グラフ理論 配布資料 #2

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)
URL：http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平成 18 年 4 月 17 日

目 次

演習問題 1 の解答例

(1) 木の構造を持つものであれば何でも良いが, 例えばトーナメント形式の対戦カードの表などは木である.

(2) 例えば $n=7$ の二部グラフは図 12 のようになる. 従って, このグラフの中に現れる閉路：3 → 5 → 4

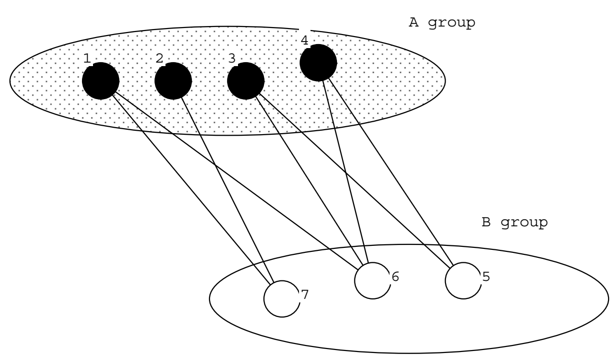


図 12: 7 個の点からなる二部グラフの例. 全ての点は group A か group B のいずれかに所属し, お互い異なるグループに属する点どうしがが辺で結ばれる. .

→ 6 → 3 を見ると確かに偶数本の辺からなり, 奇数本の辺ではない. 一般的に言って, 二部グラフはその定義より, 一つの点から出発し (これを group A としょう), 様々な経路を経て自分自身に戻ってくることができ, 閉路ができたとするならば, 必ず A → B → ⋯ B → A のような経路をたどるはずであり, 従って, この中に含まれる辺の個数 (ここで書いたところの → の個数) は必ず偶数本であり, 奇数本であることはありえない.

2 定義と例

この節ではグラフ理論に現れる数々の定義を例を交えながら解説する. 部分的に前回 (4/10) 紹介した事項をも含むが, 例えば「同形」の定義など, より正確な記述をここから学んで行くことになる.

2.1 単純グラフ

単純グラフ：グラフにループが含まれず, 頂点のどの対も高々1 つのリンクで結ばれているグラフ.

$V(\mathrm{G})$：グラフ G の**点集合 (vertex set)**
$E(\mathrm{G})$：グラフ G の**辺集合 (edge set)**
ψ_{G}：グラフ G の**接続関数 (incidence function)**

どのグラフ (単純グラフも含む)G も $V(\mathrm{G})$ と $E(\mathrm{G})$ からなる.
難しく言うと ⇒『グラフ G は $V(\mathrm{G})$ と $V(\mathrm{G})$ の元の非順序対からなる有限な族 (複数個の同じ元があってもよい) である $E(\mathrm{G})$ からなる.』

図 13 に単純グラフとその点集合及び辺集合を載せる. 前出のグラフ G の接続関数とは G の各辺に G の頂点の対を対応させる関数であり, この図の例でいくと

$$\psi_{\mathrm{G}}(\mathrm{e}_1) = uv, \quad \psi_{\mathrm{G}}(\mathrm{e}_2) = vw$$
$$\psi_{\mathrm{G}}(\mathrm{e}_3) = wu, \quad \psi_{\mathrm{G}}(\mathrm{e}_4) = wz$$

のようになる.

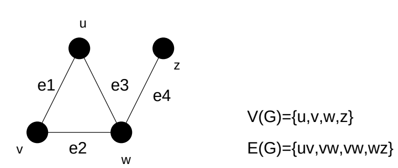


図 13: 単純グラフ G の例と点集合 $V(\mathrm{G})$ 及び辺集合 $E(\mathrm{G})$.

一方, 図 14 に**一般グラフ (general graph)** (ループや多重辺をも許されたグラフ) の一例を載せる. この図において各辺の現れる回数は uv(1 回), vv(ループ, 2 回), vw(3 回), uw(2 回), wz(1 回) である.

2.2 同形

2 つのグラフ G_1 と G_2 の間に一対一の対応関係があり, G_1 の任意の 2 点を結ぶ辺数が G_2 の対応する 2 点を結ぶ辺数に等しいとき, G_1 と G_2 は**同形 (isomorphic)** であるという. 図 15 の 2 つのグラフ G_1 及び G_2 は同形であり, G_2 中に書き込んだような対応関係を持つ.

