



|                     |                                                                                                 |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Title               | ホログラムの無損失圧縮に関する研究                                                                               |
| Author(s)           | KIM, Dukhyun                                                                                    |
| Degree Grantor      | 北海道大学                                                                                           |
| Degree Name         | 博士(情報科学)                                                                                        |
| Dissertation Number | 甲第16994号                                                                                        |
| Issue Date          | 2026-03-25                                                                                      |
| DOI                 | <a href="https://doi.org/10.14943/doctoral.k16994">https://doi.org/10.14943/doctoral.k16994</a> |
| Doc URL             | <a href="https://hdl.handle.net/2115/99838">https://hdl.handle.net/2115/99838</a>               |
| Type                | doctoral thesis                                                                                 |
| File Information    | KIM_Dukhyun.pdf, 全文                                                                             |



-博士学位論文-

ホログラムの無損失圧縮に関する研究

Study on Lossless Compression for Holograms

北海道大学大学院情報科学院  
メディアネットワークコース  
情報メディア環境学研究室

金 恵 炫

令和8年3月

# 目次

|       |                                            |    |
|-------|--------------------------------------------|----|
| 第 1 章 | 序論                                         | 1  |
| 1.1   | 研究背景 . . . . .                             | 1  |
| 1.2   | 研究目的 . . . . .                             | 3  |
| 1.3   | 論文構成 . . . . .                             | 5  |
| 第 2 章 | ホログラムの原理                                   | 6  |
| 2.1   | 概要 . . . . .                               | 6  |
| 2.2   | 参照光 . . . . .                              | 6  |
| 2.3   | 物体光 . . . . .                              | 12 |
| 2.3.1 | Helmholtz 方程式 . . . . .                    | 12 |
| 2.3.2 | Helmholtz 方程式の解 . . . . .                  | 14 |
| 2.4   | 物体光と参照光の干渉 . . . . .                       | 18 |
| 2.5   | Fresnel 回折積分 . . . . .                     | 20 |
| 2.5.1 | Kirchhoff 積分定理 . . . . .                   | 21 |
| 2.5.2 | Fresnel 回折積分 . . . . .                     | 25 |
| 2.6   | Computer-generated hologram(CGH) . . . . . | 28 |
| 第 3 章 | ホログラムの特性                                   | 35 |
| 3.1   | Fresnel ゾーン . . . . .                      | 35 |
| 3.2   | 球面波伝搬による Fresnel ゾーンの波動分布 . . . . .        | 38 |
| 3.3   | ホログラムデータの特性 . . . . .                      | 43 |
| 3.4   | 周波数制限 . . . . .                            | 47 |
| 第 4 章 | 提案手法 1: 干渉縞の方向性に基づいた無損失圧縮                  | 50 |
| 4.1   | 関連研究 . . . . .                             | 50 |
| 4.2   | 提案手法 . . . . .                             | 52 |

|       |                                                      |     |
|-------|------------------------------------------------------|-----|
| 4.2.1 | 方向性を探すための方向設定 . . . . .                              | 53  |
| 4.2.2 | DPCM(differential pulse coding modulation) . . . . . | 54  |
| 4.2.3 | 2 次線形予測手法 . . . . .                                  | 55  |
| 4.2.4 | $n$ 次線形予測手法 . . . . .                                | 56  |
| 4.2.5 | アルゴリズムの全体過程 . . . . .                                | 62  |
| 4.3   | 実験および結果 . . . . .                                    | 64  |
| 4.3.1 | ホログラム生成 . . . . .                                    | 64  |
| 4.3.2 | 実験結果 . . . . .                                       | 65  |
| 4.4   | 考察 . . . . .                                         | 71  |
| 第 5 章 | 提案手法 2:CGH の解像度調整手法および無損失圧縮の適用                       | 73  |
| 5.1   | 関連研究 . . . . .                                       | 73  |
| 5.2   | 人間の視覚特性 . . . . .                                    | 75  |
| 5.3   | 提案手法 . . . . .                                       | 77  |
| 5.3.1 | Rayleigh 基準 . . . . .                                | 77  |
| 5.3.2 | 解像度調節アルゴリズム . . . . .                                | 82  |
| 5.3.3 | アルゴリズムの全体過程 . . . . .                                | 85  |
| 5.4   | 実験 . . . . .                                         | 87  |
| 5.5   | 実験結果 . . . . .                                       | 91  |
| 5.6   | 考察 . . . . .                                         | 99  |
| 第 6 章 | 結論                                                   | 101 |
|       | 謝辞                                                   | 103 |
|       | 研究業績                                                 | 104 |
|       | 参考文献                                                 | 106 |

# 目次

|      |                                                                                               |    |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1  | ホログラムベースのデジタルホログラム放送サービスシステム . . . . .                                                        | 2  |
| 1.2  | Diffraction angle on SLM based on pixel pitch . . . . .                                       | 4  |
| 1.3  | Viewing zone of holograms . . . . .                                                           | 4  |
| 2.1  | Harmonic oscillator . . . . .                                                                 | 7  |
| 2.2  | 位相が同じ点を集めた面 . . . . .                                                                         | 10 |
| 2.3  | 平面波の伝搬 . . . . .                                                                              | 12 |
| 2.4  | 空間に source が存在しない領域での位相分布 . . . . .                                                           | 15 |
| 2.5  | 物体光と参照光の干渉 . . . . .                                                                          | 18 |
| 2.6  | 1 次波動の波面から 2 次波の生成および伝搬 . . . . .                                                             | 21 |
| 2.7  | スリットに形成された 1 次波動の破面および 2 次波の伝搬 . . . . .                                                      | 25 |
| 2.8  | $z = 0$ に位置する干渉縞への入射および回折される参照光 . . . . .                                                     | 26 |
| 2.9  | 干渉縞の生成および再生 . . . . .                                                                         | 29 |
| 2.10 | Process of computer-generated hologram . . . . .                                              | 30 |
| 2.11 | Rayleigh-Sommerfeld 回折理論における点光源の伝搬 . . . . .                                                  | 31 |
| 3.1  | 観察点 $P$ から円形スリットに形成される波面までの経路および経路差 . . . . .                                                 | 35 |
| 3.2  | 整数 $m$ が増加するにつれて形成される円形帯 . . . . .                                                            | 37 |
| 3.3  | 自由空間における点光源の球面波伝搬 . . . . .                                                                   | 38 |
| 3.4  | 傾斜因子の方位角対称性 . . . . .                                                                         | 39 |
| 3.5  | 点光源 $S$ から観察点 $P$ までの距離 . . . . .                                                             | 40 |
| 3.6  | Fresnel zone . . . . .                                                                        | 42 |
| 3.7  | SLM で 1 つのピクセルに複数の物体光の干渉 . . . . .                                                            | 43 |
| 3.8  | Sinusoidal zone plate and its transmission function. Image redescribed<br>from [17] . . . . . | 44 |

|      |                                                                                                                                                                                                                  |    |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.9  | 干渉縞 (432,422) 座標におけるホログラムデータの変動性 . . . . .                                                                                                                                                                       | 44 |
| 3.10 | ティーポッド干渉縞の $G$ チャンネルのサーフェスプロット . . . . .                                                                                                                                                                         | 45 |
| 3.11 | Lenna 画像の $G$ チャンネルのサーフェスプロット . . . . .                                                                                                                                                                          | 45 |
| 3.12 | ティーポッド干渉縞の $G$ チャンネルの周波数成分 . . . . .                                                                                                                                                                             | 46 |
| 3.13 | 物体光と参照光の入射および Fresnel ゾーンの空間周波数と Nyquist サ<br>ンプリング周波数 . . . . .                                                                                                                                                 | 49 |
| 4.1  | 干渉縞上に存在する方向性 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, ©<br>The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                                                                 | 52 |
| 4.2  | 角度による方向設定 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The<br>Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                                                                    | 53 |
| 4.3  | $0^\circ$ で DPCM の適用例 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The<br>Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                                                        | 54 |
| 4.4  | $a_n (n = 4, a_n \in \mathbb{R})$ の場合のエンコーディング過程 Reproduced from Kim et<br>al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                             | 57 |
| 4.5  | $a_n (n = 4, a_n \in \mathbb{R})$ の場合のデコーディング過程 Reproduced from Kim et<br>al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                              | 58 |
| 4.6  | 全体圧縮過程 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s),<br>published by Optica Publishing Group. . . . .                                                                                       | 63 |
| 4.7  | 再生装置パラメータ . . . . .                                                                                                                                                                                              | 64 |
| 4.8  | 干渉縞、再生像、そして、シミュレータによるノイズ: (a) uniformity,<br>(b) normal, (c) brown noise, and (d) pink noise Reproduced from Kim et<br>al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . . | 65 |
| 4.9  | 全体圧縮結果 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s),<br>published by Optica Publishing Group. . . . .                                                                                       | 66 |
| 4.10 | ブロックサイズによる圧縮結果: normal Reproduced from Kim et al., Applied<br>Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                                                       | 67 |
| 4.11 | 線形予測を行った圧縮結果: normal Reproduced from Kim et al., Applied<br>Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                                                         | 68 |
| 4.12 | 物体光の点光源数による圧縮結果: uniformity Reproduced from Kim et al.,<br>Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                                                  | 69 |
| 4.13 | 商業ソフトウェア評価による圧縮結果: normal Reproduced from Kim et al.,<br>Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                                                    | 69 |

|      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |    |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.14 | PSNR を測定した損失圧縮との比較: normal Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . .                                                                                                                                                                                                                                                                               | 70 |
| 4.15 | 計算時間および実験環境: normal Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 71 |
| 5.1  | Anatomy of human eyeball, redescibed from Tyler[55] . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 76 |
| 5.2  | 円形スリットでの Fraunhofer 回折 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 77 |
| 5.3  | $n = 1$ の Bessel 関数のグラフとエネルギー強度 $I(u)$ を表すフリンジパターン . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 81 |
| 5.4  | $\Delta\phi$ の角度で入射した 2 つの光がレンズによって分離されたエアリーディスク . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 82 |
| 5.5  | レンズの代わりに SLM を使用した場合の Rayleigh 基準に基づく 2 点間の分解能: (a) $a_x$ , (b) $a_y$ Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                                                                                                                                                                                                                  | 84 |
| 5.6  | $a_x=a_y=2$ の場合の解像度調節アルゴリズム . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 86 |
| 5.7  | サブホログラムサイズ $a_x=a_y=100$ を適用し、原点から $z$ 軸上に 17mm 離れた位置で観察したドラゴンホログラムの干渉縞: (a) 点光源数 100、(b) 点光源数 1000 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                                                                                                                                                                                    | 86 |
| 5.8  | Weber-Fechner 法則に従ってサンプリングしたサブホログラムのサイズ. サンプリング関係を定義するために用いた Weber-Fechner 曲線は $S = k \log_b n + C$ で表される. ここで、 $S$ は知覚強度を示し、 $n$ は物理的刺激量を表し、本研究ではサブホログラムのサイズ ( $n = size$ ) に対応する. 対数の底は $b = 2$ 、スケーリング定数は $k = 1$ 、基準オフセットは $C = 0$ とした. したがって、各知覚強度レベルに対応するサブホログラムサイズを決定するために、逆関係式 $n = 2^S$ を用いた. Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . . | 88 |
| 5.9  | 空間周波数領域における色による空間周波数の分類: 低周波数 (青)、中低周波数 (緑)、高周波数 (赤) Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                   | 89 |
| 5.10 | 周波数エントロピー値に基づくカラーマップ Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 90 |

|      |                                                                                                                                                                          |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.11 | Weber-Fechner 法則に従ってサンプリングした奥行き Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                         | 90 |
| 5.12 | サブホログラムサイズによる圧縮結果 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                       | 91 |
| 5.13 | クロップした干渉縞の JP2K による bpp 圧縮結果 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                            | 92 |
| 5.14 | 分析結果: (a) 再生像, (b) サーフェスプロット, (c) 周波数マップ, (d) 周波数エントロピー Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . . | 93 |
| 5.15 | クロップした干渉縞の全体周波数エントロピー値結果 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                | 94 |
| 5.16 | 視点位置座標およびサブホログラムサイズが 150 の場合に対する周波数マップ Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                  | 95 |
| 5.17 | 各視点位置での圧縮結果 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                             | 95 |
| 5.18 | 異なる物体の JP2K 圧縮結果およびサブホログラムサイズが 1000 の場合の再生像 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .             | 96 |
| 5.19 | 点光源の数に対する JP2K 圧縮結果 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                                     | 97 |
| 5.20 | サブホログラムサイズ 1920 と 150 に対する奥行きによる JP2K 圧縮結果 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .              | 97 |
| 5.21 | クロップした干渉縞の JP2K による bpp 圧縮結果 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .                            | 98 |
| 5.22 | $R$ 、 $G$ 、および $B$ の波長ごとにクロップした干渉縞の全体周波数エントロピー値結果 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group. . . . .       | 98 |



# 表目次

|     |                                                                                                                                                                                         |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.1 | Hologram generation conditions . . . . .                                                                                                                                                | 87 |
| 5.2 | Resolution distance based on wavelength and sub-hologram sizes Re-<br>produced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica<br>Publishing Group. . . . . | 89 |

# 第 1 章

## 序論

### 1.1 研究背景

ホログラフィ技術は、物体光の振幅のみを記録する従来の 2 次元写真とは異なり、物体光と基準光の干渉により光の位相、振幅、および方向を全て記録する。この特性により、空間上に物体波の波面を再生して 3 次元物体を形成することが可能となる。3 次元立体映像の発展とともに関連製品が実生活で普遍的になるにつれて、観察者は、より実感的で完全な 3 次元立体映像を実現したサービスへの要求が高まっている。

3 次元映像は、観察者が立体的に知覚する映像のことであり、立体感を生じさせる要素 (cue) は大きく生理学的な要素 (physiological cue) と経験的な要素 (experiential cue) に分けることができる[1]。生理学的な要素とは、対象との距離に応じて、二つの目が成す角度 (注視角、vergence) が変わることにより、焦点を合わせるために水晶体の厚さを調節する筋肉の動作などの身体の反応に基づく要素を指す。その一方、経験的な要素とは、私たちが生活しながら自然に習得した経験により知覚しているものの形状と遠近といった視覚的手がかりに基づく要素を指す。たとえば、2 次元画像は、後者に対応する要素をすべて表現することにより、たとえそれが 2 次元記録であっても、写真の中に込められた風景を 3 次元的に認識することができる。この上で、生理的要素まで加わる際、初めて人は実際と同じ 3 次元対象を見ていると感じるようになる。

両眼式を基盤にしている現在の 3D 映像は、両眼に映像を強制的に浸透させる方式で、ディスプレイが提供する奥行き要素 (depth cue) と眼の収束調節不整合による輻輳調節矛盾 (vergence-accomodation conflict, VAC) が発生し、長時間視聴時にめまいを感じる問題が存在する[2, 3]。しかし、ホログラムの場合、指定された観察範囲の中では観察位置の制約を受けず、また、眼鏡を着用せずに実際の自然の映像を見るような視聴が可能である。

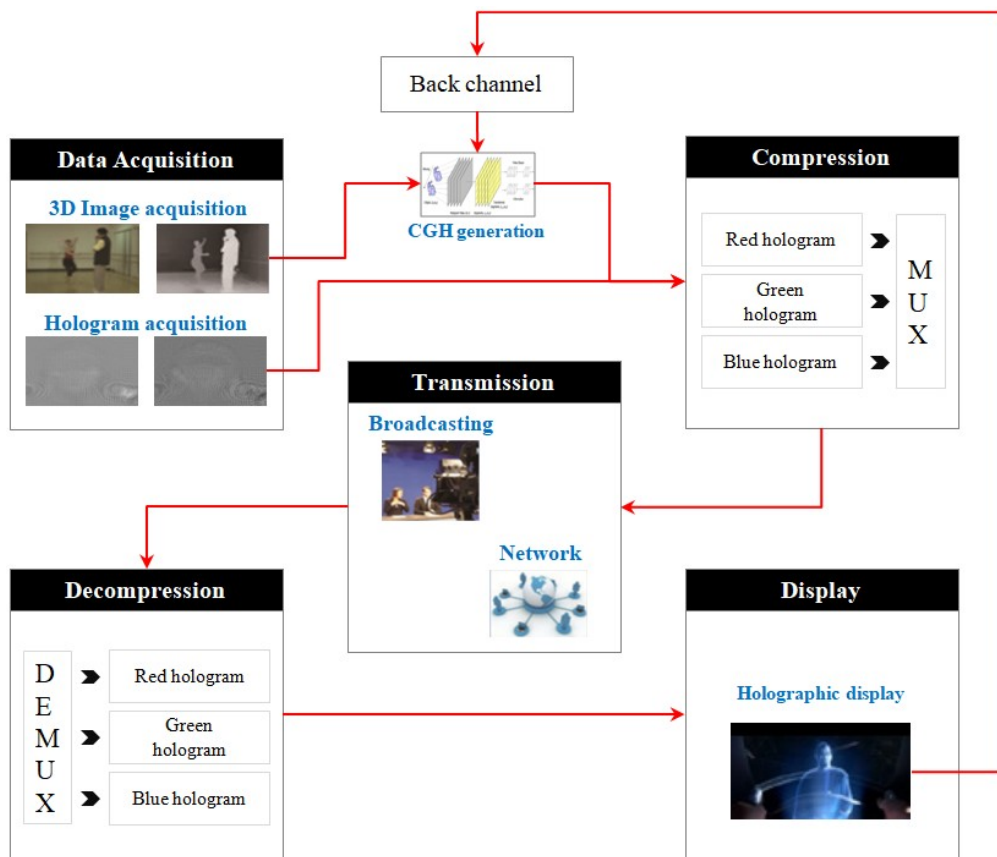


図1.1 ホログラムベースのデジタルホログラム放送サービスシステム

したがって、VAC 問題なしに完全な 3D を再現可能という利点により、究極の 3D 技術で評価され、現在の 3D 映像で発生する問題点を補完することができる[4]。

このようなホログラムの応用分野に関連して、ISO/IEC JTC1/SC29/WG11(MPEG)では、リモートビデオ会議 (telepresence)、スポーツ、地理情報システム (geometric information systems, GIS)、文化遺産、3D ナビゲーションなどへの応用範囲が定義されている。一方、Hongzhi らは、リモートビデオ会議、医療、教育、エンターテインメント (映画、スポーツ、ゲーム) などにも応用分野として挙げている[5]。このように、3D 立体映像技術であるホログラムの最終的な目標は、多様なユーザー端末環境においても、リアルタイムかつ没入感のある 3 次元映像を提供可能なホログラムベースの放送サービスの実現にある。図 1.1 に、ホログラムベースのデジタルホログラム放送サービスシステムを示した[6]。

システムの流れにおいて、データの取得は、ホログラムを光学的干渉によって取得または computer-generated hologram(CGH) 方式で生成することが可能である。生成された

ホログラムは、圧縮アルゴリズムを適用して符号化の過程を経て送信され、受信側では圧縮を解いてホログラフィックディスプレイによって再生される。このシステムで解決すべき大きな課題は、ユーザーの環境に合わせたホログラム表示と、ホログラムデータの圧縮である。すなわち、ホログラムはディスプレイに依存するデータであり、ホログラム生成の際に、使用されるディスプレイの光源の波長とピクセルピッチに関する情報が必要となる。例えば、A タイプのディスプレイに適合するように生成されたホログラムの場合、B タイプのディスプレイでは異なる形態の映像が再生される可能性がある。したがって、このような問題を解決するためには、ホログラム生成段階において back channel を設け、ユーザーのディスプレイに関する情報を取得し、それに応じてホログラム映像を表示できるようにしなければならない。また、ユーザーの没入感を確保するためには、伝送に関わる遅延時間は 20ms 以下である必要があり、この 20ms 以内に圧縮データのデコードおよび表示が完了しなければならない。

図 1.1 に示したホログラムベースの放送システムと類似した 3 次元映像ベースのデジタルホログラフィックビデオシステムが存在する。このシステムでは、ホログラムが受信側で生成されるため、ユーザーのディスプレイ環境に制限がない。これにより、既存の放送サービスシステムをそのまま利用でき、2D テレビ映像、3 次元映像、ホログラムに関する放送サービスが可能となる。このとき、ホログラムに関しては、受信側に物体の 3 次元奥行き情報および表面情報 (texture data) のみを送信し、受信側でこの情報に基づいてホログラムを生成する。そのため、ホログラム生成のためユーザーが保有するデバイスの性能に依存するという欠点がある。これに関連して、Artem らは、5G 通信網におけるリアルタイムホログラムの伝送および生成の可能性を検証するため、奥行きおよび表面情報のみを圧縮して送信し、受信側で Fresnel 変換を適用してホログラムを生成する手法を提案した[7]。しかし、ホログラム生成における膨大な計算量を考慮すると、計算速度の向上のためには GPU による並列処理が必要であることを指摘した。

## 1.2 研究目的

ホログラムを記録する方式は、可干渉性の 2 つの光の干渉により干渉縞を得るアナログ方式と干渉縞の生成、獲得をデジタル処理過程によって生成するデジタル方式に分けることができる。デジタル方式では、任意の形状の物体に対して点光源を配置し、光の伝搬と干渉を数学的にモデル化した computer-generated hologram (CGH) 法が存在する。このとき、CGH を用いて生成したホログラムを観察するためには、spatial light modulator (SLM) というデバイスが必要である。SLM のスリットに入射した参照光が回

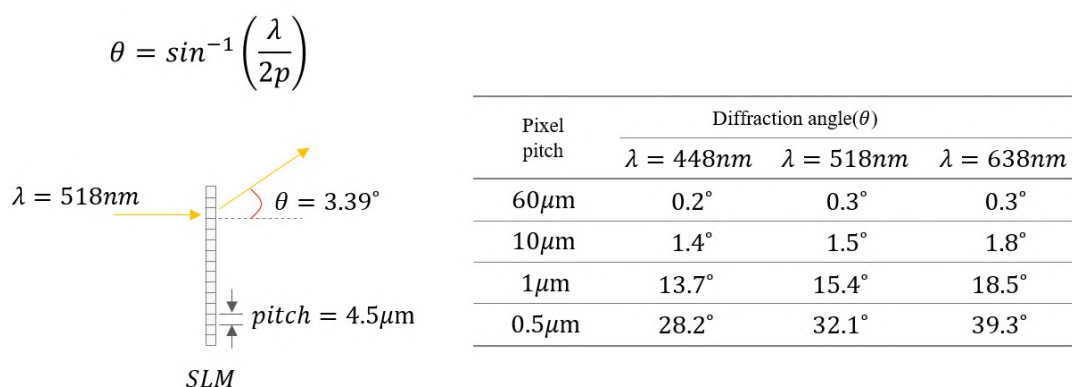


図1.2 Diffraction angle on SLM based on pixel pitch

折され、相互交差しながら物体に対する再生像を形成し、このとき、再生上の視域角 (再生像をすべて観察できる角度) はピクセルピッチに依存する．すなわち、ピクセルピッチが広くなると、光の回折角度が小さくなり観察者の視野角に制限が生じ、このような特性で、視野角を広げるためには  $1\mu m$  以下の超高解像度 SLM 開発が必要である．図 1.2 にピクセルピッチと回折角の関係を示した．さらに、図 1.3 には回折角と視域角との関係を示している．青色が視域の範囲であり、再生像全体を観察することができる．

また、解像度の観点からも  $1\mu m$  以下の SLM 開発が必要である．光学ホログラフィでは、感光板の分解能は約 5000 lp(line pair)/mm 程度となる．これを空間周波数で表現すると、 $0.1\mu m$  となる．SLM での空間周波数はピクセルピッチとなるので、ピクセルピッチを  $5\mu m$  に定めたとき、分解能は 100 lp/mm となる．したがって、lp/mm が高くなるほ

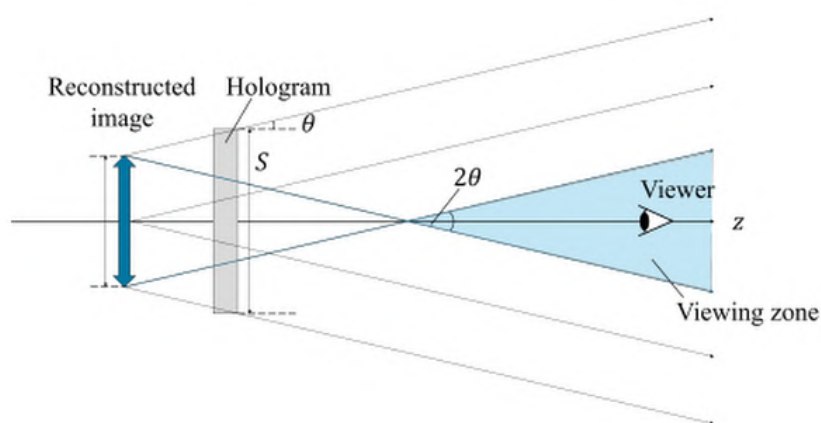


図1.3 Viewing zone of holograms

ど、解像度が高くなるので、光学ホログラフィと同じ程度の解像度を得るためには、 $1\mu\text{m}$  以下の超高解像度 SLM が必要である。

しかし、小さなピクセルピッチを維持しながら、一般的な携帯電話サイズで SLM を製作すると、再生のためのホログラムデータの量は非常に膨大になる。例えば、SLM を 4inch の 16:9 モバイルディスプレイサイズと設定し、ピクセルピッチを  $1\mu\text{m}$  と仮定したとき、対角線の長さで  $4 \times 25.4(\text{mm}) \times 1,000 = 101,600\mu\text{m}$  となり、16:9 なので、横幅は約  $88,547\mu\text{m}$ 、縦幅は約  $49,807\mu\text{m}$  になる。このとき、ピクセル間隔を  $1\mu\text{m}$  と仮定したので、総ピクセル数は  $88,547 \times 49,807 = 4,408,572,329\text{pixel}$  となり、3 チャンネルなので、 $4,408,572,329 \times 24(\text{bits}) = 105,805,735,896\text{bits} \approx 13.2\text{GB}$  になる。すなわち、1 枚のモバイルディスプレイサイズのホログラムを作ったとき、約 13GB となる。また、A4 サイズのディスプレイに表示する 1 枚のホログラムのデータサイズが約 20GB であり、25Hz refresh rate を適用したとき、伝送容量は  $500\text{Gbps}(5 \times 10^{11}\text{B/s})$  となる[7]。

現在 5G 通信網で対応可能な伝送容量は 1Gbps であり、高解像度ホログラムの伝送には著しく不足している。6G beyond では 1Tbps の伝送が可能であるが、6G の適用時点を約 10 年後程度と予測している状況である[5]。そして、各家庭で視聴する 80inch 級のディスプレイを考慮したとき、ホログラムのデータはさらに膨大になるので、これに対応した転送容量も大きくななければならない状況であるため、データの効率的な転送と保存のためにホログラムの圧縮は必須である。

### 1.3 論文構成

本論文は全 6 章で構成されており、第 1 章では研究の背景と目的について述べる。以降、第 2 章ではホログラムの原理につき、第 3 章ではホログラムデータの特性について説明する。

第 4 章では、干渉縞の方向性に基づく無損失圧縮アルゴリズムとその実験結果について述べる。

第 5 章では、フォビエイテッドレンダリングにおける周辺領域の解像度調整手法について説明し、提案した解像度調整方法で生成した干渉縞に無損失圧縮アルゴリズムを適用した実験および実験結果について説明する。

最後に第 6 章において、本研究の結論を述べる。

## 第 2 章

# ホログラムの原理

### 2.1 概要

ホログラムの歴史的背景は、1948 年、ハンガリーの物理学者 Dennis Gabor が顕微鏡の分解能向上を目的に発表した「A new microscopic principle」という論文から初めて紹介された[8]。この論文では顕微鏡での回折限界による解像度低下問題を解決するため、光の振幅と位相情報を記録する概念を提案した。振幅と位相情報を一緒に記録することで、物体の波面を正確に再現することができ、この概念がホログラムの原理になる。ホログラムは記録と再生の 2 つの過程で構成される。1 つ目は、物体光の振幅と位相を記録して干渉縞を生成する段階、2 つ目は、この干渉縞に参照光を照射することによって記録した物体光を立体的に再生させる段階である。本節では、こういったホログラムの生成および再生原理につき、参照光の定義、物体光の定義、物体光と参照光の干渉、そして Fresnel 回折積分まで記述し[9]、最後にホログラムを数値的に計算して生成する computer-generated hologram(CGH) について説明する。

### 2.2 参照光

参照光は平面波として定義される。平面波は調和振動子から式を誘導することができる。調和振動子は平衡点 (equilibrium point) を基準に物体の変位に比例した復元力が作用することにより、一定な周期運動をする系を意味する。代表的な例としてスプリング運動が存在し、図 2.1 に示した。平衡点から始まるスプリング運動は時間  $t$  に対して一定の周期で変位を繰り返すので、物体の運動を次のように  $\sin$  関数で表すことができる。

$$F(x) = \sin(x) \tag{2.1}$$

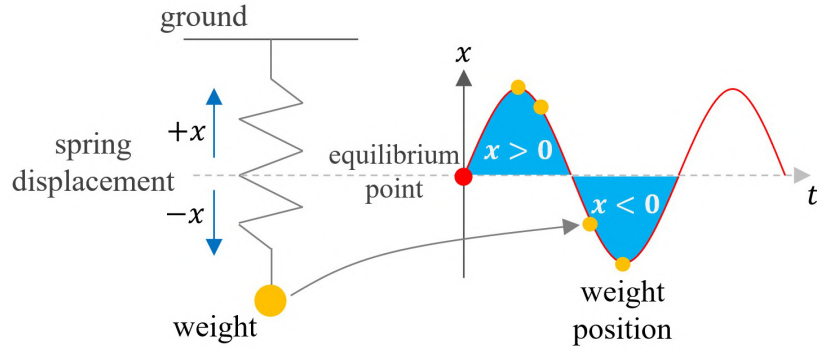


図2.1 Harmonic oscillator

ここで、平衡点  $x_0 = 0$  と定め、スプリングは非常に微細に振動すると仮定したとき、式 (2.1) を次の Taylor 展開で表せる。

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{F^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\
 &= F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + \frac{F''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \cdots, \text{ where } k \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

微細な振動の仮定により、 $x - x_0 \ll 1$  になるため、次のように書くことができる。

$$(x - x_0)^2 = (x - x_0)^3 = \cdots \approx 0 \quad (2.3)$$

したがって、Taylor 展開式を次のように近似できる。

$$F(x) \approx F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) \quad (2.4)$$

$F(x_0) = \sin(x_0 = 0) = 0$  になるので、式 (2.4) を次のように書くことができる。

$$F(x) = F'(x_0) x \quad (2.5)$$

スプリング運動から線形一次式が近似された。一次微分係数  $F'(x_0)$  をスプリングが基準点に戻る復元力で定義し、 $F'(x_0) = -k$  とおけば、次のように式を書くことができ、この式を Hooke の法則と呼ぶ。

$$F(x) = -kx \quad (2.6)$$

スプリングは一定の変位で質量  $m$  の物体が等加速度運動をする。したがって、物体を



Newton の第 2 法則を適用して次のように書くことができる.

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\vec{a}(\vec{r}) \quad , \text{ where } \vec{a} = \langle a_x, a_y, a_z \rangle, \vec{r} = \langle x, y, z \rangle \quad (2.7)$$

$$F_x = ma_x \quad (2.8)$$

$$F_y = ma_y \quad (2.9)$$

$$F_z = ma_z \quad (2.10)$$

$a_x$ 、 $a_y$ 、 $a_z$  は各方向での加速度である. Newton の第 2 法則と Hooke の法則は作用する力が同じなので、両方の式に等式が成立する. また、 $x$  軸方向に対してのみ力が作用しているため、 $y$ 、 $z$  に対する項は  $F_y = 0$ 、 $F_z = 0$  になるので、式 (2.7) を次のように書くことができる.

$$F_x = ma_x = -kx \quad (2.11)$$

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) + kx(t) = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) + \frac{k}{m} x(t) = 0 \quad (2.13)$$

すなわち、 $a_x$  を時間に対する 2 次微分形態で表現すると、式 (2.13) のように 2 次常微分方程式で表現できる. 2 次常微分方程式は、2 つの基底、 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$  を持ち、したがって 2 つの解を持つ. 2 つの解の線形結合である  $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$  が一般解となる. 微分方程式の一般解は知られており、次のように書くことができる.

$$x(t) = C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t} \quad , \text{ where } \omega := \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.14)$$

ここで、 $\omega$  は振動数を表す. 一般解の  $exp$  関数を Euler 公式によって、三角関数の形で表現すると、

$$x(t) = C_1 [\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)] + C_2 [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] \quad (2.15)$$

$$= C_1 \cos(\omega t) - i C_1 \sin(\omega t) + C_2 \cos(\omega t) + i C_2 \sin(\omega t) \quad (2.16)$$

$$= (C_1 + C_2) \cos(\omega t) + i(C_2 - C_1) \sin(\omega t) \quad (2.17)$$

$$, \text{ where } (C_1 + C_2) = C_3, \quad i(C_2 - C_1) = C_4$$

$$x(t) = C_3 \cos(\omega t) + C_4 \sin(\omega t) \quad (2.18)$$

式 (2.18) につき、次の三角関数性質を用いると、

$$a \sin(\theta) + b \cos(\theta) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \delta) \quad (2.19)$$

$$x(t) = \sqrt{C_3^2 + C_4^2} \sin(\theta + \delta) \quad (2.20)$$

式 (2.20) で、振幅  $A := \sqrt{C_3^2 + C_4^2}$ 、角速度  $\theta := \omega t$ 、 $\delta$  は初期位相として定義すると、式を次のように書くことができる。

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta) \quad (2.21)$$

式 (2.21) は、振動子の変位  $x$  が時間  $t$  に対する関数である  $x(t)$  として現れることを意味する。このとき、式 (2.21) の調和振動子から調和波を導くため、一次元の振動子を二次元空間へ拡張し、振動子が連続的に並んだ連続体であると仮定する。この仮定から波動方程式を導くことができ、したがって、各振動子の変位  $x$  と時間  $t$  の関数  $f(x, t)$  として表すことができる。ここで、誘導過程で必要な新しい物理量である波数  $k$  を導入して振動数  $\omega$  を次のように定義できる。

$$\omega = kv \quad , \text{ where } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.22)$$

$v$  は波動の速度、 $\lambda$  は波長である。これらを用いて調和波を導くと、まず、原点  $x = 0$  に位置する調和振動子の変位は、次のように表すことができる。

$$u(0, t) = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (2.23)$$

ここで、波動の伝播とは、ある地点で生成された振動の形が有限の速度で移動し、別の地点において時間遅れを伴って同一の形として観測される現象である。したがって、調和振動子が原点  $x = 0$  で生成した振動が速度  $v$  で空間中を伝播するとき、時間  $x/v$  が経過した後の位置  $x$  における時刻  $t$  の変位は、原点における時刻  $t - x/v$  の変位と一致する。すなわち、時刻  $t$  において  $t - x/v$  を考えれば、それは原点における時刻  $t$  の変位に対応するため、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u\left(0, t - \frac{x}{v}\right) \\ &= A \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \alpha\right] \\ &= A \sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{v} + \alpha\right) \\ &= A \sin(\omega t - kx + \alpha) \\ &= A \sin[-(kx - (\omega t - \alpha))] \end{aligned} \quad (2.24)$$

ここで、三角関数の次の性質を用いると、

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta = \sin(\theta + \pi) \quad (2.25)$$

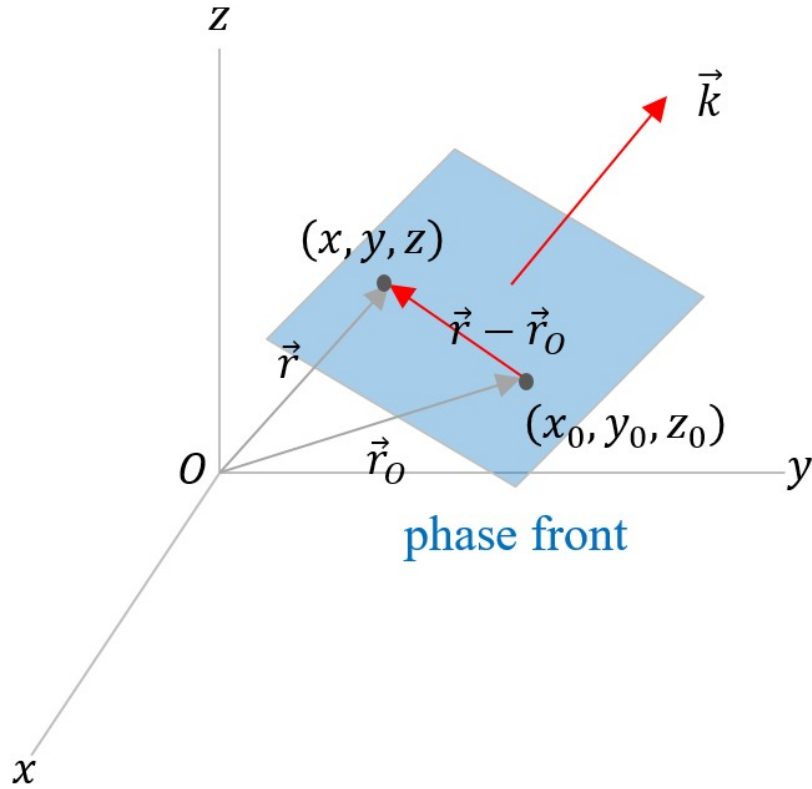


図2.2 位相が同じ点を集めた面

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow A \sin[-(kx - (\omega t - \alpha))] &= A \sin(kx - \omega t - \alpha + \pi) \\
 &= A \sin(kx - \omega t + \pi - \alpha) \\
 &= A \sin(kx - \omega t + \alpha'), \quad \text{where } \alpha' = \pi - \alpha \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

したがって、関数表記を  $\psi$  に置き換え、さらに  $\alpha' \rightarrow \alpha$  と書き換えても式の内容には影響しないため、次のように調和波を導くことができる。

$$\psi(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \alpha) \quad (2.27)$$

式 (2.27) は  $x$  軸の位相を表す波動であり、この式を 3 次元空間に拡張するため、図 2.2 のように、ある時間  $t$  で  $x, y, z$  それぞれに対して波動の位相が同じ点を集めて平面構成が可能である。この面を位相面 (phase front) と呼ぶ。位相面が空間で進行するときの波動を平面波と定義する。平面波の進行方向は波数ベクトル  $\vec{k}$  となり、波数ベクトルと位相面は垂直関係なので、この関係を利用して平面の方程式を定義することができる。平面の方

程式は、位相面で任意の点  $(x, y, z)$  と生成点  $(x_0, y_0, z_0)$  を定めて二点を連結したベクトルと  $k$  との垂直によって求めることができ、次のように書くことができる。

$$\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_O) = 0 \quad (2.28)$$

$$k_x(x - x_0) + k_y(y - y_0) + k_z(z - z_0) = 0 \quad (2.29)$$

$$k_x x + k_y y + k_z z = d, \text{ where } d = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0 \quad (2.30)$$

したがって、式 (2.30) から、次のように書くことができる。

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot \vec{r}_O = d = \text{constant} \quad (2.31)$$

