



Title	2006年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2006
Doc URL	<a href="http://hdl.handle.net/2115/15412">http://hdl.handle.net/2115/15412</a>
Rights(URL)	<a href="http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/">http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/</a>
Type	learningobject
Note(URL)	<a href="http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html">http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html</a> ; <a href="http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/">http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/</a>
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory06_5.pdf (第5回講義ノート)



[Instructions for use](#)

# グラフ理論 配布資料 #5

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

URL : [http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j\\_inoue/](http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/)

平成 18 年 5 月 8 日

## 目次

6	オイラー・グラフとハミルトン・グラフ	54
6.1	オイラー・グラフ	54
6.2	ハミルトン・グラフ	57

### 演習問題 4 の解答例

- (1)  $K_2, K_3$  はそれぞれ点数が 2,3 の完全グラフであり, 「線分」と「三角形」がこれに相当する. ここで問題となっているこの両者の「結び」 $K_2 + K_3$  は, 問題文に定義されているように  $K_2, K_3$  の辺はそのまま残され, かつ,  $K_2$  内の点は  $K_3$  内の点と結ぶことによってできる辺から成るグラフであるから, 図 72 のようなグラフが問題の結びである.

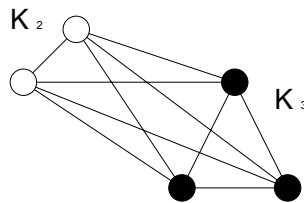


図 72:  $K_2$  と  $K_3$  の結び.

- (2) はじめに, 完全三部グラフ  $K_{2,2,2}$  に対して関係式は

$$K_{2,2,2} = \bar{K}_2 + \bar{K}_2 + \bar{K}_2 \quad (53)$$

と書けるが, この両辺の意味するグラフを具体的に描き, 両者が同形であるか否かを確認してみよう. はじめに左辺は完全三部グラフの定義より, 図 73(左) のように A,B,C グループにそれぞれ 2 点ずつ属する点のそれぞれを自分のグループ以外に属する点の全てと結びつけることによりできる. 一方の右辺の 3 つの  $\bar{K}_2$  は, 完全グラフが全ての点どうしを結んでできるグラフであったことを考えると, これは 2 個の孤立点からなる「空グラフ」ということになる. 従って, この 3 つのグラフの各々に対して, 辺は存在しないので, この 3 つの空グラフを A,B,C のように名づけ, 各々の空グラフの点を  $u_A$  等と呼ぶことに約束すると (つまり,  $u_A \in V(A)$  等), (53) 式の右辺は辺集合:

$$E(\bar{K}_2 + \bar{K}_2 + \bar{K}_2) = \{u_A u_B | u_A \in V(A) \text{ かつ } u_B \in V(B)\}$$

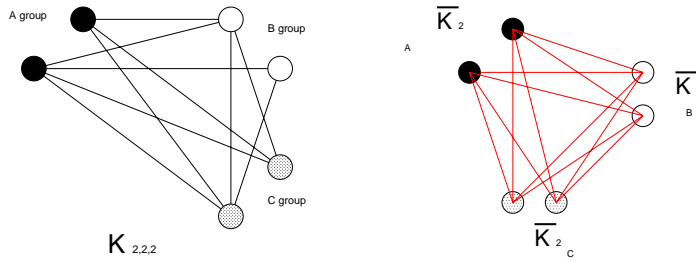


図 73:  $K_{2,2,2}$ (左) と  $\bar{K}_2 + \bar{K}_2 + \bar{K}_2$ (右).

$$\begin{aligned} & \cup \{u_B u_C \mid u_B \in V(B) \text{ かつ } u_C \in V(C)\} \\ & \cup \{u_C u_A \mid u_C \in V(C) \text{ かつ } u_A \in V(A)\} \end{aligned} \tag{54}$$

となり, これを図示すると図 73(右) のように,  $K_{2,2,2}$  と同形なグラフが出来上がる.

