanchier and H.-L. Li. Consensus in the Hegselmann–Krause model. *Journal of Statistical Physics*, 187(3):1–13, 2022.

[12] H.-L. Li. Mixed Hegselmann-Krause dynamics. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, 27(2):1149–1162, 2022.

[13] H.-L. Li. Mixed Hegselmann-Krause dynamics II. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, 28(5):2981–2993, 2023.

[14] H.-L. Li. An imitation model based on the majority. *Statistics & Probability Letters*, 206:110007, 2024.

[15] H.-L. Li. Mixed Hegselmann-Krause dynamics on infinite graphs. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2024(11):113404, 2024.

[16] T. M. Liggett. Coexistence in threshold voter models. *The Annals of Probability*, 22(2):764–802, 1994.

最適輸送距離による大域結合写像のクラスター解析

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
和田康司 (Koji WADA) *

概要

複雑系の数理モデルとして大域結合写像（GCM）が提案されている．ロジスティック写像が大域的に結合した GCM は要素間の同期によってクラスターが発生するという特徴を持ち，パラメータに依存してクラスターの安定性が変化する．特に，あるパラメータ領域において同期する要素の組み合わせの変化に伴ってクラスターが変動することが知られている．本発表では，クラスターの変化に着目して軌道の振る舞いを最適輸送距離によって定量的に評価した結果を紹介する．

1　導入

1.1　はじめに

カオス的遍歴とは疑似アトラクター（quasi attractor）と呼ばれる秩序的な状態の間をカオス的に遷移する現象である．疑似アトラクターは一般的なアトラクターと異なり，ほとんどの近傍の軌道を吸引するがある期間において一時的に軌道が離れる場合も含む構造を指す．カオス的遍歴は，非平衡ニューラルネットワーク [1] や光乱流 [2] などにおいても類似の現象が観測されており，複数の要素が相互作用する大自由度力学系において普遍的に現れる現象として考えられ，1990 年代あたりから注目されている．また，1990 年に Kaneko によって提案された大域結合写像と呼ばれる力学系において，部分秩序相と呼ばれるパラメータの範囲においてカオス的遍歴が観測されることが知られている [3].

大域結合写像に対するカオス的遍歴は，各クラスターが持つ要素数の組によって表現されるクラスタリングパターンの揺らぎとして捉えられ [4]，クラスター数などによりパラメータ領域の特徴づけがされた [5]．しかし，系全体のクラスター数のみならず各クラスター内の要素数 N_i も含めた情報から軌道の特徴を捉える解析はなされていない．そこで本稿では，最適輸送距離を用いることでクラスタリングパターンの変化を定量的に評価する手法を提案する．さらに，カオス的遍歴が現れるパラメータ領域である部分秩序相において軌道が接近する部分空間の情報を用いることで疑似アトラクターを評価した結果を紹介する．

* E-mail:wada.koji.n4@elms.hokudai.ac.jp

1.2 大域結合写像

大域結合写像（Globally coupled map, GCM）とは N 次元の離散力学系であり，ここではロジスティック写像が大域的に結合した以下のモデルを考える [3]：

$$x_{n+1}(i) = (1-\varepsilon)f(x_n(i)) + \frac{\varepsilon}{N}\sum_{j=1}^{N} f(x_n(j)), \quad 0.0 \leq \varepsilon \leq 1.0, \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

$$x_n(i) \in [0,1], \quad f(x) = \alpha x(1-x). \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad 0.0 \leq \alpha \leq 4.0,$$

非線形性の強さを表す α は分岐パラメータと呼ばれ，相互作用の強さを表す ε は結合係数と呼ばれる．系のダイナミクスはパラメータの組 (α, ε) に依存し，特に各要素の同期（$x_n(i) = x_n(j),\ i \neq j$）によって形成するクラスターがパラメータに依存する．パラメータ領域はクラスタリングの観点から大きく以下の 4 つに分類できる [3]：

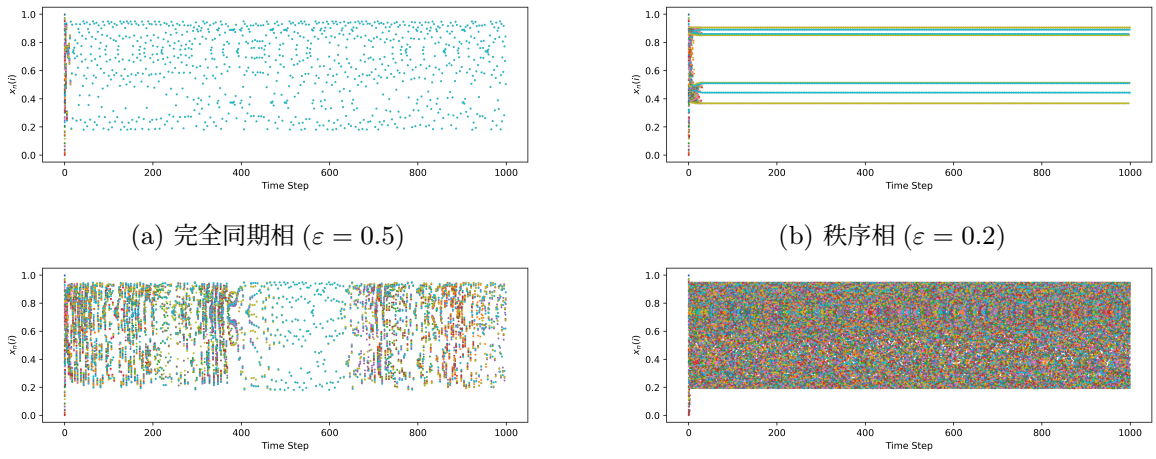
完全同期相： 過渡期間が終了後に，すべての要素 $x_n(i)$ が同期し全体が一つのクラスターとして振る舞う．

秩序相： 過渡期間が終了後に，小数のクラスターを形成し小数自由度の系として振る舞う．

部分秩序相： 時間発展の中でクラスターが変動を続けるカオス的遍歴と呼ばれる現象が発生する．

非同期相： ほとんどの要素が同期せずにばらばらに振る舞う．

そして，各相の軌道は以下のような振る舞いとなる：



(a) 完全同期相 ($\varepsilon = 0.5$)　(b) 秩序相 ($\varepsilon = 0.2$)

(c) 部分秩序相 ($\varepsilon = 0.34$)　(d) 非同期相 ($\varepsilon = 0.01$)

図 1: 各パラメータ (α, ε) に対する軌道の時間発展の例．ただし，$\alpha = 3.8, N = 100$ としており，初期値 $\boldsymbol{x}_0$ もすべてのパラメータにおいて固定している．また，$i = 1, 2, \cdots, N$ に対する $x_n(i)$ の時系列を重ねて表示している．

1.2.1 平均有効次元によるパラメータの特徴づけ

要素間の同期によって形成されるクラスターは，クラスター数を k として各クラスターが持つ要素数を N_i とおくと $(N_1, N_2, \cdots, N_k)$ と表現できる．また，いくつかの要素 $x(i)$ が同期している状態

は点 $\boldsymbol{x} = (x(1), x(2), \cdots, x(N))$ が以下の部分空間 H_σ に属する状態として捉えることができる．

定義 1 ([5])**.** N 次対称群 S_N の元 σ に対して，写像 $P_\sigma : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ を

$$P_\sigma(x_1, x_2, \cdots, x_N) := (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \cdots, x_{\sigma(N)})$$

と定義する．このとき $\mathbb{R}^N$ の部分空間 H_σ を

$$H_\sigma := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \mid x_i = x_{\sigma(i)},\ i = 1, 2, \cdots, N\}$$

と定義する．

さらに，δ を小さな正の実数として精度 δ でのクラスター数を表す指標である有効次元と平均有効次元を以下のように定義する：

定義 2 ([5])**.** 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N,\ \delta > 0$ に対して

$$\mathrm{ED}(\boldsymbol{x}, \delta) := \inf_\sigma \{\dim H_\sigma \mid H_\sigma \cap B_\delta(\boldsymbol{x}) \neq \emptyset\}$$

を精度 δ の有効次元（Effective dimension）と呼ぶ．ここで $B_\delta(x)$ は点 x の δ 近傍である．さらに，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N,\ \delta > 0,\ T \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mathrm{MED}(\boldsymbol{x}, \delta, T) := \frac{1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \mathrm{ED}(F^i(\boldsymbol{x}), \delta) \quad (\text{ただし } F^i(\boldsymbol{x}) := \underbrace{(F \circ F \circ \cdots \circ F)}_{i}(\boldsymbol{x}))$$

を精度 δ，時間 T における平均有効次元（Mean of effective dimension）と呼ぶ．

図 2 は, ランダムにサンプリングした初期値 $\boldsymbol{x}_0$ 各パラメータ ε に対する平均有効次元である．クラスター数が収束する完全同期相，秩序相，非同期相においては整数値となり，クラスタリングパターンが変動する部分秩序相においては非整数値になる傾向がある．特に，時間発展の中で各要素が同期せずクラスター数が多い場合には平均有効次元が高く，多くの要素が同期しておりクラスター数が小さい場合には平均有効次元が低い．

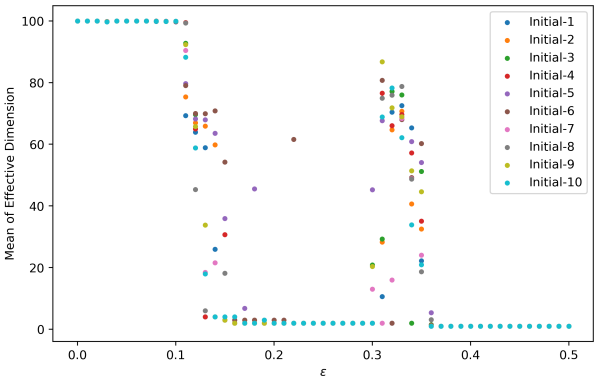
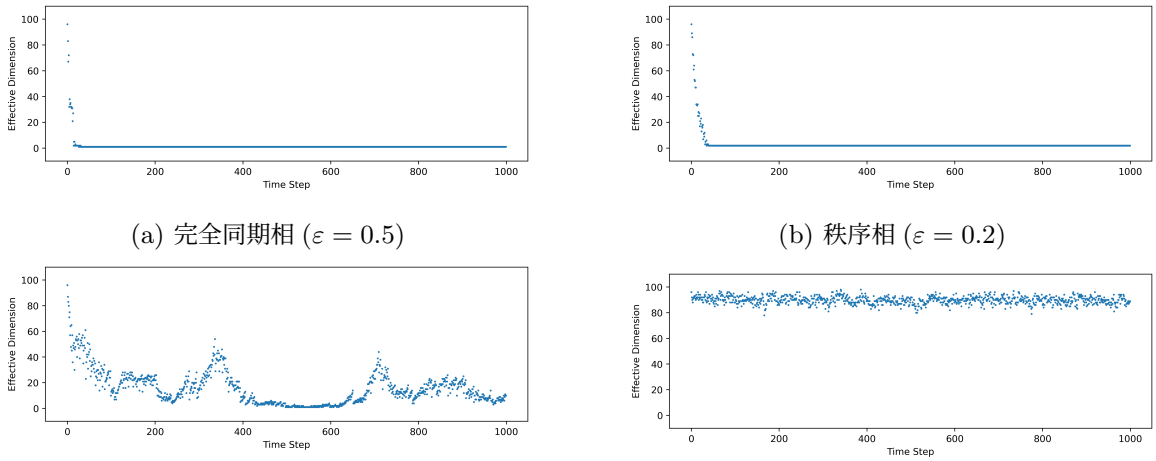


図 2: $\alpha = 3.8,\ N = 100,\ \delta = 10^{-6}$ とした時の各 ε に対する平均有効次元．ε は 0.0 から 0.5 まで 0.01 ごとに設定している．また，ランダムにサンプリングした 10 個の初期値に対する結果を重ねて表示している．時間平均は，計算した軌道の長さ 10000 ステップに対して初期状態から 5000 ステップまでを遷移期間と仮定し，その後の 5000 ステップから得ている．

1.2.2 GCM におけるカオス的遍歴

部分秩序相においては有効次元が時間発展の中で収束せず変動し，特に，時間発展の中で有効次元が小さい値で安定する期間と大きい値を取りながら変動する期間が存在する（図 3c）．このように軌道が高次元空間を遷移する期間と低次元空間の近傍を滞在する期間が断続的に観測される現象をカオス的遍歴と呼ぶ [6]．さらに，軌道を一時的にでも引き付ける部分集合を疑似アトラクターと呼ぶ．



(a) 完全同期相 ($\varepsilon = 0.5$)　(b) 秩序相 ($\varepsilon = 0.2$)

(c) 部分秩序相 ($\varepsilon = 0.34$)　(d) 非同期相 ($\varepsilon = 0.01$)

図 3: 各パラメータ (α, ε) に対する有効次元の時間発展の例．ただし，$\alpha = 3.8, N = 100$ としており，初期値 $\boldsymbol{x}_0$ もすべてのパラメータにおいて固定している．

1.3 研究の目的

1.2.1 節で見たように，パラメータ領域はクラスター数に着目した有効次元や平均有効次元によって特徴づけることができる．しかし，これらの指標は各クラスターが持つ要素数 N_i の情報を持たないため，疑似アトラクターによって解釈しようとすると部分空間 H_σ の近傍に滞在しているのかを判断することができない．そこで，本稿ではクラスタリングパターン $(N_1, N_2, \cdots, N_k)$ に着目し，その変動を最適輸送距離を用いて定量的に評価する手法を提案する．また，疑似アトラクターの複雑性を有効次元と最適輸送距離を用いて定量的に評価する手法を提案する．

2 準備

第 2 節では，最適輸送距離とクラスタリングパターンに対応するクラスター分布の定義について述べる．さらに，軌道を生成する際に問題となる「見かけの引き込み」と同期判定の具体的な方法である有限精度クラスターについて述べる．

2.1 最適輸送距離

最適輸送距離とは以下の最適化問題の解である：

定義 3. $\boldsymbol{p} = (p_i)_{i=1}^N$ と $\boldsymbol{q} = (q_j)_{j=1}^N$ を離散確率分布とする．コスト行列 $C := (C_{ij})$ と輸送行列 $P := (P_{ij})$ $(P_{ij} \geq 0,\ i, j = 1, 2, \cdots, N)$ に対して

$$\mathrm{OT}(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, C) := \min_{P \in \mathbb{R}^{N \times N}} \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} P_{ij} \;\middle|\; \sum_{j=1}^N P_{ij} = p_i,\ \sum_{i=1}^N P_{ij} = q_j \right\}$$

を最適輸送距離と呼ぶ.

2.2 クラスタリングパターンとクラスター分布

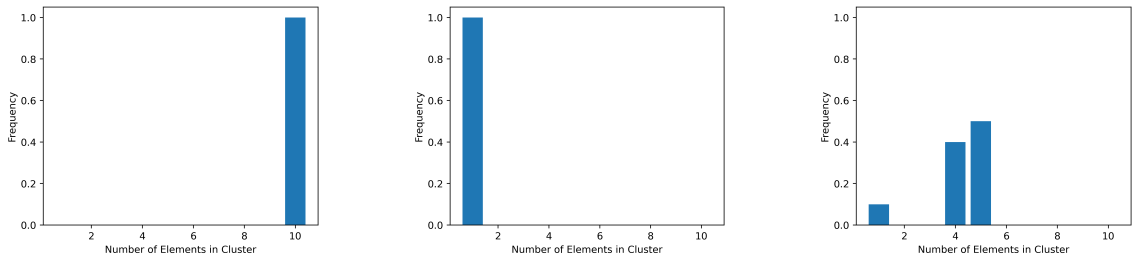
クラスタリングパターン $[(N_1, N_2, \cdots, N_k)]$ の変化を最適輸送距離を用いて評価するために，離散確率分布に対応させる必要がある．そのために，以下の写像 T を用いて離散分布 $(p_1, p_2, \cdots, p_N)$ へ変換する：

定義 4. 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して，Ω_k をクラスタリングパターン $(N_1, N_2, \cdots, N_k)$ 全体の集合とし，$\Sigma_N := \{(p_1, p_2, \cdots, p_N) \in [0,1]^N \mid \sum_{i=1}^N p_i = 1\}$ とおく．このとき写像 $T : \Omega_k \to \Sigma_N$ を

$$T(N_1, N_2, \cdots, N_k) = (p_1, p_2, \cdots, p_N), \quad p_i = \sum_{j=1, \cdots, k; N_j = i} \frac{N_j}{N}. \quad i = 1, 2, \cdots, N$$

と定義する．ここで，離散分布 $(p_1, p_2, \cdots, p_N)$ をクラスター分布と呼ぶ.

例 1. 図 4 は，各クラスタリングパターンに対するクラスター分布の例である．写像 T は，完全同期の場合（図 4a）と非同期の場合（図 4b）との差異が最適輸送距離によって最大となるように定義している.



(a) (10) (b) $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ (c) $(1, 4, 5)$

図 4: 各クラスタリングパターンに対するクラスター分布の例，ただし簡単のため $N = 10$ としている.

2.3 見かけの引き込みと有限精度クラスター

計算機で軌道を生成する際には，有限桁までしか扱うことができないという点に注意しなければならない．つまり，一度でもある要素の組が完全に同期してしまうと，本来は微小な差を持っており同期が破れる可能性があるにも関わらずその後も同一の値となってしまう．特に今回の場合は部分秩序相において顕著であり，軌道が本来持つ特徴を捉えられるとは言い難い．そのため [3] に従い，軌道を計算する際に各ステップにおいて微小なノイズを加える．具体的には，η を十分小さな正の実数とし一様分布 $U(-\eta, \eta)$ からランダムにサンプリングした値を各時刻 n において $\boldsymbol{x}_n$ 加えることにする．今回は $\eta = 10^{-12}$ として計算している．

時刻 n における同期の判定は $\boldsymbol{x}_n$ に対して最も近い部分空間 H_σ によって特徴づけられた．しかし，系の次元 N に対して部分空間 H_σ の数は組み合わせ論的に爆発するため計算機での探索は困難である．そこで，クラスタリングパターンの決定には [4] において定義された有限精度クラスターを採用する．具体的には，十分小さい正の実数 δ に対して

$$\bar{x}_n^\delta(i) := [x_n(i)/\delta] \times \delta \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

とおき，$\bar{x}_n^\delta(i)$ に対して同期・非同期を判定することで得られる精度 δ におけるクラスターを求める．この方法によって求めるクラスターを有限精度クラスターと呼ぶ．以降では有効次元をこの意味で求める有限精度クラスター数とする．今回は $\delta = 10^{-6}$ として計算している．

3 主結果

以下において $N = 100$ としていることに注意する．

3.1 クラスタリングパターン変化の定量的評価

まずは，部分秩序相において観測されるクラスタリングパターンの変化を定量的に評価した結果を紹介する．

3.1.1 提案手法

写像 T によってクラスタリングパターン $(N_1, N_2, \cdots, N_k)$ は離散確率分布であるクラスター分布 $\boldsymbol{p}$ に変換することができる．さらに，時刻 n におけるクラスター分布 $\boldsymbol{p}^{(n)}$ と時刻 $n+1$ におけるクラスター分布 $\boldsymbol{p}^{(n+1)}$ に対してコスト行列 C を固定した最適輸送距離 $\mathrm{OT}(\boldsymbol{p}^{(n)}, \boldsymbol{p}^{(n+1)}, C)$ によって時刻 n におけるクラスタリングパターンと時刻 $n+1$ におけるクラスタリングパターンの差異を評価することができる．具体的には以下の手順でクラスタリングパターン変化の評価を行った：

Step 1：パラメータ (α, ε) を設定する．

Step 2：ある初期値 $\boldsymbol{x}_0 \in [0,1]^N$ を与えたときの軌道 $\boldsymbol{x}_n$ を 10000 ステップ分計算する．

Step 3：各時刻 n におけるクラスタリング一パターン $(N_1^{(n)}, N_2^{(n)}, \cdots, N_{k^{(n)}}^{(n)})$ をクラスター分布 $\boldsymbol{p}^{(n)}$ に変換する．

Step 4：コスト行列 C を $C_{ij} = |i-j|$ として最適輸送距離 $\mathrm{OT}(\boldsymbol{p}^{(n)}, \boldsymbol{p}^{(n+1)}, C)$ を計算する．

Step 5：最適輸送距離の時系列に対して前半（5000 ステップ）を切り捨て，後半（5000 ステップ）に対して時間平均 $(1/(T-T_0))\sum_{n=T_0}^{T} \mathrm{OT}(\boldsymbol{p}^{(n)}, \boldsymbol{p}^{(n+1)}, C)$ $(T_0 = 5001,\ T = 10000)$ を計算する．

Step 6：パラメータ (α, ε) を変化させ Step 2 から Step 5 まで繰り返す．

3.1.2 結果

図 5 は各パラメータ ε に対する最適輸送距離の時間平均である．クラスタリングパターンが収束する完全同期相，秩序相，非同期相においては最適輸送距離が 0 となり初期値依存性もないことが確認できる．しかし，部分秩序相においてはクラスタリングパターンが時間発展の中で変化するため最適輸送距離も正の値を取ることが確認できる．特に，部分秩序相 I（$0.9 \leq \varepsilon \leq 0.22$）において最適輸送距離は，ほとんどの初期値に対して小さい値となり，部分秩序相 II（$0.3 \leq \varepsilon \leq 0.36$）においては最適輸送距離も大きい値となる傾向があることが確認できる．つまり，部分秩序相 I はクラスタリングパターンの変化が小さく，部分秩序相 II はクラスタリングパターンの変化が大きいと解釈することができると考えられる．

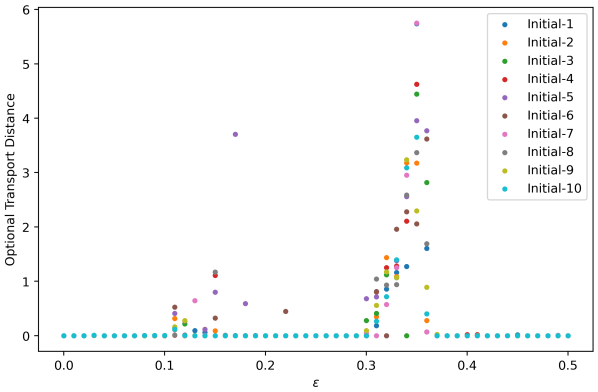


図 5: 最適輸送距離の時間平均．$\alpha = 3.8$ と固定した時の各 ε に対する平均有効次元．ε は 0.0 から 0.5 まで 0.01 ごとに設定している．また，ランダムにサンプリングした 10 個の初期値に対する結果を重ねて表示している．

3.2 疑似アトラクターの複雑性

次に，クラスタリングパターンの変化を定量的に評価した最適輸送距離と部分空間 H_σ を特徴づける有効次元によって疑似アトラクターの複雑性を評価した結果を紹介する．

3.2.1 提案手法

時間発展の中でクラスタリングパターンが変化しない期間においては，軌道がある部分空間 H_σ の近傍に滞在していると捉えることができる．そして，そのような期間が軌道が一時的にある部分集合に引き付けられている期間であると考えると，それらの期間の情報を用いることで疑似アトラクターを定量的に捉えることができると考えられる．具体的には以下の手順で疑似アトラクターの複雑性の評価を行った：

Step 1：パラメータ (α, ε) を設定する．

Step 2：ある初期値 $\boldsymbol{x}_0 \in [0,1]^N$ を与えたときの軌道 $\boldsymbol{x}_n$ を 10000 ステップ分計算する．

Step 3：各時刻 n におけるクラスタリング一パターン $(N_1^{(n)}, N_2^{(n)}, \cdots, N_{k^{(n)}}^{(n)})$ をクラスター分布 $\boldsymbol{p}^{(n)}$ に変換する．

Step 4：コスト行列 C を $C_{ij} = |i-j|$ として最適輸送距離 $\mathrm{OT}(\boldsymbol{p}^{(n)}, \boldsymbol{p}^{(n+1)}, C)$ を計算する．

Step 5：最適輸送距離の時系列に対して前半（5000 ステップ）を切り捨て，後半（5000 ステップ）の有効次元と最適輸送距離の時系列を抽出する．

Step 6：$\mathrm{OT}(\boldsymbol{p}^{(n)}, \boldsymbol{p}^{(n+1)}, C) = 0$ となる時刻 n における有効次元 $k^{(n)}$ に対する離散分布 $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_N)$ を構成する．

Step 7：Step 6 で構成した離散分布 $\boldsymbol{p}$ からシャノンエントロピー $(1/N)\sum_{k=1}^{N} p_k \log p_k$ を計算する．

Step 8：パラメータ (α, ε) を変化させ Step2 から Step7 まで繰り返す．

ここで求めた（シャノン）エントロピーを，疑似アトラクターに対する複雑性を表す指標であるという意味でアトラクターエントロピーと呼ぶことにする．

3.2.2 結果

図 6 は各パラメータ (α, ε) に対するアトラクターエントロピーである．完全同期相，秩序相，非同期相に対応するパラメータにおいては軌道が滞在する部分空間の次元が時間発展の中で変化しないためアトラクターエントロピーが 0 でとなる．対して，部分秩序相ににおいては (α, ε) に依存してアトラクターエントロピーが変化することが確認できる．特に，アトラクターエントロピーが高いパラメータ領域においては，初期値に依存せず軌道が付近に滞在する部分空間 H_σ が多様であること示している．つまり，軌道が時間発展の中で接近する疑似アトラクターがあらゆる次元の部分空間 H_σ を持つと解釈することができる．

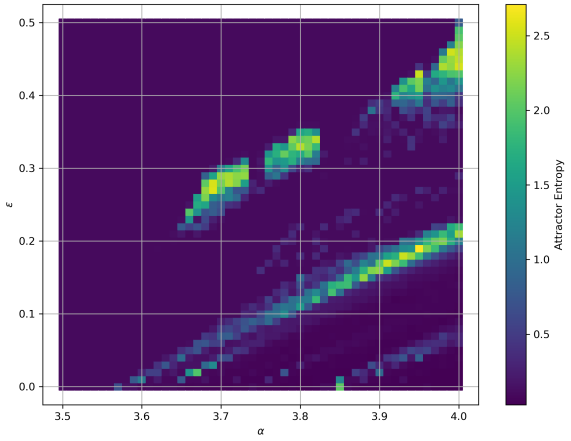


図 6: アトラクターエントロピー．縦軸 ε は 0.0 から 0.5 まで 0.01 ごとに設定し，横軸 α は 3.5 から 4.0 まで 0.01 ごとに設定している．また，ランダムにサンプリングした 10 個の初期値に対するエントロピーの平均値を表示している．

4　結論

本稿で対象とした大域結合写像（GCM）はパラメータ (α, ε) と初期値 $\boldsymbol{x}_0$ に依存して軌道の振る舞いが大きく変化する．特に，クラスタリングの観点において部分秩序相と呼ばれるパラメータ領域においてクラスタリングパターンが時間発展の中で変化することが知られていた．しかし，各クラスター内の要素数に関する情報を持ったクラスタリングパターンの変化に対する定量的な評価は行われていなかった．そこで本論文では，最適輸送距離を用いることでクラスタリングパターンの変化量を評価する手法を提案した．さらに，軌道がカオス的遍歴の中で接近する部分空間の多様性，つまり疑似アトラクターが含む部分空間の多様性をシャノンエントロピーによって評価した．今回は，カオスが観測される基本的なモデルであるロジスティック写像の大域結合系を対象とした．特に，結合係数 ε を各要素に対して一定にし結合の強さを一様にしたモデルについて解析を行った．そこで今後の課題としては，$f(x)$ を circle map などのカオスを引き起こす別の力学系に置き換えたモデルにおいての解析を行い提案手法の一般性を確認する必要がある．また，結合係数 ε を各要素に対して変化させ非一様としたモデルにおいても提案手法の有効性を確認する必要があると考えられる．さらに，[6] においてカオス的遍歴とミルナーアトラクター [7] の関連が示唆されているため，今回の提案手法により推定した疑似アトラクターとベイシンに関する解析も進める必要があると考えられる．加えて，今回は「見かけの引き込み」の問題を解消させるために軌道を生成する際に十分小さなノイズを加えていたが，力学系の構造が崩れるほど十分大きなノイズを加えたモデルについても解析を行い，ランダム力学系のダイナミクスと最適輸送距離やアトラクターエントロピーとの関係についても考察を進める必要があると考えられる．

参考文献

[1] I.Tsuda, “Dynamic link of memory-Chaotic memory map in nonequilibrium neural network”, Neural Networks, Vol.5, 313–326, 1992.

[2] K.Ikeda, I.Otsuka and K.Matsumoto, “Maxwell Bloch turbulence”, Prog. Theor. Phys. Suppl., 99, 295–324, 1989.

[3] K.Kaneko, “Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements”, Physica D: Nonlinear Phenomena, 41, 2, 137-172, 1990.

[4] 金子邦彦, 津田一郎 『複雑系双書１ 複雑系のカオス的シナリオ』(朝倉書店, 1996)

[5] 小室元政, “大域結合写像におけるカオス的遍歴の発生機構 (力学系の特異現象とその数理)”, 数理解析研究所講究録, 1118, 96-114, 1999.

[6] K.Kaneko, “On the strength of attractors in a high-dimensional system: Milnor attractor network, robust global attraction, and noiseinduced selection”, Physica D: Nonlinear Phenomena, 41, 322–344, 1998.

[7] J.Milnor, “On the Concept of Attractor”, Commun.Math.Phys, 99, 177-195, 1985.

リアプノフ指数で測れないカオス力学系の不安定性*

一橋大学　商学部　経営学科
加藤響 (Hibiki KATO) †

概 要

カオス力学系における初期値鋭敏性を特徴づける指標として，摂動の伸び率を表すリアプノフ指数が広く知られている．一方で，局所的かつ短期的にはリアプノフ指数とは異なる挙動を示す誤差発展が観測されており，そのメカニズムについては詳細が十分に解明されていない．本稿では，このような誤差発展のメカニズムに着目し，線形的なメカニズムの一例を紹介する．

1　導入

1.1　はじめに

非線形力学系における初期値鋭敏性は，気象現象などの物理現象においても顕著に現れ，予測可能性の限界を規定している．ただし，この性質は，逆に小さな摂動を利用して大きな変動を引き起こすための有効な手段ともなり得る．リアプノフ指数は，初期値鋭敏性を特徴付ける広く知られた指標であるが，より繊細な現象の理解には限界がある．例えば，流体において最大リアプノフ指数以上に誤差が発展する現象が報告されている [1, 3].

本研究では，力学系の摂動発展における局所的かつ一時的，さらに線形的なメカニズムに着目して，系の動的挙動を解析し制御・撹乱手法の構築に寄与することを目的とする．具体的には，エノン写像

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 1 + y_n - ax_n^2 \\ y_{n+1} &= bx_n \end{cases}$$

の周期点周りの微小誤差の時間発展を調べ，系を撹乱する際にどの点をどの方向に摂動すると誤差発展が大きくなるかを各点でのヤコビ行列の特異値や固有値の影響をリアプノフ指数と比較しながら解析する．ただし，パラメータは $a = 1.4, b = 0.3$ で固定する．この時，カオスアトラクタのリアプノフ指数は約 0.42 である．

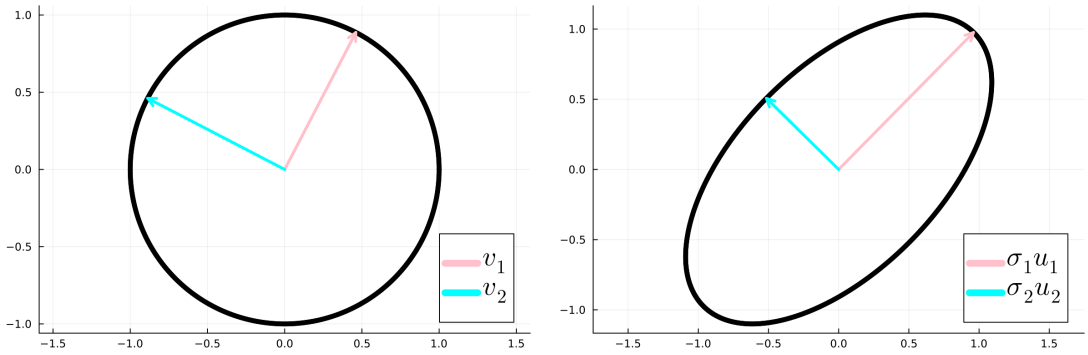
以下では特異値解析 [2, 4] について説明する．

1.2　特異値解析

ここでは非線形力学系に与えた微小摂動の初期の線形発展について述べる．N 次元の非線形離散力学系

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

*本研究は小林幹准教授 (立正大学) ならびに齊木吉隆教授 (一橋大学) との共同研究である．
†E-mail:katohibiki17@gmail.com



Before A applied. After A applied

図 1: **行列 $A = U\Sigma V^\top$ で写像することにより 2 次元空間の単位円が楕円形に変形する様子．**

について，初期値 x_0 に微小摂動 y_0 を与え，y_0 がどう発展するかを考える．ここで，x_n の周りで F を線形化し，行列 A_n を用いて $y_{n+1} = A_n y_n$ とする．以下，線形の範囲において特異値を用いて誤差の発展を記述する．また，ここでは記号 A_n を簡略化し A とする．

行列 $A^\top A$ の N 個の固有値の平方根 σ_i $(\sigma_1 \geq \cdots \sigma_N \geq 0)$ を行列 A の特異値と呼ぶ．この時，A は次のように特異値分解できる:

$$A = U\Sigma V^\top. \tag{1}$$

ここで，U, V は直交行列，Σ は σ_i を対角成分としてもつ対角行列である．行列 U と V を次のように列ベクトルで表す:

$$U = [u_1, u_2, \cdots, u_N], \quad V = [v_1, v_2, \cdots, v_N].$$

u_i を左特異ベクトル，v_i を右特異ベクトルと呼ぶ．ここで，(1) 式から u_i および右特異ベクトル v_i はそれぞれ $A^\top A$ および $AA^\top$ の固有ベクトルである．

直交行列であるため，$U^{-1} = U^\top$, $V^{-1} = V^\top$ であることに注意すると，特異値分解 (1) 式から

$$A^\top A = \Sigma^2 V, \quad A^\top A U = \Sigma^2 U, \tag{2}$$

$$Av_i = \sigma_i u_i, \quad A^\top u_i = \sigma_i v_i, \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{3}$$

が分かる．

A による摂動ベクトル y_0 の拡大については，$\|Ay_0\|^2 = \langle Ay_0, Ay_0\rangle = \langle A^\top A y_0, y_0\rangle$ と (2) より，摂動ベクトル y_0 が v_i に平行な時，拡大率は σ_i で与えられる．さらに (3) 式より v_i に平行な摂動ベクトルは，A による写像で u_i に平行になることがわかる．

y_0 の長さを ε に固定して，x_0 周りの N 次元球面を考えると $y_0^\top y_0 = \varepsilon^2, y_0 = A^{-1} y_1$ より，

$$y_1^\top (A^\top A)^{-1} y_1 = \varepsilon^2$$

となる．つまり，図 1 に示されるように，写像 A によって x_0 を中心とする半径 ε の N 次元球面が，x_1 を中心とする軸の両端までの長さが $2\varepsilon\sigma_i$ で，方向が u_i の N 次元楕円体に変形される．

2　分析手法

図 2 は本研究で扱うエノン写像のカオスアトラクタとアトラクタ内の各周期点の安定多様体を示している．本研究ではアトラクタに埋め込まれた周期 1 から 20 の周期点を扱う．ここで，同一周期軌道上の周期点は別個に扱うことに注意されたい．

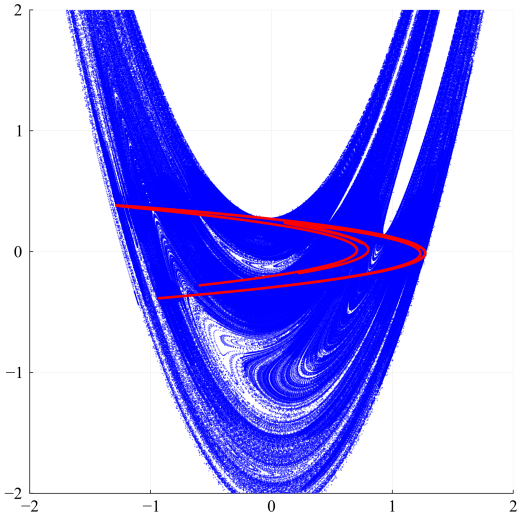


図 2: **エノン写像 ($a = 1.4, b = 0.3$) の各周期点の安定多様体と不安定多様体．** 随所で安定多様体と不安定多様体が接しており，非双曲力学系的特徴を示している．

まず，図 3 のように，アトラクタ上の周期点 $x_i(0)$ を中心として半径 ε の円周上に摂動点 $y_{i,j}(0)$ を等間隔に 1000 個配置する。ここで i は周期点のインデックス、$1 \leq j \leq 1000$ は摂動点のインデックスを示す。以下，文脈に応じて $x_i(0)$ や $y_{i,j}(0)$ を省略し、x_i、$y_{i,j}$ と記すことがある。

次に、これらの摂動点 $y_{i,j}$ を T 回写像した後、以下のように評価する：

$$
\begin{aligned}
M_i(T) &= \max_{j,t\leq T} \|x_i(t) - y_{i,j}(t)\|, \\
R_i(T) &= \frac{M_i(T)}{\varepsilon}, \\
M(T) &= \max_i M_i(T).
\end{aligned}
$$

$M_i(T)$ は，周期点 x_i における時刻 T までの誤差 $\|x_i(t) - y_{i,j}(t)\|$ の最大値であり，$R_i(T)$ は $M_i T$ と初期摂動 ε の比率である．$M(T)$ はさらに周期点全体で $M_i(T)$ の最大値を求めたものである．これを数値実験により近似的に計算し，アトラクタ上のどの点をどの方向に摂動することで，ある時刻以内で最大の誤差発展が達成されるかを考察する．

また，周期点 x_i の周期を p_i とした時，x_i 周りで

$$
m_i := \max_j \|x_i(p_i) - y_{i,j}(p_i)\|^{\frac{1}{p_i}},
$$

$$
r_i := \frac{m_i}{e^{\frac{1}{\varepsilon}}},
$$

を考えると，各周期軌道 1 周分の構造を含めつつ，異なる周期をもつ周期点通しの誤差発展の比較が可能となる．r_i は $\varepsilon^{\frac{1}{p_i}}$ で m_i を割ることで，R_i と同様に初期摂動 ε との比率を計算しており，図 10 で固有値と比較するために導入した．

さらに，周期点 x_i 単体ではなく，x_i が属する周期軌道の安定性について考えるために，F をエノン写像とし，周期点 x_i での周期回写像 F^{p_i} のヤコビ行列 J_i を考える．J_i の絶対値最大の固有値を $1/p_i$ 乗したものを λ_i, J の固有ベクトルのなす角を θ_i $(0 \leq \theta_i \leq \frac{\pi}{2})$ とする．λ_i で $1/p$ 乗することで，周期の異なる周期軌道間での誤差発展等の比較が可能になる (図 7).

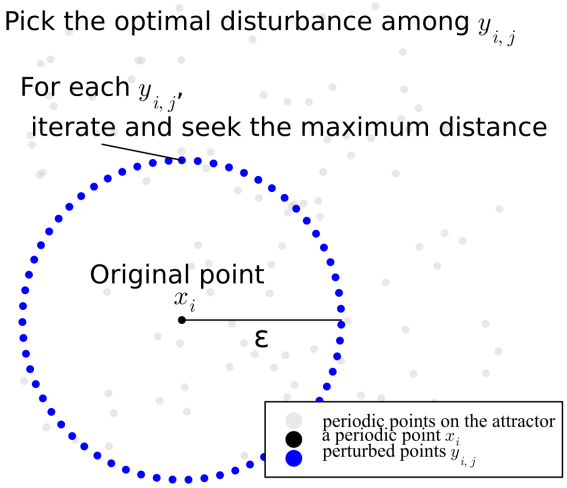


図 3: **数値実験手法.** 各周期点 x_i について，その点を中心として半径 ε の円周上に点 $y_{i,j}$ を等間隔に配置し，それらを全て時間発展させて，最も元の点との誤差発展が大きいものを求める．

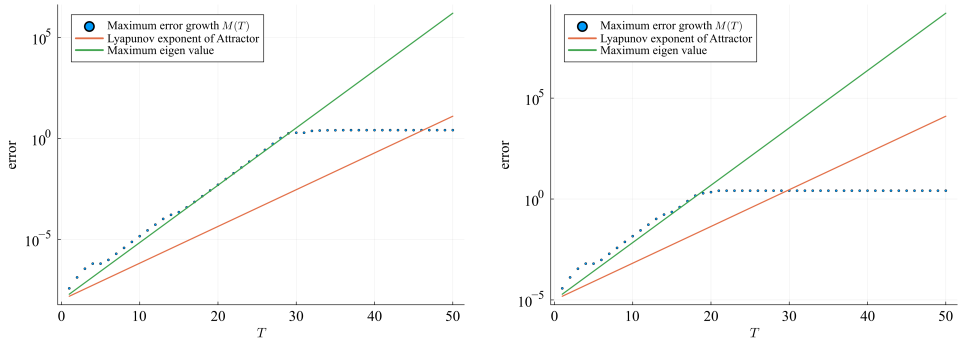
3 主結果

初期摂動 $\varepsilon = 10^{-5}, 10^{-8}$ に対し，$T = 1, \ldots, 50$ での T までの最大誤差発展 $M(T)$ を計算した．図 4 を見ると，$M(T)$(青点) が，アトラクタのリアプノフ指数を示す (橙線) と，今回最も高い不安定性を示す周期軌道である固定点の最大固有値 (緑線) を越えた誤差発展を示していることがわかる．初期の特異な部分を除けば，固有値 λ_i の大きい点が強い誤差発展を示し，最大誤差が 1 付近で飽和していることが分かる．

図 5, 6 は $T = 1, 4, 17, 30$ における相空間上での $M(T)$ および $M_i(T)$ の様子を示しており，$T = 1, 4$ ではアトラクタの [0, 1.3] 付近の右端もしくは [-1.3, 0.4] 付近の左端で $M(T)$ が達成されていることがわかる．$T = 17$ 付近では図 7 と比べると分かるように，不安定性の強い固定点付近で $M(T)$ を達成している．$T = 30$ において，$\varepsilon = 10^{-8}$ の場合は依然固定点付近の誤差拡大率が優勢だが，$\varepsilon = 10^{-5}$ は，誤差のスケールが 1 付近で飽和しており，広範な範囲で高い誤差成長を示している．

ここから，T が小さい時にアトラクタの右端・左端で見られる特異な誤差発展について考える．まず，図 8 にあるように，有限時間リアプノフ指数 (Finite Time Lyapunov Exponents，FTLE) と $\varepsilon = 10^{-5}, T = 4$ における誤差発展の指数を比較した．FTLE を計算する際はアトラクタ上の 10^6 長のカオス軌道に対して，窓幅 T の最大リアプノフ指数を計算した．ここで，リアプノフ指数に合わせるために，図中の赤線の値は $\ln(\frac{M(T)}{\varepsilon})/T$ である．この比較から，T が小さい時の誤差発展が，リアプノフ指数で得られる誤差発展の指標を上回ることが示唆される．

アトラクタ上の周期点の安定・不安定多様体に注目すると，図 2 より，アトラクタ左端・右端において，不安定多様体と安定多様体が接している様子が分かる．接点付近では安定方向と不安定方向のなす角が小さく，これによって特異な誤差拡大を示すことが示唆される．そこで，より単純なケースとして，線型写像でこの現象を確認した．固有値が $[0.5, 0.9]$ の行列 B_1, B_2 を構成する．固有値 0.5 の固有ベクトル l_1 を $[1, 0]$ に並行なベクトルで固定し，固有値 0.9 の固有ベクトル l_2 を l_1 となす角 ϕ のベクトルで定める．$\phi = \frac{\pi}{2}$ の行列を B_1, $\phi = \frac{9}{10}\pi$ の行列を B_2 とする．こ



(a) $\varepsilon = 10^{-8}$　　(b) $\varepsilon = 10^{-5}$

図 4: **アトラクタから計算したリアプノフ指数，最も高い不安定性を持つ周期軌道である固定点の最大固有値，空間内で最も大きい誤差 $M(T)$ の比較．**(a), (b) はそれぞれ初期摂動 $\varepsilon = 10^{-8}, 10^{-5}$ の T に対する $M(T)$

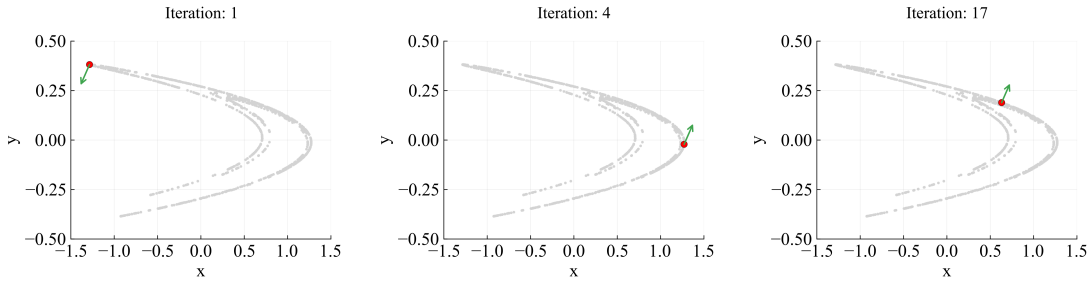


図 5: **図 4 の $\varepsilon = 10^{-5}$ について $T = 1, 4, 17$ における $M(T)$ を達成する周期点 x_i(赤) とその時の摂動方向 (緑)．**最適な摂動方向は不安定方向 (不安定多様体の接線方向) ではないことが分かる．

こで注意したいのは，B_2 の固有ベクトルのなす角が B_1 に比べ小さいことと，固有値の絶対値が 1 より小さいため，原点が安定であることである．この時，行列 B_1, B_2 を単位円に作用させると，1.2 節で示したように，左特異ベクトルの方向に特異値分単位円が伸縮し，楕円が見れる．図 9 より，固有ベクトルが直交する B_1 に関しては元の単位円より全体的に縮小しているのに対し，B_2 に関しては，伸長している部分が存在しており，なす角が小さいと最大特異値が大きくなることを確認した．

上の線型写像の例と同様のことが今回のエノン写像でも発生していることが考えられる．図 10 では，x_i において周期回写像 F^{p_i} のヤコビ行列 J_i の固有ベクトル同士のなす角 θ_i と，各周期軌道の 1 回写像あたりの最大誤差発展率 r_i を λ_i で割った値の関係が図示されている．誤解を恐れずに言うと，r_i/λ_i は固有値の最大何倍誤差発展するかを表している．図では θ_i が小さくなるほど，r_i/λ_i が冪的に大きくなる傾向が示唆されている．

以下では，大きな誤差発展を達成する摂動方向について述べる．図 5 に示されるように，最大誤差 $M(T)$ を達成する摂動方向は，必ずしも不安定方向とは一致しない．上で見ていた誤差発展の現象は線形的な現象なため，1.2 節で紹介したように，最大誤差を達成する摂動方向は線型写像を決める行列の右特異ベクトルにより得られる．図 11 では，周期軌道 1 周期での最大誤差発展 m_i を達成するような最適摂動方向 (図 11a) と，周期回写像 F^{p_i} における安定方向に直交する方向 (図 11b) を比較している．各周期点における両者のなす角を比較した結果，今回我々が扱うエノン写像において，最適摂動方向がほとんど安定方向の直交方向に一致していることが確認された．

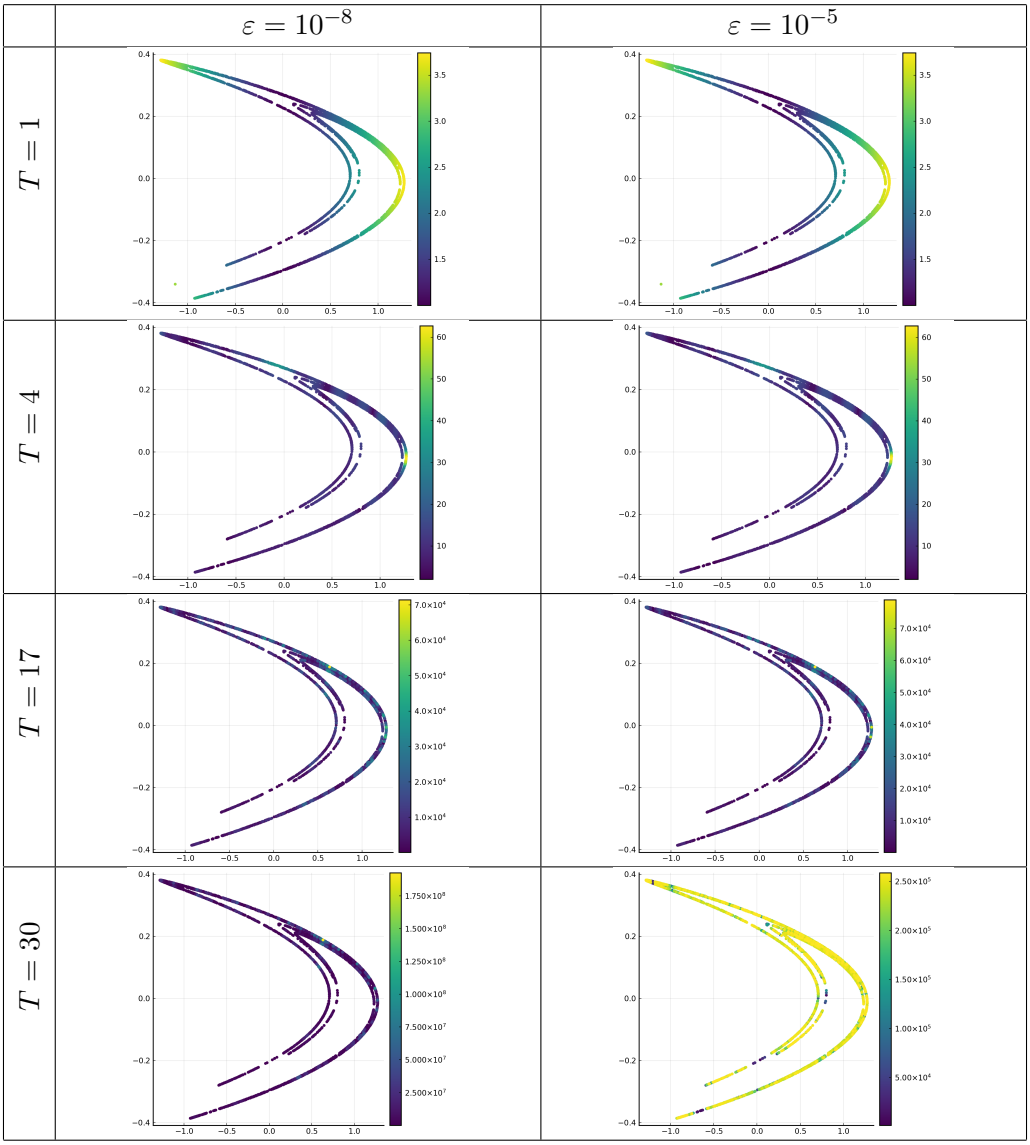


図 6: **初期誤差の小さい線形的な誤差発展と大きい非線形的な誤差発展の比較**．初期摂動サイズ $\varepsilon = 10^{-8}, 10^{-5}$ と $M_i(T)$ の比率を表す $R_i(T)$ の値の変化を $T = 1, 4, 17, 30$ に対して観測した．$T = 17$ まで $\varepsilon = 10^{-8}, \varepsilon = 10^{-5}$ の図はほとんど一致している．$T = 1$ ではアトラクタの左端と右端の $R_i(T)$ が大きく，$T = 4$ ではより顕著に右端の $R_i(T)$ が大きい．$T = 17$ においては，$[0.6, 0.2]$ 付近に存在する固定点で $R_i(T)$ が大きくなっている．$T = 30$ の時，$\varepsilon = 10^{-8}$ については，$T = 17$ との変化は小さいが，$\varepsilon = 10^{-5}$ は誤差のサイズが 1 付近で飽和しており，随所で $R_i(T)$ が大きくなっている．

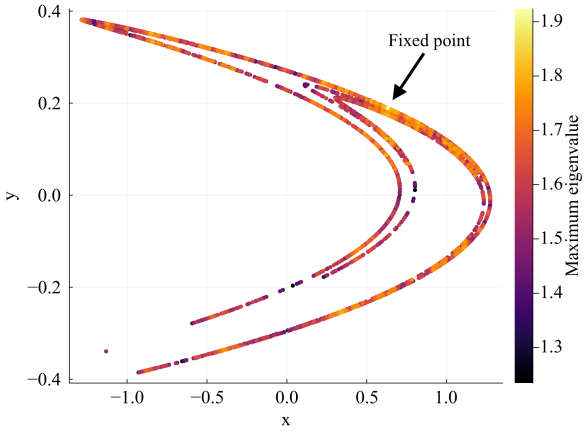


図 7: **各周期点における固有値．** 各周期点 x_i において，周期回分の写像 F^{p_i} を線形化して固有値を計算し，絶対値最大の固有値を $1/p_i$ 乗した値 λ_i で x_i を色付けした．矢印で示された固定点の不安定性が高いことが分かる．

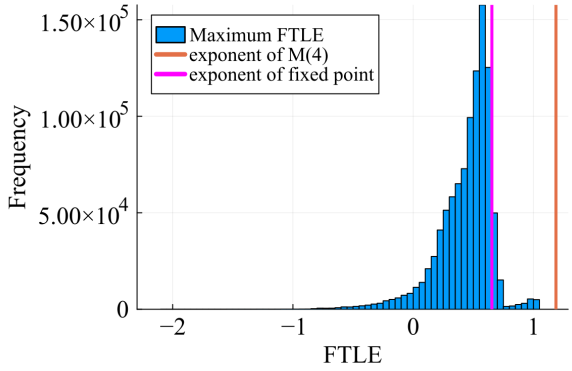


図 8: $T = 4$ **での有限時間リアプノフ指数の分布と，**$M(T)$ **の比較．**図 4 の補足として，得られた $M(T)$ がリアプノフ指数を上回ることを示すため，$T = 4, \varepsilon = 10^{-5}$ での $M(T)$ の誤差発展指数 $\ln(\frac{M(T)}{\varepsilon})/T$ (赤) と，アトラクター上の軌道に対して，窓サイズ T の最大有限時間リアプノフ指数の分布 (青) を計算した．また，固定点のリアプノフ指数を縦線 (マゼンタ) で示した．$M(T)$ の誤差発展がリアプノフ指数以上であることが示唆される．

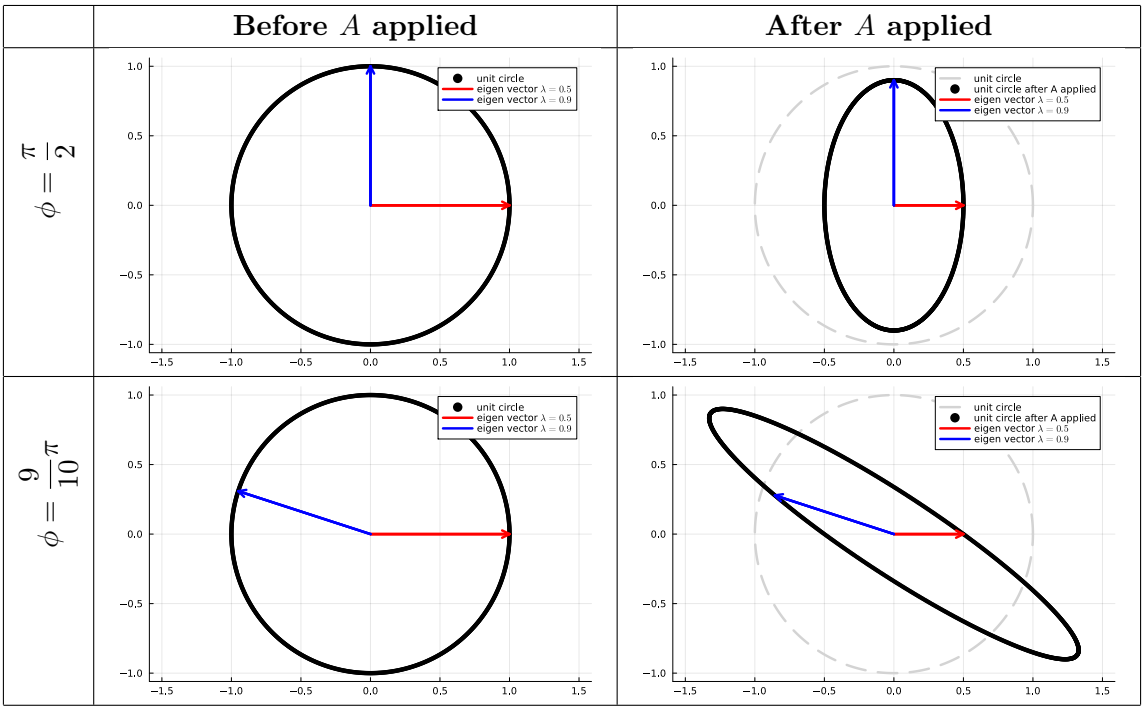


図 9: **線型写像において，固有ベクトルの非直交性により生じる短期的な固有値以上の伸びの実現．**ある 2 種類の行列 B_1, B_2 によって，単位円がどのように変形されるかを考える．固有値は両者とも $[0.9, 0.5]$ に固定し，固有ベクトルのなす角度 ϕ を上段は $\frac{\pi}{2}$，下段は $\frac{9}{10}\pi$ と変えたところ，単位円を写像した後の楕円の長軸 (最大特異値) が大きくなる現象が観測された．

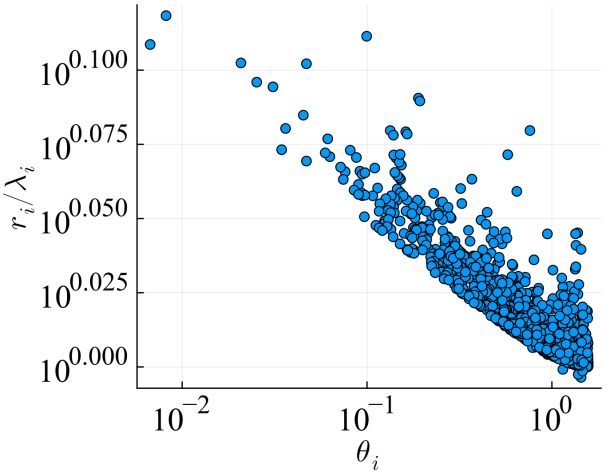
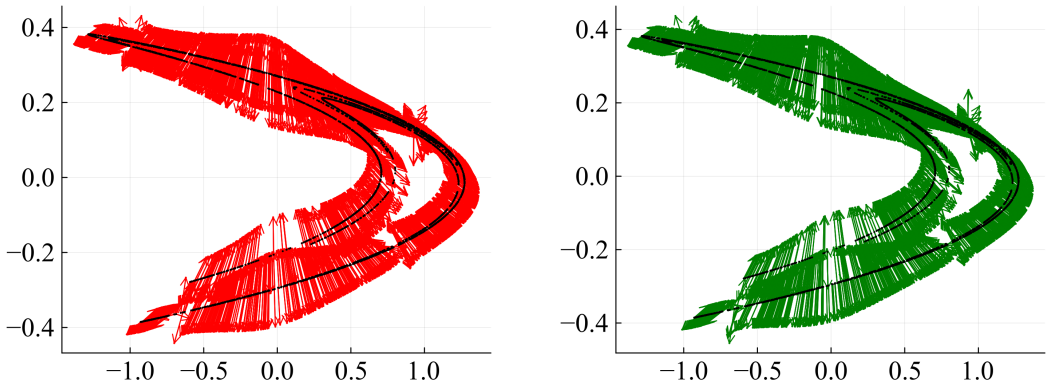
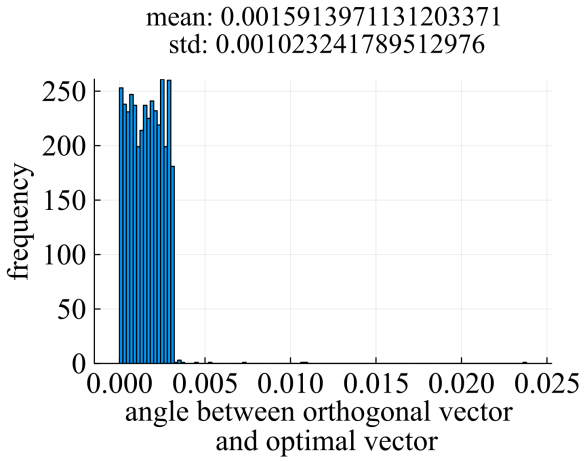


図 10: **J_i の固有ベクトルのなす角 θ_i と r_i/λ_i の比較．**周期軌道の平均的な誤差成長率が，θ_i が小さいほど固有値以上に冪的に大きくなることが示唆される．



(a) 最適摂動方向

(b) 安定部分空間と直交する方向



(c) 両者のなす角の分布

図 11: **最適摂動方向と安定空間に直交する方向の比較．** (a) は，各周期点において，m_i を達成する，つまり周期 1 周分で最も誤差発展する摂動方向を矢印で示している．(b) は，周期回写像 F^{p_i} の安定方向に直交する方向を矢印で示している．(c) は，各周期点において，前者と後者のなす角度の分布を示している．平均は 1.6×10^{-3}，標準偏差は 1.0×10^{-3} と，ほとんど 0 付近に分布しており，両者がほとんど一致していることが分かる．

4　終わりに

本稿では，エノン写像の周期点について，安定方向と不安定方向のなす角により，摂動の時間発展が固有値やリアプノフ指数以上になる現象を数値的に示した．また，大きい誤差発展を達成するような摂動方向について数値実験から得られた結果を紹介した．

本稿では低次元の力学系を対象としたが、今回紹介したような現象が高次元系においてどのように現れるかは依然として未解明である。特に、高次元力学系では複数の安定方向も関与するため、大自由度系では異なる描像が現れる可能性がある。

また、本研究の結果を実際の物理現象で検証するためには、安定多様体や周期軌道に関する情報を得ることが重要となる。その際、Lagrangian coherent structures やリザバー計算といった機械学習手法が有用な解析手段となる可能性がある。

参考文献

[1] Z. C. Feng and Y. Charles Li. Short term unpredictability of high Reynolds number turbulence - rough dependence on initial data. *ejde*, 2020(01-132), October 2020.

[2] B Legras and R Vautard. A guide to Liapunov vectors. In *Seminar Proceedings on Predictability*, volume I, pages 141–156, 1996.

[3] Y. Charles Li, Richard D. J. G. Ho, Arjun Berera, and Z. C. Feng. Superfast amplification and superfast nonlinear saturation of perturbations as the mechanism of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 904:A27, December 2020.

[4] 余田 成男. 1. 予測可能性概論. **天気**, 46(3):170–178, 1999.

6 点で分岐する複素射影直線の 4 重被覆の周期積分

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
中野竜之介 (Ryunosuke Nakano) *

概要

複素射影直線 $\mathbb{P}^1$ の $(n+3)$ 点配置空間 X_n は, 許容列と呼ばれるパラメーター $\mu = (\mu_j)_{j=1}^{n+3} \in (\mathbb{Q} \cap (0,1))^{n+3}$ $(n \in \mathbb{Z}_{>})$ を指定することで, n 次元複素超球 $\mathbb{B}_n$ の稠密開集合を $\mathbb{B}_n$ の解析自己同型群の離散部分群 $\Gamma(\mu)$ で割った空間と同型になることが知られている. 本講演では, $n = 3$, $\mu = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4, 3/4)$ の場合に, この同型写像のある代数曲線族の周期と 3 次元複素超球 $\mathbb{B}_3$ の 4 次 Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_4$ への埋め込みによるテータ関数のひき戻しを用いた構成を紹介する.

1　導入

Definition 1.1.　パラメーター $\mu = (\mu_j)_{j=1}^{n+3} \in (\mathbb{Q} \cap (0,1))^{n+3}$ $(n \in \mathbb{Z}_{>})$ が条件

$$(1 - \mu_j - \mu_k)^{-1} \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \text{ for } \forall j \neq k$$

を満たすとき, パラメーター μ を許容列であるという.

Proposition 1.2.　許容列の数は $n \geq 6$ の場合は存在せず, $n = 4, 5$ の場合は唯一存在し, $n = 3$ の場合は 7 通り, $n = 2$ の場合は 27 通り存在する.

Definition 1.3.　差集合 $(\mathbb{P}^1)^{n+3} - \mathrm{Diag}$ $(\mathrm{Diag} = \{(x_j) \in (\mathbb{P}^1)^{n+3} \mid x_j = x_k \text{ for some } j \neq k\})$ の射影一般線形群 $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ の剰余として定まる複素多様体

$$X_n = \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \setminus ((\mathbb{P}^1)^{n+3} - \mathrm{Diag}),$$

を, 相異なる複素射影直線 $\mathbb{P}^1$ の $(n+3)$ 点配置空間と呼ぶ.

Definition 1.4.　階数 $(m+1)$ の, 1 個の未知変数 u と m 個の独立変数 $x_1, \ldots, x_m$ の線形微分方程式系

$$\left\{ \left(a + \sum_{j=1}^{m} D_j \right) (b_j + D_j) - \left(c + \sum_{j=1}^{n} D_j \right) (1 + D_j) \frac{1}{x_j} \right\} u = 0 \ (j = 1, \ldots, m)$$

を Appell-Lauricella 超幾何微分方程式系 $E_D(a, b_1, \ldots, b_m, c; x)$ と呼ぶ. ただし, $D_j = x_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}$ とする.

* E-mail:nakano.ryunosuke.i3@elms.hokudai.ac.jp

Proposition 1.5. [Yos97, Chapter 6] 許容列 $\mu = (\mu_j)_{j=1}^{n+3}$ を 1 つ指定する. $\mu_1, \ldots, \mu_{n+3}$ の共通公分母を d とする. 配置空間 X_n の点 $x = (x_1, \ldots, x_{n+3}) \in X_n$ に対して定まる曲線

$$C(x)\colon w^d = \prod_{j=1}^{n+3} (z - x_j)^{d\mu_j}$$

を考える. 3 点 $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}$ をそれぞれ $0, 1, \infty$ に正規化することにより, $(n+1)$ 個の $C(x)$ の周期

$$u_k(x) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \prod_{j=1}^{n+3} (z - x_j)^{-\mu_j} dz \ (k = 1, \ldots, n+1)$$

は n 変数, 階数 $(n+1)$ の Appell-Lauricella 超幾何微分方程式系 $E_D(1 - \mu_{n+2}, \mu_1, \ldots, \mu_n, 2 - \mu_{n+1} - \mu_{n+2}; x_1, \ldots, x_n)$ の線形独立な解を与えている. また, これらの周期を並べて定まる局所一価正則ベクトル値関数 $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ は配置空間全体に解析接続でき, その像の射影化は, 符号が $(n+, 1-)$ となるようなある Hermite 行列 H に対して定まる n 次元複素超球 $\mathbb{B}_n(\mu) = \left\{ \xi = {}^t[\xi_0, \ldots, \xi_n] \in \mathbb{P}^n \mid {}^t\xi A \overline{\xi} < 0 \right\}$ の稠密開集合 $\mathbb{B}_n^\circ(\mu)$ となっている. 更に, この多価ベクトル値関数のモノドロミー群の射影化を $\Gamma(\mu)$ とするとき, $\Gamma(\mu)$ は $\mathbb{B}_n^\circ(\mu)$ に真性不連続に作用することから商空間もまた複素多様体となり, $\mathbb{B}_n^\circ(\mu)/\Gamma(\mu)$ は配置空間 X_n と複素多様体として同型になる.

本講演では, $n = 5$ の場合の唯一である許容列 $(\frac{1}{4})^8$ を制限して得られる $n = 3$ の場合の許容列 $\mu = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ の場合について, 6 点配置空間 X_3 と同型な複素多様体 X を用い, X から 4 次 Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_4$ に埋め込まれた 3 次元複素超球 $\mathbb{B}_3(\mu)$ への周期写像を定義し, その逆写像の明示的な構成を紹介する.

2 準備

Definition 2.1. 複素多様体 X を, 両側剰余

$$X = M^* \backslash X_0 / (\mathbb{C}^*)^6,$$

として定義する. ただし, M^* は $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ の部分群で, $(1,2)$-成分が 0 であるもの全体とし, X_0 は

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} & y_{31} & y_{41} & y_{51} & 0 \\ y_{12} & y_{22} & y_{32} & y_{42} & y_{52} & 1 \end{pmatrix}$$

という形をした複素 2×6 行列で, 任意の 2×2 小行列式が 0 でないもの全体とする.

複素多様体 X と配置空間 X_3 は次のような形の完全代表系をそれぞれ持つ:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & x_1 & x_2 & x_3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \middle| \ x_1, x_2, x_3 \neq 0, 1, \ x_j \neq x_k \text{ for } j \neq k \right\}.$$

このことから, X と X_3 はどちらも $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 \mid x_j \neq 0, 1, \ x_j \neq x_k \text{ for } j \neq k\}$ と複素多様体として同型であることがわかる.

Proposition 2.2. 配置 $x = (x_1, \ldots, x_5, \infty) \in X$ に対して定まる代数曲線 $C(x)$ は, 6 点 $P_j = [1 : x_j : 0]$ $(j = 1, \ldots, 5)$, $P_\infty = [0 : 0 : 1]$ で分岐する $\mathbb{P}^1$ の 4 重被覆である. また, $C(x)$ は種数 6 の閉 Riemann 面である.

Definition 2.3. 被覆変換 $\rho\colon C(x) \to C(x)$ を, 変換 $\rho(z,w) = (z, iw)$ から定まるものとする. これにより ρ^2 はそれぞれ整係数 1 次ホモロジー群 $H_1(C(x),\mathbb{Z})$ の間と X 上の正則 1-形式の成す複素ベクトル空間 $H^0(C(x),\Omega^1)$ の間に線形変換 ρ^2 を定める. これらの (-1)-固有空間をそれぞれ $H_1(C(x),\mathbb{Z})^-$, $H^0(C(x),\Omega^1)^-$ と表す.

配置 x を $(0, x_1, x_2, x_3, 1, \infty)$ に正規化し, 条件

$$0 < x_1 < x_2 < x_3 < 1 \tag{2.1}$$

を満たすと仮定するとき, 次を構成した:

- $H^0(C(x),\Omega^1)^-$ の基底 $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_4)$,
- $H_1(C(x),\mathbb{Z})^-$ の元 $\Sigma = \{A_1, \ldots, A_4, B_1, \ldots, B_4\}$ で張られる index 4 の格子 $L(x)$ で, 交点行列 Q と ρ の表現行列 M_ρ がそれぞれ

$$Q = \begin{pmatrix} O_4 & -2I_4 \\ 2I_4 & O_4 \end{pmatrix},\ M_\rho = \begin{pmatrix} O_4 & -U \\ U & O_4 \end{pmatrix},$$

となるもの. ただし, I_n は n 次単位行列であり, $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \oplus I_2$ である.

こうして $L(x)$ のシンプレクティック基底 Σ と正則微分の基底 ϕ から定まる周期行列を $\Pi = {}^t(\tau_A, \tau_B)$ とし, $\tau_A = \left(\int_{A_j} \phi_k\right)$, $\tau_B = \left(\int_{B_j} \phi_k\right)$ をそれぞれ A 周期, B 周期と呼ぶ. B 周期が単位行列になるように正規化された微分形式 $\varphi = \phi\tau_B^{-1}$ に関する周期行列の A 周期を $\tau(= \tau_A\tau_B^{-1})$ とする.

Proposition 2.4. 周期行列 Π は Riemann の双線型関係式を満たす. 即ち,

$${}^t\Pi Q \Pi = O_4,\ i\,{}^t\Pi Q\overline{\Pi} > 0$$

を満たす. 特に, 正規化された周期行列 τ は 4 次 Siegel 上半空間

$$\mathfrak{S}_4 = \{\sigma \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{C}) \mid {}^t\sigma = \sigma,\ \mathrm{Im}(\sigma) > 0\}$$

の元である. ただし, $\mathrm{Im}(\sigma) > 0$ とは行列 σ の虚部が正定値であることを意味する.

また, τ は次のような表示を持つ:

Proposition 2.5. B 周期を $\tau_B = (v_1, \ldots, v_4)$ と表すとき, 正規化された周期行列 τ は

$$\tau = iU\left(I_4 - \frac{2}{{}^tv_1Uv_1} v_1\,{}^tv_1U\right)$$

と表される. 更に, ${}^tv_1Uv_j = 0$ $(j = 2,3,4)$, $v_1^*Uv_1 < 0$ を満たす.

このことから, 次のような写像を定める:

Proposition 2.6. 複素ベクトル $v \neq 0$ に対し,

$$\imath(v) = iU\left(I_4 - \frac{2}{{}^tvUv} v\,{}^tvU\right)$$

とする. このとき, v が複素超球 $\mathbb{B}_3^U = \{\xi \in \mathbb{P}^3 \mid \xi^*U\xi < 0\}$ の元であることと, $\imath(v)$ が 4 次 Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_4$ の元であることは同値である.

こうして埋め込み $\imath\colon \mathbb{B}_3^U \to \mathfrak{S}_4$ が定まる.

Definition 2.7. 一般の配置 $y \in X$ に対し, 条件 (2.1) を満たす配置 $x = (0, x_1, x_2, x_3, 1, \infty) \in X$ を基点に取り $L(x)$ のシンプレクティック基底と微分形式の基底を解析接続したものをそれぞれ $\Sigma = \{A_1, \dots, A_4, B_1, \dots, B_4\}$, $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_4)$ とする. このとき, Proposition 2.6 から ${}^t\left(\int_{B_j} \varphi_1\right)_{j=1,2,3,4} \in \mathbb{B}_3^U$ であった. $p\colon X \to \mathbb{B}_3^U$ を, $p(y) = {}^t\left(\int_{B_j} \varphi_1\right)_{j=1,2,3,4} \in \mathbb{B}_3^U$ で定める. この写像を周期写像と呼ぶ.

埋め込み $\imath$ は, $\mathbb{B}_3^U$ の自己同型群 $\mathrm{U}(U, \mathbb{C}) = \{g \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{C}) \mid g^* U g = U\}$ の, $\mathfrak{S}_4$ の自己同型群 $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{GL}(8, \mathbb{R}) \mid M Q {}^t M = Q\}$ への埋め込み $\jmath\colon \mathrm{U}(U, \mathbb{C}) \to \mathrm{Sp}(4, \mathbb{R})$ を誘導する. この埋め込みにより周期写像 p のモノドロミー群 $\Gamma(\mu)$ は $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{Q})$ へ埋め込まれる. その像を $\Gamma'(\mu)$ と表す. 配置 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \infty)$ の 2 点 x_j, x_k $(1 \le j < k \le 5)$ のみを置換した配置 x' への経路を取り解析接続することにより, $L(x)$ から $L(x')$ への線形写像 $N(j, k) \in \mathrm{U}(U, \mathbb{Q}[i])$ が得られる. 構成から, モノドロミー群 $\Gamma(\mu)$ は $N(j, k)^2$ 達で生成される.

3 周期写像の逆写像の構成

この節では, Abel–Jacobi–Prym 写像を導入し, Riemann テータ関数の Abel–Jacobi–Prym 写像による引き戻しを調べることにより周期写像 $p\colon X \to \left(\mathbb{B}_3^U\right)^\circ / \Gamma(\mu)$ の逆写像を構成する.

Definition 3.1. 点 $x \in X$ を取り, $\tau = \imath(x)$ とする. Abel–Jacobi–Prym 写像 $\psi\colon C(x) \to J(C(x)) = \mathbb{C}^4/(\mathbb{Z}^4\tau + \mathbb{Z}^4)$ を,

$$\psi(P) = \left(\int_{\rho^2(P)}^{P} \varphi_1, \dots, \int_{\rho^2(P)}^{P} \varphi_4\right)$$

と定める. ただし, 積分路は P_∞ から P への経路を取り, $1 - \rho^2$ を作用させたものとする.

積分路の取り方から次がわかる:

Proposition 3.2. 各分岐点 P_j の ψ による像は次のようになる:

$$\begin{aligned}
\psi(P_0) \equiv \psi(P_{x_1}) &\equiv \frac{1}{2}(0,1,0,0)\tau + \frac{1}{2}(1,0,0,0),\\
\psi(P_{x_2}) \equiv \psi(P_{x_3}) &\equiv \frac{1}{2}(0,1,1,1)\tau + \frac{1}{2}(1,0,1,1),\\
\psi(P_1) \equiv \psi(P_\infty) &\equiv (0,0,0,0).
\end{aligned}$$

Definition 3.3. 指標 $a, b \in \mathbb{Z}^4$ に対し, 指標付き Riemann テータ関数を, $\mathbb{C}^4 \times \mathfrak{S}_4$ 上の正則関数

$$\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\zeta, \tau) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^4} \mathbf{e}\left(\frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2}a\right)\tau\, {}^t\left(m + \frac{1}{2}a\right) + \left(m + \frac{1}{2}a\right){}^t\left(\zeta + \frac{1}{2}b\right)\right)$$

として定める. ただし, $\mathbf{e}(t) = \exp(2\pi i t)$ である. また, テータ定数を,

$$\vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(\tau) = \vartheta\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}(0, \tau)$$

と定める.

Proposition 3.4. Abel–Jacobi–Prym 写像 $\psi\colon C(x) \to J(C(x))$ によるテータ関数の引き戻し $\psi^*\vartheta\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}(\zeta,\tau)$ が恒等的に零でないようなテータ関数に対し, 関数 $\psi^*\vartheta\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ の零点の個数は重複度を込めて 8 点である.

Remark 3.5. 関数 $\psi^*\vartheta\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}(\zeta,\tau)$ は $C(x)$ 上一価ではないが, 零点とその位数は変化しないため well-defined である.

Definition 3.6. 指標 $m_j = (a_j : b_j)$ を次のように定める:

$$m_0 = (0000 : 0000), \quad m_1 = (1000 : 0100), \quad m_2 = (0100 : 1000), \quad m_3 = (1111 : 1111).$$

また, 関数 $\vartheta_j(\zeta,\tau) = \vartheta\begin{bmatrix}a_j\\ b_j\end{bmatrix}(\zeta,\tau)$, $F_j(P) = \psi^*\vartheta(P)$ $(j = 0,\dots,11)$ とし, $C(x)$ 上の関数 $R_{jk}(P) = F_j(P)/F_k(P)$, テータ定数 $\vartheta_j(\tau) = \vartheta_j(0,\tau)$ を定める.

Remark 3.7. 関数 $R_{jk}(P) = F_j(P)/F_k(P)$ の分子と分母は一価ではないが, Abel–Jacobi–Prym 写像の多価性により係数に exp factor が現れ, 分子分母でこれらが打ち消し合うため一価となる.

Proposition 3.8. $C(x)$ 上の関数 R_{01}, R_{23} は $P = (z,w) \in C(x)$ に関する有理型関数であり, 各 $(j,k) = (0,1),(2,3)$ に対し,

$$R_{jk}(P) = C\frac{z-s}{z-t},$$

となる定数 $s,t \in \mathbb{C}$ と $C \neq 0$ が存在する. 特に,

$$R_{01}(P_0) = \frac{\vartheta_1(\tau)}{\vartheta_0(\tau)}, \quad R_{23}(P_{x_2}) = -\frac{\vartheta_3(\tau)}{\vartheta_2(\tau)}$$

が成立.

こうして次の主張を得る:

Proposition 3.9. 配置 $x = (0, x_1, x_2, x_3, 1, \infty)$ と, $\tau = \imath \circ p(x)$ に関するテータ定数に関して次が成立:

$$\frac{(\vartheta_0(\tau)^2 + \vartheta_1(\tau))^2}{4\vartheta_0(\tau)^2\vartheta_1(\tau)^2} = \frac{1}{x_1}, \qquad \frac{(\vartheta_2(\tau)^2 + \vartheta_3(\tau))^2}{4\vartheta_2(\tau)^2\vartheta_3(\tau)^2} = \frac{1-x_3}{x_2-x_3}.$$

このテータ定数達に, それぞれ x_1 と x_2, x_1 と x_3 の置換を意味する行列

$$N'(2,3) = I_2 \oplus \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ -(1+i) & 1+i \end{pmatrix}, \quad N'(2,4) = I_2 \oplus \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1-i & 1+i \end{pmatrix},$$

の $\jmath\colon \mathrm{U}(U,\mathbb{C}) \to \mathrm{Sp}(4,\mathbb{R})$ による像のテータ定数への作用を決定することにより x_2, x_3 の表示が得られる. $\jmath(N'(2,3))$, $\jmath(N'(2,4))$ は有理係数シンプレクティック群の元であるため作用の決定は一般に困難であるが, [MMN07, Lemma 5] と, $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z})$ のテータ関数への作用 [Igu72, p.85, p.176, p.182, Theorem 3] を用いることにより決定することができる. こうして次を得る:

Proposition 3.10. 指標 $m_4,\dots,m_{11}$ を,

$$m_4 = (0010 : 0001), \quad m_5 = (1010 : 0101), \quad m_6 = (0110 : 1001), \quad m_7 = (1101 : 1110),$$
$$m_8 = (0011 : 0000), \quad m_9 = (1011 : 0100), \quad m_{10} = (0111 : 1000), \quad m_{11} = (1100 : 1111),$$

と定め, $\vartheta_j(\tau)=\vartheta_{m_j}(0,\tau)$ とするとき, 次が成立:

$$\frac{(\vartheta_4(\tau)^2+\vartheta_5(\tau))^2}{4\vartheta_4(\tau)^2\vartheta_5(\tau)^2}=\frac{1}{x_2},\qquad \frac{(\vartheta_6(\tau)^2+\vartheta_7(\tau))^2}{4\vartheta_6(\tau)^2\vartheta_7(\tau)^2}=-\frac{1-x_3}{x_1-x_3},$$
$$\frac{(\vartheta_8(\tau)^2+\vartheta_9(\tau))^2}{4\vartheta_8(\tau)^2\vartheta_9(\tau)^2}=\frac{1}{x_3},\qquad \frac{(\vartheta_{10}(\tau)^2+\vartheta_{11}(\tau))^2}{4\vartheta_{10}(\tau)^2\vartheta_{11}(\tau)^2}=\frac{1-x_1}{x_2-x_1}.$$

以上により与えられた配置に対し, そこから定まる 4 次 Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_4$ の点によって元の配置が復元された. こうして次の主定理が得られる:

Theorem 3.11. [N., 修士論文] テータ定数 $\vartheta_{a,b}(\tau)$ を埋め込み $\imath$ で引き戻した関数を $\mathbb{B}_3^U$ の座標 v を用いて $\vartheta_{a,b}(v)$ と表す. このとき, $j=1,2,3$ に対し, 複素超球 $\mathbb{B}_3^U$ 上の正則関数

$$\frac{4\vartheta_{4j-4}(v)^2\vartheta_{4j-3}(v)^2}{(\vartheta_{4j-4}(v)^2+\vartheta_{4j-3}(v))^2},\ v\in\mathbb{B}_3^U$$

を考える. 点 $[v]\in(\mathbb{B}_3^U)^\circ/\Gamma$ に対し, 上で定めた正則関数の $s=v$ での値としてそれぞれ y_1,y_2,y_3 を定める. このとき, 配置 $y=(0,y_1,y_2,y_3,1,\infty)\in X$ は, $p(y)=[v]$ 満たす.

4 今後の展望

[KM09] によって次のことが示されている:

Fact 4.1. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ を, 4 項平均によって得られる漸化式

$$(a_0,b_0,c_0,d_0)=(a,b,c,d)\ (a\geq b\geq c\geq d\geq 0),$$
$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n+c_n+d_n}{4},\qquad b_{n+1}=\frac{\sqrt{(a_n+d_n)(b_n+c_n)}}{2},$$
$$c_{n+1}=\frac{\sqrt{(a_n+c_n)(b_n+d_n)}}{2},\qquad d_{n+1}=\frac{\sqrt{(a_n+b_n)(c_n+d_n)}}{2},$$

から定める. このとき, この 4 つの数列は共通の極限 $\mu(a,b,c,d)$ を持つ. この極限を Matsumoto AGM[*1] と呼ぶ. 更に, $0<x_3\leq x_2\leq x_1\leq 1$ に対し, Matsumoto AGM $\mu(1,x_1,x_2,x_3)$ は 3 変数の Lauricella F_D を用いて次のように表示される:

$$\frac{1}{\mu(1,x_1,x_2,x_3)}=F_D\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},1;1-x_1^2,1-x_2^2,1-x_3^2\right)^2.$$

ただし, n 変数の Lauricella F_D とは, パラメータ α, $\beta_1,\ldots,\beta_n$, γ と変数 $x_1,\ldots,x_n$ に対して定まる関数

$$F_D(\alpha,\beta_1,\ldots,\beta_n,\gamma;x_1,\ldots,x_n)=\sum_{m_1,\ldots,m_n\geq 0}\frac{\left(\alpha,\sum_{j=1}^n m_j\right)\prod_{j=1}^m(\beta_j,m_j)}{\left(\gamma,\sum_{j=1}^n m_j\right)\prod_{j=1}^n(1,n_j)}\prod_{j=1}^n z_j^{m_j},$$

である. ここで, 複素数 α と非負整数 n に対し, $(\alpha,n)=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$, $(\alpha,0)=1$ とする.

[*1] Arithmetic–geometric mean, 算術幾何平均

楕円曲線の場合に, Gauss AGM はテータ関数・Gauss の超幾何級数と周期写像を通して結びつくことはよく知られた事実である. また, [Bor76], [MT12] において Borchardt AGM もまた適切な代数曲線・代数曲面の上で定義されるテータ関数・超幾何関数が周期写像を通して結びつくことが知られている. 楕円曲線の場合には, $\tau \to 2\tau$ という変換で算術平均と幾何平均

$$\vartheta_{00}(2\tau)^2 = \frac{\vartheta_{00}(\tau)^2 + \vartheta_{01}(\tau)^2}{2}, \quad \vartheta_{01}(2\tau)^2 = \vartheta_{00}(\tau)\vartheta_{01}(\tau)$$

が現れる. 算術幾何平均とテータの関係式を示すにはこのような変換公式が重要になる. Matsumoto AGM の場合には次のような変換で平均が現れる:

Theorem 4.2. [N., 未発表] 行列 $C \in \mathrm{U}(U, \mathbb{C})$ を

$$C = \begin{pmatrix} 1+i & & \\ & \frac{1+i}{2} & \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & -\frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$$

と定める. また, Siegel 上半空間上の正則関数であるテータ定数を埋め込み $\imath\colon \mathbb{B}_3^U \to \mathfrak{S}_4$ で引き戻すことにより複素超球 $\mathbb{B}_3^U$ 上の正則関数としてのテータ定数にも同じ記号を使うとする. このとき, $x_j(v) = \dfrac{4\vartheta_{4j-4}(v)^2\vartheta_{4j-3}(v)^2}{(\vartheta_{4j-4}(v)^2 + \vartheta_{4j-3}(v))^2}$, $y_j(v)^2 = 1 - x_j(v)$ $(s \in \mathbb{B}_3^U)$ とおくと,

$$x_1(Cv) = \frac{(\vartheta_8(v)^2 - \vartheta_{10}(v)^2)^2}{(\vartheta_8(v)^2 + \vartheta_{10}(v)^2)^2}, \quad x_2(Cv) = \frac{(\vartheta_4(v)^2 - \vartheta_6(v)^2)^2}{(\vartheta_4(v)^2 + \vartheta_6(v)^2)^2}, \quad x_3(Cv) = \frac{(\vartheta_0(v)^2 - \vartheta_2(v)^2)^2}{(\vartheta_0(v)^2 + \vartheta_2(v)^2)^2},$$

が成立. 更に, 各 $y_j(Cv)$ は $y_j(v)$ を用いて次のように表される:

$$y_1(Cv) = \frac{4(y_1(v)+y_2(v))(y_3(v)+1)}{(y_1(v)+y_2(v)+y_3(v)+1)^2}, \qquad y_2(Cv) = \frac{4(y_1(v)+y_3(v))(y_2(v)+1)}{(y_1(v)+y_2(v)+y_3(v)+1)^2},$$

$$y_3(Cv) = \frac{4(y_1(v)+1)(y_2(v)+y_3(v))}{(y_1(v)+y_2(v)+y_3(v)+1)^2}.$$

Matsumoto AGM の場合にも同様の対応があるのではないかと予想しているため, 今後は Thomae 型の公式・Jacobi の公式の類似・モノドロミー群のレベル付き合同部分群としての特徴付けを示すことで Matsumoto AGM の代数幾何的構造を明らかにする.

参考文献

[Bor76] C. W. Borchardt. “Über das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen.” *Berl. Monatsber* **53** (1876), 611–621.

[Igu72] J. Igusa. “Theta Functions.” Berlin, Heidelberg, and New York: Springer-Verlag, 1972.

[KM09] T. Kato and K. Matsumoto. “The common limit of a quadruple sequence and the hypergeometric function F_D of three variables.” *Nagoya Math. J.* **195** (2009), 113–124.

[MMN07] K. Matsumoto, T. Minowa, and R. Nishimura. "Automorphic forms on the 5-dimensional complex ball with respect to the Picard modular group over $\mathbb{Z}[i]$." *Hokkaido Math. J.* **36** (2007), 143–173.

[MT12] K. Matsumoto and T. Terasoma. "Thomae type formula for K3 surfaces given by double covers of the projective plane branching along six lines." *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)* **2012**.669 (2012), 121–149.

[Yos97] M. Yoshida. "Hypergeometric functions, my love." **E32**. Aspects of Mathematics. Modular interpretations of configuration spaces. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn, 1997.

余イデアル部分代数を用いた $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数の構成

筑波大学大学院 理工情報生命学術院 数理物質科学研究群
杉谷礼 (Rei SUGITANI) *

概要

近年，テンソル圏において通常の環論におけるそれを一般化する形で定義される単純代数の概念が注目されている．本講演では 1 の冪根における量子座標環 $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の余イデアル部分代数の生成元と代数構造について説明する．さらにそれを用いた $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数の構成例を紹介する．

1 導入

非退化なリボン構造をもつ有限テンソル圏はモジュラーテンソル圏と呼ばれる．モジュラーテンソル圏は，三次元閉多様体の不変量や，閉曲面の写像類群の射影表現などの構成において非常に重要である [BK01, KL01]．しかしモジュラーテンソル圏の例を与えることは一般には難しい．よく知られているモジュラーテンソル圏の例としては，有限群の表現圏の Drinfeld center や，良いクラスの頂点作用素代数の表現圏などがある．また単純リー代数 $\mathfrak{g}$ に付随する 1 の冪根 q における量子群 $u_q(\mathfrak{g})$ の表現圏 $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{g}))$ を “半単純化”することで半単純なモジュラーテンソル圏が得られる [BK01]．さらにパラメータ q の位数に関する適当な条件のもとで，$\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{g}))$ 自体が非半単純なモジュラーテンソル圏になることも知られている [Lyu95]．

さて，テンソル圏において通常の環論におけるそれを一般化する形で単純代数が定義される．最近のモジュラーテンソル圏の研究において，Shimizu-Yadav は次の定理を示した：

定理 1.1 ([SY24])**.** $\mathcal{C}$ をモジュラーテンソル圏，A を $\mathcal{C}$ における単純，可換かつ haploid な対称フロベニウス代数とする．このとき局所加群の圏 $\mathcal{C}_A^{\mathrm{loc}}$ はモジュラーテンソル圏である．

定理に現れる各言葉の定義は [SY24] を参照されたい．この定理からもわかるように単純代数は，テンソル圏やモジュラーテンソル圏の研究において重要な役割を果たす．

本講演では，清水健一氏 (芝浦工業大学) との共同研究 [SS24] に基づき，q が 1 の奇数乗根の場合の量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の表現圏 $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数の構成例について説明する．Skryabin[Skr07] の結果から，$\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の余イデアル部分代数は $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ の単純代数になる．

* E-mail : rsugitani@math.tsukuba.ac.jp. 本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2124 の支援を受けたものである．

$\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の余イデアル部分代数の分類に関する結果は第 20 回数学総合若手研究集会でも紹介しているが，今回の講演では，それらの生成元と関係式を完全に決定したことを報告する．さらにこの結果を用いて構成される，$\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数の具体例についても紹介する．

2 準備

2.1 記号と用語

基礎体 $\Bbbk$ を標数 0 の代数閉体とする．本稿では特に注意しない限り線形空間などはすべて $\Bbbk$ 上で考え，$\otimes_\Bbbk$ を $\otimes$ と表す．また $m \in \mathbb{Z}$ に対し，$q \in \Bbbk^\times \setminus \{1\}$ のとき $(m)_q := (1-q^m)/(1-q)$，$q = 1$ のとき $(m)_q := m$ と定める．さらに $(0)_q! := 1$，$n \in \mathbb{N}$ に対し $(n)_q! := (1)_q(2)_q \cdots (n)_q$ とする．

ホップ代数 H が与えられたとき，H の余積と余単位をそれぞれ Δ と ε で表し，余積に関して $\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ $(h \in H)$ のように書くことにする (Sweedler 記法)．また H の双対ホップ代数を H^* と表す．その他のホップ代数に関する記号は基本的に [Kas95] の通りとする．またホップ代数に関する基本的なことは例えば [Kas95] や [Mon93] を参照されたい．

定義 2.1. ホップ代数 H の**右余イデアル部分代数** A とは $\Delta(A) \subset A \otimes H$ を満たす H の部分代数である．左余イデアル部分代数も同様に定義されるが，本稿では特に注意しない限り余イデアル部分代数といえば右余イデアル部分代数のことを指すこととする．

2.2 モノイダル圏における単純代数

この節ではモノイダル圏とそれにおける単純代数の概念を簡単に説明する．詳しくは [EGNO15] を参照されたい．

圏 $\mathcal{C}$ に対し，関手 $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，対象 $\mathbf{1} \in \mathcal{C}$ および自然同型

$$a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z), \quad l_X : \mathbf{1} \otimes X \to X, \quad r_X : X \otimes \mathbf{1} \to X \quad (X, Y, Z \in \mathcal{C})$$

が与えられているとする．自然同型 a, l, r が三角形公理および五角形公理を満たすとき $\mathcal{C}$ を**モノイダル圏**といい，関手 $\otimes$ を**テンソル積関手**，対象 $\mathbf{1}$ を**単位対象**という．Mac Lane のコヒーレンス定理により，a, l, r は恒等射であると仮定してよい．そこで以下，常に a, l, r は恒等射であると仮定する．

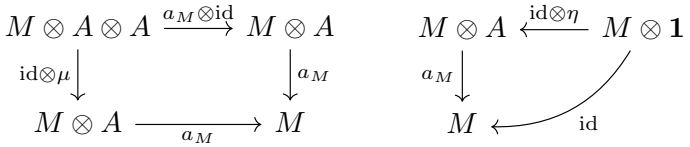
ある有限次元代数の有限次元表現の圏と同値となる線形アーベル圏を**有限アーベル圏**という．rigid なモノイダル圏（定義は [EGNO15, §2.10] を見よ）が，テンソル積関手が双線形，単位対象が単純対象，$\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbf{1}) \cong \Bbbk$ であって有限アーベル圏でもあるとき，この圏を**有限テンソル圏**という．

$\mathcal{C}$ をモノイダル圏とし，A を $\mathcal{C}$ の対象，$\mu : A \otimes A \to A$ および $\eta : \mathbf{1} \to A$ を $\mathcal{C}$ の射とする．図式

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mu \otimes \mathrm{id}} & A \otimes A \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \mathbf{1} \otimes A & \xrightarrow{\eta \otimes \mathrm{id}} & A \otimes A & \xleftarrow{\mathrm{id} \otimes \eta} & A \otimes \mathbf{1} \\ & \searrow^{\mathrm{id}} & \downarrow{\scriptstyle \mu} & \swarrow_{\mathrm{id}} & \\ & & A & & \end{array}$$

が可換であるとき，A を $\mathcal{C}$ **における代数**という．

モノイダル圏 $\mathcal{C}$ における代数 A が与えられたとする．対象 $M \in \mathcal{C}$ と射 $a_M : M \otimes A \to M$ が図式



を可換にするとき，M を $\mathcal{C}$ **における右** A**-加群**といい a_M を**作用**という．さらに $\mathcal{C}$ の射であって A の作用と整合性を保つような A-加群の射が定義され，これを用いて右 A-加群の圏 $\mathcal{C}_A$ が定義される．同様にして左 A-加群の圏 ${}_A\mathcal{C}$ 及び A-双加群の圏 ${}_A\mathcal{C}_A$ が定義される．$\mathcal{C}$ における代数 A が ${}_A\mathcal{C}_A$ において単純対象であるとき，A を**単純代数**という．

有限次元ホップ代数 H に対し $\mathrm{Rep}(H)$ を有限次元左 H-加群の圏とし，$\mathfrak{M}_H$, $\mathfrak{M}^H$ をそれぞれ有限次元の右 H-加群，右 H-余加群の圏とする．これらはすべて有限テンソル圏になる．また H の余イデアル部分代数 A は $\mathfrak{M}^H$ における代数となることに注意せよ．相対ホップ加群の圏 $\mathfrak{M}_A^H$ は $\mathcal{C} = \mathfrak{M}^H$ としたときの $\mathcal{C}_A$ として定義される [Tak79]．本稿の目的である，余イデアル部分代数を用いた $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数の構成において重要なのが Skryabin による次の結果である．

定理 2.2 ([Skr07, Theorem6.1])．H を有限次元ホップ代数，A を H の右余イデアル部分代数とする．このとき A は $\mathfrak{M}_A^H$ における単純対象である．

この定理から H の右余イデアル部分代数 A は $\mathfrak{M}^H$ の単純代数であることがわかる．$\mathfrak{M}^H$ は $\mathrm{Rep}(H^*)$ と同一視できるから，A は $\mathrm{Rep}(H^*)$ における単純代数となっているのである．

3　有限次元ホップ代数の余イデアル部分代数について

本節では有限次元ホップ代数の余イデアル部分代数について，本稿で用いる事実を紹介する．

3.1　双対ホップ代数の余イデアル部分代数

有限次元ホップ代数 H のすべての右余イデアル部分代数の集合を $\mathcal{C}(H)$ と書くことにする．$A \in \mathcal{C}(H)$ に対し $A^+ := A \cap \mathrm{Ker}\,(\varepsilon)$ とおく．H/A^+H は H の商余代数として左 H-加群余代数になっており，その双対空間 $(H/A^+H)^*$ は右 H^*-余加群代数，つまり H^* の右余イデアル部分代数とみなせる．この $(H/A^+H)^*$ について次が知られている：

定理 3.1 ([Mas92, Proposition 2.10], [Skr07, Corollary 6.5])．記号は上記の通りとする．対応 $A \mapsto (H/A^+H)^*$ は，$\mathcal{C}(H)$ と $\mathcal{C}(H^*)$ の間の全単射を定める．

さて L を有限次元ホップ代数とし，非退化なホップペアリング $(-,-) : L \times H \to \Bbbk$ が与えられたとする．このときホップ代数としての同型 $\phi : L \to H^*$ が $\phi(\ell)(h) = (\ell, h)$ $(\ell \in L, h \in H)$ によって誘導される．この ϕ と対応 $A \mapsto (H/A^+H)^*$ を組合わせて得られる写像

$$\mathcal{C}(H) \to \mathcal{C}(L), \quad A \mapsto \phi^{-1}((H/A^+H)^*) =: A^\dagger \tag{3.1}$$

は全単射である．Skryabin[Skr07, Theorem 6.1] の結果を用いれば，この $A^\dagger$ の次元は

$$\dim(A)\cdot\dim(A^\dagger)=\dim(H) \tag{3.2}$$

によって与えられる．また L に右 H-作用 $\ell\leftharpoonup h=(\ell_{(1)},h)\ell_{(2)}$ が定まるが，この作用を用いて $A^\dagger$ は次のように表される：

$$A^\dagger=\{\ell\in L\mid \ell\leftharpoonup a=\varepsilon(a)\ell \text{ for all } a\in A\}\quad (A\in\mathcal{C}(H)). \tag{3.3}$$

3.2 余イデアル部分代数の積分

H を有限次元ホップ代数，A を H の余イデアル部分代数とする．A の要素 Λ が任意の $a\in A$ に対し $\Lambda a=\varepsilon(a)\Lambda$ を満たすとき，Λ を A の**右積分**という．Skryabin の結果 [Skr07, Corollary 6.5] から A はフロベニウス代数であるため，A はスカラー倍を除いて一意的な 0 でない右積分を常にもつ．

補題 3.2. 3.1 節の記号を引き続き用いる．$A\in\mathcal{C}(H)$ に対して対応 (3.1) の L の余イデアル部分代数 $A^\dagger$ について，A の 0 でない右積分 Λ を用いて $A^\dagger=L\leftharpoonup\Lambda$ が成り立つ．

証明. H の L への作用は $\phi:L\to H^*$ が右 H-加群の同型になるように定められる．また H は有限次元ホップ代数であるからフロベニウス代数でもあり，つまり H^* は右 H-加群として H と同型である．一方で [Skr07, Theorem 6.1] より H は自由 A-加群である．以上の議論を組み合わせると L が自由 A-加群であることがわかる．

さて，右 A-加群 M に対して $I(M)=\{m\in M\mid ma=\varepsilon(a)m \text{ for all } a\in A\}$ と表すことにする．A の 0 でない右積分はスカラー倍を除いて一意的であることから $I(A)=\Bbbk\Lambda=A\Lambda$ が成り立つ．今，L は A 上自由であったから $I(L)=L\Lambda$，つまり本補題の主張を得る．証明が完了した． □

4 量子 SL_2 とその余イデアル部分代数

$N>1$ を奇数とし，q を 1 の原始 N 乗根とする．本節ではまず小さな量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ と量子座標環 $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ について説明する．特に $u_q(\mathfrak{sl}_2)$-加群としての $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ について調べ，またパラメータ q を q^{-1} に取りかえた $u_{q^{-1}}(\mathfrak{sl}_2)$ と $\overline{\mathcal{O}}_{q^{-1}}(SL_2)$ についても説明する．そして量子 SL_2 の余イデアル部分代数の分類結果を紹介する．

4.1 小さな量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ と量子座標環 $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$

小さな量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ とは，E,F,K で生成され，

$$E^N=F^N=0,\quad K^N=1,\quad KE=q^2EK,\quad KF=q^{-2}FK,\quad EF-FE=\frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}},$$
$$\Delta(K)=K\otimes K,\quad \Delta(E)=E\otimes K+1\otimes E,\quad \Delta(F)=F\otimes 1+K^{-1}\otimes F,$$
$$\varepsilon(K)=1,\quad \varepsilon(E)=\varepsilon(F)=0$$

を満たすホップ代数である．なお本稿では計算を簡潔にするため，$\tilde{F} = (q - q^{-1})KF$ とおき $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の生成元として $E, \tilde{F}, K$ を用いることがある．

量子座標環 $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ とは，a, b, c, d で生成され

$$a^N = d^N = ad - q^{-1}bc = da - qbc = 1, \quad b^N = c^N = 0,$$
$$ba = qab, \quad ca = qac, \quad db = qbd, \quad dc = qcd, \quad bc = cb,$$
$$\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c, \quad \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d, \quad \Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c, \quad \Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d,$$
$$\varepsilon(a) = \varepsilon(d) = 1, \quad \varepsilon(b) = \varepsilon(c) = 0.$$

を満たすホップ代数である．

よく知られている事実として $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ と $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ はお互いに双対ホップ代数である．実際，$u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の各生成元に対し

$$\rho(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(K) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}$$

で与えられる 2 次表現 ρ を用いて，非退化なホップペアリング $(-,-) : \overline{\mathcal{O}}_q(SL_2) \times u_q(\mathfrak{sl}_2) \to \Bbbk$ が

$$\begin{pmatrix} (a,h) & (b,h) \\ (c,h) & (d,h) \end{pmatrix} = \rho(h) \quad (h \in u_q(\mathfrak{sl}_2)) \tag{4.1}$$

により決定される．詳しくは [Cli19, Appendix A] を見よ．

4.2 $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の基底と $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ による作用

$\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の定義において，d は可逆元で $a = \left(q^{-1}bc + a\right) d^{-1}$ が成り立つ．よって

$$\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2) = \left\langle b, c, d \;\middle|\; d^N = 1,\ b^N = c^N = 0,\ db = qbd,\ dc = qcd,\ bc = cb \right\rangle$$

と表すことができ，このとき

$$\left\{ b^i c^j d^k \;\middle|\; i, j, k = 0, 1, \cdots, N-1 \right\} \tag{4.2}$$

が $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の基底となる．次に $x = bd^{-1},\ y = cd,\ z = d^2$ とおく．容易にわかるように

$$\left\{ x^i y^j z^k \;\middle|\; i, j, k = 0, 1, \cdots, N-1 \right\} \tag{4.3}$$

も $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の基底である．直接的な計算から $x^i y^j z^k = q^{-\frac{1}{2}i(i-1)+\frac{1}{2}j(j-1)-ij} b^i c^j d^{-i+j+2k}$ を得る．

さて，$\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の各生成元への $h \in u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の作用はホップペアリング (4.1) を用いて

$$\begin{pmatrix} a \leftharpoonup h & b \leftharpoonup h \\ c \leftharpoonup h & d \leftharpoonup h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a,h)a + (b,h)c & (a,h)b + (b,h)d \\ (c,h)a + (d,h)c & (c,h)b + (d,h)d \end{pmatrix} = \rho(h) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

となる．特に $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の各生成元の右作用は

$$\begin{aligned} &a \leftharpoonup E = c, && b \leftharpoonup E = d, && c \leftharpoonup E = 0, && d \leftharpoonup E = 0, \\ &a \leftharpoonup F = 0, && b \leftharpoonup F = 0, && c \leftharpoonup F = a, && d \leftharpoonup F = b, \\ &a \leftharpoonup K = qa, && b \leftharpoonup K = qb, && c \leftharpoonup K = q^{-1}c, && d \leftharpoonup K = q^{-1}d \end{aligned}$$

である．これらを用いて基底 (4.3) への E, F, K の作用が得られる：

補題 4.1. それぞれ $i,j,k=0,1,\cdots,N-1$ に対して次が成り立つ：

$$\begin{aligned}
&x^iy^jz^k \leftharpoonup E = q^{-2(j+k)+1}(i)_{q^2}x^{i-1}y^jz^k,\\
&x^iy^jz^k \leftharpoonup F = (-i+2j+2k)_{q^2}x^{i+1}y^jz^k + q^{-2i}(j)_{q^2}x^iy^{j-1}z^k,\\
&x^iy^jz^k \leftharpoonup K = q^{2(i-j-k)}x^iy^jz^k.
\end{aligned}$$

この補題 4.1 によって各 $k=0,1,\cdots,N-1$ に対し

$$V_k := \mathrm{span}\{x^iy^jz^k \mid i,j=0,1,\cdots,N-1\} \tag{4.4}$$

は $u_q(\mathfrak{sl}_2)$-加群として $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の部分加群になることがわかる．

4.3 $u_{q^{-1}}(\mathfrak{sl}_2)$ と $\overline{\mathcal{O}}_{q^{-1}}(SL_2)$

ホップ代数 $u_{q^{-1}}(\mathfrak{sl}_2)$ の各生成元 E,F,K をそれぞれ $\sigma(E)=KF$, $\sigma(F)=EK^{-1}$, $\sigma(K)=K$ と対応させるとき，σ はホップ代数としての一意的な同型 $\sigma: u_{q^{-1}}(\mathfrak{sl}_2)\to u_q(\mathfrak{sl}_2)$ になる [KS97]．また同様に $\check{\sigma}(a)=d$, $\check{\sigma}(b)=qc$, $\check{\sigma}(c)=q^{-1}b$, $\check{\sigma}(d)=a$ と対応させることで $\check{\sigma}: \overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)\to\overline{\mathcal{O}}_{q^{-1}}(SL_2)$ もホップ代数の同型になる．この節では $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ と $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ のホップペアリングを，q を明記して $(-,-)_q$ と表すことにする．それぞれの各生成元に対して直接的に計算することにより，任意の $h\in u_{q^{-1}}(\mathfrak{sl}_2)$ と $f\in\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ に対して $(f,\sigma(h))_q=(\check{\sigma}(f),h)_{q^{-1}}$ が成り立つことがわかる．これを用いれば次の補題が従う．

補題 4.2. $u_{q^{-1}}(\mathfrak{sl}_2)$ の余イデアル部分代数 A に対して，$\sigma(A)^\dagger=\check{\sigma}(A^\dagger)$ が成り立つ．

証明. 任意の $f\in\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ と $h\in u_{q^{-1}}(\mathfrak{sl}_2)$ に対して

$$\check{\sigma}(f)\leftharpoonup h = (\check{\sigma}(f_{(1)}),h)_{q^{-1}}\check{\sigma}(f_{(2)}) = (f_{(1)},\sigma(h))_q\,\check{\sigma}(f_{(2)}) = \check{\sigma}(f\leftharpoonup\sigma(h))$$

が成り立つ．この等式と (3.3) から本補題の主張を得る． □

4.4 量子 SL_2 の余イデアル部分代数

まず小さな量子群 $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の余イデアル部分代数について次が成り立つ．

命題 4.3 ([SS24])**.** 1 の奇数乗根 q における $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の余イデアル部分代数は以下ですべてである：

$$\begin{gathered}
u_q(\mathfrak{sl}_2),\quad \langle K^r\rangle,\quad \langle E,K^r\rangle,\quad \langle\tilde{F},K^r\rangle\quad (r\in\mathbb{Z}\text{ は }N\text{ の正の約数}),\\
\langle E+\alpha\tilde{F}+\beta K\rangle\quad(\alpha,\beta\in\Bbbk,(\alpha,\beta)\neq(0,0)),\quad \langle\tilde{F}+\beta K\rangle\quad(\beta\in\Bbbk,\beta\neq0),\\
\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle\quad \left(\lambda,\mu\in\Bbbk\ \text{s.t.}\ \lambda\mu\left(1-q^2\right)=1\right).
\end{gathered}$$

さらにこれらの次元はそれぞれ次のようになる：

$$\begin{gathered}
\dim\langle K^r\rangle = N/r,\quad \dim\langle E,K^r\rangle=\dim\langle\tilde{F},K^r\rangle=N^2/r,\\
\dim\langle E+\alpha\tilde{F}+\beta K\rangle=\dim\langle\tilde{F}+\beta K\rangle=N,\quad \dim\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle=N^2.
\end{gathered}$$

5.1 節のために $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の余イデアル部分代数について，2 つの補題を準備しておこう．

補題 4.4. $\alpha,\beta\in\Bbbk$ を固定し $p_{\alpha,\beta}=E+\alpha\tilde{F}+\beta K$ とおく．多項式 $\psi(X)$ を次のように定める：$\psi(X):=\prod_{k=1}^{(N-1)/2}\left(X^2-\beta(q^{2k}+q^{-2k})X+\beta^2+(q^{2k}-q^{-2k})^2/(1-q^2)\alpha\right)$．このとき，多項式 $(X-\beta)\psi(X)$ は $p_{\alpha,\beta}$ の最小多項式であり，$\Lambda_{\alpha,\beta}:=\psi(p_{\alpha,\beta})$ は $\langle p_{\alpha,\beta}\rangle$ の 0 でない右積分になる．

補題 4.5. 余イデアル部分代数 $\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle$ の生成元を $g_\lambda=\lambda^{-1}(E+\lambda K)$, $h_\mu=\mu^{-1}(\tilde{F}+\mu K)$ ととり，$\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle=\langle g_\lambda,h_\mu\rangle=:B_{\lambda,\mu}$ とする．このとき $\Lambda_{\lambda,\mu}:=\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1}{g_\lambda}^i{h_\mu}^j$ は $B_{\lambda,\mu}$ の 0 でない右積分である．

命題 4.3 で与えた余イデアル部分代数に定理 3.1 を適用することで，量子座標環 $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の余イデアル部分代数の完全なリストが得られる．さらに (3.2) を用いることでそれらの次元もわかる．

命題 4.6. 1 の奇数乗根 q における $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の余イデアル部分代数は以下ですべてである：

$$\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2),\quad \langle K^r\rangle^\dagger,\quad \langle E,K^r\rangle^\dagger,\quad \langle\tilde{F},K^r\rangle^\dagger\ (r\in\mathbb{Z}\text{ は }N\text{ の正の約数}),$$
$$\langle E+\alpha\tilde{F}+\beta K\rangle^\dagger\quad(\alpha,\beta\in\Bbbk,(\alpha,\beta)\neq(0,0)),\quad \langle\tilde{F}+\beta K\rangle^\dagger\quad(\beta\in\Bbbk,\beta\neq0),$$
$$\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle^\dagger\quad\left(\lambda,\mu\in\Bbbk\ \text{ s.t. }\ \lambda\mu\left(1-q^2\right)=1\right).$$

これらの次元はそれぞれ次のようになる：

$$\dim\langle K^r\rangle^\dagger=rN^2,\quad \dim\langle E,K^r\rangle^\dagger=\dim\langle\tilde{F},K^r\rangle^\dagger=rN,$$
$$\dim\langle E+\alpha\tilde{F}+\beta K\rangle^\dagger=\dim\langle\tilde{F}+\beta K\rangle^\dagger=N^2,\quad \dim\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle^\dagger=N.$$

5 主結果

5.1 量子座標環 $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の余イデアル部分代数の生成元

本節も $N>1$ を奇数とし，q を 1 の原始 N 乗根とする．

定理 5.1 ([SS24])**.** 命題 4.6 で与えた $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の各余イデアル部分代数の生成元は次のようになる：

$$\langle K^r\rangle^\dagger=\langle a^{N/r},a^{-1}b,ac\rangle=\langle d^{N/r},bd,cd^{-1}\rangle,\quad \langle E,K^r\rangle^\dagger=\langle d^{N/r},cd^{-1}\rangle,\quad \langle\tilde{F},K^r\rangle^\dagger=\langle a^{N/r},a^{-1}b\rangle,$$
$$\langle E+\alpha K\rangle^\dagger=\langle cd^{-1},d^2+(q-q^{-1})\alpha bd\rangle,\quad \langle\tilde{F}+\beta K\rangle^\dagger=\langle a^{-1}b,a^2-q^2\beta ac\rangle\quad(\alpha,\beta\in\Bbbk)$$
$$\langle E+\alpha\tilde{F}+\beta K\rangle^\dagger=\langle y_{\alpha,\beta},z_{\alpha,\beta}\rangle\quad(\alpha,\beta\in\Bbbk,(\alpha,\beta)\neq(0,0)),$$
$$\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle^\dagger=\langle w_{\lambda,\mu}\rangle\quad\left(\lambda,\mu\in\Bbbk\ \text{ s.t. }\ \lambda\mu\left(1-q^2\right)=1\right).$$

但し $y_{\alpha,\beta},z_{\alpha,\beta},w_{\lambda,\mu}$ はそれぞれ，補題 4.4 と補題 4.5 の右積分 $\Lambda_{\alpha,\beta}$, $\Lambda_{\lambda,\mu}$ を用いて

$$y_{\alpha,\beta}:=\frac{q^{-1}}{(N-1)_{q^2}!}\left(x^{N-1}y\leftharpoonup\Lambda_{\alpha,\beta}\right),\quad z_{\alpha,\beta}:=\frac{q^{-1}}{(N-1)_{q^2}!}\left(x^{N-1}z\leftharpoonup\Lambda_{\alpha,\beta}\right),$$
$$w_{\lambda,\mu}:=x^{N-1}y^{N-1}z\leftharpoonup\Lambda_{\lambda,\mu}$$

とする．

証明の概略．まず $\langle K^r\rangle^\dagger$, $\langle E,K^r\rangle^\dagger$, $\langle E+\alpha K\rangle^\dagger$ について，(3.3) と補題 4.1 より ‘$\supset$’ がわかる．一方，命題 4.6 で与えたそれぞれの次元と比較することにより ‘$\subset$’ を得る．さらにこれらに対し補題 4.2 を用いることにより，$\langle\tilde{F},K^r\rangle^\dagger$ と $\langle\tilde{F}+\beta K\rangle^\dagger$ の生成元も得られる．

次に $\langle E+\alpha\tilde{F}+\beta K\rangle^\dagger$ について，補題 4.1 を用いれば $y_{\alpha,\beta}$ と $z_{\alpha,\beta}$ が 0 でないことがわかる．この事実と補題 3.2 より '$\supset$' を得る．また次元を比較することで '$\subset$' も得られる．

最後に $A:=\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle^\dagger$ を考える．まず $\langle -\rangle^\dagger$ の定義 (3.1) に基づいて直接計算すると代数として $A\cong\Bbbk^N$ となることがわかる．一方で $w_{\lambda,\mu}$ は，(4.4) の $u_q(\mathfrak{sl}_2)$-加群 V_1 に含まれ，0 でない元であることが示される．これらの事実と補題 3.2 に考慮すれば，$\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle^\dagger$ は $w_{\lambda,\mu}$ によって生成されることがわかる． □

m を正の整数，n を m の約数，ξ を 1 の原始 n 乗根とする．代数 $T_{m,n}(\xi)$ を $\mathtt{g}^n=1$, $\mathtt{x}^m=0$, $\mathtt{gx}=\xi\mathtt{xg}$ を満たす $\mathtt{g},\mathtt{x}$ で生成される代数とする．

定理 5.2 ([SS24])**.** 量子座標環 $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の各余イデアル部分代数の代数構造は次のようになる：

(1) 余イデアル部分代数 $\langle K^r\rangle^\dagger$ の生成元 $s:=bd$, $t:=cd^{-1}$, $p=d^{N/r}$ は次の関係式を満たす：

$$s^N=t^N=0,\quad p^r=1,\quad ts=q^{-2}st,\quad ps=q^{N/r}sp,\quad pt=q^{N/r}tp. \tag{5.1}$$

(2) それぞれ次のような，代数としての同型が存在する：

$$\begin{aligned}
&T_{N,r}\left(q^{N/r}\right)\to\langle E,K^r\rangle^\dagger,\quad \mathtt{g}\mapsto d^{N/r},\quad \mathtt{x}\mapsto cd^{-1}.\\
&T_{N,r}\left(q^{-N/r}\right)\to\langle \tilde{F},K^r\rangle^\dagger,\quad \mathtt{g}\mapsto a^{N/r},\quad \mathtt{x}\mapsto a^{-1}b.\\
&T_{N,N}\left(q^{-2}\right)\to\langle E+\alpha K\rangle^\dagger,\quad \mathtt{g}\mapsto d^2+\left(q-q^{-1}\right)\alpha bd,\quad \mathtt{x}\mapsto cd^{-1}.\\
&T_{N,N}\left(q^{2}\right)\to\langle \tilde{F}+\beta K\rangle^\dagger,\quad \mathtt{g}\mapsto a^2-q^2\beta ac,\quad \mathtt{x}\mapsto a^{-1}b.\\
&T_{N,N}(q^{-2})\to\langle E+\alpha\tilde{F}+\beta K\rangle^\dagger,\quad \mathtt{g}\mapsto z_{\alpha,\beta},\quad \mathtt{x}\mapsto y_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}$$

(3) 余イデアル部分代数 $\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle^\dagger=\langle w_{\lambda,\mu}\rangle$ は，代数として $\Bbbk^N$ と同型である．

但し $y_{\alpha,\beta},z_{\alpha,\beta},w_{\lambda,\mu}$ は定理 5.1 の通りである．

注意 5.3. 余イデアル部分代数 $\langle E+\lambda K,\tilde{F}+\mu K\rangle^\dagger$ の生成元 $w_{\lambda,\mu}$ の最小多項式については例 5.6 で解説する．

5.2 $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数の例

2.2 節の議論から $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の余イデアル部分代数は，$h\in u_q(\mathfrak{sl}_2)$, $f\in\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ のとき左作用 $h\rightharpoonup f=f_{(1)}(f_{(2)},h)$ によって $\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数となる．$\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の各生成元への $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ の左作用は

$$\begin{aligned}
&E\rightharpoonup a=0, && E\rightharpoonup b=a, && E\rightharpoonup c=0, && E\rightharpoonup d=c,\\
&F\rightharpoonup a=b, && F\rightharpoonup b=0, && F\rightharpoonup c=d, && F\rightharpoonup d=0,\\
&K\rightharpoonup a=qa, && K\rightharpoonup b=q^{-1}b, && K\rightharpoonup c=qc, && K\rightharpoonup d=q^{-1}d
\end{aligned}$$

である．また基底 (4.2) への作用はそれぞれ次のようになる：

$$E \rightharpoonup b^i c^j d^k = q^{-2i-k+1}(i+k)_{q^2} b^i c^{j+1} d^{k-1} + q^{-2i-k+2}(i)_{q^2} b^{i-1} c^j d^{k-1} \tag{5.2}$$

$$F \rightharpoonup b^i c^j d^k = q^{i-j+1}(j)_{q^2} b^i c^{j-1} d^{k+1}, \tag{5.3}$$

$$K \rightharpoonup b^i c^j d^k = q^{-i+j-k} b^i c^j d^k \tag{5.4}$$

例 5.4. 整数 r を N の正の約数とする．定理 5.1 と定理 5.2 より，$\langle K^r \rangle^\dagger$ は関係式 (5.1) を満たす $s := bd$, $t := cd^{-1}$, $p := d^{N/r}$ によって生成される，$\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数である．(5.2)–(5.4) から，生成元 s, t, p への E, F, K の左作用はそれぞれ次のようになる：

$$\begin{aligned}
&E \rightharpoonup s = q^{-2}(q+q^{-1})st + q^{-1}, && F \rightharpoonup s = 0, && K \rightharpoonup s = q^{-2}s,\\
&E \rightharpoonup t = -qt^2, && F \rightharpoonup t = 1, && K \rightharpoonup t = q^2 t,\\
&E \rightharpoonup p = q^{-N/r+1}(N/r)_{q^2} tp, && F \rightharpoonup p = 0, && K \rightharpoonup p = q^{-N/r} p.
\end{aligned}$$

例 5.5. 定理 5.1 と定理 5.2 より，$\langle E + \alpha K \rangle^\dagger$ $(\alpha \in \Bbbk)$ は関係式 $t^N = 0$, $v^N = 1$, $vt = q^2 tv$ を満たす $t := cd^{-1}$ と $v := d^2 + (q - q^{-1})\alpha bd$ によって生成される，$\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数である．まず生成元 t への E, F, K の作用は例 5.4 と同じである．また (5.2)–(5.4) から，生成元 v への E, F, K の作用はそれぞれ次のようになる：

$$E \rightharpoonup v = (q+q^{-1})tv + \alpha(1-q^{-2}), \quad F \rightharpoonup v = 0, \quad K \rightharpoonup v = q^{-2}v.$$

例 5.6. 定理 5.1 と定理 5.2 より，$\lambda\mu\left(1-q^2\right) = 1$ を満たす $\lambda, \mu \in \Bbbk$ に対し $A = \langle E + \lambda K, \tilde{F} + \mu K \rangle^\dagger$ は，$w := w_{\lambda,\mu} = h \leftharpoonup \Lambda$ によって生成される，$\mathrm{Rep}(u_q(\mathfrak{sl}_2))$ における単純代数である．但し $h = x^{N-1}y^{N-1}z = q^{-1}b^{N-1}c^{N-1}d^2$ とし，$\Lambda := \Lambda_{\lambda,\mu}$ は補題 4.5 で与えた A の右積分とする．A の生成元 w の最小多項式および E, F, K の w への左作用を決定しよう．V_k を (4.4) における $\overline{\mathcal{O}}_q(SL_2)$ の $u_q(\mathfrak{sl}_2)$-部分加群とする．このとき $A \cap V_k$ は 1 次元で，$0 \neq w^k \in A \cap V_k$ となることが示せる．

まず w の最小多項式について，$w^N \neq 0$ と $w^N \in A \cap V_0 = \Bbbk 1_A$ より，ある $c \in \Bbbk^\times$ が存在して $w^N = c$ となる．さらにこの定数 c について

$$c = \varepsilon(c) = \varepsilon(w^N) = \varepsilon(w)^N = (h_{(1)}, \Lambda)\varepsilon(h_{(2)}) = (h, \Lambda)^N$$

が成り立つ．従って w の最小多項式は $\psi(X) = X^N - (h, \Lambda)^N$ である．

次に K の左作用は (5.4) から $K \rightharpoonup w = q^{-2}w$ となる．E と F の作用について，$w \in V_1$ に注意して (5.2) と (5.3) を用いれば

$$E \rightharpoonup w = (\text{const.}) \cdot x^{N-2}y^{N-1} \in A \cap V_0, \quad F \rightharpoonup w = (\text{const.}) \cdot x^{N-1}y^{N-2}z^2 \leftharpoonup \Lambda \in A \cap V_2$$

を得る．これよりある $\delta, \delta' \in \Bbbk$ を用いて $E \rightharpoonup w = \delta$, $F \rightharpoonup w = \delta' w^2$ となることがわかる．さらに

$$\delta = \varepsilon(E \rightharpoonup w) = \varepsilon(E \rightharpoonup h \leftharpoonup \Lambda) = (h_{(1)}, \Lambda)\varepsilon(h_{(2)})(h_{(3)}, E) = (h, \Lambda E)$$

より $\delta = (h, \Lambda E)$ を得る．また [MS01, Theorem 3.1] から δ は可逆で，$\delta' = -q\delta^{-1}$ が従う．以上の議論をまとめると，A の生成元 w への E, F, K の作用は，$\delta = (h, \Lambda E)$ として

$$K \rightharpoonup w = q^{-2}w, \quad E \rightharpoonup w = \delta, \quad F \rightharpoonup w = -q\delta^{-1}w^2$$

となる．

参考文献

[BK01] B. Bakalov and A. Kirillov, Jr. *Lectures on tensor categories and modular functors*, volume 21 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[Cli19] Z. Cline. On actions of Drinfel'd doubles on finite dimensional algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 223(8):3635–3664, 2019.

[EGNO15] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik. *Tensor categories*, volume 205 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[Kas95] C. Kassel. *Quantum groups*, volume 155 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

[KL01] T. Kerler and V. Lyubashenko. *Non-semisimple topological quantum field theories for 3-manifolds with corners*, volume 1765 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[KS97] A. Klimyk and K. Schmüdgen. *Quantum groups and their representations*. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[Lyu95] V. Lyubashenko. Invariants of 3-manifolds and projective representations of mapping class groups via quantum groups at roots of unity. *Comm. Math. Phys.*, 172(3):467–516, 1995.

[Mas92] A. Masuoka. Freeness of Hopf algebras over coideal subalgebras, *Comm. Algebra* 20 (1992), no. 5, 1353–1373.

[Mon93] S. Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings*, volume 82 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1993.

[MS01] S. Montgomery and H.-J. Schneider. Skew derivations of finite-dimensional algebras and actions of the double of the Taft Hopf algebra. *Tsukuba J. Math.*, 25(2):337–358, 2001.

[SS24] K. Shimizu, R. Sugitani, Coideal subalgebras of quantum SL2 at roots of unity. *arXiv e-prints*, arXiv:2410.10064, October 2024.

[SY24] K. Shimizu and H. Yadav. Commutative exact algebras and modular tensor categories. *arXiv e-prints*, arXiv:2408.06314, August 2024.

[Skr07] S. Skryabin. Projectivity and freeness over comodule algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 359 (2007), no. 6, 2597–2623.

[Tak79] M. Takeuchi. Relative Hopf modules—equivalences and freeness criteria. *J. Algebra*, 60(2):452–471, 1979.

DE 数値積分公式と Sinc 関数展開を用いたアメリカン・プット・オプションの早期権利行使境界の高精度数値計算

一橋大学大学院経営管理研究科
杉田 恭将 (Yasumasa SUGITA) *

概要

Black-Scholes 方程式は金融工学において広く知られた偏微分方程式であり，特にオプションの価格評価に用いられている．本研究では，アメリカン・プット・オプションの早期権利行使境界を数値計算により高精度に近似する手法を提案する．応用数学分野で広く知られる高精度数値計算法である，二重指数型変数変換 (Double Exponential transformation) および Sinc 関数展開を用いて，権利行使境界を相対誤差 10^{-13} 程度の精度で計算することに成功した．

1 研究の背景

近代のファイナンス研究の先駆けとなるオプション理論は，Black and Scholes(1973)[2] により提案され，Black and Scholes は，原資産過程が幾何ブラウン運動に従うという仮定のもとで，無裁定価格理論を用いてヨーロピアン・オプション価格の評価を行い，金融工学の基礎となる理論を築き上げた．また，Merton(1973)[7] は，配当なしアメリカン・コール・オプションの価格評価に関する理論を提案し，アメリカン・コール・オプションの価格は金利の関係により早期権利行使され得ず，ヨーロピアン・コール・オプションの価格と等しくなることを示した．しかしながら，アメリカン・プット・オプションの価格評価は，価格評価式それ自体に最適行使境界を含むことにより数学的に難しい問題である．そのため，解を解析的に得ることはできず，近似解法を用いることが必要になる．アメリカン・プット・オプションの価格評価に対する手法は，これまでに数多く提案されている．古典的にはラティス法を用いた近似や偏微分方程式に対して SOR 法を適用した近似手法などが挙げられるが，満期直前において細かい離散化が必要になり，数値計算の効率性及び計算精度は劣る．

これまでの研究で，アメリカン・プット・オプションの最適権利行使境界は，満期直前に複雑な振る舞いをすることが知られている [5]． Barles *et al.*(1995)[1] では，最適行使境界の満期直前の挙動は，解析的および数値的研究において有用性があるものとして，最適権利行使境界の漸近的性質を解析し，満期直前の挙動には特異性があることを明らかにした．その上で，満期直前の振る舞いを解析的に導出し，最適権利行使境界の近似式を提案した．また，Chen and Chadam(2007)[4] では，満期直前での解の挙動を漸近的にモデル化する研究がなされ，explicit approximation や implicit approximation, ODE approximation などの数値計算結果を示し，その相対誤差を示しているが，い

* E-mail:bd231005@g.hit-u.ac.jp

ずれの計算手法も精度が得られていない．本研究では，これらの課題に対して，応用数学では広く知られる数値計算手法である二重指数型数値積分公式 (通称:DE 公式) や Sinc 関数展開を用いて，既存研究よりも高精度に早期権利行使境界を数値計算する手法を提案する．

2　研究の概要

株式などの値動きにより価格が決定される金融商品は金融派生商品と呼ばれ，リスク管理等において重要な役割を果たしている．特に，決められた条件の下で，ある資産 (これを原資産という) を事前に決められた価格（これを権利行使価格という）で買う (ないしは売る) 権利をオプションという．オプションの保有者は満期に (または満期までの任意の時点に) 権利行使することができる．オプションにはいくつかの種類があるが，権利行使可能なタイミングにより 2 種類に大別される．ヨーロピアン・オプションは満期にのみ権利行使可能な商品である．それに対して，アメリカン・オプションは満期までの任意の時刻において，早期権利行使が可能な商品である．また，原資産を権利行使価格で買う権利をコールといい，売る権利をプットという．ここで，配当のない原資産を考え，その価格を S_t で表す．ヨーロピアン・コール・オプションは，満期 $t = T$ において，原資産価格 S_t が権利行使価格 K よりも高い場合にのみ権利行使されるため，ヨーロピアン・コール・オプションの価格を $C_E(t, S)$ とすると

$$C_E(T, S_T) = \max(0,\ S_T - K)$$

が成り立つ．ここで，上式の右辺はペイオフ関数と呼ばれる．

オプション価格は Black-Scholes 偏微分方程式と呼ばれる方程式に従うことが知られており，この方程式を適当な初期条件および境界条件の下で解くことにより解析解を得ることができる．

コール・オプションを複製ポートフォリオでヘッジすると金利を受け取ることができるため，オプション価格はペイオフ関数より上方向に乖離する．ここでアメリカン・コール・オプションを考えると，その価格はペイオフ関数より常に高い価値をもつため，たとえ早期権利行使が可能であったとしても，早期行使が最適戦略とはなり得ない．したがって，アメリカン・コール・オプションの価格 $C_A(t, S)$ はヨーロピアン・コール・オプションの価格 $C_E(t, S)$ と等しくなる．

一方で，アメリカン・プット・オプションの価格は，より複雑な振る舞いをすることが知られている．ヨーロピアン・プット・オプションの価格を $P_E(t, S)$ とすると，満期 $t = T$ において

$$P_E(T, S_T) = \max(0,\ K - S_T)$$

が成り立つ．アメリカン・プット・オプションは，アメリカン・コール・オプションと異なり，原資産価格の挙動によっては早期権利行使することが最適戦略となる．具体的には，時刻に依存して決まるある境界価格が存在し，原資産価格がその境界価格を下回った場合に早期権利行使することになる．この境界価格を最適権利行使境界（または単に権利行使境界）という（図 1)．

アメリカン・プット・オプション価格は, 通常は非線形偏微分方程式の自由境界問題 (free boundary problems) を解くことで求められる．一般に自由境界問題を解くことは容易ではないが，アメリカン・プット・オプション価格については，権利行使境界が満たす非線形方程式が知られており，権利行使境界を用いてオプション価格を求めることができる．よって，権利行使境界を高精度に計算する

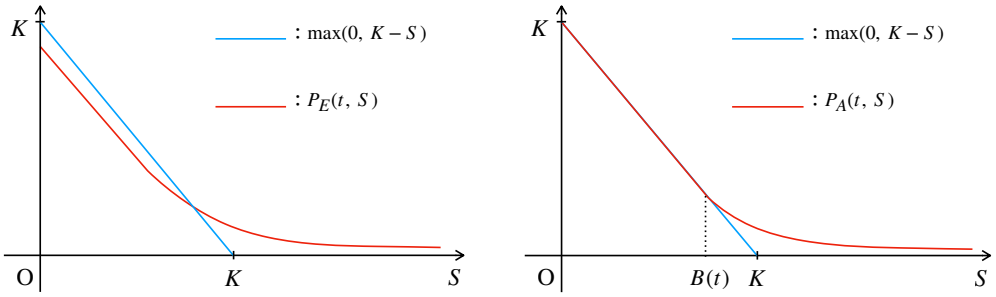


図 1　ヨーロピアン・プット・オプション価格は，左図のように原資産価格 S_t が小さくなると，ペイオフ関数の値を下回る．このようなとき，もし早期権利行使が可能ならば，権利行使した方が得になる．よって，アメリカン・プット・オプションについては，ある境界値関数 $B(t)$ が存在し，原資産価格 S_t が $B(t)$ を下回るならば即座に権利行使されることになるので，価格は右図のようになる．

ことができれば，アメリカン・プット・オプション価格を高精度に求めることが可能となる．

権利行使境界については様々な側面から研究がなされているが，解析解を求めることができないため，数値計算を用いた近似解法が研究されてきた．たとえば，古典的にはラティス法を用いたバミューダオプションによる近似や，最適権利行使境界に関する積分方程式を離散化する方法などが提案されている．しかし，我々が知る限り，既存の数値計算手法による計算結果は，最良のものであっても相対誤差が 10^{-6} 程度であり，その精度は十分であると言い難い．そのため金融工学の分野では，学術上だけでなく実務上も，最適権利行使境界の高精度な数値計算手法が望まれている．

そのような現状に対し，本研究では，応用数学分野で広く知られる高精度数値計算法である二重指数型変数変換 (Double Exponential transformation) および Sinc 関数展開を用いて，権利行使境界を相対誤差 10^{-13} 程度の精度で計算することに成功した．

3　早期行使境界が満たす方程式の導出

本章では，Black-Scholes 偏微分方程式からアメリカン・プット・オプションの早期行使境界が満たす方程式の導出を行う．本章では，以下の定義を用いる．

標準正規分布の累積密度関数を

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

とする．また

$$d_1(x,\ y,\ t) = \frac{\log\dfrac{x}{y} + \left(r + \dfrac{\sigma^2}{2}\right) t}{\sigma\sqrt{t}}, \qquad d_2(x,\ y,\ t) = \frac{\log\dfrac{x}{y} + \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right) t}{\sigma\sqrt{t}} = d1(x,\ y,\ t) - \sigma\sqrt{t}$$

と定める．さらに，$\max(0,\ \cdot)$ を $(\cdot)^+$ と表す．

原資産価格 S_t は確率微分方程式

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dB_t$$

の解であるものとして，配当は 0 を仮定する．ここで，$r > 0$ は無リスク利子率，$\sigma > 0$ はボラティリティ，$B_{t,\ \{0\le t\le T\}}$ はブラウン運動を表すものとする．ヨーロピアン・プット・オプションの価格 $P_E(t, S_t)$ は，行使価格 K として

$$P_E(t, S_t) = \mathbf{E}\left[e^{-r(T-t)}\left(K - S_T\right)^+\right]$$

により明示的に表され，以下の解析解が知られている．

$$P_E(t, S_t) = Ke^{-r(T-t)}N\left(-d_2(S_t, K, T-t)\right) - S_tN\left(-d_1(S_t, K, T-t)\right)$$

アメリカン・プット・オプションの理論価格 $P_A(t,\ S_t)$ は

$$P_A(t,\ S_t) = \sup_{t\le\tau\le T}\mathbf{E}\left[e^{-r(\tau-t)}(K - S_\tau)^+\right]$$

と表される．ただし，τ は停止時刻を意味する．配当がない場合のアメリカン・プット・オプション価格 $P_A(t,\ S_t)$ は，Jacka(1991)[6] や Carr *et al.*(1992)[3] などにより，ヨーロピアン・プット・オプション価格と早期行使プレミアムといわれる項に分解されることが知られており

$$P_A(t, S_t) = P_E(t,\ S_t) + \mathbf{E}\left[\int_0^{T-t} rKe^{-ru}1\{S(u) \le B(t+u)\}du\right] \tag{1}$$

と表される．ただし，$B(t)$ は最適権利行使境界と呼ばれる $0 \le t \le T$ で定義される関数，$S(x)$ は $S(0) = S$ となる幾何ブラウン運動の $t = x$ における値を表す．

最適権利行使境界 $B(t)$ を用いると (1) は

$$P_A(t, B(t)) = P_E(t, B(t)) + rK\int_t^T e^{-r(s-t)}N(-d_2(S_t, B(s), T-t))ds$$

と表すことができる．アメリカン・プット・オプションの価格 $P_A(t, S_t)$ は，$S_t = B(t)$ でペイオフ関数と等しくなることから，以下の等式が成り立つ．

$$K - B(t) = P_E(t, B(t)) + rK\int_t^T e^{-r(s-t)}N(-d_2(B(t), B(s), T-t))ds \tag{2}$$

ここで，$t = T - \dfrac{2u}{\sigma^2},\ B(t) = Ke^{-b(u)},\ q = \dfrac{2r}{\sigma^2}$ として (2) を整理すると，$B(t)$ に関する方程式は

$$\begin{aligned} &e^{-qu}N\left(\frac{b(u) - (q-1)u}{\sqrt{2u}}\right) + e^{-b(u)}N\left(\frac{-b(u) + (q+1)u}{\sqrt{2u}}\right) - 1 \\ &\qquad + q\int_0^u e^{-q(u-v)}N\left(\frac{b(u) - b(v) - (q-1)(u-v)}{\sqrt{2(u-v)}}\right)dv = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

と表される (これを価格分解式という)．本研究の目的は，(3) を満たす $b(u)$ を数値計算により求めることである．

権利行使境界 $b(u)$ は Evans *et al.*(2002)[5] などにより，u に関して単調増加かつ，次の性質を満たすことが知られている．

$$b(0) = 0, \quad \lim_{u \downarrow 0} \frac{b(u)}{\sqrt{-u \log u}} = 1, \quad \lim_{u \to \infty} b(u) = \log\left(1 + \frac{1}{q}\right) \tag{4}$$

$b(u)$ は解析的に求めることができないため，数値計算により求める必要がある．試行錯誤の結果，(3) を以下のように漸化式で表し，$b_n(u)$ を用いて $b_{n+1}(u)$ を定めるスキームを構築することにより，権利行使境界 $b(u)$ を計算できることがわかった．

$$\begin{aligned} e^{-qu} N\left(\frac{b_{n+1}(u) - (q-1)u}{\sqrt{2u}}\right) + e^{-b_{n+1}(u)} N\left(\frac{-b_{n+1}(u) + (q+1)u}{\sqrt{2u}}\right) - 1 \\ + q \int_0^u e^{-q(u-v)} N\left(\frac{b_n(u) - b_n(v) - (q-1)(u-v)}{\sqrt{2(u-v)}}\right) dv = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

初期状態を $b_0(u) \equiv 0$ として，関数値を求めたい u 毎に Newton 法を計算して，$b_n(u)$ から $b_{n+1}(u)$ を計算する．ここで (5) 下段の積分項は，早期行使プレミアムを意味する．

4　本研究で用いる離散化手法

本章では，本研究で用いる離散化手法である DE 数値積分公式と Sinc 関数展開について簡単に説明する．

4.1　DE 数値積分公式

有界区間 $[a,\ b]$ 上の積分を以下の二重指数型変数変換 (Double Exponential transformation) により置換積分する [8]．具体的には

$$x = \varphi^{\mathrm{DE}}(x) = \frac{b-a}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x)\right) + \frac{b+a}{2}$$

として，有界区間 $[a,\ b]$ の定積分に対する近似を以下のように与える．

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi^{\mathrm{DE}}(s))\{\varphi^{\mathrm{DE}}\}'(s)ds$$

数値計算においては，無限和を計算することができないので，有限項で打ち切る．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi^{\mathrm{DE}}(s))\{\varphi^{\mathrm{DE}}\}'(s)ds \approx h \sum_{j=-N}^{N} f(\varphi^{\mathrm{DE}}(jh))\{\varphi^{\mathrm{DE}}\}'(jh)$$

$\varphi(s)$ は $s \to \pm\infty$ で急速に $a,\ b$ に漸近するので，$\varphi'(s)$ は二重指数的に減衰する．無限積分をある十分に大きい正の定数 N を用いて，$[-N,\ N]$ の有限項で打ち切ることにより，数値積分を高精度に行うことができる．

DE 数値積分公式において，刻み幅 h と打ち切り項数 N を適切に定めることにより，打ち切り誤差と台形則の離散化誤差がほぼ等しくなるように離散化を行うと，端点に特異性がなければ，DE 数値積分公式の誤差は

$$O\left(\exp\left(-\frac{CN}{\log N}\right)\right)$$

となることが知られている．これは，N の増加に伴い誤差が指数的に近い速度で減少することを示している．

4.2 Sinc 関数展開

Sinc 関数は区間 $(-\infty,\ \infty)$ で定義される関数 [9][10] であり

$$\mathrm{Sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

で定められる．Sinc 関数は，$\mathrm{Sinc}(0) = 1$，$x \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ を満たす x に対して，$\mathrm{Sinc}(x) = 0$ を満たす振動関数である．ここで，関数 $u(t)$ は Sinc 関数を用いて

$$u(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u(jh)\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{h} - j\right) \approx \sum_{j=-N}^{N} u(jh)\mathrm{Sinc}\left(\frac{t}{h} - j\right)$$

と近似することができる．数値計算上は有限項で打ち切る必要があるため，打ち切り誤差が発生することになる．ここで，$u(jh) \approx 0$ となるような $j = \pm N$ を打ち切り項数とすることにより，極めて高精度の近似を与えることが知られている．Sinc 関数近似の誤差は，関数 $u(t)$ を $t \to \pm\infty$ で二重指数関数的に減衰する正則関数であると仮定し，打ち切り項数 N と刻み幅 h を適切にとることができれば

$$O\left(\exp\left(-\frac{CN}{\log N}\right)\right)$$

と評価される．これは DE 数値積分公式と同様に，N の増加に伴い誤差が指数的に近い速度で減少することを示している．

5 数値計算手法

■数値計算におけるパラメーター一覧

本研究の数値計算で用いるパラメータ $R,\ L,\ M,\ N$ は正の定数として，以下のように定義する．

R： 台形則の打ち切り項数　　L： Sinc 関数近似の打ち切り項数

M： 台形則の区間 0.5 あたりの分点数　　N： Sinc 関数近似の区間 0.5 あたりの分点数

5.1 オプション価格評価式への適用

アメリカン・プット・オプションの権利行使境界 $b(u)$ が満たす非線形方程式を解く際に，まず早期行使プレミアムを意味する以下の積分項を計算する必要がある．

$$q\int_0^u e^{-q(u-v)}N\left(\frac{b_n(u)-b_n(v)-(q-1)(u-v)}{\sqrt{2(u-v)}}\right)dv \tag{6}$$

関数 $b(u)$ は $[0,\ \infty)$ で定義される関数であるが，(4) より $b(0)=0$ であり，$b(u)$ の $u\to\infty$ での漸近挙動は $\log\left(1+\frac{1}{q}\right)$ へ収束することが知られているので，以下の操作を加えることにより，$u=0$ で 0，かつ $u\to\infty$ で 0 に漸近する関数 $c(u)$ を導入する．

$$c(u)=b(u)-\frac{u}{1+u}\log\left(1+\frac{1}{q}\right)$$

半区間 $[0,\ \infty)$ で定義される関数 $c(u)$ に対して，DE 変換

$$u=\varphi(s)=\exp\left\{\frac{\pi}{2}\sinh(s)\right\}$$

を適用することにより，全区間 $(-\infty,\ \infty)$ で定義され，$u\to\pm\infty$ で急速に 0 に収束するような関数 $c(\varphi(s))$ を得る．また，早期行使プレミアムの積分区間は $[0,\ u]$ であるため，積分変数を $v=uw$ と置き換えて

$$w=\psi(\xi)=\frac{1}{2}\left\{1+\tanh\left(\frac{1}{2}\pi\sinh(\xi)\right)\right\}$$

とすることにより，全区間の無限積分へと書き換えることができる．これにより積分項を台形則を用いて高精度に数値計算することが可能になる．

これらの積分変換を早期行使プレミアムの価格評価式 (6) に適用すると，以下のようになる．

$$\begin{aligned}
&q\int_0^u e^{-q(u-v)}N\left(\frac{b_n(u)-b_n(v)-(q-1)(u-v)}{\sqrt{2(u-v)}}\right)dv\\
=&qu\int_0^1 e^{-qu(1-w)}N\left(\frac{b_n(u)-b_n(uw)-(q-1)u(1-w)}{\sqrt{2u(1-w)}}\right)dw\\
=&q\varphi(s)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q\varphi(s)(1-\psi(\xi))}N\left(\frac{b_n(\varphi(s))-b_n(\varphi(s)\psi(\xi))-(q-1)\varphi(s)(1-\psi(\xi))}{\sqrt{2\varphi(s)(1-\psi(\xi))}}\right)\psi'(\xi)d\xi
\end{aligned} \tag{7}$$

この積分を台形則で計算するには，$v=\varphi(jh)$ となるような v に対して $b_n(v)$ の値が必要になるが，すでに値が求まっている $b_n(v)$ の値を用いて線形補間などにより計算すると誤差が増大してしまう．そのため，有限個の分点における関数値を用いて，任意の点における関数値を高精度に近似する必要がある．この問題を解決するため，前章で示した Sinc 関数近似を用いる．

5.2 Sinc 関数を用いた離散化

関数 $c(u)$ に対して DE 変換 $u=\varphi(s)$ を適用したものについて，関数 $c(\varphi(s))$ は $s\to\pm\infty$ で二重指数関数に近いオーダーで減衰するので，これに対して Sinc 関数近似を用いることにより，分点以

外の任意の点における関数値を高精度に求めることができる．Sinc 関数展開を変数変換後の式に適用して以下の式を得る．

$$b(\varphi(s)) \approx \sum_{k=-N}^{N} c_k \ \mathrm{Sinc}\left(\frac{y-\varphi(s)}{h}\right) + \frac{\varphi(s)}{1+\varphi(s)} \log\left(1+\frac{1}{q}\right) \tag{8}$$

u の値から $\varphi(s)$ の逆変換を用いて s の値を求め，(8) の Sinc 関数近似により $c(\varphi(s))$ を求めた上で $b(u)$ の値を得る．

以上をまとめると，全体の数値計算の流れは次のようになる．すなわち，ある u に対して積分項（早期行使プレミアム (6)）を DE 数値積分公式により計算し，$b_{n+1}(u)$ に関する非線形方程式を Newton 法により計算する．ここで，積分項を計算する際に任意の v に対して $b_n(v)$ の値が必要になるが，全区間で定義される，両端で急速に減衰する関数 $c(\varphi(s))$ に変換したものに対して，Sinc 関数近似を適用することにより高精度な近似スキームを構築することができる．

6　数値計算結果

権利行使境界 $b_I(u)$ に対して，初期状態 $b_0(u) = 0$ として Newton 法により数値解を求めるときの最大相対誤差を示す．ここで，$I \in \mathbb{N}$ は全体の反復回数とする．また，$q = 1.0$ とする．本研究のスキームでは，2 種類の打ち切り幅と刻み幅が存在する．打ち切り幅については，関数 $b(u)$ を Sinc 関数により近似する幅 L と早期行使プレミアムの積分項を台形則により計算するときの R がある．本研究の数値計算では，Sinc 関数展開について，関数 $b(u)$ の $u \to \infty$ での漸近挙動と数値解を比較し，打ち切り誤差が $3.09417... \times 10^{-16}$ 程度となる打ち切り幅 $L = 4.0$ を採用し，区間 $[-L,\ L]$ で関数 $c(\varphi(s))$ を近似する．倍精度実数による数値計算では，この打ち切り誤差は十分に小さい．台形則による数値積分に関しても同様にして，打ち切り誤差が同程度に抑えられる $R = 4.5$ を採用し，$[-R,\ R]$ により全区間の無限積分を近似する．すなわち，早期行使プレミアムは (7) の最下段に対して，積分区間 0.5 あたりの分割数を $M \in \mathbb{N}$ とすると，分割幅は $h = \frac{1}{2M}$ となる．これより，全区間の分点数は $2M \times 2R = 4RM$ である．被積分関数を

$$f(\xi) := e^{-q\varphi(s)(1-\psi(\xi))} N\left(\frac{b_n(\varphi(s)) - b_n(\varphi(s)\psi(\xi)) - (q-1)\varphi(s)(1-\psi(\xi))}{\sqrt{2\varphi(s)(1-\psi(\xi))}}\right)\psi'(\xi)$$

と定義すると，$f(\pm R)$ は十分に 0 に漸近しているため，その点での補正は数値計算上，無視することができ，複合台形則を用いて

$$\begin{aligned} q\varphi(s)\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)d\xi &\approx qh\varphi(s)\left\{\frac{1}{2}f(-R) + \sum_{j=1}^{4RM-1} f(-R+jh) + \frac{1}{2}f(R)\right\} \\ &\approx qh\varphi(s)\sum_{j=0}^{4RM} f(-R+jh) \end{aligned}$$

と近似できる．

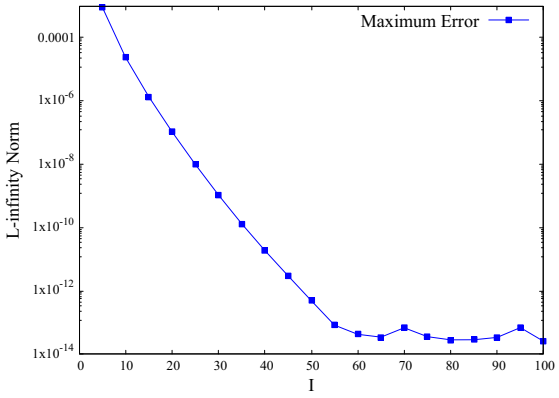


図 2　非線形方程式 (5) に対する最大ノルム (9) の計算結果．$N = 10$，$M = 100$ と定めた．

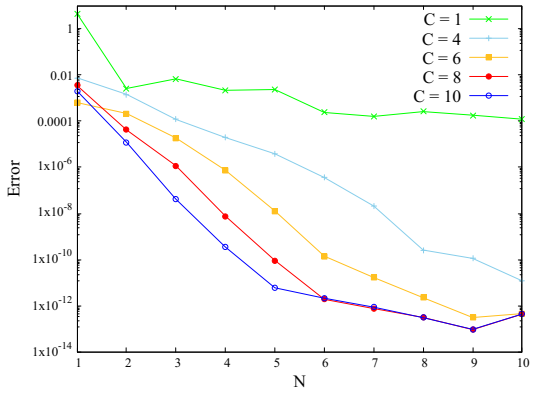


図 3　全体の反復回数を $I = 100$，積分区間 0.5 あたりの Sinc 関数近似および台形則の分点数をそれぞれ N，M とし，$M = CN$ と定め，$u = 1$ における誤差を計算した結果．

権利行使境界 $b_I(u)$ が十分に収束する反復計算回数 I を求めるために，関数 $b(u)$ の最大ノルムを

$$||b_I - b_{2I}||_{L^\infty} := \max_{0 \le u \le \infty} |b_I(u) - b_{2I}(u)| \tag{9}$$

と定義して数値計算すると，図 2 が得られた．これより本研究の数値計算では，数値解の最大誤差が 10^{-13} 以下となる反復計算回数である $I = 100$ を採用して，パラメータ N，M に関する誤差解析 (参照；図 3) を行う．

離散化に関しては，N，$M \in \mathbb{N}$ として積分区間 0.5 に対して，Sinc 関数展開の分点数と積分項に対する台形則の分点数をそれぞれ N，M とする．それぞれのパラメータは，Sinc 関数展開の分点数 N と $2N$ の計算結果を比較した際の相対誤差が十分に小さくなるような値を採用する．本研究で用いた非線形方程式 (5) では，Sinc 関数展開の刻みに対して台形則の刻みをより細かくすると，収束速度が速くなることがわかった．そのため，数値計算を行う際には，N と M の比を一定に保った状態で誤差評価を行った．ここで，$C \in \mathbb{N}$ として台形則の分点数を Sinc 関数展開の分点数 N の定数倍，すなわち $M = CN$ と定め，Sinc 関数展開の分点数が 2 倍のものとの相対誤差を解析した．検証を進めていくと，$u = 1$ 付近での誤差が最も大きくなり，原点から離れるに従い誤差は減少することが判明したため，誤差解析は $u = 1$ における $b(u)$ に対して行う．いくつかの C に対して，相対誤差は

$$\text{Error} := \left| b_I^N(1) - b_I^{2N}(1) \right|$$

と評価し，数値計算結果を図 3 に示す．ここで，$b_I^N(u)$ は，全体の反復計算回数 I として，関数 $c(\varphi(s))$ に対して幅 0.5 あたりを分点数 N で Sinc 関数展開して得られた数値解を意味する．分点数が大きくなると，$u = 1$ のおける相対誤差は指数関数に近いオーダーで減衰している．

7　結論

DE 変換と Sinc 関数近似を用いてアメリカン・プット・オプションの最適権利行使境界を近似することにより，全区間での最大相対誤差を 10^{-13} 程度まで抑えることができ，極めて高精度な数値解

を得ることに成功した．これは既存研究における精度を大幅に改善する結果である．また，この結果は，アメリカン・プット・オプション価格の高精度数値計算にも応用することができるため，非常に有意義である．

■謝辞　本研究は，科学技術振興機構 (JST) 次世代研究者挑戦的研究プログラム (Grant number:JPMJSP2174) の支援を受けたものです．また，本研究は小林健太教授 (一橋大学大学院経営管理研究科) との共同研究の内容を含んでいます．

参考文献

[1] G. Barles, J. Burdeau, M. Romano, and N. Samsoen. Critical stock price near expiration. *Mathematical finance*, 5(2):77–95, 1995.

[2] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of political economy*, 81(3):637–654, 1973.

[3] P. Carr, R. Jarrow, and R. Myneni. Alternative characterizations of american put options. *Mathematical Finance*, 2(2):87–106, 1992.

[4] X. Chen and J. Chadam. A mathematical analysis of the optimal exercise boundary for american put options. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 38(5):1613–1641, 2007.

[5] J. D. Evans, R. Kuske, and J. B. Keller. American options on assets with dividends near expiry. *Mathematical Finance*, 12(3):219–237, 2002.

[6] S. D. Jacka. Optimal stopping and the american put. *Mathematical Finance*, 1(2):1–14, 1991.

[7] R. C. Merton. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of economics and management science*, pages 141–183, 1973.

[8] M. Mori and M. Sugihara. The double-exponential transformation in numerical analysis. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 127(1-2):287–296, 2001.

[9] F. Stenger. Numerical methods based on whittaker cardinal, or sinc functions. *Siam Review*, 23(2):165–224, 1981.

[10] F. Stenger, B. Baker, C. Brewer, G. Hunter, S. Kaputerko, and J. Shepherd. Periodic approximations based on sinc. *Int. J. Pure Appl. Math*, 49(1):63–72, 2008.

移流方程式に対する CIP 法の誤差評価と浅水方程式への応用

東京大学　大学院数理科学研究科　数理科学専攻
竹村春希 (Haruki TAKEMURA) *

概要

CIP 法 (cubic interpolated pseudo-particle method) は 3 次 Hermite 補間を用いた semi-Lagrange 法である．本稿では 1 次元移流方程式に対する CIP 法について安定性と収束性に関する結果を述べる．また, 同様の数学解析が spline 補間を用いた semi-Lagrange 法にも適用可能であることを示す．さらに CIP 法に splitting 法を組み合わせた浅水方程式に対する陽的で時空間高精度な数値計算法を提案する．

1　導入

CIP 法は Takewaki–Nishiguchi–Yabe [1] によって提案された移流方程式に対する時空間高精度な差分法であり, [2] の数値実験では CIP 法は L^2 ノルムに関して時空間 3 次精度の振る舞いを示すことが分かっている．Nara–Takaki [3] は定数の速度を持つ周期境界条件下の 1 次元移流方程式に対する CIP 法について, 安定性を示した．また, Tanaka et al. [4] は CIP 法の離散的な近似関数を全空間上の連続関数に置き換えたようなスキームについて, L^2 ノルムにおいては安定でないことと, 近似解の L^2 ノルムは初期値の H^1 ノルムで抑えられることを示した．さらに, [5] で連続関数を用いたスキームの収束レートなしの収束性が証明されている．

本研究では, 周期境界条件下の 1 次元移流方程式に対する CIP 法について, 時空間 3 次精度の収束性を証明した．後で定義される重みつき H^2 ノルムに関して CIP 法が安定であることが示される．安定性の証明において最も重要となる事実は, 3 次 Hermite 補間作用素が 2 階微分に関して L^2 射影として振る舞うということである．

Hermite 補間の代わりにスプライン補間などを用いた semi-Lagrange 法についても安定性が研究されている [6, 7]．上で述べた 3 次 Hermite 補間の性質は, 3 次スプライン補間にも当てはまるため, Hermite 補間を用いた semi-Lagrange 法についても同様に安定性と収束性が示される．この方針は, Fourier 解析を用いる先行研究とは全く異なるアプローチである．

また, CIP 法は浅水方程式や KdV 方程式などさまざまな非線形変微分方程式への応用が研究されている [8, 9, 10, 11]．複雑な流体現象を記述するモデルの数値計算において, 時空間高精度な CIP 法は有用である．先行研究中の浅水方程式に対する CIP 法は, 数値実験によると, 時間方向に 1 次精度

* E-mail:takemura@ms.u-tokyo.ac.jp

である. 一方, 本稿の前半で示されるように線形の移流方程式に対する CIP 法が時間 3 次という高い精度を持っている. 本稿の後半では, 線形移流方程式に対する CIP 法の精度の高さを活かすため, 本研究独自の「splitting 法による線形化」を取り入れて浅水方程式に対する高精度な数値計算法を提案する.

2 移流方程式に対する CIP 法

2.1 1 次元移流方程式の厳密解

次のような 1 次元移流方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + u \partial_x \varphi = 0, & \text{in} \quad \mathbb{T} \times [0,T], \\ \varphi|_{t=0} = \varphi_0, & \text{in} \quad \mathbb{T}. \end{cases} \tag{AE}$$

ただし, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ とし, 与えられた移流速度 $u : \mathbb{T} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ と初期値 φ_0 は十分滑らかであるとする. $(x,t) \in \mathbb{T} \times [0,T]$ に対して, 常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} X(s;x,t) = u(X(s;x,t),s), & s \in [0,T], \\ X(t;x,t) = x. \end{cases} \tag{2.1}$$

の解を $X(s;x,t)$ と定める. $X : [0,T] \times \mathbb{T} \times [0,T] \to \mathbb{R}$ は初期値問題 (AE) における特性曲線と呼ばれる. (AE) の厳密解は

$$\varphi(x,t) = \varphi_0(X(s;x,0),s)$$

によって与えられることが知られている.

ここで 1 次元移流方程式に対する CIP 法を導入する. $M, N \in \mathbb{N}$, $h = 1/M$, $\Delta t = T/N$, $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_M = 1$, $t_n = n\Delta t$ $(n = 0, \ldots, N)$ とする. 関数空間 V_h を

$$V_h \coloneqq \left\{ v \in C^1(\mathbb{T}) \;\middle|\; j = 0, \ldots, M-1 \text{ に対して } v|_{[x_j, x_{j+1}]} \text{は 3 次多項式} \right\}$$

とし, 3 次 Hermite 補間作用素 $I_h^3 : C^1(\mathbb{T}) \to V_h$ を

$$I_h^3 g(x_j) = g(x_j), \quad D(I_h^3 g)(x_j) = Dg(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, M-1, \quad g \in C^1(\mathbb{T})$$

によって定義する. ただし, D は $\frac{d}{dx}$ を表す. 特性曲線 X が (2.1) によって定義されることに注意して, $X^n(x) = X(t_n; x, t_{n+1})$ の近似関数を以下のように定義する. $n = 0, \ldots, N-1$, $x \in \mathbb{T}$ に対し $\mathbb{T}$ 上の初期値問題

$$\begin{cases} \frac{d}{ds} X(s;t_n,x) = u(X(s;t_n,x),s), & s \in [t_n, t_{n+1}], \\ X(t_{n+1};x,t_{n+1}) = x. \end{cases}$$

を 3 次精度の Runge–Kutta 法で計算し, $X^n(x)$ の近似値を $X^n(x)$ とする. 問題 AE に対する CIP 法は

$$\varphi^0 = I_h^3 \varphi_0, \quad \varphi_h^{n+1} = I_h^3 \left(\varphi_h^n \circ X^n \right) \quad (n = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{2.2}$$

と表される. 先行研究の数値実験により, CIP 法の L^2 誤差は $O(\Delta t^3 + h^3)$ 程度であることが知られている.

2.2 CIP 法の数学解析

CIP 法の安定性解析が容易でない要因としては, 3 次 Hermite 補間作用素 I_h^3 は $L^p(\mathbb{T})$ $(p \in [1,\infty)$ 上の作用素として有界ではないことが挙げられる. 実際, $v \in C^1(\mathbb{T})$ が

$$v(x_j) = 1, \quad Dv(x_j) = 0 \quad (j = 0, \ldots, M-1),$$
$$0 \le v(x) < 1 \quad (x \notin \{x_0, x_1 \ldots, x_{M-1}\}),$$

を満たすとして, $v_n(x) = v(x)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ とすると, 任意の $j = 1, \ldots, M$ に対して $v_n(x_j) = 1$, $Dv_n(x_j) = 0$ であるため, $I_h^3 v_n \equiv 1$, $\left\| I_h^3 v_n \right\|_{L^p(\mathbb{T})} = 1$ が成り立つ. 一方, $\mathbb{T}$ 上ほとんどいたるところで $v_n \to 0$ であることと $|v_n(x)| \le 1$ $(x \in \mathbb{T})$ に注意すれば有界収束定理より $\|v_n\|_{L^p(\mathbb{T})} \to 0$ $(n \to \infty)$ が従う. 結局 $\sup_{v \in C^1(\mathbb{T})} \frac{\left\| I_h^3 v \right\|_{L^p(\mathbb{T})}}{\|v\|_{L^p(\mathbb{T})}} = +\infty$ を得て, 3 次 Hermite 補間作用素の非有界性が確認された.

そこで, 本研究ではノルム

$$\|g\|_{H^2_{h,\Delta t}(\mathbb{T})} \coloneqq \left(\|g\|^2_{L^2(\mathbb{T})} + \frac{h^4}{\Delta t} \left\| D^2 g \right\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \right)^{1/2}$$

に関する CIP 法の安定性や収束性を議論する. ここではこのノルムを重みつき H^2 ノルムと呼ぶ. 次の補題が CIP 法の安定性評価において重要である.

補題 2.1. 補間作用素 I_h^3 は重みつき H^2 ノルムに関して安定である. すなわち, ある正の定数 C が存在して, 任意の $g \in H^2(\mathbb{T})$ に対し

$$\left\| I_h^3 g \right\|_{H^2_{h,\Delta t}(\mathbb{T})} \le (1 + C\Delta t) \|g\|_{H^2_{h,\Delta t}(\mathbb{T})}$$

が成り立つ.

補題 2.1 の証明には, 以下の 2 つの補題で述べられる 3 次 Hermite 補間の性質が用いられる.

補題 2.2 (Theorem 2 of [12], Corollary 3.1 of [13])**.** 3 次 Hermite 補間作用素 I_h^3 について, 正の定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $g \in H^2(\mathbb{T})$ に対し

$$\left\| (I - I_h^3) g \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \le C h^2 \left\| D^2 g \right\|_{L^2(\mathbb{T})},$$
$$\left\| (I - I_h^3) g \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \le C h^2 \left\| D^2 (I - I_h^3) g \right\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

が成り立つ.

補題 2.3 (Lemma 3.2 of [13])**.** 任意の $f, g \in H^2(\mathbb{T})$ に対し,

$$\int_{\mathbb{T}} D^2 \left(f(x) - I_h^3 f(x) \right) \cdot D^2 \left(I_h^3 g \right)(x) dx = 0,$$

が成り立つ.

補題 2.3 は, 3 次 Hermite 補間作用素が 2 階微分に関して L^2 射影として振る舞うことを意味する. すなわち, $W_h^1 \coloneqq \left\{\partial_x^2 f \;\middle|\; f \in V_h\right\}$ として $P_{W_h^1} : L^2(\mathbb{T}) \to W_h^1$ を L^2 射影とすると

$$\partial_x^2 (I_h^3 g) = P_{W_h^1}(D^2 g), \quad g \in H^2(\mathbb{T})$$

が成り立つ.

補題 2.1 の証明. 三角不等式と相加相乗平均の不等式によって

$$(a+b)^2 \le (1+d)a^2 + \left(1 + \frac{1}{d}\right) b^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad d > 0$$

を得る. これと重みつき H^2 ノルムの定義を用いて

$$\begin{aligned}
\left\|I_h^3 g\right\|_{H^2_{h,\Delta t}(\mathbb{T})}^2 &= \left\|g + (I_h^3 g - g)\right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \frac{h^4}{\Delta t} \left|I_h^3 g\right|_{H^2(\mathbb{T})}^2 \\
&\le (1+\Delta t) \left\|g\right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \left(1 + \frac{1}{\Delta t}\right) \left\|I_h^3 g - g\right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + \frac{h^4}{\Delta t} \left|I_h^3 g\right|_{H^2(\mathbb{T})}^2
\end{aligned}$$

を得る. ここに補題 2.2 を用いて

$$\begin{aligned}
\left\|I_h^3 g\right\|_{H^2_{h,\Delta t}(\mathbb{T})}^2 &\le (1+\Delta t) \left\|I_h^3 g\right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + h^4 \left(1 + \frac{1}{\Delta t}\right) \left|I_h^3 g - g\right|_{H^2(\mathbb{T})}^2 + \frac{h^4}{\Delta t} \left|I_h^3 g\right|_{H^2(\mathbb{T})}^2 \\
&\le (1+\Delta t) \left\|I_h^3 g\right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + h^4 \left(1 + \frac{1}{\Delta t}\right) \left(\left|I_h^3 g - g\right|_{H^2(\mathbb{T})}^2 + \left|I_h^3 g\right|_{H^2(\mathbb{T})}^2\right)
\end{aligned}$$

となる. さらに補題 2.3 を用いて

$$\begin{aligned}
\left\|I_h^3 g\right\|_{H^2_{h,\Delta t}(\mathbb{T})}^2 &\le (1+\Delta t) \left\|I_h^3 g\right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 + (1+\Delta t) \frac{h^4}{\Delta t} \left|g\right|_{H^2(\mathbb{T})}^2 \\
&= (1+\Delta t) \left\|g\right\|_{H^2_{h,\Delta t}(\mathbb{T})}^2 .
\end{aligned}$$

を得て, Hermite 補間作用素の安定性が示された. □

補題 2.1 を用いて, CIP 法の収束性と安定性に関する次の 2 つの定理が示される. これらが本稿の前半の主結果である.

定理 2.4 (Lemma 3.3 of [14])**.** $u_{xx} \in C^3(\mathbb{T} \times [0,T])$ とし, 正の定数 $C_1 > 0$ が存在して $h^4 \le C_1 \Delta t$ が成り立ち, かつ Δt が十分小さいとする. $\varphi^n = \varphi(\cdot, t_n)$ $(n = 0, \ldots, N)$ とし, φ_h^n $(n = 0, \ldots, N)$ を (2.2) によって定義される近似関数とする. このとき, CIP 法は重みつき H^2 ノルムに関して安定である. すなわち, ある定数 $C > 0$ が存在して、任意の $g \in H^2(\mathbb{T})$ に対し,

$$\left\|I_h^3 \left(g \circ X^n\right)\right\|_{H^2_{h,\Delta t}(\mathbb{T})} \le (1 + C\Delta t) \left\|g\right\|_{H^2_{h,\Delta t}(\mathbb{T})} \quad (n = 0, \ldots, N)$$

が成り立つ.

定理 2.5 (Theorem 3.11 of [14])**.** 定理 2.4 の仮定に加えて $\varphi_0 \in C([0,T]; H^4(\mathbb{T}))$ のとき, 正の定数 $C > 0$ が存在して

$$\left\|\varphi^n - \varphi_h^n\right\|_{H^2_{h,\Delta t}(\mathbb{T})} \le C \left(\Delta t^3 + \frac{h^4}{\Delta t}\right) \left\|\varphi\right\|_{l^2(H^4)} \quad (n = 0, \ldots, N)$$

が成り立つ. ここで, $\left\|g\right\|_{l^2(H^4)} \coloneqq \left(\sum_{n=0}^N \Delta t \|g(\cdot, t_n)\|_{H^4(\mathbb{T})}^2\right)^{1/2}$ とする.

2.3 スプライン補間を用いた semi-Lagrange 法

関数空間 $V_h^{2,3}$ を

$$V_h^{2,3} \coloneqq \left\{ v \in C^2(\mathbb{T}) \;\middle|\; v|_{[x_j,x_{j+1}]}\text{は 3 次多項式}, \quad j = 0, \ldots, M-1 \right\}.$$

とし, 3 次スプライン補間作用素 $\Pi_h^3 : C^0(\mathbb{T}) \to V_h^{2,3}$ を

$$(\Pi_h^3 g)(x_j) = g(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, M-1.$$

によって定義する (この定義によって Π_h^3 は一意に定まる [15]).

前小節では Hermite 補間を用いた semi-Lagrange 法である CIP 法について述べたが, 同様の数学解析が 3 次スプライン補間を用いた semi-Lagrange 法にも適用可能である. 問題 AE に対して次のような数値スキームを考える.

$$\tilde{\varphi}^0 = \Pi_h^3 \varphi_0, \quad \tilde{\varphi}_h^{n+1} = \Pi_h^3 \left(\tilde{\varphi}_h^n \circ X^n \right) \quad (n = 0, 1, \ldots, N-1).$$

補題 2.2, 2.3 に対応するようなスプライン補間の性質が知られている.

補題 2.6 (Theorems 7 and 8 of [15])**.** 正の定数 $C > 0$ が存在して, 任意の $g \in H^2(\mathbb{T})$ に対し

$$\left\| \Pi_h^3 g - g \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \le C h^2 \left\| D^2 g \right\|_{L^2(\mathbb{T})},$$
$$\left\| \Pi_h^3 g - g \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \le C h^2 \left\| D^2 (\Pi_h^3 g - g) \right\|_{L^2(\mathbb{T})}$$

が成り立つ.

補題 2.7 (Theorem 4 of [15])**.** 任意の $f, g \in H^2(\mathbb{T})$ に対し,

$$\int_{\mathbb{T}} D^2 \left(f(x) - (\Pi_h^3 f)(x) \right) \cdot D^2 \left(\Pi_h^3 g \right)(x) dx = 0,$$

が成り立つ.

CIP 法の場合と全く同様のアプローチにより, 次の定理のようにスプライン補間を用いた semi-Lagrange 法の収束性が証明される.

定理 2.8 (Theorem 4.6 of [14])**.** 定理 2.5 と同じ仮定のもとで

$$\| \varphi^n - \tilde{\varphi}_h^n \|_{H^2_{h,\Delta t}(\mathbb{T})} \le C \left(\Delta t^3 + \frac{h^4}{\Delta t} \right) \| \varphi \|_{l^2(H^4)} \quad (n = 0, \ldots, N)$$

が成り立つ.

3 浅水方程式に対する CIP 法

前節の内容は, 移流方程式の初期値問題という非常に単純な問題設定における CIP 法について数学解析を行なった. しかし, より興味深い複雑な現象を記述する多くの偏微分方程式は非線形の移流項を含む. その一例として浅水方程式を取り上げ, CIP 法を応用した時空間高精度な数値計算方法を提案する. スキームの構成には splitting 法による高精度化が重要である.

3.1 浅水方程式の初期値問題と数値計算スキーム

次のような 1 次元浅水方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u + g\partial_x \phi = 0, & \text{in} \quad \mathbb{T}\times[0,T] \\ \partial_t \phi + \partial_x (u\phi) = 0, & \text{in} \quad \mathbb{T}\times[0,T] \\ \phi|_{t=0} = \phi_0, \quad u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{SWE1-1}$$

1 次元浅水方程式は 2 次元の流体運動を記述する方程式であり, $\phi(x,t)$ は水面の高さ, $u(x,t)$ は水平方向の流速を表す. $g > 0$ は重力加速度を表す定数である. 問題 (SWE1-1) に関して $W^{1,\infty}(0,T;L^\infty(\mathbb{T})) \cap L^\infty(0,T;H^2(\mathbb{T}))$ における強解の一意的な時間局所存在が知られている [16]. 以下では (SWE1-1) の十分な滑らかな解が存在することを仮定する.

ここで $r^\pm = \sqrt{g\phi} \pm \frac{1}{2}u$ とおけば, 初期値問題 (SWE1-1) は次のように書き直せる.

$$\begin{cases} \partial_t r^+ + \left(\dfrac{3}{2}r^+ - \dfrac{1}{2}r^-\right)\partial_x r^+ = 0 & \text{in} \quad \mathbb{T}\times[0,T], \\ \partial_t r^- + \left(-\dfrac{3}{2}r^- + \dfrac{1}{2}r^+\right)\partial_x r^- = 0 & \text{in} \quad \mathbb{T}\times[0,T], \\ r^\pm|_{t=0} = \sqrt{g\phi_0} \pm \dfrac{1}{2}u_0, \end{cases} \tag{SWE1-2}$$

初等的な式変形によって, 適切な仮定のもとで (SWE1-1) と (SWE1-2) は同値な問題とみなせる.

命題 3.1. (SWE1-1) の解 $u, \phi \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}\times[0,T])$ がある正の定数 L に対して $\phi \geq L$ in $\mathbb{T}\times[0,T]$ を満たすならば, $r^\pm = \sqrt{g\phi} \pm \frac{1}{2}u \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}\times[0,T])$ は (SWE1-2) の解である. また, (SWE1-2) の解 $r^\pm \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}\times[0,T])$ がある正の定数 L' に対して $r^+ + r^- \geq L'$ in $\mathbb{T}\times[0,T]$ を満たすならば, $\phi = (r^+ + r^-)^2/(4g)$, $u = r^+ - r^- \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}\times[0,T])$ は (SWE1-1) の解である.

さらに CIP 法と splitting 法を適用するために次の問題を導入する.

$$\begin{cases} \partial_t r_1^+ + \left(+\dfrac{3}{2}r_2^+ - \dfrac{1}{2}r_2^-\right)\partial_x r_1^- = 0 & \text{in} \quad \mathbb{T}\times[0,T], \\ \partial_t r_1^- + \left(-\dfrac{3}{2}r_2^- + \dfrac{1}{2}r_2^+\right)\partial_x r_1^+ = 0 & \text{in} \quad \mathbb{T}\times[0,T], \\ \partial_t r_2^+ + \left(+\dfrac{3}{2}r_1^+ - \dfrac{1}{2}r_1^-\right)\partial_x r_2^- = 0 & \text{in} \quad \mathbb{T}\times[0,T], \\ \partial_t r_2^- + \left(-\dfrac{3}{2}r_1^- + \dfrac{1}{2}r_1^+\right)\partial_x r_2^+ = 0 & \text{in} \quad \mathbb{T}\times[0,T], \\ r_1^\pm(x,0) = r_2^\pm(x,0) = \sqrt{g\phi_0(x)} \pm \dfrac{1}{2}u_0(x), \end{cases} \tag{SWE1-3}$$

(SWE1-2) に対して未知関数の数と偏微分方程式の本数が 2 倍になっている. Splitting 法を適用する際に重要となるのは, 各偏微分方程式が前節で扱った線形移流方程式の形になっていることである. すなわち, 例えば (SWE1-3) の第一式は, 仮に r_2^+ と r_2^- が既知であるみなせば, r_1^+ に関して線形な移流方程式である.

また, (SWE1-2) と (SWE1-3) の関係について次の命題が成り立つ.

命題 3.2. (SWE1-2) の解 $r^{\pm} \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}\times(0,T))$ が一意に存在し, ある正の定数 L に対して $r^{+}+r^{-} \geq L$ を満たすとき, (SWE1-3) の解 $r_1^{\pm}, r_2^{\pm} \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}\times(0,T))$ が一意に存在して, $r_1^{\pm}=r_2^{\pm}=r^{\pm}$ を満たす.

ここで splitting 法を導入する. f,g を一般の (微分) 作用素とする. ODE (または PDE) $\partial_t u = f(u)+g(u)$ の初期値問題に対して, 2 つの subproblem $\partial_t u = f(u)$, $\partial_t u = g(u)$ それぞれに対する数値解法を交互に適用して数値解を得る手法を splitting 法と呼ぶ. CIP 法を利用するために, (SWE1-3) を次の 2 つの subproblem に分割する.

$$\begin{cases} \partial_t r_1^{\pm} + c_2^{\pm}\partial_x r_1^{\mp} = 0 & \text{in} \quad \mathbb{T}\times[0,T], \\ \partial_t r_2^{\pm} = 0 & \text{in} \quad \mathbb{T}\times[0,T], \end{cases} \tag{SP1-1}$$

$$\begin{cases} \partial_t r_1^{\pm} = 0 & \text{in} \quad \mathbb{T}\times[0,T], \\ \partial_t r_2^{\pm} + c_1^{\pm}\partial_x r_2^{\mp} = 0 & \text{in} \quad \mathbb{T}\times[0,T], \end{cases} \tag{SP1-2}$$

ただし, $c_k^{\pm} = \pm\frac{3}{2}r_k^{\pm} \mp \frac{1}{2}r_k^{\mp}$ $(k=1,2)$ とする. 2 つの subproblem では $r_1^{\pm}$ か $r_2^{\pm}$ のいずれか片方のみが時間発展をするという点が計算の精度を確保する上で重要になる. 例えば (SP1-1) では $r_2^{\pm}$ は時間発展しないため, CIP 法で (SP1-1) の初期値問題を解く際には $r_2^{\pm}$ を位置にのみ依存する既知関数として扱うことができる.

ここで, CIP 法の時間発展を表す作用素 $\mathrm{S_{CIP}} : \mathbb{R}\times C(\mathbb{T})\times V_h \to V_h$ を以下のように導入する. $\Delta t>0$, $C\in C(\mathbb{T})$, $R\in V_h$ とする. 移流速度が C であるような $\mathbb{T}$ 上の 1 次元移流方程式

$$\partial_t r + C\cdot\partial_x r = 0 \quad \text{in} \quad \mathbb{T}\times[0,T]$$

に対する CIP 法で, 時刻 t_n における近似関数が R^n で, 1 ステップ進んだ時刻 $t_{n+1}=t_n+\Delta t$ における近似関数が R^{n+1} であるとする. $\mathrm{S_{CIP}}$ は $R^{n+1}=\mathrm{S_{CIP}}(\Delta t, C, R^n)$ となるように定義される.

問題 (SWE1-3) を解くために, splitting 法に従って (SP1-1) と (SP1-2) を交互に CIP 法で解く. 時間 1 次精度の手法として知られる Lie splitting を利用すると次のようなスキームになる.

$$\begin{aligned} R_{L1}^{\pm,(n)} = R^{\pm,(n)}, \quad R_{L2}^{\pm,(n)} = R^{\pm,(n)}, \\ R_{L1}^{\pm,(n+1)} = \mathrm{S_{CIP}}(\Delta t, C_{L2}^{\pm,(n)}, R_{L1}^{\pm,(n)}), \qquad & [t_n, t_{n+1}] \text{ で (SP1-1) を解く} \\ R_{L2}^{\pm,(n+1)} = \mathrm{S_{CIP}}(\Delta t, C_{L1}^{\pm,(n+1)}, R_{L1}^{\pm,(n)}), \qquad & [t_n, t_{n+1}] \text{ で (SP1-2) を解く} \\ R^{\pm,(n+1)} = R_{L1}^{\pm,(n+1)}, \end{aligned}$$

ただし, $C_{Lk}^{\pm,(n)} = \pm\frac{3}{2}R_{Lk}^{\pm,(n)} \mp \frac{1}{2}R_{Lk}^{\mp,(n)}$ $(k=1,2)$ とする.

さらに, Strang splitting による時間 2 次精度のスキームは次のようになる.

$$\begin{aligned} R_{S1}^{\pm,(n)} = R^{\pm,(n)}, \quad R_{S2}^{\pm,(n)} = R^{\pm,(n)}. \qquad t_{n+\frac{1}{2}} = \left(n+\frac{1}{2}\right)\Delta t. \\ R_{S1}^{\pm,(n+1/2)} = \mathrm{S_{CIP}}\left(\Delta t/2, C_{S2}^{\pm,(n)}, R_{S1}^{\pm,(n)}\right), \qquad & [t_n, t_{n+\frac{1}{2}}] \text{ で (SP1-1) を解く} \\ R_{S2}^{\pm,(n+1)} = \mathrm{S_{CIP}}\left(\Delta t, C_{S1}^{\pm,(n+1/2)}, R_{S2}^{\pm,(n)}\right), \qquad & [t_n, t_{n+1}] \text{ で (SP1-2) を解く} \\ R_{S1}^{\pm,(n+1)} = \mathrm{S_{CIP}}\left(\Delta t/2, C_{S2}^{\pm,(n+1)}, R_{S1}^{\pm,(n+1/2)}\right), \qquad & [t_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+1}] \text{ で (SP1-1) を解く} \\ R^{\pm,(n+1)} = R_{S1}^{\pm,(n+1)}. \end{aligned}$$

ただし, $C_{Sk}^{\pm,(n)} = \pm\frac{3}{2}R_{Sk}^{\pm,(n)} \mp \frac{1}{2}R_{Sk}^{\mp,(n)}$ $(k=1,2)$ とする.

Jia–Li [17] によって提案された時間 3 次精度の splitting 法を利用すると次のようになる.

$$
\begin{gathered}
R_{L1}^{\pm,(n)} = R^{\pm,(n)}, \quad R_{L2}^{\pm,(n)} = R^{\pm,(n)}, \quad R_{S1}^{\pm,(n)} = R^{\pm,(n)}, \quad R_{S2}^{\pm,(n)} = R^{\pm,(n)}, \\
\text{Lie splitting} \begin{cases} R_{L1}^{\pm,(n+1)} = \mathrm{S}_{\mathrm{CIP}}(\Delta t, C^{\pm,(n)}, R^{\pm,(n)}), \\ R_{L2}^{\pm,(n+1)} = \mathrm{S}_{\mathrm{CIP}}(\Delta t, C_{L1}^{\pm,(n+1)}, R^{\pm,(n)}), \end{cases} \\
\text{Strang splitting} \begin{cases} R_{S1}^{\pm,(n+1/2)} = \mathrm{S}_{\mathrm{CIP}}\left(\frac{\Delta t}{2}, C^{\pm,(n)}, R^{\pm,(n)}\right), \\ R_{S2}^{\pm,(n+1)} = \mathrm{S}_{\mathrm{CIP}}\left(\Delta t, C_{S1}^{\pm,(n+1/2)}, R^{\pm,(n)}\right), \\ R_{S1}^{\pm,(n+1)} = \mathrm{S}_{\mathrm{CIP}}\left(\frac{\Delta t}{2}, C_{S2}^{\pm,(n+1)}, R_{S1}^{\pm,(n+1/2)}\right), \end{cases} \\
R^{\pm,(n+1)} = \frac{3}{2}\left(R_{S1}^{\pm,(n+1)} + R_{S2}^{\pm,(n+1)}\right) - \frac{1}{6}\left(R_{L1}^{\pm,(n+1)} + R_{L2}^{\pm,(n+1)}\right).
\end{gathered}
$$

3.2 数値実験結果

次のような外力項つきの 1 次元浅水方程式の初期値問題について数値実験を行った.

$$
\begin{cases} \partial_t u + u\partial_x u + g\partial_x \phi = F_1, & \text{in} \quad \mathbb{T}\times[0,T] \\ \partial_t \phi + \partial_x(u\phi) = F_2, & \text{in} \quad \mathbb{T}\times[0,T] \\ \phi|_{t=0} = \phi_0, \quad u|_{t=0} = u_0. \end{cases} \tag{SWE2}
$$

$$
\begin{gathered}
g = 1, \quad \phi_0(x) = 2 + \sin(2\pi x), \quad u_0 = 0, \\
F_1(x,t) = -\frac{\pi}{2}\cos(4\pi x)\sin(4\pi t), \\
F_2(x,t) = \pi\cos(2\pi x)\left(\cos(2\pi t) - \frac{1}{2}\sin(2\pi x)\sin^2(2\pi t)\right).
\end{gathered}
$$

この問題の厳密解は $\phi(x,t) = 2 + \sin(2\pi x)\cos(2\pi t)$, $u(x,t) = -\frac{1}{2}\cos(2\pi x)\sin(2\pi t)$ である.

外力項がある場合には, $r^{\pm} = \sqrt{gh} \pm \frac{1}{2}u$ に関する PDE

$$
\partial_t r^{\pm} + c^{\pm}\partial_x r^{\pm} = \tilde{F}^{\pm}(x,t,r^{+},r^{-}),
$$

(ただし $c^{\pm} = \pm\frac{3}{2}r^{\pm} \mp \frac{1}{2}r^{\mp}$, $\tilde{F}^{\pm}(x,t,r^{+},r^{-}) = \frac{gF_1(x,t)}{r^{+}+r^{-}} \pm \frac{F_2(x,t)}{2}$) に書き換えた上で, 問題を 3 つの subproblem

$$
\begin{cases} \partial_t r_1^{\pm} + c_2^{\pm}\partial_x r_1^{\pm} = 0, \\ \partial_t r_2^{\pm} = 0, \end{cases} \tag{SP2-1}
$$

$$
\begin{cases} \partial_t r_1^{\pm} = 0, \\ \partial_t r_2^{\pm} + c_1^{\pm}\partial_x r_2^{\pm} = 0, \end{cases} \tag{SP2-2}
$$

$$
\begin{cases} \partial_t r_1^{\pm} = \tilde{F}^{\pm}(x,t,r_2^{+}(x,t), r_2^{-}(x,t)), \\ \partial_t r_2^{\pm} = \tilde{F}^{\pm}(x,t,r_1^{+}(x,t), r_1^{-}(x,t)) \end{cases} \tag{SP2-3}
$$

に分割する. Subproblem (SP2-1), (SP2-2) には, 外力項なしの場合と同様に CIP 法を用いる. Subproblem (SP2-3) については, 時間発展が明示的に

$$
r_k^{\pm}(x,t^{n+1}) = r_k^{\pm}(x,t^n) + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \tilde{F}^{\pm}(x,s,r_{3-k}^{+}(x,s), r_{3-k}^{-}(x,s))ds \quad (k=1,2)
$$

と書き表されることを利用して, Simpson 則により 3.2 の右辺を計算し, 数値解を得る. 元の問題 (SWE2) の数値解を得るために, Jia–Li の時間 3 次精度 splitting 法を利用して 3 つの subproblem に対する数値解法を順次適用した. $\phi(\cdot, t_n)$ と $u(\cdot, t_n)$ を近似する数値解をそれぞれ Φ^n, U^n と書き, $r^{\pm}(\cdot, t_n)$ を近似する数値解 $R^{\pm,n}$ によって

$$\Phi^n = \frac{1}{4g}(R^{+,n} + R^{-,n})^2, \quad U^n = R^{+,n} - R^{-,n}$$

と表現される. スキームの L^2 誤差を

$$e_{L^2} = \left(\frac{\left\| \phi(t_N) - \Phi^N \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2}{\left\| \phi(t_N) \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2} + \frac{\left\| u(t_N) - U^N \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2}{\left\| u(t_N) \right\|_{L^2(\mathbb{T})}^2} \right)^{1/2}$$

と定義する. $h \approx \Delta t$ の条件のもとでの Δt に対する L^2 誤差のプロットを図 1 に, 十分小さい h を固定したときの Δt に対する L^2 誤差のプロットを図 2 に示す. これらの数値結果においては時間方向の刻み幅に関して 3 次収束の振る舞いが確認された.

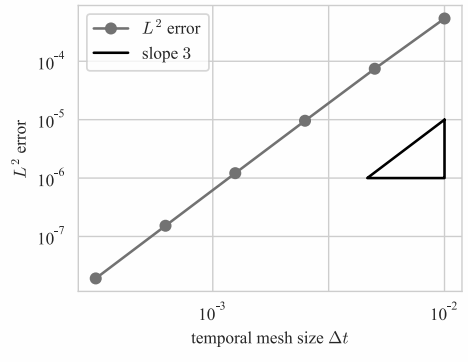


図 1　条件 $\Delta t = \frac{3}{10}h$ のもとでの Δt と L^2 誤差の関係.

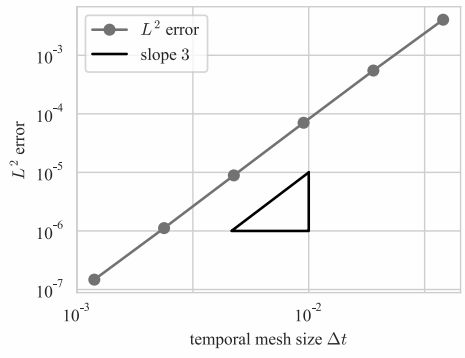


図 2　$h = \frac{1}{1000}$ のとき Δt と L^2 誤差の関係.

参考文献

[1] H. Takewaki, A. Nishiguchi, and T. Yabe, *Cubic interpolated pseudo-particle method (CIP) for solving hyperbolic-type equations*, J. Comput. Phys. **61** (1985), 261–268.

[2] T. Yabe, H. Mizoe, K. Takizawa, H. Moriki, H. N. Im, and Y. Ogata, *Higher-order schemes with CIP method and adaptive Soroban grid towards mesh-free scheme*, J. Comput. Phys. **194** (2004), 57–77.

[3] M. Nara and R. Takaki, *Stability analysis of the CIP scheme*, IEICE Trans. Fundamentals (Japanese Edition) **85** (2002), 950–953 (in Japanese).

[4] 田中大毅, 藤原宏志, 西田孝明, 磯祐介, 線型移流方程式を解く CIP 法の安定性 (理論), 日本応用数理学会論文誌 **25** (2015), 91–104.

[5] D. Tanaka, *Stability analysis of the CIP scheme and its applications in fundamental study of the diffused optical tomography*, Ph.D. thesis, Kyoto University, 2014.

[6] R. Ferretti, *On the relationship between semi-Lagrangian and Lagrange–Galerkin schemes*, Numer. Math. **124** (2013), 31–56.

[7] R. Ferretti and M. Mehrenberger, *Stability of semi-Lagrangian schemes of arbitrary odd degree under constant and variable advection speed*, Math. Comput. **89** (2020), 1783–1805.

[8] K. Toda, Y. Ogata, and T. Yabe, *Multi-dimensional conservative semi-Lagrangian method of characteristics CIP for the shallow water equations*, J. Comput. Phys. **228** (2009), 4917–4944.

[9] T. Yabe and T. Aoki, *A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation I. one-dimensional solver*, Comput. Phys. Commun. **66** (1991), 219–232.

[10] H. Takewaki and T. Yabe, *The cubic-interpolated pseudo particle (CIP) method: application to nonlinear and multi-dimensional hyperbolic equations*, J. Comput. Phys. **70** (1987), 355–372.

[11] T. Yabe, T. Ishikawa, P. Y. Wang, T. Aoki, Y. Kadota, and F. Ikeda, *A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation II. two- and three-dimensional solvers*, Comput. Phys. Commun. **66** (1991), 233–242.

[12] G. Birkhoff, M. H. Schultz, and R. S. Varga, *Piecewise Hermite interpolation in one and two variables with applications to partial differential equations*, Numer. Math. **11** (1968), 232–256.

[13] J. Goodrich, T. Hagstrom, and J. Lorenz, *Hermite methods for hyperbolic initial-boundary value problems*, Math. Comput. **75** (2006), 595–630.

[14] T. Kashiwabara and H. Takemura, *Error estimates of the cubic interpolated pseudo-particle scheme for one-dimensional advection equations* (preprint), DOI: 10.48550/arXiv.2402.11885.

[15] M. H. Schultz and R. S. Varga, *L-splines*, Numer. Math. **10** (1967), 345–369.

[16] J.-M. Rakotoson, R. M. Temam and J. J. Tribbia, *Remarks on the nonviscous shallow water equations*, Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), 2969–2998.

[17] H. E. Jia and K. T. Li, *A third accurate operator splitting method.*, Math. Comput. Modelling **53** (2011), 387–396.

Solovay モデルにおける無限組み合わせ論的対象

神戸大学 大学院 システム情報学研究科 システム情報学専攻
丹野俊将 (Toshimasa TANNO) *

概要

集合論において, 選択公理の成り立たない ZF のモデルにおける組み合わせ論的対象については長くから研究されており, 特にそのようなモデルの中で代表的なものが Solovay モデルである. 本発表では Solovay モデルにおける直線構造や有向集合について得られた結果を説明する. 特に, 有向集合間の関係 (Tukey 関係) を導入し, その関係を用いて Solovay モデルにおける実数の性質に関連するいくつかの有向集合について調べた.

1 導入

1.1 公理的集合論, 選択公理

はじめに (公理的) 集合論の背景を概覧する. 集合論の研究は, 19 世紀後半の Cantor に端を発する. 彼は実数直線 $\mathbb{R}$ についての解析的研究の中で, $\mathbb{R}$ と自然数全体 ω の間に全単射が存在しない, すなわち $\mathbb{R}$ が非可算集合であることを証明した. この論文の最後に Cantor は以下の主張が成り立つと予想した. ここでの濃度とは集合論の言葉で定式化される無限集合の大きさである.

Definition 1.1. 連続体仮説 (Continium Hypothesis) CH とは, 「$\mathbb{R}$ の任意の部分集合は可算であるか, $\mathbb{R}$ と等しい濃度を持つ」という主張である.

Cantor は連続体仮説を証明できなかったが, これは証明が困難であるというよりもっと本質的な問題があることがその後の研究で明らかになる. Gödel と Cohen それぞれの結果によって, 連続体仮説は集合論の公理系 ZFC から独立であることが示された. ここである命題 ϕ が公理系から**独立**であるというのは, その命題 ϕ もその否定 $\neg\phi$ も公理系から証明できないことを意味する.

Zermelo-Fraenkel の公理系と呼ばれる集合論の公理系 ZF, 特に ZF に選択公理 AC (Axiom of choice) を加えた公理系 ZFC は現代数学のほとんどを記述する表現力を持つため, 現代数学の標準的な形式体系と捉えることができる. その一方で, 連続体仮説のように素朴な主張であっても, 無限集合の大きさや性質についての言明のうちで ZFC から独立なものは数多く存在する.

公理的集合論では, 様々な ZF(C) のモデルを調べることで ZF(C) から独立な命題たちが互いにどのような関係にあるかを研究する. その中でも実数に関係する無限集合の濃度についての命題たちは, 中心的な話題の一つである.

* E-mail:211x503x@stu.kobe-u.ac.jp

選択公理 AC とは, 空でない集合の族からの元の選択を同時に行うことを認める公理であり, ZF と独立な命題である. 選択公理は集合論において重要な役割を果たす公理であり，特に大きな帰結として「順序数によって集合の大きさ (濃度) を適切に定義できる」ことと 「正則性 (振る舞いの良い性質) を持たない実数の集合が存在する」ことを導く.

Definition 1.2. 選択公理とは次の命題である : 任意の空でない集合 X に対して選択関数, すなわち任意の $x \in X \setminus \{\emptyset\}$ に対して $f(x) \in x$ が成り立つ関数 $f\colon X \setminus \{\emptyset\} \to \bigcup_{x\in X} x$ が存在する .

Theorem 1.3 (ZF)**.** 選択公理から次が従う.

1. 任意の集合 X に対して, ある順序数 α からの全単射 $f\colon \alpha \to X$ が存在する.
2. 実数の集合であって, Lebesgue 可測性 (Baire の性質, 完全集合の性質) を持たないものが存在する.

選択公理の成り立たない ZF のモデルとして代表的なものの一つが, Solovay モデルである.

Definition 1.4. 到達不能基数 κ と V 上の $\mathrm{Coll}(\omega, < \kappa)$-ジェネリックフィルター G に対して, $V[G]$ の中で V の元と $\mathbb{R}^{V[G]}$ の元から遺伝的定義可能である集合全体 $\mathrm{HOD}^{V[G]}_{V\cup\{\mathbb{R}^{V[G]}\}}$ を κ についての Solovay モデルと呼ぶ.

Solovay モデルでは任意の実数の集合が正則性を持つ. このことから選択公理は成り立っていないことがわかるが, 一方で実解析などの数学を展開する上で十分な程度の選択公理のフラグメントが成り立っている.

Theorem 1.5. 到達不能基数についての Solovay モデルにおいて, 次が成り立つ.

1. 任意の実数の部分集合が Lebesgue 可測性, Baire の性質, 完全集合の性質を持つ.
2. 従属選択公理 (DC) が成り立つ. すなわち, 空でない集合 X とその上の全域二項関係 R に対して, 任意の $n \in \omega$ について $x_n R x_{n+1}$ を満たす X 上の列 $\langle x_n \mid n \in \omega\rangle$ が存在する.

1.2 基数不変量

(連続体の) **基数不変量**とは，実数の構造から定義可能な集合の濃度であって, 典型的には可算無限 $\aleph_0$ と連続体濃度 $2^{\aleph_0}$ の間の値を取る. 代表的な基数不変量と ZFC におけるその関係は以下の Cichoń の図式にまとめられている. $X \to Y$ は $X \leq Y$ が ZFC から証明可能であることを意味する.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \mathrm{cov}(\mathcal{N}) & \to & \mathrm{non}(\mathcal{M}) & \to & \mathrm{cof}(\mathcal{M}) & \to & \mathrm{cof}(\mathcal{N}) & \to & 2^{\aleph_0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & & & \mathfrak{b} & \to & \mathfrak{d} & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
\aleph_0 & \to & \mathrm{add}(\mathcal{N}) & \to & \mathrm{add}(\mathcal{M}) & \to & \mathrm{cov}(\mathcal{M}) & \to & \mathrm{non}(\mathcal{N}) & &
\end{array}$$

ここで $\mathcal{M}$ は実数の痩集合, すなわち疎集合の可算和で表される部分集合 (meager set) 全体, $\mathcal{N}$ は実数の Lebesgue 測度 0 の部分集合 (null set) 全体を表す.

例えば, $\mathrm{cof}(\mathcal{M})$ (cofinality of $\mathcal{M}$) は次で定義される量である.

$$\mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \min\{|\mathcal{F}| \mid \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M} \text{ such that } \forall Y \in \mathcal{M}\ \exists Y \in \mathcal{F}(X \subseteq Y)\}$$

前述の連続体仮説が成り立たないモデル，すなわち $\aleph_0$ と $2^{\aleph_0}$ の間に無限基数が存在するモデルにおいてはこれらのどの値が等しく，どの値が分離されているのかは非自明な問題となる．この分離については非常によく研究されており，ZFC で証明可能な関係以外は全て別の値に分離可能であることが知られている (Cihoń's Maximum).

1.3 順序集合

基数不変量の多くは実数に関する順序集合に関連した量として定義される．特にいくつかは有向集合の共終数として定義される.

Definition 1.6. 順序集合 $(P, \leq_P)$ が**有向集合**であるとは, 任意の $p, q \in P$ に対して $p, q \leq_P r$ となる $r \in P$ が存在することをいう.

Definition 1.7. 順序集合 $(P, \leq_P)$ について $X \subseteq P$ が**共終的 (cofinal)** であるとは任意の $p \in P$ に対して $q \in X$ が存在して $p \leq_P q$ となることをいう.

Definition 1.8. 順序集合 $(P, \leq_P)$ について P の**共終数** $(\mathrm{cof}(P))$ とは, P の共終的な部分集合の中で最も濃度の小さいものの濃度である．これを $||(P, \leq_P)||$ と書く.

例えば上に挙げた $\mathrm{cof}(\mathcal{M})$ は有向集合 $(\mathcal{M}, \subseteq)$ の共終数である.

そのため，基数不変量の間の関係を研究する上で, その基数に対応した順序集合の間の共終部分を比較することが重要であり，このために重要な概念として **Tukey 関係**という概念がある.

Definition 1.9. 順序集合 $(D, \leq_D), (E, \leq_E)$ について D が E に **Tukey 還元可能**であるとは, D から E への関数であって任意の D の非有界な部分集合の像が E の非有界部分集合となるものがあることをいう．これを $D \preceq_T E$ と書く．$\preceq_T$ によって生成される同値関係を $\equiv_T$ と書く.

Lemma 1.10 (ZFC)**.** 順序集合 $(D, \leq_D), (E, \leq_E)$ について，$D \preceq_T E$ ならば $||(D, \leq_D)|| \leq ||(E, \leq_E)||$.

Theorem 1.11 (ZFC)**.** 有向集合 $(D, \leq_D), (E, \leq_E)$ について，$D \equiv_T E$ であることと, D と E の両方を共終的に埋め込める有向集合が存在することは同値．特に $D \equiv_T E$ ならば $||(D, \leq_D)|| = ||(E, \leq_E)||$.

$\equiv_T$ による有向集合上の同値類を**共終型**という.

2 主定理

選択公理のない ZF の元では一般に集合の濃度を比較することができない．そのため基数不変量のような無限が成す様相を把握するためには, 対応する順序集合の構造を調べる必要がある．定理 1.11

によって ZFC の元で Tukey 関係は有向集合の共終部分集合の関係を表現する概念であるといえるが, 一方でこの定理の証明には選択公理を必要とする. よって Tukey 関係は ZF のモデルにおいては共終型を表現するために適当な道具ではない. 発表者は Tukey 関係を一般化した概念 (**pre-Tukey 関係**) を導入し，それが ZF において有向集合の共終型を表現するものであることを示した.

Definition 2.1. 順序集合 $(P, \leq_P)$ に対して, その完備化 $(P^*, \leq_{P^*})$ を, $\leq_P$ について上向きに閉じている P の空でない部分集合に包含の逆で順序を定めた順序集合とする.

Definition 2.2 (pre-Tukey 関係)**.** 順序集合 $(D, \leq_D), (E, \leq_E)$ について, D が E に **pre-Tukey 還元可能**であるとは $D \preceq_T E^*$ であることをいい，これを $D \preceq_T^* E$ と書く. $\preceq_T^*$ が生成する同値関係を $\equiv_T^*$ と書く.

Theorem 2.3 (ZF)**.** 有向集合 $(D, \leq_D), (E, \leq_E)$ について，$D \equiv_T^* E$ であることと, D と E の両方を共終的に埋め込める有向集合が存在することは同値.

特に Solovay モデルにおいて, 基数不変量に対応するいくつかの有向集合の間で pre-Tukey 関係が成り立たないことを示した. $(\omega^\omega, \leq^*)$, $([\mathbb{R}]^\omega, \subseteq)$ は ZFC の元で $||(\omega^\omega, \leq^*)|| = \mathfrak{d}, ||([\mathbb{R}]^\omega, \subseteq)|| = 2^{\aleph_0}$ が成り立つような有向集合である.

Theorem 2.4. 到達不能基数についての Solovay モデルにおいて, 次の関係が成り立つ. ただし $D \to E$ は $D \preceq_T^* E$, $D \dashrightarrow E$ は $D \not\preceq_T^* E$ を表す.



すなわち, pre-Tukey 関係に関してこれら 4 つの有向集合が異なる共終型を持つことを示した.

参考文献

[1] Bartoszynski, Tomek, and Haim Judah. Set Theory: on the structure of the real line. AK Peters/CRC Press, 1995.

[2] Solovay, Robert M. "A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable." Annals of Mathematics 92.1 (1970): 1-56.

[3] Tukey, John W. Convergence and uniformity in topology. Princeton University Press, 2016.

超限チョコ (Transfinite Chomp) ゲーム

神戸大学大学院システム情報学研究科システム情報学専攻
林　佑亮 (Yusuke HAYASHI) *

概要

Chomp と呼ばれる組み合わせゲームがある．これは先手と後手のどちらに必勝戦略があるかはわかるが，具体的な必勝戦略の構成が困難であるゲームの一例として知られている．近年この Chomp の盤面を無限の長さに拡張したゲームが考えられ，この拡張によって Chomp に関する興味深い構造が明らかとなっている．本講演ではこの構造について，講演者が証明した 2 つの事実を紹介する．

1　導入

自然数 $m, n > 0$ に対して，$m \times n$-chomp とは二人のプレイヤーが行う以下のゲームである：

- チョコ板とは直積集合 $X_0 = \{0, 1, \ldots, m-1\} \times \{0, 1, \ldots, n-1\}$ のこととし．n ターン目時点での盤面を $X_n \subseteq X_0$ で表す．
- 各プレイヤーは交互にプレイする，各 $(n+1)$ ターン目において，$(k, \ell) \in X_n$ を選んで $X_{n+1} = X_n \setminus (k, m-1] \times (\ell, n-1]$ とする（チョコを食べる）．
- 敗北条件は，$(0, 0)$（毒チョコ）を食べることである．

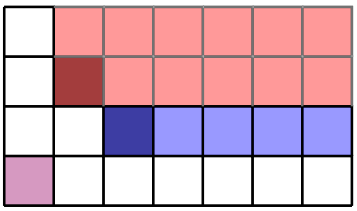


図 1　7×4-chomp において，先手（赤）が $(1, 2)$，後手が $(2, 1)$ を順にプレイした様子．紫のマス（$(0, 0)$）が毒チョコのマスであり，このマスと白いマスを含めた範囲が集合 X_2 と対応している．

Chomp の必勝戦略については以下の古典的な結果が知られている．

定理 1.1. 自然数 $m, n > 0$ に対して，$m \times n$-chomp が先手必勝であることと $(m, n) \neq (1, 1)$ は同値である．

* 219x504x@stu.kobe-u.ac.jp

興味深いことに，これは具体的な必勝戦略を構成することなく証明されるものであり，実際，一般的な必勝戦略については現在も未解明な部分が多い．

近年になって，この Chomp を一般化した Transfinite Chomp が Huddleston Scott と Shurman Jerry[1] によって考えられた．順序数 $\alpha, \beta \neq 0$ に対して $\alpha \times \beta$-Chomp とは，直積集合 $\alpha \times \beta$ に関して行う Chomp である．ただしここで，順序数 α は一般に $\alpha = \{\gamma \mid \gamma < \alpha\}$ という集合の構造を取るため，直積集合は $\alpha \times \beta = \{0, 1, \ldots, \gamma(< \alpha), \ldots\} \times \{0, 1, \ldots, \delta(< \beta), \ldots\}$ という構造を成す．この意味でこのゲームは有限の Chomp の自然な拡張となっている．

順序数が整列集合であることを利用すると，以下の帰結が得られる．

命題 1.2. 任意の順序数 $\alpha, \beta > 0$ に対して，$\alpha \times \beta$-chomp は有限手数で終了する．

すなわち，このゲームは一般に無限の大きさの盤面でプレイされるのにもかかわらず．プレイを無限回続けることができない．さらに言えば，このことから一般化された chomp に対しても，有限の場合と同様にどちらか片方に必ず必勝戦略が存在することがわかる．

この拡張によって，Chomp に新たな構造を見出すことができる．具体的には，次の定理が知られている．

定理 1.3. 任意の順序数 $\alpha > 0$ に対して，$\alpha \times \beta_\alpha$-Chomp が後手必勝になるような β_α が一意的に存在する，

この定理によって，順序数関数 f を $f(\alpha) = \beta_\alpha$ として定めることができる．この f について現在知られている値は

- $f(1) = 1$
- $f(2) = \omega$
- $f(3) = \omega^\omega$
- $f(\omega) = 2$
- $f(\omega^\omega) = 3$

のみである．

2 主定理

発表者は以下の 2 つの定理を証明した．

命題 2.1. 任意の非可算基数 κ に対して，$f \restriction \kappa$ は κ から κ への全単射である．

命題 2.2. ω_1 を最小の非可測順序数とする．ここで，$\mathsf{Suc}_{\omega_1} = \{\alpha < \omega_1 \mid \alpha\text{は後続順序数}\}, \mathsf{Lim}_{\omega_1} = \{\alpha < \omega_1 \mid \alpha\text{は極限順序数}\}$ とすると，$f^{-1}(\mathsf{Suc}_{\omega_1})$ と $f^{-1}(\mathsf{Lim}_{\omega_1})$ のいずれか片方は club を含み，

$$f^{-1}(\mathsf{Suc}_{\omega_1}) \text{ が club を含む} \iff f(\omega_1) \text{ は後続順序数}$$

が成り立つ．

club を含む，というのは大雑把に言えば「ω_1 の部分集合として “大きい」ことを意味しており，標語的には「ω_1 での f の値が極限順序数であるか，後続順序数であるかはその下での f の値の多数決で決まっている」というように捉えることができる．

先行研究が f の個別の値を調査するものであったのに対して，この 2 つの結果は f の大域的な性質を明らかにしたものである．また，命題 2.2 は集合論において典型的な現象である「反映性」の 1 つとして理解することができ，このような観点からも興味深いものである．

参考文献

[1] Scott Huddleston and Jerry Shurman. Transfinite chomp. In *More Games of No Chance, Proc. MSRI Workshop on Combinatorial Games*, pp. 183–212, 2000.