すなわち、ある時間  $t$  で同じ位相の点が  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  で表現されるので、式 (2.31) を式 (2.27) の  $\sin$  関数の位相に代入すると、次のようになる。

$$\psi(\vec{r}) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (2.32)$$

三角関数を複素指数関数で表すと、 $\psi(\vec{r})$  を次のように書くことができる。

$$\psi(\vec{r}) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (2.33)$$

平面波の進行は波長  $\lambda$  の空間周期を持ち、 $\lambda$  周期で進行した平面波と進行前の平面波は同一であるため、次の関係式が成り立つ。

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \vec{k} \cdot (\vec{r} \pm \vec{v}t) \quad (2.34)$$

$\vec{v}$  は平面波の速度である。式 (2.34) を式 (2.33) の  $\exp$  関数に代入して展開すると、

$$\psi(\vec{r}) = A e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} \pm \vec{v}t)} = A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} \pm i\vec{k} \cdot \vec{v}t} \quad (2.35)$$

$$\omega = kv = \vec{k} \cdot \vec{v} \quad (2.36)$$

$$\psi(\vec{r}) = A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} \pm i\omega t} = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)} \quad (2.37)$$

式 (2.37) に初期位相  $\delta$  を付与して次のように展開することができる。

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t + \delta)} \quad (2.38)$$

$$= A e^{i\delta} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)} \quad (2.39)$$

$$= [A \cos(\delta) + iA \sin(\delta)] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)} \quad (2.40)$$

$$= \tilde{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)} \quad (2.41)$$

したがって、平面波を次のように定義することができる。

$$\begin{aligned} \therefore \tilde{\psi}(\vec{r}, t) &= \tilde{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)} \\ , \text{ where } \tilde{A} &= A e^{i\delta} = A \cos(\delta) + iA \sin(\delta) \end{aligned} \quad (2.42)$$

定義された平面波の伝搬を図 2.3 に示した。

## 2.3 物体光

### 2.3.1 Helmholtz 方程式

物体光は球面波であり、球面波を定義するためには、3次元波動方程式で時間依存性を除去し、空間で波動の位相分布のみを考慮した Helmholtz 方程式の解から得ることができる。Helmholtz 方程式は3次元波動方程式から誘導され、3次元波動方程式は次のように

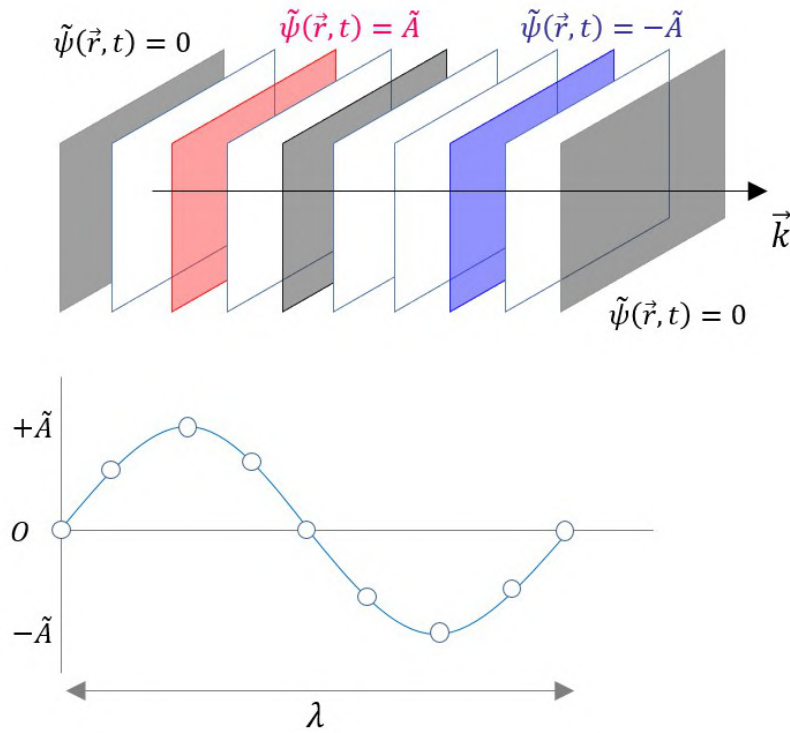


図2.3 平面波の伝搬

定義される．

$$\nabla^2 \tilde{\psi}(\vec{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.43)$$

$$, \text{ where } \nabla^2 \tilde{\psi}(\vec{r}, t) = \frac{\partial^2 \tilde{\psi}(\vec{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}(\vec{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}(\vec{r}, t)}{\partial z^2}$$

$v$  は、真空中における波動の伝搬速度である．式 (2.43) の偏微分方程式の解の形を変数分離法で次のように表現できる．

$$\psi(\vec{r}, t) = U(\vec{r})T(t) \quad (2.44)$$

式 (2.44) を式 (2.43) に代入して整理すると次の式を得られる．

$$\nabla^2 U(\vec{r})T(t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 (U(\vec{r})T(t))}{\partial t^2} \quad (2.45)$$

$$\frac{1}{U(\vec{r})} \nabla^2 U(\vec{r}) = \frac{1}{v^2} \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \quad (2.46)$$

ここで、2.2 節で定義した平面波式 (2.42) は波動方程式の解を満たすので、平面波を変数分離により次のように定義できる．

$$\tilde{\psi}(\vec{r}, t) = \tilde{A}e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)} = \tilde{A}e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i(\pm \omega t)} \quad (2.47)$$

$$\tilde{\psi}(\vec{r}, t) = U(\vec{r})e^{i(\pm \omega t)} \quad (2.48)$$

$$, \text{ where } U(\vec{r}) = \tilde{u}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (\tilde{u}_0 = \tilde{A})$$

式 (2.48) を式 (2.46) の左項の Laplace 演算子に代入して次のように解ける．

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.49)$$

$$\frac{1}{U(\vec{r})} \nabla^2 \psi(\vec{r}) = \frac{1}{U(\vec{r})} \left( \frac{\partial^2 U(\vec{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(\vec{r})}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(\vec{r})}{\partial z^2} \right) \quad (2.50)$$

$$= \frac{1}{U(\vec{r})} \left[ (ik_x)^2 u_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + (ik_y)^2 u_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + (ik_z)^2 u_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \right] \quad (2.51)$$

$$= \frac{1}{U(\vec{r})} u_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} [-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2] \quad (2.52)$$

$$= -(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (2.53)$$

ここで、波数ベクトル  $\vec{k}$  は、次のように書くことができる。

$$|\vec{k}| = \vec{k} \cdot \vec{k} = k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (2.54)$$

式 (2.54) を式 (2.53) に代入して展開すると、

$$\frac{1}{U(\vec{r})} \nabla^2 U(\vec{r}) = -k^2 \quad (2.55)$$

$$\nabla^2 U(\vec{r}) + k^2 U(\vec{r}) = 0 \quad (2.56)$$

$$\therefore [\nabla^2 + k^2]U(\vec{r}) = 0 \quad , \text{ where } k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \quad (2.57)$$

時間項が 0 になり、時間に独立な 2 次偏微分方程式が定義された。この式を Helmholtz 方程式と呼び、この方程式の解から空間へ伝搬する波動の位相分布を説明することが可能である。

### 2.3.2 Helmholtz 方程式の解

Helmholtz 方程式は homogeneous と inhomogeneous の 2 つが存在する。Homogeneous の場合、空間に点光源 (source) が存在し、点光源から波動が伝搬することにより位相が分布する。このとき、空間に点光源が存在しない領域に対する位相分布を説明する式が homogeneous Helmholtz 方程式である。図 2.5 に点光源を半径  $\varepsilon$  の球で示し、 $\varepsilon$  を除く領域で homogeneous Helmholtz 方程式を解いて波動の位相分布を求めることが目的である。 $\varepsilon$  が持つ意味は、点光源は実際に存在しない仮想の source である。そして、 $\vec{r} - \vec{r}' \rightarrow 0$  のとき、この点は発散し、空間で特異点 (singularity point) になる。したがって、仮想の点を表現することとともに特異点領域 ( $\vec{r} - \vec{r}' < \varepsilon$ ) を定めるため、半径  $\varepsilon$  の球を設定した。Inhomogeneous の場合、source を含む空間での位相分布を説明する方程式である。この節では、homogeneous Helmholtz 方程式を解き、点光源が作る波動の位相分布を求める。まず、 $\varepsilon$  の球を定めたので、球表面は方位角対称性 (azimuthal symmetry) を満たすため、球表面で波動は均一に伝搬される。この性質から、式 (2.57) の Laplace 演算子を球面座標系で表現すると、次のように書くことができる。

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (2.58)$$

方位角対称性により、 $\theta$ 、 $\phi$  項は 0 であり、距離  $r$  に対する項のみ残り、式 (2.58) は次のようになる。

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) \quad (2.59)$$

式 (2.59) を式 (2.57) に代入して展開すると次のように書くことができる．

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) + k^2 \right] U(\vec{r}) = 0 \quad (2.60)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} \right) U(\vec{r}) + k^2 U(\vec{r}) = 0 \quad (2.61)$$

$$\frac{1}{r^2} \left[ 2r \frac{d}{dr} + r^2 \frac{d^2}{dr^2} \right] U(\vec{r}) + k^2 U(\vec{r}) = 0 \quad (2.62)$$

$$\frac{d^2 U(\vec{r})}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dU(\vec{r})}{dr} + k^2 U(\vec{r}) = 0 \quad (2.63)$$

式 (2.63) の微分方程式の解は求めているため、関数  $U(\vec{r})$  の具体的な形状は不明である．しかし、点光源は発散場 (divergence field) であるため、次のように距離に応じて減少する関数として定義することができる．

$$U(\vec{r}) := \frac{1}{r} R(\vec{r}) \quad , \text{ where } r = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (2.64)$$

式 (2.64) を式 (2.65) に代入して展開すると、

$$\frac{d^2}{dr^2} \left[ \frac{R(\vec{r})}{r} \right] + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \left[ \frac{R(\vec{r})}{r} \right] + k^2 \left[ \frac{R(\vec{r})}{r} \right] = 0 \quad (2.65)$$

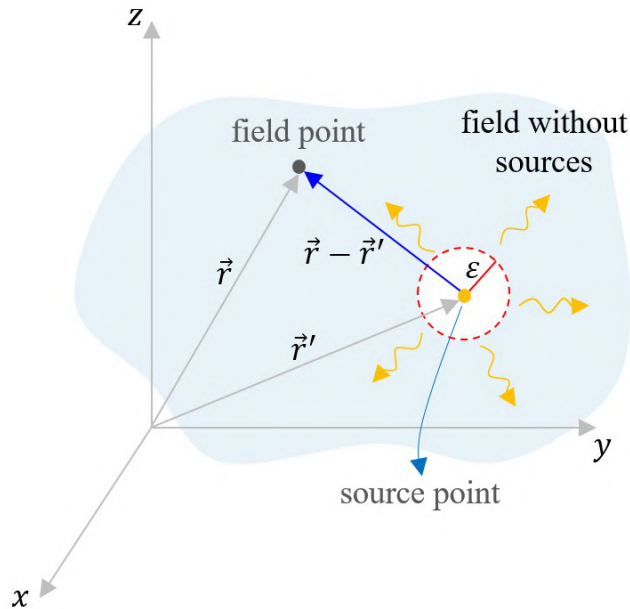


図2.4 空間に source が存在しない領域での位相分布



$$\frac{d^2}{dr^2} \left[ \frac{1}{r} R(\vec{r}) \right] = \frac{1}{r} \frac{d^2 R(\vec{r})}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \frac{dR(\vec{r})}{dr} + \frac{2R(\vec{r})}{r^3} \quad (2.66)$$

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} R(\vec{r}) \right] = \frac{1}{r} \frac{dR(\vec{r})}{dr} - \frac{1}{r^2} R(\vec{r}) \quad (2.67)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 R(\vec{r})}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \frac{dR(\vec{r})}{dr} + \frac{2R(\vec{r})}{r^3} + \frac{2}{r} \left[ \frac{1}{r} \frac{dR(\vec{r})}{dr} - \frac{1}{r^2} R(\vec{r}) \right] + k^2 \left[ \frac{R(\vec{r})}{r} \right] = 0 \quad (2.68)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d^2 R(\vec{r})}{dr^2} + k^2 \left[ \frac{R(\vec{r})}{r} \right] = 0 \quad (2.69)$$

$$\frac{d^2 R(\vec{r})}{dr^2} + k^2 R(\vec{r}) = 0 \quad (2.70)$$

式 (2.70) は 2 次常微分方程式であり、式 (2.13) と形が同じであるため、一般解は次のように書くことができる。

$$R(\vec{r}) = Ae^{ikr} + Be^{-ikr} \quad , \text{ where } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.71)$$

式 (2.71) を式 (2.65) に代入することで、関数  $U(\vec{r})$  を次のように求めることができる。

$$U(\vec{r}) := \frac{1}{r} R(\vec{r}) = \frac{1}{r} [Ae^{ikr} + Be^{-ikr}] = \frac{A}{r} e^{ikr} + \frac{B}{r} e^{-ikr} \quad (2.72)$$

ここで、解  $U(\vec{r})$  に対し、Sommerfeld irradiation condition を適用して物理的に満足する解を求めなければならない。式 (2.72) は、2 つの  $exp$  関数の線形結合の形で波動が定義された。このとき、波動は、点光源から放出されて遠いところに伝搬されなければならない、逆転波が成立しないという性質を満たさなければならない。このような性質を保障するための条件が Sommerfeld irradiation condition であり、次のように定義される。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial r} - ikU(\vec{r}) \right] = 0 \quad (2.73)$$

式 (2.73) に適用するため、式 (2.72) を次のように書く。

$$U(\vec{r}) = U_+(\vec{r}) + U_-(\vec{r}) = \frac{A}{r} e^{ikr} + \frac{B}{r} e^{-ikr} \quad (2.74)$$

まず、 $U_+(\vec{r})$  について適用すると、

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{\partial U_+(\vec{r})}{\partial r} - ikU_+(\vec{r}) \right] = \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{A}{r} e^{ikr} \right) - ik \frac{A}{r} e^{ikr} \right] \quad (2.75)$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ -\frac{A}{r^2} e^{ikr} + i \frac{A}{r} k e^{ikr} - ik \frac{A}{r} e^{ikr} \right] \quad (2.76)$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ -\frac{A}{r} e^{ikr} \right] \quad (2.77)$$

$$= - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{A \cos(kr) + Ai \sin(kr)}{r} = 0 \quad (2.78)$$

$U_+(\vec{r})$  は Sommerfeld 条件を満たすので、進行する波動であることがわかる。  $U_-(\vec{r})$  について適用すると、

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{\partial U_-(\vec{r})}{\partial r} - ikU_-(\vec{r}) \right] = \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{B}{r} e^{-ikr} \right) - ik \frac{B}{r} e^{-ikr} \right] \quad (2.79)$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ -\frac{B}{r^2} e^{-ikr} - i \frac{B}{r} k e^{-ikr} - ik \frac{B}{r} e^{-ikr} \right] \quad (2.80)$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} r \left[ -\frac{A}{r} e^{-ikr} - 2ik \frac{B}{r} e^{-ikr} \right] \quad (2.81)$$

$$= \lim_{r \rightarrow \infty} \left[ -\frac{A}{e^{ikr}} - i \frac{2kB}{e^{ikr}} \right] \neq 0 \quad (2.82)$$

すなわち、 $r \rightarrow \infty$  により、分母は振動する形であり、式全体が一点に収束せず、継続的に振動するため、 $U_-(\vec{r})$  項は逆に伝搬する波動を意味する。したがって、 $U_-(\vec{r})$  は、Helmholtz 方程式の解にはならない。まとめると、 $U(\vec{r})$  を次のように書くことができる。

$$U(\vec{r}) = U_+(\vec{r}) = \frac{A}{r} e^{ikr} \quad (2.83)$$

式 (2.83) に初期位相  $\delta$  を付与し、最終的に次のように式を書くことができる。

$$\therefore \tilde{U}(\vec{r}) = \frac{A}{r} e^{(ikr+\delta)} = \frac{1}{r} A e^{i\delta} e^{ikr} = \frac{1}{r} \tilde{A} e^{ikr} \quad (2.84)$$

ここで、 $\frac{\tilde{A}}{r}$  は光源強度 (source intensity) である。式 (2.84) は球面座標系から誘導されたので、波動は球面波に伝搬する。そして、この解は  $\frac{1}{r}$  に比例するため、伝搬距離が遠くなるほど波動は弱くなる。

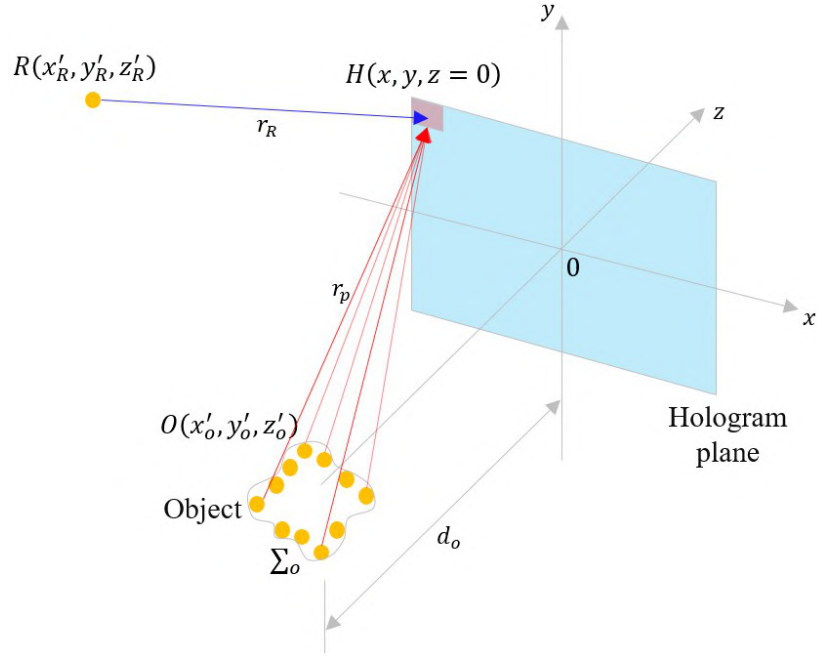


図2.5 物体光と参照光の干渉

## 2.4 物体光と参照光の干渉

干渉縞は参照光と任意の物体から反射された物体光を重ね合わせて得ることができる。2つの波動の干渉を図2.5に示した。任意形状の物体に対する点光源 $O$ が存在し、それぞれの点光源は relative phase と仮定する。そして、参照光の点光源 $R$ が存在する。このとき、Cartesian 座標系で干渉縞を記録するためのホログラム面の位置を $z = 0$ に置く。干渉させるときの2つの光の角度は、任意に設定できる。干渉縞は、superposition principle により $O$ と $R$ を干渉させたエネルギー密度を計算して求めることができ、次のように式を書ける。

$$h(\vec{r}) = |O(\vec{r}'_o) + R(\vec{r}'_R)|^2 \quad (2.85)$$

$$= [O(\vec{r}'_o) + R(\vec{r}'_R)] [O(\vec{r}'_o)^* + R(\vec{r}'_R)^*] \quad (2.86)$$

$$= O(\vec{r}'_o)O(\vec{r}'_o)^* + \tilde{R}(\vec{r}'_R)\tilde{R}(\vec{r}'_R)^* + O(\vec{r}'_o)R(\vec{r}'_R)^* + R(\vec{r}'_R)O(\vec{r}'_o)^* \quad (2.87)$$

$$= |O(\vec{r}'_o)|^2 + |R(\vec{r}'_R)|^2 + O(\vec{r}'_o)R(\vec{r}'_R)^* + R(\vec{r}'_R)O(\vec{r}'_o)^* \quad (2.88)$$

ここで、 $h$  はホログラム面上で位置 $\vec{r}$ によるエネルギー密度関数を意味し、 $*$  は複素共役 (complex conjugate) を意味する。式(2.85)で、参照光 $O$ と物体光 $R$ の時間独立的な

波動関数を、2.2 節と 2.3 節から次のように定義できる．

$$R(\vec{r}_R') = R_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_R)} \quad (2.89)$$

$$O(\vec{r}_o') = \frac{A}{r_p} e^{i(kr_p + \delta_p)} \quad (2.90)$$

ここで、物体は連続的な表面であり、表面上に存在する点光源も連続的に分布している．それらの点光源のなかから一個の点光源  $O$  と参照光  $R$  を式 (2.88) に代入して一点に対する干渉を求めることができる．まず、 $|R(\vec{r}_R')|^2$  に対しては、以下のとおり展開できる．

$$|R(\vec{r}_R')|^2 = |R_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_R)}|^2 = |R_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\delta_R}|^2 \quad (2.91)$$

$$= \left[ R_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\delta_R} \right] \left[ R_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\delta_R} \right]^* \quad (2.92)$$

$$= R_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\delta_R} R_0^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\delta_R} \quad (2.93)$$

$$= R_0 R_0^* e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{i\delta_R} e^{-i\delta_R} = |R_0|^2 \quad (2.94)$$

$|O(\vec{r}_o')|^2$  に対する展開は以下のとおりである．

$$|O(\vec{r}_o')|^2 = \left| \frac{A}{r_p} e^{i(kr_p + \delta_p)} \right|^2 = \left| \frac{A}{r_p} e^{ikr_p} e^{i\delta_p} \right|^2 \quad (2.95)$$

$$= \left[ \frac{A}{r_p} e^{ikr_p} e^{i\delta_p} \right] \left[ \frac{A}{r_p} e^{ikr_p} e^{i\delta_p} \right]^* \quad (2.96)$$

$$= \frac{A}{r_p} e^{ikr_p} e^{i\delta_p} \left( \frac{A}{r_p} \right)^* e^{-ikr_p} e^{-i\delta_p} \quad (2.97)$$

$$= \frac{A}{r_p} \left( \frac{A}{r_p} \right)^* e^{ikr_p} e^{-ikr_p} e^{i\delta_p} e^{-i\delta_p} = \frac{|A|^2}{r_p^2} \quad (2.98)$$

$O(\vec{r}_o') \tilde{R}(\vec{r}_R')^* + \tilde{R}(\vec{r}_R') O(\vec{r}_o')^*$  に対する展開は以下のとおりである．

$$O(\vec{r}_o') \tilde{R}(\vec{r}_R')^* + \tilde{R}(\vec{r}_R') O(\vec{r}_o')^* \quad (2.99)$$

$$= \frac{A}{r_p} e^{i(kr_p + \delta_p)} R e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_R)} + R e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_R)} \frac{A}{r_p} e^{-i(kr_p + \delta_p)} \quad (2.100)$$

$$= \frac{AR_0}{r_p} e^{i(kr_p + \delta_p - \vec{k} \cdot \vec{r} - \delta_R)} + \frac{AR_0}{r_p} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_R - kr_p - \delta_p)} \quad (2.101)$$

$$= \frac{AR_0}{r_p} \left[ \cos(kr_p - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_p - \delta_R) + i \sin(kr_p - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_p - \delta_R) \right] \\ + \frac{AR_0}{r_p} \left[ \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - kr_p + \delta_R - \delta_p) + i \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - kr_p + \delta_R - \delta_p) \right] \quad (2.102)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{AR_0}{r_p} \left[ \cos(kr_p - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_p - \delta_R) + i \sin(kr_p - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_p - \delta_R) \right] \\
&\quad + \frac{AR_0}{r_p} \left[ \cos \left( -(kr_p - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_p - \delta_R) \right) + i \sin \left( -(kr_p - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_p - \delta_R) \right) \right]
\end{aligned} \tag{2.103}$$

$$= 2 \frac{AR_0}{r_p} \cos(kr_p - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_p - \delta_R) \tag{2.104}$$

式 (2.94)、(2.98)、(2.104) を式 (2.88) に代入してまとめると、次のような式が得られる。

$$h(\vec{r}) = \frac{|A|^2}{r_p^2} + |R_0|^2 + 2 \frac{AR_0}{r_p} \cos(kr_p - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta_p - \delta_R) \tag{2.105}$$

このとき、式 (2.105) の  $\cos$  の  $kr_p - \vec{k} \cdot \vec{r}$  項は、 $R(\vec{r}_{R'})$  の方向を表す  $\vec{k}$  が任意の角度で入射するので、球面座標系で入射角度を成分で表現すると、次のように計算できる。

$$kr_p - \vec{k} \cdot \vec{r} = kr_p - kx \sin \theta \cos \phi + ky \sin \theta \sin \phi + kz \cos \theta \tag{2.106}$$

$$= k(r_p - x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi) \quad (\because z = 0) \tag{2.107}$$

したがって、式 (2.107) を式 (2.105) に代入すると、最終的に次のようになる。

$$\begin{aligned}
h(\vec{r}) &= \frac{|A|^2}{r_p^2} + |R_0|^2 \\
&\quad + 2 \frac{AR_0}{r_p} \cos [k(r_p - x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi) + \delta_p - \delta_R]
\end{aligned} \tag{2.108}$$

式 (2.108) は一点の物体光に対する 2 つの波動の干渉を表す。ここで、 $\frac{|A|^2}{r_p^2}$  は、物体光の振幅 (amplitude)、 $|R_0|^2$  は、参照光の振幅を示す。二つの項はホログラムで背景の明るさを表し、この明るさにより再生される干渉縞に影響を与えるため、一般的に除去される。3 番目の  $\cos$  項を干渉項 (interference term) と呼ぶ。2 つの波動を重ね合わせると位相差が発生し、この位相差に対するエネルギー強度の変化が干渉縞として現れる。

## 2.5 Fresnel 回折積分

ホログラムの再生において干渉縞は回折格子の役割をする。すなわち、干渉縞に参照光を照射して格子により回折された光を空間上のある点で観察することがホログラムであり、このような再生を数学的に説明できる理論が Fresnel 回折積分である。Fresnel 回折積分は Kirchhoff 積分定理から誘導され、2.5.1 節で Kirchhoff 積分定理を説明する。

### 2.5.1 Kirchhoff 積分定理

Kirchhoff 積分定理は、Huygens 原理を数学的に証明した定理である。Huygens 原理は、自由空間に点光源  $S$  が存在し、 $S$  は 1 次波動の source になる。このとき、1 次波動の波面が形成されると、この波面は 2 次波動を起こす source になる。この関係を図 2.6 に示した。Kirchhoff 積分定理を展開するため、図 2.6 で点光源  $S$  から 1 次波の波面が点  $P$  に形成されたとき、 $P$  で 2 次波は球面波で伝搬すると仮定する。このとき、球面波を放出する点光源を半径  $\varepsilon$  で表し、この領域を特異点とする。したがって、 $\varepsilon \rightarrow 0$  になると、点  $P$  は発散することになる。ここで、 $\varepsilon$  球の境界面を  $\Sigma'$  と定め、 $P$  が放出する球面波の境界面を  $\Sigma$  とした。これらの条件から、発散定理 (divergence theorem) を適用して境界面  $\Sigma$  での波動分布を求めることができる。体積積分における積分関数は Green identity を用い、次のように積分式を表せる。

$$\int_{\Sigma} (U \nabla V - V \nabla U) \cdot d\mathbf{A} = \int_v (U \nabla^2 V - V \nabla^2 U) dv \quad (2.109)$$

発散定理は体積全体から流れ出る流量 (vector flux) と閉曲面を通じて流れ出る流量の量が等しいことを示す定理であり、このとき、 $v$  は  $\Sigma$  に対する体積を示す。積分関数  $U$  は 1 次波動の分布、 $V$  は 2 次波動の分布を表す関数である。 $\nabla$  は Laplace 演算子を表す。ここで、 $U$ 、 $V$  はスカラー関数であり、両方の関数は Helmholtz 方程式を満たす。Green

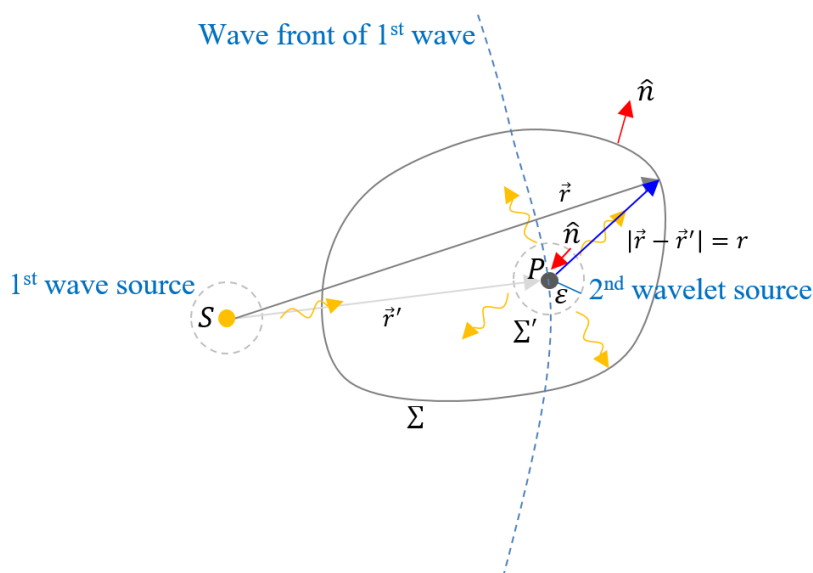


図2.6 1次波動の波面から2次波の生成および伝搬

identity を解くため、積分関数を次のように置く．

$$F = U\nabla V - V\nabla U \quad (2.110)$$

$F$  は、 $\nabla U$ 、 $\nabla V$  によりベクトル関数になる．この  $F$  に  $\nabla$  による発散を適用して次のように解くことができる．

$$\nabla \cdot F = \nabla \cdot (U\nabla V - V\nabla U) \quad (2.111)$$

$$= \nabla \cdot (U\nabla V) - \nabla \cdot (V\nabla U) = U\nabla^2 V - V\nabla^2 U \quad (2.112)$$

$U$ 、 $V$  は、Helmholtz 方程式を満たすので、以下のようになる．

$$\nabla^2 U(\vec{r}') + k^2 U(\vec{r}') = 0 \implies \nabla^2 U(\vec{r}') = -k^2 U(\vec{r}') \quad (2.113)$$

$$\nabla^2 V(\vec{r}) + k^2 V(\vec{r}) = 0 \implies \nabla^2 V(\vec{r}) = -k^2 V(\vec{r}) \quad (2.114)$$

式 (2.113)、(2.114) を式 (2.112) に代入すると、次のようになる．

$$\nabla \cdot F = U(-k^2 V(\vec{r})) - V(-k^2 U(\vec{r}')) \quad (2.115)$$

$$= -k^2 U(\vec{r}') V(\vec{r}) + k^2 V(\vec{r}) U(\vec{r}') = 0 \quad (2.116)$$

$$\implies U\nabla^2 V - V\nabla^2 U = 0 \quad (2.117)$$

$\nabla \cdot F = 0$  なので、式 (2.109) を次のように書くことができる．

$$\int_{\Sigma} (U\nabla V - V\nabla U) \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.118)$$

式 (2.118) で  $V$  を球面波と仮定したので、球面波は以下のように書ける．このとき、 $U$  は一般的な物理的状況に応じて境界条件として残しておくので、関数として定義しない．

$$V(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \tilde{V}_0 e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \tilde{V}_0 e^{ikr} \quad (2.119)$$

式 (2.119) を式 (2.118) に代入すると、次のようになる．

$$\int_{\Sigma} \left[ U\nabla \left( \frac{1}{r} \tilde{V}_0 e^{ikr} \right) - \left( \frac{1}{r} \tilde{V}_0 e^{ikr} \right) \nabla U \right] \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.120)$$

$\tilde{V}_0$  は、常数であるため、除去できる．そして、 $\nabla$  演算子により積分範囲  $\Sigma$  内に発散が適用されている．このとき、半径  $\varepsilon$  の球の内部は発散領域ではないので、積分範囲から除去しなければならない．したがって、 $\Sigma$  境界面から  $\Sigma'$  境界面までを積分範囲に定めると、面積積分を次のように書くことができる．

$$\int_{\Sigma} \left[ U\nabla \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) - \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) \nabla U \right] \cdot d\vec{A}$$

$$+ \int_{\Sigma'} \left[ U \nabla \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) - \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) \nabla U \right] \cdot d\vec{A} = 0 \quad (2.121)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \left[ U \nabla \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) - \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) \nabla U \right] \cdot \hat{n} dA \\ & + \int_{\Sigma'} \left[ U \nabla \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) - \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) \nabla U \right] \cdot (-\hat{n}) dA = 0 \end{aligned} \quad (2.122)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} \left[ U \nabla \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) - \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) \nabla U \right] \cdot \hat{n} dA \\ & - \int_{\Sigma'} \left[ U \nabla \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) - \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) \nabla U \right] \cdot \hat{n} dA = 0 \end{aligned} \quad (2.123)$$

ここで、 $\hat{n}$  は、 $\Sigma$  境界面での垂直な面方向ベクトルであり、 $-\hat{n}$  は、 $\Sigma'$  境界面で内側を向く面方向ベクトルである。それぞれの面方向ベクトルにより、式 (2.123) において  $\Sigma$  積分範囲から  $\Sigma'$  の球が除去されたことがわかる。

式 (2.123) で  $\Sigma'$  の積分を先に解くと、半径  $\varepsilon$  の球なので、方位角対称性を満たす。したがって、 $\nabla$  は  $\hat{r}$  項のみ残り、 $\hat{r}$  方向ベクトルは球表面と垂直であるため、 $\hat{r} = \hat{\varepsilon}$  と置くことができる。また、 $\varepsilon \rightarrow 0$  で減少するため、 $\nabla U$  は減少する方向なので、以下のように書ける。

$$\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \hat{\varepsilon} \quad (2.124)$$

式 (2.124) を式 (2.123) の  $\Sigma'$  の積分に代入してまとめると、次のようになる。

$$\int_{\Sigma'} \left[ U \cdot \left( -\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \hat{\varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} e^{ik\varepsilon} \right) \right) - \left( \frac{1}{\varepsilon} e^{ik\varepsilon} \right) \cdot \left( -\frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \hat{\varepsilon} \right) \right] \cdot \hat{\varepsilon} dA \quad (2.125)$$

$$\int_{\Sigma'} \left[ -U \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} e^{ik\varepsilon} \right) \hat{\varepsilon} \cdot \hat{\varepsilon} + \left( \frac{1}{\varepsilon} e^{ik\varepsilon} \right) \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \hat{\varepsilon} \cdot \hat{\varepsilon} \right] dA \quad (2.126)$$

$$\int_{\Sigma'} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} e^{ik\varepsilon} \right) \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} - U \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} e^{ik\varepsilon} \right) \right] dA \quad (2.127)$$

ここで、 $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} e^{ik\varepsilon} \right)$  を次のように解ける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} e^{ik\varepsilon} \right) &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left( \frac{1}{\varepsilon} \right) e^{ik\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (e^{ik\varepsilon}) \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} e^{ik\varepsilon} + \frac{ik}{\varepsilon} e^{ik\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.128)$$



式 (2.128) を式 (2.127) に代入して解くと、次のように書ける．

$$\int_{\Sigma'} \left[ \left( \frac{1}{\varepsilon} e^{ik\varepsilon} \right) \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} - U \left( -\frac{1}{\varepsilon^2} e^{ik\varepsilon} + \frac{ik}{\varepsilon} e^{ik\varepsilon} \right) \right] dA \quad (2.129)$$

$$\int_{\Sigma'} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + U \frac{1}{\varepsilon^2} - U \frac{ik}{\varepsilon} \right] e^{ik\varepsilon} dA \quad (2.130)$$

ここで、 $\varepsilon \rightarrow 0$  により縮小される球の面積を積分するため、solid angle を導入すると、 $dA$  を次のように定義できる．

$$dA = \varepsilon^2 d\Omega \quad (2.131)$$

$d\Omega$  は、縮小される球の微小面積を意味する．式 (2.132) を式 (2.131) に代入して解くと、次のような式が得られる．

$$\int_{\Sigma'} \left[ \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + U \frac{1}{\varepsilon^2} - U \frac{ik}{\varepsilon} \right] e^{ik\varepsilon} \varepsilon^2 d\Omega \quad (2.132)$$

$$\int_{\Sigma'} \left[ \varepsilon \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} + U - ik\varepsilon U \right] e^{ik\varepsilon} d\Omega \quad (2.133)$$

このとき、 $\varepsilon \rightarrow 0$  なので、式 (2.133) で  $e^{ik\varepsilon} \rightarrow 1$ 、 $\varepsilon \frac{\partial U}{\partial \varepsilon} \rightarrow 0$ 、また、 $ik\varepsilon U \rightarrow 0$  になるので、積分は  $U$  の項のみ残る．

$$\int_{\Sigma'} U d\Omega \quad (2.134)$$

$\varepsilon \rightarrow 0$  により、球は点  $P$  に収束し、solid angle による積分は半径  $\varepsilon$  がどの距離にあっても  $\varepsilon = 1$  である球の積分と等しいので、式 (2.134) は次のように書くことができる．

$$\int_{\Sigma'} U d\Omega = 4\pi \varepsilon^2 U_P = 4\pi U_P \quad (2.135)$$

式 (2.135) を式 (2.123) に代入して最終的に次の結果が得られる．

$$\int_{\Sigma} \left[ U \nabla \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) - \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) \nabla U \right] \cdot \hat{n} dA = 4\pi U_P \quad (2.136)$$

$$\therefore U_P = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[ U \nabla \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) - \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) \nabla U \right] \cdot \hat{n} dA \quad (2.137)$$

式 (2.137) は、 $\Sigma$  面でのすべての 2 次波の波動分布は 1 次波との関係によることを示し、この式を Kirchhoff 積分定理と呼ぶ．

## 2.5.2 Fresnel 回折積分

Fresnel 回折積分はスリットから光の伝搬を説明する理論である．Fresnel 回折積分を記述するため、Kirchhoff 積分定理をスリットに適用する条件に制限する必要がある．図 2.6 で自由空間に形成された 1 次波の波面を、図 2.7 に示したように、スリットの間隔でのみ波面が形成されるように制限し、このときの波面は点光源  $S$  から球面波が伝搬して 1 次波の波面が形成されたものと仮定する．この仮定から球面波により 1 次波が分布しているため、1 次波の分布関数を  $\tilde{U}(\vec{r}') = \tilde{U}_0 \frac{e^{ikr'}}{r'}$  と定義することができる．積分範囲は 1 次波が分布したスリットの間隔  $\Sigma = d$  と定め、 $\tilde{U}$  を式 (2.137) に代入して解くと、次の式が得られる．

$$U_P = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[ U \nabla' \left( \frac{1}{\rho} e^{ik\rho} \right) - \left( \frac{1}{\rho} e^{ik\rho} \right) \nabla' U \right] \cdot \hat{n} dA \quad (2.138)$$

