グラフ理論　#12

第12回講義　7月10日

--- マルコフ連鎖 ---

情報科学研究科　　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

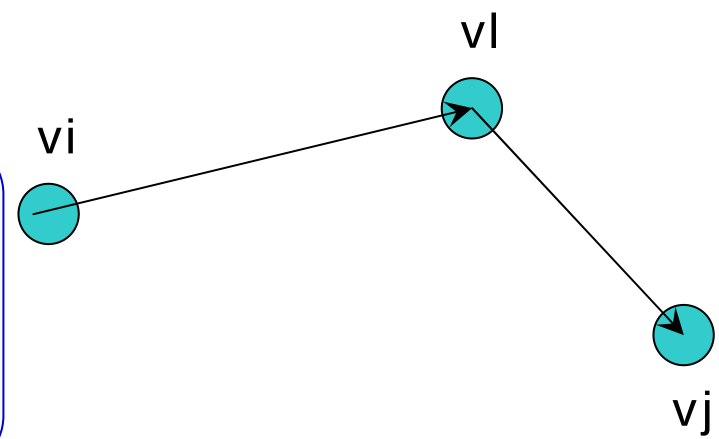
演習問題11 の解答例

隣接行列の自乗の(i,j)成分は

$$\left[\mathbf{A}^2\right]_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} a_{lj}$$

点 vi から点 vl へ至る弧の個数

点 vi から点 vl へ至る長さ2の弧の総数



$$\left[\mathbf{A}^k\right]_{ij} = \sum_{l_1=1}^{n} \cdots \sum_{l_{k-1}}^{n} a_{il_1} a_{l_1 l_2} \cdots a_{l_{k-1} j}$$

点 vi から点 vl へ至る長さ k の弧の総数

一次元酔歩

酔っ払いが各時刻で左右にそれぞれ確率1/3, 1/2で動き
確率1/6で現在の位置にとどまる

はじめ酔っ払いはE4にいたとすると、状態ベクトルは

$$\mathbf{x}_0 = (0,0,0,1,0,0)$$

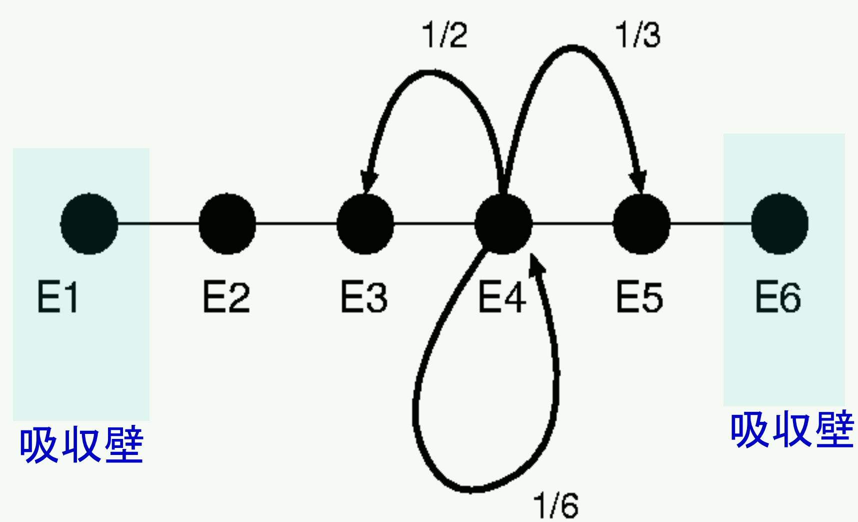
時刻t=0にE4にいる確率が1

1，２分後には

$$\mathbf{x}_1 = \left(0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{3},0\right)$$

$$\mathbf{x}_2 = \left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{13}{36},\frac{1}{9},\frac{1}{9}\right)$$