(補足事項)

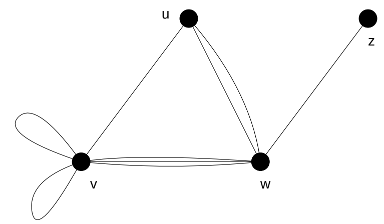


図 14: 一般グラフ G の一例.

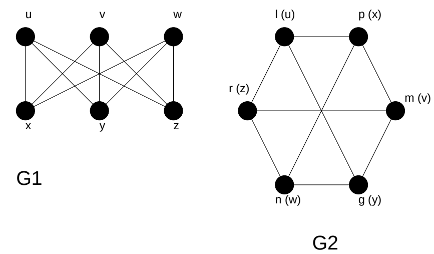


図 15: 同形グラフ G_1 と G_2.

先に定義した接続関数を用いると, 2 つのグラフ $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ が同形であるとき, 1 対 1 写像：

$$\begin{aligned}\theta : V(\mathrm{G}_1) &\to V(\mathrm{G}_2) \\ \phi : E(\mathrm{G}_1) &\to E(\mathrm{G}_2)\end{aligned}$$

が次の関係：

$$\psi_{\mathrm{G}_1}(e) = uv \quad \Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

が成り立つ. このような写像の対 (ϕ, θ) を $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ 間の**同形写像**と呼び, この同形写像が存在する場合, $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ は同形であると言い, 式では $\mathrm{G}_1 \cong \mathrm{G}_2$ と表現する.

これを実際に図 15 の $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ で確かめると

$$\theta(u) = l, \theta(v) = m, \theta(w) = n$$
$$\theta(x) = p, \theta(y) = q, \theta(z) = r$$

及び

$$\begin{aligned}\phi(\overline{ux}) &= \overline{lp} = \overline{\theta(u)\theta(x)} \\ \phi(\overline{uz}) &= \overline{lr} = \overline{\theta(u)\theta(z)} \\ \cdots &\cdots \cdots\end{aligned}$$

となるから

$$\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{ux}) = ux \quad \Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{ux})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{lp}) = lp = \theta(u)\theta(x)$$

等の成立が確かめられ, 従って, 図 15 の $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ は同形であることがわかる (もちろん, この場合の写像 ϕ, θ は同形写像である).

2.3　ラベル付きグラフとラベルなしグラフ

各点に名前の付されたグラフを**ラベル付きグラフ**と呼ぶ. 前回の講義でみた**例題 1.1** で扱った炭素原子を並べた木に関しても, この課題では「ラベルなし」としてその場合を数えたが, ラベル付きの木として扱う際には図の 2 つの木は別個の木として扱うことになる.

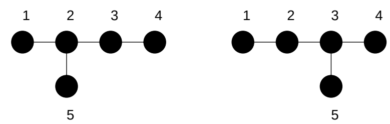


図 16: **例題 1** で扱った炭素原子の木をラベル付きで考えると両者は異なる木とみなされる.

2.4　連結グラフ

連結グラフとは平たく言えば「一つにつながっているグラフ」ということになるが, 点同士が「連結する」「連結される」という概念を用いると, 下記のように, もう少し丁寧に連結グラフを定義することができる.

まず, グラフ G の点 u, v に関して, G に u, v を結ぶ道があれば, u は v に**連結される**と言う.

そこで, グラフ G を構成する任意の 2 点 u, v に対し,

$$u \text{ は } v \text{ に連結される} \quad \Leftrightarrow \quad u \text{ は } v \text{ と同じ } V_i \text{ に属する}$$

というようにグラフ G を G の点からなる空でない部分集合 $V_1, V_2, \cdots, V_i, \cdots, V_n$ で分割したとき, 各集合からなる部分グラフ $\mathrm{G}(V_1), \mathrm{G}(V_2), \cdots, \mathrm{G}(V_n)$ をそれぞれグラフ G の**成分 (component)** と呼び, 成分が 1 つだけのグラフを**連結グラフ (connected graph)** と定義する. 図 17 に連結グラフ (G_1) 及び, 成分数が 3 である非連結グラフ (G_2) の例を載せる. 言うまでもないことだが, **非連結グラフ (disconnected graph)** とは連結グラフでないグラフのことである.

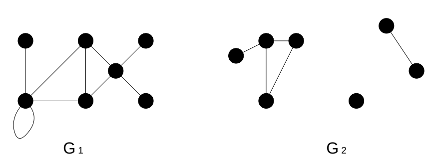


図 17: 連結グラフ G_1 と非連結グラフ G_2. G_2 の成分数は 3 である.

2.5　次数および次数列

グラフ G 及びその中の点 v に関する, 次にあげる重要な概念を押さえておこう.

