HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	埋め込み境界ナビエ・ストークス方程式の壁モデル
Author(s)	大島, 伸行
Citation	数値流体力学シンポジウム講演予稿集, 39
Issue Date	2025-12-16
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/99984
Type	conference paper
File Information	CFD2025_OS2-4-3-030shima.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

埋め込み境界ナビエ・ストークス方程式の壁モデル
Wall model formulated by Boundary-immersed Navier-Stokes Equation

○ 大島伸行，北大，北海道大学，札幌市北区北 13 条西 8 丁目, E-mail: <oshima@eng.hokudai.ac.jp>
Nobuyuki OSHIMA, Hokkaido univ., Kita-13, Nishi-8, Kita-ku, Sapporo, Hokkaido

Abstract must be 100 – 150 words using 9pt Times font. This is a simple example of how to prepare the paper for CFD39. The headings should appear as above. The instruction is written in the main body. Abstract must be 100 – 150 words using 9pt Times font. This is a simple example of how to prepare the paper for CFD39. The headings should appear as above. The instruction is written in the main body.

１． はじめに

工学設計において目標とする流れを実現する一般的な方法は，特定の境界形状（物体形状）を与えることであり，この目標のために，飛行機翼，回転機械，管路，ノズルなどの様々な流体装置が，主に経験的知見によって設計されている．実際，流れ数値シミュレーションを工学実装する際の労力の多くが壁境界の再現に割かれている．しかし，基礎式の理論的検討や離散化や計算アルゴリズムには多大な関心が現れてきたが，壁境界には物理的，数学的な検討研究は少なく，多くが単純なディレクレ条件を既知とした幾何学的補間法精度の議論に留まっている．

一方，画像処理などコンピュータ技術として境界形状を数学的に扱うレベルセット法が，また，結晶や気液界面シミュレーションの界面物理モデルとしてフェーズフィールド法が成功を収めている．これらに共通する考え方が「境界を有限幅の連続分布で近似する」ことにあり，有限解像で離散化されたデジタルデータによる統一的な数学的表現を可能にしている．

Oshima[1,2]はこの考え方を流れの固体境界に適用して境界埋め込み流れ方程式(Boundary-immersed Navier-Stoke Equation，以下 IB-NS と略す)を提案した．既報では壁せん断応力のない slip 条件および層流粘性の線形則で与える no-slip 条件を一つのパラメータで表す壁モデルが提案されている．本報では，これを一般化した壁せん断応力モデルとみなし，乱流解析や希薄流などのせん断ひずみの線形則でない壁法則（部分 slip 条件）に拡張して，数値モデルにて検証する．併せて，粗さをもつ壁面の効果や従来の補間による壁境界条件への考察を述べる．

２．境界埋め込み流れ方程式

本研究の基礎となる非圧縮性流れにおける IB-NS を以下にしめす．

$$\frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \varepsilon \boldsymbol{v} = 0$$

$$\frac{\partial \rho\, \varepsilon\, \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\, \varepsilon\, \boldsymbol{v}\boldsymbol{v} + \varepsilon\, \nabla p - \nabla \cdot \varepsilon\, \boldsymbol{\Sigma} - \varepsilon \boldsymbol{f}_w = 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mu_1(\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^t) + \mu_2(\nabla \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{I} \qquad (1)$$

ここで，変数 ε はレベルセット関数として固体境界近傍の有限厚み領域を流体部で 1，固体部で 0 となるように符号付き距離関数ξの関数として

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left\{ tanh\left(\frac{\xi}{\Delta}\right) + 1 \right\} \qquad \xi: \text{符号付き距離関数} \qquad (2)$$

と定義する．このとき，壁モデルは次元解析から

$$\varepsilon \boldsymbol{f}_w = -\alpha\mu \left\{ \varepsilon(1-\varepsilon)/\Delta \right\}^2 \boldsymbol{v} \qquad (3)$$

