



Title	2006年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2006
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/15412">http://hdl.handle.net/2115/15412</a>
Rights(URL)	<a href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learningobject
Note(URL)	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> ; <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory06_4.pdf (第4回講義ノート)



[Instructions for use](#)

# グラフ理論 配布資料 #4

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

URL : [http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

平成 18 年 4 月 24 日

## 目次

5 道と閉路	38
5.1 連結性	39
5.2 非連結化集合と分離集合	45
5.2.1 非連結化集合	45
5.2.2 分離集合	45

### 演習問題 3 の解答例

まず, 各立方体の展開図において, それを組み立てたときに向かい合う面どおしを辺で結んでできるグラフはそれぞれ次の図 53 (左) のようになる. 従って, これらのグラフを一つのグラフにまとめると図 53 (右) の

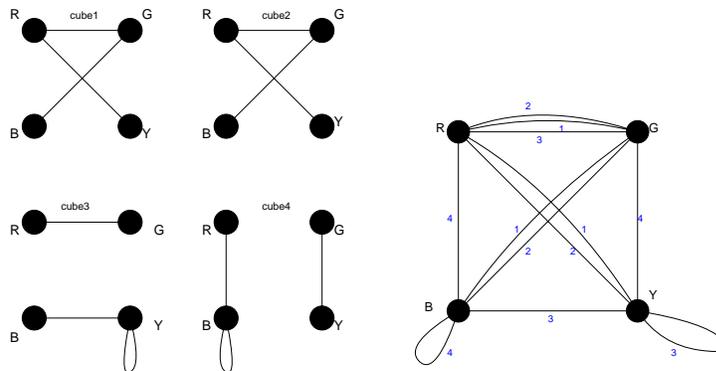


図 53: 各展開図からできるグラフ (左) と 4 つのグラフを一つにまとめてできるグラフ (右).

ようになる. このグラフで辺  $\overline{RB}$ ,  $\overline{GY}$  は全て cube4 からの辺であるから, 共通する辺が無い次数 2 の正則グラフは選べないことになる. よって, 与えられた 4 つの立方体を題意のように積み上げることはできない.

## 5 道と閉路

ここでは, 「道」及び「閉路」に関し, その概念・諸定理, 及び, 応用例をいくつかの具体例をあげて説明する. なお, 教科書 p. 52 「アルゴリズム」は, この講義では触れず, 情報工学演習 II(B) の時間に関連す

る問題を解くことにより補うことにする。

### 5.1 連結性

連結：グラフの各 2 点の間に道がある。

歩道： $v_i (i = 1, \dots, m) \in G$  に対し、辺列  $v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{m-1}v_m$  を歩道 (walk) という。

⇒ 別の表現： $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m$  ( $v_0$  : 始点,  $v_m$  : 終点)

小道：全ての辺  $v_0v_1, \dots, v_{m-1}v_m$  が異なる歩道

道：点  $v_0, v_1, \dots, v_m$  が全て異なる歩道 ( $v_0 = v_m$  であっても良いとする)

閉路：少なくとも 1 本辺を持つ閉じた道

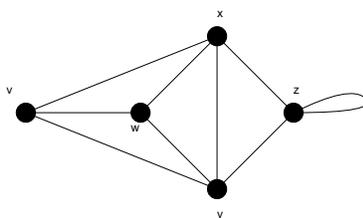


図 54: このグラフにおいて、閉路は  $x \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x$

#### 例題 4.1

連結単純グラフ  $G$  の点集合は  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  であり、 $m$  本の辺および  $t$  個の三角形があるとする。以下の (1) ~ (3) に答えよ。

- (1)  $G$  の隣接行列を  $A$  とすると、行列  $A^2$  の  $ij$  要素は  $v_i$  と  $v_j$  間の長さ 2 の歩道の個数に等しいことを示せ。
- (2) 行列  $A^2$  の対角要素の総和は  $2m$  であることを示せ。
- (3) 行列  $A^3$  の対角要素の総和は  $6t$  であることを示せ。

(解答例)

(1) 連結グラフ  $G$  に関する  $n \times n$  の隣接行列を

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{26}$$

と置くと隣接行列の自乗  $A^2$  は

$$A^2 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{nk}a_{kn} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \equiv B \tag{27}$$

と書け、 $A^2$  の  $ij$  要素である  $b_{ij}$  は

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} \tag{28}$$

である。ところで、隣接行列の定義から  $a_{ik}$  は点  $v_i$  と点  $v_k$  を結ぶ辺の本数、 $a_{kj}$  は点  $v_k$  と点  $v_j$  を結ぶ辺の本数であるから、積  $a_{ik}a_{kj}$  は点  $v_i$  から点  $v_k$  を経由して点  $v_j$  に至る長さ 2 の歩道の数に相当する (図 55 参照)。経由点  $v_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) の選び方の可能性 ( $i = k, j = k$  の場合には「ループ」があると

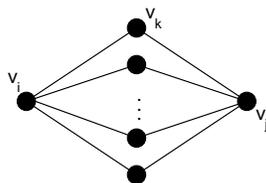


図 55: 点  $v_k$  は点  $v_i$  から点  $v_j$  へ至る経由点.

