



Title	2006年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2006
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/15412
Rights(URL)	http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learningobject
Note(URL)	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html ; http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory06_slide4.pdf (第4回講義スライド)



[Instructions for use](#)

グラフ理論 #4

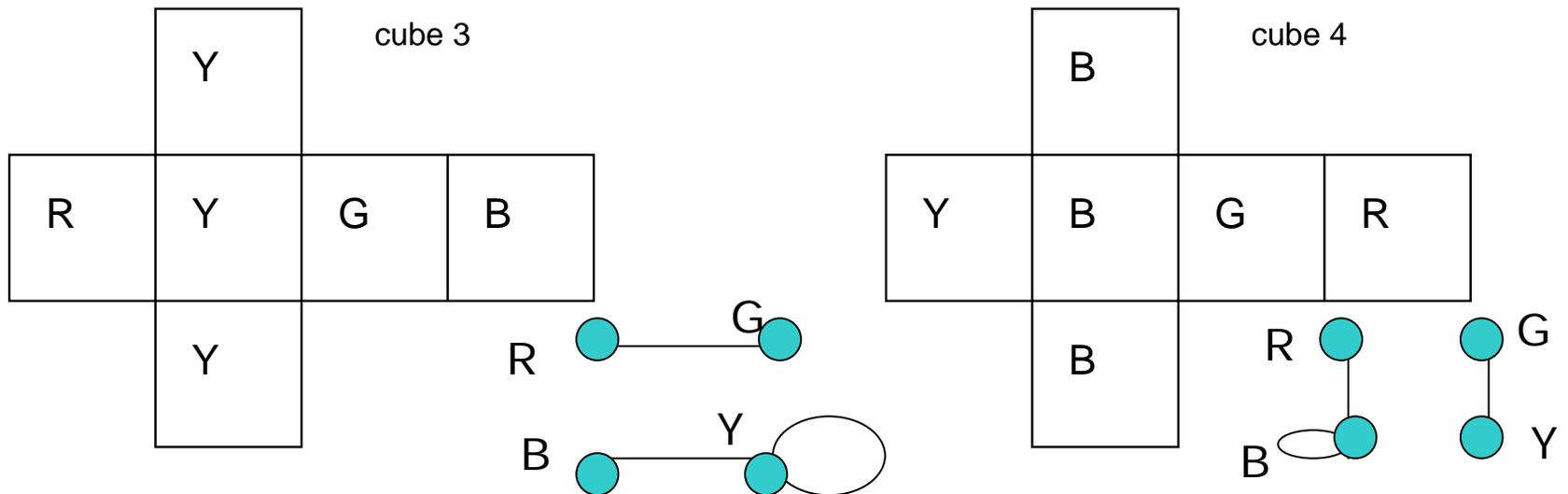
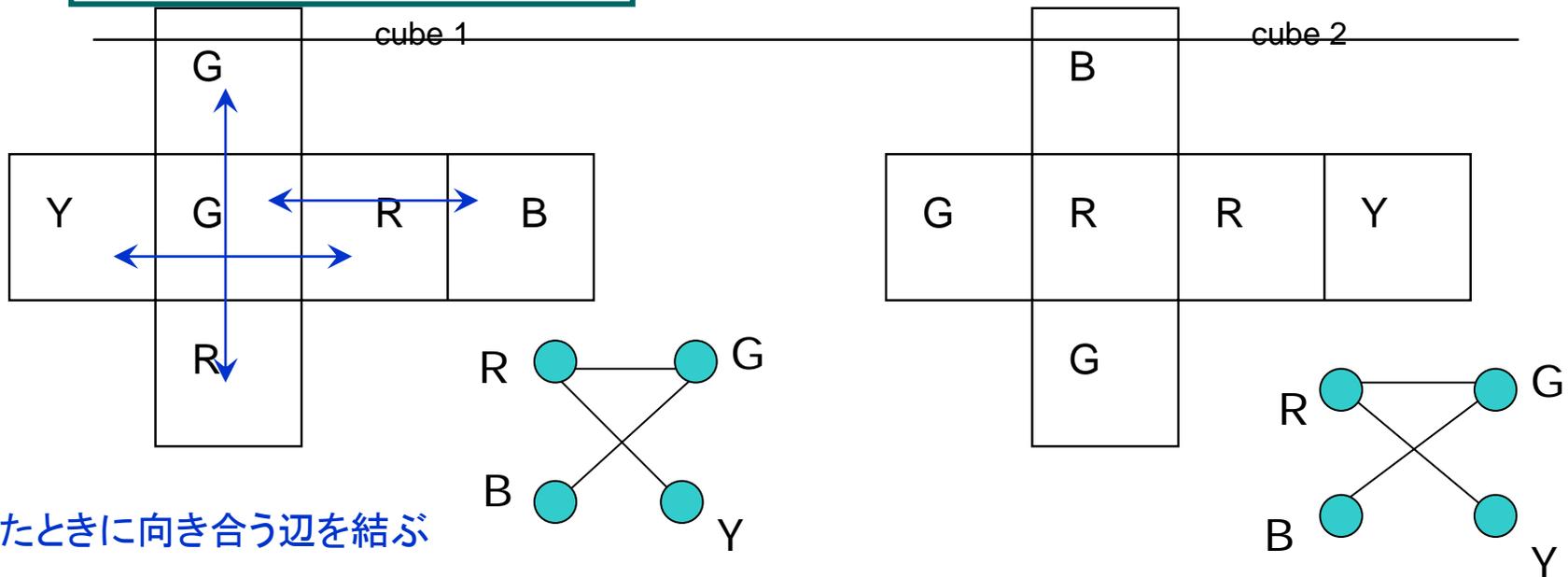
第4回講義 4月24日

--- 道と閉路 ---

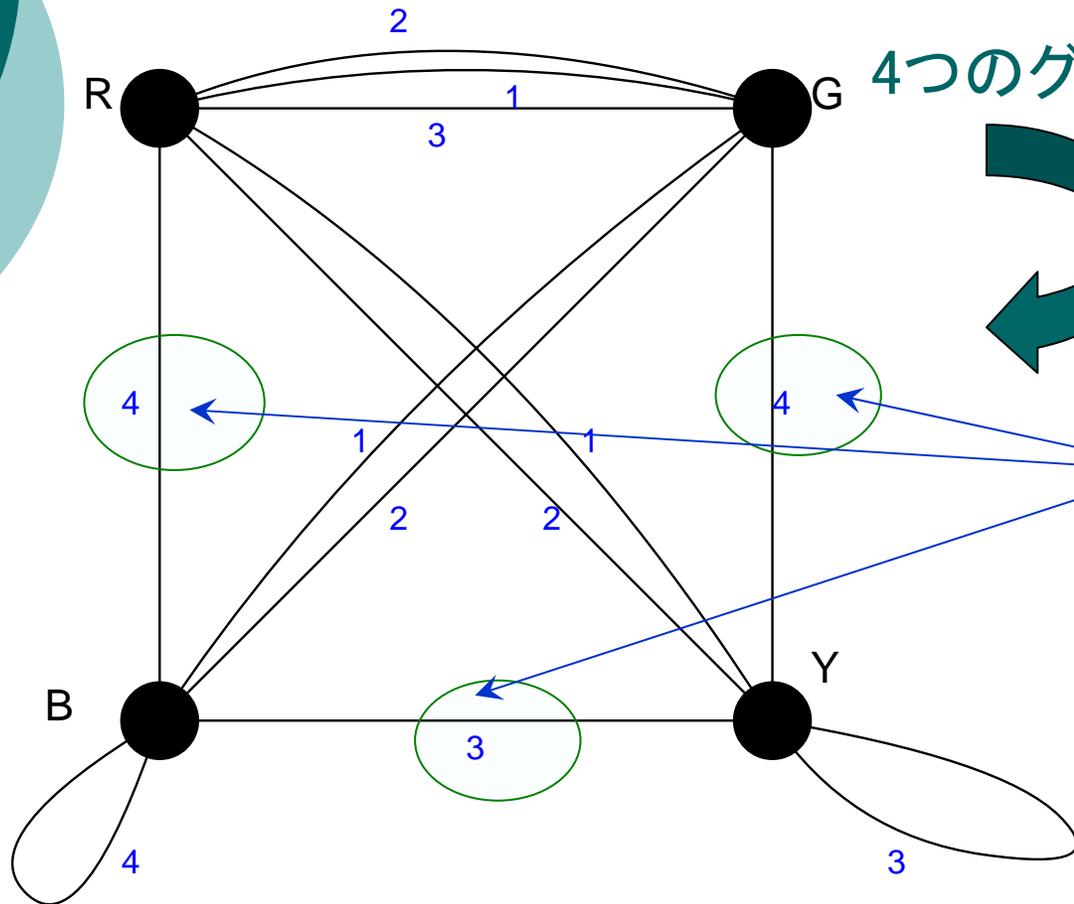
情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題3 の解答例



