



Title	2004年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Issue Date	2004
Doc URL	http://hdl.handle.net/2115/371
Rights(URL)	http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learningobject
Note	当講義資料は著者のホームページ http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/ からもダウンロードできます。
Note(URL)	http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Additional Information	There are other files related to this item in HUSCAP. Check the above URL.
File Information	GraphTheory04_10.pdf (第10回講義ノート)



[Instructions for use](#)

グラフ理論 配布資料 #10

教科書 pp. 125 ~ 142 の内容

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 6 月 21 日

演習問題 9 の解答例

1(1) グラフ G の幾何学的双対グラフ G^* を図 1 に示す.

(2) (1) で得られたグラフ G^* の幾何学的双対グラフ G^{**} は図 1 のようになり, このグラフの各点にそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5 と名前をつけることにする. このとき, 写像 $\{\theta, \phi\}$ を

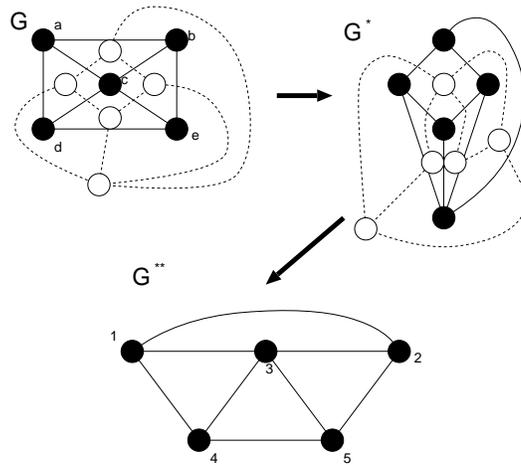


図 1: 平面グラフ G とその幾何学的双対グラフ G^* . そして, G^* の幾何学的双対グラフ G^{**} .

$$\theta : V(G) \rightarrow V(G^{**})$$

$$\phi : E(G) \rightarrow E(G^{**})$$

のように定義すると, $\theta(a) = 1, \theta(b) = 2, \theta(c) = 3, \theta(d) = 4, \theta(e) = 5$, 及び, $\phi(\overline{ab}) = \overline{12}, \phi(\overline{be}) = \overline{25}, \phi(\overline{ed}) = \overline{54}, \phi(\overline{da}) = \overline{41}, \phi(\overline{ac}) = \overline{13}, \phi(\overline{ce}) = \overline{35}, \phi(\overline{bc}) = \overline{13}, \phi(\overline{cd}) = \overline{34}$ が成り立つ.

さて, これらを用いると, 関係式;

$$\Psi_G(\overline{ab}) = ab \Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{ab})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{12}) = 12 = \theta(a)\theta(b)$$

$$\Psi_G(\overline{be}) = be \Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{be})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{25}) = 25 = \theta(b)\theta(e)$$

$$\Psi_G(\overline{ed}) = ed \Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{ed})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{54}) = 54 = \theta(e)\theta(d)$$

$$\Psi_G(\overline{da}) = da \Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{da})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{41}) = 41 = \theta(d)\theta(a)$$

$$\Psi_G(\overline{ac}) = ac \Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{ac})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{13}) = 13 = \theta(a)\theta(c)$$

$$\begin{aligned}\Psi_G(\overline{ce}) = ce &\Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{ce})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{35}) = 35 = \theta(c)\theta(e) \\ \Psi_G(\overline{bc}) = bc &\Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{bc})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{23}) = 23 = \theta(b)\theta(c) \\ \Psi_G(\overline{cd}) = cd &\Leftrightarrow \Psi_{G^{**}}(\phi(\overline{cd})) = \Psi_{G^{**}}(\overline{34}) = 34 = \theta(c)\theta(d)\end{aligned}$$

が成り立つ。従って、 $\Psi_G, \Psi_{G^{**}}$ は同形写像となるので、グラフ G と G^{**} は同形である。

2.