考える) に関し、この積  $a_{ik}a_{kj}$  を足し上げた

$$\sum_{k=1}^n a_{ik}a_{kj} = b_{ij} \tag{29}$$

は  $v_i$  から  $v_j$  へ至る長さ 2 の歩道の数である。すなわち、 $A^2$  の  $ij$  要素  $b_{ij}$  は  $v_i$  から  $v_j$  へ至る長さ 2 の歩道の数に等しい。

(2) (1) の結果を考慮すると、行列  $B = A^2$  の対角成分

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{ki} \tag{30}$$

は点  $v_i$  から点  $v_k$  を経由して  $v_i$  へ戻る長さ 2 の歩道の数であるから、これは  $v_i$  と  $v_k$  を結ぶ辺の数の 2 倍になっている (図 56 参照)。従って、行列  $A^2$  の対角和

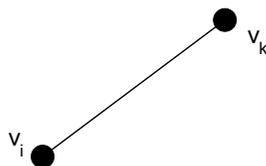


図 56: 中継点  $v_k$  を経て、 $v_i$  へ戻る経路.

$$\sum_{i=1}^n b_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{ki} \tag{31}$$

は連結グラフ  $G$  に含まれる辺の本数の 2 倍、すなわち  $2m$  である。

(3)  $A^3$  を計算すると

$$A^3 = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{1k} a_{kl} a_{l1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{1k} a_{kl} a_{ln} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{nk} a_{kl} a_{l1} & \cdots & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{nk} a_{kl} a_{ln} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} = C \quad (32)$$

であるから、 $A^3$  の  $ij$  成分は

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{lj} \quad (33)$$

と書ける。

ところで、隣接行列の定義から  $a_{ik}$  は点  $v_i$  と点  $v_k$  間の辺の本数、 $a_{kl}$  は点  $v_k$  と点  $v_l$  間の辺の本数、 $a_{lj}$  は点  $v_l$  と点  $v_j$  間の辺の本数であるから、これらの積  $a_{ik} a_{kl} a_{lj}$  は点  $v_i$  から点  $v_k$  及び点  $v_l$  を経由して点  $v_j$  へ至る歩道の数である。従って、経由点  $\{v_k, v_l\}$  の可能性について足し合わせた

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{lj} = c_{ij} \quad (34)$$

つまり、行列  $A^3$  の  $ij$  要素は点  $v_i$  から点  $v_j$  へ至る長さ 3 の歩道の数に等しい (図 57 参照)。また、

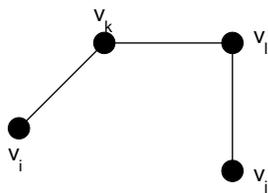


図 57: 点  $v_i$  から経由点  $\{v_k, v_l\}$  を経て  $v_j$  へと至る経路。

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{li} \quad (35)$$

は点  $v_i$  から点  $v_k$  及び点  $v_l$  を経由して  $v_i$  へ至る長さ 3 の閉路の数であるから。これは点  $v_i, v_k$  及び点  $v_l$  を結ぶ三角形の数である。従って、これを経由点  $\{v_k, v_l\}$  の可能性について足し上げた

$$\sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ik} a_{kl} a_{li} \quad (36)$$

は連結グラフ  $G$  に含まれる三角形の個数の 6 倍 ( $i, k, l$  の並べ方  $3! = 6$  通りに縮退) に等しい (図 58 参照)。すなわち

$$\sum_{i=1}^n c_{ii} = 6t \quad (37)$$

に等しい。

**定理 5.1**

グラフ  $G$  が二部グラフであるとき、閉路は全て偶数長である。

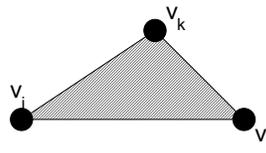


図 58: 点  $v_i$  を出発し, 点  $\{v_k, v_l\}$  を経て点  $v_i$  へと戻る閉路は三角形を形成する.

証明は教科書 p. 37 を参照のこと (この講義では触れない).

