



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	On progress of Miyanishi conjecture
Author(s)	浅野, 拓己
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第16739号
Issue Date	2026-03-25
DOI	https://doi.org/10.14943/doctoral.k16739
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/99584
Type	doctoral thesis
File Information	Takumi_Asano_abstract.pdf, 論文内容の要旨 https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/



学 位 論 文 内 容 の 要 旨

博士の専攻分野の名称 博士 (理 学) 氏 名 浅 野 拓 己

学 位 論 文 題 名

On progress of Miyanishi conjecture
(宮西予想の進展について)

申請者は、代数多様体の自己射がどのような条件下で自己同型射になるかを研究している。すでに知られている結果のうち、最も驚くべきものの1つとして Ax-Grothendieck の定理がある。この定理には様々なバリエーションがあるが、ここでは、代数多様体の自己射は単射ならば全単射である、と述べるのが最も簡明であろう。標数 0 の代数閉体上では、全単射な自己射は自動的に同型射になるので、Ax-Grothendieck の定理は確かに代数多様体の自己射が同型射になる条件を与えている。宮西正宜は、標数 0 の代数閉体上の代数多様体の自己射は余次元 2 以上の閉集合の外で単射ならば同型射であろう、と予想した。Nilkantha Das に従って、これを宮西予想と呼ぶこととする。本学位論文は、宮西予想についていくつかの知られている結果を紹介するとともに、申請者が明らかにした結果を述べるものである。既知の結果の例として、Shulim Kaliman はアフィンまたは完備な代数多様体に対して、Das は滑らかな代数多様体に対して宮西予想が正しいことを示した。Das はその他にもいくつかの結果を示しているが、本学位論文に関係するものを紹介すると、宮西予想の条件をみたす自己射が、特定の条件下で代数多様体の非特異点全体の集合の自己同型射を誘導することを Indranil Biswas と共同で示した。申請者はこの結果を用いて、特定の条件下で 3 次元代数多様体に対して宮西予想が成り立つことを示した。また、宮西予想の条件をみたす自己射が、特定の条件下で代数多様体の特異点集合の既約成分の余次元を保った置換を与えることを示した。

次に、宮西予想に対する申請者独自の手法を紹介する。申請者は双有理幾何学の手法、特に射影代数多様体の交叉理論と極小モデルプログラムを用いて、 $\mathbb{Q}$ 分解的な正規射影代数多様体の開集合である準射影代数多様体に対する宮西予想を考察した。申請者の知る限り、宮西予想に対してこのような手法は誰も行っていないようである。宮西予想の条件をみたす自己射が同型射でないと仮定すると、この自己射によって一点に収縮される曲線が存在する。申請者はまず、この曲線の射影代数多様体における閉包と標準類との交点数が 0 になる十分条件と非負になる十分条件を述べた。この段落では、特に触れなければこの条件のうち適切な方を仮定しているものとする。すると、標準類が豊富または反豊富である射影代数多様体、特に Fano 代数多様体や標準モデルの開集合として得られる準射影代数多様体に対して宮西予想が成り立つことが示される。さらに、標準類との交点数が 0 または非負という性質は因子収縮に沿って保たれることも示した。これにより、有限回の因子収縮によって、標準類が豊富または反豊富な射影代数多様体、または双有理自己同型群と自己同型群が一致する射影代数多様体得られるような射影代数多様体の開集合である準射影代数多様体に対して宮西予想が成り立つことが示される。実は、標準モデルと双有理同値でさえあれば、他の仮定なしに宮西予想が成り立つことが示せる。また、Fano 代数多様体の余次元 2 以上の閉集合を除いて得られる準射影代数多様体に対しても、上記の仮定なしに宮西予想が証明できる。

また、極小モデルの開集合である準射影代数多様体を考え、宮西予想の条件をみたす自己射を極小モデルの双有理自己写像とみなそう。極小モデルの双有理自己写像はフロップの有限列に分解される、という川又雄二郎の結果を用いると、この場合は前段落の条件がなくても、自己射によって一点に収縮される曲線の極小モデルにおける閉包と標準類との交点数は 0 になることがわかる。また、同結果により標準類との交点数が 0 である曲線（正確にはこれと自己射の定義域と

の共通部分)は自己射で収縮されないという矛盾を得る。したがって、極小モデルの開集合である準射影代数多様体に対して宮西予想が成り立つことがわかる。

さて、極小モデルプログラムで得られる代数多様体は大きく分けて3種類あり、極小モデル、標準モデル、森ファイバー空間である。交叉理論をうまく用いるために、因子収縮のみが現れる極小モデルプログラムを考えよう。有限回の因子収縮で標準モデルが得られる場合は既に述べた通り宮西予想が成立する。有限回の因子収縮で極小モデルが得られる場合、前々段落の仮定の下で、標準類との交点数が非負である曲線が降下していくことはわかるが、極小モデルの開集合に対する結果を応用するためにはこれだけでは十分ではない。実際、元の自己射から誘導される極小モデルの双有理自己写像が、その曲線のほとんどの点で定義されている必要がある。その条件を考察するため、申請者は1サイクルと因子の双有理写像による押し出しと引き戻しを定義した。極小モデルプログラムの各ステップは、標準類との交点数が負である曲線の数値的同値類が生成する端射線に対応している。この端射線が双有理自己写像による押し出しで保たれる場合、因子収縮後の代数多様体に誘導される双有理自己写像は、元の双有理自己写像の定義域の因子収縮による像の上で定義されることが剛性補題から従う。したがって、端射線が双有理自己写像による押し出しで保たれる条件を考えたい。藤本圭男の結果によれば、標準特異点を持つ小平次元が非負の射影代数多様体は、高々有限個の因子収縮を持つ。よって、因子収縮に対応するすべての端射線に対してその押し出しが再び端的であれば、双有理自己写像による押し出しが因子収縮を与える端射線全体の置換を与えていることがわかる。申請者は、宮西予想の証明には自己射をその有限回の合成に取り換えても問題ないことを示したので、この置換は恒等置換であるとしてよい。すると、因子収縮を与える端射線が双有理自己写像による押し出しで保たれることがわかる。極小モデルプログラムで極小モデルが得られる射影代数多様体の小平次元は非負なので、標準特異点を持つことを仮定すればこの議論を適用することができる。これにより、有限回の因子収縮によって極小モデルが得られる場合についても、宮西予想が成り立つ1つの条件を与えたと言える。また、ファイバー型の端射線に対しても藤本の結果の類似がある(藤本、中山昇による)。これにより、森ファイバー空間に対してはファイバー収縮後の代数多様体に自己射が誘導されることが示される。

以上のように、双有理幾何学を用いた申請者独自の手法は、宮西予想が成り立つ様々な条件を与えるとともに、今後の研究の余地をも与えている。例えば、2段落目で触れた条件や、因子収縮を与える端射線の双有理自己写像による押し出しがすべて端的である、という条件がどれほど成り立つのか、特に因子収縮によって保たれるのか、ということには研究の価値がある。また、森ファイバー空間に対してファイバー収縮後の代数多様体に自己射が誘導されることを示したが、ファイバー収縮後の代数多様体は元の代数多様体より低次元なので、次元に関する帰納法を用いるということも考えられる。さらに、Biswas と Das の結果とその応用を双有理幾何学的手法と組み合わせることで新たな結果が得られることも期待される。

このように、本学位論文は未解決の宮西予想に対して、既知の結果を応用するとともに新たな観点から考察をすることで、宮西予想が成り立つ様々な条件を与えるものであることと同時に、宮西予想の新たな進展を期待させるものである。