



Title	2006年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2006
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/15412
Rights(URL)	http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learningobject
Note(URL)	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html ; http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory06_slide12.pdf (第12回講義スライド)



[Instructions for use](#)

グラフ理論 #12

第12回講義 7月10日

--- マルコフ連鎖 ---

情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

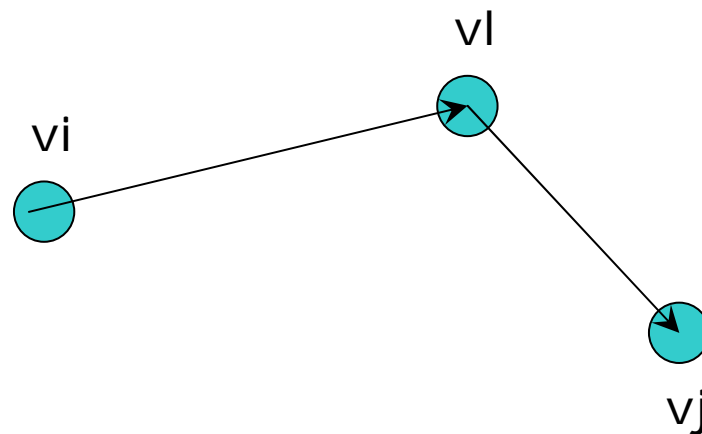
演習問題11 の解答例

隣接行列の自乗の(i,j)成分は

$$[A^2]_{ij} = \sum_{l=1}^n a_{il} a_{lj}$$

点 v_i から点 v_l へ至る弧の個数

点 v_i から点 v_l へ至る長さ2の弧の総数



$$[A^k]_{ij} = \sum_{l_1=1}^n \cdots \sum_{l_{k-1}=1}^n a_{il_1} a_{l_1 l_2} \cdots a_{l_{k-1} j}$$

点 v_i から点 v_l へ至る長さ k の弧の総数

一次元酔歩

酔っ払いが各時刻で左右にそれぞれ確率 $1/3$, $1/2$ で動き
確率 $1/6$ で現在の位置にとどまる

はじめ酔っ払いはE4にいたとすると、状態ベクトルは

$$\mathbf{x}_0 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

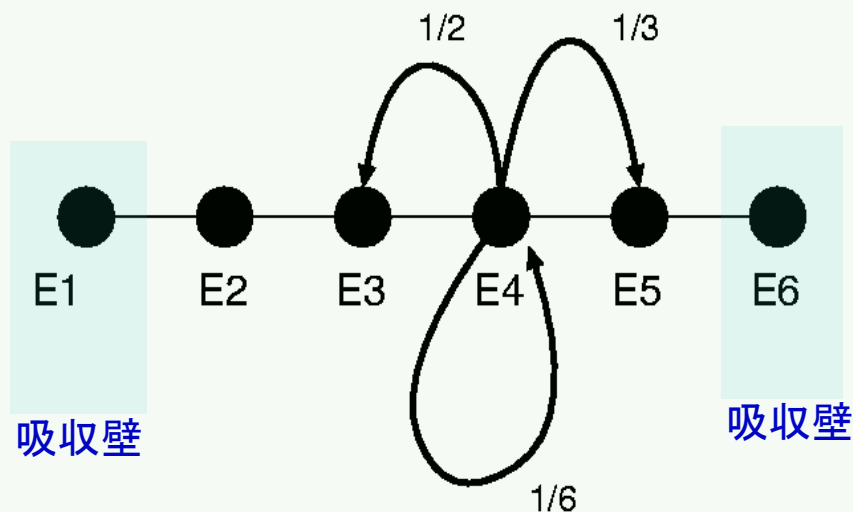
時刻 $t=0$ にE4にいる確率が1

1, 2分後には

$$\mathbf{x}_1 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 0 \right)$$

$$\mathbf{x}_2 = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{13}{36}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9} \right)$$

