# グラフ理論　#6

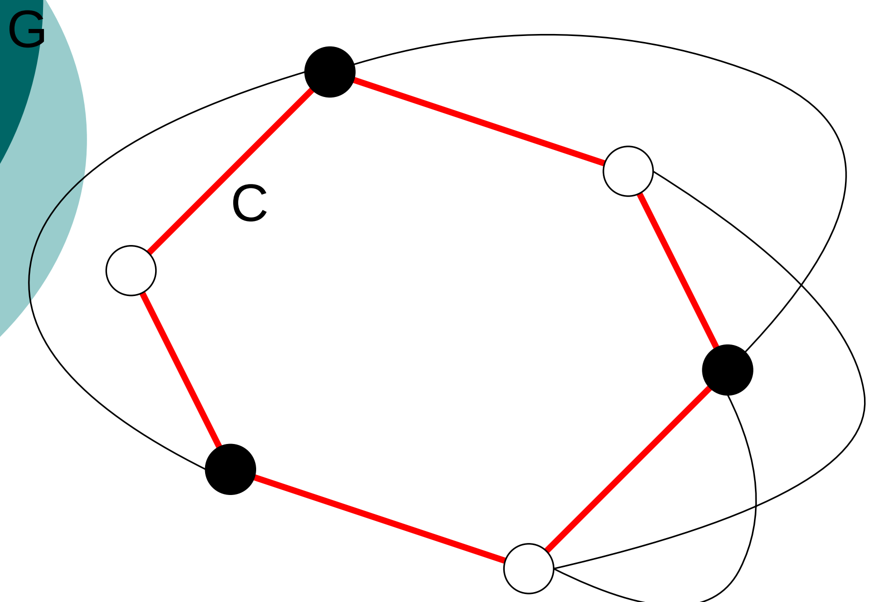
第6回講義　5月15日

## --- 木とその性質 ---

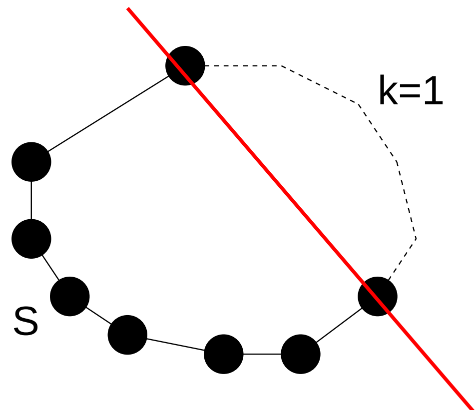
情報科学研究科　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