(1) グラフ G に含まれる任意の点 v に対して $\delta \leq \deg(v)$ とすれば、握手補題により

$$n\delta \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m \quad (1)$$

が成り立つ。一方、グラフ G に三角形が無いのであれば、グラフ G の内周は $\kappa = 4$ であるから $4 \leq \deg(F)$, すなわち

$$4f \leq \sum_{f \in F(G)} = 2m \quad (2)$$

が成り立つが、オイラーの公式: $f = 2 - n + m$ を代入し、面数 f を消去すれば

$$m \leq 2n - 4 \quad (3)$$

が得られる。(1)(3) から

$$n\delta \leq 2m \leq 2(2n - 4) \quad (4)$$

つまり

$$\delta \leq 4 - \frac{8}{n} \quad (5)$$

が成り立つ。従って、 δ は自然数であるから、 $n \geq 8$ であるならば $\delta \leq 3$ となり、証明は終了する。ところで、グラフ G には次数 3 以下の点があるならば任意の点 v に対し、 $3 \leq \deg(v)$ が成り立つべきだが、握手補題から直ちに

$$3n \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m \quad (6)$$

つまり

$$m \geq \frac{3}{2}n \quad (7)$$

となるが、これと (3) が同時に成り立つべきだから、 n は $3n/2 \leq 2n - 4$ を満たすべきであり、これは $n \geq 8$ である。従って、結局 $\delta \leq 3$ となり、グラフ G には次数 3 以下の点があることが言える。

(2) (1) の結果より、グラフ G には三角形は無く、次数 3 以下の点があることから、図 2 のような点 v が存在することになる (このグラフ G の点の数は n)。従って、 v の次数が $\deg(v) < 3$ を満たすならば証明は終わってしまうので、以下では $\deg(v) = 3$ として議論を進める。そして、図 2 のように点 v のまわりに v_1, v_2, v_3 が配置されているものとする。

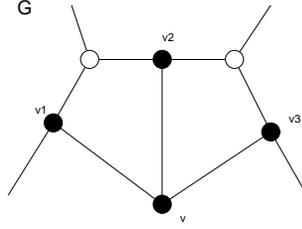


図 2: 平面グラフ G. 点 v の回りに点 v_1, v_2 , 及び, v_3 が配置されている.

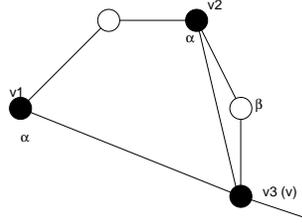


図 3: 平面グラフ G の点 vv_3 を縮約したグラフ.

さて, 辺 vv_3 を縮約してできる $(n-1)$ 点からなるグラフは図 3 のようになっており, この $(n-1)$ 点から成るグラフは 3 彩色可能であると仮定する. このとき, $v_1 \Rightarrow \alpha, v_2 \Rightarrow \alpha, v_3 \Rightarrow \beta$ とそれぞれ彩色し, 後に v を元に戻すことにする (図 4 参照. この時点で点の数 n). 元に戻した v を α, β とは異なる色 γ で彩色すれば所望のグラフ G の 3 彩色が完成する. (証明終わり).

(3) K 角形が無いのであれば, 握手補題より

$$(K+1)f \leq \sum_{F \in \mathbf{F}(G)} \deg(F) = 2m$$

が成り立つが, オイラーの公式から面数 f を消去して

$$m \leq \left(\frac{K+1}{K-1}\right)(n-2) \quad (8)$$

が得られる. これと $n\delta \leq 2m$ を組んで

$$\delta \leq 2\left(\frac{K+1}{K-1}\right) - \frac{4}{n}\left(\frac{K+1}{K-1}\right) \quad (9)$$

が成り立つ. 従って, グラフ G に K 角形まで無く, n が不等式:

$$n \geq 4\left(\frac{K+1}{K-1}\right) \quad (10)$$

を満たすならば, グラフ G には次数が $2(K+1/K-1) - 1$ 以下の点が存在することになる.

ところで, 不等式 (10) の成立条件の吟味であるが, グラフに次数 $2(K+1/K-1) - 1$ 以下の点が存在するとすれば, ある点 v に対し, $2(K+1/K-1) - 1 \leq \deg(v)$ が成立し, これと握手補題から

$$m \leq \frac{n}{2} \left\{ \left(\frac{K+1}{K-1}\right) - 1 \right\} \quad (11)$$

が得られるが, これと (8) が同時に成立するためには

$$\frac{n}{2} \left\{ \left(\frac{K+1}{K-1}\right) - 1 \right\} \leq \left(\frac{K+1}{K-1}\right)(n-2) \quad (12)$$

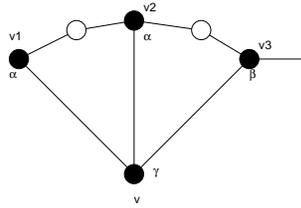


図 4: 図 3 で縮約した辺 vv_3 を元に戻す.

