グラフ理論　#8

第8回講義　5月29日

--- 平面グラフ ---

情報科学研究科　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題7の解答例

点行列法で行列木定理を用いる

$$\tau\left(K_n - e\right) = (-1)^{N+N}\left|\mathbf{D}_{K_n - e}\left(N-1, N-1\right)\right|$$

点1−2間の辺が削除

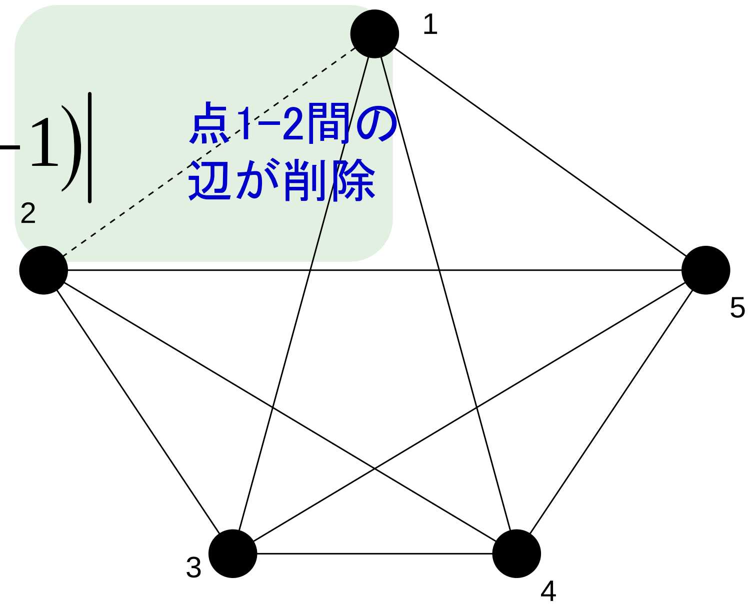
$$= \begin{vmatrix} a-1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & a-1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & -1 & a \end{vmatrix}$$