と定式化でき，α = 0 (slip 条件)，および，ポアズイユ流れ数値検証より約32 (noslip 条件) が与えられている．

変数 ε は物理的には流体占有率（多孔率）を意味する．境界領域の厚さパラメータ Δ は格子幅 dx と同オーダー（Δ =1.5dx 程度が推奨される）に与えることで，境界形状が解像度に応じた精度で評価される．このことは，乱流ラージ・エディ・シミュレーションにおいて格子スケールで空間平均された滑らかな解を扱うことで精度の良い数値計算を実現することに似ている．

基礎的検証として，2 次元円柱，隙間流路や 3 次元球まわりの流れのほか，翼列流れや衝撃波を伴う圧縮性流れ[3]（K2025）などへの応用がなされている． ε 分布の時間変化を与えれば移動・変形する物体境界も自然に解析できる[4]．また，変数 ε をレベルセット関数とみなすと画像データから形状を抽出して流れ解を求める「画像データ駆動シミュレーション」が構築できる[5]．また，正規格子による IB-NS は GPU 並列にも極めてよく適合する[6]．（解析プログラム例が公開されているので詳細ご関心あれば参照されたい[7]．

３．IB-NS における壁モデル

IB-NS における壁モデル（式(3)）は，有限幅の壁領域において速度場と体積力との構成式を与えている．従来の境界条件に照らせば，壁領域積分として前者がせん断ひずみ，後者がせん断応力に対応する．変数 ε 定義（式(2)）より

$$|\nabla \varepsilon| = 2\varepsilon(1-\varepsilon)/\Delta \qquad (4)$$

と評価され，壁モデル（式(3)）を壁領域に限定している．

この壁モデルが粘性に起因するせん断応力のみを与えることにも注意されたい．圧力による壁応力は変数 ε を通して基礎式(1)に埋め込まれており付加的な壁モデルを必要としない．固体領域全体を多孔質とみなし解置換法で速度条件を直接与える手法では slip 条件が直接的に表現できないが，本モデルでは単にα = 0（粘性起因の壁応力 $\boldsymbol{f}_w = 0$）と定式化される．

上記より IB-NS では速度場で定式化され粘性起因の壁応力を与える任意の壁モデルが容易に実装できる． その実例

として，乱流モデル解析に適用される**対数速度分布則**

$$u^+ = \frac{1}{\kappa}\ln\left(y^+\right) + C, \quad u^+ = \frac{u}{u_\tau},\ y^+ = \frac{\rho u_\tau}{\mu}\xi \tag{5}$$

壁せん断応力: $\tau_w = \rho u_\tau^2$，摩擦速度: u_τ について検討してみよう．これを速度勾配で表現すると

$$\frac{du}{d\xi} = \frac{\tau_w}{\mu}\frac{du^+}{dy^+} = \frac{u_\tau}{\kappa\xi} \tag{6}$$

となる．乱流解析にて壁モデルを適用するのは粘性低層が格子解像されない場合と考えられるので, IB-NS の壁領域は壁モデルが与えられた対数速度分布からの外挿として解かれている．よって，式(6)が成り立つ対数速度分布域で

$$\frac{\tau_w}{\mu_t} = \frac{du}{d\xi} = \frac{u_\tau}{\kappa\xi}, \quad \text{乱流粘性:}\mu_t \tag{7}$$

と評価される．これが壁領域外縁（たとえば，$\xi = \Delta$）で成り立つとすると，速度ひずみは壁面（ξ=0）に外挿した滑り速度 u_w と外縁 ($\xi = \Delta$)速度 u との差をもちいて

$$\frac{du}{d\xi} \cong \frac{u - u_w}{\xi} \tag{8}$$

と近似できるので，摩擦速度（または，壁せん断応力）が

$$u - u_w \cong u_\tau/\kappa$$

と関係づけられる．一方，壁領域での速度と壁せん断応力の関係は式(3)にて与えられるので, 壁モデル式 (8)にフィッティングするようにパラメータα を決定すればよい．