以上の議論は直ちに一般の完全  $n$  部グラフに拡張することができる.  $K_{p_i}$  の補グラフ  $\bar{K}_{p_i}$  は  $p_i$  個の孤立点からなる空グラフであり, この点集合を  $V(i)$  とすれば, 結び:  $\bar{K}_{p_1} + \dots + \bar{K}_{p_n}$  は  $n$  個のグループの中から任意の異なる 2 グループ  $V(i), V(j)$  に属する点どうしを結んでできる全ての辺集合であるから, これはまさに完全  $n$  部グラフ  $K_{p_1, \dots, p_n}$  の描き方そのものである. 従って, 題意の関係式は成立する.

## 6 オイラー・グラフとハミルトン・グラフ

ここでは情報工学的に応用される場面も多いオイラー・グラフとハミルトン・グラフについて学ぶ.

### 6.1 オイラー・グラフ

オイラー・グラフ (Eulerian graph) : 全ての辺を含む閉じた小道がある連結グラフ.

半オイラー・グラフ (semi-Eulerian graph) : 全ての辺を含む小道がある連結グラフ (閉じていない).

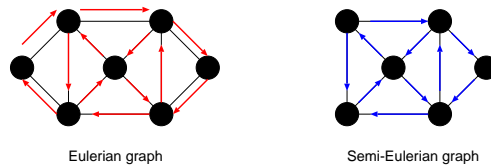


図 74: オイラー・グラフ (左) と半オイラー・グラフ (右) の一例.

#### 定理 6.2

連結グラフ  $G$  がオイラー・グラフであるための必要十分条件は  $G$  の点の次数が全て偶数であることである.

(証明)

⇒ (必要性)

$G$  のオイラー小道  $P$  がある一点を通過する毎に 2 を加えていくと、全ての辺はちょうど 1 回ずつ含まれるので、各点でこの和はその点の次数に等しく、しかも、それは偶数である。

⇐ (十分性)

各点の次数は偶数であり、かつ、連結であるとする、教科書 p. 43 **補題 6.1** より、この連結グラフ  $G$  には閉路  $C$  がある。従って、このもとでオイラー・グラフとして  $G$  が構成できればよい。つまり、このもとで具体的なオイラー・グラフの構成法を提示すれば証明は終了である。

さて、自明であるが、閉路  $C$  に  $G$  の全ての点が含まれていれば、その閉路そのものがオイラー・グラフとなるので証明は終了する。従って、以下ではこれ以外のケースに対して、オイラー・グラフの構成法を提示する。

まず、図 75 のように  $G$  から閉路  $C$  の辺を除去してできるグラフ (一般には非連結であるが、オイラー小道がある) を  $H$  とする。  $G$  の連結性より、グラフ  $H$  の各成分は  $C$  と少なくとも 1 点を共有していることに注意しよう。従って、このような状況下で、  $C$  上の任意の一点からスタートし、  $C$  の辺をたどる。そして、  $H$

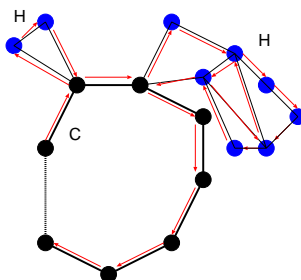


図 75: 考える連結グラフ  $G$  は閉路  $C$  とそれぞれオイラー小道を含む成分  $H$  からなる。  $C$  自身はオイラー・グラフであるから、奇数次の点を含まない。従って、  $H$  も奇数次の点を含まない。

の孤立点でない点に出くわすたびに、その点を含む  $H$  の成分のオイラー小道 ( $C$  自身はオイラー・グラフであるから、奇数次の点を含まず、従って、各成分である  $H$  も奇数次の点を含まない) をたどり、その点に戻り、また  $C$  の辺をたどって行く … という操作を繰り返し、  $C$  上の出発点に戻るという作業を行うことにより、オイラー小道が得られ、たどって来た道をつなげることにより、求めるべきオイラー・グラフを描くことができる (証明終わり)。

次にオイラー・グラフに関する例題を一つ見ておこう。

**例題 6.1**

オイラー・グラフに関して以下の問いに答えよ。

- (1) どんな  $n$  に対して完全グラフ  $K_n$  はオイラー・グラフになるか？
- (2) 完全二部グラフ  $K_{s,t}$  のどのような場合がオイラー・グラフとなるか？
- (3) どのような  $n$  に対して車輪  $W_n$  はオイラー・グラフとなるか？