演習問題3の解答例 #2



4つのグラフを合わせると



候補が一つしかないので
次数2の正則グラフ
を2つ作ることはできない

立方体を題意のように
組み立てることはできない

例題3.4の1.

(iv) 11個の点を持つ正則グラフはあるか？



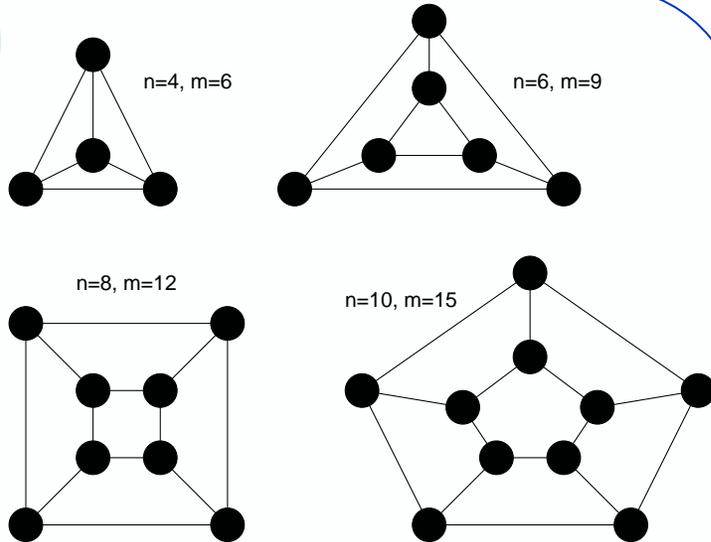
次数列 $(3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3)$ はグラフ的か？

握手補題より

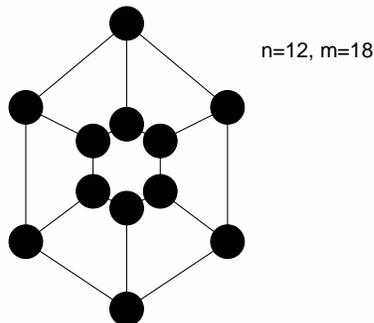
$$\underline{m} = \frac{3n}{2}$$

辺数

点数 n は偶数でなければならないので
 $n=11$ の場合には不可能



※ $n=4,6,8,10,12$ の場合の3次グラフはある



例題3.4の2.(1)

問題となるグラフとその補グラフの和は完全グラフとなるべきである

問題のグラフの辺数は

$$m = \frac{n(n-2)}{4}$$

$$\therefore n = 4k, 4k + 1$$

(辺数は整数でなくてははいけない)

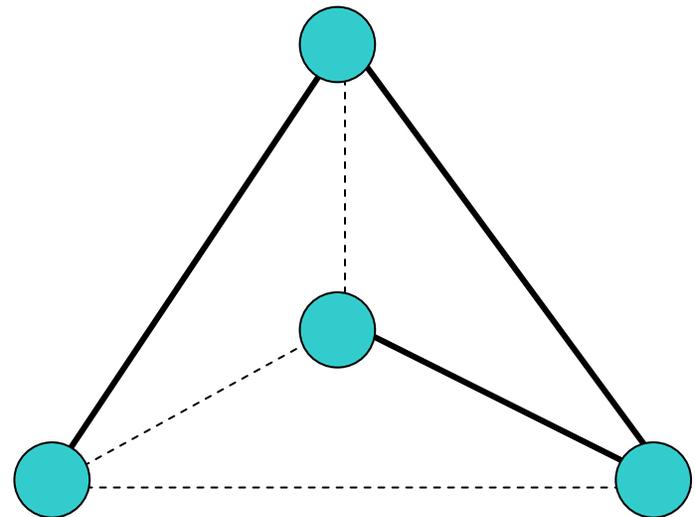
k=1のとき, n=4

$$L + 2M = 6$$

次数1の点数 次数2の点数

$$L + M = 4$$

この解は $(L, M) = (2, 2)$



破線と実線のグラフがそれぞれ自己補対

例題3.4の2.(1) #2

$k=1, n=4k+1=5$ の場合には

$$L + 2M + \underline{N} = 10$$

次数3の点数

$$L + M + N = 5$$

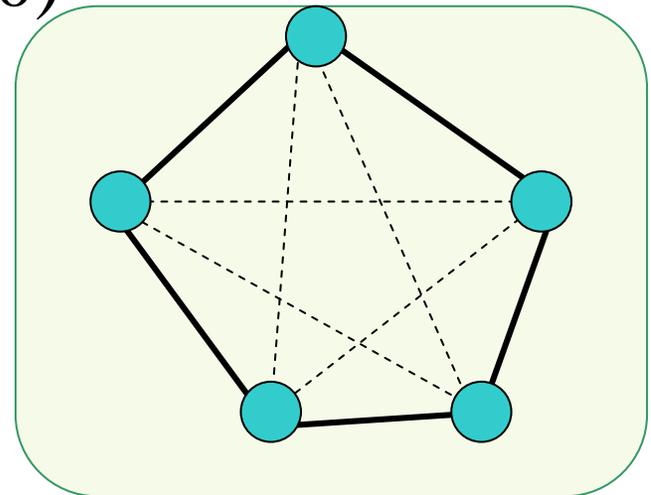
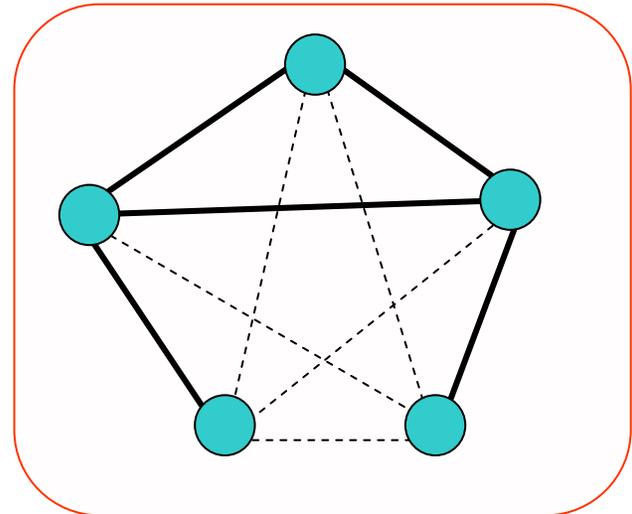
その解は