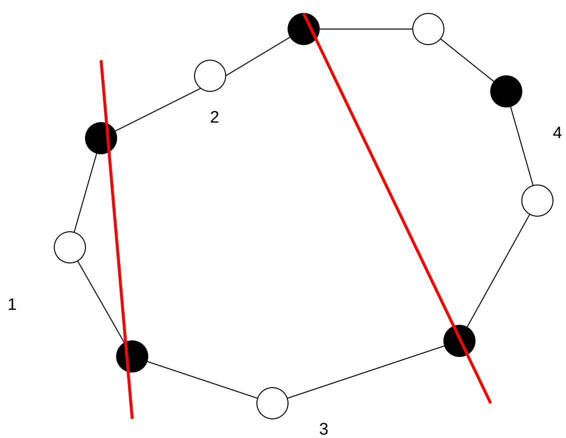
# 演習問題5 の解答例




グラフGはハミルトンであるから
閉路Cを含む




Sの要素が全て隣接している場合、G−Sの成分は1

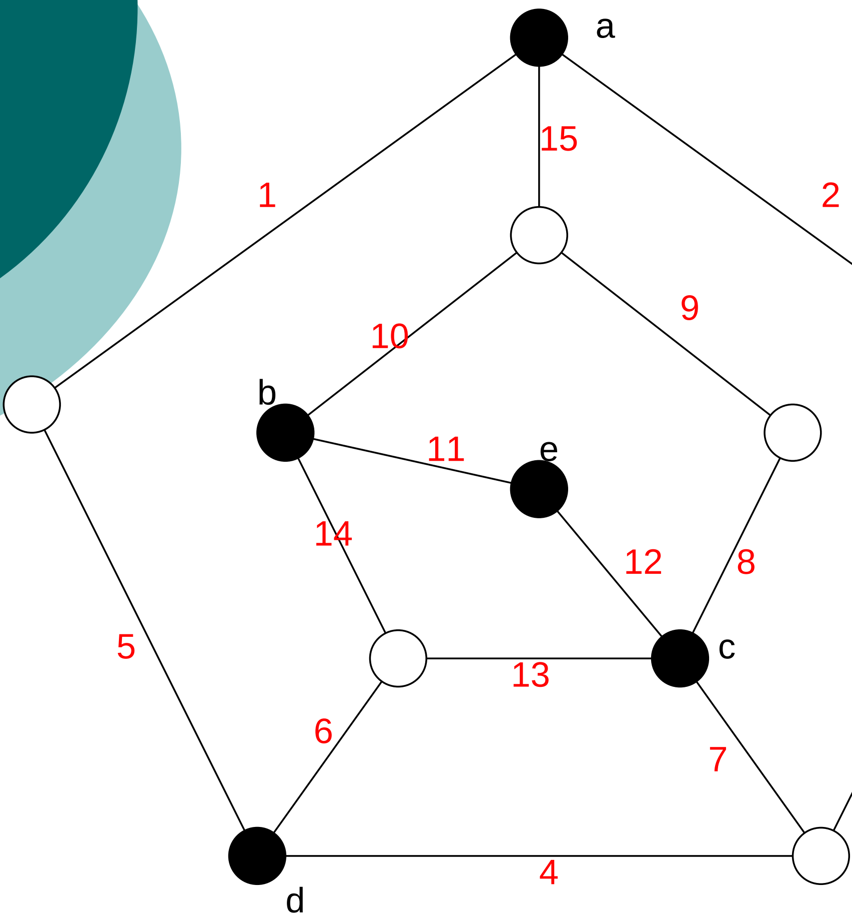



Sの要素が全て隣接していない場合
G−Sの成分はkである

従って、G−Sの成分数は k 以下

# 非ハミルトン性の示し方

（辺数に関して矛盾を引き出すやり方）




可能な限り互いに隣接していない点を選び出し、その次数を勘定する
(3,3,4,3,2)

ハミルトン閉路を構成しない辺数
(3−2)+(3−2)+(4−2)+(3−2)
+(2−2)=5(本)

(A) ハミルトン閉路の辺数
=15−5=10(本)