(解答例)

- (1) 完全グラフ  $K_n$  の任意の 1 点の次数は  $n - 1$  であるから、  $n - 1 =$  偶数の場合に限り、  $K_n$  はオイラー・グラフとなる。従って、例えば、  $K_5$  はオイラー・グラフであるが、  $K_4$  はオイラー・グラフではない。
- (2) 図 76 のように、  $s \geq 2$ 、及び、  $t$  が偶数であれば、  $a \rightarrow 1 \rightarrow b \rightarrow 2 \rightarrow a \rightarrow 3 \rightarrow b \rightarrow 4 \rightarrow a \rightarrow 5 \rightarrow b$  のような経路で、  $a, b$  を交互に経由したオイラー小道を作ることは常に可能である (図の例では  $t$  が奇数

なので、できるグラフは半オイラーであり、オイラーではない。  $t = 6$  の場合にはオイラーとなることを各自が確認してみることに。従って、 $s \geq 2$  のとき、完全二部グラフ  $K_{s,t}$  はオイラー・グラフとなる。

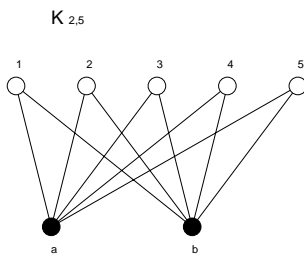


図 76: 完全二部グラフ  $K_{2,5}$ . オイラー小道が存在し、オイラー・グラフである。

- (3) 車輪は全ての  $n$  に対して、 $C_{n-1}$  と 1 点との結合部の次数は 3(奇数) であるから、オイラー・グラフとはならない。

さて、**定理 6.2** により、我々は与えられたグラフの各点の次数を調べることで、そのグラフがオイラー・グラフか否かを調べることができるようになった。従って、以下のような問題に対し、我々は直ちに答えることができる。

問題

7 つの催し会場 a,b,c,d,e,f,g の主催者がその順路を決める際に、一筆書きに基づく道順を採用しようとしている。各会場から出ている道の本数は以下の表の通りである。

会場	a	b	c	d	e	f	g
道数	4	4	4	4	4	4	2

この場合、主催者の望む「一筆書き順路」は作成可能であるか？

この問題の答えはもちろん、「可能」である(全ての点の次数が偶数であるから)。

しかし、実際にこのグラフの中からオイラー小道を探すと、グラフに含まれる点の数が多くなるに従って難しくなることはわかるであろう。どのようにすれば系統的にオイラー小道を作ることができるだろうか？

この問いに対する答えとして、Fleury (フラーリー) のアルゴリズムが知られている。この証明は教科書 p. 45 を読んで頂くことにして、ここでは、アルゴリズムを挙げておくので、各自、上の催し会場の順路作成に用いてみることに (⇒ 例題 6.3)。

**Fleury のアルゴリズム**

任意の点から出発し、次の規則に従う限り自由に辺をたどればオイラー小道が得られる。

- (1) たどった辺は除去し、孤立点が生じた場合にはそれも除去する。
- (2) どの段階でも、他にたどる辺がない場合以外には橋をたどるな。

**6.2 ハミルトン・グラフ**

ハミルトン・グラフ (Hamiltonian graph) : ハミルトン閉路によりなるグラフ。

ハミルトン閉路 (Hamiltonian cycle) : グラフ  $G$  の各点をちょうど一度だけ通る閉じた小道。

半ハミルトン・グラフ (semi-Hamiltonian graph) : 全ての点を通る道があるグラフ (閉じてはいない)。

与えられたグラフがハミルトン・グラフであるかどうかに関する判定には次の Ore (オーレ) の定理が役立つ場合が多い。

**定理 7.1 (Ore (オーレ) の定理)**

単純グラフ  $G$  には  $n(\geq 3)$  個の点があるとする。隣接していない任意の 2 点  $v, w$  に関して

$$\deg(v) + \deg(w) \geq n \quad (55)$$

が成立するとき  $G$  はハミルトン・グラフである。

(証明)

