



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	A hierarchy of general positions for hyperplane arrangements, and their varieties [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	齋藤, 琢弥
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第16239号
Issue Date	2025-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/95360
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Takuya_Saito_abstract.pdf, 論文内容の要旨



学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士（理 学） 氏 名 齋藤琢弥

学 位 論 文 題 名

A hierarchy of general positions for hyperplane arrangements, and their varieties
(超平面配置の一般の位置の程度, 及びその多様体)

超平面とはアフィン空間の余次元 1 の部分空間のことであり, 超平面の有限集合 $\mathcal{A}$ のことを超平面配置, あるいは単に配置という. 超平面配置の組合せ型とは, 超平面の交叉として書ける部分空間全てのなす半順序集合であり, 超平面配置の基本的かつ重要な不変量である. 判別的配置 $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ は Manin と Schechtman によって導入された超平面配置であり, 固定した超平面配置 $\mathcal{A}$ の各超平面を平行移動した配置全てからなる空間に定義される. 特に元の配置 $\mathcal{A}$ が直線上の配置の場合は A 型ルート系を法線ベクトルに持つ組紐配置と一致する. 判別的配置は高次の組紐群や高次の Bruhat 順序をはじめ, 多くの組合せ論・幾何学的な話題と関連している. また, 判別的配置と同値, あるいは同様な概念は凸多面体論, 符号理論, マトロイド理論などの文脈でも発見されている.

有限集合 E で添字付けられた k 次元超平面配置の空間 $\mathbf{Arr}(E, k)$ を考える. 判別的配置の組合せ型は元の超平面配置の組合せ型だけでは完全に決定されないことが Falk によって指摘されているが, 一方でこの空間の適当な Zariski 開集合上で $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ の組合せ型の濃度は最大になり, 一定になることが知られている. そのような Zariski 開集合上にある配置 $\mathcal{A}$ のことを very generic といい, そうでない配置を non-very generic という. 特に very generic な配置 $\mathcal{A}$ に対して $\mathcal{B}(\mathcal{A})$ の組合せ型はある順序集合 $P(E, k)$ と同型になる. この記述は, Bayer-Brandt によって予想され, Athanasiadis によって 90 年代に示されている. 一方で, non-very generic な配置から構成される判別的配置の組合せ型は, 未だ明らかになっていない. non-very generic な配置から構成される判別的配置には, very generic な配置から構成される判別的配置の交叉には現れないものがある. このような交叉のことも non-very generic と呼び, その階数 r と添字の集合族 $\mathbb{T} \subset 2^E$ で組合せ的に記述される. つまり, non-very generic な配置は non-very generic な交叉を持っているものとしても定義される. そこで, 本学位論文では non-very generic な交叉に対応する二つのパラメータ $(\mathbb{T}, r)$ に対し, $(\mathbb{T}, r)$ で $\mathbf{Arr}(E, k)$ の部分集合として $(\mathbb{T}, r)$ -特異多様体 $V_{(\mathbb{T}, r)}$ を定義することで, non-very generic の程度の定式化を行い, その性質を調べた. また, non-very generic な交叉のうち極小なものにも着目し, いくつかの必要条件を与える.

本学位論文は 8 つの節で構成されている. 第 1 節では, 判別的配置に関する歴史と, 関連する研究を簡単に紹介する. 第 2 節では, 線型代数に関する準備と判別的配置の定義を行う. ここには超平面配置の定義, グラスマン多様体の基本, Gale 図式と判別的配置の関係などが含まれる. 第 3 節では, non-very generic な交叉のいくつかの知られている例と, non-very generic な配置と交叉の定義を行う. また, $(\mathbb{T}, r)$ -特異多様体を導入し non-very generic な配置の集合が $(\mathbb{T}, r)$ -特異多様体の和となることを示す. 第 4 節では, マトロイド理論の視点から判別的配置に関する考察を行う. ここでは, 判別的配置が Gel'fand, Goresky, MacPherson, Serganova らが導入したマトロイドによるグラスマン多様体の滑層分割のファイバーとして扱えることを確認し, 特に $(\mathbb{T}, r)$ -特異多様体が適当なマトロイド滑層の射影による像となっていることを見る. 第 5 節では, 元の配置に対する削除と制限で判別的配置がどう振る舞うのかを確認し, 特に平行な超平面の削除という操作に注目する. 第 6 節以降では元の配置は generic なものであることを仮定する. 第 6 節では, 極小な non-very generic な配置が満たすべきいくつかの組合せ的な不等式を与える. この不等式によって non-very generic な交叉が現れる E, k 及び階数に関する必要条件を与える. 第 7 節では, $(\mathbb{T}, r)$ -特異多様体の幾何学的

な性質をいくつか調べる．ここには $(\mathbb{T}, r)$ -特異多様体の余次元に関する結果，特に $(\mathbb{T}, r)$ -特異多様体が超曲面になる十分条件を与える．また，いくつかの具体例に関する既約性，特異多様体同士の交わり方についても考察する．第 8 節では，新しい non-very generic な直線配置について考察する．まず $2n$ -車輪と呼ぶ配置に付随する特異多様体を定義し，その性質を調べる．その応用として 8 直線以下の配置から得られる判別的配置にあらわれうる non-very generic な交叉とその定義方程式を記述する．