点1−2の関係を表す部分行列

$$= (a-1)(a+1)\left(b_{m-2} + 2c_{m-2}\right)$$

$$= (n-2)n^{n-3}$$

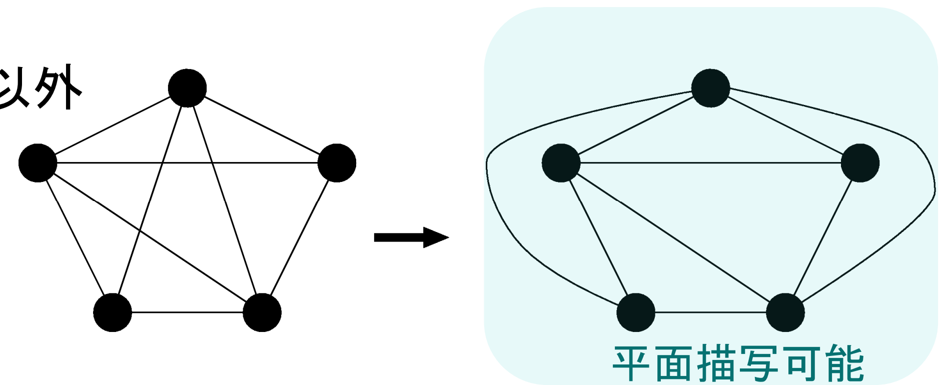
例題7.6の結果を用いる



完全グラフの任意の1辺を削除してできるグラフ

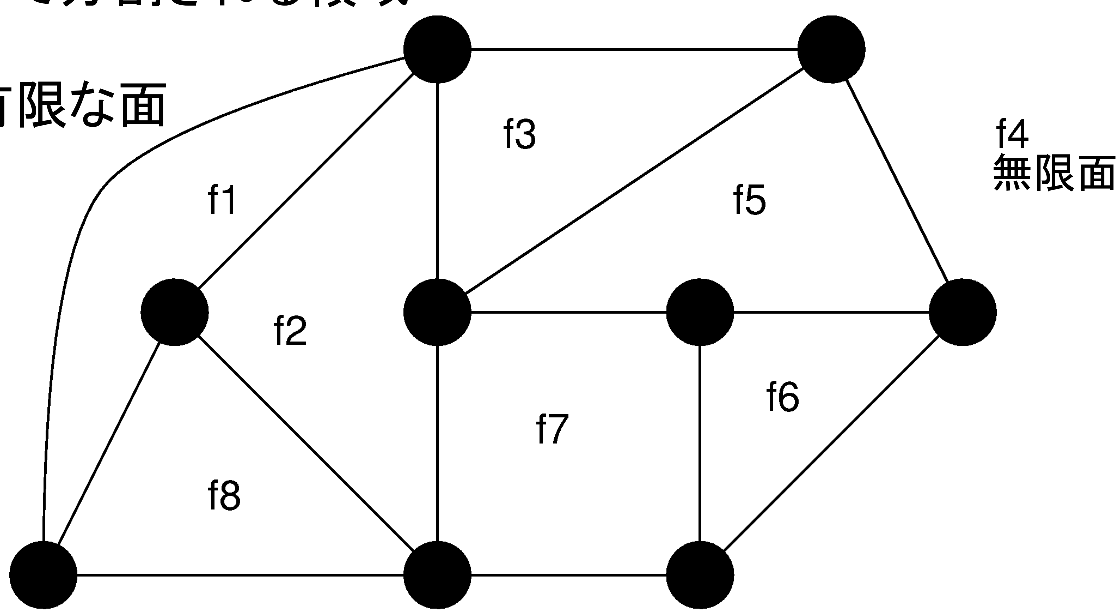
平面グラフ：定義など

平面グラフ：
どの2つの辺も、それが隣接する点以外では幾何学的に交差しないように描かれたグラフ



面：辺によって分割される領域

無限面：非有限な面



オイラーの公式

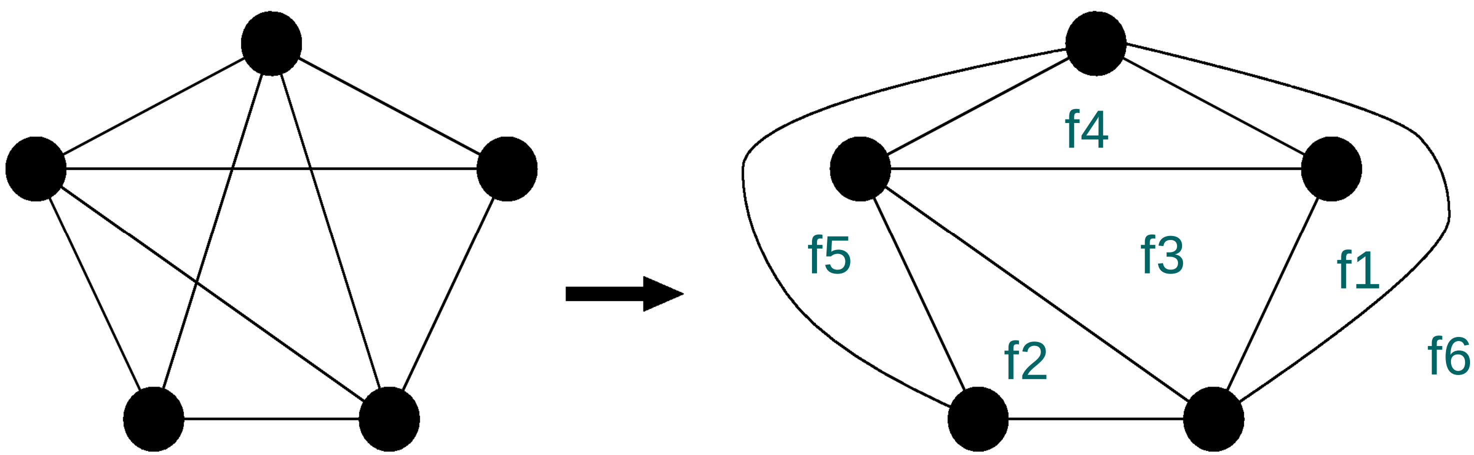
グラフGを連結な平面グラフとするとき、次の公式が成り立つ

$$n - m + f = 2$$

n:点数、m:辺数、f:面数

オイラーの公式

（例）



