



# HOKKAIDO UNIVERSITY

|                     |                                                                                                 |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Title               | 衝撃波はく離流れにおける航空機主翼フラッター現象の高忠実解析および安定化/不安定化メカニズムの解明                                               |
| Author(s)           | 三宅, 冬馬                                                                                          |
| Degree Grantor      | 北海道大学                                                                                           |
| Degree Name         | 博士(工学)                                                                                          |
| Dissertation Number | 甲第16839号                                                                                        |
| Issue Date          | 2026-03-25                                                                                      |
| DOI                 | <a href="https://doi.org/10.14943/doctoral.k16839">https://doi.org/10.14943/doctoral.k16839</a> |
| Doc URL             | <a href="https://hdl.handle.net/2115/99684">https://hdl.handle.net/2115/99684</a>               |
| Type                | doctoral thesis                                                                                 |
| File Information    | Toma_Miyake.pdf, 全文                                                                             |



# 衝撃波はく離流れにおける航空機主翼フラッター現象の 高忠実解析および安定化／不安定化メカニズムの解明

*High-Fidelity Simulation of Aircraft-Wing Flutter in Shock-Induced Separated Flows  
and Elucidation of Stabilization/Destabilization Mechanisms*

令和7年3月

北海道大学大学院工学院  
機械宇宙工学専攻

三宅冬馬  
Toma MIYAKE

# 目次

|          |                                |           |
|----------|--------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>緒論</b>                      | <b>1</b>  |
| 1.1      | はじめに                           | 1         |
| 1.2      | フラッター現象                        | 1         |
| 1.3      | 遷音速域におけるフラッター特性                | 2         |
| 1.4      | フラッター計算技術の現状                   | 3         |
| 1.5      | 衝撃波はく離によるフラッター特性の変化            | 5         |
| 1.5.1    | 対称翼における衝撃波はく離による安定化            | 5         |
| 1.5.2    | 超臨界翼におけるダブル遷音速ディップ             | 6         |
| 1.5.3    | 3次元低アスペクト比翼における高マッハ数域での急激な不安定性 | 7         |
| 1.6      | 研究目的                           | 8         |
| 1.7      | 本論文の構成                         | 9         |
| <b>2</b> | <b>数値計算手法</b>                  | <b>10</b> |
| 2.1      | 流体の支配方程式                       | 10        |
| 2.1.1    | Navier-Stokes方程式               | 10        |
| 2.1.2    | レイノルズ平均                        | 11        |
| 2.1.3    | 無次元化                           | 14        |
| 2.1.4    | 一般座標変換                         | 15        |
| 2.2      | 流体方程式の数値計算法                    | 18        |
| 2.2.1    | 支配方程式の離散化                      | 18        |
| 2.2.2    | 非粘性流束の計算法                      | 19        |
| 2.2.3    | MUSCL法による計算セル界面の値の高次精度補間       | 19        |
| 2.2.4    | 粘性流束の計算法                       | 21        |
| 2.2.5    | 時間積分法                          | 21        |
| 2.2.6    | 内部反復による時間精度の確保                 | 25        |
| 2.2.7    | 境界条件                           | 25        |
| 2.3      | 乱流モデル                          | 25        |
| 2.3.1    | Spalart-Allmarasモデル[48]        | 25        |
| 2.3.2    | 低レイノルズ補正[51]                   | 26        |
| 2.3.3    | 非線形渦粘性モデル                      | 26        |
| 2.3.4    | 乱流モデルの数値計算手法                   | 27        |
| 2.4      | 2自由度構造モデル                      | 27        |
| 2.4.1    | 支配方程式                          | 27        |
| 2.4.2    | 無次元化                           | 28        |
| 2.4.3    | 固有振動特性                         | 29        |
| 2.4.4    | 時間積分法                          | 30        |
| 2.5      | 連成手法                           | 31        |
| 2.6      | 格子の再生成                         | 31        |
| 2.7      | 流体-構造間での局所エネルギー交換              | 31        |
| 2.8      | 並列計算                           | 32        |
| 2.8.1    | 単体チューニング                       | 32        |

|          |                                                       |           |
|----------|-------------------------------------------------------|-----------|
| 2.8.2    | OpenMP/MPIハイブリッド並列化 . . . . .                         | 33        |
| <b>3</b> | <b>2次元対称翼型のフラッター特性</b>                                | <b>36</b> |
| 3.1      | 計算手法および計算条件 . . . . .                                 | 36        |
| 3.2      | 計算精度の検証 . . . . .                                     | 37        |
| 3.3      | 静的計算および強制振動翼計算による衝撃波振動の位相特性の調査 . . . . .              | 39        |
| 3.3.1    | 衝撃波運動の静的挙動 . . . . .                                  | 39        |
| 3.3.2    | 衝撃波運動の非定常挙動 . . . . .                                 | 39        |
| 3.4      | NACA64A010翼型のフラッター特性 . . . . .                        | 42        |
| 3.4.1    | NACA64A010翼型のフラッター境界 . . . . .                        | 43        |
| 3.5      | まとめ . . . . .                                         | 45        |
| <b>4</b> | <b>SC2-0610翼型のフラッター特性</b>                             | <b>46</b> |
| 4.1      | 計算手法および計算条件 . . . . .                                 | 46        |
| 4.2      | SC2-0610翼型のフラッター境界 . . . . .                          | 47        |
| 4.3      | 局所エネルギー収支の評価 . . . . .                                | 50        |
| 4.4      | 2ndディップでの衝撃波振動特性 . . . . .                            | 52        |
| 4.5      | SC2-0610翼型における特異な衝撃波振動 . . . . .                      | 56        |
| 4.6      | フラッター境界に対する超臨界翼型形状の影響 . . . . .                       | 57        |
| 4.7      | まとめ . . . . .                                         | 58        |
| <b>5</b> | <b>NACA0012ベンチマーク翼フラッター</b>                           | <b>59</b> |
| 5.1      | 計算手法および計算条件 . . . . .                                 | 59        |
| 5.2      | 対称境界条件でのフラッター境界 . . . . .                             | 61        |
| 5.3      | 翼根壁の影響 . . . . .                                      | 63        |
| 5.3.1    | $M_\infty \leq 0.85$ での流れ場の比較 . . . . .               | 63        |
| 5.3.2    | $M_\infty \geq 0.85$ での流れ場の比較 . . . . .               | 66        |
| 5.4      | 高マッハ数域での負の揚力傾斜について . . . . .                          | 71        |
| 5.5      | 衝撃波運動と負の揚力傾斜の関係 . . . . .                             | 72        |
| 5.6      | まとめ . . . . .                                         | 74        |
| <b>6</b> | <b>結論</b>                                             | <b>75</b> |
| <b>A</b> | <b>フラッター境界の同定方法</b>                                   | <b>77</b> |
| <b>B</b> | <b>静的計算における翼根壁の境界条件と流れ場の予測精度の関係について</b>               | <b>79</b> |
| <b>C</b> | <b>NACA0012翼フラッター計算における時間・空間解像度および初期擾乱の大きさの影響について</b> | <b>83</b> |



# List of Figures

|      |                                                                                                                                   |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | Schematic for supercritical airfoil [1]. . . . .                                                                                  | 1  |
| 1.2  | Schematic of Flight envelope [9]. . . . .                                                                                         | 2  |
| 1.3  | Flutter boundary for symmetric airfoil [12]. . . . .                                                                              | 3  |
| 1.4  | Flutter boundary results from AePW2 [22]. . . . .                                                                                 | 4  |
| 1.5  | Inviscid/Viscous flutter boundary. [30]. . . . .                                                                                  | 6  |
| 1.6  | Experimental flutter boundary of a supercritical wing [32]. . . . .                                                               | 7  |
| 1.7  | Top view sketch of the PAPA assembly [33]. . . . .                                                                                | 8  |
| 1.8  | Experimental flutter boundary of the NACA0012 benchmark wing [33]. . . . .                                                        | 8  |
| 2.1  | Schematic view of MUSCL interpolation. . . . .                                                                                    | 21 |
| 2.2  | Two-degree-of-freedom typical section wing model. . . . .                                                                         | 28 |
| 2.3  | Natural mode shapes of a two-degree-of-freedom plunge–pitch system. . . . .                                                       | 30 |
| 2.4  | Parallel computation for 3-dimensional calculation loop. . . . .                                                                  | 34 |
| 2.5  | Strong scaling. . . . .                                                                                                           | 34 |
| 3.1  | Computational grid for the NACA64A010 airfoil ( $803 \times 250$ ). . . . .                                                       | 36 |
| 3.2  | Streamwise velocity distribution at -0.21 deg for the stationary airfoil. . . . .                                                 | 38 |
| 3.3  | Streamwise velocity distribution at 4.0 deg for the stationary airfoil. . . . .                                                   | 38 |
| 3.4  | Effect of grid resolution in oscillating airfoil at $\alpha_m = 4.0$ deg. . . . .                                                 | 38 |
| 3.5  | Effect of time step size in oscillating airfoil at $\alpha_m = 4.0$ deg. . . . .                                                  | 38 |
| 3.6  | Effect of number of inner iterations in oscillating airfoil at $\alpha_m = 4.0$ deg. . . . .                                      | 39 |
| 3.7  | Comparison of streamwise velocity distributions for the stationary airfoil. . . . .                                               | 40 |
| 3.8  | Comparison of $C_p$ distributions over the upper surface at various angles of attack for the stationary airfoil. . . . .          | 40 |
| 3.9  | Dynamic $C_l$ loop in terms of the angle of attack for $k = 0.2$ . The arrows indicate the loop direction. . . . .                | 41 |
| 3.10 | Dynamic $C_m$ loop in terms of the angle of attack for $k = 0.2$ . The arrows indicate the loop direction. . . . .                | 41 |
| 3.11 | Dynamic loops of the shock wave position for each mean-angle of attack condition. The arrows indicate the loop direction. . . . . | 42 |
| 3.12 | Comparison of $C_p$ distributions with stationary and pitching airfoils at $\alpha_p = 0.0$ deg. . . . .                          | 42 |
| 3.13 | Comparison of $C_p$ distributions with stationary and pitching airfoils at $\alpha_p = 6.0$ deg. . . . .                          | 42 |
| 3.14 | Comparison of flutter boundaries of the NACA64A010 airfoil. . . . .                                                               | 44 |
| 3.15 | Time history of heaving and pitching displacements in a NACA64A010 airfoil. . . . .                                               | 44 |
| 3.16 | Mach number distributions around transonic dip in a NACA64A010 airfoil. . . . .                                                   | 45 |
| 3.17 | Local work coefficient distributions around transonic dip in a NACA64A010 airfoil. . . . .                                        | 45 |
| 4.1  | Computational grid for the SC2-0610 airfoil. . . . .                                                                              | 47 |
| 4.2  | Comparison of flutter boundaries of the SC2-0610 airfoil. . . . .                                                                 | 48 |
| 4.3  | Time history of heaving and pitching displacements in a SC2-0610 airfoil. . . . .                                                 | 48 |

|      |                                                                                                                                                                                                          |    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.4  | Sequential Mach number distributions ( $M_\infty = 0.775$ , $V_* = 0.7$ ). . . . .                                                                                                                       | 49 |
| 4.5  | Sequential Mach number distributions ( $M_\infty = 0.855$ , $V_* = 0.5$ ). . . . .                                                                                                                       | 49 |
| 4.6  | Comparisons of the Mach number distributions for three Mach numbers around the second dip. . . . .                                                                                                       | 50 |
| 4.7  | Distributions of the normalized local work coefficient for three Mach numbers around the second dip of the SC2-0610 airfoil. The results are at the flutter speed index on the flutter boundary. . . . . | 51 |
| 4.8  | Skin-friction distributions on the lower surface around 2nd dip. . . . .                                                                                                                                 | 51 |
| 4.9  | Dynamic loop of the shock wave position on the upper surface, for which the results of the stationary airfoil are also plotted. . . . .                                                                  | 53 |
| 4.10 | Dynamic loop of the lift coefficient, for which the results of the stationary airfoil are also plotted. . . . .                                                                                          | 53 |
| 4.11 | Skin friction distributions on the lower surface during the pitching oscillation. . .                                                                                                                    | 54 |
| 4.12 | Variation of non-dimensional separation area over the lower surface during one period. . . . .                                                                                                           | 54 |
| 4.13 | Schematic illustration of shock-wave motion as a function of Mach number and its relationship to the second dip in the flutter boundary. . . . .                                                         | 55 |
| 4.14 | Shock wave position and separation area over the upper surface at the angle of attack of 0 deg. . . . .                                                                                                  | 56 |
| 4.15 | Shock wave position and separation area over the lower surface at the angle of attack of 0 deg. . . . .                                                                                                  | 56 |
| 4.16 | Shock wave position and separation area at the angle of attack of 0 deg for the NACA64A010 airfoil. . . . .                                                                                              | 57 |
| 4.17 | Effects of supercritical airfoil shape on the flutter boundary. . . . .                                                                                                                                  | 57 |
| 5.1  | Computational grid for symmetric boundary condition (every two grid points are shown). . . . .                                                                                                           | 60 |
| 5.2  | Comparison of flutter boundaries with experiment [33] and earlier numerical result [38]. . . . .                                                                                                         | 61 |
| 5.3  | Pressure coefficient distributions on the upper surface under the steady-state (non-oscillating) condition. . . . .                                                                                      | 62 |
| 5.4  | Comparison of pressure coefficient distributions at wing root (0% span) . . . . .                                                                                                                        | 62 |
| 5.5  | Distributions of skin friction coefficient on the upper surface under the steady-state (non-oscillating) condition. . . . .                                                                              | 62 |
| 5.6  | Comparison of skin friction coefficient distributions at wing root (0% span) . . .                                                                                                                       | 63 |
| 5.7  | Comparison of flutter boundaries among three cases. . . . .                                                                                                                                              | 64 |
| 5.8  | Pressure coefficient distributions on the upper surface under the steady-state (non-oscillating) condition of C1_Sym and C2_Wall. . . . .                                                                | 65 |
| 5.9  | Comparison of pressure coefficient distributions on the upper surface between C1_Sym and C2_Wall. . . . .                                                                                                | 65 |
| 5.10 | Streamwise velocity distributions on the $x-y$ cross-section at $z = 0$ for $M_\infty = 0.77$ . . .                                                                                                      | 65 |
| 5.11 | Comparison of streamwise velocity profiles on the wing root wall $1.0c$ upstream of the wing leading edge. . . . .                                                                                       | 66 |
| 5.12 | Adjusted flutter dynamic pressures below $M_\infty = 0.85$ . . . . .                                                                                                                                     | 66 |
| 5.13 | Comparison of flutter boundaries obtained by three conditions. . . . .                                                                                                                                   | 68 |
| 5.14 | Pressure coefficient distributions on the upper surface under the steady-state (non-oscillating) condition at $M_\infty = 0.88$ . . . . .                                                                | 68 |
| 5.15 | Distributions of skin friction coefficient on the upper surface under the steady-state (non-oscillating) condition at $M_\infty = 0.88$ . . . . .                                                        | 69 |
| 5.16 | Streamwise velocity distributions under the steady-state (non-oscillating) condition for $M_\infty = 0.88$ . . . . .                                                                                     | 69 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                     |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.17 | Velocity distributions in the $x$ -direction on the $y - z$ cross-section with in-plane streamlines near the corner at $x/c = 0.25$ . . . . .                                                                                       | 69 |
| 5.18 | Streamwise momentum budget in $y - z$ cross-section near the corner at $x/c = 0.25$ . Color indicates $-\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}$ or $-\frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}$ , and vectors denote the velocity. . . . . | 70 |
| 5.19 | Adjusted flutter dynamic pressures above $M_\infty = 0.85$ . . . . .                                                                                                                                                                | 70 |
| 5.20 | Comparison of lift slope. . . . .                                                                                                                                                                                                   | 71 |
| 5.21 | Time history of plunge and pitch displacements during flutter at $M_\infty = 0.88$ in C3_Wall-QCR. . . . .                                                                                                                          | 72 |
| 5.22 | Reduced frequency at the flutter boundary. . . . .                                                                                                                                                                                  | 72 |
| 5.23 | Differences in pressure coefficient distributions on the upper surface under the steady-state (non-oscillating) condition between angle of attack of 0 deg and 0.3 deg in C3_Wall-QCR. . . . .                                      | 73 |
| 5.24 | Variation of shock wave position and nondimensional separation volume at each Mach number in C3_Wall-QCR. . . . .                                                                                                                   | 73 |
| A.1  | Time history of wing displacement near flutter onset. . . . .                                                                                                                                                                       | 78 |
| B.1  | $C_p$ distributions on the upper surface at $\alpha_A = 0.06$ deg. . . . .                                                                                                                                                          | 80 |
| B.2  | Streamwise velocity distributions at $\alpha_A = 0.06$ deg. . . . .                                                                                                                                                                 | 80 |
| B.3  | Comparison of $C_p$ distributions on the upper surface at 60% span position for $\alpha_A = 0.06$ deg. . . . .                                                                                                                      | 81 |
| B.4  | $C_p$ distributions on the upper surface at $\alpha_A = 4.02$ deg. . . . .                                                                                                                                                          | 81 |
| B.5  | Streamwise velocity distributions at $\alpha_A = 4.02$ deg. . . . .                                                                                                                                                                 | 81 |
| B.6  | Comparison of $C_p$ distributions on the upper surface at 60% span position for $\alpha_A = 4.02$ deg. . . . .                                                                                                                      | 82 |
| C.1  | Effects of grid resolution on the flutter boundary. . . . .                                                                                                                                                                         | 84 |
| C.2  | Effects of time step size on the flutter boundary. . . . .                                                                                                                                                                          | 84 |
| C.3  | Effects of initial disturbance on the flutter boundary. . . . .                                                                                                                                                                     | 84 |

# List of Tables

|     |                                                                                                                     |    |
|-----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.1 | Specifications of the AOBA-S[57]. . . . .                                                                           | 32 |
| 2.2 | Profiling results of major computational components . . . . .                                                       | 33 |
| 2.3 | Profiling results of tuned subroutines . . . . .                                                                    | 33 |
| 3.1 | Computational method . . . . .                                                                                      | 36 |
| 3.2 | Computational condition of the forced oscillating airfoil for various angles of at-<br>tack conditions[58]. . . . . | 37 |
| 3.3 | Computational condition for the flutter calculation [10]. . . . .                                                   | 43 |
| 3.4 | Structure parameters for the NACA64A010 flutter [10]. . . . .                                                       | 43 |
| 4.1 | Computational method . . . . .                                                                                      | 46 |
| 4.2 | Computational condition for the flutter calculation. . . . .                                                        | 46 |
| 4.3 | Structure parameters for the SC2-0610 flutter [10]. . . . .                                                         | 46 |
| 4.4 | Parameters of forced oscillating calculation for the SC2-0610 airfoil. . . . .                                      | 52 |
| 5.1 | Configuration of the NACA0012 benchmark wing [33]. . . . .                                                          | 60 |
| 5.2 | Structural parameters of the NACA0012 benchmark wing [33]. . . . .                                                  | 60 |
| 5.3 | Computational method . . . . .                                                                                      | 60 |
| B.1 | Computational method . . . . .                                                                                      | 79 |
| B.2 | Computational condition for the stationary airfoil[70]. . . . .                                                     | 80 |
| C.1 | Computational method . . . . .                                                                                      | 83 |
| C.2 | Computational condition for the flutter calculation. . . . .                                                        | 83 |

# 第1章 緒論

## 1.1 はじめに

1952年に世界初のジェット旅客機であるコメットが就航して以降、航空機のさらなる高速化のため研究開発が進められてきた。特にFig. 1.1[1]に示す超臨界翼型は、翼上面を平坦にすることで流れの加速を抑え、衝撃波の発生を下流側へ遅らせ、かつ弱めることに成功した。また超臨界翼型では翼上面を平坦にしたため、翼後縁でのキャンバーを強くすることで揚力を確保している。これらの工夫により超臨界翼型は通常の翼型に比べ、同一抵抗で比較した時に巡航マッハ数を18%程度大きくすることに成功し、航空機の高速化に貢献した[2]。一方、航空機の高速化に伴い、巡航マッハ数は高く、流体の動圧は大きくなる。それにより新たに空力弾性問題が顕著となる。空力弾性問題とは空気力・弾性力・慣性力が連成することによって生じるものであり、ダイバージェンスや補助翼の逆効きなどが挙げられる[3, 4, 5]。中でも、フラッターは3つの力すべてが連成することにより生じる現象であり、次節で詳しく説明する。

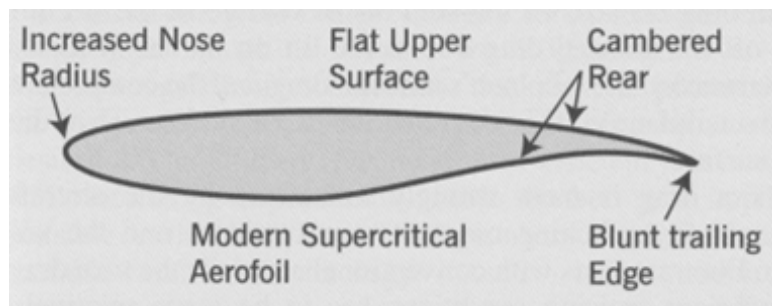


Figure 1.1: Schematic for supercritical airfoil [1].

## 1.2 フラッター現象

フラッター現象とは、流れの中に置かれた構造物に働く空気力と、構造物の弾性力および慣性力の3つの力がそれぞれ連成して生じる自励振動現象[3, 6]であり、航空機においては翼フラッターが問題となる。翼に外力が加わると、翼の変形に起因する構造力と流体力との間に位相差が生じ、翼に対して流体側からエネルギーが供給される状態になることがある。この状態では翼の振動振幅は時間とともに増大し、翼の破壊など、構造に致命的なダメージを与える。また流体もしくは構造の非線形性により、特定の振幅で振動が持続するLimit Cycle Oscillation (LCO)が生じる場合もある。LCOではフラッターのような発散的な振動は生じないものの、比較的大きな振幅の振動が断続的に生じるため、構造物の疲労特性に大きく影響する。よって、LCO特性の把握もフラッター同様に重要となる。実際の航空機ではFederal Aviation Administration (FAA) が規定している「通常（故障等のない状態）の条件下において航空機はフラッターが生じる等価対気速度に対して15%の余裕を持つ[7]」や「クリティカルな振動モードに対しては3%程度の減衰率を有する[7]」などを満たす必要がある。そのため、Fig. 1.2に示すように航空機の飛行可能領域（フライトエンベロープ）はフラッターによ

る制限を受けることがある。特に遷音速域においてはフラッターが生じやすくなるため、この領域における翼フラッター特性の把握は、航空機設計上きわめて重要となる。

FAAの規定を満たしているかを確認するためには、フラッターが生じる条件（フラッター境界）を正確に把握する必要がある。フラッター境界の同定方法としては飛行試験、風洞試験、数値解析が挙げられるが、飛行試験は設計の最終段階で行われるものであり、非常に高コストである。また風洞を用いたフラッター試験も行われているが、風洞内において実際にフラッターが生じてしまうと実験模型が飛散する恐れがあり、安全性・風洞設備の故障リスクなどの観点からコストが高い。実際にRef.[8]では風洞試験において想定より低い動圧でハードフラッターが生じた結果、停止制御が間に合わず、風洞が破損したことが報告されている。これらの安全性および経済的なコストを考慮すると、数値解析によるフラッター境界の高精度予測技術の確立およびフラッター特性の把握が望まれる。

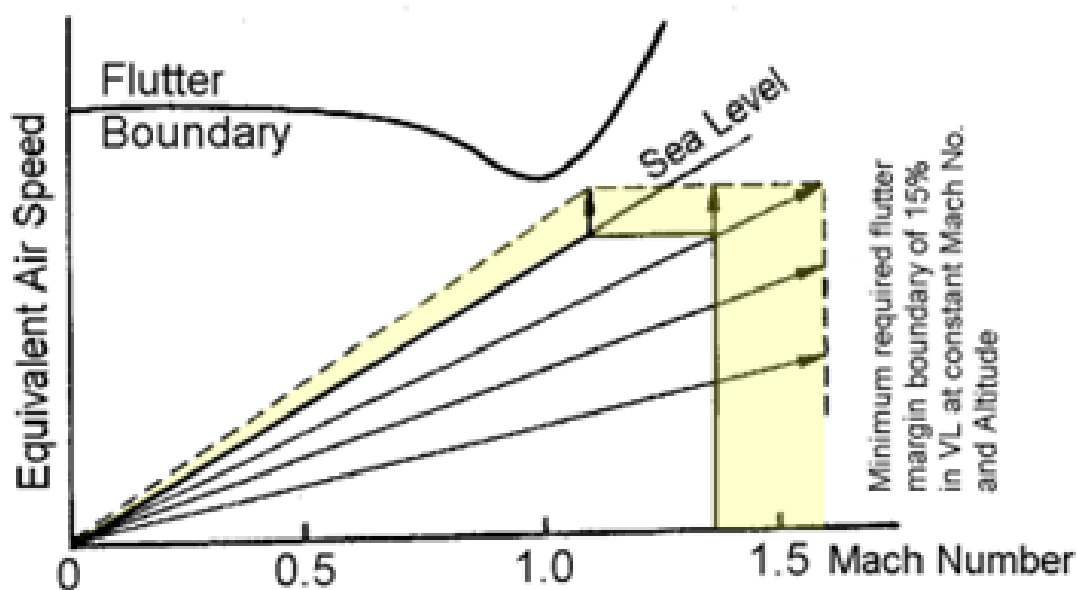


Figure 1.2: Schematic of Flight envelope [9].

### 1.3 遷音速域におけるフラッター特性

前節で述べたフラッター現象は、特に遷音速域において非常に生じやすくなることが知られており、この領域を遷音速ディップと呼ぶ。従って、遷音速域でのフラッター特性の把握が航空機設計上、非常に重要となる。

Isogai[10]は遷音速域における2次元対称翼のフラッター特性を調査するため、2次元亜音速線形ポテンシャル方程式をDoublet-Lattice Method (DLM) [11]によって解き、フラッター計算を行った。(線形方程式を用いているため衝撃波の影響は考慮できていない。) その結果、遷音速ディップでは曲げの1自由度振動が支配的になること、および流体の圧縮性が遷音速ディップの形成に重要であることを示した。しかし、Ref.[10]では線形方程式を用いているため遷音速域で重要となる衝撃波の発生は再現できていない。衝撃波の影響を考慮するため、Isogai[12]は遷音速微小擾乱方程式を用いた2次元フラッター計算を行い、Fig. 1.3のフラッター境界に示すように、衝撃波を考慮することで亜音速線形ポテンシャル方程式を用いた場合に比べて遷音速ディップがより深くシャープになることを示した。またフラッター計算に加えて、振動振幅、周波数を固定した強制振動翼計算を行い、遷音速ディップでは衝撃波振動の位相が翼振動に対して大幅に遅れることで系が不安定化することを明らかにした。遷音速ディップの底からさらにマッハ数を大きくすると衝撃波が翼後縁に達し、翼面上の全域が超

音速流れとなる。このとき、衝撃波は翼後縁に固定されるため衝撃波振動は生じない。加えてマッハ数の増大による揚力傾斜の減少、空力中心の後退によりフラッターは生じ難くなる。以上の結果から、非粘性流れにおいて2次元対称翼では、衝撃波の発生および衝撃波振動による不安定化、衝撃波の固定および空力中心の後退による安定化により遷音速ディップが形成されることが分かる。

このように遷音速域においても非粘性流れであれば、基本的なフラッター特性はよく理解されている。一方、粘性流れでは衝撃波根元の強い逆圧力勾配により、境界層はく離が生じる場合があるが、そのような複雑流れ場におけるフラッター特性についての知見は多くなく、フラッター計算自体も非常に困難である。衝撃波はく離時のフラッター解析技術の現状については次節で詳しく述べる。

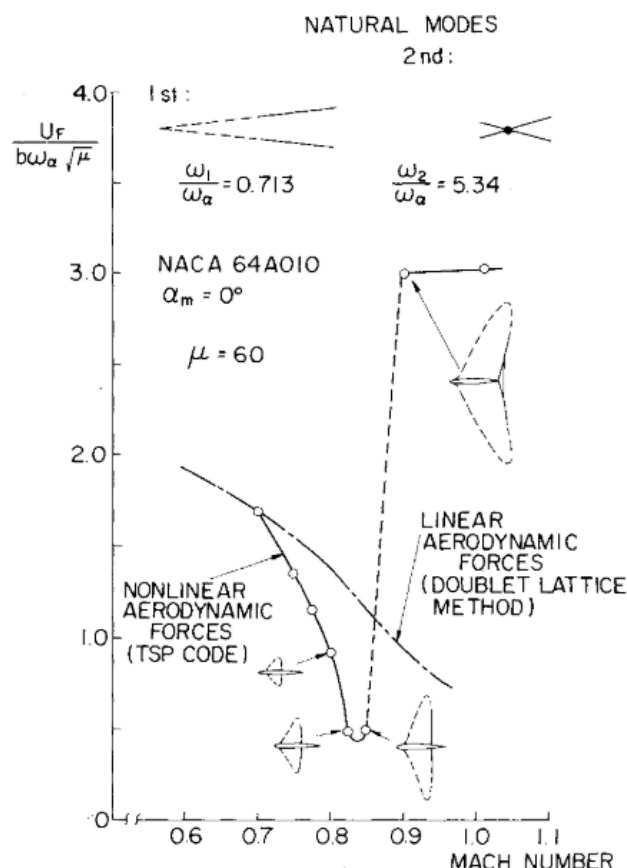


Figure 1.3: Flutter boundary for symmetric airfoil [12].

## 1.4 フラッター計算技術の現状

AGARD445.6翼モデル[13]は代表的なフラッター計算のベンチマークケースであり、NACA 65A004翼型を断面形状とする、アスペクト比1.65の3次元後退翼である。AGARD445.6翼モデルに対するフラッター計算例は多くあり[14, 15, 16, 17, 18, 19]、流体構造連成コードの検証によく用いられている。一方、薄翼のため遷音速域においても弱い衝撃波と小さなく離が生じるのみで、流体の粘性の影響は限定的である。

空力弾性解析手法の現状の技術評価および検証のため、NASAの空力弾性部門が中心となって、2012年にAeroelastic Prediction Workshop (AePW) が開催された[20]。AePWの目的は、「最先端の空力弾性解析手法が静的および動的な空力弾性現象の予測に対して実用的なツールとなり得るかを評価すること」、「既存の非定常流体解析コードやモデリング手法の有効性を議論、評価すること」である。第1回目のAePW1では、Rectangular Supercritical Wing

(RSW), Benchmark SuperCritical Wing (BSCW), High Reynolds Number Aero-Structural Dynamics (HIRENASD) の3ケースが計算対象として設定された。これらのケースはいずれも遷音速条件であり、強い衝撃波が生じ、条件によってはその背後で境界層はく離を伴う複雑流れ場となっている。AePW1では世界10か国17チームが参加し、主にUnsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes (URANS) を用いた解析が行われた。各チームは各々のソルバー、計算モデルを用いて計算を行い、その結果が比較された。RSWとBSCWでは、翼上面衝撃波位置の予測誤差や衝撃波下流側での圧力分布のばらつきが顕著であり、URANSでは衝撃波と乱流境界層の干渉や、衝撃波根元の小さなはく離域の予測精度が十分でないことが分かった。一方HIRENASDケースは、はく離がほとんど生じない条件であったため、フラッター計算の結果は実験と良く一致していた。これらの比較から、大規模なはく離を伴う流れ場においてURANSによるフラッター計算には課題があることが示された。

AePW1では計算対象のケース数が多かったため、2016年に開催されたAePW2からは、計算対象はBSCWの1ケースに限定された。AePW2では、はく離なしの遷音速条件と衝撃波はく離が発生する条件に対してフラッター計算および強制振動翼計算が行われ、実験と比較された[21]。Figure 1.4にAePW2でのフラッター計算結果のまとめを示す。多くの計算ではURANSによる解析が行われており、はく離が生じないケース (Fig. 1.4中の桃色線) では、計算モデルごとに20%程度のばらつきはあるものの、予測されたフラッター動圧の平均値は実験との誤差が2%であり比較的良好な予測結果となった。一方、強い衝撃波とその背後ではく離が生じる条件 (Fig. 1.4中の橙色線) では、計算手法、乱流モデル、計算格子に依存してフラッター動圧の予測値は25-665 psfと大きくばらついた。これらの結果から、衝撃波が生じたとしても付着流れであれば高精度なフラッター計算は可能であるが、大規模なはく離が生じる場合においてはURANSによる予測は現状の計算モデルでは困難であることが示された。またフラッター計算プロセスにおけるその他の重要な指摘として、「Flux limiter による数値粘性の影響により、フラッター動圧が過大に予測される傾向がある。」、「時間刻み幅や疑似時間反復の収束性の扱いがチームによってばらばらであり、時間精度を統一した比較が必要である。」、「フラッター動圧の探索法が各チームの経験と試行錯誤に依存しており、Reduced-order model の利用など、効率化が必須である。」などが挙げられた。

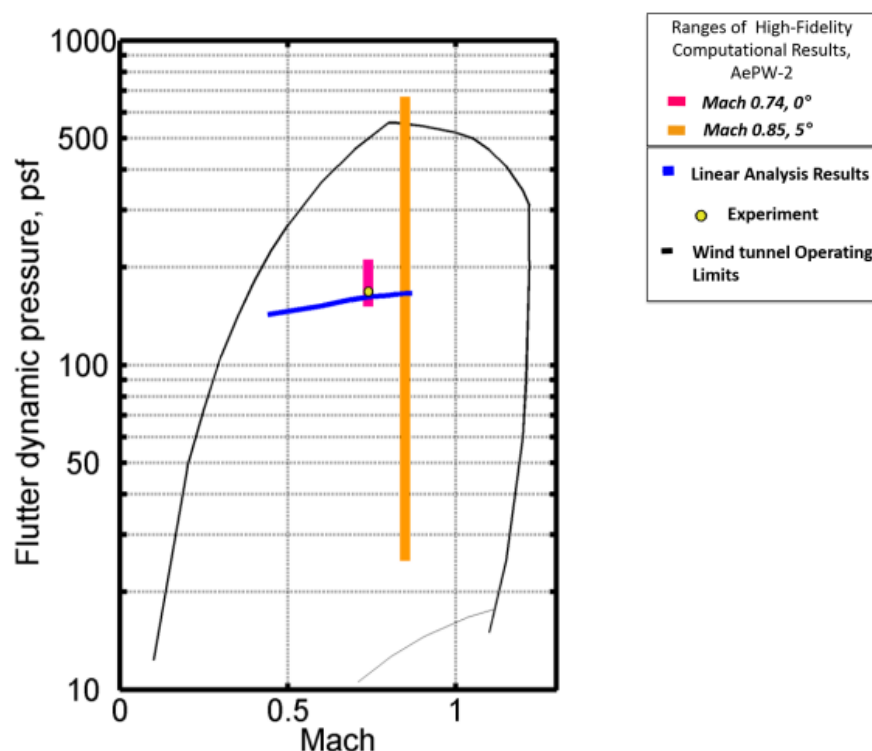


Figure 1.4: Flutter boundary results from AePW2 [22].



2019年には第3回目となるAePW3が開催され、AePW2で結果のばらつきが大きかった衝撃波はく離が生じる条件に着目し、結果の比較および議論がなされた[23, 24]。AePW3においても衝撃波はく離が生じる場合、計算手法によってフラッター動圧の予測値はばらついており、不確かさが大きいことが示された。また衝撃波はく離が生じる場合、初期擾乱の大きさによってフラッター動圧が大きく変化することも確認された。BSCWを対象とした計算例はAePW以外でも様々報告されており[22, 25, 26, 27, 28]、乱流モデルや初期擾乱の影響などが調査されている。

これまで述べた乱流モデルや初期擾乱の大きさなどに加えて、翼根壁のモデリングもフラッター動圧の予測精度に影響を及ぼす重要な要因であると考えられる。従来の多くのフラッター計算では翼根側境界に対して対称境界条件が適用されてきた[14, 29, 16, 17, 18, 22, 25, 26, 27, 28]。しかし、実際の翼根部には壁面が存在することを考えると、翼根側境界を対称境界条件としてモデル化することの妥当性については、改めて検証する必要がある。実際にPawelら[23]は翼根に滑りなし境界条件を課したSC2-0414翼の静的計算を行い、翼根部で境界層はく離が生じ、衝撃波位置やフラッター特性に大きく影響すると述べている。一方、計算の複雑さから滑りなし境界条件でのフラッター計算は実施されていない。

翼根壁に滑りなし境界条件を適用したフラッター計算例として、Stanfordら[19]によるAGARD445.6翼モデルを対象とした研究が挙げられる。Stanfordらは翼根壁に滑りなし境界条件を課したフラッター計算を行い、対称境界条件を用いた場合との比較を行った。その結果、滑りなし境界条件を適用した場合には、翼根部における圧力変動の低下および衝撃波の消失により、対称境界条件の場合と比較してフラッター動圧が全体的に増大することを示した。このように定量的なフラッター動圧の変化は認められるものの、流れ場構造を含めた定性的な挙動は、対称境界条件を用いた場合と概ね一致している。その理由として、AGARD445.6翼は最大翼厚比が約4%の薄翼であり、衝撃波が比較的弱く、翼根部において境界層はく離などの強い非線形現象が生じないことが挙げられる。一方、AePWで対象とされる翼は最大翼厚比が約14%と厚く、高マッハ数域では翼根部において強い衝撃波が形成され、その背後で流れがはく離する。このような衝撃波はく離を伴う流れ場において翼根壁のモデリングがフラッター予測精度にどのような影響を及ぼすかは調査されていない。

以上より、フラッター計算の現状の課題点をまとめると以下ようになる。

- ① 衝撃波はく離時にフラッター予測精度が急激に悪化する。
- ② 乱流モデルによる結果のばらつきが大きく、どのモデルが妥当かわからない。
- ③ Flux limiterや時間刻み幅など細かな条件が統一されておらず公平な比較が困難である。
- ④ 衝撃波はく離時には初期擾乱がフラッター挙動に大きく影響する。
- ⑤ 翼根壁に対称境界条件を適用することの妥当性は示されておらず、翼根壁と翼表面の乱流境界層の干渉がフラッター予測精度に影響することが懸念される。

これまで述べたように衝撃波はく離時の高精度フラッター解析は実現しておらず課題も多い。加えてフラッター特性に関しても、衝撃波背後ではく離の有無により安定性が大きく変化することがいくつかの先行研究[30, 31, 13, 32, 33, 34]で報告されており、次節で詳しく述べる。

## 1.5 衝撃波はく離によるフラッター特性の変化

### 1.5.1 対称翼における衝撃波はく離による安定化

3節で示したIsogaiの計算では衝撃波の影響は考慮しているものの、流体の粘性を無視していた。流体の粘性の影響も含めたフラッター特性を把握するため、Pranata[35]およびBohbotら[30]は乱流モデルを用いた2次元フラッター計算を行い、粘性と非粘性条件でフラッター特性を比較した。Figure 1.5にPranataら[35]およびBohbotら[30]のフラッター境界の計

算結果を示す．ここで横軸はマッハ数，縦軸は流体力と構造力の比を表すフラッター速度と呼ばれる無次元パラメータ（定義は第2章で述べる）である．Figure 1.5より粘性解析では非粘性解析と比較して遷音速ディップが浅くなり，ディップの底も低マッハ数側に移動することが確認できる．加えて粘性解析では非粘性解析で見られるようなS型のフラッター境界は生じなくなる．また粘性解析では，遷音速ディップの底からマッハ数を大きくしていくとフラッター速度は上昇した後，マッハ数0.86付近で一度減少に転じ，その後さらに上昇するといった傾向を示す．Bohbotら[30]は遷音速ディップの底からマッハ数を大きくすると，衝撃波背後で流れがはく離し，それによりフラッター速度は上昇すると考察している．同様の傾向はDietzらの実験[31]においても報告されている．しかし，衝撃波背後での境界層はく離とフラッター安定化のメカニズムは不明である．

以上より，2次元対称翼でのフラッター特性として以下のことが明らかになっている．

- ① 遷音速域では衝撃波の発生によりフラッターが生じやすくなる．ここで翼振動に対して衝撃波振動の位相が遅れていることが，不安定化の原因である．
- ② マッハ数を大きくすると衝撃波背後で流れがはく離し，それによりフラッターは生じ難くなる．
- ③ さらにマッハ数を大きくすると衝撃波が翼後縁に達し翼面上の全域が超音速流れとなるためフラッターはさらに生じ難くなる．

①は衝撃波振動の位相遅れ，③は衝撃波の翼後縁への固定および空力中心の後退に起因しており，そのメカニズムは分かっている．一方，②の衝撃波背後でのはく離に伴うフラッター安定化については詳細なメカニズムが不明である．

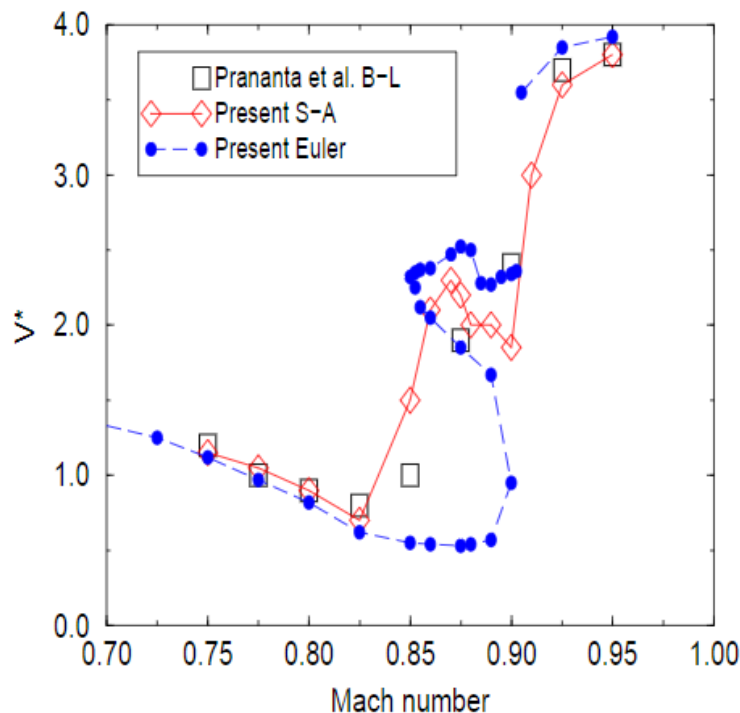


Figure 1.5: Inviscid/Viscous flutter boundary. [30].