数理論理学を用いた法的因果関係概念の分析

九州大学　大学院マス・フォア・イノベーション連係学府
村上真悟 (Shingo MURAKAMI) *

概要

法学において事実的因果関係の判断基準として知られる “あれなければこれなし” の条件関係公式は、代替的原因が存在する場合にうまく機能しないことが知られている。本稿では、因果関係の適切な判断基準を得るべく、2 つの異なるモデルを紹介し、双方の利点と限界を比較検討する。さらに、一方のモデルを他方のモデルによって記述することができるという筆者自身の結果を紹介する。この結果を用いることで、互いのモデルの利点を組み合わせることができ、因果関係概念の分析に資することが期待される。

1　導入

突然だが、“A が V のコーヒーに致死量の毒を入れ、コーヒーを飲んだ V が死亡した” という事例を考えてみよう。このとき、V の死亡の原因が A の行為であるというためには、どのような説明が考えられるだろうか。おそらく最も素朴な説明は、A が毒を入れなければ V は死亡しなかったという説明であろう。法学においては、行為と結果との間の事実的な結びつき（以下、「事実的因果関係」という。）の判断基準として、このような “あれなければこれなし” という**条件関係公式**がよく知られている。この基準は、単純明快で、一応の納得感がある。しかし、次のような事例において、条件関係公式は直観に適合する結論を導かないということが知られている。

事例 1

A と B は、意思の連絡なく、V のコーヒーに、それぞれ致死量の毒を入れた。V は、そのコーヒーを飲んで死亡した。

この事例においては、仮に A が V のコーヒーに毒を入れなかったとしても、V は B の入れた毒によって死亡していたといえる。よって、条件関係公式に従う限り、A の行為は V の死亡の原因ではないということになる。さらに、同様の理由から、B の行為も V の死亡の原因ではないということになる。このように、条件関係公式は、代替的な原因が存在する場合に非直観的な結論を導くということが知られている。

本稿では、このような問題にも対応できるような適切な判断基準を得るべく、「事実的因果関係」という概念をを数理論理学的な手法でモデリングすることを試みる。第 2 節では Halpern の因果モデルを、第 3 節では Satoh らのアブダクション枠組みを、それぞれの利点や限界と共に紹介する。第 4

* E-mail:murakami.shingo.098@s.kyushu-u.ac.jp

節では、Halpern の因果モデルを Satoh らのアブダクション枠組みによって記述することができるという筆者自身の結果を紹介する。第 5 節では、この結果が有する意義について考察し、今後の方針について述べる。

2 Halpern の因果モデル

2.1 因果モデル

以下の内容は Halpern[1] に基づくが、説明の都合上、記号を一部改めている。

定義 2.1 (因果モデル)**.** 3 つ組 $(\mathcal{V},\mathcal{U},\mathcal{F})$ を**因果モデル**という。

$\mathcal{V}=\{V_1,\ldots,V_p\},\mathcal{U}=\{U_1,\ldots,U_p\}$ はいずれも変数の集合で、0 または 1 の値をとりうるとする[*1]。$\mathcal{V}$ の元を**内生変数**、$\mathcal{U}$ の元を**外生変数**という。

$\mathcal{F}=\{F_1,\ldots,F_p\}$ はブール関数の集合である。

各 $i=1,\ldots,p$ に対して、内生変数の集合 $pa(V_i)\subset\{V_1,\ldots,V_{i-1}\}$ が定められており、各 F_i が $V_i,U_i,pa(V_i)$ を以下のように関係づけているとする。

$$V_i=F_i(pa(V_i),U_i)$$

以下、変数の集合 $\{X_1,\ldots,X_m\}$ とベクトル $(X_1,\ldots,X_m)$ を区別せず、$\vec{X}$ などと表記する。$\vec{x}$ は、$\vec{X}$ をベクトルとみた場合に、これがとる値 $\vec{x}=(x_1,\ldots,x_m)$ を表す。

外生変数全体からなるベクトル $(U_1,\ldots U_p)$ の値 $\vec{u}$ のことを**コンテクスト**という。因果モデル M においては、コンテクスト $\vec{u}$ が具体的に定まれば、各 $V_1,\ldots,V_p$ の値も一意に定まる。このことを前提に、因果モデル M とコンテクスト $\vec{u}$ の組 $(M,\vec{u})$ を**因果設定**と呼び、因果設定 $(M,\vec{u})$ において φ が成り立つことを

$$(M,\vec{u})\models\varphi$$

と表記する。ただし、φ は、例えば $(Y_1=y_1)\wedge((Y_2=y_2)\vee\neg(Y_3=y_3))$ のような、$Y=y$ という形をした式のブール結合である。

次に、介入を定義する。これは、“仮に $\vec{X}$ の値が $\vec{x}$ だったならば” という仮定に基づく推論に対応する概念である。

定義 2.2 (介入)**.** 因果モデル $M=(\mathcal{V},\mathcal{U},\mathcal{F})$ に対して、$M_{\vec{X}\leftarrow\vec{x}}:=(\mathcal{V},\mathcal{U},\mathcal{F}^{\vec{X}\leftarrow\vec{x}})$ と定義する。ここで、$\mathcal{F}^{\vec{X}\leftarrow\vec{x}}$ は、$Y\in\mathcal{V}$ を以下の $F_{X'}^{\vec{X}\leftarrow\vec{x}}$ に対応させる写像である。

$$F_{X'}^{\vec{X}\leftarrow\vec{x}}:=\begin{cases}F_{X'} & (X'\notin\vec{X})\\ x' \quad (\text{定数関数}) & (X'\in\vec{X})\end{cases}$$

ただし、$F_{X'}=F(pa(X'),U_{X'})$ であり、x' は X' に対応する $\vec{x}$ の成分である。

因果モデル M において $\vec{X}$ を $\vec{x}$ に固定する**介入**とは、モデル M を $M_{\vec{X}\leftarrow\vec{x}}$ に取り換える操作を指し、これを $\vec{X}\leftarrow\vec{x}$ と表す。

[*1] 元の Halpern のモデルにおいては、変数のとりうる値にこのような制限はない。

すなわち、介入 $vecX \leftarrow \vec{x}$ とは、$\vec{X}$ の成分である各 X' に対して、内生変数 $pa(X)$ や外生変数 U_X の値によらず、常に定数 x' の値をとるようにモデルを改変する操作である。

上記の定義に基づき、

$$(M_{\vec{X}\leftarrow\vec{x}}, \vec{u}) \models \varphi$$

であることを

$$(M, \vec{u}) \models [\vec{X} \leftarrow \vec{x}]\varphi$$

と表記することにする。上の式は、モデル M において $\vec{X} \leftarrow \vec{x}$ という介入を行った場合に、φ が成り立つことを表している。

2.2 Beckers の NESS 原因

Wright は、原因を “結果を発生させるのに十分な集合の必要な部分” と捉える Hart & Honoré の議論 [2] に着想を得て、これを NESS (Necessary Element in a Sufficient Set) と名付けた [3]。NESS は、法哲学の因果関係論において有力な見解となっている。

先ほど定義した因果モデルによってこの NESS を記述することを試みたのが、Beckers[4] の研究である。以下では、Beckers が定義した NESS 原因の定義を示す。そのための準備として、十分という概念を定義する。$(M, \vec{u})$ において $\vec{X} = \vec{x}$ が $Y = y$ にとって**十分である**とは、$\vec{z} = \mathcal{V} \setminus (\vec{X} \cup \{Y\})$ のとりうる任意の値 $\vec{z}$ に対して

$$(M, \vec{u}) \models [\vec{X} \leftarrow \vec{x}, \vec{Z} \leftarrow \vec{z}](Y = y)$$

が成り立つことをいう[*2]。つまり、$\vec{X}, Y$ 以外の変数に対してどのような介入を行っても、$Y = y$ が得られるということを意味している。

この十分という概念を用いて、NESS 原因を定義する。

定義 2.3 (直接 NESS 原因, NESS 原因)**.** $(M, \vec{u})$ において $X = x$ が $Y = y$ の**直接 NESS 原因**であるとは、以下のような条件を満たす $\vec{W} = \vec{w}$（$\vec{W}$ は空集合でもよい）が存在することをいう。

(1) $(M, \vec{u}) \models (X = x) \wedge (\vec{W} = \vec{w})$
(2) $(M, \vec{u})$ において $\{X = x, \vec{W} = \vec{w}\}$ が $Y = y$ にとって十分である
(3) $(M, \vec{u})$ において $\vec{W} = \vec{w}$ が $Y = y$ にとって十分でない

なお、上の定義における $\vec{W}$ のことを**証拠**という。

$(M, \vec{u})$ において $X_1 = x_1$ が $X_n = x_n$ の **NESS 原因**であるとは、各 $i = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $X_i = x_i$ が $X_{i+1} = x_{i+1}$ の直接 NESS 原因となるような原子事象の列 $X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n$ が存在することをいう。なお、このような原子事象の列を直接 NESS 原因の列ということがある。

[*2] Beckers はこれとは異なる定義を採用している（[4] の Definition 4）が、本これが本稿で採用した定義と同値であることは同論文の Proposition 1 によって保証される。

2.3 具体例

事例 1 は以下のようにモデリングできる。まず、変数の集合を $\mathcal{V} = \{A, B, V\}$,$\mathcal{U} = \{U_A, U_B, U_V\}$ とし、これらがブール関数の集合 $\mathcal{F}$ によって以下のように関係づけられているとする。

$$\begin{cases} A = F_A(\varnothing, \quad U_A) = U_A \\ B = F_B(\varnothing, \quad U_B) = U_B \\ V = F_V(A, B, U_V) = A \vee B \vee U_V \end{cases}$$

そして、コンテクスト $\vec{u}$ は $U_A = 1, U_B = 1, U_V = 0$ とする。

なお、各変数は、それぞれ値が 1 であるとき、以下の意味をもつと考える。

$$\begin{cases} A : \text{A が毒を入れる} \\ B : \text{B が毒を入れる} \\ V : \text{V が死亡する} \end{cases}, \quad \begin{cases} U_A : \text{A の殺意など} \\ U_B : \text{B の殺意など} \\ U_V : \text{毒以外の V の死因} \end{cases}$$

このとき、$(M, \vec{u})$ において A が V の直接 NESS 原因であることは以下のように確かめられる。まず、$(M, \vec{u}) \models (A = 1) \wedge (V = 1)$ であるので、(1) が成り立つ。次に、$A = 1$ は $V = 1$ にとって十分である（B に対してどのような介入を行っても $V = 1$ が成り立つから）ので (2) は成り立ち、$\varnothing$ は $V = 1$ にとって十分でない（$A \leftarrow 0, B \leftarrow 0$ という介入を行うと $V = 0$ となるから）ので (3) も成り立つ。なお、以上の議論においては証拠を $\vec{W} = \varnothing$ とした。このように、$A = 1$ は $V = 1$ の直接 NESS 原因であることがいえるので、NESS 原因でもある。同様の理由から、$B = 1$ も $V = 1$ の NESS 原因となる。

よって、NESS 原因を用いれば、A の行為も B の行為も V が死亡した原因になるという、直観に合致する結論を導くことができる。

2.4 検討

Halpern のモデルは柔軟性が高く、多くの事例をうまく記述することができる。また、法哲学上有力な見解である NESS を数学的に表現した NESS 原因は、理論的な根拠も十分なうえ、事例 1 のような事例においてもうまく帰納する基準である。このように、事実的因果関係を記述するための数理モデルとして、Halpern の因果モデルや Beckers の NESS 原因は、汎用性や具体的妥当性という利点がある。

他方、以上の議論においては、コンテクスト $\vec{u}$ が分かっている、すなわち、外生変数の値が全て分かっているということが前提とされていた。これを事例 1 に即して説明すれぱ、A も B も毒を投与したということが分かっているということである。しかし、訴訟においては、全ての事実が明らかになるとは限らない。A と B のいずれかが毒を投与したということまで分かっているが、どちらであるか特定できないという状況で判決を下さなければならないということも考えられるのである。法的には、このような場合、A についても B についても犯人であることの証明がないとして無罪判決（刑事訴訟法 336 号）が下されることになる。ところが、上記のような数理モデルでは、このように情報が不十分である場合の推論の枠組みを与えることができないという限界がある。

3　Satoh らのアブダクション枠組み

3.1　アブダクション枠組み

以下の内容は Satoh & Tojo[5] に基づく[*3]が、説明の都合上、記号を一部改めている。なお、この節では命題論理の用語や記号を既知として説明を進めるが、必要な知識としては、標準的な教科書[*4]に記載されたごく初歩的なもので十分である。

定義 3.1 (アブダクション枠組み)**.** 3 つ組 $(\mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{O})$ を**アブダクション枠組み**という。ここで、$\mathcal{B}, \mathcal{H}$ は命題論理式の集合、$\mathcal{O}$ は命題論理式である。また、$\mathcal{B}$ を**背景知識**、$\mathcal{H}$ を**仮説集合**という。

アブダクション枠組みにおいて、$\mathcal{B}$ は一般的な因果の法則をモデル化したものであり、因果モデル M に対応する。$\mathcal{H}$ は、実際に生じた出来事や観測した事実をモデル化したものであり、コンテクスト $\vec{u}$ に対応する。$\mathcal{O}$ は、結果を表している。

3.2　極小説明

次に、極小説明を定義する。これが、Satoh らの提案する原因の定義である。

定義 3.2 (極小説明)**.** $(\mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{O})$ をアブダクション枠組みとする。$\mathcal{E} \subset \mathcal{H}$ が $(\mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{O})$ に関して**説明**であるとは、

$$\mathcal{B} \cup \mathcal{E} \models \mathcal{O} \quad \text{かつ} \quad \mathcal{B} \cup \mathcal{E} \not\models \bot$$

が成り立つことをいう。

$(\mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{O})$ に関する説明が**極小**であるとは、

$$\mathcal{E}' \subsetneq \mathcal{E} \text{ かつ } \mathcal{B} \cup \mathcal{E}' \models \mathcal{O}$$

となる $\mathcal{E}' \subset \mathcal{H}$ が存在しないことをいう。

説明とは、背景知識と組み合わせることによって結論を導くことができる仮説（の集合）のことである。$\mathcal{B} \cup \mathcal{E} \not\models \bot$ の部分は、仮説が背景知識と矛盾する場合を除外する趣旨の条件である。仮に $\mathcal{B} \cup \mathcal{E} \models \bot$ ならば、任意の $A\mathcal{B} \cup \mathcal{E}$ に対して $v(A) = 1$ となる真理値の割り当てが存在しない。このとき、任意の $\mathcal{O}$ に対して前提 $\mathcal{B} \cup \mathcal{E}$ から結論 $\mathcal{O}$ への推論に対する反例モデルが存在しないから、いかなる結論をも導くことができてしまう。このような場合を避けるために、仮説は背景知識と矛盾しないことが要求されている。極小説明とは、説明の真部分集合であって、それ自体単独で説明となるもののことである。極小という概念には、ある説明に無関係な仮説を足すことによって冗長な説明となることを防ぐ意図がある。なお、極小説明は一般には一意に定まらない。

Satoh らは、極小説明を原因の定義とすることを提案している。次の節で、以上の定義について具体例を用いて説明する。

[*3] 用語の日本語訳は、Satoh が執筆した日本語の論文 [6] に基づく。

[*4] 例えば、[7] など。

3.3 具体例

事例 1 は以下のようにモデリングできる。アブダクション枠組み $(\mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{O})$ を次のように定義する。

- $\mathcal{B} = \{a \to v, b \to v\}$
- $\mathcal{H} = \{a, b\}$
- $\mathcal{O} = v$

ここで、a, b, v は命題変項であり、それぞれ以下の意味をもつと考える。

- a: A が毒を入れる
- b: B が毒を入れる
- v: V が死亡する

このとき、$\{a\} \subset \mathcal{H}$ が極小説明であることは以下のように確かめられる。まず、$\{a\} \cup \mathcal{B} \models v$ であるので、$\{a\}$ は説明である。そして、$\{a\}$ の真部分集合として考えられるのは φ のみであり、これが説明にならないことは明らかであるので、$\{a\}$ は極小説明でもある。同様の理由から、$\{b\}$ も極小説明である。

よって、事例 1 においては、A の行為も B の行為も V が死亡した原因になるという直観に合致する結論を導くことができる。

3.4 検討

アブダクション枠組みおよび極小説明の利点は、必ずしも全ての情報が確定していなくてもよいということである。例えば、先の具体例では仮説集合を $\mathcal{H} = \{a, b\}$ としたが、これは、A も B も毒を入れたということが分かっていることに対応する。仮に、A または B が毒を入れたということまでしか分かっていないのであれば、仮説集合を $\mathcal{H}' = \{a \vee b\}$ とすればよい（この場合は、$\{a \vee b\}$ が極小説明になる）。このように、アブダクション枠組みは、情報が不十分である場合の推論の枠組みを与えることができ、法的推論を行う上での問題意識に対応しうるという利点がある。

他方、Satoh らの論文からは、具体的な事例でどのようにモデルを作ればよいのかという一般的な理論が不明確である。例えば、以下のような事例は、どのようにモデル化すればよいのかが明らかでない。

事例 2

A は、B と意思連絡なく、V のコーヒーに致死量の毒を入れた。V は、そのコーヒーを飲んだが、毒が効く前に B が V を射殺した。

この事例は、法学において**因果関係の断絶**と呼ばれる事例である。B の行為が V の死亡の原因であると説明される一方で、A の投与した毒が V に効く前に死亡しているので、A の行為は原因とはならない。

先のアブダクション枠組みで b の意味付けを B による射殺に置き換えるだけでは、全く同じモデルとなってしまい A の行為まで原因となってしまうから、適切ではない。では、どのようにアブダクション枠組みを構成すればよいのか、という問題は、Satoh らの論文からは明らかではない。このように、アブダクション枠組みには、汎用性という観点から限界がある。

4 主結果

4.1 研究の動機

実は、事例 2 は、Halpern の理論を用いれば以下のようにモデリングできる。$\mathcal{V}$ に新たに変数 P を加え、各変数の関係を以下のように設定する。

$$\begin{cases} A = F_A(\varnothing, \quad U_A) = U_A \\ B = F_B(\varnothing, \quad U_B) = U_B \\ P = F_P(A, B, \varnothing) \quad = A \wedge \neg B \\ V = F_V(A, B, U_V) = P \vee B \vee U_V \end{cases}$$

また、コンテクストは事例 1 の場合と同じく $U_A = 1, U_B = 1, U_V = 0$ とする。

このモデルにおいて、$B = 1$ は B が V を撃ったこと、$P = 1$ は A の投与した毒が効くということを意味しており、A が毒を投与し、かつ B が V を撃たなかった場合に限り毒が効くということを $P = A \wedge \neg B$ という式で表現している。

以上の設定の下では、$B = 1$ が $V = 1$ の NESS 原因となる一方で、$A = 1$ は $V = 1$ の NESS 原因にならない（$A = 1$ が $P = 0$ の直接 NESS 原因にならないから）。このように、NESS 原因は、事例 2 においてもうまく機能する基準であることが分かる。

筆者は、汎用性や具体的妥当性という利点をもつ因果モデルと、情報が不十分である場合の推論の枠組みを与えるという利点をもつアブダクション枠組みを組み合わせることで、これらの利点を生かしつつ、それぞれの限界を補うようなモデルを得ることができないか考えた。その結果、因果モデルが与えられた場合、これとある種の同値性をもつアブダクション枠組みが構成できることを明らかにした。

4.2 因果モデルに対応するアブダクション枠組みの構成

因果 $M = (\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{V})$ が与えられているとする。モデル M の $\mathcal{V}, \mathcal{F}$ から、以下の手順でアブダクション枠組みにおける $\mathcal{B}$ を構成する。

内生変数 $X \in \mathcal{V}$ と、これを他の変数と関連付ける関数である F_X をとる。F_X はブール関数であるので、選言標準形で表記できる。選言標準形はいくつかの $\wedge$ 節を選言 $\vee$ でつないだものであるが、この $\wedge$ 節は、以下の 3 種類に分類される。ただし、**リテラル**とは、A を変数としたときの A および $\neg A$ のことをいう。

1. U_X をリテラルとして含むもの
2. $\neg U_X$ をリテラルとして含むもの
3. $U_X, \neg U_X$ をいずれもリテラルとして含まないもの

この点に注意すれば、$F_X(pa(X), U_X)$ の右辺は一般に以下の形に変形できる。

$$X = \underbrace{\bigvee_l \left\{ \left(\bigwedge_i A_{l,i} \right) \wedge U_X \right\}}_{\mathsf{A}} \vee \underbrace{\bigvee_m \left\{ \left(\bigwedge_n B_{m,n} \right) \wedge \neg U_X \right\}}_{\mathsf{B}} \vee \underbrace{\left(\bigvee_l \bigwedge_k C_{l,k} \right)}_{\mathsf{C}} \tag{1}$$

上の表記に基づいて、以下の 2 つの論理式を構成する。

$$\left\{ \left(\bigvee_l \bigwedge_i a_{l,i} \right) \wedge \left(\bigvee_m \bigwedge_n b_{m,n} \right) \right\} \vee \left(\bigvee_l \bigwedge_k c_{l,k} \right) \to x \tag{2}$$

$$x \to \left(\bigvee_l \bigwedge_i a_{l,i} \right) \vee \left(\bigvee_m \bigwedge_n b_{m,n} \right) \vee \left(\bigvee_l \bigwedge_k c_{l,k} \right) \tag{3}$$

これらの論理式を、アブダクション枠組みの $\mathcal{B}$ の元とする。
以上の手順を各 X に対して行うことで、$\mathcal{B}$ が具体的に構成できる。

定義 4.1. 上記の方法で構成した $\mathcal{B}$ を、$\mathcal{V}, \mathcal{F}$ に**対応する** $\mathcal{B}$ という。

注意 4.2. F_X を選言標準形で表した場合に、$U_X, \neg U_X$ が現れなかったり、単体で $\wedge$ 節を作っていたりすることがある。このような場合には、$\bigwedge_i A_{l,i}, \bigwedge_j B_{m,n}$ および $\bigwedge_k C_{l,k}$ の値が 0 や 1 になっていると考えればよい。この点については、後で具体例を通じて説明する。

また、上記の手順によって構成された論理式が恒真式となることもある。この点についても、後で具体例を通じて説明する。

以下の定理は、因果モデルとアブダクション枠組みの対応関係を示すものである。

定理 4.3 (因果モデルとアブダクション枠組みの対応)**.** 上記の条件（変数のとりうる値が 0 または 1, など）を満たす因果モデル $(\mathcal{V}, \mathcal{U}, \mathcal{F})$ と、アブダクション枠組み $(\mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{O})$ を考える。このとき、以下の 2 つが成り立つ。

(a) 因果モデルにおいて $\mathcal{U}$ の値を任意に定めると $\mathcal{V}$ の値も一意に定まるが、この値に一致するようにアブダクション枠組みにおける命題変項の真理値を定めると、$\mathcal{B}$ に含まれるすべての論理式の値が 1 となる。
(b) $\mathcal{B}$ に含まれるすべての論理式が真になるように、命題変項の真理値を任意に定める。これと一致するように $\mathcal{V}$ の値を定めれば、$\mathcal{U}$ の値をうまく定めることによって、$\mathcal{F}$ で関係づけられたすべての式 $X = F_X(pa(X), U_X)$ が成り立つ。

ただし、変数 X の値と論理式 x の真理値が一致するとは、$X = 1$ であることと x が真であることが同値になることをいう。

証明.
■(a)　背理法で示す。$\mathcal{B}$ に含まれる論理式であって値が 0 になるものが存在すると仮定する。この論理式が式 (2) と (3) のいずれの形であるかによって場合分けする。以下に示す通り、どちらの場合であっても矛盾が生じるので、(1) が成立する。

式 (2) の形の場合: 背理法の仮定より、$\left(\bigvee_l \bigwedge_i a_{l,i}\right) \wedge \left(\bigvee_m \bigwedge_j b_{m,j}\right)$ または $\bigvee_n \bigwedge_k c_{n,k}$ が真となる。

$(\bigvee_i \bigwedge_i a_{l,i})$ が真であるとすると、ある l', m' が存在し、$\bigwedge_i a_{l',i}, \bigwedge_j b_{m',j}$ のいずれもが真となる。これは、$\bigwedge_i A_{l',i} = \bigwedge_j B_{m',j} = 1$ となることを意味する。従って、式 (1) において、$U_X = 1$ のときは $\mathsf{A} = 1$、$U_X = 0$ のときは $\mathsf{B} = 1$ となる。いずれの場合であっても $X = 1$ となるから、式 (2) が偽であるという仮定に反する。

$\bigvee_n \bigwedge_k c_{n,k}$ が真であるとすると、式 (1) の C が 1 になるので $X = 1$ となり矛盾が生じる。

式 (3) の形の場合: 背理法の仮定より、$\bigvee_l \bigwedge_i a_{l,i}, \bigvee_m \bigwedge_j b_{m,j}, \bigvee_n \bigwedge_k c_{n,k}$ のいずれもが偽となる。

よって、任意の l, m, n に対してある i', j', k' が存在し、$a_{l,i'}, b_{m,j'}, c_{n,k'}$ が偽となる。これは、任意の l, m, n に対して $\bigwedge_i A_{l,i} = \bigwedge_j B_{m,j} = \bigwedge_k C_{n,k} = 0$ となることを意味する。従って、U_X の値が $1, 0$ のいずれであっても、式 (1) の $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$ のいずれもが 0 となるので、$X = 0$ である。これは、式 (3) が真であるという仮定に反する。

■(b) $\mathcal{B}$ に含まれる論理式がすべて真になるように、各命題変項の真理値を任意に定める。このとき、ある $X \in \mathcal{V}$ について、$\mathcal{U}$ をどの値に設定しても $X \neq F_X(pa(X), U_X)$ となると仮定する。

$X = 0$ のとき: 仮定より、$\mathcal{U}$ をどの値に設定しても $F_X(pa(X), U_X) = 1$ になる。このとき、式 (1) において $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$ の少なくとも 1 つが 1 である。

まず、$\mathsf{C} = 1$ ではない。仮に $\mathsf{C} = 1$ とすると、$\bigvee_n \bigwedge_k c_{n,k}$ が真であるので、式 (2) の前件も真。仮定より、x は偽であるので、式 (2) は偽となる。従って、$\mathcal{B}$ に含まれる論理式がすべて真であるという仮定に矛盾する。

よって、$\mathsf{C} = 0$ の場合を考えればよい。$\mathsf{A} = 1$ または $\mathsf{B} = 1$ である。$X = 0$ なので、x は偽であり、かつ、式 (2) は真であると仮定しているので、$\bigvee_l \bigwedge_i a_{l,i}$ または $\bigvee_m \bigwedge_j b_{m,j}$ が偽である。

$\bigvee_l \bigwedge_i a_{l,i}$ が偽のときは、任意の l に対して i' が存在し、$a_{l,i'}$ が偽になる。このとき、任意の l に対して $\bigwedge_i A_{l,i} = 0$ となるので、$U_X = 1$ とすれば $\mathsf{A} = \mathsf{B} = 0$ となり、$\mathsf{A} = 1$ または $\mathsf{B} = 1$ であることに矛盾する。

$\bigvee_m \bigwedge_j b_{m,j}$ が偽のときは、任意の m に対して j' が存在し、$b_{m,j'}$ が偽になる。このとき、任意の m に対して $\bigwedge_j B_{m,j} = 0$ となるので、$U_X = 0$ とすれば $\mathsf{A} = \mathsf{B} = 0$ となり、$\mathsf{A} = 1$ または $\mathsf{B} = 1$ であることに矛盾する。

以上の通り、いずれの場合であっても矛盾が生じるので、U_X をうまく設定すれば $X = F_X(pa(X), U_X) = 0$ が成り立つ。

$X = 1$ のとき: 仮定より、$\mathcal{U}$ をどの値に設定しても $F_X(pa(X), U_X) = 0$ になる。このとき、式 (1) において $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$ のいずれもが 0 である。よって、任意の l, m, n に対してある i', j', k' が存在し、$A_{l,i'} = B_{m,j'} = C_{n,k'} = 0$ である。すなわち、任意の l, m, n に対して $a_{l,i'}, b_{m,j'}, c_{n,k'}$ はいずれも偽である。このことは、式 (3) の後件が偽であることを意味している。仮定より、$X = 1$、すなわち x は真であるから、式 (3) は偽である。

従って、$\mathcal{B}$ に含まれる論理式がすべて真であるという仮定に矛盾するので、$\mathcal{U}$ の値をうまく設定すれば、$X = F_X(pa(X), U_X) = 1$ が成り立つ。 □

4.2.1 具体例

この結果を用いれば、事例 2 における $\mathcal{B}$ は以下のように構成できる。

$$\mathcal{B} = \{p \to a \wedge \neg b, a \wedge \neg b \to p, p \vee b \to v\}$$

例えば、$V = P \vee B \vee U_V$ にリテラル $\neg U_V$ が現れていないが、式 (1) の各 $B_{m,n}$ が 0 であると考えればよい。また、リテラル U_V は単体で $\wedge$ 節を作っているが、各 $A_{l,i}$ が 1 であると考えればよい。すると、これに対応する論理式は $p \vee b \to v$ と $v \to \top$ である。後者は恒真式であり、議論に影響を与えないため、$\mathcal{B}$ からは除外して書いている。

そして、これを用いたアブダクション枠組み $(\mathcal{B}, \{a, b\}, v)$ においては、$\{b\}$ だけでなく $\{a\}$ も極小説明となるので、Satoh らの提案する極小説明では、妥当な結論が得られないことが分かる。

5 展望

本研究の成果は、法的因果関係のモデリングという動機から、異なる発想に基づいて提案された 2 つのモデルの対応関係を見出したことにある。数理モデルとしての対応が示されたことによって、片方のモデルが持つ利点を活かして他方のモデルを改善することが期待できる。例えば、Halpern モデルにおいては情報が全て明らかになっている（コンテクスト $\vec{u}$ が分かっている）ということが前提とされているが、これをアブダクション枠組みで記述することで、情報が不十分な場合の推論のあり方を論じるヒントが得られるかもしれない。

今後の研究課題は、NESS 原因をアブダクション枠組みによって記述することである。現時点では、NESS 原因を用いて「または」を含む主張を扱うことはできないが、NESS 原因をアブダクション枠組みで記述できれば、“$A = a$ または $B = b$ が原因である” というような主張を表現できるようになり、法哲学上の概念である NESS をより深く理解するための契機が得られる可能性がある。

参考文献

[1] Joseph Y. Halpern. *Actual Causality*. MIT Press, reprint edition edition.

[2] Herbert Lionel Adolphus Hart and Tony Honoré. *Causation in the Law*. Oxford University Press UK.

[3] Richard W Wright. Causation in tort law. *Calif. L. Rev.*, Vol. 73, p. 1735.

[4] Sander Beckers. The counterfactual NESS definition of causation. In *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*, Vol. 35, pp. 6210–6217.

[5] Ken Satoh and Satoshi Tojo. Disjunction of Causes and Disjunctive Cause: A Solution to the Paradox of Conditio Sine Qua Non using Minimal Abduction. In *Legal Knowledge and Information Systems: JURIX 2006: The Nineteenth Annual Conference*, Vol. 152, pp. 163–168.

[6] 佐藤健. 論理に基づく人工知能の法学への応用. コンピュータ ソフトウェア, Vol. 27, pp. 36–44.

[7] 大西琢朗. 論理学. 昭和堂.

コンパクトアソシエーションスキーム

広島大学　大学院先進理工系科学研究科　先進理工系科学専攻　数学プログラム
中田彬文 (Akifumi NAKADA) *

概要

有限アソシエーションスキームとコンパクト等質空間を同時に一般化する概念としてコンパクトアソシエーションスキームを定め，可換な場合に絞って Peter–Weyl の定理や Plancherel の定理が成り立つことを紹介する．

1　導入

有限等質空間やその一般化であるコンパクト等質空間では調和解析が展開でき，Peter–Weyl の定理や Plancherel の定理といった重要な命題が成り立つ [3]．また，有限等質空間の別の一般化である有限アソシエーションスキームでも同様に調和解析が展開できる [1, 2]．これらの良く知られた事実については第 2 節で振り返る．第 3 節では，これら 2 方向の一般化を統一的に扱える枠組みとしてコンパクトアソシエーションスキームを定める．また第 4 節では，可換な場合に絞って Peter–Weyl の定理や Plancherel の定理が成り立つことを紹介する．なお，第 3 節以降の内容が主結果である．

コンパクト等質空間	$\subset$	コンパクトアソシエーションスキーム
$\cup$		$\cup$
有限等質空間	$\subset$	有限アソシエーションスキーム

2　振り返り

2.1　コンパクト等質空間上の調和解析

この小節ではコンパクト等質空間における基礎的な事実と Plancherel 型の定理を紹介する．

G をコンパクト Hausdorff 位相群とする．本稿を通して，空でないコンパクト Hausdorff 空間であって連続か推移的な G 作用を備えるものを**コンパクト等質 G 空間**と呼ぶ．良く知られているように，G の任意の閉部分群 K に対して商空間 G/K は標準的な方法でコンパクト等質 G 空間となる．逆に，任意のコンパクト等質 G 空間はこの方法で得られることも良く知られている．

X をコンパクト等質 G 空間とする．このとき，X 上の G 不変確率 Radon 測度 μ_X が一意に存在し，G 上の確率 Haar 測度の標準的な押し出しと一致する．さらに，X 上の μ_X に関する複素数値 L^2 関数全体の成す Hilbert 空間 $L^2(X)$ は G のユニタリ正則表現となる．

* E-mail: nakada-aki@hiroshima-u.ac.jp

G の既約ユニタリ表現の同型類全体の集合を $\widehat{G}$ と書き，G の**ユニタリ双対**と呼ぶ．また，各 $(\rho\colon G \curvearrowright V_\rho) \in \widehat{G}$ に対して，$L^2(X)$ の ρ 成分 $L^2_\rho(X)$ を単射 G 同変写像

$$V_\rho \otimes \mathrm{Hom}_G(V_\rho, L^2(X)) \to L^2(X),\ v \otimes f \mapsto f(v)$$

の像として定める．つまり，V_ρ を $L^2(X)$ に G 表現として埋め込み，すべての埋め込み方をわたって和をとったものを $L^2(X)$ の ρ 成分と呼び，$L^2_\rho(X)$ と書く．さらに，$L^2(X)$ に現れる既約ユニタリ G 表現の同型類全体の集合 $\widehat{G}_X$ を

$$\widehat{G}_X \coloneqq \left\{ \rho \in \widehat{G} \;\middle|\; L^2_\rho(X) \neq 0 \right\}$$

と定める．本稿では，ユニタリ G 表現 $L^2(X)$ が multiplicity-free，つまり各 $\rho \in \widehat{G}_X$ に対して $L^2_\rho(X)$ が既約ユニタリ G 表現となるとき，X は Gelfand であると言う．Gelfand コンパクト等質空間に対しては次が成り立つ．

事実 2.1 (Peter–Weyl theorem)**.** G をコンパクト Hausdorff 位相群とし，X を Gelfand コンパクト等質 G 空間とする．このとき，次が成り立つ．

1. $\rho \ncong \rho'$ なる $\rho, \rho' \in \widehat{G}_X$ に対して，$L^2_\rho(X)$ と $L^2_{\rho'}(X)$ は $L^2(X)$ の部分空間として互いに直交する．
2. 任意の $\rho \in \widehat{G}_X$ に対して $\dim L^2_\rho(X) < \infty$ と $L^2_\rho(X) \subset C(X)$ が成り立つ．
3. ρ 成分達の張る空間 $\sum_{\rho \in \widehat{G}_X} L^2_\rho(X)$ は X 上の複素数値連続関数全体が成す空間 $C(X)$ の中で一様ノルムに関して稠密である．

X を Gelfand コンパクト等質 G 空間とする．$X \times X$ への対角 G 作用を考え，その軌道空間を $\mathcal{I}$ と書き，商写像を $R\colon X \times X \twoheadrightarrow \mathcal{I}$ と書く．このとき，$\mathcal{I}$ はコンパクト Hausdorff 空間であり，$\mathcal{I}$ 上の測度 $\mu_{\mathcal{I}}$ を積測度 $\mu_X \otimes \mu_X$ の R による押し出し $\mu_{\mathcal{I}} \coloneqq R_*(\mu_X \otimes \mu_X)$ で定める．また，離散空間 $\widehat{G}_X$ 上の測度 $\mu_{\widehat{G}_X}$ を $\mu_{\widehat{G}_X}(\{\rho\}) \coloneqq \dim \rho$ で定める．さらに，各 $\rho \in \widehat{G}_X$ に対して，$L^2_\rho(X) \subset C(X)$ より，$L^2_\rho(X)$ の再生核 $\mathcal{K}_\rho \in C(X \times X)$ が定まる．以上を用いて Plancherel 型の定理を述べる．

事実 2.2. G をコンパクト Hausdorff 位相群とし，X を Gelfand コンパクト等質 G 空間とする．このとき，次が成り立つ．

1. 各 $\rho \in \widehat{G}_X$ に対して，$Q_\rho \circ R = \mathcal{K}_\rho$ なる $Q_\rho \in C(\mathcal{I})$ が一意に存在する．
2. $\{Q_\rho\}_{\rho \in \widehat{G}_X}$ は $L^2(\mathcal{I})$ の完全直交系を成す．
3. 各 $f \in L^2(\mathcal{I}, \mu_{\mathcal{I}})$ に対して，$\widehat{G}_X$ 上の関数 $\widehat{f}$ を

$$\widehat{f}\colon \widehat{G}_X \to \mathbb{C},\ \rho \mapsto \frac{1}{\dim \rho} \langle Q_\rho | f \rangle_{L^2(\mathcal{I})}$$

と定める．このとき，$\widehat{f} \in L^2(\widehat{G}_X)$ である．

4.（Plancherel 型の定理）Fourier 変換

$$L^2(\mathcal{I}) \to L^2(\widehat{G}_X),\ f \mapsto \widehat{f}$$

は等長同型写像である．

2.2 有限アソシエーションスキームの指標表

この小節では有限アソシエーションスキームにおける基礎的な事実を紹介する．

X を空でない有限集合とする．X 上の有限アソシエーションスキーム構造を次で定める．

定義 2.3. $\mathcal{I}$ を有限集合とし，$R\colon X\times X\to\mathcal{I}$ を写像とする．ここで，次が成り立つとき，R を**有限アソシエーションスキーム** (FAS) と呼ぶ.

(FAS1) $R^{-1}(i_0)=\{(x,x)\mid x\in X\}$ なる $i_0\in\mathcal{I}$ が存在する．

(FAS2) $R\colon X\times X\to\mathcal{I}$ は全射である．

(FAS3) 任意の $i\in\mathcal{I}$ に対して，$R^{-1}(i^\top)=R^{-1}(i)^\top\coloneqq\{(y,x)\mid(x,y)\in R^{-1}(i)\}$ なる $i^\top\in\mathcal{I}$ が存在する．

(FAS4) 任意の $i_1,i_2,k\in\mathcal{I}$ に対して，ある $p^k_{i_1,i_2}\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在して，任意の $(x,z)\in R^{-1}(k)$ に対して

$$p^k_{i_1,i_2}=\#\{y\in X\mid R(x,y)=i_1,\ R(y,z)=i_2\}$$

が成り立つ.

さらに，次の (FAS5) が成り立つとき，R は**可換**であると言い，(FAS6) が成り立つとき，R は**対称**であると言う．

(FAS5) 任意の $i_1,i_2,k\in\mathcal{I}$ に対して $p^k_{i_1,i_2}=p^k_{i_2,i_1}$ が成り立つ.

(FAS6) 任意の $i\in\mathcal{I}$ に対して $i^\top=i$ が成り立つ.

また，各 $i\in\mathcal{I}$ に対して，$k_i\coloneqq p^{i_0}_{i,i^\top}$ を i の**次数**と呼ぶ.

$X\times X$ 上の複素数値関数全体の成す空間を $\mathrm{Mat}(X)$ と書く．この空間の元は X で添え字付けられた正方行列とみなせる．$R\colon X\times X\to\mathcal{I}$ を FAS とする．各 $i\in\mathcal{I}$ に対して，$R^{-1}(i)\subset X\times X$ の指示関数を $A_i\in\mathrm{Mat}(X)$ と書く．このとき，$\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ は一次独立である．そこで，$\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ が張る $\mathrm{Mat}(X)$ の部分空間を FAS R の **Bose–Mesner 代数** (BMA) と呼び，$\mathfrak{A}$ と書く．Bose–Mesner 代数 $\mathfrak{A}$ は次の性質を満たす.

1. A_{i_0} は単位行列 I に等しい.
2. $\sum_{i\in\mathcal{I}}A_i$ はすべての成分が 1 の行列 J に等しい.
3. $\mathfrak{A}$ は転置で閉じる.
4. $\mathfrak{A}$ は行列積で閉じる.

さらに，FAS R が可換なら次の 5. が，対称なら 6. が成り立つ.

5. $\mathfrak{A}$ 上の行列積は可換である.
6. 任意の $A\in\mathfrak{A}$ に対して $A^\top=A$ が成り立つ.

R を可換な FAS とする．このとき，$\mathfrak{A}$ には行列積に関する原始冪等元から成る基底 $\{E_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ が一意に存在し，さらに次が成り立つ.

1. $\#XE_{j_0}=J$ なる $j_0\in\mathcal{J}$ が存在する.
2. $\sum_{j\in\mathcal{J}}E_j=I$ である.
3. 任意の $j\in\mathcal{J}$ に対して，$E_{\overline{j}}=\overline{E_j}$ なる $\overline{j}\in\mathcal{J}$ が存在する.
4. 任意の $j\in\mathcal{J}$ に対して，$E^*_j=E_j$ が成り立つ.

X 上の複素数値関数全体の成す空間を $\mathrm{Vec}(X)$ と書く．また，各 $j\in\mathcal{J}$ に対して，$\mathrm{Vec}_j(X)$ と m_j を $\mathrm{Vec}_j(X)\coloneqq\{E_jv\mid v\in\mathrm{Vec}(X)\}$ と $m_j\coloneqq\dim\mathrm{Vec}_j(X)$ で定める．このとき，相異なる $j,j'\in\mathcal{J}$ に対して，$\mathrm{Vec}_j(X)$ と $\mathrm{Vec}_{j'}(X)$ は標準内積について互いに直交する.

$\{E_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ から $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ への基底変換行列を**指標表**と呼び，P と書く．つまり $A_i=\sum_{j\in\mathcal{J}}P(j,i)E_j$

が成り立つように指標表 P を定める．このように定義すると，第一直交関係

$$\sum_{i\in\mathcal{I}}\frac{1}{k_i}\overline{P(j_1,i)}P(j_2,i)=\frac{\#X}{m_{j_1}}\delta_{j_1,j_2}$$

と第二直交関係

$$\sum_{j\in\mathcal{J}}m_j\overline{P(j,i_1)}P(j,i_2)=\#Xk_{i_1}\delta_{i_1,i_2}$$

が成り立つ．

3　コンパクトアソシエーションスキーム

この節ではコンパクトアソシエーションスキームとその Bose–Mesner 代数を定め，重要な性質や例を紹介する．以下 X を空でないコンパクト Hausdorff 空間とし，μ_X を X 上の狭義正 Radon 測度とする．まず，X 上のコンパクトアソシエーションスキーム構造を次で定める．

定義 3.1. $\mathcal{I}$ をコンパクト Hausdorff 空間とし，$R\colon X\times X\to\mathcal{I}$ を連続写像とする．ここで，次が成り立つとき，R を**コンパクトアソシエーションスキーム** (CAS) と呼ぶ．

(CAS1) $R^{-1}(i_0)=\{(x,x)\mid x\in X\}$ なる $i_0\in\mathcal{I}$ が存在する．

(CAS2) $R\colon X\times X\to\mathcal{I}$ は商写像である．

(CAS3) 任意の $i\in\mathcal{I}$ に対して，$R^{-1}(i^\top)=R^{-1}(i)^\top:=\{(y,x)\mid(x,y)\in R^{-1}(i)\}$ なる $i^\top\in\mathcal{I}$ が存在する．

(CAS4) 任意の Borel 集合 $W_1,W_2\subset\mathcal{I}$ と任意の $k\in\mathcal{I}$ に対して，ある $p^k_{W_1,W_2}\in\mathbb{R}_{\geq0}$ が存在して，任意の $(x,z)\in R^{-1}(k)$ に対して

$$p^k_{W_1,W_2}=\mu_X(\{y\in X\mid R(x,y)\in W_1,\ R(y,z)\in W_2\})$$

が成り立つ．

さらに，次の (CAS5) が成り立つとき，R は**可換**であると言い，(CAS6) が成り立つとき，R は**対称**であると言う．

(CAS5) 任意の Borel 集合 $W_1,W_2\subset\mathcal{I}$ と任意の $k\in\mathcal{I}$ に対して，$p^k_{W_1,W_2}=p^k_{W_2,W_1}$ が成り立つ．

(CAS6) 任意の $i\in\mathcal{I}$ に対して，$i^\top=i$ が成り立つ．

注意 3.2. 対称な CAS は可換である．

このように定義すると，CAS は有限アソシエーションスキームとコンパクト等質空間の共通の一般化となっている．すなわち，次が成り立つ．

例 3.3 (有限アソシエーションスキーム)**.** 有限アソシエーションスキームは CAS である．より具体的に述べると，有限アソシエーションスキームとは CAS $R\colon X\times X\to\mathcal{I}$ であって，X と $\mathcal{I}$ が有限離散空間であり，μ_X が数え上げ測度であるもののことである．また，可換性や対称性も整合的に定義されている．

例 3.4 (コンパクト等質空間)**.** G をコンパクト Hausdorff 位相群とし，X をコンパクト等質 G 空間，μ_X を X 上の G 不変確率 Radon 測度とする．このとき，$X\times X$ への対角 G 作用による商写像 $R\colon X\times X\to X\times X/\operatorname{diag}G$ は CAS である．また，コンパクト等質空間が Gelfand であることと CAS として可換であることは同値である．

これらに加えて，有限アソシエーションスキームでもコンパクト等質空間でもない CAS が存在する．

次に，Bose–Mesner 代数を定める．$X \times X$ 上の複素数値連続関数全体が成す空間 $C(X \times X)$ は行列代数と同様に，行列積 $\cdot_{\mu_X}$ や Hadamard 積 $\cdot_{\mathrm{H}}$，転置 $-^{\top}$，複素共役 $\overline{-}$，随伴 $-^{*}$ の演算を備えている．ただし，行列積 $\cdot_{\mu_X}$ は

$$A \cdot_{\mu_X} B(x,z) \coloneqq \int_y A(x,y) \cdot B(y,z)\, d\mu_X$$

と定めている．ここで，各 CAS $R\colon X \times X \to \mathcal{I}$ に対して，R の引き戻し $R^*\colon C(\mathcal{I}) \to C(X \times X)$ の像 $R^*(C(\mathcal{I}))$ を CAS R の **Bose–Mesner 代数** (BMA) と呼び，$\mathfrak{A}$ と書く．Bose–Mesner 代数 $\mathfrak{A}$ は $C(X \times X)$ の部分空間であり，次の性質を満たす．

(BMA1) (a) あるネット $(I_N)_N \subset \mathfrak{A}$ が存在して，$(I_N)_N$ は Banach 代数 $(C(X \times X), \cdot_{\mu_X}, \|-\|_{\sup})$ の近似単位元である．つまり，任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して，$A \cdot_{\mu_X} I_N \to A$ $(N \to \infty)$ と $I_N \cdot_{\mu_X} A \to A$ $(N \to \infty)$ が成り立つ．

(b) $\mathfrak{A} \cdot_{\mu_X} J \subset \mathbb{C}J$ である．ただし，J は値 1 の定数関数である．

(BMA2) $\mathfrak{A}$ は $(C(X \times X), \cdot_{\mathrm{H}}, \overline{-}, \|-\|_{\sup})$ の単位的 C*部分代数である．

(BMA3) $\mathfrak{A}$ は転置で閉じる．

(BMA4) $\mathfrak{A}$ は行列積で閉じる．

さらに，CAS R が可換なら次の (BMA5) が，対称なら (BMA6) が成り立つ．

(BMA5) $\mathfrak{A}$ 上の行列積は可換である．

(BMA6) 任意の $A \in \mathfrak{A}$ に対して，$A^{\top} = A$ が成り立つ．

ここでは，CAS R に対して BMA $\mathfrak{A}$ を定めたが，実は X 上の CAS（resp. 可換 CAS，対称 CAS）構造を与えることと BMA（resp. 可換 BMA，対称 BMA）構造を与えることは Gelfand 変換を通すと等価である．これは有限アソシエーションスキームの場合と同様の結果である．また，行列積を BMA 上に制限すると Young の畳み込み不等式と呼ぶべき次の命題が成り立つ．

命題 3.5. $\mathfrak{A}$ を BMA とし，$p, q, r \in [1, \infty]$ は $1/p + 1/q = 1 + 1/r$ を満たすとする．このとき，任意の $A, B \in \mathfrak{A}$ に対して，

$$\mu_X(X) \|A \cdot_{\mu_X} B\|_r \leq \|A\|_p \cdot \|B\|_q$$

が成り立つ．さらに，A と B が共に定数関数の場合は等号が成立する．

4　可換コンパクトアソシエーションスキーム上の Fourier 解析

この節では Peter–Weyl の定理や Plancherel の定理といった，可換有限アソシエーションスキームや Gelfand コンパクト等質空間に対して成り立つことが知られている，解析的に重要な命題が可換な CAS に対しても成り立つことを紹介する．以下，$R\colon X \times X \to \mathcal{I}$ を可換な CAS とし，$\mathfrak{A}$ を R の BMA，$\mathfrak{A}_{L^2} \subset L^2(X \times X)$ を $\mathfrak{A}$ の L^2 完備化とする．このとき，行列がベクトルに作用するように，$L^2(X \times X)$ は $L^2(X)$ に作用する．これを用いて $L^2(X)$ を $\mathfrak{A}_{L^2}$ によって同時固有空間分解する．各線形写像 $j\colon \mathfrak{A}_{L^2} \to \mathbb{C}$ に対して

$$L^2_j(X) \coloneqq \left\{ v \in L^2(X) \;\middle|\; A \cdot_{\mu_X} v = j(A)v \text{ for all } A \in \mathfrak{A}_{L^2} \right\}$$

とおき，$\mathcal{J} \coloneqq \{j\colon \mathfrak{A}_{L^2} \to \mathbb{C} \mid L^2_j(X) \neq 0\}$ とおく．このように定義すると，$j \in \mathcal{J}$ なら，j は同時固有値を表し，$L^2_j(X)$ は同時固有空間を表す．特に，次の CAS における Peter–Weyl の定理を示せる．

定理 4.1 (CAS における Peter–Weyl の定理)**.** $R\colon X \times X \to \mathcal{I}$ を可換な CAS とする．このとき，次が成り立つ．

1. 相異なる $j, j' \in \mathcal{J}$ に対して，$L^2_j(X)$ と $L^2_{j'}(X)$ は $L^2(X)$ の部分空間として互いに直交する．
2. 任意の $j \in \mathcal{J}$ に対して，$\dim L^2_j(X) < \infty$ と $L^2_j(X) \subset C(X)$ が成り立つ．
3. $\sum_{j\in\mathcal{J}} L^2_j(X)$ は $C(X)$ の中で一様ノルムに関して稠密である．
4. $0 \notin \mathcal{J}$ である．

次に，$\mathcal{I}$ と $\mathcal{J}$ の間の Fourier 変換を構成し，Plancherel 型の定理を述べる．$\mathcal{I}$ 上の狭義正 Radon 測度 $\mu_{\mathcal{I}}$ を積測度 $\mu_X \otimes \mu_X$ の R による押し出し $\mu_{\mathcal{I}} \coloneqq R_*(\mu_X \otimes \mu_X)$ で定める．また，離散空間 $\mathcal{J}$ 上の Plancherel **測度**と呼ばれる狭義正 Radon 測度 $\mu_{\mathcal{J}}$ を $\mu_{\mathcal{J}}(\{j\}) \coloneqq m_j \coloneqq \dim L^2_j(X)$ で定める．さらに，各 $j \in \mathcal{J}$ に対して，Riesz の表現定理より，$j = \langle \omega_j | - \rangle_{\mathfrak{A}_{L^2}}$ なる $\omega_j \in \mathfrak{A}_{L^2}$ が一意に存在する．この ω_j を j の**球関数**と呼ぶ．このとき，次が成り立つ．

定理 4.2. $R\colon X \times X \to \mathcal{I}$ を可換な CAS とする．このとき，次が成り立つ．

1. 各 $j \in \mathcal{J}$ に対して，$\omega_j \in \mathfrak{A}$ である．
2. $\{\omega_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ は $\mathfrak{A}_{L^2}$ の完全直交系を成す．
3. 各 $f \in L^2(\mathcal{I})$ に対して，$\mathcal{J}$ 上の関数 $\widehat{f}$ を
$$\widehat{f}\colon \mathcal{J} \to \mathbb{C},\ j \mapsto \langle \omega_j | f \circ R \rangle_{\mathfrak{A}_{L^2}}$$
と定める．このとき，$\widehat{f} \in L^2(\mathcal{J})$ である．
4.（Plancherel 型の定理）Fourier 変換
$$\mathcal{F}\colon L^2(\mathcal{I}) \to L^2(\mathcal{J}),\ f \mapsto \widehat{f}$$
は等長同型写像である．

また，$L^2(\mathcal{I})$ 上の畳み込み積 $\cdot_{\mu_X}$ を $\mathfrak{A}_{L^2}$ 上の行列積から誘導すると次が成り立つ．

命題 4.3 (畳み込み定理)**.** 任意の $f, g \in L^2(\mathcal{I})$ に対して，$\mathcal{F}(f \cdot_{\mu_X} g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$ が成り立つ．

続いて，これまでに出てきた諸概念について，第 2 節の内容に合わせてもう少し詳しく性質を述べる．まず，各球関数 ω_j について次が成り立つ．

1. $E_j \coloneqq m_j \omega_j \in \mathfrak{A}$ は $L^2_j(X)$ の再生核である．
2. E_j は行列積に関する原始冪等元である．
3. $j_0\colon A \mapsto \int A\, d\mu_X \otimes \mu_X / \mu_X(X)$ は $\mathcal{J}$ の元であり，$\mu_X(X) E_{j_0} = J$ である．
4. $\overline{j}\colon A \mapsto \overline{j(\overline{A})}$ も $\mathcal{J}$ の元であり，$E_{\overline{j}} = \overline{E_j}$ である．
5. $E_j^* = E_j$ である．
6. $E_j \cdot_{\mu_X} L^2(X) = L^2_j(X)$ である．

次に，写像 Φ_A, Φ_E を以下で定める．

$$\Phi_A\colon L^2(\mathcal{I}) \to \mathfrak{A}_{L^2},\ f \mapsto f \circ R, \qquad \Phi_E\colon L^2(\mathcal{J}) \to \mathfrak{A}_{L^2},\ g \mapsto \sum_{j\in\mathcal{J}} g(j) E_j.$$

このとき，Φ_A と Φ_E は共に等長同型を与え，Fourier 変換 $\mathcal{F}$ は $\Phi_E^{-1} \circ \Phi_A$ に一致する．また，$A \in \mathfrak{A}_{L^2}$

の Fourier 級数展開は次で与えられる．

$$A = \int_j \langle \omega_j | A \rangle \omega_j \, d\mu_{\mathcal{J}} = \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle \omega_j | A \rangle E_j.$$

最後に，$\mathcal{I}$ と $\mathcal{J}$ は Banach 代数 $(\mathfrak{A}, \cdot_{\mathrm{H}}, \|-\|_{\sup})$ と $(\mathfrak{A}_{L^2}, \cdot_{\mu_X}, \|-\|_2)$ の指標空間とそれぞれ同相であることが示せる．ただし，$\mathcal{J}$ は離散位相空間とみなしている．

参考文献

[1] E. Bannai, E. Bannai, T. Ito, and R. Tanaka. Algebraic combinatorics, volume 5. Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2021.

[2] P. Delsarte. An algebraic approach to the association schemes of coding theory. Philips Res. Rep. Suppl., (10):vi+97, 1973.

[3] M. Takeuchi. Modern spherical functions, volume 135 of Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. Translated from the 1975 Japanese original by Toshinobu Nagura.

Kitaev モデルを用いた一般次元のダイアモンド格子のエネルギー関数について

明治大学大学院　先端数理科学研究科 現象数理学専攻
舘川 暁斗 (Akito Tatekawa) *

概要

A.Kitaev はハニカム格子における量子力学のエネルギー関数をパウリのスピン作用素を、用いたハミルトニアンの固有値として構成した。本講演では一般次元のダイヤモンド格子におけるエネルギー関数を、Kitaev モデルを拡張して構成する。特に、基本グラフの概念を用いてモデルを構成する。次に、一般次元のダイアモンドのエネルギー関数あたるものを離散フーリエ変換を用いて一般化した Kitaev モデルから計算する。このモデルはマヨラナ作用素から構成したハミルトニアンの固有値として記述される。

1　導入

Kitaev [2] では, ハニカム格子上のスピン $\frac{1}{2}$ 系についての統計力学モデルを記述する. ハニカム格子は 2 次元平面上で実現される結晶格子であり, 頂点に接続する 3 辺の方向を x, y, z で表す. Kitaev モデルのハニカム格子のハミルトニアン H は Pauli のスピン作用素 $\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z$ を用いて以下のように記述される (図 1).

$$H = -J_x \sum_{x-link} \sigma_i^x \sigma_j^x - J_y \sum_{y-link} \sigma_i^y \sigma_j^y - J_z \sum_{z-link} \sigma_i^z \sigma_j^z, \quad (i, j \text{ は各頂点の添字を表す})$$

このとき, ハミルトニアン H の固有値 $\xi(\boldsymbol{q})$ は以下を満たす (図 2).

$$\xi(\boldsymbol{q}) = \pm |f(\boldsymbol{q})|.$$

$$f(\boldsymbol{q}) = 2(J_x e^{\sqrt{-1}(\boldsymbol{q}, \alpha_1)} + J_y e^{\sqrt{-1}(\boldsymbol{q}, \alpha_2)} + J_z)$$

また, Kitaev モデルを用いた 3 次元ダイアモンドは S. Ryu[7] により研究されている. 本講演では, 一般次元のダイアモンド格子のエネルギー関数を Kitaev モデルを拡張することで求める. また, このモデルの一般次元ダイアモンド格子のエネルギー関数が tight-binding モデルのエネルギー関数の値と一致することを示す.

* akitot@meiji.ac.jp

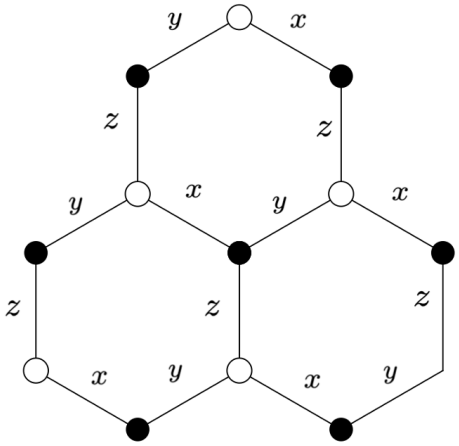


図 1　ハニカム格子と対応するパウリ作用素

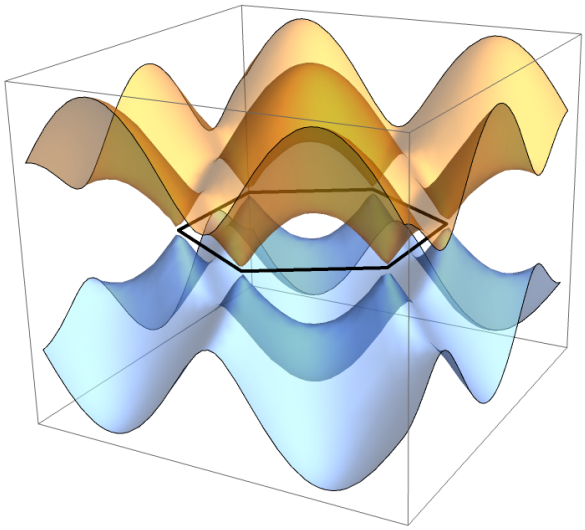


図 2　ハニカム格子のエネルギー関数

2　準備の定理・定義

2.1　d-次元ダイアモンド格子

我々は d-次元ダイアモンドを以下のように定義する．この定義は T. Sunada [8](と T. O'Keeffe [6]) による．また d-次元ダイアモンド格子を Δ_d と記述する．まず, $\mathbb{R}^{d+1}$ の標準基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}_{1\leq i\leq d+1}$ とする．

$$W=\{\sum_{i=1}^{d+1} y_i\boldsymbol{e}_i\in\mathbb{R}^{d+1}\mid \sum_{i=1}^{d+1} y_i=0,\ y_i\in\mathbb{R}\}.$$

とする.

このとき d 次元空間における A 型ルート格子 A_d を以下のように定義する.

$$A_d = \{\sum_{i=1}^{d} n_i\alpha_i \in W \mid \alpha_i = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_{d+1},\ n_i \in \mathbb{Z}\}. \tag{1}$$

また A_d を $p = \frac{1}{d+1}\sum_{i=1}^{d}\alpha_i$ だけ平行移動させた集合を $A_d + p$ とし以下のように定義する.

$$A_d + p = \{p + \sum_{i=1}^{d} n_i\alpha_i \in W \mid \alpha_i = \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_{d+1},\ n_i \in \mathbb{Z},\ p = \frac{1}{d+1}\sum_{i=1}^{d}\alpha_i\}.$$

このとき, d-次元ダイアモンド格子 Δ_d は以下のように定義される.

Definition 1. Δ_d は,*(1)(2)* を満たす空間グラフとして定義される.

(1)Δ_d の頂点の集合 $V(\Delta_d) = A_d \cup (A_d + p)$ である.

(2)Δ_d の辺の集合 $E(\Delta_d)$ は $a' \in A_d$ と $a' - p \in A_d + p$ で結ばれた線分, または $a' \in A_d$ と $a' + \alpha_i - p \in A_d + p$, *(*$1 \le i \le d$*)* で結ばれた線分の集合である.

Γ_{A_d} は任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対して, $t_{\alpha_i}(x) = \alpha_i + x$ となる並行移動 t_{α_i}, $(1 \le i \le d)$ から生成される群である.

2.2 生成・消滅演算子

以下を反交換関係 $\{\}$ を満たす生成演算子 a_i, 消滅演算子 $a_i^\dagger$, b $(1 \le i \le \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ を考える.

$$\{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = \{a_j, b\} = \{a_j^\dagger, b\} = 0,\ \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij},\ \{b, b\} = 2. \tag{2}$$

2.3 空間 $\widetilde{M}$

ベクトル空間 V を基底 $|0\rangle$ と $|1\rangle$, $\mathbb{C}$ を係数で持つものとする.

ここで空間 M を以下のように定義する.

Definition 2.

$$\widetilde{M} = \begin{cases} \bigotimes^{d} V & d \text{ が偶数} \\ \bigotimes^{d-1} V & d \text{ が奇数} \end{cases}.$$

Definition 3. Δ_d の各頂点 $v \in V(\Delta_d)$ ごとに $\widetilde{M} \cong \widetilde{M}_v$ となるような空間 $\widetilde{M}_v$ とする. 以下のような空間を定義することができる.

$$\bigotimes_{v \in V(\Delta_d)} \widetilde{M}_v.$$

2.4 基本グラフ

Δ_d は Γ_{A_d} の作用で不変である. ある写像 p で Δ_d によって普遍アーベル被覆されるグラフを Δ_d の基本グラフと言う. このとき商空間 Δ_d/Γ_{A_d} は Δ_d の基本グラフとなることが T. Sunada [8] 8.3

example (ii) より知られている (図 3). ここで, Δ_d/Γ_{A_d} を X_0 と書く.

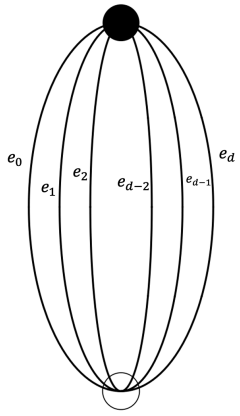


図 3　d-次元ダイアモンドの基本グラフ

$$p : \Delta_d \to X_0$$

このとき, 各 $v \in V(\Delta_d)$ の辺と X_0 の辺は一対一対応している.

また, $E(X_0)$ を X_0 の辺の集合とする. 各 $e \in E(X_0)$ に対して P_e を $p^{-1}(e)$ からなる辺の集合とする

このとき, ℓ を以下のようなラベル付けとする

$$\ell : E(X_0) \to \mathbb{Z}$$
$$\ell(e_i) = i+1, e_i \in E(X_0), (0 \leq i \leq d)$$

このとき, Δ_d の各頂点 $v \in V(\Delta_d)$ ごとに定まるスピンの方向とは, ある $v' \in V(\Delta_d)$ が存在し, $(v, v') \in E(\Delta_d)$ となるとき, $\ell(p((v, v')))$ のことである.

2.5　Majorana 作用素

もし d が偶数ならば, Majorana 作用素を生成演算子 a_i, 消滅演算子 $a_i^\dagger$, $(1 \leq i \leq \frac{d}{2}+1)$ を用いて以下のように定義する

$$\begin{cases} c_{2i-1} = a_i + a_i^\dagger \\ c_{2i} = \frac{1}{\sqrt{-1}}(a_i - a_i^\dagger). \end{cases} .$$

このとき, c_i は空間 $\bigotimes^d V$ に作用する. もし d が奇数ならば, Majorana 作用素を生成演算子 a_i, 消滅演算子 $a_i^\dagger$, $(1 \leq i \leq \frac{d-1}{2}+1)$ と b を用いて以下のように定義する

$$\begin{cases} c_{2i-1} = a_i + a_i^\dagger \\ c_{2i} = \frac{1}{\sqrt{-1}}(a_i - a_i^\dagger) \\ c_{d+2} = b \end{cases} .$$

このとき, c_i は空間 $\bigotimes^{d-1} V$ に作用する.

Majorana 作用素 c_1 から c_{d+1} は X_0 の各辺に対応し, c_{d+2} は X_0 の頂点に対応する (図 4).

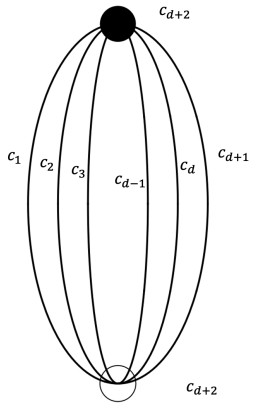


図 4　d-次元ダイアモンドの基本グラフと Majorana 作用素の対応

2.6　ハミルトニアンの構成

ハミルトニアンを構成する．次にスピンの作用素を $\sigma^k = \sqrt{-1}c_k c_{d+2}$ で構成する．また, 各頂点 $v \in V(\Delta_d)$ ごとに作用素 c_k^v, $(1 \leq k \leq d+2)$ を定義する．c_k^v, $(1 \leq k \leq d+2)$ は $\widetilde{M}_v$ のみに作用する作用素 $\sigma^k = \sqrt{-1}c_k c_{d+2}$ とする．よって各 $v \in V(\Delta_d)$ ごとに $\widetilde{M}_v$ に作用する作用素 $\sigma_v^k = \sqrt{-1}c_k^v c_{d+2}^v$ を構成できる．これらのことを用いて, ハミルトニアンを以下のように定義する．

Definition 4.

$$H = -\sum_{e \in E(X_0)} \sum_{(v,v') \in P_e(\Delta_d)} J_{\ell(e)} \sigma_v^{\ell(e)} \sigma_{v'}^{\ell(e)}$$

ここで, 改めて

$$\hat{u}_{v,v'} = \sqrt{-1} c^v_{\alpha_{v,v'}} c^{v'}_{\alpha_{v,v'}}$$

とする．ここで $c^v_{\alpha_{v,v'}}$ は Majorana 作用素, $\alpha_{v,v'} \in \ell(E(X_0))$ はスピンの方向である．

ここでハミルトニアン H を以下のように書き直す．

$$\tilde{H} = \frac{\sqrt{-1}}{4} \sum_{v,v' \in V(\Delta_d)} \hat{A}_{v,v'} c_v c_{v'}$$

このとき

$$\hat{A}_{v,v'} = \begin{cases} 2J_{\ell(e)} \hat{u}_{v,v'} & ((v,v') \in P_e) \\ 0 & (\text{そのほか}) \end{cases}$$

ここでの c_v と $c_{v'}$ は それぞれ Majorana 作用素 c_{d+2}^v と $c_{d+2}^{v'}$, $v, v' \in V(\Delta_d)$ となる．

空間 $\widetilde{M}$ の作用する作用素 D を以下のように定義する.

$$D = (\sqrt{-1})^{d-1} \prod_{i=1}^{d+1} \sqrt{-1} c_i c_{d+2}.$$

このとき, D は以下のように書き直すこともできる. また, D の $\widetilde{M}$ の固有値は ± 1 である. $\bigotimes_{v \in V(\Delta_d)} \widetilde{M_v}$ への D への作用を以下のように定義する.

$$D(\bigotimes_{v \in V(\Delta_d)} u_v) = (\bigotimes_{v \in V(\Delta_d)} Du_v).$$

このことから

$$M'(\Delta_d) = \{u \in \bigotimes_{v \in V(\Delta_d)} \widetilde{M_v} \mid Du = u\}.$$

となる空間を構成できる.

ここで H と D は可換である. よって, M' (Δ_d) は H の作用で不変である.

3 主定理

3.1 離散フーリエ変換

t_i の $x \in \mathbb{R}^d$ への作用素を $t_i \cdot x = x + N\boldsymbol{e}_i$ とする. このとき, Γ_N を以下のように定義する.

$$\Gamma_N = \{t_1^{m_1} \cdots t_d^{m_d} \mid m_1, \cdots, m_d \in \mathbb{N}\}.$$

ここで十分大きな整数 $N > 0$ でハミルトニアン H は t_i の作用で不変となるものを用意する. H の固有値問題が最小となる場合を考える. このとき, $u_{v,v'} = 1$ となる. よって基底状態エネルギーの最小状態を任意の $u_{v,v'}$ が 1 となるときのものとする. これは物理の議論で E. H. Lieb[5] から得られる結果であるが, 本研究では仮定とする.

3.2 主定理

上記の条件を考える. この条件のもとで以下の定理が成り立つ.

Theorem 1. Δ_d の $M'(\Delta_d)$ での *Kitaev* モデルのエネルギー関数 *(*ハミルトニアンの固有値*)* を以下のように得ることができる. ここで, *Kitaev* モデルのエネルギー関数 *(*ハミルトニアンの固有値*)* が最小になる場合を考える. これは,

$$E(q_{\boldsymbol{k}}) = \pm 2|J_1 + \sum_{i=1}^{d} J_{i+1} e^{\sqrt{-1}(q_{\boldsymbol{k}}, \alpha_i)}|$$

このとき, $\boldsymbol{q}_k = \sum_{i=1}^{d} \frac{k_i}{N} b_i$, $k_i \in \{0, \cdots, N-1\}$,$(\alpha_j, b_i) = 2\pi\delta_{ji}$, α_j は A_d の $\mathbb{Z}$ 基底である.

H の固有関数を $\boldsymbol{q}_k$ の関数としてみなしたとき, この関数は周期境界条件を持つとする. ここで, $\hat{u}_{v,v'}$ の固有値を $u_{v,v'} = \pm 1$ で定義する. 今回は基底状態エネルギーの最小状態を考えるため $u_{v,v'} = 1$ となる.

Γ_{A_d} に対する基本領域で隣接している 2 つの頂点を含み, それ以外の頂点を含まないものをを unit cell と呼ぶ. ここで, v を (s,λ) と v' を (t,μ) 書き直す. このとき s は unit cell 中の v の位置, λ は $\mathbb{R}^d$ における unit cell の位置を指定している . よって v を定めるごとに (s,λ) の組み合わせを d パターン構成することができる. ここでハミルトニアン H は以下のように書き直すことができる.

$$H = \frac{\sqrt{-1}}{4} \sum_{(s,\lambda),(t,\mu)\in V(\Delta_d)} A_{s\lambda,t\mu} c_{s\lambda} c_{t\mu}$$

このとき

$$A_{s\lambda,t\mu} = \begin{cases} 2J_{\ell(e)} & ((s\lambda,t\mu)\in P_e) \\ 0 & (\text{そのほか}) \end{cases}.$$

さらにこのハミルトニアン H は $\tilde{H}_u$ として以下のように書き直すことができる.

$$\tilde{H}_u = \frac{1}{2} \sum_{\boldsymbol{q},\lambda,\mu} \tilde{A}_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{q}) a_{-\boldsymbol{q}\lambda} a_{\boldsymbol{q}\mu}$$

ここで

$$\tilde{A}_{\lambda,\mu}(\boldsymbol{q}) = \sum_s A_{0\lambda,s\mu} e^{\sqrt{-1}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_s},$$
$$a_{\boldsymbol{q}\lambda} = \sum_s c_{s\lambda} e^{-\sqrt{-1}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_s},$$

である. r_s は, unit cell における s のもう一つの頂点に対しての位置ベクトルを表している. また, $c_{s\lambda} = \sum_q e^{\sqrt{-1}\boldsymbol{q}\cdot r_s} a_{\boldsymbol{q}\lambda}$ である. 作用素 $a_{\boldsymbol{q},\lambda}$ and $a^\dagger_{\boldsymbol{q},\mu}$ に対して

$$a^\dagger_{\boldsymbol{q}\lambda} = a_{-\boldsymbol{q}\lambda},$$
$$\{a_{\boldsymbol{q}\lambda}, a^\dagger_{\boldsymbol{q'}\mu}\} = \delta_{\lambda\mu}\delta_{\boldsymbol{q'q}}.$$

の反交換関係が成り立つ. このことから H は 2×2 行列 $\sqrt{-1}\tilde{A}(\boldsymbol{q})$ を得ることができる.

$$\sqrt{-1}\tilde{A}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} O & \sqrt{-1}f(\boldsymbol{q}) \\ -\sqrt{-1}f(\boldsymbol{q})^* & O \end{pmatrix}$$

であり $f(\boldsymbol{q}) = 2\sum_{i=0}^d J_{i+1} e^{\sqrt{-1}\boldsymbol{q}\cdot b_i}$ である. この行列の固有値がハミルトニアン H の固有値となるため $\xi(\boldsymbol{q}) = \pm|f(\boldsymbol{q})|$ である. これは改めて

$$\xi(\boldsymbol{q}_k) = \pm 2|\sum_{i=0}^d J_{i+1} e^{\sqrt{-1}\boldsymbol{q}_k\cdot\alpha_i}|$$

ここで

$$\boldsymbol{q}_k\cdot\alpha_j = \frac{2\pi}{N}k_j \quad (j\geq 1).$$

である.

4 tight-binding-model との関係

Δ_d におけるシュレディンガー方程式の近似モデルである tight-binding-model を考える．シュレディンガー方程式は以下で記述される

$$\hat{H}\psi = E\psi.$$

このとき

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)$$

である．また, $L^2(\mathbb{R}^d)$ で H は不変である．

このとき 一般的な Bloch の定理 が F. Bloch [1], P. Kuchment[4] Lemma 5.2, Definition 5.3, Theorem 5.5 より以下のように成り立つ．

Theorem 2 (Bloch Theorem)**.** ポテンシャル $V(x)$ が格子群 Γ の作用で不変であるとする．このときシュレディンガー方程式の解は次のような性質を満たす．$\psi(x) = e^{\sqrt{-1}\boldsymbol{q}\cdot x}u(x)$ このとき, $u(x)$ は Γ の作用で不変である．

以下 tight-binding-model を構成する (C. Kittel[3]). 格子の頂点集合を $\mathcal{V}$ とする．$\mathcal{V}$ は Γ の作用で不変である．頂点 v における基底となる関数 ψ_v とする ．$\langle\psi_v|\psi_{v'}\rangle = \int_{\mathbb{R}^d}\psi_v\psi_{v'}dx = \delta_{v,v'}$ が成り立つと仮定する．またシュレディンガー方程式の解が ψ_v を基底とする線形な式で書けるする

$$\psi = \sum_{v\in\mathcal{V}} C_v\psi_v.$$

このとき,

$$\psi_v(x) = \sum_{r\in\mathcal{V}} e^{\sqrt{-1}\boldsymbol{q}\cdot r}u_v(x-r).$$

まは $h_{v,v'}$ を以下のように定義する

$$h_{v,v'} = \int_{\mathbb{R}^d} {\psi_v}^*\hat{H}\psi_{v'}dx.$$

$h_{v,v'}$ が以下を満たすと仮定する．

$$h_{v,v'} = \begin{cases} 0 & (v = v') \\ \sum_{r\in\mathcal{V}} t_{v,v'}e^{\sqrt{-1}\boldsymbol{q}\cdot r} & ((v,v') : \text{nearest neighbours}) \\ 0 & (\text{そのほか}) \end{cases}.$$

このとき $t_{v,v'} = t^*_{v',v}$．この手法は M. Tsuchiizu[9] の K_4 格子の基本グラフを用いたエネルギー関数の計算手法をもとにしている．

Theorem 3. Δ_d における *tight-binding-model* は以下のようになる．

$$E(\boldsymbol{q}) = \pm|t_1 + \sum_{i=1}^{d} t_{i+1}e^{\sqrt{-1}\boldsymbol{q}\cdot\alpha_i}|$$

このとき, v から v' へのベクトルまたは, v' から v へのベクトルが b_i のとき $t_{v,v'} = t_{i+1}$ としている．

定理 1 と定理 3 より, $2J_i$ を t_i と置き換えれば , Δ_d の tight-binding- model と Δ_d の Kitaev モデルによる一般化によって得られる固有値は等しいことがわかる.

参考文献

[1] F. Bloch, Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern, Zeit. fuï Physik 52, 555-600,1928.

[2] A. Kitaev, Anyons in an exactly solved model and beyond. Annals of Physics Volume 3, 212-111, Issue 1, 2006.

[3] C. Kittel, Introduction to Solid State Physics, John Wiley & Sons, 2005.

[4] P. Kuchment, An Overview Of Periodic Elliptic Operators, Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 53, 343-414,2016.

[5] E. H. Lieb, Flux Phase of the Half-Filled Band, Phys. Rev. Lett. 73, 2158-2161, 1994.

[6] T. O'Keeffe, N-dimensional diamond, sodalite and rare sphere packings. Actsa Crystalloger A 47:748-753, 1991.

[7] S. Ryu, Three-dimensional topological phase on the diamond lattice.Phys. Rev. B 79, 075124, 2009.

[8] T. Sunada, Topological Crystallography: With a View Towards Discrete Geometric Analysis, Springer, 2012.

[9] M. Tsuchiizu , Three-dimensional higher-spin Dirac and Weyl dispersions in the strongly isotropic K_4 crystal, Phys. Rev.B **94**, 195426-1–8, 2016.

Note on exponents associated with Y-systems

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka Metropolitan University
Ryo TAKENAKA *

Abstract

Let (X_n, ℓ) be the pair consisting of the Dynkin diagram of finite type X_n and a positive integer $\ell \geq 2$, called level. Associated to the pair (X_n, ℓ), we obtain the Y-system, which is the set of algebraic relations, and the Dynkin quiver $Q(X_n, \ell)$. On $Q(X_n, \ell)$, we have a structure of the cluster algebra. By their periodicity, we are able to define a sequence of integers called exponents. Mizuno provide the conjectural formulas for the exponents in his research. We will present the some results for Mizuno's conjecture. Furthermore, we will see the relationship with the theory of cluster algebras and the representation theory of affine Lie algebras.

1 Introduction

Cluster algebra is an algebraic structure introduced by Fomin and Zelevinsky in the early 2000's. The cluster algebras is generated by the quiver $\mathcal{Q}$, which is a directed graph consisting of vertices and arrows, and variables $y = (y_1, \ldots, y_{|\mathbf{I}|})$ called cluster and coefficients $Y = (Y_1, \ldots, Y_{|\mathbf{I}|})$. A defining feature of cluster algebras is that they generate new algebraic structure thorough the operation called mutation. By such structure, cluster algebras play an important role in various fields such as combinatorics, representation theory, geometry, and even physics. Denote the set of vertices of $\mathcal{Q}$ by $\mathbf{I}$. In our research, we assume that quivers have no 1,2-cycles. There exists a triple $\gamma = (\mathcal{Q}, \mathbf{m}, \nu)$ called mutation loop on the cluster algebra, where $\mathbf{m}$ is a subsequence of $\mathbf{I}$ and ν is a permutation on $\mathbf{I}$. By the mutation loop γ, we can obtain certain special operation μ_γ called cluster transformation. Let X_n be a finite type Dynkin diagram and ℓ be a positive integer such that $\ell \geq 2$. Inoue, Iyama, Keller, Kuniba and Nakanishi constructed the quiver $Q(X_n, \ell)$ with the mutation loop $\gamma(X_n, \ell)$ such that the corresponding cluster transformation μ_γ has a periodicity in [3, 4]. The periodicity of the cluster transformation μ_γ means the following identity holds.

$$\mu_\gamma^{T(\ell+h^\vee)}(y) = y,$$

where $h^\vee$ is the dual Coxeter number and

$$T = \begin{cases} 1 & (X = A,\ D,\ E), \\ 2 & (X = B,\ C,\ F), \\ 3 & (X = G). \end{cases}$$

A Y-system is a system of algebraic relation determined from the root system of type X_n and the positive integer $\ell \geq 2$ called level. It is known that the (restricted constant) Y-system has a unique positive real solution. Consider the fixed point equation $\mu_\gamma(y) = y$. Then we find that the fixed point equation has a unique positive real solution and it is written in terms

*E-mail:sn22803m@st.omu.ac.jp

of the solution of the Y-system. Denote such solution by η. By the periodicity of the cluster transformation μ_γ, we obtain the matrix

$$J_\gamma(\eta) = \left(\frac{\partial \mu_i(y)}{\partial y_j}\right)\Big|_{y=\eta} \quad \text{such that} \quad J(\eta)^{T(\ell+h^\vee)} = I,$$

where $\mu_i(y)$ stands for the i-th component of $\mu_\gamma(y)$. Therefore all eigenvalues of $J_\gamma(\eta)$ are written by

$$e^{\frac{2\pi i m_1}{T(\ell+h^\vee)}}, e^{\frac{2\pi i m_2}{T(\ell+h^\vee)}}, \ldots, e^{\frac{2\pi i m_{|\mathbf{I}|}}{T(\ell+h^\vee)}}$$

by using a sequence of nonnegative integers such that $0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_{|\mathbf{I}|} < T(\ell + h^\vee)$. We call this sequence $\mathcal{E} = (m_1, m_2, \ldots, m_{|\mathbf{I}|})$ as the exponents on $Q(X_n, \ell)$, and associated with level ℓ Y-system of type X_n.

Mizuno provided the conjectural formula for exponents on $Q(X_n, \ell)$ by using the root system of type X_n. Let Δ be the root system of type X_n. We have the following two decompositions.

$$\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-, \quad \Delta = \Delta_{\text{long}} \cup \Delta_{\text{short}},$$

where Δ_+, Δ_-, Δ_{long} and Δ_{short} are the sets of positive roots, negative roots, long roots and short roots respectively. Set ρ as the half sum of positive roots. Denote a nondegenerate invariant symmetric bilinear from on Δ by $\langle \cdot, \cdot \rangle$. This form is fixed so that $\langle \alpha, \alpha \rangle = 2$ if $\alpha \in \Delta_{\text{long}}$. Associated to the pair (X_n, ℓ), we define two polynomials

$$N_{X_n,\ell}(z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{z^{T(\ell+h^\vee)} - 1}{z^{T/t_i} - 1}, \quad D_{X_n,\ell}(z) = D^{\text{long}}_{X_n,\ell}(z) D^{\text{short}}_{X_n,\ell}(z),$$

where $t_i = 2/\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle$, and the polynomials $D^{\text{long}}_{X_n,\ell}(z)$ and $D^{\text{short}}_{X_n,\ell}(z)$ are defined by

$$D^{\text{long}}_{X_n,\ell}(z) = \prod_{\alpha \in \Delta_{\text{long}}} \left(z^T - e^{\frac{2\pi i \langle \rho, \alpha \rangle}{\ell+h^\vee}}\right), \quad D^{\text{short}}_{X_n,\ell}(z) = \prod_{\alpha \in \Delta_{\text{short}}} \left(z - e^{\frac{2\pi i \langle \rho, \alpha \rangle}{\ell+h^\vee}}\right).$$

Then we have the following conjecture

Conjecture 1.1. *[6, Conjecture 3.8] Let X_n be a finite type Dynkin diagram, and ℓ be a positive integer such that $\ell \geq 2$. Let $\gamma = \gamma(X_n, \ell)$ be the mutation loop on the quiver $Q(X_n, \ell)$. Then the following identity holds for the characteristic polynomial of $J_\gamma(\eta)$.*

$$\det(zI - J_\gamma(\eta)) = \frac{N_{X_n,\ell}(z)}{D_{X_n,\ell}(z)}.$$

The consistency of Conjecture 1.1 follows from the coincident of asymptotics of partition q-series on T-data and normalized q-characters of certain weight subspace of modules of the affine Lie algebra. In order to verify such relationship, we reveiw each aspects of the theory of cluster algebras and the representation theory of affine Lie algebras.

First, consider a triple (B_+, B_-, D) of matrices, whose entries are Laurent polynomials with integer coefficients. The triple (B_+, B_-, D) is a T-datum if $B_\pm$ can be written as $B_\pm = N_0 - N_\pm$ by a triple of matrices (N_0, N_+, N_-) satisfying certain conditions. For the pair of the affine Lie algebra of type $X_N^{(r)}$ and the integer $\ell \geq 2$, we are able to construct certain T-datum $\beta(X_N^{(r)}, \ell)$, which induce the mutation loop associated with Cartan matrix.

Using the T-datum $\beta(X_N^{(r)}, \ell)$, we are able to define geometric series called total partition q-series denoted by $\mathcal{Z}_\beta(q)$. Using the Rogers dilogarithm function, we obtain certain positive real number a. Then we have the following asymptotics.

$$\lim_{\epsilon \to 0} \mathcal{Z}_\beta(e^{-\epsilon}) e^{-\frac{a}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\det(B_+)}{\det(I - J_\gamma(\eta))}},$$

where $\epsilon \to 0$ means the limit in the positive real axis.

Next, let $\mathfrak{g}$ be a finite dimensional simple Lie algebra of type X_n equipped with a Dynkin automorphism σ of order r'. Denote its Cartan subalgebra by $\mathfrak{h}$. Let $R = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i$ be a root lattice and $P = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\varpi_i$ be a weight lattice of $\mathfrak{g}$, where α_i is a simple root and ϖ_i is the fundamental weight respectively. Set $Q = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}\alpha_i \subset R$. Denote the invariant subspace of Q under the action of σ by $Q_{(0)}$ and its dual space by $Q_{(0)}^*$. Correspond to the choice of the pair (X_N, σ), the affine Lie algebra of type $X_N^{(r)}$ is realized as the canonical central extension of the loop algebra $L\mathfrak{g}$. As the vector space, we have $\tilde{\mathfrak{g}} = L\mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$, where c is the center and d is the degree operator. Note that $Q_{(0)}$ should be understood as the root lattice of $\bar{\mathfrak{g}}$, where $\bar{\mathfrak{g}}$ is the subalgebra of $\tilde{\mathfrak{g}}$ obtained by removing 0-th node of Dynkin diagram of $\tilde{\mathfrak{g}}$.

Let $L(\ell\Lambda_0)$ be the highest weight $\tilde{\mathfrak{g}}$-module with highest weight $\ell\Lambda_0$. Since $L(\ell\Lambda_0)$ is integrable highest weight module, we have canonical decomposition $L(\ell\Lambda_0) = \bigoplus_{n \geq 0} L(\ell\Lambda_0)_n$ so that $\dim(L(\ell\Lambda_0)_n) < \infty$. Therefore the following function is well-defined

$$\chi_\ell(\tau) = q^{\frac{c(\ell)}{24r}} \mathrm{tr}_{L(\ell\Lambda_0)} q^{-d},$$

where

$$c(\ell) = \frac{\ell \cdot \dim(\mathfrak{g})}{\ell + h^\vee}.$$

This is the q-character of $L(\ell\Lambda_0)$. By letting $q = e^{2\pi i \tau}$, the function $\chi_\ell(\tau)$ converges to a holomorphic function on the upper half plane $\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(\tau) > 0\}$. We have the following asymptotics.

$$\lim_{\tau \downarrow 0} \chi_\ell(\tau) e^{-\frac{\pi i c(\ell)}{12r\tau}} = \sqrt{\left| Q_{(0)}^* / (\ell + h^\vee) \right|} \prod_{\alpha \in \Delta_+} 2 \sin \frac{\pi \langle \rho, \alpha \rangle}{\ell + h^\vee},$$

where $\tau \downarrow 0$ is the limit in the positive imaginary axis. Furthermore, the RHS is calculated via the value of

$$\lim_{z \to 1} \frac{N_{X_n,\ell}(z)}{D_{X_n,\ell}(z)}.$$

The notion of the parafermionic space more clearly connects these asymptotics. Set $Q(\ell) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z} t_i \ell \alpha_i$ as the sublattice of Q. We define the parafermionic space of highest weight $\ell\Lambda_0$ such that $\ell \geq 2$ by

$$L(\ell\Lambda_0)_{Q(k)} = \bigoplus_\mu \left(L(\ell\Lambda_0), \mu \right),$$

where μ takes value in $\ell\Lambda_0 + Q/Q(\ell)$ and

$$(L(\ell\Lambda_0), \mu) = \{ v \in L(\ell\Lambda_0) \mid (h \otimes t^m) v = \delta_{m,0} \mu(h) v \quad (h \in \mathfrak{h},\ m \geq 0) \}$$

is the weight subspace isomorphic to the commutant of $L(\ell\Lambda_0)$. Then we consider the following function

$$b_\mu^{(\ell)}(\tau) = q^{-\frac{c(\ell) - n}{24r}} \mathrm{tr}_{(L(\ell\Lambda_0),\mu)} q^{-d_V - d},$$

where

$$d_V|_{(L(\ell\Lambda_0),\mu)} = \frac{\langle \mu_{(0)}, \mu_{(0)} \rangle}{2\ell}$$

and $\mu_{(0)}$ is the projection of μ onto $Q_{(0)}$. This is the branching function for the pair $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$. By the definition of the parafermionic space, we find that

$$\text{ch } L(\ell\Lambda_0)_{Q(\ell)} = q^{\frac{c(\ell)-n}{24r}} \sum_{\mu} b_{\mu}^{(\ell)}(q) \prod_{i=1}^{n} y_i^{m_i},$$

where $\mu = \ell\Lambda_0 + m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n$ such that $0 \le m_i \le t_i\ell - 1$.

Then we have the following conjecture.

Conjecture 1.2. *[2, Conjecture 5.3], [6, Conjecture 6.2] The fermionic formula of partition q-series associated with T-data $\beta(X_N^{(r)},\ell)$ such that $\ell \ge 2$ is given by the q-character of parafermionic space $L(k\Lambda_0)_{Q(k)}$. Namely, we have*

$$q^{-\frac{c(\ell)-n}{24}} \mathcal{Z}_{\beta}(q) = \sum_{\substack{1\le i\le n \\ 0\le m_i\le t_i\ell-1}} b^{(\ell)}_{\ell\Lambda_0+m_1\alpha_1+\cdots+m_n\alpha_n}(q).$$

Now, we consider the T-datum β associated with the pair $(X_n^{(1)},\ell)$. Under the assumption that Conjecture 1.2 is true, we have the following identity .

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathcal{Z}_{\beta}(e^{-\epsilon}) e^{-\frac{a}{\epsilon}} \left(\lim_{z\to 1} \frac{N_{X_n,\ell}(z)}{D_{X_n,\ell}(z)} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

These suggest the existence of some relationship between the theory of cluster algebras and the representation theory of affine Lie algebras.

2 Main Results

For Conjecture 1.1, Mizuno and the author presented several results. By using the explicit positive real solution of restricted constant Y-system, we are able to construct vectors ψ such that

$$J_{\gamma}(\eta)\psi = \lambda\psi$$

for certain roots of unity λ. Namely, we will find all eigenvalues of matrix $J_{\gamma}(\eta)$. As a consequence, we have the following theorem.

Theorem 2.1. *[6, Theorem 3.9], [9, Theorem 4.3, 4.6] The Conjecture 1.1 holds for $(X_n,\ell) = (A_1,\ell)$, $(A_n,2)$, $(B_n,2)$ and $(D_n,2)$.*

Furthermore, for fermionic conjectural formulas of partition q-series, Butorac, Kožić, Primc, Okado and the author presented the proof of Conjecture 1.2. By vertex algebraic construction, we are able to construct canonical combinatorial bases of highest weight module $L(\ell\Lambda_0)$ and its parafermionic space $L(\ell\Lambda_0)_{Q(\ell)}$. Using such bases, we derive the fermionic character formulas. As a consequence, we have the following theorem.

Theorem 2.2. *[1, Theorem 3.6], [7, Theorem 13], [8, Theorem 17] The Conjecture 1.2 is true for partition q-series associated with T-data $\beta(X_N^{(r)},\ell)$ such that $\ell \ge 2$.*

Therefore, Theorem 2.2 reveals that Conjecture 1.1 holds for $z = 1$. Furthermore, Theorem 2.2 implies that we are able to propose the problem of calculating the asymptotic of the partition q-series associated with $\beta(X_N^{(r)},\ell)$ such that $r > 2$ as a future works.

References

[1] M. Butorac, S. Kožić and M. Primc, Parafermionic bases of standard module for affine Lie algebras, Mathematische Zeitschrift **298** (2021), 1003-1032.

[2] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and T. Tsuboi, Paths, crystals and fermionic formulae, MathPhys Odyssey 2001: Integrable Models and Beyond In Honor of Barry M. McCoy (2002), 205-272.

[3] R. Inoue, O. Iyama, B. Keller, A. Kuniba and T. Nakanishi, Periodicities of T-systems and Y-systems, dilogarithm identities, and cluster algebras I: Type B_r, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **49** (2013), 1-42.

[4] R. Inoue, O. Iyama, B. Keller, A. Kuniba and T. Nakanishi, Periodicities of T-systems and Y-systems dilogarithm identities, and cluster algebras II: Type C_r, F_4 and G_2, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **49** (2013), 43-85.

[5] A. Kuniba, T. Nakanishi and J. Suzuki, Characters in conformal field theories from thermodynamic Bethe ansatz, Modern Phys. Lett. A **8** (1993), 1649-1659.

[6] Y. Mizuno, Exponents Associated with Y-systems and their Relationship with q-Series, SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications **16** (2020): 238.

[7] M. Okado and R. Takenaka, Parafermionic Bases of Standard Modules for Twisted Affine Lie Algebras of Type $A^{(2)}_{2l-1}$, $D^{(2)}_{l+1}$, $E^{(2)}_6$ and $D^{(3)}_4$, Algebras and Representation Theory **26** (5) (2023), 1669-1690.

[8] R. Takenaka, Vertex algebraic construction of modules for twisted affine Lie algebras of type $A^{(2)}_{2l}$, Journal of Pure and Applied Algebra bf 227 (4) (2023), 107263.

[9] R. Takenaka, Note on exponents associated Y-systems, arXiv preprint arXiv:2410.02286 (2024).

3元生成の数値的半群から生じるトーリックイデアルのグレブナー基底

山形大学大学院理工学研究科
菅原明広 (Akihiro SUGAWARA) *

概 要

非負整数全体の集合の部分モノイドで, 非負整数全体の集合における補集合が有限集合となるものを数値的半群という. García-Marco と Tatakis は, 数値的半群が free という性質をもつことを, それから生じるトーリックイデアルのグレブナー基底を用いて特徴づけた. 本講演では, 3 元生成の数値的半群から生じるトーリックイデアルについて, この研究に関連したよいグレブナー基底をもつことがわかったのでこれについて紹介する.

1 導入

$\mathbb{N}$ を非負整数全体, k を体, $k[x_1,\dots,x_m]$ を体 k 上の m 変数多項式環とする.

定義 1.1. $S \subset \mathbb{N}$ が次の性質をみたすとき, S は**数値的半群** (**numerical semigroup**) であるという:

(1) $x, y \Rightarrow x+y \in S$;

(2) $0 \in S$;

(3) $\mathbb{N} \setminus S$ は有限集合である.

numerical semigroup S については, 一意的な極小生成系をもつことが知られており, その濃度を $\mathrm{e}(S)$ と書くことにする. S を $\{n_1,\dots,n_m\}$ を極小生成系にもつ numerical semigroup とすると, 環準同型写像

$$\varphi : k[x_1,\dots,x_m] \to k[t];\ x_i \mapsto t^{n_i}\ (i=1,\dots,m)$$

を考えることができる. よって, S から自然にトーリックイデアル $I_S = \ker\varphi$ を得る. トーリックイデアル I_S の任意の生成系の濃度は $\mathrm{e}(S)-1$ 以上であることが知られている. また, numerical semigroup S から生じるトーリックイデアル I_S の二項式からなる極小生成系の濃度 $\mu(I_S)$ が $\mathrm{e}(S)-1$ と一致するとき, S は ***complete intersection*** であるという. 次に, complete intersection に含まれるクラスを紹介する.

定義 1.2. S を $\{n_1,\dots,n_m\}$ を極小生成系にもつ numerical semigroup とする. S が配置 $n_1,\dots,n_m$ に対して $free$ であるとは, 任意の $i \in \{1,\dots,m-1\}$ について,

$$\mathrm{lcm}(n_i, \gcd(n_{i+1},\dots,n_m)) \in \langle n_{i+1},\dots,n_m\rangle$$

が成り立つときをいう. ある極小生成系の配置 $n_{i_1},\dots,n_{i_m}$ ($\{n_{i_1},\dots,n_{i_m}\} = \{n_1,\dots,n_m\}$) が存在して, S が $n_{i_1},\dots,n_{i_m}$ に対して free となるとき, S は ***free*** であるという.

*E-mail:s231163m@st.yamagata-u.ac.jp

García-Marco と Tatakis は, numerical semigroup S が free という性質をもつことをグレブナー基底を用いて次のように特徴付けた.

事実 1.3 ([1, Theorem 4.7])**.** S を numerical semigroup, $\{n_1, \ldots, n_m\}$ を S の極小生成系とする. このとき, S が free であることは, I_S が $m-1$ の元からなるグレブナー基底をもつことと同値である.

この結果は, numerical semigroup S が complete intersection (つまり $\mu(I_S) = \mathrm{e}(S) - 1$) であるとき, ある単項式順序 $<$ が存在して $\mu(I_S) = \mu(\mathrm{in}_<(I_S))$ が成り立つことと, S が free であることが同値であることを示している. この結果と関係して, García-Marco と Tatakis は次の問題を提起した.

問題 1.4 ([1, Open problem 5.3])**.** ある単項式順序 $<$ が存在して,

$$\mu(I_S) = \mu(\mathrm{in}_<(I_S))$$

が成り立つ numerical semigroup S を特徴付けよ.

今回筆者は $\mathrm{e}(S) = 3$ においてこの問題を調べた. その結果, 次の主張を得た.

主定理 1.5. $S = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ を $\mathrm{e}(S) = 3$ の numerical semigroup とする. S が free ではないならば, 単項式順序 $<$ が存在して,

$$\mu(I_S) = \mu(\mathrm{in}_<(I_S))$$

が成り立つ.

既に知られている問題の性質をみたす numerical semigroup としては, free な numerical semigroup [1, Theorem 4.7], 等比数列からなる生成系をもつ numerical semigroup [2] が挙げられる. よって, 主定理 1.5 を示したことによって, 問題の性質をみたす新たな numerical semigroup の具体例を提示したことになる. さらに, 先行研究の結果である事実 1.3 と主定理 1.5 を合わせることで次の主張が得られる.

定理 1.6. S を $\mathrm{e}(S) = 3$ をみたす任意の numerical semigroup とする. このとき, ある単項式順序 $<$ が存在して,

$$\mu(I_S) = \mu(\mathrm{in}_<(I_S))$$

が成り立つ.

本稿では主定理の証明に用いた Buchberger 判定法及び $\mathrm{e}(S) = 3$ の numerical semigroup についての基本事項を確認し, 主定理の証明を述べる.

2 準備

2.1 グレブナー基底

この節では, [4, 5] を参考にして, グレブナー基底の基本事項について述べる. 多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ の単項式全体の集合 $\mathcal{M}$ における全順序 $<$ が次の性質をみたすとき, $<$ を $k[x_1, \ldots, x_n]$ の単項式順序という:

(1) $u \in \mathcal{M}, u \neq 1 \Rightarrow 1 < u$;

(2) $u, v, w \in \mathcal{M}, u < v \Rightarrow uw < vw$.

単項式順序としては次のような例があり, 主定理では重み順序を用いた.

例 2.1 (純辞書式順序 $(x_{i_1} > \cdots > x_{i_n})$)**.** 単項式 $\boldsymbol{x^a}$ と $\boldsymbol{x^b}$ について, 「ベクトル $(b_{i_1} - a_{i_1}, \ldots, b_{i_n} - a_{i_n})$ の最も左にある 0 でない成分が正」であるとき, $\boldsymbol{x^a} <_{\text{purelex}} \boldsymbol{x^b}$ であると定義する. すると, $<_{\text{purelex}}$ は $k[x_1, \ldots, x_n]$ の単項式順序であって, 純辞書式順序 (pure lexicographic order) と呼ばれる.

例 2.2 (重み順序)**.** $<$ を $k[x_1, \ldots, x_n]$ の単項式順序, $\boldsymbol{w} \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ を重みベクトルとする. 単項式 $\boldsymbol{x^a}$ と $\boldsymbol{x^b}$ について, 「$\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{a} \rangle < \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{b} \rangle$」であるか, または「$\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{a} \rangle = \langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{b} \rangle$ かつ $\boldsymbol{x^a} < \boldsymbol{x^b}$」であるとき, $\boldsymbol{x^a} <_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{x^b}$ であると定義する. すると, $<_{\boldsymbol{w}}$ は $k[x_1, \ldots, x_n]$ の単項式順序であって, **重み順序**と呼ばれる. ただし, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の内積であるとする.

$<$ を単項式順序とする. 多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ の任意の多項式 $f \neq 0$ について, f に現れる単項式のなかで $<$ に関して最大のものを f の $<$ に関するイニシャル単項式 (initial monomial) と呼び, $\text{in}_<(f)$ と表す. また, 多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ の任意のイデアル $I \neq 0$ から得られる単項式イデアル

$$\text{in}_<(I) = \langle \{\text{in}_<(f) : 0 \neq f \in I\} \rangle$$

を I の $<$ に関するイニシャルイデアル (initial ideal) と呼ぶ.

定義 2.3. $<$ を単項式順序とする. $k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアル $I \neq 0$ について, I に属する 0 ではない多項式の有限集合 $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ が $<$ に関する I の**グレブナー基底** (**Gröbner basis**) であるとは, $\text{in}_<(I) = \langle \text{in}_<(g_1), \ldots, \text{in}_<(g_s) \rangle$ が成立するときをいう.

$\mathcal{G}$ が $<$ に関する I のグレブナー基底であるならば $\mathcal{G}$ は I の生成系であることが知られている.

定義 2.4. $<$ を単項式順序, $I \neq 0$ を多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルとする. I の $<$ に関するグレブナー基底 $\{g_1, \ldots, g_s\}$ が**被約グレブナー基底**であるとは, 次の条件をみたすときにいう:

(1) g_i における $\text{in}_<(g_i)$ の係数は 1 である $(i = 1 \ldots, s)$;

(2) $i \neq j$ のとき, g_j に現れる単項式は $\text{in}_<(g_i)$ で割り切れない.

注意 2.5. $<$ を単項式順序, $I \neq 0$ を多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルとする. さらに, $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ を I の $<$ に関する被約グレブナー基底とする. このとき, $\{\text{in}_<(g_1), \ldots, \text{in}_<(g_s)\}$ は $\text{in}_<(I)$ の単項式からなる生成系の中で極小である. 特に,

$$|\mathcal{G}| = \mu(\text{in}_<(I))$$

が成り立つ. ただし, $\mu(\text{in}_<(I))$ は $\text{in}_<(I)$ の単項式からなる一意的な極小生成系の濃度である.

また, 二項式イデアル I の $<$ に関する被約グレブナー基底は二項式からなることが知られている.

注意 2.6. $<$ を単項式順序, I を多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ の二項式イデアルとする. このとき, I の $<$ に関する被約グレブナー基底 $\mathcal{G}$ について, 注意 2.5 より $\mu(I) \leq \mu(\text{in}_<(I))$ が成り立つ.

命題 2.7 (割り算アルゴリズム)**.** 多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ における単項式順序 $<$ を固定し, $g_1, \ldots, g_s$ を 0 と異なる $k[x_1, \ldots, x_n]$ の多項式とする. このとき, 任意の多項式 $0 \neq f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ について次の表示 (f の $g_1, \ldots, g_s$ に関する標準表示と呼ぶ) が存在する:

$$f = f_1 g_1 + \cdots + f_s g_s + f', \quad f_1, \ldots, f_s, f' \in k[x_1, \ldots, x_n].$$

ただし,

(1) $f' \neq 0$ のとき, f' に現れる単項式は $\mathrm{in}_<(g_1), \ldots, \mathrm{in}_<(g_s)$ のいずれでも割り切れない. 言い換えると, f' に現れる任意の単項式は $k[x_1, \ldots, x_n]$ の単項式イデアル $\langle \mathrm{in}_<(g_1), \ldots, \mathrm{in}_<(g_s) \rangle$ に属さない. (f' を f の $\mathrm{in}_<(g_1), \ldots, \mathrm{in}_<(g_s)$ に関する割り算の余りと呼ぶ.)

(2) $f_i g_i \neq 0$ ならば $\mathrm{in}_<(f_i g_i)$ は $<$ に関して $\mathrm{in}_<(f)$ を超えない, つまり

$$\mathrm{in}_<(f_i g_i) \leq \mathrm{in}_<(f)$$

である.

多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ に属する 0 ではない多項式 f と g について, $\mathrm{in}_<(f)$ と $\mathrm{in}_<(g)$ の最小公倍単項式を $m(f,g)$, f における $\mathrm{in}_<(f)$ の係数を c_f, g における $\mathrm{in}_<(g)$ の係数を c_g と書くことにする. このとき, f と g の S 多項式 $S(f,g)$ を

$$S(f,g) = \frac{m(f,g)}{c_f \mathrm{in}_<(f)} f - \frac{m(f,g)}{c_g \mathrm{in}_<(g)} g$$

と定義する. 一般に, 割り算アルゴリズムにおいて, $f' = 0$ となる標準表示が存在するとき, f は $g_1, \ldots, g_s$ に関して **0 に簡約可能**であるということにする.

次に紹介する Buchberger 判定法を用いることで, イデアルの生成系がグレブナー基底になるか判定することができる.

命題 2.8 (Buchberger 判定法). 多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアル $I \neq 0$ の生成系 $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ を固定する. このとき, $\mathcal{G}$ が I のグレブナー基底となるためには次の条件がみたされることが必要十分条件である:

($*$) 任意の $i \neq j$ について $S(g_i, g_j)$ は $g_1, \ldots, g_s$ に関して 0 に簡約可能である.

次の補題を適用できる場合では, Buchberger 判定法をより簡単に行うことができる.

補題 2.9. 多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ に属する 0 と異なる多項式 f と g について, $\mathrm{in}_<(f)$ と $\mathrm{in}_<(g)$ が互いに素であるならば, $S(f,g)$ は f, g に関して 0 に簡約可能である.

2.2 $\mathrm{e}(S) = 3$ の numerical semigroup

この節では, 主定理の証明に必要な $\mathrm{e}(S) = 3$ の numerical semigroup についての結果を [3] を参考にして紹介する.

以下, S を $\langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ を極小生成系にもつ numerical semigroup とする. 主定理の証明に必要な結果を述べるために次の記号を準備する.

$$\begin{aligned} c_1 &\coloneqq \min\{x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : xn_1 \in \langle n_2, n_3 \rangle\}, \\ c_2 &\coloneqq \min\{x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : xn_2 \in \langle n_1, n_3 \rangle\}, \\ c_3 &\coloneqq \min\{x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : xn_3 \in \langle n_1, n_2 \rangle\}. \end{aligned}$$

このとき, $r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{23}, r_{31}, r_{32} \in \mathbb{N}$ が存在して,

$$\begin{aligned} c_1 n_1 &= r_{12} n_2 + r_{13} n_3, \\ c_2 n_2 &= r_{21} n_1 + r_{23} n_3, \\ c_3 n_3 &= r_{31} n_1 + r_{32} n_2 \end{aligned}$$

と表せる. さらに,

$$f_1 = x_1^{c_1} - x_2^{r_{12}} x_3^{r_{13}},$$
$$f_2 = x_2^{c_2} - x_1^{r_{21}} x_3^{r_{23}},$$
$$f_3 = x_3^{c_3} - x_1^{r_{31}} x_2^{r_{32}}$$

とおく. このとき, 次の結果が知られている.

事実 2.10 (Herzog [3, Theorem 3.10])**.** 次の条件は同値である:

(1) S は complete intersection である;

(2) S は free である.

事実 2.11 (Herzog [3, Theorem 3.8])**.** $i \neq j$ $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ が存在して $r_{ij} = 0$ ならば, S は complete intersection である.

事実 2.12 (Herzog [3, Proposition 3.2])**.** 任意の $i \neq j$ $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ について $r_{ij} > 0$ とする. このとき, $\{i, j, k\} \in \{1, 2, 3\}$ について,

$$c_i = r_{ji} + r_{ki}$$

が成り立つ.

事実 2.13 (Herzog [3, Theorem 3.8])**.** 任意の $i \neq j$ $(i, j \in \{1, 2, 3\})$ について $r_{ij} > 0$ ならば, $\{f_1, f_2, f_3\}$ は I_S の極小生成系となる. 特に, S は complete intersection ではない.

3 主定理の証明

この節では, $\mathrm{e}(S) = 3$ の free でない numerical semigroup が問題 1.4 の性質をみたすことを示す.

主定理 1.5 の証明. S は free ではないので, 事実 2.10 より S は complete intersection ではない. よって, 事実 2.11 より

$$r_{12}, r_{13}, r_{21}, r_{23}, r_{31}, r_{32} > 0 \tag{1}$$

である. さらに, 事実 2.12 より

$$\begin{aligned} c_1 &= r_{21} + r_{31}, \\ c_2 &= r_{12} + r_{32}, \\ c_3 &= r_{13} + r_{23} \end{aligned} \tag{2}$$

が成り立つ. このとき, $c_3 \leq c_2 \leq c_1$ としても一般性を失わない. ここで,

$$\boldsymbol{w} \coloneqq \begin{pmatrix} c_2 \\ c_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく. 単項式順序 $<$ を一つ選ぶと, $\boldsymbol{w}$ をもちいて重み順序 $<_{\boldsymbol{w}}$ をつくれる. はじめに, $\mathrm{in}_{<_{\boldsymbol{w}}}(f_1) = x_1^{c_1}, \mathrm{in}_{<_{\boldsymbol{w}}}(f_2) = x_2^{c_2}, \mathrm{in}_{<_{\boldsymbol{w}}}(f_3) = x_1^{r_{31}}x_2^{r_{32}}$ を示す. 式 (1), 式 (2) より,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\0\\0\end{pmatrix} - \boldsymbol{w}\cdot\begin{pmatrix}0\\r_{12}\\r_{13}\end{pmatrix} &= c_2c_1 - (c_1r_{12} + 1\cdot r_{13})\\
&= (c_2 - r_{12})c_1 - r_{13}\\
&= r_{32}c_1 - r_{13}\\
&\geq c_1 - r_{13}\\
&\geq c_3 - r_{13}\\
&> r_{23}\\
&> 0,\\
\boldsymbol{w}\cdot\begin{pmatrix}0\\c_2\\0\end{pmatrix} - \boldsymbol{w}\cdot\begin{pmatrix}r_{21}\\0\\r_{23}\end{pmatrix} &= c_1c_2 - (c_2r_{21} + 1\cdot r_{23})\\
&= (c_1 - r_{21})c_2 - r_{23}\\
&= r_{31}c_2 - r_{23}\\
&\geq r_{31}c_3 - r_{23}\\
&= r_{31}(r_{13} + r_{23}) - r_{23}\\
&= r_{23}(r_{31} - 1) + r_{31}r_{13}\\
&> 0,\\
\boldsymbol{w}\cdot\begin{pmatrix}r_{31}\\r_{32}\\0\end{pmatrix} - \boldsymbol{w}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\c_3\end{pmatrix} &= (c_2r_{31} + c_1r_{32}) - c_3\\
&\geq (c_3r_{31} + c_3r_{32}) - c_3\\
&= (r_{31} + r_{32} - 1)c_3\\
&> 0
\end{aligned}$$

である. よって, $\mathrm{in}_{<_{\boldsymbol{w}}}(f_1) = x_1^{c_1}, \mathrm{in}_{<_{\boldsymbol{w}}}(f_2) = x_2^{c_2}, \mathrm{in}_{<_{\boldsymbol{w}}}(f_3) = x_1^{r_{31}}x_2^{r_{32}}$ が成り立つ. 次に, $\{f_1, f_2, f_3\}$ は I_S の $<_{\boldsymbol{w}}$ に関するグレブナー基底であることを示す. 事実 2.13 より, $I_S = \langle f_1, f_2, f_3\rangle$ であることに注意する. Buchberger 判定法 2.8 を用いて考える. 補題 2.9 より $S(f_1, f_2)$ が f_1, f_2, f_3 に関して 0 に簡約可能であることは明らか. $S(f_1, f_3), S(f_2, f_3)$ が f_1, f_2, f_3 に関して 0 に簡約可能であることは,

$$\begin{aligned}
S(f_1, f_3) &= -x_3^{r_{13}}f_2,\\
S(f_2, f_3) &= -x_3^{r_{23}}f_1
\end{aligned}$$

よりわかる. よって, $\{f_1, f_2, f_3\}$ は I_S の $<_{\mathrm{w}}$ に関するグレブナー基底となる. さらに, 式 (1), 式 (2) より $\{f_1, f_2, -f_3\}$ は I_S の $<_{\boldsymbol{w}}$ に関する被約グレブナー基底となる. よって, 注意 2.5, 注意 2.6, 事実 2.13 より,

$$3 = \mu(I_S) \leq \mu(\mathrm{in}_{<_{\boldsymbol{w}}}(I_S)) = 3$$

となるので, $\mu(I_S) = \mu(\mathrm{in}_{<_{\boldsymbol{w}}}(I_S)) = 3$ が成り立つ. ■

参考文献

[1] Ignacio García-Marco and Christos Tatakis. On robustness and related properties on toric ideals. *Journal of Algebraic Combinatorics*, Vol. 57, No. 1, pp. 21–52, 2023.

[2] Philippe Gimenez, Indranath Sengupta, and Hema Srinivasan. Minimal graded free resolutions for monomial curves defined by arithmetic sequences. *Journal of Algebra*, Vol. 388, pp. 294–310, 2013.

[3] Jürgen Herzog. Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings. *Manuscripta Mathematica*, Vol. 3, pp. 175–193, 1970.

[4] JST CREST 日比チーム. グレブナー道場. 2011.

[5] 日比孝之. グレブナー基底. 2003.

Decision problem on interactions

慶應義塾大学 理工学研究科 基礎理工学専攻
和知秀忠 (Hidetada WACHI) *

概要

相互作用とは、隣接するサイト上の状態の変化を記述する有向対称グラフのことである. 近年、坂内-亀谷-佐々田 [1] や坂内-佐々田 [3] の研究で、相互作用として記述されるミクロモデルに対して、流体力学極限の証明に重要な Varadhan の分解定理の証明が与えられた. これら研究では、相互作用が irreducibly quantified という条件を満たすことが重要である. 本研究では、古典的な流体力学極限の研究で扱われていなかった、これらの理論に適用できる新たな相互作用の例は与えるために、相互作用が irreducibly quantified であることを判定するアルゴリズムを、可換半群の問題に帰着させることで構成した.

1 導入

流体力学極限とは、マクロな決定論的偏微分方程式をミクロな確率論的な大規模相互作用系の極限として記述する数学的手法のことである. 古典的な先行研究においては、流体力学極限を証明するにあたって、ミクロな大規模相互作用系のモデルごとの特性に依存した個別具体的なアプローチが必要であったが、近年、一般のモデルに対して適用できる公理的な枠組みを構成する研究がなされている. 例えば、坂内-亀谷-佐々田 [1] や坂内-佐々田 [3] は、一般的なミクロな大規模相互作用系に対して、流体力学極限の証明に重要な Varadhan の分解定理の証明を与えた. さらに、最近、坂内-佐々田 [4] では、上の研究において大規模相互作用系を記述していた相互作用と呼ばれる対象を一般化することで、坂内-亀谷-佐々田 [1] の研究の部分的な拡張を得ている.

Definition 1.1. S を有限集合とする. 組 (S,ϕ) が S 上の相互作用であるとは、$\phi \subset (S\times S)\times(S\times S)$ であって、$(S\times S,\phi)$ が対称有向グラフであることをいう. すなわち、任意の $s,s'\in S$ に対して、$(s,s')\in\phi$ ならば $(s',s)\in\phi$ が成立することである. また、S をこの相互作用 (S,ϕ) の状態空間と呼ぶ.

Example 1.2. $\kappa\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定する. $S:=\{0,1,,\dots,\kappa\}$ とおく.

1. 部分集合 $\phi_{\kappa\text{-ex}}\subset(S\times S)\times(S\times S)$ を

$$\phi_{\kappa\text{-ex}}:=\{((j,k),(j-1,k+1)),((j-1,k+1),(j,k))\mid 0<j\leq\kappa, 0\leq k<\kappa\}$$

と定義する. このとき、相互作用 $(S,\phi_{\kappa\text{-ex}})$ を状態空間 S 上の generalized exclusion interaction

* E-mail:wachi213@keio.jp

と呼ぶ.

2. 部分集合 $\phi_{\kappa\text{-ms}} \subset (S \times S) \times (S \times S)$ を

$$\phi_{\kappa\text{-ms}} := \{((j,k),(k,j)) \mid 0 \leq j,k \leq \kappa,\ j \neq k\}$$

と定義する. このとき、相互作用 $(S, \phi_{\kappa\text{-ms}})$ を状態空間 S 上の multi species exclusion interaction と呼ぶ.

その他の例に関しては、[2] を参照されたい.

流体力学極限の理論においては、保存量という概念が重要である. 写像 $\xi : S \to \mathbb{R}$ が相互作用 (S,ϕ) の保存量であるとは、任意の $((s,t),(s',t')) \in \phi$ に対して、

$$\xi(s) + \xi(t) = \xi(s') + \xi(t') \tag{1}$$

を満たすことをいう. ここで、任意の定数関数は保存量であることに注意されたい. そのため、$\mathrm{Consv}^{\phi}(S)$ を保存量からなる $\mathbb{R}$-ベクトル空間を定数関数で貼られる部分ベクトル空間で割って得られる商ベクトル空間と定義する. 坂内-高力-佐々田-和知-山本 [2] では、相互作用の保存量を用いた分類理論を与えている.

Example 1.3. $S := \{0,1,,\dots,\kappa\}$ とおく. 任意の $i \in S$ に対して、$\xi_i : S \to \mathbb{R}$ を $\xi_i(j) := \delta_{ij}$ と定義する.

1. 相互作用 $(S, \phi_{\kappa\text{-ex}})$ に対して、$\mathrm{Cosnv}^{\phi_{\kappa\text{-ex}}}(S)$ は $\sum_{i=1}^{\kappa} \xi_i$ で張られる.
2. 相互作用 $(S, \phi_{\kappa\text{-ms}})$ に対して、$\mathrm{Cosnv}^{\phi_{\kappa\text{-ms}}}(S)$ は $\xi_1,\dots,\xi_\kappa$ で張られる.

保存量は任意の任意の $((s,t),(s',t')) \in \phi$ に対して、式 (1) を満たす解を求めれば良いので、線形代数によって $\mathrm{Consv}^{\phi}(S)$ の基底は計算することができる. 特に、自然数ベクトルによる基底が取れることに注意されたい.

坂内-亀谷-佐々田 [1] や坂内-佐々田 [3] では、irreducibly quantified という条件が証明に必要であった. そこで、次に、irreducibly quantified な相互作用を定義する. 任意の (X,E) を有限連結対称有向グラフと保存量 ξ に対して、写像 $\xi_X : S^X \to \mathbb{R}$ を

$$\xi_X(\eta) := \sum_{x \in X} \xi(\eta_x), \quad \eta = (\eta_x)_{x \in X} \in S^X$$

で定義する. ここで、$\Phi_E \subset S^X \times S^X$ を

$$\Phi_E := \{(\eta,\eta') \in S^X \times S^X \mid \exists x,y \in X,\ ((\eta_x,\eta_y),(\eta'_x,\eta'_y)) \in \phi,\ \forall z \neq x,y\ \eta_z = \eta'_z\}$$

と定義する.

Definition 1.4. 相互作用 (S,ϕ) が irreducibly quantified であるとは、次の条件を満たすことをいう; 任意の有限連結対称有向グラフ (X,E) に対して、任意の $\eta,\eta' \in S^X$ が任意の保存量 ξ に対して $\xi_X(\eta) = \xi_X(\eta')$ を満たすならば、η と η' はグラフ (S^X,Φ_E) において同じ連結成分に属している.

相互作用 (S, ϕ) が irreducibly quantified であることは、任意の有限連結対称有効グラフ (X, E) に対して、(S^X, Φ_E) の連結成分がその連結成分に含まれる点の保存量によって、完全に決定されていることを意味している.

流体力学極限の先行研究において扱われているモデルの多くは、irreducibly quantified な相互作用として記述される. 例えば、Kipnis-Landim-Olla [6] にて研究されている generalized exclusion interaction は、irreducibly quantified であることが知られている. また、Nagahata [7] で扱われている lattice gas with energy も irreducibly quantified な相互作用の例である.

Lemma 1.5 ([2, Example 2.10, Proposition 2.19])**.** *Example 1.2* にある *generalized exclusion interaction* と *multi species interaction* は、ともに *irreducibly quantified* である. また、*lattice gas with energy* も *irreducibly quantified* な相互作用である.

ここで、先行研究では扱われてこなかった相互作用のうちで、内-亀谷-佐々田 [1] や坂内-佐々田 [3] の理論に適用可能な例を挙げることを考えたい. そのためには、与えられた相互作用が、irreducibly quantified であるかどうかを判定するアルゴリズムが必要である. [2, Proposition 2.19] では、Lemma 1.5 に挙げた例のほかにもいくつかの相互作用が irreducibly quantified であることを示しているが、その証明はモデルに強く依存した形になっており、一般の相互作用に対して、irreducibly quantified であるかどうかを判定する手法が与えている訳ではない. そこで、本研究では、与えられた相互作用が irreducibly quantified であるかどうかを判定するアルゴリズムを構成した. 本研究の主結果は次のとおりである.

Theorem 1.6. 与えられた相互作用 (S, ϕ) が *irreducibly quantified* であるかという問題は、決定可能である.

これによって、計算機を用いることで、坂内-亀谷-佐々田 [1] や坂内-佐々田 [3] の理論に適用可能な相互作用を列挙することが可能になった. 本レポートの最後に、S のサイズが 5 の場合の irreducibly quantified な相互作用のリストを掲載している.

2 証明のアイデア

この節では、Theorem 1.6 の証明のアイデアについて解説する. そのために、exchangeable な相互作用と separable な相互作用を定義する.

Definition 2.1. (S, ϕ) を相互作用とする.

1. (S, ϕ) が exchangeable であるとは、任意の $s, s' \in S$ に対して、(s, s') と (s', s) が有向グラフ $(S \times S, \phi)$ において、同じ連結成分に含まれることをいう.
2. (S, ϕ) が separable であるとは、任意の $s, s' \in S$ が、任意の保存量 ξ に対して $\xi(s) = \xi(s')$ を満たすならば、$s = s'$ が成立することをいう.

相互作用 (s, ϕ) が irreducibly quantified であるならば、(S, ϕ) は exchangeable かつ separable である. 実際、有限連結対称有向グラフとして、それぞれ、2 頂点、1 頂点のものを考えることで、

irreducibly quantified であることから、exchangeable、separable であることが導かれる. また、相互作用 (S, ϕ) が exchangeable かつ separable であることは、状態空間 S が有限であることから、計算機によって検証可能であることに注意されたい. したがって、以下では、相互作用 (S, ϕ) は exchangeable かつ seprable であると仮定して良い.

ここで、次のような n 頂点対称有向グラフ

$$\circ \leftrightarrow \circ \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \circ$$

を考える. すなわち、$X_n := \{1, \ldots, n\}$, $E := \{(i, i+1), (i+1, i) \mid 1 \leq i < n\}$ で定義される有向グラフ (X, E) である. このとき、任意の $(\eta, \eta') \in \Phi_E$ は、$i \in \{1, \ldots, n-1\}$ を $((\eta_i, \eta_{i+1}), (\eta'_i, \eta'_{i+1})) \in \phi$ を満たすように取ると、

$$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_i, \eta_{i+1}, \ldots, \eta_n) \to (\eta_1, \ldots, \eta'_i, \eta'_{i+1}, \ldots, \eta_n) = \eta'$$

という変換だと見做せる. したがって、任意の $s \in S$ に対して x_s を対応する形式的な変数だとすると $(\eta, \eta') \in \Phi_E$ は、

$$x_{\eta_1} \cdots x_{\eta_i} x_{\eta_{i+1}} \cdots x_{\eta_n} \to x_{\eta_1} \cdots x_{\eta'_i} x_{\eta'_{i+1}} \cdots x_{\eta_n}$$

という語の変換だと解釈することができる. そこで、次のような半群

$$M(S, \phi) := \langle x_s,\ s \in S \mid \forall ((s, t), (s', t')) \in \phi,\ x_s x_t = x_{s'} x_{t'} \rangle$$

を考えることにする. もし、相互作用 (S, ϕ) が exchangeble であるときには、この半群は可換であることに注意されたい.

次に、相互作用の保存量と半群の準同型を関連付ける. 任意の保存量 ξ に対して、写像 $\xi_M : M(S, \phi) \to \mathbb{R}$ を

$$\xi_M(x_{s_1} \ldots x_{s_m}) := \xi(s_1) + \cdots + \xi(s_m)$$

と定義すると、これは well-defined は準同型 $\xi_M : M(S, \phi) \to \mathbb{R}_+$ である. ここで、$\mathbb{R}_+$ は $\mathbb{R}$ に加法を演算として入れた半群である. この対応によって、次の同型が得られる.

Lemma 2.2 ([9, Lemma 3.4])**.** 相互作用 (S, ϕ) に対して、上の対応 $\xi \mapsto \xi_M$ によって、ベクトル空間としての同型

$$\{ \text{保存量} \} \cong \mathrm{Hom}(M(S, \phi), \mathbb{R})$$

が誘導される.

以上のことから、$\mathrm{Consv}^\phi(S)$ の自然数ベクトルによる基底が取れたことを思い出すと、相互作用 (S, ϕ) が irreducibly quantified であるとき、任意の $x, y \in M(S, \phi)$ が、任意の準同型 $f : M(S, \phi) \to \mathbb{R}$ に対して、$f(x) = f(y)$ を満たすならば、$x = y$ が成立することがわかる. このことは、可換半群 $M(S, \phi)$ が cancellative かつ power-cancellative であることと同値である。

Definition 2.3. 可換半群 M が cancellative であるとは、任意の $a \in M$ について、任意の $b, c \in M$ に対して、$ab = ac$ ならば $b = c$ が成立することをいう. また、可換半群 M が power-cancellative であるとは、任意の $a, b \in M$ に対して、ある $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ が存在して、$a^n = b^n$ ならば $a = b$ が成立することをいう.

Proposition 2.4 ([5, II, Corollary 7.4])**.** 単位元を持たない有限生成可換半群 M が *cancellative* かつ *power-cancellative* であることと、ある有限個の準同型 $f_i : M \to \mathbb{N}_+$, $i = 1, \ldots, m$ が存在して、任意の元 $x, y \in M$ について、任意の i に対して、$f_i(x) = f_i(y)$ ならば $x = y$ が成立することは同値である.

したがって、相互作用 (S, ϕ) が irreducibly quantified であることから、可換半群 $M(S, \phi)$ が cancellative かつ power-cancellative であることが従うが、実は、この逆も成立する.

Theorem 2.5 ([9, Theorem 3.7])**.** 相互作用 (S, ϕ) が *irreducibly quantified* であることと、可換半群 $M(S, \phi)$ が *cancellative* かつ *power-cancellative* であることは同値である.

さらに、有限表示可換半群 M が cancellative かつ power-cancellative であることは、決定可能命題である. 実際、次の命題が知られている.

Theorem 2.6 ([8, Theorem 5.8])**.** 有限表示可換半群 M が *cancellative* であるかは決定可能である.

また、cancellative な可換半群はアーベル群に埋め込むことができる. そのため、与えられた cancellative な可換半群が power-cancellative であるかどうかは、単因子論を用いることで確かめることができる. 以上のことから、与えられた相互作用 (S, ϕ) が irreducibly quantified であるかは決定可能であることがわかった.

3 相互作用のリスト

最後に状態空間 S のサイズが 5 である相互作用のリスト Figure 1 を与える. このリストでは、[2] の保存量による相互作用の分類にしたがっている.

Definition 3.1. 二つの相互作用 $(S, \phi), (S', \phi')$ が等しいとは、ある全単射 $S \cong S'$ が存在して、誘導される写像 $\mathrm{Map}(S', \mathbb{R}) \cong \mathrm{Map}(S, \mathbb{R})$ がベクトル空間の同型 $\mathrm{Consv}^{\phi'}(S') \cong \mathrm{Consv}^{\phi}(S)$ を誘導することをいう.

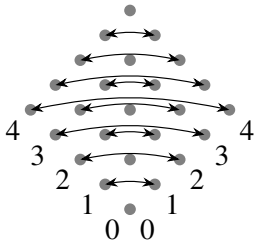
ある相互作用 (S, ϕ) が、irreducibly qunatified である相互作用と等しいとしても、(S, ϕ) 自身が irreducibly quantified であるとは限らないことに注意されたい. しかし、このリストに載っている相互作用はすべて irreucibly quantified であり、任意の状態空間のサイズが 5 の irreducibly quantified な相互作用は、このリスト Figure 1 のうちのいずれかと等しい.

4 謝辞

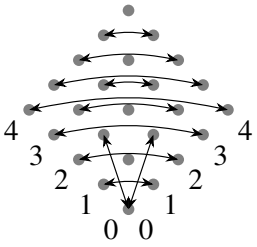
本研究は理研の大学院生リサーチ・アソシエイト制度の下での成果です。

参考文献

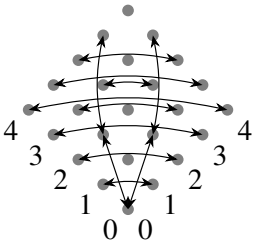
[1] K. Bannai, Y. Kametani, and M. Sasada, Topological structures of large-scale interacting systems via uniform functions and forms, Forum Math. Sigma **12** (2024), Paper No. e107, DOI



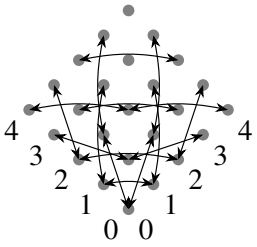
(a) $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$



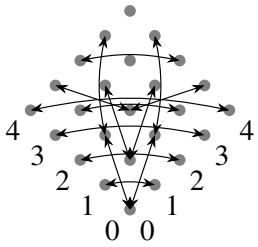
(b) $\xi_1 - \xi_2, \xi_3, \xi_4$



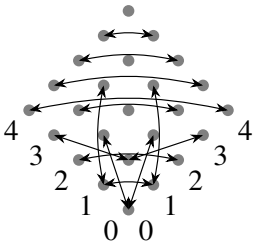
(c) $\xi_1 - \xi_2, \xi_3 - \xi_4$



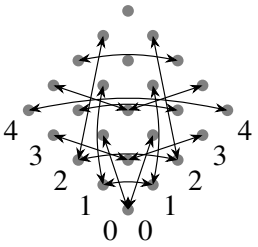
(d) $\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 - 2\xi_4$



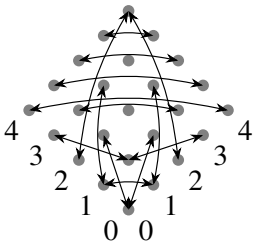
(e) $\xi_1 - \xi_2 + 3\xi_3 - 3\xi_4$



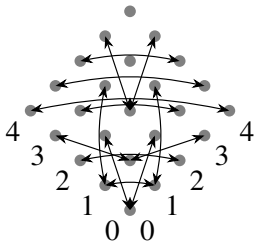
(f) $\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3, \xi_4$



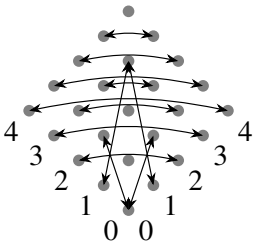
(g) $\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 - 3\xi_4$



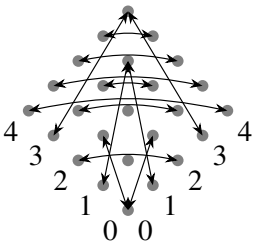
(h) $2\xi_1 - 2\xi_2 + 4\xi_3 - \xi_4$



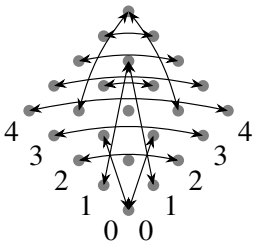
(i) $\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 - 4\xi_4$



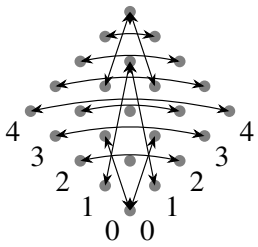
(j) $2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_3, 2\xi_4$



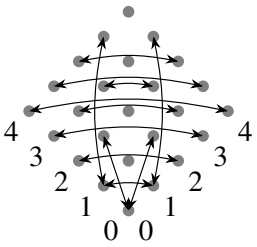
(k) $4\xi_1 - 4\xi_2 + 2\xi_3 + \xi_4$



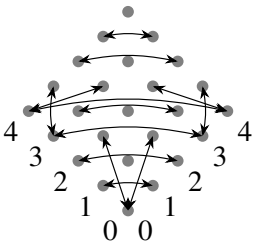
(l) $4\xi_1 - 4\xi_2 + 2\xi_3 + 3\xi_4$



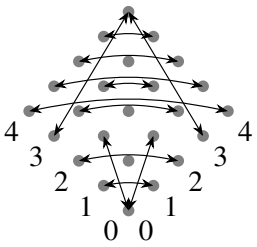
(m) $4\xi_1 - 4\xi_2 + 2\xi_3 - \xi_4$



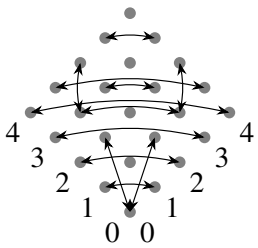
(n) $\xi_1 - \xi_2 + \xi_4, \xi_3 - \xi_4$



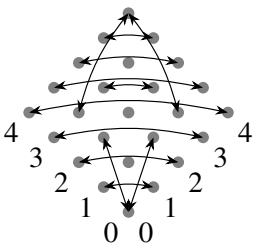
(o) $\xi_1 - \xi_2 - \xi_4, \xi_3 + \xi_4$



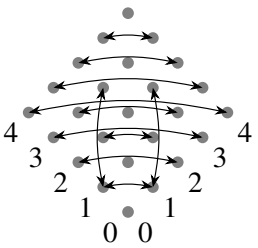
(p) $\xi_1 - \xi_2, 2\xi_3 + \xi_4$



(q) $\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_4, \xi_3 + \xi_4$



(r) $2\xi_1 - 2\xi_2 + \xi_4, 2\xi_3 + \xi_4$



(s) $\xi_1 + \xi_3, \xi_2 - \xi_3, \xi_4$

図 1: Irreducibly quantified interactions for $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

10.1017/fms.2024.61. MR4831143

[2] K. Bannai, J. Koriki, M. Sasada, H. Wachi, and S. Yamamoto, *On interactions for large-scale interacting system*. arXiv:2410.06778.

[3] K. Bannai and M. Sasada, *Varadhan' s Decomposition of Shift-Invariant Closed L^2-forms for large-scale Interacting Systems on the Euclidean Lattice*. arXiv:2111.08934.

[4] K. Bannai and M. Sasada, *On Uniform Functions on Configuration Spaces of large-scale Interacting Systems*. arXiv:2408.12886.

[5] P. A. Grillet, *Commutative semigroups*, Advances in Mathematics (Dordrecht), vol. 2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001. MR2017849

[6] C. Kipnis, C. Landim, and S. Olla, *Hydrodynamical limit for a nongradient system: the generalized symmetric exclusion process*, Comm. Pure Appl. Math. **47** (1994), no. 11, 1475–1545, DOI 10.1002/cpa.3160471104. MR1296786

[7] Y. Nagahata, *Fluctuation dissipation equation for lattice gas with energy*, J. Statist. Phys. **110** (2003), no. 1-2, 219–246, DOI 10.1023/A:1021022829221. MR1966328

[8] P. Narendran and C. Ó'Dúnlaing, *Cancellativity in finitely presented semigroups*, J. Symbolic Comput. **7** (1989), no. 5, 457–472, DOI 10.1016/S0747-7171(89)80028-8. MR0999514

[9] H. Wachi *Decision problem on interactions*. arXiv:2410.11292.

Verification of Ramanujan Property for Pair Graphs obtained from Symmetric Groups

Division of Mathematics and Mathematical Science
Department of Computer Science and Engineering
Graduate School of Engineering
Nagoya Institute of Technology
JIANG Zheng(蒋 峥) *

Abstract

A Ramanujan graph is a sparse graph with high connectivity. In other words, it is a graph whose spectral gap is as large as possible. Its concrete construction has so far involved deep mathematical theories such as number theory, representation theory, algebraic geometry, and other fields. In 2016, Cid Reyes-Bustos constructed the pair graph from a pair of a group and its subgroup, and examined the Ramanujan property for the pair graph. In this talk, I will present the results of numerical calculations on pair graphs obtained from pairs of the symmetric group S_n and the alternating group A_n. For $3 \leq n \leq 10$, we discovered many 3-regular Ramanujan graphs.

1 Introduction

Ramanujan graph is a type of sparse graph whose connectivity is very good. In other words, it is such a type of graph with its spectrum gap as large as possible. Let $G = (V, E)$ be a graph, where V is the set of vertices and E is the set of edges. G can be completely represented by its adjacency matrix A algebraically. It is indexed by vertices of G. When G has n vertices, A is an $n \times n$ symmetric matrix whose element A_{xy} is the number of edges between x and y. A has n real eigenvalues and we list them in decreasing order according to multiplicities:

$$\mu_0 \geq \mu_1 \geq ... \geq \mu_{n-1}.$$

If G is connected and k-regular, it is known that

$$k = \mu_0 > \mu_1 \geq ... \geq \mu_{n-1} \geq -k.$$

When G is a bipartite graph, $\mu_{n-1} = -k$. We say that G is a *Ramanujan graph* if $|\mu_i| \leq 2\sqrt{k-1}$ for all $\mu_i \neq \pm k$. When G is bipartite, G is a Ramanujan graph if $\mu_1 \leq 2\sqrt{k-1}$. It is known that a regular graph is Ramanujan if and only if its Ihara zeta function satisfies an analog of the Riemann hypothesis [11].

In 1988, Margulis [7], Lubotzky, Phillips and Sarnak [5] independently gave the explicit construction of Ramanujan graphs for a fixed k and $n \to \infty$ in the case $k-1$ is prime. They constructed Ramanujan graphs as Cayley graphs of certain groups, and to investigate the spectrum, they used different branches of mathematics such as number theory, representation theory and algebraic geometry, cf. [9]. In 1994, Morgenstern [8] extended the result of [5] to the case

*E-mail:jiangzhengszkj@outlook.com

where $k-1$ is a prime power. In 2015, Marcus, Spielman and Srivastava [6] proved that there exist infinite families of regular bipartite Ramanujan graphs of every degree greater than 2. As is well known, expanders (see Definition 2.4 below) have many applications in computer science, and Ramanujan graphs are in some sense the best expanders, so they are also very useful in some situations where expanders are needed. For example, Ramanujan graphs of Pizer has been proposed as a basis for post-quantum elliptic-curve cryptography [3]. Ramanujan graphs can also be used to construct expander codes for good error correcting codes [1]. In addition, Lubetzky and Peres [4] proved that the simple random walk exhibits cutoff phenomenon on all Ramanujan graphs. This result depends strongly on the fact that these graphs are Ramanujan graphs and not just expanders.

Group-subgroup pair graphs were first proposed by Cid Reyes-Bustos [10]. A group-subgroup pair graph is constructed from a group G, a subgroup $H \subset G$, and a subset $S \subset G$. When the group G and its subgroup H are the same group, the definition reduces to that of a Cayley graph. A group-subgroup pair graph can become a Ramanujan graph if it satisfies certain conditions, which will be the core of our study. We see some examples which are the pair graphs constructed from symmetric group S_n and alternating group A_n in [10].

We consider the problem whether the group-subgroup pair graphs obtained from S_n and A_n are Ramanujan graphs or not. It turns out that the case $n = 3$ is easy. In the case $n = 4$, we compute eigenvalues of the pair graphs for all S with $|S| \leq 4$ and a few S with $|S| = 5$. We think our computations have settled the problem for $n = 4$, though we have no rigorous proof at present. Because of the increase of both the number of subsets S and vertices of the pair graph $\mathcal{G}(G, H, S)$ when $n \geq 5$, we restrict the form of S, in particular $|S| = 3$. We found many examples of 3-regular Ramanujan graphs and we will introduce some of them in this talk.

2 Ramanujan Graph

All graphs will be supposed to have no loops. Assume that G is a finite graph with n vertices, then the adjacency matrix A is an $n \times n$ symmetric matrix, so all the eigenvalues are real and we list them in decreasing order:

$$\mu_0 \geq \mu_1 \geq ... \geq \mu_{n-1}.$$

We call the set of the eigenvalues the *spectrum* of G. Note that μ_0 is a simple eigenvalue with multiplicity 1 if and only if $\mu_0 > \mu_1$. A function $f : V \to \mathbb{C}$ can be thought of as a vector in $\mathbb{C}^n$ on which the adjacency matrix acts in the following way:

$$Af = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(v_1) \\ f(v_2) \\ \vdots \\ f(v_n) \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.1. *If $G = (V, E)$ is a finite k-regular graph with n vertices, we have:*

(a) $\mu_0 = k$;

(b) $|\mu_i| \leq k$ *for* $1 \leq i \leq n-1$;

(c) *The multiplicity of μ_0 is 1 if and only if G is connected.*

Proposition 2.2 ([2, Proposition 1.1.4])**.** *Let G be a connected, k-regular graph on n vertices. The following conditions are equivalent:*

(*i*) *G is bipartite;*

(*ii*) *the spectrum of G is symmetric about 0;*

(*iii*) $\mu_{n-1} = -k$.

Let $G = (V, E)$ be a graph. For $F \subseteq V$, we define the boundary ∂F of F to be the set of edges with one extremity in F and the other in $V - F$. That is to say, ∂F is the set of edges connecting F to $V - F$. Note that $\partial F = \partial(V - F)$.

Definition 2.3. *We define the expanding constant of a graph G as*

$$h(G) = \inf\{\frac{|\partial F|}{\min\{|F|, |V - F|\}} : F \subseteq V, 0 < |F| < +\infty\}.$$

If G is finite with n vertices, equation (2.3) also can be rephrased as:

$$h(G) = \min\{\frac{|\partial F|}{|F|} : F \subseteq V, 0<|F| \leq \frac{n}{2}\}.$$

Definition 2.4. *Let $(G_m)_{m\geq 1}$ be a family of finite k-regular connected graphs with $|V_m| \to +\infty$ when $m \to +\infty$. We say that $(G_m)_{m\geq 1}$ is a family of expanders if there exists ϵ>0 such that $h(G_m) \geq \epsilon$ for each $m \geq 1$.*

Theorem 2.5 ([2, Theorem 1.2.3])**.** *Let $G = (V, E)$ be a finite, connected, k-regular graph with no loops, and μ_1 be the first nontrivial eigenvalue of G. We get:*

$$\frac{k - \mu_1}{2} \leq h(G) \leq \sqrt{2k(k - \mu_1)}.$$

From Definition 2.4 and Theorem 2.5, we deduce the following:

Corollary 2.6. *Let $(G_m)_{m\geq 1}$ be a family of finite connected k-regular graphs with no loops, such that $|V_m| \to +\infty$ when $m \to +\infty$. The family $(G_m)_{m\geq 1}$ is a family of expanders if and only if there exists ϵ>0 such that $k - \mu_1(G_m) \geq \epsilon$ for each $m \geq 1$.*

Remark 2.7. *From Definition 2.4 and Corollary 2.6, we know that the bigger the spectral gap, the better "the quality" of the expander.*

The quality of a family of expanders can be represented by a lower bound on the spectral gap from Corollary 2.6. But it also cannot be too large.

Theorem 2.8 ([2, Theorem 1.3.1])**.** *Let $(G_m)_{m\geq 1}$ be the same as Corollary 2.6. Then,*

$$\liminf_{m\to+\infty} \mu_1(G_m) \geq 2\sqrt{k - 1}.$$

Definition 2.9. *A finite connected k-regular graph G is a Ramanujan graph if $|\mu| \leq 2\sqrt{k - 1}$ for any nontrivial eigenvalue μ of G.*

Example 2.10. *The Petersen graph is an undirected graph with 10 vertices and 15 edges that is as shown in Figure 1. It is 3-regular and its spectrum is $\{3, 1, 1, 1, 1, 1, -2, -2, -2, -2\}$. It obviously satisfies the condition in Definition 2.9, so that it is a Ramanujan graph.*

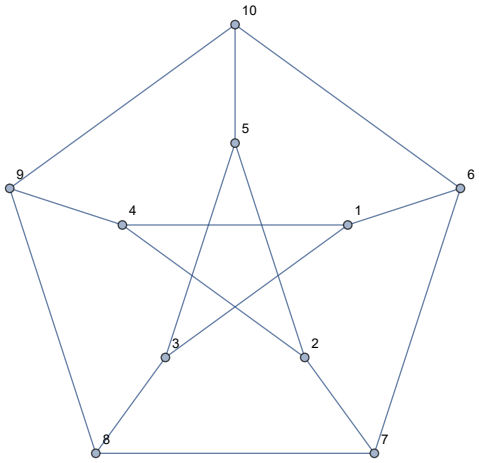


Figure 1: Petersen graph

3 Group-subgroup Pair Graphs

Definition 3.1 (Cf. [10]). *Let G be a group, H be a subgroup of G and S be a subset of G such that $S \cap H$ is a symmetric subset of H. Then the group-subgroup pair graph $\mathcal{G}(G, H, S)$ is defined as the undirected graph with vertices G and its edges*

$$\{(h, hs); h \in H, s \in S\}.$$

We use the short term "pair graph" instead of "group-subgroup pair graph".

We need some notations.

(*i*) For a group G, a subgroup H and a subset S of G, we denote

$$S_H := S \cap H,$$
$$S_O := S - H.$$

(*ii*) If H is a subgroup of index $k+1$ of G, we consider a set of representatives of the cosets $\{x_0 = e, x_1, ..., x_k\}$. Then, a partition of S_O is given by the sets

$$S_i := S \cap Hx_i, \quad i \in \{1, ..., k\}.$$

For a general pair graph, when the generating subset S is empty, it still satisfies the conditions of Definition 3.1. Then the resulting pair graph $\mathcal{G}(G, H, S)$ is trivial, i.e, it has no edge.

Example 3.2. *Let $G = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$,$H = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$, and $S = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{8}\}$. The corresponding pair graph is drawn in Figure 2.*

Proposition 3.3. *The pair-graph $\mathcal{G}(G, H, S)$ contains no isolated vertices if and only if S contains a representative for each coset of H in G other than $He = H$.*

Proposition 3.4. *All the vertices in the same coset have the same degree in a pair graph $\mathcal{G}(G, H, S)$. The degree of vertices in H is $|S|$ and the degree of the vertices in the coset Hx other than H is $|S \cap Hx|$.*

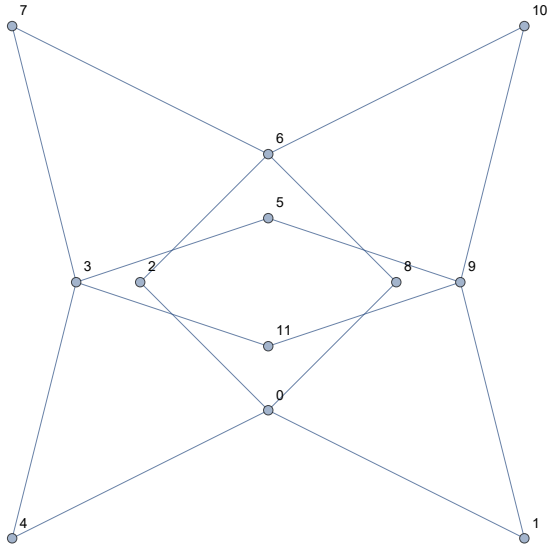


Figure 2: $\mathcal{G}(G, H, S)$

Corollary 3.5. *Let G be a group, H be a subgroup with index $[G : H] = k + 1$, S be a subset of G such that S_H is symmetric. Then for $h \in H$, we have*

$$\deg(h) \geq \sum_{i=1}^{k} \deg(x_i).$$

When S_H is empty, the equality is satisfied. Particularly, a nontrivial pair graph is regular if and only if $S_H = \emptyset$ and $[G : H] = 2$, or $[G : H] = 1$.

Lemma 3.6. *Let G be a group, H be a subgroup and S be a subset of G with $S_H = \emptyset$. The vertices of H are in the same connected component of $\mathcal{G}(G, H, S)$ if and only if $\langle H \cap (SS^{-1})\rangle = H$.*

Proposition 3.7. *Let G be a group, H be a subgroup and S be a subset of G with $S_H = \emptyset$. The necessary and sufficient conditions for a pair graph to be connected are:*

(*a*) $\langle H \cap (SS^{-1})\rangle = H$,

(*b*) *S contains representatives of all the cosets of H other than H.*

We need to introduce a notation before the next theorem:

$$\widetilde{S_O} = \langle H \cap (S_O S_O^{-1})\rangle.$$

Theorem 3.8 ([10, Theorem 4.5])**.** *A pair graph $\mathcal{G}(G, H, S)$ is bipartite if there exists a group homomorphism $\chi : H \to \{-1, 1\}$ such that $\chi(S_H) = \{-1\}$ and $\chi(\widetilde{S_O}) = \{1\}$. The converse holds when the pair graph is connected.*

Theorem 3.9 ([10, Corollary 6.4])**.** *A nontrivial connected k-regular pair graph $\mathcal{G}(G, H, S)$ with $|G| = 2n$ and $[G : H] = 2$ is a Ramanujan graph if*

$$k = |S| \geq n + 2 - 2\sqrt{n}.$$

4 Results

We choose the symmetric group S_n as G and the alternating group A_n for its subgroup as H of pair graph $\mathcal{G}(G, H, S)$. In this case, $[G : H] = 2$, so if we take $S \subset G - H$, then by Corollary 3.5, $\mathcal{G}(G, H, S)$ is k-regular where $k = |S|$, and $\mathcal{G}(G, H, S)$ is bipartite since $\chi = 1$ satisfies the condition in Theorem 3.8. We consider whether such a graph satisfies the conditions for being a Ramanujan graph.

Example 4.1 ([10, Example 6.5]). *Let $G = S_4, S = A_4$. Take*

$$S = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(3,4),(1,3,2,4),(1,4,2,3),(1,4,3,2)\},$$

so that $|S| = 8$ and it satisfies the bound of Theorem 3.9 (in this case, $n = 12$), so the corresponding pair graph $\mathcal{G}(S_4, A_4, S)$ is a Ramanujan graph. Its spectrum is $\{\pm 8, \pm\sqrt{7}\times 2, \pm\sqrt{3}\times 6, 0\times 6\}$.

The 4-regular pair graph generated by $S' = \{(2,3),(1,2,3,4),(1,2,4,3),(1,3,4,2)\}$ is also a Ramanujan graph. Therefore, the result of Theorem 3.9 is not a necessary condition.

Let us consider the case $G = S_3, H = A_3$. From Theorem 3.9, we know $\mathcal{G}(S_3, A_3, S)$ is a Ramanujan graph if $|S| \geq 3 + 2 - 2\sqrt{3} \approx 1.54$. When $|S| \leq 1$, the pair graph is disconnected. So we have nothing to do any more.

We proceed to the case $n \geq 4$.

Proposition 4.2. *Let $n \geq 4, S \subset S_n - A_n$. If $|S| \leq 2$, the pair graph $\mathcal{G}(S_n, A_n, S)$ is disconnected.*

So we assume $|S| \geq 3$ in the following.

We consider the case $G = S_4, H = A_4$. From Theorem 3.9, we know that the pair graph $\mathcal{G}(S_4, A_4, S)$ is a Ramanujan graph if $|S| \geq 12 + 2 - 2\sqrt{12} \approx 7.07$. So we just need to investigate the cases where $3 \leq |S| \leq 7$. Firstly, let $|S| = 3$, the number of such subsets is 220. Among the corresponding pair graphs, 28 are disconnected and 192 are Ramanujan graphs. Secondly, let $|S| = 4$, the number of such subsets is 495. Only in the 3 cases

$$S = \{(1,2),(3,4),(1,3,2,4),(1,4,2,3)\},$$
$$S = \{(1,3),(2,4),(1,2,3,4),(1,4,3,2)\},$$
$$S = \{(1,4),(2,3),(1,2,4,3),(1,3,4,2)\},$$

the corresponding pair graphs are disconnected. For each of these cases, we verified by computation that if we add an arbitrary element in $G - H - S$ to S, then the pair graph becomes a Ramanujan graph. In general, we suspect that if $\mathcal{G}(G, H, S)$ is a Ramanujan graph, then $\mathcal{G}(G, H, S')$ is also a Ramanujan graph for any $S' \supset S$. So we stop our computations in the case $G = S_4, H = A_4$.

Because of the increase of both the number of subsets S and vertices of the pair graph $\mathcal{G}(G, H, S)$ when $n \geq 5$, we must restrict ourselves to treat the cases where S is of certain form. Specifically, we assume that S consists of 2 cycles of length 4 and another *fixed cycle* $(1, 2, ..., n)$ (resp. $(1, 2, ..., n-1)$) when n is even (resp. odd). We give some examples when $5 \leq n \leq 9$. Note that the corresponding pair graphs are 3-regular and $2\sqrt{3-1} = 2.82842\ldots$. The numerical values of the second largest eigenvalues μ_1 are approximate values.

- $n = 5,\ S = \{(1,3,2,5),(2,3,5,4),(1,2,3,4)\},\ \mu_1 = 2.73205.$
- $n = 6,\ S = \{(1,4,3,6),(3,4,6,5),(1,2,3,4,5,6)\},\ \mu_1 = 2.72069.$
- $n = 7,\ S = \{(1,7,3,2),(4,5,7,6),(1,2,3,4,5,6)\},\ \mu_1 = 2.80175.$

- $n = 8,\ S = \{(1, 6, 4, 2), (5, 6, 8, 7), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)\},\ \mu_1 = 2.81106.$
- $n = 9,\ S = \{(1, 5, 2, 9), (6, 7, 9, 8), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)\},\ \mu_1 = 2.82777.$

When $n = 10$, we could not find Ramanujan graphs according to the previous rules of S. Incidentally, we succeeded in finding 2 Ramanujan graphs when

$$S = \{(1, 9, 2, 3), (6, 7, 9, 8), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)\},\ \mu_1 = 2.82838$$

and

$$S = \{(3, 4, 7, 5), (6, 7, 9, 8), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)\},\ \mu_1 = 2.82633.$$

References

[1] Asherov, R.; Dinur, I. Bipartite Unique Neighbour Expanders via Ramanujan Graphs. Entropy 2024, 26, 348. https://doi.org/10.3390/e26040348

[2] G. P. Davidoff, P. C. Sarnak and A. J. Valette, *Elementary number theory, group theory, and Ramanujan graphs*, London Mathematical Society Student Texts, 55, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003; MR1989434

[3] K. Eisenträger et al., Supersingular isogeny graphs and endomorphism rings: reductions and solutions, in *Advances in cryptology—EUROCRYPT 2018. Part III*, 329–368, Lecture Notes in Comput. Sci., 10822, Springer, Cham, ; MR3794837

[4] E. Lubetzky and A. Sly, Explicit expanders with cutoff phenomena, Electron. J. Probab. **16** (2011), no. 15, 419–435; MR2774096

[5] A. Lubotzky, R. S. Phillips and P. C. Sarnak, Ramanujan graphs, Combinatorica **8** (1988), no. 3, 261–277; MR0963118

[6] A. W. Marcus, D. A. Spielman and N. Srivastava, Interlacing families I: Bipartite Ramanujan graphs of all degrees, Ann. of Math. (2) **182** (2015), no. 1, 307–325; MR3374962

[7] G. A. Margulis, Problems Inform. Transmission **24** (1988), no. 1, 39–46; translated from Problemy Peredachi Informatsii **24** (1988), no. 1, 51–60; MR0939574

[8] M. Morgenstern, Existence and explicit constructions of $q + 1$ regular Ramanujan graphs for every prime power q, J. Combin. Theory Ser. B **62** (1994), no. 1, 44–62; MR1290630

[9] M. R. Murty, Ramanujan graphs, J. Ramanujan Math. Soc. **18** (2003), no. 1, 33–52; MR1966527

[10] C. Reyes-Bustos, Cayley-type graphs for group-subgroup pairs, Linear Algebra Appl. **488** (2016), 320–349; MR3419789

[11] A. A. Terras, *Zeta functions of graphs*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 128, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011; MR2768284

Branching rules for level-zero extremal weight modules from $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ to $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$

京都大学　大学院理学研究科　数学・数理解析専攻
中岡周太郎 (Shutaro NAKAOKA) *

概要

表現の分岐則とは，ある代数系の表現をその部分代数系に制限したとき，どのように振る舞うかを記述する規則である．本稿では，量子アフィン展開環 $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ のレベル・ゼロ extremal ウェイト加群を $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ に制限したときの分岐則にまつわる筆者の結果を紹介する．

1　導入

$\mathfrak{g}$ を対称化可能な Kac-Moody 代数，$U_q(\mathfrak{g})$ を 神保 [5] と Drinfeld [2] によって導入された $\mathfrak{g}$ に付随する**量子展開環**とする．量子展開環やその表現論は理論物理における可解格子模型の研究の中で自然に表れ，特に ***R* 行列**との関連から数学・物理の両面に重要な応用を与えていることが知られている．また，量子展開環のあるクラスの加群は $q \to 0$ という極限において**結晶基底**と呼ばれる基底を持ち，組み合わせ論的なデータを抽出することができることも量子展開環の表現論の大きな特徴である．

柏原 [7] は，任意のウェイト λ に対して，**extremal ウェイト加群**と呼ばれる $U_q(\mathfrak{g})$-加群 $V(\lambda)$ を導入した．これは可積分最高ウェイト加群の一般化になっており，結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ を持つ．以下，ここでは量子アフィン展開環，すなわち $\mathfrak{g}$ がアフィン型の Kac-Moody 代数の場合を主に考える．アフィン・リー代数 $\mathfrak{g}$ のウェイト λ に対し，canonical central element c との ペアリング の値を λ の**レベル**という．λ のレベルが正 (resp. 負) の場合には，$V(\lambda)$ は最高ウェイト加群 (resp. 最低ウェイト加群) と同型になり，本稿で扱うのは λ のレベルが 0 の場合である．柏原 [9, Section 13] は，$\mathcal{B}(\lambda)$ の構造に関してある予想を提示し，これは最終的に Beck-中島 [1] によって解決された．また，石井-内藤-佐垣 [4] は $\mathfrak{g}$ が untwisted な場合に**半無限 Lakshmibai-Seshadri パス模型** と呼ばれる $\mathcal{B}(\lambda)$ の組み合わせ論的な実現を与えた．これらの結果によって $\mathfrak{g}$ がアフィン型の場合において，レベル・ゼロ extremal ウェイト加群の結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ の構造について大きく理解が進んだと言えるだろう．

さて，今回のテーマである**分岐則**とは，ある代数系の表現をその部分代数系に制限したときにどのように振る舞うかを記述する規則である．古典的な例としては一般線形群 $GL_{n+1}(\mathbb{C})$ の既約有理表現を $GL_n(\mathbb{C})$ に制限したときの分岐則などが挙げられる．また，量子展開環の間の埋め込み

* E-mail:nakaoka.shutaro.53d@st.kyoto-u.ac.jp

$U_q(\mathfrak{g}) \hookrightarrow U_q(\mathfrak{g}')$ が，Dynkin 図形の埋め込みから生じる埋め込みであるとき，$U_q(\mathfrak{g}')$ の可積分最高ウェイト加群 $V(\lambda)$ を $U_q(\mathfrak{g})$ に制限しときの分岐則は，$V(\lambda)$ の結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ を自然に $U_q(\mathfrak{g})$ の加群としての結晶基底とみなしたときの最高ウェイト元をカウントすることで得られる [8, Section 4.6].

本稿では，$\Psi_{\pm 1} : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \hookrightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ という埋め込みによって $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ のレベル・ゼロ extremal ウェイト加群を $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ に制限したときの分岐則に関して筆者が得た結果を紹介する．このような埋め込みがあることは量子展開環の定義関係式を見ただけでは全く明らかではないが，アフィン・リー代数の対応する単純リー代数のループ代数の中心拡大としての表示を思い出すと自然な埋め込み $\widehat{\mathfrak{sl}}_n \hookrightarrow \widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ があることはわかる．量子アフィン展開環にも **Drinfeld 実現**と呼ばれる，アフィン・リー代数におけるループ代数の中心拡大としての表示に対応する表示があり [3]，これを手掛かりに $\Psi_{\pm 1} : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \hookrightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ という埋め込みも構成することができる．この埋め込み $\Psi_{\pm 1} : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \hookrightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ を通じて $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の Chevalley 生成元 E_0, F_0 は $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ の Chevalley 生成元に対応して**いない**ため，上で述べた Dynkin 図形の埋め込みから誘導される埋め込みとは状況が違うことに留意されたい．このため，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ の加群の結晶基底が自然に $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の加群としての結晶基底を誘導せず，この状況では結晶基底の構造のみに着目して分岐則を得ることは期待できないと思われる．したがって，このような方向性の分岐則を調べることで，結晶基底の構造から直接導くことができない，新たなレベル・ゼロ extremal ウェイト加群の性質が明らかになることが期待される．

2 準備

2.1 アフィン・ルート・データ

量子アフィン展開環の定義に必要な，アフィン・ルート・データを設定する．なおアフィン・リー代数に関する設定については [6] に準拠しており，また untwisted な場合に限定することとする．

$A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ $(I = \{0, \dots, n\})$ を，(untwisted) アフィン型一般化カルタン行列とする．ただし，単純ルートの番号付けは [6, Section 4.8] に与えられているものと同じであるとする．A に付随する ($\mathbb{Q}$ 上の) アフィン・リー代数を $\mathfrak{g}$ とし，そのカルタン部分代数を $\mathfrak{h}$ とする．$\{\alpha_i \mid i \in I\} \subset \mathfrak{h}^*$ を単純ルートの集合，$\{\alpha_i^\vee \mid i \in I\} \subset \mathfrak{h}$ を単純コルートの集合とする．

$d \in \mathfrak{h}$ を，$\langle d, \alpha_j \rangle = \delta_{0j}$ $(j \in I)$ を満たすように固定する．また，$c = \sum_{i \in I} a_i^\vee \alpha_i^\vee$ を canonical central element，$\delta = \sum_{i \in I} a_i \alpha_i$ を虚ルートの生成元とする．ここで，$a_i^\vee$ $(i \in I)$ は dual Kac label [6, Section 6.1]，a_i $(i \in I)$ は Kac label [6, Section 4.8] である．

$j \in I$ に対し，基本ウェイト $\Lambda_j \in \mathfrak{h}^*$ を，$\langle h_i, \Lambda_j \rangle = \delta_{ij}$ $(i \in I)$, $\langle d, \Lambda_j \rangle = 0$ を満たすように定める．ウェイト格子 P を $P = \left(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\Lambda_i\right) \oplus \mathbb{Z}\delta$ と定め，コウェイト格子 P^* を $P^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Z}) = \left(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee\right) \oplus \mathbb{Z}d$ により定める．

$\mathfrak{g}$ 上の不変対称双線型形式 $(\cdot, \cdot)$ は，任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\langle c, \lambda \rangle = (\delta, \lambda)$ を満たすように正規化されているものと仮定する．このとき，$(\alpha_i, \alpha_j) = a_i^\vee a_i^{-1} a_{ij}$ $(i, j \in I)$ である．$W = \langle s_i \mid i \in I \rangle \subset GL(\mathfrak{h}^*)$ を $\mathfrak{g}$ の Weyl 群とする．ここで，$s_i(\lambda) = \lambda - \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle \alpha_i$ $(\lambda \in \mathfrak{h}^*)$ は α_i に対応する単純鏡映である．

$I_0 = I \setminus \{0\}$ とおく．$W_0 = \langle s_i \mid i \in I_0 \rangle$, $Q_0^\vee = \bigoplus_{i \in I_0} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ とおく．$\xi \in Q_0^\vee$ に対し，$t_\xi \in W$ を

$$t_\xi(\lambda) = \lambda + \langle c, \lambda \rangle \nu(\xi) - \left(\langle \xi, \lambda \rangle + \frac{1}{2}(\xi, \xi)\langle c, \lambda \rangle \right) \delta$$

によって定める．ここで，$\nu : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}^*$ は

$$\langle h_1, \nu(h_2) \rangle = (h_1, h_2) \quad (h_1, h_2 \in \mathfrak{h})$$

によって定義される写像である．

2.2 量子アフィン展開環とレベル・ゼロ extremal ウェイト加群

$D > 0$ を 任意の $i \in I$ に対して $\frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2} \in D^{-1}\mathbb{Z}$ を満たす最小の正整数とする．q を不定元とし、$q_s = q^{\frac{1}{D}}$ とおく．また，$q_i = q^{\frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2}}$ と定義する．整数 $m \geq 0$ に対して，$[m]_{q_i} = \frac{q_i^m - q_i^{-m}}{q_i - q_i^{-1}}$ と定義する．さらに，整数 $m \geq 0$ に対し， $[m]_{q_i}! = [m]_{q_i}[m-1]_{q_i} \cdots [1]_{q_i}$ とおく．

量子アフィン展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ を，$\mathbb{Q}(q_s)$ 上 E_i, F_i, q^h $(i \in I, h \in D^{-1}P^*)$ で生成され，以下の関係式で定義される，1 を持つ結合代数とする:

$$q^0 = 1, \quad q^{h+h'} = q^h q^{h'} \quad (h, h' \in D^{-1}P^*),$$
$$q^h E_i q^{-h} = q^{\langle h, \alpha_i \rangle} E_i, \quad q^h F_i q^{-h} = q^{-\langle h, \alpha_i \rangle} F_i \quad (i \in I, h \in D^{-1}P^*),$$
$$E_i F_j - F_j E_i = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}} \quad (i, j \in I),$$
$$\sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s E_i^{(s)} E_j E_i^{(1-a_{ij}-s)} = 0, \quad \sum_{s=0}^{1-a_{ij}} (-1)^s F_i^{(s)} F_j F_i^{(1-a_{ij}-s)} = 0 \quad (i, j \in I,\ i \neq j),$$

ここで，$t_i = q^{\frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2}\alpha_i^\vee}$, $E_i^{(m)} = \frac{E_i^m}{[m]_{q_i}!}$, $F_i^{(m)} = \frac{F_i^m}{[m]_{q_i}!}$ $(i \in I)$ である．

詳細は省くが，$U_q(\mathfrak{g})$ は余積と対合射，余単位射を備えており，Hopf 代数になる．

$U_q^+(\mathfrak{g})$ (resp. $U_q^-(\mathfrak{g})$) を $\{E_i \mid i \in I\}$ (resp. $\{F_i \mid i \in I\}$) で生成された $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数とする．また，$U_q^0(\mathfrak{g})$ を $\{q^h \mid h \in D^{-1}P^*\}$ で生成された $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数とする．このとき，**三角分解**

$$U_q(\mathfrak{g}) \cong U_q^+(\mathfrak{g}) \otimes U_q^0(\mathfrak{g}) \otimes U_q^-(\mathfrak{g})$$

が成り立つ．

$U_q(\mathfrak{g})$-加群 M は次の条件を満たすとき，**可積分**という:

1. M は**ウェイト空間分解**

$$M = \bigoplus_{\lambda \in P} M_\lambda, \quad M_\lambda = \{u \in M \mid \forall h \in D^{-1}P^*,\ q^h u = q^{\langle h, \lambda \rangle}\}$$

をもつ．

2. 任意の $u \in M$ および $i \in I$ に対してある $N \geq 1$ が存在し，任意の $m \geq N$ に対して $E_i^{(m)} u = F_i^{(m)} u = 0$ が成り立つ．

任意の $i \in I$ および 可積分 $U_q(\mathfrak{g})$-加群 M に対し，$\mathbb{Q}(q_s)$-線形同型写像 $T_i : M \to M$ がある．(T_i については [11, Chapter 5] を参照のこと．なお，[11, Chapter 5] では，$T''_{i,1}$ という記号が使われている．)

また，各 $i \in I$ に対し，自己同型 $T_i : U_q(\mathfrak{g}) \to U_q(\mathfrak{g})$ であって，任意の可積分 $U_q(\mathfrak{g})$-加群 M，$x \in U_q(\mathfrak{g})$ および $u \in M$ に対し，

$$T_i(xu) = T_i(x)T_i(u)$$

を満たすものがある．(T_i については [11, Chapter 5] を参照のこと．なお，[11, Chapter 5] では，$T''_{i,1}$ という記号が使われている．)

Defintion 2.1. M を可積分 $U_q(\mathfrak{g})$-加群, $i \in I$ とする．ウェイト λ のベクトル $u \in M$ が, $E_i u = 0$ または $F_i = 0$ を満たすとき，u を i-extremal という．このとき，$S_i u$ を

$$S_i u = \begin{cases} F_i^{(\langle \alpha_i^\vee, x\lambda \rangle)} u & (\langle \alpha_i^\vee, x\lambda \rangle \geq 0) \\ E_i^{(-\langle \alpha_i^\vee, x\lambda \rangle)} u & (\langle \alpha_i^\vee, x\lambda \rangle \leq 0) \end{cases}$$

によって定義する．

Defintion 2.2. M を可積分 $U_q(\mathfrak{g})$-加群とする．ウェイトベクトル $u \in M$ は，任意の $p \geq 0$ および $i, i_1, \ldots, i_p$ に対して $S_{i_1} \cdots S_{i_p} u$ が i-extremal であるとき，**extremal ベクトル**という．

$u \in M$ が extremal のとき，$x = s_{i_1} \ldots s_{i_p} \in W$ に対して

$$S_x u = S_{i_1} \cdots S_{i_p} u$$

によって $S_x u$ を定義する．これは x の表示によらない．

$\lambda \in P$ とする．u_λ によって生成され，'u_λ がウェイト λ の extremal ベクトルである' という関係式で定義される $U_q(\mathfrak{g})$-加群を $V(\lambda)$ とかき，**extremal ウェイト加群**という．(正確な定義については，[7] を参照のこと．なお，[7] では $V^{\max}(\lambda)$ という記号が使われている ．)

$\lambda \in P$ および $x \in W$ に対し，次の同型がある:

$$V(\lambda) \xrightarrow{\sim} V(x\lambda), \quad u_\lambda \mapsto S_{x^{-1}} u_{x\lambda} \tag{1}$$

$\lambda \in P$ および $x \in W$ に対し，$U_q^-(\mathfrak{g})$-加群 $V_x^-(\lambda)$ を

$$V_x^-(\lambda) = U_q^-(\mathfrak{g}) S_x u_\lambda \subset V(\lambda)$$

によって定める．これを **Demazure 部分加群**という．

$i \in I_0$ に対し，$\varpi_i = \Lambda_i - a_i^\vee \Lambda_0 \in P$ と定め，

$$P_{0,+} = \left\{ \sum_{i \in I_0} m_i \varpi_i \mid \forall i \in I_0,\ m_i \geq 0 \right\}$$

とおく．任意のレベル 0 のウェイトは Weyl 群の作用によって $P_{0,+} + \mathbb{Z}\delta$ の元に移すことができるため，(1) により $\lambda \in P_{0,+}$ に対する $V(\lambda)$ を調べればよいことになる．

$x \in W$ とするとき，$S_x u_{\varpi_i} \in V(\varpi_i)$ のことを $u_{x\varpi_i}$ とかくことにする．この書き方は一見すると x の取り方に依存するように見えるが，実は依存しないことが知られている [9, Section 5].

$\lambda = \sum_{i\in I_0} m_i\varpi_i \in P_{0,+}$ に対し，

$$\widetilde{V}(\lambda) = \bigotimes_{i\in I_0} V(\varpi_i)^{\otimes m_i}$$

とおく．このとき，$U_q(\mathfrak{g})$-加群の準同型 $\Phi_\lambda : V(\lambda) \to \widetilde{V}(\lambda)$ が、$u_\lambda \mapsto \bigotimes_{i\in I_0} u_{\varpi_i}^{\otimes m_i}$ によって定まる．次の定理は柏原 [9] によって予想され，Beck-中島 [1] によって解決された:

Theorem 2.3 ([1, Corollary 4.15])**.** $\lambda \in P_{0,+}$ に対し，$\Phi_\lambda : V(\lambda) \to \widetilde{V}(\lambda)$ は単射である．

3 主結果

前節の設定を踏襲する．

3.1 埋め込み $\Psi_\varepsilon : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \to U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$

以降，$A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ が $A_\ell^{(1)}$ 型 ($\ell \in \mathbb{Z}_{>0}$) のとき (すなわち，$\mathfrak{g} = \widehat{\mathfrak{sl}}_{\ell+1}$ のとき) を考える．また，整数 $n \geq 2$ を固定する．

$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ に対して埋め込み $\Psi_\varepsilon : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \hookrightarrow U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ を与える．混乱を防ぐため，以下のように $\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ に関連する対象に対しては ‘$\breve{\ }$’ を付けた記法を用いる:

$\breve{E}_i, \breve{F}_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ を $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ の Chevalley 生成元とする．$\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ の Cartan 部分代数を $\breve{\mathfrak{h}}$ で表し，その双対を $\breve{\mathfrak{h}}^*$ で表す．単純ルート，単純コルートはそれぞれ $\breve{\alpha}_i, \breve{\alpha}_i^\vee$ $(i = 0, \ldots, n)$ で表す．次数作用素は $\breve{d}$ で表し，$\breve{\delta} = \sum_{i=0}^n \breve{\alpha}_i$ を虚ルートの生成元とする．

$\breve{P}, \breve{P}^*$ をそれぞれ $\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1}$ のウェイト格子, コウェイト格子とする．基本ウェイトは $\breve{\Lambda}_i$ $(i = 0, \ldots, n)$ とかき，$\breve{\varpi}_i = \breve{\Lambda}_i - \breve{\Lambda}_0$ $(i = 1, \ldots, n)$ と定める．$\breve{P}_{0,+} = \{\sum_{i=1}^n m_i\breve{\varpi}_i \mid m_i \geq 0\}$ とおき，$\breve{Q}_0^\vee = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\breve{\alpha}_i^\vee$ と定める．

$\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ のほうについては，‘$\breve{\ }$’ は付けないこととする．

$\mathbb{Q}$-線形写像 $\mathfrak{h} \to \breve{\mathfrak{h}}$ を

$$j(\alpha_0^\vee) = s_n(\breve{\alpha}_0^\vee) = \breve{\alpha}_0^\vee + \breve{\alpha}_n^\vee, \quad j(\alpha_i^\vee) = \breve{\alpha}_i^\vee \ (i = 1, \ldots, n-1), \quad j(d) = \breve{d}$$

によって定める．

Theorem 3.1 ([12, Proposition 4.2])**.** $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ に対し，$\mathbb{Q}(q)$ 代数の単射準同型 $\Psi_\varepsilon : U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \to U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ であって，

$$\Psi_\varepsilon(E_0) = T_n^\varepsilon(\breve{E}_0), \quad \Psi_\varepsilon(F_0) = T_n^\varepsilon(\breve{F}_0),$$
$$\Psi_\varepsilon(E_i) = \breve{E}_i, \quad \Psi_\varepsilon(F_i) = \breve{F}_i \ (i = 1, \ldots, n-1), \quad \Psi_\varepsilon(q^h) = q^{j(h)} \ (h \in P^*)$$

となるものが存在する．

3.2 $V(\check{\varpi}_i)$ の分岐則

環準同型 $f : A \to B$ および B-加群 M に対し，A-加群 f^*M を，集合 M に A の作用を $x \cdot u = f(x) \cdot u$ で与えることによって定める．以下，本稿では $\lambda \in \check{P}_{0,+}$ に対して $\Psi_\varepsilon^* V(\lambda)$ の構造について述べる．そのために，まず最も基本となる $\lambda = \check{\varpi}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ のときを考える．

$i = 1, \dots, n$ に対し，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群 $N_{i,1}, N_{i,2}$ を

$$N_{i,1} = \begin{cases} \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V(k\delta) & (i = 1) \\ V(\varpi_{i-1}) & (2 \le i \le n) \end{cases}, \quad N_{i,2} = \begin{cases} V(\varpi_i) & (1 \le i \le n-1) \\ \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} V(k\delta) & (i = n) \end{cases}.$$

によって定める．

$1 \le i \le n$ に対し，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の準同型 $\psi^i_{1,\varepsilon} : N_{i,1} \to \Psi_\varepsilon^* V(\check{\varpi}_i)$ を以下のように定める:

- $i = 1$ に対しては， $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の準同型 $\psi^1_{1,\varepsilon} : N_{1,1} \to \Psi_\varepsilon^* V(\check{\varpi}_1)$ は $u_{k\delta} \mapsto u_{-\check{\varpi}_n + k\check{\delta}}$ によって定義される．
- $2 \le i \le n$ に対しては，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の準同型 $\psi^i_{1,\varepsilon} : N_{i,1} \to \Psi_\varepsilon^* V(\check{\varpi}_i)$ は $u_{\varpi_{i-1}} \mapsto u_{\check{\varpi}_{i-1} - \check{\varpi}_n}$ によって定義される．

また，$1 \le i \le n$ に対し，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の準同型 $\psi^i_{2,\varepsilon} : N_{i,2} \to \Psi_\varepsilon^* V(\check{\varpi}_i)$ を次のように定める:

- $1 \le i \le n-1$ に対しては，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の準同型 $\psi^i_{2,\varepsilon} : N_{i,2} \to \Psi_\varepsilon^* V(\check{\varpi}_i)$ は $u_{\varpi_i} \mapsto u_{\check{\varpi}_i}$ によって定義される．
- $i = n$ に対しては，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の準同型 $\psi^n_{2,\varepsilon} : N_{n,2} \to \Psi_\varepsilon^* V(\check{\varpi}_i)$ は $u_{k\delta} \mapsto u_{\check{\varpi}_n + k\check{\delta}}$ によって定義される．

このとき，以下が成立する:

Proposition 3.2 ([12, Proposition 4.11])**.** $1 \le i \le n$ に対し，$\psi^i_{1,\varepsilon} \oplus \psi^i_{2,\varepsilon} : N_{i,1} \oplus N_{i,2} \to \Psi_\varepsilon^* V(\check{\varpi}_i)$ は $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の同型写像である．

Proposition 3.2 は，$A^{(1)}_\ell$ $(\ell \in \mathbb{Z}_{>0})$ 型の場合は**レベル・ゼロ基本表現** [9, Section 5] が対応する単純リー代数に付随する量子展開環の表現としては既約となること [10, Lemma 4.3] と，$U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})$ の可積分最高ウェイト加群の $U_q(\mathfrak{sl}_n)$ への制限の分岐則から証明できる．

$1 \le i \le n$ に対し，$L^i_{1,\varepsilon} = \psi^i_{1,\varepsilon}(N_{i,1}), L^i_{2,\varepsilon} = \psi^i_{2,\varepsilon}(N_{i,2})$ とおく．

3.3 直和分解 $\Psi_\varepsilon^* V(\lambda) = \bigoplus_{p=0}^m M_{p,\varepsilon}$

$\lambda = \sum_{i=1}^n m_i \check{\varpi}_i \in \check{P}_{0,+}$ を固定し，$m = m_1 + \cdots + m_n$ とおく．また，$\chi_\lambda : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ を

$$m_1 + \cdots + m_{\chi_\lambda(j)-1} + 1 \le j \le m_1 + \cdots + m_{\chi_\lambda(j)}$$

が任意の $j \in \{1, \dots, m\}$ に対して成り立つように定義する．

$\mathcal{I} = \{1, 2\}^m$ とおき，$\mathfrak{i} = (i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{I}$ に対して $\Psi_\varepsilon^* \left(\bigotimes_{i=1}^n V(\check{\varpi}_i)^{\otimes m_i}\right)$ の $U_q(\mathfrak{sl}_n)$-部分加群

$L_{\mathrm{i},\varepsilon}$ を

$$L_{\mathrm{i},\varepsilon} = \bigotimes_{j=1}^{m} L_{i_j,\varepsilon}^{\chi_\lambda(j)}$$

によって定める．さらに，$0 \le p \le m$ に対して $\mathcal{I}_p = \{(i_1,\dots,i_m) \in \mathcal{I} \mid \#\{j \mid i_j = 1\} = p\}$ とおき，$\Psi_\varepsilon^*\left(\bigotimes_{i=1}^n V(\check{\varpi}_i)^{\otimes m_i}\right)$ の $U_q(\mathfrak{sl}_n)$-部分加群 $L_{p,\varepsilon}$ を

$$L_{p,\varepsilon} = \bigoplus_{\mathrm{i} \in \mathcal{I}_p} L_{\mathrm{i},\varepsilon}$$

によって定める．

$\tilde{h} = \sum_{i=1}^n i\check{\alpha}_i^\vee \in \check{P}^*$ に対し，$q^{\tilde{h}} \in U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ は $\Psi_\varepsilon(U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n))$ の任意の元と可換となる．よって，任意の $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$-加群 M に対し，$q^{\tilde{h}}$ の固有空間は全て $\Psi_\varepsilon^* M$ の $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-部分加群となる．

Lemma 3.3 ([12, Lemma 4.14])**.** $1 \le i \le n$ に対し，$\Psi_\varepsilon^* V(\check{\varpi}_i)$ の $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-部分加群として次が成り立つ:

$$L_{1,\varepsilon}^i = \{u \in \Psi_\varepsilon^* V(\check{\varpi}_i) \mid q^{\tilde{h}} u = q^{i-(n+1)} u\}, \quad L_{2,\varepsilon}^i = \{u \in \Psi_\varepsilon^* V(\check{\varpi}_i) \mid q^{\tilde{h}} u = q^i u\}.$$

これにより，$L_{p,\varepsilon}$ が $q^{\tilde{h}}$ の固有値 $q^{\langle \tilde{h}, \lambda\rangle - p(n+1)}$ の固有空間であることがわかり，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群としての直和分解

$$\Psi_\varepsilon^*\left(\bigotimes_{i=1}^n V(\check{\varpi}_i)^{\otimes m_i}\right) = \bigoplus_{p=0}^m L_{p,\varepsilon}$$

を得る．$0 \le p \le m$ に対して $\Psi_\varepsilon^* V(\lambda)$ の $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-部分加群 $M_{p,\varepsilon}$ を

$$M_{p,\varepsilon} = \{u \in \Psi_\varepsilon^* V(\lambda) \mid q^{\tilde{h}} u = q^{\langle \tilde{h}, \lambda\rangle - p(n+1)} u\}$$

によって定める．

Proposition 3.4 ([12, Proposition 4.18])**.** 次が成り立つ:

1. $\Phi_\lambda(M_{p,\varepsilon}) \subset L_{p,\varepsilon}$ が成り立つ．
2. 直和分解

$$\Psi_\varepsilon^* V(\lambda) = \bigoplus_{p=0}^m M_{p,\varepsilon}$$

が成り立つ．

$\mathbb{Q}(q)[t_1^{\pm 1},\dots,t_m^{\pm 1}]$ を Laurent 多項式環とする．$\mathbb{Q}(q)[t_1^{\pm 1},\dots,t_m^{\pm 1}]$ に次のように $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の構造を入れる:

- E_i, F_i は自明に作用する．
- 単項式 $t_1^{k_1}\cdots t_m^{k_m}$ $(k_1,\dots,k_m \in \mathbb{Z})$ はウェイト $(k_1+\cdots+k_m)\delta$ をもつ．

対称群 $\mathfrak{S}_m$ が $\mathbb{Q}(q)[t_1^{\pm 1},\dots,t_m^{\pm 1}]$ に変数 $t_1,\dots,t_m$ の入れ替えによって作用する．この作用で不変な元全体のなす集合を $\mathbb{Q}(q)[t_1^{\pm 1},\dots,t_m^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_m}$ で表す．

$M_{0,\varepsilon}$ および $M_{m,\varepsilon}$ については，次のように $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ の extremal ウェイト加群と対称 Laurent 多項式環のテンソル積になる:

Theorem 3.5 ([12, Theorem 4.27 + Theorem 4.28])**.** $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の同型

$$M_{0,\varepsilon} \cong V\left(\sum_{i=1}^{n-1} m_i\varpi_i\right) \otimes (\mathbb{Q}(q)[t_1^{\pm 1},\dots,t_{m_n}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{m_n}}),$$
$$M_{m,\varepsilon} \cong (\mathbb{Q}(q)[t_1^{\pm 1},\dots,t_{m_1}^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_{m_1}}) \otimes V\left(\sum_{i=1}^{n-1} m_{i+1}\varpi_i\right)$$

がある.

$\mathcal{I}_p$ 上に辞書式順序 $<$ を次のように定める:

Defintion 3.6. $\mathrm{i}=(i_1,\dots,i_m),\mathrm{j}=(j_1,\dots,j_m)\in\mathcal{I}_p$ に対し，ある $1\le k\le m$ があって次を満たすとする:

- 任意 $l<k$ に対して $i_l=j_l$ である.
- $i_k<j_k$ である.

このとき，$\mathrm{i}<\mathrm{j}$ と定める.

$<$ は $\mathcal{I}_p$ 上の全順序を定めることに注意する.
$\mathrm{i}\in\mathcal{I}_p$ に対し，$L_{p,\varepsilon}$ の $U_q(\mathfrak{sl}_n)$-部分加群 $L_{\le\mathrm{i},\varepsilon}, L_{\ge\mathrm{i},\varepsilon}$ を

$$L_{\le\mathrm{i},\varepsilon}=\bigoplus_{\mathrm{j}\in\mathcal{I}_p,\mathrm{j}\le\mathrm{j}} L_{\mathrm{j},\varepsilon},\quad L_{\ge\mathrm{i},\varepsilon}=\bigoplus_{\mathrm{j}\in\mathcal{I}_p,\mathrm{j}\ge\mathrm{i}} L_{\mathrm{j},\varepsilon}$$

と定める.

Proposition 3.7 ([12, Proposition 4.20])**.** 次が成り立つ:

1. $\varepsilon=1$ のとき，$L_{\ge\mathrm{i},\varepsilon}$ は $L_{p,\varepsilon}$ の $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-部分加群である.
2. $\varepsilon=-1$ のとき，$L_{\le\mathrm{i},\varepsilon}$ は $L_{p,\varepsilon}$ の $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-部分加群である.

$\mathrm{i},\mathrm{j}\in\mathcal{I}_p$ とする．$\mathrm{i}<\mathrm{j}$ であり，$\mathrm{i}<\mathfrak{k}<\mathrm{j}$ となる $\mathfrak{k}\in\mathcal{I}_p$ が存在しないとき，$\mathrm{j}=\mathrm{i}_+,\mathrm{i}=\mathrm{j}_-$ とかくことにする.
$\mathrm{i}\in\mathcal{I}_p$ および $\varepsilon\in\{\pm1\}$ のとき，$U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群 $\mathcal{L}_{\mathrm{i},\varepsilon}$ を次のように定める:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{i},1}=\begin{cases} L_{\ge\mathrm{i},1} & (\mathrm{i}\text{ is maximum})\\ L_{\ge\mathrm{i},1}/L_{\ge\mathrm{i}_+,1} & (\text{otherwise})\end{cases},\quad \mathcal{L}_{\mathrm{i},-1}=\begin{cases} L_{\le\mathrm{i},-1} & (\mathrm{i}\text{ is minimum})\\ L_{\le\mathrm{i},-1}/L_{\le\mathrm{i}_-,-1} & (\text{otherwise})\end{cases}.$$

このとき，自然な $U_q(\mathfrak{sl}_n)$-線形写像

$$\Xi_{\mathrm{i},1}:\bigotimes_{j=1}^{m} N_{\chi_\lambda(j),i_j}\xrightarrow{\sim} L_{\mathrm{i},1}\hookrightarrow L_{\ge\mathrm{i},1}\to\mathcal{L}_{\mathrm{i},1}$$

および

$$\Xi_{\mathrm{i},-1}:\bigotimes_{j=1}^{m}N_{\chi_\lambda(j),i_j}\xrightarrow{\sim}L_{\mathrm{i},-1}\hookrightarrow L_{\leq\mathrm{i},-1}\to\mathcal{L}_{\mathrm{i},-1}$$

がある.

Proposition 3.8 ([12, Proposition 4.21]). 任意の $\mathrm{i}=(i_1,\dots,i_m)\in\mathcal{I}_p$ に対し,

$$\Xi_{\mathrm{i},\varepsilon}:\bigotimes_{j=1}^{m}N_{\chi_\lambda(j),i_j}\to\mathcal{L}_{\mathrm{i},\varepsilon}$$

は $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の同型写像である.

3.4 $V(m\check{\varpi}_i)$ の分岐則

筆者は, $\lambda=m\check{\varpi}_i$ $(m\in\mathbb{Z}_{>0},1\leq i\leq n)$ の場合おいてレベル・ゼロ extremal ウェイト加群の分岐則を与えた.

Theorem 3.9 ([12, Corollary 5.4+Corollary 5.9+Corollary 5.12]). $m\in\mathbb{Z}_{>0},1\leq i\leq n$ のとき, 次が成り立つ:

$$\Psi_\varepsilon^*V(m\check{\varpi}_i)\cong\begin{cases}\bigoplus_{p=0}^{m}\mathbb{Q}(q)[t_1^{\pm1},\dots,t_p^{\pm1}]^{\mathfrak{S}_p}\otimes V((m-p)\varpi_1) & (i=1)\\ \bigoplus_{p=0}^{m}V(p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i) & (2\leq i\leq n-1)\\ \bigoplus_{p=0}^{m}V(p\varpi_{n-1})\otimes\mathbb{Q}(q)[t_1^{\pm1},\dots,t_{m-p}^{\pm1}]^{\mathfrak{S}_{m-p}} & (i=n)\end{cases}.$$

まず, $2\leq i\leq n-1$ かつ $\varepsilon=1$ の場合において証明の概略を述べる.

$M_{p,1}\cong V(p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i)$ を示せばよい. $\mathrm{i}=(\overbrace{1,\dots,1}^{p},\overbrace{2,\dots,2}^{m-p})\in\mathcal{I}_p$ に対し, 次のような $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の準同型があることに注意する:

$$\tau_{p,1}^i:M_{p,1}\xrightarrow{\Phi_{m\check{\varpi}_i}|_{M_{p,1}}}L_{p,1}=L_{\geq\mathrm{i},1}\to\mathcal{L}_{\mathrm{i},1}\xrightarrow{\Xi_{\mathrm{i},1}^{-1}}V(\varpi_{i-1})^{\otimes p}\otimes V(\varpi_i)^{\otimes m-p}.$$

$\xi=k\check{\alpha}_i^\vee\in\check{Q}_0^\vee,\zeta=k\alpha_{i-1}^\vee+k\alpha_i^\vee\in Q_0^\vee$ とおく. このとき, $\tau_{p,1}^i(M_{p,1}\cap V_{t_\xi}^-(m\check{\varpi}_i))$ は $V(\varpi_{i-1})^{\otimes p}\otimes V(\varpi_i)^{\otimes m-p}$ の $U_q^-(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-部分加群 $U_q^-(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)((u_{\varpi_{i-1}-k\delta})^{\otimes p}\otimes(u_{\varpi_i-k\delta})^{\otimes m-p})$ を含むことがわかる. [14] の結果を使うと, $M_{p,1}\cap V_{t_\xi}^-(m\check{\varpi}_i)$ および $U_q^-(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)((u_{\varpi_{i-1}-k\delta})^{\otimes p}\otimes(u_{\varpi_i-k\delta})^{\otimes m-p})$ の次数付き指標が計算でき, これらは一致することがわかる. したがって $\tau_{p,1}^i$ は $U_q^-(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-加群の同型

$$\begin{aligned}M_{p,1}\cap V_{t_\xi}^-(m\check{\varpi}_i)&\cong U_q^-(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)((u_{\varpi_{i-1}-k\delta})^{\otimes p}\otimes(u_{\varpi_i-k\delta})^{\otimes m-p})\\&=\Phi_{p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i}(V_{t_\zeta}^-(p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i))\end{aligned}$$

を誘導する. ここで

$$V(m\check{\varpi}_i)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}V_{t_{k\check{\alpha}_i^\vee}}^-(m\check{\varpi}_i),\quad V(p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}V_{t_{k(\alpha_{i-1}^\vee+\alpha_i^\vee)}}^-(p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i)$$

が成り立つので, $\tau_{p,1}^i$ は同型

$$M_{p,1}\cong\Phi_{p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i}(V(p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i))\cong V(p\varpi_{i-1}+(m-p)\varpi_i)$$

を誘導することがわかる．

$2 \leq i \leq n-1$ かつ $\varepsilon = -1$ のときの証明も全く同様である．$i = 1$ や $i = n$ に対する主張の証明も筋道は同じであるが，右辺の対称 Laurent 多項式に対応する元をつくるため，量子アフィン展開環の下三角部分代数における ‘Schur 多項式に対応するベクトル’ [1, Section 3] を用いる．

参考文献

[1] J. Beck and H. Nakajima, Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras, *Duke Math. J.* 123 (2004), 335–402.

[2] V. G. Drinfeld, Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation, *Dokl. Akad.Nauk SSSR* **283** (1985), *no.*5, 1060-1064.

[3] V. G. Drinfeld, New realization of Yangian and quantum affine algebra, *Dokl. Akad.Nauk SSSR* **296** (1987), no.1, 13-17; *translation in Soviet Math. Dokl.* **36** (1988), *no.* 2, 212-216.

[4] M. Ishii, S. Naito, and D. Sagaki, Semi-infinite Lakshmibai-Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras, *Adv. Math.* **290** (2016), 967–1009.

[5] M. Jimbo, A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, *Lett. Math. Phys.* **10** (1985), *no.*1, 63-69.

[6] V.G. Kac, Infinite dimensional Lie algebras (3rd Ed.), Cambridge University Press, 1990.

[7] M. Kashiwara, Crystal bases of modified quantized enveloping algebra, *Duke Math. J.* 73 (1994), 383–413.

[8] M. Kashiwara, On crystal bases, *Representations of groups* (*Banff*, *AB*, 1994), 155-197, *CMS Conf.Proc.*, 16, *Amer. Math.Soc.*, *Providence*, *RI*, 1995.

[9] M. Kashiwara, On level zero representations of quantized enveloping algebras, *Duke Math. J.* 112 (2002), 117–175.

[10] M. Kashiwara, Level zero fundamental representations over quantized affine algebras and Demazure modules, *Publ. Res.Inst. Math. Sci.* **41** (2005), *no.* 1, 223–250

[11] G. Lusztig, Introduction to Quantum Groups, Progress in Math. **110**, Birkhäuser, 1993.

[12] S. Nakaoka, Branching rules for level-zero extremal weight modules from $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_{n+1})$ to $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$, arXiv preprint arXiv:2501.11559 (2025).

[13] H. Nakajima, Extremal weight modules of quantum affine algebras, *Representation theory of algebraic groups and quantum groups*, 343–369, *Adv. Stud. Pure Math.*, 40, *Math. Soc. Japan*, *Tokyo*, 2004.

[14] S. Naito, and D. Sagaki, Demazure submodules of level-zero extremal weight modules and specializations of Macdonald polynomials, *Math. Z.* **283** (2016), *no.* 3-4, 937–978.

頂点代数と Costello-Gwilliam の因子化代数

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科　多元数理科学専攻
西中祐介 (Yusuke NISHINAKA) *

概要

Costello-Gwilliam の因子化代数は (摂動的) 場の量子論における観測可能量の空間がもつ代数構造を記述する代数系である．一方で Borcherds によって導入された頂点代数は二次元共形場理論の代数的定式化として知られている．Costello-Gwilliam は複素平面上の因子化代数から頂点代数を構成する一般論を与えたが, そこで因子化代数に仮定されている離散条件が取り除けることを説明する．また可換な頂点代数から locally constant な因子化代数を構成できることを説明し, この構成と微分代数のジェット構成の間の関係を議論する．この報告は [N] に基づく．

1　導入

Costello と Gwilliam によって導入された因子化代数 (factorization algebra) は古典場および量子場の理論における観測可能量のなす空間の構造を定式化した代数系である．彼らは [CG17, CG21] で因子化代数の理論と摂動的場の量子論における Batalin–Vilkovisky (BV) 形式を発展させた．[CG17, CG21] の主結果の一つは古典場の理論に付随する因子化代数が変形量子化を許容するための十分条件を与えたことであり, これは Costello が [C11] で数学的に定式化した摂動的繰り込みを用いて証明された．

一方で Borcherds [Bo86] によって導入された頂点代数は二次元共形場理論の代数的枠組みとして知られている．したがって複素平面 $\mathbb{C}$ 上の因子化代数と頂点代数の間に自然な対応があると期待できる．実際, Costello と Gwilliam は [CG17, §5.3] で S^1-equivariant holomorphically translation invariant prefactorization algebra とよばれる前因子化代数から頂点代数を構成する一般的な方法を説明し, また [CG17, §5.4, §5.5] でアフィン頂点代数 (WZW 模型) や $\beta\gamma$ 頂点代数 ($\beta\gamma$ 系) に対応する因子化代数を個別に構成している．同様の方法で Williams [W17] は Viarasoro 頂点代数 (ミニマル模型) に対応する因子化代数を構成した．これらの [CG17, §5.4, §5.5] と [W17] による因子化代数の構成は factorization envelop とよばれる方法で行われている．一般の頂点代数に対する因子化代数の構成は Bruegmann [B20a] によって成されているが, 彼の構成と前述の factorization envelop を用いた構成の関係はよく分かっていない．

また因子化代数という概念には Beilinson と Drinfeld [BD04] によって導入された別のものがある．Beilinson-Drinfeld の因子化代数はカイラル代数とよばれるものと本質的に同じものであり, これは二次元共形場理論の代数幾何学的な定式化を与えるものである．さらにアフィン直線 $\mathbb{A}^1$ 上の translation-equivariant なカイラル代数と頂点代数の間の圏同値が知られている ([BD04, §0.15], [BDHK19, Corollary A.2])．Costello と Gwilliam は [CG17, §1.4.1] において二つの因子化代数の関係を発見的に述べているが, これを数学的な定理として証明することはまだ成されていない．

[N] の研究は元々, 頂点代数と圏同値になるような因子化代数の特徴づけを目標に始められたがそれは現在達成されていない．しかしながらその過程で頂点代数と因子化代数の関係について新たな結果が得られたので報告する．

* E-mail: m21035a@math.nagoya-u.ac.jp

記号と用語

- 位相空間 X に対しその開集合系を $\mathfrak{U}_X$ で表す. また各点 $x \in X$ の開近傍全体を $\mathfrak{U}_X(x)$ で表す.
- $R \in \mathbb{R}_{>0}$ と $z \in \mathbb{C}$ に対し $D_R(z) \coloneqq \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta - z| < R\}$ で開円盤を表す.
- $S^1 \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ で単位円周を表す.
- $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ と部分集合 $E \subset \mathbb{C}$ に対し $\mathrm{Conf}_l(E) \coloneqq \{(z_1, \ldots, z_l) \in E^l \mid z_i \neq z_j \, (i \neq j)\}$ で配置空間を表す.
- $\mathsf{Mod}\,\mathbb{C}$ で $\mathbb{C}$ 上の線形空間と $\mathbb{C}$-線形写像がなす圏を表す.
- $\mathsf{LCS}_{\mathbb{C}}$ で $\mathbb{C}$ 上の局所凸空間と連続な $\mathbb{C}$-線形写像がなす圏を表す.
- 単に可換代数といったら $\mathbb{C}$ 上の単位的かつ結合的な可換代数のこととする.

2 因子化代数

前因子化代数は位相空間上の前余層 (precosheaf) に因子化積 (factorization product) とよばれる構造を与えたものである. この節では因子化代数の定義を簡単に述べて, その物理的意味を解説する. 位相空間 X と完備かつ余完備な対称モノイダル圏 M を固定しよう. M のテンソル積を $\otimes$ で表し, 単位対象を 1_{M} で表す.

M に値をもつ X 上の前余層とは関手 $\mathcal{F}\colon \mathfrak{U}_X \to \mathsf{M}$ のことである. ここで開集合系 $\mathfrak{U}_X$ を包含関係で圏とみなした. 開集合の包含関係 $U \subset V$ に対応する M の射を

$$\mathcal{F}_V^U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$$

で表す. 前層の茎と双対的に各点 $x \in X$ の余茎 $\mathcal{F}^x \in \mathrm{Ob}\,\mathsf{M}$ が射影極限として定義される:

$$\mathcal{F}^x \coloneqq \varprojlim_{U \in \mathfrak{U}_X(x)} \mathcal{F}(U).$$

射影極限の自然な射を

$$\mathcal{F}_U^x \colon \mathcal{F}^x \to \mathcal{F}(U) \quad (U \in \mathfrak{U}_X(x))$$

で表す.

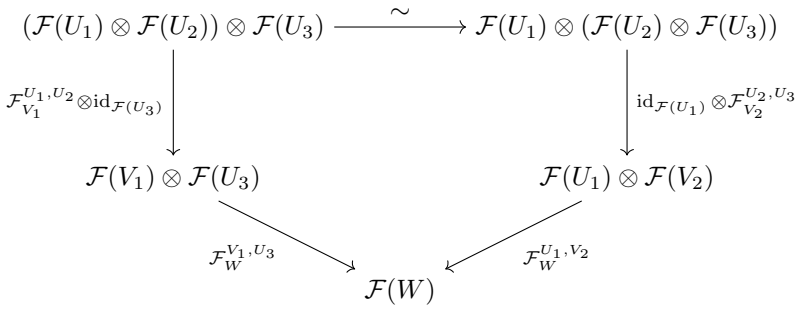
M に値をもつ X 上の前因子化代数 ([CG17, §3.1.1, §3.1.2]) とは次のデータの組で自然な両立条件を満たすものである:

- 前余層 $\mathcal{F}\colon \mathfrak{U}_X \to \mathsf{M}$.
- M の射の族
$$\mathcal{F}_W^{U,V} \colon \mathcal{F}(U) \otimes \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(W) \quad (U, V, W \in \mathfrak{U}_X,\, U \sqcup V \subset W).$$
各 $\mathcal{F}_W^{U,V}$ を因子化積とよぶ.
- M の射 $\eta\colon 1_{\mathsf{M}} \to \mathcal{F}(\varnothing)$. これを単位射とよぶ.

例えば定義に現れる両立条件の一つとして結合律がある. これは開集合 $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, W \subset X$ で

$$U_1 \sqcup U_2 \subset V_1, \quad U_2 \sqcup U_3 \subset V_2, \quad U_1 \sqcup V_2 \subset W, \quad U_3 \sqcup V_1 \subset W$$

を満たすものに対し



は可換であるという条件である．このような両立条件から有限個の開集合 $U_1,\dots,U_n,V\subset X$ で $U_1\sqcup\cdots\sqcup U_n\subset V$ を満たすものに対し M の射

$$\mathcal{F}_V^{\{U_i\}_{i=1}^n}\colon\bigotimes_{i=1}^n\mathcal{F}(U_i)\to\mathcal{F}(V)$$

が帰納的に定義される．因子化代数 ([CG17, §6.1.1]) は層のように descent condition を満たす前因子化代数であるが $\mathfrak{U}_X$ の Grothendieck 位相として Weiss 被覆を用いる．詳細は省略する．

群 G が位相空間 X に作用している状況を考える．このとき G-同変な前因子化代数とは前因子化代数 $\mathcal{F}\colon\mathfrak{U}_X\to\mathsf{M}$ と M の射の族

$$\sigma_{a,U}\colon\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}(aU)\quad(a\in G,U\in\mathfrak{U}_X)$$

の組で $\mathcal{F}$ の前因子化代数の構造と両立するものである．

以上の準備のもとで前因子化代数の物理的な意味を説明しよう．

可微分多様体 M とその上の前因子化代数 $\mathcal{F}$ が与えられたとする．M は考えている場の理論の時空を表し，各開集合 $U\subset M$ に対して $\mathcal{F}(U)$ は U 上の場に依存する物理量/観測可能量の空間を表していると解釈される[*1]．

例 2.1 ([CG17, §1.1]). 1 つの粒子が 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 内のある領域 D を運動しているとする．これは空間次元 0 の場の理論と考えることができ，時空は $M=\mathbb{R}$ (時間軸) である．

この 1 粒子系を古典的に考えよう．各開集合 $U\subset M$ に対して U 上の場とは単に関数 $f\colon U\to D$ のことである．U 上の場全体の集合 $\mathrm{Map}(U,D)$ は時間間隔 U に粒子がとり得る軌跡全体であるが，系の運動が Lagrangian $L\colon T_{\mathbb{R}}D\times U\to\mathbb{R}$ で記述されているとき実際の軌跡は L に関する Euler-Lagrange 方程式を満たす．Euler-Lagrange 方程式を満たす軌跡 $f\colon U\to D$ 全体のなす線形空間を $\mathrm{EL}(U)$ で表そう．すると観測可能量の空間 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(U)$ は $\mathrm{EL}(U)$ 上の実数値関数全体がなす可換代数であると考えられる．$\mathrm{EL}\colon U\mapsto\mathrm{EL}(U)$ は関数の制限によって層になるので $\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}\colon U\mapsto\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(U)$ は余層になる．さらに $\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(U)$ の可換代数の構造により

$$\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(U)\otimes\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(V)\longrightarrow\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(W)\otimes\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(W)\longrightarrow\mathrm{Obs}^{\mathrm{cl}}(W)$$

を因子化積として因子化代数になる．しかしこの因子化積は $U\cap V\neq\varnothing$ であっても定義される．

因子化積の定義において本質的に $U\cap V=\varnothing$ が必要になるのは量子論においてである．上の 1 粒子系を量子的に考えよう．このとき開集合 $U\subset M$ に対して観測可能量の空間 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(U)$ を与える方法はいくつか考えられると思うが，ここでは次のようにする: まず考え得る測定装置 $A,B,C,\dots$ を用意し，これらの装置を 1 粒子系に干渉させ実際に測定することを想像しよう．このとき観測可能量の空間 $\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(U)$ は時間間隔 U にできる測定の全体とする．時間間隔 U と V が $U\subset V$ を満たすとき V の中で U の間は測定し $V\backslash U$ の間は何も測

[*1] 考えている場の理論からどのようにして物理量の空間と解釈できる前因子化代数を構成するかという問題は重要である．

定しないとすることで $\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(U) \to \mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(V)$ という射が得られる．一方で同じ時間間隔 U に二つの装置 A と B を用いて同時に測定することはできない．なぜなら量子論の場合, 測定によって生じる粒子との相互作用を無視することができず, 装置 A は粒子と装置 B の複合系を測定していることになるからである．しかし時間間隔 U と V が $U \cap V = \varnothing$ を満たす場合には, U の間に装置 A で測定し A を取り除いた後 V の間に装置 B で測定するということが考えられる．よって時間間隔 U, V, W で $U \sqcup V \subset W$ を満たすもの対し

$$\mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(U) \otimes \mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(V) \longrightarrow \mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(U \sqcup V) \longrightarrow \mathrm{Obs}^{\mathrm{q}}(W)$$

という射が得られた．このような量子論における観測の問題が因子化積の定義の背景にある．

また因子化代数の枠組みは, 場の量子論において重要な計算手法である作用素積展開を再現するのに十分なデータを備えている [C23, §1]. $\mathcal{F}$ を $\mathbb{R}^n$ 上の translation-equivariant な前因子化代数, つまり加法群 $\mathbb{R}^n$ の自然な作用で同変な前因子化代数とする．$\mathcal{F}$ の同変構造を

$$\sigma_{a,U} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U + a) \quad (a \in \mathbb{R}^n, U \in \mathfrak{U}_{\mathbb{R}^n})$$

と表そう．$\mathcal{F}(U)$ を U 上の場に依存する観測可能量の空間とみなすとき, 各点 $x \in \mathbb{R}^n$ の余茎 $\mathcal{F}^x$ は x の無限小近傍における場の振る舞いにのみ依存する観測可能量の空間と解釈できる．[C23, §1.2] では $\mathcal{F}^x$ の元を local operator と呼んでいる．$\mathcal{F}$ は translation-equivariant なので $\mathcal{F}^x \cong \mathcal{F}^0$ が成り立つ．よって local operator として $0 \in \mathbb{R}^n$ まわりのものを考えれば十分である．

半径 $R \in \mathbb{R}_{>0}$ で中心 $x \in \mathbb{R}^n$ の開球を $D_R(x)$ で表すことにしよう．$\{D_R(x)\}_{R \in \mathbb{R}_{>0}}$ は x の基本開近傍系で有限交差的だから, 余茎 $\mathcal{F}^x$ は

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^x &= \varprojlim_{R \in \mathbb{R}_{>0}} \mathcal{F}(D_R(x)) \\
&= \left\{ (a_R)_{R \in \mathbb{R}_{>0}} \in \prod_{R \in \mathbb{R}_{>0}} \mathcal{F}(D_R(z)) \mid \forall r, R \in \mathbb{R}_{>0},\, r < R \Longrightarrow \mathcal{F}^{D_r(x)}_{D_R(x)}(a_r) = a_R \right\}
\end{aligned}$$

で与えられる．また射影極限の自然な射は, 射影

$$\mathcal{F}^x \to \mathcal{F}(D_R(x)), \quad \{a_r\}_{r \in \mathbb{R}_{>0}} \mapsto a_R$$

である．

いま二つの local operator $a, b \in \mathcal{F}^0$ を考えよう．$R \in \mathbb{R}_{>0}$ と $x \in D_R^\times(0) = D_R(0) \backslash \{0\}$ に対し

$$\mu^R_{x,0}(a,b) \coloneqq \mathcal{F}^{D_r(x), D_r(0)}_{D_R(0)} \left(\sigma_{x, D_r(0)} \mathcal{F}^0_{D_r(0)}(a) \otimes \mathcal{F}^0_{D_r(0)}(b) \right) \in \mathcal{F}(D_R(0)) \tag{2.1}$$

と定義する．ここで $r \in \mathbb{R}_{>0}$ を $D_r(x) \sqcup D_r(0) \subset D_R(0)$ となるように取ったが $\mu^R_{x,0}(a,b)$ の定義は同変前因子化代数の両立条件より r の取り方に依らない．よって

$$D_R^\times(0) \to \mathcal{F}(D_R(0)), \quad x \mapsto \mu^R_{x,0}(a,b)$$

という関数が得られた．この関数は x について解析的であるという仮定をしよう[*2]．すると $R \in \mathbb{R}_{>0}$ を小さくして x を 0 に近づけていくと $\mu_{x,0}(a,b) \in \mathcal{F}^0$ という積が定義でき, 作用素積展開

$$\mu_{x,0}(a,b) = \sum f_n(x) c_n \quad (c_n \in \mathcal{F}^0)$$

が得られるのではないかと期待できる．しかしこのアイデアをそのまま一般論として数学的に定式化することは容易ではない．

二次元共形場理論の作用素積展開は頂点代数を用いて記述できる．次の節では $\mathbb{C}$ 上の前因子化代数から頂点代数を構成し, 上のアイデアが二次元共形場理論の場合には正当化されることを説明する．頂点代数については [FBZ04] を参照されたい．

[*2] 解析性を述べるためには $\mathcal{F}(D_R(0))$ が位相線形空間の構造を持っている必要がある．

3　主結果 1

局所凸空間に値をとる $\mathbb{C}$ 上の前因子化代数から頂点代数を構成する方法 [N, §3.2] を解説する．この方法は Costello と Gwilliam によるもの [CG17, §5.3] および Bruegmann によるもの [B20a, §1.3] と同様のアイデアに基づくが次の点で優れている:

- 導入で触れたように Costello と Gwilliam は S^1-equivariant holomorphically translation invariant prefactorization algebras とよばれる前因子化代数から頂点代数を構成した．この前因子化代数は differentiable vector space のコチェイン複体の圏に値をとるものである (differentiable vector space については [CG17, §3.5.1] を参照)．Differentiable vector space の圏は多くの位相線形空間のクラスを部分圏として含み, かつ Abel 圏であるという著しい特徴をもつ．この特徴によって differentiable vector space の圏ではホモロジー代数を自由に使うことができる．しかしながら [CG17, Theorem 5.3.3] を見れば分かるように頂点代数の構造はコホモロジーのレベルに現れるので前因子化代数がコチェイン複体に値をとる必要はない．Differentiable vector space の概念は広く知られているわけではないので局所凸空間を使った方が分かりやすい．
- Bruegmann も [B20a, §1.3] において前因子化代数から頂点代数を構成している．彼は前因子化代数のとる値として bornological vector space を採用している．しかし彼が実際に前因子化代数から構成したものは geometric vertex algebra とよばれるものであり, 別のプレプリント [B20b] において geometric vertex algebra と頂点代数の圏同値を示している．したがって彼の構成は二段階に分かれており, 頂点代数と因子化代数の直接の対応が不明瞭になっている．それに対し [N, §3.2] では頂点代数を直接構成した．
- Costello-Gwilliam と Bruegmann による構成はどちらも前因子化代数に離散条件を課している ([CG17, Theorem 5.3.3] の条件 (iii) および [B20a, §1.3] の第一段落を参照)．[N, §3.2] では**この離散条件を仮定しなくても頂点代数の構成が可能であることを示した**．離散条件を取り除くために局所凸空間に値をもつ複素関数の解析学を用いた．

局所凸空間と連続線形写像がなす圏を $\mathsf{LCS}_{\mathbb{C}}$ で表す．$\mathsf{LCS}_{\mathbb{C}}$ を射影的テンソル積 $\otimes := \otimes_\pi$ で対称モノイダル圏とみなす．また等長変換群 $S^1 \ltimes \mathbb{C}$ の複素平面 $\mathbb{C}$ への自然な作用を考える．$\mathcal{F}\colon \mathfrak{U}_{\mathbb{C}} \to \mathsf{LCS}_{\mathbb{C}}$ を $S^1 \ltimes \mathbb{C}$-同変な前因子化代数としその同変構造を

$$\sigma_{(q,z),U}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}((q,z)U) \quad ((q,z) \in S^1 \ltimes \mathbb{C},\, U \in \mathfrak{U}_{\mathbb{C}})$$

で表す.

各 $R \in \mathbb{R}_{>0}$ と $(z_1, \dots, z_l) \in \mathrm{Conf}(D_R(0))$ に対し局所凸空間の射 $\mu^R_{z_1,\dots,z_l}\colon (\mathcal{F}^0)^{\otimes l} \to \mathcal{F}(D_R(0))$ を次のような合成として定める:

$$(\mathcal{F}^0)^{\otimes l} \xrightarrow{\otimes_{i=1}^l \mathcal{F}^0_{D_r(0)}} \bigotimes_{i=1}^l \mathcal{F}(D_r(0)) \xrightarrow{\otimes_{i=1}^l \sigma_{(1,z_i),D_r(0)}} \bigotimes_{i=1}^l \mathcal{F}(D_r(z_i)) \xrightarrow{\mathcal{F}^{D_r(z_1),\dots,D_r(z_l)}_{D_R(0)}} \mathcal{F}(D_R(0))$$

ここで $r \in \mathbb{R}_{>0}$ を

$$D_r(z_1) \sqcup \cdots \sqcup D_r(z_l) \subset D_R(0)$$

となるように取ったが $\mu^R_{z_1,\dots,z_l}$ の定義は r の取り方によらない．この $\mu^R_{z_1,\dots,z_l}$ は (2.1) の多変数版になっていることに注意されたい.

また $\Delta \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\mathcal{F}^0_\Delta := \varprojlim_{R \in \mathbb{R}_{>0}} \mathcal{F}(D_R(0))_\Delta,$$

$$\mathcal{F}(D_R(0))_\Delta \coloneqq \{a \in \mathcal{F}(D_R(0)) \mid \forall q \in S^1,\, \sigma_{q,D_R(0)}(a) = q^\Delta a\}$$

と定義する. 各元 $a \in \mathcal{F}^0_\Delta \backslash \{0\}$ を $\mathcal{F}^0$ の斉次元とよび $\Delta(a) \coloneqq \Delta$ と表す.

定義 3.1 ([N, Definition 3.2.7]). $S^1 \ltimes \mathbb{C}$-同変な前因子化代数 $\mathcal{F}\colon \mathfrak{U}_\mathbb{C} \to \mathsf{LCS}_\mathbb{C}$ は次の (i) から (iv) を満たすとき正則前因子化代数 (holomorphic prefactorization algebra) とよばれる:

(i) 任意の $0 < r < R$ と $\Delta \in \mathbb{Z}$ に対し $\mathcal{F}^{D_r(0)}_{D_R(0)}\colon \mathcal{F}(D_r(0))_\Delta \to \mathcal{F}(D_R(0))_\Delta$ は線形同型である.

(ii) 任意の $R \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し $\mathcal{F}(D_R(0)) = 0$ $(\Delta \ll 0)$.

(iii) 任意の $R \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し $\mathcal{F}(D_R(0))$ は準完備かつ Hausdorff な局所凸空間である.

(iv) 任意の $R \in \mathbb{R}_{>0}$ と斉次元 $a_1, \dots, a_l \in \mathcal{F}^0$ に対し、関数

$$\mathrm{Conf}_l(D_R(0)) \to \mathcal{F}(D_R(0)), \quad (z_1, \dots, z_l) \mapsto \mu^R_{z_1,\dots,z_l}(a_1 \otimes \cdots \otimes a_l)$$

は ([N, Definition A.1.3] の意味で) 正則である.

定義 3.1 の条件 (iv) が前節の作用素積展開の説明で仮定した解析性に対応している. また解析性が意味をもつために条件 (iii) が必要になる.

定理 3.2 ([N, Theorem 3.2.11, Proposition 3.3.2]). $\mathcal{F}\colon \mathfrak{U}_X \to \mathsf{LCS}_\mathbb{C}$ を正則前因子化代数とする. このとき線形空間

$$\mathbf{V}(\mathcal{F}) \coloneqq \bigotimes_{\Delta \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}^0_\Delta$$

上には $\mu^R_{z_1,\dots,z_l}$ から誘導される $\mathbb{Z}$-次数付き頂点代数の構造が存在する. さらに $\mathcal{F}$ が locally constant([CG17, Definition 6.4.1]) であるとき $\mathbf{V}(\mathcal{F})$ は可換な頂点代数になる.

$\mathbf{V}(\mathcal{F})$ の頂点作用素 $Y(-,z)$ の定義を説明する. 斉次元 $a, b \in \mathcal{F}^0$ と $R \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し

$$D^\times_R(0) \to \mathcal{F}(D_R(0)), \quad z \mapsto \mu^R_{z,0}(a \otimes b)$$

は正則だから Laurent 展開できる ([N, Theorem A.5.4]):

$$\mu^R_{z,0}(a \otimes b) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-1}(a_{(n)}b)_R \quad (z \in D^\times_R(0)), \qquad (a_{(n)}b)_R \in \mathcal{F}(D_R(0)).$$

この $(a_{(n)}b)_R$ は $(a_{(n)}b)_R \in \mathcal{F}(D_R(0))_{\Delta(a)+\Delta(b)-n-1}$ および $\mathcal{F}^{D_r(0)}_{D_R(0)}(a_{(n)}b)_r = (a_{(n)}b)_R$ を満たす ([N, Lemma 3.2.10]) ので

$$a_{(n)}b \coloneqq \left\{(a_{(n)}b)_R\right\}_{R \in \mathbb{R}_{>0}} \in \mathcal{F}^0_{\Delta(a)+\Delta(b)-n-1}$$

が得られた. 条件 (i), (ii) より $a_{(n)}b = 0$ $(n \gg 0)$ がしたがう. $\mathbf{V}(\mathcal{F})$ の頂点作用素は

$$\mathbf{V}(\mathcal{F}) \otimes \mathbf{V}(\mathcal{F}) \to \mathbf{V}(\mathcal{F})((z)), \quad a \otimes b \mapsto Y(a,z)b \coloneqq \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-1} a_{(n)}b$$

と定義される.

$\mu^R_{z_1,\dots,z_l}$ の定義より $a, b, c \in \mathbf{V}(\mathcal{F})$ に対して

$$\mu^R_{z,w,0}(a \otimes b \otimes c) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (z-w)^{-n-1} \mu^R_{w,0}(a_{(n)}b \otimes c) \quad (0 < |w| < |z| < R)$$

が成り立つ. これが頂点作用素の作用素積展開 ([FBZ04, §3.3.4, (3.3.10)])

$$Y(a,z)Y(b,w) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (z-w)^{-n-1}|_{|z|>|w|} Y(a_{(n)}b, w) + :Y(a,z)Y(b,w):$$

に対応している式である.

4　主結果 2

[N, §3.4] では可換頂点代数から locally constant 因子化代数を構成した．これは定理 3.2 の逆構成になっている．

定理 4.1 ([N, Proposition 3.4.6, Proposition 3.4.9]). 可換な $\mathbb{Z}$-次数付き頂点代数 $V = \bigoplus_{\Delta\in\mathbb{Z}} V_\Delta$ で V_Δ $(\Delta \ll 0)$ および $\dim_{\mathbb{C}} V_\Delta < \infty$ $(\Delta \in \mathbb{Z})$ を満たすものに対し locally constant な正則因子化代数 $\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}}$ が構成できる．さらに $\mathbb{Z}$-次数つき頂点代数の同型

$$\mathbf{V}(\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}}) \cong V$$

が成り立つ．

$\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}}$ の構成を簡単に説明する：まず [N, §2.2] において一般に可換代数 A から locally constant な因子化代数 $\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_A \colon \mathfrak{U}_{\mathbb{C}} \to \mathsf{Mod}\,\mathbb{C}$ を構成した．この構成は Lurie によって示された E_n-代数と $\mathbb{R}^n$ 上の locally constant な因子化代数の $(\infty,1)$-圏同値 ([CG17, Theorem 6.4.2]) の特別な場合になっている．条件 $V_\Delta = 0$ $(\Delta \ll 0)$ より $\overline{V} \coloneqq \prod_{\Delta\in\mathbb{Z}} V_\Delta$ 上に可換代数の構造が自然に定まるので locally constant な因子化代数 $\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}} \colon \mathfrak{U}_{\mathbb{C}} \to \mathsf{Mod}\,\mathbb{C}$ が得られる．また V の共形ウェイト Δ と translation operator T を用いて $\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}}$ 上に $S^1 \ltimes \mathbb{C}$-同変構造を定義することができる．ここで $\dim_{\mathbb{C}} V_\Delta < \infty$ $(\Delta \in \mathbb{Z})$ という条件を課すと有限次元線形空間 V_Δ の自然な位相を用いることで $\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}}$ は $\mathsf{LCS}_{\mathbb{C}}$ に値をもつ $S^1 \ltimes \mathbb{C}$-同変な因子化代数になる．

導入で述べたように Bruegmann は [B20a, §1.4] において一般の頂点代数から因子化代数を構成しているが，彼の構成と定理 4.1 の構成の関係は分かっていない．さらに残念なことに今のところ定理 4.1 の構成を一般の頂点代数に拡張することはできていない．しかし定理 4.1 の構成は次のような意味で可換微分代数のジェット構成と両立するので，その点で良いものであると言える．

定理 4.2 ([N, Proposition 3.4.11]). A を有限生成可換代数とし $\mathcal{J}A$ をそのジェット代数とする ([N, Example 3.1.3, Example 3.1.6] 参照)．可換な $\mathbb{Z}$-次数付き頂点代数 $V = \bigoplus_{\Delta\in\mathbb{Z}} V_\Delta$ で定理 4.1 の条件を満たすものと因子化代数の射 $\varphi \colon \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_A \to \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_V$ に対し $S^1 \ltimes \mathbb{C}$-同変因子化代数の射 $\widetilde{\varphi} \colon \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{\mathcal{J}A}} \to \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}}$ で

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_A & \longrightarrow & \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{\mathcal{J}A}} \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{\varphi}} \\ \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_V & \longrightarrow & \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}} \end{array}$$

を可換にするものがただ一つ存在する．ただし $\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_A \to \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{\mathcal{J}A}}$ と $\mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_V \to \mathbf{F}^{\mathrm{loc}}_{\overline{V}}$ は自然な単射 $A \hookrightarrow \mathcal{J}A \hookrightarrow \overline{\mathcal{J}A}$ と $V \hookrightarrow \overline{V}$ から定まる因子化代数の射を表す．

参考文献

[N] Y. Nishinaka, *A note on vertex algebras and Costello-Gwilliam factorization algebras*, arXiv: 2408.00412v2.

[Bo86] R. Borcherds, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras and the Monster*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA **83** (10), 3068–3071 (1986).

[BD04] A. Beilinson, V. Drinfeld, *Chiral Algebras*, AMS Colloq. Publ. **51**, Amer. Math. Soc., Province RI (2004).

[BDHK19] B. Bakalov, A. De Sole, R. Heluani, V. G. Kac, *An operadic approach to vertex algebra and Poisson vertex algebra cohomology*, Jpn. J. Math. **14**, 249–342 (2019).

[B20a] D. Bruegmann, *Vertex Algebras and Costello-Gwilliam Factorization Algebras*, arXiv: 2012.12214v2 (2020).

[B20b] D. Bruegmann, *Geometric Vertex Algebras*, arXiv: 2012.09717v2 (2020).

[C11] K. Costello, *Renormalization and effective field theory*, Math. Surv. Monog. **170**, Amer. Math. Soc. (2011).

[C23] K. Costello, *Factorization algebra*, arXiv: 2310.06137v2.

[CG17] K. Costello, O. Gwilliam, *Factorization Algebras in Quantum Field Theory volume 1*, New Mathematical monographs **31**, Cambridge University Press (2017).

[CG21] K. Costello, O. Gwilliam, *Factorization Algebras in Quantum Field Theory volume 2*, New Mathematical monographs **41**, Cambridge University Press (2021).

[FBZ04] E. Frenkel, D. Ben-Zvi, *Vertex algebras and algebraic curves*, 2nd ed., Math. Surv. Monog. **88**, Amer. Math. Soc. (2004).

[W17] B. Williams, *The Virasoro vertex algebra and factorization algebras on Riemann sarface*, Lett. Math. Phys. **107**, 2189–2237 (2017).

Initial ideals of generic ideals and variations of Moreno-Socías conjecture

大阪大学　大学院情報科学研究科　情報基礎数学専攻
谷光一郎 (Koichiro TANI) *

概要

Moreno-Socías 予想は次数付き逆辞書式順序に関するジェネリックイデアルのイニシャルイデアルに関する予想である. 一般の単項式順序について, ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルは Borel-fixed であることを示した. これは, 一般の単項式順序で成り立つ弱い Moreno-Socías 予想とみなすことができる. また, 辞書式順序に類推した Moreno-Socías 予想についても考察し, 予想が成り立つ場合と成り立たない場合をそれぞれ発見した. 本講演ではそれらについて紹介する.

1　導入

1.1　グレブナー基底

$\Bbbk$ を体とし, S を $\Bbbk$ 上の n 変数多項式環 $\Bbbk[\overline{x}] = \Bbbk[x_1, \ldots, x_n]$ とする. ここで, $\overline{x}$ は変数の集合 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ である. $\mathcal{M}(\overline{x})$ を $\overline{x}$ の変数からなる単項式全体の集合とする. $\preceq$ を $\mathcal{M}(\overline{x})$ 上で定義される全順序で以下の条件を満たすとする:

- 単項式 m_1, m_2, m_3 について, $m_1 \preceq m_2$ ならば, $m_1 m_3 \preceq m_2 m_3$ を満たす;
- $1 \in \mathcal{M}(\overline{x})$ が最小元である.

このような条件をみたす $\mathcal{M}(\overline{x})$ 上の順序を**単項式順序**という. 単項式順序で代表的なものとして, 辞書式順序 (lexicographic order) と次数付き逆辞書式順序 (degree reverse lexicographic order) がある.

Definition 1.1 (辞書式順序)**.** 以下のように定義される単項式順序を**辞書式順序**と呼ぶ:

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} \preceq x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n} \overset{\text{def}}{\iff} a_i \neq b_i \text{ を満たす最小の } i \text{ について, } a_i < b_i \text{ が成り立つ.}$$

Definition 1.2 (次数付き逆辞書式順序)**.** 以下のように定義される単項式順序を**次数付き逆辞書式**

* E-mail:tani-k@ist.osaka-u.ac.jp

順序と呼ぶ:

$$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n} \preceq x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots x_n^{b_n} \overset{\text{def}}{\iff} (\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{i=1}^{n} b_i) \text{ または}$$

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \text{ かつ } a_i \neq b_i \text{ を満たす最大の } i \text{ について, } a_i > b_i).$$

多項式 $f \in S$ について, f に出てくる項の中で単項式順序 $\preceq$ に関して最も大きい項を $\mathrm{in}_{\preceq}(f)$ と書き, f の**先頭項**と呼ぶ. S のイデアル I について, $\{\mathrm{in}_{\preceq}(f) \mid f \in I\}$ で生成される $\Bbbk$-ベクトル空間は再び S のイデアルになる. これを I の**イニシャルイデアル**と呼び, $\mathrm{in}_{\preceq}(I)$ と書く. イニシャルイデアルのような, 単項式で生成されるイデアルを単項式イデアルという.