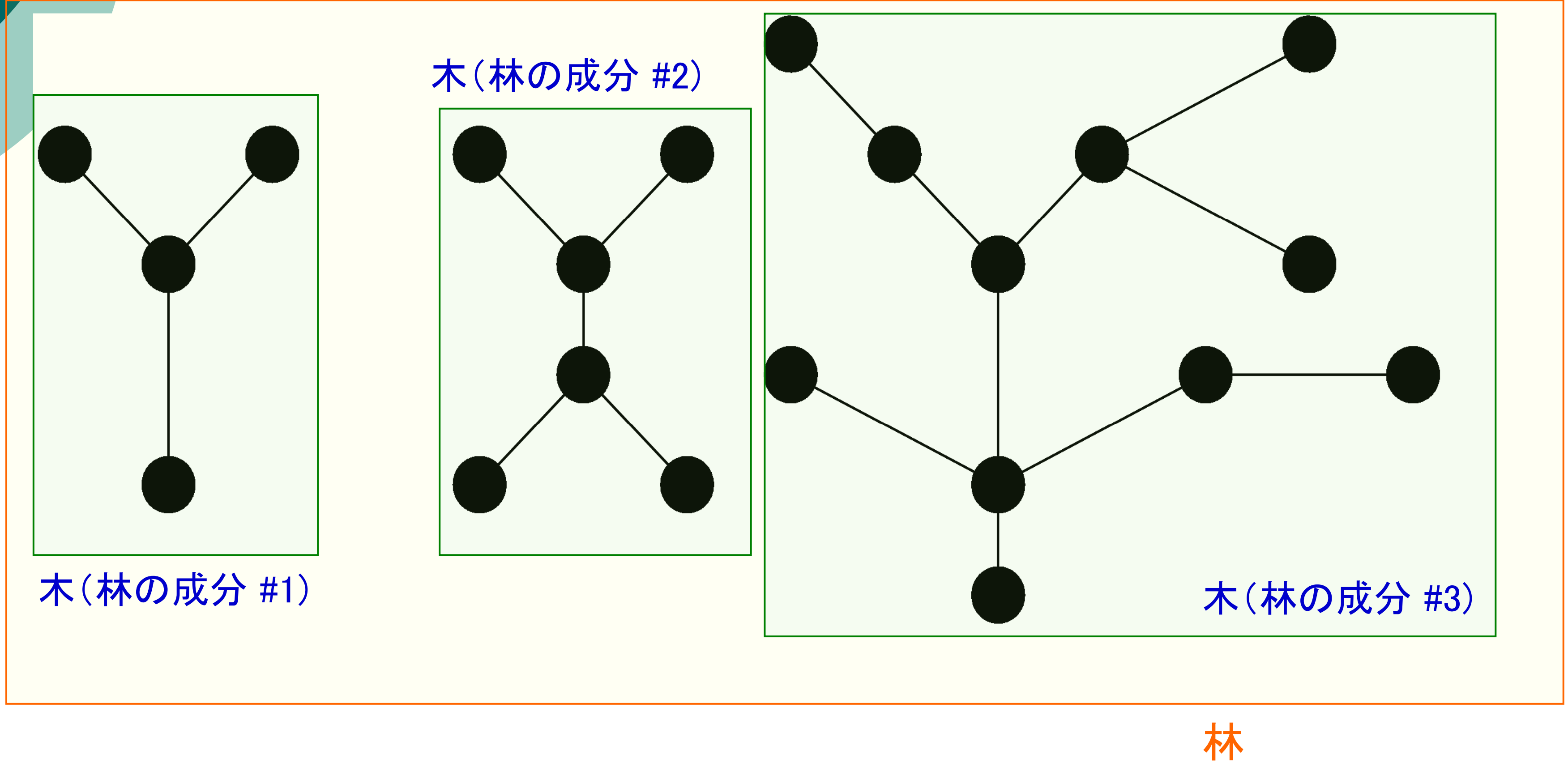
(B) 11個の点からなるハミルトン閉路の辺数=11（本）

(A) < (B) となりハミルトン閉路はできない

# 木と林

**林（forest）　：　閉路を含まないグラフ**

**木（tree）　：　連結な林**



# 定理9・1

点n個からなるグラフTに対し、次の各命題は同値である

(i) Tは木である

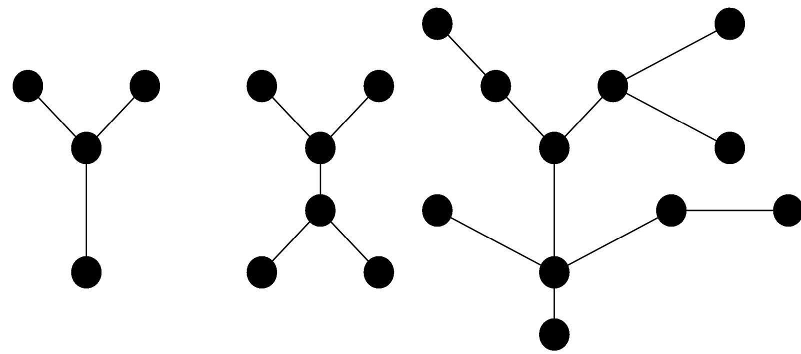
(ii) Tには閉路が無く、辺がn−1本ある

(iii) Tは連結であり、辺がn−1本ある

(iv) Tは連結であり、全ての辺は橋である

(v) Tの任意の2点を結ぶ道は丁度1本である

(iv) Tに閉路は無いが
新しい辺をどのように加えても
閉路ができ、しかも、1個の閉路である



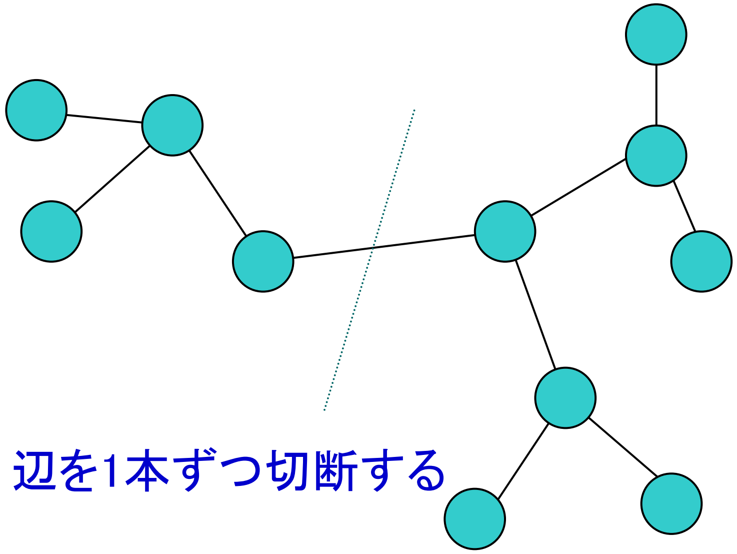
各同値性の証明は教科書参照（以下、この事実のみを使う）

# 系9・2

林Gにはn個の点とk個の成分があるとする。このとき、林Gにはn−k本の辺がある

（証明）

閉路が無く連結であるとすると、n−1本の辺がある。これから辺を1本ずつ切断する操作を進めると




1本辺を切断 ⇒ 成分 2、辺数 n−2

2本辺を切断 ⇒ 成分 3、辺数 n−3

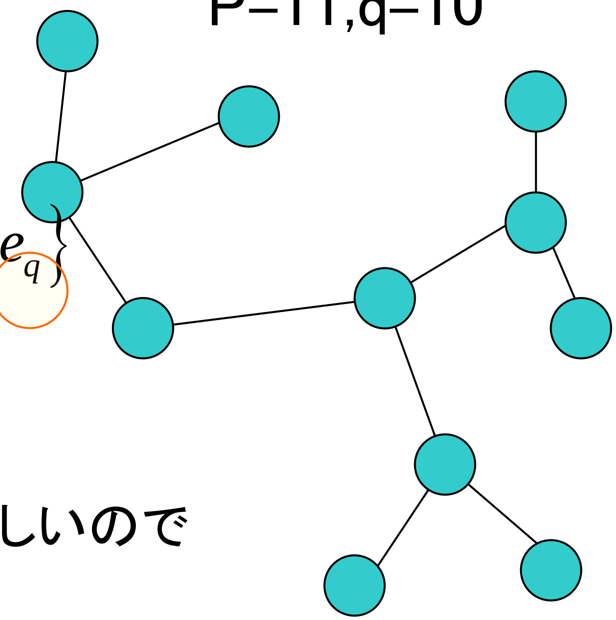
…………

K−1 本辺を切断 ⇒ 成分 k、辺数 n−k

# 系9・3

単点でない木は、少なくとも2点の端点を含む

P=11,q=10



（証明）

点数

$$\text{木T} \;:\; V(T)=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\},\ p\geq 2, E(T)=\{e_1,e_2,\ldots,e_q\}$$