### 1.5.2 超臨界翼におけるダブル遷音速ディップ

2次元対称翼のフラッター計算結果では，衝撃波はく離時はフラッターは生じ難くなることが示されたが，翼型形状が異なる場合や3次元翼においては，衝撃波はく離により強い不

安定性が生じることが実験的に確認されている[34, 13, 32, 36, 33]. Persoonら[32]は3次元超臨界翼を用いた遷音速フラッター試験を行い, Fig. 1.6に示すように特定の迎角で2つの遷音速ディップ(ダブル遷音速ディップ)が生じることを示した. またYatesら[13]も, 超臨界翼型の性能試験に用いられたTF-8A航空機の翼を対象とした遷音速フラッター試験を行い, 同様の傾向をとらえた. 対称翼の場合, 遷音速ディップは単一であることがほとんどで, ダブル遷音速ディップの発生は超臨界翼特有のものであると考えられる. Yatesら[13]はダブル遷音速ディップの発生には流体の粘性が重要であることも指摘している. またSeidelら[36]が行ったAeroelastic Research Wing-2 (ARW2)を用いた風洞試験では, 高マッハ数域において予期していない低い動圧でフラッターが発生した. この時のフラッター動圧は100psf程度であり, 線形解析で予測していた動圧に対して1/7程度と非常に低い値となっている. Seidelら[37]は不安定性の原因について調査するために追加実験を行ったが, フラッターを再現することはできなかった. しかし, 高マッハ数域において比較的大きな振幅での振動が生じることが分かった. また高マッハ数域では翼上下面の衝撃波背後で流れがはく離しており, このような流れ場が不安定性発生の要因となっていると考察している.

以上より, 超臨界翼のフラッター特性として以下のことが明らかになっている.

- ① 超臨界翼では2つのディップ(ダブル遷音速ディップ)が生じることがある.
- ② 超臨界翼で生じる高マッハ数域での不安定性は衝撃波背後でのはく離と強く関係している.

このように超臨界翼のフラッター特性について, 実験を通して上記のような現象は確認されているものの, フラッター計算による再現はできておらず, また不安定化メカニズムも不明である.

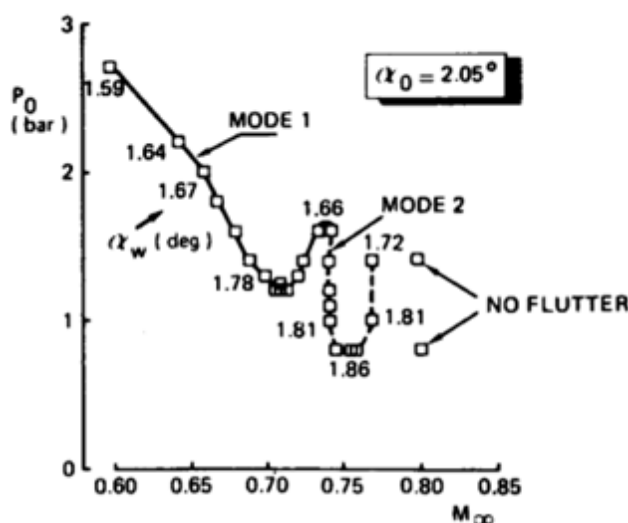


Figure 1.6: Experimental flutter boundary of a supercritical wing [32].

### 1.5.3 3次元低アスペクト比翼における高マッハ数域での急激な不安定性

超臨界翼の他にRiveraら[33]が行った低アスペクト比矩形翼(NACA0012翼型)のフラッター試験においても高マッハ数域において急激な不安定性が生じることが確認されている. Riveraらの実験では翼は剛体として扱われ, 弾性変形しない代わりに, Fig. 1.7に示すように翼根部に上下変位および回転変位の2自由度運動が可能なシステム(Pitch and Plunge Apparatus: PAPA)が取り付けられており, それによりフラッター挙動を模擬している. Figure 1.8にRiveraらの実験で得られたフラッター境界を示す. Figure 1.8より, 低マッハ数域ではマッハ数の増大と共にフラッター動圧は上昇し, マッハ数0.8付近で遷音速ディップが生じることが分かる. またさらにマッハ数を大きくすると, マッハ数0.9付近で急

激な不安定性（Plunge instability）が生じ、この領域では上下モードの1自由度振動が支配的となることが確認されている。マッハ数0.9では衝撃波背後で境界層はく離が生じており、高マッハ数域での不安定性は衝撃波はく離に起因するものであると考えられている。Stanfordら[38]はRiveraら[33]の実験に対してフラッター計算を行い、構造減衰を導入することで高マッハ数域での不安定性を定性的にとらえることに成功している。しかし、不安定性が生じるマッハ数域については実験に対して低マッハ数側かつ狭く予測している。加えて高マッハ数域での不安定化メカニズムも不明である。Erickson[34]が行った低アスペクト比翼（NACA009.3-64, NACA006.7-64）を用いたフラッター試験においてもRiveraらと同様の高マッハ数域における急激な不安定性が確認されている。

以上より、3次元低アスペクト比翼のフラッター特性として以下のことが明らかになっている。

- ① 高マッハ数域で上下モードの急激な不安定性が生じる。
- ② 急激な不安定性は衝撃波背後でのはく離に起因していると示唆されている。

このように3次元低アスペクト比翼においても超臨界翼と同様に衝撃波背後でののはく離による不安定化の可能性が示唆されているものの、そのメカニズムは不明である。

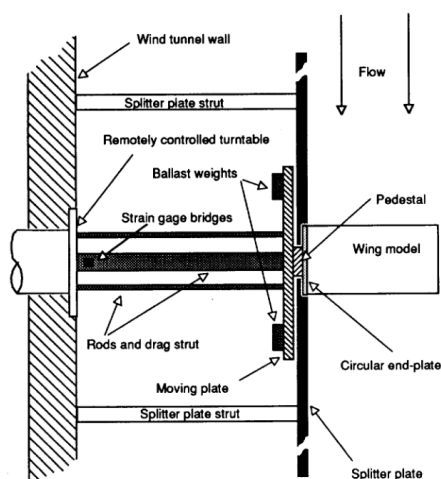


Figure 1.7: Top view sketch of the PAPA assembly (fairing over rods is not shown).

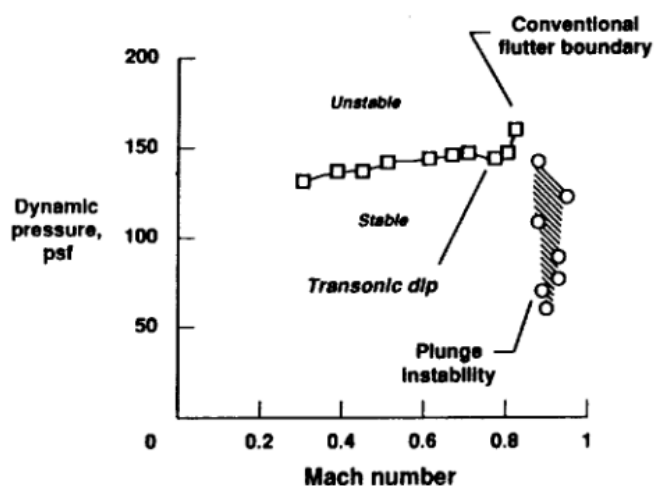


Figure 1.7: Top view sketch of the PAPA assembly [33].

Figure 1.8: Experimental flutter boundary of the NACA0012 benchmark wing [33].

## 1.6 研究目的

これまで述べたように数値解析によるフラッター現象の予測は、はく離が生じない流れ場に対しては、比較的高精度な予測が可能となっている。また衝撃波振動による遷音速ディップの発生などフラッターメカニズムに関する知見も多い。一方、衝撃波背後で流れがはく離する場合、予測精度が急激に低下し、また衝撃波はく離がどのようにフラッター安定性/不安定性に影響を及ぼすのかについては明らかにされていない。

従って、本研究では高精度・高速なフラッター計算コードを開発し、衝撃波はく離時のフラッター発生条件の高精度予測および衝撃波はく離に伴うフラッター安定化/不安定化メカニズムの解明を目的として研究を行う。具体的には、以下の解析を通して、衝撃波はく離とフラッター特性の関係について体系的に明らかにする。

- ① 2次元対称翼での衝撃波はく離による安定化メカニズムの解明。
- ② 超臨界翼におけるダブル遷音速ディップの発生メカニズムの解明。

- ③ 翼根壁の境界条件モデリングがフラッター予測精度に与える影響の調査.
- ④ 3次元低アスペクト比翼における高マッハ数域での急激な不安定化メカニズムの解明.

## 1.7 本論文の構成

本論文は以下のように構成されている.

第2章では本研究で用いた支配方程式, 数値解析手法および計算コードの並列化について述べる.

第3章では2次元対称翼型を対象に静的計算, 強制振動翼計算, フラッター計算を行い, 2次元における数値解析の予測精度検証およびフラッターメカニズムに関して議論する.

第4章では2次元超臨界翼型を対象にフラッター計算を行い, ダブル遷音速ディップの発生メカニズムに関して議論する.

第5章では3次元低アスペクト比翼のフラッター計算を行い, 3次元解析における予測精度検証および翼根壁のモデリングとフラッター計算への影響に関して議論する. また高マッハ数域での不安定化メカニズムについても述べる.

最後に第6章では本博士論文の研究成果のまとめ, および将来展望を述べる.

## 第2章 数値計算手法

### 2.1 流体の支配方程式

#### 2.1.1 Navier-Stokes方程式

本研究では流体の支配方程式として3次元圧縮性Navier-Stokes方程式を用いる。3次元圧縮性Navier-Stokes方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

ここで、 $\mathbf{Q}$ は保存量ベクトル、 $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ は $x, y, z$ 方向の流束ベクトルである。各ベクトルは、

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}, \\ \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p - \tau_{xx} \\ \rho uv - \tau_{xy} \\ \rho uw - \tau_{xz} \\ hu - u\tau_{xx} - v\tau_{xy} - w\tau_{xz} + q_x \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv - \tau_{yx} \\ \rho v^2 + p - \tau_{yy} \\ \rho vw - \tau_{yz} \\ hv - u\tau_{yx} - v\tau_{yy} - w\tau_{yz} + q_y \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw - \tau_{zx} \\ \rho vw - \tau_{zy} \\ \rho w^2 + p - \tau_{zz} \\ hw - u\tau_{zx} - v\tau_{zy} - w\tau_{zz} + q_z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

と定義される。ここで $\rho$ は密度[kg/m<sup>3</sup>]、 $u, v, w$ は $x, y, z$ 方向の速度成分[m/s]、 $e$ は単位体積あたりの全エネルギー[J/m<sup>3</sup>]、 $p$ は圧力[Pa]、 $h$ は単位体積あたりのエンタルピー[J/m<sup>3</sup>]であり、 $\tau_{ij}$ は粘性応力テンソルの成分[Pa]、 $q_x, q_y, q_z$ は $x, y, z$ 方向の熱流束[W/m]である。ニュートン流体を仮定すると粘性応力テンソル $\tau_{ij}$ は

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij}, \quad (2.3)$$

となり、熱流束 $q_i$ はフーリエの法則に従い

$$\begin{aligned} q_i &= -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_i} \\ &= -\frac{\kappa}{c_p(\gamma - 1)} \frac{\partial a^2}{\partial x_i} \\ &= -\frac{\mu_\infty}{Pr_\infty(\gamma - 1)} \frac{\partial a^2}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2.4)$$

と表される。ここで、添字 $i, j, k$ は空間座標成分を表し $i, j, k = 1, 2, 3$ はそれぞれ $x, y, z$ 方向に対応する。また $\mu$ は粘性係数[Pa·s]、 $\kappa$ は熱伝導率[W/(m·K)]、 $T$ は温度[K]、 $c_p$ は定圧比熱[J/(kg·K)]、 $\gamma$ は比熱比、 $a$ は音速[m/s]  $\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタである。 $Pr_\infty$ はプラントル数であり以下のように定義される。

$$Pr_\infty = \frac{c_p \mu_\infty}{\kappa} \quad (2.5)$$

ここで、 $\mu_\infty$ は基準粘性係数[Pa·s]である。気体は空気を仮定して、 $\gamma = 1.4$ 、 $Pr_\infty = 0.72$ とした。また単位体積当たりの全エネルギー $e$ およびエンタルピー $h$ は、

$$\begin{aligned} e &= \frac{1}{\gamma - 1} p + \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2 + w^2) \\ h &= e + p \end{aligned} \quad (2.6)$$

である。粘性係数 $\mu$ の評価にはSutherlandの式を用いる。

$$\mu = \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^{1.5} \frac{T_\infty + S}{T + S} \mu_\infty \quad (2.7)$$

ここで、 $T_\infty, S$ はそれぞれ基準温度[K]、Sutherland定数[K]であり、空気では $S = 110.4\text{K}$ である。理想気体を仮定すると状態方程式は

$$p = \rho R T \quad (2.8)$$

と表される。ここで $R$ は気体定数[J/(kg·K)]である。

### 2.1.2 レイノルズ平均

本研究では乱流を直接格子で解像するのではなく、平均量を未知変数とし、乱流の変動成分をモデル化するUnsteady Reynolds Averaged Navier-Stokes (URANS)方程式を用いた解析を行う。

未知変数 $f$ に対するレイノルズ平均を以下のように定義する。

$$f = \bar{f} + f' \quad (2.9)$$

ここで、 $\bar{f}$ は未知変数 $f$ のレイノルズ平均量、 $f'$ は変動量を表す。またレイノルズ平均に対して、以下の関係が成り立つと仮定する。

$$\begin{aligned} \overline{f'} &= 0 \\ \overline{\bar{f} f'} &= 0 \\ \overline{\bar{f}} &= \bar{f} \end{aligned} \quad (2.10)$$

圧縮性流体のような密度変動を伴う流れでは、レイノルズ平均のみをNavier-Stokes方程式に適用した場合、密度とその他の物理量の相関項が表れてしまい、モデル化すべき相関項が

増えてしまう．この問題を回避するため，以下で定義される質量加重平均（ファール平均）がレイノルズ平均とあわせて用いられる．

$$\begin{aligned} f &= \tilde{f} + f'' \\ \tilde{f} &= \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \end{aligned} \quad (2.11)$$

ここでファール平均では以下に示す関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} \overline{\rho f''} &= \overline{\rho(f - \tilde{f})} \\ &= \overline{\rho f} - (\bar{\rho} + \rho') \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \\ &= \overline{\rho f} - \overline{\rho f} - \overline{\rho' f} \xrightarrow{0} 0 \\ &= \overline{\rho f} - \overline{\rho f} \\ &= 0 \\ \overline{\rho f} &= \overline{\rho(\tilde{f} + f'')} \\ &= \overline{\rho \tilde{f}} + \overline{\rho f''} \xrightarrow{0} 0 \\ &= \overline{\rho \tilde{f}} + \overline{\rho' \tilde{f}} \xrightarrow{0} 0 \\ &= \overline{\rho \tilde{f}} \\ \overline{\rho f g} &= \overline{\rho(\tilde{f} + f'')(\tilde{g} + g'')} \\ &= \overline{\rho \tilde{f} \tilde{g}} + \overline{\rho \tilde{f} g''} + \overline{\rho \tilde{g} f''} + \overline{\rho f'' g''} \xrightarrow{0} 0 \\ &= \overline{\rho \tilde{f} \tilde{g}} + \overline{\rho f'' g''} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$g$ は $f$ と同様に未知変数を表す．以上をまとめると，

$$\begin{aligned} \overline{\rho f} &= \bar{\rho} \tilde{f} \\ \overline{\rho f''} &= 0 \\ \overline{\rho f g} &= \bar{\rho} \tilde{f} \tilde{g} + \overline{\rho f'' g''} \end{aligned} \quad (2.13)$$

となる．またファール平均においても式(2.10)の関係は同様に成り立つものとしている．

$\rho, p$ にレイノルズ平均を， $u, v, w, e, h, a$ にファール平均を適用すると，

$$\overline{\rho u} = \bar{\rho} \tilde{u}, \quad \overline{\rho v} = \bar{\rho} \tilde{v}, \quad \overline{\rho w} = \bar{\rho} \tilde{w} \quad (2.14)$$



$$\begin{aligned}
\overline{\rho u u} &= \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{u} + \overline{\rho u'' u''} \\
\overline{\rho u v} &= \overline{\rho v u} \\
&= \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{v} + \overline{\rho u'' v''} \\
\overline{\rho u w} &= \overline{\rho w u} \\
&= \bar{\rho} \tilde{u} \tilde{w} + \overline{\rho u'' w''}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\overline{\rho v v} &= \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{v} + \overline{\rho v'' v''} \\
\overline{\rho v w} &= \overline{\rho w v} \\
&= \bar{\rho} \tilde{v} \tilde{w} + \overline{\rho v'' w''}
\end{aligned}$$

$$\overline{\rho w w} = \bar{\rho} \tilde{w} \tilde{w} + \overline{\rho w'' w''}$$

$$\tilde{\tau}_{ij} = \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij}, \tag{2.16}$$

$$\overline{h u} = \tilde{h} \tilde{u} + \overline{h'' u''}, \quad \overline{h v} = \tilde{h} \tilde{v} + \overline{h'' v''}, \quad \overline{h w} = \tilde{h} \tilde{w} + \overline{h'' w''} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
\overline{u \tau_{xx}} &= \tilde{u} \tilde{\tau}_{xx} + \overline{u'' \tau''_{xx}}, & \overline{v \tau_{xy}} &= \tilde{v} \tilde{\tau}_{xy} + \overline{v'' \tau''_{xy}}, & \overline{w \tau_{xz}} &= \tilde{w} \tilde{\tau}_{xz} + \overline{w'' \tau''_{xz}} \\
\overline{u \tau_{yx}} &= \tilde{u} \tilde{\tau}_{yx} + \overline{u'' \tau''_{yx}}, & \overline{v \tau_{yy}} &= \tilde{v} \tilde{\tau}_{yy} + \overline{v'' \tau''_{yy}}, & \overline{w \tau_{yz}} &= \tilde{w} \tilde{\tau}_{yz} + \overline{w'' \tau''_{yz}} \\
\overline{u \tau_{zx}} &= \tilde{u} \tilde{\tau}_{zx} + \overline{u'' \tau''_{zx}}, & \overline{v \tau_{zy}} &= \tilde{v} \tilde{\tau}_{zy} + \overline{v'' \tau''_{zy}}, & \overline{w \tau_{zz}} &= \tilde{w} \tilde{\tau}_{zz} + \overline{w'' \tau''_{zz}}
\end{aligned} \tag{2.18}$$

となる。  $\overline{u''_j \tau''_{ij}}$  は乱流エネルギーの分子拡散を表す項であるが、超音速域までの流れ場では乱流エネルギーの分子拡散の影響はエネルギーの乱流輸送  $\overline{h'' u''_i}$  に比べて十分小さいことが知られている[39]。そのため本研究では、  $\tilde{u}_j \tilde{\tau}_{ij} = 0$  とする。レイノルズ応力およびエネルギーの乱流輸送については非圧縮流れにおける渦粘性近似と同様に以下のようにモデル化する。

$$-\overline{\rho u''_i u''_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
\overline{h'' u''_i} &= -\frac{\mu_t c_p}{Pr_{t\infty}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \\
&= -\frac{\mu_t}{Pr_{t\infty}(\gamma - 1)} \frac{\partial \tilde{a}^2}{\partial x_i}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

ここで、  $\mu_t$  は乱流粘性[Pa·s]、  $Pr_{t\infty}$  は乱流プラントル数であり、  $Pr_{t\infty} = 0.9$  とした。以上の仮定の下で、URANSでは、もとのNavier-Stokes方程式中の未知変数をレイノルズ平均もしくはファールブル平均された量として読み替え、粘性係数  $\mu$  及びプラントル数  $Pr_\infty$  を

$$\begin{aligned}
\mu &\rightarrow \mu + \mu_t \\
\frac{\mu_\infty}{Pr_\infty} &\rightarrow \frac{\mu_\infty}{Pr_\infty} + \frac{\mu_t}{Pr_{t\infty}}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

のように変更して計算を行う。次節以降では変数を表記する際の上付きのバー(̄)およびチルダ(̃)は省略している。乱流粘性  $\mu_t$  の具体的な計算方法は3節で述べる。

速度についてはファールブル平均を用いているため、レイノルズ応力項は密度変動の影響も含んでいる。従って、式(2.19)、式(2.20)のように密度変動のない非圧縮流れ場における渦粘性近似を圧縮性流れ場へ適用可能かどうかは自明ではないことに注意する必要がある。

### 2.1.3 無次元化

式(2.1), 式(2.2)に含まれる各変数に対して以下の無次元化を行う。

$$\begin{aligned} x_i^* &= \frac{x}{L}, \quad t^* = \frac{t}{L/a_\infty}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad u_i^* = \frac{u_i}{a_\infty}, \quad a^* = \frac{a}{a_\infty}, \\ e^* &= \frac{e}{\rho_\infty a_\infty^2}, \quad h^* = \frac{h}{\rho_\infty a_\infty^2}, \quad p^* = \frac{p}{\rho_\infty a_\infty^2}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_\infty}, \quad \mu_t^* = \frac{\mu_t}{\mu_\infty} \end{aligned} \quad (2.22)$$

ここで  $L, a_\infty, \rho_\infty$  はそれぞれ代表長さ[m], 基準音速[m/s], 基準密度[kg/m<sup>3</sup>]である。式(2.22)の無次元変数を式(2.1),(2.2)に代入し上付きアスタリスク(\*)を省略すると、以下の無次元化された支配方程式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} - \frac{M_\infty}{Re_\infty} \left( \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial z} \right) = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}, \\ \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ hu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ hv \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho wv \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ hw \end{bmatrix}, \\ \mathbf{E}_v &= \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \beta_x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \beta_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ \beta_z \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

式(2.21)を反映すると、

$$\tau_{ij} = (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} (\mu + \mu_t) \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij}, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \beta_x &= u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} + \frac{1}{(\gamma - 1)} \left( \frac{1}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial a^2}{\partial x}, \\ \beta_y &= u\tau_{yx} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} + \frac{1}{(\gamma - 1)} \left( \frac{1}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial a^2}{\partial y}, \\ \beta_z &= u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\tau_{zz} + \frac{1}{(\gamma - 1)} \left( \frac{1}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial a^2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

となる。ここで  $Re_\infty$  および  $M_\infty$  は、それぞれレイノルズ数およびマッハ数であり、以下のよう定義される。

$$Re_\infty = \frac{\rho_\infty U_\infty L}{\mu_\infty} \quad (2.27)$$

$$M_\infty = \frac{U_\infty}{a_\infty} \quad (2.28)$$

ここで  $U_\infty$  は基準速度[m/s]である。

### 2.1.4 一般座標変換

本研究では移動物体を扱うため、格子移動を含む一般曲線座標系への変換を行う。格子移動を含む3次元の一般曲線座標系は次のように定義される。

$$\xi = \xi(x, y, z, t), \quad \eta = \eta(x, y, z, t), \quad \zeta = \zeta(x, y, z, t), \quad \tau = t \quad (2.29)$$

変換のマトリクスは微小要素間の変換として、

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta & x_\tau \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta & y_\tau \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta & z_\tau \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \\ d\tau \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

となる。また逆の変換マトリクスは

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \\ d\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z & \xi_t \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z & \eta_t \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z & \zeta_t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ dt \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

となる。式(2.30), (2.31)より次の関係が成り立つ。

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z & \xi_t \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z & \eta_t \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z & \zeta_t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta & x_\tau \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta & y_\tau \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta & z_\tau \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

式(2.32)より、

$$\begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z & \xi_t \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z & \eta_t \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z & \zeta_t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} (y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) & (z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta) & (x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta) & a_1 \\ (y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta) & (z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta) & (x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta) & a_2 \\ (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) & (z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi) & (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} J &= x_\xi(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta) - x_\eta(y_\xi z_\zeta - y_\zeta z_\xi) + x_\zeta(y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi) \\ a_1 &= -[(y_\eta z_\zeta - y_\zeta z_\eta)x_\tau + (y_\zeta z_\xi - y_\xi z_\zeta)y_\tau + (y_\xi z_\eta - y_\eta z_\xi)z_\tau] \\ a_2 &= -[(z_\eta x_\zeta - z_\zeta x_\eta)x_\tau + (z_\zeta x_\xi - z_\xi x_\zeta)y_\tau + (z_\xi x_\eta - z_\eta x_\xi)z_\tau] \\ a_3 &= -[(x_\eta y_\zeta - x_\zeta y_\eta)x_\tau + (x_\zeta y_\xi - x_\xi y_\zeta)y_\tau + (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)z_\tau] \end{aligned} \quad (2.34)$$

である。また $J$ は変換のヤコビアンであり3次元の場合には計算空間のセル体積と物理空間のセル体積の比を表す。以上で導入した一般曲線座標変換を式(2.23)に適用する。まず、 $x$ 方向の非粘性流束について考えると、

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} \quad (2.35)$$

となる。ここで、一般座標変換後においても保存形式を保つために、以下のように微分の順序変換を行う。

$$\begin{aligned} J \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_x \mathbf{E}}{J} \right) &= J \left[ \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi_x \mathbf{E}) + (\xi_x \mathbf{E}) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{J} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi_x \mathbf{E}) + J (\xi_x \mathbf{E}) \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{J} \right) \\ &= \xi_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \mathbf{E} \frac{\partial \xi_x}{\partial \xi} - \frac{\xi_x \mathbf{E}}{J} \frac{\partial J}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

より,

$$\xi_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} = J \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_x \mathbf{E}}{J} \right) - \mathbf{E} \frac{\partial \xi_x}{\partial \xi} + \frac{\xi_x \mathbf{E}}{J} \frac{\partial J}{\partial \xi} \quad (2.37)$$

となる.  $\eta, \zeta$  微分に関しても同様に,

$$\eta_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} = J \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_x \mathbf{E}}{J} \right) - \mathbf{E} \frac{\partial \eta_x}{\partial \eta} + \frac{\eta_x \mathbf{E}}{J} \frac{\partial J}{\partial \eta} \quad (2.38)$$

$$\zeta_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \zeta} = J \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta_x \mathbf{E}}{J} \right) - \mathbf{E} \frac{\partial \zeta_x}{\partial \zeta} + \frac{\zeta_x \mathbf{E}}{J} \frac{\partial J}{\partial \zeta} \quad (2.39)$$

となる. 以上より, 式(2.35)は次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} \xi_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} &= J \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_x \mathbf{E}}{J} \right) + J \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_x \mathbf{E}}{J} \right) + J \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta_x \mathbf{E}}{J} \right) \\ &\quad - \mathbf{E} \left( \frac{\partial \xi_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_x}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta_x}{\partial \zeta} \right) \\ &\quad + \frac{\mathbf{E}}{J} \left( \xi_x \frac{\partial J}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial J}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial J}{\partial \zeta} \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

ここで面積保存則から,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (J \xi_x) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J \eta_x) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (J \zeta_x) = 0 \quad (2.41)$$

であり, これを展開すると

$$\xi_x J_\xi + \eta_x J_\eta + \zeta_x J_\zeta + J \left( \frac{\partial \xi_x}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_x}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta_x}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad (2.42)$$

となる. 従って式(2.40)は,

$$\xi_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} = J \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_x \mathbf{E}}{J} \right) + J \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_x \mathbf{E}}{J} \right) + J \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta_x \mathbf{E}}{J} \right) \quad (2.43)$$

となる.  $y, z$  方向の微分に関しても  $x$  方向と同様に求めることができ, 最終的には以下のようになる.

$$\eta_x \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = J \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_y \mathbf{F}}{J} \right) + J \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_y \mathbf{F}}{J} \right) + J \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta_y \mathbf{F}}{J} \right) \quad (2.44)$$

$$\zeta_x \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial z} = J \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_z \mathbf{G}}{J} \right) + J \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_z \mathbf{G}}{J} \right) + J \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta_z \mathbf{G}}{J} \right) \quad (2.45)$$

ここまでは空間微分項に対する一般座標変換を導出した. 以下では, 時間微分項についても同様の手順で変換を行う. 保存量ベクトル  $\mathbf{Q}$  の時間微分項は,

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} + \xi_t \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \xi} + \eta_t \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \eta} + \zeta_t \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \zeta} \quad (2.46)$$

となる. 式(2.36)と同様に,

$$J \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_t \mathbf{Q}}{J} \right) = \xi_t \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \xi} + \mathbf{Q} \frac{\partial \xi_t}{\partial \xi} - \frac{\xi_t \mathbf{Q}}{J} \frac{\partial J}{\partial \xi}. \quad (2.47)$$

である.  $\eta, \zeta$  方向も同様であるため,

$$\xi_t \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \xi} = J \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_t \mathbf{Q}}{J} \right) - \mathbf{Q} \frac{\partial \xi_t}{\partial \xi} + \frac{\xi_t \mathbf{Q}}{J} \frac{\partial J}{\partial \xi}. \quad (2.48)$$

$$\eta_t \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \eta} = J \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_t \mathbf{Q}}{J} \right) - \mathbf{Q} \frac{\partial \eta_t}{\partial \eta} + \frac{\eta_t \mathbf{Q}}{J} \frac{\partial J}{\partial \eta}, \quad (2.49)$$

$$\zeta_t \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \zeta} = J \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta_t \mathbf{Q}}{J} \right) - \mathbf{Q} \frac{\partial \zeta_t}{\partial \zeta} + \frac{\zeta_t \mathbf{Q}}{J} \frac{\partial J}{\partial \zeta}. \quad (2.50)$$

となる。また,

$$J \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\mathbf{Q}}{J} \right) = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} - \frac{\mathbf{Q}}{J} \frac{\partial J}{\partial \tau}, \quad (2.51)$$

より,

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} = J \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\mathbf{Q}}{J} \right) + \frac{\mathbf{Q}}{J} \frac{\partial J}{\partial \tau}. \quad (2.52)$$

となる。よって、式(2.46)は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} &= J \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\mathbf{Q}}{J} \right) + J \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_t \mathbf{Q}}{J} \right) + J \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_t \mathbf{Q}}{J} \right) + J \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta_t \mathbf{Q}}{J} \right) \\ &\quad + \frac{\mathbf{Q}}{J} \left[ J_\tau + \xi_t J_\xi + \eta_t J_\eta + \zeta_t J_\zeta - J \left( \frac{\partial \xi_t}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_t}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta_t}{\partial \zeta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.53)$$

体積保存則より,

$$\frac{\partial J}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} (J \xi_t) + \frac{\partial}{\partial \eta} (J \eta_t) + \frac{\partial}{\partial \zeta} (J \zeta_t) \quad (2.54)$$

であり、これを展開すると,

$$J_\tau + \xi_t J_\xi + \eta_t J_\eta + \zeta_t J_\zeta - J \left( \frac{\partial \xi_t}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta_t}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta_t}{\partial \zeta} \right) = 0. \quad (2.55)$$

となる。式(2.53)に代入すると,

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = J \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\mathbf{Q}}{J} \right) + J \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\xi_t \mathbf{Q}}{J} \right) + J \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\eta_t \mathbf{Q}}{J} \right) + J \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta_t \mathbf{Q}}{J} \right) \quad (2.56)$$

となる。

式(2.43)-(2.45),(2.56)の一般座標変換をすべての流束ベクトルに対して行い、一般座標での解ベクトルおよび流束ベクトルの形でまとめると,

$$\hat{\mathbf{Q}} = \frac{1}{J} \mathbf{Q}, \quad (2.57)$$

$$\hat{\mathbf{E}} = \frac{1}{J} (\xi_x \mathbf{E} + \xi_y \mathbf{F} + \xi_z \mathbf{G}), \quad \hat{\mathbf{E}}_v = \frac{1}{J} (\xi_x \mathbf{E}_v + \xi_y \mathbf{F}_v + \xi_z \mathbf{G}_v), \quad (2.58)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \frac{1}{J} (\eta_x \mathbf{E} + \eta_y \mathbf{F} + \eta_z \mathbf{G}), \quad \hat{\mathbf{F}}_v = \frac{1}{J} (\eta_x \mathbf{E}_v + \eta_y \mathbf{F}_v + \eta_z \mathbf{G}_v), \quad (2.59)$$

$$\hat{\mathbf{G}} = \frac{1}{J} (\zeta_x \mathbf{E} + \zeta_y \mathbf{F} + \zeta_z \mathbf{G}), \quad \hat{\mathbf{G}}_v = \frac{1}{J} (\zeta_x \mathbf{E}_v + \zeta_y \mathbf{F}_v + \zeta_z \mathbf{G}_v). \quad (2.60)$$

となる。よって一般座標系における3次元圧縮性Navier-Stokes方程式は以下ようになる。

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{Q}}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{G}}}{\partial \zeta} - \frac{M_\infty}{Re_\infty} \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{E}}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{\mathbf{F}}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \hat{\mathbf{G}}_v}{\partial \zeta} \right) = \mathbf{0} \quad (2.61)$$

一般座標系における $\xi, \eta, \zeta$ 方向の速度成分を反変速度として以下のように定義する。

$$\begin{aligned} U &= \xi_x u + \xi_y v + \xi_z w + \xi_t, \\ V &= \eta_x u + \eta_y v + \eta_z w + \eta_t, \\ W &= \zeta_x u + \zeta_y v + \zeta_z w + \zeta_t. \end{aligned} \quad (2.62)$$

反変速度を用いて一般座標系における流束ベクトルを記述すると,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{Q}} &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ e \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{E}} &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + \xi_x p \\ \rho v U + \xi_y p \\ \rho w U + \xi_z p \\ h U \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}}_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x \tau_{xx} + \xi_y \tau_{xy} + \xi_z \tau_{xz} \\ \xi_x \tau_{yx} + \xi_y \tau_{yy} + \xi_z \tau_{yz} \\ \xi_x \tau_{zx} + \xi_y \tau_{zy} + \xi_z \tau_{zz} \\ \xi_x \beta_x + \xi_y \beta_y + \xi_z \beta_z \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{F}} &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho V \\ \rho u V + \eta_x p \\ \rho v V + \eta_y p \\ \rho w V + \eta_z p \\ h V \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{F}}_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_x \tau_{xx} + \eta_y \tau_{xy} + \eta_z \tau_{xz} \\ \eta_x \tau_{yx} + \eta_y \tau_{yy} + \eta_z \tau_{yz} \\ \eta_x \tau_{zx} + \eta_y \tau_{zy} + \eta_z \tau_{zz} \\ \eta_x \beta_x + \eta_y \beta_y + \eta_z \beta_z \end{bmatrix}, \\ \hat{\mathbf{G}} &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \rho W \\ \rho u W + \zeta_x p \\ \rho v W + \zeta_y p \\ \rho w W + \zeta_z p \\ h W \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{G}}_v = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} 0 \\ \zeta_x \tau_{xx} + \zeta_y \tau_{xy} + \zeta_z \tau_{xz} \\ \zeta_x \tau_{yx} + \zeta_y \tau_{yy} + \zeta_z \tau_{yz} \\ \zeta_x \tau_{zx} + \zeta_y \tau_{zy} + \zeta_z \tau_{zz} \\ \zeta_x \beta_x + \zeta_y \beta_y + \zeta_z \beta_z \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.63}$$

となる. 以上の操作により一般座標系における支配方程式が得られた. 一般座標変換において格子の直交性は仮定しておらず, 任意の曲線座標系に対して上記の変換が成り立つ.

## 2.2 流体方程式の数値計算法

本節では前節で導出した一般座標系における無次元化されたURANS方程式の数値計算手法について述べる. 本節の説明では簡単のため, 上付きの $\hat{\phantom{x}}$ は省略している.

### 2.2.1 支配方程式の離散化

まず式(2.61)を時間方向に陰的に離散化すると以下ようになる.

$$\frac{(1 + a_\phi)\mathbf{Q}^{n+1} - (1 + 2a_\phi)\mathbf{Q}^n + a_\phi\mathbf{Q}^{n-1}}{\Delta t} = - \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \zeta} \right)^{n+1} + \frac{M_\infty}{Re_\infty} \left( \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}_v}{\partial \zeta} \right)^{n+1}\tag{2.64}$$

ここで,  $n$ は時間ステップを表す. また $a_\phi$ は時間精度を変更するパラメータであり,  $a_\phi = 0$ のとき時間1次精度,  $a_\phi = 0.5$ のとき時間2次精度となる. また空間方向には有限体積的に以下のように離散化する.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} &= \frac{\mathbf{E}_{j+1/2,k,l} - \mathbf{E}_{j-1/2,k,l}}{\Delta \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} &= \frac{\mathbf{F}_{j,k+1/2,l} - \mathbf{F}_{j,k-1/2,l}}{\Delta \eta} \\ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \zeta} &= \frac{\mathbf{G}_{j,k,l+1/2} - \mathbf{G}_{j,k,l-1/2}}{\Delta \zeta}\end{aligned}\tag{2.65}$$

ここで,  $j, k, l$ は3次元格子における $\xi, \eta, \zeta$ 方向の格子座標番号を表す. また計算領域 $(\xi, \eta, \zeta)$ における格子間隔は任意であるが, 簡単のため $\Delta \xi = \Delta \eta = \Delta \zeta = 1$ とする. 非粘性項のみ示した

が、粘性項についても同様である。また $\mathbf{E}_{j+1/2,k,l}$ は格子点上ではなく計算セル界面での流束を表すため数値流束と呼ばれる。流束ベクトルの数値流束は

$$\mathbf{E}_{j+1/2,k,l} = \mathbf{E}(\mathbf{Q}_{j+1/2,k,l}^+, \mathbf{Q}_{j+1/2,k,l}^-) \quad (2.66)$$

のように保存量ベクトルのセル界面の値から計算される。ここで $-$ ,  $+$ はそれぞれ計算セルの左側, 右側の界面を表す。

### 2.2.2 非粘性流束の計算法

非粘性流束の計算にはAdvection Upstream Splitting Method (AUSM) 族スキームであるSimple High-resolution Upwind Scheme (SHUS) [40]を用いた。以下にスキームの詳細を示す。

非粘性流束の $x$ 方向成分に着目し、流束ベクトルを質量流束と境界圧力に分けると以下のよう書ける。

$$\mathbf{E} = m\phi + p\mathbf{N} \quad (2.67)$$

ここで,

$$m = \rho U, \quad \phi = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \\ h/\rho \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.68)$$

である。同様の形式で数値流束 $\mathbf{E}_{j+1/2,k,l}$ はAUSM族スキームにおいて以下のように表される。

$$\mathbf{E}_{j+1/2,k,l} = \frac{m + |m|}{2} \phi^- + \frac{m - |m|}{2} \phi^+ + p\mathbf{N} \quad (2.69)$$

質量流束 $m$ および境界圧力 $p$ について様々な求め方が提案されている。本研究で用いるSHUSでは質量流束 $m$ および境界圧力 $p$ を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{2} \left[ (\rho U)^+ + (\rho U)^- - |\bar{U}| \Delta \rho - \frac{|\bar{M} + 1| - |\bar{M} - 1|}{2} \bar{\rho} \Delta U - \frac{|\bar{M} + 1| - |\bar{M} - 1| - 2|\bar{M}|}{2} \frac{\Delta p}{\bar{a}} \right] \\ p &= \beta^+ p^+ + \beta^- p^- + p' \\ \beta^\pm &= \frac{1}{4} (2 \mp M^\pm) (M^\pm \pm 1)^2, \quad \text{if } |M^\pm| < 1 \\ \beta^\pm &= \frac{1}{2} (1 + \text{sign}(\pm M^\pm)), \quad \text{otherwise} \\ p' &= \frac{1}{2} (m^+ - m^- - |m|) (U^+ - U^-) \end{aligned} \quad (2.70)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{U^+ + U^-}{2}, \quad \bar{a} = \frac{a^+ + a^-}{2}, \quad \bar{M} = \frac{\bar{U}}{\bar{a}} \\ \Delta \rho &= \rho^+ - \rho^-, \quad \Delta U = U^+ - U^-, \quad \Delta p = p^+ - p^- \end{aligned} \quad (2.71)$$

である。セル界面( $\pm$ )での各物理量は次項で述べるMUSCL補間により求める。 $\mathbf{E}_{j-1/2,k,l}$ およびその他の方向の流束ベクトルについても同様の計算を行う。

### 2.2.3 MUSCL法による計算セル界面の値の高次精度補間

計算セル界面における物理量の再構築にはMonotone Upstream-centered Schemes for Conservation Laws (MUSCL) 法[41]を用いた。MUSCL法ではFig. 2.1に示すようにセル内の物理

量 $q$ の分布を仮定し、セル界面の値を計算する。セル内の物理量 $q$ の分布は、

$$q(x) = q_j + \frac{1}{\Delta x}(x - x_j)\delta_j q + \frac{3\kappa}{2(\Delta x)^2} \left[ (x - x_j)^2 - \frac{(\Delta x)^2}{12} \right] \delta_j^2 q, \quad (x_{j-1/2} \leq x \leq x_{j+1/2}) \quad (2.72)$$

となる。ここで $q_j$ は以下で表されるセル平均値である。

$$q_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} q(x) dx \quad (2.73)$$

また $\delta_j$ ,  $\delta_j^2$ は以下の式で表される差分オペレータである。

$$\begin{aligned} \delta_j q &= \frac{1}{2}(q_{j+1} - q_{j-1}) \\ \delta_j^2 q &= q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1} \end{aligned} \quad (2.74)$$

セル境界での物理量は、

$$\begin{aligned} q_{j+1/2}^- &= q_j + \frac{1}{4}(1 - \kappa)(q_j - q_{j-1}) + \frac{1}{4}(1 + \kappa)(q_{j+1} - q_j) \\ q_{j+1/2}^+ &= q_{j+1} - \frac{1}{4}(1 - \kappa)(q_{j+1} - q_j) - \frac{1}{4}(1 + \kappa)(q_{j+2} - q_{j+1}) \end{aligned} \quad (2.75)$$

と計算できる。また

$$\begin{aligned} \Delta_j^- &= q_j - q_{j-1}, \quad \Delta_j^+ = q_{j+1} - q_j \\ \Delta_{j+1}^- &= q_{j+1} - q_j, \quad \Delta_{j+1}^+ = q_{j+2} - q_{j+1} \end{aligned} \quad (2.76)$$

