グラフ理論 配布資料 #5

教科書 pp. 42 〜 59 の内容

担当：井上 純一 (情報エレクトロニクス系棟 8-13)

平成 16 年 5 月 17 日

演習問題 4 の解答例

(1) (2) 図 1 を参照のこと.

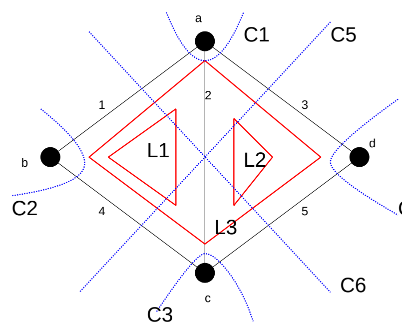

図 1: 問題のグラフ及び, 閉路 L_1, L_2, L_3, そして, カットセット $C_1, C_2, \cdots, C_6$.

(3) 閉路行列の列の増える方向に L_1, L_2, L_3, 行の増える方向に辺の番号 $1, 2, \cdots, 5$ のようにラベル付けするように決めると行列 $\boldsymbol{B}$ は

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

となる.

(4) カットセット行列の列の増える方向にカットセットの番号 $C_1, C_2, \cdots, C_6$, 行の増える方向に辺の番号 $1, 2, \cdots, 6$ を割り振ることに決めれば, 行列 $\boldsymbol{C}$ は

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

となる.

(5) 両行列の積 $\boldsymbol{BC}^T$ を作ると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{BC}^T &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 & 1+1 & 0 & 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 0 & 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 & 1+1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \pmod 2 \qquad (3)
\end{aligned}$$

となり, 題意が満たされる.

レポート #3 に関するコメント

- 全般的に良くできていましたが, 問題 2. の (2)(3) で歩道の個数を示すときに, 具体的に数えていない答案がありましたが, これでは不十分です. 歩道の数が 100 以上になると数える気力も失せますが, 13 程度ですから実際に列挙してもたいした労力ではないと思います.
- 問題 2. (4) は様々なバラエティの証明がありましたが, 筋道が通っており, 正しければ丸にしてあります.

6　オイラー・グラフとハミルトン・グラフ

ここでは情報工学的に応用される場面も多いオイラー・グラフとハミルトン・グラフについて学ぶ.

6.1　オイラー・グラフ

オイラー・グラフ (Eulerian graph): 全ての辺を含む閉じた小道がある連結グラフ.
半オイラー・グラフ (semi-Eulerian graph): 全ての辺を含む小道がある連結グラフ (閉じていない).

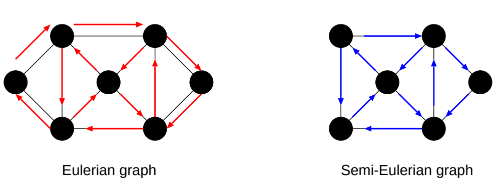

図 2: オイラー・グラフ (左) と半オイラー・グラフ (右) の一例.

定理 6.2
連結グラフ G がオイラー・グラフであるための必要十分条件は G の点の次数が全て偶数であることである.

(証明)

⇒ (必要性)

G のオイラー小道 P がある一点を通過する毎に 2 を加えていくと, 全ての辺はちょうど 1 回ずつ含まれるので, 各点でこの和はその点の次数に等しく, しかも, それは偶数である.

⇐ (十分性)

各点の次数は偶数であり, かつ, 連結であるとすると, 教科書 p. 43 **補題 6.1** より, この連結グラフ G には閉路 C がある. 従って, このもとでオイラー・グラフとして G が構成できればよい. つまり, このもとで具体的なオイラー・グラフの構成法を提示すれば証明は終了である.

さて, 自明であるが, 閉路 C に G の全ての点が含まれていれば, その閉路そのものがオイラー・グラフとなるので証明は終了する. 従って, 以下ではこれ以外のケースに対して, オイラー・グラフの構成法を提示する.