$n = 5, f = 6, m = 9$より

$n - m + f = 5 - 9 + 6 = 2$ と成立するので平面描写可能である

オイラーの公式の証明 #1

辺数 m に関する数学的帰納法により証明する

$$m = 0 : n = 1,\ f = 1 (\text{無限面})$$

$$\therefore \quad n - m + f = 1 - 0 + 1 = 2 \ \text{で成立}$$

m=0　の場合

n=1

f=1（無限面）

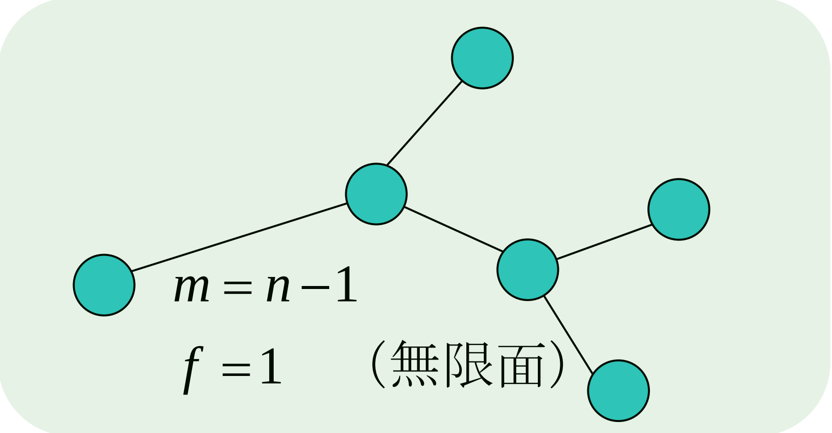
「m−1本以下の辺をもつ全てのグラフGに対して公式が成立する」と仮定する

（※注）

Gが木の場合には特別な事情がある

$$n - (n - 1) + 1 = 2$$

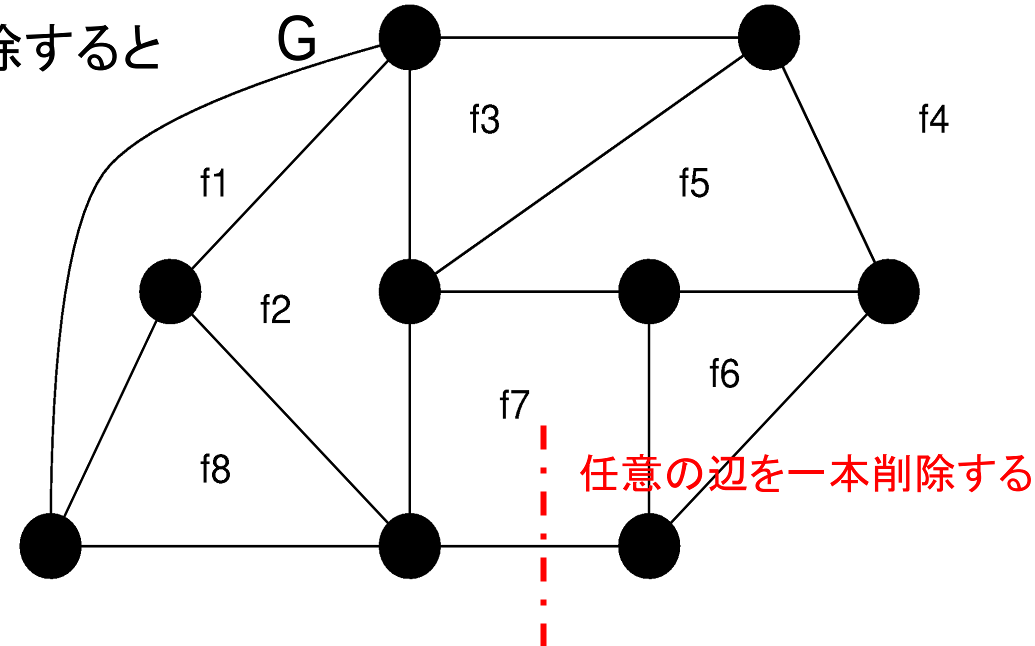
$$(\text{任意の}m\text{に対して常に成立})$$



以下の議論では木を除く一般の連結グラフ G について考える

オイラーの公式の証明 #2

グラフ G の任意の辺を一本削除すると



$$n \Rightarrow n$$

$$m \Rightarrow m-1$$

$$f \Rightarrow f-1$$

仮定により、このセットに対してオイラーの公式が成立すべきである

$$n-(m-1)+f-1=2$$

⇒ 任意の変数に対して公式は成立

$$\therefore n-m+f=2$$

証明終わり

オイラー公式の書き換え

オイラーの公式を面数を含まない形に書き換える

内周 κ : グラフGの最短の閉路長

$d(F)$: グラフGの面Fの次数の和

$$\kappa \le d(F)$$

$$\therefore\ \kappa f \le \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m$$