とすると式(2.75)は、

$$\begin{aligned} q_{j+1/2}^- &= q_j + \frac{1}{4}(1 - \kappa)\Delta_j^- + \frac{1}{4}(1 + \kappa)\Delta_j^+ \\ q_{j+1/2}^+ &= q_{j+1} - \frac{1}{4}(1 - \kappa)\Delta_{j+1}^+ - \frac{1}{4}(1 + \kappa)\Delta_{j+1}^- \end{aligned} \quad (2.77)$$

となる。本研究では遷音速流れを対象としているため衝撃波の発生など不連続な分布が生じる。2次精度以上のスキームでは不連続面において計算が不安定になってしまうため、制限関数を用いて不連続面においては1次精度に補間精度を落とし計算を安定化する。制限関数については様々提案されているが、本研究ではVan Albada limiterを用いた。Van Albada limiterを用いた場合、式(2.77)は以下になる。

$$\begin{aligned} q_{j+1/2}^- &= q_j + \frac{1}{4}(1 - \kappa s_j)\Delta_j^- + \frac{1}{4}(1 + \kappa s_j)\Delta_j^+ \\ q_{j+1/2}^+ &= q_{j+1} - \frac{1}{4}(1 - \kappa s_{j+1})\Delta_{j+1}^+ - \frac{1}{4}(1 + \kappa s_{j+1})\Delta_{j+1}^- \\ s_j &= \frac{2\Delta_j^+\Delta_j^- + \epsilon}{(\Delta_j^+)^2 + (\Delta_j^-)^2 + \epsilon} \end{aligned} \quad (2.78)$$

ここで $\epsilon$ はゼロ除算回避のための十分小さな値である。式(2.78)中の $\kappa$ の値によって補間精度を変更可能で、 $\kappa = -1$ で2次精度完全風上法、 $\kappa = 0$ で2次精度重み付き風上法、 $\kappa = 1/3$ で3次精度重み付き風上法となる。本研究では $\kappa = 1/3$ の3次精度補間を採用した。また補間の対象とする変数には任意性があるが、本研究では保存変数ではなく基礎変数である $\rho$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ を対象にMUSCL補間を行った。これは一般的に保存変数よりも基礎変数に対する補間の方が安定かつ制限関数による精度低下を低減可能であることが知られているためである。





## LUSGS陰解法[42]

一般座標系における3次元オイラー方程式は以下ようになる.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \zeta} = \mathbf{0} \quad (2.81)$$

式(2.81)を陰的に離散化すると,

$$\frac{\Delta \mathbf{Q}^n}{\Delta t} + \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \zeta} \right)^{n+1} = \mathbf{0} \quad (2.82)$$

となる.  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ を時間方向に線形化すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{n+1} &\simeq \mathbf{E}^n + \frac{\partial \mathbf{E}^n}{\partial \mathbf{Q}} \Delta \mathbf{Q}^n \\ &= \mathbf{E}^n + \mathbf{A}^n \Delta \mathbf{Q}^n \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{n+1} &\simeq \mathbf{F}^n + \frac{\partial \mathbf{F}^n}{\partial \mathbf{Q}} \Delta \mathbf{Q}^n \\ &= \mathbf{F}^n + \mathbf{B}^n \Delta \mathbf{Q}^n \end{aligned} \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^{n+1} &\simeq \mathbf{G}^n + \frac{\partial \mathbf{G}^n}{\partial \mathbf{Q}} \Delta \mathbf{Q}^n \\ &= \mathbf{G}^n + \mathbf{C}^n \Delta \mathbf{Q}^n \end{aligned} \quad (2.85)$$

となる.  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ は流束ヤコビアンと呼ばれる. 式(2.82)に代入すると,

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{I} + \Delta t \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{B} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{C} \right) \right]^n \Delta \mathbf{Q}^n &= -\Delta t \mathbf{R}(\mathbf{Q}^n) \\ \mathbf{R}(\mathbf{Q}^n) &= \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \zeta} \right)^n \end{aligned} \quad (2.86)$$

となる. 流束ヤコビアンを以下のように正負の符号によって分解する

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^+ + \mathbf{A}^- \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^- \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C}^+ + \mathbf{C}^- \end{aligned} \quad (2.87)$$

ここで上付きの $\pm$ は, 流束ヤコビアンの固有値の符号に基づく分解を表し, 正の固有値に対応する成分を $\mathbf{A}^+$ , 負の固有値に対応する成分を $\mathbf{A}^-$ とする. 式(2.86)に式(2.87)を代入し近似LDU分解を適用すると,

$$\begin{aligned} &\left[ \mathbf{I} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \mathbf{A}^- + \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{A}^+ - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \mathbf{B}^- + \Delta t \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{B}^+ - \frac{\Delta t}{\Delta \zeta} \mathbf{C}^- + \Delta t \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{C}^+ \right]_{j,k,l}^n \\ &\left[ \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} (\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-) + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} (\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-) + \frac{\Delta t}{\Delta \zeta} (\mathbf{C}^+ - \mathbf{C}^-) \right]_{j,k,l}^{n-1} \\ &\left[ \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \mathbf{A}^+ + \Delta t \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{A}^- + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \mathbf{B}^+ + \Delta t \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{B}^- + \frac{\Delta t}{\Delta \zeta} \mathbf{C}^+ + \Delta t \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{C}^- \right]_{j,k,l}^n \Delta \mathbf{Q}_{j,k,l}^n \\ &= -\Delta t \mathbf{R}(\mathbf{Q}_{j,k,l}^n) \end{aligned} \quad (2.88)$$

となる. 流束ヤコビアンを最大固有値で以下のように近似する.

$$\mathbf{A}^\pm \simeq \frac{\mathbf{A} \pm \sigma_A}{2}, \quad \mathbf{B}^\pm \simeq \frac{\mathbf{B} \pm \sigma_B}{2}, \quad \mathbf{C}^\pm \simeq \frac{\mathbf{C} \pm \sigma_C}{2} \quad (2.89)$$

ここで,

$$\begin{aligned}\sigma_A &= U + a\sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2} \\ \sigma_B &= V + a\sqrt{\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2} \\ \sigma_C &= W + a\sqrt{\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2}\end{aligned}\quad (2.90)$$

である. また式(2.88)の微分項に関しては1次精度風上差分法で以下のように離散化する.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \xi} A_{j,k,l}^+ &= \frac{A_{j,k,l}^+ - A_{j-1,k,l}^+}{\Delta \xi}, & \frac{\partial}{\partial \xi} A_{j,k,l}^- &= \frac{A_{j+1,k,l}^- - A_{j,k,l}^-}{\Delta \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} B_{j,k,l}^+ &= \frac{B_{j,k,l}^+ - B_{j,k-1,l}^+}{\Delta \eta}, & \frac{\partial}{\partial \eta} B_{j,k,l}^- &= \frac{B_{j,k+1,l}^- - B_{j,k,l}^-}{\Delta \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} C_{j,k,l}^+ &= \frac{C_{j,k,l}^+ - C_{j,k,l-1}^+}{\Delta \zeta}, & \frac{\partial}{\partial \zeta} C_{j,k,l}^- &= \frac{C_{j,k,l+1}^- - C_{j,k,l}^-}{\Delta \zeta}\end{aligned}\quad (2.91)$$

式(2.89), (2.91)を式(2.88)に代入すると,

$$\begin{aligned}& \left[ I + \Delta t I \left( \frac{\sigma_{A_{j,k,l}}}{\Delta \xi} + \frac{\sigma_{B_{j,k,l}}}{\Delta \eta} + \frac{\sigma_{C_{j,k,l}}}{\Delta \zeta} \right) - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} A_{j-1,k,l} - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} B_{j,k-1,l} - \frac{\Delta t}{\Delta \zeta} C_{j,k,l-1} \right]^n \\& \left[ I + \Delta t I \left( \frac{\sigma_{A_{j,k,l}}}{\Delta \xi} + \frac{\sigma_{B_{j,k,l}}}{\Delta \eta} + \frac{\sigma_{C_{j,k,l}}}{\Delta \zeta} \right) \right]^{n-1} \\& \left[ I + \Delta t I \left( \frac{\sigma_{A_{j,k,l}}}{\Delta \xi} + \frac{\sigma_{B_{j,k,l}}}{\Delta \eta} + \frac{\sigma_{C_{j,k,l}}}{\Delta \zeta} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} A_{j+1,k,l} + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} B_{j,k+1,l} + \frac{\Delta t}{\Delta \zeta} C_{j,k,l+1} \right]^n \Delta Q_{j,k,l}^n \\& = -\Delta t R(Q_{j,k,l}^n)\end{aligned}\quad (2.92)$$

となる. 式(2.92)は以下に示す3段階の往復スweepで計算可能である.

$$\begin{aligned}& \left[ I + \Delta t I \left( \frac{\sigma_{A_{j,k,l}}}{\Delta \xi} + \frac{\sigma_{B_{j,k,l}}}{\Delta \eta} + \frac{\sigma_{C_{j,k,l}}}{\Delta \zeta} \right) \right] \Delta Q_{j,k,l}^* \\& = -\Delta t R(Q_{j,k,l}^n) + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} A_{j-1,k,l} \Delta Q_{j-1,k,l}^* + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} B_{j,k-1,l} \Delta Q_{j,k-1,l}^* + \frac{\Delta t}{\Delta \zeta} C_{j,k,l-1} \Delta Q_{j,k,l-1}^*.\end{aligned}\quad (2.93)$$

$$\Delta Q_{j,k,l}^{**} = \left[ I + \Delta t I \left( \frac{\sigma_{A_{j,k,l}}}{\Delta \xi} + \frac{\sigma_{B_{j,k,l}}}{\Delta \eta} + \frac{\sigma_{C_{j,k,l}}}{\Delta \zeta} \right) \right] \Delta Q_{j,k,l}^* \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned}& \left[ I + \Delta t I \left( \frac{\sigma_{A_{j,k,l}}}{\Delta \xi} + \frac{\sigma_{B_{j,k,l}}}{\Delta \eta} + \frac{\sigma_{C_{j,k,l}}}{\Delta \zeta} \right) \right] \Delta Q_{j,k,l}^n \\& = \Delta Q_{j,k,l}^{**} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} A_{j+1,k,l} \Delta Q_{j+1,k,l}^n - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} B_{j,k+1,l} \Delta Q_{j,k+1,l}^n - \frac{\Delta t}{\Delta \zeta} C_{j,k,l+1} \Delta Q_{j,k,l+1}^n.\end{aligned}\quad (2.95)$$

また式(2.83)-(2.85)より,

$$\begin{aligned}A_{j-1,k,l} \Delta Q_{j-1,k,l}^* &= \Delta E_{j-1,k,l}^*, & B_{j,k-1,l} \Delta Q_{j,k-1,l}^* &= \Delta F_{j,k-1,l}^*, & C_{j,k,l-1} \Delta Q_{j,k,l-1}^* &= \Delta G_{j,k,l-1}^* \\A_{j+1,k,l} \Delta Q_{j+1,k,l}^n &= \Delta E_{j+1,k,l}^n, & B_{j,k+1,l} \Delta Q_{j,k+1,l}^n &= \Delta F_{j,k+1,l}^n, & C_{j,k,l+1} \Delta Q_{j,k,l+1}^n &= \Delta G_{j,k,l+1}^n\end{aligned}\quad (2.96)$$

であるため, 式(2.93)-(2.95)は最終的に以下ようになる.

$$\begin{aligned}& \left[ I + \Delta t I \left( \frac{\sigma_{A_{j,k,l}}}{\Delta \xi} + \frac{\sigma_{B_{j,k,l}}}{\Delta \eta} + \frac{\sigma_{C_{j,k,l}}}{\Delta \zeta} \right) \right] \Delta Q_{j,k,l}^* \\& = -\Delta t R(Q^n)_{j,k,l} + \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \Delta E_{j-1,k,l}^* + \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \Delta F_{j,k-1,l}^* + \frac{\Delta t}{\Delta \zeta} \Delta G_{j,k,l-1}^*.\end{aligned}\quad (2.97)$$

$$\Delta \mathbf{Q}_{j,k,l}^{**} = \left[ \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{I} \left( \frac{\sigma_{A_{j,k,l}}}{\Delta \xi} + \frac{\sigma_{B_{j,k,l}}}{\Delta \eta} + \frac{\sigma_{C_{j,k,l}}}{\Delta \zeta} \right) \right] \Delta \mathbf{Q}_{j,k,l}^* \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} & \left[ \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{I} \left( \frac{\sigma_{A_{j,k,l}}}{\Delta \xi} + \frac{\sigma_{B_{j,k,l}}}{\Delta \eta} + \frac{\sigma_{C_{j,k,l}}}{\Delta \zeta} \right) \right] \Delta \mathbf{Q}_{j,k,l}^n \\ &= \Delta \mathbf{Q}_{j,k,l}^{**} - \frac{\Delta t}{\Delta \xi} \Delta \mathbf{E}_{j+1,k,l}^n - \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \Delta \mathbf{F}_{j,k+1,l}^n - \frac{\Delta t}{\Delta \zeta} \Delta \mathbf{G}_{j,k,l+1}^n. \end{aligned} \quad (2.99)$$

これまでの議論では3次元オイラー方程式を用いていたため粘性項については考慮していない。粘性計算を行う場合、粘性項の効果を近似的に最大固有値に加える。

$$\begin{aligned} \sigma_{A_v} &= \frac{2(\mu + \mu_t)(\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2)}{Re_\infty \rho \Delta \xi} \\ \sigma_{B_v} &= \frac{2(\mu + \mu_t)(\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2)}{Re_\infty \rho \Delta \eta} \\ \sigma_{C_v} &= \frac{2(\mu + \mu_t)(\zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2)}{Re_\infty \rho \Delta \zeta} \end{aligned} \quad (2.100)$$

LUSGS法では式(2.89)の近似により、式(2.97)-(2.99)の左辺が対角成分のみとなるため行列反転の必要がなく、計算コストが劇的に削減された。またスweep計算時にはハイパープレーンに沿って並列性があるため、ベクトル演算などに適している。一方、式(2.89)の近似により時間精度が1次以下となっているため非定常計算時には時間精度を確保するため次節で述べる内部反復計算が必要となる。

#### DPLUR陰解法[43, 44]

LUSGS陰解法[42]はハイパープレーンに沿った並列性を有するものの、 $j, k, l$ 各方向のデータの依存性があるため、領域分割を行った場合、単純には並列計算を行うことができない。またハイパープレーンに沿った演算ではメモリがストライドアクセスとなるためキャッシュを有効に使えず実行性能が低下する。従って、本研究ではデータ依存性のないDPLUR陰解法[43, 44]を時間積分法として用いる。

LUSGS陰解法は式(2.97)-(2.99)の1反復相当の往復スweep計算であったが、DPLUR陰解法では、複数回の反復計算を行う。まず $\Delta \mathbf{Q}_{j,k,l}$ の初期値 $\Delta \mathbf{Q}_{j,k,l}^0$ を以下のように求める。

$$\Delta \mathbf{Q}_{j,k,l}^0 = - \left[ \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{I} \left( \frac{\sigma_{A_{j,k,l}}}{\Delta \xi} + \frac{\sigma_{B_{j,k,l}}}{\Delta \eta} + \frac{\sigma_{C_{j,k,l}}}{\Delta \zeta} \right) \right]^{n-1} \Delta t \mathbf{R}(\mathbf{Q}_{j,k,l}^n) \quad (2.101)$$

これは式(2.97)-(2.99)の非対角成分を無視したものに相当する。次に $m = 1, mmax$ の反復を導入し、以下のように計算する。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{Q}_{j,k,l}^m &= \left[ \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{I} \left( \frac{\sigma_{A_{j,k,l}}}{\Delta \xi} + \frac{\sigma_{B_{j,k,l}}}{\Delta \eta} + \frac{\sigma_{C_{j,k,l}}}{\Delta \zeta} \right) \right]^{m-1} \\ & \left[ -\Delta t \mathbf{R}(\mathbf{Q}_{j,k,l}^n) + \Delta t \left( \frac{\Delta \mathbf{E}_{j-1,k,l}^+ - \Delta \mathbf{E}_{j+1,k,l}^+}{\Delta \xi} + \frac{\Delta \mathbf{F}_{j,k-1,l}^+ - \Delta \mathbf{F}_{j,k+1,l}^+}{\Delta \eta} + \frac{\Delta \mathbf{G}_{j,k,l-1}^+ - \Delta \mathbf{G}_{j,k,l+1}^+}{\Delta \zeta} \right) \right]^{m-1} \\ \Delta \mathbf{Q}_{j,k,l}^n &= \Delta \mathbf{Q}_{j,k,l}^{mmax} \end{aligned} \quad (2.102)$$

これは、式(2.97)-(2.99)の非対角項を $m - 1$ ステップ目の値で評価した場合の式に相当する。式(2.102)の右辺はすべて $m - 1$ ステップの情報から計算可能であるため、データ依存性は全くない計算となっている。DPLUR陰解法ではLUSGS陰解法におけるガウスザイデル反復をヤコビ反復に変更することでデータ依存性をなくしている。ヤコビ法にしたことでガウス

ザイデル法に比べ収束性は悪化するため $mmax$ 回の反復計算を行い、収束性を改善している。Ref.[44]では $mmax = 4$ 以上で良好な収束性を得られることが示されており、本研究では $mmax = 4 - 6$ とした。DPLUR陰解法の計算量はLUSGS陰解法に比べておよそ $mmax$ 倍となるが、データ依存性がないためメモリアクセスが連続となり実行効率が向上する。また任意の方向に対して並列化が可能であるため、大規模計算時にはDPLUR陰解法の方が高速な計算が可能となる。またDPLUR陰解法は反応流[43]や非構造格子[45]、非構造格子上でのGPU計算[46]などでも利用されている。

### 2.2.6 内部反復による時間精度の確保

前節で述べたように、流束ヤコビアン の最大固有値による近似によって、LUSGS陰解法、DPLUR陰解法においては時間精度が1次以下となっている。定常計算においては収束解さえ得られれば十分であるため問題とならないが、非定常計算においては時間精度を確保する必要がある。そこで、疑似時間 $\tau$ を用いて以下のような内部反復を導入する。

$$\frac{\Delta Q^i}{\Delta \tau} = \frac{(1 + a_\phi)Q^{i-1} - (1 + 2a_\phi)Q^n + a_\phi Q^{n-1}}{\Delta t} + \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \zeta} \right)^i \quad (2.103)$$

$$\Delta Q^i = Q^i - Q^{i-1}$$

ここで $i$ は内部反復回数を表し、 $imax$ が十分大きく $\Delta Q^{imax} = 0$ となれば左辺の近似にかかわらず、右辺第一項の離散化によって時間精度は決定される。実際の計算においては、

$$\left[ \mathbf{I} + \Delta \tau \left( \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{B} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{C} \right) \right]^i \Delta Q^i \quad (2.104)$$

$$= \Delta \tau \left[ \frac{(1 + a_\phi)Q^{i-1} - (1 + 2a_\phi)Q^n + a_\phi Q^{n-1}}{\Delta t} - \mathbf{R}(Q^i) \right]$$

として、疑似時間についてはDPLUR陰解法による時間積分を行う。また $\Delta \tau$ は $\Delta t$ に依らず収束性を考慮した任意の値をとれるが、本研究では $\Delta \tau = \Delta t$ とした。

### 2.2.7 境界条件

流入出境界は流速が超音速か亜音速かで場合分けしている。超音速の場合、流入条件はすべての基礎変数に対して指定する一様流条件で固定、流出条件はすべての基礎変数を外挿した。亜音速の場合、流入条件は圧力以外の基礎変数は一様流条件で固定し、圧力は外挿、流出条件は圧力以外の基礎変数は外挿し、圧力は一様流静圧で固定した。壁面では滑りなし断熱条件としており、本研究では移動境界問題を扱うため、壁面速度は物体の移動速度となる。また壁面圧力は壁面に対して法線方向の運動量方程式を解くことで求めた。

## 2.3 乱流モデル

本研究ではURANS方程式を解くため、乱流モデルにより乱流粘性 $\mu_t$ を決める必要がある。航空空力分野で用いられる代表的なRANSモデルとしては、0方程式系のBaldwin-Lomax (BL) モデル[47]、1方程式系のSpalart-Allmaras (SA) モデル[48]、2方程式系のMenter  $k - \omega$  Shear Stress Transport (SST) モデル[49]が挙げられる。NASA Turbulence Modeling Resource[50]ではSA、SSTモデルおよびその他の様々な乱流モデルに関して詳細な説明がなされている。本研究では計算の安定性が高く、様々な改良モデルが提案されているSAモデルを用いて計算を行う。

### 2.3.1 Spalart-Allmarasモデル[48]

SAモデルでは、乱流粘性 $\mu_t$ を

$$\mu_t = \rho \hat{\nu} f_{v1} \quad (2.105)$$

と表し、 $\hat{\nu}$ に関する輸送方程式を解く．以下にNavier-Stokes方程式と同様の無次元化を行った、 $\hat{\nu}$ の輸送方程式を示す．

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial t} + u \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial x} + v \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial y} + w \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial z} \\ &= C_{b1}(1 - f_{t2})\hat{S}\hat{\nu} + \frac{1}{\sigma} \frac{M_\infty}{Re_\infty} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (\nu + \hat{\nu}) \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial x} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\nu + \hat{\nu}) \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial y} \right\} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\nu + \hat{\nu}) \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial z} \right\} \right. \\ & \quad \left. + C_{b2} \left\{ \left( \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \hat{\nu}}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] - \frac{M_\infty}{Re_\infty} C_{w1} f_w \left( \frac{\hat{\nu}}{d} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.106)$$

ここで、各モデル関数および定数は以下の通りである．

$$\begin{aligned} \hat{S} &= S + \frac{M_\infty}{Re_\infty} \frac{\hat{\nu}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, \quad S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ \chi &= \frac{\hat{\nu}}{\nu}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \\ r &= \min \left( \frac{M_\infty}{Re_\infty} \frac{\hat{\nu}}{\hat{S} \kappa^2 d^2}, r_{\max} \right), \quad g = r + C_{w2}(r^6 - r), \\ f_w &= g \left( \frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad f_{t2} = c_{t3} \exp(-c_{t4} \chi^2) \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{2}{3}, \quad C_{b1} = 0.1355, \quad C_{b2} = 0.622, \quad \kappa = 0.41, \\ C_{v1} &= 7.1, \quad C_{w2} = 0.3, \quad C_{w3} = 2.0, \quad r_{\max} = 10, \\ c_{t3} &= 1.2, \quad c_{t4} = 0.5 \\ C_{w1} &= \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + C_{b2}}{\sigma} \end{aligned} \quad (2.108)$$

本研究では式(2.106)に示すように非保存系の輸送方程式を扱ったため、一般座標系における微分は未知変数 $f$ に対して、

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \xi_x \frac{\partial f}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial f}{\partial \eta} + \zeta_x \frac{\partial f}{\partial \zeta} \quad (2.109)$$

のように行った．

### 2.3.2 低レイノルズ補正[51]

フラッター試験を模擬した計算を行う場合、動圧を変化させるが、それに従いレイノルズ数も変化する．フラッターが生じやすくなる領域では動圧も小さい値となるためレイノルズ数も低くなる．オリジナルのSAモデルは高レイノルズ数流れを仮定しており、低レイノルズ数流れにおいては摩擦係数の予測精度が悪化する．従って、本研究では以下に示す低レイノルズ数流れに対する係数補正を導入する[51]．

$$\begin{aligned} C_{w2LRe} &= C_{w4} + \frac{C_{w5}}{((\chi/40) + 1)^2} \\ C_{w4} &= 0.21, \quad C_{w5} = 1.5 \end{aligned} \quad (2.110)$$

上記の $C_{w2LRe}$ をオリジナルのSAモデルの $C_{w2}$ の代わりに用いる．

### 2.3.3 非線形渦粘性モデル

2.1.2節で導入した渦粘性モデルはレイノルズ応力を平均速度勾配の1次の項のみで記述した線形モデルである．線形モデルではレイノルズ応力の非等方性を考慮できないため、正方

形ダクトの角部で生じる2次流れを表現できない．非等方性を考慮可能なモデルとして，レイノルズ応力の輸送方程式を直接解く，Reynolds-Stress Transport equation Model (RSTM) があるが，レイノルズ応力テンソルの各成分を直接解くため未知変数が多く，方程式も複雑であることから実用計算ではあまり使われていない．実用的には，渦粘性モデルに平均速度勾配の2次の項を追加する非線形渦粘性モデルがよく使われる．SAモデルではSpalartによってQuadratic Constitutive Relation, 2000 version (QCR2000) [52]が提案され，その後，QCR2013[53], QCR2020[54], QCR2024[55]などの修正版が発表されている．本研究では，境界層はく離を伴う正方形ダクト流れにおいてWall-Resolved LESと最もよく一致するように修正がなされているQCR2024[55]を採用する．QCR2024は正方形ダクト流れ以外にも，後縁はく離を伴う翼周りの流れにおいてもWRLESの結果とよく一致することが確認されている[56]．

QCR2024ではレイノルズ応力を以下のように近似する．

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^{\text{QCR2024}} = & \tau_{ij}^{\text{SA}} - C_{\text{cr1}} (O_{ik}\tau_{jk} + O_{jk}\tau_{ik}) \\ & - C_{\text{cr2}}\mu_t \frac{\left( S_{ik}^* S_{jk}^* - \frac{1}{3} S_{mn}^* S_{mn}^* \delta_{ij} \right)}{\sqrt{\frac{\partial u_m}{\partial x_n} \frac{\partial u_m}{\partial x_n}}} - C_{\text{cr3}}\mu_t \sqrt{2W_{mn}W_{mn}} \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (2.111)$$

ここで， $\tau_{ij}^{\text{SA}}$ はSAモデルに基づく線形渦粘性近似によるレイノルズ応力であり， $\mu_t$ は乱流粘性係数である． $O_{ij}$ および $W_{ij}$ はQCR2000と同様に以下のように定義される．

$$O_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) / \sqrt{\frac{\partial u_m}{\partial x_n} \frac{\partial u_m}{\partial x_n}}, \quad (2.112)$$

$$W_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}. \quad (2.113)$$

また， $S_{ij}^*$  はひずみ速度テンソルの偏差成分であり，

$$S_{ij}^* = S_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.114)$$

と定義される．モデル定数は  $C_{\text{cr1}} = 0.5$ ， $C_{\text{cr2}} = 1.0$ ， $C_{\text{cr3}} = 2.15$  である．

### 2.3.4 乱流モデルの数値計算手法

式(2.106)の乱流粘性の輸送方程式についてもNavier-Stokes方程式と同様に有限体積的な離散化を行う．また非粘性流束には1次精度風上差分法，粘性流束に関しては2次精度中心差分法を適用する．時間離散化はNavier-Stokes方程式と同様の離散化（1次精度もしくは2次精度後退差分法）とし，時間積分法にはLUSGS陰解法もしくはDPLUR陰解法を用いる．

境界条件は，流入境界は $\hat{\nu} = 5.0$ で流出境界は外挿とした．また壁面では $\hat{\nu} = 10^{-18}$ と十分小さい値で設定した．

## 2.4 2自由度構造モデル

### 2.4.1 支配方程式

本研究では2自由度構造モデルを用いた．Figure 2.2に本研究で用いた3次元後退翼の一断面をモデル化した構造モデルを示す．構造モデルの自由度は上下変位 $h[\text{m}]$ （下向きが正），回転変位 $\alpha$ （頭上げが正）の2自由度である．支配方程式は次式のようなになる[3, 10]．

$$\begin{aligned} m \ddot{h} + S_\alpha \ddot{\alpha} + c_h \dot{h} + k_h h &= -L, \\ S_\alpha \ddot{h} + I_\alpha \ddot{\alpha} + c_\alpha \dot{\alpha} + k_\alpha \alpha &= M \end{aligned} \quad (2.115)$$

ここで,  $m$  は単位長さ当たりの質量 [kg/m],  $S_\alpha (= mbx_\alpha)$  は弾性軸周りの静的モーメント [kg],  $I_\alpha (= mb^2r_\alpha^2)$  は弾性軸周りの慣性モーメント [kg·m] を表す. また,  $c_h$  と  $c_\alpha$  は構造減衰係数 [kg/(m·s)],  $k_h (= m\omega_h^2)$  と  $k_\alpha (= I_\alpha\omega_\alpha^2)$  はそれぞれ上下運動および回転運動のばね剛性 [kg/(m·s<sup>2</sup>)] である.  $L$  は揚力 [N/m] (上向き正),  $M$  は弾性軸周りのモーメント [N] (頭上げ正) を表す. また,  $\omega_h$  と  $\omega_\alpha$  は上下運動もしくは回転運動のみを行わせたときの角振動数 [rad/s] である.

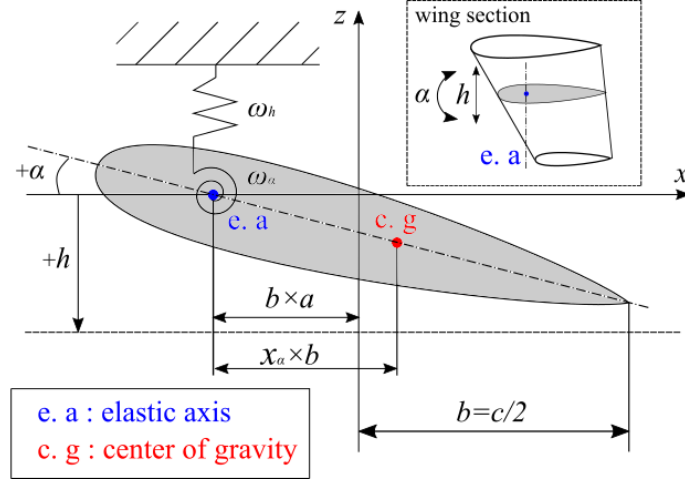


Figure 2.2: Two-degree-of-freedom typical section wing model.

### 2.4.2 無次元化

式(2.115) の各変数に対して, 以下の無次元化を行う.

$$\bar{h} = \frac{h}{b}, \quad \bar{t} = \omega_\alpha t, \quad (2.116)$$

式(2.116)を式(2.115) に代入し, 行列形式で整理すると次式のようなになる.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{Q}_A, \quad (2.117)$$

各係数行列は,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & x_\alpha \\ x_\alpha & r_\alpha^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2g_h \left( \frac{\omega_h}{\omega_\alpha} \right) & 0 \\ 0 & 2g_\alpha r_\alpha^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\omega_h}{\omega_\alpha} \right)^2 & 0 \\ 0 & r_\alpha^2 \end{bmatrix}, \quad (2.118)$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_A = \frac{V_*^2}{\pi} \begin{bmatrix} -C_l \\ 2C_m \end{bmatrix}.$$

である. ここで  $g_h$  および  $g_\alpha$  は上下, 回転方向の減衰定数でありそれぞれ,

$$g_h = \frac{c_h}{2\sqrt{mk_h}}, \quad g_\alpha = \frac{c_\alpha}{2\sqrt{mk_\alpha}} \quad (2.119)$$

で表される. また,  $C_l$  と  $C_m$  は揚力係数およびモーメント係数であり, 次式で定義される.

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c}, \quad C_m = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c^2}. \quad (2.120)$$

$x_\alpha$  と  $r_\alpha^2$  はそれぞれ静的質量不均衡および慣性能率を表す. さらに,

$$V_* = \frac{U_\infty}{b\omega_\alpha\sqrt{\mu}}, \quad \mu = \frac{m}{\rho_\infty b^2 \pi}, \quad (2.121)$$



である．ここで $V_*$ はフラッター速度もしくはSpeed Indexと呼ばれ，流体力と構造力の大きさの比を表す無次元パラメータで，フラッター境界の判定にしばしば用いられる．また $\mu$ は質量比を表す．

超臨界翼型などの非対称翼側では迎え角 $\alpha_A = 0$  degであっても揚力やモーメントが発生する．従って，フラッター計算を行うと空気力による変位が生じ，各条件でピッチング角度が統一できない．この問題を解消するために，式(2.118)の外力ベクトル $\mathbf{Q}_A$ を以下のように修正する．

$$\mathbf{Q}_{A_{mod}} = \frac{V_*^2}{\pi} \begin{bmatrix} -(C_l - C_{l_{init}}) \\ 2(C_m - C_{m_{init}}) \end{bmatrix} \quad (2.122)$$

ここで， $C_{l_{init}}, C_{m_{init}}$ は静的計算によって得られる揚力係数，モーメント係数である．フラッター計算では式(2.122)を用いる．また対称翼型では $C_{l_{init}} = 0$ ， $C_{m_{init}} = 0$ として計算する．（計算条件によっては翼型形状が対称であっても非対称な流れ場になりうる．）

### 2.4.3 固有振動特性

2自由度構造モデルの固有振動特性を調査するため，以下の式で示す，振動数 $\omega$ での調和振動を考える．

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 \exp(i\omega t), \quad \mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} \bar{h}_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \quad (2.123)$$

ここで， $i = \sqrt{-1}$ ， $\bar{h}_0, \alpha_0$ はそれぞれ上下，回転振動の複素振幅である．式(2.117)の減衰項および右辺の空気力を無視し，式(2.123)を代入し，全体を $\exp(i\omega t)$ で割ると，

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \quad (2.124)$$

となる．式(2.124)は一般化固有値問題となっており，自由度が大きい場合にはLinear Algebra PACKage (LAPACK) などで解くことができる．今回は2自由度であるため解析的に解くことができ，曲げおよび捩りモードに対する周波数が以下のように得られる．

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \left[ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{1}{\omega_\alpha^2} \right) + \sqrt{\left( \frac{1}{\omega_h^2} - \frac{1}{\omega_\alpha^2} \right)^2 + \left( \frac{2x_\alpha}{r_\alpha \omega_h \omega_\alpha} \right)^2} \right\} \right]^{-1/2}, \\ \omega_2 &= \left[ \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{\omega_h^2} + \frac{1}{\omega_\alpha^2} \right) - \sqrt{\left( \frac{1}{\omega_h^2} - \frac{1}{\omega_\alpha^2} \right)^2 + \left( \frac{2x_\alpha}{r_\alpha \omega_h \omega_\alpha} \right)^2} \right\} \right]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.125)$$

また，各モードの上下，回転運動の振幅比 $\sigma_i$  ( $i = 1, 2$ )は

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\bar{h}_0}{\alpha_0} = \frac{r_\alpha^2 \left[ \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega_1} \right)^2 - 1 \right]}{x_\alpha} \quad (\omega = \omega_1), \\ \sigma_2 &= \frac{\bar{h}_0}{\alpha_0} = \frac{r_\alpha^2 \left[ \left( \frac{\omega_\alpha}{\omega_2} \right)^2 - 1 \right]}{x_\alpha} \quad (\omega = \omega_2). \end{aligned} \quad (2.126)$$

となる． $\alpha \ll 1$ の場合を考えると，任意の $x$ 位置における $z$ 方向変位は，

$$z(x, t) = -h(t) - (x - ba)\alpha(t) \quad (2.127)$$

となる．ここで，常に $z = 0$ となる点（ピボット）が

$$\frac{x_p}{b} = -\sigma_i + a \quad (2.128)$$

の式で示す $x_p$ の位置に存在することがわかる。図示するとFig. 2.3のようになる。  $\sigma_i > 0$ の場合、Fig. 2.3aに示すように、ピボットの位置は弾性軸に対して $b\sigma_i$ の距離だけ前方にあるということを意味し、このモードをwash-outと呼ぶ。逆に $\sigma_i < 0$ の場合、Fig. 2.3bに示すように、ピボットの位置は弾性軸に対して $b\sigma_i$ の距離だけ後方にあるということを意味し、このモードをwash-inと呼ぶ。wash-outモードとは翼断面が下方に変位した場合、頭上げの変位が連成するモードをいう。逆に、wash-inモードとは翼断面が下方に変位した場合、頭下げの変位が連成するモードをいう。後退翼では $x_\alpha > 0$ より $\sigma_1 > 0$ となるため、1次モードはwash-outモードとなる。

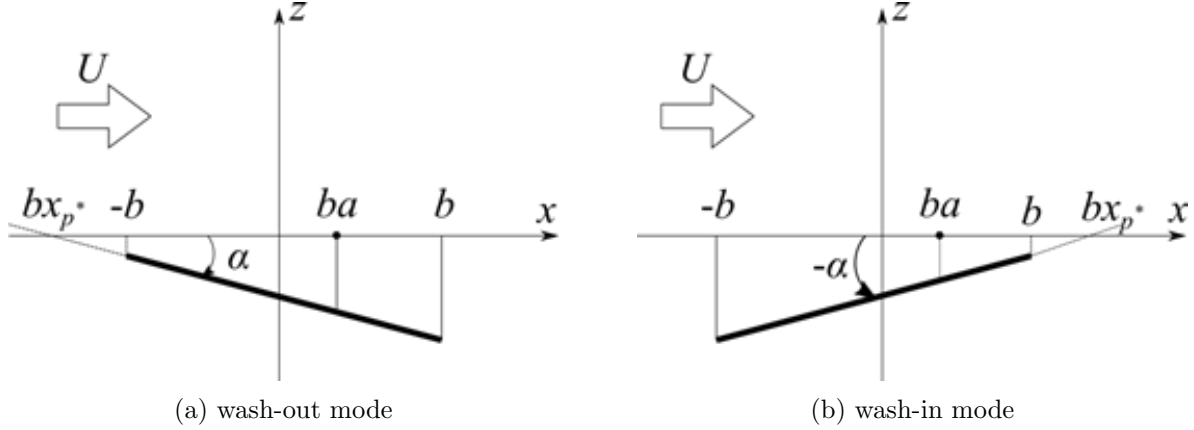


Figure 2.3: Natural mode shapes of a two-degree-of-freedom plunge-pitch system.

#### 2.4.4 時間積分法

構造方程式の時間積分には4段階Runge-Kutta法を用いる。  $f = \dot{h}$ ,  $g = \dot{\alpha}$  として式(2.117)を整理すると

$$\dot{f} = R_f, \quad \dot{g} = R_g \quad (2.129)$$

となる。ここで、

$$R_f = \frac{-r_\alpha^2 \left( \frac{\omega_h}{\omega_\alpha} \right)^2 \bar{h} + x_\alpha r_\alpha^2 \alpha - 2g_h \left( \frac{\omega_h}{\omega_\alpha} \right) r_\alpha^2 \dot{h} + 2g_\alpha x_\alpha r_\alpha^2 \dot{\alpha} - \frac{V_*^2}{\pi} [r_\alpha^2 (C_l - C_{l_{init}}) - 2x_\alpha (C_m - C_{m_{init}})]}{r_\alpha^2 - x_\alpha^2}, \quad (2.130)$$

$$R_g = \frac{x_\alpha \left( \frac{\omega_h}{\omega_\alpha} \right)^2 \bar{h} - r_\alpha^2 \alpha + 2g_h \left( \frac{\omega_h}{\omega_\alpha} \right) x_\alpha \dot{h} - 2g_\alpha r_\alpha^2 \dot{\alpha} - \frac{V_*^2}{\pi} [2(C_m - C_{m_{init}}) - x_\alpha (C_l - C_{l_{init}})]}{r_\alpha^2 - x_\alpha^2}, \quad (2.131)$$

である。式(2.129)の $f$ に対する方程式に4段階Runge-Kutta法を適用すると、次式のようになる。

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= f^n, \\ f^{(2)} &= f^n - \frac{\Delta t}{2} R_f(f^{(1)}), \\ f^{(3)} &= f^n - \frac{\Delta t}{2} R_f(f^{(2)}), \\ f^{(4)} &= f^n - \Delta t R_f(f^{(3)}), \\ f^{n+1} &= f^n - \frac{\Delta t}{6} [R_f(f^{(1)}) + 2R_f(f^{(2)}) + 2R_f(f^{(3)}) + R_f(f^{(4)})]. \end{aligned} \quad (2.132)$$

式(2.129)の $g$ についても同様に計算を行う。

## 2.5 連成手法

流体構造連成には、各方程式を時間方向に交互に解き進める弱連成法を用いた。連成解析は以下に示す手順で実行される。

1. 流体側で定常計算を行い、翼周りの流れ場を求める。
2. 翼に初期変位を与え、流体計算を行い揚力係数  $C_l$  およびモーメント係数  $C_m$  を求める。
3. 得られた揚力係数  $C_l$  およびモーメント係数  $C_m$  を構造方程式に代入して構造計算を行い、上下変位  $h$  および回転変位  $\alpha$  を求める。
4. 構造計算で得られた変位から格子を再生成し、再び流体計算を行う。

以上の計算を繰り返し行う。弱連成計算では流体と構造を交互に解くため、連成時に連成面において変位や力にずれが生じる。本解析では変位が小さく、また振動周波数が流体の流速に対して小さい（無次元周波数  $k$  が小さい）ため連成誤差は無視できる。

この連成プロセスにおいて、流体側と構造側の無次元量が異なるため、物理量の変換が必要になる。本研究では、流体側が長さをコード長  $c$ 、時間をコード長  $c$  と基準音速  $a_\infty$  を用いて  $c/a_\infty$ 、構造側が長さを半翼弦長  $b(=c/2)$ 、時間を回転運動の角振動数  $\omega_\alpha$  により無次元化を行った。これらを考慮し、実際の長さ  $h$  と時間が互いに同じであるという条件を課せば、

$$h_{\text{structure}} = 2H_{\text{fluid}}, \quad \Delta t_{\text{structure}} = \frac{2M_\infty}{V_* \sqrt{\mu}} \Delta t_{\text{fluid}}, \quad (2.133)$$

となる。

## 2.6 格子の再生成

前節で述べたように、各計算ステップにおいて構造変位  $h$ 、 $\alpha$  に基づき、流体の計算格子を再生成する必要がある。本研究では流体格子全体を以下のように移動させ、格子を再生成した。

$$\begin{aligned} x_g &= x_{g\_init} \cos(-\alpha) - z_{g\_init} \sin(-\alpha) \\ z_g &= x_{g\_init} \sin(-\alpha) + z_{g\_init} \cos(-\alpha) + h \end{aligned}$$

ここで、 $x_g$ 、 $z_g$  は移動後の計算格子点の  $x, z$  座標位置、 $x_{g\_init}$ 、 $z_{g\_init}$  は初期の計算格子点の  $x, z$  座標位置である。

## 2.7 流体-構造間での局所エネルギー交換

本解析では、非定常空気力の安定性への寄与について調査するため、Dietz らの方法[31]を用いて流体-構造間の局所エネルギー交換を評価する。局所エネルギー交換は、流体の圧力係数  $C_p$  および翼表面の移動速度  $\mathbf{v}(x, t)$  に基づき評価される。ここで座標系は Fig. 2.2 に準拠しており、 $\mathbf{x} = (x, z)^T$  である。また、流体の摩擦によるエネルギー交換は圧力によるものに比べて3桁程度小さいため無視した。

翼表面の移動速度  $\mathbf{v}(x, t)$  は次式で表される。

$$\mathbf{v}(x, t) = \frac{\partial \bar{h}(t)}{\partial t} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{\partial \alpha(t)}{\partial t} \begin{bmatrix} \frac{z}{c} \sin(\alpha(t)) \\ -\frac{(x-ba)}{c} \cos(\alpha(t)) \end{bmatrix}, \quad (2.134)$$

局所エネルギー係数  $c_w$  は次式で定義される.

$$c_w(\mathbf{x}, t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} [-(C_p(\mathbf{x}, t) - C_{p\_ave}(\mathbf{x})) A(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] dt, \quad (2.135)$$

ここで,  $C_p$ は圧力係数,  $C_{p\_ave}$ は圧力係数の時間平均値,  $A$ はセル面積,  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ は翼表面の法線ベクトル,  $T$ は翼の振動周期である.

