グラフ理論　#9

第9回講義　6月5日

--- 双対グラフ、グラフの点彩色 ---

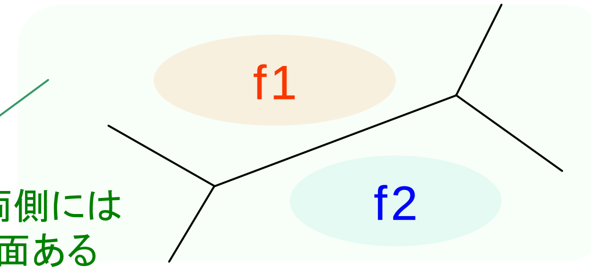
情報科学研究科　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題8の解答例

全ての点の次数が4であるので

$$4n=\sum_{v\in V(G)}\deg(v)=2m \quad \therefore 4n=2m$$



辺の両側には
必ず2面ある

オイラーの公式：$n=2m-f$を代入し、nを消去 ： $2m+8=4f$

k角形の個数をφ_kとすると

$$f=\sum_{k=3}\varphi_k, \quad 2m=\sum_{k=3}k\varphi_k$$

題意を示すために、全ての量を
k角形の個数で書き直す

従って、これらを用いて

$$3\varphi_3+4\varphi_4+5\varphi_5+6\varphi_6+\cdots+8=4\varphi_3+4\varphi_4+4\varphi_5+4\varphi_6+\cdots$$

$$\therefore \quad \varphi_3-(\varphi_5+2\varphi_6+\cdots)-8=0\le\varphi_3-8$$

$$\therefore \quad \varphi_3\ge 8$$

従って、考える平面グラフには3角形が8個以上ある

演習問題8の補足

全ての点の次数が **4でなくて3** ならば何が言えるか？

2004年度情報工学
演習II(B)(グラフ理論)
#1 問題6

握手補題から、$3n=2m$であるが、これとオイラーの公式を組んで

$$6+m=3f$$

k角形の個数をφ_kとすると

$$f=\sum_{k=3}\varphi_k,\quad 2m=\sum_{k=3}k\varphi_k$$

代入してはじめの数項を書き出してみると

$$3\varphi_3+2\varphi_4+\varphi_5-\varphi_7-2\varphi_8-\cdots=12$$

$$\therefore\ \varphi_3+\varphi_4+\varphi_5\geq\tfrac{1}{3}\left(3\varphi_3+2\varphi_4+\varphi_5\right)\geq\tfrac{1}{3}\times 12=4$$

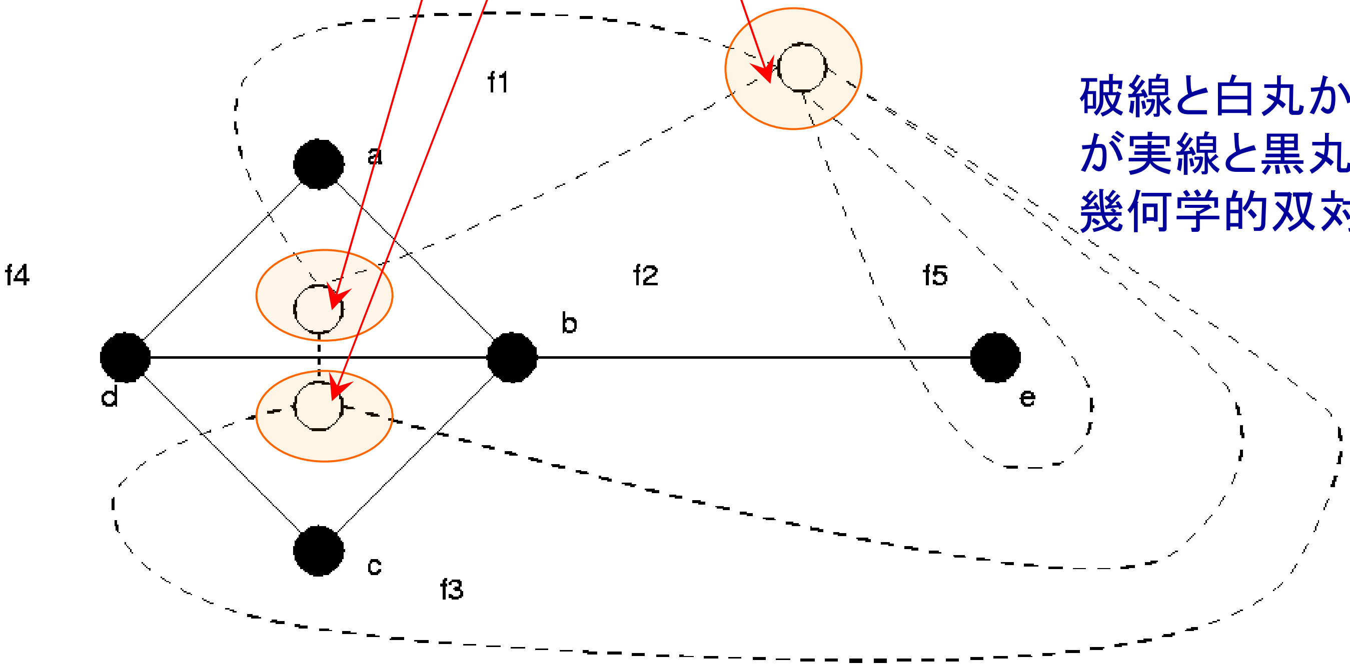
グラフには 3, 4, 5角形が少なくとも 4 個以上含まれることが言える

幾何学的双対グラフ

幾何学的双対グラフの作り方

(1)グラフGの各面 f の内側の点 v^* を選ぶ⇒双対グラフG^*の点となる

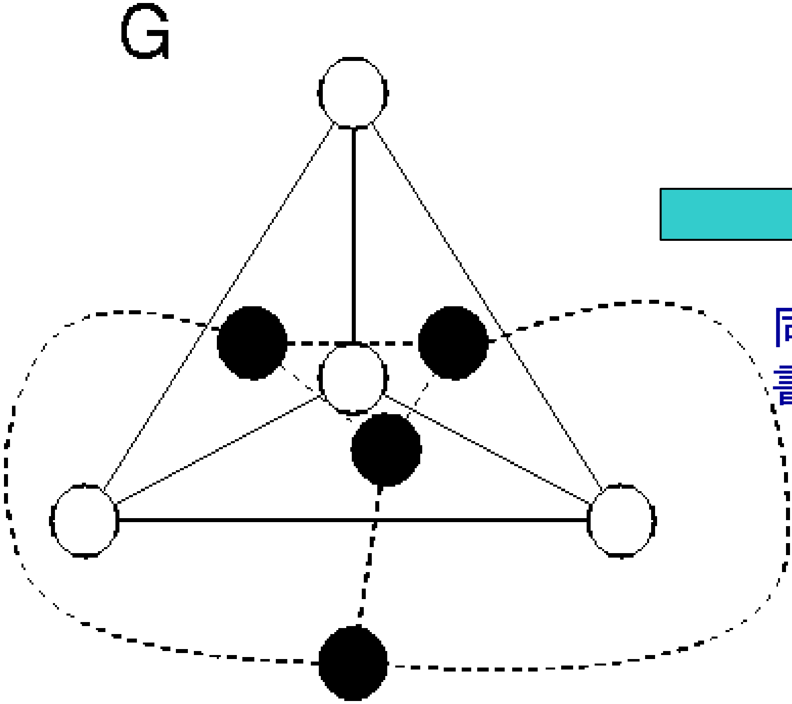
(2)グラフGの各辺 e に対応させて、e に交差する線 e^* を描いて、eに接する2つの面fの点 v^* を結ぶようにする⇒双対グラフG^*の辺となる

