



Title	Homogeneous structures of 3-dimensional Riemannian manifold [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	大野, 優
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第16238号
Issue Date	2025-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/95358
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Yu_Ohno_abstract.pdf, 論文内容の要旨



学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士（理 学） 氏 名 大野 優

学 位 論 文 題 名

Homogeneous structures of 3-dimensional Riemannian manifold
(3次元リーマン多様体の等質構造)

リーマン多様体が等質であるとは、あるリー群がそのリーマン多様体に等長的かつ推移的に作用することを意味する。等質リーマン多様体では、ある1点における計算をリー群の作用で任意の点に移すことができるため、曲率や捩率などの幾何学的量の計算が比較的容易になる。また、等質リーマン多様体は、等長的かつ推移的に作用するリー群を、その固定部分群で割った商多様体として実現され、これを本学位論文では等質空間表示と呼ぶ。ここで、一般に等質リーマン多様体の等質空間表示は一意ではないことに注意が必要である。

一般的に、与えられたリーマン多様体が等質であるかどうかを決定するのは難しい。しかし、1958年にAmbroseとSingerは、リーマン多様体の等質性を特徴づける条件を明らかにした。具体的には、単連結で完備なリーマン多様体が等質であることは、等質構造と呼ばれる特別な(1,2)型テンソル場を許容することと同値であることを示した。

リーマン対称空間は、等質リーマン多様体の典型例である。Cartanによってリーマン多様体が局所対称であることが、曲率の平行性によって特徴づけられた。このことから、リーマン対称空間は恒等的に0であるテンソル場を等質構造として持つことがわかる。特に、Ambrose-Singerの定理は、Cartanの結果の一般化になっている。

さらに、リー群とその左不変計量の組のリーマン多様体(リーマンリー群)は、そのリー群が自分自身に等長的かつ推移的に作用するため、等質リーマン多様体である。リーマンリー群は、リー群のCartan-Schoutenの(-)-接続と左不変計量に関する差テンソルを等質構造として持つ。

AmbroseとSingerによる証明は構成的である。実際、AmbroseとSingerは、リーマン多様体の等質構造からそのリーマン多様体に等長的かつ推移的に作用するリー群を明示的に構成する方法を示し、逆に、等長的かつ推移的に作用するリー群から等質構造を明示的に構成する方法も示している。

等質構造は作用するリー群のリー環の簡約分解に対応する。等質空間は、簡約分解が存在する場合に簡約であると呼ばれ、任意の等質リーマン多様体は簡約であることが知られている。等質リーマン多様体の簡約分解を一つ取れば、標準接続と呼ばれる接続が定まり、その標準接続とLevi-Civita接続の差テンソルが等質構造になる。逆に、等質リーマン多様体の等質構造が与えられた場合は、等質構造とLevi-Civita接続の和で定義される接続のホロノミー代数から簡約分解を定義できる。

AmbroseとSingerは、等質構造を用いて、等質空間表示を全て決定できる可能性を示唆した。しかし、TricerriとVanheckeにより、等質構造と等質空間表示が一对一に対応しない例が与えられ、等質構造を用いて等質空間表示を全て決定するのは困難であることが指摘された。例えば、ユークリッド平面は等質構造として、恒等的に0であるテンソル場のみ存在するが、一方でユークリッド平面をリーマン対称空間とみなした場合と、可換リー群としてみなした場合の二つの異なる等質空間表示がえられる。したがって、与えられた等質リーマン多様体の等質空間表示を全て決定するという問題は、その等質リーマン多様体の等質構造を全て決定することと、等質構造や他の方法を用いて等質空間表示を全て決定することという二つの問題に分けて考えねばならない。逆に、互いに同型でない等質構造から構成される簡約分解は、互いに同型でないことに注意する。