酔っ払いの動きの有向グラフ表現



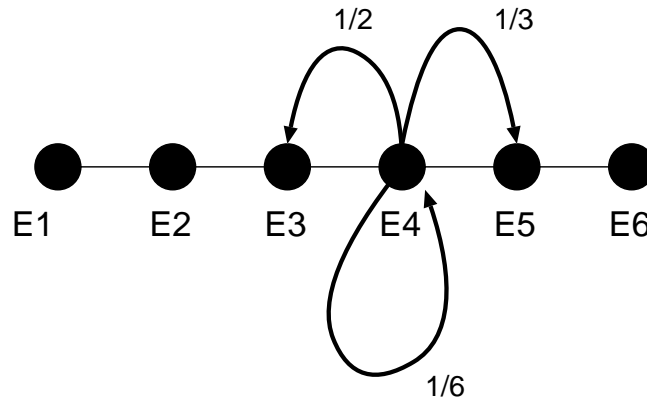
遷移行列

遷移行列 $\mathbf{P} = (P_{ij})$ 単位時間間隔で酔っ払いが
状態 E_i から E_j へ移動する確率を第 j 成分とする行列

いまの例の場合には

各行の和は1

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



各単位時間間隔の状態は遷移行列で結ばれる

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 \mathbf{P}$$

成分のひとつを書き出してみると

$$p_1^1 = p_0^1 + \frac{1}{2} p_0^2$$

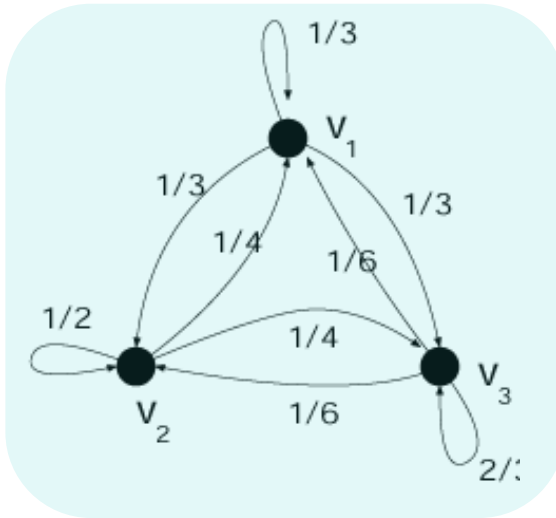
E2にいた場合には確率1/2でE1に移る

E1にいた場合には確率1でE1に留まる

具体例を例題を通じて見ていく

例題10.5

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

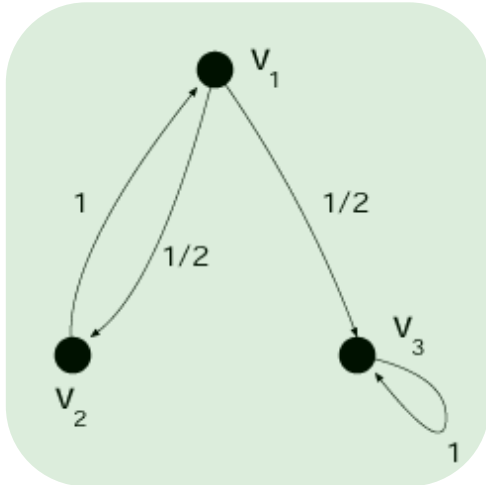


$$(p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1))$$

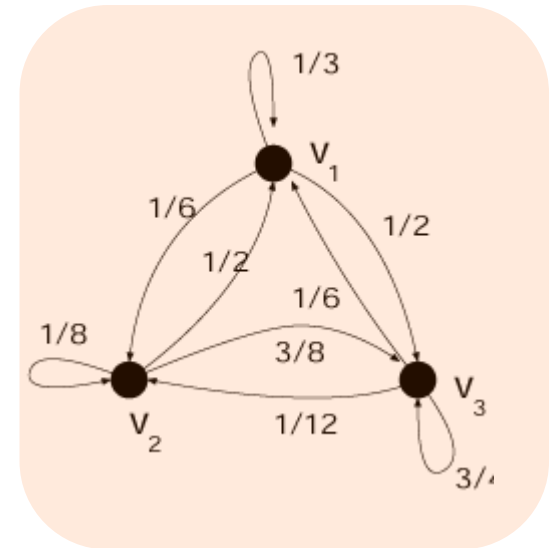
$$= (1, 0, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