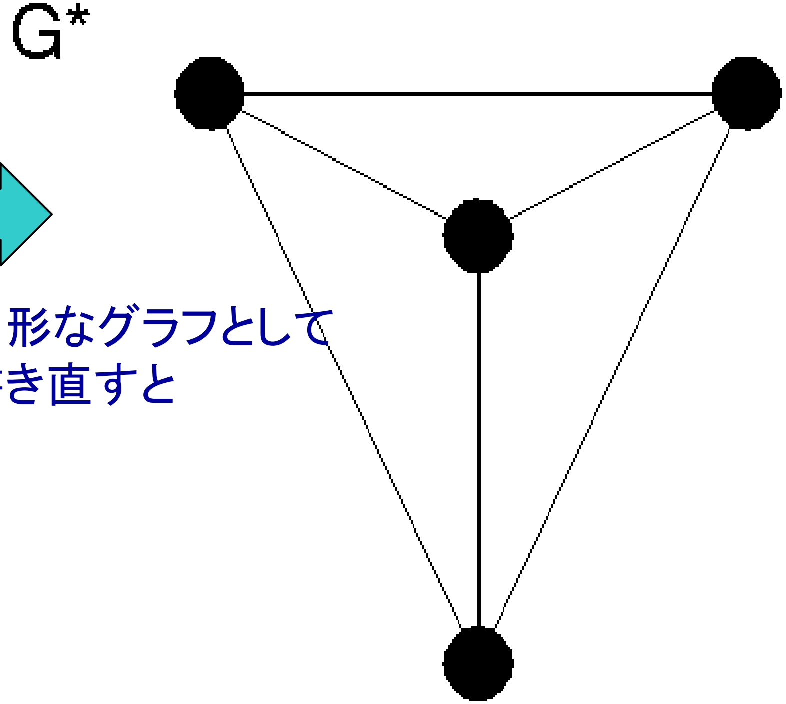


破線と白丸からなるグラフ
が実線と黒丸からなるグラフの
幾何学的双対グラフになっている

幾何学的双対グラフの例

完全グラフK_4の幾何学的双対グラフは完全グラフK_4である





同形なグラフとして
書き直すと

補題15・1とその証明

平面グラフGには n 個の点、m 本の点、f 個の面がある。
幾何学的双対グラフG^*には n^* 個の点、m^*本の辺、f^*個の面があるならば

$$n^* = f,\ m^* = m,\ f^* = n$$

が成り立つ　　　　補題15.1

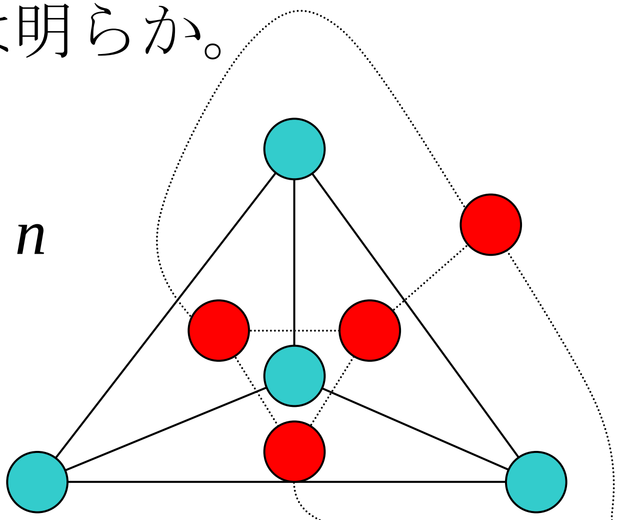
（証明）

双対グラフの作り方から、$n^* = f, m^* = m$ は明らか。

オイラーの公式より

$n^* - m^* + f^* = 2$、$f^* = 2 - n^* + m^* = 2 - f + m = n$

従って、$f^* = n$

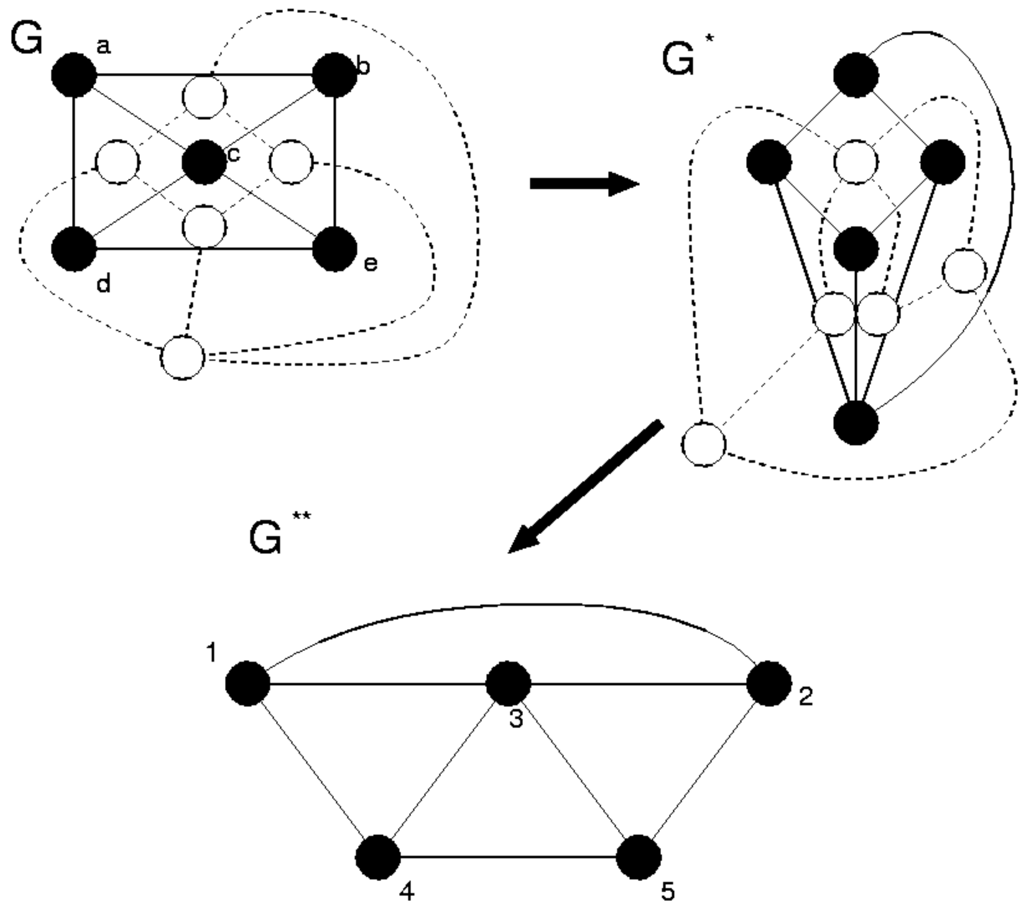


定理15・2

グラフGが連結平面ならば、G^{**}はグラフGと同形である

（例）

