



Title	2006年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2006
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/15412
Rights(URL)	http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learningobject
Note(URL)	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html ; http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory06_10.pdf (第10回講義ノート)



[Instructions for use](#)

グラフ理論 配布資料 #10

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

URL : http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平成 18 年 6 月 12 日

目次

9.2 地図の彩色	126
9.3 辺彩色	129
9.4 彩色多項式	132

演習問題 9 の解答例

グラフ G に含まれる点をその色でグループ分けする. 彩色数が $\chi(G)$ ならば, $\chi(G)$ 個のグループができるはずであるが, 同じグループに属する点の間には辺が無いことに注意する. これは, もし, そのような 2 点の間に辺が存在してしまえば, その 2 点はもはや同じ色で彩色できないことになり, 同じグループに属していることに矛盾してしまうからである. 従って, G に辺が存在するとすれば, それは異なるグループに属する点の間にある辺でなければならず, その辺数 m は任意の 2 つのグループから 1 点ずつ点を選んでその 2 点を辺で結ぶ場合の数よりも多くなくてはならない. つまり, m は $\chi(G)C_2$ 以上となるはずである. よって

$$m \geq \frac{1}{2}\chi(G)(\chi(G)-1) \quad (183)$$

が成り立つべきである. これを $\chi(G)$ について解くと

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{8m+1}) \quad (184)$$

となり, これは題意に与えられた不等式である.

9.2 地図の彩色

この節では, ヨーロッパのように, 多くの国が屹立しているような地域の地図において, 隣り合う国を異なる色で区別するためには何色が必要か? という素朴な質問から端を発した「地図の彩色」について, それにまつわる定理及び適用例を見てゆくことにする.

k -面彩色可能: 地図の隣接する 2 つの面が同じ色にならないように k 色で彩色できる場合. 図 145 に 3-彩色可能なグラフの一例を載せる.

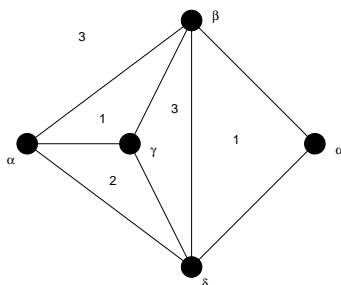


図 145: 3-面彩色可能なグラフの一例. 面に付された数字が色を表す.

定理 19.1

地図 G が 2 面彩色可能であるための必要十分条件は, G がオイラー・グラフであることである.

(証明)

必要性 :

G の各点 v を含む面は偶数でなければならないので, v の次数は偶数である. 従って, 定理 6.2 「連結グラフがオイラー・グラフであるための必要十分条件は, G の点の次数が全て偶数である」ことから, G はオイラー・グラフである.

十分性 :

任意の面 F を選び, それを赤で彩色する. F の中の任意の点 x から, 他の面 F' へ行く曲線を考える (図 146 参照).

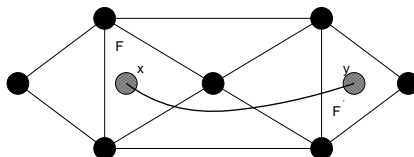


図 146: 2-面彩色可能なグラフ G においては, $x \rightarrow y \rightarrow x$ という任意の閉路は偶数回 G の辺と交差する.

F' → 赤 (曲線が偶数本の辺を交わる場合)

F' → 青 (曲線が奇数本の辺を交わる場合)

で色分けすると, $x \rightarrow y \rightarrow x$ という任意の閉路は偶数回だけ辺を交差する (G の各点に接続する辺は偶数) のでこの彩色で矛盾はない. (証明終わり).

定理 19.2

G はループの無い平面グラフとし, G^* は G の幾何学的双対であるとする. このとき, G が k -点彩色可能であるための必要十分条件は, G^* が k -面彩色可能であることである.

例として図 147 を見よ.

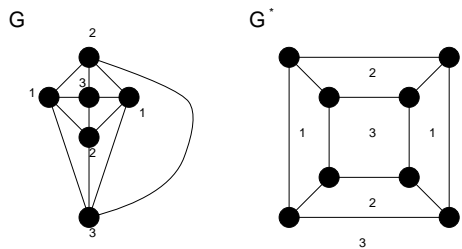


図 147: 3-点彩色可能なグラフ G (左) と, その幾何学的双対グラフ G^* . グラフ G^* は 3-面彩色可能である.