握手補題より

グラフ G の面集合

オイラーの公式: $f = 2 + m - n$ を代入してm に関してまとめると

$$m \le \frac{\kappa(n-2)}{\kappa - 2}$$

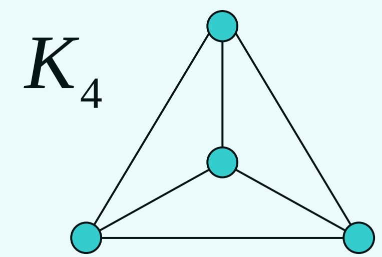
グラフの平面性の判別式
（成立すれば平面描写可能）

例題8.1

（1） 4次の完全グラフ

$$n = 4, m = {}_4C_2 = 6, \kappa = 3$$

$$\therefore \quad 6 \leq \frac{3 \cdot (4-2)}{3-2} = 6$$

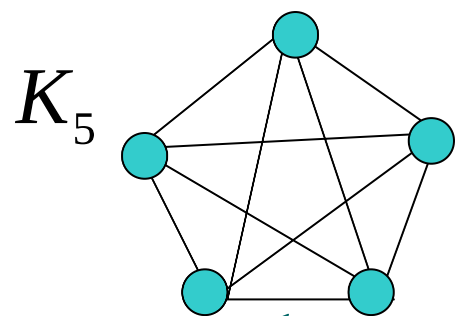


不等式成立。平面描写可能

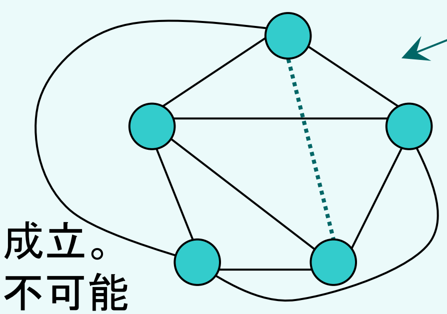
（2）5次の完全グラフ

$$n = 5, m = {}_5C_2 = 10, \kappa = 3$$

$$\therefore \quad 10 \leq \frac{3 \cdot (5-2)}{3-2} = 9$$



どのような同形写像で変換しても平面描写は不可能



不等式不成立。
平面描写不可能

オイラー公式(複数成分)とその証明

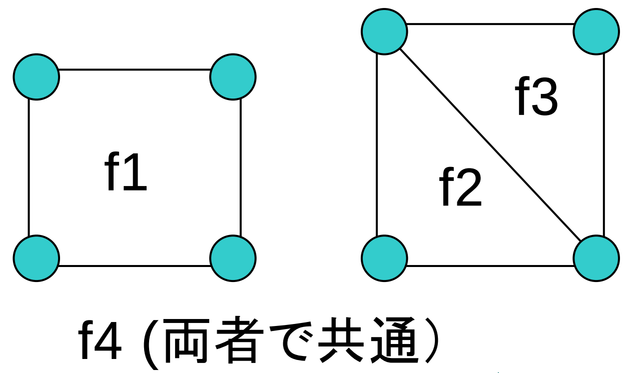
複数成分をもつグラフに対するオイラーの公式

平面グラフGの成分がkの場合には

$$n-m+f=k+1$$

が成り立つ

2成分平面グラフの例



（証明）

無限面が $k-1$ 個だけ余分にカウントされるので

$f \to f-(k-1)$とすると

$$n-m+\{f-(k-1)\}=2$$

$$\therefore \quad n-m+f=k+1$$

証明終わり

平面グラフの辺数の上限

単純連結平面グラフGが$n(\geq 3)$個の点とm本の辺をもつとき

$$m \leq 3n-6$$

が成立し、三角形が無ければ

$$m \leq 2n-4$$

が成り立つ

系13.4

（証明）

Gに含まれる最小面は3点からなる三角形なので

$$3 \leq d(F)$$

オイラー公式：f ＝ 2 − n ＋ m を代入

つまり、$3f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m, \quad \therefore \ m \leq 3n-6$

また、Gに三角形がなければ、最小面は四角形なので

$$4 \leq f(F)$$

つまり、$4f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m, \quad \therefore \ m \leq 2n-4$

証明終わり

交差数と厚さ

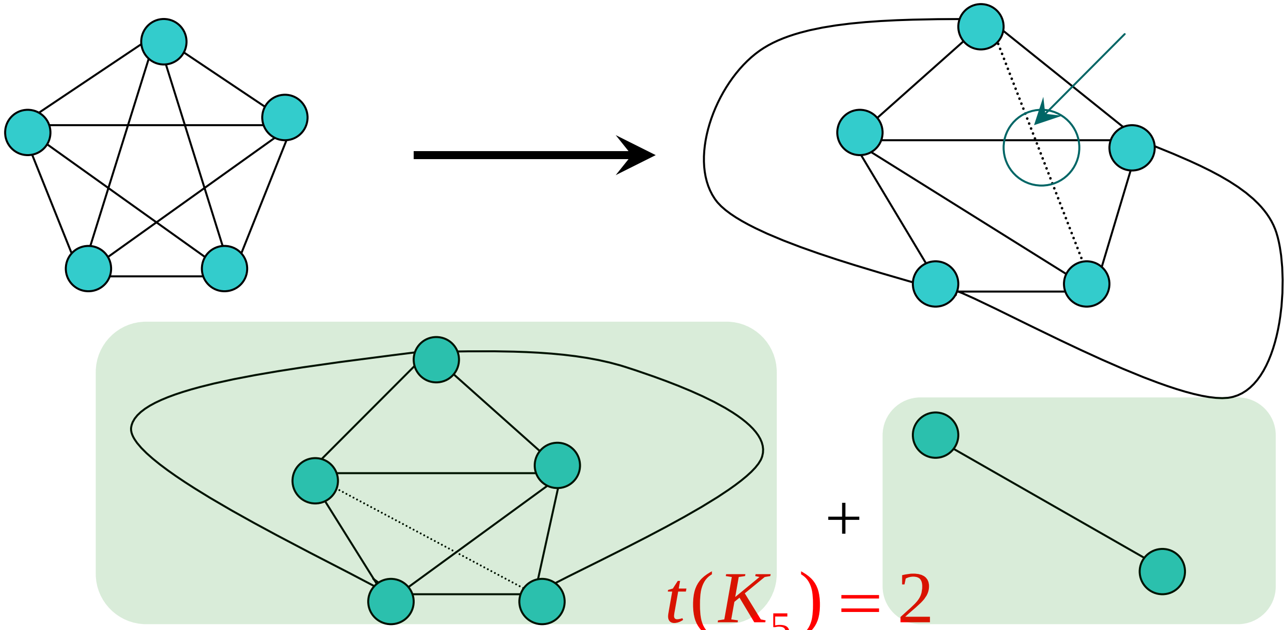
交差数 ： グラフ G を平面描写した際に生じる辺の最小交差の数 $cr(G)$