つまり,

$$n \geq 4 \left(\frac{K+1}{K-1} \right) \quad (13)$$

が成り立つことになり, これは上に述べたグラフに次数 $2(K+1/K-1) - 1$ 以下の点が存在する条件に抵触しない. 従って以上により, このグラフには次数 $2(K+1/K-1) - 1$ 以下の点が存在すると結論付けられる.

レポート #9 に関するコメント

- $K = n$ において $n \rightarrow \infty$ の極限をとらずに, n が有限のまま $K \rightarrow \infty$ を考えた人が大多数でした. もちろん, これは必ず満たさしていなければならない条件 $K \leq n$ を満たしていないのですが, この場合に得られる $m \leq n - 2$ とオイラーの公式を組んで面数 f に関する不等式を作れば $f \leq 0$ が得られます. 面数の最小値はグラフが木である場合の $f = 1$ ですからこれは不適切です. 正しい不等式 $m \leq n$ とオイラーの公式を組んで f に関する不等式を作れば $f \leq 2$ が得られます. これは $f = 2$ ($K(\infty)$ 角形の内部の面と外部の無限面), $f = 1$ (木) の場合にそれぞれが対応していることとなります (図 5 参照).

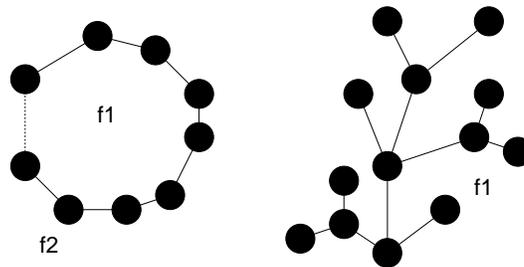


図 5: $f \leq 2$ が意味する内容は, $K(\infty)$ 角形の内部 (f_1) と外部 (f_2) の計 $f = 2$ 面 (左図), 木の無限面 (f_1) の計 $f = 1$ 面 (右図).

- $\lceil a/b \rceil = \lfloor (a+b-1)/b \rfloor$ の証明に関して

講義中に「正の定数 a, b に関する等式 :

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor \quad (14)$$

を示し、レポートとして提出すれば加点する」と言いましたが、高橋央さん、下田修さん、星加英康さん、山本貴史さん、遠藤正敏さん、南保亮太さん、西村浩哉さん、加賀陽介さん、原坂和宏さん、多田崇俊さんの計10名(順序に意味なし)が上記を示したレポートを提出してくれました。上記の方々にはレポート点に加点しておきます。以下では多田さんの証明を載せておきましょう。

(多田崇俊さんによる証明)

(a/b) が整数の場合とそうでない場合に分けて証明する。

(i) (a/b) が整数のとき

$a/b = M$ であるとき

$$\text{(与式の左辺)} = \frac{a}{b} = M \quad (15)$$

である。また、

$$\text{(与式の右辺)} = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} + 1 - \frac{1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor M - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 = M \quad (16)$$

であるから、(i) のとき関係式は成立。

(ii) (a/b) が整数でないとき

a/b の整数部分を C 、少数部分を D とすれば

$$\text{(与式の左辺)} = \left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = C + 1 \quad (17)$$

である。また

$$\text{(与式の右辺)} = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} + 1 - \frac{1}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{b} - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor C + D - \frac{1}{b} \right\rfloor + 1 \quad (18)$$

であるが、 D は a/b の少数部分であるから

$$D = \frac{a - bC}{b} \quad (19)$$

であり、 a, b, C は整数なので、 $a - bC$ も整数であり、 $a > bC$ より

$$a - bC \leq 1 \quad (20)$$

である。従って

$$D > \frac{1}{b} \quad (21)$$

なので、 $D - (1/b) = \varepsilon$ ($0 \leq \varepsilon < 1$) とおくと

$$\text{(与式の右辺)} = \lfloor C + \varepsilon \rfloor + 1 = C + 1 \quad (22)$$

となり、(ii) の場合も関係式が成り立つ。従って

$$\left\lceil \frac{a}{b} \right\rceil = \left\lfloor \frac{(a+b-1)}{b} \right\rfloor \quad (23)$$