背理法で示す。

「グラフ  $G$  はハミルトニアン・グラフではないが (55) を満たす」と仮定し、この矛盾を導く。

$G$  は (ぎりぎり) ハミルトン・グラフではないとすると、 $G$  には全ての点を含む道：

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \cdots \rightarrow v_n$$

がある。しかし、ここで、 $v_1$  と  $v_n$  が隣接しているとしてしまうと、グラフ  $G$  がハミルトン・グラフになってしまうので、 $v_1$  と  $v_n$  は隣接していないものとする。

従って、 $v_1, v_n$  に関する不等式 (55) が成立し (背理法の仮定)。

$$\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$$

が成り立つ。よって、 $v_1, v_n$  の次数は 2 以上なので ( $n = 3$  の場合、 $\deg(v_1) = 2, \deg(v_n) = 1$  はどうなのか、と思う人がいるかもしれないが、このときの 3 点の配列を考えると、これはあたらなことがわかるであろう)、 $v_i$  は  $v_1$  に隣接し、 $v_{i-1}$  は  $v_n$  に隣接するような 2 点  $v_i, v_{i-1}$  が存在する (図 77 参照)。このとき、単純グラフ  $G$  には

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v_n \rightarrow v_i \rightarrow v_1$$

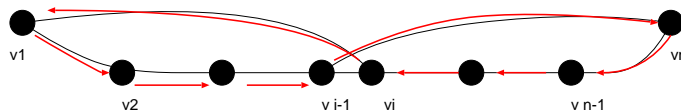


図 77: Ore の定理の十分性の証明で用いるグラフ.

なる閉路が存在することになり、矛盾。(証明終わり)<sup>1</sup>.

最後に Ore の定理に関する次の例題を見ておくことにしよう.

**例題 6.2**

グラフ  $G$  には  $n$  個の点があり,  $(n-1)(n-2)/2 + 2$  本の辺があるとす. このとき, Ore の定理を用いて, このグラフ  $G$  はハミルトン・グラフであることを示せ.

(解答例)

辺の数が  $n-1$  本の完全グラフ  $K_{n-1}$  の辺の本数は  $(n-1)(n-2)/2$  本であり, ハミルトン・グラフが多重辺等を含まない単純グラフであることを考慮すると,  $G$  は  $K_{n-1}$  と 1 点  $v$  の合計  $n$  点からなり,  $v$  は  $K_{n-1}$  を構成する任意の 2 点  $w, x$  と図 78 のように結びついていると考えてよい. 従って, この場合の辺の数は

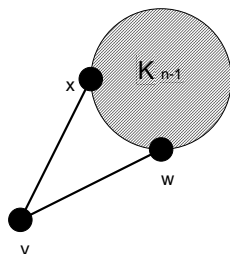


図 78: 完全グラフ  $K_{n-1}$  と点  $v$  が 2 点  $w, x$  で繋がっているグラフ  $G$ . 点の個数は  $n$ , 辺の本数は  $(n-1)(n-2)/2 + 2$  である.

$(n-1)(n-2)/2 + 2$  本であり, 問題文に条件として与えられた辺の本数となる.

さて,  $K_n$  を構成する任意の 2 点は必ず隣接するので, 考えられる可能性としては, 任意の隣接しない 2 点  $u_1$  が  $K_{n-1}$  を構成する任意の 1 点  $u_1 (\neq w, x)$  と点  $v$  の場合であるが, このときには

$$\deg(u_1) + \deg(v) = n - 2 + 2 = n \tag{56}$$

となり, Ore の定理を等式ぎりぎり満たすことがわかる.

また, 上記以外にも例えば  $K_{n-1}$  を構成する任意の辺を削除し, この辺で点  $v$  と  $K_{n-1}$  の任意の一点を結ぶ場合もありうるが, この場合には  $\deg(v) = 3$ , 辺を削除した点  $z$  の次数  $\deg(z) = n - 3$  であるから, 結局  $\deg(v) + \deg(z) = n$  となり, やはり Ore の定理を満たす. このような変換を繰り返しても, Ore の定理が破れることがないことは明らかなので結局, 題意, 即ち「 $n$  個の点および  $(n-1)(n-2)/2 + 2$  本の辺からなるグラフ  $G$  はハミルトン・グラフである」ことが示された.