辺数

木の辺の本数は

$$q=p-1$$

定理9.1 (iii)

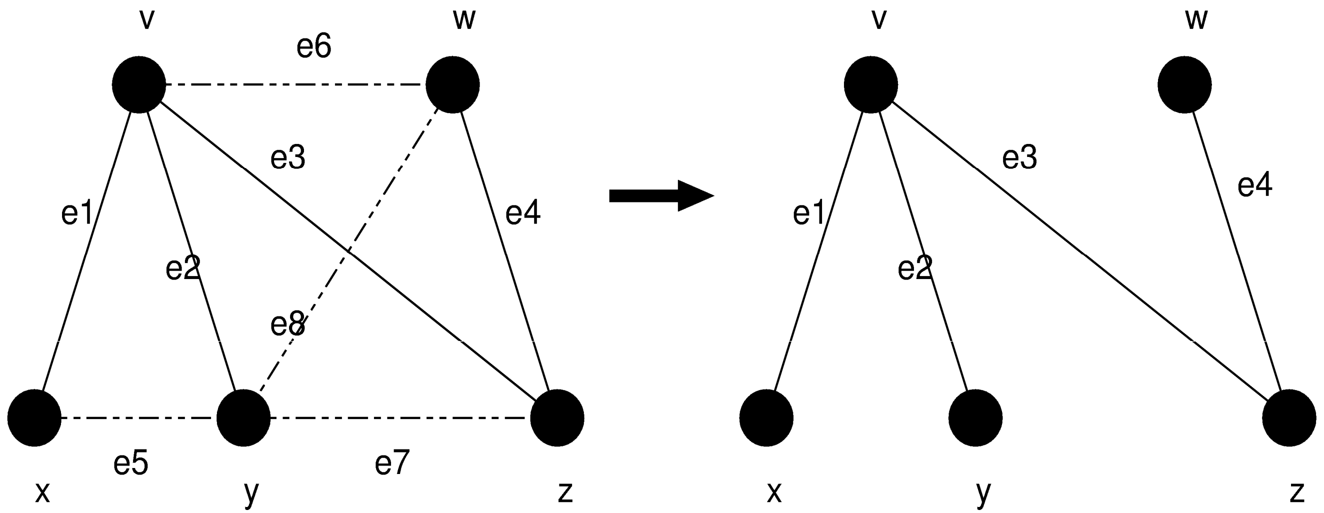
握手補題より、辺の総数の2倍はグラフの次数に等しいので

$$\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)=2q=2(p-1)$$

木の端点が2つ、つまり、p=0,1であるとすると
点の数が2以上であるグラフの次数（＞0）の定義に反する。

# 全域木と全域林

**全域木**（spanning tree）：
連結グラフGに対し、閉路が無くなるまで辺を除去して残るグラフ




閉路階数 ：

$$\gamma(G) = m - n + k = 4$$

（全域林（木）を得るために切断すべき辺の本数）

カットセット階数：