**定理 5.2**

グラフ  $G$  は  $n$  個の点を持つ単純グラフであるとする.  $G$  には  $k$  個の成分があるとき,  $G$  の辺の本数  $m$  は次式を満たす.

$$n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1) \tag{38}$$

(証明)

まず, (38) における下界を表す不等式:  $m \geq n - k$  について示す. 空グラフ  $m = 0$  のときは自明であり,  $n = k$  より,  $0 \leq 0 - 0 = 0$  で成立する. 従って, 以下ではこの場合を除外して考える. 方針としては, 辺数が  $m_0 - 1$  のときに不等式の成立を仮定し,  $m_0$  のときの成立を示すという数学的帰納法により証明することにしよう.

このために, 単純グラフ  $G$  から任意の辺を 1 本削除した場合, 成分数, 点数, 辺数はどのように変化するかを考察すると

$$\text{成分数: } k \rightarrow k + 1$$

$$\text{点数: } n \rightarrow n$$

$$\text{辺数: } m_0 \rightarrow m_0 - 1$$

となるから, 上の矢印の右側のそれぞれの量  $(k + 1, n, m_0 - 1)$  に関して不等式を作ると

$$m_0 - 1 \geq n - (k - 1)$$

が成立する. 従って, この辺数  $m_0 - 1$  に関する不等式の成立を仮定し, これから辺数  $m_0$  についての不等式の成立を導けばよいわけであるが, これは上不等式を書き直せば直ちに

$$m_0 \geq n - k$$

が得られるので, 帰納法により, 全ての  $m$  に対して不等式:  $m \geq n - k$  の成立が示された.

次に, (38) の上界を示す不等式:  $m \leq (n - k)(n - k + 1)/2$  についての成立を示す. 辺の数の上界を考えるわけであるから, グラフ  $G$  を成分数が  $k$  のグラフで, 辺の数が一番多いものとするれば, このグラフ  $G$  の各成分は完全グラフであるとしてよい. そこで, この成分の中で任意の 2 成分  $C_i, C_j$  を選び,  $C_i$  には  $n_i$  個,  $C_j$  には  $n_j$  個の点があったとする ( $n_i \geq n_j$ ). つまり,  $C_i + C_j$  の辺の総数  $N_{ij}$  はそれぞれが完全グラフで

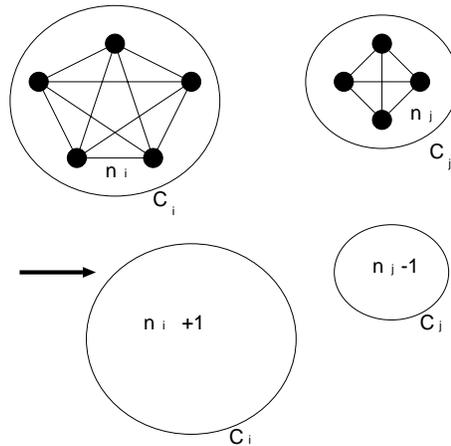


図 59: 完全グラフ  $C_i$  に点を一足して完全グラフを作り, 完全グラフ  $C_j$  から点を一引き, 完全グラフを作る.

あることを考慮すると (図 59 を参照).

$$\mathcal{N}_{ij} = \frac{1}{2}n_i(n_i - 1) + \frac{1}{2}n_j(n_j - 1) \tag{39}$$

となる. さて, ここで次の操作を考える.

(操作)

$C_i \Rightarrow n_i + 1$  個の点を持つ完全グラフ

$C_j \Rightarrow n_j - 1$  個の点を持つ完全グラフ

この置き換えにより,  $C_i + C_j$  の点数は不変であるが, 辺数  $\mathcal{N}'_{ij}$  は

$$\mathcal{N}'_{ij} = \frac{1}{2}n_i(n_i + 1) + \frac{1}{2}(n_j - 1)(n_j - 2) \tag{40}$$

のように変化する. 従って, この (操作) により, 辺の数は

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{N}_{ij} &= \mathcal{N}'_{ij} - \mathcal{N}_{ij} \\ &= \frac{1}{2}n_i(n_i + 1) + \frac{1}{2}(n_j - 1)(n_j - 2) - \left\{ \frac{1}{2}n_i(n_i - 1) + \frac{1}{2}n_j(n_j - 1) \right\} = n_i - n_j + 1 > 0 \end{aligned} \tag{41}$$

だけ増加する.