<sup>1</sup> この定理はハミルトン・グラフであるための十分条件を与えていることに注意. 従って, 条件式 (55) を満たさないようなハミルトン・グラフも存在する  $\Rightarrow$  例題 6.3.

例題 6.3

1. 本講義ノート中に挙げた「催し会場の順路問題」において
  - (1) 各会場間の関係を表すグラフを描け.
  - (2) (1) で求めたオイラー・グラフにおいて, Fleury のアルゴリズムを用いることにより, オイラー小道を求めよ.
2. オイラー・グラフで, ある点  $v$  から出発する限りは, 同じ辺を 2 度と通らないようにして勝手な方向に辺をたどればオイラー小道が得られるとき, そのグラフは点  $v$  から任意周回可能であるという.
  - (1) 図 79(左) に与えたグラフは任意周回可能であることを示せ.
  - (2) オイラー・グラフではあるが, 任意周回可能ではないグラフの例を一つ挙げよ.
  - (3) 任意周回可能なグラフが展示会場の設計に向いている理由を述べよ.
3. 図 79(右) の Groetzsch グラフはハミルトンであることを示せ.

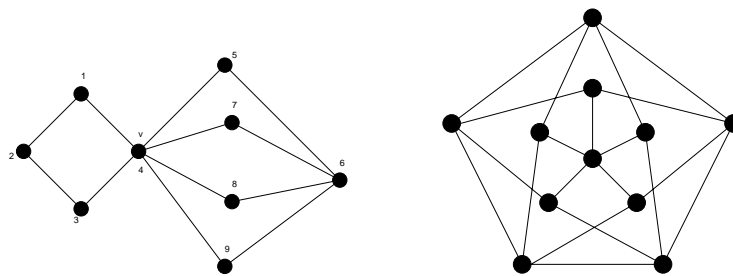


図 79: ここで任意周回可能であることを示すグラフ (左). 右図は Groetzsch グラフ.

(解答例)

1. 会場配置を連結グラフで表し, Fleury のアルゴリズムを用いることにより, 実際にオイラー小道を求めてみよう.
  - (1) 問題に与えられた表に従って  $a \sim g$  の会場を配置すると図 80(左) のようになる.

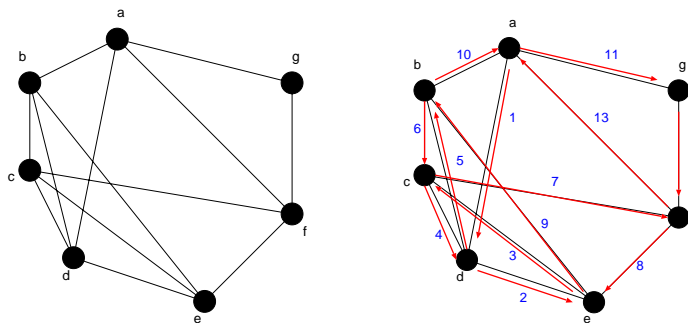


図 80: 各会場間の関係を表すグラフ (左) と求めるオイラー小道 (右).

- (2) Fleury のアルゴリズムを用いることにより, 望むべき巡回路が得られる. 図 80(右) に描いた経路がオイラー小道を与える.
- 2(1) 図 81 において, 点  $v = 4$  から出発したとして, 第一歩で  $v \rightarrow 1, v \rightarrow 3, v \rightarrow 5, v \rightarrow 7, v \rightarrow 8, v \rightarrow 9$



の異なる 6 通りのいずれを選ぶか …… 等々により，ことなる経路が得られる．少々面倒であるが，全

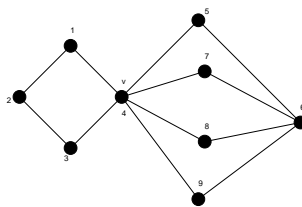


図 81: ここで任意周回可能性について考察するグラフ.