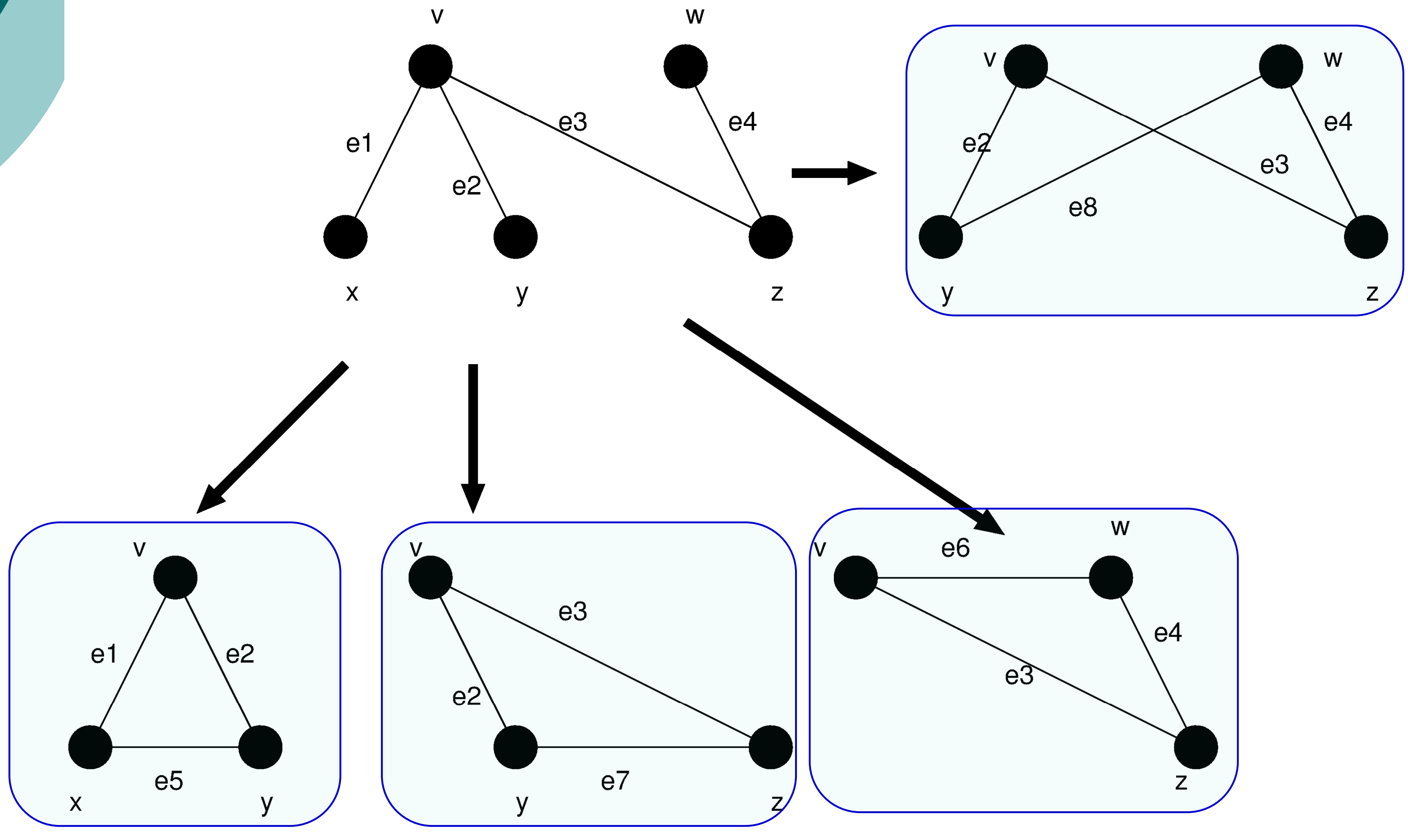
$$\xi(G) = n - k = 4$$

（全域木の辺数）

**全域林**（spanning forest）: n個の点とm本の辺、k個の成分があるとし、
Gの各成分に対し、閉路が無くなるまで辺を除去する操作を繰り返し得られるグラフ

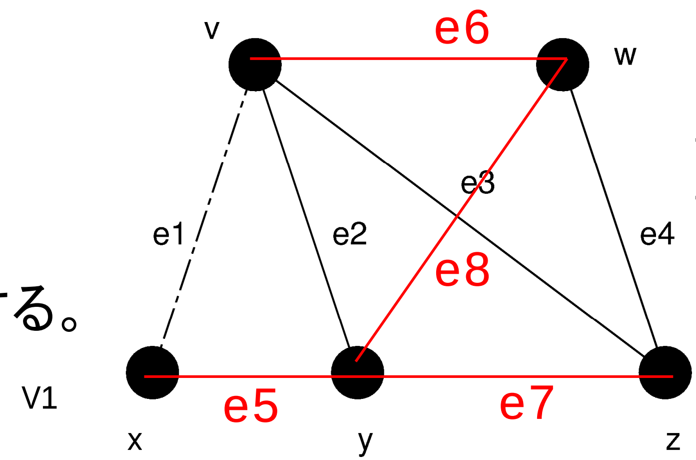
# 基本閉路集合

**基本閉路集合**：TIに含まれないGの任意の辺を一つTIに付加すると
一つずつできる閉路の集合



# 基本カットセット集合

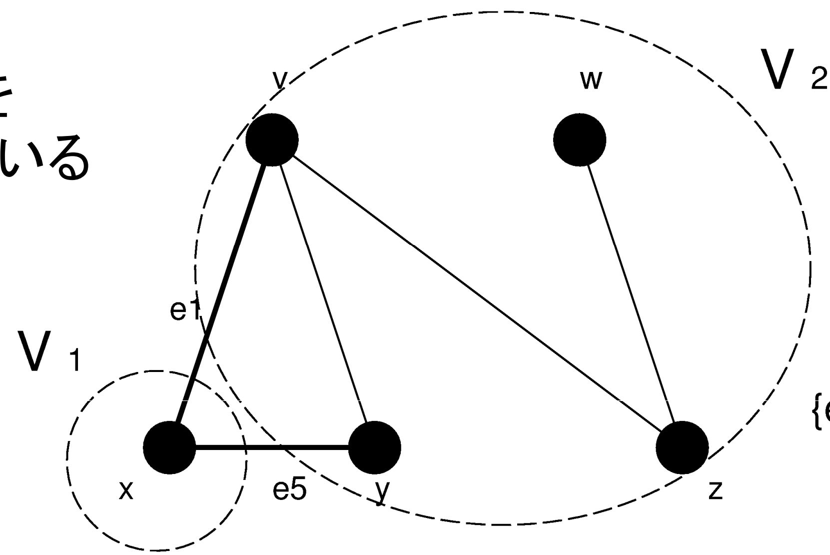
**基本カットセット集合**
：Tの各辺を除去して得られる
　カットセット集合




黒色がT
黒＋赤がG

e1で木を切断するとV1とV2に分離する。