が示せた。(証明終わり)

10.2 地図の彩色

この節では、ヨーロッパのように、多くの国が屹立しているような地域の地図において、隣り合う国を異なる色で区別するためには何色が必要か？ という素朴な質問から端を発した「地図の彩色」について、それにまつわる定理及び適用例を見てゆくことにする。

k -面彩色可能：地図の隣接する2つの面が同じ色にならないように k 色で彩色できる場合。図6に3-彩色可能なグラフの一例を載せる。

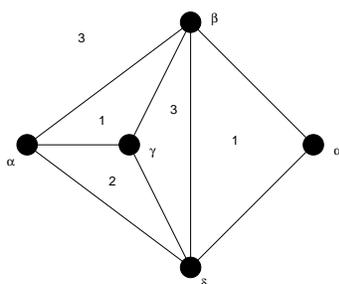


図6: 3-面彩色可能なグラフの一例。面に付された数字が色を表す。

定理 19.1

地図 G が2面彩色可能であるための必要十分条件は、 G がオイラー・グラフであることである。

(証明)

必要性：

G の各点 v を含む面は偶数でなければならないので、 v の次数は偶数である。従って、定理 6.2 「連結グラフがオイラー・グラフであるための必要十分条件は、 G の点の次数が全て偶数である」ことから、 G はオイラー・グラフである。

十分性：

任意の面 F を選び、それを赤で彩色する。 F 中の任意の点 x から、他の面 F' へ行く曲線を考える (図7参照)。

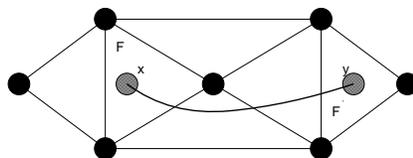


図7: 2-面彩色可能なグラフ G においては、 $x \rightarrow y \rightarrow x$ という任意の閉路は偶数回 G の辺と交差する。

F' → 赤 (曲線が偶数本の辺を交わる場合)

F' → 青 (曲線が奇数本の辺を交わる場合)

で色分けすると, $x \rightarrow y \rightarrow x$ という任意の閉路は偶数回だけ辺を交差する (G の各点に接続する辺は偶数) のでこの彩色で矛盾はない. (証明終わり).

定理 19.2

G はループの無い平面グラフとし, G^* は G の幾何学的双対であるとする. このとき, G が k -点彩色可能であるための必要十分条件は, G^* が k -面彩色可能であることである.

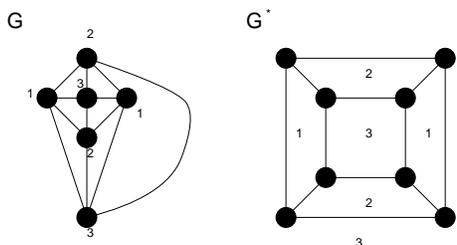


図 8: 3-点彩色可能なグラフ G (左) と, その幾何学的双対グラフ G^* . グラフ G^* は 3-面彩色可能である.

定理 19.3

地図の 4 色定理は平面グラフの 4 色定理と同値である.

証明略.

定理 19.4

G は各点が 3 次の地図であるとする. このとき, G が 3-面彩色可能であるための必要十分条件は, 各面が偶数本の辺で囲まれていることである.

(証明)

必要性 :

図 9 のように, G の任意の面 F に対し, F を取り囲む G の面は 2 色によって彩色可能である. 従って, そのような面は偶数個なければならないので, 全ての面は偶数本の辺で囲まれている.

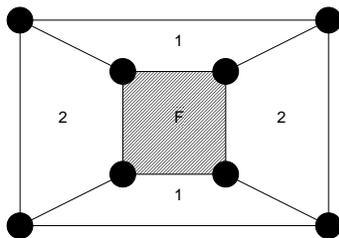


図 9: 面 F を取り囲むグラフ G の面は 2 色で彩色可能である.

十分性 :

「 G が単純連結グラフであり, G の各面が三角形であり, G の各点の次数が偶数 (オイラー・グラフ) ならば, G は 3-点彩色可能である」という双対な結果を示せばよい.

グラフ G はオイラー・グラフであるから, 定理 19.1 より, 図のように, G の面は 2 色, 赤と青によって彩色できる.