$$G \cong G^{**}$$

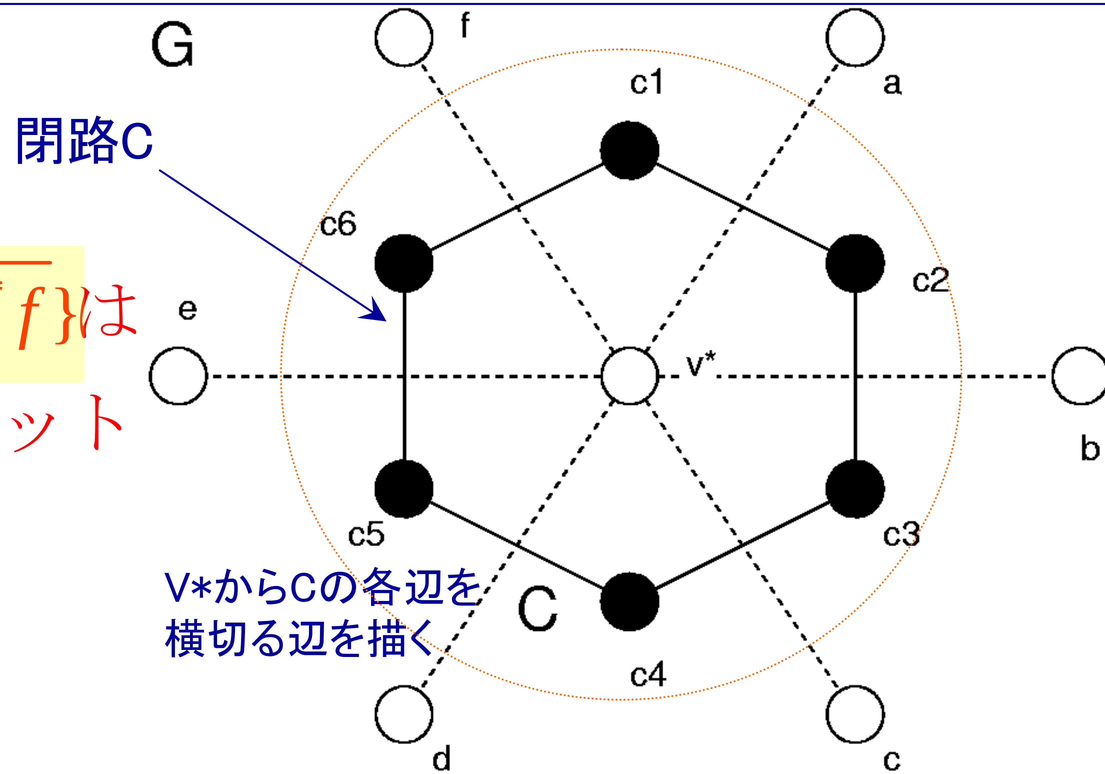


同形写像が存在する
ことは講義ノート参照

定理15･3

平面グラフGの幾何学的双対をG^*とする。グラフGの各辺のある集合が
グラフGにおいて閉路であるための必要十分条件は、それに対応する
双対グラフG^*の辺集合が、グラフG^*においてカットセットになっていることである

$\{\overline{v^*a}, \overline{v^*b}, \overline{v^*c}, \overline{v^*d}, \overline{v^*e}, \overline{v^*f}\}$は
G^*においてカットセット
になっている



系15・4

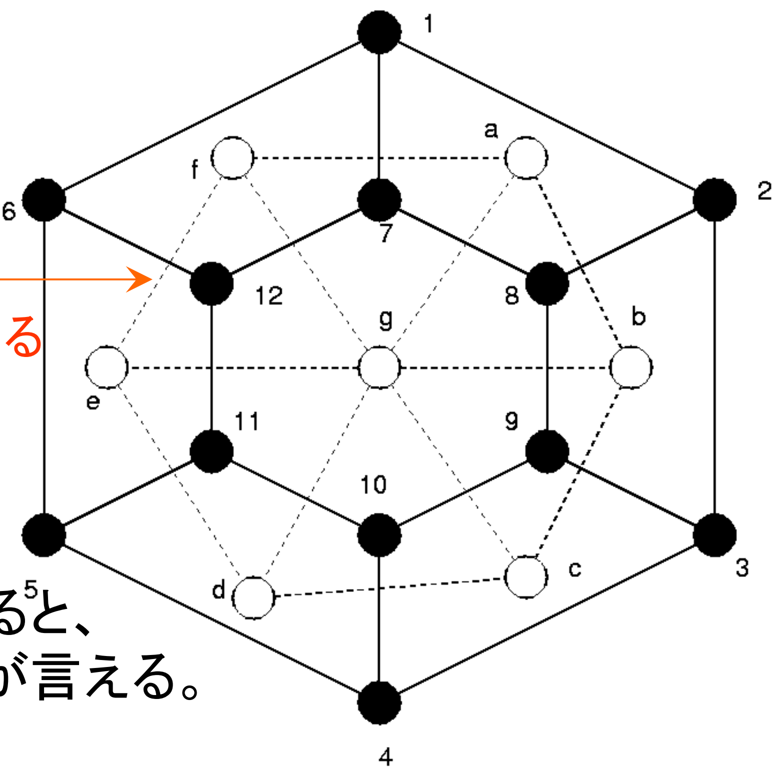
グラフGのある辺集合がGのカットセットであるための必要十分条件は、対応する幾何学的双対グラフG^*の辺集合がG^*の閉路となることである

Gのカットセット: $\{\overline{17}, \overline{28}, \overline{39}, \overline{410}, \overline{511}, \overline{612}\}_G$