本解析では,  $c_w$ の値そのものではなくその分布に着目するため,  $c_w$ をその最大値  $c_{w\_max}$ で無次元化した値を用いて安定性への影響を評価する.

## 2.8 並列計算

本研究では数千万点規模の計算格子に対して長時間の数値積分を行うため, 計算の高速化が必須となる. そのため, 単体チューニング, OpenMPおよびMPIによるハイブリッド並列化を行った. 並列計算には主に, 東北大学大規模計算科学システムスーパーコンピュータAOBAのサブシステムAOBA-Sを利用した. AOBA-Sは2025年現在, 世界最大のベクトル型スーパーコンピュータである. Table 2.1にAOBA-Sの主要な諸元を示す. AOBA-Sは演算性能とメモリ性能のバランスに優れており, BF値も0.47と近年のスーパーコンピュータとしては比較的高い値となっている.

Table 2.1: Specifications of the AOBA-S[57].

| Vector Engine    |                                              |
|------------------|----------------------------------------------|
| モデル名             | Type 30A                                     |
| コア数              | 16                                           |
| 理論演算性能 (倍精度)     | 4.91 TFlops                                  |
| メモリ容量            | 96 GB                                        |
| メモリ帯域            | 2.45 TB/s                                    |
| インタフェース          | PCI Express Gen4 x16                         |
| 最大消費電力           | 370 W                                        |
| Vector Host      |                                              |
| モデル名             | AMD EPYC 7763                                |
| コア数              | 64                                           |
| 理論演算性能 (倍精度)     | 2.50 TFlops                                  |
| メモリ容量            | 256 GB                                       |
| OS               | Rocky Linux                                  |
| 搭載Vector Engine数 | 8                                            |
| ノード間ネットワーク       | InfiniteBand NDR200×2                        |
| システム全体           |                                              |
| Vector Host数     | 504                                          |
| Vector Engine数   | 4032                                         |
| 総コア数             | 32,256 (Vector Host), 64,512 (Vector Engine) |
| 総理論演算性能          | 21.05 PFlops                                 |
| 総メモリ容量           | 504 TB                                       |
| 総メモリ帯域           | 9.97 PB/s                                    |

### 2.8.1 単体チューニング

まずコードの単体チューニングを行い, 性能向上を図った. 計算時間上位5サブルーチンのプロファイリング結果をTable 2.2に示す. ここで, Peakは演算効率 (=実行Flops/ピークFlops), V. op. ratioはベクトル化率, V. lengthはベクトル長, Req. B/Fはキャッシュか

らロードした演算のB/F値, Act. B/Fはメモリから直接ロードした演算のB/F値である. 本研究で利用したベクトル計算機SX-AURORAのベクトル長は256であるため, V. Lengthの値は256に近いほど計算機性能を引き出しやすい. またReq. B/Fは1.22, Act. B/Fは0.62であるため, これらの値を超えている場合, データ転送待ちとなりメモリ律速となっていることを意味する.

Table 2.2より, 最も計算コストの高い粘性項の計算ではベクトル化率は高いものの, ベクトル長は短く, またReq. B/Fが2.52であることからメモリ律速となっていることがわかる. 時間積分計算では, ベクトル化率およびベクトル長はほぼ最大値となっており, B/F値に関しては計算機性能の2倍ほどの値となっていることからメモリ律速であることがわかる. 非粘性流束計算では前処理のベクトル化率が低く, またAct. B/Fが18.81と非常に大きな値となっていることがわかる. MUSCL, SHUSの計算はB/F値は低いものの, ベクトル長が短くなっていることがわかる.

時間積分計算に関しては, ほぼ最適化されていたため, 粘性流束と非粘性流束のチューニングを行った. 両サブルーチンの課題はベクトル長が短いこと, B/F値が高いことである. 計算コードを調査したところ, 各方向の流束を計算する際に, 計算ループの順序が変化し, 一部のループでストライドアクセスとなっていることが判明した. 従って, 作業配列を導入し, すべての方向で連続アクセスとなるように修正した. また非粘性流束の計算では, 前処理・MUSCL・SHUSと3つのサブルーチンに分けて計算を行っていたが, 連続アクセスとするために, すべて同一のサブルーチン内で記述した. チューニング後のプロファイリング結果をTable 2.3に示す. Table 2.3より, チューニングによって, ベクトル長は最大値の256に近づき, またB/F値も低下していることがわかる. その結果, 粘性項では1.5倍, 非粘性項では3.6倍の高速化を達成した. 計算コード全体としては1.5倍程度の高速化を実現し, 17.6%程度の演算効率となった.

Table 2.2: Profiling results of major computational components

| Component                       | Peak [%] | V. op. ratio [%] | V. length | Req. B/F | Act. B/F |
|---------------------------------|----------|------------------|-----------|----------|----------|
| Viscous flux                    | 12.90    | 99.24            | 143.0     | 2.52     | 0.53     |
| Time integration                | 11.89    | 99.57            | 243.4     | 2.28     | 1.05     |
| Inviscid flux (MUSCL)           | 19.73    | 98.90            | 140.4     | 1.14     | 0.00     |
| Preprocessing for inviscid flux | 2.42     | 93.41            | 141.1     | 5.26     | 18.81    |
| Inviscid flux (SHUS)            | 28.90    | 99.09            | 141.0     | 0.60     | 0.00     |

Table 2.3: Profiling results of tuned subroutines

| Component     | Peak [%] | V. op. ratio [%] | V. length | Req. B/F | Act. B/F |
|---------------|----------|------------------|-----------|----------|----------|
| Viscous flux  | 19.53    | 99.62            | 255.1     | 1.87     | 0.55     |
| Inviscid flux | 38.57    | 99.76            | 255.3     | 0.63     | 0.27     |

## 2.8.2 OpenMP/MPIハイブリッド並列化

次にさらなる高速化のため, OpenMPによるスレッド並列化およびMessage Passing Interface (MPI) による領域分割を実装した. 具体的には, Fig. 2.4に示すように, 三重ループのうち $l$ 方向をMPIによる領域分割,  $k$ 方向をOpenMPによるスレッド並列,  $j$ 方向をベクトルプロセッサによるベクトル演算に割り当てている. OpenMPとのハイブリッド並列化にすることによって, MPIのみの場合に比べ, データ通信量を削減することができるため, 並列化効

率が高くなる。一方、過度にスレッド数が多い場合、ポート競合などにより計算速度が著しく低下するため、それぞれの並列数に関しては最適なバランスをとる必要がある。

その他にも、時間積分計算においては一反復計算ごとにデータ通信が必要となるが、通信と計算をオーバーラップさせ、通信コストを極力隠ぺいした。さらに、データ出力の記述を、

```
WRITE(31) (((Q(j,k,l,n),j=1,jmax),k=1,kmax),l=1,lmax),n=1,5)
```

から

```
WRITE(31) Q(1:jmax,1:kmax,1:lmax,1:5)
```

に変更することでベクトル化が有効となるため、データ出力速度は200倍高速となった。その結果、データI/Oのコストは無視できるほど小さくなった。

構築した計算コードの並列性能について調査するため、第5章の3次元低アスペクト比翼の計算で用いた3000万点の計算格子における強スケーリングを測定した。Figure 2.5に測定結果を示す。ここでFig. 2.5中に記入している数値は並列化効率を表す。Figure 2.5より、良好なスケーリングが得られており、おおよそ32並列までは50%以上の並列化効率を維持していることが分かる。これは通常のスカラ計算機であれば、おおよそ2000コア並列までスケーリングしていることに相当する。

```
do l=1,lmax( $\zeta$  direction)—— MPI
do k=1,kmax( $\eta$  direction)—— OpenMP
do j=1,jmax( $\xi$  direction)—— Vector

~calculation~

enddo
enddo
enddo
```

Figure 2.4: Parallel computation for 3-dimensional calculation loop.

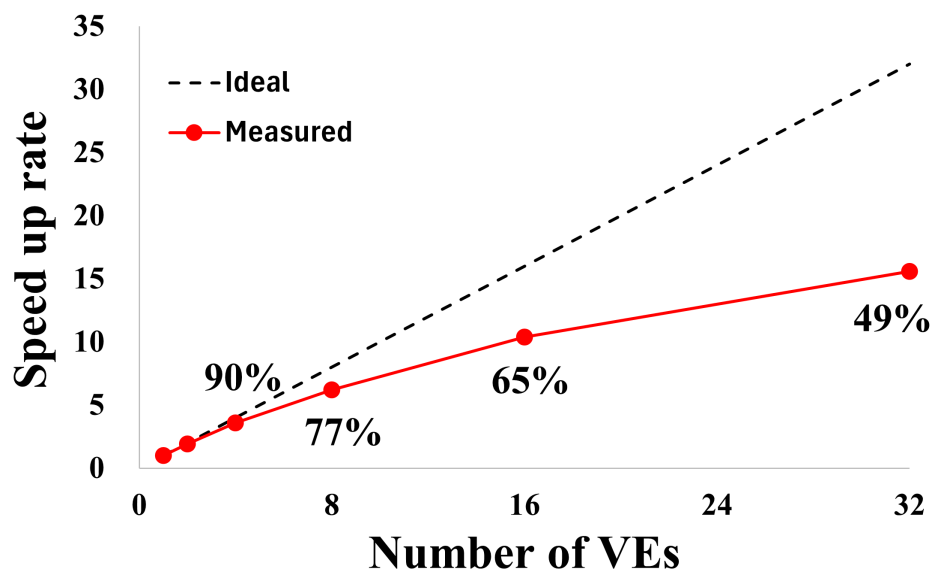


Figure 2.5: Strong scaling.

以上に示したように，計算コードの開発にあたっては，並列化に適した時間積分法としてDPLUR陰解法を採用し，さらに各種コードチューニング・ハイブリッド並列化を行った．その結果，単体性能および並列化効率の双方において高い性能を有する計算コードの開発に成功した．本計算コードを用いて次章以降で示すフラッター計算を行う．

## 第3章 2次元対称翼型のフラッター特性

本章では研究目的①の「2次元対称翼での衝撃波はく離による安定化メカニズムの解明」のため、2次元対称翼型NACA64A010を用いた静的計算，強制振動翼計算，フラッター計算を行う．まずは静的計算および強制振動翼計算の結果から計算の妥当性検証を行う．その後，強制振動翼およびフラッター計算の結果から衝撃波はく離とフラッター安定化メカニズムの関係について考察する．

### 3.1 計算手法および計算条件

計算手法はTable 3.1に示す通りである．また2次元計算であるため並列化は行っていない．翼型はNACA64A010であり，計算格子にはFig. 3.1に示すようなO型格子を用いた．空間解像度の影響を調査するため $403 \times 200$ ,  $603 \times 200$ ,  $803 \times 250$ ,  $1003 \times 250$ の4つの格子を用いた．すべての格子で翼表面法線方向の最小格子幅は $2.0 \times 10^{-6}$ である．これは翼表面第一格子点において $\eta^+ < 1$ を満たす．ここで $\eta^+$ は壁面摩擦速度 $u_\tau$ および動粘性係数 $\nu$ で無次元化された壁面からの無次元距離であり，以下のように定義される．

$$\eta^+ = \frac{u_\tau d}{\nu}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.1)$$

ここで， $d$ は壁面からの距離[m]， $\tau_w$ は壁面せん断応力[Pa]である．また外部境界の影響を小さくするため計算領域はコード長の30倍と十分大きくした．

Table 3.1: Computational method

|       |                              |
|-------|------------------------------|
| 支配方程式 | 2次元圧縮性URANS                  |
| 乱流モデル | SA[48]                       |
| 非粘性流束 | 3次精度MUSCL補間[41]を用いたSHUS[40]  |
| 粘性流束  | 2次精度中心差分法                    |
| 時間離散化 | 1次精度オイラー陰解法 ( $a_\phi = 0$ ) |
| 時間積分法 | LUSGS陰解法[42]                 |

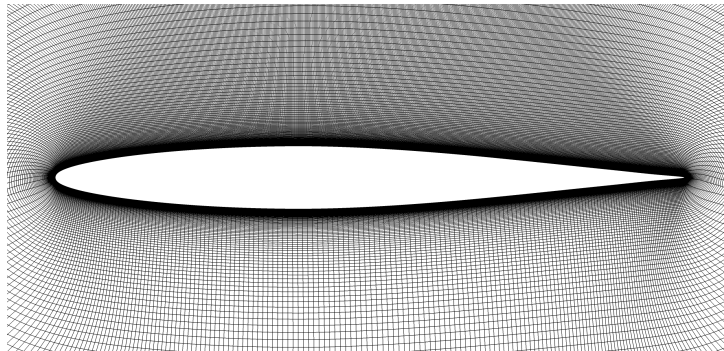


Figure 3.1: Computational grid for the NACA64A010 airfoil ( $803 \times 250$ ).



### 3.2 計算精度の検証

本節では強制振動翼計算を行い、格子収束性、時間刻み幅の影響を調査する。またDavisらが行ったNACA64A010翼型の強制振動翼試験[58]との比較から計算精度の検証についても実施する。翼振動は以下の式で与えた。

$$\alpha_p(t) = \alpha_m + \alpha_0 \sin(2kM_\infty t) \quad (3.2)$$

ここで $\alpha_p$ は翼のピッチング振動の角度[deg]、 $\alpha_m$ は平均迎え角[deg]、 $\alpha_0$ はピッチング振動の振幅[deg]、 $t$ は無次元時間である。また $k$ は無次元周波数であり、

$$k = \frac{\pi f c}{U_\infty} \quad (3.3)$$

のように定義される。式(3.3)に示すように、無次元周波数 $k$ は一様流がコード長 $c$ を通過する時間スケールと翼の振動周期の比を表す無次元量であり、振動に伴う非定常性の強さを示す指標である。また計算条件はTable 3.2に示す通りであり、Davisらの実験[58]と同一である。ここで $x_{pc}$ は回転中心の位置、 $x_{LE}$ は翼前縁の位置である。

Table 3.2: Computational condition of the forced oscillating airfoil for various angles of attack conditions[58].

|                                    |                   |
|------------------------------------|-------------------|
| Reynolds number, $Re_\infty$       | $1.2 \times 10^7$ |
| Mach number, $M_\infty$            | 0.789             |
| Mean angle of attack, $\alpha_m$   | 4.0 deg           |
| Pitching amplitude, $\alpha_0$     | 1.0 deg           |
| Reduced frequency, $k$             | 0.2               |
| Pitching center, $x_{pc} - x_{LE}$ | $0.25c$           |

はじめに翼が振動していない静的条件での流れ場について議論する。Figure 3.2に $\alpha = 0$  degにおけるマッハ数分布を示す。Figure 3.2に示すように $\alpha = 0$  degでは翼上下面に衝撃波が形成される。また迎え角を大きくした $\alpha = 4.0$  degではFig. 3.3に示すように翼上面に衝撃波が生じ、その背後で流れがはく離する。 $\alpha = 4.0$  degの条件では衝撃波はく離を伴うため、 $\alpha = 0$  degの場合と比較してより複雑な流れ場となる。従って、 $\alpha = 4.0$  degの条件に着目し、格子収束性および時間刻み幅の影響について調査する。

まず格子収束性について調査するために、 $403 \times 200$ ,  $603 \times 200$ ,  $803 \times 250$ ,  $1003 \times 250$ の格子で強制振動翼計算を行い結果を比較する。無次元時間刻み幅は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ とし、すべての条件で内部反復回数は $imax = 10$ とした。Figure 3.4に4つの異なる解像度の格子での強制振動翼計算の結果を示す。縦軸は圧力変動の翼振動周波数成分の実部および虚部である。Figure 3.4より、 $803 \times 250$ と $1003 \times 250$ の格子の結果はほぼ一致しており、 $803 \times 250$ の格子で解が十分に収束していることが分かる。このとき、コード方向の平均空間解像度は $\Delta x = 1.7 \times 10^{-3}$ である。

次に無次元時間刻み幅の影響を調査するために、 $\Delta t = 4.0 \times 10^{-4}$ ,  $2.0 \times 10^{-4}$ ,  $1.0 \times 10^{-4}$ ,  $5.0 \times 10^{-5}$ の4つの条件について強制振動翼計算を行い結果を比較する。計算格子は $803 \times 250$ のものを用いた。すべての条件で内部反復回数は $imax = 10$ とした。Figure 3.5に4つの異なる無次元時間刻み幅での強制振動翼計算の結果を示す。Figure 3.5より $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ と $\Delta t = 5.0 \times 10^{-5}$ の結果はほぼ一致しており、無次元時間刻み幅は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ で十分であることが分かる。

最後に内部反復回数 $imax$ の影響を調査するために、 $imax = 1, 3, 5, 10$ の4つの条件について強制振動翼計算を行い結果を比較する。計算格子は $803 \times 250$ 、時間刻み幅は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ である。Figure 3.6より $imax = 3$ 以上の結果はほぼ一致しており、内部反復回数は $imax = 3$ で十分であることが分かる。また $imax = 3$ の計算結果と実験値を比較すると衝撃波の振動中心位置にわずかな差異が見られるものの、その他の領域については、はく離域を含めてよく一致していることが分かる。

以上より，2次元の場合については適切な時間・空間解像度を確保することでSAモデル[48]を用いて衝撃波はく離を伴う流れ場の非定常空気力を高精度に予測可能であることが確認できた．以降の計算では計算格子は $803 \times 250$ ，無次元時間刻み幅は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ ，内部反復回数は $imax = 3$ を用いる．

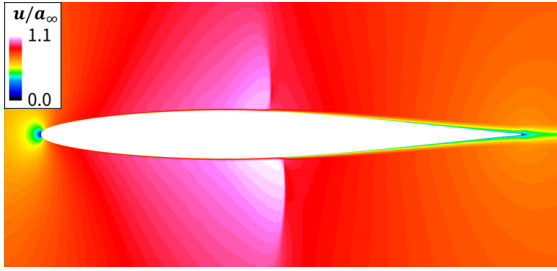


Figure 3.2: Streamwise velocity distribution at -0.21 deg for the stationary airfoil.



Figure 3.3: Streamwise velocity distribution at 4.0 deg for the stationary airfoil.

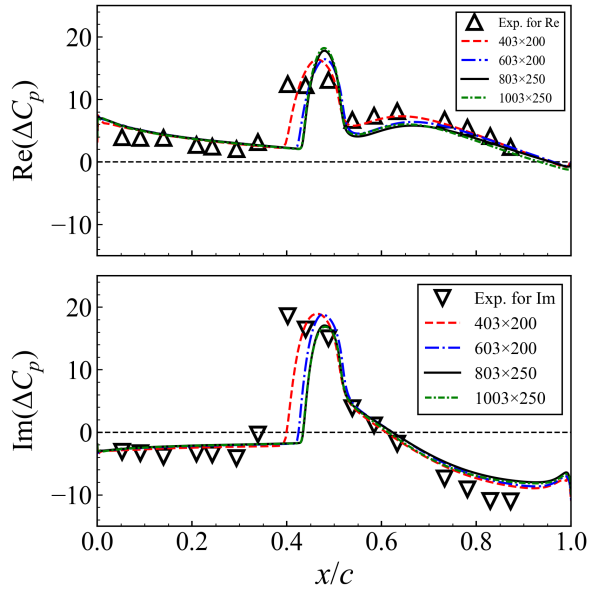


Figure 3.4: Effect of grid resolution in oscillating airfoil at  $\alpha_m = 4.0$  deg.

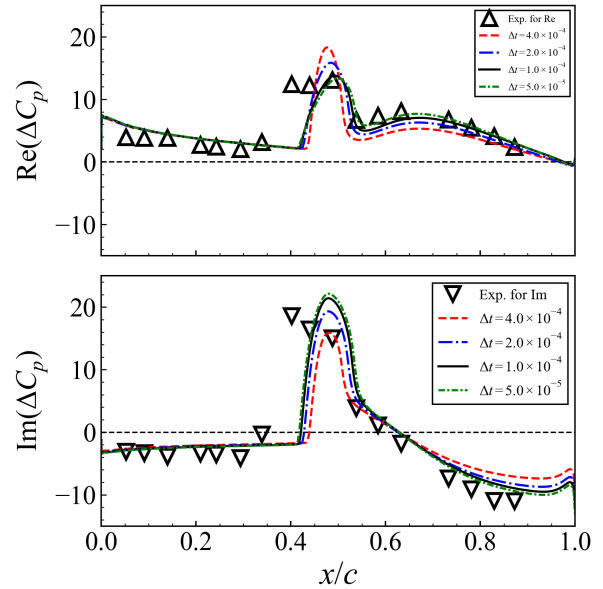


Figure 3.5: Effect of time step size in oscillating airfoil at  $\alpha_m = 4.0$  deg.

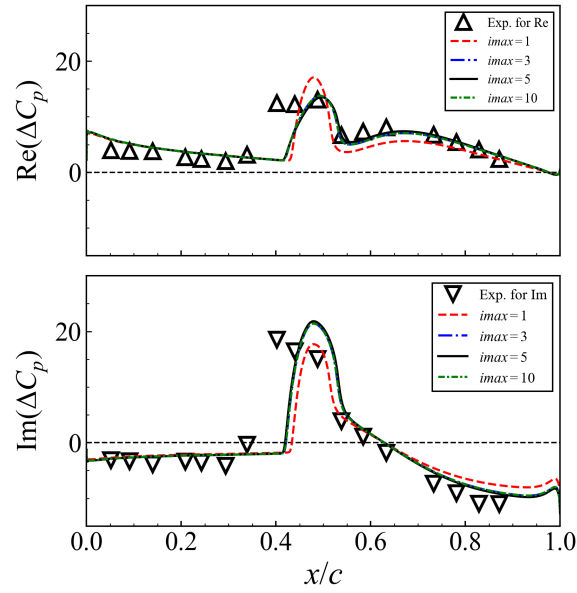


Figure 3.6: Effect of number of inner iterations in oscillating airfoil at  $\alpha_m = 4.0$  deg.

### 3.3 静的計算および強制振動翼計算による衝撃波振動の位相特性の調査

本節では静的計算，強制振動翼計算の結果から翼ピッチング振動に対する衝撃波振動の位相特性および安定性との関係について議論する．すべての計算においてレイノルズ数は  $Re_\infty = 1.2 \times 10^7$ ，マッハ数は  $M_\infty = 0.8$  とした．

#### 3.3.1 衝撃波運動の静的挙動

まず静的条件における衝撃波の運動特性について議論する．Figure 3.7に  $\alpha = 0 - 5$  degの主流方向速度分布を，Fig. 3.8に翼上面圧力係数分布の比較をそれぞれ示す．Figure 3.7およびFig. 3.8より  $\alpha \leq 2$  degでは迎え角を大きくすると翼面上の流れの加速により，衝撃波は下流側へ移動することが分かる．一方， $\alpha > 2$  degでは迎え角を大きくすると衝撃波背後で流れがはく離し，はく離域の拡大に伴い衝撃波は上流側へ移動する．このように衝撃波の運動特性は衝撃波背後ではく離の有無に大きく影響され，付着時とはく離時では，迎え角増大に対する衝撃波の移動方向は逆転する．従って振動翼においても，衝撃波振動の非定常挙動は衝撃波背後の流れ場に大きく影響されられると考えられる．

#### 3.3.2 衝撃波運動の非定常挙動

次に強制振動翼計算における衝撃波の非定常挙動について議論する．平均迎え角は  $\alpha_m = 0, 2, 4, 6$  degとし，その他の振動パラメータはTable 3.2と同様の値を用いた．

Figure 3.9に各平均迎え角における振動一周期の  $C_l$  ループを示す．Figure 3.9より  $\alpha_m = 0, 2$  degではループは反時計回りであるが， $\alpha_m = 4, 6$  degでは時計回りとなっていることが分かる．1次曲げモードの回転中心がコード中心位置より上流側となる後退翼を考えると， $C_l$  ループが時計回りの場合，系は曲げモードに対して不安定であり，反時計回りの場合は安定となる．従って，曲げモード振動を考えると， $\alpha_m \leq 2$  degでは不安定， $\alpha_m \geq 4$  degでは安定であると言える．次に捩じりモード振動の安定性について考えるため，Fig. 3.10に示す各平均迎え角における振動一周期の  $C_m$  ループに着目する．Figure 3.10よりすべての平均迎え角で反時計回りのループとなっていることが分かる．捩じれモードでは  $C_m$  ループが時計回りの場合に安定となるため，捩じれモード振動に対してはすべての平均迎え角で安定である．

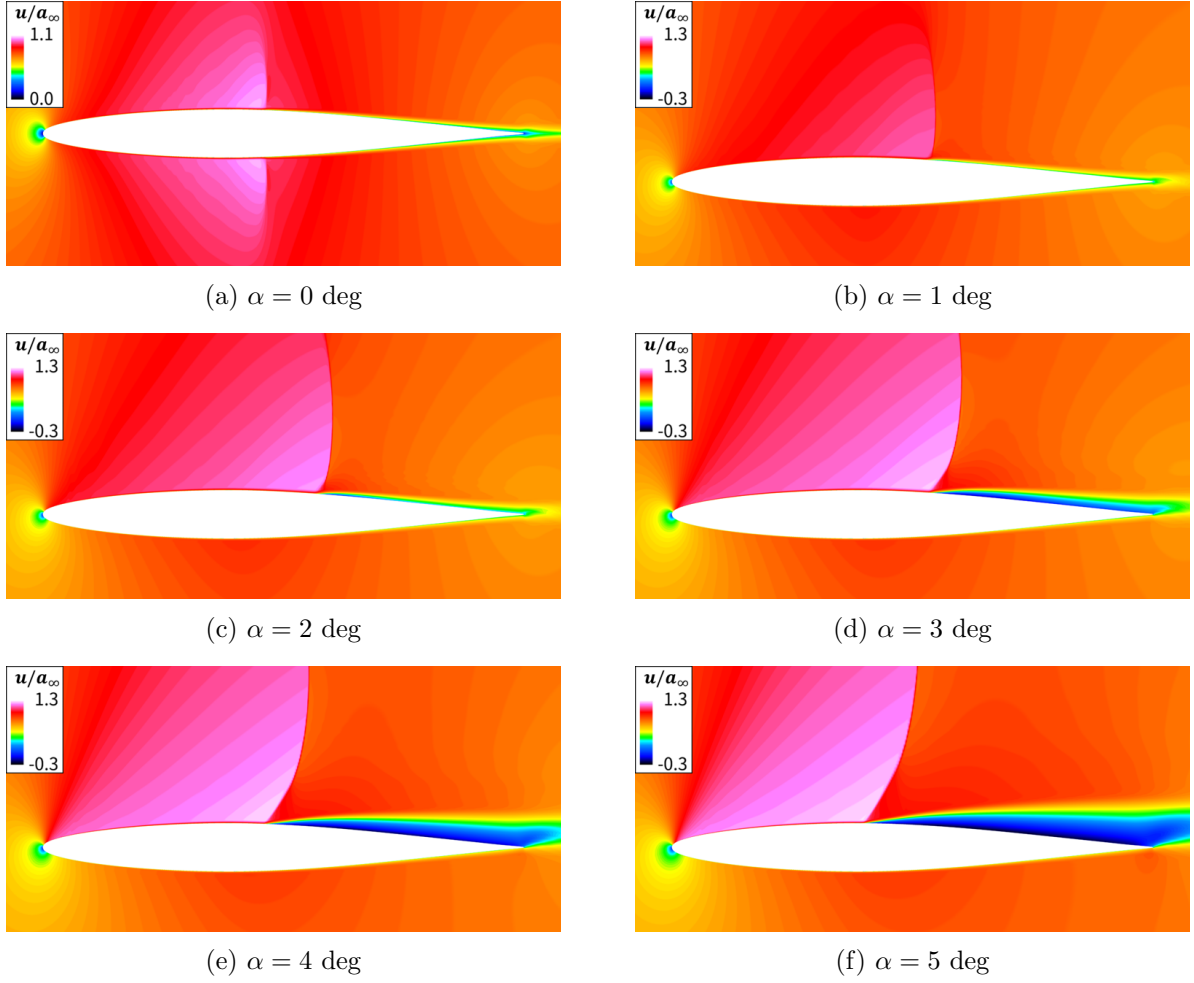


Figure 3.7: Comparison of streamwise velocity distributions for the stationary airfoil.

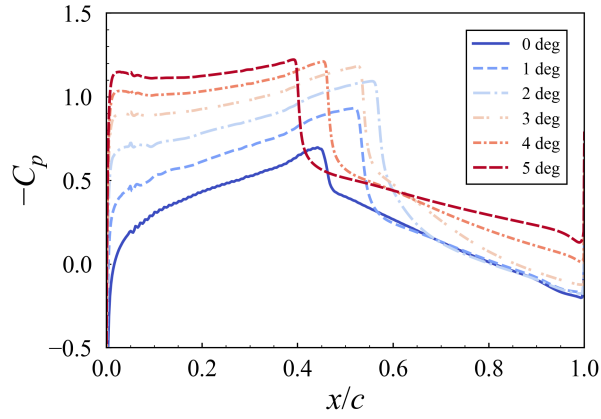


Figure 3.8: Comparison of  $C_p$  distributions over the upper surface at various angles of attack for the stationary airfoil.

Figure 3.7で示したように、 $\alpha_m = 0, 2 \text{ deg}$ では衝撃波背後で流れは付着しており、それ以上の迎え角では、はく離する。従って、衝撃波背後で流れが付着している場合、曲げモードに対して不安定、振じりモードに対して安定となり、はく離する場合、曲げ・振じりの両モードに対して安定となる。これらの傾向はBohbotら[30]のフラッター計算結果と同様である。

なぜ衝撃波背後での流れ場に依存して $C_l$ ループの方向が変化するのかを明らかにするため、Fig. 3.11に示す各平均迎え角での振動一周期での衝撃波位置の変化に着目する。ここで、

コード方向の圧力勾配の絶対値 $\left|\frac{dC_p}{dx}\right|$ が最大であり、かつ $\left|\frac{dC_p}{dx}\right| > 5.0$ である位置を衝撃波位置として定義した。なおFig. 3.11中には静的計算により得られた結果もあわせて示している。Figure 3.11より、 $\alpha_m = 0$  degでは右肩上がりの反時計回りループとなっていることが分かる。 $\alpha_m = 0$  degでは衝撃波背後で流れが付着しているため、迎え角増大に対して衝撃波は下流側へ移動する。そのため、衝撃波位置のループも右肩上がりとなる。また翼振動により衝撃波運動の位相は静的な場合に比べて遅れる。その結果、Fig. 3.12に示すように振動翼の衝撃波位置は、頭上げ運動時には静的な場合に比べて上流側、頭下げ運動時には下流側となる。この衝撃波振動の位相遅れにより、頭上げ運動時には静的な場合に比べて揚力が増大し、逆に頭下げ運動時には揚力が減少する。以上が衝撃波背後で流れが付着している場合に $C_l$ ループが反時計回りとなる理由である。

一方、衝撃波背後で流れがはく離する $\alpha_m = 6$  degでは衝撃波位置のループが右肩下がりとなる。これは頭上げ運動に対して衝撃波が上流側へ移動するためである。この時の衝撃波運動の位相遅れを考えると、Fig. 3.13に示すように、振動翼の衝撃波位置は、頭上げ運動時には静的な場合に比べ下流側、頭下げ運動時には上流側となる。この衝撃波振動の位相遅れにより、頭上げ運動時には静的な場合に比べて揚力が減少し、逆に頭下げ運動時には揚力は増加する。以上が衝撃波背後で流れがはく離している場合に $C_l$ ループが反時計回りとなる理由である。また $\alpha_m = 4$  degではループが右肩上がりとなっているが、これは翼振動時に衝撃波背後ではく離と再付着を繰り返すためである。

以上より、衝撃波背後で流れが付着している場合には、衝撃波振動の位相遅れにより非定常空気力が正の仕事を行い系は不安定化する。一方、衝撃波背後で流れがはく離している場合には、迎え角増加に対する衝撃波の運動方向が付着時と逆転するため、非定常空気力は負の仕事を行い系は安定化することが明らかになった。

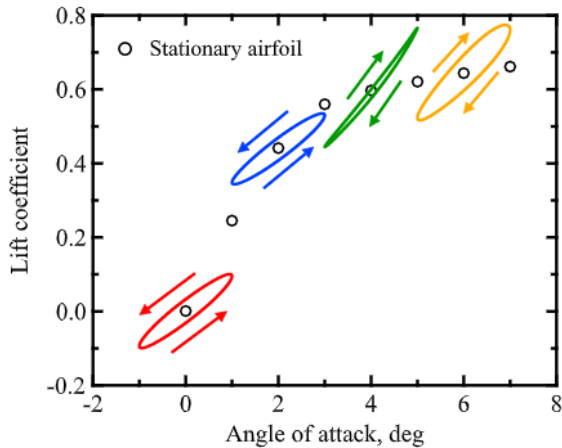


Figure 3.9: Dynamic  $C_l$  loop in terms of the angle of attack for  $k = 0.2$ . The arrows indicate the loop direction.

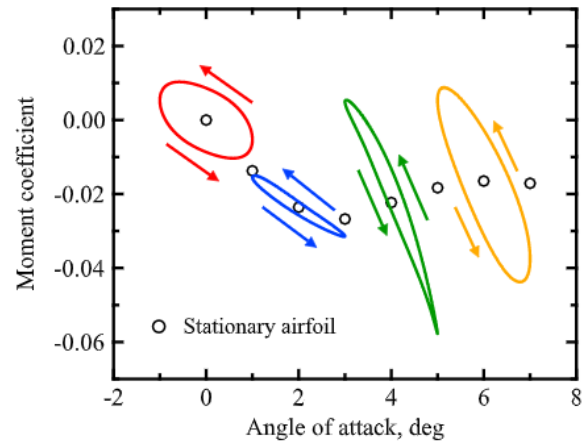


Figure 3.10: Dynamic  $C_m$  loop in terms of the angle of attack for  $k = 0.2$ . The arrows indicate the loop direction.

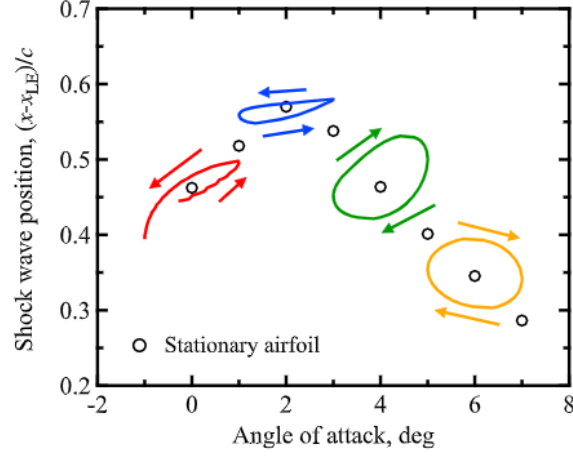


Figure 3.11: Dynamic loops of the shock wave position for each mean-angle of attack condition. The arrows indicate the loop direction.

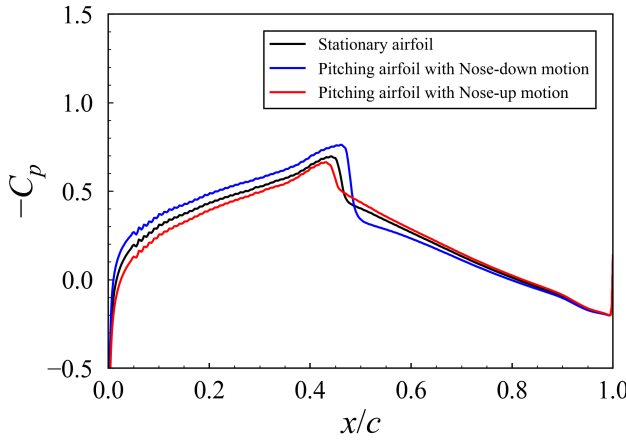


Figure 3.12: Comparison of  $C_p$  distributions with stationary and pitching airfoils at  $\alpha_p = 0.0$  deg.

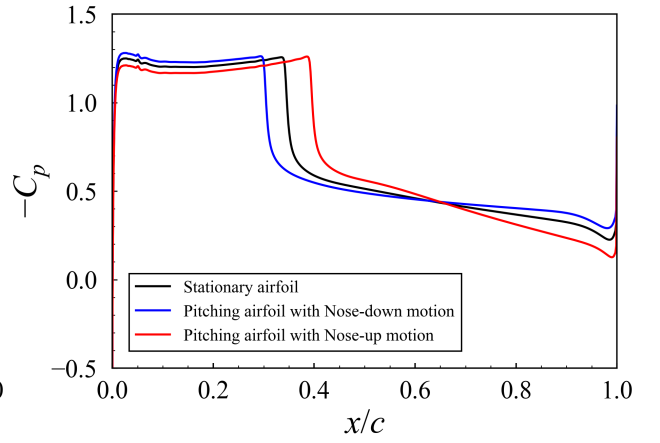


Figure 3.13: Comparison of  $C_p$  distributions with stationary and pitching airfoils at  $\alpha_p = 6.0$  deg.

### 3.4 NACA64A010翼型のフラッター特性

前節では強制振動翼計算によって、衝撃波背後での流れ場と衝撃波の位相特性との関係について議論した。本節ではNACA64A010翼型のフラッター計算を行い、実際のフラッター挙動において前節で得られた知見が適用可能であることを確認する。計算条件および構造パラメータはIsogai[10]と同様であり、Table 3.3, 3.4に示す通りである。構造パラメータを式(2.125)に代入すると、

$$\omega_1 = 11.35 \text{ Hz}, \quad \omega_2 = 84.95 \text{ Hz}$$

となる。ここで $\omega_1$ が曲げモードの固有周波数、 $\omega_2$ が捩じりモードの固有周波数である。

計算格子は強制振動翼計算の結果を参考に翼上下面でコード方向の平均空間解像度が $\Delta x = 1.7 \times 10^{-3}$ となるよう $1355 \times 250$ とした。本解析は $\alpha_A = 0$  degであり翼上下面のいずれにおいても衝撃波はく離が生じる可能性があるため、翼上下面で空間解像度を同一にしている。そのため強制振動翼計算で使用した格子に比べ格子数が増えている。また無次元時間刻み幅は $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ 、内部反復回数は $imax = 3$ とした。

Table 3.3: Computational condition for the flutter calculation [10].

|                              |                   |
|------------------------------|-------------------|
| Angle of attack, $\alpha_A$  | 0 deg             |
| Reynolds number, $Re_\infty$ | $6.6 \times 10^6$ |
| Mach number, $M_\infty$      | 0.7 – 0.9         |

Table 3.4: Structure parameters for the NACA64A010 flutter [10].

|                 |           |
|-----------------|-----------|
| $x_\alpha$      | 1.8       |
| $r_\alpha^2$    | 3.48      |
| $\omega_h$      | 100 rad/s |
| $\omega_\alpha$ | 100 rad/s |
| $\mu$           | 60        |
| $a$             | -2.0      |

### 3.4.1 NACA64A010翼型のフラッター境界

Figure 3.14にNACA64A010翼型のフラッター境界におけるフラッター速度および周波数をBohbotらおよびZhangらの計算例[30, 59]とともに示す. ここで, Zhangら[59]は乱流モデルとして $k-\omega$ モデル[60], Bohbotら[30]はSAモデル[48]を用いている. また, 翼の振動振幅が一定となるときの $V_*$ をフラッター速度と定義し, その時の周波数をフラッター周波数とする. フラッター速度および周波数の同定方法については付録Aに記述している. フラッター速度, 周波数それぞれを比較すると本計算結果とその他の計算例の結果はすべてのマッハ数でよく一致しており, 本解析が妥当であることが分かる.

まずFig. 3.14aに示すフラッター速度に着目すると, マッハ数の増大に伴いフラッター速度は小さくなり,  $M_\infty = 0.82$ で最小値をとることが分かる. さらにマッハ数を大きくすると, フラッター速度は急激に上昇する. またフラッター周波数は遷音速ディップの底( $M_\infty = 0.825$ )では曲げモードの周波数と一致しており, 典型的な遷音速ディップが形成されていることがわかる. Figure 3.15にNACA64A010翼型のフラッター境界における上下および回転変位の時間履歴を示す. 両マッハ数で比較すると,  $M_\infty = 0.825$ では上下運動と回転運動の間に位相差はないが,  $M_\infty = 0.9$ では位相差があることが分かる. これはフラッター周波数からもわかるように,  $M_\infty = 0.825$ では頭上げに対して下方変位が生じる, 曲げモードのみの単一モードで振動しているのに対して,  $M_\infty = 0.9$ では曲げ-捩じりの連成振動が生じているためである. 次にFig. 3.16に示す各マッハ数における静的計算での流れ場を比較すると, 比較的フラッター速度の大きい $M_\infty = 0.7$ では衝撃波は存在しないが, 遷音速ディップの底である $M_\infty = 0.825$ では翼面上に衝撃波が形成されていることが分かる. またフラッター速度が急激に上昇する $M_\infty = 0.9$ では衝撃波背後で流れがはく離していることが分かる.