ての可能な経路を書き下してみると (例えば, 一番目の下線が引かれた番号に対応する経路を図示すると図 82 のようになる)

- 4123456748694 , 4123456749684, 4123456847694, 4123456849674  
 4123456947684 , 4123456948674, 4123476548694, 4123476549684  
 4123476845694 , 4123476849654, 4123476945684, 4123476948654  
 4123486547694 , 4123486549674, 4123486745694, 4123486749654  
 4123486945674 , 4123486947654, 4123496547684, 4123496548674  
 4123496745684 , 4123496748674, 4123496845674, 4123496847654

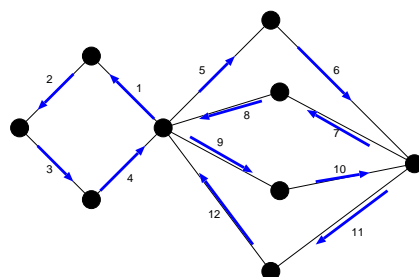


図 82: 下線が引かれた番号に対する具体的な経路.

- 4321456748694 , 4123456749684, 4321456847694, 4123456849674  
 4321456947684 , 4123456948674, 4321476548694, 4123476549684  
 4321476845694 , 4123476849654, 4321476945684, 4123476948654  
 4321486547694 , 4123486549674, 4321486745694, 4123486749654  
 4321486945674 , 4123486947654, 4321496547684, 4123496548674  
 4321496745684 , 4123496748674, 4321496845674, 4123496847654
- 4567486941234 , 4567486943214, 4567496841234, 4567496843124  
 4567412348694 , 4567412349684, 4567432148694, 4567432149684  
 4568476941234 , 4987476943214, 4568496741234, 4568496743214  
 4568412347694 , 4568412349674, 4568432147694, 4568432149674

4569476841234 , 4569476841234, 4569486741234, 4569486743214  
 4569412347684 , 4569412348674, 4569432147684, 4569432148674

4765486941234 , 4765486943214, 4765496841234, 4765496843124  
 4765412348694 , 4765412349684, 4765432148694, 4765432149684  
 4768456941234 , 4768456943214, 4768496541234, 4768496543214  
 4768412345694 , 4768412349654, 4768432145694, 4768432149654  
 4769456841234 , 4769456841234, 4769486541234, 4769486543214  
 4769412345684 , 4769412348654, 4769432145684, 4769432148654

4865476941234 , 4865476943214, 4865496741234, 4865496743124  
 4865412347694 , 4865412349674, 4865432147694, 4865432149674  
 4867456941234 , 4867456943214, 4867496541234, 4867496543214  
 4867412345694 , 4867412349654, 4867432145694, 4867432149654  
 4869456741234 , 4869456741234, 4869476541234, 4869476543214  
 4869412345674 , 4869412347654, 4869432145674, 4869432147654

4965476841234 , 4965476843214, 4965486741234, 4965486743124  
 4965412347684 , 4965412348674, 4965432147684, 4965432148674  
 4967456841234 , 4967456843214, 4967486541234, 4967486543214  
 4967412345684 , 4967412348654, 4967432145684, 4967432148654  
 4968456741234 , 4968456741234, 4968476541234, 4968476543214  
 4968412345674 , 4968412347654, 4968432145674, 4968432147654

以上、全部で 144 通りの経路 (オイラー小道) が可能であり、従って、このグラフは任意巡回可能なグラフである。

(2) 図 83 にその一例を与える。図 83 のグラフは各点の次数が偶数であり、定理 6.2 より、このグラフは

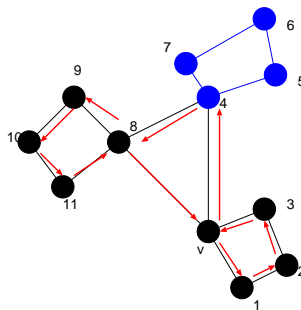


図 83: 任意巡回が不可能であるグラフの一例.

オイラー・グラフであり、確かにオイラー小道、例えば、 $v \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow v \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 8 \rightarrow v$ .