はじめ v_1 にいる
次ステップで各点にいる確率

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

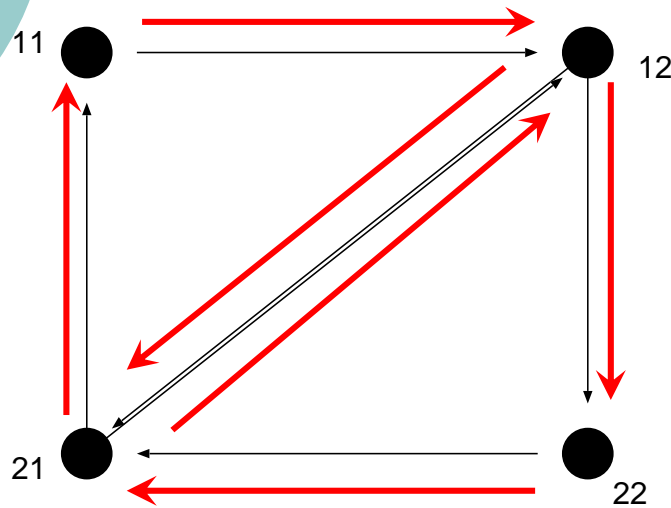


$$\mathbf{PQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$



例題10.6の1

{11,12,21,22}が $j = k$ のときのみ、点 ij と点 kl が結ばれる



具体的なオイラー小道

$$\text{outdeg}(11) = 1 = \text{indeg}(11)$$

$$\text{outdeg}(12) = 2 = \text{indeg}(12)$$

$$\text{outdeg}(21) = 2 = \text{indeg}(21)$$

$$\text{outdeg}(22) = 1 = \text{indeg}(22)$$

オイラー小道が存在する 定理23.1

例題10.6の2

遷移行列

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

状態ベクトル

$$\mathbf{x}^n = (p_a(n), p_b(n), p_c(n))$$

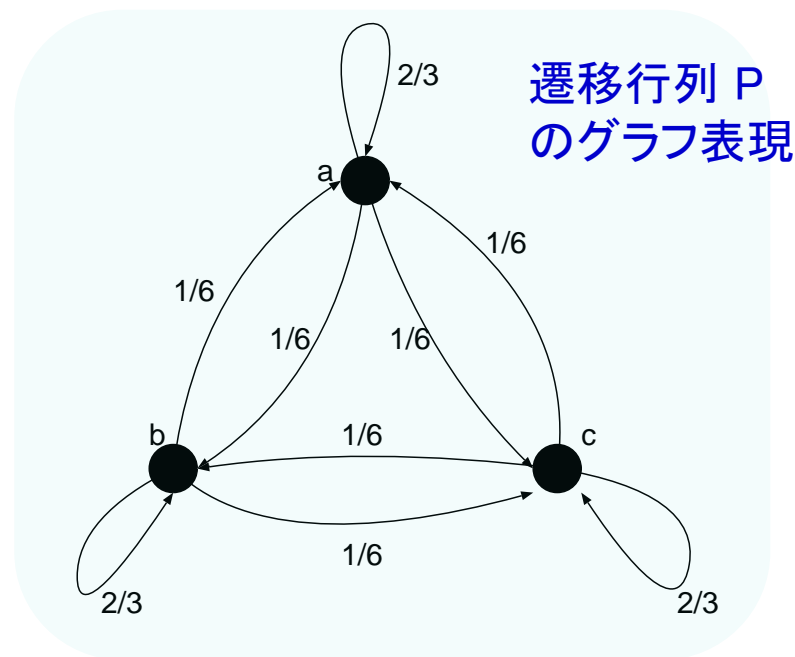
$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n \mathbf{P}$$

状態方程式

状態ベクトルの一般項

$$(p_a(n), p_b(n), p_c(n)) = \left(\frac{1}{3}(1 - 2^{-n}), \frac{1}{3}(1 + 2^{1-n}), \frac{1}{3}(1 - 2^{-n}) \right)$$

詳細は講義ノート



例題10.7

遷移行列

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} \end{pmatrix}$$



$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$ の行列要素は全て正

各状態は永続的かつ非周期的なので
このマルコフ連鎖はエルゴード的である

