情報工学演習 II(B) (グラフ理論) 配布資料 #1

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 6 月 14 日

問題 1

教科書 p.53 〜 p.55 に書かれたアルゴリズムを参考にし, 図 1 に与えたグラフの始点 u から終点 v へ至る全ての経路の中で最短のものを求めよ．なお, グラフの各辺に記された数字はその区間の距離であるものとする．なお, 同じ最短距離を与える経路が複数存在する場合には, それら全てを答えること．

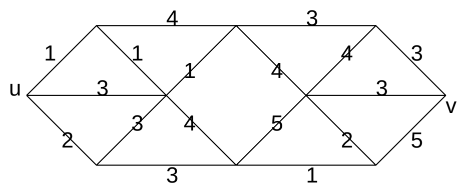

図 1: u から v へ至る最短路を求める．各辺に記された数字はその区間の距離である．

問題 2

図 2 のグラフ G に対し, 以下の問いに答えよ．

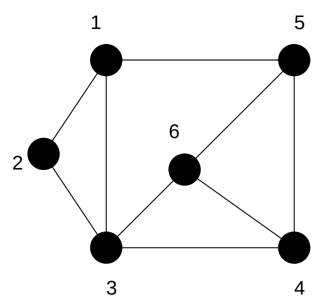

図 2: ここで全域木を考えるグラフ G.

(1) グラフ G から全域木 T を作ったとしよう．このとき, T の辺数を求めよ．

(2) (1) で全域木を作るまでに削除しなければならない辺数 $\overline{m}$ を求めよ．

(3) T に (2) で求めた辺を 1 つずつ付加すると必ず閉路が 1 つだけできる．このようにして作られる閉路を**基本閉路**と呼ぶが, この基本閉路を $\overline{m}$ 個全て描け．

(4) (3) で求めた閉路 $C_1, C_2, \cdots, C_{\overline{m}}$ に対し, 閉路行列法を用いることにより, 全域木の総数 τ(G) を求めよ．

問題 3

(1) 完全グラフ $\mathsf{K}_5, \mathsf{K}_6$ の点行列を求め, それぞれの全域木の総数 $\tau(\mathsf{K}_5), \tau(\mathsf{K}_6)$ を求めよ.
(2) 完全グラフ K_n の全域木の総数 $\tau(\mathsf{K}_n)$ を求めよ.

問題 4

図 3 のグラフ G の各点はネットワーク G 内のサーバを表すとしよう. 各サーバは確率 p で故障する. 故障

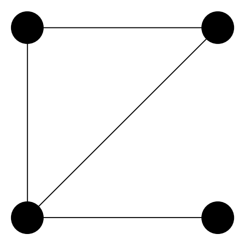

図 3: ここで考えるネットワーク G. 各点は「サーバ」を表すものとする.

したサーバは他のサーバと情報のやりとりができないので, ネットワークから除去する. k 個のサーバが故障したとき, ネットワーク内に残るサーバからなる部分ネットワークが正常である (連結である) 確率 p_k を求めよ. ただし, 1 つのサーバだけからなる「ネットワーク」は正常であるとは言わないことにする. また, システムの信頼度 :

$$R(\mathsf{G}) = \sum_k p_k$$

を計算し, p の関数として図示せよ.

問題 5

図 4 のように 1 点から k 本の枝を出し, その k 本の枝からさらに k 本の枝を出すという操作を n 回繰り返してできる木を $\mathsf{T}_k(n)$ と名付けよう. 図 4 の例は $\mathsf{T}_3(2)$ である. このとき, 次の問いに答えよ.

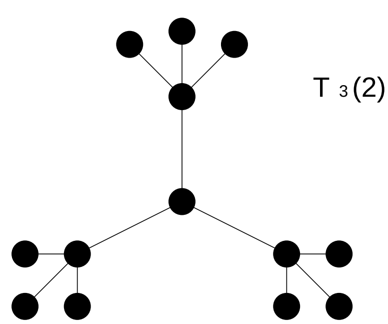

図 4: ここで述べた「操作」によって作られた木 $\mathsf{T}_3(2)$.

(1) $\mathsf{T}_3(n)$ に含まれる点の総数 $S_3(n)$ を求めよ．また, $\mathsf{T}_3(n)$ の端点の総数を $Q_3(n)$ を求め, 比 $P_3(n) = Q_3(n)/S_3(n)$ に対し, 極限値：

$$p_3 \quad = \quad \lim_{n\to\infty} P_3(n)$$

を計算せよ.

(2) (1) を参考にして, 任意の自然数 K に対して $P_K(n)$ を計算し, n に関する極限値：

$$p_K \quad = \quad \lim_{n\to\infty} P_K(n)$$

を求め, さらに K に関する極限値：

$$p_\infty \quad = \quad \lim_{K\to\infty} p_K$$

を計算し, 木 $\mathsf{T}_K(n)$ の構造と極限値 p_∞ からわかることを簡潔に述べよ.

(注)：n と言うと普通はグラフの点の数を示しますが, ここでは「操作」の回数であることに注意.

問題 6

グラフ G (点の数：$n \geq 4$) を三角形のみを含む平面グラフであるとする．G に含まれる次数 k の点の個数を n_k とするとき

(1) G の辺数 m が

$$m \quad = \quad 3n - 6$$

で与えられることを示せ.

(2) 次の関係式：

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \cdots = 12$$

が成り立つことを示せ.

(3) G は次数 5 以下の点を 4 つ以上含むことを示せ.

今度はグラフ G は全ての点の次数が 3 である平面グラフであり, φ_k 個の k 角形を含むとしよう．このとき

(4) G の辺数 m, 面数 f の間には

$$m + 6 \quad = \quad 3f$$

なる関係が成立することを示せ.

(5) 次の関係式：

$$3\varphi_3 + 2\varphi_4 + \varphi_5 - \varphi_7 - 2\varphi_8 - \cdots = 12$$

が成り立つことを示せ.

(6) G には 5 角形以下の面が 4 つ以上含まれることを示せ.

(# **レポート提出等**)：

- 以上の $\boxed{\textbf{問題 1}}$ から $\boxed{\textbf{問題 6}}$ までを全て解き, レポートとして提出すること.
- レポート締め切りは **7 月 26 日 (月) のグラフ理論の講義開始時**までとします. 問題の解答例もこの日に配布し, 簡単に解説します. なお, 井上の部屋の前にポストを用意しますので, 早くできてしまった人はこのポストに提出してください.
- このレポートの得点は「情報工学演習 II(B)」の成績のみに関わるのであって, **講義「グラフ理論」の成績とは一切関係がない**ことに注意してください.
- 第 2 回「情報工学演習 II(B) (グラフ理論)」は **6 月 28 日 (月) の講義「グラフ理論」の時間帯 (第 3 講時)** に行います.