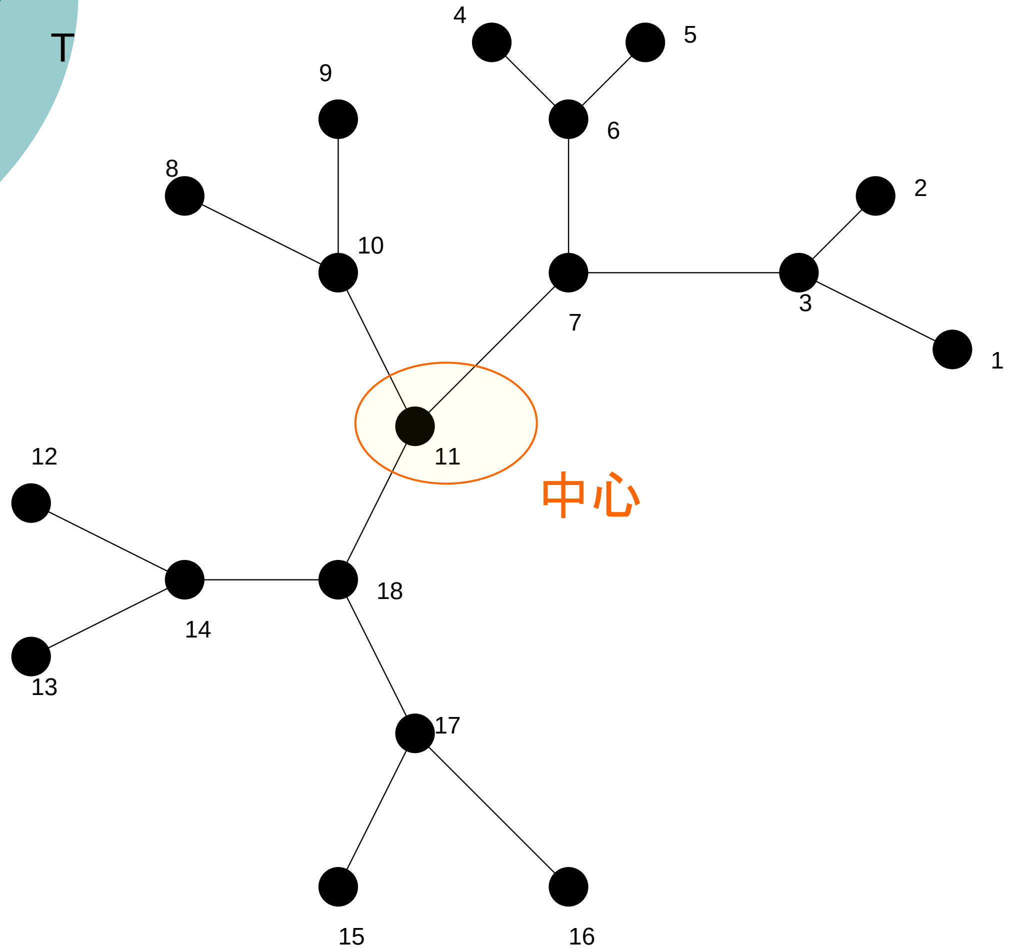
このe1とGでV1に接続していた辺e5を
組んだものはGのカットセットとなっている




この他にも
(e2,e5,e7,e8)
などがある。

# 例題7.1（1）

グラフGの中心：他点との間の距離の最大値ができるだけ小さい点v




端点を削除していく

1回目に削除される点
{1,2,4,5,8,9,12,13,15,16}

2回目に削除される点
{3,6,10,14,17}

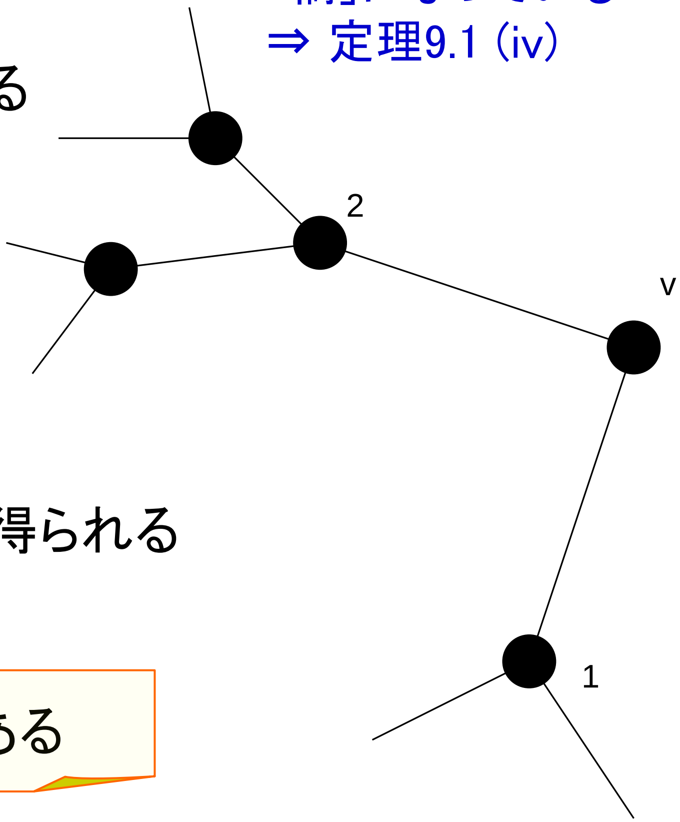
最後に削除される点
{7,18}

# 例題7.1 (2)

（I）　点1に接続している成分と
点2に接続している成分が等しい場合

木の全ての辺は
「橋」になっている
⇒ 定理9.1 (iv)