対応する幾何学的双対グラフG^*の辺集合

$\{\overline{fa}, \overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}, \overline{ef}\}$

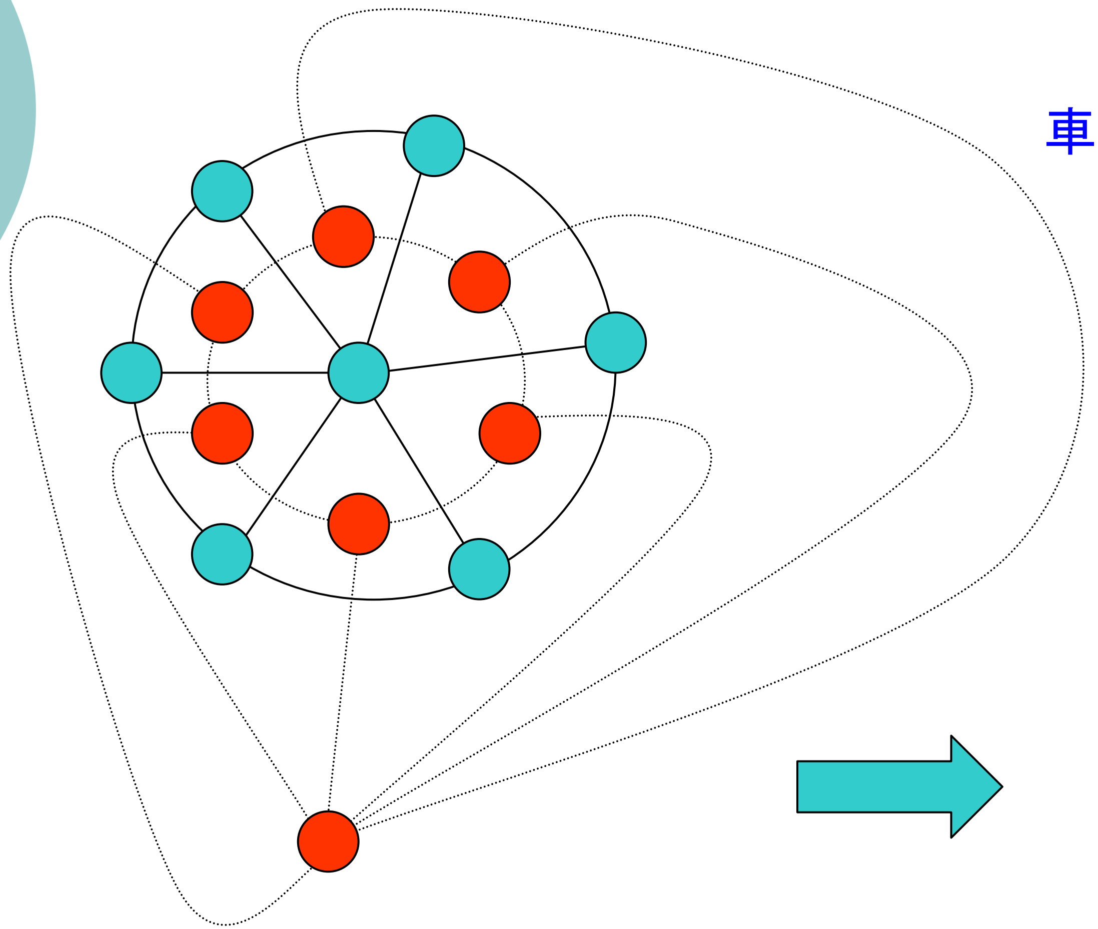
G*においては閉路となっている



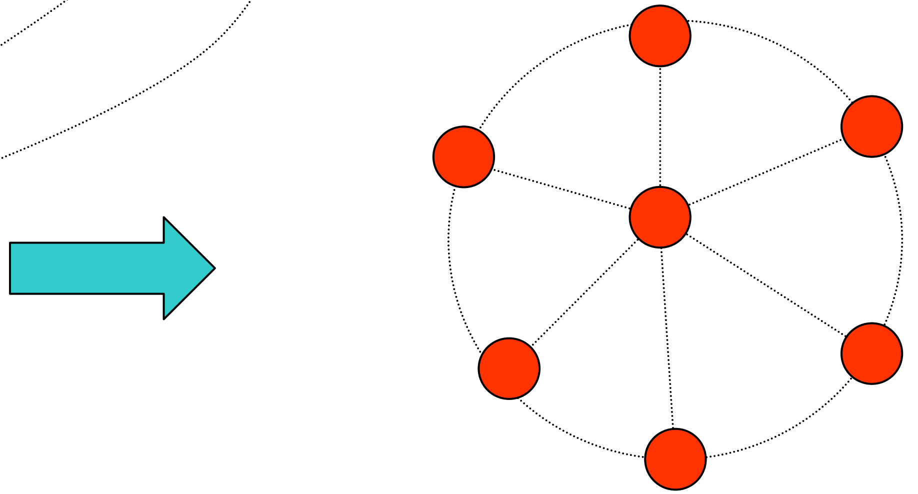
（証明のアウトライン）

定理15・3をG→G*、G*→Gとして読みかえると、**
定理15・2からGとGは同形であるから題意が言える。**

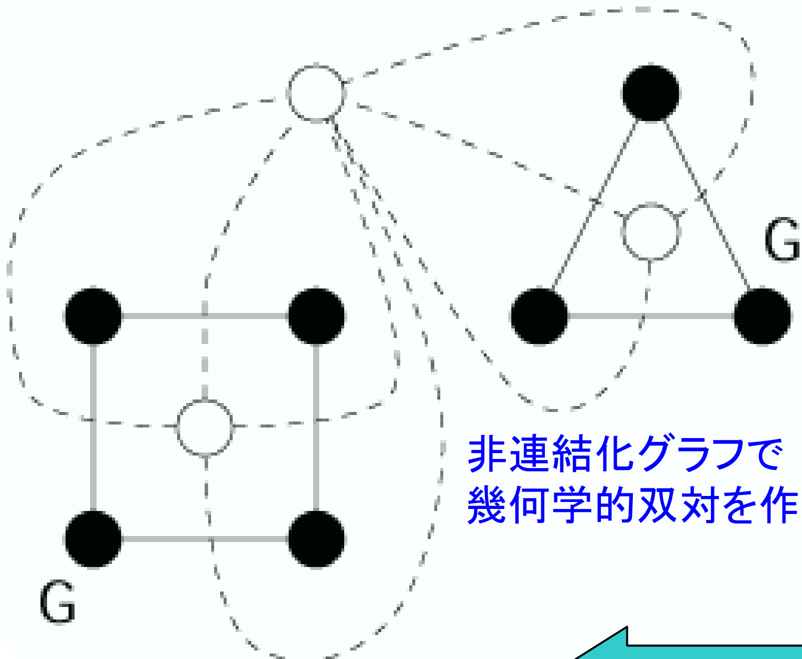
例題8.8の(1)