Oshima(2024)は層流ポアズイユ流れを用いて no-slip 条件近傍（α~32）での速度分布を示しており， α変化に応じて壁仮想原点（壁領域外縁から外挿した速度が0）が移動することを示している．そこで，さらにα→0条件へ延長して速度分布の変化を算出した（図１）．圧力勾配一定の下で，流路中央で層流ポアズイユ流れの理論解である放物分布を保ちつつ平行に上下する．よって，滑り速度 u_w が壁条件（すなわち，壁せん断応力）の変化に応じている．

パラメータα変化に応じた仮想原点と滑り速度，および，壁せん断応力の算出値を表１および図２に示す．乱流での速度分布から壁モデルが与えるパラメータ値は slip 条件と層流 no-slip 条件の中間（0＜α＜32）と推定されるが，その範囲では滑り速度がα の逆数（仮想原点は–3/4乗）におよそ比例変化すると近似できる．(一方，32≦αではいずれも–1/2 が良くフィットするようである)

実装としては，たとえば時間発展計算にて摩擦速度

$$\tau_w = \rho u_\tau^2 = \mu_t \frac{du}{d\xi} \tag{9}$$

を仮定すると，(5)定義を代入して壁仮想原点（壁領域外縁から外挿した速度が0）が

$$\frac{\xi_0}{\Delta} = 1 - C\kappa - \ln\Delta^+, \quad \Delta^+ = \frac{\rho u_\tau}{\mu}\Delta \tag{10}$$

と算出され，これにパラメータα が決定され，流れ場が解析される．これを繰り返して収束解が得られると期待できる．

上記より算出したΔ^+とα の近似関係を図3に示す（ξ_0＜0，固体側となる)．壁モデル係数（κ＝0.4, C＝5.5), Δ^+＝50（ln(Δ^+) ~ 3.9）を仮定すると，式(10)によりξ_0/Δ ~－5， α ~ 2 が算出される．