辺2v, v1を削除して中心vが得られる




（II）　点2に接続している成分
＞ 点2に接続している成分の場合

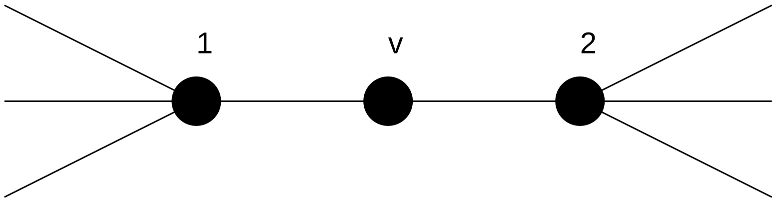
辺v1を削除して、2つの中心2, vが得られる

どんな木でも中心は1つか2つである

# 例題7.1 (3)(4)

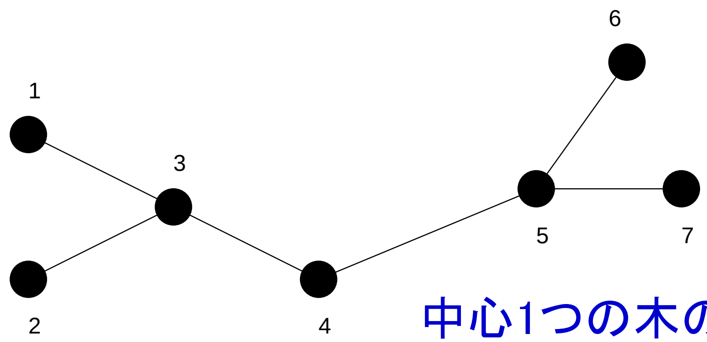
木の中心が2つあり、それらが隣接していないと仮定する。

このとき、中心1,2は点vを介して接続している

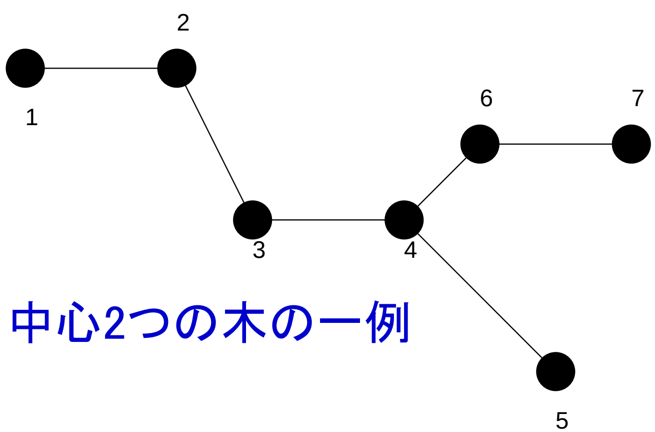