定理 19.4

G は各点が 3 次の地図であるとする. このとき, G が 3-面彩色可能であるための必要十分条件は, 各面が偶数本の辺で囲まれていることである.

(証明)

必要性 :

図 148 のように, G の任意の面 F に対し, F を取り囲む G の面は 2 色によって彩色可能である. 従って, そのような面は偶数個なければならないので, 全ての面は偶数本の辺で囲まれている.

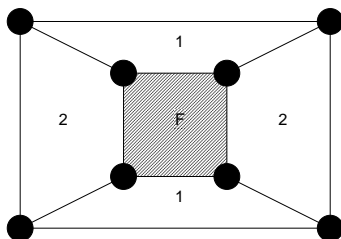


図 148: 面 F を取り囲むグラフ G の面は 2 色で彩色可能である.

十分性 :

「 G が単純連結グラフであり, G の各面が三角形であり, G の各点の次数が偶数 (オイラー・グラフ) ならば, G は 3-点彩色可能である」という双対な結果を示せばよい.

グラフ G はオイラー・グラフであるから, 定理 19.1 より, 図のように, G の面は 2 色, 赤と青によって彩色できる.

赤い面の 3 点を α, β, γ が時計回りにくるように彩色する.
 青い面の 3 点を α, β, γ が反時計回りにくるように彩色する.

とすると, このような彩色はグラフ全体に拡張できる. (証明終わり).

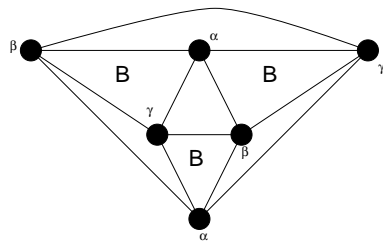


図 149: オイラー・グラフ G の面は赤と青 (B) で 2面彩色可能である.

9.3 辺彩色

点彩色, 地図の彩色 (面彩色) とくれば, 次は辺彩色である.

k -辺彩色可能 : グラフ G の隣接する辺は同じ色にならないように, G の辺を k 色で彩色できるとき.

彩色指数 : G が k -辺彩色可能, $k - 1$ -辺彩色不可能なとき, 彩色指数 $\chi'(G)$ を

$$\chi'(G) = k$$

で定義する. 図 150 に 4 辺彩色可能なグラフの一例を載せる.

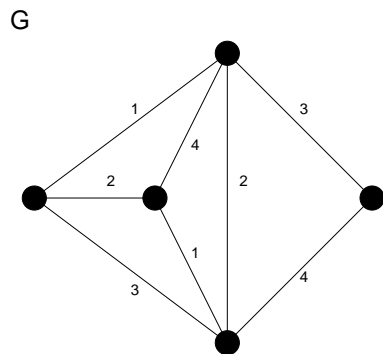


図 150: 4-辺彩色可能なグラフの一例. このグラフ G の彩色指数は $\chi'(G) = 4$ である.

定理 20.1

G は単純グラフであり, その最大次数が Δ ならば, $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$ である.

ここでは具体的な証明を追うことはせず, いくつかの代表的なグラフに対して, 上記定理を確認することにとどめておく.

(例) :

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & (n : \text{偶数}) \\ 3 & (n : \text{奇数}) \end{cases}$$

$$\chi'(W_n) = n - 1 \quad (n \geq 4)$$

定理 20.2

$n (\neq 1)$ が奇数ならば, $\chi'(K_n) = n$ であり, 偶数ならば, $\chi'(K_n) = n - 1$ である.

(証明)

$n \geq 3$ とし, 以下では n が偶数の場合と奇数の場合に分けて考えることにする.

n が奇数のとき :

完全グラフ K_n の点を正 n 角形の形状に配置し, その外周の辺を各辺に異なる色を用いて彩色し, 次に残りの辺それぞれをそれと平行な外周の辺に用いられた色で彩色する (図 151 参照).

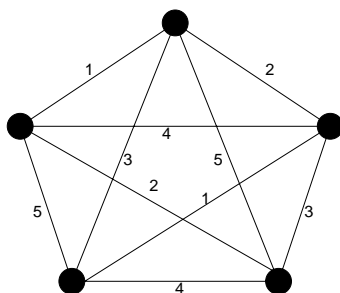


図 151: 完全グラフ K_5 の辺彩色. 外側の 5 つの辺にそれぞれ色を割り振ると, 各外辺に向かい合う辺に同色の色を割り当てれば, 5-辺彩色が完成する.