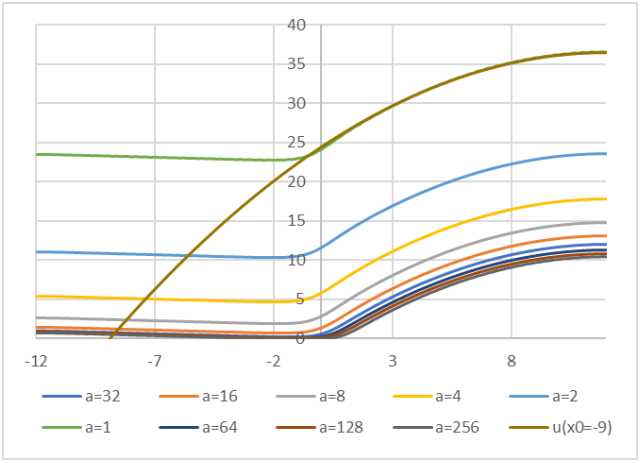

図１　壁モデル係数αによるポアズイユ流れの変化

表1　壁モデル係数αによる仮想原点ξ_0とすべり速度 u_w

α (< 32)	1	2	4	8	16
ξ_0/Δ	–9.0	–5.0	–2.7	–1.3	–0.5
u_w	24.5	11.5	5.76	2.69	1.06

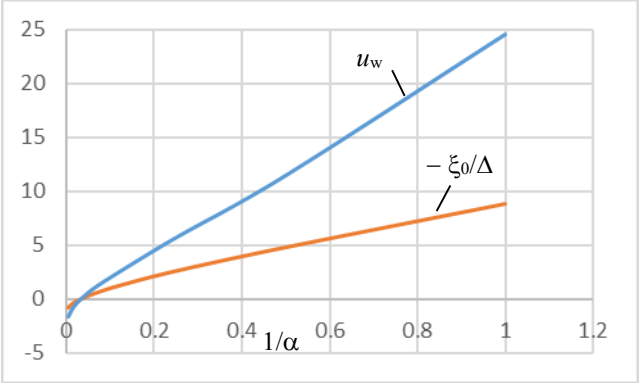

図２　壁モデル係数αによる仮想原点ξ_0とすべり速度 u_w

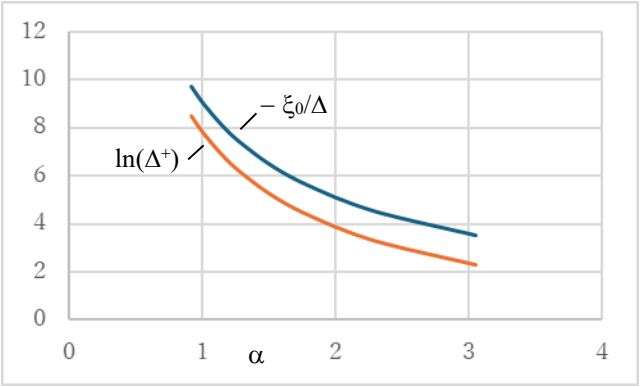

図３　壁モデル係数αによる仮想原点ξ_0と無次元厚さΔ^+

壁モデルの実装例として円柱まわり流れに適用した．等間隔デカルト座標で円柱直剣 D を 320 分割(計算領域 12.5D ×12.5，4000×4000 格子点)，壁領域厚さ Δ を格子サイズ

dx（=dy）に対して 1.5 倍とした．よって，Δ≒0.0468 D となる，簡単化のため乱流粘性を一定（Re_t=UD/μ_t=640）として，壁モデルにα＝2（上記評価よりΔ^+～50）を与えた．（Δ^+/Re_t，Δ/D，および u_τ/U より換算してμ_t/μ 比はおよそ200倍程度となり Re ～1.2 x 10^5 程度の流れに相当する．なお，計算格子に対して流入速度を 5 度傾けている．

同じ格子と流入出条件にて層流 no-slip 条件（α＝32，Re＝ρUD/μ=640）の解と比較して図 4 に示す．層流 no-slip 条件が円柱上下 90° 付近に剥離を生じて幅広い後流とカルマン渦変動が予測されるのに対して，壁モデル条件では剥離点が下流に移動して後流は狭くなり乱流状態を模擬する．抵抗係数も層流剥離に相当する Cd≒1.4 から，乱流剥離相当の約 1/3 に遷移する．ここでは，乱流粘性μ_t と無次元厚さΔ^+を定数固定した解析なので定量値には物理的意味はないが，乱流の壁境界条件は適切に再現されたと考えられる．