- 点 v の**次数 (degree)**
  v に接続している辺の本数. ただし, ループの場合は 2 本とカウントする. 式で書くと $\deg(v)$ となる.

- **孤立点 (isolated vertex)**
  次数ゼロの点
- **端点 (end-vertex)**
  次数 1 の点
- グラフ G の**次数列 (degree sequence)**
  次数を増加順に記したもの．必要となれば同じ次数を繰り返しても良い．図 17 の G_1 の例で言うと，この連結グラフの次数列は $(1,1,1,3,3,4,5)$.

また, グラフの次数に関して次の有名な補題が知られている.

握手補題 (handshaking lemma)：任意のグラフの全ての点の次数を合計すれば必ず偶数になる.

また, 整数列 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ が与えられたとき, n 個の点からなるグラフ G に対し, 各 i に関して

$$\deg(v_i) \quad = \quad d_i \tag{2}$$

が成立するとき, 数列 $d_1, d_2, \cdots, d_n$ は**グラフ的である**という．例えば, 数列 $(4,3,2,2,1)$ はグラフ的であり,

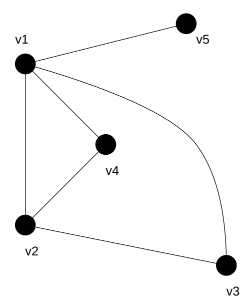


図 18: 「グラフ的」であるグラフの一例.

そのグラフは図 18 である．対応関係は

$$\mathrm{d}(v_1) = 4, \mathrm{d}(v_2) = 3, \mathrm{d}(v_3) = 2, \mathrm{d}(v_4) = 2, \mathrm{d}(v_5) = 1 \tag{3}$$

となる.

2.6 部分グラフ

グラフ G の**部分グラフ (subgraph)**：点が全て $V(\mathrm{G})$ に属し, その辺が全て $E(\mathrm{G})$ に属するグラフ.

従って, いかなる場合にも, グラフ G の点と辺の**除去**, 及び辺の**縮約** (辺を除去し, その辺の両端についていた 2 点を同一視して 1 点にすること) という操作を行うことにより, グラフ G の部分グラフを作ることができる.

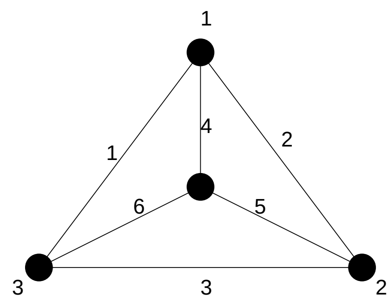
2.7 行列によるグラフの表現方法

グラフを計算機上で表現する場合には個々のグラフの特徴を数量化し, その数字を用いてコーディングする必要がある．このとき, 下記に挙げる**隣接行列**及び, **接続行列**という行列による表現方法が便利である.

グラフ G の点及び辺が $1,2,\cdots,n$, $1,2,\cdots,m$ とそれぞれラベル付けされているとすると

隣接行列 (adjacency matrix)：点 i と点 j を結ぶ辺の本数を第 ij 要素とする $n\times n$ の行列
接続行列 (incidence matrix)：点 i が辺 j に接続している場合, 第 ij 要素が 1 であり, 接続していない場合 0 であるような $n\times m$ の行列[1]

例題 2.1
図に与えられたグラフについて以下の問いに答えよ.



(1) このグラフの次数列を書け.
(2) 図のグラフに対して隣接行列 $\boldsymbol{A}$ 及び接続行列 $\boldsymbol{M}$ を求めよ.

(解答例)

(1) 次数列は $(3,3,3,3)$.
(2) それぞれの定義に従えば隣接行列 $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

接続行列 $\boldsymbol{M}$ は

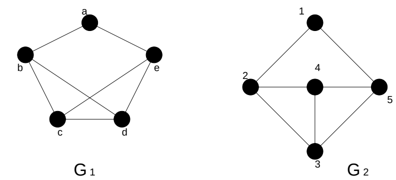
$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

となる.

[1] 点 v において辺 e が「ループ」として接続している場合, このグラフの接続行列の第 ve 成分を, 教科書によっては 1 と定義しているものと 2 と定義している 2 通りがあるようであるが, この講義ではこの場合 1 として接続行列を定義する. 従って, 接続行列の成分は必ず 0 か 1 である.

例題 2.2
以下の問題に答えよ.

1. 図の G_1 と G_2 の間の同形写像 ϕ, θ を見つけよ.