しかし、例えば図 83 の矢印に示した通りの進路を選ぶと、図の点 8, 9, 10, 11 からなる「孤立した」成分が現れてしまう。従って、点 8 での進路の選択によっては、オイラー小道ができなくなる。この意味で、図 83 に与えたグラフは任意巡回不可能なグラフであると言える。

さて、それでは、任意のオイラー・グラフが与えられたとして、そのグラフが任意巡回可能か、あるいは、不可能であるか、という判定は一般にグラフのどのような特徴によって決まるのであろうか？ 図 84 に図 83 とは異なる任意巡回不可能なグラフを 2 点挙げた。これらのグラフを考察すると、い

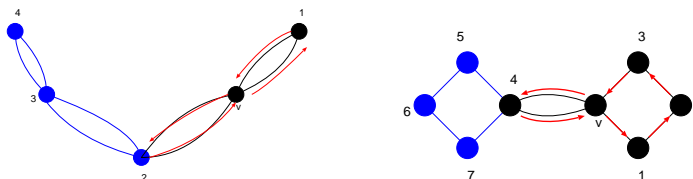


図 84: 上にあげたいずれのグラフも任意巡回が不可能である。

ずれも次数が 4 以上の点が 2 点以上含まれることがわかる。もし、次数 4 以上の点が 2 点以上含まれるのであれば、図 84 の 2(左図) や 4 のように、この点において、孤立した成分を生成させてしまうような経路の取り方は常に可能である。従って、任意巡回を可能にするためには、次数 4 以上の点を二つ以上含まないようなオイラー・グラフを用いることが肝要である。

(3) 展示場では、客が各展示場から任意に次の展示場を選び、しかも、各展示場を一回ずつまわって、最初の展示場に戻ってこれることが望ましい。従って、この性質を満たす任意巡回可能グラフの各頂点に展示場を設置することが、適切な展示場の設計である。

3. 図 85 に答えを載せる。この図 85 は Ore の定理によるハミルトンであるための十分性は満たしてはいないが (例えば  $\deg(7) + \deg(10) = 3 + 4 = 7 < 11$  で満たさない)、図 85 にハミルトン閉路を示したように確かにハミルトンである。

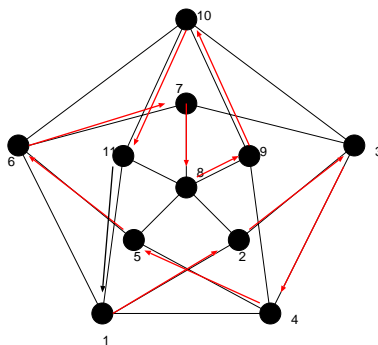


図 85: 求めるべきハミルトン閉路。

例題 6.4

1. 二部グラフ  $G$  に奇数個の点がある場合,  $G$  はハミルトン・グラフでないことを示せ.
2. 図 86 にあげたグラフはハミルトン・グラフでないことを示せ.

(解答例)

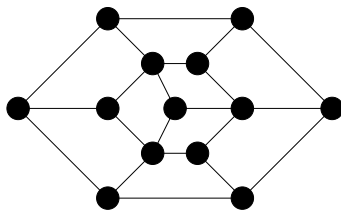


図 86: ここでそのハミルトン性を考えるグラフ.

1. まずは点数  $n = 4$  の場合の二部グラフの例を図 87(左) に載せるが, これは明らかにハミルトン閉路を含むのでハミルトン・グラフである. 次に  $n = 6$  の場合の二部グラフの一例とその同形なグラフを図

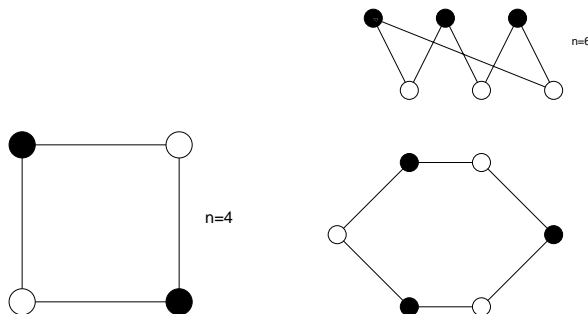


図 87:  $n = 4$  の場合の二部グラフの例 (左). 右図は  $n = 6$  の場合の二部グラフの一例 (上) とそれと同形なグラフ (下). 閉路が存在する.