イデアル I と単項式順序 $\preceq$ について, 多項式の有限集合 $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_t\} \subset I$ が

$$\mathrm{in}_{\preceq}(I) = (\mathrm{in}_{\preceq}(g_1), \ldots, \mathrm{in}_{\preceq}(g_t))$$

を満たすとき, $\mathcal{G}$ は I の $\preceq$ に関する**グレブナー基底**であるという. ただし, $(\mathrm{in}_{\preceq}(g_1), \ldots, \mathrm{in}_{\preceq}(g_t))$ は $\mathrm{in}_{\preceq}(g_1), \ldots, \mathrm{in}_{\preceq}(g_t)$ で生成されるイデアルである. グレブナー基底 $\mathcal{G} = \{g_1, \ldots, g_t\}$ が**被約**であるとは, 各 g_i がモニックであり, g_i の各項が $\mathrm{in}_{\preceq}(g_j)(i \neq j)$ では割り切れないことを言う. イデアル I と単項式順序 $\preceq$ を決めると, 被約グレブナー基底が一意に定まることが知られている. グレブナー基底の詳細に関しては, [2] や [3] などを参照されたい.

1.2 ジェネリックイデアル

以降, $\Bbbk$ は無限体とし, S のイデアル I は斉次多項式 $f_1, \ldots, f_s$ で生成される斉次イデアルとする. また, $\deg(f_i) = d_i \geq 1$ とする. 剰余環 S/I の**ヒルベルト関数**を

$$\mathrm{HF}(S/I, d) = \dim_{\Bbbk}(S/I)_d$$

で定め, **ヒルベルト級数**を以下のように定める:

$$\mathrm{HS}(S/I; t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \dim_{\Bbbk}(S/I)_i t^i.$$

生成系の各 f_i は次数 d_i の単項式の一次結合でかけるので, $a_{j,k} \in \Bbbk$ として

$$f_1 = a_{1,1}x_1^{d_1} + a_{1,2}x_1^{d_1-1}x_2 + \cdots + a_{1,r_1}x_n^{d_1}$$
$$\vdots$$
$$f_s = a_{s,1}x_1^{d_s} + a_{s,2}x_1^{d_s-1}x_2 + \cdots + a_{s,r_s}x_n^{d_s}$$

という形でかける. ここで $r_i = \binom{n+d_i-1}{d_i}$ は d_i 次単項式の個数であり, $N = \sum_{i=1}^{s} r_i$ とする. 係数 $a_{j,k}$ を並べて $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_{\Bbbk}^N$ の点と対応させることでイデアル I を点 $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_{\Bbbk}^N$ と対応させることができる. $\mathbb{A}_{\Bbbk}^N$ のザリスキ開集合 U が存在して, U の点に対応するイデアル全てで同じ性質を共有するとき, その性質は**ジェネリック**なイデアルで成り立つといわれる. 例えば以下のような性質が知られている.

Lemma 1.3 ([6, Theorem 1])**.** $n, s, d_1, \ldots, d_s$ を固定する. 稠密なザリスキ開集合 $U \subset \mathbb{A}_{\Bbbk}^N$ が存在して, U の各点 $\mathbf{a}$ に対応するイデアル I でヒルベルト級数 $\mathrm{HS}(S/I)$ が同じになる.

以下の予想は **Fröberg 予想**として知られている.

Conjecture 1.4 ([5])**.** $n, s, d_1, \ldots, d_s$ を固定する. *Lemma 1.3* で記述されているジェネリックなイデアル I について, ヒルベルト級数 $\mathrm{HS}(S/I; t)$ は $|\frac{\prod_{i=1}^{s}(1-t^{d_i})}{(1-t)^n}|$ になる. ここで, $|\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i|$ は b_i を以下のように定義された形式的冪級数 $\sum_{i=0}^{\infty} b_i t^i$ である:

$$b_i = \begin{cases} a_i & (a_j > 0 \textit{ for all } j \leq i) \\ 0 & (\textit{otherwise}). \end{cases}$$

また, イニシャルイデアルに関しても Lemma 1.3 と同じような補題がある.

Lemma 1.5 (See, e.g., [10])**.** 単項式順序 $\preceq$ を固定する. 稠密なザリスキ開集合 $V \subset \mathbb{A}_{\Bbbk}^N$ が存在して, V の各点 $\mathbf{a}$ に対応するイデアル I でイニシャルイデアル $\mathrm{in}_{\preceq}(I)$ が同じになる.

Definition 1.6. J を単項式イデアルとし, $\preceq$ を次数付き逆辞書式順序とする. J の極小生成系にある任意の単項式 m について, $\deg(m) = \deg(m')$ かつ $m \preceq m'$ が成り立つ全ての単項式 m' が再び J に属するとき, J は **weakly reverse lexicographic** であるという.

以下の予想は **Moreno-Socías 予想**として知られている.

Conjecture 1.7 ([9])**.** $n, s, d_1, \ldots, d_s$ を固定する. *Lemma 1.5* で記述されているジェネリックなイデアル I について, 次数付き逆辞書式順序に関する I のイニシャルイデアルは *weakly reverse lexicographic* である.

Lemma 1.3 と Lemma 1.5 で記述されている稠密なザリスキ開集合 U と V は $V \subset U$ であるが一般には等しくない. 今後, U の点に対応するイデアルを U-ジェネリックイデアルと呼び, V の点に対応するイデアルを V-ジェネリックイデアルと呼ぶことにする.

2 主定理

2.1 一般の単項式順序に関する結果

一般の単項式順序での V-ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルについて述べる. Bayer-Stillman [1] の結果をジェネリックイデアルのイニシャルイデアルに対して類推して以下を示した.

Theorem 2.1. $n, s, d_1, \ldots, d_s$ を固定し, 単項式順序 $\preceq$ を任意にひとつ定める. このとき, V-ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルは *Borel-fixed* である.

ここでは, Borel-fixed な単項式イデアルの定義は省略するが, Proposition 2.2 のような特徴づけがある. 非負整数 s と t について, 二項係数 $\binom{t}{s}$ が $\binom{t}{s} \not\equiv 0 \pmod{p}$ を満たすとき, $s \preceq_p t$ と書くことにする. $p = 0$ のときは, $\preceq_p$ は通常の全順序 $\leq$ と同じである.

Proposition 2.2 ([4, Theorem 15.23])**.** $J \subset S$ を単項式イデアル, $p \geq 0$ を体 $\Bbbk$ の標数とする. J が *Borel-fixed* であることの必要十分条件は, J の生成系にある任意の単項式 m が x_j^t で割り切れて x_j^{t+1} で割り切れないとき, 全ての $i < j$ と $s \preceq_p t$ で $(x_i/x_j)^s m \in J$ が成り立つことである.

Proposition 2.2 から, 単項式イデアル J が weakly reverse lexicographic ならば, J は Borel-fixed であることがわかる. したがって, Theorem 2.1 は Moreno-Socías 予想とは矛盾しておらず, 一般の単項式順序で成り立つ弱い Moreno-Socías 予想とみなすことができる.

2.2 辞書式順序に関する結果

Moreno-Socías 予想を辞書式順序へ類推した場合を考えてみる. weakly reverse lexicographic イデアルの辞書式順序版としてみなせるもののひとつは lexsegment イデアルと呼ばれ, よく調べられている.

Definition 2.3 (lexsegment イデアル)**.** 単項式順序 $\preceq$ は辞書式順序とする. J に属する任意の単項式 m について, $\deg(m) = \deg(m')$ かつ $m \preceq m'$ が成り立つ全ての単項式 m' が再び J に属するとき, J を **lexsegment イデアル**と呼ぶ.

Lexsegment イデアルの詳細については, [7, Section 6.3] や [8, Section 2.4] を参照されたい.

辞書式順序に関するジェネリックイデアルのイニシャルイデアルが lexsegment になるのかどうか考える. Theorem 2.1 の証明で行った議論を使い, 辞書式順序に当てはめて以下を示した.

Theorem 2.4. $n, s, d_1, \ldots, d_s$ を固定し, 単項式順序を辞書式順序とする. ある点 $\mathbf{a} \in U$ が存在して, $\mathbf{a}$ に対応する I のイニシャルイデアルが *lexsegment* ならば, V-ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルは *lexsegment* である.

Theorem 2.4 を使って, V-ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルが lexsegment になるような状況を見つけることができた.

Corollary 2.5. 体 $\Bbbk$ の標数を 0 とする. n, s と d_i が以下のうちのどれかひとつの条件を満たすならば, V-ジェネリックイデアルの辞書式順序に関するイニシャルイデアルは *lexsegment* である.

- $n = 3, s = 2$, *and* $2 \leq d_1, d_2 \leq 3$.
- $n = 3, s = 3$, *and* $2 \leq d_1, d_2, d_3 \leq 3$.
- $n = 4, s = 3$, *and* $2 \leq d_1, d_2, d_3 \leq 3$.

他にも V-ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルを計算する方法を考案した.

Definition 2.6. $\overline{t}$ を $\overline{x}$ とは共通部分を持たない別の変数の集合とする. $\preceq_{\overline{t}}$ と $\preceq$ をそれぞれ $\mathcal{M}(\overline{t})$ と $\mathcal{M}(\overline{x})$ 上の単項式順序とする. u_1, u_2 を $\mathcal{M}(\overline{t})$ の単項式とし, v_1, v_2 を $\mathcal{M}(\overline{x})$ の単項式とする. $\mathcal{M}(\overline{t} \cup \overline{x})$ 上の単項式順序 $\preceq'$ を以下のように定める:

$$u_1 v_1 \preceq' u_2 v_2 \overset{\text{def}}{\iff} v_1 \preceq v_2 \text{ または } (v_1 = v_2, \text{ かつ } u_1 \preceq_{\overline{t}} u_2).$$

単項式順序 $\preceq'$ を $\mathcal{M}(\overline{t}\cup\overline{x})$ 上の**逆ブロック順序**と呼ぶ.

以降, $\mathcal{M}(\overline{t}\cup\overline{x})$ 上の単項式順序 $\preceq'$ は逆ブロック順序とし, $\preceq'$ を $\mathcal{M}(\overline{x})$ 上の単項式順序に制限した $\preceq$ は $\mathcal{M}(\overline{x})$ の単項式順序として考えていたもの (ここでは特に辞書式順序) とする. また, 多項式 $g\in\Bbbk[\overline{t},\overline{x}]$ について, $\mathrm{LM}_{\preceq}(g)$ は g を $\Bbbk[\overline{t}][\overline{x}]$ の元として見たときの, $\mathcal{M}(\overline{x})$ の単項式順序 $\preceq$ に関しての先頭単項式とする. つまり $\mathrm{LM}_{\preceq}(g)$ は $\mathcal{M}(\overline{x})$ の単項式である.

Theorem 2.7. I' を $\Bbbk[\overline{t},\overline{x}]$ のイデアルで

$$\begin{aligned} F_1 &= t_{1,1}x_1^{d_1}+t_{1,2}x_1^{d_1-1}x_2+\cdots+t_{1,r_1}x_n^{d_1}\\ &\vdots\\ F_s &= t_{s,1}x_1^{d_s}+t_{s,2}x_1^{d_s-1}x_2+\cdots+t_{s,r_s}x_n^{d_s}. \end{aligned}$$

で生成されているとする. $\mathcal{G}$ を逆ブロック順序 $\preceq'$ に関する I' のグレブナー基底とする. このとき, $\{\mathrm{LM}_{\preceq}(g)\mid g\in\mathcal{G}\}$ で生成される $\Bbbk[\overline{x}]$ の単項式イデアルは V-ジェネリックイデアルの, 制限した単項式順序 $\preceq$ に関するイニシャルイデアルになっている.

Theorem 2.7 を使って, U-ジェネリックイデアルの中でイニシャルイデアルが lexsegment になるような例は存在しないことを特定の状況下で示した.

Corollary 2.8. 体 $\Bbbk$ の標数を 0 とする. $n=4,s=2,d_1=d_2=2$ のとき, 点 $\mathbf{a}\in U$ で, 対応するイデアルの辞書式順序に関するイニシャルイデアルが *lexsegment* になるような $\mathbf{a}$ は存在しない.

Corollary 2.5 と Corollary 2.8 から以下の問を考え, それらの主張が正しいことを期待できる.

Question 2.9. $n-s\geq 2$ のとき, どのような d_i についても $\mathrm{in}_{\preceq}(I)$ が *lexsegment* になるような $\mathbf{a}\in U$ は存在しないか.

Question 2.10. $n-s\leq 1$ のとき, どのような d_i についても V-ジェネリックイデアルのイニシャルイデアルは *lexsegment* になるか.

特に, Question 2.10 は Moreno-Socías 予想の辞書式順序への類推とみなすことができる.

参考文献

[1] David Bayer and Michael Stillman, *A theorem on refining division orders by the reverse lexicographic order*, Duke Math. J. **55** (1987), no. 2, 321–328. MR 894583

[2] Thomas Becker and Volker Weispfenning, *Gröbner bases*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 141, Springer-Verlag, New York, 1993, A computational approach to commutative algebra, In cooperation with Heinz Kredel. MR 1213453

[3] David A. Cox, John Little, and Donal O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*, fourth ed., Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, Cham, 2015, An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. MR 3330490

[4] David Eisenbud, *Commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 150, Springer-Verlag, New York, 1995, With a view toward algebraic geometry. MR 1322960

[5] Ralf Fröberg, *An inequality for Hilbert series of graded algebras*, Math. Scand. **56** (1985), no. 2, 117–144. MR 813632

[6] Ralf Fröberg and Clas Löfwall, *On Hilbert series for commutative and noncommutative graded algebras*, J. Pure Appl. Algebra **76** (1991), no. 1, 33–38. MR 1140638

[7] Jürgen Herzog and Takayuki Hibi, *Monomial ideals*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 260, Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011. MR 2724673

[8] Ezra Miller and Bernd Sturmfels, *Combinatorial commutative algebra*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 227, Springer-Verlag, New York, 2005. MR 2110098

[9] Guillermo Moreno-Socías, *Degrevlex Gröbner bases of generic complete intersections*, J. Pure Appl. Algebra **180** (2003), no. 3, 263–283. MR 1966660

[10] Keith Pardue, *Generic sequences of polynomials*, J. Algebra **324** (2010), no. 4, 579–590. MR 2651558

穏健トーリック特異点解消の性質について

大阪大学　大学院理学研究科　数学専攻
貝嶋優太郎 (Yutaro KAIJIMA) *

概要

穏健トーリック特異点解消とは, Chavez-Martinez, Duarte, 安田によって導入された, 正規トーリック多様体における F 爆発と本質因子の関係について考察する中で現れる特別な特異点解消のことである. 本稿では, 主に 3 次元の正規トーリック多様体に対し, 穏健トーリック特異点解消がいつ存在するか, また穏健トーリック特異点解消を持つとき, それはどのように特徴づけられるかについて紹介する. 本稿は, 山本雄大氏との共同研究 [KY24] に基づくものである.

1　導入

安田氏によって [Yas12] で導入された e 次 F 爆発 $\mathrm{FB}_e(X)$ とは, 正標数の体上の代数多様体 X に対する Frobenius 射の $e \geq 0$ 回繰り返しの普遍双有理平坦化として定義されるものである. F 爆発に対する自然な問題として, 十分大きな整数 e に対する $\mathrm{FB}_e(X)$ がいつ (クレパント) 特異点解消になるか？というものが考えられる. この問題については, 例えば, 次のようなことが知られている:

- X が 1 次元のとき, 十分大きな e に対し $\mathrm{FB}_e(X)$ は滑らかになる [Yas12].
- X が F-正則曲面のとき, 十分大きな e に対し $\mathrm{FB}_e(X)$ は X の最小特異点解消になる [Har12, TY09, Yas12].
- X が従順な商多様体 ($= \mathbb{A}^d_k/G$, G は有限群で $\mathrm{char}\, k \nmid \#G$) のとき, 十分大きな e に対し $\mathrm{FB}_e(X)$ は G-Hilbert スキームと同型になる. すなわち, $\mathrm{Hilb}^G(\mathbb{A}^d_k) \cong \mathrm{FB}_e(X)$ $(e \gg 0)$ となる [TY09].
  したがって, 特に $d = 3, G \subset \mathrm{SL}_3(k)$ のとき, $\mathrm{FB}_e(X)$ は X のクレパント解消になる.

一方で, $\mathrm{FB}_e(X)$ は特異点を持つ場合もある [Har15, HS11, HSY13, LY24]. このような結果を踏まえ, ここでは次のような問題を考えることにする.

問題 1.1. X を正規多様体とし, e を十分大きい整数とする. このとき, X 上空の本質因子は全て $\mathrm{FB}_e(X)$ に素因子として現れるか？

ここで, 本質因子とは X の全ての特異点解消に現れる素因子のことである. 本質因子は, アークの族に関する Nash 問題で登場することで有名である (例えば, [PS15] を参照). また, F 爆発の各点はジェットと見なすことができるため [Yas12], 問題 1.1は Nash 問題の類似と捉えることもできる.

* E-mail:u797381f@esc.osaka-u.ac.jp

本稿では, 正規トーリック多様体の場合に問題 1.1を考察する. この場合は, 基礎体の標数が 0 の場合も Frobenius のような自己射が定義できる. そこで, 任意標数における正規アフィントーリック多様体に対する F 爆発を次のように定義する.

定義 1.2 ([Yas12])**.** M, N を互いに双対な階数 d の自由アーベル群とし, $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}} \coloneqq N \otimes \mathbb{R}$ を強凸有理多面錐とする. $X \coloneqq \operatorname{Spec} k[\sigma^\vee \cap M]$ を σ に付随するトーリック多様体とする. $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, l 次 F 爆発 $\mathrm{FB}_{(l)}(X)$ を埋め込み $M \cap \sigma^\vee \hookrightarrow (1/l)M \cap \sigma^\vee$ に対応する射

$$F_{(l)} \colon \operatorname{Spec} k[(1/l)M \cap \sigma^\vee] \to X$$

の普遍双有理平坦化として定義する.

[Yas12] により, F 爆発の列 $(\mathrm{FB}_{(l)}(X))_{l \in \mathbb{Z}_{>0}}$ や正規化された F 爆発の列 $(\widetilde{\mathrm{FB}}_{(l)}(X))_{l \in \mathbb{Z}_{>0}}$ は終始することが知られている. よって, 十分大きい l に対する $\mathrm{FB}_{(l)}(X)$ や, $\mathrm{FB}_{(l)}(X)$ の正規化 $\widetilde{\mathrm{FB}}_{(l)}(X)$ をそれぞれ $\mathrm{FB}_{(\infty)}(X), \widetilde{\mathrm{FB}}_{(\infty)}(X)$ と書くことにする. 特に, 基礎体の標数が $p > 0$ のときは, $\mathrm{FB}_{(p^e)}(X) \cong \mathrm{FB}_e(X)$ となる.

近年, Chávez-Martínez, Duarte, 安田の 3 名により問題 1.1に対し, 1 つの解答が与えられた.

定理 1.3 ([CMDY24, Corollary 6.9])**.** X_σ を非退化な強凸有理多面錐 $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ に対応するアフィントーリック多様体とする. このとき, X_σ が穏健トーリック特異点解消を持つならば, 全ての BGS 本質因子は $\widetilde{\mathrm{FB}}_{(\infty)}(X_\sigma)$ に素因子として現れる.

本稿では, 上の定理を示すために導入された穏健トーリック特異点解消 (定義 2.6) の性質について考察を行う. 特に, いつ穏健トーリック特異点解消が存在するか, また, 存在するときそれはどのような性質を持つか, どのように特徴付けられるかという問いに対して, 3 次元の場合について解答を与える.

2 準備

M, N を互いに双対な階数 d の自由アーベル群とし, $M_{\mathbb{R}} \coloneqq M \otimes \mathbb{R}, N_{\mathbb{R}} \coloneqq N \otimes \mathbb{R}$ とする. k を体とする. 錐といったら強凸有理多面錐のこととする. $n \in N$ が原始的であるとは, 任意の $0 < \varepsilon < 1$ に対し, $\varepsilon n \notin N$ となることである. トーリック多様体の基本的な用語については [CLS11] に準拠する. 特に, 錐や凸包はそれぞれ

$$\operatorname{Cone}(u_1, \dots, u_s) \coloneqq \left\{ \sum_{i=1}^{s} \lambda_i u_i \mid \lambda_i \geq 0 \right\} \subseteq N_{\mathbb{R}}$$

$$\operatorname{Conv}(S) \coloneqq \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u \mid \lambda_u \geq 0, \sum_{u \in S} \lambda_u = 1, \text{有限個を除いて} \lambda_u = 0 \right\} \subseteq N_{\mathbb{R}}$$

という記号を使う. ここで, $u_1, \dots, u_s \in N$ は原始的であり, $S \subseteq N_{\mathbb{R}}$ は集合である.

$\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を錐とし, $\sigma^\vee \subseteq M_{\mathbb{R}}$ を σ の双対錐とする. このとき, σ に対応するアフィントーリック多様体を

$$X_\sigma \coloneqq \operatorname{Spec} k[\sigma^\vee \cap M]$$

と書く. より一般に, $N_{\mathbb{R}}$ の扇 Σ に対し, Σ に対応するトーリック多様体を X_Σ と書くことにする.

2.1 BGS 本質因子と Hilbert 基底特異点解消

正規アフィントーリック多様体 X 上空の**トーラス不変因子**とは, 正規トーリック多様体の間のトーリック固有双有理射 $Z \to X$ における Z 上の素因子 E のことである. また, 2 つの X 上空のトーラス不変因子 $E \subset Z, E' \subset Z'$ が Z と Z' の間の自然な双有理写像によって移りあう (一方の生成点が他方の生成点に送られる) とき, それらを同一視する.

$\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を錐とする. このとき, σ に含まれる N の原始元全体の集合と X_σ 上空のトーラス不変因子全体の集合には 1 対 1 対応がある [Ful93, pp. 53–54]. この対応により, σ の 1 次元の面は X_σ のトーラス不変因子と対応する.

本質因子という概念にはいくつかのバリエーションがあるが, 本稿で用いる本質因子の概念は Bouvier と Gonzalez-Sprinberg により導入された次のようなものである.

定義 2.1 (BGS 本質因子 [BGS95])**.** 正規アフィントーリック多様体 X 上空のトーラス不変因子が *BGS* **本質因子**であるとは, 全てのトーリック特異点解消に素因子として現れるもののことである.

定義 2.2. 錐 $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ に対し, σ の *Hilbert* **基底**を

$$\mathrm{Hilb}_N(\sigma) \coloneqq \{n \in \sigma \cap N \setminus \{0\} \mid \forall n_1, n_2 \in \sigma \cap N, n = n_1 + n_2 \Rightarrow n_1 = 0 \text{ or } n_2 = 0\}$$

と定める. Hilbert 基底はモノイド $\sigma \cap N$ の極小生成系としても特徴付けられる.

Σ を $N_{\mathbb{R}}$ の扇とし, $\Sigma(r)$ を Σ の r 次元の錐の集合とする. このとき, $\rho \in \Sigma(1)$ に対し, ある原始元 $P(\rho) \in \rho \cap N$ がただ 1 つ存在し, $\rho = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot P(\rho)$ と書ける. そこで, $\sigma \in \Sigma$ の極小生成系の集合を

$$\mathrm{Gen}(\sigma) \coloneqq \{P(\rho) \mid \rho \in \Sigma(1), \rho \preceq \sigma\}$$

と定義する. ここで, $\rho \preceq \sigma$ は ρ が σ の面であることを意味する. また, $N_{\mathbb{R}}$ の扇 Σ に対する極小生成系の集合を

$$\mathrm{Gen}(\Sigma) \coloneqq \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \mathrm{Gen}(\sigma)$$

と定める.

命題 2.3 ([BGS95, Theorem 1.10])**.** $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を錐とする. このとき, $\sigma \cap N$ の原始元 n が $\mathrm{Hilb}_N(\sigma)$ に属することと, n が σ の全ての滑らかな細分 Σ の $\mathrm{Gen}(\Sigma)$ に属することが同値である. これらを満たすとき, 対応するトーラス不変因子は BGS 本質因子である.

定義 2.4 ([SS23])**.** 錐 $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ の細分 Σ が σ の *Hilbert* **基底特異点解消**[*1]であるとは, Σ が滑らかであり, $\mathrm{Gen}(\Sigma) = \mathrm{Hilb}_N(\sigma)$ となることである.

[*1] [BGS95] や [Dai02] では, それぞれ G-desingularization, Hilb-desingularization などと呼ばれているが, 今回は [SS23] にならいこの呼称を用いることにする.

2.2 穏健トーリック特異点解消

定義 2.5. $\sigma = \mathrm{Cone}(u_1, \ldots, u_s) \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を非退化な単体的錐とする. このとき, l_σ を各 u_i を 1 に送るような線形関数 $N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ とする.

Σ を非退化な錐 σ の特異点解消とする. このとき, 各非退化な錐 $\tau \in \Sigma$ は滑らかであるので, 特に単体的である. よって, 定義 2.5の線形関数 l_τ が考えられる.

定義 2.6 ([CMDY24])**.** Σ を非退化な錐 $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ の細分とする. Σ が σ の**穏健トーリック特異点解消**であるとは, 任意の非退化な錐 $\tau \in \Sigma$ が滑らかで, $\mathrm{Gen}(\tau)$ が定めるアフィン超平面 $\{x \in N_{\mathbb{R}} \mid l_\tau(x) = 1\}$ が σ の全ての 1 次元の面と交わることである.

例 2.7. 任意次元のトーリック多様体に対するトーリッククレパント解消や, 2 次元のトーリック曲面に対する最小特異点解消は穏健トーリック特異点解消になる. また, 任意次元において, X の極小の端末的特異点を持つ $\mathbb{Q}$-分解的な双有理モデルが滑らかならば, それは X の穏健トーリック特異点解消を与える [CMDY24].

命題 2.8 ([CMDY24, Proposition 6.7])**.** Σ を非退化な錐 $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ の穏健トーリック特異点解消とする. このとき, $\mathrm{Gen}(\Sigma) = \mathrm{Hilb}_N(\sigma)$ となる. すなわち, 穏健トーリック特異点解消は Hilbert 基底特異点解消である.

2.3 トーリック特異点

定義 2.9. $\sigma = \mathrm{Cone}(u_1, \ldots, u_s) \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を単体的錐とする. このとき, σ の**重複度** (指数) を

$$\mathrm{mult}(\sigma) \coloneqq [\sigma \cap N + (-\sigma) \cap N : \mathbb{Z}u_1 + \cdots + \mathbb{Z}u_s]$$

と定める.

命題 2.10 ([CLS11, Proposition 11.1.8])**.** $\sigma = \mathrm{Cone}(u_1, \ldots, u_s) \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を単体的錐とする. このとき,

(i). σ が滑らかであることと $\mathrm{mult}(\sigma) = 1$ であることが同値.

(ii). $\mathrm{mult}(\sigma) = \#P_\sigma$ である. ここで,

$$P_\sigma = \left\{ n \in N \mid n = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i u_i, 0 \leq \lambda_i < 1 \right\}$$

のことである.

(iii). $e_1, \ldots, e_s$ を $\sigma \cap N + (-\sigma) \cap N$ の基底とし, 各 u_i を $u_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} e_j$ と表すことにする. このとき,

$$\mathrm{mult}(\sigma) = |\det(a_{ij})|$$

が成り立つ.

注意 2.11. アフィントーリック多様体 X_σ は, 標準的特異点を持つ双有理モデル X_{Σ_c} を持つ. ここで, Σ_c は $\mathrm{Conv}(\sigma \cap N \setminus \{0\})$ の境界面によって生成される扇である. さらに, X_σ の極小の端末的特異点を持つ $\mathbb{Q}$-分解的な双有理モデルは, Σ_c を $\mathrm{Conv}(\sigma \cap N \setminus \{0\})$ の境界面に属する格子点に沿って単体的に細分して得た扇によって定まる [CLS11, pp. 552–554].

3 主定理

まず, X が端末的特異点を持つ $\mathbb{Q}$-分解的な滑らかでないアフィントーリック多様体の場合を考える.

(i). $\dim X = 3$ のとき, 対応する錐 σ は $(1,0,0), (0,1,0), (1,p,q)$ $(1 \leq p < q, \gcd(p,q) = 1)$ で生成される [Oda88, pp. 34–36].

(ii). $\dim X = 4$ で Gorenstein のとき, 対応する錐 σ は $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (1,a,r-a,r)$ $(1 \leq a \leq r-a, \gcd(a,r) = 1)$ で生成される ([MS84], [BBBK11], [CLS11, Proposition 11.4.19 (a)]).

これらのトーリック特異点が穏健トーリック特異点解消を持たないことが次の定理から従う.

定理 3.1 ([KY24, Theorem 3.3])**.** $d \geq 3$ とし, $\sigma \subseteq N_{\mathbb{R}}$ を

$$(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1,0), (a_1,a_2,\ldots,a_d)$$

で生成される d 次元錐とする. ここで, $a_1, a_2, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}, a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{d-1} < a_d, 1 \leq a_1 \leq d-2$ である. このとき, σ に対応するアフィントーリック多様体 X_σ は穏健トーリック特異点解消を持たない.

以下, 証明の概略を述べる. σ が穏健トーリック特異点解消 Σ を持つと仮定する. このとき, 穏健トーリック特異点解消が Hilbert 基底特異点解消であること (命題 2.8) と命題 2.10を用いると, Σ は $(1,0,\ldots,0), (0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1,0), (1,1,\ldots,1)$ で生成される錐を含むことが分かる. これは Σ の非退化な錐であるが, 穏健トーリック特異点解消の定義を満たさないため, Σ が σ の穏健トーリック特異点解消であることに矛盾する. ゆえに, σ は穏健トーリック特異点解消を持たない.

これを用いて, 3 次元の穏健トーリック特異点解消は次のように特徴付けることができる.

定理 3.2 ([KY24, Theorem 3.9])**.** X を 3 次元アフィントーリック多様体とする. このとき, X が穏健トーリック特異点解消を持つならば, それは X のある極小の端末的特異点を持つ $\mathbb{Q}$-分解的な双有理モデルになる.

これは, Hilbert 基底特異点解消に関する次の事実を用いる.

補題 3.3 ([BGS95, Theorem 2.22])**.** 3 次元アフィントーリック多様体 X の任意の Hilbert 基底特異点解消は, X のある極小の端末的特異点を持つ $\mathbb{Q}$-分解的な双有理モデルを支配する.

穏健トーリック特異点解消は Hilbert 基底特異点解消なので (命題 2.8), 補題 3.3を適用することが

できる. これと, 定理 3.1から得られた $\mathbb{Q}$-分解的な端末的特異点を持つ 3 次元アフィントーリック多様体が穏健トーリック特異点解消を持たないことを用いると, 定理 3.2が示される.

注意 3.4 ([KY24, Corollary 3.11])**.** 定理 3.2から, 穏健トーリック特異点解消を持つトーリック多様体はかなり珍しく, 例えば, 標準的特異点を持つ 3 次元アフィントーリック多様体 X が穏健トーリック特異点解消を持つならば, それは X のクレパント解消になる.

例 3.5. 標準的特異点を持たないトーリック多様体で, 穏健トーリック特異点解消を持つ例として, $\mathrm{Cone}((1,0,0),(0,1,0),(r-1,r-1,r))$ $(r \geq 4)$ などがある.

参考文献

[BBBK11] Margherita Barile, Dominique Bernardi, Alexander Borisov, and Jean-Michel Kantor. On empty lattice simplices in dimension 4. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139(12):4247–4253, 2011.

[BGS95] Catherine Bouvier and Gérard Gonzalez-Sprinberg. Système générateur minimal, diviseurs essentiels et G-désingularisations de variétés toriques. *Tohoku Math. J. (2)*, 47(1):125–149, 1995.

[CLS11] David A. Cox, John B. Little, and Henry K. Schenck. *Toric varieties*, volume 124 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[CMDY24] Enrique Chávez-Martínez, Daniel Duarte, and Takehiko Yasuda. F-blowups and essential divisors for toric varieties, 2024. arXiv:2304.13247.

[Dai02] Dimitrios I. Dais. Resolving 3-dimensional toric singularities. In *Geometry of toric varieties*, volume 6 of *Sémin. Congr.*, pages 155–186. Soc. Math. France, Paris, 2002.

[Ful93] William Fulton. *Introduction to toric varieties*, volume 131 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. The William H. Roever Lectures in Geometry.

[Har12] Nobuo Hara. F-blowups of F-regular surface singularities. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140(7):2215–2226, 2012.

[Har15] Nobuo Hara. Structure of the F-blowups of simple elliptic singularities. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 22(1):193–218, 2015.

[HS11] Nobuo Hara and Tadakazu Sawada. Splitting of Frobenius sandwiches. In *Higher dimensional algebraic geometry*, volume B24 of *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, pages 121–141. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2011.

[HSY13] Nobuo Hara, Tadakazu Sawada, and Takehiko Yasuda. F-blowups of normal surface singularities. *Algebra Number Theory*, 7(3):733–763, 2013.

[KY24] Yutaro Kaijima and Yudai Yamamoto. Properties of moderate toric resolutions in dimension three, 2024. arXiv:2412.01177.

[LY24] Christian Liedtke and Takehiko Yasuda. Non-commutative resolutions of linearly reductive quotient singularities. *Q. J. Math.*, 75(3):969–985, 2024.

[MS84] David R. Morrison and Glenn Stevens. Terminal quotient singularities in dimensions three and four. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 90(1):15–20, 1984.

[Oda88] Tadao Oda. *Convex bodies and algebraic geometry*, volume 15 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. An introduction to the theory of toric varieties, Translated from the Japanese.

[PS15] Camille Plénat and Mark Spivakovsky. The Nash problem and its solution: a survey. *J. Singul.*, 13:229–244, 2015.

[SS23] Kohei Sato and Yusuke Sato. Hilbert basis resolutions for three-dimensional canonical cyclic quotient singularities. In *McKay correspondence, mutation and related topics*, volume 88 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 209–225. Math. Soc. Japan, Tokyo, [2023] ©2023.

[TY09] Yukinobu Toda and Takehiko Yasuda. Noncommutative resolution, F-blowups and D-modules. *Adv. Math.*, 222(1):318–330, 2009.

[Yas12] Takehiko Yasuda. Universal flattening of Frobenius. *Amer. J. Math.*, 134(2):349–378, 2012.

ジョイングラフに付随する対称辺凸多面体のファセット数

関西学院大学　理学部　数理科学科
毛利健太 (Kenta MORI) *

概要

対称辺凸多面体は多くの分野で研究されている多面体である。講演では対称辺凸多面体のファセットの個数の上限と下限の予想をジョイングラフに対して解決した結果を紹介する。これは NIll による d 次元の反射的凸多面体に対するファセットの個数の上限に関する予想を部分的に解決している結果でもある。また、本講演は森亜貴氏、大杉英史氏との共同研究 [7] に基づく。

1　導入

任意の頂点が格子点の凸多面体を**格子凸多面体**という。また、次元 d の多面体 $\mathcal{P}$ について次元 $d-1$ の面を多面体 $\mathcal{P}$ の**ファセット**という。

定義 1.1　格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ について $\mathbf{0}$ が内部に存在するただ一つの格子点であり、$\mathcal{P}$ の双対多面体

$$\mathcal{P}^* := \{x \in \mathbb{R}^n : \text{任意の } y \in \mathcal{P} \text{ に対して } x \cdot y \leq 1\}$$

が格子凸多面体であるとき、$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ は**反射的**であるという。また、このとき $\mathcal{P}^*$ の各頂点は $\mathcal{P}$ のファセットに対応する。

例 1.2　図 1 の多面体 $\mathcal{P}$ は反射的であり、そのファセットの個数は 6 である。

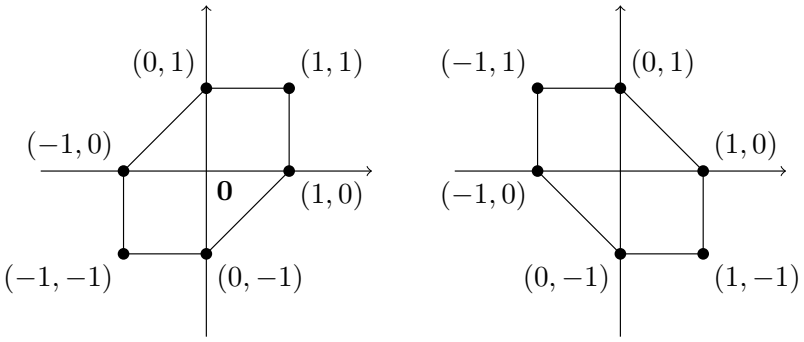
$N(\mathcal{P})$ を格子凸多面体 $\mathcal{P}$ のファセットの個数とする。このとき以下の予想が存在する。

予想 1.3（[8, Conjecture 5.2]）　$\mathcal{P}$ を d 次元の反射的凸多面体とする。このとき $N(\mathcal{P}) \leq 6^{d/2}$ が成り立つ。

ここで、グラフから生起される反射的凸多面体を導入する。G を頂点集合 $[n] := \{1, \ldots, n\}$、辺集合 $E(G)$ の有限単純グラフとする。このとき e_i を $\mathbb{R}^n$ の i 番目の標準基底とすると、G の対称辺凸多面体 $\mathcal{P}_G$ は $\{\pm(e_i - e_j) : \{i,j\} \in E(G)\}$ の凸閉包である。有限グラフの対称辺凸多面体は任意のグラフに対して反射的であることが知られている。また、頂点数 n の連結グラフに対して対称辺凸多面体の次元は $n-1$ である。

例 1.4　頂点集合が $\{1, 2, 3\}$ であるグラフ C_3 に付随する対称辺多面体 P_{C_3} は、頂点 $(1,-1,0)$、$(-1,1,0)$、$(0,1,-1)$、$(0,-1,1)$、$(1,0,-1)$、$(-1,0,1)$ の凸閉包で得られる $\mathbb{R}^3$ 上の六角形となる。

* E-mail:k-mori@kwansei.ac.jp



反射的凸多面体 $\mathcal{P}$　　双対多面体 $\mathcal{P}^*$

図 1　反射的凸多面体 $\mathcal{P}$ とその双対多面体 $\mathcal{P}^*$

対称辺凸多面体は多くの分野で研究されている。まず、エルハート理論の分野において反射的凸多面体の h^* 多項式は回文的、つまり係数の列が対称となることが知られている。さらに、完全二部グラフの対称辺凸多面体の h^* 多項式は [5] で明示的に与えられており、その証明においてファセットの記述は大きく貢献している。また、h^* 多項式の注目を集めている性質として γ 非負性があるが、対称辺凸多面体の γ 非負性は [4, 6, 9, 10] で研究されている。違う分野に関して、対称辺凸多面体は蔵本モデルに対して “adjacency polytope” という名前で応用されている。対称辺凸多面体の正規化体積が蔵本モデルの解の個数の上限を与えることが知られており、対称辺凸多面体の正規化体積は対称辺凸多面体のファセットの記述を使って与えられる。

2 つのグラフ G_1 と G_2 が 1 頂点を共有することで得られるグラフを G_1 と G_2 の **1-sum** という。同様に、複数のグラフに対してもそれらが 1 頂点を共有することで得られるグラフをそれらの 1-sum という。ここで、[5] により完全二部グラフ $K_{\ell,m}$ および完全多部グラフ $K_{\ell_1,\dots,\ell_s}(s \geq 3)$ に対して $N(\mathcal{P}_{K_{\ell,m}}) = 2^\ell + 2^m - 2$、$N(\mathcal{P}_{K_{\ell_1,\dots,\ell_s}}) = 2^{\sum_{i=1}^s \ell_i} - \sum_{i=1}^s (2^{\ell_i} - 2) - 2$ となることが与えられている。特に完全グラフ K_n に対して $N(\mathcal{P}_{K_n}) = 2^n - 2$ となる。Braun と Bruegge により以下の予想が与えられている。

予想 1.5（[1, Conjecture 2]）　G を $n \geq 3$ の連結グラフとする。このとき

(1)　n が奇数ならば、$3 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} - 2 \leq N(\mathcal{P}_G) \leq 6^{\frac{n-1}{2}}$ が成り立つ。さらに、
- $N(\mathcal{P}_G) = 3 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} - 2$ と G が $K_{(n-1)/2,(n+1)/2}$ であることが同値である。
- $N(\mathcal{P}_G) = 6^{\frac{n-1}{2}}$ と G が $(n-1)/2$ 個の triangle の 1-sum であることが同値である。

(2)　n が偶数ならば、$2^{\frac{n}{2}+1} - 2 \leq N(\mathcal{P}_G) \leq 14 \cdot 6^{\frac{n}{2}-2}$ が成り立つ。さらに、
- $N(\mathcal{P}_G) = 2^{\frac{n}{2}+1} - 2$ と G が $K_{n/2,n/2}$ であることが同値である。
- $N(\mathcal{P}_G) = 14 \cdot 6^{\frac{n}{2}-2}$ と G が K_4 と $n/2 - 2$ 個の triangle の 1-sum であることが同値である。

[1] において予想 1.5 に対して辺の本数が少ないグラフの対称辺凸多面体について結果が与えられている。

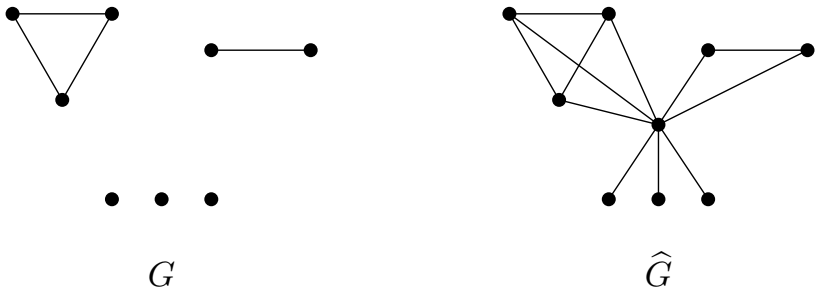


図 2　グラフ G とそのサスペンションによって得られるグラフ $\widehat{G}$

2　主定理

$G_1 = (V, E)$、$G_2 = (V', E')$ を $V \cap V' = \emptyset$ であるようなグラフとする。このとき G_1 と G_2 の**ジョイン**は頂点集合 $V \cup V'$、辺集合 $E \cup E' \cup \{\{i, j\} : i \in V, j \in V'\}$ のグラフであり、$G_1 + G_2$ とかく。グラフ G と K_1 のジョインを G の**サスペンション**といい、$\widehat{G}$ とかく。グラフのサスペンションは図 2 を参照していただきたい。

任意のグラフのサスペンションに対して以下を示した。

定理 2.1　$n \geq 2$ に対して G を頂点集合 $[n-1]$ のグラフとする。このとき

$$N(\mathcal{P}_{\widehat{G}}) \geq 2^{n-1}$$

であり、G が空グラフのとき等号が成り立つ。また

$$N(\mathcal{P}_{\widehat{G}}) \leq \begin{cases} 6^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ が奇数のとき} \\ 14 \cdot 6^{\frac{n}{2}-2} & n \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

であり以下のいずれかを満たすとき等号が成り立つ:

(a)　n は奇数であり、G は非連結な $(n-1)/2$ 個の辺である。つまり、$\widehat{G}$ は $(n-1)/2$ 個の triangle の 1-sum である。

(b)　n は偶数であり、G は非連結な $n/2-2$ 個の辺と 1 つの triangle である。つまり、$\widehat{G}$ は K_4 と $n/2-2$ 個の triangle の 1-sum である。

また、任意の 2 つのグラフのジョインに対して以下を示した。

定理 2.2　$G_1 = (V, E)$、$G_2 = (V', E')$ を $V \cap V' = \emptyset$ を満たすグラフとする。このとき $n = |V| + |V'|$ とすると、n が奇数であれば、

$$3 \cdot 2^{\frac{n-1}{2}} - 2 \leq N(\mathcal{P}_{G_1+G_2}) \leq 6^{\frac{n-1}{2}}$$

が成り立つ。また n が偶数であれば

$$2^{\frac{n}{2}+1} - 2 \leq N(\mathcal{P}_{G_1+G_2}) \leq 14 \cdot 6^{\frac{n}{2}-2}$$

が成り立つ。

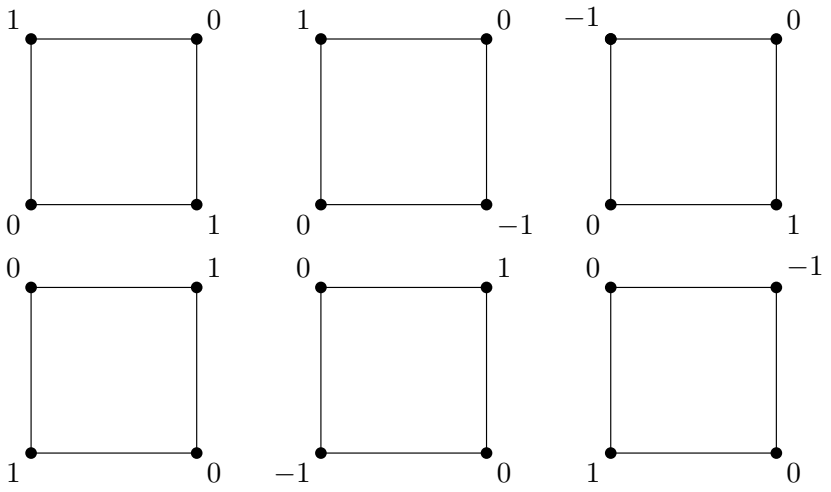


図 3　C_4 の対称辺凸多面体 $\mathcal{P}_{C_4}$ のファセットに対応するラベル付け

3　対称辺凸多面体のファセット

グラフ G の対称辺凸多面体 $\mathcal{P}_G$ のファセットに対して以下の特徴づけが知られている。

命題 3.1（[5, Theorem 3.1]）　$G=(V,E)$ を連結グラフとする。このとき $f:V\to\mathbb{Z}$ が $\mathcal{P}_G$ のファセットであることと以下を満たすことが同値である。

(i)　任意の $e=\{i,j\}\in E$ に対して、$|f(i)-f(j)|\leq 1$ である。
(ii)　辺の部分集合 $E_f:=\{e=\{i,j\}\in E:|f(i)-f(j)|=1\}$ により G の全域連結部分グラフが生成される。

$\mathcal{P}_G$ の $f:V\to\mathbb{Z}$ に対して $G_f=(V,E_f)$ を G のファセット部分グラフといい、ファセット部分グラフ全体を $FS(G)$ で表す。また、$H\in FS(G)$ に対して H によるファセットの数を $\mu(H)$ で表す。

命題 3.2（[2, Corollary 33]）　連結グラフ G の部分グラフ H がファセット部分グラフであることと H が G の極大連結全域二部部分グラフであることが同値である。

例 3.3　図 3 より C_4 の対称辺凸多面体 $\mathcal{P}_{C_4}$ のファセットは 6 個存在する。また、C_4 のファセット部分グラフは C_4 のみであり、$\mu(C_4)=6$ である。

また、二部グラフに対して以下の命題が知られている。

命題 3.4（[3, Corollary 33]）　G を頂点数 n の連結二部グラフとする。このとき、$N(\mathcal{P}_G)\leq 2^{n-1}$ であり等号成立は G が木のときである。

ここでグラフ G のブロックと対称辺凸多面体 $\mathcal{P}_G$ のファセットの個数の関連を紹介する。

定義 3.5　G を連結グラフとする。頂点 v に対して v を取り除くことで得られるグラフが非連結とな

るとき v を**切断点**という。また、切断点を持たない極大連結部分グラフを**ブロック**という。さらに、任意の頂点が切断点ではないグラフを **2-連結グラフ**という。

特に、任意のグラフはブロックの 1-sum によって構成される。2 つのグラフ G_1 と G_2 の 1-sum によるグラフ G から生起される対称辺凸多面体 $\mathcal{P}_G$ は $\mathcal{P}_{G_1}$ と $\mathcal{P}_{G_2}$ の直和となり、以下が従う。

命題 3.6（[1, Proposition 9]） G を連結グラフ G_1 と G_2 の 1-sum とする。このとき $N(\mathcal{P}_G) = N(\mathcal{P}_{G_1})N(\mathcal{P}_{G_2})$ である。

さらにこの命題より以下が従う。

命題 3.7 G を連結グラフ G_1 と G_2 の 1-sum によって得られるグラフとする。G_1 と G_2 が予想 1.5 を満たしていれば G も予想 1.5 をみたす。

4 サスペンショングラフ

本研究の主結果である、グラフ G のサスペンションによって得られるグラフ $\widehat{G}$ の対称辺凸多面体 $\mathcal{P}_{\widehat{G}}$ のファセット数について紹介する。まず、グラフの支配集合の定義を確認する。

定義 4.1 グラフ G に対して $N_G(v) \subset V$ を v に隣接している頂点による集合とする。また、$N_G[v]$ を $N_G(v) \cup \{v\}$ とする。このとき $S \subset V$ が $\bigcup_{v \in S} N_G[v] = V$ を満たすならば S は G の**支配集合**である、という。

次にグラフ G の支配集合と G のサスペンションによって得られるグラフ $\widehat{G}$ に関する補題を紹介する。

補題 4.2 G を $n-1$ 頂点のグラフとし、H を $n \in V_1$ をみたす $[n] = V_1 \sqcup V_2$ の $\widehat{G}$ の極大全域二部グラフとする。また、$c(G[V_2])$ を $G[V_2]$ の連結成分の数とする。このとき H が $\widehat{G}$ のファセット部分グラフであることと V_2 が G の支配集合であることが同値である。さらに、$\mu(H) = 2^{c(G[V_2])}$ が成り立つ。

さらに、グラフ G とその頂点 v から得られるグラフを紹介する。

定義 4.3 $G = (V, E)$ とその頂点 v に対して以下の 3 つのグラフを定義する:

- $G - v$: G の $V \setminus \{v\}$ による誘導部分グラフ;
- $G - N_G[v]$: $N_G[v] \neq V$ に対して G の $V \setminus N_G[v]$ による誘導部分グラフ;
- G/v : G から v を取り除き $i, j \in N_G(v)$ に対して $\{i, j\}$ を加えることで得られるグラフ。

例 4.4 G を C_5 のサスペンションによって得られるグラフとし、v をサイクルの 1 頂点とすると、$G - v$、$G - N_G[v]$、G/v は図 4 のように与えられる。

グラフ G と G から 1 頂点を選んで得られるグラフ $G - v$、$G - N_G[v]$、G/v との対称辺凸多面体のファセット数に対する以下の命題が補題 4.2 によって与えられる。

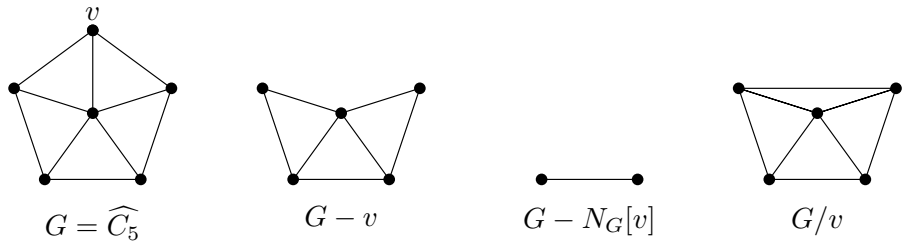


図 4　$\widehat{C_5}$ と頂点 v から得られるグラフ

命題 4.5　G を $n \geq 3$ に対して頂点集合 $[n-1]$ のグラフとする。
このとき G の頂点 v に対して、

$$N(\mathcal{P}_{\widehat{G-v}}) + N(\mathcal{P}_{\widehat{G/v}}) \quad \leq \quad N(\mathcal{P}_{\widehat{G}}) \quad \leq \quad N(\mathcal{P}_{\widehat{G-v}}) + 2N(\mathcal{P}_{\widehat{G-N_G[v]}}) + N(\mathcal{P}_{\widehat{G/v}})$$

が成り立つ。さらに $N_G[v] \neq [n-1]$ であれば

$$N(\mathcal{P}_{\widehat{G}}) \quad = \quad N(\mathcal{P}_{\widehat{G-v}}) + N(\mathcal{P}_{\widehat{G/v}}) + 2$$

が成り立つ。

この命題によって G のサスペンションによって得られるグラフ $\widehat{G}$ に対して $\widehat{G}$ から 1 頂点除いたグラフとファセット数を比較することが可能となり、数学的帰納法を駆使することで定理 2.1 の証明を完遂した。

5　ジョイングラフ

ジョイングラフに対して定理 2.2 の証明で大きく貢献する補題を紹介する。

補題 5.1　$G_1 = (V, E)$、$G_2 = (V', E')$ を $V \cap V' = \emptyset$、$|V| = n_1$ と $|V'| = n_2$ をみたすグラフとする。各 $i = 1, 2$ に対して m_i を G_i の連結成分の個数とする。このとき、

$$N(\mathcal{P}_{G_1+G_2}) \quad \leq \quad N(\mathcal{P}_{\widehat{G_1}}) + N(\mathcal{P}_{\widehat{G_2}}) + 2^{m_1} + 2^{m_2} - 2 + 4(2^{n_1-1} - 1)(2^{n_2-1} - 1).$$

が成り立つ。

定理 2.2、命題 3.4、命題 3.7 より予想 1.5 の解決のために条件:

- 2 つのグラフのジョインによってえられない（補グラフが連結グラフ）;
- 非二部である;
- 2-連結である。

をみたすグラフに焦点を定め、ファセット数を求めればよいことがわかった。

参考文献

[1] B. Braun and K. Bruegge, Facets of symmetric edge polytopes for graphs with few edges, *J. Integer Seq.* **26** (2023), Article 23.7.2.

[2] T. Chen, R. Davis, and E. Korchevskaia, Facets and facet subgraphs of symmetric edge polytopes, *Discrete Appl. Math.* **328** (2023), 139–153.

[3] A. D'Alì, E. Delucchi and M. Michałek, Many faces of symmetric edge polytopes, *Electron. J. Combin.* **29** (2022), Paper No. 3.24.

[4] A. D'Alì, M. Juhnke-Kubitzke, D. Köhne, and L. Venturello, On the gamma-vector of symmetric edge polytopes, *SIAM J. Discrete Math.* **37.2** (2023): 487-515.

[5] A. Higashitani, K. Jochemko, and M. Michałek, Arithmetic aspects of symmetric edge polytopes, *Mathematika* **65** (2019), 763–784.

[6] T. Kálmán and L. Tóthmérész, Ehrhart theory of symmetric edge polytopes via ribbon structures, preprint. `arXiv:2201.10501`.

[7] A.Mori, K.Mori and H.Ohsugi, Number of facets of symmetric edge polytopes arising from join graphs, arXiv:2312.11287

[8] B. Nill, Gorenstein toric Fano varieties, *Manuscripta Math.* **116** (2005) 183–210.

[9] H. Ohsugi and A. Tsuchiya, Symmetric edge polytopes and matching generating polynomials, *Combinatorial Theory* **1** (2021) # 9.

[10] H. Ohsugi and A. Tsuchiya, The h^*-polynomials of locally anti-blocking lattice polytopes and their γ-positivity, *Discrete Comput. Geom.* **66** (2021), 701–722.

Kneser 彩色関数とツリーの完全不変量

西村優作 *

概要

Stanley 氏によって彩色対称関数と呼ばれるグラフの不変量が考案され、これがツリーの完全不変量であると予想した。この予想は現在まで未解決である。一方、三枝崎氏らは彩色対称関数を一般化した Kneser 彩色関数を定義した。Kneser 彩色関数は自然数 k によるパラメータを持っており、特に k=1 の場合、これは彩色対称関数と一致する。本講演では、k=2 の場合、Kneser 彩色関数がツリーの完全不変量となることを紹介する。

1 はじめに

グラフの彩色とは、隣接する 2 頂点を異なる色で塗るような頂点の彩色のことであり、彩色に関連するグラフの不変量はいくつか存在している。例えば、彩色数というグラフの不変量はグラフの彩色に必要な色の最小値である。彩色とはグラフ間の準同型を用いて定義することができるため、彩色多項式を準同型によって定義できる。具体的には、グラフ G を n 色で彩色する時、色を頂点とする n 頂点完全グラフ K_n を考えると、彩色とは G から K_n への準同型写像とみなすことができる。R.P. Stanley 氏は彩色を用いた不変量として、彩色対称関数なるものを考案した。

定義 1.1 (彩色対称関数 [3])**.** 自然数を頂点とする完全グラフを $K_{\mathbb{N}}$ とする。G をグラフとした時、その彩色対称関数を下記で定義する:

$$X_{K_{\mathbb{N}}}(G) \coloneqq X_{K_{\mathbb{N}}}(G,x) \coloneqq \sum_{\phi\in \mathrm{Hom}(G,K_{\mathbb{N}})} \prod_{v\in V_G} x_{\phi(v)}.$$

彩色対称関数は形式的冪級数であるから、関数ではないが、慣習として彩色対称関数と呼ばれている。彩色対称関数には、以下の有名な予想がある。

予想 1.1 ([3])**.** $X_{K_{\mathbb{N}}}(\bullet)$ はツリーの完全不変量となる。つまり、T_1 と T_2 とが非同型なツリーであるならば、

$$X_{K_{\mathbb{N}}}(T_1) \neq X_{K_{\mathbb{N}}}(T_2).$$

この予想は現在まで未解決であるが、一般に彩色対称関数はグラフの完全不変量ではないことは既に知られており、例えば図 1 の二つのグラフは非同型であるが同じ彩色対称関数を持つ。

彩色対称関数の一般化として、Kneser 彩色関数と呼ばれる三枝崎達によって定義された [1]。Kneser 彩色関数は Kneser グラフと呼ばれるグラフを用いて定義される。

* 早稲田大学大学院基幹理工学研究科　数学応用数理専攻, E-mail:n2357y@ruri.waseda.jp

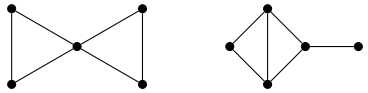


図 1: 非同型だが同じ彩色対称関数を持つ二つのグラフ

定義 1.2 (Kneser グラフ)**.** Kneser グラフ $K_{\mathbb{N},k}$ とは、頂点集合が自然数の k 点集合全体で、二つの頂点の共通部分が空である時に辺を持つと定義されたグラフのことである。

定義 1.3 (Kneser 彩色関数)**.** Kneser 彩色関数を下記で定義する。

$$X_{K_{\mathbb{N},k}}(G) := X_H(K_{\mathbb{N},k}, x) := \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}(G, K_{\mathbb{N},k})} \prod_{v \in V_G} x_{\varphi(v)}$$

$k = 1$ の場合 Kneser グラフは完全グラフであるため、$X_{K_{\mathbb{N},1}}(G) = X_{K_{\mathbb{N}}}(G)$ となる。従って、Kneser 彩色関数は彩色対称関数の一般化と考えることができる。Kneser 彩色関数の集合はグラフの完全不変量になることが知られている。

定理 1.1 ([1])**.** Kneser 彩色関数の集合

$$\{X_{K_{\mathbb{N},k}}(\bullet)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

は有限グラフの完全不変量になる。

ここで、予想 1.1 を Kneser 彩色関数へと一般化した予想を考えることができる。

予想 1.2 ([1])**.** $X_{K_{\mathbb{N},2}}(\bullet)$ はツリーの完全不変量である。

Kneser 彩色関数は k が大きくなるほど強い不変量となることが知られている。つまり、$X_{K_{\mathbb{N},k+1}}(G_1) = X_{K_{\mathbb{N},k+1}}(G_2)$ ならば $X_{K_{\mathbb{N},k}}(G_1) = X_{K_{\mathbb{N},k}}(G_2)$ が成立する。従って、予想 1.1 が成り立つならば予想 1.2 も成立する。本稿では、予想 1.2 が成立することを示す。

本稿の構成は以下の通りである。2 章で、用語の諸定義をし、また Kneser 彩色関数について知られる Power sum expansion と呼ばれる定理を紹介する。3 章では $k = 2$ の Kneser 彩色関数がツリーの完全不変量となることを示す。

2 Kneser 彩色関数の Power sum expansion

本章では、予想 1.2 の証明に重要な Kneser 彩色関数に関する Power sum expansion と呼ばれる定理を紹介する。まずは、必要な用語を定義していく。以降、グラフ G の頂点集合を $V(G)$ とし、辺集合を $E(G)$ とする。また、G の頂点 v について、$N_G(v)$ と書いたら頂点 v の近傍集合とする。G の 2 頂点 u と v について、$d_G(u, v)$ を u と v との距離とする。そして、G と H が同型であることを $G \simeq H$ で表す。

定義 2.1 ([1])**.** 自然数の k 点集合 n 個による多重集合全体の集合を $\mathcal{C}_n^{(k)}$ とする。$\mathcal{C}_n^{(k)}$ の二つの元 $\{I_1, \cdots, I_n\}$ と $\{J_1, \cdots, J_n\}$ について対称群の元 σ が存在して

$$\{I_1, \cdots, I_n\} = \{\sigma(J_1), \cdots, \sigma(J_n)\},$$

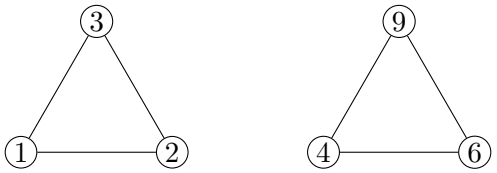


図 2: λ_1 と λ_2 のグラフ表現

となる時、$\{I_1, \cdots, I_n\} \sim \{J_1, \cdots, J_n\}$ という同値関係 $\sim$ を定義する。この同値関係による $\mathcal{C}_n^{(k)}$ の商集合を $\mathcal{P}_n^{(k)}$ とする。

本稿では、主に $k = 2$ について考えるから、その場合についてのみ言及する。$\mathcal{P}_n^{(2)}$ の任意の元 $\overline{\lambda}$ の代表元 $\lambda = \{I_1, \cdots, I_n\}$ について、これは二点集合のサイズ n の多重集合であるから、λ をグラフの辺集合とみなし、頂点集合を $\bigcup_{i=1}^n I_i$ としたグラフ G_λ を定めることができる。また、定義から G_λ は代表元の取り方によらず同型なグラフを与える。以上より、$\overline{\lambda}$ と一対一に対応するグラフ G_λ が定義できるから、$\mathcal{P}_n^{(2)}$ とは多重辺を許した辺が n 本存在するグラフ全体の集合であると考えることができる。

例 2.1. $\lambda_1 = \{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\}, \lambda_2 = \{\{4,6\},\{6,9\},\{4,9\}\}$ とすると、$\sigma = (14)(26)(39)$ という置換 σ によって $\{\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}\} = \{\{\sigma(4),\sigma(6)\},\{\sigma(6),\sigma(9)\},\{\sigma(4),\sigma(9)\}\}$ となるから、$\lambda_1 \sim \lambda_2$ となる。また、λ_1, λ_2 を辺集合とするグラフはそれぞれ図 2 のように表される。従って、λ_1 の同値類 $\overline{\lambda}$ は三頂点完全グラフ K_3 に対応している。

例 2.2 ($\mathcal{P}_3^{(2)}$)**.** $\mathcal{P}_3^{(2)}$ と一対一に対応するグラフの集合は、多重辺を許した 3 本の辺を持ち、次数 0 の頂点を含まないグラフ全体の集合である。従って下記のようになる。

$$\mathcal{P}_3^{(2)} = \{\{$$  $$\}$$

$\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{P}_n^{(2)} = \mathcal{P}^{(2)}$ とする。$\mathcal{P}^{(2)}$ を使って、$X_{K_{\mathbb{N},2}}(G)$ が属する形式的冪級数環の線形基底を構成することができる。

定義 2.2 ($Sym^{(2)}$)**.** $R_{K_{\mathbb{N},2}} \coloneqq \mathbb{C}[\![x_w \mid w \in V(K_{\mathbb{N},2})]\!]$ と定義し、$R_{K_{\mathbb{N},2}}^{S_\mathbb{N}}$ を対称群 $S_\mathbb{N}$ の作用による不変環とする。$Sym^{(2)}$ を $R_{K_{\mathbb{N},2}}^{S_\mathbb{N}}$ の次数が有限な要素から構成される部分環とする。

任意の有限なグラフ G に対して、形式的冪級数 $X_{K_{\mathbb{N},2}}(G)$ は $R_{K_{\mathbb{N},2}}$ に含まれて、また $S_\mathbb{N}$ が Kneser グラフの自己同型であることから、$X_{K_{\mathbb{N},2}}(G) \in Sym^{(2)}$ となる。

定義 2.3 ($Sym^{(2)}$ の線形基底)**.** $\mathcal{P}^{(2)}$ の任意のグラフ H を考える。更に、H の連結成分が $H_1, \cdots, H_\ell$ であるとする。この時、$p_H \in Sym^{(k)}$ を下記で定義する。

$$p_H \coloneqq \prod_{i=1}^{\ell} \sum_{\{I_1,\ldots,I_n\} \in E(H_i)} x_{I_1} \cdots x_{I_n}.$$

p_H は $Sym^{(2)}$ の $\mathbb{C}$ 上での基底となることが知られている [1]。

定義 2.4 (Admissible)**.** G を n 頂点連結グラフとする。$H \in \mathcal{P}_n^{(2)}$ について、$\varphi\colon V(G) \to E(H)$ で、任意の $\{u,v\} \in E(G)$ に対して $\varphi(u) \cap \varphi(v) \neq \emptyset$ となるような全単射が存在する時、H が G によっ

て *admissible* であると呼ぶ。また、

$$\mathcal{A}_G^{(2)} \coloneqq \{H \in \mathcal{P}_n^{(2)} \mid H \text{ が } G \text{ によって admissible となる。}\}$$

と定義する。G が非連結な場合、$G = G_1 \sqcup \cdots \sqcup G_\ell$ と連結成分で分解したとき、

$$\mathcal{A}_G^{(2)} \coloneqq \mathcal{A}_{G_1}^{(2)} \times \cdots \times \mathcal{A}_{G_\ell}^{(2)}$$

と定義する。

例 2.3. グラフ について、$\mathcal{A}_{\text{  }}^{(2)}$ を考える。例えば、$H =$ $\in \mathcal{P}_3^{(2)}$ が admissible がどうかを確かめる。H の辺集合は $\{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\}$ と表せるから、 の頂点を上から a, b, c とすれば、下記のような全単射 ϕ が存在し、従って H は admissible である。



$$\mapsto \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\}$$
$$\phi(a) = \{1,2\}, \phi(b) = \{2,3\}, \phi(c) = \{3,4\}.$$

次に、$H' =$  $\in \mathcal{P}_3^{(2)}$ について考える。H' の辺集合は $\{\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}\}$ と書け、admissible になるような  から H' への全単射 ϕ は存在しないから、H' は admissible でない。このように確かめていくと、$\mathcal{A}_{\text{  }}$ は下記のように表される。

$$\mathcal{A}_{\text{}}^{(2)} = \{$$ $$\}$$

以上の定義を用いて、$X_{K_{\mathbb{N},2}}(G)$ の Power sum expansion と呼ばれる基底の展開公式が知られている。

定理 2.1 (Power sum expansion[1])**.**

$$X_{K_{\mathbb{N},2}}(G) = \sum_{S \subset E(G)} (-1)^{|S|} \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_{G_S}^{(2)}} p_\lambda,$$

ただし G_S は辺集合 S による G の全域辺部分グラフである。

注意として、一般に $k \neq 2$ である場合でも、k 一様なハイパーグラフを対応させることで同様に基底 p_H や admissible 等の定義、そして Power sum expansion を与えることができる [1]。本稿では $k = 2$ のみを扱うから、以降 $\mathcal{A}_G^{(2)}$ を単に $\mathcal{A}_G$ と書く。

3 $k = 2$ の Kneser 彩色関数とツリーの完全不変量

本章では、以下の定理を示す。

定理 3.1. $X_{K_{\mathbb{N},2}}(\bullet)$ はツリーの完全不変量である。

実は、G がツリーである場合には定理 2.1 を用いることで $X_{K_{\mathbb{N},2}}(G)$ から $\mathcal{A}_G$ を決定することができる。従って、下記の定理を示せば定理 3.1 の証明が完了する。

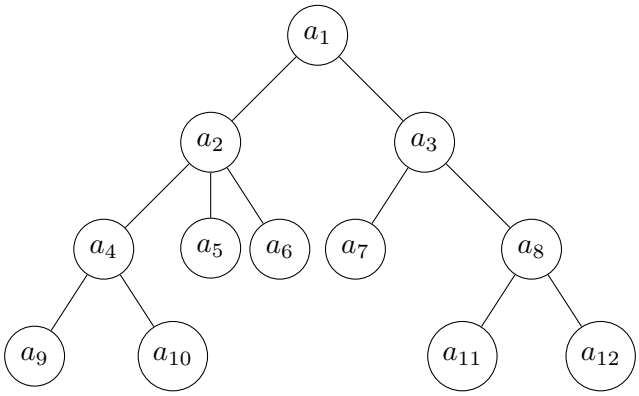


図 3: a_1 を根とする根付き頂点列

定理 3.2. G_1, G_2 をツリーとする。$\mathcal{A}_{G_1} = \mathcal{A}_{G_2}$ ならば $G_1 \simeq G_2$ である。すなわち、$\mathcal{A}_\bullet$ はツリーの完全不変量である。

そのため、まずは定理 3.2 の証明を行う。定理 3.2 の証明のために、ツリーに新たな不変量を定義する。

3.1 ツリーの最小頂点列

定義 3.1 (根付き頂点列)**.** ツリー T の頂点列 $\{a_i\}_{i=1}^n$ が $a_1 = v$ であり、$1 \leq i < j \leq n$ を満たす任意の整数 i, j について、$d_T(v, a_i) \leq d_T(v, a_j)$ を満たす時、これを v を根とする根付き頂点列と呼ぶ。

$\{a_i\}_{i=1}^n$ が v を根とする根付き頂点列とすると、任意の v でない頂点 a_i について a_i と隣接し $i_p < i$ となる頂点 a_{i_p} がただ一つ存在する。この a_{i_p} を、v を根とした時の a_i の親と呼ぶ。

例として、図 3 において、$\{a_i\}_{i=1}^{12}$ が a_1 を根とする根付き頂点列である。また、a_1 を根とした時、a_2 は a_4, a_5, a_6 の親である。

定義 3.2 (最小頂点列、最小次数列)**.** T をツリーとして、$\{a_i\}_{i=1}^n$ を v を根とする根付き頂点列、$\{deg(a_i)\}_{i=1}^n$ を $\{a_i\}_{i=1}^n$ の次数列とする。任意の v を根とする根付き頂点列 $\{a'_i\}_{i=1}^n$ に対して、

$$\{deg(a_i)\}_{i=1}^n \leq_{lex} \{deg(a'_i)\}_{i=1}^n$$

が成立する時、$\{a_i\}_{i=1}^n$ を v を根とする最小頂点列と呼ぶ。ただし、$\leq_{lex}$ は辞書式順序である。また、v の最小頂点列の次数列を v の最小次数列と呼び、$r(T, v)$ で表す。更に、任意の頂点 u に対して、$r(T, v) \leq_{lex} r(T, u)$ が成り立つような頂点 v を、T の最小葉と呼ぶ。また、最小葉 v の最小頂点列の次数列 $r(T, v)$ を T の最小次数列と呼び、$r(T)$ で表す。

一般に最小葉は一意的に定まらないが、最小次数列はツリーの不変量である。以降、$r(T, v)_k$ を $r(T, v)$ の k 番目の次数を表すことにして、$r(T)_k$ も同様に定義する。

例えば、図 3 において、

$$(a_{11}, a_8, a_{12}, a_3, a_7, a_1, a_2, a_5, a_6, a_4, a_9, a_{10})$$

は a_{11} を根とする最小頂点列であり、従って a_{11} の最小次数列は

$$r(T, a_{11}) = (1, 3, 1, 3, 1, 2, 4, 1, 1, 3, 1, 1)$$

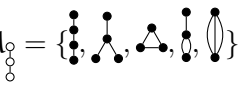
となる。a_{11} の最小頂点列は T の中で最小なので、a_{11} は最小葉であり、T の最小次数列は $r(T) = r(T, a_{11})$ となる。

3.2 定理 3.2 の証明

最小次数列を使って $\mathcal{A}_G$ の部分集合 $\Lambda_T(G)$、$\tilde{\Lambda}_T(G)$ を下記で定義する。

$\Lambda_T(G) \coloneqq \{H \in \mathcal{A}_G \mid H$ が多重辺を持たないツリー$\}$
$\tilde{\Lambda}_T(G) \coloneqq \{H \in \Lambda_T(G) \mid H$ の最小次数列 $r(H)$ が辞書式順序で最小なツリー$\}$

例 3.1. 例えば、$\mathcal{A}$ について考えよう。

$\mathcal{A}$ 

であった。この中で、多重辺を持たないツリーは以下の二つである。

Λ_T 

一つ目のツリーの最小次数列は r  $= (1, 2, 2, 1)$ であり、二つ目のツリーは r  $= (1, 3, 1, 1)$ である。辞書式順序で比較すると $(1, 2, 2, 1) \leq_{lex} (1, 3, 1, 1)$ であるから、以上より

$\tilde{\Lambda}_T$ 

となる。

$\tilde{\Lambda}_T(G)$ に関して、以下の定理を示す。

定理 3.3. G を 2 頂点以上のツリーとし、グラフ H を $\tilde{\Lambda}_T(G)$ の元とする。H_0 というグラフを、H から最小葉を一つ除いたグラフとする。この時、H_0 は G と同型である。

例 3.2. 定理 3.3 の主張を確認する。例 3.1 において、$\tilde{\Lambda}_T$ で、その最小葉は二つの葉である。従って、最小葉を除いたグラフは確かにと同型である。

定理 3.3 の証明のために、まず下記の補題を示す。

補題 3.1. 任意の $\tilde{\Lambda}_T(G)$ のグラフ H について、その最小次数列 $r(H)$ は下記の不等式を満たす。

$$r(H) \leq_{lex} (1, 2, r(G)_2, r(G)_3, \cdots, r(G)_n).$$

Proof. $\tilde{\Lambda}_T(G)$ の定義から、

$$r(H) \leq_{lex} (1, 2, r(G)_2, r(G)_3, \cdots, r(G)_n)$$

となる $H \in \Lambda_T(G)$ を構成すればよい。v_1 を G の最小葉、$\{v_i\}_{i=1}^n$ を G の v_1 を根とする最小頂点列とする。v_{i_p} を v_1 を根とした時の v_i の親として、また $1_p = 0$ とする。この時、頂点集合を $a_0, a_1, \cdots, a_n$ とし、辺集合を

$$\{\{a_{i_p}, a_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

とするグラフ H を考える。

まず、H の admissible 性を確かめる。$V(G)$ から $E(H)$ への全単射 ϕ_H を

$$\phi_H(v_i) = \{a_{i_p}, a_i\}$$

と定める。ツリー G, H と ϕ_H の例を図 4 に示す。G の任意の隣接 2 頂点 a_i, a_j について、$i = j_p$ としても一般性を失わない。この時、$\phi_H(v_j) = \{a_i, a_j\}$ であり、$a_i \in \phi_H(v_i)$ から $\phi_H(a_i) \cap \phi_H(a_j) \neq \emptyset$ である。以上より H は G によって admissible であり、$H \in \mathcal{A}_G$ である。

次に、H がツリーであることを示す。H の定義から、H の頂点集合は a_0 から a_n の $n+1$ 個の頂点である。ここで H から頂点 0 を取り除いたグラフを H_0 とする。この時、H_0 は G と同型になる。何故ならば、G は $\{v_{i_p}, v_i\}$ という $n-1$ 本の辺しか存在せず、H_0 の辺も $\{a_{i_p}, a_i\}$ という $n-1$ 本の辺のみから構成されているからである。H は H_0 の頂点 a_1 に葉をつけたグラフであったから、以上より H もツリーである。

最後に最小頂点列について考える。v_1 は G の最小葉であり H_0 は G と同型であったから、$\{a_i\}_{i=1}^n$ は H_0 上での a_1 を根とする最小頂点列である。従って、H の頂点列 $\{a_i\}_{i=0}^n$ は a_0 を根とする根付き頂点列となっている。

$$(deg(a_0), \ldots, deg(a_n)) = (1, 2, r(G)_2, r(G)_3, \cdots, r(G)_n)$$

であるから、

$$r(H) \leq_{lex} (1, 2, r(G)_2, r(G)_3, \cdots, r(G)_n)$$

となる。以上より、$H \in \Lambda_T(G)$ かつ最小頂点列に関する不等式を満たす H が存在するから、題が示された。

□

補題 3.1 を用いて、定理 3.3 が証明される。本稿では証明の概略のみを記す。G の頂点集合を $\{1, 2, \cdots, n\}$ とし、H を $\tilde{\Lambda}_T(G)$ の任意のツリーとして、その最小葉を a_0 とする。更に、H の a_0 を根とする最小頂点列を $\{a_i\}_{i=0}^n$ とし、a_{i_p} を a_0 を根とした時の a_i の親とする。この時、H の辺集合は

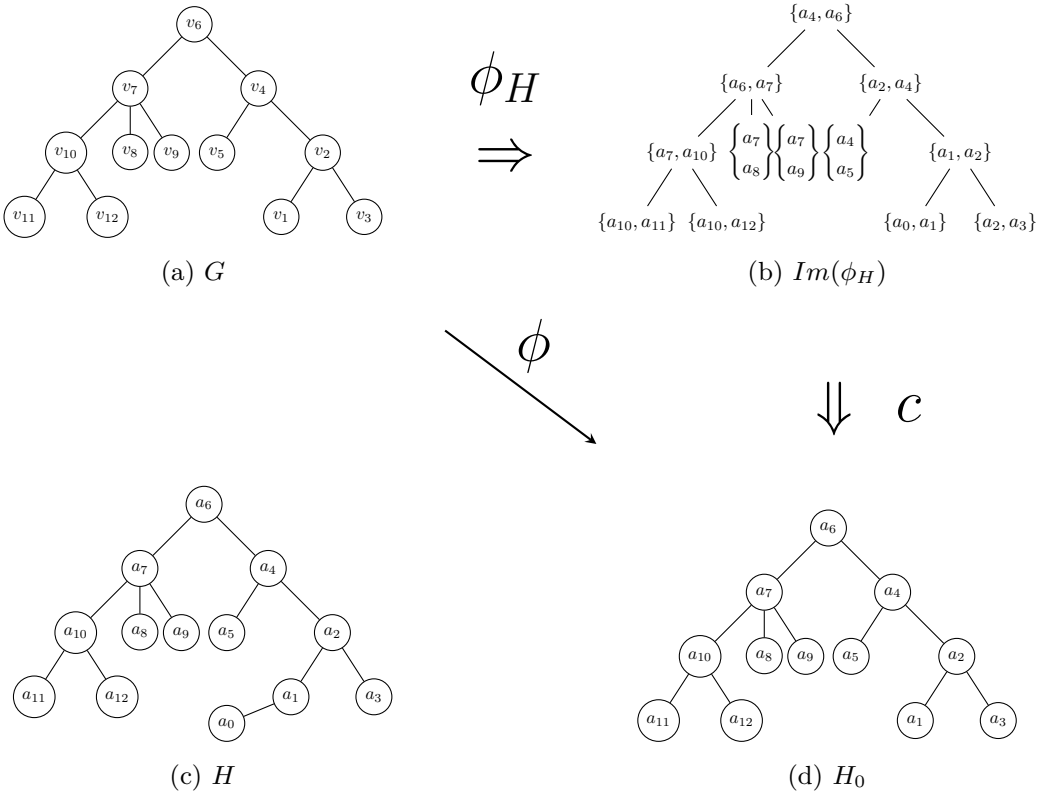
$$E(H) = \{\{a_{i_p}, a_i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

と表現される。従って、H の異なる 2 つの辺 $e_1 = \{a_{i_p}, a_i\}$ と $e_2 = \{a_{j_p}, a_j\}$ について、$c(\{a_{i_p}, a_i\}) = a_i$ という関数を定義すると、

$$c(e_1) \neq c(e_2)$$

となる。よって、

$$\{c(e) \mid e \in E(H)\} = \{a_1, \cdots, a_n\}$$



(a) G (b) $Im(\phi_H)$

(c) H (d) H_0

図 4: ツリー G, H, H_0 と全単射 ϕ_H の例

となる。そのため、H_0 を H から最小葉 a_0 を除いたグラフとすると、c は $E(H)$ から $V(H_0)$ への全単射となる。ここで、H は admissible であるから、$V(G)$ から $E(H)$ への admissible な全単射写像 ϕ_H が一つは存在する。これらを用いると、$V(G)$ から $V(H_0)$ への全単射 $\phi = c \circ \phi_H$ を定義することができる。補題 3.1 を用いることで、この ϕ が同型であることを証明できる、という流れとなっている。

定理 3.3 を使って定理 3.2 が示される。

定理 *3.2* の証明. $\mathcal{A}_{G_1} = \mathcal{A}_{G_2}$ だから、特に $\tilde{\Lambda}_T(G_1) = \tilde{\Lambda}_T(G_2)$ である。定理 3.3 から、$\tilde{\Lambda}_T(G_1)$ の適当なグラフ H を選び、その最小葉を除いたグラフを H_0 とすれば、$H_0 \simeq G_1$ かつ $H_0 \simeq G_2$ より、$G_1 \simeq G_2$ が示される。 □

3.3 定理 3.1 の証明

最後に、定理 3.1 について示す。

定理 *3.1* の証明.

$$X_{K_{\mathbb{N},k}}(G) = \sum_{S \subset E(G)} (-1)^{|S|} \sum_{\lambda \in \mathcal{A}_{G_S}^{(k)}} p_\lambda$$

である。ここで、$\Lambda = \bigcup_{S \subset E(G)} \mathcal{A}^{(2)}_{G_S}$ として、

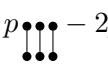
$$\Lambda_c \coloneqq \{H \in \Lambda \mid H \text{ が連結グラフである}\}$$

という集合を考える。$\mathcal{A}_{G_S}$ の定義から、G_S が連結であることと、全ての $H \in \mathcal{A}_{G_S}$ について H が連結であることは同値である。特に G がツリーである時、G_S が連結ならば $S = E(G)$ であるから、以上より

$$\Lambda_c = \mathcal{A}_G$$

である。従って、特に $X_{K_{\mathbb{N},2}}(G_1) = X_{K_{\mathbb{N},2}}(G_2)$ ならば $\mathcal{A}_{G_1} = \mathcal{A}_{G_2}$ となる。定理 3.2 から、この時 $G_1 \simeq G_2$ だったので、以上より $X_{K_{\mathbb{N},2}}(\bullet)$ はツリーの完全不変量である。 □

例 3.3 (Λ_c の例)**.**

$X_{K_{\mathbb{N},2}}($  $) = p$  $ - 2p$  $ - 2p$  $ + p$  $ + p$  $ + p$  $ + p$  $ + p$ 

この時、$\Lambda = \{\{$  $\}, \{$$\}, \{$$\}, $  $, $  $, $  $, $  $, $  $\}$ であり、この中で連結なグラフたちは

$$\Lambda_c = \{$$  $$, $$  $$, $$  $$, $$  $$, $$  $$\}.$$

となっている。例 2.3 から、確かに $\Lambda_c = \mathcal{A}_{\text{○}}$ である。また、例 3.1、例 3.2 で確認したように、

$$\tilde{\Lambda}_T($$$$) = \{$$  $$\}$$

で、最小葉を除いたグラフは確かにと同型であるから、このようにして $X_{K_{\mathbb{N},2}}($$)$ の情報のみからを一意的に復元できる。

参考文献

[1] T. Miezaki, A. Munemasa, Y. Nishimura, T. Sakuma and S. Tsujie, Universal graph series, chromatic functions, and their index theory, arXiv:2403.09985 (2024).

[2] Y. Nishimura, The Kneser chromatic function distinguishes trees, arXiv:2409.20478 (2024).

[3] R.P. Stanley. A symmetric function generalization of the chromatic polynomial of a graph. *Adv. Math.*, 111(1995), no.1, 166-194.

パラレルセッション
会場Ｃ

統計多様体におけるホップ・リノウの定理

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
上野龍 (Ryu UENO) *

概要

連結リーマン多様体のレヴィチヴィタ接続に対して, 測地的完備であれば測地的連結であるというホップ・リノウの定理がある. この性質は一般のアファイン接続に対しては成り立たない. あるクラスの統計多様体においては, 統計多様体のアファイン接続に対してホップ・リノウの定理が成り立つことを紹介する.

1　統計多様体と測地的連結性

統計多様体 (M, g, ∇) とはコダッチの方程式を満たしている, リーマン計量 g と捩れのないアファイン接続 ∇ の組が与えられた多様体 M である. この用語は情報幾何学に起源を持つが, 既にアファイン微分幾何学において研究されていた対象である [6].

連結多様体 M 上にアファイン接続 ∇ が与えられているとする. 任意の 2 点 $p, q \in M$ に対して $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ を満たす ∇-測地線 $\gamma : [0, 1] \to M$ が存在するとき, ∇ は**測地的連結**であるという. リーマン幾何学では連結リーマン多様体 (M, g) のレヴィチヴィタ接続 ∇^g が測地的完備であれば測地的連結であるというホップ・リノウの定理がある. 一般のアファイン接続に対してこの定理は成り立たず, 例 4.2 で確認できるように擬リーマン多様体のレヴィチヴィタ接続に対しても反例が見つかっている. また, コンパクト多様体上の測地的完備であるアファイン接続であっても測地的連結であるとは限らない [1]. **あるクラスの統計多様体に対してアファイン接続が測地的完備であれば測地的連結である**という性質を報告する. この講演は [4] に基づく.

2　統計多様体

定義 2.1. 滑らかな多様体 M 上にリーマン計量 g と捩れのないないアファイン接続 ∇ が与えられているとする. 3 次形式 $C = \nabla g$ が対称であるとき, (g, ∇) を統計構造, (M, g, ∇) を統計多様体と呼ぶ.

定義 2.2. 統計多様体 (M, g, ∇) に対して, (g, ∇) の**共役接続** $\overline{\nabla}$ を次で定める :

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \overline{\nabla}_X Z), \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM).$$

共役接続は情報幾何学では双対接続とも呼ばれる. 統計多様体 (M, g, ∇) とその共役接続 $\overline{\nabla}$ に対

* ueno.ryu.g1@elms.hokudai.ac.jp

して $\overline{\nabla} g = -\nabla g$ が成り立つため，$(g, \overline{\nabla})$ も M 上の統計構造である．

例 2.3. 超曲面はめ込み $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ と横断的ベクトル場 ξ，すなわち各点 $x \in M$ に対して分解 $T_{f(x)}\mathbb{R}^{n+1} = f_* T_x M \oplus \mathbb{R}\xi_x$ が成り立つものの組 $\{f, \xi\}$ を**アファインはめ込み**という．実数空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準的な平坦接続を D とする．Gauss の公式と Weingarten の公式によって，対称テンソル場 g, 捩率が 0 であるアファイン接続 ∇，$(1,1)$ 型テンソル場 S, そして 1 次微分形式 τ が M 上に誘導される：

$$D_X f_* Y = f_* \nabla_X Y + g(X,Y)\xi, \quad X, Y \in \Gamma(TM), \tag{Guass}$$

$$D_X \xi = -f_* SX + \tau(X)\xi, \quad X \in \Gamma(TM). \tag{Weingarten}$$

ここで，τ が 0 であるとき，$\{f, \xi\}$ を等積アファインはめ込みと呼ぶ．これは ∇g の対称性と同値である．そして g が定値であるとき，f は局所強凸であるという．この性質は ξ の取り方によらない．以上の設定の元で，アファインはめ込みによって統計多様体 (M, g, ∇) が誘導される．

アファイン微分幾何学において最も基本的である超曲面は 2 次超曲面である，すなわち，$(n+1)$ 次対称行列 $Q \neq 0$, $P \in \mathbb{R}^{n+1}$, $R \in \mathbb{R}$ に対して

$$yQy^t + Py^t + R = 0$$

を満たす $y = (y^1, ..., y^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ 全体による集合である．特に局所強凸である 2 次超曲面は楕円放物面，楕円面，二葉双曲面である．局所強凸 2 次超曲面上の統計構造は以下で特徴づけられる．

定理 2.4 ([6])**.** 局所強凸等積アファインはめ込み $\{f, \xi\}$ によって誘導される統計多様体を (M, g, ∇) とする．超曲面はめ込み f の像がある 2 次超曲面上に乗っているための必要十分条件は，ある関数 $\varphi \in C^\infty(M)$ があって 3 次形式 $C = \nabla g$ について以下が成り立つことである：

$$C(X,Y,Z) = d\varphi(X)g(Y,Z) + d\varphi(Y)g(Z,X) + d\varphi(Z)g(X,Y), \quad X, Y, Z \in \Gamma(TM). \tag{1}$$

この特徴付けによって統計多様体のクラスを新たに定める．

定義 2.5. 統計多様体 (M, g, ∇) の 3 次形式 $C = \nabla g$ が (1) を満たすとき，統計多様体は**割り切れる 3 次形式を持つ**という．

3 アファイン接続の測地的完備性

多様体上のアファイン接続は多様体上の直線にあたる，測地線を定める．

定義 3.1. 多様体 M にアファイン接続 ∇ が与えられているとする．次式を満たす M 上の滑らかな曲線 $\gamma : I \to M$ を **∇-測地線**と呼ぶ：

$$(\nabla_{\dot\gamma} \dot\gamma)(t) = 0, \quad t \in I.$$

ここで，$\dot\gamma$ は曲線 γ の速度ベクトルである．任意の $(p, v) \in TM$ に対して $\gamma(0) = p$, $\dot\gamma(0) = v$ を満たす ∇-測地線 $\gamma : \mathbb{R} \to M$ が存在するとき，∇ は**測地的完備**であるという．

リーマン多様体 (M,g) 上一意に定まるレヴィチヴィタ接続 ∇^g による測地線は局所的に 2 点間の最短曲線として特徴づけられる．リーマン計量 g によって誘導される距離 d によって (M,d) が完備距離空間であることと，∇^g が測地的完備であることは同値である．

割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体においては，アファイン接続の完備性を次で求めることができる．

命題 3.2 ([2])**.** 統計多様体 (M,g,∇) の 3 次形式 C に対して $C=\mathrm{sym}(d\varphi\otimes g)$ が成り立つとする．このとき，∇^g が測地的完備，関数 φ が M 上で上に有界であるとき，∇ は測地的完備である．

4　アファイン接続の測地的連結性

連結多様体 M にアファイン接続 ∇ が与えられているとする．多様体 M の任意の 2 点が ∇-測地線で結ばれるとき，$\nabla(=(M,\nabla))$ を測地的連結という．

命題 4.1 (ホップ・リノウの定理)**.** 連結リーマン多様体 (M,g) のレヴィチヴィタ接続 ∇^g が測地的完備であれば測地的連結である．

ホップ・リノウの定理は一般のアファイン接続に対して成り立たない．

例 4.2. (ドゥ・ジッター空間 [5]) 数ベクトル空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ の通常の基底 $e_1,...,e_{n+1}$ に対してローレンツ内積

$$\langle e_i,e_j\rangle=\begin{cases}0 & ,i\neq j\\ 1 & ,i=j\leq n\\ -1 & ,i=j=n+1\end{cases}$$

を与えたとき，これをローレンツ空間と呼び L^{n+1} で表す．半径 $r>0$ のドゥ・ジッター空間 $S^n_1(r)$ を

$$S^n_1(r)=\{y\in L^{n+1}\mid\langle y,y\rangle=r^2\}$$

によって定め，包含写像 $i:S^n_1(r)\hookrightarrow L$ によってローレンツ計量 $g=i^*\langle\cdot,\cdot\rangle$ を $S^n_1(r)$ 上に定める．このとき，g のレヴィチヴィタ接続 ∇^g は測地的完備であるが，測地的連結ではない．

5　割り切れる 3 次形式を持つ統計多様体

割り切れる統計多様体は良い性質を多く持つ．

命題 5.1 ([4])**.** 統計多様体 (M,g,∇) の 3 次形式 C に対して $C=\mathrm{sym}(d\varphi\otimes g)$ が成り立つとする．このとき，ω_g をリーマン計量 g による M 上の体積形式とすれば，$\theta=\exp(-\frac{n+2}{2}\varphi)\omega_g$ は ∇ に関して平行である体積形式である．

一般の統計多様体 (M,g,∇) に対して, 必ずしもアファイン接続 ∇ に関して平行である体積形式が存在するとは限らないことに注意する．

定義 5.2. 多様体 M 上に 2 つのアファイン接続 ∇, $\tilde{\nabla}$ が与えられているとする．ある閉 1 次微分形式 ρ が存在して

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \rho(X)Y + \rho(Y)X, \quad X, Y \in \Gamma(TM)$$

が成り立つとき，∇, $\tilde{\nabla}$ は射影的に同値であるという．

アファイン接続 ∇, $\tilde{\nabla}$ が射影的に同値であるとき，∇-測地線 γ はパラメータ変換を行うことで $\tilde{\nabla}$-測地線 $\tilde{\gamma}$ にすることができる [6].

命題 5.3 ([4])**.** 統計多様体 (M, g, ∇) の 3 次形式に対して $\nabla g = \mathrm{sym}(d\varphi \otimes g)$ が成り立つとする．このとき，リーマン計量 $\tilde{g} = \exp(\varphi)g$ のレヴィチヴィタ接続 $\nabla^{\tilde{g}}$ と ∇ は射影的に同値である．

従って，命題 5.3 の設定においてはアファイン接続 ∇ の測地線を調べるとき，$\nabla^{\tilde{g}}$ の測地線を調べればよい．当然，$\nabla^{\tilde{g}}$ にはホップ・リノウの定理が成り立つ．

6 主定理

今までの準備の元で，次の定理が得られた．

定理 6.1 ([4])**.** 統計多様体 (M, g, ∇) の 3 次形式 C に対して $C = \mathrm{sym}(d\varphi \otimes g)$ が成り立つとする．アファイン接続 ∇, (g, ∇) の共役接続 $\overline{\nabla}$, リーマン計量 $\tilde{g} = \exp(\varphi)g$ のレヴィチヴィタ接続 $\nabla^{\tilde{g}}$ について，以下が成り立つ．

(1) ∇ が測地的完備であり φ が下に有界であるとき, $\nabla^{\tilde{g}}$ は測地的完備である．
(2) $\nabla^{\tilde{g}}$ が測地的完備であり φ が上に有界であるとき, ∇ は測地的完備である．
(3) ∇ が測地的完備であり φ が下に有界であるとき, $\overline{\nabla}$ は測地的完備である．
(4) $\nabla^{\tilde{g}}$ が測地的完備であり φ が下に有界であるとき, $\overline{\nabla}$ は測地的完備である．
(5) ∇ と $\nabla^{\tilde{g}}$，それぞれの測地的連結性は同値である．

系 6.2 ([4])**.** 連結コンパクト統計多様体 (M, g, ∇) の 3 次形式 C に対して $C = \mathrm{sym}(d\varphi \otimes g)$ が成り立つとき，∇ は測地的連結である．

例 6.3. 楕円面 $f : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ に対して，$\{f, \xi\}$ が等積アファインはめ込みとなる横断的ベクトル場 ξ を一つとる．このとき，M は球面と同相である [6]．従って，$\{f, \xi\}$ によって誘導される M 上の統計構造 (g, ∇) において，∇ は命題 3.2 により測地的完備であり，定理 6.1 により測地的に連結である．

例 6.4. 楕円面に乗る曲面

$$f(x^1,x^2)=\frac{1}{(x^1)^2+(x^2)^2+1}\left(-2x^1,-2x^2,1\right)\in\mathbb{R}^3,\quad (x^1,x^2)\in\mathbb{R}^2$$

に対して，横断的ベクトル場を位置ベクトル $-f$ とする．このとき，Gauss の公式によって $\mathbb{R}^2$ 上に統計構造 (g,∇) が誘導される：

$$g=\frac{2}{(x^1)^2+(x^2)^2+1}\left((dx^1)^2+(dx^2)^2\right)$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=-\frac{2}{(x^1)^2+(x^2)^2+1}\left(x^i\frac{\partial}{\partial x^j}+x^j\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

ここで，$\varphi(x^1,x^2)=\log(\frac{1}{2}((x^1)^2+(x^2)^2+1))$ とおけば，$\nabla g=\mathrm{sym}(d\varphi\otimes g)$ が成り立つ．リーマン計量 $\tilde{g}=\exp(\varphi)g$ は $\mathbb{R}^2$ におけるユークリッド計量であるため，そのレヴィチヴィタ接続 $\nabla^{\tilde{g}}$ は測地的完備である．従って，定理 6.1 より ∇ は測地的連結である．ここで，∇ は測地的完備ではない．

そして，定理 6.1 を用いて割り切れる 3 次形式 C を持つ統計多様体版のホップ・リノウの定理が得られる．

定理 6.5 ([4])**.** 連結な統計多様体 (M,g,∇) が割り切れる 3 次形式 $C=\mathrm{sym}(d\varphi\otimes g)$ を持つとし，関数 φ は M 上で下に有界であるとする．このとき，

(1) ∇ が測地的完備であるとき, ∇ は測地的連結である．
(2) ∇^g が測地的完備であるとき, ∇ は測地的連結である．

参考文献

[1] L. Bates, You can't get there from here. Differential Geom. Appl. **8** (1998), no.3, 273-274.
[2] M. Noguchi, Geometry of statistical manifolds, Differential Geom. Appl. **2**(1992), no.3, 197-222.
[3] K. Nomizu, U. Pinkall, Cubic form theorem for affine immersions, Results Math. **13**(1988), no.3-4, 338–362.
[4] R. Ueno, Geodesic Connectedness on Statistical Manifolds with Divisible Cubic Forms, arxiv.org/abs/2503.10024.
[5] 野水克己，現代微分幾何入門，裳華房，1981.
[6] 野水克己, 佐々木武, アファイン微分幾何学, 裳華房, 1994.

The evolution of a curve induced by the Pohlmeyer-Lund-Regge equation

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
古郷優平 (Yuhei KOGO) *

概要

本講演では，幾何学や場の理論への応用を持つ sine-Gordon 方程式を一般化した可積分系である Pohlemeyer-Lund-Regge（PLR）方程式に従う空間曲線の時間発展について考察する．Frenet 枠と関連する微分方程式を使用し，Lund-Regge 条件における空間曲線の曲率と捩率の時間発展を記述する方程式を導出する．次に，これらの方程式を 2×2 の行列表現に置き換えて再定式化し，Frenet 枠の時間発展と PLR 方程式の Lax ペアとの間の対応を示す．この定式化では，非線形シュレディンガー方程式で使用される橋本変換に類似した複素関数が導入される．最後に，伊達悦朗により得られた N-ソリトン解を示し，それらが生成する曲線と曲面を具体的に構成する．本講演は，北海道大学の小林真平氏，福岡大学の松浦望氏との共同研究によるものである．

1　導入

1978 年に Lund と Regge は sine-Gordon 方程式のある種の一般化を発見し，空間曲線の時間発展で次の非線形偏微分方程式を満たすものとして定式化した [2](Lund-Regge 条件).

$$\dot{\gamma}' = \gamma' \times \dot{\gamma}$$

ここで，空間曲線を γ とし，γ のパラメータ方向の微分を $'$，時間発展方向の微分を $\dot{}$ で表した．この方程式は，Pohlemeyer[3] により独立に，可積分系の理論より導出され，Pohlemeyer-Lund-Regge(PLR) 方程式として知られている．1982 年に伊達悦朗 [1] は，Krichever の方法の拡張を適用して PLR 方程式の多ソリトン解および準周期解を構成し，Cramer の方法を通じて特別な線型方程式を解くことで N ソリトン解を構成する方法を導入した．この構成法は，「伊達の直接法」と呼ばれている．

本講演では，Lund-Regge 条件を適用した空間曲線の時間発展を考え，2×2 行列値 Frenet 枠（$\mathbb{R}^3$ と $\mathfrak{su}(2)$ を同一視して，SU(2) に値を持つとする）の時間発展を与える方程式と，それに伴う曲率 κ，捩率 τ の満たす連立偏微分方程式を導出する．また，橋本変換の類似として複素関数 $q = \kappa \exp\left(i \int^s (\tau - 1) ds\right)$ を定義し，適切なゲージ変換を用いることで，Frenet 枠の時間発展が，PLR 方程式の Lax 形式と一致することを示す．この対応により，複素関数 q が以下の非線形偏微分

* E-mail:yh1123_kg_5813@eis.hokudai.ac.jp

方程式を満たすことがわかる．

$$\dot{q}' + \frac{1}{2} q \int^s \left(|q|^2\right)^{\cdot} ds = 0,$$

これは，非線形 Schrödinger 方程式に類似した方程式である．さらに Lax 形式の解の対数微分を調べること（Sym の公式として知られる）により，Lund-Regge 条件を満たす空間曲線の時間発展を構築することが可能である．さらに，伊達の直接法により得られた PLR 方程式の N ソリトン解に対応する曲線の表現公式，および曲線や曲線を動かしてできる曲面が明示的に構成できる．

2 主定理

定理 2.1. 3 次元ユークリッド空間内の空間曲線 γ の時間発展を次で定める．

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\dot{\kappa}'}{\kappa} - (\tau - 1) \int^s \dot{\tau} ds \right) T - \dot{\kappa} N - \kappa \int^s \dot{\tau} ds B.$$

ここで T は単位接ベクトル，N は単位法線ベクトル，B は単位陪法線ベクトルである．フレネ枠 $\mathcal{F}$ は，連立線型微分方程式系 $\mathcal{F}' = \mathcal{F}\mathcal{L}$, $\dot{\mathcal{F}} = \mathcal{F}\mathcal{M}$ を満たし，係数行列は次で与えられる：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i\tau & -\kappa \\ \kappa & -i\tau \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{i}{\kappa} \left(m_{31}' + m_{21}\tau \right) & -m_{21} - i m_{31} \\ m_{21} - i m_{31} & -\frac{i}{\kappa} \left(m_{31}' + m_{21}\tau \right) \end{pmatrix},$$

ここで m_{21}, m_{31} は次で与えられる．

$$m_{21} = \kappa \int^s \dot{\tau} ds, \quad m_{31} = -\left(\kappa \int^s \dot{\tau} ds \right)' - \dot{\kappa}\tau.$$

この時，連立線型微分方程式系の可積分条件は

$$\left(\frac{\dot{\kappa}'}{\kappa} - (\tau - 1) \int^s \dot{\tau} ds \right)' + \kappa\dot{\kappa} = 0, \quad \left(\kappa \int^s \dot{\tau} ds \right)' + \dot{\kappa}(\tau - 1) = 0$$

であり，曲線 γ は *Lund-Regge* 条件 $\dot{\gamma}' = \gamma' \times \dot{\gamma}$ を満たす．逆に，*Lund-Regge* 条件を満たす空間曲線 γ は，上の連立偏微分方程式系および可積分条件を満たす．

系 2.2. 適切なゲージ $\mathcal{D}$ を取り，次の複素関数を導入する：

$$q = \kappa \exp\left(i \int (\tau - 1) ds \right). \tag{2.1}$$

ゲージされた *Frenet* 枠 $F = \mathcal{F}\mathcal{D}$ と定理 2.1 における $\mathcal{L}$ と $\mathcal{M}$ は次のように書き換えられる：

$$\begin{cases} F' = FL \\ \dot{F} = FM \end{cases}, \text{ここで} \quad L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & q \\ -\bar{q} & -i \end{pmatrix}, \quad M = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}\left(\dot{q}'/q\right) & -\dot{q} \\ -\dot{\bar{q}} & \operatorname{Re}\left(\dot{q}'/q\right) \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

この時，この連立線型方程式系の可積分条件は $\left\{\operatorname{Re}\left(\dot{q}'/q\right)\right\}' = -\frac{1}{2}\left(|q|^2\right)^{\cdot}$, $\operatorname{Im}\left(\dot{q}'/q\right) = 0$ であり，これは次の非線形偏微分方程式と同値である：

$$\dot{q}' + \frac{1}{2} q \int^s \left(|q|^2\right)^{\cdot} ds = 0. \tag{2.3}$$

3 Pohlemeyer-Lund-Regge 方程式

Lund-Regge 条件を満たす曲線の表現公式を導入するために，Pohlemeyer-Lund-Regge 方程式の Lax 表示について紹介する．以降 $'$ は s 微分，$\dot{}$ は t 微分を表すこととする．

(2×2) 行列値関数 Ψ を，次の連立偏微分方程式系を満たすものとする（Lax ペア）：

$$\Psi^{-1}\Psi' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\lambda & a \\ -\bar{a} & -i\lambda \end{pmatrix},\quad \Psi^{-1}\dot{\Psi} = \frac{i}{2\lambda}\begin{pmatrix} \cos u & -\exp(i\omega)\sin u \\ -\exp(-i\omega)\sin u & -\cos u. \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

ここで λ は，$\mathbb{C}^\times$ に値をとる定数 (*spectral parameter*) で，u は 2 変数実数値関数であるとする．さらに，2 変数複素数値関数 a と 2 変数実数値関数 ω は，u と新たな 2 変数実数値関数 v を用いて次で定義される：

$$a = -\frac{\{\exp(i\omega)\sin u\}'}{\cos u},\quad \omega' = \frac{v'\cos u}{2\cos^2(u/2)},\quad \dot{\omega} = \frac{\dot{v}}{\cos^2(u/2)}. \tag{3.2}$$

ここで $0 < u < \pi/2$ を仮定している．この時，Lax ペアの Compatibility condition が次の Pohlmeyer-Lund-Regge 方程式 [1, (0.2)]:

$$\dot{u}' - \frac{v'\dot{v}\sin(u/2)}{2\cos^3(u/2)} + \sin u = 0,\quad \dot{v}' + \frac{u'\dot{v} + \dot{u}v'}{\sin u} = 0, \tag{3.3}$$

となる．もし (3.3) の関数 v が定数であるとすると, 方程式 (3.3) は，sine-Gordon 方程式：

$$\dot{u}' + \sin u = 0. \tag{3.4}$$

に退化する．Lax ペアに現れる行列値関数 Ψ のことを波動関数と呼ぶ.

次に伊達の N-ソリトン解について紹介する．波動関数 $\Psi(s,t,\lambda) = (\Psi_{jk}(s,t,\lambda))_{1\le j,k\le 2}$ が次の形で書けることを仮定する．

$$\begin{aligned}
\Psi_{11}(s,t,\lambda) &= \left(\lambda^N + \sum\nolimits_{j=0}^{N-1}\psi_{1j}(s,t)\lambda^j\right)\exp\left\{\frac{i}{2}(\lambda s + \lambda^{-1}t)\right\},\\
\Psi_{21}(s,t,\lambda) &= -\left(\sum\nolimits_{j=0}^{N-1}\psi_{2j}(s,t)\lambda^j\right)\exp\left\{-\frac{i}{2}(\lambda s + \lambda^{-1}t)\right\},\\
\Psi_{12}(s,t,\lambda) &= -\overline{\Psi_{12}(s,t,\bar{\lambda})},\quad \Psi_{22}(s,t,\lambda) = \overline{\Psi_{11}(s,t,\bar{\lambda})},
\end{aligned}$$

ここで $\psi_{ij}(s,t)$ $(i=1,2,\ j=0,\dots,N-1)$ は，λ に依存しない複素数値関数で，パラメータ α_j, c_j は，次を満たす.

$$\begin{cases} \alpha_j (1\le j\le N) : \text{全ての } j \text{ に対して } \operatorname{Im}\alpha_j \text{が同符号で，かつ互いに異なる複素数,} \\ c_j (1\le j\le N) : \text{任意の複素数.} \end{cases}$$

そして，$\psi = (\psi_{10},\cdots,\psi_{1,N-1},\psi_{20},\cdots,\psi_{2,N-1})^T \in \mathbb{C}^{2N}$ を次の線型方程式の解とする

$$T_0\psi = b. \tag{3.5}$$

$2N$ ベクトル b は次で定義：

$$b = -\left((\alpha_1)^N e(\alpha_1),\dots,(\alpha_N)^N e(\alpha_N),(\overline{\alpha_1})^N\overline{c_1}e(\overline{\alpha_1}),\dots,(\overline{\alpha_N})^N\overline{c_N}e(\overline{\alpha_N})\right)^T,$$

ここで $e(\lambda)=\exp(\frac{i}{2}(\lambda s+\lambda^{-1}t))$. さらに $(2N\times 2N)$ 行列 T_0 は次で定義：

$$T_0=\begin{pmatrix} EA & -CE^{-1}A \\ \overline{CE^{-1}A} & \overline{EA}\end{pmatrix},$$

ここで $(N\times N)$ 行列 $A,\ E,\ C$ は，次で定義：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & (\alpha_1)^1 & \cdots & (\alpha_1)^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (\alpha_N)^1 & \cdots & (\alpha_N)^{N-1}\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} e(\alpha_1) & & O \\ & \ddots & \\ O & & e(\alpha_N)\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} c_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & c_N\end{pmatrix}.$$

パラメータ α_j に対する条件の下で, 線型方程式 (3.5) の係数行列は逆行列を持つ. 実際, クラメルの方法より, 関数 ψ_{ij} は，次のように具体的に書ける.

$$\psi_{1j}(s,t)=\frac{\det T_{j+1}}{\det T_0}=\frac{d_{j+1}}{d_0},\quad \psi_{2j}(s,t)=\frac{\det T_{N+j+1}}{\det T_0}=\frac{d_{N+j+1}}{d_0}, \tag{3.6}$$

$j=0,\dots,N-1$, ここで T_k は，T の k 列目を b で置き換えた行列を表し，d_j はその行列式とする. つまり

$$d_j=\det T_j,\quad (j=0,\dots,N).$$

伊達の論文 [1, section 3] より，パラメータ $\alpha_1,\dots,\alpha_N,c_1,\dots,c_N$ は，次の条件を満たす波動関数 $\Psi(s,t,\lambda)$ を一意に定める：

$$(1,c_j)\Psi(s,t,\alpha_j)=0,\quad (j=1,\dots,N).$$

さらに $\Psi(s,t,\lambda)$ は次の連立方程式系を満たすことがわかる：

$$\begin{cases} \Psi^{-1}\Psi'=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} i\lambda & i\overline{d_{2N}/d_0} \\ id_{2N}/d_0 & -i\lambda\end{pmatrix}, \\ \Psi^{-1}\dot\Psi=\dfrac{i}{2\lambda(|d_1|^2+|d_{N+1}|^2)}\begin{pmatrix} |d_1|^2-|d_{N+1}|^2 & 2\overline{d_1d_{N+1}} \\ 2d_1d_{N+1} & -|d_1|^2+|d_{N+1}|^2\end{pmatrix}.\end{cases} \tag{3.7}$$

Pohlemeyer-Lund-Regge 方程式の Lax ペア (3.1) と (3.7) を比較すると, Pohlemeyer-Lund-Regge 方程式 (3.3) の解が次で与えられる:

$$a=i\overline{\left(\frac{d_{2N}}{d_0}\right)},\ u=\arccos\left(\frac{|d_1|^2-|d_{N+1}|^2}{|d_1|^2+|d_{N+1}|^2}\right),\ v=2\arg\overline{\left(\frac{d_{N+1}}{d_0}\right)}+v_0,\ (v_0\in\mathbb{R}). \tag{3.8}$$

さらに $\Psi(s,t,\lambda)$ は，(3.1) を満たす.

パラメータ α_j,c_j を，次の条件を満たす $\{1,\dots,N\}$ の置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_N$

$$\overline{\alpha_j}=-\alpha_{\sigma(j)},\quad \overline{c_j}=-c_{\sigma(j)},\ (j=1,\dots,N). \tag{3.9}$$

が存在するように選ぶとき，d_j は次を満たす：

$$\frac{d_k}{d_0}=\overline{\left(\frac{d_k}{d_0}\right)},\ (k=1,\dots,2N). \tag{3.10}$$

この時関数 v は，(3.8) の第 3 式から定数である．よって関数 u は sine-Gordon 方程式の解である．いまの話と，(2.2) を合わせて次の系を得る.

系 3.1. 式 (2.1) の形であらわされる複素数値関数 q は，式 (3.2) であらわされる複素数値関数 a と同一視できる. つまり，q は *Pohlmeyer-Lund-Regge* 方程式の解を与える．したがって (2.2) のゲージされた *Frenet* 枠 F は，定数行列倍を除いて $\lambda = 1$ での (3.1) の波動関数 Ψ と一致する．つまり, ある $F_0 \in \mathrm{SU}(2)$ が存在して $F_0 F = \Psi$ とできる．さらに，関数族 $\{F^\lambda\}_{\lambda>0}$ で $F^\lambda|_{\lambda=1} = F_0 F$ かつ次の偏微分方程式系を満たすものが存在する.

$$\begin{cases} (F^\lambda)' = F^\lambda L^\lambda \\ (F^\lambda)^\cdot = F^\lambda M^\lambda \end{cases}, \; L^\lambda = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i\lambda & q \\ -\bar{q} & -i\lambda \end{pmatrix}, \quad M^\lambda = \frac{i}{2\lambda}\begin{pmatrix} -\operatorname{Re}(\dot{q}'/q) & -\dot{q} \\ -\bar{\dot{q}} & \operatorname{Re}(\dot{q}'/q) \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

4 Lund-Regge 条件を満たす曲線の表現公式

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ を，次で $\mathfrak{su}(2)$ と同一視する.

$$\begin{pmatrix} p & q & r \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 \longleftrightarrow \frac{1}{2}\begin{pmatrix} ir & -p-iq \\ p-iq & -ir \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2). \tag{4.1}$$

定理 4.1 (The representation formula)**.** 複素数値関数 q を (2.3) の解，2×2 行列値関数 $F(=F^\lambda)$ を (3.11) の解とする．ここで $\mathfrak{su}(2)$-値写像を次で定義する：

$$\gamma = (\lambda\partial_\lambda F)F^{-1}|_{\lambda=1}. \tag{4.2}$$

この時, $\mathbb{R}^3 \cong \mathfrak{su}(2)$ の同一視のもとで, γ は, $|\gamma'| = 1$ で *Lund-Regge* 条件を満たす．逆に, *Lund-Regg* 条件を満たす曲線の時間発展はこの方法で得られる.

この表現公式を用いて，伊達の N ソリトン解に付随する曲線の具体的な表示を紹介する.

命題 4.2. 関数 $\Psi(s,t,\lambda)$ を，式 (3.7) を満たす (2×2) 行列値波動関数とし，複素数値関数 $e(s,t,\lambda),\ f(s,t,\lambda),\ g(s,t,\lambda)$ を次で定める：

$$e(s,t,\lambda) := \exp\left(\frac{i}{2}(\lambda s + \lambda^{-1}t)\right), \tag{4.3}$$

$$f(s,t,\lambda) := \Psi_{11}(s,t,\lambda)e(s,t,-\lambda) = \lambda^N + \sum\nolimits_{j=0}^{N-1}\frac{d_{j+1}}{d_0}\lambda^j, \tag{4.4}$$

$$g(s,t,\lambda) := \Psi_{21}(s,t,\lambda)e(s,t,\lambda) = -\sum\nolimits_{j=0}^{N-1}\frac{d_{N+j+1}}{d_0}\lambda^j, \tag{4.5}$$

ここで $\Psi_{ij}(s,t,\lambda), (i,j=1,2)$ は，$\Psi(s,t,\lambda)$ の (i,j) 成分で，$d_k, (k=0,\dots,2N)$ は，(3.6) で与えたもの．この時 N-ソリトン解に付随する曲線 $\gamma(s,t) = (\gamma_1(s,t),\gamma_2(s,t),\gamma_3(s,t))$ は次で与えられる.

$$\gamma_1(s,t) = 2\operatorname{Re}\left[\frac{\bar{f}\partial_\lambda g - g\partial_\lambda\bar{f}}{f\bar{f}+g\bar{g}}e^2\right]\Big|_{\lambda=1}, \tag{4.6}$$

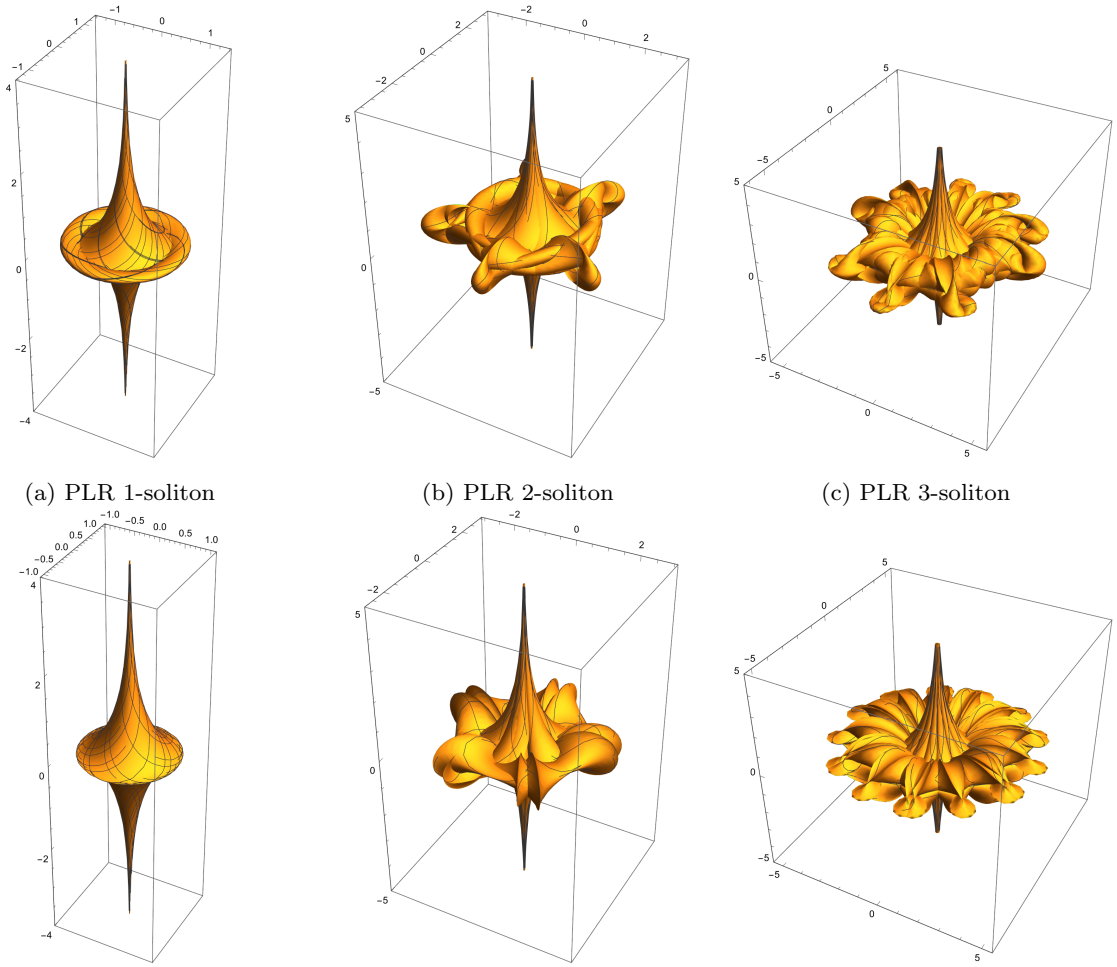
$$\gamma_2(s,t) = -2\operatorname{Im}\left[\frac{\bar{f}\partial_\lambda g - g\partial_\lambda\bar{f}}{f\bar{f}+g\bar{g}}e^2\right]\Big|_{\lambda=1}, \tag{4.7}$$

$$\gamma_3(s,t) = s - t + 2\operatorname{Im}\left[\frac{\bar{f}\partial_\lambda f + g\partial_\lambda\bar{g}}{f\bar{f}+g\bar{g}}\right]\Big|_{\lambda=1}, \tag{4.8}$$

ここで e,f,g はそれぞれ $e(s,t,\lambda), f(s,t,\lambda), g(s,t,\lambda)$ を表す.

次に，伊達の直接法により得られる Pohlemeyer-Lund-Regge，sine-Gordon 方程式の N ソリトン解に付随する曲線を，パラメータ $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ と $c_1, \ldots, c_N$ をとり，表現公式を用いて作成し，その曲線の時間発展により得られる曲面を描画する．

例 4.3. 初めに $1, 2, 3$-ソリトンに付随する曲面を 図 1 に示す．



(a) PLR 1-soliton　(b) PLR 2-soliton　(c) PLR 3-soliton

(d) sine-Gordon 1-soliton　(e) sine-Gordon 2-soliton　(f) sine-Gordon 3-soliton

図 1: PLR，sine-Gordon 方程式の $1, 2, 3$-ソリトン解による曲線の時間発展で得られる曲面

例 4.4 (4-soliton curves)**.** パラメータを次でとる．

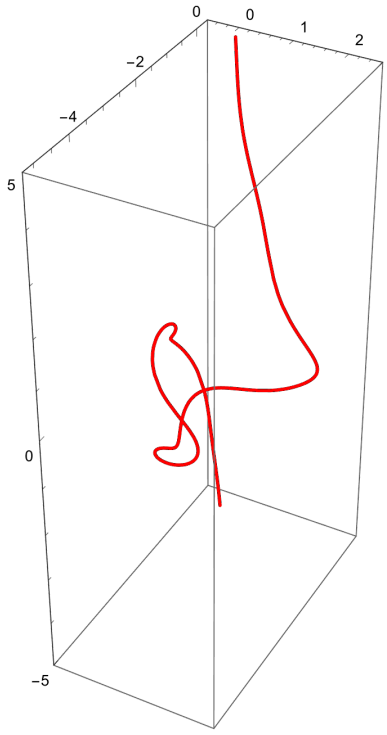
$$(c_1, c_2, c_3, c_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}).$$

この時得られる PLR 方程式の 4 ソリトン解に付随する曲線と曲面を図 2 に示す．

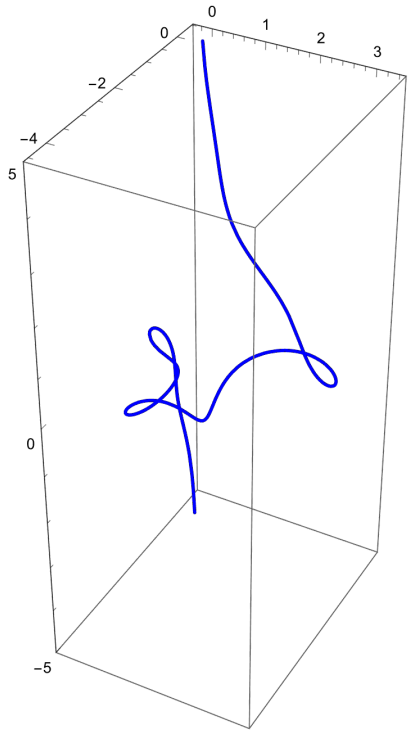
例 4.5 (4-soliton curves with sine-Gordon equation)**.** パラメータを次でとる．

$$(c_1, c_2, c_3, c_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{6}}, e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{2i\pi}{3}}, e^{\frac{5i\pi}{6}}).$$

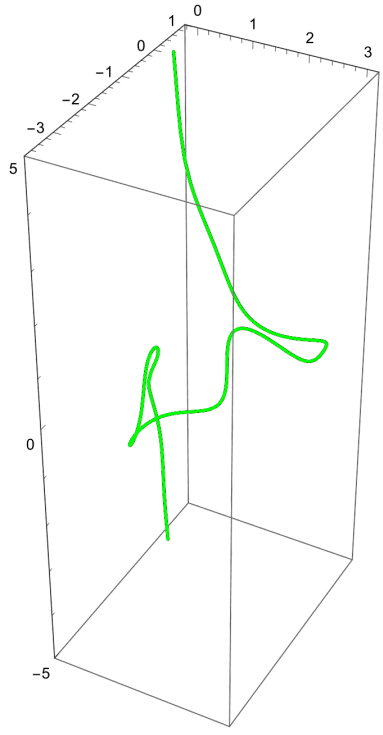
このとき，パラメータは，条件 (3.9) を満たす．sine-Gordon 方程式の 4 ソリトン解に付随する曲線と曲面を図 3 で示す．



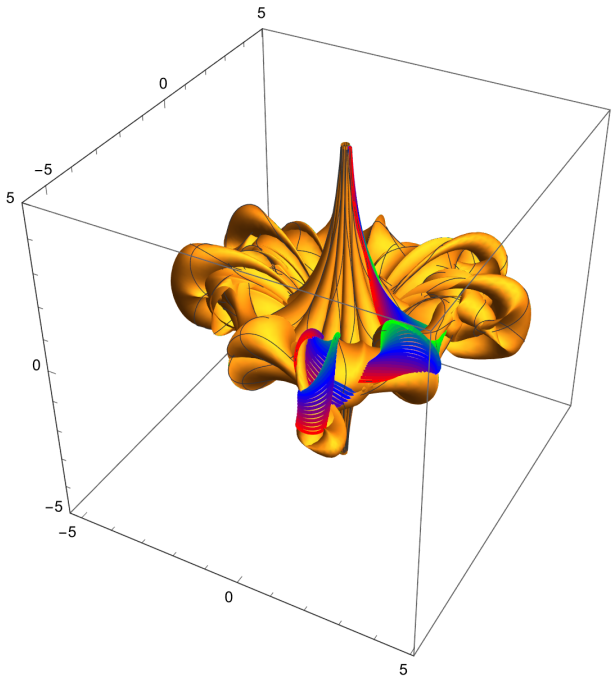
(a) $t = 0$ での曲線



(b) $t = 1$

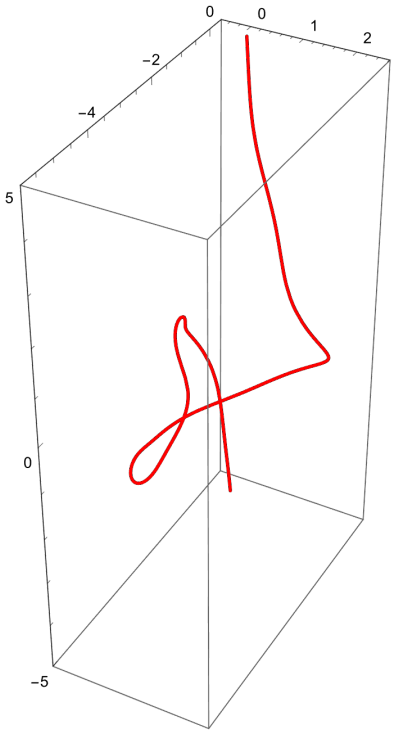


(c) $t = 2$

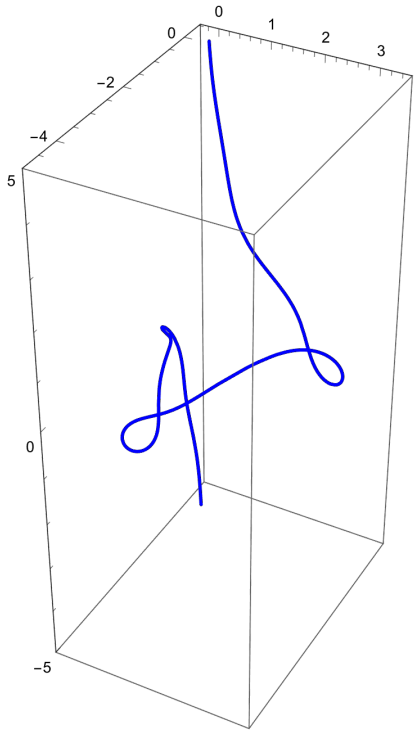


(d) 曲線 (a), (b), (c) とそれらを動かしてできる曲面

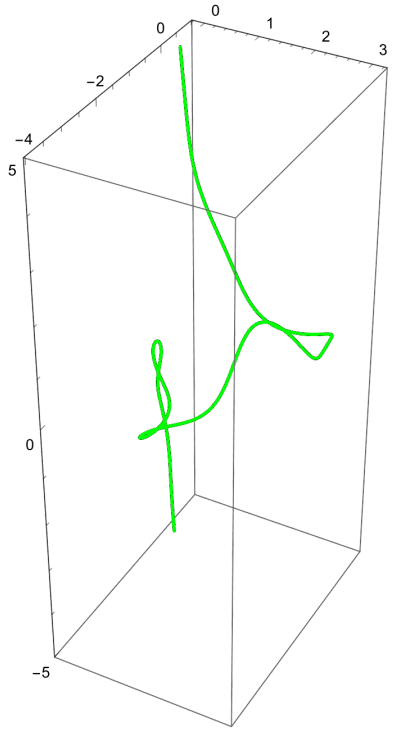
図 2: PLR 方程式の 4 ソリトン解に付随する曲線と曲面



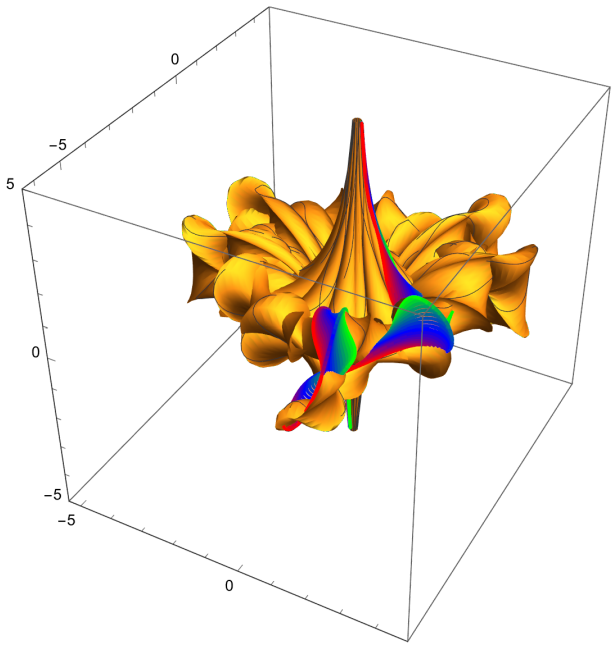
(a) $t = 0$ での曲線



(b) $t = 1$



(c) $t = 2$



(d) 曲線 (a), (b), (c) とそれらを動かしてできる曲面

図 3: sine-Gordon 方程式の 4 ソリトン解に付随する曲線と曲面

参考文献

[1] E. Date. Multi-soliton solutions and quasi-periodic solutions of nonlinear equations of sine-Gordon type. *Osaka J. Math.* **19** (1982), 125–158.

[2] F. Lund, T. Regge. Unified approach to strings and vortices with soliton solutions. *Phys. Rev. D* **14**, no. 6 (1978), 1524–1535.

[3] K. Pohlmeyer. Integrable Hamiltonian systems and iteractions through quadratic constraints. *Comm. Math. Phys.* **46** (1976), 207–221.

佐々木磁場の Legendre 軌道に沿った磁性ヤコビ場の共役値と焦値

名古屋工業大学　大学院工学研究科博士後期課程工学専攻
青木侑省 (Yusei AOKI) *

概要

複素空間形内の良い実超曲面である η 全臍的実超曲面上にはケーラー多様体の複素構造から誘導される概接触計量構造が入る。この構造のもと、速度ベクトルと加速度ベクトルが複素一次元を張る曲線族である軌道を考える。今回はこの軌道の変分の様子を調べた。特に、多様体の幾何学的な性質を数値的に表す重要な概念の１つである共役値、焦値について調べた。

1　導入

これまで、リーマン多様体の形状を考察する主な手法として、多くの研究者によって測地線の性質が調べられてきた。そこで著者は測地線を幾何構造に付随する磁場を用いて一般化し、より広い対象となる曲線族を考えることで、多様体の形状と幾何構造の両者を含めた情報が得られるのではないかとして考察を進めている。

正則断面曲率 c に対して、複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$、複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$、複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ の３つをまとめて複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ と呼ぶ。また、非平坦な複素空間形内の実超曲面で複素射影空間 $\mathbb{C}P^n(c)$ 内の半径 r の測地球面 $G(r)$、複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ 内のホロ球面 HS、半径 r の測地球面 $G(r)$、複素超曲面 $\mathbb{C}H^{n-1}(c)$ を芯とする半径 r の管 $T(r)$ をまとめて η 全臍的実超曲面という。今回はこの η 全臍的実超曲面上の特別な軌道を対象に考察を行った。特に、この軌道の変分の様子を調べることで多様体の性質を数値的に表現した共役値、焦値と呼ばれるものが得られた。

2　実超曲面上の佐々木磁場

ケーラー多様体 $\widetilde{M}$ とその複素構造 J、リーマン計量 $\langle\ ,\ \rangle$ をとる。$\widetilde{M}$ の実超曲面 M には $\widetilde{M}$ 上の複素構造 J から誘導される概接触計量構造 $(\phi, \xi, \eta, \langle\ ,\ \rangle)$ が入る。M 上の単位法線ベクトル $\mathcal{N}$ に対して、ベクトル場 ξ は $\xi = -J\mathcal{N}$ で定義される。１形式 η は $\eta(v) = \langle v, \xi\rangle$ で与えられ、$(1,1)-$テンソル場 ϕ は $\phi v = Jv - \eta(v)\mathcal{N}$ で定義され、$\langle\ ,\ \rangle$ は誘導計量である。ξ を特性ベクトル場、ϕ を特性テンソル場という。η 全臍的実超曲面は２つの主曲率を持ち、形作用素 A_M は、特性ベクトル場 ξ、ξ に直交する接ベクトル v に対して、$A_M\xi = \delta_M\xi$, $A_Mv = \lambda_Mv$ を満たす。 δ_M, λ_M で表

* E-mail:y.aoki.850@stn.nitech.ac.jp

される。ここで主曲率 δ_M, λ_M は、それぞれ次のようになる ([1])。

	$G(r)\subset\mathbb{C}P^n(c)$	$G(r)\subset\mathbb{C}H^n(c)$	HS	$T(r)$
δ_M	$\sqrt{c}\cot\sqrt{c}\,r$	$\sqrt{\lvert c\rvert}\coth\sqrt{\lvert c\rvert}\,r$	$\sqrt{\lvert c\rvert}$	$\sqrt{\lvert c\rvert}\coth\sqrt{\lvert c\rvert}\,r$
λ_M	$\frac{\sqrt{c}}{2}\cot\frac{\sqrt{c}}{2}r$	$\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}\coth\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}r$	$\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}$	$\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}\tanh\frac{\sqrt{\lvert c\rvert}}{2}r$

リーマン多様体上の閉 2 形式を磁場という。このような閉 2 形式は 3 次元ユークリッド空間上の静磁場の一般化になっている。η 全臍的実超曲面 M 上で任意の点 $p\in M$ に対する任意の接ベクトル $v,w\in T_pM$ を取り、閉 2 形式 $\mathbb{F}_\phi$ を $\mathbb{F}_\phi(v,w)=\langle v,\phi w\rangle$ で定義する ([2])。これの定数倍 $\mathbb{F}_\kappa=\kappa\mathbb{F}_\phi$ $(\kappa\in\mathbb{R})$ を佐々木磁場という。弧長で径数付けられた曲線 γ が微分方程式 $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=\kappa\phi\dot\gamma$ を満たすとき γ を $\mathbb{F}_\kappa$ の軌道と呼ぶ。特に $\kappa=0$ のとき磁場による影響が全くないので軌道は測地線になる。よって軌道は測地線の自然な一般化になっている。η 全臍的実超曲面 $M(\subset\widetilde{M})$ 上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_\kappa$ の軌道 γ に対して $\rho_\gamma=\langle\dot\gamma,\xi\rangle$ と定め、これを γ の構造捩率という。$M,\widetilde{M}$ 上のリーマン接続をそれぞれ $\nabla,\widetilde{\nabla}$ としたとき、M に接する任意のベクトル場 X, Y に対し Gauss の公式 $\widetilde{\nabla}_XY=\nabla_XY+\langle A_MX,Y\rangle\mathcal{N}$ と Weingarten の公式 $\widetilde{\nabla}_X\mathcal{N}=-A_MX$ が成り立つので、これを用いて構造捩率の微分を計算すると、

$$\frac{d}{dt}\rho_\gamma=\langle\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,\xi\rangle+\langle\dot\gamma,\phi A_M\dot\gamma\rangle=\langle\dot\gamma,\phi A_M\dot\gamma\rangle$$

が得られる。ここで、A_M は対称で ϕ は歪対称なので

$$\frac{d}{dt}\rho_\gamma=\left\langle\dot\gamma,\frac{1}{2}(\phi A_M-A_M\phi)\dot\gamma\right\rangle$$

となる。η 全臍的実超曲面上では A_M と ϕ は、主曲率ベクトルの様子から同時に対角化可能、つまり $A_M\phi=\phi A_M$ となるので構造捩率 ρ_γ は γ に沿って一定である。佐々木磁場の軌道 γ について $\|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\|=|\kappa|\|\phi\dot\gamma\|=|\kappa|\sqrt{1-\rho_\gamma^2}$ となるので、軌道に働くローレンツ力は構造捩率により変化する。

3 磁性ヤコビ場

η 全臍的実超曲面 M 上の $\mathbb{F}_\kappa$ 軌道 γ に沿ったベクトル場 Y が

$$\begin{cases}\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y+R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma=\kappa(\nabla_Y\phi)\dot\gamma+\kappa\phi\nabla_{\dot\gamma}Y,\\ \langle\nabla_{\dot\gamma}Y,\dot\gamma\rangle=0.\end{cases}\tag{J}$$

を満たすとき Y を磁性ヤコビ場と呼ぶ。ここで R は M の曲率テンソルを表す。軌道 γ に対して、滑らかな写像 $\alpha_\gamma(s,t):(-\epsilon,\epsilon)\times\mathbb{R}\to M$ の任意の s について、曲線 $t\mapsto\alpha_\gamma(s,t)$ が $\mathbb{F}_\kappa$ の軌道になっているとき α_γ を軌道 $\gamma=\alpha_\gamma(0,t)$ の変分と呼ぶ。任意の磁性ヤコビ場は軌道の変分から得られる。実際、軌道の変分 $\alpha_\gamma(s,t)$ は任意の s において $\mathbb{F}_\kappa$-軌道になるので

$$\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}}\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}=\kappa\phi\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}$$

となる。両辺を s で偏微分すると、

$$\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}}\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}=\kappa(\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s}}\phi)\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}+\kappa\phi\Big(\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}}\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s}\Big)$$

となる。一方で、曲率テンソルの定義から

$$\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}}\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}=\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}}\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}}\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s}+R(\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t},\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s})\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}$$

となり、$\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s}(s,t)\Big|_{s=0}=Y$ とし、$s=0$ のとき (J) の 1 番目の式が得られる。(J) の 2 番目の式は軌道が単位スピードであることから得られる。ここで、磁性ヤコビ場 Y から軌道に沿った成分を除外した $Y^\sharp=Y-\langle Y,\dot\gamma\rangle$ を定義しておく。

4 Legendre 軌道

η 全臍的実超曲面 M 上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_\kappa$-軌道 γ の構造捩率 ρ_γ が 0 のとき、γ を Legendre 軌道という。また、Legendre 軌道に沿った Legendre 軌道の変分による磁性ヤコビ場を Legendre 磁性ヤコビ場という。構造捩率が ±1 のとき、$\phi(\dot\gamma)=0$ となることから γ は測地線になる。一方で、構造捩率が 0 つまり Legendre な場合は $\phi\dot\gamma=J\dot\gamma$ となりケーラーの場合と対応していると考えられる。今回は、このような軌道に対して、共役値、焦値と呼ばれる多様体の性質を数値的に表現したものを求めた。

定義 4.1　初期条件 $Y(0)=0$ のもと非自明な Legendre 磁性ヤコビ場 Y で $Y^\sharp(t_c)=0$ となるものが存在するとき、$\gamma(t_c)$ を γ に沿った Legendre 共役点といい、t_c を γ に沿った $\gamma(0)$ の Legendre 共役値という。

特に、最小の正の Legendre 共役値を γ に沿った $\gamma(0)$ の第 1 Legendre 共役値といい、$Lc_\gamma(\kappa;c)$ で表す。また γ に沿った Legendre 共役値が存在しないとき、$Lc_\gamma(\kappa;c)=\infty$ とする。η 全臍的実超曲面 M 上では、2 つの $\mathbb{F}_\kappa$-軌道 γ_1, γ_2 は合同である ([1])。すなわち、M の等長写像 φ により、$\gamma_2=\varphi\circ\gamma_1$ とすることができる。このため、第 1 Legendre 共役値は M と $\mathbb{F}_\kappa$ により定まる。$M\subset\mathbb{C}M^n(c)$ であることを明確にするために、ここではこの値を $Lc\,(\kappa;M)$ と表示する、。

定理 4.1　正則断面曲率 c の複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 内の η 全臍的実超曲面上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_\kappa$ の Legendre 軌道 γ をとる。このとき、第 1 Legendre 共役値 $Lc\,(\kappa;M)$ は次のようになる。

$$Lc\,(\kappa;M)=\begin{cases}2\pi/\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2} & (\kappa^2+c+4\lambda_M^2>0\text{ のとき}),\\ \infty & (\kappa^2+c+4\lambda_M^2\le0\text{ のとき}).\end{cases}$$

Remark 1　2 次元複素空間 $\mathbb{C}^2$ 内の 3 次元標準球 S^3 上の測地線の共役値は π であることがよく知られている。上記の Legendre 共役値に対して、$\kappa\to0$, $c\to0$ とすると π となる。

定義 4.2　ケーラー多様体 $\widetilde{M}$ 上の複素構造 J に対して、閉 2 形式 $\mathbb{B}_J$ を $\mathbb{B}_J(v,w)=\langle v,Jw\rangle$ で定義し、これの定数倍 $\mathbb{B}_\kappa=\kappa\mathbb{B}_J$ $(\kappa\in\mathbb{R})$ をケーラー磁場という。

Remark 2　複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 上のケーラー磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ の軌道の共役値 $c\,(\kappa;c)$ は $c\,(\kappa;c)=\pi/\sqrt{\kappa^2+c}$ で与えられる。

定義 4.3　磁性ヤコビ場 Y を $Y=f_Y\dot\gamma+g_Y\phi\dot\gamma+h_Y\xi+Y^\perp$ と表すと、定数 $a,b\in\mathbb{R}$ に対して初期条件 $Y(0)=a\phi\dot\gamma(0)+bY^\perp$, $\nabla_{\dot\gamma}Y(0)=\lambda_M\xi(0)+\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp(0)$ のもと非自明な Legendre 磁性ヤコ

ビ場 Y で $Y^\sharp(t_f)=0$ となるものが存在するとき、$\gamma(t_f)$ を γ に沿った $\gamma(0)$ の Legendre 焦点といい、t_f を γ に沿った $\gamma(0)$ の Legendre 焦値という。

特に、最小の正の Legendre 焦値を γ に沿った $\gamma(0)$ の第 1 Legendre 焦値といい、$Lf_\gamma(\kappa;c)$ で表す。また γ に沿った Legendre 焦値が存在しないとき、$Lf_\gamma(\kappa;c)=\infty$ とする。η 全臍的実超曲面 M 上では、2 つの $\mathbb{F}_\kappa$-軌道 γ_1, γ_2 は合同であるため、ここではこの値を $Lf(\kappa;M)$ と表すことにする。

定理 4.2　正則断面曲率 c の複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 内の η 全臍的実超曲面上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_\kappa$ の軌道 γ をとる。このとき、第 1 Legendre 焦値 $Lf(\kappa;M)$ は次のようになる。

$$Lf(\kappa;M)=\begin{cases}\pi/\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2} & (\kappa^2+c+4\lambda_M^2>0 \text{ のとき}),\\ \infty & (\kappa^2+c+4\lambda_M^2\le 0 \text{ のとき}).\end{cases}$$

Remark 3　2 次元複素空間 $\mathbb{C}^2$ 内の 3 次元標準球 S^3 上の測地線の焦値は $\pi/2$ であることがよく知られている。上記の Legendre 焦値に対して、$\kappa\to 0, c\to 0$ とすると $\pi/2$ となる。

Remark 4　複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 上のケーラー磁場 $\mathbb{B}_\kappa$ の軌道の焦値 $f(\kappa;c)$ は $f(\kappa;c)=\pi/2\sqrt{\kappa^2+c}$ で与えられる。

以下にこの定理を求めるための道筋を示す。まず、磁性ヤコビ場 Y を $Y=f_Y\dot\gamma+g_Y\phi\dot\gamma+h_Y\xi+Y^\perp$ と表し、磁性ヤコビ場の方程式を解く。構造テンソル ϕ の微分は、任意のベクトル場 X,Y に対して

$$(\nabla_X\phi)Y=\langle Y,\xi\rangle A_MY-\langle A_MX,Y\rangle\xi$$

となることが知られているので、

$$\nabla_{\dot\gamma}Y=(f_Y'-\kappa g_Y)\dot\gamma+(\kappa f_Y+g_Y'+h_Y\lambda_M)\phi\dot\gamma+(h_Y'-g_Y\lambda_M)\xi+\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp$$

方程式 (J) の 2 番目の式より、$\langle\nabla_{\dot\gamma}Y,\dot\gamma\rangle=0$ なので、$f_Y'-\kappa g_Y=0$ となる。また、Legendre 軌道の条件 $\langle\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t},\xi\rangle=0$ より、

$$\langle\nabla_{\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t}}\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s},\xi\rangle+\langle\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial t},\phi A_M\frac{\partial\alpha_\gamma}{\partial s}\rangle=0$$

となり、$s=0$ のとき

$$\langle\nabla_{\dot\gamma}Y,\xi\rangle+\langle\dot\gamma,\phi A_MY\rangle=0$$

となるので、$h_Y'-2g_Y\lambda_M=0$ が得られる。よって、

$$\nabla_{\dot\gamma}Y=(\kappa f_Y+g_Y'+h_Y\lambda_M)\phi\dot\gamma+g_Y\lambda_M\xi+\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp$$

となるので、さらに t で偏微分すると

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y=&-\kappa(\kappa f_Y+g_Y'+h_Y\lambda_M)\dot\gamma+(\kappa f_Y'+g_Y''+h_Y'\lambda_M+g_Y\lambda_M^2)\phi\dot\gamma\\&+\big(g_Y'\lambda_M-\lambda(\kappa f_Y+g_Y'+h_Y\lambda_M)\big)\xi+\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp\end{aligned}$$

が得られる。また曲率テンソルに関して次のことが知られている。

補題 4.1（[4]） 正則断面曲率 c の複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 内の実超曲面 M 上のベクトル場 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して、曲率テンソル $R(X,Y)Z$ は次で与えられる。

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z = (c/4)\big(&\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y + \langle \phi Y,Z\rangle \phi X - \langle \phi X,Z\rangle \phi Y - 2\langle \phi X,Y\rangle \phi Z\big) \\ &+ \langle A_M Y,Z\rangle A_M X - \langle A_M X,Z\rangle A_M Y \end{aligned}$$

これにより、$Y = f_Y\dot\gamma + g_Y\phi\dot\gamma + h_Y\xi + Y^\perp$ と表すと、η 全臍的実超曲面上の曲率テンソル $R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma$ は次のようになる。

$$R(Y,\dot\gamma)\dot\gamma = g_Y(c+\lambda_M^2)\phi\dot\gamma + h_Y\Big(\frac{c}{4}+\delta_M\lambda_M\Big)\xi + \Big(\frac{c}{4}+\lambda_M^2\Big)Y^\perp$$

一方で、$\kappa(\nabla_Y\phi)\dot\gamma = -\kappa f_Y\lambda_M\xi$ となることがわかる。よって、

$$\begin{aligned} &\big(g_Y'' + g_Y(\kappa^2+c+4\lambda_M^2)\big)\phi\dot\gamma + h_Y\big(\frac{c}{4}+\lambda_M(\delta_M-\lambda_M)\big)\xi + \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp - \kappa\phi\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp + (\frac{c}{4}+\lambda_M^2)Y^\perp \\ &= \big(g_Y'' + g_Y(\kappa^2+c+4\lambda_M^2)\big)\phi\dot\gamma + \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp - \kappa\phi\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp + (\frac{c}{4}+\lambda_M^2)Y^\perp \\ &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。以上より、解くべき微分方程式が得られる。

命題 4.1 複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 内の η 全臍的実超曲面 M 上の佐々木磁場 $\mathbb{F}_\kappa$ の Legendre 軌道 γ に沿った Legendre 磁性ヤコビ場 Y を $Y = f_Y\dot\gamma + g_Y\phi\dot\gamma + h_Y\xi + Y^\perp$ と表すと、Y は以下の微分方程式を満たす。

$$\begin{cases} f_Y' = \kappa g_Y, \\ g_Y'' + g_Y(\kappa^2+c+4\lambda_M^2) = 0, \\ h_Y' = 2\lambda_M g_Y, \\ \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp - \kappa\phi\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp + (\frac{c}{4}+\lambda_M^2)Y^\perp = 0. \end{cases}$$

これを $\kappa^2+c+4\lambda_M^2$ の正負で場合分けし、解くことにより、次が得られる。

(i) $\kappa^2+c+4\lambda_M^2 > 0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t) = \dfrac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}}\left\{a_1\sin\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t - a_2\cos\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t\right\} + a_3, \\ g_Y(t) = a_1\cos\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t + a_2\sin\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t, \\ h_Y(t) = \dfrac{2\lambda_M}{\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}}\left\{a_1\sin\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t - a_2\cos\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t\right\} + a_4, \\ Y^\perp(t) = e^{\kappa\sqrt{-1}t/2}(b_1\cos\dfrac{1}{2}\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t + b_2\sin\dfrac{1}{2}\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t)\,E. \end{cases}$$

(ii) $\kappa^2+c+4\lambda_M^2=0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t)=\kappa(\dfrac{a_1}{2}t^2+a_2t+a_3),\\ g_Y(t)=a_1t+a_2,\\ h_Y(t)=2\lambda_M(\dfrac{a_1}{2}t^2+a_2t+a_4),\\ Y^\perp(t)=e^{\kappa\sqrt{-1}t/2}(b_1+b_2t)\ E. \end{cases}$$

(iii) $\kappa^2+c+4\lambda_M^2<0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t)=\dfrac{\kappa}{\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}}\left\{a_1\sinh\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}\ t-a_2\cosh\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}\ t\right\}+a_3,\\ g_Y(t)=a_1\cosh\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}\ t+a_2\sinh\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}\ t,\\ h_Y(t)=\dfrac{2\lambda_M}{\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}}\left\{a_1\sinh\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}\ t-a_2\cosh\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}\ t\right\}+a_4,\\ Y^\perp(t)=e^{\kappa\sqrt{-1}t/2}(b_1\cosh\dfrac{1}{2}\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}\ t+b_2\sinh\dfrac{1}{2}\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}\ t)\ E. \end{cases}$$

ここで、$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ b_1,\ b_2\in\mathbb{R}$ は定数であり、E は $\dot\gamma(0),\ \phi\dot\gamma(0),\ \xi(0),\ \mathcal{N}_{\gamma(0)}$ 全てに直交する平行ベクトル場。

ここに、初期条件 $Y(0)=0$ を適用すると、

(i) $\kappa^2+c+4\lambda_M^2>0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t)=a\dfrac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}}(1-\cos\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\ t),\\ g_Y(t)=a\sin\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\ t,\\ h_Y(t)=a\dfrac{2\lambda_M}{\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}}(1-\cos\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\ t),\\ Y^\perp(t)=b\ e^{\kappa\sqrt{-1}t/2}\sin\dfrac{1}{2}\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\ t)\ E. \end{cases}$$

(ii) $\kappa^2+c+4\lambda_M^2=0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t)=\dfrac{a}{2}\kappa t^2,\\ g_Y(t)=at,\\ h_Y(t)=a\lambda_Mt^2,\\ Y^\perp(t)=b\ e^{\kappa\sqrt{-1}t/2}t\ E. \end{cases}$$

(iii) $\kappa^2+c+4\lambda_M^2<0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t)=a\dfrac{\kappa}{\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}}\left\{\cosh\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}\,t-1\right\},\\ g_Y(t)=a\sinh\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}\,t,\\ h_Y(t)=a\dfrac{2\lambda_M}{\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}}\left\{\cosh\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}\,t-1\right\},\\ Y^\perp(t)=b\,e^{\kappa\sqrt{-1}t/2}\sinh\dfrac{1}{2}\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}\,t)\,E. \end{cases}$$

ここで、$a,\ b\in\mathbb{R}$ は定数。

が得られ、共役値が求まる。一方で、初期条件 $Y(0)=a\phi\dot\gamma(0)+bY^\perp(0),\ \nabla_{\dot\gamma}Y(0)=\lambda_M\xi(0)+\nabla_{\dot\gamma}Y^\perp(0)$ を適用すると、

(i) $\kappa^2+c+4\lambda_M^2>0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t)=a\dfrac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}}\sin\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t,\\ g_Y(t)=a\cos\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t,\\ h_Y(t)=a\dfrac{2\lambda_M}{\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}}\sin\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t,\\ Y^\perp(t)=b\,e^{\kappa\sqrt{-1}t/2}\cos\dfrac{1}{2}\sqrt{\kappa^2+c+4\lambda_M^2}\,t)\,E. \end{cases}$$

(ii) $\kappa^2+c+4\lambda_M^2=0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t)=a\kappa t,\\ g_Y(t)=a,\\ h_Y(t)=2a\lambda_M t,\\ Y^\perp(t)=b\,e^{\kappa\sqrt{-1}t/2}\,E. \end{cases}$$

(iii) $\kappa^2+c+4\lambda_M^2<0$ のとき

$$\begin{cases} f_Y(t)=a\dfrac{\kappa}{\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}}\sinh\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}\,t,\\ g_Y(t)=a\cosh\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}\,t,\\ h_Y(t)=a\dfrac{2\lambda_M}{\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}}\sinh\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}\,t,\\ Y^\perp(t)=b\,e^{\kappa\sqrt{-1}t/2}\cosh\dfrac{1}{2}\sqrt{|c|-\kappa^2-4\lambda_M^2}\,t)\,E. \end{cases}$$

ここで、$a,\ b\in\mathbb{R}$ は定数。

が得られ、焦値が求まる。

Remark 5（[4]） 正則断面曲率 c の複素空間形 $\mathbb{C}M^n(c)$ 内の η 全臍的実超曲面の ϕ -断面曲率 $K(v,\phi v)$ は次で与えられる。

$$K(v,\phi v) = c + \lambda_M^2$$

Remark 6（[1]） 複素双曲空間 $\mathbb{C}H^n(c)$ 内の $\mathbb{C}H^{n-1}(c)$ を芯とする半径 r の管 $T(r)$ 上の $\mathbb{F}_\kappa$ 軌道 γ について、互いに素な正の整数 p,q $(p>q)$ に対して、磁場 κ が以下を満たすとき γ は閉じている。

$$\frac{2}{\sqrt{|c|}}|\kappa|\cosh\sqrt{|c|}r/2 = \frac{p+q}{pq}$$

また、軌道の長さは $4\pi\sqrt{pq/|c|}\cosh\left(\sqrt{|c|}r/2\right)$ または $2\pi(p+q)/|\kappa|$ となる。今回の結果により、この性質に関わらず共役値、焦値が決まっていることがわかる。

参考文献

[1] T. Adachi, *Trajectories on geodesic spheres in a non-flat complex spaceform*, J. Geom. **90** (2008), 1–29.

[2] T. Bao and T. Adachi, *Circular trajectories on real hypersurfaces in a nonflat complex space form*, J. Geom. **96** (2009), 41–55.

[3] J. Inoguchi and M.I. Munteanu, *Magnetic Jacobi fields in Sasakian space forms*, Mediter. J. Math. **20** (2023), 20–29.

[4] T. Kajiwara and S. Maeda, *Sectional curvetures of geodesic spheres in a complex hyperbolic space*, Kodai Math. J. **38** (2015), 604–619.

カンドルのオイラー標数

大阪公立大学　大学院理学研究科　数学専攻
甲斐涼哉 (Ryoya KAI) *

概要

結び目理論で不変量として導入されたカンドルは，対称空間の一般化と見なすことができる．近年では対称空間論の手法をカンドルに応用する研究が行われている．対称空間のオイラー標数は，点対称から定まる自然な群作用を用いて計算できる．そこで，これを一般化してカンドルにオイラー標数を定義する．また，位相空間のオイラー標数と似た性質をカンドルのオイラー標数が持つことを紹介する．本研究は田丸博士氏 (大阪公立大学) との共同研究に基づく．

1　導入

位相空間のオイラー標数は重要な位相不変量である．その定義はホモロジー群を通して Betti 数の交代和として与えられ，セル分割の各次元のセルの数の交代和でも計算できる．一方で，Hopf と Samelson[1] は，コンパクト Lie 群の等質空間のオイラー標数は，極大トーラスの作用の固定点の数と一致するを示した．特に，各点に点対称が定義された空間である対称空間の場合には，その点対称から自然に導かれる群作用を用いて，オイラー標数が計算できる．

カンドルは結び目理論で不変量として導入された代数系で，群の共役演算を抽象化した公理を持つ．対称空間の点対称はカンドルの公理を満たし，したがって対称空間はカンドルとなる．言い換えると，カンドルは対称空間の位相を忘れて，つまり，対称空間を離散化して点対称の性質のみに着目した代数系と言える．

本研究では，対称空間論の視点からカンドルにオイラー標数を定義する．つまり，カンドル構造から自然に群作用が定まるが，その作用を用いてカンドルオイラー標数の定義を与える．特に，連結コンパクト Riemann 対称空間の場合には，今回定義するカンドルオイラー標数は位相空間としてのオイラー標数と一致する．また，いくつかのカンドルに対するオイラー標数の計算結果も与え，さらに，位相空間のオイラー標数と似たいくつかの性質を見る．

本稿は [4] に基づく．

2　準備

まず，カンドル [3] の定義を与える．カンドル構造を二項演算で与えることも多いが，ここでは対称空間の考え方に基づいて，各点に写像を与えることで定義する．集合 X 上の写像全体の集合を

* E-mail:sw23889b@st.omu.ac.jp

$\mathrm{Map}(X,X)$ と書く．

定義 2.1 ([3])**.** 空でない集合 X と写像 $s : X \to \mathrm{Map}(X,X)$ ($s_x := s(x)$ と書く) の組 (X,s) が次の 3 条件を満たすとき**カンドル**という：

1. 任意の $x \in X$ に対して，$s_x(x) = x$,
2. 任意の $x \in X$ に対して，$s_x : X \to X$ は全単射,
3. 任意の $x, y \in X$ に対して，$s_y \circ s_x = s_{s_y(x)} \circ s_y$.

この定義は，集合 X 上の二項演算 $\triangleleft$ を，$x \triangleleft y := s_y(x)$ で定義すると，二項演算による (右分配則を仮定した) カンドルの定義と一致する．対称空間 X の点 x における点対称を s_x とすると，写像 $s : X \to \mathrm{Map}(X,X)$ によって X 上のカンドル構造が定まる [5]．以下，対称空間とは限らないカンドルに対しても，写像 $s_x : X \to X$ を x における**点対称**と呼ぶ．カンドル $(X, s^X), (Y, s^Y)$ に対して，写像 $f : X \to Y$ が任意の $x \in X$ に対して，$f \circ s_x = s_{f(x)} \circ f$ を満たすとき，f を**カンドル準同型**という．また，全単射なカンドル準同型を**カンドル同型**といい，カンドル同型があるとき，二つのカンドルは**同型**であるという．

カンドル X に対して，X 上のカンドル同型全体の集合 $\mathrm{Aut}(X)$ は，写像の合成によって群となり，X の**自己同型群**という．自己同型群 $\mathrm{Aut}(X)$ が推移的に作用するとき，X は**等質**であるという．特に，カンドルの公理から，点対称はカンドル同型である．カンドル X の点対称たち $\{s_x\}$ が生成する $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群 $\mathrm{Inn}(X)$ を**内部自己同型群**という．内部自己同型 $\mathrm{Inn}(X)$ が推移的に作用するとき，X は**代数的連結**であるという．代数的連結なカンドルは等質である．次の群作用を用いてカンドルにオイラー標数を定義する．

定義 2.2. カンドル X に対して，$\{s_x \circ s_y \mid x, y \in X\}$ が生成する $\mathrm{Aut}(X)$ の部分群 $\mathrm{Dis}(X)$ を *displacement* **群**という．

displacement 群は transvection group などとも呼ばれ，様々な良い性質を持つことが知られている．詳細は [2] などを参照せよ．displacement 群の作用を用いて，カンドルのオイラー標数を次で定義する．

定義 2.3. カンドル X の**カンドルオイラー標数** $\chi^{\mathrm{Qdle}}(X)$ を次で定義する：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X) := \inf\{\#\mathrm{Fix}(g,X) \mid g \in \mathrm{Dis}(X)\}.$$

ここで，$\#A$ は集合 A の濃度，$\mathrm{Fix}(g,X)$ は g の作用の X における固定点集合を表す．

3 対称空間のカンドルオイラー標数

まず典型的な具体例として n 次元球面を考える．

例 3.1. 球面 $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x|^2 = 1\}$ は次で定義される点対称 s によって対称空間となる:

$$s_p(x) := 2\langle x, p\rangle p - x,$$

ここで，$\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準内積である．このとき，内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(S^n)$ と displacement 群 $\mathrm{Dis}(X)$ は以下の通りである：

$$\mathrm{Inn}(S^n) = \begin{cases} \mathrm{SO}(n+1) & n\text{: 偶数} \\ \mathrm{O}(n+1) & n\text{: 奇数} \end{cases}, \ \mathrm{Dis}(S^n) = \mathrm{SO}(n+1).$$

ここで，$\mathrm{Dis}(S^n)$ の元 g は，次元に応じて以下の形の元に $\mathrm{Dis}(X)$ 内で共役である：

$$g \sim_{\text{共役}} \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & R_{\theta_1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{\theta_{\frac{n}{2}}} \end{pmatrix} & n\text{: 偶数}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (R_\theta \in \mathrm{SO}(2)). \\ \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & R_{\theta_{\frac{n+1}{2}}} \end{pmatrix} & n\text{: 奇数}, \end{cases}$$

一般的な θ_i をとると，S^n 上の固定点の数は，n が偶数のときは 2 個，n が奇数のときは固定点が 0 個となることがわかる．固定点の数は共役で不変なので，g の固定点の数も同じである．よって，球面のカンドルオイラー標数は位相空間としてのオイラー標数と等しい．

この例を一般化することで，コンパクト Riemann 対称空間のカンドルオイラー標数は，位相空間としてのオイラー標数に一致することがわかる．その鍵となるのは次の Hopf と Samelson の結果 [1] である．位相空間 X のオイラー標数を $\chi^{\mathrm{Top}}(X)$ と書く．

命題 3.2 ([1], [6])**.** M をコンパクト Lie 群 G の等質空間とする．また，T を G の極大トーラスとして，その生成元 t_0 を取る．このとき，次が成り立つ：

$$\chi^{\mathrm{Top}}(M) = \#\mathrm{Fix}(T, M) = \#\mathrm{Fix}(t_0, M).$$

χ^{Qdle} をオイラー標数と呼ぶ理由は次の定理が成り立つからである．

定理 3.3. 連結コンパクト Riemann 対称空間 X に対して，

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X) = \chi^{\mathrm{Top}}(X).$$

定理 3.3の証明の概略は以下の通りである．

1. 連結コンパクト Riemann 対称空間 X の $\mathrm{Dis}(X)$ は連結コンパクト Lie 群であることを示す．
2. 連結 Riemann 対称空間 X は $\mathrm{Dis}(X)$ の等質空間，つまり X はカンドルとして代数的連結であることを示す．
3. 命題 3.2を適用する．

4　カンドルオイラー標数の例

この節では，具体的なカンドルに対する計算例を紹介する．

例 4.1. X を空でない集合する．X 上の点対称を $s_x := \mathrm{id}$ で定義する．このとき，(X, s) を**自明カンドル**といい，カンドルオイラー標数は X の濃度 $\#X$ と一致する．

例 4.2. 自然数 $n > 2$ に対して，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の点対称を $s_x(y) := 2x - y$ と定義し，$R_n := (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, s)$ を**二面体カンドル**という．R_n の各点を正 n 角形の頂点とみなすと，円周 S^1 の離散部分カンドルとみなせる．R_n のカンドルオイラー標数は，円周の位相空間としてのオイラー標数と同じく 0 となる．

例 4.3. 群 G 上の点対称を $s_x(y) := xy^{-1}x$ で定義し，$\mathrm{Core}(G) := (G, s)$ を G 上の**コアカンドル**という．一般に，コアカンドルとしての点対称によって，Lie 群は対称空間とみなされる．$\mathrm{Core}(G)$ が非自明カンドルのとき，つまり，G が $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ のいくつかの直積と同型でないとき，カンドルオイラー標数は非自明な連結コンパクト Lie 群のオイラー標数と同じく 0 になる．

例 4.4. 群 G と群の自己同型写像 $\sigma : G \to G$ に対して，G 上の点対称を $s_x(y) := \sigma(yx^{-1})x$ で定義し，$\mathrm{GAlex}(G, \sigma) = (G, \sigma)$ を**一般化 *Alexander* カンドル**という．$\mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ が非自明，つまり σ が恒等写像でないとき，カンドルオイラー標数は 0 となる．

一般化 Alexander カンドルは等質カンドルである．また，任意の等質カンドルは，ある一般化 Alexander カンドルからの全射カンドル準同型を持つ．カンドルのオイラー標数は，非自明なカンドルが一般化 Alexander カンドルであるかの判定条件を与えている．

例 4.5. n 次元球面 S^n の離散部分カンドル $DS^n := \{\pm e_i \mid i = 1, \ldots, n+1\}$ を**離散 n-球面**とよぶ．ここで，$\{e_i\}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準基底である．離散 n-球面のカンドルオイラー標数は

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(DS^n) = \chi^{\mathrm{Top}}(S^n) = \begin{cases} 2 & \text{if } n\text{: 偶数,} \\ 0 & \text{if } n\text{: 奇数.} \end{cases}$$

5　カンドルオイラー標数の性質

この節では，カンドルオイラー標数の一般的性質として，位相空間のオイラー標数に似た性質を紹介する．

$X_1 = (X_1, s^1), X_2 = (X_2, s^2)$ をカンドルとする．このとき，直積集合 $X_1 \times X_2$ 上に

$$s_{(x_1,x_2)}(y_1, y_2) := (s^1_{x_1}(y_1), s^2_{x_2}(y_2))$$

によってカンドル構造が定まり，$X_1 \times X_2 = (X_1 \times X_2, s)$ を X_1 と X_2 の**直積カンドル**という．キネットの公式から，CW 複体の直積のオイラー標数は，それぞれのオイラー標数の積となることが知られている．カンドルのオイラー標数についても同様に次が成り立つ．

定理 5.1. カンドル X_1, X_2 に対して次が成り立つ：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1 \times X_2) = \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1) \times \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_2).$$

また，直和集合 $X_1 \sqcup X_2$ 上に

$$s_x(y) := \begin{cases} y & \text{if } \{x, y\} \not\subset X_i, \\ s^i_x(y) & \text{if } \{x, y\} \subset X_i. \end{cases}$$

によってカンドル構造が定まり，$X_1 \sqcup^{\mathrm{free}} X_2 = (X_1 \sqcup X_2, s)$ を X_1 と X_2 の *interaction-free union* という．位相空間の直和のオイラー標数は，それぞれのオイラー標数の和になることが知られている．interaction-free union のカンドルオイラー標数は，オイラー標数の和によって上から評価できる．

定理 5.2. カンドル X_1, X_2 に対して次が成り立つ：

$$\chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1 \sqcup^{\mathrm{free}} X_2) \leq \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_1) + \chi^{\mathrm{Qdle}}(X_2).$$

定理 5.2の不等式で，等号が成り立たない例を $\mathrm{Inn}(X)$ がアーベル群であるような等質カンドルで構成することができる．

参考文献

[1] Hopf, H., Samelson, H.: Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen. Commentarii Mathematici Helvetici **13**, 240–251 (1941).

[2] Hulpke, A., Stanovský, D., Vojtěchovský, P.: Connected quandles and transitive groups. Journal of Pure and Applied Algebra **220**(2), 735–758 (2016).

[3] Joyce, D.: A classifying invariant of knots, the knot quandle. Journal of Pure and Applied Algebra **23**(1), 37–65 (1982).

[4] Kai, R., Tamaru, H.: On the Euler characteristics for quandles (2024). arXiv.2411.08319

[5] Loos, O.: Symmetric Spaces. I: General Theory. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam (1969)

[6] Püttmann, T.: Homogeneity rank and atoms of actions. Annals of Global Analysis and Geometry **22**(4), 375–399 (2002).

カンドルの距離について

立命館大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻数理科学コース
岩本 光平 (Kohei IWAMOTO) *

概 要

カンドルは群における共役演算を一般化した代数系であり, 結び目理論や対称空間論の観点から盛んに研究されている. 一方, これらの研究では, カンドルに有限性を仮定する場合がほとんどであり, 無限カンドルを直接研究するための枠組みや手法は十分に確立されていない. 本講演では幾何学的群論のアイデアに基づき, 先行研究で用いられたものとは異なる新たな距離を無限カンドルに導入する. また, ユークリッド空間および双曲平面と擬等長同型なカンドルの例を紹介する. 本講演の内容は, 甲斐涼哉氏 (大阪公立大学), 児玉悠弥氏 (鹿児島大学) との共同研究に基づく.

1 導入

カンドルは, ジョイス [4] により, 結び目理論の研究を起源に導入された代数系である. カンドルの公理は, 結び目図式におけるライデマイスター変形と呼ばれる局所的な変形操作と対応している. 一方, 結び目理論だけでなく, カンドルはさまざまな数学の分野で活発に研究されている. たとえば, 各点において点対称をもつ対称空間がある. カンドルは対称空間の一般化として考えられており, 対称空間論の立場からカンドルが研究がされている [3, 9]. 一方, 結び目理論における不変量や彩色, あるいは対称空間に関するカンドルの研究では, 有限カンドルを扱う場合がほとんであり, 無限カンドルを直接研究するための理論的枠組みや手法はまだ十分に確立されていない.

幾何学的群論では, 群を幾何学的な視点から研究され, 無限群, 特に有限生成の無限群が主な研究対象である. 有限生成群とその有限生成集合の組からケイリーグラフが定義され, そのグラフ構造から有限生成群に距離が導かれる. この距離は一般には生成集合の取り方に依存するが, 等距離性をゆるめた概念である擬等長性を考えると, 生成系の取り方によらずに群から一意的に定まる. したがって, 幾何学的な対象である距離空間の擬等長不変量は, 代数的な対象である有限生成群の不変量とみなせる. 本研究では, この幾何学的群論の枠組みを用いて, 無限カンドルの研究手法を構築することを目標にしている.

本稿では, 無限カンドルに対して 2 種類の距離を扱う. ひとつは, ウィンカー [8] によって与えられた, カンドルの生成集合 A によって定まるグラフから導かれる距離 d_A^W である. 有限生成カンドルに対して, 有限生成集合 A の取り方によらずに, d_A^W の擬等長類が定まることを示した. さらに, カンドルに自然に作用する変位の群とその生成集合 U を用いて, 距離 d_U を定義する. また, 変位の群が有限生成であるカンドルに対して, 変位の群の有限生成集合 U によらず, この距離 d_U は擬等長同型のもとで, 一意的に定まる. 特に, 変位の群が有限生成であるような有限生成カンドルは, 2 つの距離 d_A^W と d_U から擬等長類がそれぞれ一意的に定まるが, 一般にはこれらの距離 d_A^W と d_U は擬等長同型にならない例を与える. さらに, 変位の群から定まるカンドルの距離に関して, ユークリッド空間や双曲平面と擬等長同型になるカンドルの例を具体的に与える.

*E-mail:ra0061ir@ed.ritsumei.ac.jp

2 準備

まず主結果を述べるためにカンドルと幾何学的群論についてこの節で紹介する.

2.1 カンドル

まずカンドルについて紹介する. 詳細は [4, 5] を参照していただきたい.

定義 2.1 ([4])**.** 空でない集合 Q 上の二項演算 $\triangleleft : Q \times Q \to Q$ が次を満たすとき，$(Q, \triangleleft)$ を**カンドル**という.

1. 任意の $x \in Q$ に対して $x \triangleleft x = x$,
2. 任意の $y \in Q$ に対して, $s_y(x) = x \triangleleft y$ で定義される写像 $s_y : Q \to Q$ は全単射,
3. 任意の $x, y, z \in Q$ に対して, $(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$.

また, $(Q, \triangleleft)$ の演算が明示的なときには Q とあらわす. 全単射 $s_y : Q \to Q$ を y における点対称という. 本稿では，$x, y, z \in Q$ に対して,

$$x \triangleleft^{-1} y := s_y^{-1}(x), \quad x \triangleleft y \triangleleft z := (x \triangleleft y) \triangleleft z.$$

とかく. カンドル $(Q, \triangleleft)$ の部分集合 Q' に関して, 演算 $\triangleleft$ とその逆演算 $\triangleleft^{-1}$ の両方の下で Q' が閉じているとき, Q' を Q の**部分カンドル**と呼ぶ.

定義 2.2. $(Q, \triangleleft)$, $(Q', \triangleleft')$ をカンドルとする. 写像 $f : Q \to Q'$ が，任意の $x, y \in Q$ に対して, $f(x \triangleleft y) = f(x) \triangleleft f(y)$ を満たすとき, **カンドル準同型写像**という. カンドル準同型写像 $f : Q \to Q'$ が全単射であるとき, 写像 f を**カンドル同型写像**という. Q と Q' の間にカンドル同型写像が存在するとき, Q と Q' は**カンドルとして同型**であるという.

Q の自己同型写像全体 $\mathrm{Aut}(Q)$ に $fg := g \circ f$ によって群構造を与え，この群を Q のカンドル自己同型群という. この群は $x \cdot f := f(x)$ によってカンドル Q に右から作用する.

定義 2.3. $\mathrm{Aut}(Q)$ が推移的に作用するカンドル $(Q, \triangleleft)$ を**等質カンドル**という.

各点の点対称 $s_y : Q \to Q$ は Q の自己同型写像となる.

定義 2.4. $(Q, \triangleleft)$ をカンドルとする. 点対称たち $\{s_y \in \mathrm{Aut}(Q) \mid y \in Q\}$ によって生成される $\mathrm{Aut}(Q)$ の部分群を**内部自己同型群**とよび, $\mathrm{Inn}(Q)$ と表す.

$\mathrm{Inn}(Q)$ の作用を用いてカンドルに連結性が定義される.

定義 2.5. $\mathrm{Inn}(Q, \triangleleft)$ の作用による $x \in Q$ の軌道を Q の x を含む**連結成分**という. 特に，$\mathrm{Inn}(Q)$ が推移的に作用しているカンドル $(Q, \triangleleft)$ を**連結カンドル**という.

次の群は，カンドル構造から一意的に定まり，さらにカンドル自身への作用は良い性質を持つ (詳細は，[2] を参照していただきたい).

定義 2.6 ([4, 2, 9])**.** カンドル $(Q, \triangleleft)$ に対して, 以下の群を**変位の群**という.

$$\mathrm{Dis}(Q) := \left\langle s_x \circ s_y^{-1} \mid x, y \in Q \right\rangle_{\mathrm{Grp}}.$$

つぎに, カンドルの具体例について紹介する.

例 2.7. 群 G は $x \triangleleft y := y^{-1}xy (x, y \in Q)$ によってカンドルとなる. これを G の**共役カンドル**といい, $\mathrm{Conj}(G)$ とかく.

例 2.8. $n \geq 2$ とする. このとき, $x, y \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に対して,

$$x \triangleleft y := 2y - x$$

で二項演算 $\triangleleft$ を定義すると, $R_n = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \triangleleft)$ はカンドルとなる. これを**二面体カンドル**という. また, $\mathbb{Z}$ 上に同様の演算を定めたとき, $R_\infty = (\mathbb{Z}, \triangleleft)$ を**無限二面体カンドル**という.

例 2.9. G を群とし, $\psi \in \mathrm{Aut}(G)$ を群 G の自己同型写像とする. このとき群 G 上の二項演算を $x \triangleleft y := \psi(xy^{-1})y$ と定める. このとき, $\mathrm{GAlex}(G, \psi) = (G, \triangleleft)$ はカンドルとなる. このカンドル $\mathrm{GAlex}(G, \psi)$ を**一般化アレクサンダーカンドル**という. 特に, G が可換群のとき $\mathrm{GAlex}(G, \psi)$ をアレクサンダーカンドルという.

2.2 擬等長同型と有限生成群のケイリーグラフ

次に, 距離空間の擬等長同型, および有限生成群のケイリーグラフについて紹介する. 幾何学的群論では, ケイリーグラフの擬等長不変量を用いて (有限生成無限) 群が研究される. 詳しくは [6, 7] を参照していただきたい.

頂点集合を V, 辺集合を E とする連結グラフ $\Gamma(V, E)$ について, 次のようにして距離が定義される.

定義 2.10. 連結グラフ $\Gamma(V, E)$ の各辺の長さを 1 とする. このとき, グラフの 2 つの頂点 $u, v \in V$ に対して, それらを結ぶ道の長さの最小値を $d(u, v)$ とすると, d は頂点集合 V 上の**距離**を定める.

幾何学的群論, 特に, 有限生成群のケイリーグラフと擬等長同型のアイデアをもとに, カンドルに距離を導入することが本稿の目標である. そのために, 有限生成群のケイリーグラフを紹介する.

定義 2.11. G を有限生成群とし, その有限生成集合を S とする. G の部分集合 S^{-1} を $\left\{s^{-1} \mid s \in S\right\}$ とする. ただし, S は単位元 1 を含んでないと仮定する. このとき, 無向グラフ $\mathrm{Cay}(G, S)$ を以下の頂点集合 V および辺集合 E を持つグラフとして定義する.

- 頂点集合 $V = G$,
- 辺集合 $E = \left\{(g, gs) \mid g \in G, s \in S \cup S^{-1}\right\}$.

このとき, $\mathrm{Cay}(G, S)$ を G **の** S **に関するケイリーグラフ**という.

有限生成群とその生成集合からケイリーグラフを考え, このグラフに距離 (定義 2.10) が定まり, 距離空間が得られる. しかし, これは生成集合の取り方に依存する. そこで生成集合の取り方によらない群の幾何学的性質を得るために, 擬等長同型について紹介する.

定義 2.12. (X, d_X) と (Y, d_Y) を距離空間とする. その間の写像を $f : X \to Y$ とする. ある定数 $\lambda \geq 1$ および $C \geq 0$ が存在して任意の x, y に対して,

$$\frac{1}{\lambda} d_X(x, y) - C \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \lambda d_X(x, y) + C$$

が成り立つとき, 写像 f は**擬等長埋め込み**であるという.

定義 2.13. ある定数 $\lambda \geq 0$ が存在して, 任意の $y \in Y$ に対して, ある $x \in X$ が存在して $d_Y(f(x), y) \leq \lambda$ が成り立つとき, 写像 f は**粗稠密**であるという.

定義 2.14. 距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) の間の写像 $f : X \to Y$ が擬等長埋め込みかつ粗稠密であるとき f を**擬等長同型写像**という. また, 擬等長同型となる写像 $f : X \to Y$ が存在するとき, 2 つの距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) は**擬等長同型**であるという.

2 つの距離空間 (X, d_X) と (Y, d_Y) は擬等長同型であるという関係は同値関係である. 次の事実から有限生成群のケイリーグラフは擬等長同型の差を除いて一意的に定まる.

命題 2.15. 有限生成群 G の有限生成集合を S, T とする. このとき $\mathrm{id} : \mathrm{Cay}(G, S) \to \mathrm{Cay}(G, T)$ は擬等長同型写像である.

ケイリーグラフの擬等長不変量は有限生成群の不変量となる. ここで, 擬等長不変量の 1 つであるエンドの数を [7] に従って紹介する.

連結で局所有限なグラフ Γ を考える. ある固定された頂点を中心とする半径 n の球を $\mathcal{B}(n)$ とする. $\|\Gamma \backslash \mathcal{B}(n)\|$ を, $\mathcal{B}(n)$ の補集合 $\Gamma \backslash \mathcal{B}(n)$ の非有界な連結成分の数とする.

定義 2.16. 連結で局所有限なグラフ Γ とする. $e(\Gamma)$ を次で定める.

$$e(\Gamma) = \lim_{n \to \infty} \|\Gamma \backslash \mathcal{B}(n)\|.$$

このとき, $e(\Gamma)$ をグラフ Γ **のエンドの数**という.

グラフ Γ のエンドの数 $e(\Gamma)$ は, 頂点の選び方によらず一意的に定まり, $\mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ に値をとる. 有限生成群 G のケイリーグラフは連結で局所有限であり, そのエンドの数を有限生成群 G のエンドの数といい, $e(G)$ とかく. 有限生成群のエンドの数は擬等長同型のもとで不変である. エンドの数の概念はより一般的な場合に対して定義される. 詳細は [6] を参照していただきたい.

つぎに, 擬等長同型についての具体例を紹介する.

- $\mathbb{Z}^n$ のケイリーグラフはユークリッド空間 $\mathbb{E}^n$ と擬等長同型である.
- n 次元双曲閉多様体 M の基本群 $\pi_1(M)$ のケイリーグラフは双曲空間 $\mathbb{H}^n$ と擬等長同型である.

本稿の最後に, 変位の群によるグラフから定まる距離が, ユークリッド空間や双曲平面と擬等長同型なカンドルの例を構成する. その構成のために用いたのが次の命題である.

命題 2.17. G を有限生成群とし, H を G の有限指数部分群であるとする. このとき G と H は擬等長同型である.

注意. 有限生成群の有限指数部分群は, 常に有限生成である.

3 カンドルのグラフ

この節では, カンドルから定まるグラフに対して距離を導入し, 擬等長同型を用いることで得られたいくつかの結果を紹介する. まず, カンドルの生成集合を以下で定義する.

定義 3.1 ([8])**.** カンドル $(Q, \triangleleft)$ に対して, 部分集合 $A \subset Q$ とする. Q の任意の元 x に対して, A の元 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ と符号 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ が存在して,

$$x = a_0 \triangleleft^{\varepsilon_1} a_1 \triangleleft^{\varepsilon_2} \cdots \triangleleft^{\varepsilon_n} a_n$$

が成り立つとき, 部分集合 $A \subset Q$ を**カンドル Q の生成集合**という.

注意. $A \subset Q$ を生成集合とすると, $\{s_a^\varepsilon \in \mathrm{Inn}(Q) \mid \varepsilon \in \{\pm 1\}, a \in A\}$ は $\mathrm{Inn}(Q)$ の生成集合となる. 特に, カンドル Q が有限生成ならば, $\mathrm{Inn}(Q)$ は群として有限生成である.

ウィンカーはカンドルの演算から定まるグラフを定義した [8].

定義 3.2 ([8])**.** $(Q, \triangleleft)$ をカンドルとする. $A \subset Q$ をカンドル Q の生成集合とする. このとき, グラフ $\Gamma_W(Q, A)$ を以下の頂点集合 V および辺集合 E を持つグラフとして定義する.

- 頂点集合 $V = Q$,
- 辺集合 $E = \{(x, x \triangleleft^\varepsilon a) \mid x \in Q, \varepsilon \in \{\pm 1\}, a \in A\}$.

本稿では, $\Gamma_W(Q, A)$ を, カンドル Q の有限生成集合 A に関する $\mathrm{Inn}(Q)$ から定まるグラフという. カンドルの連結成分と $\Gamma_W(Q, A)$ のグラフとしての連結成分は 1 対 1 に対応する. また, カンドルの各連結成分には $\Gamma_W(Q, A)$ から距離が導かれる (定義 2.10). この距離を d_A^W とおく. 一般に距離 d_A^W は生成集合 A の取り方に依存するが，有限生成群の場合と同様に，有限生成カンドルは有限生成集合の取り方によらずに擬等長類は一意的に定まる.

定理 3.3. S, T を有限生成カンドル Q の有限生成集合とする. このとき, Q の連結成分 O に対して, $\mathrm{id} : (O, d_S^W) \to (O, d_T^W)$ は擬等長同型写像である.

さらに，変位の群の作用からグラフを定義して，カンドルに別の距離を導入する.

定義 3.4. $(Q, \triangleleft)$ をカンドルとする. $U \subset \mathrm{Dis}(Q)$ を変位の群 $\mathrm{Dis}(Q)$ の生成集合とする. このとき, グラフ $\Gamma(Q, U)$ を以下の頂点集合 V および辺集合 E を持つグラフとして定義する.

- 頂点集合 $V = Q$,
- 辺集合 $E = \{(x, x \cdot u^\varepsilon) \mid x \in Q, \varepsilon \in \{\pm 1\}, u \in U\}$.

本稿では, $\Gamma(Q, U)$ を変位の群の有限生成集合 U に関する $\mathrm{Dis}(Q)$ から定まるグラフという. $\Gamma_W(Q, A)$ と同様に, カンドルの連結成分とカンドルの変位の群から定まるグラフとしての連結成分は 1 対 1 に対応し，各連結成分には $\Gamma(Q, U)$ から距離 d_U が導かれる. $\Gamma_W(Q, A)$ と同様に, 変位の群の有限生成集合の取り方によらずに擬等長類が一意的に定まる.

定理 3.5. カンドル Q の変位の群 $\mathrm{Dis}(Q)$ の有限生成集合 U, V をとる. このとき, Q の連結成分 O に対して, $\mathrm{id} : (O, d_U) \to (O, d_V)$ は擬等長同型写像である.

有限生成カンドル (resp. 変位の群が有限生成なカンドル) に対してはグラフ $\Gamma_W(Q, A)$ (resp. $\Gamma(Q, U)$) を用いて，距離空間の擬等長類が一意に定まった. しかし，変位の群が有限生成である有限生成カンドルであっても，これらの距離空間が擬等長同型になるとは限らない.

例 3.6. 無限 2 面体カンドル $R_\infty = (\mathbb{Z}, \triangleleft)$ を考える. R_∞ の連結成分は, 0 を含む O_0 と, 1 を含む O_1 からなる. このとき, $A := \{0, 1\} \subset R_\infty$ はカンドルの有限生成集合である. また, $U := \{s_1 \circ s_0^{-1}\}$ は $\mathrm{Dis}(R_\infty)$ の有限生成集合である. このとき, 距離空間 (O_0, d_A) と (O_0, d_U) のエンドの数が異なるため，これらは擬等長同型ではない.

4　ユークリッド空間および双曲平面と擬等長同型なカンドルの例

本節では, 変位の群によるグラフから定まる距離が, ユークリッド空間および双曲平面と擬等長同型なカンドルの例を紹介する. Q の連結成分 O に $\mathrm{Dis}(Q)$ が自由に作用しているとき, 以下が成り立つ.

命題 4.1. Q を $\mathrm{Dis}(Q)$ が有限生成であるカンドルとする. Q の連結成分 O に $\mathrm{Dis}(Q)$ が自由に作用していると仮定する. このとき, $\mathrm{Dis}(Q)$ と O は擬等長同型である.

一般化アレクサンダーカンドルと, その変位の群に対して, [1] の議論によると以下が成り立つ.

補題 4.2 (cf.[1])**.** 群 G と, その自己同型写像 $\sigma \in \mathrm{Aut}(G)$ に対して定まる一般化アレクサンダーカンドル $Q = \mathrm{GAlex}(G, \sigma)$ は次を満たす.

- 単位元 $e \in G$ を含む Q の連結成分 P は $\mathrm{Dis}(Q)$ と同型な G の部分群であり, 特に, P は Q に自由に作用する.
- ある $g \in G$ に関して, 内部自己同型写像 σ が $\sigma(x) = g^{-1}xg$ で与えられているとき, P は G における $\{g\}$ の正規閉包と同型である.

補題 4.2 より, 一般化アレクサンダーカンドルの変位の群は, 一般化アレクサンダーカンドルに自由に作用することがわかる. そこで, 一般化アレクサンダーカンドルを用いて, ユークリッド空間および双曲平面のそれぞれと擬等長同型となる 2 つの例を紹介する.

例 4.3. $t \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ に対して, 一般化アレクサンダーカンドル $Q := \mathrm{GAlex}(\mathbb{Z}^n, t)$ を考える. このとき, $\mathrm{Dis}(Q)$ は $(1-t)\mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^k$ 同型である. ただし, $k = \mathrm{rank}(1-t)$ である. したがって, 命題 4.1 より Q の各連結成分は $\mathbb{Z}^k$ に擬等長同型であり, さらに $\mathbb{Z}^k$ はユークリッド空間 $\mathbb{E}^k$ と擬等長同型である. よって Q の各連結成分はユークリッド空間 $\mathbb{E}^k$ に擬等長同型である.

例 4.4. 以下の表示で定まる群 $\Delta^+(p, q, r)$ を考える.

$$\Delta^+(p, q, r) := \langle a, b, c \mid a^p = b^q = c^r = abc = 1 \rangle .$$

また, 生成元 a に関する内部自己同型写像 σ を考える. つまり

$$\sigma(x) := a^{-1}xa.$$

このとき, 一般化 Alexander カンドル $Q := \mathrm{GAlex}\left(\Delta^+(p, q, r), \sigma\right)$ の変位の群 $\mathrm{Dis}(Q)$ は $\Delta^+(p, q, r)$ の有限指数部分群となる. 実際, ある全射準同型写像 $\Delta^+(p, q, r) \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ (ただし $k = \gcd(q, r)$) の核と一致する. したがって, $\mathrm{Dis}(Q)$ は有限生成となり, 命題 2.17 より $\Delta^+(p, q, r)$ と擬等長同型である. 特に, 条件

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1 \tag{1}$$

を満たすとき, $\Delta^+(p, q, r)$ は双曲平面 $\mathbb{H}^2$ と擬等長同型である. したがって, 条件 (1) のもとで Q の各連結成分は $\mathbb{H}^2$ と擬等長同型である.

参考文献

[1] Akihiro Higashitani and Hirotake Kurihara. Generalized Alexander quandles of finite groups and their characterizations. *European Journal of Mathematics*, 10(3):41, 2024.

[2] Alexander Hulpke, David Stanovský, and Petr Vojtěchovský. Connected quandles and transitive groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 220(2):735–758, 2016.

[3] Yoshitaka Ishihara and Hiroshi Tamaru. Flat connected finite quandles. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 144(11):4959–4971, 2016.

[4] David Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 23(1):37–65, 1982.

[5] Seiichi Kamada. *Surface-Knots in 4-Space*. Springer Monographs in Mathematics. Springer Singapore, 2017.

[6] Clara Löh. *Geometric Group Theory: An Introduction*. Universitext. Springer, 2017.

[7] J. Meier. *Groups, Graphs and Trees: An Introduction to the Geometry of Infinite Groups*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2008.

[8] Steven Karl Winker. *QUANDLES, KNOT INVARIANTS, AND THE N-FOLD BRANCHED COVER*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1984.

[9] 田丸 博士. 対称空間論の離散化とカンドル代数, Part IV, 2019.

The construction of Oeljeklaus-Toma manifolds from Lie algebras and lattices

東京大学　大学院数理科学研究科　数理科学専攻

神田秀峰 (Shuho KANDA) *

概要

Oeljeklaus-Toma 多様体は数論的に構成され, その一部は局所共形 Kähler 可解多様体の族を与える. この構成では, meta-abelian Lie 群であって左不変局所共形 Kähler 構造を持つものとその格子が同時に与えられる. 本研究ではその逆, ある種の meta-abelian Lie 群であって左不変局所共形 Kähler 構造を持つものが格子を持つとき, それは Oeljeklaus-Toma 多様体の構成によって得られることを示した. この結果は Oeljeklaus-Toma 多様体の幾何学的特徴付けを与えると同時に, 数論的構成が格子の存在を議論するにあたって普遍的な手法であることを示唆している.

1　局所共形 Kähler 多様体

複素多様体 (M, J) の上の計量 g であって, その基本形式 $\omega(\cdot,\cdot) = g(J\cdot,\cdot)$ が $d\omega = 0$ を満たすものを (M, J) 上の Kähler 計量といい, (M, J, g) を Kähler 多様体という. 複素多様体論における主な研究対象はコンパクト Kähler 多様体である. しかしここ十数年でコンパクト非 Kähler 多様体, つまりいかなる計量をもってしても Kähler 多様体とはならないコンパクト複素多様体の研究に注目が集まっている.

Kähler 性を少し弱めた計量を定義する.

定義 1.1. 複素多様体 (M, J) 上の計量 g が**局所共形 Kähler** (locally conformally Kähler, LCK) とは, ある M の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ と実関数族 $f_i \in C^\infty(U_i)$ が存在して, $e^{-f_i}g$ が U_i 上で Kähler となることである.

$e^{-f_i}g$ の基本形式は $e^{-f_i}\omega$ なので, これが Kähler となることは $d(e^{-f_i}\omega) = 0$ すなわち $d\omega = df_i \wedge \omega$ と同値である. よって $U_i \cap U_j$ 上で $df_i \wedge \omega = df_j \wedge \omega$ となるが, ω は非退化なので $df_i = df_j$ となり, これらは張り合って M 上の閉形式 θ を定める. これにより以下がわかる.

命題 1.2. 複素多様体 (M, J) 上の計量 g が LCK であることは, ある閉形式 θ が存在して $d\omega = \theta \wedge \omega$ となることと同値. この θ は一意に定まり, **Lee 形式**と呼ばれる.

* E-mail:shuho@ms.u-tokyo.ac.jp

古典的に知られているコンパクト非 Kähler 多様体の例として Hopf 多様体がある．これは LCK 多様体の典型例である．

例 1.3. $\lambda \in \mathbb{C}$ を $|\lambda| > 1$ をみたす複素数とする．$\mathbb{Z}$ から $X = \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ への作用を $k \cdot z = \lambda^k z$ と定め, この作用による商多様体 $X/\mathbb{Z}$ を **Hopf 多様体**という．Hopf 多様体の 1 次ベッチ数は 1 であり, コンパクト Kähler 多様体の位相的制約から, これは Kähler 多様体になり得ない．g を $\mathbb{C}^n$ 上の標準エルミート計量の X への制限とする．X 上の実関数 $\Psi(z) = |z|^{-2} : X \to \mathbb{R}_{>0}$ について, Ψg は $\mathbb{Z}$ の作用について不変となる．よって $X/\mathbb{Z}$ 上の計量を定め, 構成からこの計量は LCK 計量となる．

古典的に知られている多くのコンパクト非 Kähler 多様体に LCK 構造が入ることが知られており, 非 Kähler 多様体論において LCK 多様体論は重要な位置を占める．LCK 構造のうち Lee 形式が平行なもの, つまり ∇ を Levi-Civita 接続としたときに $\nabla\theta = 0$ となるものを **Vaisman 多様体**という．古典的に知られている多くの LCK 多様体, 例えば Hopf 多様体などは Vaisman 多様体となる．Vaisman 多様体はよく研究されているが, Kähler 多様体上での理論の類似を考えるという文脈の研究が多い．LCK 多様体論においては Vaisman という仮定はかなり強く, 例えば LCK 多様体を調べるための多くの不変量が自明となってしまう．以上の理由により, Vaisman 構造の入らない LCK 多様体を構成することは重要である．

2 冪零多様体

この章ではコンパクト非 Kähler 多様体を構成する典型的な方法を紹介する．G を連結かつ単連結な冪零 Lie 群とし, Γ をその格子, つまり G の離散部分群で $\Gamma\backslash G$ がコンパクトとなるものとする．このとき多様体 $\Gamma\backslash G$ を**冪零多様体**という．冪零多様体が Kähler 多様体になるのはトーラスの場合に限ることが知られている [BG88][Has89]．よって G として非可換なものをとり, J を左不変複素構造とすればコンパクト複素多様体 $(\Gamma\backslash G, J)$ が定まり, これは非 Kähler 多様体となる．

G の左不変複素構造 J は G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に定まる複素構造 J と対応する．ここで Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の複素構造 J とは, $J \in \operatorname{End}\mathfrak{g}$ であって $J^2 = -\operatorname{id}$ かつ可積分条件

$$[X,Y] - [JX,JY] + J[X,JY] + J[JX,Y] = 0, \quad X,Y \in \mathfrak{g}$$

を満たすものである．以上より, 非可換な冪零 Lie 代数 $\mathfrak{g}$, その上の複素構造 J, そして対応する単連結 Lie 群 G の格子 Γ を見つければ, コンパクト非 Kähler 多様体を得ることができる．

例 2.1. 可換環 R に対し Heisenberg 群 $H_3(R)$ を

$$H_3(R) \coloneqq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x,y,z \in R \right\}$$

と定める．このとき $G = \mathbb{R} \times H_3(\mathbb{R})$ は 4 次元冪零 Lie 群を定める．これは $\Gamma \coloneqq \mathbb{Z} \times H_3(\mathbb{Z})$ を格子として持つ．対応する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は, その生成元を T, X, Y, Z として

$$[X,Y] = Z$$

という Lie 括弧積により定義される．このとき $JX = Y$, $JT = Z$ によって $\mathfrak{g}$ の複素構造が定まる．これによって定まるコンパクト複素多様体 $(\Gamma\backslash G, J)$ を**小平-Thurston 多様体**といい, Kähler 計量を持たないことが知られている．

上記の例を見ると, G の構造がよく分かっていれば格子を構成するのはさほど難しくないように感じられる．実際, 冪零 Lie 群の格子の存在に関する必要十分条件として以下が知られている．

定理 2.2 ([Mal49])**.** 単連結冪零 Lie 群 G が格子を持つための必要十分条件は, 対応する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{e_i\}_{i=1}^n$ であって構造定数 $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$ が全て有理数となるものが存在することである．

この定理を用いれば G に格子が存在するかどうかはすぐに判定できる．このようにして, 冪零多様体によってコンパクト非 Kähler 多様体の例をたくさん構成することができる．G の左不変 LCK 計量 g を考えれば $(\Gamma\backslash G, J, g)$ という LCK 多様体が得られる．複素構造のときと同様に, これは Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の LCK 構造と対応する．しかし次の命題が示すように, LCK 多様体論における重要な例を得るためには冪零多様体を考えるだけでは不十分である．

命題 2.3 ([Saw07])**.** 冪零 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に入る LCK 構造は全て Vaisman となる．

つまり上記の構成によって得られる冪零多様体は全て Vaisman 多様体になってしまう．例えば例 2.1 には LCK 構造が入るが, これは Vaisman となる．コンパクト LCK 多様体であって Vaisman でないものを得るには, より広いクラスの Lie 群を考える必要がある．

3 可解多様体

冪零 Lie 群より広いクラスとして可解 Lie 群を考える．G を連結かつ単連結な可解 Lie 群とすると, 冪零 Lie 群のときと同様に議論を進めることができる．格子 Γ が存在したとき多様体 $\Gamma\backslash G$ を**可解多様体**という．これが Kähler 多様体になる場合は簡単なケースに限ることが知られている [Has06]．対応する Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の LCK 計量 g をとることでコンパクト LCK 多様体 $(\Gamma\backslash G, J, g)$ を得ることができ, これは Vaisman になるとは限らない．可解多様体であって非 Vaisman LCK 多様体となるものを構成するまであと一歩のように見えるが, ここで難所となるのが格子の存在である．可解 Lie 群についてはその格子の存在の判定が非常に難しく, 具体的な可解 Lie 群の格子を構成するだけでも重要な研究結果となる．例えば以下のように非常に簡単な可解 Lie 群でさえ, その格子の構成は非自明である．

例 3.1. $G = \mathbb{R} \ltimes_\phi \mathbb{R}^2$ を 3 次元可解 Lie 群とする．ここで $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^2)$ は以下のよう定義される;

$$\phi(x) \coloneqq \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}.$$

行列 $M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ であって相異なる 2 つの正の固有値 λ, λ^{-1} を持つものをとる．$P \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ をその対角化行列, つまり $P^{-1}MP = \mathrm{diag}(\lambda, \lambda^{-1})$ を満たす行列とする．この時

$$\Gamma \coloneqq ((\log \lambda)\mathbb{Z}) \ltimes_\phi (P^{-1}\mathbb{Z}^2)$$

は G の格子となる.

上記のように, $G = \mathbb{R}^m \ltimes_\phi \mathbb{R}^n$ という形をした可解 Lie 群を **meta-abelian** という. 対応する Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \ltimes_{d\phi} \mathbb{R}^n$ についても meta-abelian と呼ぶ. 実は meta-abelian Lie 群のうち, nilradical が $\mathbb{R}^n$ に一致するものについては, 上記の例におけるテクニックがそのまま格子の存在の必要十分条件となる. nilradical が $\mathbb{R}^n$ に一致するとは, $X \in \mathbb{R}^m \subset \mathfrak{g}$ であって $d\phi(X)$ が nilpotent なものが 0 に限ることをいう.

命題 3.2. meta-abelian Lie 群 $G = \mathbb{R}^m \ltimes_\phi \mathbb{R}^n$ について, その nilradical が $\mathbb{R}^n$ とする. G が格子を持つとき, 格子 $\Gamma_1 \subset \mathbb{R}^m$ と正則行列 $P \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ が存在して

$$P\phi(X)P^{-1} \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z}), \quad \text{for all } X \in \Gamma_1$$

となる. このとき

$$\Gamma \coloneqq \Gamma_1 \ltimes_\phi (P^{-1}\mathbb{Z}^m)$$

は G の格子となる.

さて, 可解 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ とその上の非 Vaisman LCK 構造 J, g および対応する Lie 群 G の格子を構成することはできるだろうか. 驚くべきことに, 数論的考察を用いることで難なく構成できてしまう. これが次章で紹介する Oeljeklaus-Toma 多様体である.

4 Oeljeklaus-Toma 多様体

Oeljeklaus-Toma 多様体 (OT 多様体) は井上曲面の高次元化として知られる. 井上曲面はもともと 1974 年にコンパクト非 Kähler 曲面の研究の中で構成された多様体の族であり, その定義に数論的考察は含まれていない [Ino74]. しかし Oeljeklaus と Toma はその構成を数論的に捉え直し, 2005 年に井上曲面の高次元化に成功した [OT05]. 井上曲面は非 Vaisman LCK 構造を持つことが知られていたが, 高次元化された OT 多様体についても, その一部は非 Vaisman LCK 構造を持つ. さらに 2013 年には糟谷 [Kas13] によって, OT 多様体が meta-abelian Lie 群による可解多様体の構造を持つことが示された. このようにして OT 多様体は, LCK 多様体論において最も重宝される多様体の族となった. 以下ではその構成について述べる.

$f \in \mathbb{Q}[x]$ を n 次の有理係数既約モニック多項式とする. f は s 個のの実根と $2t$ 個の複素根を持つとする. ここで $s, t \geq 1$ を仮定する. $K \coloneqq \mathbb{Q}[x]/(f)$ とすると K は $n = s + 2t$ 次の代数体となる. x に f の根を代入するという操作から, K の実埋め込み $\sigma_1, \ldots, \sigma_s \colon K \hookrightarrow \mathbb{R}$ と複素埋め込み $\sigma_{s+1}, \ldots, \sigma_{s+2t} \colon K \hookrightarrow \mathbb{C}$ が定義される. 添え字を入れ替えて $\sigma_{s+i} = \overline{\sigma_{s+t+i}}$ としておく.

$\mathcal{O}_K$ を K の代数的整数環, つまり最小多項式として整数係数モニックなものがとれるような K の元全体とする. $\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq K$ なので, アーベル群としてのランクは n となる. $\mathcal{O}_K^\times$ を $\mathcal{O}_K$ の単数群とする. この群には捩れが存在するが, それらを取り除くように $\mathcal{O}_K^\times$ の部分群 $\mathcal{O}_K^{\times,+}$ を以下のように定義する;

$$\mathcal{O}_K^{\times,+} \coloneqq \{a \in \mathcal{O}_K^\times \mid \sigma_i(a) > 0 \text{ for all } 1 \leq i \leq s\}.$$

さて, $\mathbb{H} \coloneqq \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ を上半平面とする. 作用 $\mathcal{O}_K \curvearrowright \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ を, $a \in \mathcal{O}_K$ に対し

$$T_a(w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_t) \coloneqq (w_1 + \sigma_1(a), \dots, z_t + \sigma_{s+t}(a))$$

と定義する. また作用 $\mathcal{O}_K^{\times,+} \curvearrowright \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ を, $u \in \mathcal{O}_K^{\times,+}$ に対し

$$R_u(w_1, \dots, w_s, z_1, \dots, z_t) \coloneqq (\sigma_1(u) \cdot w_1, \dots, \sigma_{s+t}(u) \cdot z_t).$$

と定義する. この 2 つの作用により, 作用 $(\mathcal{O}_K^{\times,+} \ltimes \mathcal{O}_K) \curvearrowright \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ が定まる.

さて, $\mathcal{O}_K^{\times,+}$ の群構造は Dirichlet の単数定理により記述される.

定理 4.1 (Dirichlet の単数定理)**.** 埋め込み

$$\log : \mathcal{O}_K^{\times,+} \hookrightarrow \mathbb{R}^{s+t}$$
$$u \mapsto (\log \sigma_1(u), \dots, \log \sigma_s(u), \log |\sigma_{s+1}(u)|^2, \dots, \log |\sigma_{s+t}(u)|^2)$$

について, その像は $H \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^{s+t} \mid \sum_{i=1}^{s+t} x_i = 0\}$ 内の格子をなす.

特に, $\mathcal{O}_K^{\times,+}$ のランクは $s + t - 1$ となる. 作用 $(\mathcal{O}_K^{\times,+} \ltimes \mathcal{O}_K) \curvearrowright \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ を離散的にするために, より低いランクの部分群 $U \subset \mathcal{O}_K^{\times,+}$ をとる必要がある.

定義 4.2. $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^s} : \mathbb{R}^{s+t} \to \mathbb{R}^s$ をはじめの s 個の座標への射影とする. ランク s の部分群 $U \subset \mathcal{O}_K^{\times,+}$ で $\mathrm{pr}_{\mathbb{R}^s}(\log(U))$ が $\mathbb{R}^s$ 内の格子となるものを **admissible** という.

Dirichlet の単数定理により, admissible となる U は常に存在することがわかる. Oeljeklaus と Toma は, U が admissible であるとき作用 $(U \ltimes \mathcal{O}_K) \curvearrowright \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ が固有不連続かつ商多様体がコンパクトであることを示した. この商多様体が OT 多様体である.

定義 4.3. 代数体 K とその admissible 群 $U \subset \mathcal{O}_K^{\times,+}$ による **OT manifold** とは, 商多様体

$$X(K, U) \coloneqq \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t / (U \ltimes \mathcal{O}_K).$$

のことである. (s, t) をこの OT 多様体の**タイプ**という.

井上曲面はタイプ $(1, 1)$ の OT 多様体である. OT 多様体の LCK 構造について, 以下が成立する.

命題 4.4 ([OT05])**.** タイプ $(s, 1)$ の OT 多様体は LCK 構造を持つ.

Proof. $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}$ 上の計量 g を s 個の Poincaré 計量と 1 つの Euclid 計量の積として定める. 実関数 $\Psi \colon \mathbb{H}^s \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{>0}$ を

$$\Psi(w_1, \dots, w_s, z) \coloneqq (\operatorname{Im} w_1) \cdots (\operatorname{Im} w_s)$$

として定めると Ψg は $U \ltimes \mathcal{O}_K$ 不変な計量となり, $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}/(U \ltimes \mathcal{O}_K)$ 上の計量を定める. g は Kähler なので, この計量は LCK である. □

逆に LCK 構造を持つ OT 多様体のタイプは $(s, 1)$ に限ることも最近示された [DV23]. また OT 多様体に入る LCK 構造は Vaisman になり得ない [Kas13].

5　OT 多様体の可解多様体としての構造

OT 多様体は可解多様体の構造をもつ. より詳しく, 以下が成立する.

定理 5.1. タイプ (s,t) の OT 多様体 $X(K,U)$ に対し, $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ に可解 Lie 群の構造をうまく入れて G とする. 埋め込み $\iota\colon U \ltimes \mathcal{O}_K \hookrightarrow G$ であってその像が G の格子 Γ となっているものが存在し,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t & = & G \\ {\scriptstyle L_{(u,a)}}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle L_{\iota(u,a)}} \\ \mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t & = & G \end{array}$$

が可換となる. ここで $L_{(u,a)}$ は $(u,a) \in U \ltimes \mathcal{O}_K$ による $\mathbb{H}^s \times \mathbb{C}^t$ への作用. $L_{\iota(u,a)}$ は $\iota(u,a) \in \Gamma$ を G に左からかける作用である.

具体的にどのような群構造を入れるかは省略する. G は meta-abelian Lie 群となり, 以下のような構造を持つ.

定義 5.2. 複素行列 $C = (c_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{t\times s}(\mathbb{C})$ に対し $d\phi_C : \mathbb{R}^s \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^t)$ を

$$d\phi_C(t_1,\dots,t_s) = \mathrm{diag}(t_1,\dots,t_s,(\sum_{j=1}^{s} c_{ij}t_j)_{i=1}^{t}),$$

と定める. このとき C に付随する **OT-like Li 代数**を $\mathfrak{g}_C \coloneqq \mathbb{R}^s \ltimes_{d\phi_C} (\mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^t)$ と定める. 対応する単連結 Lie 群を G_C とかき, **OT-like Lie 群**という.

定理 5.3 ([Kas13])**.** タイプ (s,t) の OT 多様体 $X(K,U)$ に対しある $C \in \mathrm{Mat}_{t\times s}(\mathbb{C})$ が存在し, $X(K,U)$ は OT-like Lie 群 G_C をある格子で割った可解多様体となる.

任意の $C \in \mathrm{Mat}_{t\times s}(\mathbb{C})$ に対し Lie 群 G_C を定義できることに注意. つまり OT 多様体の構成は, G_C が格子を持つような C を数論的に与える方法と言える.

以下, OT-like Lie 代数であって LCK 構造をもつものについて考察する. まず以下が成立する.

命題 5.4. $C \in \mathrm{Mat}_{t\times s}(\mathbb{C})$ に付随する OT-like Lie 代数 $\mathfrak{g}_C$ について, $\mathrm{Re}\, c_{ij} = -1/2$ が全ての i,j について成立するとき, $\mathfrak{g}_C$ は非 Vaisman LCK 構造を持つ. このような $\mathfrak{g}_C$ を **LCK OT-like Lie 代数**という. 対応する Lie 群 G_C を **LCK OT-like Lie 群**という.

このような C はたくさんあるので, 任意のタイプに対し非 Vaisman LCK 構造を持つ Lie 代数をたくさん構成できたことになる. これらに付随する Lie 群の格子を見つけることができれば非 Vaisman LCK 構造を持つ可解多様体が得られる. C がタイプ $(s,1)$ の OT 多様体から作られる行列であれば, 付随する Lie 群には格子が存在する. では **OT 多様体から構成される C の他に, LCK OT-like Lie 群であって格子を持つものは存在するだろうか.** 答えは No, つまり LCK OT-like Lie 群が格子を持つこととそれが OT 多様体から構成されることは同値である.

6　主定理

定理 6.1. $C \in \mathrm{Mat}_{t\times s}(\mathbb{C})$ であって, 全ての i,j について $\mathrm{Re}\, c_{ij} = -1/2$ となるものをとる. G_C が格子を持つならば $t = 1$ となり, あるタイプ $(s,1)$ の OT 多様体 $X(K,U)$ が存在し C はこの OT 多様体から構成される.

証明はほぼ全て代数的な議論による. ここでは証明の概略を述べる. 行列 C から得られる Lie 群 G_C とその格子から何らかの代数体 K を構成する必要があり, ここが最も非自明である.

Lie 群 G_C は格子を持つので, 命題 3.2 によれば格子 $\Gamma \subset \mathbb{R}^s$ と正則行列 $P \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ が存在して

$$P\phi_C(X)P^{-1} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}), \quad \text{for all } X \in \Gamma.$$

となる. よって $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Z})$ の部分群 U が

$$U \coloneqq \{P\phi_C(X)P^{-1} \in \mathrm{SL}(n,\mathbb{Z}) \mid X \in \Gamma\}.$$

と定まる. これはランク s の自由アーベル群となる. $\phi_C(X)$ は対角行列なので, $A \in U$ に対し

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\mu_A^1, \dots \mu_A^s, \lambda_A^1, \dots, \lambda_A^t)$$

とかける. $X \in \mathbb{R}^s$ の座標表示は $A = P\phi_C(X)P^{-1}$ としたとき $(\log \mu_A^1, \dots, \log \mu_A^s)$ である. よって Γ が格子をなすとは $\{(\log \mu_A^1, \dots, \log \mu_A^s) \in \mathbb{R}^s \mid A \in U\}$ が $\mathbb{R}^s$ の格子をなすということである.

この状況から環 $K = \mathbb{Q}(U)$ が体になることを示すことができる. U は $\mathcal{O}_K^{\times,+}$ の admissible 部分群となり, OT 多様体 $X(K,U)$ から定まる可解 Lie 群 G を考えるとこれは G_C と同型となる.

7　応用

LCK OT-like Lie 群が格子を持つときにそれが OT 多様体の構成から得られることは示されたが, この LCK OT-like Lie 群とはどのくらい特殊な Lie 群だろうか. 本研究ではこの Lie 群の幾何学的特徴付けも与えた.

定理 7.1. meta-abelian Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \ltimes_{d\phi} \mathbb{R}^n$ が, 非 Vaisman LCK 構造を持つとする. このとき $m \leq 2$ なら, $\mathfrak{g}$ はある LCK OT-like Lie 代数と同型になる.

$m > 2$ については未解決であり, 本研究は以下の部分的な結果に留まる.

定理 7.2. meta-abelian Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^m \ltimes_{d\phi} \mathbb{R}^n$ が, 非 Vaisman LCK 構造を持つとする. このとき $\mathfrak{g} = J\mathbb{R}^n + \mathbb{R}^n$ なら, $\mathfrak{g}$ はある LCK OT-like Lie 代数と同型になる.

8　今後の研究について

左不変な非 Vaisman LCK 構造をもつ可解 Lie 群とその格子を見つける研究は, 格子を扱う難しさからほとんど進展がなかった. 今回の研究結果により, 例えば可解 Lie 群が $\mathbb{R}^m \ltimes_{d\phi} \mathbb{R}^n$ $(m \leq 2)$ と

いう形をしている場合には完全に解決されたことになる.

本稿の内容からわかるように, このような研究は

(i) 可解 Lie 代数であって非 Vaisman LCK 構造を持つものの分類
(ii) そのような Lie 代数に付随する Lie 群の格子の存在性

からなる. 本研究においては (i) が定理 7.1, (ii) が定理 6.1 に対応する. 現状として, まず (i) に関する進展はほとんどない. 多くの研究において考えている Lie 代数のクラスが狭く, また結論は「このようなクラスの Lie 代数のうち非 Vaisman LCK 構造を持つものは存在しない」である. Lie 代数のレベルで存在しないので, そもそも (ii) へ議論が進む余地がない.

[AO18] では $\mathfrak{g} = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^n$ の場合について考察されている. (ii) についても議論することで $n = 3$ を結論付け, 最終的には井上曲面が得られることを示している. しかしこの議論において OT 多様体は現れないため, 本研究は [AO18] の結果を OT 多様体の構成と関連付け, 拡張を行なったものと言える.

当然, meta-abelian というクラスは可解 Lie 群全体の中ではごく一部である. より広いクラスの可解 Lie 群について (i) を考察することで, 新たな非 Vaisman LCK 可解 Lie 代数が発見される可能性がある. そこからさらに格子の存在が示されると, OT 多様体に代わる新たな例が発見されることとなる. このような例が今後発見されるのか, あるいは OT 多様体以外には存在しないのか, 筆者は前者を予想しているが, 後者だとしたらそれは非常に面白い事実だと思う.

参考文献

[AO18] A. Andrada and M. Origlia, *Lattices in almost abelian Lie groups with locally conformal Kähler or symplectic structures*, Manuscripta Math. **155** (2018), no. 3-4, 389–417.

[BG88] Chal Benson and Carolyn S. Gordon, *Kähler and symplectic structures on nilmanifolds*, Topology **27** (1988), no. 4, 513–518.

[DV23] Ştefan Deaconu and Victor Vuletescu, *On locally conformally Kähler metrics on Oeljeklaus-Toma manifolds*, Manuscripta Math. **171** (2023), no. 3-4, 643–647.

[Has89] Keizo Hasegawa, *Minimal models of nilmanifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), no. 1, 65–71.

[Has06] ———, *A note on compact solvmanifolds with Kähler structures*, Osaka J. Math. **43** (2006), no. 1, 131–135.

[Ino74] Masahisa Inoue, *On surfaces of Class* VII_0, Invent. Math. **24** (1974), 269–310.

[Kas13] Hisashi Kasuya, *Vaisman metrics on solvmanifolds and Oeljeklaus-Toma manifolds*, Bull. Lond. Math. Soc. **45** (2013), no. 1, 15–26.

[Mal49] A. I. Malćev, *On a class of homogeneous spaces*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **13** (1949), 9–32.

[OT05] Karl Oeljeklaus and Matei Toma, *Non-Kähler compact complex manifolds associated to number fields*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), no. 1, 161–171.

[Saw07] Hiroshi Sawai, *Locally conformal Kähler structures on compact nilmanifolds with left-invariant complex structures*, Geom. Dedicata **125** (2007), 93–101.

トロピカル射影平面曲線の交点の有理性

東京都立大学　大学院理学研究科　数理科学専攻
呉博韜 (Botao WU) *

Abstract

Tropical geometry is a branch of algebraic geometry considered over the tropical semiring with max-plus algebra, bridging diverse mathematical fields such as combinatorics and applied mathematics. In this study, we focus on the stable intersection of finite parts of two tropical projective plane curves determined by tropical homogeneous polynomials in three variables. Our findings reveal the Γ_{val}-rationality of these stable intersection points.

1 Introduction

For a "nonzero" specific tropical polynomial f with at least two terms, duality [1] depicts the corelations between its tropical hypersurface and regular subdivision induced by coefficients on the lattice points of Newton polytope $\text{Newt}(f)$. Taking this property, we can efficiently draw tropical plane curves.

Kapranov et al. [3] established a connection between tropical hypersurfaces and the tropicalization of classical algebraic hypersurfaces over an algebraically closed field equipped with a nontrivial valuation.

Over a possibly not algebraically closed field with a nontrivial valuation, the correspondence in Kapranov ' s theorem remains unclear. In this study, we focus on the stable intersection of finite parts of tropical projective plane curves, revealing its composition and the rationality of its points. Based on these findings, we strive to provide a foundation for further discussions.

2 Preliminaries

We introduce some fundamental concepts and basic facts in tropical geometry that will be used in the rest of the text. For more details and proofs, we refer to expositions in [1], [2], [5], [7], [10].

2.1 Tropical algebra and hypersurface

Definition 2.1. $(\mathbf{T} := \mathbf{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \odot)$ is called the *tropical semifield* with two tropical operations as:

$$x \oplus y := \max(x, y), x \odot y := x + y, \text{ where } x, y \in \mathbf{T}.$$

$\oplus$ and $\odot$ are called *tropical addition* and *tropical multiplication* respectively.

Note that in order to distinguish from common plus and times, frequently they can be written as "$x + y$" and "xy" respectively. The neutral element for tropical addition (resp. tropical multiplication) is $-\infty$ (resp. 0). There do not exist addictive inverses.

*E-mail:wu-botao@ed.tmu.ac.jp

Definition 2.2. The finite formal sum

$$a_n \odot x^n \oplus a_{n-1} \odot x^{n-1} \oplus \cdots \oplus a_1 \odot x \oplus a_0$$

where $n \in \mathbf{N}$ and coefficient $a_i \in \mathbf{T}$ is called a *tropical polynomial* in x with $a_i \in \mathbf{T}$. The term $a_i \odot x^i$ is called *tropical term* in x. If $a_n \neq -\infty$, then the polynomial is said to be of degree n, denoted as $\deg(f) = n$.

