



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Immersion associated with links of complex surface singularities and their topology
Author(s)	田邊, 真郷
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第16578号
Issue Date	2025-09-25
DOI	https://doi.org/10.14943/doctoral.k16578
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/98188
Type	doctoral thesis
File Information	Masato_Tanabe_abstract.pdf, 論文内容の要旨 https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/



学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士 (理 学) 氏 名 田 邊 真 郷

学 位 論 文 題 名

Immersions associated with links of complex surface singularities and their topology

(複素曲面特異点リンクにまつわるはめ込みとそのトポロジー)

複素 3 次元空間内に複素曲面の孤立特異点を与えられると、その特異点を中心とする半径の小さい 5 次元球面（またはここから 1 点を除いて得られる 5 次元空間）内に、リンクと呼ばれる実 3 次元閉多様体および Milnor ファイバーと呼ばれる境界付きコンパクト 4 次元多様体が定まる。リンクや Milnor ファイバーの研究は、1928 年の Brauner による業績に端を発し、その後 Brieskorn, Milnor, Némethi らをはじめとする多くの研究者たちによって、トポロジー、組合せ論、接触幾何、シンプレクティック幾何、複素幾何といった多様な観点から展開されてきた。

一方、多様体のはめ込みも、1936 年の Whitney による研究から続く長い歴史を持つ。なかでも、はめ込みの正則ホモトピーによる分類問題は、1950 年代に確立された Smale-Hirsch 理論によってホモトピー論へと帰着された。その結果として特に、球面の Euclid 空間へのはめ込みに対しては Smale 不変量と呼ばれる完全不変量が知られている。このような代数的枠組みの確立により、不変量の幾何学的解釈や、非自明な不変量を与えるはめ込みの構成といった研究も盛んになった。

本学位論文では、複素 3 次元空間内の複素曲面の孤立特異点から定まるリンクのトポロジーをはめ込みの観点から研究した。主結果は大きく二つに分けられる。

第一の結果は、リンクの 5 次元空間への包含写像のはめ込みとしての正則ホモトピー類を決定したことである。ここでいう正則ホモトピー類の決定とは、Wu [Wu64] が与えた 3 次元多様体の 5 次元空間へのはめ込みの分類に対する完全不変量の決定を意味する。この完全不変量は、Wu 不変量および Smale 型不変量という 2 つの不変量の組として表される。Wu の公式からはめ込みの幾何学的な情報を読み取ることは困難であったが、Saeki-Szűcs-Takase [SST02] により、Smale 型不変量に対する幾何学的解釈が与えられた。これを用いると、包含写像の Smale 型不変量は Milnor ファイバーの符号数から決定されることが分かる。しかし、Wu 不変量に関しては幾何学的解釈の蓄積が少なく、さらに不変量の値がはめ込まれる 3 次元多様体の平行化（接束の自明化）の選び方によって変化してしまうという技術的困難が存在した。

そこで本研究では、リンク上に定まる標準的な接触構造に関して、件の包含写像が接触埋め込みであることに着目した。そして、Wu 不変量が持つ概接触幾何的な性質を明らかにすると共に、リンク上の接触構造に付随する平行化について、包含写像の Wu 不変量が消滅することを証明した。その結果、リンクの包含写像の正則ホモトピー類は、特異点に付随する Milnor ファイバーの符号数のみによって決定されることが明らかとなった。

応用として、3 次元多様体としての微分同相型は同一であるようなリンクの組であって、それらの包含写像が正則ホモトピックでない例を、Brieskorn 特異点を用いて与えた。

第二の結果は、単純特異点のリンクに付随するはめ込みに関する、ある問題の解決である。単純特異点は、Arnol'd による関数の特異点の分類 [AGV85] において最も基本的な特異点のクラスである。単純特異点は A 型・D 型・E 型という 3 つの系列を持ち、これらは正多面体や単純 Lie 環といった数学の重要なトピックと深く関係している。このような背景を反映して、単純特異点のリンクは 3 次元球面への $SU(2)$ の有限部分群の作用による商構造や、対応する Dynkin 図形に付随した鉛管構造を持つことが知られている。

このようなリンクの幾何学的構造は、Némethi–Pintér および Kinjo によって、3 次元球面の Euclid 空間への非自明なはめ込みを構成するために利用された[NP15, Kin15]。Némethi–Pintér は、リンクの包含写像を 3 次元球面からリンクへの商写像によって引き戻すことで、3 次元球面から 5 次元空間へのはめ込みを構成し、その Smale 不変量を A 型・D 型・E 型すべての場合に対して求めた。一方 Kinjo は、リンクの鉛管構造を利用することでリンクの 4 次元空間へのはめ込みを構成し、それを商写像で引き戻すことで 3 次元球面の 4 次元空間へのはめ込みを構成した。Kinjo は、その Smale 不変量を A 型・D 型の場合にのみ求めた。彼らのはめ込みの構成方法・計算手法はいずれも異なるものであったが、Kinjo のはめ込みを 5 次元空間へ押し出すと、A 型・D 型の場合には両者のはめ込みの Smale 不変量が一致することが[NP15, Kin15]内で指摘されていた。したがって、彼らのはめ込みは互いに正則ホモトピックである。しかしながら、その幾何学的な解釈は知られておらず、E 型に対する Kinjo のはめ込みの Smale 不変量も与えられていなかった。

本研究では、彼らのはめ込みが商写像によって引き戻される前の段階で既に正則ホモトピックであること、すなわち、リンクの 5 次元空間への包含写像自体が Kinjo のはめ込みに正則ホモトピックであることを明らかにした。正則ホモトピック性を得るには、Kinjo のはめ込み（を 5 次元空間に押し出したもの）の Wu 不変量および Smale 型不変量を計算し、リンクの包含写像のものと比較すればよい。ただし、Smale 型不変量の計算は Milnor ファイバーを利用して比較的容易に計算できるものの、Wu 不変量の計算のためには新たな観点が必要であった。

そこで本研究では、4 次元空間を複素 2 次元空間と見做したとき、Kinjo のはめ込みの複素接触がリンク上の標準接触構造に（概接触構造として）ホモトピックとなることを見出した。そして、Wu 不変量が持つ複素接触性に関する性質を明らかにし、接触構造に付随する平行化について Wu 不変量が消滅することを証明した。

さらに、この正則ホモトピック性の応用として、Kinjo のはめ込みの Smale 不変量を A 型・D 型・E 型すべての場合について決定した。この結果は、Kinjo による A 型・D 型の結果を新たな観点から再証明すると共に、これまで未知であった E 型の場合も含んだ計算手法を与えている。

【参考文献】

- [AGV85] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko: Singularities of Differentiable Maps I, Monograph in Math. 82, Birkhäuser, 1985.
- [Kin15] S. Kinjo: Immersions of 3-sphere into 4-space associated with Dynkin diagrams of types A and D, Bull. Lond. Math. Soc. 47(4) (2015) 651-662.
- [NP15] A. Némethi and G. Pintér: Immersions associated with holomorphic germs, Comment. Math. Helv. 90(3) (2015), 513-541.
- [SST02] O. Saeki, A. Szűcs, and M. Takase: Regular homotopy classes of immersions of 3-manifolds into 5-space, Manuscripta Math. 108(1) (2002), 13-32.
- [Wu64] W. T. Wu: On the immersion of C^∞ -3-manifolds in a Euclidean space, Sci. Sinica 13 (1964), 335-336.