$$(L, M, N) = (1, 3, 1), (2, 1, 2), (0, 5, 0)$$

対応する次数列は

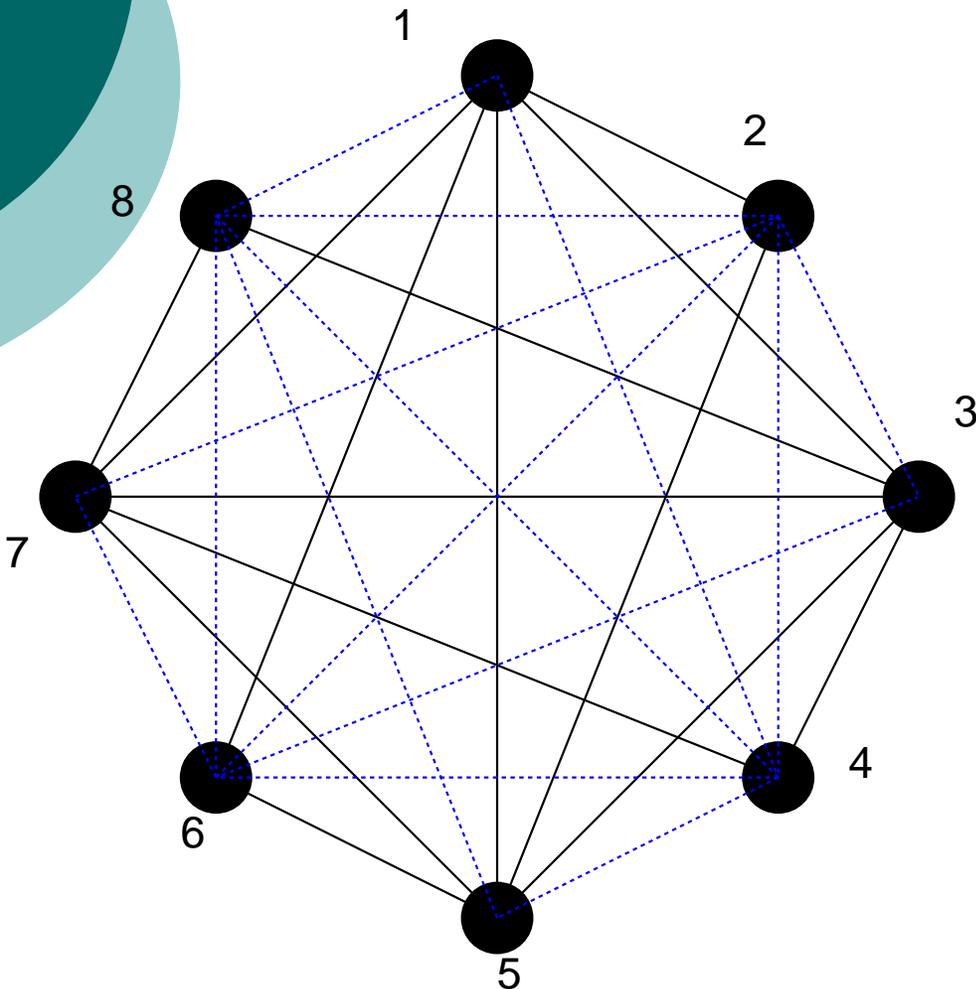
(3,2,2,2,1), (3,3,2,1,1), (2,2,2,2,2)

これは
描けない



例題3.4の2.(2)

$k=2, n = 4k=8$ の自己補対グラフの例



- (1) 8個の点を時計回りに並べる
- (2) 8個の点のうち奇数番の点に関して完全グラフを作る
- (3) 奇数番目の点とその点の番号+1番目の点どうしを結ぶ
- (4) 偶数番目の点とその点+3番目の点を結ぶ

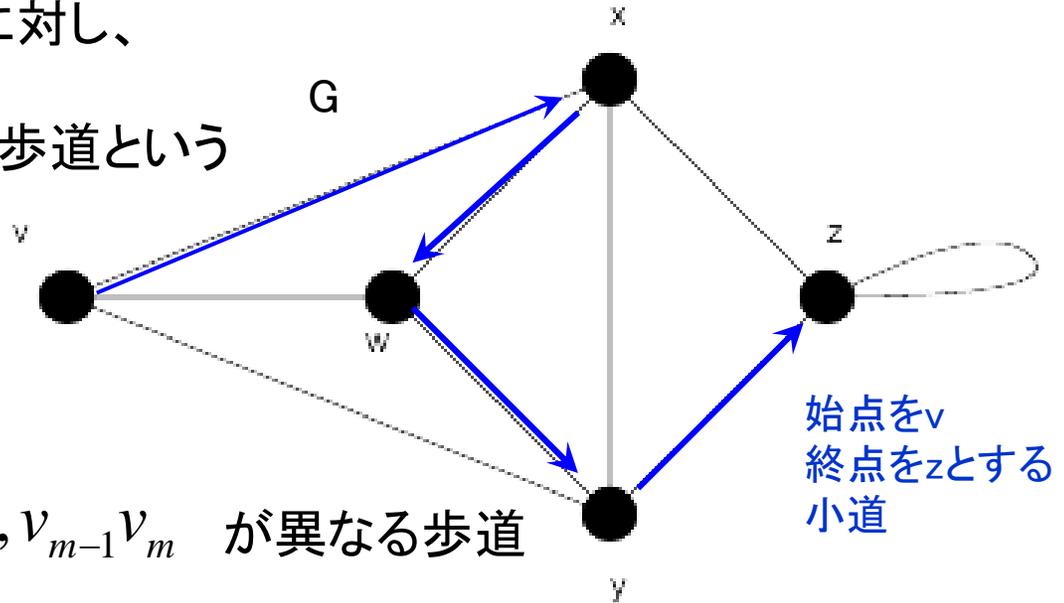
自己補対グラフの探し方

歩道・小道・道・閉路

歩道： $v_i (i = 1, \dots, m) \in G$ に対し、

$v_0 v_1, v_1 v_2, \dots, v_{m-1} v_m$ を歩道という
始点 終点

(※重複する辺があってもよい)



小道： 全ての辺 $v_0 v_1, v_1 v_2, \dots, v_{m-1} v_m$ が異なる歩道

道： 点 v_0, v_1, \dots, v_m が全て異なる歩道

閉路： 少なくとも1本辺を持つ閉じた道

例題4.1 #1

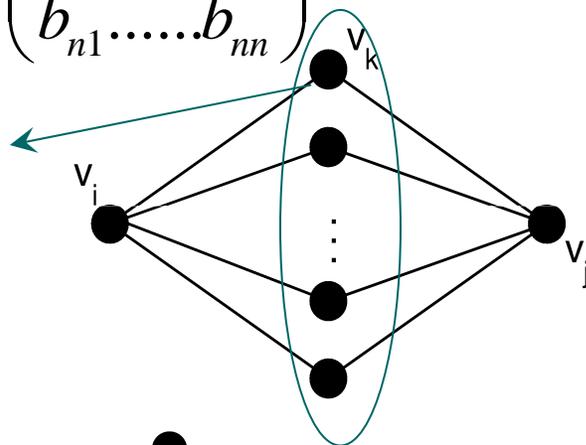
連結単純グラフ $G: \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, m 本の辺, t 個の三角形

(1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ と置くと、この2乗は $A^2 = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = B$