Definition 2.3. The set of all polynomials above constitutes a semiring, called the *tropical polynomial semiring* in a variable x with coefficients in $\mathbf{T}$, denoted by $\mathbf{T}[x]$. The tropical polynmial semiring $\mathbf{T}[x_1, \ldots, x_n]$ in variables $x_1, \ldots, x_n$ with coefficients in $\mathbf{T}$ is induced by

$$\mathbf{T}[x_1, \ldots, x_n] := (\mathbf{T}[x_1, \ldots, x_{n-1}])[x_n].$$

The definitions of term and degree of multivariate version are analogues to definition 2.2.

Remark 2.4. We can also define some similar concepts for *tropical Laurent polynomials*. For simplicity, we restrict our consideration to tropical polynomials.

Remark 2.5. Formal tropical polynomials are not always identified with functionally equivalent polynomials. For instance, let $f(x) =$"$x^2 + 1x + 2$", $g(x) =$"$x^2 + 0x + 2$". $f(x) \neq g(x)$ but for every $p \in \mathbf{T}$, we have $f(p) = g(p)$.

Definition 2.6. The *tropical polynomial function semiring* in n variables over $\mathbf{T}$ is the quotient semiring $PF(\mathbf{T}^n) := \mathbf{T}[x_1, \ldots, x_n]/\sim$, where

$$f \sim g \iff f(p) = g(p), \forall p \in \mathbf{T}^n$$

An element in $PF(\mathbf{T}^n)$ is called a *tropical polynomial function*.

Remark 2.7. In this study, a tropical polynomial refers to a "nonzero" tropical polynomial function with at least two terms.

Definition 2.8. For a given tropical polynomial $f =$"$\sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{N}^n} c_{\mathbf{u}} x^{\mathbf{u}}$" in $\mathbf{T}[x_1, \ldots, x_n]$, the *tropical hypersurface* $V_{\mathbf{R}^n}(f)$ determined by f is defined as the set of points where at least two distinct terms of f achieve the maximum, i.e.,

$$V_{\mathbf{R}^n}(f) := \{p \in \mathbf{R}^n : \exists \mathbf{i} \neq \mathbf{j} \in \mathbf{N}^n, f(p) = c_{\mathbf{i}} p^{\mathbf{i}} = c_{\mathbf{j}} p^{\mathbf{j}}\}.$$

When $n = 2$, $V_{\mathbf{R}^2}(f)$ is called *tropical plane curve*.

Definition 2.9. *Tropical projective plane* $\mathbf{TP}^2$ is a quotient space induced by equivalence relation where corresponding coordinates differ by a constant number in $\mathbf{T}^\times$. It can be glued from three affine patches $U_i := \{(x_1 : x_2 : x_3) \in \mathbf{TP}^2 : x_i \neq -\infty\} \cong \mathbf{T}^2$, $i = 1, 2, 3$.

Definition 2.10. For a given homogeneous tropical polynomial $F =$"$\sum_{\mathbf{u} \in \mathbf{N}^n} c_{\mathbf{u}} x^{\mathbf{u}}$" in $\mathbf{T}[x_1, x_2, x_3]$, the *tropical projective plane curve* $V_{\mathbf{TP}^2}(F)$ determined by F is defined as

$$V_{\mathbf{TP}^2}(F) := \{p \in \mathbf{TP}^2 : \exists \mathbf{i} \neq \mathbf{j} \in \mathbf{N}^n, F(p) = c_{\mathbf{i}} p^{\mathbf{i}} = c_{\mathbf{j}} p^{\mathbf{j}}\}.$$

It is not difficult to check this is well-defined. In the book [2] by Mikhalkin and Rau, it is shown that $V_{\mathbf{TP}^2}(F)$ consists of the finite part and some subsets of $\partial\mathbf{TP}^2$. Fix an affine patch and let f be the dehomogenization of F with respect to the patch. The *finite part* $V_{\mathbf{TP}^2}(F)^{\text{fin}}$ is the closure of $V_{\mathbf{R}^2}(f)$ in $\mathbf{TP}^2$.

2.2 Valuation and tropicalization

Definition 2.11. Let K be a field. A mapping val from K to $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ is a *valuation* if it satisfies the following axioms:

1. $a = 0 \iff \mathrm{val}(a) = \infty$,
2. $\mathrm{val}(xy) = \mathrm{val}(x) + \mathrm{val}(y)$,
3. $\mathrm{val}(x + y) \geqslant \min\{\mathrm{val}(x), \mathrm{val}(y)\}$, with equality when $\mathrm{val}(x) \neq \mathrm{val}(y)$.

The proof of equality can be referred to [1]. If $\mathrm{val}(a) = 0, \forall a \in K$, val is said to be a *trivial* valuation on K. If we restrict the domain to $K^\times$, the image of val is an additive subgroup of $\mathbf{R}$ called the *value group* Γ_{val} of (K, val). An example is Puiseux series field $\mathbf{C}\{\{t\}\}$ with valuation taking the least exponent.

Definition 2.12. Let (K, val) be a valuation field. *Tropicalization of points* in K^n is defined by a mapping:

$$\mathrm{trop} : K^n \to \mathbf{T}^n : (x_i) \mapsto (-\mathrm{val}(x_i)), i = 1, \ldots, n.$$

Let $f = \sum_{\mathbf{u} \in U \subset \mathbf{N}^n} c_{\mathbf{u}} x^{\mathbf{u}}$ be a classical polynomial in $K[x_1, \ldots, x_n]$, where $U := \{\mathbf{u} \in \mathbf{N}^n : c_{\mathbf{u}} \neq 0\}$. The *tropicalization of* f is the piecewise linear function $\mathrm{trop}(f) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ defined as:

$$\mathrm{trop}(f) = \bigoplus_{\mathbf{u} \in U \subset \mathbf{N}^n} (-\mathrm{val}(c_{\mathbf{u}})) \odot x^{\mathbf{u}}$$

The following theorem proofed by Kapranov establishes a connection between classical hypersurfaces over K and tropical hypersurfaces in $\mathbf{R}^n$.

Theorem 2.13. ([3]) *Assume that K is algebraically closed with a nontrivial valuation. f is defined as definition 2.12. Then tropical hypersurface defined by $trop(f)$ and the closure in Euclidean space $\mathbf{R}^n$ of tropicalization of classical algebraic hypersurface $V(f)$ conicide:*

$$V_{\mathbf{R}^n}(trop(f)) = \overline{trop(V(f))}$$

Remark 2.14. In this study, we work over a possibly not algebraically closed field K with a nontrivial valuation val.

2.3 Related polyhedral geometry

Definition 2.15. An intersection of finite closed half-spaces is called a *polyhedron*. Thus a polyhedron P is:

$$P := \{x \in \mathbf{R}^n : Ax \leqslant b\}, \text{ for some} A \in \mathbf{R}^{m \times n} \text{ and } b \in \mathbf{R}^m.$$

Definition 2.16. A *face* of a polyhedron P induced via a linear form $\mu \in (\mathbf{R}^n)^\vee$ is defined as:

$$face_\mu(P) := \{x \in P : x \cdot \mu \leqslant y \cdot \mu, \forall y \in P\}.$$

A face F of P is called *lower face* if for an arbitrary $x \in F$ and all $\alpha > 0$, $x - (0, \ldots, 0, \alpha) \notin P$.

Definition 2.17. A collection Σ of polyhedra is called *polyhedral complex* if it satisfies:

1. If $P \in \Sigma$, then all its faces are in Σ.
2. If $P, Q \in \Sigma$ and $P \cap Q \neq \varnothing$, then $P \cap Q$ is a face of P as well as Q.

Remark 2.18. The polyhedron σ in Σ is called a *cell* of the complex. The *support* of Σ is a collection of points from all cells, which is denoted as $|\Sigma|$.

Definition 2.19. A *subdivision* of a polytope $P \subset \mathbf{R}^n$ is a polyhedral complex $\mathrm{SD}(P)$ if all cells are bounded and $|\mathrm{SD}(P)| = P$. $\mathrm{SD}(P)$ is *regular* if and only if it is induced by a polytope $P' \subset \mathbf{R}^{n+1}$ and satisfies:

1. $\pi(P') = P$, where $\pi : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$, $(x_1 \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$.
2. $\mathrm{SD}(P) = \{\pi(F) : F \text{ is a lower face of } P'\}$.

Definition 2.20. Let $f = \text{“}\sum_{\mathbf{u}\in U\subset\mathbf{N}^n} c_{\mathbf{u}}x^{\mathbf{u}}\text{”} \in \Gamma_{\mathrm{val}}[x_1, \ldots, x_n]$, where $U := \{\mathbf{u} \in \mathbf{N}^n : c_{\mathbf{u}} \neq -\infty\}$. *Newton polytope* of f is defined as the convex hull of U:

$$\mathrm{Newt}(f) := \mathrm{conv}(U).$$

2.4 The Structure Theorem

Theorem 2.21. ([1]) *Let $f =$ “ $\sum_{\mathbf{u}\in U\subset\mathbf{N}^n} c_{\mathbf{u}}x^{\mathbf{u}}$ ” be a tropical polynomial in n variables with coefficients in Γ_{val}, where $U := \{\mathbf{u} \in \mathbf{N}^n : c_{\mathbf{u}} \neq -\infty\}$. $V_{\mathbf{R}^2}(f)$ is connected and is the support of a polyhedral complex in $\mathbf{R}^n$, which is dual to regular subdivision of* $\mathrm{Newt}(f)$. *This regular subdivision is induced by U on the lattice points of* $\mathrm{Newt}(f)$.

Definition 2.22. For a given tropical $f \in \Gamma_{\mathrm{val}}[x, y]$. An *edge* of $V_{\mathbf{R}^2}(f)$ is dual to a 1-dimensional cell in the regular subdivision described above. A *node* of $V_{\mathbf{R}^2}(f)$ is dual to a 2-dimensional cell in the regular subdivision described above, which is the point in $V_{\mathbf{R}^2}(f)$ whose valence is more than two, i.e., it lies in more than two edges. The collection of all nodes of $V_{\mathbf{R}^2}(f)$ is denoted as $\mathrm{Node}(f)$.

Definition 2.23. For given tropical polynomials $f, g \in \Gamma_{\mathrm{val}}[x, y]$, let Σ_f and Σ_g be polyhedral complexes satisfying $|\Sigma_f| = V_{\mathbf{R}^2}(f)$ and $|\Sigma_g| = V_{\mathbf{R}^2}(g)$, respectively. $V_{\mathbf{R}^2}(f)$ and $V_{\mathbf{R}^2}(g)$ *intersect transversely* at $\mathbf{w}$ if there exist unique $\sigma_f \in \Sigma_f$ and $\sigma_g \in \Sigma_g$ such that $\mathbf{w} \in \mathrm{relint}(\sigma_f) \cap \mathrm{relint}(\sigma_g)$ and $\dim(\sigma_f + \sigma_g) = 2$.

Definition 2.24. ([1]) The *stable intersection* of $V_{\mathbf{R}^2}(f)$ and $V_{\mathbf{R}^2}(g)$ is defined as

$$V_{\mathbf{R}^2}(f) \cap_{st} V_{\mathbf{R}^2}(g) := \lim_{\varepsilon\to 0} V_{\mathbf{R}^2}(f) \cap (\varepsilon\mathbf{v} + V_{\mathbf{R}^2}(g)),$$

where $\mathbf{v}$ is an arbitrary vector in $\mathbf{R}^2$.

Remark 2.25. In $\mathbf{TP}^2$, we only consider the stable intersection of finite parts and give a similar definition.

3 Main Results

We demonstrate which points can belong to stable intersection of finite parts of two tropical projective plane curves in $\mathbf{TP}^2$.

Theorem 3.1. *Let F, G be tropical homogeneous polynomials in $\Gamma_{\mathrm{val}}[x_1, x_2, x_3]$. Fix an affine patch U_3 and let the dehomogenizations of F, G be f, g respectively and a map be $\tau : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{TP}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 : x_2 : 0)$. Then we have*

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{TP}^2}(F)^{\mathrm{fin}} \cap_{st} V_{\mathbf{TP}^2}(G)^{\mathrm{fin}} =& \tau(\mathrm{TI}(f, g)) \cup \tau(V_{\mathbf{R}^2}(f) \cap \mathrm{Node}(g)) \\ &\cup \tau(V_{\mathbf{R}^2}(g) \cap \mathrm{Node}(f)) \cup \mathrm{FP}_{\mathbf{TP}^2}(F, G). \end{aligned}$$

Here $\mathrm{TI}(f,g) := \{p \in \mathbf{R}^2 : V_{\mathbf{R}^2}(f)$ *and* $V_{\mathbf{R}^2}(g)$ *intersect transversally at* $p\}$. $\mathrm{Node}(f), \mathrm{Node}(g)$ *are node sets of* $V_{\mathbf{R}^2}(f), V_{\mathbf{R}^2}(g)$ *respectively.* $\mathrm{FP}_{\mathbf{TP}^2}(F,G) := \{(-\infty : -\infty : 0), (-\infty : 0 : -\infty), (0 : -\infty : -\infty)\} \cap V_{\mathbf{TP}^2}(F)^{\mathrm{fin}} \cap V_{\mathbf{TP}^2}(G)^{\mathrm{fin}}$.

We define that a point in the torus of $\mathbf{TP}^2$ is Γ_{val}-rational if its coordinates can be expressed as the product of an element from Γ_{val} and $\frac{1}{m}, m \in \mathbf{Z}_{>0}$. We show that the stable intersection points in theorem 3.1 with finite coordinates are Γ_{val}-rational.

Theorem 3.2. *If* $V_{\mathbf{TP}^2}(F)^{\mathrm{fin}} \cap_{st} V_{\mathbf{TP}^2}(G)^{\mathrm{fin}} \backslash \partial\mathbf{TP}^2 \neq \varnothing$, *then*

$$p \in V_{\mathbf{TP}^2}(F)^{\mathrm{fin}} \cap_{st} V_{\mathbf{TP}^2}(G)^{\mathrm{fin}} \backslash \partial\mathbf{TP}^2 \implies p \text{ is } \Gamma_{\mathrm{val}}\text{-rational.}$$

Moreover, $p = \frac{1}{i_p}(p_x : p_y : 0), p_x, p_y \in \Gamma_{\mathrm{val}}$ *where* i_p *is its intersection multiplicity.*

References

[1] Maclagan, D., Sturmfels, B.: Introduction to Tropical Geometry. Japanese Translators: Ishikawa, G., Kajiwara, T., Kobayashi, M., Maeno, T. Maruzen Publishing Co., Ltd. (2023)

[2] Mikhalkin, G., Rau, J.: Tropical Geometry. Available at: https://math.uniandes.edu.co/j.rau/downloads/main.pdf (2018)

[3] Einsiedler, M., Kapranov, M., Lind, D.: Non-Archimedean amoebas and tropical varieties. J. Reine Angew. Math. **601**, 139–157 (2006)

[4] Kajiwara, T.: Tropical Toric Geometry. Contemporary Mathematics, **460**, 197–208 (2008)

[5] Richter-Gebert, J., Sturmfels, B., Theobald, T.: First Steps in Tropical Geometry. Contemporary Mathematics. **377**, 289–318 (2005)

[6] Kobayashi, M.: Linear Algebra and Regular Polyhedra. Asakura Shoten (2012)

[7] Cavalieri, R., Markwig, H., Ranganathan, D.: Tropical and Logarithmic Methods in Enumerative Geometry. Birkhäuser (2023)

[8] Ziegler, G.M.: Lectures on Polytopes. Springer, GTM. **152** (2007)

[9] Rimmasch, G.: Complete Tropical Bézout's Theorem and Intersection Theory in the Tropical Projective Plane. Doctoral dissertation, Brigham Young University (2008)

[10] Mikhalkin, G.: Enumerative Tropical Algebraic Geometry in $\mathbf{R}^2$. J. Am. Math. Soc. **18**(2), 313–377 (2005)

[11] Nakajima, Y.: Minimal Tropical Basis for Bergman Fan. Master's thesis, Tokyo Metropolitan University (2019)

[12] Song, J.: Galois quotients of metric graphs and invariant linear systems. Master's thesis, Tokyo Metropolitan University (2019)

[13] Ito, T.: Tropical Intersection Theory of Binomial Surfaces in the 3-Dimensional Projective Space. Yokohama Math. J. **68**, 1–44 (2022)

$(3,4)$-カスプ辺の内在的な不変量

横浜国立大学　大学院理工学府　数物・電子情報系理工学専攻
服部　祐樹 (Yuki HATTORI) *

概要

本稿の内容は，本田淳史氏 (横浜国立大学) との共同研究に基づく．カスプ辺は波面に頻繁に現れる特異点である．カスプ辺に対して定義される特異曲率はカスプ辺の凸性を測る内在的不変量であり，ガウス・ボンネ型公式にも用いられる．しかし，$(3,4)$-カスプ辺と呼ばれる特異点に対しては特異曲率は定義されない．本稿では $(3,4)$-カスプ辺に対して $(3,4)$-積曲率という内在的不変量を導入し，$(3,4)$-カスプ辺の凸性との関係や $(3,4)$-カスプ辺の等長変形定理を紹介する．

1　導入

Σ を 2 次元多様体とし，$f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ を写像としたとき，$p\in\Sigma$ が f の**特異点**であるとは，f が p ではめ込みでないときをいう．このような特異点をもつ曲面のクラスとして，曲面上の任意の点で単位法ベクトル場がとれるような**フロンタル**と呼ばれるものがあり，さらにフロンタルの一種として，**波面 (フロント)** と呼ばれるクラスが存在する．この “波面” に頻繁に現れる特異点として，**カスプ辺**と**ツバメの尾**が存在する．ここではカスプ辺を紹介する．

定義 1 (カスプ辺)．C^∞ 級写像 $f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ に対して，$p\in\Sigma$ が**カスプ辺**であるとは，写像芽 $f:(\Sigma,p)\to(\boldsymbol{R}^3,f(p))$ が原点での写像芽

$$\boldsymbol{R}^2\ni(u,v)\mapsto(u^2,u^3,v)\in\boldsymbol{R}^3$$

と $\mathcal{A}$-同値となるときをいう．

ここで，2 つの C^∞ 級写像芽 $f:(\Sigma,p)\to(\boldsymbol{R}^3,f(p))$ と $\bar{f}:(\bar{\Sigma},\bar{p})\to(\boldsymbol{R}^3,\bar{f}(\bar{p}))$ が $\mathcal{A}$-同値であるとは，2 つの微分同相写像芽 $\varphi:(\Sigma,p)\to(\bar{\Sigma},\bar{p})$ と $\Phi:(\boldsymbol{R}^3,f(p))\to(\boldsymbol{R}^3,\bar{f}(\bar{p}))$ が存在して，

$$\Phi\circ f\circ\varphi^{-1}=\bar{f}$$

が成り立つときをいう．

以上のカスプ辺に対しては，以下の Gauss-Bonnet 型公式が成り立つことが知られている．

定義 2 (Gauss-Bonnet 型公式 [4, 8])．Σ をコンパクトで向きづけ可能な 2 次元多様体，$f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ を波面とし，特異点はカスプ辺とツバメの尾のみを許容するとする．このとき，ガウス曲率 K，符号なし面積要素 dA，f の特異点集合 $S(f)$，特異曲率 κ_s，$S(f)$ の線素 ds，Σ のオイラー数 $\chi(\Sigma)$ を用

* E-mail:hattori-yuki-by@ynu.jp

いて，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} KdA + \frac{1}{\pi}\int_{S(f)} \kappa_s ds = \chi(\Sigma)$$

が成り立つ．

左辺に現れる κ_s はカスプ辺において定義される**特異曲率**と呼ばれる内在的な不変量であり (Saji-Umehara-Yamada [8])，カスプ辺の形状に影響を与える:

事実 3 ([8])**.** $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ を $p \in \Sigma$ でカスプ辺をもつとする．このとき p において特異曲率が正ならば，f の像はその点の近傍で凸状である．逆に，特異曲率が負ならば，f の像はその点の近傍で鞍状である．



図 1　左：$\kappa_s > 0$ のカスプ辺，　右：$\kappa_s < 0$ のカスプ辺．

ここで $(3,4)$-カスプ辺の定義を紹介する．

定義 4 ($(3,4)$-カスプ辺)．C^∞ 級写像 $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ に対して，$p \in \Sigma$ が $(3,4)$-**カスプ辺**であるとは，写像芽 $f : (\Sigma, p) \to (\boldsymbol{R}^3, f(p))$ が原点での写像芽

$$\boldsymbol{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (u^3, u^4, v) \in \boldsymbol{R}^3$$

と $\mathcal{A}$-同値となるときをいう．

この $(3,4)$-カスプ辺に対しては特異曲率を符号を込めて定義することができない．そのため，特異曲率の正負を用いて $(3,4)$-カスプ辺の形状は特徴づけられない．しかし $(3,4)$-カスプ辺にも，カスプ辺と同様に凸や鞍状のものが存在する．本稿では $(3,4)$-カスプ辺に対して $(3,4)$-積曲率という内在的不変量を導入し，$(3,4)$-カスプ辺の凸性との関係や $(3,4)$-カスプ辺の等長変形定理を紹介する．

2　定義

まずはじめにフロンタルと波面 (フロント) について定義を紹介する．

定義 5 (フロンタル，波面 (フロント))．$f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ を写像とする．

- f が**フロンタル**であるとは，2 次元球面 $\boldsymbol{S}^2$ への C^∞ 級写像 $\nu : \Sigma \to \boldsymbol{S}^2$ で，Σ 上の任意の点 $q \in \Sigma$ と，その点での接空間上の任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in T_q\Sigma$ に対して

$$\langle df_q(\boldsymbol{v}), \nu(q) \rangle = 0$$

を満たすものが存在するときをいう．このような ν を f に沿った**単位法ベクトル場**という．

- $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ をフロンタル，$\nu : \Sigma \to \boldsymbol{S}^2$ を f の単位法ベクトル場とする．ここで，f が**波面 (フロント)** であるとは，$L := (f, \nu) : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3 \times \boldsymbol{S}^2$ がはめ込みであるときをいう．

以下では $S(f)$ でフロンタル $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ の特異点集合を表し，$S(f)$ が正則曲線であることを仮定する．さらに，$S(f)$ 上の点 p は階数が 1 の特異点であると仮定する．つまり $\mathrm{rank}(df)_p = 1$ が成り立つ．このとき，$S(f)$ を**特異曲線**と呼び，その接ベクトルを**特異ベクトル**，特異ベクトルの定める 1 次元ベクトル空間を**特異方向**という．さらに，$df(\boldsymbol{v}) = 0$ を満たす零でない接ベクトル $\boldsymbol{v} \in T_p\Sigma$ を**退化ベクトル**，退化ベクトルの定める方向を**退化方向**という．さらに，階数が 1 の特異点に対してはその近傍において定義される退化ベクトル場 η が存在する．

本稿では，Martins-Saji-Santos-Teramoto [5] で導入された，カスプ辺や $(3,4)$-カスプ辺をより一般化したクラスである m-type edge を基にして議論を行う．

定義 6 (m-type edge [5]). m を正の整数とする．C^∞ 級写像 $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ に対して，$p \in \Sigma$ が **m-type edge** であるとは，写像芽 $f : (\Sigma, p) \to (\boldsymbol{R}^3, f(p))$ が原点での写像芽

$$\boldsymbol{R}^2 \ni (u, v) \mapsto (u^m, u^{m+1}a(u, v), v) \in \boldsymbol{R}^3$$

と $\mathcal{A}$-同値となるような C^∞ 級関数 $a(u, v)$ が存在するときをいう．

注意 7. $m = 2$ のとき，つまり 2-type edge は一般化されたカスプ辺と呼ばれ，Honda-Naokawa-Saji-Umehara-Yamada [2] により導入されている．特に，カスプ辺は 2-type edge であり，$(3,4)$-カスプ辺は 3-type edge となる．

さらに，m-type edge に対して，以下の退化ベクトル場に関する事実が示されている．

事実 8 ([5])**.** $S(f)$ をフロンタル $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ の特異点集合で正則曲線であるとし，ξ を $S(f)$ の方向で $\xi \notin \ker(df_p)$ とする．このとき，f が $p \in S(f)$ 上で *m-type edge* を持つことと，

$$\eta^i f(q) = 0 \quad (q \in S(f), i = 2, \ldots, m-1) \tag{2.1}$$

$$\xi f(p) \text{ と} \eta^m f(p) \text{ が線形独立} \tag{2.2}$$

を満たす退化ベクトル場 η が存在することは同値である．ここで，ξf は f の ξ 方向での微分を表し，$\eta^m f$ は f の η 方向での m 階微分を表す．

次に，不変量とその不変量の内在性を定義する．

定義 9 (不変量). $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ をフロンタルとし，$p \in \Sigma$ とする．このとき，f と p により定まる値 $J(f, p)$ が**不変量**であるとは，$\boldsymbol{R}^3$ の等長写像 T と Σ の微分同相写像 ϕ に対して，

$$|J(f, p)| = |J(T \circ f \circ \phi^{-1}, \phi(p))|$$

を満たすときをいう．

定義 10 (等長的，内在的). $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$, $\bar{f} : \bar{\Sigma} \to \boldsymbol{R}^3$ をそれぞれフロンタルとし，$p \in \Sigma$ とする．

- f が $\bar{f}$ と**等長的**であるとは，ある微分同相写像 $\phi : \Sigma \to \bar{\Sigma}$ が存在して，

$$\phi^* ds^2_{\bar{f}} = ds^2_f$$

を満たすときである．ここで，ϕ^* は ϕ による引き戻しを表す．

- 不変量 $J(f,p)$ が**内在的**であるとは，f と等長的な任意のフロンタル $\bar{f}$ に対して，

$$|J(f,p)| = |J(\bar{f},\phi(p))|$$

が成り立つときをいう．

ここで，Martins-Saji-Santos-Teramoto [5] により導入された m-type edge に対する不変量である $(m,m+i)$-カスプ的曲率を紹介する．

定義 11 ([5])．フロンタル $f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ が $p\in\Sigma$ で m-type edge をもつとする．このとき，$i=1,2,\ldots,m-1$ に対して $(m,m+i)$**-カスプ的曲率** $\omega_{m,m+i}$ を

$$\omega_{m,m+i}(p) := \frac{\|\xi f\|^{(m+i)/m}\det(\xi f,\eta^m f,\eta^{m+i}f)}{\|\xi f\times\eta^m f\|^{(2m+i)/m}}(p) \tag{2.3}$$

で定める．このとき，$\omega_{m,m+i}$ は (2.1), (2.2) を満たす正に向きづけられたベクトル場の組の取り方に依らない．

注意 12. $m=2$ のとき，つまり $(2,3)$-カスプ的曲率 $\omega_{2,3}$ はカスプ的曲率 κ_c として Martins-Saji-Umehara-Yamada [6] により導入されている．

さらに，m-type edge に対する (2.1), (2.2) を満たすベクトル場の組 (ξ,η) を用いて，新たに符号付き極限法曲率を定義する．

定義 13 (符号付き極限法曲率)．$f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ を $p\in\Sigma$ で m-type edge，$S(f)$ を f の特異点集合で Σ 内の正則曲線，ξ を $S(f)$ に接するベクトル場とし，η を (2.1), (2.2) を満たす退化ベクトル場で，ベクトル場の組 (ξ,η) が正に向きづけられるとする．このとき，$S(f)$ 上の点 p に対して，

$$\tilde{\kappa}_\nu(p) := \frac{\det(\xi f,\eta^m f,\xi^2 f)}{\|\xi f\times\eta^m f\|\|\xi f\|^2}(p) \tag{2.4}$$

で定める．この $\tilde{\kappa}_\nu$ を**符号付き極限法曲率**と呼ぶ．

このとき，以下の命題が成り立つ．

命題 14. 符号付き極限法曲率 $\tilde{\kappa}_\nu$ は正に向きづけられたベクトル場の組 (ξ,η) の取り方によらない．

以上のことから，符号付き極限法曲率 $\tilde{\kappa}_\nu$ も不変量である．

3 主定理

3.1 $(m,m+i)$-積曲率

まず初めに，m-type edge に対して取ることのできる便利な座標系として，**adapted coordinate system** を定義する．

命題 15 (Adapted coordinate system)**.** $f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ を $p\in\Sigma$ で *m-type edge* あるフロンタルとする．このとき，以下を満たす局所座標系 (u,v) で $p=(0,0)$ となるものが存在する．

(1) 特異点集合を $S(f)$ とすると，$S(f)=\{(u,0)\}$.
(2) 退化ベクトル場を η とすると，$\eta=\partial/\partial v$ で，u 軸上で $f_v(u,0)=f_{v^2}(u,0)=\cdots=f_{v^{m-1}}(u,0)=\boldsymbol{0}$.
(3) ν を f の単位法ベクトル場とすると，$\{f_u(u,0), f_{v^m}(u,0), \nu(u,0)\}$ が正規直交基底となる．

カスプ辺の場合，adapted coordinate system の存在は [8] で示された．定義 11 で定められた $(m,m+i)$-カスプ的曲率 $\omega_{m,m+i}$ と定義 13 で定められた符号付き極限法曲率 $\tilde{\kappa}_\nu$ を用いて，$(m,m+i)$-積曲率を以下で定義する．

定義 16 ($(m,m+i)$-積曲率)．$f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ を $p\in\Sigma$ で m-type edge をもつとし，$i=1,2,\ldots,m-1$ に対して $\omega_{m,m+i}$ を $(m,m+i)$-カスプ的曲率，$\tilde{\kappa}_\nu$ を符号付き極限法曲率とする．このとき，

$$\Pi_{m,m+i}(p):=\tilde{\kappa}_\nu(p)\omega_{m,m+i}(p)$$

と定める．この $\Pi_{m,m+i}$ を $(m,m+i)$-**積曲率**と呼ぶ.

定め方から，積曲率 $\Pi_{m,m+i}$ も不変量であることがわかる．さらに，積曲率 $\Pi_{m,m+i}$ の内在性について以下の定理が得られる．

定理 17. *$f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ を $p\in\Sigma$ で m-type edge をもつとし，$\tilde{\kappa}_\nu$ を符号付き極限法曲率，$\omega_{m,m+i}$ を $(m,m+i)$-カスプ的曲率，$\Pi_{m,m+i}:=\tilde{\kappa}_\nu\omega_{m,m+i}$ を $(m,m+i)$-積曲率とする．このとき，*

(1) $\Pi_{m,m+1}(p)$ は内在的な不変量である．
(2) $j=2,\ldots,m-1$ に対して，$\Pi_{m,m+1}(p)=\cdots=\Pi_{m,m+j-1}(p)=0$ であるならば，$\Pi_{m,m+j}(p)$ は内在的な不変量となる．

3.2 m-type edge の凸性

導入ではカスプ辺の形状について，特異曲率の正負によって凸性が定まることを述べた．より一般に，m が偶数の場合には特異曲率を符号を込めて定義することができ，カスプ辺の場合と同様に特異曲率の正負によって m-type edge の形状を特徴づけることができる．以下では m が奇数の場合の m-type edge の凸性について得られた結果を述べる．

今，$(m,m+1)$-積曲率 $\Pi_{m,m+1}$ とガウス曲率 K の関係式として adapted coordinate system (u,v) を用いて

$$v^{m-1}K(u,v)=\frac{(m-1)!}{m}\Pi_{m,m+1}(u)+v\Phi(u,v)$$

が成り立つ．ここで Φ は C^∞ 級関数とする．よって，$v\neq 0$ では

$$K(u,v)=\frac{(m-1)!}{m}\frac{\Pi_{m,m+1}(u)}{v^{m-1}}+\frac{1}{v^{m-2}}\Phi(u,v)$$

が成り立つ．ここで，m が奇数であることから $(m-1)$ は偶数となる．よって，特異点集合の近傍においてガウス曲率 K の正負は $\Pi_{m,m+1}$ の正負によってのみ定まる．このことから，m が奇数の場合の m-type edge の凸性について以下の定理が得られる．

定理 18. m を奇数とし，$f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ を $p\in\Sigma$ で m-*type edge* をもつとする，また，$\Pi_{m,m+1}$ を $(m,m+1)$-積曲率とする．このとき，$\Pi_{m,m+1}(p)>0$ ならば，ガウス曲率 K は p で $+\infty$ に発散する．とくに，f の像はその点の近傍で凸状である．また，$\Pi_{m,m+1}(p)<0$ ならば，ガウス曲率 K は p で $-\infty$ に発散する．とくに，f の像はその点の近傍で鞍状である．

特に，$(3,4)$-カスプ辺は 3-type edge であることから，$\Pi_{3,4}$ の正負によって形状が特徴づけられることがわかる．

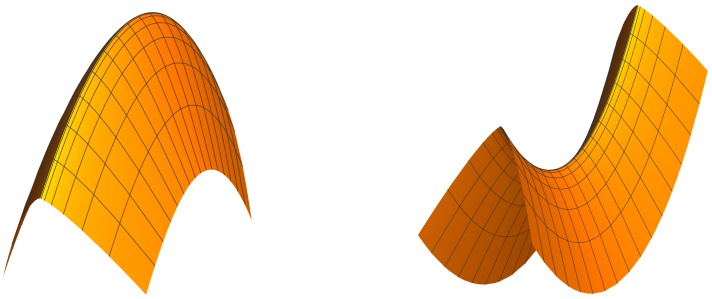


図 2　左：$\Pi_{3,4}>0$ のカスプ辺，　右：$\Pi_{3,4}<0$ のカスプ辺.

3.3　m-type edge におけるガウス曲率と平均曲率の有界性

さらに，$(m,m+i)$-積曲率 $\Pi_{m,m+i}$ を用いることでガウス曲率 K の有界性，$(m,m+i)$-カスプ的曲率 $\omega_{m,m+i}$ を用いることで平均曲率 H の有界性のそれぞれの条件が得られる．

$f:\Sigma\to\boldsymbol{R}^3$ を $p\in\Sigma$ で m-type edge をもつとし，(u,v) として adapted coordinate system をとると，f の第一基本量 E,F,G と第二基本量 L,M,N の計算から $\tilde{K}:=v^{m-1}K,\tilde{H}=v^{m-1}H$ とすると，

$$\tilde{K}(u,0)=\frac{(m-1)!}{m}\Pi_{m,m+1}(u),\quad \tilde{H}(u,0)=\frac{(m-1)!}{2m}\omega_{m,m+1}(u)$$

が成り立つ．ここで，$\tilde{K},\tilde{H}$ を特異点集合の周りで Taylor 展開することによりそれぞれ，$j=1,\dots,m-2$ に対して C^∞ 級関数 $\Phi_j(u),\varphi_j(u),\Psi(u,v),\psi(u,v)$ を用いて

$$\begin{aligned}
\tilde{K}(u,v)&=\frac{(m-1)!}{m}\Pi_{m,m+1}(u)+v\Phi_1(u)+v^2\Phi_2(u)+\cdots+v^{m-2}\Phi_{m-2}(u)+v^{m-1}\Psi(u,v)\\
\tilde{H}(u,v)&=\frac{(m-1)!}{2m}\omega_{m,m+1}(u)+v\varphi_1(u)+v^2\varphi_2(u)+\cdots+v^{m-2}\varphi_{m-2}(u)+v^{m-1}\psi(u,v)\\
&\Longleftrightarrow\\
K(u,v)&=\frac{(m-1)!}{m}\frac{\Pi_{m,m+1}(u)}{v^{m-1}}+\frac{\Phi_1(u)}{v^{m-2}}+\frac{\Phi_2(u)}{v^{m-3}}+\cdots+\frac{\Phi_{m-2}(u)}{v}+\Psi(u,v)\\
H(u,v)&=\frac{(m-1)!}{2m}\frac{\omega_{m,m+1}(u)}{v^{m-1}}+\frac{\varphi_1(u)}{v^{m-2}}+\frac{\varphi_2(u)}{v^{m-3}}+\cdots+\frac{\varphi_{m-2}(u)}{v}+\psi(u,v)
\end{aligned}$$

と表せる．以上より，K の有界性は，$\Pi_{m,m+1}(u)=\Phi_1(u)=\cdots=\Phi_{m-2}(u)=0$ と同値であり，H の有界性は，$\omega_{m,m+1}(u)=\varphi_1(u)=\cdots=\varphi_{m-2}(u)=0$ と同値であることがわかる．ここで計算か

ら特異点集合 u 軸上で，Φ_j については $\Pi_{m,m+1}(u) = \cdots = \Pi_{m,m+j}(u) = 0$ であるならば

$$\Phi_j(u) = \frac{n!}{{}_{n+1+j}C_{j+1}\, j!}\Pi_{m,m+j+1}(u)$$

が成り立ち，φ_j については $\omega_{m,m+1}(u) = \cdots = \omega_{m,m+j}(u) = 0$ であるならば

$$\varphi_j(u) = \frac{n!}{2_{n+1+j}C_{j+1}\, j!}\omega_{m,m+j+1}(u)$$

であることから，以下の定理が導かれる．

定理 19. $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ を $p \in \Sigma$ で *m-type edge* をもつとし，$\tilde{\kappa}_\nu$ を符号付き極限法曲率，$i = 1, \ldots, m-1$ に対して $\omega_{m,m+i}$ を $(m, m+i)$-カスプ的曲率，$\Pi_{m,m+i} := \tilde{\kappa}_\nu \omega_{m,m+i}$ を $(m, m+i)$-積曲率とする．さらに，f のガウス曲率を K，平均曲率を H とする．このとき，

(1) K が特異点集合の近傍で有界であることと，特異点集合上で $\Pi_{m,m+1} = \cdots = \Pi_{m,2m-1} = 0$ であることは同値である．
(2) H が特異点集合の近傍で有界であることと，特異点集合上で $\omega_{m,m+1} = \cdots = \omega_{m,2m-1} = 0$ であることは同値である．

4 主定理の応用

$(m, m+i)$-積曲率を用いることで，m-type edge の等長変形定理を考えることができる．特に，$(3,4)$-カスプ辺においては内在的な判定条件を用いることで等長変形によって $(3,4)$-カスプ辺を保つことがわかる．

4.1 $(3,4)$-カスプ辺の内在的な判定条件

$(3,4)$-カスプ辺は 3-type edge であり，波面でもあることから以下の判定条件が成り立つ．

定理 20. フロンタル $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が $p \in \Sigma$ で $(3,4)$-カスプ辺であることと，f が波面であり，p が *3-type edge* であることが同値である．

さらに内在的な判定条件を求めるために，第一種特異点と，m-type edge の代わりとなる退化次数 n 特異点の定義を紹介する．

定義 21 (第一種特異点). 特異点 $p \in S(f)$ が**第一種特異点**であるとは，p において特異方向と退化方向が異なるとき，つまり退化方向 $\langle \eta_p \rangle_{\boldsymbol{R}} = \ker(df)_p$ が特異方向 $T_pS(f)$ と異なるときをいう．

定義 22 (退化次数 n 特異点). n を正の整数，$f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ をフロンタル，ν を f の単位法ベクトル場とする．ここで，f の特異点 p に対して p の座標近傍 $(U; u, v)$ 上で定義された符号付き面積密度関数を $\lambda = \det(f_u, f_v, \nu)$ とする．ここで，$p \in \Sigma$ が**退化次数 n 特異点**であるとは，$\operatorname{rank}(df)_p = 1$ であり，p の近傍における C^∞ 級関数 $\hat{\lambda}, \alpha$ で，

- $\lambda = \alpha \hat{\lambda}^n$

- $(\hat{\lambda}_u, \hat{\lambda}_v)(p) \neq (0,0)$
- $\alpha(p) \neq 0$

を満たすものが存在するときをいう．

注意 23. $n = 1$ のとき，つまり退化次数 1 特異点は一般に**非退化特異点**と呼ばれる特異点である．ここで $p \in \Sigma$ が非退化特異点であるとは，$(\lambda_u, \lambda_v)(p) \neq (0,0)$ が成り立つときをいう．

ここで，第一種退化次数 n 特異点と $m(= n+1)$-type edge の関係性として，以下が成り立つ．

系 24. n を正の整数，$f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ をフロンタル，$p \in \Sigma$ を f の特異点とする．このとき，p が第一種退化次数 n 特異点であることと，p が $(n+1)$-*type edge* であることは同値となる．

このことから，3-type edge であるという条件は第一種退化次数 2 特異点という内在的な条件に置き換えられる．さらに，Martins-Saji-Santos-Teramoto [5] によって，以下の事実が示された．

事実 25. $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ を $p \in \Sigma$ で m-*type edge* をもつとする．このとき，f が p で波面であることと，f の $(m, m+1)$-カスプ的曲率 $\omega_{m,m+1}$ が零でない，つまり $\omega_{m,m+1}(p) \neq 0$ であることが同値である

さらに，フロンタルがジェネリックであることの定義を述べる．

定義 26. フロンタル $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が**ジェネリック**であるとは，f の符号付き極限法曲率 $\tilde{\kappa}_\nu$ が特異点集合上で零でないときをいう．

このことを用いることで，以下の $(3,4)$-カスプ辺の内在的な判定条件が得られる．

系 27 ($(3,4)$-カスプ辺の内在的な判定条件)**.** ジェネリックなフロンタル $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ が $p \in \Sigma$ で $(3,4)$-カスプ辺であることと，$(3,4)$-積曲率 $\Pi_{3,4}$ が p で零でない，つまり $\Pi_{3,4}(p) \neq 0$ であり，p が第一種退化次数 2 特異点であることが同値である．

さらに，内在的な判定条件の存在から以下が成り立つ．

系 28. $f, g : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ をジェネリックなフロンタルとするこのとき，f と g が等長的であるならば，

$$f \text{ が } (3,4)\text{-カスプ辺} \iff g \text{ が } (3,4)\text{-カスプ辺}$$

が成り立つ．

4.2 m-type edge の等長変形定理

Honda-Naokawa-Saji-Umehara-Yamada [2] で一般化されたカスプ辺 (2-type edge) の場合に等長変形定理が与えられている．ここではその等長変形定理を，2 以上の整数 m に対して m-type edge に拡張して与える．

定理 29 (m-type edge の等長変形定理)**.** $f : \Sigma \to \boldsymbol{R}^3$ を $p \in \Sigma$ で m-*type edge* を持つ実解析的かつジェネリックなフロンタル，$\gamma(t)$ を $p = \gamma(0)$ を通る特異曲線，$|\kappa_s(p)|$ を特異曲率の絶対値，$\Gamma(t)$ を

実解析的な正則曲線で曲率関数 κ_Γ が $\kappa_\Gamma(0) > |\kappa_s(p)|$ を満たすとする．このとき，p の近傍 U と p で *m-type edge* を持つ U 上の実解析的なフロンタル g_Γ で以下の条件を満たすものが存在する．

(1) g_Γ は f と等長的であり，
(2) $g_\Gamma \circ \gamma$ の像は Γ の像と一致し，
(3) g_Γ の極限法曲率は零でない．

さらに，

(i) そのような g_Γ は 4 つ存在し，
(ii) f が $(3,4)$-カスプ辺であるならば g_Γ が $(3,4)$-カスプ辺となる．

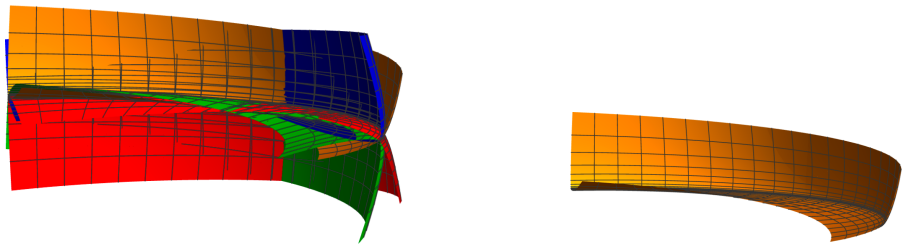


図 3　第一基本形式と特異曲線を共有する 4 つの $(3,4)$-カスプ辺 g_Γ

注意 30. この等長変形定理は，Naokawa-Umehara-Yamada [7] によるカスプ辺の場合，Honda-Naokawa-Umehara-Yamada [3]，Honda-Naokawa-Saji-Umehara-Yamada [2] による一般化されたカスプ辺 (2-type edge) の場合に示された定理の一般化となっている．特に，定理 29 の (ii) に関して，[7, 3] では f が $(2,3)$-カスプ辺であるならば g_Γ が $(2,3)$-カスプ辺であることが示されている．

さらに，以上の定理 29 に対して以下が得られる．

系 31. m が偶数のとき，4 つの g_Γ の像のうち 2 つは異なる．m が奇数のとき，$|\kappa_s| \neq 0$ ならば 4 つの g_Γ の像のうち 2 つは異なる．一方で全ての像が一致するならば $|\kappa_s| = 0$ が成り立つ．

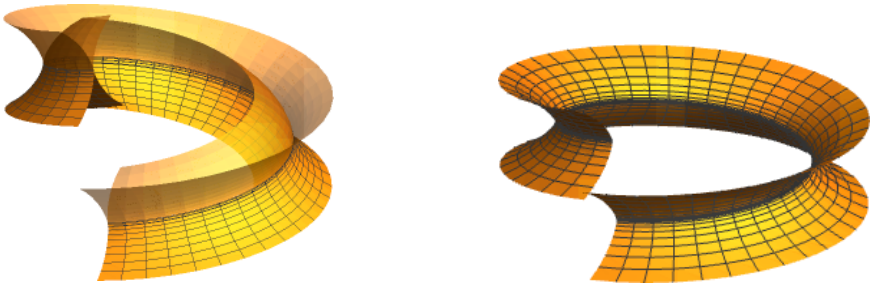


図 4　g_Γ の像 (左: m が偶数，右: m が奇数かつ $\kappa_s = 0$) (cf. [1])

参考文献

[1] Y. Hattori, A. Honda and T. Morimoto, *Bour's theorem for helicoidal surfaces with singularities*, preprint (arXiv：2310.16418).

[2] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Duality on generalized cuspidal edges preserving singular set images and first fundamental forms*, J. Singul. **22** (2020), 59–91.

[3] A. Honda, K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of wave fronts at non-degenerate singular points*, Hiroshima Math. J. **50** (2020), 269–312.

[4] M. Kosssowski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorems for C^∞-singular surfaces with limiting tangent bundle*. Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), No. 1, 19–29.

[5] L.F. Martins, K. Saji, S.P. dos Santos and K. Teramoto, *Boundedness of geometric invariants near a singularity which is a suspension of a singular curve*, Revista de Lla UMA Vol. **67**, (2024), No. 2, 475–502.

[6] L. F. Martins, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of Gaussian curvature and mean curvature near non-degenerate singular points on wave fronts*, Geometry and Topology of Manifold, Springer Proc. in Math. & Stat. **154**, 2016, Springer, 247–282.

[7] K. Naokawa, M. Umehara and K. Yamada, *Isometric deformations of cuspidal edges*, Tohoku Math. J. (2) **68** (2016), 73–90.

[8] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. Math. (2) **169** (2009), No. 2, 491–529.

特異点をもつ部分多様体の絶対全曲率

横浜国立大学大学院理工学府　数物・電子情報系理工学専攻
山内優太 (Yuta YAMAUCHI) *

概 要

本講演では $(n+r)$ 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+r}$ 内のフロンタルと呼ばれる，特異点をもつ n 次元部分多様体に対する Chern-Lashof の定理の拡張について紹介する．まず，$\boldsymbol{R}^{n+r}$ 内の許容的かつコンパクトな n 次元フロンタルに対し，その絶対全曲率がベッチ数の総和以上となることを証明する．さらに，絶対全曲率が 2 に等しく，かつ全ての特異点が第一種である場合，そのフロンタルの像は $\boldsymbol{R}^{n+r}$ 内の n 次元アファイン部分空間に含まれる閉凸体と一致する．本講演の内容は [26] に基づく．

1　導入

n, r を正の整数とする．向き付けられたコンパクトな n 次元多様体 M^n から $(n+r)$ 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+r}$ へのはめ込み $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ を考える．B を f の単位法ベクトル束，G を Lipschiz-Killing 曲率とする．この時,

$$\tau(M^n, f) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})} \int_B |G| \, d\mu_B$$

を f の**絶対全曲率**と呼ぶ．ただし $\mathrm{vol}(S^{n+r-1})$ は $(n+r-1)$ 次元単位球面 S^{n+r-1} の体積を表す．絶対全曲率について，次が知られている．

事実 1.1 (Chern-Lashof の定理 [3, 4])**.** M^n を向き付けられたコンパクトな n 次元多様体，$f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ を $(n+r)$ 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+r}$ へのはめ込みとする．

(1) b_i を M^n の i 次ベッチ数とする $(0 \leq i \leq n)$．この時，絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ に対して以下が成り立つ．

$$\tau(M^n, f) \geq \sum_{i=0}^{n} b_i(M^n).$$

(2) 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ が 3 未満ならば，M^n は n 次元単位球面 S^n と位相同型となる．

(3) 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ が 2 に等しいならば，像 $f(M^n)$ は $\boldsymbol{R}^{n+r}$ 内の n 次元アファイン部分空間に埋め込まれた凸超曲面となる．逆もまた成り立つ．

この Chern-Lashof の定理は，Fenchel の定理 ([5, 6]) のコンパクトな部分多様体への一般化となっている．これまでに Chern-Lashof の定理の様々な一般化が得られてきた: 非正曲率リーマン

*E-mail: yamauchi-yuta-hj@ynu.jp
本研究は，JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2178 の支援を受けたものである．

多様体 [24, 1]; 定曲率空間 [2, 20, 21, 22]; 非閉部分多様体 [25]; knotted surface [17]; equiaffine immersions [14]; 対称空間 [15, 16]; ミンコフスキー空間 [12]; 複素射影空間 [7].

一方，特異点を持つ部分多様体には絶対全曲率を定義されるクラスが存在する．したがって，そのような部分多様体の絶対全曲率に対しても Chern-Lashof 型定理が成り立つのではないかと考えた．本講演ではそのような部分多様体としてフロンタルを取り挙げ，それらの絶対全曲率に対する Chern-Lashof 型定理を紹介する．

2 準備

2.1 フロンタルと特異点

この節ではフロンタルの定義を紹介する．部分多様体の一般化としてのフロンタルの概念は [11] にて紹介されている．また，曲面，超曲面の場合は詳細に調べられている．詳しくは [18, 23] を見よ．

n, r を正の整数とする．n 次元多様体 M^n からユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{n+r}$ への滑らかな写像 $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ に対して，点 $p \in M^n$ で f がはめ込みであるとき p を**正則点**と呼び，そうでない時は**特異点**と呼ぶ．Σ_f を f の特異点集合とし，正則点集合 M^n_{reg} を $M^n_{\mathrm{reg}} := M^n \setminus \Sigma_f$ とおく．正則点集合が稠密な写像 f が**フロンタル**であるとは，M^n 上の任意の点 p とその開近傍 U に対し，滑らかな写像 $\Pi : U \to \widetilde{Gr}(n, n+r)$ が存在して，

$$df_q(X) \in \Pi(q) \qquad (q \in U,\, X \in T_qM^n)$$

を満たす時をいう．ここで $\widetilde{Gr}(n, n+r)$ は $\boldsymbol{R}^{n+r}$ 内の向き付き n 次元部分空間のグラスマン多様体を指す．また，このような Π を f の **generalized Gauss map** と呼ぶ.

定義 2.1. フロンタル $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ の generalized Gauss map Π が M^n 上で大域的に定められる時，フロンタル f は**余向き付け可能**であるという.

例として，はめ込み f は余向き付け可能である．これは，$\Pi(q) := df_q(T_qM^n)$ $(q \in M^n)$ とおくことで確かめられる．M^n の二重被覆を取ることで，必要ならば一般性を失うことなく f を余向き付け可能とすることができる．よって，本稿ではフロンタルは余向き付け可能だと仮定する．

フロンタル f とその generalized Gauss map Π に対し，$\Pi^{\perp}(p)$ を $\Pi(p)$ の直交補空間とする．任意の M^n の座標近傍 $(U; u_1, u_2, \cdots, u_n)$ に対し，U 上の関数 λ を

$$\lambda(p) = \det(f_1(p), f_2(p), \cdots, f_n(p), E_1(p), \cdots, E_r(p))$$

で定める．ただし，$f_i = \dfrac{\partial f}{\partial u_i}$ とし，$\{E_1, \cdots, E_r\}$ は $\Pi^{\perp}$ の滑らかな正規直交枠である．この λ を f の**符号付き体積密度関数**と呼ぶ．p がフロンタル f の特異点であることと，$\lambda(p) = 0$ であることは同値である.

定義 2.2. 特異点 $p \in M^n$ が**非退化特異点**であるとは，$(d\lambda)_p$ が 0 とならないことを指す.

非退化性は，局所座標の取り方及び正規直交枠の取り方に依らない.

補題 2.3 (cf. [26])**.** 特異点 p が非退化特異点であるとき，$\mathrm{rank}(df)_p = n - 1$ が成り立つ.

p をフロンタル $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ の非退化特異点とする．補題 2.3 より，$\dim(\ker(df)_p) = 1$ が成り立つ．この $\ker(df)_p$ を p における**退化空間**と呼ぶ．フロンタル $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ の特異点が全て非退化特異点であるならば，陰関数定理より特異点集合 Σ_f は M^n の $n-1$ 次元部分多様体となる.

定義 2.4. フロンタル $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ の特異点は全て非退化特異点であるとする．p を特異点とした時，$\ker(df)_p \not\subset T_p\Sigma_f$ が成り立つならば，$p \in M^n$ を**第 1 種特異点**と呼び，そうでない時は $p \in M^n$ を**第 2 種特異点**と呼ぶ．

C_f を M^n 上の f の第 2 種特異点の集合とする．

定義 2.5 ([26]). フロンタル $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ が以下を満たす時，f を**許容的なフロンタル**と呼ぶ

- 非退化特異点のみを持つ．
- ある Σ_f の超曲面 $\mathcal{H}$ が存在し，$C_f \subseteq \mathcal{H}$ が成り立つ．

例として，特異点が全て第 1 種特異点であるフロンタルは許容的である．また，次の例 2.6 のように，全ての特異点が A_{k+1} 特異点であるフロンタルは許容的である．

例 2.6. フロンタル $f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ の特異点が全て A_{k+1} 特異点 $(1 \leq k \leq n)$ と右左同値であるとする．ただし，A_{k+1} 特異点とは $\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^{n+1}$ への写像

$$(t, x_2, \cdots, x_n) \mapsto \left((k+1)t^{k+2} + \sum_{j=2}^{k}(j-1)t^j x_j, -(k+2)t^{k+1} - \sum_{j=2}^{k} j t^{j-1} x_j, x_2, \cdots, x_n \right)$$

の原点における写像芽を指す．$\tilde{\eta}$ を U 上の $\mathbf{0}$ にならない，各特異点 $q \in \Sigma_f$ で $\tilde{\eta}(q) \in \ker df_q$ を満たすベクトル場とし，

$$\lambda^{(0)} = \lambda,\ \lambda^{(1)} = \lambda',\ \lambda^{(i)} = d\lambda^{(i-1)}(\tilde{\eta}) \quad (2 \leq i \leq k)$$

とする．ただし，λ は f の符号付き体積密度関数である．この時，f の A_{k+1} 特異点 p に対して，p を含む近傍 U 上で

$$\lambda(p) = \lambda'(p) = \cdots = \lambda^{(k-1)}(p) = 0,\ \lambda^{(k)} \neq 0$$

が成り立ち，かつ C^∞ 級写像 $(\lambda, \lambda', \cdots, \lambda^{(k-1)}) : U \to \boldsymbol{R}^k$ のヤコビ行列の階数が p で k となる ([19, Corollary 2.5])．また，$C_f \cap U = \{p \in U \mid (\lambda, \lambda')(p) = (0,0)\}$ と表すことが出来る．よって，$\varphi = (\lambda, \lambda') : U \to \boldsymbol{R}^2$ とすると，$C_f \cap U = \varphi^{-1}((0,0))$ となる．いま，任意の $p \in \varphi^{-1}((0,0))$ に対して，p は A_{k+1} 特異点と右左同値であるので，φ のヤコビ行列の階数は 2 となる．すなわち，$(0,0) \in \boldsymbol{R}^2$ は φ の正則値となる．したがって，C_f は Σ_f 内の超曲面となる．よって，$\mathcal{H} = C_f$ とすると，f は許容的なフロンタルとなる．

例として，$\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^4$ への A_3 特異点の写像 $f : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^4$,

$$f(t, x, y) = (4t^5 + t^2 x + 2t^3 y^2, 5t^4 + 2tx + 3t^2 y, x, y)$$

の場合，$\Sigma_f = \{(t, -3ty - 10t^3, y) \in \boldsymbol{R}^3 \mid (t, y) \in \boldsymbol{R}^2\}$ 及び

$$\begin{aligned} C_f &= \{(t, -3ty - 10t^3, y) \in \Sigma_f \mid y = -10t^2\} \\ &= \{(t, 20t^3, -10t^2) \in \Sigma_f \mid t \in \boldsymbol{R}\} \end{aligned}$$

となり，f は許容的なフロンタルとなる (図 1 参照)．

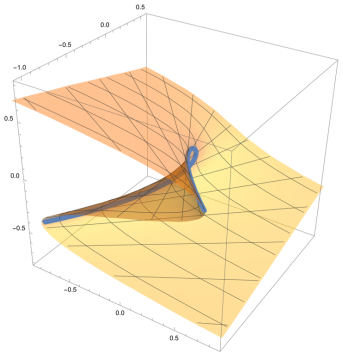


図 1: A_3 特異点の写像の特異点集合 Σ_f(黄色の曲面) と第 2 種特異点の集合 C_f(青い曲線) の図. C_f が Σ_f 内の正則曲線であるため，f は許容的なフロンタルである (定義 2.5，例 2.6).

2.2　絶対全曲率

ここでは Lipschitz-Killing 曲率の定義を紹介し，許容的なフロンタルに対して絶対全曲率を定める (定義 2.9).

ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{R}^{n+r}$ に対し，$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ で標準的な内積を表す．また，$\boldsymbol{u}$ のノルムを $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}$ で表す．各 $p \in M^n$ に対し $B_p = \{\boldsymbol{v} \in \Pi^{\perp}(p) \mid \|\boldsymbol{v}\| = 1\}$ と表し，f の**単位法ベクトル束** B を

$$B = \bigcup_{p \in M^n} B_p$$

で定める．B の滑らかな切断を f の**単位法ベクトル場**と呼ぶ．N を f の単位法ベクトル場とする．この時，正則点集合 M^n_{reg} 上で次のワインガルテンの公式が成り立つ.

$$D_X N = -df(A_N X) + D^{\perp}_X N.$$

ただし，X を M^n 上の任意のベクトル場，D を $\boldsymbol{R}^{n+r}$ の標準的な接続，$D^{\perp}$ を法接続，A_N を N に関する型作用素とする．B_{reg} を $B_{\mathrm{reg}} := \bigcup_{p \in M^n_{\mathrm{reg}}} B_p$ によって定める．$(p, \xi) \in B_{\mathrm{reg}}$ に対し，**Lipschitz-Killing 曲率** $G(p, \xi)$ を

$$G(p, \xi) = \det A_{\xi}$$

で定める.

M^n の局所座標系 $(U; u_1, \cdots, u_n)$ に対し，

$$d\hat{V} = \lambda \, du_1 \wedge \cdots \wedge du_n, \quad dV = |\lambda| \, du_1 \wedge \cdots \wedge du_n$$

をそれぞれ f の**符号付き体積要素**，(符号無し) **体積要素**と呼ぶ．この時，$d\hat{V}$ は局所座標 $(u_1, \cdots, u_n)$ と $\Pi^{\perp}$ の向きに同調した正規直交枠 $\{E_1, \cdots, E_r\}$ の取り方に依らない．また，dV は M^n の向きに同調した局所座標 $(u_1, \cdots, u_n)$ の取り方，及び $\Pi^{\perp}$ の向きに同調した正規直交枠 $\{E_1, \cdots, E_r\}$ の取り方に依らない．また，$d\sigma$ を B の各ファイバー上の体積要素とし，B の符号付き体積要素 $d\hat{\mu}_B$，(符号無し) 体積要素 $d\mu_B$ をそれぞれ

$$d\hat{\mu}_B = d\hat{V} \wedge d\sigma, \quad d\mu_B = dV \wedge d\sigma$$

によって定める.

滑らかな写像

$$\nu : B \to S^{n+r-1}; (p, \xi) \mapsto \xi$$

を f の**標準的ガウス写像**と呼ぶ.

命題 2.7 ([26, Proposition 2.5])**.** $d\mu_{S^{n+r-1}}$ を S^{n+r-1} の体積要素とする．この時，標準的ガウス写像 ν による $d\mu_{S^{n+r-1}}$ の引き戻しを $\nu^* d\mu_{S^{n+r-1}}$ と表す．B_{reg} 上で以下が成り立つ．

$$\nu^* d\mu_{S^{n+r-1}} = (-1)^n G(p, xi)\, d\hat{\mu}_B$$

したがって，G を B_{reg} 上で定義される Lipschitz-Killing 曲率とするとき，命題 2.7 より $G(p,\xi)\, d\hat{\mu}_B$ は特異点集合を越えて B 全体で定義されるなめらかな $(n+r-1)$ 次微分形式を定める．したがって，次の系が得られる．

系 2.8 ([26, Corollary 2.6])**.** $|G(p,\xi)|\, d\mu_B$ は B 上の連続な $(n+r-1)$ 次微分形式である．

今後，M^n を向き付けられたコンパクトな n 次元多様体，$f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ は許容的なフロンタルであるとし，Π を f の generalized Gauss map とする．この時，f の特異点はすべて非退化であるため，特異点集合 Σ_f は M^n 内の超曲面となる．$\bar{f}$ を f の Σ_f への制限とする．$\bar{\Pi} : \Sigma_f \to \widetilde{Gr}(n-1, n+r)$ を

$$\bar{\Pi}(p) := (df)_p(T_p M^n) \qquad (p \in \Sigma_f)$$

と定める．この時，p は非退化特異点であるため，補題 2.3 より $df_p(T_p M^n)$ は $(n-1)$ 次元部分空間になることに注意する．$\bar{\Pi}$ は $\bar{f}$ の generalized Gauss map となるので，$\bar{f} : \Sigma_f \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ は余向き付け可能なフロンタルとなる．$\bar{f}$ の単位法束，標準的ガウス写像，Lipschitz-Killing 曲率をそれぞれ $\bar{B}, \bar{\nu}, \bar{G}$ とおく．

定義 2.9 ([26])**.** M^n をコンパクトかつ向き付け可能な n 次元多様体とし，$f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ は余向き付け可能かつ許容的なフロンタルであるとする．この時，**絶対全曲率** $\tau(M^n, f)$ を次のように定める．

$$\tau(M^n, f) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})} \int_B |G(p,\xi)|\, d\mu_B + \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})} \int_{\bar{B}} |\bar{G}(q,\eta)|\, d\mu_{\bar{B}}.$$

命題 2.7 より，絶対全曲率 $\tau(M, f)$ は

$$\tau(M^n, f) = \frac{1}{\mathrm{vol}(S^{n+r-1})}(\mathrm{vol}(\nu(B)) + \mathrm{vol}(\bar{\nu}(\bar{B})))$$

と表される．ただし，$\mathrm{vol}(\nu(B))$ 及び $\mathrm{vol}(\bar{\nu}(\bar{B}))$ はそれぞれ像 $\nu(B)$ 及び $\bar{\nu}(\bar{B})$ の S^{n+r-1} での体積を表す。

もし正則点集合上の絶対全曲率のみを考えた場合，それは次の例 2.10 のように非自明な下限を持たない．

例 2.10. 正の実数 k に対し，写像 $f_k : S^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ を

$$f_k(x_1, \cdots x_n, x_{n+1}) = (x_1, \cdots x_n, k x_{n+1}^3) \quad ((x_1, \cdots x_n, x_{n+1}) \in S^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1}).$$

によって定める．この時，f_k は許容的なフロンタルである．また，

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(S^n)} \int_B |G|\, d\mu_B = \frac{6\,\mathrm{vol}(S^{n-1})}{\mathrm{vol}(S^n)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{k|\cos(t)|}{(1 + (k\sin t)^2/4)^{\frac{n+1}{2}}}\, dt < \frac{12k\,\mathrm{vol}(S^{n-1})}{\mathrm{vol}(S^n)}.$$

という不等式が成り立つ．よって，$\varepsilon > 0$ に対し，正の実数 k を $k < \varepsilon\,\mathrm{vol}(S^n)/(12\,\mathrm{vol}(S^{n-1}))$ を満たすようにとれば，正則点集合上の絶対全曲率 $\frac{1}{\mathrm{vol}(S^n)} \int_B |G(p,\xi)|\, d\mu_B$ は ε 未満となる．

3　主結果

フロンタルに対する Chern-Lashof 型定理として，次の定理 A を得た．

定理 A ([26])．M^n をコンパクトかつ向き付け可能な n 次元多様体とし，$f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ は余向き付け可能かつ許容的なフロンタルであるとする．この時，以下が成り立つ．

(1) b_i を M^n の i 次ベッチ数とする $(0 \leq i \leq n)$．この時，絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ に対して以下が成り立つ．

$$\tau(M^n, f) \geq \sum_{i=0}^{n} b_i(M^n).$$

(2) 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ が 3 未満ならば，M^n は n 次元単位球面 S^n と位相同型となる．

(3) 絶対全曲率 $\tau(M^n, f)$ が 2 に等しいならば，像 $f(M^n)$ は $\boldsymbol{R}^{n+r}$ 内の n 次元アファイン部分空間に含まれる．

Chern-Lashof の定理 (事実 1.1) と比べて，定理 A はフロンタルの像が $(n+1)$ 次元アファイン部分空間に含まれることまでしか主張できていない．しかし，特異点について条件を加えることで次の定理 B を得られる．

定理 B ([26])．M^n をコンパクトかつ向き付け可能な n 次元多様体とし，$f : M^n \to \boldsymbol{R}^{n+r}$ を余向き付け可能なフロンタルであるとする．特異点集合 Σ_f が空でなく，かつ特異点が全て第 1 種特異点であるとする．この時，$\tau(M^n, f) = 2$ であることと，次の三つの条件が同時に成り立つことは同値となる．

(a) f の像 $f(M^n)$ は n 次元アファイン部分空間に含まれる閉凸体となる，

(b) M^n は S^n と同相であり，Σ_f は S^{n-1} と同相である，

(c) 特異点集合の像 $f(\Sigma_f)$ は $f(M^n)$ の境界と一致する．

Chern-Lashof の定理 (事実 1.1) の場合，最小全曲率をもつはめ込み f の像 $f(M^n)$ は $(n+1)$ 次元アファイン部分空間に含まれたが，定理 B の場合，最小全曲率をもつフロンタル f の像 $f(M^n)$ は n 次元アファイン部分空間に含まれることに注意する．

次の例 3.1 は絶対全曲率が 2 かつ定理 B の仮定を満たすフロンタルである．

例 3.1. 写像 $f : S^n \to \boldsymbol{R}^{n+1}$ を

$$f(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \cdots, x_n, 0) \qquad ((x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n \subset \boldsymbol{R}^{n+1})$$

によって定める．この時，f の特異点は全て第一種特異点となる．特異点集合は $(n-1)$ 次元単位球面 $\{(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} = 0\}$ となる．また，像 $f(S^n)$ は n 次元単位閉球となるので，正則点集合上の絶対全曲率は 0 となる．一方，特異点集合上の絶対全曲率は 2 となるので，f の絶対全曲率は 2 となる．さらに，像 $f(S^n)$ は閉凸体となり，特異点集合の像 $f(\Sigma_f)$ はその境界と一致する．

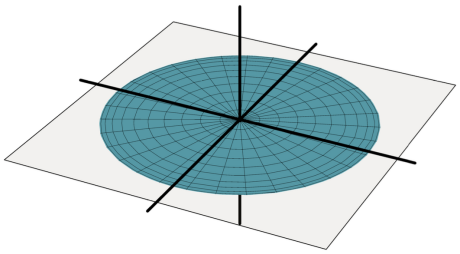


図 2: $\boldsymbol{R}^3$ 内の $f(S^2)$ の図 (例 3.1).

4　$n = 1, 2$ の場合

4.1　$n = 1$ の場合

$n = 1$ の場合，すなわち 1 次元フロンタル γ について考える．γ のパラメータ t に対し，$'$ は t による微分 $\dfrac{d}{dt}$ を表すこととする．

フロンタル $\gamma : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^{r+1}$ に対してある正の実数 ℓ が存在し，$\gamma(t+\ell) = \gamma(t)\,(t \in \boldsymbol{R})$ が成り立つならば γ を**閉フロンタル**と呼ぶ．また，ℓ で最小のものを**周期**と呼ぶ．パラメータを定数倍することで周期を 2π とすることができるので，今後は閉フロンタル γ の周期を 2π とする．この時，閉フロンタル γ の定義域を $S^1 = \boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z}$ とみなすことができる．フロンタル γ の正則点集合上で，曲率関数 κ を

$$\kappa(t) := \frac{\sqrt{\|\gamma''(t)\|^2\|\gamma'(t)\|^2 - (\gamma''(t)\cdot\gamma'(t))^2}}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

によって定める．$n = 1$ の場合，フロンタル γ は第 2 種特異点を持たない．したがって，フロンタル γ が許容的であることと，γ が非退化特異点のみをもつことは同値となる．よって，許容的なフロンタルの特異点集合は離散集合となる．

閉フロンタル $\gamma : S^1 \to \boldsymbol{R}^{r+1}$ の特異点が全て非退化であるならば，絶対全曲率を定めることができる．絶対全曲率は，曲率関数 κ を用いて表すことができる．

命題 4.1 ([26])**.** 特異点が全て非退化である閉フロンタル $\gamma : S^1 \to \boldsymbol{R}^{r+1}$ に対し，次の式が成り立つ．

$$\tau(S^1, \gamma) = \frac{1}{\pi}\int_{S^1} \kappa\, ds + \#\Sigma_\gamma.$$

閉フロンタルの絶対全曲率に対し，次の系 4.2 が成り立つ．

系 4.2 ([26])**.** 特異点が全て非退化である閉フロンタル $\gamma : S^1 \to \boldsymbol{R}^{r+1}$ に対し，次の式が成り立つ．

$$\frac{1}{\pi}\int_{S^1} \kappa\, ds + \#\Sigma_\gamma \geq 2.$$

さらに，もし特異点集合 Σ_f が空でないならば，絶対全曲率が 2 であることと，$\#\Sigma_f = 2$ かつ像 $\gamma(S^1)$ が線分となることは同値となる．

もし特異点集合 Σ_f が空ならば，つまり γ が正則曲線ならば，系 4.2 は Fenchel の定理と同値になる．また，特異点が全て非退化であるならば，γ が余向き付け可能であることと $\#\Sigma_\gamma$ が偶数であることは同値となる．したがって，特異点集合 Σ_γ が空でないとすると，$\#\Sigma_\gamma \geq 2$ となる．余向き付け不可能な場合の 1 次元フロンタルの絶対全曲率については，[10] にて調べられている．

4.2 $n = 2$ の場合

この節では Kossowski-Scherfner [13] の結果と比較するため，$\boldsymbol{R}^3$ 内の 2 次元フロンタルについて考える．

正則点集合が稠密な滑らかな写像 $f : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ が (余向き付け可能な) フロンタルであることの必要十分条件は，ある滑らかな写像 $N : M^2 \to S^2$ が存在し，

$$df_p(X) \cdot N(p) = 0 \quad (p \in M^2,\, X \in T_pM^2)$$

を満たす事である．さらに，$f : M^2 \to S^2$ が**波面**であるとは，$\mathcal{L} := (f, N) : M^2 \to \boldsymbol{R}^3 \times S^2$ がはめ込みとなることを指す．$n = 2$ の場合，フロンタル $f : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ の特異点が全て非退化であるならば，特異点集合 Σ_f は M^2 内の正則曲線となる．よって，特異点が全て非退化なフロンタル f が許容的であることと，第 2 種特異点の集合 C_f が離散集合であることは同値である．

Kossowski と Scherfner は波面に対して次の Chern-Lashof 型定理を得た．

事実 4.3 ([13])**.** M^2 を向き付け可能かつコンパクトな 2 次元多様体，$f : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ を特異点が全て非退化かつ第 2 種特異点の集合が離散集合であるような余向き付け可能な波面であるとする．この時，

$$\int_{M^2} |K|\, dV + 2\int_{\Sigma_f} \kappa\, ds \geq 2\pi(2 + 2g(M^2))$$

が成り立つ．ただし，K は f のガウス曲率，κ は $f(\Sigma_f)$ の曲率関数，ds は弧長測度，$g(M^2)$ を M^2 の種数とする．

$\boldsymbol{R}^3$ 内の 2 次元フロンタルの絶対全曲率に対し，次の系 4.4 が成り立つ．

系 4.4 ([26])**.** M^2 を向き付け可能かつコンパクトな 2 次元多様体，$f : M^2 \to \boldsymbol{R}^3$ を特異点が全て非退化かつ第 2 種特異点の集合が離散集合であるような余向き付け可能なフロンタルであるとする．この時，

$$\int_{M^2} |K|\, dV + 2\int_{\Sigma_f} \kappa\, ds \geq 2\pi(2 + 2g(M^2))$$

が成り立つ．ただし，K は f のガウス曲率，κ は $f(\Sigma_f)$ の曲率関数，ds は弧長測度，$g(M^2)$ を M^2 の種数とする．特に，

$$\int_{M^2} |K|\, dV + 2\int_{\Sigma_f} \kappa\, ds \geq 4\pi \tag{4.1}$$

が成り立つ．さらに，特異点集合 Σ_f が空でなく，すべて第 1 種であるとする．この時，(4.1) の等号が成りたつならば，M^2 は 2 次元球面と位相同型となり，像 $f(M^2)$ は $\boldsymbol{R}^3$ 内の平面に含まれる閉凸体となる．

系 4.4 は事実 4.3 のフロンタルへの拡張である．最小の絶対全曲率をもつフロンタルは波面ではないため，フロンタルへの拡張が絶対全曲率の最小性と凸性との関連を明らかにするのに不可欠である．

参考文献

[1] B. -Y. Chen, *On the total absolute curvature of manifolds immersed in Riemannian manifold*, Kōdai Math. Semin. Rep. **19** (1967), 299–311.

[2] B. -Y. Chen, *On the total absolute curvature of manifolds immersed in Riemannian manifold II*, Kōdai Math. Semin. Rep. **22** (1970), 89–97.

[3] S. -S. Chern and R. K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds*, Am. J. Math. **79** (1957), 306–318.

[4] S. -S. Chern and R. K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds. II*, Mich. Math. J. **5** (1958), 5–12.

[5] W. Fenchel, *Über Krümmung und Windung geschlossener Raumkurven*, Math. Ann. **101** (1929), 238–252.

[6] W. Fenchel, *On the differential geometry of closed space curves*, Bull. Am. Math. Soc. **57** (1951), 44–54.

[7] J. A. Hoisington, *On the total curvature and Betti numbers of complex projective manifolds*, Geom. Topol. **26** (2022), 1–45.

[8] A. Honda, K. Naokawa, K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *Duality on generalized cuspidal edges preserving singular set images and first fundamental forms*, J. Singul. **22** (2020), 59–91.

[9] A. Honda and K. Saji, *Geometric invariants of* 5/2*-cuspidal edges*, Kodai Math. J. **42** (2019), 496–525.

[10] A. Honda, C. Tanaka, and Y. Yamauchi, *The total absolute curvature of closed curves with singularities*, to appear in Advances in Geometry (arXiv:2403.00487).

[11] G. Ishikawa. *Singularities of frontals*, in: Singularities in Generic Geometry, in: Advanced Studies in Pure Mathmatics (ASPM), vol. 78, Math, Soc, Japan, 2018, pp. 55–106.

[12] S. Izumiya, *Total lightcone curvatures of spacelike submanifolds in Lorentz-Minkowski space*, Differ. Geom. Appl. **34** (2014), 103–127.

[13] M. Kossowski and M. Scherfner, *Total curvature for C^∞-singular surfaces with limiting tangent bundle*, Ann. Global Anal. Geom. **28** (2005), 179–199.

[14] N. Koike, *The Lipschitz-Killing curvature for an equiaffine immersion and theorems of Gauss-Bonnet type and Chern-Lashof type*, Result. Math. **39** (2001), 230–244.

[15] N. Koike, *Theorems of Gauss-Bonnet and Chern-Lashof types in a simply connected symmetric space of non-positive curvature*, Tokyo J. Math. **26** (2003), 527–539.

[16] N. Koike, *The Gauss-Bonnet and Chern-Lashof theorems in a simply connected symmetric space of compact type*, Tokyo J. Math. **28** (2005), 483–497.

[17] N. H. Kuiper and W. Meeks. III, *Total curvature for knotted surfaces*, Invent. Math. **77** (1984), 25–69.

[18] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *The geometry of fronts*, Ann. Math. **169-2** (2009), 491–529.

[19] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada, *A_k singularities of wave fronts*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **146** (2009), 731–746.

[20] E. Teufel, *Eine Differentialtopologische Berechnung der totalen Krümmung und totalen Absolutkrümmung in der sphärischen Differentialgeometrie*, Manuscr. Math. **31** (1980), 119–147.

[21] E. Teufel, *Differential topology and the computation of total absolute curvature*, Math. Ann. **258** (1982), 471–480.

[22] E. Teufel and G. Solanes, *Horo-tightness and total (absolute) curvatures in hyperbolic spaces*, Isr. J. Math. **194** (2013), 427–459.

[23] M. Umehara, K. Saji, and K. Yamada, Differential geometry of curves and surfaces with singularities, Series in Algebraic and Differential Geometry 1. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Hackensack, NJ, xvi, 370 p. (2022).

[24] T. J. Willmore and B. A. Saleemi, *The total absolute curvature of immersed manifolds*, J. Lond. Math. Soc. **41** (1966), 153–160.

[25] P. Wintgen, *On total absolute curvature of nonclosed submanifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **2** (1984), 55–87.

[26] Y. Yamauchi, *The total absolute curvature of submanifolds with singularities,* preprint (arXiv:2412.19147).

各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みとラプラシアンについて

名古屋大学大学院　多元数理科学研究科
成田　知将 (Kazumasa NARITA) *

概要

各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込み $(M,g) \to (B,j)$ が与えられたとき, 標準的変分と呼ばれる M 上のリーマン計量の 1 パラメータ族 $(g_t)_{t>0}$ を考える. ラプラス・ベルトラミ作用素 $\Delta_{g_t}^M$ の最小正固有値を $\lambda_1(g_t)$, (M,g_t) の体積を $\mathrm{Vol}(M,g_t)$ とする. 1982 年, Bérard-Bergery と Bourguignon は $t \to 0$ としたとき, スケール不変な量 $\lambda_1(g_t)\mathrm{Vol}(M,g_t)^{2/\dim M}$ が 0 に収束することを示した. 本講演では, リッチ曲率に関するある仮定の下で, $t \to \infty$ のとき $\lambda_1(g_t)\mathrm{Vol}(M,g_t)^{2/\dim M}$ が発散することについて述べる. 本小論はプレプリント [9] に基づく.

1　導入

1.1　設定

まず, 本小論における設定を述べる. M は連結かつ閉な（つまり, コンパクトで境界がない)n 次元多様体とする. M 上にリーマン計量 g が与えられたとき, (M,g) を（連結かつ閉な）**リーマン多様体**という. (M,g) に対し, その**体積** $\mathrm{Vol}(M,g)$ が定まる. (いま M はコンパクトなので体積は有限の値である.) ユークリッド空間における通常のラプラシアンの一般化として, リーマン多様体 (M,g) 上には**ラプラス・ベルトラミ作用素**（あるいは単に**ラプラシアン**）Δ_g^M が定まる. ただし, ここでラプラシアンの符号はラプラシアンが正値作用素になるように符号を定める. 例えば, $\mathbf{R}$ における（ユークリッド計量に関する）ラプラシアンは $\Delta = -\frac{d^2}{dt^2}$ となる. $\Delta_g^M f = \lambda f$ をみたす（C^∞ 級）関数 f を**固有関数**, λ を**固有値**という. I を $C^\infty(M)$ 上の恒等写像とする. $E_\lambda := \mathrm{Ker}(\Delta_g^M - \lambda I)$ を λ に対応する**固有関数空間**といい, その次元を固有値 λ の**重複度**という. いま, ラプラシアンは正値となるように定めたから, 固有値は非負である. また, 固有値 0 に対応する固有関数たちは定数関数たちで, M は連結なので, その重複度は 1 である. $0 = \lambda_0(g) < \lambda_1(g) < \lambda_2(g) < \cdots < \lambda_l(g) < \cdots \to \infty$ を Δ_g^M の固有値とする. 任意の l に対し, $\lambda_l(g)\mathrm{Vol}(M,g)^{2/n}$ はスケール不変な量である. すなわち, $g \mapsto cg$ $(c > 0)$ という変換について不変な量である. M が閉曲面, すなわち $n = 2$ のときには, $\mathrm{Vol}(M,g)^{2/n}$ を $\mathrm{Area}(M,g)$ と書くことにする.

* E-mail:m19032e@math.nagoya-u.ac.jp

1.2 歴史的背景

この小節では, $\lambda_1(g)\mathrm{Vol}(M,g)^{2/n}$ に関する研究の歴史について述べる. 1970 年, Hersch [6] は 2 次元球面 S^2 に対し, $\lambda_1(g)\mathrm{Area}(S^2,g)$ は g が標準計量（の正の定数倍）のときに最大値 8π をとり, また最大値を実現するのは g が標準計量（の正の定数倍）のときのみであることを示した. この結果を背景として, Berger [2] は次の問いを立てた:

問 1.1 ([2])**.** 連結な n 次元閉多様体 M に対し,

$$\Lambda_1(M) := \sup_g \lambda_1(g)\mathrm{Vol}(M,g)^{2/n}$$

は有限か?

言い換えれば, M 上の体積一定のリーマン計量全体の上の汎関数 λ_1 の上限は有限か, という問題である. この問題は現在では完全に解決されている. この問題に対する解答は M が 2 次元のときと 3 次元以上のときで大きく異なる. まず, M が 2 次元のとき, すなわち M が閉曲面の場合について述べる. 1980 年, Yang と Yau [12] は M が種数 γ の向き付け可能閉曲面であるとき, $\Lambda_1(M)$ が $8\pi\lfloor(\gamma+3)/2\rfloor$ 以下であることを示した. ただし, この評価はシャープではないため, 最大値を具体的に求めることは各種数ごとに別個に考えなければいけない問題である. (話が主題から逸れるので詳しく述べないが, 現在は γ が 2 以下の場合には $\Lambda_1(M)$ の最大値が求まっている.) 2016 年, Karpukhin が向き付け不可能な閉曲面に対して, Yang と Yau の結果を拡張し, $\Lambda_1(M)$ が M の位相的不変量に依存する定数で上から抑えることができることを示した. 以上より, M が閉曲面の場合には, Berger の上の問いは肯定的に解決されている.

一方で, M が 3 次元以上のときには, 上の問いは否定的に解決されている. 1979 年, 浦川肇[*1] [11] は 3 次元コンパクトリー群 SU(2) 上のあるリーマン計量の 1 パラメータ族 $(h_t)_{t>0}$ に対し, $\lambda_1(h_t)\mathrm{Vol}(\mathrm{SU}(2),h_t)^{2/3}$ を具体的に計算し, この量が $t\to 0$ のとき 0 に収束し, $t\to\infty$ のとき, ∞ に発散することを示した. SU(2) は 3 次元球面と自然に同一視できる. 浦川のこの仕事の直後, 丹野修吉はその仕事を奇数次元球面に一般化した. 丹野は Hopf ファイブレーション $S^1\to S^{2n+1}\to \mathbf{C}P^n$ を考え, S^{2n+1} が正則な佐々木構造を持つことに着目した. 丹野は S^{2n+1} 上のあるリーマン計量の 1 パラメータ族 $(h_t)_{t>0}$ に対し, $\lambda_1(h_t)\mathrm{Vol}(S^{2n+1},h_t)^{2/(2n+1)}$ を具体的に計算し, この量が $t\to 0$ のとき 0 に収束し, $t\to\infty$ のとき, ∞ に発散することを示した. さらに, 丹野の仕事の直後に武藤秀夫 [8] は丹野の結果を 3 次元以上の任意の次元の球面に一般化した. これらの研究をもとにして, 1994 年に Colbois と Dodziuk [4] は, 3 次元以上の任意の連結な閉多様体 M に対し, ある M 上のリーマン計量の 1 パラメータ族 $(k_t)_{t>0}$ が存在して, $t\to\infty$ のとき, $\lambda_1(k_t)\mathrm{Vol}(M,k_t)^{2/n}$ が発散することを示した. とくに, Berger の上の問は 3 次元以上の任意の多様体に対して否定的に解決された.

[*1] この小論では敬称を省略する.

2　主結果

この節では筆者による主結果について述べる．主結果はリーマン沈め込みに関するものなので, まずは準備としてリーマン沈め込みについて述べる．

2.1　準備: リーマン沈め込み

(M,g), (B,j) を連結な閉リーマン多様体で, それぞれの次元を n, p とする．$\pi : (M,g) \to (B,j)$ が**リーマン沈め込み**であるとは, $\pi : M \to B$ が沈め込みで, 各 $m \in M$ において $d\pi_m : (H_mM, g_m) \to (T_{\pi(m)}B, j_{\pi(m)})$ が内積空間の間の内積を保つ線型同型写像であることをいう．ただし, ここで H_mM とは, $V_mM := \mathrm{Ker}(d\pi_m)$ の T_mM における g_m に関する直交補空間である．H_mM を m における**水平空間**, V_mM を m における**垂直空間**という．各 $m \in M$ に対し, $\pi(m) \in B$ におけるファイバー $\pi^{-1}(\pi(m))$ を $F_{\pi(m)}$ と書く．各ファイバー $F_{\pi(m)}$ は M の $(n-p)$ 次元部分多様体である．$\iota : F_{\pi_m} \hookrightarrow M$ を包含写像とする．各ファイバー $F_{\pi(m)}$ が**全測地的**であるとは, 部分多様体 $F_{\pi(m)}$ の (M,g) における第二基本形式がいたるところ 0 であることをいう．1960 年, Hermann [5] は, 各ファイバーが全測地的であるようなリーマン沈め込み $\pi : (M,g) \to (B,j)$ について, そのファイバーたちは互いに等長的（つまりリーマン多様体として同型）であることを示した．

2.2　Bérard-Bergery と Bourguignon による先行研究

筆者による主結果は, 1982 年の Bérard-Bergery と Bourguignon の論文 [1] の後続の研究である．まず彼らの論文が先述の Colbois と Dodziuk による研究 [4] の前のものであることに注意されたい．Bérard-Bergery と Bourguignon が [1] において示したことを一言で要約すると, 彼らは前節において述べた, Hopf ファイブレーションに着目した丹野修吉の研究を部分的に一般化した．以下では, Bérard-Bergery と Bourguignon の仕事をより詳しく述べる．

(M,g), (B,j) を連結な閉リーマン多様体で, それぞれの次元を n, p とする．$\pi : (M,g) \to (B,j)$ をリーマン沈め込みとする．Bérard-Bergery と Bourguignon は**垂直ラプラシアン** Δ_v と**水平ラプラシアン** Δ_h を次のように定めた: $f \in C^\infty(M)$ に対し, $\Delta_v f$, $\Delta_h f$ をそれぞれ

$$(\Delta_v f)(m) := \Delta^{F_{\pi(m)}}(f \restriction_{F_{\pi(m)}})(m),$$

$$\Delta_h f := \Delta_g^M f - \Delta_v f,$$

により定める．ここで, $\Delta^{F_{\pi(m)}}$ はリーマン多様体 $(F_{\pi(m)}, \iota^* g)$ のラプラシアンである．垂直ラプラシアンと水平ラプラシアンは $L^2(M,g)$ における正値な形式的随伴作用素である．Bérard-Bergery と Bourguignon たち自身が述べていることであるが, 垂直ラプラシアンも水平ラプラシアンも楕円型作用素ではないから, これらの名前はかなりミスリーディングである．また, 垂直ラプラシアンのスペクトラムは離散的であるが, 水平ラプラシアンのスペクトラムは離散的とは限らない．Bérard-Bergery と Bourguignon は, リーマン沈め込み $\pi : (M,g) \to (B,j)$ に関する g の**標準的変分** $(g_t)_{t>0}$ を定義した:

定義 2.1. $\pi : (M, g) \to (B, j)$ をリーマン沈め込みとする. 各 $t > 0$ に対し, 次の 3 条件をみたす M 上のリーマン計量 g_t が一意的に定まる:

1. $g_t \restriction_{V_mM \times H_mM} = 0$.
2. $g_t \restriction_{H_mM \times H_mM} = g \restriction_{H_mM \times H_mM}$.
3. $g_t \restriction_{V_mM \times V_mM} = t^2 g \restriction_{V_mM \times V_mM}$.

リーマン計量の 1 パラメータ族 $(g_t)_{t>0}$ をリーマン沈め込み $\pi : (M, g) \to (B, j)$ に関する g の**標準的変分**という.

上の定義において, 明らかに $g_1 = g$ である. また, $\mathrm{Vol}(M, g_t) = t^{n-p}\mathrm{Vol}(M, g)$ が成り立つことがわかる. さらに, リーマン沈め込み $\pi : (M, g) \to (B, j)$ の各ファイバーが全測地的なとき, 任意の $t > 0$ に対し, $\pi : (M, g_t) \to (B, j)$ も各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みとなることが容易にわかる. リーマン沈め込み $\pi : (M, g) \to (B, j)$ の各ファイバーが全測地的なとき, (M, g_t) 上のラプラシアン $\Delta_{g_t}^M$ に関して, Bérard-Bergery と Bourguignon は次の公式を示した:

$$\Delta_{g_t}^M = t^{-2}\Delta_v + \Delta_h = t^{-2}\Delta_g^M + (1 - t^{-2})\Delta_h. \tag{2.1}$$

とくに, $\Delta_{g_t}^M$ は与えられたリーマン沈め込み $\pi : (M, g) \to (B, j)$ に関する作用素 Δ_g^M, Δ_v, Δ_h のみによって表せる. 標準的変分 $(g_t)_{t>0}$ に関して,

$$\Lambda_1(M, t) := \lambda_1(g_t)\mathrm{Vol}(M, g_t)^{2/n}$$

とおく. Bérard-Bergery と Bourguignon は次を示した:

定理 2.2 ([1])**.** (M, g), (B, j) を連結な閉リーマン多様体で, それぞれの次元を n, p とする. $\pi : (M, g) \to (B, j)$ を各ファイバーが連結かつ全測地的なリーマン沈め込みとする. このとき, $\lim_{t\to 0} \Lambda_1(M, t) = 0$ が成り立つ.

この結果は先述の丹野修吉の結果の部分的な一般化とみなせる. 丹野が原論文 [10] において考察した S^{2n+1} 上のリーマン計量の 1 パラメータ族は標準的変分とわずかに異なるが, 本質的には同じもので, 丹野による結果はすぐに標準的変分に関するものに書き換えることができる. 丹野の論文 [10] によれば, Hopf ファイブレーション $S^1 \to S^{2n+1} \to \mathbf{C}P^n$ に関する, 標準計量 g の標準的変分 $(g_t)_{t>0}$ について, $\Lambda_1(S^{2n+1}, t) = \min\{2n + t^{-2}, 4(n + 1)\}t^{1/(2n+1)}\mathrm{Vol}(S^{2n+1}, g)^{1/(2n+1)}$ を得る. このことからとくに, $\lim_{t\to 0} \Lambda_1(S^{2n+1}, t) = 0$ が成り立つので, 定理 2.2 は丹野の結果の定性的な一般化になっている. しかしながら, $t \to \infty$ のときはどうだろうか? 丹野の結果によれば, $\lim_{t\to\infty} \Lambda_1(S^{2n+1}, t) = \infty$ が成り立つが, これは Hopf ファイブレーションだけでなく一般の, 各ファイバーが全測地的なリーマン沈め込みの場合にも成り立つだろうか? この問は前節で述べた Berger の問の観点から重要であるが, Bérard-Bergery と Bourguignon が与えた十分条件は実用性に乏しく, 満足のいくものとは程遠い. 筆者の主結果はこの問に答えるものである.

2.3 主結果と例

前小節の最後に述べた問題を動機として, 筆者は [9] において次を示した:

定理 2.3 ([9])**.** (M,g), (B,j) を連結な閉リーマン多様体で, それぞれの次元を n, p とする. $\pi:(M,g)\to(B,j)$ を各ファイバーが連結かつ全測地的なリーマン沈め込みとする.

$$\mathrm{Ric}^M \geq \widetilde{c}g$$

をみたす $\widetilde{c}>0$ が存在すると仮定する. ここで, Ric^M は (M,g) のリッチテンソルである. $p\leq n-2$ の場合は, さらに任意の $y\in B$ に対して,

$$\mathrm{Ric}^{F_y} = c(\iota^* g)$$

となる $0\leq c<\widetilde{c}$ が存在すると仮定する. このとき,

$$\lim_{t\to\infty}\Lambda_1(M,t)=\infty$$

が成り立つ.

この結果から, とくに Hopf ファイブレーション $S^1\to S^{2n+1}\to \mathbf{C}P^n$ に関して, $\lim_{t\to\infty}\Lambda_1(S^{2n+1},t)=\infty$ がいえ, 丹野の結果の定性的な一般化になっている. 上の主結果は非常に多くの例に適用できるため, そのすべてを挙げることはできない. 詳しくは [9] を参照されたい. 今までは古典的な研究の話ばかりであったので, 最近の研究との関連がわかる例を 1 つ挙げる.

例 2.4. $\mathbf{C}P^1\to\mathbf{C}P^{2n+1}\to\mathbf{H}P^n$ は各ファイバーが連結かつ全測地的なリーマン沈め込みである. ここで, どの射影空間にも標準的な計量が入っているものとする. とくに, $\mathbf{C}P^{2n+1}$ 上の標準計量である Fubini–Study 計量を g_{FS} と書く. 2022 年, Bettiol, Lauret と Piccione [3] は $\lambda_1(\mathbf{C}P^{2n+1},g_t)=\min\{8n+8t^{-2},8(n+1)\}$, したがってとくに $\Lambda_1(\mathbf{C}P^{2n+1},g_t)=\min\{8n+8t^{-2},8(n+1)\}t^{2/(2n+1)}\mathrm{Vol}(\mathbf{C}P^{2n+1},g_{FS})^{2/(2n+1)}$ であることを示した. とくに,

$$\lim_{t\to 0}\Lambda_1(\mathbf{C}P^{2n+1},t)=0 \quad\text{and}\quad \lim_{t\to\infty}\Lambda_1(\mathbf{C}P^{2n+1},t)=\infty \tag{2.2}$$

がいえる. 一方, このリーマン沈め込みは主結果 2.3 の仮定をみたす. したがって, 定理 2.2 と定理 2.3 より, 直ちに (2.2) が従う.

実は, 上のリーマン沈め込みは, 正のスカラー曲率をもつ四元数ケーラー多様体のツイスターファイブレーションの典型例である. ツイスターファイブレーションの全空間 (**ツイスター空間**と呼ばれる) は, ($\mathbf{C}P^{2n+1}$ がそうであるように) ケーラーアインシュタイン計量を許容し, しかもリーマン沈め込みの各ファイバーは全測地的となる. ツイスター空間 Z のラプラシアンの最小正固有値を求めることは, 上の例 $\mathbf{C}P^1\to\mathbf{C}P^{2n+1}\to\mathbf{H}P^n$ を除けば, 極めて困難であると認識されているが, 定理 2.2 と定理 2.3 より,

$$\lim_{t\to 0}\Lambda_1(Z,t)=0 \quad\text{and}\quad \lim_{t\to\infty}\Lambda_1(Z,t)=\infty$$

であることはわかる. この意味で, 筆者による主結果 2.3 は知られていることの定性的一般化にとどまらず, 固有値問題に新しい事実をもたらすものである.

最後に, 主結果 2.3 の曲率に関する仮定は除くことができないことを例を通して確認する.

例 2.5. 標準計量 $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ を備えた平坦トーラス $T^n := \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ $(n \geq 2)$ を考える. $(x^1, \ldots, x^n)$ を T^n 上の標準的な座標とする. 標準的な射影

$$\pi : T^n \to T^{n-1}, \quad (x^1, \ldots, x^n) \mapsto (x^1, \ldots, x^{n-1}).$$

を考える. 明らかに, π は各ファイバーが連結かつ全測地的なリーマン沈め込みである. しかしながら, このリーマン沈め込みは 2.3 の曲率に関する仮定をみたさない. 各 $1 \leq i \leq n$ に対し, $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ とおく. このとき,

$$\Delta^{T^n} = -\sum_{i=1}^{n} \partial_i^2, \quad \Delta_v = -\partial_n^2, \quad \Delta_h = -\sum_{i=1}^{n-1} \partial_i^2.$$

が成り立つ.

$$\mathrm{Spec}(\Delta^{T^n}) = \{4\pi^2 |y|^2 \mid y \in \mathbf{Z}^n\}$$

であることが知られている. また, 各 $y, -y \in \mathbf{Z}^n$ に対し, 対応する固有関数空間は $\mathrm{span}\{\varphi_y(x) := \cos(2\pi\langle x, y\rangle), \psi_y(x) := \sin(2\pi\langle x, y\rangle)\}$ であることが知られている. $\{e_i\}_{i=1}^n$ を $\mathbf{R}^n$ の標準基底とする. (2.1) より, $t > 1$ に対して, $\lambda_1(g_t) = 4\pi^2 t^{-2}$ が成り立ち, 対応する固有関数空間は $\mathrm{span}\{\varphi_{e_n}(x) = \cos(2\pi x^n), \psi_{e_n}(x) = \sin(2\pi x^n)\}$ であることがわかる. ゆえに,

$$\Lambda_1(T^n, t) = \lambda_1(g_t)\mathrm{Vol}(T^n, g_t)^{2/n} = 4\pi^2 t^{2(1-n)/n} \to 0 \quad (t \to \infty)$$

となる.

参考文献

[1] Bérard-Bergery L. and Bourguignon, J. -P. : Laplacians and Riemannian submersions with totally geodesic fibers, Illinois J. Math. **26**(1982), no.2, 181–200.

[2] Berger, M. : Sur les premiéres valeurs propres des variétés Riemanniennes, Compositio. Math. **26**(1973), 129–149.

[3] Bettiol, R. G., Lauret, E. A. and Piccione, P. : The First Eigenvalue of a Homogeneous CROSS, J. Geom. Anal. **32**(2022), Article No. 76, 63pp.

[4] Colbois B. and Dodziuk, J. : Riemannian metrics with large λ_1, Proc. Amer. Math. Soc. **122**(1994), 905–906.

[5] Hermann, R. : A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fibre bundle, Proc. Amer. Math. Soc. **11**(1960), 236–242.

[6] Hersch, J. : Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **270**(1970), A1645–A1648.

[7] Karpukhin, M. : Upper bounds for the first eigenvalue of the Laplacian on non-orientable surfaces, Int. Math. Res. Notes **20**(2016), 6200–6209.

[8] Muto, H. : The first eigenvalue of the Laplacian on even dimensional spheres, Tôhoku Math. J. **32**(1980), 427–432.

[9] Narita, K. : Remark on Laplacians and Riemannian Submersions with Totally Geodesic Fibers, arxiv:2411.17078

[10] Tanno, S. : The first eigenvalue of the Laplacian on spheres, Tôhoku Math J. **31**(1979), 179–185.

[11] Urakawa, H. : On the least positive eigenvalue of the Laplacian for compact group manifolds, J. Math. Soc. Japan **31**(1979), 209–226.

[12] Yang, P. and Yau, S. T. : Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds, Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **7**(1980), no.4, 55–63.

ある pretzel knot の non-orientable 4-genus について

広島大学　大学院先進理工系科学研究科　数学プログラム
姫野圭佑 (Keisuke HIMENO) *

概要

3 次元球面内の結び目の non-orientable 4-genus とは，結び目を 4 次元球体の境界 (= 3 次元球面) にあるとみなして，その結び目が 4 次元球体内で張る向き付け不可能な曲面の crosscap の最小個数である．その決定は難しく，torus knot ですら完全に決定されていない．本講演では，いくつかの pretzel knot で non-orientable 4-genus を決定できたのでそれを紹介する．

1　導入

3 次元球面 S^3 内の円周 S^1 に微分同相な部分多様体を**結び目**という．二つの結び目が S^3 の向きを保つ同相写像で写り合う時，それらは**同値である**という．以降，同値な結び目は区別しない．

結び目を調べる上で曲面は重要である．結び目理論に現れる曲面で最も有名なものは Seifert 曲面だろう．結び目 $K \subset S^3$ に対し，

(a) S^3 内の向きづけ可能，コンパクト，連結な曲面 S で，$\partial S = K$

をみたすものを K の **Seifert 曲面**という．これを用いて結び目 K の**種数** (3-genus) $g_3(K)$ を

$$g_3(K) := \min\{g(S) \mid S \text{ は } K \text{ の Seifert 曲面 ((a) を満たす曲面)}\}$$

で定める ($g(S)$ は S の種数)．これは非負整数値の結び目不変量 (同値な結び目に対して同じ値を取る) である．

さて，S^3 を 4 次元球体 B^4 の境界とみなす．B^4 内で「Seifert 曲面」を考える，つまり，S を

(b) B^4 に適切に埋め込まれた向きづけ可能，コンパクト，連結な曲面であって，$\partial S = K (\subset S^3 = \partial B^4)$

を満たすものとする． このような S について種数と同様に，K の 4 **次元種数** (4-genus) $g_4(K)$ を

$$g_4(K) := \min\{g(S) \mid S \text{ は (b) を満たす曲面 }\}$$

で定めることができる．これも非負整数値の結び目不変量であり，定義から $g_4(K) \leq g_3(K)$ が成立し，一般に等号は成立しない．

上の話の向きづけ不可能版を考えることができる．つまり，

(c) S^3 内の向きづけ不可能，コンパクト，連結な曲面 F で，$\partial F = K$,
(d) B^4 に適切に埋め込まれた向きづけ不可能，コンパクト，連結な曲面 F で，$\partial F = K (\subset S^3 = \partial B^4)$

* himeno-keisuke@hiroshima-u.ac.jp

という二条件を考え，K の**向きづけ不可能種数** (non-orientable 3-genus) $\gamma_3(K)$ と 4 **次元向きづけ不可能種数** (non-orientable 4-genus) $\gamma_4(K)$ をそれぞれ

$$\gamma_3(K) := \min\{\beta_1(F) \mid F \text{ は (c) を満たす曲面 }\}$$
$$\gamma_4(K) := \min\{\beta_1(F) \mid F \text{ は (d) を満たす曲面 }\}$$

で定める．$\beta_1(F)$ は F の first Betti number であり，このセッティングでは F の crosscap の個数と一致する．それゆえ，γ_3, γ_4 はそれぞれ (3 次元) crosscap number，4 次元 crosscap number と呼ばれることもある．

本研究は，non-orientable 4-genus γ_4 に着目したものである．γ_4 が最初に考えられたのは [12] であり，そこでは 4-genus と 4 次元 clasp number との関連が調べられた．その後，少しずつ結び目の γ_4 が調べられ，現在では Knotinfo にある結び目のリスト [11] のうち，交差数が 10 以下が解決されており，交差数が 11 のものは約三分の一解決されている [3, 5, 9]．一方，すべての torus knot について γ_4 は決定できていない．torus knot を簡単に紹介すると，S^3 に標準的に埋め込まれたトーラス上に乗るような結び目のことであり，まず調べるべき結び目のクラスの一つである．torus knot の γ_4 については [1, 2, 4, 10] を参照.

いずれにせよ，結び目の non-orientable 4-genus γ_4 の決定は難しく，先行研究も少ない．

2 主定理

本研究はいくつかの pretzel knot に対して，新たに non-orientable 4-genus γ_4 を決定したというものである．本稿で考える pretzel knot は，三つの整数 p, q, r を用いて $P(p, q, r)$ と表される (一般には三つでなくても良い)．図 1 を参照．さらに，p, q, r は正の整数であることを仮定しておく．こうすることで，$P(p, q, r)$ は **alternating knot** (交差点の上下が交互に現れる図式を持つ結び目) となる．

よく知られている事実を述べておく．

- multiset として $\{x, y, z\} = \{p, q, r\}$ ならば，$P(x, y, z) = P(p, q, r)$．つまり，パラメータの順番は関係ない．
- $P(p, q, r)$ が結び目であるための必要十分条件は，偶数のパラメータが高々一つであること．それ以外は**絡み目**，つまり，S^3 内の複数の S^1 の非交和と微分同相な部分多様体になってしまう．

本稿では結び目を考えたいので，$P(p, q, r)$ の偶数のパラメータは無いか一つだけである．偶数のパラメータがない場合，$P(p, q, r)$ を**奇数型**と呼ぶ．同様に，偶数のパラメータが一つあるとき，$P(p, q, r)$ を**偶数型**と呼び，p が偶数であるとして良い．

次が主定理である．

定理 1. (1) $K = P(p, q, r)$ が偶数型で p を偶数とする．以下の条件のどちらかを満たす時，$\gamma_4(K) = 2$ である．

- mod 4 で，$p \equiv 0$ かつ，q と r のうち少なくとも一方は 3 と合同,

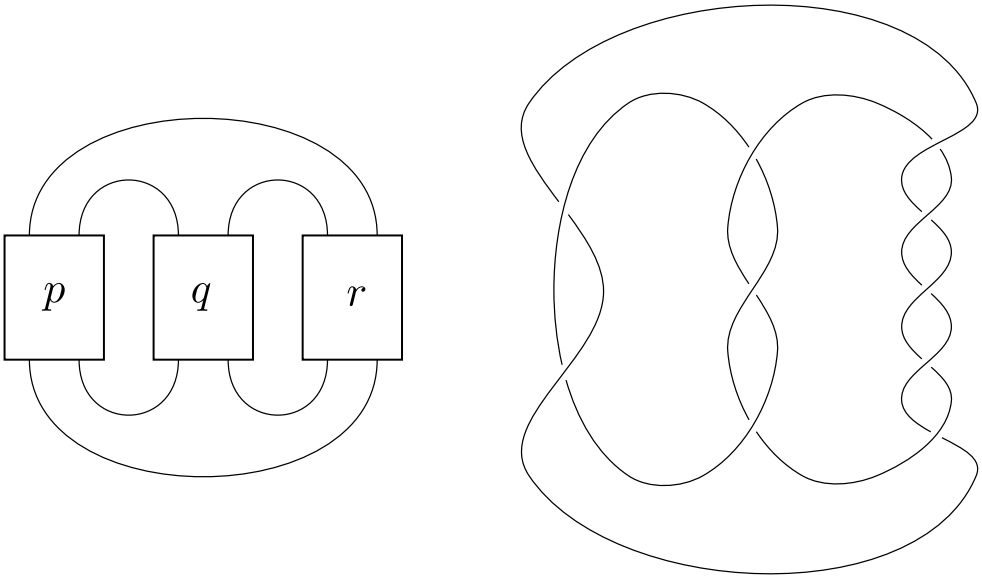


図 1　(左) pretzel knot $P(p,q,r)$. 各パラメータは縦方向の右半ひねりの個数を表す. (右) pretzel knot $P(2,3,5)$.

- mod 4 で，$p \equiv 2$ かつ，q と r のうち少なくとも一方は 1 と合同.

(2) 奇数型 $K = P(p,3,5)$ について，$\gamma_4(K) = 2$.

注意 1. 偶数型 $K = P(p,q,r)$ について $\gamma_4(K) \leq 2$ は分かっているが，条件を満たさないもので唯一決定できているものは，$\gamma_4(P(2,3,3)) = 1$ のみである [9].

3　判定道具

non-orientable 4-genus γ_4 の決定には主に二つのステップが必要である．例えば，$\gamma_4(K) = 2$ を示すには，「4 次元球体 B^4 内の $\beta_1(K) = 2$ となる適切な向きづけ不可能な曲面を構成する」「$\gamma_4(K) \geq 2$ であること」を示さなければならない． 前者はバンド手術を用いて構成，後者は Goeritz 行列から来るある二次形式の埋め込みを考える，という手法を紹介する.

3.1　向きづけ不可能バンド手術

$K \subset S^3$ を向きづけられた結び目とする．band $B = [0,1] \times [0,1]$ を，$[0,1] \times \partial[0,1] \subset K$ かつ B の向きから誘導される ∂B の向きが K と一致しないように S^3 に埋め込む．そして，$K' = (K - [0,1] \times \partial[0,1]) \cup (\partial[0,1] \times [0,1])$ とすると，K' は結び目である．こうして K から K' を得る操作を **向きづけ不可能バンド手術**という．図 2 を参照．K' の向きの付け方は一意に定まらないが，本稿では一つ向きを取るものとする.

結び目 K が張る 4 次元球体 B^4 内の向きづけ不可能曲面を構成する．$B^4 = (S^3 \times [0,1]) \cup_{S^3 \times \{1\}} B^4$ と捉え，K を $S^3 \times \{0\}$ に入れておく．このとき，$K \times [0,1]$ は $S^3 \times [0,1]$ に適切に埋め込まれた向きづけ可能曲面 (アニュラス) である．$[0,1]$ を時間軸と捉え，$S^3 \times \mathrm{Int}[0,1]$ で向きづけ不可

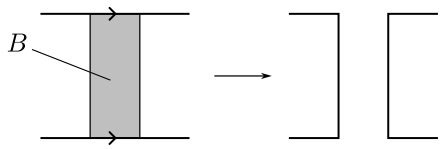


図 2　向きづけ不可能バンド手術

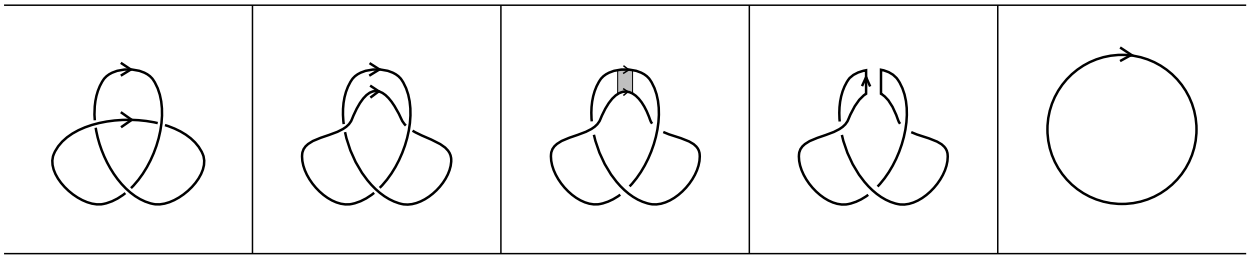


図 3　$S^3 \times [0,1]$ 内での結び目の向きづけ不可能バンド手術による変化．図は境界が trefoil in $S^3 \times \{0\}$ と unknot in $S^3 \times \{1\}$ となっている向きづけ不可能曲面 $F \in S^3 \times [0,1]$ の，$S^3 \times \{1/4\}, S^3 \times \{1/2\}, S^3 \times \{3/4\}$ による断面を表している．

能バンド手術を施すと，そこに saddle point が発生する，つまり，first Betti number が増える．しかも向きづけ不可能な曲面になる．n 回向きづけ不可能バンド手術を施して，$g_4(K') = 0$ となる K' になって，向きづけ不可能曲面 $F \subset S^3 \times [0,1]$ を得たとする ($\partial F = K \cup K'$)．このとき，$K' \subset S^3 \times \{1\}$ であり，(B^4, D^2) を $(S^3 \times \{1\}, K')$ で $(S^3 \times [0,1], F)$ に貼れば，$\partial F \cup D^2 = K$ となる向きづけ不可能曲面 $F \cup D^2$ で $\beta_1(F \cup D^2) = n$ をみたすものを B^4 で構成できたことになる．図 3 を参照.

以上より次を得る．

命題 1. 結び目 K に向きづけ不可能バンド手術を n 回施して，$g_4(K') = 0$ をみたす K' に変形できたとする．このとき，$\gamma_4(K) \leq n$ が成立.

3.2　Goeritz 行列と二次形式の埋め込み

有名な結び目不変量に **signature** $\sigma(K) \in \mathbb{Z}$ と **Arf 不変量** $\mathrm{Arf}(K) \in \{0,1\}$ がある．[13] の結果から次が得られる ([8, Theorem 2.1] 参照).

命題 2. $\sigma(K) + 4\mathrm{Arf}(K) \equiv 4 \pmod 8$ のとき，$\gamma_4(K) \geq 2$ である.

[9] で，この命題の発展バージョンが与えられた，それを紹介する.

まず，Goeritz 行列を定義する．結び目の図式によって分割された平面領域を白と黒で塗り分け (チェッカーボード彩色)，白領域に $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とラベルを割り当てる．さらに，D の各交点に図 4 のように符号を割り当てる．$i \neq j$ に対し，X_i と X_j の間の符号の合計を g_{ij} とする．そして，

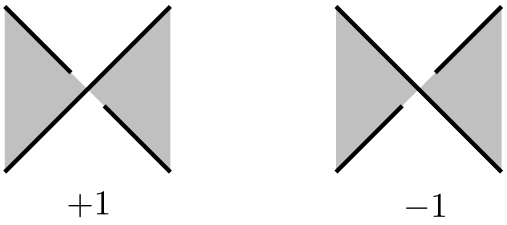


図 4　領域を白黒に分けたときの，交点の符号の付け方.

$g_{ii} = -\sum_{i\neq j} g_{ij}$ とする．こうして得られる行列 $G' = (g_{ij})$ を **pre–Goeritz 行列**といい，G' から好きに一行一列取り除いた行列 G を **Goeritz 行列** という．G 自体は図式 D や取り除く行や列に依存するが，この後の議論はそれらに依らない．また，定義より G は対称行列である．さらに，白領域と黒領域を入れ替えることで，もう一つ Goeritz 行列が手に入る．図式が alternating であるとき，二つの Goeritz 行列は定値であり，片方が正定値，もう一方が負定値である [6, 7].

引き続き，G を $n \times n$ 対称行列であるとする．$G \oplus [d]$ $(d \in \mathbb{Z})$ で，G に $(n+1, n+1)$ 成分が d でそれ以外 0 となる $(n+1)$ 行目と $(n+1)$ 列目を追加した行列を表すことにする．二次形式 $(\mathbb{Z}^{n+1}, G \oplus [d])$ を考える．つまり，$e_1, \ldots, e_{n+1}$ を $\mathbb{Z}^{n+1}$ の標準的な基底とし，$(G \oplus [d])_*(e_i, e_j) := (G \oplus [d]$ の (i,j) 成分$)$ で定義される双線型写像 $(G \oplus [d])_* \colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ がある．簡単のため，$e_i \cdot e_j := (G \oplus [d])_*(e_i, e_j)$ とする．また，$\pm\mathrm{Id}(e_i, e_j) := \pm\delta_{ij}$ として，双線形写像 $\mathrm{Id} \colon \mathbb{Z}^{n+1} \to \mathbb{Z}^{n+1}$ を定める．双線形写像 $\phi \colon (\mathbb{Z}^{n+1}, G \oplus [d]) \to (\mathbb{Z}^{n+1}, \pm\mathrm{Id})$ が **二次形式の埋め込み** であるとは，ϕ は単射で $\pm\mathrm{Id}(\phi(e_i), \phi(e_j)) = e_i \cdot e_j$ が成立しているときをいう.

これで判定条件を与えることができる．紹介するのは [8] によりさらに改良されたものである．結び目 K の **determinant** $\det(K) \in \mathbb{Z}$ は $\det(K) = |\det G|$ で与えられることに注意.

命題 3 ([8],[9])**.** K を alternating knot で，その alternating な図式からくる Goeritz 行列のうち，正定値なものを G_+，負定値なものを G_- とする.

(1) $\sigma(K) + 4\mathrm{Arf}(K) \equiv -2 \pmod 8$ かつ二次形式の埋め込み

$$\phi \colon (\mathbb{Z}^{n+1}, G_+ \oplus [\det(K)]) \to (\mathbb{Z}^{n+1}, \mathrm{Id})$$

が**存在しない**とき，$\gamma_4(K) \geq 2$ が成立.

(2) $\sigma(K) + 4\mathrm{Arf}(K) \equiv 2 \pmod 8$ かつ二次形式の埋め込み

$$\phi \colon (\mathbb{Z}^{n+1}, G_- \oplus [-\det(K)]) \to (\mathbb{Z}^{n+1}, -\mathrm{Id})$$

が**存在しない**とき，$\gamma_4(K) \geq 2$ が成立.

(3) $\sigma(K) + 4\mathrm{Arf}(K) \equiv 0 \pmod 8$ かつ二次形式の埋め込み

$$\phi \colon (\mathbb{Z}^{n+1}, G_\epsilon \oplus [\epsilon \det(K)]) \to (\mathbb{Z}^{n+1}, \epsilon\mathrm{Id})$$

が $\epsilon = 1$ と $\epsilon = -1$ でともに**存在しない**とき，$\gamma_4(K) \geq 2$ が成立.

(4) $\sigma(K) + 4\mathrm{Arf}(K) \equiv 4 \pmod 8$ かつ二次形式の埋め込み

$$\phi \colon (\mathbb{Z}^{n}, G_\epsilon) \to (\mathbb{Z}^{n+2}, \epsilon\mathrm{Id})$$

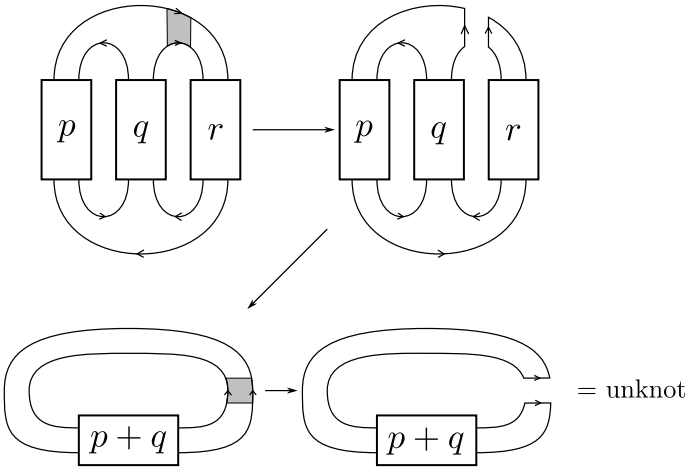


図 5　偶数型 pretzel knot を二回の向きづけ不可能バンド手術で unknot にする.

が $\epsilon = 1$ と $\epsilon = -1$ でともに**存在しない**とき，$\gamma_4(K) \geq 3$ が成立.

本稿ではこの命題の (2) しか使わない.

4　主定理について

定理 1 の証明のキーは次の命題である.

命題 4. G_- を pretzel knot $P(p,q,r)$ の標準的な alternating 図式から得られる負定値な Goeritz 行列とする．このとき，二次形式の埋め込み

$$\phi\colon (\mathbb{Z}^{\mathrm{rank}(G_-)+1}, G_- \oplus [-\det(K)]) \to (\mathbb{Z}^{\mathrm{rank}(G_-)+1}, -\mathrm{Id})$$

は存在しない.

この命題は背理法で示すことができる．これと命題 3 の (2) より次を得る.

命題 5. pretzel knot $K = P(p,q,r)$ に対し, $\sigma(K)+4\mathrm{Arf}(K) \equiv 2 \pmod 8$ であるとき, $\gamma_4(K) \geq 2$.

4.1　偶数型

偶数型 pretzel knot $K = P(p,q,r)$ (p は偶数) を考える．まずこのとき，二回の向きづけ不可能バンド手術で unknot にできる (図 5)．したがって，命題 1 より $\gamma_4(K) \leq 2$ である.

定理 1 の条件

- mod 4 で，$p \equiv 0$ かつ，q と r のうち少なくとも一方は 3 と合同,
- mod 4 で，$p \equiv 2$ かつ，q と r のうち少なくとも一方は 1 と合同.

をみたすとき，$\sigma(K) + 4\mathrm{Arf}(K) \equiv 2, 4 \pmod 8$ である．したがって，命題 2, 5 より，このとき，$\gamma_4(K) = 2$ である.

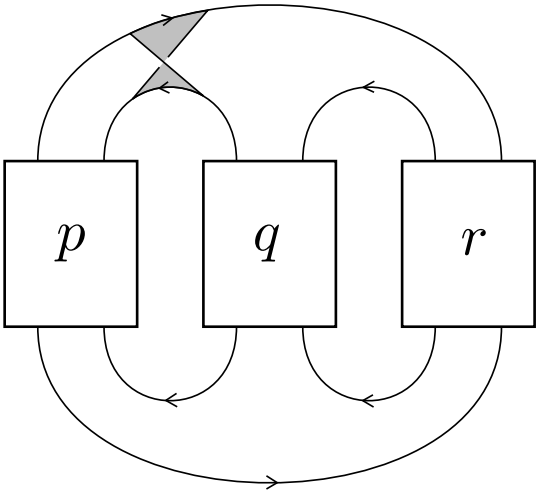


図 6　奇数型 pretzel knot を一回の向きづけ不可能バンド手術で偶数型にする．

注意 2. 定理 1 の条件をみたさないとき，$\sigma(K)+4\mathrm{Arf}(K)\equiv 0 \pmod 8$ である．命題 3 より，二次形式の埋め込み $\phi\colon (\mathbb{Z}^{n+1}, G_+ \oplus [\det(K)]) \to (\mathbb{Z}^{n+1}, \mathrm{Id})$ が存在しないことを示せれば，$\gamma_4(K)=2$ と言える．しかし，いくつか実験してみたところ，この二次形式の埋め込みは構成できてしまう．他にも，γ_4 の下からの評価を与える道具はあるが，$\gamma_4=1$ を否定できていない状況である．また，実際，$\gamma_4(P(2,3,3))=1$ である [9].

4.2　奇数型

図 6 が示すように，奇数型 pretzel knot $K=P(p,q,r)$ は一回の向きづけ不可能バンド手術で偶数型 $P(p+1,q,r)$ に変形できる．したがって，$\gamma_4(K)\le 3$ である．

定理 1 (2) の pretzel knot $K=P(p,3,5)$ (p は奇数) は二回の向きづけ不可能バンド手術で unknot にできる (図 7)．このとき，$\sigma(K)+4\mathrm{Arf}(K)\equiv 2 \pmod 8$ なので，命題 5 より $\gamma_4(K)=2$ と結論づけられる．

5　コメント

偶数型，奇数型ともにまだまだ完全決定には程遠いうえ，p,q,r に負の整数がある場合も調べたい．しかし，取り組めば分かるというものでもない．注意 2 でも述べたように，知られている判定道具すべてを使っても決定できていない例がある．つまり，新たな判定道具を作る必要があるがそれは簡単な話ではないはずだ．また，実際にバンド手術を構成するのも難しい．図 7 のバンド手術もよく見つけたなと，自分でも思う．

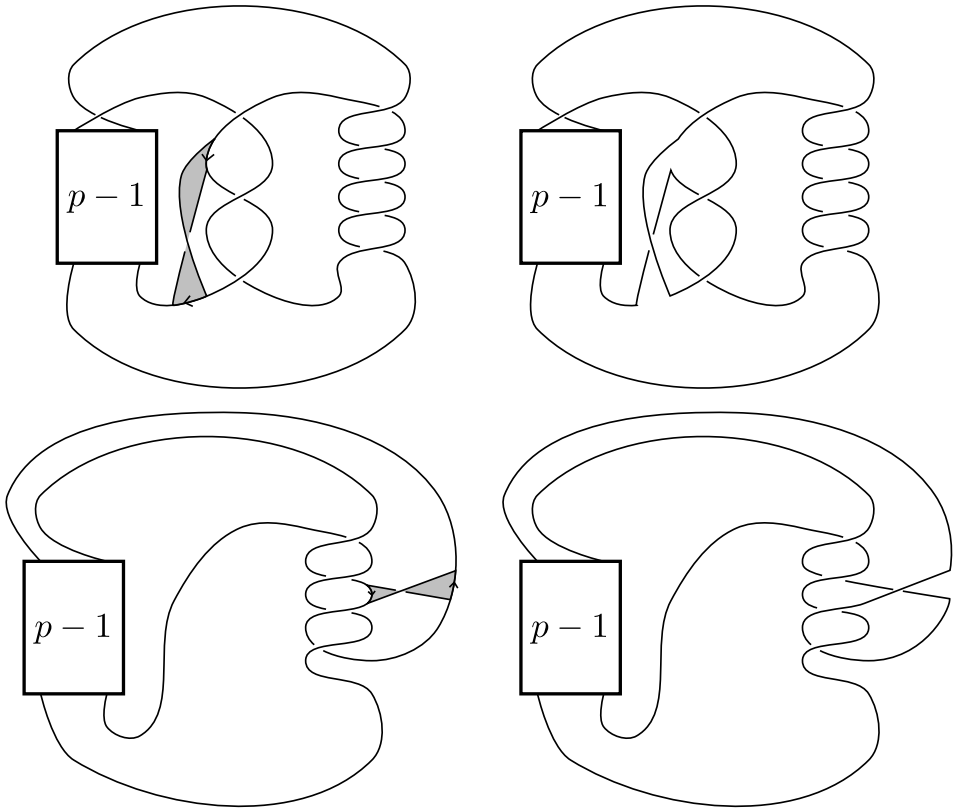


図 7　pretzel knot $P(p,3,5)$ (p は奇数) を二回の向きづけ不可能バンド手術で unknot にする．左上，右上，左下，右下の順に変形し，最後の右下は unknot になっていることは簡単な変形で確認できる．

参考文献

[1] Joshua Batson, *Nonorientable slice genus can be arbitrarily large*, Math. Res. Lett. **21** (2014), no. 3, 423–436.

[2] Fraser Binns, Sungkyung Kang, Jonathan Simone and Paula Truöl, *On the nonorientable four-ball genus of torus knots*, preprint. arXiv:2109.09187.

[3] Megan Fairchild, *The non-orientable 4-genus of 11 crossing non-alternating knots*, to appear, J. Knot Theory Ramifications. arXiv:2403.00996

[4] Megan Fairchild, Hailey Jay Garcia, Jake Murphy and Hannah Percle, *Non-orientable 4-genus of torus knots*, preprint. arXiv:2405.04737.

[5] Nakisa Ghanbarian, *The non-orientable 4-genus for knots with 10 crossings*, J. Knot Theory Ramifications **31** (2022), no. 5, Paper No. 2250034, 46 pp.

[6] C. McA. Gordon and R. A. Litherland, *On the signature of a link*, Invent. Math. **47** (1978), no. 1, 53–69.

[7] Joshua Evan Greene, *Alternating links and definite surfaces*, Duke Math. J. **166** (2017), no.

11, 2133–2151.

[8] Jim Hoste, Patrick Shanahan and Cornelia Van Cott, *On the nonorientable 4-genus of double twist knots*, J. Knot Theory Ramifications **32** (2023), no. 5, Paper No. 2350036, 30 pp.

[9] Stanislav Jabuka and Tynan Kelly, *The nonorientable 4-genus for knots with 8 or 9 crossings*, Algebr. Geom. Topol. **18** (2018), no. 3, 1823–1856.

[10] Stanislav Jabuka and Cornelia Van Cott, *On a nonorientable analogue of the Milnor conjecture*, Algebr. Geom. Topol. **21** (2021), no. 5, 2571–2625.

[11] Charles Livingston and Allison H. Moore. Knotinfo: Table of knot invariants. URL: http://knotinfo. math.indiana.edu, January 2025.

[12] Hitoshi Murakami and Akira Yasuhara, *Four-genus and four-dimensional clasp number of a knot*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), no. 12, 3693–3699.

[13] Akira Yasuhara, *Connecting lemmas and representing homology classes of simply connected 4-manifolds*, Tokyo J. Math. **19** (1996), no. 1, 245–261.

Liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$-representations and odd-th cyclic covers of genus one two-bridge knots

お茶の水女子大学 理学部数学科 4 年
坂本 穂波 (Honami Sakamoto) *

概要

p を素数とし, $\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環とする. 数論における Galois 表現の変形理論 (Hida–Mazur 理論) とその低次元位相幾何学における類似研究の文脈において, 剰余表現が可約であるような既約な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現に特別な関心があった. 本講演で紹介する我々の今回の研究 [STU25a] は, Mazur の提案に従い, その「逆の方向へ進む」ことを目指す.

主結果は次のように述べられる. 「K を種数 1 の 2 橋結び目とする. 素数 p が結び目 K のある奇数次の巡回被覆の 1 次ホモロジー群の大きさを割るとき, その群 $\pi_1(S^3 - K)$ は liminal $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ.」議論の過程で, ルジャンドル記号を使って素数 p があるルカス型数列を割るための条件も指摘する. また, liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現の存在についても論じる.

本講演の内容は, 丹下稜斗氏 (早稲田大学) と植木潤氏 (お茶の水女子大学) との共同研究に基づく.

1 導入

結び目と素数, 3 次元多様体と代数体の整数環の類似性は, Gauss の時代から重要な役割を果たしてきたと考えられている [Mor12, Mor24]. 特に, 最初に結び目の $\mathbb{Z}$ 被覆に対する Alexander–Fox 理論と代数体の $\mathbb{Z}_p$ 拡大に対する岩澤理論の類似性, また結び目群の表現の変形理論と Galois 表現の変形理論 (Hida–Mazur 理論) の類似性が指摘されている.

p を素数とし, $\mathbb{Z}_p$ を p 進整数環とする. 既存の研究において, 剰余表現が可約であるような既約な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現に特別な関心がある [MTTU17, KMTT18, TTU22, TU24, BTTU23]. 我々の今回の研究では, Mazur の提案 [Maz11, Section 19] に従い, 「逆の方向へ進む」ことを目指す.

π を群とする. 関数 $\chi : \pi \to \mathbb{Z}_p$ が $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標であるとは, $\chi = \operatorname{tr}\rho$ となるような $\mathbb{Z}_p$ の拡大体上の SL_2 表現 ρ が存在することをいう. また, $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現 (resp. 指標) が ***liminal*** であるとは, $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現 (resp. 指標) が絶対既約であり, かつ, そのすべての開近傍は絶対既約な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現 (resp. 指標) をもつことをいう.

我々の主結果は次のように述べられる.

定理 1.1. *K を S^3 上の種数 1 の 2 橋結び目とする. 素数 p が結び目 K のある奇数次の巡回被覆の 1 次ホモロジー群の大きさを割るとき, その群 $\pi_1(S^3 - K)$ は liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ.*

* sakamoto10ho73@gmail.com

このような変形可能な指標はアレクサンダー多項式の零点に対応するということが, Burde と de Rham の研究によって古典的に知られている [Bur67, dR67, HPSP01]. なので, 我々の研究の背景には深い文脈が横たわっていると考えられる. なお, Burde–de Rham の定理の p 進類似とその数論的な設定への応用も存在する [MTT24].

本稿では, まず基本的な用語の説明をした後, 段階的な結果と議論のポイントを列挙することで, 種結果の証明のあらすじを概観する. 議論の詳細・具体例・さらなる展望については, 論文 [STU25a], また日本語版要旨 [STU25b] を参照されたい.

謝辞. 第 21 回数学総合若手研究集会の世話人の方々に感謝します. また, 有用な助言をくださった指導教員の植木潤先生（お茶の水女子大学）に感謝します.

2 結び目

S^1 の 3 次元球面 S^3 への埋め込みの像 K を, 自己交差を許さない連続的変形で同一視したものを, **結び目**という. 結び目は, $\mathbb{R}^2$ への射影図によって与えることができる. **図** 2.1の 0_1(自明な結び目), 3_1(三葉結び目), 4_1(8 の字結び目) などが基本的な例である.

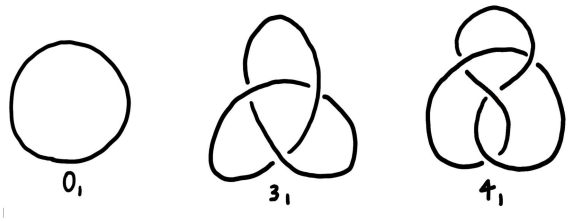


図 2.1

$S^3 - K$ 内に任意に基点 $*$ を取ったとき, 基本群 $\pi_1(S^3 - K, *)$ を K の**結び目群**とよぶ. 以下では, 基点は省略する.

任意の**種数 1 の 2 橋結び目**は, 各 $(0,0) \neq (k,l) \in \mathbb{Z}^2$ に対し, **図** 2.2によって定義される $J(2k, 2l)$ 型のダブルツイスト結び目として実現される. 基本的な参考文献は [Tra18] である.

特に, $J(2,0)$ は自明な結び目, $J(2,2)$ は三葉結び目 3_1, $J(2,-2)$ は 8 の字結び目 4_1 であることが知られている.

そのような結び目の群は次のような表示を持つ.

$$\pi := \pi_1(S^3 - J(2k, 2l)) = \langle a, b \mid w^l a = b w^l \rangle$$

ここで, a, b はメリディアンを表し, $w = (ba^{-1})^k (b^{-1}a)^k$ である.

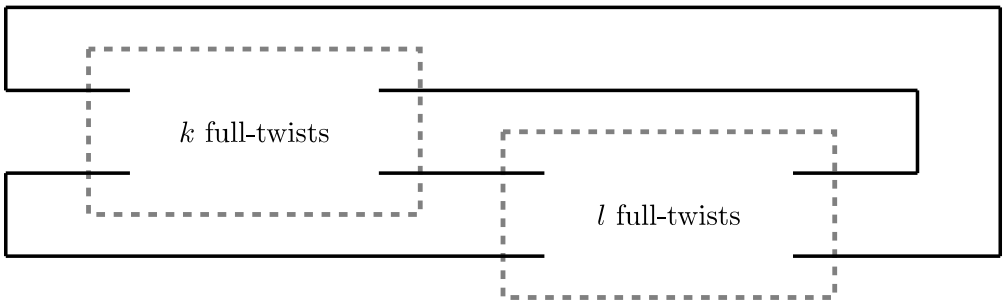


図 2.2

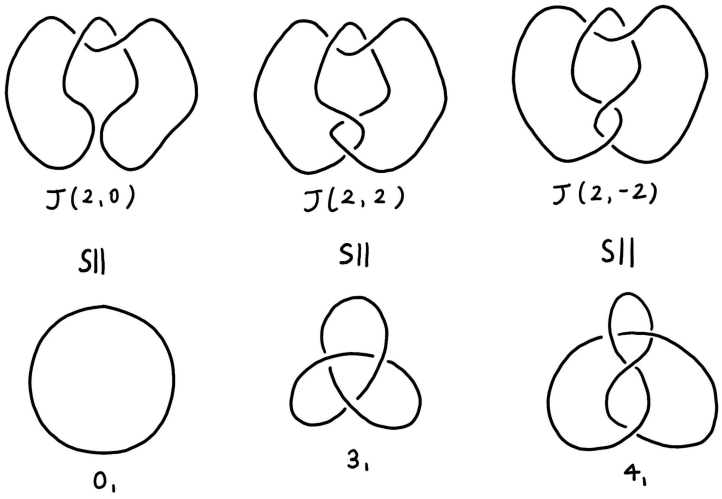


図 2.3

古典的な結び目不変量の一つにアレクサンダー多項式があり, 結び目を境界にもつ有向曲面 (ザイフェルト膜) を取るごとに決まるザイフェルト行列によって計算される. いま, ザイフェルト行列の 1 つは $V = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & l \end{pmatrix}$ であり, アレクサンダー多項式は

$$\Delta_{J(2k,2l)}(t) = \det\left(tV - V^{\perp}\right) = klt^2 + (1-2kl)t + kl$$

である.

各 $g \in \pi$ に対し, 写像 $\operatorname{tr} g\colon \operatorname{Hom}(\pi, \mathrm{SL}_2\mathbb{C}) \to \mathbb{C}; \rho \mapsto \operatorname{tr}\rho(g)$ を考える. そのとき, $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現の共役類は

$$x := \operatorname{tr} a, \quad y := \operatorname{tr} ab^{-1}$$

によってパラメーター付けられる. さらに, $z := \operatorname{tr} w$ とおく.

非可換な $\mathrm{SL}_2\mathbb{C}$ 表現の各共役類は, 次の式で定義される **Riley の普遍表現**によって代表される:

$$\rho^{\mathrm{R}}(a) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 0 & s^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho^{\mathrm{R}}(b) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 2-y & s^{-1} \end{pmatrix}.$$

ここで, $x = s + s^{-1}$ であり, x, y は Riley 多項式の等式 $f_{k,l}(x, y) = \Phi_{k,l}(x, y-2) = 0$ をみたす.

3 主定理の証明

3.1 2 つの曲線の交点

既約表現の共役類たちと, $f_{k,l}(x, y) = 0$ かつ $y - 2 \neq 0$ なる点たちの間には, 一対一対応が存在する. $y - 2 = 0$ の各点は可約表現の集合と可換表現の集合の組と対応する.

命題 3.1. $f_{k,l}(x, y) = 0$ と $y - 2 = 0$ の交点は $(x, y) = (\pm\sqrt{4 - \frac{1}{kl}}, 2)$ である.

証明. 各 $n \in \mathbb{Z}$ に対し, n 次の第 2 種チェビシェフ多項式 $S_n(z) \in \mathbb{Z}[z]$ を

$$S_{n-1}(2\cos\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin\theta}, \theta \in \mathbb{R}, \sin\theta \neq 0$$

によって定めると, [Tra18, Subsection 2.2] により, 既約指標の多様体は

$$f_{k,l}(x, y) = S_l(z) - (1 + (-x^2 + y + 2)S_{k-1}(y)(S_k(y) - S_{k-1}(y))S_{l-1}(z).$$

によって与えられる. n 次の第 2 種チェビシェフ多項式の性質を用いることで, 定理の交点を求めることができる. □

3.2 $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標

定理 3.2. $kl \neq 0$ と仮定する. このとき, $J(2k, 2l)$ の群が a *liminal* な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標をもつ必要十分条件は

i) $p = 2$ かつ $4k^2l^2 - kl \equiv 1 \bmod 8$, または

ii) $p \neq 2$, $p \nmid kl$, かつ $4k^2l^2 - kl$ の非平方部分 r に対し, ルジャンドル記号 $\left(\dfrac{r}{p}\right) = 1$.

ここに $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ に対し, $b^2 \mid a$ をみたす最大の整数を b とするとき, a/b^2 を a の**非平方部分**と呼ぶ. (この用語は別の概念に用いられる場合もあるので注意されたい.) また, $a \in \mathbb{Z}$ の p 上の**ルジャンドル記号** $(\frac{a}{p}) \in \{0, \pm 1\}$ は以下のように定義される. まず, $p \mid a$ のとき, $(\frac{a}{p}) = 0$ と置く. 次に, $p \nmid a$ と仮定する. もし $a \equiv x^2 \bmod p$ となる $x \in \mathbb{Z}$ が存在するなら, $(\frac{a}{p}) = 1$ と定める. そうでないとき, $(\frac{a}{p}) = -1$ と定める.

補題 3.3. $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ かつ $p^2 \nmid a$ とする. このとき, $\sqrt{a} \in \mathbb{Z}_p$ とであるための必要十分条件は.

i) $p = 2$ かつ $a \equiv 1 \bmod 8$, または

ii) $p \neq 2$, $(\frac{a}{p}) = 1$.

証明. ヘンゼルの補題 (cf.[Neu99, Chapter II (4.6)]) から導かれる. □

補題 3.4. $\pi_1(S^3 - J(2k, 2l))$ の liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 指標と, $\mathbb{Z}_p^2$ 上で $f_{k,l}(x, y) = 0$ と $y - 2 = 0$ の交点との間に 1 対 1 対応がある.

証明. **定理 3.1**より, $f_{k,l}(x,y) = 0$ と $y-2=0$ は $\mathbb{Z}_p^2$ 内で交点をもつとき, $f_{k,l}(x,2) = (f_{k,l}(x,y) \bmod (y-2))$ は $\mathbb{Z}_p$ において単根 α をもち, ヘンゼルの補題により $(x,y)=(\alpha,2)$ の周りの陰関数 $x = x_f(y) \in \mathbb{Z}_p[\![y-2]\!]$ が得られることを用いる. □

定理 3.2 の証明. $f_{k,l}(x,y)=0$ と $y-2=0$ が $\mathbb{Z}_p^2$ に交点を持つための必要十分条件は $p \nmid kl$ かつ $\sqrt{4k^2l^2-kl} \in \mathbb{Z}_p$ であることなので, **補題** 3.3と**補題** 3.4から定理の主張が得られる. □

3.3 Lucas/Fibonacci 型数列

$m \in \mathbb{Z}$ とし, $t^2-t+m=(t-a)(t-b)$ と書くと, $a+b=1$, $ab=m$ が成り立つ. Lucas 型数列と Fibonacci 型数列をそれぞれ $L_n = a^n+b^n$, $F_n = \frac{a^n-b^n}{a-b}$ と定義する. すると, $L_0=2$, $L_1=1$, $L_2=1-2m$, $L_{n+2}=L_{n+1}-mL_n$, $F_0=0$, $F_1=1$, $F_2=1$, $F_{n+2}=F_{n+1}-mF_n$ となり, したがって $L_n, F_n \in \mathbb{Z}$ である.

すると,

$$L_n^2 + (4m-1)F_n^2 = 4m^n \quad \cdots(\star)$$

が得られる.

ここで, p が L_{2n+1} を割り切るようなある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ があると仮定する. そのとき, 漸化式により, $(4m-1)F_n^2 \equiv (2m^n)^2 m \bmod p$ が成り立つ. これは, $m(4m-1)$ が $\bmod p$ で平方であることを表している. さらに, $p \nmid m(4m-1)$ が成り立つ. 一方, $p \mid 4m-1$ ならば, $(\star)$ より $p=2$ または $p \mid m$ となり, したがって矛盾する. よって, 次が得られる.

命題 3.5. 素数 p に対し, ある $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ があって p が L_{2n+1} を割り切るとき, ルジャンドル記号について $\left(\dfrac{4m^2-m}{p}\right) = 1$ となる.

3.4 Fox–Weber の公式

S^3 内の結び目 K を考え, そのアレクサンダー多項式を $\Delta_K(t)$ で表す. このとき, Fox–Weber の公式 [Web79] により, 各 $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, K で分岐する $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 被覆 $M_n \to S^3$ は

$$r_n := |H_1(M_n;\mathbb{Z})| = |\mathrm{Res}(t^n-1, \Delta_K(t))|$$

を満たす. ただし群 G が有限群のとき $|G|$ で G の位数 $\#G$ を表し, G が無限群のときは $|G|=0$ と定める. また, 多項式 $f(t), g(t) \in \mathbb{Z}[t]$ に対し, $\mathrm{Res}(f(t),g(t)) \in \mathbb{Z}$ はそれらの終結式を表す. なお, K が種数 1 の 2 橋結び目であるときは, $H_1(M_n)$ の詳しい群構造は Fox らによって知られている [Fox60, Ily21]. まず, 次のように主張する.

定理 3.6. $\Delta_K(t) = mt^2+(1-2m)t+m$ で $m \in \mathbb{Z}$ であるとき, $p \mid r_n$ となるある奇数 n があるならば $\left(\dfrac{4m^2-m}{p}\right) = 1$ である.

証明. n が奇数のとき, $L_n^2 = (a^n+b^n)^2 = -\mathrm{Res}(t^n-1, \Delta_K(t)) = r_n$ が成り立ち, **定理 3.5**から結論が導かれる. □

定理 1.1の証明. $\Delta_{J(2k,2l)}(t) = klt^2 + (1-2kl)t + kl$ であるから, $m = kl$ を代入することで, **定理 3.2**と**定理 3.6**から得られる. □

4 Liminal 表現の存在

いま ρ を $\mathbb{Z}_p$ の有限拡大上の表現とし, $\overline{\rho} := \rho \bmod p$ が絶対既約であり, $\mathrm{Im}\,\mathrm{tr}\,\overline{\rho} \subset \mathbb{F}_p$ をみたすとする. このとき, 有限体の Brauer 群は自明であるから, Skolem–Noether の定理により, このような $\mathbb{F}_p$ 上のある表現 $\overline{\rho}'$ と共役である (cf.[Mar16, Subsection 3.5]). さらに, Nyssen の定理 [Nys96, Théorèm 1] により, この $\overline{\rho}'$ は $\mathbb{Z}_p$ 上の表現 ρ' であって $\mathrm{tr}\rho = \mathrm{tr}\rho'$ を満たすものへと持ち上がり, このような ρ' は共役を除き一意的である.

この議論がそのまま既約指標多様体 $X_{\mathrm{irr}}(S^3 - J(2k,2l)) = \{f_{f,l}(x,y) = 0\} \setminus \{y - 2 = 0\}$ であるザリスキー閉包上の表現に拡張できるかどうかが気になるところである. Nyssen の証明は, 絶対既約性が多元環準同型の全射性と同値であるという事実を用いているので, その結果は剰余可約表現には必ずしも拡張されない. さらに, [KMTT18, Subsection 2.3] に指摘されているように, 結び目群の表現の設定では, 随伴表現の 2 次ホモロジーが消えないという意味で, 変形問題は障害が生じる. 次の問題は繊細である.

問い 4.1. $\mathbb{Z}_p$ 上の liminal 表現が与えられたとき, liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現を見つけられるか?

少なくとも次が言える.

命題 4.2. **定理** 3.2の条件のもとで, $p \neq 2$ かつ $(\frac{-kl}{p}) = 1$ であるとき, *liminal* な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現が存在する.

証明. **補題** 3.4の $\boldsymbol{\rho}^R$ を考え, $s = \frac{x - \sqrt{x^2-4}}{2}$ に注意する. **命題** 3.1より, $\sqrt{x^2-4}\,|_{y=2} = \sqrt{\frac{-1}{kl}}$ が成り立つ. $(\frac{-kl}{p}) = 1$ のとき, $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{\frac{-1}{kl}} \in \mathbb{Z}_p$ であり, よって, $\boldsymbol{\rho}^R \bmod y-2$ は liminal な $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$ 表現である. □

参考文献

[BTTU23] Léo Bénard, Ryoto Tange, Anh T. Tran, and Jun Ueki, *Multiplicity of non-acyclic* SL_2*-representations and L-functions of the twisted Whitehead links*, preprint. arXiv:2303.15941, 2023.

[Bur67] Gerhard Burde, *Darstellungen von Knotengruppen*, Math. Ann. **173** (1967), 24–33. MR 212787

[dR67] Georges de Rham, *Introduction aux polynômes d'un nœud*, Enseign. Math. (2) **13** (1967), 187–194. MR 240804

[Fox60] Ralph H. Fox, *The homology characters of the cyclic coverings of the knots of genus one*, Ann. of Math. (2) **71** (1960), 187–196. MR 119210

[HMP16] Michael Heusener, Vicente Muñoz, and Joan Porti, *The* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C})$*-character variety of the figure eight knot*, Illinois J. Math. **60** (2016), no. 1, 55–98. MR 3665172

[HP15] Michael Heusener and Joan Porti, *Representations of knot groups into* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ *and twisted Alexander polynomials*, Pacific J. Math. **277** (2015), no. 2, 313–354. MR 3402353

[HPSP01] Michael Heusener, Joan Porti, and Eva Suárez Peiró, *Deformations of reducible representations of 3-manifold groups into* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$, J. Reine Angew. Math. **530** (2001), 191–227. MR 1807271

[Ily21] Mednykh Ilya, *Homology group of branched cyclic covering over a 2-bridge knot of genus two*, preprint. arXiv:2111.04292, November 2021.

[KMTT18] Takahiro Kitayama, Masanori Morishita, Ryoto Tange, and Yuji Terashima, *On certain L-functions for deformations of knot group representations*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), no. 5, 3171–3195. MR 3766846

[Lag85] J. C. Lagarias, *The set of primes dividing the Lucas numbers has density* 2/3, Pacific J. Math. **118** (1985), no. 2, 449–461. MR 789184

[Mar16] Julien Marché, *Character varieties in* SL_2 *and Kauffman Skein algebras*, Topology, Geometry and Algebra of low-dimensional manifolds, RIMS Kôkyûroku, no. 1991, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 4 2916, pp. 27–42.

[Maz11] Barry Mazur, *How can we construct abelian Galois extensions of basic number fields?*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **48** (2011), no. 2, 155–209. MR 2774089

[Mor12] Masanori Morishita, *Knots and primes*, Universitext, Springer, London, 2012, An introduction to arithmetic topology. MR 2905431

[Mor24] ———, *Knots and primes*, Universitext, Springer Singapore, 2024, An introduction to arithmetic topology, 2nd edition.

[MTT24] Yasushi Mizusawa, Ryoto Tange, and Yuji Terashima, *On the Burde–de Rham theorem for finitely presented pro-p groups*, to appear in Int. Math. Res. Not. IMRN (2024), arXiv:2408.01270.

[MTTU17] Masanori Morishita, Yu Takakura, Yuji Terashima, and Jun Ueki, *On the universal deformations for* SL_2*-representations of knot groups*, Tohoku Math. J. (2) **69** (2017), no. 1, 67–84. MR 3640015

[Neu99] Jürgen Neukirch, *Algebraic number theory*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 322, Springer-Verlag, Berlin, 1999, Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher, With a foreword by G. Harder. MR 1697859 (2000m:11104)

[Nys96] Louise Nyssen, *Pseudo-représentations*, Math. Ann. **306** (1996), no. 2, 257–283. MR 1411348 (98a:20013)

[STU25a] Honami Sakamoto, Ryoto Tange, and Jun Ueki, *Liminal* $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$*-representations and odd-th cyclic covers of genus one two-bridge knots*, preprint. arXiv:2501.00323, 2025.

[STU25b] ———, *Liminal* $\mathrm{SL}_2\mathbb{Z}_p$*-representations and odd-th cyclic covers of genus one two-bridge knots –a précis in japanese–*, 研究集会「結び目の数理 VII」報告集, to be available at `https://taniyama.w.waseda.jp/mathsciknot2024/mathsciknot2024.html`, 2025.

[Tra18] Anh T. Tran, *Twisted Alexander polynomials of genus one two-bridge knots*, Kodai Math. J. **41** (2018), no. 1, 86–97. MR 3777388

[TTU22] Ryoto Tange, Anh T. Tran, and Jun Ueki, *Non-acyclic* SL_2*-representations of twist knots,* -3*-Dehn surgeries, and L-functions*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2022), no. 15, 11690–11731. MR 4458562

[TU24] Ryoto Tange and Jun Ueki, *Twisted Iwasawa invariants of knots*, Math. Nachr. **297** (2024), no. 4, 1519–1534. MR 4734983

[Web79] Claude Weber, *Sur une formule de R. H. Fox concernant l'homologie des revêtements cycliques*, Enseign. Math. (2) **25** (1979), no. 3-4, 261–272 (1980). MR 570312 (81d:57011)

曲面絡み目の結び目群と結び目対称カンドルの特徴付けについて

大阪大学　大学院理学研究科　数学専攻
安田順平 (Jumpei YASUDA) *

概要

絡み目の補空間の基本群を結び目群という。与えられた群がある絡み目の結び目群となる必要十分条件は、絡み目のブレイド表示を用いることで与えられる。曲面絡み目とは 4 次元空間内へ滑らかに埋め込まれた閉曲面である。本講演では、与えられた群が曲面絡み目の結び目群となるための必要十分条件（特徴付け）について紹介する。さらに、結び目対称カンドルにおける特徴付けも併せて紹介する。

1　導入

結び目 K の補空間の基本群 $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ を結び目群という。結び目理論において、結び目群は結び目や絡み目の分類において重要な働きをしている。自然な問題として「与えられた群がいつ結び目群となるか？」が挙げられる。この問題に関する結論の 1 つとして、次の Alexander-Artin の定理が知られている。

定理 1.1 ([1])**.** 群 G が絡み目の結び目群であるための必要十分条件は、あるブレイド $b \in B_m$ が存在して G が次の群表示を持つことである：

$$\left\langle x_1, \dots, x_m \,\middle|\, x_i = b \cdot x_i \quad (i = 1, \dots, m) \right\rangle.$$

ここで、$b \cdot x$ はブレイド群 B_m による自由群 F_m への作用である（$b \in B_m$, $x \in F_m$）。この定理は、「全ての絡み目があるブレイドの閉包として表すことができる」という事実を元に証明される。

曲面結び目とは 4 次元空間 $\mathbb{R}^4$ へ滑らかに埋め込まれた連結な閉曲面であり、曲面結び目の非交和を**曲面絡み目**という。González-Acuña [3] と Kamada [5] は、向き付け可能な曲面絡み目の結び目群について、独立に特徴付けを与えた。ここでは Kamada による特徴付けを紹介する。整数 $m \geq 1$ と m-ブレイド $b_1, \dots, b_n \in B_m$ に対して、次の群表示を $b_1, \dots, b_n$ **に付随した** (m, n)**-表示** (もしくは単に (m, n)**-表示**) という：

$$\left\langle x_1, \dots, x_m \,\middle|\, b_i \cdot x_1 = b_i \cdot x_2 \quad (i = 1, \dots, n) \right\rangle.$$

* E-mail:u444951d@ecs.osaka-u.ac.jp

また $b_1, \ldots, b_n$ に付随した (m,n)-表示が**境界条件**を満たすとは、以下を満たす $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ が存在することをいう：

$$\prod_{i=1}^{n} b_i^{-1} \sigma_1^{\varepsilon_i} b_i = 1_m,$$

ここで $\sigma_i \in B_m$ は Artin の標準的な生成元であり、1_m はブレイド群の単位元である。

定理 1.2 ([5])**.** 群 G が c-成分で種数 g の向き付け可能な曲面絡み目の結び目群であるための必要十分条件は、以下を満たす整数 $m, n \geq 0$ が存在することである。

(1) G は境界条件を満たす (m,n)-表示を持つ。
(2) 等式 $2c - 2g = 2m - n$ が成り立つ。
(3) $G/[G,G]$ はアーベル群 $\mathbb{Z}^c$ に同型である.

特に、群 G が（成分数などを問わない）向き付け可能な曲面絡み目の結び目群となるための必要十分条件は (1) を満たすことである。この定理は、「向き付け可能な曲面絡み目が 2 次元ブレイドの閉包として表すことができる」という事実を用いて証明される。

本稿では、上記の定理を向き付け可能性に関わらない一般の曲面絡み目へ拡張する。

整数 $m \geq 1$ とブレイド $b_1, \ldots, b_n \in B_{2m}$ に対して、次の群表示を $b_1, \ldots, b_n$ に付随した $(2m,n)$-表示 **with inverses** であるという：

$$\left\langle x_1, \ldots, x_{2m} \,\middle|\, b_i \cdot x_1 = b_i \cdot x_2,\ x_{2j-1} = x_{2j}^{-1} \quad (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m) \right\rangle,$$

また (m,n)-表示が**弱境界条件**を満たすとは、以下を満たすような符号 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ が存在することをいう：

$$\prod_{i=1}^{n} b_i^{-1} \sigma_1^{\varepsilon_i} b_i \in K_{2m},$$

ここで K_{2m} は Hilden 部分群と呼ばれるブレイド群 B_{2m} の部分群である。曲面絡み目 F が (c,d) **成分**であるとは、F の連結成分が c 個の向き付け可能な曲面と d 個の向き付け不可能な曲面からなるときをいう。そして、(c,d) 成分の曲面絡み目 F の種数 (non-orientable genus) とは $\chi(F) = 2(c+d) - g$ を満たす整数 g を意味する。そして、次が主結果である。

定理 1.3. 群 G が (c,d) 成分で種数 g の曲面絡み目の結び目群であるための必要十分条件は、ある整数 $m, n \geq 0$ が存在して G が次を満たすことである。

(1) G は弱境界条件を満たす $(2m,n)$-表示 with inverses を持つ。
(2) 等式 $2(c+d) - g = 2m - n$ が成り立つ。
(3) $G/[G,G]$ はアーベル群 $\mathbb{Z}^c \oplus (\mathbb{Z}/2)^d$ と同型である。

特に、群 G が（成分数などを問わない）曲面絡み目の結び目群となるための必要十分条件は (1) を満たすことである。

本稿では、定理 1.3 で重要な役割をしている曲面絡み目のプラット表示について概説する。また、定理 1.3 の拡張として、結び目対称カンドルに対する同様の特徴付け（定理 3.5）を紹介し、その応用（定理 3.6）を述べる。

2　ブレイド状曲面のプラット閉包

2.1　ブレイドとブレイド状曲面

本稿を通して、$m \geq 1$ と $n \geq 0$ を正の整数、$I = [0,1]$ は閉区間、D^2 と B^2 は $\mathbb{R}^2$ 内の 2 次元円板、そして $X_m = \{1, \ldots, m\}$ は D^2 内の直線上に $x_1, \ldots, x_m$ の順に並ぶ内点とする。$p : D^2 \times I \to I$ を第 2 成分への射影とする。このとき、**m-ブレイド**とは $D^2 \times I$ 内の β であって次を満たすものである：

(1) 制限写像 $p|_\beta : \beta \to I$ は次数 m の被覆写像である。
(2) $\partial\beta = X_m \times \partial I$ が成り立つ。

2 つの m-ブレイドが**同値**であるとは、境界を固定する $D^2 \times I$ のアイソトピーによって移り合うときをいう。次数 m のブレイド群 B_m を D^2 上の m 点配置空間 C_m の基本群 $\pi_1(C_m, X_m)$ として定める。すると、m ブレイドの同値類とブレイド群 B_m の元の間には自然な全単射が存在する。

$\mathrm{pr}_2 : D^2 \times B^2 \to B^2$ を第 2 成分への射影とする。また B^2 の基点 y_0 を ∂B^2 上から取り固定する。このとき、次数 m の（**基点付き**）**ブレイド状曲面** [8] とは $D^2 \times B^2$ 内のコンパクト曲面 S であって次を満たすものである：

(1) 制限写像 $\pi_S := \mathrm{pr}_2|_S : S \to B^2$ は次数 m の分岐被覆写像である。
(2) $S \cap D^2 \times \{y_0\} = X_m \times \{y_0\}$ が成り立つ。

特に、ブレイド状曲面 S が次数 m の **2 次元 m-ブレイド** [9] であるとは $\partial S = X_m \times \partial B^2$ を満たすものことをいう。本稿では、ブレイド状曲面といえば**単純**であると仮定する。すなわち、任意の点 $y \in B^2$ に対して $\#\pi_S^{-1}(y) \in \{m, m-1\}$ が成り立つことを仮定する。2 つのブレイド状曲面が**同値**であるとは、次を満たすような $D^2 \times B^2$ のアイソトピー $\{\Phi_t\}_{t\in[0,1]}$ と B^2 のアイソトピー $\{\phi_t\}_{t\in[0,1]}$ が存在することをいう：

(1) 任意の $t \in [0,1]$ に対して、$\phi_t \circ \mathrm{pr}_2 = \mathrm{pr}_2 \circ \Phi_t$ が成り立つ。
(2) 任意の $t \in [0,1]$ に対して、$\Phi_t|_{D^2\times\{y_0\}} = \mathrm{id}$ が成り立つ。

2.2　ブレイド状曲面のプラット閉包

本節では適切なブレイド状曲面に対してプラット閉包を導入する。

ウィケット [2] とは、$D^2 \times I$ 内に埋め込まれた半円周 w であって ∂w は $D^2 \times \{0\}$ と垂直に交わっているものである。**m-ウィケット配置**と言えば互いに交わらないウィケットの非交和とする。そして、m-ウィケット配置 w_0 を $\partial w_0 = X_{2m}$ かつ各ウィケットの境界が $\{x_{2j-1}, x_{2j}\}$（$i = 1, 2, \ldots, m$）となるものとして定める。また m-ウィケット配置全体からなる空間を $\mathcal{W}_m$ とする。そして $\mathcal{W}_m$ 内のループ $f : (I, \partial I) \to (\mathcal{W}_m, w_0)$ に対して、$(2m)$-ブレイド β_f を次で定義する：

$$\beta_f \;=\; \bigcup_{t\in I} \partial f(t) \times \{t\} \;\subset\; (D^2 \times \{0\}) \times I = D^2 \times I.$$

このとき、ブレイド β が**適切**であることを $\beta = \beta_f$ を満たすループ $f : (I, \partial I) \to (\mathcal{W}_m, w_0)$ が存在することして定義する。

Hilden 部分群 K_{2m} を次の表示をもつ B_{2m} の部分群として定める：

$$K_{2m} \;=\; \left\langle \sigma_1, \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2, \sigma_{2k}\sigma_{2k-1}\sigma_{2k+1}^{-1}\sigma_{2k}^{-1} \;\middle|\; k \in \{1, \ldots, m-1\} \right\rangle.$$

Brendle-Hatcher[2] は K_{2m} が適切な $(2m)$-ブレイドの同値類からなる部分群であることを示した。

本節において、B^2 と複素平面上の単位円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ を同一視し、$y_0 = 1$ とする。また $\mathrm{pr}_1 : D^2 \times B^2 \to D^2$ を第 1 成分への射影とする。次数 m のブレイド状曲面 S に対して、m-ブレイド β_S を次で定める：

$$\beta_S = \bigcup_{t \in I} \mathrm{pr}_1(\pi_S^{-1}(e^{2\pi\sqrt{-1}t})) \times \{t\} \subset D^2 \times I.$$

定義より β_S の閉包は ∂S である。ブレイド状曲面 S が**適切**であるとは β_S が適切であることをいう。適切なブレイド状曲面の次数は偶数であり、偶数次数の 2 次元ブレイドは全て適切である。

以下では、次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S に対してプラット閉包を定義する。閉区間 J_t を $J_t = \{re^{2\pi it} \in \mathbb{C} \mid r \in [1, 2]\}$（$t \in [0, 1]$）とする。但し $J_0 = J_1$ であり、和集合 $\cup_{t\in I} J_t$ は $\mathbb{C}$ 上のアニュラスである。S は適切であるため、あるループ $f : (I, \partial I) \to (\mathcal{W}_m, w_0)$ が存在して $\beta_S = \beta_f$ が成り立つ。そこで $w_t = f(t)$ を $D^2 \times J_t$ 内の m-ウィケット配置であって $\partial w_t \subset D^2 \times \{e^{2\pi it}\}$ となるものとする。そして w_t の和集合を $A_S = \cup_{t\in I} w_t$ とする。

定義 2.1. S の**プラット閉包** $\widetilde{S}$ を和集合 $S \cup A_S$ として定める。

命題 2.2 ([10])**.** 任意の曲面絡み目はある適切なブレイド状曲面のプラット閉包と全同位である。

命題 2.3 ([11])**.** S を次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面、n を π_S の分岐点の個数とする。このときプラット閉包 $\widetilde{S}$ の結び目群は $(2m, n)$-表示 with inverses を持つ。

定理 1.3 は命題 2.3 を用いて証明される。

3　カンドルと対称カンドル

カンドル [4, 7] とは、空でない集合 Q とその上の二項演算 $* : Q \times Q \to Q$ の組であって次を満たすものである。

(Q1) 任意の $a \in Q$ に対して、$a * a = a$ が成り立つ。
(Q2) 任意の $a, b \in Q$ に対してある元 $c \in Q$ が一意的に存在して、$c * b = a$ を満たす。
(Q3) 任意の $a, b, c \in Q$ に対して、$(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ が成り立つ。

また**ラック**とは空でない集合 Q とその上の二項演算 $*$ の組であって (Q2) と (Q3) を満たすものである。カンドル準同型とは写像 $f : Q \to Q'$ であって $f(a * b) = f(a) * f(b)$（$a, b \in Q$）を満たすものをいう。特に、$S_b(a) = a * b$ によって定義される写像 $S_b : Q \to Q$ はカンドル同型写像となる。カンドル Q の**内部自己同型写像** $\mathrm{Inn}(Q)$ を S_b（$b \in Q$）によって生成される自己同型群の部分群として定める。

カンドル Q が**連結**であるとは、$\mathrm{Inn}(Q)$ による Q への自然な作用が推移的であることをいう。同様に、Q 内の $\mathrm{Inn}(Q)$ による作用の軌道を Q の**連結成分**という。カンドル $(Q,*)$ に対して、二項演算 $\overline{*}: Q\times Q\to Q$ を $a\overline{*}b := S_b^{-1}(a)$ として定めると、$(Q,\overline{*})$ はカンドルとなる。$\overline{*}$ を $*$ の**双対演算**という。

カンドル Q の**良い対合写像**とは対合写像 $\rho: Q\to Q$（つまり $\rho^2=\mathrm{id}_Q$）であって $\rho(a*b)=\rho(a)*b$ と $a*\rho(b)=a\overline{*}b$ が任意の元 $a,b\in Q$ に対して成り立つことをいう。そして**対称カンドル**とはカンドルとその良い対合写像の組 (Q,ρ) をいう。また対称カンドル準同型といえばカンドル準同型 $f:(Q,\rho)\to(Q',\rho')$ であって $f\circ\rho=\rho'\circ f$ が成り立つことをいう。

例 3.1 (二面体カンドル)**.** 二面体カンドル R_n とは $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ であって二項演算として $a*b=2b-a$ を持つものである。二面体カンドルの良い対合写像は Kamada-Oshiro[6] によって以下のように分類されている：

(1) $n\equiv 1,3 \mod 4$ のとき、R_n の良い対合写像は恒等写像 id のみである。
(2) $n\equiv 2 \mod 4$ のとき、R_n の良い対合写像は恒等写像 id または対蹠写像 ρ_A のいずれかである。ここで対蹠写像は $\rho_A(a)=a+n/2$ によって定まる。
(3) $n\equiv 0 \mod 4$ のとき、R_n の良い対合写像は恒等写像 id、対蹠写像 ρ_A、そして以下で定義される二種類の半対蹠写像 ρ_{HA},ρ'_{HA} のいずれかである。

$$\rho_{HA}(a)=\begin{cases}a+n/2 & (a\text{: even})\\ a & (a\text{: odd})\end{cases},\quad \rho'_{HA}(a)=\begin{cases}a & (a\text{: even})\\ a+n/2 & (a\text{: odd})\end{cases}.$$

例 3.2. カンドル $(Q,*)$ のコピーを $\overline{Q}$ とする。すると非交和 $D(Q)=Q\cup\overline{Q}$ 上の二項演算を以下で定めるとカンドルとなる：

$$a*\overline{b}:=a\overline{*}b,\quad \overline{a}*b:=\overline{a*b},\quad \overline{a}*\overline{b}:=\overline{a\overline{*}b}.$$

さらに $D(Q)$ の対合写像 $\rho(a)=\overline{a}$ は良い対合写像となる。このとき対称カンドル $(D(Q),\rho)$ を Q の**ダブル**という。

例 3.3 (結び目対称カンドル)**.** M を連結な $(n+2)$ 次元多様体、K を M へプロパーに埋め込まれた n 次元部分多様体とする。$N(K)$ を K の管状近傍、$E(K)=M\setminus \mathrm{Int}N(K)$ を K の外部、そして $*\in E(K)$ を基点とする。K の**投げ縄 (noose)** とは K の有向メリディアン円板 D と $E(K)$ 内の有向辺 α であって ∂D 上の点を始点に $*$ を終点とするものの組 (D,α) である（図 1)。$\widetilde{Q}(M,K)$ を K の投げ縄全体のホモトピー類からなる集合とする。そして $\widetilde{Q}(M,K)$ 上の 2 項演算を次で定める：

$$[(D,\alpha)]*[(D',\alpha')]=[(D,\alpha\cdot\alpha'^{-1}\partial D'\alpha')].$$

するとこの演算によって $\widetilde{Q}(K)$ はカンドルとなる。さらに、写像 $\rho:\widetilde{Q}(M,K)\to\widetilde{Q}(M,K)$ を $\rho([(D,\alpha)])=[(-D,\alpha)]$ と定めると、これは良い対合写像となる。ここで $-D$ はメイリディアン円板 D であって向きを入れ替えたものである。この対称カンドル $(\widetilde{Q}(M,K),\rho)$ を**結び目対称カンドル**といい $X(M,K)$ または単に $X(K)$ と記す。

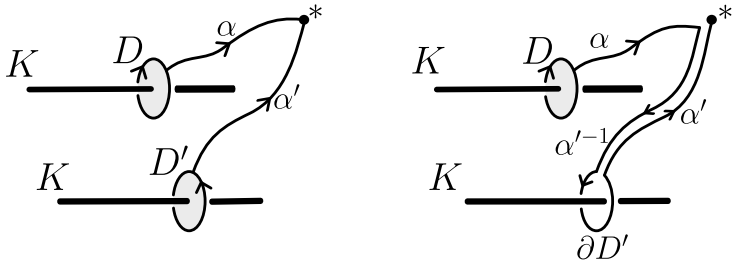


図 1　K の投げ縄（左）と結び目対称カンドルの演算（右）

次の対称カンドル表示を $2m$-ブレイド $b_1, \ldots, b_n \in B_{2m}$ に付随した $(2m, n)$**-表示 with inverses** であるという：

$$\left\langle x_1, \ldots, x_{2m} \,\middle|\, b_i \cdot x_1 = b_i \cdot x_2,\ x_{2j-1} = \overline{x_{2j}} \quad (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m) \right\rangle_{\mathrm{sq}}.$$

また $2m$-ブレイド $b_1, \ldots, b_n \in B_{2m}$ に付随した $(2m, n)$-表示 with inverses が**弱境界条件**を満たすとは、次が成り立つ $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ が存在することをいう：

$$\prod_{i=1}^{n} b_i^{-1} \sigma_1^{\varepsilon_i} b_i \in K_{2m}.$$

命題 3.4 ([11])**.** 次数 $2m$ の適切なブレイド状曲面 S の分岐点の個数を n とする。このとき、プラット閉包 $\widetilde{S}$ の結び目対称カンドルは弱境界条件を満たす $(2m, n)$-表示 with inverses を持つ。

命題 3.4 を用いることで、次の主結果を得る。

定理 3.5. 対称カンドル (Q, ρ) が (c, d) 成分で種数 g の曲面絡み目の結び目対称カンドルであるための必要十分条件は次を満たす整数 $m, n \geq 0$ が存在することである：

(1) (Q, ρ) は弱境界条件を満たす $(2n, m)$-表示 with inverses を持つ。
(2) $2(c + d) - g = 2m - n$ が成り立つ。
(3) Q は $2c + d$ 個の連携成分 $X_1, \ldots, X_c,\ Y_1, \ldots, Y_c,\ Z_1, \ldots, Z_d$ から成り、各 $i \in \{1, \ldots, c\}$ と $j \in \{1, \ldots, d\}$ に対して $\rho(X_i) = Y_i$ と $\rho(Z_j) = Z_j$ を満たす。

さらに、定理 3.5 を適用することで次を得る。

定理 3.6. 任意の整数 $n \geq 1$ と任意の良い対合写像 $\rho : R_n \to R_n$ に対してある曲面絡み目 F が存在して、結び目対称カンドル $X(F)$ が (R_n, ρ) と同型になる。

参考文献

[1] James W. Alexander. A lemma on systems of knotted curves. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 9(3):93–95, 1923.

[2] Tara Brendle and Allen Hatcher. Configuration spaces of rings and wickets. *Commentarii Mathematici Helvetici*, 88, 05 2008.

[3] F. González-Acuña. A characterization of 2-knot groups. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 10(2):221–228, 1994.

[4] D. Joyce. A classifying invariants of knots. *J. Pure. Appl. Alg.*, 23:37–65, 1982.

[5] Seiichi Kamada. A characterization of groups of closed orientable surfaces in 4-space. *Topology*, 33(1):113–122, 1994.

[6] Seiichi Kamada and Kanako Oshiro. Homology groups of symmetric quandles and cocycle invariants of links and surface-links. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(10):5501–5527, 2010.

[7] S. Matveev. Distributive groupoids in knot theory. *Math. USSR-Sb*, 47:73–83, 1984.

[8] Lee Rudolph. Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids. *Comment. Math. Helv.*, 58(1):1–37, 1983.

[9] O.Ya. Viro. Lecture given at osaka city university. September 1990.

[10] Jumpei Yasuda. A plat form presentation for surface-links. *arXiv:2105.08634*, 2021.

[11] Jumpei Yasuda. Computation of the knot symmetric quandle and its application to the plat index of surface-links. *J. Knot Theory Ramifications*, 33(03):2450005, 2024.

MGR colorings for Seifert surfaces of oriented links

大阪大学　大学院理学研究科　数学専攻
新井克典 (Katsunori ARAI) *

概要

向き付けられたいくつかの S^1 の非交和 $S^1 \sqcup \cdots \sqcup S^1$ を S^3 へ埋め込んだ像を有向絡み目という．有向絡み目を境界とする S^3 内の（連結な）有向コンパクト曲面を, その有向絡み目のザイフェルト曲面と呼ぶ．有向絡み目のザイフェルト曲面は, 有向絡み目の種々の不変量の構成において重要な役割を果たす．MGR は群とラックの構造を併せ持った代数系である．MGR を用いて, 彩色不変量と呼ばれる S^3 内の境界付き有向コンパクト曲面の全同位不変量を得ることができる．本講演ではいくつかのザイフェルト曲面に対して彩色不変量を計算し, 得られた結果について述べる．

1　ザイフェルト曲面

いくつかの向き付けられた S^1 の非交和 $S^1 \sqcup \cdots \sqcup S^1$ を $S^3 = \mathbb{R}^3 \sqcup \{\infty\}$ へ埋め込んだ像を有向絡み目という．特に 1 成分の有向絡み目を有向結び目と呼ぶ．2 つの有向絡み目 L, L' が S^3 の向きを保つ自己同相写像 $S^3 \to S^3$ で移り合うとき, L と L' は全同位であるといい, $L \cong L'$ と書く．

Definition 1.1. 3 次元球面 $S^3 = \mathbb{R}^3 \sqcup \{\infty\}$ 内の境界付き有向曲面 F が, 有向絡み目 L の**ザイフェルト曲面**であるとは, 次の条件 (i)–(ii) を満たすことをいう．

(i) F のどの連結成分も空でない境界を持つ．
(ii) $\partial F \cong L$ である．

Remark 1.2. ザイフェルト曲面に対して, 連結性を仮定する場合も多い．

Theorem 1.3 ([2, 7])**.** 任意の有向絡み目に対して, そのザイフェルト曲面が存在する．

有向絡み目のザイフェルト曲面 F と F' が S^3 の向きを保つ自己同相写像で移り合うとき, F と F' が全同位であるといい, $F \cong F'$ と書く．

任意のザイフェルト曲面 F は次の方法で空間 3 価グラフの図式 D を用いて表される (Fig. 1)．このとき, 空間 3 価グラフの図式 D をザイフェルト曲面 F の**図式**と呼ぶ．

ザイフェルト曲面の図式に対して, ライデマイスター型の定理が成り立つことが知られている．

Theorem 1.4 ([5])**.** 2 つのザイフェルト曲面が全同位であることと, それらを表す 2 つの図式がライデマイスター変形 (Fig. 2) と S^2 上のアイソトピー変形で移り合うことは同値である．

* E-mail:u068111h@ecs.osaka-u.ac.jp

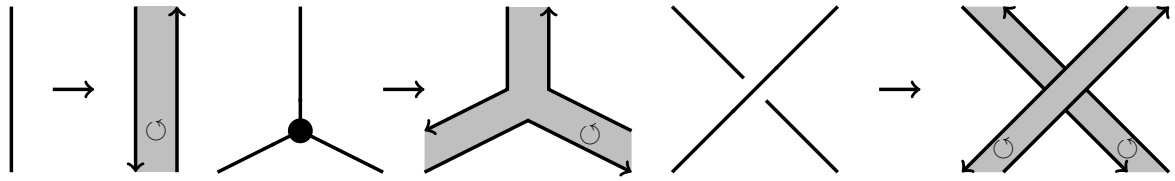


図 1　空間 3 価グラフ図式を用いたザイフェルト曲面の構成

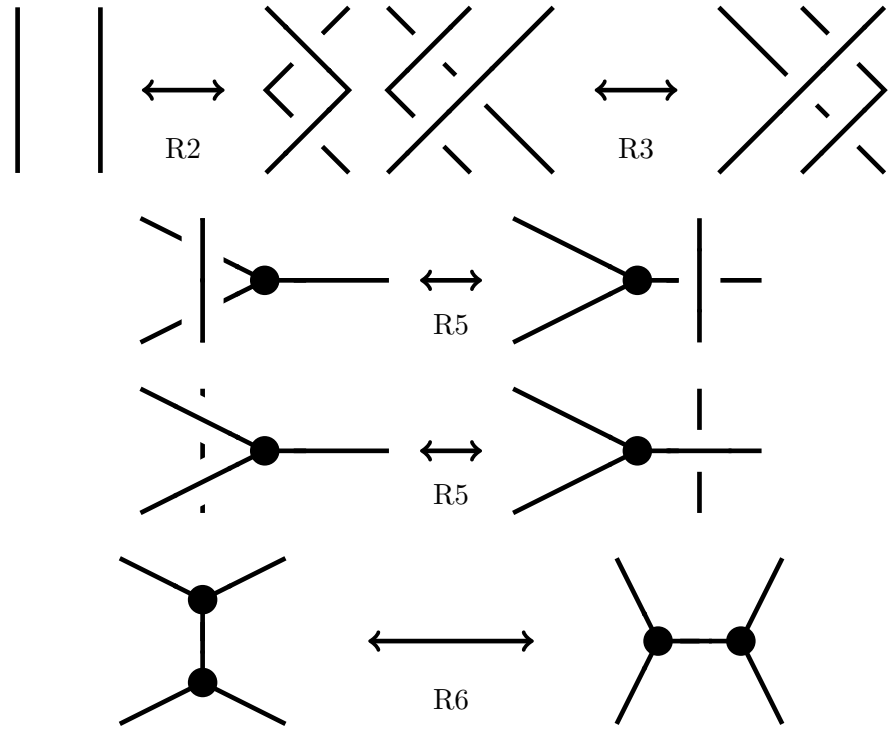


図 2　ライデマイスター変形

空間 3 価グラフの図式 D を図式としてもつザイフェルト曲面を $F(D)$ で表すこととする.

Proposition 1.5. 有向絡み目のザイフェルト曲面の図式 D に対して, 次の操作（図 3）で得られる図式 D' を考える. このとき, $\partial F(D') = \partial F(D)$ である.

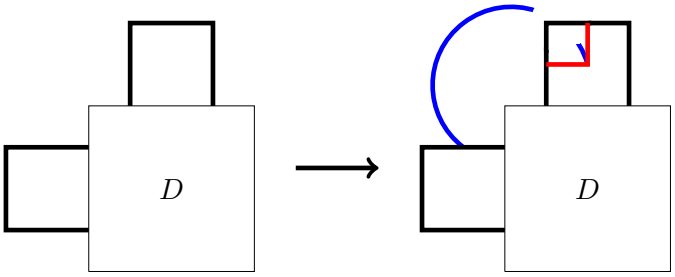


図 3　境界を変えない図式の変形

2　ザイフェルト行列

K, K' を互いに交わらない有向結び目とする．$H_1(S^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z}$ の生成元を表すメリディアンループのホモロジー類を $m \in H_1(S^3 \setminus K)$ とおく．$[K'] = n \cdot m \in H_1(S^3 \setminus K)$ を満たす整数 n を $\mathrm{Lk}(K, K')$ と書く．

Definition 2.1. F を有向絡み目 L のザイフェルト曲面とする．F の向きに対応する正の法線方向を考える．写像 $\phi : H_1(F) \times H_1(F) \to \mathbb{Z}$ を

$$\phi(x, y) = \mathrm{Lk}(l_x^+, l_y)$$

で定める．ここで, l_x, l_y はホモロジー類 x, y の代表元で, l_x^+ は l_x を F の法線方向に平行移動したものである．$H_1(F)$ の基底を一つ選び, その基底に関する ϕ の表現行列を F のザイフェルト行列といい, M_F と書く．

次の命題は基底の取り方に依らず成立する．

Proposition 2.2. 有向絡み目のザイフェルト曲面 F と F' が全同位であるとき, あるユニモジュラー行列 P が存在して, $M_{F'} = {}^T P M_F P$ を満たす．

Definition 2.3. 2 つの有向絡み目のザイフェルト曲面 F と F' の図式 D と D' がデルタ同値であるとは, D と D' がライデマイスター変形（図 2）と次のデルタ変形（図 4）で移り合うことをいう．

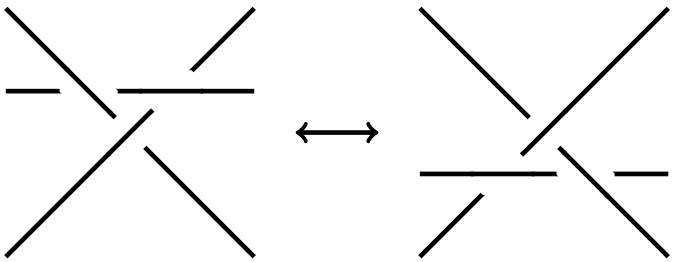


図 4　デルタ変形

Proposition 2.4. 2 つの有向絡み目のザイフェルト曲面 F と F' の図式 D と D' がデルタ同値ならば, あるユニモジュラー行列 P が存在して, $M_F = {}^T P M_{F'} P$ が成り立つ．

3　MGR について

カンドル ([4,6]) は, 結び目理論におけるライデマイスター変形に対応する代数系であり, 結び目理論の研究において重要な役割を果たす．特に結び目群の一般化である結び目カンドルは, 結び目の弱同値の差を除いて完全不変量であることが知られている．

本章では, カンドルの一般化であるラック ([1]) と群の演算を併せ持った代数系である MGR を用いて, ザイフェルト曲面の不変量を構成する．

Definition 3.1 ([1])**.** 集合 R と R 上の二項演算 $\triangleleft$ の組 $(R, \triangleleft)$ が**ラック**であるとは, 次の条件を満たすことをいう.

- 任意の $y \in R$ に対して, 写像 $S_y : R \to R$, $S_y(x) = x \triangleleft y$, は全単射である.
- 任意の $x, y, z \in R$ に対して, $(x \triangleleft y) \triangleleft z = (x \triangleleft z) \triangleleft (y \triangleleft z)$ を満たす.

Example 3.2. $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. $R_n = (\mathbb{Z}_n, x \triangleleft y = 2y - x)$ を二面体ラックという.

Definition 3.3 ([3])**.** 群の非交和 $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ と X 上の二項演算 $* : X \times X \to X$ の組 $(X, *)$ が **MGR** であるとは次の条件を満たすことをいう.

- 任意の $\lambda \in \Lambda$, $x \in X$, $a, b \in G_\lambda$ に対して, $x * (ab) = (x * a) * b$ かつ $x * e_\lambda = x$ を満たす. ここで, $e_\lambda \in G_\lambda$ は群 G_λ の単位元である.
- 任意の $x, y, z \in X$ に対して, $(x * y) * z = (x * z) * (y * z)$ を満たす.
- 任意の $\lambda \in \Lambda$, $x \in X$, $a, b \in G_\lambda$ に対して, ある $\mu \in \Lambda$ が存在して, $a * x, b * x \in G_\mu$ かつ $(ab) * x = (a * x)(b * x)$ を満たす.

MGR は Definition 3.1 の定義を満たす. 従ってラックである.

Example 3.4. $(R_3 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2 = \bigsqcup_{x \in R_3} (\{x\} \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$ は次の演算により MGR である.

$$((x,a),i) * ((y,b),j) = \begin{cases} ((x,a),i) & (b=0) \\ ((2y-x,a),i+1) & (b=1) \end{cases}, \quad ((x,a),i)((x,b),j) = ((x,a+b),i+j).$$

有向絡み目のザイフェルト曲面の図式 D の Y 向きとは, 各頂点回りで沈点や湧点（図 5）を持たない向きのことである. 有向絡み目のザイフェルト曲面図式に Y 向きを 1 つ指定したものを Y 向き付けられた図式と呼ぶ. 有向絡み目のザイフェルト曲面の Y 向き付けられた図式に対してもライデ

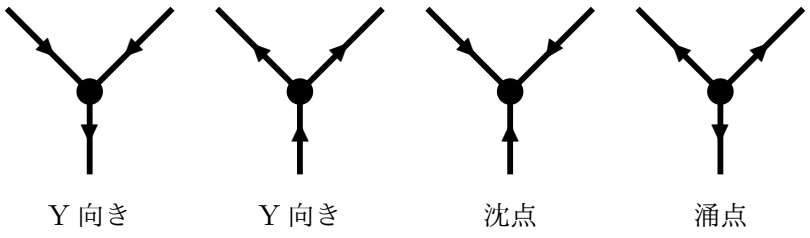


図 5　頂点周りの向き付け

マイスター変形が定義され, Theorem 1.4 と同様の定理が成り立つ.

有向絡み目のザイフェルト曲面の Y 向き付けられた図式の弧全体の集合を $\mathcal{A}(D)$ と表すこととする.

Definition 3.5. $X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ を MGR, D をザイフェルト曲面の Y 向き付けられた図式とする. D の X **彩色**とは次の条件を満たす写像 $C : \mathcal{A}(D) \to X$ のことをいう.

- D の各交差に対して, C は $C(a_i) * C(a_j) = C(a_k)$ を満たす. ここで, $a_i, a_j, a_k \in \mathcal{A}(D)$ は

図 6 の左図で表される弧である.

- D の各頂点に対して, C は $C(a_i), C(a_j) \in G_\lambda (\lambda \in \Lambda)$ かつ $C(a_i)C(a_j) = C(a_k)$ を満たす. ここで $a_i, a_j, a_k \in \mathcal{A}(D)$ は図 6 の中央及び右図で表される弧である.

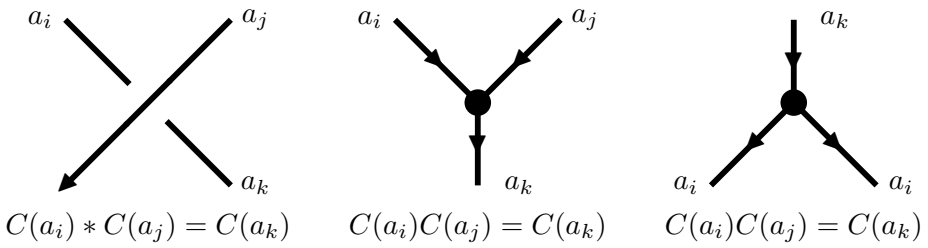


図 6　X 彩色条件

D の X 彩色全体の集合を $\mathrm{Col}_X(D)$ と書く.

Theorem 3.6 ([3])**.** X を MGR とする. 2 つの有向絡み目のザイフェルト曲面の Y 向き付けられた図式 D と D' がライデマイスター変形で移り合うならば, $\mathrm{Col}_X(D)$ と $\mathrm{Col}_X(D')$ の間に全単射が存在する. 特に, $\mathrm{Col}_X(D)$ の濃度は Y 向きの取り方に依らずザイフェルト曲面 $F(D)$ の不変量となる.

4　主定理

Theorem 4.1 (主結果)**.** 自明な 2 成分絡み目のザイフェルト曲面の組 (F, F') が存在して次を満たす.

(i) $F \ncong F'$ を満たす.
(ii) あるユニモジュラー行列 P が存在して, $M_F = {}^T P M_{F'} P$ を満たす.
(iii) F と F' の S^3 内での正則近傍 $N(F)$ と $N(F')$ はハンドル体結び目として同値である, すなわち, $N(F)$ と $N(F')$ は S^3 の向きを保つ自己同相写像で移り合う.

証明の概略. (i) ザイフェルト曲面の図式 D, D' を図 7 で定める.

このとき, Proposition 1.5 より, $\partial F(D) \cong \partial F(D') \cong$ (自明な 2 成分絡み目) である.

D, D' に対して任意に Y 向きを与える. $X = (R_3 \times \mathbb{Z}_2) \times \mathbb{Z}_2$ を Example 3.4 の MGR とする. このとき, $|\mathrm{Col}_X(D)| \neq |\mathrm{Col}_X(D')|$ であるので, Theorem 3.6 より $F(D) \ncong F(D')$ である. この $F(D)$, $F(D')$ をそれぞれ F, F' とすればよい.

(ii) Proposition 2.4 より従う.

(iii) ハンドル体結び目として,

$$N(F) \cong N(F') \cong \text{(種数 4 の自明なハンドル体結び目と三葉結び目の正則近傍の連結和)}$$

である. □

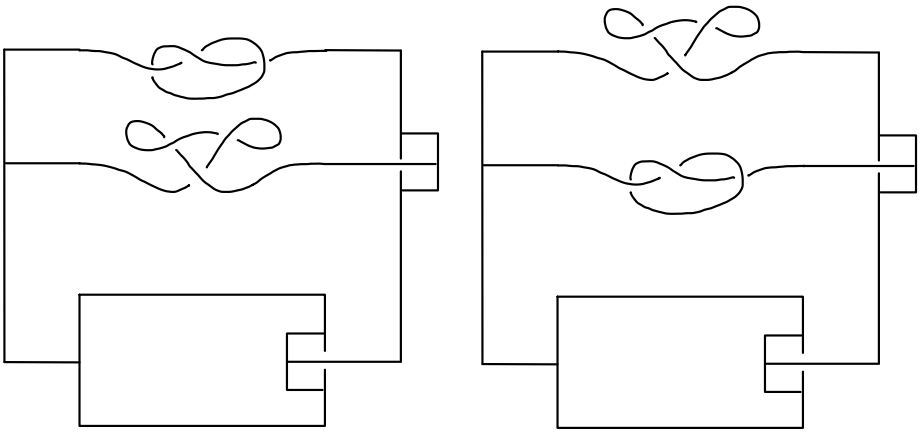


図 7　D(左) と D'(右)

参考文献

[1] Fenn, R., Rourke, C.: Racks and links in codimension two. J. Knot Theory Ramif. **1**, 343–406 (1992)

[2] Frankl, F., Pontryagin, L.: Ein Knotensatz mit Anwendung die Dimensionstheorie. Math. Ann. **102**, 785–789 (1930)

[3] Ishii, A., Matsuzaki, S., Murao, T.: A multiple group rack and oriented spatial surfaces. J. Knot Theory Ramif. **29**(7) (2020)

[4] Joyce, D.: A classifying invariant of knots, the knot quandle. J. Pure Appl. Algebra. **23**, 37–65 (1982)

[5] Matsuzaki, M.: A diagrammatic presentation and its characterization of non-split compact surfaces in the 3-sphere. J. Knot Theory Ramifications **30**(9), (2021)

[6] Matveev, S.: Distributive groupoids in knot theory. Mat. Sb. (N. S.) **119**, 78–88 (1982)

[7] Seifert, H.: Über das Geschlecht von Knoten. Math. Ann. **110**, 571–592 (1934)

Radon isometry theorem for sheaves

京都大学大学院　理学研究科　数学・数理解析専攻
瀧脇 迪哲 (Michiaki TAKIWAKI) *

概要

1-パラメータパーシステンス加群はデータ解析の道具のひとつとして様々な分野に応用されている．一方でマルチパラメータパーシステンス加群に対しては理論的な研究は不十分であり, 現在も盛んに行われている．ゆえにその応用はほとんどない．層理論はパーシステンス加群の性質を明らかにし, 応用のためのマルチパラメータパーシステンス加群の特徴量を与えてくれることが期待されている．しかし, 2 次元以上のユークリッド空間上の層のなす圏は 1 次元のそれと比較して複雑な構造を持っている．そこで次元を削減するための手段として層のラドン変換というものを紹介したい．これは $\mathbb{R}^n$ 上の層のなす圏の有界な導来圏を局所化したものと $S^{n-1}\times\mathbb{R}$ 上のそれとの間の圏同値を導くことが知られている．

本研究では $\mathbb{R}^n$ 上の層の有界な導来圏で定義された畳み込み距離, および $S^{n-1}\times\mathbb{R}$ 上の有界な導来圏で定義されたインターリービング距離と呼ばれる拡張擬距離を局所化された圏の上で改めて定義を行った．さらにラドン変換が $\mathbb{R}^n$ 上の層の多方向的な動きを 1 方向的な動きに変換することを利用して局所化された圏の上の拡張擬距離たちに関して等長的に振る舞うことを示した．

1　導入

1-パラメータパーシステンス加群はデータ解析の道具のひとつとして様々な分野で応用されている一方で, マルチパラメータの場合の応用は多くはない．そのためマルチパラメータパーシステンス加群の研究には, 実社会のデータを記述できる扱いやすい特徴量が求められている．パーシステンス加群に関する理論研究では別の数学的な対象と結びつけることでそのような特徴量を見出す試みが行われてきた．

例えば層理論はパーシステンス加群の理論に類似した分野のひとつである．両者には密接な関係があり, 最初に Curry [Cur14] が半順序集合 $\mathcal{P}$ に対して $\mathcal{P}$ 上のパーシステンス加群のなす圏と $\mathcal{P}$ に対してアレクサンドロフ位相 (半順序によって定まる位相, 詳細は [Cur14, Definition 4.2.2] を参照されたい) を与えた空間 $\mathcal{P}_{\mathfrak{a}}$ 上の層のなす圏 $\mathrm{Sh}(\mathcal{P}_{\mathfrak{a}})$ の間の圏同値を発見した．その後に柏原と Schapira [KS18] はユークリッド位相の与えられたベクトル空間 $\mathbb{V}$ に含まれる (良い) 条件を満たした錐 γ によって $\mathbb{V}$ に半順序構造を与え, $\mathrm{Sh}(\mathbb{V}_{\mathfrak{a}})$ から $\mathbb{V}$ 上の層の充満部分圏のひとつである γ-層のなす圏 $\mathrm{Sh}(\mathbb{V}_{\gamma})$ への関手を定めた．さらに Berkouk と Petit [BP21] は $\mathrm{Sh}(\mathbb{V}_{\mathfrak{a}})$ を ephemeral 加群 (詳しくは [BP21, Definition 3.4] を参照されたい) のなす充満部分圏を用いて局所化した圏と $\mathrm{Sh}(\mathbb{V}_{\gamma})$ が圏同値になることを示した．これらの圏同値によりパーシステンス加群の問題を層の問題に置き換

* E-mail:takiwaki.michiaki.87m@st.kyoto-u.ac.jp

えることができる．特にマルチパラメータパーシステンス加群は $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ 上の層に対応させることができる．

しかしながら, $\mathbb{R}^n$ 上の層の有界な導来圏 $D^b(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}$ のそれと比較して複雑な構造を持つことが知られている．例えば $\mathbb{R}$ 上の構成可能層は分解定理が存在する (詳しくは [KS18, Proposition 2.17.], [Gui16, Corollary 7.3.] などを参照されたい) が, $\mathbb{R}^n$ 上の構成可能層には同様の分解定理があるかはわからない．柏原と Schapira [KS18] は畳み込み双関手と呼ばれる双関手 $(-) * (-) : D^b(\mathbb{V}) \times D^b(\mathbb{V}) \to D^b(\mathbb{V})$ を定義した．彼らは $a \in \mathbb{R}$ に対して $D^b(\mathbb{V})$ 上の層 K_a を構成し, 関手 $K_a * (-)$ を用いて畳み込み距離 d_C(詳しくは定義 2.9 で定義する) を $D^b(\mathbb{V})$ 上に定めた．正確にはこの畳み込み距離というのは拡張擬距離であり, 特に $F, G \in D^b(\mathbb{V})$ に対して $d_C(F, G) = 0$ であることと $F \simeq G$ が同値であることは非自明である．ここで F と G が $D^b(\mathbb{R})$ 上の構成可能層であるときは分解定理によって d_C が距離の公理を満たすことを示すことができる．詳しくは [BG22, Theorem 6.3.] を参照されたい．しかし $D^b(\mathbb{R}^n)$ の場合はより強い条件が必要となる．

このような $D^b(\mathbb{R}^n)$ にまつわる問題を解決するには何かしらの次元を削減する手法が有効だと推測される．そこで本研究では層のラドン変換に焦点を当てた．これは $\mathbb{R}^n$ 上の層の導来圏から $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ 上の層の導来圏への関手である．ラドン変換はこれらの圏を局所化したものたちの間の圏同値を導くことが知られている．この圏同値によりラドン変換は $D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ の層の複体からある意味で定数層分のずれを除いて $D^b(\mathbb{R}^n)$ の層の複体を復元することができる．詳しくは [Gao17, Definition 3.1.] を参照されたい．

本研究ではラドン変換に関する等長定理の証明を行なった．まず $D^b(\mathbb{R}^n)$ および $D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ でそれぞれ定義された畳み込み距離 d_C およびインターリービング距離 d_I を新たな拡張擬距離 d_{LC} および d_{LI} として 2 つの圏を局所化した圏の上に定義しなおした．ここで d_I は $D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ 上の拡張擬距離のひとつで, 畳み込み距離 d_C の類似物である．詳しくは定義 2.11 で定義する．そして本研究における主定理が次の d_{LC} と d_{LI} に関する等長定理である．

定理 1.1. ラドン変換 $\Phi_{\mathbf{k}_A}$ は局所化された畳み込みとインターリービング距離の間の等長関手を導く:

$$\Phi_{\mathbf{k}_A} : (D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n), d_{LC}) \to (D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R}, T^{*,+}(S^{n-1} \times \mathbb{R})), d_{LI}). \tag{1.1}$$

すなわち, 任意の $F, G \in D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n)$ に対して, $d_{LC}(F, G) = d_{LI}(\Phi_{\mathbf{k}_A}(F), \Phi_{\mathbf{k}_A}(G))$ が成り立つ.

この定理は前述の畳み込み距離が距離の公理を満足するか否かを調べるのに有効な道具であると期待している．畳み込み双関手は $\mathbb{V}$ 上の層の複体を変形させる作用と見ることできる．特に畳み込み距離の定義に必要な関手 $K_a * (-)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の層に多方向的な動きを与える．もし $K_a * (-)$ の振る舞いが畳み込み距離の内在的な難しさを引き起こしているならば, ラドン変換はその問題を解決する強力な道具となるはずだ．その理由はラドン変換は多方向的な動きを 1 方向的な動きに等長的に変えることができるからである．このことについては主定理の証明を与えた後に例を交えながら説明したい．

2 準備

以降 n を 2 以上の整数, $\mathbf{k}$ を体, X, Y を滑らかな有限次元実多様体とする. $D^b(X)$ を X 上の層の有界な導来圏とする. 煩雑な説明を避けるため, 特に断りを入れなければ層は $\mathbf{k}$-ベクトル空間に値をとる層を考える. 多様体 X 上の層のなす圏 $\mathrm{Sh}(X)$ は $D^b(X)$ の部分圏とみなすことができる. また層の複体 $F \in D^b(X)$ を単に層と呼ぶ. 連続写像 $f : X \to Y$ は層の導来圏の間の関手 $Rf_! : D^b(X) \to D^b(Y), f^{-1} : D^b(Y) \to D^b(X)$ を導く. また $D^b(X)$ にはテンソル $\otimes$ が定義できる. 多様体 X の局所閉集合 Z に対して Z 上の定数層の零拡張を $\mathbf{k}_Z \in D^b(X)$ と書く. ここで紹介した $Rf_!, f^{-1}$ や $\mathbf{k}_Z$ などの記号の詳細は [KS90, Section.2] を参照されたい. また導来圏や三角圏などの用語も出てくるがこれらは [KS90, Section.1] を参照されたい.

2.1 合成と畳み込み

この節では層の 2 つの演算として合成 ($\circ$) と畳み込み ($*$) について解説する. それぞれ関数の積分変換や畳み込みといった馴染みある作用の類似物である.

定義 2.1. 2 つの射影 $p_1 : X \times Y \to X, p_2 : X \times Y \to Y$ および層 $K \in D^b(X \times Y)$ に対して関手 Φ_K を

$$\Phi_K : D^b(Y) \to D^b(X);\ \Phi_K(F) = Rp_{1!}(K \otimes p_2^{-1}F) \tag{2.1}$$

で定める. また $\Phi_K(F)$ を $K \circ F$ とかくことがあり, これを K と F の**合成**と呼ぶ.

この関手は関数に対する積分変換に相当する. すなわち X_2 上の関数 f に対して核 k による積分変換

$$(Tf)(x_1) = \int_{X_2} k(x_1, x_2) f(x_2) dx_2$$

の類似物であり, $K \in D^b(X \times Y)$ は核に相当する層である.

例 2.2. 部分集合 $A = \{(y, t, x) \in S^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; x \cdot y \leq t\}$ を考える. $x \cdot y$ は $x \in \mathbb{R}^n$ と $y \in S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ のユークリッド空間における標準的な内積を表す. 層 $\mathbf{k}_A \in D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ が定める関手 $\Phi_{\mathbf{k}_A} : D^b(\mathbb{R}^n) \to D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ を層の**ラドン変換**と呼ぶ.

このラドン変換が局所化された圏の間の圏同値を導くことを説明する. まずは局所化について説明したい. そのために層のマイクロ台と呼ばれる余接束の部分集合が必要となる. 層 $F \in D^b(X)$ に対してマイクロ台 $\mathrm{SS}(F) \subset T^*X$ は通常の意味での台 $\mathrm{supp}(F) \subset X$ を拡張した集合である. マイクロ台はある意味で層の形を与える集合とみなせる. 詳しくは [KS90, Definition 5.1.2.] を参照されたい.

余接束 T^*X の部分集合 $V \subset T^*X$ に対して $D^b(X)$ の充満部分圏 $D^b_V(X)$ を $\mathrm{SS}(F) \subset V$ を満たす $F \in D^b(X)$ からなる圏とする. このとき $D^b_V(X)$ は $D^b(X)$ の三角部分圏となる.

定義 2.3. [KS90, Definition 6.1.1.] 余接束 T^*X の部分集合 $\Omega \subset T^*X$ に対して

$$D^b(X; \Omega) := D^b(X)/D^b_{T^*X \setminus \Omega}(X)$$

で定める．すなわち $F,G\in D^b(X;\Omega)$ に対して $F\simeq G$ であることと，ある $H\in D^b(X)$ と $D^b(X)$ における三角形 $F\to G\to H\overset{+1}{\to}$ が存在して $\mathrm{SS}(H)\subset T^*X\backslash\Omega$ および $F\to G\to H\overset{+1}{\to}$ が $D^b(X)$ における完全三角形となることは同値である．

例 2.4. 余接束 $T^*\mathbb{R}^n$ の部分集合を $\dot{T}^*\mathbb{R}^n=T^*\mathbb{R}^n\backslash 0_{\mathbb{R}^n}$ で定める．ここで $0_{\mathbb{R}^n}$ は余接束 $T^*\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ の零切断である．定数層 $L_{\mathbb{R}^n}\in D^b(\mathbb{R}^n)$ に対して $D^b(\mathbb{R}^n,\dot{T}^*\mathbb{R}^n)$ の同型射 $L_{\mathbb{R}^n}\simeq 0$ が存在する．

定理 2.5. [Gao17, Theorem 3.3.] ラドン変換は局所化された層のなす圏の間の圏同値

$$\Phi_{\mathbf{k}_A}:D^b(\mathbb{R}^n,\dot{T}^*\mathbb{R}^n)\to D^b(S^{n-1}\times\mathbb{R},T^{*,+}(S^{n-1}\times\mathbb{R})) \tag{2.2}$$

を導く．ここで $T^{*,+}(S^{n-1}\times\mathbb{R})$ および $T^{*,+}\mathbb{R}$ を $T^{*,+}(S^{n-1}\times\mathbb{R}):=T^*S^{n-1}\times T^{*,+}\mathbb{R},T^{*,+}\mathbb{R}:=\{(t;\tau)\in T^*\mathbb{R};\tau>0\}$ とおいた．

次に畳み込みの定義を紹介する．これは関数に対する畳み込みを，ベクトル空間 $\mathbb{V}$ 上の層の演算として書き換えたものになる．

定義 2.6. 線形写像 $q_1,q_2,s:\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{V}$ を次で定める:

$$q_1(v_1,v_2)=v_1,\ q_2(v_1,v_2)=v_2,\ s(v_1,v_2)=v_1+v_2. \tag{2.3}$$

このとき 2 つの層 $F,G\in D^b(\mathbb{V})$ に対して $F*G:=Rs_!(q_1^{-1}F\otimes q_2^{-1}G)$ と定める．双関手 $(-)*(-):D^b(\mathbb{V})\times D^b(\mathbb{V})\to D^b(\mathbb{V})$ を**畳み込み**双関手と呼ぶ．

ここまで登場した合成と畳み込みによく似た別の層の演算を紹介する．M を多様体とする．

定義 2.7. 2 つの射影 $\widetilde{p}_1:M\times X\times Y\to M\times X,\widetilde{p}_2:M\times X\times Y\to M\times Y$ に対して，2 つの層 $K\in D^b(M\times X\times Y)$ と $F\in D^b(M\times Y)$ の合成を

$$K\mathbin{\widetilde{\circ}}F:=R\widetilde{p}_{1!}(K\otimes\widetilde{p}_2{}^{-1}F) \tag{2.4}$$

で定める．

定義 2.8. 線形写像 $\widetilde{q}_1,\widetilde{q}_2,\widetilde{s}:M\times\mathbb{V}\times\mathbb{V}\to M\times\mathbb{V}$ を次で定める:

$$\widetilde{q}_1(x,v_1,v_2)=(x,v_1),\ \widetilde{q}_2(x,v_1,v_2)=(x,v_2),\ \widetilde{s}(x,v_1,v_2)=(x,v_1+v_2). \tag{2.5}$$

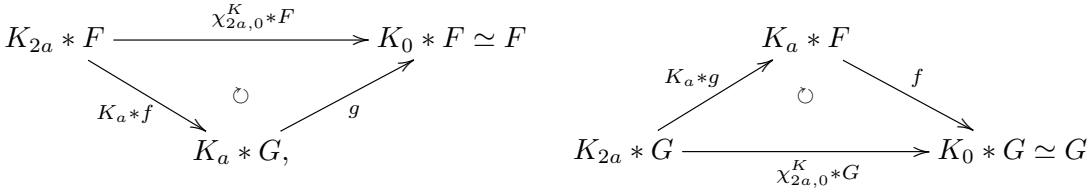
このとき 2 つの層 $F,G\in D^b(M\times\mathbb{V})$ に対して $F\mathbin{\widetilde{*}}G:=R\widetilde{s}_!(\widetilde{q}_1{}^{-1}F\otimes\widetilde{q}_2{}^{-1}G)$ と定める．

2.2 拡張擬距離

この節では $(\mathbb{V},\|\cdot\|)$ をノルム付き有限次元実ベクトル空間とする．実数 $a\geq 0$ に対して閉球体 B_a を $B_a:=\{x\in\mathbb{V};\|x\|\leq a\}$ で定める．層 $K_a\in D^b(\mathbb{V})$ を $K_a:=\mathbf{k}_{B_a}$ とおくと，別の層 $F\in D^b(\mathbb{V})$ と K_a の畳み込みを行うことで F の台を変形させることができる．これは関数に対する通常の畳み込みと似た振る舞いをしていると考えられる．すなわちコンパクト台を持つ関数 f と B_a を台に持つ指示関数 1_{B_a} の畳み込みを行なった関数 $f*1_{B_a}$ に対して，a が大きくなるにつれ，その台がだん

だんと大きくなる. これと似たような振る舞いが層の畳み込みでも起こることが知られており, 関手 $K_a * (-)$ によって $D^b(\mathbb{V})$ 上に拡張擬距離を定めることができる.

定義 2.9. (i) 2 つの層 $F, G \in D^b(\mathbb{V})$ および $a \geq 0$ に対して, 2 つの層の間の射 $f : K_a * F \to G$ および $g : K_a * G \to F$ であって 2 つの図式



(2.6)

を可換にするとき, F, G が a-インターリーブであるという. ここで $\chi^K_{2a,0} * F$ は制限写像から定まる層の間の射 $\chi^K_{2a,0} : K_{2a} \to K_0$ が導く射である. 射の組 (f, g) を a-インターリービングと呼ぶ.

(ii) 2 つの層 $F, G \in D^b(\mathbb{V})$ に対して F と G の間の**畳み込み距離**を

$$d_C(F, G) := \inf(\{a \geq 0; F \text{ と } G \text{ が } a\text{-インターリーブ}\} \cup \{\infty\}) \tag{2.7}$$

で定める.

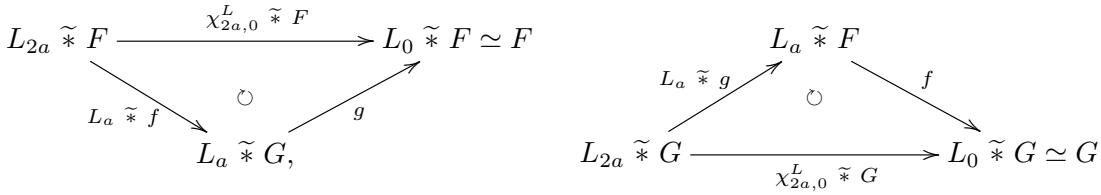
補足 2.10. 畳み込み距離は拡張擬距離である. すなわち d_C は $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ に値をとる $D^b(\mathbb{V}) \times D^b(\mathbb{V})$ 上の関数であり, $F, G, H \in D^b(\mathbb{V})$ に対して次の 3 つの条件を満たす:

(i) $d_C(F, F) = 0$,
(ii) $d_C(F, G) = d_C(G, F)$,
(iii) $d_C(F, H) \leq d_C(F, G) + d_C(G, H)$.

一方で $d_C(F, G) = 0$ のとき, $F \simeq G$ が成り立つとは限らない. 実際, Berkouk と Ginot [BG22] は $\mathbb{R}$ 上の層 F, G であって $d_C(F, G) = 0$ と $F \not\simeq G$ を満たすものを与えた.

次に $D^b(M \times \mathbb{V})$ 上に拡張擬距離を定義する. 実数 $a \geq 0$ に対して $L_a := \mathbf{k}_{M \times B_a} \in D^b(M \times \mathbb{V})$ と定める.

定義 2.11. (i) 2 つの層 $F, G \in D^b(M \times \mathbb{V})$ および $a \geq 0$ に対して, 2 つの層の間の射 $f : L_a \widetilde{*} F \to G$ および $g : L_a \widetilde{*} G \to F$ であって 2 つの図式



(2.8)

を可換にするとき, F, G が a-インターリーブであるという. ここで $\chi^L_{2a,0} \widetilde{*} F$ は制限写像から定まる層の間の射 $\chi^L_{2a,0} : L_{2a} \to L_0$ が導く射である. 射の組 (f, g) を a-インターリービングと呼ぶ.

(ii) 2 つの層 $F, G \in D^b(M \times \mathbb{V})$ に対して F と G の間の**インターリービング距離**を

$$d_I(F,G) := \inf(\{a \geq 0; F \text{ と } G \text{ が } a\text{-インターリーブ}\} \cup \{\infty\}) \tag{2.9}$$

で定める.

これらの拡張擬距離は畳み込みによって定まる関手 $K_a * (-)$ および $L_a \widetilde{*} (-)$ を用いて定義された. これらの関手は合成を用いても記述できる.

命題 2.12. [PS23, Proposition 2.1.10] 実数 $a \geq 0$ に対して $\Delta_a = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V}; \|v_1 - v_2\| \leq a\}$ と定める. このとき関手の間の同型

$$\mathbf{k}_{\Delta_a} \circ (-) \simeq K_a * (-) \tag{2.10}$$

が存在する.

命題 2.13. 実数 $a \geq 0$ に対して $Z_a = \{(x, v_1, v_2) \in M \times \mathbb{V} \times \mathbb{V}; \|v_1 - v_2\| \leq a\}$ と定める. このとき関手の間の同型

$$\mathbf{k}_{Z_a} \widetilde{\circ} (-) \simeq L_a \widetilde{*} (-) \tag{2.11}$$

が存在する.

これまでの話により, $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$ の場合を考えると d_C は $D^b(\mathbb{R}^n)$ 上で定義された拡張擬距離となる. また $M \times \mathbb{V} = S^{n-1} \times \mathbb{R}$ の場合を考えると d_I は $D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ 上で定義された拡張擬距離となる. これらの距離を局所化された圏 $D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n), D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R}, T^{*,+}(S^{n-1} \times \mathbb{R}))$ で定義し直す必要がある. そこで以下の命題を紹介しよう.

命題 2.14. [GS14, Corollary 4.14.] 2 つの層 $F, G \in D^b(M \times \mathbb{V})$ に対して $SS(F) \subset T^*M \times \mathbb{V} \times A$ および $SS(G) \subset T^*M \times \mathbb{V} \times B$ を満たす閉錐 $A, B \subset \mathbb{V}^*$ が存在すると仮定する. このとき

$$SS(F \widetilde{*} G) \subset T^*M \times \mathbb{V} \times (A \cap B) \tag{2.12}$$

が成り立つ.

$\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, M を一点からなる多様体とみなすと関手 $K_a * (-) : D^b(\mathbb{R}^n) \to D^b(\mathbb{R}^n)$ は $K_a * (-) : D^b(\mathbb{R}^n; \dot{T}^*\mathbb{R}^n) \to D^b(\mathbb{R}^n; \dot{T}^*\mathbb{R}^n)$ を誘導する. また $M \times \mathbb{V} = S^{n-1} \times \mathbb{R}$ とすると, 関手 $L_a \widetilde{*} (-) : D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R}) \to D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ は $L_a \widetilde{*} (-) : D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R}, T^{*,+}(S^{n-1} \times \mathbb{R})) \to D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R}, T^{*,+}(S^{n-1} \times \mathbb{R}))$ を誘導する.

これにより $D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n), D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R}, T^{*,+}(S^{n-1} \times \mathbb{R}))$ にそれぞれ拡張擬距離を定義 2.9, 定義 2.11 と同様にして定めることができる. これらをそれぞれ**局所化された畳み込み距離** d_{LC}, **局所化されたインターリービング距離** d_{LI} と表すことにする. 当然 a-インターリーブという言葉も局所化された圏にも定義できる.

3 主定理

本研究では以下の定理を証明した. すでに定理 1.1 として紹介したが改めてここに記す.

定理 3.1. ラドン変換 $\Phi_{\mathbf{k}_A}$ は d_{LC} と d_{LI} の間の等長関手を導く.

$$\Phi_{\mathbf{k}_A} : (D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n), d_{LC}) \to (D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R}, T^{*,+}(S^{n-1} \times \mathbb{R})), d_{LI}). \tag{3.1}$$

すなわち, 任意の $F, G \in D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n)$ に対して, $d_{LC}(F, G) = d_{LI}(\Phi_{\mathbf{k}_A}(F), \Phi_{\mathbf{k}_A}(G))$ が成り立つ.

3.1 主定理の証明

証明の流れは $F, G \in D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n)$ の間の a-インターリーブがラドン変換 $\Phi_{\mathbf{k}_A}$ で保たれることを確認すればよい. そのために以下の補題が必要である.

補題 3.2. 実数 $a \geq 0$ に対して $A_a := \{(y, t, x) \in S^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n ; x \cdot y \leq t + a\}$ と定める. 以下の層の同型射が存在する:

$$\mathbf{k}_A \circ \mathbf{k}_{\Delta_a} \simeq \mathbf{k}_{A_a} \simeq \mathbf{k}_{Z_a} \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathbf{k}_A \quad \text{in} \quad D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n). \tag{3.2}$$

定理 3.1 の証明 $F, G \in D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n)$ として, F と G が a-インターリーブであると仮定する. $\Phi_{\mathbf{k}_A}(F)$ と $\Phi_{\mathbf{K}_A}(G)$ が a-インターリーブであることを示せば良い. ラドン変換 $\Phi_{\mathbf{k}_A} = \mathbf{k}_A \circ (-)$ を (2.6) に施す:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{k}_A \circ (\mathbf{k}_{\Delta_{2a}} \circ F) & \longrightarrow & \mathbf{k}_A \circ F \\
& {\scriptstyle \mathbf{k}_A \circ (\mathbf{k}_{\Delta_a} \circ f)} \searrow \quad \circlearrowright \quad \nearrow {\scriptstyle \mathbf{k}_A \circ g} & \\
& \mathbf{k}_A \circ (\mathbf{k}_{\Delta_a} \circ G), &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& \mathbf{k}_A \circ (\mathbf{k}_{\Delta_a} \circ F) & \\
& {\scriptstyle \mathbf{k}_A \circ (\mathbf{k}_{\Delta_a} \circ g)} \nearrow \quad \circlearrowright \quad \searrow {\scriptstyle \mathbf{k}_A \circ f} & \\
\mathbf{k}_A \circ (\mathbf{k}_{\Delta_{2a}} \circ G) & \longrightarrow & \mathbf{k}_A \circ G.
\end{array}$$

ここで $K_a * (-)$ は命題 2.12 によって $\mathbf{k}_{\Delta_a} \circ (-)$ に書き換えた. さらに補題 3.2 を用いると

$$\mathbf{k}_A \circ (\mathbf{k}_{\Delta_a} \circ F) \simeq (\mathbf{k}_A \circ \mathbf{k}_{\Delta_a}) \circ F \simeq (\mathbf{k}_{Z_a} \mathbin{\widetilde{\circ}} \mathbf{k}_A) \circ F \simeq \mathbf{k}_{Z_a} \mathbin{\widetilde{\circ}} (\mathbf{k}_A \circ F).$$

が得られる. これにより先ほどの可換図式は以下のように書き換えることができる.

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{k}_{Z_{2a}} \mathbin{\widetilde{\circ}} (\mathbf{k}_A \circ F) & \longrightarrow & \mathbf{k}_A \circ F \\
& {\scriptstyle \mathbf{k}_{Z_a} \mathbin{\widetilde{\circ}} (\mathbf{k}_A \circ f)} \searrow \quad \circlearrowright \quad \nearrow {\scriptstyle \mathbf{k}_A \circ g} & \\
& \mathbf{k}_{Z_a} \mathbin{\widetilde{\circ}} (\mathbf{k}_A \circ G), &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
& \mathbf{k}_{Z_a} \mathbin{\widetilde{\circ}} (\mathbf{k}_A \circ F) & \\
& {\scriptstyle \mathbf{k}_{Z_a} \mathbin{\widetilde{\circ}} (\mathbf{k}_A \circ g)} \nearrow \quad \circlearrowright \quad \searrow {\scriptstyle \mathbf{k}_A \circ f} & \\
\mathbf{k}_{Z_{2a}} \mathbin{\widetilde{\circ}} (\mathbf{k}_A \circ G) & \longrightarrow & \mathbf{k}_A \circ G.
\end{array}$$

以上より $\Phi_{\mathbf{k}_A}(F)$ と $\Phi_{\mathbf{k}_A}(G)$ が a-インターリーブであることが示せた. 特に不等式 $d_{LI}(\Phi_{\mathbf{k}_A}(F), \Phi_{\mathbf{k}_A}(G)) \leq d_{LC}(F, G)$ が成り立つ.