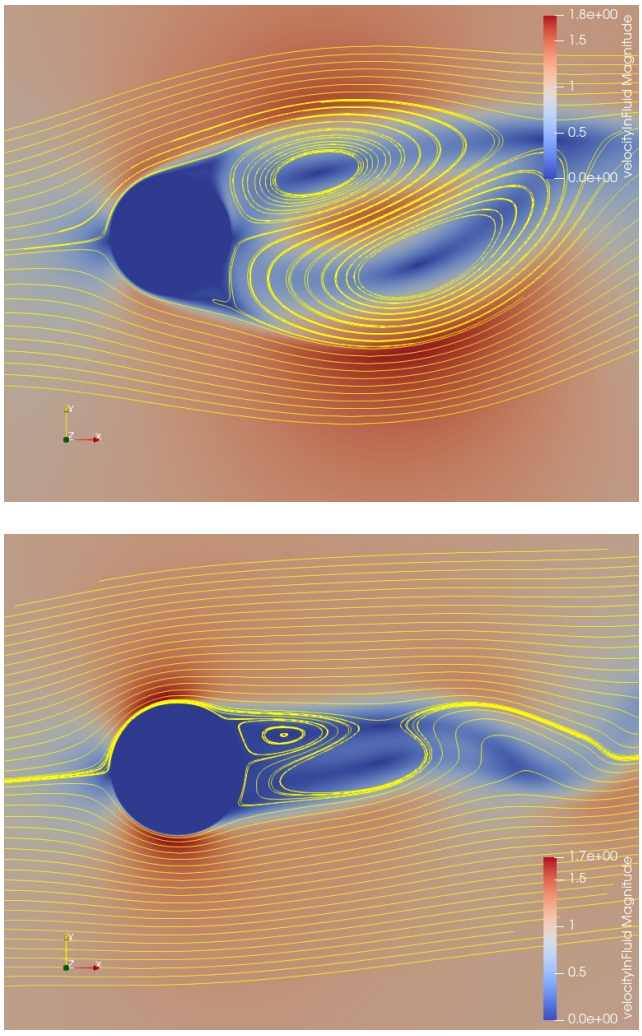

図４　壁モデル係数による流れ変化（上：α=32，下：α=2）

４．IB-NS 解からみた壁条件の考察

希薄流れの分子動力学シミュレーションからわかるようにミクロ視点では固体壁での no-slip 条件（速度固着）に物理的根拠はなく経験則（あるいは漸近近似）に過ぎない．一見，数学的な単純性があるかに見えるが，境界の幾何学条件（たとえば鋭角の角の特異性など）を考慮するには，むしろ構成式による応力モデルがより整合的といえる．

従来ナビエ・ストークス解では no-slip 壁条件を与える際に圧力に対して単純なノイマン条件（壁勾配 0）で近似する例が多いが，これは曲率のある壁では正しくない（ex.剛体回転する円柱まわり流れ）．非圧縮性流れでは連続条件を満たすように圧力条件が決定されねばならないので，圧力場の壁条件は壁近傍の速度場に依存して定式化される．IB-NS では壁近傍の圧力場は速度条件とは独立に定式化され，上記条件が自然に実現している．

Oshima[(1)]が指摘するように粘性流れに slip 壁条件を適用すると壁曲率に応じた渦度を生成する「境界層」が現れ，円柱後流が定常流れとなる場合（Re＜50 程度）には結果として no-slip 条件の 1/3 程度の抗力を与える．このことは，粗さによって局所凹凸（曲率）をもつ場合に slip 壁条件にもマクロ的には一定の「せん断応力」を生じると考えられる．これは，ミクロスケールの物理的な壁条件にかかわらず，一定の壁粗さ（凹凸）が存在すればマクロ的「せん断応力」が生じて，すなわち，固着条件の発生要因となりうる．また，乱流粘性に対するマクロスケール壁モデルも，ミクロスケール（粘性低層）の変動場が局所流線の凹凸を生じて同様の効果を生むとして同様に解釈されよう．

