



Title	A multi-microlocal study of strongly regular subanalytic sheaves
Author(s)	坂本, 龍亮
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第16741号
Issue Date	2026-03-25
DOI	<a href="https://doi.org/10.14943/doctoral.k16741">https://doi.org/10.14943/doctoral.k16741</a>
Doc URL	<a href="https://hdl.handle.net/2115/99586">https://hdl.handle.net/2115/99586</a>
Type	doctoral thesis
File Information	Ryosuke_Sakamoto_abstract.pdf, 論文内容の要旨 <a href="https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/">https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/</a>



# 学位論文内容の要旨

博士の専攻分野の名称 博士（理 学） 氏 名 坂本 龍亮

## 学位論文題名

A multi-microlocal study of strongly regular subanalytic sheaves  
(強正則な subanalytic 層の多重超局所的研究)

漸近展開可能関数や緩増加超関数は、重要な解析的对象であるにもかかわらず、古典的な意味では層をなさない。そのため、Kashiwara-Schapira [1]による従来の手法を直接適用することはできない。この問題に対処するために、ind 層や subanalytic 層といった新たな概念が導入され、その研究が進められてきた[2, 3]。Honda-Prelli-Yamazaki [4]によって、特定の部分多様体の族に沿った subanalytic 層の多重超局所化理論が構築され、従来の特殊化および超局所化の理論[5, 6]を統一的に扱う枠組みが与えられた。この枠組みにより、真島の2強漸近展開可能関数の層のような、増大度条件付きの多重超局所的对象を関手的に扱うことが可能となっている（[7, 8]を参照）。本論文では、この理論をさらに発展させ、より高度な課題に取り組むことを目的とする。

本論文は二つの章から構成される。それぞれの概要を以下に述べる。

第1章では、subanalytic 層の多重超局所解析における基本的な道具立ての整備を行う。一般の多重超局所状況において多重超局所化された Hom 関手の茎の公式を導き、さらに多重超局所化の枠組みで佐藤の三角形を確立する。

第1章の構成は以下の通りである。

第1節では、層の導来圏の知識を前提とし、subanalytic site 上の層および多重超局所解析に関する基本的概念と定義を[3], [4]に基づき整理する。また、文献には明記されていないが既存の結果から直ちに従う補足事項についても述べる。これらは後続の議論の基礎となる。

第2節では、subanalytic 層に対する一般の多重超局所化の場合において、Hom 関手の多重超局所化に対する茎の公式を導く。subanalytic 層の場合の困難の一つは、超局所的な台の切り落としを実現する関手が存在しない点である。本論文では、この問題を回避するため、Hom 関手の第1引数を構成可能層に固定する。続いて、特定の多重超局所状況における具体的な公式を得るための補題を準備し、最後にいくつかの具体例を計算する。古典的理論でもよく知られるように、茎の公式は超局所解析における中心的な道具であり、本稿で得られる公式は今後の発展において重要な役割を果たすと考えられる。

第3節では、多重超局所解析の枠組みで佐藤の三角形を確立する。まず subanalytic 層における内田の三角形を用意し、これを多重超局所化する必要がある。しかし、固有順像関手は一般に conic subanalytic 層を conic subanalytic 層に送らないため、この困難を克服する必要がある。本論文では、いくつかの補題を証明することでこれを解決し、最終的に多重超局所化された超局所 Hom 関手に対する佐藤の三角形を導く。最後に簡単な多重超局所化の

例を示し、理論の具体例を与える。内田の三角形および佐藤の三角形は、超局所解析における基本的道具であり、超局所的 Cauchy 問題や境界値問題などに使われる。本研究により、これらを多重超局所化の枠組みに拡張することで、より一般的な問題に取り組む可能性が開かれる。以上が第1章の内容である。

次に、第2章の背景と概要について説明する。Ind 層のマイクロサポートの概念は[9]で定義され、その関手的性質は[10]で研究された。Subanalytic 層の超局所化のサポートの評価は [4]において[9]のマイクロサポートを用いることで得られている。検討の結果、多重超局所化のサポート（あるいはマイクロサポート）を評価するためには、より強い超局所的条件を必要とすることが明らかとなった。本章では、この問題を解決するための新たな条件を導入し、多重超局所化のサポートおよびマイクロサポートの評価を与える。

一つの解決策は、[9]における正則性よりも強い正則性を導入することである。Martins [10]は、[9]の意味での ind 層の正則性が、Kashiwara–Oshima [11]による involutive な部分多様体に沿った正則 D-加群と良い対応を持つことを示している。本論文では、この正則性を強めても、正則 D-加群との対応が依然として保持されることを見いだした。この事実を用いて、真島の強漸近展開可能解を含む多重超局所的解析対象の性質を導く。正則 D-加群に対する緩増加超関数解および Whitney 解については、Andronikof の temperate Hom や Colin の Whitney テンソル積を用いた研究が多くの著者により行われている [12, 13]。これらの評価を用いることで、逆像と超局所化に関する定理を証明する。