第 ij 要素: $b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{kj}$

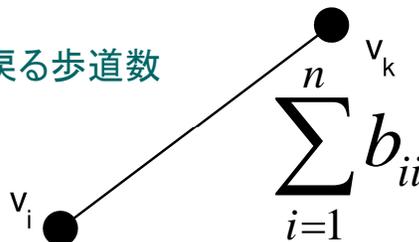
点 v_i から点 v_k を
経路して v_j に至る
長さ2の歩道の数

経路点 v_k に関する全ての可能性について足しあ
げたものは v_i と v_j 間の歩道の総数に等しい



(2) $b_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{ki}$

v_i から v_k を経路して v_i に戻る歩道数
 v_i と v_k を結ぶ辺の2倍



$$\sum_{i=1}^n b_{ii}$$

は G の総辺数の
2倍

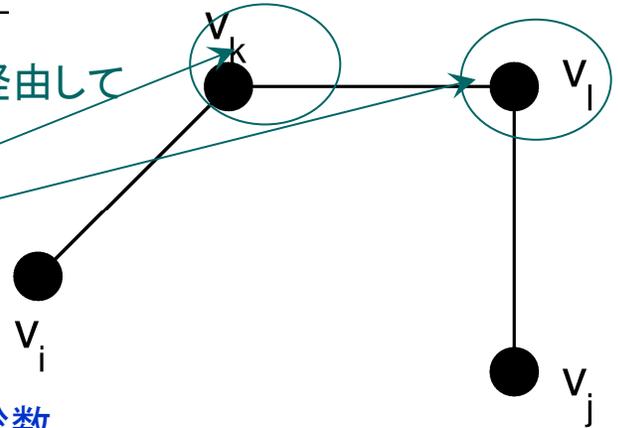
例題4.1 #2

(3)

$$A^3 = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = C$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{lj}$$

点 v_i から点 v_k と v_l を経由して
点 v_j へ至る辺の本数

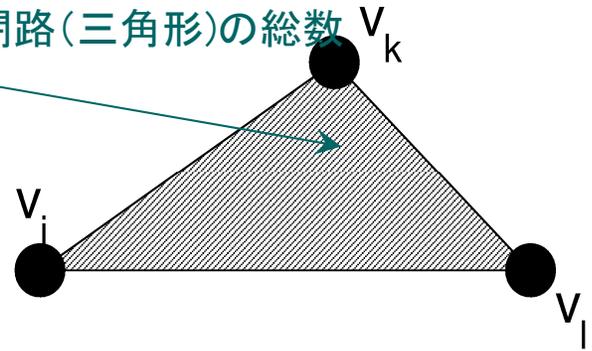


点 v_i から点 v_j へ至る歩道の総数

対角要素 :

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{li}$$

このような閉路(三角形)の総数



従って

$$\sum_{i=1}^n c_{ii} = \underline{6t}$$

点 i, k, l の並べ方の $3!=6$ 通りからくる

定理5・2 #1

グラフGはn個の点をもつ単純グラフであり、k個の成分がある場合、Gの辺数mは

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1) \text{ を満たす}$$

(証明)

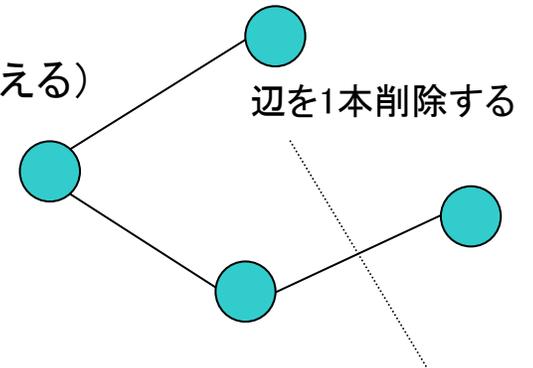
$m \geq n - k$ について

辺数の下限に関してであるから、グラフGはできるだけ少ない辺数を持つものとする(極端な場合として木を考える)

Gから辺を1本削除すると

$$k \rightarrow k + 1, n \rightarrow n, m_0 \rightarrow m_0 - 1$$

$m_0 - 1 \geq n - (k + 1)$ $m_0 - 1$ 本の辺に関して不等式の成立を仮定
(帰納法の仮定。 $m_0 = 0$ の場合は自明)



$m_0 \geq n - k$ m_0 本の辺について成立 \Rightarrow 全ての辺数について成立

定理5・2 #2

グラフGの中の任意の2成分

$$m \leq (n - k)(n - k + 1) / 2$$

の成立について示す

辺数の上界を示すので、グラフGは辺数の最も多い完全グラフとして考える

$C_i + C_j$ の辺の総数

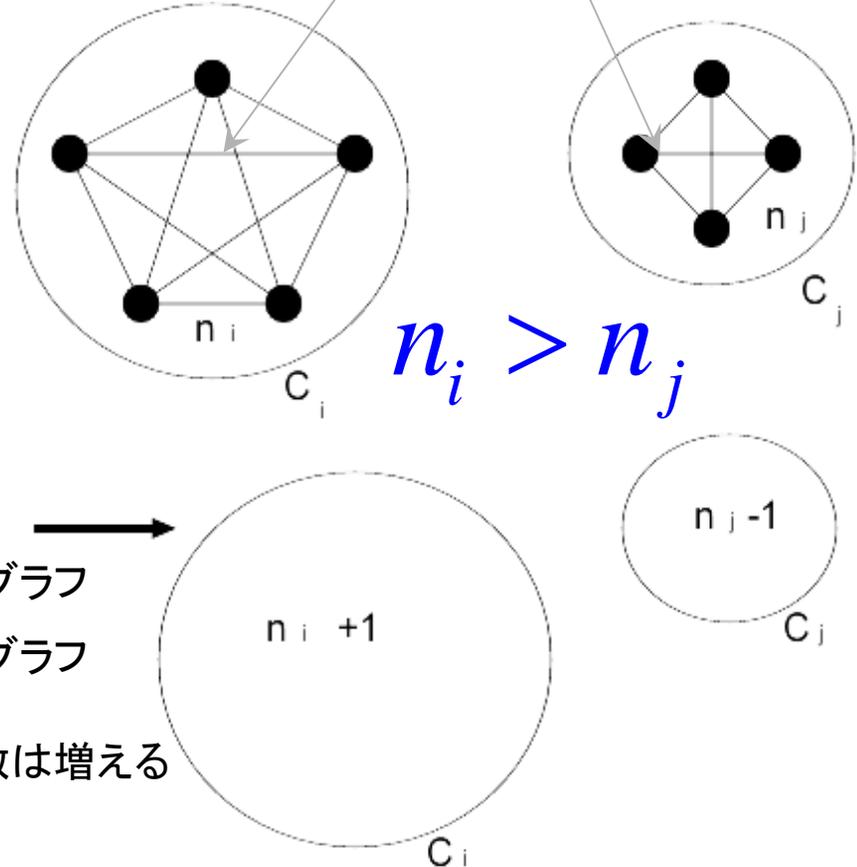
$$N_{ij} = \frac{1}{2}n_i(n_i - 1) + \frac{1}{2}n_j(n_j - 1)$$

次の操作を行う

$C_i \Rightarrow n_i + 1$ 個の点をもつ完全グラフ

$C_j \Rightarrow n_j - 1$ 個の点をもつ完全グラフ

$$\Delta N_{ij} = n_i - n_j + 1 > 0 \quad \text{だけ点の総数は増える}$$



この操作を繰り返すと $n - k + 1$ 個の完全グラフと $k - 1$ 個の孤立点を得られる

→ $m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1)$ が成立する

例題4.2 (1)