このとき, 同じ色で彩色できる辺の最大数は $(n - 1)/2$ である. 従って, 彩色指数が $n - 1$ とすると完全グラフ K_n の辺数は高々

$$\frac{1}{2}(n - 1)\chi'(K_n) = \frac{1}{2}(n - 1)^2 \neq {}_n C_2$$

となり, K_n の辺数 ${}_n C_2 = n(n - 1)/2$ に反する. 従って, $\chi'(K_n) = n$ であり, このとき, 辺数は高々

$$\frac{1}{2}(n - 1)\chi'(K_n) = \frac{1}{2}n(n - 1) = {}_n C_2$$

となり, つじつまが合う. 従って, n が奇数のときは $\chi'(K_n) = n$ である.

n が偶数のとき :

K_n は完全グラフ K_{n-1} と 1 つの点の和とみなせる. K_{n-1} の辺は n が奇数の場合に述べた方法により, $n - 1$ 色で彩色することができる. 従って, この方法で $(n - 1)$ -彩色すると, 完全グラフ K_{n-1} の各辺の次数は $n - 2$ であるから, 各点には全 n 色のうち, 欠けている色が必ず 1 つ生じ, これらの欠色は全て異なる. よって, これらの欠色で残りの辺を彩色すれば, K_n の辺彩色が完成する (図 145 参照). 従って, n が奇数のとき, $\chi'(K_n) = n - 1$ である. (証明終わり).

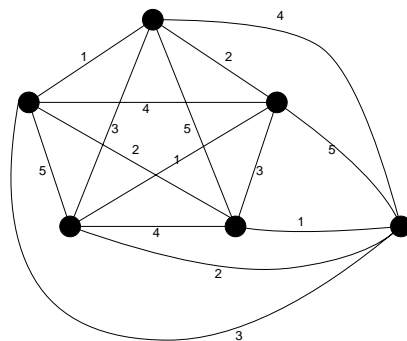


図 152: 完全グラフ K_5 の外部に点 v を配置し, この点と K_5 の各点での欠色で点 v を結べば, n が偶数 (この例では $n = 6$) の場合の n -辺彩色が完成する.

例題 9.4

グラフの辺彩色に関して以下の問い (1) ~ (3) に答えよ.

- (1) 図 153 のグラフ (a)(b) の彩色指数をそれぞれ求めよ.
- (2) ピータースン・グラフの外側の 5-閉路の可能な 3-彩色を全て考えて, ピータースン・グラフの彩色指数は 4 であることを示せ.
- (3) 「グラフ G が 3 次ハミルトングラフならばその彩色指数は 3 である」ことが知られている. この事実と (2) の結果を用いて, ピータースン・グラフはハミルトングラフでないことを示せ.

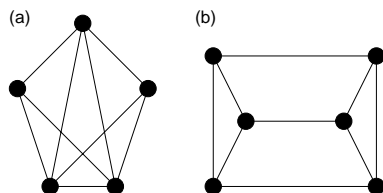


図 153: 彩色指数を求めるべきグラフ (a)(b).

(答え)

- (1) 図 154 より, (a)(b) のそれぞれの彩色指数は

$$\chi'((a)) = 5 \tag{185}$$

$$\chi'((b)) = 3 \tag{186}$$

である.

- (2) ピータースン・グラフは図 155 のように彩色できるので, その彩色指数は 4 である.
- (3) ピータースン・グラフは 3 次グラフ, つまり, 各点の次数が 3 であるが, この 3 次のグラフ G がハミルトングラフであるならば $\chi'(G) = 3$ であるはずなので, (1) の結果より, ピータースン・グラフはハミ

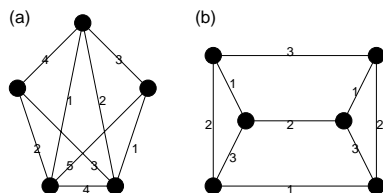


図 154: 辺に付された数字が各色を表す.