厚さ： いくつかの平面グラフを重ね合わせてグラフGを作る際に必要な平面グラフの数 $t(G)$

（例）

交差数 1, $cr(K_5)=1$

K_5



$t(K_5)=2$

例題8.3: 単純グラフの厚さの下限

単純グラフG に$n(\geq 3)$個の点、m本の辺があるとき、Gの厚さは

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil, \quad t(G) \geq \left\lfloor \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rfloor$$

を満たす

（証明）

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{\text{辺の総数}}{\text{平面グラフとなるための辺の上限}} \right\rceil$$

$$= \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil$$

さらに恒等式: $\left\lceil \dfrac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \dfrac{a+b-1}{b} \right\rfloor$ で$a = m, b = 3n-6$とすると

この関係式の証明は講義ノートを参照のこと

$$t(G) \geq \left\lfloor \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rfloor$$

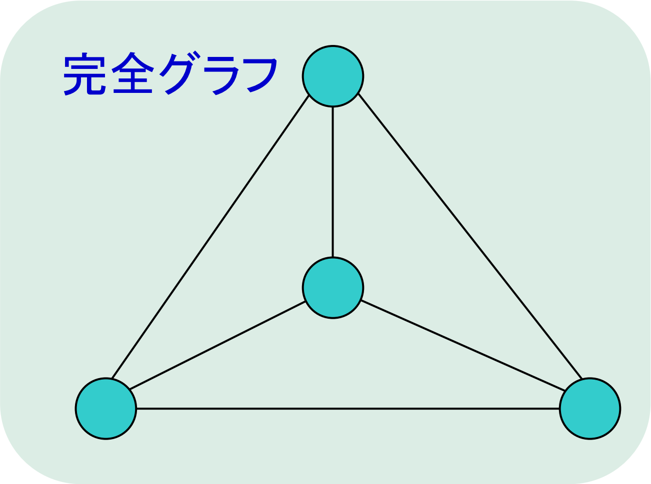
（証明終わり）

例題8.4

（1）完全グラフの厚さ

完全グラフの辺数は$m=n(n-1)/2$

$\therefore\ t(K_n)\geq\left\lfloor\frac{m+3n-7}{3n-6}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{\frac{n(n-1)}{2}+3n-7}{3n-6}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n+7}{6}\right\rfloor$