まず, 図 3 のように G から閉路 C の辺を除去してできるグラフ (一般には非連結であるが, オイラー小道がある) を H とする. G の連結性より, グラフ H の各成分は C と少なくとも 1 点を共有していることに注意しょう. 従って, このような状況下で, C 上の任意の一点からスタートし, C の辺をたどる. そして, H の

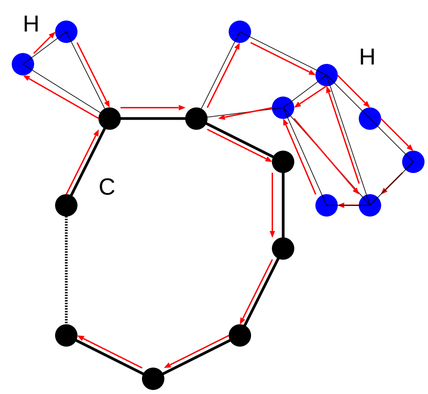

図 3: 考える連結グラフ G は閉路 C とそれぞれオイラー小道を含む成分 H からなる.

孤立点でない点に出くわすたびに, その点を含む H の成分のオイラー小道 (C 自身はオイラー・グラフであるから, 奇数次の点を含まず, 従って, 各成分である H も奇数次の点を含まない) をたどり, その点に戻り, また C の辺をたどって行く ⋯ という操作を繰り返し, C 上の出発点に戻るという作業を行うことにより, オイラー小道が得られ, たどって来た道をつなげることにより, 求めるべきオイラー・グラフを描くことができる (**証明終わり**).

次にオイラー・グラフに関する例題を一つ見ておこう.

(例題)
オイラー・グラフに関して以下の問いに答えよ.

(1) どんな n に対して完全グラフ K_n はオイラー・グラフになるか ?
(2) 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{s,t}$ のどのような場合がオイラー・グラフとなるか ?
(3) どのような n に対して車輪 W_n はオイラー・グラフとなるか ?

(答え)

(1) 完全グラフ K_n の任意の 1 点の次数は $n-1$ であるから, $n-1=$ 偶数 の場合に限り, K_n はオイラー・グラフとなる. 従って, 例えば, K_5 はオイラー・グラフであるが, K_4 はオイラー・グラフではない.
(2) 図 4 のように, $s \geq 2$, 及び, t が偶数であれば, a $\to 1 \to$ b $\to 2 \to$ a $\to 3 \to$ b $\to 4 \to$ a $\to 5 \to$ b のような経路で, a, b を交互に経由したオイラー小道を作ることは常に可能である (図の例では t が奇数なので, できるグラフは半オイラーであり, オイラーではない. $t=6$ の場合にはオイラーとなることを各自が確認してみること). 従って, $s \geq 2$ のとき, 完全二部グラフ $K_{s,t}$ はオイラー・グラフとなる.

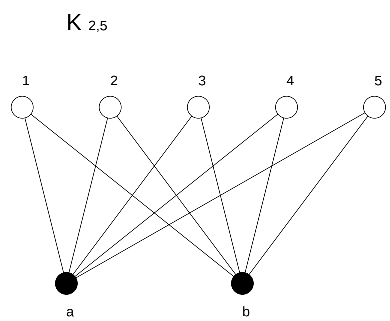

図 4: 完全二部グラフ $\mathrm{K}_{2,5}$. オイラー小道が存在し, オイラー・グラフである.

(3) 車輪は全ての n に対して, C_{n-1} と 1 点との結合部の次数は 3(奇数) であるから, オイラー・グラフとはならない.

さて, **定理 6.2** により, 我々は与えられたグラフの各点の次数を調べることにより, そのグラフがオイラー・グラフか否かを調べることができるようになった. 従って, 以下のような問題に対し, 我々は直ちに答えることができる.

(問題)
7 つの催し会場 a,b,c,d,e,f,g の主催者がその順路を決める際に, 一筆書きに基づく道順を採用しようとしている. 各会場から出ている道の本数は以下の表の通りである.

会場	a	b	c	d	e	f	g
道数	4	4	4	4	4	4	2

この場合, 主催者の望む「一筆書き順路」は作成可能であるか ?