, where  $\Sigma = d$

$$U_P = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[ \frac{\tilde{U}_0 e^{ikr'}}{r'} \nabla' \left( \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \right) - \left( \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \right) \nabla' \frac{\tilde{U}_0 e^{ikr'}}{r'} \right] \cdot \hat{n} dA \quad (2.139)$$

$$U_P = -i \frac{k}{4\pi} \int_{\Sigma} \tilde{U}(Q) \frac{e^{ik\rho}}{\rho} [\cos(\hat{r}' \cdot \hat{n}) - \cos(\hat{\rho} \cdot \hat{n})] dA \quad (2.140)$$

$$U_P = -i \frac{1}{\lambda} \int_{\Sigma} \frac{\cos(\hat{r}' \cdot \hat{n}) - \cos(\hat{\rho} \cdot \hat{n})}{2} \tilde{U}(Q) \frac{e^{ik\rho}}{\rho} dA \quad (2.141)$$

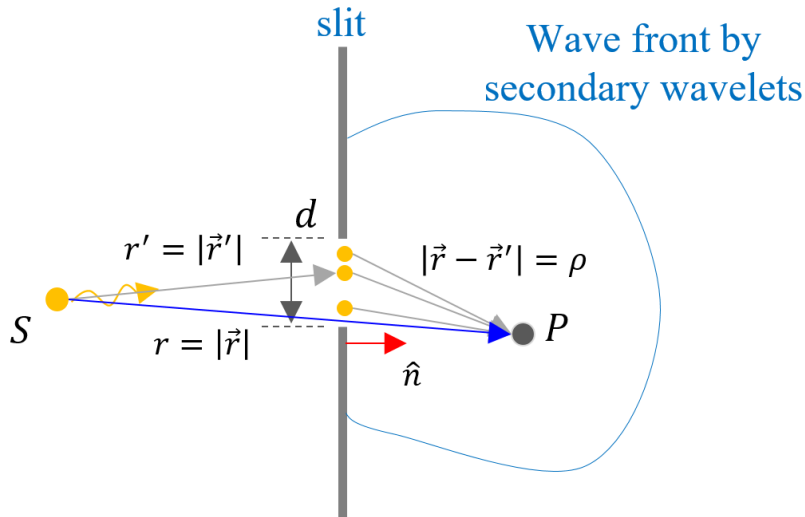


図2.7 スリットに形成された 1 次波動の破面および 2 次波の伝搬

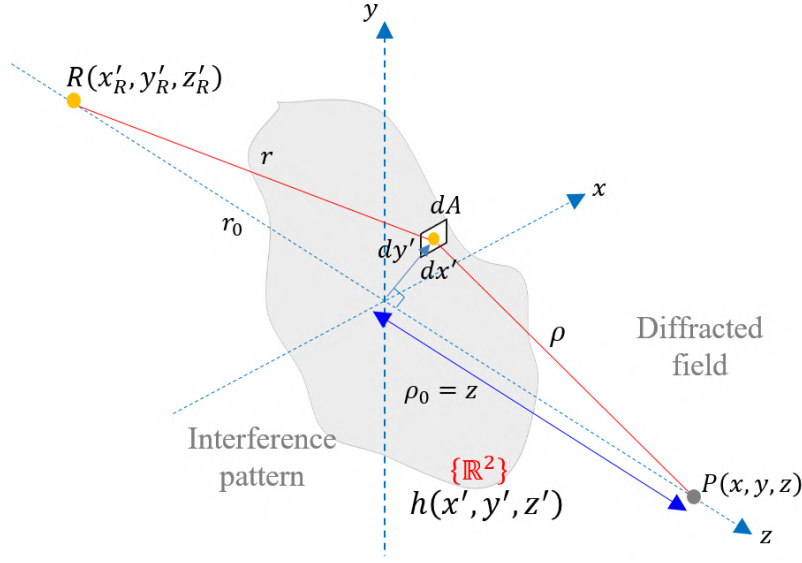


図2.8  $z = 0$  に位置する干渉縞への入射および回折される参照光

$$U_P = -i \frac{1}{\lambda} \int_{\Sigma} K(\theta) \tilde{U}(Q) \frac{e^{ik\rho}}{\rho} dA \quad (2.142)$$

$$K(\theta) := \frac{1 + \cos(\hat{r}' \cdot \hat{n})}{2}, \text{ where } \cos(\hat{\rho} \cdot \hat{n}) = -1 \quad (2.143)$$

展開された式 (2.142) を Fresnel-Kirchhoff 回折公式と呼ぶ．ここで、式 (2.143) の  $K(\theta)$  を傾斜因子 (inclination factor) と定義する． $K(\theta)$  は 1 次波の進行方向とスリットの面方向ベクトルが成す角度を意味し、 $K(\theta)$  の角度により伝搬する波の強度を調節する役割をする． $\hat{n}$  はスリットに垂直な面方向ベクトルであり、 $\hat{r}'$  は一次波の方向ベクトルである．式 (2.142) で  $\tilde{U}(Q)$  は、スリットの位置  $Q$  における 1 次波の分布関数を示す．

式 (2.142) から図 2.8 のホログラム再生を数学的に誘導できる．まず、図 2.8 では、干渉縞が Cartesian 座標系で  $z = 0$  の位置に存在し、干渉縞を  $\mathbb{R}^2$  平面であると仮定する．また、参照光の位置  $R$  と観察点の位置  $P$  とは有限距離であると仮定する．この仮定から、Fresnel 回折を適用できる．干渉縞の微小面積を  $dA$  に置くと、 $dA$  が非常に小さいため、入射される参照光は  $dA$  から全方向に回折される．したがって、傾斜因子で  $\cos(\hat{r}' \cdot \hat{n}) \approx 1$  となり  $K(\theta) \approx 1$  と近似可能である．このような条件から、式 (2.142) は次のようになる．

$$U_P = -i \frac{1}{\lambda} \int_{\Sigma} \tilde{U}(Q) \frac{e^{ik\rho}}{\rho} dA \quad (2.144)$$

式 (2.144) の積分を解くため、積分変数  $dA$  と参照項により波面が形成されている  $dA$  から観察点  $P$  までの距離  $\rho$  を求めなければならない．積分変数  $dA$  は干渉縞で微小面積

であり、2.4 節で求めた干渉縞のエネルギー密度関数  $h(\vec{r})$  に対し、 $dx'dy'$  を掛けて次のように表せる。

$$dA = h(\vec{r}') dx'dy' \quad (2.145)$$

距離  $\rho$  は、観察点  $P$  の位置が  $(x, y, z)$  であり、 $dA$  の位置が  $(x', y', z')$  になるので、次のように求めることができる。

$$\rho = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} \quad (2.146)$$

ここで、式 (2.146) の  $z^2$  を平方根の外に取り出し、以下のように表せる。

$$\rho = z \sqrt{1 + \left(\frac{x - x'}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - y'}{z}\right)^2} \quad (2.147)$$

式 (2.147) から次の条件が成立する。

$$(x - x'), (y - y') \ll z \quad (2.148)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x - x'}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - y'}{z}\right)^2 \ll 1 \quad (2.149)$$

式 (2.149) により、Taylor 展開条件が成立するので、 $\rho$  に対して Taylor 展開が可能である。  $k = 1 + \left(\frac{x - x'}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - y'}{z}\right)^2$  と置き、次のように Taylor 展開ができる。

$$f(k) = (1 + k)^{\frac{1}{2}} = f(0) + f'(0)k + \frac{f''(0)}{2}k^2 + \dots \quad (2.150)$$

Taylor 展開の係数、 $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = \frac{1}{2} \frac{1}{(1+x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$ ,  $f''(0) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{4}, \dots$  になるので、係数を代入して次のように書くことができる。

$$f(k) = 1 + \frac{1}{2}k - \frac{1}{4}k^2 - \dots \quad (2.151)$$

このとき、 $k = \left(\frac{x - x'}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - y'}{z}\right)^2 \ll 1$  なので、2 次項以降を 0 にすると、近似は 2 番目の項までになり次のように書くことができる。

$$f(k) \approx 1 + \frac{1}{2}k \quad (2.152)$$

式 (2.152) を式 (2.147) に代入し、次の式が得られる.

$$\rho = z + \frac{z}{2} \left[ \left( \frac{x - x'}{z} \right)^2 + \left( \frac{y - y'}{z} \right)^2 \right] \quad (2.153)$$

$$= z + \frac{z}{2} \left[ \frac{(x - x')^2}{z^2} + \frac{(y - y')^2}{z^2} \right] \quad (2.154)$$

$$= z + \frac{1}{2} z [(x - x')^2 + (y - y')^2] \quad (2.155)$$

$$= z + \frac{1}{2} z [(x^2 + y^2) + (x'^2 + y'^2) - 2(xx' + yy')] \quad (2.156)$$

展開された  $\rho$  に対する式 (2.156) と  $dA$  に対する式 (2.145) を式 (2.144) に代入し、また、 $\tilde{U}(Q)$  は 1 次波の光源であるので、再生において 1 次波の光源は参照光になる. したがって、式 (2.89) の参照光  $\tilde{R}(\vec{r}_{R'}) = \tilde{R}_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$  を式 (2.144) に代入し、次のように展開できる.

$$U_P = -\frac{i}{\lambda} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \tilde{R}(\vec{r}_{R'}) \frac{1}{z} e^{ik\{z + \frac{1}{2z}[(x^2 + y^2) + (x'^2 + y'^2) - 2(xx' + yy')]\}} h(\vec{r}') dx' dy' \quad (2.157)$$

$$= -\frac{i}{z\lambda} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \tilde{R}(\vec{r}_{R'}) h(\vec{r}') e^{ikz} e^{\frac{ik(x^2 + y^2)}{2z}} e^{\frac{ik(x'^2 + y'^2)}{2z}} e^{\frac{ik(-2xx' - 2yy')}{2z}} dx' dy' \quad (2.158)$$

$$= -\frac{ie^{ikz}}{z\lambda} e^{\frac{ik(x^2 + y^2)}{2z}} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \tilde{R}(\vec{r}_{R'}) h(\vec{r}') e^{\frac{ik(x'^2 + y'^2)}{2z}} e^{\frac{ik(-2xx' - 2yy')}{2z}} dx' dy' \quad (2.159)$$

$$= -\frac{ie^{ikz}}{z\lambda} e^{\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \tilde{R}(\vec{r}_{R'}) h(\vec{r}') e^{\frac{ik}{2z}(x'^2 + y'^2)} e^{-\frac{ik}{z}(xx' + yy')} dx' dy' \quad (2.160)$$

最終的に、次の式が得られる.

$$\therefore U_P = -\frac{ie^{ikz}}{z\lambda} e^{\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)} \int_{\Sigma} \int_{\Sigma} \tilde{R}(\vec{r}_{R'}) h(\vec{r}') e^{\frac{ik}{2z}(x'^2 + y'^2)} e^{-\frac{ik}{z}(xx' + yy')} dx' dy' \quad (2.161)$$

$$, \text{ where } \Sigma = -\infty : \infty \quad (2.162)$$

したがって、 $U_P$  は、参照光を照射して干渉縞から回折された波により、観察点  $P$  で表示されるホログラムの再生過程を説明する式であり、式 (2.162) の内容を図 2.9 のように表せる.

## 2.6 Computer-generated hologram(CG H)

ホログラムの記録方法は、大きく 2 つに分類することができる[10]. コヒーレントな光を用いて光学的な干渉を charge-coupled device(CCD) に記録するデジタルホログラム

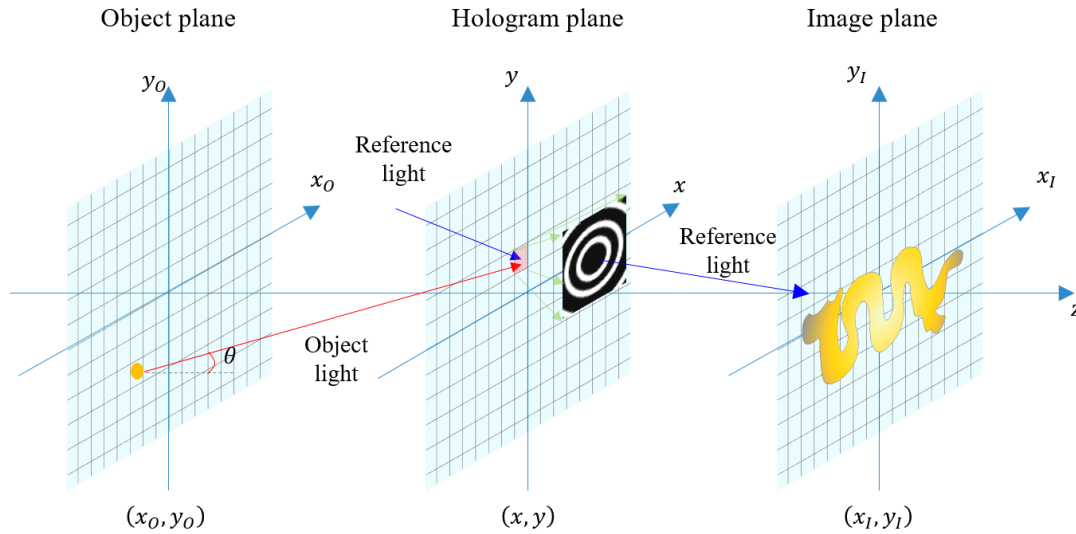


図2.9 干渉縞の生成および再生

と、波動の伝搬を数値的にシミュレーションして干渉縞を生成するコンピュータ生成ホログラム (Computer-Generated Hologram, CGH) がある。CGH は、光学的な干渉によって干渉縞を生成することが困難な実物を基盤とした、多様な形状の物体や自然環境に対して障害なく干渉縞を生成できるほか、干渉のための複雑な光学系の構築する必要がないという利点がある。一方で、数値的に膨大な波動の伝搬を計算する必要があるという課題も存在する。この点に関して、膨大な波動の伝搬計算を効率的に処理するための GPU ベースの高速計算アルゴリズムについて多くの研究が進められている。本節では、CGH を用いた干渉縞の生成方法について論じる。

CGH は、1966 年に Lohmann によって数値的に生成されたホログラムをエンコードする方法として初めて紹介され[11]、その後発展を続け、現在では CGH を生成する方法として point-based method, polygon-based method, layer-based method の 3 種類が存在する[12–14]。本節では、point-based method について説明する。この方法は、3D オブジェクトの表現において最も柔軟なアプローチである。

CGH 計算について説明する。CGH 計算の全体的な流れを図 2.10 に示した。3 次元物体の定義は、Waters (1966) により提案されたモデルを基盤としている[15]。Waters は、自発光する点光源の集合によって三次元物体を表現できることを提案した。この点光源はそれぞれ独立して伝搬し、それらの物体光を重ね合わせることで、全体の物体波面を構成できる。したがって、任意の物体に点光源を配置することで、物体光を定義することが可能となる。

## Computation process

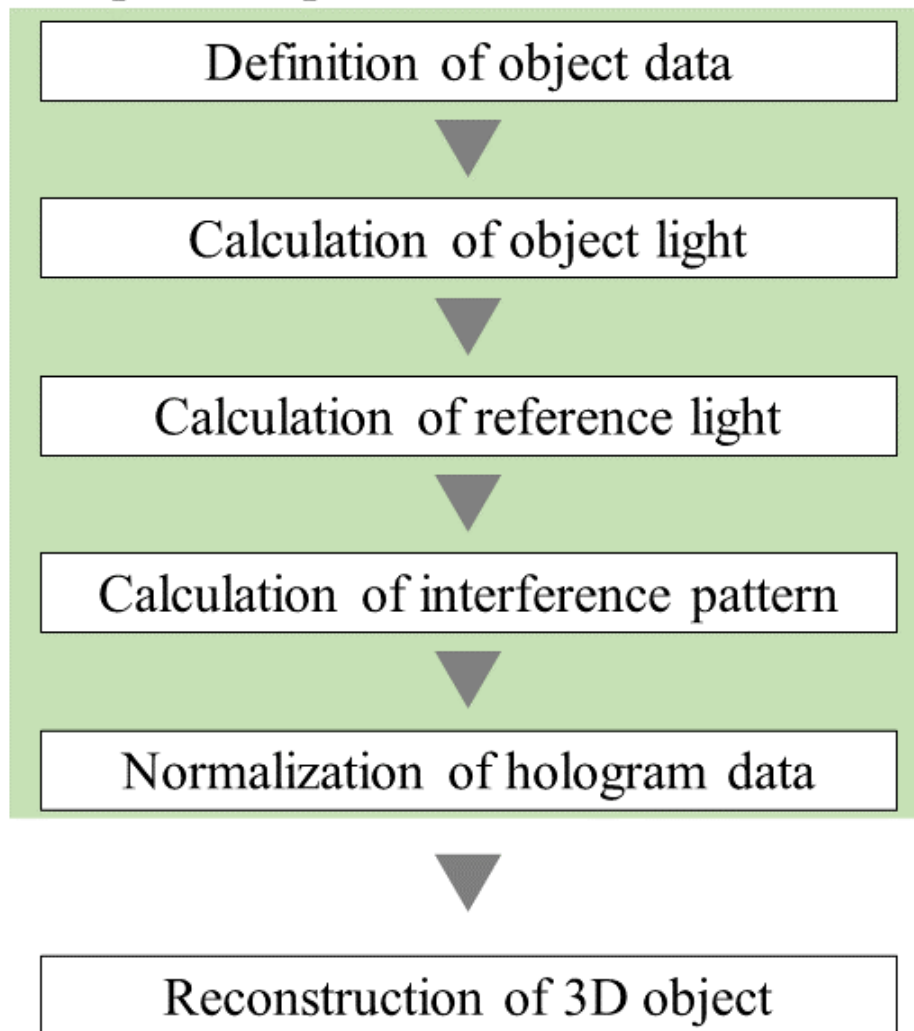


図2.10 Process of computer-generated hologram

定義された物体から各物体光が伝搬するためには、光の伝搬モデルが必要であり、本研究では Rayleigh-Sommerfeld 回折理論に基づき、物体光の伝搬および重ね合わせを説明する[16]。図 2.11 に、Rayleigh-Sommerfeld 回折理論に基づいた物体光からの波動の伝搬を示した。Rayleigh-Sommerfeld 回折式は、2.5.1 節で述べた Kirchhoff 積分定理の式

(2.137) から誘導できる．このとき、点光源からの波動の伝搬は、空間で source を含めた波動分布となる．したがって、source への寄与を明確にするため、式 (2.137) に prime notation を適用し、次のように表すことができる．

$$U_P = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[ U(\vec{r}') \nabla' \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) - \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) \nabla' U(\vec{r}') \right] \cdot \hat{n} dA' \quad (2.163)$$

, where  $r = |\vec{r} - \vec{r}'|$

式 (2.163) に Rayleigh-Sommerfeld の境界条件  $\nabla' U(\vec{r}') = 0$  を適用する．Rayleigh-Sommerfeld の境界条件の意味は、点光源から一次波が伝搬して波面が形成されるとき、波面は連続的に変化するので、連続的変化を表す式が  $\nabla' U(\vec{r}')$  となる．しかし、波面が形成される形状を正確に知ることはできないため、この項を除去するための境界条件を 0 に設定する．したがって、境界条件を適用した式を次のように書ける．

$$U_P = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[ U(\vec{r}') \nabla' \left( \frac{1}{r} e^{ikr} \right) \right] \cdot \hat{n} dA' \quad (2.164)$$

ここで、球面波  $\frac{1}{r} e^{ikr}$  は、空間上の source を含む波動の分布であるため、次の inhomogeneous Helmholtz 方程式における Green 関数  $G(\vec{r} | \vec{r}')$  の解を満たす．したがって、

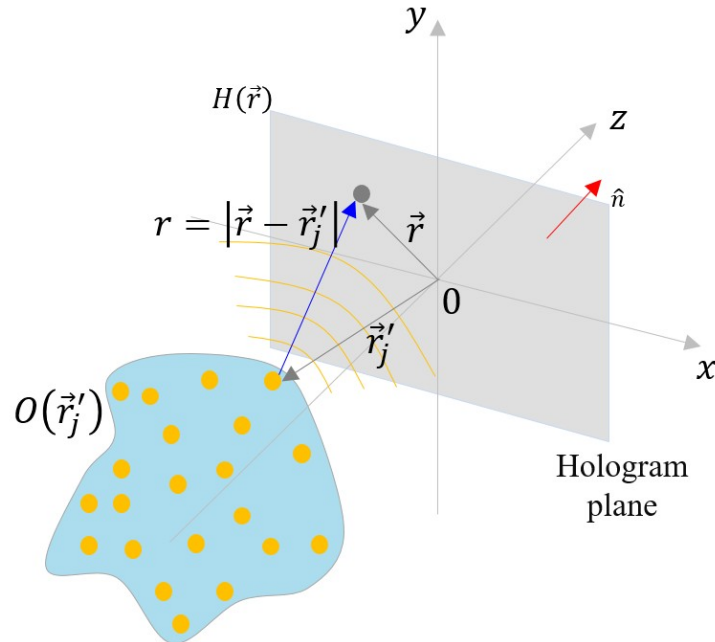


図2.11 Rayleigh-Sommerfeld 回折理論における点光源の伝搬



式 (2.164) は、一次波を放出する点光源が球面波の形で空間に伝搬することを示している。

$$[\nabla^2 + k^2] [-G(\vec{r} | \vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.165)$$

式 (2.164) を解くため、球面座標系での Laplace 演算子  $\nabla'$  と  $G(\vec{r} | \vec{r}')$  を次のように表せる。

$$G(\vec{r} | \vec{r}') = \frac{1}{r} e^{ikr} = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (2.166)$$

$$\nabla' = \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \cdot \hat{n} = \left( \frac{\partial}{\partial r} \hat{r}' + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta}' + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}' \right) \cdot \hat{n} \quad (2.167)$$

ここで、 $\nabla'$  は normal derivative として表すことができ、したがって、球面波は球面座標系において垂直な方向が  $\hat{r}'$  となるため、 $\nabla'$  は以下のように書ける。

$$\nabla' = \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.168)$$

$G(\vec{r} | \vec{r}')$  に  $\nabla'$  を適用して次のように解ける。

$$\nabla' G(\vec{r} | \vec{r}') = \left( \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} e^{ikr} \right) \nabla' |\vec{r} - \vec{r}'| \quad (2.169)$$

$$= \frac{ik e^{ikr} r - e^{ikr}}{r^2} \left[ -\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \quad (2.170)$$

$$= \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} (-\hat{r}') \quad (2.171)$$

$$-G(\vec{r} | \vec{r}') = \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r}' \quad (2.172)$$

式 (2.172) を式 (2.164) に代入し、次のように解ける。

$$U_P = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[ U(\vec{r}') \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \hat{r}' \right] \cdot \hat{n}' dA' \quad (2.173)$$

$$U_P = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[ U(\vec{r}') \left( ik - \frac{1}{r} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \right] \cos(\hat{r}', \hat{n}') dA' \quad (2.174)$$

ここで、 $\cos(\hat{r}', \hat{n}')$  は傾斜因子であり、伝搬距離  $r$  が十分に離れている場合、 $\hat{r}', \hat{n}'$  が成す角度は小さくなるため、0 とみなすことができる。したがって、 $\cos(\hat{r}', \hat{n}') \approx 1$  となる。また、次の関係も成立する。

$$ik \gg \frac{1}{r} \implies \left( ik - \frac{1}{r} \right) \approx ik \quad (2.175)$$

式 (2.175) と  $\cos(\hat{r}', \hat{n}') \approx 1$  項を代入してまとめると、次のようになる。

$$U_P = \int_{\Sigma} \left[ \frac{ik}{4\pi} U(\vec{r}') \frac{e^{ikr}}{r} \right] dA' \quad (2.176)$$

式 (2.176) を Riemann sum として次のように書ける。

$$U_P = \sum_{j=1}^N \left[ \frac{ik}{4\pi} U(\vec{r}'_j) \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'_j|}}{|\vec{r}-\vec{r}'_j|} \right] \Delta A' \quad (2.177)$$

式 (2.177) で一次波の光源を表す複素振幅関数  $U(\vec{r}')$  は、次のように振幅  $A$  に定義する。

$$\mathbf{A}(\vec{r}'_j) := \frac{ik}{4\pi} U(\vec{r}'_j) \Delta A' \quad (2.178)$$

式 (2.178) を式 (2.177) に代入し、最終的に次のように表すことができる。

$$\therefore U_P = \sum_j \mathbf{A}(\vec{r}'_j) G(\vec{r} | \vec{r}') \quad , \text{ where } G(\vec{r} | \vec{r}') = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (2.179)$$

したがって、式 (2.179) は、物体に対して有限個の点光源が定義された場合、点光源からホログラム面までの球面波の伝搬およびその重ね合わせを表す式となる。この式を利用して物体光の伝搬を計算する。

参照光の計算は、平面波がホログラム面に対して平行に入射すると仮定し、式を誘導する。このとき、平行入射であると仮定しても、一般性は失われない。まず、式 (2.89) で  $\vec{k} \cdot \vec{r}$  を次のように書ける。

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = (k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}) \cdot (x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}) \quad (2.180)$$

$$= (k \sin \theta \cos \phi \hat{x} + k \sin \theta \sin \phi \hat{y} + k \cos \theta \hat{z}) \cdot (x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}) \quad (2.181)$$

$$= kx \sin \theta \cos \phi + ky \sin \theta \sin \phi + kz \cos \theta \quad (2.182)$$

ここで、平行入射であるため  $z = 0$ 、 $\theta = 0$ 、 $\phi = 0$  の条件を代入すると、式 (2.182) は 0 となり、したがって、式 (2.89) は次のように表すことができる。

$$R(\vec{r}'_R) = R_0 e^{i\delta_R} \quad (2.183)$$

平面波は、すべての位相が同じ波動の集合であるため、初期位相  $\delta_R = 0$  とすることができる。したがって、次のように振幅のみが残る。

$$R(\vec{r}'_R) = R_0 \quad (2.184)$$

結果として CGH の計算では、参照光は振幅値のみを使用する。

物体光と参照光の干渉は、式 (2.85) に式 (2.179) と式 (2.184) を代入して次のように計算することができる。

$$h(\vec{r}) = |O(\vec{r}'_o) + R(\vec{r}'_R)|^2 \quad (2.185)$$

$$= \left| \sum_j \mathbf{A}(\vec{r}'_j) G(\vec{r} | \vec{r}') + R_0 \right|^2 \quad (2.186)$$

式 (2.186) により、物体光と参照光のエネルギー分布が記録され、干渉縞が形成される。

## 第 3 章

# ホログラムの特性

### 3.1 Fresnel ゾーン

ホログラムで物体光は球面波として伝搬し、この球面波は Fresnel ゾーンによって表現することができる。Huygens の原理によると、1 次波の波面上の各点は 2 次波を生成する点光源になる。この考えに基づき、Fresnel は波面から 2 次球面波が伝搬し、スクリーン上の任意の点  $P$  で 2 次波が干渉することで、光の強度分布により、明暗の円形フリンジパターンが生成されると仮定した。また、Fresnel は、スクリーン上に  $\frac{\lambda}{2}$  の周期で形成される円形の帯により、球面波の波面を  $\frac{\lambda}{2}$  周期で無数の円形の帯に分割できると仮定した。こ

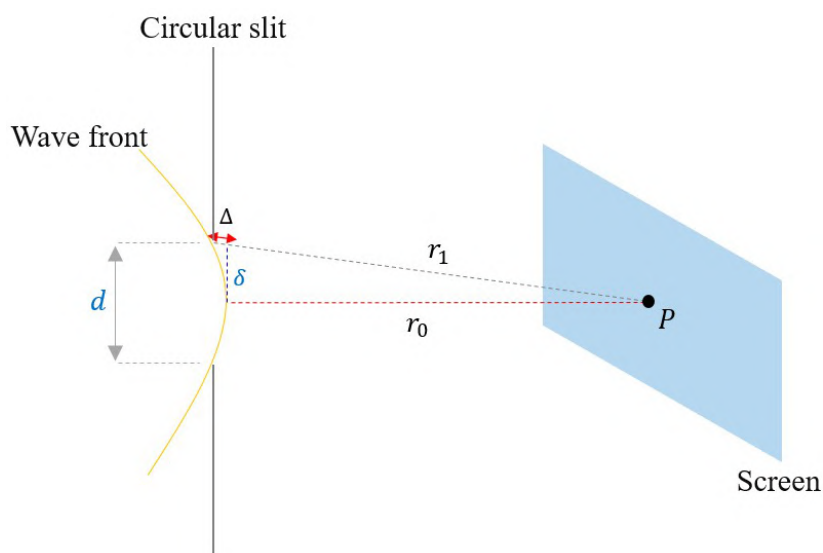


図3.1 観察点  $P$  から円形スリットに形成される波面までの経路および経路差

のような円形帯を Fresnel ハーフピリオドゾーン (Fresnel half-period zone) と呼び、一般には Fresnel ゾーンと略される。本節では、Fresnel ゾーンが  $\frac{\lambda}{2}$  の周期で円形帯を形成することについて説明する。

図 3.1 に球面波が円形スリットに入射し、スリットから観察点  $P$  へと伝搬する様子を示した。ここで、 $\delta$  は円形スリットの半径を表し、 $\Delta$  は経路  $r_0$  と  $r_1$  の経路差である。このとき、経路差  $\Delta$  は次のように表すことができる。

$$\Delta = r_1 - \sqrt{r_0^2 + \delta^2} \quad (3.1)$$

$$= r_1 - \sqrt{r_0^2 \left(1 + \frac{\delta^2}{r_0^2}\right)} = r_1 - r_0 \sqrt{\left(1 + \frac{\delta^2}{r_0^2}\right)} \quad (3.2)$$

ここで、 $\delta \ll r_0$  と仮定すると、すなわち、スリットの幅よりも伝搬距離がはるかに長い場合、 $\frac{\delta^2}{r_0^2} \ll 1$  が成立する。したがって、式 (3.2) に対して Taylor 展開が可能となる。このとき、 $\frac{\delta^2}{r_0^2} = x$  とおけば、次のように表すことができる。

$$f(x) = \sqrt{1+x} \quad (3.3)$$

$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots \quad (3.4)$$

ここで、それぞれの係数を次のように求めることができる。

$$f(0) = 1 \quad (3.5)$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2} \cdot (-1) = -\frac{1}{2} \quad (3.6)$$

$$f''(0) = -\frac{1}{2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{(1-x)^{3/2}} = -\frac{1}{4} \quad (3.7)$$

求めた係数を式 (3.4) に代入すると、次のように表せる。

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 - \dots \quad (3.8)$$

ここで、 $x = \frac{\delta^2}{r_0^2} \ll 1$  であるため、 $x^2 \approx 0$  と近似でき、2 次項まで近似すると、次のように書ける。

$$f(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\delta^2}{r_0^2} \quad (3.9)$$

式 (3.9) を式 (3.2) に代入すると、次のように書ける。

$$\Delta \approx r_1 - r_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{r_0^2}\right) = r_1 - r_0 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{r_0} \quad (3.10)$$

このとき、経路差が  $m\lambda$  になる場合、補強干渉が起こるため、次のように表すことができる。

$$m\lambda = r_1 - r_0 + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{r_0} \quad (3.11)$$

$$\implies r_1 = r_0 + m\lambda - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{r_0} \quad (3.12)$$

ここで、 $\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{r_0} \ll \lambda$  の場合、1 次波の波面の曲率半径は無視され、Fraunhofer 回折が生じる。しかし、Fresnel 回折ではこの曲率半径を無視することができないため、 $\frac{1}{2} \frac{\delta^2}{r_0} = \lambda$  の条件を適用すると、式 (3.12) は次のように表すことができる。

$$r_1 = r_0 + (m - 1)\lambda \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad (3.13)$$

このとき、式 (3.13) は補強干渉が起こる条件を表している。すなわち、経路差が波長の整数倍であると補強干渉が起こる。一方で、経路差が  $\frac{1}{2}\lambda$  になると、相殺干渉が発生するため、式 (3.13) に相殺干渉条件を適用すると、最終的に次のように書くことができる。

$$\therefore r_1 = r_0 + \frac{(m - 1)}{2} \lambda \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad (3.14)$$

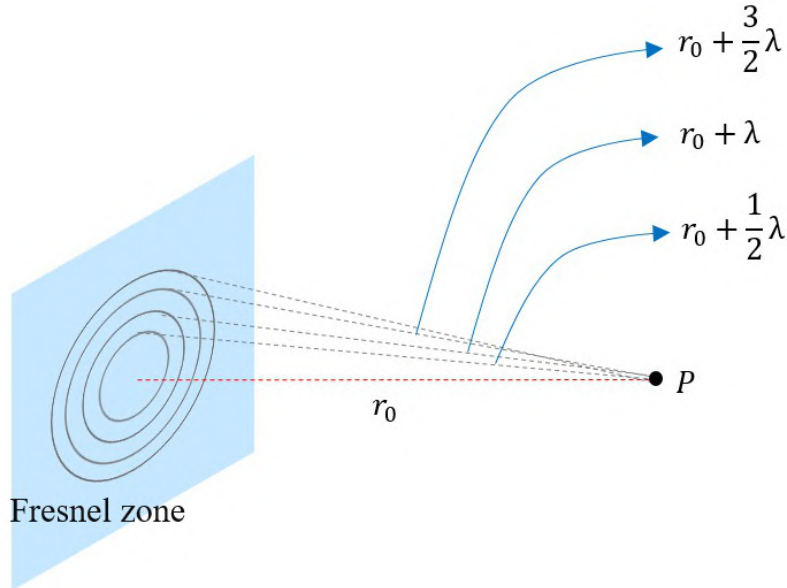


図3.2 整数  $m$  が増加するにつれて形成され円形帯

式 (3.14) は, 最初の円形帯は補強干渉により生じた帯であり, 距離  $r_0$  の位置に現れる.  $m=2$  の 2 番目の帯は,  $r_0 + \frac{1}{2}\lambda$  の位置に形成され, 相殺干渉による帯である.  $m$  が増加するにつれて, 補強干渉と相殺干渉が交互に発生するため, このような関係を図 3.2 に示した.