87(右) に載せるが, これも明らかにハミルトン閉路を含むのでハミルトン・グラフである. これら 2 つの例からわかるように, 二部グラフを白点と黒点が交互に来るように閉路グラフとして描く場合には必ずハミルトン・グラフになる.

一方,  $n$  が奇数の場合には図 88 に  $n = 7$  の例で示すように, このような白, 黒点の配置は不可能であり, 必ず閉路上には黒黒, あるいは白白が並んでしまう. 従って, 二部グラフはその点数が奇数の場合にはハミルトン・グラフにはならない.

2. まず, 問題に与えられたグラフの中央の点を除去したグラフを考えると, これにはハミルトン閉路が存在する (図 89 参照). 以下の議論ではこれを基準として考える. また, 話の見通しを良くするため, この閉路と同形なグラフを考えることにしよう (図 89 の下図). 問題のグラフはこのグラフに 1 点を加えて, その点 (13 としよう) と図 89(左) の点 2,4,6 とを結んでできるので, それを具体的に描くと図 89(右) のようになる. そこで, このグラフでは点 13 は点 2,4,6 と点 3,5 に「1 つ飛ばし」で結ばれていることから, 点 2 を出発して, 点 3,4,5, 及び, 点 13 を経由して点 6 に至るためには, 必ず, 点 3 か点 5 にはとまらずに通過しなければならないことに注目しよう. また, 点 2 から  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  と進んで, 点 9 に移つ

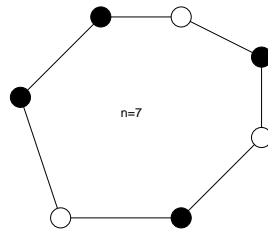


図 88:  $n = 7$  の場合には二部グラフを閉路で表現することができない.

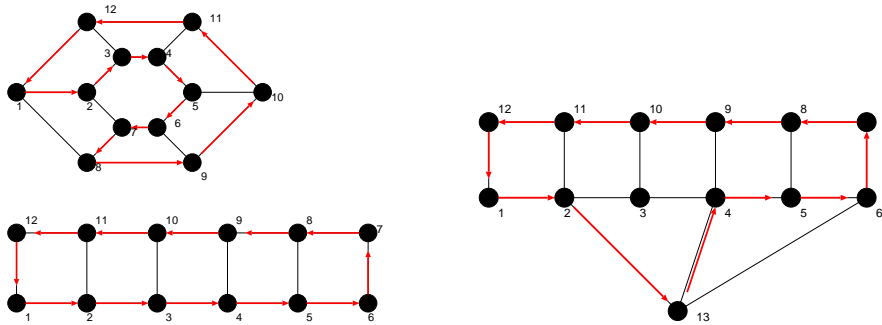


図 89: 問題に与えられたグラフの中央の点を除去すると、それはハミルトン・グラフでハミルトン閉路が存在する (左). 問題に与えられたグラフと同形なグラフ (右). このグラフにハミルトン閉路があるか否かを考察すればよい.

た場合には、 $9 \rightarrow 8$  と進むと、それ以後部分グラフ  $\{10, 11, 12\}$  には進めなくなり、逆に、 $9 \rightarrow 8$  へと移った場合には部分グラフ  $\{6, 7, 8\}$  へは進めなくなる.

このことから直ちに全ての点を 1 回ずつ通って元に戻る閉路は存在しないことがわかるので、このグラフはハミルトン・グラフではないことになる. もちろん、ここで考えた経路以外にも点  $1 \rightarrow$  点  $12 \rightarrow \dots$  のように回る経路も存在するが、結局、ここで考えた、点  $\{2, 3, 4, 5, 6, 13\}$  を含んだ「部分グラフ」にぶつかれば上記の問題が生じ、決してハミルトン閉路を描くことはできないことになる.

**演習問題 5**

$G$  はハミルトン・グラフであるとし、 $S$  は  $G$  の  $k$  個の点からなる任意の集合であるとする. このとき、グラフ  $G - S$  ( $G$  から  $S$  の点とそれらに接続している辺を全て除去して得られるグラフ) の成分は  $k$  個以下であることを具体的なハミルトン・グラフに対して一つ例示せよ.