（2）完全二部グラフの厚さ

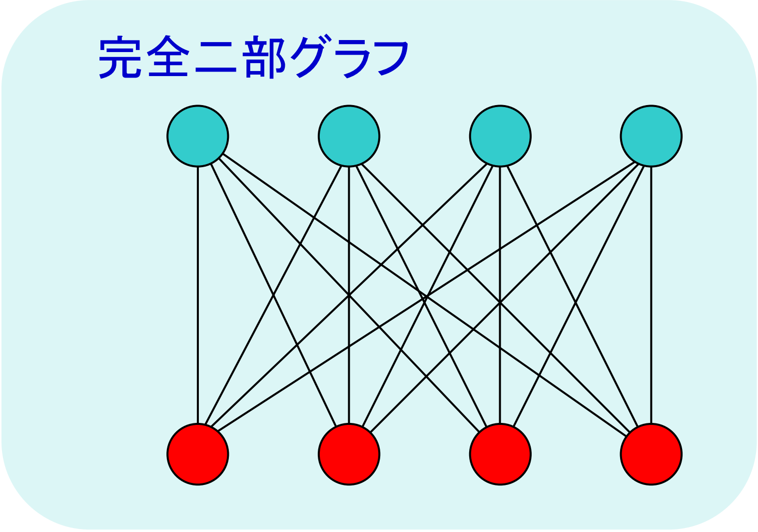
完全二部グラフ$K_{r,s}$の点数と辺数は

$m=rs,\ n=r+s$

$K_{r,s}$には三角形が含まれないので

$m\geq 2n-4\equiv m_0$

$\therefore\ t\left(K_{r,s}\right)=\left\lceil\frac{m}{m_0}\right\rceil=\left\lceil\frac{rs}{2(r+s)-4}\right\rceil$