## 3.2 球面波伝搬による Fresnel ゾーンの波動分布

本節では, 球面波が伝搬したときの Fresnel ゾーンでの波動分布について説明する. 球面波の伝搬を数学的にモデル化するため, 図 3.3 のような条件を仮定する. 3.1 節で球面波を円形帯に分けることができることを述べた. したがって, 図 3.3 の点光源  $S$  から, 球面波が生成されたとき, 球の形の波面を円形帯に分割し, この帯の面積を  $dA$  で表す. この帯は, 2 次波を生成する点光源となり, この帯の内の全ての点光源はコヒーレントであると仮定する. そして, 自由空間においてこれらの点光源は, 距離  $r$  離れた点  $P$  に向かって球面波として伝搬する. このような条件下で各円形帯で伝搬する波を求めることが目的である. このため, 球面波における円形帯の定義が必要であり, 2.3 節で定義した式 (2.84) 式を用いて, 球面波における円形帯  $dA$  を次のように表現することができる.

$$dU(P) = \frac{A_0}{\rho} e^{ik\rho} dA \quad (3.15)$$

式 (3.15) で  $\rho$  は, 点光源  $S$  から球面波の波面までの距離である球の半径に相当する.  $dA$  から点  $P$  までの伝搬を求めるため, 位相項である  $e^{ik\rho}$  における距離  $\rho$  は,  $S$  からの

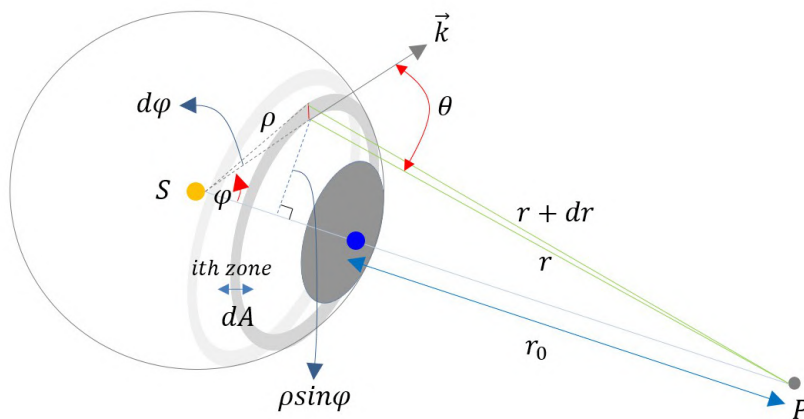


図3.3 自由空間における点光源の球面波伝搬

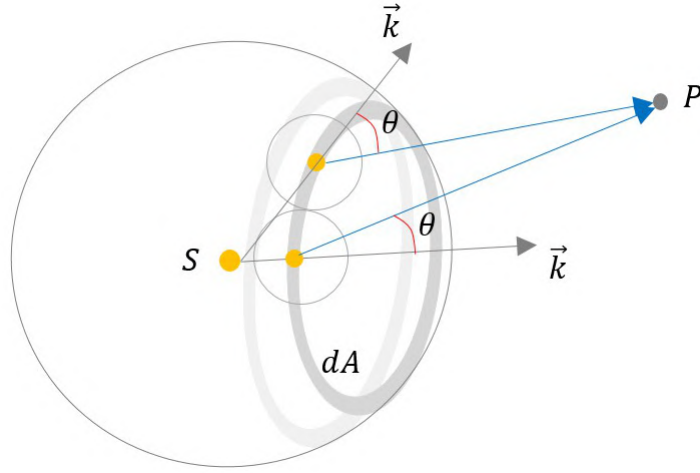


図3.4 傾斜因子の方位角対称性

伝搬距離全体である  $\rho + r$  となる．したがって、式は次のようになる．

$$dU(P) = \frac{\xi_0}{\rho} e^{ik(\rho+r)} dA \quad (3.16)$$

式 (3.16) で点光源  $S$  の寄与を含めつつ、円形帯から  $P$  まで伝搬する式の形態に表現する必要がある．最初に、 $S$  から放出される球面波の波面は距離に応じて大きくなる．このとき、波面が広がっても、振幅は距離に応じて減少するため、全体のエネルギーは保存される．したがって、比例定数  $Q$  を導入して次のように定義することができる．

$$\xi_A = Q \frac{\xi_0}{\rho} \quad (3.17)$$

ここで、 $dA$  から伝搬される 2 次波の振幅は球面波であり、距離  $r$  に依存するため、式は次のような形で表すことができる．

$$dU(P) = \frac{\xi_A}{r} e^{ik(\rho+r)} dA \quad (3.18)$$

最後に、式 (3.18) には傾斜因子を考慮する必要がある．図 3.4 に傾斜因子について示してある．図 3.4 において、点光源  $S$  から放射される波面の伝搬方向であるベクトル  $\vec{k}$  と、 $dA$  から点  $P$  へ方向がなす角  $\theta$  に対し、傾斜因子  $K(\theta)$  は、 $dA$  のすべての点について方位角対称性を持つ．したがって、 $K(\theta)$  は次のように表すことができる．

$$K(\theta) \approx \text{constant} = K \quad (3.19)$$



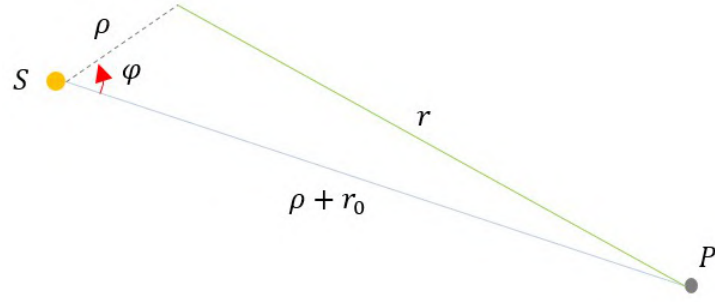


図3.5 点光源  $S$  から観察点  $P$  までの距離

$K$  を式 (3.18) に代入すると、同心円帯から伝搬する波動を表す関数を次のように書ける．

$$dU(P) = K \frac{\xi_A}{r} e^{ik(\rho+r)} dA \quad (3.20)$$

ここで、式 (3.20) は薄い同心円帯を表しており、ある範囲の帯として表現するためには、この帯について積分を行う必要がある．ただし、式 (3.20) は積分変数が  $dA$  であり、積分される関数は距離  $r$  の関数であることがわかる．したがって、 $dA$  を  $dr$  に関する式として表現する必要がある．まず、 $dA$  は図 3.3 から次のように求めることができる．

$$dA = [2\pi(\rho \sin \phi)] \rho d\phi = 2\pi\rho(\rho \sin \phi d\phi) \quad (3.21)$$

$dr$  に関する式として表すため、図 3.5 に基づき、点  $S$  から点  $P$  までの距離を  $\cos$  の第 2 法則を用いると、次のように展開できる．

$$r^2 = \rho^2 + (\rho + r_0)^2 - 2\rho(\rho + r_0) \cos \phi \quad (3.22)$$

$r^2$  を  $\phi$  の関数とみなし、微分の定義を用いて表すと、次のように書ける．

$$2r dr = 2\rho(\rho + r_0) \sin \phi d\phi \quad (3.23)$$

$$\implies \rho \sin \phi d\phi = \frac{r}{(\rho + r_0)} dr \quad (3.24)$$

$$\implies dA = \frac{2\pi\rho}{(\rho + r_0)} r dr \quad (3.25)$$

式 (3.25) を式 (3.20) に代入すると、以下のように書ける．

$$dU(P) = 2\pi K \frac{\rho \xi_A}{(\rho + r_0)} e^{ik(\rho+r)} dr \quad (3.26)$$

式 (3.26) は、球面波における同心円帯を表す式であり、波面上に第  $l$  番目の Fresnel ゾーンを意味するインデックスを付けた場合、第  $l$  ゾーンが点  $P$  に伝搬して生じる干渉は、 $l$  の区間内のすべての帯を加算したものであるため、次のように表すことができる。

$$U(P)_l = 2\pi K_l(\theta) \frac{\rho \xi_A}{(\rho + r_0)} \int_{r_{l-1}}^{r_l} e^{ik(\rho+r)} dr \quad (3.27)$$

$U(P)_l$  に対する積分は、次のように展開することができる。

$$U(P)_l = 2\pi K_l(\theta) \frac{\rho \xi_A}{(\rho + r_0)} \int_{r_{l-1}}^{r_l} e^{ik(\rho+r)} dr \quad (3.28)$$

$$= 2\pi K_l(\theta) \frac{\rho \xi_A}{(\rho + r_0)} e^{ik\rho} \left[ \frac{1}{ik} e^{ikr} \right]_{r_{l-1}}^{r_l} \quad (3.29)$$

$$= 2\pi K_l(\theta) \frac{\rho \xi_A}{(\rho + r_0)} e^{ik\rho} \frac{1}{ik} [e^{ikr_l} - e^{ikr_{l-1}}] \quad (3.30)$$

$$= 2\pi K_l(\theta) \frac{\rho \xi_A}{(\rho + r_0)} e^{ik\rho} \frac{1}{i \frac{2\pi}{\lambda}} [e^{ikr_l} - e^{ikr_{l-1}}] \quad (3.31)$$

$$= \frac{K_l(\theta) \rho \xi_A \lambda}{i(\rho + r_0)} e^{ik\rho} [e^{ikr_l} - e^{ikr_{l-1}}] \quad (3.32)$$

3.1 節で同心円帯の間隔が  $\frac{\lambda}{2}$  であることを示したので、 $l$  区間の間隔も  $\frac{\lambda}{2}$  となる。したがって、第  $l$  番目の Fresnel ゾーンの範囲は  $r_{l-1}$  から  $r_l$  までにつき、次のように表すことができる。

$$r_l = r_{l-1} + \frac{\lambda}{2} \quad (3.33)$$

$$\implies r_{l-1} = r_0 + (l-1) \frac{\lambda}{2} \quad (3.34)$$

$$\implies r_l = r_0 + (l-1) \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = r_0 + l \frac{\lambda}{2} \quad (3.35)$$

式 (2.35) を式 (3.32) に代入することで、 $\exp$  関数を次のように展開することができる。

$$e^{ikr_l} - e^{ikr_{l-1}} = e^{ikr_l} - e^{ik(r_l - \frac{\lambda}{2})} \quad (3.36)$$

$$= e^{ikr_l} - e^{ikr_l} e^{-ik \frac{\lambda}{2}} \quad (3.37)$$

$$= e^{ikr_l} \left( 1 - e^{-ik \frac{\lambda}{2}} \right) \quad (3.38)$$

$$= e^{ik(r_0 + l \frac{\lambda}{2})} \left( 1 - e^{-ik \frac{\lambda}{2}} \right) \quad (3.39)$$

$$= e^{ikr_0} e^{ikl \frac{\lambda}{2}} \left( 1 - e^{-ik \frac{\lambda}{2}} \right) \quad (3.40)$$



図3.6 Fresnel zone

ここで、 $e^{ikl\frac{\lambda}{2}}$  は次のように表すことができる．

$$e^{ikl\frac{\lambda}{2}} = e^{il\pi} = \cos(l\pi) + i\sin(l\pi) \quad \begin{cases} -1 & \text{when } l \text{ is odd} \\ +1 & \text{when } l \text{ is even} \end{cases} \quad (3.41)$$

$e^{-ikl\frac{\lambda}{2}}$  の場合、次のように表すことができる．

$$e^{-ikl\frac{\lambda}{2}} = e^{-il\pi} = \cos(\pi) - i\sin(\pi) = -1 \quad (3.42)$$

式 (3.41) および式 (3.42) より、式 (3.40) を次のように求めることができる．

$$e^{ikr_0} e^{ikl\frac{\lambda}{2}} (1 - e^{-ik\frac{\lambda}{2}}) = e^{ikr_0} (-1)^{l+1} \cdot 2 \quad (3.43)$$

$$= (-1)^{l+1} \cdot 2e^{ikr_0} \quad (l \in \mathbb{Z}) \quad (3.44)$$

式 (3.44) を式 (3.32) に代入し、 $U(P)_l$  を次のように求めることができる．

$$U(P)_l = \frac{K_l(\theta)\rho\xi_A\lambda}{i(\rho+r_0)} e^{ik\rho} [e^{ikr_l} - e^{ikr_{l-1}}] \quad (3.45)$$

$$= \frac{K_l(\theta)\rho\xi_A\lambda}{i(\rho+r_0)} e^{ik\rho} (-1)^{l+1} \cdot 2e^{ikr_0} \quad (3.46)$$

$$= (-1)^{l+1} \frac{2K_l(\theta)\rho\xi_A\lambda}{i(\rho+r_0)} e^{ik(\rho+r_0)} \quad (3.47)$$

$$= (-1)^{l+1} \frac{2K_l(\theta)\rho\xi_A\lambda}{i(\rho+r_0)} \{ \cos[k(\rho+r)] + i\sin[k(\rho+r_0)] \} \quad (3.48)$$

このとき、 $\exp$  関数の実数部のみを取り出し、最終的に次のように求めることができる。

$$\therefore [U(P)]_l = (-1)^{l+1} \frac{2K_l(\theta)\rho\xi_A\lambda}{(\rho+r_0)} \sin[k(\rho+r_0)] \quad (l \in \mathbb{Z}) \quad (3.49)$$

式 (3.49) より、 $l$  が奇数および偶数によって  $U(P)_l$  の符号が変化することがわかる。これにより波動場では補強干渉と相殺干渉が交互に生じ、図 3.6 に示すように、Fresnel ゾーンでは、明るい領域と暗い領域が  $\frac{1}{2}\lambda$  の周期で交互に現れる。

### 3.3 ホログラムデータの特性

2.6 節では、CGH における干渉縞は球面波の干渉によって生成されることを説明した。3.2 節では、Fresnel ゾーンが球面波伝搬により明暗の円形帯として表現されることを示した。このとき、補強干渉と相殺干渉の円形帯が交互に現れ、その交互に現れる形態は空間周波数として、以下のトランスミッション関数によって定義される[17]。

$$t_{SZP}(r) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \beta \sin \left[ \frac{\pi}{\lambda z'} \left( (x-x')^2 + (y-y')^2 \right) \right] \right\}, \text{ where } |\beta| \leq 1 \quad (3.50)$$

したがって、重ね合わされた Fresnel ゾーンは、図 3.8 に示すように変化する空間周波

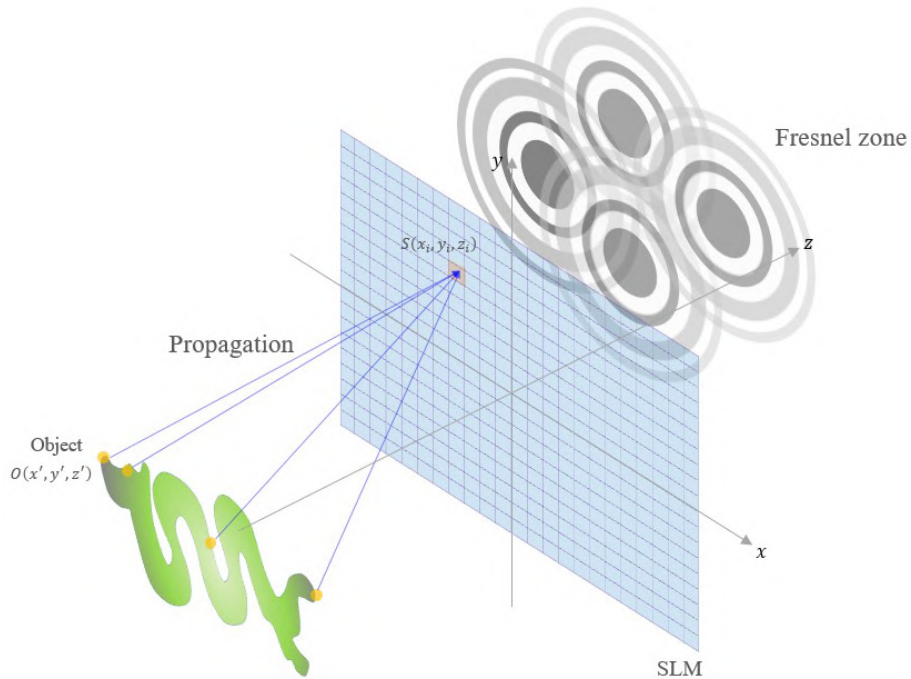


図3.7 SLM で 1 つのピクセルに複数の物体光の干渉

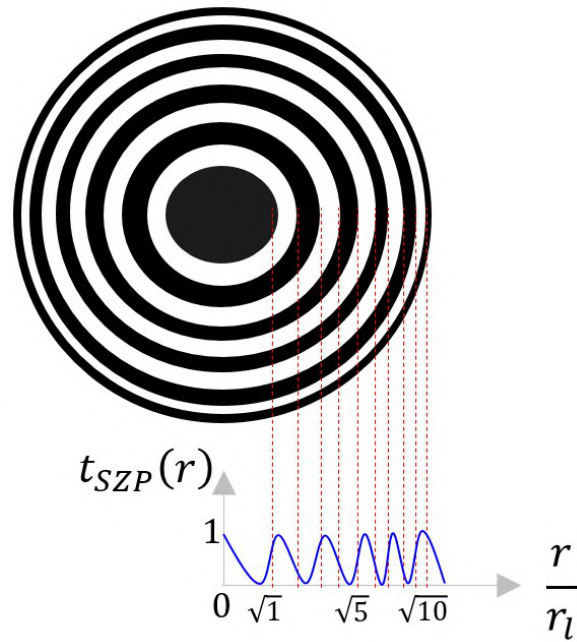


図3.8 Sinusoidal zone plate and its transmission function. Image redescribed from [17]

数成分の重ね合わせと見なすことができる．CGH によって干渉縞を生成する際、たとえ 1 万個の物体光が定義されている場合、すべてのピクセルにおいて 1 万個の空間周波数が

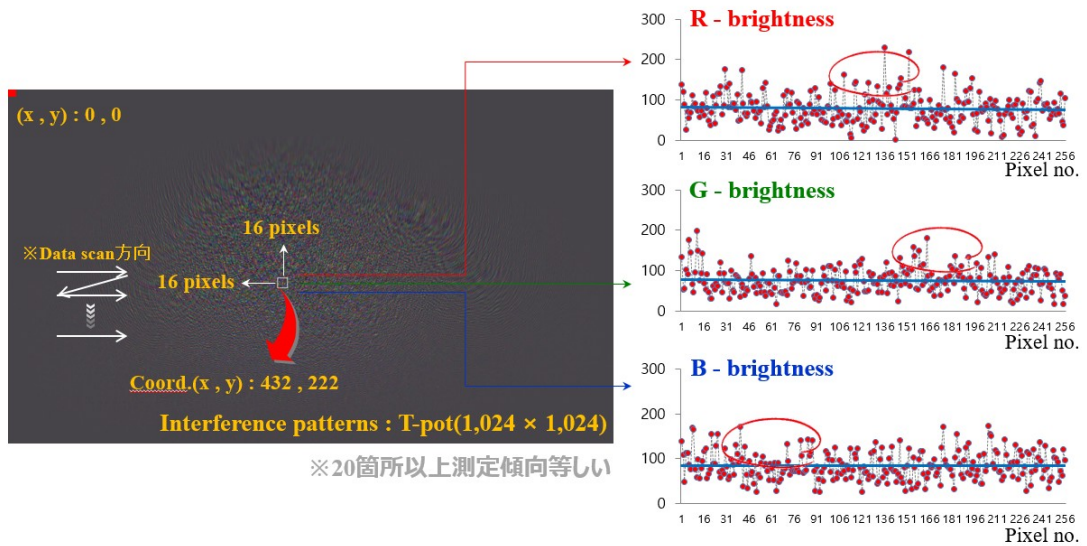


図3.9 干渉縞 (432,422) 座標におけるホログラムデータの変動性

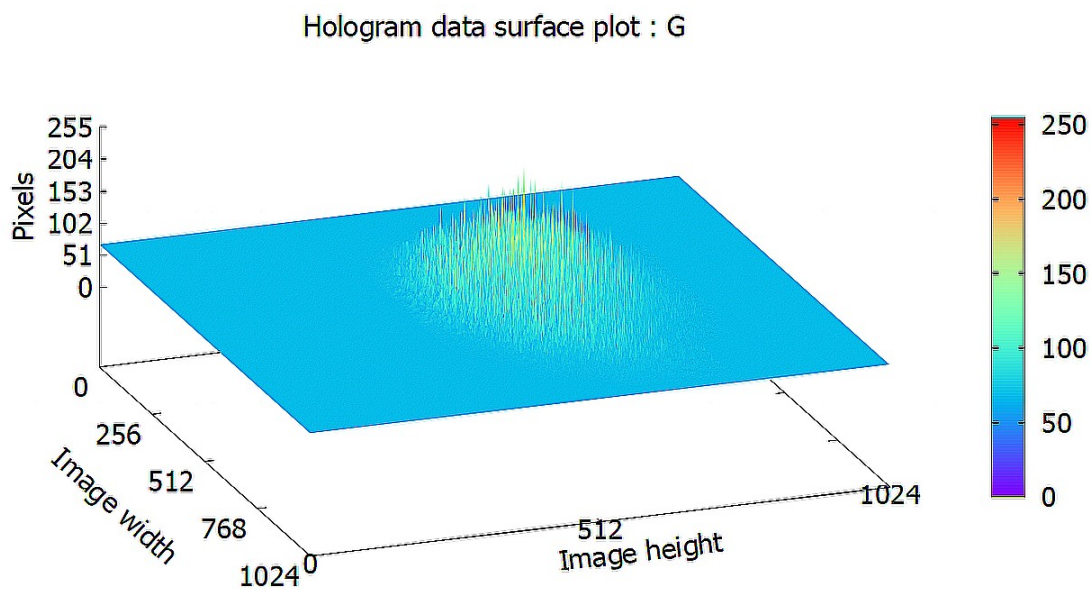


図3.10 ティーポット干渉縞の  $G$  チャンネルのサーフェスプロット

重ね合わされることになる．その結果、干渉縞の空間周波数成分の変化は非常に激しく現れる．図 3.9 に、ティーポット物体に対し、 $1024 \times 1024$  ピクセルのサイズ、 $R$ 、 $G$ 、 $B$  のフルカラーで生成された干渉縞のピクセルデータを示した．データは  $16 \times 16$  ブロックサイズでラスタースキャンにより取得された結果であり、20 か所をサンプルとしてデータを測定したところ、同様の結果が得られた．図 3.9 の結果から、2~4 ピクセルの周期で輝度値が激しく変化し、一定の幅で変化していないことがわかる．

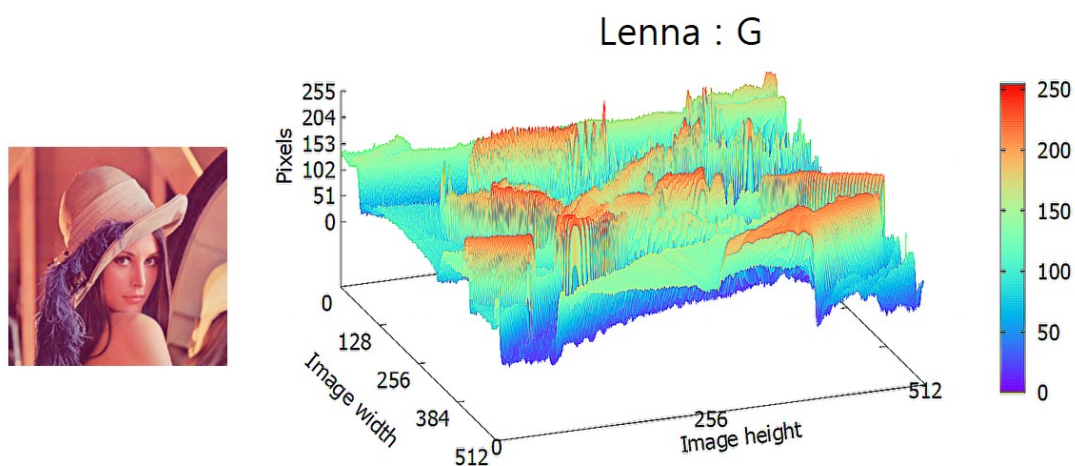


図3.11 Lenna 画像の  $G$  チャンネルのサーフェスプロット



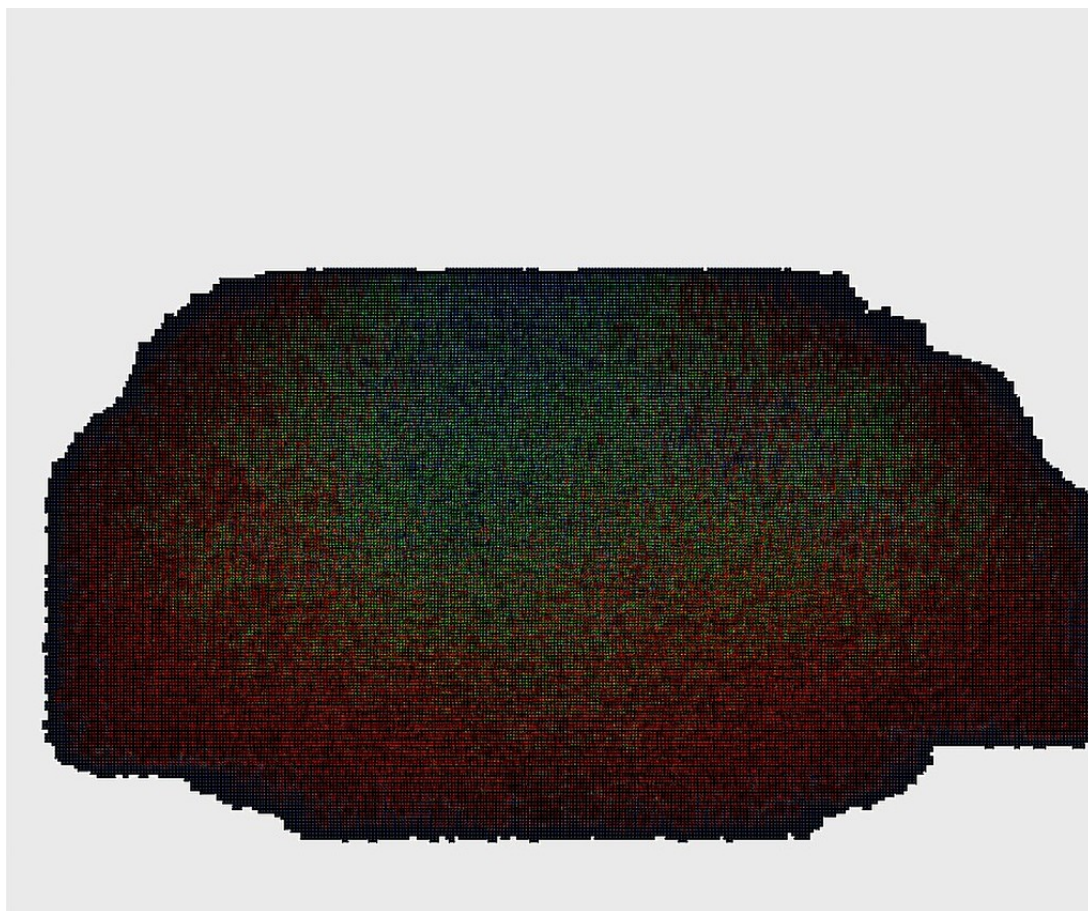


図3.12 ティーポッド干渉縞の  $G$  チャンネルの周波数成分

図 3.10 にはティーポッド干渉縞の  $G$  チャンネルに対するサーフェスプロットを示した。比較のため、2次元画像である Lenna の  $G$  チャンネルサーフェスプロットを図 3.11 に示した。図 3.10 で干渉縞が形成された領域において変動性が非常に大きいことが分かる。一方、Lenna 画像の場合、一部の境界領域にピクセルの変動があり、面積に応じた変動が存在することがわかる。そして、各面積内ではピクセルの変動幅が少なく、平坦な面で構成されていることがわかる。

図 3.12 に、ティーポッドの周波数解析結果を示した。周波数解析は、 $8 \times 8$  のブロックサイズに分割し、離散コサイン変換 (discrete cosine transform, DCT) を適用した。赤色は高周波数領域、緑色は中周波数領域、青色は低周波数領域を示している。サーフェスプロットでピクセルデータの変動性が大きいほど、干渉縞全体にわたって広範囲に高周波成分が分布していることがわかる。

したがって、1つのフリンジパターンは、補強干渉と相殺干渉が交互に現れる構造を持

ち、これらのパターンが不規則に重なることにより、干渉縞における空間周波数の変化が非常に激しくなる。この結果として、隣接するピクセル間におけるダイナミックレンジの差が大きくなり、干渉縞全体において高周波成分と低周波成分が混在する特徴が現れる。このようなデータ特性により、統計的モデルに基づく無損失圧縮アルゴリズムでは十分な圧縮効果を得ることができず、また、DCT に基づく JPEG アルゴリズムを用いて干渉縞全体に分布する高周波成分を除去した場合、物体を表現する精密なパターンが失われ、再生される物体の重要な情報を損なうことになる。このような干渉縞のデータ特性が、ホログラムの圧縮率の低下を引き起こす。

### 3.4 周波数制限

CGH によって干渉縞を生成するため、考慮しなければならない点がある。CGH では、干渉縞を SLM 上に生成し、SLM は連続的な空間ではなく、格子として離散化されている。一方で、干渉縞に用いられる物体光は球面波であり、光の位相と振幅は連続関数として表現される。このとき、式 (3.50) により、トランスミッション関数から Fresnel ゾーンの空間周波数は、波面が大きくなるにつれて高周波成分の空間周波数が現れる。したがって、限られたサイズの SLM 格子では Fresnel ゾーンが持つすべての空間周波数を表現することはできないため、Fresnel ゾーンの空間周波数を制限する必要がある。本節では、このような周波数制限の条件について説明する。

ホログラムは、物体光と参照光の干渉によって干渉縞が形成され、この干渉縞は格子としての役割を果たす。このとき、参照光は平面波であり、空間的に周期を持つ。したがって、この空間周期を利用して物体光の空間周波数を制限することができる。このため、参照光における空間周波数  $f$  と参照光の周期との関係を定義する必要がある。定義は、2.2 節で記述した式 (2.24) を用いる。式 (2.24) において初期位相  $\delta = 0$ 、振幅  $A = 1$  を代入し、位相を  $90^\circ$  シフトさせることで、次のように  $\cos$  関数で表すことができる。

$$f(x) = \cos(kx) = \cos\left(\frac{2\pi}{d}x\right) \quad (3.51)$$

ここで、 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  と定義され、 $\lambda$  の代わりに空間内で繰り返される信号の周期を  $d$  と表現する。したがって、周期的な信号  $f(x)$  に対して Fourier 変換を適用すると、次のよう



に表すことができる.

$$F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i2\pi f x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi}{d} x\right) e^{-i2\pi f x} dx \quad (3.52)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \left( e^{i\frac{2\pi}{d} x} + e^{-i\frac{2\pi}{d} x} \right) e^{-i2\pi f x} dx \quad (3.53)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left( e^{i\frac{2\pi}{d} x} e^{-i2\pi f x} + e^{-i\frac{2\pi}{d} x} e^{-i2\pi f x} \right) dx \quad (3.54)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(f-\frac{1}{d})x} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(f+\frac{1}{d})x} dx \quad (3.55)$$

$$\therefore F(f) = \frac{1}{2} \delta\left(f + \frac{1}{d}\right) + \frac{1}{2} \delta\left(f - \frac{1}{d}\right) \quad (3.56)$$

式 (3.56) から、 $f = \pm \frac{1}{d}$  となり、正の周波数と負の周波数が対称的な二つの周波数成分として現れる. この場合、正の成分を抽出すると、最終的に空間周波数と周期との関係を以下のように定義することが可能である.

$$f := \frac{1}{d} \quad (3.57)$$

ここで、干渉縞は参照光の空間的周期との位相差により形成されるため、参照光の周期  $d$  を格子間隔と見なし、次の回折格子方程式 (grating equation) から定義することができる.

$$d \sin \theta = m \lambda \quad (3.58)$$

$d$  は格子間隔、 $m$  は回折次数、 $\lambda$  は参照光の波長、 $\theta$  は回折角である. このとき、 $m=1$  の場合に強い補強干渉が生じるため、 $m=1$  とする. したがって、式 (3.58) で、 $\theta$  を  $\theta_{\max}$  にすることができ、次のように表される.

$$d = \frac{\lambda}{\sin \theta_{\max}} \quad (3.59)$$

ここで、図 3.13 に物体光と参照光の入射、および Fresnel ゾーンの空間周波数と Nyquist サンプルング周波数を示している. Nyquist 標本化定理により、最大空間周波数は次のように定義される.

$$f_{\max} \leq \frac{1}{2\Delta x} \quad (3.60)$$

サンプルング周波数は Fresnel ゾーンの空間周波数を表現するための周波数であり、SLM のピクセルピッチである  $\Delta x$  となる. したがって、Nyquist の定理により、2 倍の標

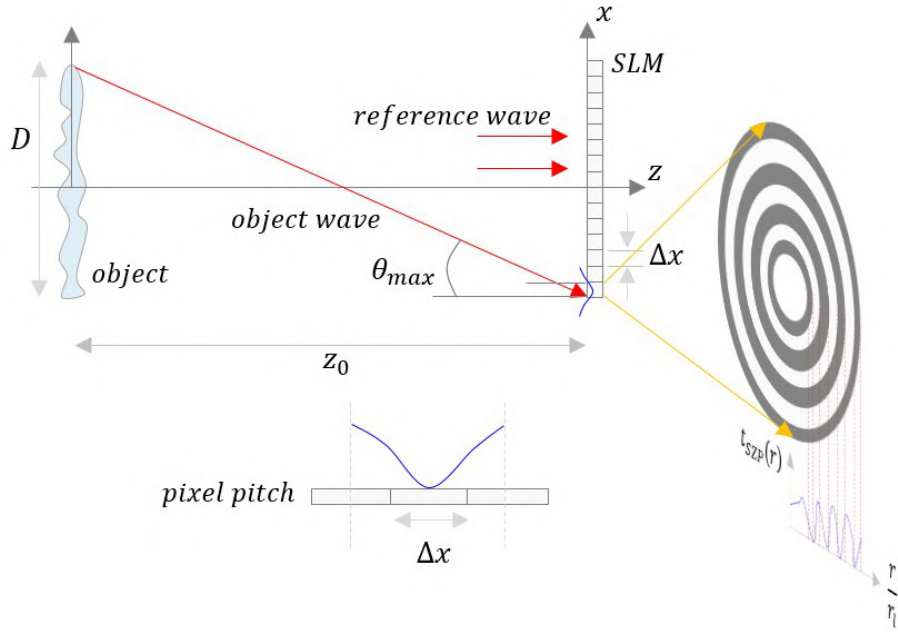


図3.13 物体光と参照光の入射および Fresnel ゾーンの時空間周波数と Nyquist サンプリング周波数

本化周波数を超えることはできない.

$$f_{\max} = \frac{1}{\frac{\lambda}{\sin \theta_{\max}}} \leq \frac{1}{2\Delta x} \quad (3.61)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta_{\max}}{\lambda} \leq \frac{1}{2\Delta x} \quad (3.62)$$

$\sin \theta_{\max} \leq 1$  であるため、 $\sin$  関数に対し、次のように Taylor 展開により近似可能である.

$$\sin \theta_{\max} \approx \theta_{\max} \quad (3.63)$$

$$\therefore \theta_{\max} \leq \frac{\lambda}{2\Delta x} \quad (3.64)$$

式 (3.64) の条件に基づいて干渉縞を生成する際、物体光の時空間周波数が制限される.

## 第 4 章

# 提案手法 1: 干渉縞の方向性に基づいた無損失圧縮

### 4.1 関連研究

デジタルホログラムの圧縮に関する研究は、1990 年代初頭から始まった。Yoshikawa らは、ホログラムを再生した際の解像度が human visual system (HVS) と比較して非常に高いことに着目し、HVS が高周波数の変化を認識しにくい特性を利用し、高周波数領域を除去することで解像度を減らす方法を提案した。この手法によりデータ量が減少しつつ、物体の重要な情報が保持され、大幅な劣化がないことを示した[18]。また、低解像度でホログラムを生成した後、bicubic interpolation を用いてホログラムの位相と振幅を滑らかに再構成する手法も提案した[19]。

Naughton と Javidi は、デジタルホログラフィーに基づく 3D オブジェクト表現にランダム位相マスクを適用した暗号化を試み、マスクを適用したホログラムに対して wavelet および JPEG を用いた圧縮を行った。提案手法は暗号化された状態でも 10:1 以上の圧縮率を達成し、圧縮から復元された再生像の解像度も認識可能な水準であることを示した[20]。また、Javidi らは、phase-shift hologram に対して 10:1 の圧縮率で損失圧縮を行い、損失した phase-shift hologram から再生像の物体が認識可能であることを検証した[21]。また、Tsang らは、ベクトル量子化 (vector quantization) を適用した損失圧縮アルゴリズムを提案し、1600:1 の高い圧縮率を達成した。しかし、スペckルノイズの発生に起因する深刻な画質劣化が観察された[22]。

最近では、JPEG アルゴリズムと deep learning を組み合わせた圧縮手法も一部提案されている[23, 24]。ここで使用されるホログラムは位相のみを記録するホログラ (phase-

only hologram) であり、振幅と位相を記録する干渉縞から振幅を除去することで一次的な圧縮効果を得ることができる。これに対し、JPEG アルゴリズムを用いて位相情報に対する損失圧縮を行った後、phase-MSE 関数が最小となるように学習させる。したがって、高い圧縮率を達成すると同時に、損失のある物体光の位相情報を補完することが可能となり、低画質の再生像の解像度を向上させた。

ホログラムの動画圧縮に関しても、いくつかの研究が提案されている。Kim らは、phase-only hologram に対して、high efficiency video coding(HEVC) アルゴリズムを適用する方法を提案した。HEVC の inter prediction の場合、phase-only hologram において、物体光の位相を  $-\pi$  から  $\pi$  に clamping した後、すべての物体光が伝搬および干渉で生成される干渉縞での位相値と予測値との差分を求め、それを residual として符号化した。Intra prediction の場合、フレーム間の位相値に対する residual を符号化することにより、全体の bit distortion rate を 63% まで減少させた[25]。Peter らは、ホログラムの動画圧縮が困難である根本的な問題を取り扱った。一般的な 2 次元映像の場合、物体の動きはピクセルの移動によって容易に予測できる。しかし、ホログラムでは物体の移動をピクセルの移動として予測することができない。これは、すべての物体点が伝搬および重ね合わせることで干渉縞が形成されるため、物体の移動はすべての物体点に影響があり、したがって、干渉縞の計算を再度行う必要がある。この問題を解決するため、angular spectrum 法を利用し、物体が移動する領域の予測値を生成することで、干渉縞全体を更新することなく動画圧縮コーデックを適用できるようにした[26]。現在、損失圧縮に関連して、2026 年を目標にホログラム圧縮の標準化が進行中である。国際標準化機構 (international standard organization, ISO) の working group1 では、2020 年の会議開始を皮切りに、Call for Evidence および Call for Proposal の段階を経て、現在 Final Draft の段階が進められている。

これまでホログラム圧縮に関する研究は主に損失圧縮を中心に進められてきた。ホログラムデータは二次元画像とは異なり、干渉縞全体に高周波成分が分布しているため、変換符号化手法によって高周波成分が削除されると、物体に関する重要な情報が失われ、その結果としてスペックルノイズの発生を引き起こす。

一般的に、二次元画像の場合、損失圧縮の適用による信号対雑音比 (peak signal-to-noise ratio, PSNR) が 40 dB 以上の画像については、観察者が元の画像と比較して大きな違いを認識できない。しかし、PSNR を 40 dB 以上に維持しつつ圧縮率を向上させることは容易ではない。さらに、PSNR に関して、わずかな PSNR の違いでも観察者によって認識される差が大きいことを示す研究も発表されている[27]。同様の視点から、損失圧縮法のアルゴリズムによって削除されるデータが異なるため、圧縮方法の違いによって発生す

るスペックルノイズの特性も異なる．まだこれらのスペックルノイズの多様な特性に関する十分な研究は行われていない．

しかし、損失圧縮と比較すると、無損失圧縮の手法についてはほとんど研究が進められていない[28, 29]．ホログラムデータのダイナミックレンジの大きさに加え、干渉縞全体に高周波成分が分布している特性が、無損失圧縮の効率を落とす要因となっている．それにもかかわらず、医学・科学[30, 31]に関連するホログラム生成の場合、画像の判読に影響を与える可能性があるため、無損失圧縮が必要な領域である．このような理由から、損失圧縮により圧縮率を 50% に削減した場合、PSNR は約 30~40dB の範囲を示し[32]、無損失圧縮手法はスペックルノイズが発生せず、損失圧縮と比較して圧縮率において顕著な差は見えない[33]．したがって、デジタルホログラフィにおける無損失圧縮の圧縮率向上に関する研究は重要であると判断される．本研究では、CGH によって計算された干渉縞の特性を活かし、無損失圧縮効率を高める方法を提案する．

## 4.2 提案手法

提案するアルゴリズムは、干渉縞上に存在する方向性を見つけ、その方向に沿ってスキャンしたデータに線形予測符号化を適用するものである．ここで、方向性は二つの意味で解釈可能である．一つ目は、干渉縞上に存在する方向性を特定することであり、もう一つは、ランダム性の強い領域において、エントロピーが最小となる方向を求め、ピクセルあたりの最小ビットを得ることである．このため、干渉縞の方向性に着目し、方向性が存在する場合、その方向に沿って隣接するピクセル間に高い相関があると考えられる．したがって、その方向に沿ってピクセル間の冗長性を除去することで、高い圧縮率の達成が可能

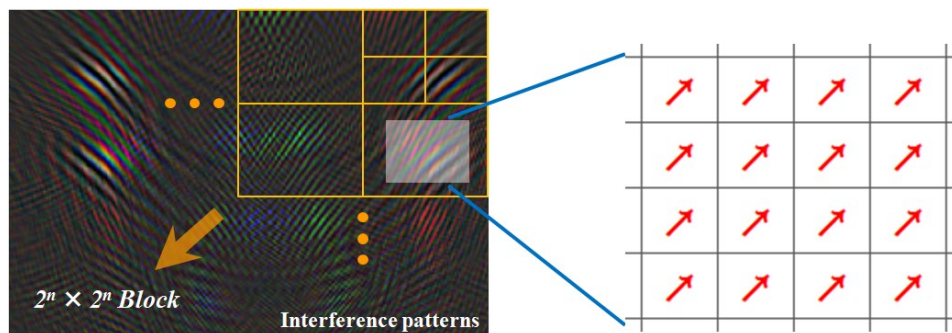


図4.1 干渉縞上に存在する方向性

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

であると仮定した。方向性を探するため、ブロックサイズ内に8つのスキャン方向を設定し、最小エントロピーを持つ方向をそのブロックを代表する方向に選択した。図 5.1 では、干渉縞に形成された方向を示している。また、ブロック内でスキャンしたデータの最小エントロピーによって決定された干渉縞の方向性が示している。

#### 4.2.1 方向性を探するための方向設定

図 4.2 に方向性を探するため、角度によるスキャン方向の設定を示した。まず、干渉縞を  $2^n \times 2^n$  ( $n = 2 : 8$ ) のブロックサイズに分割した後、図 4.2 のように角度により、各