この議論を進めると, 結局, 成分数が  $k$  であるグラフで最も辺数が多いグラフ  $G$  は点の数が  $n - (k - 1) = n - k + 1$  個の完全グラフと  $k - 1$  個の孤立点 (空グラフ) からなるグラフであると結論付けられるので, 辺数  $m$  の上限は不等式:

$$m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1) \tag{42}$$

を満たすことがわかる (証明終わり).

例題 4.2

連結グラフにおいて、点  $v$  から  $w$  への距離  $d(v, w)$  は  $v$  から  $w$  への最短路の長さである。このとき、以下の問い (1)(2) に答えよ。

(1)  $d(v, w) \geq 2$  ならば

$$d(v, z) + d(z, w) = d(v, w) \tag{43}$$

なる点  $z$  が存在することを示せ。

(2) ピーターソン・グラフ (例えば教科書 p. 23 図 3.4 参照) において、任意の異なる 2 点  $v$  と  $w$  に対して  $d(v, w) = 1$  または  $d(v, w) = 2$  であることを示せ。

(解答例)

(1) 図 60 のような状況を考える。点  $v$  から  $w$  への最短路を  $C$  とする。  $C$  の全長は  $d(v, w)$  である。この経

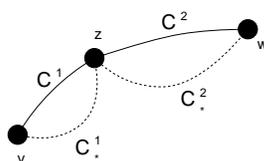


図 60:  $v \rightarrow z \rightarrow w$  の経路  $C = C^1 + C^2$  は  $v$  から  $w$  への最短路であり、その長さは  $d(v, w)$  で与えられる。

路  $C$  上に任意の点  $z$  をとり、この点  $z$  を中継点として経路  $C$  を 2 つの部分に分けて、部分路  $v \rightarrow z$  を  $C^1$ 、部分路  $z \rightarrow w$  を  $C^2$  とする。

この点  $z$  に対し、 $C^1$  は  $v$  と  $z$  を結ぶ全ての経路のうちで最短路である。なぜならば、もし  $v$  と  $z$  を結ぶ別の経路の中で  $C^1$  よりも短いものが存在するとすれば、その経路  $C_*^1$  と  $C^2$  を合わせた新しい経路  $C_*^1 + C^2$  が  $v$  と  $w$  を結ぶ全ての経路の中で最短となり、仮定に反する。従って、経路  $C^1$  が点  $v$  と  $z$  を結ぶ全ての経路の中で最短であり、 $C^1$  の全長が  $d(v, z)$  である。

次に、 $z$  と  $w$  を結ぶ経路の中で最短のものであるが、これが  $C^2$  であることは明らかである。なぜならば、この経路と別な経路  $C_*^2$  が存在するとすれば、 $C^1$  と  $C_*^2$  を足し合わせた経路  $C^1 + C_*^2$  が  $v$  と  $w$  を結ぶ全経路の中で最短となり、仮定に反する。従って、 $C^2$  が  $z$  と  $w$  を結ぶ全経路のうちで最短であり、その全長は  $d(z, w)$  である。従って、考えるグラフは連結であるから、経路  $C$  上に中継点  $z$  をいつでも任意にとることができ、この点  $z$  に対して

$$d(v, z) + d(z, w) = d(v, w) \tag{44}$$

が成り立つ。

(2) 図 61 のように、ピーターソン・グラフの各点に番号を付ける。ピーターソン・グラフの対称性から、点 1, 6 をスタート地点に選んだ場合の各他点への最短路を考えれば十分である (括弧内は長さ  $d$  を与える経路)。

$$\begin{aligned} d(1,2) &= 1 (1 \rightarrow 2), & d(1,3) &= 2 (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3), & d(1,4) &= 2 (1 \rightarrow 5 \rightarrow 4) \\ d(1,5) &= 1 (1 \rightarrow 5), & d(1,6) &= 1 (1 \rightarrow 6), & d(1,7) &= 2 (1 \rightarrow 2 \rightarrow 7), \\ d(1,8) &= 2 (1 \rightarrow 6 \rightarrow 8), & d(1,9) &= 2 (1 \rightarrow 6 \rightarrow 9), & d(1,10) &= 2 (1 \rightarrow 5 \rightarrow 10) \end{aligned}$$