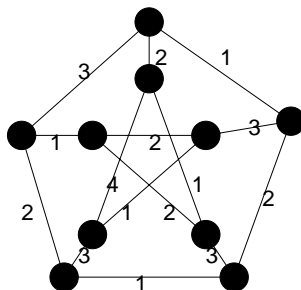


図 155: ピーターソン・グラフの彩色. 辺に付された数字が各色を表す.

ルトングラフではないことがわかる.

9.4 彩色多項式

彩色多項式 $P_G(k)$: G は単純グラフであるとし, k 色での点彩色の仕方が $P_G(k)$ 通りあるとする. このとき, $P_G(k)$ を彩色多項式と呼ぶ.

(例) :

$$P_G(k) = k(k-1)^2 \quad (\text{図 156(左上) のような 3 点からなる木 } G)$$

$$P_G(k) = k(k-1)(k-2) \quad (\text{図 156(左下) のような三角形 } G)$$

$$P_G(k) = k(k-1)^{n-1} \quad (\text{図 156(右) のような } n \text{ 点からなる木 } G)$$

$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) \quad (\text{完全グラフ } K_n)$$

明らかに

$$k < \chi(G) \Rightarrow P_G(k) = 0$$

$$k \geq \chi(G) \Rightarrow P_G(k) > 0$$

である.

次の定理は具体的にグラフ G の彩色多項式を導出する際に極めて重要である.

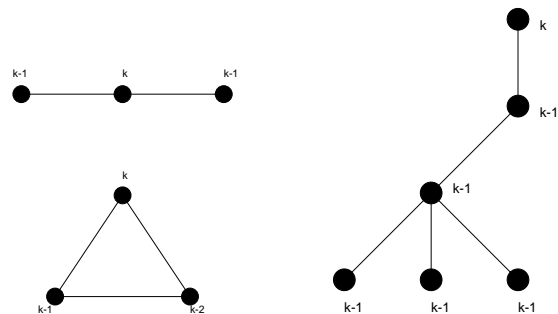


図 156: 左上から右へ $P_G(k) = k(k-1)^2, k(k-1)(k-2), k(k-1)^n$ を彩色多項式として持つグラフ.

定理 21.1

単純グラフ G から辺 e を削除して得られるグラフを $G - e$ とし, 縮約^a して得られるグラフを G/e とする. このとき

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k) \tag{187}$$

が成立する.

^a 再度確認するが, 「縮約」とは任意の 2 点 u, v を結ぶ辺 e を除去し, 点 u, v を同一視する操作である.

証明の前に, この定理の「使い方」を具体的に次の例を見てみよう.

(例) : 図 157 の例で考えると, 関係式 (187) は

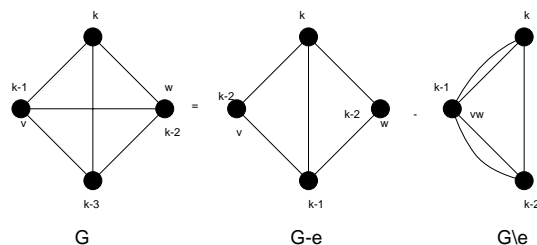


図 157: 関係式 (187) を示すグラフの一例.

$$k(k-1)(k-2)(k-3) = [k(k-1)(k-2)^2] - [k(k-1)(k-2)]$$

となる.

(証明) :

$e = vw$ とする. v と w が異なる色になるような $G - e$ の k -彩色の個数は v と w を結ぶ辺 e を描いても変化しない (図 157 のグラフ G , 及び, $G - e$ を参照). 従って, $P_G(k)$ に等しい. 一方, v と w が同じ色になるような $G - e$ の k -彩色の個数は v と w を同一視しても変わらない (図 157 のグラフ $G - e$ と G/e を参照). 従っ

て, $P_{G/e}(k)$ に等しい. 以上より

$$P_{G-e}(k) = P_G(k) + P_{G/e}(k)$$

が成り立つ. (証明終わり).

彩色多項式を求める際のポイントは, グラフ G の辺数を関係式 (187) を用いて段階的に削減して行き, 「木」まで到達した時点で, n 点からなる木の彩色多項式が $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ である事実を用いて求める, あるいは, 簡単に彩色多項式が求まるグラフまで辺数を落として, その簡単なグラフに対して彩色多項式を求めることにある.

この方法に慣れるためにいくつかの例題を見ておこう.