衝撃波が系の安定性に及ぼす影響について評価するため, フラッター境界における翼振動1周期での翼上面の局所エネルギー分布を比較する. 局所エネルギー計算 $c_w$ は2章で示したように,

$$c_w(\mathbf{x}, t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} \left[ -(C_p(\mathbf{x}, t) - C_{p-ave}(\mathbf{x})) A(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \right] dt \quad (3.4)$$

であり, 圧力変動に起因する流体から構造への流入エネルギー量を表している. 従って,  $c_w > 0$ は流体から構造へのエネルギー流入を意味し, 非定常空気力が系を不安定化していることを表す. 反対に $c_w < 0$ は非定常空気力が系を安定化していることを表す. Figure 3.17に $M_\infty = 0.825$ および $M_\infty = 0.9$ における局所エネルギー係数を最大値で正規化した $c_w/c_{wmax}$ の分布を示す. Figure 3.17におけるピークは衝撃波振動によるエネルギー流入出に相当するものであり,  $M_\infty = 0.825$ では衝撃波位置において正のピークが生じていることから, 衝撃波振動が系を不安定化していることが分かる. そのため, 衝撃波の発生によりフラッター速度は減少する. 一方,  $M_\infty = 0.9$ では衝撃波位置において負のピークが生じており, 衝撃波振動が系を安定化していることが分かる. そのため,  $M_\infty = 0.9$ においてフラッター速度は回復する. このような衝撃波背後で流れが付着している場合に生じる衝撃波振動による



不安定化，およびはく離している場合に見られる安定化の傾向は，前節の強制振動翼計算における議論と一致しており，衝撃波振動の位相遅れに起因するものである。

以上より，NACA64A010翼型のフラッター特性として，マッハ数を大きくすると，翼面上に衝撃波が生じ，その衝撃波が翼振動により振動することで系を不安定化するため，フラッター速度が減少する．さらにマッハ数を大きくすると，衝撃波背後で流れのはく離が生じ，それに伴い衝撃波振動が系を安定化ようになるため，フラッター速度が急激に上昇することが分かった。

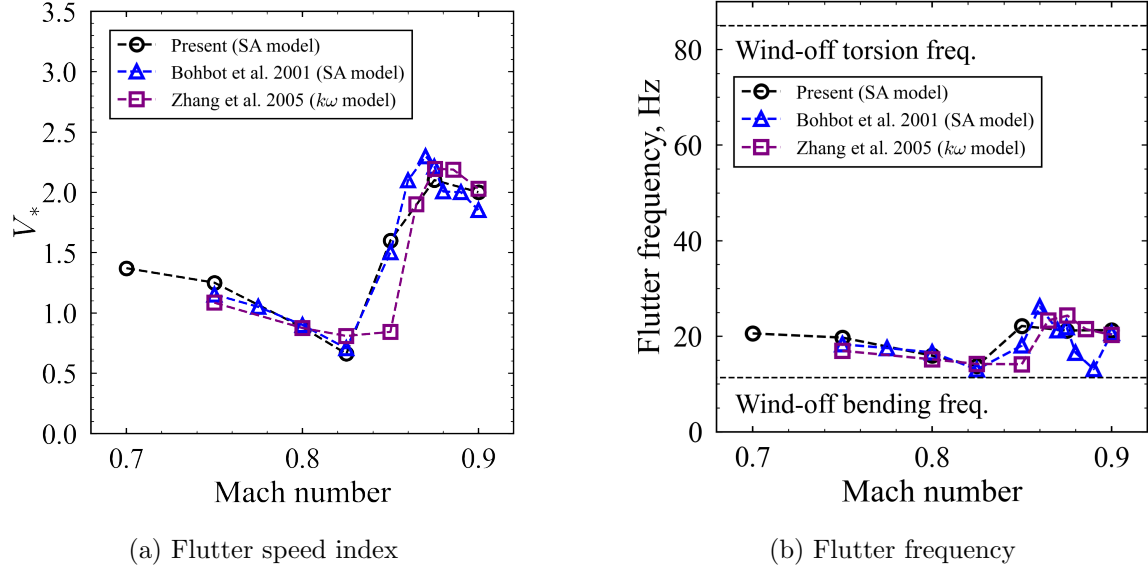


Figure 3.14: Comparison of flutter boundaries of the NACA64A010 airfoil.

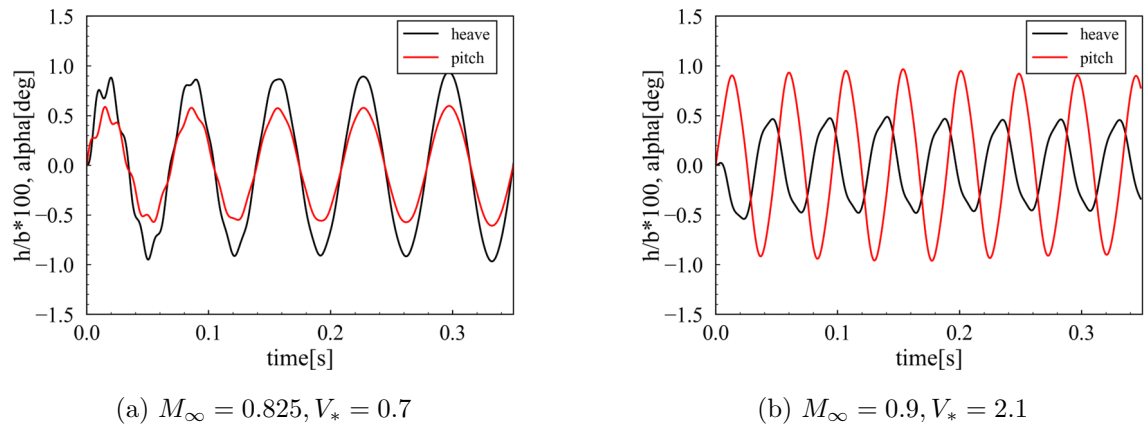


Figure 3.15: Time history of heaving and pitching displacements in a NACA64A010 airfoil.



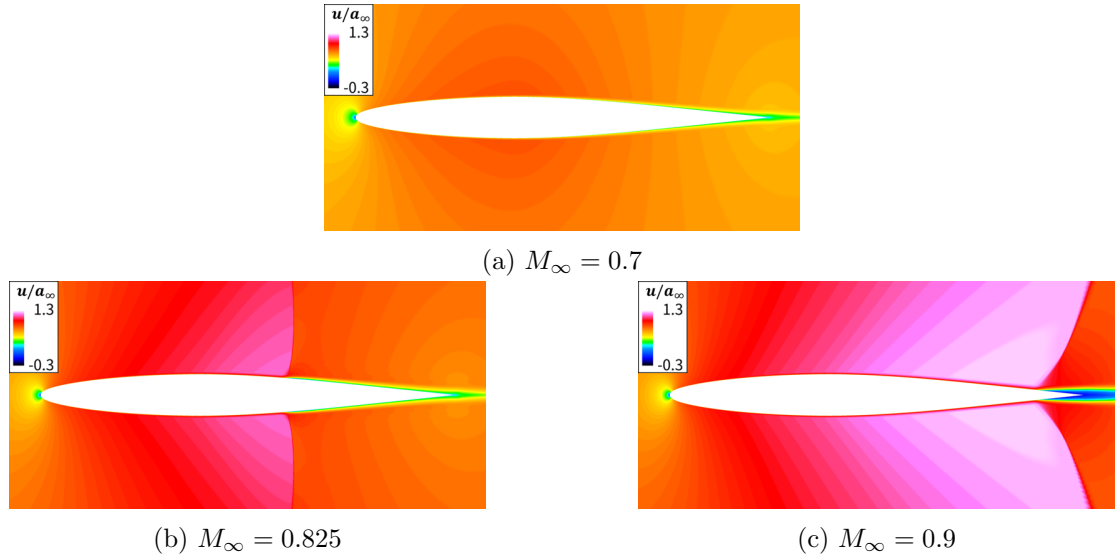


Figure 3.16: Mach number distributions around transonic dip in a NACA64A010 airfoil.

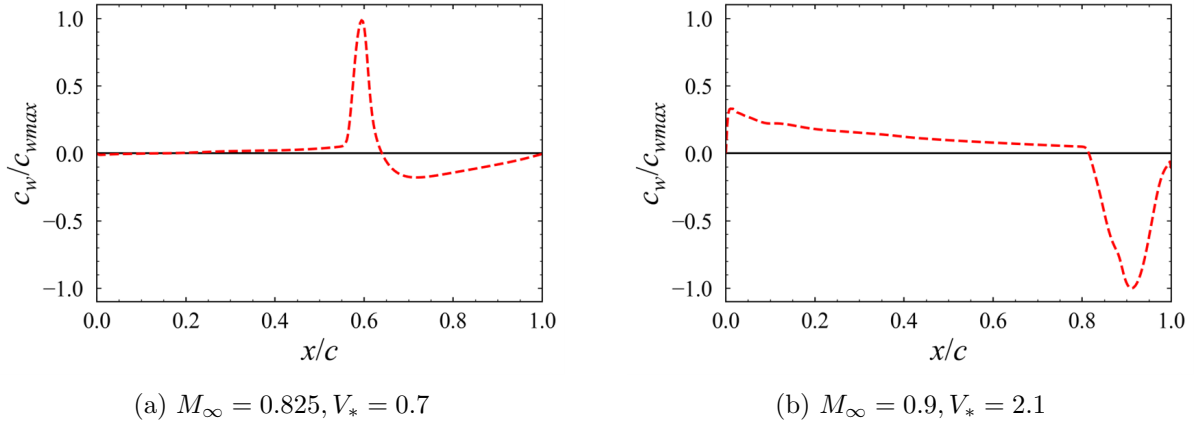


Figure 3.17: Local work coefficient distributions around transonic dip in a NACA64A010 airfoil.

### 3.5 まとめ

本章ではNACA64A010翼型を用いた2次元静的計算，強制振動翼計算，フラッター計算を行い，非定常空気力の予測精度検証および衝撃波はく離によるフラッター安定化メカニズムについて調査した．得られた結果を以下にまとめる．

- 2次元翼型に関しては時間・空間精度を十分に確保することでURANSによって衝撃波はく離の非定常挙動を高精度に予測可能である．
- 衝撃波背後で流れが付着している場合には，先行研究[12]と同様に，衝撃波振動の位相遅れが系を不安定化していることが分かった．
- 衝撃波背後で流れがはく離している場合には，迎え角の増大に対する衝撃波の移動方向が付着流れの場合とは逆転し，この状態における衝撃波振動の位相遅れは系を安定化することを明らかにした．

## 第4章 SC2-0610翼型のフラッター特性

本章では研究目的②の「超臨界翼におけるダブル遷音速ディップの発生メカニズムの解明」のため，強制振動翼およびフラッター計算を行う．Persoonら[32]の実験では超臨界翼型を断面形状にもつ3次元後退翼が用いられていたが，本研究では超臨界翼型の基礎的なフラッター特性を把握するため，2次元超臨界翼型SC2-0610を対象に計算を行った．SC2-0610翼型のSCはSupercritical airfoil，2は第2世代，06は設計揚力が0.6，10は最大翼圧比が10%であることを意味する．

### 4.1 計算手法および計算条件

計算手法はTable 4.1に示す通りである．2次元計算であるため並列化は行っていない．翼型はSC2-0610であり，計算格子にはFig. 4.1に示すようなO型格子を用いた．格子数は1204 × 250であり，前章で示した $\Delta x = 1.7 \times 10^{-3}$ を基準に決定した．翼表面法線方向の最小格子幅は $2.0 \times 10^{-6}$ であり，翼表面第一格子点において $\eta^+ < 1$ を満たしている．また外部境界の影響を小さくするため計算領域はコード長の50倍と十分大きくした．計算条件およびフラッター計算における構造パラメータはTable 4.2, 4.3に示す通りであり，前章のNACA64A010翼型のフラッター計算と同じ値を用いている．従って，曲げ，捩じりモードの固有周波数も前章と同様に，

$$\omega_1 = 11.35 \text{ Hz}, \quad \omega_2 = 84.95 \text{ Hz}$$

となる．

Table 4.1: Computational method

|       |                             |
|-------|-----------------------------|
| 支配方程式 | 2次元圧縮性URANS                 |
| 乱流モデル | SA[48]                      |
| 非粘性流束 | 3次精度MUSCL補間[41]を用いたSHUS[40] |
| 粘性流束  | 2次精度中心差分法                   |
| 時間離散化 | 1次精度オイラー陰解法                 |
| 時間積分法 | LUSGS陰解法[42]                |

Table 4.2: Computational condition for the flutter calculation.

|                                           |                      |
|-------------------------------------------|----------------------|
| Angle of attack, $\alpha_A$               | 0 deg                |
| Reynolds number, $Re_\infty$              | $6.6 \times 10^6$    |
| Mach number, $M_\infty$                   | 0.7 – 0.9            |
| Nondimensional time step size, $\Delta t$ | $1.0 \times 10^{-4}$ |
| Number of inner iterations, $imax$        | 3                    |

Table 4.3: Structure parameters for the SC2-0610 flutter [10].

|                 |           |
|-----------------|-----------|
| $x_\alpha$      | 1.8       |
| $r_\alpha^2$    | 3.48      |
| $\omega_h$      | 100 rad/s |
| $\omega_\alpha$ | 100 rad/s |
| $\mu$           | 60        |
| $a$             | -2.0      |

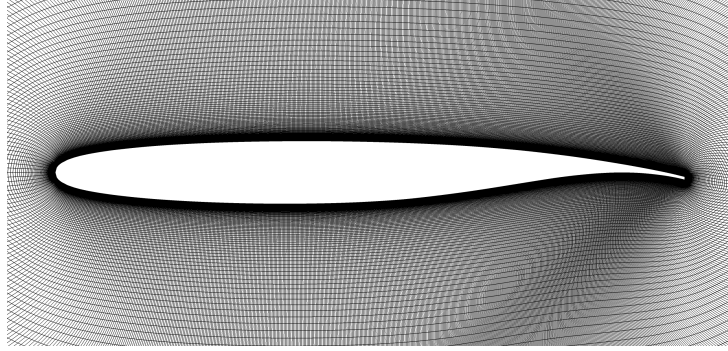


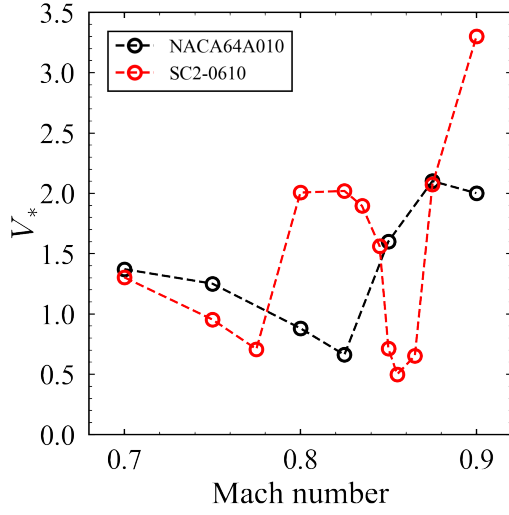
Figure 4.1: Computational grid for the SC2-0610 airfoil.

## 4.2 SC2-0610翼型のフラッター境界

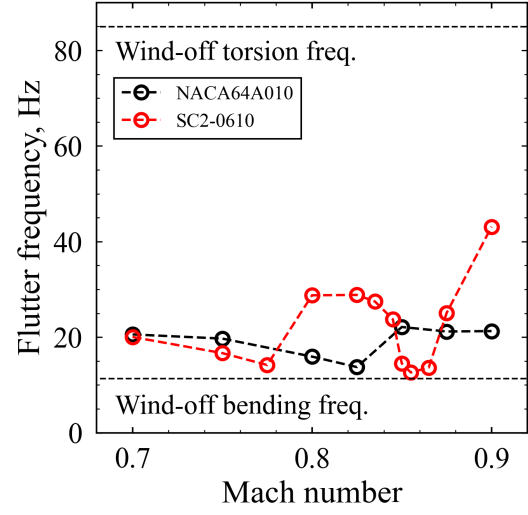
Figure 4.2にSC2-0610翼型のフラッター速度および周波数を示す。比較のため、NACA64A010翼型のフラッター境界もあわせてプロットしている。フラッター速度に着目すると、 $M_\infty = 0.775$ および $M_\infty = 0.855$ 付近でフラッター速度が急激に落ち込んでおり、実験[32, 13]で観測されていたダブル遷音速ディップが、本計算においてもとらえられていることが分かる。また2ndディップは1stディップに比べてフラッター速度が小さく、ディップが深くなっている。フラッター周波数に着目すると、両ディップの底では曲げモード振動が支配的であることが分かる。Figure 4.3に各ディップの底での、フラッター境界における上下および回転変位の時間履歴を示す。両ケースで上下運動と回転運動の間に位相差はなく、また頭上げに対して下方変位が連成しており、フラッター周波数でも述べた通り、曲げモードで振動していることが確認できる。

Figure 4.4に1stディップの底である $M_\infty = 0.775$ ,  $V_* = 0.7$ におけるフラッター振動1周期での各迎え角におけるマッハ数分布を示す。Figure 4.4より翼振動時には翼上面においてのみ衝撃波が生じていることが分かる。また翼振動1周期のすべての迎え角において衝撃波背後で流れは付着しており、はく離は生じていない。前章でも議論したように、衝撃波背後で流れが付着している場合では、衝撃波振動は系を不安定化する。またここでは示していないが、さらにマッハ数を大きくすると衝撃波背後で流れがはく離し、それに伴いフラッター速度も大きくなる。このような衝撃波の発生による不安定化およびその背後でのはく離による安定化はNACA64A010翼型と同様の傾向であり、超臨界翼型における1stディップは従来の対称翼と同様の典型的な遷音速ディップであると言える。

Figure 4.5に2ndディップの底である $M_\infty = 0.855$ ,  $V_* = 0.5$ におけるフラッター振動1周期での各迎え角におけるマッハ数分布を示す。Figure 4.5より、 $M_\infty = 0.855$ では翼上面衝撃波背後で流れがはく離しており、 $M_\infty = 0.775$ とは異なる流れ場となっていることが分かる。一方、これまで述べたように衝撃波背後で流れがはく離している場合では、衝撃波振動が系を安定化するためフラッター速度は大きくなると考えられるが、 $M_\infty = 0.855$ では逆の傾向を示している。また $M_\infty = 0.855$ では翼下面においても衝撃波が生じており、後縁のキャンバー部では流れがはく離している。Figure 4.6に2ndディップ周りのマッハ数における静的計算で得られた流れ場を示す。各マッハ数で翼上面の流れ場を比較すると、すべてのマッハ数において衝撃波ははく離が生じており、本質的には同じ流れ場であるといえる。次に翼下面に着目すると、 $M_\infty = 0.825$ までは翼下面で衝撃波は生じないが、 $M_\infty = 0.855$ では翼下面で衝撃波が生じさらに衝撃波背後で流れがはく離し、フラッター速度は最小値をとる。さらにマッハ数を大きくした $M_\infty = 0.875$ では、翼下面における衝撃波背後でのはく離域が拡大し、それに伴いフラッター速度も急激に上昇する。これらの流れ場の特徴から、翼下面の衝撃波が2ndディップ形成に重要であることが示唆される。

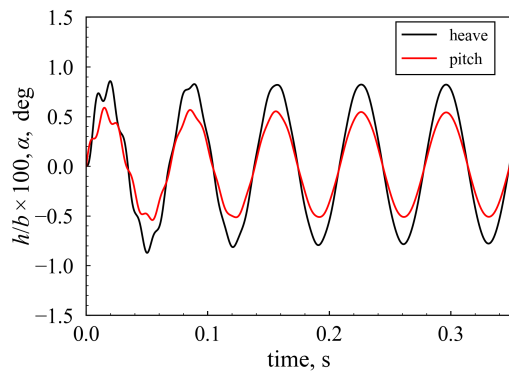


(a) Flutter speed index

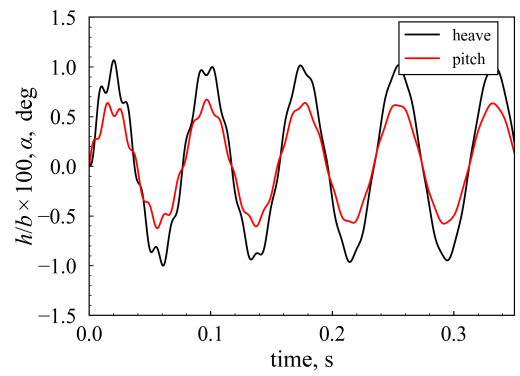


(b) Flutter frequency

Figure 4.2: Comparison of flutter boundaries of the SC2-0610 airfoil.

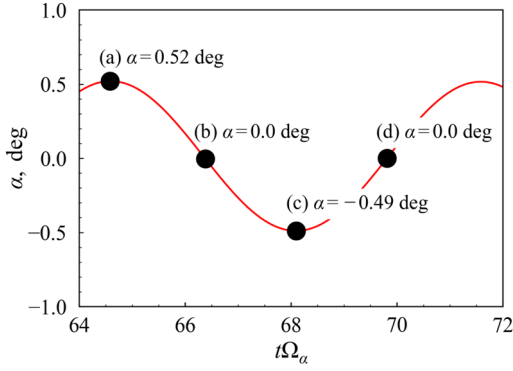


(a)  $M_\infty = 0.825, V_* = 0.7$

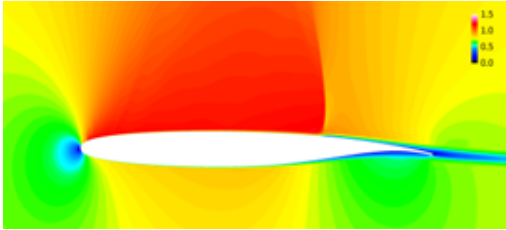


(b)  $M_\infty = 0.9, V_* = 0.5$

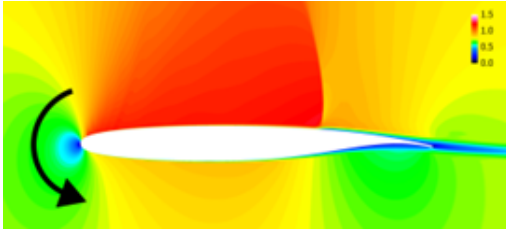
Figure 4.3: Time history of heaving and pitching displacements in a SC2-0610 airfoil.



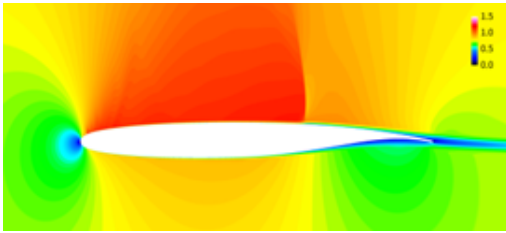
(a) Sampling points



(b)  $\alpha = 0.52^\circ$



(c)  $\alpha = 0^\circ$  (nose-down)

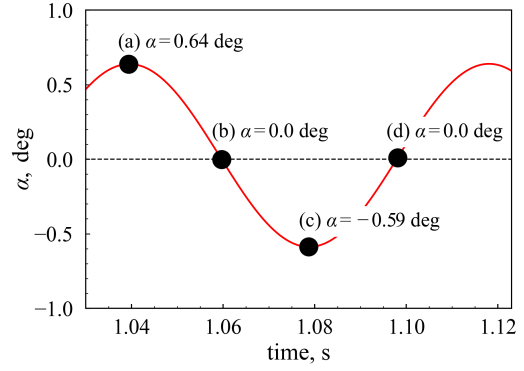


(d)  $\alpha = -0.49^\circ$

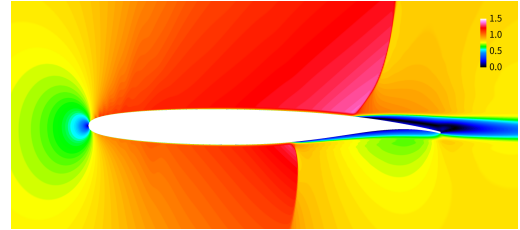


(e)  $\alpha = 0^\circ$  (nose-up)

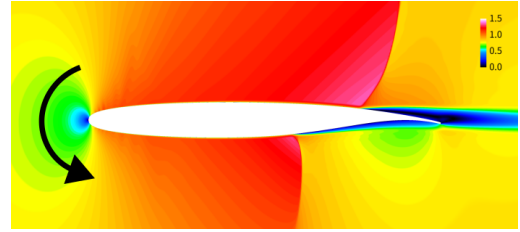
Figure 4.4: Sequential Mach number distributions ( $M_\infty = 0.775$ ,  $V_* = 0.7$ ).



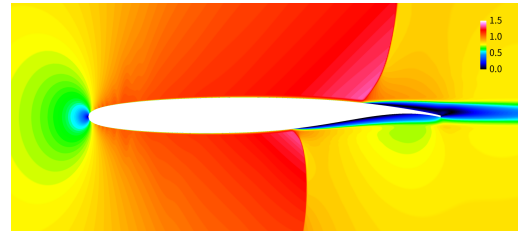
(a) Sampling points



(b)  $\alpha = 0.64^\circ$



(c)  $\alpha = 0^\circ$  (nose-down)



(d)  $\alpha = -0.59^\circ$



(e)  $\alpha = 0^\circ$  (nose-up)

Figure 4.5: Sequential Mach number distributions ( $M_\infty = 0.855$ ,  $V_* = 0.5$ ).

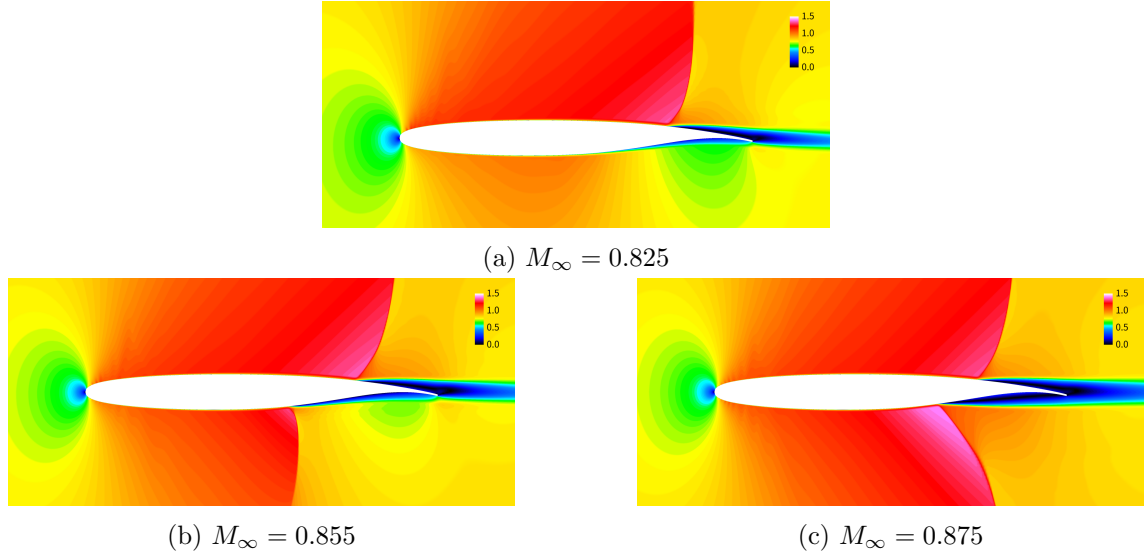


Figure 4.6: Comparisons of the Mach number distributions for three Mach numbers around the second dip.

### 4.3 局所エネルギー収支の評価

衝撃波が系の安定性に及ぼす影響について評価するため、フラッター境界における翼振動1周期での翼上面の局所エネルギー分布を比較する。Figure 4.7にフラッター境界における翼振動1周期での局所エネルギー係数分布を示す。Figure 4.7より、 $M_\infty = 0.855, 0.875$ の両条件において翼下面の衝撃波は負のピークを持っており系を安定化していることから、翼下面衝撃波振動が2ndディップの発生要因ではないことが分かる。またFig. 4.8に示すように $M_\infty = 0.855, 0.875$ では翼下面衝撃波背後で流れははく離しており、この時に衝撃波振動が安定化効果を持つことは前章のNACA64A010翼型での議論と一致している。

次に翼上面のエネルギー収支に着目すると、 $M_\infty = 0.825, 0.875$ では負のピークに見られるように衝撃波は系を安定化している。一方、2ndディップの底である $M_\infty = 0.855$ では正のピークが生じており、これは衝撃波振動が系を不安定化していることを意味している。従って、 $M_\infty = 0.855$ における翼上面の衝撃波振動が2ndディップ発生的主要原因であると言える。翼上面の流れ場は衝撃波はく離という点で3つのマッハ数条件で同一であるが、翼上面で正のピークが生じているのは $M_\infty = 0.855$ の条件のみであるため、翼下面の流れ場が翼上面衝撃波の運動特性に影響していると考えられる。

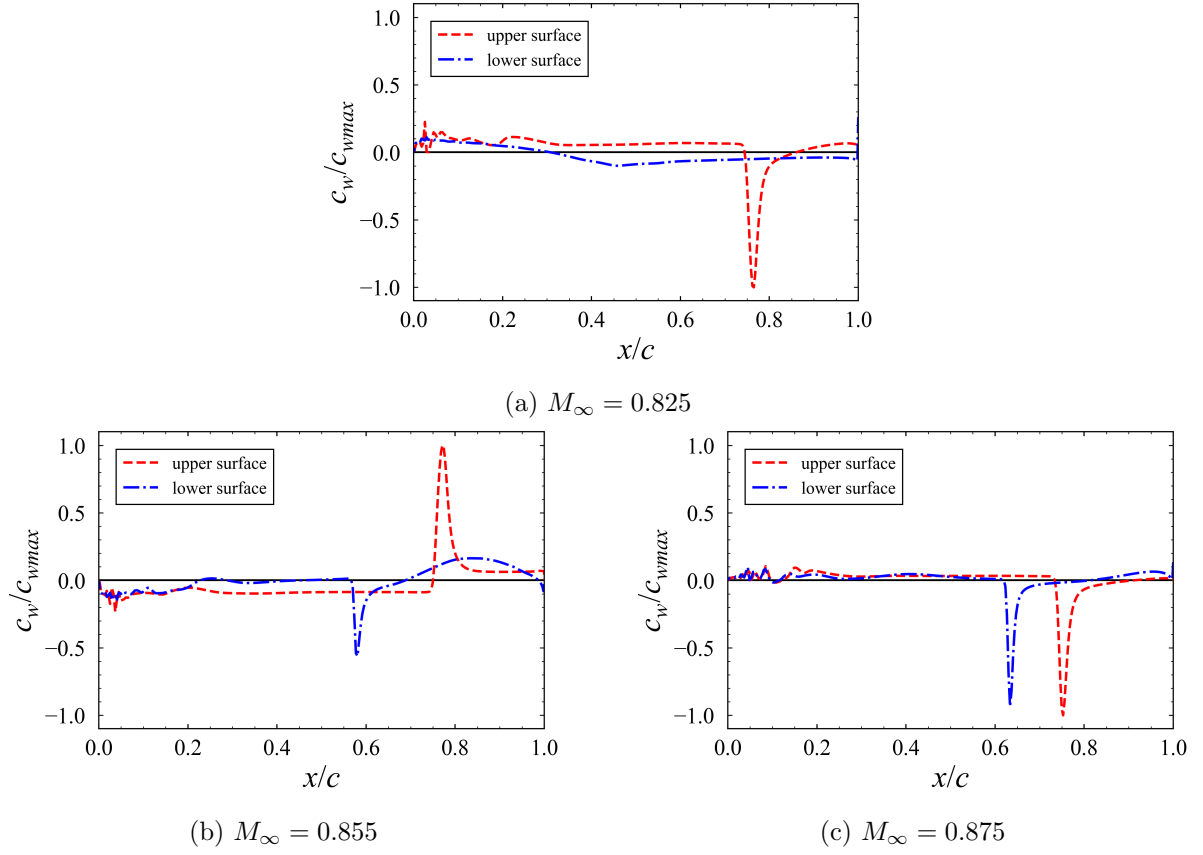


Figure 4.7: Distributions of the normalized local work coefficient for three Mach numbers around the second dip of the SC2-0610 airfoil. The results are at the flutter speed index on the flutter boundary.

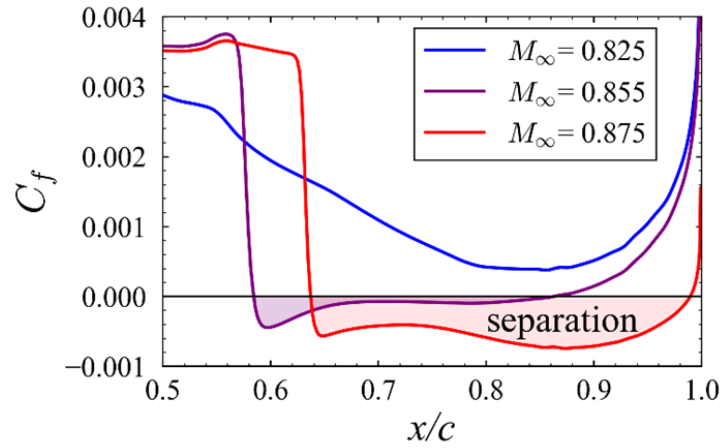


Figure 4.8: Skin-friction distributions on the lower surface around 2nd dip.

## 4.4 2ndディップでの衝撃波振動特性

前節の議論から、 $M_\infty = 0.855$ における翼上面衝撃波振動が2ndディップを生じさせていることが分かった。しかし、なぜ衝撃波背後で流れがはく離しているにも関わらず、翼上面衝撃波振動が不安定化作用を持つのかについては不明である。従って、本節では回転1自由度の強制振動翼計算を行い、翼振動時の衝撃波の運動特性と不安定化作用との関係について調査する。強制振動翼計算のパラメータはTable 4.4に示す通りである。流れ場条件はフラッター計算と同じ条件としている。

Table 4.4: Parameters of forced oscillating calculation for the SC2-0610 airfoil.

|                                    |         |
|------------------------------------|---------|
| Mean angle of attack, $\alpha_m$   | 0 deg   |
| Pitching amplitude, $\alpha_0$     | 1.0 deg |
| Reduced frequency, $k$             | 0.2     |
| Pitching center, $x_{pc} - x_{LE}$ | -0.5c   |

Figure 4.9に各マッハ数における翼振動1周期での衝撃波位置のループを示す。ここで比較のため静的計算での結果についても3つの迎え角に対してプロットしている。また衝撃波位置は前章と同様に圧力係数分布の勾配が最大となる位置で定義している。まず静的な条件での衝撃波位置の変化を比較すると、すべてのマッハ数で迎え角の増加に伴い衝撃波は上流側へ移動していることが分かる。これは衝撃波背後で流れがはく離している流れ場での典型的な挙動であり、NACA64A010翼型の結果とも一致している。一方、衝撃波位置のループを見ると、 $M_\infty = 0.825$ および $M_\infty = 0.875$ では時計回りのループを示しており、NACA64A010翼型の結果と同様であるが、2ndディップの底である $M_\infty = 0.855$ では反時計回りのループを示している。これは $M_\infty = 0.855$ では翼上面の衝撃波運動が静的な変化に対して位相進みであることを意味しており、NACA64A010翼型と異なる傾向となっている。この翼上面衝撃波振動の位相の変化によって、衝撃波振動が不安定化効果を持つようになり、2ndディップを引き起こしたことが分かる。

$M_\infty = 0.855$ における衝撃波振動の位相進みは曲げモード振動に対して支配的な外力となる揚力変動に大きく影響する。Figure 4.10に各マッハ数における翼振動1周期での揚力係数 $C_l$ のループを示す。ここでループが時計回りの場合には、揚力は系を安定化しており、反時計回りの場合には、系を不安定化していることを意味する。Figure 4.10より、 $M_\infty = 0.855$ の場合のみ、揚力係数のループが反時計回りとなっており、揚力が不安定化作用を有していることが分かる。他の2つのマッハ数条件では揚力係数のループは時計回りとなっており安定であることから、強制振動翼計算における揚力の位相特性からも $M_\infty = 0.855$ の場合が最も不安定であることが確認できる。

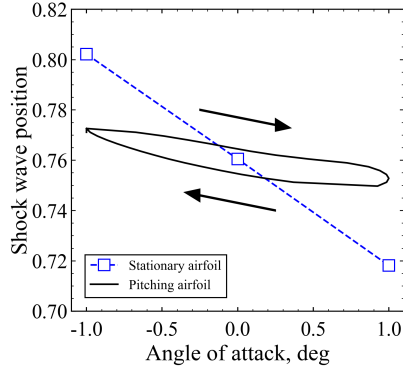
以上の結果から、翼上面衝撃波振動の位相進みに起因する非定常空気力の不安定化作用が2ndディップを生じさせていることが分かった。しかし、なぜ $M_\infty = 0.855$ において翼上面衝撃波振動が位相進みになるのか、その理由は明らかでない。翼上面の流れ場は3つのマッハ数条件でほとんど違いはないため、以下では翼下面の流れ場に着目する。

Figure 4.6のマッハ数分布に示したように、 $M_\infty = 0.855$ では翼下面で衝撃波が生じ、かつその背後で小さなはく離が生じる。一方、 $M_\infty = 0.825$ では翼下面に衝撃波は存在せず、また $M_\infty = 0.875$ では強い衝撃波が生じ、その背後で大規模に流れがはく離する。Figure 4.11に示す、翼振動1周期での翼下面の摩擦係数分布 $C_f$ より、 $M = 0.825$ では翼振動時にはく離は生じず、また $M_\infty = 0.875$ では翼振動中は常に衝撃波背後で流れがはく離している。一方、 $M_\infty = 0.855$ では翼振動1周期の間にはく離と再付着が生じていることが分かる。この翼振動時のはく離-再付着のサイクルは $M_\infty = 0.855$ に特有の挙動であり、翼上面の衝撃波振動の位相特性に影響していると考えられる。

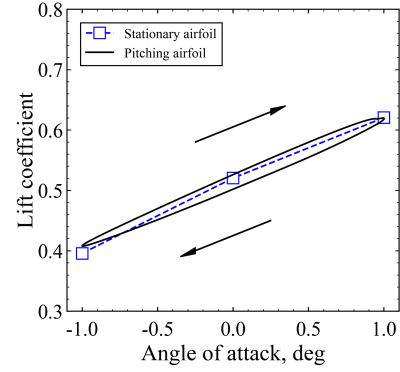
Figure 4.12に翼振動1周期での翼下面はく離面積の変動量を示す。ここで無次元はく離面積 $A_{sep}$ は $u < 0$ のセル面積の総和として定義され、また $A_{sep}$ の1周期での変動量は $|\int A_{sep} d\alpha|$ で表される。Figure 4.12より、 $M_\infty = 0.855 - 0.865$ において、はく離面積の変動量が大きくなっており、翼振動によるはく離域の変化が大きいことが分かる。翼面から流れがはく離した場合、近似的にはく離せん断層を物体表面と考えることができる。つまり、 $M_\infty =$



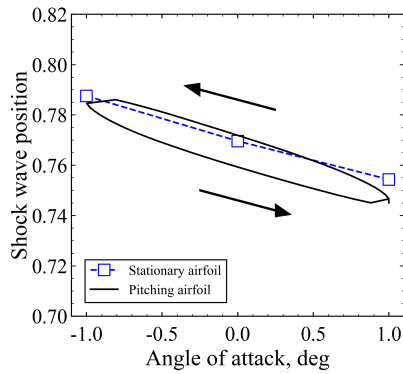
0.855 – 0.865ではなく離域の変化が大きいということは、実質的に翼型形状が大きく変化していることを意味しており、それにより翼周りの循環も変化していると考えられる。以上より、 $M_\infty = 0.855$ における翼振動時の翼下面での流れのはく離-再付着のサイクルが翼周りの循環を変化させ、その結果、翼上面衝撃波振動が位相進みとなったと考えられる。これまでの2ndディップ発生に関する議論をFig. 4.13に概念図としてまとめる。



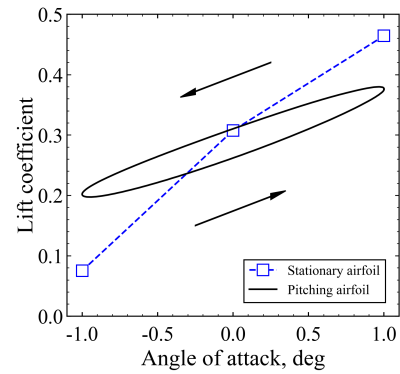
(a)  $M_\infty = 0.825$



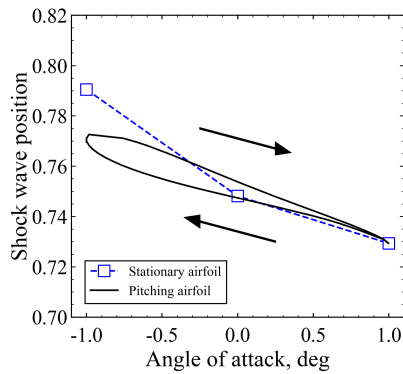
(a)  $M_\infty = 0.825$



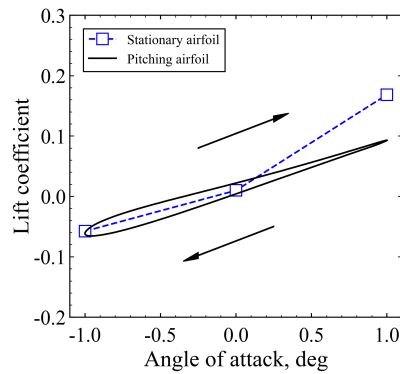
(b)  $M_\infty = 0.855$



(b)  $M_\infty = 0.855$



(c)  $M_\infty = 0.875$



(c)  $M_\infty = 0.875$

Figure 4.9: Dynamic loop of the shock wave position on the upper surface, for which the results of the stationary airfoil are also plotted.

Figure 4.10: Dynamic loop of the lift coefficient, for which the results of the stationary airfoil are also plotted.