$d(v, w)$ は v から w への最短路の長さ

$d(v, w) \geq 2$ ならば、 $d(v, z) + d(z, w) = d(v, w)$ なる点 z が存在する

(証明のアウトライン)

図において

C^1 は点 v と点 z を結ぶ最短路である 仮定

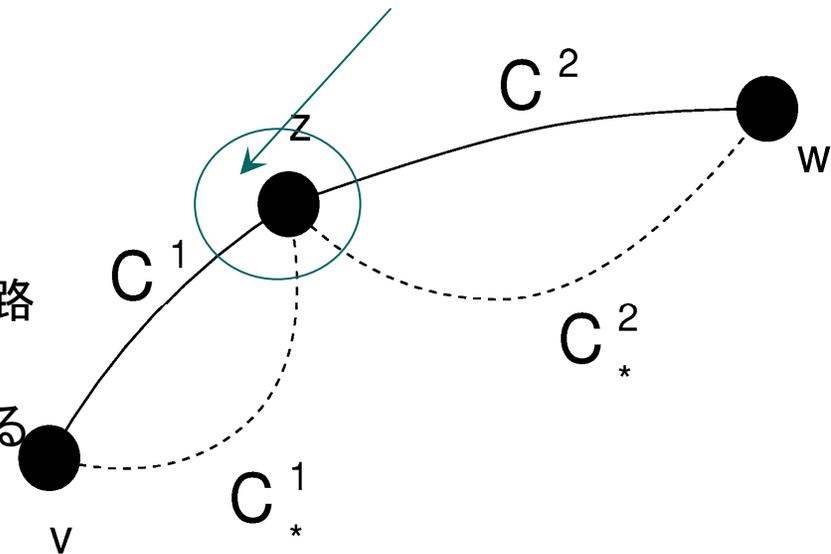
もし、これ以外に最短路 C_*^1 があるとすれば経路

$C_*^1 + C^2$ が v と w を結ぶ最短路となり仮定に反する

C^2 についても同様の議論ができる

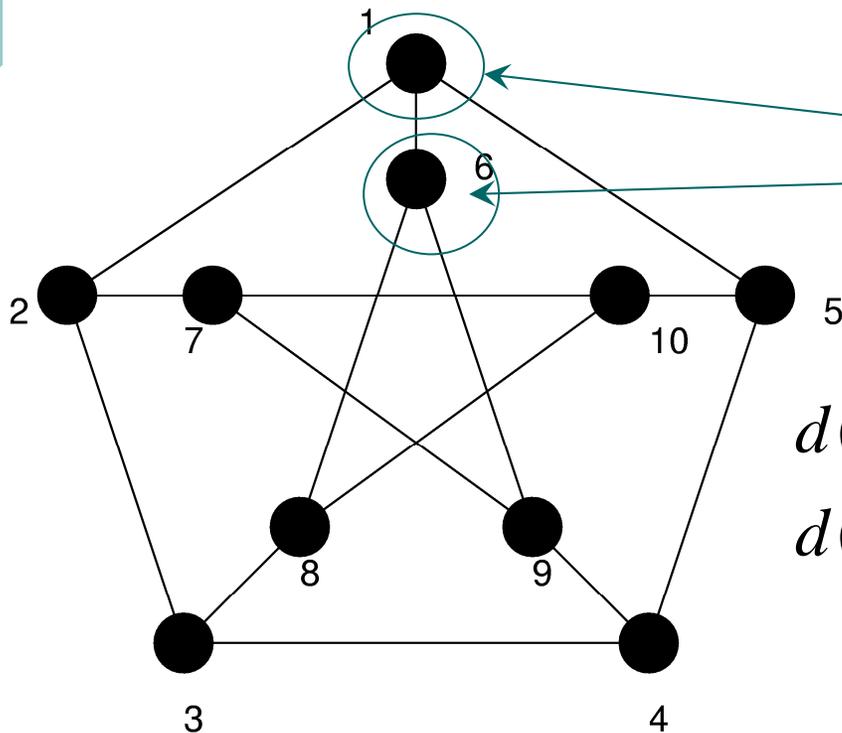
考えるグラフは連結であるから、いつでも C 上に z をとることができる

点 v と点 w 間の最短路 C 上の任意の点



例題4.2 (2)