このとき、点1,2とこの中心vの接続辺を除去すると、中心がvの1つになるので仮定に反する。

木の中心が2つある場合、それは隣接している

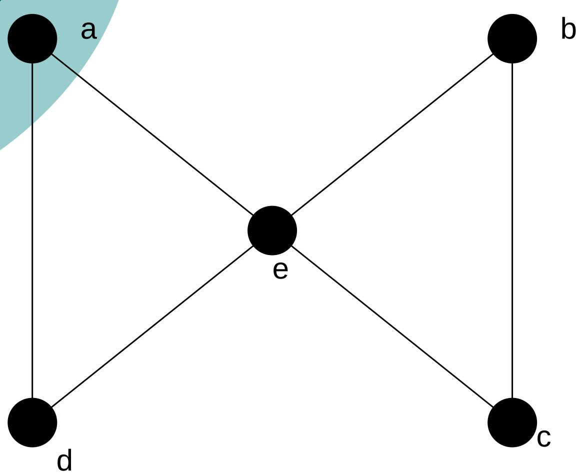



中心1つの木の一例

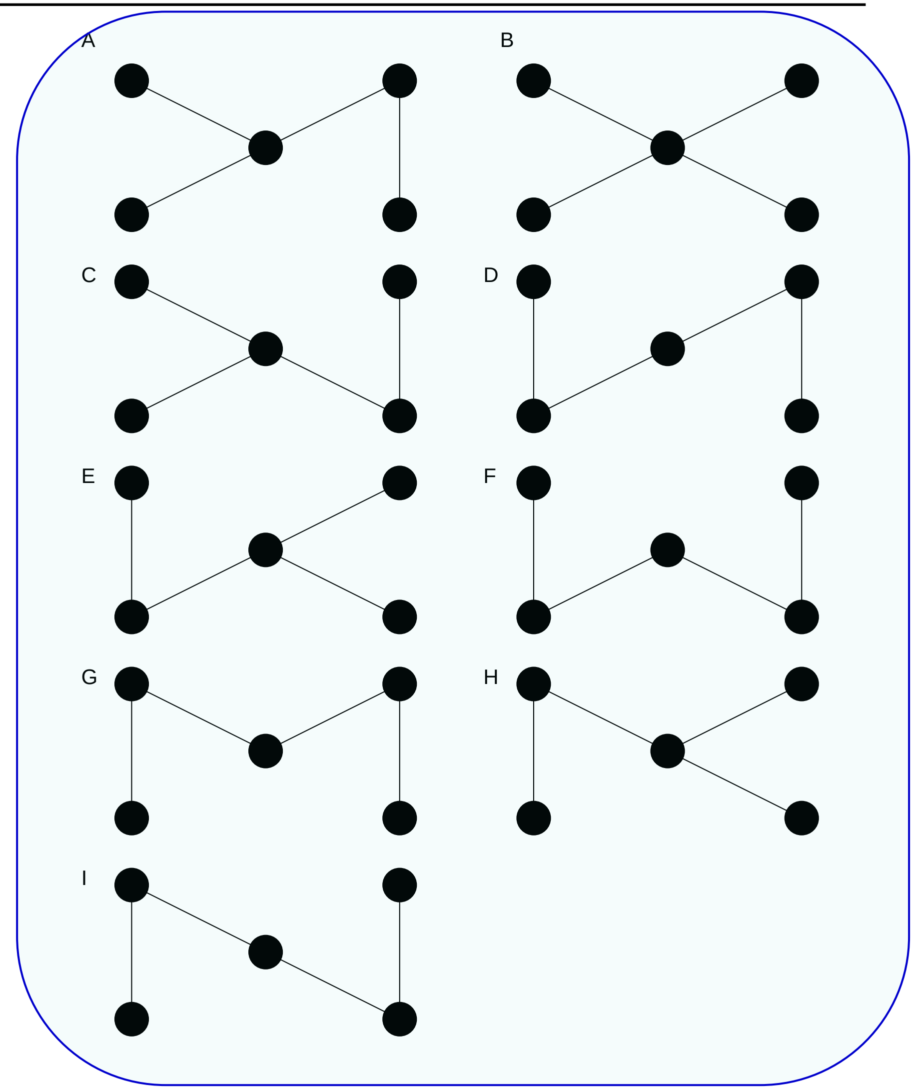



中心2つの木の一例

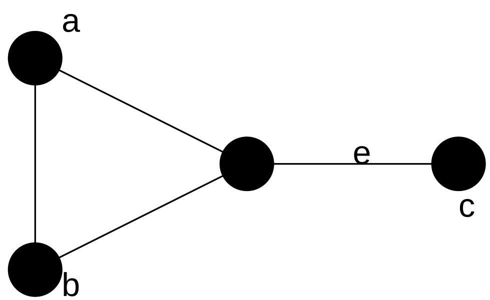
# 例題7.2 (1)

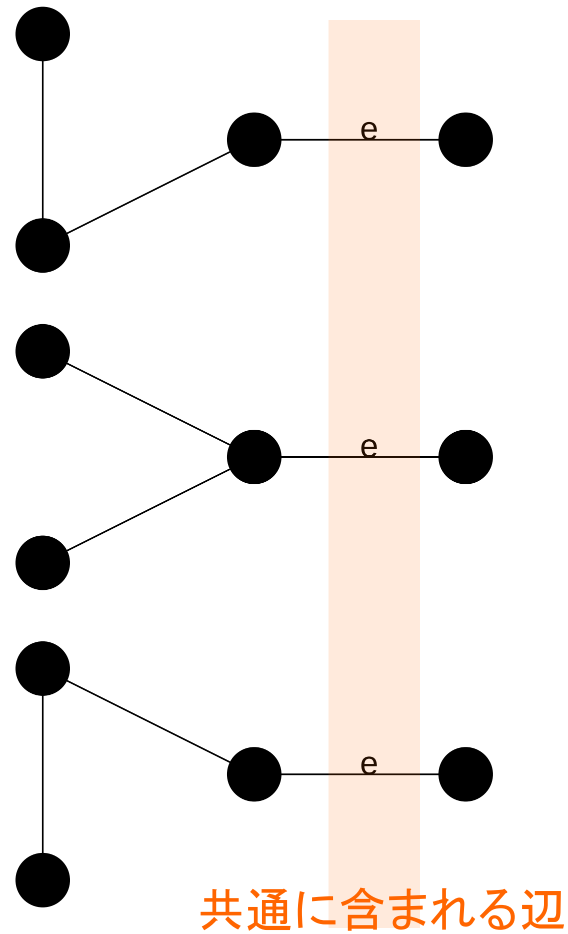



全ての全域木



# 例題7.2（2）




グラフGの辺集合C*が、Gのどの全域木にも共通するならば、C*はカットセットである