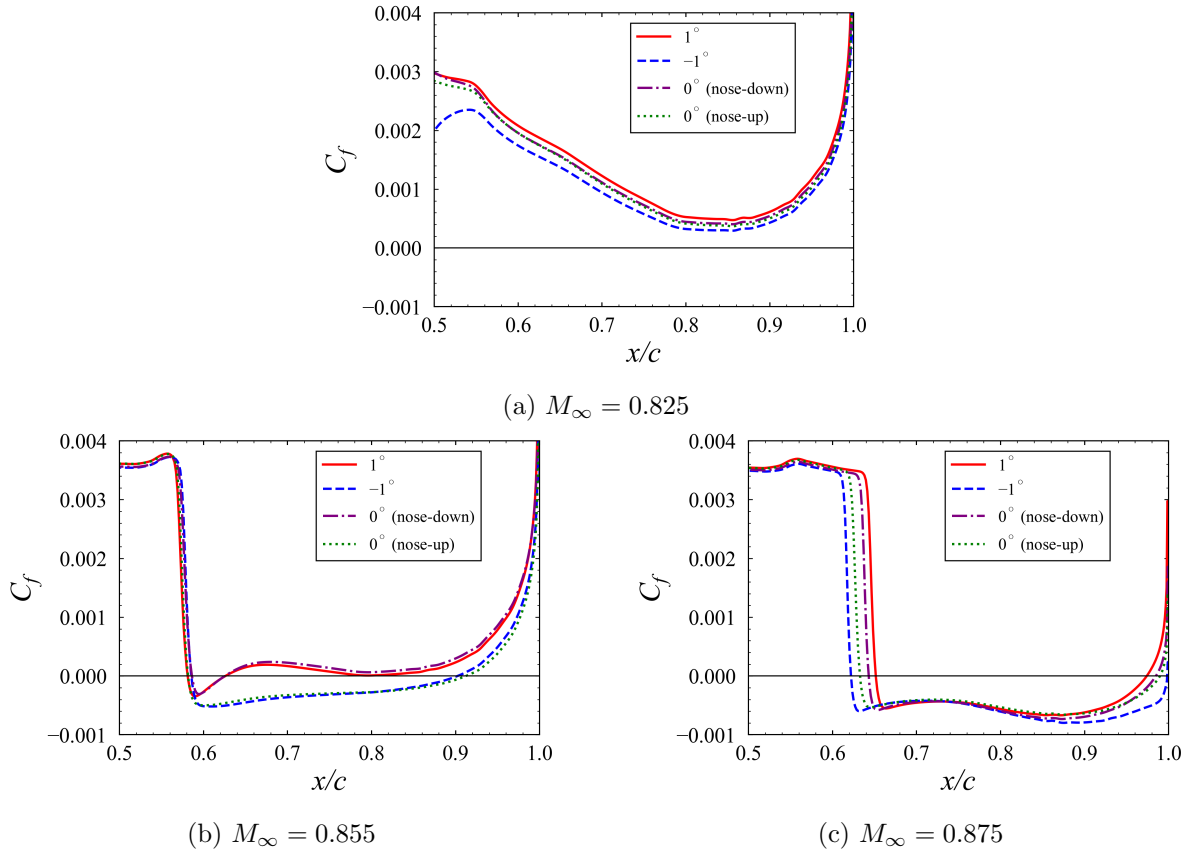


Figure 4.11: Skin friction distributions on the lower surface during the pitching oscillation.

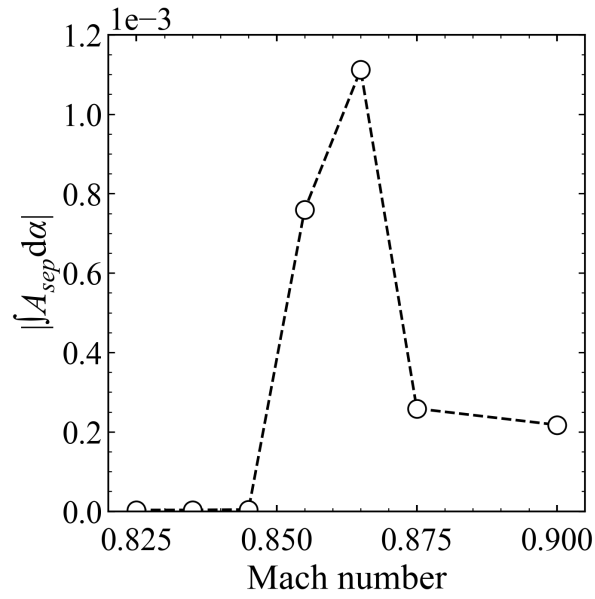


Figure 4.12: Variation of non-dimensional separation area over the lower surface during one period.

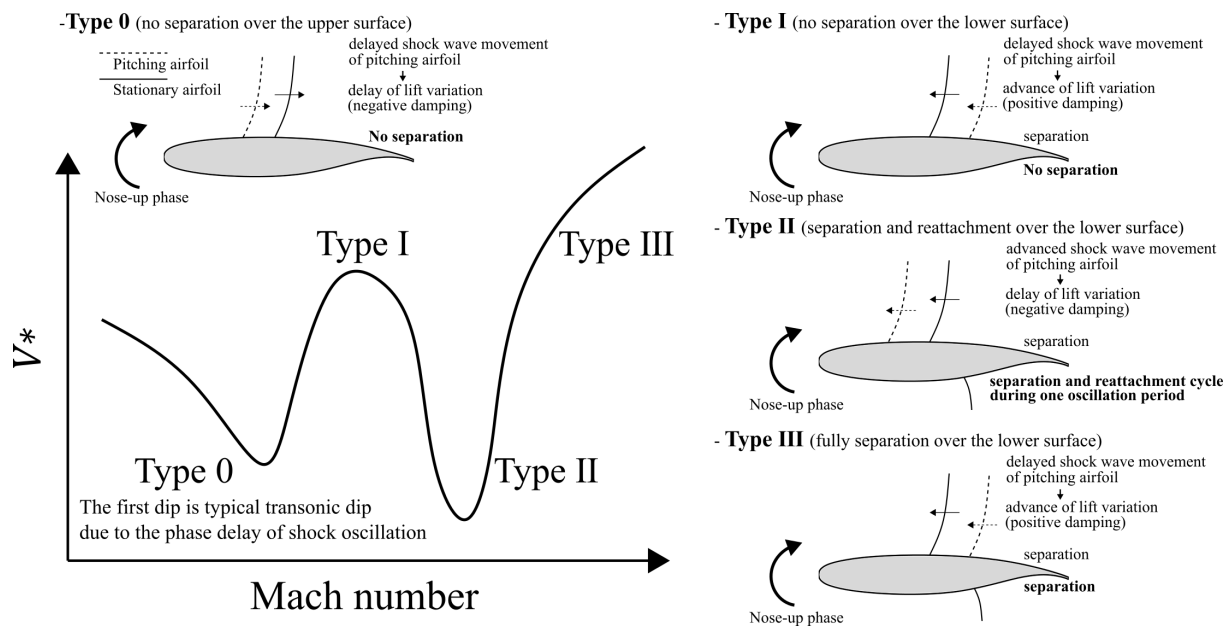


Figure 4.13: Schematic illustration of shock-wave motion as a function of Mach number and its relationship to the second dip in the flutter boundary.

## 4.5 SC2-0610翼型における特異な衝撃波振動

前節の議論から翼下面での境界層はく離が翼上面衝撃波の位相特性に大きく影響することが分かった。本節ではNACA64A010翼型との比較から、衝撃波位置や無次元はく離面積のマッハ数変化に対する挙動に着目し、翼上下面での相互作用が超臨界翼型に特有なものであるのか調査する。

Figure 4.14に翼上面での衝撃波位置および無次元はく離面積のマッハ数に対する変化を示す。ここで迎え角は $\alpha_A = 0 \text{ deg}$ である。Figure 4.14に示すように、 $M_\infty = 0.8$ からマッハ数を大きくすると衝撃波は下流側へ移動するが、 $M_\infty = 0.85$ から $M_\infty = 0.86$ にかけては、マッハ数の増大に伴い衝撃波は上流側へ移動する。このマッハ数の変化に対する衝撃波の移動特性の逆転が生じるマッハ数域は、2ndディップが生じるマッハ数域と同一である。また、さらにマッハ数を大きくすると再び衝撃波は下流側へ移動するようになる。無次元はく離面積を見ると、マッハ数増大に伴いはく離面積も大きくなり、高マッハ数側では、はく離面積の変化は小さくなる。 $M_\infty = 0.86$ においてははく離面積が減少に転じているが、これは翼上面衝撃波の移動方向の逆転に伴うものであり、のちに議論する下面に比べその変化量も小さいため、流れ場への影響はないと考えられる。

Figure 4.15に翼下面での衝撃波位置および無次元はく離面積のマッハ数に対する変化を示す。迎え角は同様に $\alpha_A = 0 \text{ deg}$ である。Figure 4.15より翼下面ではマッハ数の増大に伴い衝撃波は下流側へ移動することが分かる。またその移動量は上面に比べて大きい。無次元はく離面積を見ると、 $M_\infty = 0.85 - 0.9$ においてのみ値を持っており、このマッハ数域は翼上面衝撃波の移動方向が逆転したマッハ数域と一致している。従って、翼下面でののはく離域の急激な拡大が翼上面衝撃波の移動方向の逆転に影響していることが分かる。前章で示したように、従来の対称翼であるNACA64A010翼型では翼上下面での相互作用などは見られなかった。Figure 4.16に示すNACA64A010翼型での衝撃波位置、無次元はく離面積の変化からわかるように、マッハ数増大に対する衝撃波移動方向の逆転などは見られない。従って、翼上下面での流れ場の相互作用は超臨界翼型特有のものであり、これらが2ndディップを生じさせていると考えられる。

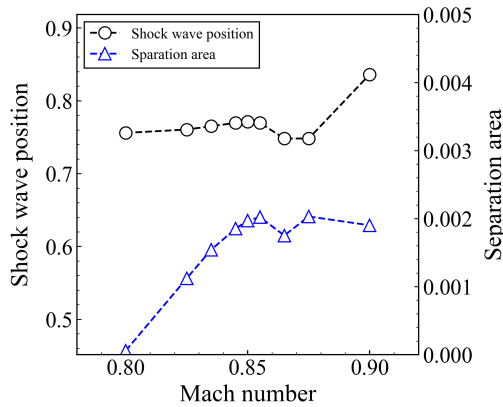


Figure 4.14: Shock wave position and separation area over the upper surface at the angle of attack of 0 deg.

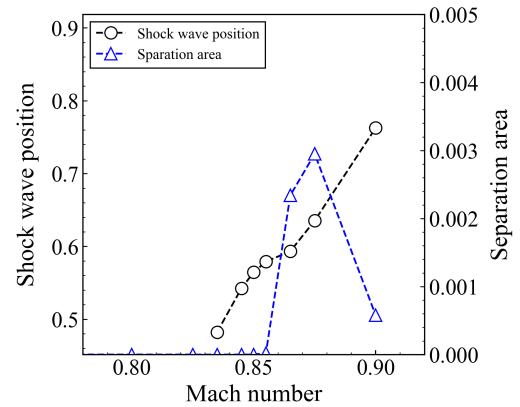


Figure 4.15: Shock wave position and separation area over the lower surface at the angle of attack of 0 deg.

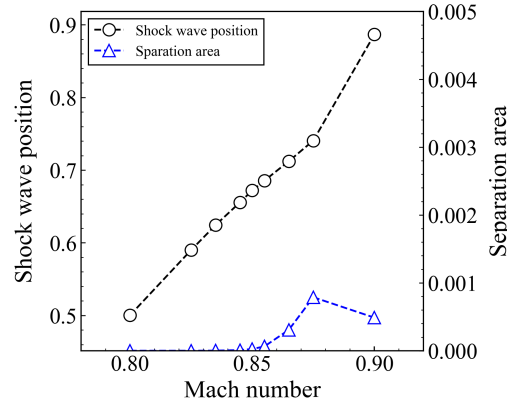


Figure 4.16: Shock wave position and separation area at the angle of attack of 0 deg for the NACA64A010 airfoil.

#### 4.6 フラッター境界に対する超臨界翼型形状の影響

本節では超臨界翼型形状がどのようにフラッター特性に影響するか議論する．これまで計算に用いてきたSC2-0610翼型に加えて，SC2-0410翼型およびSC2-0710翼型のフラッター計算を行った．追加した2つの翼型はSC2-0610翼型と同様の翼厚であるが，後縁キャンバーの強さはそれぞれ異なっており，SC2-0610翼型と比較して，SC2-0410翼型はキャンバーが弱く，SC2-0710翼型はキャンバーが強くなっている．Figure 4.17に各翼型のフラッター境界の比較を示す．まずキャンバーが強いSC2-0710翼型では，フラッター速度および周波数ともにSC2-0610翼型と同様の傾向を持っており，ダブル遷音速ディップが生じていることが分かる．一方，キャンバーが弱いSC2-0410翼型では $M_\infty = 0.875$ 近傍でフラッター速度の小さな落ち込みはあるものの，明確なダブル遷音速ディップは生じていない．従って，ダブル遷音速ディップの発生は翼型形状，特に後縁キャンバーに大きく影響されることが分かる．またSC2-0410翼型では後縁のキャンバーが小さいため，翼下面での離挙動がSC2-0610翼型と異なりそれにより，フラッター境界も大きく変化したと考えられる．

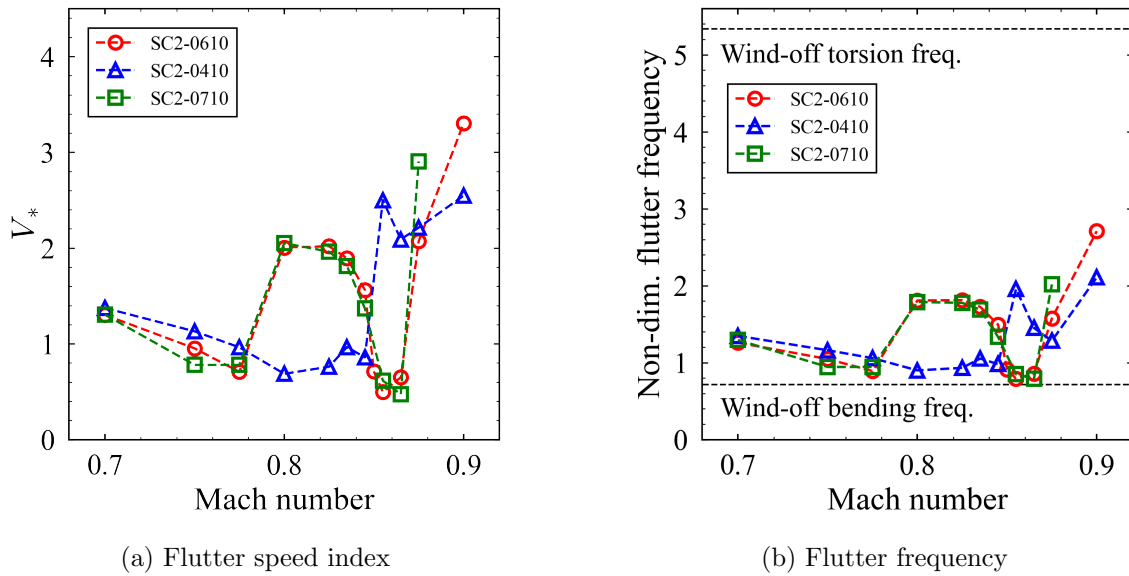


Figure 4.17: Effects of supercritical airfoil shape on the flutter boundary.

## 4.7 まとめ

本章ではSC2-0610超臨界翼型を用いた2次元フラッター計算および強制振動翼計算を行い、フラッター特性を調査した。得られた結果を以下にまとめる。

- SC2-0610超臨界翼型ではダブル遷音速ディップが生じる。
- 1stディップは翼上面衝撃波の発生に伴う不安定化とその背後ではく離による安定化に起因するもので、従来の対称翼と同様の典型的な遷音速ディップである。
- 2ndディップは翼上面衝撃波振動に起因するものである。
- 翼振動時の翼下面衝撃波背後におけるはく離-再付着のサイクルが翼周りの循環を変化させ、その結果、翼上面衝撃波振動の位相が位相進みとなる。この位相進みが2ndディップ発生の原因である。
- ダブル遷音速ディップの発生は翼後縁キャンバーの強さに大きく影響される。

## 第5章 NACA0012ベンチマーク翼フラッター

本章では研究目的③、④の「翼根壁の境界条件モデリングがフラッター予測精度に与える影響の調査」，「3次元低アスペクト比翼における高マッハ数域での急激な不安定化メカニズムの解明」のため，Riveraらによって行われたNACA0012ベンチマーク翼フラッター試験[33]を対象に3次元フラッター計算を行う．NACA0012ベンチマーク翼フラッター試験では広いマッハ数域においてフラッター試験結果が提供されており，かつ高マッハ数域において衝撃波はく離に起因する急激な不安定性が確認されているため，遷音速フラッター現象における翼根壁モデリングの検証に適している．

### 5.1 計算手法および計算条件

Riveraら[33]のNACA0012ベンチマーク翼フラッター試験では翼は剛体で弾性変形せず，翼根に取り付けられたバネにより上下・回転の2自由度運動を行う．従って，2次元と同様の2自由度系の構造モデルを用いてフラッター計算を実施する．翼形状および構造パラメータはTable 5.1，5.2に示す通りであり，それぞれフラッター試験[33]と同様の値を用いている．また弾性軸は実験と同様に翼前縁から50%コード位置とした．

流体の計算手法の概要をTable 5.3に示す．ここでSA\_LowReは低レイノルズ補正[51]を導入したSAモデル，SA\_LowRe\_QCR2024は低レイノルズ補正に加えてQCR2024[55]を導入したSAモデルを表す．また3次元計算であり計算コストが高いため，MPIとOpenMPによるハイブリッド並列計算を行った．具体的には8台のベクトルエンジンによるMPI並列および各ベクトルエンジンで16スレッドのOpenMP並列となっている．

Figure 5.1に翼根が対称境界条件の場合（後に示すC1\_Sym条件）の計算格子を示す．計算格子はO-C型の構造格子である．格子数はコード方向，スパン方向，半径方向にそれぞれ $505 \times 192 \times 251$ であり，総格子点数は2400万点程度となっている．また翼根が滑りなし境界条件の場合（後に示すC2\_Wall，C3\_Wall-QCR），翼根壁での境界層を解像するためスパン方向の格子数が増え， $505 \times 229 \times 251$ となる（総格子点数は約2900万点）．壁面垂直方向の最小格子幅は $1.2 \times 10^{-5}$ であり，翼表面第1格子点において $\eta^+ < 1$ を満たしている．外部境界はコード長の40倍であり外部境界条件の影響が表れないよう十分大きくなっている．無次元時間刻み幅は $\Delta t = 5.0 \times 10^{-3}$ とし内部反復回数は $imax = 5$ とした．計算格子および無次元時間刻み幅のフラッター予測精度に対する影響は付録Cに示しており，今回用いた値はフラッター動圧値の計算に対して十分な精度を持っていることを確認している．

フラッター計算を実施するマッハ数は $M_\infty = 0.45 - 0.95$ とした．またフラッター動圧の同定にあたって，実験を模擬するため，音速（温度）およびマッハ数が一定のもと，流体密度の変化により動圧を増減させた．従って，すべての無次元数を固定することはできず，各マッハ数条件においてレイノルズ数および質量比は密度変化に伴い変動する．本計算条件ではレイノルズ数に関しては $Re_\infty = 2.0 \times 10^5 - 2.0 \times 10^6$ の範囲であった．迎え角は実験と同様にすべての計算で $\alpha_A = 0 \text{ deg}$ とした．またフラッター計算時には初期擾乱を与えてフラッターを誘起するが，本計算では初期擾乱を $\tilde{h} = 0.005$ として与えた．初期擾乱によるフラッター動圧の変動幅は5%程度であることを確認しており，その詳細は付録Cに示している．

本章では翼根に滑りなし境界条件を適用した計算を行うが，このような条件下では翼根壁と翼表面の乱流境界層の干渉によってプラントルの第2種2次流れが生じ，翼根コーナー部の流れ場に大きく影響することが報告されている[61]．プラントルの第2種2次流れはレイノル

ズ応力の非等方性に起因するものであり，通常の線形渦粘性モデルでは再現できない．そのため，2次流れの再現にはQCRなどの非線形渦粘性モデルを用いる必要がある．以上を踏まえ本研究では，翼根壁モデリングおよび2次流れの影響を体系的に評価するため，以下に示す3つのケースについてフラッター計算を実施する．

- **C1\_Sym**: 対称境界条件，QCRなし
- **C2\_Wall**: 滑りなし境界条件，QCRなし
- **C3\_Wall-QCR**: 滑りなし境界条件，QCRあり

QCRなしではSA\_LowRe，QCRありではSA\_LowRe.QCR2024を用いている．また実験における翼根壁（スプリッタープレート）は翼前縁から $-4.75c$ の位置から存在するため，C2\_WallおよびC3\_Wall-QCRでは翼前縁を基準としたとき $-4.75c$ より上流側では対称境界条件，下流側では滑りなし境界条件を適用した．

Table 5.1: Configuration of the NACA0012 benchmark wing [33].

|                 |           |
|-----------------|-----------|
| Airfoil         | NACA0012  |
| Chord length    | 0.4064 m  |
| Mass            | 87.067 kg |
| Aspect ratio    | 2.0       |
| Taper ratio     | 1.0       |
| Sweepback angle | 0 deg     |

Table 5.2: Structural parameters of the NACA0012 benchmark wing [33].

|                 |         |
|-----------------|---------|
| $x_\alpha$      | 0       |
| $r_\alpha^2$    | 1.024   |
| $\omega_h$      | 3.36 Hz |
| $\omega_\alpha$ | 5.20 Hz |
| $g_h$           | 0.0012  |
| $g_\alpha$      | 0.0012  |

Table 5.3: Computational method

|       |                                    |
|-------|------------------------------------|
| 支配方程式 | 3次元圧縮性URANS                        |
| 乱流モデル | SA_LowRe[51], SA_LowRe.QCR2024[55] |
| 非粘性流束 | 3次精度MUSCL補間[41]を用いたSHUS[40]        |
| 粘性流束  | 2次精度中心差分法                          |
| 時間離散化 | 2次精度オイラー陰解法                        |
| 時間積分法 | DPLUR陰解法[43, 44]                   |

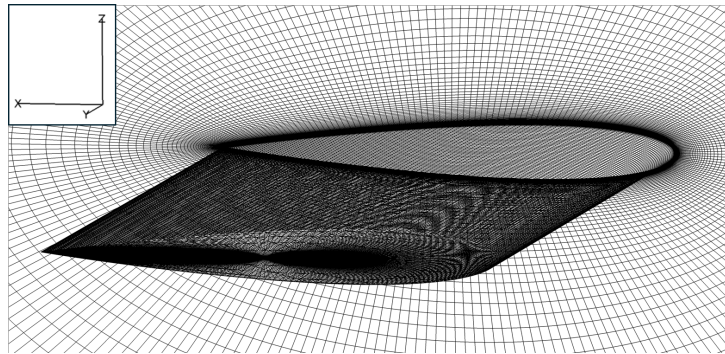


Figure 5.1: Computational grid for symmetric boundary condition (every two grid points are shown).



## 5.2 対称境界条件でのフラッター境界

まず初めにフラッター計算の妥当性検証のため、Stanfordら[38]によるフラッター計算結果との比較を行う。Stanfordらの計算では乱流モデルとしてNegative-SAモデル[62]を用いており、翼根には対称境界条件を課している。またStanfordらは減衰係数を $g_h = g_\alpha = 0.001$ としており、本計算の設定値とは異なるが、その差は小さく計算結果には影響しない。

Figure 5.2に示すフラッター境界の比較から、C1\_Symのフラッター動圧はすべてのマッハ数でStanfordらの結果とよく一致しており、妥当な計算が行えていることが分かる。次にフラッター境界を実験値と比較すると、 $M_\infty \leq 0.85$ の低マッハ数域ではフラッター動圧および周波数ともに実験値とよく一致していることが分かる。また $M_\infty = 0.77$ 付近ではフラッター動圧の落ち込みが確認され、マッハ数を大きくするとフラッター動圧は急激に増大する。フラッター周波数に着目すると、マッハ数の増大に伴い周波数は低下し、曲げモード振動の周波数に近づいていることが分かる。流れ場に着目すると、Fig. 5.3, 5.4の翼上面の圧力係数分布に示すように、 $M_\infty \geq 0.77$ のマッハ数域では翼面上に衝撃波が生じることが確認できる。さらにFig. 5.5, 5.6に示す翼上面の主流方向摩擦係数分布より、 $M_\infty = 0.77$ 以下では、はく離は生じていないが、 $M_\infty = 0.82$ では衝撃波根元で小さなはく離が生じていることが分かる。従って、 $M_\infty = 0.77$ では衝撃波振動の不安定化作用によってフラッター動圧が低下し、 $M_\infty = 0.82$ では衝撃波根元で境界層はく離が生じるため、衝撃波振動が系を安定化し、その結果フラッター動圧が上昇したと考えられる。このような衝撃波の発生に伴うフラッター動圧の低下および衝撃波背後での境界層はく離によるフラッター動圧の上昇は典型的な遷音速ディップ特性と同一である。

次に $M_\infty \geq 0.85$ のマッハ数域に着目すると、実験で確認された高マッハ数域でのフラッター動圧の急激な落ち込みを本計算でも再現できていることが分かる。またFig. 5.2bに示すように不安定性が生じるマッハ数域では曲げモード振動が支配的である。不安定性が生じるマッハ数域でのフラッター周波数の値に関する記述はないが、Ref.[33]において高マッハ数域でのフラッターは曲げモードが支配的であると述べられており、本計算結果と一致している。このようにC1\_Symは高マッハ数域での不安定性を定性的には捉えているものの、不安定性が生じるマッハ数域は実験に比べて低マッハ数側に予測しており、かつその範囲も狭い。高マッハ数域における流れ場の詳細な議論は次節で行う。

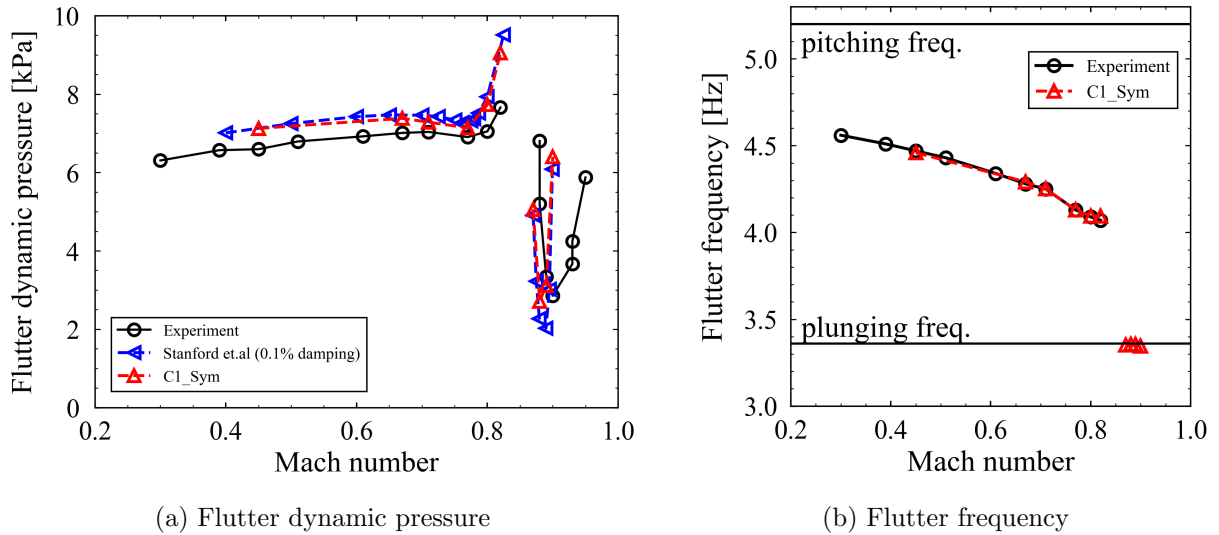


Figure 5.2: Comparison of flutter boundaries with experiment [33] and earlier numerical result [38].

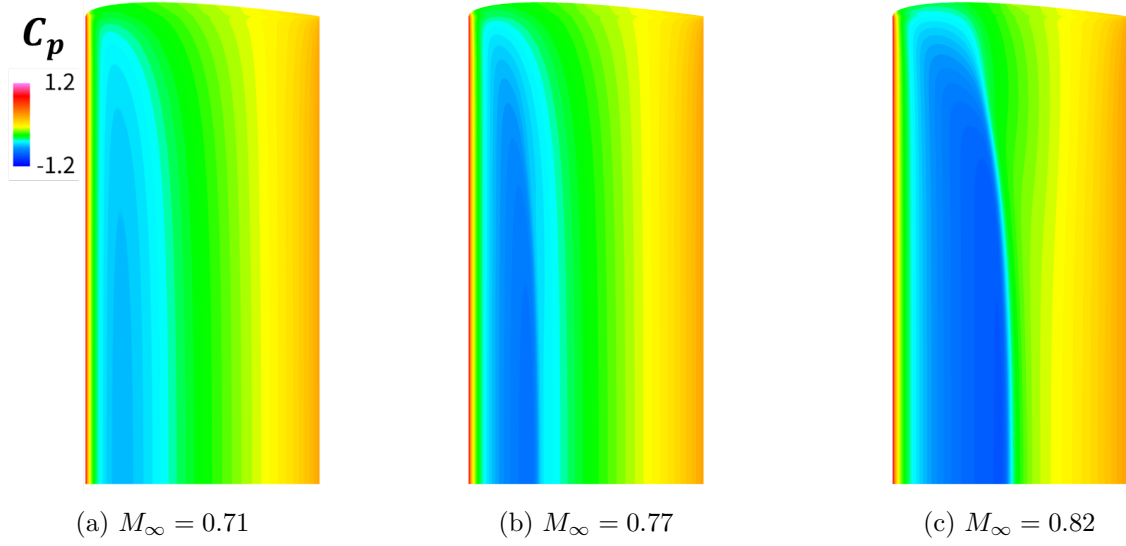


Figure 5.3: Pressure coefficient distributions on the upper surface under the steady-state (non-oscillating) condition.

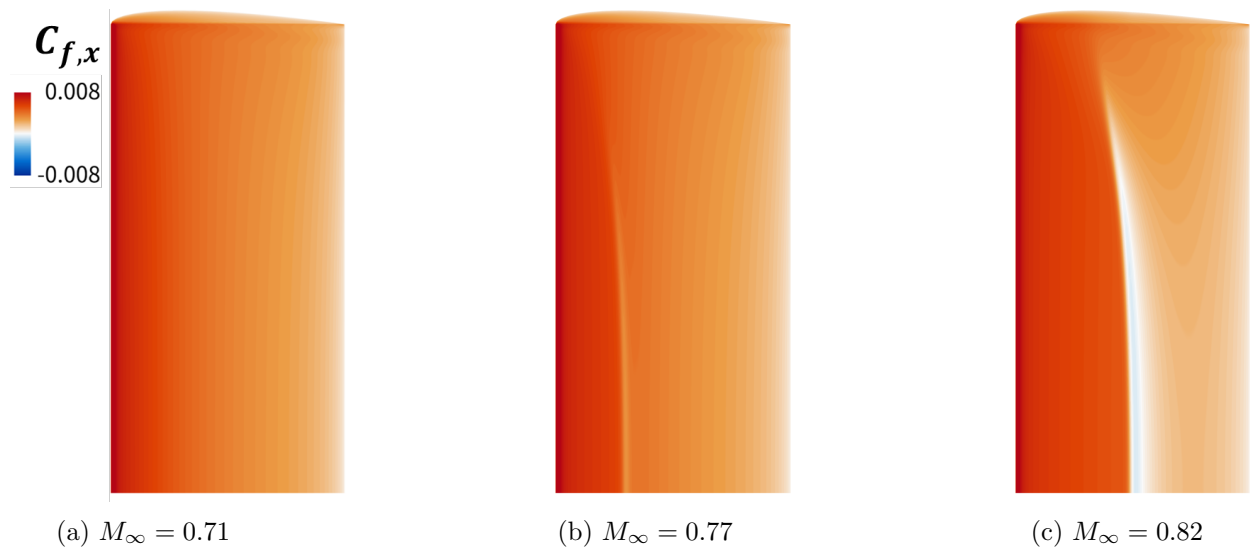
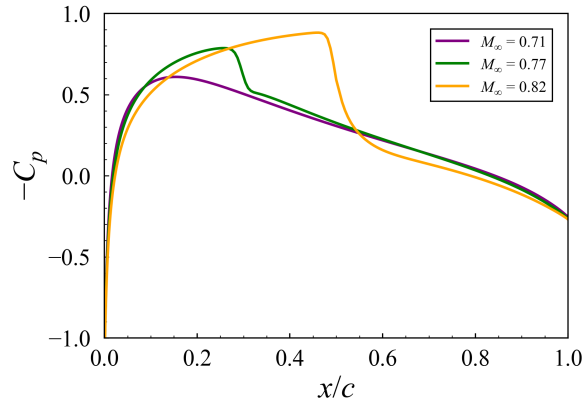


Figure 5.5: Distributions of skin friction coefficient on the upper surface under the steady-state (non-oscillating) condition.

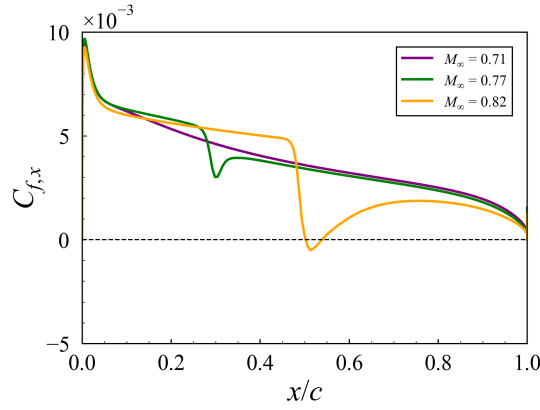


Figure 5.6: Comparison of skin friction coefficient distributions at wing root (0% span)

### 5.3 翼根壁の影響

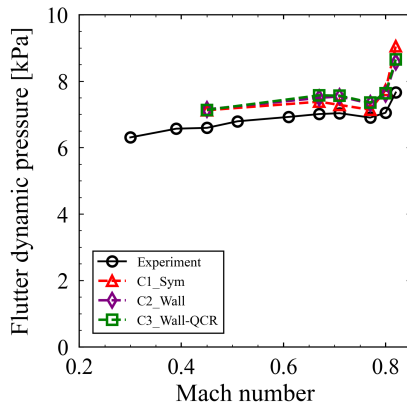
#### 5.3.1 $M_{\infty} \leq 0.85$ での流れ場の比較

本節では、強い不安定性が生じない  $M_{\infty} \leq 0.85$  のマッハ数域において、翼根壁の境界条件がフラッター予測に及ぼす影響について調査する。Figure 5.7にC1.Sym, C2.Wall, C3.Wall-QCRの3つのケースでのフラッター境界の比較を示す。Figure 5.7aに示すフラッター動圧から、C2.WallとC3.Wall-QCRの結果はほぼ一致しており、このマッハ数域では乱流の非等方性の影響は小さいことが分かる。また対称境界条件を適用したC1.Symと滑りなし境界条件を適用したC2.Wall, C3.Wall-QCRとを比較すると、マッハ数変化に対するフラッター動圧の増減の定性的な傾向は同一であるが、定量的には差異があることが分かる。特に遷音速ディップ近傍では顕著であり、Fig. 5.7bの拡大図に示すように、 $M_{\infty} = 0.77$ においては、C1.Symのフラッター動圧がC2.WallおよびC3.Wall-QCRに比べ小さくなっている。しかしマッハ数を大きくした  $M_{\infty} = 0.82$  では、C1.Symが3つのケースの中で最もフラッター動圧が大きくなる。これらの結果は、翼根に滑りなし境界条件を適用することで遷音速ディップが浅くなることを示している。フラッター周波数については、Fig. 5.7cおよびFig. 5.7dに示すように、各ケースで差異はなく、 $M_{\infty} \leq 0.85$  では翼根の境界条件にかかわらず実験結果との良好な一致が得られている。

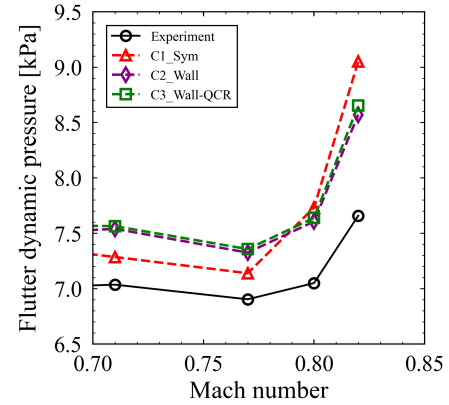
Figure 5.8にC1.SymおよびC2.Wallの翼上面圧力係数分布を、Fig. 5.9には3%スパン位置および50%スパン位置における両ケースの翼上面圧力係数分布の比較を示す。50%スパン位置では、衝撃波位置はC2.Wallの方がC1.Symに比べ上流側となっているが、圧力勾配はほぼ同程度となっている。一方、翼根近傍である3%スパン位置ではC2.Wallの圧力勾配が小さく、衝撃波が消失していることが分かる。Figure 5.10に  $M_{\infty} = 0.77$  におけるC1.SymとC2.Wallの  $x$ - $y$  断面上の主流方向速度分布を示す。またFig. 5.11に翼前縁から  $-1.0c$  の位置における翼根壁面上の速度分布を示す。Figure 5.10およびFig. 5.11より、C2.Wallでは翼根に滑りなし境界条件を適用しているため、翼根壁面に沿って境界層が発達しているのに対し、C1.Symでは対称境界条件を課しているため、境界層が存在しないことが分かる。またFig. 5.11に示すようにC2.Wallでは壁面境界層の発達により、翼根付近の流入流速が低下する。その結果、C2.Wallでは翼根近傍の衝撃波が弱められる（C3.Wall-QCRも同様の傾向を示す）。前節で述べたように、 $M_{\infty} = 0.77$  では衝撃波振動は系を不安定化させ、 $M_{\infty} = 0.82$  では系を安定化させる。翼根に滑りなし境界を適用すると、翼根壁での境界層の発達により翼根付近の衝撃波が弱まるため、これらの不安定化および安定化効果の双方が減少する。その結果、C2.WallおよびC3.Wall-QCRではC1.Symと比べて遷音速ディップが浅くなる。

フラッター予測精度について考えると、C2.WallおよびC3.Wall-QCRでは遷音速ディップが浅くなるため、 $M_{\infty} = 0.77$ （ディップの底）においてはフラッター動圧の実験値との差がC1.Symに比べて大きくなり、 $M_{\infty} = 0.82$  では逆にC1.Symに比べ実験値に近づく。そ

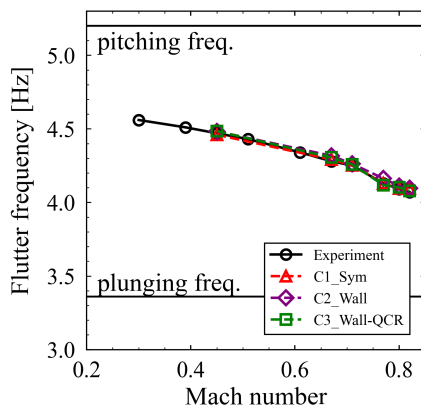
のため、Fig. 5.7aの結果から、どちらの境界条件が適切かを判断することは難しい。一方、 $M_\infty = 0.45$ の亜音速域では衝撃波が生じないため、翼根の境界条件の影響は小さく、Stanfordら[38]の計算を含めてすべてのケースでフラッター動圧は一致している。しかし、すべてのケースで実験値に対して8%程度の誤差が生じている。通常、亜音速域ではフラッター計算により高精度にフラッター動圧を予測可能である。またすべての計算結果が一致していることを踏まえると、 $M_\infty = 0.45$ におけるフラッター動圧の計算値と実験値の差は、構造減衰係数の不確かさなどに起因するものであり、計算されたフラッター動圧の値は正しいものであると考えられる。そこで、C1\_Symの $M_\infty = 0.45$ におけるフラッター動圧の実験値と計算値との差分をすべてのケースのフラッター動圧から差し引くことで、実験パラメータの不確かさの影響を排除し、フラッター予測精度について評価する。Figure 5.12に上記で述べた修正を行ったフラッター動圧を示す。遷音速ディップに着目すると、C1\_Symは実験に比べて $M_\infty = 0.77$ ではフラッター動圧が低く、 $M_\infty = 0.82$ ではフラッター動圧が高くなっており、遷音速ディップを過大に予測していることが分かる。一方、C2\_WallおよびC3\_Wall-QCRはC1\_Symに比べ、フラッター動圧が実験値とよく一致しており、遷音速ディップを適切に予測できている。以上より、 $M_\infty \leq 0.85$ のマッハ数域では、翼根に滑りなし境界条件を適用することで、フラッター動圧の予測精度が向上することが明らかとなった。一方、翼根に対称境界条件を適用した場合には、翼根近傍の衝撃波を本来よりも強く予測してしまい、その結果、遷音速ディップを過大評価することが分かった。



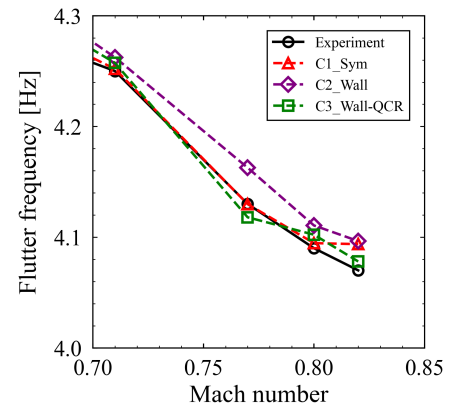
(a) Flutter dynamic pressure below  $M_\infty = 0.85$



(b) Close-up view of flutter dynamic pressure around transonic dip

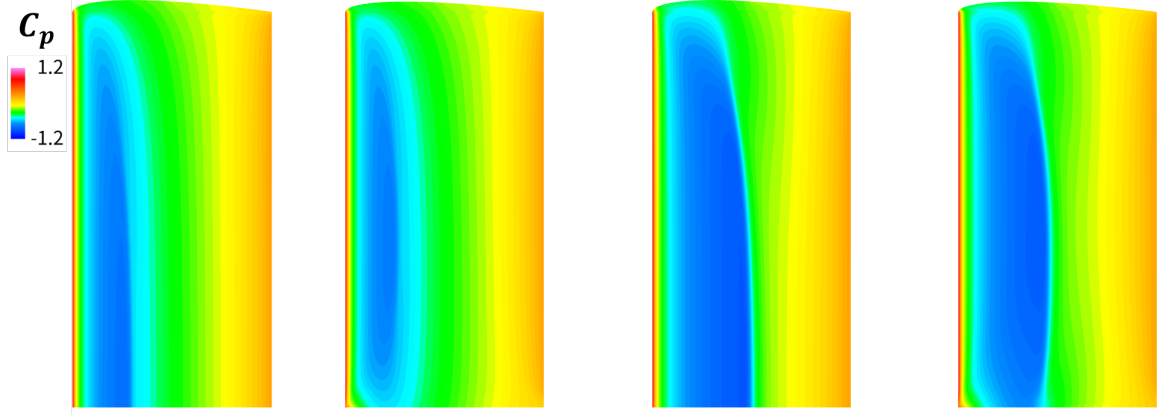


(c) Flutter frequency below  $M_\infty = 0.85$



(d) Close-up view of flutter frequency around transonic dip

Figure 5.7: Comparison of flutter boundaries among three cases.