ピータースン・グラフにおいて、任意の2点 v, w に対し
 $d(v, w) = 1$ または $d(v, w) = 2$ である



ピータースン・グラフの対称性から

$$v = 1, v = 6$$

をスタート点を選んだときの可能な経路の
長さを調べればよい。実際に調べてみると

$$d(1, 2) = 1, d(1, 3) = 2, \dots, d(1, 10) = 2,$$

$$d(6, 1) = 1, \dots, d(6, 10) = 2$$

となり、満たす。

詳細は講義ノート

非連結化集合とカットセット

非連結化集合：

それを除去するとグラフが非連結となる辺の集合

カットセット：

そのどのような部分集合も非連結化集合ではない非連結化集合

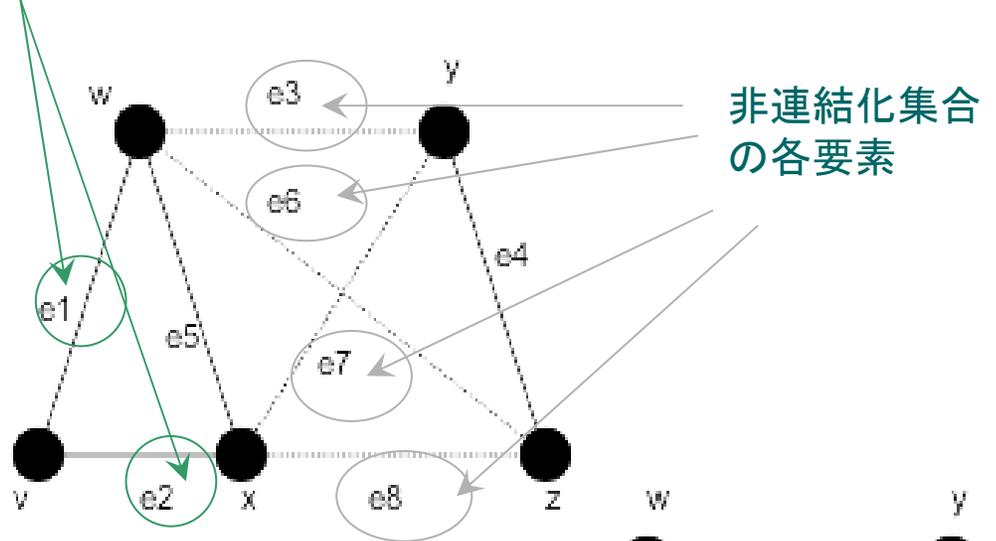
辺連結度： $\lambda(G)$

連結グラフの最小なカットセットの大きさ

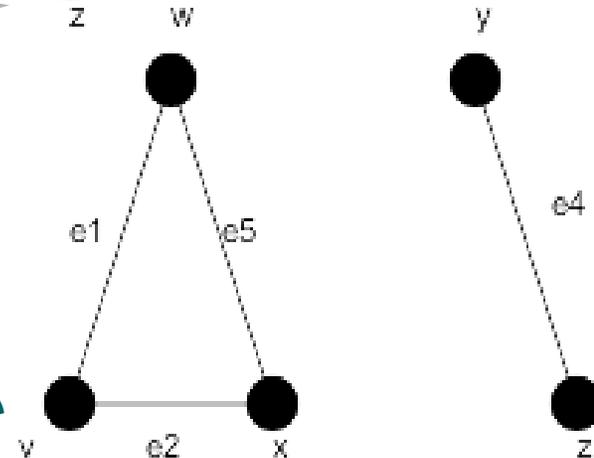
例に挙げた右図では

$$\lambda(G) = 2$$

要素数最小のカットセット



この中のどれが抜けても非連結化集合にはならない

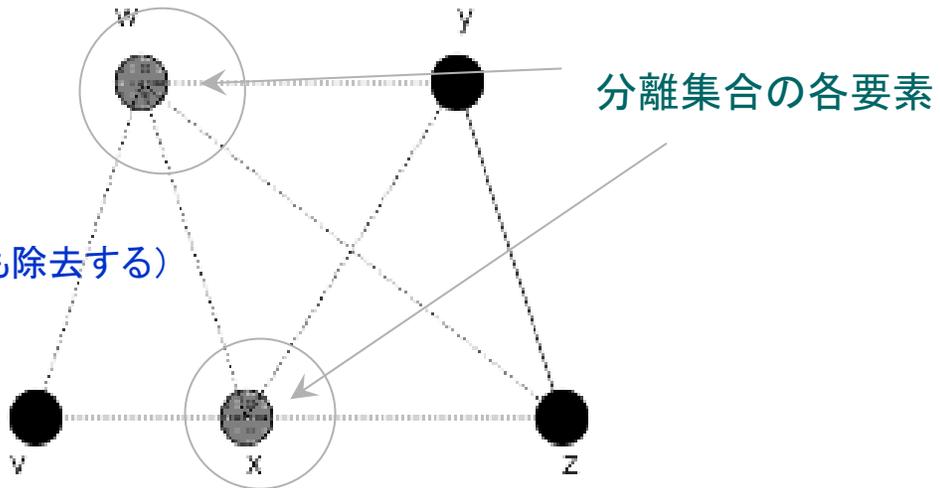


分離集合とカット点

分離集合：

それを除去するとグラフが
非連結となる点の集合

(※辺を除去する際にはその接続辺も除去する)