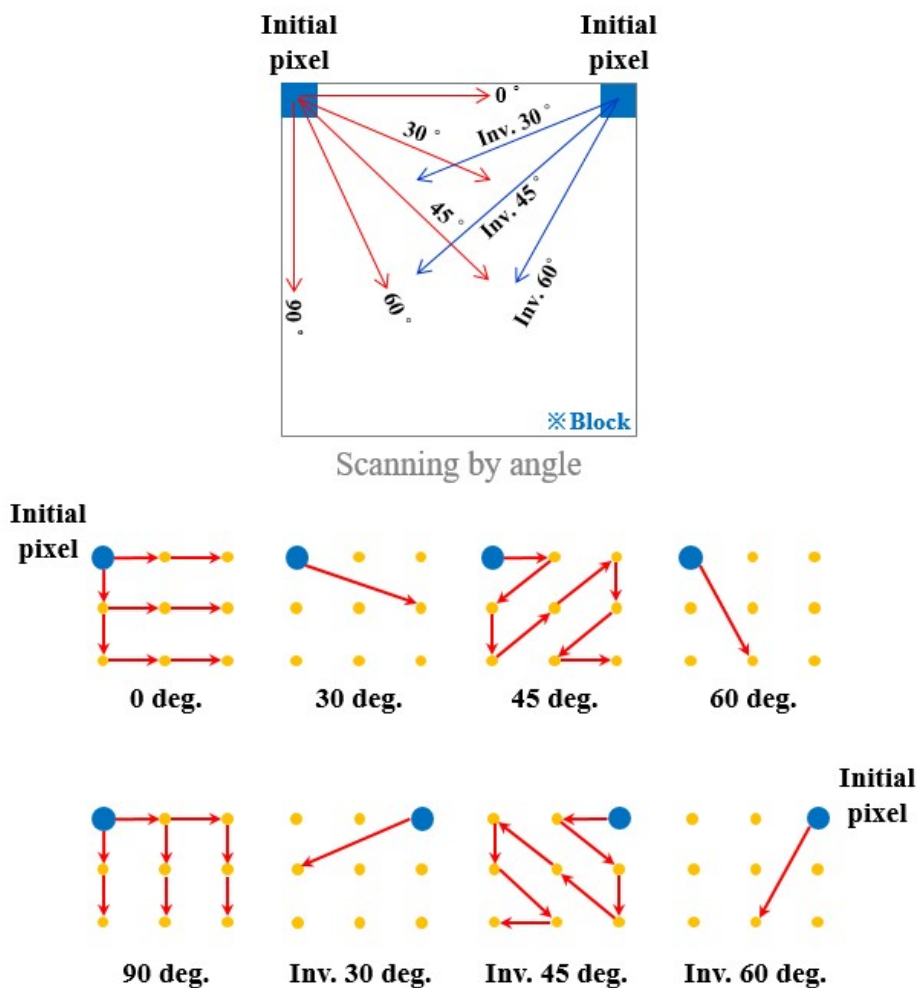


図4.2 角度による方向設定

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

ブロック内のピクセルをスキャンしながら、ピクセル間に差分符号化（differential pulse coding modulation, DPCM）を適用する．そして、8つの方向についてエントロピーを求めた後、それぞれのエントロピーの比較を通じて最小エントロピーを持つ方向を選択する．したがって、各ブロックごとに代表される方向は、それぞれ異なる．

本研究で、DPCMの適用目的は二つが存在する．一つ目は、DPCMアルゴリズムの効果の検証であり、二つ目は、2次および $n$ 次線形予測符号化を適用する方向を探すためである．すなわち、最小エントロピーを持つ方向に線形予測符号化を適用することにより、より高い予測正確度を実現できるためである．

#### 4.2.2 DPCM(differential pulse coding modulation)

DPCMは、基本的に音声圧縮のために設計された予測符号化手法であり、現在の信号と直前の信号の間の差分について量子化および符号化を行うことにより、差分符号化とも呼ばれる[34]．差分のみについて符号化を進めるため、より少ないbitを割り当てることができ、それによって、優れた圧縮率を得ることが可能である．本研究では、既に量子化されたホログラムイメージを使用するため、差分値についてのみ符号化を進める．DPCM

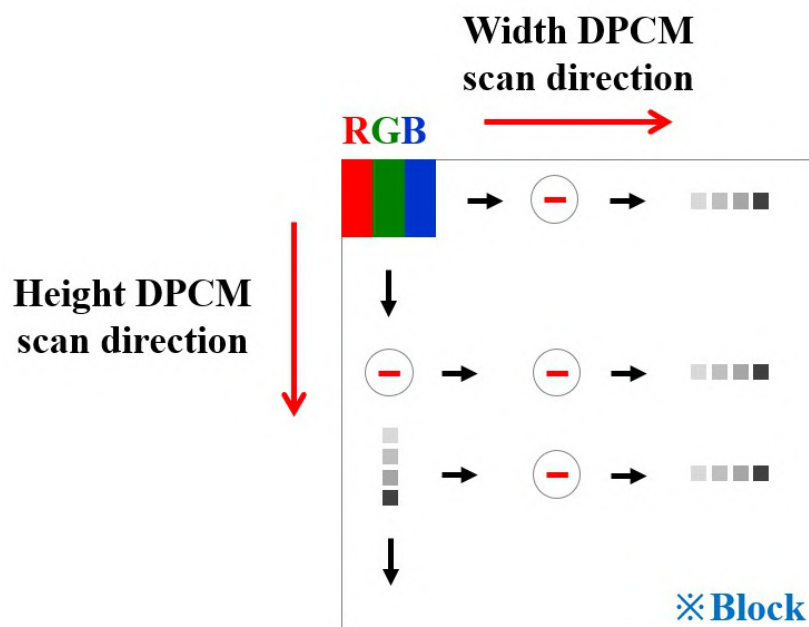


図4.3 0°でDPCMの適用例

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

の予測プロセスは、次の式によって行われる。

$$e_n = x_n - \tilde{y}_n = x_n - x_{n-1} \quad (4.1)$$

ここで、 $x_i$  は現在の信号、 $x_{i-1}$  は前の信号、 $\tilde{y}_i$  は予測値、 $e_i$  は現在の信号と前の信号の差分である。図 4.3 に、 $0^\circ$  で DPCM の適用例を示した。DPCM はピクセル間の冗長性を除去してダイナミックレンジを減らすことにより、優れた圧縮率を得ることが可能である。したがって、8 つのスキャン方向に沿い、DPCM の適用による冗長性除去およびエントロピー計算を通して最小エントロピーを持つ方向を選択する。

### 4.2.3 2 次線形予測手法

2 次線形予測手法は、DPCM を一層拡大させた方法で、 $a_n$  で  $n = 2$  の場合である。前の二つのピクセル値  $a_n$  から現在のピクセル値を予測する手法である。ここで、予測係数  $a_1$ 、 $a_2$  は、固定された値である。予測プロセスは、次の式によって行われる。

$$e_i = x_i - x_{i-1} \quad (4.2)$$

$$e_{i-1} = x_{i-1} - x_{i-2} \quad (4.3)$$

連続的な信号が完全な線形で近似させることができれば、次のように式を置くことが可能である。

$$e_i = e_{i-1} \quad (4.4)$$

$$x_i = \tilde{y}_i \quad (4.5)$$

$$\tilde{y}_i - x_{i-1} = x_{i-1} - x_{i-2} \quad (4.6)$$

$$\tilde{y}_i = 2x_{i-1} - x_{i-2} \quad (4.7)$$

$$\tilde{e}_i = x_i - \tilde{y}_i \quad (4.8)$$

したがって、次のような式を得ることができる。

$$\therefore \tilde{e}_i = x_i - (2x_{i-1} - x_{i-2}) \quad (4.9)$$

ここで、 $x_i$  は現在の信号、 $x_{i-1}$  は前の信号、 $\tilde{y}_i$  は予測値、 $\tilde{e}_i$  は現在の信号と予測値の差分である。予測係数二つについて、係数  $a_1 = 2$ 、 $a_2 = -1$  であり、予測プロセスは、4.2.1 節で説明した DPCM によって決定された方向について行われ、元のピクセル値と予測値の差分を求め、差分について符号化を行う。係数  $a_1$ 、 $a_2$  は固定型としてヘッダファイルに係数の記録が必要ではない利点があるが、係数が固定であるために予測が正確に行われない場合、圧縮性能が低下して圧縮されたファイルサイズが増加する問題が発生する欠点が存在する。



#### 4.2.4 $n$ 次線形予測手法

$n$  次の線形予測手法は、予測係数を  $a_n$  ( $n \in \{1:k\}, n, k \in \mathbb{Z}^+$ ) までに拡張して一般化させた方法である[35]。予測係数を求めるために必要な離散信号集合  $y_n$  は、4.2.1 節で DPCM によるブロック内の最小エントロピーを持つ方向のピクセルとなり、また、その方向に予測過程が行われる。予測係数の数  $n$  は、 $n \leq \frac{\text{block size}}{2}, n \in \mathbb{Z}^+$  に制限した。 $n > \frac{\text{block size}}{2}$  となる場合、全体の圧縮率と  $a_n$  の数とはトレードオフの関係にあるため、 $n$  が増加するほど記録すべき  $a_n$  の数も増加し、結果として全体の圧縮率は低下することになる。

そして、予測過程のため、 $a_n$  の数と原本ピクセル値  $y_n$  の数は、一致しなければならない。 $a_n$  数とそれに対応する  $y_n$  を掛け算することにより、 $y_{n+1}$  を予測するためである。また、 $a_n \in \mathbb{R}$  であり、それによる予測された値  $y_{n+1}$  も  $\mathbb{R}$  になる。

図 4.4 に予測についてのエンコーディング過程と、図 4.5 にデコーディング過程を示した。図 4.4 に予測係数の間に差分 (differential) を求める理由は、予測が終わった  $y_n$  は raw data として残っており、これは最後に Huffman coding を行う際、平均符号率を増加させる原因となるため、ピクセル間に差分を求めて冗長性を除去する。また、予測された値は実数であり、 $\mathbb{R} > *.5(\text{roundup})$ 、 $\mathbb{R} < *.5(\text{rounddown})$  によって量子化が行われ、最終的に定数型で作られる。ここで、量子化が行われても無損失圧縮になる理由は、ヘッダファイルに  $a_n$  と予測に使用された  $y_n$  が記録されるため、デコーディング過程でエンコーディング過程のような予測過程を行うことができる。したがって、元のピクセルに対する復元が可能となる。ここまで、 $n$  次線型予測手法の予測過程についての説明を行った。ここから線形予測に使用される  $a_n$  係数を求める方法について説明する。本研究では、 $a_n$  を Levinson-Durbin recursion に基づいて実装した[36, 37]。予測係数  $a_n$  を生成するために Yule-Walker 方程式に実装する場合、かなりの計算時間が必要になるため、Levinson-Durbin recursion を通じて計算時間を短縮することが可能である。予測係数  $a_n$  は、次のように求められる。

まず、元の離散信号集合  $\{y_n\}_{n \in [0, N]}$  を無限大に拡張した集合  $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  が存在すると仮定する。ここで、 $-\sum_{i=1}^k a_i y_{n-i}$  により、 $y_n$  に近似可能であり、また、 $y_n$  に近似する際、予測誤差を最小化させる線形予測係数  $\{a_i\}_{i \in [1, k]}$  を求めるとする。このため、least-squares error 方法により、費用関数  $E$  を、次のように定義する。

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( y_n - \left( -\sum_{i=1}^k a_i y_{n-i} \right) \right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( y_n + \sum_{i=1}^k a_i y_{n-i} \right)^2 \quad (4.10)$$

このとき、 $a_0 = 1$  に定義すると、 $E$  は、次のように単純化させることが可能である。

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^k a_i y_{n-i} \right)^2 \quad (4.11)$$

ここで、予測誤差を最小化させる線形予測係数  $\{a_i\}_{i \in [1, k]}$  を求めるため、次のように新しい変数  $j$  を導入し、各  $j$  につき、 $\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0$  となる最小値  $E$  を求めなければならない。

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 0, \text{ where } j \in [1, k] \quad (4.12)$$

したがって、式 (4.11) を式 (4.12) に代入して展開すると、次のように  $E$  の偏微分を求

#### $n$ th – order LPC ( $a_n$ ) encoding : example of $a_n(n = 4, a_n \in \mathbb{R})$

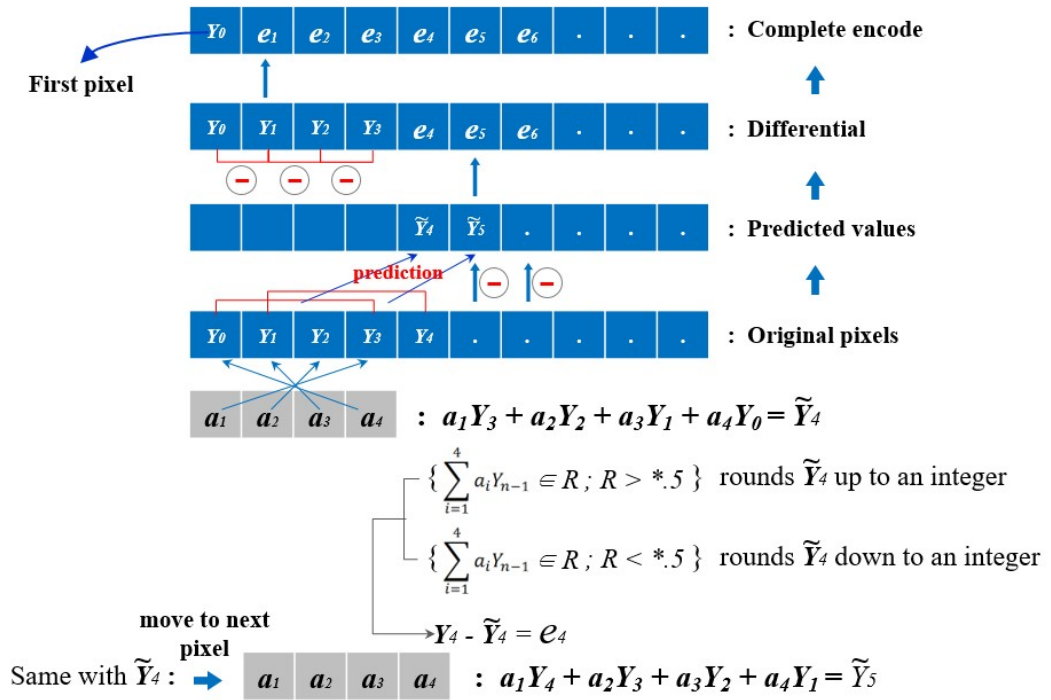


図4.4  $a_n(n = 4, a_n \in \mathbb{R})$  の場合のエンコーディング過程

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

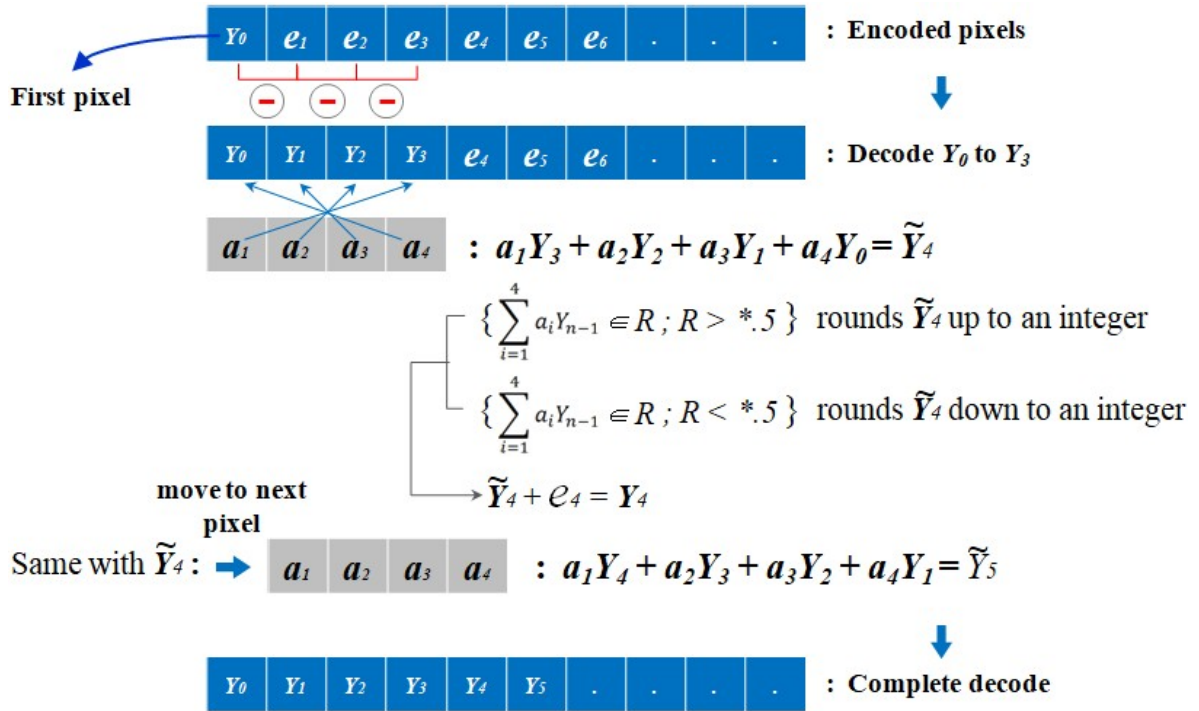


図4.5  $a_n (n = 4, a_n \in \mathbb{R})$  の場合のデコーディング過程

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{i=0}^k a_i y_{n-i} \right)^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a_j} \left( \sum_{i=0}^k a_i y_{n-i} \right)^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2y_{n-j} \left( \sum_{i=0}^k a_i y_{n-i} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

式 (4.13) で、 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} E$  範囲が無限大になっているが、ある点からすべて 0 となり、したがって、有限である。このとき、式 (4.13) は、次のように整理することができる。

$$\sum_{i=0}^k a_i \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_{n-j} y_{n-i} \right) = 0 \quad (4.14)$$

ここで、自己相関関数を導入し、次のように定義する。

$$R_l = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n y_{n+l} \quad (4.15)$$

式 (4.15) を式 (4.14) に適用することにより、次のように整理することができる。

$$\forall j \in [1, k], \quad \sum_{i=0}^k a_i R_{|j-i|} = 0 \quad (4.16)$$

したがって、式 (4.16) から、 $MA_k = 0$  のような行列の形に表現するのが可能である。

$$M = \begin{bmatrix} R_1 & R_0 & R_1 & \cdots & R_{k-2} & R_{k-1} \\ R_2 & R_1 & R_0 & \cdots & R_{k-3} & R_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R_{k-1} & R_{k-2} & R_{k-3} & \cdots & R_k & R_{k-1} \\ R_2 & R_1 & R_0 & \cdots & R_1 & R_0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A_k = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

式 (4.17) の行列から係数  $a_n$  を求めるため、Toeplitz 対称行列を作る必要がある。まず、行列  $M$  は  $k+1$  行と  $k$  列を持つため、 $MA_k = 0$  を次の行列の形に計算することができる。

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_{k-2} & R_{k-1} \\ R_1 & R_0 & \cdots & R_{k-3} & R_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R_{k-2} & R_{k-3} & \cdots & R_{k-1} & R_{k-2} \\ R_2 & R_1 & \cdots & R_1 & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_{k-1} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

式 (4.18) のような計算が可能な理由は、 $a_0 = 1$  であるためである。そこで、 $a_0$  を式 (4.18) の  $A_k$  に追加すると、 $A_k$  は、 $a_{0 \rightarrow k}$  になり、行列  $M$  は、 $R_{0 \rightarrow k}$  になる。したがって、 $MA_k = 0$  であるため、次のように、式を再定義することができる。

$$N_k = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_{k-2} & R_{k-1} \\ R_1 & R_0 & \cdots & R_{k-3} & R_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ R_{k-2} & R_{k-3} & \cdots & R_{k-1} & R_{k-2} \\ R_2 & R_1 & \cdots & R_1 & R_0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A_k = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$N_k A_k = \begin{bmatrix} E_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

式 (4.20) の行列  $N_k$  は Toeplitz 行列であり、Yule-Walker 方程式という。Yule-Walker 方程式は  $n$  次偏微分方程式であり、一般的な偏微分方程式の解法では解を求めることができない。本研究では、方程式の解を求めるとともに計算速度を考慮し、Levinson-Durbin recursion アルゴリズムを用いて解を導出する。

Levinson-Durbin 方法で式 (4.20) を解くため、 $a_0 = 1$  であるので、任意の  $E_k$  に対し、 $E_k = \sum_{i=0}^k a_i R_i$  に置くことができる。そのあと、 $A_k$  につき、 $k = 1$  の初期値を求めたうえで、 $k + 1$  に拡張し、最終的に線形係数  $A_k$  を得る。

1.  $k = 1$

$k = 1$  であるため、 $N_1 A_1 = \begin{bmatrix} E_1 \\ 0 \end{bmatrix}$  になる。また、 $N_1 = \begin{bmatrix} R_0 & R_1 \\ R_1 & R_0 \end{bmatrix}$  であり、 $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \end{bmatrix}$  になるため、 $N_1$  と  $A_1$  の二番目の行を掛け算することにより、次の式により  $a_1$  の計算ができる。

$$R_1 + R_0 a_1 = 0 \quad , \text{ where } R_0 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n^2 > 0 \quad (4.21)$$

式 (4.21) から、 $a_1 = -\frac{R_1}{R_0}$  になり、したがって、 $E_k = \sum_{i=0}^k a_i R_i$  に基づき、次のように  $E_1$  を求めるのができる。

$$E_1 = R_1 + R_0 a_1 \quad (4.22)$$

2.  $k + 1$

式 (4.20) は、次のような式 (4.23) に作ることが可能であり、式 (4.23) から、 $k \rightarrow k + 1$  に拡張し、 $N_k$  に行と列を 1 ラインを追加することにより、 $N_{k+1}$  を求めるとする。

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_k \\ R_1 & R_0 & \cdots & R_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_k & R_{k-1} & \cdots & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$N_k \rightarrow N_{k+1}$  に拡張することに伴い、 $A_k \rightarrow A_{k+1}$  についても拡張しなければならない。ここで、もし、 $MA_k = 0$  になる自明な解が存在することであれば、拡張された  $a_{k+1}$  を 0 にすることが可能である。したがって、式 (4.23) を次のように書き換えることができ、ここで、拡張された  $A_{k+1}$  をベクトル  $U_{k+1}$  として定義する。

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_{k+1} \\ R_1 & R_0 & \cdots & R_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k+1} & R_k & \cdots & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_{j=0}^k a_j R_{k+1-j} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Toeplitz 行列は対称行列であるため、 $U_{k+1}$  と  $N_{k+1}$  の最後の列との掛け算を計算することは、 $U_{k+1}$  の順序を逆にしたものと同等である。したがって、次のような行列になる。

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_{k+1} \\ R_1 & R_0 & \cdots & R_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k+1} & R_k & \cdots & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ a_k \\ \vdots \\ a_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^k a_j R_{k+1-j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ E_k \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

式 (4.25) から、ベクトル  $U_{k+1}$  を逆にした行列により、新しいベクトル  $V_{k+1}$  を定義することができる。したがって、 $A_{k+1} \neq 0$  のため、eigen value  $\lambda$  を導入することにより、拡張された  $A_{k+1}$  は、 $U_{k+1} + \lambda V_{k+1}$  の線形結合で表現することが可能である。それで、これまでの過程を整理し、 $E_k \rightarrow E_{k+1}$  に拡張された  $E_{k+1}$  は、 $N_{k+1}(U_{k+1} + \lambda V_{k+1})$  を計算することにより、次のように表現できる。

$$\begin{bmatrix} R_0 & R_1 & \cdots & R_{k+1} \\ R_1 & R_0 & \cdots & R_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{k+1} & R_k & \cdots & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 + \lambda a_k \\ \vdots \\ a_k + \lambda a_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_k + \lambda \sum_{j=0}^k a_j R_{k+1-j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_{j=0}^k a_j R_{k+1-j} + \lambda E_k \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

ここで、 $E_{k+1}$  は、 $\begin{bmatrix} E_{k+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$  のような形であり、この関係から、 $\sum_{j=0}^k a_j R_{k+1-j} + \lambda E_k = 0$  を満足させる eigen value  $\lambda$  を求めることができる。したがって、 $\lambda$  は次のように求める。

$$\lambda = \frac{-\sum_{j=0}^k a_j R_{k+1-j}}{E_k} \quad (4.27)$$

$A_{k+1}$  は、次のように求めることが可能であり、

$$A_{k+1} = U_{k+1} + \lambda V_{k+1} \quad (4.28)$$

最終的に、 $E_{k+1}$  は、次のように求められる．

$$E_{k+1} = E_k + \lambda \sum_{j=0}^k a_j R_{k+1-j} = (1 - \lambda^2) E_k \quad (4.29)$$

#### 4.2.5 アルゴリズムの全体過程

線形予測に基づき、全体圧縮過程を図 4.6 に示す．

- ステップ 1: 計算の利便性およびそれぞれの色平面で方向を探すため、ホログラムを R、G、そして B に分割する．
- ステップ 2: 周波数制限によって干渉縞に背景領域が発生する．したがって、背景領域を除いた干渉縞のみをクロッピングすることにより、圧縮効率を増加させることができ、デコーディング過程で除去した背景領域は復元させることが可能である．
- ステップ 3: 各ブロックで干渉縞の方向を探すため、 $4 \rightarrow 256$  のブロックサイズで干渉縞を分割する．
- ステップ 4: 8 つの方向にピクセルデータをスキャンしながら、DPCM を適用する．
- ステップ 5: 各スキャン方向についてエントロピーを計算する．
- ステップ 6: 計算されたエントロピーを比較して最も低いエントロピーを選択する．選択された方向が、そのブロックを代表する方向になる．
- ステップ 7:
  1. この段階では、各ブロックごとに決定された方向に対して DPCM の性能を検証するため、ステップ 8 を適用した後、符号化過程を行う．
  2. 1 のプロセスによって決定された方向につき、Levinson-Durbin recursion を適用して線形予測を行う．
- ステップ 8: 各ブロックには、デコーディング過程のため、最初のピクセルが raw data として残っている．このような raw data は、Huffman coding を行う際、圧縮率に影響を与えるため、DPCM を適用してピクセル間の冗長性を除去する．
- ステップ 9: すべての処理されたデータにつき、最終的に Huffman coding を行い、圧縮ファイルを生成する．このときの Huffman coding は、variable-length coding によって実装された．

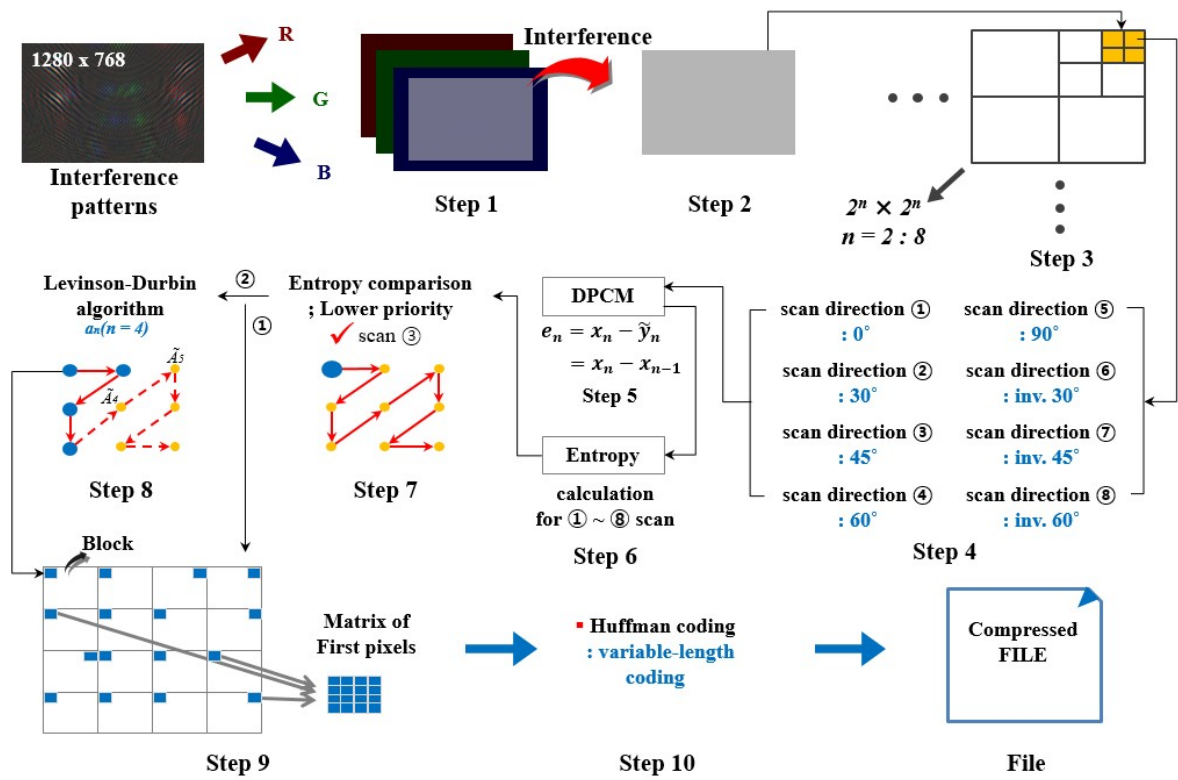


图4.6 全体压缩过程

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.



## 4.3 実験および結果

### 4.3.1 ホログラム生成

CGH において解決しなければならない問題の一つは、ホログラムに内在しているスペックルノイズの除去である。スペックルノイズの発生原因の中で一つは、広い範囲に渡って物体光を拡散させるため、物体光を計算する際、位相乱数 (randomness) を使用するためである。このような位相乱数の使用により、一点の物体光の位相と隣接した物体光の位相の間には相関が存在しないので、その結果、位相の急激な変化を発生させる。このような理由から、位相差をもつ物体光同士が複雑に干渉することで、生成されたホログラムを再生すると、点のようなスペックルが表示される。このようなスペックルノイズは、無損失圧縮アルゴリズムの効果を減少させ、また、ホログラムの画質を劣化させる。したがって、本研究では、スペックルノイズの発生原因を基盤に物体光を計算する際、位相乱数の調節を通じて 4 種類のホログラムを生成した[38]。ホログラムの物体光計算は点充填法を利用して計算し、計算する際の参照した再生装置のパラメータを図 4.7 に示した。生成された 4 種類のホログラムは以下の通りである。

- uniform random number(以下”uniformity”): 物体光を干渉させたとき、任意の位置である位相の発生確率が統計的に均一のように、位相乱数を調節したことを意味する。
- normal random number(以下”normal”): 任意の位置である位相の発生が、Gaussian 分布に従うように位相乱数を調節したことを意味する。
- brown noise(以下”brown”): 空間周波数  $f$  が  $\frac{1}{f^2}$  を従うようにし、スペクトル密度を持つように位相乱数を調節したことを意味する。
- pink noise(以下”pink”): 空間周波数  $f$  が  $\frac{1}{f}$  を従うように位相乱数を調節したことを意味する。

| Pixel pitch          | Lens focal length | Object depth | Wavelength of Red, Green, Blue |
|----------------------|-------------------|--------------|--------------------------------|
| 9.6 x 9.6[ $\mu m$ ] | 100[mm]           | 70[cm]       | 625, 525, 465[nm]              |

図4.7 再生装置パラメータ

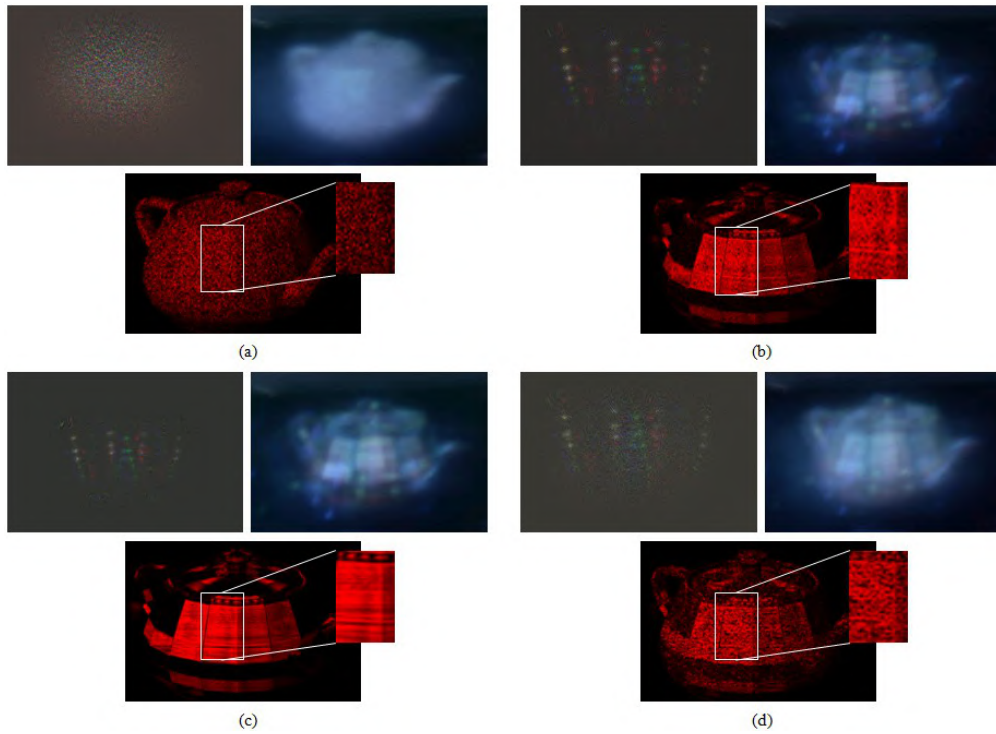


図4.8 干渉縞、再生像、そして、シミュレータによるノイズ:

(a) uniformity, (b) normal, (c) brown noise, and (d) pink noise

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

図 4.8 にそれぞれの干渉縞、再生像、そして、シミュレータ[39] を使用して拡大されたスペックルノイズを示した。また、4 種類のパログラムは、スペックルノイズの客観的評価基準である “speckle contrast” を導入し、評価した。Speckle contrast は 0 と 1 の間の値を持ち、1 に近づくほど、ノイズの影響がより大きくなることを意味する。各パログラムに対して計算された speckle contrast の数値は、それぞれ以下の通りである: (1) uniformity(0.85)、(2) normal(0.35)、(3) brown(0.18)、(4) pink(0.49)。

結果として、位相乱数調整によってスペックルノイズが減少され、また、隣接するピクセル間の相関度を高めることにより、干渉縞上に方向性が存在するパログラムを得ることができた。

### 4.3.2 実験結果

全体の圧縮結果を図 4.9 に示した。実験に使用したパログラムは 4 種類 (“uniformity”、“normal”、“brown”、“pink”) であり、パログラムのファイルサイズは 2.95MB、

| Kind<br>Info. |                         |                 |                      |                 |                 |
|---------------|-------------------------|-----------------|----------------------|-----------------|-----------------|
|               |                         | Uniformity      | Normal               | Brown           | Pink            |
|               | Best block(W x H)※      | 32 x 32         |                      |                 |                 |
| Previous      | 4 - directions(DPCM)    | 33.7% (995KB)   | 27.5% (810KB)        | 27.8% (819KB)   | 30.4% (896KB)   |
|               | 8 - directions(DPCM)    | 33.6% (990KB)   | <b>26.7% (787KB)</b> | 27.1% (799KB)   | 30.1% (888KB)   |
| Proposed      | 8 - directions( $a_2$ ) | 36.8% (1,085KB) | 29.5% (871KB)        | 29.9% (882KB)   | 33.2% (978KB)   |
|               | 8 - directions( $a_4$ ) | 34.4% (1,015KB) | 27.7% (818KB)        | 28.2% (831KB)   | 31.1% (917KB)   |
| Reference     | DPCM + Huff.            | 46.3% (1,366KB) | 39.5% (1,164KB)      | 49.8% (1,173KB) | 42.7% (1,259KB) |
|               | Huffman                 | 53.0% (1,562KB) | 45.3% (1,335KB)      | 45.6% (1,344KB) | 49.1% (1,449KB) |
|               | Run-length              | 50.3% (1,484KB) | 48.1% (1,417KB)      | 47.8% (1,409KB) | 48.8% (1,440KB) |

※ ‘Best block’ means the lowest result of any blocks

図4.9 全体圧縮結果

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

1280×768pixel、フルカラー（8bit×3）である．提案手法との比較のために Huffman 符号化、Run-length 符号化およびブロック分割をしていない raster scan のみを適用した DPCM 圧縮結果を挿入した．Huffman coding は、符号化過程のためにも使用されるが、一般的に無損失圧縮手法としても使用され、図 4.9 の”Reference” では無損失圧縮手法で使われた．また、8 つの方向と比較のため、4 つの方向（0°、45°、90°、Inv.45°）に対する圧縮結果を”Previous” に挿入した．そして、”Reference” には干渉縞の背景領域の除去をせずに、全体干渉縞について圧縮を行った．圧縮率の計算は次の式で定義し、パーセンテージが低いほど優れた結果を表す．

$$CR(\%) = \frac{\text{compressed}}{\text{uncompressed}} \times 100 \quad (4.30)$$

提案手法の圧縮率は、全体的に 27～36% の範囲で現れ、比較として挿入された他の無損失圧縮法よりも約 13～20% 減少したことがわかる．この結果として、方向性に基づいた無損失圧縮が、統計的な手法である Huffman coding あるいは DPCM より優れていることがわかる．

4 種類のホログラムで、normal の圧縮率が最も低く、優れた圧縮率の順で normal≈brown>pink>uniformity と現れた．Normal が最も低い理由は、位相乱数の調

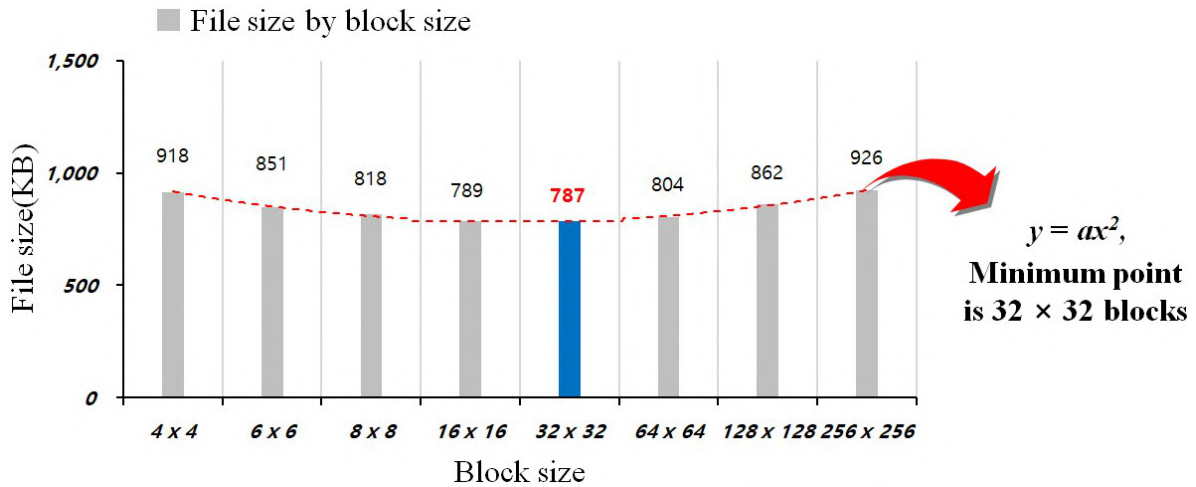


図4.10 ブロックサイズによる圧縮結果: normal

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

節により光が完全拡散されるのではなく、Gaussian 分布の特性を伴う位相を使用することにより、干渉縞上に明確な方向性が得ることができたためであり、uniformity は完全拡散されることによって圧縮率が相対的に高かった。

#### 実験結果 (1): ブロックサイズによる圧縮結果

図 4.10 に normal につき、ブロックサイズによる圧縮されたファイルサイズの結果を示した。圧縮結果は  $y = ax^2$  の曲線のような形で、32×32 ブロックで最小点を持つ。すなわち、32×32 ブロックで最も優秀な圧縮性能が表され、結果としてこのサイズでは、Fresnel ゾーンにおける方向性が最も明確に現れるためである。しかし、図 4.7 で CGH の生成条件を示したように、再生装置のピクセルピッチは固定された変数であり、焦点距離や奥行きは変更可能な変数である。それにより、変数が変わる場合、Fresnel ゾーンの大きさは変わり、方向性を最適に表すことができるブロックサイズも変わる。したがって、ブロックサイズは絶対的な結果ではなく、CGH 生成条件に依存する。