(a) C1\_Sym for  $M_\infty = 0.77$  (b) C2\_Wall for  $M_\infty = 0.77$  (c) C1\_Sym for  $M_\infty = 0.82$  (d) C2\_Wall for  $M_\infty = 0.82$

Figure 5.8: Pressure coefficient distributions on the upper surface under the steady-state (non-oscillating) condition of C1\_Sym and C2\_Wall.

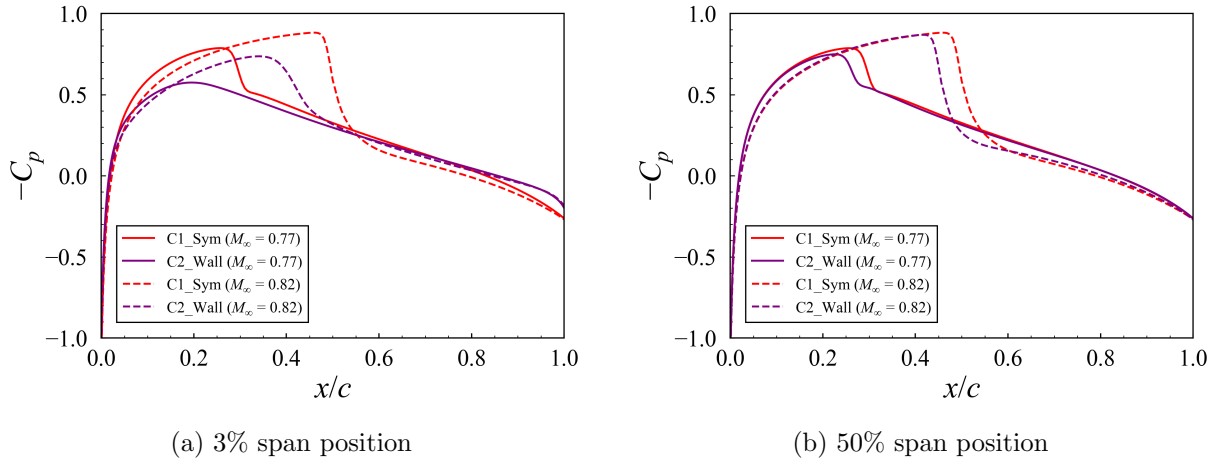


Figure 5.9: Comparison of pressure coefficient distributions on the upper surface between C1\_Sym and C2\_Wall.



Figure 5.10: Streamwise velocity distributions on the  $x-y$  cross-section at  $z = 0$  for  $M_\infty = 0.77$ .

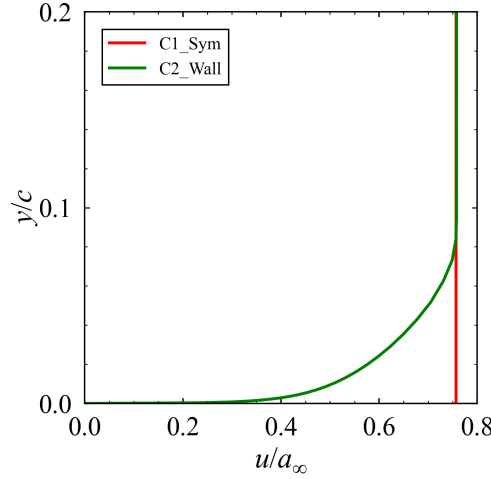


Figure 5.11: Comparison of streamwise velocity profiles on the wing root wall 1.0c upstream of the wing leading edge.

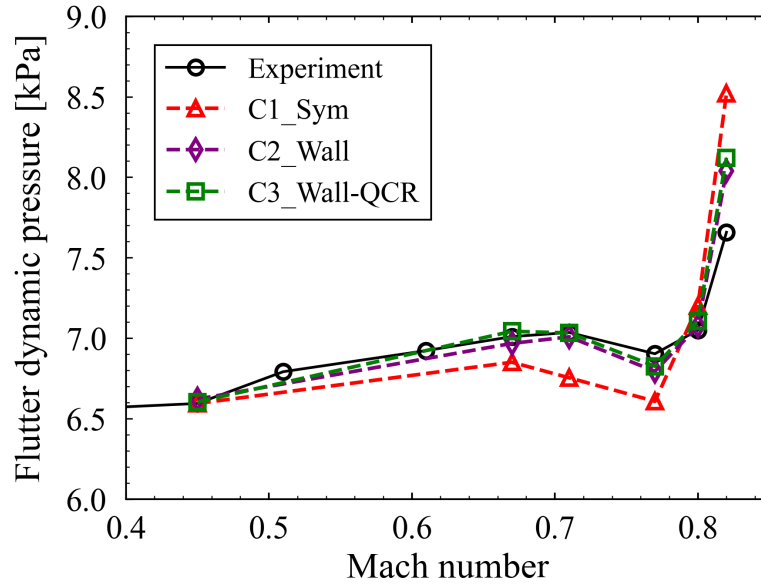


Figure 5.12: Adjusted flutter dynamic pressures below  $M_\infty = 0.85$ .

### 5.3.2 $M_\infty \geq 0.85$ での流れ場の比較

本節では、強い不安定性が生じる  $M_\infty \geq 0.85$  のマッハ数域において、翼根の滑りなし境界条件がフラッター予測精度に及ぼす影響について調査する。Figure 5.13に高マッハ数域におけるフラッター境界の比較を示す。Figure 5.13aより、C3\_Wall-QCRでは不安定となるマッハ数域が拡大し、その傾向は C1\_Sym に比べて実験結果に近くなっていることが分かる。また C3\_Wall-QCR のフラッター動圧は3つのケースの中で最も低い値をとる。一方、乱流の非等方性を考慮していない C2\_Wall は  $M_\infty = 0.87$  と  $M_\infty = 0.88$  においてのみ不安定性が生じており、そのマッハ数域は C3\_Wall-QCR に比べ極端に狭くなっている。Figure 5.7に示したように、 $M_\infty \leq 0.85$  では C2\_Wall と C3\_Wall-QCR のフラッター境界に違いが見られなかったことから、 $M_\infty \geq 0.85$  では乱流の非等方性の影響が強くなり、それによる差異が表れていると考えられる。これらの結果は、高マッハ数域においては翼根の境界条件および乱流の非等方性がフラッター予測精度に大きく影響することを示している。

Figure 5.14およびFig. 5.15に、C3\_Wall-QCRにおいてフラッター動圧が最小となった



$M_\infty = 0.88$ における圧力係数分布および摩擦係数分布を示す。加えてFig. 5.16に各スパン位置における主流方向速度分布を示す。50%スパン位置では3つのケース間で流れ場に明確な違いは確認できず、いずれの条件でも衝撃波が形成され、その後方で流れはく離している。一方、翼根に近い3%スパン位置では顕著な差異が現れており、C1\_Symでは強い衝撃波とはく離が生じ、C2\_Wallでは衝撃波が消失し大きなく離が生じる。またC3\_Wall-QCRでは弱い衝撃波が存在し、その背後で流れは付着している。Figure 5.17に $x/c = 0.25$ におけるC2\_WallとC3\_Wall-QCRの面内流線を示す。C2\_Wallでは面内に渦構造は確認されないが、C3\_Wall-QCRではコーナー部に渦が形成されていることが分かる。5.1.1でも述べたように、2次流れは乱流の非等方性に起因するものであるため、QCR2024モデルを用いたC3\_Wall-QCRのみがこの2次流れを再現している。

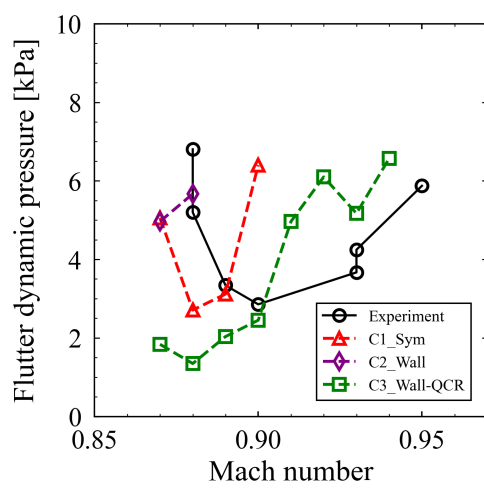
2次流れの影響をより詳細に調査するため、翼根コーナー部における対流による主流方向運動量の収支を評価する。具体的には、 $y-z$ 平面上の $x$ 方向の対流項である

$$-\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}, \quad -\frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}$$

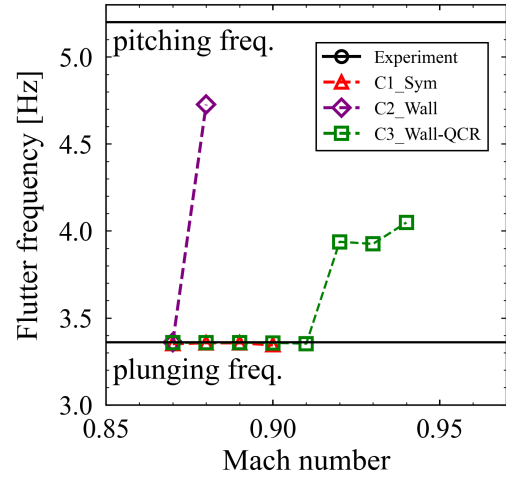
をFig. 5.18に示す。Figure 5.18aおよびFig. 5.18bに示す $y$ 方向の運動量輸送 $-\partial(\rho uv)/\partial y$ についてはC2\_WallとC3\_Wall-QCRで大きな差は確認できないが、Figure 5.18cおよびFig. 5.18dに示す $z$ 方向の運動量輸送 $-\partial(\rho uw)/\partial z$ についてはC3\_Wall-QCRはC2\_Wallに比べ、大きくなっていることが分かる。これはコーナー部での渦により翼表面へ向かう流れが誘起され、角部付近で垂直方向の運動量輸送が増加したためである。この渦による垂直方向の運動量輸送が、コーナー部でのく離を抑制し、C3\_Wall-QCRでは翼根近傍で流れが付着する。また、前節で述べたようにC3\_Wall-QCRにおいて衝撃波が弱くなるのは、翼根壁面に沿った境界層の発達によって流入流速が低下したためである。

以上より、衝撃波はく離が生じる高マッハ数域では、翼根壁面の有無および2次流れの発生により流れ場が大きく異なり、それらがフラッター動圧に大きな影響を及ぼすことが分かった。また前節では $M_\infty = 0.45$ でのフラッター動圧の計算値と実験値の差分を差し引いた評価を行いフラッター予測精度について議論したが、 $M \geq 0.85$ において同様の評価を行うとFig. 5.19に示すように、C3\_Wall-QCRの実験値とのずれは拡大する。しかし、これまで述べたように $M \geq 0.85$ では境界層はく離の影響が顕著になるため、URANSによる非定常空気力の定量的な予測は困難である。フラッター動圧は翼振動による非定常空気力の大きさと位相によって決定されるため、衝撃波はく離を伴う流れ場においてフラッター動圧の値をURANSによって高精度に予測することも同様に困難となる。そのため、C3\_Wall-QCRの実験値との定量的なずれは予測精度の悪化を意味するものではない。一方、不安定性が生じるマッハ数域に着目するとC3\_Wall-QCRが実験結果と最も一致している。また付録Bに示す静的解析では、衝撃波はく離が生じる条件において、C3\_Wall-QCRはC1\_SymおよびC2\_Wallに比べ、衝撃波位置の予測精度が優れていることも確認されている。

以上より、翼根での滑りなし境界条件の適用および非等方性を考慮した乱流モデルによる2次流れの解像は、NACA0012ベンチマーク翼で生じる急激な不安定性の予測精度を向上させる上で極めて重要であると言える。



(a) Flutter dynamic pressure above  $M_\infty = 0.85$



(b) Flutter frequency above  $M_\infty = 0.85$  (No experimental data are available for the flutter frequency)

Figure 5.13: Comparison of flutter boundaries obtained by three conditions.

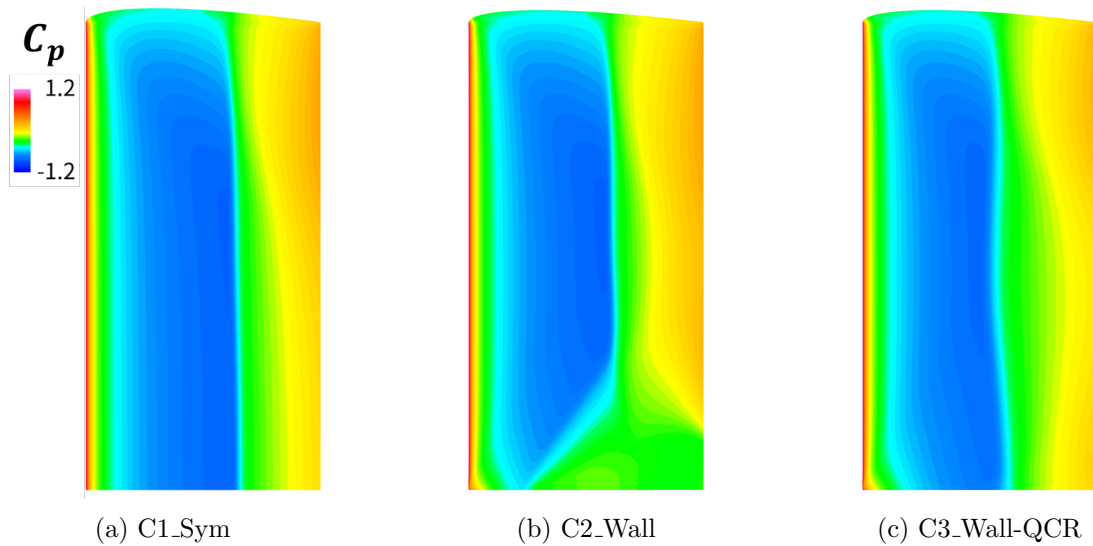


Figure 5.14: Pressure coefficient distributions on the upper surface under the steady-state (non-oscillating) condition at  $M_\infty = 0.88$ .



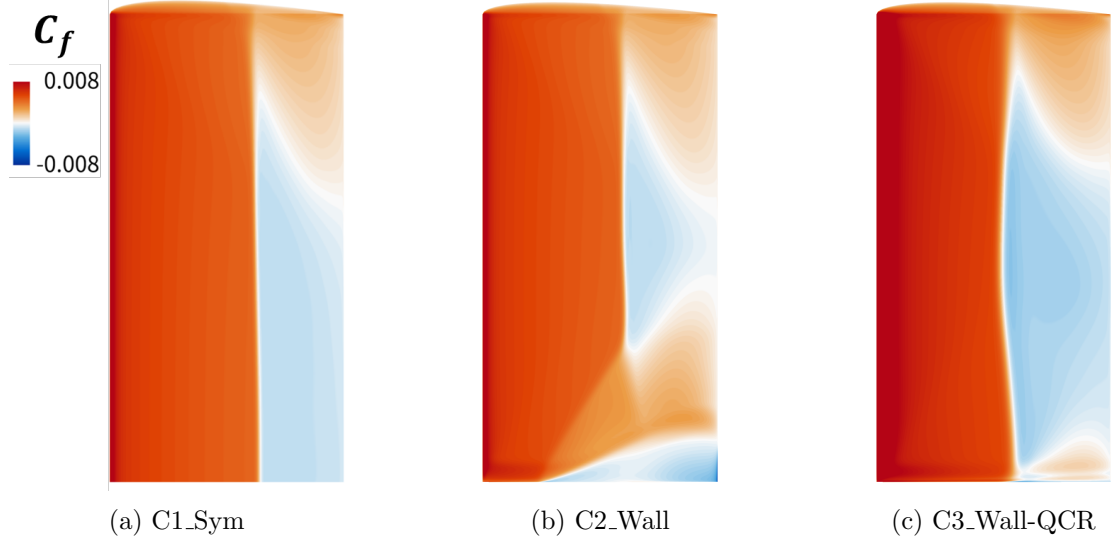


Figure 5.15: Distributions of skin friction coefficient on the upper surface under the steady-state (non-oscillating) condition at  $M_\infty = 0.88$ .

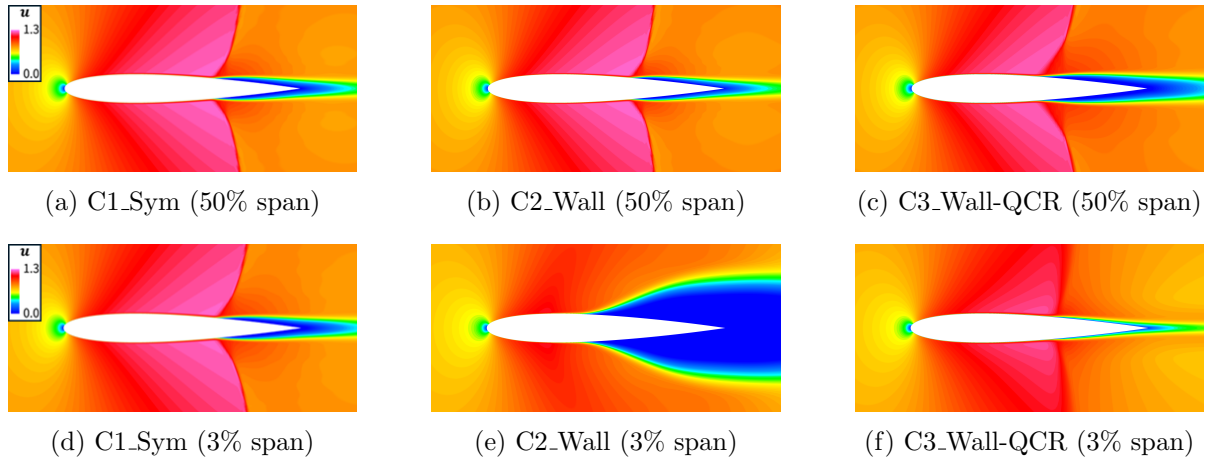


Figure 5.16: Streamwise velocity distributions under the steady-state (non-oscillating) condition for  $M_\infty = 0.88$ .

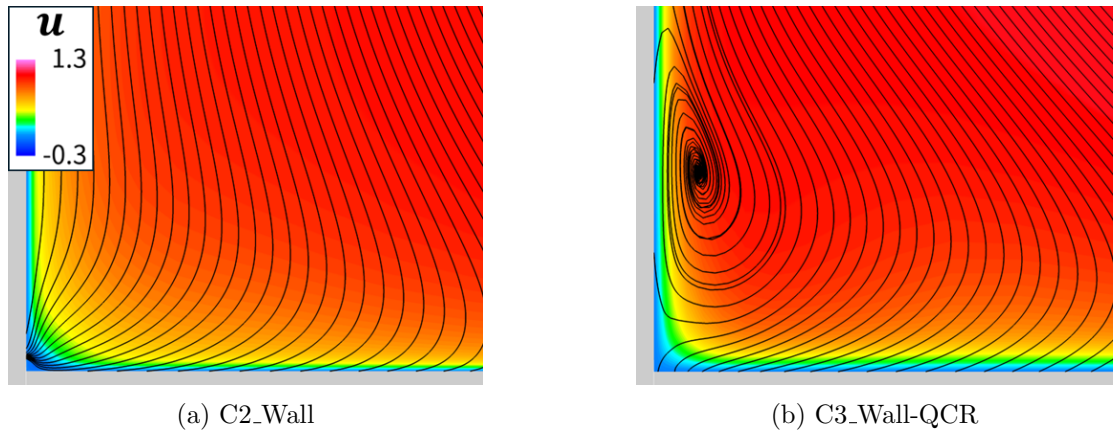


Figure 5.17: Velocity distributions in the  $x$ -direction on the  $y - z$  cross-section with in-plane streamlines near the corner at  $x/c = 0.25$ .

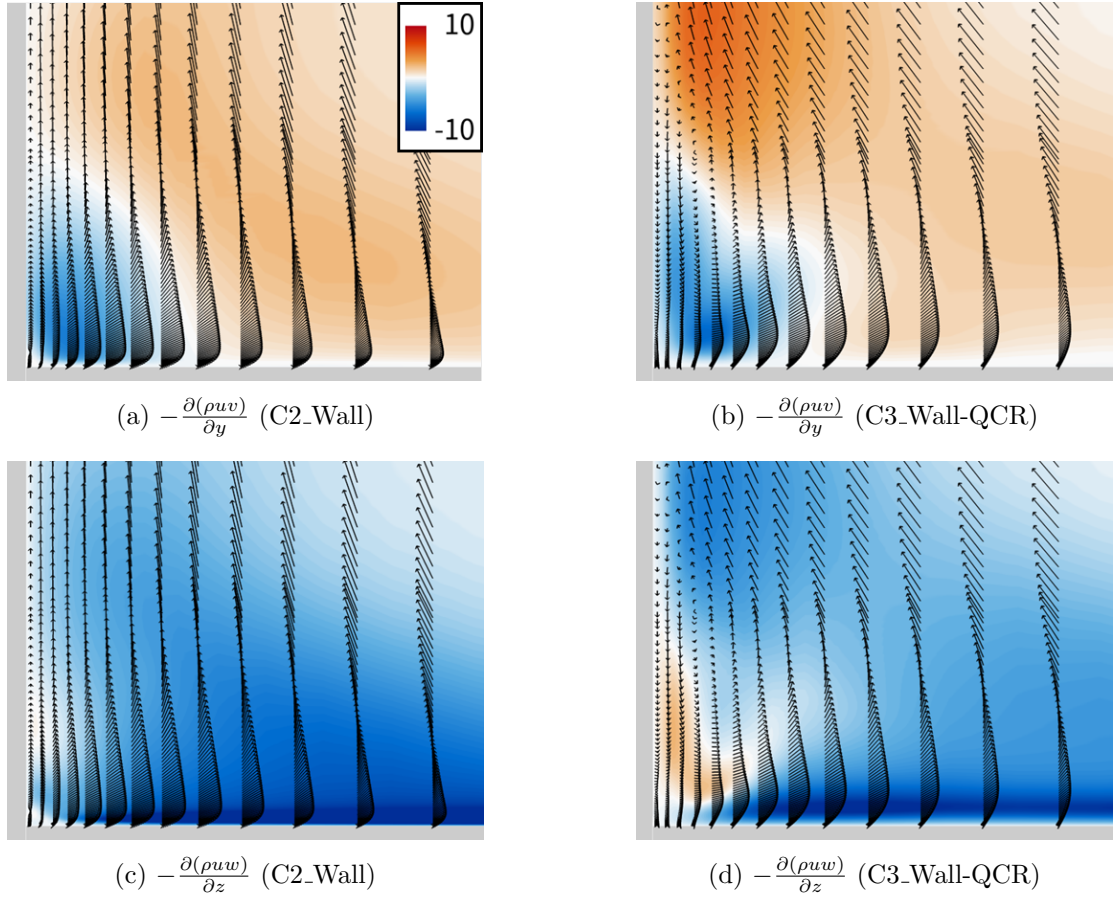


Figure 5.18: Streamwise momentum budget in  $y-z$  cross-section near the corner at  $x/c = 0.25$ . Color indicates  $-\frac{\partial(\rho uv)}{\partial y}$  or  $-\frac{\partial(\rho uw)}{\partial z}$ , and vectors denote the velocity.

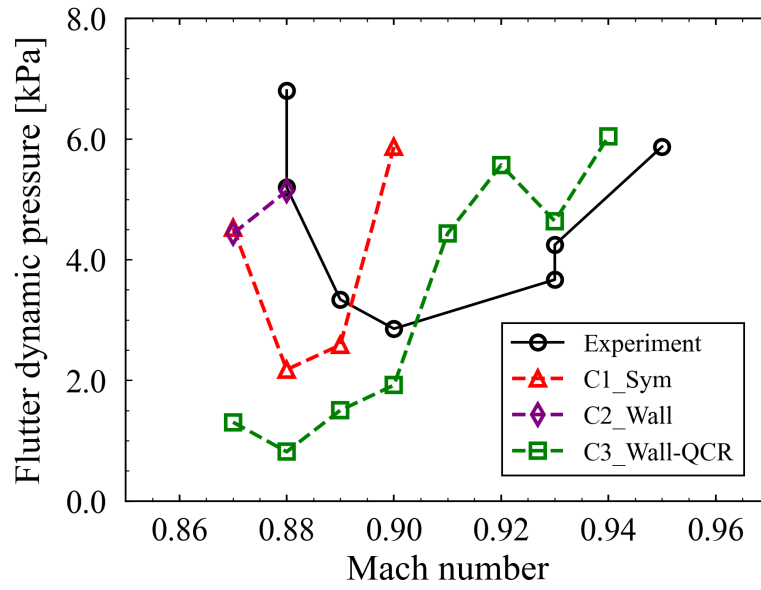


Figure 5.19: Adjusted flutter dynamic pressures above  $M_\infty = 0.85$ .

## 5.4 高マッハ数域での負の揚力傾斜について

Stanfordら[19]は、高マッハ数域での不安定領域において揚力傾斜 $C_{l,\alpha}$ が負となることを指摘し、揚力傾斜と不安定性の発生との関連性を示唆している。この結果をもとに、本節では揚力傾斜と高マッハ数域での不安定性との関係について議論する。

Figure 5.20に各ケースにおける揚力傾斜の比較を示す。揚力傾斜は、 $M_\infty = 0.88$ におけるC3\_Wall-QCRのフラッター動圧を基準に、レイノルズ数を $Re_\infty = 2.0 \times 10^5$ に固定し、迎え角 $\alpha = 0 \text{ deg}$ と $0.3 \text{ deg}$ における揚力係数から算出した。 $M_\infty \leq 0.85$  (Fig. 5.20a) ではすべてのケースで正の揚力傾斜となるが、不安定性が発生する $M_\infty \geq 0.85$  (Fig. 5.20b) では揚力傾斜は負となる。特に、負の揚力傾斜が現れるマッハ数範囲は、Fig. 5.13aに示したフラッター境界における不安定領域と概ね一致している。

Figure 5.22に示すように、本研究で得られた翼振動の無次元周波数はおよそ0.05以下であり、流れ場は翼の運動に対して準定常とみなすことができる。準定常流れを仮定すると、2自由度系における1周期あたりの空気力のなす仕事は次式で与えられる[3]。

$$W = -\pi\rho_\infty U_\infty^2 b C_{l,\alpha} h_0 \alpha_0 \left[ \frac{h_0 \omega}{\alpha_0 U_\infty} - \sin \phi \right], \quad (5.1)$$

ここで、 $W$ は翼振動1周期あたりに非定常空気力が構造に対して行う仕事、 $h_0$ および $\alpha_0$ は上下および回転振動の振幅、 $\omega$ は振動の角周波数[rad/s]、 $\phi$ は上下と回転運動の位相差[deg]である。さらに、Fig. 5.13bおよびFig. 5.21から分かるように、不安定領域では曲げモード振動が支配的であり、回転運動の影響は無視できる。回転運動の影響を無視すると式(5.1)は次式のように簡略化される。

$$W = -\pi\rho_\infty U_\infty b C_{l,\alpha} h_0^2 \omega, \quad (5.2)$$

ここで、 $C_{l,\alpha}$ を除くすべてのパラメータは正であるため、 $W$ の符号は $C_{l,\alpha}$ の符号のみによって決定される。すなわち、 $C_{l,\alpha} < 0$ のとき $W > 0$ となり、流体が構造に正の仕事をなすことで系が不安定化する。

以上より、高マッハ数領域における負の揚力傾斜が上下モードでの1自由度フラッターの発生の主要因であることが分かる。

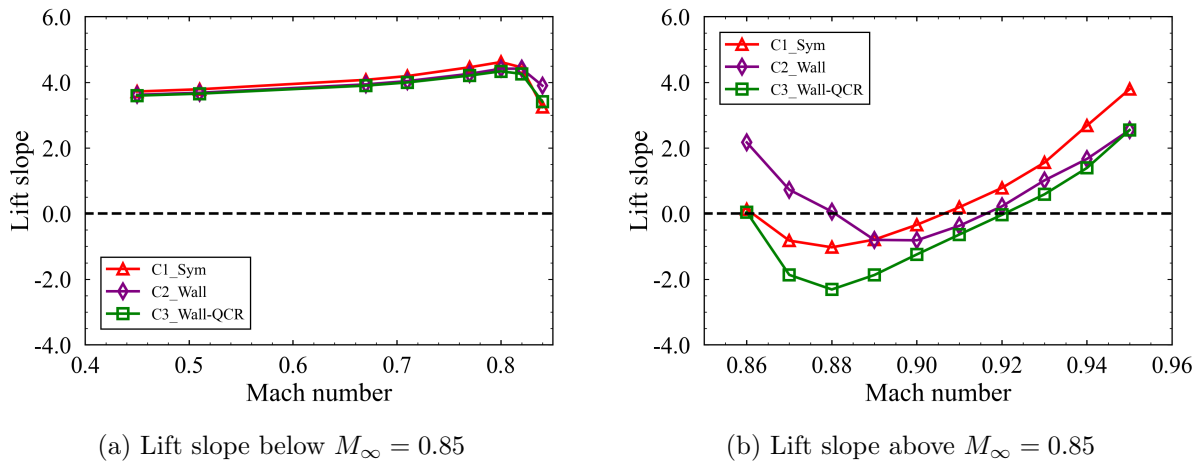


Figure 5.20: Comparison of lift slope.

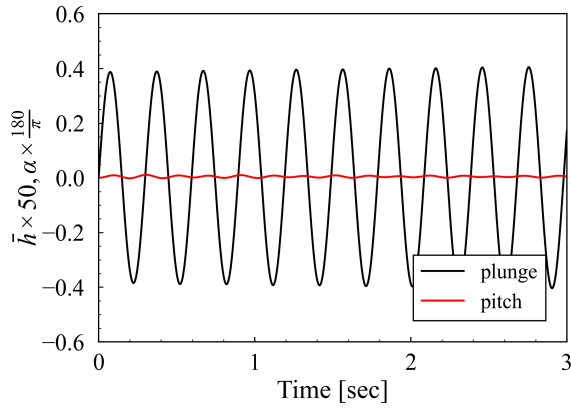


Figure 5.21: Time history of plunge and pitch displacements during flutter at  $M_\infty = 0.88$  in C3\_Wall-QCR.

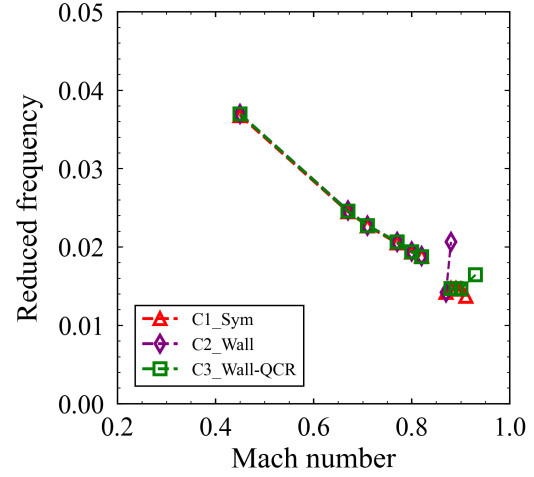


Figure 5.22: Reduced frequency at the flutter boundary.

## 5.5 衝撃波運動と負の揚力傾斜の関係

本節では、高マッハ数領域で観察される負の揚力傾斜が生じるメカニズムについて議論する。Figure 5.23にC3\_Wall-QCRにおける迎え角 $\alpha_A = 0 \text{ deg}$ と $\alpha_A = 0.3 \text{ deg}$ での翼上面圧力係数の差を示す。ここで圧力が低下する領域（揚力が増加する領域）を青色，圧力が上昇する領域（揚力が減少する領域）を赤色で示している。 $M_\infty = 0.77$ および $M_\infty = 0.82$ では翼前縁付近で圧力低下が生じており，迎え角増加に伴う翼上面流れの加速によって揚力が増加するという典型的な挙動が確認できる。一方，揚力傾斜が負となる $M_\infty = 0.88$ では，コード中央付近で顕著な圧力上昇が生じており，迎え角を増加させたにもかかわらず揚力が減少している。Figure 5.14に示すように，このマッハ数域ではコード中央に衝撃波が存在するため，圧力上昇は衝撃波の上流側への移動に起因するものと考えられる。同様の衝撃波の上流側への移動は，揚力傾斜が負となるその他のマッハ数でも確認される。この衝撃波の上流方向への移動は，衝撃波後方のはく離域の拡大によって生じる考えられる。前節までの議論で示したように，高マッハ数域では強い衝撃波が形成されるため，迎え角が小さい場合であっても衝撃波背後で流れがはく離する。従って，以降では衝撃波位置とはく離域の関係について議論する。

Figure 5.24にスパン中央における迎え角変化に対する衝撃波位置の変化 $\Delta x_{sh}$ および迎え角 $\alpha_A = 0 \text{ deg}$ における無次元はく離体積 $V_{sep}$ を示す。ここで衝撃波位置は前章と同様に圧力勾配が最大となる位置と定義され，無次元はく離体積 $V_{sep}$ は $u < 0$ となるセル体積の総和を表す。また $\Delta x_{sh} > 0$ は迎え角増加に対する衝撃波の下流側への移動を意味する。Figure 5.24に示すように，揚力傾斜が負となる $M_\infty > 0.86$ では，迎え角の増大に伴い衝撃波が大きく上流側へ移動する。さらに $V_{sep}$ は $M_\infty > 0.86$ において急激に増加しており，衝撃波後方に大規模なはく離領域が形成されていることが分かる。これらの結果は，衝撃波後方に十分大きなはく離領域が存在する場合，迎え角増加に対して衝撃波が大きく上流側へ移動し，その結果として翼上面での強い圧力上昇が発生し，負の揚力傾斜を引き起こすことを示唆している。なお，本節の議論は上面の流れに着目したものであるが，同様のメカニズムは下面流れにも存在する。

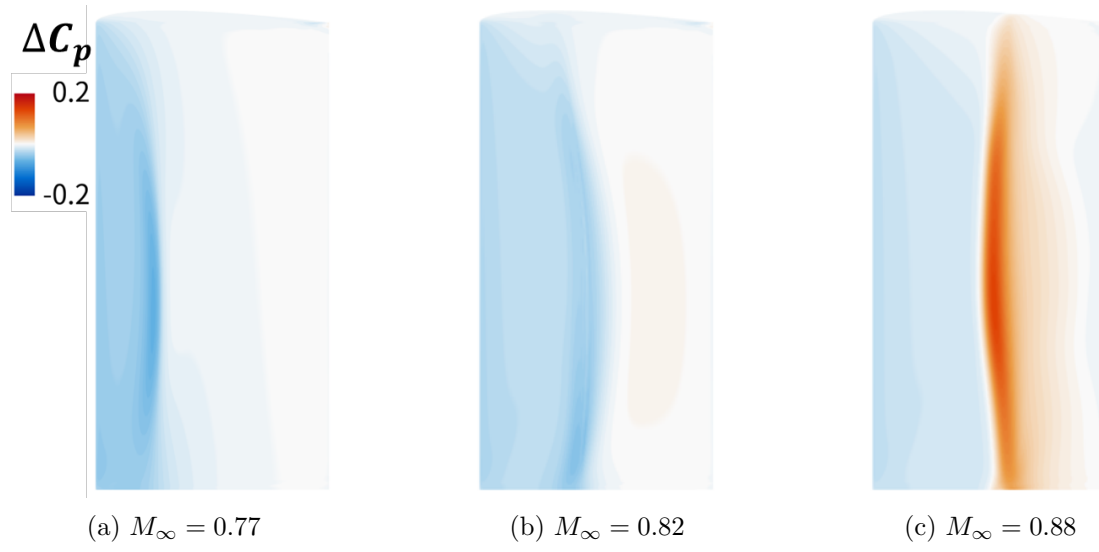


Figure 5.23: Differences in pressure coefficient distributions on the upper surface under the steady-state (non-oscillating) condition between angle of attack of 0 deg and 0.3 deg in C3\_Wall-QCR.

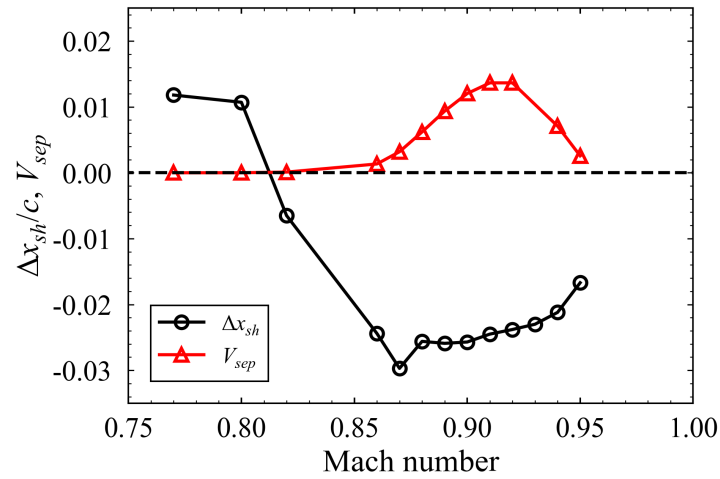


Figure 5.24: Variation of shock wave position and nondimensional separation volume at each Mach number in C3\_Wall-QCR.