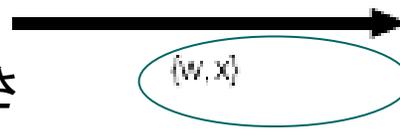


カット点：

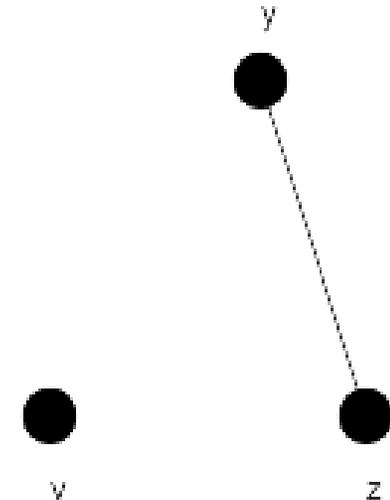
1個の点からなる分離集合

連結度：

グラフの最小な分離集合の大きさ



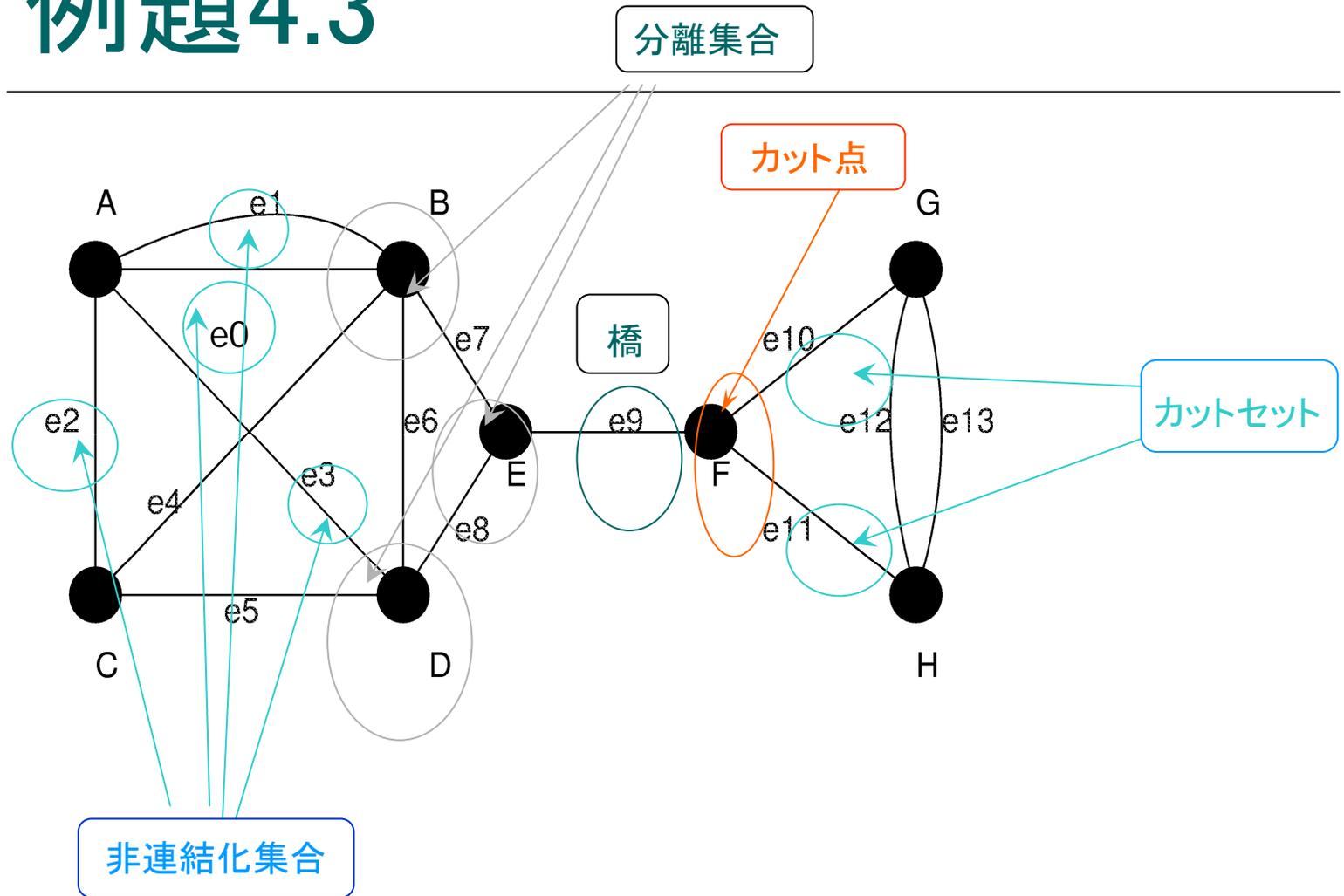
分離集合



図の例では $K(G) = 2$

$K(G) \geq k$ のときグラフGは**k連結**であるという

例題4.3

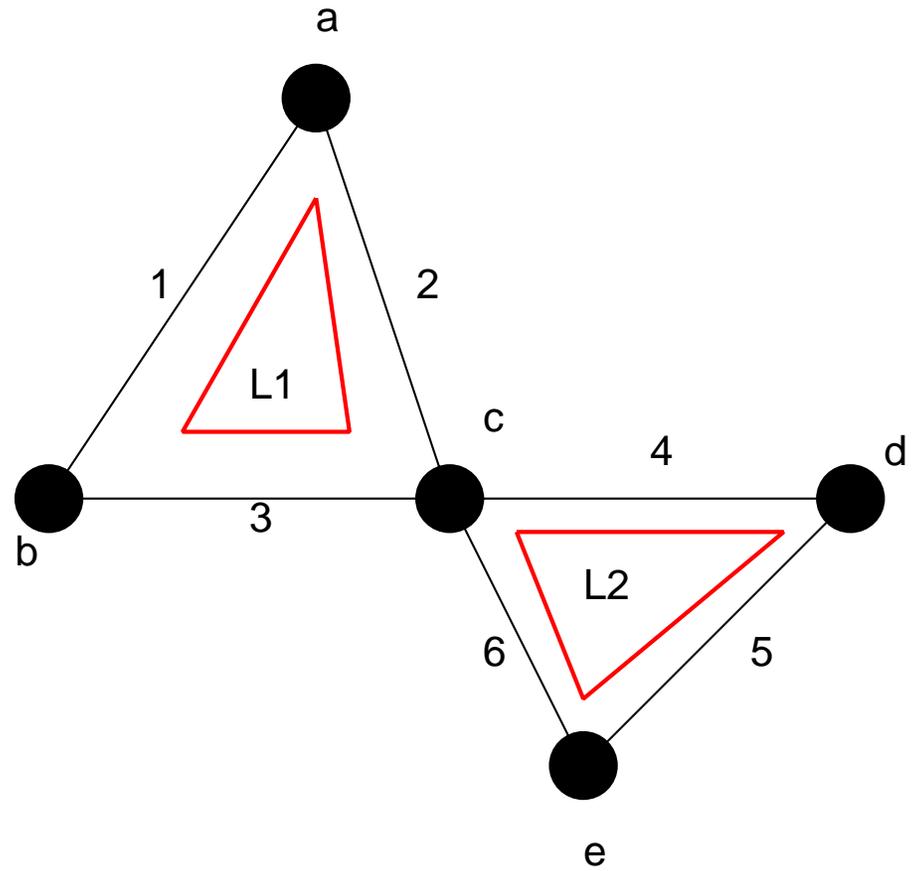


例題4.4 (タイセット行列)

タイセット行列

$$\mathbf{B} = (b_{ij})$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & (L_i \text{が枝} j \text{を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$



右図の例では

閉路L1を構成する辺

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

閉路L2を構成する辺

例題4.4 #2 (カットセット行列)

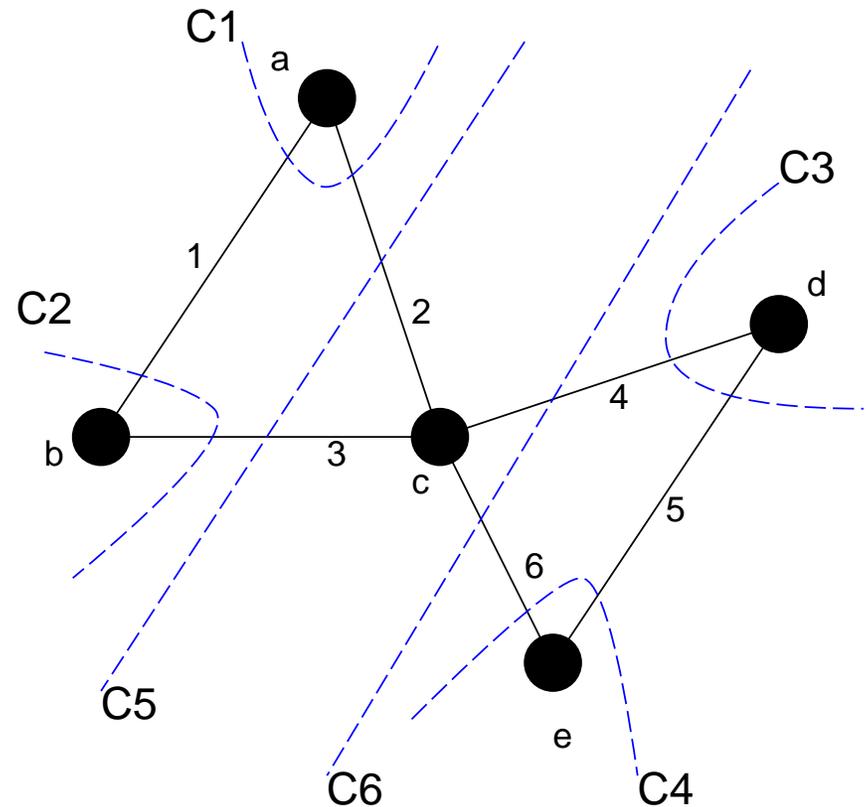
カットセット行列

$$\mathbf{C} = (c_{ij})$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & (C_i \text{が枝} j \text{を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

右図の例では

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



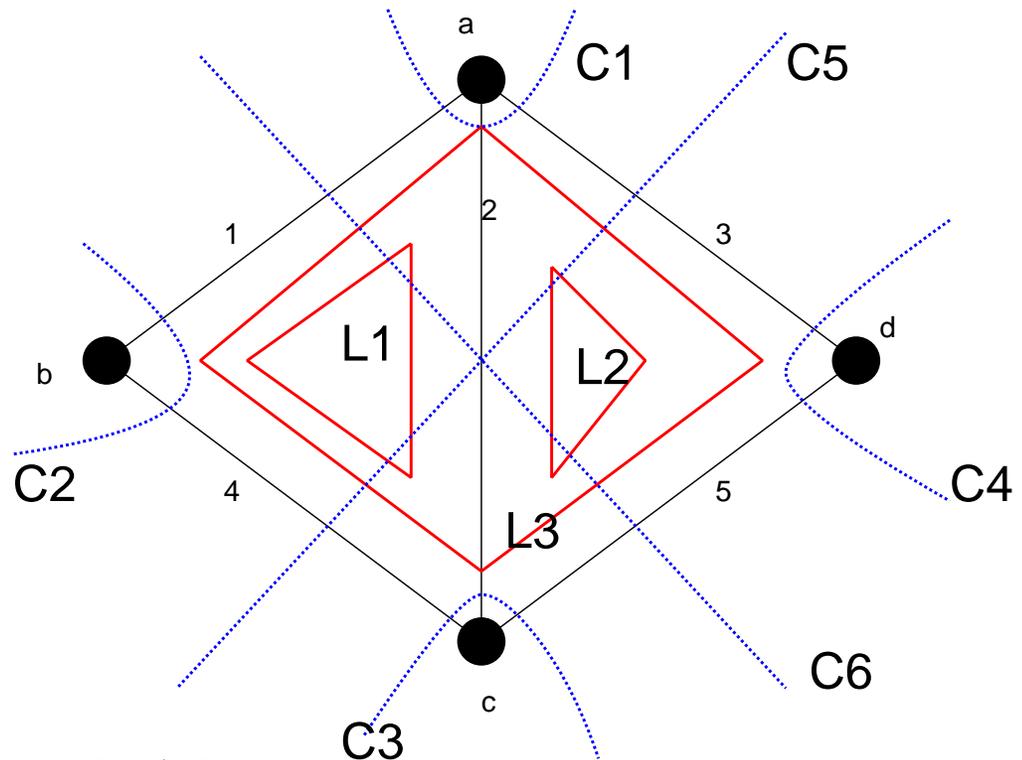
例題4.4 (1)–(3)