例題 9.5

4 つの点からなる単純連結グラフを全て挙げ, それら全てに対して彩色多項式を見つけ, これらの多項式は全て

$$k^4 - mk^3 + ak^2 - bk$$

なる形で書けることを示せ. ただし, m は辺数, a, b はともに正の定数である.

(答え)

まず, 4 つの点からなる単純連結グラフを全て描いてみると, 図 158 の A ~ F の 6 つのグラフが得られる.

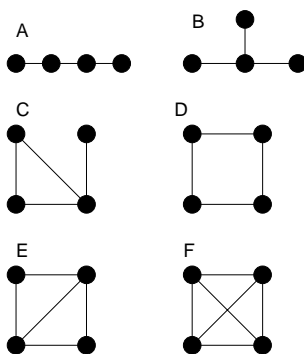


図 158: 4 つの点からなる単純連結グラフ A ~ F.

まず, $n = 4$ の「木」である A, B の彩色多項式は図 159 より直ちにわかり

$$P_A(k) = P_B(k) = k(k-1)^3 = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \tag{188}$$

である.

次に, C は公式 :

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k) \tag{189}$$

をグラフ C に適用すると, 図 160 より

$$P_C(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)^2 = k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 2k \tag{190}$$

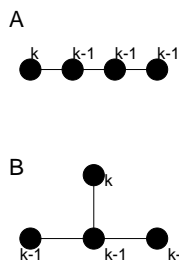


図 159: A, B は $n = 4$ 点からなる「木」であるから、その彩色多項式はどちらも $k(k-1)^3$.

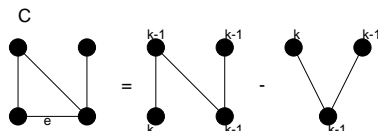


図 160: グラフ C は辺 e に関して図のように分解できる.

となる.

次にグラフ D は辺 e に関して図 161 のように分解できるので

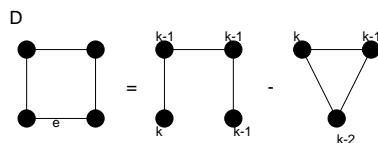


図 161: グラフ D は辺 e に関して図のように分解できる.

$$P_D(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k \tag{191}$$

が得られる.

次いで E であるが、これは図 162 のようにグラフ D と $n = 3$ の木に分解でき、グラフ D の彩色多項式 $P_D(k)$ は (191) で既に求めているので、これを用いて

$$\begin{aligned} P_E(k) &= P_D(k) - k(k-1)^2 \\ &= k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k - (k^3 - 2k^2 + k) = k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k \end{aligned} \tag{192}$$

が得られる.

最後にグラフ F であるが、これは図 163 のようにグラフ E と三角形に分解でき、グラフ E の彩色多項式は (192) で既に求めたので、これを用いて

$$\begin{aligned} P_F(k) &= P_E - k(k-1)(k-2) \\ &= k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k - (k^3 - 3k^2 + 2k) = k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k \end{aligned} \tag{193}$$

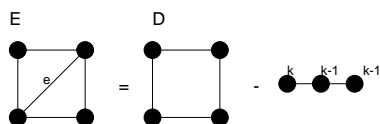


図 162: グラフ E は辺 e に関して図のように分解できる.

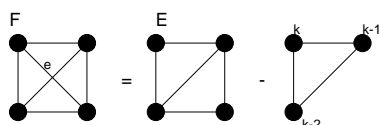


図 163: グラフ F は辺 e に関して図のように分解できる.

が得られる.

以上をまとめると

$$P_A(k) = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \tag{194}$$

$$P_B(k) = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \tag{195}$$

$$P_C(k) = k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 2k \tag{196}$$

$$P_D(k) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k \tag{197}$$

$$P_E(k) = k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k \tag{198}$$

$$P_F(k) = k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k \tag{199}$$

となり, いずれの場合も

$$P_G(k) = k^4 - mk^3 + ak^2 - bk \tag{200}$$

となり, m は辺数, a, b は正の定数となっていることがわかる.

例題 9.6

完全二部グラフ, 及び, 閉路グラフの彩色多項式に関して以下の問いに答えよ.