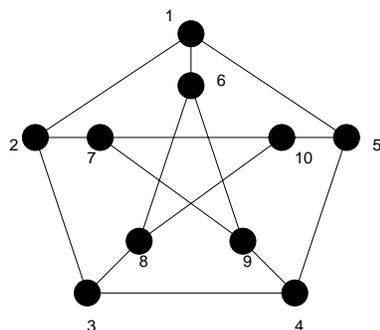


図 61: ピータースン・グラフ

$$\begin{aligned}
 d(6,1) &= 1 (6 \rightarrow 1), & d(6,2) &= 2 (6 \rightarrow 1 \rightarrow 2), & d(6,3) &= 2 (6 \rightarrow 8 \rightarrow 3) \\
 d(6,4) &= 2 (6 \rightarrow 9 \rightarrow 4), & d(6,5) &= 2 (6 \rightarrow 1 \rightarrow 5), & d(6,7) &= 2 (6 \rightarrow 9 \rightarrow 7) \\
 d(6,8) &= 1 (6 \rightarrow 8), & d(6,9) &= 1 (6 \rightarrow 9), & d(6,10) &= 2 (6 \rightarrow 8 \rightarrow 10)
 \end{aligned}$$

以上より、ピータースン・グラフの任意の2点  $v, w$  に対して  $d(v, w) = 1$  または  $d(v, w) = 2$  であることが示せた。

## 5.2 非連結化集合と分離集合

ある連結グラフを「どの程度つながったグラフであるか」という観点から調べる際、「そのグラフから何本の辺を取り去ったら非連結グラフになるか?」「そのグラフから何個の点を取り去ったら非連結グラフになるか?」という指標を用いることが多い。前者を非連結化集合 (disconnecting set), 後者を分離集合 (separating set) と呼ぶ。ここではそれぞれを例を取りあえて見てゆくことにしよう。

### 5.2.1 非連結化集合

非連結化集合：それを除去するとグラフが非連結となる辺の集合。

カットセット：そのどのような真部分集合も非連結化集合でない、非連結化集合<sup>1</sup>。図 62 の非連結化集合  $\{e_1, e_6, e_7, e_8\}$  はカットセットでもある。

辺連結度 (edge-connectivity)  $\lambda(G)$ ：連結グラフ  $G$  の最小なカットセットの大きさ。図のグラフでは  $\lambda(G) = 2$  である。

$\lambda(G) \geq k$  のとき、グラフ  $G$  は  $k$ -辺連結であるという。

### 5.2.2 分離集合

分離集合：それを除去するとグラフが非連結となる点の集合 (辺を除去するときにはその接続辺も除去することに注意)。

<sup>1</sup> 「それを除去するとグラフの成分数が増える辺の集合」として定義し直せば、「非連結化集合」、「カットセット」はそれぞれ非連結グラフにも適用できる概念であることに注意しよう。

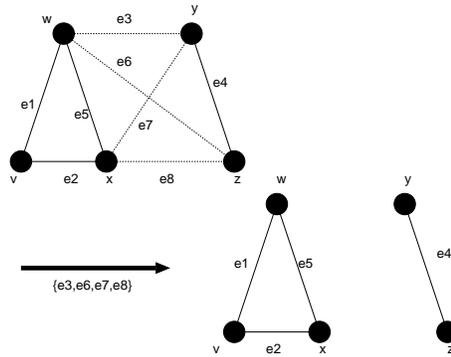


図 62: カットセット  $\{e_3, e_6, e_7, e_8\}$  を選ぶと図のような非連結グラフが得られる.

カット点：1 個の点だけからなる分離集合.

連結度  $\kappa(G)$ <sup>2</sup>：グラフ  $G$  の最小な分離集合の大きさ.

$\kappa(G) \geq k$  のとき、グラフ  $G$  は  $k$ -連結であるという.

(注)

連結度  $\kappa(G)$  とは通信系のネットワーク (インターネットを思い出して頂ければよいと思います) を構築する際に便利な量である. つまり、グラフの各点を「交換局」あるいは「サーバ」であるとすれば、そのグラフ (ネットワーク)  $G$  の連結度が  $\kappa(G)$  であるということは、 $\kappa(G)$  未満の交換局 (サーバ) が故障しても、残りの交換局 (サーバ) の連結性が保障されていることになる.

⇒ 連結度  $\kappa(G)$  はネットワークの信頼度を反映し、 $\kappa(G)$  が大きなネットワークほど、その信頼性が高い.

一方、前出の「辺連結度」 $\lambda(G)$  をこのネットワークに当てはめて考えれば、 $\lambda(G)$  未満の伝送路が故障しても、交換局 (サーバ) の連結性が保障されていることになるので、 $\lambda(G)$  も一つのネットワークの信頼度の尺度として用いることができる.

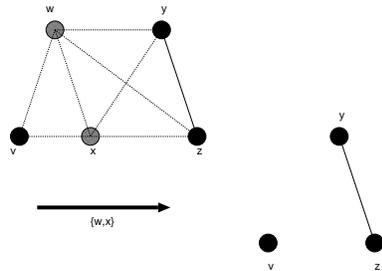


図 63: 分離集合  $\{w, x\}$  によってできる非連結グラフ.