#### 実験結果 (2): 2 次および $n$ 次線形予測による圧縮結果

図 4.11 に normal の 32×32 ブロックに対して線形予測を適用した結果を示した。一つ目は、図 4.9 の”Proposed” で、4 種類の手続きに対し、係数  $a_2$  に対する結果が DPCM の結果より約 3% 程度高くなっていることがわかる。これは、 $a_2$  が固定された係数で、また、線形に基づいて手続を予測することに限界があることを示す。したが

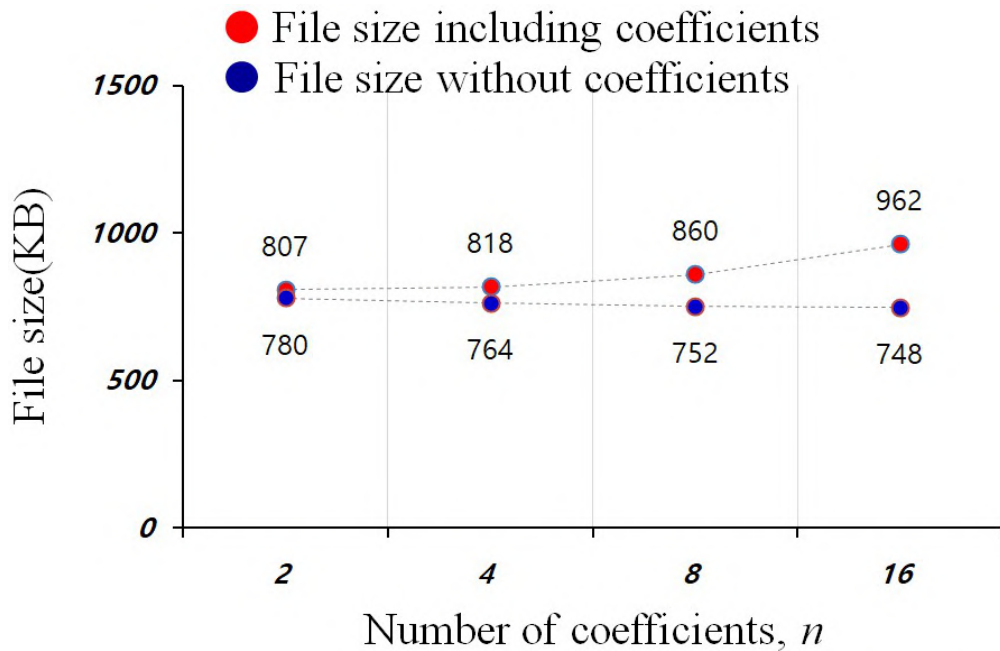


図4.11 線形予測を行った圧縮結果: normal

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

って、予測が正確に行われると、係数を記録する必要がなく、ホログラムの無損失圧縮手法として良い代案となることができるとは、結果的に適合な手法ではない。二つ目は、図 4.11 で、“File size without coefficients”の結果によると、 $n$ が増加すればするほど、図 4.11 の  $32 \times 32$  ブロックの圧縮率よりさらに減少することがわかる。しかし、無損失圧縮手法であるため、圧縮に使用した予測係数は記録しなければならない。したがって、図 4.11 の“File size including coefficients”の結果によると、係数を記録した全体圧縮ファイルは増加することによって、 $a_n$  係数の線形予測による圧縮効果が相殺されることがわかる。

### 実験結果 (3): 物体光の点光源数による圧縮結果

図 4.12 に uniformity の物体光の点光源の数による圧縮結果を示した。Uniformity を選択した理由は、光の完全拡散により干渉縞がランダム特性が強いので、高い圧縮効果を期待するのは難しい。したがって、点光源の数が少ないと、ランダム特性が落ちるので、点光源数の増加に伴う圧縮率の変化を確認するために uniformity を選択した。圧縮結果は、点光源の数が増加しても圧縮されたファイルサイズの大きな変化がないことが分かる。これにより、提案手法は、点光源の数に大きな影響を受けずに、したがって、圧縮率にお

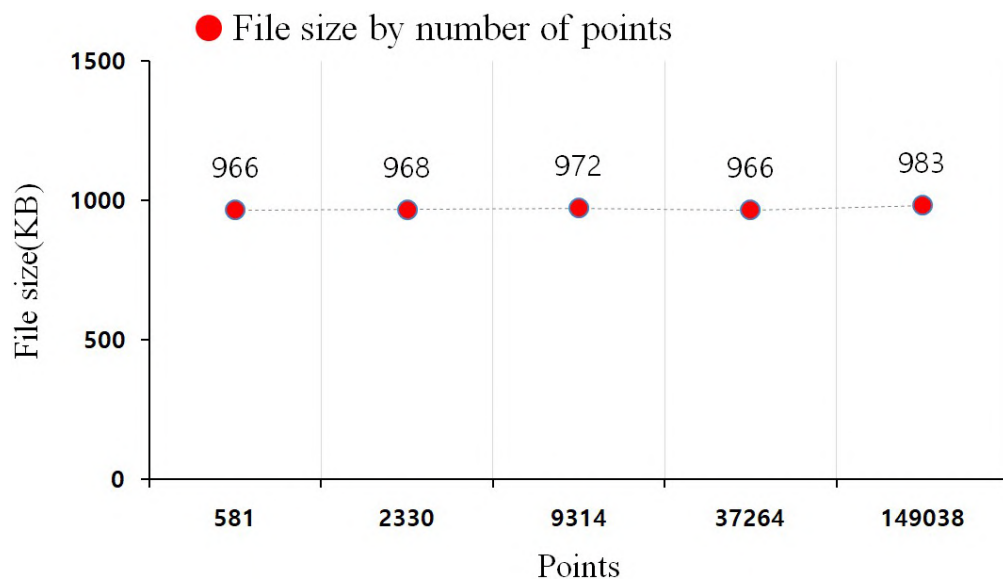


図4.12 物体光の点光源数による圧縮結果: uniformity

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

いて拡張的一般性を提供することができる。

実験結果 (4): 商業ソフトウェア評価による圧縮結果

図 4.13 は、normal について無損失圧縮と関連した商業ソフトウェアとの圧縮比較結

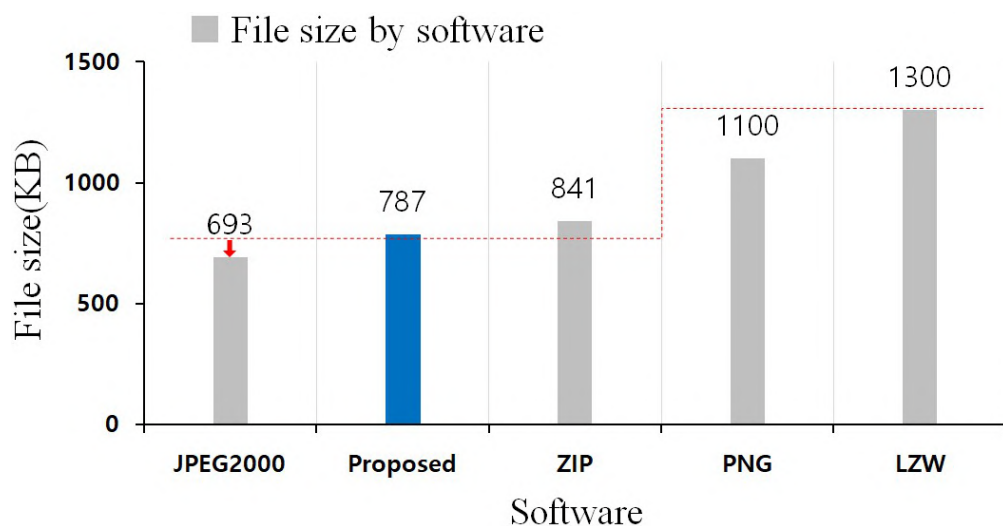


図4.13 商業ソフトウェア評価による圧縮結果: normal

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.



果を示しており、圧縮されたファイルのサイズが小さい順に JPEG2000 > Proposed > ZIP > PNG > LZW である．結果から、他のソフトウェアより優れた結果を示したが、JPEG2000 と約 90KB の差が存在する．しかし、JPEG2000 と単純なファイルサイズの比較よりデータを処理する圧縮アルゴリズムの観点から考える必要がある．JPEG2000 の場合、色空間の相関度およびブロック分割に最適化された EBCOT アルゴリズムが適用され、また、符号化のための bit-plane 基盤の 3 つのエントロピー符号化を行う．

一方、提案手法は、ホログラムの特性を生かした方向性に基づく予測符号化のみが適用されている．したがって、このような点を勘案した際、JPEG2000 と比べファイルサイズのわずかな差が存在するが、提案手法の性能向上の余地も十分にある．

#### 実験結果 (5): PSNR を測定した損失圧縮との比較

図 4.14 は、JPEG および JPEG2000 アルゴリズムを利用した損失圧縮結果と提案手法との比較結果を示す．PSNR は、元の画像信号  $I$  と損失アルゴリズムを適用した後、再生された信号  $R$  との間の mean-square error(MSE) を求め、 $\log$  関数の適用により、次のような式で定義される．

$$\text{PSNR} = 10 \cdot \log \left( \frac{I_{\max}^2}{\text{MSE}} \right) , \text{ where } \text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (I_i - R_i)^2 \quad (4.31)$$

ここで、 $I_{\max}$  は最大信号値 (8-bit の場合、255) を意味し、 $n$  は、 $I$  と  $R$  の最大ピクセル数を示す．提案手法は無損失圧縮であるため、MSE が 0 になる．損失圧縮で JPEG は、提案手法と比べ PSNR 49.0dB に約 70KB のファイルサイズの減少が行われた．また、

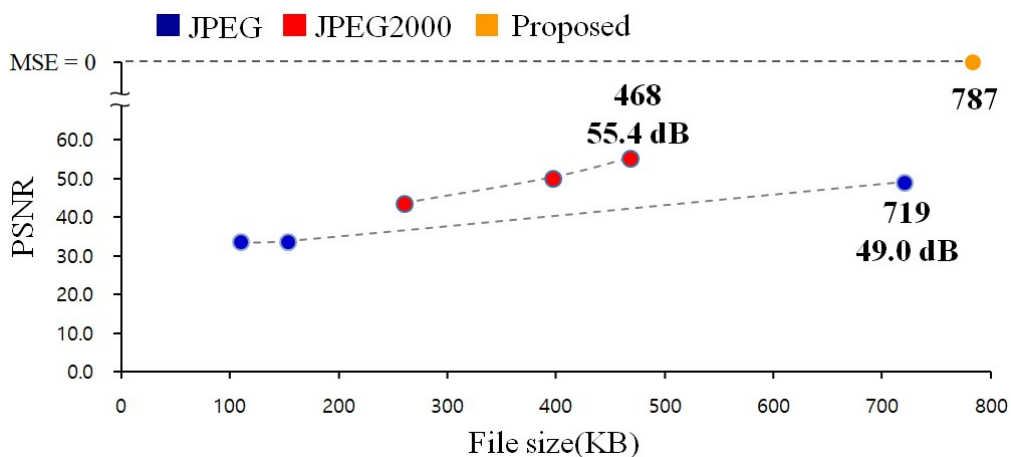


図4.14 PSNR を測定した損失圧縮との比較: normal

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

JPEG2000 の場合、PSNR 55.4dB に 300KB 程度減少した。PSNR 40dB 以上の観点から、PSNR に基づく損失圧縮の効率は優れているが、ホログラムで PSNR は絶対的基準ではなく、40dB 以上でも観察者によって影響が異なることを考慮すると、ホログラムを使用する前に使用目的を明確に定義する必要がある。また、損失圧縮とファイルサイズを比較すると、かなり大きな差は存在しないため、無損失圧縮が、効率向上によって有望になることが期待できる。

#### 実験結果 (6): 計算時間の測定

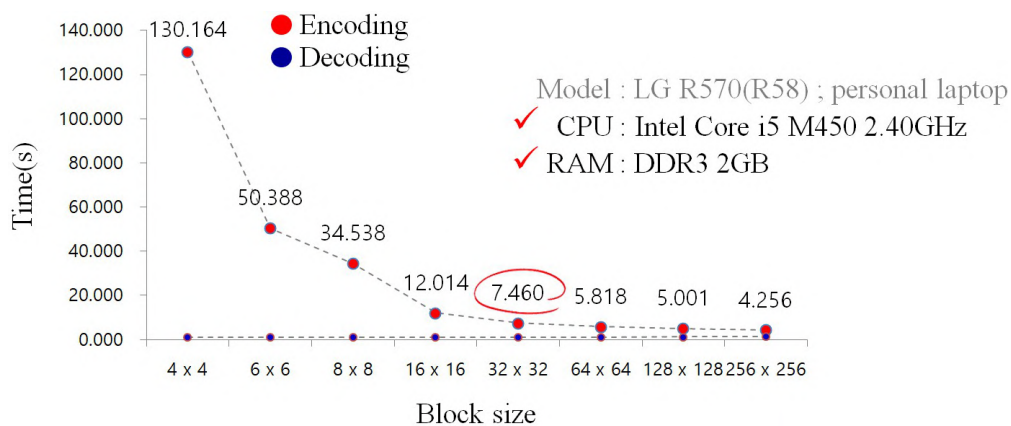


図4.15 計算時間および実験環境: normal

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2019, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

図 4.15 に normal でブロックサイズにより測定した計算時間を示した。実験環境は、Intel Core i5 2.40GHz CPU が搭載されたパーソナルノートパソコンを利用した。まず、すべてのブロックサイズに対するデコーディング時間は、0.8 1.2 秒の範囲に大きな差がない一方、エンコーディングの場合、ブロックサイズが小さいほど計算量が増加することにより、かなりの時間が測定され、ブロックサイズが大きくなるほど計算時間は減少される。32×32 ブロックの場合、約 7 秒程度の時間がかかった。

## 4.4 考察

本研究では、ホログラムの干渉縞上に存在する方向性に基づいて予測符号化手法を適用した無損失圧縮アルゴリズムを提案した。研究を行うにあたり、改善すべき部分について 5 つの項目にまとめた。

一つ目は、4 種類のホログラムで uniformity を除いた位相乱数の調節によるホログラ



ムについては、圧縮性能の向上の効果があつたが、光の完全拡散によるランダム領域が強い uniformity の場合、注目する程度の圧縮効果が表されなかつた。アルゴリズムの焦点が方向性基盤に合わせられていたため、ランダム領域に対する代案は必要であると判断される。今回の研究において、アルゴリズムの改善につき、ブロック分割を一定のブロックサイズに分割するより、quadtree 基盤のブロック分割を適用すれば、ランダム領域と方向性が存在するホログラム、両方でより向上された圧縮効果が得ることができると考えられる。

二つ目は、ホログラムにおいて予測性能の限界である。例えば、 $\sin$  あるいは  $\cos$  関数基盤のデータにおいて予測性能は誤差 0.01 以下であり、ほぼ完璧に近い予測正確度を示す。しかし、ホログラムデータを分析した結果、輝度値の変化が急激であり、さらにスペckルノイズのような周辺の輝度値と相関度を落とすデータが生成されれば、予測正確度に限界が存在すると判断される。したがって、このようなところにおいて、予測正確度を高めるため、変動があるデータ特性を反映した統計的分析から、予測係数をランダム性があるように選択し、その係数から予測を行うとより予測正確度を高めることが可能であると判断される。

三つ目は、予測係数の圧縮に関するものである。本実験では、予測係数の数を増やすことで予測精度が向上し、図 4.11 からファイルサイズの削減が確認できた。しかしながら、図 4.9 に示される全体的な圧縮結果では、係数を 4 つ用いた場合と DPCM の結果を比較すると、DPCM の方が圧縮後のファイルサイズが小さいことが分かった。これは無損失圧縮であるため、予測係数を保持する必要がある、その分ファイル全体のサイズが増加したことが原因である。したがって、予測係数を単純に保持するのではなく、圧縮して保存することで、全体のファイルサイズをさらに削減できると考えられる。

四つ目は、符号化効率を向上させる方法である。これに関連して、2 つの提案が可能である。第一は、CABAC (context-based adaptive binary arithmetic coding) を用いることで、残差 (residual) 値に対して、variable-length coding(VLE) と比較して約 10~15% の符号化効率の向上が見込まれる[40]。第二は、VLE の性能改善である。これに関連し、VLE に Partition Markov モデルを適用することで、符号化効率を約 10% 向上させることが可能である[41]。したがって、これらの手法により符号化効率をさらに高めることで、JPEG2000 と同等のファイルサイズが実現できると期待される。

五つ目は、計算時間である。今回の研究でリアルタイム基盤の圧縮を目的としていないため、符号化にかなりの時間が測定されたが、放送システムに使用されるためには、最終的に早い時間に圧縮されなければならない。そのため、コンピュータサイエンス基盤のデータストラクチャで性能向上に関するアルゴリズムの理解が必須であると考えられる。また、GPGPU を利用する方法なども必要と考えられる。

## 第 5 章

# 提案手法 2:CGH の解像度調整手法 および無損失圧縮の適用

### 5.1 関連研究

人間の目は垂直方向に約  $130^\circ$ 、水平方向に約  $165^\circ$  の範囲を視認することが可能であり[42]、人間の視覚システム (human visual system, HVS) における視覚的遅延許容閾値 (visual latency tolerance threshold) が約 13ms であることが示されている[43]。リアルタイムでレンダリングをして映像を表示する時間が遅延する場合、ユーザーの没入感が低下する可能性がある。しかし、現実的に限られたコンピュータリソースを使用してアーティファクトのない高品質のレンダリング画像を 13ms 以内にリアルタイムに生成することは困難であるため、HVS の特性を活用したフォビエイテッドレンダリング (foveated rendering) の技法が提案された。

HVS では、網膜の中心からの角度距離 (angular distance) に応じて約  $5^\circ$  の範囲が中心領域として定義される。このとき、中心領域にある物体は鮮明に認識されるが、 $5^\circ$  の範囲を超える周辺領域ではぼやけて認識される。この特性を利用する技法がフォビエイテッドレンダリングである。すなわち、中心領域には高解像度のレンダリング画像を生成し、周辺視野には低解像度の画像を生成することで、計算リソースを効率的に割り当てることができ、許容される 13ms のレイテンシ内でリアルタイムレンダリングが実現可能となった。ホログラムにおいてもフォビエイテッドレンダリング技術を適用することは、干渉縞の計算速度を向上させるために必要である。しかし、ホログラムへのフォビエイテッドレンダリング方法の適用に関する研究は初期段階であり、多くの研究は進められていないが、いくつかの研究について紹介する。

Lee らは、視線追跡を伴わない従来の最適化方式において発生する pupil swim による解像度低下問題を解決するため、フォビエイテッドレンダリングの概念を基に中心視野のみに重みを適用し、解像度が低下する範囲を周辺部に限定することで全体的な画質低下を最小限に抑えた。この方法によって生成されたホログラムを基に、OLED ベースの 2 レイヤースルー HMD を実現した[44]。Hakan らは、眼の回転中心 (瞳孔から約 13mm 後方の位置) を基準として高解像度ホログラムが常に整列するよう SLM を設計した。これにより、視線追跡装置 (pupil tracker) を用いてユーザーの眼の動きを検知し、注視する方向に応じて高解像度ホログラムコンテンツを動的に更新することで、中心領域に高解像度映像が継続的に保持されているような視覚的体験を提供した[45]。このとき、これらの研究[44, 45] では、高解像度および低解像度のホログラムを表示するため、2 つのディスプレイを使用する特徴がある。

Park らは、三角形メッシュに基づく CGH を利用し、低解像度から高解像度への progressive update 方法を提案した。この手法では、大きな三角形メッシュを利用して全体的に低解像度ホログラムを高速で生成し、視点が向けられている中心領域では、小さいメッシュを使用して密度を高め、高解像度のホログラムを生成している[46]。Kang らは、ユーザーの視線を追跡して中心領域と周辺領域を分けることで、中心領域では点光源の数を増加させて高解像度のホログラムを生成し、周辺領域では点光源の数を減少させて低解像度のホログラムを生成する方法を提案した。この方法により、全体の計算量を削減し、HMD でリアルタイム CGH 生成を可能にした[47]。Kim らは、ユーザーごとに中心視野の大きさが異なることに着目し、個別化されたパラメータを設定することでホログラムのレンダリングリソースを減らす方法を提案した[48]。

ルクセンブルクの SeeReal Technologies 社は、フォビエイテッドレンダリング技法と直接的な関連はないが、ホログラムのリアルタイム計算を可能にする方法を初めて提案した[49, 50]。SeeReal 社は、観察者の瞳孔に対応する仮想の小さな視野窓 (viewing window) を形成し、この領域に入る物体の点光源に対してのみホログラムを生成した。これにより、画面全体のホログラムを生成する場合より計算量が少なくなり、ホログラム画像の実時間生成が可能になった。この仮想の小さな視野窓を適用した技術は、サブホログラムと呼ばれる。

坂本らは、フーリエ変換光学系 (FTOS) に基づく CGH 計算方法を提案した。この方法では、サブホログラムのサイズが SeeReal で提案されたものより小さく、サブホログラムデータのサイズによって再生像の解像度が制御される。この結果、Fresnel ゾーン内で中央部と周辺部の空間解像度に違いが生じる。再生像は中心視野と周辺視野の解像度の違いを示し、Fresnel ゾーンは FTOS 内で空間周波数フィルターとして機能する。ただし、

提案された方法は FTOS ベースのシステムアーキテクチャに依存しているため、適用範囲は限定される[51, 52].

フォビエイテッドレンダリングを基盤とした損失圧縮方法も提案された. Yikai らは、JPEG 損失圧縮を基礎として、中心領域には低圧縮率を、周辺領域には高圧縮率を適用することで、全体のファイルサイズを約 1/40 まで削減した結果を報告した. この方法では、生成されたホログラムにおいて周辺領域の解像度を下げるため、nearest down-sampling 方法が適用された. この方法はダウンサンプリングをするため、四角形領域のみ設定可能である制約が存在し、解像度を下げる過程で物体の歪みが生じる可能性がある. また、解像度の精密な制御が難しい[53].

以上で、ホログラムにおけるフォビエイテッドレンダリングに関する研究内容を紹介したが、圧縮に関してはほとんど研究が進められていない. 膨大なホログラムデータと変動性の高いデータ特性を考慮すると、ホログラム圧縮のための新しい視点が必要となる. 以上の研究背景より、本研究ではフォビエイテッドレンダリングホログラムにおいて周辺領域の解像度を下げる方法を提案し、提案した方法を適用したホログラムに対して無損失圧縮率および解像度が低下したホログラムのデータ特性を調査した. 解像度調節方法は、Rayleigh 基準を利用して 2 つの点光源間の分解能を調節することでホログラム再生上の解像度を調節し、解像度を調節したホログラムに対して 5 種類の無損失圧縮アルゴリズムを適用し、圧縮率を調査した.

## 5.2 人間の視覚特性

効率的なレンダリングを行うため、HVS が物体を認識する過程を理解することが非常に重要である. 図 5.1 は眼球の解剖学的構造を示している. 眼球内部には外部から入る光を認識するための 2 種類の光受容体が存在する. 一つは桿体細胞 (rods) であり、もう一つは錐体細胞 (cones) である[54]. 錐体細胞は色に対して敏感に反応し、物体を明確に認識する. この特性により、明視環境 (photopic vision) のもとで色の区別能力を支援し、高い空間解像度を感じさせる役割を果たす. 一方、桿体細胞は暗視環境 (scotopic vision) 下で光の明るさの変化に敏感に反応するが、物体を明確に認識する空間解像度能力は非常に低い. このため、桿体細胞に基づく視覚は色の区別を行わず、主に暗視環境下での明るさの検知や瞬時に変化する動きを感知することに特化している. 錐体細胞の大部分は fovea に集中して分布しており、その数は約 4.6 百万個と推定される. 一方、桿体細胞は網膜全体に広範囲に分布しており、約 9200 万個と推定される. Fovea 以外の網膜全体に分布している錐体細胞の数は、わずか 120 万個程度しか存在しない[56].

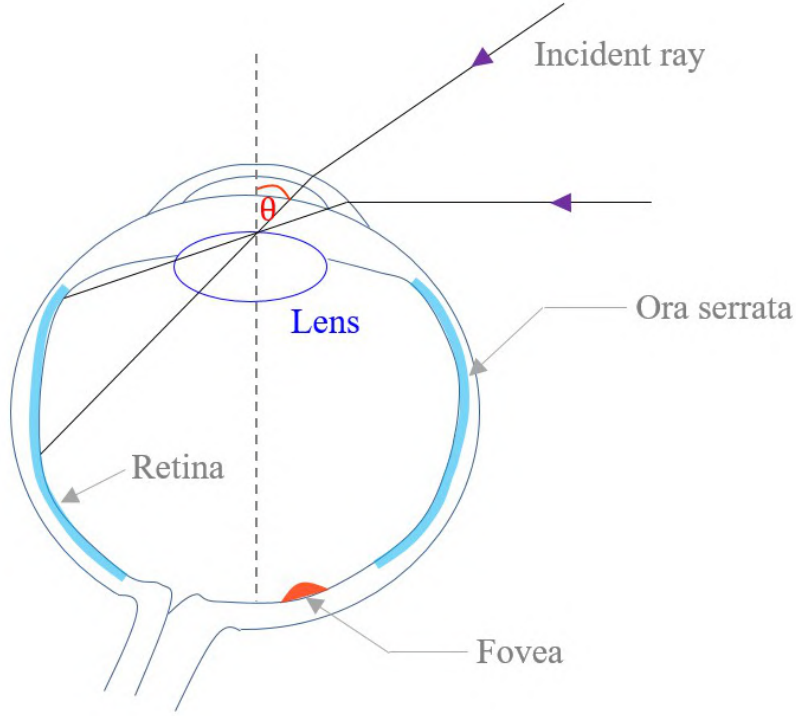


図5.1 Anatomy of human eyeball, redescribed from Tyler[55]

ここで、網膜における錐体細胞の密度分布を入射する光線の角度による関数として説明する Tyler モデルが存在する[55]。Tyler モデルでは、図 5.1 における入射光線の光路を次のように定義している。

$$x = 1 - w \cdot [1 - \cos(u \cdot \theta)] \quad (5.1)$$

ここで、 $w=0.19$  であり、 $u = \frac{\pi}{2}$  である。式 (5.1) は、入射光線の入射角に基づく光の経路を求める式である。また、定義された光の経路式を利用して、錐体細胞の分布を示す関数を次のように定義した。

$$d_c = \frac{Ax^2}{m_c \cdot (B + \theta)^{0.33}} \quad (5.2)$$

ここで、 $m_c = 1.25\mu/\text{deg}$  であり、 $B = 0.2\text{deg}$  である。 $A$  は瞳孔面積の比例定数を表す。したがって、密度関数  $d_c$  は、入射角  $\theta$  が小さいほど光がレンズを通過して fovea 付近に集中して入るようになり、fovea には錐体細胞が密集しているため、入射した光により物体を明確に認識することが可能になる。一方、入射角が大きくなると、光は網膜に向かうが、この領域には桿体細胞が広範囲に分布しているため、空間解像度を認識する能力が低下する。[55] によると、偏心率 (eccentricity) が  $0^\circ$  の場合、つまり瞳孔に垂直に入射

する光に対して錐体細胞の密度  $d_c$  は最大値となり、 $0^\circ$  から離れるほど錐体細胞の密度は減少する。  $0 \sim 20^\circ$  の範囲では  $-2/3$  の傾きで緩やかに減少するが、 $20^\circ$  以降は線形的な減少ではなく急激に錐体細胞の密度が減少する。 したがって、人間の目は偏心率が約  $5^\circ$  の範囲内で高い空間解像度を維持するため、この領域を中心領域と定義し、この範囲を超える領域を周辺領域と定義できる。 周辺部は空間解像度を認識する精度が中心部より低いため、画像の画質が低下しても画質の劣化を認識するのが難しい。 この原理を基盤として、フォビエイテッドレンダリングが可能になる。

## 5.3 提案手法

### 5.3.1 Rayleigh 基準

本研究で提案するフォビエイテッドレンダリングにおける周辺領域の解像度を調節する方法は、Rayleigh 基準の分解能限界式を基盤にしている。 Rayleigh 基準は、2つの点光源間の分解能を定義する式であり、円形スリットでの Fraunhofer 回折により導出される。 図 5.2 に円形スリットでの Fraunhofer 回折が示されている。 この場合、円形スリットが存在し、スリットに平面波が入射した後、回折された光が点  $P$  の位置に到達した際の波動場を求める必要がある。 波動場を求める式は、2.5.2 節での式 (2.142) の Fresnel-Kirchhoff

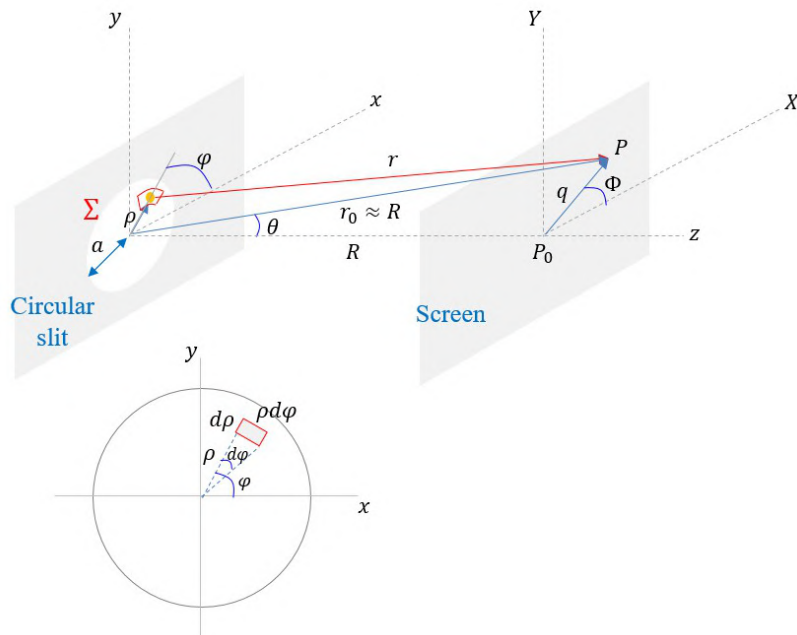


図5.2 円形スリットでの Fraunhofer 回折

回折式を用いて計算することができる．式 (2.142) は以下のように定義される．

$$U_P = \frac{\xi_L}{R} \int_{\Sigma} e^{ikr} dA \quad , \text{ where } \xi_L = -\frac{i}{\lambda} K(\theta) \tilde{U}(Q) \quad (5.3)$$

ここで、図 5.2 の円形スリットを四角形スリットと仮定し、式 (5.3) での距離  $r$  を Taylor 展開で近似すると、次のような式を得ることができる．

$$U_P = \frac{\xi_L}{R} e^{ikR} \int_{\Sigma} e^{-ik \frac{(Xx+Yy)}{R}} dx dy \quad (5.4)$$

式 (5.4) の  $x, y$  は四角形スリットの横幅と縦幅を示し、 $X, Y$  は回折により波動場が形成される領域の横幅と縦幅をそれぞれ示す．このとき、 $x, y, X, Y$ 、そして円形スリットの微小面積  $dA$  を球面座標系の変数として表現することで、円形スリットにおける波動場  $U_P$  を求めることができる．それぞれを球面座標系で表すと、次のように記述される．

$$x = \rho \cos \phi \quad (5.5)$$

$$y = \rho \sin \phi \quad (5.6)$$

$$X = q \cos \Phi \quad (5.7)$$

$$Y = q \sin \Phi \quad (5.8)$$

$$dA = \rho d\rho d\phi \quad (5.9)$$

$x, y, X, Y$  を  $Xx + Yy$  に代入して整理すると、次のように書ける．

$$Xx + Yy = \rho \cos \phi q \cos \Phi + \rho \sin \phi q \sin \Phi \quad (5.10)$$

$$= \rho q (\cos \phi \cos \Phi + \sin \phi \sin \Phi) \quad (5.11)$$

$$= \rho q \cos(\phi - \Phi) \quad (5.12)$$

ここで、円形スリットは方位角対称性を満たしているため、回折した光は  $\Phi$  に依存しない．このため、 $\Phi = 0$  とすることができる．したがって、式 (5.12) は、次のようになる．

$$Xx + Yy = \rho q \cos \phi \quad (5.13)$$

式 (5.9) と式 (5.14) を式 (5.4) に代入して次のように展開できる．

$$U_P = \frac{\xi_L}{R} e^{ikR} \int_{\Sigma} e^{-ik \frac{\rho q \cos \phi}{R}} \rho d\rho d\phi \quad (5.14)$$

$$= \frac{\xi_L}{R} e^{ikR} \int_0^{2\pi} \int_0^a e^{-ik \frac{\rho q \cos \phi}{R}} \rho d\rho d\phi \quad (5.15)$$

このとき、積分関数が連続関数である場合、Fubini 定理により、積分を次のように分けることができる。

$$U_P = \frac{\xi_L}{R} e^{ikR} \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{-ik \frac{\rho q \cos \phi}{R}} d\phi \quad (5.16)$$

ここで、積分内の定数を次のように定義する。

$$u \equiv \frac{kq}{R} \rho = c\rho \quad (c = \frac{kq}{R}) \quad (5.17)$$

式 (5.17) を式 (5.16) に代入すると、次のようになる。

$$U_P = \frac{\xi_L}{R} e^{ikR} \int_0^a \rho d\rho \int_0^{2\pi} e^{-iu \cos \phi} d\phi \quad (5.18)$$

式 (5.18) を解くため、Bessel 関数を導入し、Bessel 関数が  $n = 0$  の場合として積分を定義することができ、次のように記述される。

$$J_{n=0}(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iu \cos \phi} d\phi \quad (5.19)$$

$2\pi J_{n=0}(u)$  を式 (5.18) に代入して積分を整理すると、次の結果が得られる。

$$U_P = \frac{\xi_L}{R} e^{ikR} \int_0^a 2\pi \rho J_{n=0}(u) d\rho \quad (5.20)$$

$$= 2\pi \frac{\xi_L}{R} e^{ikR} \int_0^a J_0(c\rho) \rho d\rho \quad (5.21)$$

$$= K \int_0^a \rho J_0(c\rho) d\rho \quad , \text{ where } K \equiv 2\pi \frac{\xi_L}{R} e^{ikR} \quad (5.22)$$

式 (5.22) は Bessel 積分であり、この積分は次の Bessel 回帰関係式 (Bessel recurrence relations) を利用して解くことができる。

$$\frac{d}{du} [u^n J_n(u)] = u^n J_{n-1}(u) \quad (5.23)$$

式 (5.23) に  $n = 1$  を代入して解くと、次の結果が得られる。

$$\int_0^a \rho J_0(c\rho) d\rho = \frac{a}{c} J_1(ca) = \frac{a^2 J_1(ca)}{ca} \quad (5.24)$$



式 (5.24) を式 (5.20) に代入し、最終的に、波動場  $U_P$  を得ることができる。

$$U_P = \frac{A\xi_L}{R} e^{ikR} \frac{2J_1\left(\frac{akq}{R}\right)}{\frac{akq}{R}} \quad (5.25)$$

$$= 2\pi a^2 \frac{\xi_L}{R} e^{ikR} \frac{J_1\left(\frac{akq}{R}\right)}{\frac{akq}{R}} \quad (5.26)$$

$$= \frac{A\xi_L}{R} e^{ikR} \frac{2J_1\left(\frac{akq}{R}\right)}{\frac{akq}{R}} \quad (5.27)$$

ここで、定数を次のように定義する。

$$u \equiv \frac{akq}{R} \quad (5.28)$$

$$\therefore U_P = \frac{A\xi_L}{R} \frac{2J_1(u)}{u} e^{ikR} \quad (5.29)$$

式 (5.29) は、円形スリットで回折された光の波動分布を表す式である。この波動分布のエネルギー強度は、次のように求めることができる。

$$I = \langle U_P(\vec{r}) U_P^*(\vec{r}) \rangle \quad (5.30)$$

$$= \left\langle \frac{A\xi_L}{R} \frac{2J_1(u)}{u} e^{ikR} \left( \frac{A\xi_L}{R} \frac{2J_1(u)}{u} e^{ikR} \right)^* \right\rangle \quad (5.31)$$

$$= \left\langle \frac{A\xi_L}{R} \frac{2J_1(u)}{u} e^{ikR} \frac{A\xi_L}{R} \frac{2J_1(u)}{u} e^{-ikR} \right\rangle \quad (5.32)$$

$$= \left\langle \left( \frac{A\xi_L}{R} \right)^2 \left( \frac{2J_1(u)}{u} \right)^2 e^{ikR} \cdot e^{-ikR} \right\rangle \quad (5.33)$$

$$= \left( \frac{A\xi_L}{R} \right)^2 \left( \frac{2J_1(u)}{u} \right)^2 \quad (5.34)$$

$$\therefore I(u) = \left( \frac{A\xi_L}{R} \right)^2 \left( \frac{2J_1(u)}{u} \right)^2 \quad (5.35)$$

ここで、 $A = \pi a^2$  であり、 $\xi_L$  は振幅、 $R$  はスリットとスクリーン間の距離を表す。 $J_1(u)$  は、第 1 種の Bessel 関数であり、 $J_1(u)$  を  $u$  の関数としてグラフに表すと、図 5.3 のようになる。図 5.3 のグラフは 0 に収束していき、 $J_1(u)$  に従って強度  $I(u)$  も同様の形状を示す。したがって、 $J_1(u)$  のグラフに従い、エネルギー強度  $I(u)$  は正と負が繰り返され、この強度の変化によって現れる干渉縞が図 5.3 に示されたフリンジパターンである。

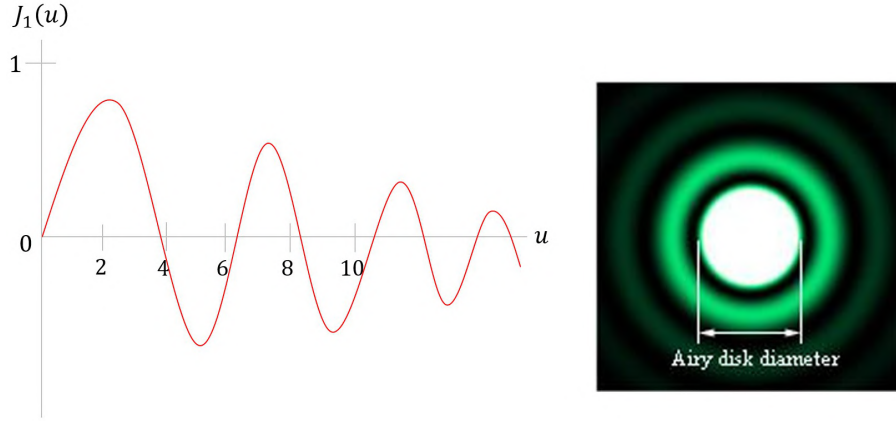


図5.3  $n = 1$  の Bessel 関数のグラフとエネルギー強度  $I(u)$  を表すフリンジパターン

このとき、グラフ上で  $J_1(u) = 0$  となる最初の  $u$  の値は約 3.83 であり、最初の正の領域がフリンジパターンの中で最も広い中心領域となる．この領域はエアリーディスク (Airy disk) と呼ばれる．したがって、式 (5.17) で定義された  $u$  からエアリーディスクの半径を求めることができ、 $u = 3.83$  を代入して展開すると、次の結果が得られる．

$$u = \frac{akq_1}{R} = 3.83 \quad (5.36)$$

$$q_1 = \frac{3.83R}{a \frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{3.83}{2\pi} \frac{R\lambda}{a} = \frac{3.83}{\pi} \frac{R\lambda}{2a} = 1.22 \frac{R\lambda}{D} \quad (5.37)$$

ここで、 $q_1$  はフリンジパターンにおける最初の円盤の半径を意味し、 $D = 2a$  は円盤の直径を表す． $\frac{3.83}{\pi} \approx 1.22$  と近似され、式 (5.37) が得られる．このとき、円形スリットをレンズに置き換えたと仮定すると、距離  $R$  は焦点距離  $f$  とみなすことができ、式は次のように表される．

$$R \approx f \implies q_1 = 1.22 \frac{\lambda}{D} f \quad (5.38)$$

$$\sin \theta = \frac{q_1}{f} = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (5.39)$$

このとき、Fraunhofer 回折は伝搬距離が非常に長い場合を扱うため、 $\sin \theta$  において  $\theta$  は非常に小さくなり、Taylor 展開により次のように近似することができる．

$$\sin \theta \approx \theta \quad (5.40)$$

$$\therefore \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (5.41)$$

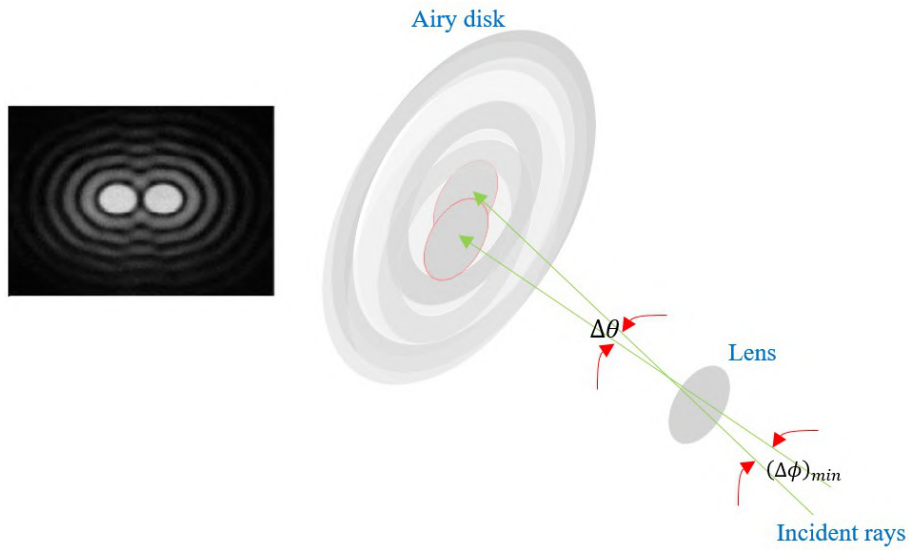


図5.4  $\Delta\phi$  の角度で入射した 2 つの光がレンズによって分離されたエアリーディスク

式 (5.41) で  $\lambda$  は光の波長を表し、この式を Rayleigh 基準と呼ぶ。図 5.4 に分離されたエアリーディスクの様子が示されている。Rayleigh 基準では、式の展開過程において円形スリットをレンズと仮定しているため、このとき、レンズに入射する 2 つの物体光のみを考慮すると、これらの光が  $(\Delta\phi)_{\min}$  の角度で入射した場合、入射光はレンズで回折され、 $\theta$  の角度で伝搬することになる。したがって、両方の光のエアリーディスクは  $\theta$  の角度を持つことになり、このとき Rayleigh 基準は、入射した 2 つの光を識別できる最小角度の基準を示すものである。すなわち、 $(\Delta\phi)_{\min} \gg \Delta\theta$  の場合、2 つのエアリーディスクは分離され、2 つの物体光を明確に識別することができる。一方、 $(\Delta\phi)_{\min} \ll \Delta\theta$  の場合、2 つのエアリーディスクは重なり、識別が不可能となる。

### 5.3.2 解像度調節アルゴリズム

提案するホログラム再生の解像度調節方法は、5.3.1 節で説明した Rayleigh 基準式を利用し、2 点間の分解能距離を調節することで解像度を制御するものである。分解能調節の核心的なアイデアは、視点と点光源の間に SLM が存在し ( $z = 0$ )、視点と 1 つの点光源を直線で結んだ際、SLM を通過する交点周辺に任意の四角形を設定し、この領域内でのみ干渉縞を生成する。この任意の四角形を「サブホログラム」と呼び、その四角形の大きさを調節することで、2 点間の分解能距離を調節することができる。この節では、分解能とサブホログラムの関係式を導出する。このため、5.3.1 節で述べた、物体光と視点

の間にレンズが存在する場合の Rayleigh 基準式は次のように定義される.