最終的に、正則 D-加群に対して、緩増加および Whitney 多重マイクロ関数を係数とする割り算定理を得る。応用として、強漸近展開可能解の解層に対する Bochner の管状領域定理の多重超局所化版を証明する。これらは [14, 15, 16] の結果の多重超局所的枠組みによる拡張に相当する。

第2章の構成は以下の通りである。

第1節では、強正則性 (strong regularity) の概念を導入し、その基本的性質を研究する。強正則性が部分的 Abel 性を持つことを示す。また、[11]の意味で正則な D-加群に対する種々の解が強正則性を満たすことを証明する。

第2節では、多重超局所化のマイクロサポートの評価公式を得る。まずサポートの評価を与え、その帰結をいくつか述べる。続いて[9]の手法を応用し、マイクロサポートの評価を証明する。応用として、非特性条件の下での subanalytic 層の逆像と Verdier 双対の超局所的同型を示す。

第3節では、部分多様体の族を正規交差型の場合に限定して、逆像と超局所化に関する定理を証明する。これは [1, Theorem 6.7.1] の多重超局所化版に相当する。多重超局所化の多重斉次構造が本質的な役割を果たす。まず古典的層の場合に定理を示し、次に前節の結果を用いて強正則な subanalytic 層の場合を証明する。

第4節では、多重超局所解析の D-加群への応用を考える。第1章で得た三角形を用いて、包含的部分束に沿って正則な D-加群の、真島の強漸近展開可能関数解を含む多重超局所的対象に対する初期値問題を証明する。最後に、正則 D-加群に対して、緩増加および Whitney 多重マイクロ関数を係数とする割り算定理を証明し、この割り算定理を応用して多重超局所版 Bochner 管状領域定理を得る。

参考文献

- [1] M. Kashiwara and P. Schapira, *Sheaves on Manifolds*, Grundlehren Math. Wiss. 292, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [2] M. Kashiwara and P. Schapira, *Ind-sheaves*, Astérisque 271 (2001), 1–136.
- [3] L. Prelli, *Microlocalization of Subanalytic Sheaves*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) 135 (2013), vi+91 pp.
- [4] N. Honda, L. Prelli and S. Yamazaki, *Multi-microlocalization and Microsupport*, Bull. Soc. Math. France 144 (2016), no. 3, 569–611.
- [5] P. Schapira and K. Takeuchi, *Déformation binormale et bispécialisation*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 319 (1994), no. 7, 707–712.
- [6] J.-M. Delort, *Microlocalisation simultanée et problème de Cauchy ramifié*, Compos. Math. 100 (1996), 171–204.
- [7] H. Majima, *Asymptotic Analysis for Integrable Connections with Irregular Singular Points*, Lecture Notes in Mathematics 1075, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1984.
- [8] N. Honda and L. Prelli, *Multi-specialization and Multi-asymptotic Expansions*, Adv. Math. 232 (2013), 432–498.
- [9] M. Kashiwara and P. Schapira, *Microlocal Study of Ind-sheaves. I. Microsupport and Regularity*, Astérisque 284 (2003), 143–164.
- [10] A. R. Martins, *Functorial Properties of the Microsupport and Regularity for Ind-sheaves*, Math. Z. 260 (2008), no. 3, 541–556.
- [11] M. Kashiwara and T. Oshima, *Systems of Differential Equations with Regular Singularities and their Boundary Value Problems*, Ann. Math. 106 (1977), 145–200.
- [12] M. Kashiwara, P. Schapira and M. T. Fernandes, *Microsupport and Cauchy Problem for Temperate Solutions of Regular Modules*, Port. Math. (N.S.) 58 (2001), no. 4, 485–504.
- [13] S. Yamazaki, *Microsupport of Whitney Solutions to Systems with Regular Singularities and its Applications*, UTMS 2003-7 (2003).
- [14] M. Uchida, *A Generalization of Bochner's Tube Theorem in Elliptic Boundary Value Problems*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 31 (1995), no. 6, 1065–1077.
- [15] T. Aoki and S. Tajima, *On a Generalization of Bochner's Tube Theorem for Generic CR-submanifolds*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 63 (1987), no. 8, 302–303.
- [16] E. Andronikof and N. Tose, *Elliptic Boundary Value Problems in the Space of Distributions*, in: RIMS Kôkyûroku 845 (1993), 13–18.