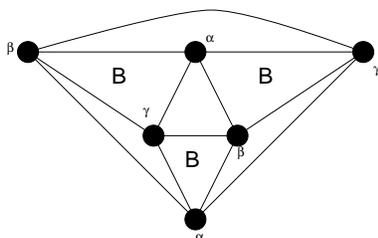


図 10: オイラー・グラフ G の面は赤と青 (B) で 2-面彩色可能である.

赤い面の 3 点を α, β, γ が時計回りにくるように彩色する.
青い面の 3 点を α, β, γ が反時計回りにくるように彩色する.

とすると, このような彩色はグラフ全体に拡張できる. (証明終わり).

定理 19.5

4 色定理を証明するためには, 3 次の地図は全て 4-面彩色可能であることを証明すれば十分である.

証明略.

定理 19.1

地図 G が 2 面彩色可能であるための必要十分条件は, G がオイラー・グラフであることである.

証明略.

10.3 辺彩色

点彩色, 地図の彩色 (面彩色) とくれば, 次は辺彩色である.

k -辺彩色可能 : グラフ G の隣接する辺は同じ色にならないように, G の辺を k 色で彩色できるとき.

彩色指数 : G が k -辺彩色可能, $k-1$ -辺彩色不可能なとき, 彩色指数 $\chi'(G)$ を

$$\chi'(G) = k$$

で定義する. 図 11 に 4 辺彩色可能なグラフの一例を載せる.

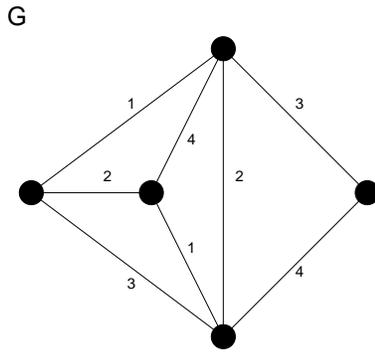


図 11: 4-辺彩色可能なグラフの一例. このグラフ G の彩色指数は $\chi'(G) = 4$ である.

定理 20.1

G は単純グラフであり, その最大次数が Δ ならば, $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1$ である.

ここでは具体的な証明を追うことはせず, いくつかの代表的なグラフに対して, 上記定理を確認することにとどめておく.

(例) :

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & (n : \text{偶数}) \\ 3 & (n : \text{奇数}) \end{cases}$$

$$\chi'(W_n) = n - 1 \quad (n \geq 4)$$

定理 20.2

$n (\neq 1)$ が奇数ならば, $\chi'(K_n) = n$ であり, 偶数ならば, $\chi'(K_n) = n - 1$ である.

(証明)

$n \geq 3$ とし, 以下では n が偶数の場合と奇数の場合に分けて考えることにする.

n が奇数のとき :

完全グラフ K_n の点を正 n 角形の形状に配置し, その外周の辺を各辺に異なる色を用いて彩色し, 次に残りの辺それぞれをそれと平行な外周の辺に用いられた色で彩色する (図 12 参照).

このとき, 同じ色で彩色できる辺の最大数は $(n - 1)/2$ である. 従って, 彩色指数が $n - 1$ とすると完全グラフ K_n の辺数は高々

$$\frac{1}{2}(n - 1)\chi'(K_n) = \frac{1}{2}(n - 1)^2 \neq {}_n C_2$$

となり, K_n の辺数 ${}_n C_2 = n(n - 1)/2$ に反する. 従って, $\chi'(K_n) = n$ であり, このとき, 辺数は高々

$$\frac{1}{2}(n - 1)\chi'(K_n) = \frac{1}{2}n(n - 1) = {}_n C_2$$

となり, つじつまが合う. 従って, n が奇数のときは $\chi'(K_n) = n$ である.

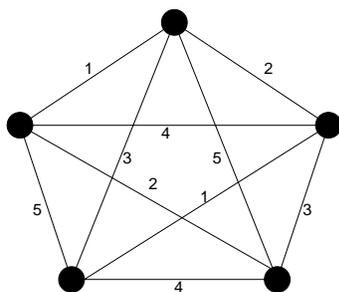


図 12: 完全グラフ K_5 の辺彩色. 外側の 5 つの辺にそれぞれ色を割り振ると, 各外辺に向かい合う辺に同色の色を割り当てれば, 5-辺彩色が完成する.

n が偶数のとき :