この問題の答えはもちろん, 「可能」である (全ての点の次数が偶数であるから).

しかし, 実際にこのグラフの中からオイラー小道を探すとなると, グラフに含まれる点の数が多くなるに従って難しくなることはわかるであろう. どのようにすれば系統的にオイラー小道を作ることができるであろうか？

この問いに対する答えとして, **Fleury (フラーリー) のアルゴリズム**が知られている. この証明は教科書 p. 45 を読んで頂くことにして, ここでは, アルゴリズムを挙げておくので, 各自, 上の催し会場の順路作成に用いてみること (⇒ **演習問題 5**).

Fleury のアルゴリズム
任意の点から出発し, 次の規則に従う限り自由に辺をたどればオイラー小道が得られる.

(1) たどった辺は除去し, 孤立点が生じた場合にはそれも除去する.
(2) どの段階でも, 他にたどる辺がない場合以外には橋をたどるな.

6.2　ハミルトン・グラフ

ハミルトン・グラフ (Hamiltonian graph)：ハミルトン閉路によりなるグラフ.
ハミルトン閉路 (Hamiltonian cycle)：グラフ G の各点をちょうど一度だけ通る閉じた小道.
半ハミルトン・グラフ (semi-Hamiltonian graph)：全ての点を通る道があるグラフ (閉じてはいない).

与えられたグラフがハミルトン・グラフであるかどうかに関しての判定には次の **Ore (オーレ) の定理**が役立つ場合が多い.

定理 7.1 (Ore の定理)
単純グラフ G には $n(\geq 3)$ 個の点があるとする. 隣接していない任意の 2 点 v, w に関して

$$\deg(v) + \deg(w) \quad \geq \quad n \tag{4}$$

が成立するとき, G はハミルトン・グラフである.

(証明)
背理法で示す.
「グラフ G はハミルトニアン・グラフではないが (4) を満たす」と仮定し, この矛盾を導く.

G は (ぎりぎり) ハミルトン・グラフではないとすると, G には全ての点を含む道：

$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to \cdots \to v_n$$

がある．しかし, ここで, v_1 と v_n が隣接しているとしてしまうと, グラフ G がハミルトン・グラフになってしまうので, v_1 と v_n は隣接していないものとする．
従って, v_1, v_n に関しても不等式 (4) が成立し,

$$\deg(v_1) + \deg(v_n) \quad \geq \quad n$$

が成り立つ．よって, v_1, v_n の次数は 2 以上なので ($n = 3$ の場合, $\deg(v_1) = 2, \deg(v_n) = 1$ はどうなのか, と思う人がいるかもしれないが, このときの 3 点の配列を考えると, これはあたらないことがわかるであろう), v_i は v_1 に隣接し, v_{i-1} は v_n に隣接するような 2 点 v_i, v_{i-1} が存在する (図 5 参照)．このとき, 単純グ

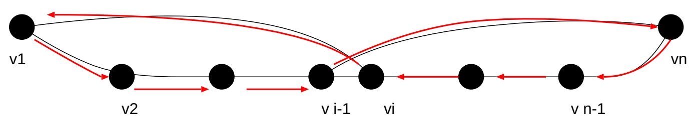

図 5: Ore の定理の十分性の証明で用いるグラフ.

ラフ G には

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_{i-1} \to v_n \to v_i \to v_1$$

なる閉路が存在することになり, 矛盾．**(証明終わり)** [1] .

最後に Ore の定理に関する次の例題を見ておくことにしょう．

(例題)
グラフ G には n 個の点があり, $(n-1)(n-2)/2 + 2$ 本の辺があるとする．このとき, Ore の定理を用いて, このグラフ G はハミルトン・グラフであることを示せ．

(答え)