## 5.6 まとめ

本研究では、Riveraら[33]が行ったNACA0012ベンチマーク翼のフラッター試験を対象に、翼根壁のモデリングおよび乱流の非等方性がフラッター予測精度に与える影響を詳細に調査した。得られた知見を以下にまとめる。

- 翼根で滑りなし境界条件を適用した場合、翼根壁に沿って境界層が発達するため翼根部での流入流速が低下し、衝撃波が弱くなる。
- $M_\infty \leq 0.85$ のマッハ数域では、C2\_WallとC3\_Wall-QCRのフラッター計算の結果に違いはなく、乱流の非等方性の影響は小さい。
- $M_\infty \leq 0.85$ では、C2\_WallおよびC3\_Wall-QCRにおいて衝撃波の影響が弱められるため、C1\_Symに比べ遷音速ディップが浅くなり、実験値とよく一致する。
- 実験において強い不安定性が報告されている  $M_\infty \geq 0.85$  の高マッハ数域では、翼根に滑りなし境界条件を適用し、かつ乱流の非等方性を考慮したC3\_Wall-QCRが、不安定性が発生するマッハ数域について実験結果を最もよく再現した。
- 乱流の非等方性を考慮しているC3\_Wall-QCRでは、翼根コーナー部での2次流れを捉えることで、翼根はく離が抑制される。
- 不安定が生じるマッハ数域では揚力傾斜  $C_{l,\alpha}$  が負となることを確認した。さらに、エネルギー収支の比較から、負の揚力傾斜は流体から構造へのエネルギー流入を意味しており、翼の曲げモードによる1自由度フラッターを生じさせることが示された。
- 高マッハ数域で揚力傾斜が負となる原因は、迎え角増加に伴う衝撃波の上流側への移動である。また衝撃波背後で大規模なはく離領域が形成されると、衝撃波の上流側への移動量が大きくなり、翼上面で強い圧力上昇が生じ、その結果として揚力が減少することを示した。
- NACA0012翼の高マッハ数域における強い不安定性は、衝撃波背後でのはく離の拡大および衝撃波の急激な移動が支配的なメカニズムであることを明らかにした。



## 第6章 結論

本博士論文研究では、高精度・高速なフラッター計算コードを開発し、衝撃波はく離流れにおける航空機主翼フラッター現象の高忠実計算および安定化/不安定化メカニズムの調査を行った。得られた結果を以下にまとめる。

- 第3章では、検証計算としてNACA64A010翼型の2次元静的計算および強制振動翼計算を行い、衝撃波はく離を伴う流れ場であっても、適切な時間・空間解像度であればSAモデルによって非定常空気力を高精度に予測可能であることが確認された。
- NACA64A010翼型におけるフラッター動圧の急激な上昇は、衝撃波はく離時の衝撃波振動の位相遅れに起因するものであることを明らかにした。また本質的には、衝撃波背後でののはく離により、迎え角増大に対する衝撃波の移動方向の逆転が重要であることを示した。
- 第4章では、SC2-0610超臨界翼型のフラッター計算および強制振動翼計算を行い、実験で確認されていたダブル遷音速ディップを再現することに成功した。
- 1stディップは従来の対称翼と同じく衝撃波振動の位相遅れによるもので、典型的な遷音速ディップであることを示した。また2ndディップは翼上面衝撃波振動の位相進みに起因するもので、これは翼振動時の翼下面でののはく離-再付着のサイクルに起因するものであることを明らかにした。
- 第5章では、NACA0012ベンチマーク翼を対象に3次元フラッター計算を行い、実験で確認されていた高マッハ数域での不安定化の予測に成功した。
- 低マッハ数域では翼根での滑りなし境界条件の適用により、遷音速ディップが浅くなり、予測精度が改善されることを示した。これは翼根壁に沿った境界層の発達により翼根部での流入流速が低下し、衝撃波が弱まるためである。
- 高マッハ数域では翼根で滑りなし境界条件を適用し、かつ乱流の非等方性を考慮できるモデルを使用することで、コーナー部での2次流れを捉え、翼根流れが付着することを示した。また翼根で流れが付着することがフラッター予測精度の改善に大きく影響することを示した。
- 圧力差分の分布から高マッハ数域では微小な迎え角変化に対して衝撃波が大きく動くことを示した。またこの衝撃波位置の変化により揚力傾斜が負となるため、曲げモード振動が生じることを準定常状態におけるエネルギー計算から明らかにした。

本研究では、一貫して衝撃波はく離という数値解析が難しい流れ場に対して、フラッター計算技術およびフラッターメカニズムについて検討、調査してきた。2次元計算によって、衝撃波はく離時の基本的なフラッター特性が明らかにされ、また3次元計算によって、翼根壁の適切なモデリングや乱流の非等方性を考慮することの重要性を示した。これらの知見は高マッハ数域でのフラッター予測技術の向上に大きく貢献するものである。一方、3次元計算ではそれらを考慮したとしても実験値との定量的な誤差は依然として大きく、URANSの限界を示しているものと思われる。そのような中、近年ではURANSとLESのハイブリッドモデル[63, 64, 65, 66]のフラッター計算への適用が盛んにおこなわれている[67, 68, 69]。ハイブリ

ッドモデルでは、はく離域をLES的に解くため、URANSの課題であるはく離域の予測精度を向上させることが期待できるが、フラッター予測精度に対する評価はあまりなされていない。またURANとLESの接合面での乱流粘性の切り替え、層流化など課題は多く残されている。今後は単純形状のLES計算などの結果を参考に、これらの問題を解決していく必要がある。



## 付録A フラッター境界の同定方法

本項ではフラッター境界の同定方法について述べる。フラッター境界を求める際、動圧（もしくはSpeed Index）を変化させ、翼振動の時間履歴からフラッター境界を決定する。具体的には複数の動圧でフラッター計算を行い、Fig A.1に示すような減衰振動と発散振動となる動圧を求める。それぞれの振動の時間履歴から減衰比を算出し、以下の式からフラッター動圧を決定する。

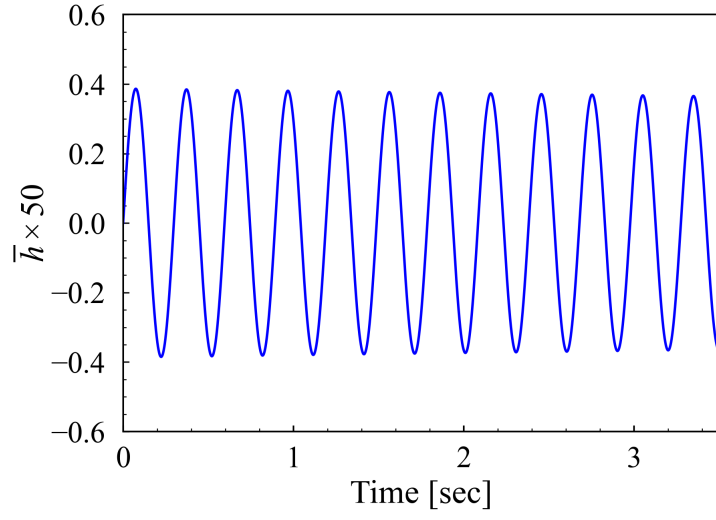
$$q_f = -\frac{\zeta_{conv}}{\zeta_{div} - \zeta_{conv}}(q_{div} - q_{conv}) + q_{conv} \quad (\text{A.1})$$

ここで、 $q_f$ はフラッター動圧[Pa]、 $q_{div}$ は発散振動となった時の動圧[Pa]、 $q_{conv}$ は減衰振動となった時の動圧[Pa]、 $\zeta_{div}$ は発散振動の減衰比、 $\zeta_{conv}$ は減衰振動の減衰比である。またフラッター周波数についても同様に、以下のように求める。

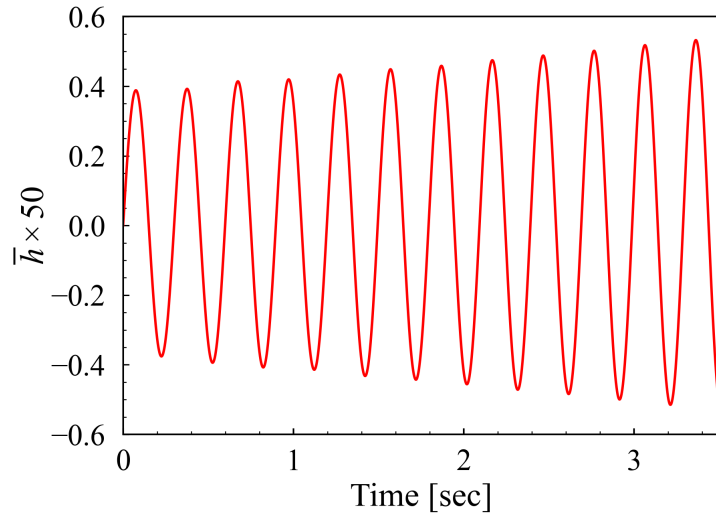
$$f_f = -\frac{\zeta_{conv}}{\zeta_{div} - \zeta_{conv}}(f_{div} - f_{conv}) + f_{conv} \quad (\text{A.2})$$

ここで、 $f_f$ はフラッター周波数[Hz]、 $f_{div}$ は発散振動となった時の周波数[Hz]、 $f_{conv}$ は減衰振動となった時の周波数[Hz]である。

このようにフラッター境界を同定するためには、各マッハ数に対して複数の動圧条件でフラッター計算を行い、減衰比が0となる条件を見つける必要がある。経験上、フラッター境界を決定するためには、少なくとも6つの動圧条件での計算が必要となる。例えば、第5章のNACA0012翼では、C1\_Sym, C2\_Wall, C3\_Wall-QCRの各ケースについて、14のマッハ数条件それぞれに対して6つの動圧条件で計算を行っている。従って、全体として252ケースのフラッター計算を行うことになる。またフラッターは非定常現象であるため、1つのフラッター計算自体にも多くの時間がかかる。そのため、フラッター境界の同定は極めて計算コストの高い問題となる。



(a) Converged response



(b) Diverged response

Figure A.1: Time history of wing displacement near flutter onset.

## 付録B 静的計算における翼根壁の境界条件と流れ場の予測精度の関係について

本項ではRiveraらが行ったNACA0012翼の静的な風洞試験[70]を対象に静的計算を行い、流れ場の予測精度について検証する。計算手法はTable B.1に示す通りであり、第5章で示したC1\_Sym, C2\_Wall, C3\_Wall-QCRの3ケースについて行う。また計算条件はTable B.2に示す通りである。

まず低迎角条件である $\alpha_A = 0.06$  degの結果について議論する。Figure B.1およびFig. B.2に $\alpha_A = 0.06$  degの翼上面圧力係数分布および3%, 60%スパン断面の主流方向速度分布を示す。Figure B.1よりすべてのケースで翼面上に衝撃波が生じていることが分かる。またFig. B.2に示すように $\alpha_A = 0.06$  degでは衝撃波背後で流れは付着している。翼根部に着目すると、C2\_WallおよびC3\_Wall-QCRでは翼根近傍で衝撃波が弱くなっており、これは5.3.1で述べたように翼根壁に沿った境界層の発達により、翼根部の流入流速が低下するためである。Figure B.3に示す60%スパン位置での圧力係数分布の実験値との比較から、若干ではあるが、C2\_WallおよびC3\_Wall-QCRはC1\_Symに比べて衝撃波位置が実験結果に近くなっていることが分かる。

次に高迎角条件である $\alpha_A = 4.02$  degの結果について議論する。Figure B.4およびFig. B.5に $\alpha_A = 4.02$  degにおける翼上面圧力係数分布および3%, 60%スパン断面の主流方向速度分布を示す。Figure B.4よりすべてのケースで翼面上に衝撃波が生じており、翼根部において圧力係数分布に顕著な差異が見られることが分かる。またFig. B.5に示すように、60%スパン位置では流れ場に違いはないものの、3%スパン位置では衝撃波や境界層はく離の発生等、各ケースで大きく異なる流れ場となっている。特にC2\_WallとC3\_Wall-QCRを比較すると、C2\_Wallは翼上面で大規模にはく離しているが、C3\_Wall-QCRでは流れは付着している。これは5.3.2で述べたようにC3\_Wall-QCRでは翼根コーナー部での2次流れにより、角部に運動量が輸送されるためである。またFigure B.6に示す60%スパン位置での圧力係数分布の実験値との比較から、C3\_Wall-QCRが最も実験と良く一致していることが分かる。

以上より、いずれの迎え角においてもC3\_Wall-QCRが最も実験と良く一致しており、予測精度が高いことが分かる。

Table B.1: Computational method

|       |                                    |
|-------|------------------------------------|
| 支配方程式 | 3次元圧縮性URANS                        |
| 乱流モデル | SA_LowRe[51], SA_LowRe-QCR2024[55] |
| 非粘性流束 | 3次精度MUSCL補間[41]を用いたSHUS[40]        |
| 粘性流束  | 2次精度中心差分法                          |
| 時間離散化 | 1次精度オイラー陰解法                        |
| 時間積分法 | DPLUR陰解法[43, 44]                   |

Table B.2: Computational condition for the stationary airfoil[70].

|                              |                    |
|------------------------------|--------------------|
| Angle of attack, $\alpha_A$  | 0.06, 4.02 deg     |
| Reynolds number, $Re_\infty$ | $1.04 \times 10^6$ |
| Mach number, $M_\infty$      | 0.82               |

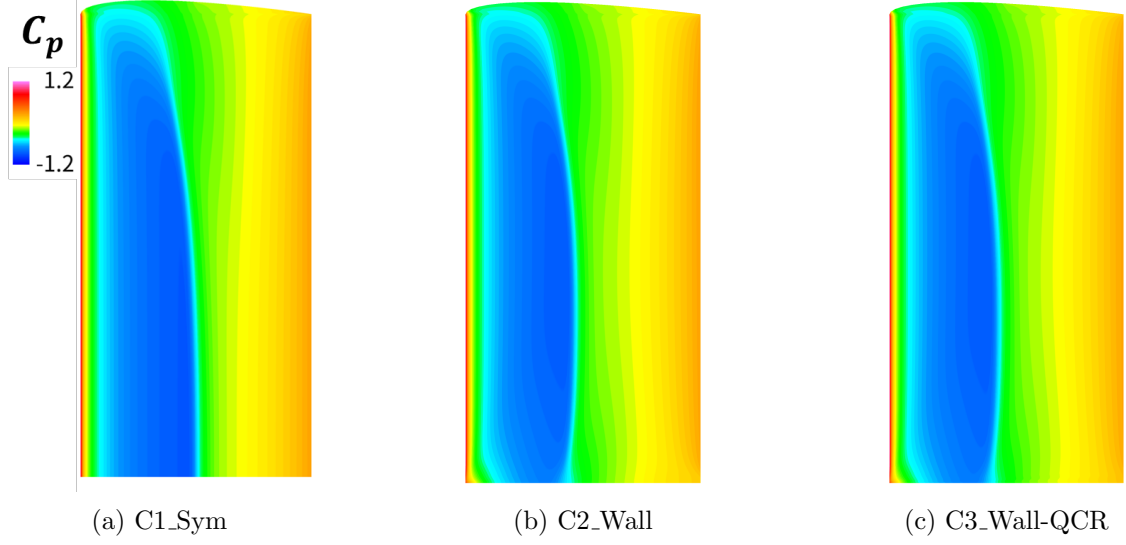


Figure B.1:  $C_p$  distributions on the upper surface at  $\alpha_A = 0.06$  deg.

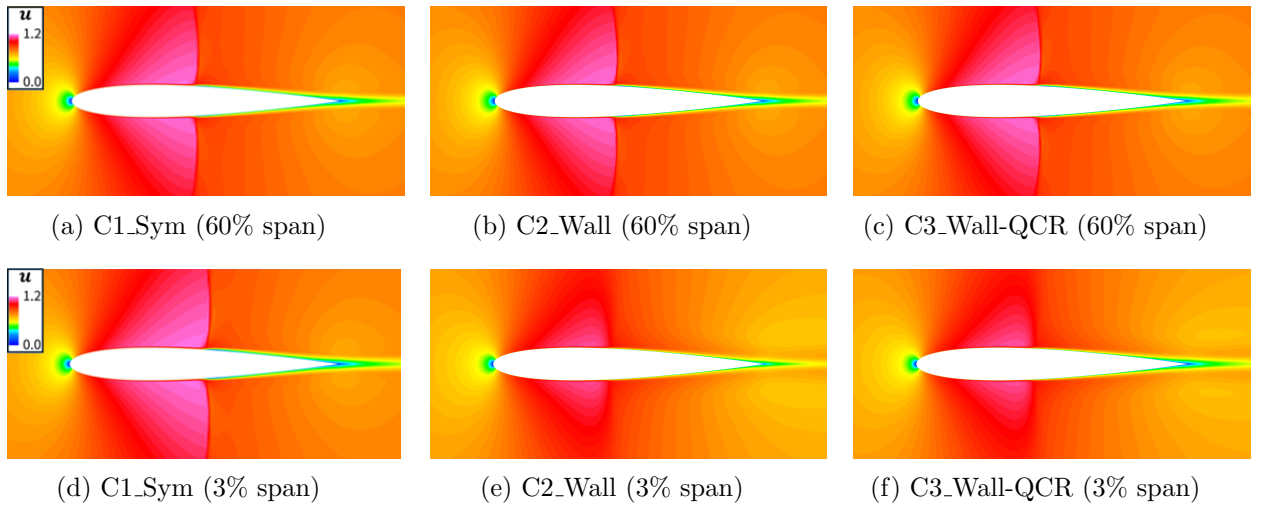


Figure B.2: Streamwise velocity distributions at  $\alpha_A = 0.06$  deg.

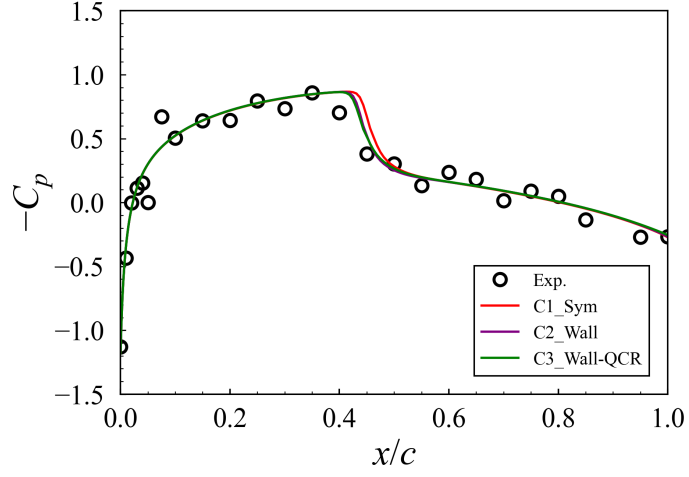


Figure B.3: Comparison of  $C_p$  distributions on the upper surface at 60% span position for  $\alpha_A = 0.06$  deg.

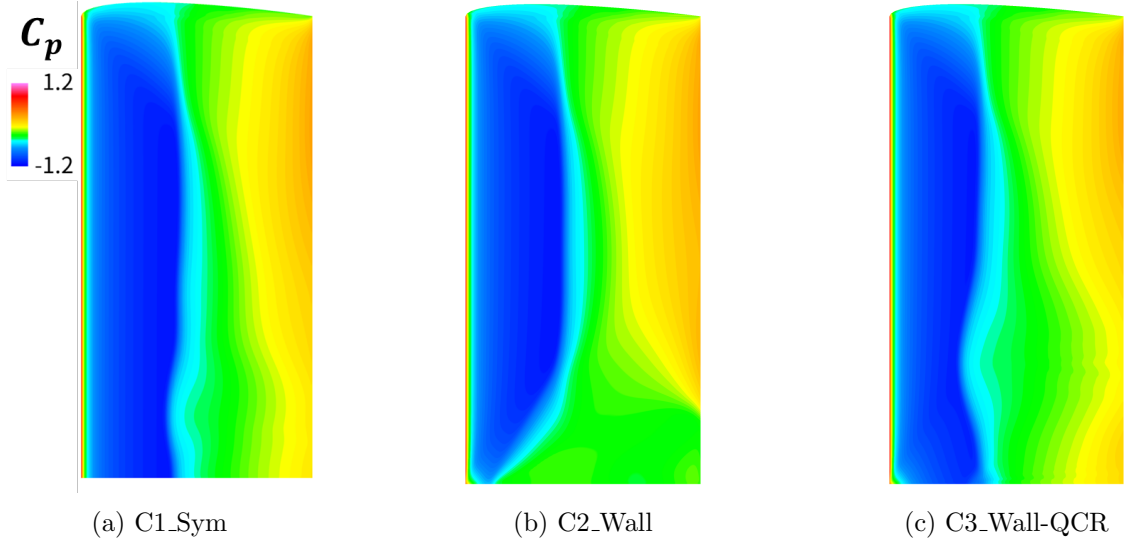


Figure B.4:  $C_p$  distributions on the upper surface at  $\alpha_A = 4.02$  deg.

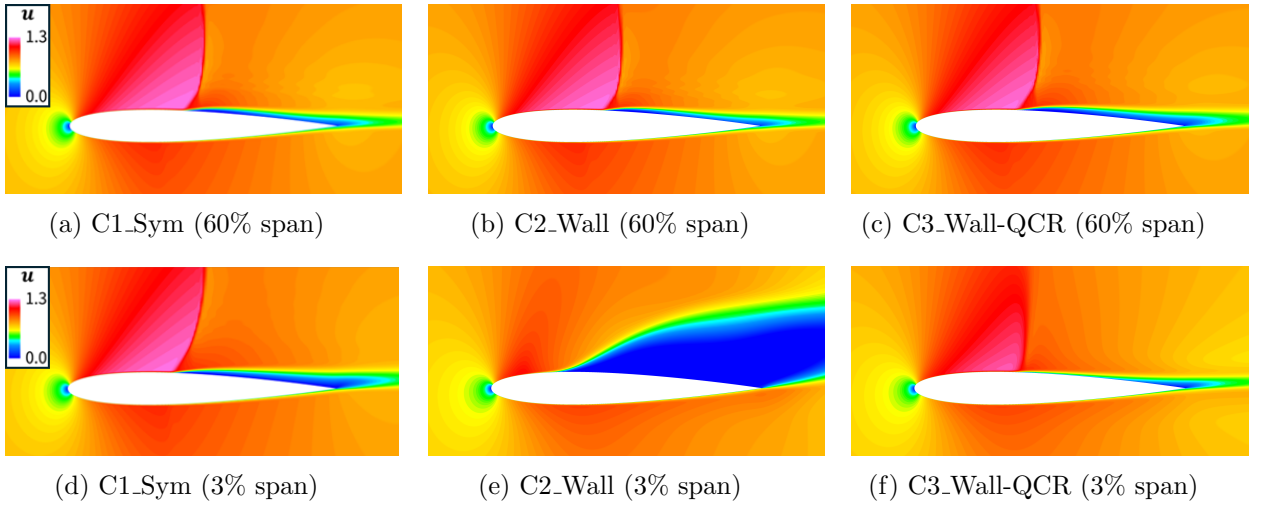


Figure B.5: Streamwise velocity distributions at  $\alpha_A = 4.02$  deg.

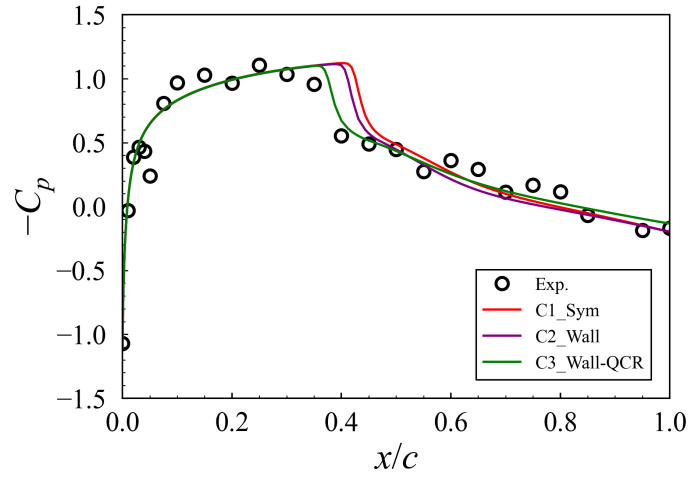


Figure B.6: Comparison of  $C_p$  distributions on the upper surface at 60% span position for  $\alpha_A = 4.02$  deg.

## 付録C NACA0012翼フラッター計算における時間・空間解像度および初期擾乱の大きさの影響について

本項では第5章で述べたNACA0012ベンチマーク翼のフラッター計算における，時間・空間解像度および初期擾乱の大きさの影響について述べる．計算手法はTable C.1に示す通りであり，第5章で示したC3-Wall-QCRのケースについて計算を行う．また計算条件はTable C.2に示す通りである．

Table C.1: Computational method

|       |                             |
|-------|-----------------------------|
| 支配方程式 | 3次元圧縮性URANS                 |
| 乱流モデル | SA_LowRe_QCR2024[55]        |
| 非粘性流束 | 3次精度MUSCL補間[41]を用いたSHUS[40] |
| 粘性流束  | 2次精度中心差分法                   |
| 時間離散化 | 2次精度オイラー陰解法                 |
| 時間積分法 | DPLUR陰解法[43, 44]            |

Table C.2: Computational condition for the flutter calculation.

|                             |                  |
|-----------------------------|------------------|
| Angle of attack, $\alpha_A$ | 0 deg            |
| Mach number, $M_\infty$     | 0.77, 0.82, 0.88 |

まず空間解像度の影響について調査するため， $505 \times 229 \times 251$ ， $355 \times 179 \times 179$ ， $255 \times 143 \times 126$ の3つの計算格子を用いてフラッター計算を行った．ここで，無次元時間刻み幅は $\Delta t = 5.0 \times 10^{-3}$ ，内部反復回数は $imax = 5$ とした．Figure C.1に3つの計算格子で得られたフラッター動圧を示す．Figure C.1に示す通り，高マッハ数域を含む3つのマッハ数条件において，すべての計算格子でフラッター動圧はほとんど同じ値をとっており，本研究で用いた $505 \times 179 \times 251$ の計算格子は十分な空間解像度を有していることが分かる．

次に時間刻み幅の影響について調査するため， $\Delta t = 5.0 \times 10^{-3}$ ， $1.0 \times 10^{-2}$ ， $2.0 \times 10^{-2}$ の3つの異なる無次元時間刻み幅を用いたフラッター計算を行い結果を比較する．ここで，計算格子には $505 \times 229 \times 251$ を用いており，内部反復回数は $imax = 5$ とした．Figure C.2に3つの異なる無次元時間刻み幅を用いた場合のフラッター動圧の比較を示す．Figure C.2に示す通り， $\Delta t = 2.0 \times 10^{-2}$ では高マッハ数域での不安定性を再現できていないが， $\Delta t = 1.0 \times 10^{-2}$ ， $5.0 \times 10^{-3}$ では，高マッハ数域を含めてフラッター動圧がよく一致しており，本研究で用いた $\Delta t = 5.0 \times 10^{-3}$ の無次元時間刻み幅は十分な時間解像度を有していることが分かる．

最後に初期擾乱の大きさの影響について調査するため， $\dot{h}_{init} = 0.002, 0.005, 0.01$ ， $\dot{\alpha}_{init} = 0.2, 0.5, 1.0$  degの6つのケースについてフラッター計算を行い結果を比較する．ここで，計算格子には $505 \times 229 \times 251$ を用いており，無次元時間刻み幅は $\Delta t = 5.0 \times 10^{-3}$ ，内部反復回数は $imax = 5$ とした．Figure C.3に各初期擾乱条件でのフラッター動圧を示す．Figure C.3に示すように，すべてのマッハ数で初期擾乱の違いによるフラッター動圧の変化は小さく，その

変動の最大値はフラッター動圧に対して5%程度である。従って、本計算条件においては初期擾乱の大きさの影響は十分小さいと言える。

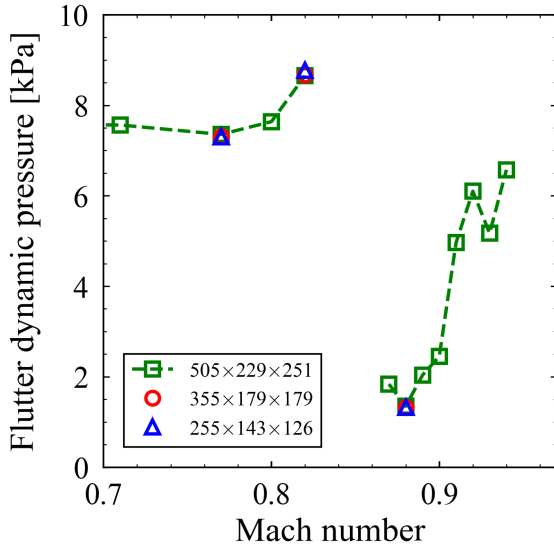


Figure C.1: Effects of grid resolution on the flutter boundary.

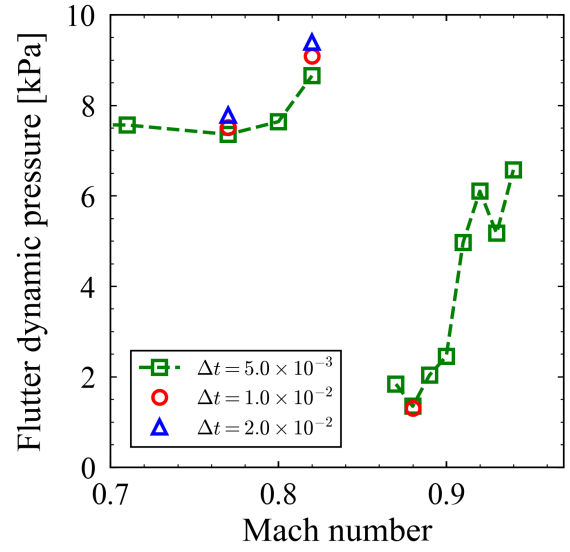


Figure C.2: Effects of time step size on the flutter boundary.

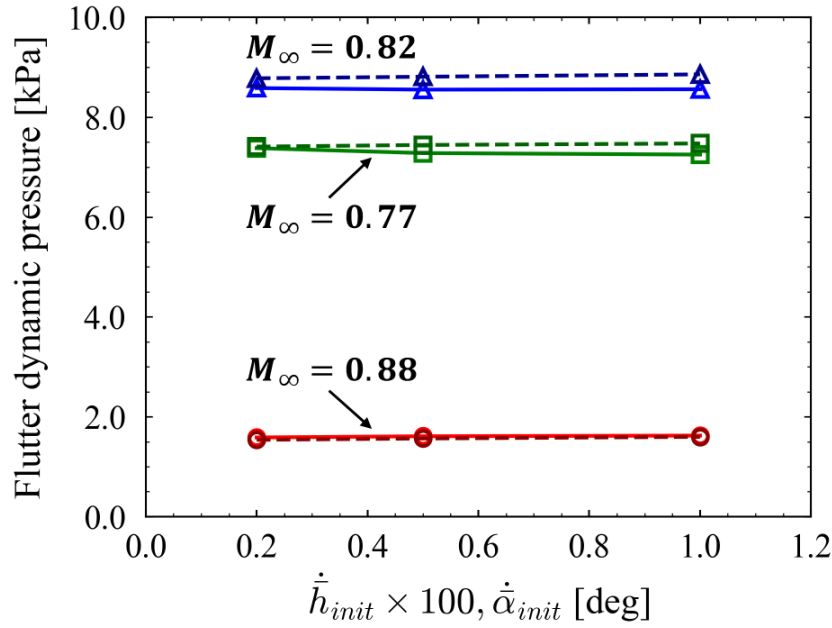


Figure C.3: Effects of initial disturbance on the flutter boundary.



## 謝辞

本研究は、HPCIシステム利用研究課題(課題番号：hp250158およびhp250073)を通じて、東北大学および大阪大学が提供するスーパーコンピュータAOBA-S、SQUIDの計算資源の提供を受け、実施しました。また本研究は、JST次世代研究者挑戦的研究プログラムJPMJSP2119の支援を受けたものです。支援に感謝いたします。

本研究を遂行するにあたり、多くの方々にご指導いただきました。ここに感謝の意を表します。指導教官である寺島洋史准教授には学部生時代から6年間にもわたり、大変お世話になりました。研究のスタート地点としては「翼型形状がフラッター特性に及ぼす影響についての調査」だったと思います。そこから本論文最終章の3次元フラッター解析に至るまでは、中々に遠い道のりではありましたが、私が迷走している際にも、ご助言や学外へ出る機会等を与えていただき、大変感謝しております。また特に研究結果のまとめ方については、学会発表時のご指導を通して成長することができたと思います。

同研究室の大島伸行教授には研究室ゼミや居室で数値計算手法に関して大変有益なご助言をいただきました。最終年度に取り組んだLES解析では、妥当性検証の方法や今後の進め方など様々なご指摘をいただいたおかげで、まとまった結果として仕上げることができました。また計算流体工学研究室・宇宙輸送工学研究室の高橋祐介准教授からは、研究分野も近いことから、研究室ゼミで流体構造連成解析手法などに関してご指摘、ご助言いただきました。また発表練習等の機会に発表スライドに対して有益なご指摘をいただけました。大変ありがとうございました。研究室秘書の白井さんには学会参加時の手続きなどで大変お世話になりました。また世間話などにも付き合ってください、気持ちをリフレッシュすることができました。

研究室の学生の皆様にも大変お世話になりました。博士課程になってからも、私の雑談やご飯、時には旅行にまで付き合ってください非常に感謝しております。そのようなリフレッシュする機会が多くあったため、研究の進捗が芳しくない時期も、精神的に落ち込むことなく楽しく過ごすことができました。

最後にこれまでの長い間、生活を支援し続けてくれた家族に感謝します。

## 参考文献

- [1] VC10.net. *A Little VC10derness*, 2021. アクセス日: 2021年1月29日.
- [2] C. D. Harris. Nasa supercritical airfoils: A matrix of family-related airfoils. NASA Technical Paper NASA TP-2969, National Aeronautics and Space Administration, 1990.
- [3] 鷺津久一郎. 空力弾性学. 共立出版, 東京, 1957. in Japanese.
- [4] J. R. Wright and J. E. Cooper. *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*. Aerospace Series. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, 2nd edition, 2014.
- [5] E. H. Dowell. *A Modern Course in Aeroelasticity*, volume 217 of *Solid Mechanics and Its Applications*. Springer, Dordrecht, 5th revised and enlarged edition, 2016.
- [6] R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, and R. L. Halfman. *Aeroelasticity*. Courier Corporation, North Chelmsford, MA, 2013.
- [7] Federal Aviation Administration. Ac 25.629-1b: Flutter. Technical report, Federal Aviation Administration, 2015. Advisory Circular.
- [8] 中道二郎. フラッタ風洞試験. <https://www.aero.jaxa.jp/topics/column/0242.html>, 2015. JAXA コラム, 2015年4月20日.
- [9] W. G. L. Luber. Store separation and trajectory prediction. Technical Report EN-SCI-277, NATO STO, 2018.
- [10] K. Isogai. On the transonic-dip mechanism of flutter of a sweptback wing. *AIAA Journal*, 17(7):793–795, 1979.
- [11] E. Albano and W. P. Rodden. A doublet-lattice method for calculating lift distributions on oscillating surfaces in subsonic flows. *AIAA Journal*, 7(2):279–285, 1969.
- [12] K. Isogai. Transonic dip mechanism of flutter of a sweptback wing. ii. *AIAA Journal*, 19(9):1240–1242, 1981.
- [13] E. C. Yates, E. C. Wynne, and M. G. Farmer. Effects of angle of attack on transonic flutter of a supercritical wing. *Journal of Aircraft*, 20(10):841–847, 1983.
- [14] E. M. Lee-Rausch and J. T. Batina. Calculation of agard wing 445.6 flutter using navier–stokes aerodynamics. 1993. AIAA Paper 1993-3476.
- [15] E. M. Lee-Rausch and J. T. Batina. Wing flutter boundary prediction using unsteady euler aerodynamic method. *Journal of Aircraft*, 32(2):416–422, 1995.
- [16] W. A. Silva, P. Chwalowski, and B. N. Perry. Evaluation of linear, inviscid, viscous, and reduced-order modeling aeroelastic solutions of the agard 445.6 wing using root locus analysis. 2014. AIAA Paper 2014-0496.

- [17] J.-Y. Gan, H.-S. Im, X.-Y. Chen, G.-C. Zha, and C. L. Pasiliao. Delayed detached eddy simulation of wing flutter boundary using high order schemes. *Journal of Fluids and Structures*, 71:199–216, 2017.
- [18] C. Gao, X. Liu, and W. Zhang. On the dispersion mechanism of the flutter boundary of the agard 445.6 wing. *AIAA Journal*, 59(7):2657–2669, 2021.
- [19] B. K. Stanford and K. E. Jacobson. Transonic flutter dips of the agard 445.6 wing. *Journal of Aircraft*, 61(2):515–522, 2024.
- [20] J. Heeg. Overview of the aeroelastic prediction workshop. 2013. AIAA Paper 2013-0783.
- [21] J. Heeg, P. Chwalowski, D. E. Raveh, A. Jirasek, and M. Dalenbring. Overview and data comparisons from the 2nd aeroelastic prediction workshop. 2016. AIAA Paper 2016-3121.
- [22] J. Heeg and P. Chwalowski. Investigating the transonic flutter boundary of the benchmark supercritical wing. 2017. AIAA Paper 2017-0191.
- [23] P. Chwalowski, B. K. Stanford, K. E. Jacobson, L. Poplingher, D. E. Raveh, A. Jirasek, G. Pagliuca, and M. Righi. Flutter prediction report in support of the high angle working group at the third aeroelastic prediction workshop. 2024. AIAA Paper 2024-0418.
- [24] P. Chwalowski, G. McHugh, S. J. Massey, L. Poplingher, D. E. Raveh, A. Jirasek, N. F. Giannelis, K. Venkatraman, M. Singh, B. Ahrabi, and M. Hong. Shock-buffet prediction report in support of the high angle working group at the third aeroelastic prediction workshop. 2024. AIAA Paper 2024-0417.
- [25] P. Chwalowski, S. J. Massey, K. E. Jacobson, W. A. Silva, and B. K. Stanford. Progress on transonic flutter and shock buffet computations in support of the third aeroelastic prediction workshop. 2022. AIAA Paper 2022-1347.
- [26] S. E. Lamberson and D. Prosser. Hpcmp create tm-av kestrel flutter computations for the third aeroelastic prediction workshop high angle working group. 2024. AIAA Paper 2024-0416.
- [27] L. Poplingher and D. E. Raveh. Computational study of stall flutter of the benchmark supercritical wing. 2024. AIAA Paper 2024-0828.
- [28] M. J. Candon, A. J. Delgado-Gutiérrez, P. Marzocca, M. Balajewicz, J. Thomas, and E. H. Dowell. Stall flutter of the benchmark supercritical wing using aeroelastic model reduction and tunable turbulence parameters. 2025. AIAA Paper 2025-0816.
- [29] H. Terashima and K. Fujii. Influence of stores on the transonic flutter of a delta wing configuration. *AIAA Journal*, 45(1):237–246, 2007.
- [30] J. Bohbot, J. Garnier, S. Toumit, and D. Darracq. Computation of the flutter boundary of an airfoil with a parallel navier–stokes solver. 2001. AIAA Paper 2001-0572.
- [31] G. Dietz, G. Schewe, and H. Mai. Amplification and amplitude limitation of heave/pitch limit-cycle oscillations close to the transonic dip. *Journal of Fluids and Structures*, 22(4):505–527, 2006.
- [32] A. J. Persoon, J. J. Horsten, and J. J. Meijer. Measurement of transonic dips in the flutter boundaries of a supercritical wing in a wind tunnel. *Journal of Aircraft*, 21(11):906–912, 1984.

- [33] Jr. Rivera, J. A., B. Dansberry, R. M. Bennett, M. H. Durham, and W. A. Silva. Naca 0012 benchmark model experimental flutter results with unsteady pressure distributions. 1992. AIAA Paper 1992-2396.
- [34] L. L. Erickson. Transonic single-mode flutter and buffet of a low aspect ratio wing having a subsonic airfoil shape. NASA Technical Note NASA-TN-D-7346 (A-4966), National Aeronautics and Space Administration, Ames Research Center, 1974.
- [35] B. B. Prananta, M. H. L. Hounjet, and R. J. Zwaan. Two-dimensional transonic aeroelastic analysis using thin-layer navier–stokes method. *Journal of Fluids and Structures*, 12(6):655–676, 1998.
- [36] D. A. Seidel, M. C. Sandford, and C. V. Eckstrom. Measured unsteady transonic aerodynamic characteristics of an elastic supercritical wing with an oscillating control surface. 1985. AIAA Paper 1985-0598.
- [37] D. A. Seidel, C. V. Eckstrom, and M. C. Sandford. Transonic region of high dynamic response encountered on an elastic supercritical wing. *Journal of Aircraft*, 26(9):870–875, 1989.
- [38] B. K. Stanford and K. E. Jacobson. Transonic aeroelastic modeling of the naca 0012 benchmark wing. *AIAA Journal*, 59(10):4134–4143, 2021.
- [39] D. C. Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, 2002.
- [40] E. Shima and T. Jounouchi. Role of cfd in aeronautical engineering (no. 14). ausm type upwind schemes. Technical Report NAL SP-34, National Aerospace Laboratory, 1997.
- [41] W. K. Anderson, J. L. Thomas, and B. Van Leer. Comparison of finite volume flux vector splittings for the euler equations. *AIAA Journal*, 24(9):1453–1460, 1986.
- [42] A. Jameson and S. Yoon. Lower-upper implicit schemes with multiple grids for the Euler equations. *AIAA Journal*, 25(7):929–935, 1987.
- [43] G. V. Candler, M. J. Wright, and J. D. McDonald. Data-parallel lower-upper relaxation method for reacting flows. *AIAA Journal*, 32(12):2380–2386, 1994.
- [44] M. J. Wright, G. V. Candler, and M. Prampolini. Data-parallel lower-upper relaxation method for the navier-stokes equations. *AIAA Journal*, 34(7):1371–1377, 1996.
- [45] D. Sharov, H. Luo, J. Baum, and R. Loehner. Implementation of unstructured grid gmres+lu-sgs method on shared-memory, cache-based parallel computers. 2000. AIAA Paper 2000-0927.
- [46] Zehner. P. and A. Hashimoto. Acceleration of the data-parallel lower-upper relaxation time-integration method on gpu for an unstructured cfd solver. *Computers & Fluids*, 256:105842, 2023.
- [47] B. S. Baldwin and H. Lomax. Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. 1978. AIAA Paper 1978-0257.
- [48] P. R. Spalart and S. R. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. 1992. AIAA Paper 1992-0439.
- [49] F. R. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8):1598–1605, 1994.

- [50] NASA Langley Research Center. Turbulence modeling resource. <https://turbmodels.larc.nasa.gov/>, 2025. Accessed on 2025-12-07.
- [51] P. R. Spalart and A. V. Garbaruk. Correction to the spalart–allmaras turbulence model, providing more accurate skin friction. *AIAA Journal*, 58(5):1903–1905, 2020.
- [52] P. R. Spalart. Strategies for turbulence modelling and simulations. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21(3):252–263, 2000.
- [53] M. Mani, D. Babcock, C. Winkler, and P. Spalart. Predictions of a supersonic turbulent flow in a square duct. 2013. AIAA Paper 2013-0860.
- [54] C. L. Rumsey, J.-R. Carlson, T. H. Pulliam, and P. R. Spalart. Improvements to the quadratic constitutive relation based on nasa juncture flow data. *AIAA Journal*, 58(10):4374–4384, 2020.
- [55] Y. Tamaki and S. Kawai. Turbulence anisotropy effects on corner-flow separation: physics and turbulence modelling. *Journal of Fluid Mechanics*, 980:A21, 2024.
- [56] Y. Tamaki, S. Kawai, and T. Imamura. Applicability of quadratic constitutive relations for turbulent flow simulations in aeronautics. *Journal of Aircraft*, 0(0):1–14, 0.
- [57] 上山根慎, 春日康弘, 新井雅裕, and 長瀬悟. ベクトル型スーパーコンピュータ sx-aurora tsubasa の最新ハードウェア. *SENAC*, 56(3):2–10, 2023.
- [58] S. S. Davis and G. N. Malcolm. Transonic shock-wave/boundary-layer interactions on an oscillating airfoil. *AIAA Journal*, 18(11):1306–1312, 1980.
- [59] Z. Zhang, S. Yang, F. Liu, and D. Schuster. Prediction of flutter and lco by an euler method on non-moving cartesian grids with boundary-layer corrections. 2005. AIAA Paper 2005-0833.
- [60] D. C. Wilcox. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26(11):1299–1310, 1988.
- [61] K. Yamamoto, K. Tanaka, and M. Murayama. Effect of a nonlinear constitutive relation for turbulence modeling on predicting flow separation at wing-body juncture of transonic commercial aircraft. 2012. AIAA Paper 2012-2895.
- [62] S. R. Allmaras, F. T. Johnson, and P. R. Spalart. Modifications and Clarifications for the Implementation of the Spalart–Allmaras Turbulence Model. Big Island, Hawaii, USA, July 9–13 2012. ICCFD. Proceedings of the Seventh International Conference on Computational Fluid Dynamics (ICCFD7).
- [63] Philippe R. Spalart, W.-H. Jou, M. Strelets, and Steven R. Allmaras. Comments on the feasibility of les for wings, and on hybrid rans/les approach. 1997. Proceedings of the First AFOSR International Conference on DNS/LES.
- [64] Philippe R. Spalart, Sebastien Deck, Michael L. Shur, Kyle D. Squires, Mikhail Kh. Strelets, and Andrei Travin. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 20(3):181–195, 2006.
- [65] Mikhail L. Shur, Philippe R. Spalart, Mikhail Kh. Strelets, and Andrei Travin. A hybrid rans–les approach with delayed-des and wall-modelled les capabilities. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 29(6):1638–1649, 2008.
- [66] Sebastien Deck and Nicolas Renard. Towards an enhanced protection of attached boundary layers in hybrid rans/les methods. *Journal of Computational Physics*, 400:108970, 2020.

- [67] Bojan Šekutkovski, Ivan Kostić, Aleksandar Simonović, Philip Cardiff, and Vladimir Jazarević. Three-dimensional fluid–structure interaction simulation with a hybrid rans–les turbulence model for applications in transonic flow domain. *Aerospace Science and Technology*, 54:259–273, 2016.
- [68] Pawel Chwalowski, Jennifer Heeg, and Robert T. Biedron. Numerical investigations of the benchmark supercritical wing in transonic flow. 2017. AIAA Paper 2017-0190.
- [69] Kensuke Soneda, Natsuki Tsushima, Kheirandish Hamidreza, and Kenichi Saitoh. Flutter evaluation in transonic regime based on detached eddy simulation. 2025. AIAA Paper 2025-0819.
- [70] Jr. Rivera, J. A., B. E. Dansberry, M. H. Durham, R. M. Bennett, and W. A. Silva. Pressure Measurements on a Rectangular Wing with a NACA0012 Airfoil During Conventional Flutter. Technical Memorandum 104211, National Aeronautics and Space Administration, NASA Langley Research Center, Hampton, VA, July 1992. NASA TM 104211.