<sup>2</sup> この連結度は、前出の辺連結度と区別するために「点連結度」と呼ばれることもある.

例題 4.3

図 64 に与えられたグラフ  $G$  について以下の問い (1) ~ (5) に答えよ.

- (1)  $G$  の非連結化集合を一つ挙げよ.
- (2)  $G$  のカットセットを一つ挙げよ.
- (3)  $G$  の橋を挙げよ.
- (4)  $G$  の分離集合を一つ挙げよ.
- (5)  $G$  のカット点を一つ挙げよ.

(解答例)

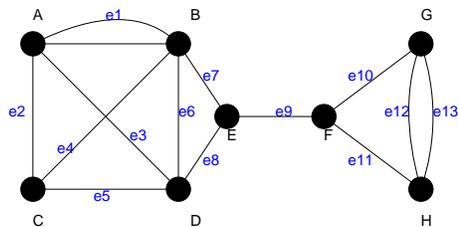


図 64: 問題文に与えられたグラフ  $G$ .

- (1) グラフ  $G$  の非連結化集合は例えば,  $\{e_7, e_8\}$ ,  $\{e_{10}, e_{11}\}$ ,  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  などである.
- (2) グラフ  $G$  のカットセットは例えば,  $\{e_7, e_8\}$ ,  $\{e_{10}, e_{11}\}$ ,  $\{e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13}\}$  などである.  
(カットセット)  $\subseteq$  (非連結化集合) であることに注意.
- (3) グラフ  $G$  の橋は  $e_9$  である.
- (4) グラフ  $G$  の分離集合は  $\{B, D, E\}$  などである.
- (5) グラフ  $G$  のカット点は  $E, F$  である.

例題 4.4

前回の講義では隣接行列, 接続行列と呼ばれる行列を用いてグラフを表現する方法を学んだが, これら 2 つの行列の他にもグラフを表現するための行列は存在し, それらを用いることにより, より有効にグラフについての考察を進めることができる. ここでは, そのような行列であるタイセット行列, 及び, カットセット行列についての演習問題を解くことにより, これら行列に関する理解を深めることにしよう.

無向グラフ  $G$  のタイセット行列 (tie-set matrix)  $B$  とは, 各行が  $G$  の閉路  $L_i$  に, 各列  $j$  が枝  $j \in E(G)$  に対応し, 行列要素  $b_{ij}$  が

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & (L_i \text{ が枝 } j \text{ を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (45)$$

と表される行列である.

一方, グラフ  $G$  のカットセット行列 (cut-set matrix)  $C$  とは, 各行  $i$  が  $G$  のカットセット  $C_i$  に, 各列  $j$  が枝  $j \in E(G)$  に対応し, 各行列要素がそれぞれ

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & (C_i \text{ が枝 } j \text{ を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (46)$$

で与えられる. 例えば, 図 65 のグラフ  $G$  においては, タイセット行列, カットセット行列はそれぞれ

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (47)$$

となる. これを踏まえて以下の問いに答えよ.

- (1) 図 66 のグラフ  $G$  の閉路を全て求めよ (それぞれに  $L_1, L_2, \dots$  のようなラベルを付けよ).
- (2) グラフ  $G$  のカットセットを全て求めよ (それぞれに  $C_1, C_2, \dots$  のようなラベルを付けよ).
- (3) グラフ  $G$  のタイセット行列  $B$  を求めよ.
- (4) グラフ  $G$  のカットセット行列  $C$  を求めよ.
- (3) タイセット行列  $B$  とカットセット行列  $C$  の間に次の関係式が成り立つことを示せ.

$$BC^T \equiv \mathbf{0} \pmod{2} \quad (48)$$

ただし,  $C^T$  は行列  $C$  の転置行列を表し,  $\mathbf{0}$  は全ての成分がゼロである行列として定義される.