一方で $\Phi_{\mathbf{k}_A}$ が圏同値であることを用いると逆向きの不等式が示せる．まず a-インターリーブであるふたつの層を $D^b(S^{n-1}\times\mathbb{R}, T^{*,+}(S^{n-1}\times\mathbb{R}))$ からとる．これらの層は $\Phi_{\mathbf{k}_A}$ が稠密な (本質的に全射, essentially surjective という表現の方が馴染みがあるかもしれない) 関手であるから $F, G \in D^b(\mathbb{R}^n, \dot{T}^*\mathbb{R}^n)$ によって $\Phi_{\mathbf{k}_A}(F), \Phi_{\mathbf{k}_A}(G)$ と表すことができる．$\Phi_{\mathbf{k}_A}(F)$ と $\Phi_{\mathbf{k}_A}(G)$ が a-インターリーブであると仮定すると, $\Phi_{\mathbf{k}_A}$ が忠実充満であることから F と G の a-インターリーブを得る．したがって不等式 $d_{LI}(\Phi_{\mathbf{k}_A}(F), \Phi_{\mathbf{k}_A}(G)) \geq d_{LC}(F, G)$ が成り立つ．2 つの不等式より $\Phi_{\mathbf{k}_A}$ が等長関手であることが示せた． □

3.2 例と予想の紹介

この節では d_C と d_I に関する非退化性の予想を紹介する．層に対する条件として構成可能という言葉が出てくるが, 詳しくは [KS90, Definition 8.4.3.] を参照してほしい．なおここまでは $\mathbf{k}$-ベクトル空間に値をとる層のみを考えていたが, これから紹介する予想ではその場合に限らないものとする．次の予想は Guillermou と Viterbo [GV24] によって層の係数が体である場合は示されている．

予想 3.3. $F, G \in D^b(\mathbb{R}^n)$ が構成可能層であるとする．ただし, これらの層の係数は体であるとは限らない．このとき $d_C(F, G) = 0$ ならば $F \simeq G$ が成り立つ．

ラドン変換は $K_a * (-)$ の多方向的な動きを $L_a \widetilde{*} (-)$ の 1 方向的な動きに変えることができるので, $D^b(\mathbb{R}^n)$ 上の畳み込み距離 d_C の問題を $D^b(S^{n-1}\times\mathbb{R})$ 上のインターリービング距離 d_I を用いて説明できるのではないかという期待がある．このラドン変換による動きの変化を具体例を用いて説明する．

例 3.4. ここでは $\mathbb{R}^2$ 上の層を考える．$\mathbb{R}^2$ の部分集合 S, I, J, T をそれぞれ

$$\begin{aligned} S &:= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1\}, \\ I &:= \{(x_1, 1) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x_1 \leq 1\}, \\ J &:= \{(x_1, -1) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x_1 \leq 1\}, \\ T &:= I \sqcup J \end{aligned}$$

と定める．$Z = S \backslash T$ と定めたとき導来圏 $D^b(\mathbb{R}^2)$ において次の完全三角形が存在する:

$$\mathbf{k}_Z \to \mathbf{k}_S \to \mathbf{k}_I \oplus \mathbf{k}_J \overset{+1}{\to} . \tag{3.3}$$

ここで $\mathbf{k}_T \simeq \mathbf{k}_I \oplus \mathbf{k}_J$ であることに注意する．実数 $a \geq 0$ に対して $S_a := S + B_a = \{x + x' \in \mathbb{R}^2; x \in S, x' \in B_a\}$ と定める．ここで B_a は $\mathbb{R}^2$ における閉球体と定めていた．同様に $I_a := I + B_a, J_a := J + B_a$ とし, さらに次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合 T_a, Z'_a, Z''_a をそれぞれ

$$T_a := I_a \cup J_a, \quad Z'_a := S_a \backslash T_a, \quad Z''_a := I_a \cap J_a$$

と定める．完全三角形 (3.3) に $K_a * (-)$ を施すと図 1 の完全三角形を得る．

これにより

$$H^0(K_a * \mathbf{k}_Z) \simeq \mathbf{k}_{Z'_a}, \quad H^1(K_a * \mathbf{k}_Z) \simeq \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq a < 1, \\ \mathbf{k}_{Z''_a} & \text{if } 1 \leq a \end{cases}$$

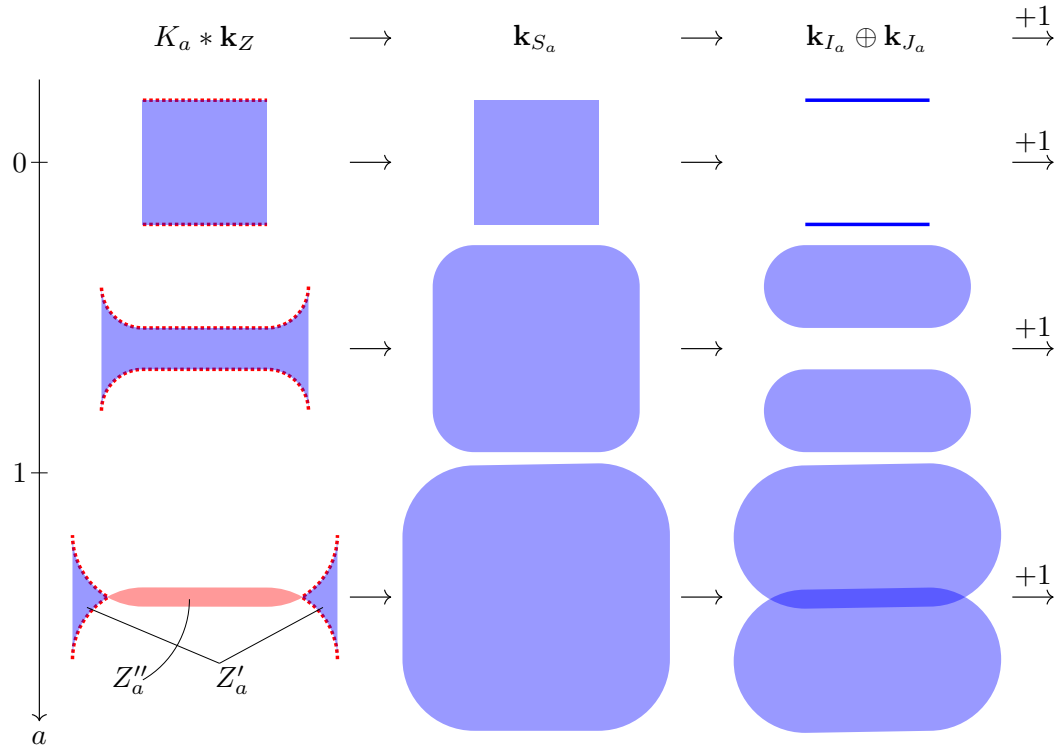


図 1　完全三角形 (3.3) に $K_a * (-)$ を施すことで $D^b(\mathbb{R}^2)$ の完全三角形を得る.

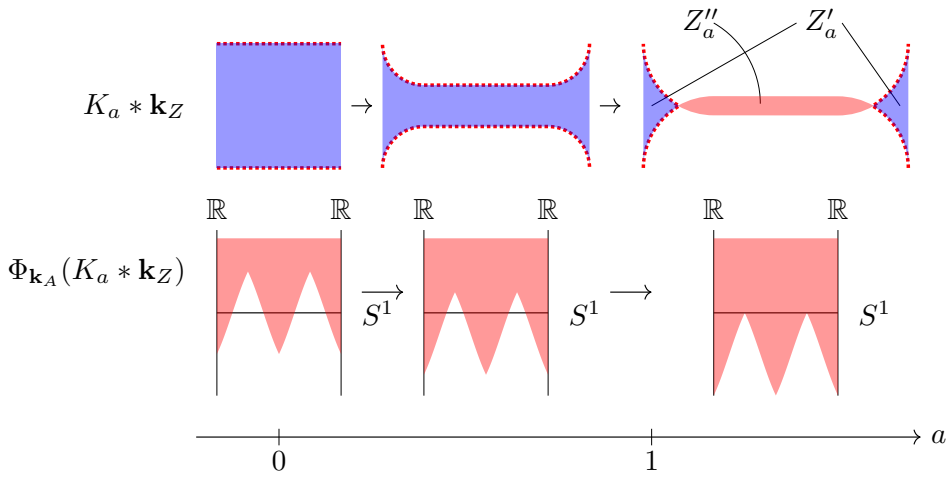


図 2　各 $a \geq 0$ に対して上の図たちは Z'_a または $Z'_a \cup Z''_a$ を表し, 下の図たちは $\{(y,t) \in S^1 \times \mathbb{R}; \varphi(y) \leq t + a\}$ を表す. ここで S^1 は $\mathbb{R}$ の閉区間 $[0,1]$ を端点 $\{0,1\}$ で同一視した空間であるので, $\{(y,t) \in S^1 \times \mathbb{R}; \varphi(y) \leq t + a\}$ は $[0,1] \times \mathbb{R}$ の部分集合として表した.

となる.

ラドン変換を施すことにより $\Phi_{\mathbf{k}_A}(K_a * \mathbf{k}_Z)$ は $K_a * \mathbf{k}_Z$ よりもわかりやすい層へ変化する. 任意の $a \geq 0$ に対して, ある連続関数 $\varphi : S^1 \to \mathbb{R}$ が存在して $\Phi_{\mathbf{k}_A}(K_a * \mathbf{k}_Z) \simeq \mathbf{k}_{\{(y,t)\in S^1\times\mathbb{R};\varphi(y)\leq t+a\}}[-1]$ と書けることが完全三角形を用いた計算からわかる.

実数 $a \geq 0$ が増加するにつれ, Z'_a はふたつの連結成分を持つようになり, $K_a * \mathbf{k}_Z$ は 0 次のみならず 1 次のコホモロジーが出現する. 一方で, $\{(y,t) \in S^1 \times \mathbb{R}; \varphi(y) \leq t + a\}$ は単に $\mathbb{R}$ 方向に伸びていくだけである. これは補題 3.2 により, ラドン変換 $\Phi_{\mathbf{K}_A}$ が関手 $K_a * (-)$ による動きを $L_a \widetilde{*} (-)$ による簡単な動きに変えることができることに起因する.

本研究の主結果である定理 3.1 により, 先ほどの予想 3.3 から新たな予想を得る.

予想 3.5. $F, G \in D^b(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ が構成可能層であるとする. ただし, これらの層の係数は体であるとは限らない. このとき $d_I(F, G) = 0$ ならば $F \simeq G$ が成り立つ.

関手 $L_a \widetilde{*} (-)$ は $K_a * (-)$ よりも簡単な動きを与えるので, こちらの方が容易に解決できるかもしれない.

参考文献

[BG22] Nicolas Berkouk and Grégory Ginot. *A derived isometry theorem for sheaves*. Advances in Mathematics. 394, 108033. 2022.

[BP21] Nicolas Berkouk, François Petit. *Ephemeral persistence modules and distance comparison*. Algebraic & Geometric topology, volume21. pages 247–277. 2021.

[Cur14] Justin Michael Curry. *Sheaves, Cosheaves and applications*. Ph.D. thesis. University of Pennsylvania. 2014.

[Gao17] Honghao Gao. *Radon Transform for Sheaves*. Available at arXiv:1712.06453v2 [math.SG].

[Gui16] Stéphane Guillermou. *The three cusps conjecture*. Available at arXiv:1603.07876v1 [math.SG].

[GS14] Stéphane Guillermou, Pierre Schapira. *Microlocal Theory of Sheaves and Tamarkin' s Non Displaceability Theorem*. Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, Springer. pages 43–85. 2014.

[GV24] Stéphane Guillermou, Claude Viterbo. *The singular support of sheaves is γ-isotoropic*. Geometric and functional analysis, Volume34. pages1052–1113. 2024.

[KS90] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira. *Sheaves on manifolds*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Volume 292. Springer-Verlag, Berlin. 1990.

[KS18] Masaki Kashiwara, Pierre Schapira. *Persistent homology and microlocal sheaf theory*. Journal of Applied and Computational Topology, Volume 2. pages 83–113. 2018.

[PS23] François Petit, Pierre Schapira. *Thickening of the diagonal and interleaving distance*. Selecta Mathematica, Volume 29. No. 70. 2023.

Guillermou–Kashiwara–Schapira kernels of geodesic flows

京都大学大学院 理学研究科 数学・数理解析専攻
新井 匠 (Takumi ARAI) *

概要

Guillermou–Kashiwara–Schapira はハミルトニアンイソトピーの層量子化が一意的に存在することを抽象的に構成することで証明した．本講演では，ハミルトニアンイソトピーが球面上または複素射影空間上の geodesic flow で与えられる場合に，その層量子化を具体的に構成できることを説明する．

1 導入

全体を通して，$\mathbb{K}$ を単位的可換環とする．M を微分可能多様体とする．I を $0 \in \mathbb{R}$ を含む開区間とする．微分可能多様体 M に対して，$\mathrm{Sh}(M)$ を $\mathbb{K}$ 加群に値をとる M 上の層の導来圏とする．対象 $F \in \mathrm{Sh}(M)$ に対して，T^*M の部分集合 $\mathrm{SS}(F)$ を F のマイクロサポートとする．

[NZ09] や [GPS24] でよく知られているように，シンプレクティック幾何と超局所層理論にはある種の関係がある．よい条件の下では，シンプレクティック幾何的な対象に対して，それに付随する超局所層理論的な対象を構成することができ，このことを「層量子化」ということがある．層量子化の代表的な例を二つ挙げる．シンプレクティック多様体 T^*M のラグランジュ部分多様体 L に対して，$\mathrm{SS}(\hat{L}) \setminus M = L$ をみたす対象 $\hat{L} \in \mathrm{Sh}(M)$ のことをラグランジュ部分多様体 L の層量子化と呼んだりする．ハミルトニアンイソトピー $\phi_t : T^*M \to T^*M$ に対して，$\mathrm{SS}(\hat{\phi}_t(-)) = \phi_t(\mathrm{SS}(-))$ をみたす自己圏同値 $\hat{\phi}_t : \mathrm{Sh}(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}(M)$ のことをハミルトニアンイソトピー ϕ_t の層量子化と呼んだりする．本稿では，この「ハミルトニアンイソトピーの層量子化」に焦点をあてて解説する．

Guillermou–Kashiwara–Schapira は，ある条件の下でハミルトニアンイソトピーの層量子化が一意的に存在することを示した．

定理 1.1 ([GKS12])**.** $\phi : (T^*M \setminus M) \times I \to T^*M \setminus M$ をハミルトニアンイソトピーとする．各時刻 $t \in I$ で $\phi_t : T^*M \setminus M \to T^*M \setminus M$ は自然な $\mathbb{R}_{>0}$ 作用と可換であると仮定する．このとき，ある対象 $K_\phi \in \mathrm{Sh}(M \times M \times I)$ が存在して $\mathrm{SS}(K_\phi) \setminus (M \times M \times I) = \Lambda_\phi$ かつ $K_\phi|_{\{t=0\}} \cong \mathbb{K}_{\Delta_M}$ が成り立つ．ここで，$\Lambda_\phi \subset T^*(M \times M \times I)$ とは ϕ の誘導するラグランジュ部分多様体である．さらに，K_ϕ は同型を除いて一意的である．

同型を除いて一意的に定まる対象 K_ϕ は Guillermou–Kashiwara–Schapira kernel または GKS kernel と呼ばれる．K_ϕ は上の条件をみたす自己圏同値 $\mathrm{Sh}(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}(M)$ を誘導するので，K_ϕ も

* arai.takumi.74e@st.kyoto-u.ac.jp

また上の意味でハミルトニアンイソトピー ϕ の層量子化と呼ぶことができる．GKS kernel にはいろいろな応用があるので，超局所層理論において重要な対象である一方で，[GKS12] における GKS kernel の存在証明では GKS kernel を抽象的に構成しているために GKS kernel が具体的にどのような層になっているのかはよくわからないものであった．本稿では，リーマン多様体 (M,g) を (S^n, g_{std}) または $(\mathbb{CP}^n, g_{\mathrm{FS}})$ とし，ハミルトニアンイソトピー $\phi : (T^*M \setminus M) \times \mathbb{R} \to T^*M \setminus M$ が geodesic flow （つまり，ハミルトニアン $H : T^*M \setminus M \to \mathbb{R}, H(x,\xi) = |\xi|_{g^*}$ の生成するハミルトンベクトル場の生成するフロー）で与えられる場合に，K_ϕ の具体的な構成を与える．

2 準備

2.1 シンプレクティック幾何

(X,ω) をシンプレクティック多様体とする．X 上の C^∞ 級関数 $H : X \to \mathbb{R}$ のことをハミルトニアンという．ハミルトンベクトル場 $v \in \mathfrak{X}(X)$ とは，あるハミルトニアン H が存在して等式 $\omega(v,-) = dH$ が成り立つようなベクトル場のことである．ハミルトニアンイソトピー $\phi : X \times I \to X$ とは，ハミルトンベクトル場を積分することで得られるフローのことである．シンプレクティック幾何では，ハミルトニアンイソトピーは重要な概念であり，とくに，後で定義する geodesic flow というものが重要である．

例 2.1. 余接束 T^*M は標準的なシンプレクティック構造 $\omega = \sum_i dx_i \wedge d\xi_i$ を持つ．ここで，$(x_1,\dots,x_n)$ は M の局所座標であり，$(\xi_1,\dots,\xi_n)$ は T^*M のファイバー座標である．

例 2.2. ハミルトニアン $H : T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, H(x,\xi) = |\xi|$ はハミルトニアンイソトピー $\phi : (T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n, \phi_t(x,\xi) = (x + t\frac{\xi}{|\xi|}, \xi)$ を生成する．

定義 2.3. (M,g) を完備リーマン多様体とする．(M,g) 上の geodesic flow とは，C^∞ 級写像 $\phi : (TM \setminus M) \times \mathbb{R} \to TM \setminus M, \phi_t(x,v) = d_{\frac{v}{|v|}}\mathrm{Exp}_{x,t}(v)$ のこと．ここで，$\mathrm{Exp}_{x,t} : T_xM \to M$ は点 $x \in M$ から時刻 $t \in \mathbb{R}$ だけ流す指数写像であり，$d_{\frac{v}{|v|}}\mathrm{Exp}_{x,t} : T_{\frac{v}{|v|}}(T_xM) \to T_{\mathrm{Exp}_{x,t}(\frac{v}{|v|})}M$ はその微分である．また，リーマン計量 g から誘導される同一視 $TM \cong T^*M$ の下で，geodesic flow $\phi : (TM \setminus M) \times \mathbb{R} \to TM \setminus M$ に対応する C^∞ 級写像 $\tilde{\phi} : (T^*M \setminus M) \times \mathbb{R} \to T^*M \setminus M$ のことも geodesic flow と呼ぶことにする．

命題 2.4. (M,g) を完備リーマン多様体とする．$\phi : (TM \setminus M) \times \mathbb{R} \to TM \setminus M$ を (M,g) 上の geodesic flow とする．点 $(x,v) \in TM \setminus M$ を固定して，曲線 $\phi(x,v,-) : \mathbb{R} \to TM \setminus M$ を考える．このとき，$\phi(x,v,-)$ の底空間成分は点 x から出発する v 方向の測地線であり，ファイバー成分はこの測地線に沿った v の平行移動である．

命題 2.5. (M,g) を完備リーマン多様体とする．このとき，geodesic flow $\phi : (T^*M \setminus M) \times \mathbb{R} \to T^*M \setminus M$ はハミルトニアン $H : T^*M \setminus M \to \mathbb{R}, H(x,\xi) = |\xi|_{g^*}$ の生成するハミルトニアンイソトピーである．

2.2 超局所層理論

グロタンディークの六演算 (Grothendieck's six operations) を $f_*, f^{-1}, f_!, f^!, \otimes, \mathcal{H}om$ と書くことにする．局所コンパクトハウスドルフ空間 X，局所閉部分集合 $Z \subset X$，包含写像 $i : Z \to X$，対象 $F \in \mathrm{Sh}(X)$ に対して，$F_Z \in \mathrm{Sh}(X)$ を $F_Z := i_! i^{-1} F$ で定義し，$\Gamma_Z(F) \in \mathrm{Sh}(X)$ を $\Gamma_Z(F) := i_* i^! F$ で定義する．Z 上の $\mathbb{K}$ に付随する定数層を $\mathbb{K}_Z \in \mathrm{Sh(Z)}$ と書くことにする．記号の濫用だが，$i_! \mathbb{K}_Z \in \mathrm{Sh}(X)$ もまた $\mathbb{K}_Z$ と書くことにする．

定義 2.6. $F \in \mathrm{Sh}(M)$ に対して，F のマイクロサポート (microsupport) とは，

$$\overline{\{(x,\xi) \in T^*M \mid \exists f \in C^\infty(M), f(x) = 0, d_x f = \xi, (\Gamma_{\{x \in M \mid f(x) \geq 0\}} F)_x \neq 0\}}^{T^*M}$$

で定義される T^*M の閉部分集合のことである．F のマイクロサポートを $\mathrm{SS}(F)$ と書く．

例 2.7. $\phi : M \to \mathbb{R}$ を $0 \in \mathbb{R}$ を正則値にもつような C^∞ 級関数とする．$U := \{x \in M \mid \phi(x) < 0\}$, $Z := \{x \in M \mid \phi(x) \geq 0\}$ とおく．このとき，$\mathbb{K}_U, \mathbb{K}_Z \in \mathrm{Sh}(M)$ について，次が成り立つ：

$$\mathrm{SS}(\mathbb{K}_U) = U \cup \{(x,\xi) \in T^*M \mid x \in \partial U, \xi = \lambda d_x \phi, \lambda > 0\},$$
$$\mathrm{SS}(\mathbb{K}_Z) = Z \cup \{(x,\xi) \in T^*M \mid x \in \partial Z, \xi = \lambda d_x \phi, \lambda > 0\}.$$

例 2.8. $N \subset M$ を C^∞ 級部分多様体とする．このとき，$\mathbb{K}_N \in \mathrm{Sh(M)}$ について，$\mathrm{SS}(\mathbb{K}_N) = T^*_N M$ が成り立つ．ここで，$T^*_N M$ とは，N の M における余法束である．

定義 2.9. $\phi : (T^*M \setminus M) \times I \to T^*M \setminus M$ をハミルトニアンイソトピーとする．各時刻 $t \in I$ で $\phi_t : T^*M \setminus M \to T^*M \setminus M$ は自然な $\mathbb{R}_{>0}$-作用と可換であるとする．ϕ の Guillermou–Kashiwara–Schapira kernel または GKS kernel とは，対象 $K_\phi \in \mathrm{Sh}(M)$ であって，次の条件

$$\mathrm{SS}(K_\phi) \setminus (M \times M \times I) = \Lambda_\phi \tag{1}$$

$$K_\phi|_{\{t=0\}} \cong \mathbb{K}_{\Delta_M} \tag{2}$$

をみたすもの．ここで，α を T^*M 上の 1 形式 $\alpha = \sum_i \xi_i dx_i$ とし，v_ϕ を ϕ の誘導する時間依存ベクトル場とし，$\langle -, - \rangle$ を 1 形式とベクトル場のペアリングとし，Λ_ϕ を $\Lambda_\phi = \{(\phi_t(x,\xi), (x,-\xi), (t, -\langle \alpha, v_\phi \rangle (\phi_t(x,\xi), t))) \in T^*M \times T^*M \times T^*I \mid (x,\xi) \in T^*M \setminus M, t \in I\}$ とし，Δ_M を $M \times M$ の対角線集合とする．

定理 2.10 ([GKS12])**.** GKS kernel は同型を除いて一意的に存在する．

例 2.11. $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ の部分集合 Z_0, Z_1 を $Z_0 := \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid |x-y| \leq -t\}$, $Z_1 := \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid |x-y| < t\}$ で定義する．ハミルトニアンイソトピー $\phi : (T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to T^*\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n, \phi_t(x,\xi) = (x + t\frac{\xi}{|\xi|}, \xi)$ の GKS kernel K_ϕ について，$K_\phi \cong \mathrm{Cone}(\psi : \mathbb{K}_{Z_0}[-1] \to \mathbb{K}_{Z_1}[n])$ が成り立つ．ここで，ψ とは，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})}(\mathbb{K}_{Z_0}[-1], \mathbb{K}_{Z_1}[n]) \cong \mathbb{K}$ の生成元である．

3 主結果

いま，同型を除いて一意的に存在する GKS kernel K_ϕ が具体的にはどのような層であるかというところに興味がある．主結果は以下である．

定理 3.1. リーマン多様体 (M,g) を (S^n, g_{std}) または $(\mathbb{CP}^n, g_{\mathrm{FS}})$ とする．ハミルトニアンイソトピー $\phi : (T^*M \setminus M) \times \mathbb{R} \to T^*M \setminus M$ を (M,g) 上の geodesic flow とする．このとき，$M \times M \times \mathbb{R}$ の部分集合の族 $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ と整数の族 $\{n_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ と導来圏 $\mathrm{Sh}(M \times M \times \mathbb{R})$ の射の列

$$\cdots \xrightarrow{\psi_{-3}} \mathbb{K}_{Z_{-2}}[n_{-2}] \xrightarrow{\psi_{-2}} \mathbb{K}_{Z_{-1}}[n_{-1}] \xrightarrow{\psi_{-1}} \mathbb{K}_{Z_0}[n_0] \xrightarrow{\psi_0} \mathbb{K}_{Z_1}[n_1] \xrightarrow{\psi_1} \mathbb{K}_{Z_2}[n_2] \xrightarrow{\psi_2} \cdots$$

が存在して，射 ψ_i の写像錐 (mapping cone) を順次とる[*1]ことで得られる対象は GKS kernel K_ϕ に同型である．さらに，この Z_i と n_i と ψ_i は具体的に与えられる．

例 3.2. $(M,g) = (S^n, g_{\mathrm{std}})$ の場合．

Z_i, n_i, ψ_i は次のようにとれる．

$$Z_i = \begin{cases} \{(x,y,t) \in S^n \times S^n \times \mathbb{R} \mid \mathrm{dist}(x,y) \le -t + i\pi\} & \text{if } i \le 0 \\ \{(x,y,t) \in S^n \times S^n \times \mathbb{R} \mid \mathrm{dist}(x,y) < t - (i-1)\pi\} & \text{if } i > 0 \end{cases}$$

$$n_i = \begin{cases} in & \text{if } i \le 0 \\ in+1 & \text{if } i > 0 \end{cases}$$

$\psi : \mathbb{K}_{Z_i}[n_i] \to \mathbb{K}_{Z_{i+1}}[n_{i+1}]$ は $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(S^n\times S^n\times\mathbb{R})}(\mathbb{K}_{Z_i}[n_i], \mathbb{K}_{Z_{i+1}}[n_{i+1}]) \cong \mathbb{K}$ の生成元.

参考文献

[GKS12] Stéphane Guillermou, Masaki Kashiwara, and Pierre Schapira. Sheaf quantization of Hamiltonian isotopies and applications to nondisplaceability problems. *Duke Math. J.*, 161(2):201–245, 2012.

[GPS24] Sheel Ganatra, John Pardon, and Vivek Shende. Microlocal Morse theory of wrapped Fukaya categories. *Ann. of Math. (2)*, 199(3):943–1042, 2024.

[NZ09] David Nadler and Eric Zaslow. Constructible sheaves and the Fukaya category. *J. Amer. Math. Soc.*, 22(1):233–286, 2009.

[*1] より正確に言えば, $\psi_{-m}, \psi_{-m+1}, \ldots, \psi_{m-1}, \psi_m$ の順に mapping cone をとることで得られる対象 K_m の $m \to \infty$ についてのホモトピー余極限を考える.

シンプレクティックトーリック多様体の同変な超曲面に関する Delzant 型定理

東京都立大学 大学院理学研究科 数理科学専攻
山口健太朗 (Kentaro YAMAGUCHI) *

概要

コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体のトーリック因子の補空間と複素トーラスの同一視のもとで，複素部分トーラスをシンプレクティックトーリック多様体の中でコンパクト化したものは一般にシンプレクティックトーリック多様体の複素部分多様体ではなく特異点をもつ場合がある．本講演では，複素部分トーラスが余次元 1 のときにそのコンパクト化が非特異な複素部分多様体になる必要十分条件を凸多面体の言葉で特徴づける．

1 導入

n 次元トーラスが効果的に Hamilton 作用している $2n$ 次元シンプレクティック多様体のことをシンプレクティックトーリック多様体とよぶ．コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体へのトーラスの Hamilton 作用による運動量写像の像（運動量多面体）は Delzant 多面体とよばれる凸多面体になる．一方で，Delzant 構成 [2] により与えられた Delzant 多面体を運動量多面体にもつコンパクトなシンプレクティックトーリック多様体を構成することができる．このようにして，コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体全体と Delzant 多面体全体との 1 対 1 対応を得られることが知られている．本稿ではこの 1 対 1 対応のことを Delzant 対応とよぶ．

[7] では，シンプレクティックトーリック多様体 M のトーリック因子 D の補空間 $M \setminus D$ と複素トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ との同一視に注目し，k 次元アフィン部分空間 $V \subset \mathfrak{t}^n$ から定まる複素 k 次元トーラス $(\mathbb{C}^*)^k$ 作用の軌道 $C(V) \subset (\mathbb{C}^*)^n \cong M \setminus D$ をシンプレクティックトーリック多様体 M の中でコンパクト化したもの $\overline{C(V)}$ について調べた．

特に，$\overline{C(V)}$ が M の複素部分多様体になるときアフィン部分空間 V から定まる k 次元トーラスの作用によって $\overline{C(V)}$ はシンプレクティックトーリック多様体になることがわかる．しかし一般に，$\overline{C(V)}$ が M の複素部分多様体ではなく特異点をもつ場合がある．ここでは，Delzant 対応の類似の結果として，[6] に基づき $k = n - 1$ のとき $\overline{C(V)}$ が M の非特異な複素部分多様体となる必要十分条件を凸多面体の言葉で特徴づける．

* E-mail:yamaguchi-kentaro@ed.tmu.ac.jp

2　シンプレクティックトーリック多様体

滑らかな多様体 M 上の 2 次微分形式 ω が非退化な閉形式になっているとき，ω をシンプレクティック形式とよび，組 (M,ω) をシンプレクティック多様体とよぶ．ここでは，シンプレクティック多様体 (M,ω) にトーラスが Hamilton 作用している状況を考える．

本節では，シンプレクティック多様体へのトーラスの Hamilton 作用およびシンプレクティックトーリック多様体について基本的な事項を述べる．

2.1　トーラスの Hamilton 作用

(M,ω) をシンプレクティック多様体とする．(M,ω) へのトーラス T の右作用を

$$\begin{aligned} M \times T &\to M \\ (x,t) &\mapsto x \cdot t \end{aligned}$$

と表す．このとき，T の元 t に対して，写像 $R_t : M \to M$ を

$$R_t(x) := x \cdot t$$

で定義する．

定義 2.1. シンプレクティック多様体 (M,ω) にトーラス T が右作用しているとする．任意の $t \in T$ に対して $R_t^*\omega = \omega$ が成り立つとき，T 作用は ω を保つという．

トーラス T の Lie 環を $\mathfrak{t}$ と表す．

定義 2.2. シンプレクティック多様体 (M,ω) へのトーラス T の右作用が ω を保つとする．次の 2 条件を満たす写像 $\mu : M \to \mathfrak{t}^*$ が存在するとき，T 作用を Hamilton 作用とよぶ．

- 任意の $x \in M$，$t \in T$ に対して $\mu(x \cdot t) = \mu(x)$ が成り立つこと，
- 任意の $X \in \mathfrak{t}$ に対して $\iota(X^\sharp)\omega = -d\langle \mu, X \rangle$ が成り立つこと．ここで，$X^\sharp$ は基本ベクトル場のこと．

また，このときの写像 $\mu : M \to \mathfrak{t}^*$ を運動量写像とよぶ．

コンパクトなシンプレクティック多様体にトーラスが Hamilton 作用しているとき，その運動量写像の像に関して次の古典的な結果が成り立つ．

定理 2.3 (凸性定理 [1, 3])**.** コンパクトなシンプレクティック多様体 (M,ω) にトーラス T が Hamilton 作用しているとき，その運動量写像 $\mu : M \to \mathfrak{t}^*$ の像は T 作用の固定点の像の凸包になる．

特に，$\mu(M)$ は凸多面体になることがわかる．$\mu(M)$ のことを運動量多面体とよぶ．

2.2 シンプレクティックトーリック多様体

シンプレクティック形式の非退化性からシンプレクティック多様体 (M,ω) の次元は偶数になることに注意する．

定義 2.4. $2n$ 次元シンプレクティック多様体 (M,ω) に n 次元トーラス T^n が効果的に Hamilton 作用しているとき，(M,ω) をシンプレクティックトーリック多様体とよぶ．

コンパクトな $2n$ 次元シンプレクティックトーリック多様体への n 次元トーラスの Hamilton 作用についての運動量写像の像（運動量多面体）は Delzant 多面体になっている．ここで，Delzant 多面体とは次で定義される凸多面体のことである．

定義 2.5. 次の 3 条件を満たす $(\mathfrak{t}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ の凸多面体 Δ を Delzant 多面体とよぶ．

- 単純であること．つまり，Δ の各頂点から n 本の辺が出ていること，
- 有理的であること．つまり，Δ の各頂点 λ から出る辺の方向ベクトル $v_1^\lambda,\dots,v_n^\lambda$ を $v_1^\lambda,\dots,v_n^\lambda \in \mathbb{Z}^n$ を満たすように選ぶことができること，
- 滑らかであること．つまり，上の条件にある $v_1^\lambda,\dots,v_n^\lambda \in \mathbb{Z}^n$ を $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{Z}$ 基底になるように選ぶことができること．

また，Delzant 多面体 Δ の頂点の集合を Λ と表す．

たとえば，複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ に Fubini–Study 計量を入れた場合の n 次元トーラスの Hamilton 作用についての運動量多面体は n 単体である．

実は，Delzant 多面体の情報からシンプレクティック商を用いて，与えられた Delzant 多面体が運動量多面体になるようなシンプレクティックトーリック多様体を構成することができる．この構成のことを Delzant 構成という．

以上のことから，次のことがわかる．

定理 2.6 ([2])**.** コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体全体と Delzant 多面体全体は 1 対 1 対応する．

$$\{\text{ コンパクトなシンプレクティックトーリック多様体 }\}/\sim \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{Delzant 多面体 }\}/\sim$$

この対応関係のことを Delzant 対応とよぶ．

シンプレクティックトーリック多様体は Kähler 多様体になる [4]．Kähler 構造を用いることで，$2n$ 次元シンプレクティックトーリック多様体 M のトーリック因子 D の補空間 $M \setminus D$ は複素 n 次元トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ と同一視することができる．ここでは，Delzant 多面体の情報を用いて複素 n 次元トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ から $2n$ 次元シンプレクティックトーリック多様体 M を構成することをコンパクト化とよぶ．

また，Delzant 多面体 Δ の頂点ごとに出ている n 本の辺の方向ベクトルの情報から Δ に対応するシンプレクティックトーリック多様体 M に複素座標近傍系を構成することができる．$M = \mathbb{C}P^n$ の

とき，この複素座標近傍系は非斉次座標近傍系に一致するので，一般のシンプレクティックトーリック多様体のときもこの複素座標近傍系のことを非斉次座標近傍系とよぶ．

3 $\overline{C(V)}$ の構成

本節では，[7] における $\overline{C(V)}$ の構成を復習する．

$V \subset \mathfrak{t}^n$ を $n-1$ 次元アフィン部分空間，$\overline{V}$ をその線形部分とする．V の傾きが有理的であることを仮定すると，$\overline{V} \cap \mathbb{Z}^n$ が階数 $n-1$ の $\mathbb{Z}$ 加群になることから $p_1, \ldots, p_{n-1} \in \mathbb{Z}^n$ を $\overline{V} \cap \mathbb{Z}^n \cong \mathbb{Z}^{n-1}$ の $\mathbb{Z}$ 基底になるように選ぶことができる．単射群準同型 $i_V : T^{n-1} \to T^n$ を

$$i_V(t_1, \ldots, t_{n-1}) := \left(\prod_{l=1}^{n-1} t_l^{\langle p_l, e_1 \rangle}, \ldots, \prod_{l=1}^{n-1} t_l^{\langle p_l, e_n \rangle} \right)$$

で定義する．ここで，$e_1, \ldots, e_n$ は $(\mathfrak{t}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ の標準基底，$\langle , \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の標準内積とする．

有理的な傾きをもつ $n-1$ 次元アフィン部分空間 $V \subset \mathfrak{t}^n$ に対して，複素 n 次元トーラス $(\mathbb{C}^*)^n$ の複素部分多様体 $C(V) \subset (\mathbb{C}^*)^n$ を

$$C(V) := \left\{ (e^{x_1+\sqrt{-1}y_1}, \ldots, e^{x_n+\sqrt{-1}y_n}) \in (\mathbb{C}^*)^n \;\middle|\; \begin{array}{l} (x_1, \ldots, x_n) \in V, \\ (e^{\sqrt{-1}y_1}, \ldots, e^{\sqrt{-1}y_n}) \in i_V(T^{n-1}) \end{array} \right\}$$

と定義する．

複素部分多様体 $C(V) \subset (\mathbb{C}^*)^n$ をシンプレクティックトーリック多様体 M のトーリック因子 D の補空間 $M \setminus D$ に埋め込み M の中でコンパクト化したものを $\overline{C(V)} \subset M$ と定義する．このコンパクト化の操作を具体的に記述することで，$\overline{C(V)} \subset M$ は M の非斉次座標近傍系ごとに多項式の零点集合として書くことができる．

定義 3.1. $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ をシンプレクティックトーリック多様体 M の非斉次座標近傍系とする．有理的な傾きをもつ $n-1$ 次元アフィン部分空間 $V \subset \mathfrak{t}^n$ に対して，$\overline{C(V)} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda^{-1}(\overline{C_\lambda(V)}) \subset M$ を次で定義する．

$$\begin{aligned} \overline{C_\lambda(V)} :=& \{ z^\lambda = (z_1^\lambda, \ldots, z_n^\lambda) \in \varphi_\lambda(U_\lambda) \cong \mathbb{C}^n \mid f^\lambda(z^\lambda) = 0 \} \\ f^\lambda(z^\lambda) :=& \prod_{\{i \mid \langle u_i^\lambda, q \rangle \geq 0\}} (z_i^\lambda)^{\langle u_i^\lambda, q \rangle} - e^{\langle a, q \rangle} \prod_{\{i \mid \langle u_i^\lambda, q \rangle \leq 0\}} (z_i^\lambda)^{-\langle u_i^\lambda, q \rangle} \end{aligned}$$

ここで，$q \in \mathbb{Z}^n$ は $\overline{V}$ の直交補空間の原始的な基底，$u_1^\lambda, \ldots, u_n^\lambda \in \mathbb{Z}^n$ は $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{Z}$ 基底 $v_1^\lambda, \ldots, v_n^\lambda$ の双対基底のこと．

注意 3.2. $\overline{C(V)}$ は $\overline{C(V)} \cap D$ 上の点で特異点をもつ場合がある．

[7] では，$\overline{C(V)}$ が M の複素部分多様体になるとき，アフィン部分空間 V から定まる M と $\overline{C(V)}$ それぞれへの T^{n-1} の Hamilton 作用についての運動量写像 $(i_V^* \circ \mu) : M \to (\mathfrak{t}^{n-1})^*$，$\overline{\mu} : \overline{C(V)} \to (\mathfrak{t}^{n-1})^*$ に関して次のことを示した．

定理 3.3 ([7])**.** $\overline{C(V)}$ が M の複素部分多様体になるとき，

$$\overline{\mu}(\overline{C(V)}) = (i_V^* \circ \mu)(M) = i_V^*(\Delta)$$

が成り立つ.

特に，$\overline{C(V)}$ が M の複素部分多様体になるとき $\overline{C(V)}$ はシンプレクティックトーリック多様体になるので，凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ は Delzant 多面体になる.

4 $\overline{C(V)}$ の Delzant 対応

$\overline{C(V)}$ は一般に特異点をもつ場合があるが，定理 3.3 では $\overline{C(V)}$ が M の複素部分多様体になるとき $\overline{C(V)}$ の運動量多面体は $i_V^*(\Delta)$ に一致することがわかった．またこのとき，$\overline{C(V)}$ はシンプレクティックトーリック多様体であることから，$\overline{C(V)}$ に Delzant 対応する凸多面体について調べる.

ここで，$M = \mathbb{C}P^2$ のとき（Δ が直角二等辺三角形のとき）を考える．どの 1 次元アフィン部分空間 V に対しても凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ は $(\mathfrak{t}^1)^* \cong \mathbb{R}^1$ の線分，つまり $\mathbb{C}P^1$ に対応する Delzant 多面体になる．しかし，たとえば傾き 3 の 1 次元部分空間 V に対して $\overline{C(V)}$ は特異点をもつことが直接計算によりわかるので，$\overline{C(V)}$ が滑らかな複素部分多様体になる必要十分条件として凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ が Delzant 多面体になることだけでは不十分である.

実は，シンプレクティックトーリック軌道体の運動量多面体（ラベル付き多面体）の情報から，シンプレクティックトーリック軌道体の特異点の情報を得られるという先行研究 [5] がある．この先行研究をヒントに，$\overline{C(V)}$ が（特異点のない）滑らかな複素部分多様体になるかどうかを凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ の情報で特徴付けられないかを考える.

4.1 主結果

[6] における主結果を述べるための言葉の準備をする.

定義 4.1. 引き戻し $i_V^* : (\mathfrak{t}^n)^* \to (\mathfrak{t}^{n-1})^*$ に対して，凸多面体 Δ の頂点 λ が次の 2 つの条件を満たすとき λ を good という.

- 点 $i_V^*(\lambda)$ が凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ の頂点になること,
- ベクトル $i_V^*(v_1^\lambda), \ldots, i_V^*(v_n^\lambda) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ がすべて零ベクトルでないこと.

定義 4.2. 引き戻し $i_V^* : (\mathfrak{t}^n)^* \to (\mathfrak{t}^{n-1})^*$ に対して，Delzant 多面体 Δ の任意の good な頂点 λ が次の 2 つの条件を満たすとき Δ を good という.

- 凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ の頂点 $i_V^*(\lambda)$ から $n-1$ 本の辺が出ていること,
- ある $j \in \{1, \ldots, n\}$ が存在して凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ の方向ベクトル $i_V^*(v_1^\lambda), \ldots, i_V^*(v_{j-1}^\lambda), i_V^*(v_{j+1}^\lambda), \ldots, i_V^*(v_n^\lambda)$ が $\mathbb{Z}^{n-1}$ の $\mathbb{Z}$-基底になること.

定理 4.3 (主結果)**.** $V \subset \mathfrak{t}^n$ を $n-1$ 次元アフィン部分空間とする．$\overline{C(V)}$ がシンプレクティックトーリック多様体 M の複素超曲面になることと，凸多面体 $i_V^*(\Delta)$ が good であることは同値.

参考文献

[1] M. F. Atiyah. Convexity and commuting Hamiltonians. *Bull. London Math. Soc.*, 14(1):1–15, 1982.

[2] Thomas Delzant. Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment. *Bull. Soc. Math. France*, 116(3):315–339, 1988.

[3] V. Guillemin and S. Sternberg. Convexity properties of the moment mapping. *Invent. Math.*, 67(3):491–513, 1982.

[4] Victor Guillemin. Kaehler structures on toric varieties. *J. Differential Geom.*, 40(2):285–309, 1994.

[5] Eugene Lerman and Susan Tolman. Hamiltonian torus actions on symplectic orbifolds and toric varieties. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 349(10):4201–4230, 1997.

[6] Kentaro Yamaguchi. Delzant type theorem for torus-equivariantly embedded toric hypersurfaces. arXiv:2411.06715.

[7] Kentaro Yamaguchi. Torus-equivariantly embedded toric manifolds associated to affine subspaces. preprint arXiv:2306.15312, to appear in Osaka Journal of Mathematics.

S^2 上 Lefschetz fibration を用いたエキゾチック構造を持つ多様体のハンドル分解への応用

岡山大学大学院　環境生命自然科学研究科　環境生命自然科学専攻
藪口　怜央 (Reo YABUGUCHI) *

概要

ある多様体に同相だが微分同相でない多様体をエキゾチックな多様体というが、$m\mathbb{CP}^2\#n\overline{\mathbb{CP}^2}$ にエキゾチックな多様体の存在問題は多くの研究がある。さらにそれらのハンドル分解がどのようなものか、特に 1-,3-ハンドルの存在性を調べる研究が存在している。この問題については $k = 6, 7, 8, 9$ に対するエキゾチック $\mathbb{CP}^2\#k\overline{\mathbb{CP}^2}$ や $E(n)_{p,q}$ についての結果が知られている。$E(n)_{p,q}$ の組 (p, q) については有限個の例に留まっていたが、本研究では可算無限個の組 (p, q) について 1-,3-ハンドルのないハンドル分解を持つことを示した。

1　導入

多様体の全体集合の分類は位相幾何学の中心的な問題の一つである。3 次元以下の多様体については多様体の同相による分類と微分同相による分類が一致することが知られているが、4 次元以上ではその差がある。5 次元以上の多様体については「手術理論」の発展により原理的にはホモトピー論的問題に帰着されることが知られているが、$3, 4$ 次元多様体についてはこの原理が適用できない。

特に、Freedman の定理により単連結 C^∞ 級 4 次元多様体の同相による分類は完了しているが、微分同相による分類は現在も完了していない。微分同相による分類が難しい原因に、与えられた 4 次元多様体に同相だが微分同相でない多様体（これをエキゾチックな多様体という）が無限個存在することがある。例えば、基本的な C^∞ 級 4 次元多様体である複素射影平面 $\mathbb{CP}^2$、複素射影平面とその逆向きの多様体の連結和 $\mathbb{CP}^2\#\overline{\mathbb{CP}^2}$ ですらエキゾチックな多様体の有無は未解決である。

さて、任意のコンパクト C^∞ 級 4 次元多様体 Y は、4 次元球体 D^4 に微分同相な k-ハンドルと呼ばれる多様体によって分解される $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$。「コンパクトで連結な多様体は 0-ハンドルが 1 つだけのハンドル分解を持つ」という定理 ([GS]) から、連結性の仮定を加えた Y は、1 つの 0-ハンドルに $1, 2, 3, 4$-ハンドルを順に接着した多様体に微分同相である。0-ハンドルに $1, 2$-ハンドルを接着した多様体を Y_2 としたとき、Y が閉多様体なら Y_2 によって Y の微分同相類が完全に決定されるなどの事実がある。また、$\partial Y = \emptyset$ でなくとも、境界が連結で Y が単連結ならば Y の微分同相類は Y_2 と 3-ハンドルの個数で決定される。そのような事実から、特別な多様体を扱わない限りハンドル分解における重要な情報は、$1, 2$-ハンドルがその多くを占めていることが分かっている。多様体 X

* E-mail:reo0713@s.okayama-u.ac.jp

の基本群 $\pi_1(X)$ が自明となるとき単連結、X が 1-ハンドルのないハンドル分解を持つとき幾何学的単連結、X が 1-,3-ハンドルのないハンドル分解を持つとき完全モース関数を許容するという。1-ハンドルは基本群の生成元に対応するため、明らかに 1-ハンドルを持たないハンドル分解を許容する多様体は単連結であるが、その逆の命題「任意の単連結 4 次元閉多様体は 1-ハンドルのないハンドル分解を持つか?（あるいは、1-,3-ハンドルのないハンドル分解を持つか?)」は未解決である ([Ki97] の問題 4.18)。もう少し言及すると（*cf.* [Po]）、3 次元以下及び 5 次元以上では単連結と幾何学的単連結は同値であるが、4 次元では反例（Casson の仕事により Po-Mazur manifolds が反例となっていること）が知られている。Kirby の問題がこれを背景を持つかは筆者は把握していないが、4 次元において単連結と幾何学的単連結が同値になるための条件の候補として閉を課しているという翻訳もできる。特に、楕円曲面 $E(n)_{p,q}$ や $\mathbb{CP}^2\#m\overline{\mathbb{CP}^2}$ にエキゾチックな多様体 (m 回の連結和を $\#m$ と書く。$m \geq 0$) に対してこの問題は集中的に取り組まれてきた（ここで、n, p, q は $n \geq 1, p, q \geq 2$ で $gcd(p, q) = 1$ の正の整数)。例えば、Harer, Kas, Kirby は「$E(1)_{2,3}$ の任意のハンドル分解は 1, 3-ハンドルをもつだろう」と予想している (Harer-Kas-Kirby 予想,[HKK86])。また、Gompf は「『$E(n)_{p,q}$ は 1, 3-ハンドルのないハンドル分解を持たないだろう』というのは良い予想である」と述べている ([G91])。

Harer-Kas-Kirby 予想は Akbulut([A09]) と安井弘一氏 ([Ya08J]) により、独立に反例が与えられている。特に、Akbulut は $E(1)$ にエキゾチックな無限族を構成しそのうちの一つが $E(1)_{2,3}$ になっており 1-,3-ハンドルがないことを示している。また、安井氏は $n \geq 1$ で $(p, q) = (2, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 5)$ の場合に、$E(n)_{p,q}$ の 1-ハンドルのないハンドル分解を持つことを示した ([Ya08J])。安井氏は「$(p, q) = (2, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 5)$ 以外の場合も構成できるだろう」とコメントしているが任意の (p, q) については未解決のままである。他の関連する仕事に、坂本氏の修士論文に $E(1)_{2,7}$ が 1-ハンドルのないハンドル分解を持つという結果がある ([Sa23])。最近のプレプリントで新たな進展があり、楠田大祐氏の結果と丹下基生氏の結果を紹介したい。楠田氏 [Ku24] は「$E(n)_{p,q}$ が 1-ハン祐ドルのないハンドル分解を持つか」という問題の組 $(n, p, q) = (n \geq 4, 5, 6), (n \geq 5, 6, 7), (n \geq 9, 7, 8), (n \geq 24, 8, 9)$ についての結果を、丹下氏 [T25] は「結び目 K の橋数が $9n$ 以下のとき、$E(n)_K$ が 1-ハンドルのないハンドル分解を持つ」、「$min\{p, q\}$ が 9 以下の時、$E(1)_{p,q}$ が 1-ハンドルのないハンドル分解を持つ」、「$min\{p, q\}$ が 4 以下の時、$E(n)_{p,q}$ が 1-ハンドルのないハンドル分解を持つ」という結果を得ている。ここで $E(n)_K$ とは楕円曲面 $E(n)$ に K に沿った結び目手術を施して得られる多様体である。Fintushel-Stern([FS98]) により導入された結び目 K に沿った結び目手術という操作は 4 次元閉多様体 X の改変操作であり豊富なエキゾチック多様体 X_K を生み出すことが知られている。

以上の先行研究では、主にハンドルスライド、有理ブローダウン、upside-down などの手法の組み合わせが主であった。岡森健一郎氏の修士論文ではエキゾチック $E(1)$ であって Lefschetz fibration から自然に生まれる Kirby 図式の特性を利用して 1-ハンドルを持たないようなハンドル分解を与えた。本研究は岡森氏の手法を応用したものであり、S^2 上 Lefschetz fibration の構造を用いて 1-,3-ハンドルに関する結果を得た。

Akhmedov-Park([AP08, AP10]) をはじめ、様々なエキゾチック $\mathbb{CP}^2\#m\overline{\mathbb{CP}^2}(2 \leq m \leq 9)$ の例が構成されてきたが ([FS06, P97, P05, PSS05, SS05] など)、安井氏 ([Ya10]) はエキゾチック

$\mathbb{CP}^2 \# m\overline{\mathbb{CP}^2}$ のハンドル分解で $m = 7, 8, 9$ のとき $1, 3$-ハンドルのない例、$m = 6, 7, 8, 9$ のとき 1-ハンドルのない例をそれぞれ与えた。ただし、$m \leq 5$ の場合そのような例は知られていない。

2 諸定義

2.1 Lefschetz fibration

以下で Lefschetz fibration の定義とモノドロミー因数分解及びカービー図式の関係について紹介する。

Definition 2.1. [GS](Lefschetz fibration)
M^4 をコンパクト向き付け可能 $C^\infty 4$ 次元多様体、B^2 をコンパクト向き付け可能 $C^\infty 2$ 次元多様体、$f\colon M^4 \to B^2$ を全射 C^∞ 写像とするとき、f が B^2 上の種数 g の Lefschetz fibration であるとは次の条件を満たすことである。

1. $\partial M^4 = f^{-1}(\partial B^2)$
2. $b_1, b_2, \ldots, b_n (\in Int(B^2))$ を f の臨界値 (ただし、n は有限) とし、f の臨界点 $p_i (\in f^{-1}(b_i))$ が条件 (a),(b) を満たして一意存在する $(i = 1, 2, \ldots, n)$。
   (a) $f|_{f^{-1}(B^2 - \{b_1, b_2, \ldots, b_n\})}$ が種数 g の閉曲面 Σ_g に微分同相なものをファイバーにもつファイバー束である。
   (b) $w = f(z_1, z_2) = z_1 z_2$ を満たす p_i と b_i の周りの向きを保つ複素局所座標が存在する。
3. M^4 に埋め込まれた自己交差数 (-1) の球面をどの $f^{-1}(b_i)$ も含まない。

$b_0 \in Int(B^2) - \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ に対して $f^{-1}(b_0)$ を正則ファイバー、$f^{-1}(b_i)$ を特異ファイバーという。
この特異ファイバーは、閉曲面 Σ_g に微分同相な正則ファイバー上の単純閉曲線が 1 点に潰すことで得られ、この潰れる単純閉曲線のことを消滅サイクルという。

2.2 写像類群

Definition 2.2. 集合 $\mathrm{Diff}_+(\Sigma_g) = \{\varphi\colon \Sigma_g \to \Sigma_g \mid \varphi$ は向きを保つ微分同相写像 $\}$ は、写像の合成を積として群となる。φ_0 と φ_1 が isotopic であるとは、連続写像 $\Phi\colon \Sigma_g \times [0,1] \to \Sigma_g$ が存在して $\varphi_t := \Phi(\cdot, t)\colon \Sigma_g \to \Sigma_g$ が $\mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)$ の元となる時である。また、記号で $\varphi_0 \sim \varphi_1$ と書く。この時、$\sim$ は同値関係である。

Definition 2.3. 種数 g の閉曲面 Σ_g の写像類群 Γ_g とは $\Gamma_g = \mathrm{Diff}_+(\Sigma_g)/\sim$ である。
$[f], [g] \in \Gamma_g$ に対して、$[f] \cdot [g] = [f \circ g]$ を積として Γ_g は群となる。

Definition 2.4. Figure1 の写像の isotopy 類は種数 g の閉曲面 Σ_g の写像類群 Γ_g の元であり、τ_c と書き Σ_g 上の単純閉曲線 c に沿ったデーンツイストという。

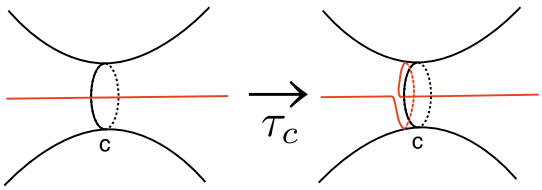


Figure1: 単純閉曲線 c についてのデーンツイスト

Definition 2.5. 全射 C^∞ 写像 $f\colon M^4 \to S^2$ を m 個の特異ファイバーを持つ S^2 上の種数 g の Lefschetz fibration とする。この Lefschetz fibration に対して定まる $id \in \Gamma_g$ の因数分解 $\tau_{c_1}\tau_{c_2}\dots\tau_{c_m} = id$ をモノドロミー因数分解という。

Fact 2.6. モノドロミー因数分解は Σ_2 上の単純閉曲線に沿ったデーンツイストの積で与えられる。モノドロミー因数分解に現れる単純閉曲線が Lefschetz fibration の特異ファイバーを特徴づけており、Lefschetz fibration の全空間のカービー図式を書くことができる。特に、デーンツイストの積の個数が特異ファイバーの本数に一致している。

3 主定理

種数 h のファイバー 2 橋結び目 K の conway 表示は

$$K = C(2\epsilon_1, 2\epsilon_2, \cdots, 2\epsilon_{2h},)$$

(ただし、$\epsilon_i \in \{+1, -1\}$) であることが知られている。本研究の主定理は次である。

Theorem. 種数 h のファイバー 2 橋結び目 K が $C(2, 2, \cdots, 2)$ で表現されるとき、任意の正整数 n, h に対して $E(n)_K$ は 1-,3-ハンドルのないハンドル分解を持つ。

この主定理から次の系を得る。

Corollary. 2 に互いに素な任意の正整数 q に対して、$E(1)_{2,q}$ は 1-,3-ハンドルのないハンドル分解を持つ。

Proof. $T_{p,q}$ を (p, q) トーラス結び目とする。このとき、$E(1)_{p,q}$ は $E(1)_{T_{p,q}}$ に微分同相であることが知られており、$(2, q)$ トーラス結び目はファイバー 2 橋結び目で $C(2, 2, \cdots, 2)$ で表現される。よって、主定理から直ちに従う。

任意の自明でない結び目 K に対して、Seiberg-Witten 不変量が異なることから $E(n)_K$ は $E(n)$ にエキゾチックであることを注意しておく。

参考文献

[A09] S. Akbulut, *An infinite family of exotic Dolgachev surfaces without 1- and 3- handles*, J. Gökova Geom. Topol. **3** (2009) 22–43.

[A12] S. Akbulut, *The Dolgachev Surface, Disproving the Harer-Kas-Kirby conjecture*, Comment. Math. Helv. **87** (2012), no.1, 187–241.

[AP08] A. Akhmedov and B. D. Park, *Exotic Smooth Structures on Small 4-Manifolds*, Invent. Math. **173** (2008), 209–223.

[AP10] A. Akhmedov and B. D. Park, *Exotic smooth structures on small 4-manifolds with odd signatures*, Invent. Math.**181** (2010), no.3, 577–603.

[B24] R. I. Baykur, *On four-manifolds without 1- and 3-handles*, arXiv:2403.14586.

[BZ67] G. Burde, H. Zieschang, and González-Acũna, *Neuwirthsche knoten und Flächenabbildungen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, **31** (1967), 239–246.

[D87] S. K. Donaldson, *Irrationality and the h-cobordism conjecture*, J. Differential Geom. **26** (1987), no. 1, 141–168.

[FS98] R. Fintushel, and R. Stern, *Knots, links, and 4-manifolds*, Invent. Math. **134** (1998), 363–400.

[FS06] R.Fintushel and R. J. Stern, *Double node neighborhoods and families of simply connected 4-manifolds with $b^+ = 1$*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), no. 1, 171–180.

[G91] R. E. Gompf, *Nuclei of elliptic surfaces*, Topology 30 (1991), no. 3, 479–511.

[GS] R. E. Gompf, A. I. Stipsitz, *4-Manifolds and Kirby Calculus*, Graduate Studies in Mathematics, **20** American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[Gon70] F. González-Acũna, *Dehn's construction on knots*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, **15** (1970), 58–77.

[HKK86] J. Harer, A. Kas, R. Kirby, *Handlebody decompositions of complex surfaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **62** (1986).

[Ki97] R. Kirby, *Problems in low-dimensional topology*, Geometric topology, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics **2.2** (ed. W. Kazez; American Mathematical Society, Providence, RI, 1997) 35–473.

[Ko89] D. Kotschick, *On manifolds homeomorphic to* $\mathbb{CP}^2\#8\overline{\mathbb{CP}^2}$, Invent. Math. **95** (1989), no. 3, 591–600.

[Ku24] D. Kusuda, *On elliptic surfaces which have no 1-handles*, arXiv:2410.16900.

[O11] K. Okamori, *A construction of an exotic* $\mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}$ *admitting a Lefschetz fibration structure*, Master Thesis, (in Japanese), Osaka University, (2011).

[P97] J. Park, *Seiberg-Witten invariants of generalized rational blow-downs*, Bull. Austral. Math. Soc. **56** (1997), no. 3, 363–384.

[P04] J. Park, *Non-complex symplectic 4-manifolds with* $b_2^+ = 1$, Bull. London Math. Soc. **36** (2004), 231–240.

[P05] J. Park, *Simply connected symplectic 4-manifolds with* $b_2^+ = 1$ *and* $c_1^2 = 2$, Invent. Math. **159** (2005), 657–667.

[PSS05] J. Park, A. I. Stipsicz, Z. Szabó, *Exotic smooth structures on* $\mathbb{CP}^2\#5\overline{\mathbb{CP}^2}$, Math. Res. Lett. **12** (2005), no. 5-6, 701–712.

[Po] V. Poenaru, *The Problems of Dimension Four, and Some Ramifications*, MDPI mathematics, **11** (2023), 3826.

[Sa23] R. Sakamoto, *A geometrically simply connected elliptic surface*, Master thesis, Osaka University (2023).

[SS05] A. I. Stipsicz and Z. Szabó, *An exotic smooth structure on* $\mathbb{CP}^2\#6\overline{\mathbb{CP}^2}$, Geom. Topol. **9** (2005), 813–832.

[T25] M. Tange, *Exotic elliptic surfaces without 1-handles*, arXiv:2501.03935v4.

[Ya08M] K. Yasui, *Exotic rational elliptic surfaces without 1-handles*, Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), no. 2, 971–996.

[Ya08J] K. Yasui, *Elliptic surfaces without 1-handles*, J. Topol. **1** (2008), no. 4, 857–878.

[Ya10] K. Yasui, *Small exotic rational surfaces without 1- and 3-handles*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 11, 5893–5907.

[Yu08] K. -H. Yun, *Twisted Fiber Sums of Fintushel-Stern's Knot Surgery 4-Manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **360**, no.11 (2008), 5853–5868.

代数曲線補集合のハンドル分解

北海道大学大学院理学研究院数学部門
菅原朔見 (Sakumi Sugawara) *

概要

複素多項式の零点集合として定義された $\mathbb{C}^2$ 内の図形を（平面）代数曲線という。代数曲線補集合は、代数幾何、トポロジー両観点から長く研究されてきた対象である。1980 年ごろ Moishezon により導入されたブレイドモノドロミーという概念により、代数曲線のトポロジーの研究が大きく進展した。本研究では、ブレイドモノドロミーのアイデアを元に、代数曲線補集合の微分同相型を記述するハンドル分解、そしてそれを絡み目の図式として表す Kirby 図式が得られたので、それについて紹介したい。

1 導入

被約な複素二変数の多項式 $f \in \mathbb{C}[x,y]$ で定義された $\mathbb{C}^2$ 内の図形 $C = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ を（アフィン平面）代数曲線と呼ぶ．補集合を $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ とおく．代数曲線の補集合は，代数幾何，トポロジーの両観点から長く研究されてきた対象である．補集合のトポロジーに関して最も注目すべき最初の研究は，Zariski による 1929 年の論文 [19] であろう．彼は与えられた代数曲線を分岐集合として持つような分岐被覆に関する研究を契機とし，補集合の基本群に関する研究を行なった．同論文は代数曲線補集合のトポロジーに関する興味深い問題を示唆しており，その後長くにわたり代数曲線のトポロジーにおける主要な研究対象となった（例えば，二重点のみを特異点として持つ曲線の補集合の基本群に関する問題や，Zariski 対に関する問題など）．Zariski により研究された補集合の基本群を計算する手法は，後に van Kampen[10] により完成させられ，現在 Zariski–van Kampen の定理として代数曲線のトポロジーにおける基本的な手法となっている．

さて，Zariski–van Kampen による補集合の基本群の計算方法は Moishezon[14] によりブレイドモノドロミーと呼ばれる概念へと発展する．ブレイドモノドロミーにより得られる補集合の基本群の表示は，Zariski–van Kampen によるものよりも関係式が少なく，“良い” 表示であった．実際，Libgober[11] により，ブレイドモノドロミーにより得られる補集合の基本群の表示から得られる 2 次元 CW 複体が，補集合とホモトピー同値であることが知られている．ブレイドモノドロミーは代数曲線のトポロジーを研究する上で強力なツールであり，後に Artal–Carmona–Cogolludo[2] により，アフィン平面曲線のブレイドモノドロミーが，付随する射影平面内の曲線の埋め込みの位相を決めることがわかった．

一方で，補集合 M は Stein 曲面，すなわち複素 Euclid 空間への双正則埋め込みを持つ複素曲面で

* E-mail:math.skm.sugawara@gmail.com

ある．Stein 曲面は 4 次元トポロジーにおいても重要な研究対象であり，ハンドル分解，Kirby 図式や，Lefschetz 束などを用いて研究されてきた [8, 6, 12, 15]．そこで，与えられた Stein 曲面に対して，その微分同相型を求めることは自然な問いである．

以上を踏まえて，本研究では代数曲線補集合の微分同相型を調べた．結果として，ブレイドモノドロミーのアイデアを基に，補集合の微分同相型を表すハンドル分解や Kirby 図式を求める方法を与えることができた．詳細は [17, 18] を参照されたい．

2　代数曲線のブレイドモノドロミー

本節では，代数曲線のブレイドモノドロミーについて述べ，補集合の基本群やホモトピー型について紹介する．ブレイドモノドロミーに関する詳細は [3, 4, 14] を参照されたい．また，代数曲線補集合の基本群については，[16] の第一部に詳細な解説がある．そちらも参照されたい．

$f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$ を複素二変数の被約な n 次多項式とし，y^n の係数が 0 でないと仮定する．多項式 $f(x,y)$ が定める代数曲線を $C = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ とし，その補集合を $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ とおく．第一成分への射影を $\pi : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ とし，各 $x \in \mathbb{C}$ に対し，$L_x = \pi^{-1}(x)$ とおく．射影の各ファイバーと曲線の交わり $L_x \cap C$ は高々 n 点集合であることに注意する．複素平面 $\mathbb{C}$ 内の部分集合 X を以下で定義する：

$$X = \{p \in \mathbb{C} \mid \#(L_p \cap C) < n\}.$$

これは L_p が C と接するか，C の特異点を含むような点 p の集まりである．別の言い方をすれば，各 $p \in \mathbb{C}$ を固定するごとに得られる y についての n 次多項式 $f(p,y)$ が重根を持つような p の集まりである．X は有限集合であり，$X = \{p_1, \ldots, p_N\}$ と表す．任意の $p_i \in X$ に対して，L_{p_i} が C の特異点または C との接点を高々 1 点含むようにジェネリックに仮定できる．このとき以下が成り立つ．証明は例えば [5] の Lemma 3.3.5 などを参照．

命題 2.1　射影の制限 $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus (C \cup \pi^{-1}(X)) \to \mathbb{C} \setminus X$ は $\mathbb{C} \setminus (n \text{ points})$ をファイバーに持つファイバー束である．

このファイバー束のモノドロミーについて観察していく．各点 $p_i \in X$ を中心とする十分小さい円板 U_i とし，これの境界の円周から一点 $p_i' \in \partial U_i$ をとる．基点 $p_0 \in \mathbb{C} \setminus X$ をとり，p_0 と p_i' を結ぶ自己交叉のない道 s_i を，「$i \neq j$ ならば $s_i \cap s_j = \{p_0\}$」となるようにとる（このような道の集まり $(s_1, \ldots, s_N)$ を基点 p_0 と集合 $\{p_1', \ldots, p_N'\}$ に関する Hurwitz 系と呼ぶことにする）．p_0 を基点とし，$s_i, \partial U_i, s_i^{-1}$ を結んでできる道のホモトピー類を $\gamma_i \in \pi_1(\mathbb{C} \setminus X, p_0)$ とおく．$\gamma_1, \ldots, \gamma_N$ は $\pi_1(\mathbb{C} \setminus X, p_0) \cong F_N$ (階数 N の自由群) の生成系をなす．各ループ γ_i に沿って，ファイバー束 $\pi : \mathbb{C}^2 \setminus (C \cup \pi^{-1}(X)) \to \mathbb{C} \setminus X$ を自明化することで，L_{p_0} 内の $L_{p_0} \cap C$ を保つような自己同相が得られる．そのためこのファイバー束からは準同型

$$\Phi : \pi_1(\mathbb{C} \setminus X, p_0) \to B(L_{p_0}, L_{p_0} \cap C)$$

を得る．ここで，$B(L_{p_0}, L_{p_0} \cap C)$ は $L_{p_0} \cap C$ を保つような L_{p_0} の写像類群であり，n 本の紐からなるブレイド群 B_n と同型である．そのため，この準同型 Φ は代数曲線のブレイドモノドロミーと呼ばれる．各生成元 γ_i に対するモノドロミーを $\beta_i = \Phi(\gamma_i) \in B(L_{p_0}, L_{p_0} \cap C)$ とおく．

基点のファイバーと曲線の交わりを $L_{p_0} \cap C = \{q_1, \ldots, q_n\}$ とおく．$L_{p_0} \setminus (L_{p_0} \cap C)$ から基点 q_0 をとり，基点 q_0 と集合 $\{q_1, \ldots, q_n\}$ に関する L_{p_0} 内の Hurwitz 系をとり，先と同様に対応する $\pi_1(L_{p_0} \setminus (L_{p_0} \cap C), q_0)$ の生成元を $e_1, \ldots, e_n$ とする．

また，$p \in \partial U_i$ に対して $L_p \cap C$ は n 点集合である．点 p が p_i に近づくとき，このうち m_i 点が一点に潰れる（L_{p_i} が C と横断的に交わるとき，m_i は特異点の重複度に一致する）と仮定し，この潰れる m_i 点に対応する $L_{p_0} \cap C$ の点の集まりを $\{q_{i_1}, \ldots, q_{i_{m_i}}\}$ とおく．対応する添字集合を $I_i = \{i_1, \ldots, i_{m_i - 1}\}$ とおく．

以上の準備のもと，以下が成り立つことが知られている．

定理 2.2 ([11]) 補集合 $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ は以下の基本群の表示から得られる 2 次元の CW 複体とホモトピー同値である：

$$\pi_1(\mathbb{C}^2 \setminus C) \cong \langle e_1, \ldots, e_n \mid \beta_i \cdot e_j = e_j,\ i = 1, \ldots, N, j \in I_i \rangle.$$

ここで $\cdot$ はブレイド群の自由群への Artin 作用を表す．

この定理は補集合を上記の表示を持つ 2 次元 CW 複体へとレトラクトさせていくことで証明される．ここで，「S^3 内の結び目群の Wirtinger 表示，そして Artin 表示が表す 2 次元 CW 複体は補集合とホモトピー同値である」という事実を局所的に用いている．添字集合 I_i が m_i 個ではなく $m_i - 1$ 個の元からなるのは，結び目群の Wirtinger 表示や Artin 表示の不足数が 1 であることに由来する．

3　代数曲線補集合のハンドル分解

本節では，代数曲線の補集合 $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ のハンドル分解について述べる．

補集合 M は開多様体であるので，$\mathbb{C}^2$ 内の十分大きな半径を持つ多重円板 $D \times D$（角を解消すれば 4 次元球体と微分同相）と曲線に対する十分小さくジェネリックな正則近傍 $\nu(C)$ をとり，$M_0 = (D \times D) \setminus \nu(C)$ のハンドル分解を考えることにする．このとき M_0 はコンパクト境界付き 4 次元多様体であり，M_0 の内部は M と微分同相である．射影 π を M_0 へと制限したものを $\pi_0 : M_0 \to D$ とおく．このとき，π_0 の制限 $\pi_0 : M_0 \setminus \left(\bigcup_{i=1}^N \pi_0^{-1}(U_i) \right) \to D \setminus \bigcup_{i=1}^N U_i$ はやはりファイバー束であり，そのファイバーは $n+1$ 個の境界成分を持つ種数 0 の曲面（つまり，大きさのある穴を n 個開けた円板 D_n）であることに注意されたい．

基点 p_0 と ∂D を結ぶ自己交叉のない道 s_0 で，$s_0 \cap s_i = \{p_0\}$ $(i = 1, \ldots, N)$ となるようなものをとり，各 $i = 0, 1, \ldots, N$ に対して道 s_i の十分小さい管状近傍 $\nu(s_i)$ とする．さらに $\nu(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^N U_i \cup \bigcup_{i=0}^N \nu(s_i)$ とおく（図 1 を参照）．

このとき，$D \setminus \nu(\Gamma)$ は円板と同相であり，したがって可縮である．よってこの上では，射影から得られるファイバー束は自明となり，ファイバーは n 個穴あき円板 D_n であるから，次を得る．

命題 3.1 $\pi_0^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma))$ は 1 ハンドル体 $\natural_n(S^1 \times D^3)$ $(\cong D_n \times D^2)$ と微分同相である．

ハンドル分解を求めたい多様体は $M_0 = \pi_0^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma)) \cup \pi_0^{-1}(\nu(\Gamma))$ であるから，後は上記の 1 ハンドル体に $\pi_0^{-1}(\nu(\Gamma))$ がどのように接着されているかを見ればよい．

各 $i = 1, \ldots, N$ に対し，$V_i \subset U_i$ を p_i を中心とする円板で，任意の $p \in V_i$ が $L_p \cap C \cong D_{n-(m_i-1)}$

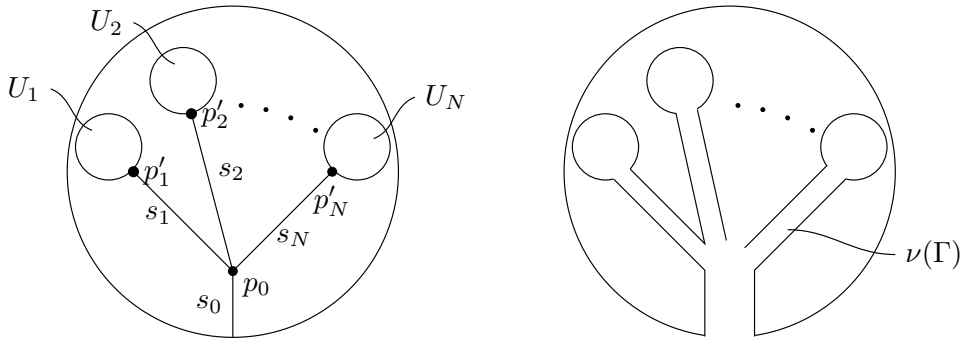


図 1　道の集まり $s_0, s_1, \ldots, s_N$ と $\nu(\Gamma)$

を満たすようにとる．点 p_i のまわりでパーツ分けし，A, B を図 2 のように定める．

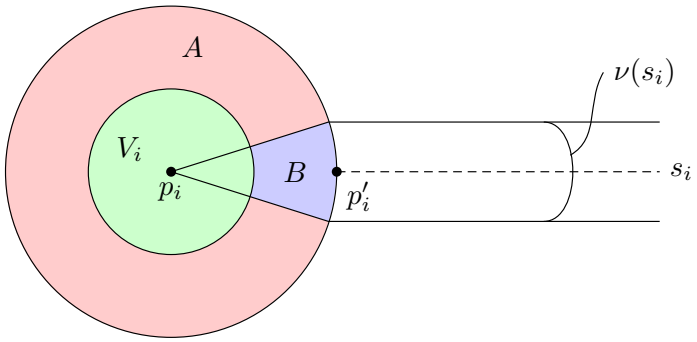


図 2　領域 A と B

このとき，実は $\pi_0^{-1}(A)$，$\pi_0^{-1}(V_i)$ を順に接着しても多様体の微分同相型が変わらないことがわかる[*1]．そして，残る部分 $\pi_0^{-1}(B)$ をこれに接着することが，$m_i - 1$ 個の 2-ハンドル接着になっている．この 2-ハンドル接着の概要を，簡単のために $m_i = 2$ と仮定して見てみよう．B の両端の連結成分について，∂U_i 側では $L_p \cap C$ から得られる二つの連結成分があるが，V_i 側では，V_i に対する仮定より $L_p \cap C$ から得られる連結成分は一つになっている（図 3）．さらに図のように，∂U_i 側から V_i 側へ近づくにつれ，$L_p \cap C$ から得られる連結成分が二つから一つへ真っ直ぐに減っていることがわかる[*2]．B を放物線状の孤で区切っていき，そのファイバーの様子を見ていくと，孤 α_2 のファイバー上にある青色の円が孤を右に進めていくと消えていく様子がわかる（図 4）．このとき，この青い円がハンドルの接着円となるような，2-ハンドルの接着が行われていることがわかる[*3]．また，$m_i \geq 3$ の場合もこの操作を繰り返していくことで，同様の 2-ハンドルの接着が行われることがわかる．残りの部分 $\pi_0^{-1}(\nu(s_i))$ の接着は全て多様体の微分同相型をかえず，結局各 i に対して，$m_i - 1$ 個の 2-ハンドルが接着されるようなハンドル分解を M_0 は持つことがわかる．

[*1] 詳細は [17] の 6 ページの議論を参照.

[*2] これは C の正則近傍を十分小さくとることにより可能になっている.

[*3] 実際に 2-ハンドルの接着になっていることは，境界の 3 次元多様体へ制限して得られる安定写像が不定値折り目のみを特異点にもつことを用い，具体的に座標を表示することからわかる.

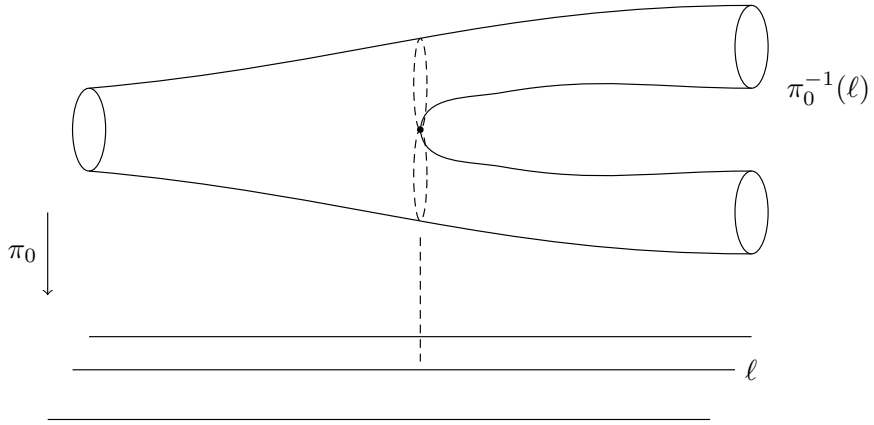


図 3　$\pi_0^{-1}(B)$ の様子．ℓ は B 内の半径方向に伸びる直線である．

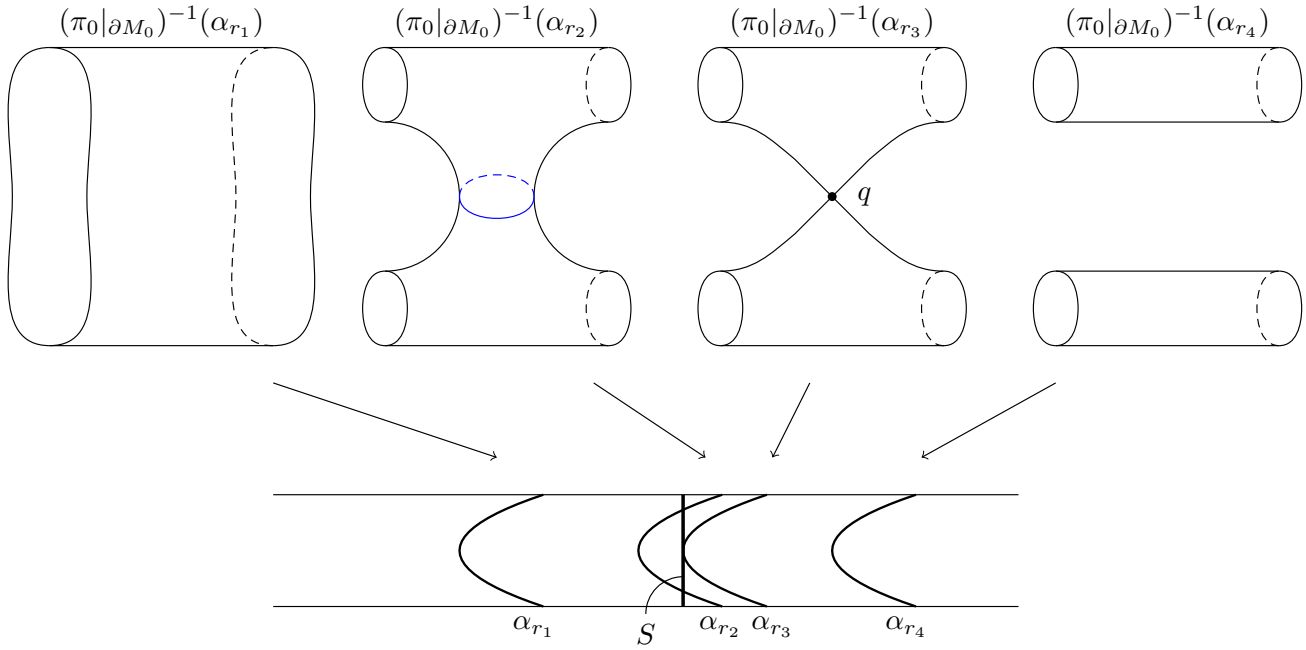


図 4　B 内の孤とその上のファイバー

4　代数曲線補集合の Kirby 図式

本節では，前節でハンドル分解を求めた補集合 $M = \mathbb{C}^2 \setminus C$ の Kirby 図式について述べる．

補集合 M_0 は 2-ハンドル体であることがわかったので，1-ハンドルの接着を表す点付き円，2-ハンドルの接着を表す枠付き絡み目を描ければよい．まず初めに，1-ハンドルの接着は，適切に埋め込まれた円板 D^2 を取り除くこと（キャンセリング 2-ハンドルの除去）によっても得られることを思い出す．このようにして得られる 1-ハンドル接着の Kirby 図式における点付き円は，取り除かれる円板の境界 ∂D^2 そのものであった（キャンセリング 2-ハンドルのベルト球面に対応）．現在ハンドル分解を考えている多様体の 1-ハンドル体は，$\pi_0^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma))$ である．そして，これは 4 次元球体

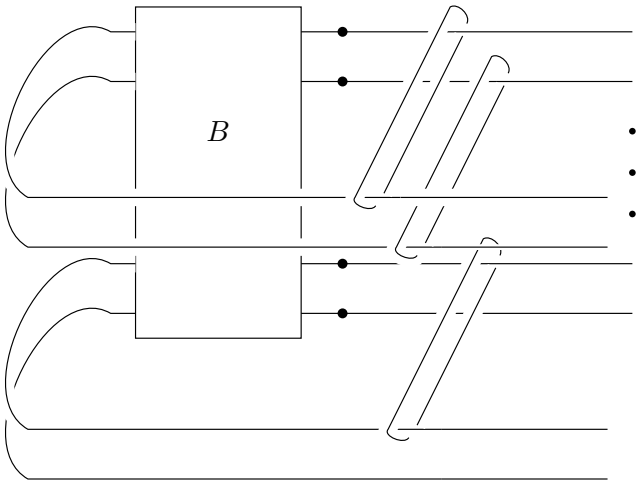


図 5　Kirby 図式の局所的な様子

$\pi^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma))$ から $\pi^{-1}(D \setminus \nu(\Gamma)) \cap C$ が作る n 個の互いに交わらない適切に埋め込まれた円板を除くことにより得られている．よって 1-ハンドル接着を表す点付き円は $\pi^{-1}(\partial(D \setminus \nu(\Gamma))) \cap C$ となる．

続いて 2-ハンドルの接着を考える．2-ハンドルの接着は，各 $p_i \in X$ に対し，L_{p_i} の周りで局所的に行われていた．このとき，Kirby 図式において 2-ハンドルの接着を表す接着円は，ブレイドに橋をかけるように，図 5 のように表される．ここで，B は p_i に付随する局所的なモノドロミーを表すブレイドである．これらをつなぎ合わせていくことで，M_0 の Kirby 図式を得る．また，フレーミング係数はどのような場合でも全て 0 であることもわかる．

例 4.1　定義式を $f(x, y) = x^p - y^q$ とする．このとき $X = \{0\}$ である．グラフ Γ を図 6 のようにすると，そこから得られる Kirby 図式は図 7 のようになる．ここで，$B_{p,q}$ は q 本の紐からなるブレイド群 B_q の元で，隣り合う i 番目と $i+1$ 番目の紐の半捻りを表す標準的な生成元 σ_i とした時に，$B_{p,q} = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{q-1})^p$ と表される元である．

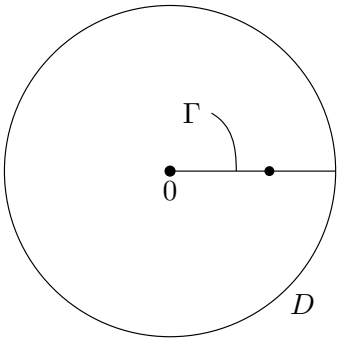


図 6　定義式 $f(x, y) = x^p - y^q$ に対して定まるグラフ Γ

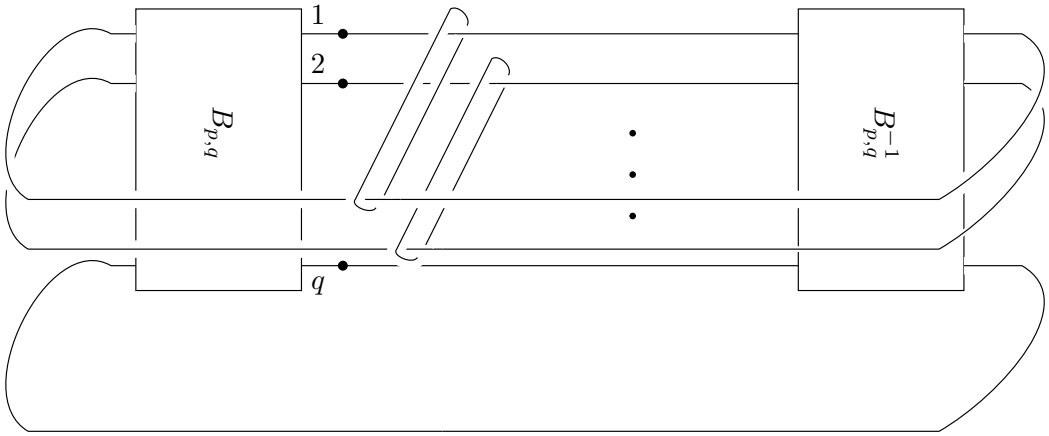


図 7　曲線 $x^p - y^q = 0$ の補集合の Kirby 図式

参考文献

[1] E. Artal Bartolo, J. Carmona Ruber, and J. I. Cogolludo Agustín, Braid monodromy and topology of plane curves, *Duke Math. J.* **118** (2003), 261–278.

[2] J. I. Cogolludo Agustín, Braid monodromy of algebraic curves, *Ann. Math. Blaise Pascal* **18** (2011), no. 1, 141–209.

[3] D. C. Cohen, A. Suciu, The braid monodromy of plane algebraic curves and hyperplane arrangements. *Comment. Math. Helvetici* **72** (1997), no. 2, 285–315.

[4] A. Dimca, Singularities and topology of hypersurfaces, Universitext, *Springer-Verlag, New York*, (1992), xvi+263 pp.

[5] Y. Eliashberg, Topological characterization of Stein manifolds of dimension > 2, *Internat. J. Math.*, **1** (1990), 29–46.

[6] R. E. Gompf, Handlebody construction of Stein surfaces, *Ann. of Math.* **148** (1998), no. 2, 619–693.

[7] E. R. van Kampen, On the fundamental group of an algebraic curve, *Amer. J. Math.*, **55** (1933), 255–260.

[8] A. Libgober, On the homotopy type of the complement to plane algebraic curves, *J. Reine Angew. Math.*, **367** (1986), 103-114.

[9] A. Loi, R. Piergallini, Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of B^4, *Invent. Math.*, (2001), no. 2, 325–348.

[10] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies, vol. **61**, Princeton University Press, Princeton (1968).

[11] B. Moishezon, Stable branch curves and braid monodromies, Lectures Notes in Math., 862, *Springer-Verlag*, (1981), 107–192.

[12] B. Ozbaci, A. Stipsicz, Surgery on contact 3-manifolds and Stein surfaces, Bolyai Soc. Math. Stud., 13, *Spreinger-Verlag, Berlin; János Bolyai Mathematical Society, Budapest*, 2004, 281 pp.

[13] 石川剛郎，徳永浩雄，島田伊知朗，齋藤幸子，福井敏純，代数曲線と特異点，特異点の数理 4，共立出版（2001）

[14] S. Sugawara, Handle decompositions and Kirby diagrams for the complement of plane algebraic curves, arXiv:2306.10519, preprint.

[15] S. Sugawara, On the topology of the complements of plane algebraic curves, Ph. D. Thesis, Hokkaido University, https://doi.org/10.14943/doctoral.k16082

[16] O. Zariski, On the problem of existence of algebraic function of two variables possessing a given branch curve, *Amer. J. Math.*, **51** (1929), 305–328.

Kaliman modification とハンドル接着

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
赤川正朋 (Masatomo AKAGAWA) *

概要

Kaliman modification という，複素代数多様体とその中の既約超曲面から新たに複素代数多様体を作る操作がある（[Ka94]）．この操作を 2-ハンドルの接着として解釈し，$\mathbb{C}^2$ とその中の既約代数曲線に対する Kaliman modificatiton の Kirby 図式を求めた．また，ある特異点付きの超曲面の Kaliman modification が $\mathbb{R}^6$ と微分同相になることを示し，$\mathbb{R}^6$ 上に有限型の Stein 構造を構成した．本研究は指導教員である粕谷直彦氏との共同研究である．

1　ハンドル分解と Kirby 図式

ここでは，可微分多様体のハンドル分解と Kirby 図式について述べる．詳しくは [GS99], [EH24], [Ta92] などを参照せよ．

1.1　ハンドル分解

特に断らない限り，M は境界を持つ実 n 次元可微分多様体とする．

定義 1.1 (ハンドル接着)**.** 整数 k $(0 \leq k \leq n)$ に対し，$h^k \coloneqq D^k \times D^{n-k}$ とおく．滑らかな埋め込み $\alpha\colon \partial D^k \times D^{n-k} \to \partial M$ による接着空間 $M \cup h^k$ の角を解消すると，自然に実 n 次元可微分多様体の構造が入る．この操作を M への **k-ハンドル接着**と言い，$M \cup_\alpha h^k$ で表す．このとき，組 (h^k, α) を n 次元 **k-ハンドル**または**指数 k のハンドル**，α を**接着写像**，$\partial D^k \times D^{n-k}$ を**接着領域**，$D^k \times \{\mathbf{0}\}$ を**コア**，$\partial D^k \times \{\mathbf{0}\}$ を**接着球面**，$\{\mathbf{0}\} \times D^{n-k}$ を**ココア**，$\{\mathbf{0}\} \times \partial D^{n-k}$ を**ベルト球面**と呼ぶ．$k = 2$ の場合，接着球面 $\partial D^2 \times \{\mathbf{0}\}$ を**接着円周**と呼ぶこともある．

定義 1.2 (ハンドル体，ハンドル分解，双対ハンドル)**.** X を n 次元可微分多様体とする．0 以上の整数の組 s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ によって

$$X \cong (h_1^0 \cup \cdots \cup h_{s_0}^0) \cup (h_1^1 \cup \cdots \cup h_{s_1}^1) \cup \cdots \cup (h_1^n \cup \cdots \cup h_{s_n}^n)$$

という表示が与えられているとき，X を**ハンドル体**，この表示を X の（整列された）**ハンドル分解**と言う．また，0-ハンドルから k-ハンドルまでを接着することで得られる多様体

$$X_k \coloneqq (h_1^0 \cup \cdots \cup h_{s_0}^0) \cup (h_1^1 \cup \cdots \cup h_{s_1}^1) \cup \cdots \cup (h_1^k \cup \cdots \cup h_{s_k}^k)$$

* E-mail:akagawa.masatomo.i1@elms.hokudai.ac.jp

を k-**ハンドル体**と言う.

命題 1.3. 全ての連結でコンパクトな n 次元可微分多様体 X は，0-ハンドルがただ 1 つだけのハンドル分解を持つ．さらに，X が閉多様体であるとき，n-ハンドルがただ 1 つだけのハンドル分解を持つ.

例 1.4 (複素射影空間のハンドル分解)**.** 複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ のアトラス $\{(U_i, \psi_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n+1\}$ を次のようにとる.

$$U_i \coloneqq \{[z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}] \mid z_i \neq 0\},$$
$$\psi_i \colon U_i \to \mathbb{C}^n;\ [z_1, \ldots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{n+1}] \mapsto \left(\frac{z_1}{z_i}, \ldots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \ldots, \frac{z_{n+1}}{z_i}\right).$$

これらと $D \coloneqq \{(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n \mid |w_i|^2 \leq 1\ (i = 1, 2, \ldots, n)\}$ に対し，$h^{2k}\ (k = 0, 1, \ldots, n)$ を

$$h^{2k} = \psi_{n-k+1}^{-1}(D)$$

によって定める．そうすると，h^{2k} を $2k$-ハンドルとする $\mathbb{C}P^n$ のハンドル分解が得られる.

例えば $n = 2$ のとき，h^0 と h^2 の共通部分は

$$\begin{aligned}
h^0 \cap h^2 &= \left\{ [z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{C}P^2 \;\middle|\; \left|\frac{z_1}{z_3}\right|^2 \leq 1, \left|\frac{z_2}{z_3}\right|^2 \leq 1, \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 \leq 1, \left|\frac{z_3}{z_2}\right|^2 \leq 1 \right\} \\
&= \{[z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{C}P^2 \mid |z_1|^2 \leq |z_2|^2, |z_1|^2 \leq |z_3|^2, |z_2|^2 = |z_3|^2\} \\
&= \left\{ \left[\frac{z_1}{z_2}, 1, \frac{z_3}{z_2}\right] \in \mathbb{C}P^2 \;\middle|\; \left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 \leq 1, \left|\frac{z_3}{z_2}\right|^2 = 1 \right\} \\
&\cong \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |w_1|^2 \leq 1, |w_2|^2 = 1\} \\
&\cong D^2 \times S^1
\end{aligned}$$

であることから，$\{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \mid w_1 = 0, |w_2| \leq 1\}$ をコアとする 2-ハンドル h^2 が接着円周 $\{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \mid w_1 = 0, |w_2| = 1\}$ に沿って 0-ハンドル h^0 に接着されている様子が分かる．またこのとき，接着写像 $\psi_3 \circ \psi_2^{-1} \colon \psi_2(h^0 \cap h^2) \to \psi_3(h^0 \cap h^2)$ は

$$\psi_3 \circ {\psi_2}^{-1}(w_1, w_2) = ({w_2}^{-1} w_1, {w_2}^{-1})$$

となり，フレーミング係数は 1 であることが分かる（フレーミング係数については 1.2 節を参照).

$\mathbb{C}P^n$ 上に複素構造から来る自然な向きとは逆の向きを入れたものを $\overline{\mathbb{C}P^n}$ と表す．D の向きを逆にする自己微分同相 $\phi \colon D \to D$ を

$$\phi(w_1, w_2, \ldots, w_n) = (\overline{w_1}, w_2, \ldots, w_n)$$

によって定めれば，$\{(U_i, \phi \circ \psi_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n+1\}$ は $\overline{\mathbb{C}P^n}$ のアトラスとなる．よって，$h^{2k}\ (k = 0, 1, \ldots, n)$ は $\overline{\mathbb{C}P^n}$ のハンドル分解をも与えている．ただし，$n = 2$ の場合，2-ハンドル接着のフレーミング係数は -1 となることに注意が必要である.

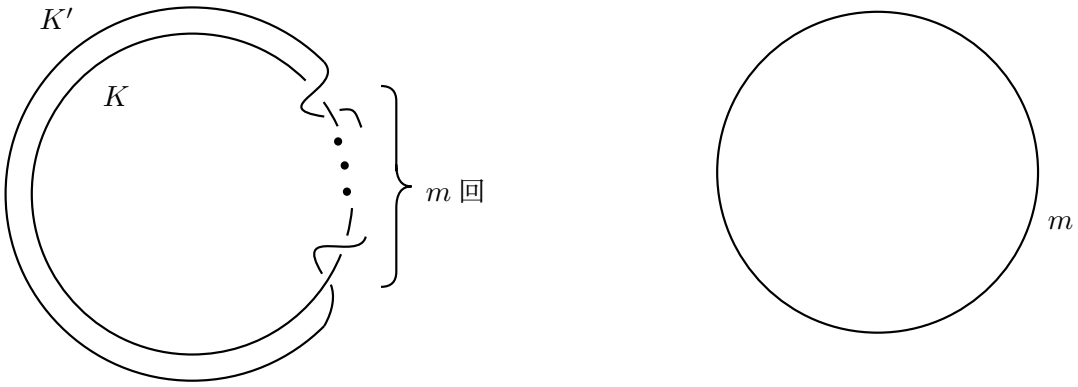


図 1　フレーミング係数

1.2　Kirby 図式

コンパクトかつ連結な向きづけられたな 4 次元多様体のハンドル分解は，Kirby 図式と呼ばれる $\mathbb{R}^3$ 内の枠付き絡み目によって表すことができる．ここでは，4 次元多様体のハンドル分解から Kirby 図式を得る方法について述べる．

X をコンパクトかつ連結な向きづけられた 4 次元多様体とし，0-ハンドルを 1 つだけ持つハンドル分解が与えられているとする（命題 1.3）．0-ハンドルの境界 $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 内の $\mathbb{R}^3$ 上に接着の様子を描くことで Kirby 図式を構成していく．

1.2.1　1-ハンドル

1-ハンドルの接着領域は $S^0 \times D^3 = \{-1, 1\} \times D^3$ である．従って，1-ハンドルの接着は $\mathbb{R}^3$ 内に 2 つの球体を描くことで表される．X は向きづけられていると仮定していたので，1 つの 1-ハンドルを D^4 に接着することで得られる多様体は $S^1 \times D^3$ と微分同相である．複数個の 1-ハンドルが接着される場合は，各 1-ハンドルの接着領域がどの球体のペアなのかがわかるようにする必要がある．そのために，アイソトピーで接着領域を動かして，ペアの球体を十分近づけておく．

1.2.2　2-ハンドル

2-ハンドルの接着円周は $\partial D^2 \times \{\mathbf{0}\} = S^1$, 接着領域は $\partial D^2 \times D^2 = S^1 \times D^2$ であり, 接着円周は 1-ハンドル体の境界内のある結び目 K, 接着領域はその管状近傍として現れる．ここで, $x \in D^2 - \{\mathbf{0}\}$ をとると $\partial D^2 \times \{x\}$ も K とは交わらないある結び目 K' として埋め込まれる．K' を結び目 K の**枠**，K と K' の絡み数 $lk(K, K')$ を**フレーミング係数**と呼ぶ（図 1）．接着円周が完全に $\mathbb{R}^3$ 内に含まれている場合は，図式に結び目 K をそのまま描き，近くにフレーミング係数を書く．接着円周が 1-ハンドルの非接着領域を通る場合は，K と $\mathbb{R}^3$ の共通部分のみを描く（図 2）.

1.2.3　3, 4-ハンドル

3, 4-ハンドルは図式内に個数だけを書く．これは次のような事情による．

今，X は閉多様体で，0, 4-ハンドルが 1 つだけのハンドル分解が与えられているとする（命題

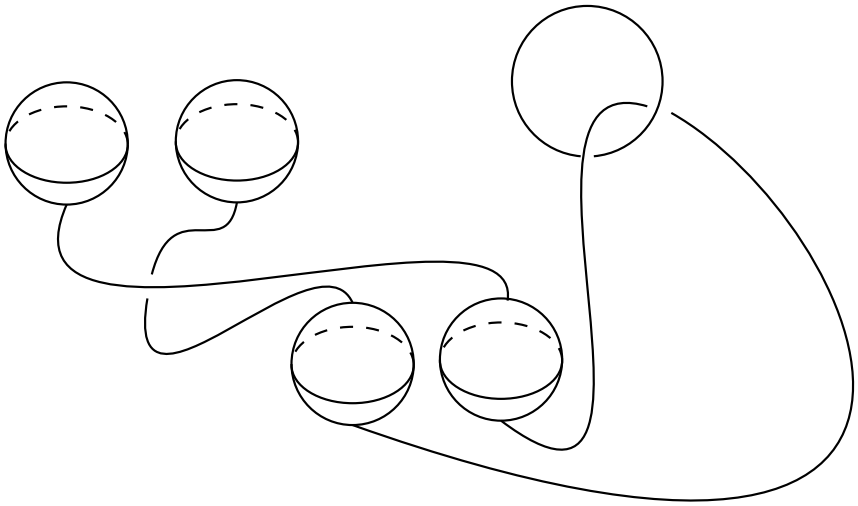


図 2　Kirby 図式上の 1-ハンドルと 2-ハンドル

1.3)．3-ハンドルの非接着領域は $D^3 \times \partial D^1 = D^3 \times \{-1, 1\}$ であり，この領域は 4-ハンドルの接着領域に完全に含まれる．従って，3-ハンドルと 4-ハンドルの和集合 $X - \mathrm{Int}X_2$ は，双対ハンドル分解によって 4-ハンドルを 0-ハンドルとみなし，そこへ 3-ハンドルを 1-ハンドルとして接着した多様体に微分同相である．特に，3-ハンドルの個数を j とすると，$X - \mathrm{Int}X_2$ は境界連結和 $\natural_j D^3 \times S^1$ と微分同相である．X はこの多様体を境界に沿って X_2 に接着することで得られるが，これによってできる多様体の微分同相型は接着写像のとり方によらないことが次の定理からわかる．

定理 1.5 ([LP72])**.** $\natural_j D^3 \times S^1$ の境界 $\sharp_j S^2 \times S^1$ の自己微分同相写像は，$\natural_j D^3 \times S^1$ の自己微分同相写像に一意的に拡張される．

よって，3-ハンドル，4-ハンドルの接着を指定せずとも，X_2 から閉多様体 X の微分同相型は一意に定まる．

一方で，多様体が閉ではない場合には微分同相型が接着写像に依存するが，その場合でも個数だけを書く．

点付き円周には次のような解釈がある．D^4 に 1-ハンドルを接着し，それをキャンセルするような 2-ハンドルを接着すると，その多様体は再び D^4 と微分同相になる．従って，1-ハンドルを接着することは D^4 からその 2-ハンドルを取り除くことと等価である．この 2-ハンドルはそのココアの管状近傍と思うことができ，ココアは D^4 に自明に埋め込まれた円盤，ベルト球面は S^3 内の自明な円周としてみえている．この円周が点付き円周に対応する．

例 1.6. $D^2 \times T^2$ と $\mathbb{C}P^2$ の Kirby 図式は図 4 のように表される．$\mathbb{C}P^2$ のハンドル分解については例 1.4 をみよ．

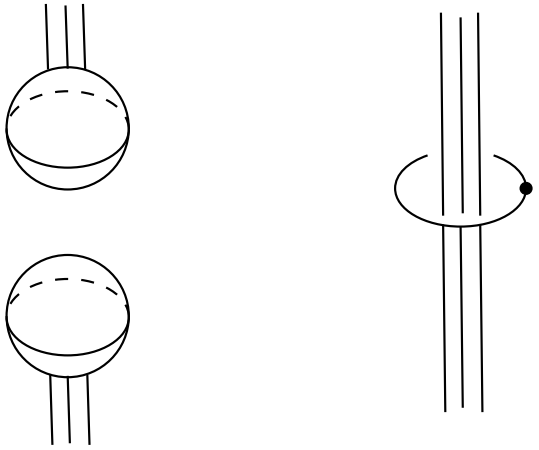


図 3　点付き円表示への描きかえ

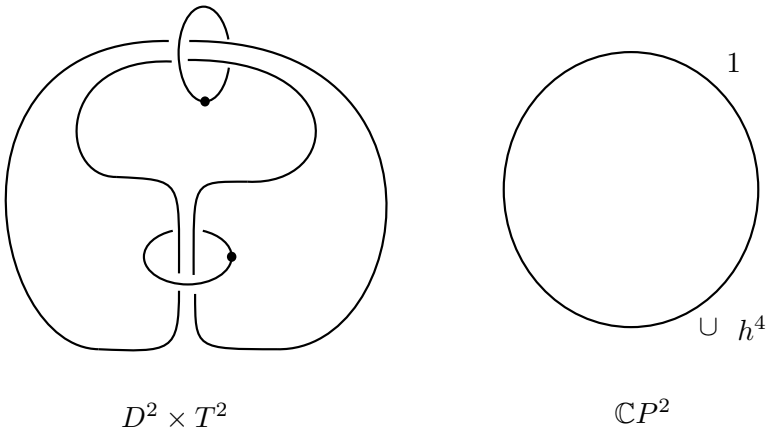


図 4　$D^2 \times T^2$ と $\mathbb{C}P^2$ の Kirby 図式

2　ブローアップと Kaliman modification

2.1　ブローアップ

整数 $n \geq 2$ に対し，$\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$ の部分多様体 $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ を

$$\widetilde{\mathbb{C}^n} = \{(\lambda x, [x]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1} \mid x \in \mathbb{C}^n - \{\mathbf{0}\}, \lambda \in \mathbb{C}\}$$

と定める．これに対し，第一成分への射影 $\pi_1 \colon \widetilde{\mathbb{C}^n} \to \mathbb{C}^n$，第二成分への射影 $\pi_2 \colon \widetilde{\mathbb{C}^n} \to \mathbb{C}P^{n-1}$ を考える．まず π_1 について 1 点の逆像に注目すると，$a \neq \mathbf{0}$ ならば ${\pi_1}^{-1}(a) = \{(a, [a])\}$，原点 $\mathbf{0}$ に対しては ${\pi_1}^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\} \times \mathbb{C}P^{n-1}$ である．よって特に，制限写像

$$\pi_1|_{\widetilde{\mathbb{C}^n} - {\pi_1}^{-1}(\mathbf{0})} \colon \widetilde{\mathbb{C}^n} - {\pi_1}^{-1}(\mathbf{0}) \to \mathbb{C}^n - \{\mathbf{0}\}$$

は双正則写像となる．一方，π_2 は **tautological line bundle** と呼ばれる $\mathbb{C}P^{n-1}$ 上の正則直線束である．この直線束の零切断は ${\pi_1}^{-1}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\} \times \mathbb{C}P^{n-1}$ と一致している．

定義 2.1 (ブローアップ)**.** M を n 次元複素多様体とし，点 $a \in M$ を固定する．$\mathbb{C}^n$ の原点 $\mathbf{0}$ を含む十分小さい半径 $\varepsilon > 0$ の開球 B^{2n}_{ε} に対し，$\varphi(\mathbf{0}) = a$ となる正則埋め込み $\varphi\colon B^{2n}_{\varepsilon} \to M$ をとる．また，tautological line bundle のファイバーを B^{2n}_{ε} に制限したものの全空間を $\widetilde{\mathbb{C}^n}_{\varepsilon}$ とおく．このとき，$\psi \coloneqq \varphi \circ \pi_1|_{\widetilde{\mathbb{C}^n}_{\varepsilon} - {\pi_1}^{-1}(\mathbf{0})}$ による貼り合わせによって，新たな複素多様体

$$\widetilde{M} \coloneqq (M - \{a\}) \cup_{\psi} \widetilde{\mathbb{C}^n}_{\varepsilon}$$

が得られる．この $\widetilde{M}$ を，点 $a \in M$ における M の 1 点**ブローアップ**と言う．ここで，$M - \{a\}$ 上の恒等写像および π_1 の $\widetilde{\mathbb{C}^n}_{\varepsilon} - {\pi_1}^{-1}(\mathbf{0})$ への制限写像から誘導される自然な射影を $\pi_1'\colon \widetilde{M} \to M$ と表す．このとき，$\widetilde{M}$ と同様に，π_1' も点 a における M の 1 点ブローアップと呼ばれ，$(\pi_1')^{-1}(a)$ はその**例外因子**と呼ばれる．また，点 a を含む部分多様体 $F \subset M$ に対し，$\overline{(\pi_1')^{-1}(F - \{a\})}$ を F の**固有変換**と言う．

例 2.2 ($\mathbb{C}^n$ の原点における 1 点ブローアップ)**.** $\mathbb{C}^n$ の原点における 1 点ブローアップとは，$\widetilde{\mathbb{C}^n}$ もしくは π_1 のことに他ならない．以下では，ブローアップ $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ に対する 2 つの異なる見方を説明する．

まず，制限写像 $\pi_1|_{\widetilde{\mathbb{C}^n} - {\pi_1}^{-1}(\mathbf{0})}\colon \widetilde{\mathbb{C}^n} - {\pi_1}^{-1}(\mathbf{0}) \to \mathbb{C}^n - \{\mathbf{0}\}$ が双正則であることと，tautological line bundle π_2 の零切断が ${\pi_1}^{-1}(\mathbf{0}) \cong \mathbb{C}P^{n-1}$ と一致することを思い出そう．すると，ブローアップ $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ とは $\mathbb{C}^n$ から原点 $\mathbf{0}$ を取り除き tautological line bundle の零切断を挿入したものである，という解釈が可能である．これが 1 つ目の見方である．

他方，以下でみるように，ブローアップ $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ は $\mathbb{C}^n$ と $\overline{\mathbb{C}P^n}$ の連結和である，という解釈も可能である．まず，$\overline{\mathbb{C}P^n} - \{p_0\}$ から $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ への微分同相写像 Φ を

$$\Phi([z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}]) = \left(\frac{\overline{z_{n+1}}}{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2} (z_1, z_2, \ldots, z_n), [z_1, z_2, \ldots, z_n] \right)$$

によって定義する．ただし，$p_0 = [0, 0, \ldots, 1]$ である．さらに，単位球体 $D^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ の埋め込み $\varphi_1\colon D^{2n} \to \mathbb{C}^n$ および $\varphi_2\colon D^{2n} \to \mathbb{C}P^n$ をそれぞれ

$$\varphi_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad \varphi_2(z_1, z_2, \ldots, z_n) = [z_1, z_2, \ldots, z_n, 1]$$

によって定め，連結和 $\mathbb{C}^n \# \overline{\mathbb{C}P^n}$ を接着空間

$$(\overline{\mathbb{C}P^n} - \varphi_2(\mathrm{Int}D^{2n})) \cup_{\varphi_2|_{\partial D^{2n}}} (\mathbb{C}^n - \varphi_1(\mathrm{Int}D^{2n}))$$

とみなす．このとき，$\mathbb{C}^n \# \overline{\mathbb{C}P^n}$ から $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ への写像 f を

$$f(x) = \begin{cases} ((z_1, z_2, \ldots, z_n), [z_1, z_2, \ldots, z_n]) & (x = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n - \varphi_1(\mathrm{Int}D^{2n})) \\ \Phi(x) & (x = [z_1, z_2, \ldots, z_n, z_{n+1}] \in \overline{\mathbb{C}P^n} - \varphi_2(\mathrm{Int}D^{2n})) \end{cases} \tag{1}$$

によって定めれば，これは微分同相写像である．尚，連結和をとることはトポロジカルな操作なので，$\mathbb{C}^n \# \overline{\mathbb{C}P^n}$ 上に自然な複素構造は存在しないが，微分同相写像 f によって $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ の複素構造を引き戻すことにより $\mathbb{C}^n \# \overline{\mathbb{C}P^n}$ を複素多様体とみなすことができる．このようにして，ブローアップ $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ は連結和 $\mathbb{C}^n \# \overline{\mathbb{C}P^n}$ と同一視される．

2.2 Kaliman modification

ここでは，Kaliman modification の定義と性質，例について述べた後，主結果に必要な考察をする．

定義 2.3 (Kaliman modification)**.** M を非特異な複素代数多様体，F を M の中の既約超曲面，a を F 上の正則点とする．3 つ組 (M, F, a) の **Kaliman modification** とは，多様体 $\widetilde{M} - \widetilde{F}$ のことを言い，$\mathrm{Kalmod}(M, F, a)$ と書く．ここで，$\widetilde{M}$ は点 a における M の 1 点ブローアップ，$\widetilde{F}$ は F の固有変換である．

Kaliman modification について，以下の命題が成り立つ．

命題 2.4 ([Ka94])**.** M がアフィン代数多様体であって，$H^1(M;\mathbb{Z}) = H^2(M;\mathbb{Z}) = 0$ であるとき，$\mathrm{Kalmod}(M, F, a)$ もアフィンである．

命題 2.5 ([Ka94])**.** 既約超曲面 F が位相多様体かつ非輪状ならば，M が可縮であることと $\mathrm{Kalmod}(M, F, a)$ が可縮であることは同値である．

Kaliman modification は，可縮な代数多様体の構成や，$\mathbb{R}^{2n}$ 上の標準的でない幾何構造を与えるための手法として有効である．以下で例をいくつか述べる．

例 2.6 ([Ka94])**.** Kaliman は，Kaliman modification と命題 2.4，命題 2.5，命題 3.6 などを用いることで，$\mathbb{C}^n$ $(n \geq 3)$ と微分同相だが双正則でない代数多様体の例を構成した．

例 2.7 (tom Dieck-Petrie 曲面 [DP90])**.** p, q を互いに素な 2 以上の整数とする．このとき，$A_{p,q} \coloneqq \mathrm{Kalmod}(\mathbb{C}^2, \{x^p - y^q = 0\}, (1,1))$ は可縮な代数多様体となる．また，これは $\mathbb{C}^3$ 内のアフィン代数多様体

$$\left\{ \frac{(xz+1)^p - (yz+1)^q - z}{z} = 0 \right\}$$

と代数多様体として同型である．

例 2.8 ([Mc09])**.** 複素多項式 $f(z_0, z_1, z_2, z_3) \coloneqq {z_0}^7 + {z_1}^2 + {z_2}^2 + {z_3}^2$ に対し，$F \coloneqq f^{-1}(0)$ とおく．$\mathbb{C}^4$ 内の単位球面 S^7 に対し，$S^7 \cap F$ が S^5 と同相であることから F は $\mathbb{R}^6$ と同相な位相多様体である．このとき，命題 2.4，命題 2.5 より $K_4 \coloneqq \mathrm{Kalmod}(\mathbb{C}^4, F, a)$ は可縮な有限型 Stein 多様体となる．従って，命題 3.6 より K_4 は $\mathbb{R}^8$ と微分同相である．帰納的に $K_{n+1} \coloneqq \mathrm{Kalmod}(K_n \times \mathbb{C}, K_n \times \{0\}, (a, 0))$ $(n \geq 4)$ と定めると，K_n は $\mathbb{R}^{2n}$ と微分同相な Stein 多様体であるが，その Stein 構造は $\mathbb{C}^n$ に自然に定まる Stein 構造とは異なる（exotic Stein 構造）．さらに，複数の K_n を 1-ハンドルで接合していくことで，可算無限個の exotic Stein 構造を構成できる．

ここで，Kaliman modification の最も基本的な例を確認しておく．

例 2.9 ($\mathrm{Kalmod}(\mathbb{C}^n, F \coloneqq \{z_n = 0\}, \mathbf{0})$)**.** 原点 $\mathbf{0}$ における $\mathbb{C}^n$ の 1 点ブローアップ $\pi_1 \colon \widetilde{\mathbb{C}^n} \to \mathbb{C}^n$

に対し，固有変換 $\widetilde{F}$ は

$$\begin{aligned}\widetilde{F} &= \overline{\pi_1^{-1}(F-\mathbf{0})} \\ &= \overline{\pi_1^{-1}(\{(z_1,z_2,\ldots,z_{n-1},0)\neq\mathbf{0}\})} \\ &= \{(\lambda(z_1,z_2,\ldots,z_{n-1},0),[z_1,z_2,\ldots,z_{n-1},0])\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}P^{n-1} \mid (z_1,z_2,\ldots,z_{n-1},0)\neq\mathbf{0},\lambda\in\mathbb{C}\} \\ &= \pi_2^{-1}(\mathbb{C}P^{n-2})\end{aligned}$$

となる．従って，$\mathbb{C}P^{n-1}\cong\mathbb{C}P^{n-2}\cup\mathbb{C}^{n-1}$ に注意すると，

$$\mathrm{Kalmod}(\mathbb{C}^n,F,\mathbf{0})=\widetilde{\mathbb{C}^n}-\widetilde{F}\cong\mathbb{C}^{n-1}\times\mathbb{C}=\mathbb{C}^n$$

が得られる．

この例は，Kaliman modification が補空間 $M-F$ に 2-ハンドルを接着する操作として解釈されることを示唆している．実際，$\mathbb{C}^n$ から F（の管状近傍）を取り除くことは 0-ハンドルへの 1-ハンドル接着に相当し，z_n 平面上の円周を接着円周として $\mathbb{C}^n-F$ へ 2-ハンドルを接着すると，1-ハンドルと 2-ハンドルがキャンセルされ再び $\mathbb{C}^n$ に戻る．実際，この考察は正しく，ブローアップ $\widetilde{\mathbb{C}^n}$ を連結和 $\mathbb{C}^2\#\overline{\mathbb{C}P^2}$ とみることで，次の命題を得た．

命題 2.10 ([Ak25])**.** $\mathrm{Kalmod}(M,F,a)$ は，補空間 $M-F$ に 2-ハンドルを接着することで得られる多様体と微分同相である．特に，この 2-ハンドルは例 1.4 で与えた $\overline{\mathbb{C}P^n}$ のハンドル分解における 2-ハンドルに一致する．

3 Stein 多様体

ここでは，Stein 多様体の定義とそれに関するいくつかの事実を [CE12] を基に述べる．

定義 3.1 (狭義多重劣調和関数，exhausting 関数)**.** (X,J) を複素多様体とする．X 上の滑らかな関数 $\varphi:X\to\mathbb{R}$ が**狭義多重劣調和**であるとは，φ が X 内の任意の複素曲線上で狭義劣調和であること，すなわち複素曲線上の座標 $z=x+iy$ をとったとき

$$\Delta\varphi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi>0$$

であることを言う．

また，X 上の関数 ψ が **exhausting** であるとは，任意の実数 c に対し X の部分集合 $\{x\in X\mid \psi(x)<c\}$ が相対コンパクトであることを言う．

定義 3.2 (Stein 多様体，Stein 構造)**.** (X,J) を複素多様体とする．X 上に狭義多重劣調和かつ exhausting な関数 ϕ が存在するとき，組 (J,ϕ) を **Stein 構造**，組 (X,J,ϕ) を **Stein 多様体**と言う．J,ϕ が何か明らかな場合には，Stein 多様体 (X,J,ϕ) を単に X と書くこともある．ϕ が Morse 関数で高々有限個の非退化臨界点しか持たないとき，Stein 構造 (J,ϕ) は**有限型**であると言う．

注意 3.3. 狭義多重劣調和関数，exhausting 関数は，摂動することによりいつでもその性質を保ったまま Morse 関数にすることができる．

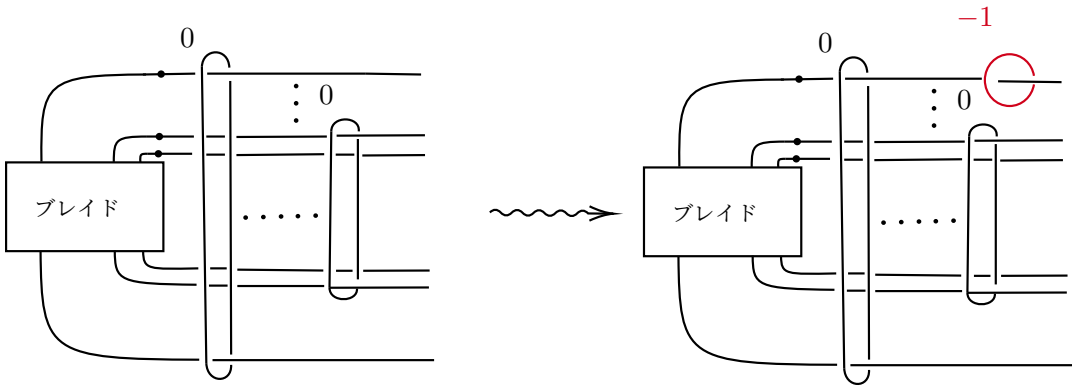


図 5　菅原による補空間 $\mathbb{C}^2 - C$ の Kirby 図式のローカルモデル（図左）と Kaliman modification による 2-ハンドルの接着（図右）

例 3.4. 標準的な複素構造を備えた $\mathbb{C}^n$ は Stein 多様体である．実際，$\phi(z) = \|z\|^2$ が狭義多重劣調和かつ exhausting な関数としてとれる．また，$\mathbb{C}^n$ 内の非特異なアフィン代数多様体 M にも，制限 $\phi|_M$ によって Stein 構造が入る．これらは有限型である．

Stein 多様体の重要な位相的性質として，次の命題がある．

命題 3.5. 複素 n 次元の Stein 多様体は，各ハンドルの指数が n 以下のハンドル分解を許容する．

Stein 多様体の微分同相型について，次の命題が成り立つ．

命題 3.6 ([CD94])**.** (X, J, ϕ) を可縮かつ有限型の Stein 多様体とする．もし $n := \dim_{\mathbb{C}} X \geq 3$ ならば，X は $\mathbb{R}^{2n}$ と微分同相である．

4　主定理

複素 2 次元においては，$\mathbb{C}^2$ 内の代数曲線の補空間のハンドル分解およびそれを表す Kirby 図式の記述方法が菅原 [Su24] によって既に得られている．菅原の方法と命題 2.10 を合わせることで，$\mathbb{C}^2$ の Kaliman modification の Kirby 図式を得た．

定理 4.1. C を $\mathbb{C}^2$ 内の既約代数曲線，a を C 上の滑らかな点とする．複素曲面 $\mathrm{Kalmod}(\mathbb{C}^2, C, a)$ の Kirby 図式は，菅原 [Su24] の方法で得られる $\mathbb{C}^2 - C$ の Kirby 図式内の 1 つの 1-ハンドルの点付き円周に，その管状近傍のメリディアンに沿ってフレーミング -1 の 2-ハンドルの接着円周を描いたものとして得られる（図 5）．

複素 3 次元においては，命題 3.6 を用いて $\mathbb{R}^6$ 上の有限型 Stein 構造を Kaliman modification によって構成した．

定理 4.2. (p, q, r) をどの 2 つも互いに素な 2 以上の正整数の組とし，複素多項式 $f(x, y, z) = x^p + y^q + z^r$ を考える．a を $f^{-1}(0)$ 上の正則点とする．このとき，複素多様体 $\mathrm{Kalmod}(\mathbb{C}^3, f^{-1}(0), a)$ は $\mathbb{R}^6$ と微分同相な有限型 Stein 多様体である．

参考文献

[Ak25] 赤川 正朋 『Kaliman modification とハンドル接着』 北海道大学，修士論文 (2025).

[CD94] A. D. R. Choudary, A. Dimca, *Complex hypersurfaces diffeomorphic to affine spaces*, Kodai Math. J., **17, no.2** (1994), 171–178.

[CE12] K. Cieliebak, Y. Eliashberg, *From Stein to Weinstein and back: Symplectic Geometry of Affine Complex Manifolds*, AMS (2012).

[DP90] T. tom Dieck, T. Petrie, *Contractible affine surfaces of Kodaira dimension one*, Japan J. Math, **16** (1990), 147–169.

[EH24] 遠藤 久顕，早野 健太 『4 次元多様体とファイバー構造: レフシェッツ束のトポロジー』 共立出版 (2024).

[GS99] R. E. Gompf, A. I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Grad. Stud. in Math., **20**, AMS, Providence, RI, (1999), xvi+558 pp.

[Ka94] S. Kaliman, *Exotic analytic structures and Eisenman intrinsic measures*, Israel J. Math, **88** (1994), 411–423.

[LP72] F. Laudenbach, V. Poénaru, *A note on* 4*-dimensional handlebodies*, Bull. Soc. Math. France, **100** (1972), 337–344.

[Mc09] M. McLean, *Lefschetz fibrations and symplectic homology*, Geometry and Topology, **13** (2009), 1877–1944.

[Su24] S. Sugawara, *On the topology of the complements of plane algebraic curves*, Hokkaido University (2024), Doctoral Thesis.

[Ta92] 田村 一郎 『微分位相幾何学』 岩波書店（1992）.

0.3

Puncture loops on a non-orientable surface

和久田 葵 (Aoi WAKUDA)

東京大学大学院数理科学研究科 博士 1 年

概要

オイラー標数が負であるような連結な曲面 N において、2 つの閉測地線とそれらの横断的な交点から smoothing によって得られるループの自由ホモトピー類が puncture を周回することがある。Chas と Kabiraj は、[1] の Lemma 2.7 において、曲面 N が向き付け可能のときには、この現象は起こらないことを示した。本研究では、曲面 N が向き付け不可能であって、smoothing 前の 2 つの測地線が one-sided であるときにのみ、この現象が起こることを示した。特に、片方の測地線を m 回周回させて得られるループの自由ホモトピー類が puncture を周回するような m は高々 2 個であることを示した。さらに、そのような m が 2 個存在する場合は、それらが連続する奇数であることも示した。

1 ねじれ双曲変換

定義 1.1.（**ねじれ双曲変換**）

$f \in \mathrm{Isom}^-(\mathbb{H}^2)$ が**ねじれ双曲変換** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$: 双曲元 $s.t.\ f = \rho_{A_g} \circ g$

(ただし、A_g は g の軸であり、 ρ_{A_g} は A_g による鏡映である。)

定義 1.2.（**ねじれ双曲変換の軸**）

$f = \rho_{A_g} \circ g \in \mathrm{Isom}^-(\mathbb{H}^2)$: ねじれ双曲変換 のとき、**軸** A_f を A_g で定義する。また、**translation length** t_f は t_g に等しい。

命題 1.3.（**translation length の関係**）

$f = \rho_{A_g} \circ g \in \mathrm{Isom}^-(\mathbb{H}^2)$: ねじれ双曲変換 のとき、translation length t_f は t_g に等しい。

次に双曲変換に関する重要な 2 つの補題を思い出す。

補題 1.4.（**双曲変換を 2 つの 180 度回転の合成で表現する**）

等長変換 $g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ について、以下は同値：

1. g が双曲変換
2. $\exists v_1, v_2 \in \partial\mathbb{H}^2$ s.t. $g = \varepsilon_{v_2}\varepsilon_{v_1}$（ただし、$\varepsilon_{v_i}$ は点 v_i における 180 度の回転）

また、このとき、

$$g \text{ の軸 } A_g \text{ は、} v_1, v_2 \text{ を通り、} v_2 \text{ は } v_1 \text{ より } A_g \text{ 上で正方向にあり、} d(v_1, u_2) = \frac{1}{2} t_g \text{ をみたす。}$$

補題 1.5.（**双曲変換を 2 つの鏡映の合成で表現する**）

等長変換 $g \in \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$ について、以下は同値：

1. g が双曲変換
2. $\exists u_1, u_2 \subset \mathbb{H}$: 交わっていない異なる双曲直線 s.t. $g = \rho_{u_2}\rho_{u_1}$（ただし、ρ_{u_i} は u_i による鏡映変換）

また、このとき、

$$g \text{ の軸 } A_g \text{ は、} u_1, u_2 \text{ と直交し、} u_1 \text{ より } u_2 \text{ が } A_g \text{ 上正方向にあり、} d(u_1, u_2) = \frac{1}{2} t_g \text{ をみたす。}$$

Beardon は上の補題 1.4 を用いることで、以下の定理 A を示した。

email:aoichan19991226@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

定理 1.6.A. [2, Theorem 7.38.6]

a, b を $P \in \mathbb{H}^2$ において軸が交わる双曲変換とし、θ を P における a の軸と b の軸の順方向のなす角とする。このとき、合成 $a \circ b$ は双曲元となる。特に、移動長さについての関係式として以下が成り立つ

$$\cosh\left(\frac{t_{a\circ b}}{2}\right) = \cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right) + \sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta.$$

また、上の補題 1.4 に加えて、補題 1.5 も用いることで、定理 1.6.A における通常の双曲変換をねじれ双曲変換に変えた定理 1.6.B〜定理 1.6.D を示すことができる。

定理 1.6.B.

a を双曲変換、b をねじれ双曲変換とし、P を a の軸と b の軸の交点とする。また、θ を P における a の軸と b の軸の順方向のなす角とする。このとき、合成 $a \circ b$ は以下のようになる。

(i) $\cos\theta > -\coth\left(\frac{t_a}{2}\right)\tanh\left(\frac{t_b}{2}\right)$ のとき、
$a \circ b$ は、ねじれ双曲変換である。特に、以下の等式が成り立つ

$$\sinh\left(\frac{t_{ab}}{2}\right) = \cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right) + \sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta$$

(ii) $\cos\theta = -\coth\left(\frac{t_a}{2}\right)\tanh\left(\frac{t_b}{2}\right)$ のとき、
$a \circ b$ は、ある軸による鏡映である（特に、ねじれ双曲変換でない)。

(iii) $\cos\theta < -\coth\left(\frac{t_a}{2}\right)\tanh\left(\frac{t_b}{2}\right)$ のとき、
$a \circ b$ は、ねじれ双曲変換である。特に、以下の等式が成り立つ：

$$\sinh\left(\frac{t_{ab}}{2}\right) = -\cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right) - \sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta$$

定理 1.6.C.

a をねじれ双曲変換、b を双曲変換とし、P を a の軸と b の軸の交点とする。また、θ を P における a の軸と b の軸の順方向のなす角とする。このとき、合成 $a \circ b$ は以下のようになる。

(i) $\cos\theta > -\tanh\left(\frac{t_a}{2}\right)\coth\left(\frac{t_b}{2}\right)$ のとき、
$a \circ b$ はねじれ双曲変換であり、以下の等式が成り立つ：

$$\sinh\left(\frac{t_{ab}}{2}\right) = \sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right) + \cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta$$

(ii) $\cos\theta = -\tanh\left(\frac{t_a}{2}\right)\coth\left(\frac{t_b}{2}\right)$ のとき、
$a \circ b$ は、実軸を軸にもつ鏡映変換である（特に、ねじれ双曲変換ではない)。

(iii) $\cos\theta < -\tanh\left(\frac{t_a}{2}\right)\coth\left(\frac{t_b}{2}\right)$ のとき、
$a \circ b$ はねじれ双曲変換であり、以下の等式が成り立つ：

$$\sinh\left(\frac{t_{ab}}{2}\right) = -\sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right) - \cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta$$

定理 1.6.D. a, b を $P \in \mathbb{H}^2$ において軸が交わるねじれ双曲変換とし、θ を P における a の軸と b の軸の順方向のなす角とする。このとき、合成 $a \circ b \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ は

$$\begin{cases} \text{楕円元} & \left|\sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right) + \cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta\right| < 1 \\ \text{放物元} & \left|\sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right) + \cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta\right| = 1 \\ \text{双曲元} & \left|\sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right) + \cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta\right| > 1 \end{cases}$$

をみたす。特に、合成 $a \circ b$ が双曲元となるときには、移動長さの関係式として以下が成り立つ

$$\cosh\left(\frac{t_{a\circ b}}{2}\right) = \left|\sinh\left(\frac{t_a}{2}\right)\sinh\left(\frac{t_b}{2}\right) + \cosh\left(\frac{t_a}{2}\right)\cosh\left(\frac{t_b}{2}\right)\cos\theta\right|.$$

2. 向き付け不能曲面上のループと双曲変換

$N(=N_{n,p})$ を向き付け不能曲面とする（ただし、n は種数, p は 1 点穴の数)。特に、N に双曲計量が入るものを扱いたいので、条件

$$\chi(N) = 2-n-p < 0 \text{ つまり } (n,p) \neq (1,0),(1,1),(2,0)$$

をみたす N についてのみ考える。また、$\hat{\pi}$ を N 上の自由ホモトピー類全体の集合とし、$\mathcal{T}$ を N のタイヒミュラー空間とする。加えて、$x \in \hat{\pi}$ に対し、 計量 $X \in \mathcal{T}$ に関する測地線を $x(X)$ と書き、その長さを $l_x(X)$ とかく。また、交点 $P \in x(X) \cap y(X)$ における forward angle ϕ_P をそれぞれの順方向どうしのなす角と定義する。

定義 2.1.（**puncture loop**）
$\alpha \in \hat{\pi}$ が N のある 1 点穴を周回するとき、**puncture loop** であるという。

補題 2.2. $X \in \mathcal{T}$ とし、$x \in \hat{\pi}$ を one-sided とする。$x(X)$ に対応する $f \in \mathrm{Isom}^-(\mathbb{H}^2)$ はねじれ双曲変換であり、$t_f = l_x(X)$ を満たす。

前章の定理 1.6.A〜定理 1.6.D により、以下の定理 2.3.A〜定理 2.3.D が成り立つ。
定理 2.3.A.([1] Lemma 2.7.)
$X \in \mathcal{T}$ とし、$\alpha, \beta \in \hat{\pi}$ を two-sided、$P \in \alpha(X) \cap \beta(X)$ 、ϕ_P を P における forward angle とすると、以下が成り立つ

$$\cosh\left(\frac{l_{|\alpha_P\beta_P|}}{2}\right) = \cosh\left(\frac{l_\alpha}{2}\right)\cosh\left(\frac{l_\beta}{2}\right) + \sinh\left(\frac{l_\alpha}{2}\right)\sinh\left(\frac{l_\beta}{2}\right)\cos\phi_P.$$

定理 2.3.B.
$X \in \mathcal{T}$ とし、$\alpha \in \hat{\pi}$: two-sided, $\beta \in \hat{\pi}$: one-sided、$P \in \alpha(X) \cap \beta(X)$、$\phi_P$ を P における forward angle とすると、以下が成り立つ

$$\sinh\left(\frac{l_{|\alpha_P\beta_P|}}{2}\right) = \left|\cosh\left(\frac{l_\alpha}{2}\right)\sinh\left(\frac{l_\beta}{2}\right) + \sinh\left(\frac{l_\alpha}{2}\right)\cosh\left(\frac{l_\beta}{2}\right)\cos\phi_P\right|.$$

(ただし、上の式の $l_\alpha, l_\beta, l_{|\alpha_P\beta_P|}$ は $X \in \mathcal{T}$ によるが、任意の $Y \in \mathcal{T}$ で成り立つ。)

定理 2.3.C.
$X \in \mathcal{T}$ とし、$\alpha \in \hat{\pi}$: one-sided, $\beta \in \hat{\pi}$: two-sided、$P \in \alpha(X) \cap \beta(X)$、$\phi_P$ を P における forward angle とすると、以下が成り立つ。

$$\sinh\left(\frac{l_{|\alpha_P\beta_P|}}{2}\right) = \left|\sinh\left(\frac{l_\alpha}{2}\right)\cosh\left(\frac{l_\beta}{2}\right) + \cosh\left(\frac{l_\alpha}{2}\right)\sinh\left(\frac{l_\beta}{2}\right)\cos\phi_P\right|$$

(ただし、上の式の $l_\alpha, l_\beta, l_{|\alpha_P\beta_P|}$ は $X \in \mathcal{T}$ によるが、任意の $Y \in \mathcal{T}$ で成り立つ。)
定理 2.3.D. $X \in \mathcal{T}$ とし、$\alpha, \beta \in \hat{\pi}$: one-sided、$P \in \alpha(X) \cap \beta(X)$ 、ϕ_P を P における forward angle とすると、以下が成り立つ

$$\cosh\left(\frac{l_{|\alpha_P\beta_P|}}{2}\right) = \left|\sinh\left(\frac{l_\alpha}{2}\right)\sinh\left(\frac{l_\beta}{2}\right) + \cosh\left(\frac{l_\alpha}{2}\right)\cosh\left(\frac{l_\beta}{2}\right)\cos\phi_P\right|.$$

特に、右辺の値が 1 となるとき、$|\alpha_P\beta_P|$ は puncture loop となる。

補題 2.5. $X \in \mathcal{T}$, $\alpha, \beta \in \hat{\pi}$, $P \in \alpha(X) \cap \beta(X)$ とする。このとき、$|\alpha_P\beta_P|$ が puncture loop ならば、 α, β はともに one-sided となる。

定理 2.6. $X \in \mathcal{T}$, $\alpha, \beta \in \hat{\pi}$, $P \in \alpha(X) \cap \beta(X)$ とし、$m \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする。このとき、$|\alpha_P^m\beta_P|$ が puncture loop となるような m は奇数であり、また、そのような m は高々 2 個である。特にそのような m が 2 個ある場合、それらは連続する奇数である。

証明. 補題 2.5 から m は奇数であり、$|\alpha_P^m\beta_P|$ が puncture loop となるような m の個数は

$$\left|\sinh(t)\sinh\left(\frac{l_\beta}{2}\right) + \cosh(t)\cosh\left(\frac{l_\beta}{2}\right)\cos\phi_P\right| = 1$$

をみたす $t \in \mathbb{R}$ の個数以下であるため、高々 2 個であることがしたがう。特に、左辺の式を t の関数とみなすと、グラフの概形からそのような m が 2 個ある場合、それらは連続する奇数であることもしたがう。

参考文献

[1] Moira Chas and Arpan Kabiraj, The Lie bracket of undirected closed curves on a surface, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 375, No. 4, pp. 2365–2386, (2021).

[2] Alan F Beardon. The geometry of discrete groups, volume 91. Springer Science + Business Media, (2012).

カンドル順序のカンドル作用による分析

東京科学大学理学院数学系数学コース
地引知栄 (Chihaya JIBIKI) *

概要

集合上に二項演算に対し不変な全順序を考える。これはトポロジー的には、基本群上と R-covered 葉層構造の関係になり、代数的には群環の zero-divisor 問題の解を探ることになる。近年、この研究は結び目理論のカンドル順序へと拡張されている。本講演では、カンドル順序とカンドル作用を力学系の観点から考察し、それらを結びつける力学的実現を紹介する。また、この研究手法の応用例についても述べる。

1 導入

二項演算を持つ集合 M 上の *right-order* $<$ とは，M 上の全順序であって次を満たすものである．

$$a < b \Rightarrow a \cdot m < b \cdot m \text{ for all } a, b, m \in M$$

一方，*circular order* とは，写像 $c : M^3 \to \{0, \pm 1\}$ であって次を満たすものである．

- **(i)** $c_M(m_1, m_2, m_3) = 0$ if $m_i = m_j$ for some $i \neq j$,
- **(ii)** $c_M(m_2, m_3, m_4) - c_M(m_1, m_3, m_4) + c_M(m_1, m_2, m_4) - c_M(m_1, m_2, m_3) = 0$ for every $m_1, m_2, m_3, m_4 \in M$,
- **(iii)** $c_M(m_1 m, m_2 m, m_3 m) = c_M(m_1, m_2, m_3)$ for every $m, m_1, m_2, m_3 \in M$.

本研究の分野はこれらの順序構造を対象としており，特に M として群を用いることが多い．本稿ではその研究の一端を紹介する．

- 群が right-order を一つでも持つとき，その群はねじれ元を持たない．ただし，これは十分条件ではなく群に対してより強い制約が課される [1]．同様に，circular order も制約を与えるが，right-order を持つ群と circular order を持つ群はある条件下で圏同値となる [2].
- right-order や circular order がアルキメデスの原理を満たすとき，$\mathbb{R}$ や S^1 上の自然な順序を特徴付ける．
- order に対して，凸部分群を定義することができる．この凸部分群は包含関係による列をなすが，列の長さは order の特徴付けとなる．
- circular order の二つ目の条件は 2-cocycle であることと解釈できる．このため，群の二次コホモロジーの元となるが，circular order をオイラー類から導出することができる [3].

* E-mail:chihaya.j[at]gmail.com

- 3 次元多様体 M の基本群 $\pi_1(M)$ が Conradian order と呼ばれる特殊な right-order を持つことと，M の第一 Betti 数が 0 であることは同値である [4, 5]．また，$\pi_1(M)$ が right-order を持つことと，$M \times \mathbb{R}$ 上にある葉層構造が誘導されることは同値である [6, 7].

この他にも数多くの研究が存在しており，詳細は [1, 8, 9] にまとめられている．

order の議論は群を中心に展開されることが多いが，カンドルを用いる研究もあり，近年ではこの分野も活発化している．例えば，群環の zero-divisors 問題のカンドル版 [10] や，結び目カンドルとの関連を議論した研究 [11, 12, 13] などが挙げられる．

本稿では，二項演算を持つ集合 M 上の right-order の集合と circular order の集合をそれぞれ $RO(M), CO(M)$ とし，これらを分析する問題を考える．すなわち，order の分類問題である．

$RO(M)$ と $CO(M)$ の分析において最初に考えるべきはその濃度であるが，これは M が群の場合は [14, 15] によって，特定の群を除き非可算濃度であることが知られている．したがって，分類というよりは，位相を導入して空間の形状を把握することが適切である．一般に $RO(M) \subset CO(M)$ が成り立つことが知られているため，$CO(M)$ に位相を導入することで $RO(M)$ は相対位相が入る．$CO(M)$ は 3 値写像の集合 $\{0, \pm 1\}^{G^3}$ の部分集合である．一方で $\{0, \pm 1\}^{G^3}$ にはチコノフ位相から定まる自然な位相が存在する．これを用いて $CO(M)$ を位相空間とすることができる．また，準開基を用いても定義可能である．次の集合

$$\Delta(M) = \{s = (m_1, m_2, m_3) \in M^3 \mid m_1 = m_2 \text{ or } m_2 = m_3 \text{ or } m_3 = m_1\},$$
$$U_s = \{c \in CO(M) \mid c(s) = 1\},$$

を $s \in M^3 \setminus \Delta(M)$ で定義する．このとき，$\{U_s\}_{s \in M^3 \setminus \Delta(M)}$ は準開基である．

空間 $CO(M), RO(M)$ が定義されたのでその形状を調べるが，[16, 17] によれば、これらの空間はかなり限定的な性質を持つ．

定理　$CO(M), RO(M)$ はコンパクト完全不連結空間であり，M が可算集合のとき距離化可能である．すなわち，M が可算集合のとき，孤立点が存在しないときに限り $CO(M), RO(M)$ はカントール集合である．

2　主定理

空間 $CO(M), RO(M)$ 内の孤立点を孤立順序と呼ぶことにする．上記定理より孤立順序の存在条件を探ることが重要である．特に M が群の場合は，この 20 年ほどで非常に多様な群に対して調べ上げられてきた．そこで本研究では M がカンドルの場合に着目した．具体的には，*dynamical realization* と呼ばれる研究手法をカンドルに拡張し，主に Mann や Rivas の仕事 [18, 19] をカンドルの文脈に適用した．本説では，主定理を述べる前にカンドルの定義を与える．

定義　カンドル Q とは以下の性質を満たす二項演算 $*$ を持つ集合をいう．

Q1　$q * q = q$ for all $q \in Q$.
Q2　For each $q, r \in Q$, there exists a unique $s \in Q$ such that $q = s * r$.
Q3　$(q * r) * s = (q * s) * (r * s)$ for all $q, r, s \in Q$.

カンドルの詳細やその研究対象については，[20] に詳しくまとめられている．次が主定理である．

定理 1 [21]　Q を $\hat{q} \in Q$ で semi-latin かつ circular order を持つカンドルとする．このとき，次の連続写像が存在する．

$$R : CO(Q) \to \mathrm{Hom}_Q(Q, \mathrm{Conj}(\mathrm{Homeo}_+(S^1)))$$
$$(\text{resp. } R : RO(Q) \to \mathrm{Hom}_Q(Q, \mathrm{Conj}(\mathrm{Homeo}_+(\mathbb{R})))).$$

特に R の像は忠実なカンドル作用に限定される．

定理 2 [21]　G を可算群とし，その部分集合 A を用いて $\mathcal{D}({}^GA)$ を Dehn カンドルとし，さらに $\hat{q} \in \mathcal{D}({}^GA)$ で semi-latin とする．c をその上の circular order とし，定理 1 による R の像 ρ は G 上の群作用へ拡張可能とする．

このとき，c が孤立順序であることは次と同値である：ρ に十分近い任意の ρ' に対して，連続で写像度 1 で単調な写像 $h : S^1 \to S^1$ で基点 x_0 を固定し，$\rho(q) \circ h = h \circ \rho'(q)$ が任意の $q \in \mathcal{D}({}^GA)$ で成り立つものが存在する．

定理 3 [21]　整数 $n \geq 2$ で $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ を自由カンドル $FQ(X)$ の生成系とする．このとき $FQ(X)$ 上の right-order $<$ は，孤立順序ならば次のいずれかを満たす．

E1 For any $\hat{q} \in FQ(X)$, there exist elements $M, m \in FQ(X)$, for any $q \in FQ(X)$ such that $\hat{q} * m < \hat{q} * q < \hat{q} * M$.

E2 For any $\hat{q} \in FQ(X)$, there exist $M, m \in FQ(X)$, for any ${}^Ux_i, {}^Vx_j \in FQ(X)$, such that

$$\hat{q} * M < \hat{q} * {}^Ux_i < \hat{q} * {}^Vx_j \text{ implies } i = j, \text{ and}$$
$$\hat{q} * {}^Ux_i < \hat{q} * {}^Vx_j < \hat{q} * m \text{ implies } i = j.$$

参考文献

[1] Adam Clay, and Dale Rolfsen. Ordered groups and topology. Vol. 176. American Mathematical Soc., 2016.

[2] Adam Clay, and Tyrone Ghaswala. "Free products of circularly ordered groups with amalgamated subgroup." Journal of the London Mathematical Society 100.3 (2019): 775-803.

[3] Danny Calegari. "Circular groups, planar groups, and the Euler class." Geometry & Topology Monographs 7 (2004): 431-491.

[4] Steven Boyer, Dale Rolfsen, and Bert Wiest. "Orderable 3-manifold groups." Annales de l'institut Fourier. Vol. 55. No. 1. 2005.

[5] James Howie. "On locally indicable groups." Mathematische Zeitschrift 180 (1982): 445-461.

[6] Mathieu Anel, and Adam Clay. "Orderable groups and bundles." arXiv preprint arXiv:1208.5844 (2012).

[7] Thomas F. Farrell. "Right-orderable deck transformation groups." The Rocky Mountain Journal of Mathematics 6.3 (1976): 441-447.

[8] 伊藤哲也. "群の不変順序と位相幾何学." 数学 67.2 (2015): 133-153.

[9] Bertrand Deroin, Andrés Navas, and Cristóbal Rivas. "Groups, orders, and dynamics." arXiv preprint arXiv:1408.5805 (2014).

[10] Bardako Valeriy G.v, Inder Bir S. Passi, and Mahender Singh. "Zero-divisors and idempotents in quandle rings." Osaka Journal of Mathematics 59.3 (2022): 611-637.

[11] Hitesh Raundal, Mahender Singh, and Manpreet Singh. Orderability of link quandles. Proc. Edinb. Math. Soc. (2), 64(3):620–649, 2021.

[12] Idrissa Ba and Mohamed Elhamdadi. Knot groups, quandle extensions and orderability, 2023.

[13] Hamid Abchir and Mohammed Sabak. On left-orderability of involutory quandles of links. arXiv preprint arXiv:2310.05735, 2023.

[14] Adam Clay, Kathryn Mann, and Cristóbal Rivas. On the number of circular orders on a group. J. Algebra, 504:336–363, 2018.

[15] Peter A. Linnell. The space of left orders of a group is either finite or uncountable. Bull. Lond. Math. Soc., 43(1):200–202, 2011.

[16] Trang Ha and Valentina Harizanov. Orders on magmas and computability theory. J. Knot Theory Ramifications, 27(7):1841001, 13, 2018.

[17] Idrissa Ba and Mohamed Elhamdadi. Circular orderability and quandles, 2022.

[18] Kathryn Mann, and Cristóbal Rivas. "Group orderings, dynamics, and rigidity." Annales de l'Institut Fourier. Vol. 68. No. 4. 2018.

[19] Cristóbal Rivas. "Left-orderings on free products of groups." Journal of Algebra 350.1 (2012): 318-329.

[20] Takefumi Nosaka. Quandles and topological pairs. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, Singapore, 2017. Symmetry, knots, and cohomology.

[21] Chihaya, Jibiki, . "Dynamics of quandle orders." arXiv preprint arXiv:2410.21476 (2024).

パラレルセッション
会場Ｄ

クリフォード代数上に構成されたマリアヴァン解析について

東北大学　大学院理学研究科　数学専攻
渡辺孝佳 (Takayoshi WATANABE) *

概要

非可換な空間に対する確率解析として boson に関する結果は多く存在する．一方で, 他の非可換な空間に対する (Itô 解析以外の) 確率解析はほとんど考えられてこなかった．本研究では Malliavin 解析の fermion を用いた類似物を構成し, それを用いて fermion に対する解析を行っている．ここでは便宜上, その類似物を反対称 Malliavin 解析と呼ぶ．反対称 Malliavin 解析では通常の Malliavin 解析に対応する様々な結果が成立する．さらにいくつか応用例も存在する．

1　導入

1.1　Malliavin 解析概略

最初にこの subsection で Malliavin 解析の簡単な復習をしたい．内容, 記号は [Nua06, FLS01] を参考にした．

$\mathcal{H}$ を可分な実 Hilbert 空間とする．完備確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ が存在して線形写像 $W : \mathcal{H} \to L^2(\Omega)$ が中心 0, 共分散 $\mathbb{E}(W(h)W(k)) = \langle h, k\rangle_{\mathcal{H}}$ を持つガウス確率変数であるとき, W を $\mathcal{H}$ 上のガウス過程とよぶ．$\mathcal{F}$ は $\{W(h) \mid h \in \mathcal{H}\}$ で生成される σ-加法族とする．C_b^∞ を無限回微分可能でその導関数が有界である関数 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ から成る集合とする．滑らかな確率変数から成る代数 $\mathcal{S}$ が

$$\mathcal{S} = \{F = f(W(h_1), \dots, W(h_n)) \mid n \in \mathbb{N}, f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n), h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H}\}$$

として定義され, Malliavin 微分 $\mathcal{D} : \mathcal{S} \to L^2(\Omega) \otimes \mathcal{H} \cong L^2(\Omega; \mathcal{H})$ が $F = f(W(h_1), \dots, W(h_n)) \in \mathcal{S}$ に対して

$$\mathcal{D}(F) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(W(h_1), \dots, W(h_n)) \otimes h_i$$

と定義される．$\mathcal{D}$ は様々な性質を持つが, ここでは次を挙げておく:

(i) (Leibniz 則) $\mathcal{D}(FG) = \mathcal{D}(F)G + F\mathcal{D}(G)$ for $F, G \in \mathcal{S}$;
(ii) (部分積分) $\mathbb{E}(FGW(h)) = \mathbb{E}(\langle h, \mathcal{D}(F)\rangle_{\mathcal{H}} G + F\langle h, \mathcal{D}(G)\rangle_{\mathcal{H}})$ for $F, G \in \mathcal{S},\ h \in \mathcal{H}$.

* E-mail:takayoshi.watanabe.q5@dc.tohoku.ac.jp

$\mathcal{D} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega; \mathcal{H})$ の共役も定義できる．これは発散と呼ばれ，$\delta : L^2(\Omega; \mathcal{H}) \to L^2(\Omega)$ と書かれる．

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} \coloneqq \left\{ u = \sum_{j=1}^{n} F_j \otimes h_j \mid n \in \mathbb{N}, F_1, \dots, F_n \in \mathcal{S}, h_1, \dots, h_n \in \mathcal{H} \right\}$$

に対して次が成り立つ:

$$\delta(u) = \sum_{j=1}^{n} F_j W(h_j) - \sum_{j=1}^{n} \langle h_j, \mathcal{D}(F_j) \rangle_{\mathcal{H}}$$

for $u = \sum_{j=1}^{n} F_j \otimes h_j \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}$．以降，$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$ として話を進める．$L^2_s(\mathbb{R}^m_+)$ として $L^2(\mathbb{R}^m_+)$ 上の対称関数から成る空間を表す．$f \in L^2_s(\mathbb{R}^m_+)$ に対して，W に関する多重積分を $I_m(f)$ と表す [Nua06]．簡単に説明すると，$A_1, \dots, A_m$ を組ごとに互いに素な集合としたとき，

$$I_m(\tilde{\mathbb{1}}_{A_1 \times \cdots \times A_m}) = W(\mathbb{1}_{A_1}) \cdots W(\mathbb{1}_{A_m})$$

と定めた上で，拡張することにより定義できる．ここで $\tilde{f}$ は f の対称化．S_m は m 次対称群．$I_m(f)$ の性質の中でも次が重要である．

Theorem 1.1 ([Nua06, Thm 1.1.4] the Wiener chaos expansion)**.** 任意の 2 乗可積分確率変数 $F \in L^2(\Omega)$ は多重積分の級数として表現できる:

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n),$$

ここで $f_0 = \mathbb{E}(F)$ であり，$f_n \in L^2_s(\mathbb{R}^n_+)$ は F から一意的に定まる．

次に，$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$ であるときの $\mathcal{D}$ の δ の作用の仕方を示そう．丁度，boson の消滅作用素，生成作用素のように振る舞っていることがわかるだろう．

Proposition 1.2 ([Nua06, Propositions 1.2.2 and 1.2.7])**.** $F \in L^2(\Omega)$ が $F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n)$ というカオス展開を持つとする．すると $F \in \mathrm{Dom}(\mathcal{D})$ であることと

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \| I_n(f_n) \|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot n! \| f_n \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n_+)} < \infty$$

であることが同値になる．$F \in \mathrm{Dom}(\mathcal{D})$ なら，

$$\mathcal{D}_t(F) = \sum_{n=1}^{\infty} n I_{n-1}(f_n(\cdot, t))$$

for a.e. $t \geq 0$.

Proposition 1.3 ([Nua06, Prop. 1.3.7])**.** $u \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \Omega)$ が $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n(\cdot, t))$ という表示を持つとする．すると $u \in \mathrm{Dom}(\delta)$ であることと

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{n+1}(\tilde{f}_n)$$

が $L^2(\Omega)$ において収束することが同値になる．

1.2 Boson と Brown 運動の関係

この subsection における内容, 用語, 記号は [Par92, Mey95, FLS01] を参考にした.

$\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ を $\mathcal{H}$ の複素化とする. 複素共役 $J : \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ が $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ に対して

$$J(h_1 + \sqrt{-1}h_2) = h_1 - \sqrt{-1}h_2$$

として定まる. $n \in \mathbb{N}$ とする. $\odot$ は対称積を表す:

$$\xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \xi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \xi_{\sigma(n)}$$

for $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. $\Xi_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ を $\{\xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n \mid \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}\}$ で生成される $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ の閉部分空間とする. $\Xi_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ のノルムは

$$\langle \xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n, \xi'_1 \odot \cdots \odot \xi'_n \rangle_{\Xi_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})} = \mathrm{per}\langle \xi_i, \xi'_j \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_i \langle \xi_i, \xi'_{\sigma(i)} \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$

として与えられる. $\Gamma_s = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Xi_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ を $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 上の対称 Fock 空間とする. ここで $\Xi_0(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$. $\Omega \in \Gamma_s$ は真空ベクトル. $h \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ に対して, 生成・消滅成作用素 $a^*(h), a(h)$ は互いに共役な非有界閉作用素. $w = \xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n$ に対してこれらの作用素の作用は次で与えられる:

$$a^*(h)w = h \odot w,$$
$$a(h)\xi_1 \odot \cdots \odot \xi_n = \sum_{i=1}^{n} \langle h, \xi_i \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \xi_1 \odot \overset{i}{\check{\cdots}} \odot \xi_n.$$

さらに, a^* と a は canonical commutation relations (CCR) を満たす:

$$[a(h), a^*(k)] = \langle h, k \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$
$$[a(h), a(k)] = [a^*(h), a^*(k)] = 0$$

for $h, k \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. $h \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ に対して $B(h) := a^*(h) + a(J(h))$ を定める. これが Brown 運動の非可換な実現になっていることが次の定理とその系からわかる.

Theorem 1.4. 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して, $f_1, \ldots, f_{2m} \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ とする. すると

$$\langle \Omega, B(f_1) \ldots B(f_{2m-1})\Omega \rangle_{\Gamma_s} = 0,$$
$$\langle \Omega, B(f_1) \ldots B(f_{2m})\Omega \rangle_{\Gamma_s} = \sum \langle J(f_{l_1}), f_{r_1} \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} \cdots \langle J(f_{l_m}), f_{r_m} \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$

ここで, 和は $\{1, 2, \ldots, 2m\}$ を m 個の異なる組 $(l_1, r_1), \ldots, (l_m, r_m)$, $l_k < r_k$ に分ける分け方をわたる (そのような分け方は $(2m)!/2^m m!$ 通りある).

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_+)$, $a_t = a(\mathbb{1}_{[0,t]})$, $a_t^* = a^*(\mathbb{1}_{[0,t]})$ とし, $B_t = a_t + a_t^*$ とする.

Corollary 1.5. B_t のモーメントは Brown 運動のモーメントに等しい.

Boson に対してこのように実現された Brown 運動に対する Malliavin 解析としては [Lin93, Mey95, FLS01, FP16] のような文献がある. 特に [FLS01, FP16] では非可換な Girsanov 変換を導入することでかなり広いクラスに対して Malliavin 解析を行うことに成功している.

2　主定理

前の section の内容をまとめると次の 2 つの事実が浮かび上がる:

- Malliavan 微分, 発散はほとんど多重積分に対する消滅作用素, 生成作用素として理解できる.
- boson において生成・消滅作用素の和が Brown 運動を実現する.

これらの事実を踏まえて fermion に対して Malliavan 解析を行えることを示そう. 以下の内容は [Wat24] に基づく.

2.1　Fermion における Malliavin 解析の構成

まずは, [BSW82] から必要な内容を導入する. $n \in \mathbb{N}$ とする. $\wedge$ は反対称積を表し, $z_1, \dots, z_n \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ に対して

$$z_1 \wedge \cdots \wedge z_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) z_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes z_{\sigma(n)}$$

として定まる. $\Lambda_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ を $\{z_1 \wedge \cdots \wedge z_n \mid z_1, \dots, z_n \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}\}$ で生成される $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{\otimes n}$ の閉部分空間とする. $\Lambda_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ のノルムは

$$\langle z_1 \wedge \cdots \wedge z_n, z_1' \wedge \cdots \wedge z_n' \rangle_{\Lambda_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})} = \det \langle z_i, z_j' \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$

として与えられる. $\Gamma_a = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Lambda_n(\mathcal{H}_{\mathbb{C}})$ を $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 上の反対称 Fock 空間とする. ここで $\Lambda_0(\mathcal{H}_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}$. 生成・消滅作用素 $b^*(z), b(z)$ は互いに共役な有界作用素であり, その作用素ノルムは $\|b(z)\| = \|b^*(z)\| = \|z\|_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}}$ となる. $w = z_1 \wedge \cdots \wedge z_n$ に対して, これらの作用素の作用は次で与えられる:

$$b^*(z) w = z \wedge w,$$
$$b(z) z_1 \wedge \cdots \wedge z_n = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \langle z, z_i \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} z_1 \wedge \overset{i}{\check{\cdots}} \wedge z_n.$$

b^*, b は canonical anti-commutation relations (CAR) を満たす:

$$\{b(z), b^*(z')\} = \langle z, z' \rangle_{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}},$$
$$\{b(z), b(z')\} = \{b^*(z), b^*(z')\} = 0$$

for $z, z' \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$. $\Psi(z) \coloneqq b^*(z) + b(J(z))$ を定義するとこれが fermion における Brown 運動の対応物になる. Clifford 代数 $\mathscr{C}$ を $\{\Psi(z) | z \in \mathcal{H}_{\mathbb{C}}\}$ で生成される W^*-代数とする. $\Omega \in \Gamma_a$ は真空ベクトル. $m(\cdot) = \langle \Omega, \cdot \Omega \rangle_{\Gamma_a}$ を定めておく. $(\Gamma_a, \mathscr{C}, m)$ は regular probability gauge 空間 [Seg53, Seg56, Gro72] となっている. $1 \leq p < \infty$ に対して, $L^p(\mathscr{C})$ を $\mathscr{C}$ のノルム

$$\|u\|_{L^p(\mathscr{C})} = m(|u|^p)^{\frac{1}{p}} = \langle \Omega, (u^* u)^{\frac{p}{2}} \Omega \rangle_{\Gamma_a}^{\frac{1}{p}}.$$

に関する完備化とする. $u \mapsto u\Omega$ という対応はユニタリ作用素 $D : L^2(\mathscr{C}) \to \Gamma_a$ を定める [Seg56, Gro72]. $L^\infty(\mathscr{C})$ は $\mathscr{C}$ に作用素ノルムを備えたものとする. $\mathscr{B}$ を $\mathscr{C}$ の W^*-部分代数とすると, 任

意の $1 \leq p \leq \infty$ に対して, $u \in L^p(\mathscr{C})$ の $\mathscr{B}$ に関する条件付き期待値 $m(u|\mathscr{B})$ を定めることができる [Seg53, Kun58, Yea75, Wil74, Ume54, Ume56]. 詳細は省略するが通常の条件付き期待値と同様の性質を持つことが示せる. ここからは $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = L^2(\mathbb{R}_+)$ としよう. Λ_n を $\Lambda_n(L^2(\mathbb{R}_+))$ の意味で用いる. $\mathscr{C}_t$ を $\{\Psi(u) \mid u \in L^2(\mathbb{R}_+), \mathrm{supp}(u) \subset [0,t]\}$ で生成される $\mathscr{C}$ の W^*-部分代数とする. X_t がマルチンゲールであることはこのフィルトレーション $\mathscr{C}_t$ に対して $m(X_t|\mathscr{C}_s) = X_s$ が成り立つことで特徴づけられる. $W_n \in L^2(\mathbb{R}_+^n)$ に対して次の性質を満たす $J_n(w_n) \in L^2(\mathscr{C})$ の存在が示せる:

$$J_n(w_n)\Omega = w_n$$

これが fermion における多重積分として振る舞う. 特にカオス展開が成り立つことが重要である.

Theorem 2.1 ([BSW82, Thm 2.4])**.** $\{X_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$ が $\{\mathscr{C}_t\}$ に適合した L^2-マルチンゲールであるとする. すると $w_0 \in \mathbb{C}$ と反対称な関数 $w_n \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+^n)$ が存在して

$$X_t = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(w_n \mathbb{1}_{[0,t]^n})$$

が成り立つ.

長くなったが, 反対称 Malliavin 微分と発散が定義できるようになった.

Definition 2.2. 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $v_n \in \Lambda_n$ とし $w_n \in L^2(\mathbb{R}_+^{n+1})$ は a.e. $t \geq 0$ に対して $w_n(t,\cdot) \in \Lambda_n$ とする. $\mathcal{D}_t : D^{-1}\Lambda_n \to L^2(\mathbb{R}_+) \otimes D^{-1}\Lambda_{n-1}$, $\delta : L^2(\mathbb{R}_+) \otimes D^{-1}\Lambda_n \to D^{-1}\Lambda_{n+1}$ を次のように定義する:

$$\mathcal{D}_t(J_n(v_n)) \coloneqq nJ_{n-1}(v_n(t,\cdot)),$$
$$\delta(J_n(w_n(t,\cdot))) \coloneqq J_{n+1}(\hat{w}_n),$$

ここで $J_{-1}(\cdot) = 0$, $\hat{w}_n$ は w_n の反対称化. この定義は線形に拡張される.

のちに用いることになる β を定義してこの subsection を終わろう.

Definition 2.3 ([BSW82, Def. 3.13])**.** $\beta : L^2(\mathscr{C}) \to L^2(\mathscr{C})$ は自己共役なユニタリ作用素 $D^{-1}\Gamma(-1)D$ を表すこととする. ここで $\Gamma(-1)$ は -1 の第二量子化.

2.2 通常の Malliavin 解析と類似の性質

次の積公式が鍵になる. 以降の結果はこの公式を用いることで示されている.

Proposition 2.4. $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. 任意の $f \in \Lambda_p$, $g \in \Lambda_q$ に対して, 次の等式が成り立つ:

$$J_p(f)J_q(g) = \sum_{r=0}^{p\wedge q} r! \binom{p}{r}\binom{q}{r} J_{p+q-2r}(f \hat{\wedge}_r g),$$

ここで $p \wedge q = \min(p,q)$, $f\hat{\wedge}_r g$ は

$$f \wedge_r g \coloneqq \int f(t_1, \ldots, t_{p-r}, s_r, \ldots, s_1) g(s_1, \ldots, s_r, t_{p-r+1}, \ldots, t_{p+q-2r})\, d\mathbf{s}.$$

を反対称化したもの.

まず, Leibniz 則の類似が成り立つ.

Proposition 2.5. 任意の $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して, $f \in \Lambda_p$, $g \in \Lambda_q$ とする. すると

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_t(J_p(f)J_q(g)) &= \mathcal{D}_t(J_p(f))J_q(g) + (-1)^p J_p(f)\mathcal{D}_t(J_q(g)) \\ &= \mathcal{D}_t(J_p(f))J_q(g) + \beta(J_p(f))\mathcal{D}_t(J_q(g)).\end{aligned}$$

CAR も成立する.

Proposition 2.6. $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $h \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $f \in \Lambda_p$, そして $h \otimes J_p(f) \in L^2(\mathbb{R}_+) \otimes D^{-1}\Lambda_p$ とする. すると

$$\{\mathcal{D}_t, \delta\} h \otimes J_p(f) = h(t) J_p(f).$$

形式的には, $\{\mathcal{D}_t, \delta\} = \delta_t \otimes \mathrm{Id}_{L^2(\mathscr{C})}$, ここで δ_t は Dirac 超関数.

fermion に対する Itô 解析である Itô-Clifford 解析の拡張のなることもわかる. $\mathfrak{H}[0,1]$ は Itô-Clifford 積分が定義できる空間であり, 単関数の極限で得られる.

Proposition 2.7. $\mathfrak{H}[0,1] \subset \mathrm{Dom}(\delta)$ であり, δ を $\mathfrak{H}[0,1]$ に制限したものは Itô-Clifford 積分に等しい:

$$\delta(u) = \int_0^1 d\Psi_t u_t$$

for every $u \in \mathfrak{H}[0,1]$.

反対称な Clark-Ocone 公式も成り立つ.

Theorem 2.8 (The anti-symmetric Clark-Ocone formula)**.** $F \in \mathrm{Dom}(\mathcal{D})$ とする. すると

$$F = m(F) + \int_0^1 d\Psi_t m(\mathcal{D}_t F | \mathscr{C}_t).$$

2.3 応用例

応用として集中不等式, 対数 Sobolev 不等式, fourth-moment 定理を考えよう. 集中不等式については Theorem 2.8 が有効に機能して通常の Malliavin 解析と同様の結果が示せる.

Theorem 2.9 (cf. [HP02, Lem. 3.1, Prop. 3.3] The concentration inequality)**.** $F \in \mathrm{Dom}(\mathcal{D}) \cap L^\infty(\mathscr{C})$ を $\int \|\mathcal{D}_t F\|_\infty^2 \, dt < \infty$ であるような自己共役作用素とする. そのスペクトル分解を $F = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_\lambda$ とおく. もし

$$h(s) = \int \|\mathcal{D}_t F\|_{L^\infty(\mathscr{C})} \|e^{-sF} \mathcal{D}_t e^{sF}\|_{L^\infty(\mathscr{C})} \, dt$$

が $[0, \infty)$ 上単調であれば, $x \geq 0$ に対して

$$m\left(E([m(F) + x, \infty))\right) \leq \exp\left(-\int_0^x h^{-1}(s) \, ds\right)$$

が成り立つ.

対数 Sobolev 不等式については反対称 Malliavin 解析を生かそうとすると, 弱い結果しか得られなかった.

Proposition 2.10 (cf. [Gro75, Thm 3]). $f : \{-1, 1\} \to \mathbb{C}$ とする. 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &m(|f(\Psi_1)|^2 \log |f(\Psi_1)|^2) - m(|f(\Psi_1)|^2) \log m(|f(\Psi_1)|^2) \\ &\leq 2 \log 4 \cdot \|\mathcal{D}_\cdot f(\Psi_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+) \otimes L^2(\mathscr{C})}. \end{aligned}$$

Remark 2.11. [Gro75, Thm 3] によると, この不等式の右辺は $2\|\mathcal{D}_\cdot f(\Psi_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+) \otimes L^2(\mathscr{C})}$ が最良である.

最後に fourth-moment 定理を扱う. 通常の fourth-moment 定理は固定された次数のカオスに属する確率変数の列がいつ正規分布に分布収束するかの必要十分条件を述べた定理であり, 名前の由来はその必要十分条件の中に “ 4 次のキュムラントが 0 に収束する ” という条件があるからである. fermion においても通常の fourth-moment 定理に対応する条件の内, 一部が同値になることが示せる

Theorem 2.12. $q \geq 2$ とし $F_n = F_n^* = J_q(f_n)$, $n \in \mathbb{N}$, は q-次カオスに属する列とする ($f_n \in \Lambda_q$). さらに, $m(F_n^2) \to 1$, $n \to \infty$ となるとする. すると, $n \to \infty$ の時, 次の条件は同値:

(i) $\langle \mathcal{D}_\cdot F_n, \mathcal{D}_\cdot R^{-1} F_n \rangle \to 1$ in $L^2(\mathscr{C})$;
(ii) $\|f_n \hat{\wedge}_r f_n\|_{2q-2r} \to 0$, for all $r = 1, \ldots, q-1$ such that $q + r$ is even;
(iii) $\mathrm{Var}\left(\|\mathcal{D}_\cdot F_n\|^2\right) \to 0$.

上記について, $\langle f_\cdot, g_\cdot \rangle = \int f_t^* g_t \, dt$, $f_t, g_t \in L^2(\mathscr{C})$ for a.e. $t \geq 0$ であり, $\|\cdot\|^2 = \langle \cdot, \cdot \rangle$, $\mathrm{Var}(F) = m(F^*F) - |m(F)|^2$ for $F \in L^2(\mathscr{C})$.

4 次のキュムラントを導く計算を Clifford 代数において再現すると次の定理において定義される写像 K が導かれる. ところが, この K が 0 に収束しないにもかかわらず, Theorem 2.12 の条件を満たす列を構成することができる.

Theorem 2.13. $f_1, \ldots, f_4 \in L^2(\mathbb{R}_+)$ を 0 でない $\langle f_i, f_j \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+)} = 0$, $i \neq j$ をみたす実関数とする. $f = f_1 \wedge \cdots \wedge f_4$, $F = J_4(f)$ とおき,

$$K(F) := m(F^4) - 2m(F^2)^2 - \frac{(-1)^q}{2}(2q!) \int \|f(t, *) \wedge f\|^2_{2q-1} \, dt$$

と定める. すると

(i) $K(F) \neq 0$,
(ii) $\|f \hat{\wedge}_2 f\|_4 = 0$.

なお, Brown 運動の対応物である $\Psi(z)$, $z \in L^2(\mathbb{R}_+)$ は Theorem 2.12 の諸条件を満たす上に, $K(\Psi(z)) = 0$ になる.

参考文献

[BSW82] C. Barnett, R. F. Streater, and I. F. Wilde. The Itô-Clifford integral. *Journal of Functional Analysis*, 48(2):172–212, 1982.

[FLS01] U. Franz, R. Leandre, and R. Schott. Malliavin calculus and Skorohod integration for quantum stochastic processes. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 4(1):11–38, 2001.

[FP16] U. Franz and N. Privault. *Probability on real Lie algebras*, volume 206 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, 2016.

[Gro72] L. Gross. Existence and uniqueness of physical ground states. *Journal of Functional Analysis*, 10(1):52–109, 1972.

[Gro75] L. Gross. Logarithmic Sobolev inequalities. *American Journal of Mathematics*, 97(4):1061–1083, 1975.

[HP02] C. Houdré and N. Privault. Concentration and deviation inequalities in infinite dimensions via covariance representations. *Bernoulli*, 8(6):697–720, 2002.

[Kun58] R. A. Kunze. L_p Fourier transforms on locally compact unimodular groups. *Transactions of the American Mathematical Society*, 89(2):519–540, 1958.

[Lin93] J. M. Lindsay. Quantum and non-causal stochastic calculus. *Probability Theory and Related Fields*, 97:65–80, 1993.

[Mey95] P. A. Meyer. *Quantum probability for probabilists*, volume 1538 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, second edition, 1995.

[Nua06] D. Nualart. *The Malliavin calculus and related topics*. Probability and Its Applications. Springer, Berlin, second edition, 2006.

[Par92] K. R. Parthasarathy. *An introduction to quantum stochastic calculus*, volume 85 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser, Basel, 1992.

[Seg53] I. E. Segal. A non-commutative extension of abstract integration. *Annals of Mathematics*, 57(3):401–457, 1953.

[Seg56] I. E. Segal. Tensor algebras over Hilbert spaces. II. *Annals of Mathematics*, 63(1):160–175, 1956.

[Ume54] H. Umegaki. Conditional expectation in an operator algebra. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 6(2-3):177–181, 1954.

[Ume56] H. Umegaki. Conditional expectation in an operator algebra, II. *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, 8(1):86–100, 1956.

[Wat24] T. Watanabe. Malliavin calculus on the Clifford algebra. *Journal of Stochastic Analysis*, 5(3):1–25, 2024.

[Wil74] I. F. Wilde. The free fermion field as a Markov field. *Journal of Functional Analysis*, 15(1):12–21, 1974.

[Yea75] F. J. Yeadon. Non-commutative L^p-spaces. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 77(1):91–102, 1975.

非整数階時間微分を伴う時間依存する汎函数の劣微分作用素によって支配される非線形発展方程式の可解性とその応用

東北大学大学院理学研究科数学専攻
中島 慶人 (Yoshihito NAKAJIMA) *

概要

本発表では非整数階時間微分を伴う時間依存する汎関数の劣微分作用素によって支配される非線形抽象発展方程式の可解性とその応用について説明する. 非整数階時間微分作用素は, ライプニッツ則や連鎖律公式が破綻するなど多くの困難を引き起こす. そのため古典的な非線形偏微分方程式と比べると, 非整数階時間微分を伴う発展方程式に関しては分かっていないことが多い. 本発表ではこのような非線形発展方程式の可解性について得られた結果を述べる.

1 導入

本稿では, 実ヒルベルト空間 H に於ける次の非線形発展方程式の可解性について考える.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k*(u-u_0)](t)+\partial\varphi^t(u(t))\ni 0 \ \text{ in } H, \quad 0<t<T. \tag{P}$$

ただし $0<T<\infty$ とし, 各 $t\in[0,T]$ に対して, $\partial\varphi^t : H\to 2^H$ はそれぞれ適正 ($\varphi^t\not\equiv+\infty$) 下半連続凸汎関数 $\varphi^t : H\to(-\infty,+\infty]$ の劣微分作用素を表し, $u_0\in D(\varphi^0)$ は初期値とする. 方程式 (P) は, 初期条件を含んでいることに注意する. 以後, 作用素 $A : H\to 2^H$ とグラフ $G(A)\subset H\times H$ を同一視する. また非整数階時間微分作用素を例として含むように, 積分核 $k=k(t)$ は次の仮定をみたすとする:

(A.0) 関数 k は $L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ に属する非負値減少関数とし, さらにある非負値減少関数 $\ell\in L^1_{\mathrm{loc}}([0,+\infty))$ が存在して $k*\ell\equiv 1$ が成り立つ. (以後, この条件を $(k,\ell)\in P.C.$ とあらわすことにする).

ただし, 合成積 $*$ は次により定義する.

$$(f*g)(t):=\int_0^t f(t-s)g(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{for } \ t>0.$$

* E-mail: yoshihito.nakajima.p8@dc.tohoku.ac.jp

仮定 (A.0) を満たす積分核 k (および ℓ) の具体例としては, 以下が挙げられる: $\alpha \in (0,1)$ に対して

$$k_\alpha(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad \ell_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{for } \ t > 0.$$

このとき対応する微分作用素 $(d/dt)[k_\alpha * (u-u_0)]$ は α 階のリーマン・リュービル微分 $\partial_t^\alpha(u-u_0)$ と一致する.

通常の 1 階時間微分の場合については, 例えば [4], [5], [6], [8] などが知られており, そこで得られた結果は, 境界が動く領域上の p-ラプラシアンを含む退化拡散方程式に対する初期値境界値問題などへ応用されている. 本研究では [4], [5], [6], [8] の結果を非整数階時間微分の場合へ拡張し, それを境界が動く領域上の非整数階時間微分と p-ラプラシアンを含む退化拡散方程式に対する初期値境界値問題へ応用することを目的とする.

2 主結果

方程式 (P) の強解を次のように定義する.

定義 2.1 ((P) の強解)**.** 初期値 $u_0 \in D(\varphi^0)$ に対して, 次の 2 つの条件が成立するとき $u \in L^2(0,T;H)$ を $[0,T]$ における問題 (P) の**強解**と呼ぶ.

(i) $k*(u-u_0) \in W^{1,2}(0,T;H)$ および $[k*(u-u_0)](0) = 0$ が成り立つ.
(ii) 次をみたすような $\eta \in L^2(0,T;H)$ が存在する:
- $\eta(t) \in \partial\varphi^t(u(t))$ for a.e. $t \in (0,T)$.
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u-u_0)\right](t) + \eta(t) = 0 \ \text{ in } H \quad \text{for a.e. } t \in (0,T).$

次に主結果で用いる仮定を導入する.

(A.1) 次をみたす $\alpha \in W^{1,2}(0,T)$ および $\beta \in W^{1,1}(0,T)$ が存在する: $s \le t$ をみたす任意の $s,t \in [0,T]$ および $z \in D(\varphi^s)$ に対して, 次をみたす $z_{s,t} \in D(\varphi^t)$ が存在する.

$$\|z_{s,t} - z\|_H \le |\alpha(t)-\alpha(s)| \left(1 + |\varphi^s(z)|^{1/2}\right),$$
$$\varphi^t(z_{s,t}) \le \varphi^s(z) + |\beta(t)-\beta(s)|\left(1+|\varphi^s(z)|\right).$$

このとき, 次の主結果を証明することができた.

定理 2.1 ((P) の強解の存在)**.** 仮定 (A.0) および (A.1) が成立するとき, 問題 (P) の強解 $u \in L^2(0,T;H)$ がただ一つ存在する.

以下では定理 2.1 の偏微分方程式への応用例について述べる. 次の p-ラプラシアンを含む退化拡散方程式の可解性について考える.

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha(u-u_0) - \Delta_p u = 0 & \text{in } Q, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma. \end{cases} \tag{PP}$$

ただし, 各 $t \in [0,T]$ に対して Ω_t は滑らかな境界 $\partial\Omega_t$ を持つ $\mathbb{R}^d$ 上の有界領域とし $[0,T]\times\mathbb{R}^d$ の部分集合 Q, Γ をそれぞれ $Q = \bigcup_{t\in[0,T]}(\{t\}\times\Omega_t)$ および $\Gamma = \bigcup_{t\in[0,T]}(\{t\}\times\partial\Omega_t)$ とする. また

$2 \leq p < \infty$, $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega_0) \cap L^2(\Omega_0)$, $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ とする. ここで Q は次をみたす集合とする.

(B) 次をみたす $\mathbb{R}^d$ 上の滑らかな有界領域 Ω が存在する.
  (i) $\overline{Q} \subset [0,T] \times \Omega$ が成り立つ.
  (ii) 次をみたす C^∞ 級写像 $H, H^{-1} : [0,T] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ が存在する:
    – 任意の $t \in [0,T]$ に対して, $H(t,\Omega_0) = \Omega_t$ および $H^{-1}(t,\Omega_t) = \Omega_0$ が成り立つ.
    – 任意の $(t,x) \in [0,T] \times \Omega_0$ に対して, $H^{-1}(t,H(t,x)) = x$ が成り立つ.
    – 任意の $(t,x) \in Q$ に対して, $H(t,H^{-1}(t,x)) = x$ が成り立つ.

また, 初期値境界値問題の強解を次のように定義する.

定義 2.2 ((PP) の強解)**.** 仮定 (B) をみたす $\mathbb{R}^d$ 上の滑らかな有界領域 Ω および初期値 $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega_0) \cap L^2(\Omega_0)$ に対して, 次の 4 つの条件 (i) - (iv) が成立するとき, $u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ を $[0,T]$ における問題 (PP) の**強解**と呼ぶ.

(i) $k * (u - u_0) \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$ および $[k * (u-u_0)](0) = 0$ が成り立つ.
(ii) $u(t,\cdot) \in W_0^{1,p}(\Omega_t)$ for a.e. $t \in (0,T)$ が成り立つ.
(iii) $\Delta_p u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ が成り立つ.
(iv) 次の方程式をみたす:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u-u_0)\right](t,x) - \Delta_p u(t,x) = 0 \quad \text{for a.e. } (t,x) \in (0,T) \times \Omega.$$

このとき, 定理 2.1 を応用することで (PP) の強解の存在を示すことができた.

定理 2.2. 仮定 (A.0) および (B) が成立するとき, 問題 (PP) の強解 $u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ が一意に存在する. ここで Ω は仮定 (B) をみたす $\mathbb{R}^d$ 上の滑らかな有界領域である.

3 準備

3.1 劣微分作用素

定義 3.1. 実ヒルベルト空間 H における適正 $(\varphi \not\equiv \infty)$ 下半連続凸汎関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ に対して, 次をみたす多価作用素 $\partial\varphi \subset H \times H$ を φ の **劣微分作用素** と呼ぶ.

$$\partial\varphi = \{[w,\xi] \in H \times H : \text{任意の } z \in H \text{ に対して } \varphi(z) - \varphi(w) \geq (\xi, z-w)_H\}.$$

また $D(\varphi) := \{u \in H : \varphi(u) < \infty\}$, $D(\partial\varphi) := \{u \in H : \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$ とする.

劣微分作用素は, 滑らかな凸汎関数のフレシェ微分を下半連続凸汎関数に対して一般化した概念である. 実際, 適正下半連続凸汎函数 φ が点 $v \in H$ でフレシェ微分可能である場合, $\partial\varphi(v) = \{\varphi'(v)\}$ が成り立つ. さらに $\partial\varphi$ は極大単調作用素である. すなわち, 次の事実が成り立つ.

- 任意の $(x_1,y_1) \in \partial\varphi$ および $(x_2,y_2) \in \partial\varphi$ に対して $(y_1 - y_2, x_1 - x_2)_H \geq 0$ が成り立つ.

- 任意の $\lambda > 0$ および $v \in H$ に対して $u + \lambda\partial\varphi(u) \in v$ をみたす $u \in D(\partial\varphi)$ が唯一つ存在する.

極大単調作用素の理論を用いることにより, 劣微分作用素は吉田近似と呼ばれるリプシッツ作用素により近似することができる.

命題 3.1 ([2], Theorem 2.9)**.** 適正下半連続凸汎関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ と任意の $\lambda > 0$ に対して $\varphi_\lambda : H \to (-\infty, \infty]$ を以下で定める (関数 φ_λ をモロー・吉田正則化と呼ぶ).

$$\varphi_\lambda(u) := \inf\left\{\varphi(v) + \frac{1}{2\lambda}\|v-u\|_H^2 : v \in H\right\} \quad \text{for } u \in H.$$

このとき φ_λ は次の性質をみたす.

(i) φ_λ は凸であり H 上全体でフレシェ微分可能である.

(ii) 任意の $u \in H$, $\lambda > 0$ に対して $\varphi(J_\lambda u) \le \varphi_\lambda(u) \le \varphi(u)$ である. ただし $J_\lambda = (I + \lambda\partial\varphi)^{-1}$ とする. また $\lambda \to +0$ とすると, $\varphi_\lambda(u) \to \varphi(u)$ となる.

(iii) 任意の $\lambda > 0$ に対して $\partial(\varphi_\lambda)(u) = \{\varphi_\lambda'(u)\}$ である. ここで, $\varphi_\lambda'(u)$ は点 u における φ_λ のフレシェ微分である. また $\partial\varphi$ の吉田近似 $(\partial\varphi)_\lambda$ と φ_λ の劣微分作用素 $\partial(\varphi_\lambda)$ は一致する (以後 $\partial(\varphi_\lambda)(u)$ の括弧を省略して $\partial\varphi_\lambda(u)$ と書く. また, $\partial\varphi_\lambda$ を多価関数ではなく関数 $\partial\varphi_\lambda : H \to H$ と同一視する).

(iv) 任意の $\lambda > 0$ に対して $\partial\varphi_\lambda : H \to H$ はリプシッツ連続である.

(v) 任意の点列 $v_n = \partial\varphi_{1/n}(u_n)$ および $(u, v) \in H \times H$ に対して, u_n が u に H 上で強収束し, v_n が v に H 上で弱収束するならば $(u, v) \in \partial\varphi$ となる.

劣微分作用素の吉田近似の例として, 次の例が挙げられる.

命題 3.2 ([7], Chapter IV. Example 2.C)**.** 測度有限な可測集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 適正下半連続凸汎関数 $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ に対して $\Psi^\varphi : L^2(\Omega; H) \to (-\infty, \infty]$ を以下の適正下半連続凸汎函数とする.

$$\Psi^\varphi(u) := \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \varphi(u(x))\,\mathrm{d}x & \text{if } \varphi(u(\cdot)) \in L^1(\Omega), \\ \infty & \text{if } \varphi(u(\cdot)) \notin L^1(\Omega). \end{cases}$$

このとき, 次が成り立つ.

(i) 任意の $\lambda > 0$ に対して, 適正下半連続凸汎函数 Ψ^φ は次をみたす凸汎函数となる.

$$\Psi_\lambda^\varphi(u) = \int_\Omega \varphi_\lambda(u(x))\,\mathrm{d}x \quad \text{for all } u \in L^2(\Omega; H).$$

また, 劣微分作用素 $\partial\Psi^\varphi$ の吉田近似 $\partial\Psi_\lambda^\varphi$ は次をみたす作用素となる.

$$\partial\Psi_\lambda^\varphi(u) = \varphi_\lambda(u) \quad \text{for all } u \in L^2(\Omega; H).$$

(ii) 劣微分作用素 $\partial\Psi^\varphi$ は次をみたす作用素となる.

$$\partial\Psi^\varphi = \{g \in L^2(\Omega; H) : g(x) \in \partial\varphi(u(x)) \text{ for a.e. } x \in \Omega\} \quad \text{for all } u \in L^2(\Omega; H).$$

最後に仮定 (A.1) から得られる凸汎関数の性質を述べる.

命題 3.3 ([5], Theorem 1.5.1)**.** 各 $t \in [0,T]$ に対して, $\varphi^t : H \to (-\infty, \infty]$ を適正下半連続凸汎関数とする. もし仮定 (A.1) が成立するならば, 次をみたす定数 $C_0 \in \mathbb{R}$ が存在する

$$\varphi^t(z) \geq -C_0(1 + |z|_H) \quad \text{for all } t \in [0,T],\ z \in H.$$

3.2 連鎖律

通常の 1 階微分の場合, 次の凸汎関数に関する連鎖律がよく知られている.

命題 3.4 ([7], Chapter IV, Lemma 4.3)**.** 適正下半連続凸汎関数 $\varphi : H \to (-\infty, \infty]$ と $u \in W^{1,2}(0,T;H)$ に対して, $g_u(t) \in \partial\varphi(u(t))$ for a.e. $t \in (0,T)$ をみたす $g_u \in L^2(0,T;H)$ が存在するとする. このとき $\varphi(u) \in W^{1,1}(0,T)$ であり, 次の等式が成立する.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(u) = \left(h, \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)_H \quad \forall\, h \in \partial\varphi(u(t)) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T).$$

命題 3.5 ([5], Lemma 1.2.5)**.** 各 $t \in [0,T]$ に対して, $\varphi^t : H \to (-\infty, \infty]$ を適正下半連続凸汎関数とする. もし仮定 (A.1) が成立するならば, 次をみたす非負関数 $\eta_1, \eta_2 \in L^1(0,T)$ および正の定数 $\delta \in (0,1)$ が存在する: 各 $u \in W^{1,2}(0,T;H)$ および $\lambda > 0$ に対して, 次の不等式が成立する.

$$\begin{aligned}
&\varphi_\lambda^t(u(t)) - \int_0^t \left(u'(r), \partial\varphi_\lambda^t(u(r))\right)_H \mathrm{d}r \\
&\leq \varphi_\lambda^0(u(0)) + \int_0^t \delta\|\partial\varphi_\lambda^t(u(r))\|_H^2 + \eta_1(r)|\varphi_\lambda^t(u(r))| + \eta_2(r)\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

合成積を伴う微分の場合, 次の連鎖律不等式が成り立つ.

命題 3.6 ([1], Proposition 3.4)**.** 適正下半連続凸汎関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ に対して $u_0 \in D(\varphi)$ とする. また $k \in W^{1,1}(0,T)$ は $k(t) \geq 0, k'(t) \leq 0$ for a.e. $t \in (0,T)$ をみたすとする. さらに $u, g \in L^2(0,T;H)$ は $\varphi(u(\cdot)) \in L^1(0,T)$ および $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ for a.e. $t \in (0,T)$ をみたすとする. このとき, 次の不等式が成立する.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k * (u - u_0)](t), g(t)\right)_H \geq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big[k * (\varphi(u(\cdot)) - \varphi(u_0))\big](t) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T).$$

しかし非整数階時間微分を考える場合, 考える積分核 k_α は非負かつ減少関数であるが, 原点で特異性を持つためソボレフ空間 $W^{1,1}(0,T)$ の元にならず, 上の命題をそのまま適用することができない. しかし m-増大作用素と completely positive kernel の理論を用いることにより, 命題 3.6 と同等の不等式を得ることができる (命題 3.10 参照).

3.3 m-増大作用素

本節では, Completely Positive Kernel の性質を述べる際に必要な m-増大作用素の性質について述べる.

定義 3.2. 実バナッハ空間 X に対し, 次をみたす作要素 $A \subset X \times X$ を A の **増大作用素** と呼ぶ.

$$\|x_1 - x_2\|_X \leq \|(x_1 + \alpha y_1) - (x_2 + \alpha y_2)\|_X \quad \text{for all } [x_1, y_1], [x_2, y_2] \in A,\ \alpha > 0.$$

さらに, 増大作用素 $A \subset X \times X$ が次をみたすとき A を **m-増大作用素** と呼ぶ.

任意の $\alpha > 0$, $w \in X$ に対して $w = x + \alpha y$ をみたすような $[x, y] \in A$ が唯一つ存在する.

また $D(A) = \{u \in X : Au \neq \emptyset\}$ とする.

定義 3.3. 任意の $\lambda > 0$, m-増大作用素 A に対して, A のレゾルベント $J_\lambda^A : X \to D(A)$, A の吉田近似 $A_\lambda : X \to X$ をそれぞれ次の作用素とする.

$$J_\lambda^A(u) := (I + \lambda A)^{-1}(u) \quad \text{for all } u \in X, \quad A_\lambda := \frac{1}{\lambda}\left(I - J_\lambda^A\right)(u) \quad \text{for all } u \in X.$$

ここで, $I : X \to X$ は恒等写像とする. m-増大作用素の定義から, J_λ^A は well-defined である. また吉田近似の定義から, A が線形作用素の場合, $A_\lambda = A(J_\lambda^A f)$ が成り立ち, さらに $f \in D(A)$ をみたすならば $A_\lambda f = A(J_\lambda^A) = J_\lambda^A A f$ が成立する.

命題 3.7 ([7], Chapter IV, Proposition 7.1, Proposition 7.2)**.** 任意の m-増大作用素 $A \subset X \times X$ に対して, 次の性質をみたす.

(i) 任意の $u \in X$, $\lambda > 0$ に対して, $A_\lambda u \in A(J_\lambda^A u)$ である.
(ii) 任意の $u \in \overline{D(A)}^X$ に対して, $\lim_{\lambda \to +0} J_\lambda^A(u) = u$ である.
(iii) グラフ $A \subset X \times X$ は閉である. 特に A が線形作用素のとき, グラフ A が凸集合となるため弱閉となり次が成立する.

> 任意の数列 $(u_n, v_n) \in A$ および $(u, v) \in X \times X$ に対して,
> u_n が u に弱収束し, v_n が v に弱収束するならば $(u, v) \in A$ である.

3.4 Completely positive kernels

まず, 次の命題が成り立つことが知られている.

命題 3.8 ([3], Theorem 2.2, [9], Section 2)**.** $(k, \ell) \in P.C.$ とする. 任意の $\lambda > 0$ に対して $s_\lambda \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0, \infty))$ を次のボルテラ方程式の解とする.

$$s_\lambda(t) + \lambda[\ell * s_\lambda](t) = 1 \quad \text{for } t > 0.$$

このとき $s_\lambda \geq 0$, $s_\lambda' \leq 0$ が成り立つ. 特に $k_\lambda := \lambda s_\lambda \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0, \infty))$ とすると $k_\lambda \geq 0$, $k_\lambda' \leq 0$ が成り立つ. また $h_\mu \in L^1_{\mathrm{loc}}([0, \infty))$ を次のボルテラ方程式の解とする.

$$h_\mu(t) + \mu(\ell * h_\mu)(t) = \mu\ell(t) \quad \text{for } t > 0.$$

このとき $h_\mu \geq 0$, $k_\mu = h_\mu * k_\mu$ をみたす.

ここで X を実バナッハ空間 $1 \le p \le \infty$ とし, 線形作用素 $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset L^p(0,T;X) \to L^p(0,T;X)$ を次で定める.

$$D(\mathcal{B}) := \{v \in L^p(0,T;X) : k * v \in W^{1,p}(0,T;X),\ [k*v](0) = 0\},$$
$$\mathcal{B}v := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k*v) \quad \text{for } v \in D(\mathcal{B}).$$

このとき, 命題 3.8 から次の事実が成り立つ. 特に $\mathcal{B}$ は m-増大作用素となる.

- 任意の $f \in L^p(0,T;X)$ に対して $J_\lambda(f) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\ell * k_\lambda * f]$ とすると $J_\lambda(f) + \dfrac{1}{\lambda} J_\lambda(f) = f$.
- 任意の $f, g \in L^p(0,T;X)$ に対して $\|J_\lambda(f) - J_\lambda(g)\|_{L^p(0,T;X)} \le \|f - g\|_{L^p(0,T;X)}$.

ここで命題 3.7 を用いることにより, 次の命題が従う.

命題 3.9 ([1], Section 3, [9], Section 2)**.** 実バナッハ空間 X, $1 \le p \le \infty$, $(k,\ell) \in P.C.$ とする. また $v \in L^p(0,T;X)$ が $k * v \in W^{1,p}(0,T;X)$ と $(k*v)(0) = 0$ をみたすとする. このとき, 次が成り立つ.

$$k_n \to k \quad \text{in } L^1(0,T), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k_n * v] \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k*v] \quad \text{in } L^p(0,T;X).$$

また, 任意の点列 $u_n \in D(\mathcal{B})$ および $v_n := \mathcal{B}u_n$ に対して, u_n が u に $L^p(0,T;X)$ 上で弱収束し v_n が v に $L^p(0,T;X)$ 上で弱収束するならば, $u \in D(\mathcal{B})$ であり $v = \mathcal{B}u$ となる. また任意の $f \in L^p(0,T;X)$ に対して, 次が成り立つ.

$$h_n * f \to f \quad \text{in } L^p(0,T;X).$$

命題 3.6 および命題 3.9 を組み合わせることにより, 次の主張が成立する.

命題 3.10. 適正下半連続凸汎関数 $\varphi : H \to (-\infty, +\infty]$ に対して $u_0 \in D(\varphi)$, $(k,\ell) \in P.C.$ とする. さらに $u \in L^2(0,T;H)$ が $k*(u-u_0) \in W^{1,2}(0,T;H)$, $[k*(u-u_0)](0) = 0$, $\varphi(u(\cdot)) \in L^1(0,T)$ をみたすとする. また $g(t) \in L^2(0,T;H)$ が $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ for a.e. $t \in (0,T)$ をみたすとする. このとき, 次の不等式が成立する.

$$\left[\ell * \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[k*(u-u_0)](\cdot), g(\cdot)\right)_H\right](t) \ge \varphi(u(t)) - \varphi(u_0) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T),$$
$$\int_0^t \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}[k*(u-u_0)](s), g(s)\right)_H \mathrm{d}s \ge [k*(\varphi(u(\cdot)) - \varphi(u_0))](t) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T).$$

4 証明の概略

定理 2.2 は定理 2.1 を適用して得られる結果であるため, ここでは定理 2.1 の証明のみ行う.

簡単のため, 任意の $t \in [0,T]$ に対して $\partial\varphi^t$ は一価作用素とする.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, 次の (P) にあらわれる劣微分作用素 $\partial\varphi^t$ を $\partial\varphi^t_{1/n}$ により近似をし, さらに $(1/n)(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(u-u_0)$ を加えた近似問題 (P_n) の可解性を考える.

$$\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_n - u_0)(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k*(u-u_0)\right](t) + \partial\varphi^t_{1/n}(u(t)) = 0, \quad 0 < t < T. \tag{P_n}$$

このとき (P_n) の可解性を証明することができる.

補題 4.1. 次をみたす $u_n \in W^{1,2}(0,T;H)$ が一意に存在する.

$$\begin{aligned} &u_n(0) = u_0, \\ &\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_n - u_0) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[k * (u_n - u_0)\right] + \partial\varphi_{1/n}^{\cdot}(u_n) = 0 \quad \text{in } L^2(0,T;H). \end{aligned} \tag{1}$$

ここで $(1/n)(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(u_n - u_0)$ の項を付け加えることによって, 命題 3.4, 3.5 の連鎖律を用いることができるため, より多くの一様評価が成り立つような近似問題となっている. つぎにア・プリオリ評価を導出する. 方程式 (1) の両辺に $(d/dt)(u_n - u_0)$ をかけ $(0,t)$ で積分を行うことにより, 命題 3.4, 3.5 および命題 3.10 の連鎖律を用いて次の不等式を示すことができる.

$$\begin{aligned} &\int_0^t \frac{1}{n}\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(u_n - u_0\right)(r)\right\|_H^2 \mathrm{d}r + \left[\ell * \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[k * (u_n - u_0)]\right\|_H^2\right](t) + \varphi_{1/n}^t(u_n(t)) \\ &\le \varphi^0(u_0) + |\eta_2|_{L^1(0,T)} + \int_0^t \|\partial\varphi_\lambda^r(u(r))\|_H^2 + \eta_1(r)\varphi_\lambda^r(u(r))\,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

for all $t \in (0,T)$. ここで $\eta_1, \eta_2 \in L^1(0,T)$ は命題 3.5 をみたす非負関数とする. ここで, 命題 3.3 より, n に依存しない定数 $C_0 > 0$ が存在する.

$$\begin{aligned} &\int_0^t \frac{1}{n}\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(u_n - u_0\right)(r)\right\|_H^2 \mathrm{d}r + \left[\ell * \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[k * (u_n - u_0)]\right\|_H^2\right](t) + |\varphi_{1/n}^t(u_n(t))| \\ &\le C_0\left[1 + |\varphi^0(u_0)| + |\eta_2|_{L^1(0,T)} + \int_0^t \|\partial\varphi_\lambda^r(u(r))\|_H^2 + \eta_1(r)|\varphi_\lambda^r(u(r))|\,\mathrm{d}r\right]. \end{aligned}$$

ここで, 次の不等式を用いた.

$$\|u_n(t) - u_0\|_H^2 \le |\ell|_{L^1(0,T)}\left[\ell * \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[k * (u_n - u_0)]\right\|_H^2\right](t) \quad \text{for a.e. } t \in (0,T).$$

従って, 方程式 (1) から次の不等式評価が成り立つ.

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right)\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(u_n - u_0\right)(r)\right\|_H^2 \mathrm{d}r + \left[\ell * \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[k * (u_n - u_0)]\right\|_H^2\right](t) + |\varphi_{1/n}^t(u_n(t))| \\ &\le C_0\left[1 + |\varphi^0(u_0)| + \int_0^t \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[k * (u_n - u_0)](r)\right\|_H^2 + \eta_1(r)|\varphi_\lambda^r(u(r))|\,\mathrm{d}r\right] \\ &= C_0\left[1 + |\varphi^0(u_0)| + \int_0^t \eta_1(r)|\varphi_\lambda^r(u(r))|\,\mathrm{d}r + \left[k * \left[\ell * \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}k * (u_n - u_0)\right\|_H^2\right]\right](t)\right]. \end{aligned}$$

for all $t \in (0,T)$. ここでボルテラ型積分不等式を用いることによって, 次の不等式が成り立つ.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left[\left\|\varphi_{1/n}^{\cdot}(u_n(\cdot)) + \left[\ell * \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[k * (u_n - u_0)]\right\|\right](\cdot)\right\|_{L^\infty(0,T)}\right] < \infty.$$

特に, 次の不等式が成り立つ.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left[\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[k * (u_n - u_0)]\right\|_{L^2(0,T;H)}^2\right] = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left[\left\|k * \left[\ell * \left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[k * (u_n - u_0)]\right\|_H^2\right]\right\|_{L^\infty(0,T)}\right] < \infty.$$

従って, 次の不等式が成り立つ.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left[\sqrt{n}\left\|\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(u_n-u_0)\right\|_{L^2(0,T;H)}\right]<\infty.$$

方程式 (1) より, 次の一様な不等式が成り立つ.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\partial\dot{\varphi}_{1/n}(u_n)\|_{L^2(0,T;H)}<\infty.$$

最後に, これらのア・プリオリ評価を用いて近似解の収束を証明する. 方程式 (1) より, 次の等式が成り立つ.

$$\frac{1}{n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_n(t)-\frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_m(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k*(u_n-u_m)](t)+\partial\varphi^t_{1/n}(u_n(t))-\partial\varphi^t_{1/m}(u_m(t))=0$$

for a.e. $t\in(0,T)$. 一様評価および連鎖律不等式により, 方程式の両辺に u_n-u_m をかけて $(0,t)$ で積分することで, 次の不等式をみたす n,m に依存しない定数 $C_1\geq 0$ が存在する.

$$[k*\|u_n-u_m\|_H^2](t)\leq C_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{m}}\right)\quad\text{for a.e. } t\in(0,T).$$

ここで, 次の不等式を用いた.

$$\begin{aligned}&(\partial\varphi^t_{1/n}(u_n(t))-\partial\varphi^t_{1/m}(u_m(t)),u_n(t)-u_m(t))_H\\&\geq-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)(\|\partial\varphi^t_{1/n}(u_n(t))\|_H^2+\|\partial\varphi^t_{1/m}(u_m(t))\|_H^2)\quad\text{for a.e. } t\in(0,T).\end{aligned}$$

従って, 次の不等式が成り立つ.

$$\|u_n-u_m\|^2_{L^2(0,T;H)}=\left\|\ell*[k*\|u_n-u_m\|_H^2]\right\|_{L^\infty(0,T)}\leq C_1|\ell|_{L^1(0,T)}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{m}}\right).$$

特に $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ は $L^2(0,T;H)$ のコーシー列となり, 次をみたす関数 $u\in L^2(0,T;H)$ が存在する.

$$u_n\to u\text{ in }L^2(0,T;H).$$

ここで命題 3.1, 3.2 を用いると u が初期値問題 (P) の強解であることを示すことができる. 最後に一意性を証明する. 関数 $u,v\in L^2(0,T;H)$ が方程式 (P) の解とする. このとき, 次の等式が成り立つ.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[k*(u-v)](t)+\partial\varphi^t(u(t))-\partial\varphi^t(v(t))=0$$

for a.e. $t\in(0,T)$. 上の方程式の両辺に $u-v$ をかけて $(0,t)$ で積分することにより, 次の不等式が成り立つ.

$$[k*\|u-v\|_H^2](t)\leq 0$$

for a.e. $t\in[0,T]$. ここで, 命題 3.10 および $\partial\varphi^\cdot$ が極大単調作用素であることを用いた. 従って次の不等式が成り立つ.

$$\int_0^T\|u(r)-v(r)\|_H^2\,\mathrm{d}r=[\ell*k*\|u-v\|_H^2](T)\leq 0.$$

特に $\|u-v\|_{L^2(0,T;H)}=0$ が成り立ち, 解の一意性が証明された.

参考文献

[1] G. Akagi, Fractional flows driven by subdifferentials in Hilbert spaces, Israel J. Math., **234** (2019), 809–862.

[2] V. Barbu, *Nonlinear differential equations of monotone types in Banach spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2010.

[3] Ph. Clément and J.A. Nohel, Asymptotic behavior of solutions of nonlinear Volterra equations with completely positive kernels, SIAM J. Math. Anal., **12** (1981), 514–535.

[4] K. Nobuyuki, Some nonlinear parabolic variational inequalities, Israel J. Math., **22** (1975), no. 3-4, 304—331.

[5] K. Nobuyuki, Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications, Chiba Univ., (1981) 1–87.

[6] M. Ôtani, Nonlinear evolutions with time-dependent constraints Adv. Math. Sci. Appl., **3** (1993/94), 383–399

[7] R.E. Showalter, *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 49, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[8] Y. Yamada, On evolution equations generated by subdifferential operators., J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **23** (1976), no. 3, 491—515.

[9] R. Zacher, Boundedness of weak solutions to evolutionary partial integro-differential equations with discontinuous coefficients, J Math. Anal. Appl. **348** (2008), 137—149.

楕円型・擬放物型システムによる
非等方的モノクロ画像処理過程

千葉大学　大学院融合理工学府　数学情報科学専攻
鵜飼直孝 (Naotaka UKAI) *

概要

本講演は, 方位調整を伴う非等方的モノクロ画像処理に関連する楕円型・擬放物型システムを主題とする. 本システムは [3] で提案されたモデルに基づいており, 先行研究 [6, 7, 1] では, 放物型および擬放物型システムの適切性に関する結果が報告されている. しかし, 従来のシステムでは, 方位の初期値の適切な設定方法が不明瞭であった. そこで本講演では, 方位の初期設定を必要としない楕円型・擬放物型システムを考察し, 得られた結果を報告する. 尚, 本稿は水野大樹さん (千葉大学大学院融合理工学府), 白川健先生 (千葉大学教育学部), Harbir Antil 先生 (George Mason 大学) との共同研究に基づく.

1　導入

本稿を通して, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は有界な領域とし, その境界 $\Gamma := \partial\Omega$ は Lipschitz とする. また, $0 < T < \infty$ は時間の定数とし, $Q := (0,T) \times \Omega$, $\Sigma := (0,T) \times \Gamma$ と定める.

本稿では, 以下に記述される楕円-擬放物型システム (S) を考える:

$$\begin{cases} -\kappa\Delta\alpha + \nabla\gamma(R(\alpha)\nabla u) \cdot R(\alpha+\frac{\pi}{2})\nabla u = 0 \text{ in } Q, \\ \partial_t u - \operatorname{div}\left({}^\top R(\alpha)\nabla\gamma(R(\alpha)\nabla u) + \nu|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \mu\nabla\partial_t u\right) + \lambda(u - u_{\mathrm{org}}) = 0 \text{ in } Q, \\ \alpha = u = \partial_t u = 0 \text{ on } \Sigma, \quad u(0,x) = u^0(x), \ x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

ここに, $\kappa,\ \nu,\ \mu,\ \lambda > 0,\ p > 2$ は固定された定数とする.

システム (S) は次で定められる $[L^2(\Omega)]^2$ 上の汎関数 E の擬放物型勾配流として導出される:

$$[\alpha,u] \in [L^2(\Omega)]^2 \mapsto E(\alpha,u) := \begin{cases} \dfrac{\kappa}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla\alpha|^2\,dx + \int_\Omega \gamma(R(\alpha)\nabla u)\,dx \\ \qquad + \dfrac{\nu}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx + \dfrac{\lambda}{2}\int_\Omega |u - u_{\mathrm{org}}|^2\,dx, \\ \qquad \text{if } [\alpha,u] \in H_0^1(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega), \\ \infty, \quad \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2}$$

汎関数 E は, モノクロ画像に対する方位調整を考慮する高精度ノイズ除去を目的に, 文献 [3] において提案された支配エネルギーに基づいている. 定義式 (2) では, $\alpha \in H_0^1(\Omega)$ と $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ が未知

* E-mail:24wd0101@student.gs.chiba-u.jp

変数となっており, それぞれを「画像の構成要素の方位 (角度) を表す関数」と「修正過程における画像データを表す関数」と対応させている. 更に与えられたノイズ入り元画像データ $u_{\mathrm{org}} \in L^2(\Omega)$ との L^2-距離 (の 2 乗) を加味することで, エネルギーの最小化による画像データの最適化が行えるようになっている. 加えて, 定義式 (2) に, ある与えられた非等方的な計量 $0 \leq \gamma \in C^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ と回転行列：

$$\alpha \in \mathbb{R} \mapsto R(\alpha) := \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

の合成関数を組み入れることにより, 画像データ u だけでなく, 画像の構成要素の方位 α の自動調整をも考慮した高精度の画像データが実現できるよう, 工夫されている.

本稿で考えるシステム (S) の先行研究 (cf. [6, 7, 1]) と異なる点は, 第一方程式が楕円型方程式で構成されている点にある. これまでのシステムは定義式 (1) の第一方程式において $\partial_t\alpha$ を含む放物型システム, あるいは $\partial_t\alpha$ および $\Delta\partial_t\alpha$ を含む擬放物型システムであり, 先述の先行研究では, そのシステムの適切性 (解の存在・解の一意性・初期値に関する連続依存性) に関する結果が報告されている. しかし, 数値計算に応用する場合, 従来のシステムでは初期条件の設定に関して課題が残されている. 具体的には, 画像データ u の初期値については与えられたデータ u_{org} を手掛かりにして設定できるが, 方位 α の初期値については画像からどのように読み取ればよいか実は不明瞭である. したがって, 画像処理においては, 方位の初期値を手動で推定するのではなく, 方程式の中で自動的に計算されるモデルが望ましいと考えられる. そこで, 本稿では, 方位の初期設定を必要としない楕円型・擬放物型システムを考察し, 得られた結果を報告する.

2 準備

はじめに, 本稿で使用する記法についての説明を行う.

任意の $a, b \in [-\infty, \infty]$ に対して,

$$a \vee b := \max\{a, b\} \text{ and } a \wedge b := \min\{a, b\}$$

と定める.

次に, X を Banach 空間とする. $|\cdot|_X$ を X 上のノルムと表記する. 特に, X が Hilbert 空間であれば, その内積を $(\cdot,\cdot)_X$ と表す. また, $d \in \mathbb{N}$ とする. $x \in \mathbb{R}^d$ のユークリッドノルムを $|x|$ と表し, $x, y \in \mathbb{R}^d$ のスカラー積を $x \cdot y$ と表す. すなわち,

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2} \quad \text{and} \quad x \cdot y := x_1y_1 + \cdots + x_dy_d,$$
$$\text{for all } x = [x_1, \ldots, x_d],\ y = [y_1, \ldots, y_d] \in \mathbb{R}^d.$$

次に, 時間離散化に関する記法を導入する.

$\tau > 0$ は時間幅を表す正定数とし, 時間の列 $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$ を

$$t_i := i\tau, \text{ for any } i = 0, 1, 2, \ldots.$$

として定める. 任意の点列 $\{[t_i, u_i]\}_{i=0}^{\infty} \subset [0,\infty) \times X$ に対し, 3 通りの補完 $[\overline{u}]_\tau \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,\infty); X)$, $[\underline{u}]_\tau \in L^\infty_{\mathrm{loc}}([0,\infty); X)$, and $[u]_\tau \in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}([0,\infty); X)$ を以下で定める:

$$\begin{cases} [\overline{u}]_\tau(t) := \chi_{(-\infty,0]} u_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{(t_{i-1},t_i]}(t) u_i, \\ [\underline{u}]_\tau(t) := \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \chi_{(t_i,t_{i+1}]}(t) u_i, & \text{in } X, \text{ for any } t \geq 0, \\ [u]_\tau(t) := \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{(t_{i-1},t_i]}(t) \left(\frac{t - t_{i-1}}{\tau} u_i + \frac{t_i - t}{\tau} u_{i-1} \right), \end{cases}$$

ただし, $\chi_E : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ は集合 $E \subset \mathbb{R}$ の特性関数を表す.

3 主結果

本稿では, 以下を仮定する.

(A0) $p > 2$, $\nu > 0$, $\mu > 0$, $\lambda > 0$ は固定された定数とし, $\kappa > 0$ は十分大きいとする.

(A1) $u_{\mathrm{org}} \in L^2(\Omega)$ は与えられた関数で, $0 \leq u_{\mathrm{org}} \leq 1$ a.e. in Ω を満たす.

(A2) $\gamma \in C^{1,1}(\mathbb{R}^2) \cap C^2(\mathbb{R}^2)$ は与えられた非負の凸関数で, $0 \in \mathbb{R}^2$ が γ の唯一つの最小元である.

(A3) $u^0 \in W^{1,p}_0(\Omega)$ は与えられた関数で, $0 \leq u^0 \leq 1$ a.e. in Ω を満たす.

次に, システム (S) の解の定義を述べる.

定義 1. 以下の条件を満たす関数の組 $[\alpha, u]$ をシステム (S) の解と呼ぶ.

(S0) $[\alpha, u] \in W^{1,2}(0,T; H^1_0(\Omega)) \times [W^{1,2}(0,T; H^1_0(\Omega)) \cap L^\infty(0,T; W^{1,p}_0(\Omega))]$, $0 \leq u \leq 1$ in $\overline{Q}$, and $u(0) = u^0$ in $[L^2(\Omega)]$.

(S1) α は以下の変分等式を満たす:

$$\kappa(\nabla\alpha(t), \nabla\varphi)_{[L^2(\Omega)]^2} + \int_\Omega \nabla\gamma(R(\alpha(t))\nabla u(t)) \cdot R(\alpha(t)+\tfrac{\pi}{2})\nabla u(t)\varphi \, dx = 0,$$
$$\forall \varphi \in H^1_0(\Omega), \text{ a.e. } t \in (0,T).$$

(S2) u は以下の変分不等式を満たす:

$$\begin{aligned} &(\partial_t u(t), u(t) - \psi)_{L^2(\Omega)} + \mu(\nabla\partial_t u(t), \nabla(u(t) - \psi))_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\quad + \nu \int_\Omega |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t) \cdot \nabla(u(t) - \psi) \, dx + \lambda(u(t) - u_{\mathrm{org}}, u(t) - \psi)_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \int_\Omega \gamma(R(\alpha(t))\nabla u(t)) \, dx \leq \int_\Omega \gamma(R(\alpha(t))\nabla\psi) \, dx, \ \forall \psi \in W^{1,p}_0(\Omega), \text{ a.e. } t \in (0,T). \end{aligned}$$

上記に基づき, 本稿では以下の主定理を, 現時点における成果として報告する.

主定理. ある $\kappa_* > 0$ が存在し, 任意の $\kappa > \kappa_*$ に対して, システム (S) の解は唯一つ存在する. さらに, 以下のエネルギー不等式を満たす.

$$E(\alpha(t), u(t)) \leq E(\alpha(s), u(s)), \ 0 \leq \forall s \leq \forall t \leq T. \tag{3}$$

4　証明の概要

本章では, 重要な補題の紹介とその証明および主定理の証明の概略を記述する.

4.1　証明の準備

主定理の証明は, 以下の時間離散化スキームによる近似問題に基づく. $m \in \mathbb{N}$ を時間区間 $(0,T)$ の分割数とし, $\tau := \frac{T}{m}$ を時間幅を表す定数とする.

$(\mathrm{AP})^\tau$ 以下を満たす列 $\{[\alpha^i, u^i]\}_{i=1}^m \subset H_0^1(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ を求める問題:

$$\begin{cases} -\kappa\Delta_0\alpha^i + \nabla\gamma(R(\alpha^i)\nabla u^i)\cdot R(\alpha^i+\frac{\pi}{2})\nabla u^i = 0 \\ \dfrac{u^i-u^{i-1}}{\tau} - \mathrm{div}\Big({}^\top R(\alpha^i)\nabla\gamma(R(\alpha^i)\nabla u^i) + \nu|\nabla u^i|^{p-2}\nabla u^i + \dfrac{\mu}{\tau}\nabla(u^i-u^{i-1})\Big) + \lambda(u^i-u_{\mathrm{org}}) = 0 \end{cases}$$

ただし, $u^0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ は与えられた関数であり, Δ_0 は斉次 Dirichlet 境界条件を付した Laplace 作用素を表す. また, $\alpha^0 \in H_0^1(\Omega)$ は以下を満たす関数として与える:

$$-\kappa\Delta_0\alpha^0 + \nabla\gamma(R(\alpha^0)\nabla u^0)\cdot R(\alpha^0+\tfrac{\pi}{2})\nabla u^0 = 0.$$

近似問題 $(\mathrm{AP})^\tau$ の解については以下のように定義する.

定義 2. $\{[\alpha^i, u^i]\}_{i=1}^m$ が $(\mathrm{AP})^\tau$ の解であるとは, $\{[\alpha^i, u^i]\}_{i=1}^m \subset H_0^1(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega)$ であり, 各 $i = 1, 2, \ldots, m$ に対し, $[\alpha^i, u^i]$ が以下を満たすことをいう:

(AP1)　α^i は以下の変分等式を満たす:

$$\kappa(\nabla\alpha^i, \nabla\varphi)_{[L^2(\Omega)]^2} + (\nabla\gamma(R(\alpha^i)\nabla u^i)\cdot R\left(\alpha^i+\tfrac{\pi}{2}\right)\nabla u^i, \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

(AP2)　u^i は以下の変分等式を満たす:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\tau}(u^i-u^{i-1},\psi)_{L^2(\Omega)} + \frac{\mu}{\tau}(\nabla(u^i-u^{i-1}),\nabla\psi)_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &\quad + (\nabla\gamma(R(\alpha^i)\nabla u^i), R(\alpha^i)\nabla\psi)_{[L^2(\Omega)]^2} + \nu\int_\Omega |\nabla u^i|^{p-2}\nabla u^i\cdot\nabla\psi\,dx \\ &\quad + \lambda(u^i-u_{\mathrm{org}},\psi)_{L^2(\Omega)} = 0,\ \forall\psi \in W_0^{1,p}(\Omega). \end{aligned}$$

近似問題 $(\mathrm{AP})^\tau$ については, 以下の定理を示すことができる.

定理 1. ある $\tau_0 \in (0,1)$, $\kappa_0 > 0$ が存在し, 任意の $\tau \in (0,\tau_0)$, $\kappa \geq \kappa_0$ に対し, $(\mathrm{AP})^\tau$ はただ一つの解 $\{[\alpha^i, u^i]\}_{i=1}^m \subset H_0^1(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega)$ を持つ. さらに解 $\{[\alpha^i, u^i]\}_{i=1}^m \subset H_0^1(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega)$ は以下のエネルギー不等式を満たす.

$$E(\alpha^i, u^i) \leq E(\alpha^{i-1}, u^{i-1}),\ \forall i = 1, ..., m. \tag{4}$$

定理 1. の証明には, 以下の補題を示すことが重要となる.

補題 1. $u_0^\dagger \in H^1(\Omega)$ に対し, 以下の楕円型境界値問題 (E; $\alpha, u, u_0^\dagger)_\tau$ を考える.

$$\begin{cases} -\kappa\Delta_0\alpha + \nabla\gamma(R(\alpha)\nabla u)\cdot R(\alpha+\frac{\pi}{2})\nabla u = 0, \\ \dfrac{u-u_0^\dagger}{\tau} - \mathrm{div}\Big({}^\top R(\alpha)\nabla\gamma(R(\alpha)\nabla u) + \nu|\nabla u|^{p-2}\nabla u + \dfrac{\mu}{\tau}\nabla(u-u_0^\dagger)\Big) + \lambda(u-u_{\mathrm{org}}) = 0. \end{cases}$$

このとき, 問題 (E; $\alpha, u, u_0^\dagger)_\tau$ の解 $[\alpha_k, u_k] \in H_0^1(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega)$, $k=1,2$, は以下を満たす:

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{\kappa}{2} - 4\Big(1+\frac{p}{\nu}C_{u^0}\Big)^{\frac{2}{p}}(1+C_p)^2\Big(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}} + C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-1}}}\Big)^2|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}\Big)|\nabla(\alpha_1-\alpha_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2} \\ &+\Big(\frac{1}{\tau} - \frac{25}{\kappa\cdot(1\wedge\mu)}(1+C_p)^2\Big(1+\Big(\frac{p}{\nu}C_{u^0}\Big)^{\frac{2}{p}}\Big(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}}\Big)^2\Big)|\nabla\gamma|^2_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}\Big)\cdot \\ &\qquad\cdot\Big(|u_1-u_2|^2_{L^2(\Omega)} + \mu|\nabla(u_1-u_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}\Big) \le 0, \end{aligned} \tag{5}$$

ただし, $C_{u^0} := E(0,u^0)$ であり, $C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}}$, $C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-1}}}$ は Sobolev の埋め込み $H^1(\Omega)\subset L^{\frac{2p}{p-2}}$ および $H^1(\Omega)\subset L^{\frac{2p}{p-1}}$ による定数, C_p は Poincaré の不等式による定数を表す. したがって,

$$\begin{aligned} &\kappa > \kappa_1 := 8\Big(1+\frac{p}{\nu}C_{u^0}\Big)^{\frac{2}{p}}(1+C_p)^2\Big(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}} + C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-1}}}\Big)^2|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}, \\ &0<\tau<\tau_1 := \left(\frac{\kappa\cdot(1\wedge\mu)}{25(1+C_p)^2\big(1+\big(\frac{p}{\nu}C_{u^0}\big)^{\frac{2}{p}}\big(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}}\big)^2\big)|\nabla\gamma|^2_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}}\right)\wedge\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

に対して, 問題 (E; $\alpha, u, u_0^\dagger)_\tau$ の解は唯一つである.

補題 *1.* の証明 変分学の一般論 (cf. [2]) より, (E; $\alpha, u, u_0^\dagger)_\tau$ の解は以下の汎関数の最小元となる:

$$[y,z]\in[L^2(\Omega)]^2 \mapsto \Phi(y,z) := \begin{cases} \dfrac{\kappa}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla y|^2\,dx + \frac{\nu}{p}\int_\Omega|\nabla z|^p\,dx + \frac{1}{2\tau}\int_\Omega|z-u_0^\dagger|^2\,dx \\ \qquad + \dfrac{\mu}{2\tau}\displaystyle\int_\Omega|\nabla(z-u_0^\dagger)|^2\,dx + \int_\Omega\gamma(R(y)\nabla z)\,dx \\ \qquad + \dfrac{\lambda}{2}\displaystyle\int_\Omega|z-u_{\mathrm{org}}|^2\,dx, \ \text{if } [y,z]\in H_0^1(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega), \\ +\infty, \ \text{otherwise.} \end{cases}$$

さらに, 任意の $[y,z]\in[L^2(\Omega)]^2$ に対して,

$$\Phi(y,z) \ge \frac{\kappa}{2(C_p)^2}|y|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{4}|z|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{\lambda}{2}|u_{\mathrm{org}}|^2_{L^2(\Omega)},$$

であり, Φ は適正下半連続性を有するので, Φ の最小元が存在することがわかる.