- (1) 完全二部グラフ $K_{2,3}$ の彩色多項式 $P_{K_{2,3}}(k)$ を求めよ.
- (2) 完全二部グラフ $K_{2,s}$ (s : 任意の自然数) の彩色多項式 $P_{K_{2,s}}(k)$ を求めよ.
- (3) 閉路グラフ C_4 , 及び, C_5 の彩色多項式 $P_{C_4}(k), P_{C_5}(k)$ を求めよ.
- (4) 数学的帰納法を用いて, 閉路グラフ C_n に対する彩色多項式 $P_{C_n}(k)$ が

$$P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

で与えられることを証明せよ.

(答え)

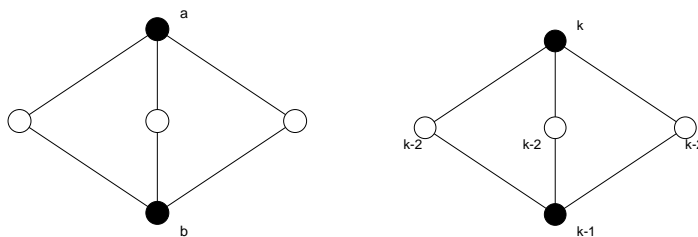


図 164: 完全二部グラフ $K_{2,3}$ (左) とその彩色の仕方(右).

(1) 完全二部グラフ $K_{2,3}$ は図 164(左) のとおりである. 以下, 点 a と点 b が同色の場合と異色の場合に分けて考える.

- (i) 点 a と点 b が同色の場合, 彩色の方法は $k(k-1)^3$ 通りある.
- (ii) 点 a と点 b が異色の場合, 彩色の方法は $k(k-1)(k-2)^3$ 通りがある (図 164(右) 参照).

従って, 求める彩色多項式はこの両者の和として

$$P_{K_{2,3}}(k) = k(k-1)^3 + k(k-1)(k-2)^2$$

で与えられる.

(2) 完全二部グラフ $K_{2,s}$ は図 165 のようなグラフである. この図 165 では「中間層」の点の個数が s であ

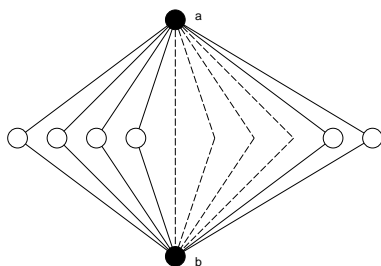


図 165: 完全二部グラフ $K_{2,s}$. 「中間層」は s 個の白丸からなる.

ることに注意しよう. このとき, やはり, 点 a と点 b が同色/異色の場合に分けて考える.

- (i) 点 a と点 b が同色の場合 : $k(k-1)^s$ 通り.
- (ii) 点 a と点 b が異色の場合 : $k(k-1)(k-2)^{s-1}$ 通り.

従って, 求める彩色多項式はこれら 2 つの場合の和として

$$P_{K_{2,s}}(k) = k(k-1)^s + k(k-1)(k-2)^{s-1}$$

で与えられる.

(3) 公式：

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k) \tag{201}$$

を用いると、 C_4 は図 166 のように「分解」することができるので、求める彩色多項式は

$$P_{C_4}(k) = k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) = k(k-1)(k^2 - 3k + 3)$$

となる。一方、 C_5 は、図 167 のように分解できるので、求める彩色多項式 $P_{C_5}(k)$ は $P_{C_4}(k)$ の結果を用

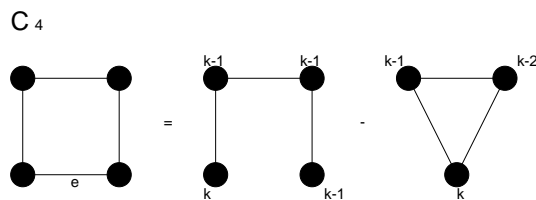


図 166: 閉路 C_4 はこの図のように木と三角形 (C_3) へと分解できる。

いて

$$\begin{aligned} P_{C_5}(k) &= k(k-1)^4 - P_{C_4}(k) \\ &= k(k-1)^4 - k(k-1)(k^2 - 3k + 3) = k(k-1)(k^3 - 4k + 6k - 4) \end{aligned}$$