車輪の幾何学的双対は車輪

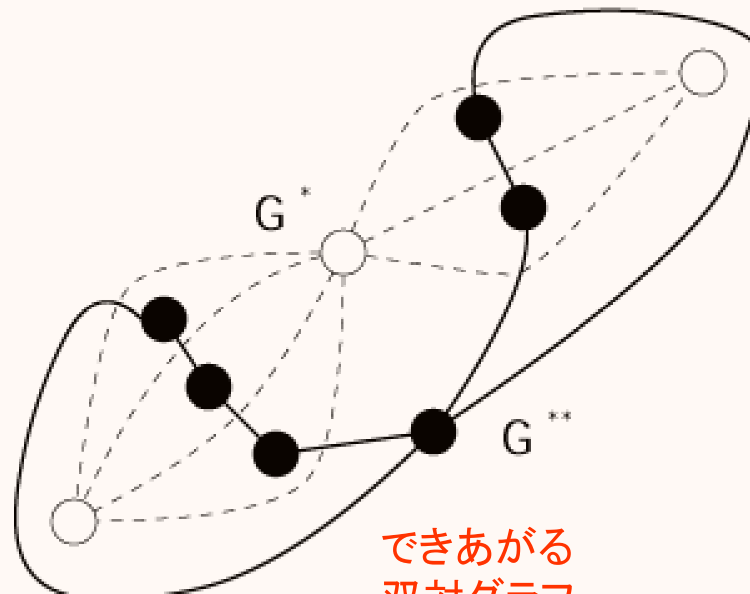


例題8.8の(2)



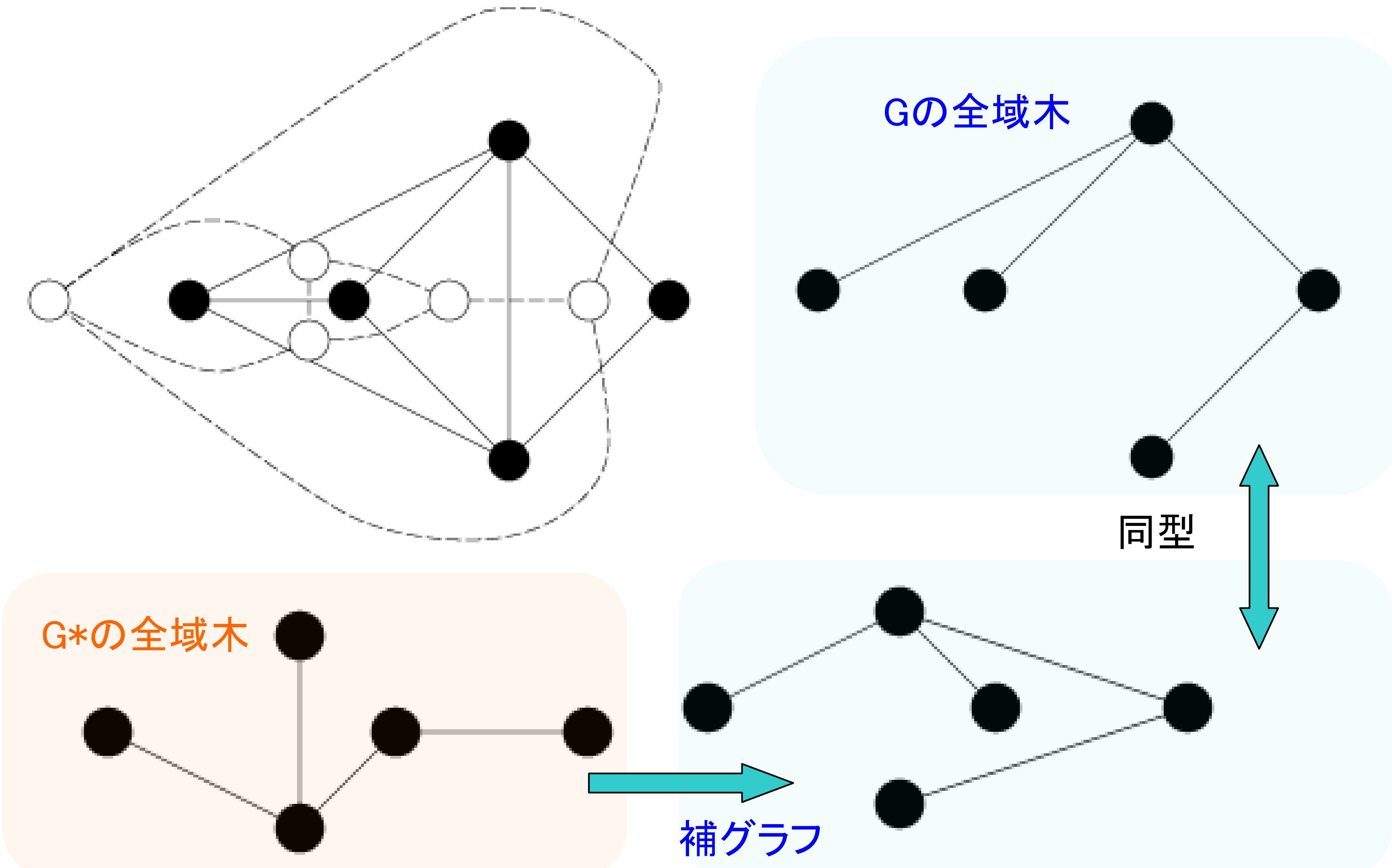
非連結化グラフで
幾何学的双対を作る

両者は同型でない



できあがる
双対グラフ

例題8.8の(3)