また, G_1 の任意の辺 e 及び点 u, v に対して

$$\psi_{\mathrm{G}_1}(e) = uv \quad \Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

が成り立っていることを 2,3 の $\{e, u, v\}$ の組に対して確かめよ.

2. 図 15 のグラフ G_2 の部分グラフを 2 つ挙げよ.
3. 次の隣接行列 $\boldsymbol{A}$, 接続行列 $\boldsymbol{M}$ で与えられるグラフをそれぞれ描け.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(解答例)

1. 求める同形写像 θ, ϕ はグラフ $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2$ の各点に対して

$$\theta(\mathsf{a}) = 1, \theta(\mathsf{b}) = 2, \theta(\mathsf{c}) = 3, \theta(\mathsf{d}) = 4, \theta(\mathsf{e}) = 5$$

各辺に対して

$$\phi(\overline{\mathsf{ab}}) = \overline{12}, \phi(\overline{\mathsf{bc}}) = \overline{23}, \phi(\overline{\mathsf{cd}}) = \overline{34}, \phi(\overline{\mathsf{bd}}) = \overline{24}$$
$$\phi(\overline{\mathsf{de}}) = \overline{45}, \phi(\overline{\mathsf{ce}}) = \overline{35}, \phi(\overline{\mathsf{ea}}) = \overline{51}$$

従って, この写像の下で

$$\begin{aligned} \psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{\mathsf{ab}}) = \mathsf{ab} \quad &\Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{\mathsf{ab}})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{12}) = \theta(\mathsf{a})\theta(\mathsf{b}) \\ \psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{\mathsf{bc}}) = \mathsf{bc} \quad &\Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{\mathsf{bc}})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{23}) = \theta(\mathsf{b})\theta(\mathsf{c}) \\ \psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{\mathsf{cd}}) = \mathsf{cd} \quad &\Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{\mathsf{cd}})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{34}) = \theta(\mathsf{c})\theta(\mathsf{d}) \\ \psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{\mathsf{de}}) = \mathsf{de} \quad &\Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{\mathsf{de}})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{45}) = \theta(\mathsf{d})\theta(\mathsf{e}) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{\mathsf{ea}}) = \mathsf{ea} \quad &\Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{\mathsf{ea}})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{\mathsf{51}}) = \theta(\mathsf{e})\theta(\mathsf{a}) \\
\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{\mathsf{ce}}) = \mathsf{ce} \quad &\Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{\mathsf{ce}})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{\mathsf{35}}) = \theta(\mathsf{c})\theta(\mathsf{e}) \\
\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{\mathsf{bd}}) = \mathsf{bd} \quad &\Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{\mathsf{bd}})) = \psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{\mathsf{24}}) = \theta(\mathsf{b})\theta(\mathsf{d})
\end{aligned}
$$

が成り立つ.

2. 例えば図 19 のようなグラフが G_2 の部分グラフである.

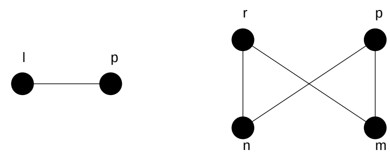


図 19: グラフ G_2 の部分グラフの例.

3. まず, 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ について考える. この隣接行列のサイズから, 求めるグラフの点の数は $n=5$ であり, 隣接行列は必ず対称行列であることに注意しょう. また, この行列 $\boldsymbol{A}$ の対角成分は全てゼロであることから, このグラフには**ループが含まれない**ことが直ちにわかる. 以上に注意しながら隣接行列の定義に従ってグラフを描くと図 20 のようになる. もちろん, この図と全く同じでなくても, 同形なグラ

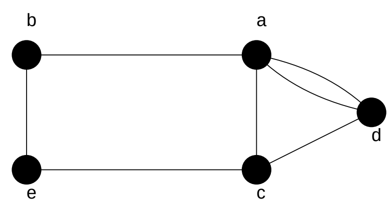


図 20: 隣接行列が　で与えられるグラフ. ここで, 隣接行列　の第 1 行, 2 行, ⋯ の番号として, 図の点 a,b, ⋯ が対応していることに注意.

フならば正解である.

次は接続行列 $\boldsymbol{M}$ を持つグラフに関してであるが, 以下の点に注意しながら考察するとグラフが描きやすい.

- 隣接行列の各列には必ず 2 個の 1 があり, 対応する行の番号が付された点同士が結ばれ, それにより出来上がる辺にはその列の番号が割り当てられる.
- 第 i 行, 第 j 行に 1 が立っている列が l 本ある場合, 点 i,j 間には l 重の多重辺が存在する.