(解答例)

- (1) (2) 図 67 を参照のこと.
- (3) 閉路行列の列の増える方向に  $L_1, L_2, L_3$ , 行の増える方向に辺の番号  $1, 2, \dots, 5$  のようにラベル付けす

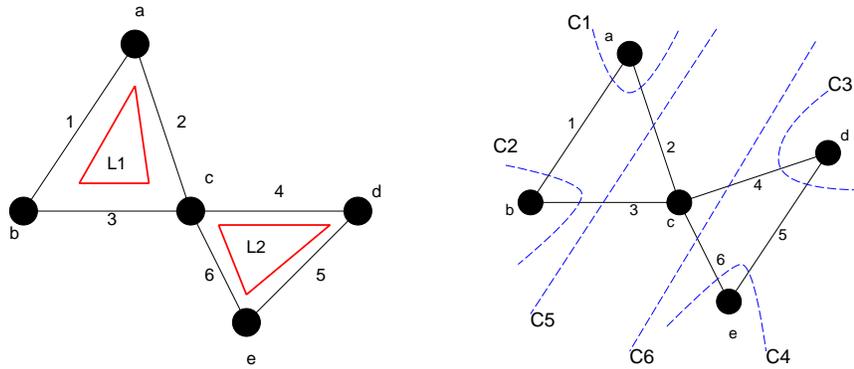


図 65: グラフ G の閉路 (左) とカットセット (右).

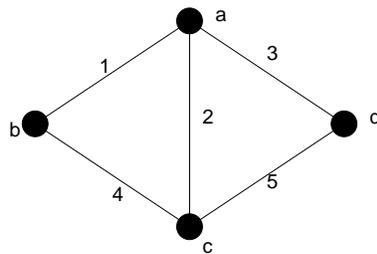


図 66: 問題のグラフ G.

るように決めると行列  $B$  は

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{49}$$

となる.

- (4) カットセット行列の列の増える方向にカットセットの番号  $C_1, C_2, \dots, C_6$ , 行の増える方向に辺の番号  $1, 2, \dots, 6$  を割り振ることに決めれば, 行列  $C$  は

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{50}$$

となる.

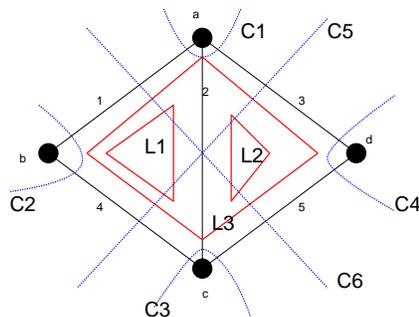


図 67: 問題のグラフ及び, 閉路  $L_1, L_2, L_3$ , そして, カットセット  $C_1, C_2, \dots, C_6$ .

(5) 両行列の積  $BC^T$  を作ると

$$\begin{aligned}
 BC^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 & 1+1 & 0 & 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 0 & 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \pmod{2}
 \end{aligned}$$

となり, 題意が満たされる.

**例題 4.5**

1. 完全グラフ  $K_3$  に関し, その各点がサーバに対応し,  $K_3$  のつながり方をした「ネットワーク」をなしているものとする. このネットワークの各辺が確率  $q$  で断線する場合, グラフが依然として連結グラフである場合に限り, このネットワークは正常に機能することがわかっている. このとき, このネットワークが正常である確率 (ネットワークの信頼度)  $R$  を  $p$  の関数として求め, 図示せよ.
2. 今回の講義で学んだ「閉路」「カットセット」に関して以下の問いに答えよ.
  - (1) グラフの中に辺  $e$  を含む閉路が 2 つある場合,  $e$  を含まない閉路があることを例を挙げて示せ.
  - (2) グラフの中に辺  $e$  を含むカットセットが 2 つある場合,  $e$  を含まないカットセットがあることを例を挙げて示せ.

**(解答例)**

1. 完全グラフ及び, 辺が 1 本断線したグラフ (3 種類), 辺が 2 本断線したグラフ (3 種類), 辺が全て断線したグラフ (1 種類) のそれぞれのグラフを図 68 に示す. ここで注意すべきなのは, 各点はネットワークのサーバに対応するので, このような問題においては, グラフはラベル付きのものを考えるべきである. 従って, この図からネットワークが正常に動作するのは完全グラフの場合, 及び, 辺が 1 本だけ断線する場合に限り, それぞれの確率は  $(1 - q)^3, 3q(1 - q)^2$  で与えられるので, ネットワークの信頼度

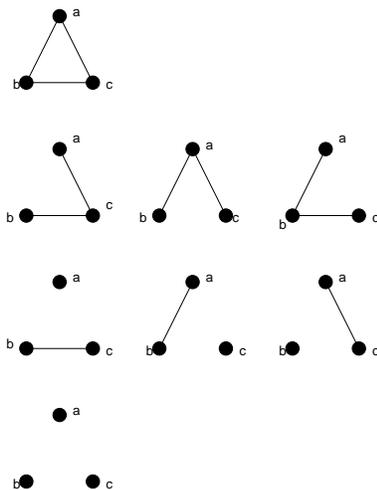


図 68: ここで考えられるネットワークの状態. 上から, 断線ゼロ, 1 本断線, 2 本断線, 全部断線のグラフ. ネットワークとして正常であるのは, 断線ゼロ, 及び, 1 本断線の場合のみ.