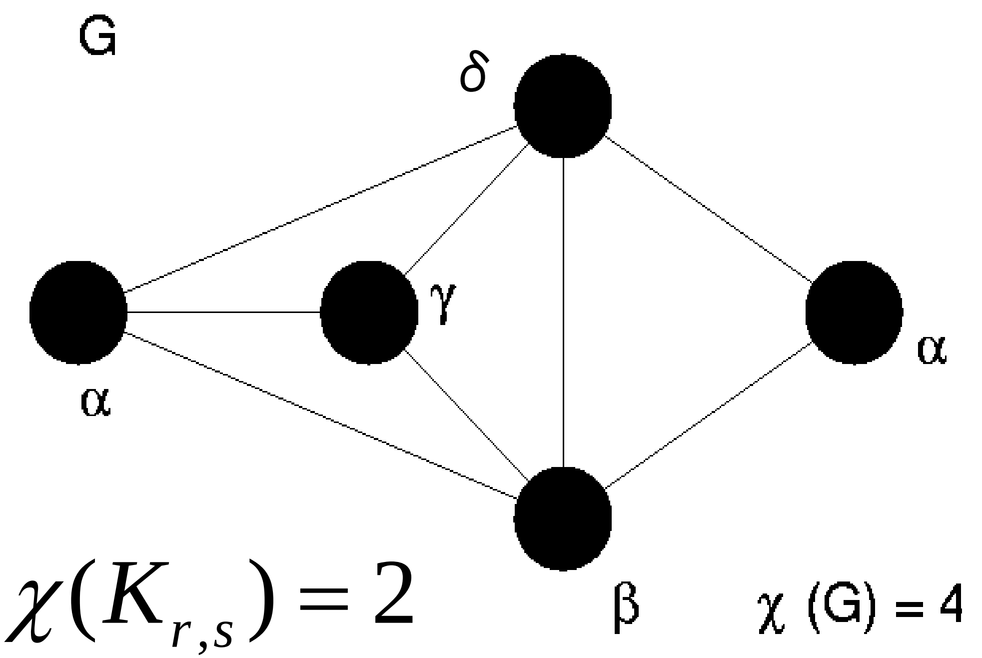


グラフの彩色：点彩色

k−彩色可能：
k個の色の一つをGの各点に割り当て、隣接するどの2つの点も同色できること
k−彩色的：
グラフGがk彩色可能であるが、(k−1)彩色不可能であるとき
⇒ グラフGの彩色数はkである

$$\boxed{\chi(G)=k}$$

「彩色数はkである」、というのをこのように表記する



いくつかの代表的グラフに対する例　：

$$\chi(K_n)=n,\ \chi(N_n)=1,\ \chi(K_{r,s})=2$$

定理17･1

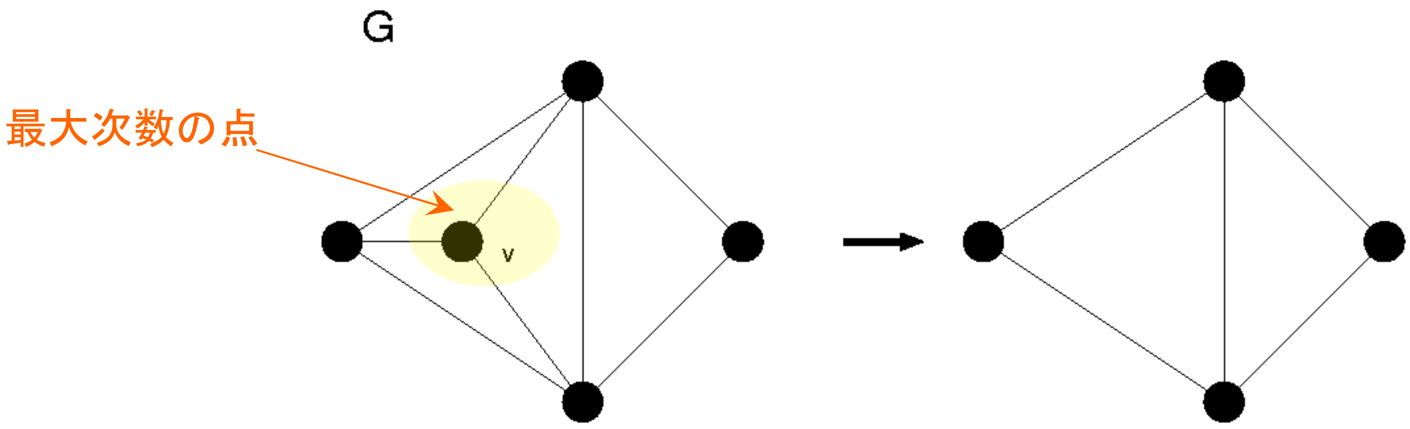
単純グラフGの最大次数がΔならば、グラフGは$(\Delta+1)$彩色可能である