K_n は完全グラフ K_{n-1} と 1 つの点の和とみなせる. K_{n-1} の辺は n が奇数の場合に述べた方法により, $n-1$ 色で彩色することができる. 従って, この方法で $(n-1)$ -彩色すると, 完全グラフ K_{n-1} の各辺の次数は $n-2$ であるから, 各点には全 n 色のうち, 欠けている色が必ず 1 つ生じ, これらの欠色は全て異なる. よって, これらの欠色で残りの辺を彩色すれば, K_n の辺彩色が完成する (図 6 参照). 従って, n が奇数のとき,

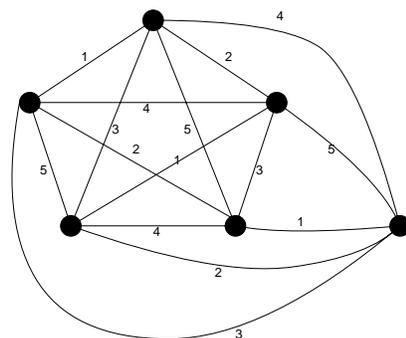


図 13: 完全グラフ K_5 の外部に点 v を配置し, この点と K_5 の各点での欠色で点 v を結べば, n が偶数 (この例では $n=6$) の場合の n -辺彩色が完成する.

$\chi'(K_n) = n-1$ である. (証明終わり).

定理 20.3

4 色定理と次の命題は同じである : あらゆる 3 次の地図 G に対して $\chi'(G) = 3$ である.

証明略.

定理 20.4

二部グラフ G の最大次数が Δ ならば, $\chi'(G) = \Delta$ である.

証明略.

(例題)

グラフの辺彩色に関して以下の問い(1)~(3)に答えよ.

- (1) 図 14 のグラフ (a)(b) の彩色指数をそれぞれ求めよ.
- (2) ピータースン・グラフの外側の 5-閉路の可能な 3-彩色を全て考えて, ピータースン・グラフの彩色指数は 4 であることを示せ.
- (3) 「グラフ G が 3 次ハミルトングラフならばその彩色指数は 3 である」ことが知られている. この事実と (2) の結果を用いて, ピータースン・グラフはハミルトングラフでないことを示せ.

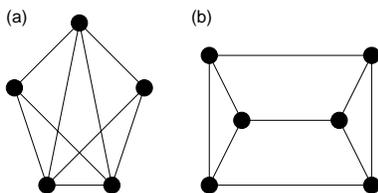


図 14: 彩色指数を求めるべきグラフ (a)(b).

(解答)

(1) 図 15 より, (a)(b) のそれぞれの彩色指数は

$$\chi'((a)) = 5 \quad (24)$$

$$\chi'((b)) = 3 \quad (25)$$

である.

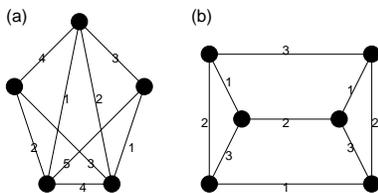


図 15: 辺に付された数字が各色を表す.

- (2) ピータースン・グラフは図 16 のように彩色できるので, その彩色指数は 4 である.
- (3) ピータースン・グラフは 3 次グラフ, つまり, 各点の次数が 3 であるが, この 3 次のグラフ G がハミルトングラフであるならば $\chi'(G) = 3$ であるはずなので, (1) の結果より, ピータースン・グラフはハミルトングラフではないことがわかる.

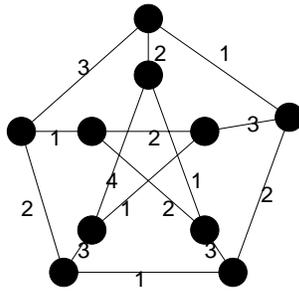


図 16: ピーターソン・グラフの彩色. 辺に付された数字が各色を表す.

10.4 彩色多項式

彩色多項式 $P_G(k)$: G は単純グラフであるとし, k 色での点彩色の仕方が $P_G(k)$ 通りあるとする. このとき, $P_G(k)$ を彩色多項式と呼ぶ.