ここで, 各 $i=1,\dots,m$ に対して, 以下の汎関数 Φ_i を定める.

$$[y,z]\in[L^2(\Omega)]^2 \mapsto \Phi_i(y,z) := \begin{cases} \dfrac{\kappa}{2}\displaystyle\int_\Omega |\nabla y|^2\,dx + \frac{\nu}{p}\int_\Omega|\nabla z|^p\,dx + \frac{1}{2\tau}\int_\Omega|z-u^{i-1}|^2\,dx \\ \qquad + \dfrac{\mu}{2\tau}\displaystyle\int_\Omega|\nabla(z-u^{i-1})|^2\,dx + \int_\Omega\gamma(R(y)\nabla z)\,dx \\ \qquad + \dfrac{\lambda}{2}\displaystyle\int_\Omega|z-u_{\mathrm{org}}|^2\,dx, \ \text{if } [y,z]\in H_0^1(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega), \\ +\infty, \ \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき, 各 $i=1,\dots,m$ に対し, $(\mathrm{AP})^\tau$ の解 $[\alpha^i,u^i]$ は Φ_i の最小元の 1 つになる. したがって,

$$\begin{aligned}E(\alpha^i,u^i)&\le\Phi_i(\alpha^i,u^i)\le\Phi_i(\alpha^{i-1},u^{i-1})=E(\alpha^{i-1},\alpha^{i-1})\\&\le\Phi_{i-1}(\alpha^{i-1},\alpha^{i-1})\le\cdots\le E(\alpha^1,u^1)\le\Phi_1(\alpha^1,u^1).\end{aligned}\tag{6}$$

さらに, 以下を得る.

$$\Phi_1(\alpha^1,u^1)\le\Phi_1(\alpha^0,u^0)=E(\alpha^0,u^0),\tag{7}$$

$$\Phi_1(\alpha^1,u^1)\le\Phi_1(0,u^0)=E(0,u^0)=C_{u^0}.\tag{8}$$

次に, $[\alpha_k,u_k]\in H^1_0(\Omega)\times W^{1,p}_0(\Omega)$ を問題 $(\mathrm{E};\,\alpha_k,u_k,u_0^\dagger)_\tau$, $k=1,2$, の解とする. このとき, $(\mathrm{E};\,\alpha_1,u_1,u_0^\dagger)_\tau$ と $(\mathrm{E};\,\alpha_2,u_2,u_0^\dagger)_\tau$ の各方程式同士を引き算し, (E1) の両辺に $(\alpha_1-\alpha_2)$ を掛け, (E2) の両辺に (u_1-u_2) を掛け, 2 つの式を足し合わせることで以下の不等式を得る:

$$\begin{aligned}&\kappa|\nabla(\alpha_1-\alpha_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}+\frac{1}{\tau}\big(|u_1-u_2|^2_{L^2(\Omega)}+\mu|\nabla(u_1-u_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}\big)\\&\quad+\lambda|u_1-u_2|^2_{L^2(\Omega)}+\nu\int_\Omega(|\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1-|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2)\cdot\nabla(u_1-u_2)\,dx\\&\quad+\int_\Omega\big(\nabla\gamma(R(\alpha_1)\nabla u_1)\cdot R(\alpha_1+\tfrac{\pi}{2})\nabla u_1-\nabla\gamma(R(\alpha_2)\nabla u_2)\cdot R(\alpha_2+\tfrac{\pi}{2})\nabla u_2\big)(\alpha_1-\alpha_2)\,dx\\&\quad+\int_\Omega\big({}^\top R(\alpha_1)\nabla\gamma(R(\alpha_1)\nabla u_1)-{}^\top R(\alpha_2)\nabla\gamma(R(\alpha_2)\nabla u_2)\big)\cdot\nabla(u_1-u_2)=0.\end{aligned}$$

また, 仮定 (A2) と Tartar の不等式 (cf. [4, Lemma 2.1]) より, 以下を得る.

$$\begin{aligned}&\kappa|\nabla(\alpha_1-\alpha_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}+\frac{1}{\tau}\Big(|u_1-u_2|^2_{L^2(\Omega)}+\mu|\nabla(u_1-u_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}\Big)\\&\le4|\nabla^2\gamma|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^{2\times2})}\int_\Omega|\nabla u_1|^2|\alpha_1-\alpha_2|^2\,dx\\&\quad+5|\nabla^2\gamma|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^{2\times2})}\int_\Omega|\nabla(u_1-u_2)||\nabla u_1||\alpha_1-\alpha_2|\,dx\\&\quad+4|\nabla\gamma|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}\int_\Omega|\nabla u_1||\alpha_1-\alpha_2|^2\,dx\\&\quad+5|\nabla\gamma|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}\int_\Omega|\nabla(u_1-u_2)||\alpha_1-\alpha_2|\,dx\\&\quad+|\nabla^2\gamma|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^{2\times2})}|\nabla(u_1-u_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}\\&=:I_1+I_2+I_3+I_4+|\nabla^2\gamma|_{L^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^{2\times2})}|\nabla(u_1-u_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}\end{aligned}\tag{9}$$

ここで, Hölder の不等式, Young の不等式, Poincaré の不等式, 2 次元の Sobolev の埋め込み $H^1(\Omega)\subset L^{\frac{2p}{p-2}}$, $H^1(\Omega)\subset L^{\frac{2p}{p-1}}$, (6), (8) より, (9) の I_j, $j=1,2,3,4$, は以下のように評価できる:

$$\begin{aligned}I_1&\le4|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\nabla u_1|^2_{[L^p(\Omega)]^2}|\alpha_1-\alpha_2|^2_{L^{\frac{2p}{p-2}}(\Omega)}\\&\le4\left(\frac{p}{\nu}C_{u^0}\right)^{\frac{2}{p}}(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}})^2|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\alpha_1-\alpha_2|^2_{H^1(\Omega)}\\&\le4\left(\frac{p}{\nu}C_{u^0}\right)^{\frac{2}{p}}(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}})^2(1+(C_p)^2)|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\nabla(\alpha_1-\alpha_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2},\end{aligned}\tag{10}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &\le 5|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\nabla(u_1-u_2)|_{[L^2(\Omega)]^2}|\nabla u_1|_{[L^p(\Omega)]^2}|\alpha_1-\alpha_2|_{L^{\frac{2p}{p-2}}(\Omega)}\\
&\le \frac{25}{\kappa}\left(\frac{p}{\nu}C_{u^0}\right)^{\frac{2}{p}}(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}})^2(1+C_p)^2|\nabla\gamma|^2_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\nabla(u_1-u_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}\\
&\qquad+\frac{\kappa}{4}|\nabla(\alpha_1-\alpha_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}, \qquad (11)\\
I_3 &\le 4|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\nabla u_1|_{[L^p(\Omega)]^2}|\alpha_1-\alpha_2|^2_{L^{\frac{2p}{p-1}}(\Omega)}\\
&\le 4\left(\frac{p}{\nu}C_{u^0}\right)^{\frac{1}{p}}(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-1}}})^2(1+(C_p)^2)|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\nabla(\alpha_1-\alpha_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}, \qquad (12)\\
I_4 &\le 5|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\nabla(u_1-u_2)|_{[L^2(\Omega)]^2}|\alpha_1-\alpha_2|_{L^2(\Omega)}\\
&\le \frac{25}{\kappa}(C_p)^2|\nabla\gamma|^2_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\nabla(u_1-u_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}+\frac{\kappa}{4}|\nabla(\alpha_1-\alpha_2)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}. \qquad (13)
\end{aligned}
$$

以上より, (9)–(13) を合わせることで不等式 (5) が得られる. □

定理 *1* の証明. 定理 1 は補題 1 からただちに得られる. 実際, 近似問題 $(\mathrm{AP})^\tau$ の解の存在と一意性については, 補題 1 において,

$$\tau_1 := \tau_0,\ \kappa_1 := \kappa_0,\ u_0^\dagger := u^{i-1},$$

とすれば, 一意解 $\{[\alpha^i, u^i]\}_{i=1}^m$ を得る.

次に, エネルギー不等式 (4) については, 補題 1 の (6) と (7) を組み合わせることで得られる. □

4.2 主定理の証明の概略.

近似問題 $(\mathrm{AP})^\tau$ の第 1 方程式において, α^i の式と α^{i-1} の式を引き算した式に $\frac{1}{\tau}(\alpha^i-\alpha^{i-1})$ をかける. このとき, 仮定 (A2), 定理 1, Hölder の不等式, Young の不等式, Poincaré の不等式, 2 次元の Sobolev の埋め込みを用いることで, 以下の評価を得る.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}\left(\frac{\kappa}{2}-\left(1+\frac{p}{\nu}C_{u^0}\right)^{\frac{2}{p}}(1+C_p)^2\left(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}}+C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-1}}}\right)^2|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}\right)|\nabla(\alpha^i-\alpha^{i-1})|^2_{[L^2(\Omega)]^2}\\
&\le \frac{1}{\tau}\cdot\frac{\left(1+(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}})^2(\frac{p}{\nu}C_{u^0})^{\frac{2}{p}}\right)(1+C_p)^2|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}}{\kappa\mu}\left(\mu|\nabla(u^i-u^{i-1})|^2_{[L^2(\Omega)]^2}\right). \qquad (14)
\end{aligned}
$$

また, 近似問題 $(\mathrm{AP})^\tau$ の第 2 方程式に (u^i-u^{i-1}) をかけることで, 以下の評価を得る.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\tau}|u^i-u^{i-1}|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{\mu}{2\tau}|\nabla(u^i-u^{i-1})|^2_{[L^2(\Omega)]^2}+\frac{\nu}{p}|u^i|^p_{[L^p(\Omega)]^2}+\frac{\lambda}{2}|u^i-u_{\mathrm{org}}|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\le \frac{\nu}{p}|u^{i-1}|^p_{[L^p(\Omega)]^2}+\frac{\lambda}{2}|u^{i-1}-u_{\mathrm{org}}|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{T}{2\mu}|\nabla\gamma|^2_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}|\Omega|, \qquad (15)
\end{aligned}
$$

ただし, $|\Omega|$ は $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ の Lebesgue 測度を表す. よって, (14) より,

$$\kappa_2 := 2\left(1+\frac{p}{\nu}C_{u^0}\right)^{\frac{2}{p}}(1+C_p)^2\left(C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-2}}}+C_{H^1}^{L^{\frac{2p}{p-1}}}\right)^2|\nabla\gamma|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2;\mathbb{R}^2)}$$

とすれば, 定理 1, (14), (15) より $\kappa>\max\{\kappa_0,\kappa_2\}$ に対して, 以下の有界性が得られる.

(B-1) $\{[\alpha]_\tau \mid \tau\in(0,\tau_0)\}$ は $W^{1,2}(0,T;H_0^1(\Omega))$ で有界,

(B-2) $\{[\overline{\alpha}]_\tau \mid \tau \in (0,\tau_0)\}$, $\{[\underline{\alpha}]_\tau \mid \tau \in (0,\tau_0)\}$ は $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ で有界,

(B-3) $\{[u]_\tau \mid \tau \in (0,\tau_0)\}$ は $L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap W^{1,2}(0,T;H_0^1(\Omega))$ で有界,

(B-4) $\{[\overline{u}]_\tau \mid \tau \in (0,\tau_0)\}$, $\{[\underline{u}]_\tau \mid \tau \in (0,\tau_0)\}$ は $L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ で有界,

(B-5) $\{\nabla\gamma(R([\overline{\alpha}]_\tau)\nabla[\overline{u}]_\tau) \mid \tau \in (0,\tau_0)\}$ は $L^\infty(Q;\mathbb{R}^2)$ で有界,

(B-6) 任意の $\tau \in (0,\tau_0)$ に対して, $t \in [0,T] \mapsto E([\overline{\alpha}]_\tau,[\overline{u}]_\tau) \in [0,\infty)$, $t \in [0,T] \mapsto E([\underline{\alpha}]_\tau,[\underline{u}]_\tau) \in [0,\infty)$ は非増加. さらに, $E(\alpha^0,u^0)$ は有界なので, $\{E([\overline{\alpha}]_\tau,[\overline{u}]_\tau), E([\underline{\alpha}]_\tau,[\underline{u}]_\tau) \mid \tau \in (0,\tau_0)\}$ は $BV(0,T)$ で有界.

上記を基に, システム (S) の可解性については, Aubin のコンパクト性定理 [5, Corollary 4] を用いることで得られる. また, エネルギー不等式 (3) については, エネルギーの収束の議論に, (B-6) および Helly の選出定理 [8, 定理 VIII. 19] による考察を加えることにより, 示すことができる.

次に, システム (S) の解の一意性の証明の概略を述べる. システム (S) の解の一意性を示すためには以下の不等式を導出することが鍵となる: ある正定数 $C_*, \widetilde{C} > 0$ が存在して

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}J(t) + (\kappa - \widetilde{C})|\nabla(\alpha_1-\alpha_2)(t)|^2_{[L^2(\Omega)]^2}\\ &\le C_*(1+|\nabla u_1(t)|_{[L^p(\Omega)]^2})^2 J(t),\ \text{a.e. } t\in(0,T),\end{aligned} \tag{16}$$

ただし,

$$J(t) := |(u_1-u_2)(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \mu|\nabla(u_1-u_2)(t)|^2_{[L^2(\Omega)]^2},\ \forall t\in[0,T].$$

であり, $[\alpha_k,u_k] \in [L^2(0,T;L^2(\Omega))]^2 (k=1,2)$ は初期条件 $u_1(0)=u_2(0)=u_0$ を満たすシステム (S) の解である. したがって, もし $\kappa > \max\{\kappa_0,\kappa_2,\widetilde{C}\}$ であれば, Gronwall の補題より, システム (S) の解が一意であることが得られる. この不等式の導出については, α_k に対する 2 つの変分等式の差を取り, $\varphi := (\alpha_1-\alpha_2)(t)$ として得られる不等式と, u_1 の変分不等式において $\psi := u_2(t)$, u_2 の変分不等式において $\psi := u_1(t)$ とし, 2 つの式を足し合わせることで得られる不等式の 2 つの不等式を足し合わせることで得られる.

最後に, $0 \le u \le 1$ in $\overline{Q}$ については, 比較原理を用いることで, [1] と同様に示すことができる. □

参考文献

[1] Harbir Antil, Daiki Mizuno, Ken Shirakawa, and Naotaka Ukai. A gradient system based on anisotropic monochrome image processing with orientation auto-adjustment. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 33(2):755–782, 2024.

[2] Viorel Barbu. *Nonlinear Differential Equations of Monotone Types in Banach Spaces.* Springer Monographs in Mathematics, Springer, New York, 2020.

[3] Benjamin Berkels, Martin Burger, Marc Droske, Oliver Nemitz, and Martin Rumpf. *Cartoon extraction based on anisotropic image classification.* SFB 611, 2006.

[4] V. L. Carbone, C. B. Gentile and K. Schiabel-Silva. Asymptotic properties in parabolic problems dominated by a p-Laplacian operator with localized large diffusion. *Nonlinear Anal.*, 74 (2011), 4002–4011.

[5] Jacques Simon. Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 146:65–96, 1987.

[6] 白川 健. 非等方性を考慮する画像処理問題の支配エネルギーに対する連続系勾配流. 日本数学会 2018 年度会 実函数論分科会 講演アブストラクト, pages 73–74, 2018.

[7] 鵜飼 直孝, 水野 大樹, 白川 健, and Harbir Antil. 画像処理問題における方位調整を考慮するエネルギー勾配流. 日本数学会 2024 年度年会 実函数論分科会 講演アブストラクト, pages 23–24, 2024.

[8] 辻 正次. 実函数論. 槙書店, 東京, 1962.

有限体積法による多孔質媒体中の二相流モデルの解析

日本女子大学大学院　理学研究科　数理・物性構造科学専攻
森村晃子 (Akiko MORIMURA) *

概要

筆者はこれまで多孔質媒体中の水分移動を記述する二相流モデルについて研究を進めてきた. このモデルは水と空気に対する質量保存則から得られる 2 本の拡散方程式からなり, それらの拡散係数は未知関数に依存する. 本稿ではこの方程式系に対し, 空隙内での空気密度が空気の含有率に比例するという仮定のもと, Robin 型境界条件を伴う初期値境界値問題を導出する. さらに, 有限体積法によって構成される近似解を用いて弱解の存在を示す. なお, 本稿は愛木豊彦教授 (日本女子大学) と荏原製作所との共同研究に基づく.

1　導入

多孔質媒体とはスポンジのように小さい孔が数多く空いている物質のことである. 多孔質媒体は構造が複雑であるため, その内部に水が浸透する場合, その流れは通常の媒体中 (パイプなど) とは異なる. この現象を記述する数理モデルは既にいくつか提案されている [2, 5, 11]. 本研究では多孔質媒体の一つであるレンガに水が浸透していく様子を表す偏微分方程式モデルを取り扱う.

Green–Dabiri–Weinaug–Prill [6] や Fukui–Iba–Hokoi–Ogura [3] は, レンガ内部の水の浸透と空気圧の関係を考えるために, 多孔質媒体内の孔の割合を表す空隙率と実験環境の温湿度は一定, なおかつ空間水平方向の変化は一様という仮定のもと, 以下の空間一次元の二相流モデルを提唱した.

$$\partial_t m_w(u) + \partial_x q_w = 0, \quad \partial_t m_a(u) + \partial_x q_a = 0, \tag{1}$$
$$q_w = -\lambda(\psi_w(u))\partial_x P_w, \quad q_a = -k(\psi_w(u))\partial_x P_a, \tag{2}$$
$$q_w(t,0) = 0, \quad q_a(t,0) = 0, \tag{3}$$
$$q_w(t,1) = C_w(P_w(t,1) - \hat{P}_w), \quad q_a(t,1) = C_a(P_a(t,1) - \hat{P}_a), \tag{4}$$
$$u(0,x) = u_0(x), \quad m_a(0,x) = m_{a0}(x), \tag{5}$$
$$P_a - P_w = -\rho_w u, \quad P_a = \rho_a RT, \quad \psi_w + \psi_a = \phi, \quad m_w = \rho_w \psi_w, \quad m_a = \rho_a \psi_a. \tag{6}$$

ここで, u は水分化学ポテンシャル; m_w, m_a は水と空気の質量; q_w, q_a は水と空気の流束; ψ_w, ψ_a は水と空気の含有率; λ, k は水と空気の拡散係数; P_w, P_a は水と空気の圧力; ρ_w, ρ_a は水と空気の密度を表す. ただし ρ_w は正定数であると仮定する. また, $R, T, \phi, C_w, \hat{P}_w, C_a, \hat{P}_a$ は正定数である.

この数理モデルの未知関数は水分化学ポテンシャル u と空気の質量 m_a である. 時間発展の支配方程式は質量保存則 (1) であり, 流束はダルシー則 (2) に従う. また, 含水率 ψ_w は以下の図 1 のグラフ

* E-mail: m1716096ma@ug.jwu.ac.jp

をもつ有界な関数である.

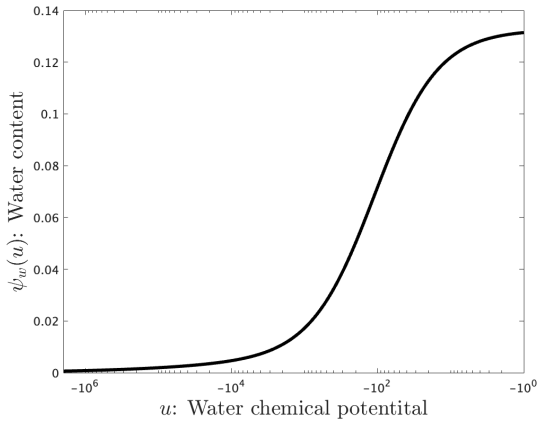


図 1　ψ_w のグラフ [3]

さらに, 水の拡散係数 λ は図 2 のグラフのような関数である. 一般的に, 多孔質媒体への液体浸透を考える際は図 3 のようなグラフで表される拡散係数を用いる. この拡散係数の特徴は, 含水率が少ない場合は小さい値をとり (青線), 含水率が多くなるにつれて急激に増加する (ピンク線) ことである. 水の拡散係数 λ を含水率 ψ_w の関数とみなすと, これは図 2, 3 と同様のグラフになる. このことから, 水の拡散方程式は多孔質媒体への水分浸透を記述することが期待される.

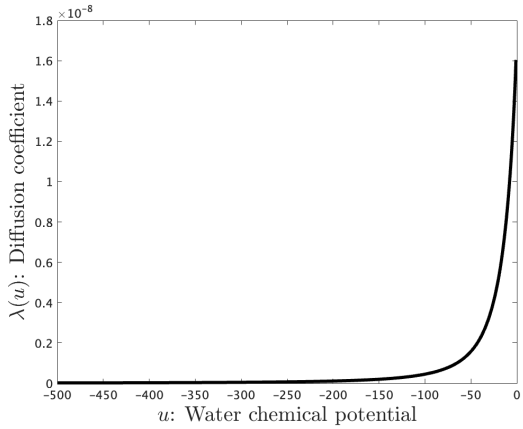


図 2　λ のグラフ ([3])

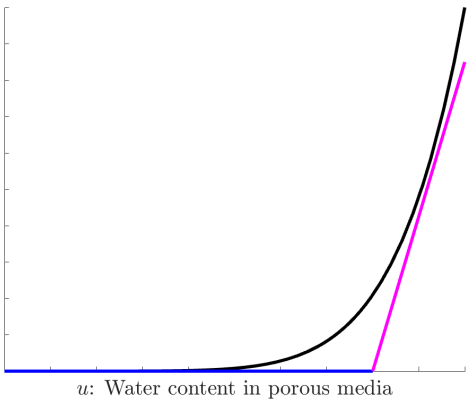


図 3　多孔質媒体内の液体浸透に関する拡散係数

境界条件はレンガ下面 $x = 0$ では流束が 0 (式 (3)), レンガ上面 $x = 1$ では流束が圧力差に比例する (式 (4)) と仮定している. また, 初期条件 (5) としてレンガが乾燥している状態を考えている. 他にも, 毛管圧の定義式や乾燥気体の状態方程式 (6) を与えている.

Fukui らの論文ではレンガ下面を断湿処理し, レンガ上面に水の層がある状態で水の浸透実験を行なっている.

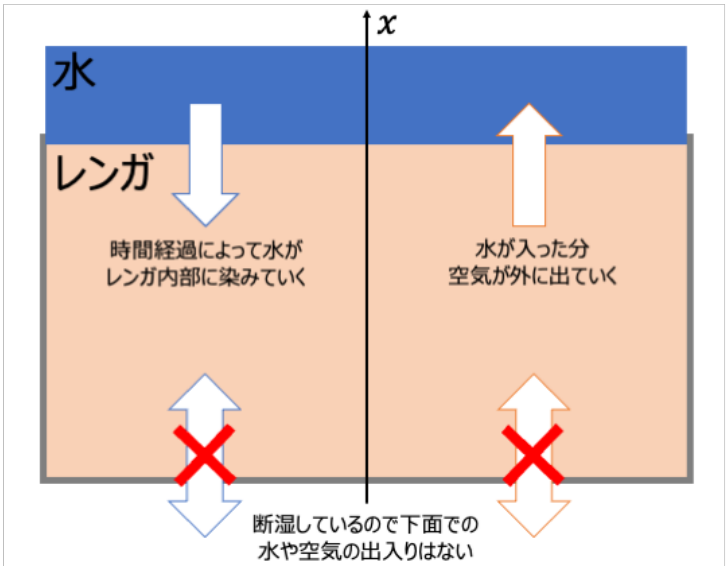


図 4　Fukui らの実験

さらにこの実験結果と数理モデル (1)–(6) の数値計算結果を比較し, 実験的立場からこの数理モデルの妥当性を示している. 一方, Fukui らの数理モデルに対する解の存在やその挙動といった数学的基礎理論は十分に整備されていないのが現状である.

本研究では, Fukui らの数理モデル (1)–(6) において, 空気密度が空気の含有率に比例する, つまり $\rho_a = \dfrac{\psi_a}{\phi}\rho_a^*$ (ρ_a^*: 最大空気密度) であると仮定し, ψ_w, λ, k を一般化した初期値境界値問題の数学的解析を行なった.

2　問題設定

以下の非線形拡散を持つ放物型偏微分方程式系の初期値境界値問題を考える.

$$
\begin{cases}
\partial_t f(u) = \partial_x(\lambda(f(u))(\partial_x u + C^*\partial_x v)), & \\
\partial_t g(v) = \partial_x(k(f(u))\partial_x v) & \text{in } Q(T) := (0,T)\times(0,1), \\
\partial_x u = 0,\ \partial_x v = 0 & \text{at } x = 0,\ t \in (0,T), \\
-\lambda(f(u))(\partial_x u + C^*\partial_x v) = \kappa_u^*(u - u_b^*), & \\
-k(f(u))\partial_x v = \kappa_v^*(v - v_b^*) & \text{at } x = 1,\ t \in (0,T), \\
u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x) & \text{for } x \in (0,1).
\end{cases}
\tag{P}
$$

ここで, $u, v : Q(T) \to \mathbb{R}$ は未知関数, $u_0, v_0 : (0,1) \to \mathbb{R}$ は既知関数, C^*, κ_v^* は非負の定数, u_b^*, κ_u^*, v_b^* は正定数である. また, $f, \lambda, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はある正定数 C_f, $C_{1\lambda}$, $C_{2\lambda}$, C_{1k}, C_{2k} に対して以下の仮定を満たす.

$f, \lambda, k \in C^1(\mathbb{R})$ であり, $\mathbb{R}$ 上で

$$
f \geq 0, \quad 0 \leq f' \leq C_f, \quad C_{1\lambda} \leq \lambda \leq C_{2\lambda}, \quad |\lambda'| \leq C_{2\lambda}, \quad C_{1k} \leq k \leq C_{2k}, \quad |k'| \leq C_{2k}.
$$

さらに, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$g(r) = ([r]^+)^2, \quad r \in \mathbb{R}$$

と定義する. ただし $[r]^+ = \max\{r, 0\}$ である.

問題 (P) は, Fukui らのモデルにおいて前節で述べた空気密度に関する物理的仮定を課し, 水分化学ポテンシャル u と空気の含有率 ψ_a を未知関数とすることで導出できる. また, 問題 (P) の u に関する方程式 (第一式) は楕円-放物型である. 楕円-放物型方程式とは時間退化する放物型方程式で, これまで [1, 7, 10] などで考察されている. 本研究における関数 f の代表例は図 1 をグラフにもつ含水率 ψ_w のような有界関数である. このような f は $\mathbb{R}$ で逆関数を持たないため, 未知関数の変換に基づく解析が極めて困難である. これは他の楕円-放物型方程式にも現れる大きな特徴の 1 つである. 本研究では, この困難を Robin 型境界条件を活用して得られる評価によって解消している.

筆者はこれまで多孔質媒体中の水分拡散のみに焦点を当てた方程式の数学的解析を行なってきた [8, 9]. そこでは非単調な境界条件をもつ初期値境界値問題に対し, 有限体積法による近似が有効であった. このような背景を踏まえ, 本研究では有限体積法によって構成される近似解を用いて問題 (P) の弱解の存在を示した.

3 主結果

問題 (P) の弱解を次のように定義する.

定義. $T > 0$ に対し $Q(T)$ 上の関数の組 (u, v) が次の条件を満たすとき, (u, v) を $[0, T]$ 上の (P) の弱解という: $u, v \in L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H^1(0, 1))$ であり, $\eta(T) = 0$ を満たす任意の $\eta \in W^{1,2}(0, T; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H^1(0, 1))$ に対して

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q(T)} f(u)\partial_t\eta dxdt + \int_{Q(T)} \lambda(f(u))(\partial_x u + C^*\partial_x v)\partial_x\eta dxdt + \int_0^T \kappa_u^*(u(t,1) - u_b^*)\eta(t,1)dt \\
&\qquad = \int_0^1 f(u_0)\eta(0,x)dx, \\
&-\int_{Q(T)} g(v)\partial_t\eta dxdt + \int_{Q(T)} k(f(u))\partial_x v\partial_x\eta dxdt + \int_0^T \kappa_v^*(v(t,1) - v_b^*)\eta(t,1)dt \\
&\qquad = \int_0^1 g(v_0)\eta(0,x)dx.
\end{aligned}$$

この定義のもと, 弱解の存在に関して次の定理が得られた.

主定理. $u_0 \in L^2(0, 1)$, $v_0 \in L^\infty(0, 1)$, $0 \le v_0 \le v_b^*$ とする. このとき, 任意の $T > 0$ に対し, $[0, T]$ 上の (P) の弱解 (u, v) が存在する. さらに, v は任意の $t \in [0, T]$ に対して $0 \le v(t) \le v_b^*$ を満たす.

論文 [8, 9] では f が狭義単調増加であることを仮定していたが, 本研究の主定理ではそれを仮定していないことに注意する. また, v の方程式の拡散係数 $k(f(u))$ は u に依存しているため, 正則性の観点から強解の存在を示すことは現状難しい.

4　有限体積法による空間離散化

有限体積法とは, 偏微分方程式の空間離散化手法の 1 つである [12]. 具体的な操作としては, 空間領域を小さいセル (コントロールボリューム) に分割し, 支配方程式の空間変数に関する積分形を各コントロールボリュームごとに離散近似する. これによって時間変数に関する常微分方程式系が得られる. 有限体積法の最大の特徴は, 各コントロールボリュームごとに保存則が成り立つことである. そのため, 質量や運動量, 熱量といった物理量が保存されるため, 熱流体解析において広く利用されている. 本研究の主定理の証明では有限体積法で得られた常微分方程式系の解を使って単関数列を構成し, 近似パラメータに関する一様評価を示すことが鍵となる.

離散化するための準備として関数 f, g を次の関数 $f_\varepsilon, g_\varepsilon$ でそれぞれ近似する.

$$f_\varepsilon(r) = f(r) + \varepsilon r, \quad g_\varepsilon(r) = g(r) + \varepsilon r, \quad r \in \mathbb{R}.$$

ただし, $0 < \varepsilon < 1$ である. また, g_ε^b を

$$g_\varepsilon^b(r) = \begin{cases} 2v_b^* r - v_b^{*2} + \varepsilon r, & r > v_b^*, \\ r^2 + \varepsilon r, & 0 \le r \le v_b^*, \\ \varepsilon r, & r < 0 \end{cases}$$

と定義する. 問題 (P) において f, g を $f_\varepsilon, g_\varepsilon$ に置き換えた問題を (P_ε), $f_\varepsilon, g_\varepsilon^b$ に置き換えた問題を $(\mathrm{P}_\varepsilon^b)$ とする. また, 領域 $(0,1)$ を n 等分し, 有限体積法によって $(\mathrm{P}_\varepsilon^b)$ を空間離散化して得られる常微分方程式系 (+ 適当な初期条件) を $(\mathrm{OP}_\varepsilon^b)^{(n)}$ とする.

$$f_\varepsilon'(u_i^{(n)})(u_i^{(n)})' = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta x}\lambda((f_\varepsilon(u))_{1+\frac{1}{2}})(\delta_x u_1^{(n)} + C^*\delta_x v_1^{(n)}) & \text{if } i = 1, \\ \dfrac{1}{\Delta x}\Bigg(\lambda((f_\varepsilon(u))_{i+\frac{1}{2}})(\delta_x u_i^{(n)} + C^*\delta_x v_i^{(n)}) & \\ \qquad -\lambda((f_\varepsilon(u))_{i-1+\frac{1}{2}})(\delta_x u_{i-1}^{(n)} + C^*\delta_x v_{i-1}^{(n)})\Bigg) & \text{if } 2 \le i \le n-1, \\ -\dfrac{1}{\Delta x}\Bigg(\kappa_u^*(u_n^{(n)} + C^* v_n^{(n)} - u_b^*) & \\ \qquad +\lambda((f_\varepsilon(u))_{n-1+\frac{1}{2}})(\delta_x u_{n-1}^{(n)} + C^*\delta_x v_{n-1}^{(n)})\Bigg) & \text{if } i = n, \end{cases}$$

$$g_\varepsilon'(v_i^{(n)})(v_i^{(n)})' = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta x}k((f_\varepsilon(v))_{1+\frac{1}{2}})\delta_x v_1^{(n)} & \text{if } i = 1, \\ \dfrac{1}{\Delta x}\Big(k((f_\varepsilon(u))_{i+\frac{1}{2}})\delta_x v_i^{(n)} - k((f_\varepsilon(u))_{i-1+\frac{1}{2}})\delta_x v_{i-1}^{(n)}\Big) & \text{if } 2 \le i \le n-1, \\ -\dfrac{1}{\Delta x}\Big(\kappa_v^*(v_n^{(n)} - v_b^*) + k((f_\varepsilon(u))_{n-1+\frac{1}{2}})\delta_x v_{n-1}^{(n)}\Big) & \text{if } i = n. \end{cases}$$

以下, $(\mathrm{OP}_\varepsilon^b)^{(n)}$ の導出過程を説明する. まず, Δx を空間分割幅, つまり $\Delta x = \dfrac{1}{n}$ とする. また, コントロールボリュームである区間 $[(i-1)\Delta x, i\Delta x]$ における u, v の近似値をそれぞれ

$$u \simeq u_i^{(n)}, \qquad v \simeq v_i^{(n)}$$

とする. さらに, 隣接する近似値 $w_{i-1}^{(n)},\ w_i^{(n)},\ w_{i+1}^{(n)}$ $(w=u,v)$ に対して

$$\delta_x w_i = \frac{w_i^{(n)} - w_{i-1}^{(n)}}{\Delta x}, \qquad w_{i+\frac{1}{2}} = \frac{w_i^{(n)} + w_{i+1}^{(n)}}{2},$$

と定義する. 次に問題 $(\mathrm{P}_\varepsilon^b)$ の u の方程式の両辺を区間 $[(i-1)\Delta x, i\Delta x]$ で積分する.

$$\int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \partial_t f(u)dx = \int_{(i-1)\Delta x}^{i\Delta x} \partial_x(\lambda(f(u))(\partial_x u + C^*\partial_x v))dx.$$

最後に, 拡散係数 $\lambda(f(u))$ については区間 $[(i-1)\Delta x, i\Delta x]$ において

$$\lambda(f(u)) \simeq \lambda((f(u))_{i+\frac{1}{2}}),$$

と近似し, 空間一階微分を中心差分近似することで $\{u_i^{(n)}\}_i$ の方程式が得られる. 同様にして, $\{v_i^{(n)}\}_i$ の方程式も導出することができる. このようにして得られる $(\mathrm{OP}_\varepsilon^b)^{(n)}$ の時間大域解の存在はピカールの定理より容易に示される.

5 主定理の証明

まず, $(\mathrm{OP}_\varepsilon^b)^{(n)}$ の解を $\{(u_i^{(n)}, v_i^{(n)})\}$, χ_i を $[(i-1)\Delta x, i\Delta x)$ の特性関数として,

$$u^{(n)}(t,x) = \sum_{i=1}^n \chi_i(x) u_i^{(n)}(t), \qquad v^{(n)}(t,x) = \sum_{i=1}^n \chi_i(x) v_i^{(n)}(t),$$

と定める. 問題 $(\mathrm{OP}_\varepsilon^b)^{(n)}$ の $v^{(n)}$ に関する式に $[-v^{(n)}]^+, [v^{(n)} - v_b^*]^+$ をそれぞれかけて積分すると以下の不等式が得られる.

$$0 \le v^{(n)} \le v_b^* \quad \text{a.e. on } Q(T). \tag{7}$$

よって

$$g_\varepsilon^b(v^{(n)}) = g_\varepsilon(v^{(n)}) = (v^{(n)})^2 + \varepsilon v^{(n)}$$

が成り立つ.

次に,

$$U^{(n)} = f_\varepsilon(u^{(n)}), \qquad V^{(n)} = g_\varepsilon(v^{(n)})$$

とおく. また, 空間に関する単関数 $w^{(n)}$ に対して, $\tilde{w}^{(n)}$ を以下のように定義する.

$$\tilde{w}^{(n)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \le x < \Delta x, \\ \dfrac{w^{(n)}(x) - w^{(n)}(x-\Delta x)}{\Delta x} & \text{if } \Delta x \le x \le 1. \end{cases}$$

問題 $(\mathrm{OP}_\varepsilon^b)^{(n)}$ の $u^{(n)}, v^{(n)}$ に関する方程式に $u^{(n)}, v^{(n)}$ をそれぞれかけて積分すると次の n, ε に関する一様評価が得られる: 任意の $t \in [0,T]$ に対して

$$|U^{(n)}(t)|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t |\tilde{u}^{(n)}(\tau)|_{L^2(0,1)}^2 d\tau + \int_0^t |u^{(n)}(\tau,1)|^2 d\tau \le C, \tag{8}$$

$$|V^{(n)}(t)|_{L^2(0,1)}^2 + \int_0^t |\tilde{v}^{(n)}(\tau)|_{L^2(0,1)}^2 d\tau \le C. \tag{9}$$

ただし, C は T に依存する. さらに, 次の補題を用いる.

補題 1. $w^{(n)}$ を $(0,1)$ 上の単関数とする. 次の不等式が成り立つ.

$$|w^{(n)}|^2_{L^2(0,1)} \le (|\tilde{w}^{(n)}|^2_{L^2(0,1)} + |w^{(n)}(1)|^2)^2.$$

補題 1 と (7), (8), (9) より, 任意の $t \in [0,T]$ に対して

$$\int_0^t |u^{(n)}(\tau)|^2_{L^2(0,1)} d\tau \le C,$$
$$\int_0^t |v^{(n)}(\tau)|^2_{L^2(0,1)} d\tau \le C.$$

また, $(\mathrm{OP}^b_\varepsilon)^{(n)}$ の $u^{(n)}, v^{(n)}$ に関する方程式に $\eta \in L^2(0,T;H^1(0,1))$ をかけて積分すると次の評価が得られる.

$$\left| \int_{Q(T)} \partial_t U^{(n)} \eta dxdt \right| \le C|\eta|_{L^2(0,T;H^1(0,1))},$$
$$\left| \int_{Q(T)} \partial_t V^{(n)} \eta dxdt \right| \le C|\eta|_{L^2(0,T;H^1(0,1))}.$$

次に, 以下の離散版 Aubin のコンパクト定理に相当する補題を用いて, 強収束部分列の存在を示す.

補題 2 ([4])**.** $Q(T)$ 上の関数 $z^{(n)}$ は空間変数に関して単関数とする. さらに, $\{z^{(n)}\}$ は $L^\infty(0,T;L^2(0,1))$ で有界, $\{\tilde{z}^{(n)}\}$ は $L^2(0,T;L^2(0,1))$ で有界, $\{z_t^{(n)}\}$ は $L^2(0,T;H^1(0,1)^*)$ で有界とする. このとき, $z^{(n_j)} \to z$ in $L^2(0,T;L^2(0,1))$ $(j \to \infty)$ となるような $\{z^{(n)}\}$ の部分列 $\{z^{(n_j)}\}$ と $z \in L^2(0,T;L^2(0,1))$ が存在する.

$\{U^{(n)}\}, \{V^{(n)}\}$ に対してこの補題 2 を適用すると $U^{(n_j)}$ が U に, $V^{(n_j)}$ が V に $L^2(0,T;L^2(0,1))$ で強収束する $\{U^{(n)}\}, \{V^{(n)}\}$ の部分列 $\{U^{(n_j)}\}, \{V^{(n_j)}\}$ と $U, V \in L^2(0,T;L^2(0,1))$ が得られる. この部分列の極限をとることで (P_ε) の弱解の存在が示せる. (P_ε) の解を $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ とすると, $u_\varepsilon, v_\varepsilon$ に関しても (n) 付きの評価と同様の評価が得られる. したがって, 連続版 Aubin のコンパクト定理と極大単調作用素の性質より, 部分列をとることで (P) の弱解の存在が示せる.

参考文献

[1] H. W. Alt, S. Luckhaus, *Quasi-linear elliptic-parabolic differential equations*, Math. Z., **183**(1983), pp. 311–341.

[2] The porous medium equation, Nonlinear diffusion problems, Lecture notes in mathematics, **1224**(1985), pp. 1–46.

[3] K. Fukui, C. Iba, S. Hokoi, D. Ogura, *Effect of air pressure on moisture transfer inside porous building materials*, J. Environ. Eng., AIJ, **83**(2018), pp. 39–47.

[4] T. Gallouët, J. C. Latché, *Compactness of discrete approximate solutions to parabolic PDEs - Application to a turbulence model*, Commun. Pure Appl. Anal., **11**(2012), pp. 2371–2391.

[5] C. Gavioli, P. Krejčí, *Phase transitions in porous media*, Nonlinear Differ. Equ. Appl., **29**(2022), 72.

[6] D. W. Green, H. Dabiri, C. F. Weinaug, R. Prill, *Numerical modeling of unsaturated groundwater flow and comparison of the model to a field experiment*, Water Resources Research, **6**(1970), pp. 862–874.

[7] N. Kenmochi, I. Pawlow, *A class of nonlinear elliptic-parabolic equations with time dependent constrains*, Nonlinear Anal. TMA., **10**(1986), pp. 1181–1202.

[8] A. Morimura, T. Aiki, *Solvability of the moisture transport model for porous materials*, Adv. Math. Sci. Appl., **33**(2024), pp. 501–524.

[9] A. Morimura, T. Aiki, *Convergence of approximate solutions constructed by the finite volume method for the moisture transport model in porous media*, in preparation.

[10] F. Otto, *L1-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations*, J. differ. equ. **131**(1996), pp. 20–38.

[11] A. Suzuki, Y. Niibori, S. A. Fomin, V. A. Chugunov, T. Hashida, *Analysis of Water Injection in Fractured Reservoirs Using a Fractional-Derivative-Based Mass and Heat Transfer Model*, Math. Geosci., **47**(2015), pp. 31–49.

[12] H. K. Versteeg, W. Malalasekera, 数値流体力学*:* 第 *2*版 , 丸善出版 (2007).

Supports of multi-microlocalizations with growth conditions

Department of Mathematics, Graduate School of Science, Hokkaido University
Ryosuke Sakamoto *

Abstract

We define the notions of strong regularity of subanalytic sheaves, and prove an estimation of supports of multi-microlocalizations for strongly regular subanalytic sheaves. We apply the results to the subanalytic sheaves of Whitney and temperate holomorphic solutions of regular $\mathcal{D}_X$-modules.

1 Introduction

Sato, Kawai and Kashiwara introduced a new method of analysis, algebraic analysis and microlocal analysis([3]). This theory concerns the microlocal properties of a function.

Kashiwara and Schapira developed the microlocal theory of sheaves([4]). They introduced the notion of the microsupport SS(F) for a sheaf F on a derived category of sheaves. This is a formalization of the singularity of a function using the theory of sheaves, and it is the collection of directions in which the cohomology of the sheaf F varies. This work provided a powerful new framework for studying singularities of solutions to differential equations.

On the other hand, important analytical objects such as asymptotically developable functions and tempered distributions do not form classical sheaves, therefore conventional methods cannot be applied. New concepts such as ind-sheaves and subanalytic sheaves have been introduced and studied to handle these objects([15, 8]). In [1], Honda, Prelli and Yamazaki constructed the theory of multi-microlocalizations of subanalytic sheaves along a certain family of submanifolds. Their framework allows us to handle multi-microlocal objects with growth conditions such as a sheaf of Majima's asymptotically developable functions functorially(see [10, 2]). In particular they obtained estimate of microsupport of multi-microlocalizations by that of a sheaf F. However their estimation is limited to usual sheaves. For this limitation, the multi-microlocalization under growth conditions is a difficult object to understand microlocally.

The notion of microsupport for ind-sheaves was defined in [6]. And its functorial properties was studied in [5]. In [9], Prelli obtained an estimate of supports of microlocalizations for subanalytic sheaves by means of the microsupport in terms of Kashiwara and Schapira([6]). After some study we found that it is necessary to strengthen the microlocal conditions to find the estimate of supports of multi-microlocalizations for subanalytic sheaves. In this article, we introduce the possible solutions to find an estimate of supports of multi-microlocalizations for subanalytic sheaves.

One of the possible solutions is introducing the notion of stronger regularity than that of Kashiwara and Schapira's notion introduced in [6]. In [5], Martins proved that the regularity of ind-sheaves has a nice relation with regular $\mathcal{D}$-modules along an involutive submanifold in the sense of Kashiwara and Oshima ([14]). We found that strengthening the regularity is still valid to have the good relation with the regular $\mathcal{D}$-modules. Applying this fact, we deduce some properties of multi-microlocal analytic objects including a Majima's strong asymptotically developable solution of regular $\mathcal{D}$-modules.

*E-mail:sakamoto.ryosuke.h0@elms.hokudai.ac.jp

1.1 Multi-microlocal analysis

In this section we recall some fundamental preliminaries. We basically follow the notations of [4] and [1].

For a sheaf F on a manifold X, one may associate a conic object $\nu_M(F)$ on the normal bundle T_MX along a closed submanifold M. We call this functor $\nu_M(F)$ a specialization along M. One may send a conic object on T_MX to the conormal bundle T^*_MX. This functor is called Fourier-Sato transformation and denoted by $(\bullet)^\wedge$. Combining these two functors we have a microlocalization functor $\mu_M := (\nu_M(\bullet))^\wedge$ along M. Moreover one can obtain multi-microlocalization $\mu_\chi := (\nu_\chi(\bullet))^\wedge$ along a family of closed manifolds χ with growth condtions(see [1] for details). By microlocalizations we may have the following distinguished triangle:

Theorem 1.1 (Sato triangle)**.** Let $F \in D^b(k_X)$.

$$F|_M \otimes or_{M/X}[-n] \to R\Gamma_M(F)|_M \to R\dot{\pi}_*\mu_M(F) \to +1$$

is a distinguished triangle here $\dot{\pi} : T^*_MX \setminus M \to M$.

Let X be a complex neighborhood of a manifold M.

Theorem 1.2 ([3])**.** We have $H^j(\mu_M(\mathcal{O}_X)) = 0$, $j \neq n$.

$C_M := H^n(\mu_M(\mathcal{O}_X)) \otimes or_{M/X}$ is a sheaf of microfunctions on M and $\mathcal{B}_M := H^n(R\Gamma_M(\mathcal{O}_X)|_M) \otimes or_{M/X}$ is a sheaf of Sato hyperfunctions on M.

By this theorem we obtain the following well-known Sato exact sequence:

$$0 \to \mathcal{A}_M \to \mathcal{B}_M \xrightarrow{sp} \dot{\pi}_*C_M \to 0,$$

where $\mathcal{A}_M$ is a sheaf of analytic functions on M.

Remark 1.3. Thus roughly speaking, $\mu_M(\mathcal{O}_X)$ measures the "non-analyticity" of Sato hyperfunctions. As the construction is functorial, this methodology is valid to analyze many analytical objects which form sheaves. However many of the classical analytic objects do not form a sheaf. Moreover the classical microlocal analysis is only valid to analyze the singularity along only one submanifold. To address this limitations, in [6], [9], [1], they obtained a generalized framework of the microlocal theory.

Theorem 1.4. Let $F \in D^b(k_{X_{sa}})$ be an object of the derived category of subanalytic sheaves. We have the following distinguished triangle:

$$\nu_\chi(F) \to \tau^{-1}R\Gamma_M(F) \otimes or_{M/X}[n] \to Rp^+_{1*}(p^+_2)^{-1}\mu_\chi(F) \otimes or_{M/X}[n] \xrightarrow{+1},$$

here for p^+, p^+ and τ we do not explain in details(see [1, Theorem 4.2]).

Example 1.5 (Majima's strongly asymptotically developable functions)**.** By applying the multi-specialization functor ν_χ along the family of normal crossing submanifolds χ to the subanalytic sheaf of Whitney holomorphic functions $\mathcal{O}^w$ we obtain a sheaf of Majima's strongly asymptotically developable functions which is defined in [10](see [2] for details).

We can define the functor $\mu hom_{\hat{\chi}}$, a variant of Sato's microlocalization functor(see [13]). We can obtain Sato triangle for the functor $\mu hom_{\hat{\chi}}$ (see [12]):

Theorem 1.6 (Sato triangle in multi-microlocalizations)**.** Let $\hat{\chi}$ be a family of submanifolds with certain condition. For $G_1, G_2, \ldots, G_\ell \in D^b_{\mathbb{R}\text{-}c}(k_X)$ and $F \in D^b(k_{X_{sa}})$, we have the following distinguished triangle:

$$\overset{\ell}{\underset{i=1}{\otimes}} D'G_i \otimes F \to \mathrm{R}\mathcal{H}om(\overset{\ell}{\underset{i=1}{\otimes}} G_i, F) \to R\dot{\pi}_*\mu\mathrm{hom}^{sa}_{\hat{\chi}}(G_1, \ldots, G_\ell; F) \xrightarrow{+1}.$$

2 Main Results: an estimation of supports of microlocalizations with growth conditions

Novelty: All the results in this section are newly obtained by the author.
All families of submanifolds are assumed to be normal crossing type.

2.1 normal crossing type $\chi = \{M_1, M_2\}$

Proposition 2.1. *Assume $F \in D^b(k_X)$.*

$$C_{\chi^*}(\mathrm{SS}(F)) \cap S^*_\chi = \overline{t_1 t_2\, \mathrm{SS}(F)} \cap T^*_{M_1}X \times_M T^*_{M_2}X$$

In particular, if $\mathrm{SS}(F)$ *is t_1, t_2-conic we have:*

$$C_{\chi^*}(\mathrm{SS}(F)) \cap S^*_\chi = \mathrm{SS}(F) \cap T^*_{M_1}X \times_M T^*_{M_2}X.$$

Proof. $(x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) \in C_{\chi^*}(\mathrm{SS}(F))$ then there exists sequence $(x_{1,n}, x_{2,n}; \xi_{1,n}, \xi_{2,n}) \in \mathrm{SS}(F)$ and $(t_{1,n}, t_{2,n}) \subset (\mathbb{R}^+)^2$ such that

$$(t_{1,n}x_{1,n}, t_{2,n}x_{2,n}; t_{2,n}\xi_{1,n}, t_{1,n}\xi_{2,n}) \to (x_1, x_2; \xi_1, \xi_2) \tag{1}$$

and $t_{1,n}, t_{2,n} \to \infty$. This gives the result. □

Definition 2.2 (strongly regular subanalytic sheaves)**.** We say $F \in D^b(k_{X_{sa}})$ is strongly regular along V if there exists a small filtrant system $\{F_i\}$ in $C^{[a,b]}(\mathrm{Mod}^c_{R-c}(k_X))$ with $\mathrm{SS}(F_i) \subset V$ such that F is quasi-isomorphic to $\varinjlim_i \rho_* F_i$ locally on X.

Theorem 2.3. *Let V be a subset in T^*X. Assume $F \in D^b(k_{X_{sa}})$ is strongly regular along V. Then*

$$\mathrm{supp}(\rho^{-1}\mu^{sa}_\chi F) \subset \overline{t_1 t_2 V}.$$

Proof. Let $p = (x; \xi) \notin \overline{t_1 t_2 V}$. By the strong regularity along V, there exist a small filtrant system $\{F_i\}$ in $C^{[a,b]}(\mathrm{Mod}^c_{\mathbb{R}-c}(k_X))$ with $\mathrm{SS}(F_i) \subset V$ such that F is quasi-isomorphic to $\varinjlim_i \rho_* F_i$ on a neighborhood W of x. And also we find a t_1, t_2-conic open neighborhood U of p such that $\overline{t_1 t_2 V} \cap U = \emptyset$ and $U \subset \pi^{-1}(W)$. We have:

$$H^k \mu^{sa}_\chi(F_W) \simeq \varinjlim_i H^k \rho_* \mu_\chi F_{iW}.$$

Then $\mu^{sa}_\chi(F)|_U = 0$ since $\mathrm{supp}(\mu_\chi F_i) \subset \overline{t_1 t_2\, \mathrm{SS}(F_i)} \subset \overline{t_1 t_2 V}$. □

Proposition 2.4. *Let $G_1, G_2 \in D^b_{\mathbb{R}-c}(k_X)$, $F \in D^b(k_{X_{sa}})$. Assume F is strongly regular along V. Let $\hat{\chi}$ be of a normal crossing type.*

$$\mathrm{supp}\, \mu hom_{\hat{\chi}}(G_1, G_2; F) \subset \overline{t_1 t_2 (\mathrm{SS}(G_1) \times \mathrm{SS}(G_2) \cap i_{\Delta\pi}{}^t i'^{-1}_\Delta V)}.$$

Proof. $\mathrm{R}\mathscr{H}om(p_2^{-1}(G_1 \boxtimes G_2), p_1^! R i_{\Delta *} F))$ is strongly regular along $\mathrm{SS}(G_1) \times \mathrm{SS}(G_2) \cap i_{\Delta\pi}{}^t i'^{-1}_\Delta V$. □

Proposition 2.5. *Let $G_1, G_2 \in D^b_{\mathbb{R}-c}(k_X)$, $F \in D^b(k_{X_{sa}})$. Assume F is strongly regular along V. Let $\hat{\chi}$ be of a normal crossing type. Suppose that* $\mathrm{SS}(G_1) \times \mathrm{SS}(G_2) \cap i_{\Delta\pi}{}^t i'^{-1}_\Delta V \subset T^*_X X \times T^*_X X$. *Then*

$$D'G_1 \otimes D'G_2 \otimes \rho^{-1}F \xrightarrow{\sim} \rho^{-1}\, \mathrm{R}\mathscr{H}om(G_1 \otimes G_2, F).$$

Proof. Use the distinguished triangle in Theorem 1.6. □

2.2 Solution of $\mathcal{D}$-modules in complex domains with growth conditions.

Let $\chi := \{Y_1, Y_2\}$ and assume each Y_i and $Y := \bigcap Y_i$ are complex submanifolds of X. As usual, let $\mathcal{D}_X$ be the sheaf of holomorphic differential operators on X. Assume that Y is non-characteristic for an involutive subbundle V in T^*X and $\mathcal{M}$ is a regular coherent $\mathcal{D}_X$-module along V.

Theorem 2.6. *If $\mathcal{M}$ is regular along an involutive vector subbundle V of T^*X, then* $\mathrm{Sol}^w(\mathcal{M}) := \mathrm{R}\mathcal{H}om(\rho_!\mathcal{M}, \mathcal{O}_X^w)$ *and* $\mathrm{Sol}^t(\mathcal{M}) := \mathrm{R}\mathcal{H}om(\rho_!\mathcal{M}, \mathcal{O}_X^t)$ *are strongly regular along V.*

Proof. We may assume $X = Z \times Y$, for some complex manifolds Z and Y, that f is the projection $X \to Y$ and that $V = X \times_Y T^*Y$. By [11, Lemma 3.6] we may also assume $\mathcal{M} = \mathcal{D}_{X\to Y}$. By [9, Corollary A.4.8], we have

$$f^{-1}\mathcal{O}_Y^w \simeq \mathrm{R}\mathcal{H}om(\rho_!\mathcal{D}_{X\to Y}, \mathcal{O}_X^w).$$

There exists a small filtrant system $\{F_i\} \in C^{[a,b]}(\mathrm{Mod}^c_{R-c}(k_X))$ so that $F := \mathcal{O}_Y^w$ is quasi isomorphic to $\varinjlim_i \rho_* F_i$. Then $f^{-1}F$ is quasi isomorphic to $\varinjlim_i \rho_* f^{-1}F_i$ locally on X and one has

$$\mathrm{SS}(f^{-1}F_i) \subset X \times_Y T^*Y, \text{ for all } i \in I.$$

It follows that $f^{-1}F$ is strongly regular along V.

For the case of $\mathrm{Sol}^t(\mathcal{M})$, the proof is similar([5, Proposition 3.8]). We may use [9, Corollary A.3.7] in this case. □

Corollary 2.7. *Let $F \in D^b(k_{X_{sa}})$. Assume F is strongly regular along V in T^*X. If $\dot{T}^*_{M_1}X \times_X \dot{T}^*_{M_2}X \cap \overline{t_1 t_2 V} = \emptyset$, then*

$$\nu_\chi(F) \xrightarrow{\sim} \tau^{-1}\rho^{-1}R\Gamma_M(F) \otimes \omega_{M/X}^{\otimes -1}.$$

Proof. By [1, Theorem 4.2] and Theorem 2.3, the result follows. □

Theorem 2.8. *Assume that Y is non-characteristic for an involutive subbundle V in T^*X and $\mathcal{M}$ is regular coherent $\mathcal{D}_X$-module along V. Then*

$$\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \nu_\chi(\mathcal{O}_X^\lambda)) \simeq \tau^{-1}\,\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(Df^*\mathcal{M}, \mathcal{O}_Y) \tag{2}$$

$$\simeq \tau^{-1} f^{-1}\,\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X), \tag{3}$$

where $\lambda = w$ or t.

Proof. By assumption, Y is non-characteristic for $\mathcal{M}$. By the non-characteristic condition and Cauchy-Kowaleskaya-Kashiwara theorem,

$$\tau^{-1}\,\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \rho^{-1}R\Gamma_Y(\mathcal{O}_X^\lambda)) \otimes \omega_{Y/X}^{\otimes -1} \simeq \tau^{-1} f^{-1}\,\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \tag{4}$$

and

$$\tau^{-1} f^{-1}\,\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X) \simeq \tau^{-1}\,\mathrm{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(Df^*\mathcal{M}, \mathcal{O}_Y). \tag{5}$$

Here we used [9, Proposition 5.3.8], [7, Theorem 3.1.1] and [7, Corollary 2.2.3].

Since $\mathrm{Sol}^\lambda(\mathcal{M})$ is strongly regular along V by Theorem 2.6, by Corollary 2.7 it is enough to check $\dot{T}^*_{M_1}X \times_X \dot{T}^*_{M_2}X \cap \overline{t_1 t_2 V} = \emptyset$. However almost the same fact was already checked in the proof of [1, Theorem 4.4]. □

References

[1] N. Honda and L. Prelli and S. Yamazaki, Multi-microlocalization and microsupport. Bull. Soc. Math. France 144 (2016), no. 3, 569-611. Zbl 1370.35023 MR 3558433

[2] N. Honda and L. Prelli, Multi-specialization and multi-asymptotic expansions, Adv. Math. **232** (2013), 432–498; MR2989990

[3] M. Sato and T. Kawai and M. Kashiwara, Microfunctions and pseudo-differential equations. In Hyperfunctions and pseudo-differential equations (Proc. Conf., Katata, 1971; dedicated to the memory of André Martineau), pp. 265-529, Lecture Notes in Math. 287, Springer, Berlin-New York, 1973. Zbl 0277.46039 MR 420735

[4] M. Kashiwara and P. Schapira, Sheaves on manifolds. Grundlehren Math. Wiss. 292, Springer-Verlag, Berlin, 1990. Zbl 0709.18001 MR 1074006

[5] Ana Rita Martins. Functorial properties of the microsupport and regularity for ind-sheaves. Mathetische Zeitschrift, 260 (2008), no. 3, 541-556.

[6] M. Kashiwara and P. Schapira, Microlocal study of ind-sheaves. I. Micro-support and regularity, Astérisque No. 284 (2003), 143–164; MR2003419

[7] Luca Prelli. Cauchy-Kowaleskaya-Kashiwara theorem with growth conditions. Math. Z., 265(1):115-124, 2010.

[8] L. Prelli, Sheaves on subanalytic sites, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **120** (2008), 167–216; MR2492657

[9] Luca Prelli. Microlocalization of subanalytic sheaves. Number 135 in Mémoires de la Société Mathématique de France. Société mathématique de France, 2013.

[10] H. Majima. Asymptotic Analysis for Integrable Connections with Irregular Singular Points. Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1984

[11] Kashiwara M. and Schapira P. and Fernandes, T. M. Microsupport and cauchy problem for temperate solutions of regular modules. Portugaliae Mathematica. Nova Seŕie, 58(4):485-504, 2001.

[12] R. Sakamoto. The stalk formula for multi-microlocal Hom functors and multi-microlocal Sato's triangle. 2024, 2411.19095, arXiv, `https://arxiv.org/abs/2411.19095`.

[13] N. Honda and L. Prelli, *μhom* and multi-microlocal operators. 2024, 2404.06123, arXiv, `https://arxiv.org/abs/2404.06123`

[14] Kashiwara,M.,Oshima,T. Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems. Ann. Math. 106, 145-200 (1977)

[15] M. Kashiwara and P. Schapira, Ind-sheaves, Astérisque No. 271 (2001), 136 pp.; MR1827714

非線形拡散を持つ Fokker-Planck 方程式における散逸関数の長時間挙動

日本大学大学院理工学研究科数学専攻博士後期課程 1 年
荒木　康太 (Kouta Araki) *

概要

非線形拡散を持つ Fokker-Planck 方程式をノイマン境界条件の下で考える．この方程式は，自由エネルギー，エネルギー則，および連続の方程式を基に構築された方程式である．エネルギー則によれば，自由エネルギーの減衰は散逸関数によって決定される．拡散係数が定数の場合，Carrillo-Jüngel-Markowich-Toscani-Unterreiter によって，散逸関数の長時間挙動および解の L^1 ノルムでの長時間挙動が研究されている．本講演では，拡散係数が定数でない場合について，散逸関数が指数減衰するための十分条件を考察する．

1　導入

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ を滑らかな境界を持つ有界凸領域，ν を $\partial\Omega$ 上の外向き単位法線ベクトル，$\alpha > 1$ を定数とする．以下の非線形 Fokker-Planck 方程式を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \nabla(\alpha d(x)\rho^{\alpha-1} + \phi(x))) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ \qquad\qquad \rho(x,\ 0) = \rho_0(x), \quad x \in \Omega, \\ \rho \nabla(\alpha d(x)\rho^{\alpha-1} + \phi(x)) \cdot \nu = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \quad t > 0. \end{cases} \tag{NFP}$$

ここで，$d = d(x)\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$，$\phi(x)\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$，$\rho_0\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は与えられた関数である．以下 $d, \phi \in C^2(\overline{\Omega})$ かつ，$\overline{\Omega}$ 上 $d, \rho_0 > 0$ であり，

$$\int_\Omega \rho_0 \, dx = 1 \tag{1}$$

を仮定する．(1) の仮定は (NFP) が確率微分方程式と関係があることに由来する．

$$\mu := \alpha d(x)\rho^{\alpha-1} + \phi(x) \tag{2}$$

とすると (NFP) は連続の方程式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \operatorname{div}(\rho \nabla \mu) = 0 \tag{3}$$

とかきかえられる．$\boldsymbol{u} := -\nabla\mu$ は速度場を表す．d が定数のとき，

$$\operatorname{div}(\rho \nabla(\alpha d \rho^{\alpha-1})) = (\alpha - 1) d \Delta \rho^\alpha = \operatorname{div}((\alpha - 1) d \nabla \rho^\alpha) \tag{4}$$

* E-mail:csku24001@g.nihon-u.ac.jp

が成り立つから (NFP) は多孔質媒質型の非線形拡散となる．他方，d が定数でないとき，(4) の 3 つの項はすべて異なる．連続の方程式は，質量保存則に関係のある重要な方程式の一つであることから，本研究では，連続の方程式を基礎にした非線形拡散を考察する．

Gauss の発散定理から以下が成り立つ．

補題 1.1. ρ は (NFP) の正値な古典解とする．このとき，

$$\int_\Omega \rho_0 \, dx = \int_\Omega \rho \, dx = 1 \tag{5}$$

となる．

次に自由エネルギーを

$$\mathscr{F}[\rho](t) := \int_\Omega (d(x)\rho^\alpha + \rho\phi(x)) \, dx$$

と定義する．(NFP) と部分積分により

命題 1.2. ρ は (NFP) の正値な古典解とすると

$$\frac{d}{dt}\mathscr{F}[\rho](t) = -\int_\Omega |\nabla\mu|^2 \rho \, dx =: -\mathscr{D}[\rho](t) \le 0 \tag{6}$$

が成り立つ．

ここで定義された $\mathscr{D}[\rho](t)$ は自由エネルギーの散逸関数と呼ばれる．(6) を両辺 $t \in [0,T]$ で積分すると，以下の積分型のエネルギー則

$$\mathscr{F}[\rho](T) + \int_0^T \int_\Omega |\boldsymbol{u}|^2 \rho \, dxdt = \mathscr{F}[\rho](0) \tag{7}$$

が成り立つ．ここで，$\mathscr{F}[\rho](0)$ が上に有界とする．このとき，$T \to \infty$ としたとき，左辺の 2 項目の広義積分が収束するため，ある単調増加な点列 $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ が存在して，

$$t_j \to \infty, \qquad \int_\Omega |\nabla\mu|^2 \rho \, dx \to 0, \quad j \to \infty \tag{8}$$

が成り立つ．本稿では，

$$\int_\Omega |\nabla\mu|^2 \rho \, dx \to 0, \quad t \to \infty \tag{9}$$

が成り立つための条件を考察する．d が定数で，ϕ が強凸関数のとき，[5, 1] のエントロピー消散法によれば (9) の指数オーダーでの収束並びに ρ の L^1 ノルムの長時間挙動が研究されている．他方 $\alpha = 1$ に対する (NFP) の問題は $\rho^{\alpha-1}$ を $\log\rho$ に変えた問題，すなわち

$$\rho_t - \mathrm{div}(\rho\nabla(d(x)\log\rho + \phi(x))) = 0$$

を考えることになる． d が定数の時は線形拡散となり，エントロピー消散法が有効である [5]．一方 d が定数でないとき，[2] で (7) をみたす方程式の導出と周期境界条件における (9) が考察されている．d が x の関数，すなわち不均一な拡散をもつ Fokker-Planck 方程式においては，

$$\rho\nabla(d\log\rho + \phi) = d\nabla\rho + \rho\log\rho\nabla d + \rho\nabla\phi$$

となるから，$\alpha = 1$ であっても非線形方程式になることに注意する．本講演では $\alpha > 1$ の場合，すなわち，多孔質媒質型の非線形拡散において (9) が指数オーダーで収束するための d の条件を ρ が (NFP) の $\overline{\Omega}$ 上正値で有界な古典解である仮定の下で導出する．

定理 1.3. $n = 1, 2, 3$ と仮定する．ある正の定数 $\lambda > 0$ が存在して，$\nabla^2\phi \geq \lambda I$ が成り立つとする．ここで I は単位行列，$\nabla^2\phi$ は ϕ の *Hesse* 行列である．$\nabla d, \nabla\phi$ は有界とする．ρ はある正の定数 C_1, $C_2 > 0$ が存在して，

$$C_1 \leq \rho \leq C_2 \tag{10}$$

を満たす時間大域的古典解とする．このとき，ある正の定数 C_3，C_4，$C_5 > 0$ が存在して

$$d(x) \geq C_3, \quad \int_\Omega |\nabla\mu(x,0)|^2\rho_0\,dx \leq C_4 \tag{11}$$

が成り立つならば，

$$\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx \leq C_5 e^{-\lambda t}, \qquad t > 0 \tag{12}$$

が成り立つ．

注意 1.4. 定理 *1.3* から，

$$\nabla\mu \to 0 \quad in \quad L^2(\Omega)$$

が得られる．

定理 1.3 では d を大きくとる必要がある．しかし，C_1，C_2 は一般に d に依存する．そのため，C_1，C_2 が d にどのように依存するかを調べる必要がある．また，(NFP) は

$$\mathrm{div}(\alpha(\alpha-1)d(x)\rho^{\alpha-1}\nabla\rho)$$

の項が存在するため，退化型拡散方程式となる．熱方程式とは異なり，$\rho_0 \geq 0$ であっても，(NFP) の解の正値性は一般には成り立たないことが知られている．我々は μ に関する方程式を考察することで次の結果を得た．

定理 1.5. ρ を (NFP) の時間大域的古典解とする．$\alpha d\rho_0^{\alpha-1} > \max_{y\in\overline{\Omega}}\phi(y) - \phi$ が成り立つとき，

$$C_1 \leq \rho \leq C_2 \tag{13}$$

が成り立つ．ただし，C_1，C_2 は

$$C_1 = \left(\frac{\min_{y\in\overline{\Omega}}(\alpha d(y)\rho_0^{\alpha-1}(y) + \phi(y)) - \max_{y\in\overline{\Omega}}\phi(y)}{\alpha\max_{y\in\overline{\Omega}}d(y)}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}},$$

$$C_2 = \left(\frac{\max_{y\in\overline{\Omega}}(\alpha d(y)\rho_0^{\alpha-1}(y) + \phi(y)) - \min_{y\in\overline{\Omega}}\phi(y)}{\alpha\min_{y\in\overline{\Omega}}d(y)}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

で与えられる正の定数である．

注意 1.6. ある正の定数 C が存在して

$$\frac{\min_{y\in\overline{\Omega}} d(y)}{\max_{y\in\overline{\Omega}} d(y)} > C$$

を仮定すれば,

$$C_1 \geq \left(C \min_{y\in\overline{\Omega}} \rho_0^{\alpha-1}(y) + \frac{\min_{y\in\overline{\Omega}} \phi(y) - \max_{y\in\overline{\Omega}} \phi(y)}{\alpha \max_{y\in\overline{\Omega}} d(y)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$$

が成り立つ．d を大きくとることによって $C_1 > 0$ となる．同様に C_2 の d に関しての有界性も得られる．

2 主定理の証明

2.1 定理 1.3 の証明

$\mathscr{F}$ の t での 2 階導関数を $\mathscr{F}$ の t に関する 1 階導関数で下から評価する．そして，Gronwall 型の不等式を導き，指数減衰を示す．[5] の計算を参考にすると以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{F}[\rho](t) &= 2\int_\Omega (\nabla\mu\cdot\nabla^2\phi\nabla\mu)\rho\,dx + 2(\alpha-1)\int_\Omega d(x)|\nabla^2\mu|^2\rho^\alpha\,dx \\
&\quad + 2(\alpha-1)^2\int_\Omega d(x)(\Delta\mu)^2\rho^\alpha\,dx - (\alpha-1)\int_{\partial\Omega} d(x)\rho^\alpha\nabla|\nabla\mu|^2\cdot\nu\,d\sigma \\
&\quad - \int_\Omega (\nabla d(x)\cdot\nabla^2\mu\nabla\mu)\rho^\alpha\,dx - 2(2\alpha-1)\int_\Omega (\nabla d(x)\cdot\nabla\mu)\Delta\mu\rho^\alpha\,dx \\
&\quad - 2\alpha\int_\Omega (\nabla d(x)\cdot\nabla\mu)(\nabla\rho\cdot\nabla\mu)\rho^{\alpha-1}\,dx \\
&=: 2I_1 + 2(\alpha-1)I_2 + 2(\alpha-1)^2 I_3 - (\alpha-1)I_4 - I_5 - 2(2\alpha-1)I_6 - 2\alpha I_7.
\end{aligned} \tag{14}$$

Ω が有界凸領域であることと Neumann 境界条件から $I_4 \leq 0$ がなりたつ．また，定理 1.3 の $\nabla^2\phi \geq \lambda I$ 仮定から,

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{F}[\rho](t) \geq 2\lambda\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx + 2(\alpha-1)I_2 + 2(\alpha-1)^2 I_3 - I_5 - 2(2\alpha-1)I_6 - 2\alpha I_7 \tag{15}$$

が成り立つ．d が x に依存する関数なので [5] と違い，I_5，I_6，I_7 の項が現れる．これを処理するために，以下の補題を用意する．

補題 2.1. ρ は (NFP) の有界で正値な時間大域的古典解とする．任意の $\delta_1 > 0$ に対して

$$\int_\Omega (\nabla d(x)\cdot\nabla^2\mu\nabla\mu)\rho^\alpha\,dx \leq \frac{\|\nabla d\|_\infty\|\rho^{\alpha-1}\|_\infty}{4\delta_1\min_{x\in\Omega} d(x)}\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx + \delta_1\|\nabla d\|_\infty\int_\Omega d(x)|\nabla^2\mu|^2\rho^\alpha\,dx$$

が成り立つ.

証明. $\rho > 0$ であることから，積分の三角不等式より以下が成り立つ.

$$\int_\Omega (\nabla d(x)\cdot\nabla^2\mu\nabla\mu)\rho^\alpha\,dx \leq \int_\Omega |(\nabla d(x)\cdot\nabla^2\mu\nabla\mu)|\rho^\alpha\,dx \leq \int_\Omega |\nabla d(x)||\nabla^2\mu||\nabla\mu|\rho^\alpha\,dx.$$

Hölder の不等式と Young の不等式から任意の $\delta_1 > 0$ に対して以下が成り立つ.

$$\int_\Omega |\nabla d(x)||\nabla^2\mu||\nabla\mu|\rho^\alpha\,dx \le \frac{1}{4\delta_1}\int_\Omega \frac{1}{d(x)}|\nabla d(x)||\nabla\mu|^2\rho^\alpha\,dx + \delta_1\int_\Omega |\nabla d(x)|d(x)|\nabla^2\mu|^2\rho^\alpha\,dx.$$

$d(x) > 0$ かつ，$\nabla d(x)$，ρ は有界であるから，

$$\int_\Omega \frac{1}{d(x)}|\nabla d(x)||\nabla\mu|^2\rho^\alpha\,dx \le \frac{\|\nabla d(x)\|_\infty\|\rho^{\alpha-1}\|_\infty}{\min_{x\in\Omega} d(x)}\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx,$$
$$\int_\Omega |\nabla d(x)|d(x)|\nabla^2\mu|\rho^\alpha\,dx \le \|\nabla d(x)\|_\infty\int_\Omega d(x)|\nabla^2\mu|^2\rho^\alpha\,dx$$

が成り立つ．まとめると，

$$\int_\Omega (\nabla d(x)\cdot\nabla^2\mu\nabla\mu)\rho^\alpha\,dx \le \frac{\|\nabla d(x)\|_\infty\|\rho^{\alpha-1}\|_\infty}{4\delta_1\min_{x\in\Omega} d(x)}\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx + \delta_1\|\nabla d(x)\|_\infty\int_\Omega d(x)|\nabla^2\mu|^2\rho^\alpha\,dx$$

が得られる． □

(2.1) より

$$|I_5| \le \frac{\|\nabla d\|_\infty\|\rho^{\alpha-1}\|_\infty}{4\delta_1\min_{x\in\Omega} d(x)}\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx + \delta_1\|\nabla d\|_\infty I_2$$

となるから δ_1 を $\delta_1\|\nabla d\|_\infty = (\alpha-1)$ を満たすように十分小さくとることで

$$2(\alpha-1)I_2 - I_5 \ge (\alpha-1)I_2 - \frac{\|\nabla d\|_\infty^2\|\rho^{\alpha-1}\|_\infty}{4(\alpha-1)\min_{x\in\Omega} d(x)}\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx \tag{16}$$

となる．I_6 の積分について，非負値の $2(\alpha-1)^2 I_3$ の項を用いて同様に計算することで

$$2(\alpha-1)^2 I_3 - 2(2\alpha-1)I_6 \ge -\frac{(2\alpha-1)\|\nabla d\|_\infty^2\|\rho^{\alpha-1}\|_\infty}{4(\alpha-1)^2\min_{x\in\Omega} d(x)}\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx \tag{17}$$

とできる．I_7 は $\nabla\rho$ を含む，$\mu = \alpha d(x)\rho^{\alpha-1} + \phi(x)$ であるから，$\nabla\mu$ には $\nabla\rho$ の項が現れる．$\nabla d(x)$，$\nabla\phi(x)$ が有界，$d(x)$ が有界な正値関数であることを用いると，I_7 は以下のように下から評価される．

補題 2.2. ρ を (NFP) の正値で有界な時間大域的古典解，∇d と $\nabla\phi$ は有界な関数，$d(x)$ は有界な正値関数とする．このとき，

$$\begin{aligned}-2\alpha\int_\Omega (\nabla d(x)\cdot\nabla\mu)(\nabla\rho\cdot\nabla\mu)\rho^{\alpha-1}\,dx \ge &-\frac{2\|\nabla d\|_\infty}{(\alpha-1)\min_{x\in\Omega} d(x)}\int_\Omega |\nabla\mu|^3\rho\,dx\\ &-\frac{2\|\nabla d\|_\infty\|\nabla\phi\|_\infty}{(\alpha-1)\min_{x\in\Omega} d(x)}\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx\end{aligned} \tag{18}$$

が成り立つ．

I_7 に現れる $|\nabla\mu|^3$ の項を扱うために，次の Sobolev-Poincare 型の不等式を考える．

命題 2.3 (Sobolev-Poincare 型の不等式)**.** ρ を (NFP) の $\overline{\Omega}$ 上の正値で有界な時間大域的古典解とする．*Sobolev* 指数 $p*$ を $n \ge 3$ のときは $\frac{1}{p*} := \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$，$n = 1, 2$ のときは $1 \le p* < \infty$ とする．このとき，ある正の定数 $C_6 > 0$ が存在して，ベクトル場 $\boldsymbol{v} \in C^1(\Omega)$ に対して以下が成り立つ．

$$\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v} - \overline{\boldsymbol{v}}|^{p*}\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p*}} \le C_6\left(\int_\Omega |\nabla\boldsymbol{v}|^2\rho\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

ここで，$\overline{\boldsymbol{v}}$ は積分平均とする．

証明. $p*$ が Sobolev 指数であることから Sobolev-Poincare 不等式より ([4, p.174], [6, Theorem4.3])

$$\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}-\overline{\boldsymbol{v}}|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \le C_7\left(\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つことに注意する．$C_1 < \rho < C_2$ と，[4, p.174] と [6, Theorem4.3] を組み合わせると

$$\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}-\overline{\boldsymbol{v}}|^{p^*}\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \le C_2^{\frac{1}{p^*}}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}-\overline{\boldsymbol{v}}|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \le C_2^{\frac{1}{p^*}}C_7\left(\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{C_2^{\frac{1}{p^*}}C_7}{C_1^{\frac{1}{2}}}\left(\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2\rho\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

が得られる．$C_6 := \frac{C_2^{\frac{1}{p^*}}C_7}{\sqrt{C_1}}$ とすればよい． □

Sobolev-Poincare 型不等式から，次の補間不等式を示す．

命題 2.4. $n = 1, 2, 3$ のとする，ρ は (NFP) の $\overline{\Omega}$ 上の正値で有界な時間大域的古典解とする．ある定数 C_8，C_9，$C_{10} > 0$ が存在してベクトル場 $\boldsymbol{v} \in C^1(\Omega)$ に対して

$$\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^3\rho\,dx \le C_8\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2\rho\,dx + C_9\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2\rho\,dx\right)^3 + C_{10}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2\rho\,dx\right)^{\frac{3}{2}}$$

が成り立つ．

証明. $a + b = 1$ となる $a, b > 0$ に対して，$p > 1$ の dual index を p' とする．Hölder の不等式から，

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^3\rho\,dx &\le \left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^{3ap}\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^{3bp'}\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &= \left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}-\overline{\boldsymbol{v}}+\overline{\boldsymbol{v}}|^{3ap}\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^{3bp'}\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \qquad (19)\\ &\le 2^{\frac{3a-1}{p}}\left(\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}-\overline{\boldsymbol{v}}|^{3ap}\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |\overline{\boldsymbol{v}}|^{3ap}\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\right)\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^{3bp'}\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}\end{aligned}$$

が成り立つ．(19) の右辺の 1 項目を考える．$3ap = p*$ が成り立つと仮定する．このとき，命題 2.3 から，

$$\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}-\overline{\boldsymbol{v}}|^{3ap}\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C_6^{\frac{p^*}{p}}\left(\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2\rho\,dx\right)^{\frac{p^*}{2p}}.$$

ここで，$3bp' = 2$，$\frac{p^*}{2p} < 1$ が成り立つと仮定する．このとき，Young の不等式から

$$\left(\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2\rho\,dx\right)^{\frac{p^*}{2p}}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \le \frac{p*}{2p}\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2\rho\,dx + \left(1-\frac{p*}{2p}\right)\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p'}\left(1-\frac{p^*}{2p}\right)^{-1}}.$$

次に (19) の右辺の 2 項目を考える．Ω は有界領域で ρ は正値で有界であるため，Hölder の不等式から

$$\left(\int_\Omega |\overline{\boldsymbol{v}}|^{p^*}\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = |\overline{\boldsymbol{v}}|^{\frac{p^*}{p}} \le \left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |\boldsymbol{v}|\,dx\right)^{\frac{p^*}{p}} \le \left(\frac{1}{|\Omega|C_1}\int_\Omega |\boldsymbol{v}|\rho\,dx\right)^{\frac{p^*}{p}} \le \left(\frac{1}{|\Omega|C_1}\right)^{\frac{p^*}{p}}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2\rho\,dx\right)^{\frac{p^*}{2p}}$$

が成り立つ．よって (19) に代入すると

$$\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^3\rho\,dx \le 2^{\frac{3a-1}{p}} C_6^{\frac{p*}{p}} \frac{p*}{2p}\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2\rho\,dx + 2^{\frac{3a-1}{p}} C_6^{\frac{p*}{p}} \left(1-\frac{p*}{2p}\right)\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p'}\left(1-\frac{p*}{2p}\right)^{-1}}$$
$$+ 2^{\frac{3a-1}{p}} \left(\frac{1}{|\Omega|C_1}\right)^{\frac{p*}{p}} \left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2\rho\,dx\right)^{\frac{p*}{2p}} \left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2\rho\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$

が得られる．それぞれの条件を整理すると，$n \ge 3$ のとき，

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{3a}{p*} + \frac{3b}{2} = \frac{3a}{2} - \frac{3a}{n} + \frac{3b}{2}$$

から，$a = \dfrac{n}{6}$ が得られる．$\frac{p*}{2p} < 1$ より，$n < 4$ となる．

$n = 1, 2$ のとき，$2 \le p* < \infty$ から $p* = 6$ とおけばよい．この時，$a = b = \dfrac{1}{2}$ となることから，

$$a = b = \frac{1}{2}, \quad 3bp' = 2 \Leftrightarrow p' = \frac{4}{3}, \quad p = 4, \quad p* = 6, \quad \frac{1}{p'}\left(1-\frac{p*}{2p}\right)^{-1} = 3$$

となる．

$$\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^3\rho\,dx \le 2^{\frac{1}{8}} C_6^{\frac{3}{2}} \frac{3}{4}\int_\Omega |\nabla \boldsymbol{v}|^2\rho\,dx + 2^{\frac{1}{8}} C_6^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4}\left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2\rho\,dx\right)^3 + 2^{\frac{1}{8}} \left(\frac{1}{|\Omega|C_1}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2\rho\,dx\right)^{\frac{3}{2}}$$

が成り立つ． □

これらをまとめると以下が成り立つ．

補題 2.5. ρ は (NFP) の正値で有界な古典解とする．このとき，$\|\nabla d\|_\infty$，$\|\nabla\phi\|_\infty$，$\|\rho^{\alpha-1}\|_\infty$ に依存する定数 C_{11}，C_{12}，C_{13}，$C_{14} > 0$ が存在して以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{F}[\rho](t) \ge{}& \left(2\lambda - \frac{C_{11}}{\min_{x\in\Omega} d(x)}\right)\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx + \left((\alpha-1) - \frac{C_{12}}{\min_{x\in\Omega} d(x)}\right) I_2 \\ &- \frac{C_{13}}{\min_{x\in\Omega} d(x)}\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx\right)^3 - \frac{C_{14}}{\min_{x\in\Omega} d(x)}\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx\right)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned} \tag{20}$$

証明. (16)，(17)，補題 2.2 から，ρ の t での 2 階導関数は以下のように評価できる．

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{F}[\rho](t) \ge{}& \left(2\lambda - \frac{C_{11}}{\min_{x\in\Omega} d(x)}\right)\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx + (\alpha-1)I_2 \\ &- \frac{2\|\nabla d\|_\infty}{(\alpha-1)\min_{x\in\Omega} d(x)}\int_\Omega |\nabla\mu|^3\rho\,dx.\end{aligned} \tag{21}$$

補題 2.4 から

$$\int_\Omega |\nabla\mu|^3\rho\,dx \le C_8 I_2 + C_9\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx\right)^3 + C_{10}\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx\right)^{\frac{3}{2}}$$

が得られる．よってまとめると C_{12}，C_{13}，$C_{14} > 0$ を用いて

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{F}[\rho](t) \ge{}& \left(2\lambda - \frac{C_{11}}{\min_{x\in\Omega} d(x)}\right)\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx + \left((\alpha-1) - \frac{C_{12}}{\min_{x\in\Omega} d(x)}\right) I_2 \\ &- \frac{C_{13}}{\min_{x\in\Omega} d(x)}\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx\right)^3 - \frac{C_{14}}{\min_{x\in\Omega} d(x)}\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx\right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

が得られる．□

補題 2.6. ρ は (NFP) の正値で有界な時間大域的古典解，このとき，$d(x) > C_3$ とすると，ある定数 C_{13}，$C_{14} > 0$ に対して以下が成り立つ．

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{F}[\rho](t) \geq \lambda \int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx - C_{13}\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx\right)^{\frac{3}{2}} - C_{14}\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx\right)^3.$$

証明. (20) から，

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{F}[\rho](t) \geq \left(2\lambda - \frac{C_{11}}{C_3}\right)\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx + \left((\alpha-1) - \frac{C_{12}}{C_3}\right)I_2 \\ - \frac{C_{13}}{C_3}\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx\right)^3 - \frac{C_{14}}{C_3}\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx\right)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

が得られる．

$$\left(2\lambda - \frac{C_{11}}{C_3}\right) \geq \lambda, \quad \left((\alpha-1) - \frac{C_{12}}{C_3}\right) \geq 0$$

となるように $d(x)$ を大きくとると，$\mathscr{F}[\rho](t)$ の t の 2 階導関数は

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathscr{F}[\rho](t) \geq \lambda \int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx - C_{13}\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx\right)^{\frac{3}{2}} - C_{14}\left(\int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx\right)^3$$

となる．□

定理 *1.3* の証明.

$$g(t) := \int_\Omega |\nabla\mu|^2\rho\,dx$$

と定義する．(2.6) と $\frac{d}{dt}\mathscr{F}[\rho](t)$ から以下が成り立つ，

$$\frac{d}{dt}g(t) \leq -\lambda g(t) + C_{13}g(t)^{\frac{3}{2}} + C_{14}g(t)^3 \tag{22}$$

(22) に対して Gronwall 型の微分不等式により，定理 1.3 が得られる．□

2.2 定理 1.5 の証明

定理 1.5 を示すためには (NFP) に対する最大値原理の証明をなぞることである．(NFP) の第一式目を非発散型で表すと

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} - \alpha(\alpha-1)d(x)\rho^{\alpha-1}\Delta\rho - G(\nabla\rho) - \rho\Delta\phi + \alpha\rho^\alpha\Delta d = 0$$

となる．すると方程式には ρ の 0 階の微分項が現れるため，ρ と $\Delta\phi$，Δd の関係を考察する必要がある．この考察を避けるために $\mu = \alpha d\rho^{\alpha-1} + \phi$ についての方程式を立てる．(NFP) の第一式目を μ を用いて表すと $\rho_t - \mathrm{div}(\rho\nabla\mu) = 0$ が成り立つから

$$\begin{aligned}\mu_t &= \alpha(\alpha-1)d(x)\rho^{\alpha-2}\rho_t \\ &= \alpha(\alpha-1)d(x)\rho^{\alpha-2}\,\mathrm{div}(\rho\nabla\mu) \\ &= \alpha(\alpha-1)d(x)\rho^{\alpha-1}\Delta\mu + \alpha(\alpha-1)d(x)\rho^{\alpha-2}\nabla\rho\cdot\nabla\mu\end{aligned}$$

となる．$\nabla\mu = \alpha(\nabla d)\rho^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1)d\rho^{\alpha-2}\nabla\rho + \nabla\phi$ が成り立つから，μ の方程式は

$$\mu_t - \alpha(\alpha-1)\rho^{\alpha-1}\Delta\mu + (\alpha\rho^{\alpha-1}\nabla d + \nabla\phi)\cdot\nabla\mu + |\nabla\mu|^2 = 0 \tag{23}$$

となる．この方程式には μ の 0 階微分の項が現れない．したがって，ρ を与えられた関数として μ についての方程式に対する最大値原理を導出する．

補題 2.7. $\alpha d\rho_0^{\alpha-1} > \max_{y\in\overline{\Omega}}\phi(y) - \phi$ が成り立つと仮定する．このとき

$$\min_{y\in\overline{\Omega}}\mu(y,0) \le \min_{(y,t)\in\Omega\times[0,T]}\mu(y,t)$$

が成り立つ．

証明. 初めに

$$\min_{(y,t)\in\overline{\Omega}\times[0,T]}\mu(y,t) = \min_{(y,t)\in\Omega\times\{t=0\}\cup\partial\Omega\times[0,T]}\mu(y,t)$$

を示す．μ の方程式は $|\nabla\mu|^2 > 0$ から以下のようになる．

$$\mu_t - \alpha(\alpha-1)d\rho^{\alpha-1}\Delta\mu + (\alpha\rho^{\alpha-1}\nabla d + \nabla\phi)\cdot\nabla\mu \ge 0.$$

したがって，

$$L[\mu] := -\alpha(\alpha-1)d\rho^{\alpha-1}\Delta\mu + (\alpha\rho^{\alpha-1}\nabla d + \nabla\phi)\cdot\nabla\mu$$

と定義すると，方程式は μ は

$$\mu_t + L[\mu] \ge 0 \tag{24}$$

をみたす．すなわち，μ は線形方程式 $\mu_t + L[\mu] = 0$ の優解になる．したがって，線形放物型方程式の最大値原理 [3] から

$$\min_{(y,t)\in\overline{\Omega}\times[0,T]}\mu(y,t) = \min_{(y,t)\in\Omega\times\{t=0\}\cup\partial\Omega\times[0,T]}\mu(y,t)$$

が成り立つ．次に，境界で最小値にならないことを背理法を用いて示す．ある最小値をとる点 $(x_0,t_0)\in\partial\Omega\times[0,T]$ が存在したとする．このとき，Hopf の補題から

$$\frac{\partial\mu}{\partial\nu}(x_0,t_0) < 0 \tag{25}$$

が成り立つ．しかし，(NFP) の境界条件から矛盾．よって

$$\min_{y\in\overline{\Omega}}\mu(y,0) \le \mu(x,t) \quad (x,t)\in\overline{\Omega}\times[0,T]$$

が成り立つ． □

次に μ の上からの評価を考える．

補題 2.8. $\alpha d\rho_0^{\alpha-1} > \max_{y\in\overline{\Omega}}\phi(y) - \phi$ が成り立つと仮定する．このとき，

$$\mu(x,t) \le \max_{(y,t)\in\Omega\times[0,\infty)}\mu(y,t), \quad \textit{for } x\in\Omega,\ t\in[0,\infty) \tag{26}$$

証明. $\beta > 0$ に対して $\eta = e^{\beta\mu}$ とおくと

$$\eta_t = \beta e^{\beta\mu}\mu_t, \quad \nabla\eta = \beta e^{\beta\mu}\nabla\mu, \quad \Delta\eta = \beta e^{\beta\mu}\Delta\mu + \beta^2 e^{\beta\mu}|\nabla\mu|^2$$

が成り立つことから，(23) に代入すると

$$\eta_t - \alpha(\alpha-1)d(x)\rho^{\alpha-1}\Delta\eta - \beta(1-\alpha(\alpha-1)d(x)\beta\rho^{\alpha-1})|\nabla\mu|^2 + (\alpha\rho^{\alpha-1}\nabla D + \nabla\phi)\cdot\nabla\eta = 0 \tag{27}$$

が得られる．ここで，ρ の下からの評価より，ある ρ_0，d，ϕ，α にのみ依存する正の定数 $C > 0$ が存在して $\alpha d(x)\rho^{\alpha-1} \geq C$ が成り立つので，$1 - \alpha(\alpha-1)\beta d(x)\rho^{\alpha-1} \leq 0$ となるように β を十分大きくとることで

$$\eta_t - \alpha(\alpha-1)d(x)\rho^{\alpha-1}\Delta\eta + (\alpha\rho^{\alpha-1}\nabla d + \nabla\phi)\cdot\nabla\eta \leq 0 \tag{28}$$

すなわち，η はある線形放物型方程式の劣解となる．従って，下からの評価と同様の線形方程式の議論 [3, 4, 7] により，η について最大値原理

$$\eta(x,t) \leq \max_{y\in\overline{\Omega}} \eta(y,0) \tag{29}$$

が成り立つ．$\eta > 0$ より，(29) の両辺に対数を取ることで μ についての上からの評価が得られる． □

参考文献

[1] J. A. Carrillo, A. Jüngel, P. A. Markowich, G. Toscani, and A. Unterreiter. Entropy dissipation methods for degenerate parabolic problems and generalized Sobolev inequalities. *Monatsh. Math.*, 133(1):1–82, 2001.

[2] Y. Epshteyn, C. Liu, C. Liu, and M. Mizuno. Nonlinear inhomogeneous Fokker-Planck models: energetic-variational structures and long-time behavior. *Anal. Appl. (Singap.)*, 20(6):1295–1356, 2022.

[3] L. C. Evans. *Partial differential equations*, Vol. 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2010.

[4] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[5] A. Jüngel. *Entropy methods for diffusive partial differential equations*. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, [Cham], 2016.

[6] E. H. Lieb and M. Loss. *Analysis*, Vol. 14 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2001.

[7] M. H. Protter and H. F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1984. Corrected reprint of the 1967 original.

半直線上ノイマン境界条件下での移流拡散方程式の解の長時間挙動

早稲田大学　大学院基幹理工学研究科　数学応用数理専攻
中川　貴就 (TAKANARI NAKAGAWA) *

概要

本講演では移流拡散方程式の初期値境界値問題を考察する．初期値問題の解の挙動については多くの結果が知られているが，初期値境界値問題の解についての類似の結果は多くないように思われる．そこで本研究では，ノイマン境界条件を課した半直線上の移流拡散方程式の解の長時間挙動を解析し，直線上での結果と比較して境界条件が長時間挙動に与える影響を調べる．特に非線形項の指数が 3 の場合に，第一漸近形への収束率の評価に差異が見られたので，その結果を報告する．

1　導入

本稿では，次の移流拡散方程式の初期値境界値問題を考える：

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u - \partial_x f(u) = 0, & t > 0, x > 0, \\ \partial_x u(t,0) = 0, & t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x > 0. \end{cases} \tag{IBP}$$

ここで，$u : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は未知関数，$u_0 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は $t = 0$ で与えられた初期値である．また，非線形項 $f(u)$ はある $q \in (1,\infty)$ を用いて $f(u) = u|u|^{q-1}$ と表されるものとする．移流拡散方程式は，その名のとおり物理量の移流と拡散の相互作用による現象の時間発展を記述するモデルであり，$\partial_x^2 u$ の項と $\partial_x f(u)$ の項がそれぞれ拡散効果と移流効果を表す．また，ノイマン境界条件は，境界における物理量の流入出がないことを表している．一般に，非線形偏微分方程式の解の明示的表現を与えることは困難であるが，解の具体的表示が得られない場合でも，解の長時間挙動等の定性的性質については情報が得られる場合がある．本研究ではノイマン境界条件が (IBP) に与える影響について，長時間挙動の観点から考察することを目的とする．具体的には，(IBP) の解の第一漸近形，第二漸近形を導出し，境界条件を取り除いた直線上での移流拡散方程式の解の長時間挙動の結果と比較する．

* E-mail:nakataka624@akane.waseda.jp

2 先行研究

まず，直線上の熱方程式についての基本的事項を述べる．以下，各 $p \in [1,\infty]$ に対して，$L^p(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 空間とし，$\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R})}$ はそのノルムである．

各 $\varphi \in L^p(\mathbb{R}),\ p \in [1,\infty]$ に対し，φ を初期値とする次の線形熱方程式 (H) を考える：

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{H}$$

方程式 (H) の $t \geq 0$ における解を $e^{t\Delta}\varphi$ と表すと，$L^p(\mathbb{R})$ 上の有界線形作用素の族 $(e^{t\Delta}; t \geq 0)$ は半群を成し，これは熱半群と呼ばれる．特に $t > 0$ のとき，$e^{t\Delta}\varphi$ は熱核

$$G(t,x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

を用いて，

$$(e^{t\Delta}\varphi)(x) = (G(t) * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y\,, \qquad x \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

と表される．直接計算によって熱核は任意の $p \in [1,\infty],\ l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対して

$$\left\|\partial_x^l G(t)\right\|_p \leq C t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{l}{2}}, \qquad t > 0$$

を満たすことが分かり，$e^{t\Delta}\varphi$ の具体的表示 (2.1) を用いることで，$e^{t\Delta}\varphi$ に関しても同様の減衰評価

$$\left\|\partial_x^l e^{t\Delta}\varphi\right\|_p \leq C t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{l}{2}} \|\varphi\|_1, \qquad t > 0$$

が成り立つことが示される．このことから，線形熱方程式 (H) の解 $e^{t\Delta}\varphi$ が時間の経過に伴って $O\left(t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\right)$ のオーダーで減衰し，さらに微分する毎に減衰が $t^{-\frac{1}{2}}$ だけ早くなることが分かる．それでは次に，$e^{t\Delta}\varphi$ が時間の経過に伴ってどのような関数に近づいていくのか，即ち解 $e^{t\Delta}\varphi$ の長時間挙動について考える．Taylor の定理より，等式

$$G(t,x-y) = G(t,x) - y\left(\int_0^1 \partial_x G(t,x-\theta y)\,\mathrm{d}\theta\right),$$

が成り立ち，これを $e^{t\Delta}\varphi$ の具体的表示 (2.1) に用いると，

$$\begin{aligned} (e^{t\Delta}\varphi)(x) &= \int_{\mathbb{R}} G(t,x-y)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,\mathrm{d}y\right) G(t,x) - \int_{\mathbb{R}} y\left(\int_0^1 \partial_x G(t,x-\theta y)\,\mathrm{d}\theta\right)\varphi(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

を得る．この等式を利用することで，$\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ ならば任意の $p \in [1,\infty]$ に対して

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)} \left\|e^{t\Delta}\varphi - MG(t)\right\|_{L^p} = 0 \tag{2.2}$$

が成り立つことが示される．ここで，$M \coloneqq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$ である．詳しい証明は儀我-儀我 [4] を参照せよ．式 (2.2) から，(H) の解 $e^{t\Delta}\varphi$ の第一漸近形は熱核の定数倍 $MG(t)$ であり，その収束率は解 $e^{t\Delta}\varphi$ 自体の減衰のオーダー $O\left(t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\right)$ よりも早い $o\left(t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\right)$ で与えられることが分かる．線形熱方程式 (H) に対しては，さらに詳細な解の長時間挙動についての解析もされており，解の高次漸近形についても導出されている．実際，等式

$$G(t,x-y) = G(t,x) - y\partial_x G(t,x) + y^2\left(\int_0^1 \partial_x^2 G(t,x-\theta y)(1-\theta)\,\mathrm{d}\theta\right)$$

を利用することで，$\varphi \in L^1_1(\mathbb{R})$ ならば任意の $p \in [1,\infty]$ に対して，

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \left\| e^{t\Delta}\varphi - MG(t) + m\partial_x G(t) \right\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \tag{2.3}$$

となることが示される．ここで，$m \coloneqq \int_{\mathbb{R}} x\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ である．また，

$$L^1_1(\mathbb{R}) \coloneqq \left\{ \varphi \in L^1(\mathbb{R}) \,;\, \int_{\mathbb{R}} |x\varphi(x)|\,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$

と定義する．式 (2.2), (2.3) から，(H) の解の第二漸近形が $-m\partial_x G(t)$ であることが分かる．

ここからは，(IBP) から境界条件を取り除いた以下の初期値問題 (P) に関する先行研究を述べる．

$$\begin{cases} \partial_t u - \partial_x^2 u - \partial_x f(u) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{P}$$

ここで，$u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は $t = 0$ で与えられた初期値，非線形項 $f(u)$ はある $q \in (1,\infty)$ を用いて $f(u) = u|u|^{q-1}$ と表されるものとする．(P) については多次元の場合も含めた数多くの結果があるが，ここではそれらの結果を一次元に限定して述べる．先ほど導入した熱半群 $(e^{t\Delta}; t \geq 0)$ を用いると，方程式 (P) は以下のような積分方程式

$$u(t,x) = e^{t\Delta}u_0(x) + \int_0^t \partial_x e^{(t-\tau)\Delta} f(u(\tau))(x)\,\mathrm{d}\tau$$

に書き換えることが出来る．Escobedo-Zuazua[1] は，この積分方程式を直接解析することで，$u_0 \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R})$ ならば (P) には時間大域的な解が存在すること，さらにその解 u は任意の $p \in [1,\infty]$ に対して，

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq Ct^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \qquad t > 0$$

を満たすことを示した．この評価式から (P) の解は線形熱方程式 (H) の解と同じオーダーで減衰することがわかる．(P) の解の存在や正則性，アプリオリ評価，減衰評価などの性質については Zuazua のレクチャーノート [8] にも詳しく書かれている．また，解の長時間挙動についても Escobedo-Zuazua[1] で解析されており，次の命題が示されている．

命題 2.1 (Escobedo-Zuazua[1])**.** $q>2$ とする．$u_0\in(L^1_1\cap L^\infty)(\mathbb{R})$ であるとし，u を (P) の時間大域解とする．このとき，任意の $p\in[1,\infty]$ に対してある $C_p>0$ が存在して，任意の $t\geq 1$ に対して

$$\|u(t)-MG(t)\|_{L^p(\mathbb{R})}\leq C_p\begin{cases}t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{q-2}{2}}, & 2<q<3,\\ t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}\log(1+t), & q=3,\\ t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}, & q>3\end{cases}$$

が成り立つ．

この結果から，(P) の解の第一漸近形は線形熱方程式 (H) の場合と同様に熱核の定数倍 $MG(t)$ であり，収束率の上からの評価は非線形項の指数 q によって 3 つに場合分けされることが分かる．さらに，Zuazua[9] は指数 q の命題 2.1 における 3 つの場合分けそれぞれに対して解の第二漸近形を導出した． Zuazua[9] の結果から，命題 2.1 における第一漸近形への収束率が，3 つの場合それぞれで最良であることが示される．ここでは $q=3$ の場合の結果を抜粋して述べる．

命題 2.2 (Zuazua[9])**.** $q=3$ とする．$u_0\in(L^1_1\cap L^\infty)(\mathbb{R})$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}|u_0(x)|^2\exp\left(\frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x<\infty$ であるとし，u を (P) の時間大域解とする．このとき，任意の $p\in[1,\infty]$ に対して，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})+\frac{1}{2}}}{\log t}\left\|u(t)-MG(t)-\frac{1}{4\sqrt{3}\pi}M^3(\log t)\partial_xG(t)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}=0$$

が成り立つ．

さらに，Fukuda[2] は命題 2.2 の仮定を弱めた上で，以下の命題を示した．

命題 2.3 (Fukuda[2])**.** $q=3$ とする．$u_0\in(L^1_1\cap L^\infty)(\mathbb{R})$ であるとし，u を (P) の時間大域解とする．このとき，任意の $p\in[1,\infty]$ に対してある $C_p>0$ が存在して，任意の $t\geq 2$ に対して，

$$\left\|u(t)-MG(t)-\frac{1}{4\sqrt{3}\pi}M^3(\log t)\partial_xG(t)\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\leq C_pt^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}$$

が成り立つ．

命題 2.2, 2.3 を比べると，Fukuda[2] の結果の方が第二漸近形への収束率が改善されていることが分かる．Fukuda-Sato[3] は，命題 2.3 と同じ仮定のもとで (P) の解 u の第三漸近形を構成し，命題 2.3 における解の第二漸近形への収束率 $O\left(t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})-\frac{1}{2}}\right)$ が最良であることを示した．

以上のように，初期値問題 (P) の解の挙動については数多くの結果があるが，初期値境界値問題 (IBP) の解に対しての類似の結果は多くはないように思われる．例えば，Karch[5] では，(IBP) の解が熱核の定数倍に $o\left(t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}\right)$ のオーダーで収束することが示されているが，命題 2.1 と比較すると，(IBP) の解の場合も非線形項の指数 q についての場合分けをともなうより詳細な評価を得られるのではないかと期待できる．そこで，本研究では Escobedo-Zuazua[1], Zuazua[8], Fukuda[2], Fukuda-Sato[3] で用いられた初期値問題 (P) の解の解析手法を初期値境界値問題 (IBP) の解の解析に適用し，命題 2.1, 2.3 に類する結果を得ること，そしてそれらの結果を比較して，ノイマン境界条件が (IBP) の解の長時間挙動に与える影響を調べることを目的とする．特に，非線形項の指数 q が 3

の場合に，(IBP) の解の第一漸近形への収束率が (P) の解の第一漸近形への収束率よりも $\log t$ だけ改善出来ることが分かった．

3 準備

本研究の主結果を紹介するための準備として，(IBP) の時間大域解の存在とその性質について述べる．$\mathbb{R}_{\geq 0} \coloneqq [0,\infty)$ とし，各 $p \in [1,\infty]$ に対して $L^p(\mathbb{R}_{\geq 0})$ を $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 上の Lebesgue 空間，そのノルムを $\|\cdot\|_p$ と表すとする．さらに，重み付き Lebesgue 空間 $L^1_1(\mathbb{R}_{\geq 0})$ を

$$L^1_1(\mathbb{R}_{\geq 0}) \coloneqq \left\{ \varphi \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0}) \, ; \int_0^\infty |x\varphi(x)| \, \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

と定義する．熱核 $G(t,x)$ を用いて，$L^p(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 上の有界線形作用素 $e^{t\Delta}_N$, $e^{t\Delta}_D$ をそれぞれ

$$e^{t\Delta}_N \varphi(x) \coloneqq \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty (G(t,x-y)+G(t,x+y))\varphi(y)\,\mathrm{d}y\,, & t>0, \\ \varphi(x), & t=0, \end{cases}$$
$$e^{t\Delta}_D \varphi(x) \coloneqq \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty (G(t,x-y)-G(t,x+y))\varphi(y)\,\mathrm{d}y\,, & t>0, \\ \varphi(x), & t=0 \end{cases}$$

と定義すると，任意の $\varphi \in L^p(\mathbb{R}_{\geq 0})$ に対して $e^{t\Delta}_N\varphi$, $e^{t\Delta}_D\varphi$ はそれぞれ，初期値を φ とし，境界条件としてノイマン境界条件，ディリクレ境界条件を課した半直線上の線形熱方程式の解となる．また，$L^p(\mathbb{R}_{\geq 0})$ 上の有界線形作用素の族 $(e^{t\Delta}_N; t\geq 0)$ と $(e^{t\Delta}_D; t\geq 0)$ は半群を成し，直線上の場合と同様に任意の $p\in[1,\infty]$, $l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して以下の減衰評価を満たす．

$$\left\|\partial_x^l e^{t\Delta}_N \varphi\right\|_p \leq Ct^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{l}{2}}\|\varphi\|_1, \qquad t>0,$$
$$\left\|\partial_x^l e^{t\Delta}_D \varphi\right\|_p \leq Ct^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{l}{2}}\|\varphi\|_1, \qquad t>0.$$

さらに，部分積分を用いることで，$(e^{t\Delta}_N; t\geq 0)$ と $(e^{t\Delta}_D; t\geq 0)$ の間には

$$(e^{t\Delta}_N \partial_x v)(x) = -2G(t,x)v(0) + \partial_x (e^{t\Delta}_D v)(x)$$

が成り立つことがわかる．実際,

$$\begin{aligned}
(e^{t\Delta}_N \partial_x v)(x) &= \int_0^\infty (G(t,x-y)+G(t,x+y))(\partial_y v)(y)\,\mathrm{d}y \\
&= [(G(t,x-y)+G(t,x+y))v(y)]_{y=0}^{y=\infty} - \int_0^\infty (\partial_y(G(t,x-y)+G(t,x+y)))v(y)\,\mathrm{d}y \\
&= -2G(t,x)v(0) + \int_0^\infty ((\partial_x G)(t,x-y) - (\partial_x G)(t,x+y))v(y)\,\mathrm{d}y \\
&= -2G(t,x)v(0) + \partial_x \int_0^\infty (G(t,x-y)-G(t,x+y))v(y)\,\mathrm{d}y \\
&= -2G(t,x)v(0) + \partial_x (e^{t\Delta}_D v)(x)
\end{aligned}$$

となる．この関係式を用いることで, (IBP) は以下のような積分方程式に書き換えることができる．

$$\begin{aligned} u(t,x) &= e_N^{t\Delta}u_0(x) + \int_0^t e_N^{(t-\tau)\Delta}\partial_x f(u(\tau))(x)\,\mathrm{d}\tau \\ &= e_N^{t\Delta}u_0(x) - \int_0^t 2G(t-\tau,x)f(u(\tau,0))\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \partial_x e_D^{(t-\tau)\Delta} f(u(\tau))(x)\,\mathrm{d}\tau\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

この積分方程式 (3.1) を直接解析することで，解の存在とその性質に関する次の命題を得る．

命題 3.1. 任意の $q \in (1,\infty)$ 及び任意の $u_0 \in (L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}_{\geq 0})$ に対し，(IBP) には時間大域的な解

$$u \in (C \cap L^\infty)((0,\infty); (C \cap L^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}_{\geq 0}))$$

が唯一つ存在する．また，任意の $t > 0$ に対して

$$\|u(t)\|_1 + \int_0^t |u(\tau,0)|^q\,\mathrm{d}\tau \leq \|u_0\|_1, \quad \|u(t)\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty$$

が成り立つ．さらに任意の $p \in (1,\infty)$ に対して，

$$u \in C((0,\infty); W^{2,p}(\mathbb{R}_{\geq 0})) \cap C^1((0,\infty); L^p(\mathbb{R}_{\geq 0}))$$

であり，任意の $p \in (1,\infty)$ に対して，次の減衰評価を満たす．

$$\|u(t)\|_p \leq Ct^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}, \qquad t > 0.$$

4 主定理

まず，解の第一漸近形に関する定理を述べる．

定理 4.1. $q > 2$ とする．$u_0 \in (L^1_1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}_{\geq 0})$ であるとし，u を (IBP) の時間大域解とする．このとき，任意の $p \in [1,\infty]$ に対してある正数 $C_p > 0$ が存在して，任意の $t \geq 2$ に対して，

$$\|u(t) - M_0 G(t)\|_p \leq C_p \begin{cases} t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{q-2}{2}}, & 2 < q \leq 3, \\ t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}, & q > 3 \end{cases}$$

が成り立つ．ここで，

$$M_0 \coloneqq 2\left(\int_0^\infty u_0(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty f(u(\tau,0))\,\mathrm{d}\tau\right) = 2\left(\int_0^\infty u_0(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty (u|u|^{q-1})(\tau,0)\,\mathrm{d}\tau\right)$$

である．

注意 1. 先行研究の章で述べたように，$q = 3$ のとき (P) の解の第一漸近形への収束率は，$O\left(t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}\log t\right)$ のオーダーが最良であることが示されているが，定理 4.1 では (IBP) の解の第一漸近形への収束率は $O\left(t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}\right)$ に改善出来ることが示されている．

次に，$q = 3$ の場合の解の第二漸近形についての定理を述べる．

定理 4.2. $q=3$ とする．$u_0 \in (L_1^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}_{\geq 0})$ であるとし，u を (IBP) の大域解とする．このとき，任意の $p \in [1,\infty]$ に対して，以下が成り立つ．

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \left\| u(t) - M_0 G(t) - A(t) \right\|_p = 0$$

が成り立つ．ここで，

$$\begin{aligned} A(t,x) \coloneqq & \int_0^t \left(-2G(t-\tau,x) + 2G(t,x)\right) f(M_0 G(\tau,0))\,\mathrm{d}\tau \\ & + 2\int_t^\infty f(M_0 G(\tau,0))\,\mathrm{d}\tau\, G(t,x) + \int_0^t \partial_x e_D^{(t-\tau)\Delta} f(M_0 G(\tau))(x)\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

である．

5　主結果の証明の概略

この章では，本研究の主結果である定理 4.1 の証明の概略を説明する．(IBP) は積分方程式 (3.1) に書き換えられることから，$u(t,x) - M_0 G(t,x)$ を次のように分解できる．.

$$\begin{aligned} u(t,x) - M_0 G(t,x) &= e_N^{t\Delta} u_0(x) - \int_0^t 2G(t-\tau,x) f(u(\tau,0))\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \partial_x e_D^{(t-\tau)\Delta} f(u(\tau))\,\mathrm{d}\tau \\ &\quad - 2\left(\int_0^\infty u_0(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty f(u(\tau,0))\,\mathrm{d}\tau\right) G(t,x) \\ &= e_N^{t\Delta} u_0(x) - 2\left(\int_0^\infty u_0(x)\,\mathrm{d}x\right) G(t,x) \\ &\quad - \int_0^t 2G(t-\tau,x) f(u(\tau,0))\,\mathrm{d}\tau + \int_0^\infty 2f(u(\tau,0))\,\mathrm{d}\tau\, G(t,x) \\ &\quad + \int_0^t \partial_x e_D^{(t-\tau)\Delta} f(u(\tau))\,\mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

あとは，各項をそれぞれ評価していくのだが，その際に重要となる評価を以下に補題として述べる．

補題 5.1. $1 \leq p \leq \infty$ とする．このとき，$u_0 \in L_1^1(\mathbb{R}_{\geq 0})$ であるならば，

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{2}} \left\| e_N^{t\Delta} u_0 - M' G(t) \right\|_p = 0$$

が成り立つ．ここで，$M' \coloneqq 2\displaystyle\int_0^\infty u_0(x)\,\mathrm{d}x$ である．

注意 2. この評価を式 (2.2) と比較すると，ノイマン境界条件を課した半直線上の線形熱方程式の解の第一漸近形は直線上の線形熱方程式と同様に熱核の定数倍であるが，第一漸近形への収束率は直線上の場合よりも早くなることが分かる．また式 (2.3) と比較すると，ノイマン境界条件を課すと，直線上の場合に解の第二漸近形に対応していた部分が 0 になることも分かる．

補題 5.1 の証明の概略. 等式

$$\begin{aligned}
e_N^{t\Delta}u_0(x) - M'G(t,x) &= e_N^{t\Delta}u_0(x) - 2\left(\int_0^\infty u_0(x)\,\mathrm{d}x\right)G(t,x)\\
&= \int_0^\infty (G(t,x-y)+G(t,x+y))u_0(y)\,\mathrm{d}y - 2\left(\int_0^\infty u_0(y)\,\mathrm{d}y\right)G(t,x)\\
&= \int_0^\infty (G(t,x-y)-G(t,x)+y\partial_x G(t,x))u_0(y)\,\mathrm{d}y\\
&\quad + \int_0^\infty (G(t,x+y)-G(t,x)-y\partial_x G(t,x))u_0(y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

を用いて証明する．注意 2 で述べたように第二漸近形に対応していた部分が 0 になることは，最右辺第三項と最右辺第六項の和が 0 であることに起因している．

□

補題 5.2. $q=3$ とする．$u_0 \in (L_1^1 \cap L^\infty)(\mathbb{R}_{\geq 0})$ であるとし，u を (IBP) の時間大域解とする．このとき，任意の $p \in [1,\infty]$ に対してある $C_p > 0$ が存在して，任意の $t \geq 2$ に対して，

$$\left\| \int_0^t \partial_x e_D^{(t-\tau)\Delta} f(u(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right\|_p \leq C_p t^{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{2}}$$

が成り立つ.

補題 5.2 の証明の概略. この補題の証明においては，Fukuda[2] の Propotion 4.2 の証明を参考にした．Fukuda[2] の証明と大きく異なるのは，等式

$$\begin{aligned}
\partial_x e_D^{(t-\tau)\Delta} f(u(\tau))(x) &= \partial_x e_D^{(t-\tau)\Delta}((M_0 G)^3(\tau))(x)\\
&= M_0^3 \int_0^\infty \partial_x G(t-\tau,x-y)G^3(\tau,y)\,\mathrm{d}y\\
&\quad - M_0^3 \int_0^\infty \partial_x G(t-\tau,x+y)G^3(\tau,y)\,\mathrm{d}y\\
&= M_0^3 \int_0^\infty \partial_x G(t-\tau,x-y)\left(-\frac{d}{dy}\int_y^\infty G^3(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}y\\
&\quad - M_0^3 \int_0^\infty \partial_x G(t-\tau,x+y)\left(-\frac{d}{dy}\int_y^\infty G^3(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}y\\
&= M_0^3 \partial_x G(t-\tau,x)\int_0^\infty G^3(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta\\
&\quad - M_0^3 \int_0^\infty \partial_x^2 G(t-\tau,x-y)\int_y^\infty G^3(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y\\
&\quad - M_0^3 \partial_x G(t-\tau,x)\int_0^\infty G^3(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta\\
&\quad - M_0^3 \int_0^\infty \partial_x^2 G(t-\tau,x+y)\int_y^\infty G^3(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y\\
&= -M_0^3 \int_0^\infty \partial_x^2 G(t-\tau,x-y)\int_y^\infty G^3(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y\\
&\quad - M_0^3 \int_0^\infty \partial_x^2 G(t-\tau,x+y)\int_y^\infty G^3(\tau,\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

が成り立つことである．直線上の場合は上式 4 つ目の等号の右辺における第一項と第三項が打ち消し合わず，ここから (P) の解の第二漸近形である $\frac{1}{4\sqrt{3\pi}}M^3(\log t)$ が導出されるが，ノイマン境界条件を課した場合は直線上の場合の第二漸近形に対応する部分が 0 となる．□

参考文献

[1] M. Escobedo and E. Zuazua: Large time behavior for convection-diffusion equations in $\mathbf{R}^N$, J. Funct. Anal.**100**(1991)119-161.

[2] I. Fukuda: Asymptotic profiles of solutions for the generalized Fornberg-Whitham equation with dissipation, J. Math. Anal. Appl.**527**(2023)127427, 30 pp.

[3] I. Fukuda and S. Sato: Higher-order asymptotic profiles of solutions to the Cauchy problem for the convection-diffusion equation with variable diffusion, arXiv:2405.00896.

[4] 儀我美一，儀我美保：非線形偏微分方程式-解の漸近挙動と自己相似解-, 共立出版, 1999.

[5] G. Karch: Asymptotics of solutions to a convection-diffusion equation on the half-line, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **130**(2000), 837-853.

[6] T. Kato: "Perturbation Theory for Linear Operators", Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 132, Second edition, Springer, 1995.

[7] A. Pazy: "Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations", Applied Mathematical Sci. 44, Springer, 1983.

[8] E. Zuazua: Asymptotic behavior of scalar convection-diffusion equations, arXiv:2003.11834

[9] E. Zuazua: Weakly nonlinear large time behavior in scalar convection-diffusion equations, Differ. Integral. Equ.**6**(1993)1481-1492.

二重冪型非線形項をもつ Benjamin–Ono 型方程式の進行波解の安定性解析

東京理科大学　大学院理学研究科　数学専攻
國分海斗 (Kaito KOKUBU) *

概要

本講演では, 吸引的 – 吸引的な二重冪型非線形項をもつ Benjamin–Ono 型方程式の進行波解の安定性について考察する. 進行波解の安定性に関する理論はいくつか構築されているが, 本研究では, Grillakis–Shatah–Strauss(1987) に基づき, 作用汎関数の線形化作用素に対する強圧性を導くことにより安定性を証明する.

1　導入

1.1　はじめに

非線形分散型方程式は, 電磁波や水面波など, 様々な波動現象を記述する非線形偏微分方程式であり, 非線形 Schrödinger 方程式や Korteweg–de Vries 方程式などがこれに分類される. これらの方程式は, 波を空間方向に分散させる構造 (分散性) と, 1 点に集中させる構造 (非線形性) をもち, 特に分散性と非線形性が釣り合うとき, いくら時間が経過しても形状が保たれる孤立波解が現れる. 孤立波解に摂動を加えた際に, その解が孤立波解の近くに留まり続けるとき, 孤立波解は安定であるという (正確な定義は後ほど述べる). 孤立波解の安定性については, 1980 年代以降盛んに解析が行われており, 近年では, 非線形項を一般化した場合や連立系など, 様々な設定のもとで研究が行われている.

1.2　問題設定

次の二重冪型非線形項をもつ Benjamin–Ono 型方程式を考える:

$$\partial_t u + \partial_x(|u|^{p-1}u + |u|^{q-1}u) - \partial_x D_x^\sigma u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}. \tag{BO}$$

ここで, $u = u(t,x)$ は実数値の未知関数とする. また, $\sigma > 0$ とし, 作用素 D_x^σ は Fourier 変換 $\mathscr{F}$ を用いて $D_x^\sigma := \mathscr{F}^{-1}|\xi|^\sigma \mathscr{F}$ と定める. この作用素は, $D_x^\sigma = (-\partial_x^2)^{\sigma/2}$ とも書かれる. なお, 本稿では, $1 < \sigma < 2$ の場合を考える. また, $1 < p < q < \infty$ とする.

* E-mail:1123701@ed.tus.ac.jp

本稿では (BO) の初期値問題に関して以下の仮定を課す.

仮定. $1 < \sigma < 2$ とする. このとき, 任意の $u_0 \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して, ある時刻 $T > 0$ が存在して, $u(0) = u_0$ なる (BO) の解 $u(t) \in C([0,T), H^{\sigma/2}(\mathbb{R}))$ が一意的に存在する. さらに, $u(t)$ は次の汎関数の値を保存する:

$$\text{(エネルギー)} \qquad E(v) = \frac{1}{2}\|D_x^{\sigma/2}v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \frac{1}{q+1}\|v\|_{L^{q+1}}^{q+1},$$

$$\text{(質量)} \qquad M(v) = \frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2.$$

注意. $3/4 \le \sigma < 2$ のとき, p と q がともに奇数であれば, この仮定は実際に成り立つことが知られている. (Molinet–Tanaka [7] を参照)

1.3 進行波解と基底状態

ここでは, (BO) の進行波解 $\phi(x-ct)$ について詳しく述べる. ここで, $c > 0$ は進行波の速さを表す正定数である.

まず, (BO) の進行波解 $\phi(x-ct)$ を構成する関数 ϕ は次の方程式 (定常問題) の非自明解として与えられる:

$$D_x^\sigma \phi + c\phi - |\phi|^{p-1}\phi - |\phi|^{q-1}\phi = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{SP_c}$$

この方程式は $u(t,x) = \phi(x-ct)$ を (BO) に代入し, 形式的に微分を計算することで得られる. ここで, $H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ 上の汎関数 S_c を

$$S_c(v) \coloneqq E(v) + cM(v) = \frac{1}{2}\|D_x^{\sigma/2}v\|_{L^2}^2 + \frac{c}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \frac{1}{q+1}\|v\|_{L^{q+1}}^{q+1}$$

と定める. この汎関数は定常問題 (SP_c) に対応する作用汎関数とよばれる. このとき, $S_c \in C^2(H^{\sigma/2}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$ であり, $v, w \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して,

$$S_c'(v) = D_x^\sigma v + cv - |v|^{p-1}v - |v|^{q-1}v,$$
$$S_c'(v)w = D_x^\sigma w + cw - p|v|^{p-1}w - q|v|^{q-1}w$$

となる. ただし, 汎関数に対する微分は Fréchet 微分である (以下も同様). 特に, $v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して, v が (SP_c) の解であることと, $S_c'(v) = 0$ が成り立つことは同値である.

本研究では, 定常問題 (SP_c) の特殊解の 1 つである**基底状態**によって構成された進行波解の安定性を考察する. まず, 基底状態の定義を述べる.

定義. 定常問題 (SP_c) の非自明解 $\phi_c \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ が,

$$S_c(\phi_c) = \inf\{S_c(v) : v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ S_c'(v) = 0\}$$

を満たすとき, ϕ_c を (SP_c) の基底状態という.

基底状態の存在性については, 本研究とは別に考察すべき問題である. 本稿で考える定常問題 (SP_c) については, $0 < \sigma < 2$ のとき, 任意の $c > 0$ に対して, $H^{\sigma+1}(\mathbb{R})$ に属する正値偶

関数の基底状態の存在性がわかっている．さらに, (SP_c) の基底状態 ϕ_c は, (SP_c) に対応する Nehari 汎関数

$$K_c(v) \coloneqq \langle S_c'(v), v\rangle = \|D_x^{\sigma/2}v\|_{L^2}^2 + c\|v\|_{L^2}^2 - \|v\|_{L^{p+1}}^{p+1} - \|v\|_{L^{q+1}}^{q+1},\ v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$$

を用いて, 次のように変分的に特徴付けられる:

$$S_c(\phi_c) = \inf\{S_c(v) : v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ K_c(v) = 0\}.$$

定常問題 (SP_c) の基底状態に関する詳細は, [6] を参照されたい.

1.4 進行波解の安定性

ここでは, (BO) の進行波解の安定性の定義を述べる．まず, $r > 0$ と $v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して,

$$U_r(v) \coloneqq \left\{u \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R}) : \inf_{y\in\mathbb{R}} \|v - u(\cdot - y)\|_{H^{\sigma/2}} < r\right\}$$

とおく．ただし, $\|v\|_{H^{\sigma/2}}^2 = \|D_x^{\sigma/2}v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2$ とする．この集合は, (BO) の解が平行移動に関して不変であることを加味した v の近傍である．

定義. 以下の性質が成り立つとき, (BO) の進行波解 $\phi(x-ct)$ は**安定** (軌道安定) であるという:

> 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して, $u_0 \in U_\delta(\phi)$ ならば, $u(0) = u_0$ を満たす (BO) の解 $u(t)$ が時間大域的に存在し, 任意の時刻 $t \geq 0$ に対して, $u(t) \in U_\varepsilon(\phi)$ が成り立つ.

また, 進行波解 $\phi(x-ct)$ が**不安定**であるとは, 進行波解 $\phi(x-ct)$ が上の意味で安定でないことをいう.

1.5 先行研究

まず, 単純冪型非線形項をもつ Benjamin–Ono 型方程式

$$\partial_t u + \partial_x(|u|^{p-1}u) - \partial_x D_x^\sigma u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R} \tag{sBO}$$

の進行波解 $\psi_c(x-ct)$ について述べる[1)]．ここで, $1 < \sigma < 2$, $1 < p < \infty$ とし, $c > 0$ に対して ψ_c は次の定常問題の一意的な正値偶関数の基底状態とする[2)]:

$$D_x^\sigma \psi + c\psi - |\psi|^{p-1}\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

このとき, 進行波解 $\psi_c(x-ct)$ は, $p < 2\sigma + 1$ ならば安定であり, $p > 2\sigma + 1$ ならば不安定であることが, Bona–Souganidis–Strauss [1] の抽象論により得られる．なお, p の条件に現れる指数 $2\sigma + 1$ は Benjamin–Ono 型方程式に対する L^2-臨界指数である．

1) (sBO) についても必要に応じて初期値問題の $H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ 上での局所適切性を仮定する.
2) 基底状態の一意性は Frank–Lenzmann [2] による.

次に, (BO) と同様の二重冪型非線形項をもつ非線形 Schrödinger 方程式

$$i\partial_t u + \Delta u + |u|^{p-1}u + |u|^{q-1}u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N$$

の定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ の安定性に関する先行研究を述べる[3)]. $1 < p < 1 + 4/N$ とすると, $\omega > 0$ が十分小さければ, 定在波解 $e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ は安定であることが, $N = 1$ の場合は Ohta [8], $N \geq 3$ の場合は Fukuizumi [3] によってそれぞれ得られている. なお, 指数 $1 + 4/N$ は非線形 Schrödinger 方程式に対する L^2-臨界指数である.

2 主定理とその十分条件

この節では, 本研究で得られた結果とその十分条件について述べる.

定理 1 (K. [5])**.** $1 < \sigma < 2$, $1 < p < q < \infty$, $p < 2\sigma + 1$ とする. また, 各 $c > 0$ に対して, ϕ_c は定常問題 (SP_c) の正値偶関数の基底状態とする. このとき, ある $c^* \in (0, \infty)$ が存在して, 任意の $c \in (0, c^*)$ に対して, (BO) の進行波解 $\phi_c(x - ct)$ は安定である.

定理 1 は, Grillakis–Shatah–Strauss [4] の議論に従って証明される. 次の命題は, 定理 1 の十分条件である.

命題 2. $1 < \sigma < 2$, $1 < p < q < \infty$, $p < 2\sigma + 1$ とする. また, 各 $c > 0$ に対して, ϕ_c は定常問題 (SP_c) の正値偶関数の基底状態とする. このとき, ある $c^* \in (0, \infty)$ が存在して, 任意の $c \in (0, c^*)$ に対して, 以下の性質を満たす定数 $C_0 > 0$ と $\varepsilon_0 > 0$ が存在する:

$M(u) = M(\phi_c)$ なるすべての $u \in U_{\varepsilon_0}(\phi_c)$ に対して,

$$E(u) - E(\phi_c) \geq C_0 \|u - \phi_c(\cdot - y)\|_{H^{\sigma/2}}^2$$

が成り立つ.

定理 1 は, 命題 2 を用いて背理法によって示される. その際に, (BO) の解の連続性および, エネルギー E と質量 M の保存則が必要となる. 詳しい証明は, [4, Theorem 3.5] を参照されたい.

次に命題 2 の十分条件を述べる.

命題 3. $1 < \sigma < 2$, $1 < p < q < \infty$, $p < 2\sigma + 1$ とする. また, 各 $c > 0$ に対して, ϕ_c は定常問題 (SP_c) の正値偶関数の基底状態とする. このとき, ある $c^* \in (0, \infty)$ が存在して, 任意の $c \in (0, c^*)$ に対して, 以下の性質を満たす定数 $C_1 > 0$ が存在する:

$(v, \phi_c)_{L^2} = (v, \partial_x \phi_c)_{L^2} = 0$ なるすべての $v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\langle S_c''(v)(\phi_c)v, v\rangle \geq C_1 \|v\|_{H^{\sigma/2}}^2$$

が成り立つ.

命題 3 を用いた命題 2 の証明は [5] を参照されたい.

以上の議論から, 主定理の証明は命題 3 を示すことに帰着される.

---

3) 関数 ϕ_ω は $\sigma = 2$ としたときの (SP_c) に対する正値偶関数の基底状態とする. また, c は ω に置き換えている.

3　命題 3 の証明の概略

まず, 定常問題 (SP_c) の解 ϕ に対して,

$$\phi(x) = c^{1/(p-1)}\tilde{\phi}(c^{1/\sigma}x) \tag{3.1}$$

なるスケーリングを施すと, 関数 $\tilde{\phi}$ は次の定常問題の解となる:

$$D_x^\sigma\tilde{\phi} + \tilde{\phi} - |\tilde{\phi}|^{p-1}\tilde{\phi} - c^\alpha|\tilde{\phi}|^{q-1}\tilde{\phi} = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ここで, $\alpha \coloneqq (q-p)/(p-1) > 0$ とおいた. このとき, 形式的に $c \to +0$ とすれば, 次の単純冪型非線形項をもつ定常問題が現れる:

$$D_x^\sigma\psi + \psi - |\psi|^{p-1}\psi = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{sSP_1}$$

定常問題 (sSP_1) については, 一意的な正値偶関数の基底状態の存在性が知られている (Frank–Lenzmann [2]). また, (SP_c) の正値偶関数の基底状態は, 次の意味で (sSP_1) の基底状態に収束することがわかる.

補題 4. $1 < \sigma < 2$, $1 < p < q < \infty$ とする. また, 各 $c > 0$ に対して, ϕ_c は定常問題 (SP_c) の正値偶関数の基底状態とし, $\tilde{\phi}_c$ は ϕ_c に (3.1) のスケーリングを施して得られる関数とする. さらに, ψ_1 は定常問題 (sSP_1) の一意的な正値偶関数の基底状態とする. このとき, $c \to +0$ とすると $\tilde{\phi}_c$ は $H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ 上で ψ_1 に強収束する.

また, 定常問題 (sSP_1) の基底状態に関する性質はよく調べられており, その性質を用いることで, 次の補題を示すことができる:

補題 5. $1 < \sigma < 2$, $1 < p < 2\sigma + 1$ とする. また, ψ_1 は定常問題 (sSP_1) の正値偶関数の基底状態とする. このとき, 次の性質を満たす定数 $C_2 > 0$ が存在する:

$(v, \psi_1)_{L^2} = (v, \partial_x\psi_1)_{L^2} = 0$ なるすべての $v \in H^{\sigma/2}(\mathbb{R})$ に対して,

$$\langle (S_1^0)''(\psi_1)v, v\rangle \geq C_2\|v\|_{H^{\sigma/2}}^2$$

が成り立つ.

ここで, S_1^0 は 定常問題 (sSP_1) に対応する作用汎関数であり, 以下のように定められる:

$$S_1^0(v) \coloneqq \frac{1}{2}\|D_x^\sigma v\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|v\|_{L^2}^2 - \frac{1}{p+1}\|v\|_{L^{p+1}}^{p+1}.$$

命題 3 は, 補題 4 で得られる (SP_c) の基底状態の収束性と補題 5 で得られる性質から, 近似の議論を行うことで証明される. 詳しい証明は [5] を参照されたい.

参考文献

[1] J. L. Bona, P. E. Souganidis, and W. A. Strauss, *Stability and instability of solitary waves of Korteweg-de Vries type*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **411** (1987), no. 1841, 395–412.

[2] R. L. Frank and E. Lenzmann, *Uniqueness of non-linear ground states for fractional Laplacians in* $\mathbb{R}$, Acta Math. **210** (2013), no. 2, 261–318.

[3] R. Fukuizumi, *Remarks on the stable standing waves for nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity*, Adv. Math. Sci. Appl. **13** (2003), no. 2, 549–564.

[4] M. Grillakis, J. Shatah, and W. Strauss, *Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry. I*, J. Funct. Anal. **74** (1987), no. 1, 160–197.

[5] K. Kokubu, *Stability of travelling waves to benjamin-ono type equations with double power nonlinearities*, arXiv:2407.00321.

[6] K. Kokubu, *On solitary wave solutions to dispersive equations with double power nonlinearities*, Kodai Math. J. **47** (2024), no. 3, 301–322.

[7] L. Molinet and T. Tanaka, *Improved bilinear Strichartz estimates with application to the well-posedness of periodic generalized KdV type equations*, preprint, arXiv:2207.08725.

[8] M. Ohta, *Stability and instability of standing waves for one-dimensional nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity*, Kodai Math. J. **18** (1995), no. 1, 68–74.

Regularity properties of a generalized Oseen evolution operator in exterior domains, with applications to the Navier-Stokes initial value problem

名古屋大学大学院 多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
朝見陽介 (Yosuke ASAMI) *

概要

流体中を剛体が定められた運動をする際の, 剛体周りの流れを求める問題を考察する. 剛体の運動が時間に依存しているとき, 対応する線形化方程式は非自励系となり, その解作用素は発展作用素と呼ばれる. Hansel-Rhandi[6] はこの発展作用素を構成し, 非線形方程式の初期値問題の局所適切性を示したが, その解は軟解であった. 本講演では初期値に空間方向の重みを考えることによって強解が得られたという結果を紹介する.

1 導入

$\mathbb{R}^3$ を満たす非圧縮粘性流体の中で, 有界な剛体の障害物が運動しているものとする. このとき, その剛体の周りでの流れについて考察する. 流れは剛体に密着させた座標系での Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u - (\eta + \omega \times x) \cdot \nabla u + \omega \times u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (x,t) \in D \times (0, \mathcal{T}) \\ u|_{\partial D} = \eta + \omega \times x, \qquad u \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty, \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \end{cases} \tag{1.1}$$

に従う. ここで $x = (x_1, x_2, x_3)^\top, t$ はそれぞれ位置座標と時刻, D は $C^{1,1}$ の境界 ∂D をもつ $\mathbb{R}^3$ の外部領域であり, $\mathbb{R}^3 \setminus D \subset B_1$, $B_1 := \{|x| < 1\}$ を仮定する. 未知関数は流体の速度場を表すベクトル値関数 $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^3$ と圧力を表すスカラー値関数 $p = p(x,t) \in \mathbb{R}$ である. $\eta = \eta(t), \omega = \omega(t)$ はそれぞれ剛体重心の並進速度, 重心周りの回転角速度であり, この 2 つは既知である. また, $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2 + \partial_{x_3}^2$ は 3 次元 Laplacian, $\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ は 3 次元勾配, div はベクトル場の発散, $\times$ は 3 次元ベクトルの外積を表す. (1.1) の第 1 式は流体の運動量保存則 (Navier-Stokes 方程式) と質量保存則である. 第 2 式は境界条件を表し, 前者は滑りなし境界条件 (境界上での流体の速度と剛体の速度が一致する条件) を, 後者は無限遠方で流体が静止する条件を表す. 第 1 式に現れる $(\omega \times x) \cdot \nabla u$ は外部領域で非有界な係数を伴う項で, この問題でしばしば困難を引き起こす重要な項である. なお, $\eta(t) \equiv \omega(t) \equiv 0$ ならば, 通常の Navier-Stokes 方程式の外部問題を表し, Iwashita[9] などで考察されている.

* 本講演は名古屋大学の菱田俊明氏との共同研究に基づく. E-mail:yosuke.asami.e6@math.nagoya-u.ac.jp

本講演の主題は, (1.1) の時間局所適切性 (一意解の存在性と初期値の連続依存性) である. Hansel-Rhandi[6] は, 後に述べる線形化問題 (2.5) の発展作用素 $T(t,s)$ を構成し, (1.1) に対する一意な時間局所解の存在を示した. 注意すべきこととして, この発展作用素の生成作用素 $L(t)$(その定義は後の (2.7)–(2.8) で与えられる) は, 各 t を固定したときに解析的半群を生成せず, それゆえ (1.1) を [12] などの発展作用素の一般論に基づいて関数解析的に考察することはできない. [6] は独自の視点に基づいて一意解を構成し, システムの局所適切性を論じた. ただし, その解のクラスは, 後の (4.1) で与えられる積分方程式の解 (軟解) であり, 時間変数 t に関する微分可能性をはじめ, 解の正則性については明らかにはなっていなかった. 本講演では, 発展作用素の新しい正則性評価に基づいて, 時間変数に関して C^1 級の解が得られたことを報告する.

2 発展作用素

主結果の紹介の前に, 本章では後に述べる (1.1) の線形化問題 (2.5) において時間発展を司る発展作用素 $\{T(t,s)\}_{t\geq s\geq 0}$ に関する先行研究について述べる. まずは発展作用素に関する予備知識について紹介した後, 本問題固有の話題について述べる.

2.1 放物型発展作用素

本講演の主題でもある発展作用素について, 以下の常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A(t)u = 0 \qquad t \in (s,\infty), \\ u(s) = f \end{cases} \tag{2.1}$$

を例に挙げて解説をする. まず, u が $\mathbb{R}^N$ に値を取る関数で, $A(t)$ が時刻 t には依存しない N 次の定数行列 A である場合, 初期値問題 (2.1) の解作用素は行列の指数関数を用いて

$$u(t) = e^{-(t-s)A}f, \qquad e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k \tag{2.2}$$

と表される. また, u が Banach 空間 X に値を取る関数で, 同じく $A(t)$ が時刻によらない Banach 空間 X 上の線形作用素 A である場合, (2.1) の解作用素は作用素半群 $\{e^{-tA}\}_{t\geq s}$ を用いて (2.2) と表すことができる (後者の級数による表示は A が X 上の有界作用素である時にのみ有効である). この時の作用素 A のことを, 半群 e^{-tA} の生成作用素と呼ぶ. 本稿で取り扱う発展作用素は, この生成作用素が時間依存している場合の解作用素 $\{U(t,s)\}_{t\geq s\geq 0}$ のことを指す. この発展作用素を用いれば, (2.1) の解は,

$$u(t) = U(t,s)f$$

と表示できる. 定数係数の時と違って, 初期時刻 s も解作用素のパラメータ (従って発展作用素は 2-パラメータ族) になることに注意されたい. また, これらの解作用素には semigroup property(半群性) と呼ばれるものがあり, 発展作用素に対しては $s \leq \tau \leq t$ に対して

$$U(t,\tau)U(\tau,s)f = U(t,s)f \tag{2.3}$$

が成り立つ. この左辺は, (2.1) を時刻 τ まで解き, 改めて $U(\tau,s)f$ を初期値とみて時刻 t まで解いたものを, 一方右辺は (2.1) を一気に時刻 t まで解いたものを表し, 関係式 (2.3) はそれらが一致すること (解の一意性) を表している. この semigroup property は, 4 節で述べる解の正則性でも用いる.

また, 生成作用素 $A(t)$ が各点 t を固定したときに解析的半群を生成し, さらに $A(t)$ の resolvent 作用素について, t に関する一様有界性をはじめとした複数の評価式が成り立つとき, $U(t,s)$ は放物型発展作用素と呼ばれる (解析的半群については [5, 7.4 節] を, 必要な評価式については [12, 第 5 章] を参照されたい). 放物型発展作用素の顕著な性質として, 平滑化効果が挙げられ, これは $f \in X$(必ずしも生成作用素の定義域 $D(A(t))$ に属していなくても良い) に対し,

$$U(t,s)f \in D(A(t)), \qquad \frac{\partial}{\partial t}U(t,s)f + A(t)U(t,s)f = 0 \tag{2.4}$$

が成り立つことを言う. このことは, 次節で述べる解の正則性評価とも関わる.

2.2 (1.1) の線形化問題と発展作用素 $T(t,s)$

話を戻して, (1.1) の線形化問題

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u - (\eta + \omega \times x)\cdot\nabla u + \omega \times u + \nabla p = 0, \quad \operatorname{div} u = 0, \quad (x,t) \in D \times (0,\mathcal{T}) \\ u|_{\partial D} = 0, \qquad u \to 0 \quad \text{as } |x| \to \infty, \\ u(\cdot,s) = f(\cdot) \end{cases} \tag{2.5}$$

を考える. 第 1 式を抽象的な常微分方程式に書き換えるため, まずはベクトル場の Helmholtz 分解 (直和分解 [11]) から始める. 以下, $1 < q < \infty$ とし, G は $\mathbb{R}^3$ それ自身, または外部領域を表すものとする. G 上 q 乗可積分関数の空間 $L^q(G)$ には直和分解

$$\begin{aligned} &L^q(G) = L^q_\sigma(G) \oplus \{\nabla p \in L^q(G) : p \in L^q_{\mathrm{loc}}(\overline{G})\}, \\ &L^q_\sigma(G) = \begin{cases} \{u \in L^q(D) : \operatorname{div} u = 0 \ \text{ in } \ D, \quad \nu \cdot u|_{\partial D} = 0\}, & G = D, \\ \{u \in L^q(\mathbb{R}^3) : \operatorname{div} u = 0 \ \text{ in } \ \mathbb{R}^3\}, & G = \mathbb{R}^3, \end{cases} \end{aligned} \tag{2.6}$$

が成り立ち, それゆえ射影作用素 $P : L^q(G) \to L^q_\sigma(G)$ が定まる. ただし, ν は D 上外向きの単位法線ベクトルを表す. (2.5) の第 1 式において, 圧力は時間発展しないため, 方程式の両辺に射影作用素 P を施して圧力を消去し, $L^q_\sigma(D)$ 上での常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + L(t)u = 0, \quad (x,t) \in D \times (0,\mathcal{T}), \\ u(\cdot,s) = f(\cdot) \in L^q_\sigma(D) \end{cases}$$

を考察する. ただし, 作用素 $L(t)$ とその定義域 $D_q(L(t))$ は,

$$L(t)u = P\left(-\Delta - (\eta(t) + \omega(t) \times x)\cdot\nabla + \omega(t)\times\right)u \tag{2.7}$$

$$D_q(L(t)) = \{u \in L^q_\sigma(D) \cap W^{1,q}_0(D) \cap W^{2,q}(D) : (\omega(t) \times x)\cdot\nabla u \in L^q(G)\} \tag{2.8}$$

で与えられる. この $L(t)$ が本講演での主題となる発展作用素 $T(t,s)$ を生成する. 注意すべきこととして, $L(t)$ は $\omega(t) \equiv 0$ でない限り, 各 t を固定したときに解析的半群の生成作用素とはならない. その原因は移流項の係数 $(\omega(t) \times x)$ が外部領域 D において非有界となるためであり, それゆえ $T(t,s)$

は双曲型発展作用素[*1]に分類される. しかしながら, (1.1) は剛体に密着させた座標変換を行うことで得られ, その過程で移流項 $(\eta(t)+\omega(t)\times x)\cdot\nabla u$(と $\omega(t)\times u$) がもたらされることを考えると, 解の平滑化が起きないことも考えにくく, 実際 Hansel-Rhandi[6] は独自の視点に基づいて $T(t,s)$ が L^q-L^r 平滑性評価を持つことを示した. しかし, (2.4) のような平滑化効果が成り立つには, $f\in Y_q(D)$(その定義は (3.1) を参照) でなければならず, 初期値に対して強い滑らかさを課さなければならなかった. 本研究では, $f\in L^q_\sigma(D)$ かつ $|x|f\in L^q(D)$ に対して (2.4) が成り立つことを示し, それを通して非線形問題 (1.1) の精密な評価を行った.

3 主結果

本研究 [1] では (2.5) の発展作用素に関する新しい評価を導出し, それを非線形問題 (1.1) に適用して時間局所解の構成を行った. ここでは, 非線形問題での結果に焦点を当てて紹介する.

主定理の記述に際し, まずは関数空間の導入を行う. 領域 G に対し, $L^q(G)$ で G 上 q 乗可積分な空間を表し, そのノルムは $\|\cdot\|_{q,G}$ で表す. ただし, 外部領域 D のノルムは単に $\|\cdot\|_q$ と書く. 本講演では空間方向の重み $|x|f$ を考えた時の考察を行うため, $\alpha\geq 0$ に対し,

$$\begin{aligned}&\rho(x):=1+|x|\\&L^q_\alpha(G):=\{u\in L^q(G):\rho^\alpha u\in L^q(G)\},\qquad L^q_{\alpha,\sigma}:=L^q_\alpha(G)\cap L^q_\sigma(G)\end{aligned}$$

で定める ($L^q_\sigma(G)$ の定義は (2.6) で述べている). また, 解の空間方向に対する正則性を捉えるため,

$$\begin{aligned}&Y_q(G):=\{u\in L^q_\sigma(G)\cap W^{1,q}_0(G)\cap W^{2,q}(G):\rho\nabla u\in L^q(G)\},\\&\|u\|_{Y_q(G)}:=\|u\|_{q,G}+\|\rho\nabla u\|_{q,G}+\|\nabla^2 u\|_{q,G}\end{aligned}\tag{3.1}$$

と定める. 明らかに, $Y_q(D)\subset D_q(L(t))$ が任意の $t\geq 0$ に対して成り立つ.

まず (1.1) では, 滑りなし境界条件により境界値が 0 になっていないが, $u|_{\partial D}=\eta+\omega\times x=(1/2)\mathrm{rot}\,\{\eta\times x-|x|^2\omega\}$ と書けるので, $0\leq\phi\leq 1$ かつ境界 ∂D の近傍で $\phi=1$ となる cut-off 関数 ϕ を固定し,

$$\begin{aligned}&b(x,t):=\frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\left\{\phi(x)(\eta(t)\times x-|x|^2\omega(t))\right\}\\&u(x,t)=b(x,t)+v(x,t),\end{aligned}\tag{3.2}$$

を考える. ただし, rot はベクトル場の回転を表す. この時, v の満たす方程式は,

$$\begin{cases}\dfrac{dv}{dt}+L(t)v+P(v\cdot\nabla v+b\cdot\nabla v+v\cdot\nabla b)(t)=PF(t), & t\in(0,\infty),\\ v(0)=v_0:=u_0-b(0),\end{cases}\tag{3.3}$$

ただし,

$$F:=-\partial_t b+\Delta b+(\eta+\omega\times x)\cdot\nabla b-\omega\times b-b\cdot\nabla b,\tag{3.4}$$

である. この時, 以下が成り立つ.

[*1] ただし「双曲型」とは「放物型ではない」という意味であり, 波動方程式などの双曲型方程式が属するクラスよりずっと広いクラスを指す (発展作用素論における術語である).

Theorem 3.1 ([1, Theorem 2.5])**.** $\vartheta \in (0,1], \gamma \in [0,1)$ とし, $\mathcal{T} \in (0,\infty)$ を任意に取る. η, ω は,

$$\begin{aligned} &\eta, \omega \in C^{1,\vartheta}_{\mathrm{loc}}((0,\infty);\mathbb{R}^3), \qquad |\eta'(t)| + |\omega'(t)| = O(t^{-\gamma}) \quad \text{as } t \to 0, \\ &|\eta'(t) - \eta'(\tau)| + |\omega'(t) - \omega'(\tau)| \le C(t-\tau)^{\vartheta}\tau^{-\gamma-\vartheta} \quad \left(\frac{t}{2} < \tau < t \le \mathcal{T}\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

を満たすとする. この時, 任意の $q \in (3,\infty)$, $v_0 \in L^q_{1,\sigma}(D)$ に対して, ある $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}_0(\|\rho v_0\|_q, m_0, q, \gamma, D) \in (0,1]$ が存在して, 区間 $[0,\mathcal{T}_0]$ 上における (3.3) の時間局所解 $v(t)$ が以下のクラスで存在する:

$$v \in C([0,\mathcal{T}_0]; L^q_\sigma(D)) \cap C^1((0,\mathcal{T}_0]; L^q_\sigma(D)), \tag{3.6}$$

$$v(t) \in Y_q(D) \quad \forall t \in (0,\mathcal{T}_0], \qquad L(\cdot)v \in C((0,\mathcal{T}_0]; L^q_\sigma(D)). \tag{3.7}$$

さらにこの解は, 以下の平滑化効果および初期値への収束を達成する: $r \in [q,\infty]$ に対し, ある定数 $C_1 = C(m_0, q, r, \gamma, D) > 0$, $C_2 = C_2(m_0, q, \vartheta, \gamma, D) > 0$ に対して,

$$\sup_{0<t\le\mathcal{T}_0} \left(t^{(3/q-3/r)/2}\|\rho v(t)\|_r + t^{1/2+(3/q-3/r)/2}\|\rho\nabla v(t)\|_r \right) \le C_1(\|\rho v_0\|_q + 1), \tag{3.8}$$

$$\sup_{0<t\le\mathcal{T}_0} \left(t\|\partial_t v(t)\|_q + t\|\nabla^2 v(t)\|_q \right) \le C_2(\|\rho v_0\|_q + m_1), \tag{3.9}$$

$$\lim_{t\to 0} \|\rho(v(t) - v_0)\|_q = 0, \tag{3.10}$$

$$\lim_{t\to 0} t^{j/2+(3/q-3/r)/2}\|\rho\nabla^j v(t)\|_r = 0, \quad j \in \{0,1\}, \quad (j,r) \ne (0,q) \tag{3.11}$$

ただし,

$$\begin{aligned} m_0 &:= \sup_{0\le t\le 1} (|\eta(t)| + |\omega(t)|) + \sup_{0<t\le 1} t^{\gamma} \left(|\eta'(t)| + |\omega'(t)| \right), \\ m_1 &:= \sup_{\frac{t}{2}<\tau<t\le 1} \frac{\tau^{\gamma+\vartheta} \left(|\eta'(t) - \eta'(\tau)| + |\omega'(t) - \omega'(\tau)| \right)}{(t-\tau)^{\vartheta}} + m_0 + m_0^2. \end{aligned}$$

Remark 3.2. 主定理についていくつか注意を述べる.

1. Theorem 3.1 では, (1.1) から導かれる方程式 (3.3) の解の性質 (3.8)–(3.11) について述べているが, 関係式 (3.2) を用いることにより,

$$u \in C([0,\mathcal{T}_0]; L^q(D)) \cap C^1((0,\mathcal{T}_0]; L^q(D))$$

であることも従う.

2. Fujita-Kato[4] によれば, 非線形偏微分方程式をスケール変換に関して不変な空間 (臨界空間) で考察することの重要性が指摘されている (Fujita-Kato の原理). 例えば全空間 $\mathbb{R}^n$ における通常の Navier-Stokes 方程式は $L^n(\mathbb{R}^n)$ が臨界空間となる. (1.1) は不変にするスケール変換を持たないが, $L^3(D)$ で解析をすることによって, 時間大域的な軟解の存在およびその性質が Hishida[7] で調べられている. しかしながら, Theorem3.1 は $q = 3$ を含んでおらず, 臨界空間での解析は行えていない. その理由は, Duhamel 項の微分の評価を行う際, weight を 2 つ課した $\rho^2 Pf$ の L^q ノルムを評価しなければならないが ([1, Section 8], 後の (4.13) も参照), $\|\rho^2 Pf\|_q \le C\|\rho^2 f\|_q$ となるのは, $q \in (3,\infty)$ の時, かつこの時に限るからである (Muckenhoupt weight, [3] 参照).

3. 一意性については, 解の存在性と独立に述べることができて, 一意性が成り立つ解のクラスは (3.6)–(3.7) より広い. 後に述べる積分方程式 (4.1) について, 解は存在したならば以下のクラスで一意であることも示した ([1, Proposition 9.1]) : $\mathcal{T} \in (0,\infty)$ に対して,

$$v \in L^\infty(0,\mathcal{T};L^q_\sigma(D)), \qquad t^{1/2}\nabla v \in L^\infty(0,\mathcal{T}_0;L^q(D)).$$

これについては, Fujita-Kato[4, Theorem 3.1] に記された方法で示す事ができる.

4. 仮定 (3.5) は, 元の問題 (1.1) を (3.3) に書き換えた時に現れる関数 F(その表示は (3.4) を参照) の $\partial_t b$ が well-deifined になるための仮定であり, 発展作用素 $T(t,s)$ それ自体を調べるための仮定としては過剰である. 発展作用素の生成, 及びその評価の確立のためには,

$$\eta,\omega \in C^{0,\theta}_{\mathrm{loc}}([0,\infty):\mathbb{R}^3), \qquad \theta \in (0,1] \tag{3.12}$$

で十分である.

[6] は, $v_0 \in L^q_\sigma(D), q \in [3,\infty)$ のもと, $v \in L^\infty(0,\mathcal{T}_0;L^q_\sigma(D))$ かつ $t^{1/2}\nabla v \in L^\infty(0,\mathcal{T}_0;L^q(D))$ なる時間局所的な一意解が存在することを示した (本研究とは違って, 臨界空間 $L^3_\sigma(D)$ も含まれている). Theorem3.1 は, 仮定 $v_0 \in L^q_{1,\sigma}(D), q \in (3,\infty)$ が満たされるならば, 解 v が [6] よりさらに詳細なクラス (3.6)–(3.7) に属することを示している.

4 証明の概略

主定理は, 発展作用素 $T(t,s)$ に対する評価を用いて, 積分方程式

$$v(t) = T(t,0)v_0 - \int_0^t T(t,\xi)P(v\cdot\nabla v + b\cdot\nabla v + v\cdot\nabla b + F)(\xi)\,d\xi \tag{4.1}$$

に対する解の存在, 及びその解を評価することによって得られる (この論法は, [10] などにも見られる標準的な議論である). 従って, 発展作用素 $T(t,s)$ 自体に成り立つ評価が, 論証における中心の役割を果たすため, 以下では発展作用素に対する評価について述べる. 以下, 断らない限り $\mathcal{T} \in (0,\infty), 0 \le s < t \le \mathcal{T}$ とする. また, Remark3.2 の 4. に基づいて, (3.12) を仮定し, $m \in (0,\infty)$ に対して,

$$\sup_{0\le t\le\mathcal{T}}(|\eta(t)|+|\omega(t)|) + \sup_{0\le s<t\le\mathcal{T}}\frac{|\eta(t)-\eta(s)|+|\omega(t)-\omega(s)|}{(t-s)^\theta} \le m$$

が成り立つとする. 以下で述べる発展作用素の評価で, 定数 C は常に $\mathcal{T}, m$ に依存するが, η,ω に対しては一様に取ることができる.

一般に外部問題の考察では, しばしば「全空間 $\mathbb{R}^3$ に対する評価」と「有界領域 B_R に対する評価」とを組み合わせた評価が行われる. 全空間における線形化問題 ((2.5) において, D を $\mathbb{R}^3$ に取り替えたもの) の発展作用素 $f \mapsto U(t,s)f$ は, 熱半群 $e^{t\Delta}$ を用いて明示的に表示でき, 以下の L^q-L^r 平滑性評価が成り立つ.

Proposition 4.1 ([1, Proposition 4.1])**.** $\alpha \ge 0, q \in [1,\infty], r \in [q,\infty]$ とし, $j \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ とすると, $f \in L^q_\alpha(D)$ に対して以下が成り立つ:

$$\|\rho^\alpha\nabla^j U(t,s)f\|_{r,\mathbb{R}^3} \le C(t-s)^{-j/2-(3/q-3/r)/2}\|\rho^\alpha f\|_{q,\mathbb{R}^3}.$$

この $U(t,s)$ と, 有界領域 $D_7 := D \cap B_7$ ($B_7 := \{|x| < 7\}$) に対する発展作用素 $V(t,s)$, および適当な cut-off 関数 ϕ を用いて外部領域に対する発展作用素の第 0 近似 $T_0(t,s)$ を,

$$T_0(t,s)f = W(t,s)f = (1-\phi)U(t,s)f_0 + \phi V(t,s)f + \mathbb{B}[(U(t,s)f_0 - V(t,s)f_1)\cdot\nabla\phi] \tag{4.2}$$

で定める. ただし, f_0, f_1 は f を $\mathbb{R}^3, D_7$ に適当に修正したもので, $\mathbb{B}$ は solenoidal 条件 $\operatorname{div} u = 0$ の回復に伴う Bogovskiĭ作用素 [2] を表す. この第 0 近似は, 方程式

$$\partial_t W(t,s)f + L(t)W(t,s)f = -PK(t,s)f$$

を満たす. ただし, $PK(t,s)f$ は剰余項で, D 上コンパクトな台を持つ. Hansel-Rhandi は [6, Section 5] において, 所要の発展作用素 $T(t,s)$ を以下の積分方程式

$$T(t,s)f = W(t,s)f + \int_s^t T(t,\tau)PK(\tau,s)\,d\tau$$

を解くことによって構成した. 構成の方法は逐次近似法

$$T_{j+1}(t,s)f = \int_s^t T_j(t,\tau)PK(\tau,s)f\,d\tau, \qquad T_0(t,s)f = W(t,s)f \tag{4.3}$$

に基づき, (2.5) の発展作用素 $T(t,s)f$ は

$$T(t,s)f = \sum_{j=0}^{\infty} T_j(t,s)f \tag{4.4}$$

で与えられる. Proposition4.1 と合わせて, 以下が得られる.

Proposition 4.2 ([1, Theorem 2.1])**.** $\alpha \in [0,3), q \in \left(\frac{3}{3-\alpha}\right), \infty, r \in [q,\infty]$ とし, $j \in \{0,1\}$ とすると, $f \in L^q_{\alpha,\sigma}(D)$ に対して以下が成り立つ:

$$\|\rho^\alpha \nabla^j T(t,s)f\|_r \le C(t-s)^{-j/2-(3/q-3/r)/2}\|\rho^\alpha f\|_q. \tag{4.5}$$

この平滑性評価 (4.5) を元に, 仮定 $\rho v_0 \in L^q(D)$ から t について C^1 級の (線形化方程式の) 解が得られることについて述べる. まず解の正則性を捉える補助空間として, $Z_q(D)$ を

$$\begin{aligned} &Z_q(D) := \{u \in L^q_\sigma(D) : \rho\nabla u \in L^q(D)\}, \\ &\|u\|_{Z_q(D)} := \|u\|_q + \|\rho\nabla u\|_q \end{aligned}$$

で定める. Hishida は [8, Section 5] において, $f \in Z_q(D)$ $(3/2 < q < \infty)$ なる初期値に対して, この発展作用素 $T(t,s)$ は t に関する正則性

$$T(\cdot,s)f \in C^1((s,\infty); L^q_\sigma(D)), \qquad t \in (s,\infty)$$

および (2.4) のような平滑化効果が成り立つことを指摘した. これは [6] が述べていた $f \in Y_q(D)$ に対する平滑化効果と比べると, 初期値に対する仮定が緩められていることが分かる. これと (4.5) を $r = q, (j,\alpha) = (0,0), (1,0), (1,1)$ に対して用いると, $f \in L^q_{1,\sigma}(D)$ ならば, $s < t\,(\le \mathcal{T})$ に対して,

$$T(t,s)f, \quad \rho\nabla T(t,s)f \in L^q(D)$$

が成り立つことが分かる. すなわち, 線形化方程式 (2.5) の解 $T(t,s)f$ は, 初期時刻 s を離れると直ちに空間 $Z_q(D)$ の元となることがしたがう. これと semigroup property(2.3) を合わせると, 任意の $\varepsilon > 0$, $t - s \geq \varepsilon$ に対して, $f \in L^q_{1,\sigma}(D)$ ならば, 線形化方程式の解 $T(t,s)f$ を

$$T(t,s)f = T(t,s+\varepsilon)T(s+\varepsilon,s)f$$

と見ることにより, $\varepsilon > 0$ の任意性から $T(\cdot,s)f \in C^1((s,\mathcal{T}];L^q_\sigma(D))$ であることが従い, 発展作用素の時間微分, 及び空間 2 回微分に対する評価として以下が成り立つ.

Proposition 4.3 ([1, Theorem 2.2]). $q \in (\frac{3}{2},\infty)$ とすると, $f \in L^q_{1,\sigma}(D)$ に対して, 以下が成り立つ:

$$\|\partial_t T(t,s)f\|_q + \|T(t,s)f\|_{Y_q(D)} \leq C(t-s)^{-1}\|f\|_q + C(t-s)^{-1/2}\|\rho f\|_q \tag{4.6}$$

Proposition4.2, 4.3 を組み合わせることにより, 発展作用素 $T(t,s)$ の t に関する Hölder 評価も得られる. 以下の (4.7) は, Duhamel 項及び (3.3) の解の評価においても用いられる.

Proposition 4.4 ([1, Theorem 2.3]). $q \in \left(\frac{3}{3-\alpha},\infty\right), r \in [q,\infty], j = \{0,1\}$ とし, $\mu_j \in \left(0, 1-\frac{j}{2}\right]$ とすると, $f \in L^q_{1,\sigma}$, $0 \leq s < \tau < t \leq \mathcal{T}$ に対して, 以下が成り立つ:

$$\|\nabla^j T(t,s)f - \nabla^j T(\tau,s)f\|_r \leq C(t-\tau)^{\mu_j}(\tau-s)^{-j/2-(3/q-3/r)/2-\mu_j}\|\rho f\|_q, \tag{4.7}$$

ただし, $r = \infty$ の場合, $\mu_j = 1 - j/2$ は含めない.

積分方程式 (4.1) の考察には, 発展作用素 $T(t,s)$ の評価のみならず, Duhamel 項が t について C^1 級の関数になるための十分条件の考察および評価式も要する. 以下, $\mu \in (0,1], \kappa \in [0,1)$ とし, Duhamel 項を

$$w(t) := \int_s^t T(t,\sigma)g(\sigma)\,d\sigma, \tag{4.8}$$

$$(\cdot - s)^\kappa g \in L^\infty(s,\mathcal{T};L^q_{2,\sigma}(D)), \tag{4.9}$$

$$g \in C((s,\mathcal{T}];L^q_\sigma(D)), \quad \|g(t)-g(\sigma)\| \leq C(t-\sigma)^\mu(\sigma-s)^{-\kappa-\mu} \quad \left(\frac{s+t}{2} < \sigma < t \leq \mathcal{T}\right) \tag{4.10}$$

$$\{g\}_{q,\mu,\kappa} := \sup_{\frac{s+t}{2}<\sigma<t\leq\mathcal{T}} \frac{(\sigma-s)^{\kappa+\mu}\|g(t)-g(\sigma)\|_q}{(t-\sigma)^\mu} \tag{4.11}$$

で定める. この時, 以下が成り立つ.

Proposition 4.5 ([1, Theorem 2.4]). $q \in \left(\frac{3}{2},\infty\right), 0 \leq s < \mathcal{T}$ とする. (4.8) で定義された $w(t)$ について, (4.9)–(4.11) のもと以下が成り立つ:

$$w \in C^1((s,\mathcal{T}];L^q_\sigma(D)), \qquad w(t) \in Y_q(D) \quad \forall t \in (s,\mathcal{T}]$$

$$\|\partial_t w(t)\|_q + \|\nabla^2 w(t)\|_q \leq C(t-s)^\kappa \left(\sup_{\sigma\in(s,\mathcal{T})}(\sigma-s)^\kappa\|\rho^2 g(\sigma)\|_q + \{g\}_{q,\mu,\kappa}\right).$$

以下では, $\partial_t w$ に注目し, g に対して weight を 2 つ要する理由について述べる. まず発展作用素 $T(t,s)$ は (4.4) によって得られたものであるが, 初期時刻 $t = s$ における特異性は $T_0(t,s) =$

$W(t,s)$((4.2), (4.3) 参照) が最も強い [1, Section 8, (8.6)]. そのため以下では (4.8) で $T(t,\sigma)$ を $W(t,\sigma)$ に取り替えたものについて述べる. まず (4.8) の時間微分について,

$$\int_s^{(s+t)/2} \partial_t W(t,\sigma)g(\sigma)\,d\sigma + \int_{(s+t)/2}^t \partial_t W(t,\sigma)g(\sigma)\,d\sigma =: w_1(t) + w_2(t)$$

と分けて考察する. (4.6) より, $w_1(t)$ の方は区間 $[s,(s+t)/2]$ 上で可積分であり問題は無い. しかし一方で $w_2(t)$ に (4.6) をそのまま適用すると, $\sigma = t$ における特異性が強すぎるため, g に対する Hölder 連続性 (4.10) を援用して特異性を可積分程度のものに緩める. (4.10) は, Hölder 評価を利用したぶん初期時刻 $\sigma = s$ 近傍の特異性が強まる評価となっているが, $w_2(t)$ の積分区間に $\sigma = s$ は含まれないため, この特異性は問題にならない (従って, $-\kappa - \mu < -1$ のような強い特異性を持っていてもよい). ここで, $\mathbb{R}^3$ 上の発展作用素 $U(t,s)$ が関わる部分に注目をすると,

$$\begin{aligned}\int_{(s+t)/2}^t (1-\phi)\partial_t U(t,\sigma)g_0(\sigma)\,d\sigma &= \int_{(s+t)/2}^t (1-\phi)\partial_t U(t,\sigma)\left(g_0(\sigma) - g_0(t)\right)d\sigma \\ &\quad - \int_{(s+t)/2}^t (1-\phi)L_{\mathbb{R}^3}(t)\left(U(t,\sigma) - e^{-(t-\sigma)L_{\mathbb{R}^3}(t)}\right)g_0(t)\,d\sigma \\ &\quad + (1-\phi)e^{-\frac{(t-s)}{2}L_{\mathbb{R}^3}(t)}g_0(t)\end{aligned} \tag{4.12}$$

と変形できる. ただし, $L_{\mathbb{R}^3}(t)$, $e^{-tL_{\mathbb{R}^3}(t)}$ は $\mathbb{R}^3$ 上の線形化問題に現れる線形作用素, 及び t を固定したときに $L_{\mathbb{R}^3}(t)$ が生成する半群で, g_0 は g を $\mathbb{R}^3$ へゼロ拡張した関数である. (4.12) 右辺第 2 項の評価には

$$\left\| L_{\mathbb{R}^3}(t)\left(U(t,s) - e^{-(t-s)L_{\mathbb{R}^3(t)}}\right)f\right\|_{q,\mathbb{R}^3} \le C(t-s)^\theta\left((t-s)^{-\frac{1}{2}}\|\rho f\|_{q,\mathbb{R}^3} + \|\rho^2 f\|_{q,\mathbb{R}^3}\right) \tag{4.13}$$

を用いる ([1, Lemma 4.2]). ただし, θ は (3.12) で課した η,ω の Hölder 次数である. この右辺に ρ^2 が現れるため, 非同次項 g には (4.9) のように weight を 2 つ課さなければならない. なお, η,ω が $\mathbb{R}^3$ の定数ベクトルの場合, 発展作用素 $U(t,s)$ は半群 $e^{-(t-s)L_{\mathbb{R}^3}}$ に一致するため (4.12) の右辺第 2 項は現れず, g に対して課す weight ρ は 1 つで十分である (従って weight が 2 つ必要になるのは, 非自励系特有の事象であると言える). $w(t)$ が t について C^1 級であることは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対する補助関数

$$w_\varepsilon(t) := \int_s^{t-\varepsilon} T(t,\sigma)g(\sigma)\,d\sigma$$

が区間 $(s,\mathcal{T}]$ 上の任意の compact 集合上で C^1 級であること, および $\varepsilon \to 0$ で $w(t)$ に $(s,\mathcal{T}]$ 上広義一様収束することにより従う.

参考文献

[1] Asami, Y., Hishida, T.: Regularity properties of a generalized Oseen evolution operator in exterior domains, with applications to the Navier-Stokes initial value problem. arXiv:2411.19711

[2] Bogovskiĭ, M.E.: Solution of the first boundary value problem for the equation of continuity of an incompressible medium. Sov. Math. Dokl. **20**, 1094–1098 (1979)

[3] Farwig, R., Sohr, H.: Weighted L^q-theory for the Stokes resolvent in exterior domains. J. Math. Soc. Japan **49**, 251–288 (1997)

[4] Fujita, H., Kato, T.: On the Navier-Stokes initial value problem. I. Arch. Rational Mech. Anal. **16**, 269–315 (1964)

[5] 藤田宏, 黒田成俊, 伊藤清三: 関数解析. 岩波書店 (1991)

[6] Hansel, T., Rhandi, A.: The Oseen-Navier-Stokes flow in the exterior of a rotating obstacle: the non-autonomous case. J. Reine Angew. Math. **694**, 1–26 (2014)

[7] Hishida, T.: Large time behavior of a generalized Oseen evolution operator, with applications to the Navier-Stokes flow past a rotating obstacle. Math. Ann. **372**, 915–949 (2018)

[8] Hishida, T.: Decay estimates of gradient of a generalized Oseen evolution operator arising from time-dependent rigid motions in exterior domains. Arch. Rational Mech. Anal. **238**, 215–254 (2020)

[9] Iwashita, H.: L_q-L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L_q spaces, Math. Ann. **285**, 265–288 (1989)

[10] Kato, T.: Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. Math. Z. **187**, 471–480 (1984)

[11] Miyakawa, T.: On nonstationary solutions of the Navier-Stokes equations in an exterior domain. Hiroshima Math. J. **12**, 115–140 (1982)

[12] 田辺広城: 発展方程式. 岩波書店 (1975)

Relation between series representations of functions related to astroid-type closed curves and uniformly asymptotic evaluations of generalized Bessel functions

名古屋大学 大学院多元数理科学研究科 多元数理科学専攻
北島雅也 (Masaya KITAJIMA) *

概要

正の実数 p により円を一般化した閉曲線 p-circle 内部の格子点に対して, 各点と対応する単位正方形たちからなる図形の近似を通し, 面積間の誤差項 P_p を考える. 半径の増大に伴う P_p の漸近を調べる問題において, 我々は未だ着手されていない 1 以下の p の場合について取り組むため, 倉坪氏と中井氏による円 ($p=2$) の問題についての研究手法に目を向けた. 本稿では, 手法において重要な役割を果たす級数等式の p に対する一般化を与え, 問題が一般化 Bessel 関数の諸性質, 特に一様漸近評価と結びつくことに触れ, この数論の問題と特殊関数論の繋がりを強調する.

1 導入

正の実数 p, r に対して, 円を一般化した図形である p-circle (Lamé's curve, あるいは supper ellipse として呼称される閉曲線) $\{x \in \mathbb{R}^2 |\ |x_1|^p + |x_2|^p = r^p\}$ の格子点問題について考える. すなわち, それは p-circle と (格子点中心の非交叉単位正方形からなる) モザイク状に近似された図形間における面積の誤差

$$P_p(r) := R_p(r) - \frac{2}{p}\frac{\Gamma^2(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{2}{p})}r^2$$

に対して, $P_p(r) = \mathcal{O}(r^{\alpha_p})$ かつ $P_p(r) = \Omega(r^{\alpha_p})$ を満たすような値 α_p を見つける問題である. ただし, R_p は p-circle 内部における格子点の個数 (近似モザイク図形の面積), gamma 関数 Γ からなる項は p-circle の面積であり, $\mathbb{R}$ 上の関数 f と g に対して $f(t) = \mathcal{O}(g(t))$ や $f(t) = \Omega(g(t))$ であるとは, それぞれ $\limsup_{t\to\infty} |\frac{f(t)}{g(t)}| < +\infty$ や $\liminf_{t\to\infty} |\frac{f(t)}{g(t)}| > 0$ であることを意味することに注意せよ.

特に $p = 2$ の場合 (すなわち, 閉曲線が円になる場合) では, いわゆる Gauss の円問題 [3] と呼ばれており, 1917 年に G.H. Hardy[5] が予想した, 十分小さな任意の $\varepsilon > 0$ で成り立つ $\mathcal{O}$ 評価の下限

$$P_2(r) = \mathcal{O}(r^{\frac{1}{2}+\varepsilon}), \quad \neq \mathcal{O}(r^{\frac{1}{2}}) \tag{1.1}$$

について, $\frac{105}{824}(= 0.127\cdots)$ よりも大きな任意の ε に対して, 評価 (1.1) が成り立つことが 2017 年に J. Bourgain と N. Watt [1] により示されている.

* E-mail:kitajima.masaya.z5@s.mall.nagoya-u.ac.jp

一方で, $p>2$ の場合, E. Krätzel により一般化された Bessel 関数 ([8], Definition 3.3) を用いた級数展開で表される second main term $\Psi(r;p)$ ([8], (3.55)) で分解した表示 ([8], (3.57))

$$P_p(r)=\Psi(r;p)+\Delta(r;p) \tag{1.2}$$

から以下の重要な定理が与えられており, このとき, G. Kuba[9] による 1993 年の結果 (剰余項 $\Delta(r;p)$ の $\mathcal{O}$ 評価) を適用すれば, $p>\frac{73}{27}$ の場合の問題が解決する.

Theorem 1.1 ([8], Theorem 3.17 A)**.** $p>2$ としたとき, $\Delta(r;p)=\mathcal{O}(r^{\alpha_p})$ を満たす $\alpha_p<1-\frac{1}{p}$ が存在するならば, そのとき $P_p(r)=\mathcal{O}(r^{1-\frac{1}{p}}),\Omega(r^{1-\frac{1}{p}})$ が成り立つ.

ここで, 残された $0<p<2$ の場合について考える. $p\geq 2$ の場合における分解 (1.2) に基づいた従来の方法では, r を固定した $x_2>0$ に対する二階導関数 $x_2''(x_1)$ を扱うのだが, $0<p<2$ の場合ではこの導関数に特異点が現れてしまうため, 根本的に別の手法から問題に取り組む必要がある.

起点として, $p=2$ の場合の問題に対する, 倉坪氏と中井氏 [10] による調和解析的な取り組みと, それにおける極めて重要な等式 ([10], (2.6))

$$D_\beta(s:x)-\mathcal{D}_\beta(s:x)=s^{\beta+1}2^{\beta+1}\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}\frac{J_{\beta+1}(2\pi\sqrt{s}|x-n|)}{(2\pi\sqrt{s}|x-n|)^{\beta+1}}\qquad(\beta>\frac{1}{2}) \tag{1.3}$$

について着目する. ただし, J_ν は Bessel 関数であり, $\beta>-1,\ s>0,\ x\in\mathbb{R}^2$ に対して,

$$D_\beta(s:x):=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\sum_{|m|^2<s}(s-|m|^2)^\beta e^{2\pi ix\cdot m},\quad \mathcal{D}_\beta(s:x):=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_{|\xi|^2<s}(s-|\xi|^2)^\beta e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi \tag{1.4}$$

として定められており, 特に $D_0(r^2:0)-\mathcal{D}_0(r^2:0)=P_2(r)$ が成り立つ. 倉坪氏と中井氏は, この Bessel 関数を用いた級数表示 (1.3) を用いて Hardy 予想 (1.1) と同値な調和解析的な主張を与えた (詳細は [10] の Theorem 7.1 を参照せよ).

そこで, 我々は 倉坪氏と中井氏の手法に倣い, (1.4) を p-norm $|\xi|_p(:=(|\xi_1|^p+|\xi_2|^p)^{\frac{1}{p}})$ により一般化した関数

$$D_\beta^{[p]}(s:x):=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\sum_{|m|_p^p<s}(s-|m|_p^p)^\beta e^{2\pi ix\cdot m},\quad \mathcal{D}_\beta^{[p]}(s:x):=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\int_{|\xi|_p^p<s}(s-|\xi|_p^p)^\beta e^{2\pi ix\cdot\xi}d\xi, \tag{1.5}$$

を調べることを通して, 特に先行研究において未着手な $\frac{2}{p}\in\mathbb{N}$ が奇数なる $0<p\leq 1$ に対応する「astroid 型」p-circle の問題を考え, 与えられた誤差項 P_p の評価式に対応する同値な調和解析的な主張 ([10] の Theorem 7.1 の一般化) を見出すことを将来的な目標とする.

本稿では, 論文 [10] において重要な役割を果たす等式 (1.3) の p に対する一般化を与え, その過程に定めた一般化 Bessel 関数の諸性質との結びつきについて強調する.

2 主定理

$\mathbb{R}^2$ 上の関数 F が球対称であるとは, 任意の $x\in\mathbb{R}^2$ で $F(x)=\phi(|x|)$ を満たす非負実数上の関数 ϕ が存在することをいい, このような関数 F が $\mathbb{R}^2$ 上で可積分であれば, その Fourier 変換が

$$\hat{F}(\xi) = 2\pi \int_0^\infty J_0(2\pi r|\xi|)\phi(r) r dr \quad (\xi \in \mathbb{R}^2) \tag{2.1}$$

のように零次 Bessel 関数 J_0 を用いた積分で表示できることを思い返す (零次の Hankel 変換; [2]).

このとき, 正の実数 p, $\mathbb{R}^2$ 上の関数 F に対し, 任意の $x \in \mathbb{R}^2$ で $F(x) = \phi(|x|_p)$ を満たす非負実数上の関数 ϕ が存在するとき, F は p-radial であると定める (すなわち, 球対称性の一般化).

すると, $\mathbb{R}^2$ 上で可積分かつ p-radial な関数 F の Fourier 変換を, 表示 (2.1) の対応物として

$$\hat{F}(\xi) = p\Gamma^2(\frac{1}{p}) \int_0^\infty J_0^{[p]}(2\pi r\xi)\phi(r) r dr \qquad (\xi \in \mathbb{R}^2) \tag{2.2}$$

のように表すことを通し ([6], (2.3)), 零次 Bessel 関数における p-radial に基づく一般化関数

$$J_0^{[p]}(x) := \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{p})} \left(\frac{2}{p}\right)^2 \int_0^1 \cos(x_1 t^{\frac{1}{p}}) \cos(x_2(1-t)^{\frac{1}{p}}) t^{\frac{1}{p}-1}(1-t)^{\frac{1}{p}-1} dt \qquad (x \in \mathbb{R}^2)$$

を定義できる. 更に, Bessel 関数に関してよく知られている公式 ([11] の Lemma 4.13)

$$J_{\alpha+\beta+1}(t) = \frac{t^{\beta+1}}{2^\beta \Gamma(\beta+1)} \int_0^1 J_\alpha(ts) s^{\alpha+1}(1-s^2)^\beta ds \qquad (\alpha > -\frac{1}{2},\ \beta > -1,\ t > 0)$$

に倣い, $J_0^{[p]}$ を核とし正の次数を付加させることで, 非負実数次 Bessel 関数の一般化関数を次のように定める ([6], (2.4), Definition 2.5).

$$J_\omega^{[p]}(x) := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma^2(\frac{1}{p})} \left(\frac{2}{p}\right)^2 \int_0^1 \cos(x_1 t^{\frac{1}{p}}) \cos(x_2(1-t)^{\frac{1}{p}}) t^{\frac{1}{p}-1}(1-t)^{\frac{1}{p}-1} dt & (\omega = 0), \\ \frac{|x|_p^\omega}{p^{\omega-1}\Gamma(\omega)} \int_0^1 J_0^{[p]}(\tau x)\tau(1-\tau^p)^{\omega-1} d\tau & (\omega > 0). \end{cases} \tag{2.3}$$

すると, 本稿の主結果として, (変数により) 一般化された p-circle 内格子点誤差関数 $D_\beta^{[p]} - \mathcal{D}_\beta^{[p]}$ に対する, 次のような級数展開が得られる (すなわち, 表示 (1.3) の p についての一般化).

Theorem 2.1 ([6], Theorem 1.3)**.** $p > 0$ に対して, $\mathcal{D}_\beta^{[p]}(1:x)$ が $\mathbb{R}^2$ 上可積分となる $\beta > -1$ の下で, 次が成り立つ.

$$D_\beta^{[p]}(s:x) - \mathcal{D}_\beta^{[p]}(s:x) = s^{\beta+\frac{2}{p}} p^{\beta+1}\Gamma^2(\frac{1}{p}) \sum_{n \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}} \frac{J_{\beta+1}^{[p]}(2\pi \sqrt[p]{s}(x-n))}{(2\pi \sqrt[p]{s}|x-n|_p)^{\beta+1}} \qquad (s > 0,\ x \in \mathbb{R}^2).$$

この定理の証明において, 第一に次の命題が根幹となっている.

Proposition 2.2 ([6], Proposition 3.1)**.** $p > 0,\ \beta > -1$ に対して, 次が成り立つ.

$$\mathcal{D}_\beta^{[p]}(s:x) = s^{\beta+\frac{2}{p}} p^{\beta+1}\Gamma^2(\frac{1}{p}) \frac{J_{\beta+1}^{[p]}(2\pi \sqrt[p]{s}x)}{(2\pi \sqrt[p]{s}|x|_p)^{\beta+1}} \qquad (s > 0,\ x \in \mathbb{R}^2).$$

これは $a > 0,\ \beta > -1$ とした $\mathbb{R}^2$ 上可積分な p-radial 関数

$$U_{\beta,a}^{[p]}(x) := \begin{cases} (a^p - |x|_p^p)^\beta & (x \in \mathbb{R}^2,\ |x|_p < a), \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^2,\ |x|_p \geq a) \end{cases}$$

に対して, 一般化された零次 Hankel 変換 (2.2) を施し, Fourier 変換の諸性質から示される.

そして, Theorem 2.1 の証明におけるもう一つの重要なピースとして, 周期化級数展開

$$D_\beta^{[p]}(s:x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}^2}\mathcal{D}_\beta^{[p]}(s:x-n) \tag{2.4}$$

が挙げられる. この展開は, 定理の仮定により, 可積分関数の周期化としてよく知られている次の補題を, 関数 $\mathcal{D}_\beta^{[p]}(1:x)$ に対して適用することで得られる.

Lemma 2.3 (Poisson の和公式: [11], Theorem 2.4)**.** $\mathbb{R}^d$ $(d\in\mathbb{N})$ 上可積分な関数 F に対して, 級数 $f(x):=\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}F(x+m)$ は $\mathbb{T}^d(:=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^d)$ の L^1-norm で収束し $\mathbb{T}^d$ 上可積分であり, $\hat{F}(m)=\hat{f}(m)$, すなわち次が成り立つ.

$$f(x)=\sum_{m\in\mathbb{Z}^d}\hat{F}(m)e^{2\pi ix\cdot m}\quad(x\in\mathbb{T}^d).$$

よって, 以上の Proposition 2.2 と展開 (2.4) より, 以下のように目的の一般化等式が導かれる.

$$\begin{aligned}D_\beta^{[p]}(s:x)-\mathcal{D}_\beta^{[p]}(s:x)&=\sum_{n\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}\mathcal{D}_\beta^{[p]}(s:x-n)\\&=s^{\beta+\frac{2}{p}}p^{\beta+1}\Gamma^2(\frac{1}{p})\sum_{n\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}\frac{J_{\beta+1}^{[p]}(2\pi\sqrt[p]{s}(x-n))}{(2\pi\sqrt[p]{s}|x-n|_p)^{\beta+1}}\quad(s>0,\ x\in\mathbb{R}^2).\end{aligned}$$

3 特殊関数の諸性質への帰着

主結果を含め, 前節までの議論は $p>0$ の場合として一般的に広く成り立つものであったが, 本節ではやや特別な場合に制限し, 特に後半は $\frac{2}{p}\in\mathbb{N}$ が奇数なる $0<p<1$ あるいは $p=2$ の場合について考えていきたい. なお, このような p に対応する閉曲線 p-circle を特に「astroid 型」と呼ぶことにする ($p=\frac{2}{3}$ の場合の閉曲線が astroid と呼称されるため).

この制限を行う理由の一つとして, $J_0^{[p]}$ に対する $\mathbb{R}^2$ 上 (広義) 一様漸近な評価を求める際に, 同関数の振動積分表示が必要になるのだが, $\frac{2}{p}$ が奇数の場合に導かれる振動積分表示 ([7], Proposition 2.1) が

$$J_0^{[p]}(x)=\frac{(\frac{2}{p})^2}{2\Gamma^2(\frac{1}{p})}\int_0^{2\pi}e^{i(x_1\sin^{\frac{2}{p}}\theta+x_2\cos^{\frac{2}{p}}\theta)}(\cos\theta\sin\theta)^{\frac{2}{p}-1}d\theta$$

のような形になり, $\frac{2}{p}$ が自然数全体の場合と比較してより自然な形になることが挙げられる.

我々は各 p の制限下において $J_0^{[p]}$ の (広義) 一様漸近な $\mathcal{O}$ 評価を既に求めており, x_1 および x_2 軸付近の振る舞いが p に依存することが以下の二つの結果から明らかである.

Theorem 3.1 ([7], Theorem 1.4; 遠方における $\mathbb{R}^2$ の象限上広義一様な漸近評価)**.**
$0<p\le1$ または $p=2$, x $(:=(x_1,x_2))\in\mathbb{R}^2$ に対して, 符号関数 $\mathrm{sgn}(\cdot)$ と歪角度 φ により

$$x_1=\mathrm{sgn}(\cos\varphi)|x|_p|\cos\varphi|^{\frac{2}{p}},\quad x_2=\mathrm{sgn}(\sin\varphi)|x|_p|\sin\varphi|^{\frac{2}{p}},\quad(0\le\varphi<2\pi)$$

と表示したとき, $\arg(x)(:=\varphi)\in(0,2\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\}$ について広義一様に次が成立する.

$$J_0^{[p]}(x)=\begin{cases}\mathcal{O}(|x|_p^{-\frac{1}{2}}) & (0<p<1,\ p=2),\\ \mathcal{O}(|x|_p^{-1}) & (p=1),\end{cases}\qquad(|x|_p\to\infty).$$

Theorem 3.2 ([7], Theorem 1.5; 遠方における $\mathbb{R}^2$ 上一様な漸近評価)**.**
$\frac{2}{p} \in \mathbb{N}$ なる p に対して, $\mathbb{R}^2$ 上一様に次が成立する.

$$J_0^{[p]}(x) = \begin{cases} \mathcal{O}(|x|_p^{-\frac{1}{2}}) & (p=2), \\ \mathcal{O}(|x|_p^{-\frac{p}{2}}) & (\frac{2}{p} \in \mathbb{N}_{\geq 2}), \end{cases} \qquad (|x|_p \to \infty).$$

なお, これらの結果は $J_\omega^{[2]}(x) = J_\omega(|x|)$ の関係から従来の Bessel 関数の漸近評価 ([12], p199(1))

$$J_\nu(t) = \mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2}}) \qquad \left(\nu > -\frac{1}{2}\right) \tag{3.1}$$

の次数が 0 という特別な場合と矛盾しないことが分かる.

一方で, 次数が正の実数 ω である場合の $J_\omega^{[p]}$ に対する一様漸近な $\mathcal{O}$ 評価式が得られれば, Theorem 2.1 の仮定である「$\mathcal{D}_\beta^{[p]}(1:x)$ が $\mathbb{R}^2$ 上可積分」となるような β の具体的な範囲を特定できる.

すなわち, このことは, $\frac{2}{p} \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ の場合を考えるとき (既知な $J_0^{[p]}$ の一様漸近評価式を含むような) 広い次数 $\omega \geq 0$ に対する $\mathbb{R}^2$ 上一様な評価式

$$J_\omega^{[p]}(x) = \mathcal{O}(|x|_p^{-q_\omega^{[p]}}) \qquad (|x|_p \overset{\text{unif}}{\to} \infty) \tag{3.2}$$

を満たす $q_\omega^{[p]} > 0$ (特に $q_0^{[p]} = \frac{p}{2}$) の下限 $Q^{[p]}$ を求めることに帰着できる (Bessel 関数の漸近評価 (3.1) のように指数が次数に非依存であるとは限らないことに注意せよ).

実際, $\beta > 1 - Q^{[p]}$ の下で, $\beta + 1 > 2 - Q^{[p]} + \varepsilon$ なる $\varepsilon > 0$ が存在し $|x|_p^{-(\beta+1)} < |x|_p^{-(2-Q^{[p]}+\varepsilon)}$ であるから, 次が成り立つ.

$$\frac{J_{\beta+1}^{[p]}(x)}{|x|_p^{\beta+1}} = \mathcal{O}(|x|_p^{-q_{\beta+1}^{[p]}-(2-Q^{[p]}+\varepsilon)}) = \mathcal{O}(|x|_p^{-(2+\varepsilon)}) = \mathcal{O}(|x|^{-(2+\varepsilon)}). \tag{3.3}$$

また, 簡単な計算により得られる級数展開 ([6], Proposition 2.6)

$$J_\omega^{[p]}(x) = \frac{(\frac{|x|_p}{p})^\omega (\frac{2}{p})^2}{\Gamma^2(\frac{1}{p})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\frac{2(k+1)}{p} + \omega)} \sum_{m \in \mathbb{N}_0^2 \ |m|'=k} \frac{\Gamma(\frac{2m+1}{p})}{(2m)!} x^{2m} \qquad (\omega \geq 0) \tag{3.4}$$

(ただし, $|m|' := m_1 + m_2$, $x^{2m} := x_1^{2m_1} \cdot x_2^{2m_2}$ のように, 多重指数の表記による Γ や階乗を用いている) から, $x \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{J_\omega^{[p]}(x)}{|x|_p^\omega} &= \frac{4}{p^{\omega+2}\Gamma^2(\frac{1}{p})} \left(\frac{\Gamma^2(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{2}{p}+\omega)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\frac{2(k+1)}{p}+\omega)} \sum_{m \in \mathbb{N}_0^2 \ |m|'=k} \frac{\Gamma(\frac{2m+1}{p})}{(2m)!} x^{2m} \right) \\ &\to \frac{4}{p^{\omega+2}\Gamma^2(\frac{1}{p})} \left(\frac{\Gamma^2(\frac{1}{p})}{\Gamma(\frac{2}{p}+\omega)} + 0 \right) \qquad (x \to 0) \end{aligned}$$

より次のように原点での関数の値を再定義すれば, $\frac{J_\omega^{[p]}(x)}{|x|_p^\omega}$ は $\mathbb{R}^2$ 上連続である.

$$\frac{J_\omega^{[p]}(x)}{|x|_p^\omega} := \frac{(\frac{2}{p})^2}{p^\omega \Gamma(\omega + \frac{2}{p})} \qquad (x = 0).$$

ゆえに, $\frac{J_\omega^{[p]}(x)}{|x|_p^\omega}$ における $\mathbb{R}^2$ 上の一様漸近評価式 (3.3) および連続性により, 原点中心の閉球 B と定数 $C_B,\ C'_B>0$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left|\frac{J_\omega^{[p]}(x)}{|x|_p^\omega}\right|dx=\int_B\left|\frac{J_\omega^{[p]}(x)}{|x|_p^\omega}\right|dx+\int_{\mathbb{R}^2\setminus B}\left|\frac{J_\omega^{[p]}(x)}{|x|_p^\omega}\right|dx\le C_B+C'_B\int_{\mathbb{R}^2\setminus B}\frac{dx}{|x|^{2+\varepsilon}}<+\infty.$$

よって, このとき $\mathcal{D}_\beta^{[p]}(1:x)$ ($\backsimeq_{\beta,p}\ \frac{J_{\beta+1}^{[p]}(2\pi x)}{|2\pi x|_p^{\beta+1}}$; Proposition 2.2) が $\mathbb{R}^2$ 上可積分であり, 主定理 (Theorem 2.1) の「astroid 型」版について, 仮定をより具体化させることができた.

Theorem 3.3 ([7], Theorem 3.1)**.** $\frac{2}{p}\in\mathbb{N}$ なる p に対して, $J_\omega^{[p]}(x)\overset{\text{unif}}{=}\mathcal{O}(|x|_p^{-q_\omega^{[p]}})$ を満たすような $Q^{[p]}:=\inf_{\omega\ge0}q_\omega^{[p]}$ が存在するとき, $\beta>1-Q^{[p]}$ の下で, 次が成立する.

$$D_\beta^{[p]}(s:x)-\mathcal{D}_\beta^{[p]}(s:x)=s^{\beta+\frac{2}{p}}p^{\beta+1}\Gamma^2(\frac{1}{p})\sum_{n\in\mathbb{Z}^2\setminus\{0\}}\frac{J_{\beta+1}^{[p]}(2\pi\sqrt[p]{s}(x-n))}{(2\pi\sqrt[p]{s}|x-n|_p)^{\beta+1}}\qquad(s>0,\ x\in\mathbb{R}^2).$$

以上より, 導入で記したように, 倉坪氏と中井氏の手法に倣い我々の研究目的を達成させるには, 正の実数次数 ω に対する $J_\omega^{[p]}$ の一様漸近評価式を (更に, のちのことを考慮すると主要項の係数も) 求める必要がある. 一方, J_ν と異なり $J_\omega^{[p]}$ が二変数関数であることから, この形の状態で H. Hankel[4] による複素解析を介した J_ν の漸近展開の導出法に沿うことは困難である.

そこで, 級数展開 (3.4) をもとに, $x=(\mathrm{sgn}(\cos\varphi)r|\cos\varphi|^{\frac{2}{p}},\mathrm{sgn}(\sin\varphi)r|\sin\varphi|^{\frac{2}{p}})$ $(0\le\varphi<2\pi, r>0)$ により, 歪角度 φ を固定することで, r についての一変数関数として考える. すなわち,

$$J_\omega^{[p]}(x)=:\mathcal{J}_{\omega,\varphi}^{[p]}(r)=\frac{(\frac{2}{p})^2}{\Gamma^2(\frac{1}{p})}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^{2k}(-1)^k}{\Gamma(\frac{2}{p}(k+1)+\omega)}\Big(\frac{r}{p}\Big)^{2k+\omega}\Big(\sum_{m\in\mathbb{N}_0^2\ |m|'=k}\frac{\Gamma(\frac{2m+1}{p})}{(2m)!}|\cos^{m_1}\varphi\sin^{m_2}\varphi|^{\frac{4}{p}}\Big),$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\in\mathbb{N}_0^2\ |m|'=k}\frac{\Gamma(\frac{2m+1}{p})}{(2m)!}|\cos^{m_1}\varphi\sin^{m_2}\varphi|^{\frac{4}{p}}\\
&\quad=\sum_{n=0}^{k}\frac{\Gamma(\frac{1}{p}(2n+1))\Gamma(\frac{1}{p}(2(k-n)+1))}{(2n)!(2(k-n))!}(\cos^{\frac{4}{p}}\varphi)^n(\sin^{\frac{4}{p}}\varphi)^{k-n}\\
&\quad=\sum_{n=0}^{k}\frac{\pi\Gamma(\frac{1}{p}(2n+1))\Gamma(\frac{1}{p}(2(k-n)+1))}{n!\ 2^{2n}\Gamma(n+\frac{1}{2})\cdot(k-n)!\ 2^{2(k-n)}\Gamma(k-n+\frac{1}{2})}(\cos^{\frac{4}{p}}\varphi)^n(\sin^{\frac{4}{p}}\varphi)^{k-n}\\
&\quad=\frac{\pi}{2^{2k}}\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{n!\ (k-n)!}\Big(\frac{\Gamma(\frac{2}{p}(n+\frac{1}{2}))\Gamma(\frac{2}{p}(k-n+\frac{1}{2}))}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(k-n+\frac{1}{2})}\Big)(\cos^{\frac{4}{p}}\varphi)^n(\sin^{\frac{4}{p}}\varphi)^{k-n}\\
&\quad=\frac{\pi}{k!\ 2^{2k}}\sum_{n=0}^{k}\frac{(\frac{2}{p}(k+1)-1)!}{n!\ (k-n)!}\Big(\frac{B(\frac{2}{p}(n+\frac{1}{2}),\frac{2}{p}(k-n+\frac{1}{2}))}{B(n+\frac{1}{2},k-n+\frac{1}{2})}\Big)(\cos^{\frac{4}{p}}\varphi)^n(\sin^{\frac{4}{p}}\varphi)^{k-n}\\
&\quad=:\frac{\pi}{k!\ 2^{2k}}\Phi_{k,\varphi}^{[p]}
\end{aligned}$$

と表す (ただし, $B(s,t)$ は beta 関数である).

特に $\frac{2}{p}$ が奇数 ($\frac{2}{p}-1$ が偶数) となるような p に対して, beta 関数の公式

$$B\Big(l+\frac{1}{2},m+\frac{1}{2}\Big)=\frac{\pi(2l-1)!!\ (2m-1)!!}{(2l+2m)!!}\qquad(l,m\in\mathbb{N}_{\ge0})$$

を用いると

$$\begin{aligned}\frac{B(\frac{2}{p}(n+\frac{1}{2}),\frac{2}{p}(k-n+\frac{1}{2}))}{B(n+\frac{1}{2},k-n+\frac{1}{2})} &= \frac{B(\frac{2}{p}n+\frac{\frac{2}{p}-1}{2}+\frac{1}{2},\frac{2}{p}(k-n)+\frac{\frac{2}{p}-1}{2}+\frac{1}{2})}{B(n+\frac{1}{2},(k-n)+\frac{1}{2})}\\ &= \frac{\pi(\frac{2}{p}(2n+1)-2)!!\ (\frac{2}{p}(2(k-n)+1)-2)!!}{(\frac{2}{p}(2k+2)-2)!!}\cdot\frac{(2k)!!}{\pi(2n-1)!!\ (2(k-n)-1)!!}\\ &= \frac{(\frac{2}{p}(2n+1)-2)!!\ (\frac{2}{p}(2(k-n)+1)-2)!!}{(2n-1)!!\ (2(k-n)-1)!!}\cdot\frac{2^k k!}{2^{\frac{2}{p}(k+1)-1}(\frac{2}{p}(k+1)-1)!}\end{aligned}$$

と記せるので

$$\begin{aligned}\Phi^{[p]}_{k,\varphi} &= \sum_{n=0}^{k}\frac{(\frac{2}{p}(k+1)-1)!}{n!\ (k-n)!}\Big(\frac{(\frac{2}{p}(2n+1)-2)!!\ (\frac{2}{p}(2(k-n)+1)-2)!!}{(2n-1)!!\ (2(k-n)-1)!!}\Big)\cdot\frac{k!\ (\cos^{\frac{4}{p}}\varphi)^n(\sin^{\frac{4}{p}}\varphi)^{k-n}}{2^{\frac{2}{p}(k+1)-(k+1)}(\frac{2}{p}(k+1)-1)!}\\ &= \frac{1}{2^{(\frac{2}{p}-1)(k+1)}}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\frac{(\frac{2}{p}(2n+1)-2)!!\ (\frac{2}{p}(2(k-n)+1)-2)!!}{(2n-1)!!\ (2(k-n)-1)!!}(\cos^{\frac{4}{p}}\varphi)^n(\sin^{\frac{4}{p}}\varphi)^{k-n}\end{aligned} \tag{3.5}$$

すなわち

$$\mathcal{J}^{[p]}_{\omega,\varphi}(r) = \frac{(\frac{2}{p})^2}{\Gamma^2(\frac{1}{p})}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^{2k}(-1)^k}{\Gamma(\frac{2}{p}(k+1)+\omega)}\Big(\frac{r}{p}\Big)^{2k+\omega}\frac{\pi}{k!\ 2^{2k}}\Phi^{[p]}_{k,\varphi} \tag{3.6}$$

と表せる. よって, 我々はこの歪角度固定一般化 Bessel 関数 (3.6) を複素数域まで拡張することで, 先に記した Hankel による漸近展開の導出を考えている.

また, 我々の研究方針において必要とされる Bessel 関数の諸性質の対応物は他にも予想され, 例えば Bessel 関数の微分公式 $\frac{d}{dr}(\frac{J_\omega(r)}{r^\omega}) = -\frac{J_{\omega+1}}{r^\omega}$ の対応物が考えられる. これは, (3.5) と (3.6) から

$$\frac{d}{dr}\frac{\mathcal{J}^{[p]}_{\omega,\varphi}(r)}{r^\omega} = -\frac{1}{r^{\omega+\frac{2}{p}-1}}\Big(\frac{(\frac{2}{p})^2}{\Gamma^2(\frac{1}{p})}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{p^{2l}(-1)^l}{\Gamma(\frac{2}{p}(l+1)+\omega+\frac{2}{p})}\Big(\frac{r}{p}\Big)^{2l+\omega+\frac{2}{p}}\frac{\pi}{l!\ 2^{2l}}\cdot\frac{p^{\frac{2}{p}}}{2}\Phi^{[p]}_{l+1,\varphi}\Big)$$

として式変形でき, これより仮に定数 $C^{[p]}_\varphi$ が存在して

$$\frac{p^{\frac{2}{p}}}{2}\Phi^{[p]}_{l+1,\varphi} = C^{[p]}_\varphi\Phi^{[p]}_{l,\varphi} \tag{3.7}$$

が成り立てば, 次の微分公式が得られることになる.

$$\frac{d}{dr}\Big(\frac{\mathcal{J}^{[p]}_{\omega,\varphi}(r)}{r^\omega}\Big) = -C^{[p]}_\varphi\frac{\mathcal{J}^{[p]}_{\omega+\frac{2}{p},\varphi}(r)}{r^{\omega+\frac{2}{p}-1}} \tag{3.8}$$

ゆえに, 本稿で掲げた我々の数論的問題の研究対象に, 特殊関数論分野との深い繋がりを見出せる.

参考文献

[1] J. Bourgain & N. Watt, Mean square of zeta function, circle problem and divisor problem revisited, arXiv:1709.04340v1 (2017).

[2] J.D. Gaskill, Linear systems, Fourier transforms, and optics, Wiley. 1978.

[3] C.F. Gauss, De nexu inter multitudinem classium, in quas formae binariae secundi gradus distribuuntur, earumque determinantem. In: Schering, E., ed., Werke, Vol. 2. Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften (1876) 269-291.

[4] H. Hankel, Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art, Math. Ann. 1 (1869) 467-501.

[5] G.H. Hardy, E.Landau, The average order of the arithmetical functions $P(x)$ and $\Delta(x)$, Proc. Lond. Math. Soc. 15 (1917) 192-213.

[6] M. Kitajima, Series expansions by generalized Bessel functions for certain functions related to the lattice point problems for the p-circle, arXiv:2408.02613v1 (2024).

[7] M. Kitajima, Asymptotic evaluations of generalized Bessel function of order zero related to the p-circle lattice point problem, arXiv:2411.10850v1 (2024).

[8] E. Krätzel, Lattice Points, Kluwer Academic Publication, 1988.

[9] G. Kuba, On sums of two k-th powers of numbers in residue classes II, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 63 (1993) 87-95.

[10] S. Kuratsubo & E. Nakai, Multiple Fourier series and lattice point problems, J. Func. Anal. 282 (2022) 1-62.

[11] E.M. Stein & G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton Univ. Press, 1971.

[12] G.N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, 1995.

3変数量子Garnier系のTakano理論について

神戸大学大学院 理学研究科 数学専攻
皇學館大学 教育学部 教育学科
上野祐一 (Yuichi UENO) *

概 要

本稿では，3変数量子 Garnier 系 G(1,1,1,1,1,1) について正則性による特徴付けを行う．また，3変数の場合の結果をもとに，一般の n 変数量子 Garnier 系についても正則性による特徴付けの一般化を目指す．

1 Painlevé 方程式の Takano 理論とその量子化

Painlevé 方程式 P_{J} ($\mathrm{J}=\mathrm{I},\cdots,\mathrm{VI}$) とは動く特異点は極のみ（これを Painlevé 性と呼ぶ）である2階の非線型常微分方程式である [16, 1]．1980年代の Okamoto の一連の研究により，Painlevé 方程式の Hamilton 構造が明らかにされ，Bäcklund 変換として作用する AffineWeyl 群対称性が示された [15]．また，Okamoto は, 各方程式 P_{J} に対してその初期値空間 (解を一意的にパラメトライズする空間) を定義し blow-up により構成した [14]．

一方で，1990年代後半 Takano 等により各 Painlevé 方程式 P_{J} ($\mathrm{J}=\mathrm{II},\cdots,\mathrm{VI}$) が，その初期値空間から一意的に再現できることが示された [23, 20, 11, 12, 13]．すなわち，Okamoto 初期値空間は，元の chart(q,p) にいくつかの chart(x_i,y_i) を追加し，それらをある双有理正準変換により張り合わせることにより構成できる．そして，元の chart(q,p) と追加した chart(x_i,y_i) の全てにおいて，Hamiltonian が正準変数の多項式になる．さらに上記のように構成した初期値空間において，全ての chart で正則な Hamiltonian により記述される Hamilton 系は Painlevé 方程式に限るという結果である．これを Takano 理論と呼ぶ．古典の Painlevé 方程式は正準変数 q,p の多項式 Hamiltonian を持つ次のような Hamilton 系で書ける．

$$\frac{df}{dt}=\{f,H_{\mathrm{J}}\}+\frac{\partial f}{\partial t}, \tag{1}$$

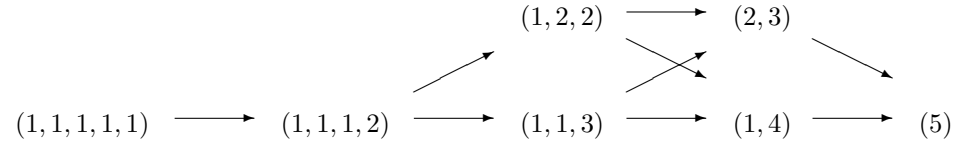
ここで，$\{\phi,\psi\}:=\dfrac{\partial\phi}{\partial p}\dfrac{\partial\psi}{\partial q}-\dfrac{\partial\phi}{\partial q}\dfrac{\partial\psi}{\partial p}$ は Poisson 括弧であり，f は正準変数 q,p の多項式である．このように Painlevé 方程式は Hamilton 系で書けるため，Poisson 括弧を交換子に置き換えるという意味での量子化が可能である．それを実際に Painlevé 方程式 P_{J} ($\mathrm{J}=\mathrm{II},\cdots,\mathrm{VI}$) に対して行ったものが [28] である．

2 Garnier 系と2変数量子 Garnier 系

n 変数 Garnier 系 [2] とは，$n+3$ 個の特異点と n 個の見かけ上の特異点を持つ Riemann 球面 $\mathbb{P}^1$ 上の2階 Fuchs 型常微分方程式のモノドロミー保存変形から得られる n 個の時間変数を持つ

*E-mail:y-ueno@kogakkan-u.ac.jp

Hamilton 系である．Garnier 系は Painlevé 方程式の多変数拡張であり，$n=1$ のとき Painlevé VI 型方程式に一致する．2 変数退化 Garnier 系については Kimura により構築されており，5 の分割に対応する次の分割がある [7, 9, 10]. [1]



これらの各場合において，Sasano [17, 18] や Suzuki [21, 22] により Painlevé 方程式と同様の初期値空間についての研究が行われている．ここでは，G(1,1,1,1,1) の場合における Sasano による構成方法について見ることとする．

Garnier 系 G(1,1,1,1,1) についての多項式 Hamiltonian については Kimura と Okamoto [10] により導入された．Sasano [17, 18] による表記方法に従い，次のような形の Hamilton 系を考える ([24, 25, 26, 27] 参照)．

$$\begin{aligned} dq_1 &= \frac{\partial H_1}{\partial p_1}dt_1 + \frac{\partial H_2}{\partial p_1}dt_2, \quad dp_1 = -\frac{\partial H_1}{\partial q_1}dt_1 - \frac{\partial H_2}{\partial q_1}dt_2, \\ dq_2 &= \frac{\partial H_1}{\partial p_2}dt_1 + \frac{\partial H_2}{\partial p_2}dt_2, \quad dp_2 = -\frac{\partial H_1}{\partial q_2}dt_1 - \frac{\partial H_2}{\partial q_2}dt_2, \end{aligned} \tag{2}$$

ここで，Hamiltonian $H_i (i=1,2)$, H_{VI}, 変換 π は次で与えられる．[2]

$$\begin{aligned} H_1 &= H_{\mathrm{VI}}(q_1,p_1,t;\alpha_4+\alpha_6,\alpha_2,\alpha_1,\alpha_5,\alpha_3) \\ &\quad +(2\alpha_1+\alpha_2)\frac{q_1q_2p_2}{t_1(t_1-1)} + \alpha_3\{\frac{p_1}{t_1-t_2} - \frac{(t_2-1)p_2}{(t_1-t_2)(t_1-1)}\}q_2 + \alpha_4\frac{t_2(p_2-p_1)q_1}{t_1(t_1-t_2)} \\ &\quad +\{\frac{2(t_2-1)p_1p_2}{(t_1-t_2)(t_1-1)} - \frac{t_1p_1^2+t_2p_2^2}{t_1(t_1-t_2)} + \frac{(2q_1p_1+q_2p_2)p_2}{t_1(t_1-1)}\}q_1q_2, \\ H_2 &= \pi(H_1), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\pi : (q_1,p_1,q_2,p_2,t_1,t_2;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_6) \to (q_2,p_2,q_1,p_1,t_2,t_1;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_3,\alpha_5,\alpha_6), \tag{4}$$

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{VI}}(q,p,t;\tilde\alpha_0,\tilde\alpha_1,\tilde\alpha_2,\tilde\alpha_3,\tilde\alpha_4) &= \frac{1}{t(t-1)}\{q(q-1)(q-t)p^2 \\ &\quad -\{(\tilde\alpha_0-1)q(q-1)+\tilde\alpha_3q(q-t)+\tilde\alpha_4(q-1)(q-t)\}p+\tilde\alpha_2(\tilde\alpha_1+\tilde\alpha_2)(q-t)\}. \end{aligned} \tag{5}$$

Garnier 系 G(1,1,1,1,1) に対して，Sasano により構築された正準変換は次の通り：

$$\begin{aligned} r_1 :\ & q_1 = \frac{1}{x_1}, \quad p_1 = -x_1^2y_1 - x_1x_2y_2 - \alpha_1x_1, \quad q_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad p_2 = x_1y_2, \\ & x_1 = \frac{1}{q_1}, \quad y_1 = -q_1^2p_1 - q_1q_2p_2 - \alpha_1q_1, \quad x_2 = \frac{q_2}{q_1}, \quad y_2 = q_1p_2. \\ r_2 :\ & q_1 = \frac{1}{x_1}, \quad p_1 = -x_1^2y_1 - x_1x_2y_2 - \alpha_2x_1, \quad q_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad p_2 = x_1y_2, \\ & x_1 = \frac{1}{q_1}, \quad y_1 = -q_1^2p_1 - q_1q_2p_2 - \alpha_2q_1, \quad x_2 = \frac{q_2}{q_1}, \quad y_2 = q_1p_2. \\ r_3 :\ & q_1 = -x_1y_1^2 + \alpha_3y_1, \quad p_1 = \frac{1}{y_1}, \quad q_2 = x_2, \quad p_2 = y_2, \end{aligned}$$

[1] また，2 変数 Garnier 系の他の退化については次が知られている [4, 5, 6].

[2] 方程式 (5) における Hamiltonian H_{VI} は Fuchs の関係式 $\tilde\alpha_0+\tilde\alpha_1+2\tilde\alpha_2+\tilde\alpha_3+\tilde\alpha_4=1$ に従う Painlevé VI 型方程式の Hamiltonian である．

$$x_1 = -q_1p_1^2 + \alpha_3 p_1, \quad y_1 = \frac{1}{p_1}, \quad x_2 = q_2, \quad y_2 = p_2.$$

$$r_4: \quad q_1 = x_1, \quad p_1 = y_1, \quad q_2 = -x_2y_2^2 + \alpha_4 y_2, \quad p_2 = \frac{1}{y_2},$$

$$x_1 = q_1, \quad y_1 = p_1, \quad x_2 = -q_2p_2^2 + \alpha_4 p_2, \quad y_2 = \frac{1}{p_2}.$$

$$r_5: \quad q_1 = -x_1y_1^2 - x_2 + \alpha_5 y_1 + 1, \quad p_1 = \frac{1}{y_1}, \quad q_2 = x_2, \quad p_2 = \frac{1}{y_1} + y_2,$$

$$x_1 = -q_1p_1^2 - q_2p_1^2 + p_1^2 + \alpha_5 p_1, \quad y_1 = \frac{1}{p_1}, \quad x_2 = q_2, \quad y_2 = p_2 - p_1.$$

$$r_6: \quad q_1 = -x_1y_1^2 - \frac{t_1}{t_2}x_2 + \alpha_6 y_1 + t_1, \quad p_1 = \frac{1}{y_1}, \quad q_2 = x_2, \quad p_2 = \frac{t_1}{t_2}\frac{1}{y_1} + y_2,$$

$$x_1 = -q_1p_1^2 - \frac{t_1}{t_2}q_2p_1^2 + t_1p_1^2 + \alpha_6 p_1, \quad y_1 = \frac{1}{p_1}, \quad x_2 = q_2, \quad y_2 = p_2 - \frac{t_1}{t_2}p_1. \tag{6}$$

このとき，次が成立する [17].

Theorem 2.1. *[17]* 正準変数 q_1, p_1, q_2, p_2 に関する *Hamiltonian* $H_i (i = 1, 2)$ を持つ多項式 *Hamilton* 系を考え，以下を仮定する．

1. *Hamiltonian* H_i の次数の合計は q_1, p_1, q_2, p_2 に関して 5 次.
2. (6) の各変換 $r_i (i = 1, \ldots, 6)$ の下で，系 (2) は多項式 *Hamiltonian* を持つ *Hamilton* 系に再び変換される．

このとき，そのような系は系 (2)-(5) に一致し，ただ一つである.

これらを次のように量子化したものを考える．

$$dq_i = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{2}[q_i, H_j]dt_i, \quad dp_i = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{2}[p_i, H_j]dt_i \tag{7}$$

ここで，$[,]$ は次を満たす交換子である: $[A, B] = AB - BA$. また，q_1, p_1, q_2, p_2 は $[q_i, p_j] = \delta_{i,j}h$ $(h \in \mathbb{C})$ を満たす量子正準変数であり，$t_i (i = 1, 2)$ は 2 つの独立な時間発展の変数である．そして，G(1,1,1,1,1) 同様，G(1,1,1,2), G(1,1,3), G(1,2,2) , G(1,4) に対しては Sasano の古典的な変換を，G(2,3), G(5) については Suzuki の古典的な変換をそのまま用いて，正則性の条件により Hamiltonian $H_i (i = 1, 2)$ を決定する．このとき，G(1,1,1,1,1), G(1,1,1,2), G(1,1,3), G(1,2,2) , G(1,4), G(2,3), G(5) の各場合に対して次が成り立つ．

Theorem 2.2. *[29]* 量子正準変数 q_1, p_1, q_2, p_2 に関する非可換 *Hamiltonian* $H_i (i = 1, 2)$ を持つ多項式 *Hamilton* 系 (7) を考え，以下を仮定する：

1. *Hamiltonian* H_i の次数の合計は q_1, p_1, q_2, p_2 に関して 5 次.
2. 対応する変換 r_i の下で，系 (7) は多項式 *Hamiltonian* を持つ *Hamilton* 系に再び変換される．

このとき，そのような系はただ一つに決まる.

