HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Geometry of Surfaces with Singular Points and the Gauss-Bonnet Theorem [an abstract of dissertation and a summary of dissertation review]
Author(s)	橋堀, 恭矢
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第16241号
Issue Date	2025-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/95364
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Type	doctoral thesis
File Information	Kyoya_Hashibori_abstract.pdf, 論文内容の要旨

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称　博士（理　学）　氏　名　　橋　堀　恭　矢

学 位 論 文 題 名

Geometry of Surfaces with Singular Points and the Gauss-Bonnet Theorem
（特異点を持つ曲面の幾何学と Gauss-Bonnet の定理）

コンパクトな境界付き 2 次元 Riemann 多様体に関する古典的な Gauss-Bonnet の定理は，Riemann 計量の Gauss 曲率の積分，境界の測地的曲率の積分，そして Euler 標数を結びつける基本的な定理である．この定理は，幾何学的性質とトポロジー的性質を統一的に記述するものであり，曲面の幾何学において重要な役割を果たしている．例えば，正則曲面（2 次元多様体を定義域とするはめ込み）の場合，その誘導計量が Riemann 計量となるため，Gauss-Bonnet の定理がそのまま適用される．一方で，特異点（はめ込みにならない点）を持つ曲面では，Gauss 曲率や測地的曲率が特異点において定義されないため，この定理を直接適用することはできない．しかし，特異点を持つ曲面の中でも「性質の良い」ものに限定すれば，Gauss-Bonnet の定理を拡張することが可能である．このような拡張は，特異点を許容する曲面の幾何学的性質やトポロジー的特徴を正確に記述する上で不可欠であり，近年，特異点を考慮した理論の構築が注目を集めている．

本論文では，特異点を許容する曲面として，フロンタル・波面，2 次元多様体間の滑らかな写像，さらに交叉帽子を特異点として許容する曲面を対象とする．そして，これらに対して Gauss-Bonnet の定理を拡張し，特異点を持つ曲面の幾何学的性質とトポロジー的構造を明らかにするための枠組みを提示する．また，この拡張された Gauss-Bonnet 型公式を用いて，具体的な応用例をいくつか示すことで，特異点を持つ曲面の幾何学やトポロジーを新たな視点から体系的に理解するための理論的基盤を提供する．

2 次元多様体から 3 次元 Riemann 多様体への滑らかな写像に沿って単位法線ベクトル場が存在する場合，この写像をフロンタルと呼ぶ．また，単位法線ベクトル場が多様体間の写像としてはめ込みである場合，この写像は波面と呼ばれる．特に，正則曲面はその定義から波面の一種であり，フロンタルや波面は正則曲面の一般化として位置づけられる．これらの研究の中で，Langevin-Levitt-Rosenberg (1995) および Kossowski (2002) は，特異点としてカスプ辺とツバメの尾のみを許容する閉波面に対して，2 種類の Gauss-Bonnet 型公式を導出した．この両公式はいずれも波面の定義域に関する情報に基づいて記述されており，波面の内在的性質を捉える新たな枠組みの必要性が認識されていた．

この課題に対して，Saji-Umehara-Yamada (2009) は波面を内在的に定式化するための新たな構造として連接接束を導入した．連接接束は，Riemann 多様体上の接束と極限接束（波面の各点における単位法線ベクトルの直交平面全体）を統一的に扱うものであり，波面の幾何学的性質を記述する上で重要な役割を果たす．また，Saji-Umehara-Yamada (2008) は，束準同型の特異点（ファイバー間の線形写像が線形同型でない点）として A_2 特異点とピークのみを許容する連接接束に対する Gauss-Bonnet 型公式を導出した．ここで，連接接束がカスプ辺とツバメの尾のみを特異点として許容する波面から構成される場合，カスプ辺は A_2 特異点と対応し，ツバメの尾はピークと対応する．この結果から，Saji-Umehara-Yamada による Gauss-Bonnet 型公式は，Langevin-Levitt-Rosenberg および Kossowski による公式の一般化であると位置づけられる．

その後，Saji-Umehara-Yamada による Gauss-Bonnet 型公式は，Domitrz-Zwierzyński (2020) によって境界付き 2 次元多様体上の連接接束にも適用可能な形で一般化された．

連接接束は，フロンタル・波面のみならず，2 次元多様体間の滑らかな写像からも構成することができる．この性質を活用し，Saji-Umehara-Yamada (2012) は，Saji-Umehara-Yamada (2008) による Gauss-Bonnet 型公式をフロンタルや波面，さらには 2 次元多様体間の滑らかな写像に応

