



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Stability of Metric Viscosity Solutions
Author(s)	牧田, 慎平
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(理学)
Dissertation Number	甲第16743号
Issue Date	2026-03-25
DOI	https://doi.org/10.14943/doctoral.k16743
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/99588
Type	doctoral thesis
File Information	Shimpei_Makida_abstract.pdf, 論文内容の要旨 https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/



学位論文内容の要旨

博士の専攻分野の名称 博士（理 学） 氏 名 牧田 慎平

学位論文題名

Stability of Metric Viscosity Solutions
(距離粘性解の安定性に関して)

ハミルトン・ヤコビ方程式とは、一階の非線形偏微分方程式であり、光学や力学、表面科学などに表れる重要な方程式である。その数学的な解析の歴史は古く、ハミルトニアンが滑らかな場合、特性曲線法によって、局所的に滑らかな解が存在することは知られていた。しかし一般的には特性曲線が交差してしまうことがあるため、大域的な古典解の存在は必ずしも保証されない。克蘭ダーとリオンスは、粘性解という弱解の概念を導入することで、ハミルトン・ヤコビ方程式の大域解の存在・一意性を、粘性解のレベルで明らかにした。その後粘性解の概念は楕円型・放物型の偏微分方程式にも導入され、粘性解の妥当性や解挙動が多くの研究者によって研究されている。

近年では、非ユークリッド空間における非線形偏微分方程式に対しても、粘性解理論が研究されている。実際、克蘭ダーとリオンスは、1985年に発表された一連の論文において、ヒルベルト空間におけるハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解の存在・一意性を証明した。さらに、線形構造を前提としない距離空間上のハミルトン・ヤコビ方程式に対しても粘性解の概念が、[Giga Hamamuki Nakayasu 2015], [Ambrosio Feng 2014], [Gangbo Świąch 2014, 2015]等によってそれぞれ導入されている。

特に[Gangbo Świąch 2014, 2015]に着目する。これらの論文で導入されたスロープを用いたハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解のことを距離粘性解と呼ぶ。スロープとはユークリッド空間における関数の勾配のノルムに対応する量であり、一般の距離空間において定義可能である。[Gangbo Świąch 2014]では、距離空間における、ハミルトニアンが未知関数の微分のノルムに依存するタイプのハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解が導入された。その後[Gangbo Świąch 2015]では、より一般的なハミルトニアンを持つハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解に対する比較定理や最適制御による距離粘性解の存在が示された。さらに[Nakayasu Namba 2018]では、固定された距離空間上のハミルトン・ヤコビ方程式に対し、距離粘性解の緩和半極限が再び距離粘性解となること(安定性)が示された。

本学位論文は、距離粘性解の安定性に関するものである。ただし、ここでいう安定性は、方程式を考える領域(空間)がパラメータに依存する場合に、考えている方程式の解が極限方程式の解に収束することを指している。

このような安定性は、領域摂動問題と複雑領域上の偏微分方程式の解の構成問題に現れる。[Achdou Tchou 2015]では、Y字路を一樣に太らせた二次元領域が退化してY字路になる時に、二次元領域上のハミルトン・ヤコビ方程式の粘性解の安定性が示されている。[Camilli Capitanelli Marchi 2016]では、シェルピンスキ・ガスケット上のアイコナール方程式の粘性解を、シェルピンスキ・ガスケットのネットワーク近似を通して、グラフ上のアイコナール方程式の解の極限として構成した。さらに、[Makida 2023 Preprint]では、あるユークリッド空間において、増大するネットワークがハウスドルフ収束する時に、ネットワーク上のハミルトン・ヤコビ方程式の距離粘性解の安定性を示した。

本学位論文はパート I とパート II から構成されている。パート I は、中安淳先生との共同研究([1])に基づく。パート II は単著論文([2])の内容に基づく。

本学位論文の内容は、距離空間上のハミルトン・ヤコビ方程式に対して距離粘性解の安定性を、

ハウスドルフ／グロモフ・ハウスドルフ収束のもとで、体系的に確立するものである。主な結果は次のとおりである。

(1) 定常型ハミルトン・ヤコビ方程式の距離粘性解の安定性（ハウスドルフ収束）：
安定性の証明のために、距離粘性解の特徴付け（二乗距離関数型のテスト関数による同値性）を示す。そして、距離の一樣収束を仮定した上で、コンパクト距離空間列のハウスドルフ収束に対する、距離粘性解の緩和半極限が、極限空間の極限方程式の距離粘性解になることを示す。（パート I）

(2) 時間依存型および非コンパクトへの拡張：
時間依存型ハミルトン・ヤコビ方程式に対しても同様に距離粘性解の安定性を示す。さらに、非コンパクトな距離空間列に対して、エックランドの変分原理を用いて、定常型ハミルトン・ヤコビ方程式の距離粘性解の安定性を証明する。（パート I）

(3) 距離が一樣収束する距離空間列の具体例の考察：
プレフラクタルとシェルピンスキ・ガスケット、Y 字路を一樣に太らせた二次元領域と Y 字路や、格子点集合と二次元ユークリッド空間などで、安定性の定理の仮定である距離の一樣収束が満たされていることを示す。（パート I）

(4) 時間依存型ハミルトン・ヤコビ方程式の距離粘性解の安定性
（グロモフ・ハウスドルフ収束）：
イプシロン等長写像を用いた緩和半極限の定義を導入し、距離粘性解の特徴づけと組み合わせて時間依存型ハミルトン・ヤコビ方程式の距離粘性解の安定性の証明を与える。（パート II）

(5) カントロヴィッチ最大化問題の最大化要素のグロモフ・ハウスドルフ収束に対する安定性：
最大化要素をある時間依存型ハミルトン・ヤコビ方程式の距離粘性解として捉え、そのグロモフ・ハウスドルフ収束に関する安定性を導く。（パート II）

引用文献

[1]S. Makida, A. Nakayasu, Stability of metric viscosity solutions under Hausdorff convergence, preprint, 2023.

[2]S. Makida, On the Gromov–Hausdorff stability of metric viscosity solutions, accepted for publication in Proceedings of the American Mathematical Society, 2025.