(例):

$$P_G(k) = k(k-1)^2 \quad (\text{図 17(左上) のような 3 点からなる木 } G)$$

$$P_G(k) = k(k-1)(k-2) \quad (\text{図 17(左下) のような三角形 } G)$$

$$P_G(k) = k(k-1)^{n-1} \quad (\text{図 17(右) のような } n \text{ 点からなる木 } G)$$

$$P_G(k) = k(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1) \quad (\text{完全グラフ } K_n)$$

明らかに

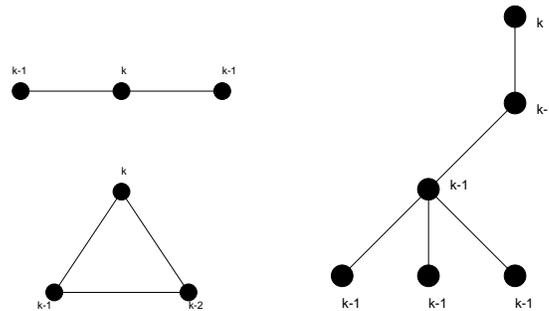


図 17: 左上から右へ $P_G(k) = k(k-1)^2, k(k-1)(k-2), k(k-1)^n$ を彩色多項式として持つグラフ.

$$k < \chi(G) \Rightarrow P_G(k) = 0$$

$$k \geq \chi(G) \Rightarrow P_G(k) > 0$$

である.

次の定理は具体的にグラフ G の彩色多項式を導出する際に極めて重要である.

定理 21.1

単純グラフ G から辺 e を削除して得られるグラフを $G - e$ とし, 縮約^a して得られるグラフを G/e とする. このとき

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k) \tag{26}$$

が成立する.

^a 再度確認するが, 「縮約」とは任意の 2 点 u, v を結ぶ辺 e を除去し, 点 u, v を同一視する操作である.

証明の前に, この定理の「使い方」を具体的に次の例を見てみよう.

(例) : 図 18 の例で考えると, 関係式 (26) は

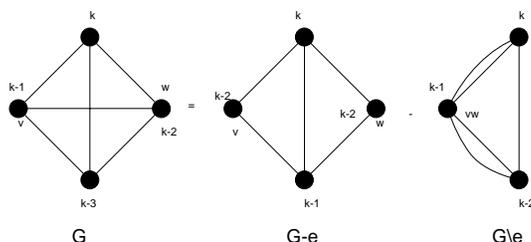


図 18: 関係式 (26) を示すグラフの一例.

$$k(k-1)(k-2)(k-3) = [k(k-1)(k-2)^2] - [k(k-1)(k-2)]$$

となる.

(証明) :

$e = vw$ とする. v と w が異なる色になるような $G - e$ の k -彩色の個数は v と w を結ぶ辺 e を描いても変化しない (図 18 のグラフ G , 及び, $G-e$ を参照). 従って, $P_G(k)$ に等しい. 一方, v と w が同じ色になるような $G - e$ の k -彩色の個数は v と w を同一視しても変わらない (図 18 のグラフ $G-e$ と G/e を参照). 従って, $P_{G/e}(k)$ に等しい. 以上より

$$P_{G-e}(k) = P_G(k) + P_{G/e}(k)$$

が成り立つ. (証明終わり).

彩色多項式を求める際のポイントは, グラフ G の辺数を関係式 (26) を用いて段階的に削減して行き, 「木」まで到達した時点で, n 点からなる木の彩色多項式が $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$ である事実を用いて求める, あるいは, 簡単に彩色多項式が求まるグラフまで辺数を落として, その簡単なグラフに対して彩色多項式を求めることにある.

この方法に慣れるためにいくつかの例題を見ておこう.

(例題)

4つの点からなる単純連結グラフを全て挙げ、それら全てに対して彩色多項式を見つけ、これらの多項式は全て

$$k^4 - mk^3 + ak^2 - bk$$

なる形で書けることを示せ。ただし、 m は辺数、 a, b はともに正の定数である。

(解答)

まず、4つの点からなる単純連結グラフを全て描いてみると、図19のA~Fの6つのグラフが得られる。

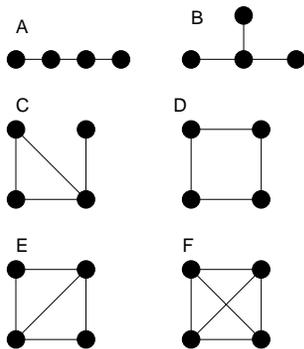


図 19: 4つの点からなる単純連結グラフ A~F.

