HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Picard-Fuchs equations of the generalized Dwork family [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	根岸, 崚
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第16240号
Issue Date	2025-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/95362
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Ryo_Negishi_abstract.pdf, 論文内容の要旨

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　　根 岸 崚

学 位 論 文 題 名

Picard-Fuchs equations of the generalized Dwork family
（一般化 Dwork 族の Picard-Fuchs 方程式）

代数多様体の周期が満たす微分方程式は Picard-Fuchs 方程式と呼ばれ，関数論や複素代数幾何学において古くから研究されてきた対象であるが，数論的な設定の上では Picard-Fuchs 方程式はフロベニウス構造と呼ばれる付加構造を持ち，そこから数論的に重要な不変量や性質が得られることが 1960 年代に Dwork により観察された．特に Dwork は，現在 Dwork 族と呼ばれる射影超曲面の族の Picard-Fuchs 方程式が一般化超幾何微分方程式となることを示し，ゼータ関数の研究に応用した．

2009 年に Katz は Dwork 族を一般化した超曲面の族（以下，一般化 Dwork 族と呼ぶ）について，その Picard-Fuchs 方程式が一般化超幾何微分方程式となることを0進的な手法を用いて示した．しかしその証明は抽象的であり，微分方程式の具体的な形は特別な場合を除いて得られていなかった．

また，同時期に Kloosterman は一般化 Dwork 族を含むある種の射影超曲面の族の p 進コホモロジーのフロベニウス作用の変形を表す行列を計算した．この変形行列は Picard-Fuchs 方程式のフロベニウス構造から自然に導出されるものであるが，Kloosterman は Picard-Fuchs 方程式を求めることなく変形行列を計算した．

本論文では一般化 Dwork 族の Picard-Fuchs 方程式を明示的に与え，その応用として p 進コホモロジーのフロベニウス作用の変形行列を Kloosterman と異なる方法で計算した．以下，証明に用いる手法および概略を述べる．

射影超曲面の族において，与えられたコホモロジー類の満たす Picard-Fuchs 方程式をヤコビ環を用いて計算するアルゴリズムが知られているが，その計算はコホモロジー類ごとに異なり，それらを統一的に扱う公式や計算法はほとんど知られていない．本論文では，まず一般的な射影超曲面の族のコホモロジー類が GKZ 超幾何系と呼ばれる連立線形偏微分方程式系を満たすことを示し，その結果として一般化 Dwork 族のコホモロジー類が満たす超幾何微分方程式を具体的に与える．

しかし，ここで得られた方程式は周期以外も解に含む階数の高い微分方程式となり，本質的な情報を得るためには元の方程式から適当な 1 次因子の積を取り除いた微分方程式もまた Picard-Fuchs 方程式となることを示す必要がある．本研究ではこの問題を Katz の0進層の結果を用いて解決し，Picard-Fuchs 方程式が既約な超幾何微分方程式となることを示した．さらに得られた超幾何微分方程式の D 加群とコホモロジー群の原始部分(primitive part)が同型となることも示した．これらの結果は上述の Katz の結果を精密化するものである．

正標数の体上定義された一般化 Dwork 族のような代数多様体の族について，その相対リジッドコホモロジーはフロベニウス構造を持つことが知られている．フロベニウス構造はある条件を満たす可積分接続と加法群としての自己準同型の組からなるが．このうち可積分接続は代数的ドラムコホモロジーとの比較同型を通して，Picard-Fuchs 方程式に対応する接続，Gauss-Manin 接続に一致する．上述の結果より一般化 Dwork 族の Picard-Fuchs 方程式は具体的に与えられているので，それを用いてフロベニウス作用の変形行列を計算する．