



Title	構造化低ランク近似アルゴリズムとその初期化戦略に関する研究
Author(s)	吉野, 夏樹
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(情報科学)
Dissertation Number	甲第16986号
Issue Date	2026-03-25
DOI	https://doi.org/10.14943/doctoral.k16986
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/99830
Type	doctoral thesis
File Information	Natsuki_Yoshino_abstract.pdf, 論文内容の要旨 https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/



学位論文内容の要旨

博士の専攻分野の名称 博士（情報科学） 氏名 吉野 夏樹

学位論文題名

構造化低ランク近似アルゴリズムとその初期化戦略に関する研究

(A Study on Structured Low-Rank Approximation Algorithms and Their Initialization Strategy)

実世界のデータには、物理法則やシステム構造に起因する先験的な性質が存在し、これらはしばしば構造化行列を係数とする線形方程式でモデル化される。この方程式が成立するためには、行列が所定の構造を保持し、かつ所望のランク条件を満たす必要がある。しかし、現実の問題では観測雑音や数値誤差の影響により、得られた行列は一般にフルランクとなり、厳密な解を持たない場合が多い。このような状況下では、背後にある構造的性質を損なわずに行列を補正することが重要である。特に、構造を保持しつつ近傍の低ランク行列を求める操作は、構造化低ランク近似 (Structured Low-Rank Approximation: SLRA) と呼ばれ、信号処理、システム同定、時系列解析など多くの工学分野で基本的かつ重要な課題として現れる。

最も単純な低ランク近似手法は特異値分解に基づくものであるが、この方法は構造を保持しないため、近似結果に対応するモデルが存在しないという問題がある。構造を保持した低ランク近似問題の難しさは、所定のランクを持つ構造化行列の集合を陽に記述できないこと、さらにその集合が非凸であることに起因する。このため、最適化の制約条件を明示的に表現することが困難であり、最適解を直接求める方法は存在しない。適用範囲の広い反復解法も確立されていないため、問題の性質や要求に応じて多様なアルゴリズムが提案されてきた。

そのようなアルゴリズムの中で、行列の低ランク性の零空間表現を用いる SLRA 手法が存在する。このアプローチは有効性が報告されているものの、理論面での体系化が不十分であり、設計や選択に関する明確な指針を欠いているのが現状である。本論文の目的は、この現状を踏まえ、未解決の課題に対して理論的理解を深め、改善手法を提案することである。具体的には、以下の二点に焦点を当てた。

第一に、構造化全最小ノルム法に基づく SLRA アルゴリズムの定式化を解析し、計算誤差を最小化するための「初期方程式」の選択基準を導出した。これにより、従来の基準に比べて計算量を大幅に削減し、効率化を実現した。第二に、低ランク性の零空間表現を用いる SLRA アルゴリズムにおける初期化戦略の重要性を明確化し、従来の初期化戦略における脆弱性を引き起こす要因として「特異値の交代」という現象の存在を指摘した。従来の戦略では、観測行列の最小特異値に対応する右特異ベクトルが、所望の近似結果の零空間の基底と高い類似度を持つことを前提としていたが、雑音や摂動の影響によりこの仮定が成立しない場合がある。この問題に対処するため、本研究では変数射影法に基づく SLRA アルゴリズムを対象として、複数の候補ベクトルを評価する方法と、それらの線形結合係数を最適化する方法の二つの戦略を提案した。数値実験により、提案手法が雑音除去および近似的な GCD 計算において従来法よりも頑健であり、性能向上に寄与することを確認した。

本論文は、全 7 章から構成されている。各章の概要は以下の通りである。

第 1 章では、本研究の背景と目的を述べている。構造化低ランク近似 (Structured Low-Rank Approximation: SLRA) が信号処理やシステム同定など多くの応用分野で重要な役割を果たす理由を示し、現状の課題を整理している。

第 2 章では、SLRA の応用分野と数理的背景を説明している。まず、Hankel 行列と複素指数関数の和との関係を概説し、Hankel 行列に対する SLRA が信号の雑音除去や時系列予測に利用できることを概説している。次に、多項式の基本的性質を説明し、近似最大公約多項式 (近似 GCD) の概念を導入している。誤差を含む複数の多項式に対して近似的に GCD を求める問題や、その応用例についても述べている。

第 3 章では、行列構造を考慮しない非構造化低ランク近似に関する先行研究を総括している。これは、構造化低ランク近似における初期値計算の基盤として位置づけられる。また、よく知られた、特異値分解を応用する手法 (truncated SVD) についても触れている。

第 4 章では、主要な SLRA アルゴリズムを解説する。特に、構造化全最小ノルム法に基づくもの (STLN-SLRA) と変数射影法に基づくもの (VP-SLRA) の二つを詳細に説明し、第 5 章および第 6 章で提案する改善手法の基盤を整えている。STLN-SLRA アルゴリズムの導出においては、複数の既存文献を統合し、後続の解析が容易になるよう記号や手順を工夫している。その他の SLRA アルゴリズムについても概説している。

第 5 章では、STLN-SLRA の定式化を再検討し、計算コストを低減する新しい初期方程式の選択基準を提案している。従来は全ての候補を構成し残差ノルム等が最小のものを選択していたため、計算量が大きく、妥当性の検証も不十分であった。本研究では、初期方程式の選択基準を理論的に導出し、計算誤差を最小化する方法を提示している。さらに、近似的な GCD 計算や正弦波信号の雑音除去に関する数値実験により有効性を確認している。

第 6 章では、行列の低ランク性を零空間で表現する SLRA アルゴリズムにおける初期化戦略の重要性を明確化し、従来法の脆弱性を引き起こす要因として「特異値の交代」現象を指摘している。従来の初期化戦略は、観測行列の最小特異値に対応する右特異ベクトルを初期値として用いることを前提としていたが、雑音や摂動の影響によりこの仮定が成立しない場合があることを示している。本章では、この問題に対処するため、VP-SLRA を対象として、複数の候補ベクトルを評価する方法と、それらの線形結合係数を最適化する方法の二つの戦略を提案している。数値実験では、まず信号の雑音除去性能を検証し、提案法が極端な失敗を減らし、平均的な復元誤差を低減することで雑音に対する頑健性を示している。さらに、VP-SLRA を介した近似的な GCD 計算による真の GCD 推定において、雑音が平均 0 の白色ガウス性を持つ場合に提案戦略が性能向上に寄与することを確認している。

第 7 章では、本論文の成果を総括し、今後の課題と展望を述べている。