3　3変数量子 Garnier 系

次に，3 変数量子 Garnier 系について考える．これらを適切に定義するために，次のような量子 Hamilton 系を考える．

$$dq_i = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{3}[q_i, H_j]dt_i, \quad dp_i = \frac{1}{h}\sum_{j=1}^{3}[p_i, H_j]dt_i \tag{8}$$

ここで，$q_1, p_1, q_2, p_2, q_3, p_3$ は $[q_i, p_j] = \delta_{i,j}h$ $(h \in \mathbb{C})$ を満たす量子正準変数であり，$t_i (i = 1, 2, 3)$ は 3 つの独立な時間変数である．Hamiltonian $H_i (i = 1, 2, 3)$ を正則性を用いて決定することを考える．これを行うために，適切な方法により量子正準変換を定義する必要があるが，Sasano の古典的な変換 [18] ([8] 参照). をそのまま量子化して得られる次の量子変換 $r_1, \ldots, r_7$ を考える．

$$
\begin{aligned}
r_1 :\ & q_1 = \frac{1}{x_1}, \quad p_1 = -x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - x_1 x_3 y_3 - \alpha_1 x_1, \\
& q_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad p_2 = x_1 y_2, \quad q_3 = \frac{x_3}{x_1}, \quad p_3 = x_1 y_3, \\
& x_1 = \frac{1}{q_1}, \quad y_1 = -q_1^2 p_1 - q_1 q_2 p_2 - q_1 q_3 p_3 - \alpha_1 q_1, \\
& x_2 = \frac{q_2}{q_1}, \quad y_2 = q_1 p_2, \quad x_3 = \frac{q_3}{q_1}, \quad y_3 = q_1 p_3, \\
r_2 :\ & q_1 = \frac{1}{x_1}, \quad p_1 = -x_1^2 y_1 - x_1 x_2 y_2 - x_1 x_3 y_3 - \alpha_2 x_1, \\
& q_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad p_2 = x_1 y_2, \quad q_3 = \frac{x_3}{x_1}, \quad p_3 = x_1 y_3, \\
& x_1 = \frac{1}{q_1}, \quad y_1 = -q_1^2 p_1 - q_1 q_2 p_2 - q_1 q_3 p_3 - \alpha_2 q_1, \\
& x_2 = \frac{q_2}{q_1}, \quad y_2 = q_1 p_2, \quad x_3 = \frac{q_3}{q_1}, \quad y_3 = q_1 p_3, \\
r_3 :\ & q_1 = -x_1 y_1^2 + \alpha_3 y_1, \quad p_1 = \frac{1}{y_1}, \quad q_2 = x_2, \quad p_2 = y_2, \quad q_3 = x_3, \quad p_3 = y_3, \\
& x_1 = -q_1 p_1^2 + \alpha_3 p_1, \quad y_1 = \frac{1}{p_1}, \quad x_2 = q_2, \quad y_2 = p_2, \quad x_3 = q_3, \quad y_3 = p_3, \\
r_4 :\ & q_1 = x_1, \quad p_1 = y_1, \quad q_2 = -x_2 y_2^2 + \alpha_4 y_2, \quad p_2 = \frac{1}{y_2}, \quad q_3 = x_3, \quad p_3 = y_3, \\
& x_1 = q_1, \quad y_1 = p_1, \quad x_2 = -q_2 p_2^2 + \alpha_4 p_2, \quad y_2 = \frac{1}{p_2}, \quad x_3 = q_3, \quad y_3 = p_3, \\
r_5 :\ & q_1 = x_1, \quad p_1 = y_1, \quad q_2 = x_2, \quad p_2 = y_2, \quad q_3 = -x_3 y_3^2 + \alpha_5 y_3, \quad p_3 = \frac{1}{y_3}, \\
& x_1 = q_1, \quad y_1 = p_1, \quad x_2 = q_2, \quad y_2 = p_2, \quad x_3 = -q_3 p_3^2 + \alpha_5 p_3, \quad y_3 = \frac{1}{p_3}, \\
r_6 :\ & q_1 = -x_1 y_1^2 - x_2 y_2^2 - x_3 y_1^2 + y_1^2 - x_2 - x_3 + \alpha_6 y_1 + 1, \quad p_1 = \frac{1}{y_1}, \\
& q_2 = x_2, \quad p_2 = \frac{1}{y_1} - y_1 + y_2, \quad q_3 = x_3, \quad p_3 = \frac{1}{y_1} - y_1 + y_3, \\
& x_1 = -q_1 p_1^2 - q_2 p_2^2 - q_3 p_1^2 + p_1^2 - q_2 - q_3 + \alpha_6 p_1 + 1, \quad y_1 = \frac{1}{p_1}, \\
& x_2 = q_2, \quad y_2 = \frac{1}{p_1} - p_1 + p_2, \quad x_3 = q_3, \quad y_3 = \frac{1}{p_1} - p_1 + p_3,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r_7:\quad & q_1=-x_1y_1^2-\frac{t_1}{t_2}x_2y_1^2-\frac{t_1}{t_3}x_3y_1^2+t_1y_1^2-\frac{t_1}{t_2}x_2-\frac{t_1}{t_3}x_3+\alpha_7y_1+t_1,\quad p_1=\frac{1}{y_1},\\
& q_2=x_2,\quad p_2=\frac{t_1}{t_2}(\frac{1}{y_1}-y_1)+y_2,\quad q_3=x_3,\quad p_3=\frac{t_1}{t_3}(\frac{1}{y_1}-y_1)+y_3,\\
& x_1=-q_1p_1^2-\frac{t_1}{t_2}q_2p_1^2-\frac{t_1}{t_3}q_3p_1^2+t_1y_1^2-\frac{t_1}{t_2}q_2-\frac{t_1}{t_3}q_3+\alpha_7p_1+t_1,\quad y_1=\frac{1}{p_1},\\
& x_2=q_2,\quad y_2=\frac{t_1}{t_2}(\frac{1}{p_1}-p_1)+p_2,\quad x_3=q_3,\quad y_3=\frac{t_1}{t_3}(\frac{1}{p_1}-p_1)+p_3,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

変換 (9) に対して，次が成り立つ．

Theorem 3.1. 量子正準変数 q_1,p_1,q_2,p_2,q_3,p_3 に関する非可換 *Hamiltonian* $H_i(i=1,2,3)$ を持つ多項式 *Hamilton* 系 (8) を考え，以下を仮定する：

1. *Hamiltonian* H_i の次数の合計は q_1,p_1,q_2,p_2,q_3,p_3 に関して 5 次.
2. 対応する変換 $r_i(i=1,\dots,7)$ の下で，系 (8) は多項式 *Hamiltonian* を持つ *Hamilton* 系に再び変換される．

このとき，そのような系はただ一つに決まる．

証明については，2 変数の場合と同様 [29] のため省略する．以下に得られる Hamiltonian H_1,H_2,H_3 を述べる．ただし，$-h+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7=\kappa$ とする．

The Hamiltonian H_1 for t_1-flow.

$$
\begin{aligned}
\kappa H_1 \;=\;& \frac{q_1^3p_1^2}{t_1(t_1-1)}+\frac{2q_1^2q_2p_1p_2}{t_1(t_1-1)}+\frac{2q_1^2q_3p_1p_3}{t_1(t_1-1)}+\frac{q_1q_2^2p_2^2}{t_1(t_1-1)}+\frac{2q_1q_2q_3p_2p_3}{t_1(t_1-1)}+\frac{q_1q_3^2p_3^2}{t_1(t_1-1)}\\
&-\frac{(t_1+1)}{t_1(t_1-1)}q_1^2p_1^2-\frac{q_1q_2p_1^2}{t_1-t_2}+\frac{2(t_2-1)}{(t_1-1)(t_1-t_2)}q_1q_2p_1p_2-\frac{t_2q_1q_2p_2^2}{t_1(t_1-t_2)}-\frac{q_1q_3p_1^2}{t_1-t_3}\\
&+\frac{2(t_3-1)}{(t_1-1)(t_1-t_3)}q_1q_3p_1p_3-\frac{t_3q_1q_3p_3^2}{t_1(t_1-t_3)}+\frac{h-\alpha_1-\alpha_2}{t_1(t_1-1)}(q_1^2p_1+q_1q_2p_2+q_1q_3p_3)+\frac{q_1p_1^2}{t_1-1}\\
&+(\frac{h-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3}{t_1-1}-\frac{h-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6}{t_1}-\frac{\alpha_4}{t_1-t_2}-\frac{\alpha_5}{t_1-t_3})q_1p_1+\frac{\alpha_4t_2q_1p_2}{t_1(t_1-t_2)}\\
&+\frac{\alpha_5t_3q_1p_3}{t_1(t_1-t_3)}+\frac{\alpha_3q_2p_1}{t_1-t_2}-\frac{\alpha_3(t_2-1)q_2p_2}{(t_1-1)(t_1-t_2)}+\frac{\alpha_3q_3p_1}{t_1-t_3}-\frac{\alpha_3(t_3-1)}{(t_1-1)(t_1-t_3)}q_3p_3\\
&+\frac{\alpha_1\alpha_2q_1}{t_1(t_1-1)}-\frac{\alpha_3p_1}{t_1-1}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

The Hamiltonian H_2 for t_2-flow.

$$\begin{aligned}\kappa H_2 \;=\;& \frac{q_1^2q_2p_1p_2}{t_2(t_2-1)}+\frac{2q_1q_2^2p_1p_2}{t_2(t_2-1)}+\frac{2q_1q_2q_3p_1p_3}{t_2(t_2-1)}+\frac{q_2^3p_2^2}{t_2(t_2-1)}+\frac{2q_2^2q_3p_2p_3}{t_2(t_2-1)}+\frac{q_2q_3^2p_3^2}{t_2(t_2-1)}\\ &+\frac{t_1q_1q_2p_1^2}{t_2(t_1-t_2)}-\frac{2(t_1-1)}{(t_2-1)(t_1-t_2)}q_1q_2p_1p_2+\frac{q_1q_2p_2^2}{t_1-t_2}-\frac{(t_2+1)}{t_2(t_2-1)}q_2^2p_2^2-\frac{q_2q_3p_2^2}{t_2-t_3}\\ &+\frac{2(t_3-1)}{(t_2-1)(t_2-t_3)}q_2q_3p_2p_3-\frac{t_3q_2q_3p_3^2}{t_2(t_2-t_3)}+\frac{h-\alpha_1-\alpha_2}{t_2(t_2-1)}(q_1q_2p_1-q_2^2p_2-q_2q_3p_3)+\frac{q_2p_2^2}{t_2-1}\\ &+\frac{\alpha_4(t_1-1)}{(t_2-1)(t_1-t_2)}q_1p_1-\frac{\alpha_4q_1p_2}{t_1-t_2}-\frac{\alpha_3t_1q_2p_1}{t_2(t_1-t_2)}+\frac{\alpha_5t_3q_2p_3}{t_2(t_2-t_3)}+\frac{\alpha_4q_3p_2}{t_2-t_3}-\frac{\alpha_4(t_3-1)}{(t_2-1)(t_2-t_3)}q_3p_3\\ &+(\frac{h-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_4}{t_2-1}-\frac{h-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6}{t_2}-\frac{\alpha_3}{t_2-t_1}-\frac{\alpha_5}{t_2-t_3})q_2p_2\\ &+\frac{\alpha_1\alpha_2q_2}{t_2(t_2-1)}-\frac{\alpha_4p_2}{t_2-1}.\end{aligned}\tag{11}$$

The Hamiltonian H_3 for t_3-flow.

$$\begin{aligned}H_3 \;=\;& \frac{q_1^2q_3p_1^2}{t_3(t_3-1)}+\frac{2q_1q_2q_3p_1p_2}{t_3(t_3-1)}+\frac{2q_1q_3^2p_1p_3}{t_3(t_3-1)}+\frac{2q_2q_3^2p_2p_3}{t_3(t_3-1)}+\frac{q_2^2q_3p_2^2}{t_3(t_3-1)}+\frac{q_3^3p_3^2}{t_3(t_3-1)}\\ &+\frac{t_1q_1q_3p_1^2}{t_3(t_1-t_3)}-\frac{2(t_1-1)}{(t_3-1)(t_1-t_3)}q_1q_3p_1p_3+\frac{q_1q_3p_3^2}{t_1-t_3}+\frac{2(t_3-1)}{(t_3-1)(t_3-t_2)}q_2q_3p_2p_3-\frac{t_2q_2q_3p_2^2}{t_3(t_3-t_2)}\\ &+\frac{q_2q_3p_3^2}{t_2-t_3}-\frac{(t_3+1)}{t_3(t_3-1)}q_3^2p_3^2-\frac{h-\alpha_1-\alpha_2}{t_3(t_3-1)}(q_1q_3p_1+q_2q_3p_2+q_3^2p_3)+\frac{q_3p_3^2}{t_3-1}\\ &+\frac{\alpha_5(t_1-1)}{(t_3-1)(t_1-t_3)}q_1p_1-\frac{\alpha_5q_1p_3}{t_1-t_3}-\frac{\alpha_5(t_2-1)}{(t_3-1)(t_3-t_2)}q_2p_2-\frac{\alpha_5q_2p_3}{t_2-t_3}-\frac{\alpha_3t_1q_3p_1}{t_3(t_1-t_3)}+\frac{\alpha_4t_2q_3p_2}{t_3(t_3-t_2)}\\ &+(\frac{h-\alpha_1-\alpha_2+\alpha_5}{t_3-1}-\frac{h-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4-\alpha_5-\alpha_6}{t_3}-\frac{\alpha_3}{t_3-t_1}-\frac{\alpha_4}{t_3-t_2})q_3p_3\\ &+\frac{\alpha_1\alpha_2q_3}{t_3(t_3-1)}-\frac{\alpha_5p_3}{t_3-1}.\end{aligned}\tag{12}$$

2 変数の場合と同様に，次が従う．

Theorem 3.2. 得られた *Hamiltonian* $H_i(i=1,2,3)$ に対応する t_i*-flow* は互いに可換である．

4 n 変数量子 Garnier 系

$n=3$ の場合の結果より，一般の n 変数量子 Garnier 系について考える．

Definition 4.1. $i=1,\dots,n+4$ に対して，*original chart* 上の座標 $(q,p)=(q_1,p_1,\dots,q_n,p_n)$ と i 番目の変換された *chart* 上の座標 $(x,y)=(x_1,y_1,\dots,x_n,y_n)$ との関係を与える変換 r_i を次のように定義する．

$$r_i:\quad q_i=-(x_iy_i-\alpha_i)y_i,\quad p_i=\frac{1}{y_i},\quad (i=1,\dots,n).\tag{13}$$

$$r_i:\quad q_j=\begin{cases}\dfrac{1}{x_1} & (j=1),\\ \dfrac{x_j}{x_1} & (j\neq 1),\end{cases}\qquad p_j=\begin{cases}-x_1(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_ky_k+\alpha_i) & (j=1),\\ x_1y_j & (j\neq 1),\end{cases}\qquad (i=n+1,n+2).\tag{14}$$

$$r_{n+3}: \quad q_j = \begin{cases} 1 + y_1^2 - \sum_{i=2}^{n} x_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i y_1 - \alpha_{n+3}) y_1 & (j=1), \\ x_j & (j \neq 1), \end{cases} \tag{15}$$

$$p_j = \begin{cases} \dfrac{1}{y_1} & (j=1), \\ y_j + \dfrac{1}{y_1} - y_1 & (j \neq 1). \end{cases} \tag{16}$$

$$r_{n+4}: \quad q_j = \begin{cases} t_1 + t_1 y_1^2 - \sum_{i=2}^{n} \dfrac{t_1}{t_i} x_i - (\sum_{i=1}^{n} \dfrac{t_1}{t_i} x_i y_1 - \alpha_{n+4}) y_1 & (j=1), \\ x_j & (j \neq 1), \end{cases} \tag{17}$$

$$p_j = \begin{cases} \dfrac{1}{y_1} & (j=1), \\ y_j + \dfrac{t_1}{t_j}(\dfrac{1}{y_1} - y_1) & (j \neq 1). \end{cases} \tag{18}$$

Remark 4.1. r_i における座標 (x, y) と r_j における座標 (x, y) とは区別する必要がある．また，i 番目の変換 r_i はパラメータ α_i に，r_{n+4} は時間変数 $t_1, \ldots, t_n$ に依存するものである．

これらの変換 $r_1, \ldots, r_{n+4}$ は 古典の場合の変換 [19] の一般化である．各変換 r_i は双有理正準変換であり，その逆変換は (q, p) を (x, y) に置き換えたものである．このとき，次が予想できる．

Conjecture 4.1. 正準変数 $q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n$ に関する非可換 *Hamiltonian* H_i を持つ多項式 *Hamilton* 系を考え，以下を仮定する：

1. *Hamiltonian* H_i の次数の合計は $q_1, p_1, \ldots, q_n, p_n$ に関して 5 次.
2. 対応する変換 r_i の下で，この系は多項式 *Hamiltonian* を持つ *Hamilton* 系に再び変換される．

このとき，そのような *Hamiltonian* H_i は次のようにただ一つに決まる．

$$\begin{aligned} t_i(t_i-1)\kappa H_i =& q_i\Big(\sum_{j=1}^{n} q_j p_j + a_{n+1}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} q_j p_j + a_{n+2}\Big) \\ &+ \Big\{q_i(a_{n+3}t_i + a_{n+4} - \kappa) + (t_i - t_i q_i - q_i)v_i\Big\}p_i \\ &- \sum_{j(\neq i)=1}^{n} \Big\{q_j v_i (p_j X_{i,j} + p_i \tilde{X}_{i,j}) + q_i v_j (p_i X_{i,j} + p_j X_{j,i})\Big\}, \end{aligned} \tag{19}$$

ここで，

$$v_i = q_i p_i - a_i, \quad \kappa = \sum_{i=1}^{n+4} a_i - h, \quad X_{i,j} = \frac{t_i(t_j-1)}{t_j - t_i}, \quad \tilde{X}_{i,j} = \frac{t_i(t_i-1)}{t_i - t_j}.$$

この予想に対して，$n \leq 8$ までは確認済みである．

Remark 4.2. 量子 *Hamiltonian* (19) は既知の古典的な *Garnier* 系の *Hamiltonian* の *[8, 3]* の量子化とみなすことができる．

参考文献

[1] B. Gambier, *Sur les équations différetielles du second ordre et du premier degré dont l' intégrale générale est á points critiques fixes.*, Acta. Math. **33**(1910), 1-55.

[2] R. Garnier, *Sur des équations différentielles du troisiéme ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes*, Ann. Ecole Norm. Sup., **29** (1912), 1-126.

[3] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, From Gauss to Painlevé −A modern theory of special functions−, Aspects of Mathematics, **E16**, Vieweg (1991) ISBN 978-3-322-90165-1.

[4] H. Kawakami, *Four-Dimensional Painlevé-Type Equations Associated with Ramified Linear Equations III: Garnier Systems and Fuji-Suzuki Systems*, SIGMA, **13** (096) (2017), 1-50.

[5] H. Kawakami, A. Nakamura and H. Sakai, *Toward a classification of four-dimensional Painlevé equations*, in: Algebraic and geometric aspects of integrable systems and random matrices, eds. A. Dzhamay, K. Maruno and V.U. Pierce, Contemp. Math., **593** (Providence: American Mathematical Society, 2013), 143-161.

[6] H. Kawakami, A. Nakamura and H. Sakai, *Degeneration scheme of 4-dimensional Painlevé-type equations*, MSJ Memoirs, **37** (2018), 25-111.

[7] H. Kimura, *The degeneration of the two dimensional Garnier system and the polynomial Hamiltonian structure*, Ann. Mat. Pura Appl., **155** (1989), 25-57.

[8] H. Kimura, *Uniform foliation associated with the Hamiltonian system $\mathcal{H}_n$*, Anali. Scuola Norm. Sup. di Pisa, **20** (1993), 1-60.

[9] H. Kimura, *On the initial value spaces of degenerate Garnier system*, RIMS Kokyuroku, (2000), 18-27.

[10] H. Kimura and K. Okamoto, *On the polynomial Hamiltonian structure of the Garnier systems*, J. Math. Pures Appl., **63** (1984), 129-146.

[11] T. Matano, A. Matumiya and K. Takano, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems II*, J. Math. Soc. Japan, **51** (1999), 766-843.

[12] A. Matumiya, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems III*, Kumamoto J. Math., **10** (1997), 45-73.

[13] M. Noumi, K. Takano and Y. Yamada, *Bäcklund transformations and the manifolds of Painlevé systems*, Funkcial. Ekvac., **45** (2002), 237-258.

[14] K. Okamoto, *Sur les feuilletages associés aux équations du second ordre á points critiques fixes de P. Painlevé*, Jap. J. Math., 5 (1979), 1-79.

[15] K. Okamoto, *Painlevé equations*, (in Japanese) Iwanami, (2009) ISBN 978-4-00005836-0.

[16] P. Painlevé, *Sur les équations différetielles du second ordre dont l' intégrale générale et uniforme*, Oeuvret. III, 187-271.

[17] Y. Sasano, *Studies on the Garnier system in two variables*, arXiv:0704.2869.

[18] Y. Sasano, *Symmetric Hamiltonian of the Garnier System and its degenerate systems in two variables*, arXiv:0706.0799.

[19] Y. Sasano and Y. Yamada, *Symmetry and holomorphy of Painlevé type systems*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, **B2** (2007), 215-225.

[20] T. Shioda and K. Takano, *On some Hamiltonian structures of Painlevé systems I*, Funkcial. Ekvac., **40** (1997), 271-291.

[21] M. Suzuki, *On the initial value spaces of degenerate Garnier system in two variables*, RIMS Kokyuroku, (2001), 41-52.

[22] M. Suzuki, *Space of initial conditions of Garnier system and its degenerate systems in two variables*, J. Math. Soc. Japan, **58** (2006), 1079-1117.

[23] K. Takano, *Defining manifolds for Painlevé equations*, in *Toward the exact WKB analysis of differential equations, linear and nonlinear* (Eds. C. J. Howls, T. Kawai and Y. Takei), Kyoto Univ. Press, (2000), 261-269.

[24] T. Tsuda, *Birational symmetries, Hirota bilinear forms and special solutions of the Garnier systems in 2-variables*, J. Math .Sci. Univ. Tokyo, **10** (2003), 355-371.

[25] T. Tsuda, *Rational solutions of the Garnier system in terms of Schur polynomials*, IMRN, **43** (2003), 2341-2358.

[26] T. Tsuda, *Universal characters and integrable systems*, PhD thesis. The University of Tokyo, (2003).

[27] T. Tsuda, *Toda equation and special polynomials associated with the Garnier system*, Advances in Mathematics, **206** (2006), 657-683.

[28] Y. Ueno, *Polynomial Hamiltonians for quantum Painlevé equations*, Int. J. Math., **20** (2009), 1335-1445.

[29] Y. Ueno, *Polynomial Hamiltonians for quantum Garnier systems in two variables*, preprint, arXiv:2306.00993.

最良評価付 L^2 割算定理と多重列調和関数の特徴付け

東京都立大学 理学研究科 数理科学専攻
高倉 真和 (Masakazu Takakura) *

概要

多変数関数論において古くから知られている Skoda 型 L^2 割算定理に最良評価を与えた．またこの最良評価は多重列調和関数の特徴付けになっている．

1 背景

多変数関数論において, 領域の凸性と解析方程式の可解性の関係は興味深く研究されてきた．岡, Cartan, Stein, Hörmander らによる次の顕著な結果がある．

定理 1　1. 擬凸領域 Ω 上の解析的連接層 $\mathcal{F}$ に対して

$$H^q(\Omega, \mathcal{F}) = 0 \ \ (q > 0).$$

2. $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を領域とする．Ω 上の任意の解析的連接層 $\mathcal{F}$ に対して

$$H^q(\Omega, \mathcal{F}) = 0 \ \ (q > 0).$$

ならば Ω は擬凸領域.

解析的連接層の高次コホモロジーは解析的方程式を解く上での幾何学的障害類を表している．したがって定理 1 は「可解性」と「領域の幾何学的な凸性」が等価であることを表している．一方で, Hörmander による $\bar{\partial}$–方程式の解に関する L^2–存在定理が示されて以降, 解析的な方程式は L^2 評価付で解けることが分かった．特に大沢–竹越の L^2 拡張定理はその代表例で, 複素幾何学において重要な役割を果たしている．近年 L^2 拡張定理の最良評価とその逆問題について著しい発展があった ([2, 4])．これは岡, Cartan, Stein, Hörmander らの結果の L^2–version である．つまり「$L^2(\Omega, e^{-\phi})$ 評価付の可解性」と,「ϕ の多重劣調和性」が等価であることを示している．本研究では, L^2 割算定理に対して同様の問題を考えた.

Ω を $\mathbb{C}^n$ 上の領域とする．割算問題とは Ω 上の正則関数 $f, g_1, \ldots, g_r \in \mathcal{O}(\Omega)$ に対して $f = \sum h_i g_i$ $(*)$ を満たす正則関数 $h_1, \ldots, h_r$ が存在するかという問いである. 岡潔 [1] は擬凸領域には $(*)$ を解く上での幾何学的な障害がないことを示した. つまり, 局所的に解が存在することと, 擬凸領域 Ω 上に大域的な解が存在することは同値である. これは代数的な判定法としては完全なものであるが, そもそも局所的な解の存在の判定が難しい．そこで Skoda は次の L^2-effective な判定法を示した.

* E-mail:takakura-masakazu@ed.tmu.ac.jp

定理 2（Skoda'72[3]） ϕ を Ω 上の多重劣調和関数, $q=\min(n-1,r)$, ϵ を正の実数とする．もし $(f,g_1,\dots,g_r)$ が

$$I:=\int_\Omega |f|^2|g|^{-2(q+1+\epsilon)}e^{-\phi}d\lambda<+\infty$$

を満たすなら $(*)$ の解が存在し,

$$J:=\min_{h:(*)\text{ の解}}\int_\Omega |h|^2|g|^{-2(q+\epsilon)}e^{-\phi}d\lambda\le(1+q/\epsilon)I$$

を満たす. ここに $d\lambda$ はルベーグ測度である.

つまり, $|f|^2|g|^{-2(q+1+\epsilon)}$ の局所可積分性が $(*)$ の局所解の存在を保証する．定理 1 には Briancon–Skoda の定理や多重種数の変形不変性定理といった重要な応用が多く知られている．その後定理 2 の L^2 評価はさまざまな改良が行われてきたが, それらは等号成立の場合を含まないという意味で最良の評価ではない.

主結果

定理 2 の L^2 評価を改善し, 最良評価を与えた．これは近年の最良評価付 L^2 拡張定理の進展に影響を受けてのことである [4].

定義 1 集合 $\mathcal{G}$ は次の条件 (i),(ii),(iii) を満たす $\mathbb{R}_{\le0}$ 上で定義された C^∞ 級の正の関数の組 $(C(t),D(t),S(t))$ の集まりである.

(i) $\frac{d}{dt}D(t)=-C(t)$
(ii) $\frac{d}{dt}(S(t)D(t))=-D(t)$
(iii) $\frac{d}{dt}S(t)<0$.

特に

$$\int_0^1 rD(\log r^2)dr<+\infty,$$

$$D(0)=0$$

を満たす時, $(C,D,S)\in\mathcal{G}$ は sharp condition を満たすという.

注意 1 上記の (i),(ii),(iii) を満たす組 (C,D,S) は多くある．実際 $C(t)\colon\mathbb{R}_{<0}\to\mathbb{R}_{>0}$ を連続な非減少関数とし,

$$D(t)=\int_t^0 C(s)ds,$$

$$S(t)=\left(\int_t^0 D(s)ds\right)/D(t)$$

と定めると, $(C,D,S)\in\mathcal{G}$ となる.

次の補題は主結果の証明において重要な役割を果たす.

補題 1　$\Omega \subset \mathbb{C}^n$ を擬凸領域, (E,h) を中野の意味で正な Ω 上の正則ベクトル束とし (hogehoge) ϕ を Ω 上の負の多重劣調和関数とする. E に値を持つ $\bar\partial$–閉 $(0,1)$ 形式 v と $(C,D,S) \in \mathcal{G}$ に対して

$$\int_\Omega D(\phi)\,\mathrm{Tr}_{\partial\bar\partial\phi}\langle v\wedge\bar v\rangle_h d\lambda < +\infty$$

を満たすとする. このとき $\bar\partial u = v$ の解で

$$\int_\Omega C(\phi)|u|_h^2 d\lambda \le \int_\Omega D(\phi)\,\mathrm{Tr}_{\partial\bar\partial\phi}\langle v\wedge\bar v\rangle_h d\lambda$$

を満たすものが存在する

この L^2 評価は次のような等号成立の場合を含む.

例 1　$\Omega = \{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ とし, $\phi = |z|^2 - 1$, $(C,D,S) = (1,-t,-t/2)$ とする.

$$v = d\bar z$$

に対して $\bar\partial u = v$ の $L^2(\Omega)$ 最小解は $u = \bar z$ で, このとき

$$\int_{|z|<1}|u|^2 = \pi/2 = \int_{|z|<1}(1-|z|^2) = \int_{|z|<1}(1-|z|^2)\mathrm{Tr}_{dz\wedge d\bar z}dz\wedge d\bar z.$$

主定理 1　ϕ を擬凸領域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 上の多重劣調和関数とする. もし $f, g_1, \dots, g_r$ が $\Phi := \log|g|^2 < 0$ および

$$I_{f,g} := \int_\Omega (C(\Phi) + qD(\Phi))|f|^2|g|^{-2(q+1)}e^{-\phi}d\lambda < +\infty$$

を満たすなら, $(*)$ の解が存在し,

$$J_{f,g} := \min_{h:(*)\text{ の解}} \int_\Omega C(\Phi)|h|^2|g|^{-2q}e^{-\phi}d\lambda \le I_{f,g}$$

を満たす. ここに $d\lambda$ はルベーグ測度である.

主張に $S(t)$ が登場しないが, この定理の証明には (ii),(iii) を満たす S の存在が必要である.

例 2

1. $(C,D,S) = (e^{-\epsilon t}, (e^{-\epsilon t}-1)/\epsilon, (e^{-\epsilon t}+\epsilon t-1)/\epsilon(e^{-\epsilon t}-1))$ とすると主結果 1 の L^2 評価は

$$\int_\Omega |h|^2|g|^{-2(q+\epsilon)}e^{-\phi}d\lambda \le (1+q/\epsilon)\int_\Omega |f|^2|g|^{-2(q+1+\epsilon)}e^{-\phi}d\lambda - q/\epsilon\int_\Omega |f|^2|g|^{-2(q+1)}e^{-\phi}$$

となる. これは定理 2 の評価を真に改善している.

2. $(C,D,S) = (e^{qt}, (1-e^{qt})/q, (1-e^{qt}+qt)/q(1-e^{qt}))$ とすると主結果 1 の L^2 評価は

$$\int_\Omega |h|^2e^{-\phi} \le \int_\Omega |f|^2|g|^{-2(q+1)}e^{-\phi}$$

となる.

例 3　$\Omega = \{z\in\mathbb{C}^n |\ |z|^2<1\}$, $\phi = 0$, 複素定数 $a_1,\dots,a_n$ に対し $(f,g_1,\dots,g_n) = (a_1z_1+\cdots+a_nz_n, z_1,\dots,z_n)$ とすれば, $J_{f,g} = I_{f,g}$ が成立する.

以下 sharp condition を満たす (C, D, S) を 1 つ固定する.

定義 2　領域 Ω とその上の局所 L^1 可積分関数 ϕ を考える. $I_{f,g} < +\infty$ となる任意の正則関数の組 $(f, g_1, \ldots, g_n)$ に対して $J_{f,g} \leq I_{f,g}$ となるとき, (Ω, ϕ) は sharp L^2 division property を持つと言う.

主定理 1 は多重劣調和関数が sharp L^2 division property をもつことを示している. 次の結果はこの逆を主張している.

主定理 2　Ω を $\mathbb{C}^n$ 上の領域, ϕ を Ω 上の C^2 級関数とする.

(i) 任意の有界擬凸部分領域 $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ に対して, $(\widetilde{\Omega}, \phi)$ が sharp L^2 division property を持つとき, $(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} + \frac{\partial \phi}{\partial z^i} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}^j})_{i,j}$ は半正定値.

(ii) 任意の有界擬凸部分領域 $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ と 多重調和関数 $\psi \in PH(\widetilde{\Omega})$ に対して, $(\widetilde{\Omega}, \phi + \psi)$ が sharp L^2 division property を持つとき, $(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j})_{i,j}$ は半正定値.

(iii) 任意の有界擬凸部分領域 $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ と任意の正の定数 ϵ に対して, $(\widetilde{\Omega}, \epsilon\phi)$ が sharp L^2 division property を持つとき, $(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^i \partial \bar{z}^j})_{i,j}$ は半正定値.

参考文献

[1] Kiyoshi Oka. Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII. Sur quelques notions arithmétiques. Bull. Soc. Math. Fr., 78:1–27, 1950.

[2] F. Deng, Z. Wang, L. ZHANG, X. Zhou. New characterization of plurisubharmonic functions and positivity of direct image sheaves June 2024American Journal of Mathematics 146(3):751-768

[3] H. Skoda. Application des techniques L 2 à la théorie des ideaux dúne algèbre de fonctions holomorphes avec poids. Ann. Sci. Ec. Norm. Supér. (4) , 5:545–579, 1972. 1

[4] Q. Guan, X. Zhou. A solution of an L^2 extension problem with an optimal estimate and applications. Ann. of Math. (2), 181(3):1139–1208, 2015.

Hitchin section に含まれる階数 3 の Higgs 束の調和計量

京都大学　大学院理学研究科　数学・数理解析専攻　数理解析系
藤岡舜 (Hitoshi FUJIOKA) *

概要

リーマン面上に正則微分の組が与えられると，Hitchin section に含まれる Higgs 束を定義でき，それは自然な対称積を持っている．本講演では，Hitchin section に含まれる階数 3 の Higgs 束について，スペクトル曲線が 2 重被覆になる条件の下で，対称積と整合的な調和計量の存在について説明する．特に $\mathbb{C}$ や $\mathbb{C}^*$ 上の場合を扱う．

1　Higgs 束と調和計量

本稿では X をリーマン面とする．X 上の **Higgs 束** (E,θ) とは，X 上の正則ベクトル束 E と正則なベクトル束の射 $\theta : E \to E \otimes K_X$ の組のことである．ここで K_X とは X の余接束を指す．θ を Higgs 場と呼ぶ．まず，本稿の主題である Hitchin 方程式とその解である調和計量を紹介しよう．

定義 1.1. (E,θ) を X 上の Higgs 束とする．E のエルミート計量 h が次の方程式 (Hitchin 方程式) を満たすとき h を**調和計量**という．

$$F_{\nabla_h} + [\theta, \theta^{*h}] = 0. \tag{1}$$

ここで，∇_h は h に関する Chern 接続であり，F_{∇_h} はその曲率である．また θ^{*h} は h に関する θ の随伴である．このとき，組 (E,θ,h) のことを調和束と呼ぶ.

注意 1.2. 式 (1) は接続 $\nabla_h + \theta + \theta^{*h}$ の曲率が 0 であることを指す.

Hitchin は Yang–Mills の自己双対方程式を次元簡約することで式 (1) を導入した [3]．与えられた Higgs 束が調和計量を持つかどうか調べるのは一般には難しい問題である．しかし，いくつかの場合によく知られている事実がある．本章では X がコンパクトリーマン面であるときの重要な定理を紹介する．

まずベクトル束の次数や Higgs 束の安定性について紹介する．

定義 1.3. E を X 上の $\mathbb{C}$ ベクトル束とする．E の**次数** $\deg(E)$ を次で定義する．

$$\deg(E) = \int_X c_1(E).$$

ここで $c_1(E)$ とは E の第一チャーン類のことである．E の次数を E の階数で割った値を $\mu(E)$ で表し，**slope** と呼ぶ.

* E-mail:fujioka@kurims.kyoto-u.ac.jp

定義 1.4. (E,θ) を X 上の Higgs 束とする．$\theta(F)\subset F\otimes K_X$ を満たすような E の任意の部分束 F に対し，$\mu(F)<\mu(E)$ を満たすとき，(E,θ) は**安定**であるという．また (E,θ) が同じ slope を持つ安定な Higgs 束の直和として表せるとき，**多重安定**であるという．

調和計量の存在について，次の Hitchin[3]，Simpson[9] による結果が有名である．

定理 1.5 (小林–Hitchin 対応)**.** X がコンパクトであるとする．このとき次が同値である．

- Higgs 束 (E,θ) が調和計量をもつ．
- Higgs 束 (E,θ) が多重安定かつ $\deg(E)=0$ である．

つまり，コンパクトリーマン面上の与えられた Higgs 束が調和計量をもつかどうか判定するには安定性を調べればよいというである．コンパクトでないリーマン面上の Higgs 束についての統一的な結果はないが，コンパクトリーマン面から有限個の点をのぞいたようなリーマン面上の Higgs 束については類似の対応定理が存在する．また特別な形の Higgs 束についてもいくつか調べられている．

2 Hitchin section に含まれる Higgs 束

X を種数が 2 以上のコンパクトリーマン面とする．階数 r の Higgs 束 (E,θ) が $\operatorname{Tr}\theta=0$ と $\det(E)\cong\mathcal{O}_X$ を満たすとき，$\mathrm{SL}(r,\mathbb{C})$-Higgs 束という．$X$ 上の多重安定な $\mathrm{SL}(r,\mathbb{C})$-Higgs 束のなすモジュライ空間を $\mathcal{M}$ で表すことにする．

定義 2.1. 次で定義される写像を **Hitchin ファイブレーション**という．

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{M} & \longrightarrow & \bigoplus_{i=2}^{r} H^0(X,K_X^i).\\ \cup & & \cup\\ [E,\theta] & \longmapsto & (p_2(\theta),\dots,p_r(\theta))\end{array}$$

ここで $p_2,\dots,p_r$ は $\mathrm{SL}(r,\mathbb{C})$-不変多項式環の生成元である．

$K_X^{1/2}$ を一つ固定する．**Hitchin section** とは，Hitchin が [4] でタイヒミュラー空間のある種の一般化を考えるために導入したもので，Hitchin ファイブレーションの右逆射である．つまり任意の $q=(q_2,\dots,q_r)\,(q_j\in H^0(X,K_X^j))$ に対し，ある Higgs 束 $(\mathbb{K}_{X,r},\theta(q))$ を対応させるものである．この Higgs 束は次のように与えられる：

$$\mathbb{K}_{X,r}=\bigoplus_{i=1}^{r}K_X^{(r-2i+1)/2},\quad \theta(q)=\begin{pmatrix}0 & q_2 & q_3 & \cdots & q_r\\ 1 & 0 & q_2 & \cdots & q_{r-1}\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & q_2\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

この形の Higgs 束 $(\mathbb{K}_{X,r},\theta(q))$ を，X が必ずしもコンパクトでないようなリーマン面の場合でも **Hitchin section に含まれる Higgs 束**と呼ぶことにする．

次に Higgs 束の対称積とそれに関連する概念を定義する．

定義 2.2. (E,θ) を X 上の Higgs 束とする．ベクトル束 E の正則な対称積 $C:E\otimes E\to\mathcal{O}_X$ が

$C(\theta \otimes \mathrm{id}_E) = C(\mathrm{id}_E \otimes \theta)$ を満たすとき，(E, θ) の**対称積**であるという．また X のすべての点のファイバー上で C が非退化であるとき，C は非退化であるという．

定義 2.3. C を Higgs 束 (E, θ) の非退化な対称積とする．E のエルミート計量 h が対称積 C と**整合的**であるとは，写像 $\Phi_C : E \to E^*, v \mapsto C(-, v)$ が h と h^* に関して等長となることをいう．ここで h^* は E^* に誘導されるエルミート計量である．

Hitchin section に含まれる Higgs 束 $(\mathbb{K}_{X,r}, \theta(q))$ は

$$K_X^j \otimes K_X^{-j} \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

から定まる自然な対称積をもつ．これを $C_{X,r}$ と表すことにする．

次のような問題を考えることができる．

問題. Hitchin section に含まれる Higgs 束 $(\mathbb{K}_{X,r}, \theta(q))$ は対称積 $C_{X,r}$ と整合的な調和計量を持つか．

この問題に関して，次のような先行研究がある．

1. Li–望月 [7] は，X が双曲的，つまり普遍被覆が上半平面と双正則となるとき，そのような調和計量は存在することを示した．さらに X がコンパクトであれば，そのような計量は一意に定まることも示した．
2. Li–望月 [6] は，Higgs 束が generically regular semisimple(次章で説明する) であるとき，そのような調和計量が存在することを示した．

3 主定理

主定理に必要な Higgs 束のスペクトル曲線について説明する．

定義 3.1. (E, θ) を X 上の階数 r の Higgs 束とする．(E, θ) の**スペクトル曲線** Σ_θ を

$$\Sigma_\theta = \{\lambda \in K_X \mid \det(\lambda \,\mathrm{id}_E - \theta) = 0\}$$

で定める．$K_X \to X$ を Σ_θ に制限して得られる写像を $\pi : \Sigma_\theta \to X$ で表すことにする．正の整数 n を

$$n = \max_{p \in X}(\#\pi^{-1}(p))$$

とするとき，$\pi : \Sigma_\theta \to X$ は n **重の分岐被覆**であるという．特に $n = r$ のとき，(E, θ) は generically regular semisimple であるという．

以下では，$\mathbb{C}$ や $\mathbb{C}^*$ の標準的な座標を z で書く．さらに $\mathbb{P}^1$ を $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を加えた空間とみなす．

講演者は X が非コンパクトかつ放物的，つまり $X = \mathbb{C}$ もしくは $\mathbb{C}^*$ で階数が 3 の場合に，q が $\mathbb{P}^1$ 上有理型であるという条件の下で次の結果を得た．

定理 3.2. q は $\mathbb{P}^1$ 上有理型であるとする．$(\mathbb{K}_{\mathbb{C},3}, \theta(q))$ が generically regular semisimple でない，つまり $\pi : \Sigma_{\theta(q)} \to \mathbb{C}$ が 1 重もしくは 2 重の分岐被覆のとき，次を満たす多項式 $f \in \mathbb{C}[z]$ が存在する．

$$q_2 = 3 \cdot 2^{-5/3} f^2 (dz)^2, \quad q_3 = f^3 (dz)^3.$$

このとき，f の次数が 2 以上ならば $(\mathbb{K}_{\mathbb{C},3}, \theta(q))$ は対称積 $C_{\mathbb{C},3}$ と整合的な調和計量を持ち，そうでないならば持たない．

定理 3.3. q は $\mathbb{P}^1$ 上有理型であるとする．$\pi : \Sigma_{\theta(q)} \to \mathbb{C}^*$ が 1 重もしくは 2 重の分岐被覆のとき，次を満たすローラン多項式 $f \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ が存在する．

$$q_2 = 3 \cdot 2^{-5/3} f^2 (dz/z)^2, \quad q_3 = f^3 (dz/z)^3.$$

このとき，f が定数でない場合に限り，$(\mathbb{K}_{\mathbb{C}^*,3}, \theta(q))$ は対称積 $C_{\mathbb{C}^*,3}$ と整合的な調和計量を持つ．

階数 3 で q が有理型である場合は，定理 3.2，3.3 と [6, Theorem 2.34] によって，整合的な調和計量の存在についての必要十分条件を与えていることがわかる．

定理 3.2 の $\deg(f) \geq 1$ の場合にのみ証明の概略を述べる．詳しい議論やいくつかの言葉の定義は [2] を参照のこと．まず鍵となるのは Li–望月による次の定理である．

定理 3.4 ([6])**.** X をコンパクトリーマン面とし，D をその有限部分集合とする．このとき次の対象は同値である．

- 非退化な対称積と整合的な (X, D) 上wild な調和束,
- 完全な対称積をもつ (X, D) 上の good かつ多重安定なフィルター付き Higgs 束.

q が有理型という条件は wild という条件に対応しており，定理 3.4 を用いることができる状況になっている．よって，考えたい調和計量の存在問題は次の 2 つの問題に分解される．

問 A Higgs 束 $(\mathbb{K}_{\mathbb{C},3}, \theta(q))$ の $\mathbb{P}^1$ への有理型な延長, つまり $E|_{\mathbb{C}} = \mathbb{K}_{\mathbb{C},3}$ を満たす局所自由 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(*\infty)$ 加群 E で，$\theta(q)$ と $C_{\mathbb{C},3}$ が有理型に延びるものはあるか．

問 B 問 A で考えた E 上に定まるフィルター付き Higgs 束 $(\mathcal{P}_* E, \theta(q))$ であって，good かつ多重安定で $C_{\mathbb{C},3}$ が完全となるように延びるものはあるか．

これらの問題を考えるために，$\theta(q)$ に関する広義固有空間分解と整合的な無限遠点まわりの $\mathbb{K}_{\mathbb{C},3}$ の枠 s_1, s_2, s_3 をとる．このとき，問 A の解答となる次の補題が成り立つ．

補題 3.5. $(\mathbb{K}_{\mathbb{C},3}, \theta(q))$ の $\mathbb{P}^1$ への有理型な延長 E は

$$E_\infty = \bigoplus_{i=1}^{3} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,\infty}(*\infty) s_i \tag{2}$$

で定まるものただ一つである．

よって，問 B では式 (2) で定まる E 上のフィルター付き Higgs 束についてのみ考えれば良い．

$\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$ とする．E 上のフィルター付き Higgs 束 $(\mathcal{P}^{\mathbf{d}}_* E, \theta(q))$ として，

$$\mathcal{P}^{\mathbf{d}}_c E_\infty = \bigoplus_{i=1}^{3} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,\infty}([c - d_i]\infty) s_i, \quad c \in \mathbb{R}.$$

で定まるものを考える．ここで $[x]$ は x を超えない最大の整数を指す．以下の 2 つの補題が成り立つ．

補題 3.6. $\deg(f) \geq 2$ のとき，ある $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ が存在して，フィルター付き Higgs 束 $(\mathcal{P}^{\mathbf{d}}_* E, \theta(q))$ は問 B の条件を満たす．$\deg(f) = 1$ のとき，そのような $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$ は存在しない．

補題 3.7. E 上のフィルター付き Higgs 束で good かつ $C_{\mathbb{C},3}$ が完全となるように延びるものは，$(\mathcal{P}^{\mathbf{d}}_* E, \theta(q))$ で定まるもののみである．

補題 3.6，3.7 により定理 3.2 の $\deg(f) \geq 1$ の場合を得る．

参考文献

[1] Biquard O., Boalch P., Wild nonabelian Hodge theory on curves, Compositio Math. **140** (2004), 179–204.

[2] Fujioka H., Harmonic metrics for Higgs bundles of rank 3 in the Hitchin section, SIGMA **20** (2024), no. 111.

[3] Hitchin N. J., The self-duality equations on a Riemann surface, Proc. London Math. Soc. **55** (1987), 59–126.

[4] Hitchin N. J., Lie groups and Teichmüller space, Topology **31** (1992), 449–473.

[5] Li Q., Mochizuki T., Complete solutions of Toda equations and cyclic Higgs bundles over non-compact surfaces, arXiv:2010.05401.

[6] Li Q., Mochizuki T., Harmonic metrics of generically regular semisimple Higgs bundles on noncompact Riemann surfaces, Tunisian Journal of Math. **5** (2023), 663–711.

[7] Li Q., Mochizuki T., Higgs bundles in the Hitchin section over non-compact hyperbolic surfaces, Proc. London Math. Soc. **129** (2024), no. 6, Paper No. e70008.

[8] Mochizuki T., Wild harmonic bundles and wild pure twistor D-modules, Astérisque **340** (2011).

[9] Simpson C. T., Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and applications to uniformization, Journal of the American Math. Soc. **1** (1988), 867–918.

[10] Simpson C. T., Harmonic bundles on noncompact curves, Journal of the American Math. Soc. **3** (1990), 713–770.

接触角構造付き平均曲率流の存在定理について*

東京科学大学　理学院数学系数学コース
田代紀一 (Kiichi TASHIRO) †

概 要

平均曲率流とは, 曲面の運動方程式ともいえる二階の準線形放物型偏微分方程式の一種で, 曲面の速度が平均曲率で与えられている曲面族のことである. これは滑らかな初期値から出発しても有限時刻で特異点が生じることが知られており, そのため特異点の形状解析や正則性定理の研究のために, 様々な視点から弱解の提案と研究がされてきている. 本稿の目的は, 平均曲率流の Brakke の意味での解の存在定理の証明を, 毛細管現象からくる接触角構造を境界条件として加えた上で行うことである. 特に弱解の定式化や存在性定理のための Ilmanen による elliptic regularization と呼ばれる手法について解説する.

1　導入: グラフ平均曲率流から

平均曲率流は金属の焼きなまし法の数理モデルとして考案された幾何学的流れの問題の一つであり, 曲面族の法線方向速度が平均曲率で与えられるものである. 例えば, $\mathbb{R}^{n+1}$ 内の n 次元曲面族が, 時間でパラメータ付けられた滑らかな関数 $f(\cdot,t):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ でグラフ表示されたとしよう. このとき速度と平均曲率 H が等しいとすると, f は偏微分方程式

$$\frac{\partial_t f}{\sqrt{1+|\nabla_x f|^2}} = H = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla_x f}{\sqrt{1+|\nabla_x f|^2}}\right) \tag{1.1}$$

の解でなければならない. この方程式の $f=0$ での線形化は $\partial_t f = \mathrm{div}\nabla_x f = \Delta_x f$ となることから, 平均曲率流は曲面に対する熱方程式のようなものであることがわかる. 平均曲率流は有限時刻で消失やピンチングのような特異点が生じうることが知られているが, 熱方程式の平滑化効果により解の平滑化効果が期待できる[1]. そのため, 時間大域的に (適切な弱解の意味で) 解が存在することが予測できる. Brakke [Bra78] は幾何学的測度論の概念である varifold を用いて弱解を定式化し, 存在性と正則性を扱った. 本稿ではこの定式化を非斉次 Neumann 境界条件の一種である接触角構造付きに拡張し, 存在性について議論する.

超関数の意味での解を定式化するために, グラフ $G(f)$ の曲面積の時間変化率を計算してみる. 滑らかな境界をもつ有界開領域 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 上の高さ関数 $z=f(x,t)\,(x\in\Omega)$ が方程式 (1.1) を満たすとする. 非負値テスト関数 $\phi\in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$ に対して, 部分積分と方程式 (1.1) を用いて

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{G(f)}\phi\,dS = \frac{d}{dt}\int_\Omega \phi(x,f(x,t))\sqrt{1+|\nabla_x f|^2} = \int_\Omega \phi\frac{\nabla_x f\cdot\nabla_x\partial_t f}{\sqrt{1+|\nabla_x f|^2}} + \partial_z\phi\partial_t f\sqrt{1+|\nabla_x f|^2}\\
&= \int_\Omega -\phi\partial_t f\,\mathrm{div}\left(\frac{\nabla_x f}{\sqrt{1+|\nabla_x f|^2}}\right) + \partial_t f\frac{-(\nabla_x\phi+\partial_z\phi\nabla_x f)\cdot\nabla_x f+\partial_z\phi\partial_t f(1+|\nabla_x f|^2)}{\sqrt{1+|\nabla_x f|^2}}\\
&\quad + \int_{\partial\Omega}\frac{\phi\partial_t f\nabla_x f\cdot\vec{\nu}_{\partial\Omega}}{\sqrt{1+|\nabla_x f|^2}} = \int_\Omega(-\phi H^2+\nabla\phi\cdot(H\vec{\nu}_f))\sqrt{1+|\nabla_x f|^2} + (\text{境界項})
\end{aligned} \tag{1.2}$$

*本研究は, JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2106・JPMJSP2180 の支援を受けたものです.

†E-mail:tashiro.k.0e2f@m.isct.ac.jp

[1]弱解を考えられるという意味ではこの期待は正しいが, ある意味では誤りである. 実際, 特異点を一点だけもつ mean-convex な曲面を初期値とする平均曲率流で, 特異点が無限回生じるような (fatteness が起こらないレベルセット解の意味での) 解の例が三浦達哉氏によって知られている ([Mi16]).

と計算できる. ここで $\vec{v}_f$ はグラフ $G(f)$ の単位法線ベクトル. まず初めにこの式から平均曲率流の弱解はどのように定式化すべきかを考察していく. 主な議論のポイントは, どのように界面を接触角境界条件付きの意味で弱解に適した形で一般化するか, となる. Dirichlet や Neumann 境界条件であれば境界項が 0 となるが, 接触角条件では 0 とならないためである.

2 修正可能 Radon 測度と capillary による接触角構造

曲面を一般化する考え方として, 曲面を曲面積とみなして考える varifold と呼ばれるものがある. しかし varifold は抽象的すぎる概念であるため, ここでは varifold のうち, 測度論的に C^1 とみなせるクラスである (整 n 次元) 修正可能 Radon 測度を紹介する.

Definition 2.1. 1. 集合 $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ が **(n 次元可算) 修正可能集合**であるとは, $\mathcal{H}^n$ 可測かつ局所有限であり, ある高々可算個のリプシッツ写像 $F_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ が存在して, $\mathcal{H}^n(\Gamma \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i(\mathbb{R}^{n+1})) = 0$ を満たすときである. ここで $\mathcal{H}^n$ は n 次元ハウスドルフ次元である.

2. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上の Radon 測度 μ が **(整 n 次元) 修正可能**であるとは, ある修正可能集合 Γ と, Γ 上に定義される $\mathcal{H}^n$ 可測関数 $\theta : \Gamma \to [0, \infty)$ が存在して, $\theta \in L^1_{loc}(\mathcal{H}^n \lfloor_\Gamma)$ かつ $\mathcal{H}^n$-a.e. で $\theta(x) \in \mathbb{N}$ であり

$$\mu(\phi) = \int_\Gamma \phi(x)\theta(x)\, d\mathcal{H}^n(x) \quad (\phi \in C_c(\mathbb{R}^{n+1}))$$

と書けるときである. ここで $\mathcal{H}^n \lfloor_\Gamma$ は測度の制限を表し, $\mathcal{H}^n \lfloor_\Gamma(A) = \mathcal{H}^n(A \cap \Gamma)$ のこと.

この n 次元ハウスドルフ測度とはおおざっぱには曲面積測度のことであり, f のグラフ $G(f)$ のハウスドルフ測度は $d\mathcal{H}^n \lfloor_{G(f)} = \sqrt{1 + |\nabla f|^2}\, dx$ となることが知られている. 関数 θ は曲面の**多重度**と呼ばれるもので, $\theta = 2$ であれば曲面が二枚重なっている状況を表している.

リプシッツ写像はほとんど至る所で C^1 であるという Rademacher の定理より, 修正可能という概念は積分記号下では C^1 多様体のように扱うことができる. 実際, 曲面の構造を考える上で必須である接平面の概念を修正可能 Radon 測度に対しても次の意味で考えることができる.

Theorem 2.2. 修正可能 *Radon* 測度 μ に対して, 修正可能集合 Γ と非負値可測関数 θ を $\mu = \theta\mathcal{H}^n \lfloor_\Gamma$ なるようにとる. このとき $\mathcal{H}^n$-*a.e.* $x \in \Gamma$ に対して n 次元部分空間 $T_x\mu \subset \mathbb{R}^{n+1}$ が存在して

$$\lim_{\lambda \to +0} \int_{(x+\Gamma)/\lambda} \phi\, d\mu = \theta(x) \int_{T_x\mu} \phi\, d\mathcal{H}^n$$

が任意の $\phi \in C_c(\mathbb{R}^{n+1})$ で成り立つ. この $T_x\mu$ を μ *(*あるいは Γ*)* の x での**概接平面**という.

概接平面は測度論的な接平面であり, 積分範囲を拡大する操作を利用することで微分を使わずに, 曲面が平面に近づいて行く状況を記述している. この定理があるため, 修正可能というクラスは微分できないような極めて一般的な曲面を扱うときに役立つクラスであることがわかる. 一方で平均曲率は二回微分しないと得られない量であるため[2], 修正可能であるだけではこれは存在しえないことが想像できる. ではどのように考えるかというと, 「曲面積の第一変分は平均曲率で表される」ということを用いる. 具体例として, 任意のテスト関数 $\phi \in C^1_c(\Omega)$ をとり, グラフ $z = f(x)$ を z 方向にのみ第一変分を取った $z = f(x) + \delta\phi(x)$ について, 表面積の $\delta = 0$ での微分を計算してみる. これは部分積分により

$$\frac{d}{d\delta} \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla_x f + \delta \nabla_x \phi|^2} \Big|_{\delta=0} = \int_\Omega \frac{\nabla_x f \cdot \nabla_x \phi}{\sqrt{1 + |\nabla_x f|^2}} = -\int_\Omega \phi \mathrm{div}\left(\frac{\nabla_x f}{\sqrt{1 + |\nabla_x f|^2}} \right)$$

[2]弱い意味の曲面に対してもこれは正しく, 平均曲率を持つ整修正可能集合は a.e. で C^2 部分多様体で表現できることが U. Menne 氏によって知られている ([Men13]). 実際にはもう少し弱い仮定で証明されている.

となる. すこし無理矢理であるが, $X=(0,\dots,0,\phi)$ というベクトル場を考えることで

$$\int_\Omega \mathrm{div}_{T_xG(f)}X\sqrt{1+|\nabla_x f|^2}=-\int_\Omega X\cdot(H\vec{\nu}_f)\sqrt{1+|\nabla_x f|^2}$$

という等式を得ることができ, 実際にこの等式は一般のテストベクトル場について成り立つ. ここで $\mathrm{div}_{T_xG(f)}$ は発散を $T_xG(f)$ への射影したもので, 射影行列 $P_{T_xG(f)}$ とヘシアン ∇X を用いて $\mathrm{tr}(P_{T_xG(f)}(\nabla X))$ と書ける. 左辺において二回微分を行っていないことに着目すると, 弱い意味での平均曲率は第一変分から次のように定義することができる.

Definition 2.3. 整 n 次元修正可能 Radon 測度 μ に対し, μ について可積分なベクトル場 $\vec{H}_\mu:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}^{n+1}$ が存在し, 任意の $X\in C^1_c(\mathbb{R}^{n+1};\mathbb{R}^{n+1})$ に対し

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}}\mathrm{div}_{T_x\mu}X\,d\mu=-\int_{\mathbb{R}^{n+1}}X\cdot\vec{H}_\mu\,d\mu$$

が成り立つならば, $\vec{H}_\mu$ を μ **の一般化された平均曲率ベクトル**という.

上記の弱い意味での平均曲率の定義は部分積分に大きく依存している. 部分積分を行うと境界項が出てくることから, 境界条件を考えたいときには上記の定義は不十分である. そこで $-1<a<1$ に対して, 次の capillary を考慮した面積汎関数である Gauss' free energy を考える:

$$G_a(S):=\mathcal{H}^n(S\cap\Omega)+a\mathcal{H}^n(S\cap\partial\Omega)\quad(S:\text{境界が }\Omega\text{ 上滑らかな }n\text{ 次元曲面となる領域}).\tag{2.1}$$

これは S が机の上の水滴のような状況と思ったときに, エネルギーとして表面積を採用した汎関数である. 水滴 S は机 $\partial\Omega$ に染み込むため, S の表面張力は Ω と $\partial\Omega$ で異なる. この張力の変化を wettability と呼ばれる定数 a で表現している. 汎関数 G_a の体積保存条件下での最小化領域は, 下図のような張力のつり合いによる (Young の) 接触角構造を持つ.

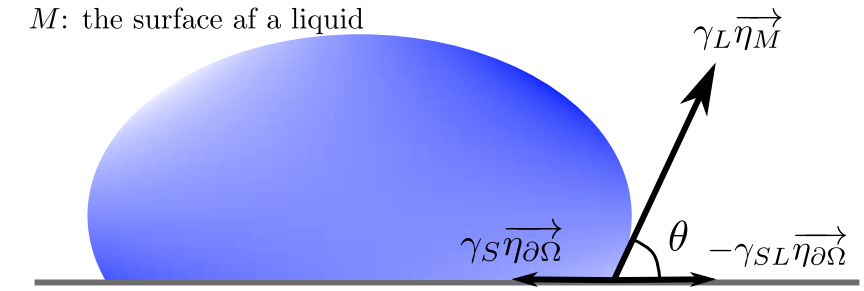


図 1: Young's low の図

曲率と capillary の関係を見るために, テストベクトル場 X に対して G_a の第一変分を考える. 境界を $M=\partial S$ とおき, 境界での張力のつり合いを見るために $X\cdot\nu_{\partial\Omega}=0$ と仮定する. このとき領域の境界 $\partial\Omega$ の平均曲率と X が直行することから

$$\begin{aligned}(G_a\text{ の }X\text{ についての第一変分})&=\int_\Omega\mathrm{div}_{T_xM}X\,d\mathcal{H}^n\lfloor_M+a\int_{\partial\Omega}\mathrm{div}_{T_xM}X\,d\mathcal{H}^n\lfloor_M\\&=-\int_\Omega X\cdot\vec{H}_M\,d\mathcal{H}^n\lfloor_M+\int_{\gamma(M)}(\vec{\eta}_{M\cap\Omega}+a\vec{\eta}_{M\cap\partial\Omega})\cdot X\,d\mathcal{H}^{n-1}\end{aligned}$$

と計算できる．ここで $\gamma(M)$ は $M \cap \Omega$ の曲面の意味での境界であり，$\vec{\eta}_\cdot$ は曲面の単位 conormal ベクトルを表している．上図のつり合いの関係から，$\vec{\eta}_{M\cap\Omega} + a\vec{\eta}_{M\cap\partial\Omega} \perp \partial\Omega$，すなわち $X \cdot \vec{\nu}_{\partial\Omega} = 0$ なるテストベクトル場に対して上式の境界項が 0 となることが，接触角条件を表していることを読み取れる．上記の議論は，曲面測度 μ に対し補助的な境界測度 ν を導入することで，つり合いによる接触角構造を定義できることを示唆している．このモチベーションを元に，Kagaya–Tonegawa [KT17] は次のような接触角構造を，一般化された曲面に対して定義した．

Definition 2.4. 定数 $\theta \in (0,\pi)$ を固定し，$a = \cos\theta$ とする．滑らかな境界をもつ閉領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ 内に台を持つ整 n 次元修正可能 Radon 測度 μ と $\partial\Omega$ に台を持つ整 n 次元修正可能 Radon 測度 ν に対し，ある μ について可測なベクトル場 $\vec{H}_\mu : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ が存在し，任意の $X \in C^1_c(\mathbb{R}^{n+1};\mathbb{R}^{n+1})$ で $X \cdot \vec{\nu}_{\partial\Omega} = 0$ を満たすものに対し

$$\int_\Omega \mathrm{div}_{T_x\mu} X \, d\mu + a\int_{\partial\Omega} \mathrm{div}_{T_x\nu} X \, d\nu = -\int_\Omega X \cdot \vec{H}_\mu \, d\mu, \quad \vec{H}_\mu \cdot \vec{\nu}_{\partial\Omega} = 0 \ (\text{a.e. } x \in \partial\Omega) \tag{2.2}$$

が成り立つならば，$\vec{H}_\mu$ を μ **の一般化された接触角付き平均曲率ベクトル**という．このような H_μ があるとき，組 (μ,ν) は**接触角 θ を持つ**という．領域 Ω は，内部にある曲面測度 μ が境界に張り付く可能性を考慮して閉領域としてある．

3 接触角付き Brakke flow

前章で曲面を測度論的に C^1 曲面として扱えるような一般化を行い，一般化された平均曲率を接触角付きで定義した．次に超関数の意味での平均曲率流を式 (1.2) を元に考察していく．この式は一般の (滑らかな) 時間発展する多様体に対して成り立つ．速度ベクトルを $\vec{V}$，平均曲率ベクトルを $\overrightarrow{H}$ として多様体の族 M_t に対して境界項を無視して式 (1.2) を考えると

$$\frac{d}{dt}\int_{M_t} \phi \, d\mathcal{H}^n = \int_{M_t} (-\phi\vec{H} + \nabla\phi) \cdot \vec{V} \, d\mathcal{H}^n \quad (\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^{n+1};[0,\infty))) \tag{3.1}$$

となる．式 (1.2) における境界項は，今回の設定では平均曲率の定義によって処理しているため，0 であるとしてよい．素直に考えれば，式 (3.1) における $\vec{V}$ を $\vec{H}$ に取り換えることで弱解の定式化ができるのではと思える．弱解とはいえ平均曲率を時間積分しているため，すべてでなくてもほとんどすべての時刻で接触角構造とそれによる平均曲率が必要であろう．式 (3.1) からアプリオリ評価として曲率の局所時空間 L^2 積分が有界であることが得られるため，これも解の定義に必要となる．また曲面同士が段々近づき重なってしまうことも想定されるため，多重度を考えられるクラスで解を定義することが (後付けだが) 自然である．以上を踏まえて，次のように (接触角付きの) 平均曲率流の弱解の一つである Brakke flow を定義する[3]．

Definition 3.1. 定数 $\theta \in (0,\pi)$ を固定し，$a = \cos\theta$ とし，さらに滑らかな境界をもつ閉領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を固定する．領域 Ω 内に台を持つ整 n 次元修正可能 Radon 測度 μ_t と $\partial\Omega$ 内に台を持つ整 n 修正可能 Radon 測度 ν_t の組 $\{(\mu_t,\nu_t)\}_{t\geq 0}$ が n **次元接触角付き Brakke flow** であるとは，以下がすべて満たされるときである．

1. a.e. $t > 0$ に対し，(μ_t,ν_t) は接触角 θ を持つ (一般化された平均曲率を $\vec{H}_{\mu_t}$ と書く)．
2. 任意の $0 < T < \infty$ と任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対し，$\int_0^T \int_K |\vec{H}_{\mu_t}|^2 \, d\mu_t dt < \infty$.
3. 任意の $0 \leq t_1 < t_2$ と任意の $\phi \in C^1_c(\Omega \times [0,\infty);[0,\infty))$ に対し，

$$\int_\Omega \phi \, d(\mu_t + a\nu_t)\Big|_{t_1}^{t_2} \leq \int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega (-\phi\vec{H}_{\mu_t} + \nabla_x\phi) \cdot \vec{H}_{\mu_t} \, d\mu_t dt + \partial_t\phi \, d(\mu_t + a\nu_t)dt. \tag{3.2}$$

[3]形は元々の Brakke [Bra78] の定義と異なるが，本質的には同じである．Brakke は多重度が自然数であることを要請しておらず，曲率を曲面の法方向に射影するといった必要が出てくる．

この定義は式 (3.1) を動機にしているといっても多くの謎があるように見えるだろう．まず, なぜ式 (3.1) のように等式で定義していないかについて説明する．極めて一般的な枠組みでは, 曲面の一部が一瞬にして消滅する状況を許容しなければ存在定理の証明が困難になるということが一つの理由である．具体的には, 曲率の L^2 積分項を近似するとき, 一般にはこの項に対しては下半連続性しか保証できないことが等式を証明できない技術的な困難となる．現象的にも, 不安定なシャボン玉が一瞬にして消えるように曲面の消失が起こりえるため, 等式で定義すると弱解として不適である．また滑らかな場合であれば, 式 (3.1) と (3.2) から次の特徴付けを得ることができるため, 不等式で平均曲率流を定義してしまっても, その正当性を証明できる．

Proposition 3.2. 滑らかな多様体の族 $\{M_t\}_{t\in[0,T)}$ が平均曲率流であることと, 任意の $\phi \in C^1_c(\mathbb{R}^{n+1}\times[0,\infty);[0,\infty))$ と任意の $0 \le t_1 < t_2 < T$ に対して,

$$\int_{M_t} \phi \, d\mathcal{H}^n \Big|_{t_1}^{t_2} \le \int_{t_1}^{t_2}\int_{M_t} (-\phi \vec{H}_{M_t} + \nabla_x \phi)\cdot \vec{H}_{M_t} + \partial_t \phi \, d\mathcal{H}^n dt$$

が成り立つことは同値である．ここで $\vec{H}_{M_t}$ は M_t の平均曲率ベクトル.

なぜ式 (3.2) に補助的に導入した境界測度を入れているかについて説明する．滑らかな場合であれば ν_t に関する項が右辺と左辺で打ち消しあうため, ν_t が時間について滑らかでないときを考える．仮に式 (3.2) に境界項がなかったとすると, ν_t に関しては接触角構造以外に連続性すら保証されていないことから, 例えば初期値においては ν_t は $\partial\Omega$ の一部分のみにしかなかったとしても, ある時刻で $\nu_t = \mathcal{H}^n\lfloor_{\partial\Omega}$ のように補助的な境界測度が急激に境界全体に広がるという現象を防ぐことができない．このとき式 (2.2) の ν の項が自動的に 0 になるが, これは $a = 0$, すなわち接触角 90° な状況と一致してしまい, Neumann 境界条件のような振る舞いになってしまう．この現象を防ぐために境界項に何らかの意味での連続性が必要であり, その連続性の保証のために境界項を定義に組み込んでいる．

とはいえ不等式で定義することには明確なデメリットがあり, 定義からの一意性の保証が何もなくなってしまう．それどころか, 初期値が空集合でなくても一瞬で曲面全体がなくなってしまう非物理的な現象をもこの定義は許容してしまっている．境界測度 ν_t のみが突然消失することも起こりうるだろう．このような現象を防ぐためには上の定義に加えて筋のいい解の連続性などの性質を構成法から示すことが必要である．構成法からどの程度まで一意性に迫っていけるかという問題は平均曲率流に対する大きな研究テーマの一つである.

4　先行研究と主定理

時間発展しない接触角を考慮した問題は, Gauss' free energy (2.1) に関する膨大な研究がある．一方で, 時間発展する平均曲率流についての研究は時間発展しないものと比べるとほとんど研究されていない．ここでいくつか先行研究を紹介する．粘性解理論を用いたレベルセットの意味での平均曲率流については, Ishii–Sato [IS04] により, (より一般の形の方程式に対する) 粘性解理論が整備されている．Minimizing movement 法と呼ばれる, 変分的近似スキームによる minimizer を用いた時間離散的近似法による研究は比較的盛んでありすべての文献を挙げることは難しい．ここでは近年に証明された, minimizing movement 法の近似の収束先が領域が凸であれば, レベルセット解に収束するという Eto–Giga [EG24] による結果のみを挙げておくに留める．平均曲率流の存在性の研究は, 二重井戸型ポテンシャルを持つ反応拡散型方程式である Allen–Cahn 方程式を用いたものも有名である．接触角構造に対応する非斉次 Neumann 境界条件を課した Allen–Cahn 方程式を用いた研究については, [HL24] や [MTTW24] 等がある．[HL24] では BV flow と呼ばれる別の定式化による平均曲率流の弱解について議論している．BV flow は, 曲面が囲む領域の面積変化に着目した定式化であり, 表面積変化に着目している Brakke

flow とは異なる解概念である. [MTTW24] では接触角付き Allen–Cahn 方程式のエネルギーについて, 特異極限の振る舞いを議論している. しかしながら, 両者ともに特異極限の収束に関して自然だが証明されていない非自明な仮定を付けたものになっている.

これらの先行研究に対し, Brakke の意味の平均曲率流の弱解を可能な限り前提条件を排除した形での証明を, Ilmanen [I94] による変分法で取った曲面を使って平均曲率流を近似する elliptic regularization と呼ばれる手法を応用することで得ることができた. 前置きが非常に長くなってしまったが, 次が主定理となる.

Theorem 4.1 ([Ta24], Theorem 2.7)**.** 定数 $\theta \in (0, \pi/2)$ を固定し[4], $a = \cos\theta$ とし, さらに滑らかな境界をもつ閉領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を固定する. 開集合 $E_0 \subset \Omega$ を境界が C^1 となりかつ $\mathcal{H}^n(\partial E_0) < \infty$ と取る[5]. このとき定義 *3.1* の意味の接触角付き *Brakke flow* $\{(\mu_t, \nu_t)\}_{t\geq 0}$ で

$$\mu_0 + a\nu_0 = \lim_{t\to+0}(\mu_t + a\nu_t) = \mathcal{H}^n\lfloor_{\Omega^\circ\cap\partial E_0} + a\mathcal{H}^n\lfloor_{\partial\Omega\cap\partial E_0}$$

を満たすものが存在する. ここで Ω° は Ω のユークリッド位相についての内部.

5 証明の概略: elliptic regularization について

接触角構造を考え始める上での最初の困難は, 非斉次な境界項を無視できないことによる評価の難しさである. このことは, 式 (1.2) 中の境界項が, Dirichlet や Neumann 境界条件であれば 0 となるが接触角境界条件では消えないという部分にも現れている. 一方で Gauss' free energy と関連する変分法による解析手法の発達は, 変分構造と接触角構造は相性がいいことを示唆している. [Ta24] のアイデアは, 変分法で考えた曲面を用いて平均曲率流を構成する elliptic regularization を, 変分構造を利用して接触角構造付きにうまく拡張していくことである. ここから capillary 付き elliptic regularization の流れについて解説する.

1. 初期値として $E_0 \subset \Omega$ をとり, 次の汎関数を考える:

$$I_a^\varepsilon(S) := \int_{\partial^* S\cap\Omega^\circ} + a\int_{\partial^* S\cap\partial\Omega} \frac{1}{\varepsilon}\exp\Big(-\frac{z}{\varepsilon}\Big)\, d\mathcal{H}^{n+1}. \tag{5.1}$$

ここで, $S \subset \mathbb{R}^{n+1}\times[0,\infty)$ は $E_0 = \{x \mid (x,0) \in S\}$ となるような有界周長集合 (あるいは set of finite perimeter とも呼ばれる) とし, $\partial^* S$ を reduced boundary とする. Reduced boundary とは「測度論的境界」とでもいうべきもので, 有界周長集合から「スジの良い」点のみを集め, 境界が a.e. で C^1 曲面となるようにしたものである. 例として $[0,1]^2\cup\mathbb{Q}$ について考えてみる. この集合に対し位相的な境界を取ってしまうと $\partial([0,1]^2\cup\mathbb{Q}) = \mathbb{R}^2$ と全体空間になってしまうが, 測度 0 の集合を都合よく取り除くことで $\partial^*([0,1]^2\cup\mathbb{Q}) = \partial[0,1]^2$ のように幾何学的に意味のある部分のみを考えることができる. これが reduced boundary の考え方である. 汎関数 (5.1) の minimizer S^ε をとり[6], テストベクトル場 X に $X\cdot\vec{\nu}_{\Omega\times(0,\infty)} = 0$ を仮定して汎関数 (5.1) の第一変分を計算すると, $\vec{\mathbf{e}}_z = (0,\dots,0,1) \in \mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}$ として

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^\circ\times(0,\infty)} + a\int_{\partial\Omega\times(0,\infty)} &\mathrm{div}_{T_{(x,z)}} X\, d\mathcal{H}^{n+1}\lfloor_{\partial^* S^\varepsilon}\\ &= \int_{\Omega^\circ\times(0,\infty)} \frac{1}{\varepsilon} P_{T^\perp_{(x,z)}(\partial^* S^\varepsilon)}(\vec{\mathbf{e}}_z)\cdot X\, d\mathcal{H}^{n+1}\lfloor_{\partial^* S^\varepsilon}\end{aligned}$$

[4] 技術的な理由により, $a > 0$ となるように角度に制限を加えている. この場合でも, 曲面が囲む領域の「反対側」を見ることにより, 本質的には $a < 0$ の状況を表せている.

[5] もっと弱いクラスを初期値として取れる. 曲面積変化の連続性や曲面が囲む領域の体積変化の連続性などの性質も証明できる. この性質により, 前章で説明した Brakke flow 特有の曲面が突然消失する現象を防げる.

[6] Set of finite perimeter を考える理由の一つは, C^1 曲面と違いコンパクト性と下半連続性があるためである. これらにより, 変分法における直接法で表面積汎関数の minimizer を取ることができる.

が得られる. Minimizer S^ε に対し, $\mu^\varepsilon = \mathcal{H}^{n+1}\lfloor_{\Omega^\circ\times(0,\infty)\cap\partial^* S^\varepsilon}$ と $\nu^\varepsilon = \mathcal{H}^{n+1}\lfloor_{\partial\Omega\times(0,\infty)\cap\partial^* S^\varepsilon}$ とおくと, 組 $(\mu^\varepsilon, \nu^\varepsilon)$ は上記の計算により接触角構造を持つことがわかる. よって Euler–Lagrange 方程式として, $\partial^* S^\varepsilon$ の接触角付き平均曲率ベクトルを $\vec{H}^\varepsilon$ とおくと

$$\vec{H}^\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon} P_{T^\perp_{(x,z)}(\partial^* S^\varepsilon)}(\vec{\mathbf{e}}_z)$$

が得られる. 時間 $t \geq 0$ をとり, $\partial^* S^\varepsilon - t\vec{\mathbf{e}}_z/\varepsilon$ のように t でパラメータ付けた z 方向平行移動を考えると, 得られた式の右辺はまさに平行移動の速度ベクトルを表していることがわかる. すなわち, 曲面族 $\partial^* S^\varepsilon_t = \partial^* S^\varepsilon - t\vec{\mathbf{e}}_z/\varepsilon$ は平均曲率流になっている. 上記で定めた $(\mu^\varepsilon, \nu^\varepsilon)$ に対し, この平行移動を施したものを $(\mu^\varepsilon_t, \nu^\varepsilon_t)$ とおく. 平行移動した測度の組 $(\mu^\varepsilon_t, \nu^\varepsilon_t)$ について, 時間微分を計算することでこの組が接触角付き Brakke flow になっていることを確認できる.

2. 汎関数 (5.1) の重み関数 $\exp(-z/\varepsilon)$ は, z 方向に伸びれば伸びるほど小さい重みになっていくことを表している. すなわち $\varepsilon \to 0$ とすると, z 方向の重みも指数的に小さくなり, その結果 $\partial^* S^\varepsilon$ は z 方向に伸びたシリンダー状の図形 $\partial^* E \times (0,\infty)$ に近づいていく.

3. 平行移動 $\partial^* S^\varepsilon_t$ は平均曲率流であった. ここでもし接触角付き Brakke flow にコンパクト性があったとすれば, ε について部分列をとることで $\partial^* S^\varepsilon_t$ はある Brakke flow が存在して $\varepsilon \to 0$ の極限で収束することがいえる. 平行移動する前の $\partial^* S^\varepsilon$ はシリンダーに収束していくため, $\partial^* S^\varepsilon_t$ もまたシリンダー $\partial^* E_t \times \mathbb{R}$ に収束する. コンパクト性により収束先は Brakke flow であったので $\partial^* E_t \times \mathbb{R}$ も Brakke flow である. スライスをとることで, $\partial^* E_t$ も Brakke flow であることがわかり, これが求めたかったものである.

上記の議論において, 正当化が最も困難な部分はコンパクト性の証明である. Sobolev 関数とのアナロジーでこの点を説明しよう. Galerkin 法を例に挙げると, 近似法から導かれるエネルギー評価を行うことで近似列に対して

$$\int_0^T \int_\Omega |u^\varepsilon|^2 + |\nabla u^\varepsilon|^2 < \infty, \quad \int_0^T \|\partial_t u^\varepsilon\|^2_{H^{-1}} < \infty$$

といった評価を導出し, Sobolev 関数のコンパクト性を用いて近似列の収束先をとっていた. Brakke flow についても詳細は大幅に異なるものの, 第一変分はおおよそ面積測度に対する「微分」だと思えば,

$$\mu^\varepsilon_t(\phi) \leq C\|\phi\|_\infty, \quad \left| \int_\Omega \mathrm{div}_{T_x\mu^\varepsilon_t} X \, d\mu^\varepsilon_t \right| \leq C\|X\|_\infty, \quad \text{(Brakke flow の不等式)}$$

がそれぞれ Sobolev 関数の枠組みと対応する評価といえる. 実は上式第二項の第一変分の評価は, μ^ε_t が曲率をもつことと Brakke flow はアプリオリに曲率の L^2 ノルムが有界になることから自動的に導かれ, このことを利用して Brakke [Bra78] は (通常の)Brakke flow のコンパクト性を証明した[7]. 「微分」である第一変分の評価を行うとき, 接触角平均曲率ベクトルを表現している第一変分は, $\mu^\varepsilon_t + a\nu^\varepsilon_t$ に対して定義されているため,

$$\left| \int_\Omega \mathrm{div}_{T_x(\mu^\varepsilon_t + a\nu^\varepsilon_t)} X \, d(\mu^\varepsilon_t + a\nu^\varepsilon_t) \right| \leq C\|X\|_\infty$$

という, μ^ε_t と ν^ε_t を足したものである $\mu^\varepsilon_t + a\nu^\varepsilon_t$ に対してしか評価が得られないことが問題となる. しかしながら, 曲率を積分しているのは曲面測度 μ^ε_t のみであるため, コンパクト性を μ^ε_t に

[7] 明示的に主張が書かれているわけではなく, 構成法の証明のなかでコンパクト性にあたるものを証明している. 明示的なものは [I94] に書かれている.

適用できなければ不都合が生じる. すなわち $\|\nabla(u^\varepsilon + v^\varepsilon)\|_2$ の評価から $\|\nabla u^\varepsilon\|_2$ の評価を導く必要がある. 一般には $f + g \in W^{1,2}$ であっても $f \in W^{1,2}$ かつ $g \in W^{1,2}$ すら成立しないため, ここには何か工夫が必要になることは想像に難くない.

この問題に対して, 今回の構成では minimizer を用いているという事実をうまく使うことができる. 具体的には De Philippis–Maggi [DM15] によって証明された minimizer に対する正則性定理を援用することで, S^ε に対して次の事実を課してもよいことがわかる (本稿のために, 主張は非常にラフに書いている).

Theorem 5.1. *Minimizer* $\partial^* S^\varepsilon \cap \Omega^\circ \times (0,\infty)$ は境界まで込めて $C^{1,1/2}$ 曲面である. さらに, $\partial^* S^\varepsilon \cap \Omega^\circ \times (0,\infty)$ の曲面の意味での境界 $\gamma(\partial^* S^\varepsilon \cap \Omega^\circ \times (0,\infty))$ は領域の境界 $\partial\Omega$ と $\mathcal{H}^{n-1}$-*a.e.* $(x,z) \in \gamma(\partial^* S^\varepsilon \cap \Omega^\circ \times (0,\infty))$ で角度 θ で接している.

上記のような正則性定理があったとしても, 第一変分の評価を直接的に得ることはできない. なぜなら, 今回用いてる汎関数 (5.1) は $\exp(-z/\varepsilon)$ という重みを付けているため, 第一変分の評価をする際, 常に $1/\varepsilon$ がかかってしまい ε に対して一様な評価が出ないからである.

完全に μ_t^ε と ν_t^ε を Sobolev 関数と同一視してアイデアのみを解説する. 一つ目のアイデアは, $\|\nabla(\mu_t^\varepsilon + a\nu^\varepsilon)\|$ の評価は平均曲率ベクトル H^ε を絡めた形で得られるため, Brakke flow のアプリオリ評価を利用できることである. 曲率の評価そのものは重み関数の存在から ε に依存してしまうが, minimizer というだけでなく Brakke flow である事実を利用することで ε に依存しない評価に置き換えることができる. このことにより, $\|\nabla(\mu_t^\varepsilon + a\nu^\varepsilon)\|$ の評価を μ_t^ε と ν_t^ε それぞれに分解することさえ出来れば評価が完成しそうである. 二つ目のアイデアは, μ_t^ε と ν_t^ε が「交わる」部分は境界上のみであることから, μ_t^ε が接触角の構造を通常の意味で持つ事実を利用できるだろうということである. 接触角構造から, 境界上であれば

$$\nu_{\partial\Omega\times(0,\infty)} \cdot \nabla \mu_t^\varepsilon = \sin\theta$$

が成立する. 境界に対して接戦方向ではなく法方向に変分を取っているため, cos と sin の関係から上式に現れるのは sin である. 一方, 補助的な境界測度 ν_t^ε は完全に境界に張り付いているため

$$\nu_{\partial\Omega\times(0,\infty)} \cdot \nabla \nu_t^\varepsilon = 0$$

が成立する. よって, 境界上の勾配を境界の法方向成分のみに射影したものを $\nabla^\perp$ と書くと,

$$\nabla^\perp(\mu_t^\varepsilon + a\nu_t^\varepsilon) = \sin\theta \nabla \mu_t^\varepsilon$$

が得られ, $\sin\theta \neq 0$ に注意すれば μ_t^ε 単体の評価を $\mu_t^\varepsilon + a\nu_t^\varepsilon$ の評価により得ることができる. 以上の議論は全く形式的なものであるが, 実は修正可能 Radon 測度に対して正当化することができ, これによりコンパクト性のための第一変分の評価を得ることができる.

6 今後の展望

[Ta24] で接触角付き Brakke flow の存在定理を得ることができたわけであるが, その性質についてはほとんどなにも言えていない. 例えば, avoidance principle, Huisken's monotonicity formula, 消滅時刻の下界評価など, 通常の平均曲率流で知られていることが何も知られていない. 上記の性質たちや, Brakke の正則性定理を接触角条件下で行うことは (曲線の場合であっても) 非自明であり, 接触角構造をより深く理解する上で重要な問題となるだろう.

接触角付きに限らない Brakke flow の研究全般として, 解析学的手法からどのようなことがわかるか, という疑問が多く残されていることが挙げられる. 平均曲率流は微分幾何学の手法をベースにした研究は膨大な量にのぼる. 一方で, Allen–Cahn 方程式やレベルセット解など解析

学からのアプローチはよく知られているにも関わらず, 微分幾何学的研究と比べるとかなり少なく, Allen–Cahn 方程式の性質を平均曲率流の性質を逆輸入することで証明できるか? など未知なる鉱脈がまだ眠っているのではないかと考えている. 近年の研究がまとめられたサーベイとして [Stu23], Brakke flow の入門書として [Ton19] がある. もし興味を持っていただいた読者がいたら, ぜひ読んでいただきたい.

参考文献

[Bra78] K. Brakke, *The Motion of a Surface by its Mean Curvature*, Math. Notes 20, Princeton University, Princeton, 1978.

[DM15] G. De Philippis and F. Maggi, *Regularity of Free Boundaries in Anisotropic Capillarity Problems and the Validity of Young's Law*, Arch. Ration. Mech. Anal., 216(2):473–568, (2015).

[EG24] T. Eto and Y. Giga, *A Convergence Result for a Minimizing Movement Scheme for Mean Curvature Flow with Prescribed Contact Angle in a Curved Domain*, arXic preprint, arXiv:2402.16180, (2024).

[HL24] S. Hensel and T. Laux, *BV Solutions for Mean Curvature Flow with Constant Contact Angle: Allen–Cahn Approximation and Weak-Strong Uniqueness*, Indiana Univ. Math. J., 73(1):111–148, (2024).

[I94] T. Ilmanen, *Elliptic Regularization and Partial Regularity for Motion by Mean Curvature*, Mem. Am. Math. Soc., 108(520), 90pp, (1994).

[IS04] H. Ishii and M-H. Sato, *Nonlinear Oblique Derivative Problems for Singular Degenerate Parabolic Equations on a General Domain*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., 57(7-8):1077–1098, (2004).

[MTTW24] K. Marshall-Stevens, M. Takada, Y. Tonegawa and M. Workman, *Gradient Flow of Phase Transitions with Fixed Contact Angle*, arXiv preprint, arXiv:2411.17979, (2024).

[Men13] U. Menne, *Second Order Rectifiability of Integral Varifolds of Locally Bounded First Variation*, J. Geom. Anal., 23(2):709–763, (2013).

[Mi16] T. Miura, *An Example of a Mean-Convex Mean Curvature Flow Developing Infinitely Many Singular Epochs*, J. Geom. Anal., 26(4):3019–3026, (2016).

[KT17] T. Kagaya and Y. Tonegawa, *A Fixed Contact Angle Condition for Varifolds*, Hiroshima Math. J., 47(2):139–153, (2017).

[Stu23] S. Stuvard, *New Advances on the Existence and Regularity of Brakke's Mean Curvature Flow*, arXiv priprint, arXiv:2311.05370, 2023.

[Ta24] K. Tashiro, *Existence of Weak Mean Curvature Flow with Prescribed Contact Angle via Elliptic Regularization*, arXiv preprint, arXiv:2410.12283, (2024).

[Ton19] Y. Tonegawa, *Brakke's Mean Curvature Flow: An Introduction*, Springer Singapore, 2019.

Large time behavior of exponential surface diffusion flows on $\mathbb{R}$

東京大学　大学院数理科学研究科　数理科学専攻
片山　翔 (Sho KATAYAMA) *

概要

本講演では, 一般化された表面拡散流 $V = \Delta_{\Gamma_t} f(-\kappa)$ を取り扱う. 表面拡散流は $\mathbb{R}^N$ 内の $N-1$ 次元曲面 Γ_t の時間発展を記述する方程式であり, V は Γ_t が法線方向に移動する速度, κ は Γ_t の平均曲率, Δ_{Γ_t} は Γ_t 上の Laplace–Beltrami 作用素である. また, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はなめらかな狭義単調増加関数である. 代表的な例は指数型表面拡散流 $V = \Delta_{\Gamma_t} \exp(-\kappa)$ であり, これは Mullins [6, 7] が Gibbs–Thomson 則と呼ばれるエネルギー法則に基づいて得た結晶表面の時間発展のモデルである.

本講演では, $N = 2$ で Γ_t が $\mathbb{R}$ 上の関数のグラフである場合に, 表面拡散流 $V = \Delta_{\Gamma_t} f(-\kappa)$ の解が時間遠方で $V = -f'(0)\Delta_{\Gamma_t}\kappa$ の自己相似解と呼ばれる特殊な解に漸近することを示す. この結果は, Mullins が f を $\kappa = 0$ のまわりで線形化して得た結果を正当化する. この研究は儀我美一 (東京大) と Michael Gößwein(Duisburg-Essen 大) との共同研究に基づく.

1　導入

本講演では, $\mathbb{R}^N$ 内の $N-1$ 次元曲面の族 $\{\Gamma_t\}_{t\geq 0}$ に関する一般化された表面拡散流

$$V = \Delta_{\Gamma_t} f(-\kappa) \quad \text{on} \quad \Gamma_t,\ t > 0, \tag{1.1}$$

を取り扱う. ここで, V は Γ_t が法線方向に移動する速度, κ は Γ_t の平均曲率, Δ_{Γ_t} は Γ_t 上の Laplace–Beltrami 作用素である. また, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はなめらかな狭義単調増加関数であり, $f'(0) = 1$ をみたすとする. 方程式 (1.1) の典型的な例は $f(r) = e^r$ とした方程式

$$V = \Delta_{\Gamma_t} \exp(-\kappa) \quad \text{on} \quad \Gamma_t,\ t > 0, \tag{1.2}$$

であり, 指数型表面拡散流と呼ばれる. なお, 通常の文脈では, 表面拡散流は方程式

$$V = -\Delta_{\Gamma_t}\kappa \quad \text{on} \quad \Gamma_t,\ t > 0, \tag{1.3}$$

を指す. 区別のため, 以降では (1.3) を「従来の表面拡散流」と呼称する.

* E-mail:katayama-sho572@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

1.1 モデルの導出

指数型表面拡散流は, Mullins [6,7] によって与えられた, 緩和過程と呼ばれる結晶表面の時間発展のモデルである. 緩和過程は, 結晶表面を原子が流動することによって引き起こされる時間発展の仮定であり, 低温の金 (Au) の結晶などがこの過程に従うことが知られている.

Mullins は, 結晶表面 Γ_t の法方向の移動速度 V はそこへの原子の単位時間あたり流入量に比例すると仮定した. この仮定は

$$V = -\alpha \operatorname{div}_{\Gamma_t} j$$

と表される. ここで, j は結晶表面の原子の流量であり, $\alpha > 0$ は定数である. また, j は Fick 則

$$j = -M\nabla_{\Gamma_t}\rho$$

に従う. ここで, ρ は結晶表面の原子の密度分布であり, $M > 0$ は定数である.

Mullins はさらに, ρ は Gibbs–Thomson 則

$$\log\frac{\rho}{\rho_0} = \beta\frac{\delta E}{\delta\Gamma}$$

を仮定した. これは, 密度分布の対数が表面エネルギー E の Γ による変分 $\delta E/\delta\Gamma$ に比例するというエネルギー法則であり, $\rho_0 > 0$ は定数, β は温度 θ と Boltzmann 定数 k を用いて $\beta = (\theta k)^{-1}$ と表される定数である. とくに, 表面エネルギー E が面積であるとすると, $\delta E/\delta\Gamma$ は

$$\frac{\delta E}{\delta\Gamma} = -\kappa$$

と表される.

これらをあわせると, Γ_t は指数型表面拡散流

$$\Gamma_t = M\alpha\Delta_{\Gamma_t}\exp(-\beta\kappa)$$

に従うことがわかる. 適当にスケールを変換すれば (1.2) を得る.

1.2 $\mathbb{R}$ 上の関数のグラフに関する表面拡散流

以降では, それ以外を述べない限り, $N = 2$ であるとする. このとき, Γ_t は曲線であり, Δ_{Γ_t} は弧長パラメータに関する 2 階微分 ∂_s^2 となる. さらに, Γ_t は $\mathbb{R}$ 上の関数 $u(\cdot,t)$ のグラフとして表されるとする. このとき, V, ∂_s, κ はそれぞれ

$$V = \frac{u_t}{(1+u_x^2)^{1/2}},\quad \partial_s = \frac{\partial_x}{(1+u_x^2)^{1/2}},\quad \kappa = \frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}},$$

と表される. これらを (1.1) に当てはめると, $\mathbb{R}$ 上の関数のグラフに関する表面拡散流

$$u_t = \left(\frac{1}{(1+u_x^2)^{1/2}}\left(f\left(-\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}}\right)\right)_x\right)_x \tag{1.4}$$

が得られる. 従来の表面拡散流は

$$u_t = -\left(\frac{1}{(1+u_x^2)^{1/2}}\left(\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}}\right)_x\right)_x \tag{1.5}$$

となる.

Mullins は解の小ささ

$$|u_x|, |u_{xx}| \ll 1$$

を仮定した上で, (1.4) の f を線形化して (1.5) に書き直し, さらにそれを線形化することで, (1.4) が

$$u_t = -\partial_x^4 u \tag{1.6}$$

で近似されることを示した. (1.6) は重調和熱方程式, あるいは Mullins 方程式と呼ばれる.

1.3 自己相似解

従来の表面拡散流 (1.5) および Mullins 方程式 (1.6) は, 変換

$$u \mapsto u^\sigma(x,t) := \sigma^{1/4} u(\sigma^{-1/4}x, \sigma^{-1}t),\ \sigma > 0, \tag{1.7}$$

によって不変である. (すなわち, u がこれらの方程式の解であれば, u^σ も解である.) これらの方程式の解 U が変換 (1.7) によって不変であるとき, U を自己相似解という.[*1]Mullins は, 方程式 (1.6) を半直線 $(0,\infty)$ 上で境界条件

$$u_x = m, \quad u_{xxx} = 0, \tag{1.8}$$

のもとで考え, 自己相似解の級数表示を計算した. (ただし, 収束は議論されていない.) Martin [5] は, 別の方法で同じ自己相似解の積分表示を得たうえで, それが遠方で指数的に 0 に収束することを示した.

また, 表面拡散流 (1.5) に関しては, Koch–Lamm[4] が $\mathbb{R}$ 上での非自明な自己相似解の存在を示している. とくに, 十分小さい $\varepsilon > 0$ について, 表面拡散流 (1.5) の自己相似解 U_ε であって

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{U_\varepsilon(x,1)}{|x|} = \varepsilon$$

となるものの存在が示された. これは, 変換 (1.7) について不変かつ初期値として $\varepsilon|x|$, $0 < \varepsilon \ll 1$, をとれるような枠組みで (1.5) に関する初期値問題の解の一意的な存在を示すという方法で証明された. 実際, $\varepsilon|x|$ は変換 (1.7) について不変であるため, 解 U_ε の一意的な存在が示されると, u_ε^σ も同じ初期値問題の解となり, 一意性から $U_\varepsilon^\sigma = U_\varepsilon$ となる. また, 同様の方法により, Asai–Giga[1] は $(0,\infty)$ 上で境界条件 (1.8) をみたす自己相似解の存在を示している.

[*1] この方程式に限らず, 自己相似解は微分方程式の解挙動を調べる手がかりとしてしばしば重要とされる.

1.4 従来の表面拡散流の時間大域挙動

表面拡散流 (1.5) の自己相似解は, より一般の表面拡散流の解の時間大域挙動を調べる上で重要な役割を果たす. たとえば, Du–Yip[2] では, 初期値 u_0 が

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|(u_0)_x(x)| \ll 1, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}}|u_0(x)-\varepsilon|x||<\infty,$$

をみたすとき, この初期値に関する (1.5) の初期値問題の解 u について,

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in t^{1/4}K} t^{-1/4}|u(x,t)-U_\varepsilon(x,t)|=0 \tag{1.9}$$

が任意のコンパクト集合 $K\subset\mathbb{R}$ について成り立つことが示された. この証明は, 解 u が減衰評価

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\sup_{t>0} t^{k/4+\ell}|\partial_x^{k+1}\partial_t^\ell u(x,t)|\le C_{k,\ell},\ k,\ell\ge 0, \tag{1.10}$$

をみたすことを用いる. 実際, 評価 (1.10) が示されると, 同様の評価が変換 (1.7) を施された関数 u^σ についても成り立ち, Ascoli–Arzelá の定理により u^σ は部分列の意味である関数 U に $C(\mathbb{R}\times[0,\infty))\cap C^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ の位相で収束する.[*2] 極限関数 U は表面拡散流 (1.5) の解であり, また $U(x,0)=\varepsilon|x|$ をみたすので, U は自己相似解 U_ε と一致する. また, 極限関数の一意性から, u^σ は部分列をとらずに U_ε に $C(\mathbb{R}\times[0,\infty))\cap C^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ の位相で収束することもわかる. u^σ を u に戻せば (1.9) が示される.

また, [2] は追加の仮定

$$u_0(x)-\varepsilon|x|=O(|x|^{-\delta}),\ \delta>0,$$

のもとで,

$$\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}} t^{-1/4}|u(x,t)-U_\varepsilon(x,t)|=0$$

となることも示している.

1.5 (1.4) の時間大域挙動の観察

一般化された表面拡散流 (1.4) は, 勾配非線形性 f の影響により, 変換 (1.7) に関する不変性が損なわれている. 実際, u が (1.4) の解であるとすると, u^σ がみたすべき方程式は

$$u_t^\sigma=\left(\frac{1}{(1+(u_x^\sigma)^2)^{1/2}}\left(\sigma^{1/4}f\left(-\frac{\sigma^{-1/4}u_{xx}^\sigma}{(1+(u_x^\sigma)^2)^{3/2}}\right)\right)_x\right)_x$$

となってしまう. 一方で, u^σ が $\sigma\to\infty$ での極限関数 U をもつとすると,

$$U_t=-f'(0)\left(\frac{1}{(1+U_x^2)^{1/2}}\left(\frac{U_{xx}}{(1+U_x^2)^{3/2}}\right)_x\right)_x$$

[*2] すなわち, u^σ のある部分列 u^{σ_n}, $\sigma_n\to\infty$, について, u^{σ_n} 任意のコンパクト集合 $K\subset\mathbb{R}\times[0,\infty)$ 上で U に一様収束し, また $\partial_x^k\partial_t^\ell u^{\sigma_n}$ は任意のコンパクト集合 $K\subset\mathbb{R}\times(0,\infty)$ 上で $\partial_x^k\partial_t^\ell U$ に一様収束する.

となり, U は従来の表面拡散流の解となる. さらに, 初期値 u_0 が条件

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{u_0(x)}{|x|} = \varepsilon$$

をみたすとすると, U は自己相似解 U_ε となることがわかる. 従って, 前節と同様の議論によって, 減衰評価 (1.10) を得られれば u の時間大域挙動を知ることができる.

一方で, 問題 (1.4) の減衰評価には, 勾配非線形性 f に起因する特有の困難が伴う. とくに, 方程式 (1.4) を展開すると $f'(-\kappa)$, $f''(-\kappa)$ が現れるが, これらがどのように解の評価に影響を及ぼすかが非自明であり, 慎重な取り扱いを要する. また, この際に曲率 κ を一様に評価できている必要があるが, 従来の表面拡散流の解析に用いられていたノルムは κ を各点的に制御できない. 従って, ノルムを選ぶ段階からこの点を考慮した上で慎重に選ぶ必要がある. これらの要因によって, 指数型表面拡散流を含む一般化された表面拡散流に関する研究は進んでおらず, とくに時間大域挙動に関する結果は解に小ささを仮定した上でも知られていない.

2 主定理

前節を踏まえ, 方程式 (1.4) の解の減衰評価および時間大域挙動に関する結果を述べる. なお, 方程式 (1.4) の可解性について知られている結果は存在しないため, まず可解性を議論する必要があるが, ここでは省略する.

定理 2.1 ([3])**.** 次をみたす $\varepsilon_0 > 0$ が存在する: $u_0 \in C^5(\mathbb{R})$ が $\sup_{\mathbb{R}} (|(u_0)_x| + |(u_0)_{xx}|) =: \varepsilon_1 < \varepsilon_0$ をみたすとすると, 問題

$$u_t = \left(\frac{1}{(1+u_x^2)^{1/2}} \left(f\left(-\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}} \right) \right)_x \right)_x \text{ in } \mathbb{R}\times(0,\infty),\ u(\cdot,0) = u_0 \text{ in } \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

の解 u は評価

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{t>0} |u_x(x,t)| &\le C\varepsilon_1, \\ \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{t>0} |\partial_x^k \partial_t^\ell u(x,t)| &\le C_{k,\ell}\varepsilon_1,\ k,\ell \ge 0, (k,\ell) \notin \{(0,0),(1,0)\}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

をみたす.

定理 2.2 ([3])**.** 定理 2.1の仮定に加え,

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{u_0(x)}{|x|} = \varepsilon$$

を仮定すると, 問題 (2.1) の解 u は

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in t^{1/4}K} t^{-1/4} |u(x,t) - U_\varepsilon(x,t)| = 0 \tag{2.3}$$

を任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}$ についてみたす. ここで, U_ε は従来の表面拡散流の自己相似解であって $\lim_{|x|\to\infty} U_\varepsilon(x,1)/|x| = \varepsilon$ をみたすものである.

なお, 前述の通り, 定理 2.2は定理 2.1が示されれば [2] と同様にして示すことができる.

2.1 定理 2.1の証明の戦略

定理 2.1は, 方程式 (1.4) を Mullins 方程式 (1.6) からの摂動と見做して評価することにより証明する. 方程式 (1.4) は

$$u_t = (-(1-\alpha)u_{xxx} + F)_x,$$
$$\alpha := 1 - \frac{1}{(1+u_x^2)^2} f'\left(-\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}}\right), \quad F := \frac{3u_x u_{xx}^2}{(1+u_x^2)^3} f'\left(-\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^{3/2}}\right), \tag{2.4}$$

と書き直される. さらに, $v := u_x$ とおき, 方程式の両辺を x で微分すると

$$v_t = (-(1-\alpha)v_{xx} + F)_{xx}$$

となる. この方程式の評価を Mullins 方程式の評価から作ることによって定理 2.1を証明する. このためには, 次の 2 点を両立するノルムを使う必要がある[*3]:

1. $v_t = ((1-\alpha)v_{xx} + F)_{xx}$ の形の線形方程式に対して有効な評価ができる;
2. 1. の評価を (2.4) の α, F について使える程度の α, F の評価が与えられる.

2.2 スケールされた Hölder ノルム

前節の 1.,2. をクリアするノルムとして, 次のスケールされた Hölder ノルムを用いる.

定義 2.1. $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mu \in (0,1)$, $-\infty < a < b < +\infty$ に対し, $f : \mathbb{R} \times (a,b) \to \mathbb{R}$ に対するスケールされた Hölder ノルム $\|f\|_{BC^{k+\mu,(k+\mu)/4}(\mathbb{R}\times(a,b))}$ を

$$\begin{aligned}\|f\|'_{BC^{k+\mu,(k+\mu)/4}(\mathbb{R}\times(a,b))} := &\sum_{\ell+4m\leq k} (b-a)^{\ell/4+m} \sup_{x\in\mathbb{R},t\in(a,b)} |\partial_x^\ell \partial_t^m f| \\ &+ \sum_{\ell+4m=k} (b-a)^{(k+\mu)/4} \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R},x\neq y,\\ t\in(a,b)}} \frac{|\partial_x^\ell \partial_t^m f(x,t) - \partial_x^\ell \partial_t^m f(y,t)|}{|x-y|^\mu} \\ &+ \sum_{k-3\leq \ell+4m\leq k} (b-a)^{(k+\mu)/4} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R},\\ s,t\in(a,b),s\neq t}} \frac{|\partial_x^\ell \partial_t^m f(x,s) - \partial_x^\ell \partial_t^m f(x,t)|}{|s-t|^{(k+\mu-\ell-4m)/4}}\end{aligned}$$

によって定義する.

定義 2.2. $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mu \in (0,1)$, $T > 0$ に対し, $f : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ に対するノルム $\|f\|_{Z_T^{k+\mu}}$ を

$$\|f\|_{Z_T^{k+\mu}} := \sup_{t\in(0,T)} \|f\|'_{BC^{k+\mu,(k+\mu)/4}(\mathbb{R}\times(t/2,t))} + \sup_{t\in(0,T)} (1+t)^{-1/4} \|f_x\|'_{BC^{k-1+\mu,(k-1+\mu)/4}(\mathbb{R}\times(t/2,t))}$$

により定義する.

すると, これらのノルムに関して, 次の評価が得られる.

[*3] これらを両立できるようなノルムおよび線形方程式の設定を与えたことが本研究の最も重要な新規性であり, なおかつ講演者の貢献である.

補題 2.1. $\delta, \varepsilon > 0$ とし, $\alpha, F : \mathbb{R} \times (0,T) \to \mathbb{R}$, $v_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は

$$\sup_{t\in(0,T)} \|\alpha\|'_{BC^{2+\mu,(2+\mu)/4}(\mathbb{R}\times(t/2,t))} \le \delta,$$
$$\sup_{t\in(0,T)} t^{-3/4}(1+t)^{-1/4}\|F\|'_{BC^{2+\mu,(2+\mu)/4}(\mathbb{R}\times(t/2,t))} \le \varepsilon,$$
$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(|v(x)| + |v_x(x)|) \le \varepsilon,$$

をみたすとする. δ が十分小さいとすると, 線形方程式

$$v_t = (-(1-\alpha)v_{xx} + F)_{xx} \text{ in } \mathbb{R}\times(0,T),\ v(\cdot,0) = v_0 \text{ in } \mathbb{R},$$

の解 v は

$$\|v\|_{Z_T^{4+\mu}} \le C\varepsilon$$

をみたす.

この評価は, 放物 Schauder 評価と呼ばれる古典的な評価 (たとえば [8]) を用いて示すことができる. また, 次の評価を初等的に示すことができる.

補題 2.2. $v : \mathbb{R}\times(0,\infty) \to \mathbb{R}$ が $\|v\|_{Z_T^{4+\mu}} \le 1$ をみたすとすると,

$$\alpha := 1 - \frac{1}{(1+v^2)^2} f'\left(-\frac{v_x}{(1+v^2)}\right),\ F := \frac{3vv_x^2}{(1+v^2)^3} f'\left(-\frac{v_x}{(1+v^2)^{3/2}}\right),$$

により定義される関数 α, F は

$$\sup_{t>0} \|\alpha\|'_{BC^{2+\mu,(2+\mu)/4}(\mathbb{R}\times(t/2,t))} \le C\|v\|_{Z_T^{3+\mu}},$$
$$\sup_{t>0} t^{-3/4}(1+t)^{-1/4}\|F\|'_{BC^{2+\mu,(2+\mu)/4}(\mathbb{R}\times(0,\infty))} \le C\|v\|^3_{Z_T^{3+\mu}},$$

をみたす.

これらを組み合わせることにより, 次の非線形評価を得ることができる.

補題 2.3. 次をみたす $\delta_0 > 0$ が存在する: u_0 が $\sup_{\mathbb{R}}(|(u_0)_x| + |(u_0)_{xx}|) =: \varepsilon_1 < \infty$ をみたすとし, u を問題 (2.1) の解とする. $v := u_x$ とすると

$$\|v\|_{Z_T^{3+\mu}} \le \delta_0 \implies \|v\|_{Z_T^{4+\mu}} \le C\varepsilon_1. \tag{2.5}$$

2.3 定理 2.1の証明

ε_1 が十分小さく, 評価 (2.5) で $C\varepsilon_1 < \delta_0/2$ となるとする. まず, 十分小さい $\tau > 0$ について, $\|v\|_{Z_\tau^{4+\mu}} < \delta_0/2$ となる. (これは放物 Schauder 評価によって証明されるが, ここでは省略する.) このことから,

$$T^* := \sup\left\{t > 0 : \|v\|_{Z^{4+\mu}} < \frac{\delta_0}{2}\right\} > 0$$

である．ここで $T^* < \infty$ を仮定すると, T^* に十分近い $T > T^*$ について $\|v\|_{Z_T^{3+\mu}} < \delta_0$ である．(2.5) と ε_1 の選び方から $\|v\|_{Z_T^{4+\mu}} < \delta_0/2$ となり, これは $T > T^*$ に矛盾する．従って $T^* = \infty$ であり, ノルムの定義から $k + 4\ell \leq 5$ かつ $k \neq 0$ の場合に (2.1) が示される．

$k + 4\ell > 5$ かつ $k \neq 0$ の場合はさらなる放物 Schauder 評価の適用によって示される．$k = 0$ の場合は $k \neq 0$ の場合と $u_t = (-(1-\alpha)v_{xx} + F)_x$ から示される．

参考文献

[1] T. Asai and Y. Giga, *On self-similar solutions to the surface diffusion flow equations with contact angle boundary conditions*, Interfaces Free Bound. **16**, 539–573.

[2] H. Du and N. K. Yip, *Stability of self-similar solutions to geometric flows*, Interfaces Free Bound. **25** (2023), 155–191.

[3] Y. Giga, M. Göeßwein, and S. Katayama, *Large time behavior of exponential surface diffusion flows on* $\mathbb{R}$, arXiv: 2411.17175.

[4] H. Koch and T. Lamm, *Geometric flows with rough initial data*, Asian J. Math. **16** (2012), no. 2, 209–235.

[5] P. A. Martin, *Thermal grooving by surface diffusion: Mullins revisited and extended to multiple grooves*, Quart. Appl. Math. **67** (2009), 125–136.

[6] W. W. Mullins, *Two-dimensional motion of idealized grain boundaries*, J. Appl. Phys. **27** (1956), 900–904.

[7] ———, *Theory of thermal grooving*, J. Appl. Phys. **28** (1957), 333–339.

[8] V. A. Solonnikov, *On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form*, Trudy Mat. Inst. Steklov. **83** (1965), 3–163 (Russian).

分布型時間遅れをもつ バーガーズ方程式の半群理論を用いた研究

お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科 理学専攻数学コース
/ 理化学研究所 革新知能統合研究センター 数理科学チーム

小川実里 (Misato OGAWA) *

概要

バーガーズ方程式は, 交通流の数理モデルとして知られる. また, バーガーズ方程式に遅延項を導入することで, 運転手が周囲の混雑状況から判断し行動するまでの時間遅延を考慮した数理モデルとできる. 本講演では, そうしたバーガーズ方程式と交通流の数理モデルとの対応と, 分布型の遅延項をもつバーガーズ方程式の時間大域解の存在と一意性, 減衰評価について, 半群理論を用いて得られた結果を紹介する.

1 導入

本講演は, 久保隆徹先生 (お茶の水女子大学) との共同研究に基づく.

交通流の数理モデルとして，以下のバーガーズ方程式がよく知られている：

$$\partial_t \rho - \nu \partial_x^2 \rho + V_m \partial_x \left\{ \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right) \right\} = 0. \tag{B}$$

ここで，$x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ とし，$\rho = \rho(t, x)$ は車の密度（未知関数）, ν は拡散係数, V_m は $\rho \to 0$ のときの最大速度，ρ_m は最大密度を表し，ν, V_m, ρ_m はすべて正定数である.

この (B) は, 密度 ρ と流量 q に関する「交通流の保存則」$\partial_t \rho + \partial_x q = 0$ に,

$$q = \rho v, \quad v = V_m \left(1 - \frac{\rho}{\rho_m} \right) - \frac{\nu}{\rho} \partial_x \rho$$

を代入することで得られる．上の第 1 式は流量と密度，速度の関係を表すものであり，第 2 式の 1 項目 $V_m(1 - \rho/\rho_m)$ は, 空いている状況（ρ が 0 に近い場合）では車は最高速度 V_m に近い速度を出すことができ，逆に, 混んでいる状況（ρ が ρ_m に近い場合）では車はほとんど速度が出せないことを意味している．また，第 2 式の 2 項目は, 自分の車よりも前が混んでいる状況（$= \partial_x \rho > 0$ の場合）にはスピードを落とし，前が空いている状況（$= \partial_x \rho < 0$ の場合）にはスピードを上げることを意味している.

この数理モデル (B) を導出するための v と ρ の関係式をみると, 密度 ρ が変化すれば同時に速度 v も変化することを意味しており，運転手は周囲の混雑状況から瞬時に判断し, 車の速度を変えること

* E-mail:g2340603@edu.cc.ocha.ac.jp

を意味している．一方, 現実においては, 運転手が混雑状況を把握してから車の速度を調整するまでに時間遅れが伴う．そのことを考慮し, 固定された遅れパラメータ $\tau > 0$ に対し, τ だけ過去の密度 $\rho_\tau = \rho(t-\tau)$ から決まる速度：

$$v(t,x) = V_m\left(1 - \frac{\rho_\tau}{\rho_m}\right) - \frac{\nu}{\rho}\partial_x\rho$$

を導入すれば, 先と同様に以下のバーガーズ方程式を得る:

$$\partial_t\rho - \nu\partial_x^2\rho + V_m\partial_x\left\{\rho\left(1 - \frac{\rho_\tau}{\rho_m}\right)\right\} = 0.$$

この速度の項をさらに一般化して，Kubo-Ueda[1] では

$$\begin{cases} \partial_t\rho - \nu\partial_x^2\rho + \partial_x(\rho V(\rho_\tau)) = 0, & (t > 0,\ x \in \mathbb{R}), \\ \rho(\theta, x) = \rho_0(\theta, x) & (-\tau \le \theta \le 0,\ x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

の初期履歴問題が考察されている．ただし, $V(\rho)$ は ρ に関して C^1 級関数, $\rho_0(\theta, x)$ は $-\tau \le \theta \le 0$ を満たす θ に対して与えられた関数である．[1] では，時間局所解とアプリオリ評価を組み合わせることで，ρ と τ がある関係を満たす場合において，時間大域解の一意存在性定理が証明されている．

本講演では, τ だけ過去から現在までの密度分布に依存する速度を導入して得られるバーガーズ方程式を考える [2]：

$$\begin{cases} \partial_t\rho - \nu\partial_x^2\rho + \partial_x\left\{\rho\left(1 - \displaystyle\int_{t-\tau}^{t} f(t-s)\rho(s)\ ds\right)\right\} = 0, & (t > 0, x \in \mathbb{R}), \\ \rho(\theta, x) = \rho_0(\theta, x), & (-\tau \le \theta \le 0, x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

ただし, f は $\left(\displaystyle\int_0^\tau |f(t)|^2\ dt\right)^{1/2} =: M_f < \infty$ を満たす重み関数, また, $\rho_0(\theta, x)$ は $-\tau \le \theta \le 0$ を満たす θ に対して与えられた関数である．この問題に対しては，Kubo-Ueda[1] と同様にして，[2] において ρ と τ がある関係を満たす場合において，時間大域解の一意存在性定理が示されている．本発表では，半群理論を用いて時間大域解の一意存在定理を導くことを目標として上の問題の考察を行った．

考える問題の第 1 式には $\rho(t)$ 以外に，τ だけ過去から現在までの密度にも依存しているため，そのままでは半群理論は適用しづらい．そこで，補助関数

$$z(t, \theta, x) := \rho(t + \theta, x)$$

を用意し, 以下のバーガーズ方程式を得る：

$$\begin{cases} \partial_t\rho - \nu\partial_x^2\rho + \partial_x\left\{\rho\left(1 - \displaystyle\int_{-\tau}^{0} f(-\theta)z(t,\theta)\ d\theta\right)\right\} = 0, & (t > 0,\ x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t z = \partial_\theta z \quad t > 0, & (-\tau \le \theta \le 0,\ x \in \mathbb{R}), \\ \rho(\theta, x) = \rho_0(\theta, x), & (-\tau \le \theta \le 0,\ x \in \mathbb{R}). \end{cases} \tag{p}$$

ここで, 以下に注意する：

$$\int_{t-\tau}^{t} f(t-s)\rho(s)\ ds = \int_0^\tau f(r)\rho(r-\tau)\ dr = \int_0^\tau f(r)z(t,-r)\ dr = \int_{-\tau}^{0} f(-\theta)z(t,\theta)\ d\theta.$$

変数変換により (p) は以下の方程式に帰着できる：

$$\begin{cases} \partial_t \rho - \nu \partial_x^2 \rho + \partial_x \left\{ \rho \displaystyle\int_{-\tau}^{0} f(-\theta) z(t,\theta)\, d\theta \right\} = 0, & (t>0,\ x \in \mathbb{R}), \\ \partial_t z = \partial_\theta z, & (\tau>0,\ -\tau \le \theta \le 0,\ x \in \mathbb{R}), \\ \rho(\theta, x) = \rho_0(\theta, x), & (-\tau \le \theta \le 0,\ x \in \mathbb{R}). \end{cases} \tag{P}$$

さらに, [3] から, (P) に対応する以下の積分方程式が導出される：

$$\begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix} = \mathscr{T}_0(t) \begin{pmatrix} \rho(\tau) \\ z(\tau,\theta) \end{pmatrix} - \int_\tau^t \mathscr{T}_0(t-s) \begin{pmatrix} \partial_x g(s) \\ 0 \end{pmatrix} ds. \tag{IE}$$

ただし, 記号簡単のため，$g(s) = \rho \displaystyle\int_{-\tau}^{0} f(-\theta) z(t,\theta)\, d\theta$ とおき，また，半群 $\mathscr{T}_0(t)$ は以下で与えられるものである：

$$\mathscr{T}_0(t) = \begin{pmatrix} S(t) & 0 \\ S_t & T_0(t) \end{pmatrix}.$$

ただし, $S(t)$ は $-\nu\partial_x^2$ によって生成される半群, $S_t : H^1$ から $C([-\tau,0] : H^1)$ への作用素であり,

$$(S_t x)(\theta) = \begin{cases} S(t+\theta)x & (t+\theta>0), \\ 0 & (t+\theta \le 0) \end{cases}$$

で与えられる．また，$T_0(t) : C([-\tau,0] : H^1)$ 上のべき零左シフト半群, すなわち,

$$T_0(t) z(0,\theta) = \begin{cases} z(0, t+\theta) & (t+\theta \le 0), \\ 0 & (t+\theta>0) \end{cases}$$

で与えられる[*1].

2 主定理

本発表では，主定理として，半群理論を用いて (IE) に対して, 次の時間大域解の存在定理を証明することができたことを紹介する．

定理 2.1 (時間大域解の存在定理)**.** $0 \le \tau \le 1/2$ とする．このとき，次を満たす（十分小さい）正定数 σ が存在する．もし, $\rho_0(\theta) \in C([-\tau,0] : H^1)$ が $\rho_0(0) \in L^1$ であり,

$$\|\rho_0(0)\|_{L^1} + \sup_{-\tau \le \theta \le 0} \|\rho_0(\theta)\|_{H^1} \le \sigma$$

を満たすとき, (IE) に対してある一意解 $\rho(t)$ と $z(t,\theta)$ が存在して,

$$\rho(t) \in C([-\tau,\infty) : H^1),\ z(t,\theta) \in C([0,\infty) \times [-\tau,0] : H^1)$$

[*1] $u \in H^1$ であるとは $u \in L^2$ かつ $\partial_x u \in L^2$ を満たすことである．また，$\|u\|_{H^1} = \|u\|_{L^2} + \|\partial_x u\|_{L^2}$ で H^1 のノルムを定める．

と次の不等式を満たす：

$$\sup_{t\geq-\tau}\left\{(1+t)^{\frac{1}{4}}\|\rho(t)\|_{L^2}+(1+t)^{\frac{3}{4}}\|\partial_x\rho(t)\|_{L^2}\right\}$$
$$+\sup_{t\geq0}\left\{\sup_{-\tau\leq\theta\leq0}\left\{(1+t+\theta)^{\frac{1}{4}}\|z(t,\theta)\|_{L^2}+(1+t+\theta)^{\frac{3}{4}}\|\partial_x z(t,\theta)\|_{L^2}\right\}\right\}\leq 2C_0\sigma.$$

ただし，C_0 は (3.1) で与えられる正定数である．

3　主定理の証明の概略

縮小写像の定理を用いて主定理を証明するために，写像と基盤空間を準備する．写像は，積分方程式 (IE) の右辺と定める，すなわち，

$$\Phi\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}(t)=\begin{pmatrix}S(t)\rho_0(0)-\displaystyle\int_0^t S(t-s)\partial_x\{\rho(s)V(z)(s)\}\,ds\\ S_t\rho_0(0)+T_0(t)z(0,\theta)-\displaystyle\int_0^t S_{t-s}\left[\partial_x\{\rho(s)V(z)(s)\}\right]\,ds\end{pmatrix}.$$

と定める．また，以下のように基盤空間 B と B_σ を用意する．

$$B:=\left\{\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}\mid \rho\in C([-\tau,\infty):H^1),\ z\in C\left([0,\infty)\times[-\tau,0]:H^1\right)\right\},$$
$$B_\sigma:=\left\{\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}\in B\,\middle|\,\begin{array}{c}\|\rho(t)-\rho_0(\theta)\|_{H^1}\to0\ (t\to0),\\ \|z(t,\theta)-z(0,\theta)\|_{H^1}\to0\ (t\to0,\forall\theta\in[-\tau,0])\\ \left\|\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}\right\|_{B_\sigma}\leq 2C_0\sigma\end{array}\right\},$$

ただし，$\left\|\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}\right\|_{B_\sigma}:=\sup_{t\geq-\tau}\left\{(1+t)^{\frac{1}{4}}\|\rho(t)\|_{L^2}+(1+t)^{\frac{3}{4}}\|\partial_x\rho(t)\|_{L^2}\right\}$
$$+\sup_{t\geq0}\left\{\sup_{-\tau\leq\theta\leq0}\left\{(1+t+\theta)^{\frac{1}{4}}\|z(t,\theta)\|_{L^2}+(1+t+\theta)^{\frac{3}{4}}\|\partial_x z(t,\theta)\|_{L^2}\right\}\right\}.$$

Φ が B_σ 上の縮小写像であることを証明できれば，縮小写像の定理から主定理が得られることがわかることに注意する．Φ が B_σ 上の縮小写像であることを示すために必要な熱半群の評価や初等的な評価を紹介する．1 つ目の補題は，熱半群の L^1-L^2 評価である：

補題 3.1. *$g\in H^1\cap W^{1,1}$, $0\leq\theta,\theta_1,\theta_2\leq1$ とするとき, 以下の不等式が成立する：*

$$\|S(t)g\|_{L^2}\leq C_{0,\ell}^2(1+2\nu t)^{-\frac{1}{4}}\|g\|_{L^1}+e^{-\nu t}\|g\|_{L^2},$$
$$\|S(t)\partial_x g\|_{L^2}\leq C_{1,\ell}^2(1+2\nu t)^{-\frac{3}{4}}\|g\|_{L^1}+C_{1,h}^2\left\{e^{-\frac{1}{2}\nu t}(\nu t)^{-\frac{1}{2}}\|g\|_{L^2}\right\}^{\theta}\left\{e^{-\nu t}\|\partial_x g\|_{L^2}\right\}^{1-\theta},$$
$$\|\partial_x S(t)\partial_x g\|_{L^2}\leq C_{2,\ell}^2\left\{(1+2\nu t)^{-\frac{5}{4}}\|g\|_{L^1}\right\}^{\theta_1}\left\{(1+2\nu t)^{-\frac{3}{4}}\|\partial_x g\|_{L^1}\right\}^{1-\theta_1}$$
$$+C_{2,h}^2\left\{e^{-\frac{1}{2}\nu t}(\nu t)^{-\frac{1}{2}}\|\partial_x g\|_{L^2}\right\}^{\theta_2}\left\{e^{-\frac{1}{2}\nu t}(\nu t)^{-1}\|g\|_{L^2}\right\}^{1-\theta_2}.$$

ここで, $C_{0,\ell}^2$, $C_{1,\ell}^2$, $C_{1,h}^2$, $C_{2,\ell}^2$, $C_{2,h}^2$ は τ によらないある正定数である.

注意 3.1. $g \in L^2$ に対して，$S(t)g$ はフーリエ変換 $\mathcal{F}$ とその逆変換 $\mathcal{F}^{-1}$ を用いて以下で与えられる：

$$S(t)g = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-\nu|\xi|^2 t}\mathcal{F}[g]\right].$$

このことから，$\partial_x S(t)g = S(t)\partial_x g$ がわかる．

次の評価式は，積分方程式 (IE) の積分の項を評価する際に使われる初等的な評価式である．

補題 3.2. $0 < a, b < 1$, $k > 0$, $0 \le \tau \le 1/2$, $t \ge \tau$, $\nu > 0$ とする．

このとき, 以下が成り立つ：

$$\int_\tau^t \{1 + (2\nu(t-s)\}^{-a}(1+s-\tau)^{-b}\, ds \le C_1^3(1+t-\tau)^{1-a-b},$$
$$\int_\tau^t e^{-k(t-s)}(t-s)^{-a}(1+s-\tau)^{-b}\, ds \le C_2^3 t^{-a}(1+t-\tau)^{1-b}.$$

ここで, C_1^3, C_2^3 は τ によらない定数である．

これらの補題を用いて Φ が B_σ 上の縮小写像であることが示される．実際,

$$\Phi\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} S(t)\rho_0(0) - \int_0^t S(t-s)\partial_x g(s)\, ds \\ S_t\rho_0(0) + T_0(t)z(0,\theta) - \int_0^t S_{t-s}(\partial_x g(s))\, ds\end{pmatrix}.$$

の第 1 成分について，上の 2 つの補題を用いれば

$$\begin{aligned}\left\|\left(\Phi\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}\right)_1\right\|_{L^2} &\le \|S(t-\tau)\rho(\tau)\|_{L^2} + \int_\tau^t \|S(t-s)\partial_x g(s)\|_{L^2}\, ds \\ &\le C_{0,\ell}^2\left(1+2\nu(t-s)\right)^{-\frac{1}{4}}\|\rho_0(\tau)\|_{L^1} + e^{-\nu(t-\tau)}\|\rho_0(\tau)\|_{L^2} \\ &\quad + \int_\tau^t C_{1,\ell}^2\left(1+2\nu(t-s)\right)^{-\frac{3}{4}}\|g(s)\|_{L^1}\, ds \\ &\quad + \int_\tau^t C_{1,h}^2\left\{2^{-\frac{1}{2}\nu(t-s)}(\nu(t-s))^{-\frac{1}{2}}\|g(s)\|_{L^2}\right\}^{\theta_1} \times \left\{e^{-\nu(t-s}\|\partial_x g(s)\|_{L^2}\right\}^{1-\theta_1} ds \\ &=: I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned}$$

と評価できる．I_1 については，$0 \le t \le \tau$ に対しては，積分方程式を

$$\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix} = \mathscr{T}_0(t)\begin{pmatrix}\rho(0)\\ z(0,\theta)\end{pmatrix} - \int_0^t \mathscr{T}_0(t-s)\begin{pmatrix}\partial_x g(s)\\ 0\end{pmatrix} ds$$

と書き換え，補題を用いると

$$\begin{aligned}I_1 &\le \left(C_{0,\ell}^2(1+2\nu(t-\tau))^{-\frac{1}{4}} + e^{-\nu(t-\tau)}\right)\left(\|\rho_0(0)\|_{L^1} + 4C_0M_f\sqrt{\tau}(1+16C_0)\sigma^2\right) \\ &\le \left(C_{0,\ell}^2(1+(2\nu)^{-1/4}) + (4\nu)^{-1/4}e^{-1/4+\nu}\right)\left(\|\rho_0(0)\|_{L^1} + 4C_0M_f\sqrt{\tau}(1+16C_0)\sigma^2\right)(1+t)^{-\frac{1}{4}},\end{aligned}$$

と評価できる．また，I_2 についても補題から,

$$\begin{aligned}
I_2 &\le \int_\tau^t C_{1,\ell}^2 \left(1+2\nu(t-s)\right)^{-\frac{3}{4}} \|g(s)\|_{L^1} ds \\
&\le 4C_{1,\ell}^2 C_0^2 M_f \sqrt{\tau}\sigma^2 \int_\tau^t \left(1+2\nu(t-s)\right)^{-\frac{3}{4}} (1+s-\tau)^{-\frac{1}{2}}\, ds \\
&\le 4C_{1,\ell}^2 C_1^3 C_0^2 M_f \sqrt{\tau}\sigma^2 (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4}} \\
&\le 4C_{1,\ell}^2 C_1^3 C_0^2 M_f \sqrt{\tau}\sigma^2 (1+\tau)^{\frac{1}{4}} (1+t)^{-\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

と評価でき，I_3 も I_2 と同様に,

$$\begin{aligned}
I_3 &\le C_{1,h}^2 \int_\tau^t e^{-\frac{1}{2}\nu(t-s)\theta_1} e^{-\nu(t-s)(1-\theta_1)} (\nu(t-s))^{-\frac{1}{2}\theta_1} \|g(s)\|_{L^2}^{\theta_1} \|\partial_x g(s)\|_{L^2}^{1-\theta_1} ds \\
&\le C_{1,h}^2 4\cdot 2^{1-\theta_1} M_f \sqrt{\tau} C_0^2 \sigma^2 \int_\tau^t e^{-\frac{1}{2}\nu(t-s)(2-\theta_1)} (\nu(t-s))^{-\frac{1}{2}\theta_1} (1+s-\tau)^{-\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\theta_1} ds \\
&\le C_{1,h}^2 4\cdot 2^{1-\theta_1} M_f \sqrt{\tau} C_0^2 \sigma^2 C_2^3 \nu^{-\frac{1}{2}\theta_1} t^{-\frac{1}{2}\theta_1} (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta_1} \\
&= C_{1,h}^2 4\cdot 2^{1-\theta_1} M_f \sqrt{\tau} C_0^2 \sigma^2 C_2^3 \nu^{-\frac{1}{2}\theta_1} (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4}} \tau^{-\frac{1}{2}\theta_1}
\end{aligned}$$

と評価できる．ただし, θ_1 は $0 \le \theta_1 \le 1$ を満たす任意の実数である．ここで，簡単のため $\theta_1 = 3/4$ ととると，以下を得る：

$$\begin{aligned}
I_3 &\le 4\cdot 2^{\frac{1}{4}} C_{1,h}^2 M_f C_0^2 \sigma^2 C_2^3 \nu^{-\frac{3}{8}} (1+t-\tau)^{-\frac{1}{4}} \tau^{\frac{1}{8}} \\
&\le 4\cdot 2^{\frac{1}{4}} C_{1,h}^2 M_f C_0^2 \sigma^2 C_2^3 \nu^{-\frac{3}{8}} \tau^{\frac{1}{8}} (1+\tau)^{\frac{1}{4}} (1+t)^{-\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

以上から,

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\Phi \begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix} \right)_1 \right\|_{L^2} \le{}& \left(C_{0,\ell}^2 (1+(2\nu)^{-1/4}) + (4\nu)^{-1/4} e^{-1/4+\nu} \right) \|\rho_0(0)\|_{L^1} (1+t)^{-\frac{1}{4}} \\
&+ 4C_0 M_f \sqrt{\tau} \left(C_{0,\ell}^2 (1+(2\nu)^{-1/4}) + (4\nu)^{-1/4} e^{-1/4+\nu} \right) (1+16C_0)\sigma^2 (1+t)^{-\frac{1}{4}} \\
&+ 4C_0^2 M_f \tau^{\frac{1}{8}} \left(C_{1,\ell}^2 C_1^3 \tau^{\frac{3}{8}} + 4\cdot 2^{\frac{1}{4}} C_{1,h}^2 C_2^3 \nu^{-\frac{3}{8}} \right) (1+\tau)^{\frac{1}{4}} \sigma^2 (1+t)^{-\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

が得られる．同様にして，$\left\| \partial_x \left(\Phi \begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix} \right)_1 \right\|_{L^2}$, $\left\| \left(\Phi \begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix} \right)_2 \right\|_{L^2}$, $\left\| \partial_x \left(\Phi \begin{pmatrix} \rho \\ z \end{pmatrix} \right)_2 \right\|_{L^2}$ の評価を行

えば，最終的に，$\left\|\Phi\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}\right\|_{B_\sigma}$ の評価が次のように得られる：

$$\begin{aligned}\left\|\Phi\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}\right\|_{B_\sigma} \leq& 2\left(C_{0,\ell}^2(1+(2\nu)^{-\frac{1}{4}})+(4\nu)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{4}+\nu}\right)\sigma+(1+\tau)^{\frac{1}{4}}\sigma\\ &+2\left(C_{1,\ell}^2(1+(2\nu)^{-\frac{3}{4}})+(4\nu)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{4}+\nu}\right)\sigma+(1+\tau)^{\frac{3}{4}}\sigma\\ &\quad+8C_0M_f\sqrt{\tau}\left(C_{0,\ell}^2(1+(2\nu)^{-\frac{1}{4}})+(4\nu)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{4}+\nu}\right)(1+16C_0)\sigma^2\\ &\quad+4C_0^2M_f\tau^{\frac{1}{8}}\left(C_{1,\ell}^2C_1^3\tau^{\frac{3}{8}}+4\cdot 2^{\frac{1}{4}}C_{1,h}^2C_2^3\nu^{-\frac{3}{8}}\right)(1+\tau)^{\frac{1}{4}}\sigma^2\\ &\quad+4C_0^2M_f\tau^{\frac{1}{8}}\left(C_{1,\ell}^2C_1^3\tau^{\frac{3}{8}}+4\cdot 2^{\frac{3}{4}}C_{1,h}^2C_2^3\nu^{-\frac{3}{8}}\right)(1+\tau)^{\frac{1}{4}}\sigma^2\\ &+2\left(C_{1,\ell}^2(1+(2\nu)^{-\frac{3}{4}})+C_{1,h}^2(4\nu)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{4}+\nu}\tau^{\frac{1}{2}}\right)4C_0M_f\sqrt{\tau}(1+16C_0)\sigma^2\\ &+8\cdot 2^{\frac{1}{4}}C_0^2M_f\tau^{-\frac{3}{8}}\sigma^2\left(C_{2,\ell}^2C_1^3\tau^{\frac{7}{8}}+C_{2,h}^2\nu^{-\frac{7}{8}}\right)(1+\tau)^{\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

ここで，C_0 を σ の 1 次の係数と設定する，すなわち

$$C_0 := 2\left(C_{0,\ell}^2(1+(2\nu)^{-\frac{1}{4}})+C_{1,\ell}^2(1+(2\nu)^{-\frac{3}{4}})+2(4\nu)^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{1}{4}+\nu}\right)+(1+\tau)^{\frac{1}{4}}+(1+\tau)^{\frac{3}{4}} \quad (3.1)$$

と設定すれば，以上の評価から，もし σ を十分小さくとるならば，$\left\|\Phi\begin{pmatrix}\rho\\ z\end{pmatrix}\right\|_{B_\sigma} \leq 2C_0M$ が成り立つことがわかる．また，

$$\|\rho(t)-\rho_0(\theta)\|_{H^1}\to 0\ (t\to 0), \qquad \|z(t,\theta)-z(0,\theta)\|_{H^1}\to 0\ (t\to 0,\forall\theta\in[-\tau,0])$$

も証明することができるので，Φ が B_σ 上の縮小写像であると示される．よって，縮小写像の定理から，(IE) を満たす $\rho\in B_\sigma$ が一意に存在することがわかる．以上から，B_σ において (IE) の解を得る．

参考文献

[1] Takayuki Kubo and Yoshihiro Ueda, "*Existence theorem for global in time solutions to Burgers equation with a time delay*", Journal of Differential Equations, 184-230, (2022).

[2] 櫻井 咲希, 分布型時間遅れをもつ Burgers 方程式の時間大域解について, 令和 4 年度修士論文, (2022).

[3] Bátkai András and Piazzera Susanna, Semigroups for delay equations, AK Peters/CRC Press, (2005).

Higher order estimate near the boundary of a large solution to semilinear Poisson equation

広島大学　先進理工系科学研究科　数学プログラム
張　彧瀟 (ZHANG YUXIAO) *

概要

本稿では、滑らかな境界 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上で非線形ポアソン方程式 $\Delta u = f(u)$ の large solution の境界付近における漸近挙動に関する問題を考察する。二種類の典型的な非線形項に対し、特定の条件のもとで、large solution の境界 ∂D 付近における漸近挙動における第三項、さらには高次項までを与える。

1　導入

完全導体容器内で均一に帯電した理想気体の平衡を考える。平衡は、気体内の電気力が圧力とちょうど釣り合うときに発生する。どのような容器でも、気体の総質量ごとに、容器内のその気体の質量の平衡分布が 1 つだけ存在することがわかる。平衡状態では、密度と圧力は容器表面で最大値に達し、この表面では両方とも定数である。さらに、気体の総質量が増加するにつれて、密度と圧力は各点で増加する。ただし、Keller の研究 [1] により、容器内の密度と圧力は、気体の総質量のように無

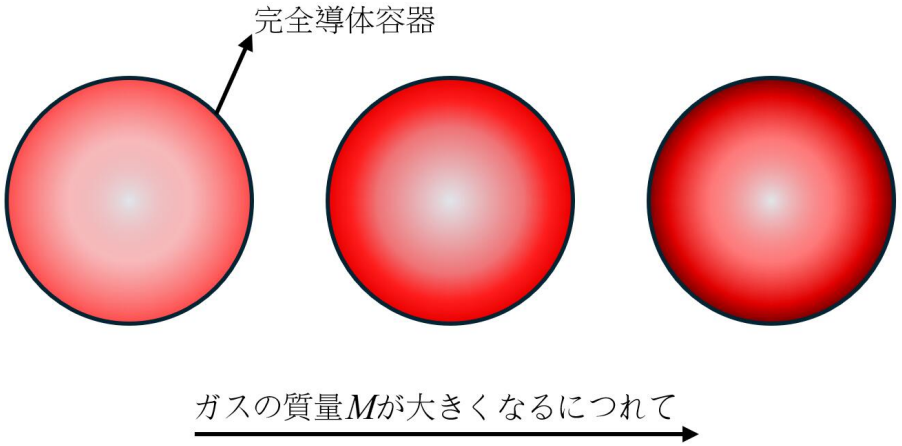


図 1　完全導体容器の変化

制限に増加するわけではない。代わりに、気体の総質量が無限になるにつれて、内部の各点で密度と圧力の両方が有限の上限に近づく。総質量が大きい場合、気体の大部分は表面近くの薄層に蓄積す

* E-mail:d233553@hiroshima-u.ac.jp

る。容器内により多くの気体を入れても、内部の点で密度と圧力を限りなく大きくすることができない。

この問題を数学モデルに表す。

圧力を p、質量密度を ρ、電荷密度を $a\rho$、および電場ベクトルを E とする。このとき、平衡の条件は

$$\nabla p = a\rho E$$

である。定数 a は、電荷密度と質量密度の比である。気体が均一に帯電したと仮定しているため、a は定数である。電荷が場の発生源であるという事実は、次の方程式で表される。

$$\nabla \cdot E = 4\pi a\rho.$$

ここで、

$$v = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho(p)}$$

で定義すると、

$$\Delta v = f(v) \tag{$*$}$$

が成り立つ。ただし、$f(v) = 4\pi a^2 \rho(p(v))$ である。

ここで、理想気体の場合を考えると、圧力 p と質量密度 ρ は以下の式を満たす。

$$p = \frac{RT}{m}\rho.$$

ただし、定数 T は温度であり、R は気体定数であり、m は気体中の分子の平均質量である。$p_0 = 1$ のとき、

$$v = \frac{RT}{m}\log p$$

が成り立つ。したがって、

$$u = \frac{m}{RT}v + \log 4\pi\Big(\frac{am}{RT}\Big)^2$$

とすると、

$$\Delta u = e^u \tag{$**$}$$

になる。総質量 M が無限大になるとき、圧力は内部の点で有限な上限を持つが、境界で無限大になることがわかる。

本稿では、

$$\Delta u = f(u) \tag{1}$$

のような方程式をポアソン方程式と呼ぶ。また、当該方程式の解が以下の条件 (2) を満たす場合、その解は large solution と呼ばれる。

$$u(x) \to \infty \quad \text{as } \delta(x) \to 0 \tag{2}$$

ただし、$\delta(x) = \mathrm{dist}(x, \partial D)$ は D 内の点 x と境界 ∂D の距離となる関数である。

したがって、前述の物理現象において、$(**)$ 式の u は large solution となる。

(1) 式において、非線形項 $f(t)$ には冪関数 t^p と指数関数 e^t という二つの典型的な例が存在する。ここで、e^t の場合は既に前述で紹介した ([1] を参照)。一方、t^p の場合は幾何学および数学の他の分野で現れている ([2,3] を参照)。

本研究では、冪関数型および指数関数型の非線形項に対し、特定の条件のもとで、その large solution が境界付近における漸近挙動の第三項やより高次の項を与える。言い換えれば、large solution の漸近形を与える。

2 既知の結果

この節では、半線形ポアソン方程式 (1) の large solution の境界付近における漸近挙動について、先行研究における既知の結果 [4,5,6,7] を述べる。

$D \subset \mathbb{R}^n,\ n \geq 2$ を滑らかで有界な領域とする。

定理 2.1 (J.B.Keller [4], R.Osserman [5], 1957, large solution の存在). 半線形ポアソン方程式 (1) の large solution u が存在するための必要十分条件は

$$\Psi(t) = \int_t^\infty \frac{1}{\sqrt{2F(s)}} ds < \infty \quad \text{for } \forall t > 0. \tag{3}$$

ただし、$F'(s) = f(s)$ である。このとき、すべての large solution u は

$$\lim_{\delta(x)\to 0} \frac{u(x)}{\Phi(\delta(x))} = 1 \tag{4}$$

を満たす。ただし、Φ は Ψ の逆関数である。

この定理により、境界付近における large solution は以下の展開式で表すことができる。

$$u(x) = \Phi(\delta(x)) + o(1)\,\Phi(\delta(x)) \quad \text{as } \delta(x) \to 0. \tag{5}$$

すなわち、境界付近における large solution の漸近挙動の主要項は $\Phi(\delta(x))$ である。

例として、$f(t) = t^p$ の場合、$\Phi(\delta(x)) = \left(\frac{2(p+1)}{(p-1)^2}\right)^{\frac{1}{p-1}} (\delta(x))^{-\frac{2}{p-1}}$ であり、$f(t) = e^t$ の場合、$\Phi(\delta(x)) = \log \frac{2}{(\delta(x))^2}$ である。

ならば、第二項はどうなるか？この問題について、以下の定理が成り立つ。

定理 2.2 (C. Anedda, G. Porru [6], 2007). $p > 1$ および $\beta > 0$ を定数、$f(t)$ を $[0,\infty)$ で定義された滑らかな関数とし、以下の仮定 (a1)-(a4) を満たすとする。

(a1) $f(0) = 0,\ f'(t) > 0\ \ (t \in (0,\infty))$.

(a2)
$$\frac{f'(t)\,F(t)}{(f(t))^2} = \frac{p}{p+1} + O(1)\,t^{-\beta} \quad (t \to \infty).$$

(a3) $M > 0$ が存在して、任意の $\theta \in (1/2, 2)$ と大きい $t > 0$ に対して、
$$\frac{|f''(\theta t)|\,t^2}{f(t)} \leq M$$

が成り立つ。

(a4) $1 < p \leq 3$ のとき、$\theta_0 \in (0,1)$, $t_0 > 1$ が存在して、任意の $\theta \in (\theta_0, 1)$, $t > t_0$ に対して、$\theta f(t) > f(\theta t)$ が成り立つ。

このとき、(1) のすべての large solution は

$$u(x) = \Phi(\delta(x)) \left[1 + \frac{(n-1)H(x)}{p+3}\delta(x) + O(1)\delta^{\sigma}(x)\right] \quad (\delta(x) \to 0) \tag{6}$$

を満たす。$\sigma \in (1,2]$ は、$\sigma < \min\{2\beta/(p-1)+1, 2/(p-1)+1\}$ を満たす定数である。ここで、任意の $x \in D$ に対して、$H(x)$ は x における曲面 $\{y \in D \,|\, \delta(y) = \delta(x)\}$ の平均曲率である。

この定理は、二重冪関数型の非線形項 (例えば $f(t) = t^p + \alpha t^q$ $(\alpha \in \mathbb{R}, -1 < q < p)$) の場合において、その large solution の境界付近における漸近挙動の第二項が $\frac{(n-1)H(x)}{p+3}\Phi(\delta(x))\delta(x)$ で与えられることを示す。

定理 2.3 (C. Anedda, G. Porru [7], 2008). $f(t)$ が以下の仮定 (b1)-(b4) を満たすとする。

(b1) $f(t) \geq 0, F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds < \infty$ であり、十分大きい t に対して、$f'(t) > 0$ が成り立つ。

(b2)
$$\frac{F(t)f'(t)}{f^2(t)} = 1 + O(1)\frac{1}{t} \quad (t \to \infty).$$

(b3) $C > 0$ が存在して、
$$\frac{F(t)}{f(t)} = C + O(1)\frac{1}{t} \quad (t \to \infty).$$

(b4) $\exists m > 2, \varepsilon > 0, L > 0, t_0 > 0$ s.t. $\forall t > t_0$
$$\frac{|f''(t+\sigma)|}{f(t)} \leq L(F(t))^{\frac{1}{m}} \quad (-\varepsilon < \sigma < \varepsilon).$$

このとき、(1) のすべての large solution は

$$u(x) = \Phi(\delta(x)) + (n-1)H(x)C\delta(x) + O(1)(\Phi(\delta(x)))^{-1}\delta(x) \quad (\delta(x) \to 0) \tag{7}$$

を満たす。

この定理は、指数関数型の非線形項 (例えば $f(t) = e^{\frac{1}{C}t}P(t)$、$P(t)$ が正の多項式関数である) の場合において、その large solution の境界付近における漸近挙動の第二項が $(n-1)H(x)C\delta(x)$ で与えられることを示す。

本研究では、既知の二つの定理を拡張し、より厳密な条件のもとで、上記二種類の非線形項に対する境界付近における large solution の漸近挙動の第三項を解析する。特に、$f(t) = t^p + \alpha t^q$ $(\alpha \in \mathbb{R}, -1 < q < p)$ の場合には、漸近挙動の高次項を与え、$f(t) = e^t$ の場合には、漸近挙動の第三項は一般の指数関数型非線形項の第三項とは異なるものとなることを示す。

3 主結果

$D \subset \mathbb{R}^n,\ n \geq 2$ を滑らかで有界な領域とする。

定理 3.1 (K. Takimoto, Y. Zhang [8], 2023). $p > 1,\ q \in ((p+1)/2, p),\ \widetilde{q} \in (-1, q)$ を定数とし、$\varphi(t)$ は $[0,\infty)$ で定義された滑らかな関数とする。$f(t) = t^p + \varphi(t)$ とし、以下の仮定 (A1), (A2), (A3), (A4) を満たすとする。

(A1) $f(0) = 0,\ f'(t) > 0\ \ (t \in (0,\infty))$.

(A2) 定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して、$\varphi(t) = \alpha t^q + O(1)\, t^{\widetilde{q}},\ \varphi'(t) = \alpha q t^{q-1} + O(1)\, t^{\widetilde{q}-1}\ \ (t \to \infty)$ が成立する。

(A3) $M > 0$ が存在して、任意の $\theta \in (1/2, 2)$ と大きい $t > 0$ に対して、

$$\frac{|f''(\theta t)|\, t^2}{f(t)} \leq M$$

が成り立つ。

(A4) $1 < p \leq 3$ のとき、$\theta_0 \in (0,1),\ t_0 > 1$ が存在して、任意の $\theta \in (\theta_0, 1),\ t > t_0$ に対して、$\theta f(t) > f(\theta t)$ が成り立つ。

このとき、(1) のすべての large solution は

$$u(x) = \Phi(\delta(x)) \left[1 + A_1(x)\, \delta(x) + A_\gamma(x)\, \delta^\gamma(x) + O(1)\, \delta^{\mu_1}(x)\right] \quad (\delta(x) \to 0) \tag{8}$$

を満たす。ただし、$\mu_1 = \min\{4(p-q)/(p-1) + 1, 2(p-\widetilde{q})/(p-1) + 1, 2\}, \gamma = 2(p-q)/(p-1) + 1,\ A_1(x) = (n-1)H(x)/(p+3)$ であり、$A_\gamma(x)$ は $n,\ p,\ q,\ \alpha,\ H(x)$ に依存する関数である。

この定理は、$f(t) = t^p + \alpha t^q$ のような非線形項の場合において、その large solution の境界付近における漸近挙動の第三項が $A_\gamma(x)\, \delta^\gamma(x)\, \Phi(\delta(x))$ で与えられることを示す。q が定理の条件を満たすとき、γ は $\gamma \in (1,2)$ を満たす、すなわち、整数ではないということがわかる。

定理 3.1 では $(p+1)/2 < q < p$ の場合を考えているが、もし q がちょうど $(p+1)/2$ であるならば、$\gamma = 2$ となることがわかる。このとき、以下の定理が成立する。

定理 3.2 (K. Takimoto, Y. Zhang [8], 2023). $f(t) = t^p + \varphi(t)$ とし、定理 3.1 において (A1), (A4) と以下の仮定 (A2)', (A3)' を満たすとする。

(A2)' 定数 $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して、$\varphi(t) = \alpha t^q + O(1)\, t^{\widetilde{q}},\ \varphi'(t) = \alpha q t^q + O(1)\, t^{\widetilde{q}-1},\ \varphi''(t) = \alpha q(q-1)\, t^{q-2} + O(1)\, t^{\widetilde{q}-2}\ \ (t \to \infty)$ が成立する。

(A3)' $M' > 0$ が存在して、任意の $\theta \in (1/2, 2)$ と大きい $t > 0$ に対して、

$$\frac{|f'''(\theta t)|\, t^3}{f(t)} \leq M'.$$

このとき、(1) のすべての large solution は

$$u(x) = \Phi(\delta(x)) \left[1 + A_1(x)\, \delta(x) + A_2(x)\, \delta^2(x) + O(1)\, \delta^{\mu_2}(x)\right] \quad (\delta(x) \to 0) \tag{9}$$

を満たす。ただし、$\mu_2 = \min\{2(p-\widetilde{q})/(p-1)+1, 3\}$, $A_1(x) = (n-1)H(x)/(p+3)$ であり、$A_2(x)$ は $n,\ p,\ q,\ \alpha,\ H(x)$ に依存する関数である。

特に、$\varphi(t)$ がちょうど αt^q であるならば、境界付近における large solution の漸近挙動の高次項を得ることができる。

定理 3.3 (K. Takimoto, Y. Zhang [9], 2024). $p > 1$ とする。$m \in \mathbb{N},\ m \geq 3$ とする。

(1) $q \in (\max\{(p-3)/2,\ (3-m)(p-1)/2+1\}, (4-m)(p-1)/2+1)$ のとき、$\Delta u = u^p + \alpha u^q$ in D のすべての large solution は

$$u(x) = \Phi(\delta(x))\left[1 + \sum_{k=1}^{m-1} A_k(x)\delta^k(x) + A_\gamma(x)\delta^\gamma(x) + O(1)\delta^\sigma(x)\right] \quad (\delta(x) \to 0) \tag{10}$$

を満たす。ただし、$\gamma = 2(p-q)/(p-1)+1$ であり, $A_1(x),\ A_2(x), \ldots, A_{m-1}(x)$ と $A_\gamma(x)$ は $n,\ p,\ q,\ \alpha,\ H(x)$ に依存する関数である。また、σ は $\sigma \in (\gamma, m), \sigma < 2(p+1)/(p-1)$ を満たす任意の定数である。

(2) $1 < p < (m+2)/(m-2),\ q = (3-m)(p-1)/2+1$ のとき、$\Delta u = u^p + \alpha u^q$ in D のすべての large solution は

$$u(x) = \Phi(\delta(x))\left[1 + \sum_{k=1}^{m} A_k(x)\delta^k(x) + O(1)\delta^\sigma(x)\right] \quad (\delta(x) \to 0) \tag{11}$$

を満たす。ただし、$A_1(x),\ A_2(x), \ldots, A_m(x)$ は $n,\ p,\ q,\ H(x)$ に依存する関数であり、σ は $\sigma \in (m, m+1], \sigma < 2(p+1)/(p-1)$ を満たす任意の定数である。

上記の結果は第 2 節の定理 2.2 の拡張である。一方、定理 2.3、すなわち指数関数型の非線形項に対しては、以下の定理が成立する。

定理 3.4 (Y. Zhang [10], in preparation). $f(t)$ が以下の仮定 (B1)-(B4) を満たすとする。

(B1) $f(t) \geq 0,\ F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\,ds < \infty$ であり、十分大きい t に対して、$f'(t) > 0$ が成り立つ.

(B2)
$$\frac{F(t)f'(t)}{(f(t))^2} = 1 + O(1)t^{-2} \quad \text{as } t \to \infty.$$

(B3) $C > 0, C_1 \in \mathbb{R}$ が存在して、
$$\frac{F(t)}{f(t)} = C + C_1 t^{-1} + O(1)t^{-2} \quad \text{as } t \to \infty$$
が成り立つ。

(B4) $m > 2$, $\varepsilon > 0$, $M_0 > 0$, $t_0 > 0$ が存在して、$t > t_0$ に対して、
$$\frac{|f''(t+\sigma)|}{f(t)} \leq M_0 (F(t))^{\frac{1}{m}}, \quad -\varepsilon < \sigma < \varepsilon$$
が成り立つ。

このとき、(1) のすべての large solution は

$$u(x)=\Phi(\delta(x))+A_1(x)\delta(x)+A_2(x)\delta(x)(\Phi(\delta(x)))^{-1}+O(1)\delta(x)(\Phi(\delta(x)))^{\gamma}\quad \text{as } \delta(x)\to 0 \tag{12}$$

を満たす。ただし、$\gamma\in[-2,-1)$ は任意の定数であり、$A_1(x)=C(n-1)H(x), A_2(x)=C_1(n-1)H(x)$ である。

この定理は、$f(t)=e^{\frac{1}{C}t}P(t)$ ($P(t)$ が正の多項式関数である) のような非線形項の場合において、その large solution の境界付近における漸近挙動の第三項が $A_2(x)\delta(x)(\Phi(\delta(x)))^{-1}$ で与えられることを示す。

ただし、非線形項がちょうど e^t である場合 (すなわち、前述の例において $C=1, P(t)\equiv 1$ である場合)、$C_1=0$ であるので、$A_2(x)\equiv 0$ となる。このとき、第三項 (言い換えれば、係数がゼロではない最初の項) は定理 3.4 で記述された形式とは異なるものとなる。

定理 3.5 (Y. Zhang [10], in preparation). $\Delta u=e^u$ in D のすべての large solution は

$$u(x)=\Phi(\delta(x))+A_1(x)\delta(x)+A_2(x)\delta^2(x)(\Phi(\delta(x)))+O(1)\delta^2(x)(\Phi(\delta(x)))^{\gamma}\quad \text{as } \delta(x)\to 0 \tag{13}$$

を満たす。ただし、$\gamma\in(0,1)$ は任意の定数であり、$A_1(x)=(n-1)H(x)$, $A_2(x)=\nabla A_1(x)\cdot\nabla\delta(x)-A_1^2(x)$ である。

参考文献

[1] J.B.Keller, Electrohydrodynamics I. The equilibrium of a charged gas in a container. J. Rational Mech. Anal., 1956, **5**: 715–724.

[2] C. Loewner, L. Nirenberg, Partial differential equations invariant under conformal or projective transformations, in: Contributions to Analysis (a Collection of Papers Dedicated to Lipman Bers), Academic Press, New York, 1974, pp. 245–272.

[3] H. Rademacher, Einige besondere Probleme partieller Differentialgleichungen, Die Differential- und Integralgleichungender Mechanik und Physik, I, second edition, Rosenberg, New York, 1943, pp. 838–845.

[4] J.B. Keller, On solutions of $\Delta u=f(u)$, Commun. Pure Appl. Math. 10 (1957) 503–510.

[5] R. Osserman, On the inequality $\Delta u\geq f(u)$, Pac. J. Math. 7 (1957) 1641–1647.

[6] C. Anedda, G. Porru, Second order estimates for boundary blow-up solutions of elliptic equations, in: Dynamical Systems and Differential Equations. Proceedings of the 6th AIMS International Conference, Discrete Contin. Dyn. Syst. (suppl.) (2007) 54–63.

[7] C. Anedda, G. Porru, Estimates for boundary blow-up solutions of semilinear elliptic equations, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 2, 2008, no. 5, 213–234.

[8] K. Takimoto, Y. Zhang, Higher order estimate near the boundary of a large solution to semilinear Poisson equation with double-power like nonlinearity. J. Math. Anal. Appl., 2023, **527**: Art 127382.

[9] K. Takimoto, Y. Zhang, Asymptotic behavior near the boundary of a large solution to semilinear Poisson equation with double-power nonlinearity. Acta Mathematica Scientia, 2024, **44B**(6): 2083–2098.

[10] Y. Zhang, Third order boundary estimates for large solutions to semilinear Poisson equations with exponential nonlinearities, in preparation.

粗凸空間のホロ境界

東京都立大学　大学院理学研究科　数理科学専攻
佐藤一慶 (Ikkei SATO) *

概要

ホロ境界とは, 連続関数を用いて構成される距離空間のコンパクト化である. 距離空間の大域的な情報を含む概念であり, 測地的 Gromov 双曲空間や CAT(0) 空間, Busemann 空間を始めとする非正曲率空間では, 同じく非正曲率空間の大域的な情報を含む概念である理想境界との対応が研究されてきた. 本研究では, 非正曲率空間の一般化と見なせる「粗凸空間」において, そのホロ境界と理想境界の対応について調べた.

1　粗凸空間

粗凸空間は, 測地的 Gromov 双曲空間, CAT(0) 空間を始めとする非正曲率空間を統一する概念として, 深谷友宏氏及び尾國新一氏 [FO20] により導入された. この節では, 粗凸空間の定義と具体例, 及び関連する諸概念について紹介する.

1.1　粗凸空間

(X,d) を距離空間とする. X 上で定義される bicombing $\Gamma\colon X\times X\times[0,1]\to X$ とは, $x,y\in X$ に対して, $\Gamma(x,y,0)=x$, $\Gamma(x,y,1)=y$ を満たす写像のことである.

$\lambda\geq 1$, $k\geq 0$ を定数とする. bicombing Γ が (λ,k)**-quasi geodesic bicombing** であるとは, 任意の $x,y\in X$ と任意のパラメータ $t,s\in[0,1]$ に対して, 以下の不等式が成り立つことを意味する.

$$\frac{1}{\lambda}|t-s|d(x,y)-k\leq d(\Gamma(x,y,t),\Gamma(x,y,s))\leq\lambda|t-s|d(x,y)+k$$

特に, bicombing Γ が **geodesic bicombing** であるとは, 任意の $x,y\in X$ と任意のパラメータ $t,s\in[0,1]$ に対して, 以下の等式が成り立つことを意味する.

$$d(\Gamma(x,y,t),\Gamma(x,y,s))=|t-s|d(x,y)$$

定義 1.1 (Coarsely convex bicombing)**.** (X,d) を距離空間, $\lambda\geq 1, k\geq 0, E\geq 1, C\geq 0$ を定数とする. また, $\theta\colon\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ を非減少関数とする. (X,d) 上の (λ,k,E,C,θ)**-coarsely convex bicombing** とは, (λ,k)-quasi geodesic bicombing であって, 以下の条件を満たすものである.

* E-mail:sato-ikkei@ed.tmu.ac.jp

(1) $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ と $a, b \in [0,1]$ に対して, $y_1' \coloneqq \Gamma(x_1, y_1, a)$, $y_2' \coloneqq \Gamma(x_2, y_2, b)$ とする. このとき, 任意の $c \in [0,1]$ に対して以下が成立する.

$$d(\Gamma(x_1, y_1, ca), \Gamma(x_2, y_2, cb)) \leq (1-c)Ed(x_1, x_2) + cEd(y_1', y_2') + C$$

(2) $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$ と $t, s \in [0,1]$ に対して, 以下が成立する.

$$|td(x_1, x_2) - sd(y_1, y_2)| \leq \theta(d(x_1, x_2) + d(\Gamma(x_1, y_1, t), \Gamma(x_2, y_2, s))$$

特に geodesic bicombing Γ で, 条件 (1) を満たすものを **geodesic (E, C)-coarsely convex bicombing** という.

注 1.2. Γ が geodesic bicombing の場合, 三角不等式により Γ は定義 1.1 の条件 (2) を自動的に満たす.

定義 1.3 (粗凸空間)**.** ある定数 $\lambda \geq 1, k \geq 0, E \geq 1, C \geq 0$ と非減少関数 $\theta\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ があって, $(\lambda, k, E, C, \theta)$-coasely convex bicombing が定義されている距離空間 (X, d) を **$(\lambda, k, E, C, \theta)$-粗凸空間**（もしくは単に**粗凸空間**）という. 特に, geodesic (E, C)-coarsely convex bicombing が定義されている距離空間を**測地的 (E, C)-粗凸空間**（もしくは単に**測地的粗凸空間**）という.

例 1.4. V をノルム空間とする. V 上の bicombing を, 2 点を結ぶ Affine 直線で与えると, V は測地的 $(1, 0)$-粗凸空間である.

例 1.5. 距離空間 (X, d) が **Busemann 空間**であるとは, 測地空間であり, 更に任意の測地線 $\gamma_1\colon [0, a_1] \to X$, $\gamma_2\colon [0, a_2] \to X$ と, 任意の $t \in [0,1]$ に対して以下の不等式が成り立つことを意味する.

$$d(\gamma_1(ta_1), \gamma_2(ta_2)) \leq (1-t)d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) + td(\gamma_1(a_1), \gamma_2(a_2))$$

したがって, Busemann 空間 (X, d) は一意測地的である. 特に, Busemann 空間 (X, d) 上では canonical な $(1, 0)$-coarsely convex bicombing を定義できることから, Busemann 空間は測地的 $(1, 0)$-粗凸空間である.

以下の定義は, section 1.2 及び section 3.1 で用いる.

定義 1.6. (X, d) を距離空間, $\Gamma\colon X \times X \times [0,1] \to X$ を X 上で定義された (λ, k)-quasi geodesic bicombing とする. このとき, **reparametrized bicombing** $\mathtt{rp}\Gamma\colon X \times X \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ を以下のように定義する.

$$\mathtt{rp}\Gamma(x, y, t) \coloneqq \begin{cases} \Gamma\left(x, y, \frac{t}{d(x,y)}\right) & \text{if } t \leq d(x, y) \\ y & \text{if } t > d(x, y). \end{cases}$$

geodesic bicombing に対しても, 同様に reparametrized bicombing を定義できる.

1.2 理想境界

測地的 Gromov 双曲空間, CAT(0) 空間を始めとして非正曲率空間には理想境界というコンパクト化が定義できた. 同様の概念は粗凸空間に対しても定義ができることを紹介する.

(X,d) を粗凸空間, Γ を X 上の coarsely convex bicombing, $\mathtt{rp}\Gamma$ を Γ の reparametrized bicombing とする. また $o \in X$ を基点として固定する.

定義 1.7 (Gromov 積)**.** $k_1 \coloneqq \lambda + k$, $D \coloneqq 2(1+E)k_1 + C$, $D_1 \coloneqq 2D+2$ とする. このとき, $(- \mid -)_o \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を以下のように定義する.

$$(x \mid y)_o \coloneqq \min\{d(o,x), d(o,y), \sup\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid d(\mathtt{rp}\Gamma(o,x,t), \mathtt{rp}\Gamma(o,y,t)) \leq D_1\}\}$$

[FOY22] の議論により, 粗凸空間の理想境界を定義する. 以下のような X 上の点列による集合を与える.

$$S_o^\infty X \coloneqq \{\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ は } (x_m \mid x_n)_o \to \infty \text{ as } m,n \to \infty \text{ を満たす点列.}\}$$

$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in S_o^\infty X$ に対して, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \sim \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ であるとは,

$$(x_n \mid y_n)_o \to \infty \text{ as } n \to \infty$$

と定義する. このとき, $\sim$ は $S_o^\infty X$ 上の同値関係を定める.

定義 1.8. (X,d) を粗凸空間とする. X の**理想境界** $\partial_o X$ を, $S_o^\infty X$ を同値関係 $\sim$ で割った集合として定義する. また $\bar{X}$ を, X と $\partial_o X$ の非交和として定義する. すなわち, 以下のように定義する.

$$\partial_o X \coloneqq S_o^\infty X/\sim, \quad \bar{X} \coloneqq X \cup \partial_o X$$

$x \in X$ と X 上の点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対して, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in x$ と表した場合, 全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して, $x_n = x$ が成り立つことを意味する. Gromov 積 $(- \mid -)_o \colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を, 以下のようにして $(- \mid -)_o \colon \bar{X} \times \bar{X} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ に拡張する. すなわち任意の $x, y \in \bar{X}$ に対して,

$$(x \mid y)_o \coloneqq \sup\{\liminf_{n\to\infty} (x_n \mid y_n)_o \mid \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in x, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in y\}$$

と定義する.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, V_n を以下のように定義する.

$$V_n \coloneqq \{(x,y) \in \bar{X} \times \bar{X} \mid (x \mid y)_o > n\}\} \cup \left\{(x,y) \in X \times X \mid d(x,y) < \frac{1}{n}\right\}$$

このとき, 族 $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $X \cup \partial_o X$ に一様構造を定める. またこれは距離化可能である. 任意の $x \in \bar{X}$ に対して, $V_n[x] \subset \bar{X}$ を以下のように定める.

$$V_n[x] \coloneqq \{y \in \bar{X} \mid (x,y) \in V_n\}$$

このとき, 族 $\{V_n[x]\}_{n\in\mathbb{N}}$ は x の基本近傍系を定める.

命題 1.9 ([FO20, Proposition 4.19])**.** 十分小さい $\epsilon > 0$ と, $D, \theta(0), \epsilon$ により定まる定数 $K \geq 1$ に対して, 以下を満たす $\partial_o X$ 上の距離 d_ϵ が存在する. すなわち, 任意の $x, y \in \partial_o X$ に対して,

$$\frac{1}{K} e^{-\epsilon(x \mid y)_o} \leq d_\epsilon(x,y) \leq e^{-\epsilon(x \mid y)_o}$$

が成り立つ. 特に距離 d_ϵ により定まる位相は $\partial_o X$ における位相と一致しており, 距離空間 $(\partial_o X, d_\epsilon)$ は直径が 1 以下である.

注 1.10. 粗凸空間の理想境界は, 基点の取り方に依らず定めることができる. また, $\partial_o X$ 及び $\bar{X} = X \cup \partial_o X$ は位相空間としてコンパクトである.

2 ホロ境界

2.1 ホロ境界

(X, d) を固有な距離空間として, $o \in X$ を基点として固定する. また, $C(X)$ を X 上で定義される $\mathbb{R}$-値連続関数全体の集合とし, 広義一様収束の位相を入れる.

このとき, $\phi\colon X \to C(X)$ を以下のように定義する.

$$x \mapsto \phi_x(-) \coloneqq d(-, x) - d(o, x)$$

定義 2.1 (ホロ境界)**.** (X, d) を固有な距離空間, $o \in X$ を基点として固定する. $\phi\colon X \to C(X)$ を上記で定義した写像とする. このとき, 距離空間 (X, d) の**ホロ境界** $\partial_h X$ を

$$\partial_h X \coloneqq \mathrm{cl}\, \phi(X) \setminus \phi(X)$$

と定義する. ここで, cl は $C(X)$ の位相に関する閉包を表している.

注 2.2. $\phi\colon X \to C(X)$ は基点を固定して定義しているが, ホロ境界は基点に依らず定まる. また, $C(X)$ は位相空間として Hausdorff 空間であることから, ホロ境界も Hausdorff 空間である.

例 2.3. $(\mathbb{R}^2, l^1)$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ に l^1-距離を入れた距離空間とする. ここで l^1-距離とは, $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して,

$$l^1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \coloneqq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

と定義される $\mathbb{R}^2$ 上の距離である. このとき, ホロ境界 $\partial_h(\mathbb{R}^2, l^1)$ は $\partial[-\infty, \infty]^2$ と同相である.

2.2 被約ホロ境界

定義 2.4. (X, d) を固有な距離空間, $\partial_h X$ を X のホロ境界とする. $\xi, \eta \in \partial_h X$ に対して $\xi \sim \eta$ であるとは,

$$\sup_{x \in X} |\xi(x) - \eta(x)| < \infty$$

と定義する. このとき, $\sim$ は $\partial_h X$ に対して同値関係を定める. (X, d) の**被約ホロ境界**を, ホロ境界 $\partial_h X$ を同値関係 $\sim$ で割った空間 $\partial_h X/\sim$ として定義する. また, その位相は $\partial_h X$ から誘導される商位相を入れる.

一般に固有な測地的 Gromov 双曲空間に対して, その理想境界とホロ境界が必ずしも一致するとは限らない. しかし, Webster と Winchester[WW03] は以下の定理を示した.

定理 2.5 ([WW03, Theorem 4.5])**.** (X,d) を固有な測地的 Gromov 双曲空間とし, $o\in X$ を基点として固定する. $\partial_o X$ を基点 o に関する X の理想境界とし, また $\partial_h X$ を X のホロ境界とする. このとき, $\partial_h X$ から $\partial_o X$ に自然な商写像が存在する.

定理 2.5 の系として, 測地的 Gromov 双曲空間においては理想境界と被約ホロ境界は位相を込めて一致することが従う. しかし, 同様の結果は粗凸空間に対して成り立たない. 例えば, 例 1.4 でノルム空間が測地的粗凸空間であることを見たが, $(\mathbb{R}^2, l^1)$ の被約ホロ境界は Hausdorff 空間にならない. 一方で, 粗凸空間の理想境界は距離化可能であることから Hausdorff 空間である.

3 主結果

3.1 錐距離

Andreev は Busemann 空間に対して**錐距離**を定義し, Busemann 空間においては錐距離を用いたホロ境界と, Busemann 空間に元々定義されていた距離による理想境界が位相を込めて一致することを示した [And18, Theorem. 3.4]. 我々は, 測地的粗凸空間に対しても錐距離を定式化した.

定義 3.1. (X,d) を測地的 (E,C)-粗凸空間, Γ を X 上で定義された geodesic (E,C)-coarsely convex bicombing, $\mathtt{rp}\Gamma$ を Γ の reparametrized bicombing とする. また $o\in X$ を基点として固定する. このとき, $x,y\in X$ に対して**錐距離** $d_c(x,y)$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} d_c(x,y) \coloneqq\ & |d(o,x)-d(o,y)| \\ & + d(\mathtt{rp}\Gamma(o,x,\min\{d(o,x),d(o,y)\}), \mathtt{rp}\Gamma(o,y,\min\{d(o,x),d(o,y)\})) \end{aligned}$$

錐距離の定義より, 任意の $x\in X$ に対して $d_c(o,x)=d(o,x)$ が成立する. また, 錐距離は非負性, 非退化性及び対称性を満たしている.

注 3.2. 例 1.5 で見たように, Busemann 空間は測地的 $(1,0)$-粗凸空間である. このとき定義 3.1 で与えた錐距離の定義は, Andreev が [And18] で与えた錐距離の定義と一致している.

補題 3.3. (X,d) を測地的 (E,C)-粗凸空間とする. このとき, 任意の $x,y,z\in X$ に対して以下が成立する.

$$d_c(x,z)\leq Ed_c(x,y)+Ed_c(y,z)+C$$

特に (X,d) が測地的 $(1,0)$-粗凸空間であれば, d_c は X 上の距離を定める.

3.2 錐距離によるホロ境界

この節では錐距離を用いたホロ境界を定義し, 理想境界との対応について解説する. (X,d) を固有な測地的 (E,C)-粗凸空間として, $o\in X$ を基点として固定する. また, $B(X)$ を X 上で定義される $\mathbb{R}$-値関数全体の集合とし, 広義一様収束の位相を入れる.

このとき, $\psi\colon X\to B(X)$ を以下のように定義する.

$$x\mapsto \psi_x(-)\coloneqq d_c(-,x)-d_c(o,x)$$

定義 3.4 (錐距離によるホロ境界)**.** (X,d) を固有な測地的 (E,C)-粗凸空間, $B_b(X)$ を X 上で定義される有界連続関数全体の集合とする. また $\psi\colon X \to B(X)$ を上記のように定義する. X 上で定義された関数の集合 $B_{b,E}(X)$ を以下のように定義する.

$$B_{b,E}(X) \coloneqq \left\{ f \in B(X) \;\middle|\; \frac{1}{E}\psi_x - \beta \leq f \leq E\psi_x + \beta,\ \exists x \in X, \exists \beta \in B_b(X) \right\}$$

このとき, **錐距離によるホロ境界** $\partial_h^c X$ を以下のように定義する.

$$\partial_h^c X \coloneqq \operatorname{cl} \psi(X) \setminus B_{b,E}(X)$$

ここで, cl は $B(X)$ の位相に関する閉包を表している.

注 3.5. 錐距離を用いたホロ境界の元である関数は, 連続関数である.

錐距離によるホロ境界に対して, 我々は以下の命題が成り立つことを示した.

命題 3.6. (X,d) を固有な測地的 (E,C)-粗凸空間として, $o \in X$ を基点として固定する. このとき, 錐距離によるホロ境界 $\partial_h^c X$ から理想境界 $\partial_o X$ に全射連続写像 $\Pr\colon \partial_h^c X \to \partial_o X$ を構成できる.

3.3 錐距離による被約ホロ境界

定義 2.4 と同様に, 定義 3.4 で定義された錐距離によるホロ境界に対しても, 被約ホロ境界を定義できる.

定義 3.7. (X,d) を固有な距離空間, $\partial_h^c X$ を X の錐距離によるホロ境界とする. $\xi, \eta \in \partial_h^c X$ に対して $\xi \sim \eta$ であるとは,

$$\sup_{x \in X} |\xi(x) - \eta(x)| < \infty$$

と定義する. このとき, $\sim$ は $\partial_h^c X$ に対して同値関係を定める. (X,d) の**錐距離による被約ホロ境界**を, 錐距離によるホロ境界 $\partial_h^c X$ を同値関係 $\sim$ で割った空間 $\partial_h^c X/\sim$ として定義する. また, その位相は $\partial_h^c X$ から誘導される商位相を入れる.

錐距離による被約ホロ境界に対して, 命題 3.6 の系として以下の定理が従う.

定理 3.8 (主定理)**.** (X,d) を固有な測地的 (E,C)-粗凸空間, $o \in X$ を基点として固定する. このとき, 錐距離による被約ホロ境界 $\partial_h^c X/\sim$ と理想境界 $\partial_o X$ は位相を込めて一致する.

Busemann 空間では, 錐距離によるホロ境界とその商集合である被約ホロ境界は一致している. したがって定理 3.8 は, Andreev が Busemann 空間に対して示した結果 [And18, Theorem. 3.4] の測地的粗凸空間への一般化となっている.

参考文献

[And18] Pavel Andreev. The cone metric of a busemann space. *Journal of Geometry*, 109(1):25, 2018.

[FO20] Tomohiro Fukaya and Shin-ichi Oguni. A coarse Cartan-Hadamard theorem with application to the coarse Baum-Connes conjecture. *J. Topol. Anal.*, 12(3):857–895, 2020.

[FOY22] Tomohiro Fukaya, Shin-ichi Oguni, and Takamitsu Yamauchi. Coarse compactifications and controlled products. *Journal of Topology and Analysis*, 14(04):875–900, 2022.

[WW03] Corran Webster and Adam Jeremiah Winchester. Boundaries of hyperbolic metric spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 221:147–158, 2003.

Proper action の Bornology と粗幾何学による特徴づけ

広島大学大学院　先進理工系科学研究科　数学プログラム
長屋 拓暁 (Hiroaki NAGAYA) *

概要

群作用の商空間を考える際に proper という性質は重要である．Palais は適切な設定下で proper 作用は等長作用のケースしかないことを明らかにした．本研究では, 今までトポロジーを用いて定義される proper 作用をボルノロジーを用いて定義する．主結果として bornological proper 作用は粗空間に適切に作用するケースしかないことを明らかにした．これは Palais の結果の一般化になっている．

1　導入

この節では, L を局所コンパクトハウスドルフ群, X を局所コンパクトハウスドルフ空間, ρ を X 上の連続 L-作用とする．任意の相対コンパクトな部分集合 $C, C' \subset X$ に対し, 集合

$$L_{C\to C'} := \{l \in L \mid lC \cap C' \neq \emptyset\}$$

が L において相対コンパクトであるとき, 作用 ρ は **proper** であるという．proper の定義に関する注意として, この定義の相対コンパクトの部分をコンパクトに置き換えて proper を定義する流儀が多い．しかし今回の設定では同値であり, 本研究では応用の都合上こちらを採用する．

もし作用 ρ が proper ならば, 以下のような商空間に関する命題が得られる．

命題 1.1. 作用の proper 性について以下の命題が成り立つ．

1. L をハウスドルフ群, X をハウスドルフ空間とする．X への連続的な L-作用が proper ならば, 商空間 $L\backslash X$ もまたハウスドルフである．
2. L を局所コンパクトハウスドルフ群, X を完全正則空間とする．X への連続的な L-作用が proper ならば, 商空間 $L\backslash X$ もまた完全正則である．
3. L を離散群, X を局所コンパクトハウスドルフ空間とする．X への連続的な L-作用が proper かつ自由であるならば, $\pi\colon X \to L\backslash X$ は被覆写像である．

上記の命題の完全正則性について簡単に説明を加える．距離空間の一般化として, 一様空間と呼ばれるものがある．これは位相の構造よりも強い概念で一様連続性や完備性を議論できる空間である．そして位相空間が一様化可能である必要十分条件が完全正則性である．

* E-mail:nagayahiroaki@hiroshima-u.ac.jp

このように群作用の商を考えるときに作用の proper 性は重要である．距離空間に等長に作用する場合には, proper は以下のように特徴づけられることが知られている．

命題 1.2. (X, d) を Haine-borel な距離空間 (i.e. 有界閉集合であることとコンパクトであることが同値な距離空間) とする．また, ρ を X 上等長な連続 L-作用とする．このとき, 以下の 2 つの条件は同値である．

1. 作用 ρ は proper である．
2. 任意の点 $x \in X$ についてイソトロピー $L^x := \{l \in L \mid lx = x\}$ がコンパクトかつ軌道 $L \cdot x$ が X 上閉集合である．

しかし等長とは限らない一般の作用では, 上記の命題の 2 を満たしていても proper になるとは限らない．下記がその例である．

例 1.3. $L := \mathbb{Z}, X := \mathbb{R}^2$ とおく．X 上の L-作用 ρ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} \rho\colon \mathbb{Z} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) &\to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \\ (n, (x_1, x_2)) &\mapsto (2^n x_1, 2^{-n} x_2) \end{aligned}$$

この作用 ρ は自由な作用 (i.e. 任意の点でのイソトロピーは単位元のみ) である．また任意の点 $x \in X$ について軌道は閉集合である．しかしこの作用は proper ではない．実際コンパクト集合として円周 S^1 を考えたとき, $\mathbb{Z}_{S^1 \to S^1} = \mathbb{Z}$ となり相対コンパクトとならない．

上記では等長でなく proper 作用でもない例を見たが, そもそも等長ではない proper 作用は存在するのだろうか. Palais は L を Lie 群, X を C^∞-多様体とした設定において, C^∞-級作用が proper になるには, 等長に作用する場合しかないことを明らかにした．

定理 1.4 (Palais [5])**.** L を Lie 群とし, X を C^∞ 級多様体とする．また ρ を C^∞ 級な proper 作用とする．このとき, X 上に位相を保つ L-不変な Riemann 計量が存在する．

ここで, 位相を保つとは距離から定まる位相が X に備わる元の位相と一致することを指す．また吉野氏は命題 1.2 の “等長な作用” という条件を一様空間論の観点から一般化した．一様空間とは距離空間から “連続” の概念を抽象化したものである．構造の強い順に距離空間, 一様空間, 位相となっており, 一様空間から位相を誘導することができる．

定理 1.5 (Yoshino [8])**.** L を局所コンパクトハウスドルフ群, $(X, \mathcal{U})$ を可分かつパラコンパクトで局所コンパクトハウスドルフな一様空間とする．ρ を $(X, \mathcal{U})$ 上同程度連続 (i.e. $\forall U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{U}$ s.t. $\forall g \in G, V_g := \{(gx, gy) \mid (x, y) \in V\} \subset U$) な L-作用とする．このとき以下は同値である．

(i) 作用 ρ は proper である．
(ii) 任意の点 $x \in X$ についてイソトロピー L^x がコンパクトかつ軌道 $L \cdot x$ が X 上閉集合である．

さらに, 吉野氏は適切な設定化において, 作用が proper になるには, 同程度連続に作用する場合しかないことを明らかにした．

定理 1.6 (Yoshino [8])**.** L を局所コンパクトハウスドルフ群, X をパラコンパクトで局所コンパクトハウスドルフな空間とする. また, ρ を X 上の連続 L-作用で商空間 $L\backslash X$ もパラコンパクトになるものとする. このとき, ρ が proper ならば, X 上に位相を保つ一様構造 $\mathcal{U}$ が存在して作用 ρ が同程度連続になる.

ここで, 位相を保つとは一様構造から定まる位相が X に備わる元の位相と一致することを指す. これらのトポロジーや一様空間の研究をもとに本研究では proper 作用をボルノロジー (定義 2.1) や粗空間 (定義 2.4) の観点から考察する. トポロジーや一様空間が “連続” について考える概念に対して, ボルノロジーや粗空間は “有界” を扱う概念として導入された. また一様構造がトポロジーを誘導するように粗構造はボルノロジーを誘導する (命題 2.6).

まず本研究の成果の一つとして, bornological proper を以下のように導入した.

定義 1.7. $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間, ρ を X 上の有界 L-作用とする. このとき, ρ が **bornological proper** であるとは, 任意の $B, B' \in \mathcal{B}_X$ に対して, $L_{B,B'} := \{l \in L \mid lB \cap B' \neq \emptyset\}$ が $\mathcal{B}_L$ の元であることをいう.

この bornological proper と proper 作用は適切な条件下で一致する (詳細は定理 2.12).

このようにボルノロジーの観点から proper 作用を定義したとき, 下記の問いが自然と浮かぶ.

問題 1.8. トポロジーの proper 作用における命題 1.2 と 定理 1.5 (同様に定理 1.4 と定理 1.6) に対応する bornological proper 作用における定理は何か？

平たくいうと, 適切な状況下での bornological proper 作用の特徴づけと, bornological proper 作用になるには, どのような作用しかあり得ないかを明らかにせよという問いである.

命題 1.2 および定理 1.5 に呼応する形で, 粗空間 (定義 2.4) に同程度制御 (定義 2.9) に作用する場合に以下の主結果が得られた.

定理 1.9 (N)**.** $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{E})$ を粗空間とする. また粗構造から定まるボルノロジー $\mathcal{B}_L$ を考える. 作用 ρ が $(X, \mathcal{B}_\mathcal{E})$ 上の L-有界作用であり, $(X, \mathcal{E})$ 上の同程度制御であるとする. このとき, 次の 2 つの条件は同値である.

(i) 作用 ρ は B-proper である.
(ii) 任意の $x \in X$ に対し, $L^x \in \mathcal{B}_L$ となり, $\iota_x^*(\mathcal{B}_X) = q_*^x(\mathcal{B}_L)$ である.

条件 (ii) の等号式に関しては, 定義 2.3 とその下部に詳細がある.

また定理 1.4 および定理 1.6 に呼応する形で, 以下の主結果が得られた.

定理 1.10 (N)**.** $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間とする. 作用 ρ が X 上の L-有界作用とする. 作用 ρ が bornological proper であるとき, X 上にボルノロジーを保つ粗構造 $\mathcal{E}$ が存在して, 作用 ρ が同程度制御となる.

ここで, ボルノロジーを保つとは粗構造から定まるボルノロジーが X に備わる元のボルノロジーと一致することを指す.

2　主定理

本稿を通じて, 任意の集合 X に対し, その冪集合を $\mathcal{P}(X)$ と表す.

以下に本稿の流れを紹介する. 節 2.1 では, ボルノロジー空間に関する基本的事項を紹介する. 節 2.2 では, 粗空間に関する基本的事項を紹介する. 節 2.3 では, 有界作用に関する基本的事項を紹介する. 節 2.4 では, 粗空間に作用に関するケースにおいて用語を定義する. 節 2.5 では, ボルノロジーを用いて作用の proper 性を定義し, それが適切な設定下では位相の proper 性と同値になることを紹介する. 最後に節 2.6 では, ボルノロジーにおける proper 性の特徴づけと proper 作用の適用範囲について主結果を述べる.

2.1　ボルノロジー空間

この節では, 関数解析の分野から生まれたボルノロジーについて定義を紹介する. 歴史的経緯については [4] を参照されたい. ボルノロジーはトポロジーと同様に, 集合 X に対し, 冪集合 $\mathcal{P}(X)$ の部分集合を用いて以下のように定義する.

定義 2.1 (ボルノロジー)**.** X を集合, $\mathcal{B}$ を $P(X)$ の部分集合とする. $\mathcal{B}$ が X 上の**ボルノロジー**であるとは, $\mathcal{B}$ が次の 3 つの条件を満たすことをいう.

(i) $\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B = X$.
(ii) 任意の $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ に対し, $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$.
(iii) 任意の $B \in \mathcal{B}$ と任意の $B' \subset B$ について, $B' \in \mathcal{B}$.

X 上のボルノロジー $\mathcal{B}$ に対し, 組 $(X, \mathcal{B})$ を**ボルノロジー空間**と呼び, ボルノロジーの各要素 $B \in \mathcal{B}$ を**有界集合**という. 特にボルノロジー空間の有限部分集合はすべて有界である.

次に「ボルノロジー基底」の概念を紹介する. 集合 X に対し, $\mathcal{D}$ が X の部分集合族であり, 次の 2 つの条件を満たすとき, $\mathcal{D}$ を X 上の**ボルノロジー基底**という.

(i') $\bigcup_{D\in\mathcal{D}} D = X$.
(ii') 任意の $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ に対し, $D_1 \cup D_2 \subset D$ となる $D \in \mathcal{D}$ が存在する.

ボルノロジー基底 $\mathcal{D}$ に対し, 集合 $\langle\mathcal{D}\rangle := \{S \subset X \mid \exists D \in \mathcal{D} \text{ such that } S \subset D\}$ はボルノロジーとなる.

例 2.2. 以下に 2 つのボルノロジーの例を示す.

(i) (X, d) を距離空間とする. このとき, すべての有界部分集合の族 $\mathcal{B}_d(X)$ はボルノロジーである. これを**有界ボルノロジー**と呼ぶ.
(ii) X をハウスドルフ空間とする. このとき, 相対コンパクトな部分集合全体の族 $\mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(X)$ はボルノロジーを形成する. これを**コンパクトボルノロジー**と呼ぶ.

ボルノロジー空間の間の射について以下に定義する.

定義 2.3 (ボルノロジー空間の間の射)**.** $(X, \mathcal{B}_X)$, $(Y, \mathcal{B}_Y)$ をボルノロジー空間とする. $f\colon X \to Y$ が**有界**であるとは, 任意の $B \in \mathcal{B}_X$ に対し, $f(B) \in \mathcal{B}_Y$ となることである.

また, 集合からボルノロジー空間への単射 $\iota\colon S \to Y$ があるとき, ι が有界となるような定義域側の最大なボルノロジーを自然に誘導することができる. それを $\iota^*\mathcal{B}_Y := \{\iota^{-1}(D) \subset S \mid D \in \mathcal{B}_Y\}$ と書く. 逆にボルノロジー空間から集合への全射 $q\colon X \to T$ があるとき, q が有界となるように値域側に自然にボルノロジーを誘導することができる. それを $q^*\mathcal{B}_X := \{q(B) \subset T \mid B \in \mathcal{B}_X\}$ と書く.

2.2 粗空間

この節では, Roe によって考案された粗空間を紹介する（cf. [7]）. 距離空間から “連続” の概念を抽象化したのが一様構造である. それに対して “有界” の概念を抽象化したのが粗構造である. 2.1 では, 本稿で必要なボルノロジーの基本的事項を紹介した. 実は粗空間とボルノロジーは, 異なる文脈から生まれた概念である. それを統合して Bunke と Engel が “bornological coarse space” という両者を兼ね備える概念を導入した ([2]).

定義 2.4 (粗空間)**.** 集合 X と $P(X \times X)$ の部分集合 $\mathcal{E}$ の対 $(X, \mathcal{E})$ が粗空間であるとは, 次の 5 つの条件を満たすことをいう：

(i) $\mathrm{diag}(X) := \{(x, x) \mid x \in X\} \in \mathcal{E}$.
(ii) 任意の $E \in \mathcal{E}$ について, $E^\top := \{(x', x) \mid (x, x') \in E\} \in \mathcal{E}$.
(iii) 任意の $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ について,

$$E_1 \circ E_2 := \{(x, z) \in X \times X \mid \exists y \in X \text{ such that } (x, y) \in E_1 \text{ and } (y, z) \in E_2\} \in \mathcal{E}.$$

(iv) 任意の $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}$ について, $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{E}$.
(v) 任意の $E \in \mathcal{E}$ と $E' \subset E$ に対し, $E' \in \mathcal{E}$.

上記の設定において $\mathcal{E}$ の各要素を**制御集合**と呼ぶ. 一様構造との違いが現れている条件が, (iv) である. 一様構造は近傍 (一様構造の元のこと) に対し, それより大きな集合は全て近傍になるという条件をもつ. それに対して (iv) の条件は, 粗構造は制御集合に対し, それより小さな集合は全て制御集合になることを主張している. ここから一様構造が連続を議論の対象にしているのに対し, 粗構造は有界を議論の対象にしていることがわかる.

各 $E \in \mathcal{E}$ および X の部分集合 T に対し, E-**近傍**を以下のように定義する：

$$E[T] := \{s \in X \mid \exists t \in T \text{ such that } (s, t) \in E\}.$$

$\mathcal{P}(X \times X)$ の部分集合 $\mathcal{C}$ が次の 4 つの条件を満たすとき, **粗構造の基底**と呼ぶ（cf. [3]）.

(i)’ ある $E \in \mathcal{C}$ が存在して $\mathrm{diag}(X) \subset E$.
(ii)’ 各 $E \in \mathcal{C}$ に対し, ある $E' \in \mathcal{C}$ が存在して $E^\top \subset E'$.
(iii)’ 各 $E_1, E_2 \in \mathcal{C}$ に対し, ある $E' \in \mathcal{C}$ が存在して $E_1 \circ E_2 \subset E'$.
(iv)’ 各 $E_1, E_2 \in \mathcal{C}$ に対し, ある $E' \in \mathcal{C}$ が存在して $E_1 \cup E_2 \subset E'$.

粗構造の基底 $\mathcal{C}$ を持つとき, 次のように粗構造が定義される.

$$\langle \mathcal{C} \rangle := \{E \subset X \times X \mid \exists C \in \mathcal{C} \text{ such that } E \subset C\}.$$

例 2.5. (X, d) を距離空間とし, 任意の $r \geq 0$ に対し, 集合

$$E_r := \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) \leq r\}$$

を定義する. このとき, 族 $\mathcal{C}_d := \{E_r \subset X \times X \mid r \geq 0\}$ は粗構造の基底である. 集合 $\mathcal{E}_d := \langle \mathcal{C}_d \rangle$ を**有界粗構造**と呼ぶ.

以下のように粗空間からボルノロジーを誘導することができる.

命題 2.6. $(X, \mathcal{E})$ を粗空間とする. このとき,

$$\mathcal{B}_{\mathcal{E}} := \{\cup_{i=1}^{n} E_i[p_i] \mid n \in \mathbb{N}, \{E_i\}_{i=1}^{n} \subset \mathcal{E}, \{p_i\}_{i=1}^{n} \subset X\} \cup \{\emptyset\}$$

は X 上のボルノロジーとなる.

2.3 ボルノロジー空間への群作用

位相群は, 群と位相を兼ね備えたものであり, リー群などもその一例である. 位相群の定義は群演算が連続であることを要請した. それと同様にボルノロジー群は群演算が有界 (定義 2.3) であることを要請する.

この節では, $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間 (定義 2.1), L をボルノロジー $\mathcal{B}_L$ を備えた群, ρ を X 上の L-作用とする.

定義 2.7 (ボルノロジー群, cf. [6])**.** 群 L が**ボルノロジー群**であるとは, 積

$$L \times L \to L, \quad (l_1, l_2) \mapsto l_1 l_2$$

および逆元をとる写像

$$L \to L, \quad l \mapsto l^{-1}$$

がともに有界である場合であることをいう. ここで, $L \times L$ には $\langle \mathcal{B}_L \times \mathcal{B}_L \rangle$ が備えられている. ボルノロジーの集合としての直積は一般にボルノロジーにはならないが, ボルノロジー基底にはなる.

位相群に連続作用を定義することに呼応する形で, ボルノロジー群に有界作用を以下で定義する.

定義 2.8 (有界作用)**.** L の X 上の作用 ρ が**有界作用**であるとは, 次の写像が有界であるときである：

$$L \times X \to X, \quad (l, x) \mapsto lx$$

ここで, $L \times X$ には $\langle \mathcal{B}_L \times \mathcal{B}_X \rangle$ が備えられている.

2.4 粗空間への群作用

この節では, [1] によって導入された粗空間上の同程度制御な群作用の定義を紹介する. L を群, X を集合, ρ を X 上の L-作用とする. 各 $l \in L$, $X \times X$ の部分集合 E に対し, 次の 2 つの記法を使用する:

$$E_l := \{(lx, ly) \mid (x, y) \in E\}$$
$$E_L := \bigcup_{l \in L} E_l.$$

距離空間 (より一般に一様空間) では, 写像の族に対して “同程度連続” と呼ばれる概念がある. 特に空間に群作用が備わっているとき, その群自体を自己同型写像の族と見ることができる. その族が同程度連続であるとき, 作用が同程度連続であるという. この定義は距離空間だけではなく, 一様空間に一般化することができる. その “有界” 版の対応物として同程度制御という概念を以下で定義する.

定義 2.9. $(X, \mathcal{E})$ を粗空間, L を群とする. L の作用 ρ が**同程度制御**であるとは, 各 $E \in \mathcal{E}$ に対し, ある $F \in \mathcal{E}$ が存在し, 任意の $l \in L$ に対し $E_l \subset F$ となることをいう.

上記の定義は, E_L が各 $E \in \mathcal{E}$ に対し制御集合であることを意味する. また, $E, F \in \mathcal{E}$ の要素が $E_l \subset F$ を満たす場合, 任意の点 $x \in X$ に対し $l \cdot (E[x]) \subset F[lx]$ が成り立つ.

例 2.10. (X, d) を距離空間とし, L を等長変換群の部分群とする. このとき, L は $(X, \mathcal{E}_d)$ に同程度制御に作用している.

すなわち, 同程度連続は等長作用の一般化である.

2.5 ボルノロジー的 Proper 性と位相的 Proper 性との関連

この節では, $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間, ρ を X 上の有界な L-作用とする (順に定義 2.7, 2.1, 2.8 を参照).

定義 2.11. 作用 ρ が **bornological proper**(以降 B-proper と略記)であるとは, 任意の $B, B' \in \mathcal{B}_X$ に対し, $L_{B \to B'}$ が $\mathcal{B}_L$ に属することをいう.

このようにボルノロジー的に定義した作用の proper 性と位相的に定義した作用の proper 性にはどのような関係性があるだろうか. 実は L や X に適切な設定を定め, コンパクトボルノロジー (例 2.2) を考えると 2 つの proper 作用は同値になる.

定理 2.12. L を局所コンパクトハウスドルフ群, X を連続的な L-作用を備えた局所コンパクトハウスドルフ空間とする. また, それぞれにコンパクトボルノロジー $(L, \mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(L))$ および $(X, \mathcal{B}_{\mathrm{cpt}}(X))$ を考える. このとき, X 上の L-作用が proper であることと, B-proper であることは同値である.

2.6 bornological proper の特徴づけ

この節では, 作用の B-proper 性 (定義 2.11) を特徴付ける. $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群 (定義 2.7), $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間 (定義 2.1), ρ を X 上の有界な L-作用 (定義 2.8) とする. また各点 $x \in X$ に対して, ι_x を軌道 $L \cdot x$ から X への包含写像とし, 写像 q^x を以下のように定義する:

$$q^x \colon L \to L \cdot x,\ l \mapsto lx.$$

このとき, 粗空間 (定義 2.4) に同程度制御 (定義 2.9) に作用している設定下では, B-proper は以下のように特徴づけられる. これはイントロダクションで紹介した定理 1.9 のことである.

定理 2.13 (N)**.** $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{E})$ を粗空間とする. また粗構造から定まるボルノロジー $\mathcal{B}_L$ を考える. 作用 ρ が $(X, \mathcal{B}_\mathcal{E})$ 上の L-有界作用であり, $(X, \mathcal{E})$ 上の同程度制御であるとする. このとき, 次の 2 つの条件は同値である.

(i) 作用 ρ は B-proper である.
(ii) 任意の $x \in X$ に対し, $L^x \in \mathcal{B}_L$ となり, $\iota_x^*(\mathcal{B}_X) = q_*^x(\mathcal{B}_L)$ である.

上記の, $L^x := \{l \in L \mid lx = x\}$ はイソトロピーのことであり, 軌道上の 2 つのボルノロジー $\iota_x^*(\mathcal{B}_X), q_*^x(\mathcal{B}_L)$ については定義 2.3 とその下部分を参照されたい. 適切な設定化では, $L^x \in \mathcal{B}_L$ という条件がイソトロピーが相対コンパクトであるという条件と一致する (詳しくは定理 2.12 を参照されたい). また詳細の説明は省くが, 適切な設定化では任意の点 $x \in X$ に対して, $\iota_x^*(\mathcal{B}_X) = q_*^x(\mathcal{B}_L)$ が成り立つこととが任意の軌道が閉集合であるということは同値である. 注意として一般に有界作用が B-proper でないでも $q_*^x\mathcal{B}_L \subset \iota_x^*\mathcal{B}_X$ は成り立つ.

イントロダクションでは Palais の結果として, C^∞-級の設定において proper 作用は等長作用のケースに限ることを紹介した (定理 1.4). また吉野はより一般の設定において proper 作用は一様空間に同程度連続に作用するケースに限ることを示した (定理 1.6). これらの定理の “粗空間版” として B-proper 作用は粗空間に同程度制御に作用するケースしかないことが明らかになった. これはイントロダクションで紹介した定理 1.10 である.

定理 2.14 (N)**.** $(L, \mathcal{B}_L)$ をボルノロジー群, $(X, \mathcal{B}_X)$ をボルノロジー空間, ρ を $(X, \mathcal{B}_X)$ 上の L-有界作用とする. ρ が B-proper ならば, あるボルノロジーを保つ粗構造 $\mathcal{E}$ が存在して, ρ は同程度制御になる.

定理 2.14 と定理 2.12 によって以下の系が直ちに導かれる.

系 2.15 (N)**.** $(L, \mathcal{B}_L)$ を局所コンパクトハウスドルフ群, $(X, \mathcal{B}_X)$ を局所コンパクトハウスドルフ空間とし, ρ を X 上の L-連続作用とする. ρ が proper ならば, ある粗構造 $\mathcal{E}$ が存在して, 誘導するボルノロジーが X 上のコンパクトボルノロジーと一致し, 作用 ρ は同程度制御になる.

すなわち, 本研究により proper 作用には粗構造が定まることが明らかとなった.

参考文献

[1] Nikolay Brodskiy, Jerzy Dydak, and Atish Jyoti Mitra, *Coarse structures and group actions*, Colloq. Math. **111** (2008), no. 1, 149–158. MR 2353938

[2] Ulrich Bunke and Alexander Engel, *Homotopy theory with bornological coarse spaces*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2269, Springer, Cham, [2020] ©2020. MR 4176662

[3] Dikran Dikranjan and Nicolò Zava, *Categories of coarse groups: quasi-homomorphisms and functorial coarse structures*, Topology Appl. **273** (2020), 106980, 31. MR 4074764

[4] Henri Hogbe-Nlend, *Les racines historiques de la bornologie moderne*, Actes du Colloque d'Analyse Fonctionnelle (Univ. Bordeaux, Bordeaux, 1971), Supplément au Bull. Soc. Math. France, vol. Tome 100, Soc. Math. France, Paris, 1972, pp. 201–206. MR 355511

[5] Richard S. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math. (2) **73** (1961), 295–323. MR 126506

[6] Dinamérico P. Pombo, Jr., *Bornological groups*, Indian J. Math. **54** (2012), no. 2, 225–258. MR 3013350

[7] John Roe, *Lectures on coarse geometry*, University Lecture Series, vol. 31, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. MR 2007488

[8] 吉野 太郎, **固有な作用の一様連続性について**, 表現論シンポジウム講演集 **2006** (2006), 22–30.

ある q 超幾何方程式の接続問題とその退化極限

神戸大学 大学院理学研究科 数学専攻
藤井 大計 (Taikei Fujii) *

概要

超幾何型の Jackson 積分は広く研究されており, 様々な分野で活躍する. 本講演では, バランス条件の付いた Jordan-Pochhammer 型 Jackson 積分の接続公式について報告する. また, この Jackson 積分と Kajihara の q 超幾何級数の関係およびその退化極限についても述べる. 本講演の内容は神戸大学の信川喬彦氏との共同研究に基づく.

1 導入

記号: よく使う記号をまとめる. $q \in \mathbb{C}$, $0 < |q| < 1$ と固定する.

$$(a)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-aq^i),\ (a)_l = \frac{(a)_\infty}{(aq^l)_\infty},\ l \in \mathbb{Z}, \tag{1.1}$$

$$(a_1, \dots, a_r)_L = (a_1)_L \cdots (a_r)_L,\ L \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \tag{1.2}$$

$$\theta(x) = (x, q/x)_\infty,\ \theta(x_1, \dots, x_r) = \theta(x_1) \cdots \theta(x_r), \tag{1.3}$$

$$\int_0^\tau f(t)d_qt = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(\tau q^n)\tau q^n,\ \int_0^{\tau\infty} f(t)d_qt = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\tau q^n)\tau q^n, \tag{1.4}$$

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)d_qt = \int_0^{\tau_2} f(t)d_qt - \int_0^{\tau_1} f(t)d_qt, \tag{1.5}$$

$$T_x f(x) = f(qx). \tag{1.6}$$

Gauss の超幾何級数は次で定義される級数である.

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \gamma\end{matrix}; x\right) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 1}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 1\cdot 2}x^2 + \cdots. \tag{1.7}$$

この級数は, 数学, 物理学, 工学など様々な場面に登場する重要な特殊関数である. この級数は Gauss の超幾何方程式と呼ばれる次の微分方程式を満たす.

$$\left[x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\frac{d}{dx} - \alpha\beta\right] f(x) = 0, \tag{1.8}$$

* tfujii@math.kobe-u.ac.jp

この微分方程式は $\mathbb{P}^1$ 上に 3 点の特異点を持つ 2 階の Fuchs 型方程式の標準的な表示である．Gauss の超幾何方程式には, 次のような Euler 型積分解を持つ.

$$\int_p^q t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt, \quad p,q \in \{0,1,\frac{1}{x},\infty\} \tag{1.9}$$

Heine の q 超幾何方程式と呼ばれる Gauss の超幾何方程式の 'q 差分版' が知られている:

$$[x(1-aT_x)(1-bT_x)-(1-T_x)(1-cq^{-1}T_x)]f(x)=0. \tag{1.10}$$

ただし, $T_x h(x)=h(qx)$ である．この方程式は, $q\to 1$ という極限で方程式 (1.8) に退化する．方程式 (1.10) は, 次のような積分解を持つ.

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} t^{\alpha-1}\frac{(qt,bxt)_\infty}{(ct/a,xt)_\infty}d_qt, \quad \tau_1,\tau_2\in\{0,1,q/bx\}, \tag{1.11}$$

$$\frac{\theta(bx)}{\theta(x)}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} s^{\beta-\gamma}\frac{(qat/c,qt/x)_\infty}{(t,qt/bx)_\infty}d_qt, \quad \sigma_1,\sigma_2\in\{0,x,c/a\}. \tag{1.12}$$

例えば, 次のような解の間の線形関係を持つ:

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{\alpha-1}\frac{(qt,bxt)_\infty}{(ct/a,xt)_\infty}d_qt &= \left(\frac{b}{q}\right)^\alpha\frac{\theta(b)}{\theta(b/a)}x^\alpha\frac{\theta(ax)}{\theta(x)}\times\int_0^{q/bx} t^{\alpha-1}\frac{(qt,bxt)_\infty}{(ct/a,xt)_\infty}d_qt\\ &+\left(\frac{a}{c}\right)^{\beta-\gamma+1}\frac{\theta(c/b)}{\theta(a/b)}\times\frac{\theta(bx)}{\theta(x)}\int_0^{c/a} s^{\beta-\gamma}\frac{(qat/c,qt/x)_\infty}{(t,qt/bx)_\infty}d_qt.\end{aligned} \tag{1.13}$$

このような解の間の線形関係を求めることは基本的で重要な問題であり接続問題と呼ぶ．本稿では, Heine の q 超幾何方程式 (1.10) を拡張した方程式に対する接続問題を考える.

[6] において, 次の $M+1$ 階の q 差分方程式が導入された.

$$E_M y=0, \tag{1.14}$$

$$\begin{aligned}E_M &= x^{M+2}T_x^{-1}\prod_{i=0}^{M}(B-Aq^iT_x)\\ &+\sum_{k=1}^{M+1}(-1)^k x^{M+2-k}[e_k(a)T_x^{-1}-qe_k(b)]\prod_{i=0}^{M-k}(B-Aq^iT_x)\prod_{i=0}^{k-2}(1-q^{-i}T_x)\\ &+(-1)^M\frac{a_2\cdots a_{M+3}}{B}T_x^{-1}\prod_{i=0}^{M}(1-q^{-i}T_x).\end{aligned} \tag{1.15}$$

ここで, $a=(a_2,a_3,\dots,a_{M+3})$, $b=(b_2,b_3,\dots,b_{M+3})$ であり e_k は k 次基本対称式である．また, $Aa_2\cdots a_{M+2}=q^2Bb_2\cdots b_{M+3}$ とする．この方程式は次のバランス条件 $Aa_2\cdots a_{M+2}=q^2Bb_2\cdots b_{M+3}$ のついた積分解を持つ:

$$\varphi_{i,j}=\int_{q/a_i}^{q/a_j}\frac{(Axt)_\infty}{(Bxt)_\infty}\prod_{k=2}^{M+3}\frac{(a_kt)_\infty}{(b_kt)_\infty}d_qt, \quad \tilde{\varphi}_{i,j}=x^\lambda\int_{b_i}^{b_j}\frac{(qt/(Bx))_\infty}{(qt/(Ax))_\infty}\prod_{k=2}^{M+3}\frac{(qt/(b_k))_\infty}{(qt/(a_k))_\infty}d_qt \tag{1.16}$$

また, [6] において, この方程式 (1.14) は Kajihara の q 超幾何級数 $W^{M,2}$ を解に持つことが示された．Kajihara の q 超幾何級数は, Macdonald 理論に背景を持ち, 双対変換公式などの良い性質を持つ多重級数である．本稿では, $E_My=0$ とその退化 $E'_My=0$ についての接続問題を考える．また, Kajihara の q 超幾何級数との関係についても述べる.

2 $E_M y = 0$ について

2.1 積分の接続公式

この章では, 方程式 $E_M y = 0$ (1.14) の積分解 (1.16) の間の線形関係式を導出する. $E_M y = 0$ に対する接続公式を以下の方法で導出した. [5] で与えられた, Jordan-Pochhammer 型 Jackson 積分の間の接続公式を特殊化する. 次に, この特殊化された接続公式の余分な項を消去する. この消去には, 作用素 E_M の性質を使う. 得られた接続公式は次で与えられる.

Theorem 2.1 ([2])**.** バランス条件 $a_1 \cdots a_{M+3} = q^2 b_1 \cdots b_{M+3}$ のついた積分 (1.16) に対して, 次の接続公式が成り立つ*:*

$$\sum_{k=2}^{M+3} \tilde{C}_k \int_{q/a_1}^{q/a_k} \prod_{i=1}^{M+3} \frac{(a_i t)_\infty}{(b_i t)_\infty} d_q t = 0, \tag{2.1}$$

ここで,

$$\tilde{C}_k = \frac{C_k}{C_1} = \left(\frac{a_k}{a_1}\right)^2 \prod_{i=1}^{M+3} \frac{\theta(a_k/b_i)}{\theta(a_1/b_i)} \prod_{\substack{1 \le i \le M+3 \\ i \ne 1}} \theta(a_1/a_i) \prod_{\substack{1 \le i \le M+3 \\ i \ne k}} \theta(a_k/a_i)^{-1}. \tag{2.2}$$

2.2 Kajihara の q 超幾何級数との関係

次の級数は Kajihara の q 超幾何関数 [4] と呼ばれる.

$$\begin{aligned} & W^{M,N}\left(\begin{matrix} \{a_i\}_{1\le i\le M} \\ \{x_i\}_{1\le i\le M} \end{matrix} \,\middle|\, s; \{u_k\}_{1\le k\le N}; \{v_k\}_{1\le k\le N}; z \right) \\ &= \sum_{l \in (\mathbb{Z}_{\ge 0})^M} z^{|l|} \frac{\Delta(xq^l)}{\Delta(x)} \prod_{1\le i\le M} \frac{1 - q^{|l|+l_i} s x_i}{1 - s x_i} \\ &\qquad \times \prod_{1\le j\le M} \left(\frac{(s x_j)_{|l|}}{((sq/a_j)x_j)_{|l|}} \prod_{1\le i\le M} \frac{(a_j x_i/x_j)_{l_i}}{(q x_i/x_j)_{l_i}} \right) \\ &\qquad \times \prod_{1\le k\le N} \left(\frac{(v_k)_{|l|}}{(sq/u_k)_{|l|}} \prod_{1\le i\le M} \frac{(u_k x_i)_{l_i}}{((sq/v_k)x_i)_{l_i}} \right), \end{aligned} \tag{2.3}$$

ただし, $|l| = l_1 + \cdots + l_M$, $\Delta(x) = \prod_{1\le i<j\le M} (x_i - x_j)$, $xq^l = \{x_1 q^{l_1}, \ldots, x_M q^{l_M}\}$.

[6] において, 積分 $\varphi_{i,j}$ と $W^{M,N}$ の間の関係が得られた.

$$W\left(\begin{matrix} \{a_i\}_{1\le i\le M+3} \\ \{b_i\}_{1\le i\le M+3} \end{matrix} \right) = \frac{-1}{q(1-q)(q)_\infty} \int_{q/a_1}^{q/a_2} \prod_{i=1}^{M+3} \frac{(a_i t)_\infty}{(b_i t)_\infty} d_q t. \tag{2.4}$$

ただし,

$$W\left(\begin{array}{c}\{a_i\}_{1\le i\le M+3}\\ \{b_i\}_{1\le i\le M+3}\end{array}\right)$$
$$=\frac{(a_1/a_2,a_3/b_2,a_2q/a_1,b_1b_2q^2/(a_1a_2),b_2b_3q^2/(a_1a_2))_\infty}{a_1(b_1q/a_1,b_1q/a_2,b_2q/a_1,b_2q/a_2,b_3q/a_1,b_3q/a_2)_\infty}\prod_{i=4}^{M+3}\frac{(b_2q^2b_i/(a_1a_2),qa_i/a_1,qa_i/a_2)_\infty}{(b_2q^2a_i/(a_1a_2),qb_i/a_1,qb_i/a_2)_\infty}$$
$$\times W^{M,2}\left(\begin{array}{c|c}\{a_i/b_i\}_{4\le i\le M+3} & \frac{b_2q}{a_1a_2};\frac{1}{b_1},\frac{1}{b_3};\frac{b_2q}{a_1},\frac{b_2q}{a_2};\frac{a_3}{b_2}\\ \{a_i\}_{4\le i\le M+3}&\end{array}\right), \tag{2.5}$$

であり, $a_1\cdots a_{M+3}=q^2b_1\cdots b_{M+3}$. 接続公式 (2.1) とこの公式によって, 次の線形関係式をえる.

Theorem 2.2 ([2])**.** 次の線形関係式が成り立つ.

$$\sum_{i=2}^{M+3}D_kW\left(\begin{array}{c}a_1,a_k,a_2,\dots,a_{k-1},a_{k+1},\dots a_{M+3}\\ \{b_i\}_{1\le i\le M+3}\end{array}\right)=0, \tag{2.6}$$

ここで

$$D_k=\left(\frac{a_k}{a_1}\right)^2\prod_{i=1}^{M+3}\frac{\theta(a_k/b_i)}{\theta(a_1/b_i)}\prod_{\substack{1\le i\le M+3\\ i\ne 1}}\theta(a_1/a_i)\prod_{\substack{1\le i\le M+3\\ i\ne k}}\theta(a_k/a_i)^{-1}. \tag{2.7}$$

ただし, $a_1\cdots a_{M+3}=q^2b_1\cdots b_{M+3}$.

3 $E_My=0$ の退化について

3.1 積分の接続公式

[6] において, $E_My=0$ の退化が計算されている. その一つに次の $M+1$ 階の q 差分方程式がある.

$$E'_My=0 \tag{3.1}$$
$$\begin{aligned}E'_M&=x^{M+2}(1-q^\alpha T_x)\prod_{i=0}^{M}(B-Aq^iT_x)\\&\quad+\sum_{k=1}^{M+1}(-1)^kx^{M+2-k}(e_k(a)-q^\alpha e_k(b)T_x)\prod_{i=0}^{M+2-k}(B-Aq^iT_x)\prod_{i=0}^{k-1}(1-q^{-i}T_x)\\&\quad+(-1)^{M+2}\frac{a_2a_3\cdots a_M}{B}T_x^{-1}\prod_{i=0}^{M+1}(1-q^iT_x)\end{aligned} \tag{3.2}$$

この方程式は次の積分解を持つ:

$$I_{i,j}=\int_{q/a_i}^{q/a_j}t^{\alpha-1}\frac{(Axt)_\infty}{(Bxt)_\infty}\prod_{k=2}^{M+2}\frac{(a_kt)_\infty}{(b_kt)_\infty}d_qt,\quad 0\le i,j\le M+2,\ a_0=0 \tag{3.3}$$

$$\tilde{I}_{i,j}=\frac{\theta(Ax)}{\theta(Bx)}\int_{b_i}^{b_j}\frac{(qt/(Bx))_\infty}{(qt/(Ax))_\infty}\prod_{k=2}^{M+2}\frac{(qt/(b_k))_\infty}{(qt/(a_k))_\infty}d_qt,\quad 1\le i,j\le M+3,\ b_{M+3}=\sigma\infty \tag{3.4}$$

この方程式に対しても, 以下の接続公式を導出できる.

Theorem 3.1. バランス条件 $a_1a_2\cdots a_{M+2}=q^{\alpha+1}b_1b_2\cdots b_{M+2}$ のついた積分 $I_{i,j}$, $\tilde{I}_{i,j}$ は次の接続公式を満たす.

$$\sum_{k=2}^{M+2}\check{C}_k\int_{b_1}^{b_k}\prod_{i=1}^{M+2}\frac{(qt/b_i)_\infty}{(qt/a_i)_\infty}d_qt+\check{C}_{M+3}\int_{b_1}^{\sigma\infty}\prod_{i=1}^{M+2}\frac{(qt/b_i)_\infty}{(qt/a_i)_\infty}d_qt=0, \tag{3.5}$$

$$\int_0^{q/a_p}t^{\alpha-1}\prod_{i=1}^{M+2}\frac{(a_it)_\infty}{(b_it)_\infty}d_qt=\sum_{\substack{1\le k\le M+2\\ k\neq r}}\check{L}_{k,p}\times\frac{\theta(a_1)}{\theta(b_1)}\int_{b_r}^{b_k}\prod_{i=1}^{M+2}\frac{(qt/b_i)_\infty}{(qt/a_i)_\infty}d_qt, \tag{3.6}$$

ここで

$$\check{C}_k=\left(\frac{b_1}{b_k}\right)^2\frac{\theta(\sigma/b_k)}{\theta(\sigma/(q^{\alpha-1}b_k))}\frac{\theta(\sigma/b_1)}{\theta(\sigma/(q^{\alpha-1}b_1))}\prod_{i=1}^{M+2}\frac{\theta(a_i/b_k)}{\theta(a_i/b_1)}\prod_{i=2}^{M+2}\theta(b_i/b_1)\prod_{i=1}^{M+2}\theta(b_i/b_k)^{-1},\quad 1\le k\le M+2, \tag{3.7}$$

$$\check{C}_{M+3}=\left(\frac{b_1}{\sigma}\right)^2\theta(q^\alpha)\frac{\theta(\sigma/b_1)}{\theta(\sigma/(q^{\alpha-1}b_1))}\prod_{i=1}^{M+2}\frac{\theta(a_i/\sigma))}{\theta(a_i/b_1)}\prod_{i=2}^{M+2}\theta(b_i/b_1)\prod_{i=1}^{M+2}\theta(b_i/\sigma)^{-1}, \tag{3.8}$$

$$\check{L}_{k,p}=\frac{1}{qb_k}\left(\frac{q}{a_p}\right)^\alpha\frac{\theta(q^{\alpha+1}b_k/a_p)}{\theta(q^\alpha)}\frac{\theta(b_1)}{\theta(a_1)}\prod_{\substack{1\le j\le M+2\\ j\neq p}}\theta\left(\frac{a_j}{b_k}\right)\prod_{\substack{1\le j\le M+2\\ j\neq k}}\theta\left(\frac{b_j}{b_k}\right)^{-1}. \tag{3.9}$$

積分 $I_{0,j}$, $2\le k\le M+2$ は $E'_My=0$ の $x=0$ における基本解系を与える. また, $\tilde{I}_{M+2,k}$, $2\le k\le M+3$, $k\neq M+2$ は $x=\infty$ における基本解系である. よって, 定理 3.1 から原点と無限遠点の間の接続公式を得る.

Corollary 3.2. バランス条件 $a_1a_2\cdots a_{M+2}=q^{\alpha+1}b_1b_2\cdots b_{M+2}$ を仮定し $a_1=Ax$, $b_1=Bx$ とおく. この時, 次の $E'_My=0$ の接続公式をえる.

$$\begin{pmatrix}I_{0,2} & I_{0,3} & \cdots & I_{0,M+2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\tilde{I}_{M+2,2} & \tilde{I}_{M+2,3} & \cdots & \tilde{I}_{M+2,M+1} & \tilde{I}_{M+2,M+3}\end{pmatrix}R_1R_2 \tag{3.10}$$

ここで

$$R_1=\begin{pmatrix}\check{r}_2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \check{r}_3 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \check{r}_4 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\ \check{r}_{M+3} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ \check{r}_{M+3} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},\quad R_2=\begin{pmatrix}\check{L}_{1,2} & \check{L}_{1,3} & \cdots & \check{L}_{1,M+2}\\ \check{L}_{3,2} & \check{L}_{2,3} & \cdots & \check{L}_{2,M+2}\\ \check{L}_{4,2} & \check{L}_{4,3} & \cdots & \check{L}_{3,M+2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \check{L}_{M+1,2} & \check{L}_{M+1,3} & \cdots & \check{L}_{M+1,M+2}\end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

であり $\check{r}_k=\check{C}_k\Big|_{b_1\leftrightarrow b_{M+2}}$ とする.

3.2 Kajihara の q 超幾何級数との関係

Kajihara の q 超幾何級数 $\Phi^m_{n,r}$ [4] は次で与えられる:

$$\Phi^m_{n,r}\left(\begin{array}{c|c|c|c}\{a_i\}_{1\le i\le m}\\ \{x_i\}_{1\le i\le m}\end{array}\begin{array}{c|c|c}\{b_k\}_{1\le k\le n}\\ \{d_k\}_{1\le k\le n}\end{array}\begin{array}{c|c|c}\{c_s\}_{1\le s\le r}\\ \{e_s\}_{1\le s\le r}\end{array}\begin{array}{c|}u\\ \\ \end{array}\right)=\sum_{l\in(\mathbb{Z}_{\ge 0})^M}u^{|l|}\frac{\Delta(xq^l)}{\Delta(x)}\prod_{1\le i,j\le n}\frac{(a_jx_i/x_j)_{l_i}}{(qx_i/x_j)_{l_i}}$$
$$\times\left(\prod_{k=1}^m\prod_{i=1}^n\frac{(b_kx_i)_{l_i}}{(d_kx_i)_{l_i}}\right)\left(\prod_{k=s}^r\frac{(c_s)_{|l|}}{(e_s)_{|l|}}\right). \tag{3.12}$$

公式 (2.4) を退化すると次の変換公式が得られる.

$$F_0\left(\begin{array}{c}\{a_i\}_{1\le i\le M+2}\\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2}\end{array}\right)=\frac{-1}{q(1-q)(q)_\infty}\int_0^{q/a_1}\prod_{k=1}^{M+2}t^{\alpha-1}\frac{(a_kt)_\infty}{(b_kt)_\infty}d_qt, \tag{3.13}$$

$$F_\infty\left(\begin{array}{c}\{a_i\}_{1\le i\le M+2}\\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2}\end{array}\right)=\frac{-1}{q(1-q)(q)_\infty}\int_{b_1}^{b_2}\prod_{k=1}^{M+2}\frac{(qt/(b_k))_\infty}{(qt/(a_k))_\infty}d_qt. \tag{3.14}$$

ここで

$$F_0\left(\begin{array}{c}\{a_i\}_{1\le i\le M+2}\\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2}\end{array}\right)=\frac{q^{\alpha-1}}{a_1^\alpha}\frac{(q^\alpha b_1/a_1,a_3/b_1)_\infty}{(q^\alpha,qb_3/a_1,qb_1/a_1)_\infty}\prod_{i=4}^{M+2}\frac{(qa_i/a_1)_\infty}{(qb_i/b_1)_\infty}$$
$$\times\Phi^M_{1,1}\left(\begin{array}{c|c|c|c}\{a_i/b_i\}_{1\le i\le n}\\ \{a_i\}_{1\le i\le n}\end{array}\begin{array}{c|c}\{1/b_3\}\\ \{q/b_1\}\end{array}\begin{array}{c|c}\{qb_1/a_1\}\\ \{q^{\alpha+1}b_1/a_1\}\end{array}\begin{array}{c|}a_3/b_1\\ \\ \end{array}\right), \tag{3.15}$$

$$F_\infty\left(\begin{array}{c}\{a_i\}_{1\le i\le M+2}\\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2}\end{array}\right)=\frac{(q^{1-\alpha},b_2/b_1,qb_1/b_2)_\infty}{(qb_1/a_1,qb_2/a_1,qb_1/a_2,qb_2/a_2)_\infty}\prod_{i=4}^{M+2}\frac{(qb_1/b_i,qb_2/b_i)_\infty}{(qb_1/a_i,qb_2/a_i)_\infty}$$
$$\times\Phi^M_{2,0}\left(\begin{array}{c|c|c|c}\{a_j/b_j\}_{3\le i\le M+2}\\ \{1/b_i\}_{3\le i\le M+2}\end{array}\begin{array}{c|c}\{a_1,a_2\}\\ \{b_1,b_2\}\end{array}\begin{array}{c|c}\cdot\\ \cdot\end{array}\begin{array}{c|}q^{\alpha-1}\\ \\ \end{array}\right), \tag{3.16}$$

であり $a_1a_2\cdots a_{M+2}=q^{\alpha+1}b_1b_2\cdots b_{M+2}$ とする.

この公式と退化極限によって, 次の線形関係式を得る.