タイセット行列

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

カットセット行列

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



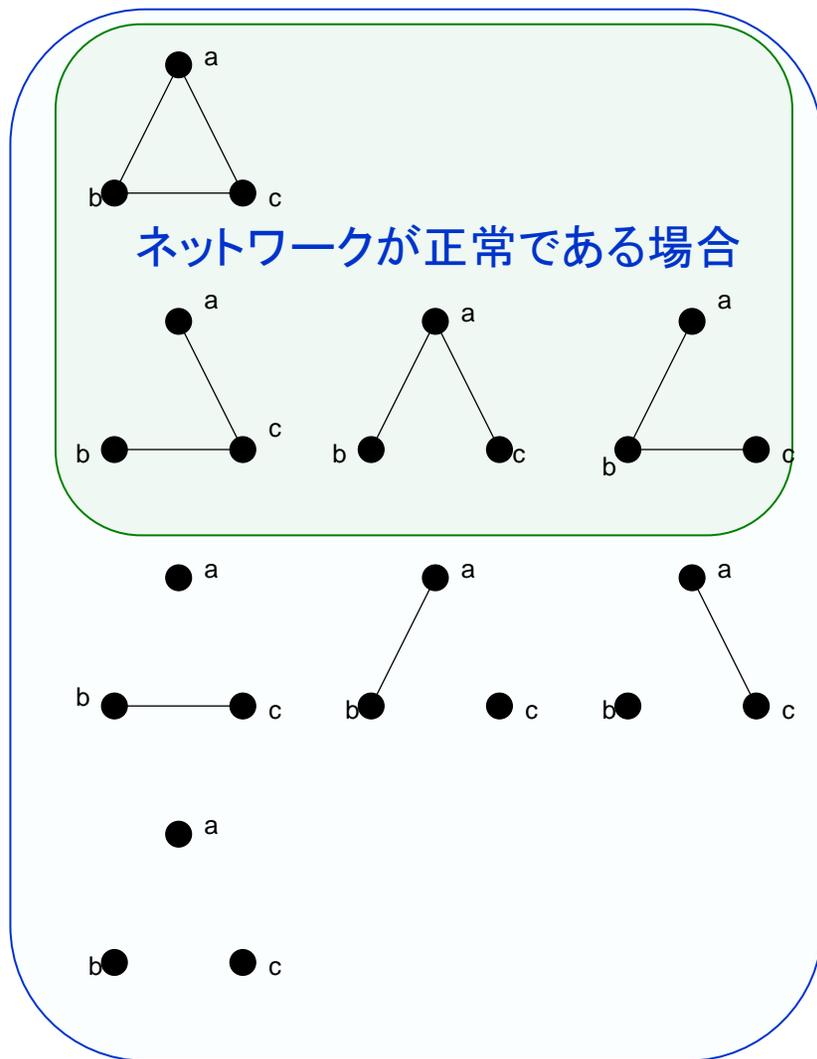
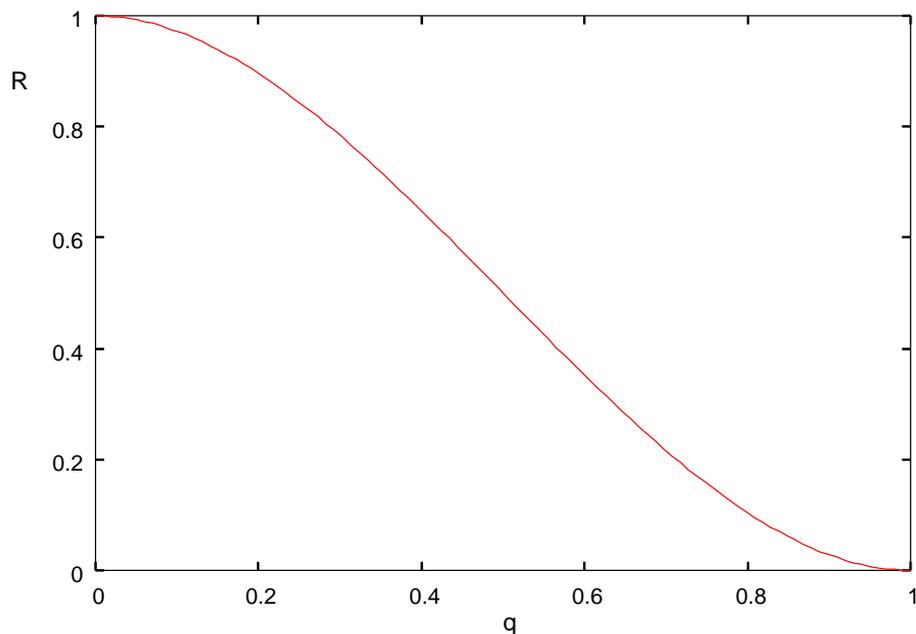
一般に次が成立

$$\mathbf{BC}^T = \mathbf{0} \pmod{2}$$

例題4.5の1

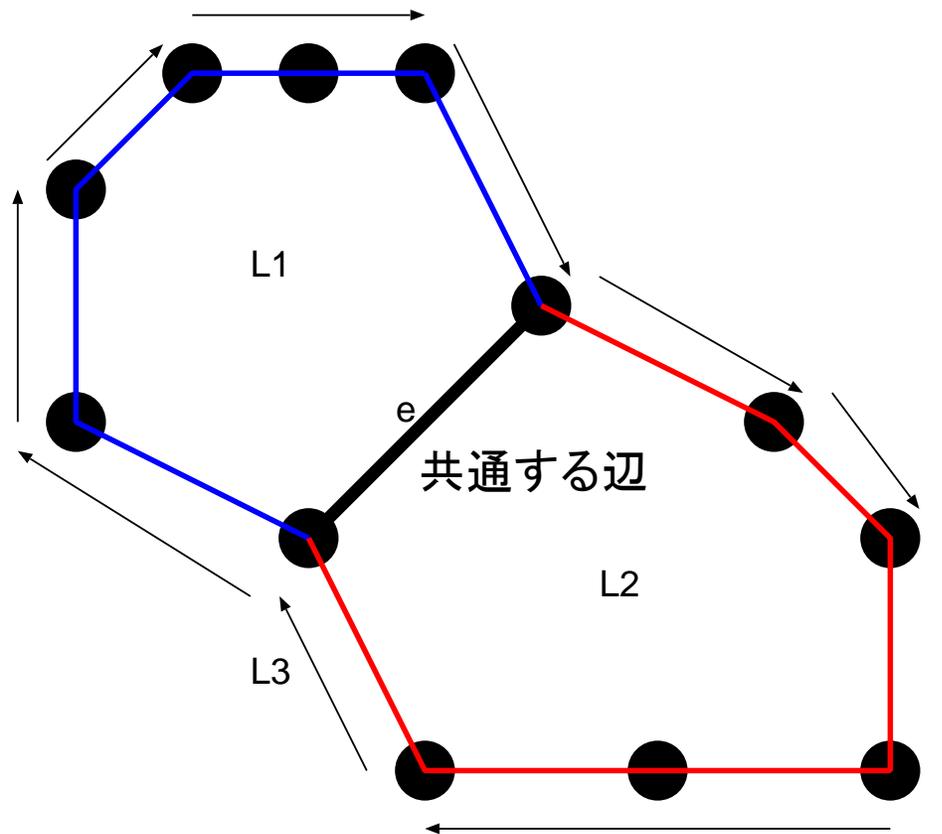
右図より、ネットワークが正常である確率は

$$R(q) = (1 - q)^3 + 3q(1 - q)^2$$



例題4.5の2 (1)

辺 e を含まない閉路として、 $L1, L2$ の和から e を削除してできる閉路 $L3$ を選べる



例題4.5の2 (2)

辺 e, e_1, e_2 が三角形をなしている場合にはカットセットとして $\{e, e_1\}, \{e, e_2\}$ 以外に必ず $\{e_1, e_2\}$ を選ぶことができる

