



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Lower gradient estimates for viscosity solutions to first-order Hamilton-Jacobi equations
Author(s)	廣瀬, 和也
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第16742号
Issue Date	2026-03-25
DOI	https://doi.org/10.14943/doctoral.k16742
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/99587
Type	doctoral thesis
File Information	Kazuya_Hirose_abstract.pdf, 論文内容の要旨 https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/



学位論文内容の要旨

博士の専攻分野の名称 博士（理 学） 氏 名 廣瀬 和也

学位論文題名

Lower gradient estimates for viscosity solutions to first-order Hamilton-Jacobi equations
(1 階ハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解に対する下からの勾配評価)

ハミルトン・ヤコビ方程式は、古典力学のハミルトン系をはじめ、最適制御、確率過程、画像処理、界面発展など、自然科学および工学の幅広い分野に現れる基本的な偏微分方程式である。特に、時間変数と空間変数を含む非線形の 1 階微分方程式として、波面の伝播や界面運動の記述において中心的な役割を果たしている。しかし、この方程式は一般に滑らかな（微分可能な）解をもたず、時間の経過とともに「特異点」や「折れ曲がり」が生じることが多い。そのような場合にも意味のある解を定義するために導入されたのが粘性解の概念であり、1980 年代以降にその理論的基礎が整備された。粘性解の理論は、古典的な意味での解の存在が保証されない場合でも、一意かつ安定な「弱い意味での解」を定義できる点で画期的であり、現在では非線形偏微分方程式理論の標準的な枠組みとして確立されている。

粘性解の理論では、これまで主に上からの勾配評価が研究されてきた。これは、解の正則性を保証したり、数値計算における安定性を議論したりする上で重要であり、代表的な方法として、Bernstein 型のエネルギー評価法や Ishii-Lions 法などが知られている。一方で、下からの勾配評価、すなわち解が平坦にならないことを保証する結果はほとんど知られていない。実際、ハミルトニアンが非凸の場合、解の勾配は瞬時にゼロになることがあり、その結果、界面が太る現象が生じる。この現象は、幾何学的界面発展方程式や画像処理の等高面法などにおいて深刻な問題を引き起こす。したがって、凸構造をもつハミルトニアンのもとで、勾配がどの程度まで小さくなり得るかを定量的に評価することは、理論的にも応用的にも極めて重要な課題である。

本論文の目的は、凸かつリプシッツ連続なハミルトニアンをもつハミルトン・ヤコビ方程式に対して、粘性解の空間勾配の大きさについて下からの定量的評価を与えることである。具体的には、初期状態の勾配の大きさを与えたとき、時間発展に伴い勾配がどの程度まで減衰し得るか、またどの領域で勾配が保持されるのかを明確にする。本論文では、この課題に対して次の二つの異なる手法を用いた。

- (1) 偏微分方程式に基づく解析的方法
- (2) 変分原理および力学系に基づく方法

第一の手法は、Ley [1] の研究に基づき、Barron-Jensen 解と呼ばれる、凸ハミルトニアンに対して粘性解と同値な概念を用いるものである。この手法では、粘性解を下から近似する関数である下限量み込みによって平滑化し、局所比較原理を用いて勾配の減衰速度を評価する。その結果、勾配の大きさが時間とともに指数的にしか減衰しないことが示すことができた。また、本研究で得られた評価式は、既存の評価式よりも広い領域で適用可能であり、より大きな下限を与えることに成功した。これは、先行研究で利用されていた手法を厳密に議論したことに起因する。

第二の手法では、力学的な観点からの解析を行った。ここでは、浜向-廣瀬 [3] の先行研究を基礎とし、ヘルグロッツの変分原理に基づく拡張された力学的枠組みを用いる。これは、エネルギー保存則をもたない場合にも適用できる拡張ハミルトン系であり、接触ハミルトン系として知られている。この力学系に沿って初期勾配の発展を追跡することにより、粘性解の勾配の下限を直接的に評価することが可能となる。その結果、偏微分方程式に基づく手法よりも一般に鋭い下限が得られることを示した。

さらに、ハミルトニアンが勾配に関して正の斉次性をもつ場合には、解の等高面集合に関して興味深い幾何的構造が現れることを明らかにした。具体的には、ある等高面集合上の勾配は、その等高面に近い初期勾配だけに依存することを示した。この性質は、界面発展を数値的に扱う等

高面法において、界面の勾配を保持できる理由を数学的に説明するものである。加えて、輸送方程式やアイコナル方程式など具体的な例に対して、本研究で得た評価式が最適であることを確認した。

本論文で得られた結果は、[2]と[3]に基づいている。

参考文献

[1] O. Ley, Lower-bound gradient estimates for first-order Hamilton--Jacobi equations and applications to the regularity of propagating fronts, *Adv. Differential Equations* 6 (2001), 547--576.

[2] K. Hirose, Lower gradient estimates for viscosity solutions to first-order Hamilton--Jacobi equations depending on the unknown function, *Nonlinear Differ. Equ. Appl.* 32, Paper No. 27 (2025), 1--36.

[3] N. Hamamuki, K. Hirose, A dynamical approach to lower gradient estimates for viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *SIAM J. Math. Anal.* 55(4) (2023), 3169--3204.