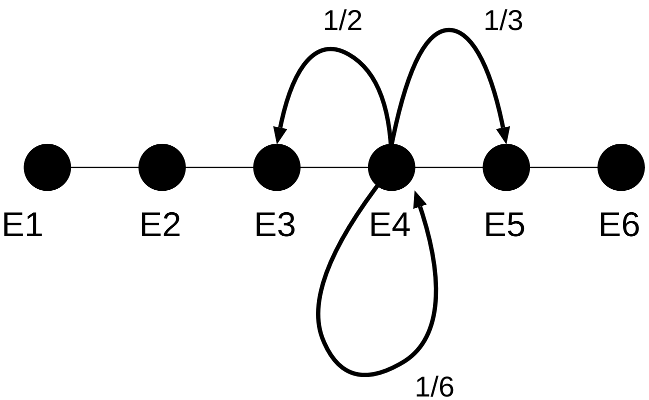
酔っ払いの動きの有向グラフ表現



遷移行列

遷移行列 $\mathbf{P} = \left(P_{ij} \right)$

単位時間間隔で酔っ払いが
状態 Ei から Ej へ移動する確率を第ij成分とする行列



いまの例の場合には

各行の和は1

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

各単位時間間隔の状態は遷移行列で結ばれる

$$\boxed{\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 \mathbf{P}}$$

成分のひとつを書き出してみると

E2にいた場合には確率1/2でE1に移る

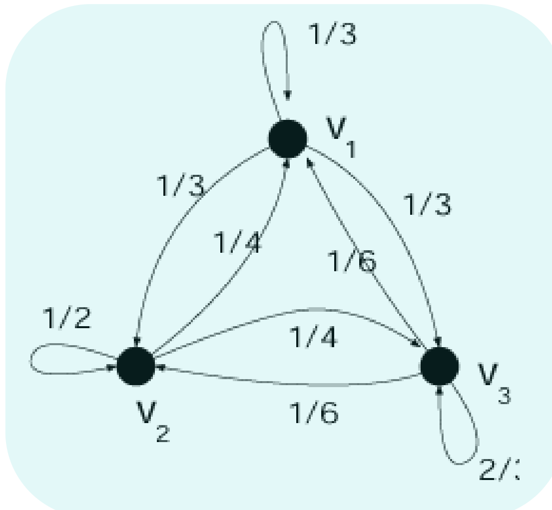
$$p_1^1 = p_0^1 + \frac{1}{2} p_0^2$$

E1にいた場合には確率1でE1に留まる

具体例を例題を通じて見ていく

例題10.5

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



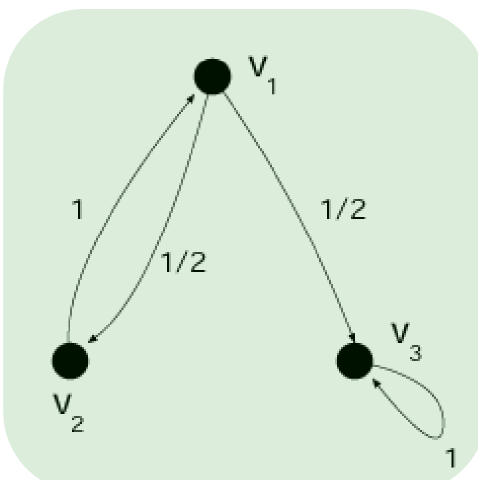
$$(p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1))$$