Theorem 3.3. 次の線形関係式が成り立つ.

$$\sum_{i=2}^{M+2}\check{D}_kF_0\left(\begin{array}{c}a_k,a_1,a_2,\dots,a_{k-1},a_{k+1},\dots a_{M+2}\\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2}\end{array}\right)=0, \tag{3.17}$$

$$F_0\left(\begin{array}{c}a_p,a_1,a_2,\dots,a_{p-1},a_{p+1},\dots a_{M+2}\\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2}\end{array}\right)$$
$$=\sum_{\substack{1\le k\le M+2\\ k\ne r}}\check{L}_{k,p}\times F_\infty\left(\begin{array}{c}a_r,a_k,a_1,a_2,\dots,a_{r-1},a_{r+1},\dots,a_{k-1},a_{k+1}\dots,a_{M+2}\\ \{b_i\}_{1\le i\le M+2}\end{array}\right). \tag{3.18}$$

ここで

$$\check{D}_k=\frac{a_k^{\alpha+1}}{q^{\alpha-1}\sigma^2}\prod_{i=1}^{M+2}\frac{\theta(\sigma/a_i)}{\theta(\sigma/b_i)}\prod_{i=1}^{M+2}\theta(a_k/b_i)\prod_{\substack{1\le i\le M+2\\ i\ne k}}\theta(a_k/a_i)^{-1}. \tag{3.19}$$

ただし, $a_1 \cdots a_{M+2} = q^{\alpha+1} b_1 \cdots b_{M+2}$ とする.

謝辞

本研究集会での講演の機会を与えてくださった第 21 回数学総合若手研究集会の世話人の皆様に深く感謝いたします. 本研究は JST 次世代研究者挑戦的研究プログラム JPMJSP2148 と JSPS 科研費 Grant Number 22H01116 の支援を受けたものです.

参考文献

[1] Fujii, T., & Nobukawa, T. (2022). Hypergeometric solutions for variants of the q-hypergeometric equation. arXiv preprint arXiv:2207.12777.

[2] T. Fujii, T. Nobukawa, Connection formula for the Jackson integral of Riemann-Papperitz type. arXiv:2404.00969.

[3] Gasper, G., & Rahman, M. (2011). Basic hypergeometric series (Vol. 96). Cambridge university press.

[4] Y. Kajihara, A unified approach to transformations for multiple basic hypergeometric series of type A, in: Representation Theory, Special Functions and Painlevé Equations - RIMS 2015, in: Adv. Stud. Pure Math. **76**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 247-274 (2018).

[5] Mimachi, K. (1989). Connection problem in holonomic q-difference system associated with a Jackson integral of Jordan-Pochhammer type. Nagoya Mathematical Journal, 116, 149-161.

[6] T. Nobukawa, Jackson integral representation for Kajihara's q-hypergeometric series and an extension of the q-Riemann-Papperitz system, arXiv:2402.14358.

2 次元 2 状態量子ウォークの弱収束定理

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
関 元樹 (Motoki SEKI) *

概要

量子ウォークはランダムウォークの量子版とされる数理モデルである．ランダムウォークの長時間極限の漸近挙動を中心極限定理が記述するように，量子ウォークの漸近挙動は弱収束定理によって記述される．1 次元の一様な量子ウォークにおいての弱収束定理は 2002 年に今野によって示された．極限確率分布において，初期状態に依存しない部分は今野関数と呼ばれ，様々な 1 次元量子ウォークモデルの極限確率分布に現れることが知られている．これまでに見出された 2 次元の量子ウォークの極限確率分布に現れる関数は，一見 2 次元今野関数に見えるものの，その関係性は 1 次元の場合と比べて十分に明らかではなかった．本研究では，2 次元 2 状態の一様な量子ウォークを解析し，1 次元今野関数との関係性を厳密に明らかにすることで，真の 2 次元今野関数と呼ぶべき関数を特定した．本研究は現在のところ arXiv のプレプリント [1] として発表されている．なお，本研究は滋賀大学の浅原啓介氏，北海学園大学の船川大樹氏，公立小松大学の鈴木章斗氏との共同研究である．

1　導入

量子ウォークはランダムウォークの量子版とされる数理モデルであり，本研究では離散時間量子ウォークに焦点を当てる．以下ではランダムウォークと対比しながら量子ウォークと，その弱収束定理を紹介する．

1.1　ランダムウォークの概要

ランダムウォークの漸近挙動は中心極限定理により記述される．簡単のため，その内容を 1 ステップあたり右に 1 サイト移動する確率を $p = 1/2$ とする場合について述べる．

定理 1 (1 次元単純ランダムウォークにおける中心極限定理)**.** スケールしたウォーカーの位置を表す確率変数 $S_t/\sqrt{t}$ は，$t \to \infty$ の極限において，標準正規分布に分布収束する：

$$\frac{S_t}{\sqrt{t}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1). \tag{1}$$

なお，本テクニカルレポートにおいて，記号 $\Longrightarrow$ は分布収束（あるいは，確率変数の弱収束）を表すものとする．

* E-mail:marmot.motoki@gmail.com

この定理は直感的には以下のような意味を持つ：

- 単純ランダムウォークでは，特徴的な拡散のスケールは $v = \sqrt{t}$ である．
- 確率分布は，原点付近で確率が高く，周辺に至って低くなる，ガウシアンの形状を保ちながら拡散していく．

次節以降ではランダムウォークの特徴と比較しながら 1 次元量子ウォークのモデルの定義と特徴を述べていく．

1.2 離散時間量子ウォーク

典型的な 1 次元の離散時間量子ウォークモデルの定義を以下で述べる．まず，時刻を $t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で表し，空間は $\mathbb{Z}$ とする．ウォーカーの状態空間はヒルベルト空間

$$\mathcal{H} := \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}) = \left\{ \Psi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \sum_{x\in\mathbb{Z}} \|\Psi(x)\|_{\mathbb{C}^2}^2 < \infty \right\} \tag{2}$$

とする．$\mathbb{Z}$ の各サイト上に $\mathbb{C}^2$ のベクトルが配置されていて，2 乗総和可能な関数として定義される．X_t を量子ウォーカーの位置を表す確率変数とする．時刻 t における位置 x に量子ウォーカーが存在する確率は次の式で計算される：

$$P(X_t = x) = |\Psi^{(1)}(t,x)|^2 + |\Psi^{(2)}(t,x)|^2. \tag{3}$$

続いて，1 次元の離散時間量子ウォークのダイナミクスについて述べる．時間発展作用素は $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素 U である．初期状態が $\|\Psi_0\| = 1$ なる $\Psi_0 \in \mathcal{H}$ であるとき，t ステップ後の状態 $\Psi_t = U^t\Psi_0$ で与えられる[*1]．時間発展作用素は典型的には 2 つの $\mathcal{H}$ 上の作用素 S と C を用いて $U = SC$ と表される．この 2 つの作用素はそれぞれ（条件付き）シフト作用素とコイン作用素と呼ばれる．$\ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ 上の左シフト作用素 L を次のように定義する：

$$L\psi(x) = \psi(x+1), \qquad \psi \in \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}).$$

この L を用いて，シフト作用素 S は $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C}) \oplus \ell^2(\mathbb{Z};\mathbb{C})$ 上の行列表示として，

$$S := \begin{pmatrix} L & O \\ O & L^* \end{pmatrix} \tag{4}$$

と定義される．一方コイン作用素 C の方は，一般には各サイトごとに 2×2 のユニタリ行列 $C(x)$ が定義されていて，それをすべてのサイトに直和することが多い．量子ウォークモデルが一様な場合はすべての $x \in \mathbb{Z}$ において $C(x)$ が等しく，次のように表すことができる：

$$C := \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} e^{i\delta/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha}a & e^{i\beta}b \\ -e^{-i\beta}b & e^{-i\alpha}a \end{pmatrix} \tag{5}$$

[*1] もし，系のハミルトニアン H が存在するとすれば，$U = e^{-iH}$ とみなせば，$\Psi_t = e^{-itH}\Psi_0$ となり，Schrödinger 方程式と対応づく．しかし，一般には量子ウォークに対応するハミルトニアンの存在は言えないことが多い．

図 1　ランダムウォークと Hadamard ウォークの数値シミュレーションした確率分布の比較図. 青線がランダムウォーク，橙線が Hadamard ウォークを示す.

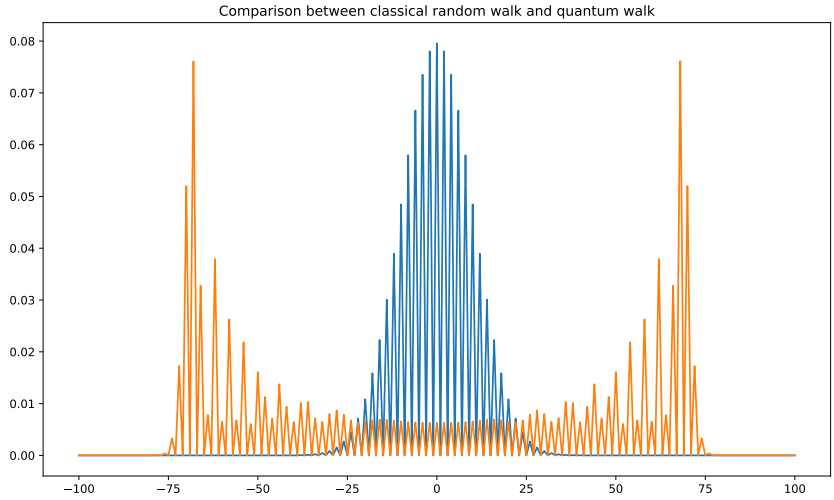
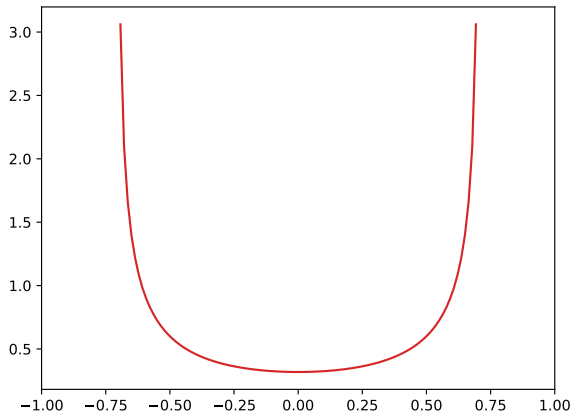


図 2　1 次元今野関数 $f_{\mathrm{K}}(v;r)$



ここで，$a, b \in [0,1]$ は，$a^2 + b^2 = 1$ を満たし，$\alpha, \beta, \delta \in [-\pi, \pi)$ である．以上で，1 次元の離散時間量子ウォークモデルのダイナミクスが定義された.

ランダムウォークと一様な離散時間量子ウォークの典型的なモデルである Hadamard ウォークをそれぞれ数値シミュレーションした結果が図 1 である．このシミュレーションから 1 次元量子ウォークはランダムウォークに比して次のような特徴があることが分かる：

- 量子ウォークはランダムウォークに比して拡散が早い.
- ランダムウォークは確率分布が原点付近の確率が高く，周辺に至って確率が低くなるガウシアンの形状を保ちながら拡散していくのに対して，量子ウォークは原点付近の確率が低く，確率が高い 2 つの山が左右に拡散していく，確率分布の形状が**逆釣鐘型**である.

表 1　古典ランダムウォークと量子ウォークの比較

比較項目	古典ランダムウォーク	量子ウォーク
確率過程か否か？	Yes	No
何が時間発展するのか？	確率測度	ウォーカーの状態
主要な定理	中心極限定理	弱収束定理
スケーリングされた確率変数	$S_t/\sqrt{t}$	X_t/t
典型的な確率分布	標準正規分布	今野分布
分布の形状	単峰型	逆釣鐘型

1.3　1 次元量子ウォークの弱収束定理

離散時間量子ウォークにおける最も基本的な定理が**弱収束定理**である．一様な 1 次元量子ウォークに関する弱収束定理は，2002 年に今野によって組合せ論的手法を用いて示された．その定理の主張が以下の通りである：

定理 2 (Konno (2002)[2])**.** 一様な 1 次元量子ウォーク $U = SC$ の S と C はそれぞれ式 (4) と (5) で定義されたものとする．このとき，スケールされた位置を表す確率変数 X_t/t は $t \to \infty$ である確率変数 V_{K} に弱収束する：

$$\frac{X_t}{t} \Longrightarrow V_{\mathrm{K}}. \tag{6}$$

V_{K} の累積分布関数は

$$\begin{aligned} P\left(V_{\mathrm{K}} \le x\right) &= \lim_{t\to\infty} P\left(\frac{X_t}{t} \le x\right) \\ &= \int_{-\infty}^{x} w(v) f_{\mathrm{K}}(v; v_{\max})\, dv \end{aligned} \tag{7}$$

で与えられる．ここで $w(v)$ は初期状態に依存する v の関数で，**今野関数** $f_{\mathrm{K}}(v; r)$ と定数 $v_{\max} = a$ は初期状態に依存しない．また，今野関数は以下で与えられる：

$$f_{\mathrm{K}}(v; r) := \frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi(1-v^2)\sqrt{r^2-v^2}} I_{(-r,r)}(v). \tag{8}$$

ここで，$I_S(v)$ は集合 S の指示関数である．

本定理の重要な点はランダムウォークの拡散スケールが $\sqrt{t}$ なのに対し，量子ウォークでは t である点である．このことを，ランダムウォークが**拡散的広がり** (diffusive spreading) を示すのに対して，量子ウォークは**線形的広がり** (ballistic spreading, linear spreading) を示すという．確率密度関数の形状がランダムウォークがガウシアンの形状をしているのに対して，量子ウォークは逆釣鐘形をしている．特に $v = -v_{\max}, v_{\max}$ まわりで確率が高くなる．

表 2　最大の速さを用いた，1 次元量子ウォークの分類．ここで，δ_x は $x \in \mathbb{R}$ におけるデルタ測度である．

分類	極限分布	挙動
(a) $v_{\max} = 0$	δ_0	束縛状態
(b) $v_{\max} \in (0,1)$	今野分布	線形的広がり
(c) $v_{\max} = 1$	$C_{-1}\delta_{-1} + C_{+1}\delta_{+1}$	一方向への運動

古典ランダムウォークと量子ウォークの特徴を比較したのが表 1 である．古典ランダムウォークは確率過程の一種であるのに対して，量子ウォークは確率過程ではない．これは古典ランダムウォークは確率測度が時間発展するのに対して，量子ウォークが時間発展するのはウォーカーの状態であって，確率分布は時間発展された状態から非可逆的に計算されるものだからである．

1.4　1 次元量子ウォークにおける最大の速さ $v_{\max}$

1 次元の量子ウォークと 2 次元の量子ウォークを統一的に理解するために，**最大の速さ** $v_{\max}$ という，モデルに依存する定数を導入する．Fourier 変換した時間発展作用素から，分散関係 $\omega(k)$ が計算できる．1 次元の一様な量子ウォーク（式 (4) 及び (5)）においては次のようになる：

$$\omega(k) = a\cos(k + \alpha). \tag{9}$$

ただし k は $\mathbb{T} := [-\pi, \pi)$ を動く．この分散関係を波数 k で微分すると，群速度 $v_{\mathrm{g}}(k)$ が計算できる．その最大値を最大の速さ $v_{\max}$ と定義する：

$$v_{\max} := \max_{k\in\mathbb{T}} |v_{\mathrm{g}}(k)| = \max_{k\in\mathbb{T}} \left| \frac{d\omega(k)}{dk} \right|. \tag{10}$$

これを計算すると，$v_{\max} = a$ となる．

このように最大の速さを導入すると，1 次元量子ウォークを最大の速さによって表 2 のように分類することができる．2 次元の量子ウォークについても，この最大の速さ $v_{\max}$ という定数で量子ウォークを分類していく．

1.5　2 次元量子ウォークの先行研究と本研究の目的

1 次元の量子ウォークの極限確率分布については，多様なモデルで解析が進められてきた一方で，2 次元の量子ウォークに関する研究は十分に進んでいない．

Watabe らは Grover ウォークを一般化した，2 次元 4 状態の 1 パラメータ量子ウォークに対して，次のような極限確率分布の絶対連続部分を導出した [3]：

$$f(v_1, v_2) = \frac{1}{\pi^2(1 - v_1^2)(1 - v_2^2)} I_E(v_1, v_2), \tag{11}$$

ここで，E は $\pi/4$ 傾けた単一の楕円で，

$$E = \left\{ (v_1, v_2) \;\middle|\; \frac{(v_1 + v_2)^2}{4a} + \frac{(v_1 - v_2)^2}{4(1-a)} < 1 \right\} \tag{12}$$

と定義される．

Di Franco らは alternate quantum walk と呼ばれる特定の 2 次元 2 状態量子ウォークが，2 次元 4 状態の Generalized Grover walk モデルの極限確率分布の絶対連続部分と，等しい確率分布を持つという意味で対応づくことを示した [4, 5].

しかし，式 (11) の f を 2 次元の今野関数と認めることは次の理由からできない．f と 1 次元今野関数 f_{K} を比較すると，$\sqrt{r^2-v^2}$ に相当する部分が f_{K} には存在するものの，f には存在しない．1 次元から 2 次元に持ち上げるにあたって関数形が単純になるとは考えにくい．

1 次元のモデルで存在する概念が 2 次元や多次元のモデルに存在するのか，存在するならば具体的にどのような形になっているのかを調べるのは数学的に自然な動機である．よって本学位論文は 2 次元量子ウォークにおける真の今野関数と，その 1 次元今野関数との関係性を探求することを目的とする．

2 セッティング

時刻は $t = 0, 1, 2, \ldots$ とし，空間は $\mathbb{Z}^2 = \{x = (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{Z}\}$ とする．2 変数 (x_1, x_2) をまとめて普通のイタリック体 x で表し，今後現れる変数の組も同様に表す．状態のヒルベルト空間は $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2) \simeq \ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^2$ である．我々は 2 次元 2 状態量子ウォークモデル (2D2SQW) を次のように定義する：

$$U = S_2 C_2 S_1 C_1, \tag{13}$$

ここで，$j = 1, 2$ に対して，$S_j := L_j \oplus L_j^*$ であり，L_j は $\ell^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C})$ 上の左/下シフト作用素で

$$L_1\psi(x_1, x_2) := \psi(x_1 + 1, x_2), \quad L_2\psi(x_1, x_2) := \psi(x_1, x_2 + 1), \qquad \psi \in \ell^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}) \tag{14}$$

とする．コイン作用素は格子全体にわたって一様で，$C_j := \bigoplus_{x \in \mathbb{Z}^2} C_{j,0}$ で $C_{j,0} \in U(2)$ は次で定義される：

$$C_{j,0} := e^{i\delta_j/2} \begin{pmatrix} e^{i\alpha_j} a_j & e^{i\beta_j} b_j \\ -e^{-i\beta_j} b_j & e^{-i\alpha_j} a_j \end{pmatrix}, \tag{15}$$

ここで，$a_j, b_j \in [0, 1]$ で，パラメータは次を満たす：

$$a_j^2 + b_j^2 = 1, \tag{16}$$

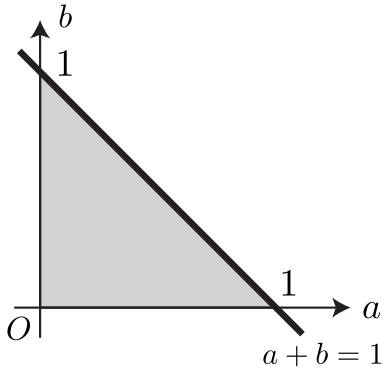
$$\alpha_j, \beta_j, \delta_j \in [-\pi, \pi), \qquad \det C_{j,0} = e^{i\delta_q}. \tag{17}$$

我々は次のパラメータを導入する：

$$a := a_2 a_1, \qquad b := b_2 b_1. \tag{18}$$

式 (16) より，パラメータ (a, b) が満たす条件は $a + b \leq 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$ であることが分かる．その様子を図示したのが三角形の領域を表した図 3 である．ここで，後の便宜のためこの領域を Δ と名付けておく：逆に，この三角形領域の任意の点 (a, b) を取ったとき，条件 (16) を満たすような，a_j, b_j が存在する．ただし，このモデルが 1 次元のモデルに reduce される場合を除くために，パラメータが $ab = 0$ となる点を除くことにする．

図 3　パラメータ領域 $(a,b)\in\Delta$．これらのパラメータは灰色で塗られた領域の内部と $a+b=1$ となる境界を任意にとりうる．$ab=0$ となる境界は除く．



初期状態を $\Psi_0\in\mathcal{H}$ とすると，時刻 t における状態は $\Psi_t=U^t\Psi_0$ で与えられる，ここで Ψ_0 は $\|\Psi_0\|=1$ という条件を満たす．位置 (x_1,x_2) の上への正射影作用素 $\hat{\Pi}_{(x_1,x_2)}\colon\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ は

$$\left(\hat{\Pi}_{(x_1,x_2)}\Psi\right)(y_1,y_2):=\begin{cases}\Psi(x_1,x_2), & (y_1,y_2)=(x_1,x_2),\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}\tag{19}$$

で定義される．時刻 t における量子ウォーカーの x_1 方向と x_2 方向の位置を表す確率変数をそれぞれ $X_{1,t}$ と $X_{2,t}$ とする．このとき，時刻 t においてウォーカーを位置 (x_1,x_2) に見出す確率は次で与えられる：

$$P((X_{1,t},X_{2,t})=(x_1,x_2))=\left\|\hat{\Pi}_{(x_1,x_2)}\Psi_t\right\|^2.\tag{20}$$

3　主結果

3.1　2 次元量子ウォークにおける最大の速さ $v_{\max}$

2D2SQW に対しても最大の速さ $v_{\max}$ を導入する．2D2SQW の分散関係 $\omega(k)$ は次で与えられる：

$$\cos\omega(k)=a\cos(k_2+k_1+\alpha_2+\alpha_1)-b\cos(k_2-k_1+\beta_2-\beta_1).\tag{21}$$

ただし k は $\mathbb{T}^2$ を動く．その群速度は $v_{\mathrm{g}}(k):=\nabla_k\omega(k)=(v_{\mathrm{g},1}(k),v_{\mathrm{g},2}(k))$ で定義される．これを用いて，最大の速さ $v_{\max}$ は次で定義される：

$$v_{\max}=\max_{j=1,2}\max_{k\in\mathbb{T}^2}|v_{\mathrm{g},j}(k)|.\tag{22}$$

これを計算すると，$v_{\max}=a+b$ を得る．

最大の速さを用いて，パラメータ領域 (a,b) を 3 つのクラスに分類する：

- $v_{\max}=\max\{a,b\}\iff\Delta_{ab=0}:=\{(a,b)\in\Delta\mid ab=0\}$.
- $v_{\max}\in(0,1)\iff\Delta_{(0,1)}:=\{(a,b)\in\Delta\mid a+b<1,ab\neq0\}$.
- $v_{\max}=1\iff\Delta_1:=\{(a,b)\in\Delta\mid a+b=1,ab\neq0\}$.

このうち，$(a,b) \in \Delta_{ab=0}$ については上でも述べたように，解析からは除外する．よって，主結果を $v_{\max} \in (0,1)$ の場合と，$v_{\max} = 1$ の場合に分けて記述する．

3.2 $v_{\max} \in (0,1)$ の場合

この小節では，次の条件が満たされているとする：

$$(a,b) \in \Delta_{(0,1)}, \qquad \text{i.e.} \qquad v_{\max} \in (0,1),\ ab \neq 0.$$

まず，$j = 1,2$ に対して，$\pi/4$ 回転した楕円領域 E_j を次のように定義する：

$$E_j := \left\{ (v_1, v_2) \;\middle|\; \frac{(v_1+v_2)^2}{4a_j^2} + \frac{(v_1-v_2)^2}{4b_j^2} \leq 1 \right\}. \tag{23}$$

この E_j に対応して，関数 F_j を次で定義する：

$$F_j(v_1,v_2) := 1 - \frac{(v_1+v_2)^2}{4a_j^2} - \frac{(v_1-v_2)^2}{4b_j^2}. \tag{24}$$

また，関数 $F_0(v_1,v_2)$ を次で定義する：

$$F_0(v_1,v_2) := \frac{(a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2}{2ab} \left\{ 1 - \frac{(v_1+v_2)^2}{4a_0^2} - \frac{(v_1-v_2)^2}{4b_0^2} \right\}. \tag{25}$$

ただし，

$$a_0^2 := \frac{(a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2}{b_1^2 + b_2^2}, \qquad b_0^2 := \frac{(a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2}{a_1^2 + a_2^2}. \tag{26}$$

とする．この準備をもって，定理を述べる：

定理 3 (2D2SQW の弱収束定理)**.** $v_{\max} \in (0,1)$ とする．このとき，X_t/t の極限分布は次で与えられる：

$$P(V_1 \leq x, V_2 \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \sum_{\#=\pm} w_{\#}(v_1,v_2) f_{\#}(v_1,v_2)\, dv_1 dv_2. \tag{27}$$

ここで，$w_{\#}$ は初期状態に依存する関数である．$f_{\#}$ は初期状態に依存しない関数で，

$$f_{\pm} = \frac{F_0 \pm \sqrt{F_1F_2}}{2\pi^2(1-v_1^2)(1-v_2^2)\sqrt{F_1F_2}} I_{E_1 \cap E_2} \tag{28}$$

で与えられる．

上の定理で与えられた極限の累積分布関数を次で書き直す：

定義 4 (1 次元極限)**.**

$$G_b(x,y) := \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \sum_{\#=\pm} w_{\#}(v_1,v_2) f_{\#}(v_1,v_2)\, dv_1 dv_2. \tag{29}$$

また，1 次元極限 $b \to 0$ を次で定義する：パラメータ a_1 を $0 < a_1 < 1$ となるように固定し，G_b の極限を $b_2 \to 0$ とすることで，弱収束の意味でとる．この意味で極限が存在するときに，

$$G_0 := \lim_{b \to 0} G_b(x,y) \tag{30}$$

とかく.

この定義のもとで，次の定理が得られた：

定理 5. $v_{\max} \in (0,1)$ とする．このとき，1 次元極限 $G_0(x,y)$ は存在して，

$$G_0(x,y) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} w(v) f_{\mathrm{K}}(v; v_{\max})\, dv, & y \geq x \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{y} w(v) f_{\mathrm{K}}(v; v_{\max})\, dv, & x > 0. \end{cases} \tag{31}$$

この定理は形式的には $\{(v,v) \mid v \in [-v_{\max}, v_{\max}]\}$ の線分上で次を意味する：

$$\frac{d}{dv} G_0(v,v) = w(v) f_{\mathrm{K}}(v; v_{\max}). \tag{32}$$

この意味で，我々が導いた関数 $f_{\pm}$ は 1 次元今野関数 f_{K} へと収束する．よって，我々は $f_{\pm}$ は 2 次元今野関数と呼ぶにふさわしいと考える.

3.3 $v_{\max} = 1$ の場合

この小節では，次の条件が満たされているとする：

$$(a,b) \in \Delta_1 \qquad \text{i.e.} \qquad v_{\max} = 1,\ ab \neq 0.$$

2 つの楕円 E_j は縮退して，

$$E := \left\{ (v_1, v_2) \;\middle|\; \frac{(v_1+v_2)^2}{4a} + \frac{(v_1-v_2)^2}{4b} \leq 1 \right\} \tag{33}$$

となる．また，対応する関数 F を次で定義する：

$$F(v_1,v_2) := 1 - \frac{(v_1+v_2)^2}{4a} - \frac{(v_1-v_2)^2}{4b} \tag{34}$$

補題 6. $(a,b) \in \Delta_1$ とする．次が成立する：

1. $E = E_j$ $(j = 1,2)$.
2. $F = F_j$ $(j = 1,2)$.
3. $2abF = F_0$.

この補題と式 (28) の $f_{\pm}$ とを組み合わせると，f_+ は Watabe ら，Di Franco らの関数 f（式 (11)）と一致し，f_- は消えてしまうことが分かる．また，2 つの楕円の共通部分 $E_1 \cap E_2$ は E に縮退する.

定理 7. $(a,b) \in \Delta_1$ とする．このとき，X_t/t の極限分布は次で与えられる：

$$P(V_1 \leq x, V_2 \leq y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} w_+(v_1,v_2) f(v_1,v_2)\, dv_1 dv_2. \tag{35}$$

我々の結果は Watabe らや Di Franco らの結果を $v_{\max} = 1$ かつ $ab \neq 0$ の特別な場合として含むという意味で，洗練させたものということができる．しかし，次の定理によってこの関数は 2 次元今野関数ということができないことがわかる．$H(x) = I_{[0,\infty)}(x)$ をヘビサイド関数とする.

表 3　量子ウォークの 2 次元分布と 1 次元分布の関係性.

パラメータ	$v_{\max}$	2 次元分布		1 次元分布
$(a,b)\in\Delta_{ab=0}$	$\max\{a,b\}$	1DQW		なし
$(a,b)\in\Delta_{(0,1)}$	$(0,1)$	$w_+f_+ + w_-f_-$	$\xrightarrow[b\to 0]{a+b<1}$	wf_{K}
$(a,b)\in\Delta_1$	1	（Watabe ら，Di Franco ら）w_+f	$\xrightarrow[b\to 0]{a+b=1}$	$C_{-1}\delta_{-1}+C_{+1}\delta_{+1}$

定理 8. $(a,b)\in\Delta_1$ とする．$G_b(x,y)$ を式 (35) の右辺で定義する．このとき，極限 $G_0=\lim_{b\to 0}G_b$ が存在して，

$$G_0(x,y)=\begin{cases}C_{-1}H(x+1)+C_{+1}H(x-1), & y\geq x\\ C_{-1}H(y+1)+C_{+1}H(y-1), & x>y.\end{cases} \tag{36}$$

ここで，初期状態に依存する関数 w_+ が定数を決定する：$C_{\pm 1}=w_+(\pm 1,\pm 1)$.

この定理は形式的には $\{(v,v)\mid v\in[-v_{\max},v_{\max}]\}$ の線分上で次を意味する：

$$\frac{d}{dv}G_0(v,v)=C_{-1}\delta_{-1}(v)+C_{+1}\delta_{+1}(v). \tag{37}$$

すなわち，Watabe らや Di Franco らが得た f は $b\to 0$ の極限で次に収束することが分かる：

$$C_{-1}\delta_{-1}+C_{+1}\delta_{+1}. \tag{38}$$

結果的に，まとめると，表 3 のように 2 次元分布と 1 次元分布の関係性が得られたことが分かる.

4　まとめ

本研究において，我々は 2D2SQW の新たな 2 次元極限確率分布を得た．確率分布の台は 2 つの楕円の共通部分となる．得られた確率分布を 1 次元に潰すような極限を取ると 1 次元量子ウォークの今野関数が現れる．この意味で，我々の得た関数 $f_\pm$ は「真の 2 次元今野関数」と呼ぶことができる．また，我々の得た確率分布は先行研究で得られた確率分布を特別な場合として含んでいる.

参考文献

[1] K. Asahara, D. Funakawa, M. Seki, A. Suzuki, Two-dimensional quantum central limit theorem by quantum walks, arXiv:2408.09578.

[2] N. Konno, Quantum random walk in one dimension, Quant. Inf. Process. **1**, 5, 345–354 (2002).

[3] K. Watabe, N. Kobayashi, M. Katori, N. Konno, Limit distributions of two-dimensional quantum walks, Phys. Rev. **A 77**, 6, 062331 (2008).

[4] C. Di Franco, M. Mc Gettrick, Th. Busch, Mimicking the probability distribution of a two-dimensional Grover walk with a single-qubit coin, Phys. Rev. Lett. **106**, 8, 080502 (2011).

[5] C. Di Franco, M. Mc Gettrick, T. Machida, Th. Busch, Alternate two-dimensional quantum walk with a single-qubit coin, Phys. Rev. **A 84**, 4, 042337 (2011).

ポスターセッション
会場E

一般の基数の数論変換アルゴリズムの比較

名古屋工業大学大学院　工学研究科　工学専攻　情報工学系プログラム　情報数理分野
兼高泰河 (Taiga KANETAKA) *

概要

数論変換とは素数 q に対して $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上で定義される高速フーリエ変換である．整数係数多項式の乗算を最も高速に計算することができる手法として知られていて，近年では耐量子計算機暗号の高速化などに用いられる．特に多項式を再帰的に 2 分割することによって変換結果を得るアルゴリズムを 2 基数の数論変換という．本講演では整数 $r \geq 1$ に対して基数が 2^r の数論変換を実装し，乗算の回数や実行時間を比較し，基数 2 の数論変換が最も高速であるということを示す．

1　導入

近年，計算機の発展やセキュリティ意識の向上によって，従来よりも複雑な暗号方式が求められている．そのなかでも代表的な暗号方式として，格子暗号がある．格子暗号の中には，現在用いられている暗号方式よりも安全と考えられている耐量子計算機暗号 [4][5][8] や，暗号化したまま演算を可能にする準同型暗号等 [1][3] があり，盛んに研究が行われている．しかし，暗号を計算するために多項式同士の乗算を多用するため，実行時間が大きくなるという欠点を抱えている．多項式同士の乗算を高速に行うために高速フーリエ変換 [2] や数論変換 [7] というアルゴリズムが用いられる．

高速フーリエ変換とは，$\mathbb{C}$ 上の多項式を再帰的に分割することで，多項式同士の乗算を計算しやすい形に変形するアルゴリズムである．$(n-1)$ 次多項式同士の積を素朴に計算する場合，係数同士の乗算は $\mathcal{O}(n^2)$ 回発生するが，2 分割の高速フーリエ変換を用いることで，$\mathcal{O}(n \log n)$ 回まで減らすことができる．特に，高速フーリエ変換の計算に必要な乗算の回数は $\frac{n}{2} \log_2 n$ 回である．さらに，4 分割の高速フーリエ変換 [9] を用いることで，乗算回数は $\frac{3n}{8} \log_2 n$ まで減少する．しかし，計算機で実装した場合は丸め誤差が発生する．

数論変換 [7] とは，$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上の多項式を高速フーリエ変換と同様の操作で変形するアルゴリズムである．こちらは小数を扱わないので誤差が生じることなく計算できる．また，2 分割では係数同士の乗算の回数を $\frac{n}{2} \log_2 n$ 回まで減らすことができる．しかし，4 分割の数論変換 [6] は虚数単位が使えない関係で，$\frac{5n}{4} \log_4 n = \frac{5n}{8} \log_2 n$ 回の乗算を必要とする．高速フーリエ変換と同じ回数にはならないが，疑似的な複素数を導入し並列化することで，理論的には $(\frac{3}{8} n \log_2 n + \frac{n}{2})$ 回程度の乗算と同じ程度の時間で計算することができる．

本研究では整数 $r \geq 1$ に対し，2^r 分割の数論変換の乗算回数を計算し，実際に多項式を計算する際に最適な分割数を求める．

* E-mail:clz14036@nitech.jp

2　高速フーリエ変換

2.1　離散フーリエ変換

定義 1 (離散フーリエ変換)**.** f を $\mathbb{C}$ 上の $(n-1)$ 次多項式，ω を $\mathbb{C}$ の原始 n 乗根とする．このとき，

$$\hat{f}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\omega^i) t^i$$

で定義される $\mathbb{C}$ 上の $(n-1)$ 次多項式を f の離散フーリエ変換と呼ぶ.

定義 2 (離散フーリエ逆変換)**.** $\hat{f}$ を $\mathbb{C}$ 上の $(n-1)$ 次多項式とする．このとき，

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \hat{f}(\omega^{-i}) x^i$$

で定義される $\mathbb{C}$ 上の $(n-1)$ 次多項式を $\hat{f}$ の離散フーリエ逆変換と呼ぶ.

注 3. 離散フーリエ逆変換は原始 n 乗根 ω^{-1} を用いた離散フーリエ変換を n で割ったものと考えることができる，

本章の離散フーリエ (逆) 変換で用いられる n, ω は特に断りのない限り固定されているものとする.

定理 4. $\mathbb{C}$ 上の $(n-1)$ 次多項式 $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ の離散フーリエ変換を $\hat{f}$ とする．このとき，$\hat{f}$ の離散フーリエ逆変換は f となる.

証明は省略する.

2.2　多項式の乗算

多項式の乗算を求めるのに必要な係数同士の積の回数について述べる．n, m を正の整数，K を体として，K 上の多項式 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ と $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ の積を求める．このとき，各係数同士の積を一つずつ計算すると，

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j}$$

となり，K 上の乗算の回数は $\mathcal{O}(nm)$ となる.

次に，多項式の乗算と離散フーリエ変換の関係について述べる．K 上の多項式 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ に対して，$V(f) \coloneqq (a_0, a_1, \ldots, a_n)$，$\mathbf{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in K^{n+1}$ に対して, $F(\mathbf{a})(x) \coloneqq \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ と定義する.

定理 5. $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j x^j$ を $\mathbb{C}$ 上の $(n-1)$ 次多項式とし，f の離散フーリエ変換を $\hat{f}$，g の離散フーリエ変換を $\hat{g}$ とする．このとき，$F(V(\hat{f}) \otimes V(\hat{g}))(x)$ は $f(x) \cdot g(x)$ を $(x^n - 1)$ で割った余りの離散フーリエ変換と等しい.

証明. $V(\hat{f}) \otimes V(\hat{g})$ の i 番目の成分を計算する．$V(\hat{f})$ の i 番目の成分を $\hat{f}_i$，$V(\hat{g})$ の i 番目の成分を $\hat{g}_i$ とする．

$$\begin{aligned}
\hat{f}_i \cdot \hat{g}_i &= \sum_{j=0}^{n-1} f_j \omega^{ij} \sum_{k=0}^{n-1} g_k \omega^{ik} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{i(j+k)} f_j g_k \\
&= \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{il} \sum_{m=0}^{l} f_m g_{l-m} + \sum_{l=n}^{2n-2} \omega^{il} \sum_{m=l-n+1}^{n-1} f_m g_{l-m} \\
&= \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{il} \sum_{m=0}^{l} f_m g_{l-m} + \sum_{l=0}^{n-2} \omega^{il} \sum_{m=l+1}^{n-1} f_m g_{l+n-m} \\
&= \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{il} \left(\sum_{m=0}^{l} f_m g_{l-m} + \sum_{m=l+1}^{n-1} f_m g_{l+n-m} \right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

次に，$f(x) \cdot g(x)$ を $(x^n - 1)$ で割った余りを計算する．

$$\begin{aligned}
f(x) \cdot g(x) &= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{l} f_m g_{l-m} x^l + \sum_{l=n}^{2n-2} \sum_{m=l-n+1}^{n-1} f_m g_{l-m} x^l \\
&= \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{l} f_m g_{l-m} x^l + \sum_{l=0}^{n-2} \sum_{m=l+1}^{n-1} f_m g_{l+n-m} x^{l+n}
\end{aligned}$$

$(x^n - 1)$ で割って整理すると以下のようになる．

$$\sum_{l=0}^{n-1} x^l \left(\sum_{m=0}^{l} f_m g_{l-m} + \sum_{m=l+1}^{n-1} f_m g_{l+n-m} \right) \bmod (x^n - 1) \qquad (2)$$

(1)，(2) より，$F(V(\hat{f}) \otimes V(\hat{g}))(x)$ は $f(x) \cdot g(x)$ を $(x^n - 1)$ で割った余りの離散フーリエ変換と等しい． □

原始 n 乗根 ω の累乗が事前に計算されていると仮定する．成分ごとの乗算は $\mathcal{O}(n)$ だが，離散フーリエ変換を素朴に計算すると，乗算が $\mathcal{O}(n^2)$ 回発生する．次節以降で解説する高速フーリエ変換を用いることで離散フーリエ変換を $\mathcal{O}(n \log n)$ 回の乗算で計算することができ，多項式の乗算全体に必要な $\mathbb{C}$ 上の乗算も $\mathcal{O}(n \log n)$ 回となる．

2.3 基数 2 の高速フーリエ変換

離散フーリエ変換の計算を高速化する手法として高速フーリエ変換 [2] が知られている．

n を 2 の累乗，ω を $\mathbb{C}$ の原始 n 乗根とする．$\mathbb{C}$ 上の $(n-1)$ 次多項式 $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ に対す

る離散フーリエ変換後の j 次の項の係数を $\hat{a}_j$ とする．$\hat{a}_j$ を 2 分割する．

$$\begin{aligned}\hat{a}_j &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \omega^{ij} \\ &= \sum_{i=0}^{n/2-1} a_{2i}\omega^{2ij} + \sum_{i=0}^{n/2-1} a_{2i+1}\omega^{(2i+1)j} \\ &= \underbrace{\sum_{i=0}^{n/2-1} a_{2i}(\omega^2)^{ij}}_{(n/2-1)\text{ 次多項式の離散フーリエ変換}} + \omega^j \underbrace{\sum_{i=0}^{n/2-1} a_{2i+1}(\omega^2)^{ij}}_{(n/2-1)\text{ 次多項式の離散フーリエ変換}}\end{aligned}$$

ω^2 は原始 $(n/2)$ 乗根なので，前半は a_{2i} $(0 \le i \le n/2-1)$ を i 次の係数とした $(n/2-1)$ 次多項式の離散フーリエ変換の j 次の係数，後半は a_{2i+1} $(0 \le i \le n/2-1)$ を i 次の係数とした $(n/2-1)$ 次多項式の離散フーリエ変換の j 次の係数に ω^j をかけたものとなっている．

$\omega^{n/2} = -1$ なので，$j = 0, 1, \ldots, n/2-1$ に対して，

$$\begin{cases} \hat{a}_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{n/2-1} a_{2i}(\omega^2)^{ij} + \omega^j \sum_{i=0}^{n/2-1} a_{2i+1}(\omega^2)^{ij} \\ \hat{a}_{j+n/2} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n/2-1} a_{2i}(\omega^2)^{ij} - \omega^j \sum_{i=0}^{n/2-1} a_{2i+1}(\omega^2)^{ij} \end{cases} \tag{3}$$

となる．

以上のことから，$(n-1)$ 次多項式の離散フーリエ変換を求めるためには，$(n/2-1)$ 次多項式の離散フーリエ変換を 2 つと $n/2$ 回の乗算を計算すればよい．0 次多項式の離散フーリエ変換は恒等写像となるので，ω の累乗が事前に計算されていると仮定すると，全体の乗算回数は $\frac{n}{2}\log_2 n$ 回の乗算で離散フーリエ変換を計算できる．つまり $\mathcal{O}(n \log n)$ 回の乗算で済むため，素朴な多項式の積や離散フーリエ変換よりも高速に計算できることがわかる．

定義 6 (基数 r の高速フーリエ変換)**.** 多項式を r 分割する操作を再帰的に繰り返して離散フーリエ変換を求める手法を基数 r の高速フーリエ変換と呼ぶ．

本節で述べたのは基数が 2 の高速フーリエ変換である．

2.4 基数 4 の高速フーリエ変換

基数 4 の高速フーリエ変換 [9] について解説する．

n を 4 の累乗，$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ とする．$\mathbb{C}$ 上の $(n-1)$ 次多項式 $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ に対する離散フーリエ変換後の j 次の項の係数を $\hat{a}_j$ とする．$\hat{a}_j$ を 4 分割する．

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_j &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \omega^{ij} \\
&= \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i}\omega^{4ij} + \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+1}\omega^{(4i+1)j} + \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+2}\omega^{(4i+2)j} + \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+3}\omega^{(4i+3)j} \\
&= \underbrace{\sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i}(\omega^4)^{ij}}_{(n/4-1)\text{ 次多項式の離散フーリエ変換}} + \omega^j \underbrace{\sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+1}(\omega^4)^{ij}}_{(n/4-1)\text{ 次多項式の離散フーリエ変換}} \\
&\quad + \omega^{2j} \underbrace{\sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+2}(\omega^4)^{ij}}_{(n/4-1)\text{ 次多項式の離散フーリエ変換}} + \omega^{3j} \underbrace{\sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+3}(\omega^4)^{ij}}_{(n/4-1)\text{ 次多項式の離散フーリエ変換}}
\end{aligned} \tag{4}
$$

ω^4 は原始 $(n/4)$ 乗根なので，4 つの $(n/4-1)$ 次多項式の離散フーリエ変換に分かれている．$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ なので，$\omega^{n/4} = i, \omega^{n/2} = -1, \omega^{3n/4} = -i$ である．したがって，$j = 0, 1, \ldots, n/4-1$ に対して，

$$
\begin{cases}
\hat{a}_j = \displaystyle\sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i}(\omega^4)^{ij} + \omega^j \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+1}(\omega^4)^{ij} \\
\qquad + \omega^{2j} \displaystyle\sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+2}(\omega^4)^{ij} + \omega^{3j} \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+3}(\omega^4)^{ij} \\
\hat{a}_{j+n/4} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i}(\omega^4)^{ij} + i\omega^j \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+1}(\omega^4)^{ij} \\
\qquad - \omega^{2j} \displaystyle\sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+2}(\omega^4)^{ij} - i\omega^{3j} \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+3}(\omega^4)^{ij} \\
\hat{a}_{j+n/2} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i}(\omega^4)^{ij} - \omega^j \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+1}(\omega^4)^{ij} \\
\qquad + \omega^{2j} \displaystyle\sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+2}(\omega^4)^{ij} - \omega^{3j} \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+3}(\omega^4)^{ij} \\
\hat{a}_{j+3n/4} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i}(\omega^4)^{ij} - i\omega^j \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+1}(\omega^4)^{ij} \\
\qquad - \omega^{2j} \displaystyle\sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+2}(\omega^4)^{ij} + i\omega^{3j} \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+3}(\omega^4)^{ij}
\end{cases} \tag{5}
$$

となる．計算機を用いる場合，虚数単位 i は複素数の実部と虚部の入れ替えと符号反転のみで表現で

きるので，乗算は必要ない．したがって，$\hat{a}_j, \hat{a}_{j+n/4}, \hat{a}_{j+n/2}, \hat{a}_{j+3n/4}$ の計算で発生する乗算は

$$\omega^j \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+1}(\omega^4)^{ij}, \quad \omega^{2j} \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+2}(\omega^4)^{ij}, \quad \omega^{3j} \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+3}(\omega^4)^{ij}$$

の 3 回である．

以上のことから，$(n-1)$ 次多項式の離散フーリエ変換を求めるためには，$(n/4-1)$ 次多項式の離散フーリエ変換を 4 回と $3n/4$ 回の乗算を計算すればよい．0 次多項式の離散フーリエ変換は恒等写像となるので，全体の乗算回数は $\frac{3}{4}n\log_4 n = \frac{3}{8}n\log_2 n$ 回となり，基数 2 の高速フーリエ変換から減少していることがわかる．

3 数論変換

本章では q を素数，ω を $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ の原始 n 乗根とする．

3.1 基数 2 の数論変換

定義 7 (数論変換)**.** f を $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上の $(n-1)$ 次多項式とする．このとき，

$$\hat{f}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\omega^i)t^i$$

で定義される $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上の $(n-1)$ 次多項式を f の数論変換と呼ぶ.

数論逆変換も離散フーリエ逆変換と同様に定義でき，多項式の乗算も同じ乗算回数で実現できる．また，数論変換も高速フーリエ変換と同様のアルゴリズムで高速化することができる．

n を 2 の累乗とする．$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上の $(n-1)$ 次多項式 $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ に対する数論変換後の j 次の項の係数を $\hat{a}_j$ とする．$\hat{a}_j$ を離散フーリエ変換と同様に 2 分割すると，$\omega^{n/2} = -1$ なので，$j = 0, 1, \ldots, n/2-1$ に対して，(3) となる．したがって，基数 2 の高速フーリエ変換と同様，$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上の乗算が $\frac{n}{2}\log_2 n$ 回発生する．

定義 8 (基数 r の数論変換)**.** 多項式を r 分割する操作を再帰的に繰り返して数論変換を求める手法を基数 r の数論変換と呼ぶ.

本節で述べたのは基数 2 の数論変換である．

3.2 基数が 4 の数論変換

基数 4 の数論変換 [6] について解説する．

n を 4 の累乗とする．$\mathbb{C}$ 上の $(n-1)$ 次多項式 $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ に対する数論変換後の j 次の項の係数を $\hat{a}_j$ とする．$\hat{a}_j$ を 4 分割すると，数論変換と同様 (4) となり，ω^4 は原始 $(n/4)$ 乗根なので，4 つの $(n/4-1)$ 次多項式の数論変換に分かれている．$\omega^{n/2} = -1$ なので，$j = 0, 1, \ldots, n/4-1$ に対して，(5) の i を $\omega^{n/4}$ に置き換えた式を得る．基数 4 の高速フーリエ変換とは異なり，虚数単位

を用いた乗算の省略ができない．したがって，$\hat{a}_j, \hat{a}_{j+n/4}, \hat{a}_{j+n/2}, \hat{a}_{j+3n/4}$ の計算で発生する乗算は，高速フーリエ変換と同じ

$$\omega^j \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+1}(\omega^4)^{ij}, \quad \omega^{2j} \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+2}(\omega^4)^{ij}, \quad \omega^{3j} \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+3}(\omega^4)^{ij}$$

の 3 回と，

$$\omega^{n/4} \cdot \omega^j \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+1}(\omega^4)^{ij}, \quad \omega^{n/4} \cdot \omega^{3j} \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+3}(\omega^4)^{ij}$$

の 2 回を合わせた 5 回である．

以上のことから，$(n-1)$ 次多項式の数論変換を求めるためには，$(n/4-1)$ 次多項式の数論変換を 4 回と $5n/4$ 回の $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上の乗算を計算すればよい．全体の乗算回数は $\frac{5}{4}n\log_4 n = \frac{5}{8}n\log_2 n$ 回の乗算となり，基数 2 の数論変換と比較すると増加していることがわかる．

次に，複素数のように，$\omega^{n/4}$ の乗算を省略できる形で値を保持する方法を考える．複素数は実部と虚部で分けて値を保持しているため，虚数単位との乗算は実部と虚部の入れ替えと符号の反転のみで対応することができる．そこで，数論変換の計算過程では，以下で定義する疑似複素数形式で値を保持しておき，最後に $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ に変換するという操作を考える．

定義 9 (疑似複素数)**.** $a \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ に対して，

$$b + c \cdot \omega^{n/4} = a$$

をみたす $(b, c) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^2$ を a の疑似複素数と呼ぶ.

$\omega^{n/4}$ のスカラー倍に関しては複素数における i 倍のように扱うことができるため，

$$\omega^{n/4}(b, c) = (-c, b)$$

と計算でき，乗算を省略することができる．これにより，

$$\omega^{n/4} \cdot \omega^j \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+1}(\omega^4)^{ij}, \quad \omega^{n/4} \cdot \omega^{3j} \sum_{i=0}^{n/4-1} a_{4i+3}(\omega^4)^{ij}$$

で発生した 2 回の $\omega^{n/4}$ 倍を乗算なしで計算できる．

以上を踏まえると，疑似複素数を用いた基数 4 の数論変換で発生するスカラー倍は，基数 4 の高速フーリエ変換の乗算回数と等しく，$\frac{3}{8}n\log_2 n$ 回となる．しかし，スカラー倍演算 1 回で $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上の乗算が 2 回発生するため，$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上の乗算は $\frac{3}{4}n\log_2 n$ 回となり，基数 $2, 4$ の数論変換よりも演算回数が大きくなるということになる．

また，疑似複素数の数論変換は係数が疑似複素数のままなので，$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ に変換するためには係数ごとに 1 回の $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上の乗算をする必要がある．したがって，全体では $(\frac{3}{4}n\log_2 n + n)$ 回の乗算を必要とする．

しかし，疑似複素数を用いた数論変換は並列性に優れていると考えられる．疑似複素数の演算は成分ごとに計算することになるため，同時に計算しても干渉することがない．また，スカラー倍は同じ

値を各成分に掛けるため，それぞれ異なる値を掛けるよりもメモリ効率が良いと考えられる．また，最後の $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ に戻す過程で発生する乗算も，掛ける値が $\omega^{n/4}$ と一定で，各乗算に依存性がないので，スカラー倍と同様に並列性に優れていると考えることができる．したがって，2 成分のスカラー倍を並列に処理できる環境では，理想的には $(\frac{3}{8}n\log_2 n + \frac{n}{2})$ 回の乗算と同等の時間で計算できるということになる．

4 主結果

前章の疑似複素数を用いた基数が 4 の数論変換と同様の手法で，整数 $r \geq 1$ に対して，基数が 2^r の数論変換を実装する．

定義 10 (拡張した疑似複素数)**.** $a \in \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ に対して，

$$b_0 + \sum_{i=1}^{2^{r-1}-1} b_i \cdot (\omega^{n/2^r})^i = a$$

をみたす $(b_0, b_1, \ldots, b_{2^{r-1}-1}) \in (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^{(2^{r-1}-1)}$ を a の基数 2^r 用に拡張された疑似複素数と呼ぶ.

基数 2^r 用に拡張された疑似複素数を値として保持する基数が 2^r の数論変換を考える.. n を 2^r の累乗とする．

$$\begin{aligned}
\hat{a}_j &= \sum_{i=0}^{n-1} a_i \omega^{ij} \\
&= \sum_{k=0}^{2^r-1} \left(\sum_{i=0}^{n/2^r-1} a_{2^r i+k} \omega^{(2^r i+k)j} \right) \\
&= \underbrace{\sum_{i=0}^{n/2^r-1} a_{2^r i} (\omega^{2^r})^{ij}}_{(n/2^r-1) \text{ 次多項式の数論変換}} + \sum_{k=1}^{2^r-1} \left(\omega^{kj} \underbrace{\sum_{i=0}^{n/2^r-1} a_{2^r i+1} (\omega^{2^r})^{ij}}_{(n/2^r-1) \text{ 次多項式の数論変換}} \right)
\end{aligned}$$

この式で乗算が発生するのは後半の ω^{kj} の乗算部分である．基数 4 の数論変換と同様に，$j = 0, 1, \ldots, n/2^r - 1$ に対して $\hat{a}_j, \hat{a}_{j+n/2^r}, \ldots, \hat{a}_{j+(2^r-1)n/2^r}$ を考えると，

$$\omega^j \sum_{i=0}^{n/2^r-1} a_{2^r i+1} (\omega^{2^r})^{ij}, \quad \omega^{2j} \sum_{i=0}^{n/2^r-1} a_{2^r i+2} (\omega^{2^r})^{ij}, \ldots, \quad \omega^{(2^r-1)j} \sum_{i=0}^{n/2^r-1} a_{2^r i+2^r-1} (\omega^{2^r})^{ij}$$

の $(2^r - 1)$ 回の乗算と，

$$\omega^{n/2^r} \cdot \omega^j \sum_{i=0}^{n/2^r-1} a_{2^r i+1} (\omega^{2^r})^{ij}$$

のような，$\omega^{n/2^r}$ の累乗の乗算が複数回必要となるが，後者の乗算は拡張された複素数によって，成分のシフトと符号の反転のみで実現できる．乗算回数を数えると，数論変換での疑似複素数のスカ

ラー倍が $\frac{(2^r-1)n}{2^r}\log_{2^r} n = \frac{(2^r-1)n}{r\cdot 2^r}\log_2 n$ 回ということになる．したがって，$\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上の乗算の回数は $\frac{2^{r-1}(2^r-1)n}{r\cdot 2^r}\log_2 n$ 回である．また，基数 2^r 用に拡張した疑似複素数を $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ に戻す際の $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ 上の乗算の回数は $n(2^{r-1}-1)$ 回となり，全体での乗算回数は $\frac{2^{r-1}(2^r-1)n}{r\cdot 2^r}\log_2 n + n(2^{r-1}-1)$ である．これは r に関して単調に増加するため，基数が 2 の数論変換が乗算の回数において最適であるとわかる．ただし，スカラー倍の乗算を全て並列に処理できる環境では $\frac{1}{2^{r-1}}$ 倍の時間で数論変換を求めることができる．このとき，n と r の値次第では乗算にかかる時間を減らすことができる．

参考文献

[1] Chillotti, Ilaria; Gama, Nicolas; Georgieva, Mariya; Izabachène, Malika. TFHE: fast fully homomorphic encryption over the torus. J. Cryptology 33 (2020), no. 1, 34–91.

[2] Cooley, James W.; Tukey, John W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. Math. Comp. 19 (1965), 297–301.

[3] CRYPTREC 暗号技術調査ワーキンググループ（高機能暗号），CRYPTREC 暗号技術ガイドライン（高機能暗号），2023 年 3 月．`https://www.cryptrec.go.jp/report/cryptrec-gl-2005-2022.pdf`

[4] CRYPTREC 暗号技術調査ワーキンググループ（耐量子計算機暗号），CRYPTREC 暗号技術ガイドライン（耐量子計算機暗号），2023 年 3 月．`https://www.cryptrec.go.jp/report/cryptrec-gl-2004-2022.pdf`

[5] Pierre-Alain Fouque, Jeffrey Hoffstein, Paul Kirchner, Vadim Lyubashevsky, Thomas Pornin, Thomas Prest, Thomas Ricosset, Gregor Seiler, William Whyte, and Zhenfei Zhang. Falcon: Fast-fourier lattice-based compact signatures over ntru. NIST PQC, October 2020. `https://falcon-sign.info/falcon.pdf`.

[6] S. Kudo, Y. Nogami, S. Huda and Y. Kodera. Optimizing CRYSTALS-Dilithium in Rust: Radix-4 NTT and Assembly-level Comparison with Official C Implementation. 2024 International Conference on Consumer Electronics - Taiwan (ICCE-Taiwan), Taichung, Taiwan, 2024, 395-396, September 2024.

[7] Zhichuang Liang and Yunlei Zhao. Number Theoretic Transform and Its Applications in Lattice-based Cryptosystems: A Survey, arXiv:2211.13546, November 2022.

[8] National Institute of Standards and Technology. Module-Lattice-Based Key-Encapsulation Mechanism Standard. FIPS 203, August 2024.

[9] Xin Xiao, Erdal Oruklu and Jafar Saniie. Fast memory addressing scheme for radix-4 FFT implementation. 2009 IEEE International Conference on Electro/Information Technology, 437-440 August 2009.

The optimal vaccination strategy to control COVID-19

Department of Systems Informatics, Graduate School of System Informatics, Kobe University
Huaiyu Teng

Toshikazu Kuniya *

Abstract

Models of infectious disease dynamics suggest that treatment, vaccination, and isolation are required for the control of infectious diseases. Considering that vaccination is one of the most effective methods to control infectious diseases, it is often not possible to rapidly vaccinate all susceptible populations in the early stages of the spread of infectious diseases due to the limitation of the number of vaccines, insufficient medical personnel, or the slow progress of vaccination efforts. Our simulation analysis by building an SVIWRD model found that the degree of negative impact of infectious diseases shown when young and old people were divided into two populations and vaccinated at different rates was different.Therefore, for the current problem of continued spread of COVID-19, we consider the infectious disease dynamics model to achieve the goal of making the risk of COVID-19 infection lower by controlling the proportion of vaccination of elderly and young people. In this paper, we divided young and old people into two groups, established an SVIWRD model, performed single-objective optimization using Pontryagin's maximum principle, and used the Runge-Kutta method for numerical calculation and simulation, so as to arrive at a certain vaccination ratio that plays the effect of reduced negative impact of COVID-19.

1 Introduction

The COVID-19 pandemic has severely impacted populations and economies worldwide, with global cases reaching 704,753,890, deaths 7,010,681, and recoveries 675,619,811 as of April 13, 2024 [24]. Despite prevention efforts, new infection waves persist, highlighting uncertainty about the pandemic's resolution [19].

Researchers are working to develop vaccines, prevention strategies, and treatments against the coronavirus. The emergence of virus variants necessitates more effective vaccines to curb infections. Mathematical models play a critical role in predicting infection trends and designing optimal control strategies [10, 25, 26, 1, 23, 21]. These models underscore the importance of combining treatment, vaccination, and isolation measures, with vaccination being the most effective. However, limitations like vaccine shortages and logistical challenges often impede rapid vaccination.

Vaccines are not fully effective, and infections may still occur post-vaccination. Paper [18] explored optimal vaccination coverage to minimize costs and infection losses. Building on this, our study employs the SVIWRD (Susceptible-Vaccinated-Infected-Waned-Removed-Death) model to analyze the impact of vaccination rates on young and elderly populations. Using Pontryagin's maximum principle [9] and numerical methods like the Runge-Kutta method [3], we identified an optimal vaccination ratio to reduce COVID-19 transmission [7, 16, 8, 4, 11, 17]. This paper is structured as follows:

- **Section 2** introduces the SVIWRD model and age-based population groups.
- **Section 3** derives the disease-free equilibrium and the basic reproduction number R_0 under constant control.

*E-mail:toukaiu1215@gmail.com

- **Section 4** investigates the sensitivity of R_0 to parameters.
- **Section 5** applies Pontryagin's maximum principle to determine the optimal control using adjoint functions.
- **Section 6** provides numerical simulations for vaccine allocation strategies.
- **Section 7** concludes with discussions and implications.

2 SVIWRD model

The SVIWRD model, a variation of common epidemic models, assumes constant mortality and birth rates, maintaining a steady population during the epidemic. Given the higher mortality risk for the elderly (60+ years) and the greater infection spread risk among the non-elderly (below 60 years), the population is divided into these two groups. This study constructs the following SVIWRD dynamic system model:
Elderly:

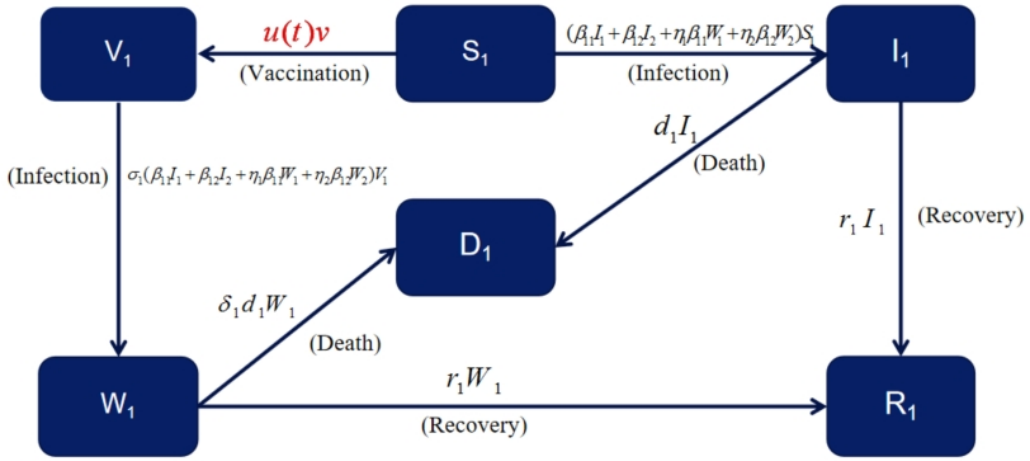
$$\begin{aligned}
S_1'(t) &= aS_2(t) - \left[\beta_{11}I_1(t) + \beta_{12}I_2(t) + \eta_1\beta_{11}W_1(t) + \eta_2\beta_{12}W_2(t)\right] S_1(t) - \mu_1 S_1(t) - u(t)v,\\
V_1'(t) &= aV_2(t) + u(t)v - \sigma_1\left[\beta_{11}I_1(t) + \beta_{12}I_2(t) + \eta_1\beta_{11}W_1(t) + \eta_2\beta_{12}W_2(t)\right] V_1(t) - \mu_1 V_1(t),\\
I_1'(t) &= aI_2(t) + \left[\beta_{11}I_1(t) + \beta_{12}I_2(t) + \eta_1\beta_{11}W_1(t) + \eta_2\beta_{12}W_2(t)\right] S_1(t) - (\mu_1 + \gamma_1 + d_1)\, I_1(t),\\
W_1'(t) &= aW_2(t) + \sigma_1\left[\beta_{11}I_1(t) + \beta_{12}I_2(t) + \eta_1\beta_{11}W_1(t) + \eta_2\beta_{12}W_2(t)\right] V_1(t) - (\mu_1 + \gamma_1 + \delta_1 d_1)W_1(t),\\
R_1'(t) &= aR_2(t) + \gamma_1 I_1(t) + \gamma_1 W_1(t) - \mu_1 R_1(t),\\
D_1'(t) &= d_1 I_1(t) + \delta_1 d_1 W_1(t).
\end{aligned}$$

Non-elderly:

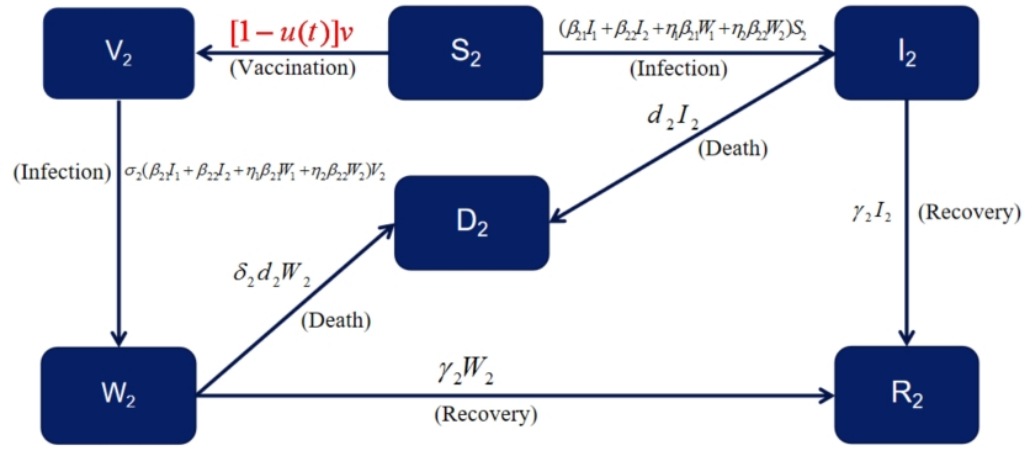
$$\begin{aligned}
S_2'(t) &= b - \left[\beta_{21}I_1(t) + \beta_{22}I_2(t) + \eta_1\beta_{21}W_1(t) + \eta_2\beta_{22}W_2(t)\right] S_2(t) - (\mu_2 + a)\, S_2(t) - [1-u(t)]v,\\
V_2'(t) &= [1-u(t)]\, v - \sigma_2\left[\beta_{21}I_1(t) + \beta_{22}I_2(t) + \eta_1\beta_{21}W_1(t) + \eta_2\beta_{22}W_2(t)\right] V_2(t) - (\mu_2 + a)\, V_2(t),\\
I_2'(t) &= \left[\beta_{21}I_1(t) + \beta_{22}I_2(t) + \eta_1\beta_{21}W_1(t) + \eta_2\beta_{22}W_2(t)\right] S_2(t) - (\mu_2 + \gamma_2 + d_2 + a)I_2(t),\\
W_2'(t) &= \sigma_2\left[\beta_{21}I_1(t) + \beta_{22}I_2(t) + \eta_1\beta_{21}W_1(t) + \eta_2\beta_{22}W_2(t)\right] V_2(t) - (\mu_2 + \gamma_2 + \delta_2 d_2 + a)W_2(t),\\
R_2'(t) &= \gamma_2 I_2(t) + \gamma_2 W_2(t) - (\mu_2 + a)\, R_2(t),\\
D_2'(t) &= d_2 I_2(t) + \delta_2 d_2 W_2(t),
\end{aligned} \tag{1}$$

with the initial conditions $S_i(0) > 0, V_i(0) \geq 0, I_i(0) \geq 0, W_i(0) \geq 0, R_i(0) \geq 0$ and $D_i(0) \geq 0$, $i = 1, 2$. Here, S is the susceptible population, V is the vaccinated population, I is the infected population, W is the infected population after vaccination, R is the recovered population, and D is the dead population due to disease. a is the natural growth rate of age. When the model spans a longer time period, the natural growth rate should be considered as non-elderly individuals transition into the elderly group. However, since this study focuses on the early stage of the epidemic (0.2 years), $a = 0$ is assumed. b is the natural birth rate, β_{ij} is the rate of disease transmission from I_j to S_j, η_i is the reduction ratio of infectivity of people who are infected after vaccination. μ is the natural mortality rate, d is the disease-induced mortality rate, γ is the recovery rate. v is the number of vaccination done per unit time. $u \in [0, 1]$ is the control function representing the ratio of vaccine allocation to the elderly people: $u(t)v$ and $[1 - u(t)]v$ are the numbers of vaccination allocated at time t to the elderly and non-elderly populations, respectively. In this model, we assume that the vaccine efficacy can not be perfect, so $\sigma \in [0, 1]$ is the efficacy in reducing the disease transmission rates ($\sigma = 0$ implies the perfect efficacy, i.e., no infection occurs in the vaccinated population), and $\delta \in [0, 1]$ is the efficacy in reducing the disease-induced death rate ($\delta = 0$ implies that no disease-induced death occurs in

the vaccinated population). Moreover, η in [0,1] is the efficacy in reducing the infectivity of infected individuals. Among them, the subscripts 1 and 2 represent the elderly and non-elderly populations, respectively. For the flowchart of the model, see Figure 1.



(a) Elderly population



(b) Non-elderly population

Figure 1: Flowchart of the SVIWRD model with elderly and non-elderly populations

3 Disease-free equilibrium and basic reproduction number

In this section, we derive the disease-free equilibrium and basic reproduction number R_0 of model (1) in the case where the control function is constant ($u(t) = u$). "Disease-free equilibrium" is the state in a disease model where there are no infected individuals present. The disease-free equilibrium can formally be expressed as

$$(S_1^0, V_1^0, 0, 0, 0, 0, S_2^0, V_2^0, 0, 0, 0, 0),$$

where

$$\begin{aligned} S_1^0 &= \frac{-uv + aS_2^0}{\mu_1} = \frac{ab - (a + \mu_2 u)v}{\mu_1(\mu_2 + a)}, \quad V_1^0 = \frac{uv + aV_2^0}{\mu_1} = \frac{(a + \mu_2 u)v}{\mu_1(\mu_2 + a)}, \\ S_2^0 &= \frac{b - (1 - u)\, v}{\mu_2 + a}, \quad V_2^0 = \frac{(1 - u)\, v}{\mu_2 + a}. \end{aligned} \tag{2}$$

Hence, the disease-free equilibrium exists uniquely if $S_1^0, S_2^0 > 0$, which is equivalent to

$$v < \min\left(\frac{b}{1-u},\ \frac{ab}{a+\mu_2 u}\right).$$

In what follows, unless otherwise noted, we assume that this inequality holds and the disease-free equilibrium uniquely exists. The basic reproductive number (R_0) of an infectious agent is defined as the average number of secondary infections produced by an infected individual in a disease-free host population [5]. R_0 determines whether a pathogen can persist in such a population and is valuable for assessing control options. When R_0 is less than 1, on average each infectious individual infects less than one other individual, and the pathogen will die out in the population. In contrast, when R_0 exceeds 1, numbers of cases will on average rise over time, and an epidemic can occur [8].

In order to verify how effective this model is in controlling infectious diseases through vaccination, we need to calculate the value of the basic reproduction number R_0 and analyze its stability. Following [6], we consider the linearized equations around the disease-free equilibrium as follows:

$$\begin{bmatrix} I_1'(t) \\ I_2'(t) \\ W_1'(t) \\ W_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta_{11}I_1 + \beta_{12}I_2 + \eta_1\beta_{11}W_1 + \eta_2\beta_{12}W_2)\, S_1^0 \\ (\beta_{21}I_1 + \beta_{22}I_2 + \eta_1\beta_{21}W_1 + \eta_2\beta_{22}W_2)\, S_2^0 \\ \sigma_1\,(\beta_{11}I_1 + \beta_{12}I_2 + \eta_1\beta_{11}W_1 + \eta_2\beta_{12}W_2)\, V_1^0 \\ \sigma_2\,(\beta_{21}I_1 + \beta_{22}I_2 + \eta_1\beta_{21}W_1 + \eta_2\beta_{22}W_2)\, V_2^0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\mu_1+\gamma_1+d_1)\, I_1 - aI_2 \\ (\mu_2+\gamma_1+d_2+a)\, I_2 \\ (\mu_2+\gamma_1+\delta_1 d_1)\, W_1 - aW_2 \\ (\mu_2+\gamma_2+\delta_2 d_2+a)\, W_2 \end{bmatrix}.$$

Using the general theory in [6], R_0 can be calculated as $R_0 = \rho\left[FV^{-1}\right]$ (ρ denotes the spectral radius), where

$$F = \begin{bmatrix} \beta_{11}S_1^0 & \beta_{12}S_1^0 & \eta_1\beta_{11}S_1^0 & \eta_2\beta_{12}S_1^0 \\ \beta_{21}S_2^0 & \beta_{22}S_2^0 & \eta_1\beta_{21}S_2^0 & \eta_2\beta_{22}S_2^0 \\ \sigma_1\beta_{11}V_1^0 & \sigma_1\beta_{12}V_1^0 & \sigma_1\eta_1\beta_{11}V_1^0 & \sigma_1\eta_2\beta_{12}V_1^0 \\ \sigma_2\beta_{21}V_2^0 & \sigma_2\beta_{22}V_2^0 & \sigma_2\eta_1\beta_{21}V_2^0 & \sigma_2\eta_2\beta_{22}V_2^0 \end{bmatrix}$$

and

$$V = \begin{bmatrix} \mu_1+\gamma_1+d_1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2+\gamma_2+d_2+a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1+\gamma_1+\delta_1 d_1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2+\gamma_2+\delta_2 d_2+a \end{bmatrix}.$$

Note that $F - V$ is the Jacobian matrix at the disease-free equilibrium. From [6, Theorem 2], we see that if $R_0 < 1$, then the disease-free equilibrium is locally asymptotically stable, whereas if $R_0 > 1$, then it is unstable. In other words, $R_0 < 1$ means that the infectious disease will stop spreading and $R_0 > 1$ means that the infectious disease will continue to spread.

4 Optimal control in the SVIWRD model with vaccination

4.1 Problem Definition

Let $u(t)$ represent the proportion of the population vaccinated among the elderly at time t. The objective is to minimize the following cost functional:

$$J(u) = \int_0^{t_f} \left(k_1 I_1 + k_2 I_2 + l_1 D_1 + l_2 D_2 + \frac{m_1}{2}(uv)^2 + \frac{m_2}{2}\left((1-u)v\right)^2\right) dt, \tag{3}$$

where

- k_1, k_2 are the cost coefficients for infections of the elderly and non-elderly, respectively.
- l_1, l_2 are the cost coefficients for deaths of the elderly and non-elderly, respectively.
- m_1, m_2 are the cost coefficients for distributing vaccines to the elderly and non-elderly, respectively.
- $u(t) \in [0, 1]$ is the control variable, representing the fraction of the vaccine allocated to the elderly at time t.

The dynamic equations of the system are described by the SVIWRD model, which accounts for the changes in susceptible (S), vaccinated (V), infected (I), waned (W), recovered (R), and deceased (D) populations.

4.2 Hamiltonian Definition

Using Pontryagin's Maximum Principle [9], we define the Hamiltonian function as:

$$H = k_1 I_1 + k_2 I_2 + l_1 D_1 + l_2 D_2 + \frac{m_1}{2}(uv)^2 + \frac{m_2}{2}\left((1-u)v\right)^2 + \sum_{i=1}^{12} \lambda_i f_i, \tag{4}$$

where

- λ_i are the adjoint variables.
- f_i are the right-hand side functions of the state equations.

4.3 Existence and Uniqueness of the Optimal Control

(i) Existence and Uniqueness of the Solution to the State and Adjoint Equations

The right-hand side of the SVIWRD model is Lipschitz continuous with respect to the state variables in any bounded closed region $\Omega \subset R_+^{12}$. That is, there exists a positive constant $L > 0$ such that

$$\|f(t, x_1, u) - f(t, x_2, u)\| \leq L\|x_1 - x_2\| \quad \text{for all } x_1, x_2 \in \Omega, \quad u \in [0, 1] \quad \text{and} \quad t > 0, \tag{5}$$

where $f = (f_1, f_2, \ldots, f_{12})$ and $\|\cdot\|$ denotes the Euclidean norm. This ensures the existence and uniqueness of the solution to the state equations. Similarly, we can verify the existence and uniqueness of the solution to the adjoint equations by virtue of the Lipschitz continuity of the system.

(ii) Strict convexity of the Cost Function and the Hamiltonian

The cost functional $J(u)$ is strictly convex in u because it includes terms like $(uv)^2$ and $((1-u)v)^2$, both of which ensures that $\partial^2 J/\partial u^2 > 0$. By a similar reason, the Hamiltonian H is also strictly convex in u.

(iii) Existence and Uniqueness of the Optimal Control

The control variable $u(t)$ is bounded, meaning $u(t) \in [0, 1]$ and is Lebesgue measurable. According to the optimal control theory [9], such constraints guarantee the existence of the optimal control. By applying Pontryagin's Maximum Principle [3, 7], we can obtain the optimal control $u^*(t)$ by solving the condition:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad \text{at the optimal solution.} \tag{6}$$

This gives us an expression for $u^*(t)$. Specifically, the optimal control $u^*(t)$ is given by

$$u^*(t) = \min\left(\max\left(0, \frac{v(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_8 - \lambda_7)}{m_1 v^2 + m_2 v^2}\right), 1\right). \tag{7}$$

This form guarantees the uniqueness of the optimal control $u^*(t)$.

5 Numerical simulation

In this section, we perform numerical simulation adopting the optimal control u^*. For solving ordinary differential equations (ODEs), we use the standard fourth-order Runge-Kutta method. In the simulation, we use the parameters as shown in Table 1, which are chosen considering the COVID-19 in Japan for 0.2 year from April 2021, when the vaccine distribution started in Japan.

Table 1: The summary of parameters used in simulation

Parameter	Value	Description	Reference
$(\beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22})$	$q(0.25, 1, 1, 4)$	Disease transmission rate	Assumed
q	40	Scaling parameter for intensity of disease spread	Calculated
a	0	Transfer rate from the non-elderly group to the elderly group	Assumed
b	0.0219	Birth rate	Calculated
(μ_1, μ_2)	$(1/20, 1/80)$	Natural mortality	[12]
(d_1, d_2)	$(2.4, 0.024)$	Disease-induced mortality	[13]
(γ_1, γ_2)	$(24, 24)$	Recovery rate	[2]
v	0.8	Number of vaccination shots per unit time	[14]
(σ_1, σ_2)	$(0.4, 0.4)$	Vaccine efficacy ($1 - \sigma_1$, $i = 1, 2$) to reduce the susceptibility	[20]
(δ_1, δ_2)	$(0.2, 0.2)$	Vaccine efficacy ($1 - \delta_i$, $i = 1, 2$) to reduce the disease-induced mortality	[20]
(η_1, η_2)	$(0.5, 0.5)$	Vaccine efficacy ($1 - \eta_i$, $i = 1, 2$) to reduce the infectivty	[15]
(k_1, k_2)	$(1, 2)$	Cost coefficient of being infected	Assumed
(l_1, l_2)	$(100, 200)$	Cost coefficient of being dead	Assumed
(m_1, m_2)	$(0.1, 0.2)$	Cost coefficient of distributing vaccines	Assumed

The biological justification for them is as follows:

- The unit time is 1 year.
- Based on [12], we assume that the average life expectancy is 80 years. The people aged more than 60 is categorized as elderly, and thus, the average life expectancies for each group are $1/\mu_1 = 20$ and $1/\mu_2 = 80$, respectively. Moreover, the average sojourn time in the non-elderly group is $1/a = 60$.
- In the absence of disease and vaccination, the total population is calculated as

  $$S_1^0 + S_2^0 = \frac{aS_2^0}{\mu_1} + S_2^0 = \frac{\mu_1 + a}{\mu_2 + a}\frac{b}{\mu_1}.$$

  Under the assumption that the total population is normalized as 1, the parameter b can be calculated as

  $$b = \frac{(\mu_2 + a)\mu_1}{\mu_1 + a} \approx 0.0219.$$

- Based on [2], we assume that the average infection period $(1/\gamma_i,\ i = 1, 2)$ for both of the elderly and non-elderly people is 1/2 month = 1/24 year.

- Based on [13], we assume that the disease-induced mortality in elderly people is 100 times higher than that in non-elderly people, and about 10 percent of the infected elderly people become severe. Regarding the severe individuals as removed individuals, we assume that $d_1 = 0.1\gamma_1 = 2.4$ and $d_2 = 0.01d_1 = 0.0024$.

- Based on [14], we assume that 80 percent of total population has been vaccinated after 1 year passed, and thus, $v = 0.8$.

- We assume that the vaccine efficacy is the same for two age groups. By [20], we assume that the reduction effect in infection risk is 60 percent ($1 - \sigma_i = 0.6$, $i = 1, 2$) and that in disease-induced death is 80 percent ($1 - \delta_i = 0.8$, $i = 1, 2$). Moreover, by [15], we assume that the reduction effect in disease transmission is 50 percent ($1 - \eta_i = 0.5$, $i = 1, 2$).

- We assume that $\beta_{ij} = q\phi_i\psi_j$, $i = 1, 2$, where q is a scalling parameter for intensity of disease spread, and ϕ_i and ψ_i are the susceptibility and infectivity in group i, respectively. We can consider that elderly people is more careful and more likely to reduce the contact opportunity because the disease-induced mortality is quite high. Hence, we assume that $\phi_1 = \psi_1 = 0.5$ and $\phi_2 = \psi_2 = 2$. The scalling parameter q is set to be 40 so that the basic reproduction number in the absence of vaccination approximates 5, which is close to the estimated value for the delta variant [22].

- We assume that the cost of disease-induced death is 100 times higher than that of infection ($l_i = 100k_i$, $i = 1, 2$). Moreover, from the perspective of remaining life, we assume that the cost in non-elderly people is 2 times higher than that in elderly people. Thus, setting $k_1 = 1$, we obtain $k_2 = 2$, $l_1 = 100$ and $l_2 = 200$. Moreover, we assume that the cost of vaccine distribution is 10 times less than that of infection. Here, we can consider that distributing vaccines in non-elderly people is much harder than in elderly people because the disease-induced death rate is lower in non-elderly people, and therefore, some of the non-elderly people often show the vaccine hesitancy.

The initial condition is fixed as follows

$$S_1(0) = 0.33, \quad S_2(0) = 0.65, \quad I_1(0) = I_2(0) = 0.01, \quad V_i(0) = W_i(0) = R_i(0) = D_i(0) = 0, \quad i = 1, 2.$$

The optimal control u^* can be calculated as shown in Figure 2.

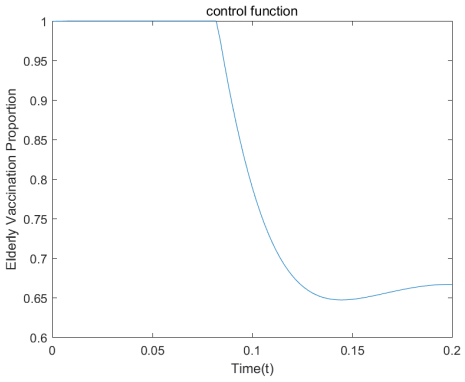
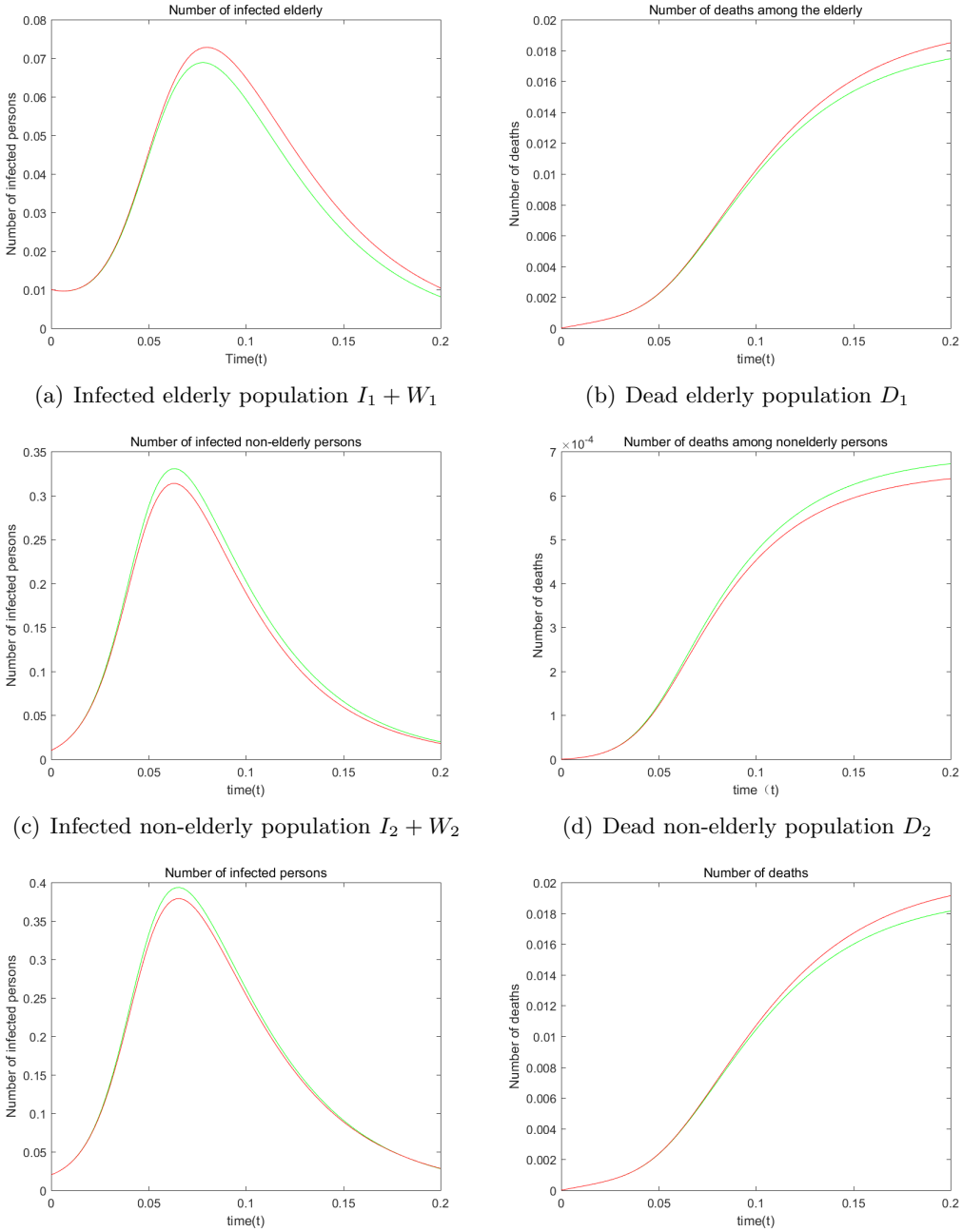


Figure 2: The optimal control u^*

Moreover, Figure 3 shows that the infected and dead populations in the optimal case $u = u^*$ (green) and the uncontrolled case $u = 0.5$ (red).



(a) Infected elderly population $I_1 + W_1$

(b) Dead elderly population D_1

(c) Infected non-elderly population $I_2 + W_2$

(d) Dead non-elderly population D_2

(e) Total infected population $I_1 + I_2 + W_1 + W_2$

(f) Total dead population $D_1 + D_2$

Figure 3: The infected and dead populations in the optimal case ($u = u^*$, green) and the uncontrolled case ($u = 0.5$, red)

From these figures, we obtain the following insights:

1. Adopting the strategy of giving priority to the elderly for vaccination will result in the lowest cost.

2. Due to the adoption of a priority vaccination strategy for the elderly, the number of infections and deaths in the elderly population will decrease, but the number of infections and deaths in the non-elderly population will increase.

3. After adopting the strategy of giving priority to the elderly for vaccination, the number of deaths in the total population will decrease, but the number of infections will increase. If the infection weight parameter is adjusted higher, the simulation results will change. As the infection weight parameter increases, the number of deaths might gradually increase and the number of infections will gradually decrease. At this time, priority might be given to non-elderly people for vaccination.

References

[1] Abdo, M.S., Shah, K., Wahash, H.A., Panchal, S.K., 2020. On a comprehensive model of the novel coronavirus (COVID-19) under mittag-leffler derivative. Chaos, Solitons & Fractals 135, 109867.

[2] Byrne, A., McEvoy, D., Collins, A., Hunt, K., Casey, M., Barber, A., Butler, F., Griffin, J., Lane, E., McAloon, C., O'Brien, K., Wall, P., Walsh, K., More, S., 2020. Inferred duration of infectious period of sars-cov-2: rapid scoping review and analysis of available evidence for asymptomatic and symptomatic covid-19 cases. BMJ Open 10, e039856.

[3] Cartwright, J.H., Piro, O., 1992. The dynamics of Runge–Kutta methods. International Journal of Bifurcation and Chaos 2, 427–449.

[4] Chan, J.F.W., Yuan, S., Kok, K.H., To, K.K.W., Chu, H., Yang, J., Xing, F., Liu, J., Yip, C.C.Y., Poon, R.W.S., et al., 2020. A familial cluster of pneumonia associated with the 2019 novel coronavirus indicating person-to-person transmission: a study of a family cluster. The lancet 395, 514–523.

[5] Diekmann, O., Heesterbeek, J.A.P., Metz, J.A.J., 1990. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations. Journal of Mathematical Biology 28, 365–382.

[6] van den Driessche, P., Watmough, J., 2002. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. Mathematical Biosciences 180, 29–48.

[7] Gorbalenya, A.E., Baker, S.C., Baric, R.S., de Groot, R.J., Drosten, C., Gulyaeva, A.A., Haagmans, B.L., Lauber, C., Leontovich, A.M., Neuman, B.W., et al., 2020. Severe acute respiratory syndrome-related coronavirus: The species and its viruses–a statement of the coronavirus study group. BioRxiv .

[8] Huang, C., Wang, Y., Li, X., Ren, L., Zhao, J., Hu, Y., Zhang, L., Fan, G., Xu, J., Gu, X., et al., 2020. Clinical features of patients infected with 2019 novel coronavirus in Wuhan, China. The lancet 395, 497–506.

[9] Lenhart, S., Workman, J.T., 2007. Optimal control applied to biological models. CRC press.

[10] Li, Q., Guan, X., Wu, P., Wang, X., Zhou, L., Tong, Y., Ren, R., Leung, K.S., Lau, E.H., Wong, J.Y., et al., 2020a. Early transmission dynamics in Wuhan, China, of novel coronavirus–infected pneumonia. New England journal of medicine 382, 1199–1207.

[11] Li, Q., Guan, X., Wu, P., Wang, X., Zhou, L., Tong, Y., Ren, R., Leung, K.S., Lau, E.H., Wong, J.Y., et al., 2020b. Early transmission dynamics in Wuhan, China, of novel coronavirus–infected pneumonia. New England journal of medicine 382, 1199–1207.

[12] Ministry of Health, Labour and Welfare of Japan, 2020. The 23rd life tables. URL: https://www.mhlw.go.jp/english/database/db-hw/vs02.html.

[13] Ministry of Health, Labour and Welfare of Japan, 2023. Visualizing the data: information on covid-19 infections. URL: https://covid19.mhlw.go.jp/en/.

[14] National Institute of Infectious Diseases, 2022. On vaccines for covid-19 as of january 14, 2022 (japanese). URL: https://www.niid.go.jp/niid/ja/2019-ncov/2484-idsc/10923-covid19-68.html.

[15] Oordt-Speets, A., Spinardi, J., Mendoza, C., Yang, J., Morales, G., McLaughlin, J.M., Kyaw, M.H., 2023. Effectiveness of covid-19 vaccination on transmission: A systematic review. COVID 3, 1516–1527.

[16] Organization, W.H., et al., 2020. Naming the coronavirus disease (COVID-19) and the virus that causes it. Brazilian Journal of Implantology and Health Sciences 2.

[17] Riou, J., Althaus, C.L., 2020. Pattern of early human-to-human transmission of wuhan 2019 novel coronavirus (2019-nCoV), December 2019 to January 2020. Eurosurveillance 25, 2000058.

[18] Sharomi, O., Malik, T., 2017. Optimal control in epidemiology. Annals of Operations Research 251, 55–71.

[19] Shen, Z.H., Chu, Y.M., Khan, M.A., Muhammad, S., Al-Hartomy, O.A., Higazy, M., 2021. Mathematical modeling and optimal control of the covid-19 dynamics. Results in Physics 31, 105028.

[20] SPI-M-O, 2021. Summary of further modelling of easing restrictions – roadmap step 2. URL: https://assets.publishing.service.gov.uk/government/uploads/system/uploads/attachment_data/file/975909/S1182_SPI-M-O_Summary_of_modelling_of_easing_roadmap_step_2_restrictions.pdf.

[21] Sun, D., Duan, L., Xiong, J., Wang, D., 2020. Modeling and forecasting the spread tendency of the COVID-19 in china. Advances in Difference Equations 2020, 1–16.

[22] Ueda, M., Kobayashi, T., Nishiura, H., 2022. Basic reproduction number of the covid-19 delta variant: Estimation from multiple transmission datasets. Mathematical Biosciences and Engineering 8, 13137–13151.

[23] Ullah, S., Khan, M.A., 2020. Modeling the impact of non-pharmaceutical interventions on the dynamics of novel coronavirus with optimal control analysis with a case study. Chaos, Solitons & Fractals 139, 110075.

[24] worldometer, 2024. Coronavirus cases. URL: https://www.worldometers.info/coronavirus/.

[25] Wu, J.T., Leung, K., Leung, G.M., 2020. Nowcasting and forecasting the potential domestic and international spread of the 2019-nCoV outbreak originating in wuhan, china: a modelling study. The lancet 395, 689–697.

[26] Zhao, S., Lin, Q., Ran, J., Musa, S.S., Yang, G., Wang, W., Lou, Y., Gao, D., Yang, L., He, D., et al., 2020. Preliminary estimation of the basic reproduction number of novel coronavirus (2019-nCoV) in china, from 2019 to 2020: A data-driven analysis in the early phase of the outbreak. International journal of infectious diseases 92, 214–217.

単純特異点リンクにまつわるはめ込みのトポロジー

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
田邊真郷 (Masato TANABE) *

概要

はめ込みの正則ホモトピーによる分類や，具体的なはめ込みの性質を調べる研究は，Whitney, Smale, Hirsch らの研究に端を発して古くから研究されてきた．近年，Kinjo, Némethi–Pintér は，単純特異点リンクにまつわる 3 次元球面の 4, 5 次元空間へのはめ込みを独立に構成・研究した．講演者は，彼らのはめ込みが実は正則ホモトピックであったことを明らかにし，その証明の鍵となるはめ込みの Wu 不変量に新たな幾何学的解釈を与えた．本稿の前半部は，研究のキーワードであるはめ込み・単純特異点リンクのそれぞれ独立した概説である（第 1 章・第 2 章）．後半部において，先行研究のはめ込みの構成方法，援用したはめ込みの分類理論，そして講演者の主結果について述べる（第 3 章）．本稿の内容は講演者のプレプリント [Tan24] に基づく．本稿では，特にことわらない限り，多様体や写像はすべて C^∞ 級であるとする．

1　はめ込みのトポロジー

本章では，はめ込みの分類問題について紹介する．詳しくは [Ada84] 等を参照されたい．本章を通して，M, N を多様体とする．

1.1　定義・Whitney の研究

まずは分類対象と分類基準を定義しよう．

定義 1.1. 写像 $f\colon M \to N$ が**はめ込み**であるとは，任意の点 $x \in M$ における微分 $df_x\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ が単射であることをいう．はめ込みは $f\colon M \looparrowright N$ とも表される．

定義 1.2. はめ込みの連続族 $\{f_t\colon M \looparrowright N\}_{t\in[0,1]}$ を**正則ホモトピー**という．二つのはめ込み $f, g\colon M \looparrowright N$ が**正則ホモトピック**であるとは，それらを結ぶ正則ホモトピーが存在することをいう．

多様体 M から多様体 N へのはめ込みの正則ホモトピー類全体が成す集合を $\mathrm{Imm}[M, N]$ と書こう．はめ込みの分類問題とは，この集合 $\mathrm{Imm}[M, N]$ がどれだけ大きいかを問うことに他ならない．そのような問題が興味を持たれ始めた契機は，Whitney–Graustein による以下の定理だと思われる．

定理 1.3 ([Whi37])**.** 回転数を与える写像 $\mathrm{rot}\colon \mathrm{Imm}[S^1, \mathbb{R}^2] \to \mathbb{Z}$ は全単射である．

この定理は，$\mathrm{Imm}[S^1, \mathbb{R}^2]$ が $\mathbb{Z}$ 程度の大きさを持つことだけでなく，簡便な完全不変量まで与えて

* E-mail:tanabe.masato.i8@elms.hokudai.ac.jp

くれている．はめ込みの分類が，「回転数の計算」という代数トポロジー的な営みによって達成されるのである．また，Whitney は，多様体論で有名な埋め込み・はめ込み可能性の問題を調べる過程で，m 次元多様体の $2m$ 次元多様体へのはめ込みに対する正則ホモトピー不変量として「自己交叉数」という量も発見した（残念ながらはめ込みを分類し切るものではなかったが）[Whi44]．しかし，これらの結果以降，はめ込みの分類理論について目立った成果はしばらく現れなかった．

1.2 Smale–Hirsch 理論

はめ込みの研究を爆発的に加速させたのは，1950 年代後半，Smale と Hirsch による 3 つの結果であった．第 1 の結果は以下である．

定理 1.4 ([Sma59a])**.** $\mathrm{Imm}[S^2, \mathbb{R}^n]$ からホモトピー群 $\pi_2(V_{n,2})$ への全単射が存在する．

ただし，$V_{n,k}$ は $\mathbb{R}^n$ の k-枠（一次独立な k 本のベクトルの組）全体が成す空間 — **Stiefel 多様体**を表す[*1]．$\pi_2(V_{3,2}) = \pi_2(\mathrm{SO}(3))$ は自明群なので，以下の系を得る．

系 1.5. $\mathrm{Imm}[S^2, \mathbb{R}^3]$ は一点集合である．特に，標準的な埋め込み $\iota\colon S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ について，ι と $-\iota$ ははめ込みとして正則ホモトピックである．

「特に,」以降の事実は**球面の裏返し** (sphere eversion) と呼ばれており，当時はかなり驚きの結果だった．Smale は裏返しの可能性だけを示したが，その後の研究者によって，裏返しの具体的な記述も与えられた．例えば Francis–Morin[*2]を参照されたい [FM80]．

第 2 の結果は，上の結果から程なくして Smale 自身が与えた，任意次元の球面の Euclid 空間へのはめ込みの分類である．彼は，はめ込みの微分写像に注目するという回転数の概念を汲んだアイデアで，とある完全不変量を構成してみせた．この不変量は，今日では **Smale 不変量**と呼ばれている．

定理 1.6 ([Sma59b])**.** Smale 不変量 $\Omega\colon \mathrm{Imm}[S^k, \mathbb{R}^n] \to \pi_k(V_{n,k})$ は群同型である．ただし，$\mathrm{Imm}[S^k, \mathbb{R}^n]$ にははめ込みの連結和で群構造を入れる．

例 1.7. $\mathrm{Imm}[S^3, \mathbb{R}^4] \cong \pi_3(V_{4,3}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$，$\mathrm{Imm}[S^3, \mathbb{R}^5] \cong \pi_3(V_{5,3}) \cong \mathbb{Z}$.

最後に，第 3 の結果は Hirsch によって与えられた．Smale の結果を，一般の多様体間のはめ込みに対して一般化したのである．彼の結果を述べるために，以下の概念を導入しよう．

定義 1.8. 接束間の連続写像 $F\colon TM \to TN$ が**形式的なはめ込み**であるとは，任意の点 $x \in M$ において，ファイバー間の線型写像 $F_x\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ が単射であることをいう．

注意 1.9. 形式的なはめ込みは底空間のあいだの連続写像 $\bar{F}\colon M \to N$ を誘導する．しかし，F が $\bar{F}$ の微分であることは要請しないことに注意されたい．はめ込みは底空間方向の様子がファイバー方向に微分として反映されるが，形式的なはめ込みではその必要はないのである．

[*1] Stiefel 多様体は等質空間の構造を持ちます: $V_{n,k} \cong \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})/\mathrm{GL}(n-k,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}(n)/\mathrm{SO}(n-k)$．この空間のホモトピー群は，ファイバー束のホモトピー長完全列を利用すると比較的容易に求められます．

[*2] Morin は盲目の数学者だったそうです．

定義 1.10. 形式的なはめ込みの連続族 $\{F_t\colon TM \to TN\}_{t\in[0,1]}$ を**形式的な正則ホモトピー**という．二つの形式的なはめ込み $F, G\colon TM \to TN$ が**正則ホモトピック**であるとは，それらを結ぶ形式的な正則ホモトピーが存在することをいう．

多様体 M から多様体 N への形式的なはめ込みの形式的な正則ホモトピー類全体が成す集合を $\mathrm{Imm}^{\mathrm{form}}[M,N]$ と書こう．Hirsch が示したこと（の一部）は以下の通りである[*3]．

定理 1.11 ([Hir59])**.** 微分 $\mathrm{Imm}[M,N] \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{form}}[M,N],\ f \mapsto df$ は全単射である．

$\mathrm{Imm}^{\mathrm{form}}[M,N]$ という集合は，$\mathrm{Imm}[M,N]$ よりも随分と扱いやすい．一つ例を見ておこう．

例 1.12. M を平行化可能多様体（つまり，接束 TM が自明化可能である）とし，$\mathrm{Imm}^{\mathrm{form}}[M,\mathbb{R}^n]$ を「計算」する．まず，二つの自明化 $TM \cong M\times\mathbb{R}^m$, $T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ を固定する．これらを通じれば，M の $\mathbb{R}^n$ への形式的なはめ込みとは，ファイバーごとに単射な束準同型 $M\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ に他ならない．この束準同型は連続写像 $M \to \mathbb{R}^n \times V_{n,m}$ と等価であるから，全単射

$$\mathrm{Imm}[M,\mathbb{R}^n] = \mathrm{Imm}^{\mathrm{form}}[M,\mathbb{R}^n] = [M, \mathbb{R}^n\times V_{n,m}] = [M, V_{n,m}]$$

を得る．ただし，$[X,Y]$ は位相空間 X, Y 間の連続写像のホモトピー類全体が成す集合を表す．

Hirsch の定理を以て，はめ込みの分類理論は代数トポロジー — 微分写像のホモトピー論 — へと帰着された．また，球面のはめ込みであれば，Smale 不変量という具体的な完全不変量も知られている．今日では，彼らの業績はまとめて **Smale–Hirsch 理論**と呼ばれている．さらに，Hirsch の定理およびその証明技法は**ホモトピー原理 (h-principle)** として一般化され，付加構造つきのはめ込みや，より広い対象の研究にも大きな波及を見せている．

2　単純特異点リンク

本章では，複素特異点，特に単純特異点のトポロジー的側面について紹介する．詳しくは [Mil68, AGV85, Sea06, Kas15, Sea19] 等を参照されたい．

2.1　リンクと Milnor ファイバー

複素超曲面の特異点を解析する上で，しばしば次の空間を考える．

定義 2.1 (リンクと Milnor ファイバー[*4])**.** $h\colon (\mathbb{C}^n,0) \to (\mathbb{C},0)$ を，原点に孤立特異点を持った複素正則函数芽とし，超曲面孤立特異点 $(h^{-1}(0),0) \subset (\mathbb{C}^n,0)$ を考える．このとき，充分小さな正数 $0<\varepsilon\ll 1$ に対して定まる実 $2n-3$ 次元多様体 $K := h^{-1}(0)\cap S^{2n-1}_{\varepsilon}$ を h の**リンク**という．さら

[*3] 実際に Hirsch が示したことは，はめ込み全体の空間と形式的なはめ込み全体の空間の弱ホモトピー同値性でした．本来はそこまで言及して初めて Hirsch の結果です．しかし，講演者の研究が関連するのはその弧状連結成分 (π_0) に関するものでしたので，本文では結果を絞って紹介しました．

[*4] リンクという呼び名は，$n=2$ の場合，リンクが 3 次元球面内の 1 次元部分多様体（すなわち，円周の非交和の埋め込み）となることに由来します．また，Milnor ファイバーという呼び名は，Milnor のファイブレーション定理に由来します．この定理は歴史的に重要ですが，今回の研究にあたっては関連性が薄いため割愛します．

に，充分小さな正数 $0 < \delta \ll \varepsilon \ll 1$ に対して定まる複素 $n-1$ 次元多様体 $F \coloneqq h^{-1}(\delta) \cap B_\varepsilon^{2n}$ を h の **Milnor ファイバー**という．

リンクは Milnor ファイバーの境界 $\partial F = h^{-1}(\delta) \cap S_\varepsilon^{2n-1}$ と球面 S_ε^{2n+1} 内でアイソトピックである．リンクの具体例としては，Poincaré のホモロジー 3 次元球面，エキゾチック 7 次元球面など，トポロジーにおいて重要な空間が現れる．さらに，球面 S_ε^{2n+1} およびリンク K 上にはそれぞれ

$$\xi_{\mathrm{std}} \coloneqq TS_\varepsilon^{2n+1} \cap J(TS_\varepsilon^{2n+1}), \quad \xi_{\mathrm{can}} \coloneqq TK \cap J(TK)$$

によって接触構造が入り，$(K, \xi_{\mathrm{can}}) \subset (S_\varepsilon^{2n+1}, \xi_{\mathrm{std}})$ は接触部分多様体となる．ξ_{can} は K 上の**標準接触構造**と呼ばれる．これに加え，リンクや Milnor ファイバーは豊富な構造を備えており，特異点論・トポロジー・組合せ論・接触/シンプレクティック/複素/スピン幾何といった多様な観点から研究され続けてきた．

さて，Arnol'd は，複素函数芽 $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ に対してモダリティと呼ばれる概念を導入し，モダリティ 2 までを持つ函数芽の完全な分類を行った．表題にある**単純特異点**とは，モダリティ 0 を持つ函数芽の特異点である．Arnol'd の結果によると，単純特異点は A, D, E 型に分類される．以下でも垣間見ることになるが，この分類は正多面体の分類や単純 Lie 代数の分類といった他の様々な数学と関連している．そのため，単純特異点は各方面から **Klein 特異点**，**du Val 特異点**，**有理二重特異点**などとも呼ばれている．

以降，3 変数函数芽の単純特異点が定めるリンク — 本稿ではこれを**単純特異点リンク**と呼ぶ — に注目しよう．この場合，単純特異点を表す函数芽の標準形として以下のものが知られている．

- A_{n-1} $(n \geqslant 2)$: $x^2 + y^2 + z^n$
- D_{n+2} $(n \geqslant 2)$: $x^2 + y^2 z + z^{n+1}$
- E_6: $x^2 + y^3 + z^4$
- E_7: $x^2 + y^3 + yz^3$
- E_8: $x^2 + y^3 + z^5$

定義から，単純特異点リンクは 5 次元球面内に埋め込まれた 3 次元多様体である．A_{n-1} 型のリンクはレンズ空間 $L(n, n-1)$ に，E_8 型のリンクは Poincaré のホモロジー 3 次元球面に微分同相であることが（後述の構造を見るなどすると）分かる．単純特異点リンクは多様な幾何構造を持つが，本稿で注目するのは以下に述べる 2 種類の見方である．

2.2 軌道空間としての幾何構造 — $\mathrm{SU}(2)$ の有限部分群から

Arnol'd の分類よりもずっと昔，Klein は SU(2) の有限部分群を分類し，それらが単純特異点（と後に呼ばれたクラスの特異点）に対応することを示した [Kle56]．対応関係は以下の通りである．

- A_{n-1} $(n \geqslant 2)$: 位数 n の巡回群 C_n
- D_{n+2} $(n \geqslant 2)$: 位数 $4n$ の二項二面体群 Dic_n
- E_6: 四面体群 $2T$（位数は 24）
- E_7: 八面体群 $2O$（位数は 48）

- E_8: 十二面体群 $2I$（位数は 120）

$\Gamma \subset \mathrm{SU}(2)$ を上記の群のひとつとしよう．Γ は $\mathbb{C}^2$ に左から作用し，商特異点 $\Gamma\backslash\mathbb{C}^2$ を定める（原点が特異点）．Klein は $\Gamma\backslash\mathbb{C}^2$ が $\mathbb{C}^3$ 内の複素超曲面の特異点として実現されることを示した．ここに現れる超曲面の定義方程式が，対応する単純特異点のそれであったのである．このとき，軌道空間 $\Gamma\backslash S^3$ は，対応する特異点のリンク K に微分同相となる．トポロジカルに言えば，リンク K は，S^3 からの普遍被覆 $p\colon S^3 \to K$ であって被覆変換群が Γ であるものを許容する．

なお，実現の写像，すなわちパラメタづけ $\Phi\colon (\mathbb{C}^2,0) \to (\Gamma\backslash\mathbb{C}^2,0) \hookrightarrow (\mathbb{C}^3,0)$ は，例えば A_{n-1} 型, D_{n+2} 型に対しては以下のように表せることが知られている:

$$(s,t) \mapsto \left(\frac{1}{2}(s^n - t^n), \frac{\sqrt{-1}}{2}(s^n + t^n), st\right), \quad (s,t) \mapsto \left(\frac{st}{2}(s^{2n} - t^{2n}), \frac{\sqrt{-1}}{2}(s^{2n} + t^{2n}), s^2t^2\right).$$

2.3 鉛管多様体としての幾何構造 — Dynkin 図形から

一般に，超曲面孤立特異点 $(V,0) \subset (\mathbb{C}^3,0)$ が，有限回のブローアップによって解消され，現れる例外曲線たちが正規交叉するようにできたとしよう．特異点リンクは解消される特異点のまわりに現れる多様体だったので，例外曲線たちの合併の正則近傍の境界に微分同相である．このような状況は，トポロジーの言葉を遣うと以下のようにまとめられる．「重み付きグラフ G を，例外曲線に対応して頂点（重みは自己交叉数）を置き，例外曲線同士が交わっているとき辺を結ぶ（重みはその交叉数）ことによって構成する．このとき，件の特異点の特異点解消およびリンクは，G を台グラフとするような鉛管 4 (resp. 3) 次元多様体 $X(G)$ (resp. $M(G)$) に微分同相である．」

単純特異点は上記の例となっており，極小特異点解消と呼ばれる解消に現れる台グラフが，古くから **Dynkin 図形**と呼ばれるものになっている（図 2.3）．

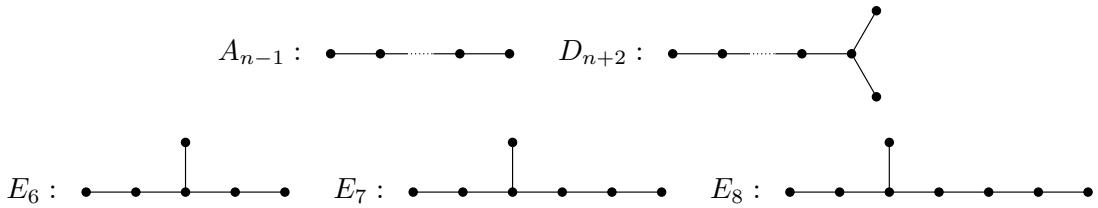


図 1　A-D-E 型の Dynkin 図形（頂点数は添字と一致している．頂点の重みは -2，辺の重みは 1 とする）

さらに，単純特異点に限っては，その Milnor ファイバー F も $X(G)$ に微分同相となる．つまり，極小特異点解消と Milnor ファイバーが同じ微分同相型を持つ．しかしながら，それぞれが許容する自然な複素構造は全く異なることに注意しておこう．というのも，極小特異点解消内は，例外曲線 $\mathbb{C}P^1$ たちを複素部分多様体として含んでいる．一方で，F は $\mathbb{C}^3$ の複素部分多様体なので，コンパクトで境界を持たないような複素部分多様体を持つことはできない（Liouville の定理）．より詳しく，極小特異点解消における例外曲線たちの合併に Milnor ファイバー側で対応するのは，実断面 $F \cap \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{C}^3$ である．この一つ一つの既約成分は F の総実 (totally real) な部分多様体である．

3　本研究の概要および主結果

本章では，講演者が今回取り組んだ研究，および得られた主結果について紹介する．詳しくは [Tan24] を参照されたい．

3.1　単純特異点リンクにまつわるはめ込み

本研究のモチベーションは，以下の独立した二つの先行研究の間に見出だされる，とある関係性であった．一つ目の研究は，Némethi–Pintér による，複素特異点とはめ込み理論の融合である [NP15]．彼らは，$(\mathbb{C}^2,0)$ からのパラメタづけを持つような $\mathbb{C}^3$ 内の超曲面特異点に対し，以下の手続きではめ込みを得た．特異点のパラメタづけを $\Phi\colon(\mathbb{C}^2,0)\to(\mathbb{C}^3,0)$ と置く．（技術的な仮定として，Φ は原点だけに特異点を持つとする．）$\mathbb{C}^3$ 内で原点を中心とする充分小さな球面 S^5_ε をとり，逆像 $\mathfrak{S}\coloneqq\Phi^{-1}(S^5_\varepsilon)$ を考える．$\mathfrak{S}$ は S^3 に微分同相であることから，はめ込み $\Phi|_{\mathfrak{S}}\colon S^3\looparrowright S^5_\varepsilon-\{1\mathrm{pt.}\}=\mathbb{R}^5$ が得られる．彼らの主結果は，Φ が持つ複素特異点の重複度と $\Phi|_{\mathfrak{S}}$ の Smale 不変量を関係づける公式であった．そして，彼らは公式の具体例として，単純特異点から得られるはめ込みを考えた．

定理 3.1 ([NP15])**.** 単純特異点とそのパラメタづけ $\Phi\colon(\mathbb{C}^2,0)\to(\Gamma\backslash\mathbb{C}^2,0)\hookrightarrow(\mathbb{C}^3,0)$ に対し，誘導されるはめ込み $\Phi|_{\mathfrak{S}}\colon S^3\looparrowright\mathbb{R}^5$ の Smale 不変量 $\Omega(\Phi|_{\mathfrak{S}})\in\mathbb{Z}$[*5]は

$$\Omega(\Phi|_{\mathfrak{S}})=\begin{cases}-(n^2-1) & (A_{n-1}\text{の場合});\\ -(4n^2+12n-1) & (D_{n+2}\text{の場合});\\ -167 & (E_6\text{の場合});\\ -383 & (E_7\text{の場合});\\ -1079 & (E_8\text{の場合}).\end{cases}$$

ここで，上記のはめ込み $\Phi|_{\mathfrak{S}}$ は

$$\Phi|_{\mathfrak{S}}=f\circ p\colon S^3\to\Gamma\backslash S^3\cong K\hookrightarrow\mathbb{R}^5$$

と分解されることに注意しておく．ただし，p はリンク上の普遍被覆を，f はリンクの $S^5_\varepsilon-\{1\mathrm{pt.}\}=\mathbb{R}^5$ への包含写像を表す．

二つ目の研究は，Kinjo による，単純特異点リンクを通じた非自明なはめ込みの構成およびその Smale 不変量の計算である [Kin15]．Kinjo は，単純特異点リンクの鉛管構造に注目することで，以下のようにはめ込みを構成した．まず，はめ込み $w\colon S^2\looparrowright\mathbb{R}^4$ であって，正の自己交叉を唯一つだけ持つようなものを考える（これを Whitney の球面という）．この法 Euler 数は -2 であるため，法束は余接束 T^*S^2 に同型である．法束の円盤化・円周化をそれぞれ

$$\hat{g}_{A_1}\colon DT^*S^2\looparrowright\mathbb{R}^4,\quad g_{A_1}\colon UT^*S^2\looparrowright\mathbb{R}^4$$

と置こう．$DT^*S^2=X(A_1)$ および $UT^*S^2=M(A_1)$ に注意（記号は 2.3 節を参照）すれば，A_1 型リンクの $\mathbb{R}^4$ へのはめ込みが得られたことになる．あとはこれをはめ込みごと鉛管工事することで，

[*5] 計算のためには同型 $\mathrm{Imm}[S^3,\mathbb{R}^5]\cong\mathbb{Z}$ を固定する必要がありますが，ここでは説明を省略します．

任意の A-D-E 型 Dynkin 図形 G に対して，はめ込み

$$\hat{g}_G\colon X(G) \looparrowright \mathbb{R}^4, \quad g_G\colon M(G) \looparrowright \mathbb{R}^4$$

が得られる．Kinjo は，g_G を普遍被覆 $p\colon S^3 \to M(G)$ で引き戻すことによって，はめ込み $g_G \circ p\colon S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ を得た．そして，A 型および D 型に対して，以下の結果を得た．

定理 3.2 ([Kin15])**.** A 型および D 型の単純特異点，および対応する Dynkin 図形 G を考える．このとき，はめ込み $g_G \circ p\colon S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ の Smale 不変量 $\Omega(g_G \circ p) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$[*6]は

$$\Omega(g_G \circ p) = \begin{cases} (-n^2 - 1, 1) & (A_{n-1}\text{の場合}); \\ (-4n^2 - 12n - 1, 1) & (D_{n+2}\text{の場合}). \end{cases}$$

注意が二点ある．一点目に，Kinjo の結果は $M(G)$ の向きが裏返ったものに対する計算であって，上記の結果はそれを裏返し直したはめ込みに対するものである[*7]．ただ，これは非本質的なので，あまり気にしないことにする．二点目に，Kinjo は E 型に対する結果を得ていない．というのも，彼女が Smale 不変量の計算に用いたのは，「与えられたはめ込みを境界に持つような 1 次元高い写像を構成し，その実特異点を数え上げる」という職人技だったためである（これを特異 Seifert 膜の手法という [ET11]）．膜の張り方や特異点の数え上げは，E 型に応用できるようなものではなかった．

上記二つの研究は，それぞれ異なるモチベーション・手法からのものであったにも拘らず，奇妙な関係性を持っていた．Kinjo のはめ込みを $\mathbb{R}^5$ に押し出して得られるはめ込みの Smale 不変量を計算すると，以下を得るのである．$j\colon \mathbb{R}^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ を包含写像としよう．

系 3.3. A 型および D 型の単純特異点，および対応する Dynkin 図形 G を考える．このとき，はめ込み $j \circ g_G \circ p\colon S^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ の Smale 不変量 $\Omega(j \circ g_G \circ p) \in \mathbb{Z}$ は

$$\Omega(j \circ g_G \circ p) = \begin{cases} -(n^2 - 1) & (A_{n-1}\text{の場合}); \\ -(4n^2 + 12n - 1) & (D_{n+2}\text{の場合}). \end{cases}$$

これと定理 3.1 を比較すると，Smale 不変量（正則ホモトピー分類の完全不変量！）の一致から，**A 型と D 型の場合には，二つのはめ込み $\Phi|_{\mathfrak{S}} = f \circ p$ と $j \circ g_G \circ p$ が正則ホモトピックであること**が判明する．この事実は既に [NP15, Kin15] 両者から指摘されていたが，幾何学的な理由は調べられていなかった．そこで，講演者は以下二つの問いを立て，いずれも肯定的に解決した．

問題 3.4. (1) E 型に対しても g_G の Smale 不変量が求められるか？

(2) そもそも f と $j \circ g_G$ が正則ホモトピックなのではないか？

この解決のために，講演者は Wu および Saeki–Szűcs–Takase による有向 3 次元多様体の 5 次元空間へのはめ込みの分類・完全不変量に関する研究を援用し，不変量の新たな幾何学的解釈を与えた．

[*6] 計算のためには同型 $\mathrm{Imm}[S^3, \mathbb{R}^4] \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ を固定する必要がありますが，ここでは説明を省略します．

[*7] 正確に言うと，Kinjo の論文では，Dynkin 図形に重み $+2$ を載せたグラフが用いられていました．

3.2　3 次元多様体の 5 次元空間へのはめ込みの分類

M^3 を向きづけられた連結閉 3 次元多様体とする．障害理論により，M^3 は平行化可能である．よって，例 1.12で見たことから，全単射

$$\mathrm{Imm}[M^3, \mathbb{R}^5] \to [M^3, V_{5,3}]$$

が得られる．Wu は [Wu64] において，右辺のホモトピー集合を解析し，M^3 の $\mathbb{R}^5$ へのはめ込みに対する完全不変量を得た．完全不変量は二つの不変量から成る．一つ目は M^3 の 2-骨格上で定まる **Wu 不変量**，二つ目は Smale 不変量の類似に相当する **Smale 型不変量**である[*8]．しかしながら，Wu によって与えられた Smale 型不変量の表式は，具体的計算には向かなかった．これを改善したのが Saeki–Szűcs–Takase [SST02]（はめ込みの法束が自明な場合）および Juhász [Juh05]（一般の場合）であった．彼らは，特異 Seifert 膜という概念を用い，幾何学的かつ簡便な Smale 型不変量の計算方法を与えた．まずは Wu 不変量の定義から紹介しよう．

定義 3.5. M^3 の平行化 $\tau\colon TM^3 \to M^3 \times \mathbb{R}^3$ を固定する．はめ込み $f\colon M^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ に対して，微分が定める写像を $\varphi_{\tau,f}\colon M^3 \to V_{5,3}$ と置く．このとき，生成元 $\Sigma \in H^2(V_{5,3};\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ の引き戻し

$$c_\tau(f) \coloneqq (\varphi_{\tau,f})^*(\Sigma) \in H^2(M^3;\mathbb{Z})$$

を f の τ に関する **Wu 不変量**という．

注意 3.6. 生成元 Σ は，$\mathrm{SO}(2)$-束 $\mathrm{SO}(5) \to \mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(2) \cong V_{5,3}$ の Euler 類が 2Σ となるように選ぶ．これは，Wu 不変量の 2 倍がはめ込み f の法 Euler 類と一致することに他ならない．

注意 3.7. Wu 不変量は，M^3 の平行化に依存して値が切り替わる[*9]．このため，Wu 不変量を計算するためには，そもそもどのような平行化を選び取るかが問題となる．

Smale 型不変量については，設定や定義が少々複雑なので，研究で用いた部分のみ紹介する．

定義 3.8. 法束が自明なはめ込み $f\colon M^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ に対して，それを境界に持つ写像 $\hat{f}\colon X^4 \to \mathbb{R}^6_+$ をとる．ただし，X^4 は M^3 を境界に持つようなコンパクト有向 4 次元多様体とする．このとき，整数値

$$i(f) \coloneqq \frac{3}{2}(\sigma(X^4) - \alpha(M^3)) + s(\hat{f}) \in \mathbb{Z}$$

を f の **Smale 型不変量**という．ただし，$\sigma(X^4)$ は X^4 の符号数，$\alpha(M^3) \coloneqq \dim_{\mathbb{Z}_2} H_1(M^3;\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$，$s(\hat{f})$ は $\hat{f}$ の特異性に関わる量である．$\hat{f}$ が埋め込みに正則ホモトピックならば，$s(\hat{f}) = 0$ となる．

計算に現れる写像 $\hat{f}$ を，f の**特異 Seifert 膜**という．この下で，[SST02] は以下を示した．$\mathrm{Imm}[M^3,\mathbb{R}^5]_0$ を，法束が自明なはめ込み $M^3 \looparrowright \mathbb{R}^5$ の正則ホモトピー類全体が成す集合とする．また，$\Gamma_2(0) \coloneqq \{C \in H^2(M^3;\mathbb{Z}) \mid 2C = 0\}$ と置く．

[*8] Smale 型不変量という名称は講演者がつけたもので，一般的ではありません．

[*9] この依存性は [Tan24, Appendix A] で詳しく述べています．

定理 3.9 ([Wu64, SST02])**.** $i\colon \mathrm{Imm}[M^3,\mathbb{R}^5]_0 \to \mathbb{Z}$ は well-defined である．さらに，対応

$$(c_\tau, i)\colon \mathrm{Imm}[M^3,\mathbb{R}^5]_0 \to \Gamma_2(0)\times\mathbb{Z}$$

は全単射である．

3.3 主結果

注目していたはめ込み $f\colon K\hookrightarrow\mathbb{R}^5$ と $j\circ g_G\colon M(G)\looparrowright\mathbb{R}^5$ は，どちらも有向 3 次元多様体の 5 次元空間へのはめ込みである．しかも，定義域はそれぞれリンク K と鉛管多様体 $M(G)$ であり，ある微分同相によって同一視することができる．微分同相を固定すれば，f と $j\circ g_G$ が正則ホモトピックであるかを問うことに意味がある．定理 3.9 から，正則ホモトピック性は Wu 不変量と Smale 型不変量の計算によって判定できる．この戦略に基づき，講演者は，問題 3.4(2) を肯定的に解決した．主定理は以下の通りである．

定理 3.10 ([Tan24])**.** 任意の単純特異点を考える．そのリンクを K，Milnor ファイバーを F，対応する Dynkin 図形を G とする．K の平行化 $\tau\colon TK\to K\times\mathbb{R}^3$ を，K 上の標準接触構造に沿って固定する．このとき，

$$(c_\tau(f), i(f)) = \left(0, \frac{3}{2}(\sigma(F)-\alpha(K))\right),$$
$$(c_\tau(j\circ g_G), i(j\circ g_G)) = \left(0, \frac{3}{2}(\sigma(X(G))-\alpha(M(G)))\right).$$

したがって，f と $j\circ g_G$ は正則ホモトピックである．

Smale 型不変量 i の方は，Milnor ファイバーが（特異点のない）特異 Seifert 膜として選べるため，比較的容易に計算できる．主定理の新規性は Wu 不変量の計算 — より正確には，適切な平行化を選び取り，その下で Wu 不変量の消滅を得たこと — にある．本稿では詳しく述べられないが，f の Wu 不変量の消滅は **K が $\mathbb{R}^5$ の（概）接触部分多様体になっていること**，$j\circ g_G$ の Wu 不変量の消滅は**正則ホモトピーによって，g_G の構成に用いた w たちが $\mathbb{R}^4=\mathbb{C}^2$ への総実 (totally real) なはめ込みにできること**[*10]**，したがって，$M(G)$ 上の（概）接触構造が g_G によって $\mathbb{C}^2$ へはめ込まれると複素接触すること**が本質的に効いている．講演者は，これらの消滅を，Wu 不変量の定義に登場するコホモロジー類 $\Sigma\in H^2(V_{5,3};\mathbb{Z})$ の棲み処である $V_{5,3}=\mathrm{SO}(5)/\mathrm{SO}(2)$ を他の空間 $\mathrm{SO}(5)/\mathrm{U}(2)$, $\mathrm{SO}(4)$ に移すことで証明した．この手法は，定義域多様体に引き戻す前のコホモロジー類を解析するものであり，定義域多様体のトポロジーに振り回されない「普遍的な」証明を教えてくれる．

最後に，上記の正則ホモトピック性を利用することで，講演者は問題 3.4(1) を肯定的に解決した．さらに，[Kin15] により既知であった A, D 型の計算結果を再証明することにも成功した．ただし，証明は G. Pintér 氏の提案による[*11]．

[*10] この変形は，g_G および $\mathbb{R}^4=\mathbb{C}^2$ が $X(G)$ 上に誘導する複素構造が，Milnor ファイバーの複素構造と（概複素構造として）同一となることを見据えたものです．この $X(G)$ 上の複素構造から $M(G)$ 上に概接触構造が誘導し，これを備えた $M(G)$ は標準接触構造を備えたリンク K と概接触多様体として同一視することができます．

[*11] Pintér 氏からは，プレプリント第 1 版の投稿後すぐに，沢山の情報と共に連絡を頂きました．定理 3.11 の証明を含め，沢山の議論を交わすことができました．

定理 3.11 ([Tan24])**.** 任意の単純特異点，および対応する Dynkin 図形 G を考える．このとき，はめ込み $g_G \circ p\colon S^3 \looparrowright \mathbb{R}^4$ の Smale 不変量 $\Omega(g_G \circ p) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ は

$$\Omega(g_G \circ p) = \begin{cases} (-n^2-1, 1) & (A_{n-1}\text{の場合}); \\ (-4n^2-12n-1, 1) & (D_{n+2}\text{の場合}); \\ (-169, 1) & (E_6\text{の場合}); \\ (-385, 1) & (E_7\text{の場合}); \\ (-1081, 1) & (E_8\text{の場合}). \end{cases}$$

証明には，今回の主結果である定理 3.1，[NP15] の定理 3.10，そして $g_G \circ p$ の法写像度の計算のみを用いる．これは，[Kin15] における特異 Seifert 膜を用いた技法とは大きく異なる．

参考文献

[Ada84] 足立正久: 埋め込みとはめ込み，岩波書店，1984.

[AGV85] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko: *Singularities of Differentiable Maps I*, Monograph in Math. **82**, Birkhäuser, 1985.

[ET11] T. Ekholm and M. Takase: *Singular Seifert surfaces and Smale invariants for a family of 3-sphere immersions*, Bull. Lond. Math. Soc. **43**(2) (2011), 251–266.

[FM80] G. K. Francis and B. Morin: *Arnold Shapiro's eversion of the sphere*, Math. Intell. **2** (1980), 200–203.

[Hir59] M. W. Hirsch: *Immersions of manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **93** (1959), 242–276.

[Juh05] A. Juhász: *A geometric classification of immersions of 3-manifolds into 5-space*, Manuscripta Math. **117**(1) (2005), 65–83.

[Kas15] N. Kasuya: *On the Links of Simple Singularities, Simple Elliptic Singularities and Cusp Singularities*, Demonstr. Math. **48**(2) (2015), 289–312.

[Kas16] N. Kasuya: *An obstruction for codimension two contact embeddings in the odd dimensional Euclidean spaces*, J. Math. Soc. Jpn. **68**(2) (2016), 737–743.

[Kin15] S. Kinjo: *Immersions of 3-sphere into 4-space associated with Dynkin diagrams of types A and D*, Bull. Lond. Math. Soc. **47**(4) (2015) 651–662.

[Kle56] F. Klein: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, Teubner(Leipzig), 1884. [English translation: *Lectures on the icosahedron and the solution of equations of the fifth degree*, Dover, 1956.]

[Mil68] J. W. Milnor: *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, AMS **61**, Princeton Univ. Press, 1968.

[NP15] A. Némethi and G. Pintér: *Immersions associated with holomorphic germs*, Comment. Math. Helv. **90**(3) (2015), 513–541.

[SST02] O. Saeki, A. Szűcs, and M. Takase: *Regular homotopy classes of immersions of 3-manifolds into 5-space*, Manuscripta Math. **108**(1) (2002), 13–32.

[Sea06] J. Seade: *On the Topology of Isolated Singularities in Analytic Spaces*, Prog. Math. **241**, Birkhäuser, Basel, 2006.

[Sea19] J. Seade: *On Milnor's fibration theorem and its offspring after 50 years*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **56**(2) (2019), 281–348.

[Sma59a] S. Smale: *A classification of immersions of the two-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **90**(2) (1959), 281–290.

[Sma59b] S. Smale: *The classification of immersions of spheres in euclidean spaces*, Ann. of Math. **69** (1959), 327–344.

[Tan24] M. Tanabe: *Regular homotopy classes of links of simple singularities and immersions associated with their Dynkin diagrams*, arXiv:2405.02513 [math.GT], preprint.

[Whi37] H. Whitney: *On regular closed curves in the plane*, Compos. Math. **4** (1937), 276–284.

[Whi44] H. Whitney: *The self-intersections of a smooth n-manifold in 2n-space*, Ann. of Math. **45**(2) (1944), 220–246.

[Wu64] W. T. Wu: *On the immersion of C^∞-3-manifolds in a Euclidean space*, Sci. Sinica **13** (1964), 335–336.

リザバーコンピューティングに基づくてんかん発作分類

北海道大学 大学院理学院 数学専攻
岸本 勇太 (Yuta KISHIMOTO) *

概 要

てんかんは脳内の異常な電気活動による反復的な発作を特徴とする神経疾患である．てんかん発作を引き起こす神経活動の異常が最初に発生する脳の特定の部位をてんかん焦点といい，この部位で発生した異常な電気信号が，周囲の脳領域に広がることで発作が引き起こされる．標準的な抗てんかん薬では発作を抑制できない難治性てんかんの患者に対しては，てんかん焦点の正確な特定に基づく外科手術が検討される．そのため，脳波（EEG）や皮質脳波（ECoG）の解析を通じたてんかん焦点の特定が重要である．本研究では，リザバーコンピューティングと呼ばれる手法を活用し，高精度な発作分類モデルを構築することで，てんかん焦点を特定する方法を提案する．

1 背景・目的

てんかんは脳内の異常な電気活動による反復的な発作を特徴とする神経疾患で，世界中で約 5,000 万人が患っている最も一般的な神経疾患のひとつである．てんかん発作は，意識喪失，異常運動，記憶障害など多様な症状を引き起こし，予測が困難なため，患者の日常生活に大きな影響を与える．さらに，てんかん患者の約 30%は標準的な抗てんかん薬では発作を抑制できない「難治性てんかん」と診断される．てんかん発作を引き起こす神経活動の異常が最初に発生する脳の特定の部位をてんかん焦点といい，この部位で発生した異常な電気信号が，周囲の脳領域に広がることで発作が引き起こされる．難治性てんかんの患者には，てんかん焦点の正確な特定に基づく外科手術が検討される．先行研究 [1] では，Long Short Term Memory（LSTM）を活用した発作前期と発作間欠期の分類モデルが提案された．LSTM モデルは，時系列データの予測において高い性能を発揮する一方，複雑な内部構造ゆえに学習には多くの時間とメモリを要するという問題がある．

てんかん発作の予測において学習時間の短縮は重要な課題であるため，本研究では，計算コストの小さいリザバーコンピューティングと呼ばれる手法を活用した高精度な発作分類モデルを構築する．

2 手法

本研究における発作分類手法は，以下の 4 つのステップで構成される．

1. 脳波データの特徴量抽出
2. 訓練データを用いた ESN モデルのハイパーパラメータ調整
3. テストデータの発作分類
4. 性能評価

*E-mail:kishimoto.yuta.l5@elms.hokudai.ac.jp

まず，脳波データを 1 秒（2000 ステップ）ごとにセグメント分割し，各セグメントから抽出した特徴量を用いて ESN モデルの入力ベクトルを構成した．出力データは発作時に 1，非発作時に 0 をとる 2 クラスラベルである．次に，訓練データを用いて ESN モデルのハイパーパラメータを最適化し，テストデータを使用して発作分類を行った．評価指標には混合行列から得られる感度，特異度，精度の 3 指標を用いた．Leave-One-Out 交差検証により得られる各指標の平均値を ESN モデルの分類性能として評価する．

2.1 脳波データ

本研究で使用する脳波データは，京都大学大学院医学研究科てんかん・運動異常生理学講座において，0.01Hz から 600Hz までの広帯域周波数を同時に記録した高精度なデータである．右側頭葉てんかん患者（以下，Pt1）に関しては，全 50 個の硬膜下電極を用いて皮質脳波（ECoG）を記録している．電極の留置は以下の 4 つの領域に分類されている．

- A 領域（右側頭葉前部）：20 個の電極を格子状に留置
- B 領域（右側頭葉後部）：20 個の電極を格子状に留置
- C 領域（側頭葉底面）：6 個の電極を線状に留置
- D 領域（シルビウス裂）：4 個の電極を線状に留置

てんかん焦点は，B13（B 領域の 13 番目の電極）および D01（D 領域の 1 番目の電極）周辺で確認されている．また，臨床的な診断や評価に重要となる脳波の特定のパターンも観察されており，具体的には，”Paroxysmal fast が B18, D01, D02 電極で，”Rhythmic slow”が D02 電極で，”Rhythmic spike”が A19, A20, B12 電極で確認されている．

右側頭葉てんかん患者（以下，Pt1）の脳波データは，11 回の発作（ictal1〜ictal11）に対応している．各データは，発作開始 30 分前から発作終了 15 分後までの区間を切り出したものである．

2.2 特徴量抽出

リザバーコンピューティングによる発作分類モデルへの入力として使用するため，先行研究 [1] で用いられる時間・周波数領域特徴量に加えて，てんかん発作の前兆を捉えるうえで重要な特徴量として注目されている順列エントロピー（Permutation Entropy, PE）を 1 秒間（2000 タイムステップ）の脳波セグメントごとに抽出する．

2.2.1 時間領域特徴量

時間領域特徴量については，基本統計量（平均，分散，歪度，尖度，標準偏差）に加えて，ゼロクロス数とピーク電位差を抽出した．発作前期では，発作間欠期に比べて分散が減少し，尖度が上昇することが以前より報告されている [2].

2.2.2 周波数領域特徴量

時間領域特徴量に加えて，脳波信号の周波数領域情報も考える．総エネルギースペクトルや基本的な周波数帯域（δ 波（1〜3Hz），θ 波（4〜7Hz），α 波（8〜13Hz），β 波（14〜30Hz），γ_1 波（31〜55Hz），γ_2 波（65〜110Hz））のエネルギースペクトルを抽出する．本研究に用いる脳波

データは，0.01Hz から 600Hz までの広域周波数帯域を記録しているため，上記の周波数帯域に加えて，111-300Hz の高周波帯域も考慮し，この帯域のエネルギースペクトルを γ_3 波として抽出する．各周波数帯域のエネルギースペクトルは，離散フーリエ変換（DFT）を用いて算出する．

2.2.3 順列エントロピー

順列エントロピー（Permutation Entropy, PE）は，時系列データの非線形性や複雑性を評価するための指標である．2002 年に Bandt と Pompe によって提案された手法で，計算がシンプルかつ効率的である点が特徴である [3]．この手法は，時系列データの値そのものではなく，値の大小関係（順序）に基づいてエントロピーを計算する．順列エントロピーは，時系列データの局所的な順序構造を用いて，その情報量を測定する．シャノンエントロピーが確率分布に基づいて計算されるのに対し，順列エントロピーはデータの順序関係に着目し，その多様性をエントロピーとして定量化する．以下に，順列エントロピーの具体的な計算手順を示す．

1. 時間遅延座標系の作成
   まず，埋め込み次元 M と遅延時間 τ を定めておく．定めた埋め込み次元と遅延時間に対して，1 次元時系列 $\{x(t)\}_{t=0}^{N-1}$ から M 次元ベクトル

$$(x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau), \ldots, x(t+(M-1)\tau) \tag{1}$$

   を作成する．時系列データ全体から $N-(M-1)$ 個の M 次元データ列

$$\{(x(t), x(t+\tau), x(t+2\tau), \ldots, x(t+(M-1)\tau)\}_{t=0}^{N-(M-1)\tau} \tag{2}$$

   を作成することができる．これを $\{x(t)\}_{t=0}^{N-1}$ の時間遅延座標系という．

2. 順列による記号化
   時間遅延座標系の各ベクトルには，ベクトルの各成分の大小関係に対応する順序パターン π が割り当てられる．たとえば，埋め込み次元 $M=3$ のベクトル $(3.4, 4.1, 2.5)$ は，順序パターン $(2,3,1)$ となる．次に，与えられた時間窓内である順序パターン π が発生する確率 $p(\pi)$ を計算する．そして，ウィンドウ内のエントロピーは，

$$PE = -\sum_{\pi} p(\pi) \log_2 p(\pi) \tag{3}$$

   と定める．PE の値が小さいほど時系列は規則的で決定論的であり，大きいほどノイズが多くランダムであることを意味する．

また，先行研究 [4] において，発作時に順列エントロピーの値が有意に減少する結果が得られており，てんかん発作の前兆を捉えるうえで重要な特徴量として注目されている．Pt1-ictal1 のてんかん焦点 D01 電極における脳波データの順列エントロピーを図 1 に示す．ただし，埋め込み次元を $M=5$，遅延時間を $\tau=10$ とした．赤破線で囲まれた領域は発作期間であり，発作開始前 20 分から発作終了後 10 分までのデータをプロットしている．3,430,641[pts] の発作開始に先行して，順列エントロピーが減少しており，発作時と非発作時の差異が明瞭である．

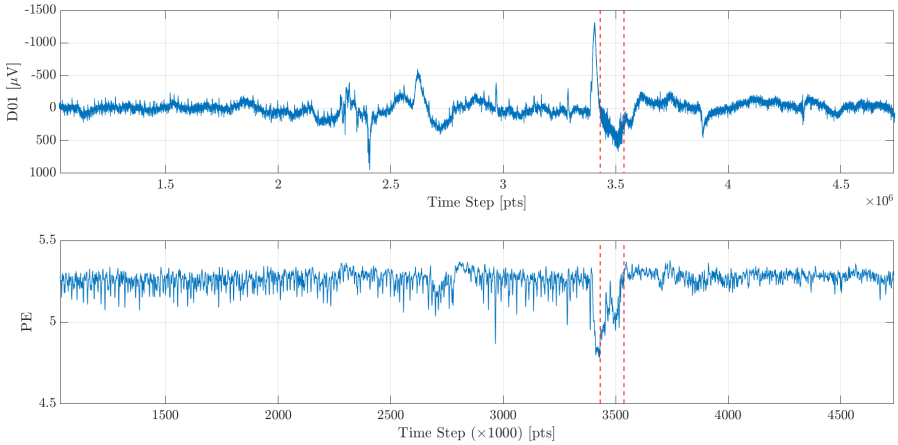


図 1: Pt1-D01 電極における脳波データ（上段）と順列エントロピー（下段）

3　リザバーコンピューティング

リザバーコンピューティングはリカレントニューラルネットワーク（RNN）から派生して生まれた機械学習の枠組みのひとつである．リザバーコンピューティングは，中間層から出力層への結合荷重 W^{out} の学習に限定し RNN が抱えていた学習上の課題を解消する．この章では，Jaeger によって 2001 年に提案されたリザバーコンピューティングの代表的なモデルである Echo State Network（ESN）モデル [5] について解説する．

3.1　Echo State Network（ESN）

ESN モデルは，入力層・リザバー層・出力層の 3 層から構成されるリカレントニューラルネットワークであり（図 2），非線形ダイナミクスを持つリザバー層を用いて時系列データの予測や分類を行うことが可能である．時刻 n における N_u 次元の入力ベクトル，N_x 次元のリザバー状態ベクトル，N_y 次元の出力ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{u}(n)$, $\boldsymbol{x}(n)$, $\boldsymbol{y}(n)$ とする．リザバー層の状態は，入力層からの情報と前時刻のリザバー状態および出力層からのフィードバックによって更新される．その後，出力層はリザバー層を用いて更新が行われる．リザバー層，出力層の更新式は以下の式で定義される．

$$\boldsymbol{x}(n+1) = (1-\alpha)\boldsymbol{x}(n) + \alpha \boldsymbol{f}(W^{\text{in}}\boldsymbol{u}(n+1) + W^{\text{res}}\boldsymbol{x}(n) + W^{\text{fb}}\boldsymbol{y}(n)) \tag{4}$$

$$\boldsymbol{y}(n+1) = W^{\text{out}}\boldsymbol{x}(n+1) \tag{5}$$

ここで，$W^{\text{in}} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_u}$ は，入力層からリザバー層への入力結合重み行列，$W^{\text{res}} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$ は，リザバー層のニューロン同士のリカレント結合重み行列，$W^{\text{fb}} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_y}$ は，出力層からリザバー層へのフィードバック結合重み行列である．また，$\alpha \in [0, 1]$ はリーク率と呼ばれる定数である．リーク率が小さいほど現在の状態に過去の状態が強く反映されるため，長期依存性の高い時系列信号の分析が可能になる．$W^{\text{out}} \in \mathbb{R}^{N_y \times N_x}$ は，リザバー層から出力層への結合重み行列である．それぞれの結合重み行列には，結合強度および結合密度が設定される．また，$\boldsymbol{f}$ は活性化関数であり，入力となるベクトルの各要素に適用される．本研究においては **tanh** を採用した．

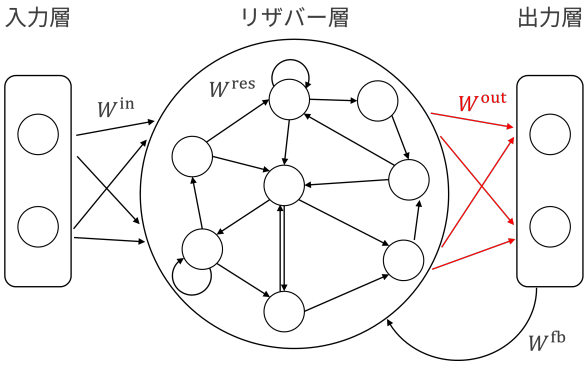


図 2: Echo State Network（ESN）モデル

3.1.1 ESN モデルの設計

1. 入力結合重み行列 W^{in} の設定
   W^{in} は式（4）で使用される結合重みであり，入力データをリザバーに渡す役割を担う．この行列は，一様分布に従う乱数で生成され，その分布範囲は $[-a_{\text{in}}, a_{\text{in}}]$ とする．ここで，a_{in} は入力スケーリングと呼ばれ，本研究では W^{in} のハイパーパラメータとして扱われる．

2. リザバーのリカレント結合重み行列 W^{res} の設定
   リカレント結合重み行列 W^{res} を設定するためには，リザバーのサイズ，スパース性，およびスケーリングを適切に決定する必要がある．リザバーのサイズはノード数 N_x で表される．N_x が小さすぎる場合，モデルの表現力が不足し，一方で，大きすぎる場合はモデルの表現力が過剰になり，過学習を引き起こすおそれがある．過学習が発生すると，未学習のテストデータに対する予測精度が低下する．そのため，N_x は適切に設定する必要がある．
   次に，リザバーのスパース性は，リザバー状態の均一化を防ぎ，入力に対する多様な応答を各ノードで得るために重要である．リザバーのリカレント結合重み行列 $W^{\text{res}} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$ の各要素は，確率 p で非ゼロ，確率 $1-p$ でゼロとする．この確率 p をハイパーパラメータとして最適化し，適切なスパース性を決定する．W^{res} の非ゼロ要素には，入力結合重み行列 W^{in} と同様に，特定の分布に従った乱数を用いる．本研究では，区間 [-1, 1] の一様分布を採用した．W^{res} には適切なスケーリングが必要であり，このスケーリングにはスペクトル半径 ρ を用いる．$\rho(W^{\text{res}})$ は W^{res} の固有値の絶対値の最大値を指し，以下の条件を満たすように設定する．

$$\rho(W^{\text{res}}) < 1 \tag{6}$$

   この条件は，ESN の特徴である Echo State Property（ESP）を成立させるための必要条件である．ESP は，リザバー層に与えられた過去の入力の影響を保持し，後続の入力に対してもその影響を反映し続けること特性を指す．ESP によって，初期値がランダムな場合でも，時間発展とともにリザバー状態が初期値に依存しなくなることを保証する．本研究では，ハイパーパラメータ探索により $\rho(W^{\text{res}})$ を最適化し，$\rho(W^{\text{res}}) < 1$ の条件を満たすように設定した．

3.2 リッジ回帰

過学習は，モデルの表現力が過剰になることで発生する現象である．機械学習では，訓練データを用いてモデルを学習し，モデル出力と目標出力の誤差を最小化するように調整を行う．しかし，モデルの表現力が高すぎると，訓練データに過度に適合してしまい，未知のテストデータに対する予測精度が低下するという問題が生じる．過学習を抑制するための方法として，正則化が用いられる．

本節では，オフライン学習としてリッジ回帰という正則化手法について説明する．ESN モデルの学習アルゴリズムでは，線形学習器を用いて出力結合重み行列 W^{out} を最適化する．目標出力 D とモデル出力 $W^{\text{out}}X$ の二乗誤差に学習パラメータの L_2 ノルムの二乗を正則化項として加えることを L_2 正則化と呼び，このときの最適化した W_{out} を求める回帰のことをリッジ回帰という．すなわち，最小化すべきコスト関数 $E(W^{\text{out}})$ を

$$E(W^{\text{out}}) = \frac{1}{2}\|D - W^{\text{out}}X\|_F^2 + \lambda\|W^{\text{out}}\|_F^2 \tag{7}$$

とする．$\lambda > 0$ は正則化項の大きさを調整する正則化パラメータである．このとき解は

$$W^{\text{out}} = DX^T(XX^T + \lambda I)^{-1} \tag{8}$$

と求められる．ここで，$I \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$ は単位行列を表す．ESN モデルの学習においては，リッジ回帰を一度だけ行うことで，最適な出力結合重み行列 W^{out} を得る．そのため従来の RNN モデルと比較して学習時間が非常に短いことが利点である．

3.3 Leave-One-Out 交差検証

Leave-One-Out 交差検証は，交差検証の一種であり，データセット内の各サンプルをひとつずつテストデータとして使用し，残りのデータを学習データとしてモデルの訓練を行う手法である．本研究においては，具体的に以下の手順で実施される．

1. Pt1-ictal1〜ictal11 の全データセットのうちひとつをテストデータとして分離する．
2. 残りのデータを用いて ESN モデルを訓練する．
3. 訓練された ESN モデルを用いて，テストデータに対する分類を行う．
4. 上記プロセスをデータセット内の全サンプルについて繰り返す．
5. 評価指標の平均を算出し，これを最終的なモデルの分類性能とする．

3.4 モデル性能評価

てんかん発作分類の性能評価には，混同行列を用いる．混同行列は，学習済みモデルの分類性能を視覚化する手法で，実際のクラスと予測されたクラスを組み合わせた行列である．2 クラス分類の場合，混同行列は図 3 のように表される．ここで，各要素は以下のように定義される．

- 真陰性（True Negative, TN）：実測値が非発作であり，モデルも非発作と分類したもの
- 偽陽性（False Positive, FP）：実測値が非発作であり，モデルが発作と分類したもの
- 偽陰性（False Negative, FN）：実測値が発作であり，モデルが非発作と分類したもの
- 真陽性（True Positive, TP）：実測値が発作であり，モデルも発作と分類したもの

モデルの性能評価は，混同行列から導かれる以下の 3 指標で行う．

- 感度（Sensitivity）発作に属するサンプルの中で，モデルが正しく発作と分類した割合を表す．2 クラス分類の場合は，

$$\mathrm{SEN} = \frac{\mathrm{TP}}{\mathrm{TP} + \mathrm{FN}} \tag{9}$$

と表される．

- 特異度（Specificity）非発作に属するサンプルの中で，モデルが正しく非発作と分類した割合を表す．2 クラス分類の場合は，

$$\mathrm{SPE} = \frac{\mathrm{TN}}{\mathrm{TN} + \mathrm{FP}} \tag{10}$$

と表される．

- 精度（Accuracy）
精度は，全サンプルの中でモデルにより正しく分類されたサンプル（これは混同行列の対角要素の和）の割合を表す．クラスごとのサンプル数に偏りがあるときは，サンプル数の多いクラスに関する結果が強く反映される．2 クラス分類の場合は，

$$\mathrm{ACC} = \frac{\mathrm{TP} + \mathrm{TN}}{\mathrm{TP} + \mathrm{FP} + \mathrm{FN} + \mathrm{TN}} \tag{11}$$

と表される．

SEN, SPE, ACC はいずれも取り得る値の範囲が [0, 1] であり，値が 1 に近いほど性能がよいと評価する．

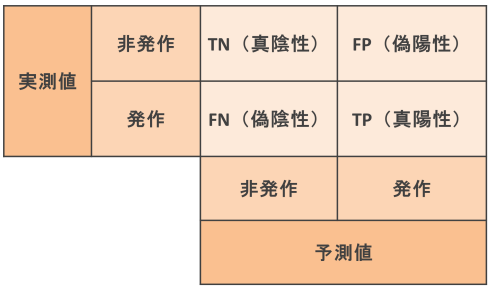


図 3: 混同行列

4　主結果

難治性てんかん患者の発作分類において ESN モデルが有効であるかを評価し，以下の成果を得た．

1. ESN モデルは高い感度と特異度を示し，特にてんかん焦点電極では 90%以上の高い感度で発作検出が可能であることを確認した．一方で非焦点電極では，発作時の特徴を十分に捉えることができず，感度が低くなることが分かった．

2. 各電極の発作検出感度を分析した結果，ESN モデルはてんかん焦点付近で顕著に高い感度を示し，逆に焦点から遠い電極では低い感度を示した．これにより，感度の大きさが焦点特定に寄与する可能性があることが分かった．

4.1 てんかん発作分類性能

時刻 n における ESN モデルの入力ベクトル $\boldsymbol{u}(n)$ には，節 2.2 において抽出した 16 種類の特徴量を用いる．また，目標出力 $d(n)$ は次のように定義する．

$$d(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n \in \text{発作区間} \\ 0 & \text{if } n \in \text{非発作区間} \end{cases} \tag{12}$$

この入出力データに基づいて，モデル出力 $\hat{y}(n)$ を得る．$\hat{y}(n)$ に対して閾値処理を適用し，その値を最終的な予測値とする．なお，モデルの入力特徴量にはそれぞれ平均 0，分散 1 となるように標準化を施している．

Pt1-ictal1 の D01 電極における ESN モデルの性能評価結果を図 4 に示す．同図の下部の矩形波は実際の発作時刻，橙線はモデル出力を表している．発作時にモデル出力が大きく立ち上がり，発作検出が正しく行われていることが確認できる．また，図 5 はモデル出力に閾値処理を施した結果である．この図では，発作時に橙線が立ち上がり，発作を正しく検出できている一方で，発作の前後で誤検出が生じていることが確認できる．これは閾値を $y(n) = 1.25$ に設定した結果であり，発作前後のモデル出力の一部が発作として判定されたためである．閾値処理後の結果をまとめた混同行列を図 6 に示す．実測値が発作であるサンプル数 53 のうちすべてをモデルも発作と判定しており，実測値が非発作であるサンプル数 2716 のうち 2693 をモデルが正しく非発作と判定していることが確認できる．この混同行列から ESN モデルの性能評価指標を算出すると，感度は 1.0，特異度は 0.99153，精度は 0.99169 であった．

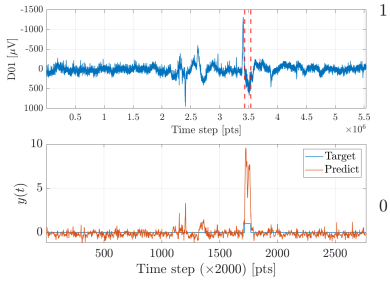


図 4: D01 電極の出力結果

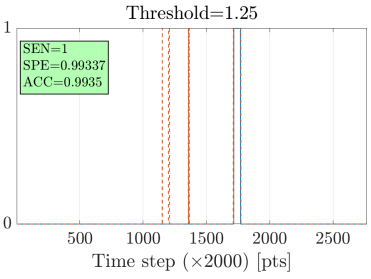


図 5: D01 電極における閾値処理後の出力結果

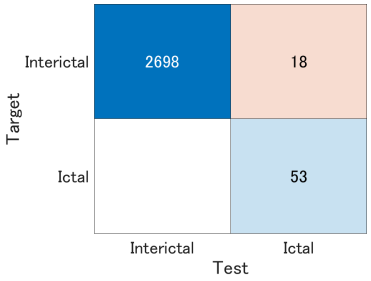


図 6: D01 電極の混同行列

一方，非てんかん焦点である A04 電極における評価結果を図 7〜図 9 に示す．A04 電極は，発作時と非発作時におけるモデル出力の大きさが同程度であり，発作検出が困難であることが分かる．発作検出感度は 0.0，特異度は 1.0，精度は 0.98086 であった．感度が 0.0 にもかかわらず精度が高くなっているのは，発作時と比較して非発作時のサンプル数が多く，非発作時の分類性能が高いためである．発作検出感度が低い理由として，A04 電極はてんかん焦点から遠い位置にあるため，D01 電極や B13 電極で確認できた DC 電位が観測できず，発作時の特徴を十分に捉えることができなかったためであると考えられる．したがって，焦点電極では発作検出感度が高い一方で，非焦点電極では発作分類が困難であることがわかった．

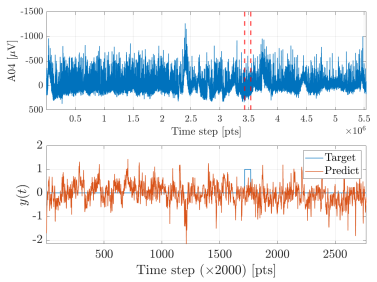


図 7: A04 電極の出力結果

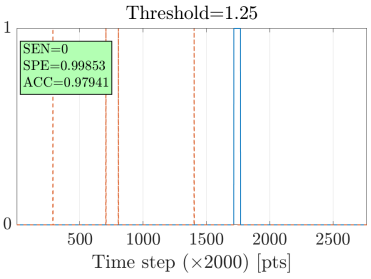


図 8: A04 電極における閾値処理後の出力結果

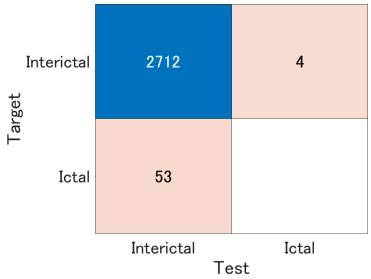


図 9: A04 電極の混同行列

4.2 てんかん焦点の特定

本節では，節 4.1 で得られた結果を基に，患者の各電極における発作検出感度からてんかん焦点を特定する方法を提案する．具体的には，各電極の脳波データから特徴量の抽出選択を行うことで入力ベクトルを構成し，それを ESN モデルに与える．モデル出力と発作ラベルを用いてリッジ回帰により学習する．Leave-One-Out 交差検証により各電極における平均発作検出感度を算出する．図 10 は，Pt1 の各電極における発作の平均感度を示している．結果として，電極ごとに異なる感度が算出され，てんかん焦点付近の電極において発作検出感度が顕著に高い傾向が確認された．てんかん焦点や”Paroxysmal fast”, ”Rhythmic slow”が観察されている B13, B18, D01, D02, D03 電極およびその周辺電極は，いずれも平均感度が 0.7 以上の赤領域に分布していた．”Rhythmic spike”が観察されている A20 電極は赤領域，A19, B12 電極は，平均感度が 0.4 以上の黄領域に分布していた．また，黄領域の他の電極（A14, B07, B09 電極）においては，いずれも赤領域電極の隣に留置されている．一方，てんかん焦点から遠い位置にある他の電極は，平均感度が 0.4 未満の領域に分布していた．この結果から，臨床的な診断や評価に重要となる脳波の特定パターンが観察されている電極では，ESN モデルによる発作検出感度が高いことが示された．したがって，発作検出感度の結果を基にてんかん焦点を特定できる可能性があることと，従来のてんかん焦点診断プロセスを補完するアプローチとして活用できることが示唆される．

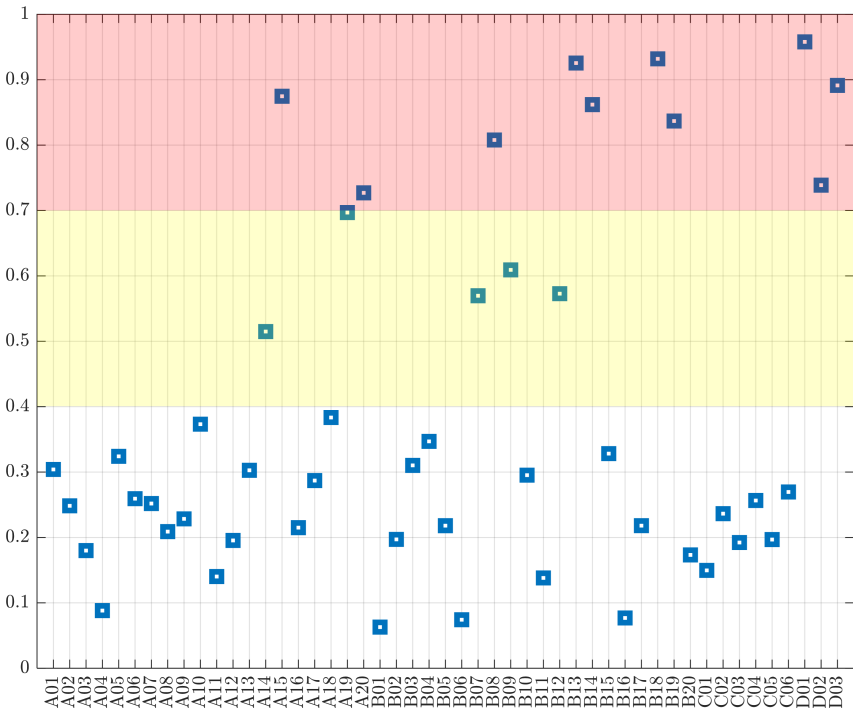


図 10: Pt1 の各電極における発作検出平均感度

参考文献

[1] Tsiouris, Kostas M., et al. "A long short-term memory deep learning network for the prediction of epileptic seizures using EEG signals." Computers in biology and medicine 99 (2018) : 24-37.

[2] Mormann, Florian, et al. "On the predictability of epileptic seizures." Clinical neurophysiology 116.3 (2005) : 569-587.

[3] Bandt, Christoph, and Bernd Pompe. "Permutation entropy: a natural complexity measure for time series." Physical review letters 88.17 (2002) : 174102.

[4] Bratu, Ionuț-Flavius, et al. "Permutation entropy-derived parameters to estimate the epileptogenic zone network." Epilepsia 65.2 (2024) : 389-401.

[5] Jaeger, Herbert. "The " echo state " approach to analysing and training recurrent neural networks-with an erratum note." Bonn, Germany: German National Research Center for Information Technology GMD Technical Report 148.34 (2001): 13.

Constructing an m × (n+1) trianguloid from an m × n trianguloid

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
小村寅之介 (Toranosuke OMURA) *

概要

単体の直積 $\Delta^m \times \Delta^n$ の三角形分割には過去数十年間において様々な研究が行われてきた．Pavel Galashin, Gleb Nenashev, Alexander Postnikov 等は trianguloid というものを定義し，$\Delta^m \times \Delta^n$ の三角形分割全体の集合と $(m+1) \times (n+1)$ 型の trianguloid 全体の集合の間に自然な全単射があることを示した．本発表では $m \times n$ 型の trianguloid から $m \times (n+1)$ 型の trianguloid を構成する方法について述べる．

1　導入

まず三角形分割について簡単な説明をする．$A \subset \mathbb{R}^k$ を有限集合とする．$Q = \mathrm{Conv}A$ と定める．このとき Q を convex polytope と呼ぶ．単体的複体 τ が (Q, A) の三角形分割であるとは次の条件がすべて成り立つことである．

- $Q = \bigcup_{\Delta \in \tau} \Delta$.
- 各 $\Delta \in \tau$ に対して Δ の頂点全体の集合は A の部分集合になる．

文脈から A が明らかなときには τ が Q の三角形分割であるということもある．以後，τ の元としては最大次元の単体のみを考える（つまり Q と同じ次元の単体のみを考える）．

三角形分割の問題として自然に考えられるものとしては P, Q が convex polytope のとき，その直積 $P \times Q$ の三角形分割がどうなるかという問題がある．ここではその最も単純な場合である，単体の積 $\Delta^m \times \Delta^n$ の三角形分割について扱う．この場合においても m, n が大きい場合にはわかっていないことも多くある．

本発表では，Pavel Galashin, Gleb Nenashev, Alexander Postnikov 等が導入した trianguloid についてまず説明し，$\Delta^m \times \Delta^n$ の三角形分割との関連性について述べる．次に主結果として $m \times (n+1)$ 型の trianguloid を $m \times n$ 型の trianguloid から構成する方法について述べる．

* E-mail:omura.toranosuke.m5@elms.hokudai.ac.jp

2 準備

$[m] = \{1, \cdots, m\}$, $[\bar{n}] = \{\bar{1}, \cdots, \bar{n}\}$ を互いに共通部分を持たない 2 つの集合とする．$\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m\}$ を $\mathbb{R}^m$ の標準基底，$\{\boldsymbol{e}_{\bar{1}}, \cdots, \boldsymbol{e}_{\bar{n}}\}$ を $\mathbb{R}^n$ の標準基底とする．$\Delta^{m-1} = \mathrm{Conv}\{\boldsymbol{e}_i \mid i \in [m]\}$，$\Delta^{n-1} = \mathrm{Conv}\{\boldsymbol{e}_{\bar{j}} \mid \bar{j} \in [\bar{n}]\}$ とすると $\Delta^{m-1} \times \Delta^{n-1} = \mathrm{Conv}\{\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_{\bar{j}} \mid i \in [m], \bar{j} \in [\bar{n}]\} \subset \mathbb{R}^{m+n}$ となる．[1]

2.1 trianguloid の定義

trianguloid は [1] において最初に導入された．本来は $\Delta^{m-1} \times \Delta^{n-1}$ に限らない convex polytope に対して定義されているが，ここでは $\Delta^{m-1} \times \Delta^{n-1}$ の場合に限定した場合の定義について説明する．$P_{m,n}, P^-_{m,n}$ をそれぞれ，

$$P_{m,n} = n\Delta^{m-1} := \{(a_1, \cdots, a_m) \mid \text{任意の } i \in [m] \text{ について } a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{かつ}, \sum_{i=1}^{m} a_i = n\},$$

$$P^-_{m,n} = (n-1)\Delta^{m-1} := \{(a_1, \cdots, a_m) \mid \text{任意の } i \in [m] \text{ について } a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{かつ}, \sum_{i=1}^{m} a_i = n-1\}$$

とする．有向グラフ $\Gamma_{m,n}$ を次の様に定義する．頂点集合 $V(\Gamma_{m,n})$ を $V(\Gamma_{m,n}) = (P^-_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m) \cup (P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m)$ とする．辺集合 $E(\Gamma_{m,n})$ を $E(\Gamma_{m,n}) = \{(\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{b} + \boldsymbol{e}_i) \mid b \in P^-_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m, i \in [m]\}$ とする．今後 $(\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{a}) \in E(\Gamma_{m,n}), \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{e}_i$ のとき，$(\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{a})$ のことを $(\boldsymbol{b} \underset{i}{\to} \bullet)$ または $(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a})$ と書くことにする．

定義 2.1. $m \times n$ 型の pre-trianguloid とは (T1) から (T3) を満たす写像 $\mathbb{T} : E(\Gamma_{m,n}) \to 2^{[\bar{n}]}$ である．(T1) から (T4) を満たすものを $m \times n$ 型の trianguloid と呼ぶ．

(T1) 任意の辺 $(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}) \in E(\Gamma_{m,n})$ に対して，$|\mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a})| = a_i$.

(T2) 任意の $\boldsymbol{a} \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ と任意の $\bar{j} \in [\bar{n}]$ に対して，ある $i \in [m]$ が存在して $\bar{j} \in \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a})$.

(T3) $\boldsymbol{a} \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ と $i, j \in [m]$ に対して，$\boldsymbol{a}' := \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ ならば $\mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}) \subset \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}')$.

(T4) $\boldsymbol{c} \in (n-2)\Delta^{m-1} \cap \mathbb{Z}^m$ と互いに異なる 3 つの $i, j, k \in [m]$ に対して,$\mathbb{T}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_i \underset{j}{\to} \bullet) \neq \mathbb{T}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_k \underset{j}{\to} \bullet)$ ならば, $\mathbb{T}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_j \underset{i}{\to} \bullet) = \mathbb{T}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_k \underset{i}{\to} \bullet)$ かつ $\mathbb{T}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_i \underset{k}{\to} \bullet) = \mathbb{T}(\boldsymbol{c} + \boldsymbol{e}_j \underset{k}{\to} \bullet)$.

(T1) と (T2) から以下のことが分かる．

命題 2.2. [1, Remark 3.2.] $m \times n$ 型の trianguloid $\mathbb{T}$ と $\boldsymbol{a} \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ に対して $[\bar{n}] = \mathbb{T}(\circ \underset{1}{\to} \boldsymbol{a}) \sqcup \mathbb{T}(\circ \underset{2}{\to} \boldsymbol{a}) \sqcup \cdots \sqcup \mathbb{T}(\circ \underset{m}{\to} \boldsymbol{a})$.

また (T3) より次のことが分かる．

命題 2.3. $\boldsymbol{a} \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ と $i, j \in [m]$ と $s \in \mathbb{N}$ に対して $\boldsymbol{a}' := \boldsymbol{a} + s\boldsymbol{e}_i - s\boldsymbol{e}_j \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ ならば

$\mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}) \subset \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}')$.

次のことが知られている．

定理 2.4. [1, Section7] $\mathbb{T}$ を $m \times n$ 型の trianguloid とする．任意の $\boldsymbol{b} \in P^-_{m,n}$ に対して，$\Delta_{\boldsymbol{b}} := \mathrm{Conv}\{\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{e}_{\bar{j}} \mid \bar{j} \in \mathbb{T}(\boldsymbol{b} \underset{i}{\to} \bullet)\}$ とする．このとき $\Delta_{\boldsymbol{b}}$ は $m+n-2$ 次元 ($=\Delta^{m-1} \times \Delta^{n-1}$ の次元) で，

$$\tau_{\mathbb{T}} := \{\Delta_{\boldsymbol{b}} \mid \boldsymbol{b} \in P^-_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m\}$$

は $\Delta^{m-1} \times \Delta^{n-1}$ の三角形分割である．

定理 2.5. [1, Theorem 3.6, Lemma 5.3] $m \times n$ 型の trianguloid 全体の集合と $\Delta^{m-1} \times \Delta^{n-1}$ の三角形分割全体の集合は，写像 $\mathbb{T} \to \tau_{\mathbb{T}}$ によって一対一対応する．

2.2 $3 \times n$ の trianguloid の図示

ここでは $3 \times n$ 型の trianguloid の図的な表現について説明する．$P_{3,n}$ と $P^-_{3,n}$ の次元は 2 で互いに平行なので，垂直方向の違いを無視することで一つの平面上に $P_{3,n} \cap \mathbb{Z}^3$ と $P^-_{3,n} \cap \mathbb{Z}^3$ をプロットできる．例えば $n = 3$ のとき以下の様になる．

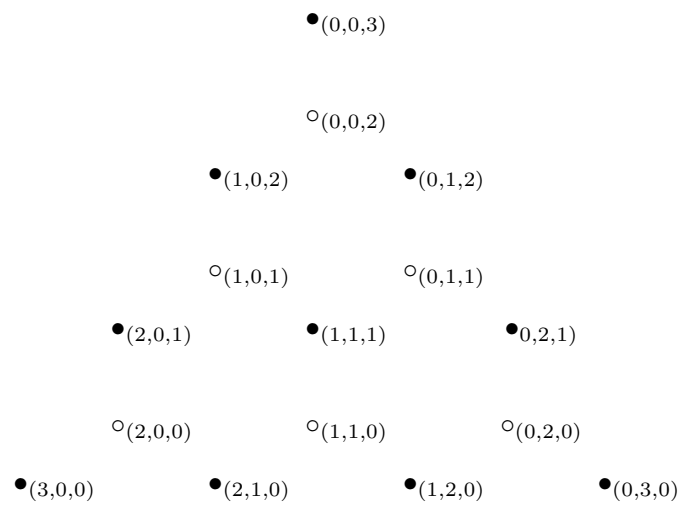


図 1　$P_{3,3} \cap \mathbb{Z}^3$ の点と $P^-_{3,3} \cap \mathbb{Z}^3$ の点のプロット．$P_{3,3} \cap \mathbb{Z}^3$ の点は黒丸，$P^-_{3,3} \cap \mathbb{Z}^3$ の点は白丸で表現している．

$(\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{a}) \in E(\Gamma_{3,n})$ となる $\boldsymbol{b} \in P^-_{3,n} \cap \mathbb{Z}^3$，$\boldsymbol{a} \in P_{3,n} \cap \mathbb{Z}^3$ に対して $\bar{j} \in \mathbb{T}(\boldsymbol{b} \to \boldsymbol{a})$ ならば $\bar{j}$ とラベル付けされた矢印を上の図に書き込むことにする．そうすることで $\mathbb{T}$ の情報を視覚的に把握しやすくなる．

例 2.6. $n=3$ とする．$\mathbb{T}: E(\Gamma_{3,3}) \to 2^{[\bar{3}]}$ を次の様に定義する．

$$\begin{array}{lll}
\mathbb{T}((2,0,0)^t \underset{1}{\to} \bullet) = \{\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}, & \mathbb{T}((2,0,0)^t \underset{2}{\to} \bullet) = \{\bar{1}\}, & \mathbb{T}((2,0,0)^t \underset{3}{\to} \bullet) = \{\bar{1}\}, \\
\mathbb{T}((1,1,0)^t \underset{1}{\to} \bullet) = \{\bar{2},\bar{3}\}, & \mathbb{T}((1,1,0)^t \underset{2}{\to} \bullet) = \{\bar{1},\bar{2}\}, & \mathbb{T}((1,1,0)^t \underset{3}{\to} \bullet) = \{\bar{2}\}, \\
\mathbb{T}((0,2,0)^t \underset{1}{\to} \bullet) = \{\bar{3}\}, & \mathbb{T}((0,2,0)^t \underset{2}{\to} \bullet) = \{\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}, & \mathbb{T}((0,2,0)^t \underset{3}{\to} \bullet) = \{\bar{3}\}, \\
\mathbb{T}((1,0,1)^t \underset{1}{\to} \bullet) = \{\bar{2},\bar{3}\}, & \mathbb{T}((1,0,1)^t \underset{2}{\to} \bullet) = \{\bar{1}\}, & \mathbb{T}((1,0,1)^t \underset{3}{\to} \bullet) = \{\bar{1},\bar{2}\}, \\
\mathbb{T}((0,1,1)^t \underset{1}{\to} \bullet) = \{\bar{3}\}, & \mathbb{T}((0,1,1)^t \underset{2}{\to} \bullet) = \{\bar{1},\bar{2}\}, & \mathbb{T}((0,1,1)^t \underset{3}{\to} \bullet) = \{\bar{2},\bar{3}\}, \\
\mathbb{T}((0,0,2)^t \underset{1}{\to} \bullet) = \{\bar{3}\}, & \mathbb{T}((0,0,2)^t \underset{2}{\to} \bullet) = \{\bar{1}\}, & \mathbb{T}((0,0,2)^t \underset{3}{\to} \bullet) = \{\bar{1},\bar{2},\bar{3}\}.
\end{array}$$

実際に $\mathbb{T}$ は trianguloid になっている．このとき $\mathbb{T}$ は以下の図のようになる．

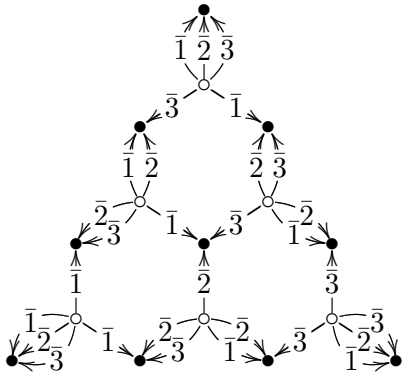


図 2　$\mathbb{T}$ の図

3　主結果

私は $m \times n$ 型の trianguloid から $m \times (n+1)$ 型の trianguloid を構成する方法を得た．

3.1　$\mathbb{T}_s$ の定義

主定理を述べるために記号の定義をする．$\mathbb{T}$ を $m \times n$ 型の trianguloid とする．整数 s を $1 \le s \le n+1$ の範囲で 1 つとって固定する．写像 $\mathbb{T}_s$ を次のように定義する．写像 $i: P_{m,n+1} \cap \mathbb{Z}^m \to [m]$ を

$$i(\boldsymbol{a}) = \begin{cases} \max\{i \mid a_i > 0\} & (\sum_{i=3}^{m} a_i \neq 0), \\ 1 & (\sum_{i=3}^{m} a_i = 0 \,\text{and}\, a_1 \ge s), \\ 2 & (\sum_{i=3}^{m} a_i = 0 \,\text{and}\, a_1 < s), \end{cases}$$

とする．

注 3.1. $i(\boldsymbol{a})$ の定義より，$a_{i(\boldsymbol{a})} \ge 1$ である．従って $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})} \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ である．

各 $(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}) \in E(\Gamma_{m,n+1})$ に対して, $\mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a})$ を

$$\mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}) = \begin{cases} \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}) \cup \{\overline{n+1}\} & (i = i(\boldsymbol{a}) \text{ and } (\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}) \in E(\Gamma_{m,n})), \\ \{\overline{n+1}\} & (i = i(\boldsymbol{a}) \text{ and } (\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}) \notin E(\Gamma_{m,n})), \\ \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}) & (i \neq i(\boldsymbol{a})), \end{cases}$$

と定義する.

3.2 主定理

定理 3.2. $1 \leq s \leq n+1$ の範囲の整数 s に対して, $\mathbb{T}_s$ は $m \times (n+1)$ 型の trianguloid になる.

例 3.3. $\mathbb{T}$ を例 2.6 の 3×3 型の trianguloid とする.

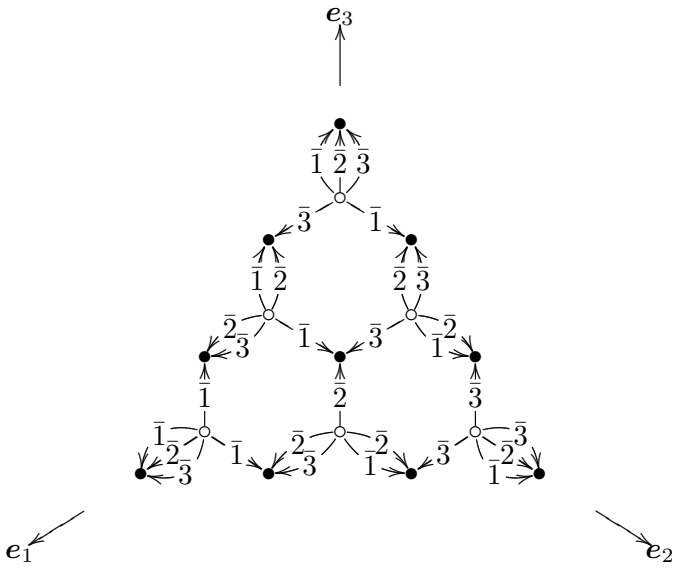


図 3　$\mathbb{T}$ の図

$s = 2$ とする. この時, $i(\boldsymbol{a})$ は以下のようになる.

$$i(\boldsymbol{a}) = \begin{cases} 3 & (a_3 > 0), \\ 1 & (a_3 = 0 \,\text{and}\, a_1 \geq 2), \\ 2 & (a_3 = 0 \,\text{and}\, a_1 < 2). \end{cases}$$

従って $\mathbb{T}_2$ は次のような 3×4 型の trianguloid になる.

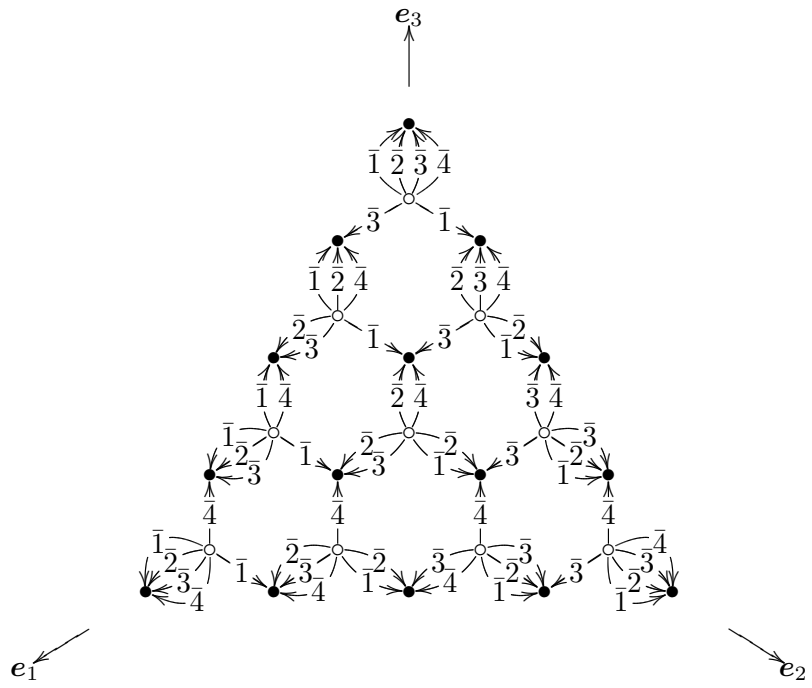


図 4　$\mathbb{T}_2$ の図

4　主定理の証明

ここでは $\mathbb{T}_s$ が (T3) を満たすことについてのみ証明する．(T1)，(T2)，(T4) についての証明は省略する．

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}' \in P_{m,n+1} \cap \mathbb{Z}^m$ かつ $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j$ $(i \neq j)$ かつ $(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}), (\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}') \in E(\Gamma_{m,n+1})$ と仮定する．まず次の補題を示す．

補題 4.1. $i = i(\boldsymbol{a})$ ならば $i = i(\boldsymbol{a}')$.

補題 4.2. $i(\boldsymbol{a}) \neq i(\boldsymbol{a}')$ ならば，$i \neq i(\boldsymbol{a})$ かつ $j = i(\boldsymbol{a})$.

補題 *4.1* の証明. $i = i(\boldsymbol{a})$ とする．

$i(\boldsymbol{a}) \geq 3$ と仮定する．$i(\boldsymbol{a})$ の定義より，$u > i(\boldsymbol{a})$ であるような u に対して，$a_u = 0$ である．$i(\boldsymbol{a}) = i \neq j$ かつ $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j \in P_{m,n+1} \cap \mathbb{Z}^m$ なので，$j < i(\boldsymbol{a})$ である．よって次を得る．

$$a'_k = \begin{cases} 0 & (k > i(\boldsymbol{a})), \\ a_{i(\boldsymbol{a})} + 1 & (k = i(\boldsymbol{a})). \end{cases}$$

$i(\boldsymbol{a}) \geq 3$ だから，$i(\boldsymbol{a}') = i(\boldsymbol{a})$ である．

$i(\boldsymbol{a}) = 1$ と仮定する．$i(\boldsymbol{a})$ の定義より，$a_1 \geq s$ である．$i = i(\boldsymbol{a}) = 1$ かつ $i \neq j$ だから，$a'_1 = a_1 + 1 > s$ である．よって $i(\boldsymbol{a}') = i(\boldsymbol{a}) = 1$ である．

$i(\boldsymbol{a}) = 2$ と仮定する．$i(\boldsymbol{a})$, の定義より，$a_1 < s$ である．$i = i(\boldsymbol{a}) = 2$ かつ $i \neq j$ だから，$a'_1 < a_1 < s$ である．よって $i(\boldsymbol{a}') = i(\boldsymbol{a}) = 2$ である．

□

補題 *4.2* の証明. $i(\boldsymbol{a}) \neq i(\boldsymbol{a}')$ と仮定する．最初に $i \neq i(\boldsymbol{a})$ を示す. $i = i(\boldsymbol{a})$ と仮定する．補題 4.1 より， $i(\boldsymbol{a}) = i = i(\boldsymbol{a}')$ となる．これは仮定 $i(\boldsymbol{a}) \neq i(\boldsymbol{a}')$ に反す．. 背理法により $i \neq i(\boldsymbol{a})$ が成り立つ.

次に $j = i(\boldsymbol{a})$ を示す．$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j \in P_{m,n+1} \cap \mathbb{Z}^m$ かつ $i \neq j$ だから，$a_j \geq 1$ である.

$\sum_{i=3}^{m} a_i \neq 0$ と仮定する．$i(\boldsymbol{a})$ の定義と仮定 $\sum_{i=3}^{m} a_i \neq 0$ より，$i(\boldsymbol{a}) \geq 3$ となる．$i(\boldsymbol{a})$ の定義より，$u > i(\boldsymbol{a})$ であるような u に対して $a_u = 0$.

仮定 $(\circ \underset{i}{\rightarrow} \boldsymbol{a}) \in E(\Gamma_{m,n+1})$ より，$a_i \geq 1$ となる．よって $i \leq i(\boldsymbol{a})$ である．$a_j \geq 1$ より，$j \leq i(\boldsymbol{a})$ である．もし $j < i(\boldsymbol{a})$ ならば，このとき

$$a'_u = \begin{cases} 0 & (u > i(\boldsymbol{a})) \quad \because i \leq i(\boldsymbol{a}) \\ a_{i(\boldsymbol{a})} & (u = i(\boldsymbol{a})) \quad \because i \neq i(\boldsymbol{a}) \text{ かつ } j < i(\boldsymbol{a}), \end{cases}$$

となる．$i(\boldsymbol{a}) \geq 3$ より，$i(\boldsymbol{a}') = i(\boldsymbol{a})$ となる．これは仮定 $i(\boldsymbol{a}) \neq i(\boldsymbol{a}')$ に矛盾する．背理法により $j = i(\boldsymbol{a})$ が成り立つ.

$\sum_{i=3}^{m} a_i = 0$ と仮定する．$i \neq j$ かつ $(\circ \underset{i}{\rightarrow} \boldsymbol{a}), (\circ \underset{i}{\rightarrow} \boldsymbol{a}') \in E(\Gamma_{m,n+1})$ かつ $\sum_{i=3}^{m} a_i = 0$ より，$(i,j) = (1,2)$ または $(i,j) = (2,1)$ となる．$i(\boldsymbol{a})$, の定義より，$i(\boldsymbol{a}) = 1$ または $i(\boldsymbol{a}) = 2$ である．$i \neq i(\boldsymbol{a})$ より，$j = i(\boldsymbol{a})$ である. □

以上の補題を使って $\mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\rightarrow} \boldsymbol{a}) \subset \mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\rightarrow} \boldsymbol{a}')$ を示す.

4.1 $i(\boldsymbol{a}) = i(\boldsymbol{a}')$ の場合.

まず $\mathbb{T}(\circ \underset{i}{\rightarrow} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}) \subset \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\rightarrow} (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}) + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j)$ を示す．$\mathbb{T}$ は (T3) を満たしているので，$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})} + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ を示せば十分である．注 3.1 より，$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})} \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ となる．次に $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})} + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ を示す.

■$j \neq i(\boldsymbol{a})$ の場合. 仮定 $\boldsymbol{a} \in P_{m,n+1} \cap \mathbb{Z}^m$ より，$a_j \geq 1$ かつ $a_{i(\boldsymbol{a})} \geq 1$ を示せば十分である．仮定 $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j \in P_{m,n+1} \cap \mathbb{Z}^m$ より，$a_j \geq 1$ である．注 3.1 より，$a_{i(\boldsymbol{a})} \geq 1$ となる．従って $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})} + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j \in P_{m,n} \cap \mathbb{Z}^m$ が成り立つ.

■$j = i(\boldsymbol{a})$ の場合. この場合 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})} + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e}_i - 2\boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}$. が成り立つ．仮定 $i \neq j$ より，$i \neq i(\boldsymbol{a})$ となる．従って $a_{i(\boldsymbol{a})} \geq 2$ を示せば十分である．仮定 $i(\boldsymbol{a}) = i(\boldsymbol{a}')$ と注 3.1 より，$a'_{i(\boldsymbol{a})} \geq 1$ となる．従って

$$1 \leq a'_{i(\boldsymbol{a})} = a_{i(\boldsymbol{a})} - 1, \quad \because \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j \text{ かつ } i \neq j = i(\boldsymbol{a}),$$

となり，$a_{i(\boldsymbol{a})} \geq 2$ となることがわかる．よって $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})} + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j \in n\Delta^{m-1} \cap \mathbb{Z}^m$ が成り立つ.

以上より，$\mathbb{T}(\circ \underset{i}{\rightarrow} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}) \subset \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\rightarrow} (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}) + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j)$ となることがわかった．これを使って $\mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\rightarrow} \boldsymbol{a}) \subset \mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\rightarrow} \boldsymbol{a}')$ を示す.

■$i = i(\boldsymbol{a}) = i(\boldsymbol{a}')$ **の場合．**　$\mathbb{T}_s$ の定義より，

$$\mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}) = \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}) \cup \{\overline{n+1}\},$$
$$\mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}') = \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}' - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a}')}) \cup \{\overline{n+1}\} = \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}) \cup \{\overline{n+1}\},$$

である．$\mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}) \subset \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}) + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j)$ だから，$\mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}) \subset \mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}')$ が成り立つ．

■$i \neq i(\boldsymbol{a}) = i(\boldsymbol{a}')$ **の場合．**　$\mathbb{T}_s$ の定義より，

$$\mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}) = \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}),$$
$$\mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}') = \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}' - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a}')}) = \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}).$$

である．$\mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}) \subset \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}) + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j)$ だから，$\mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}) \subset \mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}')$ が成り立つ．

4.2　$i(\boldsymbol{a}) \neq i(\boldsymbol{a}')$ **の場合．**

補題 4.2 より，$i \neq i(\boldsymbol{a})$ かつ $j = i(\boldsymbol{a})$ となる．よって

$$\mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}) = \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a})}) = \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_j),$$
$$\mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}') = \begin{cases} \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}' - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a}')}) \cup \{\overline{n+1}\} = \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a}')}) \cup \{\overline{n+1}\} & (i = i(\boldsymbol{a}')), \\ \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}' - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a}')}) = \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a}')}) & (i \neq i(\boldsymbol{a}')), \end{cases}$$

となる．

■$i = i(\boldsymbol{a}')$ **の場合．**　この場合，$\mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a}')}) = \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_j)$ となる．従って $\mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}) \subset \mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}')$ である．

■$i \neq i(\boldsymbol{a}')$ **の場合．**　$\mathbb{T}$ は (T3) を満たすので，$\mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_j) \subset \mathbb{T}(\circ \underset{i}{\to} (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{e}_j) + \boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_{i(\boldsymbol{a}')})$ が成り立つ．よって $\mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}) \subset \mathbb{T}_s(\circ \underset{i}{\to} \boldsymbol{a}')$ が成り立つ．

参考文献

[1] Pavel Galashin, Gleb Nenashev, and Alexander Postnikov “*Trianguloid and triangulations of root polytopes ”, Journal of Combinatorial Theory, Series A, Volume 201, 2024.* https://doi.org/10.1016/j.jcta.2023.105802

[2] Alexander Postnikov “*Permutohedra, associahedra, and beyond ”, International Mathematics Research Notices, Volume 2009, Issue 6, Pages 1026–1106, 2009.*

[3] Israel Moiseevich Gelfand, Mikhail Kapranov, Andrei Zelevinsky “*Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants ”, 2008*

エッジ置換による部分自己相似グラフとそのマルチフラクタル解析

北海道大学　大学院理学院　数学専攻
坂本信仁 (Masahiro SAKAMOTO) *

概要

エッジを特定の構造に置き換えることで構成するエッジ置換グラフモデルは、再帰的な入れ子構造により自己相似な構造を持つ。エッジを置換する構造を複数用いてグラフを構成することで、グラフ全体は部分自己相似構造をもつ。本稿では置換先の構造の違いを反映するようなエッジの重みを定義し、部分自己相似構造をもつグラフについての特徴量として重みづけられたエッジの一般化次元に注目した。

1　導入

1.1　グラフ

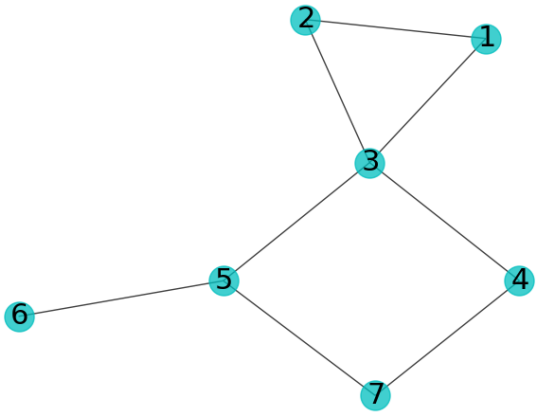


図 1　グラフの例.　ノード数 7, エッジ数 8 の単純無向グラフ.

グラフ G とは, 離散集合 $V \subset \mathbb{N}$ と V の要素対を要素とする集合 $E \subset V \times V$ の集合対 $G = (V, E)$ で定義される.　V の要素をノードや頂点, Vertex 等と呼び, E の要素をエッジや辺, Link 等と呼ぶ. 特定のグラフ G のノードの集合であることを明示する際には $V(G)$ と書き，同様にエッジの集合についても $E(G)$ と書き表す. ノード $u, v \in V$ の間にエッジがつながっているとき, $(u, v) \in E$ (また

* E-mail:m_sakamoto_451183@eis.hokudai.ac.jp

は $e = (u, v)$ について, $e \in E$.) と書き, ノード u とノード v は「隣接している」という．また, グラフ全体のノード数を N, エッジ数を M で表す．つまり, $|V| = N, |E| = M$ である．図 1 を例に V, E を表すと, 以下のとおりである．

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$
$$E = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 7), (5, 6), (5, 7)\}.$$

1.1.1 距離、直径

ノード i, j 間の**距離**を $d(i, j)$ で表し、i から j へ至る経路を構成する最小のエッジ列の長さで定義する。図 1 において、$d(1, 4) = 2,\ d(2, 7) = 3$ である．

グラフの**直径**をグラフ中の距離の最大値で定義する。図 1 で表したグラフについて、3 つのノード対 $(1, 6), (2, 6), (4, 6)$ の距離が $d(1, 6) = d(2, 6) = d(4, 6) = 3$ でグラフ中で最大である．このように, 直径を実現するノード対は必ずしも 1 組とは限らない．

1.2 典型的な構造を持つグラフ

特徴的な構造を持つグラフを紹介する。n-サイクルグラフ, ツリーグラフ, 正則グラフを紹介する．また, 図 2 に具体例を載せる

- n-サイクルグラフ
  閉路の構造からなるグラフをサイクルやサイクルグラフとよび, とくにノード数 n からなる長さ n の閉路を n-サイクルグラフや n-サイクルとよぶ．n-サイクルのエッジ数は n であり, 各ノードの次数はすべて等しく 2 である．
- ツリーグラフ
  グラフ全体でサイクルの構造が存在しないものをツリーグラフとよぶ． ノード数 n のツリーグラフは $n - 1$ 本のエッジをもつ．
- 正則グラフ
  すべてのノードの次数が等しいグラフを正則グラフと呼び, 特に次数が k であるものを k-正則グラフと呼ぶ．また, グラフ中のどのノード対間にもエッジが存在している正則グラフを完全グラフとよぶ．

図 2 (a) はノード数，エッジ数ともに 4 の閉路である 4-サイクルグラフであり，ノードの次数は全て 2 である．図 2 (b) はサイクルグラフからなる部分グラフが存在しないツリーグラフである．ノード数 10 に対してエッジ数 9 である．図 2 (c) はノード数 5 からなるグラフであり，任意のノードは自身を除く全てのノードとエッジがつながっている．このようなグラフを完全グラフと呼ぶ．完全グラフの直径はそのノード数にかかわらず 1 である．

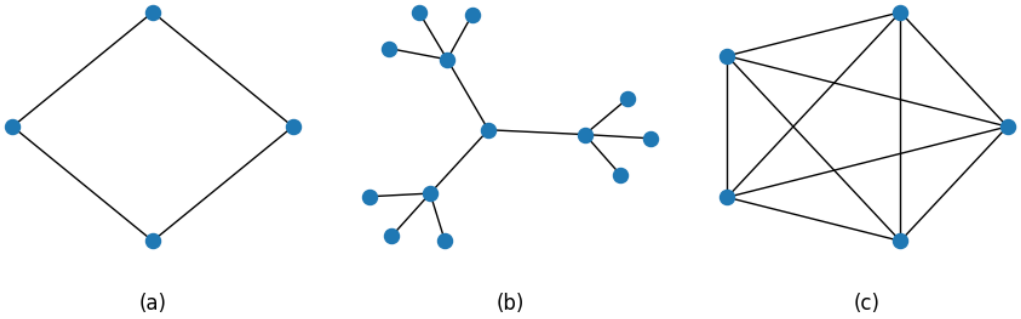


図 2　典型的構造のグラフ．　(a) 4-サイクル, (b) ツリーグラフ, (c) 完全グラフ (4-正則グラフ)

2　エッジ置換モデルグラフ

再帰的にエッジを特定の構造に置き換えることで構成するエッジ置換モデルについて紹介する。置換する特定のグラフ構造を**ジェネレータ**と呼び，エッジをジェネレータで置換する際に元のエッジのノードと重複するジェネレータのノードを**置換基点**と呼ぶ。

2.1　1 つのジェネレータを用いたエッジ置換モデル

1 つのジェネレータを用いて構成する例として、$(2,2)$-flower グラフと呼ばれるグラフを図 3 で紹介する。これは、エッジを 4-サイクルグラフで置換することで構成するグラフである。図 3 は初期状態を 4-サイクルグラフとし、エッジ置換を 2 回繰り返したグラフである。1 つのジェネレータからなるグラフについては、自己相似な構造を評価する指標としてフラクタル次元が研究されている [1]。

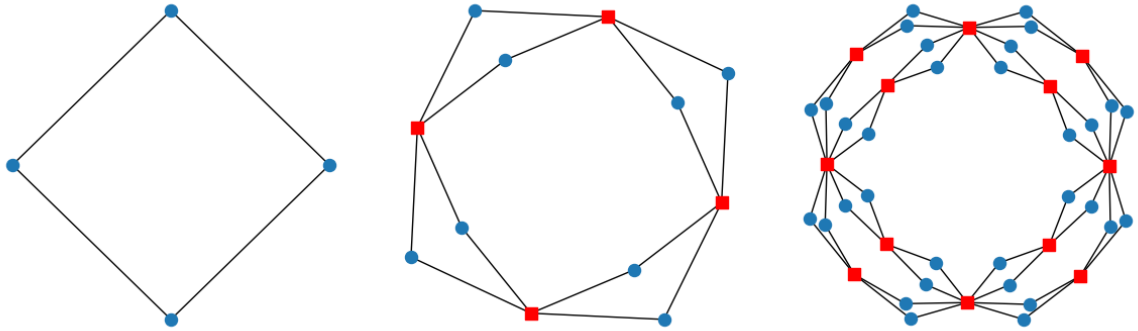


図 3　$(2,2)$-flower グラフ．　左から順に初期状態の 4-サイクルグラフ, 中央と右はそれぞれ左隣のグラフから 1 回エッジ置換を行ったグラフ．　新しく追加されたノードを青丸で示す．

2.2 複数のジェネレータを用いたエッジ置換モデル

K 個のジェネレータを $S_1, \ldots, S_K$ と表す．以降，ジェネレータ S_i を表す記号 i の集合を $\mathcal{L} = \{1, \ldots, K\}$ で表す．S_i の直径 L_i について以下が成り立つようにジェネレータとそれを表す記号とを対応付ける．

$$L_i \leq L_j, (i, j \in \mathcal{L}, i < j).$$

S_i のエッジ集合 $E(S_i)$ とノード集合 $V(S_i)$ について，その要素数を以下で表す．

$$m_i = |E(S_i)|,$$
$$n_i = |V(S_i)|.$$

複数のジェネレータを用いてエッジ置換モデルを構築する場合，ジェネレータ中の各エッジがどのジェネレータに置換されるか定める必要がある．そこで，モデルのすべてのエッジ e に対して置換先のジェネレータのラベル $\ell_{(e)} \in \mathcal{L}$ に基づいてエッジのラベル $\ell_{(e)}$ を定める．エッジ e の置換先をそのラベル $\ell_{(e)}$ と対応付けて $S_{\ell_{(e)}}$ で定める．

エッジ置換モデルの初期状態 $G(1)$ を，ジェネレータ 1 つからなるグラフとする．以降では，特に断らない限り，$G(1)$ を S_1 とする．

ジェネレータの構造と，各エッジの置換先の設定から定まる行列を定義する．

定義 1 (ジェネレータからなる部分グラフ数についての遷移行列)**.** ジェネレータ S_i のエッジ $e \in E(S_i)$ で，S_j に置換されるエッジの本数を用いて $K \times K$ 行列 $A = (a_{ij})$ の要素 a_{ij} を

$$a_{ij} = \sum_{e \in E(S_i)} \delta_{j, \ell_{(e)}}$$

で定義する．

この行列を用いることでジェネレータ毎に置換先の個数をとらえることができ，グラフ中のジェネレータからなる部分グラフの数を計算することができる．自明な構造でグラフ全体が飽和することを避けるため，行列 A が既約行列となるように置換先を設定する．

ジェネレータの構造をもとにグラフの大域的な特徴を解析するために, 以降ではジェネレータの構造と置換基点について以下の制約を課す．

条件 1． ジェネレータは連結．

条件 2． 置換基点となるノード対は, ジェネレータ中の最遠ノード対の一つでその距離は 1 より大きい．

条件 2 について，図 4 で図解する

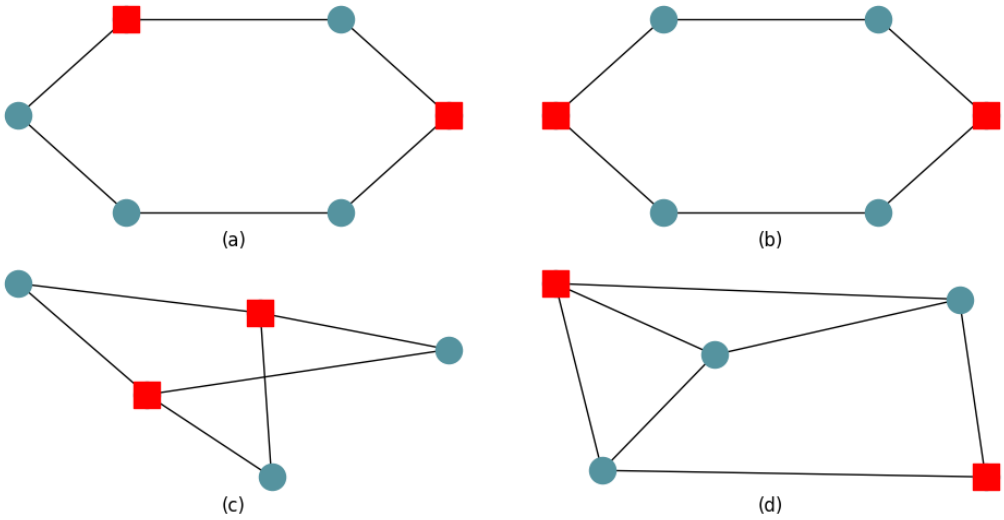


図 4　ジェネレータの条件．それぞれすべて赤い四角で表したノードをジェネレータの置換基点として考える．(a) は 6-サイクルグラフであり，2 個の置換基点の間の距離がサイクルグラフ全体の直径よりも小さいため不適切である．(b) は同じく 6-サイクルだが，置換基点間の距離がグラフ全体の直径と等しいためジェネレータについての条件 2 を満たす．(c), (d) はそれぞれ条件をすべて満たすジェネレータの例．

図 4 (a) は条件 2 を満たさないジェネレータと置換基点の例であり，置換基点の間の距離が 3 でなければならないが，この例は距離 2 であるため不適．図 4 (b) は (a) と同じ 6-サイクルグラフで条件 2 を満たす例．図 4 (c), (d) は条件をすべて満たすグラフ例である．

2.3　エッジ置換モデルの直径

一般に、与えられたグラフの直径を正確に推定することは困難である。効率的に 2 ノード間の最短距離探索をするアルゴリズムとしては Dijkstra 法等が知られており，直径の計算に用いるとノード数 N に対して N^3 に比例する程度の計算量であることが知られている．本稿ではグラフを構成するジェネレータの直径 $L_1, \ldots, L_K$ を用いて推定する方法について，Z.Neroli による定理 [2] を紹介し，これを用いてモデルの直径を評価する．既に述べたジェネレータについての条件（図 4）から，ジェネレータ中の置換基点対の間には，少なくとも 1 つのパスが存在する．エッジ置換によるジェネレータからなる部分グラフの直径は，置換基点対間のパス上のエッジがジェネレータに置換されることで増大する．グラフ全体の直径は，ジェネレータからなる部分グラフの直径の増大と関係して増大する．この性質を用いてモデル全体の直径を推定する．

置換基点の間の距離がジェネレータの直径と等しいため，各ジェネレータの置換基点間のパスにどのような置換先が存在しているかということは，グラフの直径を考えるうえで重要である．ジェネレータの部分グラフにおいて直径を推定するうえで重要な構造を定義する．

定義 2 (置換基点対の間のパス)．ジェネレータ S_i の置換基点の一方 a_i から始まり b_i に至るパスで，その長さが置換基点同士の間の距離と等しいものを $P(a_i, b_i)$ と表す．S_i の全ての $P(a_i, b_i)$ からな

る集合を $\mathcal{P}_i$ と表し，

$$\mathcal{P}_i = \{P(a_i, b_i) | P(a_i, b_i) \subset S_i\}$$

で定義する．

$\mathcal{P}_i$ を用いて，S_i のエッジを適当なジェネレータで置換した時の各 $P(a_i, b_i)$ の距離の増分を考える．

定義 3. 各 $P \in \mathcal{P}_i$ に対して，P を構成するエッジの置換先の数を並べたベクトル $\mathbf{b}_i$ を以下で定義する．

$$\mathbf{b}_i = (b_{i1}, \ldots, b_{iK}),$$
$$b_{ij} = \sum_{\substack{e \in P \\ \ell_{(e)} \in \mathcal{L}}} \delta_{j\ell_{(e)}}.$$

各ジェネレータについてのベクトル $\mathbf{b}_i$ を並べた行列を用いて，グラフ全体の直径の推移を近似的に解析する．

定義 4 (直径の増大に関する行列)**.** $\mathbf{b}_i$ を第 i 行成分とする行列を B とする．各ジェネレータについて $\mathcal{P}_i$ の要素 $P(a_i, b_i)$ を 1 つ固定する毎に $\mathbf{b}_i$ が 1 つ定まる．とりうる全ての $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_K$ の組み合わせからなる B の集合を $\mathcal{B}$ で表す．

$$\mathcal{B} = \{B | B = {}^t(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_K)\}.$$

以降で他の行列と混同する恐れがある場合は，行列 $B \in \mathcal{B}$ を「直径の増大に関係する行列」と呼ぶこととする．この行列を用いてエッジ置換前後の直径の増分を考える．

定義 5 (行列集合の最小スペクトル半径)**.** $\mathcal{B}$ に含まれる行列 B のスペクトル半径 $\rho(B)$ の最小値を $r_{\min}(\mathcal{B})$ で表す．

$$r_{\min}(\mathcal{B}) := \min_{B} \{\rho(B) | B \in \mathcal{B}\}.$$

各ジェネレータ中の置換基点をつなぐパスのジェネレータへの置換による直径の増大は行列 B を用いて考えることができ，各ジェネレータの置換基点をつなぐパスの長さの増大に関係してモデル全体の直径は増大する．$\mathcal{B}$ のうちスペクトル半径が最小の行列 B は，1 回のエッジを置換した後のグラフで最短距離を与える置換先の組み合わせである．したがって，十分置換を繰り返した後のグラフは，$\mathcal{B}$ のうちスペクトル半径最小の行列 B のスペクトル半径 $r_{\min}(\mathcal{B})$ の累乗でその直径が推移する．この性質からグラフ全体の直径の推移を近似的にとらえたのが次の Neroli による定理 [2] である．

定理 6 (直径の近似式 (Neroli, '24[2]))**.** エッジ置換モデルの直径 $L(t)$ は十分大きな置換ステップ t において以下で近似できる．

$$L(t) \simeq (r_{\min}(\mathcal{B}))^t.$$

証明は Neroli [2] **Theorem 3.4** を参照のこと．証明は大きく分けて以下のステップに基づく．

1. エッジ置換 1 ステップでの直径の増大が行列 $B \in \mathcal{B}$ を用いて表せることを示す．
2. 行列の積 $\prod_{i=1}^{t}$ の漸近挙動を評価し，上限下限を求めることで直径の評価を行う．

3　主結果：エッジに対する重みの割り当てと一般化次元

本節では，複数のジェネレータからなるエッジ置換モデルに対して，置換先の履歴を反映するようなエッジの重みを定める． 3.1 節ではエッジ置換におけるジェネレータの遷移や規格化条件等からエッジの重みを定義し，同じ重みをもつエッジの本数を表す重複度の計算を行う．次いで 3.2 節では，前節で定義し計算したエッジの重みをもとにグラフの一般化次元を計算する．ここで計算される一般化次元は，グラフのエッジからなる集合に対して計算されるため，形式的にはエッジについて被覆を考える解析法であることに注意が必要である．

3.1　重みの割り当て

エッジに対して重みづける方法は必ずしも一意に定まるものではない．本稿ではジェネレータの区別に注目して解析するために，エッジ置換後のジェネレータからなる部分グラフのエッジ集合は置換前のエッジと同じ重みを持ち，ジェネレータからなる部分グラフ内でエッジの重みを等分するように定める．具体的には以下の条件を満たすようにエッジの重みを考える．

条件 1． (規格化条件) 全てのエッジにわたって重みの総和をとると 1 となる．エッジ e の重み $\mu(e)$ について，

$$\sum_{e\in E(G(t))} \mu(e) = 1$$

を満たす．

条件 2． (重みの継承) エッジの置換先の部分グラフに含まれる各エッジの重みの総和が置換元のエッジの重みと等しい．あるエッジ e でその記号が $\ell_{(e)} \in \mathcal{L}$ であるものから置換された部分グラフ $g_{\ell_{(e)}}$ と，そのエッジ $e' \in E(g_{\ell_{(e)}})$ の重み $\mu(e')$ について

$$\mu(e) = \sum_{e'\in E(g_{\ell_{(e)}})} \mu(e')$$

を満たす。

条件 3． (重みの等分) ジェネレータからなる部分グラフに含まれるエッジは全て同じ重みをもつ．あるジェネレータ構造からなる部分グラフ g のエッジ集合 $E(g)$ に含まれるエッジ $e, e' \in E(g)$ について，

$$\mu(e) = \mu(e')$$

が成り立つ．

モデルの構成法から，エッジと置換先は記号で対応付けられる．つまり，$G(t-1)$ のエッジ e をジェネレータ $S_{\ell_{(e)}}$ で置換することは，エッジ e についての長さ $t-1$ の記号列 I_e の末尾に $\ell_{(e)} \in \mathcal{L}$ を追加することと考えられる．長さ $t-1$ の記号列 I_e と関係づけられたエッジを S_j へと置換する場合，置換後のジェネレータ S_j からなる部分グラフ g_j に含まれるエッジ $e' \in E(g_j)$ についての記号列 $I_{e'}$

は、末尾に j を追加した長さ t からなる記号列と対応づけられる．但し、グラフ全体で同じ記号と対応付けられるエッジは複数存在することに注意が必要である．以上から、$G(t)$ のエッジ e について，その重み $\mu(e)$ を以下で定義する．

定義 7 (エッジの重み)**.** エッジ e の重み $\mu(e)$ をエッジ置換先の遷移履歴を表す記号列 I_e とジェネレータ S_i のエッジ数 m_i を用いて，

$$\mu(e) = \prod_{i \in I_e} \left(\frac{1}{m_i} \right)^{n(I_e, i)}$$

と定義する．但し，$n(I_e, i)$ は記号列 $I_e \in \mathcal{L}^t$ における記号 i の出現回数を表し，以下で定める．

$$n(I_e, i) = \sum_{k \in I_e} \delta_{ik}.$$

同じ記号列 I_e を持つエッジの本数 $\rho(\mu(e))$ は以下で計算される．

命題 8 (エッジの重みの重複度)**.** 記号列 I_e に対応するエッジの重み $\mu(e)$ をもつエッジの本数は以下で計算される．

$$\rho(\mu(e)) = \prod_{k=1}^{t-1} a_{i_k i_{k+1}}.$$

但し，記号列 I_e の k 番目の記号を i_k と表す．

3.2 一般化次元

複数のジェネレータからなるエッジ置換モデルの一般化次元を部分グラフのエッジ集合に対して定義する．ここで，置換前のエッジ e の重み $\mu(e)$ と，e を置換した後の部分グラフ g_e のエッジ集合の重み $\mu(E(g_e))$ は等しいため，ジェネレータ構造からなる部分グラフを被覆の部分グラフと考える代わりに，置換後のジェネレータ構造に対応するエッジを被覆対象として考え，その重みを用いることでエッジ集合のモデルの一般化次元を計算する．

グラフのボックス次元を数値的に解析する先行研究の手法 [3, 4] にならい，ユークリッド距離の定まらないグラフに対して集合についての一般化次元における被覆の直径に相当する量を考えるために，被覆する部分グラフの直径をグラフ全体の直径で除して規格化した値を用いる．本稿ではエッジを被覆対象として考えているため，グラフ全体の直径 $L(t)$ を用いて被覆する部分グラフの直径を規格化した値は $1/L(t)$ で計算する．モデルの一般化次元 $D(q)$ は次のように計算できる．

定義 9 (エッジ集合の一般化次元)**.** エッジ置換モデルの一般化次元を以下で定義する．

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{t \to \infty} \frac{\log(Z_t(q))}{\log(1/L(t))} \quad (q \neq 1).$$

但し $L(t)$ は 2.3 節で与えた $G(t)$ の直径で，分割和 $Z_t(q)$ は以下で計算する．

$$Z_t(q) = \sum_{e \in E(G(t))} (\mu(e))^q.$$

$q=1$ の一般化次元は

$$D_1 = \lim_{t\to\infty} \frac{\mu(e)\log(\mu(e))}{\log(1/L(t))}$$

で表すことができる．一般化次元の計算に用いる分割和はエッジの重みの q 乗の総和であり，エッジ e の重み $\mu(e)$ と重複度 $\rho(\mu(e))$ は，定義 7 と命題 8 から，エッジ e についての記号列 $I_e=(i_1,\ldots,i_t)$ を用いて以下のように表せる．

$$\mu(e) = \prod_{i\in I_e} \left(\frac{1}{m_i}\right)^{i_{\{I_e\}}},$$
$$\rho(\mu(e)) = \prod_{k=1}^{t-1} a_{i_k,i_{k+1}}.$$

これを計算するために，新しく $K\times K$ 行列 $W_q=(w_{ij}^{(q)})$ を定義する．ジェネレータからなる部分グラフの数についての遷移行列 A の要素 a_{ij} と，各ジェネレータ S_i のエッジ数 m_i を用いて，エッジの重みを計算する行列 W_q を

$$w_{ij}^{(q)} = \frac{a_{ij}}{{m_i}^q}.$$

でその要素を定める．ここで，q は実数値パラメータとする．以降，この行列 W_q を「エッジの重みについての行列」とよび，ジェネレータからなる部分グラフ数の遷移に関する行列や，直径の増大に関係する行列と区別する．行列 W_q の t 乗 W_q^t の各要素を $(w_{ij}^{(q),t})$ と表すことにすると，$(w_{ij}^{(q),t})$ は以下の条件に当てはまる全てのエッジの重みの重複を含めた総和を表す．

条件 1． エッジ置換を $t-1$ 回行った後のグラフ $G(t)$ である．

条件 2． グラフの初期状態は i 番目のジェネレータ S_i ひとつからなるものである．

条件 3． $t-1$ 回の置換の後，ジェネレータ S_j からなる部分グラフに含まれるエッジの重みである．

上記条件から，$(w_{ij}^{(q),t})$ はジェネレータ S_i を初期状態として t 回置換を行った後の S_j の構造からなる部分グラフのエッジについての重みを表す．このことから，グラフ $G(t)$ のエッジ集合 $E(G(t))$ に含まれるエッジの重みについての分割和 $Z_t(q)$ は以下の式から求められる．

$$Z_t(q) = X(1)\ W_q^t\ \mathbf{1}.$$

但し，$X(1)$ は初期状態のグラフ $G(1)$ におけるジェネレータからなる部分グラフの数を並べた行ベクトルで，$\mathbf{1}$ は要素がすべて 1 からなる K 次列ベクトルとする．以上から，ジェネレータに基づく重みつきグラフのエッジ集合についての一般化次元 D_q は，

$$D_q = \frac{1}{q-1}\lim_{t\to\infty} \frac{\log(X(1){W_q}^t\mathbf{1})}{\log\left(1/r_{\min}(\mathcal{B})\right)^t}.$$

により計算できる．

3.3 具体例

一般次元計算の具体例として、図 5 で表されるエッジとその置換先から構成されるエッジ置換モデルについて、一般化次元を計算した結果を図 6 に示す。

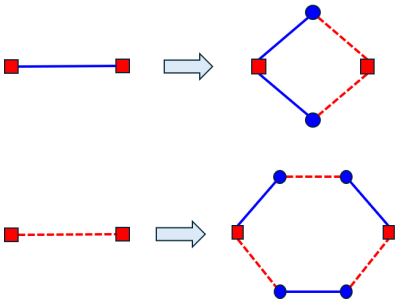


図 5　4-サイクルグラフと 6-サイクルグラフを用いてエッジとその置換先を定める。赤の四角で表したノードを置換基点とし、青の実線で表したエッジは 4-サイクルに置換し、赤の破線で表したエッジは 6-サイクルに置換する。初期状態を 4-サイクルとする。

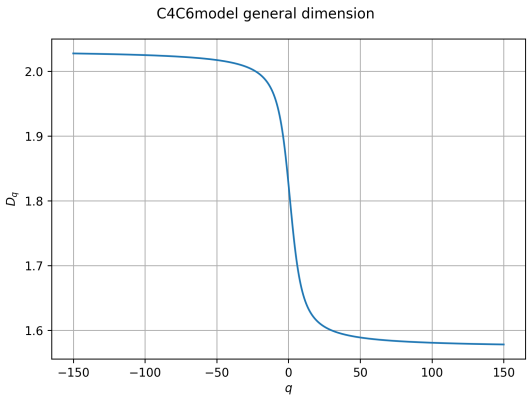


図 6　左に示す置換規則で構成したエッジ置換モデルににについての一般化次元。プロットする q の範囲は $-150 \leq q \leq 150$ とした。

参考文献

[1] Kousuke Yakubo and Yuka Fujiki. A general model of hierarchical fractal scale-free networks. *PLOS ONE*, Vol. 17, No. 3, pp. 1–22, Mar 2022.

[2] Ziyu Neroli. Fractal dimensions for iterated graph systems. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, Vol. 480, No. 2300, p. 20240406, 2024.

[3] Chaoming Song, Lazaros K Gallos, Shlomo Havlin, and Hernán A Makse. How to calculate the fractal dimension of a complex network: the box covering algorithm. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, Vol. 2007, No. 03, p. P03006, Mar 2007.

[4] Dan-Ling Wang, Zu-Guo Yu, and V Anh. Multifractal analysis of complex networks. *Chinese Physics B*, Vol. 21, No. 8, p. 080504, Aug 2012.

索引

Li, Hsin-Lun, 223
Tu Binnan, 85
■ア行
青木 侑省, 419
赤川 正朋, 551
朝見 陽介, 641
足立 大雅, 159
新井 克典, 511
新井 匠, 527
荒木 康太, 615
安藤 遼哉, 175
今村 悠希, 91
岩本 光平, 433
上野 祐一, 659
上野 龍, 403
鵜飼 直孝, 591
内海 凌, 41
小川 実里, 697
小村 寅之介, 791
■カ行
貝嶋 優太郎, 375
甲斐 涼哉, 427
片山 翔, 689
加藤 響, 237
兼高 泰河, 751
軽部 尚香, 135
神田 秀峰, 441
岸本 勇太, 781
北島 雅也, 651
鴻池 真斗, 71
國分 海斗, 635
古郷 優平, 409
呉 博韜, 451
■サ行
齋藤 琢弥, 51
坂本 穂波, 495
坂本 信仁, 799
坂本 龍亮, 609
佐藤 一慶, 713
島崎 達史, 205
蔣 崢, 343
地引 知栄, 565
菅原 明広, 327
菅原 朔見, 543
杉谷 礼, 255
杉田 恭将, 265
助永 真之, 77
鈴木 望夢, 169
関 元樹, 739
■タ行
髙倉 真和, 669
高橋 諒, 181
瀧脇 迪哲, 517
武中 亮, 321
竹村 春希, 275
田代 紀一, 679
舘川 暁斗, 311
田中 優帆, 31
田邊 真郷, 771
谷 光一郎, 369
丹野 俊将, 285
張 彧瀟, 705
滕 懐宇, 761
■ナ行
中岡 周太郎, 351
中川 貴就, 625
中島 慶人, 581
中田 彬文, 303
中野 竜之介, 247
長峰 実央, 197
長屋 拓暁, 721
成田 知将, 477
西中 祐介, 361
西村 優作, 391
小脇 修和, 65
■ハ行
橋本 七海, 139
服部 祐樹, 457
林 佑亮, 289
姫野 圭佑, 485
伏見 宗紘, 131
藤井 大計, 731
藤岡 舜, 673
星野 真生, 3
■マ行
松川 寿人, 101
松下 光虹, 59
松田 凌, 21
水野 雄貴, 107
溝口 史華, 13
宮下 空, 191
村上 真悟, 293
毛利 健太, 383
森村 晃子, 601
■ヤ行
安田 順平, 503
薮口 怜央, 537
山内 優太, 467
山口 健太朗, 531
山田 雄斗, 117
余 錦波, 149
吉田 智輝, 121
■ラ行
■ワ行
和久田 葵, 561
渡辺 孝佳, 571
渡部 悠人, 217
和田 康司, 227
和知 秀忠, 335