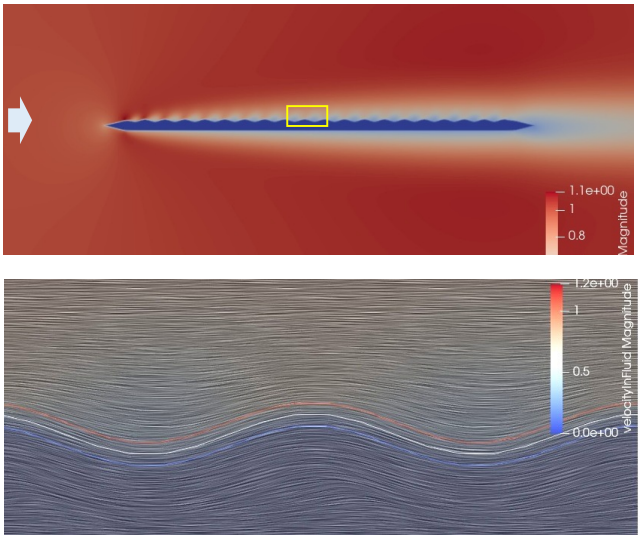

図５　粗さ薄板周りの速度分布
（上：全体　主流速度，下：壁近傍の流線表示）

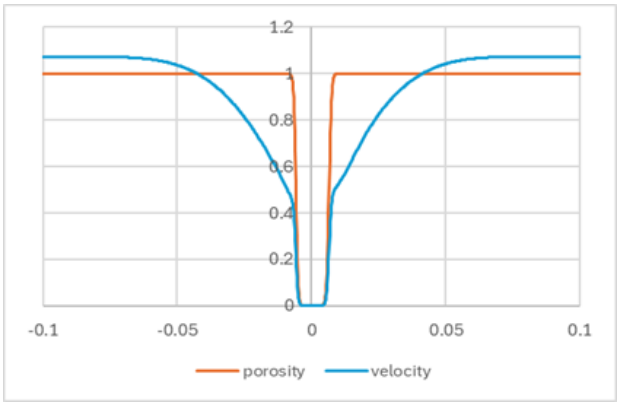

図６　粗さ薄板中央の境界層速度分布

ここでは，粗さ壁の単純モデルを用いて上記効果を模擬した検証例を紹介する[8]．計算対象は一様流入（左）に平行に上面に波状粗さをもつ薄板をおき、上下周期、流出（右）圧力一定として、薄板周囲に生じる定常層流の境界層流れを解析した。注目すべきは、係数$\alpha = 0$ によって、平滑な下面では境界層のない slip 条件速度場が得られるが、波状面には顕著な境界層をもつ noslip 条件速度場が現れる。ただし、そのとき遠方速度場から外挿する仮想壁位置は、壁形状に依存し、粗さ（波高）すなわち曲率が小さいほどすべり速度は小さく，仮想原点は流体側に近づく．

壁領域の平均的なすべり速度が一致するように平滑面の係数αを調整すると、上下面に同等の境界層流れが誘起され（図５上)、このときの遠方速度場は両面でほぼ対称となる（図６)。遠方速度場への影響は壁近傍（粗さ（波高）程度の距離）に限られる。壁近傍を LIC 法にて流線表示（図５下）から，流れは凹凸の壁に沿っており剥離は生じていないことが分かる．マクロ流れへのせん断力は壁近傍の流線曲率により生じる渦度に起因している．

５．おわりに

本報では境界埋め込み流れ方程式（IB-NS）における壁モデルにて乱流壁モデルや粗さ壁条件を模擬した部分 slip 壁条件を１つのパラメータにて表現する方法を提案し，2 次元ポアズイユ流れ，円柱流れ，および，境界層流れにて数値検証を示した．今後，乱流モデル解析への実装や，スカラー輸送方程式や圧縮性流れへの展開を試みたい．

参考文献

(1) Oshima, N., “A Novel approach for wall-boundary immersed flow simulation: proposal of modified Navier-Stokes equation”, Journal of Fluid Science and Technology, Vol. 18, No. 4 (2023) DOI: 10.1299/jfst.2023jfst0034.

(2) Oshima, N., “A Novel approach for wall-boundary immersed flow simulation (part 2: modeling of wall shear stress), Journal of Fluid Science and Technology, Vol. 19, No. 3 (2024) DOI: 10.1299/jfst.2024jfst0026.

(3) Kawashiro,E., Terashima, H.,Oshima,N.， Development of a Porosity-Based Immersed Boundary Model for the Compressible Navier-Stokes Equations on Cartesian Grids, 22th International Conference on Clow Dynamics, (2025)

(4) Nakamichi, N., Cho, Y. and Oshima, N., “Image-data-driven Simulation of Fluid Dynamics: Proposal and Evaluation”, Mechanical Engineering Journal Vol.11, No.10 (2024) DOI: 10.1299/mej.24-00196

(5) 中道，ジョ，大島，3 次元画像データを直接用いた流れシミュレーション，第 52 回可視化情報シンポジウム (2024)

(6) 中道, Cho，大島, マルチカラーSOR 法による 3 次元ポアソン方程式の高速解法と境界埋め込みナビエ・ストークス方程式への適用，第 39 回数値流体力学シンポジウム，(2025)

(7) 大島，固体境界が埋め込まれた改良ナビエ・ストークス方程式の解法，北海道大学学術成果コレクション (HUSCAP)https://eprints.lib.hokudai.ac.jp/dspace/handle/2115/89344

(8) 大島，境界埋め込み流れ解析における壁面境界条件の数値的考察，機械学会計算力学講演会，(2025)