と求まる。

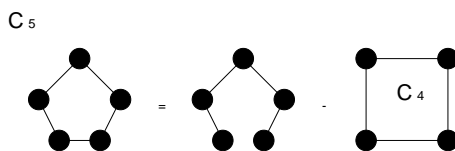


図 167: 閉路 C_5 はこの図のように木と C_4 へと分解できる。

(4) 閉路であるから、 $n \geq 2$ として考える。 $n = 2$ のときには、図 168 より、 $P_{C_2}(k) = k(k-1)$ となるが、これは証明すべき関係式で $n = 2$ と置いたものに等しい。そこで、点の数が $n - 1$ のとき、関係式：

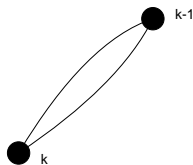


図 168: 閉路 C_2 とその彩色方法。

$$P_{C_{n-1}}(k) = (k-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k-1) \tag{202}$$

が成立すると仮定する。

このとき、図 169 の辺 e で、公式 (201) を用いると

$$\begin{aligned}
 P_{C_n}(k) &= k(k-1)^{n-1} - P_{C_{n-1}}(k) \\
 &= k(k-1)^{n-1} - \{(k-1)^{n-1} + (-1)^{n-1}(k-1)\} \\
 &= k(k-1)^{n-1} - (k-1)^{n-1} + (-1)^n(k-1) \\
 &= (k-1)^n + (-1)^n(k-1)
 \end{aligned}$$

となる。従って、数学的帰納法により、全ての n に対して

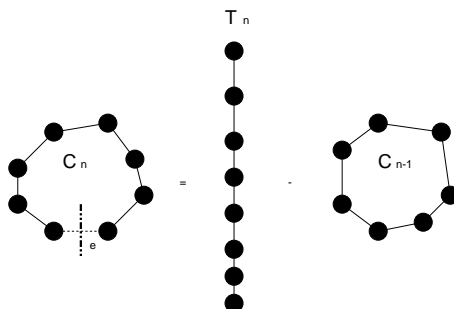


図 169: 閉路 C_n を辺 e において分解すると、 n 点からなる木 T_n と閉路 C_{n-1} へと分解される。

$$P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

が成り立つ。(証明終わり)。

例題 9.7

グラフ G が非連結な単純グラフならば、彩色多項式 $P_G(k)$ はその成分の彩色多項式の積で与えられることを示せ。

(答え)

例えば、三角形を G_1 とし、2 個の点からなる木を G_2 とする。このとき、3 色が使うことのできる色数とすれば、 $P_{G_1}(3) = P_{G_2}(3) = 6$ である。具体的に三色を R,B,G として彩色を図示すると図 170 のようになる。これから明らかに、この G_1, G_2 をグラフ G の 2 つの成分としたとき、この 2 つの成分は非連結であるから、 G_1 の彩色の仕方は G_2 の彩色の仕方に影響を与えない。従って、非連結グラフ G を 3 色で色分けする場合、出来上がるグラフの個数は $P_{G_1}(3) \times P_{G_2}(3) = 36$ 通りある。この考察を押し進めてグラフの成分数が増えた場合を考えても、個々の彩色多項式の積で非連結グラフの彩色の仕方の数が決まるのは明らかなので、題意が言えることになる。

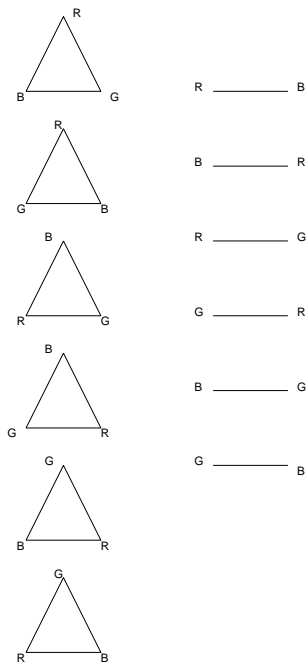


図 170: G_1, G_2 の 3 色での彩色の仕方. それぞれ 6 通りある.

演習問題 10

点数 n の一般グラフ: G , 木: T_n , 完全グラフ: K_n の彩色多項式の間には次の不等式が成立することを示せ.

$$P_{K_n}(k) \leq P_G(k) \leq P_{T_n}(k)$$

連絡事項

次回 6/19 は担当者 (井上) 出張のため休講とします. 今回のレポート締め切りは 6/26 の講義開始時までとします.