$$= (1,0,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right)$$

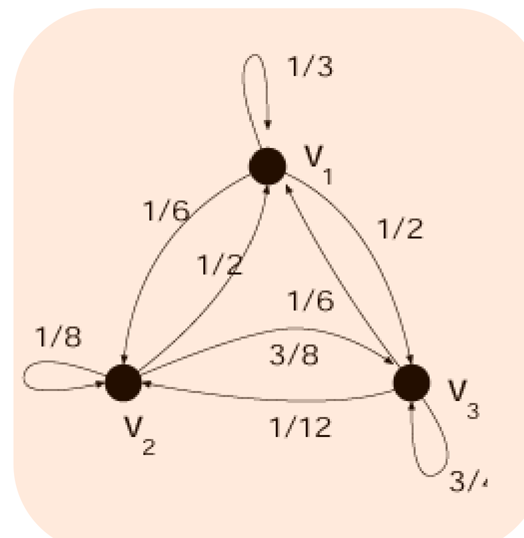
はじめ
v1にいる

次ステップ
で各点にいる
確率

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

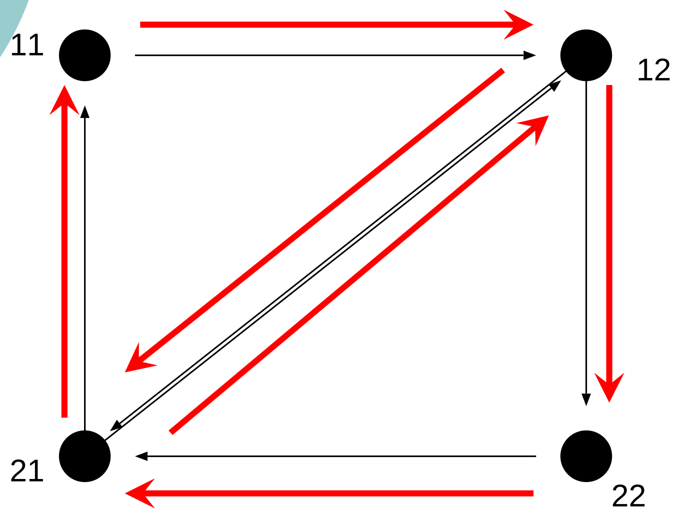


$$\mathbf{PQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$



例題10.6の1

$\{11, 12, 21, 22\}$が$j = k$のときのみ、点ijと点klが結ばれる



具体的なオイラー小道

$\mathrm{outdeg}(11) = 1 = \mathrm{indeg}(11)$

$\mathrm{outdeg}(12) = 2 = \mathrm{indeg}(12)$

$\mathrm{outdeg}(21) = 2 = \mathrm{indeg}(21)$

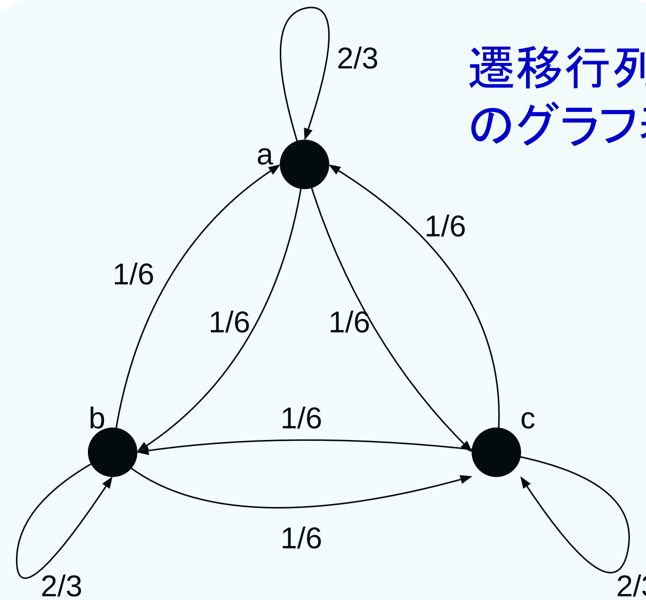
$\mathrm{outdeg}(22) = 1 = \mathrm{indeg}(22)$

オイラー小道が存在する　定理23.1

例題10.6の2

遷移行列

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



遷移行列 P
のグラフ表現

状態ベクトル

$$\mathbf{x}^n = \left(p_a(n), p_b(n), p_c(n) \right)$$

$$\boxed{\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n \mathbf{P}}$$

状態方程式

状態ベクトルの一般項

$$\left(p_a(n), p_b(n), p_c(n) \right) = \left(\tfrac{1}{3}(1-2^{-n}), \tfrac{1}{3}(1+2^{1-n}), \tfrac{1}{3}(1-2^{-n}) \right)$$

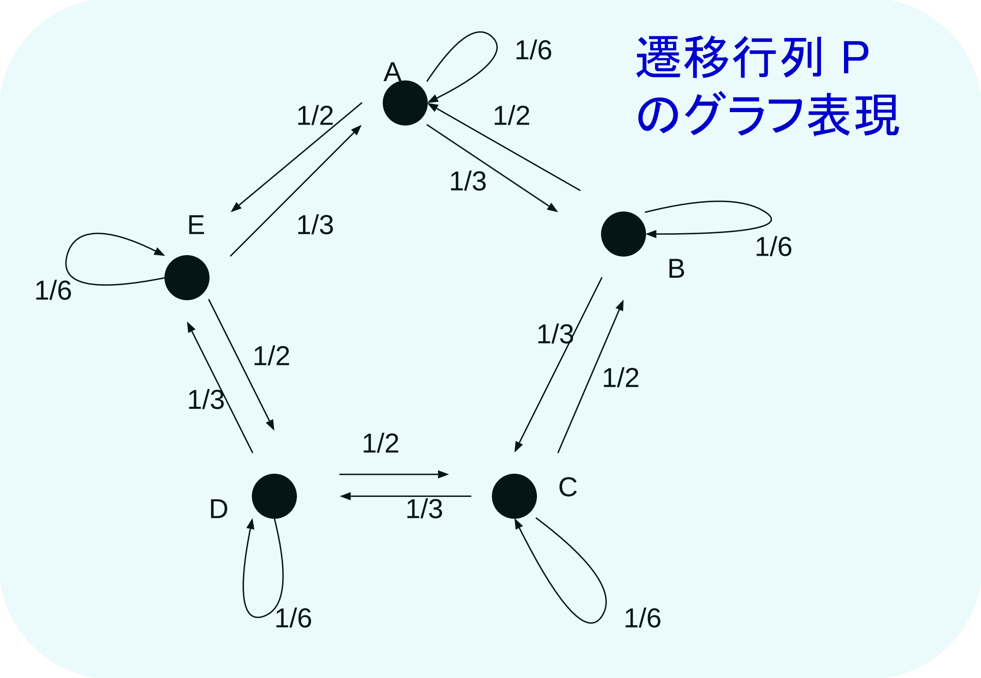
詳細は講義ノート

例題10.7

遷移行列

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}^2=\begin{pmatrix} \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} \end{pmatrix}$$



$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^n$の行列要素は全て正

各状態は永続的かつ非周期的なので
このマルコフ連鎖はエルゴード的である