以上に注意しながらグラフを描くと図 21 のようになる.

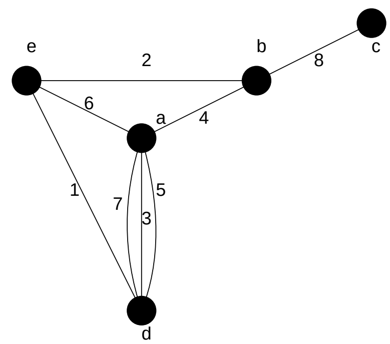


図 21: 隣接行列が　で与えられるグラフ. ここで, 接続行列　の第 1 列, 2 列 ⋯ の番号として, 図の a,b, ⋯ が対応していることに注意.

例題 2.3

以下の問いに答えよ.

(1) 5 個の点と 8 本の辺をもつ次のようなグラフを描け.
 (i) 単純グラフ
 (ii) ループがない, 単純でないグラフ
 (iii) 多重辺がない, 単純でないグラフ

(2) 図 22 に与えられるグラフの隣接行列 $\boldsymbol{A}$, 接続行列 $\boldsymbol{M}$ を求めよ.

(3) 6 点からなるグラフで, 各点の次数列が $(3, 3, 5, 5, 5, 5)$ であるものを描け. この次数をもつ単純グラフは存在するか？

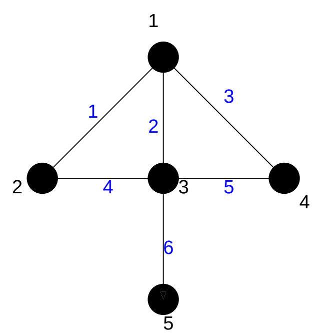


図 22: ここで考えるグラフ.

(解答例)

1. (i)(ii)(iii) を満たすグラフは図 23 のようになる.

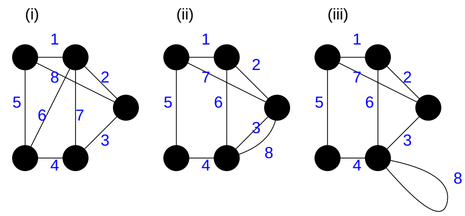


図 23: 5 個の点と 8 本の辺をもつグラフで条件 (i)(ii)(iii) を満たすもの.

2. 定義に従えば, 隣接行列 $\boldsymbol{A}$, 接続行列 $\boldsymbol{M}$ は

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

3. 図 24 を参照. 単純グラフは無い.

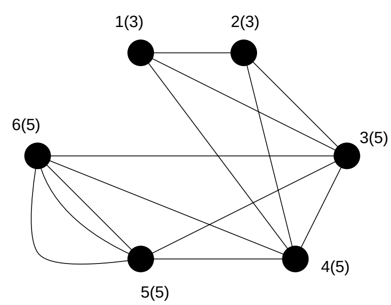


図 24: 6 点からなるグラフで次数列 $(3, 3, 5, 5, 5, 5)$ であるもの.

演習問題 2

(1) 前回 (4/10) 出題の **演習問題 1** の解答に載せた図 12(当講義ノート 10 ページ) の二部グラフの隣接行列と接続行列, 及び次数列をそれぞれ求めよ. ただし, 接続行列を求める際には, 各自がどのように各辺に番号をふったのかを明示して解答を作成すること.

(2) 次数列 $(3,3,3,3,3,3)$ はグラフ的か？ 理由とともに答えよ.

(3) **例題 2.2** の 1. にならって図 25 に載せた 2 つのグラフ $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2$ の同形写像 θ, ϕ を見つけ, G_1 の任意の辺 e 及び点 u, v に対して

$$\psi_{\mathsf{G}_1}(e) = uv \quad \Leftrightarrow \quad \psi_{\mathsf{G}_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)$$

が成り立っていることを $\{e, u, v\}$ の組に対して確かめよ.

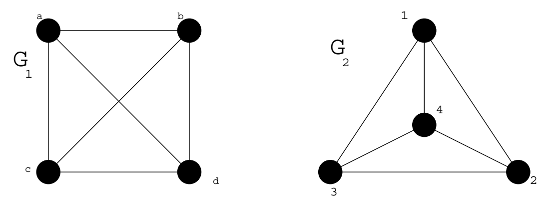


図 25: ここでその同形性を議論するグラフ $\mathsf{G}_1, \mathsf{G}_2$.