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (5.42)$$

ここで、 $D = 2a$  であり、 $a$  はレンズの半径を意味する. 提案する方法では、レンズの代わりに任意の四角形のサブホログラムをレンズと仮定するため、レンズの直径  $D$  の代わりに任意の四角形の横幅  $a_x$  と縦幅  $a_y$  を設定し、それぞれの  $a_x$ 、 $a_y$  を求める必要がある. 図 5.5 には、視点と物体を結び、サブホログラムのサイズを設定した際の  $a_x$  と  $a_y$  が示されている. まず、 $a_x$  を求めるため、すべての物体点光源間の横幅の平均を次のように定義する.

$$D_{x_{\text{ave}}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{x_i} \quad (5.43)$$

$D_{x_i}$  は、任意の 2 点光源間の横幅である. このとき、視点で 2 つの点光源の重なったエアリーディスクのフリンジパターンを区別できる最小分解角は、 $\theta_R = \theta_O$  の条件が成立する必要がある、 $\theta_R$  と  $\theta_O$  は次のように定義される.

$$\theta_R = \frac{1.22\lambda}{a_x} \quad (5.44)$$

$$\theta_O = \frac{D_{x_{\text{ave}}}}{R} \quad (5.45)$$

ここで、 $\theta_R$  は Rayleigh 基準から求めることができ、 $\theta_O$  は弧の長さの公式から求めることができる. 任意の 2 点光源から SLM までの距離を半径  $R$  として円を描いた場合、2 点光源間の距離は非常に短いため、 $D_{x_{\text{ave}}} = R\theta_O$  とすることができる. したがって、次のように式を展開することができる.

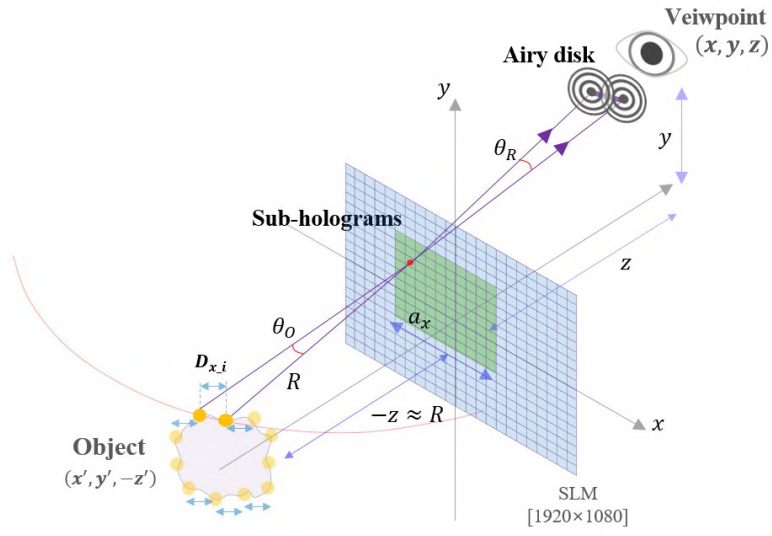
$$\theta_R = \theta_O \quad (5.46)$$

$$\frac{1.22\lambda}{a_x} = \frac{D_{x_{\text{ave}}}}{R} \quad (5.47)$$

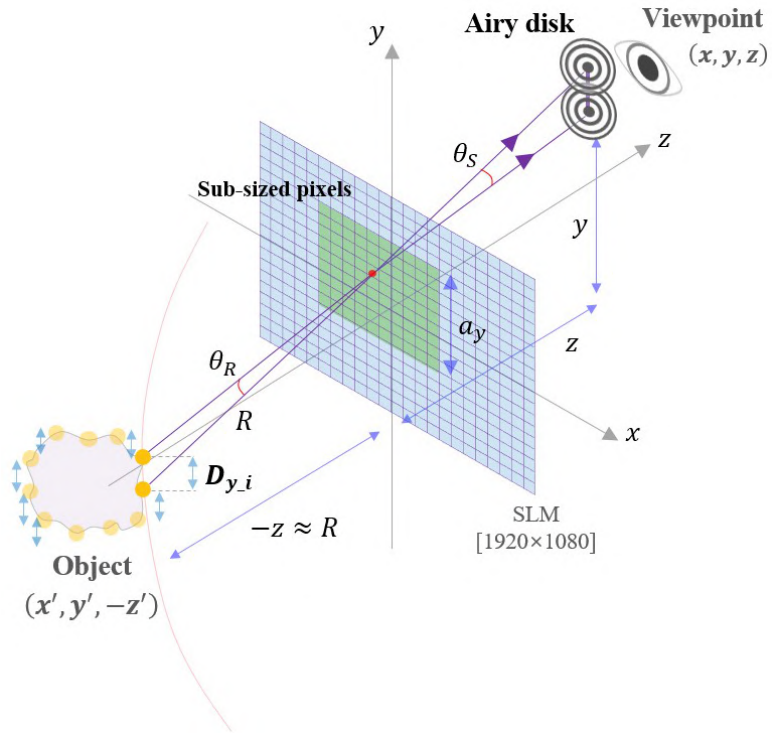
$$D_{x_{\text{ave}}} = \frac{1.22\lambda}{a_x} \cdot R \quad (5.48)$$

このとき、物体光からの伝搬距離  $R$  は Fresnel 近似により物体から SLM までの距離  $|z|$  で近似できるため、 $R \approx |z|$  とおく. また、サブホログラムの横幅  $a_x$  はピクセルピッチとピクセル数によって求めることができるため、最終的に次のように式を導出することができる.

$$\therefore D_{x_{\text{ave}}} = \frac{1.22\lambda}{p_x} \cdot \frac{z}{n_{\text{width}}}, \text{ where } a_x = p_x \times n_{\text{width}} \quad (5.49)$$



(a)



(b)

図5.5 レンズの代わりに SLM を使用した場合の Rayleigh 基準に基づく 2 点間の分解能:

(a)  $a_x$ , (b)  $a_y$

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

同様の方法で  $a_y$  を求めることができ、次のように式を書ける。

$$\therefore D_{y\text{ave}} = \frac{1.22\lambda}{p_y} \cdot \frac{z}{n_{\text{height}}} , \text{ where } a_y = p_y \times n_{\text{height}} \quad (5.50)$$

したがって、式 (5.49) および式 (5.50) は、2 点間の分解能距離とサブホログラムのサイズとの関係を示す式であり、サブホログラムのサイズを調節することで分解能の制御が可能となり、結果として解像度を調節することができる。

### 5.3.3 アルゴリズムの全体過程

解像度調節アルゴリズムの全体的な手順は次の通りであり、図 5.6 には、 $a_x=a_y=2$  の場合について示している。

- ステップ 1: サブホログラムのサイズの集合  $\{a_{x_n} \times a_{y_n}\}_{n=1}^k$  の中からサイズを決定し、このとき、任意のサイズの四角形を選択することができる。
- ステップ 2: SLM の位置を  $z=0$  に設定し、視点の位置を  $V(x, y, z)$ 、物体の位置を  $O(x', y', z')$  に定めたとき、これら二つの位置を直線で結び、SLM を通過する交点の座標を次のように求める。

$$\vec{S}(t) = (1-t)\vec{V} + t\vec{O} \quad (5.51)$$

$$x_i(t) = (1-t)x + tx' = x + t(x' - x) \quad (5.52)$$

$$y_i(t) = (1-t)y + ty' = y + t(y' - y) \quad (5.53)$$

$$z_i(t) = (1-t)z + tz' = z + t(z' - z) \quad (5.54)$$

$$\therefore x_i(t) = x + \frac{z}{z - z'}(x' - x) \quad (5.55)$$

$$\therefore y_i(t) = y + \frac{z}{z - z'}(y' - y) \quad (5.56)$$

- ステップ 3: ステップ 2 で求めた交点座標を中心として、 $\{a_{x_n} \times a_{y_n}\}_{n=1}^k$  の領域を設定し、視点と結んだ物体点に対し、次の式によりサブホログラム領域内のみ干渉縞を計算する。領域外は計算しない。ここで、 $x_{\text{width}}$ 、 $y_{\text{height}}$  は、サブホログラム領域内の座標である。

$$|x_{\text{width}} - x_i| < \frac{a_x}{2} \quad (5.57)$$

$$|y_{\text{height}} - y_i| < \frac{a_y}{2} \quad (5.58)$$

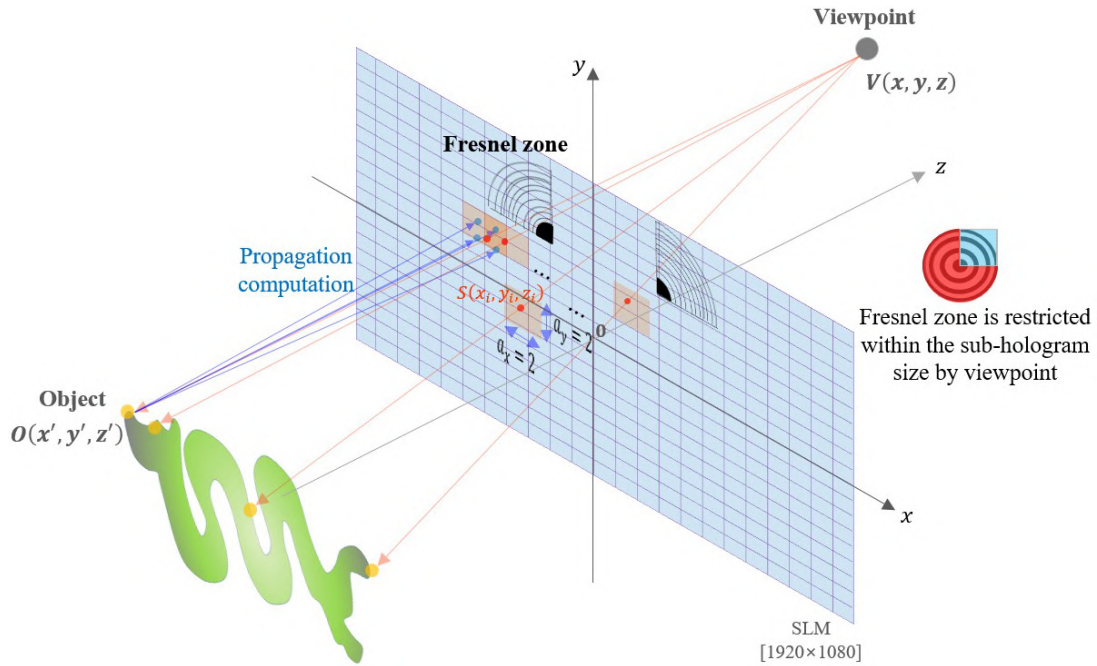


図5.6  $a_x = a_y = 2$  の場合の解像度調節アルゴリズム

- ステップ 4: 全ての点光源に対して、Step 1~3 のプロセスを適用する。

ここで、物体光である球面波は重ね合わせによって波面が整列し、Fresnel ゾーンを形

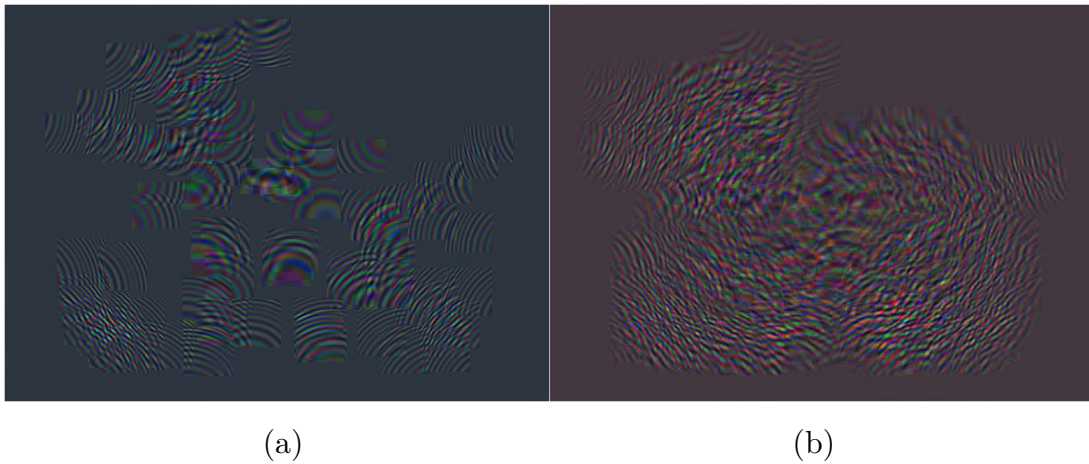


図5.7 サブホログラムサイズ  $a_x = a_y = 100$  を適用し、原点から  $z$  軸上に 17mm 離れた位置で観察したドラゴンホログラムの干渉縞：(a) 点光源数 100、(b) 点光源数 1000  
Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

成する．提案した方法では、制限されたサブホログラムのサイズにより、全体の Fresnel ゾーンがサブホログラムのサイズに対応する断片に切り取られる．このとき、視点の向きによって視点が Fresnel ゾーンを通過する領域が断片に切り取られるため、断片の位置は視点の影響を受ける．直感的な理解のため、図 5.7 に干渉縞を示した．このようなメカニズムによって解像度を調節する．

## 5.4 実験

ホログラムの生成に使用した物体は、4 種類（ドラゴン、バニー、ティーポット、ミックス）であり、Point-based method に基づく CGH 手法を適用した[57]．すべてのホログラムは、1920×1080 ピクセルのサイズ、フルカラー（8 ビット ×3）で構成され、ファイルサイズは 5.93MB である．ホログラムの生成条件は表 5.1 に示しており、本研究の実験では、角スペクトル法 (angular spectrum method) を用いて再生像を取得した[58]．

圧縮評価のために、5 種類の無損失圧縮アルゴリズムを適用した：JPEG2000(JP2K)、JPEG-LS(lossless)、Lempel-Ziv-Markov chain algorithm(LZMA)、Deflate (LZ77 + variable-length coding)、および線形予測符号化 (linear predictive coding, LPC)．ここで、LPC は 32×32 のブロックサイズに対して 4 つの予測係数を用いて圧縮を行った[59]．

圧縮実験は、次の 5 つの条件に評価を行った．それ以外の条件については共通とし、ドラゴンモデルを奥行き 66.5mm に配置し、点光源数 10,000、視点 (0, 0, 17mm) を適用してホログラムを生成し、圧縮評価を行った．サブホログラムのサイズは、Weber-Fechner

表5.1 Hologram generation conditions

|                     |                    |           |
|---------------------|--------------------|-----------|
| Device<br>parameter | Pixel pitch ( m)   | 4.5       |
|                     | Resolution (pixel) | 1920×1080 |
| Wavelength          | Red (nm)           | 638       |
|                     | Green (nm)         | 518       |
|                     | Blue (nm)          | 448       |

曲線に基づいて設定し、図 5.8 に示した[60]．Weber-Fechner 曲線において、 $n$  は刺激の大きさを表し、この値に応じて人間が感じる感覚の大きさは  $\log$  曲線として表れる．この曲線に従う値からサブホログラムのサイズをサンプリングして決定した．本実験では、サブホログラムのサイズは正方形に設定した．



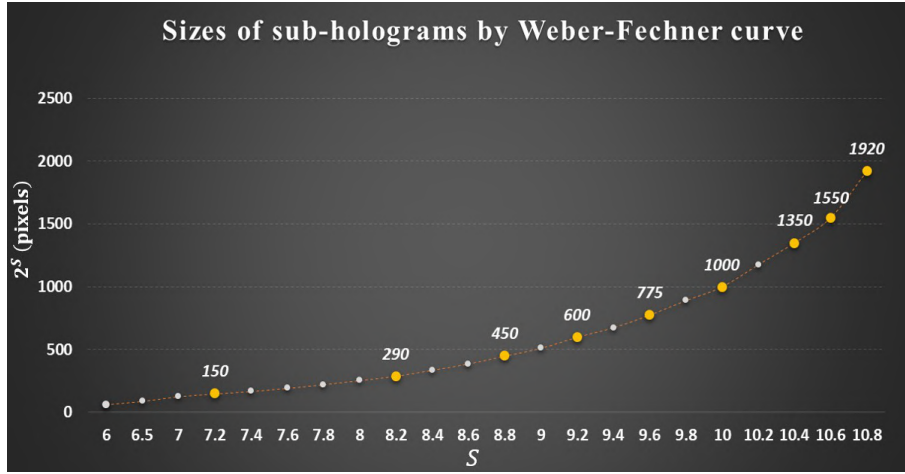


図5.8 Weber-Fechner 法則に従ってサンプリングしたサブホログラムのサイズ. サンプリング関係を定義するために用いた Weber-Fechner 曲線は  $S = k \log_b n + C$  で表される. ここで,  $S$  は知覚強度を示し,  $n$  は物理的刺激量を表し, 本研究ではサブホログラムのサイズ ( $n = size$ ) に対応する. 対数の底は  $b = 2$ , スケーリング定数は  $k = 1$ , 基準オフセットは  $C = 0$  とした. したがって, 各知覚強度レベルに対応するサブホログラムサイズを決定するために, 逆関係式  $n = 2^S$  を用いた.

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

圧縮結果の分析には, サーフエスプロット, 周波数スペクトル, および周波数エントロピーをカラーマップとして可視化した. まず, 周波数スペクトルについては, 図 5.9 のように, 空間周波数を低周波・中周波・高周波の領域に分割した. 領域の分割基準としては, 空間周波数の座標をベクトルとして, その大きさに基づいて分類した. この計算過程は, 式 (5.59) から式 (5.63) に示した.

$$f(u, v) = ui + vj \quad (5.59)$$

$$|f(u, v)| = \sqrt{\left(\frac{n}{\text{blocksize}}\right)^2 + \left(\frac{m}{\text{blocksize}}\right)^2}, \text{ where } n, m < \text{blocksize} (\in \mathbb{Z}^+) \quad (5.60)$$

$$\text{low frequency region} \leq |f(u, v)| = 0.4 \quad (5.61)$$

$$\text{middle frequency region} \leq |f(u, v)| = 0.7 \quad (5.62)$$

$$\text{high frequency region} > |f(u, v)| = 0.7 \quad (5.63)$$

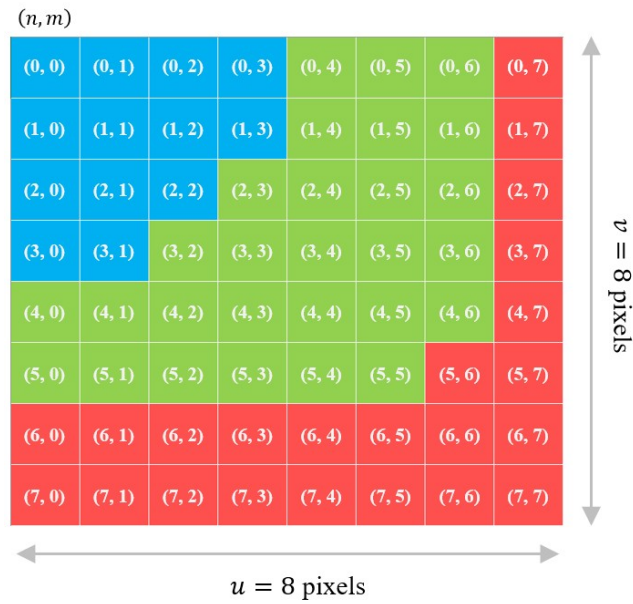


図5.9 空間周波数領域における色による空間周波数の分類：低周波数 (青)、中低周波数 (緑)、高周波数 (赤)

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

周波数成分を得るため、ホログラムに対して  $8 \times 8$  ブロックサイズで DCT を行い、それぞれの空間周波数に対応するパワースペクトル値を 0 から 1 の範囲に正規化した。その後、 $R(255, 0, 0)$ 、 $G(0, 255, 0)$ 、 $B(0, 0, 255)$  の色成分に乗算し、0 から 255 の輝度値として周波数領域の強度を表現した。周波数エントロピーは、次の式によって定義され、定

表5.2 Resolution distance based on wavelength and sub-hologram sizes

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

| $\lambda$ (nm) | Sub-hologram sizes |       |       |       |       |       |      |      |      |
|----------------|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|
|                | 150                | 290   | 450   | 600   | 775   | 1000  | 1350 | 1550 | 1920 |
| Red : 638      | 76.68              | 39.66 | 25.56 | 19.17 | 14.84 | 11.50 | 8.52 | 7.42 | 5.99 |
| Green : 518    | 62.26              | 32.20 | 20.75 | 15.56 | 12.05 | 9.34  | 6.92 | 6.02 | 4.86 |
| Blue : 448     | 53.84              | 27.85 | 17.95 | 13.46 | 10.42 | 8.08  | 5.98 | 5.21 | 4.21 |

\* resolution distance unit:  $\mu\text{m}$

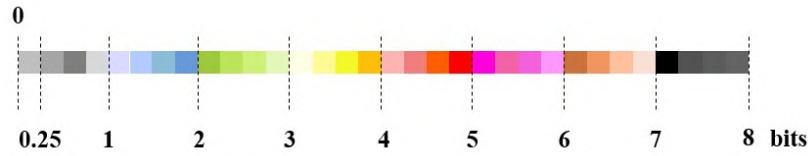


図5.10 周波数エントロピー値に基づくカラーマップ

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

義された式に基づき、DCT と同じ  $8 \times 8$  ブロックサイズで計算した[61]。エントロピー値 (0～8 ビット) は、図 5.10 のカラーマップを用いて可視化した。

$$E(f) = - \sum_v \sum_u \left( \frac{f_{u,v}}{\sum f_{u,v}} \right) \log_2 \left( \frac{f_{u,v}}{\sum f_{u,v}} \right) \quad (5.64)$$

, where  $u, v$  are spatial frequencies,  $f$  is the power spectrum

最後に、サブホログラムのサイズに応じた 2 点間の分解能距離を表 5.2 に示した。

実験 2. 視点に対する圧縮評価

5 か所の視点について圧縮評価を行い、視点の座標は図 5.16 に示した。

実験 3. 異なる物体形状に対する圧縮評価

4 種類の物体に対して圧縮評価を行い、サブホログラムのサイズが 1000 の場合の再生

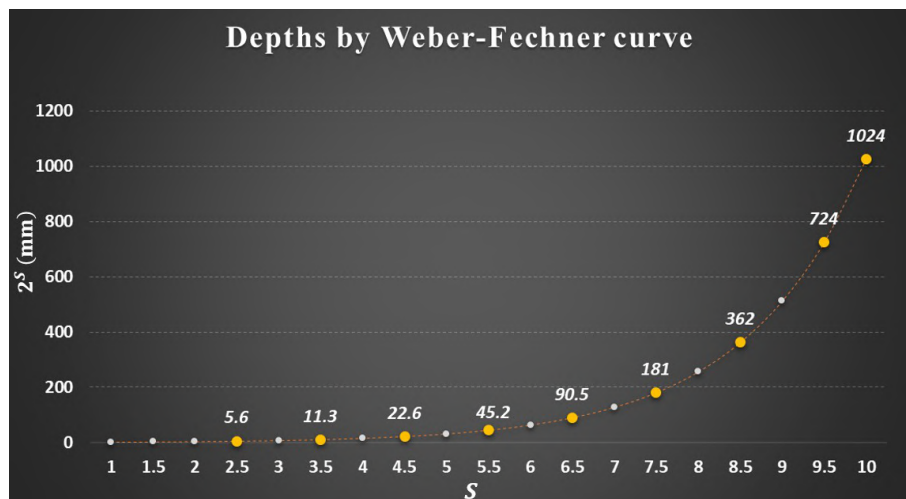


図5.11 Weber-Fechner 法則に従ってサンプリングした奥行き

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

像を図 5.18 に示した。

実験 4. 点光源数が 100、1000、5000、10000、50000 の場合の圧縮評価

実験 5. 奥行きによる評価

奥行きによる圧縮評価では、Weber-Fechner 曲線に従って奥行きを設定し、評価を行った。図 5.11 に曲線に従ってサンプリングした奥行きを示した。

Bits per pixel(bpp) を基にした圧縮率は、次のように定義した[62]。

$$\text{bpp} = \frac{\text{File size} \times 8 \text{ bit}}{\text{width} \times \text{height}} \quad (5.65)$$

$$\text{Compression rate \%} = \frac{24 \text{ bit} - \text{bpp}}{24 \text{ bit}} \times 100 \quad (5.66)$$

## 5.5 実験結果

サブホログラムのサイズによる圧縮結果を図 5.12 に示した。サブホログラムのサイズが 1920 の場合、全体領域に干渉縞を生成するため、解像度の低下はなく、通常の高解像度生成と同等である。サイズが小さくなるほどファイルサイズが減少し、5つのアルゴリズムの中で JP2K と JP-LS が最も高い圧縮性能を示すことがわかる。図 5.14 には、ファイルサイズの減少効果を分析するために、サブホログラムサイズに応じた再生像とともに

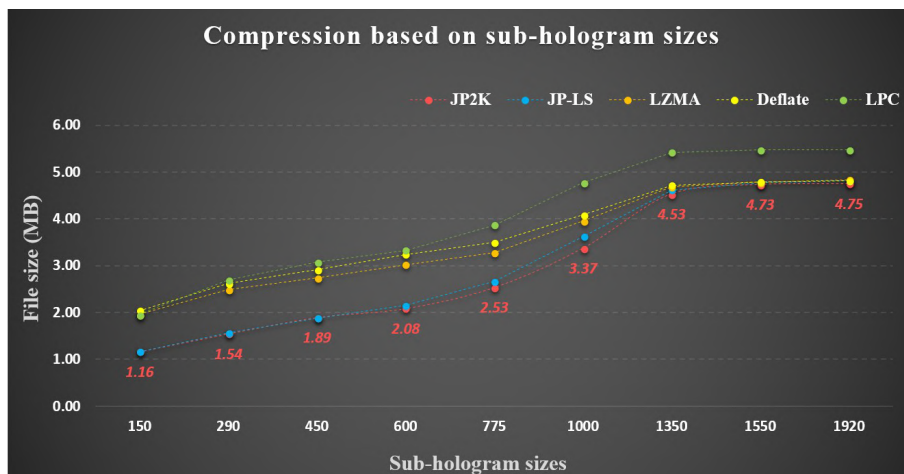


図5.12 サブホログラムサイズによる圧縮結果

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

に、サーフェスプロット、周波数分布、周波数エントロピーの結果を示した．図 5.14 では、 $R$ 、 $G$ 、 $B$  の波長が同様の傾向を示すため、代表として  $R$  の結果を示している．

図 5.14 の (a)-1 から 9 までの再生像において、サブホログラムのサイズが 150 および 290 の場合を除き、サイズの縮小に伴う画質の変化はみられるが、深刻な画質の劣化は観察されなかった．図 5.14 の (b)-1 から 9 までは干渉縞に対するサーフェスプロットを示しており、サイズが小さくなるにつれて、ピクセル値のダイナミックレンジが減少すると同時に、干渉縞が形成される領域も縮小していることがわかる．JP-LS の場合、ピクセルのダイナミックレンジの減少効果により、予測対象ピクセルに対して左側および上側のピクセルとの相関が非常に高くなり、予測誤差が減少するため、圧縮効果が高くなると分析できる．また、ダイナミックレンジの減少は干渉縞データの変動性が低下することを意味し、図 5.14 の (c)-1 から 9 までの周波数成分分布結果から、サイズが小さくなるにつれて赤色の高周波成分がほとんど消失し、中間周波数がそれを置き換えていることが確認された．サイズがさらに小さくなると、低周波数成分が大部分を占め、中周波数成分が一部存在していることがわかる．このような周波数成分の分布変化は、JP2K のウェーブレット変換において高周波領域のウェーブレット係数を小さくする．したがって、符号化の際にウェーブレット係数をビットプレーンに構成すると、各ビットプレーンにおいて高周波領域では 0 が多くなり、ランレングス符号化によって効率的な圧縮が可能となる．

図 5.14 の (d)-1 から 9 は、周波数成分のエントロピーを視覚化したものであり、(c) における周波数成分の分布と類似した傾向が観察される．1920 の場合には、6 ビット程度の周波数エントロピーが主に分布しているのに対し、サイズが小さくなるほど 1～2 ビット

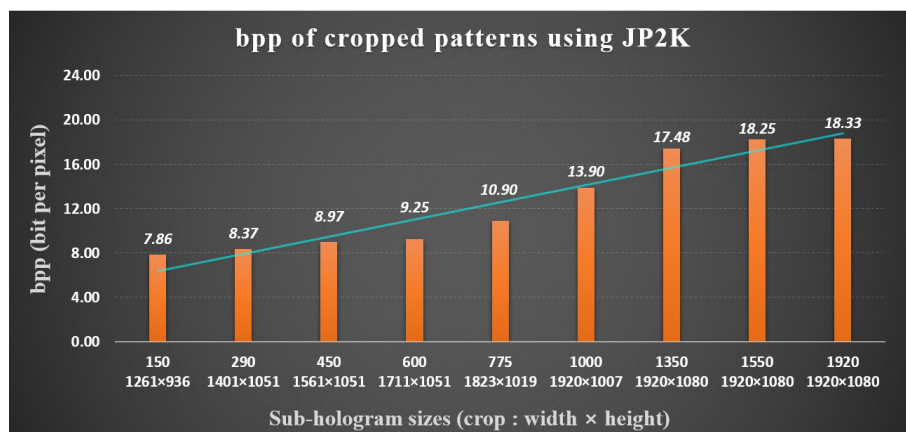


図5.13 クロップした干渉縞の JP2K による bpp 圧縮結果

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.