（証明）

点数に関する帰納法で示す。

任意の点vとその接続辺を除去してできる$n-1$個の点、最大次数Δのグラフは$(\Delta+1)$彩色可能であると仮定する

vを元に戻し、vに隣接するΔ個以下の点と異なる色でvを彩色すれば、n個の点からなるグラフGの$(\Delta+1)$彩色が得られる



定理17･3

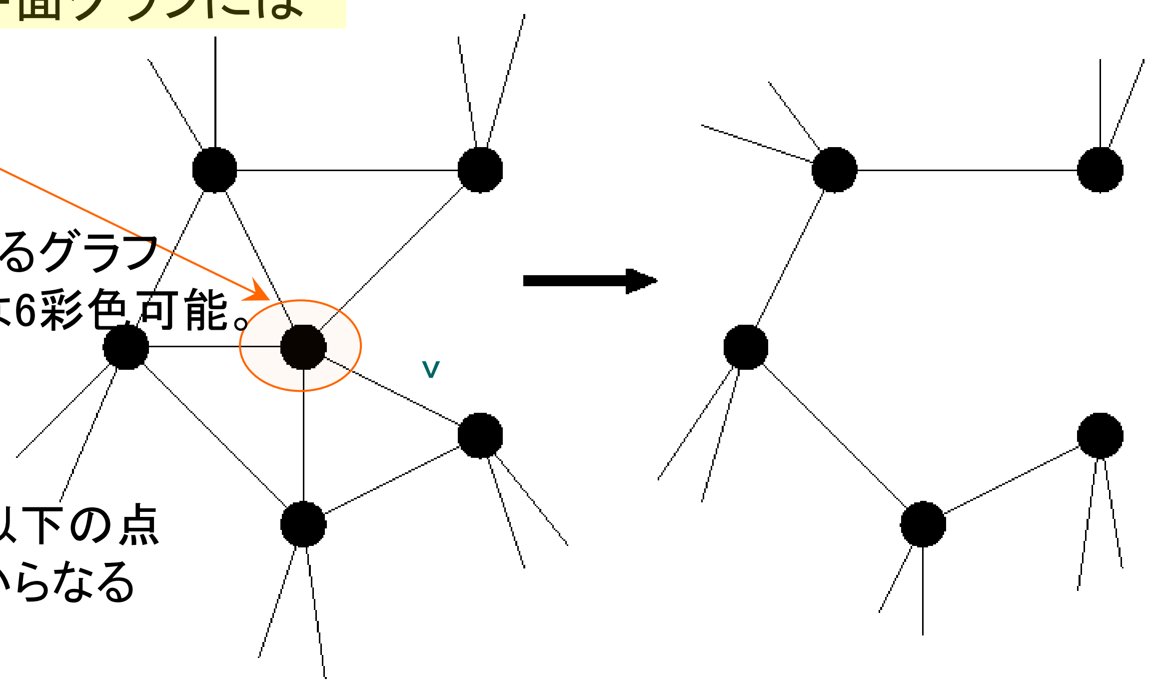
全ての単純平面グラフは6彩色可能である

（証明）

「n−1個の点をもつ全ての単純平面グラフは6彩色可能である」と仮定する

定理13･6より、「全ての単純平面グラフには次数5以下の点がある」

点vを除去すると、n−1個の点からなるグラフができあがるので、仮定より、これは6彩色可能。



点vを元に戻し、vに接続する5個以下の点以外の色でvを彩色すれば、n点からなるグラフの6彩色が得られる

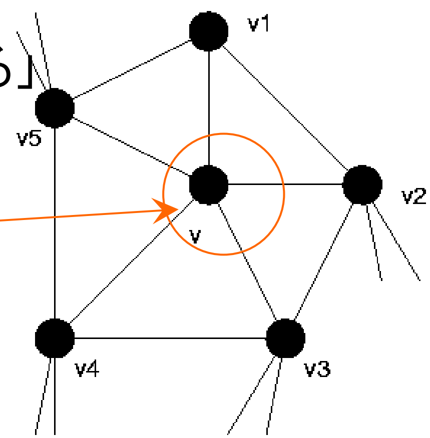
定理17・4

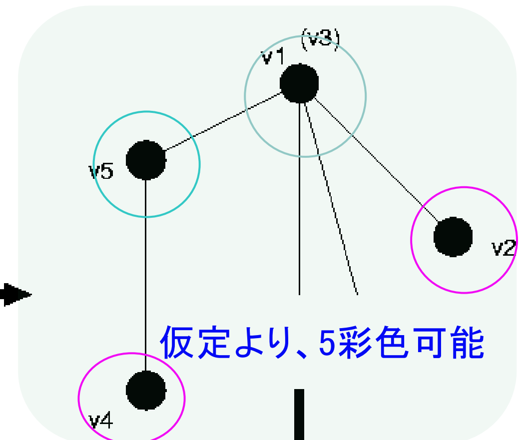
全ての単純平面グラフは5彩色可能である

（証明）

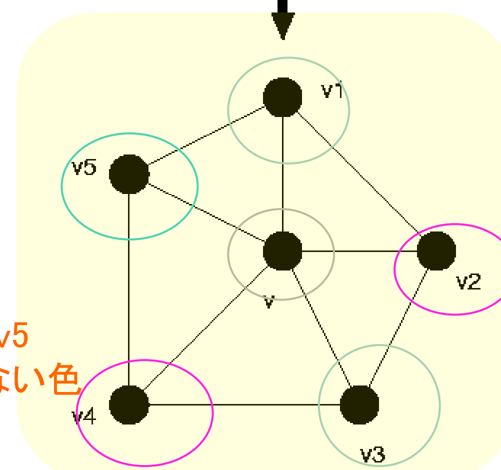
「n−1個以下の点をもつ全ての
単純平面グラフは5彩色可能である」
と仮定する

定理13・6より、Gには次数5以下の
点がある





2本の辺vv1、vv3を縮約する

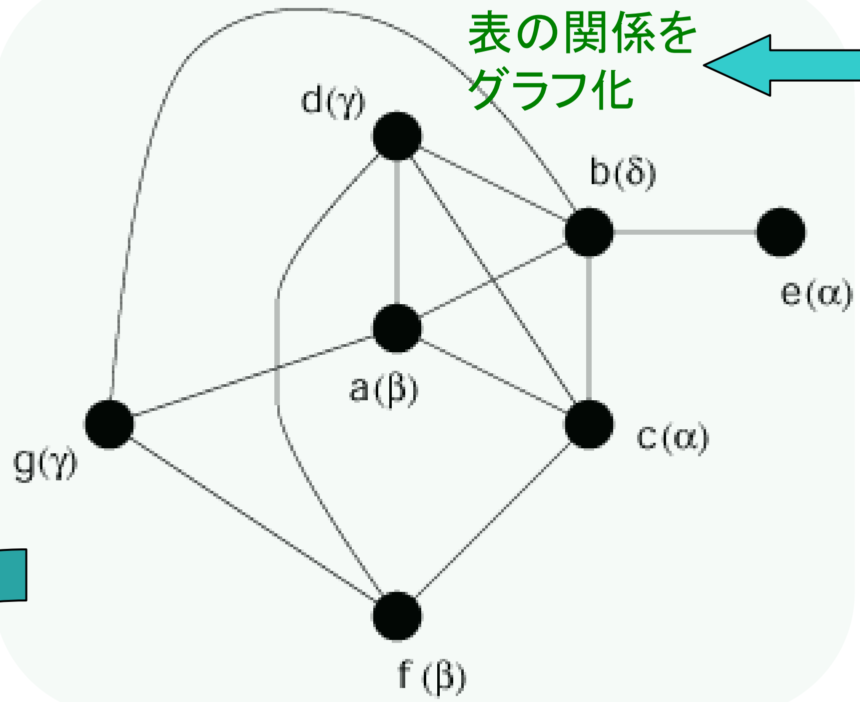


点vに当てられた色でv1、v3を彩色し、
点vを元々割り当てられた色以外で彩色しなおせば
Gの5彩色が完成する

点v1,v3は同色だから、v1−v5
の中にはまだ使われていない色
が存在する

例題9.1（点彩色の応用例）

表の関係を
グラフ化



	a	b	c	d	e	f	g
a	−	*	*	*	−	−	*
b	*	−	*	*	*	−	*
c	*	*	−	*	−	*	−
d	*	*	*	−	−	*	−
e	−	*	−	−	−	−	−
f	−	−	*	*	−	−	*
g	*	*	−	−	−	*	−

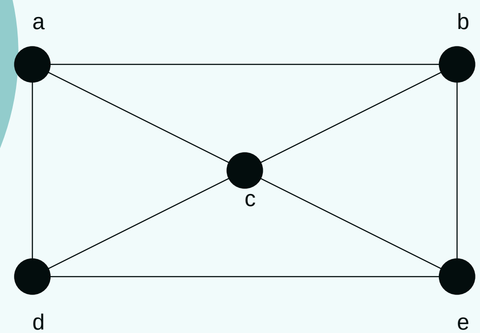
＊は同じ時間帯にあってはならない講義

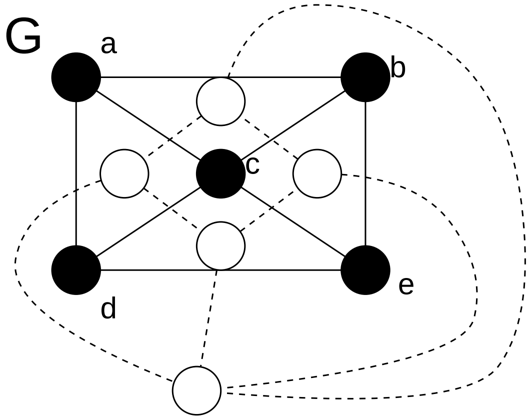
講義 c, e は α 講時に開講
講義 a, f は β 講時に開講
講義 d, g は γ 講時に開講
講義 b だけは δ 講時に開講