まず、 $n = 4$ の「木」である A, B の彩色多項式は図 20 より直ちにわかり

$$\begin{aligned} P_A(k) = P_B(k) &= k(k-1)^3 \\ &= k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \end{aligned} \quad (27)$$

である。

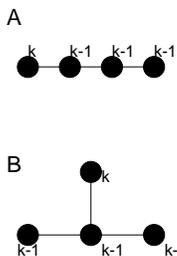


図 20: A, B は $n = 4$ 点からなる「木」であるから、その彩色多項式はどちらも $k(k-1)^3$.

次に、C は公式：

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G \setminus e}(k) \quad (28)$$

をグラフ C に適用すると、図 21 より

$$\begin{aligned} P_C(k) &= k(k-1)^3 - k(k-1)^2 \\ &= k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 2k \end{aligned} \quad (29)$$

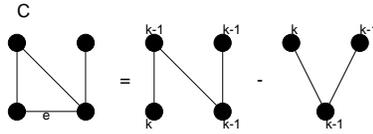


図 21: グラフ C は辺 e に関して図のように分解できる.

となる.

次にグラフ D は辺 e に関して図 22 のように分解できるので

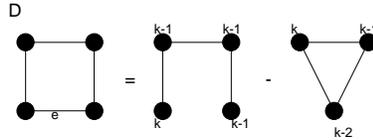


図 22: グラフ D は辺 e に関して図のように分解できる.

$$\begin{aligned}
 P_D(k) &= k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) \\
 &= k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

が得られる.

次いで E であるが, これは図 23 のようにグラフ D と $n = 3$ の木に分解でき, グラフ D の彩色多項式 $P_D(k)$ は (30) で既に求めているので, これを用いて

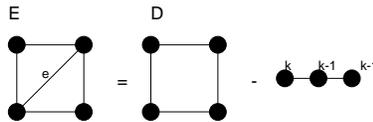


図 23: グラフ E は辺 e に関して図のように分解できる.

$$\begin{aligned}
 P_E(k) &= P_D(k) - k(k-1)^2 \\
 &= k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k - (k^3 - 2k^2 + k) \\
 &= k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

が得られる.

最後にグラフ F であるが, これは図 24 のようにグラフ E と三角形に分解でき, グラフ E の彩色多項式は (31) で既に求めたので, これを用いて

$$\begin{aligned}
 P_F(k) &= P_E - k(k-1)(k-2) \\
 &= k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k - (k^3 - 3k^2 + 2k) \\
 &= k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

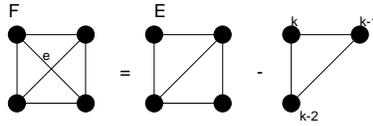


図 24: グラフ F は辺 e に関して図のように分解できる.

が得られる.

以上をまとめると

$$P_A(k) = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \quad (33)$$

$$P_B(k) = k^4 - 3k^3 + 3k^2 - k \quad (34)$$

$$P_C(k) = k^4 - 4k^3 + 5k^2 - 2k \quad (35)$$

$$P_D(k) = k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k \quad (36)$$

$$P_E(k) = k^4 - 5k^3 + 8k^2 - 4k \quad (37)$$

$$P_F(k) = k^4 - 6k^3 + 11k^2 - 6k \quad (38)$$

となり, いずれの場合も

$$P_G(k) = k^4 - mk^3 + ak^2 - bk \quad (39)$$

となり, m は辺数, a, b は正の定数となっていることがわかる.

演習問題 10

完全二部グラフ, 及び, 閉路グラフの彩色多項式に関して以下の問いに答えよ.

- (1) 完全二部グラフ $K_{2,3}$ の彩色多項式 $P_{K_{2,3}}(k)$ を求めよ.
- (2) 完全二部グラフ $K_{2,s}$ (s : 任意の自然数) の彩色多項式 $P_{K_{2,s}}(k)$ を求めよ.
- (3) 閉路グラフ C_4 , 及び, C_5 の彩色多項式 $P_{C_4}(k), P_{C_5}(k)$ を求めよ.
- (4) 数学的帰納法を用いて, 閉路グラフ C_n に対する彩色多項式 $P_{C_n}(k)$ が

$$P_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$$

で与えられることを証明せよ.

連絡事項: 次回 (6/28) は第 2 回目の情報工学演習 II(B) となります. 7/5, 7/12 は井上の出張のため休講です. 従って, 今回のレポート締め切りは 7 月 26 日 (月) のグラフ理論講義開始時までとします.