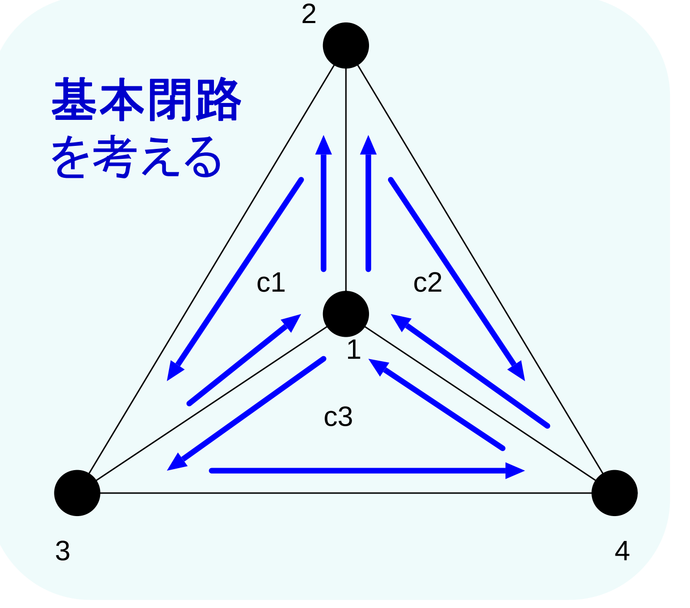


例題8.5の1と2

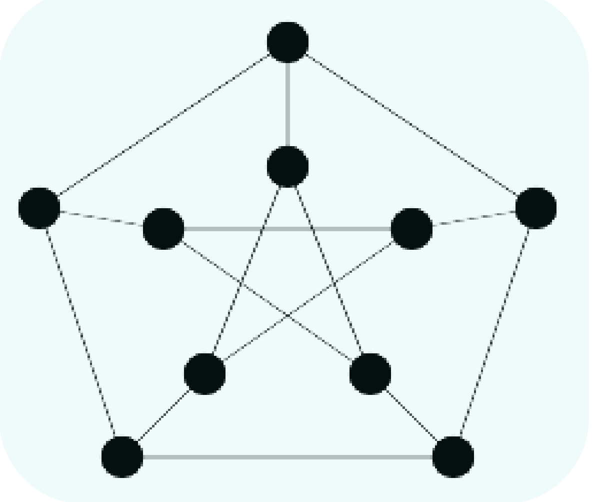
1. 完全グラフの全域木の総数（復習）

閉路行列法を用いると

$$\tau(K_4) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 16$$



2. ピータースン・グラフの平面性



$n=10, m=15, \kappa=5$ を判別式に代入し

$$m \le \frac{\kappa(n-2)}{\kappa-2} = \frac{5(10-2)}{5-2} = 13.33\ldots.$$

これは満たされないので
ピータースン・グラフは平面的ではない

例題8.5の3

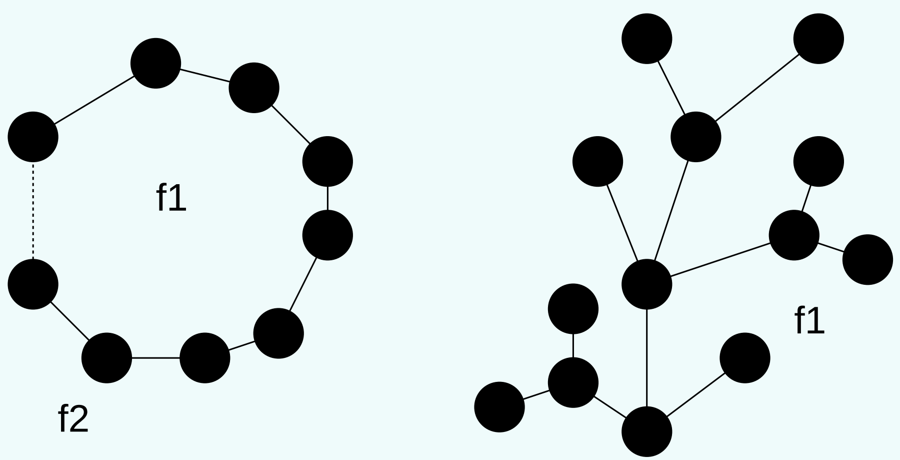
K角形までない場合

握手補題より

$$(K+1)f = \sum_{f \in \mathbf{F}(G)} d(F) = 2m$$

オイラーの公式 $f = 2-n+m$ よりfを消去

$$m \leq \left(\frac{K+1}{K-1}\right)(n-2) \to n \ \left(n \to \infty, K = n\right)$$



考えうる状況

例題8.6

地図においては隣り合う5つ以下の隣接国しかもたない国が存在することの証明

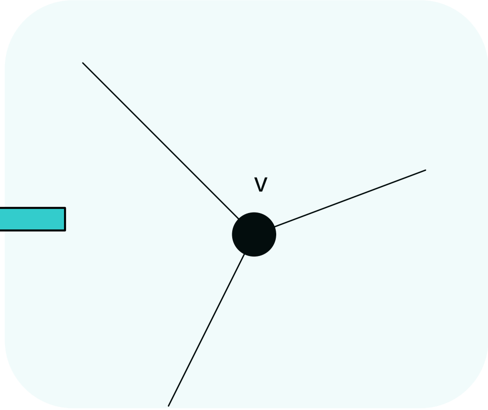
（1）

地図では任意の点に接続する辺は3つ以上

$\therefore m \geq 3n/2$であるから

$n \leq \frac{2m}{3}$

辺の両端には必ず点が2つあるので2で割る

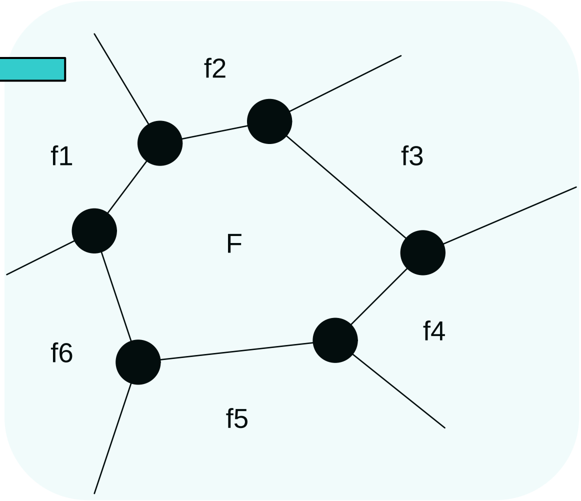


（2）

Gの中に面がf個あれば

$m \geq 6f/2 \quad \therefore f \leq \frac{m}{3}$

境界線の両側には必ず面が2つあるので2で割る



（3）

オイラーの公式より

$2 = n - m + f \leq \frac{2m}{3} - m + \frac{m}{3} = 0$

従って(1)のもとで(2)を仮定すると矛盾が生じたので題意が成立する