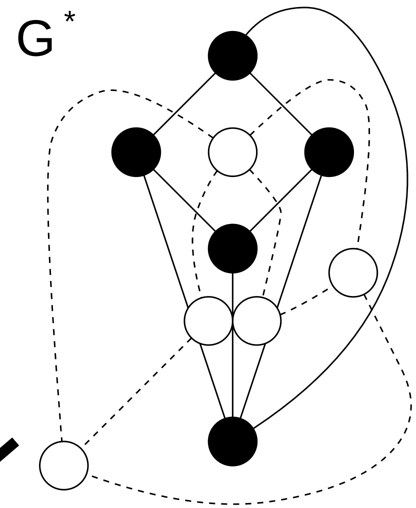
例題9.2の1

G

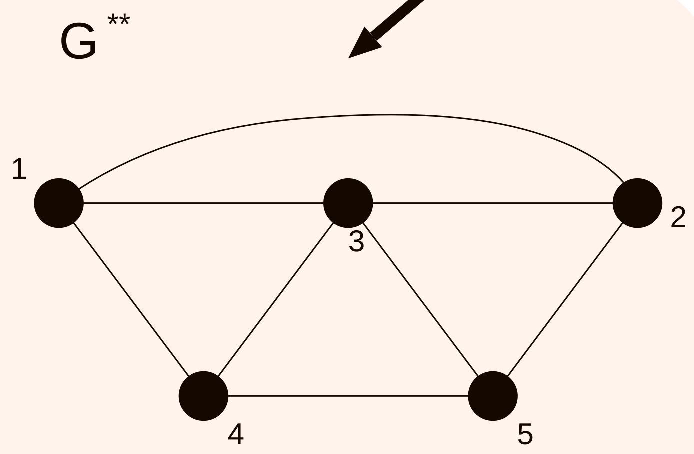
ここで考えるグラフ







グラフGとG**は同型
同型写像の存在については
講義ノートを参照



定理15.2

例題9.2の１の(1)

G に含まれる任意の点 v について

$\delta \le \deg(v)$ と仮定すると $n\delta \le \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m$

ぎりぎり次数 δ の点が含まれると仮定する

握手補題より

G には三角形はないので

$4 \le \deg(F) \ \therefore 4f \le \sum_{F \in F(G)} \deg(F) = 2m$

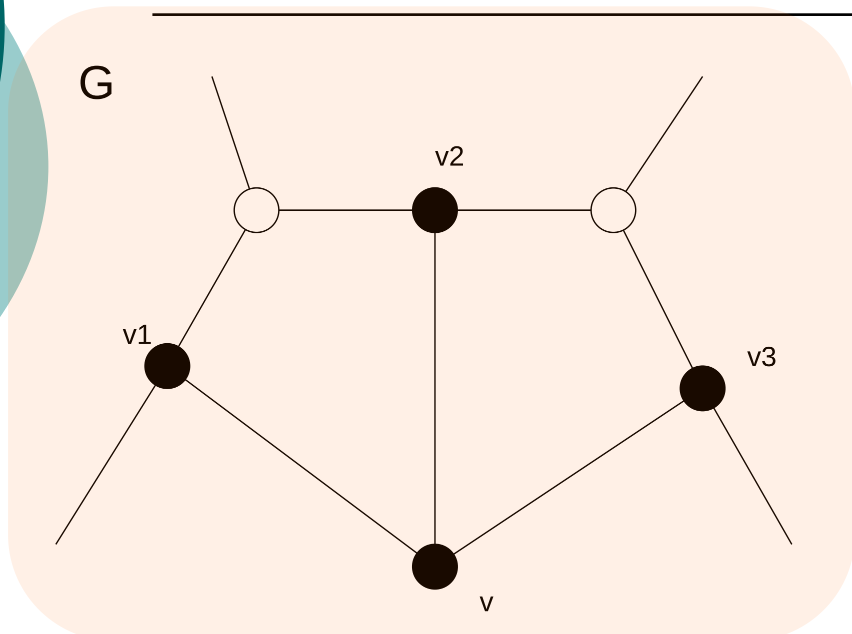
オイラーの公式: $f = 2 - n + m$ より f を消去して $m \le 2n - 4$

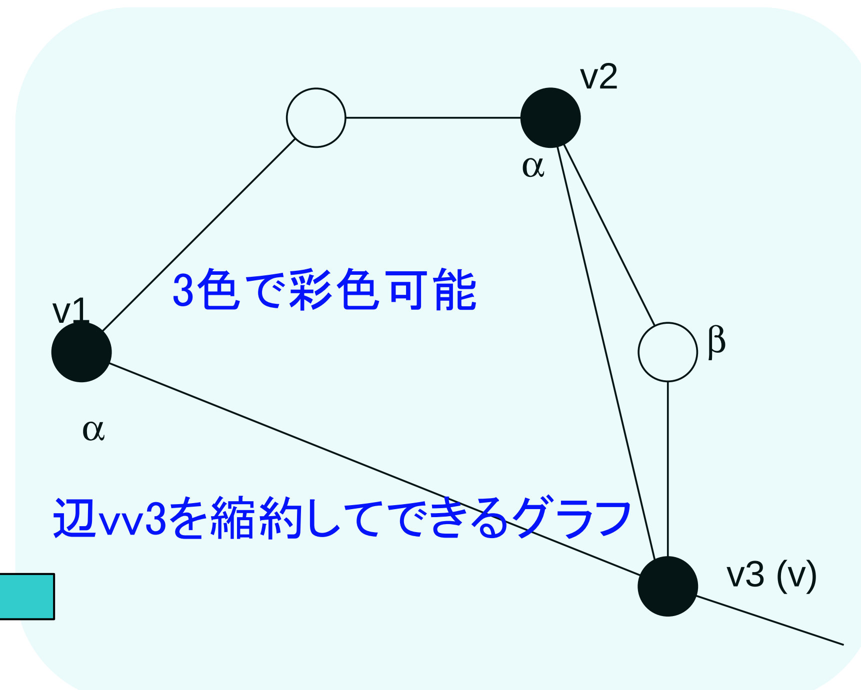
$\therefore \ n\delta \le 2m \le 2(2n-4)$

つまり、 $\delta \le 4 - \frac{8}{n}$

nは8以上なので（講義ノート参照）
題意が成立する。

例題9.2の１の(2)





点vを元に戻し、
α、βと異なる色で塗れば
グラフGの3彩色が完成

例題9.3（プラトン・グラフの彩色）