本博士論文では、上記の問題を、連結、単連結かつ完備である3次元等質リーマン多様体につ

いて議論し、完全に解決した。先行研究は次のようにまとめられる。まず、1978年に関川によって、連結、単連結かつ完備である任意の3次元等質リーマン多様体は、リーマン対称空間($S^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{R}^3, S^2 \times \mathbb{R}, \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$)か、リーマンリー群と等長的であることが示された。

1986年に岡山大学の阿部貢士の修士論文で、3次元空間形($S^3, \mathbb{H}^3, \mathbb{R}^3$)の等質構造と等質空間表示が全て決定された。また、リーマンリー群について、TricerriとVanheckeによりハイゼンベルグ群、GadeaとOubiñaによりBerger球面の等質構造がそれぞれ決定された。そして、2023年にCalvino-Louzaoらによって、対称ではない3次元リーマンリー群の等質構造が研究された。阿部貢士の分類結果から、3次元双曲空間と3次元ユークリッド空間において、Ambrose-Singerの定理からは得られない等質空間表示が存在することがわかる。また、明示的に記されていないが、Calvino-Louzaoらの等質構造の分類は、リー群構造に関する左不変性を仮定したものになっており、等質構造の完全な分類はなされていなかった。

本博士論文の結果は、以下の3つである：(1)積多様体 $S^2 \times \mathbb{R}$ および $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ の等質構造を全て決定した。(2)3次元リーマンリー群の等質構造を、左不変性を仮定せずに分類した。特に、互いに等長的であるが、リー群として同型でない2つのリー群を、等質構造を用いて発見した。(3)連結、単連結かつ完備である3次元等質リーマン多様体の、全ての等質空間表示を決定した。

これらの結果から、連結、単連結かつ完備である3次元等質リーマン多様体の全ての等質構造と等質空間表示を決定でき、この場合において、AmbroseとSingerによって提起された問題が完全に解決される。それぞれについて証明の概要を以下で述べる。

まず、積多様体 $S^2 \times \mathbb{R}$ および $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ について、等長的かつ推移的に作用するリー群が直接決定できるため、等質空間表示を分類できる。得られた等質空間表示に対し、その簡約分解を決定し、それを用いて等質構造を決定した。

次に、3次元リーマンリー群の等質構造を、左不変性の仮定をせずに分類するために、リー群のリー環の正規直交基底を1つ固定した。そしてその双対基底を用いて(1,2)型テンソル場を表現し、そのテンソル場が等質構造となる条件を求めた。この条件はテンソル場の係数に関する微分方程式であり、それを解くことで等質構造を決定した。等質構造が左不変であるという仮定は、テンソル場の各係数が定数であるということを意味する。特に、2次元特殊線形群の普遍被覆群に関して、左不変でない等質構造が存在した。この等質構造は、Calvino-Louzaoらの等質構造の分類では得られていなかったことに注意する。さらに、この等質構造から等質空間表示を構成し、2次元特殊線形群の普遍被覆群に、ある3次元非ユニモデュラーリー群が等長的かつ単純推移的に作用していることがわかった。特に、2次元特殊線形群はユニモデュラーであり、これらの2つの3次元リー群は互いに同型でないが、リーマン多様体としては等長的である。

最後に、関川の定理から、連結、単連結かつ完備である任意の3次元等質リーマン多様体は、リーマン対称空間か、リーマンリー群であり、これらの空間に等長的かつ推移的に作用するリー群を決定できる。なお、3次元双曲空間と3次元ユークリッド空間に関しては、等質構造から構成できない等質空間表示が存在する。特に、これらの等質空間表示から構成される等質構造は、他の等質空間表示から構成される等質構造と一致する。

本論文の構成は以下の通りである。第1章では、のちの章で必要な基礎事項を与え、等質空間とリーマン対称空間に関する一般的な事実を確認する。第2章では、等質リーマン多様体について、特に簡約分解について詳しく説明する。第3章では、Ambrose-Singerの定理を概説し、等質構造についてより詳しく述べる。第4章では、3次元リーマン多様体の等質構造と等質空間表示に関して研究し、3次元リーマン多様体の全ての等質構造と等質空間表示を分類する。