用する方法を示した．特に，2 次元多様体間の滑らかな写像への応用として，写像の特異点集合の回転数と Euler 標数を関係付ける Levine（1966）の公式，および写像度，Euler 標数，カスプ特異点の個数を関係付ける Quine（1978）の公式を，Gauss-Bonnet 型公式を用いて簡潔に導出している．

本論文の第 1 の主結果として，Domitrz-Zwierzyński（2020）による Gauss-Bonnet 型公式を活用し，Levine の公式および Quine の公式を境界付きの場合に一般化した新たな公式を提示する．この一般化により，2 次元多様体間の滑らかな写像における特異点とトポロジー的性質の関連をさらに深く理解する枠組みが提供される．

一方，Saji-Umehara-Yamada（2012）は，フロンタルバンドルを導入することで，Gauss-Bonnet 型公式をフロンタルに適用するための新たな枠組みを構築した．フロンタルバンドルとは，フロンタルの一般化として考えられる構造であり，1 つの多様体上に定義された 2 種類の連接接束を，適切な整合条件のもとで組み合わせることで得られる．この枠組みに基づき，フロンタルバンドルに対する 4 種類の Gauss-Bonnet 型公式が自然に導かれる．さらに，これらの公式を組み合わせることで，Saji-Umehara-Yamada は追加の 4 種類の公式を導出している．その応用例として，Bleecker-Wilson（1978）による，正則曲面の Gauss 写像におけるカスプ特異点の個数と，Gauss 曲率が負となる領域の Euler 標数を関係付ける公式を値域が定曲率空間である場合に一般化することに成功している．

本論文の第 2 の主結果として，Domitrz-Zwierzyński（2020）による Gauss-Bonnet 型公式を活用し，境界付き多様体上のフロンタルバンドルに対する新たな Gauss-Bonnet 型公式を導出した．さらに，これらの公式を組み合わせることで，追加の 4 種類の公式を提示している．特に，フロンタルバンドルの一方の連接接束の束準同型が特異点を持たない場合や，多様体が境界を持たない場合などの条件に制限した場合の結果も得られており，これらの公式は Bleecker-Wilson の公式や Saji-Umehara-Yamada の公式を，A_2 特異点やピークのみを許容するフロンタルおよび境界付きフロンタルの場合にまで一般化するものである．

また，Saji-Umehara-Yamada（2012）は，波面の特異点集合の近傍で外在的曲率（主曲率の積）が有界である場合の応用も示している．応用の 1 つとして，閉波面の特異点集合の近傍で外在的曲率が有界かつ負である場合，定義域の Euler 標数が零になることを証明している．本論文では，これらの結果をさらに発展させ，境界付き波面の場合にまで一般化した新たな公式を提示している．

フロンタルではない特異点を持つ曲面の例として，交叉帽子を持つ曲面が挙げられる．交叉帽子では，曲面の単位法線ベクトル場を特異点にまで滑らかに拡張することができないため，この特異点を持つ曲面はフロンタルとして扱うことができない．一方で，交叉帽子はフロンタルではない曲面の特異点としてジェネリックなものであり，その幾何学的性質は活発に研究されている．例えば，Kuiper（1975）は，交叉帽子を特異点として許容する閉曲面に対する Gauss-Bonnet 型公式を導出した．また，Hasegawa-Honda-Naokawa-Umehara-Yamada（2014）は，West（1995）および Fukui-Hasegawa（2012）による交叉帽子の標準形に基づいて研究を行い，誘導計量だけで記述される不変量を発見している．この成果は，交叉帽子の内在的な定式化への期待を高めるものであった．

このような背景を踏まえ，Hasegawa-Honda-Naokawa-Saji-Umehara-Yamada（2015）は，交叉帽子の内在的な定式化として内在的交叉帽子を提案した．これは，半正定値計量の特異点（半正定値計量が退化する点）として交叉帽子を捉えるものである．さらに，Kuiper による Gauss-Bonnet 型公式を，内在的交叉帽子のみを特異点として許容する半正定値計量が与えられた 2 次元閉多様体に対して一般化している．

本論文の主結果として，内在的交叉帽子を通過する正則曲線の測地的曲率測度が有界であることを証明した．この結果を基に，Hasegawa-Honda-Naokawa-Saji-Umehara-Yamada による Gauss-Bonnet 型公式を境界付き多様体に一般化する新たな公式を導出している．この成果は，交叉帽子を持つ曲面の幾何学的性質をより深く理解するための理論的基盤を提供するとともに，境界付き多様体における特異点の理論を大きく前進させるものである．