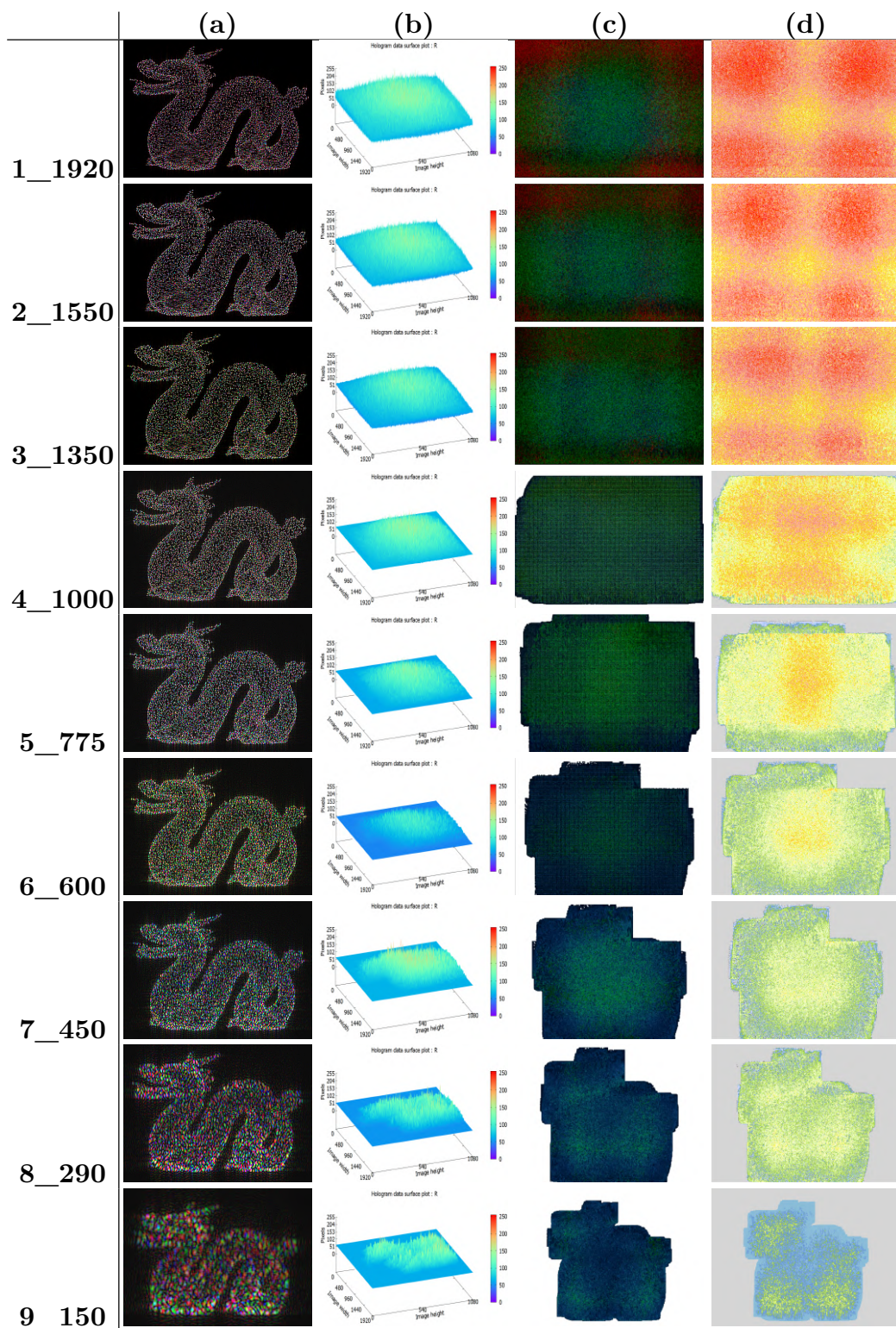


図5.14 分析結果: (a) 再生像, (b) サーフェスプロット, (c) 周波数マップ, (d) 周波数エン  
トロピー

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

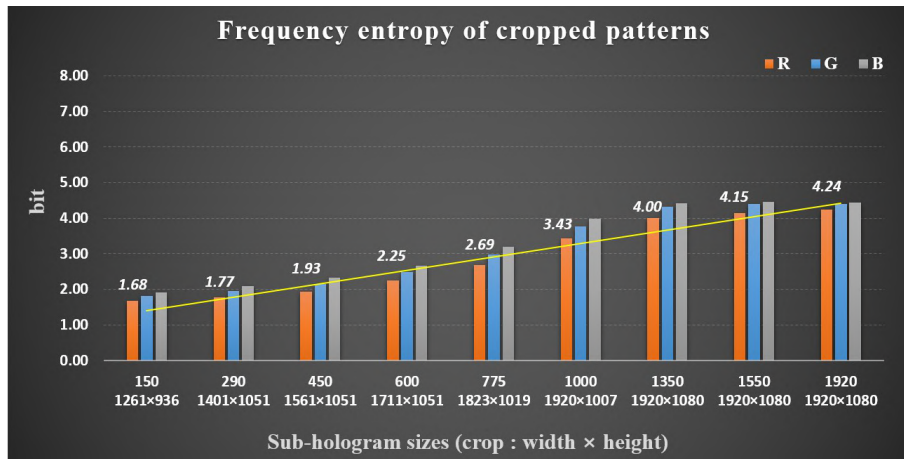


図5.15 クロップした干渉縞の全体周波数エントロピー値結果

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

の分布がみられ、全体的にエントロピーが減少していることがわかる。

サーフェスプロットの結果から、サブホログラムのサイズが小さくなるにつれ、干渉縞以外の背景領域が増加することがわかる。これは、サブホログラムのサイズが小さいほど、狭い範囲で干渉縞が生成されるためである。したがって、図 5.13 では、図 5.12 の圧縮結果において背景領域による圧縮効果ではなく、実際の干渉縞領域に対する圧縮効果を明確に示すため、干渉縞から背景を除去した後、bpp (bits per pixel) を用いてサイズの異なる干渉縞を同一スケールで比較した。その結果、サイズの減少により最大で約 67% の圧縮が可能であることがわかる。

図 5.15 には、クロップした干渉縞の周波数エントロピーを示しており、サイズが小さくなるほど、干渉縞に対して計算された全体の周波数エントロピーが減少することがわかる。

LZMA と Deflate アルゴリズムは辞書符号化を基盤としている。干渉縞における高周波成分の減少により、ピクセル値のダイナミックレンジが縮小するため、限られたダイナミックレンジ内で重複するピクセル値が出現する頻度が高くなり、一定の圧縮効果が得られる。しかし、干渉縞データは不規則に変化するため、この特性を完全な辞書テーブルとして構築することには限界がある。同様に、LPC は変動するピクセルをもとに予測係数を生成して予測を行うが、変動性が低下しても正確な予測には限界が存在するため、高い圧縮率を得ることは困難である。

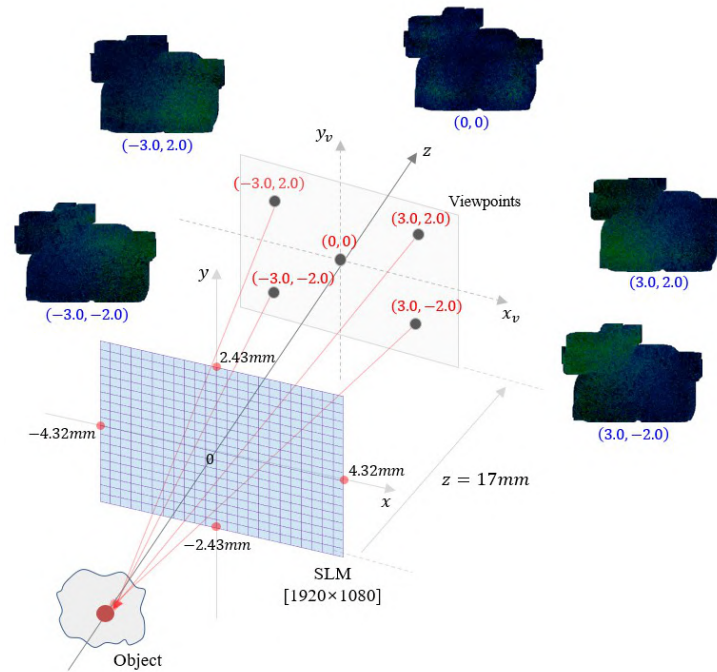


図5.16 視点位置座標およびサブプログラムサイズが 150 の場合に対する周波数マップ  
Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

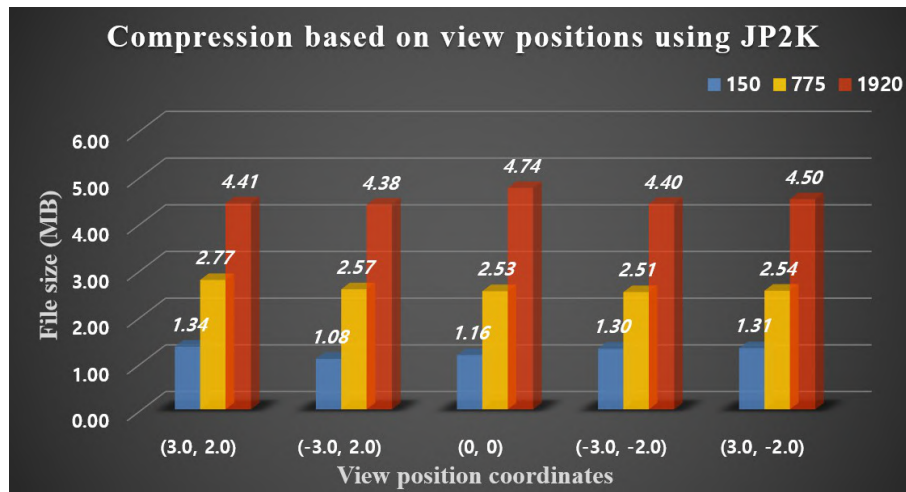


図5.17 各視点位置での圧縮結果  
Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.



図 5.16 は、視点位置およびサブホログラムサイズが 150 の場合、各視点における周波数マップを示している。圧縮結果は図 5.17 に示した。各視点ごとに設定した三つのサブホログラムサイズに対する圧縮結果につき、ファイルサイズに大きな差がないことがわかる。サブホログラムサイズが 150 の場合の周波数マップをみると、各視点の向きに対して中周波数成分の分布が集中していることがわかる。Fresnel ゾーンにおける空間周波数はトランスミッション関数によって説明できる。すなわち、観察者の視点からの距離が遠くなるほど、Fresnel ゾーンの空間周波数は急激に変化する。そのため、固定された視点から同一物体内で遠い位置にある点を見る場合、干渉縞においてその位置には相対的に高い周波数成分が分布することになる。このような影響により、各視点から離れた位置には高周波数成分が集中している。

図 5.18 には、サブホログラムサイズが 1000 の場合の再生像および異なる形状の物体に対する圧縮結果を示す。物体形状の違いが圧縮結果に与える影響はほぼないことがわかる。

図 5.19 は、点光源数に対する圧縮結果を示しており、サブホログラムサイズごとのファイルサイズは点光源数にほとんど依存しないことがわかる。この結果から、解像度調節のため、サブホログラムサイズを調節する際に点光源数の影響を考慮する必要がなく、一般性を提供することができる。

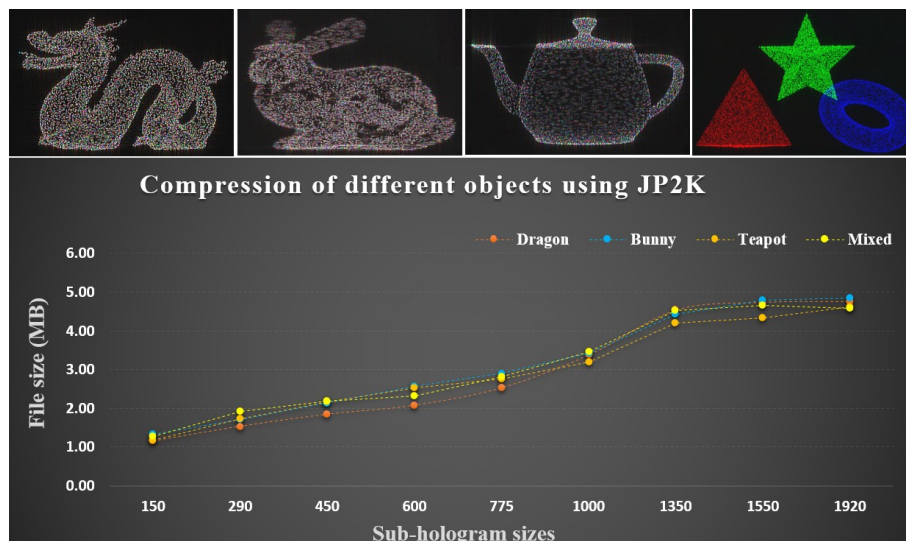


図5.18 異なる物体の JP2K 圧縮結果およびサブホログラムサイズが 1000 の場合の再生像  
Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

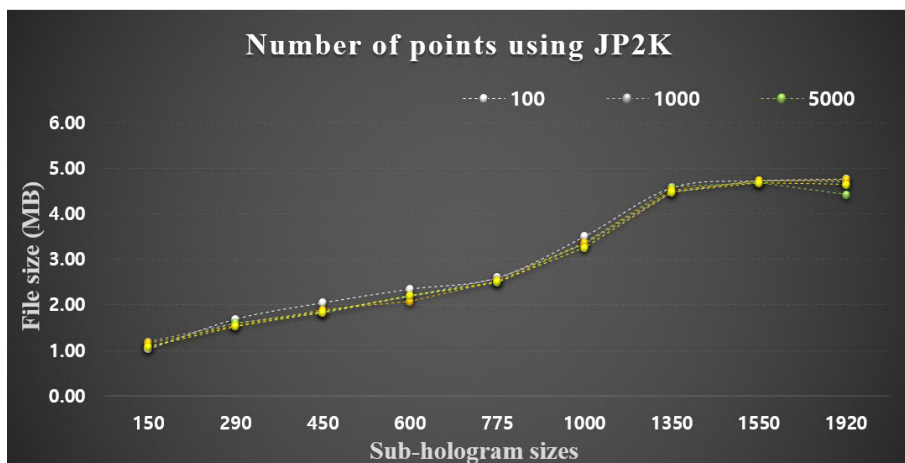


図5.19 点光源の数に対する JP2K 圧縮結果

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

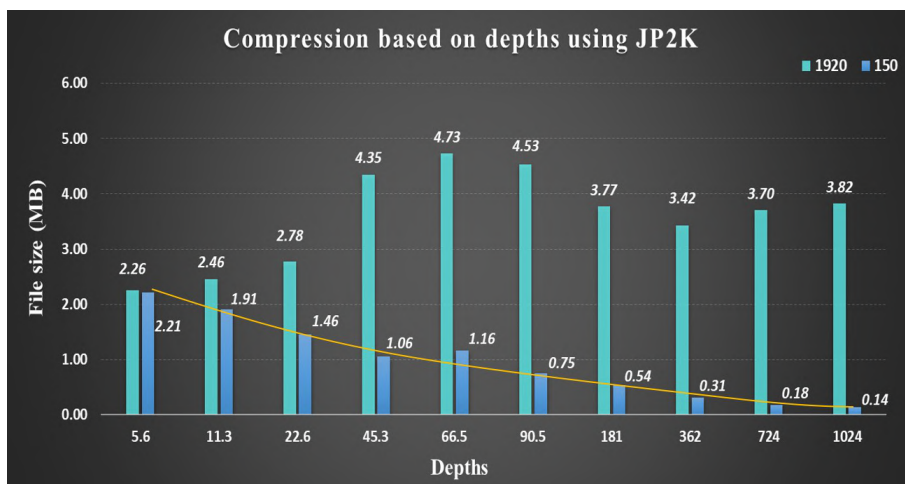


図5.20 サブホログラムサイズ 1920 と 150 に対する奥行きによる JP2K 圧縮結果

Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

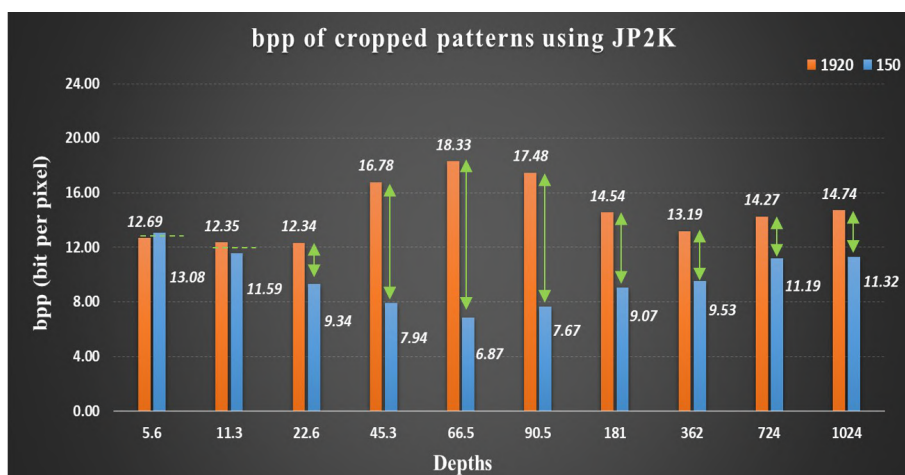


図5.21 クロップした干渉縞の JP2K による bpp 圧縮結果  
 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

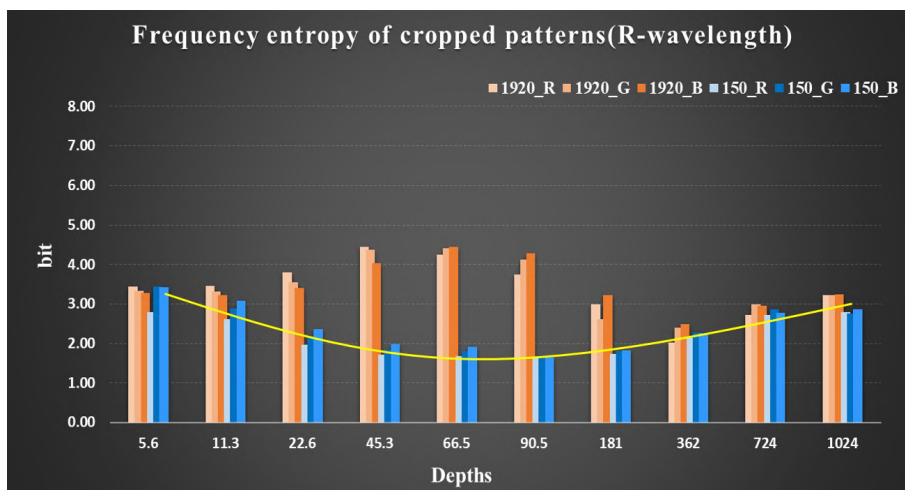


図5.22  $R$ 、 $G$ 、および  $B$  の波長ごとにクロップした干渉縞の全体周波数エントロピー値  
 結果  
 Reproduced from Kim et al., Applied Optics, 2025, © The Author(s), published by Optica Publishing Group.

図 5.20 は、奥行きに応じた圧縮結果を示しており、奥行きが遠くなるほどファイルサイズが著しく減少することがわかる。奥行きが遠くなると、トランスミッション関数で記述される Fresnel ゾーンにおける同心円の間隔が非常に狭くなり、それに伴って実際に干渉縞が形成される領域が著しく小さくなる。その結果、圧縮による効果は主に背景領域で発生することになる。これに対して、図 5.21 では、背景領域を除去するクロップ処理を施した干渉縞に対し、bpp 基板の圧縮結果を示している。45 mm から 90 mm の奥行き範囲で、1920 と 150 のサブプログラムサイズ間の差が最も大きく、奥行きが近くまたは遠くなる場合には、bpp の差が徐々に小さくなって行くことがわかる。

図 5.22 は、クロップ処理をした干渉縞における  $R$ 、 $G$ 、および  $B$  の波長ごとの全体周波数エントロピー値を示したものである。周波数エントロピー値と bpp の結果の傾向が非常に類似していることが確認できる。この結果から、奥行きが近くなる場合および遠くなる場合には、干渉縞内の周波数の複雑度が増加することにより、様々な周波数成分が存在することで圧縮効率が低下することになる。したがって、奥行きが近いまたは遠い場合には、各サブプログラムサイズにおいて複雑な周波数成分が混在するため、サブプログラムサイズを小さくしても圧縮効果があまり得られないと考えられる。

## 5.6 考察

本研究では、フォビエイテッドレンダリングホログラムにおいて周辺領域の解像度を調節するため、Rayleigh 基準を利用した 2 つの物体点間の分解能制御手法を提案した。提案手法は、任意のサブプログラムサイズを調節することで、2 つの点光源間の距離を調節し、フォビエイテッドレンダリングで周辺領域に対するホログラム再生像の空間解像度を選択的に調節可能とする。提案手法の利点および今後の展望は、以下の 5 つの項目に整理できる。

第一に、提案手法ではホログラムを生成する段階で解像度の調節が行われる。そのため、生成された干渉縞はすでに解像度が調節された状態となっており、干渉縞を再生するための特別な再生装置を必要としない。一般的なホログラムを観察するための光学系を用いて観察することが可能であり、中心領域と周辺領域のそれぞれを表示するディスプレイを設置する必要がなく、単一のパネルで対応可能である。

第二に、高解像度および低解像度のホログラムを生成する際、点光源の数を調節する必要がなく、サブプログラムのサイズを調節するだけで、CGH 計算によって再生像の解像度を効率的に調節することができる。また、解像度の調節過程においても、ホログラムを生成する物体が歪むことなく、精密に解像度を制御することが可能である。

第三に、提案した方法で生成したホログラムは、物体光の振幅と位相が記録された干渉縞である。このとき、振幅を除去した位相ホログラムを圧縮すると、実験結果の無損失圧縮率より高い圧縮率を得ることができる。

第四に、提案手法は計算時間に対して利点がある。提案手法において分解能に影響を与える変数は、奥行き  $z$ 、サブホログラムのサイズ、SLM のピクセルピッチ、そして波長  $\lambda$  である。一般的に、波長  $\lambda$  と SLM のピクセルピッチは固定値を使用するため、 $\text{pitch} = 4.5\mu\text{m}$ 、 $\lambda = 518\text{nm}$ 、 $z = 40\text{mm}$  に設定した場合、サブホログラムのサイズを 1920 とすると分解能は  $2.92\mu\text{m}$ 、1350 とすると  $4.16\mu\text{m}$  となる。これら 2 つの分解能は、いずれもピクセルピッチ  $4.5\mu\text{m}$  以下の値であるため周波数制限が生じ、最終的には 1920 と 1350 のサイズの分解能は  $4.5\mu\text{m}$  に一致する。結果として、サブホログラムのサイズを 1920, 1350 とした場合、同一の干渉縞を生成することになり、1350 のサイズで生成することが可能である。また、計算量の削減に加え、1350 サイズによる圧縮効果も得られる。

第五に、提案手法によって生成されたホログラムを再生した際、再生像において顕著な画質劣化は観察されなかった。この結果から、損失圧縮適用が可能であると判断される。実験結果で解析された周波数成分に基づき、画質劣化を最小限に抑える方向への損失圧縮を適用することにより、より高い圧縮率の達成が期待される。

## 第 6 章

# 結論

ホログラムは、膨大なデータ量とデータの変動性が大きいという性質のため、従来の 2 次元画像に適用されていた圧縮アルゴリズムでは十分な圧縮効果を得ることができなかった。そこで本研究では、2 次元画像とは異なるデータ特性を持つホログラムに対し、無損失圧縮率の向上を目的として、ホログラムの干渉縞に存在する方向性に基づく線形予測符号化手法を提案した。また、膨大なデータ量を効率的に圧縮するため、人間の視覚特性を活用するフォビエイテッドレンダリングにおける周辺領域での解像度制御手法を提案し、提案手法を適用したホログラムに対して無損失圧縮率を評価することで、解像度制御によって圧縮が効果的に行われることを確認した。

提案手法 1 では、ホログラムの干渉縞上に存在する方向性に基づき、その方向に沿った線形予測符号化手法の適用を提案した。提案手法により圧縮を行った結果、クロッピングされた干渉縞に対して約 26%（% が低いほど圧縮効果が高い）の圧縮率を達成した。これは従来の無損失圧縮アルゴリズム（ZIP、PNG、Huffman 符号化）よりも優れた圧縮性能であることを確認できた。このとき、線形予測符号化手法における予測性能は良好であったが、予測係数の記録によってファイルサイズの増加をもたらした。したがって、計算コストを考慮した場合、4 方向（DPCM）と 8 方向（DPCM）の圧縮結果に大きな差が見られなかったことから、4 方向のアルゴリズムでも十分であると判断される。また、本手法は無損失圧縮であり、PSNR40db 以上の損失圧縮と比較しても極端な差が見られないことから、損失圧縮とほぼ同等の性能を実現することが可能である。これにより、損失圧縮で高周波成分の除去によって発生する観察視野角の制限や再生像全体における画質劣化の問題を解決することができると考えられる。

提案手法 2 では、人間の視覚システムは物体を観察する際、およそ  $5^{\circ}$ ~ $20^{\circ}$  の範囲に対してのみ高解像度で認識し、 $20^{\circ}$  を超える領域については低解像度および物体の存在の有

無のみを認識することが知られている．したがって、ホログラムにおいても画面全体を高解像度で保持するのではなく、視線が集中する領域のみを高解像度で表現し、周辺領域は低解像度で表現するのがホログラムの計算コストおよびデータ圧縮の観点から効率的である．このような観点から、本研究では、二つの物体光の分解能距離を調節することで周辺視野における解像度を制御する手法を提案した．また、提案手法を用いてホログラムを生成し、解像度を調節したホログラムに対して無損失圧縮アルゴリズムを適用し、圧縮率および解像度が調整されたデータ特性を調べた．

提案手法により生成されたホログラムでは、解像度が低下するほど無損失圧縮率が向上し、最大約 70% に達することが確認された．また、解像度の低下に伴いピクセルデータのダイナミックレンジが縮小し、その結果として周波数解析においては、高解像度ホログラムに存在していた高周波成分が徐々に減少し、低周波成分が主に分布する傾向が明らかとなった．このダイナミックレンジの縮小および高周波成分の低減は、ピクセル値の変動を抑制し、周辺ピクセルとの空間的相関を高める要因となる．その結果、圧縮性能の向上に寄与していると考えられる．さらに、解像度を調整して再生したホログラムの観察結果から、サブホログラムサイズが 150 および 290 の場合を除き、他のサイズでは顕著な画質劣化は確認されなかった．これらの結果は、周波数成分の解析に基づき画質劣化を最小限に抑えながら損失圧縮手法を検討できる可能性を示している．したがって、提案手法はホログラム放送サービスにおいて、ユーザー環境に応じた解像度調整を実現するための有効なアプローチであるといえる．また、大容量のホログラムデータに対しても、画質を大きく損なうことなく、ユーザーの注視領域を除く周辺領域を無損失圧縮することにより、データ容量を 13GB から約 4GB（サブホログラムサイズ 450 の場合）まで削減可能であることが確認された．最後に、周辺領域は画質変化に対する感度が比較的低いことから、この領域に損失圧縮を適用することも有効であると考えられる．これにより、さらなる圧縮率の向上を図りつつ、高解像度ホログラムの視認性を維持できる効果が期待される．

提案した二つの手法は、限られた通信帯域幅でホログラムのリアルタイム伝送を可能にする新たな貢献をもたらすことが期待される．

# 謝辞

本論文をまとめるにあたり、本研究を行う貴重な機会を与えてくださり、多くのご助言とご指導を賜りました、本学情報科学研究院メディアネットワーク部門情報メディア学分野の旧メディア創生学研究室坂本雄児教授、並びに、今年度より新たに所属することとなった本学情報科学研究院メディアネットワーク部門情報メディア学分野の情報メディア環境学研究土橋宣典教授に心より深く感謝申し上げます。また、メディアダイナミクス研究室長谷山美紀教授と小川貴弘教授に深く感謝致します。

さらに、様々な面において学生生活を力強く支えてくださった本研究室の姜錫助教、そして研究を進める中で日頃よりご意見やご協力をくださった先輩方、後輩の皆さんにも深く感謝いたします。特に、小野君には改めて感謝の意を表します。

遠く離れた地で勉強している私のため、いつも祈ってくださっている母へ、言葉では表しきれない感謝の気持ちを捧げます。

この世のすべての知恵をお持ちになり、幾度となく困難に直面したときに知恵と導きを与えてくださり、すべてのことが主 Jesus Christ の素晴らしい計画の中で行われていることを深く信じながら、無事に卒業へと導いてくださった Jesus Christ に、すべての栄光を捧げます。

Everything is possible in him who makes me strengthens ; Philippians 4:13



# 研究業績

## 国際論文

- Kim Duk Hyun, Kohei Tamagawa, and Yuji Sakamoto, "Lossless compression applying linear predictive coding based on the directionality of interference patterns of a hologram," Appl. Opt. 58, 5018-5028 (2019)
- D. Kim, A. Muramoto, K. Ono, K. Seok, and Y. Sakamoto, "Lossless compression of CGH via resolution-controlled sub-hologram," Appl. Opt. 64, 10678-10690 (2025).

## 国際学会

- D.H. KIM, M. Mitobe, and Y. Sakamoto, "Study on lossless compression of hologram data," The 18th International Meeting on Information Display (IMID 2018) 11, 1016 (2018).
- D.H. KIM, T. Kohei, M. Mitobe, and Y. Sakamoto, "Study on lossless compression using directional characteristics according to scan directions on Fresnel fields of hologram," Proc. The 9th Japan-Korea Workshop on Digital Holography and Information Photonics (2018), paper P78.

## 国内学会

- KIMDUKHYUN, 水戸部将也, 坂本雄児, "ホログラムデータの無損失圧縮に関する研究," 3次元画像コンファレンス 2018, 1-2, 2018年7月.
- KIMDUKHYUN, 玉川恒平, 坂本雄児, "線形予測による干渉縞の無損失圧縮方法,"

HODIC, 2019, Vol. 39, 2019 年 5 月.

- KIMDUKHYUN, 坂本雄児, "Sub-hologram に対する無損失圧縮の検討," HODIC 学生シンポジウム 2024, 3-4, 2024 年 2 月.

## 参考文献

- [1] J. Hong *et al.*, “Three-dimensional display technologies of recent interest: Principles, status, and issues,” *Applied optics*, vol. 50, no. 34, H87–H115, 2011.
- [2] S. J. Watt, K. Akeley, M. O. Ernst, and M. S. Banks, “Focus cues affect perceived depth,” *Journal of vision*, vol. 5, no. 10, pp. 7–7, 2005.
- [3] S. Reichelt, R. Häussler, G. Fütterer, and N. Leister, “Depth cues in human visual perception and their realization in 3d displays,” in *Three-Dimensional Imaging, Visualization, and Display 2010 and Display Technologies and Applications for Defense, Security, and Avionics IV*, SPIE, vol. 7690, 2010, pp. 92–103.
- [4] D. Page, T. Thomas, S. Kelley, P. G. Jones, and D. A. Miller, “Vergence and accommodation in simulation and training with 3d displays,” in *Proceedings of Interservice/Industry Training, Simulation, and Education Conference 2014*, vol. 14147, 2014.
- [5] I. F. Akyildiz and H. Guo, “Holographic-type communication: A new challenge for the next decade,” *ITU Journal on Future and Evolving Technologies*, vol. 3, no. 2, pp. 421–442, 2022.
- [6] Y.-H. Seo, H.-J. Choi, and D.-W. Kim, “Digital hologram coding,” *Holography - Basic Principles and Contemporary Applications*, 2013.
- [7] S. A. Shoydin and A. L. Pazoev, “Transmission of 3d holographic information via conventional communication channels and the possibility of multiplexing in the implementation of 3d hyperspectral images,” in *Photonics*, MDPI, vol. 8, 2021, p. 448.
- [8] D. Gabor, “A new microscopic principle,” *Nature*, vol. 161, pp. 777–778, 1948.

- [9] K. D. Mielenz, “Numerical evaluation of diffraction integrals,” *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, vol. 105, no. 4, pp. 581–587, 2000.
- [10] P. Tsang and T.-C. Poon, “Review on the state-of-the-art technologies for acquisition and display of digital holograms,” *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, vol. 12, pp. 1–1, 2016.
- [11] B. R. Brown and A. W. Lohmann, “Complex spatial filtering with binary masks,” *Appl. Opt.*, vol. 5, no. 6, pp. 967–969, 1966.
- [12] E. Sahin, E. Stoykova, J. Mäkinen, and A. Gotchev, “Computer-generated holograms for 3d imaging: A survey,” *ACM Comput. Surv.*, vol. 53, no. 2, 2020.
- [13] D. Pi, J. Liu, and Y. Wang, “Review of computer-generated hologram algorithms for color dynamic holographic three-dimensional display,” *Light: Science & Applications*, vol. 11, no. 1, p. 231, 2022.
- [14] D. Blinder, T. Birnbaum, T. Ito, and T. Shimobaba, “The state-of-the-art in computer generated holography for 3d display,” *Light: Advanced Manufacturing*, vol. 3, p. 35, 2022.
- [15] J. P. Waters, “Holographic image synthesis utilizing theoretical methods,” *Applied Physics Letters*, vol. 9, no. 11, pp. 405–407, 1966.
- [16] A. S. Marathay and S. M. Prasad, “Rayleigh-sommerfeld diffraction theory and lambert’s law,” *Pramana*, vol. 14, pp. 103–111, 1980.
- [17] V. Moreno, J. F. Román, and J. R. Salgueiro, “High efficiency diffractive lenses: Deduction of kinoform profile,” *American Journal of Physics*, vol. 65, no. 6, pp. 556–562, 1997.
- [18] H. Yoshikawa and K. Sasaki, “Information reduction by limited resolution for electroholographic display,” in *Practical Holography VII: Imaging and Materials*, S. A. Benton, Ed., International Society for Optics and Photonics, vol. 1914, SPIE, 1993, pp. 206–211.
- [19] H. Yoshikawa and K. Sasaki, “Image scaling for electroholographic display,” in *Practical Holography VIII*, SPIE, vol. 2176, 1994, pp. 12–22.
- [20] T. J. Naughton and B. Javidi, “Compression of encrypted three-dimensional objects using digital holography,” *Optical Engineering*, vol. 43, no. 10, pp. 2233–2238, 2004.

- [21] O. Matoba, T. J. Naughton, Y. Frauel, N. Bertaux, and B. Javidi, “Real-time three-dimensional object reconstruction by use of a phase-encoded digital hologram,” *Applied optics*, vol. 41, no. 29, pp. 6187–6192, 2002.
- [22] P. Tsang, K. W. Cheung, and T.-C. Poon, “Low-bit-rate computer-generated color fresnel holography with compression ratio of over 1600 times using vector quantization,” *Applied optics*, vol. 50, no. 34, H42–H49, 2011.
- [23] H. Ko and H. Y. Kim, “Deep learning-based compression for phase-only hologram,” *IEEE Access*, vol. 9, pp. 79 735–79 751, 2021.
- [24] N. Chamakhi, I. Bouzidi, A. O. Zaid, and F. Dufaux, “Jpeg based compression of digital holograms,” in *2018 7th European Workshop on Visual Information Processing (EUVIP)*, IEEE, 2018, pp. 1–6.
- [25] K.-J. Oh, H. Ban, S. Choi, H. Ko, and H. Y. Kim, “Hvc extension for phase hologram compression,” *Optics Express*, vol. 31, no. 6, pp. 9146–9164, 2023.
- [26] D. Blinder, C. Schretter, and P. Schelkens, “Global motion compensation for compressing holographic videos,” *Optics express*, vol. 26, no. 20, pp. 25 524–25 533, 2018.
- [27] H. Yoshikawa, T. Yamaguchi, and H. Uetake, “Image quality evaluation and control of computer-generated holograms,” in *Practical Holography XXX: Materials and Applications*, SPIE, vol. 9771, 2016, pp. 144–152.
- [28] K. Jaferzadeh, S. Gholami, and I. Moon, “Lossless and lossy compression of quantitative phase images of red blood cells obtained by digital holographic imaging,” *Applied optics*, vol. 55, no. 36, pp. 10 409–10 416, 2016.
- [29] D. Blinder, T. Bruylants, H. Ottevaere, A. Munteanu, and P. Schelkens, “Jpeg 2000-based compression of fringe patterns for digital holographic microscopy,” *Optical Engineering*, vol. 53, no. 12, pp. 123 102–123 102, 2014.
- [30] Z. Lu and Y. Sakamoto, “Holographic display method for volume data by volume rendering,” *Optics Express*, vol. 27, no. 2, pp. 543–556, 2019.
- [31] Z. Lu and Y. Sakamoto, “Holographic display methods for volume data: Polygon-based and mip-based methods,” *Applied optics*, vol. 57, no. 1, A142–A149, 2018.
- [32] H. Gu and G. Jin, “Phase-difference-based compression of phase-only holograms for holographic three-dimensional display,” *Optics Express*, vol. 26, no. 26, pp. 33 592–33 603, 2018.

- [33] D. H. Kim, M. Mitobe, and Y. Sakamoto, "Study on lossless compression of hologram data," *IMID*, vol. 11, no. 1016, 2018.
- [34] C. C. Cutler, "Differential quantization of communication signals," *U.S. Patent*, no. 2,605,361, 1952.
- [35] D. O'Shaughnessy, "Linear predictive coding," *IEEE potentials*, vol. 7, no. 1, pp. 29–32, 1988.
- [36] G. Gandhimathi, A. Hemalatha, and S. Babu, "Evaluation of levinson-durbin recursion method for source-filter model based artificial bandwidth extension systems," *Int. J. Sci. Eng. Res.*, vol. 6, pp. 232–238, 2015.
- [37] A. Habibi, "Comparison of nth-order dpcm encoder with linear transformations and block quantization techniques," *IEEE Transactions on Communication Technology*, vol. 19, no. 6, pp. 948–956, 1971.
- [38] K. Tamagawa, M. Mitobe, and Y. Sakamoto, "Simulating the effects of statistical characteristics of random phases on speckle noise in computer-generated hologram," in *Practical Holography XXXIII: Displays, Materials, and Applications*, SPIE, vol. 10944, 2019, pp. 188–193.
- [39] M. Mitobe and Y. Sakamoto, "Effect of point pitch on speckle noise in computer-generated hologram using point-based method," in *Practical Holography XXXIII: Displays, Materials, and Applications*, SPIE, vol. 10944, 2019, pp. 160–166.
- [40] D. Marpe, H. Schwarz, and T. Wiegand, "Context-based adaptive binary arithmetic coding in the h. 264/avc video compression standard," *IEEE Transactions on circuits and systems for video technology*, vol. 13, no. 7, pp. 620–636, 2003.
- [41] J. E. García, V. A. González-López, G. H. Tasca, and K. Y. Yaginuma, "An efficient coding technique for stochastic processes," *Entropy*, vol. 24, no. 1, p. 65, 2021.
- [42] B. Guenter, M. Finch, S. Drucker, D. Tan, and J. Snyder, "Foveated 3d graphics," *ACM transactions on Graphics (tOG)*, vol. 31, no. 6, pp. 1–10, 2012.
- [43] M. C. Potter, B. Wyble, C. E. Hagmann, and E. S. McCourt, "Detecting meaning in rsvp at 13 ms per picture," *Attention, Perception, & Psychophysics*, vol. 76, pp. 270–279, 2014.
- [44] S. Lee *et al.*, "Foveated retinal optimization for see-through near-eye multi-layer displays," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 2170–2180, 2017.

- [45] A. Cem, M. K. Hedili, E. Ulusoy, and H. Urey, “Foveated near-eye display using computational holography,” *Scientific reports*, vol. 10, no. 1, pp. 14–905, 2020.
- [46] Y.-G. Ju and J.-H. Park, “Foveated computer-generated hologram and its progressive update using triangular mesh scene model for near-eye displays,” *Optics express*, vol. 27, no. 17, pp. 23 725–23 738, 2019.
- [47] J. Hong, Y. Kim, S. Hong, C. Shin, and H. Kang, “Gaze contingent hologram synthesis for holographic head-mounted display,” in *Practical Holography XXX: Materials and Applications*, SPIE, vol. 9771, 2016, pp. 117–122.
- [48] J. Kim, J. Kim, M. Jung, T. Kwon, and K. Kim, “Individualized foveated rendering with eye-tracking head-mounted display,” *Virtual Reality*, vol. 28, no. 1, p. 25, 2024.
- [49] S. Reichelt, R. Haussler, N. Leister, G. Futterer, H. Stolle, and A. Schwerdtner, “Holographic 3-d displays-electro-holography within the grasp of commercialization,” in *Advances in Lasers and Electro Optics*, IntechOpen, 2010.
- [50] A. Schwerdtner, R. Häussler, and N. Leister, “Large holographic displays for real-time applications,” in *Practical Holography XXII: Materials and Applications*, SPIE, vol. 6912, 2008, pp. 215–222.
- [51] L. Wei and Y. Sakamoto, “Fast calculation method with foveated rendering for computer-generated holograms using an angle-changeable ray-tracing method,” *Applied optics*, vol. 58, no. 5, A258–A266, 2019.
- [52] T. Ichikawa, T. Yoneyama, and Y. Sakamoto, “Cgh calculation with the ray tracing method for the fourier transform optical system,” *Optics express*, vol. 21, no. 26, pp. 32 019–32 031, 2013.
- [53] Z. Dong, Y. Ling, C. Xu, Y. Li, and Y. Su, “Gaze-contingent efficient hologram compression for foveated near-eye holographic displays,” *Displays*, vol. 79, pp. 102–464, 2023.
- [54] T. D. Lamb, “Why rods and cones?” *Eye*, vol. 30, no. 2, pp. 179–185, 2016.
- [55] C. W. Tyler, “Analysis of human receptor density,” in *Basic and clinical applications of vision science: the professor jay m. enoch festschrift volume*, Springer, 1997, pp. 63–71.
- [56] U. S. Kim, O. A. Mahroo, J. D. Mollon, and P. Yu-Wai-Man, “Retinal ganglion cells—diversity of cell types and clinical relevance,” *Frontiers in neurology*, vol. 12, pp. 661–938, 2021.

- [57] D. Pi, J. Liu, and Y. Wang, “Review of computer-generated hologram algorithms for color dynamic holographic three-dimensional display,” *Light: Science & Applications*, vol. 11, no. 1, p. 231, 2022.
- [58] Z. He, K. Liu, X. Sui, and L. Cao, “Angular-spectrum algorithm for holographic 3d display based on 2d-to-3d approach,” in *Ultra-High-Definition Imaging Systems V*, SPIE, vol. 12025, 2022, pp. 55–60.
- [59] K. D. Hyun, K. Tamagawa, and Y. Sakamoto, “Lossless compression applying linear predictive coding based on the directionality of interference patterns of a hologram,” *Applied Optics*, vol. 58, no. 18, pp. 5018–5028, 2019.
- [60] M. Cowdrick, “The weber-fechner law and sanford’s weight experiment,” *The American Journal of Psychology*, vol. 28, no. 4, pp. 585–588, 1917.
- [61] U. Melia, F. Claria, M. Vallverdu, and P. Caminal, “Measuring instantaneous and spectral information entropies by shannon entropy of choi-williams distribution in the context of electroencephalography,” *Entropy*, vol. 16, no. 5, pp. 2530–2548, 2014.
- [62] S. Rustad, P. N. Andono, G. F. Shidik, *et al.*, “Digital image steganography survey and investigation (goal, assessment, method, development, and dataset),” *Signal processing*, vol. 206, pp. 108–908, 2023.