辺の数が $n-1$ 本の完全グラフ K_{n-1} の辺の本数は $(n-1)(n-2)/2$ 本であり, ハミルトン・グラフが多重辺等を含まない単純グラフであることを考慮すると, G は K_{n-1} と 1 点 v の合計 n 点からなり, v は K_{n-1} を構成する任意の 2 点 w, x と図 6 のように結びついていると考えてよい．従って, この場合の辺の数は $(n-1)(n-2)/2 + 2$ 本であり, 問題文に条件として与えられた辺の本数となる．
さて, K_n を構成する任意の 2 点は必ず隣接するので, 考えられる可能性としては, 任意の隣接しない 2 点が K_{n-1} を構成する任意の 1 点 $u_1 (\neq w, x)$ と点 v の場合であるが, このときには

$$\deg(u_1) + \deg(v) \quad = \quad n - 2 + 2 = n \tag{5}$$

となり, Ore の定理を等式ぎりぎりで満たすことがわかる．
また, 上記以外にも例えば K_{n-1} を構成する任意の一辺を削除し, この辺で点 v と K_{n-1} の任意の一点を結

[1] この定理はハミルトン・グラフであるための十分条件を与えていることに注意．従って, 条件式 (4) を満たさないようなハミルトン・グラフも存在する ⇒ $\boxed{\textbf{演習問題 5}}$.

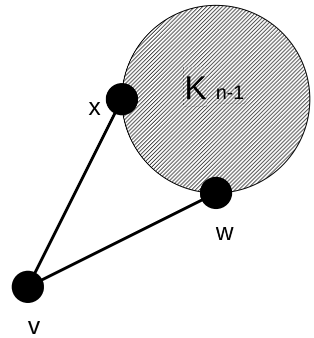

図 6: 完全グラフ K_{n-1} と点 v が 2 点 w, x で繋がっているグラフ G. 点の個数は n, 辺の本数は $(n-1)(n-2)/2+2$ である.

ぶ場合もありうるが, この場合には $\deg(v)=3$, 辺を削除した点 z の次数 $\deg(z)=n-3$ であるから, 結局 $\deg(v)+\deg(z)=n$ となり, やはり Ore の定理を満たす. このような変換を繰り返しても, Ore の定理が破れることがないことは明らかなので結局, 題意, 即ち**「n 個の点および $(n-1)(n-2)/2+2$ 本の辺からなるグラフ G はハミルトン・グラフである」**ことが示された.

演習問題 5

1. 本講義ノート中に挙げた**「催し会場の順路問題」**において
 (1) 各会場間の関係を表すグラフを描け.
 (2) (1) で求めたオイラー・グラフにおいて, Fleury のアルゴリズムを用いることにより, オイラー小道を求めよ.

2. オイラー・グラフで, ある点 v から出発する限りは, 同じ辺を 2 度と通らないようにして勝手な方向に辺をたどればオイラー小道が得られるとき, そのグラフは点 v から**任意周回可能**であるという.
 (1) 図 7 に与えたグラフは任意周回可能であることを示せ.

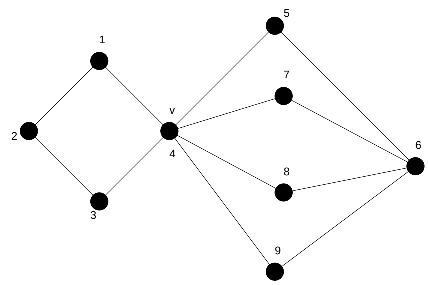

図 7: ここで任意周回可能であることを示すグラフ.

 (2) オイラー・グラフではあるが, 任意周回可能ではないグラフの例を一つ挙げよ.
 (3) 任意周回可能なグラフが展示会場の設計に向いている理由を述べよ.

3. 図の Groetzsch グラフはハミルトンであることを示せ.

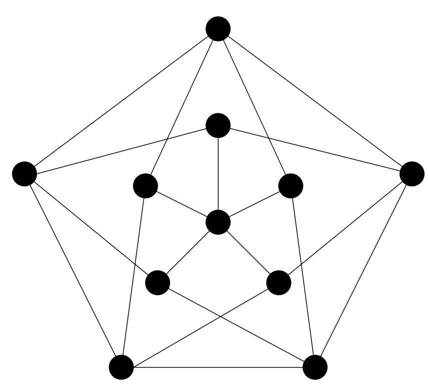

図 8: Groetzsch グラフ.