$R$  はこれら両者の和で与えられる. 従って,  $q$  の関数としての  $R$  は

$$R(q) = (1 - q)^3 + 3q(1 - q)^2 \tag{51}$$

となる. これを図 69 に描く.

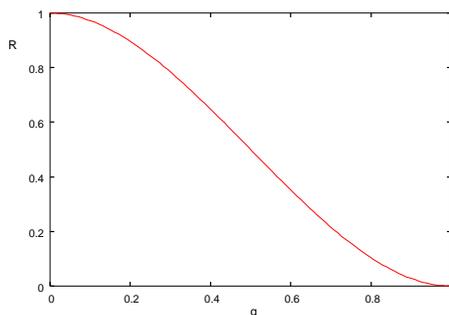


図 69: ネットワークの信頼度  $R$  の各辺の断線確率  $q$  依存性.

2. (1)(2) に該当するケースをそれぞれ図 70, 及び, 図 71 に描く. 図 70 に示したように, 辺  $e$  を含む閉路として  $L_1, L_2$  を選ぶと,  $e$  を含まない閉路として, いつでも  $L_1, L_2$  の和から  $e$  を削除したものを第 3 の閉路  $L_3$  としてとることができる.

図 71 のように辺  $e_1, e_2$  が三角形をなしている場合には, カットセット  $\{e, e_1\}$  によって, グラフ  $G$  は部分グラフ  $G_1$ , 及び,  $G_2 + G_3$  に分離し, カットセット  $\{e, e_2\}$  によって部分グラフ  $G_1 + G_2$ , 及び,  $G_3$  に分離するが,  $e$  を含まないカットセットとして  $\{e_1, e_2\}$  をいつでもとることができて, この場合にはグラフ  $G$  が部分グラフ  $G_1 + G_3$ , 及び,  $G_2$  に分離する.

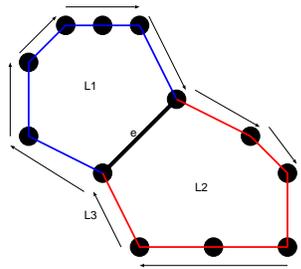


図 70: 辺  $e$  を含む閉路としては,  $L_1, L_2$  があるが,  $e$  を含まない閉路として, いつでも  $L_1, L_2$  の和から  $e$  を削除したものを第 3 の閉路  $L_3$  としてとることができる.

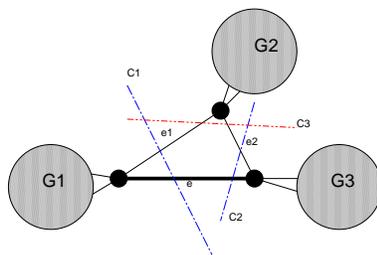


図 71: 図のように辺  $e$ , 及び, 辺  $e_1, e_2$  が三角形をなしている場合には, カットセット  $\{e, e_1\}, \{e, e_2\}$  以外に必ず,  $\{e_1, e_2\}$  を選ぶことができる.

**演習問題 4**

グラフ  $G_1$  と  $G_2$  の結び:  $G = G_1 + G_2$  とは点集合:  $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ , および, 辺集合:  $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1) \text{ かつ } v \in V(G_2)\}$  を持つグラフのことである. このとき以下の問いに答えよ.

- (1) 完全グラフ  $K_2$  と  $K_3$  の結びを図示せよ.
- (2) 点集合が  $n$  個の部分集合  $V_i (i = 1, \dots, n)$  に分割され,  $G$  のどの辺もその端点を異なる部分集合内にあるようにできるものを  $n$  部グラフと呼ぶが, この  $n$  部グラフが特に, 分割の任意の部分集合内にある各点が, その他の部分集合内にある全ての点と結びつけられるとき, そのグラフを完全  $n$  部グラフと呼び,  $K_{p_1, p_2, \dots, p_n} (p_i = |V_i|)$  と書く. このとき,

$$K_{p_1, p_2, \dots, p_n} = \bar{K}_{p_1} + \bar{K}_{p_2} + \dots + \bar{K}_{p_n} \tag{52}$$

が成り立つことを示せ. ただし,  $\bar{G}$  はグラフ  $G$  の補グラフを表すものとする. ( わかりにくければ, 実際に  $K_{2,2,2}$  の場合を図示してみよ.)

連絡：次回 5 月 1 日は休講とします. 今回のレポート締め切りは 5 月 8 日の講義開始時までとします.